

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESPECIALIZAÇÃO EM ESTATÍSTICA – ÊNFASE EM INDÚSTRIA E
MERCADOS

O USO ALTERNADO DE DUAS CARTAS DE
CONTROLE \bar{X} COM TAMANHOS AMOSTRAIS
DIFERENTES

Aluno: Sérgio Henrique Junqueira Meirelles Paiva

Orientador: Prof. Dr. Roberto da Costa Quinino

Belo Horizonte

2020

Sérgio Henrique Junqueira Meirelles Paiva

**O USO ALTERNADO DE DUAS CARTAS DE CONTROLE \bar{X} COM TAMANHOS
AMOSTRAIS DIFERENTES**

Monografia de especialização apresentada
ao Departamento de Estatística da
Universidade Federal de Minas Gerais, como
requisito parcial à obtenção do título de
Especialista em Gestão Pública.

Orientador: Prof. Dr. Roberto da Costa
Quinino

Belo Horizonte

2020

2020, Sérgio Henrique Junqueira Meirelles Paiva
@Todos os direitos reservados

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa CRB 6ª
Região nº 1510

Paiva, Sérgio Henrique Junqueira Meirelles

P149u O uso alternado de duas cartas de controle \bar{X} com
tamanhos amostrais diferentes / Sérgio Henrique
Junqueira Meirelles Paiva .— Belo Horizonte, 2020.
14.f.. il.; 29 cm.

Monografia (especialização) - Universidade Federal de
Minas Gerais – Departamento de Estatística.

Orientador: Roberto da Costa Quinino.

1. Estatística. 2. Controle de qualidade. .3. Método de
Monte Carlo. 4 Amostra de tamanho variável. I.
Orientador. II. Título.

CDU 519.6 (043)



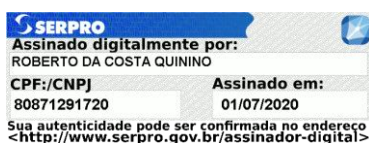
Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
5924 Departamento de Estatística

E-mail: pgest@ufmg.br
Tel: 3409-5923 – FAX: 3409-

P Programa de Pós-Graduação /
Especialização Av. Pres. Antônio Carlos, 6627
- Pampulha 31270-901 – Belo Horizonte –
MG

ATA DO 209ª. TRABALHO DE FIM DE CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ESTATÍSTICA DE SERGIO HENRIQUE JUNQUEIRA MEIRELLES PAIVA.

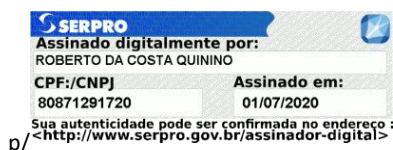
Aos vinte e seis dias do mês de junho de 2020, às 17:00 horas, com utilização de recursos de videoconferência a distância, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pela Comissão do Curso de Especialização em Estatística, para julgar a apresentação do trabalho de fim de curso do aluno **Sérgio Henrique Junqueira Meirelles Paiva**, intitulado: “O Uso Alternado de duas Cartas de Controle Xbar com Tamanhos Amostrais Diferentes”, como requisito para obtenção do Grau de Especialista em Estatística. Abrindo a sessão, o Presidente da Comissão, Professor Roberto da Costa Quinino – Orientador, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares, passou a palavra ao candidato para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do candidato. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se sem a presença do candidato e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o candidato foi considerado Aprovado condicional às modificações sugeridas pela banca examinadora no prazo de 30 dias a partir da data de hoje por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente ao candidato pelo Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 26 de junho de 2020.



Prof. Roberto da Costa Quinino
(Orientador)
Departamento de Estatística / UFMG



Prof. Anderson Laécio Galindo Trindade
DEP / UFMG



Altieres Marçal Frade
Engenheiro/VALE

RESUMO

A prática usual no uso de cartas de controle \bar{X} para monitorar a média de um processo consiste em coletar amostras de tamanho n em intervalos igualmente espaçados e comparar com limites de controle. O objetivo deste trabalho é propor um modelo alternativo, chamado carta de controle com tamanho amostral variável (CCTV), no qual duas cartas de controle \bar{X} tradicionais são usados alternadamente com amostras de tamanhos n_1 e n_2 . Os resultados obtidos por simulação de Monte Carlo mostram que a carta de controle CCTV proposta pode apresentar melhor desempenho, em termos de *Average Run Lengths* (ARL), do que a tradicional carta de controle \bar{X} .

Palavras-chaves: controle de qualidade; simulação de Monte Carlo; Carta de controle \bar{X} , amostra de tamanho variável; *Average Run Lengths*.

ABSTRACT

The usual practice in using \bar{X} control charts to monitor the mean of a process consists of taking at equally intervals samples of size n and compare with control limits. The purpose of this article is to propose an alternative model, called variable sample size (VSS) control chart, in which two traditional \bar{X} control charts are used alternately with samples of sizes n_1 and n_2 . The obtained results by Monte Carlo simulation show that the proposed VSS control chart can perform better, in terms of Average Run Lengths (ARL), than the traditional \bar{X} control chart.

Keywords: quality control; Monte Carlo simulation; Xbar control chart, variable size sample; Average Run Lengths.

Lista de ilustrações

Figura 1: $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ com $k = 3$	2
Figura 2: Fluxograma da carta de controle CCTV X.....	6
Figura 3: Fluxograma da simulação para carta CCTV	7
Figura 4: Comparação ARL1 para as Cartas \bar{X} e CCTV para $n = 4$	11
Figura 5: Comparação ARL1 para as Cartas \bar{X} e CCTV para $n = 5$	11
Figura 6: Comparação ARL1 para as Cartas \bar{X} e CCTV para $n = 6$	12

Lista de tabelas

Tabela 1: Código <i>MATLAB</i> para Simulação da Carta CCTV	2
Tabela 2: Valores de ARL1 para $n = 4$	9
Tabela 3: Valores de ARL1 para $n = 5$	10
Tabela 4: Valores de ARL1 para $n = 6$	10

Sumário

1. Introdução.....	1
2. Carta de Controle CCTV.....	4
3. Programa de Simulação de Monte Carlo com uso do <i>MATLAB</i>	6
4. Resultados.....	8
5. Conclusões.....	12
6. Referências bibliográficas.....	13

1. Introdução

O controle estatístico de processos (CEP) é uma ferramenta usada para monitorar, analisar, controlar e aperfeiçoar o desempenho de processos. Com uso de técnicas de CEP é possível conseguir melhoria contínua na qualidade e na produtividade.

A ideia principal do CEP consiste em modelar o comportamento estatístico usual (típico) do processo, idealmente quando este está bem ajustado, operando em uma boa condição (estado sob controle) e, a partir daí, detectar quando ocorre uma mudança. O CEP realiza intervenções pró ativas com objetivo de melhorar a qualidade, evitar o desperdício e conseqüentemente melhorar a produtividade.

Uma característica de qualidade que é medida em escala numérica é chamada de variável, como, por exemplo, peso e volume. Para lidar com uma variável é necessário monitorar seu valor médio, por exemplo. Isso é feito, usualmente, por meio de uma carta de controle \bar{X} .

A carta de controle \bar{X} possui uma linha central (LC), que representa o valor médio (μ_0) do processo quando esse está sob controle, e pelos limites inferior (LIC) e superior (LSC) de controle, que são estimados a partir do desvio padrão da média amostral ($\sigma_{\bar{X}}$), sendo geralmente calculados pelas equações 1 e 2, respectivamente:

$$\mu_0 - k\sigma_{\bar{X}} \quad (1)$$

$$\mu_0 + k\sigma_{\bar{X}} \quad (2)$$

Em geral, é usado $k = 3$ para representar um deslocamento de 3 desvios padrões e como isso trabalharmos com Average Run Lengths (ARL_0) igual a aproximadamente 370. Logo, caso estejamos diante de uma população sob controle com $\mu_0 = 0$ e $\sigma_{\bar{X}} = 1$, teríamos amostras fora dos limites de controle se estivessem na área hachurada na Figura 1:

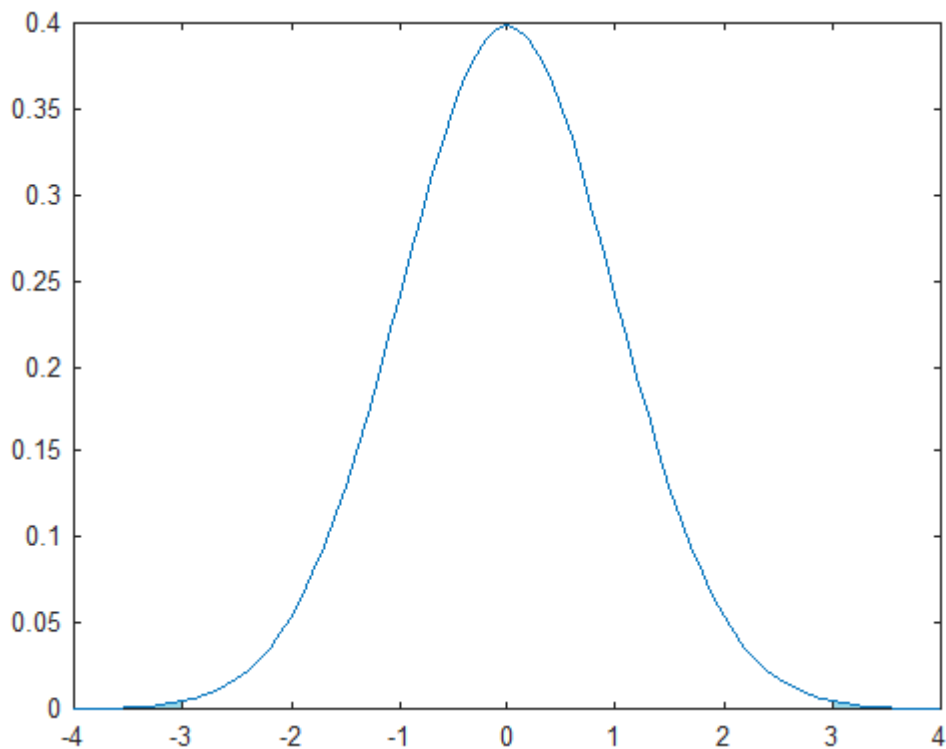


Figura 1 - $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ com $k = 3$

Para o caso exemplificado, com $k = 3$, o valor ARL_0 se aproxima de 370,4, que, então, seria a quantidade de amostras necessárias para detectarmos um deslocamento da média do processo. Já o comprimento médio de execução fora de controle (ARL_1) depende da média fora de controle, dada por $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$, em que o valor de δ indica o deslocamento a ser detectado e σ o desvio padrão populacional. Nosso objetivo é determinar procedimentos que gerem ARL_1 o mais baixo possível limitados a uma amostra de tamanho n ou similar. As médias de amostras que ficam fora da região delimitada pelos limites de controle indicam que o processo está fora de controle devido à alguma causa atribuível. Caso contrário, o processo é dito sob controle.

Prabhu et al. (1993) e Costa (1994) desenvolveram um esquema de tamanho amostral adaptativo para cartas de controle \bar{X} e examinaram suas propriedades e desempenho estatístico, que foi denotado como tamanho variável da amostra (VSS). A proposta dos autores inclui limites de controle habituais ($\mu_0 \pm 3\sigma_{\bar{x}}$) e um limite de alerta denominado w . Neste procedimento, o uso das cartas de controle com amostra menor ou amostra maior é decidido baseado na última média amostral calculada. Se a média amostral ficar próxima da linha central da carta de controle então a próxima

amostra será de tamanho menor e caso a média amostral fique próxima dos limites de controle então a próxima amostra será com tamanho maior. Para decidir o que era mais próximo da linha central ou dos limites de controle os autores definiram um limite de alerta w e este é calculado de modo a minimizar o valor ARL_1 . Zimmer et al. (1998) indicaram que o gráfico VSS proposto detectou mudanças moderadas mais rapidamente do que a tradicional carta \bar{X} .

Em um debate com duas empresas dos setores metalúrgico e farmacêutico, engenheiros de controle de qualidade e técnicos operacionais observaram que, em algumas situações, o esquema VSS poderia ser confuso para os operadores. Um desejo era que houvesse um esquema superior a carta \bar{X} mas que fosse mais simples do que o esquema VSS e este é objetivo do trabalho. Além disso, eles entenderam que o tamanho das amostras inspecionadas deveria ser menor que 10, porque, caso contrário, o tempo necessário para avaliar os itens da amostra poderia ser muito maior que o usual para a carta de controle \bar{X} padrão. Após uma longa discussão, houve um consenso de que se a decisão sobre qual tamanho de amostra a ser usada não precisasse ser decidida utilizando o limite de alerta w então a proposta seria consideravelmente mais viável. Para a equipe de controle de qualidade, essa alternativa simples poderia gerar uma curva de aprendizado que permitiria a implementação de esquemas adaptativos mais complexos no futuro.

Visto isso, este trabalho irá descrever uma nova carta de controle de tamanho de amostra variável, denotada por carta de controle CCTV, que consiste na alternância entre dois tamanhos de amostra, n_1 e n_2 , fazendo a verificação se a média da amostra fica dentro dos limites de controle tradicionais sem a necessidade de limite de alerta w .

A organização deste trabalho está estruturada da seguinte forma: no capítulo 2 será discutida a carta de controle CCTV \bar{X} . No capítulo 3, discutiremos a implementação computacional do processo de simulação para avaliar o desempenho da carta de controle CCTV \bar{X} proposta. No capítulo 4 são apresentados os resultados das simulações realizadas. As conclusões e observações finais são apresentados no capítulo 5.

2. Carta de Controle CCTV

Sem perda de generalidade trabalharemos com os dados da população padronizados. O objetivo deste trabalho é propor simplificações no procedimento da carta de controle VSS \bar{X} , de modo que as regras de decisão sejam simplificadas para facilitar a implementação da carta de controle resultante em situações práticas de negócios. O funcionamento da carta de controle com tamanho amostral alternado (carta de controle CCTV \bar{X}) é descrito pelo algoritmo a seguir:

- (i) Inicia-se com uma amostra de tamanho n_1 e se $\bar{x} \geq LSC_k^{n_1} = \frac{k}{\sqrt{n_1}}$ ou $\bar{x} \leq LIC_k^{n_1} = -\frac{k}{\sqrt{n_1}}$, então o processo é considerado fora de controle e é ajustado; A próxima inspeção será com tamanho de amostra n_1 novamente e a etapa (i) é repetida;
- (ii) Se $LIC_k^{n_1} = -\frac{k}{\sqrt{n_1}} < \bar{x} < LSC_k^{n_1} = \frac{k}{\sqrt{n_1}}$, então o processo é considerado sob controle; Segue para a etapa (iii)
- (iii) É retirada uma amostra de tamanho n_2 ; Se $\bar{x} \geq LSC_k^{n_2} = \frac{k}{\sqrt{n_2}}$ ou $\bar{x} \leq LIC_k^{n_1} = -\frac{k}{\sqrt{n_1}}$, então o processo é considerado fora de controle; Caso $LIC_k^{n_2} = -\frac{k}{\sqrt{n_2}} < \bar{x} < LSC_k^{n_2} = \frac{k}{\sqrt{n_2}}$, então o processo é considerado sob controle; Volta para a etapa (i)

O fluxograma na figura 2 descreve o processo para um melhor entendimento.

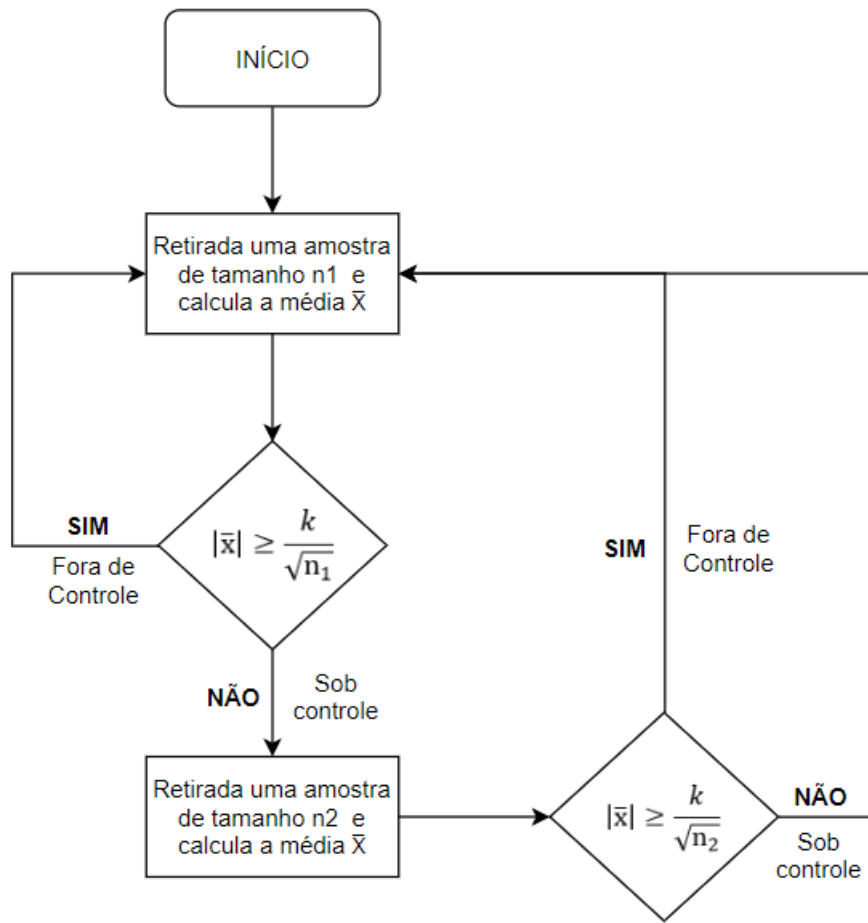


Figura 2 - Fluxograma da carta de controle CCTV \bar{X}

3. Programa de Simulação de Monte Carlo com uso do *MATLAB*

O programa de simulação para carta de controle CCTV foi realizado conforme o fluxograma descrito na figura 3. Conforme Prabhu et al. (1993) e Costa (1994), para comparar cartas de controle com amostras variáveis com a carta de controle \bar{X} devemos ter a média das amostras utilizadas (n_g) na situação sob controle ($\delta = 0$) igual a n .

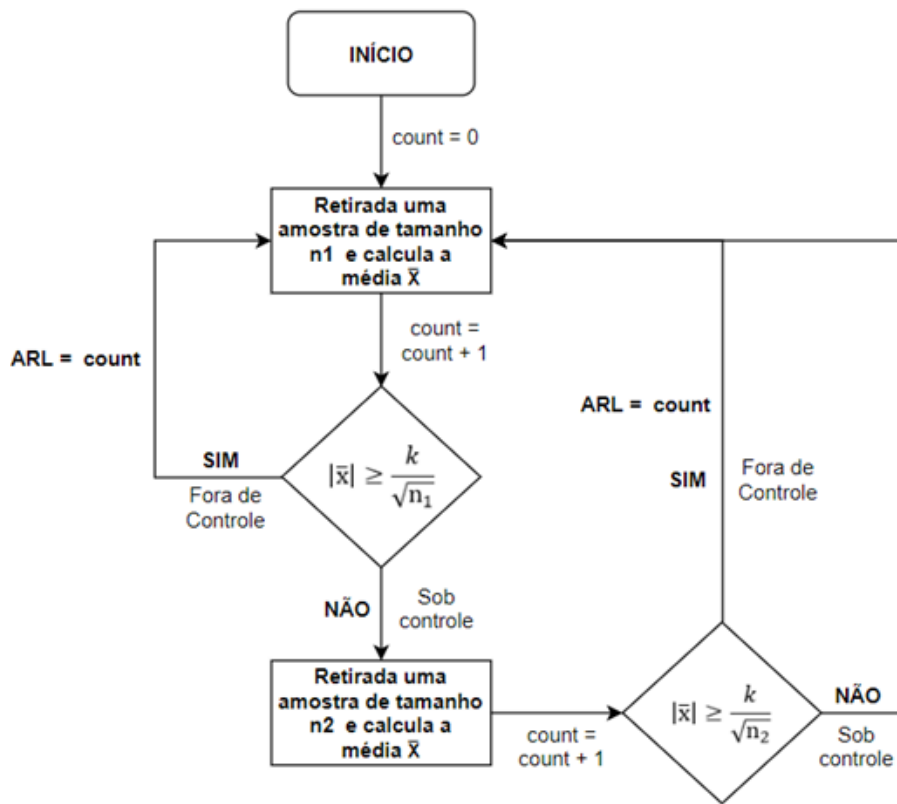


Figura 3 - Fluxograma da simulação para carta CCTV

Baseado no fluxograma da figura 3, foi desenvolvido um código no software *MATLAB* para simular a carta de controle CCTV, permitindo obter os valores de ARL_1 uma vez definidos os valores de n_1 , n_2 e ARL_0 . O código encontra-se na Tabela 1.

Tabela 1: Código *MATLAB* para Simulação da Carta CCTV

```

close all
clear all
clc
tic
%Carta de Controle para média usando três desvios.
Objetivo é calcular o %ARL. Estou trabalhando com dados padronizados.
Assim, sob controle temos que  $X \sim N(0;1)$ . Logo  $\bar{X} \sim N(0, 1/(n1^{0.5}))$ 

u = 0; %Média (quando é 0, está sob controle)
n = 5; %Tamanho das amostras
n1 = 8;
n2 = 2;
corridas = 10000; %Quantidade de corridas

%Um único N
desvio = 1/sqrt(n);
LI = -3*desvio; %Limite inferior da carta de controle
LS = 3*desvio; %Limite superior da carta de controle

p = cdf('normal',LI,u,desvio) + (1 - cdf('normal',LS,u,desvio));
for k = 1:corridas
    resultado(k) = random('geo',p) + 1;
end
ARL = mean(resultado);

%Agora Carta Xbar alternadas com tamanho n1 e n2.
Restrição:média(n1;n2)<=n
desvio1 = 1/sqrt(n1);
LI1 = -3*desvio1;
LS1 = 3*desvio1;

desvio2 = 1/sqrt(n2);
LI2 = -3*desvio2;
LS2 = 3*desvio2;

p1 = cdf('normal',LI1,u,desvio1) + (1 - cdf('normal',LS1,u,desvio1));
p2 = cdf('normal',LI2,u,desvio2) + (1 - cdf('normal',LS2,u,desvio2));

for k = 1:corridas
    resultado1(k) = random('geo',p1) + 1;
    resultado2(k) = random('geo',p2) + 1;
    if(resultado1(k) <= resultado2(k))
        resultadoAlt(k) = 2*resultado1(k) - 1;
        vetorNg(k) = resultado1(k)*n1 + (resultado1(k)-1)*n2;
    else
        resultadoAlt(k) = 2*resultado2(k);
        vetorNg(k) = resultado2(k)*(n1 + n2);
    end
end
end

ARLa = mean(resultadoAlt)
ng = sum(vetorNg)/sum(resultadoAlt)

toc

```

4. Resultados

A performance da carta de controle com tamanho variável (CCTV \bar{X}) foi comparada com a carta de controle \bar{X} tradicional. Os valores de ARL_1 foram calculados quando a média no controle μ_0 mudou para $\mu_1 = \mu_0 + \delta$, em que $|\delta| = [0; 0,25; 0,50; 0,75; 1,00; 1,25; 1,50; 1,75; 2,00]$. Quando o processo estava sob controle, os dados estavam padronizados, isto é, possuíam uma distribuição normal padrão $N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$. Além disso, utilizamos os valores de ARL_0 próximos a 370,4.

Os valores para ARL_1 foram obtidos através dos resultados da lógica informada no capítulo 2 e do código desenvolvido no *MATLAB*, disponibilizado no capítulo 3. Os tamanhos das amostras foram definidos como $n = [4; 5; 6]$ e, na situação de controle controlado, temos $n_g = n$ para fazermos uma comparação adequada. Assim, tendo em vista a discussão no capítulo 1 sob as ressalvas feitas nos estudos das empresas metalúrgica e farmacêutica, foi escolhida apenas uma combinação de n_1 e n_2 para cada n utilizado para ser usado em todos δ simulados, cujos critérios foram tanto n_1 e $n_2 < 10$ e, como dito, no estado de controle, $n_g = n$, pois não necessariamente $\frac{n_1+n_2}{2} = n$ gera $n_g = n$.

Os resultados são apresentados nas tabelas 2 a 4 para $n = 4, 5$ e 6 , respectivamente:

Tabela 2: Valores de ARL_1 para $n = 4$

δ	$ARL \bar{X}$ $n = 4$	ARL CCTV \bar{X} $n_1 = 7$ e $n_2 = 1$	n_g
0	370,398	370,376	4,00
0,25	155,224	147,657	4,02
0,50	43,895	36,431	4,07
0,75	14,968	11,068	4,25
1,00	6,303	4,353	4,66
1,25	3,241	2,187	5,34
1,50	2,000	1,373	6,16
1,75	1,446	1,098	6,72
2,00	1,189	1,021	6,93

Tabela 3: Valores de ARL_1 para $n = 5$

δ	ARL \bar{X} n = 5	ARL CCTV \bar{X} n1 = 8 e n2 = 2	ng
0	370,398	370,432	5,00
0,25	133,159	128,516	5,02
0,50	33,401	28,987	5,09
0,75	10,761	8,602	5,31
1,00	4,495	3,368	5,83
1,25	2,388	1,752	6,63
1,50	1,566	1,210	7,43
1,75	1,220	1,044	7,85
2,00	1,076	1,007	7,97

Tabela 4: Valores de ARL_1 para $n = 6$

δ	ARL \bar{X} n = 6	ARL CCTV \bar{X} n1 = 9 e n2 = 3	ng
0	370,398	369,916	6,00
0,25	115,869	113,401	6,02
0,50	26,358	23,584	6,10
0,75	8,167	6,805	6,38
1,00	3,437	2,715	7,00
1,25	1,906	1,503	7,89
1,50	1,333	1,119	8,62
1,75	1,110	1,021	8,92
2,00	1,030	1,003	8,99

Como recomendado por Prabhu et al. (1993), o tamanho médio da amostra em todos os casos foi igual a n quando o processo estava sob controle.

Para maior visualização do leitor, as figuras 4, 5 e 6 ilustram os dados de ARL_1 apresentados na Tabelas 2-4 uma escala logarítmica para indicar melhor as diferenças entre os gráficos de controle. A vantagem das cartas de controle CCTV sobre as cartas de controle \bar{X} tradicionais pode ser bem visualizada, sendo mais notória quando o valor de δ é moderado, isto é, $0,5 \leq \delta \leq 1,5$.

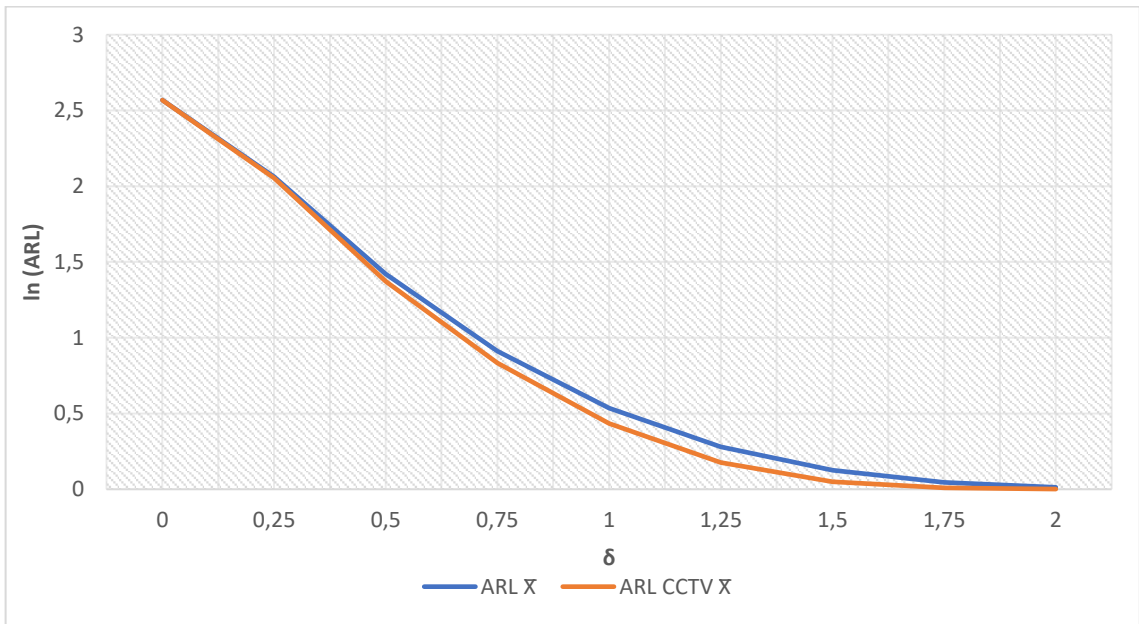


Figura 4 - Comparação ARLI para as Cartas \bar{X} e CCTV para $n = 4$

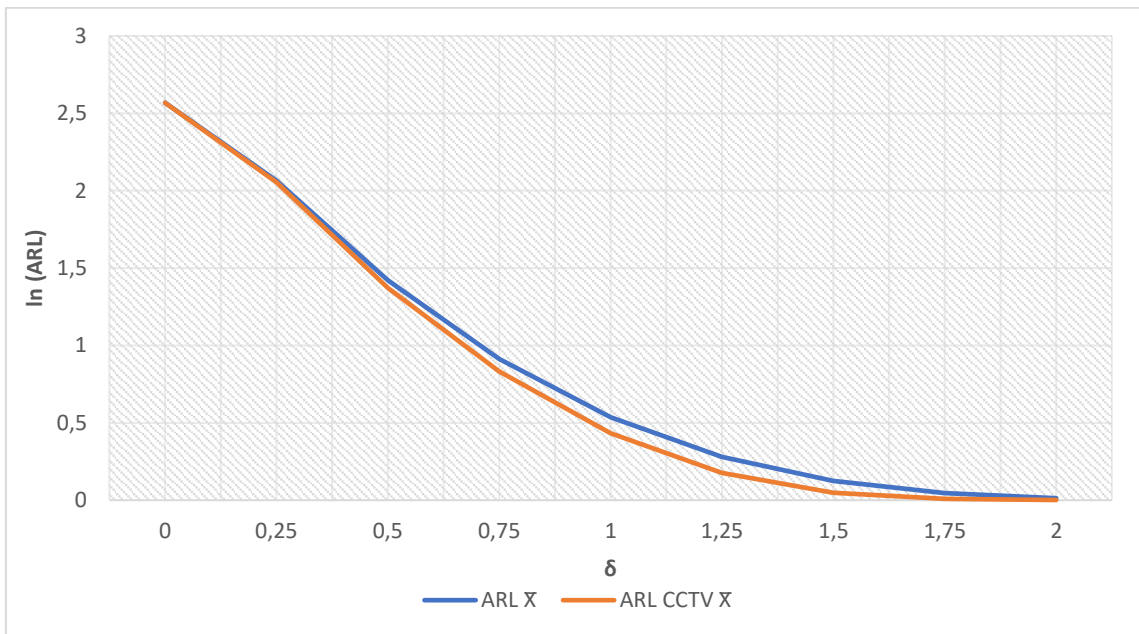


Figura 5 - Comparação ARLI para as Cartas \bar{X} e CCTV para $n = 5$

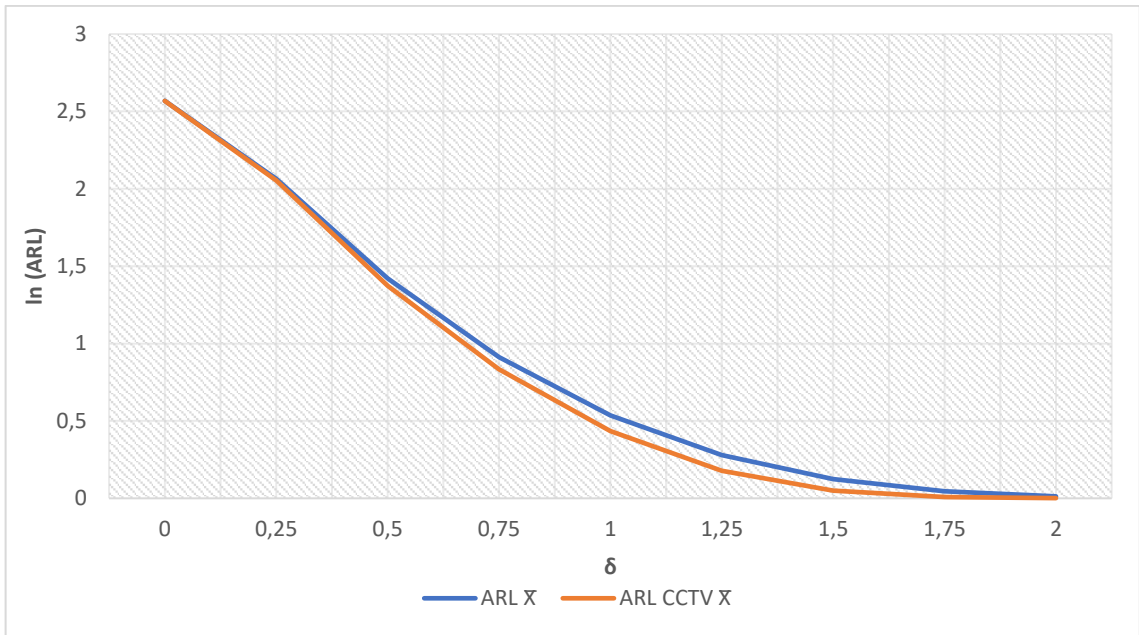


Figura 6 - Comparação ARL para as Cartas \bar{X} e CCTV para $n = 6$

5. Conclusões

Foi proposta uma nova carta de controle, chamada carta de controle de tamanho variável (CCTV) \bar{X} , que simplifica as cartas de controle previamente introduzidas na literatura conhecida como carta de controle VSS \bar{X} . Essa carta de controle proposta apresentou valores ARL_1 inferiores à carta de controle \bar{X} padrão, que ainda é amplamente utilizada na indústria.

Após o trabalho desenvolvido, podemos dar sugestões para que, caso alguma empresa queira usar a carta de controle \bar{X} tradicional devido à sua facilidade de uso, ela opte pelo uso da carta controle CCTV \bar{X} , que produz valores de ARL_1 menores em uma complexidade semelhante.

A partir da ideia do trabalho realizado, são abertas novas ideias com maior clareza para que possam ser desenvolvidos novos métodos a fim de aperfeiçoar cada vez o controle estatístico de processos, que é ferramenta de muita utilidade em diversos setores produtivos. Um novo objeto de estudo seria avaliar a utilização do uso da carta \bar{X} com amostra menor sendo utilizada sequencialmente j vezes e a carta \bar{X} com amostra maior utilizada sequencialmente k vezes. Neste trabalho discutimos o caso $j = k = 1$.

6. Referências bibliográficas

Costa, Antônio F. B. **Xbar charts with variable sample size**. *Journal of Quality Technology*. 1994

Prabhu, S. S., Runger, G. C., Keats, J. B. **\bar{X} chart with adaptive sample sizes**. *International Journal of Production Research*. 1993

Zimmer, L. S., Montgomery, D. C., Runger, G. C. **Evaluation of a three-state adaptive sample size \bar{X} control chart**. *International Journal of Production Research*. 1998.

Cumulative distribution function Mathworks. Disponível em:
<<https://www.mathworks.com/help/stats/prob.normaldistribution.cdf.html>>. Acesso em: 15/05/2020.