UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

FACULDADE DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

LORENZZO RODRIGUES FRADE

REALISMO LÓGICO E PLURALISMO LÓGICO

Belo Horizonte

2017

LORENZZO RODRIGUES FRADE

REALISMO LÓGICO E PLURALISMO LÓGICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do título de Mestre em Filosofia.

Área de concentração: Lógica, ciência, mente e linguagem.

Orientador: Abílio Azambuja Rodrigues Filho

Belo Horizonte

2017

100
F799r
2017

Frade, Lorenzzo Rodrigues

Realismo lógico e pluralismo lógico [manuscrito] / Lorenzzo Rodrigues Frade. - 2017.

127 f.

Orientador: Abilio Azambuja Rodrigues Filho.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas.

Inclui bibliografia

1. Filosofia – Teses. 2. Lógica – Teses.4.Lógica – Filosofia - Teses. I. Rodrigues, Abilio. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

FOLHA DE APROVAÇÃO

Realismo Lógico e Pluralismo Lógico

LORENZZO RODRIGUES FRADE

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FILOSOFIA, como requisito para obtenção do grau de Mestre em FILOSOFIA, área de concentração FILOSOFIA, linha de pesquisa Lógica e Filosofia da Ciência.

Aprovada em 08 de agosto de 2017, pela banca constituída pelos membros:

Prof. Abílio Azambuja Rodrigues Filho
(UFMG)

Prof. André da Silva Porto
(UFG)

Antonio Mariano N. Coelho

Prof. Antônio Mariano Nogueira Coelho
(UFMG)

Belo Horizonte, 8 de agosto de 2017.

"O mundo sempre parece mais brilhante quando você acaba de fazer algo que não existia antes."

Neil Gaiman[1]

[1] Entrada no Blog Gunpowder treason and plot (5 Nov 2004)

Agradecimentos

Agradeço a todos os professores do departamento de Filosofia da UFMG, que contribuíram para minha formação, em especial àqueles da linha de pesquisa “Lógica, ciência, mente e linguagem”.

Agradeço a todos os membros do Grupo de Estudo em Lógica, pelas incontáveis ideias compartilhadas, pelas críticas, pelo apoio, pela amizade, e por todo o conhecimento adquirido em conjunto.

Agradeço, em especial, a meu orientador, Abílio Azambuja Rodrigues Filho, pela atenção, disponibilidade e paciência, e por ter participado de todos os passos de minha formação em lógica, desde a graduação.

Agradeço, por fim, a minha família: a minha namorada, Aládia, aos meus irmãos, Gabriela e Arthur, e aos demais entes queridos, cujo apoio é inestimável. Em especial, agradeço a minha mãe, Vanilda (*in memoriam*), por seu apoio em todos os âmbitos, pelos incentivos que ainda me movem e por ter provido por mim durante toda minha formação acadêmica.

Resumo

Diante da diversidade de lógicas existentes, um forte apelo por formas de pluralismo surge em filosofia da lógica. O pluralismo é a perspectiva segundo a qual existe mais de uma lógica correta, e diz respeito à multiplicidade de tratamentos que podem ser dados a noção de conseqüência lógica. Contudo, formas de pluralismo tendem a conflitar com a perspectiva de que a lógica descreve a realidade em seus aspectos mais gerais. Isto é: uma vez que a realidade seja apenas uma, não deveria haver mais de uma descrição correta de seus aspectos mais gerais. Esta dissertação tem como objetivo conciliar estes dois pontos de vista. Para tal, advoga por uma forma de pluralismo que se baseie na diversidade de propriedades que podem ser preservadas das premissas para a conclusão. Assim, a lógica clássica continuaria sendo interpretada como possuidora de caráter ontológico, por preservar *verdade*. Outras lógicas podem ser justificadas em um âmbito diferente, onde não concorrem com a lógica clássica enquanto descrição da realidade. Argumenta-se, seguindo os trabalhos de Carnielli e Rodrigues[2], que este seja o caso de algumas lógicas paraconsistentes, que seriam conciliáveis com a lógica clássica por terem caráter epistêmico e pretenderem preservar *evidência*; e que, da mesma forma, este seria o caso da lógica intuicionista, que também possui caráter epistêmico e pretende preservar a *disponibilidade de prova*.

Palavras-chave: Pluralismo lógico, realismo lógico, natureza da lógica.

[2] Ver, por exemplo, CARNIELLI, W; RODRIGUES, A. On the philosophy and mathematics of the Logics of Formal Inconsistency. Em: *New Directions in Paraconsistent Logic.* Springer. 2016

Abstract

In the face of the diversity of existent logics, a strong appeal for forms of pluralism arises in philosophy of logic. *Pluralism* is the perspective according to which there are more than one correct logic, and relates to the multiplicity of treatments that can be given to the notion of logical consequence. Nevertheless, forms of pluralism tend to conflict with the perspective that logic describes reality in its more general aspects. That is: once there is only one reality, there should not be more than one true description of its more general aspects. This dissertation's purpose is to conciliate these two points of view. For such, it advocates for a form of pluralism that is based on the different properties that can be preserved from premises to conclusion. Therefore, the classical logic keeps being interpreted as having an ontological feature, for it preserves *truth*. Other logics can be justified in a different scope, where they don't conflict with classical logic as description of reality. It is argued, following the works of Carnielli and Rodrigues[3], that this is the case of some paraconsistent logic, which would be reconcilable with classical logic for having an epistemological feature and intends to preserve *evidence*; and, similarly, that would be the case of intuitionistic logic, which also has an epistemological feature and intends to preserve *availability of proof.*

Key-words: Logical Pluralism, logical realism, nature of logic.

[3] For instance, CARNIELLI, W; RODRIGUES, A. On the philosophy and mathematics of the Logics of Formal Inconsistency. Em: *New Directions in Paraconsistent Logic.* Springer. 2016

Sumário

Introdução

Diante da existência e do sucesso, na filosofia e para além dela, de diferentes *lógicas*, um forte apelo por formas de pluralismo aparece na bibliografia recente sobre filosofia da lógica.

Embora seja um fato evidente a existência de diferentes lógicas - e mesmo de diferentes lógicas filosoficamente ou pragmaticamente bem sucedidas - a discussão acerca da possibilidade desses diferentes sistemas lógicos serem todos corretos é bastante controversa.

Entendemos por *pluralismo* quaisquer perspectivas que defendam a existência de mais de um sistema lógico correto. Opõe-se ao *monismo*, que entendemos como qualquer perspectiva na qual haja apenas uma lógica correta.

Entretanto, precisamos diferenciar lógicas que são *extensões* da lógica clássica (ou de outra lógica em particular) e lógicas que são "*rivais"* da mesma. A lógica modal para a lógica clássica, por exemplo, não se pretende uma alternativa a ela, mas uma extensão dela. A lógica intuicionista, por outro lado, rejeita a aplicação irrestrita do princípio do terceiro excluído, de forma que provas válidas na lógica clássica possam ser inválidas na lógica intuicionista - por isso, dizemos que a lógica intuicionista é uma *alternativa* à lógica clássica, ou uma *rival* dela. Uma forma de pluralismo minimamente interessante precisa defender que duas ou mais lógicas *rivais* estejam corretas.

Todavia, formas de pluralismo parecem conflitar com a opinião de que a lógica clássica possui caráter ontológico, ou seja, que, de alguma forma, fala de como é a realidade. Esta era a concepção que tinha, por exemplo, Frege, segundo o qual o objeto da lógica seria a verdade, e cuja tarefa seria "discernir as leis do ser verdadeiro" [1].

Se adotarmos uma perspectiva realista, na qual a lógica clássica tenha caráter ontológico, dizendo, de alguma forma, algo acerca da realidade, não poderemos, aparentemente, aceitar que outras lógicas alternativas também tenham caráter ontológico, sob pena de trazer para o plano da realidade as contradições que as lógicas não clássicas e a lógica clássica parecem ter. De fato, alguns pensadores, como Priest, defendem que existem contradições reais. Mas as contradições decorrentes da união entre a lógica clássica e a lógica paraconsistente – ambas possuindo caráter ontológico, descrevendo aspectos da realidade – não poderiam ser algumas dessas contradições reais. De fato, se tomarmos o princípio da explosão da lógica clássica junto à tese de que existem contradições reais, temos como consequência a trivialidade da realidade – onde todas as proposições seriam verdadeiras – o que não é uma tese aceitável nem para os paraconsistentes.

Em outras palavras, dado existir uma única realidade, se a lógica trata de leis da realidade, deve existir uma única lógica correta. Assim, as diferentes lógicas seriam vistas como explicações rivais que tentam dar conta da mesma realidade – mas não seriam todas igualmente verdadeiras. Analogamente ao que ocorre na química ou na biologia, onde não temos uma pluralidade de "químicas" igualmente corretas, porém incompatíveis entre si, descrevendo os mesmos fenômenos. Existem, contudo, teorias rivais em diversos âmbitos da ciência. Todavia, estas teorias não se pretendem igualmente verdadeiras, mas justamente competem entre si, cada uma delas pretendendo ser a melhor explicação dos fenômenos. Nós podemos aceitar, no âmbito das ciências empíricas, que tenhamos razões para crer em teorias diferentes e incompatíveis entre si.

---

[1] FREGE, G. O pensamento.[1918] In: ALCOFORADO, Paulo (Org. e Trad.) *Investigações lógicas*. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2002. p. 9-39.

Mas esta parece ser uma característica da ciência em progresso, não da realidade: razão pela qual estamos sempre buscando formas de conciliar teorias inconsistentes entre si, ou de substituirmos duas teorias que, quando unidas, são inconsistentes, por uma terceira teoria que englobe as outras duas e não seja inconsistente. De forma análoga, se a lógica trata das leis da verdade, poderíamos aceitar que existam diferentes lógicas tentando descrever tais leis – mas não que tais leis possam ser corretamente descritas de diferentes e incompatíveis modos, pois isso implicaria no fato de que as próprias leis da realidade são contraditórias. Dessa forma, nos deparamos com um dilema, onde aceitar o realismo lógico parece implicar na recusa do pluralismo lógico: isto é, se crermos que a lógica descreve a realidade, não podemos aceitar que diferentes lógicas, incompatíveis entre si, sejam igualmente corretas neste propósito.

Para tentar dar conta deste problema, trataremos especialmente de dois tipos de lógicas não-clássicas, são elas as lógicas *paracompletas*, e as lógicas *paraconsistentes*.

Chamaremos de lógica *paracompleta* qualquer lógica que não possua entre suas fórmulas válidas o princípio do terceiro excluído, isto é, qualquer lógica em que $\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A}$ não seja uma de suas fórmulas válidas.

Chamaremos de lógica *paraconsistente* qualquer lógica que não possua o princípio da explosão como regra de inferência, ou qualquer lógica em que $\mathbf{(A \wedge \neg A) \rightarrow B}$ não seja uma de suas fórmulas válidas.

Entre as lógicas paracompletas, daremos especial ênfase à lógica intuicionista. A lógica intuicionista é uma lógica que surgiu como uma tentativa de formalização das ideias de L. E. J. Brouwer[2]. Embora seja questionável o quanto a formalização da lógica intuicionista, seguindo a interpretação BHK (Brouwer-Heyting-Kolmogorov), é fiel a

[2] Ver HEYTING , A (ed). *L. E. J. Brouwer Collected Works:* Philosophy and Foundations of Mathematics. New York: North-Holland Publishing Company, 1975.

matemática construtiva de Brouwer, ela foi a lógica intuicionista que se consolidou e mais engendrou discussões filosóficas. A lógica intuicionista, em sua interpretação habitual, é uma lógica *paracompleta*, mas não *paraconsistente*, uma vez que conta com o *ex falso quodlibet* ($\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$).

E entre as lógicas paraconsistentes, daremos especial ênfase às LFIs, isto é, às Lógicas da Inconsistência Formal (Logic of Formal Inconsistency). Nós escolhemos as LFIs por se tratarem de um grupo de lógicas paraconsistentes que não possui necessariamente pretensão ontológica, como, por exemplo, possui a LP (Logic of Paradox) de Graham Priest, que defende a existência de contradições reais - tese conhecida como *dialeteísmo*[3].

Uma perspectiva como a de Priest dificilmente seria conciliável com a lógica clássica - exceto, talvez, se não pretendêssemos manter nossa concepção ontológica da lógica clássica. Isto é, dado que tanto a Logic of Paradox, como a lógica clássica, pretendem ser a abordagem correta da preservação de verdade em sentido forte e irrestrito, elas dificilmente poderiam ser, ao mesmo tempo, bem sucedidas neste propósito.

A não ser que a realidade seja ambígua ou contraditória – e contraditória de uma forma que nem um dialeteísta gostaria – não é claro como dois tratamentos tão distintos da relação de preservação de verdade possam estar ambos corretos.

Além disso, caso se creia, como um dialeteísta, que existam contradições reais, em qual sentido alguém poderia dizer que a lógica clássica, que adota o princípio da explosão (segundo o qual tudo se segue de uma contradição), é correta? Isso significaria

[3] PRIEST, GRAHAN e TANAKA, KOJI e WEBER, ZACH. Paraconsistent Logic. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.), disponível em = <https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/logic-paraconsistent/>. Acesso em 2017.

dizer que a realidade é não só contraditória, mas trivial. O que é algo que definitivamente não estaríamos dispostos a aceitar.

Parece implausível que se concilie a Logic of Paradox, tendo uma abordagem dialeteísta, isto é, realista acerca da existência de contradições, e a lógica clássica, tendo também uma perspectiva realista, isto é, pretendendo dizer, de alguma forma, como a realidade é.

As LFIs, por outro lado, são neutras em relação à crença de que existam contradições reais. Além disso, são capazes de expressar conceitos distintos, como, por exemplo, *verdade* e *evidência*, através de um símbolo na linguagem, °. Isso faz das LFIs um grupo de lógicas especialmente interessante para quem pretende tratar de lógicas paraconsistentes com motivação epistemológica.

Mais adiante trataremos mais detalhadamente destes dois grupos de lógica: as paracompletas e as paraconsistentes.

Uma perspectiva que considere correta, além da lógica clássica, uma lógica paracompleta ou paraconsistente será, como dissemos, uma forma de pluralismo. Veremos algumas concepções que tentam dar conta do pluralismo lógico.

Todavia, precisamos antes explicitar uma questão terminológica: trata-se da distinção entre *pluralismo* e *relativismo*. Seguindo Haack[4] e Priest[5], chamaremos de *pluralismo* uma perspectiva que defenda a existência de mais de uma lógica correta - mesmo que alguma delas tenha algum tipo de primazia sobre as demais. Chamaremos de *relativismo* uma perspectiva que, além de pluralista, considere que diferentes lógicas são *igualmente* corretas.

[4] HAACK, S. *Philosophy of Logics*, Cambridge: Cambridge University Press. 1978. Cap 12
[5] PRIEST, G. *Doubt truth to be a Liar*. Oxford: Oxford University Press, 2006. p. 194

Isto é, enquanto o *pluralista* crê haver duas ou mais lógicas corretas, o *relativista* crê, além disso, não haver nenhuma hierarquia de valor ou importância entre elas.

Pretendemos defender uma abordagem *pluralista*, mas não necessariamente *relativista*.

Nosso objetivo geral é fornecer uma interpretação realista do pluralismo lógico, advogando por uma forma de pluralismo lógico compreensível do ponto de vista clássico. Assim, pretendemos conciliar uma perspectiva realista da lógica clássica com uma perspectiva pluralista acerca da lógica. Em outras palavras, queremos mostrar como é possível que exista mais de uma lógica correta e, ainda assim, a lógica clássica diga respeito à realidade e seja capaz de preservar *verdade*.

Observe, todavia, que não temos o objetivo de advogar uma forma de pluralismo sedutora para diferentes perspectivas não-clássicas. Pretendemos, por outro lado, convencer os lógicos realistas clássicos de que é possível uma abordagem pluralista da lógica que preserve o caráter realista da lógica clássica.

Para tal, apresentaremos brevemente (no capítulo 1) algumas formas de realismo acerca da lógica – a fim de ilustrar as diversas motivações que podemos ter para adotar uma postura realista. Nós não pretendemos, nessa breve passagem, realizar uma apologia do realismo, mas apenas ilustrar algumas das razões pelas quais é relevante conciliar uma perspectiva realista com uma perspectiva pluralista. Examinaremos também algumas formas de pluralismo, e, a partir de um diálogo com Beall e Restall, investigaremos as teses contidas nos trabalhos de Carnielli e Rodrigues, onde apresentam uma lógica paraconsistente de motivação epistêmica e defendem que esta lógica preserva *evidência,* uma propriedade diferente da *verdade*, preservada pela lógica clássica. Eles defendem também que a lógica intuicionista preserva uma terceira propriedade, a *disponibilidade de prova*, distinta das outras duas.

A fim de corroborar esta tese, exporemos (no capítulo 2) uma lógica intuicionista, e (no capítulo 3) a lógica paraconsistente de motivação epistêmica adotada por Carnielli e Rodrigues. Assim, defenderemos a plausibilidade da interpretação de que estas duas lógicas têm caráter epistêmico e preservam propriedades diferentes.

Com isso, advogaremos por uma forma de pluralismo compatível com a tese de que a lógica clássica tem caráter ontológico, isto é, que a lógica clássica diz respeito à realidade. Nesta interpretação, o conflito entre pluralismo e realismo desaparece, uma vez que algumas lógicas rivais da lógica clássica – aquelas tratadas por este trabalho e presentes em nosso pluralismo – não se situariam no plano ontológico e não concorreriam com a lógica clássica enquanto descrições de mundo.

Capítulo 1

1. Pluralismos Lógicos e o Realismo

Visando tratar o problema do aparente conflito entre perspectivas realistas acerca da lógica clássica e perspectivas pluralistas acerca da lógica, este capítulo tem como objetivo explorar diferentes teses pluralistas acerca da lógica. Iniciaremos este capítulo com uma breve defesa de perspectivas realistas acerca da lógica clássica, com o objetivo de salientar a importância de uma forma de pluralismo que se concilie com esta tese.

Em seguida, apresentaremos algumas formas de pluralismo com o propósito de evidenciar suas virtudes e seus limites, bem como situar o contexto teórico em que se encontra nossa perspectiva. Ao final desta exposição, dialogaremos com o pluralismo de Beall e Restall e com teses pluralistas contidas nos trabalhos de Carnielli e Rodrigues. Por fim, faremos uma breve apresentação da relação de dualidade existente entre o princípio da explosão e o princípio do terceiro excluído, a fim de mostrar um correspondente no âmbito técnico para a relação filosófica entre as lógicas paraconsistente e intuicionista.

1.2 – Em defesa do realismo

Diante do aparente impasse entre uma perspectiva pluralista acerca da lógica e uma perspectiva realista acerca da mesma, poderia se pensar que a melhor alternativa fosse abandonar o realismo.

Entretanto, temos varias razões para crer que a lógica clássica tem caráter ontológico. Por exemplo, o princípio do terceiro excluído, presente na lógica clássica e ausente na lógica intuicionista, parece não ser adequadamente justificado se não apelarmos para uma perspectiva realista.

Por exemplo, se tomarmos a proposição *p* “Toda estrela tem ao menos um planeta a orbitando” [6], somos tentados a supor que *p* seja verdadeira ou falsa independentemente do nosso conhecimento. Isso se deve a um ponto de vista realista acerca do mundo natural, isto é: de que objetos como estrelas e planetas existem independentemente do nosso conhecimento deles, de forma que a realidade decida entre *não p* (caso haja ao menos uma estrela sem um planeta em sua órbita) ou *p* (caso não haja).

A aplicação geral do princípio do terceiro excluído a objetos matemáticos pressupõe o mesmo realismo acerca da matemática, isto é, supõe que os objetos matemáticos existam independentemente de nosso conhecimento deles. Por exemplo, quando tomamos a conjectura de Goldbach (*g*), que diz que todo número par maior ou igual a quatro é a soma de dois primos, e afirmamos, pelo princípio do terceiro excluído, que ou *g* ou a negação de *g* é verdadeira, estamos supondo que a realidade decide entre ambos independentemente de termos construído uma prova de *g* ou encontrado um contra-exemplo para *g*.

É plausível que se creia, portanto, que o princípio do terceiro excluído seja bem justificado por uma perspectiva realista acerca da lógica. Queremos mostrar que perspectivas realistas sejam adequadas para justificar não apenas o princípio do terceiro excluído, mas também o da não-contradição, razão pela qual advogaremos pela

[6] Seguimos aqui GEORGE, A. L; VELLEMAN, D. *Philosophies of Mathematics*. *Oxford*: Blackwell, *2002*.. p. 91

plausibilidade de perspectivas realistas acerca da lógica clássica – que se destaca pela adoção desses princípios.

Isso significa que o próprio tratamento da negação na lógica clássica apresenta caráter ontológico: por isso, podemos dizer que a verdade ou falsidade de *p* está determinada independente de nosso conhecimento, ou que *p* não pode ser verdadeiro e falso ao mesmo tempo.

Ademais, o apelo pelo realismo acerca da lógica – em especial acerca da lógica clássica – é tão forte quanto o apelo por formas de pluralismo, e está presente em toda a história da filosofia da lógica: desde seus primórdios, com Aristóteles, posteriormente com Frege, e ainda hoje aparece como uma perspectiva plausível.

1.2.1 - Aristóteles

Aristóteles foi o primeiro grande lógico, e fundador da lógica enquanto disciplina sistematizada. Para ele, a lógica já tinha um aspecto realista, que transparece em suas formulações do princípio de não contradição.

A primeira formulação aristotélica do princípio de não-contradição pode ser interpretada como uma formulação de caráter ontológico, sendo talvez a mais famosa formulação do princípio:

> tal princípio é o mais certo de todos; qual é este princípio, nós iremos dizer. É o de que o mesmo atributo não pode ao mesmo tempo pertencer e não pertencer ao mesmo objeto sob o mesmo aspecto[7]

[7] Met Γ 3. 1005b 19, 20. Ver tradução em Inglês: ROSS. W. D. Translation of Aristotle’s Metaphysics. 2nd Edition. In: Richard Mckeon (ed.) *The Basic Works of Aristotle.* New York: Random House, 1941. “such a principle is the most certain of all; which principle this is, let us proceed to say. It is, that the same attribute cannot at the same time belong and not belong to the same subject and in the same respect” (Tradução nossa do inglês).

Destacando o fato de que Aristóteles estava se referindo a objetos reais, e que o pertencimento de uma propriedade a um objeto deve ser atual, e não meramente potencial, esta formulação diz que é impossível um objeto ter e não ter uma propriedade ao mesmo tempo sob o mesmo aspecto - isto é, não podemos aceitar "$Pa \wedge \neg Pa$" por ser impossível que exista, na realidade, um objeto *a* que possua e não possua a propriedade *P* (ao mesmo tempo e sob o mesmo aspecto).

De acordo com esta formulação, é a própria realidade, ao tornar impossível que um objeto possua e não possua uma mesma propriedade (sob o mesmo aspecto e ao mesmo tempo) que nos impele a adotar o princípio de não contradição. Assim, podemos dizer que a lógica clássica tem caráter realista porque adota um princípio que descreve a própria realidade. De fato, este princípio parece descrever a realidade em um de seus aspectos mais gerais para Aristóteles, uma vez que se trata do princípio mais básico, donde não pode advir erro algum.

A segunda formulação aristotélica do princípio da não contradição tem caráter aparentemente psicologista: “é impossível para qualquer um acreditar que a mesma coisa é e não é” [8].

Isto é, esta formulação diz que é impossível sustentar a crença de que algum objeto tem e não tem uma determinada propriedade. Entretanto, se vista do ponto descritivo esta interpretação parece pouco plausível, pois parece haver pessoas que acreditam em coisas contraditórias – como sugerem algumas interpretações de Hegel e, contemporaneamente, como creem os dialeteístas.

O próprio Aristóteles tem uma resposta para isso, alegando que tais pessoas possam dizer coisas contraditórias, mas não verdadeiramente crer nestas coisas. Ainda

[8] *Met* IV 3 1005b 24 cf.1005b 29–30 Ver tradução em Inglês: ROSS. W. D. Translation of Aristotle’s Metaphysics. 2nd Edition. In: Richard Mckeon (ed.) *The Basic Works of Aristotle.* New York: Random House, 1941. ““it is impossible for any one to believe the same thing to be and not to be”” (Tradução nossa do ingles).

assim, se trata de uma interpretação passível de muitas objeções, que deve ser preterida por uma alternativa: a de que esta segunda formulação tenha caráter prescritivo.

De acordo com esta interpretação, alguém não poderia *racionalmente* crer que um objeto possui e não possui uma determinada característica. Essa interpretação vai ao encontro do próprio desejo do autor de extrair a segunda formulação da primeira[9]. Isto é: uma vez que a realidade não permita que um objeto possua e não possua uma mesma propriedade ao mesmo tempo e sob o mesmo aspecto, seria irracional crer que algum objeto tivesse e não tivesse a mesma propriedade – afinal, tal feito é impossível.

A terceira formulação aristotélica do princípio de não contradição tem caráter semântico, e diz: "A mais indisputável de todas as crenças é a de que asserções contraditórias não são verdadeiras ao mesmo tempo” [10].

Uma boa interpretação dessa versão é a de que ela é uma variante da primeira, uma vez que Aristóteles acreditava que toda asserção consiste em predicar uma coisa de outra. Isto é, dizer que asserções opostas não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo é dizer que não se pode ter Pa verdadeiro e $\neg Pa$ verdadeiro ao mesmo tempo. Novamente, uma interpretação realista parece estar por trás disso, na crença de que a realidade não pode tornar Pa e $\neg Pa$ verdadeiros ao mesmo tempo.

Embora seja controverso afirmar qual versão do princípio de não contradição Aristóteles pretendia dar primazia, é plausível supor que uma perspectiva realista esteja por trás de todas elas. Essa suposição é suportada pelo fato de Aristóteles insistir que os objetos e as predicados (*Pa*) precisam ser reais e atuais, e não meras expressões lingüísticas. Por isso, Aristóteles parece estar de fato dizendo que objetos do mundo real

---

[9] Para o argumento de Aristóteles de que a segunda versão pode ser derivada da primeira, ver linhas finais da Metafpisica IV 3.

[10] Met. Γ 6 1011b 13, 14 Ver tradução em Inglês: ROSS. W. D. Translation of Aristotle’s Metaphysics. 2nd Edition. In: Richard Mckeon (ed.) *The Basic Works of Aristotle.* New York: Random House, 1941. “The most indisputable of all beliefs is that contradictory statements are not at the same time true”. (tradução nossa do ingles).

não podem possuir aspectos contraditórios – e isso consiste em uma justificativa realista para o princípio da não contradição.

1.2.2 - Frege

Frege também possuía uma perspectiva realista acerca da lógica, de acordo com a qual a lógica teria uma relação especial com a *verdade*, tratando de leis gerais que regulam as relações de verdade.

> Assim como a palavra "belo" indica a direção da estética, e a palavra "bom" a direção da ética, da mesma maneira a palavra "verdadeiro" indica a direção da lógica. De fato, todas as ciências têm a verdade como objetivo; mas a lógica se relaciona ainda de uma maneira muito especial com a mesma. [...] Descobrir verdades é tarefa de todas as ciência; à lógica cabe a descoberta das leis do ser verdadeiro.[11]

Com efeito, é preciso tomar com ressalvas a afirmação de Frege de que a "verdade" indica a essência da lógica. Em outras passagens, o autor acaba por dar primazia à noção de "força assertórica", argumentando que a "verdade" fosse apenas uma tentativa frustrada – ainda que indispensável – de indicar a essência da lógica.

> Pois a palavra "belo" indica de fato a essência da estética, assim como a palavra "bom" indica a essência da ética, enquanto a palavra "verdadeiro" é efetivamente apenas uma tentativa frustrada de indicar a essência da lógica, uma vez que aquilo que de fato está em jogo não está, de maneira alguma, na palavra "verdadeiro", mas sim na força assertórica com a qual a sentença é afirmada. [12]

---

[11] FREGE, G. O pensamento [1918] In: ALCOFORADO, Paulo (Org. e Trad.) *Investigações lógicas*. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2002. p. 9-39. Apud RUFFINO, M. "O Verdadeiro, o Bom e o Belo em Frege". *O Que Nos Faz Pensar*, 20, pp. 27-44, 2006.

[12] FREGE *Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel*, vol. I, ed. por H. Hermes, F. Kambartel and F. Kaulbach, seg. edição, Hamburg: Meiner. 1983. Apud GREIMANN, Dirk. A caracterização da lógica pela força assertórica em frege. Resposta a Marco Ruffino. **Manuscrito**, Campinas , v. 35, n. 1, p. 61-83, June 2012 . Available from <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0100-

Todavia, mesmo que com ressalvas, colocar *verdade* como um indicativo da natureza da lógica revela uma perspectiva realista. Isso porque se a lógica trata, de alguma forma, das ‘leis do ser verdadeiro’, e se a verdade está ligada à realidade, a lógica há de legislar sobre a realidade.

É por isso que, por exemplo, a lógica clássica – especialmente para Frege - não poderia aceitar a presença de contradições: pois se a verdade torna as proposições verdadeiras, a presença de uma contradição verdadeira implicaria na existência de uma contradição na realidade – o que não é uma tese muito atraente para a maioria de nós.

Com efeito, independentemente de a lógica ser caracterizada pela força assertórica ou pela verdade propriamente dita, ela era, para Frege, um tratamento das condições de verdade, ou da preservação de verdade. E “verdade”, aqui, deve ser entendida de forma realista e objetiva: “Para mim, o que é verdadeiro é algo objetivo e independente do sujeito que julga”[13].

A perspectiva realista de Frege pode ser encontrada em diversas de suas críticas ao psicologismo. Por exemplo, na introdução das *Leis Básicas*, Frege argumenta que não entende as “leis da lógica” como leis psicológicas do que acreditamos ser verdadeiro, mas como “leis da verdade”, que independem de nosso conhecimento.[14] E diz:

> Se ser verdadeiro é, portanto, independente de ser reconhecido por uma pessoa ou outra, então as leis da verdade não são leis psicológicas: elas são

---

60452012000100002&lng=en&nrm=iso>. access on 24 Mar. 2017. http://dx.doi.org/10.1590/S0100-60452012000100002.

[13] FREGE. *Basic Laws of Arithmetic.* Editado por M. Furth. Berkeley and Los Angeles: University of California Press. 1964. p.15 “For me, what is true is something objective and independent of the judging subject”.

[14] FREGE. *Basic Laws of Arithmetic.* Editado por M. Furth. Berkeley and Los Angeles: University of California Press. 1964. p.13

> pedras demarcadoras fixadas em um princípio eterno, que nosso pensamento pode transbordar, mas nunca deslocar.[15]

Dessa forma, nosso pensamento pode ignorar as leis lógicas e passar por cima de suas 'pedras demarcadoras', mas não pode modificá-las: as leis da verdade permanecem ali, inalteradas, mesmo que nosso pensamento se equivoque e pense de forma diferente. O que significa que, para Frege, os princípios da lógica existem independentemente de nosso conhecimento, descrevendo aspectos da própria realidade, e, portanto, tendo caráter ontológico.

Assim, a lógica – além do caráter prescritivo, de nos dizer como de fato devemos pensar se quisermos preservar verdade – teria também caráter descritivo. Mas não enquanto uma descrição de como de fato pensamos, e sim como uma descrição de como a realidade é, isto é, de como funcionam as leis da preservação de verdade – analogamente a como as ciências empíricas nos fornecem as leis da natureza. Com a diferença de que as leis da natureza não podem ser desobedecidas, enquanto nosso pensamento, por consistir em uma atividade mental, pode desobedecer às leis da lógica.

De fato, para Frege, o matemático (ou o lógico) não estaria criando nada com suas definições, exceto por nomear alguma propriedade que determinado objeto já possuísse. Analogamente, as leis da lógica não poderiam ser invenções; haveriam de nomear relações de verdade que já existissem independentes de nós.

> Assim como o geógrafo não cria um mar quando ele desenha linhas demarcadoras e diz: chamarei a parte da superfície do oceano demarcada por estas linhas de Mar Amarelo, também o matemático não pode realmente criar nada por meio de suas definições. Nem pode alguém por pura definição

[15] FREGE. *Basic Laws of Arithmetic*. Editado por M. Furth. Berkeley and Los Angeles: University of California Press. 1964. p.13. "If being true is thus independent of being acknowledged by somebody or other, then the laws of truth are not psychological laws: they are boundary stones set in an eternal foundation, which our thought can overflow, but never displace." (Tradução nossa)

> magicamente conjurar em algo uma propriedade que a coisa de fato não possua – exceto de que agora será chamada pelo nome com o qual a nomeou.[16]

Isso não vale, é claro, apenas para definições. Ao contrário, Frege acreditava que a atividade de conhecer consiste em compreender algo que já estivesse ali, e não em criar aquilo que é conhecido. Dessa forma, o conhecimento matemático consistiria em alcançar verdades independentes, assim como ocorrem nas ciências empíricas.

> …considerações psicológicas não têm mais lugar na lógica do que na astronomia ou na geologia. Se quisermos emergir do subjetivo, devemos conceber o conhecimento como uma atividade que não cria o que é conhecido, mas agarra o que já está lá. A imagem de agarrar é muito adequada para elucidar o assunto. Se eu agarro um lápis, muitos eventos diferentes ocorrem em meu corpo: nervos são estimulados, alterações ocorrem na tensão e na pressão dos músculos, tendões, e ossos, a circulação do sangue é alterada. Mas a totalidade desses eventos não é o lápis, nem cria o lápis; o lápis existe independentemente deles. E é essencial para agarrar que algo esteja lá para se agarrar; as mudanças internas sozinhas não são agarrar. Da mesma forma que aquilo que nós agarramos com a mente também existe independentemente dessa atividade, independentemente das idéias e suas alterações que são parte do ato de agarrar, ou o acompanham; e não é idêntico a totalidade desses eventos nem é criado por eles como uma parte de nossa vida mental.[17]

---

[16] FREGE. *Basic Laws of Arithmetic.* Editado por M. Furth. Berkeley and Los Angeles: University of California Press. 1964. p.11 “Just as the geographer does not create a sea when he draws boundary lines and says: the part of the ocean's surface bounded by these lines I am going to call the Yellow Sea, so too the mathematician cannot really create anything by his defining. Nor can one by pure definition magically conjure into a thing a property that in fact it does not possess - save that of now being called by the name with which one has named it.” (tradução nossa)

[17] FREGE. *Basic Laws of Arithmetic.* Editado por M. Furth. Berkeley and Los Angeles: University of California Press. 1964. p.23, 24. “psychological considerations have no more place in logic than they do in astronomy or geology. If we want to emerge from the subjective at all, we must conceive of knowledge as an activity that does not create what is known but grasps what is already there. The picture of grasping is very well suited to elucidate the matter. If I grasp a pencil, many different events take place in my

Isto é, ao rechaçar o psicologismo, Frege adota uma perspectiva realista, na qual os objetos da matemática já existem antes de serem descobertos, e a tarefa do matemático consiste não em criá-los, mas em alcançá-los.

Assim, Frege adotava uma perspectiva platonista em relação a matemática. Isto é, acreditava que os objetos e as verdades da matemática existiam em um mundo a parte, independentemente de nós os conhecermos. Mas com isso Frege havia de ser um platonista também em relação à lógica, uma vez que seu propósito era reduzir a aritmética à lógica. De fato, para Frege, a aritmética seria apenas um desenvolvimento da lógica, e, como tal, não deveria ter um status epistemológico diferente dela.

> Eu espero poder alegar que no presente trabalho eu tenha tornado provável que as leis da aritmética sejam juízos analíticos e conseqüentemente a priori. A Aritmética então se torna simplesmente um desenvolvimento da lógica, e toda proposição da aritmética uma lei da lógica, ainda que uma lei derivada.[18]

Isto é: se Frege era platonista em relação à aritmética e esta, para ele, nada mais era que um desenvolvimento da lógica, ele havia de ser também platonista em relação à lógica.[19] Assim, para Frege, a lógica tinha caráter tão realista e objetivo como a matemática.

Cremos nós que tais perspectivas, como a de Aristóteles e a de Frege, sejam poderosas demais para serem simplesmente descartadas em prol de alguma forma pouco

---

body: nerves are stimulated, changes occur in the tension and pressure of muscles, tendons, and bones, the circulation of the blood is altered. But the totality of these events neither is the pencil nor creates the pencil; the pencil exists independently of them. And it is essential for grasping that something be there which is grasped; the internal changes alone are not the grasping. In the same way, that which we grasp with the mind also exists independently of this activity, independently of the ideas and their alterations that are a part of this grasping or accompany it; and it is neither identical with the totality of these events nor created by it as a part of our own mental life." (tradução nossa)

[18] FREGE, Gottlob (*1974*), The *Foundations* of *Arithmetic*: A *Logico- Mathematical Inquiry into* the *Concept* of *Number*. Traduzido por *J. L. Austin*. Oxford: Blackwell. 1974. § 87 "I hope I may claim in the present work to have made it probable that the laws of arithmetic are analytic judgments and consequently a priori. Arithmetic thus becomes simply a development of logic, and every proposition of arithmetic a law of logic, albeit a derivative one." (tradução nossa do ingles)

[19] Ver CARNIELLI, W; RODRIGUES, A. On the philosophy and mathematics of the Logics of Formal Inconsistency. Em: *New Directions in Paraconsistent Logic.* Springer. 2016. p. 67

sofisticada de pluralismo. Em vez disso, buscaremos formas de pluralismo que sejam consistentes com perspectivas realistas acerca da lógica clássica. Em vista disso, analisaremos algumas formas de pluralismo e veremos como se comportam em relação ao realismo presente na lógica clássica.

1.3 - Algumas formas de pluralismo

1.3.1 – O contextualismo

Quando nos deparamos com a pluralidade de lógicas existentes e bem sucedidas, a primeira coisa que podemos pensar é que diferentes lógicas podem ser apropriadas a diferentes contextos.

Por exemplo, é comum nos textos de Brouwer e Heyting o argumento de que a aplicação irrestrita do terceiro excluído, conforme ocorre na lógica clássica, seja um problema especialmente para a matemática.

De fato, as críticas de Brouwer parecem sempre se referir à aplicação do terceiro excluído à matemática[20]:

> Matemática rigorosamente tratada deste ponto de vista, e deduzindo teoremas exclusivamente por meios de construção introspectiva, é chamada matemática intuicionista. Em vários aspectos ela difere da matemática clássica. Em primeiro lugar, porque a matemática clássica usa lógica para

[20] Ver também HEYTING, A.. *Intuitionism: an Introduction*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1956 p.1. "(class) I never understood why logic should be reliable everywhere else, but not in mathematics. (Int) We have spoken about that subject before. The idea that for the description of some kinds of objects another logic may be more adequate than the customary one has sometimes been discussed. But it was Brouwer who first discovered an object which actually requires a different form of logic, namely the mental mathematical construction [L. E. J. Brouwer 1908]. The reason is that in mathematics from the very beginning we deal with the infinite, whereas ordinary logic is made for reasoning about finite collections."

> gerar teoremas, acredita na existência de verdades desconhecidas, e em particular aplica o *princípio do terceiro excluído* expressando que toda asserção matemática (i.e. toda atribuição de uma propriedade matemática a uma entidade matemática) ou é verdade ou não pode ser verdade.[21]

Nos textos sobre lógica paraconsistente – ao menos na tradição que busca justificá-la epistemicamente, e não ontologicamente, como os dialeteístas – é comum a citação de contradições nas ciências empíricas, ou mesmo em ciências formais em progresso, como o cálculo do século XX. Isto é, é comum a idéia de que a lógica paraconsistente seja necessária como uma forma de isolar as contradições enquanto aguardamos uma solução posterior, sem que, com isso, trivializemos a teoria ou tenhamos que descartá-la como um todo.

> O que nós precisamos é um modelo em que você tem estruturas teóricas que podem conter suposições errôneas, em que alguns dos seus dados são falsos, que você pode operar com regras que podem induzir a falsidades, que pode haver contradições, e assim em diante, porque estes são os tipos de problemas que nós realmente enfrentamos. [22]

Isso deixa parecer, à primeira vista, que diferentes lógicas se distingam pelos objetos de que tratam: uma lógica para ciências empíricas, outra para a matemática construtiva, outra para entidades platônicas. O problema desta abordagem é que um tratamento da consequência lógica - a princípio - deveria se aplicar a quaisquer

---

[21] BROUWER, L.E.J (1948 C). Consciousness, Philosophy and Mathematics. In: HEYTING (ed). *L. E. J. Brouwer Collected Works:* Philosophy and Foundations of Mathematics. New York: North-Holland Publishing Company, 1975. p. 488 “Mathematics rigorously treated from this point of view, and deducing theorems exclusively by means of introspective construction, is called intuitionistic mathematics. In many respects it deviates from classical mathematics. In the first place because classical mathematics uses logic to generate theorems, believes in the existence of unknown truths, and in particular applies the *principle of the excluded third* expressing that every mathematical assertion (i.e. every assignment of a mathematical property to a mathematical entity) either is a truth or cannot be a truth” (tradução nossa)

[22] W. C. Wimsatt apud DA COSTA, N.C.A.; FRENCH, S. *Science and Partial Truth.* Oxford: OUP, 2003. p. 84. “What we need is a model in which you have theoretical structures that may have erroneous assumptions, in which some of your data are false, that you may operate on with rules that can induce falsehoods, that may have contradictions and so on, because those are the kinds of problems we really face.” (tradução nossa)

contextos, uma vez que a lógica trata de objetos com a maior generalidade possível. Aparentemente a universalidade é um objetivo comum a diferentes lógicas e muitas delas acreditam cumprir este objetivo.

A lógica clássica, por exemplo, pretende dar conta da preservação de verdade em todos os casos, em todos os contextos, ignorando a natureza dos objetos de que trata.

Uma lógica que não se aplicasse a todos os casos poderia ser interpretada como fazendo uso de premissas ocultas, que só valem para determinados casos. Por exemplo, um intuicionista poderia dizer que o terceiro excluído é uma premissa oculta de domínios completos ou decidíveis. Dessa forma, poder-se-ia argumentar, a lógica intuicionista seria a lógica correta, e a clássica um caso específico em que, em domínios completos e decidíveis, a lógica intuicionista estaria autorizada a fazer uso do terceiro excluído como premissa.

Assim, para alguém que defendesse a universalidade da lógica e estivesse de acordo com as críticas intuicionistas na matemática, o terceiro excluído simplesmente não poderia ser uma lei lógica, haja vista a existência de uma exceção.

Analogamente, se houverem exceções para o princípio da identidade, este não seria também uma lei lógica. Como Priest diz: "se existem situações em que objetos podem não ser idênticos a si mesmos, então auto-identidade não é, de modo algum, uma lei lógica."[23]

Isto é, se contextos diferentes exigem lógicas diferentes, pode-se pensar que a lógica, propriamente dita, seja apenas o que há em comum entre elas, e as demais lógicas sejam apenas extensões da primeira, com o recurso de premissas específicas de domínios específicos.

[23] PRIEST, G. (2006)'Logical Pluralism', em Doubt truth to be a Liar, Oxford: Oxford University Press, cap. 12. "if there are situations in which objects may not be self-identical, then self-identity is not a logical law at all." (tradução nossa)

Por outro lado, este núcleo comum pode ser restrito demais para representar o que entendemos por "Lógica" - isso se houver, de fato, um núcleo comum a qualquer lógica que tenha sido bem sucedida.

Apesar disso, parece que o que está em jogo, se nós quisermos ser realmente pluralistas, não pode ser apenas o contexto de aplicação. Do contrário, ficaríamos sempre suscetíveis a critica de que cada uma de nossas lógicas é apenas um conjunto específico de regras de um contexto específico, e não - como a lógica deveria ser - a representação das leis mais gerais de inferência.

1.3.2 – O Pluralismo de Carnap

Uma forma um pouco mais interessante de pluralismo, que não se reduz apenas a aplicação em contextos, é o Pluralismo de Carnap, que parte de seu Princípio da Tolerância:

> Em lógica não há moral. Todos têm a liberdade de construir sua própria lógica, isto é, a sua própria forma de linguagem, como desejarem. Tudo o que é exigido é que, se deseja discutir o assunto, deve indicar claramente os seus métodos, e dar regras sintáticas em vez de argumentos filosóficos. [24]

O pluralismo de Carnap é geralmente[25] visto como um pluralismo acerca da linguagem: diferentes análises de validade derivam de diferentes linguagens. Trata-se de

[24] CARNAP, R. The Logical Syntax of Language, London: Kegan Paul, 1937. Section 17 "In logic there are no morals. Everyone is at liberty to build up his own logic, i.e., his own form of language, as he wishes. All that is required of him is that, if he wishes to discuss it, he must state his methods clearly, and give syntactical rules instead of philosophical arguments" (tradução nossa)

[25] Ver, por exemplo, RESTALL, G. Carnap's tolerance, Meaning and Logical Pluralism. *The Journal of Philosophy,* vol *99* n.8. p. 426-443. 2002. Ou: TAJER, D. *Pluralismo Lógico*. 2010. 141 f. Tesis de Licenciatura de Filosofía. Universidad de Buenos Aires, Facultad de Filosofía y Letras, Buenos Aires. 2010.

diferentes leituras. Mais especificamente, de diferentes leituras dos conectivos. Por exemplo, podemos ter duas negações, com regras de inferência distintas:

$A, \neg_C A \models B$ $A, \neg_P A \not\models B$

Nesta interpretação, não é a consequência lógica que se altera, mas a linguagem - a leitura dos conectivos. Isto é, não temos verdadeiramente dois (ou mais) tratamentos diferentes da noção de consequência lógica, mas um único tratamento desta noção, com dois (ou mais) símbolos lógicos que interpretem os conectivos da linguagem natural.

É claro que entre duas lógicas rivais teremos regras de inferência distintas. O ponto é que se formos pluralistas acerca da linguagem, podemos ter em um mesmo sistema as duas lógicas - as duas leituras dos conectivos - especificando (em nosso exemplo, no subscrito) qual tratamento dos conectivos estamos utilizando em dado momento. Neste sistema único que poderíamos expressar diferentes lógicas, e este sistema teria um único tratamento da noção de consequência lógica, mas diversos tratamentos de cada conectivo.

Em nosso exemplo, teríamos entre as fórmulas válidas o princípio da explosão com negação clássica, mas não com a negação paraconsistente. Mas a relação de consequência lógica permanece a mesma: em todos os casos em que temos a negação clássica, valem as inferências clássicas. Nos casos em que temos a negação paraconsistente, valem as inferências da lógica paraconsistente. Tudo que temos são símbolos extras na linguagem.

Um problema dessa abordagem é que lógicas alternativas a lógica clássica não parecem pretender uma mudança no sentido dos conectivos, mas uma noção diferente de consequência lógica.

Quando um intuicionista rejeita a aplicação irrestrita do princípio do terceiro excluído, ele não pretende que tal princípio valha para alguma negação, mas não para alguma outra negação, que de alguma forma tenha mudado de sentido - seja por representar uma ambiguidade da linguagem natural, ou por consistir em alguma noção nova de negação. O que ele parece defender é a regra de *inferência* não seja irrestritamente válida.

Do contrário, não teríamos diferentes lógicas *rivais*, mas um único sistema lógico com diferentes conectivos. Tal sistema, todavia, não parece poder ser adequadamente levado a cabo[26] - ao menos não se quisermos dar conta, pelo menos, da lógica clássica e da lógica intuicionista.

Suponha que tenhamos uma teoria T com axiomas não indexados, de tal forma que cada axioma possa ser indexado pelas lógicas que o aceitem. Dessa forma, teríamos, por exemplo:

$\vdash A \rightarrow^{c} (A \vee^{c} B)$ $\qquad\qquad$ $\vdash A \rightarrow^{i} (A \vee^{i} B)$

A consequência lógica seria uma só, pois tanto a linguagem intuicionista quanto a clássica seriam parte da mesma teoria T.

O lógico clássico e o lógico intuicionista discordariam, por outro lado, quanto à adoção da dupla negação como um de seus axiomas:

$\neg^{c}\neg^{c}A \vdash A$ $\qquad\qquad$ $\neg^{i}\neg^{i}A \nvdash A$

[26] Seguindo HARRIS, JH. (1982) ’What’s so logical about ’logical’ axioms?’, Studia Logica, Vol. 41, No. 2/3, pp. 159-171.; De acordo com a exposição de TAJER, D. *Pluralismo Lógico*. 2010. 141 f. Tesis de Licenciatura de Filosofía. Universidad de Buenos Aires, Facultad de Filosofía y Letras, Buenos Aires. 2010.

Mas, segundo Harris, para todo conectivo que conecta fórmulas não indexadas (por exemplo, a disjunção em $A \vee B$), há uma equivalência entre as regras intuicionistas e clássicas. Portanto:

$A \vee^{i} B \leftrightarrow A \vee^{c} B$

A partir do que, prova que:

$A \vee^{c} \neg^{c}A \leftrightarrow A \vee^{i} \neg^{i}A$

Isso significa que a negação intuicionista colapsa na presença da negação clássica, de forma a não ser possível admitir em um mesmo sistema que o terceiro excluído valha para a linguagem clássica, mas não valha na linguagem intuicionista.

Pode-se pensar, por outro lado, que o mesmo não seja o caso para o lógico paraconsistente, simpático as LFIs, e que este acredite na existência de duas negações distintas: uma representada por $(\neg A) = 1$ e $(°A) = 1$, e uma por $(\neg A) = 1$ e $(°A) = 0$.

De fato, estes dois casos possuem inferências distintas. Por exemplo,

1) $°A, \neg A \wedge A \vdash B$

Todavia,

2) $\neg A \wedge A$ |-/- B

Isto é: parece haver duas negações. Uma, quando $°A = 1$, sendo a negação clássica. E a outra, quando $°A = 0$, sendo a negação paraconsistente.

Todavia, será este comportamento melhor compreendido como uma mudança no sentido da negação, ou como um tipo de caso especial que permita o uso de diferentes regras de inferência? Os dois casos acima se distinguem pelo sentido de sua negação, ou pelo uso de cânones de inferência mais rígidos?

Para tentar dar um caminho a esta questão, propomos dois exemplos em linguagem natural:

3) (2 + 2 = 4), e (2 + 2 ≠ 4). Logo, a lua é de queijo.

4) Em uma situação cotidiana, obtivemos a informação, de um hipotético João, que "a Universidade fica a sul". De outra pessoa, digamos, José, obtivemos a informação de que "a universidade fica a norte, e não a sul". Logo, concluímos que "a Universidade se situa em marte".

É plausível que se entenda 3) como um caso semelhante a 1), onde tratamos de algo que acreditamos ser consistente. Pelo menos a título de exemplo, suporemos que este é o caso.

Em 4), por outro lado, parece plausível supor que as informações, tanto de João quanto de José, podem estar erradas - eles podem ter se enganado, ou nem saberem onde fica o sul ou o norte.

Parece plausível, portanto, que (2 + 2 = 4) receba °, mas "A universidade fica a sul" e "a universidade fica a norte" não recebam. Desta forma, a inferência (3) estaria correta. E a (4) incorreta.

Mas a palavra "Não", em linguagem natural, teria se alterado entre os exemplos 3) e 4)? Será que estávamos, sem perceber, usando a negação de forma ambígua? Ou será que estávamos, simplesmente, defendendo o uso de regras de inferência diferentes para ambos os casos? Parece-nos mais plausível aceitar a segunda possibilidade; isto é, que estamos recorrendo a premissas ocultas que nos são permitidas por domínios que supomos completos e consistentes – de forma análoga ao lógico intuicionista que, raciocinando sobre o mundo físico corriqueiro, recorre ao terceiro excluído. Isso – insistimos – não é razão para dizer que a negação em linguagem natural seja ambígua, ou que estejamos mudando seu sentido. O que mudamos é apenas o seu tratamento formal, por estarmos visando preservar propriedades diferentes.

1.4 – O pluralismo de Beall e Restall

Uma das formas mais influentes de pluralismo foi defendida por Beall e Restall (2000, 2006) – e se trata de uma forma de pluralismo acerca da conseqüência lógica. Exporemos a concepção destes autores partindo do artigo de 2000/06.

Beall e Restall partiram de um princípio intuitivo de consequência lógica, que diz:

> (V) Uma conclusão *A* se segue de um conjunto de premissas *P* se, e somente se, em todo caso que cada premissa de *P* é verdadeira, também é o caso em que *A* é verdadeira. Ou, equivalentemente, não há uma circunstância em que cada premissa de *P* seja verdadeira, mas *A* não seja[27].

O ponto central do pluralismo de Beall e Restall é que (V) não nos dá uma explicação completa do que é consequência lógica, de modo a haver diferentes especificações de *casos* em (V), que dão origem a diferentes lógicas, e que há, ao menos, duas corretas especificações de casos de (V).

O pluralismo de Beall e Restall pode ser capturado por 3 condições:

1) A noção intuitiva de consequência lógica é dada por V

[27] BEALL, J.C.; RESTALL, G. Logical Pluralism. In: *Australasian Journal of Philosophy*, 78, 2000, p. 476 “(V) A conclusion *A* follows from premises *P* if and only if any case in which each premise in *P* is true is also the case in which *A* is true. Or equivalently, there is no case in which each premise in *P* is true, but in which *A* fails to be true.” (Tradução nossa)

2) Uma lógica é dada por uma especificação de *casos* de V. Tal especificação pode ser vista como uma especificação das *condições de verdade* das sentenças da linguagem.

3) existem, pelo menos, duas especificações de *casos* de V.

Os autores tomam (1) como auto-explanatório, dando apenas alguns exemplos na literatura onde algo semelhante a (V) aparece como a definição de consequência lógica, como em Richard Jeffrey[28] e Newton Smith[29].

Para eles, lógica é uma questão de preservação de verdade em todos os casos. Mas é preciso especificar quais são esses casos em questão (mundos possíveis, construções, etc...).

Além disso, é preciso fornecer as condições de verdade nestes *casos*. Eles dão o seguinte exemplo:

"$A \wedge B$ é verdadeiro em x se e somente se A é verdadeiro em x e B é verdadeiro em x".

Uma abordagem de tal tipo não nos diz apenas o que a conjunção é, mas também nos diz algo a respeito da consequência lógica. De tal forma que dessas condições de verdade se pode extrair a validade de ($A \wedge B \vdash A$).

A única das 3 condições que é controversa, eles argumentam, é a (3). Para convencer o leitor de que existem ao menos duas especificações (igualmente corretas) de *casos* em V, os autores começam por expor uma especificação de V para a lógica clássica, que pode ser reconstruída assim:

(V) Clássica: uma conclusão A se segue de um conjunto de premissas P se, e somente se, em todo *mundo possível* (ou, depois, *modelo*) em que cada premissa de P é verdadeira, A é verdadeira.

28 JEFFREY, C Richard. *Formal Logic*: its scope and its limits. McGraw Hill, Third edition, 1991. p. 1 “A valid argument is one whose conclusion is true in every case in which all its premises are true.”

29 SMITH, Newton. *Logic:* an introductory course. Balliol College, Oxford: 1985 p. 3. “An argument is valid if it has the property that if the premises were true the conclusion would have to be true.”

E fornecem algumas condições de verdade. Por exemplo:

"¬A é verdadeiro em *w* sse A não é verdadeiro em *w*".

Em seguida, expõem uma especificação por *modelo*, a fim de levar em conta o requisito de que um argumento deve ser válido ou inválido devido a sua forma, o que não seria necessário na análise de mundos possíveis.

Observe que tanto os *modelos* quanto os *mundos possíveis*, teriam de ser *completos* e *consistentes*, razão pela qual ambas as abordagens poderiam caracterizar a lógica clássica (mas não uma lógica paracompleta ou paraconsistente).

Como ambas as especificações de *casos* possuem alguma diferença, por exemplo, em validar ou não uma inferência do tipo "A é vermelho |– A é colorido", os autores argumentam que aqui já temos duas abordagens diferentes de validade.

Os autores argumentam que ambas são especificações de V e, portanto, que ambas são *lógicas*. Discutir se um argumento como "A é vermelho, logo A é colorido" é *realmente* válido é algo infrutífero e pouco informativo. Preferem dizer, simplesmente, que é válido de acordo com uma especificação, e inválido de acordo com outra.

Na sessão seguinte os autores tratam de uma especificação de V para uma lógica não-clássica, a saber, a Lógica Relevante.

Começam por argumentar que a clausula de negação para a lógica clássica da o *significado* de negação (¬A é verdadeiro se, e somente se, A não é verdadeiro). Mas que daí não se segue que esta seja a única leitura aceitável da negação **para qualquer *caso*.** Pois isso seria presumir que todos os *casos* aceitáveis sejam para modelar mundos *completos e consistentes*.

> Existem várias boas razões para usar uma cláusula de negação clássica ao construir uma abordagem da verdade em casos. A razão mais óbvia é a forma

> como nós usamos a negação, e as condições sob as quais negações são, de fato, verdadeiras: ~A é verdadeira exatamente quando A não é verdadeira. Isto, alguém pode dizer, é simplesmente o que 'não' significa. [30]

Uma das leituras que não se restringirá a mundos *completos* e *consistentes* será a partir da noção de *situação* (que podem ser incompletas ou inconsistentes ou ambos). Eles elucidam a noção de *situação* através de alguns exemplos, como: "na situação envolvendo a casa de Greg enquanto ele escreve isso, é *verdade* que Christine está lendo um jornal [...] É *falso* que a televisão esteja ligada". A ideia é que situações 'tornam' afirmações verdadeiras ou falsas. Mas deixam outras afirmações indeterminadas, quando não aparecem nessas situações. Por isso, um tratamento clássico da negação não será apropriado.

Entretanto, argumentam que dar um tratamento não-clássico – isto é, diferentes condições de "verdade" – para a negação quando a noção de consequência lógica for especificada por "situações" não significa que a negação mudou de sentido.

> Nós devemos enfatizar, neste ponto, que o tratamento não-tradicional da negação não significa que nós estamos modelando uma negação não-clássica. Muito pelo contrário. Nosso tratamento da negação não é o tradicional simplesmente porque estamos entrando em um novo campo -- a lógica de situações. Não tem sido tradicional modelar afirmações do tipo 'A é verdadeiro em uma situação x'; quando se o faz, e quando se conhece que situações são partes restritas do mundo, se torna claro que se deve rejeitar o tratamento clássico da negação quando aplicado a situações. Isto é

[30] BEALL, J.C.; RESTALL, G. Logical Pluralism. In: *Australasian Journal of Philosophy*, 78, 2000, p. 481 "There are many good reasons for using a classical negation clause in constructing an account of truth in cases. The most obvious reason is the way that we use negation, and the conditions under which negations are, in fact, true: -A is true just when A is not true. This, one might say, is simply what 'not' means." (tradução nossa)

> completamente consistente com o tratamento clássico de verdade ou falsidade da negação simplesmente. [31]

Beall e Restall defendem que o sentido da negação pode ser preservado mesmo quando estamos trabalhando com diferentes regras de inferência. Ao pensar em *situações*, não estamos tratando de uma ambiguidade do que significa "não" em linguagem natural, ou modulando uma nova negação que fosse dissociada do significado intuitivo da palavra. Do contrário, o sentido da negação permanece o mesmo, e continua sendo verdade que "A é verdadeiro se, e somente se, $\neg$A é falso". A única diferença é que precisamos recorrer a regras diferentes para tratar de um problema diferente: pois não é verdade que "A é verdadeiro em uma situação se, e somente se, $\neg$A é falso nesta situação", afinal, podem existir situações onde A não aparece e $\neg$A também não aparece. Isso não é algo que o lógico clássico discordaria, nem é algo que resulta de uma interpretação diferente da negação.

Por fim, Beall e Restall dão uma especificação de *caso* em V que pode ser resumida como se segue:

(V) Relevante: Uma conclusão A se segue de um conjunto de premissas P se, e somente se, em toda *situação* em que cada premissa de P é verdadeira, A é verdadeira.
Entendendo *situação* como um caso que pode ser incompleto e inconsistente.

Note que uma inferência como ($A \vdash B \vee \neg B$) não valeria, pois uma situação que torna A verdadeiro pode não tornar $B \vee \neg B$ verdadeiro.

---

[31] BEALL, J.C.; RESTALL, G. Logical Pluralism. In: *Australasian Journal of Philosophy*, 78, 2000, p. 482 "We must emphasize at this point that the non-traditional treatment of negation does not mean that we are modeling a non-classical negation. Quite to the contrary. Our treatment of negation is not the traditional one simply because we are entering a new field -- the logic of situations. It has not been traditional to formally model claims of the form 'A is true in situation x'; once you do so, and once you acknowledge that situations are restricted parts of the world, it becomes clear that you ought reject the classical treatment of negation when applied to situations. This is completely consistent with the classical treatment of the truth or falsity of negation *simpliciter*. " (tradução nossa)

Os autores insistem, novamente, que a negação ($\neg$) é clássica: ($B \vee \neg B$) é verdadeira em todos os mundos possíveis. Ainda assim, ($A \vdash B \vee \neg B$) é *relevantemente inválido*:

> se nós tomarmos as tautologias relevantes como sendo aquelas afirmações verdadeiras em toda situação, então $B \vee \sim B$ não está entre elas. Isso não significa que tenhamos adotado uma estranha abordagem não-clássica da negação. Nós concordamos com os teóricos clássicos que $B \vee \sim B$ é verdadeiro em todo mundo possível, onde mundos são (ao menos) completos. Nossa negação é clássica. O argumento de A para $B \vee \sim B$ é classicamente válido, qualquer mundo (possível) em que A é verdadeiro, será um mundo em que $B \vee \sim B$ é verdadeiro; a invalidade do argumento dado é uma invalidade *relevante*, pois existem situações nas quais as premissas são verdadeiras, mas a conclusão não o é. [32]

Isto é, embora reconheçam, da mesma forma que o lógico clássico, que A implica $B \vee \neg B$ em qualquer mundo possível, argumentam que este pode não ser o caso em uma *situação*, que pode ser incompleta: isto é, pode haver uma *situação* que torne A verdadeiro e não torne $B \vee \neg B$ verdadeiro.

Na seção seguinte, os autores tratam de outra noção de consequência lógica: a intuicionista. Os autores começam por apresentar a semântica de Kripke para a lógica intuicionista, que eles consideram apropriada.

> Uma semântica das condições de verdade pode ser dada para a lógica intuicionista da matemática construtiva, em que tanto faz justiça prática da

---

[32] BEALL, J.C.; RESTALL, G. Logical Pluralism. In: *Australasian Journal of Philosophy*, 78, 2000, p. 483 "if we take the relevant tautologies to be those claims true in every situation, then Bv-B is not among them. This does not mean that we have adopted a strange non-classical account of negation. We agree with the classical theorists that Bv-B is true in every world, where worlds are (at least) complete. Our negation is classical. The argument from A to Bv-B is classically valid in that any (possible) world in which A is true is one in which Bv~B is true; the invalidity of the given argument is a relevant invalidity, as there are situations in which the premise but not the conclusion is true" (tradução nossa)

> matemática construtiva, quanto abre caminho para uma leitura pluralista desta prática. A semântica de condições de verdade é simplesmente a semântica de Kripke para a lógica intuicionista. 'Verdade' é relativizada a pontos (que modelam construções) que são parcialmente ordenados pela força (escrita '≥').
>
> $A \wedge B$ é verdadeiro em c se, e somente se, A e B são verdadeiros em C
>
> $A \vee B$ é verdadeiro em c se, e somente se, A é verdadeiro em c ou B é verdadeiro em c.
>
> $A \rightarrow B$ é verdadeiro em *e* se, e somente se, para qualquer $d \geq c$, se A é verdadeiro em d, então B também é.
>
> $\neg A$ é verdadeiro em c se, e somente se, A não é verdadeiro em d para qualquer $d \geq c$.[33]

Acreditamos que essa especificação de *caso* em V pode ser sistematizada da seguinte maneira:

(V) Intuicionista: Uma conclusão A se segue de um conjuntos de premissas P se, e somente se, em toda *construção* em que cada premissa de P é verdadeira, A é verdadeira.

Uma construção é um *caso* necessariamente consistente, mas não necessariamente completo, uma vez que não se pode esperar que para todo A seja

[33] BEALL, J.C.; RESTALL, G. Logical Pluralism. In: *Australasian Journal of Philosophy*, 78, 2000, p. 486 "A truth conditional semantics may be given for the intuitionistic logic of constructive mathematics, which both does justice to the practice of constructive mathematics and opens the way for a pluralist reading of that practice. The truth conditional semantics is simply Kripke's semantics for intuitionistic logic. Truth is relativised to points (which model constructions) which are partially ordered by strength (written '≥'). $A \wedge B$ is true in c iff A and B are true in c. $A \vee B$ is true in c iff A is true in c or B is true in c. $A \rightarrow B$ is true in e iff for any $d \geq c$, if A is true in d then so is B. $\neg A$ is true in c iff A is not true in d for any $d \geq c$. " (tradução nossa)

possível construir A ou construir $\neg$A. Portanto, (A $\vee$ $\neg$A) não pode ser um teorema de uma lógica que pretenda dar conta da noção de construção.

Beall e Restall argumentam que isso não significa que (A $\vee$ $\neg$A) não seja *verdadeiro* ou mesmo *necessariamente verdadeiro*. O que poderíamos dizer é que (A $\vee$ $\neg$A) não é construtivamente válido. Isto é, dada uma proposição A qualquer, não se pode garantir que haja disponibilidade de prova de A ou disponibilidade de prova de $\neg$A.

> O que é importante, aqui, é que para um pluralista não se segue que A $\vee$ ~A não seja verdadeiro, ou, mesmo, não seja *necessariamente verdadeiro*. É consistente sustentar que todas as verdades da lógica clássica valem, e que todos os argumentos da lógica clássica são *válidos*, com o uso do raciocínio matemático construtivo, e a rejeição de certas inferências clássicas. O fato crucial que torna esta posição consistente é a mudança de contexto. Inferências clássicas são *classicamente* válidas; elas não são *construtivamente* válidas. Se nós usarmos um passo inferencial clássico, digamos a inferência de $\forall x(AvB)$ para $\exists xA\ v\ \forall xB$, **então (nós acreditamos) nós não passamos da verdade para a falsidade**, e nós não podemos passar da verdade para a falsidade. É impossível que $\forall x(A\ v\ B)$ seja verdadeiro e $\exists xA\ v\ \forall xB$ seja falso; **Entretanto, tal inferência *pode* nos levar de uma verdade que pode ser construída para uma que não o pode,** como nós vimos. Portanto a inferência, embora seja classicamente válida, pode ser rejeitada nos terrenos da não-construtividade. [34] (grifo nosso)

---

[34] BEALL, J.C.; RESTALL, G. Logical Pluralism. In: *Australasian Journal of Philosophy*, 78, 2000, p. 487 "What is important, here, is that for a pluralist it does not follow that *Av-A* is not true, or even, not *necessarily true.* It is consistent to maintain that all of the truths of classical logic hold, and that all of the arguments of classical logic are *valid* with the use of constructive mathematical reasoning, and the rejection of certain classical inferences. The crucial fact which makes this position consistent is the shift in context. Classical inferences are valid, *classically;* they are not *constructively* valid. If we use a classical inference step, say the inference from $\forall x(AvB)$ to $\exists xA\ v\ \forall xB$, then we have not (we think) moved from truth to falsity, and we cannot move from truth to falsity. It is impossible for $\forall x(A\ v\ B)$ to be true and for $\exists xA\ v\ \forall xB$ to be false; however, such an inference *can* take one from a truth which can be

Aqui os autores parecem entender que a relação de consequência lógica clássica preserva a verdade, mas não garante que a verdade da conclusão possa ser construída, como ocorre na lógica intuicionista.

Esta interpretação vai ao encontro do trabalho de Carnielli e Rodrigues, em que argumentam que a noção de consequência lógica da lógica clássica pretende, de fato, preservar verdade. Enquanto a lógica intuicionista pretende preservar outra noção, que é a de disponibilidade de prova – onde devemos entender que uma prova de x está *disponível* se *x* foi efetivamente construída ou se há uma prova *y* de que a construção de *x* é possível.[35].

Por fim, Beall e Restall voltam a criticar uma abordagem que defenda que a diferença entre as lógicas está no sentido, em linguagem natural, atribuído a *não*.

> Quando um construtivista diz 'não', ele quer dizer não; ele não quer dizer qualquer outra coisa, estranha a matemática clássica. O construtivista difere do pensador clássico apenas em seu uso de cânones de inferência mais estreitos. [36]

Parece razoável, seguindo Beall e Restall, que se entenda o pluralismo lógico como um pluralismo acerca da *consequência lógica*, e não da interpretação dos conectivos usados em linguagem natural.

No fim do artigo de 1998[37], os autores tratam de algumas objeções a sua posição. A versão conta com uma parte especialmente interessante, em uma *crítica* que

---

constructed to one which cannot, as we have seen. So, the inference, despite being classically valid, can be rejected on the grounds of nonconstructivity." (tradução nossa)

[35] CARNIELLI, W; RODRIGUES, A. An epistemic approach to paraconsistency: a logic of evidence and truth. No prelo (2016).

[36] BEALL, J.C.; RESTALL, G. Logical Pluralism. In: *Australasian Journal of Philosophy*, 78, 2000, p. 487 "When a constructivist says 'not', she means not; she does not mean something else, foreign to the classical mathematician. The constructivist differs from the classical reasoner only in her use of tighter canons of inference" (tradução nossa)

[37] BEALL, J.C.; RESTALL, G. Logical Pluralism. Versão de 1998. Página 19

proporia substituir *verdade* em V por *assertibility*. Os autores consideram esta proposta plausível e afirmam que 'verdade' não precisa estar envolvida.

Isso nos inspira a explorar outra possibilidade: a de substituir "É verdadeiro" por "Recebe semântico 1" (ou V, ou o valor designado), uma vez que o que parece estar em jogo em algumas lógicas não-clássicas não é exatamente o conceito de verdade.

1.5 – Uma forma diferente de pluralismo

Para tratar do problema do pluralismo lógico, pode ser frutífero voltar nossos olhos para a questão da natureza da lógica. Esta é uma questão fundamental em filosofia da lógica: sobre o que os princípios da lógica são? Popper expõe o problema apresentando três principais pontos de vista sobre a natureza da lógica:

> (A) As regras da lógica são leis do pensamento.
>
> (A1) Elas são leis naturais do pensamento – elas descrevem como nós de fato pensamos; e nós não podemos pensar de outra forma.
>
> (A2) Elas são leis normativas – elas nos dizem como nós devemos pensar
>
> (B) As regras da lógica são as leis mais gerais da natureza – elas são leis descritivas que se aplicam a quaisquer objetos.
>
> (C) As regras da lógica são leis de determinadas linguagens descritivas – do uso de palavras e especialmente de sentenças.[38]

[38] POPPER, K.R. *Conjectures and Refutations*. New York: Harper, 1963. p. 206-207 “(A) The rules of logic are laws of thought. (A1) They are natural laws of thought--they describe how we actually do think; and we cannot think otherwise. (A2) They are normative laws--they tell us how we ought to think. (B) The rules of logic are the most general laws of nature--they are descriptive laws holding for any object

Ou seja, temos os pontos de vista segundo os quais a lógica tem caráter epistêmico (A), sendo descritivo (A1) ou normativo (A2), ontológico (B), ou lingüístico (C).

No plano ontológico, parece implausível que haja mais de uma lógica correta, uma vez que a realidade é uma só. Todavia, embora tenhamos razões para pensar que a lógica clássica tem caráter ontológico, o mesmo pode não ser o caso para outras lógicas.

Caso se considere alguma lógica não-clássica não do ponto de vista ontológico, mas do ponto de vista epistemológico, podemos aceitar um tipo de pluralismo entre elas.

Em nossa leitura de Beall e Restall buscamos preparar o terreno para uma concepção ligeiramente diferente, que parte da ideia de que diferentes lógicas podem preservar diferentes propriedades, como defende o pluralismo de Carnielli e Rodrigues[39].

Dessa forma, a lógica clássica poderia permanecer com seu caráter ontológico e conviver pacificamente com lógicas não-clássicas de natureza epistêmica.

Como citam Beall e Restall, um intuicionista não diria que a lógica clássica parte de verdades para chegar a falsidades, mas que parte de verdades cujas provas estão disponíveis, para verdades cujas provas não são encontradas.

O intuicionista busca um sistema lógico capaz de preservar não apenas a v*erdade*, mas a *disponibilidade de prova.* Analogamente, um lógico paraconsistente pode buscar um sistema que preserve outra coisa: por exemplo, a *disponibilidade de evidência*.[40]

---

whatsoever. (C) The rules of logic are laws of certain descriptive languages--of the use of words and especially of sentences." (tradução nossa)

[39] Ver, por exemplo, CARNIELLI, W; RODRIGUES, A. Paraconsistency and duality: between ontological and epistemological views. In Logica Yearbook 2015. College Publications, 2016.

[40] CARNIELLI, W; RODRIGUES, A. On the philosophy and mathematics of the Logics of Formal Inconsistency. Em: *New Directions in Paraconsistent Logic.* Springer. 2016.

Diante deste cenário, uma forma de pluralismo um pouco diferente da exposta por Beall e Restall pode residir não em uma especificação de *caso* em nosso princípio intuitivo de consequência lógica, mas em uma especificação do que está sendo preservado, isto é, do que significa *receber 1*. Com este propósito apresentamos novamente uma concepção intuitiva de consequência lógica:

(V): uma conclusão A se segue de um conjunto de premissas P se, e somente se, em todo caso em que cada premissa de P recebe 1, A também recebe 1.

Esta formulação é semelhante a que apresentamos anteriormente, seguindo Beall e Restall, e que se encontra em diferentes livros introdutórios de lógica. A diferença reside apenas na substituição de "é verdadeiro" por "recebe 1"

Esta substituição é estratégica: Embora todas as lógicas que tratamos aqui estejam preservando o valor 1, não é adequado dizer que "recebe 1" seja sinônimo de "é verdadeiro" em todas elas.

De fato, entender o valor 1 intuicionista como significando "verdade" se mostra contra-intuitivo. O predicado "verdade" é, geralmente, usado como se referindo a algo que está no mundo. Quando dizemos, por exemplo, que "é verdade que *a terra gira em torno do sol"*, queremos dizer que isto é o que ocorre no mundo, e não que nós sabemos ou provamos isso.

O caso fica ainda mais contra-intuitivo quando se pensa em entidades que não se acredita existirem aparte de nosso conhecimento delas. Para um intuicionista, a matemática só existe enquanto construção mental. O que significa, portanto, dizer que uma proposição da matemática é "verdadeira"? Uma proposição da matemática, para um intuicionista, pode ser verdadeira da mesma forma que "a terra gira em torno do sol" é verdadeira?

Aparentemente, isso seria como dizer que há algo para além do nosso conhecimento que torna uma proposição da matemática verdadeira. Mas isso é justamente o que o intuicionista quer rejeitar.

De fato, intuicionistas não são adeptos da interpretação da lógica intuicionista como dizendo respeito ao predicado verdade. Heyting diz:

> A noção de verdade não faz sentido <…> na matemática intuicionista. <...> Apenas se pode dizer de verdade matemática genuína se houver uma realidade matemática com a qual está relacionada... Para mim, pessoalmente, a suposição de uma realidade abstrata de qualquer tipo parece desprovida de significado.[41]

Em algumas lógicas paraconsistentes isso se mostra ainda mais claro. Por exemplo, em Carnielli e Rodrigues é dito explicitamente que receber o valor 1 significa algo diferente de ‘é verdadeiro’:

v(A) = 1 significa ‘há evidência de que A é verdadeiro’[42]

Tal lógica tem, entretanto, ferramentas para expressar também a noção de *verdade*. Isso se da através de um símbolo, °, que indica que o valor da fórmula que se segue foi estabelecido conclusivamente. Por exemplo °A = 1 significa que o valor de A foi conclusivamente estabelecido. Assim, além de ser capaz de expressar ‘há evidência de que A é verdadeiro’, como vimos acima, a lógica que apresentam também é capaz de expressar que ‘A é verdadeiro’:

---

[41] HEYTING, A. ‘On truth in mathematics’, Verlag van de plechtige viering van het honderdvijftigjarig bestaan der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen met de teksten der bij die gelegenheid gehouden redevoeringen en voorgedrachte, Amsterdam: North-Holland, 1958, pp. 277–279. Apud RAATIKAINEN, P. Conceptions of truth in intuitionism. In: *History and Philosophy of Logic*, volume 25, Number 2, Maio de 2004. "‘the notion of truth makes no sense [. . .] in intuitionistic mathematics", " One can only speak of genuine mathematical truth if there is a mathematical reality to which it is related. . . . to me personally the assumption of an abstract reality of any sort seem meaningless" (tradução nossa do inglês).

[42]CARNIELLI, W; RODRIGUES, A. An epistemic approach to paraconsistency: a logic of evidence and truth. No prelo (2016) p.10 “v(A) = 1 means ‘there is evidence that A is true’”

‘°A $\wedge$ A vale’ significa ‘A é verdadeiro’[43]

Trataremos mais detalhadamente destes dois conjuntos de lógicas nos capítulos posteriores, onde buscaremos oferecer motivações epistêmicas para as lógicas paraconsistentes e para as lógicas paracompletas.

Por conseguinte, a apresentação mais geral de (V), com "recebe 1" em vez de "é verdadeiro", se mostra mais capaz de lidar com diferentes lógicas não-clássicas.

Por exemplo, a respeito da lógica paraconsistente citada acima, caso ficássemos apenas com a abordagem anterior de (V), pareceria, a princípio, que a concepção de conseqüência lógica só se aplicaria para casos em que temos v(°P) = 1 para toda premissa P. Enquanto a apresentação que propomos deixa claro que a definição de conseqüência lógica também vale para v(°P) = 0 para alguma premissa P.

Isto é, nossa definição deixa claro que, além da *verdade*, a *evidência* também pode ser preservada. Este é, afinal, o objetivo da interpretação de Carnielli e Rodrigues para algumas LFIs: um sistema apropriado para fornecer uma relação de conseqüência lógica capaz de preservar um predicado mais fraco que o predicado "verdade", como o predicado "evidência".

Dito de outra forma, pela primeira apresentação de *V*, apresentada por Beall e Restall, parece que teríamos apenas:

(V1) uma conclusão A se segue de um conjunto de premissas Γ se, e somente se, em todo caso em que cada premissa P de Γ é verdadeira (isto é, para todo P $\in \Gamma$, P = 1 e °P = 1), A também é verdadeira (isto é, A = 1 e °A = 1).

Mas seria desejável para tal sistema que:

---

[43]CARNIELLI, W; RODRIGUES, A. An epistemic approach to paraconsistency: a logic of evidence and truth. No prelo (2016) p.17 “’°A $\wedge$ A holds’ means ‘A is true’”

(V1') uma conclusão A se segue de um conjunto de premissas Γ se, e somente se, em todo caso em que cada premissa de P de Γ recebe 1 (mesmo para algum °P = 0), A também recebe 1 (mesmo para °A = 0).

Entender o que significa "receber 1" em diferentes lógicas é entender aquilo que é preservado das premissas para a conclusão. Por possuírem naturezas diferentes, algumas lógicas podem preservar propriedades diferentes.

Nas lógicas que trataremos aqui, buscaremos mostrar, seguindo Carnielli e Rodrigues[44], que a lógica clássica tem caráter ontológico, razão pela qual pretende preservar a *verdade.* As lógicas intuicionista e paraconsistente têm caráter epistemológico, e preservam diferentes propriedades epistemologicamente relevantes, a saber, *a disponibilidade de prova* e a *evidência*, respectivamente.

Dessa forma, o pluralismo se deve a uma pluralidade de coisas que podem ser preservadas. Por isso, entendemos que algumas lógicas podem ser conciliadas por serem capazes de preservar coisas diferentes – não havendo real rivalidade entre elas.

Admitir uma espécie de pluralismo enfraquecido que aceita lógicas não-clássicas por razões epistêmicas não ameaça o realismo clássico, uma vez que estas lógicas não são entendidas como concorrentes da lógica clássica enquanto descrição de estrutura de mundo ou das "leis do ser verdadeiro".

Ou, dito de modo mais geral, a existência de uma ou mais lógicas não-clássicas corretas e justificáveis não coloca em xeque o estatuto ontológico da lógica clássica se estas lógicas se justificarem em um plano outro que o ontológico – isto é, se elas não pretenderem preservar *verdade* em um sentido realista.

[44] Seguindo, entre outros artigos, CARNIELLI, W; RODRIGUES, A. Paraconsistency and duality: between ontological and epistemological views. In Logica Yearbook 2015. College Publications, 2016.

Assim, é possível conciliar o fato de que há diferentes tratamentos da noção de consequência lógica com a visão realista de que a lógica clássica diz algo a respeito da realidade, e não apenas da linguagem ou da nossa forma de conhecer.

É preciso, no entanto, explicar como se justificam algumas lógicas não clássicas, se não ontologicamente. Uma vez que não é possível analisar todas as lógicas existentes, e como para o nosso objetivo basta mostrar que existem outras lógicas corretas para além da lógica clássica que sejam filosoficamente compatíveis com esta, seguiremos a tese de que a lógica intuicionista se justifica epistemologicamente e visa preservar *disponibilidade de prova* e argumentaremos em favor de uma justificativa também epistêmica para a lógica paraconsistente, onde a mesma preservaria *evidência*.

1.6 – A relação entre lógicas paracompletas e paraconsistentes

Estes dois predicados, a *disponibilidade de prova* e a *evidência*, têm certa relação entre si. Enquanto a noção de *prova disponível* é, em certo sentido, mais forte que a de *verdade* (pois pode haver verdades cuja prova não está disponível), a noção de *evidência* é, em certo sentido, mais fraca que a de *verdade* (pois pode haver evidências de algo falso)[45].

Estes predicados, por assim dizer, um para além e outro aquém da *verdade*, levam a necessidade de se abandonar alguns princípios da lógica clássica.

[45] CARNIELLI, W; RODRIGUES, A. On the philosophy and mathematics of the Logics of Formal Inconsistency. Em: *New Directions in Paraconsistent Logic.* Springer. 2016 p.74

Para tratar adequadamente da preservação de disponibilidade de prova, os intuicionistas rejeitam o princípio do terceiro excluído ($A \vee \neg A$). Enquanto os paraconsistentes, para dar conta da preservação de evidência, rejeitam o princípio da explosão ($A \wedge \neg A \vdash B$).

Estes dois princípios, entretanto, revelam uma peculiar relação. Assim como no plano filosófico entendemos as lógicas intuicionistas e paraconsistentes como preservando predicados aquém ou além da *verdade*, há uma correspondência no âmbito técnico, que reside no fato daqueles dois princípios rejeitados serem *duais* entre si.

Definimos, primeiramente, dualidade de conectivos clássicos. Sejam C1 e C2 dois conectivos n-ários quaisquer. C1 é dual de C2 se, e somente se,

$$\neg C1\ (A1, ..., An) \leftrightarrow C2\ (\neg A1, ..., \neg An)$$

Sendo esta equivalência definida na lógica clássica.

De acordo com essa definição, temos que a conjunção é dual da disjunção, pois:

$$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

Temos, também, que os quantificadores universal e existencial são duais, pois:

$$\neg\forall xA \leftrightarrow \exists x\neg A$$

A rigor, formulas duais são fórmulas obtidas trocando o operador lógico pelos duais: $A \vee B$ e $A \wedge B$ são duais. Mas as fórmulas que expressam o terceiro excluído e o princípio da não contradição, $\neg(A \wedge \neg A)$ e $\neg A \vee A$, são vistas como ‘duais’.[46]

[46] Isso ocorre, por exemplo, em N. C. A. da Costa. On the theory of inconsistent formal systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, XV(4):497–510, 1974, onde a lógica paraconsistente C_1 é apresentada baseado em uma ‘dualidade’ entre terceiro excluído e não contradição, e também entre eliminação e introdução da dupla negação.

A definição de *dualidade* também pode ser adaptada para regras de inferência, de forma que o terceiro excluído, visto enquanto regra de inferência, seja *dual* do princípio da explosão. Isto é:

$$\frac{B}{A \vee \neg A}\ (TE) \qquad \text{é dual de} \qquad \frac{A \wedge \neg A}{B}\ (PE)$$

Desta forma, dizemos que estes dois grupos de lógica, as lógicas paracompletas e as lógicas paraconsistentes, surgem pela rejeição de regras de inferência duais.

A relação de dualidade fica ainda mais clara quando trabalhamos em cálculo de sequentes. Vejamos um sistema de cálculo de sequentes para lógica clássica[47].

Seja L uma linguagem para lógica proposicional com os operadores $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, a constante lógica $\perp$, e a negação, $\neg$, definida como $A \rightarrow \perp$. Esta linguagem também conta com sinais de pontuação:), (. E usaremos as letras maiúsculas A, B, C... como variáveis da metalinguagem.

Sejam Γ e Δ conjuntos finitos, vazios ou não-vazios. Nosso único axioma será: $P,\ \Gamma \Rightarrow \Delta, P$.

E nós teremos as seguintes regras de inferência:

$\dfrac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{}_{L \wedge}$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}{}_{R \wedge}$

[47] O sistema apresentado segue NEGRI, S; Jan Von Plato. *Structural proof theory*. Cambridge University Press. 2001. p49

$\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, L\vee$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}\, R\vee$
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, L\rightarrow$	$\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}\, R\rightarrow$
$\dfrac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, L\bot$	

Observe que para este sistema, que é clássico, vale a dupla negação, que pode ser provada a partir das regras acima.

Dupla Negação

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow \bot, A}\,ax}{\Rightarrow \neg A, A}\,R\rightarrow \qquad \dfrac{}{\bot \Rightarrow A}\,L\bot}{\neg\neg A \Rightarrow A}\,L\rightarrow$$

Observe que a dualidade entre a conjunção e a disjunção pode ser intuitivamente visualizada enquanto regras de inferência. A conjunção a esquerda é dual da disjunção a direita, enquanto a disjunção a esquerda é dual da conjunção a direita. O que ocorre entre as regras de inferência duais é que A e B passam da esquerda para a direita (ou da direita para a esquerda), assim como a fórmula A □ B (onde □ = $\wedge$ ou $\vee$), que, além disso, tem seu conectivo trocado pelo conectivo dual (no caso, $\wedge$ por $\vee$, ou $\vee$ por $\wedge$).

De fato, para obter-se a dual de uma regra de inferência, basta trocar o conectivo lógico em questão pelo seu dual, (isto é, A □ B por A $\square^{\mathbf{d}}$ B) e a formula que este conectivo liga (A □ B) passa da esquerda para a direita (ou da direita para a esquerda), assim como as duas fórmulas ligadas (isto é, A e B).

Aplicando-se este método aos princípios do *terceiro excluído* e da *explosão*, enquanto regras de inferência, pode-se observar intuitivamente a dualidade entre eles.

Partindo do princípio da explosão, trocamos a conjunção pelo seu dual, a disjunção, e passamos a fórmula da esquerda para a direita, obtemos o terceiro excluído.

Evidentemente, o caminho inverso também vale: se partirmos do terceiro excluído e trocarmos a disjunção pelo seu conectivo dual, a conjunção, e passarmos a fórmula da direita para a esquerda, obteremos o princípio da explosão.

Agora, a relação de dualidade entre as duas regras de inferência pode ser observada em cálculo de seqüentes:

$\dfrac{\qquad}{\Gamma, A, \neg A \Rightarrow \Delta}$	$\dfrac{\qquad}{\Gamma \Rightarrow A, \neg A, \Delta}$

Fica, assim, intuitivamente observada – por meio do cálculo de seqüentes – a relação de dualidade entre as regras de inferência da explosão e do terceiro excluído. Esta relação representa a correspondente técnica da relação entre lógicas paraconsistentes (que rejeitam o princípio da explosão) e paracompletas (que rejeitam o princípio do terceiro excluído), ao passo que noções aquém e além do predicado verdade – como *evidência* e *disponibilidade de prova* – representam a correspondente filosófica desta relação.

Capítulo 2

2. A Lógica Intuicionista

A lógica intuicionista é uma lógica paracompleta que desde o seu aparecimento engendra muitas discussões filosóficas. Sistematizada, pela primeira vez por Andrei Kolmogorov, em 1925[48], e, mais tarde, por Arend Heyting (1928)[49], a lógica intuicionista surgiu como uma tentativa de fornecer um sistema lógico que represente as ideias da matemática construtivista de L. E. J. Brouwer, professor do próprio Heyting.

A lógica intuicionista passou por diversas formulações até atingir certa consolidação com a interpretação BHK (Brouwer-Heyting-Kolmogorov). Mas mesmo hoje se questiona o quanto a interpretação usual é fiel à matemática brouweriana[50].

Nós não nos ateremos, todavia, a tais discussões. Nosso objetivo neste capítulo é ilustrar uma concepção epistemológica do intuicionismo e mostrar como esta concepção se distingue do realismo clássico. Além disso, pretendemos dar evidências de que é razoável entender a noção de consequência lógica intuicionista como objetivando a preservação da disponibilidade de prova, e não como preservando verdade, tal qual a lógica clássica.

---

[48] KOLMOGOROV, A., 1925, “O principe tertium non datur”, *Matematiceskij Sbornik*, 32: 646–667. English translation in van Heijenoort 1967, pp. 416–437.

[49] HEYTING, A., 1928, [Prize essay on the formalization of intuitionistic logic]. Expanded and revised version published as Heyting 1930, Heyting 1930A, Heyting 1930B.

[50] Para uma discussão acerca do Ex Falso Sequitur Quodlibet ($\perp \rightarrow A$), válido do ponto de vista da lógica intuicionista, na interpretação BHK, mas polêmico em relação a interpretação da obra de Brouwer, ver VAN ATTEN, M. ‘On the hypothetical judgement in the history of intuitionistic logic,’ in *Logic, Methodology, and philosophy of science XIII: Proceedings of the 2007 International Congress in Beijing*, C. Glymour and W. Wang and D. Westerståhl (eds.), London: King's College Publications. 2008.

Para tal, começaremos o capítulo com uma breve exposição da visão de Brouwer, que pode ser considerada uma justificativa ontológica para a lógica intuicionista. Em seguida, exporemos, com base em Heyting e em Kolmogorov, uma justificativa epistêmica para a lógica intuicionista. Por fim, buscaremos situar o debate intuicionista na discussão acerca do pluralismo lógico, onde enfim faremos um breve comentário a respeito do significado dos conectivos lógicos na lógica intuicionista.

2.2 – Brouwer e a justificativa ontológica

Ao contrário do que ocorre no *logicismo*, onde lógicos como Frege e Russell[51] pretendiam utilizar a lógica com propósito de fundamentação da matemática, os lógicos intuicionistas, seguindo a filosofia de Brouwer, veem a lógica apenas como uma parte da própria matemática, e sua formalização tem como objetivo apenas a expressão de construções intuicionisticamente corretas em uma linguagem compreensível para os matemáticos.

> As pessoas tentam, por meio de sons e símbolos, originar em outras pessoas cópias das construções e raciocínios matemáticos que elas mesmas fizeram; pelos mesmos meios, elas tentam ajudar suas próprias memórias. Dessa forma surge a *linguagem matemática*, e seu caso especial, *a linguagem do raciocínio lógico*.[52]

[51] Ver, por exemplo, FREGE, G. Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens, Halle a. S.: Louis Nebert. Translated as Concept Script, a formal language of pure thought modelled upon that of arithmetic, by S. Bauer-Mengelberg. In J. VAN HEIJENOORT (ed.). *From Frege to Gödel:* A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1967.; e RUSSELL, B; WHITEHEAD, A. N. *Principia Mathematica*. [1910-13]. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1968.

[52] BROUWER, *On the Foundations of Mathematics*. In: CW I, p. 73. "People try by means of sounds and symbols to originate in other people copies of mathematical constructions and reasonings which they have made themselves; by the same means they try to aid their own memory. In this way the

De fato, a matemática e a linguagem de matemática são duas coisas bem diferentes para Brouwer. Para ele, a linguagem apenas é capaz de descrever a atividade matemática após ela ter sido executada, e tem apenas um papel pragmático de auxílio da memória e da comunicação.

Brouwer acreditava que a matemática consiste justamente em uma criação mental desprovida de linguagem, que se originaria da noção a priori de tempo.

Assim, através da observação da passagem do tempo, nossa mente perceberia um primeiro momento desencadeando em um segundo. Da abstração de todo o conteúdo desses dois momentos, se encontra a forma do número dois – como um substrato comum a tudo que é "dois". Esta – acredita Brouwer – é a intuição básica da matemática, que da origem aos números naturais.

> Separando completamente a matemática da linguagem matemática e, portanto, do fenômeno da linguagem descrita pela lógica teórica, reconhecendo que a matemática intuicionista é essencialmente uma atividade sem linguagem da mente, tendo sua origem na percepção de um movimento do tempo. Esta percepção de um movimento do tempo pode ser descrita como o despedaçar de um momento da vida em duas coisas distintas, uma dando lugar à outra, mas mantida na memória. Se a duozidade então gerada for despida de toda a qualidade, ela se transforma na forma vazia do substrato comum de todas as duozidades. E é este substrato comum, esta forma vazia, que é a intuição básica da matemática.[53]

---

mathematical language comes into being, and as its special case the *language of logical reasoning." (tradução nossa)*

[53] BROUWER, L.E.J. *Brouwer's Cambridge lectures on intuitionism*, D. van Dalen (ed.), Cambridge: Cambridge University Press, Cambridge. 1981. Apud IEMHOFF, ROSALIE. "Intuitionism in the Philosophy of Mathematics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.), disponível em: <https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/intuitionism/>. "Completely separating mathematics from mathematical language and hence from the phenomena of language described by theoretical logic, recognizing that intuitionistic mathematics is an essentially languageless activity of the mind having its origin in the perception of a move of time. This perception of a move of time may be described as the falling apart of a life moment into two distinct things, one of

Assim, Brouwer concebe a matemática de forma independente a sua linguagem – devendo sua existência apenas à criação mental por parte de uma mente livre que percebe o movimento do tempo. Por isso, a lógica aparece como uma metamatemática, que estuda os padrões do pensamento matemático.

Desta forma, a matemática de Brouwer era independente da linguagem e da realidade fora da mente: toda a verdade matemática, para ele, dependia de uma prova construída na mente. Todo objeto matemático, e quaisquer propriedades que este objeto pudesse ter, dependia da construção mental daquele objeto.

> Verdade existe apenas na realidade, isto é, nas experiências presentes e passadas da consciência (...) experiências esperadas e experiências atribuídas a outros são verdadeiras apenas enquanto antecipações e hipóteses; em seus conteúdos não há verdade.[54]

Uma vez que se entenda a verdade matemática desta maneira, a rejeição do terceiro excluído é imediata: nós não temos, para qualquer proposição *p*, uma construção em nossa mente de *p* ou de $\neg p$. Logo, $(p \vee \neg p)$ não pode ser um teorema lógico.

Dito de outra maneira, se nós não temos uma construção de *p*, nem uma de $\neg p$, e não pode haver verdades na matemática para além das nossas construções, então $(p \vee \neg p)$ simplesmente não pode ser verdadeiro em todos os casos. Do contrário, estaríamos assumindo que a verdade de *p* estaria pairando em um terreno outro que o das construções mentais – e isso é justamente o que Brouwer quer evitar.

---

which gives way to the other, but is retained by memory. If the twoity thus born is divested of all quality, it passes into the empty form of the common substratum of all twoities. And it is this common substratum, this empty form, which is the basic intuition of mathematics." (tradução nossa)

[54] BROUWER, L. Consciousness, philosophy and mathematics. Em: Collected works vol. I. (ed. A. Heyting). North-Holland Publishing Company (1975). apud CARNIELLI, W; RODRIGUES, A. Paraconsistency and duality: between ontological and epistemological views. In Logica Yearbook 2015. College Publications, 2016. p. 6 "[T]ruth is only in reality i.e. in the present and past experiences of consciousness (...) expected experiences, and experiences attributed to others are true only as anticipations and hypotheses; in their contents there is no truth." (tradução nossa)

De fato, uma das principais críticas intuicionistas é a do apelo a entidades metafísicas, que estaria pressuposto no terceiro excluído. O princípio do terceiro excluído parece adequando quando pensamos em entidades físicas em situações corriqueiras. Por exemplo, alguém poderia dizer que a afirmação p = "toda estrela tem um planeta que a orbita" é verdadeira ou falsa independente de nosso conhecimento acerca dela. Dessa forma, poderíamos dizer $p \vee \neg p$, isto é, ou é o caso que toda estrela tem um planeta que a orbita, ou é o caso que existe alguma estrela sem nenhum planeta a orbitando. E podemos fazer esta afirmação mesmo que não saibamos qual das duas possibilidades é verdadeira.

Todavia, o mesmo princípio pode ser problemático quando aplicado a objetos mentais – entre eles a matemática intuicionista. Isso ocorre porque podemos dizer que $p \vee \neg p$ vale para o exemplo das estrelas independente de nosso conhecimento acerca delas devido ao fato de existem estrelas reais no mundo real. Assim, ou todas as estrelas (reais, do mundo real) têm planetas a orbitando, ou alguma não tem.

Objetos que criamos em nossa mente, por outro lado, não podem ter características que independem de nosso conhecimento acerca delas, pois é nosso conhecimento que as concede tais características. Assim, aplicar o princípio do terceiro excluído a objetos da matemática parece um comprometimento ontológico com a existência externa de tais objetos: da mesma forma que aplicar a objetos do mundo corriqueiro significa que tais objetos existam independentemente de nossa mente ou de nosso conhecimento acerca deles. Isto é, dizer que uma proposição da matemática é verdadeira independente de nosso conhecimento é o mesmo que dizer que existe algo fora de nós que as torna verdadeira – da mesma forma que estrelas e planetas tornarão verdadeira ou falsa a proposição "toda estrela tem um planeta que a orbita".

O exemplo mais citado é o da conjectura de Goldbach (g), segundo a qual todo número par maior que 2 seria a soma de dois primos. Atualmente, não se tem uma prova de (g), nem um contraexemplo para (g).

Desta forma, a aplicação do terceiro excluído a problemas matemáticos não resolvidos, como (g), parece pressupor a existência de verdades matemáticas para além do nosso conhecimento acerca delas - pairando em algum terreno outro que o das provas matemáticas.

Por exemplo, ao dizermos (g $\vee$ $\neg$g) parecemos estar pressupondo que a conjectura de Goldbach já tem sua verdade ou falsidade determinada, mesmo antes de encontrarmos qualquer prova (e mesmo se, por acaso, for impossível de ser provada) – analogamente ao que ocorre com nosso exemplo da estrela, onde a verdade ou falsidade de *p* já estava determinada pelo mundo físico, mesmo antes de encontrarmos um contraexemplo para *p* ou uma prova de *p*.

Se (g $\vee$ $\neg$g) é verdadeira, o que a torna verdadeira, se não há uma prova de *g*, nem uma prova de $\neg g$? Estaria a verdade ou a falsidade da conjectura de Goldbach pré-determinada em algum mundo platônico? E se não estiver, como poderíamos dizer que um dos dois seja verdadeiro antes de prová-lo?

Para o intuicionista, aplicar irrestritamente o terceiro excluído (A $\vee$ $\neg$A) é comprometer-se com a existência de um mundo platônico onde as verdades da matemática já estejam pré-determinadas.

O caso é especialmente problemático se considerarmos a possibilidade de haver problemas insolúveis na matemática – o que, para o matemático clássico, é um fato. Suponha, portanto, uma proposição *i* acerca da matemática que seja insolúvel. Neste caso, estaríamos autorizados a dizer que ou *i* ou $\neg i$ é verdadeiro? Ora, mas nessa hipótese, nenhum dos dois nunca seria provado. Como poderia um problema insolúvel da matemática ser verdadeiro ou falso? De fato, isso não parece ser possível, exceto se apelarmos para um mundo platônico.

Para fugir da interferência de teses metafísicas como essa na matemática, Brouwer acaba por ser comprometer com uma outra metafísica da matemática: com a tese de que não existem verdades transcendentes da matemática. Por isso, Brouwer identifica *verdade* e *prova* no contexto matemático: uma proposição da matemática é dita verdadeira se e somente se for provada.

Não é surpresa, portanto, a recusa do terceiro excluído: se uma proposição da matemática só é verdadeira se for provada, não podemos dizer que existam verdades que independem de nosso conhecimento, como em nosso exemplo.

Todavia, isso ainda é tratar a lógica intuicionista como preservação de verdade, assim como a lógica clássica. A única diferença é que verdade aqui, no contexto da matemática construtivista, se identifica com prova. De acordo com essa perspectiva, a lógica intuicionista e a lógica clássica – ao menos no que diz respeito à matemática – não podem ser conciliadas, uma vez que ambas são tratamentos da preservação de verdade propriamente dita. Se a verdade na matemática for entendida ao modo brouweriano, a lógica clássica estaria simplesmente incorreta (ao menos no que diz respeito a matemática).

Entretanto, mesmo uma lógica baseada numa perspectiva antirrealista acerca da matemática – onde verdades da matemática não podem existir fora de nossa mente – ainda reserva um caráter epistêmico: pois não havendo *verdades* matemáticas para além de nosso conhecimento, precisamos proceder de acordo com o que se *sabe*, isto é, precisa-se proceder epistemicamente.

Desta forma, pode-se dizer que mesmo a matemática de Brouwer está preservando disponibilidade de prova. Ainda assim, a motivação é ontológica: é a crença em uma ontologia da matemática – a de que os objetos da matemática são construções em nossa mente – que justifica a rejeição do terceiro excluído por Brouwer.

Além disso, caso se identifique *prova* e *verdade*, a lógica intuicionista será um tratamento de preservação de *verdade* – mesmo que *verdade* compreendida de uma forma específica. E se a lógica intuicionista for um tratamento das condições de verdade, ela também terá algum caráter ontológico, assim como ocorre com a lógica clássica.

E se para preservar *verdade* na matemática precisamos de uma lógica intuicionista, uma abordagem pluralista se torna um pouco mais problemática: alguém poderia dizer que a lógica intuicionista que é a lógica correta por excelência, uma vez que seus princípios valem tanto para a matemática quanto para o mundo fora dela. Se assim concebermos a lógica intuicionista, teremos a lógica clássica apenas como um caso especial, no qual estamos autorizados a utilizar o terceiro excluído como uma premissa extra de domínios específicos – isto é, teremos uma perspectiva *monista* que tem a lógica intuicionista como a lógica correta, e a clássica como uma extensão restrita a domínios decidíveis (e consistentes).

É natural que outras interpretações da filosofia de Brouwer possam ser realizadas. Mas não é claro como uma concepção da lógica intuicionista como preservando *verdade* em matemática – mesmo que com uma concepção peculiar de verdade – possa ser conciliada, em uma visão pluralista, com uma visão habitual da lógica clássica, na qual a mesma também preserva verdade com a maior generalidade possível.

Todavia, uma vez que Brouwer identifica *verdade* e *prova* em matemática, abre margem para abandonarmos de vez o predicado *verdade* na lógica intuicionista e a tratarmos como um sistema de preservação de disponibilidade de prova. Isso vai ao encontro das interpretações de Heyting e Kolmogorov, que veremos a seguir.

2.3 – Heyting e a justificativa epistêmica

Heyting tem uma das interpretações mais influentes da lógica intuicionista, com uma contribuição inestimável para o que veio a ser a interpretação BHK (Brouwer-Heyting-Kolmogorov).

Aluno de Brouwer, Heyting buscou dar significado aos conectivos intuicionistas, dando assim uma definição informal de prova intuicionista[55], na qual:

- $\perp$ não pode ser provado
- Uma prova de $A \wedge B$ consiste em uma prova de A e em uma prova de B.
- Uma prova de $A \vee B$ consiste em uma prova de A ou uma prova de B
- Uma prova de $A \rightarrow B$ é uma construção que transforma qualquer prova de A em uma prova de B.
- Uma prova de $\exists xA(x)$ é dada apresentando-se um elemento *d* do domínio e uma prova de *A(d)*.
- Uma prova de $\forall xA(x)$ é uma construção que transforma qualquer prova de que *d* pertence ao domínio em uma prova de *A(d)*.[56]

[55] Lembramos que a interpretação de Heyting não pode ser considerada uma definição formal porque não define o que é uma construção. IEMHOFF, ROSALIE. "Intuitionism in the Philosophy of Mathematics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.), disponível em: <https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/intuitionism/>.

Além disso, a negação, $\neg A$, é definida como $A \to \bot$. Isto é, se prova uma negação de uma fórmula *A* mostrando que uma construção de *A* é impossível – que é o mesmo que dizer que uma construção de *A* implicaria no *falso*, ou no absurdo ($\bot$).

Dessa forma, o princípio do terceiro excluído não pode ser intuicionisticamente válido: pois não é o caso que para qualquer proposição *A* tenhamos uma prova de *A* ou uma prova de que *A* implique no absurdo.

É evidente que uma vez provada uma proposição *A* ou uma proposição $\neg A$, a proposição ($A \vee \neg A$) terá sido provada para este caso. Mas não podemos garantir que estas provas sempre serão possíveis de serem encontradas: pode haver problemas insolúveis na matemática. Assim, aceitar o terceiro excluído seria se comprometer com a existência de verdades matemáticas antes das provas serem encontradas – seria comprometer-se com verdades transcendentes.

Todavia, embora seja clara a crítica intuicionista ao recurso a verdades transcendentes, alguns intuicionistas, como Heyting, defendiam que o intuicionismo também não precisa se comprometer com a hipótese contrária: com a afirmação de que não há verdades transcendentes na matemática.

Heyting argumentava, por outro lado, que a crença em tais entidades não poderia entrar nas provas matemáticas - razão pela qual advogava a favor de uma matemática construtivista, como a de Brouwer, cuja lógica subjacente é a lógica intuicionista.

[56] IEMHOFF, ROSALIE. "Intuitionism in the Philosophy of Mathematics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.), disponível em: <https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/intuitionism/>. "* $\bot$ is not provable. * A proof of $A \wedge B$ consists of a proof of *A* and a proof of *B*. * A proof of $A \vee B$ consists of a proof of *A* or a proof of *B*. * A proof of $A \rightarrow B$ is a construction which transforms any proof of *A* into a proof of *B*. * A proof of $\exists x A(x)$ is given by presenting an element *d* of the domain and a proof of $A(d)$. * A proof of $\forall x A(x)$ is a construction which transforms every proof that *d* belongs to the domain into a proof of $A(d)$." (tradução nossa)

> Aqui, então, está um importante resultado da crítica intuicionista: *A ideia de uma existência de entidades matemáticas fora da nossa mente não deve adentrar às provas.* Eu acredito que mesmo realistas, enquanto continuam a acreditar na existência transcendente [*transcendante]* de entidades matemáticas, devem reconhecer a importância da questão de saber como a matemática pode ser construída sem o uso desta ideia. [57]

Neste parágrafo, Heyting insiste na utilidade da lógica intuicionista enquanto ferramenta para compreensão de como seria a matemática sem o apelo a existência de entidades matemáticas transcendentes, mesmo para quem de fato creia na existência de tais entidades.

A concepção da matemática enquanto independente de questões filosóficas permeia diversas obras do autor. Em *intuitionistic views on the nature of mathematics*, por exemplo, Heyting diz:

> O intuicionismo não é um sistema filosófico da mesma forma que o realismo, o idealismo ou o existencialismo. A única tese filosófica da matemática intuicionista é a de que não é necessária nenhuma filosofia para entender a matemática. Ao contrário, toda filosofia é conceitualmente muito mais complicada do que a matemática.
> A lógica, no sentido usual, depende de questões filosóficas[58]

---

[57] HEYTING. Sur la logique intuitionniste (On Intuitionistic Logic). Académie. Royale de Belgique, Bulletin 16, S. 957–963, 1930. Traduzido do francês para o inglês por Amy L. Rocha. "Here, then, is an important result of the intuitionistic critique: *The idea of an existence of mathematical entities outside our minds must not enter into the proofs.* I believe that even the realists, while continuing to believe in the transcendent *[transcendante]* existence of mathematical entities, must recognize the importance of the question of knowing how mathematics can be built up without the use of this idea." (tradução nossa do inglês)

[58] HEYTING, A. "Intuitionistic views on the nature of mathematics", *Synthese*, 27: p. 79. 1974 "Intuitionism is not a philosophical system on the same level with realism, idealism, or existentialism. The only philosophical thesis of mathematical intuitionism is that no philosophy is needed to understand mathematics. On the contrary, every philosophy is conceptually much more complicated than mathematics. Logic in the usual sense does depend upon philosophical questions." (tradução nossa)

Esta ideia, de que a lógica intuicionista pretende tratar de provas matemáticas sem compromissos ontológicos, vai ao encontro de nossa interpretação, segundo a qual o que está em jogo na relação de consequência lógica intuicionista não é a preservação de verdade, mas a preservação da disponibilidade de prova.

A concepção de que a lógica intuicionista é especialmente adequada para tratar da matemática enquanto construção mental, não tendo, portanto, caráter estritamente ontológico (como a lógica clássica), também é algo presente em diversas obras de Heyting. Por exemplo, logo no começo de *Intuitionism: an Introduction*, Heyting escreve:

> (clássico) Eu nunca entendi por que a lógica deveria ser confiável em todos os outros lugares, mas não em matemática.
> (int) Nós discutimos este assunto antes. A idéia de que para a descrição de alguns tipos de objetos outra lógica pode ser mais adequada que a costumeira já foi discutida outras vezes. Mas foi Brouwer quem primeiro descobriu um objeto que realmente requer um diferente tipo de lógica, a saber, a construção mental matemática [L. E. J. Brouwer 1908]. A razão é que em matemática, desde o início, nós lidamos com o infinito, enquanto que a lógica ordinária é feita para raciocinar acerca de coleções finitas.[59]

Neste diálogo, o lógico clássico questiona a rejeição do emprego da lógica clássica justamente na matemática - dando a entender que o intuicionista concordaria em seu emprego na vida comum. A isso, o intuicionista responde que a lógica ordinária

[59] HEYTING, A.. *Intuitionism: an Introduction*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1956 p.1. "(class) I never understood why logic should be reliable everywhere else, but not in mathematics. (Int) We have spoken about that subject before. The idea that for the description of some kinds of objects another logic may be more adequate than the customary one has sometimes been discussed. But it was Brouwer who first discovered an object which actually requires a different form of logic, namely the mental mathematical construction [L. E. J. Brouwer 1908]. The reason is that in mathematics from the very beginning we deal with the infinite, whereas ordinary logic is made for reasoning about finite collections." (tradução nossa)

(clássica) é adequada para tratamento de coleções finitas, mas não para o tratamento de coleções infinitas, como as da matemática.

Mais interessante que a relação entre finito e infinito, entretanto, é o destaque para um tipo específico de objeto ao qual a lógica clássica não poderia se aplicar: a construção mental matemática.

De fato, o emprego do terceiro excluído a construções mentais - enquanto tais - não faz muito sentido. Como dissemos, o emprego do terceiro excluído parece pressupor a realidade do objeto a que se refere. Como poderíamos dizer que uma construção mental existe independentemente de nosso conhecimento acerca dela? Como poderia haver uma construção mental que, justamente, não foi construída em alguma mente, ou que foi construída em nossa mente sem que soubéssemos?

Pode-se, é claro, julgar a utilidade de se ater a uma matemática que consista apenas em construções mentais. Todavia, parece bastante plausível que uma tal matemática precisaria rejeitar o princípio do terceiro excluído.

Do contrário, estaríamos dizendo que para qualquer proposição p, teríamos em nossa mente uma construção de p ou uma construção de $\neg p$. Isto, claramente, não é o caso.

Desta forma, o intuicionismo se justifica pelo menos enquanto uma elucidação de como seria uma matemática sem apelo a verdades transcendentes, e de como a relação de consequência lógica teria que ser outra, diferente da clássica, capaz de preservar não apenas a verdade, mas a disponibilidade de prova.

Sendo assim, uma asserção p não pode significar a mesma coisa para o intuicionista que para o clássico.

Em Sur la logique intuitionniste (1930C) (Sobre a lógica intuicionista), Heyting afirma que uma proposição p expressa um problema ou uma expectativa. Em Die intuitionistisch e Grundlegung der Mathematik (1931) (as fundações intuicionistas da matemática), afirma que expressa uma *intenção*[60]. De uma forma ou de outra, Heyting entendia que o significado de uma asserção *p* para o intuicionista era diferente daquele para o clássico. Enquanto para o clássico *p* significava, em um sentido transcendente, "*p é verdadeiro*", para o intuicionista significava "*p* é conhecidamente provável/construtível".

> Uma proposição *p* como, por exemplo, "A constante de Euler é racional," expressa um problema, ou ainda melhor, uma expectativa (de encontrar dois inteiros *a* e *b* tais que c = a/b), que pode ser realizada [réalisée] ou desapontada [déçue]. A asserção de *p* tem, na lógica clássica, o significado "*p* é verdadeiro"; esta "asserção clássica" designa um fato transcendente da natureza que não se conforma às idéias intuicionistas. Se, por exemplo, um realista dissesse: "É verdade que C é racional," ele poderia apenas dizer: "Existem dois inteiros *a* e *b* tais que C = a/b"; vê-se que a asserção clássica implica na ideia de existência transcendente. <...>
>
> Para satisfazer as demandas intuicionistas, a asserção deve ser a observação de um fato empírico, isto é, a realização da expectativa expressada pela proposição *p*. Aqui, então, está a asserção Brouweriana de *p*: Sabe-se como provar *p*. Nós denotaremos isso por ⊢p. [61]

---

[60] TROELSTRA, A., 1990, “On the early history of intuitionistic logic”, in *Mathematical Logic*, P. Petkov, ed., New York: Plenum Press, 1990. p. 7

[61] HEYTING, A. “Sur la logique intuitionniste”, *Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences*, 16: 957–963, 1930. English translation in Mancosu 1998. pp. 307 "A proposition *p* like, for example, "Euler's constant is rational," expresses a problem, or better yet, a certain expectation (that of finding two integers *a* and *b* such that *C = a/b),* which can be fulfilled *[réalisée]* or disappointed *[déçue]*. The *assertion* of *p* has, in classical logic, the meaning *"p* is true"; this "classical assertion" designates a transcendent fact of nature that does not conform with the intuitionistic ideas. If, for example, a realist were to say: "It is true that *C* is rational," he could just as well say: "There exist two integers *a* and *b* such that *C = a/b";* one sees that the classical assertion implies the idea of transcendent existence. <…> To satisfy the intuitionistic demands, the assertion must be the observation of an empirical fact, that is, of the realization of the expectation expressed by the proposition *p.* Here, then, is the *Brouwerian assertion* of *p: It is known how to prove p.* We will denote this by ⊢ p." (tradução nossa do inglês)

Isso vai ao encontro do que pretendemos defender, a saber, que "$p = 1$" signifique, para o intuicionista, que há uma prova de *p* disponível. O que é o mesmo que dizer que *p* pode ser provada e nós sabemos como fazê-lo.

Enquanto para o lógico clássico o que está em jogo é a verdade de *p*, para o intuicionista o que está em jogo é a *prova* de *p*.

Observe, entretanto, que a prova não precisa ser levada a cabo. Isso porque, por exemplo, a prova de *p* pode ser grande demais para ser executada por qualquer pessoa ou computador. Se, entretanto, houver uma prova de que *p* pode ser provada, e possamos fornecer um algoritmo que descreva como construir *p*, nós já concederemos valor 1 para *p*.

Isto não é análogo a dizer apenas que *p* precisa ser, a princípio, demonstrável. É preciso que se tenha a prova de que *p* é construtível, e o algoritmo que diga como a construir.

Nos modelos de Kripke para a lógica intuicionista atribuímos o valor semântico 0 para uma proposição *p* que ainda não foi provada, mesmo que no futuro ela venha a ser provada e a receber 1. Como esta proposição foi provada em um tempo t2, podemos dizer que ela já era construtível em t1. Mas não tínhamos nenhuma prova disso em t1, por isso esta proposição recebia 0 em t1 e passou a receber 1 em t2.

Seria pouco plausível dizer que *p* era falso em t1, e passou a ser verdadeiro em t2. Mas, de fato, $p = 0$ em t1. Interpretar o valor 1 intuicionista como significando 'verdadeiro' e o valor 0 como significando 'falso' é contra-intuitivo e não vai de acordo com muitos dos propósitos intuicionistas.

Dizer que algo era falso até ser provado é algo muito pouco plausível intuitivamente. Por outro lado, dizer que não havia uma prova disponível de *A* até que *A* fosse provado, é algo tão plausível que soa como um truísmo.

Suponha agora que já houvesse uma prova não-construtiva de *p*. Embora o intuicionista não reconheça isso como uma prova de *p* - e continue cético em relação a possibilidade de se construir *p* - ele já saberá que $\neg$p não é construtível. Neste caso, fica claro como o intuicionista não teria razão nenhuma para dizer que *p* é *falso*. Entretanto, continua atribuindo 0 a *p*, isto é, continua dizendo que não há uma prova disponível de *p* (e, até onde ele sabia naquele estágio, poderia nunca haver, isto é, poderia ser um problema insolúvel).

O que a lógica intuicionista nos fornece não são as condições de verdade, como a lógica clássica o faz - mas as condições de prova - ou as condições de disponibilidade de prova.

2.3 – Além de Heyting, Kolmogorov

Embora a formalização de Arend Heyting tenha tido maior repercussão, foi Andrei Kolmogorov quem primeiro publicou uma formalização de um fragmento da lógica intuicionista, em 1925. Por ter sido escrito em Russo, o artigo teve pouca repercussão[62].

Kolmogorov também tinha uma interpretação fortemente epistêmica da lógica intuicionista. Ele argumentava que a lógica intuicionista tinha como objeto não proposições no sentido clássico, que são verdadeiras ou falsas independentemente de nosso conhecimento delas, mas seu objeto consistia em *problemas*.

[62] TROELSTRA, A., 1990, “On the early history of intuitionistic logic”, in *Mathematical Logic*, P. Petkov, ed., New York: Plenum Press, 1990. p. 3

No artigo de 1932[63], Kolmogorov não da uma definição de *problema*. Em vez disso, fornece alguns exemplos, como "Provar a falsidade do Teorema de Fermat". Em seu último exemplo, o autor coloca um problema impossível: o de, dada uma expressão racional de π, encontrar uma expressão racional para *e*. Como isso é impossível, o problema é dito *sem conteúdo*, e a prova de que ele é sem conteúdo será considerada a sua solução.

Tendo exemplificado a noção de *problema*, Kolmogorov fornece uma interpretação da lógica intuicionista e de seus conectivos em termos de *problemas*.

> Se *a* e *b* são dois problemas, então a $\wedge$ B designa o problema "resolver ambos problemas, *a* e *b*", enquanto $a \vee b$ designa o problema "resolver ao menos um dos problemas *a* e *b*". Além disso, $a \supset b$ é o problema "resolver *b*, supondo que a solução de *a* é dada" ou, equivalentemente, "reduzir a solução de *b* a solução de *a*".[64]

Além disso, a negação, definida em termos de (a $\rightarrow \perp$), designaria o problema "obter uma contradição, supondo como dada uma solução de *a*.". Por fim, (x)a(x) designaria o problema "obter um método geral para a solução de a(x) para todo valor de x."[65]

Dessa forma, toda fórmula da lógica intuicionista designaria um problema.

Tomando agora a interpretação de Kolmogorov, analisemos novamente a conjectura de Goldbach (g), segundo a qual todo número par maior ou igual a 2 é a soma de dois primos. (g) receberia 1, portanto, se encontrássemos a prova de que todo

[63] KOLMOGOROV, A. “Zur Deutung der intuitionistischen Logik”, *Mathematische Zeitschrift*, 35: 58–65, 1932. English translation in Mancosu 1998. p 329
[64] KOLMOGOROV, A. “Zur Deutung der intuitionistischen Logik”, *Mathematische Zeitschrift*, 35: 58–65, 1932. English translation in Mancosu 1998. p 329 "If *a* and *b* are two problems, then $a \wedge b$ designates the problem “to solve both problems *a* and *b*”, while $a \vee b$ designates the problem “to solve at least one of the problems *a* and *b*”. Furthermore, $a \supset b$ is the problem “to solve *b* provided that the solution for *a* is given” or, equivalently, “to reduce the solution of *b* to the solution of *a*”" (tradução nossa do inglês).
[65] KOLMOGOROV, A. “Zur Deutung der intuitionistischen Logik”, *Mathematische Zeitschrift*, 35: 58–65, 1932. English translation in Mancosu 1998. p 329

número par maior ou igual a 2 é a soma de dois primos. (¬g) receberia 1, por outro lado, se encontrássemos uma contradição a partir da hipótese de que *g* é o caso. No momento, não temos nem uma solução de (g), nem uma contradição a partir da hipótese (g). Fica claro, portanto, que (g ∨ ¬g) não vale.

Por isso, Kolmogorov argumenta que o problema (p ∨ ¬p) não pode adentrar na lista dos problemas resolvidos por ninguém, uma vez que não podemos garantir, para qualquer problema *p*, que tenhamos uma solução de *p* ou uma derivação de uma contradição a partir de *p*.

> ⊢ .a ∨ ¬a (1) [...]
>
> Em nossa interpretação de problemas, a fórmula (1) se lê como se segue: fornecer um método geral que permita, para cada problema *a*, ou encontrar a solução de *a*, ou inferir uma contradição da existência de uma solução para *a*! Em particular, se o problema *a* consistir na prova de uma proposição, então se deve possuir um método geral que permita ou provar ou reduzir a uma contradição qualquer proposição. Se nosso leitor não se considera onisciente, ele provavelmente concluirá que a fórmula (1) não pode ser encontrada na lista de problemas resolvidos por ele.[66]

Pela interpretação de Kolmogorov, fica claro que não é a 'verdade' que está em jogo, mas os 'problemas' e suas soluções. Partindo de sua interpretação, podemos dizer que um argumento intuicionisticamente válido é aquele não vai de problemas cuja solução está disponível para problemas cuja solução não está.

[66] KOLMOGOROV, A. “Zur Deutung der intuitionistischen Logik”, *Mathematische Zeitschrift*, 35: 58–65, 1932. English translation in Mancosu 1998, pp. 331, 332. " In our problem interpretation the formula (1) reads as follows: to give a general method that allows, for every problem *a*, either to find a solution for *a*, or to infer a contradiction from the existence of a solution for *a!*
In particular, if the problem *a* consists in the proof of a proposition, then one must possess a general method either to prove or to reduce to a contradiction any proposition. If our reader does not consider himself to be omniscient, he will probably determine that the formula (1) cannot be found on the list of problems solved by him" (tradução nossa do inglês)

Um exemplo de raciocínio deste tipo - onde não há preservação de disponibilidade de prova, embora haja preservação de verdade - é a prova não-construtiva de que *existem dois números irracionais p e q tal que p^q é racional*.

Para tal, partimos de (√‾2)^(√‾2) e nos perguntamos se este número é ou não racional. Como o princípio do terceiro excluído vale para o lógico clássico, temos apenas duas alternativas: a) (√‾2)^(√‾2) é racional. b) (√‾2)^(√‾2) não é racional.

Mas se a hipótese a) estiver correta, então façamos p = q = √‾2. Temos, portanto, dois números irracionais *p* e *q* tal que *p^q é racional.*

Se, por outro lado, a hipótese b) estiver correta, então façamos p = (√‾2)^ (√‾2) e q = (√‾2). Ora, então p^q = ((√‾2)^ (√‾2)) ^(√‾2) = 4, que é um número racional. Novamente, temos dois números irracionais *p* e *q* tal que *p^q é racional*.

Como, pelo terceiro excluído, essas são as únicas duas alternativas, está provado que existem dois números irracionais *p* e *q* tal que *p^q é racional*. Mesmo que não saibamos quais são estes dois números.

Supondo um realismo acerca das entidades matemáticas, nós provamos, de fato, que *é verdade* que existem dois números racionais *p* e *q* tal que p^q é racional. Mas não mostramos quais são estes números. Nós descobrimos que, em algum lugar, tais números existem. Mas não os *construímos*. Com este tipo de prova, nós não chegamos a conclusões falsas a partir de premissas verdadeiras. Mas chegamos a verdades que não podemos construir.

Este exemplo corrobora nossa interpretação. De fato, parece implausível, ou pelo menos problemático, argumentar que as condições de verdade de (¬¬A) e as condições de verdade de (A) não sejam as mesmas em qualquer mundo possível.

Isto é, parece muito problemático que alguém discorde que (A) seja verdadeiro exatamente nos mesmos mundos possíveis que (¬¬A) é verdadeiro, e que (A) seja falso exatamente nos mesmos mundos possíveis que (¬¬A) é falso. Ou mesmo que alguém acredite que (A) e (¬¬A) não signifiquem a mesma coisa em linguagem natural.

Por outro lado, é bastante plausível a afirmação de que uma construção de (¬¬A) não necessariamente implique em uma construção de (A). De fato, caso se entenda 'construção' da maneira como um intuicionista entende, esta afirmação parece muito pouco polêmica.

Contudo, tanto a interpretação de Heyting de expectativas/intenções, quanto a interpretação de Kolmogorov de cálculo de problemas, parecem tratar da lógica intuicionista com um viés fortemente epistêmico, onde o que está em jogo não é a verdade de uma proposição, mas a disponibilidade da prova desta proposição.

De fato, embora Heyting tenha, a princípio, visto sua interpretação como divergente daquela de Kolmogorov, veio, mais tarde[67], a reconhecer que as duas interpretações são equivalentes: "As interpretações anteriores de Kolmogorov (como cálculo de problemas) e Heyting (como cálculo de intenções de construções) eram substancialmente equivalentes" (HEYTING, 1958)[68].

Esta concepção, acreditamos, pode ser conciliada com a lógica clássica por tratar de algo diferente - por preservar uma propriedade diferente. Assim, embora se reconheça a rivalidade existente entre a concepção de matemática dos clássicos e dos intuicionistas (em especial, de Brouwer), as lógicas clássica e intuicionista podem conviver em harmonia, uma vez que a primeira pode se justificar ontologicamente (ao

---

[67] HEYTING. Intuitionism in mathematics. In: R. Klibanski (ed.), Philosophy in the mid-century. A survey. La Nuova Italia éditrice, Firenze, 1958c 101-115.

[68] HEYTING. Intuitionism in mathematics. In: R. Klibanski (ed.), Philosophy in the mid-century. A survey. La Nuova Italia éditrice, Firenze, 1958c. APUD TOELSTRA. (1983), Logic in the writings of Brouwer and Heyting, in : V.M. Abrusci, E. Casari and M. Mugnai, eds., Atti del Convegno Internazionale di Storia della Logica. San Gimignano. 4-8 dicembre 1982_(Cooperativa Libraria Universitaria Editrice Bologna, Bologna), p. 200. "The older interpretations by Kolmogorov (as a calculus of problems) and Heyting (as a calculus of intended constructions) were substantially equivalent." (tradução nossa)

buscar preservar a Verdade), e a segunda, epistemologicamente (ao buscar preservar a disponibilidade de prova).

2.4 – O debate intuicionista e o pluralismo lógico

Como lembra Raatikainen, a lógica intuicionista, ao menos para Heyting (e, acreditamos, também para Kolmogorov), trata de problemas completamente diferentes dos da lógica clássica.

> Para Heyting (ao menos nos anos 1950s), entretanto, as lógicas intuicionista e clássica não entrem exatamente em conflito, pois elas se concernem, de acordo com ele, a problemas totalmente diferentes; ele chama a primeira de lógica do conhecimento e a última de lógica do ser, isto é, a primeira expressa, em seu ponto de vista, o que é conhecido como verdadeiro, enquanto a última o que é verdadeiro.[69]

Isso é análogo a dizer que a lógica clássica tem caráter ontológico e a lógica intuicionista tem caráter epistemológico. Ou, dito de uma outra maneira, que a lógica clássica - como disse Frege - trata das 'leis do ser verdadeiro', enquanto a lógica intuicionista trata das 'leis' do que pode ser provado ou construído.

Que tais leis tenham de ser diferentes não é nada extraordinário. Para além das discussões de como se deve fazer matemática - se com ou sem apelo a entidades transcendentes - fica claro que não se pode usar as 'leis do ser verdadeiro' para preservar

---

[69] RAATIKAINEN, P. Conceptions of truth in intuitionism. In: *History and Philosophy of Logic*, volume 25, Number 2, Maio de 2004. p. 135. "For Heyting (at least in the 1950s), however, intuitionistic and classical logic do not as such conflict, for they concern, according to him, wholly different issues; he called the former the logic of knowledge and the latter the logic of being, i.e. the former express, in his view, what is known as true, whereas the latter what is true (Heyting 1956a, 1958b)." (tradução nossa)

disponibilidade de prova, pois inferências clássicas podem nos levar de verdades cujas provas estão disponíveis para verdades cujas provas não possuímos. Tampouco podemos usar as 'leis do que pode ser provado' para preservar toda a verdade. Pois embora as inferências da lógica intuicionistas sejam classicamente válidas e preservem verdade, elas não são capazes de validar todas as inferências que preservam verdade. Isto é, a lógica intuicionista seria *incompleta* se tomada com o objetivo de preservar verdade, deixando de validar inferências que preservam verdade, assim como a lógica clássica seria *incorreta* se tomada com o objetivo de preservar disponibilidade de prova, validando inferências que não preservam esta propriedade.

Em suma, a lógica clássica é inadequada para os propósitos intuicionistas - de preservação de disponibilidade de prova e de dar conta de uma matemática que não apele para a existência de entidades transcendentes. Analogamente, a lógica intuicionista é inadequada para preservar a verdade, uma vez que pode não haver prova disponível de coisas que são, de fato, verdadeiras.

Nem o lógico intuicionista duvida que a lógica clássica seja apropriada para preservar verdade em modelos, nem o lógico clássico duvida que a lógica clássica possa levar de uma verdade que pode ser construída para uma verdade que não o pode.

Se o objetivo de ambos é diferente - se o objetivo é preservar algo diferente - é muito plausível que precisemos de regras de inferência diferentes.

Isso responde a uma crítica comum ao pluralismo, em especial a formas de pluralismo que defendam a necessidade de lógicas diferentes para tratar objetos diferentes.

Priest, por exemplo, argumenta contra este tipo de pluralismo defendendo que *validade* é preservação de verdade em todas as situações, para quaisquer objetos[70] - isto

---

[70] Por exemplo em PRIEST, G. *Doubt truth to be a Liar*. Oxford: Oxford University Press, 2006. p 198

é, que não podemos ter princípios diferentes para objetos diferentes. A lógica, propriamente dita, teria de ser comum a todos os objetos.

De acordo com esta crítica, não poderíamos adotar um pluralismo de lógicas corretas, cada uma apropriada para um tipo de objeto diferente – pois isso feriria o princípio da generalidade da lógica. O que poderíamos ter, de acordo com esta perspectiva, seria uma lógica que consistiria no que há de comum a todas as lógicas bem sucedidas, e todas as diferenças derivariam de casos especiais em que certos objetos permitiriam o uso de premissas extras, analogamente ao uso que o intuicionista faz do terceiro excluído ao raciocinar sobre domínios finitos ou decidíveis. Assim, ao raciocinar sobre um domínio consistente poderíamos recorrer à regra da explosão, e ao raciocinar sobre um domínio completo poderíamos recorrer ao princípio do terceiro excluído. Mas estes princípios e regras seriam apenas premissas ocultas provenientes daqueles domínios. O pluralista, por outro lado, desejaria algo diferente: que se tratasse de lógicas diferentes, com regras de inferência diferentes.

Todavia, embora seja razoável cobrar da lógica uma generalidade em relação aos objetos, o mesmo não pode ser requerido em relação à propriedade de proposições que se pretende preservar - isto é, uma única lógica não precisa ser capaz de preservar quaisquer coisas - como verdade, evidência e disponibilidade de prova - usando um mesmo conjunto de regras.

Se validade pode ser definida não apenas como preservação de verdade, mas como preservação de evidência, ou preservação de disponibilidade de prova, teremos como resultado o surgimento de diferentes abordagens da noção de consequência lógica - todas elas, a princípio, preservando o preceito da generalidade em relação aos objetos.

2.5 – Um breve adendo sobre o significado dos conectivos intuicionistas

Outra crítica de Priest a formas de pluralismo lógico, e que toca o debate intuicionista, diz respeito ao significado dos conectivos. Para ele, diferentes lógicas possuem diferentes significados para os conectivos. Dessa forma, ou apenas uma lógica está correta em relação ao significado atribuído aos conectivos, ou a linguagem natural é ambígua. Mas se a linguagem natural for ambígua, por exemplo, em relação a implicação, não deveríamos ter diferentes lógicas, mas apenas diferentes conectivos expressando cada um dos sentidos da implicação - não teríamos, assim, propriamente um pluralismo.

Priest recorre ao seguinte argumento para defender que a negação na lógica intuicionista tem significado diferente da negação presente na lógica clássica:

> Os conectivos clássicos e intuicionistas têm significados diferentes. (De fato, alguns intuicionistas, como Dummett, até mesmo afirmam que alguns conectivos clássicos não tem significado algum). Deste modo, tomemos a negação como exemplo. As negações clássica e intuicionista têm diferentes condições de verdade. Mas diferenças nas condições de verdade implicam em diferenças no significado. Logo, os dois conectivos possuem diferentes significados.[71]

Este argumento pode ser explicitado da seguinte maneira:

A) As negações da lógica clássica e da lógica intuicionista possuem diferentes condições de verdade.

---

[71] PRIEST, G. *Doubt truth to be a Liar*. Oxford: Oxford University Press, 2006. p 198 “Classical and intuitionist connectives have different meanings. (Indeed, some intuitionists, such as Dummett, even claim that some classical connectives have no meaning at all). Thus, take negation as an example. Classical and intuitionist negations have different truth conditions. But difference in truth conditions entails difference in meaning. Hence, the two connectives have different meanings.” (tradução nossa)

B) diferentes condições de verdade implicam em diferentes significados.

logo,

C) as negações clássica e intuicionista possuem diferentes significados.

De fato, diferentes condições de verdade parecem implicar em diferentes significados. Por exemplo, se tomarmos a disjunção clássica e alterarmos sua tabela de verdade para conceder valor de verdade *falso* quando os dois disjuntos são *verdadeiros*, teremos outro significado de disjunção, que é o que chamamos de disjunção exclusiva. Se o conectivo da negação, por outro lado, passasse a conceder V para V e F para F, nós dificilmente a reconheceríamos como uma negação - o significado dela seria completamente diferente.

Parece plausível, portanto, que o significado dos conectivos seja dado pelas condições de verdade, e, portanto, que a premissa B de Priest esteja correta.

A primeira premissa, entretanto, pode ser problematizada. Os conectivos intuicionistas realmente possuem diferentes condições de verdade que os clássicos?

Neste capítulo, buscamos mostrar a plausibilidade de uma interpretação da lógica intuicionista como uma lógica que não pretende preservar verdade, mas disponibilidade de prova.

Seguindo esta linha interpretativa, não parece plausível dizer que os conectivos da lógica intuicionista tenham outras condições de verdade. É mais razoável dizer que eles simplesmente não estão falando de 'verdade'. Que, como disse Heyting, eles tratam de problemas diferentes.

Quando um intuicionista diz que o *modus ponens* é intuicionisticamente válido, ele não quer dizer que a verdade das premissas implica na verdade da conclusão - mas que a disponibilidade de prova das premissas implica na disponibilidade de prova da conclusão.

Analogamente, quando diz que o terceiro excluído não é um teorema, um intuicionista não pretende dizer que "$A \vee \neg A$" não seja verdadeiro em todos os mundos possíveis - mas apenas que não podemos garantir que, para qualquer sentença A, tenhamos disponível uma prova de A ou uma prova de $\neg A$.

Isto não é dar outras condições de verdade para a negação - é apenas tratar a negação segundo outro ponto de vista, que não o de condições de verdade.

Se o intuicionista reconhece que "$A \vee \neg A$" é verdadeiro em todos os mundos possíveis, então o que ele entende pela palavra "não" - a sua negação - não tem condições de verdade diferentes daquelas que o clássico diz.

O que ocorre é que ele simplesmente está dizendo outra coisa quando diz que "$A \vee \neg A$" não é intuicionisticamente válido, visto que ambos podem concordar que o terceiro excluído 1) é verdadeiro em todos os mundos possíveis e que 2) não é o caso para qualquer sentença A, tenhamos disponível uma prova de A ou uma prova de $\neg A$.

Se ambos podem coerentemente concordar com as duas proposições (1 e 2), eles não estão, de forma alguma, atribuindo condições de verdade diferentes para a mesma negação da linguagem natural. Eles estão apenas preocupados em preservar coisas diferentes (a disponibilidade de prova ou a verdade), e para tal precisam de uma noção de consequência lógica diferente.

A negação intuicionista não tem seu sentido necessariamente diferente da negação clássica. A negação intuicionista não é fruto de uma ambiguidade na linguagem, tampouco se trata de uma negação estranha à clássica e ao uso no cotidiano. Trata-se da mesma negação, em seu sentido habitual, obedecendo a diferentes regras lógicas, a fim de preservar algo diferente do que ocorre na lógica clássica, que é a disponibilidade de prova.

Capítulo 3

3. Sobre a paraconsistência

Este capítulo tem por objetivo oferecer uma interpretação epistêmica para a lógica paraconsistente, para que esta possa ser conciliada com uma visão realista acerca da lógica clássica.

Para isso, começaremos discutindo as motivações para o dialeteísmo de Priest, que consiste em uma justificação ontológica para a lógica paraconsistente. Ressaltaremos algumas fraquezas do dialeteísmo e argumentaremos que esta não é a melhor motivação para uma lógica paraconsistente, além de não ser uma perspectiva conciliável com a lógica clássica em sua interpretação ontológica.

Por isso, partiremos para uma motivação epistêmica para a paraconsistência, a partir da leitura proposta por Carnielli e Rodrigues[72]. Nesta interpretação, a lógica paraconsistente pretende preservar a propriedade *evidência*, razão pela qual pode ser conciliada com a lógica clássica, que visa a *preservação de verdade*.

[72] Entre outros, CARNIELLI, W; RODRIGUES, A. On the philosophy and mathematics of the Logics of Formal Inconsistency. Em: *New Directions in Paraconsistent Logic.* Springer. 2016.

3.2 – Um caso de paraconsistência: O Dialeteísmo de Priest

Uma das mais difundidas formas de *paraconsistência* é o *dialeteísmo*, tese segundo a qual existem *dialetéias*. Uma *dialetéia* é uma sentença A tal que tanto A quanto $\neg A$ são verdadeiras. Dessa forma, o dialeteísmo defende a existência de contradições reais.

A discussão sobre o dialeteísmo é duplamente interessante para nós. Primeiro, porque pretendemos dar conta das lógicas paraconsistentes em nosso pluralismo lógico. Segundo, porque um de seus principais defensores, Graham Priest, que também é um dos fundadores do próprio termo[73], defende uma forma de monismo, isto é, defende que só existe uma lógica correta: a sua lógica dialeteísta, a Logic of Paradox.

Em primeiro lugar, é preciso distinguir o *dialeteísmo* do *trivialismo*, que seria a tese segundo todas as contradições são verdadeiras. O dialeteísta, por outro lado, defende que *algumas* contradições são verdadeiras.

Essa diferença é possível porque uma lógica dialeteísta deve ser paraconsistente, ou seja, deve não possuir o princípio da explosão (segundo o qual de uma contradição se segue qualquer coisa) entre suas regras de inferência. Dessa forma, a existência de uma contradição não implicaria na verdade de todas as fórmulas, e, portanto, no *trivialismo*.

É possível, entretanto, endossar a paraconsistência sem se comprometer com o dialeteísmo. Por exemplo, ao se advogar em favor de uma lógica paraconsistente por motivações epistêmicas, como veremos em detalhe mais tarde.

O dialeteísmo, por outro lado, consiste em uma motivação ontológica para a paraconsistência: dada a existência de contradições reais e a não-trivialidade da

---

[73] Ver, por exemplo, PRIEST, G.; ROUTLEY, R. & NORMAN, J. (eds.). *Paraconsistent Logic:* Essays on the Inconsistent. Philosophia Verlag. 1989

realidade, precisamos de uma lógica paraconsistente para descrever a realidade corretamente. Mas existem contradições reais?

3.2.1 – Os paradoxos de auto-referência

Uma primeira motivação para o dialeteísmo é a existência de paradoxos, como o *paradoxo do mentiroso*. Em sua versão mais simples, o paradoxo do mentiroso pode ser descrito como a sentença que diz dela mesma que ela é falsa:

Esta sentença é falsa.

Ou, para evitar o uso da palavra "esta", poder-se-ia dizer:

(1) A sentença (1) é falsa.

Em qualquer dos casos, se esta sentença é verdadeira, então o que ela diz é o caso. Portanto, ela é falsa. Mas se a sentença for falsa, então o que ela diz (isto é, que ela própria é falsa) é verdade, portanto, ela é verdadeira.

Alguém poderia pensar que o problema está na auto-referência: na possibilidade de uma proposição falar de si mesma. Entretanto, mesmo se eliminarmos a auto-referência direta, o paradoxo parece poder surgir:

(1) A sentença (2) é verdadeira

(2) A sentença (1) é falsa.

Vejamos: se a sentença (1) é verdadeira, então (2) é verdadeira. Mas (2) diz que (1) é falsa, logo, (1) é falsa. Mas se (1) é falsa,então (2) é falsa. Mas (2), que é falsa, diz que (1) é falsa. Então (1) tem que ser verdadeira.

Analogamente, se (2) é verdadeira, então (1) é falsa. Mas (1), que é falsa, diz que (2) é verdadeira. Então (2) tem que ser falsa. Se (2) for falsa, por outro lado, então o que ela diz é falso, o que significa que (1) é verdadeira. Mas se (1) é verdadeira, então (2) é falsa.

Se o problema não pode ser solucionado proibindo a auto-referência, alguém poderia imaginar que o paradoxo derive do princípio da bivalência. Este foi o caminho que seguiu, por exemplo, Kripke[74], que admite que existem *lacunas* entre os valores de verdade, e que algumas sentenças - como o *paradoxo do mentiroso* - estão nessas *lacunas*.

Todavia, formas fortalecidas do paradoxo ressurgem. Por exemplo, tomemos a seguinte proposição:

Esta proposição não é verdadeira.

Seguindo soluções como esta, ainda é o caso que toda sentença é verdadeira ou falsa ou nenhum dos dois. Mas se aquela sentença é verdadeira, então ela não pode ser verdadeira, pois é isso que ela diz. Se a sentença não for verdadeira, qualquer que seja seu valor de verdade, então o que a proposição diz de si mesma é o caso. Logo, a proposição é verdadeira. Dessa forma, o paradoxo ressurge com proposições que devem ser, ao mesmo tempo, verdadeiras e não verdadeiras.

Diante de tamanha dificuldade para resolver paradoxos como este, dialeteístas argumentam que algumas sentenças são realmente contraditórias. Desta forma, o *paradoxo do mentiroso*, por exemplo, seria ao mesmo tempo *verdadeiro* e *falso*, consistindo em um exemplo de *dialetéia*.

Todavia, Priest não restringe seus exemplos de dialetéias a paradoxos semânticos. Casos de vagueza, por exemplo, também entram em jogo.

[74] Ver, por exemplo, KRIPKE, Saul A. Outline of a theory of truth. *Journal of Philosophy* 72 (19):690-716. 1975.

3.2.2 – Os casos de vagueza

Priest argumenta que quando temos um predicado vago, dizer que os casos limítrofes não satisfazem nem o predicado, nem sua negação (por exemplo, dizer que um adolescente não é nem um adulto, nem um não-adulto), não é algo mais intuitivo do que dizer que o caso limítrofe satisfaz ambos: o predicado e sua negação (por exemplo, dizer que um adolescente é e não é um adulto).

Desta forma, o dialeteísmo surgiria como um tratamento alternativo de predicados vagos. Ele argumenta, além disso, que se trata de um tratamento preferível em alguns casos.

Considere, por exemplo, a transição de cor do vermelho para o azul, através do magenta. Priest sugere que seria mais plausível que se considerasse as cores limítrofes entre azul e vermelho como sendo ambas azul e vermelho do que como não sendo nenhum dos dois. [75]

Este exemplo, embora possa ser eficiente em convencer alguém de que algo pode ter duas cores ao mesmo tempo, não parece tão convincente como um exemplo de dialetéia. Isso porque nós dizemos que *vermelho* é *não-azul* justamente porque supomos que não há algo que possa ser vermelho e azul ao mesmo tempo. Se estivermos errados acerca dessa suposição - se um objeto puder ser azul e vermelho ao mesmo tempo - o mais natural é que simplesmente digamos que vermelho e azul não são excludentes, isto é, que não são a negação um do outro. Se há algo que é azul e vermelho ao mesmo tempo, então, trivialmente, concluímos que não é o caso que *todo azul é não-vermelho*. Portanto, não teríamos razão para chamar o azul de não-vermelho, e não teríamos no

[75] PRIEST, G e ROUTLEY, R. *On* Paraconsistency, Research Series in Logic and Metaphysics, Dept. of Philosophy, RSSS, ANU, Australia,1984. pp 169-170

magenta algo que é vermelho e não-vermelho ao mesmo tempo: teríamos apenas algo que é vermelho e azul ao mesmo tempo.

Este exemplo parece dizer mais respeito à natureza das cores do que à existência de dialetéias. Da mesma forma que uma criança, não familiar com a noção de densidade, pode achar que coisas grandes e coisas leves são incompatíveis, que todo grande é não-leve. Ora, ao se deparar com objetos de baixa densidade, a criança entenderia que existem objetos grandes e leves. Isso não representaria, para ela, uma dialetéia: só representaria uma informação nova acerca da natureza dos objetos físicos e de suas relações entre massa e volume. Analogamente, se o exemplo de Priest estiver correto, estaremos aprendendo que as cores Azul e Vermelho não são incompatíveis, assim como os predicados Grande e Leve não o são. Isso, nos parece, é mais plausível do que continuar chamando o vermelho de não-azul quando esta cor pode, de fato, ser também azul.

Entretanto, Priest não vê dialetéias apenas em transições de cores, mas em diversos momentos de transição. Um exemplo disso poderia ser, como narra Priest, da escrita em um papel. Durante um momento, a caneta toca o papel. Em outro momento, a caneta não toca. Mas no contínuo do movimento, deve haver um instante exato em que a caneta deixa o papel. Neste exato instante, ela estaria no papel ou fora dele?

Outro exemplo disso é a transição de dentro para fora de um quarto. Quando alguém está saindo de um quarto, no instante em que ele passa pela porta, ele está dentro ou fora?

Priest formula o problema de um modo geral. Se em um dado instante o sistema está em um estado s_0 (por exemplo, a caneta está no papel), e em outro dado instante o sistema está em um estado s_1 (neste exemplo, a caneta não está no papel), em qual estado o sistema se encontra no instante de transição? Priest enumera quatro possibilidades:

a) está apenas em s_0

b) está apenas em s_1

c) está em nenhum dos dois estados

d) está em ambos estados.

Poder-se-ia argumentar que em casos como este podemos estipular qualquer das opções. Por exemplo, que no instante de transição esteja dentro ou fora do quarto. s_0 ou s_1. O que Priest argumenta, entretanto, é que essa possibilidade de se escolher uma das duas opções não é propriamente uma resposta ao problema, mas justamente salienta o problema: podemos escolher se naquele instante estamos dentro ou fora porque nenhuma dessas opções é mais adequada que a outra.[76]

Portanto, uma vez que estar 'dentro' ou estar 'fora' são alternativas assimétricas e nenhuma tem mais razão de ser que a outra, naquele instante de transição não se pode estar nem dentro nem fora, ou se deve estar em ambos estados ao mesmo tempo.

Entretanto, se não estiver nem dentro, nem fora, então não estará dentro, e não estará não-dentro ($\neg A \wedge \neg\neg A$). O que também é uma solução dialeteísta, assim como estar dentro e fora ao mesmo tempo ($A \wedge \neg A$).

3.2.3 – Uma alternativa ao dialeteísmo

Mesmo diante de tais argumentos, estes exemplos de dialetéias não parecem muito convincentes. Embora os problemas tratados sejam legítimos, a maior parte das

[76] PRIEST, G. *In Contradiction*, Dordrecht: Martinus Nijhoff (1987). 2nd expanded edition, Oxford: Oxford University Press, 2006. p. 161.

pessoas não parece estar muito disposta a ver neles um exemplo de contradição, salvo na ausência de uma alternativa um pouco mais plausível.

Contudo, tanto o paradoxo do mentiroso, quanto casos de vagueza e de transição, admitem também o tratamento por meio de *gaps* ou lacunas de valores de verdade, isto é, o tratamento que apela para a possibilidade de haverem proposições que não são nem verdadeiras, nem falsas.

O principal argumento de Priest contra tais tipos de tratamento é o de que a negação é um operador de contrariedade, ou, dito de outra forma, que o princípio da exaustão é adequado: A não é verdadeiro se, e somente se, $\neg$A é verdadeiro.

Por exemplo, ao tratar dos casos de transição, Priest argumenta que a melhor maneira de atacar seu argumento quanto à existência de um estado de coisas que seja ambos s_0 e s_1 (nossa letra D. No exemplo, seria estar dentro e fora do quarto ao mesmo tempo), seria rejeitar o princípio da exaustão e, assim, possibilitar a nossa opção c (no exemplo, seria não estar nem no quarto, nem fora do quarto).

> A forma mais plausível, ao que me parece, de atacar este argumento pela existência de mudanças do tipo D é rejeitar o princípio da exaustão (se *a* não é verdadeiro, então $\neg$*a* é verdadeiro), e então permitir a possibilidade de mudanças do tipo G [nossa c][77]

Entretanto, mesmo sem entrar nos méritos da discussão entre *truth-value gaps* e *truth-value gluts*, é evidente que o defensor dos *gaps* não reconheceria a negação como um operador de contrariedade, afinal, é justamente o oposto disso que ele defende: isto é, que uma sentença pode não ser nem verdadeira nem falsa.

[77] PRIEST, G. *In Contradiction*, Dordrecht: Martinus Nijhoff (1987). 2nd expanded edition, Oxford: Oxford University Press, 2006. p.161 "The most plausible way, it seems to me, to attack this argument for the existence of type D changes is to reject the exhaustion principle (if a is not true then :a is true), and hence allow for the possibility of type G changes" (tradução nossa)

Naturalmente, se uma sentença pode não ser nem verdadeira nem falsa, o princípio da exaustão não pode valer. Não pode ser o caso que se *A* não é verdadeiro, $\neg A$ é verdadeiro. Afinal, *A* pode não ser nem verdadeiro nem falso, e $\neg A$ também.[78]

Além disso, os exemplos aqui citados, mesmo os metafísicos, parecem surgir a partir da nossa linguagem, e é ainda um problema decidir se correspondem a algo de contraditório no mundo, ou se podemos chamar de 'contradição verdadeira' algo que é fruto da nossa linguagem ou do nosso aparato cognitivo.

Mais do que isso, se uma aparente dialetéia disser respeito apenas ao nosso aparato cognitivo, poderíamos dizer que ela é *verdadeira* no mesmo sentido que dizemos, em uma perspectiva realista da lógica clássica, que uma proposição é verdadeira? Ou estamos querendo dizer algo mais fraco que verdade, como o fato de termos duas informações conflitantes, em vez de duas verdades contraditórias?

De uma forma ou de outra, o dialeteísmo é uma tese metafisicamente forte e encontra muitas resistências. Diante da dificuldade de solução de paradoxos, concluir daí a tese de que eles representam contradições reais no mundo parece ser um passo muito grande.

Diante desses problemas, uma lógica baseada no dialeteísmo não parece ser uma alternativa muito sedutora à lógica clássica. Dizemos "alternativa" porque, de fato, ambas as perspectivas não parecem conciliáveis: dado que a realidade não é trivial, a existência de contradições reais implicaria em que o *ex falso* ($\perp \rightarrow$ A) fosse simplesmente errado.

Por outro lado, o surgimento de contradições é inevitável, e a lógica clássica parece inadequada para tratar delas. Por exemplo, não é viável que apliquemos o

[78] Esta idéia, dita de outra maneira, pode ser encontrada em TAJER, D. *Pluralismo Lógico*. 2010. 141 f. Tesis de Licenciatura de Filosofía. Universidad de Buenos Aires, Facultad de Filosofía y Letras, Buenos Aires. 2010. p. 67

princípio da explosão ao nos depararmos com um banco de dados com informações contraditórias.

Diante de tais circunstâncias, precisamos de uma lógica paraconsistente que não se comprometa com a existência de contradições reais. Tal lógica, acreditamos, pode ser conciliada com a lógica clássica, uma vez pode ser justificada em um âmbito outro que o ontológico, isto é, uma vez que não pretenda se comprometer com como a realidade é. Seu objetivo, em vez disso, é dar um tratamento pragmaticamente razoável para as situações onde aparecem contradições de natureza epistêmica.

3.3 – A lógica das contradições epistêmicas

Um primeiro ponto que precisaremos ter em mente se quisermos encontrar tal lógica é que ela não poderia se comprometer com a noção de *verdade* em sentido forte, como faz a lógica clássica. Do contrário, cairíamos inevitavelmente em uma forma de dialeteísmo: teríamos alguma proposição A, tal que A e $\neg A$ são verdadeiras.

Portanto, a noção que buscamos precisa ser mais fraca que a noção de *verdade*, de tal modo que possamos aceitar proposições A e $\neg A$ sem que isso implique em dizer que ambas são verdadeiras. Uma noção mais fraca que *verdade* e que pode cumprir este papel, como argumentam Carnielli & Rodrigues[79], é a noção de *evidência*.

A noção de *evidência* é mais fraca que a noção de *verdade*: nós podemos ter evidência para algo que mais tarde descobriremos ser falso. E nós podemos, é claro, ter

[79] Ver CARNIELLI, W; RODRIGUES, A. An epistemic approach to paraconsistency: a logic of evidence and truth. Submetido. Ver também: CARNIELLI, W; RODRIGUES, A. On the philosophy and mathematics of the Logics of Formal Inconsistency. Em: *New Directions in Paraconsistent Logic.* Springer. 2016.

evidências contraditórias, e os exemplos são fartos: bancos de dados, informações opostas, depoimentos jurídicos, inconsistências entre teorias físicas bem aceitas.

Em nenhum desses casos, todavia, podemos concluir qualquer proposição B a partir de duas evidências contraditórias representadas por proposições A e $\neg$A. Isto é, a presença de duas evidências contraditórias A e $\neg$A não significa que exista evidência para qualquer proposição B. Portanto, o princípio da explosão não se aplica ao raciocínio acerca de evidências.

Assim, o objetivo central desta lógica paraconsistente será a preservação de evidência, e não preservação de verdade, como na lógica clássica. Por esta razão, as duas podem ser conciliadas em uma forma de pluralismo lógico, uma vez que as duas não têm o mesmo objetivo e não competem entre si.

Nesta perspectiva, recusar o princípio geral da explosão não é negar que ele preserve verdade, é apenas afirmar que tal princípio não é adequado para o objetivo de preservar evidência. Se queremos uma lógica tal que uma inferência esteja correta se, e somente se, ela preserva evidência, então não podemos ter entre nossas regras de inferência o princípio de explosão. Todavia, é importante salientar que não temos aqui, propriamente, um pluralismo de contextos, ao menos não da forma ingênua que expomos no começo, em nossa apresentação acerca de formas de pluralismo.

Isso porque não é o assunto por si só que determina a lógica mais adequada, mas sim a propriedade que se deseja preservar das premissas para a conclusão. Isto é, não é o objeto, como a física ou os bancos de dados, que nos vai impelir a usar uma lógica paraconsistente.

O que tais campos de raciocínios fazem, por outro lado, é nos impelir a raciocinar a partir de outros predicados, que não o de verdade. Pois os âmbitos onde surgem contradições epistêmicas são justamente aqueles em que não temos verdades ou evidências conclusivas, mas simplesmente *evidências*, que podem ser contraditórias ou incompletas.

Dessa forma, não é simplesmente o assunto, o âmbito, que muda, mas o nosso objetivo: deixamos de nos preocupar com preservação de verdade - que é algo que nós não temos acesso - para nos preocupar com preservação de evidência. E não há, realmente, muita polêmica em se afirmar que para preservar evidência é preciso abandonar o princípio da explosão enquanto regra de inferência.

Assim, nossa forma de pluralismo se distingue de um contextualismo ingênuo, embora concordemos que determinados contextos podem nos levar a querer preservar coisas outras que *verdade*. E quando queremos preservar outras coisas, precisamos seguir outras regras. E isso em nada fere a universalidade da lógica: a lógica clássica continua preservando verdade em todos os contextos, e nossa lógica paraconsistente continua preservando evidência em todos os contextos, assim como a lógica intuicionista continua preservando disponibilidade de prova em todos os contextos. Tudo que ocorre é que em alguns contextos nós não queremos preservar todas essas coisas, ou estamos mais interessados em preservar alguma delas.

Voltando a nossa lógica paraconsistente, acreditamos que a noção de evidência pode ser adequada para uma lógica que queira dar conta de contradições nas ciências empíricas. Entendemos "evidência" como "razões para acreditar", ou como a presença de qualquer informação não-conclusiva. Assim, quando dizemos que A *vale*, ou quando concedemos o valor 1 para A, estamos dizendo que temos razões para crer que A é o caso. Naturalmente, em diversos contextos temos razões para crer tanto que A é verdadeiro, quanto que $\neg$A é verdadeiro (entendendo que '$\neg$A' represente 'A é falso').

Um caso de paraconsistência epistêmica nada mais é do que um caso em que existem razões para crer tanto em uma proposição, quanto em sua negação. Isso não significa que ambos (A e ¬A) sejam verdadeiros. Nem que alguém de fato acredite em ambos ao mesmo tempo. Significa apenas que no presente momento temos evidências não conclusivas para os dois.

Se somos realistas, diremos que um e apenas um dos dois é verdadeiro (A ou ¬A). Mas podemos não saber qual, e termos razões para acreditar tanto em um (A), quanto em outro (¬A).

Neste cenário, precisamos continuar sendo capazes de realizar inferências sem *trivializar* o sistema, isto é, sem concluir quaisquer proposições arbitrárias a partir da presença de informações conflitantes A e ¬A. [80]

Todavia, uma vez que a verdade de uma proposição A seja conclusivamente estabelecida, eliminaremos as evidências não-conclusivas contrárias. Assim, nossa lógica paraconsistente se mostra uma lógica do saber em progresso, onde podemos aceitar a presença de proposições contrárias na ausência de uma evidência conclusiva para qualquer uma delas (e na presença de evidência não conclusiva para ambas).

Contudo, embora a noção de evidência seja apropriada para nossos propósitos, que é o de oferecer uma abordagem epistêmica para a paraconsistência, ela indica que nossa lógica será não apenas paraconsistente (como o é, por exemplo, a Lógica do Paradoxo, de Priest), mas também paracompleta (como é, por exemplo, a lógica intuicionista que expusemos aqui). Isso porque além de existirem situações onde possuímos evidências contraditórias (tanto de A, quanto de ¬A), existem cenários em que não possuímos evidência alguma (nem de A, nem de ¬A). Assim, ficamos com as seguintes possibilidades:

[80] Seguindo aqui: CARNIELLI, W; RODRIGUES, A. An epistemic approach to paraconsistency: a logic of evidence and truth. No prelo (2016)

1. Absolutamente nenhuma evidência: Nem A, nem ¬A vale

2. Apenas evidência de que A é verdadeiro: A vale, ¬A não vale.

3. Apenas evidência de que A é falso: ¬A vale. A não vale.

4. Evidências conflitantes: Ambos A e ¬A valem. [81]

3.4 – Um sistema de dedução natural para a lógica da preservação de evidência[82]

3.4.1 – Linguagem utilizada

Vejamos, portanto, um sistema de dedução natural adequado ao objetivo de preservar evidência. Como explicamos, tal sistema será paraconsistente e paracompleto.

Nossa linguagem, L_0, possuirá o seguinte alfabeto:

(i) Letras proposicionais: p_1, p_2, p_3, ...

(ii) Operadores lógicos: $\rightarrow$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$

(iii) Sinais de pontuação: (,)

Usaremos as letras minúsculas p, q, r, s como abreviações das letras proposicionais p_1, p_2, p_3, p_4. Também usaremos as letras maiúsculas A, B, C, D, E como variáveis da metalinguagem para fórmulas de L_0.

Como usual, definimos *termo* como todas as variáveis e constantes individuais, e definimos *fórmula* como se segue:

(i) Toda letra proposicional é uma fórmula.

[81] CARNIELLI, W; RODRIGUES, A. An epistemic approach to paraconsistency: a logic of evidence and truth. No prelo (2016) p. 5, 6 "1. No evidence at all: both A and ¬A do not hold. 2. Only evidence that A is true: A holds, ¬A does not hold. 3. Only evidence that A is false: ¬A holds, A does not hold. 4. Conflicting evidence: both A and ¬A hold." (tradução nossa)

[82] Este sistema pode ser encontrado em CARNIELLI, W; RODRIGUES, A. An epistemic approach to paraconsistency: a logic of evidence and truth. No prelo (2016)

(ii) Se A é fórmula, $(\neg A)$ é formula.

(iii) Se A e B são fórmulas, (A □ B) é fórmula, □ $\in \{\rightarrow, \vee, \wedge\}$

(iv) Nada mais é fórmula.

3.4.2 – As Regras de Dedução Natural Para a Lógica da Preservação de Evidência.

A fim de encontrar uma lógica adequada à preservação de evidência, partiremos da Lógica Positiva Intuicionista, que consiste nas regras de introdução e eliminação dos operadores lógicos $(\rightarrow, \wedge, \vee)$. Em seguida, apresentaremos as regras de introdução e eliminação da negação para cada conectivo, uma vez que não podemos contar com a regra da introdução da negação $(A \rightarrow B, A \rightarrow \neg B \vdash \neg A)$, que somada às regras da Lógica Positiva Intuicionista deriva o princípio da explosão.

Começando com as regras de dedução natural para a Lógica Positiva Intuicionista:

Introdução da Conjunção

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B}\ \mathrm{I}\wedge$$

Introdução da disjunção

$$\frac{A}{A \vee B}\ \mathrm{I}\vee \qquad\qquad \frac{B}{A \vee B}\ \mathrm{I}\vee$$

Introdução da implicação

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \to B}\,\mathbf{I}\!\to$$

Eliminação da conjunção

$$\dfrac{A \wedge B}{A}\,\mathbf{E}\wedge \qquad\qquad \dfrac{A \wedge B}{B}\,\mathbf{E}\wedge$$

Eliminação da disjunção

$$\dfrac{A \vee B \qquad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\,\mathbf{E}\vee$$

Eliminação da implicação

$$\frac{A \rightarrow B \qquad A}{B}\ \mathbf{E}{\rightarrow}$$

Onde [A] significa que a hipótese A foi descarregada.

Abaixo, seguem as regras de introdução e eliminação da negação para cada conectivo, e a regra da dupla negação, que também advogaremos que preserva evidência.

Introdução da negação para a conjunção

$$\frac{\neg A}{\neg(A \wedge B)}\ \mathbf{I}\neg\wedge \qquad\qquad \frac{\neg B}{\neg(A \wedge B)}\ \mathbf{I}\neg\wedge$$

Introdução da negação para a disjunção

$$\frac{\neg A \quad \neg B}{\neg(A \vee B)}\ \mathbf{I}\neg\vee$$

Introdução da negação para a implicação

$$\frac{A \qquad \neg B}{\neg(A \to B)}\ \mathbf{I}\neg\to$$

Eliminação da negação para a disjunção

$$\frac{\neg(A \vee B)}{\neg A}\ \mathbf{E}\neg\vee \qquad\qquad \frac{\neg(A \vee B)}{\neg B}\ \mathbf{E}\neg\vee$$

Eliminação da negação para a implicação

$$\frac{\neg(A \to B)}{A}\ \mathbf{E}\neg\to \qquad\qquad \frac{\neg(A \to B)}{\neg B}\ \mathbf{E}\neg\to$$

Eliminação da negação para a conjunção

$$\frac{\neg(A \wedge B) \qquad \begin{array}{c}[\neg A]\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\neg B]\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ C\end{array}}{C}\ \mathbf{E}\neg\wedge$$

Dupla Negação

$$\frac{A}{\neg\neg A}\,\mathbf{DN} \qquad\qquad \frac{\neg\neg A}{A}\,\mathbf{DN}$$

3.5 – Uma Interpretação Para a Lógica da Preservação de Evidência.

3.5.1 – A interpretação da Lógica Básica da Evidência

Carnielli e Rodrigues oferecem uma interpretação em termos de preservação de evidência para a Lógica Positiva Intuicionista[83]. Para a introdução da conjunção e a introdução da disjunção a interpretação é bastante direta: sejam *k* e *k'* evidências para *A* e *B*, respectivamente. Então *k* e *k'* juntos constituem evidência para $A \wedge B$. Similarmente, seja *k* evidência para *A*. Então *k* é evidência para $A \vee B$.

Já a introdução da implicação é interpretada da seguinte forma: se a suposição de que existe uma evidência *k* de *A* levar a descoberta de uma evidência *k'* de *B*, então temos uma evidência para $A \to B$.

Todavia, não é preciso haver uma relação de relevância ou significado entre A e B. Portanto, analogamente ao que ocorre com a interpretação clássica e a interpretação intuicionista BHK – onde, respectivamente, a verdade de B implica na verdade de A $\to$ B; e a disponibilidade de prova de B implica em uma prova disponível de A $\to$ B –

[83] CARNIELLI, W; RODRIGUES, A. An epistemic approach to paraconsistency: a logic of evidence and truth. No prelo (2016)

também para a nossa lógica paraconsistente uma evidência para B constituirá evidência para A $\rightarrow$ B, para qualquer A.

Seguindo a ideia de Gentzen[84] de que as regras de introdução são como 'definições' dos símbolos, e as regras de eliminação como 'consequências' dessas 'definições', Carnielli e Rodrigues reformulam para os termos de *evidência* o *princípio da inversão* de Prawitz[85], que é uma forma mais precisa da mesma ideia. A reformulação é a que segue:

> *Princípio da Inversão da Evidência*
>
> Seja α uma aplicação de uma regra de eliminação que tem *B* como consequência. Então, para qualquer *k* que é evidência para a premissa maior de α, quando combinado à evidência para a menor premissa de α (se houver alguma), já constitui evidência para *B*; a existência de evidência para *B* pode, portanto, ser obtida diretamente da existência de evidência para suas premissas, sem a adição de α.[86]

Portanto, se existe um *k* que é evidência para $A \wedge B$, *k* deve constituir (ou conter) uma evidência para A, e também para B. Algo análogo ocorre com a eliminação da implicação: suponha que *k* seja uma evidência pra *A*, e *k'* uma evidência para $A \rightarrow B$. Pela interpretação da regra de Introdução da Implicação, temos que se *k* é uma evidência para *A*, então existe uma evidência *k''* para *B*. Mas nós, de fato, temos uma evidência *k* para *A*. Logo, existe uma evidência *k''* para *B*.

---

[84] GENTZEN, G. Investigations into logical deduction (1935). In: SZABO, M.E. *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. North-Holland Publishing Company. 1969.p. 80

[85] PRAWITZ, D. *Natural Deduction*: A Proof-Theoretical Study (1965). Dover Publications. 2006. p.33

[86] CARNIELLI, W; RODRIGUES, A. An epistemic approach to paraconsistency: a logic of evidence and truth. No prelo (2016) p.7 "Evidence inversion principle (EIP). Let α be an application of an elimination rule that has *B* as consequence. Then, any *k* that is evidence for the major premise of α, when combined with evidence for the minor premises of α (if any), already constitutes evidence for *B*; the existence of evidence for *B* is thus obtainable directly from the existence of evidence for the premises, without the addition of α." p.7 (tradução nossa)

O princípio também se aplica à eliminação da disjunção. A partir da introdução da disjunção, nós temos que para *k* ser evidência para $A \vee B$, *k* precisa ser evidência para *A*, ou evidência para *B*. Ora, se a partir de qualquer um dos dois casos se conseguir encontrar uma evidência k' para C, então temos, a partir de *k*, evidência para *C*.

Dito de outra forma: se tanto de A, quanto de B, se conseguir derivar C, então se pode derivar C de $A \vee B$ de modo a preservar evidência, isto é: a existência de evidência para $A \vee B$ implicaria na existência de evidência para C.

Observe que com apenas as regras de introdução e eliminação dos conectivos ($\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$) exposta acima, mas sem as regras referentes à negação, obteríamos uma lógica capaz tanto de preservar *disponibilidade de prova*, quanto de preservar *evidência*. Entretanto, ela não seria capaz de preservar TODA a disponibilidade de prova ou TODA a evidência.

Em outras palavras, tal lógica seria correta tanto no que diz respeito à preservação de disponibilidade de prova, quanto no que diz respeito à preservação de evidência, mas não seria completa em relação a nenhuma das duas.

No que diz respeito à preservação de evidência, tal lógica não seria completa porque não admitiria o princípio da dupla negação, que parece preservar evidência, mas que definitivamente não preserva disponibilidade de prova. Assim, esta lógica consideraria inválido um raciocínio que partisse da evidência de um $\neg\neg A$ para concluir uma evidência para *A*, mesmo que intuitivamente este raciocínio esteja correto no que se refere à preservação de evidência.

No que diz respeito à preservação de disponibilidade de prova, tal lógica não seria completa porque não possuiria o princípio da explosão intuicionista ($\perp \vdash A$). O que significa que ela também não provaria o silogismo disjuntivo ($A \vee B, \neg A \vdash B$). De fato, tais raciocínios não preservam evidência. Mas são perfeitamente plausíveis do ponto de vista da preservação da disponibilidade de prova. Isto é: dado uma prova de $A \vee B$ e uma prova de $\neg A$, uma prova de B se segue.

Por isso, quem busca uma lógica completa e correta para o tratamento da noção de disponibilidade de prova pode preferir partir para a lógica intuicionista em sua interpretação habitual, que conta com o princípio da explosão, do que adotar a lógica positiva intuicionista.

Alguém que, por outro lado, esteja buscando uma lógica mais adequada para o tratamento da noção de evidência – como nós estamos – não poderá, evidentemente, contar com o princípio da explosão. Mas talvez seja interessante encontrar uma negação mais completa no que diga respeito à preservação de evidência, e nos habilite, por exemplo, a recorrer ao princípio de dupla negação, que parece preservar evidência.

Como não podemos contar com a regra de introdução da negação ($A \rightarrow B, A \rightarrow \neg B \vdash \neg A$), que somada às regras de introdução e negação dos conectivos derivaria o princípio da explosão, é necessário contar com uma introdução da negação para cada conectivo, como vimos na exposição das regras de dedução natural para a lógica da preservação da evidência.

Para desenvolver as regras de introdução da negação para cada conectivo, Carnielli e Rodrigues buscaram as condições suficientes para refutar uma fórmula[87]. Isto é, para concluirmos uma fórmula negada, nós pensamos no que seria condição suficiente para negar aquela fórmula.

Por exemplo, a negação de *A* é condição suficiente para se concluir a negação da conjunção $(A \wedge B)$. Portanto, se temos uma evidência *k* para $\neg A$, nós temos uma

[87] CARNIELLI, W; RODRIGUES, A. An epistemic approach to paraconsistency: a logic of evidence and truth. No prelo (2016) p.8

evidência para $\neg(A \wedge B)$ (Evidentemente, o mesmo se aplica a uma evidência *k'* de *B*). Portanto, nossa regra preserva evidência.

Algo análogo se aplica a disjunção. Se nós temos uma evidência *k* para $\neg A$ e temos uma evidência *k'* para $\neg B$, então temos evidência para $\neg(A \vee B)$. Isto é, $\neg A$ e $\neg B$ juntos são condição suficiente para se afirmar $\neg(A \vee B)$.

O mesmo raciocínio vale para a implicação. Isto é, se temos uma evidência *k* de que *A* é o caso, e, somado a isso, temos uma evidência *k'* de que $\neg B$ é o caso, então temos evidência para $\neg(A \rightarrow B)$. Isto é, *A* e $\neg B$ são condições suficientes para se afirmar $\neg(A \rightarrow B)$.

Para desenvolver as regras de eliminação da negação para cada conectivo, Carnielli e Rodrigues recorreram, novamente, ao *princípio da inversão da evidência*[88].

Por exemplo, para a *disjunção*, suponha que tenhamos uma evidência *k* para $\neg$(A $\vee$ B). Ora, pela regra de introdução, já vimos que esta evidência *k* precisa consistir em uma evidência *k'* (ou em uma vertente *k'* da evidência *k*) de $\neg A$, e uma evidência *k''* (ou em uma vertente *k''* da evidência *k*) de $\neg$B. Portanto, de $\neg$(A $\vee$ B) podemos concluir tanto $\neg$A, quanto $\neg$B, sem que com isso deixemos de estar preservando verdade.

Algo análogo ocorre com a implicação. Nós vimos, pela regra de introdução, que para termos uma evidência *k* para $\neg(A \rightarrow B)$, precisamos ter duas evidências (ou duas vertentes da evidência *k*) *k'* de A e *k''* de $\neg$B. Portanto, podemos – respeitando nosso objetivo de preservar evidência – concluir tanto A quanto $\neg$B a partir de $\neg$(A $\rightarrow$ B).

Para a conjunção se aplica o mesmo raciocínio. Pela *introdução da negação para a conjunção*, nós temos que se *k* é uma evidência para $\neg(A \wedge B)$, então *k* deve possuir uma componente *k'* que é evidência para $\neg A$, ou uma componente *k''* que é

[88] CARNIELLI, W; RODRIGUES, A. An epistemic approach to paraconsistency: a logic of evidence and truth. No prelo (2016) p.9

evidência para $\neg B$. Ora, se tanto de $\neg A$ quanto de $\neg B$ pudermos encontrar uma evidência k''' para C, e assim deduzir *C*, então de $\neg(A \wedge B)$ poderemos – preservando evidência – concluir *C*.

Tendo explicado a adequação, para a finalidade de preservar evidência, das regras de introdução e eliminação dos conectivos, bem como as regras de introdução e eliminação da negação para cada conectivo, resta apenas mostrar que a *dupla negação* também preserva evidência.

Carnielli e Rodrigues argumentam que é razoável supor que se *k* é evidência de que *A* é verdade, então *k* é evidência de que é falso que *A* seja falso. A recíproca é igualmente razoável: se *k* é evidência de que é falso que *A* seja falso, *k* é evidência de que *A* é verdadeiro[89].

Carnielli e Rodrigues chamam de Lógica Básica da Evidência (ou, em inglês, BLE – Basic Logic of Evidence) a lógica composta pela dupla negação e pelas regras de introdução e negação de $\rightarrow$, $\vee$ e $\wedge$, somadas às regras de introdução e eliminação para as fórmulas negadas de $\rightarrow$, $\vee$ e $\wedge$[90].

Eles também oferecem uma semântica para a Lógica Básica da Evidência. Eles ressaltam que essa semântica não tem como objetivo ter apelo intuitivo, independente do sistema de dedução natural. Em vez disso, a semântica para a Lógica Básica da Evidência pretende representar aquelas regras de dedução, de forma que se possam provar determinados resultados técnicos.

Como o objetivo dessa lógica é preservar evidência, os valores 1 e 0 significarão coisas diferentes daqueles da lógica clássica. Como já adiantamos anteriormente, o valor v(A) = 1 significa que há evidência de que *A* é verdadeiro, ao passo que o valor

---

[89] CARNIELLI, W; RODRIGUES, A. An epistemic approach to paraconsistency: a logic of evidence and truth. No prelo (2016) p.9

[90] CARNIELLI, W; RODRIGUES, A. An epistemic approach to paraconsistency: a logic of evidence and truth. No prelo (2016) p.9

v(A) = 0 significa que não há evidência de que *A* é verdadeiro. Por outro lado, o valor $v(\neg A) = 1$ significa que há evidência de que *A* é falso, ao passo que $v(\neg A) = 0$ significa que tal evidência não existe.

3.5.2 As Lógicas da Inconsistência Formal

Conforme Carnielli e Rodrigues apontam em *An epistemic approach to paraconsistency: a logic of evidence and truth* [91], existem circunstâncias em que precisamos raciocinar não apenas sobre *evidência*, como na lógica que acabamos de expor, nem apenas sobre *verdade*, como na lógica clássica. Mas sobre ambos os contextos ao mesmo tempo.

Isso ocorre quando temos que raciocinar a respeito de proposições cuja verdade ou falsidade está estabelecida, junto a outras proposições para as quais temos apenas evidências não conclusivas.

As *LFIs* (*Logics of Formal Inconsistency*, ou, em português, Lógicas da Inconsistência Formal) podem dar conta desses conceitos. Isso porque as LFIs são capazes de recuperar a lógica clássica, isto é, o princípio da explosão e o princípio do terceiro excluído, para um conjunto de proposições – isto é, para aquelas proposições cuja verdade ou falsidade está determinada.

Dessa forma, as *LFIs* são capazes tanto de preservar *evidência*, quanto de preservar *verdade*. Elas fazem isso a partir da introdução de uma noção metalinguística na linguagem objeto, com o conectivo unitário **o**, que recupera a lógica clássica para aquela fórmula. Isto é, se *oA* é verdadeiro, todos os princípios da lógica clássica valem

[91] CARNIELLI, W; RODRIGUES, A. An epistemic approach to paraconsistency: a logic of evidence and truth. No prelo (2016) p.14

para *A*. Do ponto de vista informal, pode-se dizer que o significado de $\circ A$ é "*A* é consistente".

$\circ A$ pode ser compreendido como significando que a verdade de *A* foi (ou pode ser) estabelecida. Assim, para toda proposição *A* para a qual $\circ A$ é verdadeiro, temos que ou *A* é verdadeiro, ou $\neg A$ é verdadeiro – mas nunca ambos verdadeiros ou ambos falsos.

Assim, embora o princípio da explosão não seja válido irrestritamente no sistema, ele valerá para fórmulas *consistentes*. Isto é:

$$\circ A,\ A, \neg A \vdash B$$

Do ponto de vista intuitivo, o que temos é que se *A* é consistente, *A* não pode ser verdadeiro e falso ao mesmo tempo (isso é justamente o que ser *consistente* significa!), do contrário tudo vale.

Observe que isso tem implicação direta – tanto do ponto de vista prático quanto do ponto de vista intuitivo – na validade do *silogismo disjuntivo* ($A \vee B, \neg A \vdash B$).

Note que quando tratamos de evidências, para ter-se uma evidência de que $(A \vee B)$ é o caso precisamos de uma evidência de *A*, ou de uma evidência de *B* (ver introdução da disjunção).

Suponhamos que tenhamos evidência para A, e disso concluamos ($A \vee B$). Ora, o surgimento de uma evidência para $\neg A$ certamente não nos diz nada sobre B. É bastante plausível, portanto, que o *silogismo disjuntivo* não valha neste caso.

Suponhamos agora que tenhamos uma evidência conclusiva de que *A* é verdadeiro, isto é, que tenhamos $v(\circ A) = 1$, e $v(A) = 1$. E disso concluamos $(A \vee B)$. Se por hipótese encontrarmos $v(\neg A) = 1$, é bastante plausível que possamos concluir *B*, afinal, como dissemos, se *A* é consistente ($v(\circ A) = 1$), não podemos ter *A* verdadeiro e falso ao mesmo tempo ($v(A) = 1$ e $v(\neg A) = 1$), do contrário *tudo vale*: inclusive B.

Todavia, vale lembrar que uma vez que *A* seja consistente e *A* seja verdadeiro, qualquer evidência de $\neg A$ torna-se nula – pois ter $v(\circ A) = 1$ e $v(A) = 1$ significa que a verdade de *A* foi estabelecida conclusivamente. O mesmo vale para $\neg A$.

Dessa forma, teremos uma lógica paraconsistente que tolerará contradições no plano epistêmico, isto é, tolerará a existência de evidências contraditórias sem trivializar o sistema. Todavia, esta lógica não admitirá contradições no plano ontológico, isto é, não aceitará que duas *verdades* possam se contradizer, o que implicaria em trivialidade.

Isso significa que esta lógica não rivalizará com a lógica clássica no plano ontológico. Ao contrário disso, ela recupera a lógica clássica para as proposições que recebam $\circ$.

A divergência reside apenas no fato desta lógica oferecer um tratamento para situações em que não temos propriamente a *verdade*, ou a *evidência conclusiva* de uma proposição, mas apenas alguma *evidência* (inconclusiva) para ela.

E isso não a torna incompatível com o realismo clássico: mesmo que a lógica clássica esteja descrevendo as leis de preservação de verdade, com uma perspectiva realista de verdade, ela ainda pode ser conciliada com uma lógica paraconsistente que trate da preservação de *evidência*. De fato, isso é o que ocorre na lógica que acabamos de apresentar.

Esta interpretação, que distingue os âmbitos ontológico, onde contradições não são toleradas; e epistêmico, onde elas o são; vai ao encontro de nossa forma de pluralismo, onde lógicas tidas como rivais podem coexistir por visarem preservar propriedades diferentes.

Seção 4 - Considerações Finais

4.1 – Nosso pluralismo e seus limites

Diante do aparente impasse entre formas de pluralismo e perspectivas realistas acerca da lógica clássica – e tendo em vista a plausibilidade de ambas as perspectivas, nós advogamos por uma forma de pluralismo enfraquecida, que acreditamos ser capaz de conciliá-las.

É claro que, em nosso pluralismo, nem todas as perspectivas podem ser conciliadas. Algumas lógicas são genuinamente rivais – como em nosso exemplo do dialeteísmo de Priest e a lógica clássica, que são lógicas que pretendem preservar verdade em um sentido realista. Por isso nós dissemos que nossa forma de pluralismo consiste em um pluralismo *enfraquecido*. Em nossa perspectiva, nem todas as lógicas filosoficamente bem sucedidas podem ser conciliadas.

Algumas lógicas não-clássicas, todavia, têm natureza expressamente diferente, e suas rivalidades com a lógica clássica consistem muito mais no objetivo de tratar determinado objeto ou problema sob um viés outro que o da verdade, do que em oferecer um tratamento diferente da preservação de verdade propriamente dita.

A lógica intuicionista, por exemplo, não oferece uma abordagem diferente de preservação de verdade em sentido forte, mas um tratamento da preservação de outra coisa, que é a disponibilidade de prova.

Nós também mostramos uma lógica paraconsistente que não rivaliza com a lógica clássica no que diz respeito à preservação de verdade, mas oferece um tratamento da preservação de evidência.

Assim, concebemos uma forma de pluralismo influenciada pelos trabalhos de Beall e Restall, mas com a peculiaridade de não relativizar o que significa “caso” na definição intuitiva de consequência lógica, mas no que significa receber o valor designado.

Isto é, partimos de uma definição básica de conseqüência lógica, que diz: uma conclusão A se segue de um conjunto de premissas P se, e somente se, em todo caso em que todas as premissas de P recebem 1, A também recebe 1.

E defendemos que lógicas diferentes surgem das especificações do que significa receber 1. Para a lógica clássica, significa “ser verdadeiro” – em sentido ontológico. Para a lógica intuicionista, mostramos que pode ser entendido como “tem prova disponível”, e para a lógica paraconsistente advogamos a favor de uma interpretação na qual “recebe 1” significaria “tem evidência para”. Acreditamos que predicados como esses possam ser conciliados, e, portanto, que as lógicas citadas possam conviver em harmonia.

Em outras palavras, dizer que o pluralismo advém de diferentes especificações do que significa “receber 1”, é o mesmo que dizer que o pluralismo advém da diversidade de coisas que possam ser preservadas das premissas para a conclusão.

E é neste ponto que encontramos os limites de nossa perspectiva: lógicas que preservam propriedades diferentes podem conviver em harmonia. Mas nossa abordagem não é capaz de conciliar as lógicas que visam preservar as mesmas propriedades.

Assim, em relação à preservação de verdade propriamente dita (ou ao menos em relação à *verdade em modelos*), somos monistas. Em relação à preservação de disponibilidade de prova – também acreditamos existir uma única lógica (ou ao menos uma *melhor* ou *mais completa* lógica) capaz de preservar a disponibilidade de prova, se fixada uma única noção de ‘disponibilidade de prova’. Em relação à preservação de evidência – se novamente fixado o que significa preservar evidência – também acreditamos existir uma única lógica que seja a mais apropriada a essa tarefa. Em suma, se fixado o que queremos preservar, não existirá, em nossa perspectiva, duas ou mais lógicas igualmente apropriadas para a tarefa.

Este não é, entretanto, um limite muito devastador. Embora algumas perspectivas (como o pluralismo resultante do Princípio da Tolerância de Carnap) possam talvez tentar conciliar visões tão antagônicas como o dialeteísmo e o realismo clássico, coisa que nossa filosofia não é capaz, poucas perspectivas são bem sucedidas em conciliar toda e qualquer lógica bem sucedida. Em especial – como mostramos – não é claro como poderia um pluralismo tão absoluto dar conta de uma visão ontológica da lógica, onde a mesma descreveria algum aspecto geral da realidade.

Ao enfraquecer um pouco nosso pluralismo, somos capazes de explicar o realismo da lógica clássica frente ao debate pluralista, pois agora não mais haveria risco de trazer a relatividade de lógicas para o plano ontológico, resultando em uma relatividade da verdade ou da realidade. Do contrário, como dissemos, somos *monistas* em relação ao propósito de preservação da verdade (desde que fixado um sentido específico de preservação de verdade), estando assim resguardados do risco de aceitar mais de uma lógica como descritora de algum aspecto importante da realidade.

Além disso, mesmo as formas mais tolerantes de pluralismos, como o de Beall e Restall, precisam fixar certas especificações (que na filosofia de Beall e Restall consiste em especificar o que significa *caso* na definição de conseqüência lógica), que uma vez fixadas não darão origem a mais de uma lógica. Assim como em nosso pluralismo, ao se fixar o que se deseja preservar das premissas para a conclusão, não haverá mais de uma lógica apropriada para a função. Por isso, embora nossa forma de pluralismo encontre seus limites, ela não deixa de ser pluralista em um sentido relevante – mesmo que ela não seja capaz de conciliar todas as lógicas bem sucedidas do ponto de vista filosófico.

4.2 – O pluralismo e a natureza da Lógica

Contudo, nossa visão pluralista revela não apenas uma perspectiva acerca do pluralismo lógico, mas também da natureza da lógica propriamente dita. Enquanto alguns dizem que lógica é “preservação de verdade”; e outros, como os intuicionistas, dizem que sua lógica não diz respeito à noção de verdade, mas de prova; nós oferecemos um ponto de vista segundo o qual a lógica – em abstrato – visa apenas preservar alguma propriedade das premissas para a conclusão. Isto é, que a lógica trata de alguma propriedade ou predicado, que se todas as premissas possuírem, a conclusão deve possuir também. E neste ponto reside o pluralismo: lógicas diferentes preservam coisas diferentes.

A lógica, enquanto disciplina, não é a preservação de uma propriedade específica. O predicado “verdade” foi apenas o mais obvio, e por vezes o mais útil, razão pela qual a lógica clássica obteve sucesso tão grande. Mas, como vimos, existem outras coisas que também podem ser preservadas das premissas para a conclusão, e essas coisas, geralmente, exigem cânones de inferência diferentes, resultando em lógicas diferentes.

Assim, vemos a lógica como uma disciplina que trata da relação entre premissas e conclusão, de modo que a conclusão esteja de alguma forma fundada nas premissas.

Isto é: em todo o caso em que todas as premissas possuam determinada propriedade, a conclusão também deve possuir essa propriedade. Relacionar premissas e conclusões é o que significa ser uma lógica. Nomear qual é esta relação é o que distingue uma lógica da outra. A pluralidade de lógicas advém dessas diferentes especificações do que pode ser preservado das premissas para a conclusão.

Por isso, não há razão para rivalidade genuína entre lógicas que visam preservar propriedades diferentes – há apenas uma rivalidade aparente, já que utilizam métodos de inferência diferentes. Além disso, lógicas aparentemente rivais muitas vezes surgem de discordâncias em outras áreas, como a filosofia da matemática adotada, ou a crença acerca da existência de contradições na realidade.

Quando há discordância acerca da forma apropriada de se tratar determinado assunto, é natural que se adote diferentes lógicas, e isso corrobora uma aparente rivalidade entre estas lógicas. Por exemplo, o matemático clássico e o matemático construtivista discordam acerca de qual o tratamento correto da matemática. Mas não necessariamente discordam acerca de qual a forma correta de se tratar a noção de preservação de verdade ou a noção de preservação de disponibilidade prova. Ambos podem, por exemplo, advogar a lógica clássica como um bom tratamento da preservação de verdade, e a lógica intuicionista como um bom tratamento da noção de preservação de disponibilidade de prova. Isso significa que a aparente rivalidade entre as lógicas intuicionista e a lógica clássica é apenas uma ilusão, decorrente do fato de que um matemático construtivista poderia proceder de acordo com a lógica intuicionista, enquanto um matemático clássico poderia aplica a lógica clássica. Mas não são as duas lógicas que são rivais: é a filosofia da matemática clássica e a filosofia da matemática construtivista que o são.

4.3 – O Pluralismo e o Relativismo

Todavia, entre lógicas justificáveis e compatíveis entre si, e que fornecem abordagens razoáveis de preservação de propriedades interessantes, como ocorre com a lógica clássica (preservando verdade), a lógica intuicionista (preservando disponibilidade de prova), e a lógica paraconsistente (preservando evidência), há alguma, entre elas, que é mais correta, adequada ou importante que as outras?

Será apenas uma questão de aplicação e de interesse, ou haverá algum valor intrínseco em se preservar verdade, em vez de evidência ou prova? Esta é uma questão em aberto: defendemos até aqui uma abordagem pluralista – segundo a qual existem diferentes lógicas corretas ou justificadas. Se, entre elas, há alguma hierarquia ou se devemos ser *relativistas* – isto é, se nós devemos crer que todas as lógicas justificadas são igualmente corretas – não é algo que trataremos aqui.

De fato, algumas formas de pluralismo defendem a existência de duas ou mais lógicas 'igualmente boas'. Nós, por outro lado, apresentamos uma forma de pluralismo que se baseia na diversidade de propriedades de proposições que possam ser preservadas das premissas para a conclusão – mantendo-nos neutros em relação à existência, ou inexistência, de uma hierarquia de valor entre essas propriedades.

Contudo, há ainda uma segunda noção de *relativismo* em lógica, que é apresentada por Beall e Restall em seu verbete "Logical Consequence"[92]. Neste verbete, os autores colapsam as perspectivas *contextualistas* e as *relativistas*, afirmando que o lógico relativista defende que a validade de um argumento depende de seu contexto:

---

[92] BEALL, J.C.; RESTALL, G. Logical Consequence. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.), Disponível em = <https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/logical-consequence/>. Acesso em março de 2017.

> O contextualista lógico ou o relativista diz que a validade de um argumento depende do assunto em questão, ou do quadro de referência, ou de algum outro contexto de avaliação. (Por exemplo, o uso da lei do terceiro excluído pode ser válido em um livro didático de matemática clássica, mas não em um livro didático de matemática intuicionista, ou em um contexto onde raciocinamos a respeito de ficção ou assuntos vagos.)[93]

De acordo com esta definição, o relativismo não mais aparece como uma forma mais forte de pluralismo (no qual existiriam lógicas *igualmente* apropriadas), mas como uma perspectiva mais próxima ao monismo, na qual uma vez fixada o contexto, há somente uma forma de tratar a validade de um argumento.

> O *pluralista* lógico, por outro lado, diz que de um mesmo argumento, em um mesmo contexto, existem por vezes diferentes coisas que podem ser ditas com respeito a sua validade. Por exemplo, talvez alguém queira dizer que o argumento de uma coleção contraditória de premissas para uma conclusão não relacionada a elas seja *válido* no sentido de que em virtude de sua forma não é o caso que as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa (então ele é válido em um sentido preciso), mas que, não obstante, em outro sentido a forma do argumento não garante que a verdade das premissas *leve* à verdade da conclusão. O monista ou o contextualista sustenta que no caso deste argumento uma única resposta deve ser encontrada para a questão de sua validade. O pluralista nega isso. O pluralista sustenta que a noção de conseqüência lógica pode, ela mesma, ser tornada mais precisa em mais de

[93] BEALL, J.C.; RESTALL, G. Logical Consequence. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.), Disponível em = <https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/logical-consequence/>. Acesso em março de 2017. "The logical *contextualist* or *relativist* says that the validity of an argument depends on the subject matter or the frame of reference or some other context of evaluation. (For example, a use of the law of the excluded middle might be valid in a classical mathematics textbook, but not in an intuitionistic mathematics textbook, or in a context where we reason about fiction or vague matters.)" (tradução nossa)

> uma maneira, assim como a idéia original de um “bom argumento” bifurca na validade dedutiva e indutiva.[94]

De acordo com o critério exposto, nós realmente apresentamos uma forma de pluralismo, e não de relativismo. De fato, em nossa perspectiva um mesmo argumento pode ser tratado sob o viés da preservação de verdade, da preservação de evidência ou da preservação da disponibilidade de prova – e estas podem ser interpretadas como maneiras de tornar mais precisa a noção geral de conseqüência lógica, ao tornar preciso o que significa uma proposição receber o valor designado.

Observe, entretanto, que não é o contexto que determina se nós devemos optar por preservar qualquer um daqueles predicados. Ao contrário, a questão de qual lógica usar – isto é, de como dar precisão a nossa noção intuitiva de conseqüência lógica – permanece em aberto. A única forma de escolher qual lógica usar é através de nosso objetivo de tratar um determinado problema sob um viés ou outro – de preservar uma propriedade ou a outra. Essa escolha certamente será influenciada pelo assunto a ser tratado (ou seja, pelo contexto). Mas este não a determina, já que um mesmo assunto pode ser tratado por lógicas diferentes.

Ao estudar matemática, por exemplo, alguém pode aderir a uma lógica intuicionista com o objetivo de saber se uma determinada conclusão pode ser construída a partir de um determinado conjunto de premissas. Ou pode, ao examinar exatamente a

---

[94] BEALL, J.C.; RESTALL, G. Logical Consequence. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.), Disponível em = <https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/logical-consequence/>. Acesso em março de 2017. “The logical *pluralist*, on the other hand, says that of one and the same argument, in one and the same context, there are sometimes different things one should say with respect to its validity. For example, perhaps one ought say that the argument from a contradictory collection of premises to an unrelated conclusion is *valid* in the sense that in virtue of its form it is not the case that the premises are true and the conclusion untrue (so it is valid in one precise sense) but that nonetheless, in another sense the form of the argument does not ensure that the truth of the premises *leads to* the truth of the conclusion. The monist or the contextualist holds that in the case of the one argument a single answer must be found for the question of its validity. The pluralist denies this. The pluralist holds that the notion of logical consequence itself may be made more precise in more than one way, just as the original idea of a “good argument” bifurcates into deductive and inductive validity” (tradução nossa)

mesma questão, com o mesmo conjunto de premissas e a mesma conclusão, aplicar a lógica clássica, a fim de saber se é possível, ao mesmo tempo, que a conclusão seja falsa e o conjunto de premissas verdadeiro.

Nossa perspectiva não é, portanto, *relativista* (no sentido de Beall e Restall), mas legitimamente *pluralista*, e nosso pluralismo consiste na variedade de coisas que podem ser preservadas das premissas para a conclusão.

Bibliografia:

BATENS, D. (ed.). *Frontiers of Paraconsistent Logic*. Research Studies, London: Wiley, 2000.

______. Against Global Paraconsistency. In: *Studies in Soviet Thought* 39, 1990. pp. 209-229.

______. Inconsistencies and beyond: A logical-philosophical discussion. *Revue Internationale de Philosophie* 51(2), 1997. pp. 259–273.

BEALL, J.C.; RESTALL, G. Logical Pluralism. In: *Australasian Journal of Philosophy*, 78, 2000.

______. Defending logical pluralism. In: *Logical Consequence:* Rival Approaches Proceedings of the 1999 Conference of the Society of Exact Philosophy, Stanmore: Hermes, 2001. pp. 1–22.

______. *Logical Pluralism*, Oxford: Oxford University Press. 2006

______. Logical Consequence. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.), Disponível em = <https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/logical-consequence/>. Acesso em março de 2017.

BERTO, F. How to Sell a Contradiction. *College Publications*. 2007

BÉZIAU, J. Y.; CARNIELLI, W.; GABBAY, D. M. *Handbook of Paraconsistency*. College Publications, 2007.

BÉZIAU, J. Y. What is paraconsistent logic? In: BATENS, D. (ed) *Frontiers of Paraconsistent Logic*. Research Studies, London: Wiley, 2000. pp. 95-112

BLANCHETTE, P. *Frege's Conception of Logic*. Oxford University Press, 2012.

BREMER, M. *An introduction to paraconsistent logics*. Frankfurt: Peter Lang, 2005.

BROWN, B. 2002. On paraconsistency. In: JACQUETTE, D. (ed) *A companion to philosophical logic*, Oxford: Blackwell, 2002. pp. 628–650

BROUWER, L. Consciousness, philosophy and mathematics. In: HEYTING, A. *Collected works vol. I*. North-Holland Publishing Company, 1975.

BURGE, T. Frege on truth, in: HAAPARANTA, L e HINTIKKA, J. (eds.), *Frege Synthesized*, Dordrecht: D. Reidel Publishing Co., 1986. pp. 97-154.

BURGESS, J. P. *Philosophical Logic* (Princeton Foundations of Contemporary Philosophy), Princeton: Princeton University Press, 2012.

______. “Frege on knowing the Third Realm”, *Mind*, 101. 1992. p. 633–650.

CARNAP, R. *The Logical Syntax of Language*, London: Kegan Paul, 1937.

CARNIELLI, W.; CONIGLIO, M.; MARCOS, J. Logics of Formal Inconsistency. In: GABBAY, D; GUENTHNER, F. (eds.) *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 14, 2 ed. Springer, 2007. p.1-95.

CARNIELLI, W.; CONIGLIO, M.; D’OTTAVIANO, I. M. L. *Paraconsistency*: The Logical Way to the Inconsistent. CRC Press, 2002.

CARNIELLI, W; RODRIGUES, A. On the philosophy and mathematics of the Logics of Formal Inconsistency. Em: *New Directions in Paraconsistent Logic.* Springer. 2016.

______. An epistemic approach to paraconsistency: a logic of evidence and truth. No prelo, 2016.

______. Paraconsistency and duality: between ontological and epistemological views. In Logica Yearbook 2015. College Publications, 2016.

CHATEAUBRIAND, O. *Logical Forms, vol. 1: Truth and Description,* Un. Estadual de Campinas, Coleção CLE n.34. Campinas, 2001.

COOK, R. Let a thousand flowers bloom: a tour of logical pluralism. *Philosophy Compass,* 5(6), 2010, pp. 492-504.

DA COSTA, N. Essaio sobre os fundamentos da Lógica, São Paulo: Hucitec, 1994.

______. "On the Theory of Inconsistent Formal Systems" in: *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 15 (4): 497–510. 1974.

DA COSTA, N.C.A.; FRENCH, S. *Science and Partial Truth.* Oxford: OUP, 2003.

DUMMETT, M. The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic. *In Truth and Other Enigmas*. Cambridge: Harvard UP. 1975. pp. 215--247.

______. *Truth and Other Enigmas*, Cambridge: Harvard University Press. 1978.

DUTILH-NOVAES, C. Contradiction: The real philosophical challenge for paraconsistent logic. In: BÉZIAU, J. Y.; CARNIELLI, W.; GABBAY, D. M. (eds.) *Handbook of Paraconsistency*. College Publications, 2007. pp. 465-480.

ETCHEMENDY, J. *On the Concept of Logical Consequence*, Stanford: CSLI Publications, 1999.

FIELD, H. Pluralism in logic. *The Review of Symbolic Logic*, 2(2), 2009, pp. 342–359.

FRANCHELLA, M. “L. E. J. Brouwer: Toward Intuitionistic Logic”. In: *Historia Mathematica*. Milan, Italy. ed. 22. 1995. p. 304-322

FREGE, G. Thought. (1918) In: BEANEY, Michael (Ed.). *The Frege Reader*. Oxford: Blackwell Publishers, 1997. p. 1-46

______. O pensamento.(1918) In: ALCOFORADO, Paulo (Org. e Trad.) *Investigações lógicas*. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2002. p. 9-39.

______. *Basic Laws of Arithmetic.* Editado por M. Furth. Berkeley and Los Angeles: University of California Press. 1964.

______. The *Foundations* of *Arithmetic: A* Logico- Mathematical Inquiry into *the* Concept *of* Number. Traduzido por *J. L. Austin*. Oxford: Blackwell. 1974. § 87

______. Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens, Halle a. S.: Louis Nebert. Translated as Concept Script, a formal language of pure thought modelled upon that of arithmetic, by S. Bauer-Mengelberg. In J. VAN HEIJENOORT (ed.). *From Frege to Gödel:* A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1967.

GENTZEN, G. Investigations into logical deduction (1935). In: SZABO, M.E. *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. North-Holland Publishing Company. 1969.

GEORGE, A. L; VELLEMAN, D. *Philosophies of Mathematics*. *Oxford*: Blackwell, *2002*.

GODDU, G. C. What exactly is logical pluralism? *Australasian Journal of Philosophy*, 80(2), 2002, pp. 218-230.

GOLDFARB, W. Frege's Conception of Logic. In: FLOYD, J. e SHIEH, S. (eds.), *Future Pasts: The Analytic Tradition in Twentieth-Century Philosophy*, Oxford: Oxford University Press, 2001, p. 25–41.

GOTTLIEB, P. Aristotle on non-contradiction. *Stanford encyclopedia of philosophy* (summer 2015). Disponivel em: < https://plato.stanford.edu/archives/sum2015/entries/aristotle-noncontradiction/>. Acesso em 2017.

GREIMANN, Dirk. A caracterização da lógica pela força assertórica em frege. Resposta a Marco Ruffino. **Manuscrito**, Campinas , v. 35, n. 1, p. 61-83, June 2012 . Available from <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0100-60452012000100002&lng=en&nrm=iso>. access on 24 Mar. 2017. http://dx.doi.org/10.1590/S0100-60452012000100002

HAACK, S. *Philosophy of Logics*, Cambridge: Cambridge University Press. 1978.

______. *Deviant Logic*, *Fuzzy Logic: Beyond the Formalism*, Chicago: University of Chicago Press, 1996.

HARRIS, JH. What's so logical about 'logical' axioms? *Studia Logica*, Vol. 41, No. 2/3, pp. 159-171. 1982.

HEYTING , A (ed). *L. E. J. Brouwer Collected Works:* Philosophy and Foundations of Mathematics. New York: North-Holland Publishing Company, 1975.

HEYTING, A. ‘On truth in mathematics’, Verlag van de plechtige viering van het honderdvijftigjarig bestaan der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen met de teksten der bij die gelegenheit gehouden redevoeringen en voorgedrachte, Amsterdam: North-Holland, 1958, pp. 277–279.

______. ‘La conception intuitionniste de la logique’, La e´tudes philosophiques 11, 226–233. 1956.

______. ‘Intuitionism in mathematics’, in R. Klibansky, ed., Philosophy in the mid-century. A survey, Firenze: La Nuova Italia, pp. 101–115. 1958.

______. “Sur la logique intuitionniste”, *Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences*, 16: 957–963, 1930. English translation in Mancosu 1998, pp. 306–310.

______. “Intuitionistic views on the nature of mathematics”, *Synthese*, 27: p. 79.

______. *Intuitionism: an Introduction*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1956

IEMHOFF, ROSALIE. "Intuitionism in the Philosophy of Mathematics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.), disponível em: <https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/intuitionism/>.

JEFFREY, C Richard. *Formal Logic*: its scope and its limits. McGraw Hill, Third edition, 1991.

KRIPKE, Saul A. Outline of a theory of truth. *Journal of Philosophy* 72 (19):690-716. 1975.

______. Semantical analysis of intuitionistic logic. In: CROSSLEY, J. e DUMMETT, M. (eds.). *Formal systems and recursive functions*, Amsterdam: North-Holland. 1965.

KOLMOGOROV, A. “O principe tertium non datur”, *Matematiceskij Sbornik*, 32: 646–667, 1925. English translation in van Heijenoort 1967, pp. 416–437.

______. “Zur Deutung der intuitionistischen Logik”, *Mathematische Zeitschrift*, 35: 58–65, 1932. English translation in Mancosu 1998, pp. 328–334.

ŁUKASIEWICZ, J. *Selected Works*, L. Borkowski (ed.), Amsterdam: North-Holland, and Warsaw: PWN. p 90. 1970.

______. *Atistotle’s Syllogistic:* From the Standpoint of Modern Formal Logic, Oxford: Oxford University Press, 1951.

MARCOS, J. *Logics of Formal Inconsistency*. 2005. 378 páginas. Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. Campinas, 6/02/2005.

______. Nearly every normal modal logic is paranormal. *Logique et Analyse*, 48. 2005. p. 279-300.

NEGRI, S; Jan Von Plato. *Structural proof theory*. Cambridge University Press. 2001.

POPPER, K. *Objective Knowledge:* An Evolutionary Approach, Oxford: Oxford University Press. 1972.

______. *Conjectures and Refutations*. New York: Harper, 1963. p. 206-207

PRAWITZ, D. *Natural Deduction*: A Proof-Theoretical Study (1965). Dover Publications. 2006.

PRIEST, G. Inclosures, Vagueness, and Self-Reference, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 51: 69–84. 2010

______. *Doubt truth to be a Liar*. Oxford: Oxford University Press, 2006.

______. *In Contradiction*, Dordrecht: Martinus Nijhoff (1987). 2nd expanded edition, Oxford: Oxford University Press, 2006.

______. Paraconsistent Logic. In: GABBAY, D; GUENTHNER, F. (eds.) *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 6, 2002.

PRIEST, G. & ROUTLEY, R. Introduction to Paraconsistent Logic. *Studia Logica* 44:3-16. 1983.

______. *On* Paraconsistency, Research Series in Logic and Metaphysics, Dept. of Philosophy, RSSS, ANU, Australia,1984.

PRIEST, G.; ROUTLEY, R. & NORMAN, J. (eds.). *Paraconsistent Logic:* Essays on the Inconsistent. Philosophia Verlag. 1989

PRIEST, GRAHAN e TANAKA, KOJI e WEBER, ZACH. Paraconsistent Logic. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.), disponível em = <https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/logic-paraconsistent/>. Acesso em 2017.

PRIEST, G.; BEALL, JC.; ARMOUR-GARB, B. *The Law of Non-Contradiction*, Oxford: Clarendon Press, 2004.

QUINE, W. V. O. (1970) *Philosophy of Logic,* Cambridge, MA: Harvard University Press, 1986.

______. Methods of Logic. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1950.

RAATIKAINEN, P. Conceptions of truth in intuitionism. In: *History and Philosophy of Logic*, volume 25, Number 2, Maio de 2004.

READ, S. Thinking about Logic, Oxford University Press. 1995.

______. Monism: The One True Logic. In: DEVIDI, D. e KENYON, T. (eds.), *A Logical Approach to Philosophy*: Essays in Honour of Graham Solomon, New York, 2006. pp. 193-209.

RESTALL, G. Carnap's tolerance, Meaning and Logical Pluralism. *The Journal of Philosophy,* vol. *99* n.8. p. 426-443. 2002.

ROSS. W. D. Translation of Aristotle's Metaphysics. 2nd Edition. In: MCKEON, R. (ed.) *The Basic Works of Aristotle.* New York: Random House, 1941.

RUFFINO, M. O Verdadeiro, o Bom e o Belo em Frege. *O Que Nos Faz Pensar,* 20, pp. 27-44, 2006.

RUSSELL, B; WHITEHEAD, A. N. *Principia Mathematica*. (1910-13). 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1968.

RUSSELL, G. One true logic? *Journal of Philosophical Logic*, 37(6), 2008. pp. 593–611.

______. Logical Pluralism. *Stanford encyclopedia of philosophy*. (winter 2016). Disponível em: <https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/logical-pluralism/>. Acesso em 2017.

SCHURZ, G. Tarski and Carnap on logical truth, or what is genuine logic? In: WOLENSKI, J. e KÖHLER, E. (eds.), *Alfred Tarski and the Vienna Circle:* Austro-Polish Connections in Logical Empiricism, Dortrecht: Kluwer, 1998. pp. 77–94.

SHAPIRO, S. *Foundations without Foundationalism*, Oxford: Oxford University Press. 2000.

SLATER, B. H. Paraconsistent logics? *Journal of Philosophical Logic* 24, 1995. pp. 233–254.

SMILEY, T. Frege and Russell. *Epistemologica*, 4: 53–8. 1981.

SMITH, Newton. *Logic:* an introductory course. Balliol College, Oxford: 1985

SOAMES, S. *Understanding Truth.* Oxford University Press, New York, 1999.

SORENSEN, R. *A brief history of the paradox.* Oxford: Oxford University Press. 2003.

TAJER, D. *Pluralismo Lógico*. 2010. 141 f. Tesis de Licenciatura de Filosofía. Universidad de Buenos Aires, Facultad de Filosofía y Letras, Buenos Aires. 2010.

______. Una defensa sistemática del pluralismo lógico. *Cuadernos de filosofía* n58, Buenos Aires, 2012.

TANAKA, K. Three Schools of Paraconsistency. *The Australasian Journal of Logic,* 1: 28-42, 2003.

______. *The labyrinth of trees and the sound of silence:* Topics in dialetheism. Ph.D. thesis, University of Queensland, 2000.

TANAKA, K; BERTO, F; MARES, E; e PAOLI, F. (Eds.). *Paraconsistency: Logic and Applications,* Dordrecht: Springer. 2013

TARSKI, A. On the concept of logical consequence, in CORCORAN, J (ed.), *Logic, Semantics and metamathematics*, 2nd edition, Hackett: Indianapolis, 1983. pp. 409–420.

TROELSTRA, A., 1990, "On the early history of intuitionistic logic", in *Mathematical Logic*, P. Petkov (ed.), New York: Plenum Press, 1990. 3-17

______. Logic in the writings of Brouwer and Heyting, in : V.M. Abrusci, E. Casari and M. Mugnai, eds., Atti del Convegno Internazionale di Storia della Logica. San Gimignano. 4-8 dicembre 1982_(Cooperativa Libraria Universitaria Editrice Bologna, Bologna), 193-210.

TROELSTRA, A e VAN DALEN, D. *Constructivism I and II*, Amsterdam: North-Holland, 1988.

VAN ATTEN, M. 'On the hypothetical judgement in the history of intuitionistic logic,' in *Logic, Methodology, and philosophy of science XIII: Proceedings of the 2007 International Congress in Beijing*, C. Glymour and W. Wang and D. Westerståhl (eds.), London: King's College Publications. 2008.

VAN DALEN, D. Logic and structure. Springer, 4th edition. 2008.

VARZI, A. On Logical Relativity. *Philosophical Issues,* 10, 2002. pp. 197-219.

WEIR, A. 'There are no true contradictions', em: PRIEST, G.; BEALL, JC.; ARMOUR-GARB, B. *The Law of Non-Contradiction*, Oxford: Clarendon Press, 2004.

WOODS, J. *Paradox and paraconsistency*, Cambridge University Press, 2003.

WYATT, N. What are Beall and Restall pluralists about? *Australasian Journal of Philosophy*, 82. 2004. pp. 409–420.