

Universidade Federal de Minas Gerais
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Centro de Pesquisa e Desenvolvimento em
Engenharia Elétrica

Síntese de Dinâmica Não-Linear Por Meio de Modelos Afins Por Partes: Um Método Baseado em Topologia

Gleison Fransoares Vasconcelos Amaral

Tese submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Luis Antonio Aguirre

E sabemos que todas as coisas concorrem para o bem daqueles que amam a Deus, daqueles que são chamados segundo o seu propósito. Porque os que dantes conheceu, também os predestinou para serem conformes à imagem de seu Filho, a fim de que Ele seja o primogênito entre muitos irmãos; e aos que predestinou, a estes também chamou; e aos que chamou, a estes também justificou; e aos que justificou, a estes também glorificou.

Rm 8, 28-30.

Resumo

Comportamentos dinâmicos não-lineares são inerentes à maioria dos sistemas, senão a todos. Por isso mesmo, o estudo e a análise de tais sistemas é uma realidade nos mais diversos ramos das ciências. Desde a matemática pura até ramos de aplicação como as engenharias.

Um dos desafios mais comuns da ciência é a construção de modelos que expressem algumas características de interesse de um dado sistema. A partir de modelos, o sistema original vai sendo melhor compreendido. A obtenção de modelos que expressem representativamente sistemas dinâmicos não-lineares continua, no entanto, sendo um desafio.

Neste trabalho é investigado como as características topológicas e dinâmicas de um sistema dinâmico não-linear podem auxiliar na reconstrução de campos vetoriais contidos no espaço de fases tridimensional. É mostrado, por meio de alguns exemplos, que os modelos obtidos são parcimoniosos e além disso conseguem reproduzir o comportamento global do sistema, guardando as propriedades locais. Para garantir formalmente a equivalência, ferramentas de análise topológica são empregadas.

O principal objetivo deste trabalho é a síntese de dinâmicas não-lineares por meio de modelos afins por partes. Nesse sentido é desenvolvida uma orientação baseada na estrutura topológica de atratores estranhos para que modelos afins por partes possam ser construídos. Também é explorada a relação entre superfície de chaveamento dos modelos e os parâmetros de bifurcação dos sistemas abordados. Uma vez que os modelos obtidos, além de representativos, são parcimoniosos, circuitos eletrônicos que implementam as dinâmicas foram projetados e montados.

Abstract

Nonlinear dynamics are inherent to the majority of the systems. Therefore, the study and analysis of such systems it is a reality in most diverse branches of sciences, from pure mathematics to applied sciences as engineering.

A common challenge of sciences is to built models that express some characteristics of interest in the system. From such models the original system can be better understood. However, the building of models that express nonlinear dynamic systems representatively continues being an open challenge.

This work investigates how the topological characteristics and dynamics of a nonlinear dynamical system can help in the vector field reconstruction in the three-dimension phase space. It is shown by some examples that the achieved models are parsimonious and moreover that, they reproduce the global behavior of the system keeping the local properties. To guarantee formal equivalence tools of topological analysis are used.

The main objective of this work is the nonlinear dynamic synthesis by means of piecewise affine models. In this direction an orientation based on the topological structure of strange attractors is developed so that piecewise affine models can be constructed. Also the work explores the relation between switching surface of the models and the system bifurcation parameters. Since such representative models are parsimonious, electronic circuits that implement the dynamics were developed and tested.

Agradecimentos

Agradeço ao Senhor Jesus por nos conceder a sua graça e nos ensinar a andar em seus caminhos. De modo especial, agradeço-Lhe por operar em minha vida de maneira viva e eficaz durante todo esse tempo do doutorado.

Ao meu orientador Luis Antonio Aguirre minha profunda gratidão. Obrigado por tudo que aprendi com você e pela sua amizade.

Ao pesquisador e amigo Christophe Letellier que, com grande paciência, me iniciou no mágico mundo da análise topológica. Merci Beaucoup, mon ami!

A Rita de Cássia de Paula Amaral, minha amada esposa, que teve paciência para entender as minhas ausências e sem a qual este trabalho não teria sido possível.

Aos meus amigos-irmãos Mara Cristina da Silveira Coelho, Erivelton Geraldo Nepomuceno e Dair José de Oliveira. Deus os abençoe por tudo.

Aos amigos do Movimento Shalom da Arquidiocese de Mariana. De modo especial, os meus irmãos Marclei Gomes de Oliveira e Vanessa Silva Gomes.

Ao técnico de Laboratório Carlos Eduardo Pádua Oliveira e ao aluno Paulo Mônico Júnior pelo grande auxílio prestado na montagem dos circuitos eletrônicos e pelas discussões.

Aos colegas do departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de São João del-Rei.

A minha mãe, Marlene Vasconcelos Amaral, pelo dom da vida e a meu pai, José Soares do Amaral, porque sua presença se estende além do tempo.

Sumário

Resumo	v
Abstract	vii
Agradecimentos	ix
Sumário	xi
Lista de Tabelas	xv
Lista de Figuras	xvii
Lista de Símbolos	xix
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	3
1.2 Organização do texto	4
2 Dinâmica Não-Linear e Análise Topológica	5
2.1 Sistemas dinâmicos não-lineares	5
2.1.1 Propriedades gerais de campos vetoriais	7
2.1.2 Conjuntos ω e α limites	8
2.1.3 Atrator	8
2.1.4 Atratores em $\mathbb{R}^3$	9
2.1.5 Estabilidade de pontos fixos	11
2.1.6 Variedades	14
2.2 Ferramentas de análise	19
2.2.1 Bifurcação local	22
2.3 Dinâmica global	24
2.3.1 Órbitas homoclínicas e heteroclínicas	24
2.3.2 Bifurcações globais	26
2.4 Análise topológica	28

2.4.1	Mapa de primeiro retorno	28
2.4.2	Órbitas periódicas instáveis	29
2.4.3	Número de conexão (<i>linking number</i>)	30
2.4.4	Padrão (<i>template</i>)	31
2.4.5	Descrição algébrica do padrão	33
2.4.6	Acomodação das órbitas no padrão	34
2.5	Discussão final	37
3	Modelos Afins por partes	39
3.1	Introdução	39
3.2	Modelos com estrutura por partes	40
3.2.1	Modelos explícitos	40
3.3	Sistemas afins por partes	44
3.4	Estimação de parâmetros	46
3.5	Discussão final	48
4	Relação entre Modelos Afins por Partes e Topologia	51
4.1	Introdução	51
4.2	Atratores estranhos e variedades ramificadas	52
4.3	Singularidades	54
4.4	Construção de singularidades	55
4.5	Mecanismos da dinâmica caótica em $\mathbb{R}^3$	56
4.6	Pontos fixos e toro limitante	57
4.7	Sistemas cobertura e imagem	59
4.8	Variedades e bifurcações globais	60
4.9	Conclusão	63
5	Reconstrução de Campos Vetoriais	65
5.1	Introdução	65
5.2	Sistemas caóticos e seus mecanismos	66
5.3	Reconstrução do sistema de Rössler	68
5.3.1	Análise topológica do atrator Rössler	68
5.3.2	Dinâmica local do sistema de Rössler	71
5.3.3	Modelo afim por partes do sistema de Rössler	74
5.4	Reconstrução do sistema de Lorenz	80
5.4.1	Análise topológica do sistema de Lorenz	80
5.4.2	Dinâmica local de Lorenz	83
5.4.3	Modelo afim por partes do sistema de Lorenz	84
5.5	Conclusão	88

6	Aplicações	91
6.1	Introdução	91
6.2	Projeto de osciladores caóticos	91
6.3	Circuitos de chaveamento	92
6.3.1	Circuito módulo	92
6.3.2	Chaves analógicas	102
6.4	Eletrodissolução do cobre	108
6.4.1	Dinâmica do processo	109
6.4.2	Reconstrução	110
6.5	Conclusão	113
7	Conclusão	115
7.1	Principais contribuições	116
7.2	Discussões Finais	117
7.3	Trabalhos futuros	117
	Bibliografia	127
A	Circuitos eletrônicos	129

Lista de Tabelas

5.1	Número de conexão entre pares de órbitas de Rössler	70
5.2	Autovalores do sistema de Rössler	71
5.3	População de órbitas periódicas instáveis de Rössler	79
5.4	Autovalores do sistema de Lorenz	84

Lista de Figuras

2.1	Órbita e curva integral	6
2.2	Ciclo limite e caos	10
2.3	Trajetórias no espaço bidimensional	13
2.4	Trajetórias no espaço tridimensional	13
2.5	Variedades lineares no espaço tridimensional	17
2.6	Variedades lineares do oscilador de Chua	18
2.7	Variedade não-linear	19
2.8	Imersão de séries	20
2.9	Seção de Poincaré do atrator de Rössler	21
2.10	Diagramas de bifurcação de sistemas autônomos	23
2.11	Órbita homoclínica do sistema de Shil'nikov.	24
2.12	Órbitas heteroclínicas	25
2.13	Órbita homoclínica separatriz	26
2.14	Retrato de fases antes da bifurcação homoclínica	27
2.15	Retrato de fases após a bifurcação homoclínica	27
2.16	Mapa de primeiro retorno	29
2.17	Órbita 2101	30
2.18	Convenção para cruzamentos de órbitas	31
2.19	Cruzamentos de órbitas	32
2.20	Mecanismos de construção de dinâmica caótica	32
2.21	Elementos do padrão	33
2.22	Acomodação de órbitas no padrão	36
3.1	Funções de ativação	41
3.2	Rede neural afim por partes	42
3.3	Classificação dos procedimentos de estimação	49
4.1	Sistema afim e a formação de ramos	54
4.2	Ponto de rasgo	57
4.3	Padrões e formas canônicas	58
4.4	Sistemas cobertura e imagem	61
4.5	Soma conectada	62

4.6	Bifurcação global de um sistema afim por partes	64
5.1	Atrator e seção de Poincaré do sistema de Rössler	69
5.2	Mapa de primeiro retorno de Rössler	69
5.3	Padrão do sistema de Rössler	70
5.4	Variedades do sistema de Rössler linearizado	72
5.5	Regiões de transição	73
5.6	Comportamentos meta-estáveis	75
5.7	Superfícies de chaveamento	76
5.8	Resultados dos modelos de Rössler reconstruído	77
5.9	Padrão dos modelos afins por partes	78
5.10	Diagrama de bifurcação do sistema de Rössler	80
5.11	Diagrama de bifurcação do sistema de Rössler reconstruído . .	81
5.12	Padrão de Lorenz e do sistema imagem	82
5.13	Atrator de Lorenz e variedades de um ponto fixo simétrico . .	85
5.14	Diagramas de Bifurcação do sistema de Lorenz e do modelo . .	87
5.15	Comportamentos do modelo afim por partes de Lorenz	90
6.1	Circuito módulo	92
6.2	Resultados dos modelos p/ superfície $x + 0,398z - 4 = 0$	96
6.3	Resultados da implementação eletrônica de Rössler	97
6.4	Caos multimodal	98
6.5	Diagrama de bifurcação do modelo com estrutura canônica . .	98
6.6	Diagrama de bifurcação do modelo afim por partes.	99
6.7	Atratores em diferentes regiões do espaço de parâmetros . . .	100
6.8	Resultados experimentais do circuito de Rössler	101
6.9	Circuito de controle do chaveamento	103
6.10	Atrator do circuito de Lorenz	106
6.11	Chaveamento	107
6.12	Montagem experimental de eletrodissolução	108
6.13	Série temporal da corrente elétrica	109
6.14	Pontos fixos estimados da série temporal.	110
6.15	Atrator e mapa de primeiro retorno da eletrodissolução	110
6.16	Atrator e mapa de primeiro retorno do modelo	112
A.1	Circuito que implementa o sistema de Rössler	130
A.2	Circuito que implementa o sistema de Lorenz	131

Lista de Símbolos

$\mathbf{x}$	vetor de estados do sistema
$\dot{x}$	derivada primeira da função x (em relação ao tempo)
k	tempo discreto
t	tempo contínuo
$\mathbb{R}$	espaço euclidiano
∞	infinito numérico
$\forall$	para todo
$\in$	pertence a
$\notin$	não pertence a
$\subset$	está contido em
$\subseteq$	está contido ou é igual a
$\ \cdot\ $	norma euclidiana
$ \cdot $	função módulo
$\mathbf{J}$	matriz jacobiana
s_i	superfície de chaveamento
$d(\mathbf{x})$	distância da superfície de chaveamento
$\mathbf{p}_g$	ponto fixo g
λ_{gi}	i -ésimo autovalor referente ao ponto fixo g
$\boldsymbol{\lambda}$	vetor de autovalores
E_{gi}^{em}	i -ésima variedade linear estável m -dimensional referente ao ponto fixo g (se há apenas uma variedade o índice i é omitido)
E_{gj}^{im}	j -ésima variedade linear instável m -dimensional referente ao ponto fixo g (se há apenas uma variedade o índice j é omitido)
E^{cm}	variedade linear central m -dimensional
W_{gj}^{em}	j -ésima variedade não-linear estável m -dimensional referente ao ponto fixo g (se há apenas uma variedade o índice j é omitido)
$\mathbf{M}(\delta_i, \sigma_i)$	torção entre os ramos δ_i e σ_i
Ψ	matriz de regressores

$\mathbf{A}^T$	transposta da matriz $\mathbf{A}$
$\mathbf{p}_+$ e $\mathbf{p}_-$	pontos fixos simétricos
$\phi(t)$	trajetória
$\exists$	existe
$\cup$	união
$\cap$	intercessão
ϕ	vazio
$\prod$	produtório
$\sum$	somatório
$\mathcal{M}[s_i]$	modelo afim por partes construído com a superfície s_i
$\mathbf{1}$	vetor de elementos unitários
$\tan$	função trigonométrica tangente

Capítulo 1

Introdução

Uma das mais importantes tarefas das ciências e, em particular, dos seus ramos aplicados, é a construção de modelos. A principal razão é que modelos são um grande auxílio na compreensão da realidade e na resolução de seus problemas. Modelos servem para reduzir a complexidade da realidade de maneira que se possa extrair características de interesse. Construção de modelos é uma tarefa desafiante e ao mesmo tempo fascinante.

Entre as teorias desenvolvidas no sentido de explicar a realidade, encontra-se a teoria de sistemas dinâmicos não-lineares. Por sistema entende-se uma combinação de componentes, que atuam conjuntamente e realizam um determinado objetivo (Ogata, 1993). Um sistema é caracterizado como dinâmico quando a sua evolução depende de seu estado anterior, isto é, o presente e o futuro dependem de como foi o passado. Uma das atribuições dessa teoria é descrever os possíveis regimes de operação, ou seja, os possíveis comportamentos de um dado sistema.

A teoria moderna de sistemas dinâmicos não-lineares foi desenvolvida por Jules Henri Poincaré. Em 1890, Poincaré escreveu o trabalho que deu origem ao que hoje é conhecido como teoria de sistemas dinâmicos (Poincaré, 1890). Nesse trabalho Poincaré preparou os fundamentos da análise local e global de sistemas dinâmicos. Além de importantes conceitos que permeiam toda a teoria como, por exemplo, o conceito de variedades, também foram utilizadas ferramentas como o mapa de primeiro retorno (Holmes, 2005). Os trabalhos de Poincaré deram a base para que se compreendesse o que hoje é conhecido como comportamento dinâmico caótico.

Caos é um comportamento que apresenta uma aparente desordem quando é verificada a sua evolução temporal. Esse comportamento recebeu diferentes denominações nas suas primeiras observações. Inicialmente, “fluxo determinístico não-periódico” (Lorenz, 1963), e foi chamado até mesmo de comportamento aleatório (Ueda, 1992). Apesar da aparente desordem, esse

regime apresenta uma estrutura organizada e rica de informação dinâmica. Verificou-se, mais tarde, que esse comportamento dinâmico está associado à presença de alguma *não-linearidade* nas equações.

Até antes da década passada, a construção de modelos estava quase que exclusivamente restrita a equações que descrevem a física de processos. Inicialmente, devido à complexidade dos sistemas, e associado a isso, à falta de recursos computacionais, a maior parte das análises eram restritas a pequenas faixas de operação. Os modelos resultantes dessa abordagem são modelos lineares. Cada vez mais tais modelos revelam-se insuficientes para satisfazer objetivos modernos. Seja porque se deseja operar sistemas em maiores faixas, ou porque se deseja conhecer e analisar regimes de operação que não podem ser descritos por modelos lineares como, por exemplo, o comportamento caótico.

A partir de meados da década passada, um outro procedimento para construção de modelos começou a ser empregado de maneira crescente, a obtenção de modelos a partir de dados experimentais (Aguirre, 2004). Essa prática ficou conhecida como modelagem empírica ou identificação caixa preta. Modelos utilizados nesse segundo grupo possuem, em geral, grande capacidade de aproximação de funções ou até mesmo capacidade de aproximação universal. Dessas duas estratégias de construção de modelos origina-se uma outra abordagem que combina características dos dois procedimentos. A construção de modelos é feita a partir de dados, porém utilizando alguma informação auxiliar do sistema. Essa estratégia é conhecida como identificação caixa cinza (Corrêa e Aguirre, 2004).

Modelos utilizados na modelagem empírica podem ser classificados em dois grandes grupos: modelos globais e modelos com estruturas por partes. Os modelos globais explicam toda a faixa de observação da realidade com uma única estrutura. Nos modelos com estrutura por partes, cada parte do modelo se encarrega de explicar uma única parte das observações. Essa segunda abordagem, pela própria filosofia de construção, é capaz de fornecer interpretações dos comportamentos locais, além de ser capaz de fornecer uma explicação para o comportamento global. Por isso mesmo, essa abordagem apresenta grande proximidade com a forma como as engenharias resolvem problemas. Ou seja, determinam-se pontos de operação e, em torno desses pontos, desenvolvem-se modelos simples, geralmente lineares.

O estudo das características de modelos e o desenvolvimento de procedimentos para determinação de reconstrução de regimes dinâmicos apresenta-se como uma importante contribuição tanto para a área de dinâmica não-linear quanto para a área de modelagem e identificação de sistemas.

1.1 Objetivos

A partir da segunda metade da década de 80, foram desenvolvidas ferramentas que permitiram a caracterização de sistemas dinâmicos caóticos. Essas ferramentas compõem o chamado método topológico de caracterização. Esse arcabouço de ferramentas possibilitou uma forma de conhecer a estrutura topológica do comportamento caótico, bem como os mecanismos que produzem a dinâmica. Apesar de tais métodos fornecerem um modelo, no sentido de que explicam a formação da dinâmica, esses modelos não são uma reconstrução das equações que reproduzem a dinâmica.

Para realizar essa reconstrução pode-se empregar modelos globais ou modelos com estrutura por partes. Esse segundo grupo foi adotado neste trabalho por apresentar relativa facilidade de fornecer não apenas informação local, mas também os elementos fundamentais que formam a dinâmica, as variedades.

Esses modelos, no entanto, apresentam duas dificuldades principais. A primeira é que a determinação da divisão do espaço é uma tarefa nada trivial. Tanto assim que em (Shorten et al., 1999) é advertido que a obtenção de informações locais deve ser tomada com extrema cautela. A segunda dificuldade refere-se ao elevado número de partes quando a complexidade dos sistemas aumenta (Hiew, 1994; Storace e De Feo, 2004), característica conhecida como “a maldição da dimensionalidade” (*the curse of dimensionality*).

A metodologia proposta neste trabalho utiliza informações do sistema, obtidas por meio de análise topológica, para orientar o processo de construção do modelo e, conseqüentemente, a reconstrução da dinâmica proposta.

Tendo em vista a proposta de construção baseada em topologia, os objetivos daí decorrentes são assim resumidos:

- Investigar como a conexão entre as partes do modelo, isto é, os submodelos afins, determina o comportamento resultante. Assim, objetiva-se escolher superfícies de chaveamento de modo a garantir a equivalência com as topologias de sistemas não-lineares.
- Estudar formas de parametrizar o processo de chaveamento entre os submodelos afins de modo que o modelo resultante possa representar o sistema não apenas para um único ajuste de parâmetro, mas em uma ampla faixa de variação desse parâmetro.
- Verificar como os modelos obtidos podem ser utilizados para síntese de circuitos eletrônicos. Para isso sistemas com diferentes estruturas topológicas são empregados para testar o procedimento de síntese de circuito.

1.2 Organização do texto

O Capítulo 2 apresenta alguns fundamentos de dinâmica não-linear e análise topológica necessários para a leitura do trabalho. Optou-se por uma abordagem mais geométrica dos fundamentos de dinâmica não-linear. No final do capítulo são apresentadas as ferramentas e o método de análise topológica.

Uma breve revisão da vasta área de modelos com estrutura por partes é apresentada no Capítulo 3. Esse capítulo aborda algumas das várias estruturas equivalentes aos modelos afins por partes. Também é detalhada a estrutura desse tipo de modelo.

O Capítulo 4 apresenta uma investigação da estrutura dos modelos afins por partes tendo em vista a reconstrução de campos vetoriais. Para isso, verifica-se como essa representação de modelo reconstrói os principais elementos topológicos que compõem a dinâmica caótica. Os resultados dessa investigação servem como orientação para o procedimento de construção de modelos afins por partes.

Reconstrução de campos vetoriais por meio de modelos afins por partes é tratada no Capítulo 5. É verificado como a superfície de chaveamento entre os submodelos pode ser determinada de modo a reproduzir a dinâmica de conhecidos sistemas da literatura, os sistemas de Rössler e de Lorenz. Também é mostrado nesse capítulo como parametrizar a superfície de chaveamento de modo a reproduzir a seqüência de bifurcações dos sistemas.

Aplicações são tratadas no capítulo 6. Duas aplicações ilustram a metodologia proposta. A primeira se refere à síntese de circuitos. São fornecidas duas possíveis configurações de circuitos para reproduzir dinâmicas codificadas na forma afim por partes. A outra aplicação refere-se à identificação de um processo de eletrodissolução potenciostática do cobre. Nessa modelagem parte-se apenas das medições de uma variável do processo.

No capítulo 7, conclusões finais e propostas de continuidade são discutidas.

Capítulo 2

Fundamentos de Dinâmica Não-Linear e Análise Topológica

Nos últimos anos, o processo de identificação de sistemas dinâmicos conhecido como caixa-cinza vem sendo bastante empregado (Corrêa, 2001). Esse tipo de abordagem possui a relativa facilidade de obtenção de modelo, característica de processo caixa-preta e a possibilidade de utilização de conhecimento a priori como auxílio tanto na escolha da estrutura quanto na estimação de parâmetros.

Extração de informação a partir de séries temporais já é realizada para pontos fixos (Aguirre e Souza, 1998), órbitas periódicas instáveis (So et al., 1997), diagramas de bifurcação (Bagarinao et al., 1999a,c,b), invariantes topológicos (Letellier et al., 1995c), entre outras. Essas informações contribuem para a utilização da estratégia caixa cinza. Neste trabalho informação de pontos fixos e da topologia do atrator são utilizadas na construção de modelos afins por partes.

O objetivo deste capítulo é apresentar as definições de conceitos fundamentais na área de sistemas dinâmicos não-lineares, além de descrever as ferramentas e o procedimento de análise topológica utilizados nos próximos capítulos.

2.1 Sistemas dinâmicos não-lineares

Quando se trata de sistema físico, pode-se dizer que o sistema é dinâmico quando há algum elemento armazenador de energia. Em termos gerais, diz-se que um sistema é dinâmico quando o valor das variáveis, em um dado instante, possui alguma dependência temporal dos valores passados. A forma matemática de representação de um sistema dinâmico em tempo contínuo,

adotada neste trabalho, é baseada em (Wiggins, 1990; Guckenheimer e Holmes, 1983):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\mu}), \quad (2.1)$$

com $\mathbf{x} \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}^1$ e $\boldsymbol{\mu} \in V \subseteq \mathbb{R}^p$, sendo que o ponto à esquerda na equação (2.1) representa o operador “ $\frac{d}{dt}$ ” aplicado ao vetor de estados do sistema $\mathbf{x}$, $\mathbb{R}^n$ é o espaço de estados, t é o tempo, $\boldsymbol{\mu}$ é o vetor de parâmetros e $\mathbf{f}(\cdot, \cdot; \cdot)$ uma função suave não-linear n -dimensional chamada campo vetorial.

A solução da equação (2.1) é uma função suave $\boldsymbol{\phi}(t, t_0, \mathbf{x}_{t_0})$ definida para todo $\boldsymbol{\phi} \in U$ e $t \in I$, tal que

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\phi}(t, t_0, \mathbf{x}_{t_0}))|_{t=\tau} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\phi}(t, t_0, \mathbf{x}_{t_0}), t; \boldsymbol{\mu}), \quad (2.2)$$

para todo $\boldsymbol{\phi} \in U$ e $\tau \in I$ (Guckenheimer e Holmes, 1983). Ao conjunto de todas as soluções $\boldsymbol{\phi}(t, t_0, \mathbf{x}_{t_0})$ dá-se o nome de *fluxo*. Diz-se que o campo vetorial $\mathbf{f}$ gera o fluxo (Guckenheimer e Holmes, 1983).

Quando não há necessidade de representar a dependência temporal ou dos parâmetros, a função não-linear $\mathbf{f}$ é descrita apenas como $\mathbf{f}(\boldsymbol{\phi})$. A função $\boldsymbol{\phi}(t)$ ¹ é interpretada geometricamente como uma curva em $\mathbb{R}^n$ (Wiggins, 1990).

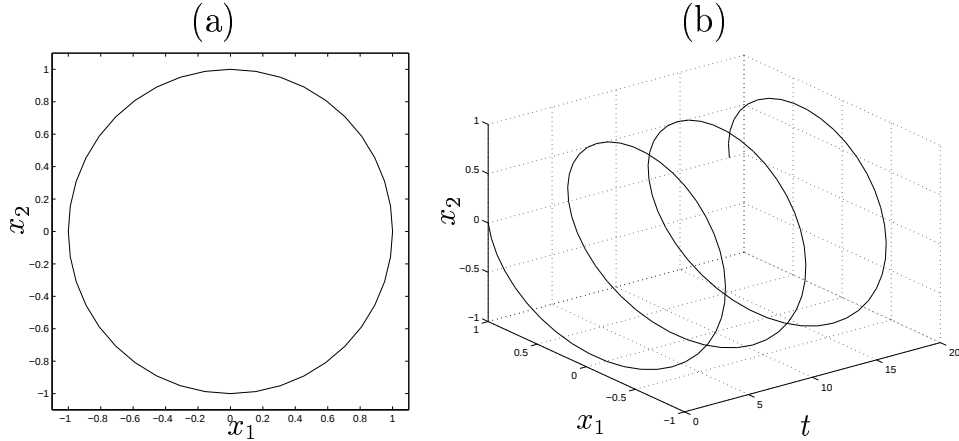


Figura 2.1: Solução do sistema dinâmico (2.3) para condição inicial $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. (a) órbita (b) curva integral.

A função $\boldsymbol{\phi}(t, t_0, \mathbf{x}_{t_0})$ é referida como a trajetória do sistema partindo do ponto $\mathbf{x}_{t_0}$ em $t = t_0$, isto é, partindo da condição inicial $\mathbf{x}(t_0)$ no tempo inicial t_0 . É definido como órbita o conjunto de pontos do espaço de estados

¹Como os sistemas abordados neste trabalho são autônomos, isto é, podem ser expressos omitindo-se a dependência temporal, a notação será simplesmente $\boldsymbol{\phi}(t)$.

associados com a trajetória que passa pelo ponto $\mathbf{x}(t_0)$. Como exemplo, considere as equações do sistema linear (Wiggins, 1990),

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1. \end{cases} \quad (2.3)$$

A trajetória que parte da condição inicial $\mathbf{x} = [1 \ 0]^T$ será

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix}.$$

A órbita associada a essa condição inicial é descrita pela relação

$$x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

Quando num mesmo gráfico são impressos os valores da trajetória e o correspondente valor de tempo, dá-se o nome de curva integral. Na Figura 2.1 são mostradas a órbita e a curva integral do sistema (2.3).

Um conceito que será muito útil no decorrer do texto é o conceito de *diagrama de fases* ou *retrato de fases*. O retrato de fases é o conjunto de todas as trajetórias do campo vetorial ou mapa (caso discreto) (Monteiro, 2002). O conhecimento da geometria do retrato de fases contribuirá para a construção de sistemas dinâmicos não-lineares, como será visto nos próximos capítulos.

“O estudo de sistemas dinâmicos não-lineares, de um ponto de vista geométrico, começa exatamente com o estudo da evolução da trajetória no retrato de fases” (Wiggins, 1990).

2.1.1 Propriedades gerais de campos vetoriais

Considere que a função $\mathbf{f}(\phi)$ em (2.1) é C^r , ($r \geq 1$) em algum conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$.² A seguir, é enunciado o teorema que garante a *existência* e *unicidade* de soluções de (2.1) com respeito às condições iniciais.

Teorema 2.1.1 (Existência e Unicidade de soluções) *Seja $\mathbf{x}_{t_0} \in U$. Então existe uma solução de (2.1) partindo de $\mathbf{x}_{t_0}$ em $t = t_0$, denotada por $\phi(t, t_0, \mathbf{x}_{t_0})$ com $\phi(t_0, t_0, \mathbf{x}_{t_0}) = \mathbf{x}_{t_0}$, para $\|t - t_0\|$ suficientemente pequeno. Esta solução é única no sentido que qualquer outra solução de (2.1) partindo de $\mathbf{x}_{t_0}$ em $t = t_0$ deve ser a mesma $\phi(t, t_0, \mathbf{x}_{t_0})$ no seu intervalo comum de existência. Além disso, $\phi(t, t_0, \mathbf{x}_{t_0})$ é uma função r vezes diferenciável C^r de t , t_0 e $\mathbf{x}_{t_0}$ (Wiggins, 1990).*

²Uma função é dita C^r se é contínua e possui suas r derivadas contínuas, no domínio das variáveis.

O teorema acima possui uma importante implicação geométrica. Se existe uma única solução partindo de $\mathbf{x}_{t_0}$, isso significa que as trajetórias de um sistema dinâmico nunca se cruzam. Essa observação é importante quando se deseja fazer a *imersão* de um sinal, ou seja, reconstruir o atrator a partir de uma série temporal.

A seguir serão apresentadas definições referentes ao comportamento assintótico de sistemas dinâmicos.

2.1.2 Conjuntos ω e α limites

G. D. Birkhoff é conhecido na literatura como o maior continuador dos trabalhos de Poincaré (Holmes, 2005). Os conceitos a seguir foram definidos por Birkhoff, em 1922 (Monteiro, 2002).

Definição 2.1.1 (Ponto ω limite) *Um ponto $\mathbf{q}$ é um ponto ω -limite de um ponto $\mathbf{p}$ se existe uma seqüência $\phi(t_1, t_0, \mathbf{p})$, $\phi(t_2, t_0, \mathbf{p})$, ... de maneira que $\phi(t, t_0, \mathbf{p}) \rightarrow \mathbf{q}$ quando $t \rightarrow \infty$.*

O conjunto de todos os pontos ω -limite de um sistema é chamado de conjunto ω -limite e é denotado por $\omega(\mathbf{p})$.

Definição 2.1.2 (Ponto α limite) *Um ponto $\mathbf{q}$ é um ponto α -limite de um ponto $\mathbf{p}$ se existe uma seqüência $\phi(t_1, t_0, \mathbf{p})$, $\phi(t_2, t_0, \mathbf{p})$, ... de maneira que $\phi(t, t_0, \mathbf{p}) \rightarrow \mathbf{q}$ quando $t \rightarrow -\infty$.*

De maneira similar, o conjunto de todos os pontos α -limite de um sistema é chamado de conjunto α -limite e é denotado por $\alpha(\mathbf{p})$. O conjunto $\omega(\mathbf{p})$ está diretamente relacionado ao regime permanente de um sistema dinâmico.

As definições a seguir estão relacionadas diretamente com os regimes de um sistema. Esse conceito será um dos elementos chave para que seja realizada a reconstrução da dinâmica dos sistemas.

2.1.3 Atrator

A seguir o conceito de atrator é definido como em Wiggins (1990).

Definição 2.1.3 (Conjuntos invariantes) *Seja um conjunto $S \in \mathbb{R}^n$. Esse conjunto é dito invariante em relação ao sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ se para qualquer $\mathbf{x}(t_0) \in S$, $\phi(t, t_0, \mathbf{x}_{t_0}) \in S \forall t \in \mathbb{R}$.*

Definição 2.1.4 (Conjunto atrativo) *Um conjunto invariante fechado $S \subset \mathbb{R}^n$ é chamado um conjunto atrativo se há alguma vizinhança U de S tal que $\forall \mathbf{x}_U \in U$, $\forall t \geq 0$, $\phi(t, t_0, \mathbf{x}_U) \in U$ e $\phi(t, t_0, \mathbf{x}_U) \rightarrow S$ quando $t \rightarrow \infty$.*

Definição 2.1.5 (Bacia de atração) *O domínio ou bacia de atração de S é dado por $\bigcup \phi(t, t_0, \mathbf{x}_U)$.*

Definição 2.1.6 (Transitividade topológica) *Um conjunto fechado invariante S é dito ser topologicamente transitivo se, para qualquer dois conjuntos abertos relativos $U, V \subset S$, $\exists t \in \mathbb{R} \mid \phi(t, t_0, \mathbf{x}_U) \cap V \neq \emptyset$.*

Definição 2.1.7 (Atrator) *Um atrator é um conjunto atrativo topologicamente transitivo.*

2.1.4 Atratores em $\mathbb{R}^3$

Atratores são particularmente importantes no estudo e análise de sistemas dinâmicos não-lineares. Em geral, a análise de sistemas dinâmicos começa por um atrator de dimensão zero chamado ponto fixo.

Ponto fixo

O ponto fixo é todo ponto que satisfaz $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}, \forall t$, sendo $\bar{\mathbf{x}}$ um vetor constante. A determinação de pontos fixos, seja analiticamente (Monteiro, 2002), ou por meio de estimação (Aguirre e Souza, 1998), é um tópico de grande relevância, uma vez que a análise de estabilidade local de sistemas é feita em torno desses pontos.

Para sistemas contínuos, os pontos fixos são as soluções de:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.4)$$

A equação (2.4) mostra que ponto fixo, que tem dimensão zero, é todo ponto em que a taxa de variação $\mathbf{x}$ no tempo é nula.

Ciclo limite

O ciclo limite é um objeto de dimensão 1. No domínio do tempo é caracterizado por um comportamento oscilatório. A seguir é apresentada a definição ciclo limite (Monteiro, 2002).

Definição 2.1.8 (Ciclo limite) *Um ciclo limite é uma órbita associada a uma trajetória fechada e isolada, que pode aparecer no retrato de fases de sistemas não-lineares.*

Trajetória isolada significa ausência de outras trajetórias fechadas infinitesimalmente próximas. Um exemplo de ciclo limite é mostrado na Figura 2.2 (a). O ciclo limite foi produzido pelo circuito de Chua (Chua, 1992). Esse regime foi obtido para valor de parâmetro $R = 0,617$. O parâmetro R é o valor do resistor do circuito de Chua.

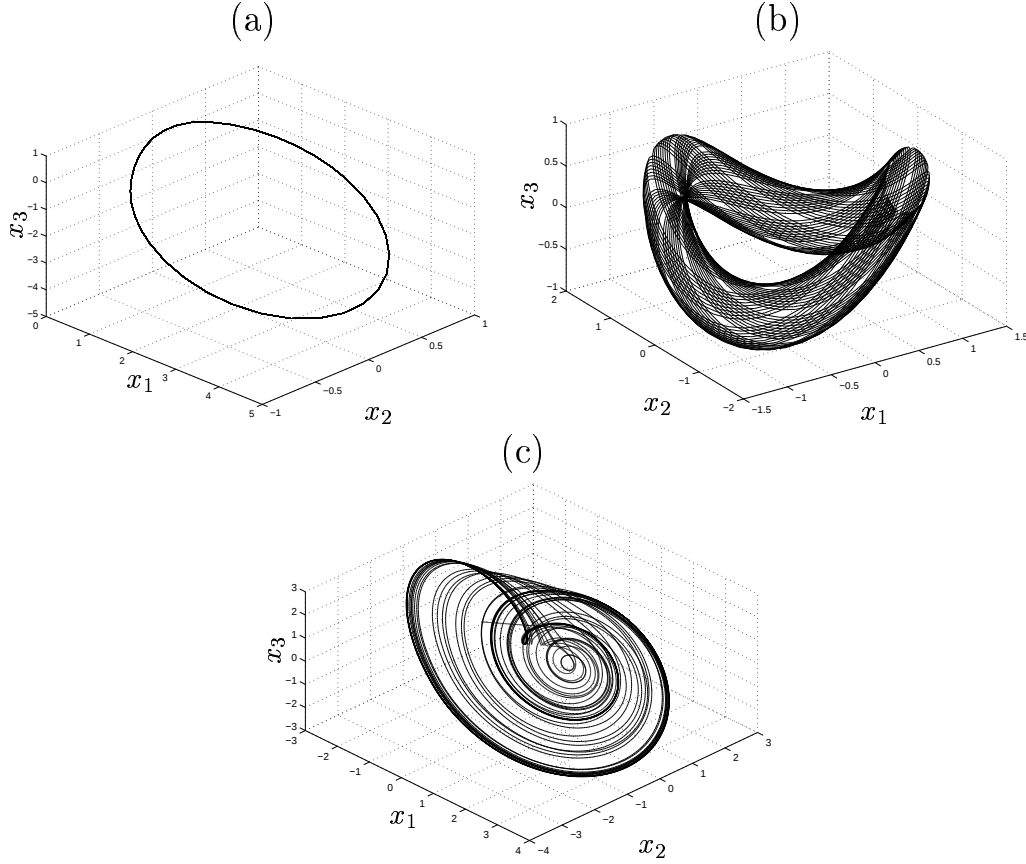


Figura 2.2: (a) Ciclo limite apresentado pelo sistema de Chua para valor do parâmetro $R = 0,617$ (b) Superfície toroidal obtida pela sistema A de Sprott para condição inicial $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$ (c) comportamento caótico produzido pelo sistema de Shil'nikov para valor de parâmetro $b = 0,82$.

Superfície toroidal

Esse regime é caracterizado por comportamento periódico ou quase-periódico. A principal distinção que se faz em relação ao ciclo limite é que, nesse caso, o regime é composto por duas frequências fundamentais independentes cuja razão é irracional. O atrator resultante desse comportamento é o toro, que é um objeto de dimensão 2. A Figura 2.2(b) mostra uma superfície toroidal do sistema A de Sprott

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 x_3 \\ \dot{x}_3 = 1 - x_2^2 \end{cases}$$

A superfície toroidal é obtida quando a condição inicial é $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$.

Atrator estranho

O regime caótico é caracterizado pela aparente irregularidade no domínio do tempo e pela impossibilidade de se fazer previsões a longo prazo. De maneira mais estrita caracteriza-se o regime caótico por espectro de frequências contínuo, dimensão do atrator fracionária, sensibilidade a condições iniciais (Fiedler-Ferrara e Prado, 1994). Na figura 2.2 (c) é apresentado um exemplo de atrator estranho produzido pelo sistema de Shil'nikov

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_2 - 0,3375x_3 + f_c(x_1). \end{cases}$$

sendo,

$$f_c(x_1) = \begin{cases} 1 - bx_1, & \text{se } x_1 > 0 \\ 1 + 0,633625x_1, & \text{se } x_1 \leq 0. \end{cases}$$

2.1.5 Estabilidade de pontos fixos

Em termos gerais, diz-se que um sistema é estável se, para qualquer condição inicial $\mathbf{x}(t_0)$ próxima de um ponto fixo $\bar{\mathbf{x}}$, o sistema permanece próximo ao ponto fixo para qualquer tempo posterior a t_0 . No caso de estabilidade assintótica o sistema converge ao ponto fixo quando o tempo tende a infinito. A seguir essas idéias são formalizadas como em Wiggins (1990).

Estabilidade de Lyapunov

Um ponto fixo $\bar{\mathbf{x}}$ é estável se, dado um $\epsilon > 0$ existe um $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tais que, para qualquer outra solução $\phi(t)$, da equação (2.1), que satisfaz $\|\bar{\mathbf{x}} - \phi(t_0, t_0, \mathbf{x}_{t_0})\| < \delta$, então $\|\bar{\mathbf{x}} - \phi(t, t_0, \mathbf{x}_{t_0})\| < \epsilon$ para $t > t_0$, $t_0 \in \mathbb{R}$.

Estabilidade assintótica

Um sistema será assintoticamente estável se o ponto fixo $\bar{\mathbf{x}}$ é estável no sentido de Lyapunov e se existe uma constante $b > 0$ tal que, se $\|\bar{\mathbf{x}} - \phi(t_0, t_0, \mathbf{x}_{t_0})\| < b$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{\mathbf{x}} - \phi(t, t_0, \mathbf{x}_{t_0})\| = 0$.

Determinação de estabilidade

Sistemas lineares autônomos invariantes em tempo contínuo têm a seguinte forma funcional:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}. \quad (2.5)$$

Para uma análise da estabilidade desses sistemas basta calcular os autovalores da matriz A . Têm-se três situações possíveis em se tratando da estabilidade:

1. assintoticamente estável: todos os autovalores possuem parte real negativa;
2. estável no sentido de Lyapunov: não tem autovalor algum com parte real positiva;
3. instável: pelo menos um dos autovalores possui parte real positiva.

Associado aos autovalores tem-se uma outra informação importante sobre o sistema, a geometria do retrato de fases em torno dos pontos fixos. Essa geometria conduz a uma classificação de pontos fixos. Detalhes sobre essa classificação podem ser encontrados em (Fiedler-Ferrara e Prado, 1994). A Figura 2.3 mostra trajetórias de diferentes retratos de fases bidimensionais. Na Figura 2.4 são mostradas trajetórias no espaço tridimensional. Em traço fino, trajetórias contidas em conjuntos invariantes tratados na próxima subseção. A linha cheia mostra trajetórias contidas em conjuntos invariantes do mesmo sistema após serem alterados os autovetores. Essa ilustração revela que os autovetores determinam as direções dos conjuntos invariantes associados a cada autovalor. Ou seja, autovetores determinam as direções de estabilidade local de um sistema. Esses conjuntos invariantes, as variedades, são tratados na próxima subseção.

Linearização

No caso de sistemas não-lineares, uma alternativa para análise de estabilidade local é linearizar o sistema em torno dos pontos fixos.

Dada uma região em torno de um ponto fixo $\mathbf{p}_g$,

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}_g + \mathbf{y}. \quad (2.6)$$

Substituindo a equação (2.6) em (2.1) e expandindo usando série de Taylor em torno do ponto fixo $\mathbf{p}_g$, resulta em:

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{p}}_g + \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{p}_g) + \mathbf{J}(\mathbf{p}_g)\mathbf{y} + O(\|\mathbf{y}\|^2), \quad (2.7)$$

sendo $O(\|\mathbf{y}\|^2)$ os termos de ordem maior ou igual a dois na expansão de Taylor. Usando $\mathbf{f}(\mathbf{p}_g) = 0$, a equação (2.7) torna-se:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}(\mathbf{p}_g)\mathbf{y} + O(\|\mathbf{y}\|^2). \quad (2.8)$$

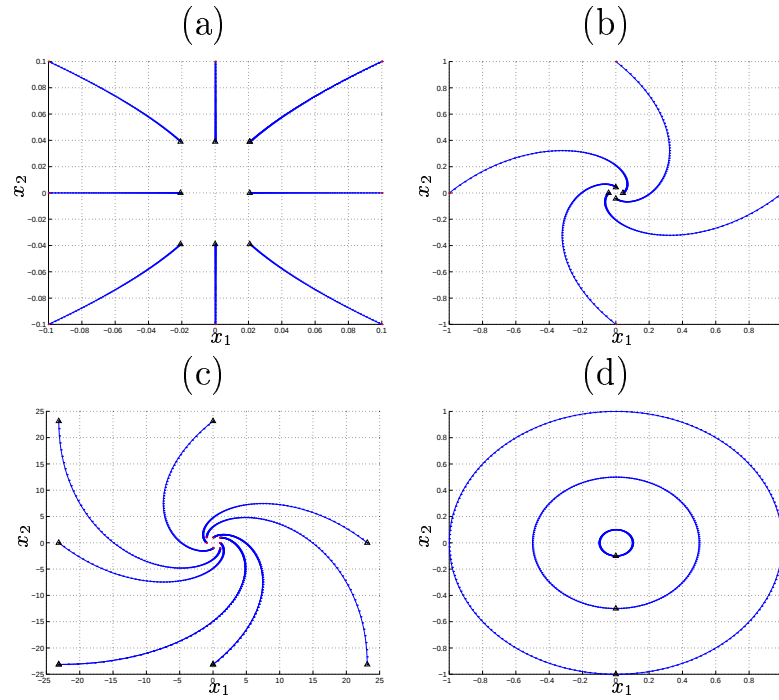


Figura 2.3: Trajetórias dos diferentes retratos de fases bidimensionais. (a) Nó estável (b) foco estável (c) foco instável (d) centro.

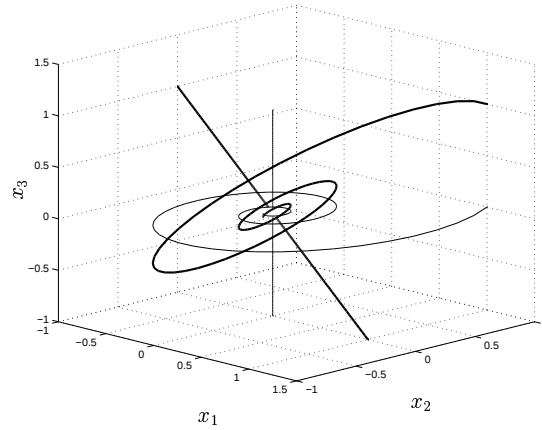


Figura 2.4: Trajetórias no espaço tridimensional. Em traço fino, trajetórias contidas em conjuntos invariantes (variedades dos pontos fixos). A linha cheia mostra trajetórias contidas em conjuntos invariantes do mesmo sistema após serem alterados os autovetores.

Tomando apenas o termo linear da expansão tem-se então o seguinte sistema linear associado:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}(\mathbf{p}_g)\mathbf{y}, \quad (2.9)$$

sendo $\mathbf{J}(\mathbf{p}_g)$ a matriz jacobiana avaliada no ponto fixo $\mathbf{p}_g$. A matriz jacobiana é definida como

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{df_1(\mathbf{x})}{dx_1} & \frac{df_1(\mathbf{x})}{dx_2} & \cdots & \frac{df_1(\mathbf{x})}{dx_n} \\ \frac{df_2(\mathbf{x})}{dx_1} & \frac{df_2(\mathbf{x})}{dx_2} & \cdots & \frac{df_2(\mathbf{x})}{dx_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_n(\mathbf{x})}{dx_1} & \frac{df_n(\mathbf{x})}{dx_2} & \cdots & \frac{df_n(\mathbf{x})}{dx_n} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Dessa aproximação surge uma importante pergunta a ser respondida antes de se utilizar a equação (2.9) para análise de estabilidade: em que condições pode-se garantir equivalência local entre o sistema não-linear e o sistema linearizado? Isto é, a aproximação linear é suficiente para descrever o sistema não-linear em torno dos pontos fixos?

O seguinte teorema responde a essa pergunta.

Teorema 2.1.2 (Hartman-Grobman) *Se a matriz jacobiana de um sistema não-linear tomada em um ponto fixo, não possuir autovalores nulos ou puramente imaginários, então existe uma função h (homeomorfismo) definida em alguma vizinhança do ponto fixo que localmente toma as órbitas do fluxo não-linear e as leva ao fluxo linear associado. O homeomorfismo preserva o sentido das órbitas e pode também ser escolhido para preservar a parametrização no tempo (Fiedler-Ferrara e Prado, 1994).*

Respeitada a condição do teorema acima, análise local de sistemas não-lineares em torno dos pontos fixos pode ser feita por meio da matriz jacobiana.

Na próxima subseção o conceito de variedade é abordado. Esse conceito é muito importante para o entendimento da reconstrução de atratores a ser tratada nos capítulos 4 e 5.

2.1.6 Variedades

O conceito completo de variedade é bastante amplo e seu tratamento completo foge ao escopo deste trabalho. Para uma introdução ao assunto veja (Lee, 2000). Dentro dos objetivos deste texto, variedade pode ser entendida como:

1. Contexto linear: O subconjunto E de um espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ é uma variedade linear de $\mathbb{R}^n$ quando $E = \{\mathbf{p} + S\}$ para algum vetor $\mathbf{p}$ de $\mathbb{R}^n$ e algum subespaço S de $\mathbb{R}^n$ (Kaplan, 1973). O vetor $\mathbf{p}$ é chamado um líder de E e o subespaço S é chamado espaço base de E .
2. Contexto não-linear: Uma superfície imersa no $\mathbb{R}^n$ que pode ser localmente representada como um gráfico de uma função (Wiggins, 1990).

Também é importante salientar que uma variedade possui localmente a mesma estrutura de $\mathbb{R}^n$. Ter a mesma estrutura significa que existem transformações locais de variáveis que tomam os pontos da variedade e levam aos pontos do espaço euclidiano de dimensão correspondente.

A terminologia usada para representar as variedades lineares estáveis, instáveis e central será E_p^{ed} , E_p^{id} e E_p^{cd} . Sendo d a dimensão da variedade, p o ponto fixo associado a variedade e “i”, “e” e “c” significam, respectivamente, os termos instável, estável e central.

Os exemplos que seguem fornecem uma visão geométrica do conceito de variedade. Será possível verificar que o ponto fixo é um ponto α -limite de qualquer ponto da variedade instável e, de maneira similar, é um ponto ω -limite de qualquer ponto da variedade estável.

Os três primeiros exemplos são de sistemas lineares. A Figura 2.5 apresenta simulações desses sistemas, observa-se em traço fino trajetórias contidas nas variedades e, em linha cheia, trajetórias com condição inicial fora das variedades.

O primeiro tem a seguinte equação

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Esse sistema linear apresenta uma variedade linear estável e uma variedade linear instável,

$$\begin{aligned} E^{e2} &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3(0) = 0\}, \\ E^{i1} &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1(0) = x_2(0) = 0\}. \end{aligned}$$

A Figura 2.5 (a) mostra trajetórias desse sistema. O segundo sistema é descrito abaixo,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Nesse sistema linear tem-se duas variedades lineares estáveis e uma variedade linear instável,

$$\begin{aligned} E_{11}^{e1} &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \mid x_2(0) = x_3(0) = 0\}, \\ E_{12}^{e1} &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \mid x_1(0) = x_3(0) = 0\}, \\ E_1^{i1} &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \mid x_1(0) = x_2(0) = 0\}. \end{aligned}$$

As trajetórias desse sistema são mostradas na Figura 2.5 (b). O sistema da Figura 2.5 (c) é descrito como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

O sistema (2.11) apresenta as variedades

$$\begin{aligned} E^{c1} &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \mid x_3(0) = 0\}, \\ E^{i2} &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1(0) = x_2(0) = 0\}. \end{aligned}$$

O chaveamento de poucos sistemas lineares pode resultar em comportamentos complicados. A Figura 2.6 mostra um atrator estranho produzido pelo oscilador de Chua (1992). Esse oscilador é composto localmente por um sistema linear e dois sistemas afins. Em traço fino, mostram-se trajetórias contidas nas variedades dos pontos fixos. Neste sistema, as variedades são localmente lineares. Em linha cheia, o atrator estranho dupla volta do circuito de Chua. Os valores para simulação foram extraídos de Kennedy (1992).

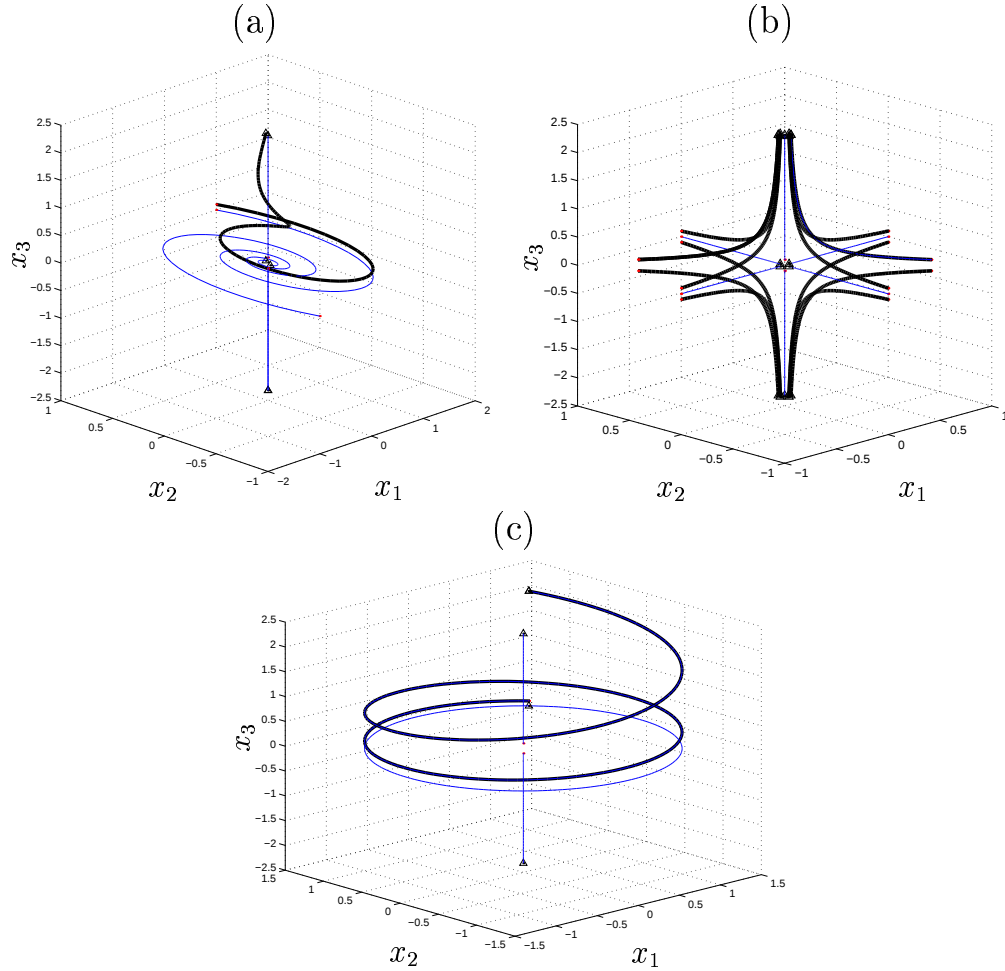


Figura 2.5: Trajetórias de retratos de fases referentes aos seguintes pontos fixos: (a) ponto fixo sela-foco (b) ponto fixo sela-nó (c) Ponto fixo centro. Como pode ser verificado, trajetórias que não partem das variedades apresentam um comportamento que é uma combinação do comportamento nas variedades. Em linha cheia, trajetórias que partem de condições iniciais fora das variedades. Em traço fino, trajetórias contidas nas variedades.

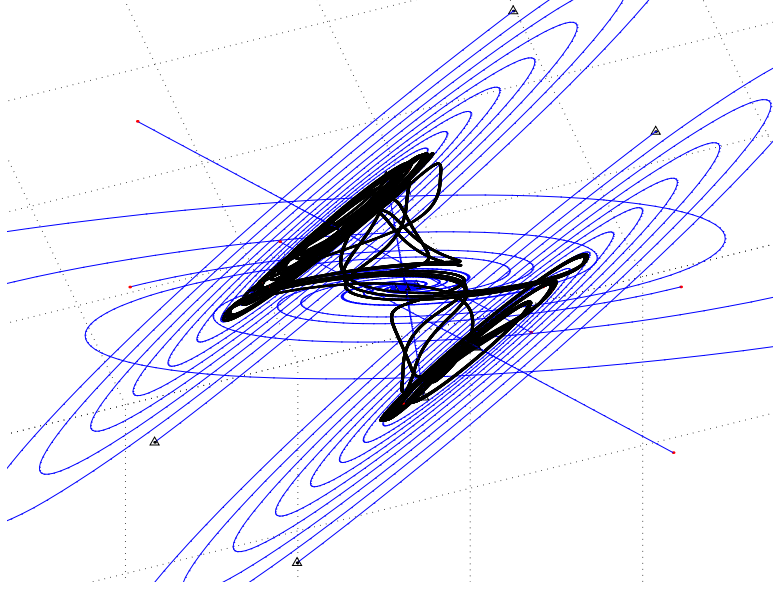


Figura 2.6: Atrator caótico dupla volta obtido pela combinação de variedades lineares de 3 pontos fixos sela-foco. Os pontos fixos simétricos apresentam variedades E^{e1} e E^{i2} , e o ponto fixo trivial E^{i1} e E^{e2} . As trajetórias contidas nas variedades estão em traço fino e o atrator em linha cheia.

A seguir, um exemplo de variedade não-linear quadrática (Hale e Koçak, 1991). Seja o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = +x_1^2 + x_2. \end{cases}$$

As soluções analíticas para esse sistema são:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(0)e^{-t}, \\ x_2(t) &= -\frac{1}{3}x_1(0)^2e^{-2t} + \left(\frac{1}{3}x_1(0)^2 + x_2(0)\right)e^t. \end{aligned} \quad (2.12)$$

As variedades de (2.12) são:

$$W^{e1} = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \mid x_2(0) = -\frac{1}{3}x_1(0)^2 \right\}, \quad (2.13)$$

$$E^{i1} = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \mid x_1(0) = 0 \}, \quad (2.14)$$

sendo, W^{e1} a variedade não-linear estável e E^{i1} a variedade linear instável, ambas de dimensão 1. A Figura 2.7 mostra trajetórias de (2.12).

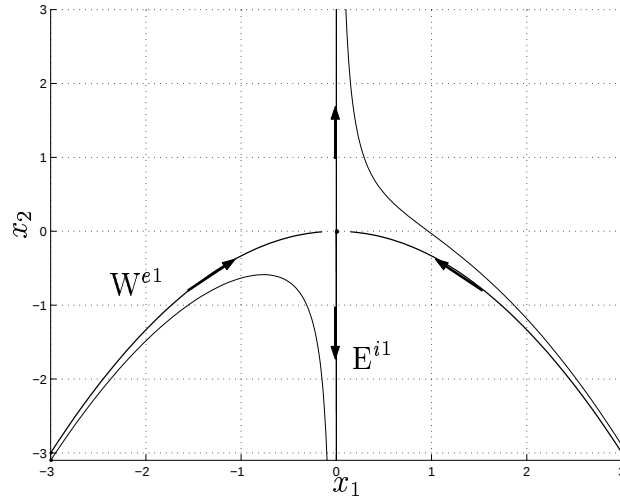


Figura 2.7: A variedade instável é linear e a variedade estável é uma função quadrática.

2.2 Ferramentas de análise

Nesta seção serão brevemente abordadas algumas ferramentas de análise de sistemas dinâmicos não-lineares, a saber: imersão, seção de Poincaré e diagrama de bifurcação. Uma revisão sobre o assunto é encontrada em (Fiedler-Ferrara e Prado, 1994; Monteiro, 2002).

Imersão

Geralmente, em se tratando de problemas reais, é comum que se tenha acesso a apenas uma das variáveis de estado do sistema. A técnica utilizada para reconstruir o atrator, por meio de uma série temporal $x(k)$, é conhecida como *imersão*. Tomando a série $x(k)$ e a série de valores passados $x(k - \tau)$ é possível obter uma reconstrução da topologia do atrator do sistema e em caso de baixa dimensão pode-se ter uma idéia até mesmo da dimensão do atrator (Packard et al., 1980). Essa equivalência entre as variáveis de estado e as coordenadas de atraso foi provada por Takens (1981). A Figura 2.8 ilustra o procedimento. Foi tomada a variável x_1 do sistema de Rössler para valores de parâmetros $(a; b; c) = (0,432; 2; 4)$. Faz-se a reconstrução do atrator desenhando um gráfico que relaciona $x(k)$ e $x(k - \tau)$, sendo τ o atraso de tempo. As Figuras 2.8(b) e (d) mostram casos de reconstruções inadequadas. Para $\tau = 10$ verifica-se equivalência entre o atrator da Figura 2.8(a) e a reconstrução da Figura 2.8(c).

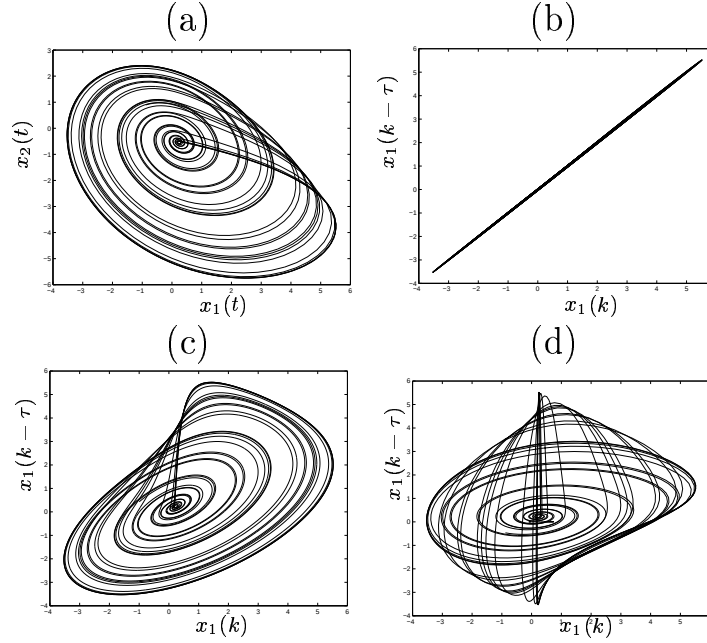


Figura 2.8: Imersão da série temporal da variável x_1 do sistema de Rössler (a) projeção do atrator de Rössler no plano x_1x_2 (b) Imersão feita com $\tau = 1$ (c) Imersão feita com $\tau = 10$ (d) Imersão feita com $\tau = 50$.

É interessante observar que um atraso de tempo “baixo” para um determinado sistema pode não fornecer informação sobre a topologia do atrator. Quando o atraso é aumentado, verifica-se que é produzido um atrator reconstruído com as mesmas características topológicas que o atrator original, desde que seja atendida uma condição de dimensão do espaço de imersão. Para valor de atraso “muito alto”³ o sistema reconstruído perde a informação do atrator, ou seja, a topologia reconstruída não é equivalente.

A reconstrução por coordenadas de atraso não é a única forma de reconstrução de atratores, também podem ser citadas imersão por espaço de fases diferenciais, decomposição por valor singular, entre outras.

Seção de Poincaré

A seção de Poincaré consiste na intersecção entre trajetórias de um sistema e um plano que corta o fluxo de maneira transversal. O uso de seção de Poincaré proporciona redução de dimensionalidade de um problema. Por exemplo, um sistema tridimensional contínuo é reduzido para um sistema bidimensional discreto na seção de Poincaré. Um ponto im-

³Os termos *muito alto*, *alto*, *baixo* dependem da taxa de amostragem do sistema.

portante a se observar na construção de uma seção de Poincaré é que as trajetórias devem cruzar o plano que determina a seção sempre no mesmo sentido. A Figura 2.9 (a) mostra o atrator de Rössler sendo seccionado por duas seções de Poincaré. As Figuras 2.9 (b) e (c) mostram as referidas seções. A seção de Poincaré da Figura 2.9(b) pode ser definida como $P_1 = \{(x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0,1236 \text{ e } \dot{x}_1 > 0\}$. A outra seção Figura 2.9(c) foi definida como $P_2 = \{(x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = -0,4689 \text{ e } \dot{x}_2 > 0\}$.

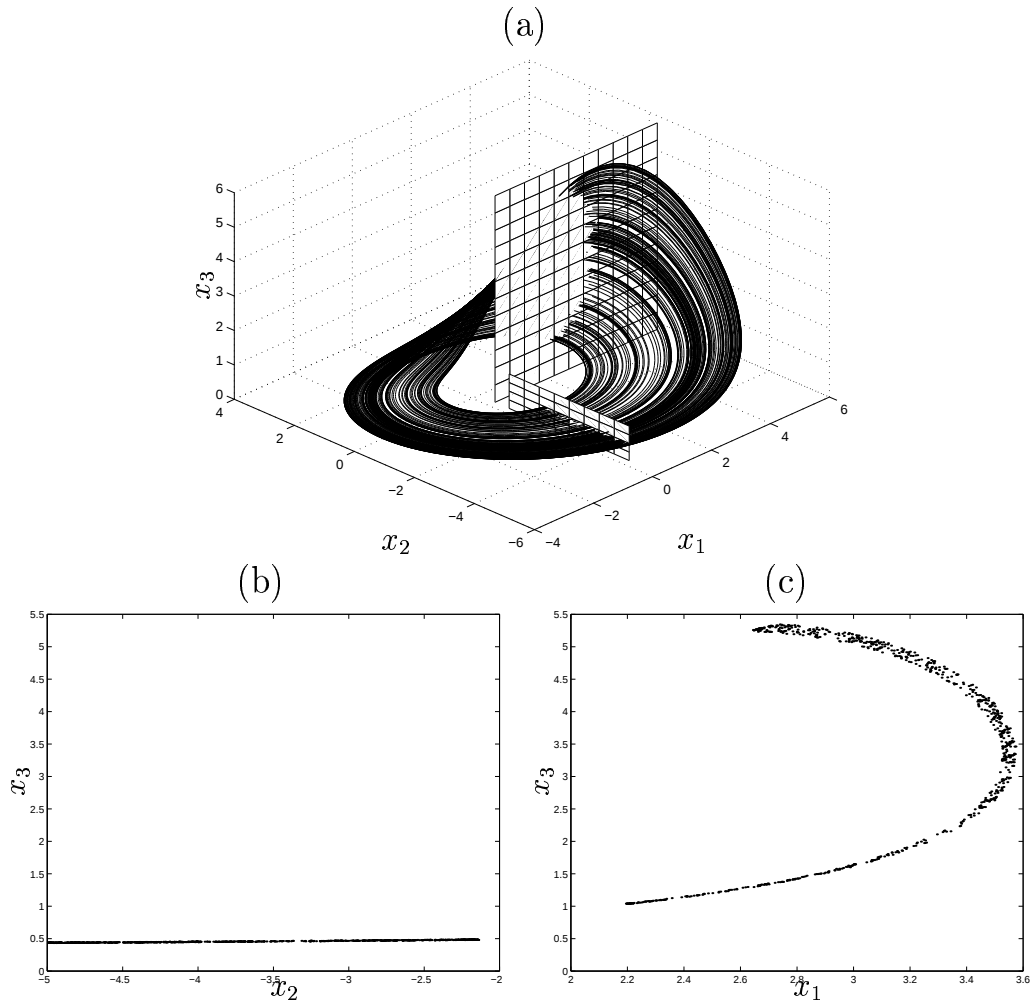


Figura 2.9: (a) Atrator do sistema de Rössler e seções de Poincaré (b) Seção de Poincaré em $x_1 = 0,1236$ e $\dot{x}_1 > 0$ (c) Seção de Poincaré em $x_2 = -0,4689$ e $\dot{x}_2 > 0$. Os valores tomados para x_1 e x_2 são as coordenadas de do ponto fixo envolvido pelo atrator caótico.

2.2.1 Bifurcação local

Apenas será abordada bifurcação de pontos fixos. A bifurcação de ciclos pode ser estudada, em muitos casos, utilizando seções de Poincaré, o que reduz a análise ao estudo da bifurcação de pontos fixos do mapa de Poincaré.

Foi Poincaré quem introduziu o termo em 1885, referindo-se à mudança qualitativa do retrato de fases de um sistema dinâmico quando um parâmetro μ passa por um valor crítico (Monteiro, 2002). O conceito também pode ser entendido como uma mudança da estabilidade e ou do número de pontos fixos reais de um sistema. O número total de pontos fixos (reais e complexos) de um sistema é um invariante topológico (Gilmore e Lefranc, 2002).

Diferentes padrões de bifurcação e suas respectivas formas normais⁴ são comentados abaixo. A análise de estabilidade pode ser encontrada em Fiedler-Ferrara e Prado (1994).

Bifurcação sela-nó: Esta bifurcação é marcada pela variação do número de pontos fixos reais. Antes da bifurcação não há nenhum ponto fixo real, após a bifurcação aparecem um ponto fixo estável e um ponto fixo instável.

Forma normal: $\dot{x} = \mu - x^2$.

Bifurcação transcritical: Na bifurcação transcritical não há variação do número de pontos fixos reais, o que ocorre é mudança de estabilidade dos pontos fixo após a bifurcação.

Forma normal: $\dot{x} = \mu x - x^2$.

Bifurcação forquilha: A bifurcação forquilha apresenta mudança tanto no número quanto na estabilidade de pontos fixos reais. Pode ser de dois tipos:

- **supercrítica** $\rightarrow$ Na supercrítica há o ponto fixo trivial estável antes da bifurcação. Após a bifurcação o ponto trivial torna-se instável e além desse ponto aparecem dois outros simétricos e estáveis.

Forma normal: $\dot{x} = \mu x - x^3$.

- **subcrítica** $\rightarrow$ Na subcrítica há dois pontos simétricos instáveis e o ponto fixo trivial estável antes da bifurcação. Após a bifurcação apenas encontra-se o ponto fixo trivial instável.

Forma normal: $\dot{x} = \mu x + x^3$.

Na Figura 2.10 são mostrados diagramas de bifurcação de sistemas que apresentam bifurcações sela-nó, transcritical e forquilha.

⁴A forma normal de um campo vetorial é a forma mais simples em que se pode reescrevê-lo, por meio de polinômios, de modo a ainda ser possível reproduzir o retrato de fases (Monteiro, 2002).

Diagrama de bifurcação

O diagrama de bifurcação é um gráfico que relaciona o parâmetro de bifurcação e o comportamento estacionário da saída do sistema. É uma ferramenta utilizada na análise do comportamento de um sistema em uma faixa de valores do parâmetro de bifurcação. Por isso mesmo, essa ferramenta vem sendo utilizada como método de validação de modelos em identificação de sistemas dinâmicos não-lineares (Aguirre e Billings, 1994; Corrêa et al., 1999).

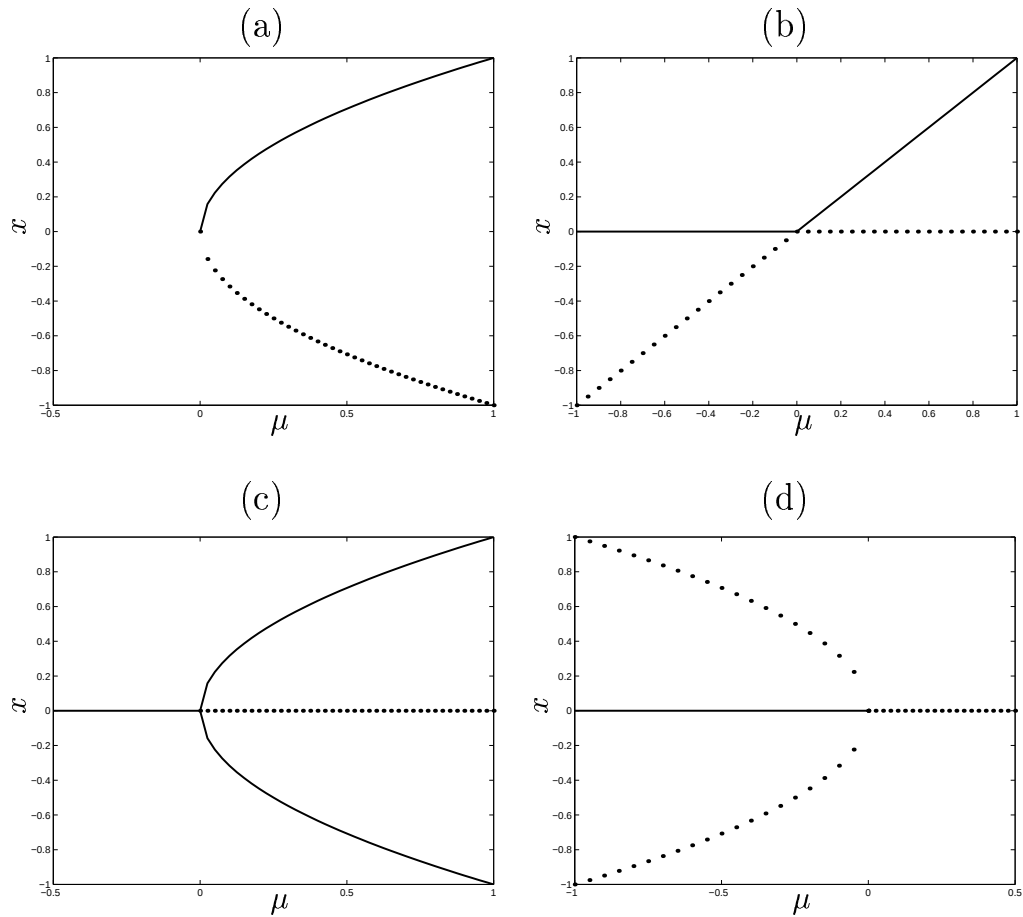


Figura 2.10: Diagramas de bifurcação: (a) bifurcação sela-nó (b) bifurcação transcritical (c) bifurcação forquilha supercrítica (d) bifurcação forquilha subcrítica.

2.3 Dinâmica global

Nesta seção são abordados alguns aspectos de dinâmica global, bem como de bifurcações globais.

2.3.1 Órbitas homoclínicas e heteroclínicas

A verificação da presença ou ausência de órbitas homoclínicas e heteroclínicas é uma importante informação para o estudo global de sistemas dinâmicos não-lineares.

Órbitas homoclínicas são órbitas de um ponto de sela que ligam o ponto a si mesmo, isto é, a trajetória $\phi(t)$ tende ao ponto fixo $\mathbf{p}$ quando $t \rightarrow \pm\infty$. Tais órbitas são parte de uma variedade estável e parte de uma variedade instável do mesmo ponto fixo. Exemplo dessa órbita é mostrado na Figura 2.11. Essa órbita homoclínica é obtida pelo sistema de Shil'nikov.

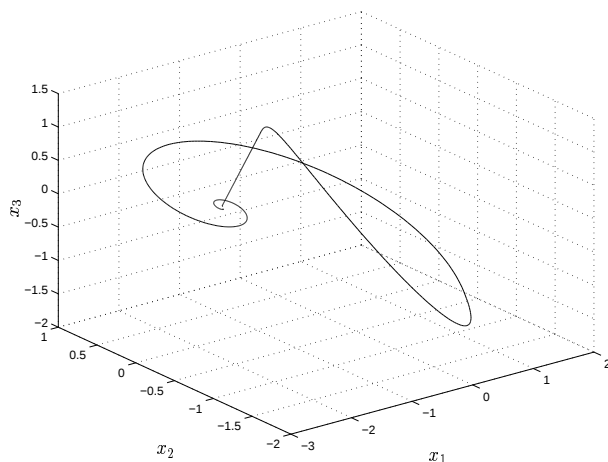


Figura 2.11: Órbita homoclínica do sistema de Shil'nikov.

Shil'nikov provou que a existência de caos pode ser provada rigorosamente se entre pontos fixos sela-foco existirem conexões homoclínicas ou heteroclínicas (Silva, 1993).

As órbitas heteroclínicas são conexões entre variedades de diferentes pontos fixos. A trajetória $\phi(t)$ tende ao ponto fixo $\mathbf{p}_1$ quando $t \rightarrow +\infty$ e tende ao ponto fixo $\mathbf{p}_2$ quando $t \rightarrow -\infty$. Nesse caso a órbita é parte de uma variedade estável de um ponto fixo e uma variedade instável de outro ponto fixo. Órbitas heteroclínicas são mostradas na Figura 2.12. As trajetórias da Figura 2.12 foram geradas pelas equações do pêndulo não-linear (Fiedler-Ferrara e

Prado, 1994)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 \sin(x_1) \end{cases}$$

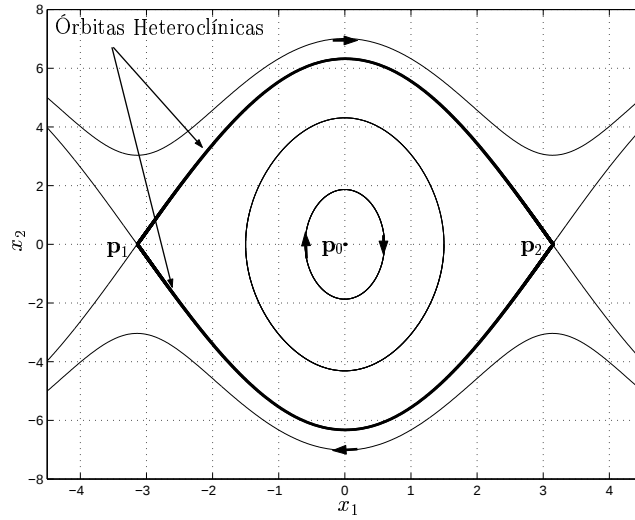


Figura 2.12: Conexões heteroclínicas ligando os pontos fixos $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ do pêndulo não-linear. O parâmetro foi ajustado em $\omega = \sqrt{10}$.

Há outro conceito relacionado a essas órbitas que é o de separatriz. A separatriz divide o retrato de fases em regiões com diferentes comportamentos. O modelo que gerou as trajetórias da Figura 2.13

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_1^2 \end{cases} \quad (2.15)$$

é conhecido como peixe, devido à forma de seu retrato de fases (Hale e Koçak, 1991). Na Figura 2.13 verificam-se dois comportamentos distintos. O sistema (2.15) linearizado em torno do ponto fixo trivial $\mathbf{x} = [0 \ 0]^T$ possui dois autovalores reais, um positivo e um negativo (sela). Por isso, o ponto trivial é instável. O ponto $\mathbf{x} = [1 \ 0]^T$ apresenta autovalores puramente complexos no sistema linearizado o que caracteriza um centro. A órbita homoclínica separatriz divide essas duas regiões.

A seguir bifurcações globais são discutidas.

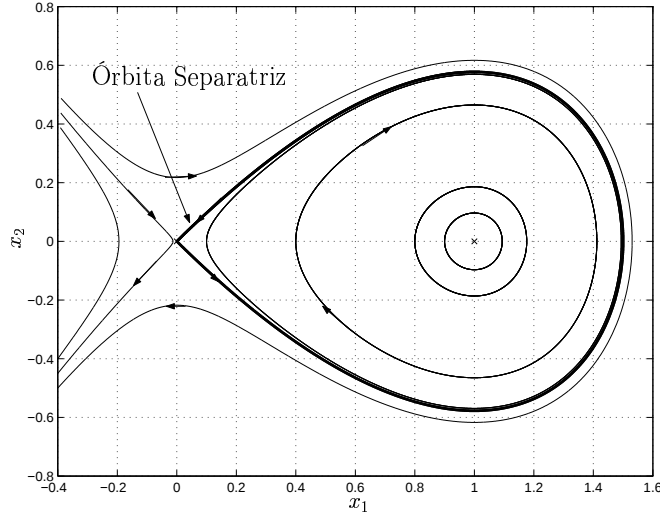


Figura 2.13: A órbita homoclínica (linha grossa) separa a região de comportamento periódico da região instável do retrato de fases.

2.3.2 Bifurcações globais

As bifurcações globais tratadas neste trabalho são as bifurcações homoclínicas e heteroclínicas. Essas bifurcações recebem esse nome pois consistem na quebra ou na formação de uma conexão homoclínica ou heteroclínica. Essa quebra (formação) produz uma mudança no comportamento global do sistema. As bifurcações homoclínicas e heteroclínicas são classificadas como bifurcações globais pois não podem ser previstas pelo cálculo de autovalores, ou seja, por meio de análise local (Monteiro, 2002).

As Figuras 2.14 e 2.15 mostram um exemplo de bifurcação homoclínica do sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_1^2 - x_2(x_1^3 - x_1^2 + x_2^2 - c). \end{cases} \quad (2.16)$$

Esse sistema apresenta ponto fixo trivial do tipo sela e um outro ponto fixo que é um foco instável. A estabilidade desses pontos não muda após a bifurcação homoclínica que acontece da Figura 2.14 para Figura 2.15. Como se vê na Figura 2.14, o sistema (2.16) é globalmente instável para $c = 0,1$. Para $c = 0$ forma-se uma conexão homoclínica entre as variedades do ponto fixo trivial. Os pontos interiores a essa conexão tendem à órbita homoclínica; conseqüentemente, tendem ao ponto trivial. O retrato de fases para essa condição é visto na Figura 2.15.

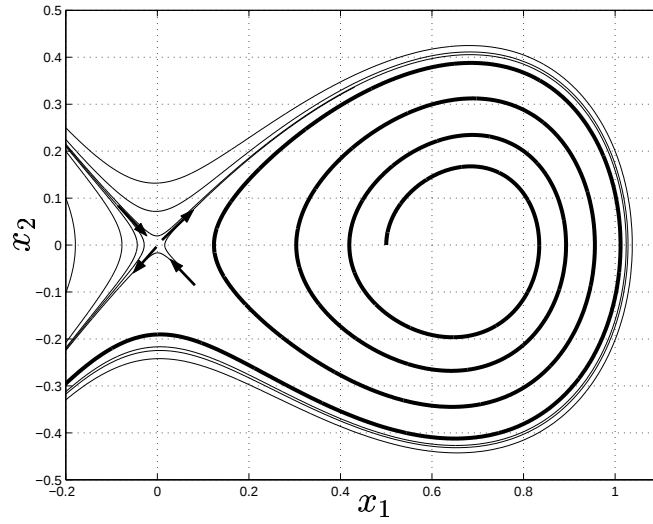


Figura 2.14: Retrato de fases do sistema (2.16) com parâmetro de bifurcação ajustado em $c = 0,1$.

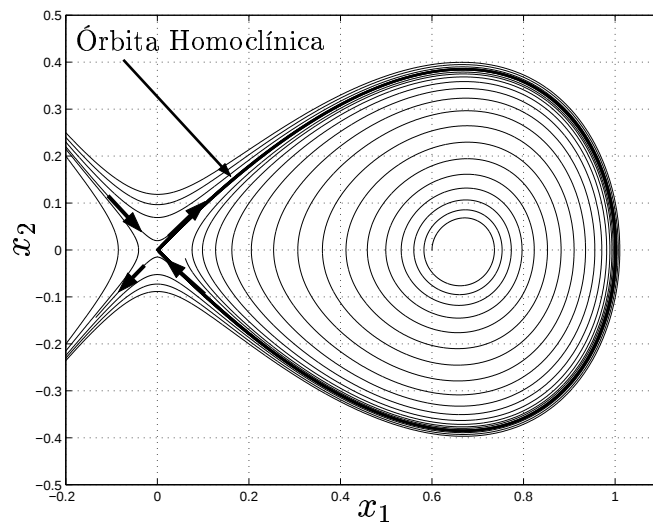


Figura 2.15: Retrato de fases do sistema (2.16) quando o parâmetro é ajustado em $c = 0$. Nesse caso verifica-se a formação de uma conexão homoclínica.

2.4 Análise topológica

Esta seção apresenta definições e ferramentas utilizadas na análise topológica de sistemas dinâmicos não-lineares caóticos. Essas ferramentas foram desenvolvidas para caracterizar atratores caóticos (Mindlin et al., 1990; Gilmore, 1998). Além de permitir uma caracterização da dinâmica, que é robusta à variação de parâmetros, a análise topológica vem sendo utilizada com sucesso na validação de modelos de sistemas caóticos (Papoff et al., 1992; Letellier et al., 1995b,c; Boulant et al., 1997; Letellier et al., 1998; Letellier, 2002).

O procedimento de análise topológica consiste em determinar uma figura bidimensional que descreve os mecanismos de expansão e contração do atrator (Birman e Williams, 1983). A essa figura dá-se o nome de padrão (*template*). A construção de padrões é feita por meio das informações extraídas da população de órbitas periódicas instáveis coexistentes com o atrator estranho. O primeiro passo no procedimento de análise topológica consiste em determinar uma seção de Poincaré do sistema e, por meio dessa seção, construir o mapa de primeiro retorno.

2.4.1 Mapa de primeiro retorno

O mapa de primeiro retorno consiste em um gráfico que relaciona pontos da seção de Poincaré. Dado um conjunto de pontos $y(k)$ de uma variável na seção de Poincaré, o mapa de primeiro retorno é construído tomando-se os valores de $y(k)$ e $y(k+1)$. Esse gráfico apresenta informações fundamentais para a análise topológica como, por exemplo, o número e a característica de cada símbolo que será utilizado para descrever as órbitas instáveis. Ao conjunto desses símbolos dá-se o nome de alfabeto. A condição para que esses símbolos sejam extraídos diretamente é que o mapa de primeiro retorno seja uma função injetora, isto é, cada valor da variável tenha um único valor (adiantado) associado. Se essas condições não são atendidas, estratégias de particionamento mais elaboradas devem ser empregadas (Lefranc et al., 1994; Plumecoq e Lefranc, 1994).

A cada região monotônica do mapa é associado um símbolo. Se a região for ascendente, o símbolo será par e, se descendente, ímpar. Cada um desses símbolos está diretamente relacionado com um dos ramos do padrão. Podem-se definir os ramos como sendo trajetórias que possuem propriedades topológicas semelhantes como, por exemplo, preservar ou inverter o sentido do fluxo. Ao ponto limite entre os ramos dá-se o nome de ponto crítico. O ponto crítico é o ponto em que a inclinação do mapa muda de sinal ou apresenta descontinuidade.

A Figura 2.16 apresenta o mapa de primeiro retorno do sistema de Rössler para valor do parâmetro $a = 0,398$. A variável utilizada para construção do mapa foi a variável y . O mapa apresenta um único ponto crítico y_c em $-3,2$. Como só há um ponto crítico e o mapa tem uma região ascendente e outra descendente, a codificação utilizada será 0 e 1. A codificação simbólica de um ponto y qualquer é feita da seguinte maneira

$$\begin{aligned} &0, \text{ se } y < y_c \text{ e} \\ &1, \text{ se } y \geq y_c. \end{aligned}$$

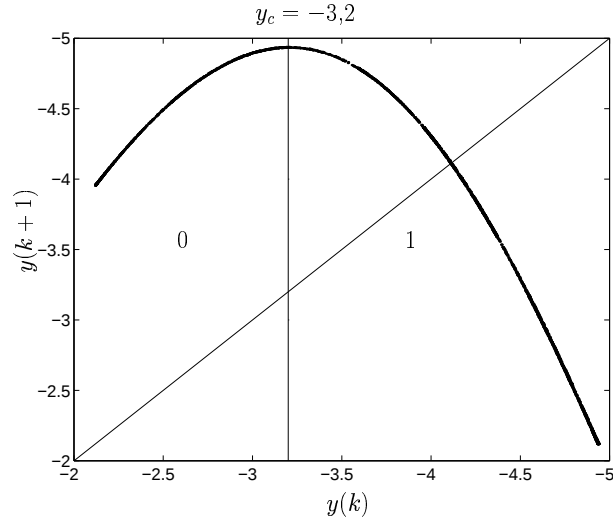


Figura 2.16: Mapa de primeiro retorno do sistema de Rössler para $a = 0,398$.

Além da codificação de órbitas periódicas instáveis, o mapa de primeiro retorno também pode ser utilizado para checar a propriedade de simetria de sistemas (Aguirre et al., 2004).

2.4.2 Órbitas periódicas instáveis

Um conjunto infinito de órbitas periódicas instáveis coexiste com o atrator caótico. O grande interesse na observação dessas órbitas é explicado pelo fato de ser possível extrair delas características invariantes do atrator caótico. Ou seja, as órbitas periódicas instáveis possuem os mesmos invariantes que o atrator caótico (Auerbach et al., 1987; Lathrop e Kostelich, 1989). Um dos invariantes topológicos que podem ser extraídos é o número de conexões. Esse invariante descreve o modo como as órbitas estão conectadas. Realizando a

análise em algumas órbitas de baixa ordem, é possível obter as características do atrator caótico.

As órbitas periódicas instáveis podem ser extraídas de um conjunto de dados de um regime caótico. O algoritmo para extração de órbitas periódicas instáveis foi implementado em ambiente FORTRAN 77 por P. Dutertre (Université de Rouen - França).

Extraídas as órbitas e uma vez construído o mapa de primeiro retorno, é feita a codificação. O conjunto de símbolos que codificam uma órbita periódica é chamado palavra. A Figura 2.17 apresenta a órbita 2101 extraída do conjunto de equações que descrevem o sistema de Rössler e os pontos da seção de Poincaré referentes a essa órbita. Cada ponto na seção de Poincaré é codificado pela ordem de visitação de cada região monotônica do mapa de primeiro retorno. O primeiro símbolo se refere ao ramo em que está situado o ponto e os demais símbolos os próximos ramos na seqüencia de cruzamento da órbita com a seção de Poincaré.

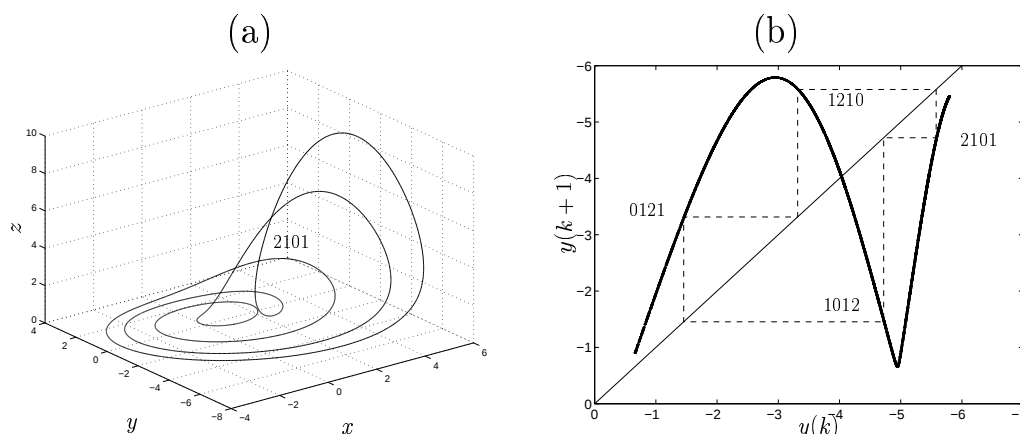


Figura 2.17: (a) Órbita 2101 do sistema de R ssler p/ $a = 0,52$ (b) Mapa de primeiro retorno e pontos da órbita 2101. Os pontos referentes à órbita são os pontos da linha tracejada que tocam o mapa

2.4.3 Número de conexão (*linking number*)

Esse invariante informa a maneira como as órbitas estão conectadas. Depois que as órbitas foram extraídas de um conjunto de dados,   possível calcular o número de conexão. Se o fluxo é projetado em um plano de projeção padr o⁵ então   possível observar cruzamentos entre trajetórias do fluxo.

⁵Plano de projeção padrão é aquele em que não há mais de duas trajetórias passando pelo mesmo cruzamento.



Figura 2.18: Convenção para cruzamento de órbitas periódicas instáveis.

O procedimento para calcular o número de conexões $L_k(o_1, o_2)$ entre as órbitas o_1 e o_2 é descrito em (Le Sceller et al., 1994). Primeiramente é necessário definir o número $\epsilon(p_i) = \pm 1$ do cruzamento de cada ponto de cruzamento p_i segundo a convenção adotada na Figura 2.18. O número de conexões é definido como

$$L_k(o_1, o_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \epsilon(p_i). \quad (2.17)$$

Esses cruzamentos podem ser contados automaticamente por meio de uma rotina desenvolvida em linguagem FORTRAN 77 por O. Ménard (Université de Rouen - França). A Figura 2.19 mostra o cruzamento entre as órbitas 210 e 2101. A rotina encontrou 14 cruzamentos, sendo um positivo o que resulta em um número de conexão igual -6.

2.4.4 Padrão (*template*)

O padrão é uma superfície ramificada conveniente para visualizar fluxos de sistemas dinâmicos caóticos. O padrão é composto basicamente por dois elementos que constroem a dinâmica não-linear, um processo de expansão e um processo de contração (Gilmore, 1998). Uma representação desses processos é mostrada na Figura 2.20. O mecanismo de expansão é obtido por um dos meios: dobra ou rasgo. Exemplos clássicos desses processos acontecem, respectivamente, nos sistemas de Rössler e de Lorenz.

O processo de contração de um atrator caótico acontece quando várias trajetórias se juntam na mesma região. Essa região é chamada de linha de ramificação.

As informações contidas no padrão podem ser agrupadas em 3 categorias:

- Torção local

Refere-se à torção que um ramo dá em torno de si mesmo. Pode ser determinado contando o número de cruzamentos entre duas trajetórias que cruzam o mesmo ramo.

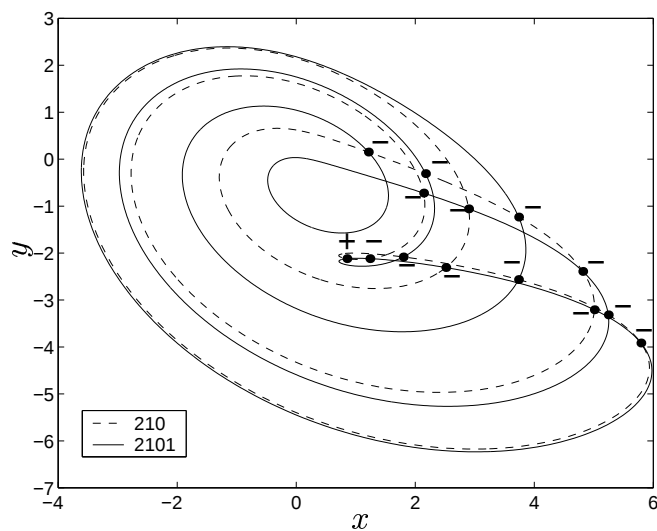


Figura 2.19: Cruzamentos entre as órbitas 210 e 2101. O sinal + representa cruzamentos positivos e o sinal - cruzamentos negativos.

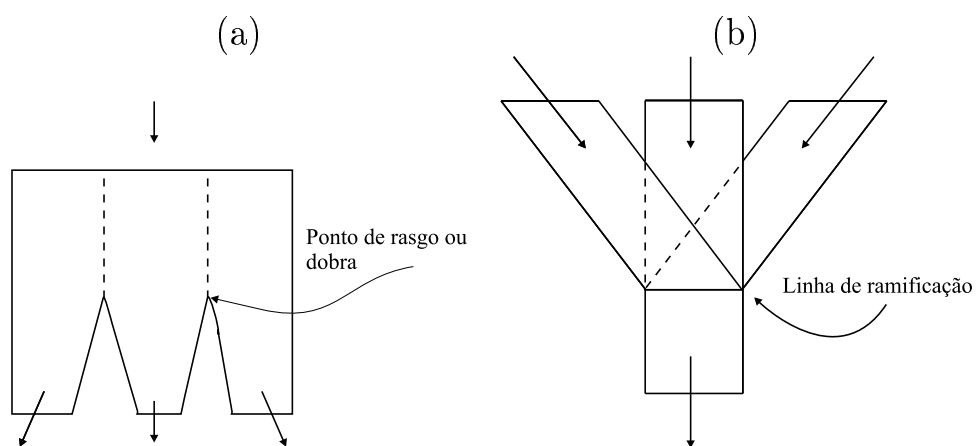


Figura 2.20: Mecanismos de construção de dinâmica caótica: (a) Processo de expansão (b) Processo de contração

- Torção entre ramos

Refere-se à torção que um ramo dá em torno de outro ramo. É determinado somando o número de cruzamentos entre os ramos.

- Ordem de inserção na linha de ramificação

Refere-se à ordem em que os ramos são inseridos na linha de ramificação. Nessa região também ocorrem cruzamentos.

A Figura 2.21 ilustra as diferentes regiões do padrão.

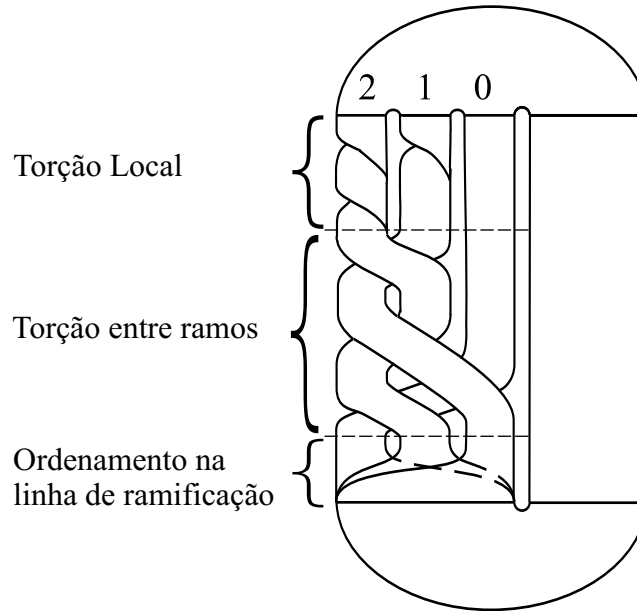


Figura 2.21: Padrão do sistema de Rössler para $a = 0,492$. Destacam-se as regiões em que acontecem cruzamentos.

2.4.5 Descrição algébrica do padrão

A descrição do padrão é feita por meio de números inteiros. Existem diferentes propostas de descrição do padrão; a que será apresentada aqui é sugerida em (Mindlin et al., 1990). O padrão é descrito por duas matrizes. A primeira delas fornece informação das torções. Os elementos da diagonal representam a torção local de cada ramo, enquanto os elementos fora da diagonal fornecem informação da torção entre ramos. A segunda matriz

descreve a ordem na qual os ramos são inseridos na linha de ramificação. Por exemplo, o padrão da Figura 2.21 é descrito pelas seguintes matrizes,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A matriz $\mathbf{M}$ significa que o ramo 0 não apresenta torção local, o ramo 1 tem uma torção local e o ramo 2, duas torções locais. O ramo 0 tem uma torção tanto com o ramo 1 quanto com o ramo 2 e os ramos 1 e 2 têm entre si 2 torções.

A ordem de inserção na linha de ramificação, segundo a matriz $\mathbf{L}$, será primeiro o ramo 1 em seguida o ramo 2 e por fim o ramo 0.

Os números de conexão e os elementos da matriz $\mathbf{M}$ estão relacionados pela seguinte relação (Le Sceller et al., 1994):

$$L_k(o_1, o_2) = \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{j=1}^{p_2} \mathbf{M}(\delta_i, \sigma_j) + N_l(o_1, o_2) \quad (2.18)$$

sendo δ_i os símbolos que compõem a órbita o_1 , σ_j os símbolos que compõem a órbita o_2 e $N_l(o_1, o_2)$ o número de cruzamentos que acontecem na região de inserção na linha de ramificação. Um procedimento para determinar $N_l(o_1, o_2)$ é descrito em Le Sceller et al. (1994). Por exemplo, tomando as órbitas 2101 e 210 referentes ao padrão da Figura 2.21 a relação será

$$\begin{aligned} L_k(210, 2101) &= \frac{1}{2} [\mathbf{M}(2,2) + \mathbf{M}(2,1) + \mathbf{M}(2,0) + \mathbf{M}(2,1) + \\ &\quad \mathbf{M}(1,2) + \mathbf{M}(1,1) + \mathbf{M}(1,0) + \mathbf{M}(1,1) + \\ &\quad \mathbf{M}(0,2) + \mathbf{M}(0,1) + \mathbf{M}(0,0) + \mathbf{M}(0,1) + N_l(210, 2101)] \\ &= \frac{1}{2} [-2 - 2 - 1 - 2 - \\ &\quad -2 - 1 - 1 - 1 - \\ &\quad -1 - 1 + 0 - 1 + 3] \\ L_k(210, 2101) &= -6 \end{aligned}$$

2.4.6 Acomodação das órbitas no padrão

Uma vez determinado o padrão, é possível validá-lo utilizando órbitas de ordem maior. Essas órbitas são desenhadas no padrão e o número de

conexões pode ser determinado. Se o número de conexões obtido no padrão for o mesmo número de conexões obtido por órbitas extraídas do sistema, então o padrão está adequado. Essa é uma das propriedades importantes desse invariante topológico: possibilidade de verificar se foi calculado errado.

O desenho das órbitas no padrão segue dois passos:

- determinar a ordem em que as órbitas cruzam uma seção de Poincaré;
- executar permutação circular para ligar os pontos da seção de Poincaré da parte de cima do padrão com os pontos da seção de Poincaré da parte de baixo.

Ordenamento das palavras na seção de Poincaré

A regra de ordenamento na seção de Poincaré segue os seguintes passos:

1. por meio do mapa de primeiro retorno, definir o símbolo que irá representar cada ramo. Para inclinação positiva, símbolo par e inclinação negativa, símbolo ímpar;
2. determinar a paridade da palavra. A paridade é definida como sendo a soma algébrica dos símbolos.
3. O ordenamento ascendente é determinado em função da paridade, como definido abaixo:
 - Se a paridade entre o maior conjunto de símbolos comuns de duas palavras é par, então escolhe-se a palavra que possui o símbolo seguinte menor.
 - Se a paridade entre o maior conjunto de símbolos comuns de duas palavras é ímpar, então escolhe-se a palavra que possui o símbolo seguinte maior.

Ordem de ligação de pontos

Os pontos das duas seções de Poincaré são ligados segundo permutação circular das palavras que descrevem uma órbita. Por exemplo, a órbita 2101 apresenta, na seção de Poincaré, os seguintes pontos 2101, 1012, 0121 e 1210, que serão ligados seguindo a ordem apresentada.

A Figura 2.22 ilustra as regras de acomodação de órbitas no padrão do sistema de Rössler para parâmetro $a = 0,492$. Uma análise topológica exaustiva do sistema de Rössler é apresentada em Letellier et al. (1995a).

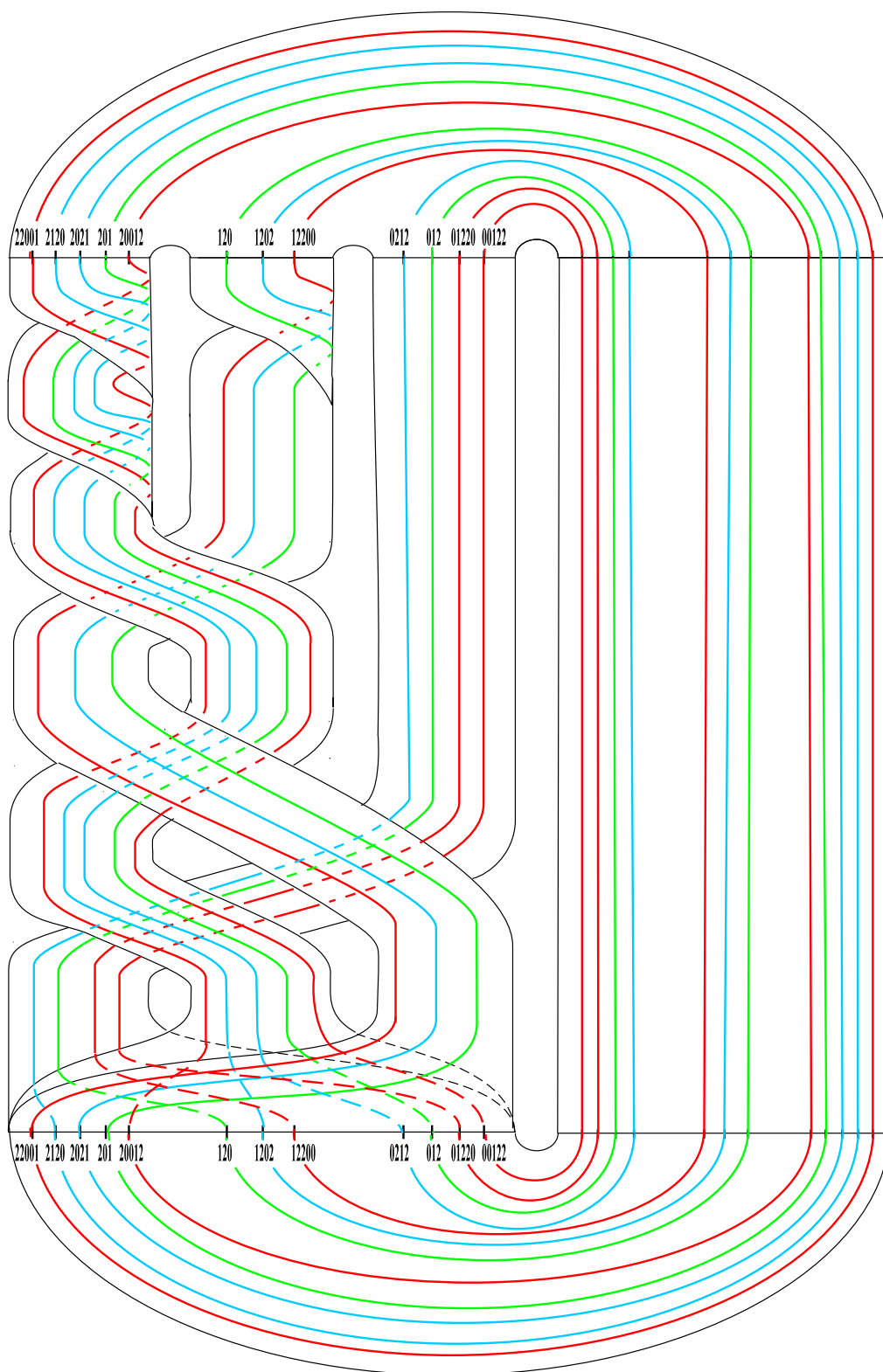


Figura 2.22: Acomodação das órbitas 201 (verde), 2120 (azul) e 22001 (vermelho) no padrão do sistema de Rössler $p/a=0,492$.

2.5 Discussão final

Este capítulo apresentou os conceitos fundamentais da teoria de sistemas dinâmicos não-lineares. O procedimento de caracterização topológica de atratores caóticos também foi apresentado. No capítulo 4 esses conceitos serão empregados no desenvolvimento de uma metodologia de reconstrução de elementos topológicos fundamentais para construção de um atrator estranho.

Capítulo 3

Modelos Afins por partes

3.1 Introdução

Tem-se observado, nas últimas décadas, crescente interesse por modelos com estrutura por partes (*piecewise models*), principalmente nas áreas de identificação de sistemas e controle. Existem basicamente duas razões para isso. Em primeiro lugar, essa abordagem possui a característica de reduzir problemas grandes e/ou complicados em subproblemas menores e de mais fácil solução. Em geral, essa abordagem conduz a subproblemas locais interpretáveis possibilitando descrições locais e globais do problema. Outra característica importante desses modelos é que sua estrutura é adequada para implementação digital, o que os torna bons candidatos para estratégias de controle.

Existe uma série de representações de modelos que utilizam a estrutura por partes desenvolvidas principalmente a partir da década passada: redes neurais com função de ativação linear por partes (Batruni, 1991; Gad et al., 2000; Lin e Unbehauen, 1995), hiperplanos conectados (do inglês *hinging hyperplanes*) (Breiman, 1993; Pucar e Sjoberg, 1998; Roll et al., 2004), estruturas canônicas (Chua e Deng, 1986, 1988; Kahlert e Chua, 1990, 1992; Güzelis e Gökner, 1991; Júlian, 2003), modelos de Wiener e Hammerstein em que o bloco não-linear é uma função linear por partes (Roll, 2001a; Roll et al., 2004; Paoletti, 2004), modelos de complementaridade linear (Kevenaar e Leenaerts, 1992; Heemels et al., 2002), sistema dinâmico misto lógico (Bemporad e Morari, 1999), modelos *max-min-plus scaling* (De Schutter e van den Boom, 2000), modelos nebulosos de Takagi-Sugeno-Kang (Takagi e Sugeno, 1985; Sugeno e Kang, 1988).

Estas representações são muitas vezes referidas como sistemas híbridos, isto é, sistemas que possuem uma componente contínua (discreta) e uma

componente lógica, responsável pelo chaveamento entre diferentes regiões do espaço. Apesar de haver várias representações, os sistemas híbridos possuem entre si equivalência, se guardadas determinadas condições (Kevenaar e Leenaerts, 1992; Bemporad et al., 2000; Heemels et al., 2001a,b). Essa equivalência é muito relevante uma vez que estratégias de construção e análise de modelos podem ser importadas de uma representação para outra.

Modelos Afins por partes apresentam-se como uma das mais importantes estruturas de sistemas híbridos seja pelos resultados de análise e síntese, seja porque sua estrutura é adequada para simulação (Bemporad, 2004). A próxima seção apresenta uma descrição de algumas representações com estrutura por partes.

3.2 Modelos com estrutura por partes

O conjunto dessas representações pode ser agrupado em duas grandes classes de modelos: implícitos e explícitos. Os modelos implícitos são aqueles que não produzem diretamente uma saída para uma entrada, antes um algoritmo tem de ser executado de modo a “resolver” o modelo em termos de suas variáveis auxiliares (Kevenaar e Leenaerts, 1992; Heemels et al., 2002). Os modelos explícitos são, em geral, estruturas mais compactas. Nesses modelos a saída é obtida por simples substituição das entradas. A estrutura utilizada neste trabalho, o modelo afim por partes, pertence a esse segundo grupo. Por isso, apenas algumas estruturas explícitas relacionadas diretamente com esse modelo serão comentadas a seguir.

3.2.1 Modelos explícitos

Formas canônicas

Esses modelos apareceram inicialmente no contexto de modelagem de circuitos (Chua e Deng, 1986, 1988). A grande vantagem dessa representação está no fato de que as informações das partes e do chaveamento são codificadas com um número mínimo de parâmetros e que, além disso, cobre todas as funções de uma variável. Apesar das vantagens dessa representação, para dimensões maiores seu uso estava restrito a condições impostas pelas características das funções que seriam modeladas. A representação na forma canônica é descrita pela relação

$$y = ax + b + \sum_{i=1}^n c_i |a_i x + b_i|. \quad (3.1)$$

Mais tarde essa representação foi estendida para todas as funções bidimensionais em $\mathbb{R}^2$. Basicamente, a idéia que possibilitou a extensão foi a composição de funções módulo, isto é, a função resultante é obtida na forma “aninhada”. Entre essas estruturas têm-se os modelos de Kahlert e Chua (1992) e de Güzelis e Gökner (1991). Essa estrutura foi generalizada para dimensão arbitrária por Júlian (2003).

Redes neurais

Dependendo da escolha da arquitetura de uma rede neural, a equação que a descreve será um modelo afim por partes. Uma rede neural resultará em um modelo afim por partes, quando a função de ativação dos neurônios das camadas ocultas for uma função não-linear afim por partes. Como exemplo citam-se as funções módulo, sigmóide linear por partes, entre outras.

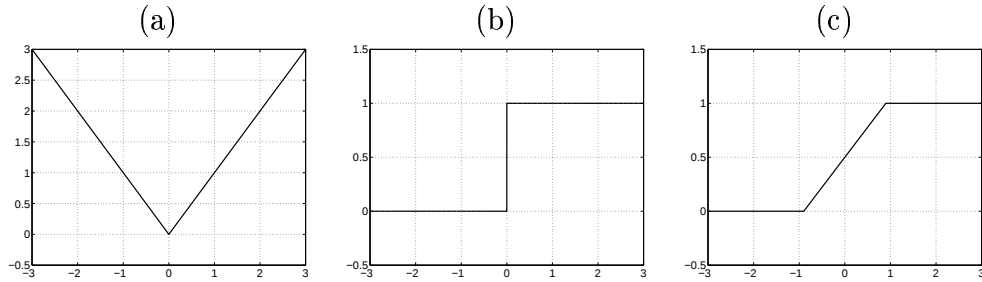


Figura 3.1: Funções de ativação: (a) módulo (b) sinal (c) sigmóide

A Figura 3.1 ilustra essas funções. Basicamente pode-se agrupar as funções de ativação de redes lineares por partes em três grupos:

1. módulo;
2. sigmoidal;
3. função de máximos ou mínimos (hiperplanos conectados).

Em Batruni (1991) a função de ativação utilizada é o operador de valor absoluto, isto é, a função módulo. A rede é composta por K seções sendo cada seção composta por duas camadas. A camada mais oculta em cada seção utiliza operadores de valor absoluto e a camada de saída funções lineares. A equação abaixo descreve a saída da j -ésima seção da rede,

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{B}_j^T \mathbf{x}_j + \mathbf{a}_j + \sum_{i=1}^n \mathbf{c}_{ji} |g_{ji}|, \quad (3.2)$$

sendo a entrada um vetor $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^p$ e a saída $\mathbf{y}_j \in \mathbb{R}^m$. Os parâmetros $\mathbf{a}_j$ e $\mathbf{c}_{ji} \in \mathbb{R}^m$, respectivamente, pesos e termos de polarização (*bias*) dos neurônios de saída, enquanto a matriz $\mathbf{B}_j \in \mathbb{R}^{p \times m}$. O número de neurônios n determina o número de partições do modelo. O símbolo $|\cdot|$ representa a função módulo. O escalar g_{ij} é a saída do bloco somador dos neurônios da camada oculta,

$$g_{ij} = \alpha_i \mathbf{x}_j + \beta_i. \quad (3.3)$$

Os parâmetros $\alpha_i \in \mathbb{R}^p$ e $\beta_i \in \mathbb{R}$ são, respectivamente, os pesos e o termo de polarização dos neurônios da camada oculta. É importante ressaltar que o vetor $\mathbf{x}_j$, em uma rede com k seções, é a saída da seção $j - 1$, o que implica uma estrutura por partes. É essa estrutura que produz a capacidade de aproximação universal (Lin e Unbehauen, 1995).

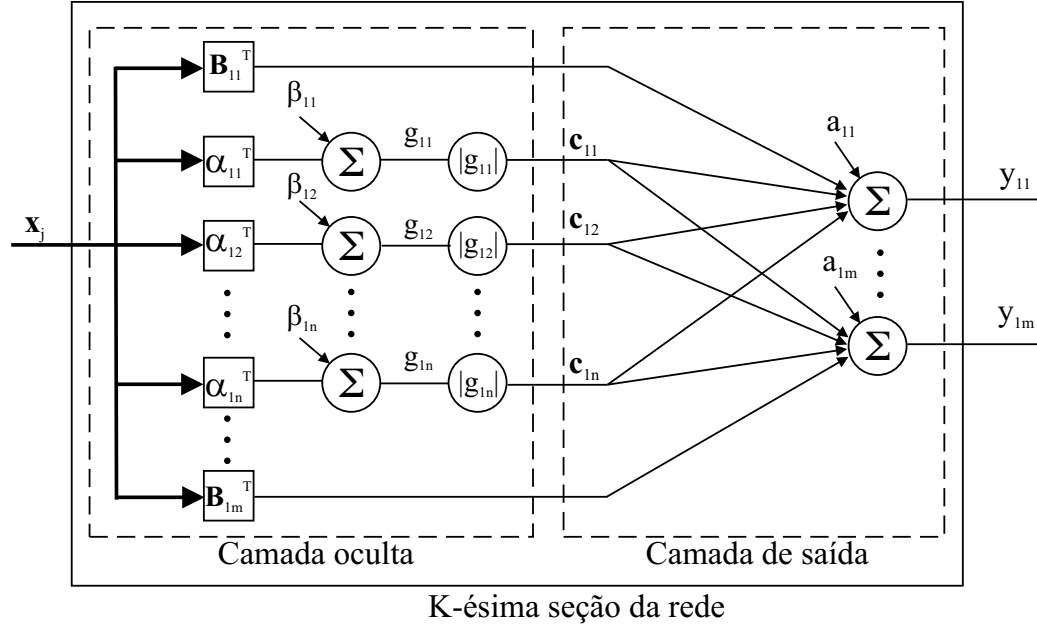


Figura 3.2: Rede neural afim por partes proposta por (Batruni, 1991).

A rede é treinada com o algoritmo *backpropagation* (Rumelhart et al., 1986; Rumelhart e McClelland, 1986).

Uma justificativa para função de ativação linear por partes é que, no caso de implementação digital de uma função de ativação sigmoideal, haveria a necessidade de utilizar uma tabela (*lookup table*). Tal tabela apresenta um considerável consumo de memória, que se agrava quando mais de uma forma sigmoideal é empregada na rede.

O treinamento é favorecido pelo emprego de função de ativação afim por partes. Nesse caso é garantido que a função erro médio quadrático é uma função quadrática nos parâmetros da rede, o que implica a inexistência de mínimos locais na superfície de erro.

Em (Lin e Unbehauen, 1995) argumenta-se que redes lineares por partes contornam o problema das redes perceptron de múltiplas camadas com funções de ativação sigmoidais, isto é, aquelas redes permitem entender como a rede construiu um determinado comportamento. No caso da rede neural apresentada por Gad et al. (2000) a função de ativação empregada é uma sigmóide linear por partes. Neste caso a rede não utiliza o algoritmo *back-propagation* e nem do cálculo da derivada da função erro médio quadrático. O algoritmo utiliza o erro absoluto.

Modelos fuzzy de Takagi-Sugeno-Kang

O modelo do tipo Takagi-Sugeno-Kang (TSK) foi sugerido em (Takagi e Sugeno, 1985; Sugeno e Kang, 1988). Essa estrutura apresenta a particularidade de utilizar conjuntos nebulosos apenas no antecedente de suas regras. O conseqüente é formado, geralmente, por funções lineares. A forma geral das regras desses modelos é

$$\text{“Se } (x_1 \text{ é } \mu_{1i}) \text{ então } y = f_i(\mathbf{x})\text{”},$$

sendo que o índice “ i ” indica ser a i -ésima regra. Para o caso de identificação de sistemas dinâmicos em tempo contínuo tem-se

$$\text{“Se } (x_1 \text{ é } \mu_{1i}) \text{ e } (x_2 \text{ é } \mu_{2i}) \text{ e } \dots \text{ e } (x_n \text{ é } \mu_{ni}) \text{ então } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i \mathbf{u}\text{”}.$$

Em tempo discreto,

$$\begin{aligned} &\text{“Se } (x(k-1) \text{ é } \mu_{1i}) \text{ e } (x(k-2) \text{ é } \mu_{2i}) \text{ e } \dots \text{ e } (x(k-n) \text{ é } \mu_{ni}) \\ &\text{então } x(k) = \mathbf{a}_i \mathbf{x} + \mathbf{b}_i \mathbf{u}\text{”}, \end{aligned}$$

sendo que nesse caso o vetor $\mathbf{x}$ é composto pelos valores em atraso da variável $x(k)$. Para maiores detalhes sobre aplicação do modelo TSK em identificação de sistemas veja Hellendoorn e Driankov (1997).

Uma escolha comum na obtenção de modelos Takagi-Sugeno-Kang é tomar μ_{ni} como função dos estados do sistema $\mathbf{x}$. A função de pertinência μ_{ni} determina como será o chaveamento entre os subsistemas lineares. O sistema dinâmico não-linear em tempo contínuo obtido por meio do modelo fuzzy será

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{x})(\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{x})},$$

sendo

$$w_i(x) = \prod_{j=1}^n \mu_{ji}(x).$$

Os modelos afins podem ser interpretados como caso particular da estrutura do modelo TSK. Na próxima seção é apresentada a parametrização de modelos afins por partes utilizada nesse trabalho.

3.3 Sistemas afins por partes

A estrutura de modelos afins por partes (Sontag, 1981) é definida por três elementos:

1. *Divisão do espaço de estados.*

O espaço é dividido em um certo número de politopos P_i , sendo que $\bigcup P_i = \mathbb{R}^n$ e $\bigcap P_i = \emptyset$. Esses politopos são determinados por meio de desigualdades lineares que definem semi-espacos: $S_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{c}_i \mathbf{x} + \mathbf{d} \geq 0\}$. O politopo P_i pode ser definido como a interseção de um certo número de semi-espacos $\bigcap S_i = P_i$. Os hiperplanos $s_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{c}_i \mathbf{x} + \mathbf{d} = 0\}$, que definem a partição do espaço e, conseqüentemente, dos semi-planos serão referidos como superfície de chaveamento.

2. *Modelo afim de cada partição do espaço.*

Uma vez determinadas as partições do espaço, é necessário definir os subsistemas que descreverão o comportamento do sistema em cada região. Os subsistemas locais podem ser definidos como $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_i (\mathbf{x} - \mathbf{p}_i)$. Sendo $\mathbf{x}, \mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

3. *Lei de chaveamento entre politopos.*

Para concluir a definição do sistema afim por partes, basta determinar uma função que seleciona o subsistema referente ao politopo P_i . Sejam as seguintes funções $f[d_i(\mathbf{x})]$ e $\bar{f}[d_i(\mathbf{x})]$:

$$f[d_i(\mathbf{x})] = \begin{cases} 1, & \text{se } d_i(\mathbf{x}) \geq 0 \\ 0, & \text{se } d_i(\mathbf{x}) < 0 \end{cases}$$

e

$$\bar{f}[d_i(\mathbf{x})] = \begin{cases} 0, & \text{se } d_i(\mathbf{x}) \geq 0 \\ 1, & \text{se } d_i(\mathbf{x}) < 0. \end{cases}$$

Como pode ser verificado, a função $\bar{f}[d_i(\mathbf{x})]$ é a função complementar de $f[d_i(\mathbf{x})]$, ou seja, $\bar{f}[d_i(\mathbf{x})] = 1 - f[d_i(\mathbf{x})]$. Em politopos separados

pelo(s) mesmo(s) hiperplano(s) a definição de uma lei de chaveamento é facilitada pelo uso da função complementar $\bar{f}[\cdot]$. Se essas funções não forem cuidadosamente escolhidas, o sistema pode não apresentar unicidade de soluções, não podendo assim representar um sistema em todo espaço. Essa característica de unicidade de soluções é conhecida, na área de sistemas híbridos, como *well-posedness*.

Se o contradomínio das funções $f[\cdot]$ e $\bar{f}[\cdot]$ possuírem valores intermediários entre 0 e 1 como, por exemplo, funções sigmoidais, o sistema dinâmico resultante terá transição suave e pode ser interpretado como um sistema nebuloso (Takagi e Sugeno, 1985). Se forem funções de limiar, o sistema resultante será então um sistema afim por partes.

A função $d_i(\mathbf{x})$ será definida como a distância ao hiperplano s_i , $d_i(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_i\mathbf{x} + \mathbf{d}$, o que significa que $d(\mathbf{x}) = 0$ para $\mathbf{x} \in s_i$, $d(\mathbf{x}) \geq 0$ se $\mathbf{x} \in \mathbf{c}_i\mathbf{x} + \mathbf{d} \geq 0$ e $d(\mathbf{x}) < 0$ caso $\mathbf{x} \in \mathbf{c}_i\mathbf{x} + \mathbf{d} < 0$.

A composição da função $f[\cdot]$ com a função distância $d_i(\mathbf{x})$ determina o chaveamento. Como um determinado politopo é definido como a interseção de um conjunto de semi-espacos, pode-se utilizar a função a seguir para caracterizar a pertinência em um determinado politopo:

$$lc_i(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{n_r} f[d_j(\mathbf{x})], \quad (3.4)$$

sendo n_r o número de hiperplanos que definem o politopo P_i . A função $lc_i(\mathbf{x})$ será chamada lei de chaveamento e significa que:

$$lc_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbf{x} \in P_i, \\ 0, & \text{se } \mathbf{x} \notin P_i. \end{cases}$$

Assim, um sistema dinâmico afim por partes pode ser descrito pela equação:

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n_p} lc_i(\mathbf{x}) \mathbf{A}_i(\mathbf{x} - \mathbf{p}_i), \quad (3.5)$$

sendo n_p o número de politopos.

Tomando o Teorema 2.1.2 (Hartman-Grobman) no contexto de modelos afins por partes, os seguintes resultados podem ser estabelecidos:

Corolário 1: Se um ponto fixo de um sistema for hiperbólico, então, na síntese da dinâmica não-linear global, basta apenas um subsistema linear para descrever a dinâmica em torno do ponto fixo.

Corolário 2: Se um ponto fixo de um sistema for não-hiperbólico, então, na síntese da dinâmica não-linear global, necessariamente, a vizinhança do

ponto fixo tem de ser descrita por mais de um subsistema afim e, além disso, uma das partições do espaço deve passar pelo ponto fixo.

Um ponto fixo é chamado de não-hiperbólico se pelo menos um dos autovalores da matriz jacobiana, da linearização do sistema em torno do ponto fixo, for igual a zero.

3.4 Estimação de parâmetros

A estimação de parâmetros consiste em uma das etapas de um processo de construção de modelos. Depois da escolha da estrutura do modelo, utiliza-se algum critério que minimize uma função custo, isto é, uma função que mede, de alguma forma, a distância entre a resposta do sistema e a resposta do modelo. Em relação à estimação de parâmetros de sistemas com estrutura por partes, divide-se inicialmente o problema em dois cenários:

- *A partição do espaço é conhecida.* Por meio de informação a priori ou pelo conhecimento de um especialista, pode ser conhecida a partição do espaço de estados. Ou seja, um especialista pode informar os pontos de operação de um sistema. Quando a partição do espaço é conhecida, pode-se utilizar técnicas clássicas de estimação de sistemas lineares. No entanto, ressalta-se que essa não é a situação mais comum. Geralmente a partição é uma das componentes que deve ser estimada.
- *A partição do espaço não é conhecida.* Se a partição não é conhecida a priori, a estimação de parâmetros do modelo torna-se, em alguns casos, um problema de otimização difícil de resolver.

Os vários procedimentos para estimação de parâmetros em sistemas afins por partes, quando a partição não é conhecida a priori, podem ser agrupados segundo a classificação de Roll (2001b):

- *Partições e submodelos são estimados simultaneamente*

Nesse grupo os parâmetros são obtidos pela minimização de uma função custo. Por meio de dados e das equações do modelo constrói-se a função erro médio quadrático. Técnicas de otimização não-linear padrão são empregadas para minimizar essa função custo. A vantagem desse grupo é a simplicidade do método. A desvantagem é que o algoritmo pode estagnar em mínimos locais e, além disso, a interpretação dos modelos locais pode ser perdida porque o critério de ajuste do modelo é global.

Exemplos desse grupo são redes neurais com função de ativação linear por partes (Batruni, 1991; Gad et al., 2000), hiperplanos conectados

reparametrizados (Pucar e Sjöberg, 1996; Pucar e Sjöberg, 1998) e a estrutura canônica (Pucar e Sjöberg, 1998). Em Batruni (1991) a estrutura canônica sugerida em (Kahlert e Chua, 1992) foi analisada na forma de uma rede neural. Roll et al. (2004) busca solução ótima de duas subclasses de modelos afins por partes, modelos de hiperplanos conectados ARX e modelos afins por partes Wiener ARX. Dentro do contexto de sistemas nebulosos, a rede ANFIS (sistema de inferência baseada em rede adaptativa) obtém modelos TSK dentro da perspectiva desse grupo (Jang, 1993).

- *Partições e submodelos são estimados simultaneamente, porém, apenas uma partição é estimada por vez*

Esse grupo é menos sujeito a problemas relacionados a mínimos locais, no entanto a determinação do critério de parada pode conduzir a um número incorreto de divisões do espaço.

Um exemplo de estrutura desse grupo são os hiperplanos conectados. Quando sugerido por Breiman (1993), os hiperplanos conectados acrescentavam uma função de conexão de hiperplanos (*hinge function*) por vez, isto é, a partir de um processo construtivo, o algoritmo acrescentava funções de conexão para explicar o resíduo resultante entre a função a ser aproximada e a soma das funções de conexão já acrescentadas. Um outro exemplo de abordagem construtiva é descrito em (Hush e Horne, 1998). Os autores utilizam uma rede neural com funções de ativação lineares por partes. Cada neurônio é gradualmente ajustado pela mesma estratégia de ajuste de resíduos.

Em (Heredia e Gonzalo, 1996) são obtidos sistemas afins por partes por meio de uma representação chamada decomposição de limiar (*threshold decomposition*). O sinal a ser modelado é particionado em vários níveis (limiares). Cada limiar forma regiões retangulares porque é paralelo ao eixo do espaço. Essa estrutura também apresenta propriedade construtiva porque um limiar é acrescentado por vez. No trabalho de Ernst (1998) aproximação e identificação de sistemas são feitas por meio de hiperplanos conectados em um esquema de árvore. Após o ajuste da primeira função de conexão, o algoritmo verifica qual dos dois hiperplanos apresenta o pior ajuste. Esse hiperplano é substituído por uma função de conexão e assim sucessivamente. Essa estrutura possui a flexibilidade a mais de poder apresentar particionamentos que não são necessariamente paralelos aos eixos coordenados, o que facilita o ajuste em alguns casos.

- *Partições e submodelos são estimados iterativamente, sendo que apenas a partição ou o modelo é estimado a cada passo*

As principais características deste grupo são: 1) divisão do espaço feita por meio de técnicas de agrupamento (*clustering*), 2) modelos locais não estimados no mesmo instante que as partições do espaço. A vantagem desse grupo é que a estimação dos submodelos é geralmente simples. No entanto, a determinação do número de agrupamentos é uma tarefa nada trivial. Como exemplo desse grupo, cita-se o trabalho de (Ferrari-Trecate et al., 2003). No contexto de sistemas nebulosos, o trabalho de (Hellendoorn e Driankov, 1997) determina modelos TSK por meio dessa abordagem.

- *Partições são estimadas utilizando grades regulares*

Em (Hiew, 1994) modelos nebulosos são determinados por meio de grades regulares. O grande problema dessa estrutura é o elevado número de regiões necessárias para que haja um “bom” ajuste, isto é, um ajuste que atenda a um critério de erro mínimo. Por exemplo, na identificação dos sistemas de Rössler e Lorenz, nesse mesmo artigo, foram necessárias 32768 e 1024 regiões, respectivamente.

No contexto de redes neurais (Choi e Choi, 1994) o espaço foi particionado em células triangulares ou retangulares.

Julián (1999) trata da obtenção de modelos canônicos de alto nível em um espaço de dimensão qualquer. No caso de $\mathbb{R}^2$, por exemplo, o espaço é particionado em regiões triangulares (*simplices*).

Storace e De Feo (2004) utilizam a estrutura de hiper-retângulos para realizar identificação de sistemas dinâmicos não-lineares.

O esquema apresentado na Figura 3.3 sintetiza a classificação proposta por Roll (2001b).

3.5 Discussão final

Este capítulo apresentou as definições básicas referentes a modelos com estruturas por partes e, em particular, de modelos afins por partes. A determinação da partição do espaço é uma questão chave na construção desses modelos. Apesar de existirem vários métodos para determinação dessa partição, esse ainda é um problema não resolvido. Os próximos capítulos irão abordar esse problema sob uma perspectiva de critérios baseados em informação da dinâmica e da topologia de atratores.

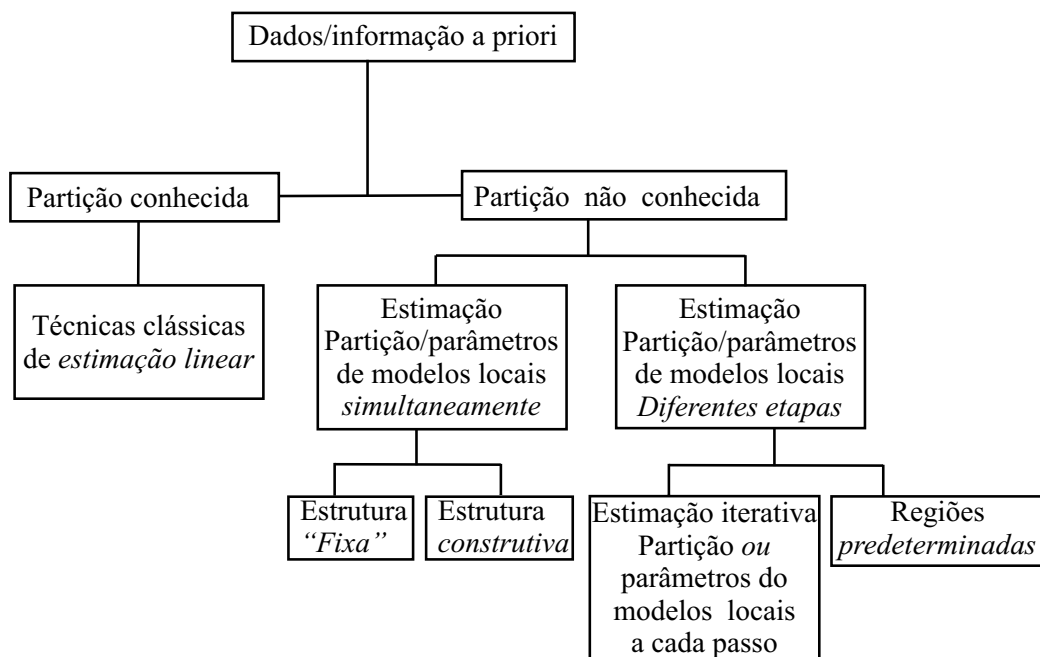


Figura 3.3: Classificação dos procedimentos de estimação de sistemas com estrutura por partes. Adaptado de Roll (2001b).

Capítulo 4

Relação entre Modelos Afins por Partes e Topologia

4.1 Introdução

A caracterização de sistemas dinâmicos não-lineares pode ser feita por meio de três grupos distintos de ferramentas. O primeiro grupo é composto pelos chamados métodos geométricos ou métricos. Nesse grupo, objetiva-se entre outras coisas, medir dimensões (Grassberger e Procaccia, 1983). Exemplos de ferramentas desse grupo são os algoritmos baseados em contagem de caixas. O segundo grupo é constituído por métodos dinâmicos. Um exemplo desse grupo são os expoentes de Lyapunov. Essa ferramenta descreve a taxa média com que o fluxo expande ou contrai ao longo de sua evolução temporal (Eckmann e Ruelle, 1985; Eckmann et al., 1986; Abarbanel et al., 1993). Por fim, o terceiro grupo usado na caracterização de sistemas é formado pelos métodos topológicos. Ferramentas desse grupo descrevem o comportamento global de um sistema dinâmico (Gilmore, 1998).

Além de serem utilizadas com sucesso na validação de modelos, ferramentas topológicas possuem duas importantes características que as distinguem dos demais grupos. A primeira característica é que invariantes topológicos são robustos a perturbações nos parâmetros de controle ou de bifurcação do sistema, o que os torna menos sensíveis à presença de ruído em dados experimentais. A outra característica é que os invariantes topológicos fornecem um modelo global da dinâmica, isto é, descrevem os mecanismos de construção do comportamento global. Já é conhecido na literatura (Letellier et al., 2005) que métodos dinâmicos como expoentes de Lyapunov podem falhar na descrição de importantes mudanças globais de campos vetoriais. Mudanças globais como, por exemplo, bifurcação de atratores estranhos (*perestroika*),

só são bem descritas por meio de ferramentas topológicas.

Métodos topológicos são, por natureza, os mais adequados para descrever a estrutura dinâmica global de sistemas não-lineares. Existe, no entanto, uma limitação para sua aplicação. Métodos topológicos são restritos ao espaço $\mathbb{R}^3$ ou ao espaço $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$. A razão para essa limitação é que a teoria matemática que embasa os métodos topológicos, a teoria dos nós (Manturov, 2004), falha para dimensões maiores que 3. Extensão de tais métodos a espaços de grande dimensão ainda é um dos maiores desafios da área.

Entre as representações de modelos utilizadas na identificação e modelagem de sistemas dinâmicos não-lineares, os modelos afins por partes destacam-se por possibilitarem uma interpretação global e local da dinâmica reconstruída. No entanto, dependendo da maneira como os submodelos locais são determinados, o modelo resultante pode apresentar um número excessivo de subsistemas e, além disso, esses subsistemas podem não ter relação com a dinâmica local do sistema modelado.

Este capítulo mostra como características topológicas de atratores estranhos podem ser reconstruídas por meio de modelos afins por partes. Essas características são, por exemplo, as singularidades, os mecanismos de construção de atratores estranhos em $\mathbb{R}^3$, entre outras. O principal objetivo em verificar como esses modelos constroem elementos da estrutura topológica global, é utilizar esse conhecimento para determinar uma metodologia de construção desses modelos de modo a garantir comportamento global e local.

Como a metodologia é fundamentada em características topológicas, as análises que seguirão estarão restritas a sistemas dinâmicos contidos no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. Outra restrição é que os sistemas tratados tenham apenas pontos fixos hiperbólicos. A razão para essa restrição é que dessa forma fica garantido que a vizinhança de cada ponto fixo possa ser modelada com apenas um subsistema afim. Dessa forma, garante-se o comportamento local e o foco da análise se concentra em verificar como determinar o chaveamento de modo a reconstruir a topologia de um atrator estranho.

4.2 Atratores estranhos e variedades ramificadas

Considerando apenas os casos não-degenerados, o único tipo de atrator possível para sistemas lineares contidos em $\mathbb{R}^3$ são pontos fixos. No caso de sistemas dinâmicos não-lineares, mais 3 atratores são possíveis: ciclo limite, superfície toroidal e atrator estranho. Para o caso de um sistema contido em $\mathbb{R}^3$, se a evolução de sua trajetória leva assintoticamente para um atrator

estranho, sua dinâmica apresenta comportamento caótico (Monteiro, 2002), razão pela qual, muitas vezes esse atrator é conhecido como atrator caótico. Sendo dinâmicas caóticas o foco deste trabalho, o atrator tomado como objeto de estudo será o atrator estranho.

Como determinado por Birman e Williams (1983) atratores estranhos contidos no espaço $\mathbb{R}^3$ podem ser projetados em variedades ramificadas bidimensionais. Posteriormente verificou-se que essa estrutura é adequada para classificar atratores estranhos (Mindlin et al., 1990). Essas variedades são formadas por meio de dois componentes, sendo que, o primeiro é associado ao processo de expansão. Esse componente da variedade ramificada tem a característica de dividir o fluxo em regiões conhecidas como ramos. O outro componente da variedade ramificada está associada ao processo de contração do fluxo, no qual os ramos são reunidos. Esses componentes fazem com que haja um caminho fechado ao longo da variedade ramificada. A topologia do atrator é descrita por esse caminho fechado.

Para que comportamentos caóticos sejam descritos por meio de modelos afins por partes, a primeira questão que se coloca é: como modelos afins por partes podem reproduzir os processos de expansão e contração de uma dinâmica caótica? De maneira equivalente, pode-se reproduzir uma dada variedade ramificada?

O processo de formação de ramos, no caso de modelos afins, está relacionado diretamente com a variedade linear unidimensional estável de um submodelo. Se duas trajetórias partem de lados diferentes da variedade, verifica-se, então, a formação de ramos. Por exemplo, seja o sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,05 & 5 & 0 \\ -5 & 0,05 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Esse sistema foi simulado para várias condições iniciais $(x, -x, 1)$, sendo $x \in [-2 \ 2]$. Como pode ser observado pela Figura 4.1, as trajetórias em que as condições iniciais estão situadas em lados diferentes da variedade linear estável unidirecional (eixo z) produzirão diferentes ramos. Condições iniciais simétricas convergem assintoticamente para variedade instável (plano xy). Essas trajetórias formam no espaço de estados a estrutura de um ramo com torção local zero e um ramo com uma torção local igual a 1.

Em se tratando de modelos afins por partes, também é possível a formação de ramos por meio da combinação de regiões como acontece quando a trajetória cruza a superfície de chaveamento algumas vezes antes de retornar à linha de ramificação. Esse processo pode até mesmo originar caos multimodal, isto é, atratores em que o mapa de primeiro retorno apresenta mais de

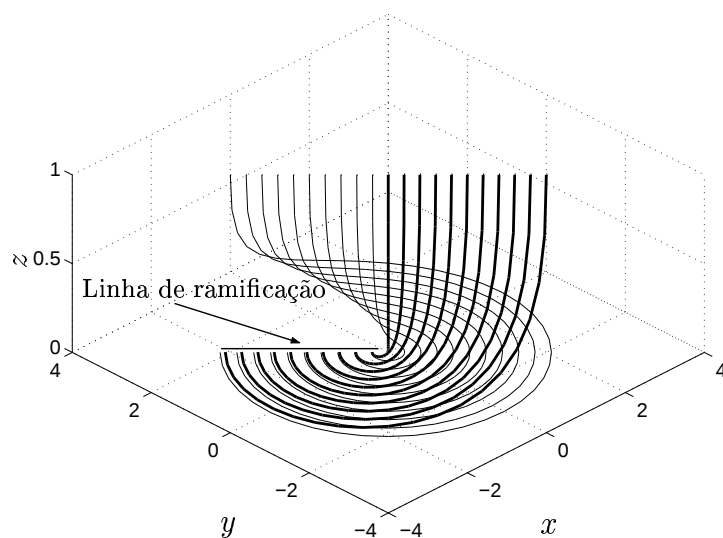


Figura 4.1: Conjunto de trajetórias de um sistema afim que produzem diferentes ramos. Em linha fina, ramo com torção local $+1$ e, em linha cheia, ramo com torção local zero.

dois ramos. Exemplo de caos multimodal obtido por meio de modelos afins por partes será apresentado no capítulo 6.

As *singularidades* da variedade ramificada estão relacionadas diretamente com a formação dos ramos. A seguir será descrito como modelos afins podem reproduzir essas singularidades e, conseqüentemente, dar origem a ramos.

4.3 Singularidades

Variedades ramificadas são estruturas que são variedades em quase todos os pontos do espaço, a não ser nas singularidades. Por definição, variedades são estruturas localmente equivalentes ao espaço euclidiano. Ou seja, existe uma transformação local de variáveis que leva os pontos da variedade aos pontos do espaço euclidiano. As singularidades são pontos em que é impossível estabelecer a equivalência com o espaço euclidiano.

As singularidades presentes nas variedades bidimensionais ramificadas são de dois tipos: singularidades de separação (*split*) e singularidades de junção (*join*).

Singularidade de separação

A singularidade de separação possui dimensão zero. Essa singularidade

está associada com a divisão da trajetória em ramos. O processo de expansão do atrator tem relação direta com essa singularidade. No entanto, apenas observa-se essa singularidade quando o mecanismo de construção da dinâmica for rasgo (*tear*). Os mecanismos serão abordados na próxima seção.

Singularidade de junção

A singularidade de junção possui dimensão um. Está associada à região do atrator em que diferentes trajetórias se aproximam assintoticamente. Na variedade ramificada é chamada de linha de ramificação. A determinação do número de linhas de ramificação é uma importante informação porque associada a esse número está a construção do conjunto de Poincaré. O conjunto de Poincaré é a generalização da seção de Poincaré para sistemas que apresentam atratores com mais de um buraco em sua estrutura topológica. No caso de um atrator estranho, o número de discos disjuntos que formarão o conjunto de Poincaré é igual ao número de linhas de ramificação (Tsankov e Gilmore, 2004). Se o conjunto de Poincaré for corretamente determinado, o mapa de primeiro retorno revelará o número de ramos do padrão e os mecanismos da dinâmica caótica.

4.4 Construção de singularidades

A construção de atratores estranhos por meio de modelos afins por partes é auxiliada pela compreensão da função das variedades lineares e da superfície de chaveamento na formação das singularidades.

A singularidade de separação é obtida quando parte da trajetória de um subsistema é desviada para região de predominância da variedade linear estável do ponto fixo de outro subsistema. A maneira pela qual um modelo afim por partes desenvolve esse desvio é chavear a trajetória para uma região do espaço em que a variedade linear estável do subsistema adjacente é predominante. É importante ressaltar que uma das funções da superfície de chaveamento é conduzir a trajetória de uma região do campo vetorial em que existe a predominância da variedade instável para uma região em que há predominância de uma variedade estável e, assim, garantir que a evolução do sistema seja globalmente estável. Se a superfície de chaveamento não processar constantemente, na evolução temporal, esse chaveamento, o sistema torna-se globalmente instável. Como a superfície de chaveamento divide o fluxo, então o ponto de rasgo acontece na superfície de chaveamento.

Linhas de ramificação são formadas quando diferentes ramos se aproximam assintoticamente da variedade instável. Por isso, a linha de ramificação é formada no interior de um politopo.

Para que um sistema afim por partes desenvolva uma linha de ramificação, a divisão do espaço de estados deve permitir que a trajetória alcance a região em que a variedade instável é predominante. Exemplo da formação de uma linha de ramificação é mostrada na Figura 4.1.

4.5 Mecanismos da dinâmica caótica em $\mathbb{R}^3$

Tanto os atratores estranhos observados experimentalmente quanto aqueles obtidos por simulação numérica, no espaço $\mathbb{R}^3$, possuem a dinâmica formada por meio dos mecanismos de dobra, rasgo ou os dois processos. O mecanismo de dobra é caracterizado pela junção de ramos adjacentes na mesma linha de ramificação. A característica do mecanismo de rasgo é que ramos que partem da mesma linha de ramificação são direcionados para diferentes linhas de ramificação.

Mecanismo de dobra em modelos afins por partes

Modelos afins por partes podem sintetizar a dobra se as trajetórias da variedade instável forem direcionadas para a região do campo vetorial que é determinada pela variedade estável desse mesmo ponto fixo. O que faz esse redirecionamento é o chaveamento para um segundo campo vetorial que realiza o giro. O exemplo mais conhecido de sistema que apresenta esse mecanismo é o sistema de Rössler, o qual será tratado em detalhes no próximo capítulo. As dobras também podem ser completamente desenvolvidas no interior de um politopo. A Figura 4.1 ilustra o comportamento de dobra nesse último caso. Tanto em um como outro caso a linha de ramificação sempre é formada pela tendência assintótica da trajetória para o plano da variedade bidimensional instável.

Mecanismo de rasgo em modelos afins por partes

Em termos da construção do mecanismo de rasgo, parte da trajetória governada pela variedade instável será direcionada, de maneira brusca, para a variedade estável de um outro ponto fixo. A Figura 4.2 (a) mostra um atrator de um sistema afim por partes que apresenta o mecanismo de rasgo. Como pode ser visto na Figura 4.2 (b) o ponto de rasgo acontece exatamente na superfície de chaveamento.

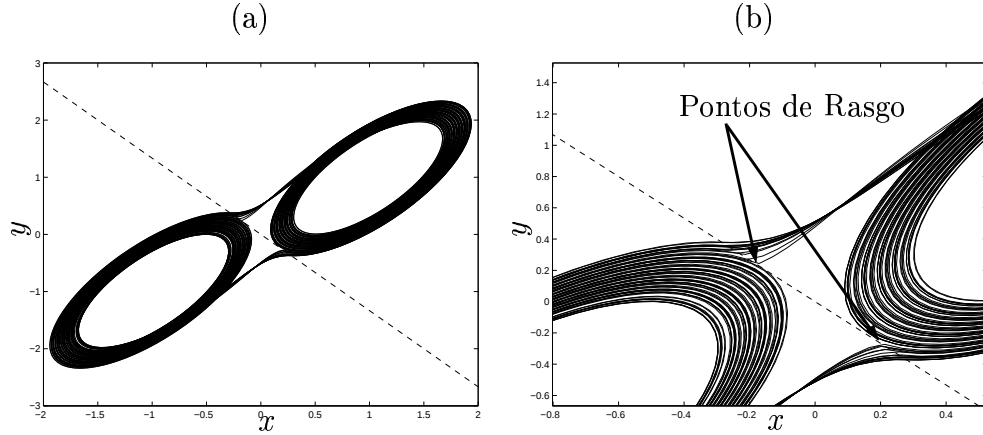


Figura 4.2: (a) Projeção no plano xy de um atrator estranho formado pelo mecanismo de rasgo (b) Detalhe da região em que acontece o rasgo. A linha tracejada é a projeção da superfície de chaveamento no plano xy .

4.6 Pontos fixos e toro limitante

É conhecido pelos trabalhos de Poincaré (1881), que a estrutura do campo vetorial é fortemente determinada pelo número, localização e tipo de pontos fixos. O terceiro nível de classificação de atratores estranhos em $\mathbb{R}^3$ é o toro limitante (Tsankov e Gilmore, 2003, 2004). Por meio dessa estrutura que delimita o atrator, foi verificada a função de pontos fixos do tipo sela-nó e sela-foco na organização global do atrator. Por exemplo, foi verificado que não é possível haver dois pontos sela-foco imersos em um atrator estranho que não sejam separados por um ponto sela-nó. O ponto fixo sela-nó tem a função de realizar a transição de uma espiral, em torno de um ponto fixo, para outra.

Os toros são classificados, basicamente, por meio do número de buracos em sua estrutura. Esse número é chamado de ordem (*genus*) do toro. Uma classificação mais detalhada é fornecida por meio das formas canônicas. As formas canônicas são estruturas planas que apresentam internamente círculos e polígonos. Os círculos revelam os pontos fixos imersos no atrator enquanto os polígonos fornecem informação sobre as singularidades. A forma canônica é descrita por meio do par (g, p) , sendo g o número total de buracos do toro e p o número de círculos. Essas formas canônicas descrevem o número de singularidade presentes no padrão. Pode ser mostrado que, à exceção do toro de ordem 1, todos os demais possuem $2(g - 1)$ pares de singularidades.

A Figura 4.3(a) e (b) apresenta dois tipos de padrão. O primeiro com

mecanismo de dobra e o outro com o mecanismo de rasgo. O padrão da 4.3(a), por apresentar apenas um buraco, pode ser simplificado de modo a ter uma única linha de ramificação e 4 ramos. As correspondentes formas canônicas são mostradas nas Figuras 4.3(c) e (d).

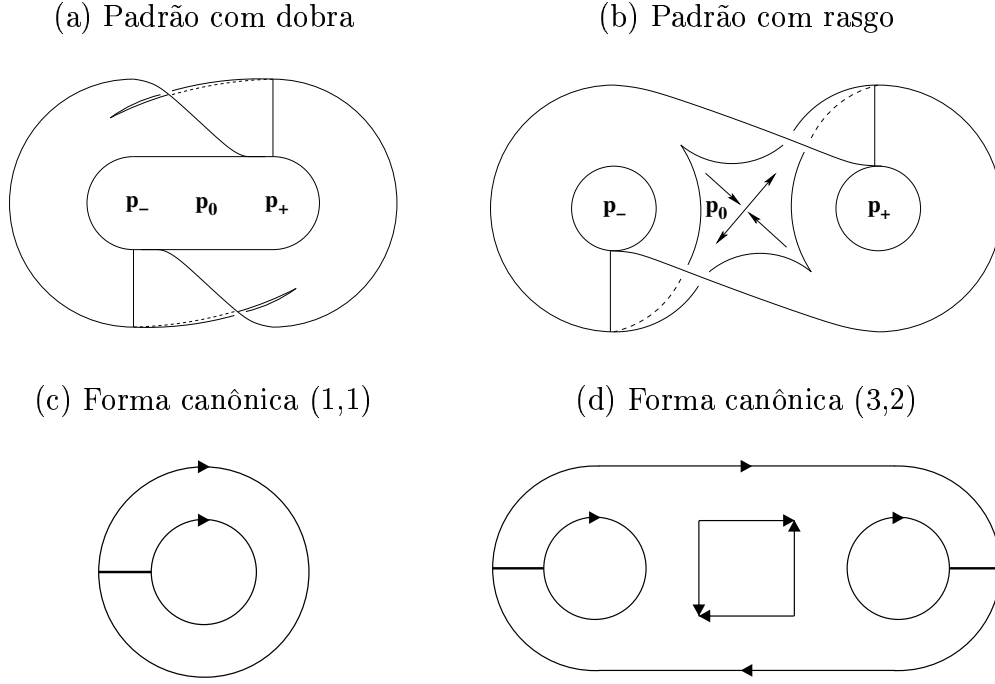


Figura 4.3: (a) padrão com mecanismo de dobra, (b) Padrão com mecanismo de rasgo, (c) forma canônica equivalente ao toro do padrão de (a), (d) forma canônica equivalente ao toro do padrão de (b).

Na construção do comportamento caótico por meio de modelos afins, o chaveamento entre os subsistemas afins pode realizar o papel dos pontos fixos do tipo sela-nó. Além disso, pode-se supor que o número de subsistemas afins está relacionado diretamente com o número de pontos fixos do tipo sela-foco e o equivalente não-linear de pontos fixos virtuais. Pontos fixos virtuais surgem no contexto de sistemas afins. Quando o ponto fixo de um submodelo está fora do politopo desse submodelo, então esse ponto é chamado de virtual (Shorten et al., 1999). Por exemplo, dinâmicas contidas em um toro de ordem 1 são obtidas por meio da combinação de dois pontos fixos do tipo sela-foco. No entanto, existem sistemas com atratores contidos em um toro de ordem 1 mas que apresentam apenas um ponto fixo no espaço e supostamente outro ponto fixo é virtual.

Como se supõe que o chaveamento possa substituir um ponto fixo do tipo sela-nó e foi verificado que esse tipo de ponto fixo está relacionado às transições entre regiões circulares do toro, pergunta-se: seria possível desenvolver sistemas com estruturas topológicas mais ricas por meio da composição de sistemas mais simples? Tal questão se relaciona diretamente com a teoria de sistemas imagem e cobertura. Essa questão é abordada na seção seguinte dentro do contexto de sistemas afins por partes.

4.7 Sistemas cobertura e imagem

Sistemas simétricos podem apresentar um dos três tipos de simetria: rotacional, inversão e de reflexão. Pode ser verificado se um sistema possui um dos grupos de simetria, se o sistema for invariante às transformações de variável:

$$\begin{aligned} \text{reflexão: } (x, y, z) &\rightarrow (x, y, -z), \\ \text{rotação: } (x, y, z) &\rightarrow (-x, -y, z), \\ \text{inversão: } (x, y, z) &\rightarrow (-x, -y, -z). \end{aligned}$$

Sistemas invariantes a uma das transformações acima são chamados sistemas cobertura (*cover system*) (Letellier e Gilmore, 2001). Sistemas com diferentes grupos de simetria apresentam diferentes topologias. No entanto, a simetria pode ser eliminada por meio de transformações de variáveis. O sistema resultante é conhecido como sistema imagem (*image system*). A operação inversa também é possível. Após a devida transformação de variáveis, pode ser constatado que diferentes sistemas simétricos podem ter o mesmo sistema imagem.

No caso de modelos afins por partes, diferentes sistemas cobertura podem ser obtidos por meio de operações de inversão ou rotação de um sistema assimétrico e a determinação de um eixo de simetria. O eixo de simetria será uma das superfícies de chaveamento.

O procedimento para se construir sistemas cobertura por meio de modelos afins por partes é descrito a seguir:

1. seja um atrator assimétrico contido em um toro de ordem 1.¹ Transladar para origem o ponto fixo imerso no atrator. Essa operação é realizada por meio da transformação $(x, y, z) \rightarrow (x - x_p, y - y_p, z - z_p)$, sendo que (x_p, y_p, z_p) são as coordenadas do ponto fixo;

¹A composição de sistemas afins não precisa ser feita apenas com sistemas contidos no toro de ordem 1. Nesse procedimento foi tomado toro de ordem 1 para facilitar a descrição.

2. transladar o sistema e sua cópia para regiões equidistantes. Por exemplo, o sistema pode ser transladado fazendo $(x, y, z) \rightarrow (x - d, y, z)$ e sua cópia $(x, y, z) \rightarrow (x + d, y, z)$, sendo que o termo d representa a distância transladada;
3. aplicar ao sistema imagem uma transformação de coordenadas que produzam rotação ou inversão, isto é, $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ ou $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$;
4. determinar o eixo de simetria. A escolha é feita considerando que a conexão dos subsistemas devem preservar a orientação do fluxo. Essa operação conduz à conclusão de que, em sistemas simétricos, uma das superfícies de chaveamento deve conter o eixo de simetria.

Os atratores das Figuras 4.4(a) e (b) foram obtidos por modelos afins seguindo o procedimento proposto. O atrator imagem é mostrado na Figura 4.4(c). Para construção da Figura 4.4(a) foi aplicada uma operação de rotação e na Figura 4.4(b) operação de inversão.

Do ponto de vista topológico, a operação desenvolvida acima para produzir sistemas cobertura por meio de modelos afins por partes, encontra profunda relação com a teoria dos nós (Manturov, 2004; Ghrist et al., 1997). Por definição nós são curvas fechadas que não se auto-interseccionam. No caso de sistemas dinâmicos, as órbitas periódicas são tratadas como nós. A operação descrita acima corresponde à operação de nós conhecida como soma conectada. A Figura 4.5 ilustra a operação de soma conectada, representada pelo operador $\#$. A operação é aplicada aos nós k_1 e k_2 o que dá origem ao nó k_3 .

Uma importante característica dessa operação é que deve ser garantida a preservação da orientação dos nós. Essa propriedade é garantida quando a operação de rotação ou de inversão é aplicada ao sistema imagem duplicado.

4.8 Variedades e bifurcações globais

Pretende-se avaliar como a superfície de chaveamento pode alterar o comportamento global do campo vetorial de modo a produzir bifurcações globais. Será verificado a seguir que a junção de submodelos afins pode dar origem a um ponto fixo e até mesmo a bifurcações locais.

Para que se possa constatar as afirmações acima, será tomado o seguinte

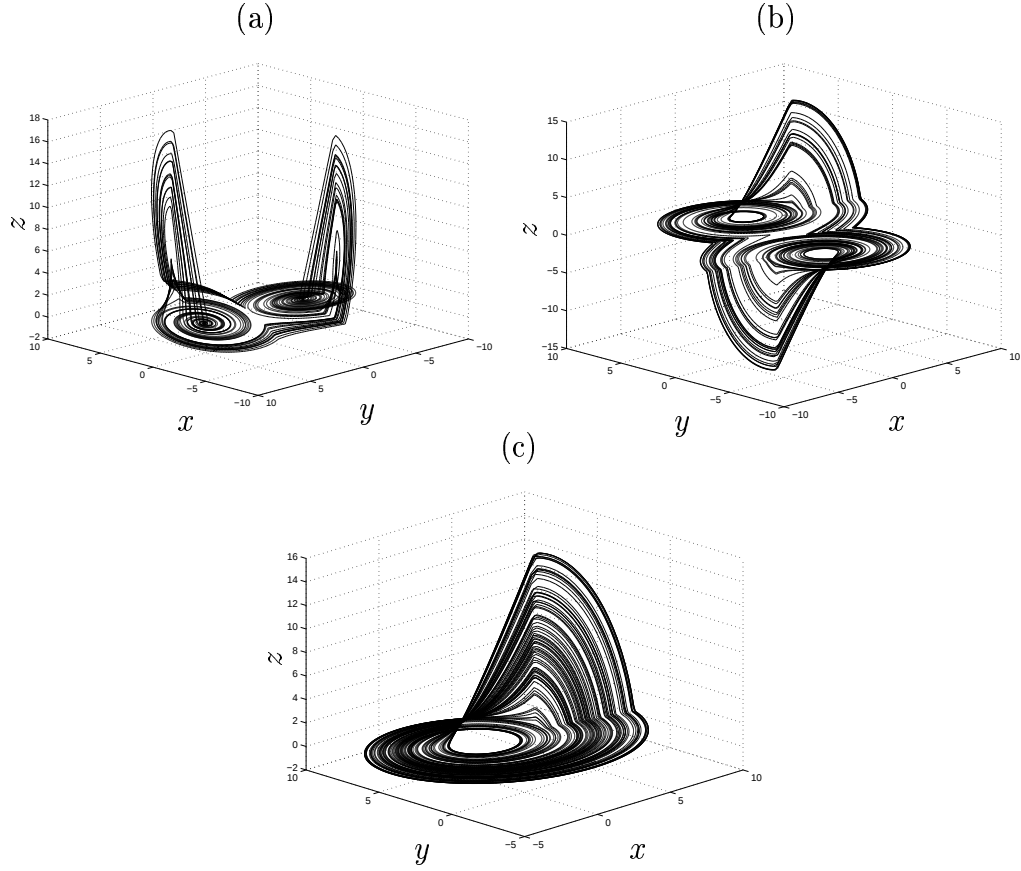


Figura 4.4: (a) Sistema obtido pela operação de rotação, conseqüentemente tal sistema apresenta a propriedade de simetria de rotação. (b) Sistema obtido pela operação de inversão. (c) Sistema que deu origem aos sistemas em (a) e (b), isto é, o sistema imagem.

modelo afim por partes:

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x + f_c(x, y), \end{cases} \quad (4.2)$$

sendo,

$$f_c(x, y) = \begin{cases} -1, & \text{se } ax + y > 0 \\ +1, & \text{se } ax + y \leq 0, \end{cases}$$

e $a \in \mathbb{R}$ é o parâmetro que varia a inclinação da superfície de chaveamento. A Figura 4.6 mostra o retrato de fases quando a assume os valores 3, 0 e -3. Algumas observações a seguir são feitas para essa variação de a .

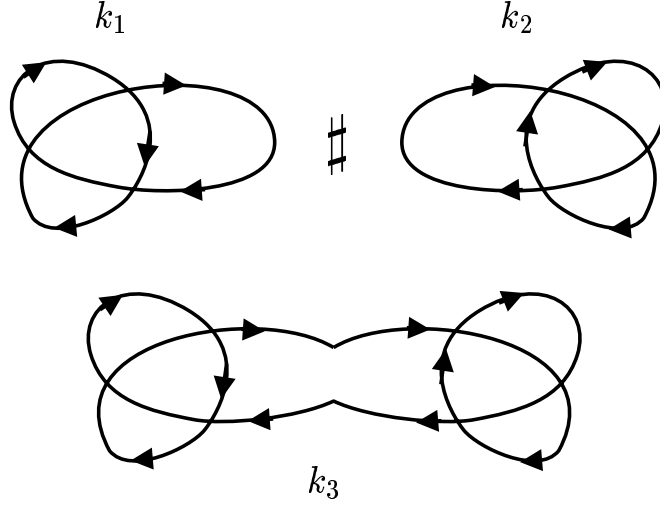


Figura 4.5: Soma conectada entre os nós orientados k_1 e k_2 dando origem ao nó k_3 .

Os submodelos afins possuem os pontos fixos $p_- = (-1, 0)$ e $p_+ = (1, 0)$. Esses pontos fixos são do tipo sela-nó. Verifica-se também que a junção entre os dois subsistemas produz um comportamento de ponto fixo em $p_0 = (0, 0)$. A rigor, $p_0 = (0, 0)$ não pode ser ponto fixo porque para esse valor as derivadas serão $(\dot{x}, \dot{y}) = (0, 1)$. No entanto, essas derivadas indicam que o sistema deve crescer na direção positiva de y . Para um aumento infinitesimal de y tem-se $(x, y) = (0, 0^+)$. Nessa região do espaço a derivada será $(\dot{x}, \dot{y}) = (0, -1)$, o que indica que o sistema decresce na direção de y voltando para $(x, y) = (0, 0)$. Por isso, será assumido que $(x, y) = (0, 0)$ é ponto fixo.

Primeiramente os retratos de fases da Figura 4.6 serão analisados do ponto de vista local. Quando a superfície de chaveamento é variada, nenhuma mudança é verificada em torno dos pontos fixos simétricos. Pelo campo vetorial pode ser verificado que o ponto fixo p_0 é um foco e que, além disso, a estabilidade desse ponto é alterada pelo parâmetro a da superfície de chaveamento. Verifica-se que ocorre uma bifurcação de ponto fixo. Na Figura 4.6(b) o campo vetorial em torno de p_0 tem o comportamento de um ponto fixo centro. Quando o parâmetro a recebe valores negativos, p_0 torna-se um foco estável (Figura 4.6(a)). Para valores positivos, p_0 torna-se um foco instável (Figura 4.6(c)).

Quanto ao comportamento global, importantes mudanças também são observadas no retrato de fases. Na Figura 4.6(a) existem conexões hetero-

clínicas entre os pontos simétricos e o ponto fixo trivial. Essa formação cria uma bacia de atração entre as variedades estáveis. Quando o parâmetro assume o valor $a = 0$, acontece uma bifurcação global. As variedades estáveis e instáveis dos pontos fixos simétricos se conectam. A conexão heteroclínica entre os pontos simétricos e o ponto trivial é rompida e uma nova conexão heteroclínica é formada, agora, entre os pontos simétricos. A bacia de atração deixa de existir e verifica-se estabilidade marginal na região interior às conexões heteroclínicas, isto é, os autovalores do ponto p_0 são puramente imaginários. Em seguida o parâmetro a assume valores positivos. A Figura 4.6(c) mostra que nessa condição as conexões são rompidas e o retrato de fases torna-se globalmente instável. Pela Figura 4.6, também verifica-se que modelos afins por partes apresentam relação com sistemas de estrutura variável.

Esse exemplo mostra que a variação na superfície de chaveamento tem um profundo impacto no comportamento global e local de um campo vetorial. Foi também verificado nesse exemplo que a principal razão é a mudança global das variedades não-lineares dos pontos fixos.

4.9 Conclusão

Este capítulo mostrou como importantes elementos da topologia de atratores estranhos podem ser reproduzidos por meio de modelos afins por partes. Foi verificado que comportamentos dinâmicos podem ser construídos, como visto na metodologia para produzir sistemas cobertura. Tendo sido apresentada a maneira como esses modelos podem construir dinâmicas, será apresentado no próximo capítulo um procedimento para reconstrução de campos vetoriais. A reconstrução utilizará as orientações apresentadas neste capítulo. Elementos topológicos fundamentais como singularidades, ramos e mecanismos podem ser identificados em atratores estranhos. Por meio da determinação desses elementos pode-se empregar o modelo afim para reconstruir o atrator.

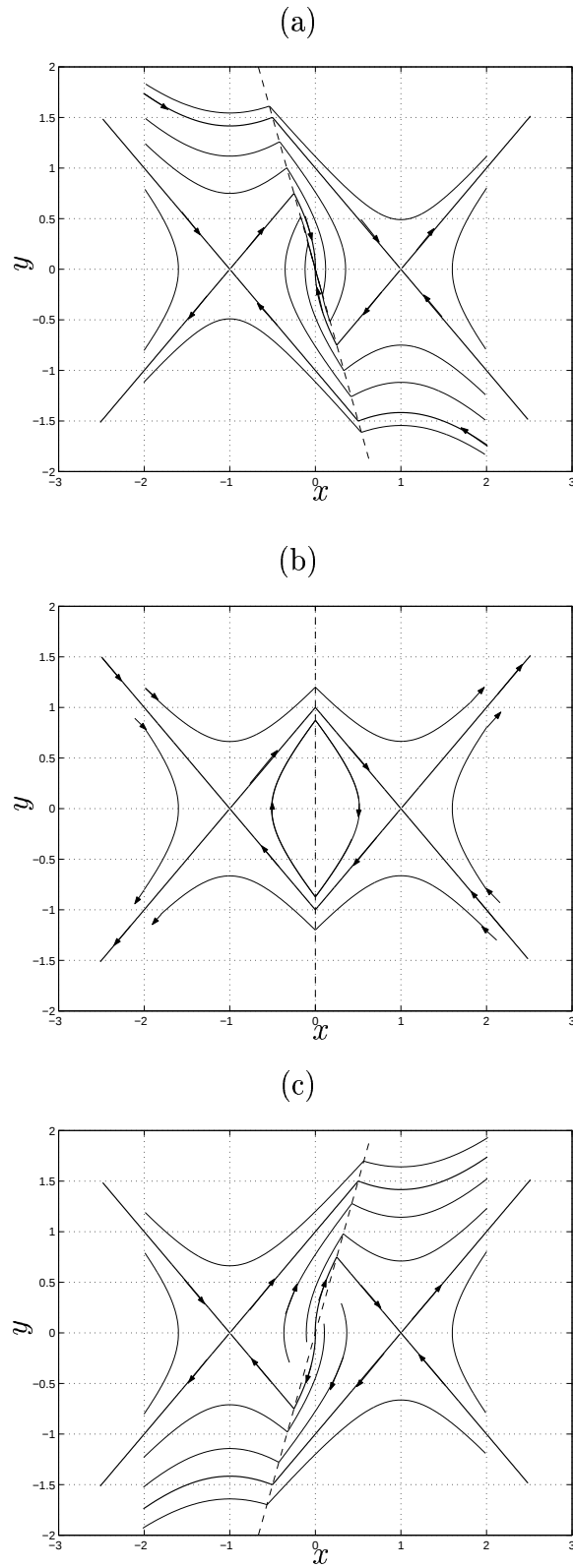


Figura 4.6: Retratos de fase obtidos por meio de simulação das trajetórias do sistema (4.2). (a) $a = -3$, (b) $a = 0$, (c) $a = 3$. As variedades também foram obtidas por meio de simulação.

Capítulo 5

Reconstrução de Campos Vetoriais

5.1 Introdução

Entre as dificuldades encontradas na construção de modelos afins por partes citam-se a determinação do número de divisões do espaço e a busca de uma superfície de chaveamento. Este capítulo descreve um procedimento baseado na organização topológica de atratores que fornece orientações para responder a essas questões. Alguns dos resultados apresentados foram publicados em (Amaral et al., 2006).

O ponto de partida é a extração das características topológicas e dinâmicas dos sistemas, bem como a determinação de qual mecanismo de construção da dinâmica está presente. O conhecimento dessas características e de como reproduzi-las em modelos afins por partes permite a construção de modelos que reproduzem os comportamentos dinâmicos local e global.

Investiga-se também qual é a relação entre a variação da superfície de chaveamento e a topologia resultante. No presente capítulo, assumem-se conhecidos os submodelos locais de modo que o foco do estudo é a conexão entre os submodelos. Os resultados mostram que é possível obter modelos topologicamente equivalentes aos sistemas abordados. Esse resultado é obtido com um número mínimo de modelos locais, apenas dois para o caso dos sistemas tratados neste capítulo. Ressalta-se que a reconstrução dos mesmos sistemas, seguindo outros procedimentos, resultou em um número relativamente grande de submodelos locais, centenas (Storace e De Feo, 2004) e até milhares de submodelos locais (Hiew, 1994). Será mostrado a seguir que o procedimento proposto não apresenta tal dificuldade.

Uma vez que o procedimento proposto é baseado nas características to-

pológicas e dinâmicas dos atratores, a próxima seção descreverá algumas das características dos sistemas tratados neste capítulo, os sistemas de Rössler e de Lorenz.

5.2 Sistemas caóticos e seus mecanismos

Em 1963, Lorenz foi um dos primeiros a descrever um sistema que apresenta comportamento caótico em tempo contínuo (Lorenz, 1963). As equações de Lorenz são uma versão simplificada do modelo de convecção de Rayleigh-Bénard. Essas equações surgiram dentro do contexto de dinâmica dos fluidos; no entanto, depois foi mostrado que outros sistemas físicos também apresentam o mesmo comportamento do sistema de Lorenz, como exemplo, laser (Haken, 1975) e motor de corrente contínua sem escovas (Hemati, 1994). O sistema de Lorenz é descrito pelas seguintes equações

$$\begin{cases} \dot{x} = -sx + sy \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy, \end{cases} \quad (5.1)$$

dependentes dos parâmetros (s, r, b) . Os pontos fixos do sistema são:

$$\mathbf{p}_+ = \begin{cases} x_+ = \sqrt{b(r-1)} \\ y_+ = \sqrt{b(r-1)} \\ z_+ = r-1 \end{cases}, \quad \mathbf{p}_0 = \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}, \quad \text{e } \mathbf{p}_- = \begin{cases} x_- = -\sqrt{b(r-1)} \\ y_- = -\sqrt{b(r-1)} \\ z_- = r-1 \end{cases}.$$

As equações de Lorenz resultam em um ponto fixo trivial $\mathbf{p}_0$ e dois pontos fixos simétricos $\mathbf{p}_-$ e $\mathbf{p}_+$. Não apenas os pontos fixos, mas todo o campo vetorial desse sistema apresenta a propriedade de simetria rotacional em torno do eixo z . Nesse caso diz-se que o sistema é invariante sob a transformação de coordenadas $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$.

Algum tempo depois, surgiu um outro sistema que também produz comportamento caótico em tempo contínuo, o sistema de Rössler (Rössler, 1976). Esse sistema foi descrito inicialmente na literatura como um “modelo de um modelo”, porque não apresentava na época, interpretação física. Mais tarde verificou-se que alguns sistemas físicos se comportavam de maneira semelhante ao sistema de Rössler (laser (Papoff et al., 1992), eletrodissolução do cobre (Letellier et al., 1995b,c), reação de Belousov-Zhabotinsky (Letellier et al., 1998), sistema bioquímico (Letellier, 2002)). O sistema de Rössler é um sistema semelhante ao sistema de Lorenz, porém sem a propriedade de simetria. Diz-se que é semelhante ao sistema de Lorenz porque o sistema imagem de Lorenz tem o mesmo padrão de Rössler (Letellier e Gilmore,

2001). Enquanto o sistema de Lorenz apresenta duas espirais simétricas, o sistema de Rössler apresenta apenas uma. O sistema de Rössler é descrito pelas equações

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + (x - c)z, \end{cases} \quad (5.2)$$

que têm apenas dois pontos fixos,

$$\mathbf{p}_{\pm} = \begin{cases} x_{\pm} = -ay_{\pm} \\ y_{\pm} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \\ z_{\pm} = -y_{\pm}. \end{cases} \quad (5.3)$$

É interessante notar que apenas o ponto fixo $\mathbf{p}_{-}$ está imerso no atrator caótico. O que explica, em parte, a formação de apenas uma espiral. O ponto $\mathbf{p}_{+}$ faz com que o sistema seja globalmente estável. Essas características estão relacionadas com o mecanismo de dobra (*folding*).

As estruturas dos atratores produzidos pelos sistemas de Lorenz e Rössler são classificadas como toro limitante de ordem 3 e 1, respectivamente¹ (Tsankov e Gilmore, 2003). Sistemas com a estrutura de um toro limitante de ordem 1 somente apresentam o mecanismo de dobra, o que é identificado no mapa de primeiro retorno por ramos monotônicos e um ponto crítico diferenciável (Byrne et al., 2004). O sistema de Lorenz por apresentar mais de uma espiral é capaz de desenvolver um outro mecanismo além de dobra, o mecanismo de rasgo (*tearing*). Esse mecanismo pode ser identificado no mapa de primeiro retorno pela presença de ramos monotônicos e ponto crítico não-diferenciável ou descontínuo (Byrne et al., 2004).

Comportamentos caóticos em baixa dimensão ($d = 3$) são formados por um ou pela combinação dos mecanismos citados anteriormente. Assim, o entendimento de como os sistemas de Rössler e Lorenz podem ser reproduzidos guarda relativo grau de generalidade. A questão que se coloca é: como reproduzir esses sistemas por meio de modelos afins por partes e garantir suas propriedades locais e globais? Para responder a essa questão um procedimento de reconstrução dos sistemas de Rössler e de Lorenz, que utiliza modelos afins por partes, é sugerido e investigado. Na próxima seção, será checado como o mecanismo de dobra do sistema de Rössler pode ser obtido por modelos afins por partes.

¹Dependendo dos valores dos parâmetros, o atrator de Lorenz também pode ser classificado como toro limitante de ordem 1.

5.3 Reconstrução do sistema de Rössler

As próximas subseções apresentarão de maneira mais minuciosa, qual é a topologia e a dinâmica local do sistema de Rössler para o conjunto de parâmetros $(a; b; c) = (0,398; 2; 4)$. Tais informações, que podem ser total ou parcialmente extraídas de dados, orientarão a construção do modelo afim por partes.

5.3.1 Análise topológica do atrator Rössler

Para se obter uma descrição rigorosa do comportamento global do sistema de Rössler, será empregado um procedimento de análise topológica. Como já referido anteriormente, esse procedimento começa com o cálculo do mapa de primeiro retorno de uma seção de Poincaré do atrator. Para o sistema em questão, uma seção de Poincaré que auxilia o processo de codificação simbólica é dada pelo corte feito na direção do ponto fixo imerso no atrator:

$$P \equiv \{(y_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid x_n = x_-, \dot{x} > 0\}, \quad (5.4)$$

sendo x_- a coordenada desse ponto fixo. Esse corte do atrator é apresentado na Figura 5.1 (a). O conjunto de pontos na seção P não apresenta dobra, como pode ser visto na Figura 5.1 (b), isso garante comportamento monotônico no mapa de primeiro retorno.

O mapa de primeiro retorno é construído por meio da variável y_n . A Figura 5.2 apresenta o mapa e a codificação simbólica dos pontos da seção P . O ponto y_c determina a codificação simbólica dos pontos em P ,

$$y_n = \begin{cases} 1, & \text{se } y \geq y_c \\ 0, & \text{se } y < y_c. \end{cases} \quad (5.5)$$

Em seguida, órbitas periódicas instáveis são extraídas do atrator e codificadas segundo a equação (5.5). Para determinar qual é o padrão, os números de conexão foram calculados. Os números de conexão entre pares de órbitas periódicas instáveis são apresentados na Tabela 5.1.

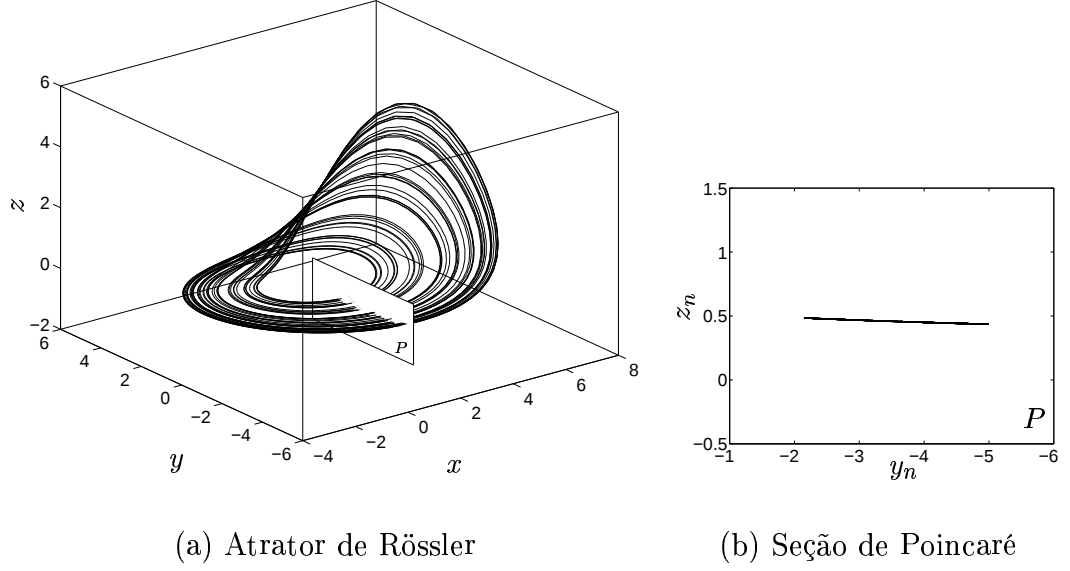


Figura 5.1: (a) Atrator do sistema de Rössler para os valores dos parâmetros $(a; b; c) = (0,398; 2; 4)$, (b) seção de Poincaré $P \equiv \{(y_n, z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid x_n = x_-, \dot{x} > 0\}$.

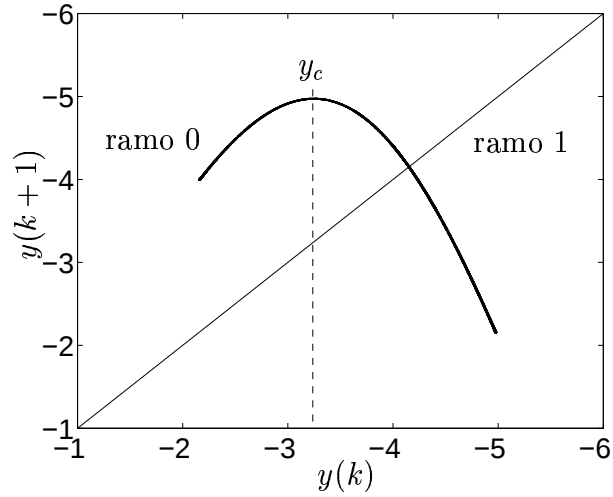


Figura 5.2: (a) Mapa de primeiro retorno do sistema de Rössler. O ponto $y_c = -3,25$ é o limite entre as regiões de expansão e contração, isto é, os ramos 0 e 1.

Tabela 5.1: Número de conexão entre pares de órbitas periódicas instáveis coexistentes com o atrator de Rössler.

	(1)	(10)	(1011)	(10111)
(10)	-1			
(1011)	-2	-3		
(10111)	-2	-4	-8	
(10110)	-2	-4	-8	-10

Com a informação da Tabela 5.1, o padrão é determinado e validado. O comportamento global do sistema de Rössler para o conjunto de valores de parâmetros $(a; b; c) = (0,398; 2; 4)$ é sintetizado pelo padrão da Figura 5.3.

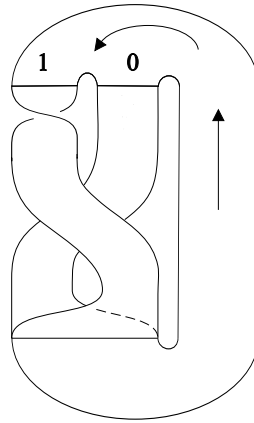


Figura 5.3: Padrão do sistema de Rössler com convenção de inserção padrão na linha de ramificação. O padrão consiste em dois ramos, sendo o ramo 0 relacionado ao processo de expansão e o ramo 1, ao processo de contração.

O padrão consiste apenas de dois ramos, sendo o ramo 0 o responsável pelo mecanismo de expansão do atrator (*stretching*) e o ramo 1 responsável pelo mecanismo de contração (*folding*). Observa-se também que o ramo 1 apresenta uma torção local negativa (-1). Também há um cruzamento negativo (-1) entre os ramos e não há torção global.

Como o procedimento para construção de modelos afins por partes é baseado em informação global e local, será mostrado a seguir como a dinâmica local em torno dos pontos fixos pode auxiliar o entendimento da formação do comportamento global, isto é, os mecanismos de expansão e dobra.

5.3.2 Dinâmica local do sistema de Rössler

A seguir será verificado como a informação do campo vetorial em torno dos pontos fixos se relaciona com o comportamento global. A primeira etapa para análise local é o cálculo dos pontos fixos. Para o conjunto de valores de parâmetros referidos anteriormente, o sistema apresenta os seguintes pontos fixos:

$$\mathbf{p}_- = \begin{bmatrix} 0,2100 \\ -0,5277 \\ 0,5277 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_+ = \begin{bmatrix} 3,7900 \\ -9,5225 \\ 9,5225 \end{bmatrix}.$$

O comportamento dinâmico em torno desses pontos é descrito pelos autovalores e autovetores das respectivas matrizes jacobianas. Para os pontos fixos referidos acima, os autovalores foram calculados e são apresentados na Tabela 5.2, sendo λ_{g_i} o i -ésimo autovalor do ponto fixo $\mathbf{p}_g$.

Tabela 5.2: Autovalores do sistema de Rössler linearizado em torno de seus pontos fixos.

$\lambda_{-1} = -3,6547$	$\lambda_{+1} = 0,3412$
$\lambda_{-2} = 0,1314 - j0,9810$	$\lambda_{+2} = -0,0766 - j3,2381$
$\lambda_{-3} = 0,1314 + j0,9810$	$\lambda_{+3} = -0,0766 + j3,2381$

Pelos autovalores conclui-se que os dois pontos fixos são do tipo sela-foco². Das matrizes jacobianas verifica-se que o ponto fixo $\mathbf{p}_-$ tem uma variedade instável bidimensional E_-^{i2} e uma variedade estável unidimensional E_-^{e1} e o outro ponto fixo uma variedade estável bidimensional E_+^{e2} e uma variedade instável unidimensional E_+^{i1} . A Figura 5.4 mostra trajetórias contidas nas variedades estáveis e instáveis dos pontos fixos e o atrator.

A visualização das variedades e do atrator auxilia na compreensão da dinâmica global porque permite checar como se dá, ainda que de maneira qualitativa, a interação entre as variedades. A Figura 5.5 mostra as variedades associadas a cada um dos pontos fixos do sistema. O campo vetorial do sistema de Rössler resulta de um efeito combinado dessas variedades. Uma importante observação é que em determinadas regiões do espaço, algumas variedades influenciam fortemente o comportamento do sistema.

²Aqui será feita a distinção entre sela-foco e sela-nó. Enquanto na análise de estabilidade essa distinção parece não ser tão relevante, no caso de reconstrução será. Importa saber como é o campo vetorial, para que se possa entender como se dá a interação entre as variedades lineares.

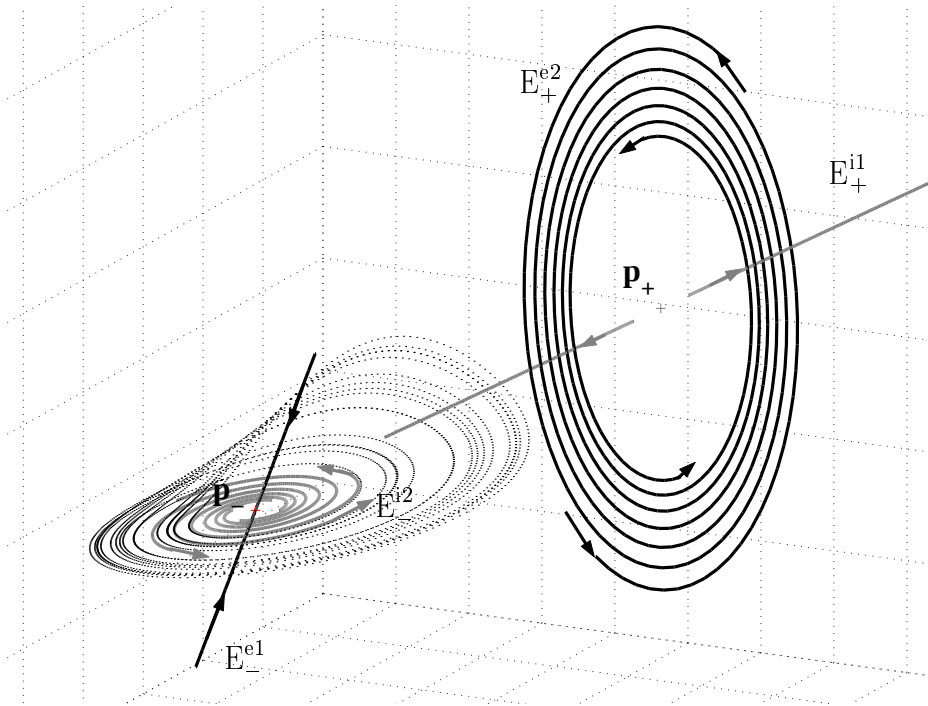


Figura 5.4: Atrator de Rössler (pontilhado) e as variedades referentes às linearizações nos pontos fixos $\mathbf{p}_-$ e $\mathbf{p}_+$. Variedades estáveis E_-^{e1} e E_+^{e2} (preto) e variedades instáveis E_-^{i2} e E_+^{i1} (cinza).

A variedade E_-^{i2} do ponto fixo $\mathbf{p}_-$ explica o comportamento divergente da trajetória. Quando a trajetória alcança a primeira região de transição, começa a ser fortemente determinada pelo campo vetorial do ponto fixo $\mathbf{p}_+$, ver Figura 5.5. O processo de dobra da trajetória, associado ao ramo 1 do padrão, é iniciado principalmente pela variedade E_+^{e2} . Essa variedade conduz a trajetória até a segunda região de transição. Nessa região, a trajetória é fortemente influenciada pelo comportamento da variedade E_-^{e1} , isto é, a trajetória é reinjetada até próxima ao ponto fixo $\mathbf{p}_-$ concluindo a dobra e reiniciando o processo de expansão e dobra.

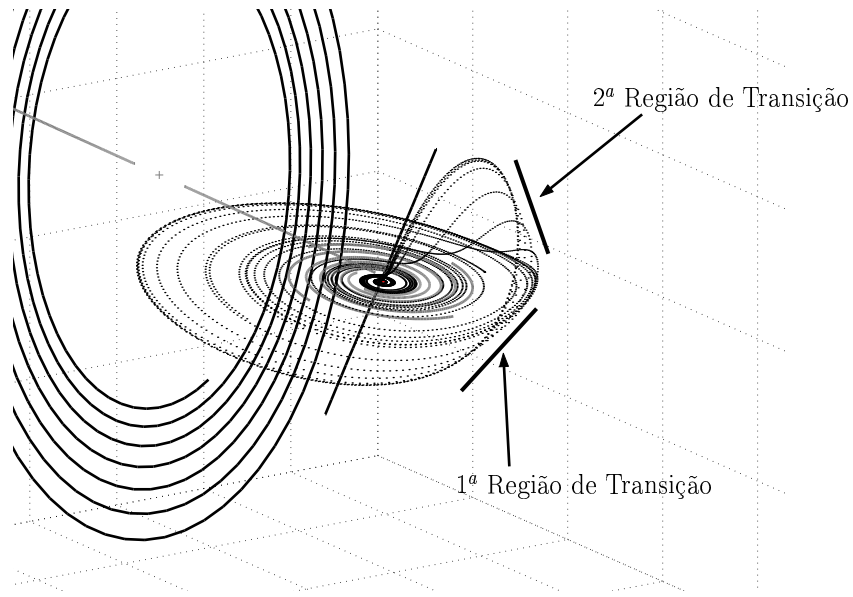


Figura 5.5: A primeira região de transição marca a passagem do domínio das variedades do ponto $\mathbf{p}_-$ para as variedades do ponto $\mathbf{p}_+$. A segunda região de transição marca o retorno do domínio das variedades do ponto $\mathbf{p}_-$ na determinação da trajetória.

O campo vetorial de cada ponto fixo tem associado, para o caso em estudo, um comportamento topológico. O processo de expansão pode ser explicado pela dinâmica do ponto fixo $\mathbf{p}_-$, enquanto a dobra é obtida por meio do campo vetorial do ponto $\mathbf{p}_+$ e concluída pela variedade estável do ponto $\mathbf{p}_-$. Resumidamente, pode-se afirmar que a função do campo vetorial do ponto fixo $\mathbf{p}_+$ é levar o fluxo da variedade E_-^{u2} para variedade E_-^{e1} . Na próxima seção, as informações da dinâmica local e global serão utilizadas na construção de um modelo afim por partes topologicamente equivalente ao sistema de Rössler.

5.3.3 Modelo afim por partes do sistema de Rössler

Como observado anteriormente, o comportamento do sistema de Rössler pode ser entendido por meio do retrato de fases do campo vetorial em torno dos pontos fixos e pela identificação das regiões onde cada campo vetorial é dominante. Como o sistema apresenta dois pontos fixos do tipo sela-foco, o modelo por partes será construído com apenas dois submodelos afins e uma partição do espaço. O modelo afim por partes que reconstrói o comportamento do sistema de Rössler terá a seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = f_1[d(\mathbf{x})] \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0,398 & 0 \\ z_- & 0 & (x_- - 4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_- \\ y - y_- \\ z - z_- \end{bmatrix} + f_2[d(\mathbf{x})] \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0,398 & 0 \\ z_+ & 0 & (x_+ - 4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_+ \\ y - y_+ \\ z - z_+ \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

sendo que as matrizes quadradas da equação (5.6) são as matrizes jacobianas avaliadas nos pontos fixos $\mathbf{p}_-$ e $\mathbf{p}_+$. O termo $[\mathbf{x} - \mathbf{p}_g]$ mostra que cada subsistema afim do modelo está centrado em um dos pontos fixos da equação (5.3). Essas duas características fazem com que o modelo afim da equação (5.6) seja apenas válido para os valores dos parâmetros $(a; b; c) = (0,398; 2; 4)$.

Como definido na seção 3.3, a função $d(\mathbf{x})$ determina a distância de um ponto qualquer do espaço de estados até a superfície de chaveamento s_i . As superfícies de chaveamento s_i são os principais ingredientes que determinam a transição entre os subsistemas. A escolha da superfície de chaveamento está profundamente relacionada com as regiões de transição mostradas na Figura 5.5. Do ponto de vista topológico, as duas regiões de transição estão relacionadas apenas com o ramo 1 do padrão. Essa observação significa que, no caso desse sistema, o chaveamento será responsável apenas pela construção da dobra, isto é, do ramo 1.

As funções $f_1[d(\mathbf{x})]$ e $f_2[d(\mathbf{x})]$ são definidas como na seção 3.3:

$$f_1[d(\mathbf{x})] = \begin{cases} 1, & \text{se } d(\mathbf{x}) \geq 0 \\ 0, & \text{se } d(\mathbf{x}) < 0 \end{cases}$$

e

$$f_2[d(\mathbf{x})] = \begin{cases} 0, & \text{se } d(\mathbf{x}) \geq 0 \\ 1, & \text{se } d(\mathbf{x}) < 0. \end{cases}$$

Como o sistema de Rössler não é um sistema afim por partes, a região de transição entre o domínio de cada ponto fixo não é bem definida, ou

seja, a transição acontece de maneira suave, gradual. O campo vetorial, progressivamente, deixa de ter as características do campo em torno de um ponto fixo e começa a tomar a forma do campo vetorial do outro ponto fixo. O que permite fazer tal observação é a análise dos autovalores e autovetores da matriz jacobiana avaliada em cada ponto do espaço. Se o sistema não for por partes, tem-se um conjunto de autovalores e autovetores diferentes em cada ponto do espaço. Tal constatação leva à conclusão de que não há uma única superfície de chaveamento, pelo menos do ponto de vista qualitativo. No entanto, uma escolha incorreta dessa superfície conduz a comportamentos instáveis ou topologicamente não equivalentes.

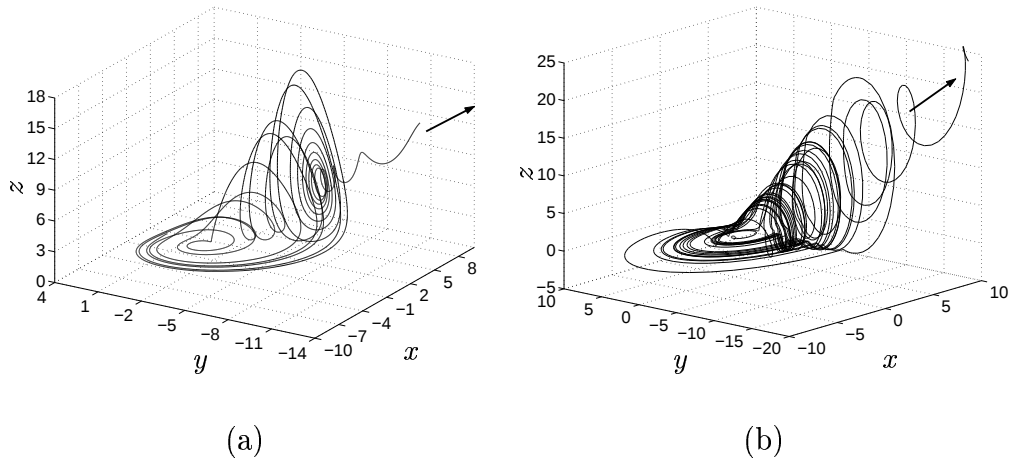


Figura 5.6: (a) Atrator do sistema de Rössler para os valores dos parâmetros $(a; b; c) = (0,5566251; 2; 4)$, (b) Trajetória do sistema afim por partes mostrado na equação (5.6) com superfície de chaveamento $x = 2$.

A Figura 5.6(a) mostra o comportamento do sistema de Rössler para os valores dos parâmetros $(a; b; c) = (0,5566251; 2; 4)$. Tomando o modelo descrito na equação (5.6) e a superfície de chaveamento $x = 2$ obtém-se comportamento instável como mostrado na Figura 5.6(b). Isso mostra que a superfície de chaveamento pode determinar o tipo de dinâmica resultante e, portanto, torna-se necessário investigar com mais detalhes a sua influência.

Para investigar a influência da superfície de chaveamento, as superfícies abaixo foram escolhidas,

$$s_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x = 3,59\}, \quad (5.7)$$

$$s_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid y = -3x + 10,6\}, \quad (5.8)$$

$$s_3 = \begin{cases} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid -x + 0,7y + 4,5 = 0\}, & \text{se } y \geq -1,4689, \\ \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2,35y - 0,02 = 0\}, & \text{se } y < -1,4689, \end{cases} \quad (5.9)$$

$$s_4 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 0,95y^2 + 3y + 6 - x = 0\}. \quad (5.10)$$

As projeções dessas superfícies de chaveamento em $\mathbb{R}^2$ podem ser vistas na Figura 5.7. Dois critérios foram seguidos para seleção dessas superfícies. O primeiro é baseado em informação da dinâmica local. As superfícies devem dividir o espaço nas duas regiões de transição descritas anteriormente, isto é, na região em que a variável z começa a crescer e na região próxima ao ponto de máximo de z . O segundo critério é baseado na topologia global. O mapa de primeiro retorno do sistema resultante deve apresentar apenas dois ramos monotônicos e máximo diferenciável.

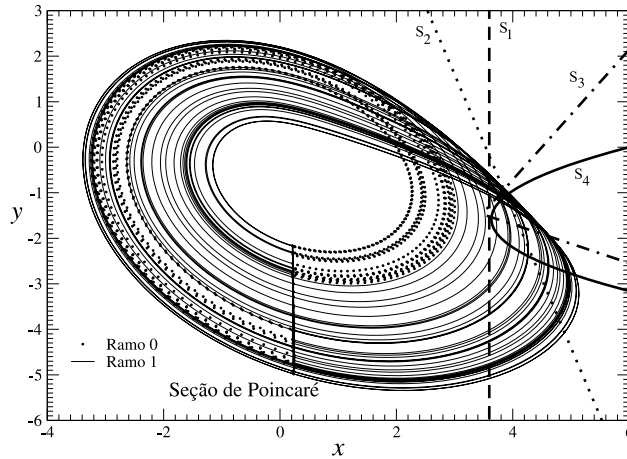


Figura 5.7: Projeção do atrator de Rössler no plano xy . As superfícies de chaveamento s_1 , s_2 , s_3 e s_4 foram escolhidas segundo as regiões de transição mostradas na Figura 5.5. Essa escolha objetiva a reconstrução do ramo 1 do padrão.

Os atratores caóticos e os correspondentes mapas de primeiro retorno são mostrados na Figura 5.8. Os modelos obtidos podem ser agrupados em dois conjuntos. O primeiro composto pelos modelos $\mathcal{M}[s_1]$ e $\mathcal{M}[s_2]$. Estes modelos, apesar de apresentarem mapas de primeiro retorno semelhantes,

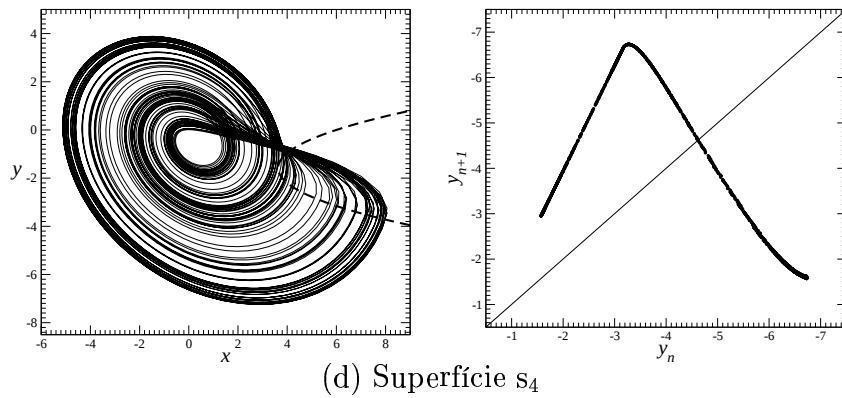
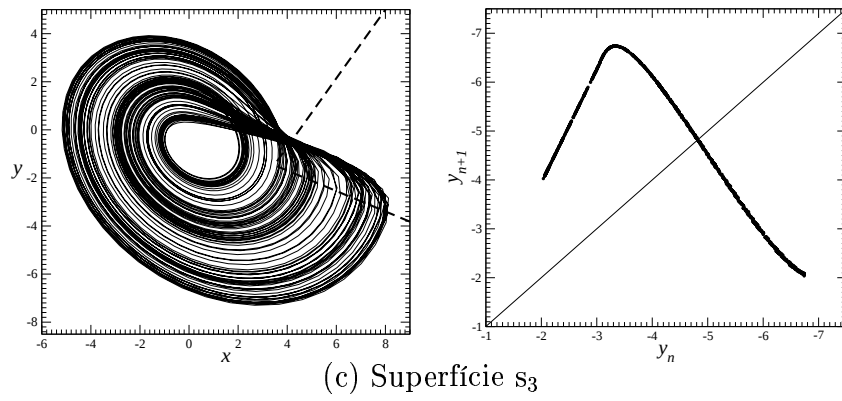
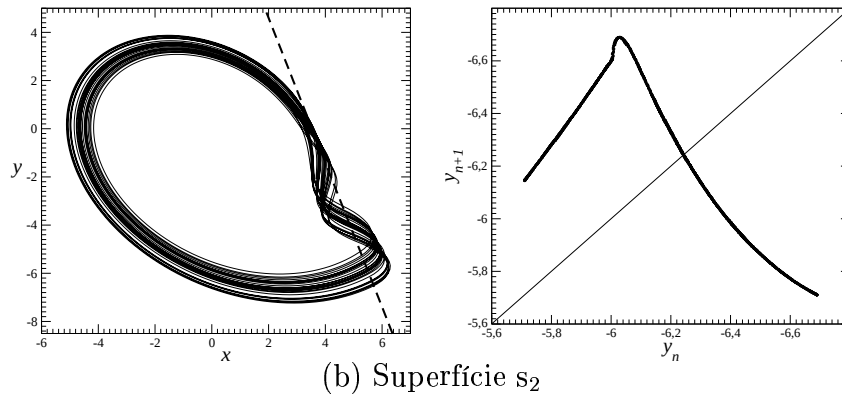
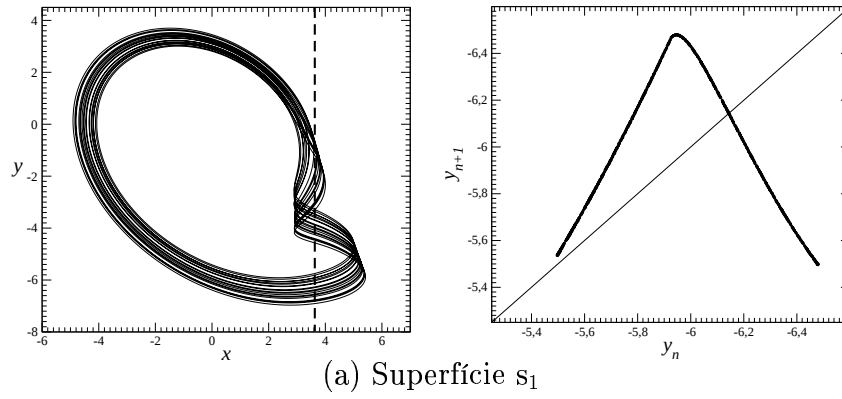


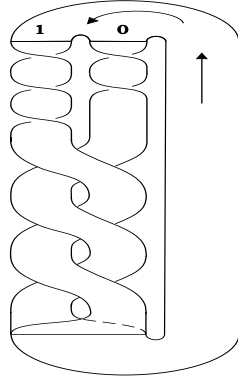
Figura 5.8: Atratores caóticos dos modelos afins resultantes das superfícies definidas anteriormente. A superfície de chaveamento é desenhada em linhas tracejadas. Os mapas de primeiro retorno correspondentes estão na coluna da direita.

diferem bastante em suas topologias. Por meio do número de conexões da população de órbitas periódicas instáveis foram obtidos os padrões destes modelos. Verifica-se que esses modelos apresentam dois tipos de dobras. A dobra no sentido usual da palavra, isto é, um meio giro no ramo 1 e a outra dobra refere-se a giros tomados ao longo de todos os ramos. Exatamente por isso, esses giros são torções globais. A Figura 5.9 apresenta padrões referentes aos modelos $\mathcal{M}[s_1]$ e $\mathcal{M}[s_2]$. A matriz que descreve as torções do padrão no caso desses modelos é a seguinte

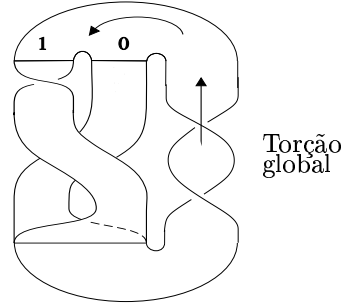
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Esse padrão é equivalente ao padrão de Rössler mais uma torção global. Essa equivalência pode ser mostrada na equação abaixo,

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}}_{\text{torção global}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{Rössler}}.$$



(a) Padrão sem torção global



(b) Padrão com uma torção global

Figura 5.9: (a) Padrão para os $\mathcal{M}[s_1]$ and $\mathcal{M}[s_2]$. Este padrão apresenta um número maior de torções locais e de torções entre os ramos do que verificado no padrão de Rössler da Figura 5.3. Substituindo as torções locais e torções entre os ramos por torções globais, obtém-se um padrão equivalente (b).

Os modelos $\mathcal{M}[s_3]$ e $\mathcal{M}[s_4]$ são topologicamente equivalentes ao sistema de Rössler porque apresentam o mesmo padrão de Rössler. No entanto, o modelo $\mathcal{M}[s_3]$ é mais exato que o modelo $\mathcal{M}[s_4]$ porque possui a mesma população de órbitas periódicas instáveis que Rössler. A população de órbitas

extraídas dos atratores de Rössler e dos modelos são mostradas na Tabela 5.3. A população de órbitas do modelo $\mathcal{M}[s_4]$ é bem mais desenvolvida (maior) o que sugere que o $\mathcal{M}[s_4]$ corresponde ao sistema de Rössler para outra região do espaço de parâmetros.

Tabela 5.3: População de órbitas periódicas instáveis extraídas de Rössler para valores dos parâmetros $(a; b; c) = (0,398; 2,0; 4,0)$ e dos modelos afins por partes.

Órbitas	Rössler	$\mathcal{M}[s_1]$	$\mathcal{M}[s_2]$	$\mathcal{M}[s_3]$	$\mathcal{M}[s_4]$
(0)		•			
(1)	•	•	•	•	•
(10)	•	•	•	•	•
(101)		•			•
(100)		•			•
(1011)	•	•	•	•	•
(1001)		•			
(1000)		•			
(10111)	•	•	•	•	•
(10110)	•	•	•	•	•
(10010)		•			
(10011)		•			
(10001)		•			
(10000)		•			
(101110)	•	•	•	•	•
(101111)	•	•	•	•	•
(100101)		•			•
(100111)		•			
(100110)		•			
(100010)		•			
(100011)		•			
(100001)		•			
(100000)		•			

Mesmo os modelos $\mathcal{M}[s_1]$ e $\mathcal{M}[s_4]$, que mostram uma topologia muito diferente do atrator de Rössler, correspondem a outras regiões do espaço de parâmetros do sistema. Isso conduz à hipótese de que a superfície de chaveamento pode ser parametrizada de modo a funcionar como parâmetro de bifurcação. De fato, verifica-se que a conjectura é verdadeira. Para mostrar essa afirmativa, o ramo inferior da superfície de chaveamento do modelo

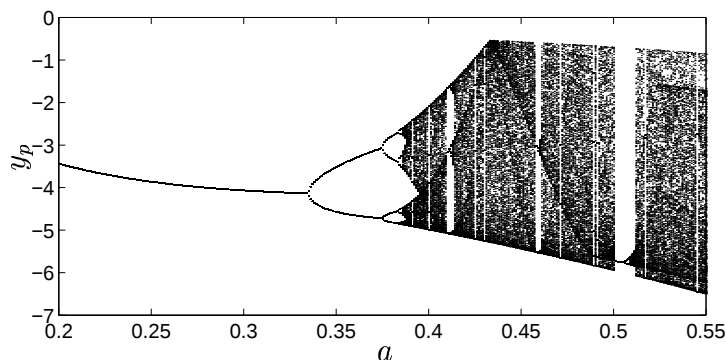


Figura 5.10: Diagrama de bifurcação do sistema de Rössler. O parâmetro a é variado no intervalo $[0,2 \ 0,55]$.

$\mathcal{M}[s_3]$ será variado de modo a alterar o ângulo entre os dois ramos da superfície de chaveamento. O ângulo entre os dois ramos da superfície s_3 tem um efeito semelhante à variação do parâmetro a na equação de Rössler (5.2). Para que o ângulo seja variado, a reta inferior de $\mathcal{M}[s_3]$ foi parametrizada como $(y - y_1) = \tan(\phi)(x - x_1)$, sendo (x_1, y_1) o ponto de encontro entre as retas que formam s_3 e ϕ é o ângulo entre a reta inferior e o eixo horizontal. Como mostrado na Figura 5.10 o sistema de Rössler apresenta uma cascata de duplicação de período quando o parâmetro a for variado. O ângulo ϕ também mostra a mesma rota para o comportamento caótico. A Figura 5.11 mostra que se o ângulo ϕ é aumentado, tem-se um comportamento semelhante a Rössler quando o parâmetro a é variado. Por isso, verifica-se que o ângulo ϕ é um parâmetro de bifurcação de $\mathcal{M}[s_3]$.

5.4 Reconstrução do sistema de Lorenz

Como afirmado anteriormente, para um determinado conjunto de parâmetros o sistema de Lorenz apresenta o mecanismo de rasgo. Esse mecanismo não é observado em sistemas semelhantes ao de Rössler, isto é, sistemas que produzem apenas atratores delimitados por um toro de ordem 1. A seguir o sistema de Lorenz será reconstruído para o conjunto de parâmetros que produz apenas o mecanismo de rasgo $(s, r, b) = (10, 28, \frac{8}{3})$.

5.4.1 Análise topológica do sistema de Lorenz

Sabendo da propriedade de simetria, uma seção de Poincaré foi escolhida de modo a aproveitar essa característica. A seção de Poincaré escolhida

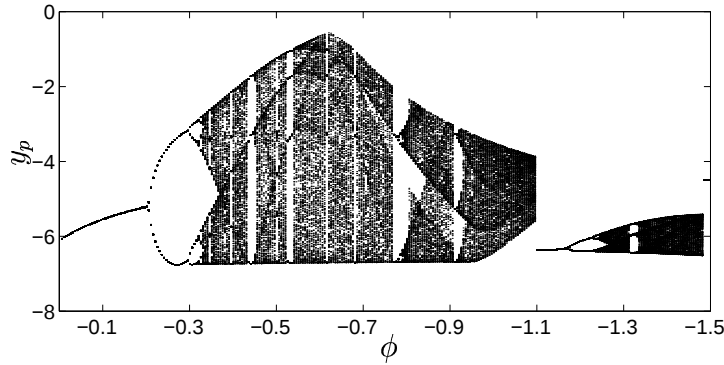


Figura 5.11: Diagrama de bifurcação do sistema de Rössler afim por partes. No caso desse sistema o parâmetro ajustado é o ângulo ϕ da reta inferior da superfície de chaveamento s_3 .

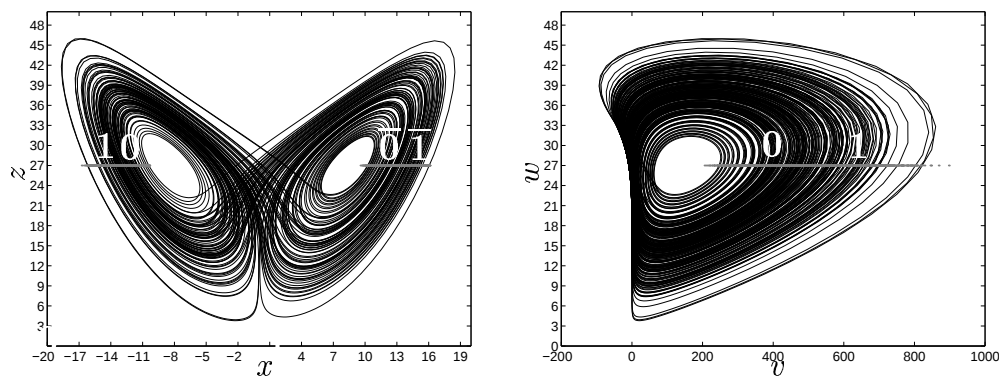
consiste em um corte na coordenada z dos pontos fixos simétricos,

$$P_L \equiv \{(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2 \mid z_n = z_+ = z_-, \dot{z}_n > 0\}. \quad (5.12)$$

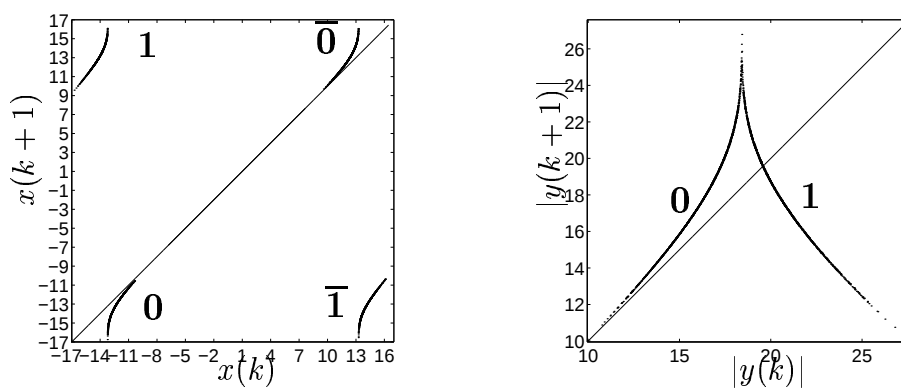
Esse corte em z fornece informação das duas asas do atrator, como mostrado na Figura 5.12(a). Como o atrator de Lorenz é delimitado por um toro de ordem 3, a descrição do atrator deve ser feita por meio de um conjunto de Poincaré, isto é, duas seções de Poincaré, uma em cada asa do atrator. Por isso, um único corte em z atende à construção do conjunto de Poincaré.

O mapa de primeiro retorno é obtido pela variável y_n . Como pode ser visto na Figura 5.12(b), o mapa de primeiro retorno apresenta quatro ramos monotônicos descontínuos, o que revela o mecanismo de rasgo. Os quatro ramos monotônicos implicam a necessidade de quatro símbolos para que se possa descrever completamente a dinâmica do sistema, sendo os símbolos 1 e 0 referentes a um domínio fundamental e os símbolos $\bar{1}$ e $\bar{0}$ referentes ao outro domínio fundamental. Os domínios fundamentais são regiões, definidas por um eixo de simetria, que apresentam as mesmas características topológicas e dinâmicas (Letellier e Gouesbet, 1995). Os símbolos 1 e $\bar{1}$ sempre levam a trajetória para a outra asa do atrator, enquanto os símbolos 0 e $\bar{0}$ mantêm a trajetória na mesma asa do atrator. A dinâmica é corretamente descrita pelo padrão mostrado na Figura 5.12(c).

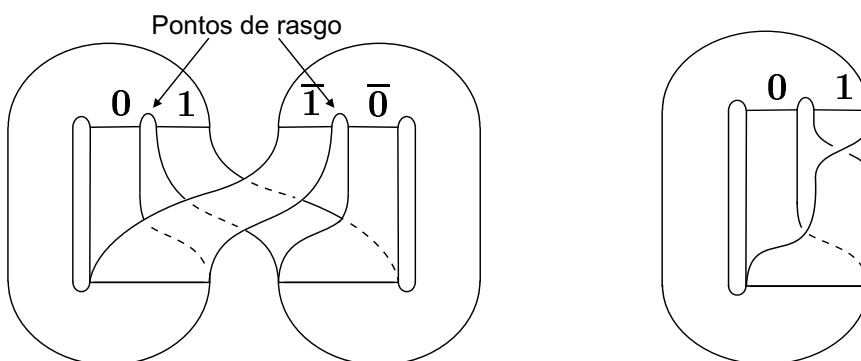
Uma vez conhecida a propriedade de simetria, a descrição topológica pode ser simplificada. A codificação simbólica pode ser feita apenas nos domínios fundamentais. Sistemas que apresentam propriedade de simetria rotacional podem ser convenientemente mapeados em seus domínios fundamentais por



(a) Atratores



(b) Mapas de primeiro retorno



(c) Padrões

Figura 5.12: De cima para baixo estão seção de Poincaré, mapa de primeiro retorno e padrão. A coluna da esquerda apresenta as referidas informações para o sistema de Lorenz com os parâmetros ajustados em $(s, r, b) = (10, 28, \frac{8}{3})$. Na coluna da direita as mesmas informações calculadas para o sistema imagem de Lorenz, obtido pela transformação (5.13).

meio da seguinte transformação (Letellier e Gilmore, 2001)

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2 \\ v &= 2xy \\ w &= z. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Essa transformação permite obter um sistema sem nenhuma simetria, porém preserva a informação topológica do sistema original. O sistema imagem de Lorenz possui a mesma topologia de Rössler. Apesar do mecanismo presente no sistema imagem ser de dobra, a informação de que o mecanismo presente no sistema original é rasgo pode ser visto no mapa de primeiro retorno pela presença de um ponto crítico não-diferenciável.

O sistema sem simetria apresenta topologia de um toro de ordem 1, nesse caso apenas uma seção de Poincaré é suficiente para descrever toda a informação topológica presente no atrator. A Figura 5.12(a) apresenta o atrator do sistema de Lorenz após a transformação (5.13). O mapa de primeiro retorno apresentado na Figura 5.12(b) foi construído com o módulo da variável y do sistema original. Esse mapa apresenta o mesmo comportamento do atrator imagem de Lorenz, isto é, apresenta apenas dois ramos monotônicos e um ponto crítico não diferenciável. Na Figura 5.12(c) é apresentado o padrão do sistema imagem

5.4.2 Dinâmica local de Lorenz

Seguindo um procedimento semelhante ao adotado para o sistema de Rössler, nesta seção será investigada a relação entre a dinâmica local em torno dos pontos fixos e o comportamento não-linear global.

O primeiro passo é o cálculo dos pontos fixos e de suas matrizes jacobianas. Para os valores de parâmetros $(s; r; b) = (10; 28; \frac{8}{3})$ tem-se os seguintes pontos fixos

$$\mathbf{p}_+ = \begin{pmatrix} 3\sqrt{8} \\ 3\sqrt{8} \\ 27 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ e } \mathbf{p}_- = \begin{pmatrix} -3\sqrt{8} \\ -3\sqrt{8} \\ 27 \end{pmatrix}.$$

A matriz jacobiana do sistema 5.1 é calculada e avaliada em cada um dos pontos fixos acima. Uma vez obtidas as matrizes jacobianas, são extraídos os autovalores relativos a cada ponto fixo para que se possa entender qual o comportamento local em torno dos pontos fixos do sistema linearizado. Os autovalores relativos aos pontos fixos acima são apresentados na Tabela 5.4.

Tabela 5.4: Autovalores do sistema de Lorenz para $(s; r; b) = (10; 28; \frac{8}{3})$.

$\lambda_{\pm_1} = -13,8546$	$\lambda_{0_1} = -22,8277$
$\lambda_{\pm_2} = 0,0940 - 10,1945i$	$\lambda_{0_2} = 11,8277$
$\lambda_{\pm_3} = 0,0940 + 10,1945i$	$\lambda_{0_3} = -\frac{8}{3}$

O sistema é composto por três pontos fixos. Sendo os pontos fixos simétricos $\mathbf{p}_+$ e $\mathbf{p}_-$ do tipo sela-foco e o ponto fixo trivial $\mathbf{p}_0$ um sela-nó. A Figura 5.13 apresenta as variedades do sistema linearizado em torno de $\mathbf{p}_+$. Pela Figura 5.13 também é possível compreender como dinâmica local e global se relacionam. Partindo de um conjunto de pontos do fluxo que esteja próximo a variedade instável bidimensional do ponto fixo $\mathbf{p}_-$ verifica-se que o comportamento nessa região é de expansão. O fluxo espirala até encontrar uma região que apresenta dois comportamentos topológicos distintos. O ponto separação é uma singularidade chamada de ponto de rasgo. Uma região do fluxo continua o movimento em torno do ponto $\mathbf{p}_-$ enquanto outra parte do fluxo é direcionado até o ponto fixo $\mathbf{p}_+$. Nessa região o movimento é fortemente influenciado pela variedade unidimensional estável do ponto fixo $\mathbf{p}_+$. Quando o fluxo é direcionado para o ponto $\mathbf{p}_+$, o mesmo é progressivamente contraído junto com o fluxo que espirala em torno de $\mathbf{p}_+$, o que dá origem a uma outra singularidade, a linha de ramificação. O fluxo espirala em torno de $\mathbf{p}_+$ até que parte do fluxo seja separada e vá de encontro ao ponto fixo $\mathbf{p}_-$ e o processo recomeça. Quando o fluxo está suficientemente próximo do eixo z , a dinâmica é acelerada na direção do ponto fixo $\mathbf{p}_0$; no entanto, como esse ponto é instável, o fluxo se aproxima de $\mathbf{p}_0$ até alcançar uma região em que a dinâmica é governada fortemente pela variedade instável bidimensional de um dos pontos fixos simétricos. Em resumo, pode-se afirmar que a dinâmica governada pelas variedades bidimensionais dos pontos fixos simétricos estão relacionadas fortemente com os ramos 1 e $\bar{1}$ do padrão, enquanto as variedades unidimensionais estáveis estão fortemente relacionadas com os ramos 0 e $\bar{0}$ do padrão. A próxima subseção utilizará essas informações para construir um modelo afim por partes topologicamente equivalente ao sistema de Lorenz.

5.4.3 Modelo afim por partes do sistema de Lorenz

Como afirmado na seção anterior, as variedades dos pontos fixos simétricos influenciam fortemente a dinâmica. Essa constatação sugere que o modelo afim por partes pode utilizar apenas as linearizações dos pontos fixos simétricos. Tomando os sistemas linearizados em torno desses pontos,

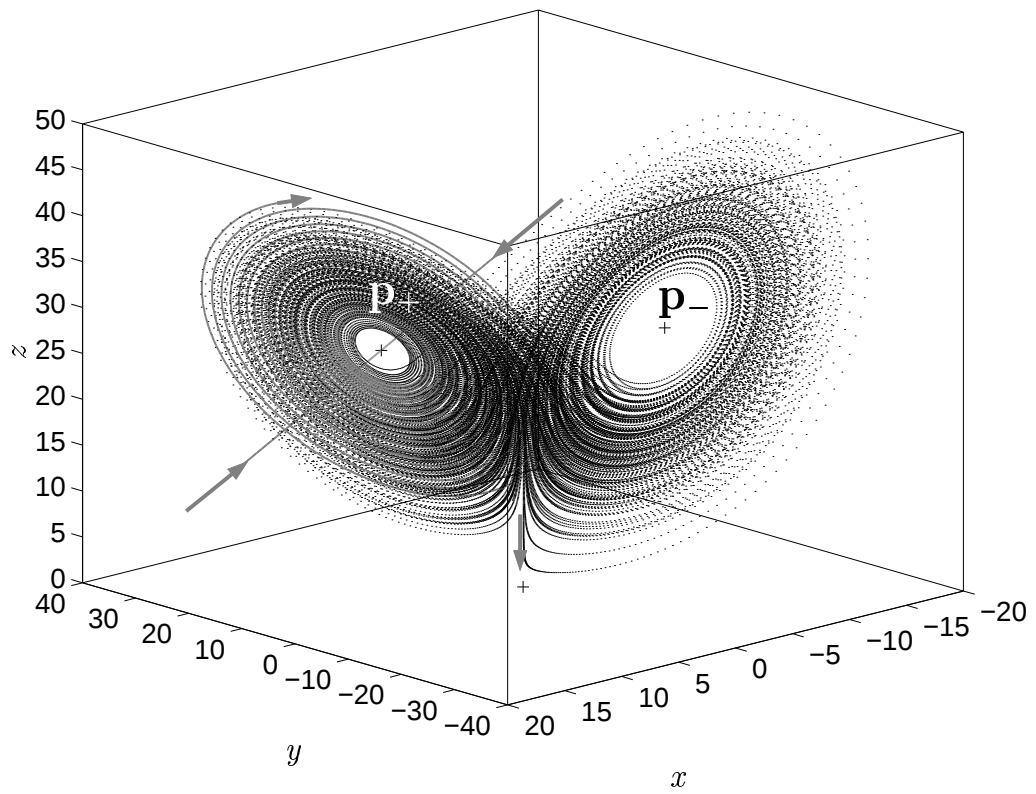


Figura 5.13: Atrator de Lorenz para conjunto de parâmetros $(s_0; r_0; b_0) = (10; 28; \frac{8}{3})$. Os pontos fixos são representados pelos sinais “+”. As setas indicam direções apontadas pelas variedades.

obtém-se a seguinte estrutura

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = f_1[d(\mathbf{x})] \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & -3\sqrt{8} \\ 3\sqrt{8} & 3\sqrt{8} & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 3\sqrt{8} \\ y - 3\sqrt{8} \\ z - 27 \end{bmatrix} + \\ f_2[d(\mathbf{x})] \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & +3\sqrt{8} \\ -3\sqrt{8} & -3\sqrt{8} & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + 3\sqrt{8} \\ y + 3\sqrt{8} \\ z - 27 \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Para que o sistema apresente a propriedade de simetria rotacional em relação ao eixo z a superfície de chaveamento deve conter o eixo z e além disso também deve ser simétrica em relação a esse eixo. A superfície de chaveamento é que irá produzir os pontos de rasgo. De certa forma pode-se afirmar que o ponto fixo trivial foi substituído pela superfície de chaveamento. Optou-se por escolher a superfície mais simples que atenda às considerações acima. A superfície é descrita abaixo

$$s_5(\theta) = \begin{cases} \{(\mathbf{x}, \theta) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \pi] \mid x = 0\}, & \text{se } \theta = \frac{\pi}{2} \\ \{(\mathbf{x}, \theta) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \pi] \mid x - \left(\frac{1}{\tan(\theta)}\right) y = 0\}, & \text{se } \theta \neq \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (5.15)$$

sendo que o parâmetro θ permite girar a superfície em torno do eixo z . Esse parâmetro funciona na superfície de chaveamento $s_5(\theta)$ como um parâmetro de bifurcação. De fato, quando esse parâmetro é variado, Figura 5.14(b), observa-se uma seqüência de bifurcações semelhante àquela obtida para o sistema de Lorenz quando o parâmetro ρ é variado Figura 5.14(a).

De acordo com Byrne et al. (2004), é possível distinguir regiões no espaço de parâmetros em que o sistema de Lorenz apresenta diferentes mecanismos. Para se obter tais regimes, utiliza-se a seguinte parametrização do sistema

$$\begin{aligned} s &= s_0 + \rho(s_1 + s_0), \\ r &= r_0 + \rho(r_1 + r_0), \\ b &= b_0 + \rho(b_1 + b_0), \end{aligned}$$

com $(s_0; r_0; b_0) = (10; 28; \frac{8}{3})$ e $(s_1; r_1; b_1) = (30; 278,56; 1)$. Assim, verifica-se que o sistema apresenta o mecanismo de rasgo para $\rho < 0,15$ e o mecanismo de dobra para $\rho > 1,0$. Na região $\rho > 1,0$ observa-se uma cascata de duplicação de período, característica marcante de um sistema que apresenta o mecanismo de dobra. Os mecanismos de rasgo e dobra ocorrem simultaneamente no intervalo $0,15 < \rho < 1,0$. Para determinados valores do parâmetro ρ também se observa atratores com torções globais e atratores conectados coexistindo no espaço de fases (Letellier et al., 2005).

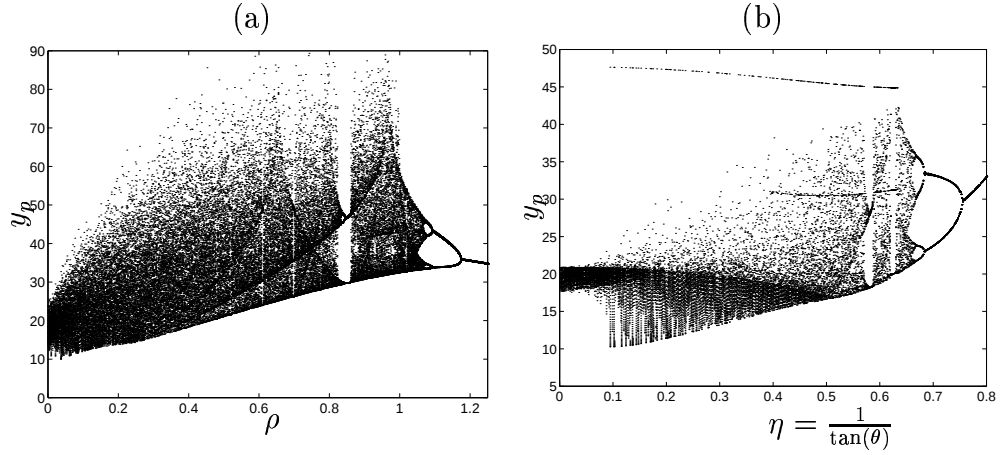


Figura 5.14: Diagramas de bifurcação: (a) sistema de Lorenz (b) modelo afim por partes da equação (5.14).

Esses mecanismos também puderam ser observados no modelo afim por partes de Lorenz. Quando a superfície de chaveamento é rotacionada por meio do parâmetro θ , obtêm-se as mesmas bifurcações de atrator caótico produzidas pelo sistema de Lorenz quando o parâmetro ρ é variado. A Figura 5.15 apresenta esses resultados. Quando o parâmetro $\theta = 1,346$ o mapa de primeiro retorno apresenta um máximo não diferenciável. Essa singularidade do mapa de primeiro retorno é a assinatura do mecanismo de rasgo. O mecanismo de dobra pode ser verificado quando $\theta = 1,004$. Verificou-se também o mecanismo de dobra associado a torções globais se $\theta = 1,051$. Perda de simetria é verificada para $\theta = 0,9897$. Nesse caso, observa-se a presença de atratores assimétricos conectados coexistindo no espaço de estados.

5.5 Conclusão

Foi desenvolvido um procedimento para construção de modelos afins por partes baseado na organização topológica dos atratores. Dois sistemas foram empregados para testar o procedimento, os sistemas de Rössler e de Lorenz. Os sistemas reconstruídos são representantes dos mecanismos de construção de comportamento caótico em baixa dimensão ($d = 3$), isto é, os mecanismos de dobra e de rasgo.

O procedimento apresentado consiste nos seguintes passos:

1. definir o número e a localização dos pontos fixos, em torno dos quais a dinâmica será organizada;
2. avaliar as matrizes jacobianas em torno de cada um dos pontos fixos do tipo sela-foco definidos nos passos anteriores;
3. definir a superfície de chaveamento baseada em informações topológicas e/ou na organização relativa dos pontos fixos. Dentre as informações topológicas utilizadas citam-se o tipo de mecanismo (dobra ou rasgo), número de singularidades, simetria ou assimetria do sistema, entre outras;
4. simular o modelo afim por partes e comparar o atrator resultante por meio de análise topológica. Como mostrado nas seções anteriores, a posição da superfície de chaveamento pode ser empregada como um ajuste fino do modelo uma vez que a localização da superfície funciona como parâmetro de bifurcação.

Em ambos sistemas investigados, somente dois pontos fixos foram empregados na reconstrução dos modelos afins por partes. Como mostrado, apenas os pontos fixos do tipo sela-foco foram empregados no modelo. O ponto fixo do tipo sela-nó foi substituído pela superfície de chaveamento porque esses pontos estão fortemente relacionados com o processo de rasgo do fluxo. Portanto, no caso dos modelos utilizados, esse processo é conseguido pelo chaveamento entre os subsistemas.

Nos sistemas abordados neste capítulo, os atratores reconstruídos são topologicamente equivalentes aos atratores dos sistemas originais. Esse fato não é tão surpreendente se for considerado que os modelos foram obtidos assumindo conhecidos os pontos fixos e as matrizes jacobianas dos sistemas originais. Partindo dos trabalhos de Poincaré, sabe-se que as dinâmicas são estruturadas em torno de pontos fixos e são determinadas pelas respectivas auto-estruturas locais. Por isso, a dinâmica dos sistemas reconstruídos não pode divergir drasticamente dos modelos obtidos. Entretanto, se pontos fixos

e os submodelos afins não forem conhecidos previamente, o desempenho do modelo afim por partes diminuirá.

Foi mostrado que a escolha da superfície de chaveamento é um ingrediente chave para a construção de uma determinada topologia. Não apenas na reconstrução de um padrão, mas também em um nível mais fino de classificação, a população de órbitas periódicas instáveis. Foi mostrado numericamente que a superfície de chaveamento pode ser parametrizada de modo que um determinado parâmetro dessa superfície possa funcionar como um parâmetro de bifurcação. Como consequência, diferentes regimes consistentes com os sistemas originais foram obtidos como, por exemplo, cascatas de duplicação de período, mecanismos de dobra e rasgo, combinação desses mecanismos, torções globais, entre outros.

O próximo capítulo investigará o desempenho de modelos afins por partes no caso em que os subsistemas são estimados a partir de dados. Também será discutida a síntese de circuitos a partir dos modelos obtidos neste capítulo.

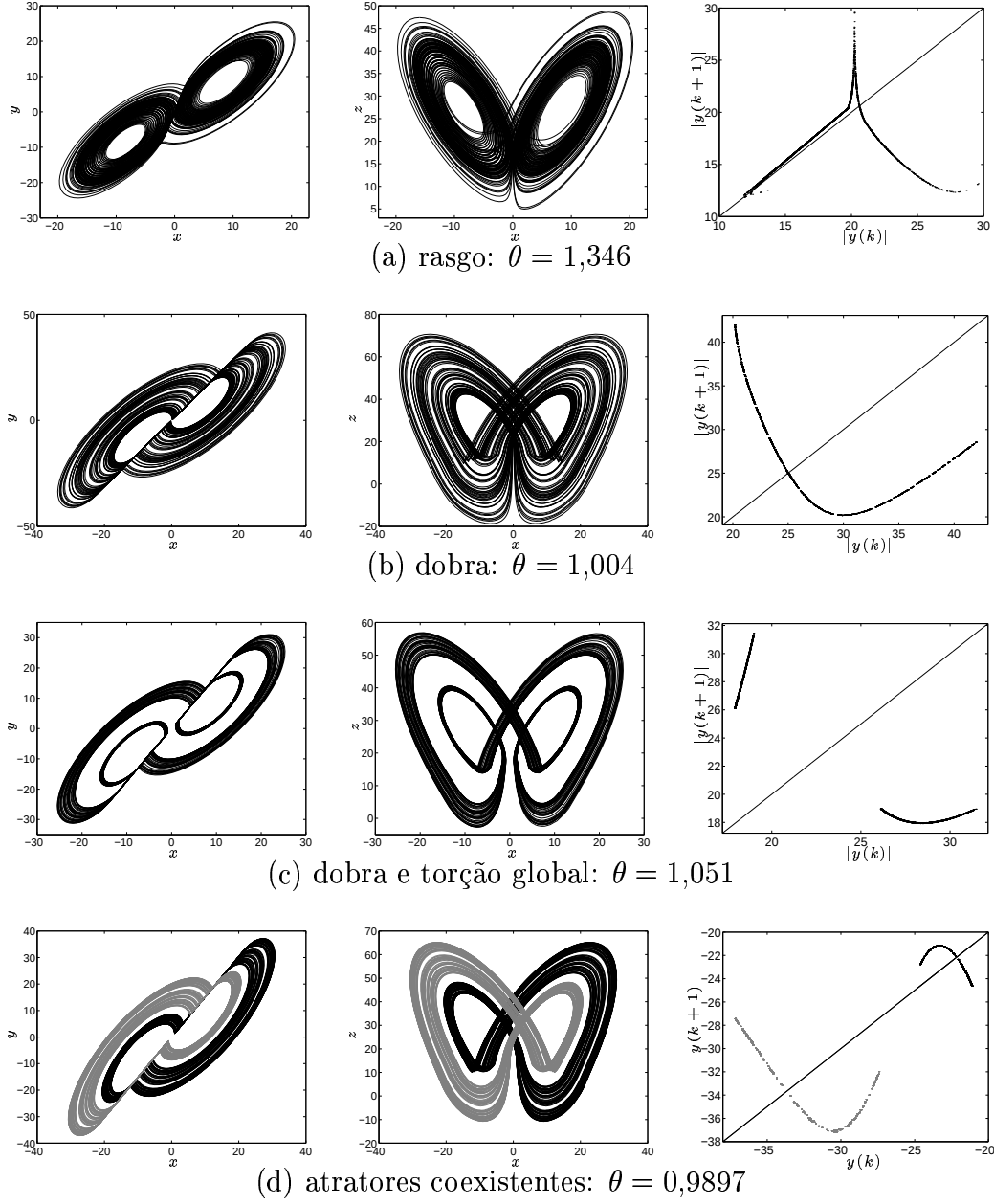


Figura 5.15: Projeções do atrator no plano xy (coluna a esquerda) e projeções no plano xz (coluna do meio). A coluna à direita mostra os respectivos mapas de primeiro retorno da seção de Poincaré P_L . (a) Atrator com mecanismo de rasgo (b) Atrator com mecanismo de dobra (c) Atrator com mecanismo de dobra e torção global (d) Atratores coexistentes que apresentam mecanismo de dobra.

Capítulo 6

Aplicações

6.1 Introdução

Este capítulo aborda duas aplicações de modelos afins por partes a saber: síntese de circuitos e identificação de sistemas. A síntese de dinâmica não-linear por meio de circuitos eletrônicos permite que sejam realizados experimentos, que possibilitam estudos de dinâmica não-linear e caos experimental. A identificação, por outro lado, tem o objetivo de formular uma representação matemática do processo. O modelo obtido pode ser empregado tanto para que se conheça melhor o processo, quanto para auxiliar na implementação de estratégias de controle baseadas em modelo. Mesmo não sendo o foco deste trabalho a aplicação de modelo, os tópicos a seguir apresentam importantes etapas do leque de possíveis aplicações.

A síntese de circuitos tratada neste capítulo será ilustrada por dois exemplos. Serão implementados circuitos que reproduzam as dinâmicas dos sistemas de Rössler e de Lorenz.

No caso da identificação, um modelo afim por partes (auto-regressivo) será empregado para reconstruir a dinâmica. O sistema modelado é um processo de eletrodissolução potencioestática de cobre. Ressalta-se que, para realizar a identificação, a única informação disponível a priori foram dados coletados na montagem experimental do processo.

6.2 Projeto de osciladores caóticos

Uma das vantagens referentes ao emprego de representações afins por partes é que existe relativa facilidade na implementação de circuitos eletrônicos. Basicamente, os circuitos implementados são compostos de três subcircuitos a saber: integradores, somadores e circuitos de chaveamento. Os dois

primeiros subcircuitos são facilmente implementados por meio de amplificadores operacionais. Quanto a circuitos de chaveamento deve haver uma correspondência entre uma representação afim por partes e uma estratégia de chaveamento. A seguir serão apresentados circuitos que implementam modelos afins por partes.

6.3 Circuitos de chaveamento

Neste capítulo são empregados dois circuitos para realizar o chaveamento entre os subsistemas afins, um circuito que implementa a função módulo (Sprott, 2000) e outro circuito que é composto por chaves analógicas e um circuito de controle do chaveamento. A seguir tais circuitos serão abordados e exemplos de implementação descritos.

6.3.1 Circuito módulo

O circuito utilizado para realizar o chaveamento é mostrado na Figura 6.1. Como apresentado, o circuito consiste de dois resistores de mesmo valor R , um diodo d e um amplificador operacional U .

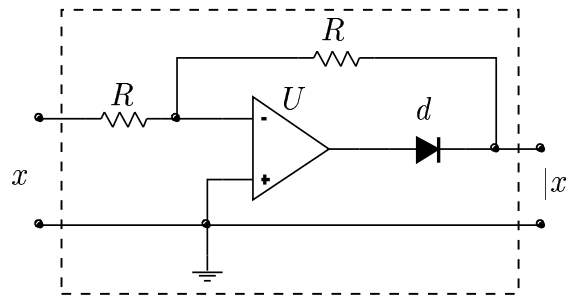


Figura 6.1: Circuito para implementação da função módulo.

A utilização desse circuito, para implementar o chaveamento, está condicionada a rígidas restrições. Apesar disso, dada a facilidade de implementação, é vantajoso verificar se uma determinada dinâmica pode ser reproduzida por meio dessa estratégia.

A primeira restrição é que as variáveis que descrevem a superfície de chaveamento devem ser as mesmas variáveis que serão chaveadas. Essa restrição elimina um grupo de sistemas dinâmicos como, por exemplo, sistemas com simetria rotacional em relação ao eixo z . Como visto no capítulo anterior, para

esse tipo de dinâmica a superfície de chaveamento é descrita pelas variáveis x e y , no entanto, são necessários chaveamentos na variável z .

Seguindo o procedimento proposto neste trabalho, verifica-se que o modelo afim por partes é mais adequado para modelagem de sistemas porque, nesses modelos, ficam explícitos os submodelos locais. No entanto, modelos construídos com a função módulo são mais indicados para implementação eletrônica porque apresentam menor número de parâmetros, isto é, estrutura canônica. Dessa forma, uma possibilidade é construir um modelo do sistema com modelos afins por partes e, em seguida, deduzir um modelo com função módulo a partir de um modelo afim por partes.

Assim, a segunda restrição refere-se ao fato de que a representação do chaveamento por meio da função módulo é uma aproximação do modelo afim por partes. Essa aproximação nem sempre reproduz o comportamento do modelo afim por partes. Apesar disso, pode-se encontrar regiões no espaço de parâmetros em que a dinâmica procurada seja equivalente.

O que se pretende nesse procedimento é buscar a relação entre o modelo afim

$$\dot{x} = f_1[d(\mathbf{x})](a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + f_2[d(\mathbf{x})](a_2x + b_2y + c_2z + d_2), \quad (6.1)$$

e a forma canônica,

$$\dot{x} = ax + by + cz + d + g |x + b_my + c_mz + d_m|. \quad (6.2)$$

As funções $f_1[d(\mathbf{x})]$ e $f_2[d(\mathbf{x})]$ são definidas como na seção 3.3:

$$f_1[d(\mathbf{x})] = \begin{cases} 1, & \text{se } d(\mathbf{x}) \geq 0 \\ 0, & \text{se } d(\mathbf{x}) < 0 \end{cases}$$

e

$$f_2[d(\mathbf{x})] = \begin{cases} 0, & \text{se } d(\mathbf{x}) \geq 0 \\ 1, & \text{se } d(\mathbf{x}) < 0, \end{cases}$$

sendo que a função $d(\mathbf{x})$ determina a distância de um ponto qualquer do espaço de estados até a superfície de chaveamento s_i . Se as equações (6.1) e

(6.2) forem igualadas, obtém-se as expressões:

$$\begin{aligned}
 (a + g) &= a_1, \\
 (a - g) &= a_2, \\
 (b + gb_m) &= b_1, \\
 (b - gb_m) &= b_2, \\
 (c + gc_m) &= c_1, \\
 (c - gc_m) &= c_2, \\
 (d + gd_m) &= d_1, \\
 (d - gd_m) &= d_2.
 \end{aligned}
 \tag{6.3}$$

Considerando as situações em que o argumento da função módulo é positivo ou negativo, pode ser verificado que a relação exata entre as duas formas somente acontece para

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{(a_1 + a_2)}{2}, \\
 b &= \frac{(b_1 + b_2)}{2}, \\
 c &= \frac{(c_1 + c_2)}{2}, \\
 d &= \frac{(d_1 + d_2)}{2}, \\
 g &= \frac{(a_1 - a_2)}{2}, \\
 b_m &= \frac{(b_1 - b_2)}{(a_1 - a_2)},
 \end{aligned}
 \tag{6.4}$$

$$c_m = \frac{(c_1 - c_2)}{(a_1 - a_2)}, \tag{6.5}$$

$$d_m = \frac{(d_1 - d_2)}{(a_1 - a_2)}. \tag{6.6}$$

As equações (6.4), (6.5) e (6.6) restringem a escolha da superfície de chaveamento. Contudo, deve ser avaliado inicialmente se a superfície determinada pelos coeficientes (6.4), (6.5) e (6.6) é adequada para reproduzir uma dinâmica proposta. Se não for o caso, as variáveis b_m , c_m e d_m podem ser escolhidas de modo a atender a construção da dinâmica proposta, sendo que, nesse caso, o modelo canônico será uma aproximação da representação afim

por partes. Como já visto anteriormente, os coeficientes b_m , c_m e d_m variam a posição da superfície de chaveamento e isso funciona como parâmetro de bifurcação. Assim, mesmo que o modelo na forma canônica não reproduza exatamente as equações (6.1), ainda é possível reconstruir uma dada dinâmica por meio da análise do espaço de parâmetros.

As equações acima consideram apenas duas regiões no espaço. No entanto, a equação pode ser generalizada para um número qualquer de divisões do espaço por meio da substituição das funções $f[d(\mathbf{x})]$ pelo produtório de funções, como detalhado no capítulo 3. No caso da equação (6.2) podem ser empregadas formas mais gerais como, por exemplo, os modelos de Güzelis e Gökner (1991), de Kahlert e Chua (1992), redes neurais com função de ativação módulo (Batruni, 1991), entre outros.

A seguir será mostrado um exemplo de implementação de circuito. Será construído um circuito que apresente a dinâmica do sistema de Rössler para os valores de parâmetros $(a; b; c) = (0,398; 4; 2)$. Para isso parte-se das equações apresentadas no capítulo 5,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = f_1[d(\mathbf{x})] \begin{bmatrix} 0 & -1,0000 & -1,0000 \\ 1,0000 & a & 0 \\ z_+ & 0 & (x_+ - c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_+ \\ x_2 - y_+ \\ x_3 - z_+ \end{bmatrix} + \\ f_2[d(\mathbf{x})] \begin{bmatrix} 0 & -1,0000 & -1,0000 \\ 1,0000 & a & 0 \\ z_- & 0 & (x_- - c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_- \\ x_2 - y_- \\ x_3 - z_- \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

Sabendo que, no caso do sistema de Rössler, as coordenadas dos pontos fixos se relacionam segundo

$$\begin{aligned} x_{\pm} &= -ay_{\pm}, \\ z_{\pm} &= -y_{\pm}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

e que as funções f_i são complementares, a equação (6.7) pode ser reescrita como,

SE $d(\mathbf{x}) \geq 0$ ENTÃO

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= (z_-)x + (x_- - c)z + (-(z_-)x_- - (x_- - c)z_-), \end{aligned} \quad (6.9)$$

SENÃO

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -y - z \\
\dot{y} &= x + ay \\
\dot{z} &= (z_+)x + (x_+ - c)z + (-(z_+)x_+ - (x_+ - c)z_+).
\end{aligned}
\tag{6.10}$$

Como mostrado nas equações (6.9) e (6.10) apenas a equação referente a $\dot{z}$ apresentará chaveamento. Para que a forma canônica possa ser obtida, uma lei de chaveamento deve ser uma relação entre as variáveis x e z . A superfície de chaveamento escolhida inicialmente para que haja uma correspondência exata entre os modelos será $x + 0,398z - 4 = 0$. No entanto, essa superfície de chaveamento difere das superfícies escolhidas no capítulo 5. Por isso, antes de prosseguir deve ser avaliado se essa superfície de chaveamento reproduz a dinâmica procurada. Para isso foram construídos o atrator e mapa de primeiro retorno. O resultado é mostrado na Figura 6.2.

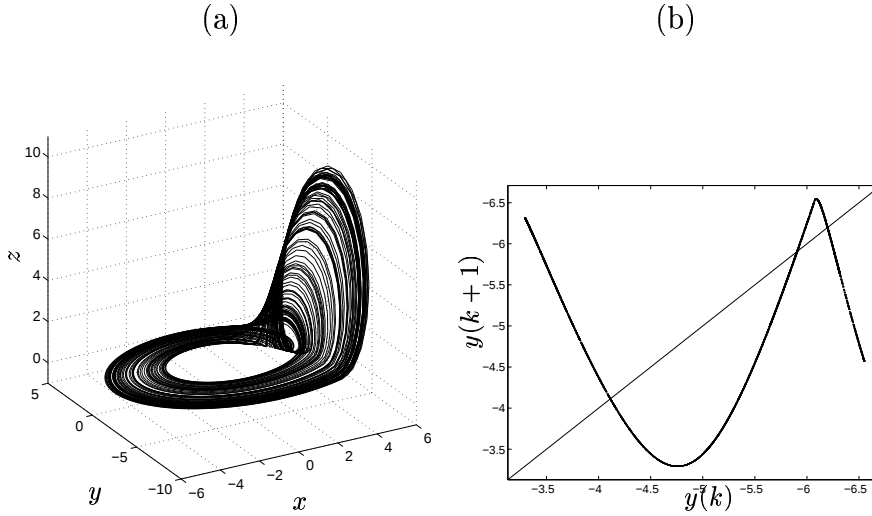


Figura 6.2: (a) Atrator resultante do modelo afim por partes para superfície $x + 0,398z - 4 = 0$. (b) Mapa de primeiro retorno.

O atrator e o mapa de primeiro retorno mostram que o número de ramos é diferente de Rössler para o conjunto de valores assumidos. Além disso, pode ser visto na Figura 6.2 (a) que o atrator apresenta torção global o que também não é verificado em Rössler. Dessa forma, conclui-se que a superfície inicialmente proposta não atende à reconstrução.

Do sistema de Rössler sabe-se que o parâmetro a aumenta o número de ramos do sistema (Letellier et al., 1995a). Partindo dessa informação pode-se supor que a variação desse parâmetro nos modelos afins por partes pode alterar também o número de ramos. Essa conjectura pôde ser checada por meio de simulações do modelo. Assim, esse parâmetro foi ajustado empiricamente em $a = 0,25$. Para esse valor de parâmetro e a superfície de chaveamento $x + 0,398z - 4 = 0$ o modelo produz um atrator e mapa de primeiro retorno equivalentes aos de Rössler como mostrado nas Figuras 6.3(a) e (b).

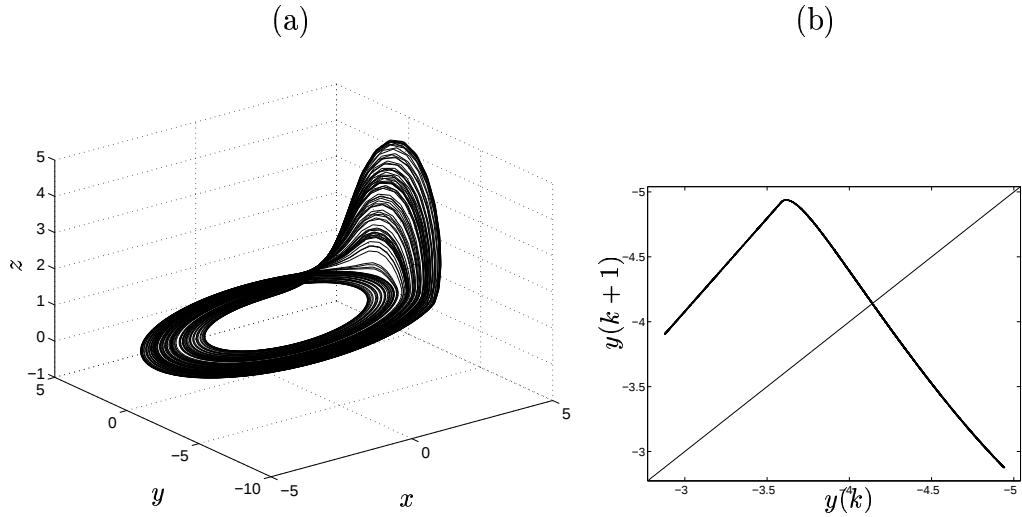


Figura 6.3: Resultados da implementação eletrônica do modelo de Rössler afim por partes para $a = 0,25$ e $\tan(\theta) = 0,398$: (a) Atrator (b) mapa de primeiro retorno.

Reajustando os parâmetros a e θ diferentes regimes podem ser obtidos do modelo assim como no sistema de Rössler. θ é o ângulo da superfície $x + \tan(\theta)z - 4 = 0$. Para os valores $a = 0,34$ e $\theta = 0,62$ o modelo produz caos multimodal sem torção global assim como observado no sistema de Rössler. Esse regime é mostrado na Figura 6.4(a), com seu respectivo mapa de primeiro retorno na Figura 6.4(b).

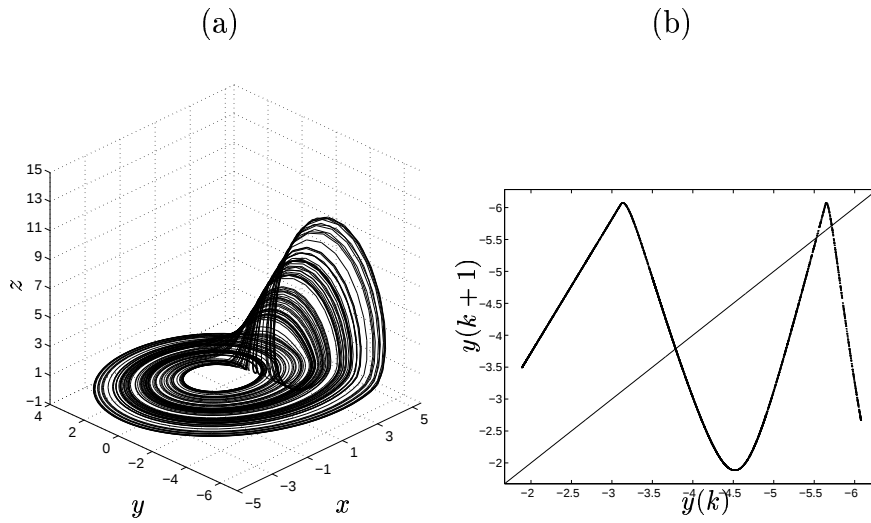


Figura 6.4: Caos multimodal obtido pelo modelo de Rössler afim por partes para $a = 0,34$ e $\tan(\theta) = 0,62$: (a) Atrator (b) mapa de primeiro retorno.

Como a superfície de chaveamento foi variada para que se obtivesse caos multimodal, é necessário verificar a relação entre os dois modelos uma vez que agora a relação não é exata. Para que se possa conhecer o comportamento global foram construídos diagramas de bifurcação para os modelos. Os diagramas foram construídos para $a = 0,398$, sendo o parâmetro θ variado.

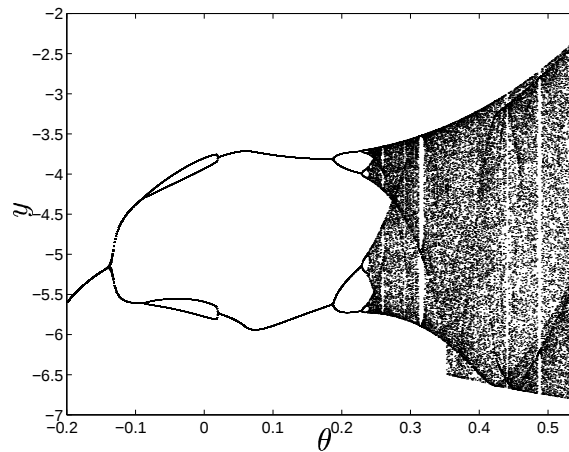


Figura 6.5: Diagrama de bifurcação do modelo com função módulo (estrutura canônica).

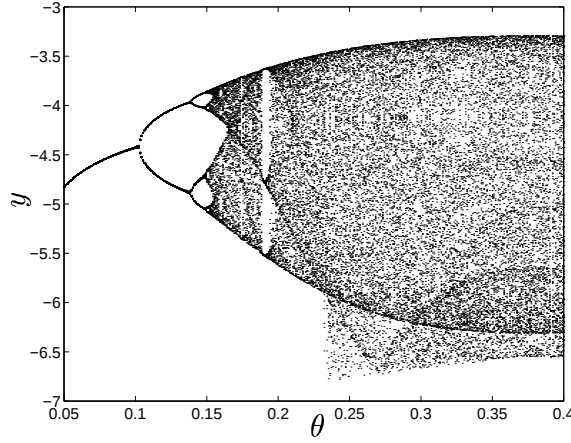


Figura 6.6: Diagrama de bifurcação do modelo afim por partes.

Como observado nas Figuras 6.5 e 6.6, os dois modelos desenvolvem um cenário de duplicação de período. No caso do modelo com função módulo, o sistema desenvolve um cenário atípico. Para $\theta = [-0,087 \ 0,02]$ o sistema desenvolve período-4. Em uma rota típica, para valores de $\theta > 0,02$, o sistema desenvolveria período-8. Pelo diagrama mostrado na Figura 6.5 para $\theta > 0,02$ o sistema retorna a período-2 e, em seguida, a rota torna-se padrão. Outra observação é que como a relação exata entre os modelos acontece apenas para $\tan(\theta) = 0,398$, quando o parâmetro se distancia desse valor a relação entre os sistemas começa a se distanciar, por isso é que são verificados diferentes diagramas. A principal razão é que o modelo com a função módulo, por ser uma estrutura compacta, não possibilita variar apenas a superfície de chaveamento sem que as matrizes jacobianas sejam alteradas.

Apesar das diferenças de comportamento, foi verificado que é possível identificar diferentes regiões no espaço de parâmetros de modo que os dois modelos se comportem de maneira equivalente. Essa informação pode ser extraída dos diagramas de bifurcação Figuras 6.5 e 6.6. Por exemplo, se for ajustado $\theta = 0,31$ para modelo com módulo e $\theta = 0,19$ para modelo afim, os comportamentos resultantes são equivalentes. Os atratores e os mapas de primeiro retorno são mostrados na Figura 6.7.

Implementação e resultados

Uma vez identificada relação entre os modelos e as regiões equivalentes do espaço de parâmetros, o modelo de Rössler foi construído por meio da

função módulo. O modelo resultante é o seguinte

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= 5,0x - 2,0z - 15,0 + 4,5045 |x + \tan(\theta)z - 4|,\end{aligned}\tag{6.11}$$

sendo que o ajuste de a e da $\tan(\theta)$ foi feito por meio de dois potenciômetros. O circuito resultante é mostrado no apêndice. Resultados experimentais confirmam as deduções feitas anteriormente. Alguns resultados são mostrados na Figura 6.8. Foram observados comportamentos periódicos nas Figuras 6.8(a) e (b), comportamento caótico unimodal e multimodal nas Figuras 6.8(c) e (d) respectivamente. Os dados foram coletados por meio de um osciloscópio de dois canais marca Tektronix modelo TDS3012.

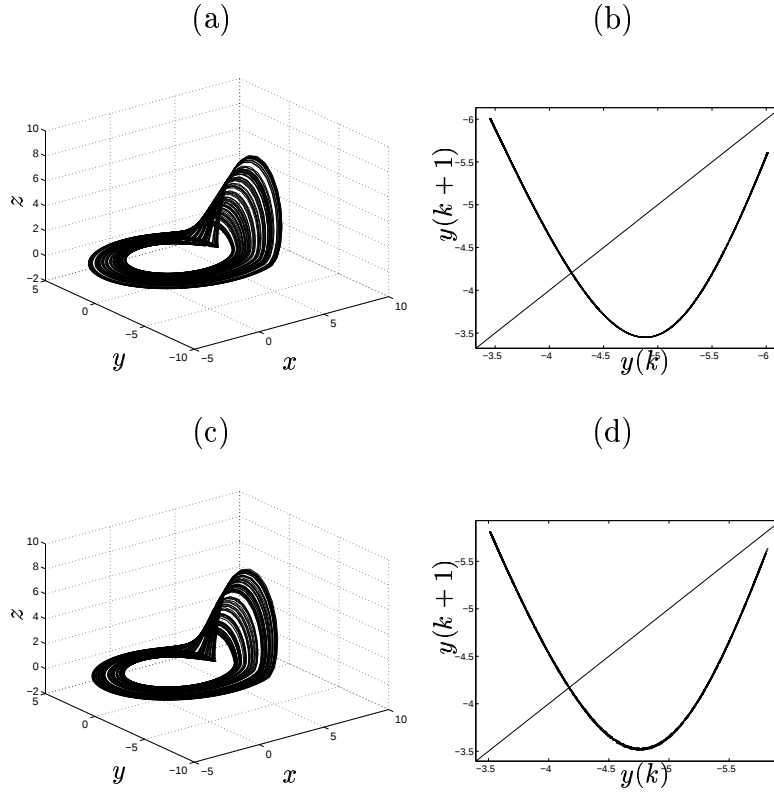


Figura 6.7: Em diferentes regiões do espaço de parâmetros, pode ser encontrada equivalência entre a dinâmica dos sistemas. (a) e (b) Atratores e mapa de primeiro retorno do modelo que utiliza função módulo. (c) e (d) Atratores e mapa de primeiro retorno do modelo afim por partes.

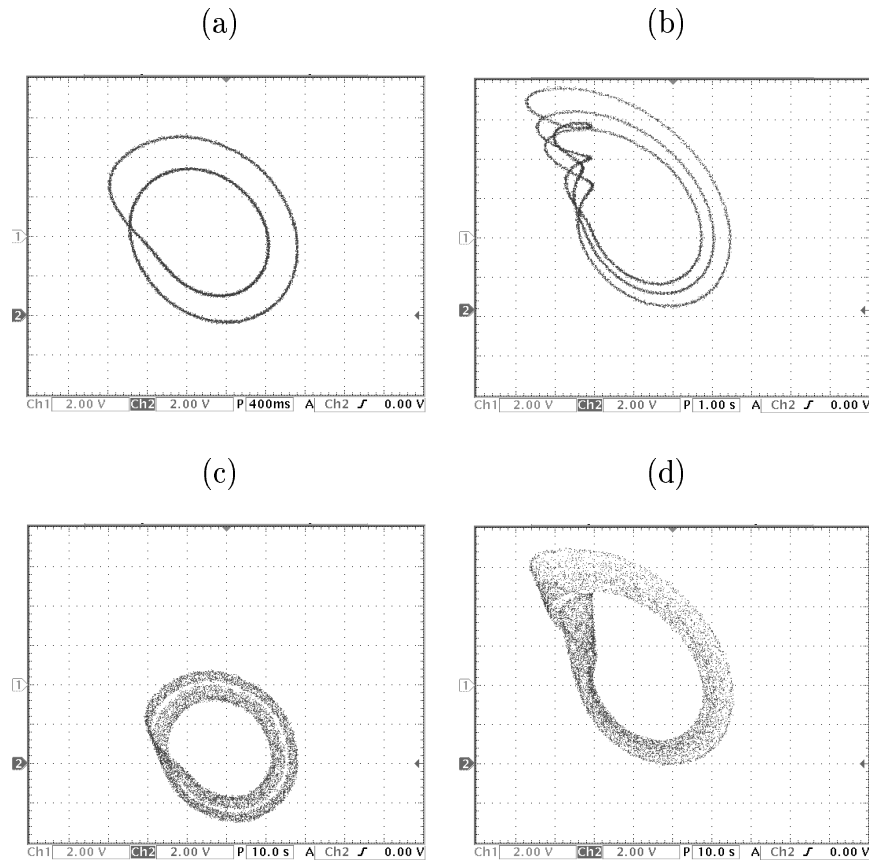


Figura 6.8: Resultados experimentais do circuito que implementa o modelo de Rössler afim por partes: (a) período-2 (b) período-3 (c) caos unimodal (d) caos multimodal.

6.3.2 Chaves analógicas

Essa estratégia implementa exatamente a estrutura de um modelo afim por partes na forma da equação (6.1), sem as restrições descritas anteriormente. O circuito de chaveamento é composto pelo circuito de controle do chaveamento e por chaves analógicas. Neste trabalho a implementação das chaves analógicas foi feita por meio do circuito integrado conhecido no mercado de componentes eletrônicos como SD4066BE. Esse circuito integrado possui quatro chaves analógicas controladas por tensão. O circuito de controle do chaveamento pode ser implementado por um circuito digital que implementa a lógica do chaveamento. Se o espaço de estados for dividido em apenas duas regiões, o circuito que implementa o chaveamento consistirá de duas funções complementares. Essa configuração é mostrada na Figura 6.9. O circuito de controle de chaveamento é composto por amplificadores operacionais em malha aberta. A função $d(\mathbf{x})$ pode ser construída apenas com circuitos somadores, uma vez que as superfícies de chaveamento empregadas nos modelos são planos.

A seguir o sistema de Lorenz será implementado por meio dessa estratégia. Serão tomadas as equações afins por partes desenvolvidas no capítulo 5.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = f_1[d(\mathbf{x})] \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & -3\sqrt{8} \\ 3\sqrt{8} & 3\sqrt{8} & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 3\sqrt{8} \\ y - 3\sqrt{8} \\ z - 27 \end{bmatrix} + \\ f_2[d(\mathbf{x})] \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & +3\sqrt{8} \\ -3\sqrt{8} & -3\sqrt{8} & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + 3\sqrt{8} \\ y + 3\sqrt{8} \\ z - 27 \end{bmatrix}. \quad (6.12)$$

Dessa equação pode-se realizar a mesma simplificação feita na seção anterior de modo que a equação (6.12) possa ser reescrita como,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -10x + 10y \\ \dot{y} &= x - y + (-f_1[d(\mathbf{x})] + f_2[d(\mathbf{x})])(3\sqrt{8}y - 81\sqrt{8}) \\ \dot{z} &= (-f_1[d(\mathbf{x})] + f_2[d(\mathbf{x})])(-3\sqrt{8}x - 3\sqrt{8}y) - \frac{8}{3}z - 72. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Com a equação (6.13) já seria possível a implementação do circuito se não fosse por algumas limitações referentes aos componentes do circuito. Dentre as principais limitações citam-se os valores de alimentação dos amplificadores operacionais e os valores comerciais de resistores que não atendem aos valores necessários para reproduzir o modelo.

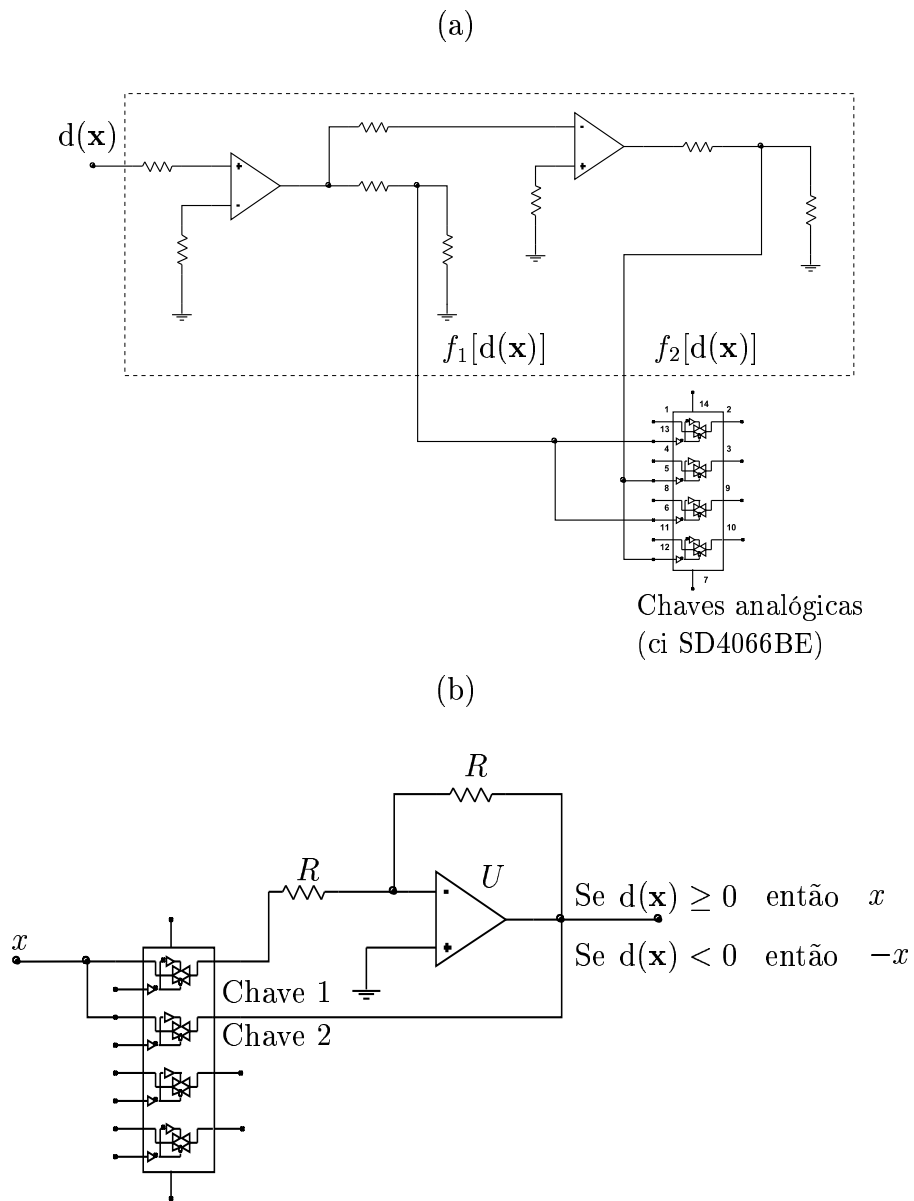


Figura 6.9: (a) Circuito de controle do chaveamento (b) Circuito composto por chaves controladas de maneira complementar, isto é, quando a chave 1 se fecha a chave 2 se abre e vice-versa.

Limitações dos circuitos

Uma limitação crítica encontrada no projeto do circuito refere-se à saturação dos amplificadores operacionais. A saturação acontece para valores de entrada maiores ou menores que 13 volts. Outra dificuldade encontrada refere-se ao fato de que o circuito produz baixas frequências. Como o circuito oscila em uma faixa de frequência relativamente baixa, em torno de 1 rad/s, é difícil encontrar o ponto de ajuste do circuito. Além disso, para o modelo (6.13), o inconveniente da saturação dos amplificadores acontecerá, o que impossibilita a construção da dinâmica de Lorenz.

No entanto, uma vantagem dos circuitos afins por partes é que a solução para essas duas dificuldades é encontrada em uma só operação: multiplicar as variáveis de estado, apenas no lado direito da equação (6.13), por uma constante. Essa operação pode ser facilmente implementada alterando o ganho do bloco integrador, o que é feito pela simples troca de resistores. O aumento do ganho do circuito integrador tem o efeito de variar os autovalores e modificar os pontos fixos.

Dado um submodelo afim,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(n_1 \mathbf{x} - \mathbf{p}), \quad (6.14)$$

pode ser facilmente verificado que, com a inclusão do fator n_1 na equação (6.14), os pontos fixos se tornam

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}/n_1. \quad (6.15)$$

e os autovalores,

$$\lambda_{in} = n_1 \lambda_i. \quad (6.16)$$

Assim os autovetores não são alterados, enquanto que, pelo aumento dos autovalores, o sistema oscila mais rápido. Pela diminuição das coordenadas dos pontos fixos tem-se a diminuição da amplitude da oscilação. Para um controle independente da amplitude pode-se multiplicar $\mathbf{p}$ na equação (6.14) por um outro fator n_2 . A amplitude e a frequência de oscilação podem ser alteradas dessa maneira sem que a dinâmica seja modificada.

Seguindo essas orientações e tendo em vista os valores comerciais de componentes eletrônicos o modelo final tem a forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2,96x + 2,96y \\ \dot{y} &= 0,296x - 0,296y + f_1(d(\mathbf{x}))(2,4z) + f_2(d(\mathbf{x}))(-2,4z) \\ \dot{z} &= f_1(d(\mathbf{x}))(-2,4(x+y)) + f_2(d(\mathbf{x}))(2,4(x+y)) - 0,8z + 0,8, \end{aligned} \quad (6.17)$$

com $n_1 = \frac{3}{10}$ e $n_2 = 0,0059$. As coordenadas em z dos pontos fixos foram ajustadas separadamente em 0. O circuito resultante é mostrado no apêndice.

Resultados experimentais

Além de comportamento periódico, o sistema apresentou o comportamento caótico mostrado na Figura 6.10.

Esse foi o único atrator estranho observado. Por simulações esperava-se obter outros regimes caóticos, mas isso não foi verificado experimentalmente. A razão dessa limitação é explicada pela amplitude do sinal de controle de chaveamento na região de transição.

Como pode ser visto na Figura 6.11(a) e (b), a região do espaço de estados determinada pelo campo vetorial do ponto fixo trivial é construída por meio da combinação dos campos vetoriais dos dois subsistemas afins. Ou seja, o rápido chaveamento entre os subsistemas afins produz um campo vetorial semelhante àquele associado ao ponto fixo trivial. Como pode ser visto pelas simulações mostradas nas Figuras 6.11(c) e (d), o sinal de controle das chaves analógicas, na região em que acontece a dinâmica combinada, possui amplitude muito baixa e alta frequência. Por essa característica, conclui-se que o sinal é muito vulnerável a ruído. Conjectura-se que o ruído possa estar degradando a formação da dinâmica referente ao ponto fixo trivial.

A Figura 6.11(e) mostra a medição do sinal de controle da chave analógica. Verifica-se que existem regiões de chaveamento rápido o que mostra coerência com a formação da dinâmica combinada já esperada. Pode ser visto também que o sinal possui um certo nível de ruído.

Apesar de não ter sido possível reproduzir todos os regimes obtidos pelo modelo afim por partes, o circuito mostrou-se capaz de reproduzir pelo menos um dos comportamentos caóticos. Posteriormente deve ser investigada a possibilidade de se empregar histerese no chaveamento. Deve ser verificado se o modelo afim por partes com atraso no chaveamento pode formar a dinâmica do ponto fixo trivial. Outra possibilidade a ser investigada é a construção de um modelo de Lorenz que utilize a informação da dinâmica do ponto fixo trivial, objetivando aumentar a robustez.

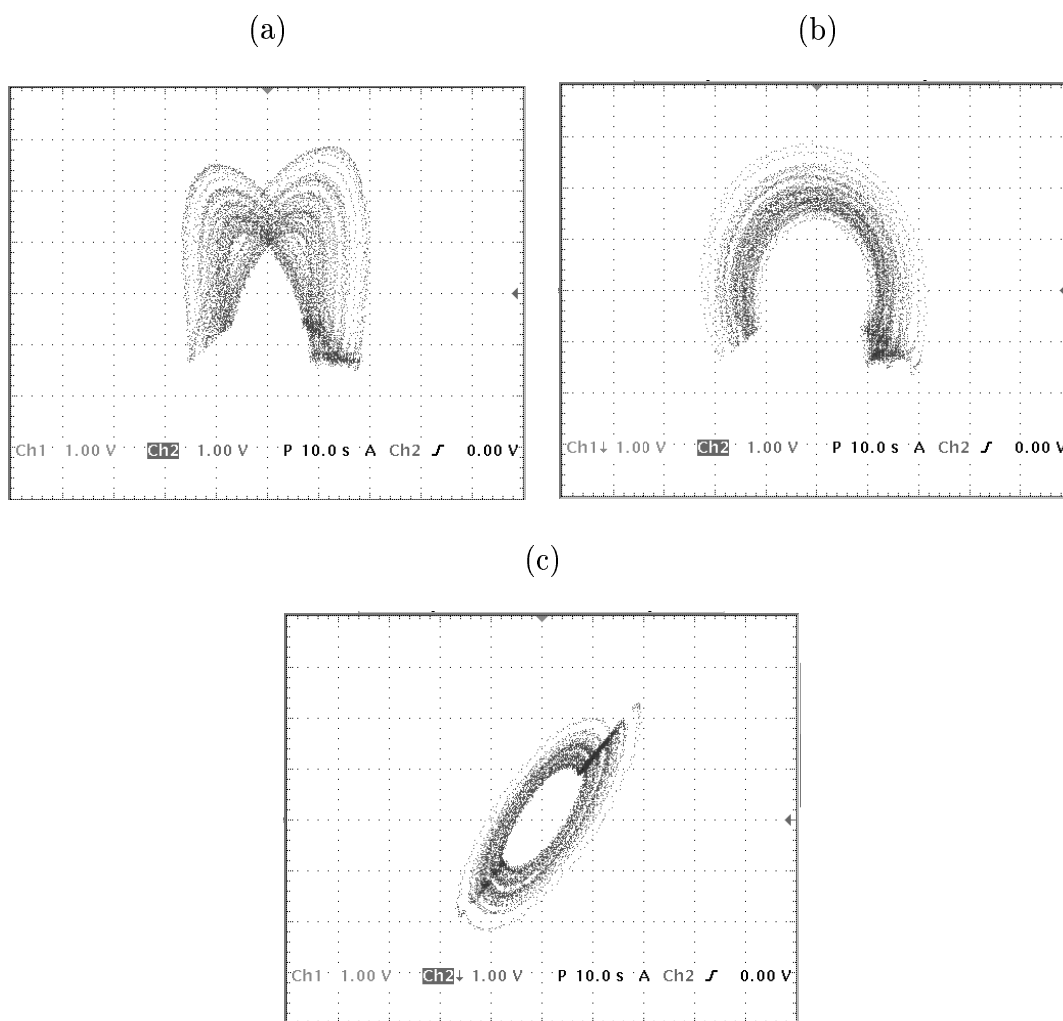


Figura 6.10: Projeções do atrator produzido pelo circuito eletrônico de Lorenz: (a) plano xz (b) plano yz (c) plano xy . Supõe-se que o atrator tem topologia próxima àquela apresentada na Figura 5.15(d).

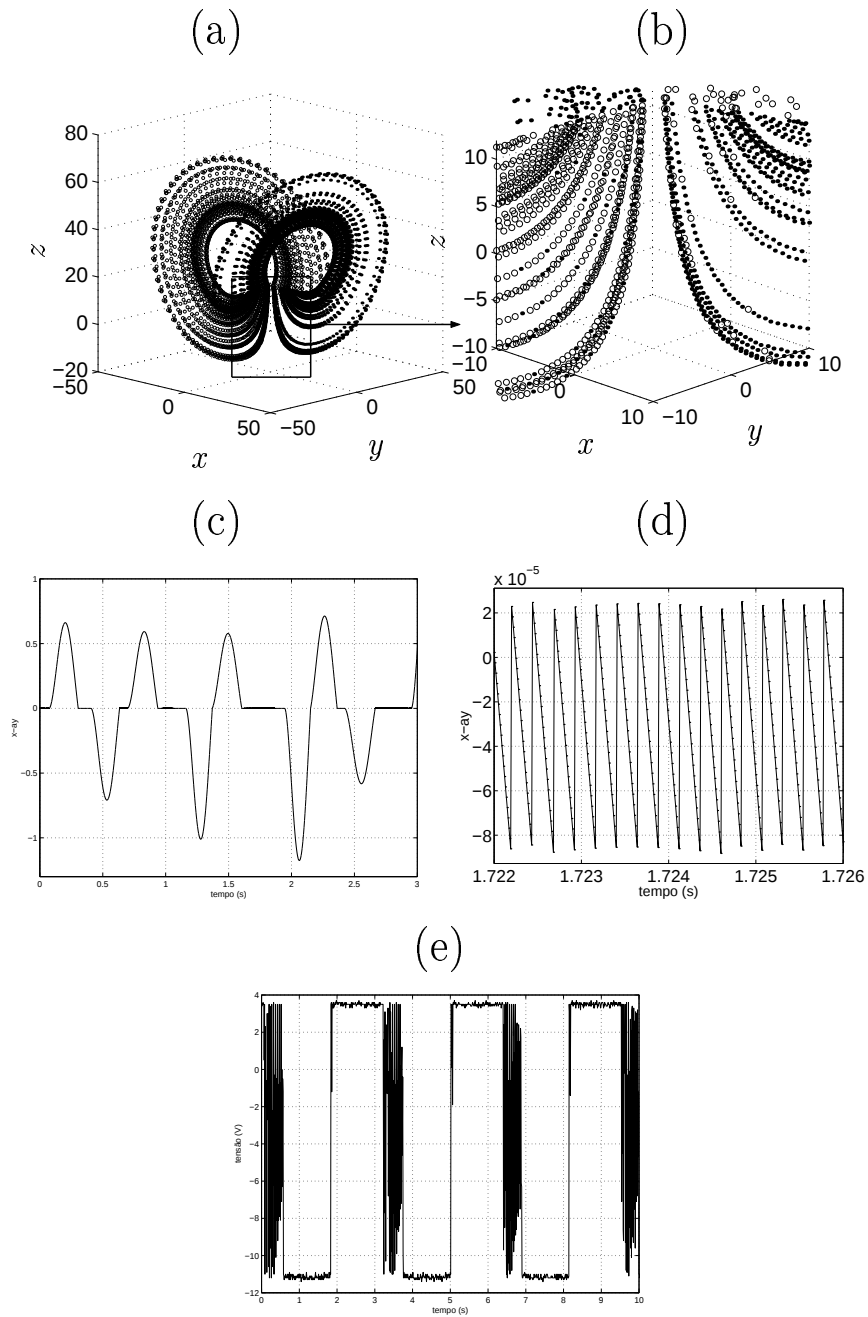


Figura 6.11: (a) Atrator do modelo de Lorenz afim por partes (b) zoom na região inferior do atrator (c) sinal de controle do chaveamento (d) detalhamento do sinal de chaveamento na região próxima de zero (e) sinal de controle das chaves.

6.4 Eletrodissolução do cobre

É conhecido na literatura, principalmente desde os trabalhos de Belousov e Zhabotinskyi, que reações químicas podem desenvolver dinâmicas caóticas (Letellier et al., 1998). A seguir será feita a identificação de uma série temporal coletada na montagem experimental mostrada na Figura 6.12. A montagem foi desenvolvida por Z. Fei e J. Hudson (University of Virginia, Charlottesville, Virginia).

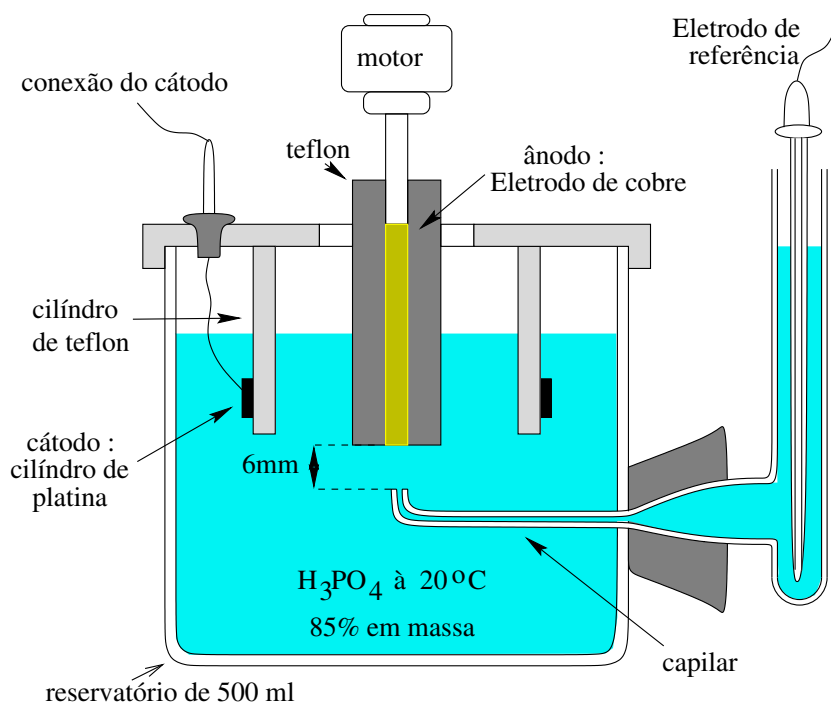


Figura 6.12: Montagem experimental de um processo de eletrodissolução potencioestática de cobre desenvolvida por Z. Fei e J. Hudson.

A montagem refere-se ao processo de eletrodissolução potencioestática de um eletrodo rotativo de cobre imerso em ácido fosfórico. Maiores detalhes sobre a montagem são encontrados em Letellier et al. (1995c).

Um potencioestado (Princeton Applied Research model 273) foi usado para regular o potencial (em 689 mV) do eletrodo rotativo com respeito ao eletrodo de referência e para monitorar a corrente elétrica. Os dados foram registrados a uma frequência de $f_e = 1500\text{Hz}$ usando um computador 486 e uma placa de aquisição de dados (Model DAS-16, Keithley MetraByte's). A série temporal da corrente é mostrada na Figura 6.13.

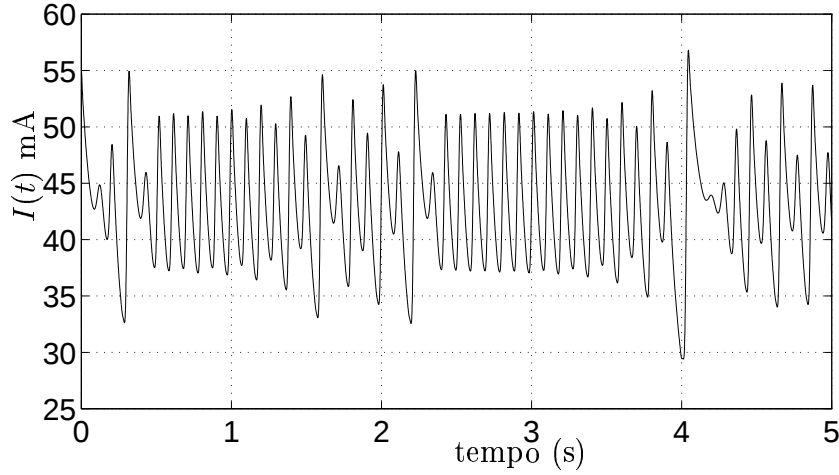


Figura 6.13: Série temporal da corrente elétrica

6.4.1 Dinâmica do processo

A primeira informação relevante para a identificação do processo de eletrodissolução são os pontos fixos. Para obtê-los foi utilizado o algoritmo de estimação de pontos fixos descrito em (Aguirre e Souza, 1998). Nesse algoritmo um modelo NARMAX (Não-linear Autoregressivo Média móvel com entradas eXógenas) polinomial é ajustado em janelas do conjunto de dados. Foram utilizadas janelas de 600 pontos e um incremento de 5 entre janelas. A Figura 6.14 mostra os pontos fixos estimados para cada janela do conjunto de dados. As linhas tracejadas na Figura 6.14 correspondem aos limites dos dados. Verifica-se que apenas um ponto fixo estimado está contido entre as linhas tracejadas e seu valor médio é 43,699. Esse ponto fixo é envolvido pelo atrator e, por isso, será utilizado na determinação da seção de Poincaré.

O próximo passo é fazer a imersão do conjunto de dados. No caso desse sistema, sabe-se da literatura que o espaço de imersão pode ser construído tomando três coordenadas (Letellier et al., 1995b). Assim foram utilizadas as coordenadas $x(k - 2\tau)$, $x(k - \tau)$ e $x(k)$, sendo $x(k)$ a série temporal da corrente elétrica e $\tau = 5$. O resultado é mostrado na Figura 6.15(a).

Partindo do atrator reconstruído e do valor estimado do ponto fixo, determina-se a seção de Poincaré

$$P \equiv \{(x_n(k), x_n(k - 2\tau)) \in \mathbb{R}^2 \mid x_n(k - \tau) = 43,7 \text{ e } \dot{x}_n(k - \tau) > 0\}. \quad (6.18)$$

A seção de Poincaré P é mostrada na Figura 6.15(a). Por meio dos valores $x_n(k)$ da seção de Poincaré foi construído o mapa de primeiro retorno da

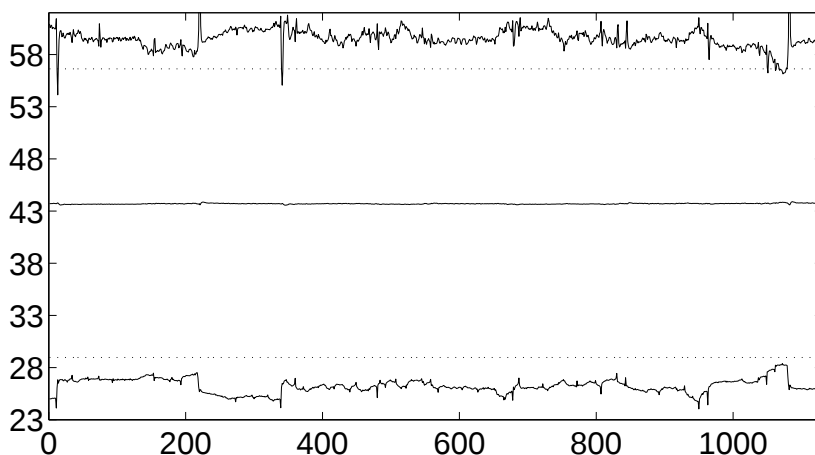


Figura 6.14: Pontos fixos estimados da série temporal.

Figura 6.15(b). O mapa mostra que o atrator reconstruído apresenta dois ramos monotônicos com máximo diferenciável.

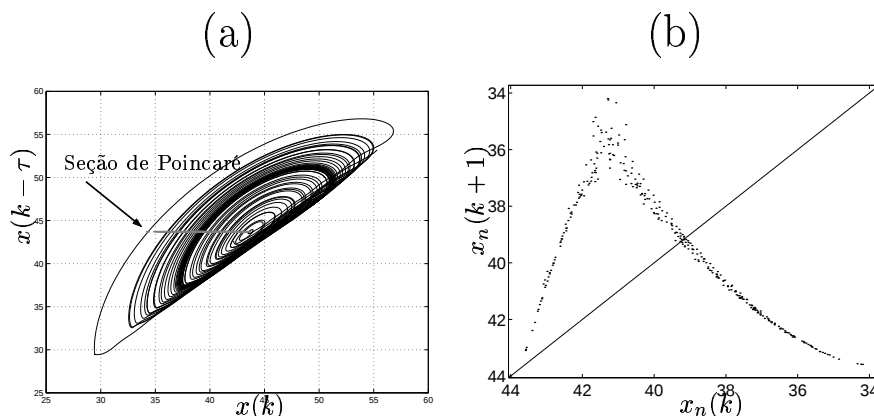


Figura 6.15: (a) Imersão da série temporal da corrente (b) mapa de primeiro retorno correspondente à seção de Poincaré mostrado no item (a).

6.4.2 Reconstrução

A reconstrução utilizará os dados e as informações deduzidas na seção anterior. Como o sistema apresenta dois ramos e o atrator pode ser imerso em um toro limitante de ordem 1, supõe-se que o sistema possa ser reconstruído com dois submodelos.

Assim como no caso de Rössler, verifica-se pelo atrator, que existe uma região de transição onde acontece a dobra. A superfície de chaveamento será buscada nessa região. Uma importante observação referente à utilização do procedimento baseado em topologia, no caso discreto, é que a superfície de chaveamento será uma relação entre as coordenadas utilizadas para realizar a imersão. No caso desse sistema, a superfície de chaveamento foi determinada empiricamente a partir de inspeção visual do atrator. A superfície escolhida foi

$$s(\mathbf{x}) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (x(k-2\tau) - 49) - 0,01x(k-\tau) + 0,9(x(k) - 49) = 0 \}, \quad (6.19)$$

sendo $\mathbf{x} = [x(k-2\tau) \ x(k-\tau) \ x(k)]^T$.

Com a superfície pode-se dividir o conjunto de dados em dois grupos. O próximo passo para obtenção do modelo é a estimação dos submodelos locais. As equações dos submodelos locais terão a forma

$$x(k+\tau) = ax(k-2\tau) + bx(k-\tau) + cx(k) + d. \quad (6.20)$$

como se trata de modelo linear nos parâmetros, o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = [a \ b \ c \ d]^T \in \mathbb{R}^4$ pode ser obtido por meio do estimador de mínimos quadrados clássico,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Psi}]^{-1} \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{x}(\mathbf{k} + \boldsymbol{\tau}), \quad (6.21)$$

sendo a matriz de regressores $\boldsymbol{\Psi} = [\mathbf{x}(\mathbf{k} - 2\boldsymbol{\tau}) \ \mathbf{x}(\mathbf{k} - \boldsymbol{\tau}) \ \mathbf{x}(\mathbf{k}) \ \mathbf{1}] \in \mathbb{R}^{(N \times 4)}$ e N o número de amostras.

Uma vez definida a superfície de chaveamento, equação (6.19), o conjunto de dados foi dividido em dois subconjuntos e por meio da equação (6.21) os submodelos locais foram calculados para cada sub-região do espaço. Assim, o modelo para eletrodissolução será

$$x(k+\tau) = \begin{cases} 0,27289x(k-2\tau) - 1,03582x(k-\tau) + \\ +1,80068x(k) - 2,42085, & \text{se } d(\mathbf{x}) \geq 0, \\ 0,94991x(k-2\tau) - 2,68542x(k-\tau) + \\ +2,71145x(k) + 0,97289, & \text{se } d(\mathbf{x}) < 0. \end{cases} \quad (6.22)$$

Por meio do modelo (6.22) o sistema foi reconstruído. O atrator reconstruído é mostrado na Figura 6.16(a). O Mapa de primeiro retorno associado é mostrado na Figura 6.16(b). Atrator desenvolve dois ramos assim como o atrator original. O mapa de primeiro retorno é descontínuo, o que revela que o sistema reconstruído não apresenta exatamente o mesmo mecanismo do atrator da eletrodissolução. Como mostrado no capítulo 5, uma dinâmica semelhante a de Rössler, apresenta duas regiões de transição. Assim

conjectura-se que, possivelmente, seja necessário mais de uma superfície de chaveamento. No entanto, o modelo obtido já representa alguns aspectos da dinâmica do processo de eletrodissolução.

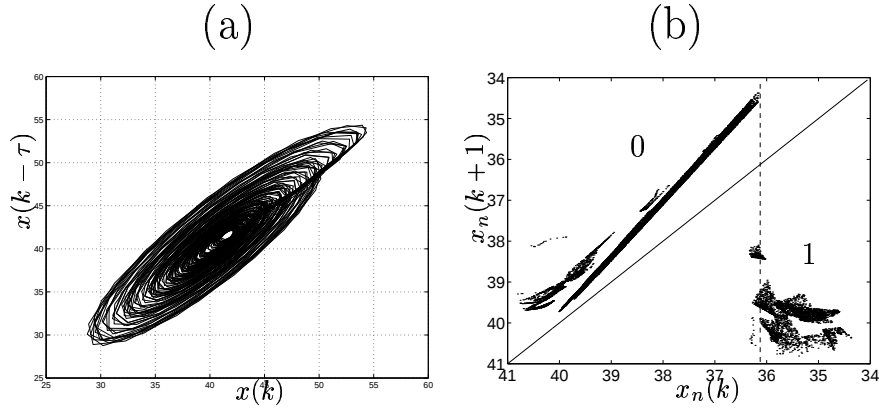


Figura 6.16: (a) Imersão da série produzida pelo modelo afim por partes (b) Mapa de primeiro retorno associado.

6.5 Conclusão

Este capítulo apresentou aplicações de modelos afins por partes.

Foram utilizados dois procedimentos para implementação eletrônica do chaveamento. No primeiro, um circuito que codifica a estrutura dos modelos canônicos foi empregado. Os modelos canônicos não guardam equivalência exata com os modelos afins por partes. Apesar disso foi possível encontrar, no espaço de parâmetros, regiões em que os dois modelos apresentam comportamentos equivalentes. Esse procedimento foi implementado para o caso do sistema de Rössler. Os resultados experimentais mostram que o circuito consegue reproduzir as dinâmicas do sistema. Apesar desse procedimento se aplicar somente a uma classe restrita de sistemas, a facilidade de implementação justifica o seu uso.

O outro procedimento, mais geral que o primeiro, consiste na utilização de chaves analógicas. O circuito de controle de chaveamento executa a mesma função que a função $f[\cdot]$ nos modelos afins por partes. Nesse caso o circuito reproduz exatamente os modelos afins por partes. Esse procedimento foi empregado para o caso do sistema de Lorenz. O circuito conseguiu reproduzir um dos atratores estranhos desse sistema. Conjectura-se que, nesse caso, o modelo afim por partes não é adequado para implementação em circuitos porque o sinal de chaveamento tem amplitude muito baixa na região próxima ao ponto fixo trivial. Essa característica torna o sinal vulnerável a ruído o que resulta em chaveamentos espúrios, impossibilitando assim a construção de outros atratores estranhos. Deve ser investigado, posteriormente, se tal fragilidade pode ser contornada por meio de um atraso no chaveamento, ou seja, o emprego de um circuito de histerese.

No caso da identificação do processo de eletrodissolução potencioestática do cobre, foi possível a partir de uma única série temporal extrair alguns elementos que orientaram a estimação do modelo. Utilizando imersão dos dados, foi possível reconstruir o atrator e conhecer algumas de suas características. Por meio do algoritmo descrito em (Aguirre e Souza, 1998), o ponto fixo imerso no atrator foi extraído da série temporal. Com o ponto fixo e o atrator reconstruído, foi possível saber que o sistema apresenta dois ramos e mecanismo de dobra. Obtidas essas informações e, pela utilização do procedimento descrito no capítulo 5, um modelo autoregressivo afim por partes foi obtido. O modelo apresenta comportamento caótico com dois ramos no mapa de primeiro retorno. No entanto, verifica-se que o mapa de primeiro retorno aponta para outra topologia. Conjectura-se que essa característica possa ser melhorada pela utilização de mais uma superfície de chaveamento.

Capítulo 7

Conclusão

Modelos com estrutura por partes vêm apresentando crescente interesse na literatura, principalmente nas comunidades de controle e identificação de sistemas. A principal razão para isso é que esses modelos dividem grandes e ou complicados problemas, em problemas menores de mais fácil solução. Além disso, os modelos locais resultantes dessa estrutura, podem apresentar relação direta com sistemas físicos.

Existe uma vasta gama de modelos que possuem a estrutura por partes e esses modelos podem, se guardadas as relações de equivalência, ser convertidos um no outro. Essa intercambialidade possui a vantagem de possibilitar a utilização de técnicas de um tipo de modelo nos demais. Assim, o desenvolvimento de um modelo implica o desenvolvimento dos demais.

O modelo nebuloso do tipo Takagi-Sugeno-Kang (TSK) tem sido muito utilizado em estratégias de controle baseadas em modelo. Entre essas estratégias citam-se a compensação paralela distribuída, controle preditivo e controle robusto. O modelo afim por partes tratado neste trabalho possui equivalência direta com o modelo TSK. Assim essa estrutura é potencialmente indicada para estratégias de controle.

Neste trabalho, os modelos afins por partes foram tratados sob a perspectiva de reconstrução de campos vetoriais. Partiu-se dos resultados e conceitos da teoria de sistemas dinâmicos não-lineares e de ferramentas numéricas. Para demonstrar as principais idéias, utilizou-se o rigor das ferramentas de análise topológica e uma série de simulações numéricas. Tem-se verificado na literatura uma tendência para essa abordagem (Holmes, 2005): “... *the use of computers in rigorous argument, as well as illustration and simulation, is becoming more common.*”¹

¹... o uso de computadores na argumentação rigorosa, tanto quanto ilustrações e simulações, está se tornando mais comum.

7.1 Principais contribuições

Foi desenvolvido um procedimento para síntese de sistemas dinâmicos não-lineares por meio de modelos afins por partes. A metodologia apresentada é baseada no conhecimento da estrutura do retrato de fases de sistemas lineares e na reconstrução de elementos da topologia de atratores estranhos. Consideram-se conhecidos a princípio os modelos locais e investiga-se a escolha da superfície de chaveamento na construção da dinâmica. A reconstrução assim desenvolvida conseguiu representar bem os sistemas modelados de maneira local e global. Associado a isso, os modelos também apresentaram um número mínimo de partes. Obtidos os modelos, a superfície de chaveamento pode ser parametrizada de modo que um de seus parâmetros passe a se comportar como um parâmetro de bifurcação. Essa parametrização fez com que o modelo reproduzisse a mesma seqüência de bifurcações dos sistemas. Além disso, foi mostrado que a parametrização possibilitou obter as mesmas bifurcações globais do sistema de Lorenz. Recentemente foi mostrado que essas bifurcações globais são observadas em vários sistemas encontrados na literatura (Letellier et al., 2005). Assim, conclui-se que a reconstrução desenvolvida cobre uma classe de sistemas. Esses resultados foram submetidos e aceitos para publicação em periódico (Amaral et al., 2006).

A estratégia de parametrização da superfície de chaveamento possibilitou também que os modelos afins por partes pudessem ser aproximados por uma estrutura canônica. Essa estrutura facilita a implementação de circuitos eletrônicos. A relação entre as estruturas pode ser encontrada por meio da identificação de regiões, dos espaços de parâmetros, que produzem comportamentos equivalentes. Uma forma geral de implementação de circuitos foi construída por meio de chaves analógicas. Enquanto as formas canônicas têm a sua aplicação condicionada, a implementação por meio de chaves analógicas não se restringe quanto ao tipo de sistema.

A metodologia de reconstrução foi empregada na modelagem do processo de eletrodissolução potencioestática do cobre. Por meio de um conjunto de dados foi possível obter os elementos topológicos necessários para o processo de reconstrução da dinâmica. Nesse caso, não se dispunha dos submodelos locais. O atrator reconstruído pelo modelo apresenta diferença significativa em relação ao atrator original, como pode ser verificado pelo mapa de primeiro retorno. Apesar disso, o modelo estimado apresenta o mesmo conjunto de símbolos necessários para descrever a sua dinâmica simbólica.

Esse foi um primeiro passo na utilização desse procedimento dentro do contexto de identificação de sistemas usando modelos discretos. Salienta-se, no entanto, que ainda há muito a ser pesquisado.

7.2 Discussões Finais

Uma importante característica do método proposto é que o número de submodelos resultantes é aproximadamente o número de pontos fixos do sistema, podendo até ser menor. Como resultado dessa abordagem, o problema do elevado número de partes devido ao aumento da complexidade do problema (*the curse of the dimensionality*) é evitado.

Outra característica, é que se a superfície de chaveamento é determinada pela topologia, os submodelos locais podem ser estimados por mínimos quadrados lineares (clássico). Como verificado no caso da identificação do processo de eletrodissolução, a metodologia pôde ser empregada mesmo sem o conhecimento das dinâmicas locais.

Como parâmetros da superfície de chaveamento funcionam como parâmetros de bifurcação, conjectura-se que, após a aplicação da metodologia proposta, a qualidade do modelo pode ser melhorada se a superfície de chaveamento for reajustada por mínimos quadrados não-lineares. Dessa forma o ajuste global pode funcionar com um ajuste fino do modelo.

Em relação à síntese de circuitos, não há a princípio, restrições para implementação. Seguindo a estratégia de chaves analógicas, se um modelo afim por partes puder ser obtido, pode-se implementar um circuito que reproduz a dinâmica.

7.3 Trabalhos futuros

O trabalho proporcionou uma série de questionamentos que espera-se sejam futuramente abordados.

- A busca de elementos fundamentais da topologia do atrator será melhor realizada por meio de um algoritmo, de modo que, partindo de um conjunto de dados, seja possível estabelecer, por exemplo, onde se encontram as linhas de ramificação e os pontos de rasgo. Assim a determinação da superfície de chaveamento pode ser realizada mais rapidamente.
- Investigar a utilização de ferramentas dinâmicas locais, como por exemplo, expoentes de Lyapunov locais, na determinação de regiões de dominância das variedades de cada ponto fixo. Verificar a relação entre a informação dessas ferramentas e a informação topológica.
- Construir um procedimento de reconstrução para o caso de sistemas não-hiperbólicos e sistemas não-autônomos contidos no espaço $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$.

- Estudar o problema de determinação de chaveamento em espaço de alta dimensão. Foi mostrado que elementos da topologia podem ser relacionados com a posição das variedades. Como as variedades são localmente retas, planos e hiperplanos, pode-se buscar a relação entre as variedades e a topologia mesmo em alta dimensão.
- Investigar o problema da imersão no processo de determinação da estrutura de um modelo afim por partes (autoregressivo).
- Investigar estratégias de implementação de circuitos que sejam mais compactas.

Referências Bibliográficas

- Abarbanel, H. D. I., Brown, R., Sidorowich, J. J., e Tsimring, L. S. (1993). The analysis of observed chaotic data in physical systems. *Reviews of Modern Physics*, 65(4):1331–1392.
- Aguirre, L. e Souza, A. (1998). An algorithm for estimating fixed points of Dynamical Systems from time series. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 8(11):2203–2213.
- Aguirre, L. A. (2004). *Introdução à Identificação de Sistemas*. Editora da UFMG, 2ª edição.
- Aguirre, L. A. e Billings, S. A. (1994). Validating identified nonlinear models with chaotic dynamics. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, (4):109–125.
- Aguirre, L. A., Rafael, A. M. L., Amaral, G. F. V., e Letellier, C. (2004). Constraining the topology of neural network to ensure dynamics with symmetry properties. *Physical Review E*, 69(026701):1–11.
- Amaral, G. F. V., Letellier, C., e Aguirre, L. A. (2006). Piecewise affine models of chaotic attractors: The Rössler and Lorenz systems. *Chaos*, 16(1):1–13.
- Auerbach, D., Cvitanović, P., Eckmann, J. P., Gunaratne, G., e Procaccia, I. (1987). Exploring chaotic motion through periodic orbits. *Physical Review Letters*, 58(23):2387–2389.
- Bagarinao, E., Pakdaman, K., Nomura, T., e Sato, S. (1999a). Generalized one-parameter bifurcation diagram reconstruction using time series. *Physica D*, 124:258–270.
- Bagarinao, E., Pakdaman, K., Nomura, T., e Sato, S. (1999b). Time series-based bifurcation diagram reconstruction. *Physica D*, 2229:1–21.

- Bagarinao, E., Pakdaman, K., Nomvra, T., e Sato, S. (1999c). Reconstructing bifurcation diagrams from noisy time series using nonlinear autoregressive models. *Phys. Rev. E*, 60(1):1073–1076.
- Batruni, R. (1991). A multilayer neural network with piecewise-linear structure and backpropagation learning. *IEEE Transactions on Neural Network*, 2(3):395–403.
- Bemporad, A. e Morari, M. (1999). Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints. *Automatica*, 35:407–427.
- Bemporad, A. G. (2004). Efficient conversion of the mixed logical dynamical systems into an equivalent piecewise affine form. *IEEE transactions on Automatic Control*, 49(5).
- Bemporad, A. G., Ferrari-Trecati, e Morari, M. (2000). Observability and controllability of piecewise affine and hybrid systems. *IEEE transactions on Automatic Control*, 45(10).
- Birman, J. S. e Williams, R. F. (1983). Knotted periodic orbits in dynamical systems-I: Lorenz’s equations. *Topology*, 22(1):47–82.
- Boulant, G., Lefranc, M., Bielawski, S., e Derozier, D. (1997). Horseshoe templates with global torsion in a driven laser. *Physical Review E*, (5):5082–5091.
- Breiman, L. (1993). Hinging hyperplanes for regression, classification and function approximation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 3(39):999–1013.
- Byrne, G., Gilmore, R., e Letellier, C. (2004). Distinguishing between folding and tearing mechanisms in strange attractors. *Physical Review E*, 70(056214):1–9.
- Choi, C. e Choi, J. Y. (1994). Constructive neural networks with piecewise interpolation capabilities for function approximation. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 5(6):936–944.
- Chua, L. O. (1992). The genesis of chua’s circuit. *International Journal of Electronics and Communications*, 46(4):250–257.
- Chua, L. O. e Deng, A. (1986). Canonical piecewise-linear modeling. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, CAS-33(5):511–525.

- Chua, L. O. e Deng, A. (1988). Canonical piecewise-linear representation. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 35(1):101–111.
- Corrêa, M. V. e Aguirre, L. A. (2004). Identificação não-linear caixa-cinza: Uma revisão e novos resultados. *Revista Controle & Automação*, 15(2):109–126.
- Corrêa, M. V. (2001). *Identificação caixa-cinza de sistemas não-lineares utilizando representações NARMAX racionais e polinomiais*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.
- Corrêa, M. V., Aguirre, L. A., e Braga, A. P. (1999). Validação de modelos neurais identificados a partir de um sistema caótico. In *IV Congresso Brasileiro de Redes Neurais*, páginas 152–158, ITA São José dos Campos, SP, Brasil.
- De Schutter, B. e van den Boom, T. (2000). On model predictive control for max-min-plus-scaling discrete event systems. Relatório Técnico bds:00-04, Control Systems Engineering, Fac. of Information Technology and Systems, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands.
- Eckmann, J. P., Kamphorst, S. O., Ruelle, D., e Ciliberto, S. (1986). Liapunov exponents from time series. *Phys. Rev. A*, 34(6):4971–4979.
- Eckmann, J. P. e Ruelle, D. (1985). Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Rev. Mod. Phys.*, 57(3):617–656.
- Ernst, S. (1998). Hinging hyperplanes trees for approximations and identification. In *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision & Control 1998*, Tampa, Florida, USA.
- Ferrari-Trecate, G., Muselli, M., Liberati, D., e Morari, M. (2003). A clustering technique for the identification of piecewise affine systems. *Automatica*, 39(2):205–217.
- Fiedler-Ferrara, N. e Prado, C. P. C. (1994). *Caos - Uma Introdução*. Editora Edgard Blücher.
- Gad, E. F., Atiya, A. F., Shaheen, S., e El-Dessouki (2000). A new algorithm for learning in piecewise-linear neural networks. *Neural Networks*, 13(4-5):485–505.

- Ghrist, R. W., Holmes, P. J., e Sullivan, M. C. (1997). *Knots and Links in Three-Dimensional Flows*. Springer-Verlag. <http://www.galileo.math.siu.edu/~msulliva/Book/>.
- Gilmore, R. (1998). Topological analysis of chaotic dynamical systems. *Reviews of Modern Physics*, 70(4):1455–1529.
- Gilmore, R. e Lefranc, M. (2002). *The Topology of Chaos: Alice in stretch and squeezland*. Wiley.
- Grassberger, P. e Procaccia, I. (1983). Estimation of the kolmogorov entropy from a chaotic signal. *Phys. Rev. A*, (28):2591–2593.
- Guckenheimer, J. e Holmes, P. (1983). *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcation of vector fields*. Springer-Verlag, New York.
- Güzelis, C. e Gökner, I. C. (1991). A canonical representation for piecewise-affine to circuit analysis. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 38(11):1342–1354.
- Haken, H. (1975). Analogy between higher instabilities in fluids and lasers. *Phys. Lett.*, 53(1):77–78.
- Hale, J. e Koçak, H. (1991). *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag, New York.
- Heemels, W. P. M. H., De Shutter, B., e Bemporad, A. (2001a). Equivalence of hybrid dynamical models. *Automatica*, 37(7).
- Heemels, W. P. M. W., Çamlıbel, M. K., e Schumacher, J. M. H. (2002). On the dynamic analysis of piecewise-linear networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 49(3):315–327.
- Heemels, W. P. M. W., De Schutter, B., e Bemporad, A. (2001b). On the equivalence of classes of hybrid dynamical models. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision & Control 2001*, Orlando, Florida, USA.
- Hellendoorn, H. e Driankov, D. (1997). *Fuzzy Model Identification - Selected Approaches*. Springer.
- Hemati, N. (1994). Strange attractors in brushless dc motors. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 41(1):40–45.

- Heredia, E. A. e Gonzalo, R. A. (1996). Piecewise linear system modeling based on a continuous threshold decomposition. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44(6):1440–1453.
- Hiew, H. L. (1994). An adaptive fuzzy system for modeling chaos. *Information Sciences*, 81(3–4):193–212.
- Holmes, P. (2005). Ninety plus thirty years of nonlinear dynamics: less is more and more is different. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15(9):2703–2716.
- Hush, D. R. e Horne, B. (1998). Efficient algorithms for function approximations with piecewise linear sigmoidal networks. *IEEE Transactions on Neural Network*, 9(6):1129–1141.
- Jang, J. R. (1993). Anfis: Adaptative-network-based fuzzy inference system. *IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics*, 23(3):665–685.
- Júlian, P. M. (2003). The complete canonical piecewise-linear representation: Functional form for minimal degenerated intersections. *IEEE transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 50(3):387– 396.
- Julián, P. M. (1999). *A High Level Canonical Piecewise Linear Representation: Theory and Applications*. Tese de Doutorado, Universidad Nacional Del Sur, Bahía Blanca, Argentina.
- Kahlert, C. e Chua, L. O. (1990). A generalized canonical piecewise-linear representation. *IEEE Trans. Circ. and Systems CAS*, 37:373–383.
- Kahlert, C. e Chua, L. O. (1992). The complete canonical piecewise-linear representation - part I: The geometry of the domain space. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 39(3):222–236.
- Kaplan, W. e Lewis, D. J. (1973). *Cálculo e Algebra Linear*, volume 3. Livros Técnicos e Científicos Editora S. A. e Editora Universidade de Brasília, Av. Venezuela, 163 - ZC-05 CP 3655, Rio de Janeiro- GB, 1ª edição.
- Kennedy, M. P. (1992). Robust op amp realization of chua's circuit. *Frequenz*, 46(3-4):66–80.
- Kevenaar, T. A. M. e Leenaerts, D. M. W. (1992). A comparison of piecewise-linear model descriptions. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 39(12):996–1004.

- Lathrop, D. P. e Kostelich, E. J. (1989). Characterization of an experimental strange attractors by periodic orbits. *Physical Review A*, 40(7):4028–4031.
- Le Sceller, L., Letellier, C., e Gouesbet, G. (1994). Algebraic evaluation of linking numbers of instable periodic orbits in chaotic attractors. *Phys. Rev. E*, 49(5):4693–4695.
- Lee, J. M. (2000). *Introduction to Topological Manifolds*. Springer.
- Lefranc, M., Glorieux, P., Papoff, F., Molesti, F., e Arimondo, E. (1994). Combining topological analysis and symbolic dynamics to describe a strange attractor and its crises. *Physical Review Letters*, 73(10):1364–1367.
- Letellier, C. (2002). Topological analysis of chaos in a three variable biochemical model. *Acta Biotheoretica*, (50):1–13.
- Letellier, C., Dutertre, P., e Maheu, B. (1995a). Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system: Toward a systematic topological characterization. *5*, (1):271–282.
- Letellier, C. e Gilmore, R. (2001). Covering dynamical systems: two-fold covers. *Phys Rev. E*, 63:16206.
- Letellier, C. e Gouesbet, G. (1995). Topological characterization of a system with high-order symmetries. *52*, (5):4754–4761.
- Letellier, C., Le Sceller, L., Dutertre, P., Gouesbet, G., Fei, Z., e Hudson, J. L. (1995b). Topological characterization and global vector field reconstruction from an experimental electrochemical system. *Journal of Physical Chemistry*, (99):7016–7027.
- Letellier, C., Le Sceller, L., Maréchal, E., Dutertre, P., Maheu, B., Gouesbet, G., Fei, Z., e Hudson, J. L. (1995c). Global vector field reconstruction from a chaotic experimental signal in copper electrodisolution. *Phys. Rev. E*, 51(5):4262–4266.
- Letellier, C., Maquet, J., Labro, H., Le Sceller, L., e Gousbet, G. (1998). Analysing chaotic behavior in a belousov-zhabotinskyi reation by using a global vector field reconstruction. *J. Phys Chem. A*, (102):10265–10273.
- Letellier, C., Tsankov, T., Byrne, G., e Gilmore, R. (2005). Large-scale structural reorganization of strange attractors. *Physical Review E*, 72(026212):1–12.

- Lin, J. e Unbehauen, R. (1995). Canonical piecewise-linear networks. *IEEE Transactions on Neural Network*, 6(1):43–50.
- Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of Atmospheric Sciences*, 20:283–293.
- Manturov, V. (2004). *Knot Theory*. CRC Press LLC.
- Mindlin, G. B., Hou, X., Solari, H. G., Gilmore, R., e Tufillaro, N. B. (1990). Classification of strange atractors by integers. *Phys. Rev. Lett.*, páginas 2350–2353.
- Monteiro, L. H. A. (2002). *Sistemas dinâmicos*. Editora Livraria da Física.
- Ogata, K. (1993). *Engenharia de Controle Moderno*. Segunda Edição, Prentice Hall do Brasil, São Paulo.
- Packard, N. H., Crutchfield, J. P., Farmer, J. D., e Shaw, R. S. (1980). Geometry of a times series. *Physical Review Letters*, 45(9):712–716.
- Paoletti, S. (2004). *Identification of Piecewise Affine Models*. Tese de Doutorado, Università di Siena. Tesi di Dottorato di Ricerca in Ingegneria dell’Informazione.
- Papoff, F., Arimondo, E., Mindlin, B., Solari, H., e Gilmore, R. (1992). Structure of chaos in the laser with saturable absorber. *Phys. Rev. Lett.*, páginas 1128–1131.
- Plumecoq, J. e Lefranc, M. (1994). From template analysis to generating partitions I: Periodic orbits, knots and symbolic encodings. *Physica D*, 144:231–258.
- Poincaré, H. J. (1890). Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Mathematica*, 13:1–270.
- Poincaré, H. (1881). Mémoire sur les curbes définies par une équation différentielle. *Journal de Mathématiques*, 7((3^e série),):375–422.
- Pucar, P. e Sjöberg, J. (1996). On the parametrization of hinging hyperplane models. Relatório Técnico LiTH-ISY-R-1831, Dept of EE. Linköping University, S-581 83 Linköping, Sweden.
- Pucar, P. e Sjöberg, J. (1998). On the hinge-finding algorithm for hinging hyperplanes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 44(3).

- Roll, J. (2001a). Identification of piecewise affine wiener models via mixed-integer programming. Relatório Técnico LiTH-ISY-R-2346, Department of Electrical Engineering, Linköping University, SE-581 83 Linköping, Sweden.
- Roll, J. (2001b). *Robust Verification and Identification of Piecewise Affine Systems*. Tese de Doutorado, Department of Electrical Engineering, Linköping University, SE-581 83 Linköping, Sweden.
- Roll, J., Bemporad, A., e Ljung, L. (2004). Identification of piecewise affine systems via mixed-integer programming. *Automatica*, 40(1):37–50.
- Rössler, O. E. (1976). An equation for continuous chaos. *Phys. Lett. A*, 57A:397–398.
- Rumelhart, D. E., Hinton, G. E., e Williams, R. J. (1986). Learning representations of back-propagation errors. *Nature*, 323:533–536.
- Rumelhart, D. E. e McClelland, J. L. (1986). *Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of cognition*, volume 1. MIT press, Cambridge, MA.
- Shorten, R., Murray-Smith, R., e Bjorgans, R. (1999). On the interpretation of local models in blended multiple models structures. *International Journal of Control*, (72):620–628.
- Silva, C. P. (1993). Shil'nikov's theorem - a tutorial. *IEEE Transactions on Circuits and Systems - I: Fundamental Theory and Applications*, 40(10):675–682.
- So, P., Ott, E., Sauer, T. Gluckman, B. J., Grebogi, C., e Schiff, S. J. (1997). Extracting unstable periodic orbits from chaotic time series data. *Physical Review E*, 55(5):5398–5417.
- Sontag, E. D. (1981). Nonlinear regulation: The piecewise linear approach. *IEEE transactions on Automatic Control*, AC-26(2).
- Sprott, J. C. (2000). Simple chaotic systems and circuits. *Am. J. Phys*, (68):758–763.
- Storace, M. e De Feo, O. (2004). Piecewise-linear approximation of nonlinear dynamical systems. *IEEE Trans. Circ. Syst. I*, 51(4):830–842.
- Sugeno, M. e Kang, T. G. (1988). Structure identification of fuzzy model. *Fuzzy Sets and Systems*, 28:15–33.

- Takagi, T. e Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, SMC-15:116–132.
- Takens, F. (1981). *Dynamical Systems and Turbulence*. D. Rand and L.-S. Young. Lecture Notes in Mathematics N° 898.
- Tsankov, T. D. e Gilmore, R. (2003). Strange attractors are classified by bounding tori. *Physical Review Letters*, 91(13):134104–1–134104–4.
- Tsankov, T. D. e Gilmore, R. (2004). Topological aspects of the structure of chaotic attractors in $\mathbb{R}^3$. *Physical Review E*, 69(056206):1–11.
- Ueda, Y. (1992). *The Road To Chaos*. Aerial Press, Inc.
- Wiggins, S. (1990). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag, New York.

Apêndice A

Circuitos eletrônicos

As Figuras a seguir referem-se aos circuitos implementados no capítulo 6. O sistema de Rössler foi implementado pelas equações

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= 5,0x - 2,0z - 15,0 + 4,5045 |x + \tan(\theta)z - 4|. \end{aligned} \tag{A.1}$$

O circuito que implementa esse sistema é mostrado na Figura A.1. A dinâmica de Lorenz é implementada pela circuito da Figura A.2. As equações associadas são

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2,96x + 2,96y \\ \dot{y} &= 0,296x - 0,296y + f_1(d(\mathbf{x}))(2,4z) + f_2(d(\mathbf{x}))(- (2,4z)) \\ \dot{z} &= f_1(d(\mathbf{x}))(-2,4(x + y)) + f_2(d(\mathbf{x}))(2,4(x + y)) - 0,8z + 0,8. \end{aligned} \tag{A.2}$$

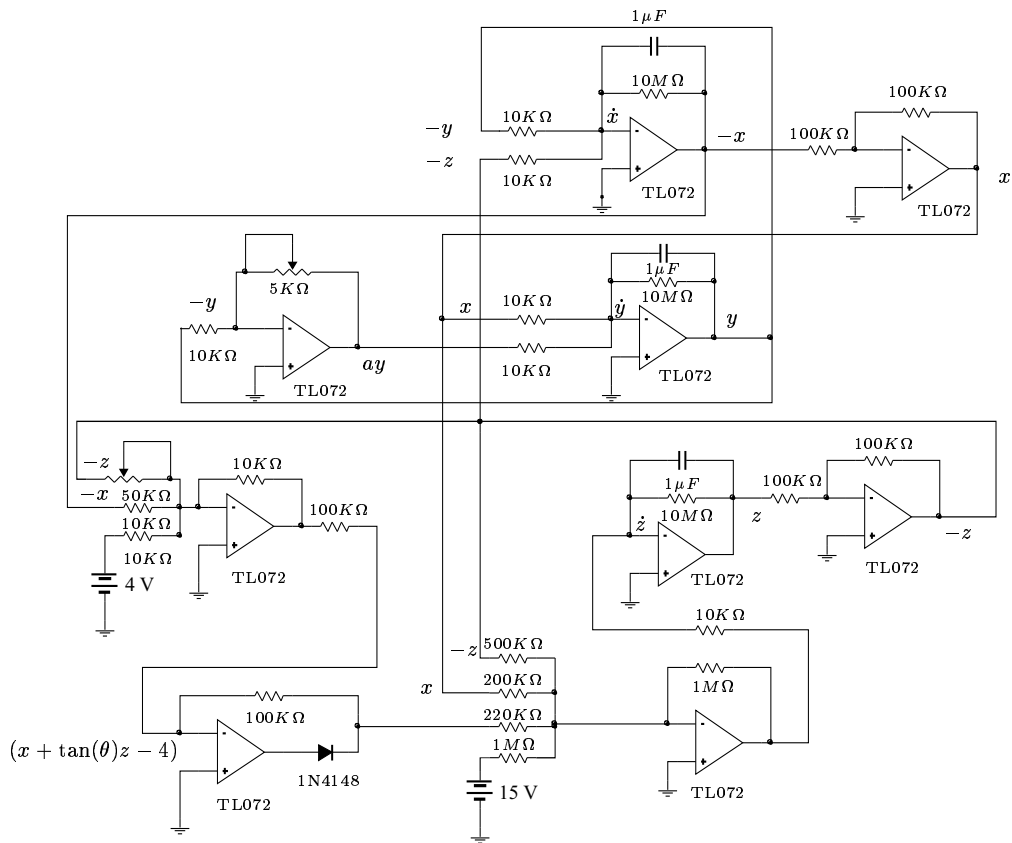


Figura A.1: Circuito eletrônico que implementa o sistema de Rössler.

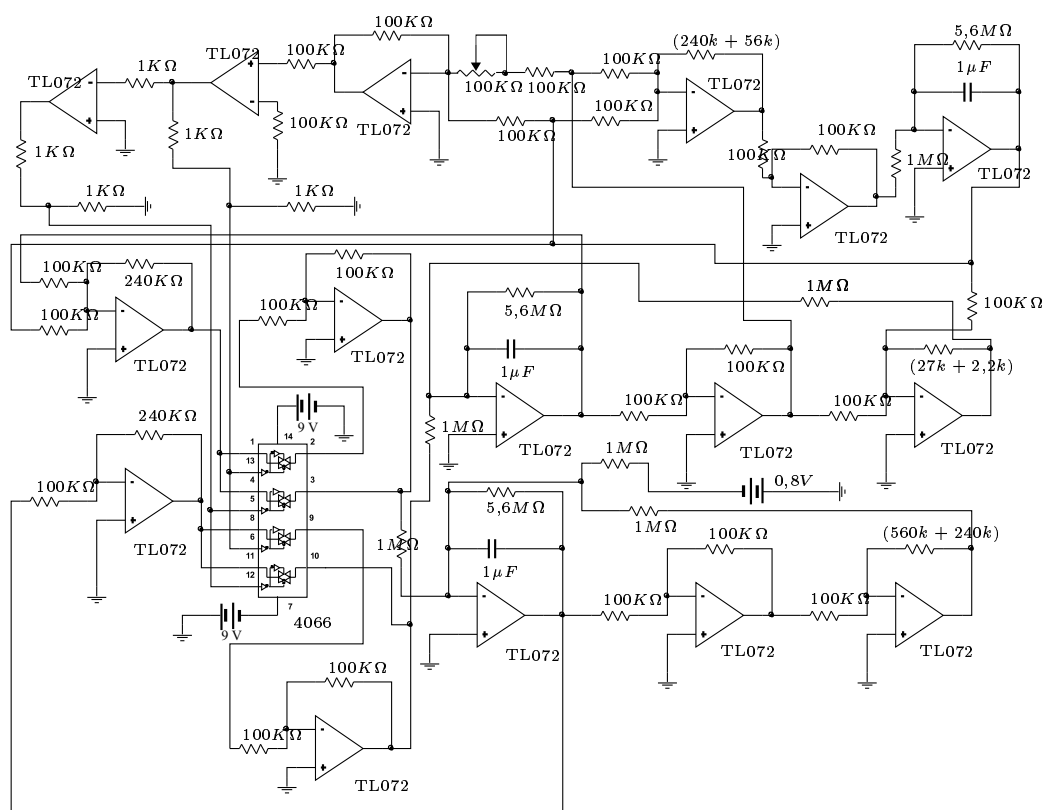


Figura A.2: Circuito que implementa dinâmica equivalente a do sistema de Lorenz para os valores $(s, r, b) = (10, 28, -\frac{8}{3})$.

