

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

MATHEUS HENRIQUE SILVA DE SOUSA

..

OTIMIZAÇÃO DE UM MICROMOTOR USANDO O MÉTODO ELIPSOIDAL COM A
ANÁLISE DE SENSIBILIDADE VIA MÉTODO ADJUNTO

Belo Horizonte

2024

MATHEUS HENRIQUE SILVA DE SOUSA

..

**OTIMIZAÇÃO DE UM MICROMOTOR USANDO O MÉTODO ELIPSOIDAL COM A
ANÁLISE DE SENSIBILIDADE VIA MÉTODO ADJUNTO**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Engenharia Elétrica

Orientador: Prof. Dr. Rodney Rezende Saldanha

Belo Horizonte

2024

S725o Sousa, Matheus Henrique Silva de.
Otimização de um micromotor usando o método elipsoidal com a análise de sensibilidade via método adjunto / Matheus Henrique Silva de Sousa. - 2024.

1 recurso online (82 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Rodney Rezende Saldanha.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndices: f. 80-82.

Bibliografia: f. 76-79.

1. Engenharia elétrica - Teses. 2. Otimização - Teses. 3. Método dos elementos finitos- Teses. 4. Análise de sensibilidade - Teses. I. Saldanha, Rodney Rezende. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 621.3(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
COLEGIADO DO CURSO PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

"OTIMIZAÇÃO DE UM MICROMOTOR USANDO O MÉTODO ELIPSOIDAL COM A ANÁLISE DE SENSIBILIDADE VIA MÉTODO ADJUNTO"

MATHEUS HENRIQUE SILVA DE SOUSA

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica. Aprovada em 04 de julho de 2024. Por:

Prof. Dr. Rodney Rezende Saldanha
DEE (UFMG) - Orientador

Prof. Dr. André Luiz Paganotti
DEM (CEFET-MG)

Prof. Dr. Marcio Matias Afonso
GEII-1 (CEFET-MG)

Prof. Dr. Adriano Chaves Lisboa
Diretor GAIA (GAIA - CEFET MG)

Prof. Dr. Elson José da Silva
DEE (UFMG)

Prof. Dr. Diogo Batista de Oliveira
DEE (UFMG)



Documento assinado eletronicamente por **Rodney Rezende Saldanha, Membro de comissão**, em 12/07/2024, às 14:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcio Matias Afonso, Usuário Externo**, em 15/07/2024, às 15:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **André Luiz Paganotti, Usuário Externo**, em 17/07/2024, às 13:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Diogo Batista de Oliveira, Professor do Magistério Superior**, em 17/07/2024, às 16:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Adriano Chaves Lisboa, Usuário Externo**, em 18/07/2024, às 15:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Elson Jose da Silva, Professor do Magistério Superior**, em 24/07/2024, às 15:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3343587** e o código CRC **6D5F29B5**.

À minha família e amigos.

Nunca desista de tentar!

Agradecimentos

Aos meus pais, Elizabeth e José, pelos incentivos e pelos ensinamentos que me permitiram alcançar os meus sonhos.

Ao meu irmão, Guilherme.

Ao Professor e Orientador, Doutor Rodney Rezende Saldanha, que com extrema paciência e competência ímpar conduziu a orientação deste trabalho. Saiba que, sem você, este trabalho não teria sido concluído.

Ao coorientador, Professor André Luiz Paganotti, e ao coorientador PhD, Adriano, por suas valiosas contribuições a este estudo.

Resumo

Esta dissertação aborda a otimização de um micromotor eletrostático por meio do Método Elipsoidal com Cortes Múltiplos e Análise de Sensibilidade via Método Adjunto. Um modelo numérico do micromotor eletrostático utilizando elementos finitos é desenvolvido. A distribuição do potencial escalar elétrico, o campo elétrico e o torque do micromotor são calculados e analisados. O estudo visa aprimorar os parâmetros de projeto do micromotor, por meio da variação da largura e altura dos dentes do estator e do rotor, utilizando uma metodologia de otimização e análise de sensibilidade, avaliando a eficácia do método adjunto em comparação com métodos tradicionais de derivação, como o método das diferenças finitas centrais (CFD). A análise de sensibilidade adjunta é validada por meio do método das diferenças finitas centrais, e são analisadas as vantagens em termos de precisão e eficiência computacional. A aplicação do método adjunto em conjunto com o método elipsoidal de cortes múltiplos demonstra ser uma abordagem promissora para a otimização do micromotor eletrostático. Os resultados obtidos fornecem uma base valiosa para o desenvolvimento de sistemas mais eficientes e precisos.

Palavras-chave: micromotor; otimização mono-objetivo; método adjunto; método elipsoidal; método de elementos finitos.

Abstract

This dissertation addresses the optimization of an electrostatic micromotor using the Ellipsoidal Multiple Cutting Plane Method and Sensitivity Analysis via the Adjoint Method. A numerical model of the electrostatic micromotor using finite elements is developed. The distribution of the scalar electric potential, the electric field, and the torque of the micromotor are calculated and analyzed. The study aims to enhance the design parameters of the micromotor by varying the width and height of the stator and rotor teeth, employing an optimization methodology and sensitivity analysis, evaluating the effectiveness of the adjoint method compared to traditional derivation methods, such as the central finite differences method (CFD). The adjoint sensitivity analysis is validated through the central finite differences method, and the advantages in terms of precision and computational efficiency are analyzed. The application of the adjoint method in conjunction with the ellipsoidal multiple cutting plane method proves to be a promising approach for the optimization of the electrostatic micromotor. The results obtained provide a valuable basis for the development of more efficient and precise systems.

Keywords: micromotor, mono-objective optimization; adjoint state method; ellipsoidal method; finite elements method.

Lista de Figuras

1.1	(a) Simulação do funcionamento de um micromotor com indicação das regiões de campo elétrico de elevada intensidade. (b) Foco na fração do micromotor modelada.	19
1.2	Desenho do micromotor com identificação dos principais parâmetros de projeto. r_{gap} : Raio do entreferro do micromotor; gap : Comprimento do entreferro do micromotor; w_r : Largura do dente do rotor; h_r : Altura do dente do rotor; w_s : Largura do dente do estator; h_s : Altura do dente do estator; r_c : Raio de curvatura da quina do dente.	22
1.3	Malha do micromotor simulado via Método de Elementos Finitos. Para este problema, só é necessário modelar o entreferro, aqui separado em duas regiões pela banda de rolamento utilizada na simulação.	22
1.4	(a) Região de interesse de campo elétrico mais intenso, imagem obtida durante a simulação do micromotor; (b) Resultado da simulação do torque	23
2.1	Malha do micromotor simulado por FEM, para este problema só é necessário modelar o entreferro, aqui separado em duas regiões pela banda de rolamento utilizada na simulação.	37
3.1	Malha FEM com foco nos dentes do estator e do rotor.	46
3.2	(a) Malha FEM com foco na borda inferior. (b) Malha FEM com foco na borda esquerda.	47
3.3	Ilustração da banda de rolamento.	47
3.4	(a) Nós de interesse do estator. (b) Nós de interesse do rotor	48
3.5	Foco em nós de interesse do estator, identificados com a cor preta, onde se aplica a análise de sensibilidade	49
3.6	Malha do micromotor simulado por FEM, para este problema só é necessário modelar o entreferro, aqui separado em duas regiões pela banda de rolamento utilizada na simulação.	50
3.7	(a) Vértices do retângulo. (b) Vértices sobrepostos na malha de elementos finitos	52
3.8	(a) Vértices do retângulo. (b) Vértices sobrepostos na malha de elementos finitos	53

3.9	(a) Vértices do retângulo. (b) Vértices sobrepostos na malha de elementos finitos	54
3.10	(a) Vértices do retângulo. (b) Vértices sobrepostos na malha de elementos finitos	54
4.1	Desenho do micromotor com identificação dos principais parâmetros de projeto. r_{gap} : Raio do entreferro do micromotor; gap : Comprimento do entreferro do micromotor; w_r : Largura do dente do rotor; h_r : Altura do dente do rotor; w_s : Largura do dente do estator; h_s : Altura do dente do estator; r_c : Raio de curvatura da quina do dente.	60
4.2	(a) Malha do micromotor inicial com $x_0 = 0,25$. (b) Malha após 2000 iterações.	61
4.3	Variação de $\ x_{k+1} - x_k\ $ com $x_0 = 0,25$	62
4.4	Simulação do torque do micromotor antes e depois do método elipsoidal com $x_0 = 0,25$	62
4.5	Malha do micromotor inicial e final com $x_0 = 0,50$ e 2000 iterações	63
4.6	Variação de $\ x_{k+1} - x_k\ $ com $x_0 = 0,50$	63
4.7	Simulação do torque do micromotor antes e depois do método elipsoidal com $x_0 = 0,50$	64
4.8	Malha do micromotor inicial e final com $x_0 = 0,75$ e 2000 iterações	64
4.9	Variação de $\ x_{k+1} - x_k\ $ com $x_0 = 0,75$	65
4.10	Simulação do torque do micromotor antes e depois do método elipsoidal com $x_0 = 0,75$	66
4.11	Malha do micromotor inicial e final com $x_0 = 0,95$ e 2000 iterações	66
4.12	Variação de $\ x_{k+1} - x_k\ $ com $x_0 = 0,95$	67
4.13	Simulação do torque do micromotor antes e depois do método elipsoidal com $x_0 = 0,95$	67
4.14	Variação de w_s com otimização via método elipsoidal com análise de sensibilidade via método adjunto	68
4.15	Variação de w_s com otimização via método elipsoidal com análise de sensibilidade via método CFD	68
4.16	Variação de h_s com otimização via método elipsoidal com análise de sensibilidade via método adjunto	69
4.17	Variação de h_s com otimização via método elipsoidal com análise de sensibilidade via método CFD	69
4.18	Variação de w_r com otimização via método elipsoidal com análise de sensibilidade via método adjunto	70
4.19	Variação de w_r com otimização via método elipsoidal com análise de sensibilidade via método CFD	70
4.20	Variação de h_r com otimização via método elipsoidal com análise de sensibilidade via método adjunto	71

4.21	Variação de h_r com otimização via método elipsoidal com análise de sensibilidade via método CFD	71
------	--	----

Lista de Tabelas

4.1	Derivadas adjuntas: Valores absolutos e normalizados	58
4.2	Derivadas CFD: Valores absolutos e normalizados	58
4.3	Comparativo das derivadas obtidas via método adjunto e via método das diferenças finitas centrais	59

Lista de abreviaturas

- CFD:** Central Finite Difference (Diferenças Finitas Centrais)
- FEM:** Finite Elements Method (Método dos Elementos Finitos)
- MEMS:** Microelectromechanical Systems (Micromotor eletrostático)

Sumário

1	Introdução	17
1.1	O Micromotor Eletrostático	18
1.2	Motivação e Justificativa	20
1.3	Descrição do Problema	21
1.4	Revisão da Literatura	24
1.5	Objetivos do Trabalho	26
1.6	Participação em Congresso Científico	27
1.7	Organização da Dissertação	27
2	Fundamentação Teórica	28
2.1	Método de Elementos Finitos	28
2.1.1	Equações de Maxwell	28
2.1.2	Espaços de Elementos Finitos Contínuos	30
2.1.3	Método de Galerkin	30
2.2	Cálculo do Torque	36
2.3	Derivação Numérica	39
2.4	Método Adjunto	40
2.5	Método Elipsoidal	42
2.5.1	Método Elipsoidal Clássico	43
2.5.2	Método Elipsoidal de Múltiplos Cortes	44
3	Metodologia de Análise de Sensibilidade e Otimização de um Micromotor Eletrostático	45
3.1	Aplicação do Método de Elementos Finitos	45
3.2	Aplicação do Método das Diferenças Finitas Centrais	47
3.2.1	Obtenção do Δx	48
3.3	Aplicação do Método Adjunto	49
3.4	Aplicação do Método Elipsoidal nos Parâmetros do Micromotor	51
3.4.1	Parametrização do Micromotor	52

4	Resultados	57
4.1	Comparação das derivadas	57
4.1.1	Comparação das derivadas	57
4.2	Comparativo do custo computacional entre as metodologias de análise de sensibilidade	59
4.3	Resultados da Otimização via Método Elipsoidal	60
4.3.1	Parametrização do Micromotor	60
4.3.2	Resultados para $x_0 = 0,25$	61
4.3.3	Resultados para $x_0 = 0,50$	62
4.3.4	Resultados para $x_0 = 0,75$	64
4.3.5	Resultados para $x_0 = 0,95$	65
4.3.6	Comparativo das variáveis	67
5	Conclusões	73
5.1	Comparativo entre os Métodos Adjunto e CFD	73
5.2	Comparativo do Tempo de Execução Entre o Método Adjunto e o CFD	73
5.3	Resultados da Otimização	74
5.4	Conclusões Finais	74
6	Trabalhos Futuros	75
	Referências Bibliográficas	76
A	Torque por Tensor de Maxwell	80

Capítulo 1

Introdução

Motores elétricos são de suma importância para a sociedade atual, sendo utilizados nas mais diversas aplicações, desde brinquedos e eletrodomésticos até carros e aplicações industriais. Os primeiros motores elétricos, tais quais os conhecemos hoje, surgiram no século XIX, sendo o primeiro modelo de motor elétrico desenvolvido em 1821 por Michael Faraday, onde se utilizava um ímã e um fio imersos em mercúrio e, ao passar uma corrente pelo fio, este começava a rodar ao redor do ímã, mostrando o princípio da conversão de eletricidade em energia mecânica. O primeiro motor elétrico giratório com potência significativa foi criado apenas em 1838 pelo professor alemão Moritz Hermann von Jacobi, que utilizava baterias para gerar energia mecânica a partir do giro do motor. O primeiro gerador de corrente contínua autoinduzido, por sua vez, foi criado apenas em 1886 pelo cientista alemão Werner von Siemens e, desde então, máquinas elétricas se tornaram cada vez mais prevalentes na sociedade. Dentre os diversos tipos de motores elétricos existentes na atualidade, este trabalho foca-se no motor eletrostático, que converte energia elétrica em energia mecânica a partir de campos elétricos.

A primeira máquina eletrostática foi desenvolvida por volta de 1740, cerca de 80 anos antes do primeiro motor elétrico, por Andrew Gordon, sendo também referida como motor capacitor, e caracteriza-se por conter dois elementos: um rotor metálico e um estator isolante. Micromotores eletrostáticos, ou micromotores MEMS (Microelectromechanical Systems), foram desenvolvidos pela primeira vez em 1987, quando começaram a atrair a atenção dos cientistas ao serem fabricados em uma escala micrométrica (Vinhais et al. (2005)). Esses micromotores têm uma ampla gama de aplicações devido à sua capacidade de operar em escalas muito pequenas com alta precisão e eficiência, sendo utilizados em dispositivos médicos, na aplicação de medicamentos em tecidos específicos (de Ávila et al. (2017)) e no tratamento de células cancerígenas (Gao et al. (2019)). Eles também tem aplicações no ramo da robótica, devido à sua capacidade de fornecer movimento preciso e controlado em escalas muito pequenas, sendo usado, por exemplo, em cirurgias minimamente invasivas (Kode e

Cavusoglu (2007)), em telecomunicações, como atuadores em sistemas de radiofrequência (Kurmendra e Kumar (2020)), entre muitas outras aplicações.

O avanço das tecnologias e a crescente demanda por micromotores cada vez melhores faz com que a obtenção de parâmetros de projeto ótimos sejam cada vez mais cruciais na sua produção. Contudo, o número de parâmetros que fazem parte do processo de otimização tem crescido com os avanços tecnológicos e o desejo de se obter projetos melhores. A obtenção de projetos para sistemas eletromagnéticos é uma das áreas onde mais se observa essa tendência, uma vez que pode-se desejar melhorias na performance dos produtos para vários fatores, como aumento do torque, distribuição do campo eletromagnético, diminuição de perdas ou do volume, entre outros. Além disso, é necessário levar em consideração as várias limitações provenientes dos diferentes materiais que os compõem, como limitações dos dielétricos, dos aços, dos condutores ou dos ímãs utilizados.

Problemas que envolvem a obtenção desses projetos ótimos através de métodos matemáticos de otimização, como os métodos do gradiente descendente ou de Newton, exigem a solução de vários sistemas lineares e o cálculo do gradiente da função objetivo ou das restrições de projeto em alguns casos. Um obstáculo para seu uso neste tipo de problema está no fato de que é necessário realizar a análise de sensibilidade dos parâmetros do projeto (cálculo do gradiente da função objetivo), o que pode necessitar de muitas análises do sistema matricial inicial, sendo muito custoso em termos de esforço e tempo computacional. Diante deste fato, uma metodologia de análise de sensibilidade com elevada exatidão e reduzido custo computacional é proposta neste trabalho e aplicada na otimização dos parâmetros de um micromotor eletrostático.

1.1 O Micromotor Eletrostático

O princípio de funcionamento de um micromotor eletrostático consiste na aplicação de uma diferença de potencial entre os dentes do estator e do rotor, fazendo com que o rotor comece a girar, como exemplificado na Figura 1.1 (a) e em detalhe em (b). Quando os dentes se alinham, aplica-se o potencial em outro conjunto de dentes do estator e o rotor continua girando, de maneira similar ao funcionamento dos motores de corrente contínua. A principal diferença entre os motores eletrostáticos e os motores elétricos mais tradicionais está no tipo de campo utilizado na geração do torque, uma vez que motores CC e CA geram torque por meio da ação de campos magnéticos, enquanto motores eletrostáticos geram torque por meio da ativação de campos elétricos.

O avanço na utilização de micromotores eletrostáticos se deu devido à necessidade de se trabalhar com campos elétricos, uma vez que as aplicações envolvidas não possuem as mesmas características dos motores tradicionais. Estes trabalham com campos magnéticos, que

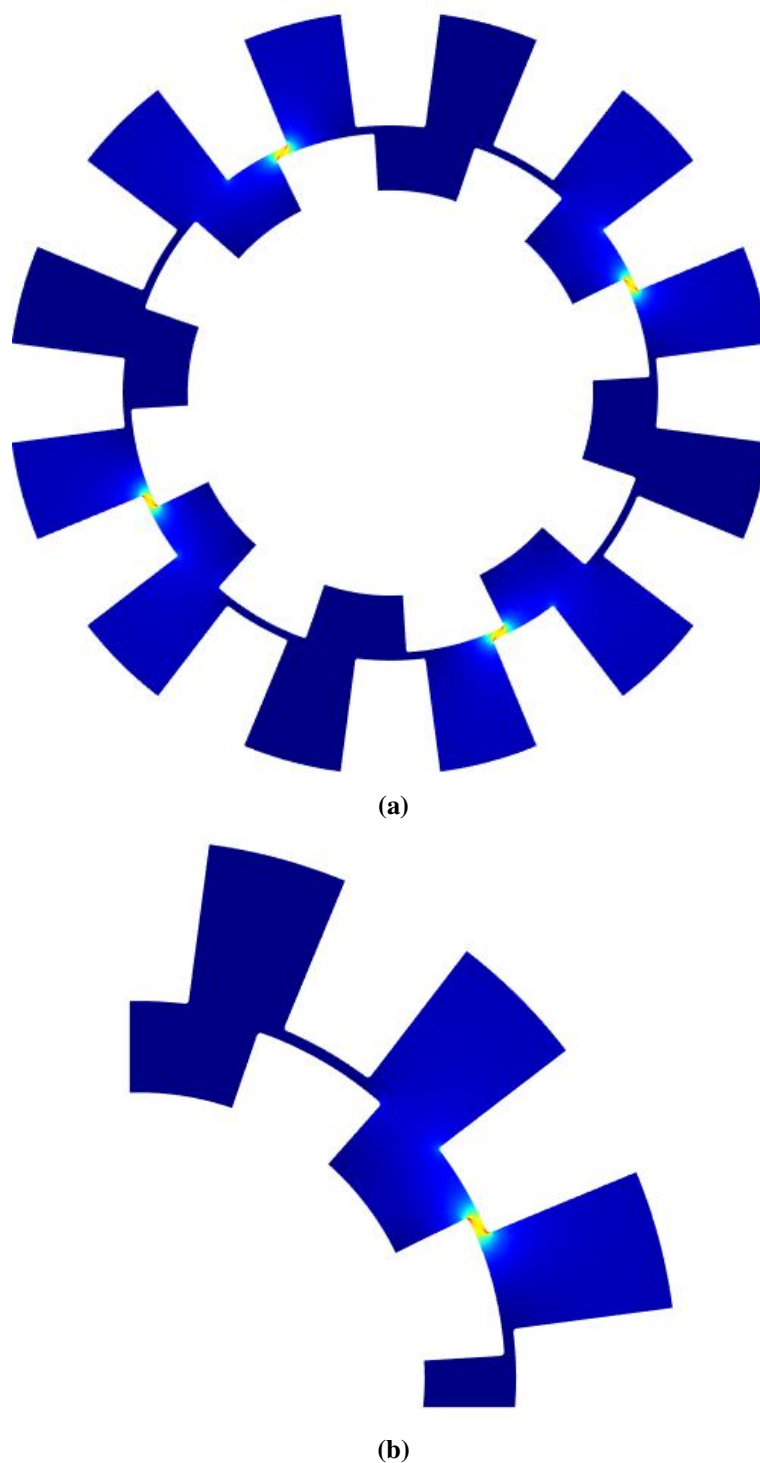


Figura 1.1: (a) Simulação do funcionamento de um micromotor com indicação das regiões de campo elétrico de elevada intensidade. (b) Foco na fração do micromotor modelada.

são capazes de gerar trabalho com uma potência significativamente maior para uma mesma quantidade de energia utilizada em campos elétricos empregados nos micromotores eletrostáticos. Além disso, essa expansão se deve aos avanços nas tecnologias de produção de materiais como silicone (Trimmer e Gabriel (1987)) e outros materiais semicondutores utili-

zados nos componentes dos micromotores. Hoje, os micromotores são utilizados em diversas aplicações, desde aplicações aeroespaciais em satélites, devido à ausência de fenômenos eletromagnéticos associados ao seu funcionamento (Lafontan et al. (2003)), até aplicações em equipamentos de biomedicina (Dufour et al. (1997)). Contudo, produzi-los não é um processo trivial, tendo em vista que seus componentes possuem dimensões muito pequenas. Logo, é necessário utilizar da modelagem numérica para se obter os parâmetros de projeto e da fabricação dos componentes envolvidos.

Por esse motivo, a aplicação de metodologias de projeto e simulação se torna cada vez mais relevante em sua fabricação, o que torna o uso da modelagem numérica via elementos finitos muito interessante para sua simulação. Sua complexa geometria pode gerar resultados drasticamente diferentes se utilizarmos apenas equações analíticas para descrever o seu funcionamento. Logo, obter um projeto otimizado para o micromotor eletrostático é um desafio, o que torna o desenvolvimento de uma metodologias de simulação numérica e otimização dos parâmetros de projeto algo extremamente necessário, e que é desenvolvido neste trabalho.

1.2 Motivação e Justificativa

Os métodos de otimização buscam obter o ponto ótimo de uma função com o menor número de iterações possíveis. Métodos de otimização numérica que trabalham com os valores da sensibilidade dos parâmetros do projeto são bastante comuns. No entanto, para se obter a sensibilidade da função de interesse, com a maioria dos métodos, é necessário solucionar o problema matricial pelo menos uma vez para cada uma das N variáveis do problema, dependendo do tipo de problema e do tipo de derivação escolhida.

Com os avanços tecnológicos, torna-se necessário considerar cada vez mais variáveis durante o projeto de sistemas eletromagnéticos. Isso faz com que o uso de métodos evolutivos que não dependem ou possuem pouca relação com a análise de sensibilidade sejam adotados para problemas com um número elevado de dimensões. Através do método adjunto, ou método da variável adjunta (*Adjoint Variable Method* em inglês), é possível obter os dados da sensibilidade dos parâmetros do projeto de forma mais rápida que os métodos de derivação tradicionais, permitindo o uso de métodos de otimização determinísticos que normalmente não seriam aplicados por necessitarem de muito tempo para se obter as sensibilidades da função objetivo.

Este método já vem sendo utilizado na análise de sensibilidade há algumas décadas, seja para realizar a previsão do tempo, como em (Cioaca et al. (2011)), ou em aplicações na área de teoria de controle, além de aplicações com análise em elementos finitos em engenharia de estruturas e engenharia elétrica (Li (2006)). Aplicações em problemas de engenharia elétrica

em baixa frequência são menos comuns e há a necessidade de alterações significativas nos algoritmos já existentes para que possam ser utilizados. Estas adaptações nem sempre são possíveis, uma vez que alguns programas de simulação numérica comerciais não disponibilizam ao usuário acesso ao processo de construção das matrizes dos sistemas envolvidos. Logo, tem-se um processo de otimização não trivial.

A simplicidade numérica do método adjunto torna este algoritmo mais desejável para análise de sensibilidade em problemas lineares e não lineares. Logo, seu uso resulta em um tempo de execução dos métodos de otimização consideravelmente reduzido, mas sua implementação é árdua e torna a sua utilização mais difícil. Espera-se que a metodologia de análise de sensibilidade adjunta proposta neste trabalho não seja apenas mais rápida, mas sirva como base para futuros desenvolvimentos relacionados a obtenção de parâmetros ótimos de projeto em outros problemas de engenharia em baixa frequência.

1.3 Descrição do Problema

O problema abordado neste projeto de mestrado consiste na otimização dos parâmetros do projeto de um micromotor, visando maximizar parâmetros como o torque médio do micromotor por meio do método elipsoidal modificado e com análise de sensibilidade feita via método adjunto. O projeto do micromotor depende de uma série de fatores que afetam seu desempenho e funcionamento, desde parâmetros geométricos como a largura do entreferro, a altura e largura dos dentes do estator e do rotor. Além de fatores operacionais como o nível de tensão aplicado, ou mesmo da escolha do material dielétrico do micromotor e presente no entreferro. Para este trabalho, considera-se um projeto com os parâmetros geométricos apresentados na Figura 1.2.

Este projeto modela numericamente o micromotor por meio do método dos elementos finitos (*Finite Elements Method*, FEM), cuja malha utilizada na simulação se encontra na Figura 1.3. A vantagem de se trabalhar com este método é a possibilidade de simular o funcionamento da máquina elétrica, cujas geometrias dificultam a análise de seu funcionamento apenas por meio de métodos analíticos baseados em simplificações físicas. Tem-se com o método de elementos finitos um conjunto de matrizes que nos permite obter uma solução numérica da distribuição do potencial escalar elétrico em todos os nós da malha.

Como resultado da metodologia desenvolvida, é possível gerar imagens que apresentam o funcionamento do micromotor, mostrando o rotor girando, a ativação da tensão no dente do estator e o campo elétrico resultante entreferro. A Figura 1.1 mostra a imagem da simulação do campo elétrico em todo o micromotor, com foco na parte modelada por elementos finitos, que é replicada para as demais partes desta simulação. Já a Figura 1.4 mostra com mais detalhes a região onde o campo elétrico é mais intenso e o resultado da simulação do torque

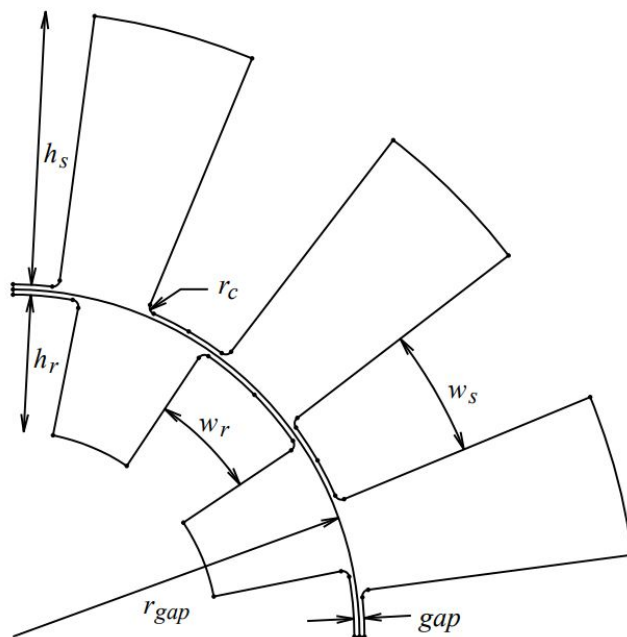


Figura 1.2: Desenho do micromotor com identificação dos principais parâmetros de projeto. r_{gap} : Raio do entreferro do micromotor; gap : Comprimento do entreferro do micromotor; w_r : Largura do dente do rotor; h_r : Altura do dente do rotor; w_s : Largura do dente do estator; h_s : Altura do dente do estator; r_c : Raio de curvatura da quina do dente.

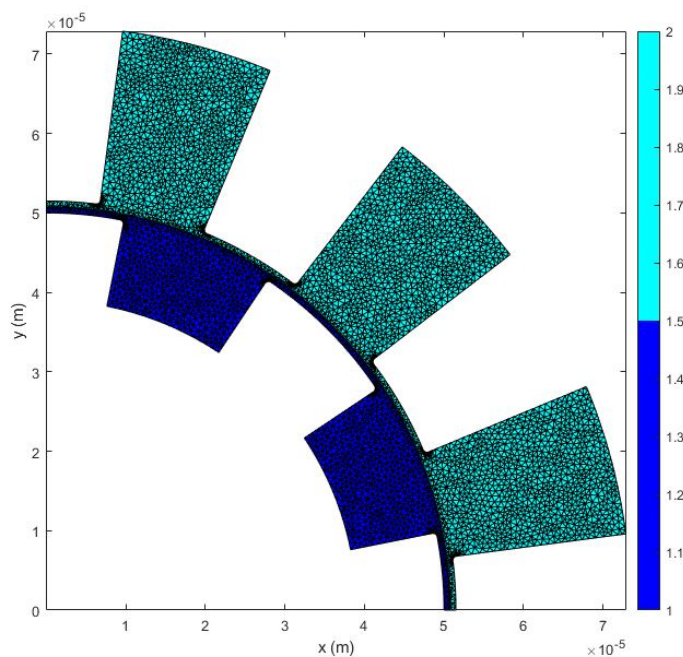


Figura 1.3: Malha do micromotor simulado via Método de Elementos Finitos. Para este problema, só é necessário modelar o entreferro, aqui separado em duas regiões pela banda de rolamento utilizada na simulação.

ao longo do giro do rotor do micromotor.

Por meio da modelagem numérica via elementos finitos, deseja-se aplicar os métodos

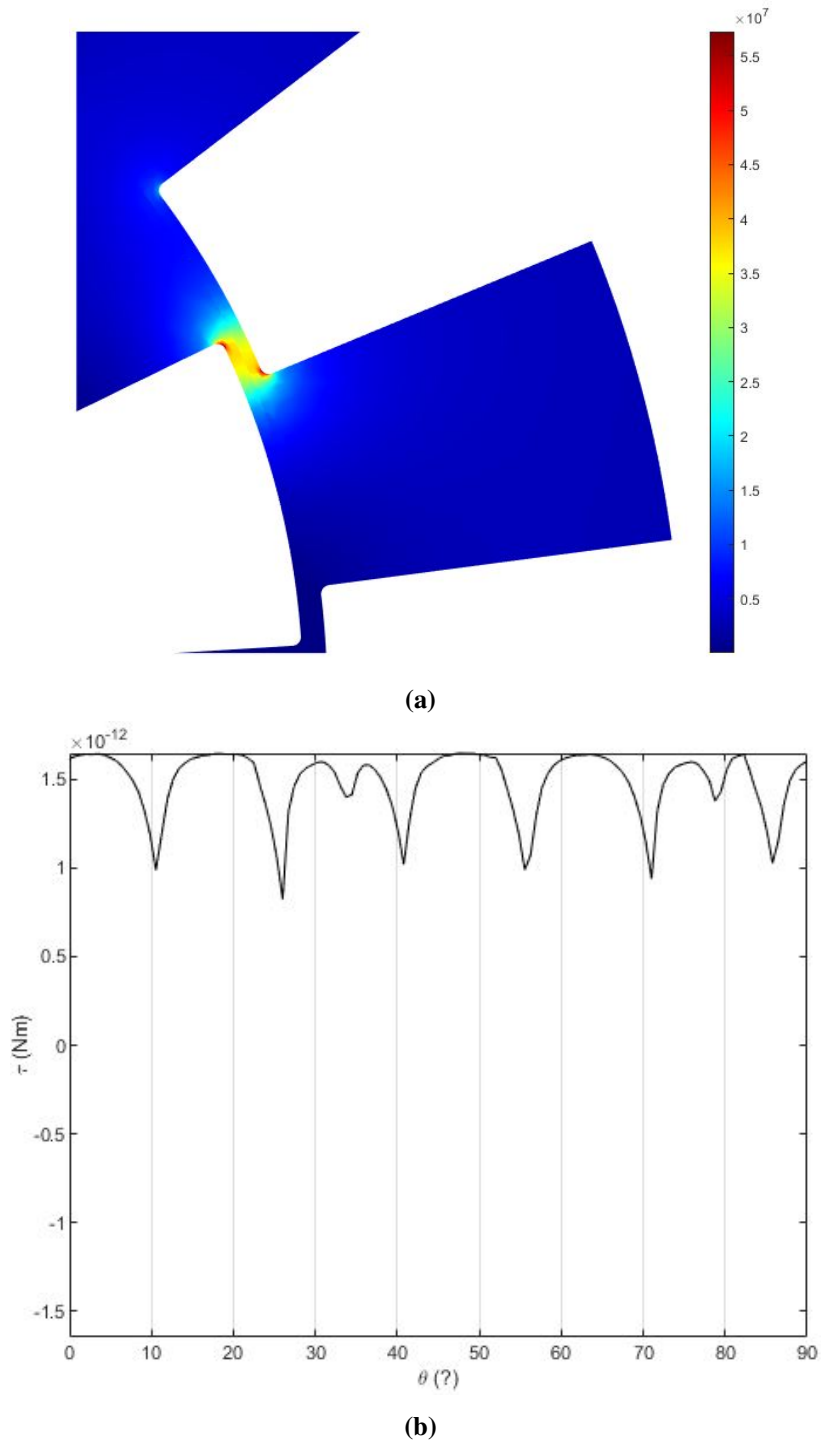


Figura 1.4: (a) Região de interesse de campo elétrico mais intenso, imagem obtida durante a simulação do micromotor; (b) Resultado da simulação do torque

de otimização baseados no uso da informação da sensibilidade, a qual é obtida a partir da derivada dos nós na região de interesse em relação as coordenadas espaciais x e y . Adota-se o método elipsoidal de múltiplos cortes para o processo de otimização e para a análise de sensibilidade são utilizados o método adjunto e o método das diferenças finitas centrais

(*Central Finite Differences* ou CFD). O uso de dois métodos de derivação diferentes, adotados separadamente pelo método de otimização tem dois objetivos para este trabalho:

- 1 Comparar os valores da sensibilidade entre os dois métodos para garantir que a implementação do método adjunto está correta, ou seja, validar a metodologia de análise de sensibilidade desenvolvida;
- 2 Analisar o desempenho do método de otimização quando se utiliza cada um dos dois métodos de análise de sensibilidade escolhidos neste trabalho.

O objetivo destas comparações é mostrar que o método adjunto obtém uma derivada similar à encontrada por métodos de derivação tradicionais, porém com uma série de vantagens. Dentre as vantagens do método, é possível destacar seu menor custo computacional, maior precisão e o fato de o método adjunto não ser sensível ao aumento do número de variáveis de projeto. Isso torna o uso do método adjunto uma alternativa muito interessante para métodos de otimização com maior custo computacional ou com maior número de variáveis de projeto.

1.4 Revisão da Literatura

Ao pesquisar no portal CAPES com palavras-chave como *adjoint method*, *optimization*, *electrical machines*, *torque*, *micromotor*, entre outras, é possível encontrar artigos e outras publicações que abordam a aplicação do método adjunto em máquinas elétricas e em outras áreas do conhecimento. Nesta seção, são apresentadas as ideias das principais referências encontradas sobre o assunto.

Neste trabalho, utiliza-se como referência o artigo escrito por A. C. Lisboa, D. A. G. Vieira e R. R. Saldanha (Lisboa et al. (2009)), no qual se aplica o método dos pontos interiores para a otimização de um micromotor eletrostático. Embora o tipo de problema abordado seja semelhante ao deste estudo, a metodologia empregada difere. Adicionalmente, o trabalho de Lisboa et al. (Lisboa et al. (2006)) é relevante por empregar o método elipsoidal para a otimização multiobjetiva de um micromotor. Este é o único trabalho encontrado que aplica o método elipsoidal em um micromotor eletrostático de maneira similar à proposta neste estudo.

Outros estudos de otimização de micromotores foram encontrados, mas adotam metodologias diferentes das aqui propostas. Um dos trabalhos refere-se à aplicação exclusiva de equações analíticas para modelar um micromotor no processo de otimização (Dufour et al. (1996)). Esta abordagem demonstra a viabilidade de otimização de micromotores sem a dependência de métodos numéricos. Além disso, foram identificadas aplicações de algoritmos genéticos na otimização de micromotores (Lin et al. (2009)), evidenciando que os processos

de otimização não se restringem a métodos exatos, mas também englobam técnicas heurísticas e meta-heurísticas.

São escassas na literatura as aplicações do método adjunto em máquinas elétricas, e as referências disponíveis ainda não são diretamente aplicáveis ao problema analisado, pois se concentram no uso do método adjunto para análise de sensibilidade em outros regimes de operação. Um exemplo de aplicação do método é apresentado por (Zhang e Wang (2017)). Neste trabalho, utiliza-se o método dos elementos finitos para o cálculo dos parâmetros eletromagnéticos da máquina, e a velocidade normal é obtida a partir da análise de sensibilidade feita via método adjunto. Outro estudo relevante é o de (Gourragui et al. (2007)), que também envolve a aplicação do método adjunto em máquinas elétricas. Este trabalho visa maximizar o torque e minimizar as perdas elétricas em um motor de relutância chaveado, no contexto de um problema de otimização multiobjetivo.

Esses exemplos ilustram a versatilidade do método adjunto em diferentes contextos de análise de sensibilidade e otimização em máquinas elétricas, mesmo que ainda sejam poucas as aplicações diretamente relacionadas ao problema específico abordado neste estudo.

Procurando artigos que utilizassem o método adjunto em outros problemas eletromagnéticos em baixa frequência, como em linhas de transmissão, não se encontrou trabalhos que utilizem o método adjunto associado ao processo de otimização. Exceto nos trabalhos de (Paganotti, 2024), onde se utiliza o método elipsoidal de cortes múltiplos com a sensibilidade da função objetivo obtida via método adjunto. Este trabalho evidencia a potencialidade da aplicação do método adjunto em problemas de baixa frequência, que são ainda pouco explorados.

Porém, observa-se que existem trabalhos que o utilizam o método adjunto para a análise de sensibilidade do problema. Um exemplo desta aplicação é identificado em (Negm et al. (2014)), onde se utiliza o método adjunto para obter a matriz Hessiana das sensibilidades em n iterações, ao invés das n^2 necessárias caso se utilizasse o método das diferenças finitas, sendo n o número de variáveis do problema. O interessante deste trabalho é que ele utiliza o método das diferenças finitas, por mais custoso que tenha sido comparado ao método adjunto, para validar o resultado alcançado.

Trabalhando com otimização multiobjetivo, ainda se tem uma referência onde o torque é dividido em duas componentes em uma máquina síncrona: uma proveniente do ímã permanente e outra devido à relutância magnética. Os gradientes são tratados como as funções objetivo derivadas com base no método adjunto a fim de otimizar os parâmetros do projeto do rotor do motor síncrono (Li et al. (2013)).

A última referência encontrada é sobre a minimização de forças transitórias em um sistema eletromecânico, onde o objetivo é minimizar o valor máximo das forças durante a partida da máquina movida por um torque dinâmico (Mezyk (1994)). A análise de sensibilidade é feita pelo método adjunto e, em seguida, utiliza-se o método simplex, outro método

de otimização aplicável em problemas não-lineares, o que demonstra como o método pode ser utilizado em problemas com técnicas de otimização distintas.

A melhor referência para entendimento do método adjunto é encontrada em (Bakr (2013)), onde há uma descrição bem didática dos vários métodos de otimização e uma descrição passo a passo do equacionamento envolvido na aplicação deste método. Através da análise do material encontrado, podemos concluir que o método pode ser aplicado na análise de sensibilidade de problemas de elementos finitos, possibilitando a implementação dos algoritmos utilizados neste trabalho. Descrições muito boas do método também estão presentes em (Kuci et al. (2016)) e de sua aplicação nas referências (Nikolova et al. (2004)) e (Lee e Ida (2014)).

A abordagem de análise de sensibilidade utilizada neste trabalho é baseada no trabalho de (Paganotti et al. (2022)), onde se utiliza o método adjunto para realizar as análises de sensibilidade para otimização das geometria de feixes de cabos condutores de linhas de transmissão. Neste trabalho, aplica-se uma metodologia similar para a análise da sensibilidade dos parâmetros de projeto do micromotor eletrostático.

1.5 Objetivos do Trabalho

Este trabalho tem como objetivo geral desenvolver uma metodologia para otimização dos parâmetros de um micromotor eletrostático utilizando um método elipsoidal com cortes múltiplos, com a sensibilidade da função objetivo obtida por meio do método adjunto.

Para isso, tem-se os seguintes objetivos específicos:

- Modelar o micromotor via Método De Elementos Finitos;
- Implementar a análise de sensibilidade via diferenças finitas centrais;
- Implementar a análise de sensibilidade via método adjunto;
- Validar os valores da sensibilidade obtidos pelo método adjunto comparando-os com os obtidos pelo método das diferenças finitas centrais;
- Implementar e aplicar o método de otimização elipsoidal com cortes múltiplos;
- Fazer um comparativo do esforço computacional do processo de otimização ao se utilizar cada uma das metodologias de análise de sensibilidade da função objetivo estudadas neste projeto.

Com a realização desses objetivos específicos, espera-se desenvolver uma metodologia robusta e eficiente para a otimização de micromotores eletrostáticos, contribuindo significativamente para a melhoria de desempenho desses dispositivos.

1.6 Participação em Congresso Científico

Os resultados preliminares deste trabalho foram apresentados no COMPUMAG (Computation of Electromagnetic Fields, 2022, Cancun) em janeiro de 2022, com o título "Optimization of an Electrostatic Micromotor with Adjoint-State Method Sensitivity Analysis" (Otimização de um Micromotor Eletrostático com Análise de Sensibilidade via Método Adjunto) (SOUSA et al. (2022)).

1.7 Organização da Dissertação

Esta dissertação está dividida em Introdução, Fundamentação Teórica, Metodologia de Análise de Sensibilidade e Otimização de um Micromotor Eletrostático, Resultados, Conclusão, Trabalhos Futuros e Apêndice. No primeiro capítulo, encontra-se a apresentação do problema, motivação e pesquisa bibliográfica. O segundo capítulo apresenta os métodos envolvidos no desenvolvimento deste trabalho, sendo eles o FEM, métodos de derivação numérica, cálculo do torque e o método de otimização adotado. O capítulo 3 apresenta os detalhes da aplicação dos métodos de análise de sensibilidade e otimização utilizados neste trabalho e como estes afetam a parametrização do micromotor.

No capítulo 4 são apresentadas as análises feitas a partir dos resultados das aplicações dos métodos de análise de sensibilidade dos parâmetros e do método de otimização utilizado. A conclusão geral do trabalho se encontra no capítulo 5. As propostas de continuidade deste estudo estão no capítulo 6. Ao final, há um apêndice que mostra o detalhamento da obtenção do torque obtido a partir da modelagem numérica desenvolvida.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Neste capítulo são apresentados os detalhes dos métodos utilizados neste trabalho, sendo estes o FEM, utilizado na modelagem do micromotor, e o Tensor de Maxwell, cuja aplicação permite calcular o torque do micromotor. São apresentados também os fundamentos dos métodos de derivação CFD e Adjunto, responsáveis pela obtenção da sensibilidade dos parâmetros de projeto dos micromotores, e o método elipsoidal, utilizado na otimização do micromotor.

A partir do entendimento do método adjunto, podemos obter uma maior compreensão de sua aplicabilidade em problemas de otimização, uma vez que pode ser utilizado para obter a sensibilidade da função objetivo de um modo eficiente e preciso.

2.1 Método de Elementos Finitos

O Método de Elementos Finitos (*Finite Element Method*, FEM) é aplicável em problemas em que a solução exata é de difícil obtenção analítica, e nos casos em que esta solução não existe analiticamente.. Em engenharia elétrica, esse método é muito utilizado para modelar campos elétricos ou magnéticos em diversos problemas, sendo comumente aplicado em máquinas elétricas. Para este trabalho, considera-se sua aplicação em problemas eletrostáticos. Descrições mais completas do método e para um maior número de aplicações podem ser encontradas em diversas fontes, como (Johnson (2012)) para uma introdução ao método, (Ŝolín (2005)) como uma boa referência para elementos de ordem superior e uma boa base para entendimento dos subespaços do método, e (Özgün e Kuzuoğlu (2018)) como uma referência para primeiras implementações do método com Matlab.

2.1.1 Equações de Maxwell

Antes de apresentar o equacionamento do método, vale a pena revisar as equações de Maxwell, uma vez que todo o desenvolvimento matemático do método de elementos finitos

para o problema do micromotor eletrostático se baseia nestas equações em regime eletrostático. Comumente se considera a seguinte formulação das equações de Maxwell (Ŝolín (2005)):

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.4)$$

Onde \vec{E} representa o campo elétrico dado em V/m , \vec{D} a densidade de fluxo elétrico N/Vm , o vetor \vec{J} representa a densidade de corrente de condução dada em A/m^2 , ρ_v é a densidade de carga elétrica, dada em C/m^3 . \vec{H} representa o campo magnético, dado em A/m e \vec{B} representa a densidade de fluxo magnético, dada em Tesla T . O termo $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ representa a corrente de deslocamento dada em A/m^2 .

Reescrevendo as equações de Maxwell para o caso particular do micromotor eletrostático, onde os termos dependentes da variação do tempo são desprezados, temos:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.8)$$

No regime eletrostático, utiliza-se o potencial escalar elétrico ϕ definido a partir de (2.5) com $\nabla \times \vec{E} = 0$. Aplicando-se a propriedade vetorial onde se tem que o rotacional do gradiente de um campo escalar é nulo ($\nabla \times \nabla V = 0$) e também a identidade que estabelece que o divergente do rotacional de um campo vetorial é nula, sendo ϕ o potencial escalar elétrico adotado, pode-se escrever:

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad (2.9)$$

. Partindo da relação $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, onde ϵ é a permissividade elétrica do meio, e de (2.7) obtém-se a equação de Poisson adotada para a modelagem de problemas eletrostáticos (Ŝolín (2005)):

$$-\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) = \rho_v \quad (2.10)$$

O termo $\rho_v = 0$ para este caso, onde não se tem cargas livres no domínio de estudos considerado. A equação (2.10) é utilizada pelo método dos elementos finitos como a forma forte do problema, que será explicada mais à frente.

2.1.2 Espaços de Elementos Finitos Contínuos

Para iniciar o desenvolvimento das equações do método de elementos finitos, é necessário definir os espaços de funções utilizados pelo método de elementos finitos. Considerando um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, limitado por $\partial\Omega$, preenchido por material de permissividade ϵ e onde se tem uma distribuição de carga volumétrica ρ_v . O potencial escalar elétrico ϕ é definido como $\phi \in H^1(\Omega)$, onde $H^1(\Omega)$ é definido como o conjunto de funções que possuem derivada de primeira ordem de quadrado integrável, cujos gradientes também possuem quadrado integrável (Ŝolín (2005)):

$$H^1(\Omega) = \phi \in L^2(\Omega) : \nabla\phi \in L^2(\Omega) \quad (2.11)$$

com norma e semi-norma definidas como:

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{H^1(\Omega)} &= [\|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)}^2]^{1/2} \\ |\phi|_{H^1(\Omega)} &= \|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

O método de elementos finitos usa, em cada elemento com domínio Ω_i^e , aproximações polinomiais locais pertencentes a $H^1(\Omega_i^e)$, $1 \leq i \leq n$ e $\Omega_1^e + \Omega_2^e + \dots + \Omega_n^e = \Omega$. Para o problema analisado, Ω_i^e são elementos triangulares cujas soluções possíveis são polinômios de grau 1. Como será mostrado durante o desenvolvimento do método de Galerkin, também é necessário definir o subespaço $V_h \subset H^1(\Omega)$ que contém as funções de aproximação polinomiais em cada elemento que garantem a continuidade de ϕ entre as faces, fazendo com que o método seja conforme. Logo, $V_h \subset H^1(\Omega) \iff V_h \subset C^0(\bar{\Omega})$ (Ŝolín (2005)).

2.1.3 Método de Galerkin

O Método de Galerkin é um método poderoso e versátil para a solução de equações diferenciais parciais, especialmente no contexto do Método dos Elementos Finitos. Ele fornece uma forma sistemática de transformar um problema contínuo em um problema discreto que pode ser resolvido numericamente.

2.1.3.1 Forma Forte e Forma Fraca

Para o método de elementos finitos, reescreve-se (2.10) para o caso mais genérico como (Ŝolín (2005)):

$$-\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) = \rho_v \quad \text{em } \Omega \quad (2.13)$$

Em cujas fronteiras pode-se aplicar diferentes condições de contorno de acordo com as características do problema, sendo as mais comuns a condição de Dirichlet, dada por:

$$\phi = g \quad \text{sobre } \Gamma_g \quad (2.14)$$

e a condição de Neumann dada por:

$$\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial n} = h \quad \text{sobre } \Gamma_h \quad (2.15)$$

Sendo Γ_g a fronteira do domínio Ω onde se aplicam condições de Dirichlet e Γ_h a fronteira onde se têm condições de Neumann e Γ representa o conjunto das várias fronteira as condições são aplicadas. A equação (2.13) é chamada de forma forte do problema, pois trabalha com uma derivada de segunda ordem para a solução do problema. No entanto, deseja-se trabalhar com equações de primeira ordem que são mais fáceis de serem tratadas matematicamente.

Para o enfraquecimento da forma forte do problema, primeiro escreve-se o problema na forma integral para o domínio de estudos considerado::

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) d\Omega = \int_{\Omega} \rho_v d\Omega \quad \text{em } \Omega \quad (2.16)$$

Agora, multiplica-se os dois lados da equação por uma função auxiliar v , $v \in V_h \subset C$, sendo V o espaço de funções de forma, e utiliza-se o teorema de Green, descrito em detalhes em (Solín (2005)), obtendo:

$$\int_{\Omega} \epsilon \nabla \phi \cdot \nabla v d\Omega - \int_{\partial\Omega} \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial n} v d\Gamma = \int_{\Omega} \rho_v v d\Omega \quad (2.17)$$

Considerando as condições de contorno de Neumann (2.15), a forma fraca do problema é expressa como:

$$\int_{\Omega} \epsilon \nabla \phi \cdot \nabla v d\Omega = \int_{\Omega} \rho_v v d\Omega + \int_{\Gamma_h} h v d\Gamma \quad (2.18)$$

onde Γ_h é a parte da fronteira onde a condição de Neumann é aplicada. As condições de contorno de Dirichlet são incorporadas no espaço de funções de teste e de aproximação.

A forma fraca (2.18) é a base para a formulação do Método de Galerkin no Método dos Elementos Finitos. Ao substituir as funções ϕ e v por suas aproximações discretas, a equação resultante é um sistema de equações algébricas que pode ser resolvido numericamente para obter a solução aproximada do problema original.

$$-\int_{\Omega} v \nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) d\Omega = \int_{\Omega} \epsilon \nabla v \cdot \nabla \phi d\Omega - \int_{\partial\Omega} v \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Omega \quad (2.19)$$

Aplicando o teorema de Green (Ŝolín (2005)) tem-se:

$$-\int_{\Omega} v \nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) d\Omega = \int_{\Omega} \epsilon \nabla v \cdot \nabla \phi d\Omega - \int_{\Gamma} v \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma \quad (2.20)$$

E o problema pode ser reescrito como:

$$\int_{\Omega} \epsilon \nabla v \cdot \nabla \phi d\Omega = \int_{\Omega} v \rho_v d\Omega + \int_{\Gamma} v \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma \quad (2.21)$$

Tem-se em (2.21) a forma fraca do problema, pois as derivadas presentes são apenas de primeira ordem, e agora é necessário identificar quais as condições de contorno serão aplicadas para que se possa ter o domínio de estudos definido.

2.1.3.2 Condição de Dirichlet

Condições de fronteira de Dirichlet se referem à condições em que o valor de ϕ ao longo de uma fronteira é definido. Também chamada de condição natural temos o problema baseado na equação (2.21): Encontre ϕ , $\phi = 0$ em $\partial\Omega$ tal que (Ŝolín (2005)):

$$\int_{\Omega} \epsilon \nabla v \cdot \nabla \phi d\Omega = \int_{\Omega} v \rho_v d\Omega + \int_{\Gamma_g} v \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma \quad \forall v \in V_h \quad (2.22)$$

Como, para esse caso, $\phi = 0 \rightarrow v = 0$ em $\partial\Omega$, logo $\int_{\Gamma_g} v \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma = 0$, o que implica na seguinte formulação para o problema:

$$\int_{\Omega} \epsilon \nabla v \cdot \nabla \phi d\Omega = \int_{\Omega} v \rho_v d\Omega \quad (2.23)$$

Para o caso de $\phi \neq 0$ o problema passa a ser mais genérico e escrito como: Encontre $\phi = g$ em $\partial\Omega$ tal que (Ŝolín (2005)):

$$\int_{\Omega} \epsilon \nabla v \cdot \nabla \phi d\Omega = \int_{\Omega} v \rho_v d\Omega + \int_{\Gamma_g} v \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma \quad \forall v \in V_h \quad (2.24)$$

Neste caso se faz uso de uma função admissível do tipo:

$V_D = \phi = \{w + u_D : w \in V; u_D \in H^1(\Omega), u_D = g \text{ sobre } \partial\Omega\}$ e lembrando que o espaço de funções de teste é $V = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$.

Agora é possível escrever a forma fraca do problema com condição de fronteira de Dirichlet como:

$$\int_{\Omega} \epsilon \nabla v \cdot \nabla w d\Omega = \int_{\Omega} v \rho_v d\Omega + \int_{\Omega} \epsilon \nabla v \cdot \nabla u_g d\Omega \quad : \forall v \in V \quad (2.25)$$

Uma vez definida as condições de fronteira de Dirichlet parte-se para a definição das condições de fronteira de Neumann.

2.1.3.3 Condição de Contorno de Neumann

Para a condição de Neumann temos o seguinte problema:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) &= \rho_v \quad \text{em } \Omega \\ \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial n} &= h \quad \text{sobre } \Gamma_h \end{aligned} \quad (2.26)$$

E fazendo as mesmas manipulações já apresentadas e lembrando a equação (2.21) temos a seguinte forma fraca (Ŝolín (2005)):

$$\int_{\Omega} \epsilon \nabla v \cdot \nabla \phi d\Omega = \int_{\Omega} v \rho_v d\Omega + \int_{\Gamma_h} v h d\Gamma \quad (2.27)$$

O FEM obedece esta condição automaticamente conforme o mostrado na equação (2.24), uma vez que ela ocorre naturalmente ao longo do processo de criação da forma fraca para o método de Galerkin. Uma vez definidas as condições de Dirichlet e Neumann pode-se considerar as condições de fronteira mistas.

2.1.3.4 Condições de Contorno Mistas

Ocorrem quando se tem ambas as condições de fronteira e sua forma forte é:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) &= \rho_v \quad \text{em } \Omega \\ \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial n} &= h \quad \text{sobre } \Gamma_h \\ \phi &= g \quad \text{sobre } \Gamma_g \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde $\Gamma_h + \Gamma_g = \partial\Omega$, e sua forma fraca passa a ser:

$$\int_{\Omega} \epsilon \nabla v \cdot \nabla \phi d\Omega = \int_{\Omega} v \rho_v d\Omega + \int_{\Gamma_h} v h d\Gamma - \int_{\Omega} \epsilon \nabla v \cdot \nabla u_g d\Omega \quad : \forall v \in V \quad (2.29)$$

2.1.3.5 Condição de Contorno Periódica

Esta condição é muito útil para simulações com o método de elementos finitos cujos problemas possuem algum tipo de simetria, sendo o exemplo clássico problemas de máquinas elétricas. É aplicada a dois segmentos da fronteira para forçar que os valores dos potenciais sejam idênticos ao longo dos dois segmentos. Sua implementação faz com que $\phi|_{\Gamma_1} = \phi|_{\Gamma_2}$, assumindo que as arestas de Γ_1 e Γ_2 tem o mesmo comprimento. No caso do motor se utiliza apenas $\frac{1}{4}$ da geometria logo a condição de contorno passa a ser:

$$\phi|_{\Gamma_{inferior}} = \phi|_{\Gamma_{esquerda}} \quad (2.30)$$

2.1.3.6 Função de Forma

Para que se consiga escrever a forma fraca na forma de um sistema que possa ser solucionado se utiliza de funções de formas, que para o método de elementos finitos tradicional em duas dimensões são funções associadas a cada um dos nós que compõe o elemento triangular utilizado. Para elementos triangulares com apenas 3 nós se utiliza polinômios de primeiro grau para as funções de forma e estas são obtidas através da representação dos potenciais nos nós 1, 2 e 3 através de:

$$\phi(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y \quad (2.31)$$

assim os potenciais em cada nó são escritos como:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= a_1 + a_2x_1 + a_3y_1 \\ \phi_2 &= a_1 + a_2x_2 + a_3y_2 \\ \phi_3 &= a_1 + a_2x_3 + a_3y_3 \end{aligned} \quad (2.32)$$

E se obtém os valores de a_1 , a_2 e a_3 a partir dos seguintes determinantes:

$$a_1 = \frac{1}{2A_e} \begin{vmatrix} \phi_1 & x_1 & y_1 \\ \phi_2 & x_2 & y_2 \\ \phi_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (2.33)$$

$$a_2 = \frac{1}{2A_e} \begin{vmatrix} 1 & \phi_1 & y_1 \\ 1 & \phi_2 & y_2 \\ 1 & \phi_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (2.34)$$

$$a_3 = \frac{1}{2A_e} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \phi_1 \\ 1 & x_2 & \phi_2 \\ 1 & x_3 & \phi_3 \end{vmatrix} \quad (2.35)$$

e A_e é a área do elemento, obtido através do determinante mostrado em (2.36).

$$A_e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (2.36)$$

Agora é possível reescrever a equação (2.31) como:

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2A_e} \sum_{i=1}^3 (p_i + q_i x + r_i y) \phi_i \quad (2.37)$$

onde:

$$\begin{aligned}
p_1 &= x_2y_3 - x_3y_2 & q_1 &= y_2 - y_3 & r_1 &= x_3 - x_2 \\
p_2 &= x_3y_1 - x_1y_3 & q_2 &= y_3 - y_1 & r_2 &= x_1 - x_3 \\
p_3 &= x_1y_2 - x_2y_1 & q_3 &= y_1 - y_2 & r_3 &= x_2 - x_1
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Agora como $\vec{E} = -\nabla\phi$ temos:

$$\vec{E} = iE_x + jE_y = -\left(i\frac{\partial\phi}{\partial x} + j\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) \tag{2.39}$$

$$\vec{E} = iE_x + jE_y = -i\frac{1}{2A_e}\left(q_1\phi_1 + q_2\phi_2 + q_3\phi_3\right) - j\frac{1}{2A_e}\left(r_1\phi_1 + r_2\phi_2 + r_3\phi_3\right) \tag{2.40}$$

Agora a equação (2.37) como:

$$\phi(x, y) = \varphi_1(x, y)\phi_1 + \varphi_2(x, y)\phi_2 + \varphi_3(x, y)\phi_3 \tag{2.41}$$

onde as chamadas funções de forma são dadas por:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x, y) &= \frac{1}{2A_e}(p_1 + q_1x + r_1y) \\
\varphi_2(x, y) &= \frac{1}{2A_e}(p_2 + q_2x + r_2y) \\
\varphi_3(x, y) &= \frac{1}{2A_e}(p_3 + q_3x + r_3y)
\end{aligned} \tag{2.42}$$

e pode-se confirmar que a condição "delta de Kronecker", importante para o método e descrita em detalhes em (Solín (2005)), se aplica já que:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x_1, y_1) &= 1 & \varphi_2(x_1, y_1) &= 0 & \varphi_3(x_1, y_1) &= 0 \\
\varphi_1(x_2, y_2) &= 0 & \varphi_2(x_2, y_2) &= 1 & \varphi_3(x_2, y_2) &= 0 \\
\varphi_1(x_3, y_3) &= 0 & \varphi_2(x_3, y_3) &= 0 & \varphi_3(x_3, y_3) &= 1
\end{aligned} \tag{2.43}$$

e que os valor de φ_1 varia linearmente entre 1 e 0 do nó 1 para os nós 2 e 3 respectivamente.

2.1.3.7 Aplicando as Funções de Forma na Forma Fraca

Retomando a forma fraca da equação (2.29) temos o problema: Encontre $w \in V$, tal que:

$$\int_{\Omega} a\nabla v \cdot \nabla wd\Omega = \int_{\Omega} v\rho_v d\Omega + \int_{\Gamma_h} vhd\Gamma - \int_{\Omega} a\nabla v \cdot \nabla u_g d\Omega \quad : \forall v \in V \tag{2.44}$$

onde V é o espaço das funções de teste: $V = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sobre } \partial\Gamma_g\}$, e o espaço de soluções admissíveis é $V_D = \{\phi = u_D + w : w \in V, u_D \in H^1(\Omega), u_D|_{\Gamma_D} = V_D\}$.

2.1.3.8 Implementação Computacional

A partir da forma fraca se pode aplicar o método de Garlekin, que converte a integral em um somatório das contribuições de cada elemento da malha que compõe o domínio Ω . Através do método de Garlekin o problema pode ser reescrito como um sistema da forma:

$$K\phi = b \quad (2.45)$$

onde K é chamada de matriz de rigidez e definida como:

$$\begin{aligned} K &= (a_{ij})_{i,j=1}^n \\ a_{ij} &= a(\varphi_i, \varphi_j) \end{aligned} \quad (2.46)$$

onde φ_i é a função de forma do nó i do elemento que contém n nós e φ_j a função de forma do nó j . Os valores à se determinar são expressos por ϕ e b é o vetor de excitação do problema, sendo estes definidos como:

$$\begin{aligned} \phi &= (\phi_i)_{i=1}^n \\ b &= (b_i)_{i=1}^n \\ b_i &= l(\varphi_i) \end{aligned} \quad (2.47)$$

Uma vez definidos os parâmetros do método de Garlekin, agora é necessário reunir as contribuições de cada elemento em um problema matricial e encontrar o valor da variável ϕ , que neste caso representa o valor do potencial escalar elétrico em cada um dos nós do domínio de estudo.

Uma vez apresentada a definição do domínio e o equacionamento do método dos elementos finitos, parte-se agora para a modelagem numérica do micromotor a ser otimizado.

2.2 Cálculo do Torque

Para a simulação do micromotor por elementos finitos, são aplicadas três técnicas para superar certos problemas da modelagem. Primeiramente, para que apenas 1/4 do micromotor precisasse ser modelado por elementos finitos, os nós no gap entre o rotor e o estator na parte inferior e lateral do micromotor foram definidos como nós com condição de contorno cíclica, compatível com a simetria do problema, uma vez que se modela apenas um quarto do micromotor.

Também são modificados os nós encontrados no gap de forma a terem o mesmo comprimento e aplicados a eles uma condição de contorno diferente, denominada banda de rolamento, mostrada na figura (1.3), apresentada novamente a seguir. O uso desta técnica permite simular todas as posições do rotor sem gerar novamente a malha, pois a conectividade dos

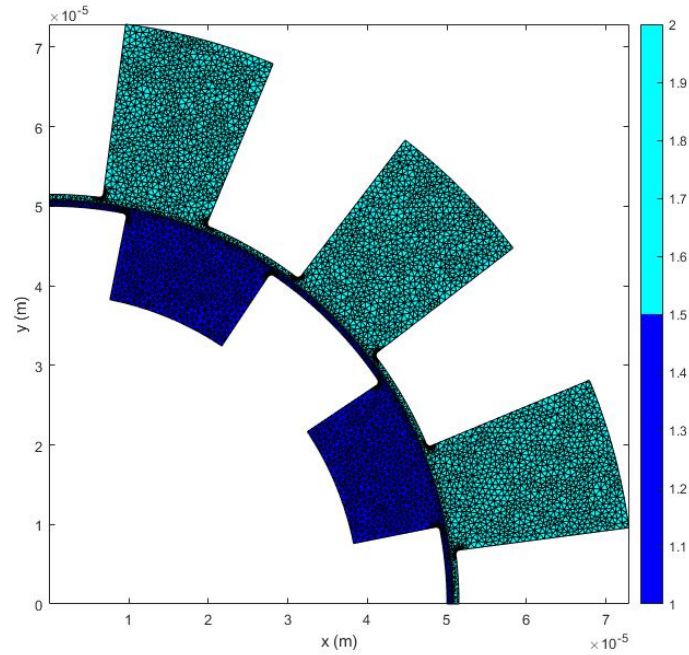


Figura 2.1: Malha do micromotor simulado por FEM, para este problema só é necessário modelar o entreferro, aqui separado em duas regiões pela banda de rolamento utilizada na simulação.

nós se adapta após rotacionar apenas uma parte da malha, o que torna a simulação consideravelmente mais rápida. Os detalhes da implementação são dados em (Meeker (2018)).

Por último, mas não menos importante, tem-se o problema numérico causado por bordas muito agudas, o qual é solucionado utilizando um algoritmo para arredondar os cantos dos dentes onde o campo elétrico teria um valor muito elevado devido à singularidade do ponto na solução numérica do problema, possível graças à utilização do malhador dmesh, desenvolvido na tese de Adriano (Lisboa (2008)), que apresenta este recurso.

Para a avaliação do desempenho do micromotor, utiliza-se o valor do torque, que pode ser obtido a partir dos valores do campo elétrico usando o tensor das tensões de Maxwell (*Maxwell's stress tensor*), amplamente utilizado para determinar o torque em corpos sob influência de campos eletromagnéticos, como é o caso do rotor de máquinas elétricas (Salon (1990)). Métodos computacionais como o FEM são muito úteis nesta aplicação para calcular o campo ao redor do objeto analisado.

Para determinar a força usando o tensor de Maxwell, temos a equação:

$$\vec{f} = \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (2.48)$$

onde \vec{f} é a densidade de força no ponto analisado e \mathbf{T} é o tensor de Maxwell, dado por:

$$\mathbf{T} = \epsilon_0 \left(\vec{E} \otimes \vec{E} - \frac{1}{2} |\vec{E}|^2 \mathbf{I} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{B} \otimes \vec{B} - \frac{1}{2} |\vec{B}|^2 \mathbf{I} \right) \quad (2.49)$$

onde \otimes é o produto tensorial entre dois vetores, também chamado de produto dyádico.

Para o problema eletrostático, este tensor pode ser simplificado para:

$$\mathbf{T} = \epsilon_0 \left(\vec{E} \otimes \vec{E} - \frac{1}{2} |\vec{E}|^2 \mathbf{I} \right) \quad (2.50)$$

A densidade de força \vec{f} pode ser obtida por:

$$\vec{f} = \epsilon_0 \left[(\vec{E} \cdot \nabla) \vec{E} - \vec{E} \cdot (\nabla \vec{E}) \right] \quad (2.51)$$

O vetor de campo elétrico \vec{E} é essencial neste cálculo. A partir de \vec{f} , pode-se decompor a força em componentes normal e tangencial à superfície. A componente tangencial é responsável por gerar o torque que faz o rotor girar e é dada por:

$$f_t = f - f_n \quad (2.52)$$

Onde:

$$f_n = f \cdot \hat{n} \quad (2.53)$$

e \hat{n} representa o vetor normal a curva onde se deseja obter a densidade da força.

O valor do torque pode ser obtido integrando-se os valores de $d\vec{F}$ ao longo de uma curva ao redor do rotor:

$$\tau_e = l \int_L (\vec{r} \times d\vec{F}) \quad (2.54)$$

Onde l é o comprimento do rotor, \vec{r} é o vetor que liga a curva avaliada ao centro do eixo do rotor e $d\vec{F}$ é o resultado do produto entre f_t e o elemento diferencial de comprimento da curva utilizada dL . Como uma solução numérica é utilizada para este problema, o resultado é aproximado somando-se os valores de $d\vec{F}$ nos nós da malha:

$$\tau_e = l \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times d\vec{F}_i) \quad (2.55)$$

Onde N representa o número de nós ao longo da curva utilizada para esta avaliação. Considerando que a curva é uma circunferência, os vetores \vec{r}_i são iguais para todos os nós, simplificando o cálculo.

$$T_e = l.r. \sum_1^N (f_t dL_i) \quad (2.56)$$

Na qual dL_i representa o elemento diferencial da aresta do elemento utilizada na curva que envolve o rotor. Vale a pena observar que se simula apenas uma parte do micromotor, logo o valor obtido para este torque será proporcional a parte simulada, sendo o valor encontrado multiplicado por quatro caso apenas 1/4 do motor seja simulado.

2.3 Derivação Numérica

A derivação numérica feita a partir de diferenças finitas consiste em um dos primeiros métodos de derivação computacional desenvolvidos. Neste método, temos uma função objetivo $f(x)$ que depende de um vetor $x = [x_1, x_2, \dots, x_N]$. Já usando conceitos como derivada numérica, sabemos que se determinarmos o gradiente de $f(x)$, teremos a direção de maior crescimento e decrescimento da função. Assim, podemos determinar quais componentes do vetor x devemos aumentar e quais devemos diminuir, e em que medida deve ser esta variação, como é utilizada nos métodos de otimização baseados na informação do gradiente. Nestes métodos, a obtenção de novas soluções se baseia na seguinte formulação genérica para problemas unidimensionais (Bakr (2013)):

$$x_{k+1} = x_k + \alpha \cdot \frac{df}{dx} \quad (2.57)$$

onde x_k representa a variável do método durante a k -ésima iteração, α representa o passo do processo de otimização e $\frac{df}{dx}$ a derivada da função $f(x)$, sendo esta equação válida também para problemas com múltiplas variáveis.

Pela equação clássica de derivação numérica (Bakr (2013)), sabemos que:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2.58)$$

onde h representa uma perturbação infinitesimal de x para que se obtenha um valor que indica a direção de maior crescimento da função f para variações do valor de x . O valor desta derivada pode ser aproximado por:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2.59)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.60)$$

É necessário ter ciência de que há um erro associado a este tipo de aproximação, representado pelo fator $O(\Delta x)$, e que valores de Δx muito pequenos ou grandes podem comprometer a precisão da aproximação realizada.

Vale a pena notar que esta perturbação pode ser feita tanto com o intuito de aumentar o valor de x (diferença finita positiva) quanto de diminuí-lo (diferença finita negativa). Assim, a equação (2.59) pode ser reescrita como mostrado em (2.61) mantendo o mesmo princípio básico:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (2.61)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.62)$$

Também podemos considerar que, caso a aplicação permita, é interessante utilizar duas perturbações para obter uma melhor aproximação do valor da derivada, na técnica conhecida como diferenças finitas centrais (CFD - *Central Finite Differences*), o que resulta na equação (2.63):

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (2.63)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (2.64)$$

O resultado fica mais confiável, pois agora o erro é proporcional a Δx^2 . No entanto, é importante considerar que esta técnica requer duas perturbações para cada variável de entrada, o que torna o cálculo da sensibilidade da função objetivo mais lento. Porém, é de fácil implementação computacional. O método CFD é adotado neste trabalho para validar as derivadas da função objetivo obtidas pelo método adjunto.

Para funções com mais de uma variável de entrada, sabemos que podemos realizar derivações parciais em relação a cada uma das variáveis de entrada. O vetor composto por todas estas derivações parciais é denominado gradiente da função e é amplamente utilizado nos métodos de otimização. Em (2.65), mostramos como é o equacionamento do vetor gradiente de uma função.

$$\nabla f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \hat{x}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \hat{x}_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N} \hat{x}_N \quad (2.65)$$

Porém a aquisição das derivadas parciais em problemas computacionais exige que a função f seja analisada pelo menos $N+1$ vezes. Este é o método mais utilizado na obtenção de derivadas numéricas devido à sua simplicidade de implementação. No entanto, podemos observar que o esforço computacional aumenta consideravelmente com o aumento das dimensões do problema, tornando o uso do método adjunto uma solução interessante para reduzir o tempo gasto nas simulações para obtenção das derivadas da função objetivo analisada.

2.4 Método Adjunto

Para explicar o método adjunto, adota-se o desenvolvimento apresentado em (Bakr (2013)), aqui traduzindo os passos para o português. Apresenta-se a aplicação do método para um problema linear de valores reais. A descrição completa do método para problemas não lineares e variáveis imaginárias pode ser encontrada em (Park (2019)).

Inicialmente, considera-se o sistema linear obtido na determinação da carga elétrica de um sistema formado por cabos condutores de energia em uma linha de transmissão, descrito em detalhes em (Paganotti et al. (2022)):

$$K(x)\phi = b \quad (2.66)$$

onde a matriz K do sistema depende dos parâmetros do vetor \mathbf{x} . O vetor ϕ é a solução do sistema e b é chamado de excitação, contendo as tensões das fases. Esse tipo de matriz é comum em aplicações do método dos elementos finitos e outros problemas que necessitam solucionar sistemas lineares. O objetivo do método adjunto é encontrar o gradiente de uma função objetivo f , que depende de x e ϕ , ou seja, $f(x, \phi)$.

Normalmente, seria necessário utilizar as equações (2.59) ou (2.61) $N + 1$ vezes para obter o gradiente da função de interesse, ou $2N + 1$ vezes no caso das diferenças finitas centrais, equação (2.63). No entanto, para o método adjunto, consideramos essencialmente dois sistemas matriciais, permitindo estimar a sensibilidade de uma forma mais eficiente. Consideremos a derivada do sistema (2.66) em relação a x_i , o i -ésimo parâmetro do vetor \mathbf{x} .

$$\frac{\partial(K(x)\phi)}{\partial x_i} = \frac{\partial b}{\partial x_i} \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial(K(x)\bar{\phi})}{\partial x_i} + K \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial b}{\partial x_i} \quad (2.68)$$

O termo $\frac{\partial(K(x)\bar{\phi})}{\partial x_i}$ é a derivada de $K(x)$ em relação a x_i , mantendo fixo o valor nominal de ϕ . Para resolver o problema da derivação das variáveis de estado, devemos isolar o segundo termo da primeira parte da equação (2.68). Assim, temos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = K^{-1} \left(\frac{\partial b}{\partial x_i} - \frac{\partial K(x)}{\partial x_i} \bar{\phi} \right) \quad (2.69)$$

Agora, se considerarmos a função objetivo $f(x, \phi)$, sua derivada em relação a x_i é dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial^e f}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \quad (2.70)$$

Onde o termo $\frac{\partial^e f}{\partial x_i}$ representa a dependência explícita da função objetivo em relação a x_i , geralmente conhecida, enquanto o segundo termo representa a dependência implícita do vetor das variáveis de estado ϕ , desconhecida. Substituindo a equação (2.69) em (2.70), obtemos a derivada de f em relação a x_i :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial^e f}{\partial x_i} + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial \phi} \right) K^{-1} \left(\frac{\partial b}{\partial x_i} - \frac{\partial K(x)}{\partial x_i} \bar{\phi} \right)} \quad (2.71)$$

Com os dois termos em destaque, podemos definir o vetor adjunto das variáveis de estado, como mostrado a seguir:

$$\hat{\phi}^T = \left(\frac{\partial f}{\partial \phi} \right) K^{-1} \Rightarrow \hat{\phi} = \left(\frac{\partial f}{\partial \phi} \right)^T K^{(T)^{-1}} \Rightarrow K^T \hat{\phi} = \left(\frac{\partial f}{\partial \phi} \right)^T \quad (2.72)$$

Aqui, a matriz do sistema é K^T , e podemos obter o valor de $\hat{\phi}$ ao resolver o sistema adjunto. Uma vez obtida a solução do sistema, podemos substituir o valor de $\hat{\phi}$ na equação (2.71), e assim a derivada $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ pode ser obtida através de:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial^e f}{\partial x_i} + \hat{\phi}^T \left(\frac{\partial b}{\partial x_i} - \frac{\partial K(x)}{\partial x_i} \bar{\phi} \right) \quad (2.73)$$

Note que com a solução $\hat{\phi}$, obtida de forma completamente independente de x_i , consegue-se calcular a derivada de f em relação a todas as componentes do vetor \mathbf{x} apenas resolvendo o sistema apresentado na equação (2.66) e o sistema adjunto apresentado em (2.71). Isso nos permite obter a sensibilidade do problema de forma mais rápida e eficiente, poupando esforço computacional e tempo.

Para calcular o valor do termo $\frac{\partial K(x)}{\partial x_i} \bar{\phi}$, é necessário derivar cada termo que compõe a matriz $K(x)$ em relação a x_i .

Quando a derivada da matriz $\phi(x)$ é obtida de forma analítica, utiliza-se o método adjunto analítico. Quando a derivada da matriz $\phi(x)$ é obtida numericamente, por meio do método CFD, utiliza-se o método adjunto-CFD. Descrições mais detalhadas sobre o método adjunto e suas aplicações podem ser encontradas nas referências (Li (2006)), (Kuci et al. (2016)), (Nikolova et al. (2004)) e (Lee e Ida (2014)).

2.5 Método Elipsoidal

Este trabalho utiliza o método elipsoidal, que é um método determinístico da família dos métodos de exclusão de semi-espacos e utiliza a informação do gradiente fornecido pelo método adjunto. Este método tem sido aplicado de forma efetiva em problemas com elevado número de variáveis, diversas restrições com um ou mais objetivos.

O método elipsoidal trabalha com uma interpretação geométrica interessante, identificando um elipsoide ao redor da solução candidata dentro do espaço de soluções possíveis, onde possivelmente se encontra a solução global do problema. Em sua versão clássica, ele realiza apenas um corte pelo centro do elipsoide a cada iteração, gerando elipsoides de volumes cada vez menores até que se encontre uma solução próxima do ótimo global. No entanto, neste trabalho utiliza-se uma versão que trabalha com múltiplos cortes, conforme proposto por (Vieira et al. (2010)). Nesta versão, são aplicados cortes sucessivos ao elipsoide após o corte central da versão clássica, o que gera um efeito "deep-cut"(corte profundo), melhorando sem perda de robustez do método e aumentando significativamente a taxa de convergência para a solução ótima.

O método é resultado de pesquisas realizadas por um grupo de pesquisadores da UFMG, composto por D. A. Gomes Vieira, A. C. Lisboa e R. R. Saldanha (Lisboa et al. (2006)).

Acredita-se que o uso da sensibilidade adjunta, mais precisa e rápida, pode resultar em melhores resultados obtidos por esta metodologia.

2.5.1 Método Elipsoidal Clássico

A versão original do método elipsoidal foi introduzida por Shor, Yudin e Nemirovsky, (Yudin e Nemirovski (1976)) e (Shor (1977)) nos anos 70, sendo o primeiro método de otimização de ordem polinomial para a solução de problemas de programação linear.

O i -ésimo elipsoide do método pode ser escrito como:

$$E_i = \{x \in \mathbb{R}^n | (x - x_i)^T Q_i (x - x_i) \leq 1\} \quad (2.74)$$

onde x_i é o centro do elipsoide e a solução candidata, $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz definida positiva do problema. O termo x_{k+1} é obtido de maneira iterativa pelas equações dadas a seguir (Vieira et al. (2010)):

$$x_{k+1} = x_k + \tau \frac{Q_k^{-1} d_k}{\sqrt{d_k^T Q_k^{-1} d_k}} \quad (2.75)$$

$$Q_{k+1}^{-1} = \delta \left(Q_k^{-1} - \sigma \frac{Q_k^{-1} d_k d_k^T Q_k^{-1}}{d_k^T Q_k^{-1} d_k} \right) \quad (2.76)$$

$$d_k = \begin{cases} -\nabla f(x_k), & \text{se } g(x_k) \leq 0 \\ -\nabla g_j(x_k) & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.77)$$

$$\tau = \frac{1}{1+n} \quad (2.78)$$

$$\delta = \frac{n^2}{n^2 - 1} \quad (2.79)$$

$$\sigma = \frac{2}{(n+1)} \quad (2.80)$$

onde τ é o passo, σ é a dilatação, e δ é a expansão dos parâmetros que formam o novo elipsoide, respectivamente. α_k é a profundidade do corte e n é a dimensão do problema. $g(x_k)$ and g_j são as restrições e as restrições violadas, respectivamente. O valor de x_k é a solução atual do problema e d_k é o gradiente da função objetivo ou da restrição mais violada, sendo que $\nabla f(x_k)$ pode ser obtido tanto pelo método CFD ou pelo método adjunto, porém o valor de $\nabla g_j(x_k)$ só pode ser obtido pelo método CFD ou de maneira analítica.

2.5.2 Método Elipsoidal de Múltiplos Cortes

O algoritmo do método elipsoidal de múltiplos cortes aplicado no processo de otimização é apresentado em (2.81) e (2.82), onde x_k é o vetor de variáveis, Q_k é a matriz definida positiva do problema de d_k é a informação da sensibilidade dada por (2.83):

$$x_{k+1} = x_k + \tau_k \frac{Q_k^{-1} d_k}{\sqrt{d_k^T Q_k^{-1} d_k}} \quad (2.81)$$

$$Q_{k+1}^{-1} = \delta_k \left(Q_k^{-1} - \sigma_k \frac{Q_k^{-1} d_k d_k^T Q_k^{-1}}{d_k^T Q_k^{-1} d_k} \right) \quad (2.82)$$

$$d_k = \begin{cases} -\nabla f(x_k), & \text{se } \nabla g(x_k) \leq 0 \\ -\nabla g(x_k) & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.83)$$

Os demais parâmetros do método são definidos como:

$$\tau_k = \frac{1 + n\alpha_k}{1 + n} \quad (2.84)$$

$$\delta_k = \frac{n^2(1 - \alpha_k^2)}{n^2 - 1} \quad (2.85)$$

$$\sigma_k = \frac{2(1 + n\alpha_k)}{(n + 1)(1 + \alpha_k)} \quad (2.86)$$

$$a_k = a'_{i_k} \quad (2.87)$$

$$d_k = d'_{i_k} \quad (2.88)$$

$$\alpha_k = \alpha(a_k, d_k, x_k, Q_k) \quad (2.89)$$

Para:

$$i_k = \operatorname{argmax}_i \alpha(a_i, d_i, x_k, Q_k) \quad (2.90)$$

onde i_k é a indexação do plano de corte escolhido e a profundidade do corte é dada por:

$$\alpha(a, d, c, \phi) = \frac{(a - c)^T d}{\sqrt{d^T Q^{-1} d}} \quad (2.91)$$

Após a apresentação dos métodos de otimização, análise de sensibilidade, cálculo de torque e de modelagem do micromotor este capítulo de Fundamentação Teórica se encerra. No próximo capítulo é apresentado a implementação destes métodos no processo de otimização do micromotor, bem como um detalhamento da parametrização do micromotor desenvolvida neste trabalho.

Capítulo 3

Metodologia de Análise de Sensibilidade e Otimização de um Micromotor Eletrostático

Neste capítulo, são apresentados os detalhes da implementação dos métodos FEM, CFD e adjunto, utilizados na análise de sensibilidade desenvolvida neste trabalho e os detalhes da aplicação do método elipsoidal nos parâmetros de projeto do micromotor.

Para a aplicação da análise de sensibilidade, é preciso, primeiramente, definir a função objetivo deste trabalho. Utiliza-se o somatório do quadrado do potencial escalar elétrico dos nós da malha, apresentada em 3.1. A função objetivo em questão leva em consideração o valor do potencial escalar elétrico em todos os nós da malha do micromotor utilizado neste trabalho.

$$f(x, y) = \left(\sum \phi_i(x, y)^2 \right) \quad (3.1)$$

O motivo por trás da definição desta função objetivo encontra-se na relação entre o valor do campo elétrico no entreferro do micromotor e o valor do torque obtido pelo Tensor de Maxwell, ambos dependentes da distribuição do potencial escalar elétrico no entreferro do micromotor. Como o aumento dos valores do potencial elétrico resulta em um aumento no valor do campo elétrico no entreferro, temos que a maximização da função objetivo deve resultar em um aumento do valor do torque do micromotor eletrostático analisado.

3.1 Aplicação do Método de Elementos Finitos

Para a modelagem do micromotor, utilizaram-se as condições de fronteira de Dirichlet e periódica, além da banda de rolamento ao longo do entreferro. Para a condição de Dirichlet,

consideraram-se as bordas dos dentes do estator e do rotor do micromotor, e nelas se aplica a condição de fronteira descrita por 3.2.

$$\phi = g \quad \text{sobre } \Gamma_g \quad (3.2)$$

onde Γ_g é a curva onde se aplica a condição de contorno.

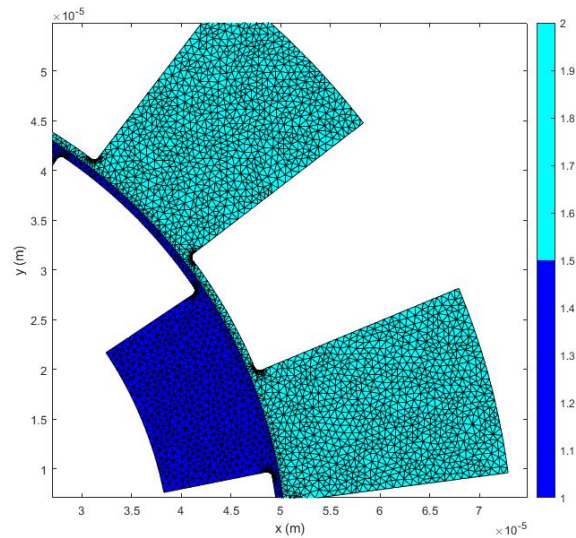


Figura 3.1: Malha FEM com foco nos dentes do estator e do rotor.

O valor do potencial nos dentes do estator varia entre 0 e 1 p.u., dependendo de qual dente do estator deve ser acionado de acordo com a posição dos dentes do rotor. O potencial do rotor, por sua vez, está sempre definido como 0 p.u., uma vez que este se encontra aterrado.

Para a aplicação da condição de fronteira periódica, consideram-se as bordas inferior e esquerda da malha do micromotor, como apresentado na figura 3.2, e aplica-se a condição de fronteira descrita por 3.3.

$$\phi|_{\Gamma_{inferior}} = \phi|_{\Gamma_{esquerda}} \quad (3.3)$$

onde $\Gamma_{inferior}$ e $\Gamma_{esquerda}$ representam as fronteiras inferior e esquerda da malha de elementos finitos, respectivamente.

A banda de rolamento, por sua vez, é aplicada ao longo das arestas que dividem o entreferro, identificável nas figuras 3.2 e 3.3. Para a aplicação da banda de rolamento, é necessário garantir que o comprimento das arestas ao longo da curva seja uniforme, o que permite que se deslize a malha mais próxima do rotor e seja necessário apenas ajustar a informação da conectividade. A figura 3.3 mostra com detalhes uma malha modelo para aplicação desta técnica.

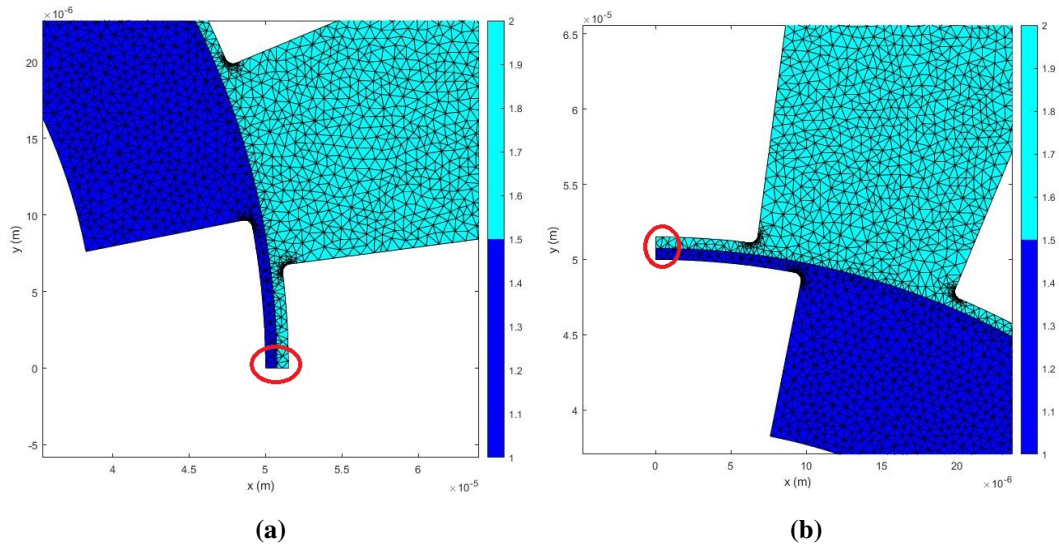


Figura 3.2: (a) Malha FEM com foco na borda inferior. (b) Malha FEM com foco na borda esquerda.

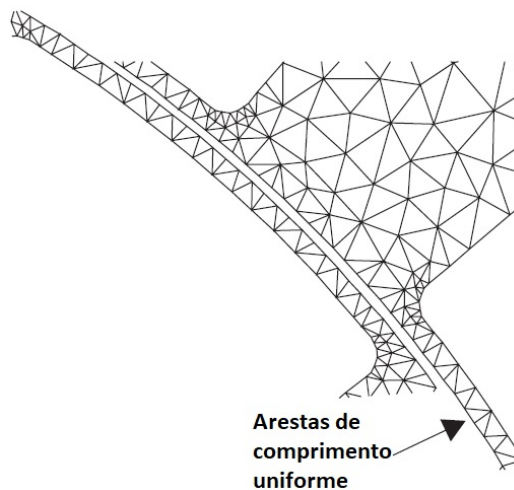


Figura 3.3: Ilustração da banda de rolamento.

3.2 Aplicação do Método das Diferenças Finitas Centrais

Para obter a derivada via diferenças finitas centrais, aplica-se uma perturbação, Δx e Δy , nas coordenadas de cada um dos nós identificados como sendo de interesse na figura 3.4 e obtém-se a derivada conforme a equação 2.63, mostrada no Capítulo 2. A informação desta derivada é utilizada pelo método elipsoidal para alterar os parâmetros geométricos do micromotor por meio da metodologia proposta ao final deste capítulo e para a validação da implementação do método adjunto. A perturbação é aplicada em cada um dos nós de interesse, e a malha de elementos finitos nos demais nós do entreferro do micromotor não é alterada. No entanto, a matriz de rigidez precisa ser recalculada para cada perturbação para a solução do sistema de elementos finitos e, após a solução do sistema, reproduzido a seguir,

e obtenção do valor de ϕ , calcula-se o valor da função objetivo 3.1.

$$K(x, y)\phi = b \quad (3.4)$$

Para esta análise de sensibilidade via CFD são necessárias um total de $2N + 1$ soluções do sistema de elementos finitos para cada direção que se deseja aplicar a derivada, sendo N o número de nós de interesse avaliados, para obter todas as sensibilidades via CFD. A obtenção da informação da derivada dos nós de interesse, identificados na figura 3.4, se dá a partir da solução do sistema do FEM para cada um dos nós de interesse após aplicar a perturbação, o que torna a definição dos valores de Δx e Δy de suma importância para sua aplicação. A figura 3.5 mostra em detalhe alguns dos nós cujas coordenadas serão perturbadas para aplicação do método CFD.

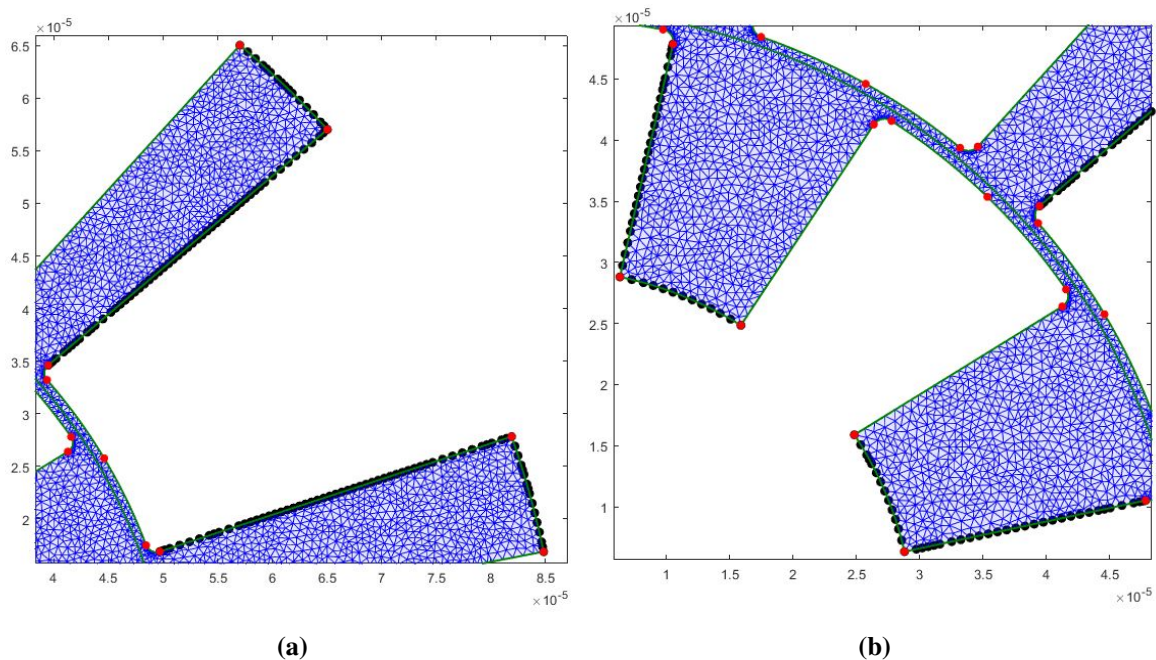


Figura 3.4: (a) Nós de interesse do estator. (b) Nós de interesse do rotor

3.2.1 Obtenção do Δx

Para aplicar o método das diferenças finitas centrais é necessário determinar qual valor da perturbação Δx será aplicado. A definição deste valor é de suma importância para a aplicação do método, uma vez que seu valor afeta diretamente a precisão do método. Um valor muito pequeno de Δx pode resultar em um erro na obtenção da derivada devido à precisão computacional, enquanto valores muito grandes de Δx podem levar a função analisada além de pontos de máximos ou mínimos de interesse e resultar em uma derivada incorreta.

Para este trabalho em particular, o uso de um valor de Δx elevado também pode resultar em erros na malha utilizada pelo método de elementos finitos, uma vez que a perturbação Δx

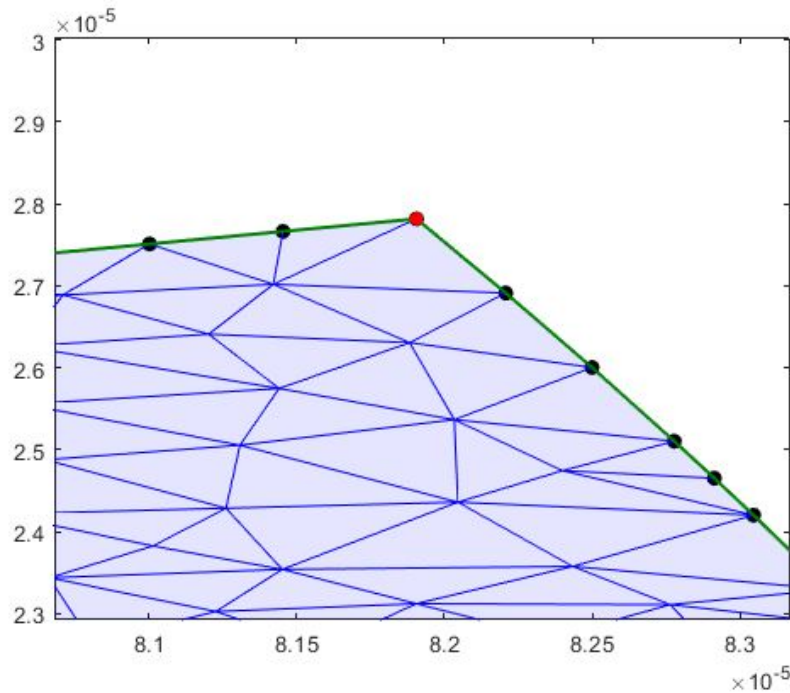


Figura 3.5: Foco em nós de interesse do estator, identificados com a cor preta, onde se aplica a análise de sensibilidade

é aplicada nas coordenadas x e y dos nós de interesse da malha, mostrados nas figuras 3.4 (a) e (b). A perturbação tem de ter ordens de grandeza inferior às dimensões do problema, já que um valor elevado pode alterar a malha de tal forma que, ao aplicar o FEM, os elementos da malha não serão conformes.

O valor da perturbação é escolhido por meio de uma série de testes para que a perturbação atenda às especificações do problema. Inicialmente, testou-se uma perturbação de 10^{-8} m, cerca de 1000 vezes menor que as dimensões do problema, porém este valor afetava a malha em nós com arestas muito pequenas, resultando em elementos não conformes e impossibilitando a análise. Ao analisar os nós da malha, observou-se que a menor diferença entre dois nós consecutivos em x e y era de cerca de 10^{-9} m. Logo, considerou-se um valor de Δx que seja cerca de 100.000 vezes menor que este valor para a análise de sensibilidade via método CFD. Sendo assim, o valor de Δx escolhido é de 10^{-14} m.

3.3 Aplicação do Método Adjunto

Considere o modelo de micromotor apresentado na figura 2.1, apresentada novamente à seguir. Para a aplicação do método adjunto, é necessário definir onde se deseja obter os valores das sensibilidades da função objetivo. O micromotor utiliza o método dos elementos finitos e a variação da função objetivo é obtida a partir de mudanças nas posições espaciais (x, y) dos nós de interesse, conforme mostrado na figura 3.4.

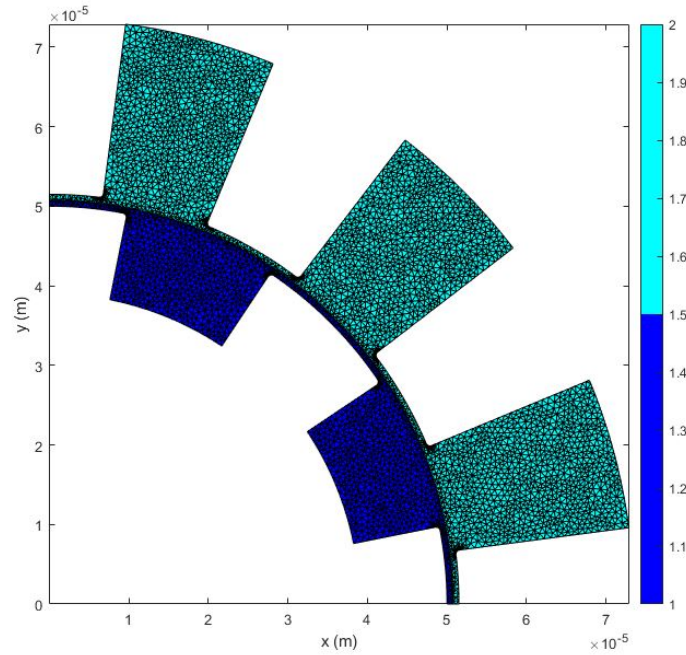


Figura 3.6: Malha do micromotor simulado por FEM, para este problema só é necessário modelar o entreferro, aqui separado em duas regiões pela banda de rolamento utilizada na simulação.

Considerando-se a análise de sensibilidade da função objetivo em relação a coordenada x , necessita-se da derivada de $f(x, y)$ que é utilizada para a análise via método adjunto, conforme a equação 2.73, reproduzida novamente a seguir:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial^e f}{\partial x_i} + \hat{\phi}^T \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial K(x, y)}{\partial x_i} \bar{\phi} \right) \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial \phi} = \frac{(\sum \phi_i(x, y)^2)}{\partial \phi} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial \phi} = 2(\sum \phi_i(x, y)) \quad (3.7)$$

A matriz K é a matriz de rigidez do sistema de elementos finitos e o vetor ϕ é o vetor de soluções e b a excitação do sistema:

$$K(x, y)\phi = b \quad (3.8)$$

A derivada explícita para este problema é nula, logo a equação (3.5) pode ser reescrita como dependendo apenas de (3.7) e considerando $x_i = x$ como sendo as coordenadas x dos nós da malha de elementos finitos que são utilizadas para obtenção da sensibilidade na direção x e temos a seguinte equação:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \hat{\phi}^T \left(\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} - \frac{\partial K(x)}{\partial x} \bar{\phi} \right) \quad (3.9)$$

Onde $\hat{\phi}$ é a solução do sistema adjunto, assim se obtendo a derivada adjunta das coordenadas cartesianas dos nós da malha do problema de elementos finitos para a função objetivo escolhida. O termo derivada de ϕ em relação a x também será nulo, uma vez que o potencial inserido via dirichet não depende de características geométricas do problema, pois este é uma constante definida pelo projetista, logo tem-se.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\hat{\phi}^T \left(\frac{\partial K(x)}{\partial x} \bar{\phi} \right) \quad (3.10)$$

De maneira similar para em relação a coordenada y , obtém-se:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\hat{\phi}^T \left(\frac{\partial K(y)}{\partial y} \bar{\phi} \right) \quad (3.11)$$

A derivada da matriz de rigidez em relação a x e y é obtida de forma analítica a partir do equacionamento utilizado para sua criação.

A derivada da função objetivo usando a análise de sensibilidade adjunta obtém a sensibilidade de todos os nós do domínio de estudo por meio da solução do sistema matricial dos elementos finitos e da solução do sistema adjunto.

3.4 Aplicação do Método Elipsoidal nos Parâmetros do Micromotor

Para aplicar o método, é necessário escolher quais variáveis deseja-se analisar. A informação da derivada obtida pelos métodos de análise de sensibilidade pode ser aplicada no processo de otimização e incluída no método elipsoidal para aprimorar o processo de otimização. Os valores da sensibilidade são obtidos a partir da distribuição do potencial escalar elétrico em função das posições geométricas (x, y) dos nós de interesse presentes nos dentes, figura 3.4, e, no caso do método adjunto, no entreferro do micromotor analisado.

A sensibilidade média da posição dos nós de interesse é calculada para cada uma das oito bordas marcadas no desenho do micromotor da figura 3.4 e utilizadas pelo método elipsoidal para obter a variação da parametrização utilizada neste trabalho. Com base nos valores obtidos, as seguintes variáveis são escolhidas para o processo de otimização devido à forma como seus valores podem ser obtidos:

- Largura do dente do estator ($w_s(x, y)$)
- Altura do dente do estator ($h_s(x, y)$)
- Largura do dente do rotor ($w_r(x, y)$)
- Altura do dente do rotor ($h_r(x, y)$)

Os demais parâmetros geométricos do micromotor como raio (r_{gap}), comprimento do entreferro (gap) e curvatura da quina do dente (r_c) são mantidos constantes, uma vez que a metodologia desenvolvida até este ponto não consegue parametrizar os demais parâmetros de projeto.

3.4.1 Parametrização do Micromotor

Para cada uma das oito bordas identificadas na figura 3.4, determina-se uma área retangular onde um ponto representativo da sua posição poderia estar, para determinar o valor da variável correspondente. Para as variáveis w_s e w_r , escolhem-se pontos nas quinas dos dentes mais próximos do gap, com posição determinada por uma variável externa (x, y) que modifica o valor do ponto representativo.

Para a variável w_s , existem dois pontos representativos associados a ela. A distância angular entre estes dois pontos e a origem determina o valor de w_s . O primeiro ponto está entre $(\pi/6) - (\pi/20) = 21^\circ$ e $(\pi/6) - (\pi/14) = 17.14^\circ$, e o segundo ponto está entre $(\pi/6) + (\pi/20) = 39^\circ$ e $(\pi/6) + (\pi/14) = 42,86^\circ$, com raio determinado como $(50,75 + 0,75)\mu m$.

Considerando as condições acima, os pontos do retângulo que contém o ponto são:

$$10^{-4} * [(0,4808 \ 0,1518) \ (0,4921 \ 0,1846), \ (0,4921 \ 0,1518) \ (0,4808; 0,1846)]$$

O segundo retângulo é composto pelos pontos:

$$10^{-4} * [(0,4002 \ 0,3241) \ (0,3775 \ 0,3503) \ (0,3775, 0,3241) \ (0,4002, 0,3503)].$$

A figura (3.7) a seguir mostra as posições dos vértices dos dois retângulos e sua respectiva posição na malha do micromotor.

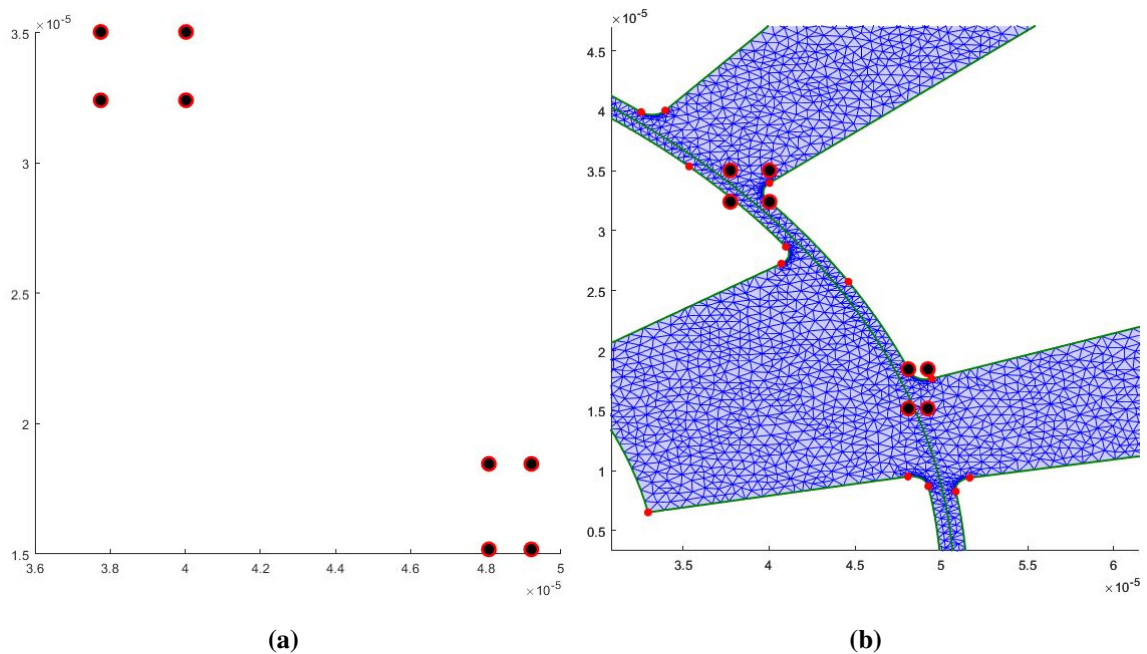


Figura 3.7: (a) Vértices do retângulo. (b) Vértices sobrepostos na malha de elementos finitos

Para a variável altura do dente do estator (h_s) se aplica uma lógica parecida, levando em consideração dois pontos de referência próximos do meio dos pontos mais externos da ranhura do estator marcados na figura (3.4), porém com o valor obtido através da média do raio dos dois pontos em relação à origem para determinar o valor de h_s , figura (3.8), o que gera as seguintes coordenadas para seus retângulos:

$$10^{-4} * [(0,8065 \ 0,2161) \ (0,9225 \ 0,2472) \ (0,9225 \ 0,2161) \ (0,8065 \ 0,2472)]$$

e

$$10^{-4} * [(0,5904 \ 0,6753) \ (0,6753 \ 0,5904) \ (0,5904 \ 0,5904) \ (0,6753 \ 0,6753)]$$

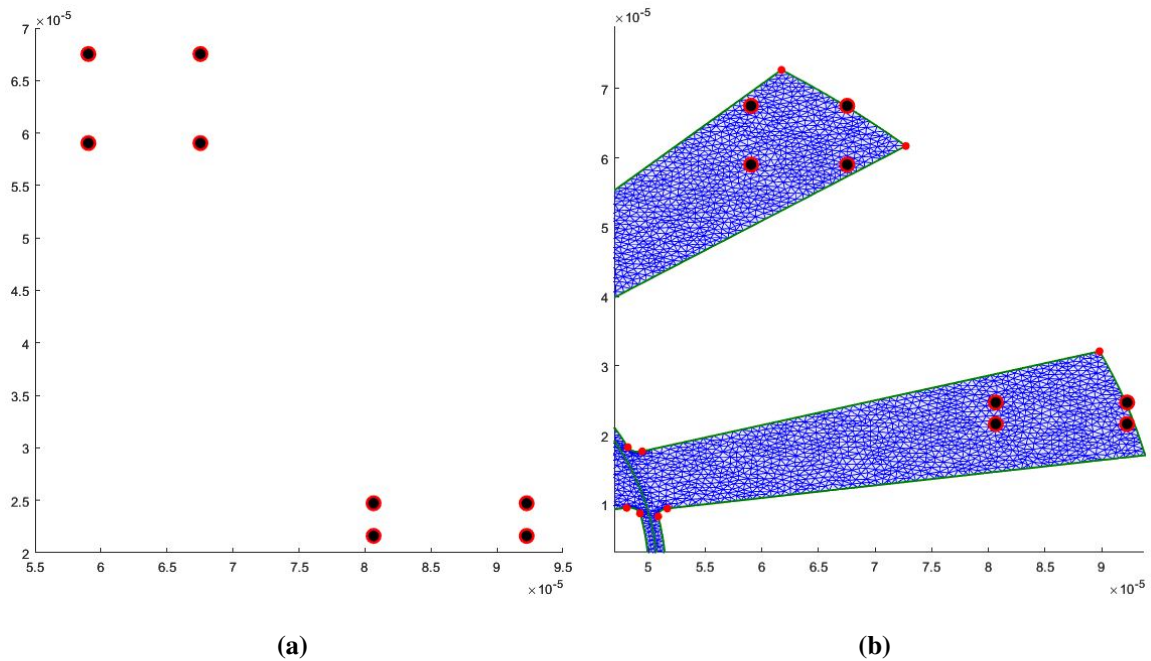


Figura 3.8: (a) Vértices do retângulo. (b) Vértices sobrepostos na malha de elementos finitos

Uma análise semelhante à feita para o estator é aplicada também nos dentes do rotor. Para a largura do dente do rotor (w_r) e para a altura do dente do rotor (h_r), os retângulos que contêm os pontos que definem essas variáveis estão mostrados nas figuras 3.9 e 3.10, respectivamente. As coordenadas dos retângulos que delimitam o parâmetro w_r são:

$$10^{-4} * [(0,4891 \ 0,1040) \ (0,4973 \ 0,0523) \ (0,4973 \ 0,1040) \ (0,4891 \ 0,0523)]$$

e

$$10^{-4} * [(0,4330 \ 0,2500) \ (0,4045 \ 0,2939) \ (0,4045, 0,2500) \ (0,4330 \ 0,2939)]$$

E as coordenadas dos retângulos que as delimitam o parâmetro h_r :

$$10^{-4} * [(0,3284 \ 0,08800) \ (0,2705 \ 0,07247) \ (0,2705 \ 0,08800); (0,3284 \ 0,07247)]$$

e

$$10^{-4} * [(0,2404 \ 0,1980) \ (0,2404 \ 0,2404) \ (0,1980 \ 0,2404) \ (0,1980 \ 0,1980)]$$

Para tratar o problema de uma forma paramétrica temos a consideração de que cada um dos retângulos apresentados nas figuras 3.7, 3.8, 3.9 e 3.10 através de um vetor x de 16

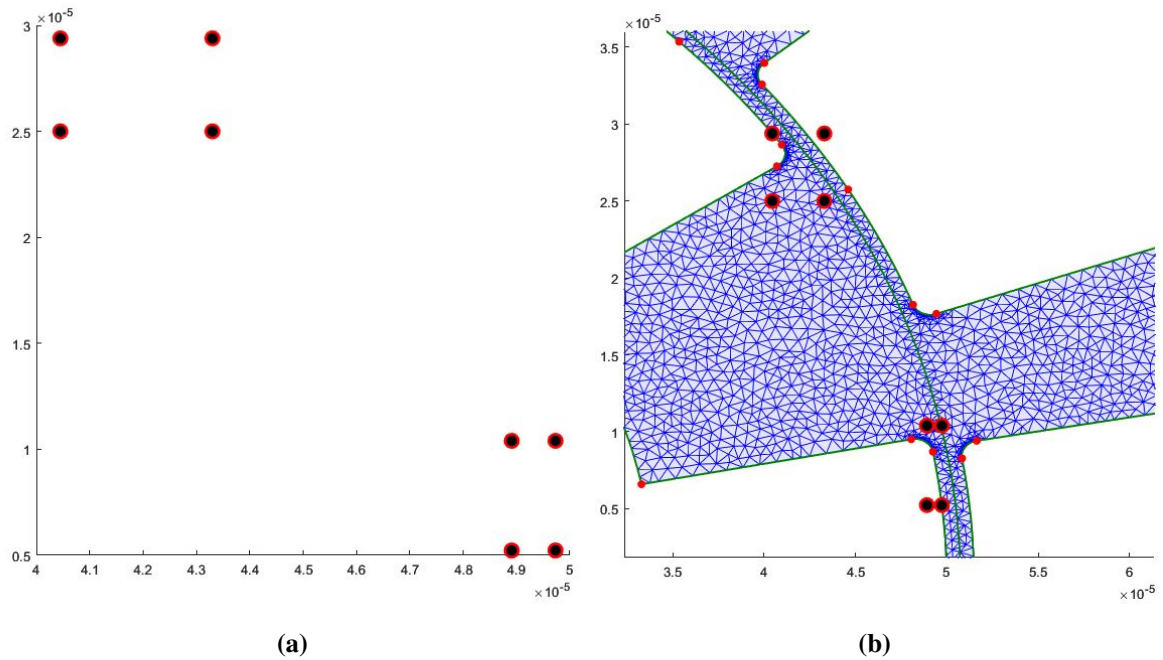


Figura 3.9: (a) Vértices do retângulo. (b) Vértices sobrepostos na malha de elementos finitos

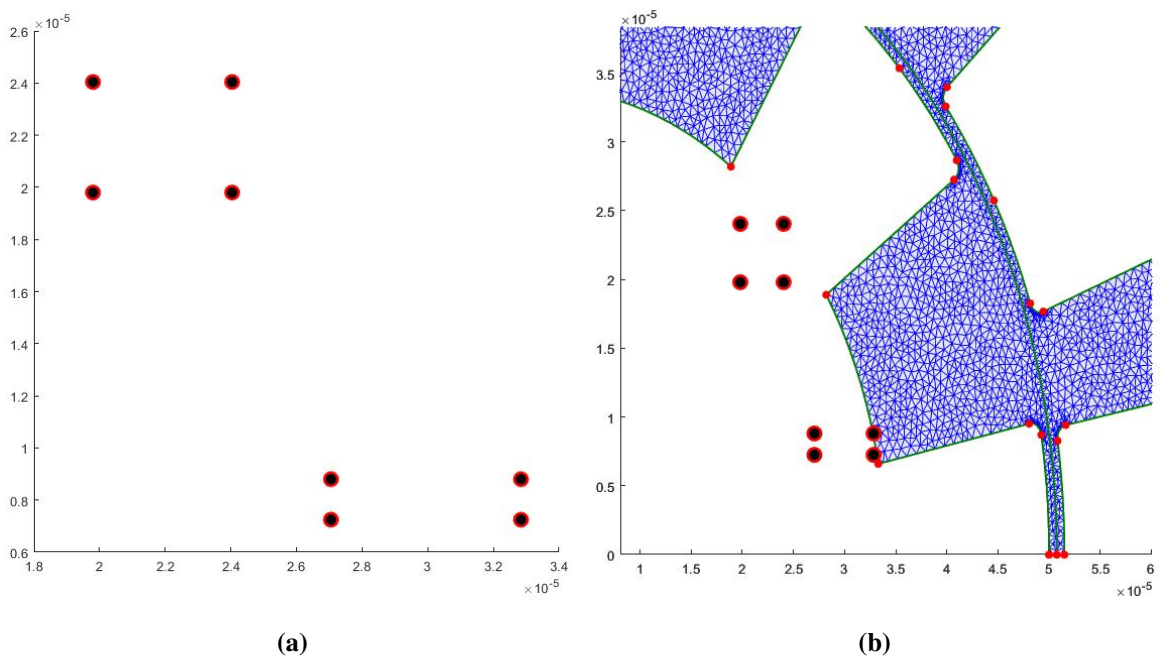


Figura 3.10: (a) Vértices do retângulo. (b) Vértices sobrepostos na malha de elementos finitos

posições com valores entre 0 e 1, cada uma associada a uma coordenada x ou y dentro de cada retângulo. Assim para a figura 3.10, por exemplo, e considerando as 4 coordenadas cartesianas do último retângulo apresentado temos que a posição associada ao vetor nulo:

$$x = [0 \ 0]$$

está associado ao ponto:

$$10^{-4} * [0, 1980 \ 0, 1980]$$

O vetor:

$$x = [0 \ 1]$$

é associado ao ponto:

$$10^{-4} * [0, 1980 \ 0, 2404]$$

e o vetor

$$x = [1 \ 1]$$

é associado ao ponto:

$$10^{-4} * [0, 2404 \ 0, 2404]$$

Este vetor \mathbf{x} que é efetivamente utilizado pelo método elipsoidal para a otimização do micromotor, pois através desta parametrização, que busca respeitar os limites tecnológicos de projeto, é que são modificados os parâmetros de projeto. são modificados os parâmetros de projeto.

3.4.1.1 Aplicação do Método Elipsoidal com Cortes Múltiplos

Para a aplicação do método elipsoidal, considera-se o vetor \mathbf{x} que parametriza as coordenadas dos retângulos mostrados nas Figuras 3.7, 3.8, 3.9 e 3.10. Retomando as Equações 2.81 e 2.83, que definem os valores de x_{k+1} e d_k , mostradas no Capítulo 2 e repetidas a seguir:

$$x_{k+1} = x_k + \tau_k \frac{Q_k^{-1} d_k}{\sqrt{d_k^T Q_k^{-1} d_k}} \quad (3.12)$$

$$d_k = \begin{cases} -\nabla f(x_k), & \text{se } \nabla g(x_k) \leq 0 \\ -\nabla g(x_k) & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.13)$$

O vetor x_k refere-se ao k-ésimo valor do vetor \mathbf{x} , que possui um total de 16 posições, todas elas associadas à parametrização do micromotor e com valor mínimo de 0 e valor máximo de 1, sendo esta também a restrição utilizada neste problema.

O valor considerado para $\nabla f(x_k)$ na aplicação do método elipsoidal de cortes múltiplos é o valor médio das derivadas dos nós de cada uma das 8 bordas de interesse consideradas na Figura 3.4 para as direções x e y , sendo o valor das derivadas individuais de cada nó obtido via método CFD ou via método Adjunto.

Após a apresentação dos detalhes da implementação dos métodos de elementos finitos, CFD, Adjunto e de como é definida a parametrização do micromotor para utilização do método de otimização, este capítulo de metodologia chega ao fim. No próximo capítulo, são apresentados os resultados da aplicação dos métodos de otimização e análise de sensibilidade no micromotor, destacando as inovações e conclusões obtidas dessas análises.

Capítulo 4

Resultados

Neste capítulo, valida-se a metodologia de análise de sensibilidade adjunta comparando seus resultados com os obtidos pelo método das diferenças finitas centrais. O custo computacional envolvido na obtenção das sensibilidades é apresentado e analisado. Por fim, otimiza-se o micromotor eletrostático via método elipsoidal com cortes múltiplos, utilizando a sensibilidade da função objetivo obtida pelo método adjunto, e comparam-se os gráficos com as variações dos parâmetros de projeto para os testes feitos com análise de sensibilidade via método adjunto e CFD.

4.1 Comparação das derivadas

Nesta seção, é apresentado como são calculadas as derivadas pelo método adjunto, que em seguida são comparadas e validadas com as sensibilidades obtidas via método das diferenças finitas centrais.

4.1.1 Comparação das derivadas

Como medida de comparação dos valores das derivadas temos os valores absolutos e normalizados das derivadas adjuntas e por CFD nas direções x e y , mostradas nas tabelas 4.1 e 4.2 a seguir. Nestas tabelas tem-se as informações das derivadas para os 10 primeiros pontos de interesse na malha que são nós nos dentes do estator e do rotor do micromotor eletrostático. Ao analisar as tabelas 4.1 e 4.2 se observa que os valores das derivadas são consideravelmente distintos para ambos os métodos, sendo que a derivada adjunta é da ordem de 10^{10} , enquanto que a derivada via CFD é da ordem de 10^{13} . No entanto, como o método de otimização trabalha apenas com a direção da derivada estes valores devem ser normalizados, o que mostra que tanto a derivada adjunta quanto a CFD possuem mesma direção. As primeiras diferenças aparecendo por volta da quarta ou quinta casa decimal.

Tabela 4.1: Derivadas adjuntas: Valores absolutos e normalizados

derivada adjunta x	derivada adjunta y	dfx normalizado	dfy normalizado
-0,6179e+10	0,2916e+10	-0,9044	0,4267
-0,4000e+10	1,1368e+10	-0,3319	0,9433
-0,5019e+10	1,4042e+10	-0,3366	0,9416
-0,5651e+10	1,5809e+10	-0,3366	0,9417
-0,6347e+10	1,7756e+10	-0,3366	0,94167
-0,6981e+10	1,9530e+10	-0,3366	0,9417
-0,5605e+10	1,5681e+10	-0,3366	0,9417
-0,4772e+10	1,3351e+10	-0,3366	0,9417
-0,5048e+10	1,4120e+10	-0,3366	0,9416
-0,5033e+10	1,4081e+10	-0,3366	0,9417

Tabela 4.2: Derivadas CFD: Valores absolutos e normalizados

derivada CFD x	derivada CFD y	dfx normalizado	dfy normalizado
-1,0944e+13	0,5165e+13	-0,9043	0,4268
-0,7085e+13	2,0134e+13	-0,3319	0,9433
-0,8888e+13	2,4865e+13	-0,3366	0,9416
-1,0006e+13	2,7996e+13	-0,3365	0,9417
-1,1240e+13	3,1446e+13	-0,3366	0,9417
-1,2363e+13	3,4560e+13	-0,3366	0,9416
-0,9927e+13	2,7767e+13	-0,3366	0,9416
-0,6051e+13	2,3642e+13	-0,3366	0,9417
-0,8938e+13	2,5005e+13	-0,3366	0,9416
-0,8914e+13	2,4935e+13	-0,3366	0,9416

A seguir é mostrado um comparativo do erro percentual, obtido através da equação apresentada à seguir e considerando a derivada CFD como sendo a referência:

$$Erro(\%) = 100 \times \frac{f'_{adjunta} - f'_{CFD}}{f'_{CFD}} \quad (4.1)$$

Observa-se na tabela 4.3 que o erro dos valores normalizados é consideravelmente pequeno para os nós analisados, sendo que para uma precisão de 4 casas decimais nem sequer é possível observar um erro percentual em vários dos nós analisados. Nos nós em que se observa alguma variação têm-se um erro percentual da ordem de 10^{-2} , conforme apresentado na tabela 4.3. Para esta análise busca-se observar também que a maioria dos erros obtidos é quase nulo para a precisão de 4 casas decimais, mostrando que as sensibilidades obtidas pelos métodos adjunto e CFD são praticamente os mesmos para a maioria dos nós de interesse para esta comparação.

Tabela 4.3: Comparativo das derivadas obtidas via método adjunto e via método das diferenças finitas centrais

dfx Adjunta	dfy Adjunta	dfx CFD	dfy CFD	erro % em dfx	erro % em dfy
-0,9044	0,4267	-0,9043	0,4268	-0,0111	0,0234
-0,3319	0,9433	-0,3319	0,9433	0,0000	0,0000
-0,3366	0,9416	-0,3366	0,9416	0,0000	0,0000
-0,3366	0,9417	-0,3365	0,9417	-0,0298	0,0000
-0,3366	0,94167	-0,3366	0,9417	0,0000	0,0032
-0,3366	0,9417	-0,3366	0,9416	0,0000	-0,0106
-0,3366	0,9417	-0,3366	0,9416	0,0000	-0,0106
-0,3366	0,9417	-0,3366	0,9417	0,0000	0,0000
-0,3366	0,9416	-0,3366	0,9416	0,0000	0,0000
-0,33667	0,9417	-0,3366	0,9416	-0,02080	-0,0106

4.2 Comparativo do custo computacional entre as metodologias de análise de sensibilidade

Para representar o quão significativa é a redução no tempo de obtenção da sensibilidade da função objetivo ao trabalhar com o método adjunto em vez do CFD, mede-se o tempo gasto pela ferramenta desenvolvida. Considerando um total de 2000 iterações e o ponto inicial de $x_0 = 0,75$, obteve-se um tempo de $1,4135 \times 10^5$ s utilizando o método CFD, o que resulta em 39,2631 horas para passar pelas iterações. Logo, cada iteração com o método CFD leva cerca de 70,675 s.

Utilizando o método adjunto com as mesmas condições do método CFD, gasta-se $2,1829 \times 10^4$ s, o que resulta em 363,8098 minutos ou 6,0635 horas, sendo gastos 10,914 segundos por iteração. Com estes resultados, chega-se à conclusão de que o método adjunto é 6,475 vezes mais rápido que o método CFD para este problema.

Considerando que o cálculo da sensibilidade via método adjunto representa cerca de 4 segundos do tempo de cada iteração, tem-se que a modelagem do micromotor, criação da malha de elementos finitos e solução do problema levam cerca de 7 segundos. Enquanto no método CFD são necessários cerca de 66 segundos para a análise de sensibilidade de um total de 16 variáveis, ou seja, cerca de 4 segundos para cada variável. Caso este fosse um problema com mais variáveis, como por exemplo um problema com 40 variáveis, seriam necessários cerca de 160 segundos para o método CFD, uma vez que ele trabalha apenas com os nós de interesse. O método adjunto, por sua vez, obtém a sensibilidade para todos os nós da malha, logo o aumento do seu tempo computacional seria muito menor, o que torna o método adjunto ainda mais vantajoso se comparado ao CFD.

Uma vez validada a análise de sensibilidade adjunta, parte-se agora para a análise dos resultados do processo de otimização que adota esta sensibilidade durante a sua execução.

4.3 Resultados da Otimização via Método Elipsoidal

Nesta seção são apresentados os resultados da otimização dos parâmetros do micromotor eletrostático utilizando os métodos adjunto e CFD para a análise de sensibilidade. O ponto de referência para análise do torque na simulação do micromotor eletrostático é o pico observado por volta de $3,6^\circ$, pois nas curvas simuladas ele apresenta o comportamento mais próximo do observado na literatura para o torque de máquinas elétricas (Salon (1990)).

4.3.1 Parametrização do Micromotor

Para este estudo, adota-se um micromotor com os seguintes parâmetros base:

$$V = 80 \text{ V}$$

$$r_{gap} = 50,75 * 10^{-6} \text{ m}$$

$$gap = 1,5 * 10^{-6} \text{ m}$$

$$profundidade = 2,2 * 10^{-6} \text{ m}$$

$$r_{in} = 21 * 10^{-6} \text{ m}$$

$$r_{out} = 100 * 10^{-6} \text{ m}$$

$$r_{corner} = 100 * 10^{-8} \text{ m}$$

$$w_{ti} = \pi/10; \text{ rad}$$

$$h_{ti} = 20 * 10^{-6} \text{ m}$$

$$w_{to} = \pi/10 \text{ rad}$$

$$h_{to} = 40 * 10^{-6} \text{ m}$$

Lembrando que estes parâmetros são referentes ao desenho do micromotor apresentado na figura 1.2, mostrada novamente a seguir.

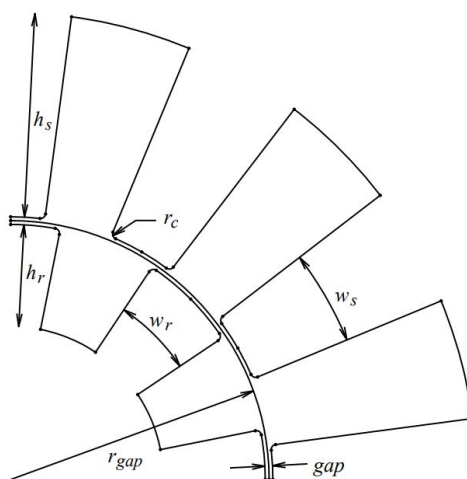


Figura 4.1: Desenho do micromotor com identificação dos principais parâmetros de projeto. r_{gap} : Raio do entreferro do micromotor; gap : Comprimento do entreferro do micromotor; w_r : Largura do dente do rotor; h_r : Altura do dente do rotor; w_s : Largura do dente do estator; h_s : Altura do dente do estator; r_c : Raio de curvatura da quina do dente.

Para este estudo, considera-se que os valores de r_{gap} , gap e r_c são mantidos constantes. Os resultados apresentados a seguir referem-se ao valor inicial do vetor x utilizado para a parametrização dos parâmetros do micromotor durante o processo de otimização, conforme descrito ao final do Capítulo 2. Esse primeiro valor de x no processo de otimização é referido como x_0 . Todos os componentes de x_0 , que representam os valores das grandezas indicadas na figura 4.1, possuem os mesmos valores iniciais para análise, sendo estes: 0, 25, 0, 50, 0, 75 e 0, 95. Estes valores foram escolhidos para testar a metodologia com pontos iniciais diversos dentro dos retângulos identificados nas figuras 3.7, 3.8, 3.9 e 3.10.

4.3.2 Resultados para $x_0 = 0, 25$

Aqui são apresentados os resultados obtidos quando o x_k inicial utilizado no método é de 0,25, para um critério de parada (ϵ) de 10^{-6} e um máximo de 2000 iterações. A figura 4.2 traz o design do micromotor antes e depois de passar pelo processo de otimização via método adjunto com 2000 iterações.

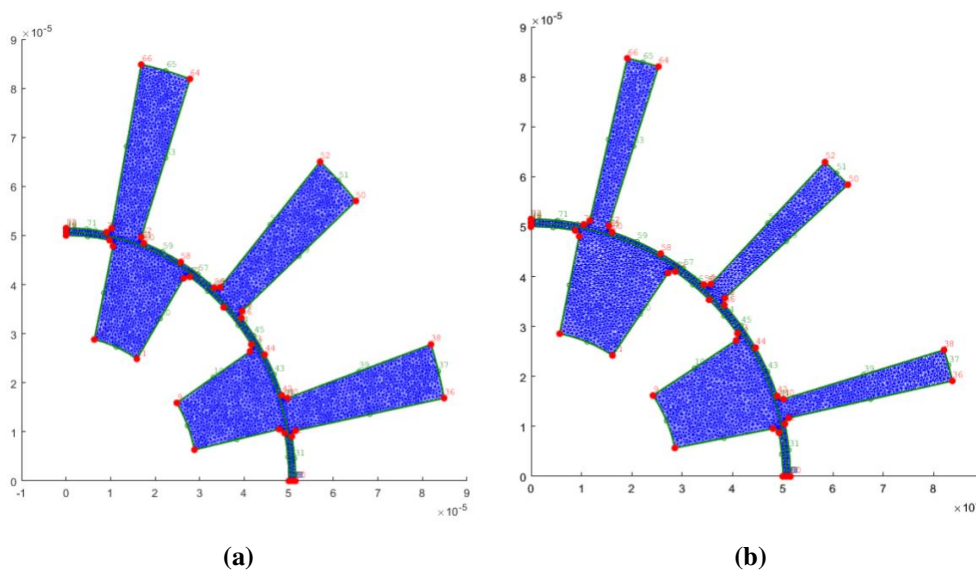


Figura 4.2: (a) Malha do micromotor inicial com $x_0 = 0, 25$. (b) Malha após 2000 iterações.

Através da figura pode-se observar uma clara tendência de aumento no valor da largura do dente do estator (w_s) e diminuição da largura do dente do rotor (w_r), e uma leve tendência de aumento do valor da altura do dente do rotor (h_r). O gráfico a seguir apresenta a variação de $\|x_{k+1} - x_k\|$ ao longo das iterações. Após 26 iterações o valor de $\|x_{k+1} - x_k\|$ é inferior à 10^{-2} , após 213 iterações chegou a 10^{-3} . Ele leva 1335 iterações para atingir valores menores que 10^{-4} e com 1889 iterações atinge o menor valor encontrado de $2,3087 \times 10^{-5}$, mostrando que o valor de 10^{-6} escolhido pode ter sido mais rigoroso do que o problema necessitava e ter acarretado um maior número de iterações para o valor inicial considerado nesta análise.

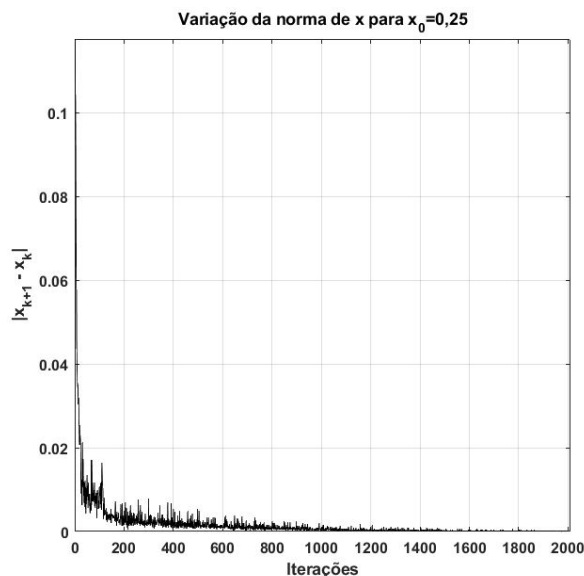


Figura 4.3: Variação de $\|x_{k+1} - x_k\|$ com $x_0 = 0,25$

O valor do torque médio para o micromotor inicial é de 3,211 pNm e o valor final é de 3,3480 pNm, um aumento de 4,2592%, os quais podem ser observados na figura 4.4. O torque máximo considerado no ponto de referência era de 3,5128 pNm e aumentou para 3,6189 pNm, um aumento de 2,9318% para o torque máximo.

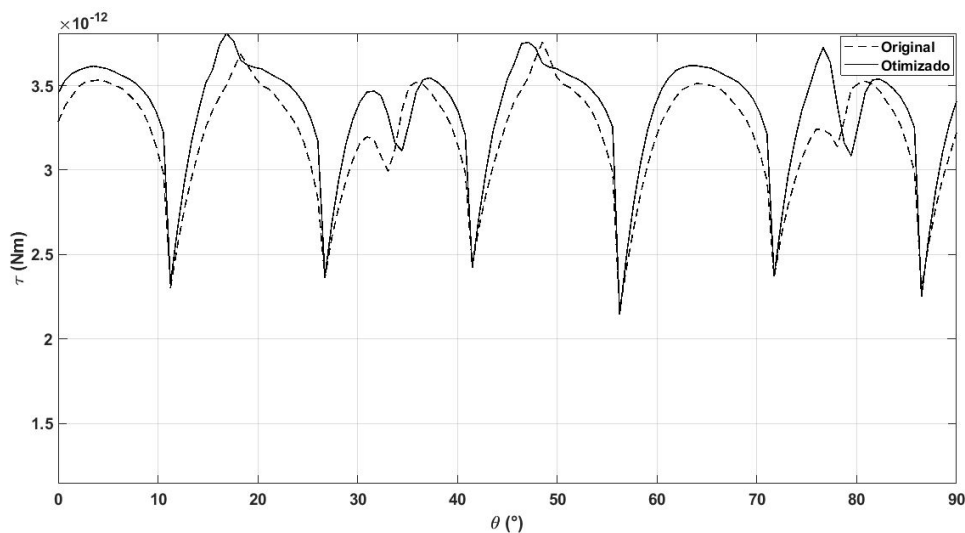


Figura 4.4: Simulação do torque do micromotor antes e depois do método elipsoidal com $x_0 = 0,25$

4.3.3 Resultados para $x_0 = 0,50$

Aqui são apresentados os resultados obtidos quando o x_k inicial utilizado no método é de 0,50, para um valor ϵ de 10^{-6} e um máximo de 2000 iterações. A figura 4.5 traz a malha do micromotor antes e depois da otimização via método adjunto, sendo observada a mesma

tendência de variação de w_r e w_s observada para $x_0 = 0,25$, Neste caso uma tendência de aumento observada para o valor da altura do dente do estator (h_s).

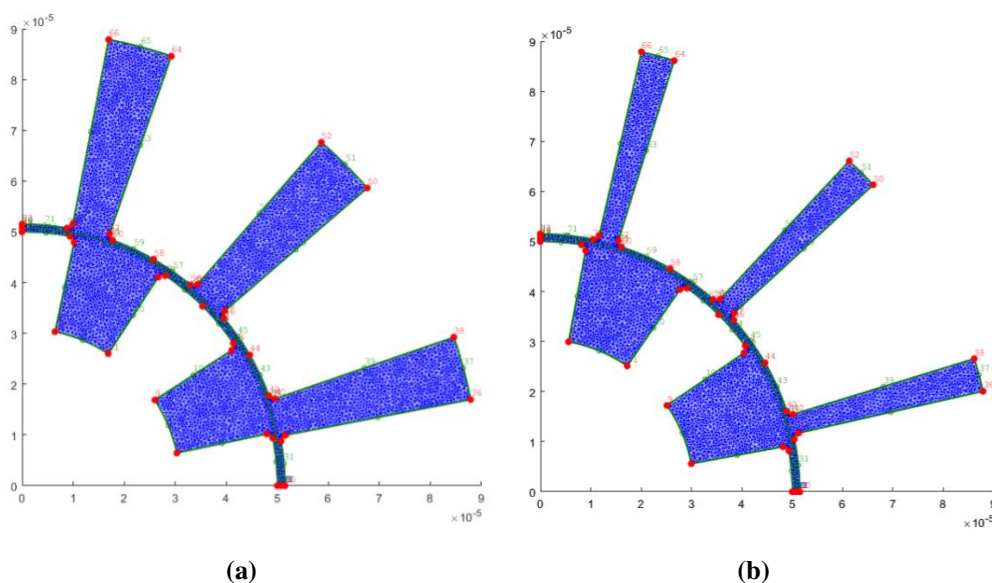


Figura 4.5: Malha do micromotor inicial e final com $x_0 = 0,50$ e 2000 iterações

Com 28 iterações o valor de $\|x_{k+1} - x_k\|$ já era menor que 10^{-2} , com 93 já era inferior à 10^{-3} e com 600 iterações atingiu o critério de parada de $\|x_{k+1} - x_k\| < 10^{-6}$, indicando que provavelmente se obteve um mínimo local na região delimitada pelos valores de x após 600 iterações, conforme mostrado na figura 4.6.

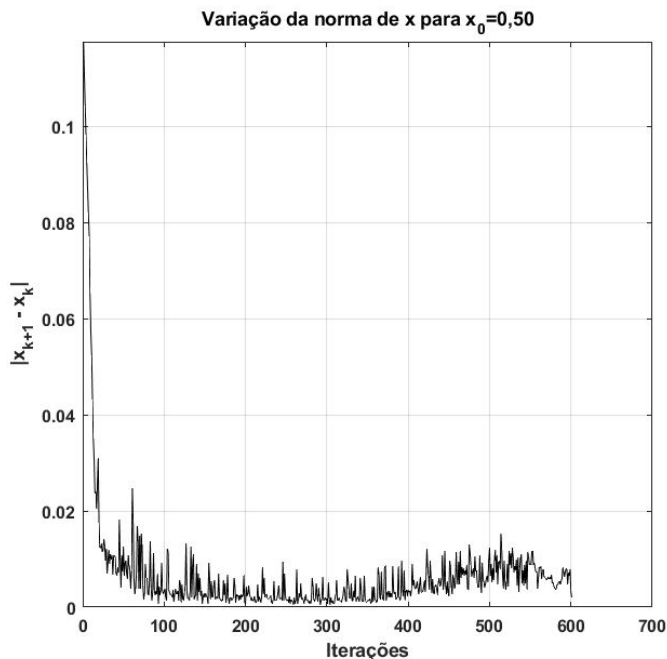


Figura 4.6: Variação de $\|x_{k+1} - x_k\|$ com $x_0 = 0,50$

O valor do torque médio passou de 3,2661 pNm para 3,4360 pNm após a otimização do método adjunto, um aumento de 5,2019%, sendo que o valor do torque no ponto de referência passou de 3,5618 pNm para 3,6706 pNm, indicando um aumento de 3,0546% no valor máximo, conforme apresentado na figura 4.7.

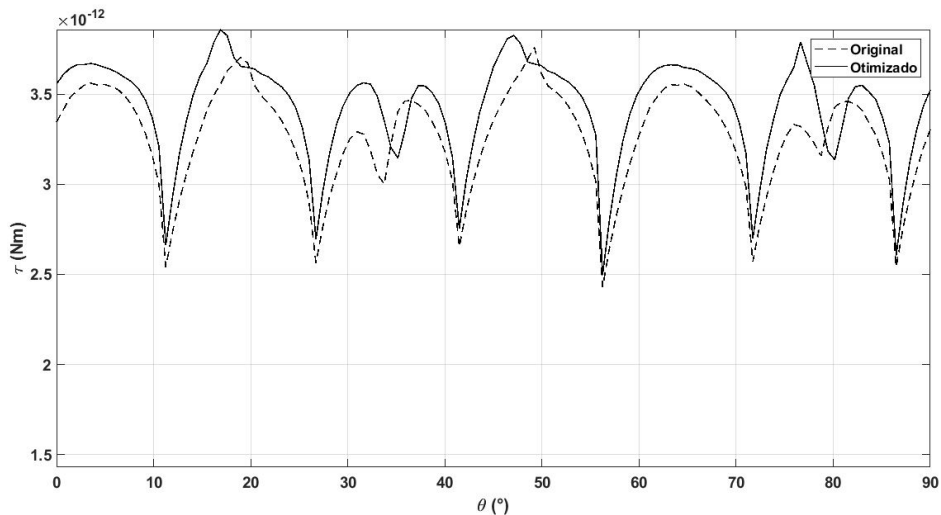


Figura 4.7: Simulação do torque do micromotor antes e depois do método elipsoidal com $x_0 = 0,50$

4.3.4 Resultados para $x_0 = 0,75$

Aqui são apresentados os resultados obtidos quando o x_k inicial utilizado no método é de 0,75, para um valor ϵ de 10^{-6} e um máximo de 2000 iterações, conforme apresentado na figura 4.8.

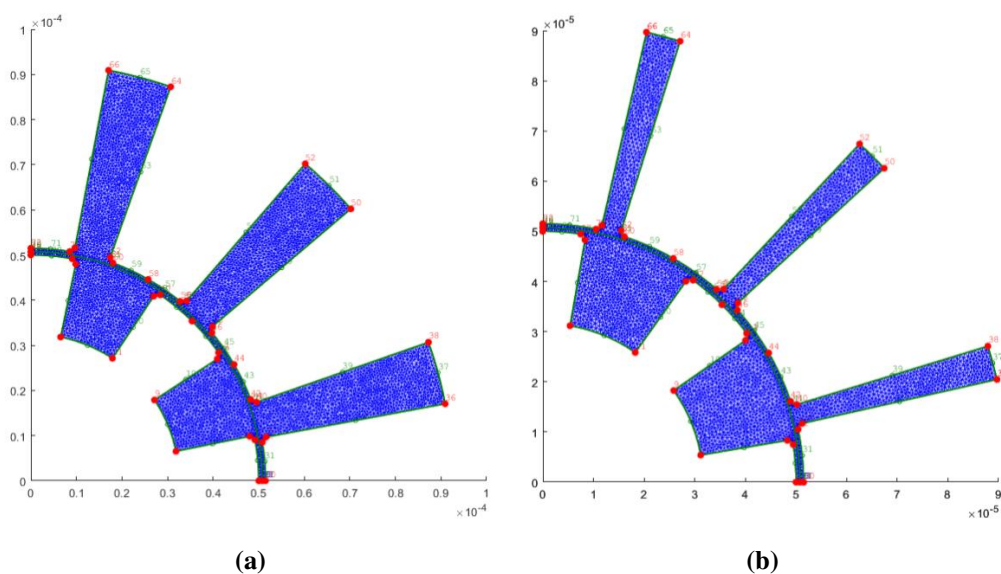


Figura 4.8: Malha do micromotor inicial e final com $x_0 = 0,75$ e 2000 iterações

Para este caso utilizou-se todas as 2000 iterações sem que se atinge-se o critério de parada, sendo que em 30 iterações o valor de $\|x_{k+1} - x_k\|$ já era inferior à 0,01, com 49 já era inferior à 0,001. Com 1525 iterações é inferior à 0,0001 e com 1976 ele atinge seu menor valor para esta execução do método, chegando à $4,2720 * 10^{-5}$, conforme mostrado na figura 4.9.

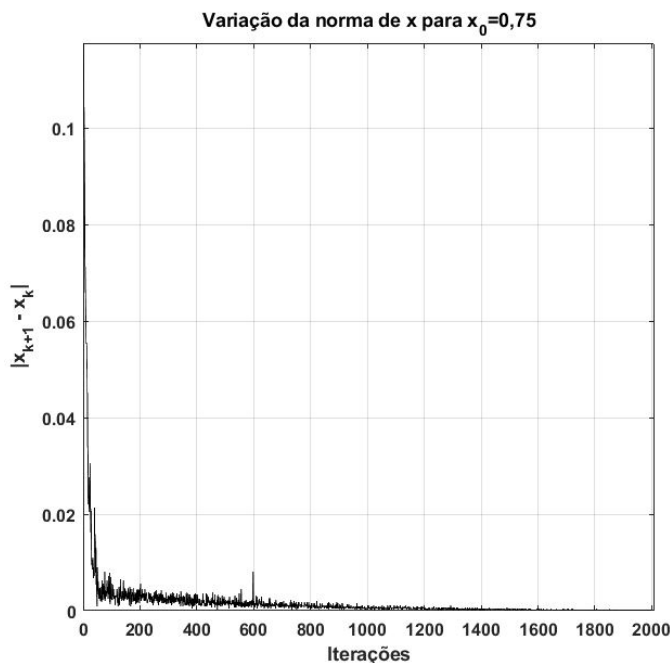


Figura 4.9: Variação de $\|x_{k+1} - x_k\|$ com $x_0 = 0,75$

Neste cenário o valor inicial do torque médio é de 3,3252 pNm e o final é de 3,4836 pNm, indicando um aumento de 4,7636%. O valor máximo é de 3,5885 pNm para 3,6936 pNm, um aumento de 2,9288%. Este comportamento pode ser obtido à partir dos dados da figura 4.10

4.3.5 Resultados para $x_0 = 0,95$

Aqui são apresentados os resultados obtidos quando o x_k inicial utilizado no método é de 0,95, para um valor ϵ de 10^{-6} e um máximo de 2000 iterações, como mostrado na figura 4.12.

Para este caso novamente não se alcança o critério de parada, mesmo após as 2000 iterações. Após 47 iterações o valor de $\|x_{k+1} - x_k\|$ já era inferior à 0,01, com 80 era inferior à 0,001. Com 1499 iterações é inferior à 0,0001 e com 1952 atinge seu menor valor para esta execução do método, chegando à $3,9648 * 10^{-5}$, conforme apresentado na figura 4.12.

O valor do torque médio do desenho original é de 3,3504 pNm e o torque médio ao final do processo de otimização é de 3,5187 pNm, um aumento de 5,02%. O valor do torque no

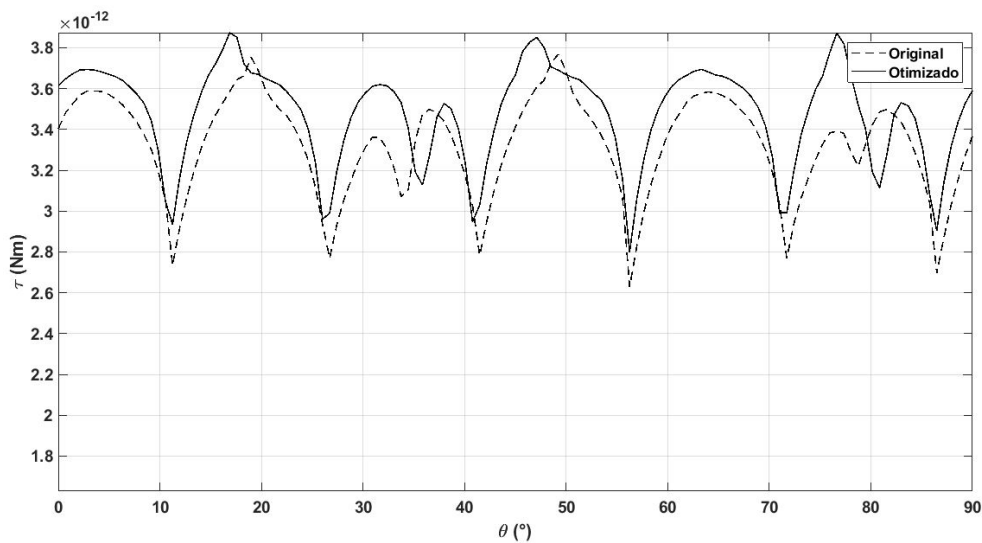


Figura 4.10: Simulação do torque do micromotor antes e depois do método elipsoidal com $x_0 = 0,75$

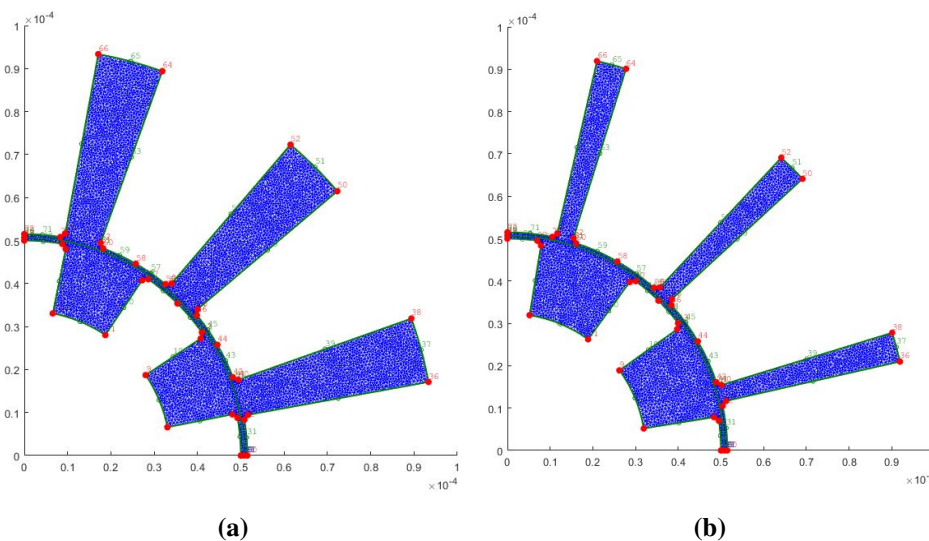


Figura 4.11: Malha do micromotor inicial e final com $x_0 = 0,95$ e 2000 iterações

ponto de referência, por sua vez, passou de 3,6008 pNm para 3,7288 pN, representando um aumento de 3,55%. A curva do torque está apresentada na figura 4.13

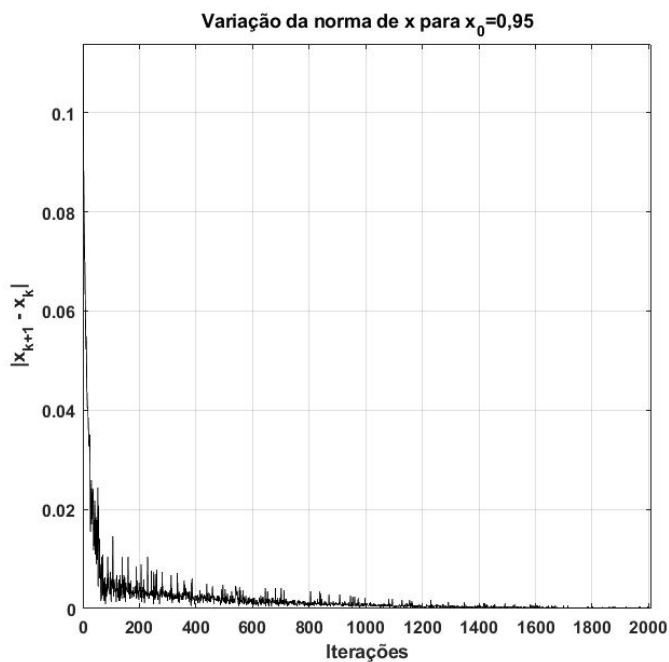


Figura 4.12: Variação de $\|x_{k+1} - x_k\|$ com $x_0 = 0,95$

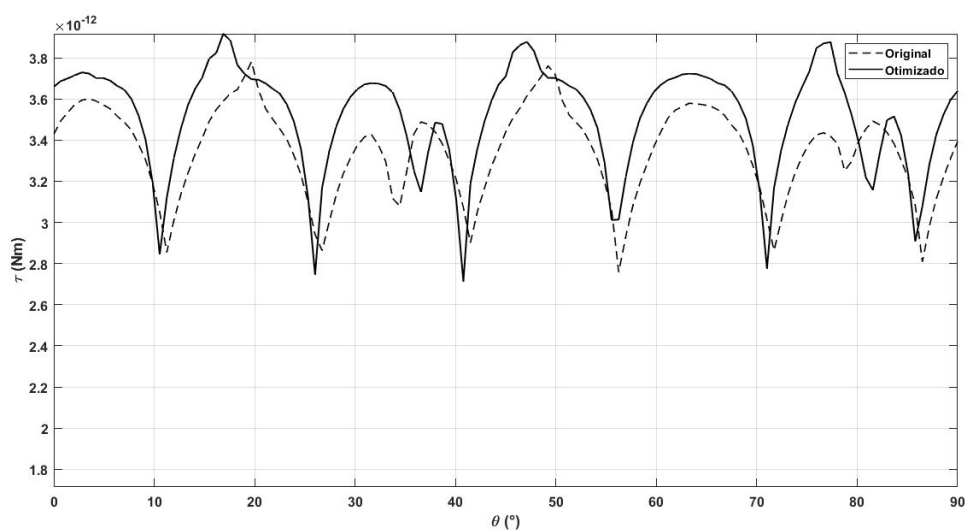


Figura 4.13: Simulação do torque do micromotor antes e depois do método elipsoidal com $x_0 = 0,95$

4.3.6 Comparativo das variáveis

Aqui são apresentadas as análises da variação de w_s , h_s , w_r e h_r ao longo das iterações para o método adjunto e para o CFD, analisando sua variação e os valores finais encontrados.

Analisando a variável w_s , que representa a largura do dente do estator, cuja variação é apresentada nas figuras 4.14 e 4.15, fica visível que se atingiu o maior valor permitido para este problema com menos de 200 iterações com ambos os métodos, deixando evidente que esta variável é muito sensível à variação da função objetivo.

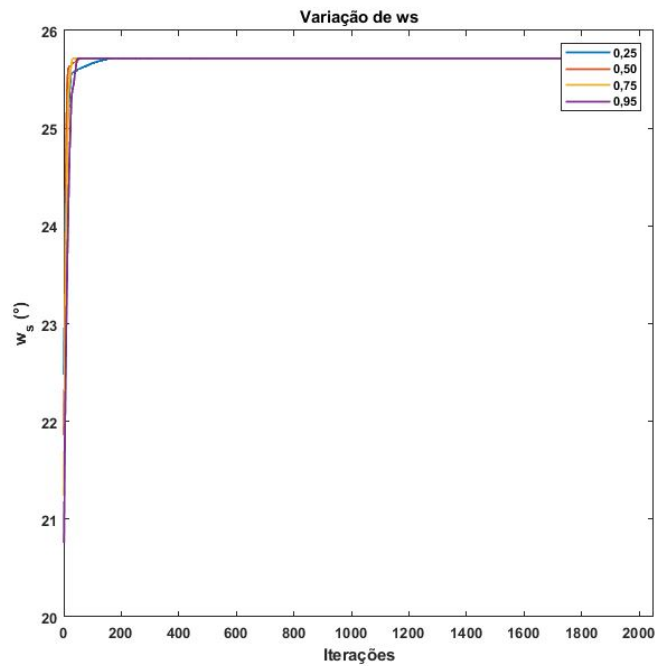


Figura 4.14: Variação de w_s com otimização via método elipsoidal com análise de sensibilidade via método adjunto

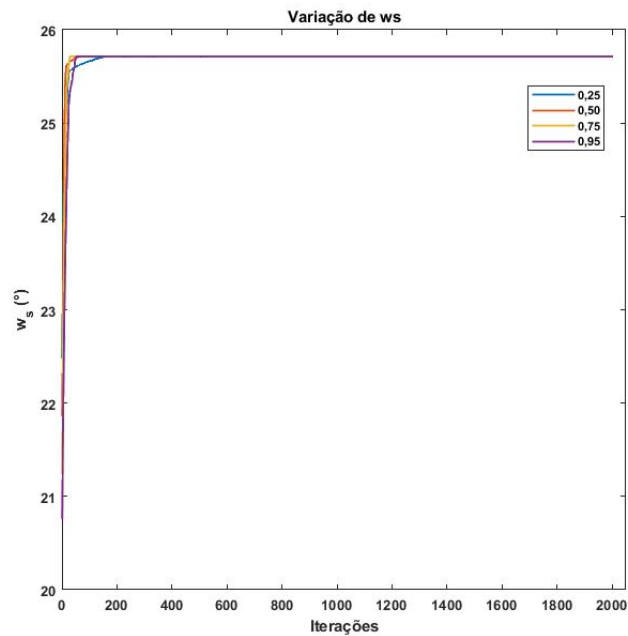


Figura 4.15: Variação de w_s com otimização via método elipsoidal com análise de sensibilidade via método CFD

Nas figuras 4.16 e 4.17 observamos que a variável h_s , que representa a altura do dente do estator, varia consideravelmente mais devagar que a variável w_s , com uma tendência para diminuição do seu valor para a maioria dos casos, sendo a exceção o método adjunto com

ponto inicial $x_0 = 0,5$, onde o mínimo local encontrado resulta em um valor de h_s maior que o inicial ao final da otimização.

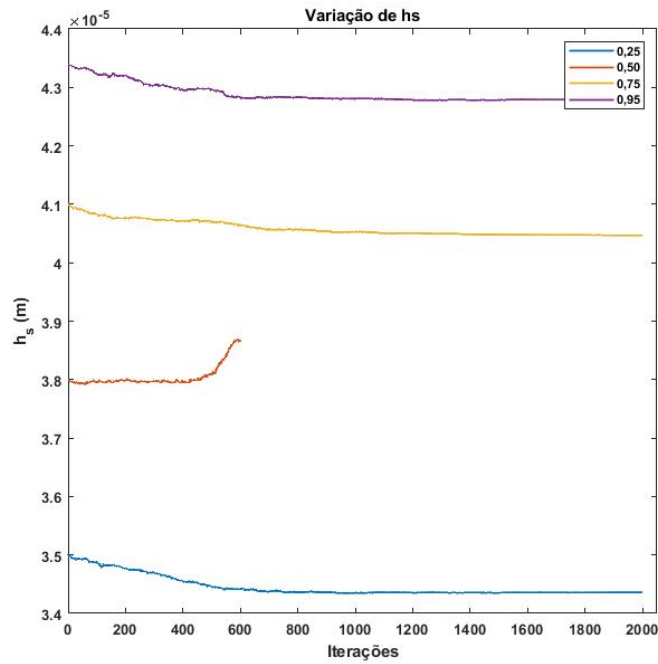


Figura 4.16: Variação de h_s com otimização via método elipsoidal com análise de sensibilidade via método adjunto

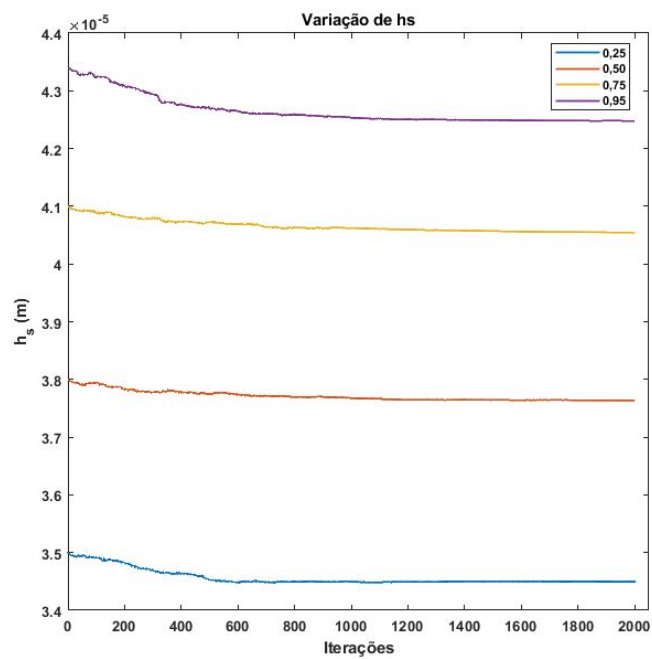


Figura 4.17: Variação de h_s com otimização via método elipsoidal com análise de sensibilidade via método CFD

As figuras 4.18 e 4.19 trazem a variação de w_r e nelas se observa uma clara tendência em

diminuir o valor da variável em ambos os métodos, sendo que após 200 iterações os valores observados oscilam muito pouco para quase todos os casos, novamente com a exceção do caso $x_0 = 0,5$ para o método adjunto em que o valor final aumenta um pouco ao se aproximar do mínimo encontrado.

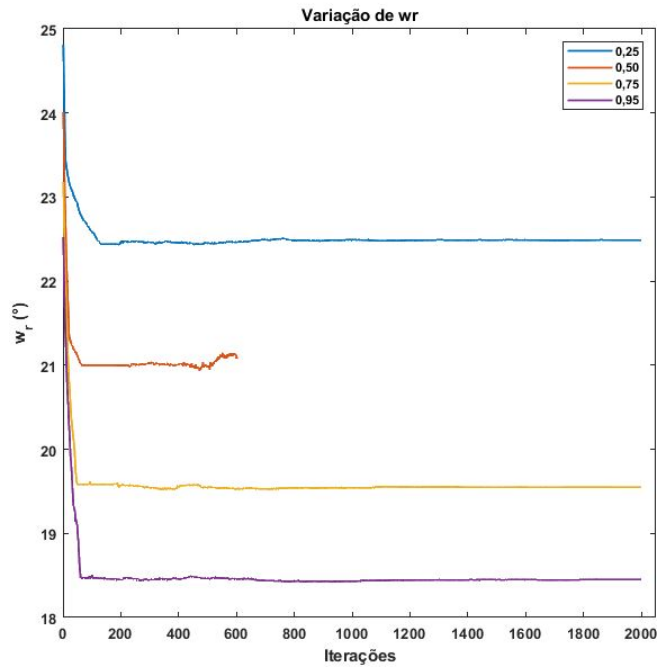


Figura 4.18: Variação de w_r com otimização via método elipsoidal com análise de sensibilidade via método adjunto

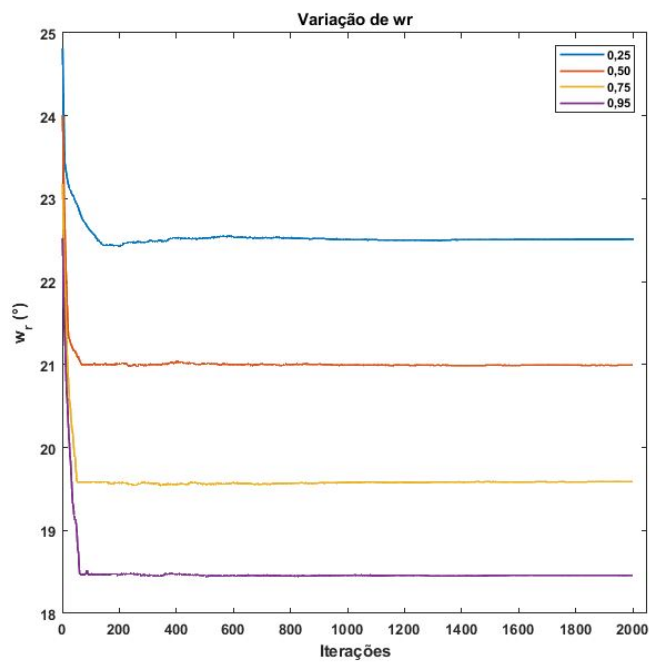


Figura 4.19: Variação de w_r com otimização via método elipsoidal com análise de sensibilidade via método CFD

As figuras 4.20 e 4.21 trazem a variação de h_r e nelas se observa uma clara tendência de aumentar o valor da variável em ambos os métodos, sendo que após 2000 iterações os valores observados ainda apresentam sinais de variação para todos os casos em que um ponto ótimo não é encontrado.

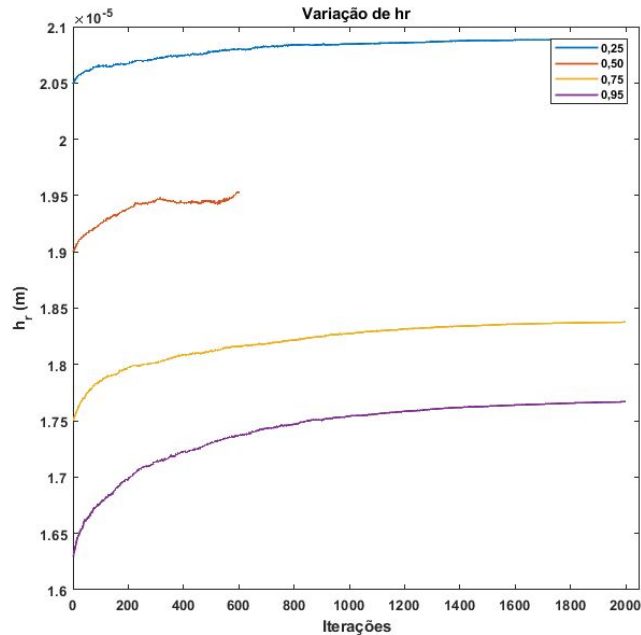


Figura 4.20: Variação de h_r com otimização via método elipsoidal com análise de sensibilidade via método adjunto

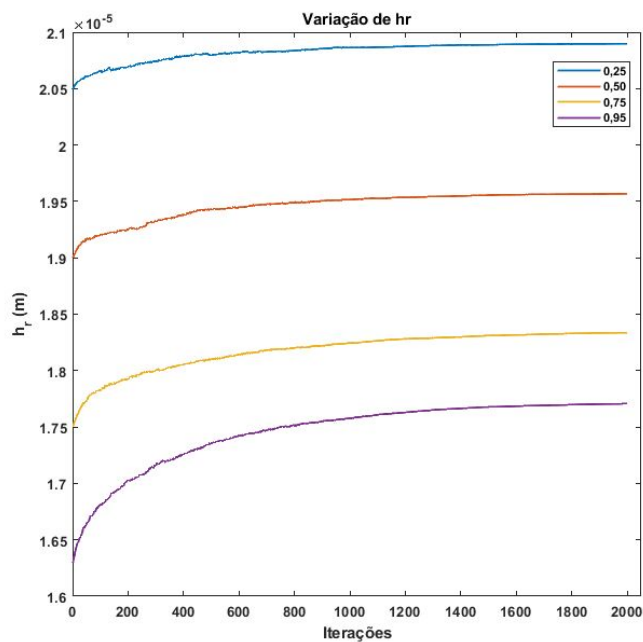


Figura 4.21: Variação de h_r com otimização via método elipsoidal com análise de sensibilidade via método CFD

Neste capítulo é possível observar que a análise de sensibilidade adjunta está validada. Além disso ela consegue obter uma quantidade de informação de sensibilidade da função objetivo de todos os nós do domínio de estudos e com um custo computacional muito menor do que o obtido com o método CFD. A otimização do micromotor eletrostático via método elipsoidal com cortes múltiplos que adota a sensibilidade adjunta obtém aumento do torque nos casos analisados. Apresenta-se a seguir as conclusões finais deste estudo e as propostas de continuidade.

Capítulo 5

Conclusões

Neste capítulo são apresentadas as conclusões obtidas a partir das análises dos resultados deste trabalho.

5.1 Comparativo entre os Métodos Adjunto e CFD

Os resultados deste trabalho mostraram que a utilização do método adjunto para a análise de sensibilidade no problema de otimização de um micromotor eletrostático com o método elipsoidal obteve resultados similares aos obtidos ao aplicar as diferenças finitas centrais. Analisando apenas os valores das sensibilidades, observam-se erros consideravelmente baixos entre os dois métodos. Os resultados encontrados pelo método de otimização são similares, mostrando que os métodos aplicados funcionaram de maneira equivalente para os casos testados neste estudo.

5.2 Comparativo do Tempo de Execução Entre o Método Adjunto e o CFD

Ao se analisar o tempo de execução dos métodos de otimização, observa-se que o método adjunto é em média aproximadamente 6,5 vezes mais rápido que o método CFD. Espera-se que esta diferença aumente com o aumento do número de variáveis utilizadas durante a otimização, uma vez que o método adjunto é relativamente indiferente ao número de variáveis analisadas, obtendo a sensibilidade de todos os nós da malha. Enquanto isso, o método CFD obtém apenas a sensibilidade dos nós de interesse, o que aumentaria significativamente o tempo computacional necessário para obter a mesma quantidade de informação de sensibilidade.

5.3 Resultados da Otimização

Os resultados da otimização demonstraram que a utilização do método adjunto para a análise de sensibilidade no problema de otimização de um micromotor eletrostático com o método elipsoidal obteve resultados similares aos obtidos ao aplicar as diferenças finitas centrais. Houve uma melhoria de aproximadamente 4 a 5% no valor do torque médio do micromotor e cerca de 3% no valor do torque máximo. Quanto aos parâmetros analisados, observa-se que o método aplicado na otimização converge rapidamente para os parâmetros w_r e w_s , com os valores de w_s aumentando ao final do processo de otimização, enquanto os valores de w_r diminuíram. Os parâmetros h_s e h_r não convergem de maneira similar, com h_s tendendo a valores menores e h_r apresentando um aumento como resultado do processo de otimização para a maioria dos testes realizados.

5.4 Conclusões Finais

Em síntese, os resultados deste estudo demonstraram que a aplicação do método elipsoidal na otimização de um micromotor eletrostático, aliada à análise de sensibilidade via método adjunto, apresenta resultados comparáveis aos obtidos com o uso de diferenças finitas centrais. Os valores de sensibilidade obtidos são consistentes entre os métodos, refletindo em resultados similares ao final da etapa de otimização. Além disso, é observado que o método adjunto é significativamente mais rápido em termos de tempo de execução em comparação com o método CFD, indicando sua eficiência computacional, especialmente em cenários com um maior número de variáveis.

Esses resultados evidenciam a viabilidade e a eficácia do método elipsoidal em conjunto com a análise de sensibilidade via método adjunto para a otimização de micromotores eletrostáticos. A equivalência de resultados entre os métodos testados sugere que a abordagem proposta neste estudo pode ser uma alternativa eficiente e precisa para aprimorar o desempenho desses dispositivos. Os resultados obtidos contribuem para o avanço do conhecimento na área de engenharia elétrica e destacam a importância da otimização e análise de sensibilidade na melhoria de sistemas eletromecânicos de alta precisão.

Capítulo 6

Trabalhos Futuros

Dentre os resultados das análises deste trabalho, observa-se algumas possibilidades para possíveis trabalhos futuros, que são brevemente apresentados nesta seção.

- Trabalhar com uma seleção diferente dos conjuntos de nós cuja análise de sensibilidade é utilizada, uma vez que nem todos os nós selecionados afetaram significativamente a análise de sensibilidade obtida e adotada durante o processo de otimização.
- Identificar a aplicabilidade do método para mais variáveis de projeto do micromotor, como o raio do micromotor e o comprimento do entreferro, que são variáveis importantes para o funcionamento do micromotor, mas que não foram abordadas neste trabalho.
- Aplicar o método proposto a diferentes micromotores, com um número variável de polos e dimensões diferentes, para que se possa entender melhor as limitações do método proposto e sua aplicabilidade.
- Trabalhar com diferentes tipos de motores, como motores de indução ou motores CC, já que a metodologia aplicada ao micromotor não é necessariamente exclusiva para esse tipo de motor.

Referências Bibliográficas

- Bakr, M. (2013). *Nonlinear Optimization in Electrical Engineering with Applications in MATLAB®*. Computing and Networks. Institution of Engineering and Technology.
- Cioaca, A.; Zavala, V. e Constantinescu, E. (2011). Adjoint sensitivity analysis for numerical weather prediction: Applications to power grid optimization. In *Proceedings of the first international workshop on High performance computing, networking and analytics for the power grid*, pp. 35–42.
- de Ávila, B. E.-F.; Angsantikul, P.; Li, J.; Lopez-Ramirez, M. A.; Ramírez-Herrera, D. E.; Thamphiwatana, S.; Chen, C.; Delezuk, J. A.; Samakapiruk, R.; Ramez, V.; Obonyo, M.; Zhang, L. e Wang, J. (2017). Micromotor-enabled active drug delivery for in vivo treatment of stomach infection. *Nature Communications*, 8.
- Dufour, I.; Sarraute, E. e Abbas, A. (1996). Optimization of the geometry of electrostatic micromotors using only analytical equations. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 6:108–111.
- Dufour, I.; Sarraute, E.; Francais, O. e Abbas, A. (1997). Simulation of self-control of an electrostatic micromotor for an intravascular echographic system. *Sensors and Actuators A: Physical*, 62(1):748–751.
- Gao, C.; Lin, Z.; Wang, D.; Wu, Z.; Xie, H. e He, Q. (2019). Red blood cell-mimicking micromotor for active photodynamic cancer therapy. *ACS applied materials & interfaces*.
- Gourragui, I.; Leonard, F.; Abba, G. e Vivalda, J.-C. (2007). Current waveforms optimization for a switched reluctance motor. *International Journal of Tomography & Statistics*, 6:152–158.
- Johnson, C. (2012). *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. Courier Corporation.
- Kode, V. e Cavusoglu, M. C. (2007). Design and characterization of a novel hybrid actuator using shape memory alloy and dc micromotor for minimally invasive surgery applications. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 12:455–464.

- Kuci, E.; Henrotte, F.; Duysinx, P.; Dular, P. e Geuzaine, C. (2016). Design sensitivity analysis for shape optimization of nonlinear magnetostatic systems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 52(3):1–4.
- Kurmendra e Kumar, R. (2020). A review on rf micro-electro-mechanical-systems (mems) switch for radio frequency applications. *Microsystem Technologies*, 27:2525 – 2542.
- Lafontan, X.; Pressecq, F.; Beaudoin, F.; Rigo, S.; Dardalhon, M.; Roux, J.-L.; Schmitt, P.; Kuchenbecker, J.; Baradat, B.; Lellouchi, D.; Le-Touze, C. e Nicot, J.-M. (2003). The advent of mems in space. *Microelectronics Reliability*, 43(7):1061–1083.
- Lee, H.-b. e Ida, N. (2014). An interpretation of adjoint sensitivity analysis for shape optimal design of electromagnetic systems. In *9th IET International Conference on Computation in Electromagnetics (CEM 2014)*, pp. 1–2.
- Li, D. (2006). *SENSITIVITY ANALYSIS WITH FINITE-ELEMENT METHOD FOR MICROWAVE DESIGN AND OPTIMIZATION*. PhD thesis, McMaster University.
- Li, M.; Guimarães, F. G. e Lowther, D. A. (2013). A multiobjective approach for designing the rotor of brushless motors. *IEEE Transactions on Magnetics*, 49(5):2279–2282.
- Lin, Z. W.; Li, J.; Zhang, B.-H. e Di, X. (2009). Design optimization of polysilicon electrostatic micromotor based on genetic algorithm. *2009 Second International Conference on Information and Computing Science*, 3:130–133.
- Lisboa, A. (2008). *Refinamento de Delaunay para complexos curvos*. Doutorado em engenharia elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, UFMG, Brasil.
- Lisboa, A. C.; Saldanha, R. R. e Vieira, D. A. G. (2009). Optimization of electrostatic micromotor by a nonlinear interior point method. In *The 17th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields (COMPUMAG)*, Florianópolis. Proceedings of the 17th COMPUMAG, 2009.
- Lisboa, A. C.; Vieira, D. A. G.; Vasconcelos, J. A.; Saldanha, R. R. e Takahashi, R. H. C. (2006). Multiobjective optimization of an electrostatic micromotor using the multiple cuts ellipsoid method. *2006 12th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation*, pp. 304–304.
- Meeker, D. (2018). Sliding band motion model for electric machines. *Finite Element Method Magnetics*.
- Mezyk, A. (1994). Minimization of transient forces in an electro-mechanical system. *Structural optimization*, 8:251–256.

- Negm, M. H.; Bakr, M. H.; Ahmed, O. S.; Nikolova, N. K. e Bandler, J. W. (2014). Wideband second-order adjoint sensitivity analysis exploiting tlm. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 62(3):389–398.
- Nikolova, N.; Bandler, J. e Bakr, M. (2004). Adjoint techniques for sensitivity analysis in high-frequency structure cad. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 52(1):403–419.
- Özgül, Ö. e Kuzuoğlu, M. (2018). *Matlab-based finite element programming in electromagnetic Modeling*. CRC Press.
- Paganotti, A. L.; Saldanha, R. R.; Afonso, M. M. e Lisboa, A. C. (2022). Fast sensitivity analysis of electric potential distribution of transmission lines by using adjoint method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 58(9):1–4.
- Park, I. H. (2019). *Design sensitivity analysis and optimization of electromagnetic systems*. Springer.
- Salon, S. (1990). Finite element analysis of electric machinery. *IEEE Computer Applications in Power*, 3(2):29–32.
- Shor, N. Z. (1977). Cut-off method with space extension in convex programming problems. *Cybernetics*, 13(1):94–96.
- Ŝolín, P. (2005). *Partial differential equations and the finite element method*. John Wiley & Sons.
- SOUSA, M. H. S.; PAGANOTTI, A. L.; LISBOA, A. C. e ALDANHA, R. R. (2022). Optimization of an electrostatic micromotor with adjoint-state method sensitivity analysis. In *Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, 2022, Cancun. Proceedings of COMPUMAG 2021*.
- Trimmer, W. S. e Gabriel, K. J. (1987). Design considerations for a practical electrostatic micro-motor. *Sensors and Actuators*, 11(2):189–206.
- Vieira, D. G.; Lisboa, A. C. e Saldanha, R. R. (2010). An enhanced ellipsoid method for electromagnetic devices optimization and design. *IEEE Transactions on Magnetics*, 46(8):2843–2851.
- Vinhais, H. F.; de Godoy, P. H. e Silva, E. C. N. (2005). Optimized design on an electrostatic side-drive micromotor. In *ABCM Symposium Series in Mechatronics*, volume 2, pp. 433–450.

- Yudin, D. e Nemirovski, A. (1976). Informational complexity and effective methods for the solution of convex extremal problems. *Matematicheskie Metody Resheniya Èkonomicheskikh Zadach.*, 12.
- Zhang, H. e Wang, S. (2017). Topology optimization of rotor pole in switched reluctance motor for minimum torque ripple. *Electric Power Components and Systems*, 45(8):905–911.

Apêndice A

Torque por Tensor de Maxwell

Partindo da equação de Lorentz para o cálculo da força, temos:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{A.1})$$

que pode ser reescrita na forma linear ao dividir os dois lados da equação por dV , assim:

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \quad (\text{A.2})$$

onde \vec{f} é a força por unidade de volume. Agora podemos substituir ρ e \vec{J} a partir das equações de Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (\text{A.4})$$

e chegamos na equação A.5

$$\vec{f} = \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} \quad (\text{A.5})$$

Utilizando o vetor de Poynting, temos que

$$\frac{\partial(\vec{E} \times \vec{B})}{\partial t} = \frac{\partial(\vec{E})}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{E} \times \frac{\partial(\vec{B})}{\partial t} = \frac{\partial(\vec{E})}{\partial t} \times \vec{B} - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) \quad (\text{A.6})$$

e podemos reescrever A.5 como:

$$\vec{f} = \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial(\vec{E} \times \vec{B})}{\partial t} - \epsilon_0 \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) \quad (\text{A.7})$$

Adicionando o termo $(\nabla \cdot \vec{B}) \vec{B}$ para manter a simetria e sabendo que $(\nabla \cdot \vec{B}) = 0$ (Lei de Gauss), e reorganizando os termos, temos a equação a seguir:

$$\vec{f} = \epsilon_0[(\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})] + \frac{1}{\mu_0}[(\nabla \cdot \vec{B})\vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})] - \epsilon_0 \frac{\partial(\vec{E} \times \vec{B})}{\partial t} \quad (\text{A.8})$$

a qual pode ser simplificada novamente se utilizarmos a seguinte identidade vetorial do cálculo:

$$\frac{1}{2}\nabla(\vec{A} \cdot \vec{A}) = \vec{A} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{A} \quad (\text{A.9})$$

O que resulta na equação A.10

$$\vec{f} = \epsilon_0[(\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} + (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E}] + \frac{1}{\mu_0}[(\nabla \cdot \vec{B})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B}] - \frac{1}{2}\nabla(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2) - \epsilon_0 \frac{\partial(\vec{E} \times \vec{B})}{\partial t} \quad (\text{A.10})$$

A partir de A.10 é possível definir o tensor de Maxwell como sendo

$$\mathbf{T} = \epsilon_0 \left(\vec{E} \otimes \vec{E} - \frac{1}{2}|\vec{E}|^2 \mathbf{I} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{B} \otimes \vec{B} - \frac{1}{2}|\vec{B}|^2 \mathbf{I} \right) \quad (\text{A.11})$$

e \vec{f} pode ser reescrito como:

$$\vec{f} = \nabla \cdot \mathbf{T} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial S}{\partial t} \quad (\text{A.12})$$

Para um problema eletrostático, como o micromotor simulado via FEM, a equação A.11 pode ser ainda mais simplificada, como mostrado a seguir:

$$\mathbf{T} = \epsilon_0 \left(\vec{E} \otimes \vec{E} - \frac{1}{2}|\vec{E}|^2 \mathbf{I} \right) \quad (\text{A.13})$$

e A.12 pode ser reescrito como:

$$\vec{f} = \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (\text{A.14})$$

$$d\vec{f} = \int \nabla \cdot \mathbf{T} dL \quad (\text{A.15})$$

onde $d\vec{f}$ é a densidade linear de força obtida ao longo da curva que envolve o rotor do micromotor. Como esta curva não é contínua, se trabalha com o valor do torque nos elementos pelos quais ela passa, sendo assim temos não uma integral mas sim um somatório.

$$d\vec{f} = \sum \nabla \cdot \mathbf{T} dL \quad (\text{A.16})$$

Agora que se conhece a densidade de força, podemos escrever a força como o produto de A.16 pela profundidade da máquina:

$$d\vec{F} = \sum \nabla \cdot \mathbf{T} \times d \quad (\text{A.17})$$

Onde $d\vec{F}$ é a densidade superficial de força ao longo da curva que envolve o rotor e d é o comprimento de cada seguimento onde se determinou o valor de \mathbf{T} . O torque, por sua vez, é obtido por:

$$\tau = l(\vec{r} \times d\vec{F}) \quad (\text{A.18})$$

onde l é o comprimento do micromotor e \vec{r} é o raio da curva que o envolve e o produto vetorial de \vec{r} e $d\vec{F}$ garante que apenas as componentes perpendiculares a \vec{r} , que por sua vez são também tangenciais à superfície analisada, sejam computadas no cálculo do torque, pois estas são as componentes da força responsáveis pela rotação do rotor.