

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-graduação em Física

Álvaro Antônio Alves Louzi

**ESTABILIDADE DO VÁCUO NA APROXIMAÇÃO
DE UM LAÇO DE UM MODELO 331**

Belo Horizonte
2024

Álvaro Antônio Alves Louzi

ESTABILIDADE DO VÁCUO NA APROXIMAÇÃO DE UM LAÇO DE UM MODELO 331

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Bruce Lehmann Sánchez Vega

Belo Horizonte
2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

L895e Louzi, Álvaro Antônio Alves.
Estabilidade do vácuo na aproximação de um laço de um modelo 331 / Álvaro
Antônio Alves Louzi. – 2024.
202 f. : il.

Orientador: Bruce Lehmann Sánchez Vega.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais,
Departamento de Física.
Bibliografia: f. 183-191.

1. Vácuo. 2. Modelo padrão. 3. Grupo de renormalização. I. Título. II.
Sánchez Vega, Bruce Lehmann. III. Universidade Federal de Minas Gerais,
Departamento de Física.

CDU – 539.2 (043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO]

ATA DA SESSÃO DE ARGUIÇÃO DA 718ª DISSERTAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA, DEFENDIDA POR ÁLVARO ANTÔNIO ALVES LOUZI, orientado pelo professor Bruce Lehmann Sanchez Vega, para obtenção do grau de **MESTRE EM FÍSICA**. Às 15 horas de vinte e sete de fevereiro de 2024, reuniu-se a Comissão Examinadora, composta pelos professores **Bruce Lehmann Sanchez Vega** (Orientador - Departamento de Física/UFMG), **Antônio Sérgio Teixeira Pires** (Departamento de Física/UFMG) e **Alex Gomes Dias** (Centro de Ciências Naturais e Humanas/UFABC) para dar cumprimento ao Artigo 37 do Regimento Geral da UFMG, submetendo o bacharel **ÁLVARO ANTÔNIO ALVES LOUZI** à arguição de seu trabalho de dissertação, que recebeu o título de **“Estabilidade do vácuo na aproximação de um laço de um modelo 331”**. O candidato fez uma exposição oral de seu trabalho durante aproximadamente 50 minutos. Após esta, os membros da comissão prosseguiram com a sua arguição e apresentaram seus pareceres individuais sobre o trabalho, concluindo pela aprovação do candidato.

Belo Horizonte, 27 de fevereiro de 2024.

Prof. Bruce Lehmann Sanchez Vega

Orientador do aluno

Departamento de Física/UFMG

Prof. Antônio Sérgio Teixeira Pires

Departamento de Física/UFMG

Prof. Alex Gomes Dias

Centro de Ciências Naturais e Humanas/UFABC

Candidato: Álvaro Antônio Alves Louzi



Documento assinado eletronicamente por **Alvaro Antonio Alves Louzi, Usuário Externo**, em 29/02/2024, às 11:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alex Gomes Dias, Usuário Externo**, em 29/02/2024, às 11:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Sergio Teixeira Pires, Professor do Magistério Superior**, em 01/03/2024, às 09:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Bruce Lehmann Sanchez Vega, Coordenador(a)**, em 01/03/2024, às 17:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3066064** e o código CRC **6DBCDBF1**.

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer ao apoio e amor incondicional vinda da minha família, em especial, aos meus pais Edgar e Lídia, e ao meu irmão Guilherme. O suporte que vocês me deram durante toda a minha trajetória é a maior prova de amor que tenho e terei ao longo da minha vida.

Também quero agradecer aos meus amigos que fiz ao longo do caminho para que pudesse estar onde estou, pelas conversas, risos e abraços. Vocês com certeza tornaram a caminhada mais leve, e também, mais divertida.

À minha namorada Karina, por qual eu sou muito grato pelo amor, paciência e conselhos que você me deu para que eu me tornasse uma pessoa melhor e mais determinada.

Ao Professor Bruce Vega, que considero, não somente meu orientador, mas também um amigo que fiz nesta trajetória. Obrigado por acreditar em meu potencial e pela mentoria realizada desde 2020.

A CAPES, que financiou a minha bolsa de estudos para que eu pudesse me dedicar ao mestrado de forma exclusiva.

Por último, mas não menos importante, a todos que de alguma forma puderam me ajudar, direta ou indiretamente, na construção desta dissertação.

Muito obrigado,

Álvaro Antônio Alves Louzi

*“O diabo desta vida é que entre cem caminhos temos que escolher apenas um,
e viver com a nostalgia dos outros noventa e nove.”*

Fernando Sabino

Resumo

A presente dissertação de Mestrado examina o Modelo Padrão da Física de Partículas, detalhando suas interações e peculiaridades a fim de motivar o estudo de modelos além do Modelo Padrão. No próximo capítulo, são efetuados os cálculos de correções quânticas a um laço para uma teoria geral invariante de gauge sob $SU(N)$, de forma a obter as equações do grupo de renormalização. Estas equações são fundamentais, dentre outros motivos, para analisar a estabilidade de extensões do Modelo Padrão, em especial, a estabilidade do vácuo do Modelo 331 econômico. Este trabalho visa fornecer uma síntese das principais ferramentas para o estudo fenomenológico de extensões do Modelo Padrão, com aplicação inédita ao Modelo 331 econômico.

Palavras-chave: modelo 331, estabilidade do vácuo, extensão modelo padrão, equação grupo de renormalização

Abstract

In this Master thesis, we examined the Standard Model, detailing its interactions and characteristics, in order to motivate the study of models beyond Standard Model (BSM). In the next chapter, the one-loop calculations are evaluated to a generic $SU(N)$ theory, to obtain the Renormalization Group Equations. These equations are fundamentals, among other reasons, to analyze the stability of extensions of the Standard Model. Specifically, we aim to study the economical 331 model. Besides, this model aims to provide a synthesis of the main tools to the phenomenological study of extensions of the Standard Model, with an unprecedented application to the economical 331 model.

Keywords: 331 model, vacuum stability, beyond standard model, renormalization group equations.

Lista de ilustrações

Figura 1 – As anomalias dos grupos de gauge do Modelo Padrão.	21
Figura 2 – A anomalia gravitacional no Modelo Padrão.	21
Figura 3 – Autointerações do campo de Higgs.	28
Figura 4 – Interações entre o bóson de Higgs e os bósons vetoriais W^\pm, Z^0	29
Figura 5 – Interações leptônicas com os bósons vetoriais do Modelo Padrão.	33
Figura 6 – Transição de sabor dos quarks mediado pelos bósons W^\pm	35
Figura 7 – Vértice de interação cúbica entre os bósons W^\pm com Z^0 ou γ	36
Figura 8 – Interações quárticas dos bósons W^\pm, Z^0 e γ	37
Figura 9 – Diagrama de Feynman a um laço do propagador do fóton.	40
Figura 10 – Contorno com ramificação em $4m^2$	43
Figura 11 – Soma dos diagramas da polarização do vácuo.	45
Figura 12 – Correção a um laço para o propagador do elétron.	47
Figura 13 – Correção a um laço do vértice do eletromagnetismo quântico.	50
Figura 14 – Diagramas de Feynman dos bósons de gauge SU(N) a um laço.	60
Figura 15 – O propagador renormalizado dos férmions.	63
Figura 16 – Diagramas a um laço que compõe o vértice renormalizado da interação férmion-bóson-férmion.	64
Figura 17 – Correção ao propagador escalar pelo acoplamento de Yukawa.	68
Figura 18 – Diagramas a um laço do propagador escalar.	69
Figura 19 – Correções a um laço da interação de Yukawa.	71
Figura 20 – Diagramas da contribuição λ^2 para o acoplamento quártico.	73
Figura 21 – As correções de ordem g^2 ao acoplamento quártico escalar.	74
Figura 22 – Diagramas de ordem g^4 a um laço para o acoplamento quártico.	75
Figura 23 – Correção do acoplamento quártico escalar a um laço pelo acoplamento de Yukawa.	76
Figura 24 – Região dos parâmetros para o modelo de dubleto de Higgs inerte.	90
Figura 25 – Região dos parâmetros orbitais.	94
Figura 26 – Região dos parâmetros para o modelo <i>triplet seesaw</i>	95
Figura 27 – Exemplos de diagramas de Feynman conectado e desconectado.	97
Figura 28 – Exemplos de diagramas 1PI.	100
Figura 29 – Região dos parâmetros para o modelo de dubletos de Higgs inerte considerando as correções quânticas.	117
Figura 30 – Região dos parâmetros para o modelo <i>triplet seesaw</i> considerando as correções quânticas.	119
Figura 31 – Anomalias não triviais dos modelos 331.	126

Figura 32 – As interações cúbicas do bóson escalar H_3 com os novos bósons de gauge do Modelo 331 econômico.	132
Figura 33 – As interações quárticas entre os bósons escalares H_3 e H_5 com os bósons de gauge. O bóson escalar H_5 consiste somente de interações de ordem quártica.	132
Figura 34 – O acoplamento de Yukawa dos novos quarks pesados.	133
Figura 35 – Exemplos de diagramas contendo interações quárticas entre bósons escalares e vetoriais.	149
Figura 36 – Exemplo de diagramas contendo interações cúbicas entre os bósons escalares.	150
Figura 37 – Exemplos de diagramas contendo interações quárticas de bósons carregados eletricamente.	152
Figura 38 – Diagramas contendo as interações quárticas entre o bóson de Higgs e os bósons vetoriais neutros.	154
Figura 39 – Alguns exemplos das novas interações no setor leptônico de Yukawa, quando comparadas ao Modelo Padrão.	159
Figura 40 – Alguns exemplos das correntes FCNC no setor quarkônico.	161
Figura 41 – As novas interações dos férmions do Modelo Padrão mais o neutrino destro, com os novos bósons de gauge advindos do Modelo 331.	165
Figura 42 – As interações entre os quarks do Modelo Padrão com os novos quarks de quarta e quinta geração, por intermédio dos bósons de gauge X^0, Y^-	166
Figura 43 – Região dos valores esperados do vácuo para o modelo 331 econômico.	173
Figura 44 – Estabilidade do vácuo a um laço para o Modelo 331 econômico.	178
Figura 45 – Comparação entre a massa do bóson escalar neutro mais pesado junto ao quark mais pesado.	179
Figura 46 – Região dos parâmetros a um laço para o Modelo 331 econômico.	180
Figura 47 – As representações fundamental e antifundamental de $SU(3)$ no diagrama de pesos, do inglês <i>weight diagrams</i> . Estas representações irredutíveis podem ser combinadas de forma a gerar outras representações.	195
Figura 48 – A representação adjunta $\mathbf{8}$ no diagrama de pesos. Esta representação é utilizada para representar os mésons, partículas formadas por um par quark-antiquark.	198

Sumário

1	O MODELO PADRÃO	15
1.1	A Lagrangeana do Modelo Padrão	17
1.1.1	Os férmions do Modelo Padrão	18
1.1.2	Os acoplamentos de Yukawa	20
1.1.3	O dubleto de Higgs	25
1.2	Quebra espontânea da simetria eletrofraca	25
1.2.1	O bóson de Higgs	27
1.2.2	A massa dos férmions	30
1.2.3	As interações entre os férmions e os bósons	32
1.2.4	Os bósons de gauge	35
2	GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO	38
2.1	Eletromagnetismo quântico	38
2.1.1	Correção do propagador do fóton	39
2.1.2	Autoenergia do elétron	47
2.1.3	Correção do vértice	50
2.2	Teoria invariante sobre SU(N)	54
2.3	Correções quânticas da teoria SU(N)	56
2.3.1	Propagador do bóson de gauge	59
2.3.2	Propagador do férmion	63
2.3.3	Vértice férmion-férmion-bósons de gauge	64
2.3.4	Equação de grupo de renormalização do acoplamento g	65
2.4	Acoplamento de Yukawa	66
2.4.1	Correção adicional ao propagador fermiônico	68
2.4.2	Propagador escalar	69
2.4.3	Vértice de Yukawa	71
2.5	Acoplamento quártico do campo escalar	73
2.5.1	Contribuição λ^2	73
2.5.2	Contribuição $g^2\lambda$	74
2.5.3	Contribuição g^4	75
2.5.4	Contribuição Y^4	76
2.6	Equações do grupo de renormalização do Modelo Padrão	78
3	ESTABILIDADE DO POTENCIAL ESCALAR	81
3.1	Estabilidade clássica do potencial escalar	81

3.1.1	Copositividade de uma matriz	87
3.1.2	Condições de estabilidade do vácuo para o Modelo de dubleto de Higgs inerte	89
3.1.3	Condições de estabilidade do vácuo para o Modelo <i>triplet seesaw</i>	90
3.2	Estabilidade quântica do potencial escalar	96
3.2.1	Ação Efetiva	97
3.2.2	Potencial de Coleman-Weinberg	102
3.2.3	Resomação de grandes logaritmos	107
3.2.4	Potencial efetivo multiescala	111
4	O MODELO 331	120
4.1	A Lagrangeana do Modelo 331	121
4.1.1	Setor fermiônico	122
4.1.2	Acoplamentos de Yukawa	123
4.1.3	Setor escalar	125
4.2	Anomalias de gauge	126
4.3	A estrutura do vácuo do Modelo 331	127
4.4	Primeira quebra espontânea de simetria	129
4.4.1	Quarks de quarta e quinta geração	132
4.4.2	Termos cinéticos dos férmions	134
4.4.3	Termos cinéticos dos bósons de gauge	137
4.4.4	Termos cinéticos dos bósons escalares	141
4.4.5	Potencial escalar	143
4.5	Segunda quebra espontânea de simetria	144
4.5.1	Interações bósons escalares e vetoriais	145
4.5.2	Massa dos férmions	156
4.5.3	Termo cinético dos léptons	164
4.5.4	Termo cinético dos quarks	165
4.5.5	Termos cinéticos dos bósons de gauge	166
5	ESTABILIDADE DO VÁCUO DO MODELO 331	169
5.1	Estabilidade a nível clássico	169
5.1.1	Condições de estabilidade	174
5.2	Estabilidade a um laço	175
6	CONCLUSÕES	181
	REFERÊNCIAS	183

	APÊNDICES	192
	APÊNDICE A – SU(3)	193
A.1	Representações	194
	Índice	200

1 O Modelo Padrão

O Modelo Padrão é uma das maiores conquistas, se não a maior, alcançada pela Humanidade. Foram necessários inúmeros esforços experimentais e teóricos para que este modelo se consagrasse na Física. Todo o conteúdo do Modelo Padrão está descrito em uma Lagrangeana formulada por A. Salam [1], S. Weinberg [2] e S. Glashow [3], culminando na premiação do prêmio Nobel de Física em 1979. Entretanto, o Modelo Padrão pode ser entendido como o final de uma história que começa bem antes, no início do século XX.

A formulação da Mecânica Quântica, como a conhecemos, teve seu início na tentativa de explicar o comportamento do átomo, a partir das linhas espectrais discretas observadas nos elementos. Utilizando a ideia de quantização de energia desenvolvida por Max Planck, ganhando força com a hipótese de que a luz é uma partícula por Einstein, Niels Bohr pôde descrever corretamente os níveis de energia para átomos hidrogenoides. A falta de uma equação geral que pudesse descrever o comportamento atômico foi contornada pela célebre equação de Schrödinger, em 1926. Max Heisenberg também tem grande participação no desenvolvimento da mecânica quântica, ao formular o princípio da incerteza, assim como, desenvolver a mecânica quântica matricial. Entretanto, ainda não havia uma equação que pudesse descrever o comportamento atômico em regimes relativísticos. À época, já se tinha conhecimento dos níveis de energia para átomos hidrogenoides relativísticos, devido ao trabalho de Arnold Sommerfeld. Na tentativa de formular uma equação que tratasse o tempo e o espaço igualmente, Dirac [4] obteve o resultado de Sommerfeld para os níveis de energia, mas também pôde prever a existência de uma partícula com as mesmas propriedades do elétron, exceto o valor de sua carga elétrica, sendo positiva. Carl David Anderson [5] observou a partícula pela primeira vez, lhe rendendo o prêmio Nobel em Física em 1936. Wolfgang Pauli postulou a existência do neutrino para explicar a conservação de energia e momento do decaimento beta. Enrico Fermi [6] generalizou a eletrodinâmica quântica, QED, formulada inicialmente por Dirac, para conter o decaimento beta. Aproximadamente na mesma época, o nêutron foi descoberto por J. Chadwick [7]. Dessa forma, a estrutura atômica se mostrava cada vez mais complexa e novas interações precisariam ser explicadas. Por exemplo, o nêutron e o próton, constituintes do núcleo atômico, tem carga elétrica nula e positiva, respectivamente. Assim, como grandes núcleos conseguiam se manter estável? Yukawa [8] propôs, em 1935, que partículas escalares mediavam a interação entre nêutrons e prótons, e como esta interação deveria ser de curto alcance, as partículas escalares tinham que ser massivas. Dez anos depois, a partícula proposta pela teoria de Yukawa, o π -méson, foi descoberta pelo grupo liderado por Cecil Powell, dentro os integrantes, o brasileiro César Lattes [9]. Na década de 1940, Feynman [10, 11], Schwinger [12, 13] e Tomonaga [14] conseguiram computar as correções quânticas da QED, em termos da renormalização. Na

década de 1950, os neutrinos foram descobertos por C. Cowan e F. Reines [15]. A física chinesa C. S. Wu [16] montou o experimento proposto por C. N. Yang e T. D. Lee [17] para verificar a violação da paridade pela interação fraca, o que foi confirmado. Além disso, outros experimentos realizados por R. Garwin et. al. [18], e Friedman e Telegdi [19] também confirmaram a violação da paridade. Logo depois, Feynman e Gell-Mann [20] identificaram que a violação da paridade ocorria devido a termos das correntas vetoriais e axiais. Devido ao trabalho de Yang e Mills [21], físicos teóricos perceberam que as interações fracas poderiam ser causadas por um bóson vetorial massivo, o bóson W . A década de 1960 foi marcada por grandes avanços na área teórica. As partículas que interagem fortemente foram organizadas em termos do grupo $SU(3)$ por Y. Ne'eman e Gell-Mann [22]. Pouco depois, Gell-Mann [23] e G. Zweig [24], de forma independente, postularam os quarks como partículas elementares sob $SU(3)$ responsáveis por formar a matéria bariônica. Em 1964, Nambu [25] propôs que a interação entre os quarks ocorria como uma teoria de Yang-Mills sob $SU(3)$. Nesta década também ocorreu o surgimento do Modelo Padrão como o conhecemos, a partir da unificação da interação fraca e eletromagnética: a interação eletrofraca. Neste processo, um novo bóson vetorial, de carga neutra, foi previsto: o bóson Z . Devido ao trabalho de Nambu [26, 27] em 1961 sobre física dos píons, e generalizando o trabalho de J. Goldstone, Higgs [28], Brout e Englert [29] mostraram que a quebra espontânea de simetria gera bósons vetoriais massivos a partir de bóson vetoriais sem massa, ao transformar uma simetria global da Lagrangeana em uma simetria local. Do fim da década de 1960 até o presente momento, outras partículas foram sendo descobertas e o quebra cabeça sendo montado. Em 2012, o CERN [30], a partir de dados obtidos do LHC, anunciou a descoberta do bóson de Higgs, peça fundamental do Modelo Padrão, já que a introdução desta partícula está ligada ao mecanismo de geração de massa de outras partículas.

Sabemos hoje que o Modelo Padrão é composto de 25 partículas¹ elementares divididas entre os férmions, com 12 partículas, e os bósons, com 13 partículas. Os férmions elementares são divididos em 6 *quarks*, partículas que participam da interação forte, e portanto, carregam carga de cor; e 6 léptons, partículas que não participam da interação forte. Os férmions obedecem a estatística de Fermi-Dirac, e no Modelo Padrão, os férmions elementares possuem spin $1/2$. Os bósons elementares são os responsáveis pela interação entre os férmions ou entre eles mesmos, em alguns casos. Obedecem a estatística de Bose-Einstein e possuem spin 0 (bóson de Higgs) ou spin 1 (fóton, W^\pm , Z^0 , e glúons).

¹ Quando os campos são quantizados, as excitações dos campos são chamadas de partículas. Nesse texto, será comum se referenciar às partículas, mesmo quando ainda não foram quantizadas, devido ao contexto.

1.1 A Lagrangeana do Modelo Padrão

A Lagrangeana do Modelo Padrão pode ser dividida em 4 partes, a fim de facilitar o entendimento de sua estrutura

$$\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{WD} + \mathcal{L}_{Yuk} + \mathcal{L}_H. \quad (1.1)$$

A Lagrangeana de Yang-Mills \mathcal{L}_{YM} descreve os bósons de gauge do Modelo Padrão, sendo $SU(3)_C$ para cor, $SU(2)_L$ para o isospin fraco e $U(1)_Y$ para a hipercarga fraca

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} \sum_{A=1}^8 G_{\mu\nu}^A G^{\mu\nu A} - \frac{1}{4} \sum_{a=1}^3 W_{\mu\nu}^a W^{\mu\nu a} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}. \quad (1.2)$$

Os tensores de força das interações são definidos da seguinte forma para os campos de cor

$$G_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A - g_3 f^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C, \quad A, B, C = 1, \dots, 8, \quad (1.3)$$

com os campos de gauge A_μ^B representando os oitos campos dos glúons, f^{ABC} sendo as constantes de estrutura de $SU(3)$ e g_3 a constante adimensional de acoplamento. Já para os campos de isospin fraco

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g_2 \epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \quad a, b, c = 1, 2, 3, \quad (1.4)$$

onde W_μ^a representam os bósons vetoriais intermediários, ϵ^{abc} são as constantes de estrutura de $SU(2)$ e g_2 a constante adimensional de acoplamento. Por fim, o campo da hipercarga fraca

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (1.5)$$

Todos os campos acima surgem como uma consequência da imposição de uma transformação de gauge local nos campos fermiônicos de forma que a Lagrangeana (1.1) seja invariante. A título de ilustração, considere o seguinte spinor de Weyl

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

cujas partes cinéticas em uma Lagrangeana é dada por

$$\mathcal{L} = i\psi_L^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_L, \quad (1.7)$$

onde $\sigma^\mu = (1, \sigma^i)^2$ com a componente final sendo as matrizes de Pauli. Claramente, a Lagrangeana (1.7) é invariante globalmente por uma fase

$$\psi_L \rightarrow e^{i\alpha} \psi_L. \quad (1.8)$$

² Para à direita, temos $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^i)$.

Caso esta fase dependa de uma coordenada espaço-tempo, então é necessário introduzir a derivada covariante da seguinte forma

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig\mathbf{A}_\mu, \quad (1.9)$$

onde \mathbf{A}_μ é definido como

$$\mathbf{A}_\mu = A_\mu^a \frac{\lambda^a}{2}$$

e g o acoplamento. Para o Modelo Padrão, os campos vetoriais se transformam como

$$\text{SU}(3)_C : D_\mu = \partial_\mu + ig_3 G_\mu^A \frac{\lambda^A}{2}, \quad A = 1, \dots, 8, \quad (1.10)$$

$$\text{SU}(2)_L : D_\mu = \partial_\mu + ig_2 W_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}, \quad a = 1, 2, 3, \quad (1.11)$$

$$\text{U}(1)_Y : D_\mu = \partial_\mu + ig_1 \frac{y}{2} B_\mu, \quad (1.12)$$

onde λ^A são as matrizes de Gell-Mann

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

E σ^a são as matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

1.1.1 Os férmions do Modelo Padrão

O Modelo Padrão tem que levar em conta a divisão dos férmions entre quarks e léptons. Os quarks estão na representação fundamental de $\text{SU}(3)_C$, $\mathbf{3}$, pois interagem com os glúons. Já os léptons não interagem com os glúons, e portanto, estão na representação trivial, $\mathbf{1}$. Além disso, teremos férmions na representação fundamental do grupo $\text{SU}(2)_L$, $\mathbf{2}$ e na representação trivial, $\mathbf{1}$. Dessa forma, será possível criar bilineares invariantes sob transformações de todos os grupos do Modelo Padrão, o que também possibilitará que haja a geração de massa, exceto para o neutrino, pelo mecanismo de Higgs, como visto

mais adiante. Assim, os campos férmionicos são da seguinte forma

$$\text{dubleto de léptons: } L_i = \begin{pmatrix} \nu_i \\ e_i \end{pmatrix}_L \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2}, y_1), \quad (1.15)$$

$$\text{singlete lépton: } \bar{e}_{iL} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1}, y_2), \quad (1.16)$$

$$\text{dubleto de quarks: } \mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{d}_i \end{pmatrix}_L \sim (\mathbf{3}, \mathbf{2}, y_3), \quad (1.17)$$

$$\text{antiquark da família up: } \bar{\mathbf{u}}_{iL} \sim (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, y_4), \quad (1.18)$$

$$\text{antiquark da família down: } \bar{\mathbf{d}}_{iL} \sim (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, y_5). \quad (1.19)$$

A notação ao fim denota a atribuição da cor, isospin e hipercarga, respectivamente para cada. Por exemplo, $(1, 2, y_1)$ do dubleto de léptons é traduzido por ser trivial sob a ação do grupo $SU(3)_C$, fundamentalmente sob a ação do grupo $SU(2)_L$ e uma fase y_1 sob a ação de $U(1)_Y$. O índice i se refere às três famílias de férmions quirais. Assim,

$$\mathcal{L}_{WD} = \sum_{i=1}^3 (L_i^\dagger \sigma^\mu D_\mu L_i + \bar{e}_i^\dagger \sigma^\mu D_\mu \bar{e}_i + \mathbf{Q}_i^\dagger \sigma^\mu D_\mu \mathbf{Q}_i + \bar{\mathbf{u}}_i^\dagger \sigma^\mu D_\mu \bar{\mathbf{u}}_i + \bar{\mathbf{d}}_i^\dagger \sigma^\mu D_\mu \bar{\mathbf{d}}_i), \quad (1.20)$$

em que as derivadas covariantes são da seguinte forma

$$\begin{aligned} D_\mu L_i &= (\partial_\mu + ig_2 \frac{\sigma^a}{2} W_\mu^a + ig_1 \frac{y_1}{2} B_\mu) L_i, \\ D_\mu \bar{e}_i &= (\partial_\mu + ig_1 \frac{y_2}{2} B_\mu) \bar{e}_i, \\ D_\mu \mathbf{Q}_i &= (\partial_\mu + ig_3 \frac{\lambda^A}{2} A_\mu^A + ig_2 \frac{\sigma^a}{2} W_\mu^a + ig_1 \frac{y_3}{2} B_\mu) \mathbf{Q}_i, \\ D_\mu \bar{\mathbf{u}}_i &= (\partial_\mu - ig_3 \frac{\lambda^{*A}}{2} A_\mu^A + ig_1 \frac{y_4}{2} B_\mu) \bar{\mathbf{u}}_i, \\ D_\mu \bar{\mathbf{d}}_i &= (\partial_\mu - ig_3 \frac{\lambda^{*A}}{2} A_\mu^A + ig_1 \frac{y_5}{2} B_\mu) \bar{\mathbf{d}}_i. \end{aligned}$$

1.1.2 Os acoplamentos de Yukawa

\mathcal{L}_{YM} e \mathcal{L}_{WD} já dispõem de uma simetria global enorme, tendo em vista que existem várias famílias de diferentes simetrias quirais, uma para cada conjunto de férmions com os mesmos números quânticos. Por exemplo, existe a seguinte transformação global no dubleto de léptons

$$L_i \rightarrow L'_i = U_{ij} L_j, \quad (1.21)$$

onde U_{ij} é uma matriz unitária 3×3 , que deixa \mathcal{L}_{YM} e \mathcal{L}_{WD} invariantes. Como há 5 tipos de férmions e cada um deles tem 3 famílias, então há uma invariância global [31] $U(3)_Q \times U(3)_d \times U(3)_u \times U(3)_\ell \times U(3)_e \equiv [U(3)]^5$. Essa enorme invariância sob $[U(3)]^5$ é explicitamente quebrada ao introduzir o acoplamento de Yukawa, no qual pares fermiônicos interagem com partículas escalares. No caso do Modelo Padrão, a partícula escalar é um singlete $\mathbf{1}$ do grupo $SU(3)_C$, um dubleto $\mathbf{2}$ do grupo $SU(2)_L$, além de ter hipercarga y_h , como representado abaixo

$$H = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2}, y_h), \quad (1.22)$$

em que H é o dubleto de Higgs. Procurando invariantes de Lorentz, singletos de cor e de isospin, e invariante por hipercarga, temos que \mathcal{L}_{Yuk} tem de ser da seguinte forma

$$\mathcal{L}_{Yuk} = iY_{ij}^{[e]} \widehat{L}_i \bar{e}_j H^* + iY_{ij}^{[d]} \widehat{Q}_i \bar{d}_j H^* + iY_{ij}^{[u]} \widehat{Q}_i \bar{u}_j \tau_2 H + \text{c.c.}, \quad (1.23)$$

sendo introduzido aqui a seguinte notação $\widehat{\eta} = \eta^T \sigma_2$. Os acoplamentos Y_{ij} são matrizes complexas 3×3 com entradas constantes, e τ_2 é a matriz de isospin fraco, utilizada para deixar a Lagrangeana invariante sob $SU(2)_L$, neste produto. A invariância sob a hipercarga nos dá a seguinte condição

$$y_h = y_1 + y_2 = -(y_3 + y_4) = (y_3 + y_5). \quad (1.24)$$

Classicamente, o valor da hipercarga é arbitrário, mas ao nível quântico pode ser restrito a partir da anomalia de Adler-Bell-Jackiw [32, 33]. Entende-se por anomalia, uma simetria presente na teoria clássica mas que não é respeitada a nível quântico. Para melhor entendimento, sabe-se que simetrias globais contínuas implicam correntes conservadas, a partir do teorema de Noether. No caso de uma destas simetrias ser anômala, então não há corrente conservada, já que esta simetria não é, de fato, uma simetria. Isso tem consequências importantes se estas correntes se acoplam a partículas de spin 1 sem massa, como na QED e teoria de Yang-Mills. Neste caso, se estas correntes não forem conservadas, então a identidade de Ward será violada, polarizações longitudinais sem sentido físico serão produzidos e a unitariedade das transformações será violada, como explica [34]. Assim, é necessário que as simetrias de gauge, aquelas associadas a partículas de spin 1 sem massa, sejam livres de anomalia. Felizmente, o teorema de Adler-Bardeen [35] afirma que estas anomalias ocorrem somente a um laço. Portanto, é suficiente exigir que os diagramas de

Feynman triangulares a um laço, representados na Figura 1, vão a zero. O grupo SU(3) não possui a anomalia quiral, pois a estrutura é de um vetor (há tantos quarks quanto antiquarks canhotos). SU(2) não possui coeficientes simétricos, isto é,

$$d^{abc} = \frac{1}{2} \text{Tr}[\{T^a, T^b\}T^c] = 0, \quad (1.25)$$

e, portanto, não há nenhuma teoria [34] com anomalia [SU(2)]³. Resta somente U(1) como o único candidato para anomalias de gauge. Estas aparecem como nos diagramas abaixo

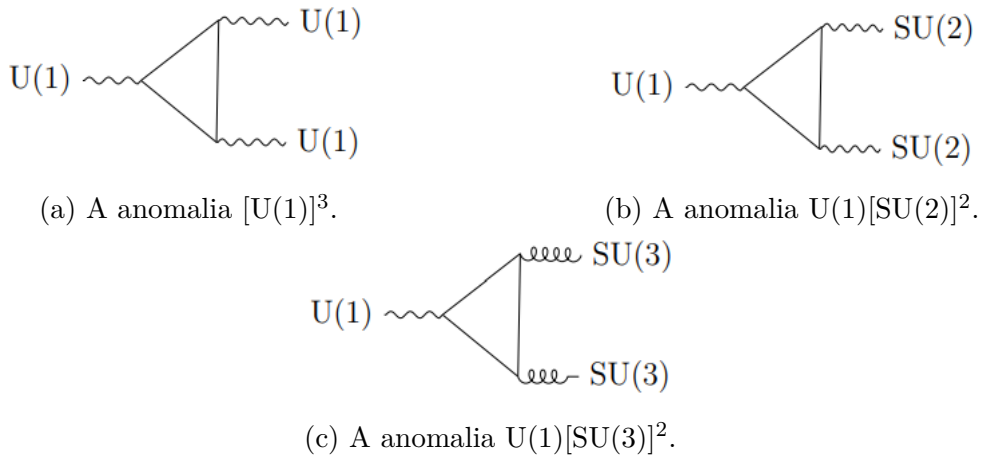


Figura 1 – U(1), SU(2) e SU(3) na figura acima representam as correntes associadas as suas respectivas simetrias de gauge. Por exemplo, na figura (b), o bóson B_μ decai para dois bósons de gauge W_μ^a .

As equações resultantes que irão cancelar a anomalia são, respectivamente aos diagramas acima,

$$(2y_1^3 + y_2^3) + 3(2y_3^3 + y_4^3 + y_5^3) = 0, \quad y_1 + 3y_3 = 0, \quad 2y_3 + y_4 + y_5 = 0. \quad (1.26)$$

Pode-se considerar a anomalia gravitacional, representada pelo seguinte diagrama de Feynman na Figura 2.

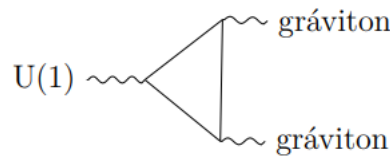


Figura 2 – É esperado que em uma teoria renormalizável da gravitação, este diagrama exista.

O cálculo da anomalia com um bóson de gauge e dois grávitons produz o seguinte resultado [34, 36]

$$\partial_\mu J^{\mu a} \propto \text{Tr}[T_R^a] \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\gamma\delta} R_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}, \quad (1.27)$$

em que $R_{\mu\nu\gamma\delta}$ é o tensor de curvatura de Riemann. Como os grupos $SU(N)$ são compostos por geradores de traço nulo, resta avaliar somente o grupo $U(1)$. Assim, exigindo que esta anomalia vá a zero, é obtida a seguinte relação

$$2y_1 + y_2 + 6y_3 + 3y_4 + 3y_5 = 0. \quad (1.28)$$

Esta condição não está na mesma igualdade que as outras, já que não existe, até o presente momento, uma teoria de gravitação quântica renormalizável. Entretanto, essa contribuição afetaria a conservação da hipercarga somente se os laços da gravitação quântica fossem importantes. De qualquer forma, provavelmente este diagrama estará presente em uma teoria renormalizável da gravidade [37].

Resolvendo as equações (1.24), (1.26) e (1.28) em unidades de y_h , encontram-se os seguintes resultados para os valores das hipercargas y_i , definidas em (1.15)-(1.19)

$$y_1 = -1, y_2 = +2, y_3 = +\frac{1}{3}, y_4 = -\frac{4}{3}, y_5 = +\frac{2}{3}. \quad (1.29)$$

Dessa forma, a exigência de que as anomalias de gauge do Modelo Padrão vão a zero implica que a hipercarga seja quantizada.

As simetrias globais de \mathcal{L}_{YM} e \mathcal{L}_{WD} podem ser utilizadas para simplificar o acoplamento de Yukawa. Sem perda de generalidade, podemos escrever qualquer matriz como o produto de uma matriz unitária vezes uma matriz diagonal real vezes outra matriz unitária

$$Y_{ij}^{[e]} \equiv \mathbf{Y}^{[e]} = \mathbf{U}_e^T \mathbf{M}^{[e]} \mathbf{V}_e, \quad (1.30)$$

onde \mathbf{U}_e^T e \mathbf{V}_e são as matrizes 3×3 unitárias. Redefinindo os campos como

$$L \rightarrow \mathbf{U}_e L, \quad \bar{e} \rightarrow \mathbf{V}_e \bar{e},$$

a parte leptônica do acoplamento de Yukawa se torna diagonal. Adotando a notação y_{ii} para os elementos da matriz diagonal $\mathbf{M}_e^{[e]}$, o primeiro termo de (1.23) toma a seguinte forma

$$\mathcal{L}_{Yuk}^{[e]} = i \sum_{i=1}^3 y_{ii}^{[e]} \hat{L}_i \bar{e}_i H^* + \text{h.c.} = iy_{11} \hat{L}_1 \bar{e}_1 H^* + iy_{22} \hat{L}_2 \bar{e}_2 H^* + \dots \quad (1.31)$$

É possível notar que o acoplamento de Yukawa quebra explicitamente a simetria global leptônica em três transformações de fases [37]: $U(3)_\ell \times U(3)_e \rightarrow U(1)_e \times U(1)_\mu \times U(1)_\tau$, onde as transformações nos campos são feitas da seguinte forma

$$L_i \rightarrow e^{i\alpha_i} L_i, \quad \bar{e}_i \rightarrow e^{-i\alpha_i} \bar{e}_i, \quad (1.32)$$

com cada valor de α_i associado aos três números leptônicos, um para cada família: elétron, múon e tau, respectivamente.

O mesmo procedimento pode ser aplicado para o acoplamento de Yukawa no setor dos quarks. Entretanto, diferentemente do setor leptônico, não será possível fazer

a redefinição no dubleto \mathbf{Q}_i , como será visto a seguir. Reescrevendo os acoplamentos de Yukawa como

$$Y_{ij}^{[d]} \equiv \mathbf{Y}^{[d]} = \mathbf{U}_d^T \mathbf{M}^{[d]} \mathbf{V}_d, \quad (1.33)$$

$$Y_{ij}^{[u]} \equiv \mathbf{Y}^{[u]} = \mathbf{U}_u^T \mathbf{M}^{[u]} \mathbf{V}_u. \quad (1.34)$$

É possível redefinir os campos $\bar{\mathbf{u}}$ e $\bar{\mathbf{d}}$ como

$$\bar{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbf{V}_u \bar{\mathbf{u}}, \quad \bar{\mathbf{d}} \rightarrow \mathbf{V}_d \bar{\mathbf{d}}. \quad (1.35)$$

Entretanto, não é possível fazer esta absorção de matriz unitária em \mathbf{Q}_i sem modificar o outro termo onde ele está presente. Para ver isto, considere somente o acoplamento de Yukawa dos quarks *up* e *down* de (1.23), na forma matricial, já com a redefinição de (1.35)

$$\mathcal{L}_{Yuk}^{[u,d]} = i\mathbf{Q}^T \mathbf{U}_u^T \mathbf{M}^{[u]} \sigma_2 \bar{\mathbf{u}} \tau_2 H + i\mathbf{Q}^T \mathbf{U}_d^T \mathbf{M}^{[d]} \sigma_2 \bar{\mathbf{d}} H^* + \text{c.c.}, \quad (1.36)$$

Redefinindo o campo \mathbf{Q} da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}' &= \mathbf{U}_d^{-1} \mathbf{Q}, \\ \mathbf{Q}' &= \mathbf{U}_d^\dagger \mathbf{Q}, \end{aligned} \quad (1.37)$$

onde na passagem da segunda linha foi usado a unitariedade de \mathbf{U}_d . Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yuk}^{[u,d]} &= i\mathbf{Q}'^T (\mathbf{U}_d^\dagger)^T \mathbf{U}_u^T \mathbf{M}^{[u]} \sigma_2 \bar{\mathbf{u}} \tau_2 H + i\mathbf{Q}'^T \mathbf{M}^{[d]} \sigma_2 \bar{\mathbf{d}} H^* + \text{c.c.}, \\ \mathcal{L}_{Yuk}^{[u,d]} &= i\mathbf{Q}'^T (\mathbf{U}_u \mathbf{U}_d^\dagger)^T \mathbf{M}^{[u]} \sigma_2 \bar{\mathbf{u}} \tau_2 H + i\mathbf{Q}'^T \mathbf{M}^{[d]} \sigma_2 \bar{\mathbf{d}} H^* + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (1.38)$$

Retornando a notação de índices, juntamente com a notação introduzida para a matriz diagonal, chega-se a

$$\mathcal{L}_{Yuk}^{[u,d]} = i \sum_{i,j=1}^3 \left(y_{ii}^{[d]} \widehat{\mathbf{Q}}_i \bar{\mathbf{d}}_i H^* + y_{jj}^{[u]} \widehat{\mathbf{Q}}_i (\mathbf{U}_u \mathbf{U}_d^\dagger)_{ji} \bar{\mathbf{u}}_i \tau_2 H \right) + \text{c.c.} \quad (1.39)$$

A matriz $\mathbf{U}_u \mathbf{U}_d^\dagger$ pode ser decomposta novamente para retirar fases redundantes. Toda matriz unitária pode ser decomposta da seguinte forma

$$\mathbf{U}_u \mathbf{U}_d^\dagger = \mathcal{P}^T \mathcal{U} \mathcal{P}', \quad (1.40)$$

onde $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ são matrizes diagonais de fase e \mathcal{U} a matriz com os parâmetros remanescentes. Neste caso, temos 3 famílias e, portanto, $\mathbf{U}_u \mathbf{U}_d^\dagger$ depende de 9 parâmetros, sendo um deles uma fase geral. As matrizes \mathcal{P} e \mathcal{P}' são parametrizadas por dois parâmetros cada. Assim, \mathcal{U}_{ij} tem apenas quatro parâmetros: três ângulos de rotação mais uma fase. Logo, com esta decomposição, é possível absorver \mathcal{P} em $\bar{\mathbf{u}}$, e \mathcal{P}' em \mathbf{Q} . Dessa forma, (1.23) tem a seguinte forma

$$\mathcal{L}_{Yuk} = iy_{ii}^{[e]} \widehat{L}_i \bar{e}_i H^* + iy_{ii}^{[d]} \widehat{\mathbf{Q}}_i \bar{\mathbf{d}}_i H^* + iy_{jj}^{[u]} \widehat{\mathbf{Q}}_i \mathcal{U}_{ji} \bar{\mathbf{u}}_i \tau_2 H + \text{h.c.} \quad (1.41)$$

A matriz \mathcal{U}_{ij} é chamada de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) [38, 39] e contém os 3 ângulos de mistura entre os quarks e uma fase geral. O acoplamento de Yukawa nos quarks quebra explicitamente a simetria $U(3)_Q \times U(3)_u \times U(3)_d \rightarrow U(1)_B$, restando apenas uma fase geral entre eles, associada a $U(1)_B$, cujo número quântico é chamado de número bariônico

$$\mathbf{Q}_i \rightarrow e^{i\alpha_B} \mathbf{Q}_i, \quad \bar{\mathbf{u}}_i \rightarrow e^{-i\alpha_B} \bar{\mathbf{u}}_i, \quad \bar{\mathbf{d}}_i \rightarrow e^{-i\alpha_B} \bar{\mathbf{d}}_i. \quad (1.42)$$

A grande simetria global presente na Lagrangeana foi reduzida devido aos acoplamentos de Yukawa para quatro fases: um número bariônico e três números leptônicos.

Existe uma anomalia global presente nos grupos $U(1)_B$ e $U(1)_e \times U(1)_\mu \times U(1)_\tau$. Essas anomalias não geram nenhuma inconsistência ao Modelo Padrão, já que as correntes obtidas a partir do teorema de Noether para estas simetrias não se acoplam a partículas de spin 1 sem massa. A única contribuição diferente de zero ocorre quando estas correntes decaem em duas correntes de gauge de $SU(2)_L$

$$\partial_\mu J_B^\mu = \partial_\mu J_L^\mu = \frac{3g_2^2}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} W_{\mu\nu}^a W_{\alpha\beta}^a, \quad (1.43)$$

em que J_L corresponde ao número leptônico total. Embora estas simetrias sejam anômalas, a diferença $B - L$ não é anômala, sendo possível associar um bóson de gauge a esta nova simetria. Um dos motivos da violação do número bariônico ser interessante é devido a uma possível explicação da preponderância da matéria sob antimatéria. Sakharov [40] mostrou que existem 3 condições que são necessárias para que isto ocorra: O número bariônico deve ser violado, as simetrias discretas C e CP devem ser violadas e deve ter um desvio do equilíbrio térmico. Interessantemente, o Modelo Padrão conta com todas elas, porém para explicar a assimetria quantitativamente, é necessário mais violação do número bariônico e mais violação CP e uma transição de fase não tão suave como presente no Modelo Padrão, como mencionado em [34]. Assim, a bariogênese não é explicada pelo Modelo Padrão e Modelos Além do Modelo Padrão se tornam importantes e fundamentais.

1.1.3 O dubleto de Higgs

A parte final da Lagrangeana (1.1) é devido ao dubleto de Higgs (1.22). A derivada covariante que age neste campo é

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_2 \frac{\sigma^a}{2} W_\mu^a + iy_h \frac{g_1}{2} B_\mu. \quad (1.44)$$

A Lagrangeana \mathcal{L}_H renormalizável, que acomoda a invariância da simetria interna $SU(2)_L \times U(1)_Y$ é dada por

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu H)^\dagger (D^\mu H) + \mu^2 H H^\dagger - \lambda (H H^\dagger)^2. \quad (1.45)$$

Portanto, o Modelo Padrão clássico é composto de 19 parâmetros, sendo 3 referentes aos acoplamentos de gauge, 13 parâmetros referentes aos acoplamentos de Yukawa, ao acoplamento λ de Higgs, ao parâmetro dimensional μ e o ângulo de vácuo da QCD, responsável pela violação CP forte. Embora o Modelo Padrão clássico não tenha nenhum mecanismo para a massa dos neutrinos, experimentos recentes [41] já detectaram que os neutrinos de todas as famílias leptônicas possuem massa. Assim, há adicionais 3 parâmetros relacionados às massas mais 3 parâmetros dos ângulos de mistura dos neutrinos, e por fim, 3 fases complexas [42], totalizando 28 parâmetros ao Modelo Padrão atual. Além de ser invariante ao grupo de gauge $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, é invariante, ao nível clássico, por quatro transformações globais de fase, os três números leptônicos e o número bariônico.

1.2 Quebra espontânea da simetria eletrofraca

A geração das massas dos bósons de gauge W^\pm , Z^0 e dos férmions, excetuando-se os neutrinos, é devido ao valor esperado do vácuo, ou VEV, adquirido pelo dubleto de Higgs H . O potencial escalar de Higgs, a partir de (1.45), é

$$V = -\mu^2 H^\dagger H + \lambda (H^\dagger H)^2, \quad (1.46)$$

em que $\mu^2 > 0$. O mínimo de energia ocorre no mínimo deste potencial, sendo obtido a partir da seguinte equação

$$\frac{\partial V}{\partial H^\dagger} = -\mu^2 H + 2\lambda (H^\dagger H) H = 0. \quad (1.47)$$

Tendo como soluções $H_{\text{vác.}} = 0$ e

$$H_{\text{vác.}}^\dagger H_{\text{vác.}} = \frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv \frac{v^2}{2}. \quad (1.48)$$

Esta última solução corresponde ao mínimo de energia, já que a segunda derivada do potencial avaliada neste valor é positiva

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial H \partial H^\dagger} &= -\mu^2 + 4\lambda (H^\dagger H), \\ \frac{\partial^2 V}{\partial H \partial H^\dagger} \Big|_{\text{vác.}} &= -\mu^2 + 2\mu^2 = \mu^2 > 0. \end{aligned} \quad (1.49)$$

É possível parametrizar $H_{\text{vác.}}$ por três ângulos da seguinte forma

$$H_{\text{vác.}} = e^{i\theta_0} \mathbf{U} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (1.50)$$

onde \mathbf{U} é definido como um elemento de $\text{SU}(2)_L$. Na forma de Euler, \mathbf{U} é escrito como

$$\mathbf{U} = e^{i\frac{\sigma_3}{2}\eta_1} e^{i\frac{\sigma_2}{2}\eta_2} e^{i\frac{\sigma_3}{2}\eta_3}. \quad (1.51)$$

Dessa forma, é possível escrever o estado do vácuo da seguinte forma

$$H_{\text{vác.}} = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i(\theta'+\eta_1)} \sin \eta_2 \\ e^{i(\theta'-\eta_1)} \cos \eta_2 \end{pmatrix}, \quad (1.52)$$

onde $\theta' = \theta_0 - \eta_3$.

Devido às transformações de gauge presentes em $\text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y$, todos os mínimos são igualmente equivalentes e, portanto, é possível tomar o seguinte valor devido a sua simplicidade

$$\langle H \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.53)$$

A transformação do grupo $\text{SU}(2)_L$ no vácuo $\langle H' \rangle = e^{i\tau^a \zeta^a} \langle H \rangle$, pode ser analisada a partir de uma transformação infinitesimal $\langle H' \rangle = \langle H \rangle + i\tau^a \zeta^a \langle H \rangle + \mathcal{O}(\zeta^2)$. Como os geradores são da seguinte forma $\tau^a = \frac{\sigma^a}{2}$, temos que

$$\tau^1 \langle H \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^2 \langle H \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^3 \langle H \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Assim, o vácuo $\langle H \rangle$ não é invariante sob uma transformação de $\text{SU}(2)_L$. Pelo teorema de Nambu-Goldstone, estes três geradores quebrados darão massa aos três bósons, neste caso, W^\pm e Z^0 . Agora, considere a seguinte transformação de $\text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y$ em H

$$H' = e^{i\tau^a \zeta^a} e^{i\frac{y_h}{2}\beta} H, \quad (1.54)$$

então para que o vácuo seja invariante, é necessário que $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$ e $\zeta_3 = \beta$. Dessa forma,

$$H' = e^{i(\tau^3 + y_h/2)\beta} H, \quad (1.55)$$

isto é, a combinação $Q = \tau^3 + y_h/2$ deixa o vácuo invariante, desde que $y_h = 1$. Generalizando este resultado para todos os férmions,

$$Q = \tau^3 + \frac{y_i}{2}, \quad (1.56)$$

para qualquer hipercarga y_i (1.29). A generalização é possível, pois o tipo de transformação feita em (1.54) acontece também para os férmions. Como existe uma transformação que deixa o vácuo invariante, então existirá um bóson sem massa, de acordo com o teorema de Nambu-Goldstone [34]. Neste caso, o bóson é o fóton γ , responsável por intermediar a interação eletromagnética. Assim, identificamos também que Q é a carga elétrica. Portanto, esta configuração do vácuo é a responsável por quebrar a simetria $\text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y$ para $\text{U}(1)_Q$, sendo o grupo de gauge da teoria eletromagnética.

1.2.1 O bóson de Higgs

Para identificar os graus de liberdade do vácuo eletrofraco será usada a parametrização de Kibble para o dubleto de Higgs

$$H = e^{\frac{i}{v}\zeta^a(x)\tau^a} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \equiv \mathbf{U}(x)H_0, \quad (1.57)$$

em que $\zeta^a(x)$ e h zeram quando avaliados no vácuo, com h sendo o bóson de Higgs. O termo exponencial $\mathbf{U}(x)$ descreve transformações unitárias de gauge de $SU(2)_L$. Sob transformações de gauge nas três direções quebradas, $h(x)$ é invariante, enquanto $\zeta^a(x)$ transforma de forma não homogênea

$$\zeta^a(x) \rightarrow \zeta^a(x) + \theta^a, \quad a = 1, 2, 3, \quad (1.58)$$

com ζ^a representando os bósons de Nambu-Goldstone [37], os bósons associados aos três geradores quebrados. Rescrevendo o potencial (1.46) como

$$V = \lambda \left(H^\dagger H - \frac{v^2}{2} \right)^2 - \lambda \frac{v^4}{4}, \quad (1.59)$$

e utilizando a parametrização de Kibble para o dubleto de Higgs no potencial, chega-se a seguinte expressão

$$V = \lambda \left(\frac{(v+h)^2}{2} - \frac{v^2}{2} \right)^2 = \lambda v^2 h^2 + \lambda v h^3 + \frac{\lambda}{4} h^4, \quad (1.60)$$

com as autointerações quártica e cúbicas representadas pelos diagramas de Feynman da Figura 3. A partir da expressão (1.60), a massa do bóson de Higgs é obtida

$$m_h^2 = \left. \frac{d^2V}{dh^2} \right|_{h=0} = 2\lambda v^2. \quad (1.61)$$

A descoberta do bóson de Higgs, em 2012 [30], veio a partir da medição da massa de uma nova partícula, que se comportava como uma partícula escalar. Dados mais recentes [43] indicam que a massa do bóson de Higgs é igual a $m_h = 125,25 \pm 0,17$ GeV.

Por fim, concluímos que os bósons de Nambu-Goldstone desaparecem do potencial, restando analisar para o termo cinético de Higgs. Para expressar o termo cinético do dubleto de Higgs H na parametrização de Kibble, começamos a partir da derivada covariante definida em (1.44)

$$D_\mu H = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\partial_\mu + ig_2 \mathbf{W}_\mu + i\frac{g_1}{2} B_\mu \right) \mathbf{U} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}, \quad (1.62)$$

seguida da seguinte transformação de gauge,

$$\mathbf{W}_\mu \rightarrow \mathbf{W}'_\mu = -i\mathbf{U}^\dagger \partial_\mu \mathbf{U} + \mathbf{U}^\dagger \mathbf{W}_\mu \mathbf{U}. \quad (1.63)$$

(a) Interação quártica do bóson de Higgs correspondente ao termo $\frac{\lambda}{4}h^4$.(b) Interação cúbica do bóson de Higgs correspondente ao termo $\lambda v h^3$.

Figura 3 – As autointerações quártica e cúbica, respectivamente, do campo de Higgs.

Isso permite escrever a derivada covariante de (1.62) da seguinte forma

$$D_\mu H = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{U} \left(\partial_\mu + i g_2 \mathbf{W}'_\mu + i \frac{g_1}{2} B_\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}. \quad (1.64)$$

Como $\mathbf{W}_\mu = \frac{\tau^a}{2} W_\mu^a$,

$$D_\mu H = \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathbf{U} \begin{pmatrix} 2\partial_\mu + g_2 W_\mu^3 + g_1 B_\mu & g_2(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ g_2(W_\mu^1 + iW_\mu^2) & 2\partial_\mu - g_2 W_\mu^3 + g_1 B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}. \quad (1.65)$$

O termo cinético de Higgs $(D_\mu H)^\dagger D^\mu H$ fica da seguinte forma

$$(D_\mu H)^\dagger D^\mu H = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{1}{8} (g_1 B_\mu - g_2 W_\mu^3) (g_1 B^\mu - g_2 W^{3\mu}) (v + h)^2 + \frac{g_2^2}{2} (W_\mu^1 - iW_\mu^2) (W^{1\mu} + iW^{2\mu}) (v + h)^2, \quad (1.66)$$

pois \mathbf{U} é unitário e, portanto, desaparece completamente da Lagrangeana. Os campos de gauge W_μ^3 e B_μ estão relacionados por uma transformação ortogonal com os campos Z_μ e A_μ . Assim, \mathcal{L}_H contém uma massa quadrática para a seguinte combinação canônica

$$Z_\mu = \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu, \quad \text{com } m_Z^2 = \frac{1}{4} v^2 (g_1^2 + g_2^2), \quad (1.67)$$

onde

$$\cos \theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad (1.68)$$

em que θ_W é o ângulo de Weinberg. A combinação linear ortogonal de Z_μ será identificado como o vetor potencial associado ao fóton

$$A_\mu = \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu. \quad (1.69)$$

Também é feita uma redefinição dos campos W_μ^1 e W_μ^2

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2), \quad \text{com } m_W^2 = \frac{1}{4} v^2 g_2^2. \quad (1.70)$$

A relação das massas dos bósons Z_μ e W_μ^\pm são relacionadas da seguinte forma a nível de árvore³

$$\frac{m_W^2}{m_Z^2} = \cos^2 \theta_W = 1 - \sin^2 \theta_W = 0,76879 \quad (1.71)$$

em que foi usado o valor experimental [43] $\sin^2 \theta_W = 0,23121 \pm 0,00004$. Os dados apresentados por [43] indicam os seguintes valores para as massas dos bósons de gauge massivos: $m_Z = 91,1876 \pm 0,0021$ GeV e $m_W = 80,377 \pm 0,012$. Assim, a Lagrangeana \mathcal{L}_H (1.45) tomará a seguinte forma após a quebra espontânea de simetria

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H = & \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu + m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{h}{v} \left(2 + \frac{h}{v} \right) \left(\frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu \right) \\ & + \frac{h}{v} \left(2 + \frac{h}{v} \right) (m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu}) + \lambda v^2 h^2 + \lambda v h^3 + \frac{\lambda}{4} h^4. \end{aligned} \quad (1.72)$$

A partir de (1.72), é possível notar que o bóson de Higgs h não se acopla ao fóton a nível clássico, pois é eletricamente neutro. Portanto, a nível clássico, o bóson de Higgs só interage com os bósons de gauge massivos W^\pm e Z_μ . As interações entre o bóson de Higgs e os bósons de gauge massivos estão representados pelos diagramas de Feynman na Figura 4.



(a) A interação quártica carregada dos bósons da interação fraca com o bóson de Higgs. (b) A interação quártica carregada dos bósons da interação fraca com o bóson de Higgs.



(c) A interação quártica neutra do bóson Z^0 com o bóson de Higgs. (d) A interação quártica neutra do bóson Z^0 com o bóson de Higgs.

Figura 4 – Estes diagramas de Feynman representam, a nível de árvore, a interação dos bósons de gauge massivos com o bóson de Higgs. Estas interações são decorrentes dos termos $h^2 W_\mu^+ W^{-\mu}$, $h W_\mu^+ W^{-\mu}$, $h^2 Z_\mu Z^\mu$ e $h Z_\mu Z^\mu$, respectivamente.

³ Sem correções radiativas.

1.2.2 A massa dos férmions

É necessário analisar a quebra espontânea de simetria para \mathcal{L}_{Yuk} . Para isso, a análise será dividida entre a parte leptônica e parte dos quarks. O dubleto de Higgs H será escrito em termos da parametrização de Kibble, definida em (1.57). Dessa forma, para a parte leptônica (1.31), temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Yuk}^{[e]} &= iy_{ii}^{[e]} \widehat{L}_i \bar{e}_i H^* + \text{c.c.}, \\ \mathcal{L}_{Yuk}^{[e]} &= iy_{ii}^{[e]} \widehat{L}_i \bar{e}_i \mathbf{U}^* H_0 + \text{c.c.}\end{aligned}\quad (1.73)$$

Como \mathbf{U} é unitária, então $\mathbf{U}^* = (\mathbf{U}^\dagger)^T$, logo $L'_i = \mathbf{U}^\dagger L_i$, o que nos permite escrever (1.73) da seguinte forma

$$\mathcal{L}_{Yuk}^{[e]} = iy_{ii}^{[e]} (\mathbf{U}^\dagger L_i)^T \sigma_2 \bar{e}_i H_0 + \text{c.c.}\quad (1.74)$$

Analisando L'_i para uma transformação infinitesimal de \mathbf{U} , vemos que

$$\mathbf{U}^\dagger L_i \approx \begin{pmatrix} (1 + \frac{i}{v} \zeta_3) \nu_i + \frac{i}{v} (\zeta_1 - i \zeta_2) e_i \\ \frac{i}{v} (\zeta_1 + i \zeta_2) \nu_i + (1 - \frac{i}{v} \zeta_3) e_i \end{pmatrix} + \mathcal{O}((\zeta \cdot \tau)^2),\quad (1.75)$$

o que possibilita realizar uma transformação de gauge nos campos ζ_i , como mostrado em (1.58). Escolhendo uma transformação que deixe $\zeta_i = 0$, também conhecida como gauge unitário, a transformação de \mathbf{U} em L_i será

$$\mathbf{U}^\dagger L_i \rightarrow \begin{pmatrix} \nu_i \\ e_i \end{pmatrix}.\quad (1.76)$$

Assim, como a primeira componente do dubleto de Higgs é zero neste gauge, então o acoplamento de Yukawa leptônico toma a seguinte forma

$$\mathcal{L}_{Yuk}^{[e]} = iy_{ii}^{[e]} (e_{L,i})^T \sigma_2 \bar{e}_i \left(\frac{v+h}{\sqrt{2}} \right) + \text{c.c.}\quad (1.77)$$

Esta forma do acoplamento de Yukawa sugere que interpretemos $(e_{L,i})$ e (\bar{e}_i) como partes canhota e destra dos campos massivos dos léptons e, μ, τ . Identificando a seguinte transformação para \bar{e}_i

$$\bar{e}_i = -\sigma_2 e_{R,i}^*,\quad (1.78)$$

e também que

$$(e_{L,i})^T e_{R,i}^* = -e_{R,i}^\dagger e_{L,i}.\quad (1.79)$$

Então, a partir diagonalização feita para os acoplamento y_{ii} , chega-se a seguinte forma

$$\mathcal{L}_{Yuk}^{[e]} = i \left(\frac{v+h}{\sqrt{2}} \right) (y_e e_R^\dagger e_L + y_\mu \mu_R^\dagger \mu_L + y_\tau \tau_R^\dagger \tau_L) + \text{c.c.}\quad (1.80)$$

Como os acoplamentos de Yukawa para os léptons y_e, y_μ, y_τ são números real e v é real, então as massas dos léptons são dados por

$$(m_e, m_\mu, m_\tau) = \frac{v}{\sqrt{2}} (y_e, y_\mu, y_\tau)\quad (1.81)$$

Podemos escrever (1.80) como

$$\mathcal{L}_{Yuk}^{[e]} = i \left(1 + \frac{h}{v} \right) (m_e \bar{e}e + m_\mu \bar{\mu}\mu + m_\tau \bar{\tau}\tau), \quad (1.82)$$

em que nomeamos o produto $\bar{e}e = e_R^\dagger e_L + \text{c.c.}$ na forma de Dirac.

Para os quarks do tipo *down*, descritos pela primeira parte de (1.39)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yuk}^{[d]} &= iy_{ii}^{[d]} \widehat{\mathbf{Q}}_i \bar{\mathbf{d}}_i H^* + \text{c.c.}, \\ \mathcal{L}_{Yuk}^{[d]} &= iy_{ii}^d \widehat{\mathbf{Q}}_i \bar{\mathbf{d}}_i \mathbf{U}^* H_0 + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (1.83)$$

Transformando o campo \mathbf{Q}_i como $\mathbf{Q}'_i = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{Q}_i$, analogamente ao que fora feito para os léptons, então

$$\mathcal{L}_{Yuk}^{[d]} = iy_{ii}^d \mathbf{Q}'_i{}^T \sigma_2 \bar{\mathbf{d}}_i H_0 + \text{c.c.} \quad (1.84)$$

Seguindo o que fora feito em (1.78), permite identificar a seguinte relação

$$\bar{\mathbf{d}}_{i,L} = -\sigma_2 \mathbf{d}_{i,R}^* \quad (1.85)$$

No gauge unitário, o dubleto de quarks se transforma de forma análoga aos léptons (1.76)

$$\mathbf{U}^\dagger \mathbf{Q}'_i \rightarrow \mathbf{Q}'_{i,L} \quad (1.86)$$

Dessa forma, (1.84) será reescrita como

$$\mathcal{L}_{Yuk}^{[d]} = -iy_{ii}^d \frac{(v+h)}{\sqrt{2}} \mathbf{d}'_{L,i}{}^T \mathbf{d}_{R,i}^* + \text{c.c.}, \quad (1.87)$$

possibilitando a identificação dos seguintes quarks *down*

$$\mathbf{d}'_{L,1} = \mathbf{d}_L, \quad \mathbf{d}'_{L,2} = \mathbf{s}_L, \quad \mathbf{d}'_{L,3} = \mathbf{b}_L, \quad (1.88)$$

onde d, s, b são os quarks *down, strange, bottom*, respectivamente. Por fim, o acoplamento de Yukawa dos quarks *down*, na forma de Dirac, é

$$\mathcal{L}_{Yuk}^{[d]} = i \left(1 + \frac{h}{v} \right) (m_d \bar{\mathbf{d}}\mathbf{d} + m_s \bar{\mathbf{s}}\mathbf{s} + m_b \bar{\mathbf{b}}\mathbf{b}). \quad (1.89)$$

Para o acoplamento de Yukawa dos quarks da família *up*, descritos pela segunda parte de (1.39), temos que

$$\mathcal{L}_{Yuk}^{[u]} = y_{jj}^u i \widehat{\mathbf{Q}}_j \mathcal{U}_{ji} \bar{\mathbf{u}}_j \tau_2 \mathbf{U} H_0 + \text{c.c.} \quad (1.90)$$

Como τ_2 é a segunda matriz de Pauli, então satisfaz $\tau_2 \vec{\tau} \tau_2 = -\vec{\tau}^T$, daí segue que

$$\tau_2 \mathbf{U} = (\mathbf{U}^{-1})^T \tau_2 = (\mathbf{U}^\dagger)^T \tau_2, \quad (1.91)$$

permitindo absorver \mathbf{U} na seguinte transformação $\mathbf{Q}'_i = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{Q}_i$. No gauge unitário, temos que

$$\mathcal{L}_{Yuk}^{[u]} = y_{jj}^u i \widehat{\mathbf{Q}}'_i \mathcal{U}_{ji} \bar{\mathbf{u}}_j \tau_2 H_0 + \text{c.c.}, \quad (1.92)$$

$$\mathcal{L}_{Yuk}^{[u]} = y_{jj}^u i \frac{(v+h)}{\sqrt{2}} \mathbf{u}_{L,i}^T \mathcal{U}_{ji} \sigma_2 \bar{\mathbf{u}}_j + \text{c.c.} \quad (1.93)$$

Identifica-se a parte destra do quark *down* como $\sigma_2 \bar{\mathbf{u}}_{L,j} = -\mathbf{u}_{R,j}^*$. Além disso, define-se a seguinte relação $\mathbf{u}_j = \mathcal{U}_{ji} \mathbf{u}'_{L,i}$, logo

$$\mathbf{u}_{L,1} = \mathbf{u}_L, \quad \mathbf{u}_{L,2} = \mathbf{c}_L, \quad \mathbf{u}_{L,3} = \mathbf{t}_L. \quad (1.94)$$

Portanto, o acoplamento de Yukawa do quark *up*, na forma de Dirac é

$$\mathcal{L}_{Yuk}^{[u]} = i \left(1 + \frac{h}{v} \right) (m_u \bar{\mathbf{u}} \mathbf{u} + m_c \bar{\mathbf{c}} \mathbf{c} + m_t \bar{\mathbf{t}} \mathbf{t}). \quad (1.95)$$

1.2.3 As interações entre os férmions e os bósons

O acoplamento dos quarks e léptons com os campos de gauge é determinado pelos termos de derivadas covariantes. Como estamos analisando a Lagrangeana do Modelo Padrão na quebra espontânea de simetria, então neste vácuo assimétrico, é necessário reescrever (1.20) em termos dos novos autoestados de massa, obtidos na subseção anterior. Duas importantes características ocorrem: a mistura dos bósons neutros W_μ^3 e B_μ , e a mistura entre os autoestados de massa dos quarks canhotos pela matriz \mathcal{U} . Vale ressaltar que os procedimentos a seguir estarão no gauge unitário. Para a parte canhota leptônica, o termo cinético é

$$\begin{aligned} L_i^\dagger \sigma^\mu D_\mu L_i &= \begin{pmatrix} \nu_i^\dagger & e_i^\dagger \end{pmatrix}_L \sigma^\mu \partial_\mu \begin{pmatrix} \nu_i \\ e_i \end{pmatrix}_L \\ &+ \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \nu_i^\dagger & e_i^\dagger \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} g_2 W_\mu^3 - g_1 B_\mu & g_2 (W_\mu^1 - i W_\mu^2) \\ g_2 (W_\mu^1 + i W_\mu^2) & -g_2 W_\mu^3 - g_1 B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_i \\ e_i \end{pmatrix}_L, \end{aligned} \quad (1.96)$$

enquanto para a parte destra, temos

$$\bar{e}_i^\dagger \sigma^\mu D_\mu \bar{e}_i = \bar{e}_i^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \bar{e}_i + \bar{e}_i^\dagger \sigma^\mu i g_1 B_\mu \bar{e}_i. \quad (1.97)$$

Inserindo a identidade $\sigma_2^2 = 1$ e utilizando (1.78) para a parte destra, permite reescrevê-la como

$$\bar{e}_i^\dagger \sigma^\mu D_\mu \bar{e}_i = e_{R,i}^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu e_{R,i} + e_{R,i}^\dagger \bar{\sigma}^\mu i g_1 B_\mu e_{R,i}, \quad (1.98)$$

em que $\sigma_2 \sigma^\mu \sigma_2 = \bar{\sigma}^\mu$. Isso permite juntar as partes canhotas e destras para os termo cinético na forma de Dirac. Entretanto, manteremos estes termos em suas formas destras e canhotas para identificar as interações eletromagnéticas e fracas. Para isso, utiliza-se as seguintes relações

$$W_\mu^3 = \cos \theta_W Z_\mu + \sin \theta_W A_\mu, \quad B_\mu = -\sin \theta_W Z_\mu + \cos \theta_W A_\mu, \quad (1.99)$$

em (1.96) e (1.98), sendo obtidos os seguintes termos de interações

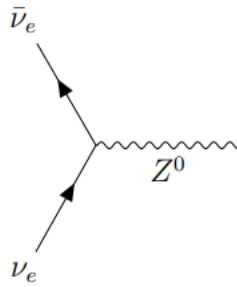
$$\begin{aligned}
 & -ieA_\mu(e_{L,i}^\dagger\sigma^\mu e_{L,i} + e_{R,i}^\dagger\bar{\sigma}^\mu e_{R,i}) + \frac{ie}{\sqrt{2}\sin\theta_W}(W_\mu^+\nu_{L,i}^\dagger\sigma^\mu e_{L,i} + W_\mu^-e_{L,i}^\dagger\sigma^\mu\nu_{L,i}) \\
 & + i\frac{eZ_\mu}{2\cos\theta_W\sin\theta_W}(\nu_{L,i}^\dagger\sigma^\mu\nu_{L,i} - e_{L,i}^\dagger\sigma^\mu e_{L,i} + 2\sin^2\theta_W(e_{L,i}^\dagger\sigma^\mu e_{L,i} + e_{R,i}^\dagger\bar{\sigma}^\mu e_{R,i})),
 \end{aligned} \tag{1.100}$$

em que o primeiro termo representa a interação eletromagnética, o segundo termo as interações fracas carregadas e o último termo a interação fraca neutra, com as interações descritas em (1.100) sendo representadas pelos seguintes diagramas de Feynman na Figura 5. A falta dos termos destros em $W_\mu^+\nu_{L,i}^\dagger\sigma^\mu e_{L,i} + W_\mu^-e_{L,i}^\dagger\sigma^\mu\nu_{L,i}$ indica que esta interação não respeita a paridade, assim como a interação com Z_μ . Já a interação eletromagnética contém tanto termos destros e canhotos de forma simétrica, respeitando a paridade. Além disso, é identificada a seguinte relação para a carga elétrica

$$e = g_2 \sin\theta_W. \tag{1.101}$$



(a) Interação elétron-pósitron eletromagnética γ ou fraca Z^0 . (b) Vértice da interação entre o bóson W^- com o elétron e o antineutrino do elétron.



(c) Vértice da interação entre o bóson Z^0 com o neutrino e o antineutrino do elétron.

Figura 5 – Interações eletromagnéticas e fracas do setor leptônico, a partir dos termos de (1.100). Embora os vértices foram mostrados apenas para a família do elétron, o mesmo vale para múons e taus.

O mesmo procedimento é feito para os quarks. Começando do termo cinético para o dubleto de quarks \mathbf{Q}_i (1.20)

$$\mathbf{Q}_i^\dagger\sigma^\mu D_\mu\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_i^\dagger\sigma^\mu\left(\partial_\mu + ig_2\frac{\sigma^a}{2}W_\mu^a + i\frac{g_1}{6}B_\mu\right)\mathbf{Q}_i, \tag{1.102}$$

sabemos que todas as redefinições de \mathbf{Q}_i em termos dos autoestados de massa envolvem transformações unitárias. Essas transformações são absorvidas pelos campos de gauge em transformações de gauge, como visto em (1.63). Portanto, já podemos analisar as interações eletrofracas para os quarks em termos dos autoestado de massa dos gauges. Assim, os termos de interação entre os quarks e os bósons de gauge escritos nos autoestados de massa, são

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_i^\dagger \sigma^\mu \left(ig_2 \frac{\sigma^a}{2} W_\mu^a + i \frac{g_1}{6} B_\mu \right) \mathbf{Q}_i &= ie A_\mu \left(\frac{2}{3} \mathbf{u}'_{L,i} \sigma^\mu \mathbf{u}'_{L,i} - \frac{1}{3} \mathbf{d}'_{L,i} \sigma^\mu \mathbf{d}'_{L,i} \right) \\ &+ \frac{ie Z_\mu}{\cos \theta_W \sin \theta_W} \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \right) \mathbf{u}'_{L,i} \sigma^\mu \mathbf{u}'_{L,i} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W \right) \mathbf{d}'_{L,i} \sigma^\mu \mathbf{d}'_{L,i} \right) \\ &+ \frac{ie}{\sqrt{2} \sin \theta_W} W_\mu^+ \mathbf{u}'_{L,i} \sigma^\mu \mathbf{d}'_{L,i} + \frac{ie}{\sqrt{2} \sin \theta_W} W_\mu^- \mathbf{d}'_{L,i} \sigma^\mu \mathbf{u}'_{L,i}. \end{aligned} \quad (1.103)$$

Similarmente, para os quarks destros, temos os seguintes termos de interação

$$\begin{aligned} -i \frac{g_1}{6} B_\mu (2 \bar{\mathbf{u}}_i^\dagger \sigma^\mu \mathbf{u}_i + \bar{\mathbf{d}}_i^\dagger \sigma^\mu \mathbf{d}_i) &= -\frac{ie}{3} A_\mu \mathbf{d}_{R,i}^\dagger \bar{\sigma}^\mu \mathbf{d}_{R,i} + \frac{ie}{3} \sin^2 \theta_W Z_\mu \mathbf{d}_{R,i}^\dagger \bar{\sigma}^\mu \mathbf{d}_{R,i} \\ &+ \frac{2ie}{3} A_\mu \mathbf{u}_{R,i}^\dagger \bar{\sigma}^\mu \mathbf{u}_{R,i} - \frac{2ie}{3} \sin^2 \theta_W Z_\mu \mathbf{u}_{R,i}^\dagger \bar{\sigma}^\mu \mathbf{u}_{R,i}. \end{aligned} \quad (1.104)$$

Resta escrever $\mathbf{u}'_{L,i}$ e $\mathbf{d}'_{L,i}$ em termos dos autoestados de massa, definidos na seção anterior

$$\begin{aligned} \mathbf{d}'_{L,i} &= (\mathbf{d}_L, \mathbf{s}_L, \mathbf{b}_L), \\ \mathbf{u}'_{L,i} &= (\mathcal{U}^\dagger)_{ij} \mathbf{u}_{L,j}. \end{aligned} \quad (1.105)$$

As correntes neutras entre os quarks de mesmos sabores presentes em (1.103) e (1.104)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_i \sigma^\mu \mathbf{u}'_i &= \mathbf{u}_i^\dagger (\mathcal{U} \mathcal{U}^\dagger)_{ij} \sigma^\mu \mathbf{u}_j \\ &= \mathbf{u}^\dagger \sigma^\mu \mathbf{u} + \mathbf{c}^\dagger \sigma^\mu \mathbf{c} + \mathbf{t}^\dagger \sigma^\mu \mathbf{t}, \end{aligned} \quad (1.106)$$

obviamente não apresentam transição de sabores. Porém, a unitariedade de \mathcal{U}_{ij} só é preservada a nível de árvore. Na teoria quântica dos campos, esta unitariedade não é preservada e, portanto, há um pequeno desvio devido às correções quânticas. O mecanismo responsável por manter este desvio suficientemente pequeno é chamado Mecanismo GIM, devido aos criadores S. Glashow, J. Iliopoulos e L. Maiani [44], que previram o quark *charm* para explicar esta supressão.

Por outro lado, as correntes carregadas causam transições de sabores entre os quarks

$$\mathbf{u}'_{L,i} \sigma^\mu \mathbf{d}'_{L,i} = \mathbf{u}'_{L,j} \mathcal{U}_{ji} \sigma^\mu \mathbf{d}_{L,i}, \quad (1.107)$$

cuja interação é representada pelos seguintes diagramas de Feynman na Figura 6. Pode-se escrever todas as interações entre os férmions e os campos de gauge da seguinte forma

$$\begin{aligned} &\frac{ie}{\sqrt{2} \sin \theta_W} \left[W_\mu^- (e_{L,i}^\dagger \sigma^\mu \nu_{L,i} + J^{+\mu}) + W_\mu^+ (\nu_{L,i}^\dagger \sigma^\mu e_{L,i} + J^{-\mu}) \right] \\ &+ ie A_\mu J_{\text{em}}^\mu + \frac{ie Z_\mu}{\sin \theta_W \cos \theta_W} \left[\frac{1}{2} (\nu_{L,i}^\dagger \sigma^\mu \nu_{L,i} - e_{L,i}^\dagger \sigma^\mu e_{L,i}) + J^{3\mu} - \sin^2 \theta_W J_{\text{em}}^\mu \right], \end{aligned} \quad (1.108)$$



- (a) Transição de sabor de um quark *down* para um quark *up*, emitindo um bóson W^- .
 (b) Transição de sabor de um quark *up* para um quark *down*, emitindo um bóson W^+ .

Figura 6 – Transição de sabor entre quarks que ocorre dos termos finais em (1.103).

onde as correntes fracas carregadas, fracas neutras e eletromagnéticas são, respectivamente

$$\begin{aligned}
 J_\mu^- &= \mathbf{u}_{L,j}^\dagger \mathcal{U}_{ji} \sigma_\mu \mathbf{d}_{L,i} \quad , \quad J_\mu^+ = \mathbf{d}_{L,j}^\dagger (\mathcal{U}^\dagger)_{ji} \sigma_\mu \mathbf{u}_{L,i} \\
 J_\mu^3 &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{u}_{L,j}^\dagger \sigma_\mu \mathbf{u}_{L,j} - \mathbf{d}_{L,j}^\dagger \sigma_\mu \mathbf{d}_{L,j} \right) \\
 J_{\text{em}}^\mu &= \frac{2}{3} \left(\mathbf{u}_{L,j}^\dagger \sigma^\mu \mathbf{u}_{L,j} + \mathbf{u}_{R,j}^\dagger \bar{\sigma}^\mu \mathbf{u}_{R,j} \right) - \frac{1}{3} \left(\mathbf{d}_{L,j}^\dagger \sigma^\mu \mathbf{d}_{L,j} + \mathbf{d}_{R,j}^\dagger \bar{\sigma}^\mu \mathbf{d}_{R,j} \right) \\
 &\quad - \left(e_{L,j}^\dagger \sigma^\mu e_{L,j} + e_{R,j}^\dagger \bar{\sigma}^\mu e_{R,j} \right).
 \end{aligned} \tag{1.109}$$

Assim, indentifica-se que os quarks up tem carga elétrica igual $\frac{2}{3}$, os quarks down $-\frac{1}{3}$, e todos os léptons carregados -1 . Como os neutrinos não se acoplam a A_μ , então são eletricamente neutros.

1.2.4 Os bósons de gauge

Para completar a descrição da Lagrangeana do Modelo Padrão pós quebra espontânea de simetria no gauge unitário, temos que avaliar a parte de Yang-Mills, que contém interações entre os campos de gauge. A parte QCD continua inalterada devido à unitariedade das transformações feita nos quarks. Assim, a QCD consiste de

$$\mathcal{L}_{QCD} + ig_3 A_\mu^A J^{A\mu}, \tag{1.110}$$

em que as correntes dos glúons são dadas, na forma de Dirac, por

$$J_\mu^A = \bar{\mathbf{u}}_i \gamma_\mu \frac{\lambda^A}{2} \mathbf{u}_i + \bar{\mathbf{d}}_i \gamma_\mu \frac{\lambda^A}{2} \mathbf{d}_i, \tag{1.111}$$

com a Lagrangeana da QCD sendo

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} \sum_{A=1}^8 G_{\mu\nu}^A G^{\mu\nu A}, \tag{1.112}$$

em que o tensor de força é definido como em (1.3).

No setor eletrofraco, todos os potenciais de gauge são canônicos devido as redefinições serem unitárias, e seus termos cinéticos não mudam de forma

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{4} (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)^2 \\
 & -\frac{1}{2} (\partial^\mu W^{+\nu} - \partial^\nu W^{+\mu}) (\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-).
 \end{aligned} \tag{1.113}$$

Após uma extensa álgebra e integrações por partes dos termos cruzados de $(W_{\mu\nu}^3)^2$ em (1.2), as interações em termos dos campos Z_μ e A_μ são

$$i \left(e A^\mu + \frac{e}{\tan \theta_W} Z^\mu \right) \left[W^{+\nu} (\partial_\nu W_\mu^- - \partial_\mu W_\nu^-) - W^{-\nu} (\partial_\nu W_\mu^+ - \partial_\mu W_\nu^+) \right], \tag{1.114}$$

em que estas interações são representadas pelo seguinte diagrama de Feynman na Figura 7.

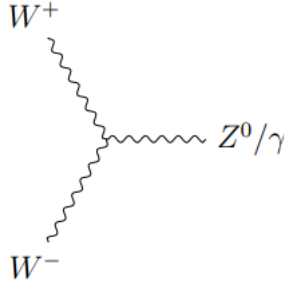


Figura 7 – Vértice de interação cúbica entre os bósons W^\pm com Z^0 ou γ .

Em (1.114) foram utilizadas as seguintes decomposições

$$W_{\mu\nu}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_{\mu\nu}^1 \mp i W_{\mu\nu}^2) = \partial_\mu W_\nu^\pm - \partial_\nu W_\mu^\pm \mp i g_2 (W_\nu^3 W_\mu^\pm - W_\mu^3 W_\nu^\pm), \tag{1.115}$$

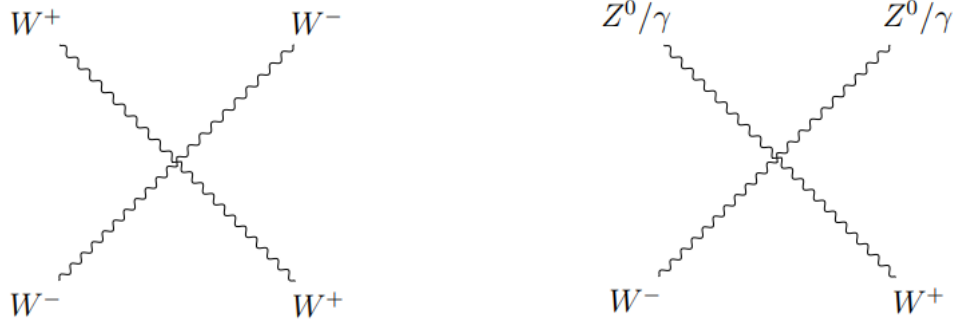
e

$$W_{\mu\nu}^3 = \partial_\mu W_\nu^3 - \partial_\nu W_\mu^3 - i g_2 (W_\mu^- W_\nu^+ - W_\mu^+ W_\nu^-).$$

As autointerações quárticas dão os seguintes termos, sendo representadas por diagramas de Feynman na Figura 8

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{e^2}{\sin^2 \theta_W} \left[(W_\mu^- W^{-\mu}) (W_\nu^+ W^{+\nu}) - (W_\mu^- W^{+\mu})^2 \right] \\
 & - \frac{e^2}{\sin^2 \theta_W} \left[(\cos \theta_W Z_\mu + \sin \theta_W A_\mu) (\cos \theta_W Z^\mu + \sin \theta_W A^\mu) (W^{+\rho} W_\rho^-) \right. \\
 & \left. - (\cos \theta_W Z_\mu + \sin \theta_W A_\mu) W^{+\mu} (\cos \theta_W Z_\rho + \sin \theta_W A_\rho) W^{-\rho} \right].
 \end{aligned} \tag{1.116}$$

Assim, conclui-se a descrição da Lagrangeana do Modelo Padrão no gauge unitário, útil para identificar os graus de liberdade dos campos, mas não recomendado, conforme mencionado em [37], para realizar cálculos quânticos.



(a) Interação quártica entre os bósons W^\pm referentes à primeira linha de (1.116). (b) Processo de aniquilação gerando bósons neutros.

Figura 8 – Interações quárticas entre os bósons W^\pm com Z^0 e γ , representados de forma geral, referente às últimas linhas de (1.116).

Todas as partículas carregadas eletricamente interagem com o fóton com força proporcional a sua carga. Além disso, as interações são diagonais, preservam paridade e conjugação de carga. O mesmo ocorre para a interação forte entre quarks e glúons, isto é, preservam paridade e conjugação de carga, ao menos a nível clássico. Estas invariâncias são quebradas sutilmente na QCD devido à efeito quânticos não perturbativos relacionados a anomalias quânticas, como mencionado em [37].

Os bósons W^\pm mediam as interações em que há troca de sabores entre férmions canhotos, violando C e P, individualmente. As interações são diagonais por família e preservam CP para os léptons. Para os quarks, estas interações geram transições entre diferentes famílias, e explicitamente violam a invariância CP. Para ver esta última afirmação, seguindo [34], considere (1.109) e o primeiro termo de (1.108)

$$\mathcal{L}^{[u,d]} = \frac{ie}{\sqrt{2} \sin \theta_W} \left[W_\mu^+ \mathbf{u}_{L,j}^\dagger \mathcal{U}_{ji} \sigma^\mu \mathbf{d}_{L,i} + W_\mu^- \mathbf{d}_{L,j}^\dagger (\mathcal{U}^\dagger)_{ji} \sigma^\mu \mathbf{u}_{L,i} \right], \quad (1.117)$$

onde P_L é operador projeção de quiralidade $P_L \Psi = \Psi_L$. Assim, sob CP^4 , o termo acima se torna

$$CP : \quad \mathcal{L}^{[u,d]} = \frac{ie}{\sqrt{2} \sin \theta_W} \left[W_\mu^+ \mathbf{u}_{L,j}^\dagger (\mathcal{U}_{ji}^\dagger)^T \sigma^\mu \mathbf{d}_{L,i} + W_\mu^- \mathbf{d}_{L,j}^\dagger (\mathcal{U}^T)_{ji} \sigma^\mu \mathbf{u}_{L,i} \right], \quad (1.118)$$

assim, a não ser que $\mathcal{U} = \mathcal{U}^\dagger$, então os quarks violam a simetria CP explicitamente, pois como mencionado existe uma fase, tornando a matriz não real.

Além disso, vimos que as interações vistas respeitam quatro números globais quânticos, que não estão relacionados a simetrias de gauge: número de quark e os três números leptônicos. Entretanto, aspectos não perturbativos do estado de vácuo do Modelo Padrão alteram esta invariância, como mostrado em (1.43).

⁴ W^\pm trocam de lugar entre si, pois são antipartículas de cada um.

2 Grupo de Renormalização

Até o presente momento, o Modelo Padrão foi tratado de forma clássica e, portanto, muito dos resultados que podem ser retirados a partir da Lagrangeana não vão concordar com os resultados experimentais. Isso porque a quantização dos campos gera uma série de interações não previstas pelas equações clássicas de movimento. Estas interações chamadas de correções radiativas ou quânticas, em geral, contêm integrais divergentes que estão associadas a flutuações quânticas em distâncias muito pequenas ou momentos arbitrariamente grandes. Os processos de regularização e renormalização são necessários para que os observáveis associados a estas correções sejam finitos.

Ao renormalizar os observáveis, estes adquirem uma dependência em escala de energia, satisfazendo a equação diferencial conhecida como grupo de renormalização. Define-se o grupo de renormalização como a invariância dos observáveis sobre mudanças na escala de energia. Na próxima seção serão vistos estes procedimentos para a eletrodinâmica quântica e discutido alguns resultados importantes. Após isso, serão realizados cálculos quânticos a um laço para uma teoria não-abeliana de gauge. Dessa forma, será possível encontrar as equações do grupo de renormalização para os observáveis do Modelo Padrão a um laço.

2.1 Eletromagnetismo quântico

O eletromagnetismo quântico, desenvolvido independentemente por Feynman [10, 11], Schwinger [12, 13] e Tomonaga [14], descreve a interação entre a luz (fóton) e o elétron a nível quântico e relativístico. A sua importância histórica reside no fato de ser uma das primeiras teorias quânticas dos campos que obteve resultados experimentais satisfatórios quando confrontados com as previsões teóricas. Matematicamente, a eletrodinâmica quântica é caracterizada pela invariância de gauge sob o grupo abeliano $U(1)$. A quantização do campo eletromagnético A_μ é o fóton, enquanto a quantização do campo fermiônico ψ representa o elétron. Assim, a Lagrangeana do eletromagnetismo quântico é dada por

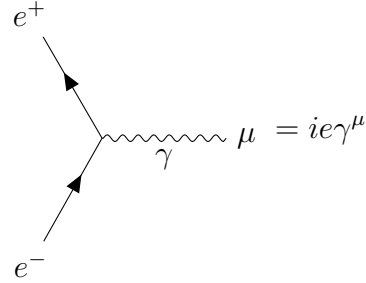
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi + e\bar{\psi}\not{A}\psi, \quad (2.1)$$

em que $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ é o tensor de forças. Além disso, é adotada a notação *slashed*, $\not{A} \equiv \gamma_\mu A^\mu$.

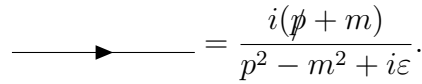
A quantização dos campos geram as regras de Feynman, representações pitorescas das interações que são traduzidas em relações matemáticas. Para o eletromagnetismo

quântico, as regras são

$$\mu \text{ ~~~~~ } \nu = \frac{-i}{p^2 + i\varepsilon} \left(g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right), \quad (2.2)$$



$$e^+ \text{ ~~~~~ } e^- \text{ ~~~~~ } \gamma \text{ ~~~~~ } \mu = ie\gamma^\mu, \quad (2.3)$$



$$\text{~~~~~} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (2.4)$$

O fator ξ em (2.2) é um valor arbitrário, porém necessário para que o propagador do fóton seja encontrado. No processo de quantização dos campos pela integral de caminho de Feynman, há uma redundância na integral dos campos A_μ devido a invariância de gauge presente na teoria. O procedimento de Faddeev-Popov elimina esta redundância na integral de caminhos, sendo visto em detalhes na próxima seção para uma teoria não-abeliana $SU(N)$. Por fim, nos cálculos realizados a seguir é escolhido $\xi = 1$, conhecido como gauge de Feynman.

No capítulo anterior, foram encontradas equações para as hipercargas dos férmions no Modelo Padrão (1.29). Para a QED, o grupo de gauge $U(1)$ tem como número quântico a carga elétrica Q . Assim, de forma análoga a (1.26), encontramos a seguinte equação para QED, de forma a não haver uma anomalia de gauge

$$q_1^3 + q_2^3 = 0, \quad (2.5)$$

onde q_1 é a carga elétrica de ψ e q_2 de $\bar{\psi}$. Como q_1 e q_2 são números reais, então $q_1 = -q_2$. Dessa forma, a anomalia de gauge não está presente na QED.

2.1.1 Correção do propagador do fóton

O primeiro termo da correção radiativa do propagador do fóton é a criação de um par elétron-pósitron agindo virtualmente como um dipolo, polarizando o vácuo na presença de radiação eletromagnética, cuja interação está representada pelo diagrama de Feynman na Figura 9. Essa interação tem a seguinte integral a ser calculada

$$i\Pi^{\mu\nu}(p^2) = -(ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu i(\not{k} - \not{p} + m)\gamma^\nu i(\not{k} + m)]}{[(p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon](k^2 - m^2 + i\varepsilon)}. \quad (2.6)$$

Antecipando-se nos resultados, essa integral é divergente. Em uma análise rápida, o denominador se comporta como k^4 , enquanto o numerador apresenta o seguinte comportamento $k^2 d^4k$. Como k^μ representa o quadrimomento do laço, sendo integrado sob todos

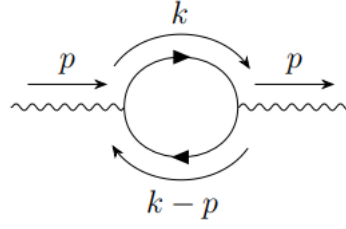


Figura 9 – Correção a um laço do propagador do fóton, também chamada de polarização do vácuo.

os valores, então para grandes valores de k^μ , a integral irá divergir. Portanto, a integral deverá ser regularizada, de forma a não quebrar a invariância de gauge sob $U(1)$ presente na teoria. A regularização dimensional - desenvolvida por t'Hooft, Veltman, Gianbiagi e Bolinni - preenche este requisito e, portanto, será utilizada. O método consiste em realizar uma continuação analítica da integral em (2.6) para d dimensões, em que $d = 4 - \epsilon$, com $\epsilon \rightarrow 0$. Dessa forma, (2.6) se torna

$$i\Pi^{\mu\nu}(p^2) = -(ie)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu i(\not{k} - \not{p} + m)\gamma^\nu i(\not{k} + m)]}{[(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon](k^2 - m^2 + i\epsilon)}, \quad (2.7)$$

onde foi introduzido μ , uma escala de energia permitindo que e continue sendo adimensional. O numerador tem a seguinte forma

$$\text{Tr}[\gamma^\mu i(\not{k} - \not{p} + m)\gamma^\nu i(\not{k} + m)] = 4[p^\mu k^\nu + k^\mu p^\nu - 2k^\mu k^\nu - g^{\mu\nu}(-k^2 + p \cdot k + m^2)]. \quad (2.8)$$

Para o denominador, o cálculo segue utilizando os parâmetros de Feynman, definidos da seguinte forma

$$\frac{1}{ABC \dots Z} = (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \dots \int_0^1 dx_n \frac{\delta(1-x_1-\dots-x_n)}{(Ax_1 + Bx_2 + \dots + Zx_n)^n}. \quad (2.9)$$

Assim, nesse caso, encontra-se que

$$\frac{1}{[(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon](k^2 - m^2 + i\epsilon)} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(k-p(1-x))^2 + xp^2(1-x) - m^2 + i\epsilon]^2}. \quad (2.10)$$

Realizando a mudança de variável $\ell^\mu = k^\mu - p^\mu(1-x)$, com $d^d \ell = d^d k$, tem-se que

$$i\Pi^{\mu\nu}(p^2) = -e^2 \mu^{4-d} (4g^{\mu\nu} p^2 - 8p^\mu p^\nu) \int_0^1 dx x(1-x) \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell^2 - \Delta)^2} + 4e^2 \mu^{4-d} g^{\mu\nu} \int_0^1 dx \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^2(1-2/d) - m^2}{(\ell^2 - \Delta)^2}, \quad (2.11)$$

com $\Delta = m^2 - p^2 x(1-x) + i\epsilon$. Os termos lineares ℓ^μ vão a zero na integral sob o argumento de simetria.

Utilizando os seguintes resultados para estas integrais, obtidos de [34]

$$\int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell^2 - \Delta)^2} = \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \Gamma(2 - d/2), \quad (2.12)$$

$$\int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^2}{(\ell^2 - \Delta)^2} = -\frac{d}{2} \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Delta^{1-d/2}} \Gamma(1 - d/2), \quad (2.13)$$

em que $\Gamma(x)$ é a função gama. Dessa forma, é obtido o seguinte resultado

$$i\Pi^{\mu\nu}(p^2) = -8ie^2(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \int_0^1 dx x(1-x) \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\mu^{4-d}}{\Delta^{2-d/2}} \Gamma(2 - d/2). \quad (2.14)$$

A expansão dos termos que dependem em d dentro da integral é realizada da seguinte forma, considerando a definição de Weierstrass [45] da função gama

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{z/n}}{1 + z/n},$$

em que γ é a constante de Euler-Mascheroni. Realizando a expansão em $z = 0$ até termos de primeira ordem, tem-se que

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{1 - \gamma z + \mathcal{O}(z^2)}{z} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \mathcal{O}(z^2/n^2)), \\ \Gamma(z) &\approx \frac{1}{z} - \gamma. \end{aligned}$$

Assim, utilizando esse resultado da função gama aos termos dentro da integral (2.14), encontra-se para a expansão $d = 4 - \epsilon$ em $\epsilon = 0$ que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\mu^{4-d}}{\Delta^{2-d/2}} \Gamma(2 - d/2) &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{\Gamma(\epsilon/2)}{\left(\frac{\Delta}{4\pi\mu^2}\right)^{\epsilon/2}}, \\ \frac{1}{16\pi^2} \frac{\Gamma(\epsilon/2)}{\left(\frac{\Delta}{4\pi\mu^2}\right)^{\epsilon/2}} &= \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma\right) \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \ln\left(\frac{\Delta}{4\pi\mu^2}\right)\right), \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln\left(\frac{\Delta}{4\pi\mu^2}\right) - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon)\right), \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln\left(\frac{\Delta}{\mu^2}\right) - \mathcal{O}(\epsilon)\right), \end{aligned} \quad (2.15)$$

sendo realizado na última a linha a seguinte redefinição de $4\pi e^\gamma \mu^2 \rightarrow \mu^2$. Dessa forma, $\Pi^{\mu\nu}(p^2)$ em (2.14) tem o seguinte resultado

$$i\Pi^{\mu\nu}(p^2) = -i \frac{e^2}{2\pi^2} (p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \int_0^1 dx x(1-x) \left[\frac{2}{\epsilon} + \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2 - p^2 x(1-x) + i\varepsilon}\right) \right]. \quad (2.16)$$

Portanto, o propagador do fóton até um laço tem a seguinte forma

$$iD^{\mu\nu} = \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2} + \frac{-i}{p^2} i\Pi^{\mu\nu}(p^2) \frac{-i}{p^2}. \quad (2.17)$$

Por simplificação, $\Pi^{\mu\nu}(p^2)$ será escrito como

$$i\Pi^{\mu\nu}(p^2) = i(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)\Pi(p^2) \quad (2.18)$$

onde

$$\Pi(p^2) = -\frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left[\frac{2}{\epsilon} + \ln \frac{\mu^2}{m^2 - p^2 x(1-x) + i\varepsilon} \right]. \quad (2.19)$$

Embora não será demonstrado neste texto, o propagador do fóton está relacionado ao potencial de Coulomb, como mostrado em [34, 46]. Portanto, a um laço, o potencial de Coulomb, no espaço dos momentos, é da seguinte forma

$$V(p) = e^2 \frac{1 + \Pi(p^2)}{p^2}. \quad (2.20)$$

É necessário renormalizar esta expressão, pois (2.19) contém um termo infinito. Para isso, escolhe-se uma escala de energia $p^2 = p_0^2$ em que se define a carga elétrica renormalizada, isto é,

$$p_0^2 V(p_0) = e_R^2 = e^2(1 + \Pi(p_0^2)). \quad (2.21)$$

Resolvendo para a carga e em função de e_R até a ordem e_R^4 , encontramos

$$e^2 = e_R^2(1 - \Pi(p_0^2)). \quad (2.22)$$

Substituindo (2.22) em (2.20), obtemos

$$V(p) = \frac{e_R^2}{p^2} [1 + \Pi(p^2) - \Pi(p_0^2)]. \quad (2.23)$$

ou

$$V(p) = \frac{e_R^2}{p^2} - \frac{e_R^4}{2\pi^2 p^2} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(\frac{m^2 - p_0^2 x(1-x) + i\varepsilon}{m^2 - p^2 x(1-x) + i\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(e_R^6). \quad (2.24)$$

Escolhendo a escala de renormalização $p_0^2 = 0$, então $V(p)$ simplifica para

$$\begin{aligned} V(p) &= \frac{e_R^2}{p^2} - \frac{e_R^4}{2\pi^2 p^2} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(\frac{m^2}{m^2 - p^2 x(1-x) + i\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(e_R^6), \\ V(p) &= \frac{e_R^2}{p^2} + \frac{e_R^4}{2\pi^2 p^2} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} x(1-x) + i\varepsilon \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Notemos que o termo $x(1-x)$ do argumento do logaritmo se encontra em $0 < x(1-x) < 1/4$, de forma que o corte de ramificação¹ se encontra a partir de $p^2 = 4m^2$, isto é, a energia mínima para que fóton “crie” um par elétron-pósitron. Nesse regime em que $p^2 > 4m^2$ é possível reescrever o segundo termo de $V(p)$, advindo de $\Pi(q^2)$ em (2.19), a partir da parte imaginária de $\Pi(q^2)$. Para isso, observemos que para um valor fixo de

¹ Do inglês, *branch cut*.

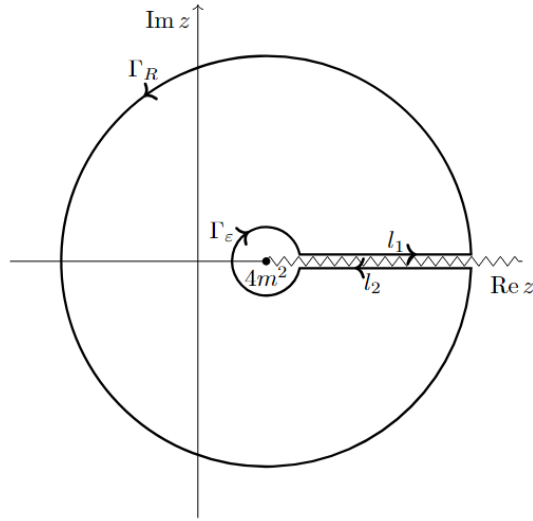


Figura 10 – Contorno utilizada para definir o caminho de integração da fórmula de Cauchy. Note que a ramificação começa em $4m^2$ e se estende até o infinito. Além disso, há uma descontinuidade da função ao passar do plano inferior para o plano superior.

$p^2 \geq 4m^2$, tem-se que os valores de x que contribuem para a parte imaginária se encontram em

$$\begin{aligned} 1 - \frac{p^2}{m^2}x(1-x) &\leq 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta &\leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\beta, \end{aligned} \quad (2.26)$$

em que $\beta = \sqrt{1 - 4m^2/p^2}$. A partir da seguinte identidade $\text{Im}[\ln(-X \pm i\varepsilon)] = \pm\pi$, tem-se que para a expressão de (2.19) que

$$\begin{aligned} \text{Im}[\Pi(p^2 \pm i\varepsilon)] &= \pm \frac{e^2}{2\pi} \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\beta}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\beta} x(1-x)dx \\ &= \mp \frac{e^2}{12\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{p^2}\right). \end{aligned} \quad (2.27)$$

A partir da fórmula integral de Cauchy, tem-se que

$$\Pi(p^2) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\Pi(z)}{z - p^2 - i\varepsilon} dz, \quad (2.28)$$

em que o contorno Γ está ilustrado na Figura 10. Além disso, note que devido à fórmula integral de Cauchy, estamos deixando $p^2 + i\varepsilon$ dentro do contorno, como desejado pela prescrição das regras de Feynman. Logo, tem-se que $\varepsilon' < \varepsilon$. Podemos reescrever o caminho fechado da integral em quatro integrais

$$\oint_{\Gamma} = \int_{\Gamma_R} + \int_{\Gamma_\varepsilon} + \int_{l_1} + \int_{l_2}.$$

É possível mostrar que as integrais em Γ_R e $\Gamma_{\varepsilon'}$ vão a zero, embora não será provado nesse texto, com o foco sendo destinado aos caminhos l_1 e l_2 . Assim,

$$\Pi(p^2) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{4m^2+i\varepsilon'}^{R+i\varepsilon'} \frac{\Pi(s)}{s-p^2-i\varepsilon} ds - \int_{4m^2-i\varepsilon'}^{R-i\varepsilon'} \frac{\Pi(s)}{s-p^2-i\varepsilon} ds \right], \quad (2.29)$$

em que s é a parte real da variável z . Ao realizar a substituição $s \rightarrow s \mp i\varepsilon'$, respectivamente, nas integrais, encontra-se que

$$\begin{aligned} \Pi(p^2) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{4m^2}^R \frac{\Pi(s-i\varepsilon')}{s-p^2-i\varepsilon-i\varepsilon'} ds - \int_{4m^2}^R \frac{\Pi(s+i\varepsilon')}{s-p^2-i\varepsilon+i\varepsilon'} ds \right], \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{4m^2}^R \frac{\Pi(s-i\varepsilon')(s-p^2-i\varepsilon+i\varepsilon') - \Pi(s+i\varepsilon')(s-p^2-i\varepsilon-i\varepsilon')}{(s-p^2-i\varepsilon+i\varepsilon')(s-p^2-i\varepsilon-i\varepsilon')} ds \right], \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\text{Im}\Pi(s-i\varepsilon')}{s-p^2-i\varepsilon} ds, \end{aligned} \quad (2.30)$$

sendo utilizado o princípio de Schwarz

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} [f(s+i\varepsilon') - f(s-i\varepsilon')] &= 2i \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \text{Im}f(s+i\varepsilon') \\ &\Rightarrow \text{Im}f(s+i\varepsilon') = -\text{Im}f(s-i\varepsilon') \end{aligned}$$

da segunda para terceira linha, e tomando o limites $R \rightarrow \infty$ ao final. O segundo termo de (2.23) consiste da diferença $\Pi(p^2) - \Pi(0)$, quando $p_0^2 = 0$. Assim, ao definir que

$$\Pi(0) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\text{Im}\Pi(s-i\varepsilon')}{s-i\varepsilon} ds, \quad (2.31)$$

a expressão renormalizada é

$$\begin{aligned} \Pi(p^2) - \Pi(0) &= \frac{p^2}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\text{Im}\Pi(s-i\varepsilon')}{s(s-p^2-i\varepsilon)} ds, \\ &= \frac{e_R^2 p^2}{12\pi^2} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}} \left(1 + \frac{2m^2}{s}\right)}{s(s-p^2-i\varepsilon)} ds. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Substituindo (2.32) em (2.23), encontra-se o potencial de Uehling no espaço dos momentos

$$V(p) = \frac{e_R^2}{p^2} + \frac{e_R^2}{12\pi^2} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}} \left(1 + \frac{2m^2}{s}\right)}{s(s-p^2-i\varepsilon)} ds. \quad (2.33)$$

O segundo termo é, nas palavras de Uehling [47], a existência de cargas induzidas correspondentes a polarização do vácuo. Dessa forma, essa correção radiativa faz o potencial de Coulomb sofrer um pequeno desvio.

Retornado à expressão (2.25), note que na situação em que $p^2 \gg m^2$, encontra-se

$$\begin{aligned} V(p) &\approx \frac{e_R^2}{p^2} + \frac{e_R^4}{2\pi^2 p^2} \ln \left(\frac{-p^2}{m^2} \right) \int_0^1 dx x(1-x) \\ &= \frac{e_R^2}{p^2} \left(1 + \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{-p^2}{m^2} \right). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Comparando esta expressão com o potencial de Coulomb, pode-se definir uma carga efetiva

$$e_{\text{ef.}}^2(p^2) = e_R^2 \left(1 + \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{-p^2}{m^2} \right). \quad (2.35)$$

Podemos nos perguntar se este efeito permanece em mais laços. Para isso, consideremos incluir maiores termos de correção à carga elétrica efetiva, como mostrado no diagrama da Figura 11. Neste caso, o potencial de Coulomb tomará a seguinte forma

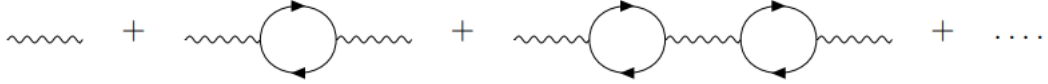


Figura 11 – O diagrama da polarização do vácuo a um laço é chamado de *one particle irreducible* ou 1PI. Isso porque não é possível dividi-lo em outros diagramas. A construção acima conecta os diagramas 1PI de forma a obter correções em laços maiores, a partir do diagrama a um laço.

$$V(p) = \frac{e_R^2}{p^2} \left[1 + \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{-p^2}{m^2} + \left(\frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{-p^2}{m^2} \right)^2 + \dots \right]. \quad (2.36)$$

Os termos acima formam uma série geométrica, de forma que pode-se escrever a seguinte igualdade

$$V(p) = \frac{1}{p^2} \left[\frac{e_R^2}{1 - \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{-p^2}{m^2}} \right] \quad (2.37)$$

com a carga efetiva no espaço dos momentos sendo definida como

$$e_{\text{ef.}}^2(p^2) = \frac{e_R^2}{1 - \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \frac{-p^2}{m^2}}, \quad (2.38)$$

sendo conhecida como *running coupling*. Uma vez incluído todos os termos na série acima, os próximos termos devem ser de ordem inferior em alguma expansão, como discutido em [34]. Notemos que a definição desta constante de acoplamento advém da condição de renormalização a um laço: $e_{\text{ef.}} = e_R$ quando $p^2 = 0$. A equação (2.38) pode ser escrita da seguinte forma

$$\frac{1}{e_{\text{ef.}}^2(p^2)} = \frac{1}{e_R^2(p_0^2)} - \frac{1}{12\pi^2} \ln \frac{-p^2}{m^2}. \quad (2.39)$$

A partir desta equação, é possível encontrar a equação do grupo de renormalização para e_R . Para que o resultado esteja na forma que será vista ao longo deste texto para outras equações do grupo de renormalização, tomaremos $m^2 = \mu^2$. Assim, derivando em relação a μ , encontra-se o seguinte

$$0 = -2 \frac{1}{e_R^3} \frac{de_R}{d\mu} + \frac{2}{12\pi^2} \frac{1}{\mu} \quad (2.40)$$

$$\mu \frac{de_R}{d\mu} = \frac{e_R^3}{12\pi^2}.$$

Há uma outra forma de obter a equação do grupo de renormalização removendo somente a parte divergente da integral em (2.16). Este esquema de renormalização é conhecido como *minimal subtraction scheme MS*, do inglês, esquema de subtração mínima. Da equação (2.16), percebe-se que a forma do contratermo a ser adicionado é

$$-i\delta_3(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu). \quad (2.41)$$

Somando este termo a (2.16), o propagador do fóton até um laço em (2.17) é

$$iD^{\mu\nu} = \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2} + \frac{-i}{p^2} i(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)(\Pi(p^2) - \delta_3) \frac{-i}{p^2}, \quad (2.42)$$

em que foi usado a simplificação de (2.18). Logo,

$$\Pi(p^2) - \delta_3 = -\frac{e^2}{6\pi^2\epsilon} - \frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{\mu^2}{m^2 - p^2 x(1-x)} - \delta_3. \quad (2.43)$$

Neste esquema, somente a parte divergente é removida, obtendo

$$\delta_3 = -\frac{e^2}{6\pi^2\epsilon}. \quad (2.44)$$

No esquema de renormalização *MS*, os parâmetros observados não são os mesmos da Lagrangeana, sendo funções não triviais de m_R , e_R , μ . Porém, μ é uma escala arbitrária e nenhum dos observáveis deve depender dela. Portanto, os parâmetros m_R , e_R da Lagrangeana devem ser funções não triviais de μ , tal que nenhuma quantidade física dependa de μ . A renormalização dos campos e dos parâmetros observáveis m_R , e_R é feita da seguinte forma

$$A_R^\mu = \frac{1}{\sqrt{Z_3}} A_\mu, \quad \psi_R = \frac{1}{\sqrt{Z_2}} \psi, \quad m_R = \frac{1}{Z_m} m, \quad e_R = \frac{1}{Z_e} \mu^{-\epsilon/2} e, \quad (2.45)$$

com $Z_i = 1 + \delta_i$. A partir do termo de interação eletromagnética entre os férmions (2.1), é obtida a relação entre a carga não renormalizada e a carga renormalizada

$$e\bar{\psi} A \psi = Z_e \mu^{\epsilon/2} Z_2 \sqrt{Z_3} e_R \bar{\psi}_R A_R \psi_R, \quad (2.46)$$

$$e = \mu^{\epsilon/2} Z_1 e_R \quad (2.47)$$

com a definição $Z_1 = Z_e Z_2 \sqrt{Z_3}$. Será discutido brevemente ao fim da seção que $Z_1 = Z_2$, logo, $Z_e = \frac{1}{\sqrt{Z_3}}$. Diferenciando e_R em relação a μ na equação (2.47), com o uso de $Z_e = \frac{1}{\sqrt{Z_3}}$, então temos o seguinte resultado

$$0 = \mu^{\epsilon/2} \frac{1}{\sqrt{Z_3}} e_R \left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{\mu}{e_R} \frac{de_R}{d\mu} - \frac{\mu}{2Z_3} \frac{dZ_3}{d\mu} \right). \quad (2.48)$$

Quando $Z_3 = 1$, isto é, na ordem zero, então

$$\mu \frac{de_R}{d\mu} = -\frac{\epsilon}{2} e_R. \quad (2.49)$$

Na próxima ordem de Z_3 ,

$$\mu \frac{dZ_3}{d\mu} = \mu \frac{d}{d\mu} \left(1 - \frac{e_R^2}{6\pi^2\epsilon} \right) = -\frac{1}{\epsilon} \frac{e_R}{3\pi^2} \frac{de_R}{d\mu}. \quad (2.50)$$

Usando (2.49),

$$\mu \frac{dZ_3}{d\mu} = \frac{e_R^2}{6\pi^2}. \quad (2.51)$$

Logo, no limite $\epsilon \rightarrow 0$, (2.48) é

$$\mu \frac{de_R}{d\mu} = \frac{e_R^3}{12\pi^2}, \quad (2.52)$$

isto é, a mesma equação diferencial obtida anteriormente em (2.40). Nas próximas seções, o esquema de renormalização MS será utilizado, devido a sua praticidade em obter a equação do grupo de renormalização.

2.1.2 Autoenergia do elétron

O propagador do campo eletromagnético A_μ sofreu uma modificação devido ao cálculo a um laço. O mesmo ocorrerá para o elétron. Entretanto, devido à existência da massa do elétron, esta também sofrerá uma correção. Assim, o cálculo a seguir é comumente chamado de autoenergia do elétron.

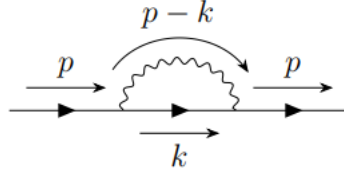


Figura 12 – Correção a um laço para o propagador do elétron.

O diagrama da Figura 12 dá a um laço a correção do propagador do elétron, a partir do seguinte cálculo

$$i\Sigma(p) = (ie)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma^\mu i \frac{(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\nu \frac{(-ig_{\mu\nu})}{(p-k)^2 + i\epsilon}, \quad (2.53)$$

que já se encontra na regularização dimensional.

O denominador pode ser reescrito a partir dos parâmetros de Feynman

$$\frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)(p-k)^2 + i\epsilon} = \int_0^1 \frac{dy}{(\ell^2 - \Delta)^2}, \quad (2.54)$$

com

$$\ell^\mu = k^\mu - yp^\mu \text{ e } \Delta = (1-y)(m^2 - yp^2) + i\epsilon. \quad (2.55)$$

Por fim, o numerador, com a substituição de k^μ por ℓ^μ , é

$$\mathcal{N} = -(d-2)py + md + \text{termos lineares em } \ell. \quad (2.56)$$

Novamente, os termos lineares em ℓ vão a zero na integral, sob argumentos de simetria. Assim, temos a integral resultando em

$$i\Sigma(p) = e^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dy \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{(d-2)\not{p}y - md}{(\ell^2 - \Delta)^2}. \quad (2.57)$$

A partir dos resultados em (2.12) e (2.15), obtém-se para a expressão (2.57) o seguinte resultado

$$i\Sigma(p) = -i \frac{e^2}{16\pi^2} \left[(\not{p} - 2m) + \int_0^1 dy (2y\not{p} - 4m) \ln \left(\frac{(1-y)(m^2 - yp^2)}{\mu^2} + i\varepsilon \right) \right] + i \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{(2\not{p} - 8m)}{\epsilon}. \quad (2.58)$$

O propagador do elétron até um laço é

$$iS(\not{p}) = \frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m} i\Sigma(p) \frac{i}{\not{p} - m}. \quad (2.59)$$

Entretanto, esse propagador não está renormalizado devido à divergência presente no momento \not{p} e na massa m em (2.58). A adição de contratermos solucionará esse problema, permitindo tomar $\epsilon = 0$.

A redefinição do campo ψ , como feito em (2.45), permite que a divergência associada ao momento \not{p} seja removida

$$\psi_R = \frac{1}{\sqrt{Z_2}} \psi, \quad (2.60)$$

com $Z_2 = 1 + \delta_2$, sendo δ_2 identificado como o contratermo. Enquanto para a massa, temos que

$$m = Z_m m_R, \quad (2.61)$$

com $Z_m = 1 + \delta_m$.

É possível realizar o mesmo procedimento feito em (2.37), isto é, obter uma série geométrica a partir dos diagramas 1PI. Assim, o propagador do férmion é

$$iS(\not{p}) = \frac{1}{Z_2} \frac{i}{\not{p} - Z_m m_R - \Sigma(p)}. \quad (2.62)$$

Expandindo Z_2 e Z_m , e tomando somente termos a primeira ordem, isto é, termos do tipo $\delta_2 \delta_m$, $\delta_2 \Sigma(p)$ e $\delta_m \Sigma(p)$ são desconsiderados, obtém-se que

$$iS(\not{p}) = \frac{i}{\not{p} + \delta_2 \not{p} - m_R - (\delta_2 + \delta_m) m_R - \Sigma(p)}, \quad (2.63)$$

sendo necessário resolver a seguinte equação para encontrar os contratermos desejados

$$\frac{e_R^2}{16\pi^2} \frac{(2\not{p} - 8m_R)}{\epsilon} + \delta_2 \not{p} - (\delta_m + \delta_2) m_R = 0. \quad (2.64)$$

São obtidos os seguintes resultados para os contratermos

$$\begin{aligned}\delta_2 &= -\frac{e_R^2}{8\pi^2\epsilon}, \\ \delta_m &= -\frac{6e_R^2}{16\pi^2\epsilon},\end{aligned}\tag{2.65}$$

em que a carga elétrica já está em sua forma renormalizada, não havendo problema, pois $e^2 = e_R^2$ no termo principal. Diferenciando dos dois lados de (2.61) com relação a μ ,

$$\begin{aligned}0 &= \frac{dZ_m}{d\mu} m_R + Z_m \frac{dm_R}{d\mu} \\ \frac{1}{m_R} \frac{dm_R}{d\mu} &= -\frac{1}{Z_m} \frac{dZ_m}{d\mu}.\end{aligned}\tag{2.66}$$

Para o termo Z_m ,

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z_m} \frac{dZ_m}{d\mu} &= -\frac{6e_R}{8\pi^2\epsilon} \frac{de_R}{d\mu} \\ \frac{1}{Z_m} \frac{dZ_m}{d\mu} &= \frac{3e_R^2}{8\pi^2\mu},\end{aligned}\tag{2.67}$$

com $\frac{de_R}{d\mu} = -\frac{\epsilon}{2\mu} e_R$ como visto em (2.49). Assim, a equação do grupo de renormalização para a massa do elétron é

$$\mu \frac{dm_R}{d\mu} = -\frac{3e_R^2}{8\pi^2} m_R\tag{2.68}$$

A equação de grupo de renormalização nos diz, portanto, que se a massa m_R for zero em qualquer escala, ela será zero sempre, indicando uma simetria da QED. De fato, a massa igual a zero deixaria a Lagrangeana da QED invariante por transformações quirais a nível clássico. Porém, a simetria quiral neste caso é anômala, ou seja, não há simetria quiral na QED. Para ver isso, considere a corrente clássica associada a esta simetria quiral é

$$J^{5\mu} = \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi,\tag{2.69}$$

com $\partial_\mu J^{5\mu} = 0$ quando $m = 0$. Embora não será mostrado neste texto, podendo ser encontrado a demonstração em [34, 48], o cálculo da anomalia quiral para a QED resulta no seguinte resultado

$$\partial_\mu J^{5\mu} = -\frac{e^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}.\tag{2.70}$$

O termo $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}$ corresponde a uma derivada total na Lagrangeana, o que permitirá escrever uma nova corrente $J'^{5\mu}$ que será conservada. Assim, ao utilizar a seguinte relação — obtida de [48] —

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = -\partial_\mu (2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu F_{\rho\sigma}),\tag{2.71}$$

torna possível escrever (2.70) como uma derivada total

$$\partial_\mu \left(J^{5\mu} - \frac{e^2}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu F_{\rho\sigma} \right) = 0,\tag{2.72}$$

sendo definida a nova corrente

$$J'^{5\mu} = J^{5\mu} - \frac{e^2}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu F_{\rho\sigma}. \quad (2.73)$$

O problema desta nova corrente reside no fato de não ser invariante sob transformações de gauge. De forma a deixar mais claro esta constatação, considere a seguinte transformação

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta(x), \quad (2.74)$$

em que $\theta(x)$ é a fase local do grupo U(1). O termo $F_{\rho\sigma}$ é claramente invariante sob esta transformação. Assim, (2.73) toma a seguinte forma

$$J'^{5\mu} = J^{5\mu} - \frac{e^2}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu F_{\rho\sigma} - \frac{e}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \theta F_{\rho\sigma}, \quad (2.75)$$

permitindo concluir que o último termo arruína a invariância sob transformações de gauge. Entretanto, a carga global definida a partir de (2.73)

$$Q'^5 = \int J'^{50} d^3x \quad (2.76)$$

é invariante sob transformações de gauge, embora isso não será demonstrado, sendo a demonstração encontrada em [48]. Assim, a presença desta anomalia não arruína a existência de uma carga conservada, mas esta afirmação ocorre somente para o caso abeliano. Isso significa que a anomalia é proibida de gerar termos que violam a conservação da carga global quiral, tal como a massa fermiônica.

2.1.3 Correção do vértice

O vértice da QED (2.3) também terá uma correção quântica. A princípio, esta correção está relacionada apenas a carga elétrica, se analisarmos (2.3). Entretanto, existe a correção do momento magnético do elétron, como será visto a seguir.

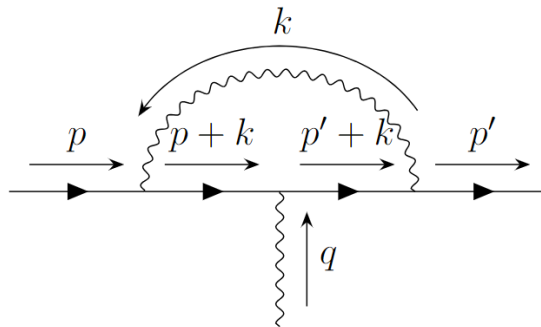


Figura 13 – Correção a um laço do vértice do eletromagnetismo quântico.

A correção a um laço do vértice do eletromagnetismo quântico é calculada a partir do seguinte diagrama de Feynman da Figura 13, tendo a seguinte integral

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')[ie\Gamma^\mu(p,p')]u(p) = \\ - e^3 \bar{u}(p') \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\nu(\not{k} + \not{p}' + m)\gamma^\mu(\not{k} + \not{p} + m)\gamma_\nu}{(k^2 + i\varepsilon)[(p' + k)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p + k)^2 - m^2 + i\varepsilon]} u(p) \end{aligned} \quad (2.77)$$

em que p, p' são os momentos dos elétrons externos relacionados com o momento do fóton q a partir da seguinte igualdade

$$q_\mu = p'_\mu - p_\mu, \quad (2.78)$$

e $u(p), \bar{u}(p')$ são spinores de Dirac, em que a introdução dos spinores de Dirac servirá para simplificar a expressão do numerador, como veremos mais adiante.

O denominador desta integral, usando os parâmetros de Feynman é

$$\frac{1}{(k^2 + i\varepsilon)[(p' + k)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p + k)^2 - m^2 + i\varepsilon]} = 2 \int_0^1 dx dy dz \frac{\delta(1 - x - y - z)}{[\ell^2 - \Delta]^3}, \quad (2.79)$$

com $\ell^\mu = k^\mu + xp^\mu + yp'^\mu$ e $\Delta = (1 - z)^2 m^2 - xyq^2 + i\varepsilon$. Seguindo o procedimento de regularização dimensional como feito anteriormente, é necessário utilizar a álgebra das matrizes γ^μ em d dimensões para o numerador, encontrada em [34, 46]. Dessa forma, o numerador é

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^\mu = & -2m^2\gamma^\mu + 4mz(p' + p)^\mu + 4m(x - y)q^\mu + (2 - d)\not{\ell}\gamma^\mu\not{\ell} \\ & - 2(z\not{p}' + (x - 1)\not{q})\gamma^\mu(z\not{p} + (1 - y)\not{q}) \\ & + (4 - d)(z\not{p}' + x\not{q} - m)\gamma^\mu(z\not{p} - y\not{q} - m). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Usando esta expressão nos spinores de Dirac com a igualdade $p^2 = p'^2 = m^2$, chega-se a

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\mathcal{N}^\mu u(p) = & \bar{u}(p')\{- (d - 2)\not{\ell}\gamma^\mu\not{\ell} + m^2\gamma^\mu[8z - 2(1 + z^2) + (4 - d)(1 - z)^2] \\ & - q^2\gamma^\mu[2(z + xy) - (4 - d)xy] \\ & - im\sigma^{\mu\nu}q_\nu(1 - z)[2z + (4 - d)(1 - z)] \\ & + mq^\mu(x - y)[4 - 2z - (4 - d)(1 - z)]\}u(p), \end{aligned} \quad (2.81)$$

com $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$.

Para simplificar ainda mais (2.81), é útil analisar as simetrias da integral. A integral sobre os parâmetros de Feynman, a integral $\int d^d\ell$ e o denominador são invariantes sobre a troca $x \leftrightarrow y$, sendo a quarta linha de (2.81) a única a mudar de sinal, portanto este termo é igual a zero quando integrado, restando apenas

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\mathcal{N}^\mu u(p) = & \bar{u}(p')\{- (d - 2)\not{\ell}\gamma^\mu\not{\ell} + m^2\gamma^\mu[8z - 2(1 + z^2) + (4 - d)(1 - z)^2] \\ & - q^2\gamma^\mu[2(z + xy) - (4 - d)xy] \\ & - im\sigma^{\mu\nu}q_\nu(1 - z)[2z + (4 - d)(1 - z)]\}u(p). \end{aligned} \quad (2.82)$$

A partir da inserção dos spinores de Dirac na matriz γ^μ , é possível reescrever $\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)$ usando a decomposição de Gordon

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \left(\frac{(p+p')^\mu}{2m} + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right) u(p).$$

Essa identidade será útil para identificarmos uma forma geral para $\Gamma^\mu(p, p')$. Isso é possível, uma vez que $\Gamma^\mu(p, p')$ e γ^μ se transformam como vetores sob transformações de Lorentz. Ou seja, $\Gamma^\mu(p, p')$ dependerá de quantidades vetoriais γ^μ , p^μ e p'^μ . Dessa forma, $\Gamma^\mu(p, p')$ tem a seguinte forma

$$\bar{u}(p')\Gamma^\mu(p, p')u(p) = \bar{u}(p') \left(F_1(q^2)\gamma^\mu + F_2(q^2)\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} \right) u(p), \quad (2.83)$$

em que $F_1(q^2)$ e $F_2(q^2)$ são chamados de fatores de forma, e por serem funções de q^2 são invariantes sob transformações de Lorentz. O uso da identidade (2.83) permite dividir o numerador \mathcal{N}^μ em

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 &= \frac{(d-2)^2}{d}\ell^2 - (d-2)\Delta + 2z(2m^2 - q^2) \\ \mathcal{N}_2 &= (1-z)[4z + 2(4-d)(1-z)]m^2, \end{aligned} \quad (2.84)$$

obtidos após uma álgebra envolvendo matrizes γ^μ de Dirac em d dimensões. Assim, identifica-se que

$$\mathcal{N}^\mu = \mathcal{N}_1\gamma^\mu - \mathcal{N}_2\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}, \quad (2.85)$$

possibilitando escrever os fatores de forma como

$$\begin{aligned} F_1(q^2) &= -2ie^2\mu^{4-d} \int_0^1 dx dy dz \delta(1-x-y-z) \int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^d} \frac{\mathcal{N}_1}{(\ell^2 - \Delta)^3}, \\ F_2(q^2) &= 2ie^2\mu^{4-d} \int_0^1 dx dy dz \delta(1-x-y-z) \int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^d} \frac{\mathcal{N}_2}{(\ell^2 - \Delta)^3}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

O primeiro fator de forma $F_1(q^2)$ corrige a carga elétrica a partir do vértice entre elétron-fóton, tendo o seguinte resultado quando utilizada as expressões (2.12), (2.13) e (2.15)

$$\begin{aligned} F_1(q^2) &= \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon} - \frac{e^2}{8\pi^2} \left[-1 + \int_0^1 \int_0^{1-x} \ln \frac{(1-(1-x-y)^2)m^2 - xyq^2}{\mu^2} dy dx \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{(2m^2 - q^2)(1-x-y)}{(x+y)^2 m^2 - xyq^2} dy dx \right]. \end{aligned} \quad (2.87)$$

$F_2(q^2)$ contribui para a correção do momento magnético do elétron, sendo finita em $d = 4$

$$F_2(q^2) = \frac{e^2}{4\pi^2} \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{(x+y)(1-x-y)m^2}{(x+y)^2 m^2 - xyq^2} dy dx \quad (2.88)$$

Calculando $F_2(q^2)$ em $q^2 = 0$, chega-se ao seguinte resultado

$$F_2(0) = \frac{e^2}{8\pi^2} = \frac{\alpha}{2\pi}. \quad (2.89)$$

Como $F_2(q^2)$ está relacionado ao momento magnético, como mostra [46], então o valor encontrado acima é a correção ao momento magnético encontrado por J. Schwinger [13]

$$\begin{aligned} g &= 2 + 2F_2(0) \\ g &= 2 + \frac{\alpha}{\pi}. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Utilizando o valor aproximado da constante de estrutura fina $\alpha \approx 1/137$, o momento magnético do elétron é igual a $g = 2,002323$. Medidas mais recentes [49] mostram que $g = 2,00231930436$ (13), o que permite concluir a precisão histórica de valores entre a teoria e o experimento².

A divergência da correção do vértice encontra-se somente em $F_1(q^2)$, sendo necessária a renormalização. Adicionando o contratermo δ_1 em (2.83)

$$\bar{u}(p')\Gamma^\mu(p, p')u(p) = \bar{u}(p') \left(F_1(q^2)\gamma^\mu + \delta_1\gamma^\mu + F_2(q^2)\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} \right) u(p), \quad (2.91)$$

encontra-se que

$$\delta_1 = -\frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}, \quad (2.92)$$

sendo $\delta_1 = \delta_2$, sendo um resultado esperado para a teoria em todas as ordens. Para ver isto, considere a Lagrangeana do eletromagnetismo renormalizada

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = iZ_2\bar{\psi}_R\cancel{\partial}\psi_R - m_RZ_2Z_m\bar{\psi}_R\psi_R + e_RZ_1\bar{\psi}_R\cancel{A}_R\psi_R - \frac{Z_3}{4}F_{\mu\nu R}F_R^{\mu\nu}, \quad (2.93)$$

em que $Z_i = 1 + \delta_i$. Esta Lagrangeana implica que a derivada covariante é da forma

$$D_{\text{ren.}}^\mu = \partial^\mu - ie_R\frac{Z_1}{Z_2}A_R^\mu, \quad (2.94)$$

isto é, a não ser que $Z_1 = Z_2$ então a invariância de gauge é quebrada. Logo é necessário que $Z_1 = Z_2$ em todas as ordens de perturbação da teoria, e isso de fato acontece, embora não será provado neste texto, com a prova podendo ser encontrada em [34].

² Importante ressaltar que o valor da medida experimental está sendo comparada com valores teóricos em cálculos que envolvem mais laços. De qualquer forma, é surpreendente como o cálculo a um laço realizado no texto está correto para quatro casas decimais após a vírgula.

2.2 Teoria invariante sobre SU(N)

No Capítulo 1, vimos que o Modelo Padrão é invariante sob as transformações de gauge SU(3) SU(2) e U(1). Devido a não-comutatividade entre os geradores dos grupos SU(3) e SU(2), os bósons vetoriais associados a estes grupos podem interagir entre si, o que permitiu as interações cúbicas e quárticas. De forma geral, as teorias invariantes de gauge sob SU(N) para $N \geq 2$, terão bósons que interagem entre si. Estas teorias são conhecidas como teorias não-abelianas. Diferentemente da QED, vista anteriormente, o número de cálculos a um laço aumenta consideravelmente, já que estas teorias tem um maior número de interações. Além disso, uma característica que não é aparente na QED, mas se torna importante em teorias SU(N) é o surgimento de partículas não-físicas chamados de *ghosts*. Os *ghosts* vão aparecer devido ao procedimento de Faddeev-Popov para retirar a redundância da integral dos campos de gauge na integral de caminho. O procedimento se dá da seguinte forma, ao considerar que a ação é invariante de gauge

$$S[G_\mu^A] = S[G_\mu'^A], \quad (2.95)$$

onde

$$G_\mu'^A = U G_\mu^A U^\dagger - \frac{i}{g} U \partial_\mu U^\dagger, \quad U(x) = e^{i\pi^A(x)T^A}, \quad (2.96)$$

com T^A os geradores do grupo e π^A as fases dependentes de coordenadas espaço-tempo. Dessa forma, a integral de caminho

$$Z = \int \mathcal{D}G_\mu^A e^{iS} \quad (2.97)$$

não é bem definida já que $\mathcal{D}G_\mu^A$ significa integrar sob todos os campos G_μ^A , inclusive os campos que estão relacionados por transformações de gauge, ou seja, há uma redundância nesta integral. Assim, é necessário definir uma nova medida de $\mathcal{D}G_\mu^A$ que não faça contas redundantes, isto é, é necessário que a integral de caminho contenha somente campos G_μ^A com diferentes configurações físicas. Para isso, consideremos a seguinte quantidade

$$\Delta^{-1}[G_\mu^A] = \int \mathcal{D}U \delta[\mathcal{G}^B(G_\mu'^A)], \quad (2.98)$$

onde $\mathcal{D}U$ é a integral sob todos os elementos do grupo e \mathcal{G}^B são funções que zeram para algum campo $G_\mu'^A$. $\Delta^{-1}[G_\mu^A]$ é invariante por transformações em U, como mostrado em [48], logo

$$\Delta^{-1}[G_\mu^A] = \Delta^{-1}[G_\mu'^A]. \quad (2.99)$$

Dessa forma, é possível inserir a identidade $\Delta[G_\mu^A] \Delta^{-1}[G_\mu^A] = 1$ em (2.97), obtendo

$$Z = \int \mathcal{D}G_\mu^A \Delta[G_\mu^A] \int \mathcal{D}U \delta[\mathcal{G}^B(G_\mu'^A)] e^{iS}. \quad (2.100)$$

Fazendo a transformação de gauge $G_\mu'^A$ para G_μ^A , a segunda integral deixa de depender das transformações U

$$Z = \int \mathcal{D}G_\mu^A \Delta[G_\mu^A] \int \mathcal{D}U \delta[\mathcal{G}^B(G_\mu^A)] e^{iS}, \quad (2.101)$$

o que permite trocar $\int \mathcal{D}U$ por um infinito multiplicativo, que é o infinito indesejável desde o início, obtendo

$$Z = \mathcal{N} \int \mathcal{D}G_\mu^A \Delta[G_\mu^A] \delta[\mathcal{G}^B(G_\mu^A)] e^{iS}, \quad (2.102)$$

em que \mathcal{N} é o infinito multiplicativo. Para encontrar $\Delta[G_\mu^A]$, é feita a mudança de variável em (2.98)

$$\mathcal{D}U = \mathcal{D}\mathcal{G} \det \left| \frac{\delta U}{\delta \mathcal{G}} \right|, \quad (2.103)$$

em que o determinante aparece pela mudança de variável, isto é, é o Jacobiano da transformação. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}[G_\mu^A] &= \int \mathcal{D}\mathcal{G} \det \left| \frac{\delta U}{\delta \mathcal{G}} \right| \delta[\mathcal{G}], \\ \Delta^{-1}[G_\mu^A] &= \det \left| \frac{\delta U}{\delta \mathcal{G}} \right|_{\mathcal{G}=0} \end{aligned} \quad (2.104)$$

ou seja,

$$\Delta[G_\mu^A] = \det \left| \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta U} \right|_{\mathcal{G}=0}. \quad (2.105)$$

Parametrizando $U(x)$ pelas funções $\pi^A(x)$, então

$$\Delta[G_\mu^A] = \det \left| \frac{\delta \mathcal{G}^A}{\delta \pi^B(x)} \right|_{\mathcal{G}=0}. \quad (2.106)$$

Seguindo o raciocínio apresentado em [48], a integral de caminho é

$$Z[J_\mu^A] = \int \mathcal{D}G_\mu^A \det \left| \frac{\delta \mathcal{G}^B(x)}{\delta \pi^A(y)} \right| e^{i \int d^4x [\mathcal{L} + J^{A\mu} G_\mu^A - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu G_\mu^A)^2]}, \quad (2.107)$$

em que $J^{A\mu}$ é uma corrente arbitrária. O termo $\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu G_\mu^A)^2$ aparece devido a uma redefinição de \mathcal{G}^B , como mostrado por [48]. O determinante pode ser reescrito como uma integral de caminho sobre campos de Grassmann,

$$\det \left| \frac{\delta \mathcal{G}^B(x)}{\delta \pi^A(y)} \right| = \int \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{-i \int d^4x d^4y \bar{c}^A(x) \frac{\delta \mathcal{G}^A}{\delta \pi^B} c^B(y)}. \quad (2.108)$$

Os campos de Grassmann c^A correspondem aos *ghosts* de Faddeev-Popov, que se transformam como membros da representação adjunta do grupo $SU(N)$. O termo $\frac{\delta \mathcal{G}^A}{\delta \pi^B}$ entre os campos de *ghost* pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{G}^A(x)}{\delta \pi^B(y)} &= \frac{\partial \mathcal{G}^A(x)}{\partial G_\mu^C(x)} \frac{\delta G_\mu^C(x)}{\delta \pi^B(y)} \\ &= \frac{\partial \mathcal{G}^A(x)}{\partial G_\mu^C(x)} (D_\mu)^{CB} \delta(x-y), \end{aligned} \quad (2.109)$$

com

$$(D_\mu)^{CB} = \partial_\mu \delta^{CB} + g f^{CBD} G_\mu^D. \quad (2.110)$$

Portanto, a ação da integral de caminho é

$$S_{\text{ef.}} = \int d^4x \left[\mathcal{L} + J^{A\mu} G_\mu^A - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu G_\mu^A)^2 - \bar{c}^A \frac{\partial \mathcal{G}^A(x)}{\partial G_\mu^C(x)} (D_\mu)^{CB} c^B \right]. \quad (2.111)$$

Considerando o gauge de Lorentz

$$\mathcal{G}^A = \partial^\mu G_\mu^A = 0, \quad (2.112)$$

temos que

$$\frac{\partial \mathcal{G}^A(x)}{\partial G_\mu^C(x)} = \partial^\mu \delta^{AC}. \quad (2.113)$$

Assim, a ação toma a seguinte forma

$$S_{\text{ef.}} = \int d^4x \left[\mathcal{L} + J_\mu^A G^{A\mu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu G^{A\mu})^2 - \bar{c}^A \partial^2 c^A + g f^{ABC} \partial_\mu \bar{c}^A G^{B\mu} c^C \right], \quad (2.114)$$

cujo propagador do *ghost* é

$$B \cdots \cdots \cdots A = \frac{i\delta^{AB}}{p^2 + i\epsilon}. \quad (2.115)$$

Os *ghosts* não são estados físicos observáveis, pois foram introduzidos como campos de Grassmann, isto é, anticomutam. Entretanto, se comportam como escalares, como visto no termo $\partial_\mu \bar{c}^A \partial^\mu c^A$ em (2.114), violando o teorema de spin-estatística. Assim, os *ghosts* aparecem somente como linhas internas em diagramas de Feynman.

2.3 Correções quânticas da teoria SU(N)

Uma vez introduzidos os *ghosts*, não há mais nenhum obstáculo aparente impedindo a realização dos cálculos quânticos. O interesse agora é obter as equações do grupo de renormalização para o Modelo Padrão. Porém, os cálculos realizados para uma teoria SU(N) são vantajosas, caso deseje-se estudar modelos além do Modelo Padrão, como por exemplo SU(5), o modelo de Georgi-Glashow [50] que propôs a unificação entre a interação forte, fraca e eletromagnética. Vale ressaltar que os grupos de gauge do Modelo Padrão são um produto, isto é, SU(3) × SU(2) × U(1). Logo, os cálculos obtidos neste texto para SU(N) sofrerão pequenas modificações, como mostrados mais adiantes, sendo vistas em [51–53]. Assim, considere a seguinte Lagrangeana efetiva, com n_F férmions e n_S escalares, no gauge de Feynman $\xi = 1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{SU(N)}} = & -\frac{1}{4} (\partial_\mu G_\nu^A - \partial_\nu G_\mu^A)^2 - \frac{1}{2} (\partial^\mu G_\mu^A)^2 + \bar{\psi}_i (i\not{\partial} - m) \psi_i + g \bar{\psi}_i \not{G}^A T_{ij}^A \psi_j \\ & - g f^{ABC} (\partial^\mu G_\nu^A) G_\mu^B G^{\nu C} - \frac{g^2}{4} f^{EAB} G_\mu^A G_\nu^B f^{ECD} G^{\mu C} G^{\nu D} - \varphi_i^* (\partial^2 + M^2) \varphi_i \\ & + ig G_\mu^A T_{ij}^A (\varphi_i^* \partial^\mu \varphi_j - \varphi_j^* \partial^\mu \varphi_i) + g^2 \varphi_i^* G_\mu^A T_{ik}^A T_{kj}^B G^{\mu B} \varphi_j \\ & - \bar{c}^A \partial^2 c^A + g f^{ABC} (\partial^\mu \bar{c}^A) G_\mu^B c^C, \end{aligned} \quad (2.116)$$

com f^{ABC} sendo as constantes de estrutura do grupo e g o acoplamento da teoria.

Os propagadores desta teoria tem as seguintes regras de Feynman

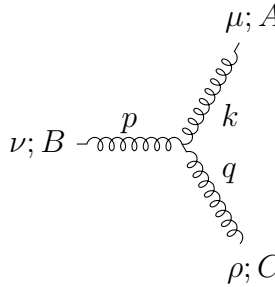
para os bósons de gauge : $\mu; B \xrightarrow[p]{\text{wavy}} \nu; A = -i \frac{g^{\mu\nu} \delta^{AB}}{p^2 + i\epsilon}$, (2.117)

para os férmions : $j \xrightarrow[p]{\text{solid}} i = i \frac{\delta^{ij}}{\not{p} - m + i\epsilon}$, (2.118)

para os escalares : $j \xrightarrow[p]{\text{dashed}} i = i \frac{\delta^{ij}}{p^2 - M^2 + i\epsilon}$. (2.119)

Generalizando o conceito de “cor” — visto para os quarks no Modelo Padrão — para $SU(N)$, é necessária a existência da conservação da “cor” nos propagadores devido aos termos δ^{ij}, δ^{ab} .

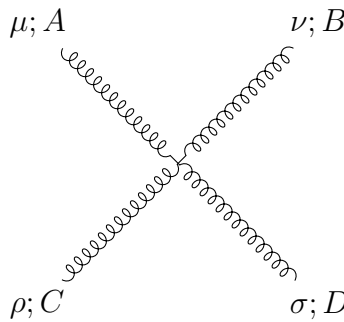
A autointeração cúbica presente em (2.116) é dada pela seguinte regra de Feynman



$$= gf^{ABC} [g^{\mu\nu} (k - p)^\rho + g^{\nu\rho} (p - q)^\mu + g^{\rho\mu} (q - k)^\nu], \quad (2.120)$$

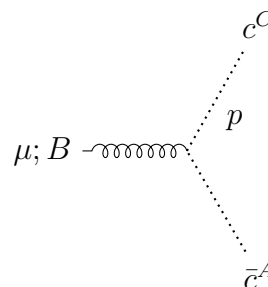
com os momentos entrando na direção do vértice satisfazendo $p + k + q = 0$.

A interação quártica entre os bósons de gauge tem a seguinte regra



$$= -ig^2 [f^{ABE} f^{CDE} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ACE} f^{BDE} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ADE} f^{BCE} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})]. \quad (2.121)$$

A interação entre o *ghost* e o bóson de gauge é



$$= -gf^{ABC} p^\mu. \quad (2.122)$$

Para os escalares há duas interações, sendo

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 i \\
 \nearrow \\
 \mu; A \text{ --- } \\
 \searrow \\
 j
 \end{array}
 \end{array}
 = ig(p+q)^\mu T_{ij}^A, \tag{2.123}$$

e

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \mu; B \\
 \swarrow \\
 \nu; A \\
 \searrow \\
 i \quad j
 \end{array}
 \end{array}
 = ig^2 \{T^A, T^B\}_{ij} g^{\mu\nu}, \tag{2.124}$$

com $\{T^A, T^B\}_{ij} = (T^A T^B + T^B T^A)_{ij}$.

Para os férmions há somente uma interação

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 i \\
 \nearrow \\
 \mu; A \text{ --- } \\
 \searrow \\
 j
 \end{array}
 \end{array}
 = ig\gamma^\mu T_{ij}^A. \tag{2.125}$$

Com as regras de Feynman obtidas, já é possível a construção de diagramas que contenham laços para o cálculo da correção radiativa e seguir o processo de renormalização já apresentado anteriormente no esquema *MS*. Entretanto, há vários diagramas a um laço para teorias não-abelianas, tornando a tarefa de cálculo um trabalho hercúleo. A princípio³, estamos interessados em obter a equação do grupo de renormalização do acoplamento g da teoria. Assim, torna-se útil escrever a Lagrangeana da teoria renormalizada, e descobrir o que de fato tem de ser calculado.

³ Os acoplamentos de Yukawa e o acoplamento quártico escalar serão vistos na próxima seção, de forma a trazer suavidade a leitura nessa parte do texto.

A Lagrangeana renormalizada desta teoria é

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{SU}(N)} = & -Z_3 \frac{1}{4} (\partial_\mu G_\nu^A - \partial_\nu G_\mu^A)^2 - Z_3 \frac{1}{2} (\partial^\mu G_\mu^A)^2 + Z_2 \bar{\psi}_i (i\not{\partial} - Z_m m_R) \psi_i + g_R Z_1 \bar{\psi}_i \not{G}^A T_{ij}^A \psi_j \\
& - g_R Z_{G^3} f^{ABC} (\partial^\mu G^{A\nu}) G_\mu^B G_\nu^C - Z_{G^4} \frac{g_R^2}{4} f^{EAB} G^{A\mu} G^{B\nu} f^{ECD} G_\mu^C G_\nu^D \\
& - Z_4 \varphi_i^* (\partial^2 + Z_M M^2) \varphi_i + i g_R Z_1 G^{A\mu} T_{ij}^A (\varphi_i^* \partial_\mu \varphi_j - \varphi_j^* \partial_\mu \varphi_i) \\
& + g_R^2 Z_s \varphi_i^* G^{A\mu} T_{ik}^A T_{kj}^B G_\mu^B \varphi_j - Z_{3c} \bar{c}^A \partial^2 c^A + g_R Z_{1c} f^{ABC} (\partial_\mu \bar{c}^A) G_\mu^B c^C,
\end{aligned} \tag{2.126}$$

de onde se conclui que uma possível forma de obter a equação do grupo de renormalização do acoplamento g_R está na interação férmion-férmion-bóson

$$g_R Z_1 \bar{\psi}_i \not{G}^A T_{ij}^A \psi_j = g_R \frac{Z_1}{Z_2 \sqrt{Z_3}} \bar{\psi}_i^{(0)} \not{G}^{A(0)} T_{ij}^A \psi_j^{(0)}, \tag{2.127}$$

com

$$g = \frac{Z_1}{Z_2 \sqrt{Z_3}} g_R, \quad G^A = \frac{1}{\sqrt{Z_3}} G^{A(0)}, \quad \psi = \frac{1}{\sqrt{Z_2}} \psi^{(0)}, \tag{2.128}$$

sendo os campos com índice (0) referente aos campos não renormalizados. A mudança de notação para os campos normalizados e renormalizados, quando comparados a (2.45), ocorre como forma de simplificar a leitura, devido a existência de muitos índices presentes.

2.3.1 Propagador do bóson de gauge

Como mostrado em 2.1.1, o propagador do fóton continha uma divergência no cálculo a um laço. Esta divergência também estará presente para os propagadores dos bósons de gauge de uma teoria SU(N). Portanto, seguindo a metodologia apresentado anteriormente, é necessário encontrar os contratermos dos propagadores dos bósons de gauge, dos férmions e dos vértices entre férmion-férmion-bóson, isto é, Z_3 , Z_2 e Z_1 , respectivamente. A correção quântica do propagador do bóson de gauge consiste de sete diagramas, sendo seis deles construídos a partir das regras de Feynman vistas anteriormente, mais um contratermo. Vale ressaltar que todo o cálculo seguirá no gauge de Feynman $\xi = 1$. Os diagramas que constituem a correção são dados pela Figura 14, sendo cada diagrama identificado pelos seguintes termos, respectivamente

$$\mathcal{M}^{AB\mu\nu} = \mathcal{M}_F^{AB\mu\nu} + \mathcal{M}_3^{AB\mu\nu} + \mathcal{M}_4^{AB\mu\nu} + \mathcal{M}_{S,3}^{AB\mu\nu} + \mathcal{M}_{S,4}^{AB\mu\nu} + \mathcal{M}_{\text{gh.}}^{AB\mu\nu} + \mathcal{M}_{\text{c.t.}}^{AB\mu\nu}. \tag{2.129}$$

Analogamente ao propagador do fóton, a correção a um laço dos propagadores dos bósons de gauge é da forma

$$\mathcal{M}^{AB\mu\nu} \sim \delta^{AB} (p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) f(p^2). \tag{2.130}$$

Embora, individualmente esta forma não apareça nos diagramas acima, mas sim quando somados. Assim, os cálculos serão feitos individualmente, mas somados ao final.

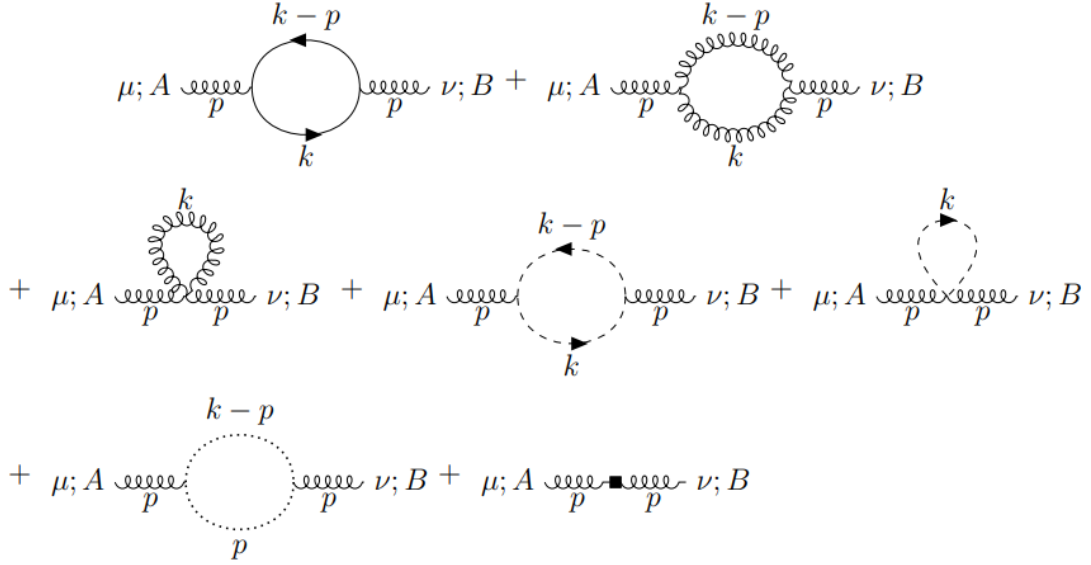


Figura 14 – Todos os diagramas de Feynman a um laço que compõe o propagador renormalizado dos bósons de gauge. Diferentemente da seção anterior, as setas indicando os sentidos dos momentos foram retiradas por simplicidade.

O primeiro laço corresponde ao laço fermiônico e seu cálculo é muito similar ao cálculo feito para o eletromagnetismo quântico (2.6). De fato, a única mudança é a introdução do traço dos geradores da álgebra T^A e a introdução de um fator $1/2$, pois os campos fermiônicos estão tratados como de Weyl, logo

$$\mathcal{M}_F^{AB\mu\nu} = -\text{Tr}[T^A T^B] \frac{g^2}{4\pi^2} (p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \int_0^1 dy y(1-y) \left[\frac{2}{\epsilon} + \text{termos finitos} \right]. \quad (2.131)$$

Como o interesse é encontrar os contratermos com a finalidade de obter a equação do grupo de renormalização, então os termos finitos não serão apresentados neste texto, podendo ser encontrados em [34, 46]. O resultado divergente é, portanto

$$\mathcal{M}_F^{AB\mu\nu} = \delta^{AB} T_F \frac{g^2}{16\pi^2} (p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \left(-\frac{4}{3\epsilon} \right), \quad (2.132)$$

com $[T^A T^B] = T_F \delta^{AB}$.

Os laços que contém as autointerações dos bósons de gauge são resumidos na seguinte integral, já escritas na regularização dimensional⁴

$$i(\mathcal{M}_3^{AB\mu\nu} + \mathcal{M}_4^{AB\mu\nu}) = \frac{g^2}{2} \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{-i}{k^2} \frac{-i}{(p-k)^2} f^{ACE} f^{BDF} \delta^{CF} \delta^{ED} \mathcal{N}_3^{\mu\nu} + \frac{-ig^2}{2} \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{-ig_{\rho\sigma}}{k^2} \mathcal{N}_4^{AB\mu\nu\rho\sigma}. \quad (2.133)$$

É possível escrever como uma integral somente, multiplicando o segundo termo por $\frac{(p-k)^2}{(p-k)^2}$

$$i(\mathcal{M}_3^{AB\mu\nu} + \mathcal{M}_4^{AB\mu\nu}) = -\frac{g^2}{2} \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{f^{ACD} f^{BDC} \mathcal{N}_3^{\mu\nu} + (p-k)^2 \mathcal{N}_4^{AB\mu\nu}}{k^2 (p-k)^2}. \quad (2.134)$$

⁴ Os termos da prescrição de Feynman $i\epsilon$ estão omitidos.

Para o numerador, temos o seguinte

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_3^{\mu\nu} &= [g^{\mu\alpha}(p+k)^\rho + g^{\alpha\rho}(p-2k)^\mu + g^{\rho\mu}(k-2p)^\alpha]g_{\alpha\beta}g_{\rho\sigma} \\
&\quad \times [g^{\nu\beta}(p+k)^\sigma + g^{\beta\sigma}(p-2k)^\nu + g^{\sigma\nu}(k-2p)^\beta], \\
\mathcal{N}_3^{\mu\nu} &= [g_\beta^\mu(p+k)_\sigma + g_{\beta\sigma}(p-2k)^\mu + g_\sigma^\mu(k-2p)_\beta] \\
&\quad \times [g^{\nu\beta}(p+k)^\sigma + g^{\beta\sigma}(p-2k)^\nu + g^{\sigma\nu}(k-2p)^\beta], \\
\mathcal{N}_3^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}(p+k)^2 + (p+k)^\mu(p-2k)^\nu + (p+k)^\nu(k-2p)^\mu + (p-2k)^\mu(p+k)^\nu \\
&\quad + d(p-2k)^\mu(p-2k)^\nu + (p-2k)^\mu(k-2p)^\nu + (k-2p)^\nu(p+k)^\mu + (k-2p)^\mu(p-2k)^\nu \\
&\quad + g^{\mu\nu}(k-2p)^2, \\
\mathcal{N}_3^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}[(p+k)^2 + (k-2p)^2] + d(p-2k)^\mu(p-2k)^\nu + (p-2k)^\mu(k-2p)^\nu \\
&\quad + (k-2p)^\mu(p-2k)^\nu.
\end{aligned} \tag{2.135}$$

Enquanto para a segunda parte

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_4^{AB\mu\nu} &= g_{\rho\sigma}\delta^{CD} \times \\
&\quad [f^{ABE}f^{CDE}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \\
&\quad + f^{ACE}f^{BDE}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \\
&\quad + f^{ADE}f^{BCE}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})], \\
\mathcal{N}_4^{AB\mu\nu} &= 2f^{ADE}f^{BDE}g^{\mu\nu}(d-1).
\end{aligned} \tag{2.136}$$

Para continuar os cálculos, é necessário tratar também do denominador que, a partir dos parâmetros de Feynman, toma a seguinte forma

$$\frac{1}{k^2} \frac{1}{(p-k)^2} = \int_0^1 dy \frac{1}{(\ell^2 - \Delta)^2}, \tag{2.137}$$

com $\ell^\mu = k^\mu - yp^\mu$ e $\Delta = -yp^2(1-y)$. A mudança de variável afeta somente $\mathcal{N}_3^{\mu\nu}$, além disso, devido a simetria da integral, termos lineares em ℓ^μ não serão escritos pois estes vão a zero.

$$\mathcal{N}_3^{\mu\nu} = 2\ell^2 g^{\mu\nu} - (6-4d)\ell^\mu\ell^\nu - [6(y^2-y+1) - d(1-2y)^2]p^\mu p^\nu + (2y^2-2y+5)p^2 g^{\mu\nu}. \tag{2.138}$$

Os termos de estrutura do grupo f^{ABC} estão multiplicados entre si de forma a realizar o somatório entre dois índices, tendo o seguinte resultado

$$f^{ACE}f^{BCE} = C_{\text{adj}}\delta^{AB}, \tag{2.139}$$

em que C_{adj} é o invariante Casimir para a representação adjunta do grupo, com a seguinte relação para SU(N): $C_{\text{adj}} = N$.

Portanto, (2.134) tem a seguinte a forma

$$\begin{aligned}
\frac{-g^2}{2} \mu^{4-d} C_{\text{adj}} \delta^{AB} \int_0^1 dy \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} &\left[\frac{2\ell^2 g^{\mu\nu} - (6-4d)\ell^\mu\ell^\nu - (6(y^2-y+1) - d(1-2y)^2)p^\mu p^\nu}{(\ell^2 - \Delta)^2} \right. \\
&\left. + \frac{(2y^2-2y+5)p^2 g^{\mu\nu} + 2g^{\mu\nu}(\ell^2 + (1-y)^2 p^2)(d-1)}{(\ell^2 - \Delta)^2} \right]. \tag{2.140}
\end{aligned}$$

Antes de avaliar a integral em ℓ^μ , é de grande utilidade também inserir a contribuição dos *ghosts* a esta integral. Pelas regras de Feynman, (2.115) e (2.122), obtemos

$$i\mathcal{M}_{\text{gh.}}^{AB\mu\nu} = (-1)g^2\mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{(k-p)^2} \frac{i}{k^2} f^{CAD} k^\mu f^{DBC} (k-p)^\nu. \quad (2.141)$$

Fazendo a mudança de variáveis, obtidas a partir dos parâmetros de Feynman

$$-g^2\delta^{AB}C_{\text{adj}} \int_0^1 dy \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^\mu \ell^\nu - p^\mu p^\nu y(1-y)}{(\ell^2 - \Delta)^2}. \quad (2.142)$$

Realizando a soma de (2.140) com (2.142), o resultado obtido da integral em ℓ em d dimensões é igual a

$$\begin{aligned} g^2\delta^{AB}C_A \frac{\mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dy \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}} & \left\{ g^{\mu\nu} \Delta \left[\frac{(d-2)^2}{d} \frac{d}{2} \Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) \right] \right. \\ & + p^\mu p^\nu \left[-3(x^2 - x + 1) + \frac{d}{2}(1-2x)^2 + x(1-x)\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \right] \\ & \left. + g^{\mu\nu} p^2 \left[\left(x^2 - x + \frac{5}{2} - (1-x)^2(d-1)\right) \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.143)$$

Usando o fato de que $\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)(d-2) = -2\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)$, junto da expansão em $\epsilon = 0$ com $d = 4 - \epsilon$, vale a seguinte identidade⁵

$$\frac{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{\mu^2}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}} = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \log \frac{\Delta}{\mu^2} + \text{termos finitos}\right). \quad (2.144)$$

Escrevendo somente a parte divergente e realizando a integral em y , tem-se o seguinte resultado

$$\mathcal{M}_{3,4,\text{gh.}}^{AB\mu\nu} = \frac{g^2}{16\pi^2} \delta^{AB} (g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \left(\frac{10}{3\epsilon} C_{\text{adj}} + \text{termos finitos}\right). \quad (2.145)$$

Por fim, o laço escalar contido no propagador do bóson de gauge é

$$i\mathcal{M}_S^{AB\mu\nu} = g^2 \text{Tr}(T^A T^B) \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(2k+p)^\mu (2k+p)^\nu - 2g^{\mu\nu} [(k+p)^2 - m^2]}{(k^2 - m^2)((k+p)^2 - m^2)}, \quad (2.146)$$

com $\mathcal{M}_S^{AB\mu\nu} = \mathcal{M}_{S,3}^{AB\mu\nu} + \mathcal{M}_{S,4}^{AB\mu\nu}$.

Usando os parâmetros de Feynman, tem-se as seguintes identificações

$$k^\mu = \ell^\mu - yp^\mu, \quad \Delta = m^2 - yp^2(1-y). \quad (2.147)$$

Logo,

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_S^{AB\mu\nu} = g^2 T_S \delta^{AB} \mu^{4-d} \int_0^1 dy \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} & \left[\frac{2\left(\frac{2}{d}-1\right) g^{\mu\nu} \ell^2 + (1-2y)^2 p^\mu p^\nu}{(\ell^2 - \Delta)^2} \right. \\ & \left. - \frac{2g^{\mu\nu} ((1-y)^2 p^2 - m^2)}{(\ell^2 - \Delta)^2} \right], \end{aligned} \quad (2.148)$$

⁵ Como mostrado em (2.15).

com $T_S = \text{Tr}(T^A T^B)$. O cálculo de (2.148) resulta em

$$\mathcal{M}_S^{AB\mu\nu} = -\frac{g^2}{16\pi^2} \delta^{AB} T_S (g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \left(\frac{2}{3\epsilon} + \text{termos finitos} \right). \quad (2.149)$$

Assim, o contratermo necessário para cancelar as divergências, com n_F sabores de férmions e n_S sabores de escalares, é obtido a partir da soma dos termos em (2.132), (2.145) e (2.149)

$$\delta_3 = \frac{g^2}{16\pi^2\epsilon} \left(\frac{10}{3} C_A - \frac{4}{3} n_F T_F - \frac{2}{3} n_S T_S \right). \quad (2.150)$$

2.3.2 Propagador do férmion

A correção quântica do propagador do férmion desta teoria, consiste apenas de dois diagramas, sendo um deles o contratermo, como mostrado na Figura 15.

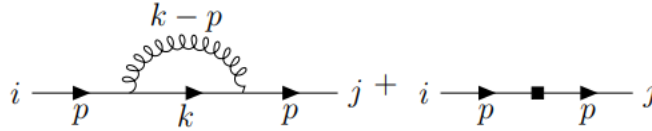


Figura 15 – O propagador renormalizado dos férmions.

A correção é análoga a correção do propagador do elétron no eletromagnetismo quântico, visto em 2.1.2. A única diferença, quando comparado ao primeiro, é a inserção dos termos do grupo $SU(N)$. Assim,

$$\Sigma^{ij}(\not{p}) = \delta^{ij} \left[\frac{g^2}{16\pi^2} C_F \left(\frac{2\not{p} - 8m}{\epsilon} \right) + \delta_2 \not{p} - (\delta_m + \delta_2)m + \text{termos finitos} \right], \quad (2.151)$$

com $C_F = \frac{N^2-1}{2N}$. Dessa forma, os contratermos são facilmente identificados

$$\delta_2 = \frac{g^2}{16\pi^2\epsilon} (-2C_F), \quad (2.152)$$

$$\delta_m = \frac{g^2}{16\pi^2\epsilon} (-6C_F). \quad (2.153)$$

2.3.3 Vértice férmion-férmion-bósons de gauge

Diferentemente do eletromagnetismo quântico — em que há somente um diagrama a um laço para a correção do vértice — na teoria não-abeliana surge um segundo laço devido à interação cúbica entre os bósons de gauge. Os diagramas que compõe esta interação a um laço estão representados na Figura 16.

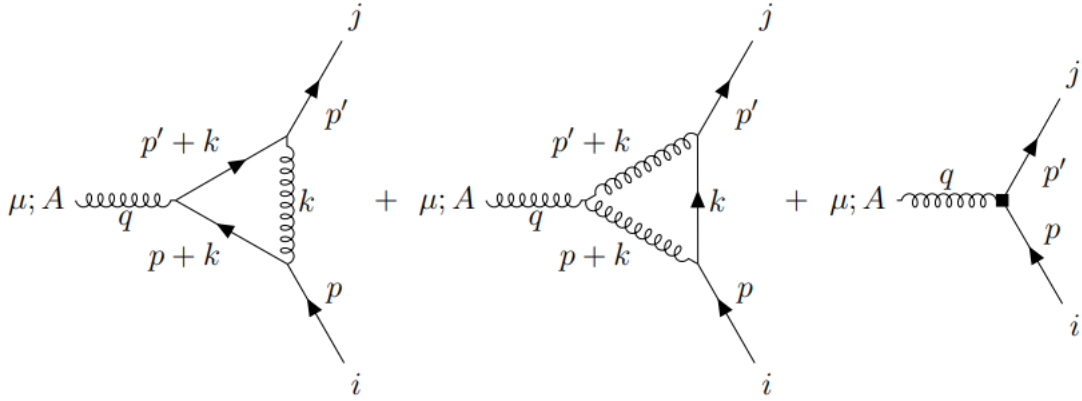


Figura 16 – Diagramas a um laço que compõe o vértice renormalizado da interação férmion-bóson-férmion.

O primeiro diagrama da Figura 16 é dado por

$$\begin{aligned}
 ig\Gamma_{ij,1}^{\mu A}(p', p) &= ig(T^C T^A T^B)_{ij} \delta^{BC} \Gamma^\mu(p', p) \\
 ig\Gamma_{ij,1}^{\mu A}(p', p) &= ig(T^B T^A T^B)_{ij} \Gamma^\mu(p', p)
 \end{aligned}$$

com $\Gamma^\mu(p', p)$ idêntico a (2.77). Os termos de grupo podem ser manipulados da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 T^B T^A T^B &= T^B T^B T^A + T^B [T^A, T^B] \\
 &= C_F T^A + if^{ABC} T^B T^C = C_F T^A + \frac{i}{2} f^{ABC} [T^B, T^C] \\
 &= C_F T^A - \frac{1}{2} f^{ABC} f^{BCD} T^D \\
 &= \left(C_F - \frac{1}{2} C_{\text{adj}} \right) T^A.
 \end{aligned} \tag{2.154}$$

A partir do cálculo do vértice da QED, sabemos o cálculo de $\Gamma^\mu(p', p)$. Utilizando o resultado de (2.87), uma vez que o fator de forma da QED ($F_1(q^2)$) contém a divergência, possibilita a obtenção do resultado de (2.154), sendo igual a

$$\Gamma_{ij,1}^{\mu A}(p', p) = \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \left(C_F - \frac{1}{2} C_{\text{adj}} \right) T_{ij}^A \gamma^\mu + \text{termos finitos}. \tag{2.155}$$

Uma vez que o interesse se encontra na obtenção da estrutura divergente dos cálculos será usado o seguinte artifício, como feito em [34]. Assim, para o segundo diagrama da Figura 16, tomemos $m = 0$ juntamente com os momentos externos iguais a zero. Dessa forma,

$$\Gamma_{ij,2}^{\mu A} = f^{ABC}(T^C T^B)_{ij} g^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{2k^2 \gamma^\mu - 2\gamma^\rho \not{k} \gamma_\rho k^\mu}{k^6}. \quad (2.156)$$

Como $\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma_\rho = (2-d)\gamma^\nu$ e $k^\mu k^\nu = \frac{k^2}{d} g^{\mu\nu}$, então

$$\Gamma_{ij,2}^{\mu A} = f^{ABC}(T^C T^B)_{ij} g^2 \mu^{4-d} \left(4 - \frac{4}{d}\right) \gamma^\mu \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^4}, \quad (2.157)$$

em que o resultado da integral é

$$\Gamma_{ij,2}^{\mu A} = i f^{ABC}(T^C T^B)_{ij} \frac{g^2}{8\pi^2} \gamma^\mu \left(\frac{3}{\epsilon} + \text{termos finitos}\right). \quad (2.158)$$

Para os geradores do grupo, temos que

$$f^{ABC} T^C T^B = -\frac{i}{2} C_{\text{adj}} T^A. \quad (2.159)$$

Logo,

$$\Gamma_{ij,2}^{\mu A} = C_{\text{adj}} T_{ij}^A \gamma^\mu \frac{g^2}{16\pi^2} \left(\frac{3}{\epsilon} + \text{termos finitos}\right). \quad (2.160)$$

Sendo assim, o contratermo associado a esta interação férmion-férmion-bóson é

$$\delta_1 = \frac{g^2}{16\pi^2 \epsilon} (-2C_F - 2C_{\text{adj}}). \quad (2.161)$$

2.3.4 Equação de grupo de renormalização do acoplamento g

A partir da equação (2.127) tem-se a relação entre a constante não renormalizada e a constante normalizada

$$g = g_R \mu^{\epsilon/2} \frac{Z_1}{Z_2 \sqrt{Z_3}}, \quad (2.162)$$

com $Z_i = 1 + \delta_i$. Como g não depende de μ , então o lado esquerdo será nulo, o que possibilitará o seguinte resultado ao diferenciar esta expressão em relação a μ

$$\begin{aligned} 0 &= g_R \mu^{\epsilon/2} \frac{Z_1}{Z_2 \sqrt{Z_3}} \left(\frac{1}{g_R} \mu \frac{dg_R}{d\mu} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{Z_1} \mu \frac{dZ_1}{d\mu} - \frac{1}{Z_2} \mu \frac{dZ_2}{d\mu} - \frac{1}{2} \frac{1}{Z_3} \mu \frac{dZ_3}{d\mu} \right) \\ &\Rightarrow \frac{1}{g_R} \mu \frac{dg_R}{d\mu} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{Z_1} \mu \frac{dZ_1}{d\mu} - \frac{1}{Z_2} \mu \frac{dZ_2}{d\mu} - \frac{1}{2} \frac{1}{Z_3} \mu \frac{dZ_3}{d\mu} = 0 \end{aligned} \quad (2.163)$$

Para o termo de ordem principal $Z_i = 1$, temos que

$$\mu \frac{dg_R}{d\mu} = -\frac{\epsilon}{2} g_R. \quad (2.164)$$

Dessa forma, para um laço, obtemos para os termos de derivada Z_i que

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z_i} \mu \frac{dZ_i}{d\mu} &= \frac{1}{1 + \delta_i} \mu \frac{d}{d\mu} (1 + \delta_i) \\ &= \mu \frac{d\delta_i}{d\mu} + \mathcal{O}(\delta_i^2) \\ &= \mu \frac{dg_R}{d\mu} \frac{d\delta_i}{dg_R} + \mathcal{O}(\delta_i^2) \\ \frac{1}{Z_i} \mu \frac{dZ_i}{d\mu} &= -\frac{\epsilon}{2} g_R \frac{d\delta_i}{dg_R},\end{aligned}\tag{2.165}$$

em que na última linha tomou-se como exato somente o primeiro termo da série.

Portanto, a equação do grupo de renormalização do acoplamento g_R é

$$\mu \frac{dg_R}{d\mu} = -\frac{g_R^3}{16\pi^2} \left(\frac{11}{3} C_A - \frac{2}{3} n_F T_F - \frac{1}{3} n_S T_S \right),\tag{2.166}$$

com $T_F = T_S = \frac{1}{2}$, sendo o valor de $1/2$ uma convenção amplamente utilizada.

2.4 Acoplamento de Yukawa

Até o presente momento não foi considerada a interação entre escalares e férmions, isto é, os acoplamento de Yukawa. Devido a sua presença no Modelo Padrão, é importante que também seja encontrada a sua equação do grupo de renormalização.

Para deduzir as equações já visando obter resultados para o Modelo Padrão, é útil projetar os campos fermiônicos em destros e canhotos

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi, \quad \psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi,\tag{2.167}$$

dessa forma o acoplamento de Yukawa, considerando somente com um escalar real, é

$$\mathcal{L}_{\text{Yuk.}} = -Y_{ij} \bar{\psi}_{Li} \psi_{Rj} \phi + \text{h.c.}.\tag{2.168}$$

A presente teoria conta com escalares complexos, porém é possível realizar a transformação para escalares reais, de forma que os geradores da simetria T^A se tornem antissimétricos e imaginários, sendo renomeados como θ^A .

Para encontrar a forma destes geradores, vamos considerar que as componentes do campo escalar complexo seja decomposta em escalares reais $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_i + i\phi_{i+d(R)})$, em que d_R é a dimensão da representação do grupo de gauge, com o índice $i = 1, \dots, 2d(R)$. Por simplicidade, adotaremos $\phi'_i = \phi_{i+d(R)}$.

Em uma transformação infinitesimal dos campos escalares complexos, temos que $\delta\varphi_i = i\zeta^A (T^A)_j^i \varphi_j$, que se traduz para os campos escalares reais como $\delta\phi_i = i\zeta^A (\theta^A)_{ij} \phi_j$. Assim, seja $R^A = \text{Re } T^A$ e $J^A = \text{Im } T^A$. Substituindo estas relações na transformação

infinitesimal dos campos complexos, temos que

$$\begin{aligned}\delta\phi_i + \delta\phi'_i &= i\zeta^A [R_{ij}^A + iJ_{ij}^A](\phi_j + i\phi'_j), \\ &= i\zeta^A [R_{ij}^A\phi_j - J_{ij}^A\phi'_j] - \zeta^A [R_{ij}^A\phi'_j + J_{ij}^A\phi_j],\end{aligned}\quad (2.169)$$

permitindo identificar que

$$\begin{aligned}\delta\phi_i &= -\zeta^A [R_{ij}^A\phi'_j + J_{ij}^A\phi_j], \\ \delta\phi'_j &= \zeta^A [R_{ij}^A\phi_j - J_{ij}^A\phi'_j].\end{aligned}\quad (2.170)$$

Escrevendo (2.170) em notação matricial

$$\begin{pmatrix} \delta\phi \\ \delta\phi' \end{pmatrix} = i\zeta^A \begin{pmatrix} iJ^A & iR^A \\ -iR^A & iJ^A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \phi' \end{pmatrix}.\quad (2.171)$$

Assim, θ^A tem o seguinte formato

$$\theta^A = i \begin{pmatrix} J^A & R^A \\ -R^A & J^A \end{pmatrix}.\quad (2.172)$$

Note que a matriz acima é composta de outras matrizes, no caso, R^A e J^A . Como exemplo, consideremos o campo escalar complexo sob o grupo $SU(2)$. A decomposição realizada anteriormente tem como resultado os seguintes geradores para os campos reais

$$\theta^1 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta^2 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta^3 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\quad (2.173)$$

Após esta digressão, voltemos a análise para a Lagrangeana de (2.168), estendo-a para acoplamentos de Yukawa com n_S escalares reais mais o acoplamento escalar quártico, necessário para a renormalização da teoria

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SU(N)} + Y_{ij}^a \bar{\psi}_{Li} \psi_{Rj} \phi_a - \frac{\lambda}{4} (\phi_a \phi_a)^2 + \text{h.c.}\quad (2.174)$$

Considerando que a matriz Y_{ij}^a é complexa, podemos tratá-la como a amplitude para aniquilar um férmion do j e criar um férmion do tipo i . Na formulação acima, com campos esquerdos e direitos, Y_{ij}^a é a amplitude para aniquilar férmions canhotos do tipo j e criar férmions destros do tipo i , o contrário valendo para $Y_{ij}^{a\dagger}$, como discutido por [52].

Uma relação que será útil mais a frente surge da invariância de gauge local do acoplamento de Yukawa

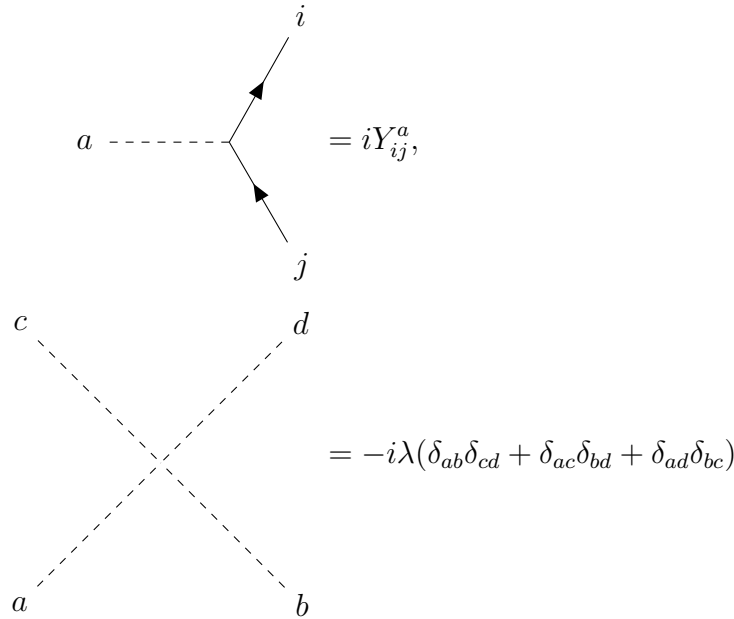
$$\mathcal{L}' = Y_{ij}^a \overline{(\exp i\zeta^A T_L^A \psi_L)}_i (\exp i\zeta^A T_R^A \psi_R)_j (\exp i\zeta^A \theta^A \phi)_a + \text{h.c.},\quad (2.175)$$

em que $T_{L(R)}^A$ são os geradores da álgebra $SU(N)$ dos campos canhotos ou destros. Expandindo e mantendo os termos lineares em ζ_A , é obtida a condição da invariância de gauge

$$T_L^A \mathbf{Y}^a - \mathbf{Y}^a T_R^A = \theta_{ab}^A \mathbf{Y}^b. \quad (2.176)$$

A interação de Yukawa gera novas correções aos propagadores do férmion e escalar, mas que não alteram a equação (2.166), pois o contratermo vértice escalar-escalar-bósons de gauge cancela o contratermo gerado pelo propagador do férmion.

As novas regras de Feynman são



2.4.1 Correção adicional ao propagador fermiônico

A nova correção para o propagador do férmion está representada pelo diagrama na Figura 17.

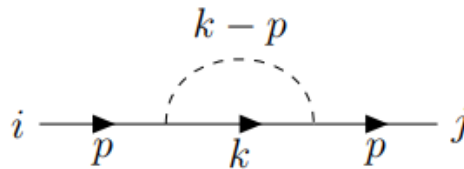


Figura 17 – A adição do acoplamento de Yukawa também corrige a um laço o propagador fermiônico. Na imagem é considerado somente o propagador com quiralidade canhota. Para a quiralidade de direita, basta inverter a ordem das matrizes Y_{ij}^a .

Utilizando as regras de Feynman, temos o seguinte cálculo

$$i\Sigma(\not{p})_{ij} = -Y_{im}^a (Y_{nj}^b)^\dagger \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i\delta_{ab}}{(p-k)^2 - M^2} \frac{i\delta_{mn}(\not{k} - m)}{k^2 - m^2}. \quad (2.177)$$

Usando os parâmetros de Feynman, chega-se a seguinte substituição para $k^\mu = \ell^\mu + yp^\mu$. Além disso, obtemos que $\Delta = yM^2 + (1-y)m^2 - yp^2(1-y)$. Na regularização dimensional, temos

$$i\Sigma(\not{p})_{ij} = (Y^a Y^{a\dagger})_{ij} \mu^{4-d} \int_0^1 dy \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{\not{\ell} + y\not{p} - m}{(\ell^2 - \Delta)^2}, \quad (2.178)$$

Escrevendo somente os termos divergente ao resolver a integral (2.178), na expansão em $\epsilon = 0$, quando $d = 4 - \epsilon$, tem-se que

$$i\Sigma(\not{p})_{ij} = \frac{i(Y^a Y^{a\dagger})_{ij} \not{p}}{16\pi^2 \epsilon} - \frac{i(Y^a Y^{a\dagger})_{ij} m}{8\pi^2 \epsilon} + \text{termos finitos}. \quad (2.179)$$

Dessa forma, é necessário modificar os contratermos mostrados em (2.152) para

$$\delta_2 = -\frac{g^2}{16\pi^2 \epsilon} (2C_F) - \frac{\mathbf{Y}_a \mathbf{Y}_a^\dagger}{16\pi^2 \epsilon}, \quad (2.180)$$

$$\delta_m = \frac{g^2}{16\pi^2 \epsilon} (-6C_F) - \frac{\mathbf{Y}_a \mathbf{Y}_a^\dagger}{16\pi^2 \epsilon}, \quad (2.181)$$

em que $\mathbf{Y}_a \equiv Y^{a ij}$.

2.4.2 Propagador escalar

As correções radiativas do propagador escalar são dadas pelos seguintes diagramas na Figura 18

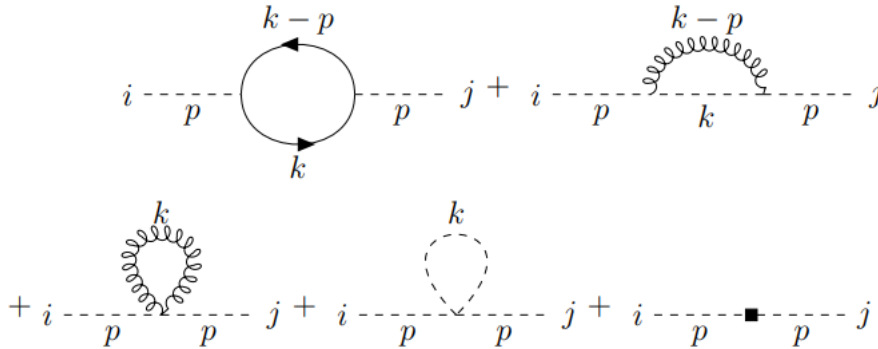


Figura 18 – Os diagramas a um laço do propagador escalar com o diagrama do contratermo ao final. O primeiro diagrama só ocorre quando há o acoplamento de Yukawa, enquanto o penúltimo diagrama corrige a massa dos escalares.

A partir das regras de Feynman, o primeiro diagrama da Figura 18 corresponde a

$$i\Sigma(p^2)_{ab} = \frac{1}{2} \text{Tr}[\mathbf{Y}_a \mathbf{Y}_b^\dagger] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[(\not{k} - m)(\not{p} - \not{k} - m)]}{(k^2 - m^2)[(p - k)^2 - m^2]}. \quad (2.182)$$

Os parâmetros de Feynman dão a seguinte substituição $k^\mu = \ell^\mu + yp^\mu$ e $\Delta = m^2 - yp^2(1-y)$. Realizando o traço no numerador, obtemos

$$i\Sigma(p^2)_{ab} = 2\text{Tr}[\mathbf{Y}_a \mathbf{Y}_b^\dagger] \int_0^1 dy \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{-\ell^2 + yp^2(1-y)}{(\ell^2 - \Delta)^2}, \quad (2.183)$$

Regularizando dimensionalmente a integral e utilizando (2.12), (2.13) e (2.15), obtém-se a seguinte expressão

$$i\Sigma(p^2)_{ab} = i\text{Tr}[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\dagger]\delta_{ab} \int_0^1 dy(-4m^2 + 6yp^2(1-y)) \left[\frac{1}{8\pi^2\epsilon} + \text{termos finitos} \right], \quad (2.184)$$

em que foi realizada a seguinte projeção $\text{Tr}[\mathbf{Y}_a\mathbf{Y}_b^\dagger] = \text{Tr}[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\dagger]\delta_{ab}$. Como os propagadores dos campos ϕ^a estão relacionados com p^2 , então o resultado para $i\Sigma(p^2)_{ab}$, considerando somente o termo com p^2 , é igual a

$$i\Sigma(p^2)_{ab} = i \frac{\text{Tr}[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\dagger]\delta_{ab}}{8\pi^2\epsilon} p^2. \quad (2.185)$$

A adição do contratermo a expressão acima implica a redefinição dos campos escalares. Logo, a relação entre os campos renormalizados e renormalizados é

$$\phi_a = \frac{1}{\sqrt{Z_\phi}} \phi_a^{(0)}, \quad (2.186)$$

com $Z_\phi = 1 + \delta_\phi$. O procedimento para encontrar os contratermos é idêntico ao realizado no propagador do elétron no eletromagnetismo quântico em (2.62). Dessa forma, a primeira adição ao contratermo δ_ϕ é encontrada a partir de (2.185), sendo esta igual a

$$\delta_\phi = - \frac{\text{Tr}[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\dagger]}{8\pi^2\epsilon}. \quad (2.187)$$

Para o segundo e terceiro diagrama, da esquerda para direita da Figura 18, há o seguinte termo

$$\begin{aligned} i\Sigma(p^2)_{ab} &= (ig)^2(\theta_{ai}^A\theta_{ib}^A) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i(p+k)^\mu(-ig_{\mu\nu})(p+k)^\nu}{(k^2-M^2)(p-k)^2} + ig^2(\theta_{ai}^A\theta_{ib}^A) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}(-ig^{\mu\nu})}{(p-k)^2} \\ i\Sigma(p^2)_{ab} &= -g^2(\theta^A\theta^A)_{ab}\mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(p+k)^2 - d(k^2 - M^2)}{(k^2 - M^2)(p-k)^2}, \end{aligned} \quad (2.188)$$

em que na passagem da primeira para a segunda linha, a integral foi regularizada em d dimensões, com $\theta_{ai}^A\theta_{ib}^A \equiv (\theta^A\theta^B)_{ab}$. Realizando a substituição $k^\mu = \ell^\mu + yp^\mu$ e com $\Delta = (1-y)M^2 - yp^2(1-y)$, então

$$i\Sigma(p^2)_{ab} = -g^2(\theta^A\theta^A)_{ab}\mu^{4-d} \int_0^1 dy \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^2(1-d) + dM^2 + p^2((1+y)^2 - dy^2)}{(\ell^2 - \Delta)^2}. \quad (2.189)$$

O cálculo das integrais resulta em

$$i\Sigma(p^2)_{ab} = -i \frac{g^2 C_S \delta_{ab} p^2}{4\pi^2\epsilon} + \text{termos finitos}, \quad (2.190)$$

com $(\theta^A\theta^A)_{ab} = C_S \delta_{ab}$, em que C_S é o invariante de Casimir para o campo escalar na representação fundamental. Somando o resultado de (2.190) a (2.187), então o contratermo resultante para o campo escalar é

$$\delta_\phi = - \frac{\text{Tr}[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\dagger]}{8\pi^2\epsilon} + \frac{g^2 C_S}{4\pi^2\epsilon}. \quad (2.191)$$

2.4.3 Vértice de Yukawa

Feito as correções dos campos fermiônicos e escalares, o próximo passo é encontrar as correções do acoplamento de Yukawa, obtidas a partir dos seguintes diagramas da Figura 19.

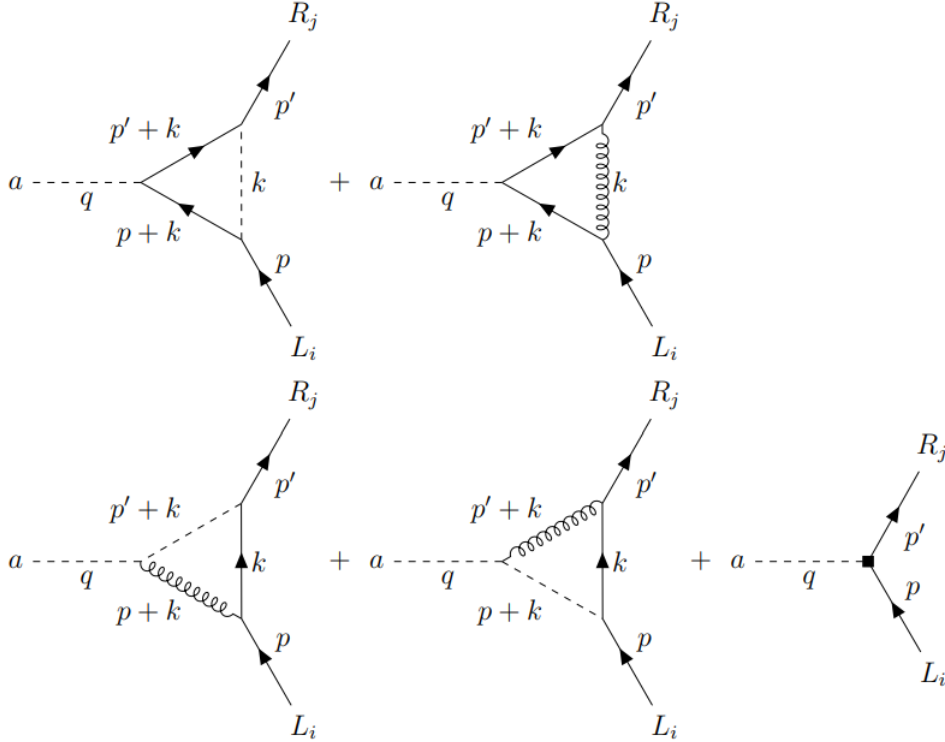


Figura 19 – Correções a um laço da interação de Yukawa no gauge de Feynman, com o último diagrama representando o contratermo.

O cálculo destes diagramas será realizado da mesma forma em que fora realizado para (2.156), isto é, será tomado $m = 0$, assim como os momentos externos. Dessa forma, o primeiro diagrama da Figura 19 é

$$i\Gamma(0)_a = (i\mathbf{Y}_b)(i\mathbf{Y}_a^\dagger)(i\mathbf{Y}_b) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i\cancel{k}}{k^2} \frac{i}{k^2} \frac{i\cancel{k}}{k^2}. \quad (2.192)$$

Passando a integral para d dimensões e integrando, então

$$i\Gamma(0)_a = -i \frac{\mathbf{Y}_b \mathbf{Y}_a^\dagger \mathbf{Y}_b}{8\pi^2 \epsilon} + \dots \quad (2.193)$$

O mesmo vale para o terceiro e quarto diagramas da Figura 19

$$i\Gamma(0)_a = i(ig)^2 \theta_{ab}^A (T_L^A \mathbf{Y}_b - \mathbf{Y}_b T_R^A) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ik^\mu}{k^2} \frac{(-i)\gamma^\mu}{k^2} \frac{i\cancel{k}}{k^2}, \quad (2.194)$$

$$i\Gamma(0)_a = i \frac{g^2 \theta_{ab}^A (T_L^A \mathbf{Y}_b - \mathbf{Y}_b T_R^A)}{8\pi^2 \epsilon} + \dots$$

Por fim, o segundo diagrama da Figura 19 se traduz em

$$\begin{aligned}
i\Gamma(0)_a &= i(ig)^2 T_L^A \mathbf{Y}_a T_R^A \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(-i)}{k^2} \frac{i\cancel{k}}{k^2} \frac{i\cancel{k}}{k^2} \gamma^\mu, \\
i\Gamma(0)_a &= g^2 T_L^A \mathbf{Y}_a T_R^A \mu^{6-3/2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d}{k^4}, \\
i\Gamma(0)_a &= i \frac{g^2 T_L^A \mathbf{Y}_a T_R^A}{2\pi^2 \epsilon} + \dots
\end{aligned} \tag{2.195}$$

Portanto, o contratermo necessário para o acoplamento de Yukawa é obtido ao somar (2.193), (2.194) e (2.195)

$$\delta_Y \mathbf{Y}_a = \frac{\mathbf{Y}_b \mathbf{Y}_a^\dagger \mathbf{Y}_b}{8\pi^2 \epsilon} - \frac{g^2 \theta_{ab}^A (T_L^A \mathbf{Y}_b - \mathbf{Y}_b T_R^A)}{8\pi^2 \epsilon} - \frac{g^2 T_L^A \mathbf{Y}_a T_R^A}{2\pi^2 \epsilon}. \tag{2.196}$$

O acoplamento de Yukawa renormalizado é obtido a partir da redefinição dos campos em (2.168)

$$\mathbf{Y}_a^{(0)} = \mathbf{Y}_a \frac{Z_Y \mu^{\epsilon/2}}{\sqrt{Z_L Z_R Z_\phi}} \tag{2.197}$$

Como o lado esquerdo não depende de μ , então ao diferenciar (2.197) em relação a μ , a seguinte equação diferencial é obtida

$$\mu \frac{d\mathbf{Y}_a}{d\mu} = -\frac{\epsilon}{2} \mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_a \mu \frac{dZ_Y}{d\mu} - \frac{1}{2} \mathbf{Y}_a \frac{dZ_L}{d\mu} - \frac{1}{2} \frac{dZ_R}{d\mu} \mathbf{Y}_a - \frac{1}{2} \mathbf{Y}_a \frac{dZ_\phi}{d\mu}. \tag{2.198}$$

Após uma extensa álgebra, chega-se a equação do grupo de renormalização para o acoplamento de Yukawa

$$\begin{aligned}
\mu \frac{d\mathbf{Y}_a}{d\mu} &= -\frac{\epsilon}{2} \mathbf{Y}_a + \frac{1}{16\pi^2} \left[2\mathbf{Y}_b \mathbf{Y}_a^\dagger \mathbf{Y}_b + \frac{1}{2} (\mathbf{Y}_a \mathbf{Y}_b^\dagger \mathbf{Y}_b + \mathbf{Y}_b \mathbf{Y}_b^\dagger \mathbf{Y}_a) + \mathbf{Y}_b \text{tr}[\mathbf{Y}_a \mathbf{Y}_b^\dagger] \right. \\
&\quad \left. + g^2 (-4\theta^A \theta^A \mathbf{Y}_a - 8T_L^A \mathbf{Y}_a T_R^A + \mathbf{Y}_a T_L^A T_L^A + T_R^A T_R^A \mathbf{Y}_a) \right].
\end{aligned} \tag{2.199}$$

O último termo pode ser simplificado partindo da condição de invariância de gauge (2.176)

$$\theta^A \theta^A \mathbf{Y}_a = \mathbf{Y}_a T_L^A T_L^A + T_R^A T_R^A \mathbf{Y}_a - 2T_L^A \mathbf{Y}_a T_R^A, \tag{2.200}$$

em que os índices dos geradores θ^A e $T_{L(R)}^A$ foram omitidos de forma a deixar a notação mais limpa. Logo, no limite $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned}
\mu \frac{d\mathbf{Y}_a}{d\mu} &= \frac{1}{16\pi^2} \left[2\mathbf{Y}_b \mathbf{Y}_a^\dagger \mathbf{Y}_b + \frac{1}{2} (\mathbf{Y}_a \mathbf{Y}_b^\dagger \mathbf{Y}_b + \mathbf{Y}_b \mathbf{Y}_b^\dagger \mathbf{Y}_a) + \mathbf{Y}_b \text{Tr}[\mathbf{Y}_a \mathbf{Y}_b^\dagger] \right. \\
&\quad \left. - 3g^2 (\mathbf{Y}_a T_L^A T_L^A + T_R^A T_R^A \mathbf{Y}_a) \right].
\end{aligned} \tag{2.201}$$

2.5 Acoplamento quártico do campo escalar

A equação do grupo de renormalização a um laço do acoplamento quártico nesta teoria, assim como de forma similar no Modelo Padrão, conta com contribuições de ordem λ^2 , $g^2\lambda$, g^4 , $Y^2\lambda$ e Y^4 , sendo os dois últimos relacionados aos acoplamentos de Yukawa.

2.5.1 Contribuição λ^2

Os diagramas que contribuem para os termos de ordem λ^2 estão representadas na Figura 20, sendo também presentes numa teoria escalar pura.

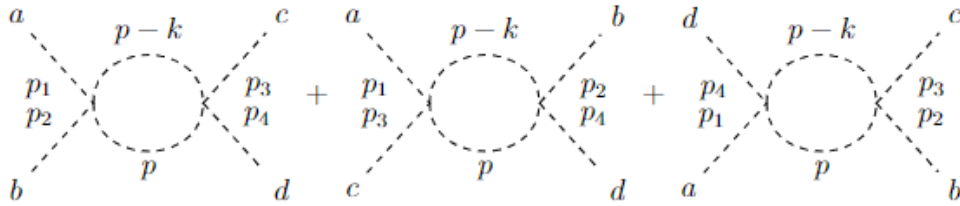


Figura 20 – Os diagramas da interação quártica pura de ordem λ^2 vão existir, mesmo que não haja os acoplamentos de Yukawa e de gauge. O momento p pode ser igual a $p = p_1 + p_2$, no canal s , $p = p_1 - p_3$ no canal t ou $u = p_1 - p_4$ no canal u , em que s, t, u são as variáveis de Mandelstam.

Usando as regras de Feynman para o acoplamento quártico, encontra-se, após uma longa álgebra

$$iV_{abcd}^{(1)} = (-i\lambda)^2 \left(\frac{N+8}{2} \right) (\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ad}\delta_{bc} + \delta_{ac}\delta_{bd}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - M^2} \frac{i}{(p-k)^2 - M^2}, \quad (2.202)$$

em que fator N é o resultado da seguinte multiplicação $\delta_{ij}\delta_{ij}$ que aparece ao longo da álgebra.

Devido ao interesse em obter somente a divergência UV, será utilizado o mesmo método para a correção do vértice Yukawa e do acoplamento de gauge g mostrado nas seções anteriores. Portanto, o resultado da integral (2.202) contendo somente a divergência é

$$iV_{abcd}^{(1)} = \frac{(i\lambda^2)(N+8)}{16\pi^2\epsilon} (\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ad}\delta_{bc} + \delta_{ac}\delta_{bd}). \quad (2.203)$$

A forma $(\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ad}\delta_{bc} + \delta_{ac}\delta_{bd})$ sempre estará presente nas correções quânticas. Isso ocorre pois os cálculos estão corrigindo o vértice $(-i\lambda)(\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ad}\delta_{bc} + \delta_{ac}\delta_{bd})$.

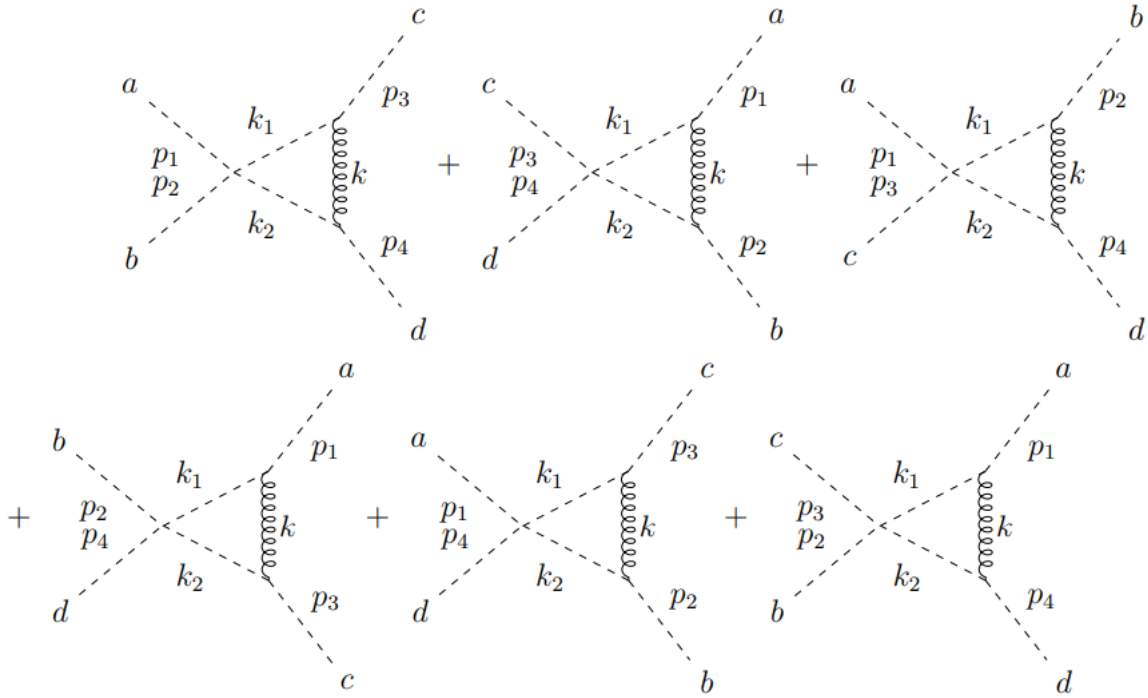
2.5.2 Contribuição $g^2\lambda$


Figura 21 – As correções de ordem g^2 ao acoplamento quártico escalar. Os momentos k_1 e k_2 são combinações lineares dos momentos externos p_1, p_2, p_3 e p_4 e do momento k . Devido ao interesse em encontrar somente a divergência, então estes momentos são $k_1 = k$ e $k_2 = k$, ao utilizar o artifício apresentado em [34].

Para esta contribuição há 6 combinações possíveis, sendo representadas pela Figura 21. A integral referente ao cálculo a um laço dos diagramas acima tem a seguinte forma

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i(k_1 + p_i)^\mu (-ig_{\mu\nu}) i(k_2 + p_j)^\nu}{(k_1^2 - M^2)(k)^2(k_2^2 - M^2)}, \quad (2.204)$$

em que p_i, p_j são os momentos externos que estão ligados pelo acoplamento de gauge. Por exemplo, o primeiro diagrama corresponde a $p_i = p_3$ e $p_j = p_4$. Devido ao interesse de obter somente a estrutura divergente, os cálculos são simplificados ao tomar $p_i = p_j = M = 0$. Assim, os dois primeiros diagramas, da esquerda para direita, da Figura 21, são da seguinte forma

$$iV_{abcd}^2 = (-i\lambda)(ig)^2(C_S\delta_{ab}\delta_{cd} + \theta_{da}^A\theta_{cb}^A + \theta_{db}^A\theta_{ca}^A)\Gamma_{UV}^{(2)}, \quad (2.205)$$

com

$$\Gamma_{UV}^{(2)} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ik^\mu (-ig_{\mu\nu}) ik^\nu}{k^6} = -\frac{1}{8\pi^2\epsilon}. \quad (2.206)$$

Para simplificar (2.205), será utilizado a identidade de Fierz para $SO(N)$

$$\theta_{ab}^A\theta_{cd}^A = \frac{1}{4}(\delta_{ad}\delta_{bc} - \delta_{ac}\delta_{bd}). \quad (2.207)$$

Dessa forma,

$$iV_{abcd}^2 = \frac{-i\lambda g^2}{8\pi^2\epsilon} \left[(2C_S - 1)\delta_{ab}\delta_{cd} + \frac{1}{2}\delta_{bc}\delta_{ad} + \frac{1}{2}\delta_{ac}\delta_{bd} \right]. \quad (2.208)$$

O mesmo ocorre para os outros quatro diagramas da Figura 21. Logo,

$$iV_{abcd}^2 = \frac{-i\lambda g^2}{8\pi^2\epsilon} \left[\frac{1}{2}\delta_{ab}\delta_{cd} + (2C_S - 1)\delta_{bc}\delta_{ad} + \frac{1}{2}\delta_{ac}\delta_{bd} \right], \quad (2.209)$$

$$iV_{abcd}^2 = \frac{-i\lambda g^2}{8\pi^2\epsilon} \left[\frac{1}{2}\delta_{ab}\delta_{cd} + \frac{1}{2}\delta_{bc}\delta_{ad} + (2C_S - 1)\delta_{ac}\delta_{bd} \right]. \quad (2.210)$$

Assim, ao somar todos os 6 diagramas, é obtido

$$iV_{abcd}^2 = \frac{-i\lambda g^2 C_S}{4\pi^2\epsilon} (\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ad}\delta_{bc} + \delta_{ac}\delta_{bd}). \quad (2.211)$$

2.5.3 Contribuição g^4

A contribuição para g^4 contém as formas das contribuições para o acoplamento quártico a um laço, como mostrado na Figura 22.

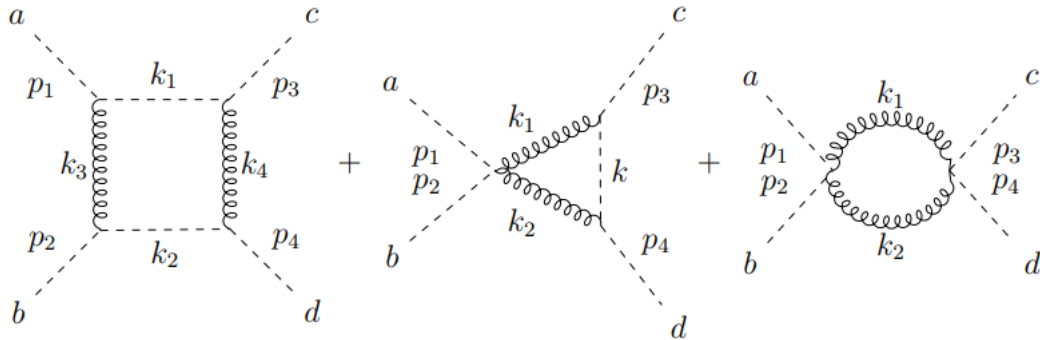


Figura 22 – Diagramas de ordem g^4 a um laço para o acoplamento quártico. Os momentos internos k_1, k_2, k_3 e k_4 são combinações lineares dos momentos externos. Cada permutação dos índices a, b, c, d dará combinações lineares diferentes.

O cálculo para esta contribuição deve levar em conta as permutações nos índices a, b, c, d das linhas externas. As integrais do laço dos últimos dois diagramas já foram vistas ao longo deste texto, por exemplo em (2.204) e (2.202). A integral a um laço do primeiro diagrama é chamado de diagrama caixa, do inglês *box diagram*, tendo a seguinte forma neste caso

$$I_{\text{box}} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i(p_i + k_1)^\mu (-ig_{\mu\nu})(p_j + k_2)^\nu i(p_l + k_2)^\rho (-ig_{\rho\sigma})(p_k + k_1)^\sigma}{(k_1^2 - M^2)k_3^2(k_2^2 - M^2)k_4^2}, \quad (2.212)$$

em que p_i, p_j, p_l, p_k correspondem aos momentos externos. Por exemplo, no primeiro diagrama mostrado na Figura 22, temos que $p_i = p_1, p_j = p_2, p_l = p_4$ e $p_k = p_3$. Assim,

a soma destes três diagramas, mais as permutações, permite obter o seguinte termo divergente, após uma extensa álgebra

$$iV_{abcd}^3 = \frac{3ig^4}{16\pi^2\epsilon} [\{\theta^A\theta^B\}_{ac}\{\theta^A\theta^B\}_{bd} + \{\theta^A\theta^B\}_{ab}\{\theta^A\theta^B\}_{cd} + \{\theta^A\theta^B\}_{ad}\{\theta^A\theta^B\}_{bc}], \quad (2.213)$$

com

$$\{\theta^A\theta^B\}_{ab} = \theta_{ai}^A\theta_{ib}^B + \theta_{ib}^B\theta_{ai}^A. \quad (2.214)$$

Para $SO(N)$, é possível simplificar esta expressão usando a identidade de Fierz, e seguinte equação

$$2if^{ABC}\theta_{ai}^B\theta_{ib}^C = -C_{adj}\theta_{ab}^A, \quad (2.215)$$

chegando a seguinte expressão final

$$iV_{abcd}^3 = \frac{3ig^4}{64\pi^2\epsilon} C_S (\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ad}\delta_{bc} + \delta_{ad}\delta_{bc}). \quad (2.216)$$

2.5.4 Contribuição Y^4

Esta contribuição a um laço é necessária para renormalizar o acoplamento quártico, devido a presença do acoplamento de Yukawaa. A Figura 23 mostra um dos possíveis diagramas que representam esta contribuição. Vale ressaltar que o cálculo a seguir considerou todas as permutações possíveis.

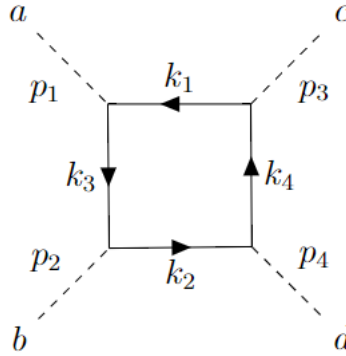


Figura 23 – O fator de contribuição para este diagrama é $\text{Tr}[\mathbf{Y}_a \mathbf{Y}_b^\dagger \mathbf{Y}_c \mathbf{Y}_d^\dagger]$. Os momentos k_1, k_2, k_3 e k_4 são combinações lineares com os momentos externos p_1, p_2, p_3 e p_4 , de tal forma que existirá um momento, renomeado como k , a ser integrado.

Somando todos os diagramas com as permutações, permite projetar o seguinte termo $(\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ad}\delta_{bc} + \delta_{ad}\delta_{bc})$. Dessa forma,

$$iV_{abcd}^4 = \text{Tr}[(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\dagger)^2] (\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ad}\delta_{bc} + \delta_{ad}\delta_{bc}) \Gamma_V, \quad (2.217)$$

com

$$\Gamma_V = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[(\not{k}_1 + m)(\not{k}_2 + m)(\not{k}_3 + m)(\not{k}_4 + m)]}{(k_1^2 - m^2)(k_2^2 - m^2)(k_3^2 - m^2)(k_4^2 - m^2)}, \quad (2.218)$$

em que k_i são os momentos internos que dependem de k e dos momentos externos. Assim, o termo que contribuirá para a equação do grupo de renormalização do acoplamento quártico é

$$iV_{abcd}^4 = 4 \frac{\text{Tr}[(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\dagger)^2]}{16\pi^2\epsilon} (\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ad}\delta_{bc} + \delta_{ad}\delta_{bc}). \quad (2.219)$$

Somando todas as contribuições encontradas em (2.203), (2.211), (2.216) e (2.219), tem-se que

$$iV_{abcd} = (-i\lambda) \left[-\frac{(N+8)\lambda}{16\pi^2\epsilon} + \frac{4g^2C_S}{16\pi^2\epsilon} - \frac{3g^4C_S}{64\pi^2\epsilon\lambda} - \frac{4\text{Tr}[(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\dagger)^2]}{16\pi^2\epsilon\lambda} \right] \times (\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ad}\delta_{bc} + \delta_{ad}\delta_{bc}). \quad (2.220)$$

Portanto, a renormalização da constante de acoplamento quártico Z_λ é

$$Z_\lambda = 1 + \frac{(N+8)\lambda}{16\pi^2\epsilon} - \frac{4g^2C_S}{16\pi^2\epsilon} + \frac{3g^4C_S}{64\pi^2\epsilon\lambda} + \frac{4\text{Tr}[(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\dagger)^2]}{16\pi^2\epsilon\lambda}. \quad (2.221)$$

A relação entre o acoplamento não renormalizado e o renormalizado, obtido a partir de (2.186) e (2.174) é dada por

$$\lambda = \lambda_R \mu^\epsilon \frac{Z_\lambda}{Z_\phi^2}. \quad (2.222)$$

Diferenciando ambos os lados em relação a μ , e após uma pequena álgebra, chega-se a uma forma geral para a equação de renormalização do acoplamento quártico

$$\mu \frac{d\lambda_R}{d\mu} = -\epsilon\lambda_R - \lambda_R \frac{\mu}{Z_\lambda} \frac{dZ_\lambda}{d\mu} + 2\lambda_R \frac{\mu}{Z_\phi} \frac{dZ_\phi}{d\mu}. \quad (2.223)$$

Para o termo Z_λ ,

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{Z_\lambda} \frac{dZ_\lambda}{d\mu} &= \mu \frac{d}{d\mu} \left(1 + \frac{(N+8)\lambda}{16\pi^2\epsilon} - \frac{4g^2C_S}{16\pi^2\epsilon} + \frac{3g^4C_S}{32\pi^2\epsilon\lambda} + \frac{4\text{Tr}[(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\dagger)^2]}{16\pi^2\epsilon\lambda} \right), \\ \frac{\mu}{Z_\lambda} \frac{dZ_\lambda}{d\mu} &= -\frac{(N+8)\lambda}{16\pi^2} + \frac{4g^2C_S}{16\pi^2} - \frac{12g^4C_S}{64\pi^2\lambda} - \frac{4\text{Tr}[(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\dagger)^2]}{16\pi^2\lambda}. \end{aligned} \quad (2.224)$$

Para o termo Z_ϕ ,

$$\begin{aligned} \lambda_R \frac{\mu}{Z_\phi} \frac{dZ_\phi}{d\mu} &= \lambda_R \mu \frac{d}{d\mu} \left(1 - \frac{\text{Tr}[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\dagger]}{8\pi^2\epsilon} + \frac{g^2C_S}{4\pi^2\epsilon} \right) \\ \lambda_R \frac{\mu}{Z_\phi} \frac{dZ_\phi}{d\mu} &= \lambda_R \frac{\text{Tr}[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\dagger]}{8\pi^2} - \lambda_R \frac{g^2C_S}{4\pi^2}. \end{aligned} \quad (2.225)$$

Somando estes dois resultados a equação (2.223), chega-se a

$$16\pi^2\mu \frac{d\lambda_R}{d\mu} = (N+8)\lambda_R^2 - 12C_S\lambda_R g_R^2 + 3C_S g_R^4 + 4\lambda \text{Tr}[\mathbf{Y}_a \mathbf{Y}_b^\dagger]_R - 4\text{Tr}[(\mathbf{Y}_a \mathbf{Y}_a^\dagger)^2]_R. \quad (2.226)$$

Usando o fato de que o invariante de Casimir para $\text{SO}(N)$ é $C_S = \frac{N-1}{4}$, vemos que a equação de grupo de renormalização para o acoplamento quártico está de acordo com a mostrada em [54].

2.6 Equações do grupo de renormalização do Modelo Padrão

As equações do grupo de renormalização deduzidas para $SU(N)$ são de grande utilidade para encontrar as equações do grupo de renormalização do Modelo Padrão, sendo necessária algumas pequenas modificações, como discutido em [52]. Isso ocorre, pois as equações encontradas consideraram somente um grupo de gauge, enquanto o Modelo Padrão é um produto direto entre três grupos de gauge. Assim, generalizando para um produto direto $G_1 \times \cdots \times G_n$

$$g^2 C_{F(S)} \rightarrow \sum_l g_l^2 C_{F(S)}^l, \quad (2.227)$$

$$g^4 C_{\text{adj}} C_{F(S)} \rightarrow \sum_l g_l^4 C_{\text{adj}}^l C_{F(S)}^l, \quad (2.228)$$

$$g^4 C_{F(S)} T_{F(S)} \rightarrow \sum_l g_l^4 C_{F(S)}^l T_{F(S)}^l, \quad (2.229)$$

$$g^4 C_{F(S)} C_{F(S)} \rightarrow \sum_{l,m} g_l^2 g_m^2 C_{F(S)}^l C_{F(S)}^m, \quad (2.230)$$

em que l, m representam os grupos G_1, G_2, \dots, G_n . Por exemplo, um modelo formado pelo produto direto $SU(3) \times SU(2)$, a (2.227) toma a seguinte forma

$$\sum_l g_l^2 C_{F(S)}^l = g_2^2 C_{F(S)}^2 + g_3^2 C_{F(S)}^3, \quad (2.231)$$

com $C_{F(S)}^2$ representando o invariante de Casimir para o grupo $SU(2)$ para os férmions (F) e/ou escalares (S), o mesmo vale para $C_{F(S)}^3$.

Para o Modelo Padrão, começaremos pelo grupo $U(1)_Y$, que tem $C_{\text{adj}} = 0$ e $n_{F(S)} T_{F(S)} = \frac{3}{20} \sum_i y_i^2$. Dessa forma, a equação do grupo de renormalização para g_1 é

$$\mu \frac{dg_1}{d\mu} = -\frac{g_1^3}{16\pi^2} \left[\frac{3}{20} \frac{2}{3} \left(2 \cdot (-1)^2 + 2^2 + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 3 \cdot \left(\frac{-4}{3} \right)^2 + 3 \cdot \frac{2^2}{3^2} \right) N_{\text{fam}} + \frac{1}{10} \right]. \quad (2.232)$$

Como são 3 famílias, então $N_{\text{fam}} = 3$. Logo,

$$\mu \frac{dg_1}{d\mu} = \frac{41}{10} \frac{g_1^3}{16\pi^2}. \quad (2.233)$$

Para $SU(2)_L$, existem $n_F = 12$ sabores, sendo 6 sabores de léptons e 6 sabores de quarks. O dubleto de Higgs contribui com $n_S = 1$. Assim

$$\mu \frac{dg_2}{d\mu} = -\frac{19}{6} \frac{g_2^3}{16\pi^2}. \quad (2.234)$$

Por fim, para $SU(3)_C$, $n_F = 2 \cdot 3 + 3 + 3 = 12$, em que o fator 2 aparece devido ao dubleto dos quarks. Como não há partículas escalares elementares sob $SU(3)_C$ no Modelo Padrão, então $n_S = 0$. Portanto,

$$\mu \frac{dg_3}{d\mu} = -7 \frac{g_3^3}{16\pi^2}. \quad (2.235)$$

Os acoplamentos de Yukawa são mais complicados, pois envolvem as matrizes Y_a , sendo os índices a atrelados a cada campo escalar real que compões o dubleto de Higgs. No Modelo Padrão, o dubleto de Higgs pode ser decomposto em 4 campos escalares reais, de forma que, ao expandir a Lagrangeana de Yukawa do Modelo Padrão \mathcal{L}_{Yuk} .

$$\mathcal{L}_{\text{Yuk.}} = -\frac{\mathbf{Y}^e}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_L e_R \phi_1 - i\frac{\mathbf{Y}^e}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_L e_R \phi_2 - \frac{\mathbf{Y}^e}{\sqrt{2}}\bar{e}_L e_R \phi_3 - i\frac{\mathbf{Y}^e}{\sqrt{2}}\bar{e}_L e_R \phi_4. \quad (2.236)$$

É possível reorganizar esta Lagrangeana com um campo auxiliar ν_R , formando um dubleto tanto para a quiralidade canhota quanto para a direita, deixando-a na forma de (2.168)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yuk.}} = & -\phi_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{e}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{Y}^e \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_R \\ e_R \end{pmatrix} - \phi_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{e}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i\mathbf{Y}^e \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_R \\ e_R \end{pmatrix} \\ & -\phi_3 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{e}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Y}^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_R \\ e_R \end{pmatrix} - \phi_4 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{e}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i\mathbf{Y}^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_R \\ e_R \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.237)$$

de onde se identifica as seguintes matrizes \mathbf{Y}_a para os léptons

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{Y}_e \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{Y}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i\mathbf{Y}_e \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Y}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Y}_e \end{pmatrix}, & \mathbf{Y}_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i\mathbf{Y}_e \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.238)$$

Escolhendo Y_3 na equação (2.201), chega-se ao seguinte resultado

$$\mu \frac{d\mathbf{Y}_e}{d\mu} = \frac{\mathbf{Y}_e}{16\pi^2} \left[\frac{3}{2} \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e + \text{Tr}(3\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d + 3\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u + \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e) - \frac{9}{4}(g_1^2 + g_2^2) \right]. \quad (2.239)$$

Realizando o mesmo procedimento anterior para os quarks, as matrizes \mathbf{Y}_a tomam o seguinte formato

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{Y}_d \\ -\mathbf{Y}_u & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{Y}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i\mathbf{Y}_d \\ i\mathbf{Y}_u & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Y}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_u & 0 \\ 0 & \mathbf{Y}_d \end{pmatrix}, & \mathbf{Y}_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i\mathbf{Y}_u & 0 \\ 0 & i\mathbf{Y}_d \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.240)$$

Novamente, escolhendo Y_3 , chega-se aos seguintes resultados

$$\begin{aligned} \mu \frac{d\mathbf{Y}_d}{d\mu} &= \frac{\mathbf{Y}_d}{16\pi^2} \left[\frac{3}{2} (\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d - \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u) + \text{Tr}(3\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d + 3\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u + \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{4}g_1^2 + \frac{9}{4}g_2^2 + 8g_3^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (2.241)$$

$$\begin{aligned} \mu \frac{d\mathbf{Y}_u}{d\mu} &= \frac{\mathbf{Y}_u}{16\pi^2} \left[\frac{3}{2} (\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u - \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d) + \text{Tr}(3\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d + 3\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u + \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{17}{20}g_1^2 + \frac{9}{4}g_2^2 + 8g_3^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.242)$$

Por fim, a partir do acoplamento quártico, considerando os quatro campos escalares reais do dubleto de Higgs, permite obter a seguinte equação para λ

$$\mu \frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{1}{16\pi^2} \left[12\lambda^2 - \left(\frac{9}{5}g_1^2 + 9g_2^2 \right) \lambda + \frac{9}{4} \left(\frac{3}{25}g_1^4 + \frac{2}{5}g_1^2g_2^2 + g_2^4 \right) + 4T\lambda - 4H \right], \quad (2.243)$$

onde

$$T = \text{Tr}(3\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d + 3\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u + \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e),$$

e

$$H = \text{Tr}[3(\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d)^2 + 3(\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u)^2 + (\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)^2].$$

Vale ressaltar que o fator 3 que aparece nos traços está relacionado ao número de cores dos quarks.

Outro detalhe de extrema importância é a simetria contida nos acoplamentos de Yukawa. Caso estes fossem nulos, a equação do grupo de renormalização informa que não haveriam correções radiativas a um laço, o que é válido com a discussão realizada no capítulo anterior, em que foi discutido a quebra de simetria global $[\text{U}(3)]^5$ pelo acoplamento de Yukawa. Aqui, está sendo feito a mesma análise a partir das equações do grupo de renormalização. O mesmo não ocorre para o acoplamento quártico de Higgs, pois há dois termos que não dependem de λ , ou seja, não há uma simetria associada a λ . Além disso, pode-se notar que mesmo tomando $\lambda = 0$, em altas energias é visto que λ tomará valores diferente de zero.

3 Estabilidade do potencial escalar

Neste capítulo serão estudadas as condições de estabilidade do vácuo do potencial escalar a nível de árvore e com correções quânticas a um laço, aplicando a alguns modelos que estendem o Modelo Padrão, como o Modelo de dubleto de Higgs inerte, e Modelo *triplet seesaw*. A nível de árvore, as condições serão derivadas a partir do critério da copositividade de uma matriz como feito inicialmente por [55, 56]. A nível quântico, será introduzida a ação efetiva, uma ferramenta poderosa que engloba as correções radiativas, permitindo avaliar o verdadeiro valor esperado do vácuo em uma teoria quântica de campos. Como aplicação, o potencial de Coleman-Weinberg [57] será estudado para introduzir a ressonância do potencial efetivo a um laço. Após este estudo, as condições de estabilidade obtidas a nível clássico serão usadas para estudar a estabilidade do potencial efetivo a um laço quando este depende de várias constantes de acoplamento e de vários campos, seguindo o método desenvolvido por [58].

3.1 Estabilidade clássica do potencial escalar

O potencial de Higgs do Modelo Padrão não é estável na escala de energia de Teorias de Grande Unificação, cerca de 10^{16} GeV, se a massa do bóson de Higgs for menor que 128 GeV, pois λ é negativo para a escala de energia das Teorias de Grande Unificação [56]. Medidas recentes da massa do bóson de Higgs $m_h = 125,25 \pm 0,17$ GeV [59, 60], indicam uma instabilidade do Modelo Padrão em escalas de energia menores que a escala de Planck $\approx 10^{19}$ GeV, conforme mostrado por [61, 62]. De acordo com [62], o valor atual da massa do bóson de Higgs faz com que o Modelo Padrão se encontre próximo a borda entre estabilidade e metaestabilidade. Assim, extensões do Modelo Padrão visam, entre outras características, melhorar a estabilidade do potencial escalar, em particular, com adição de novas partículas escalares [63, 64]. Exemplos de extensão do Modelo padrão incluem o Modelo de dois dubletos de Higgs [56, 65, 66], Modelos do tipo *seesaw* [67, 68] e Modelos de singlete escalar para matéria escura [56, 64].

Para ilustrar a ideia de como encontrar condições de estabilidade para um potencial escalar, quando ocorre quebra espontânea de simetria, considere o seguinte potencial de um campo escalar real

$$V(\phi) = -\frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4. \quad (3.1)$$

A simetria presente neste caso é \mathbb{Z}_2 , podendo ser chamada de reflexão, pois o potencial é simétrico na transformação $\phi \rightarrow -\phi$.

Há três valores críticos que este potencial adquire, obtidos a partir da minimização

do potencial

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \phi} &= -\mu^2 \phi + \lambda \phi^3 = 0, \\ &= \phi(-\mu^2 + \lambda \phi^2) = 0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Dessa forma, resta analisar se $\phi = 0$ ou $\phi^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$ são máximos ou mínimos. Para isso, recorre-se a segunda derivada do potencial avaliada nestes valores críticos

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = -\mu^2 + 3\lambda \phi^2.\tag{3.3}$$

Quando avaliada em $\phi = 0$,

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right|_{\phi=0} = -\mu^2 < 0.\tag{3.4}$$

Logo, $\phi = 0$ é um máximo local do potencial. Já para $\phi^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right|_{\phi^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}} = 2\mu^2 > 0.\tag{3.5}$$

Assim, $\phi = \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$ são os os mínimos locais, sendo possível escolher um destes dois valores para ser o valor esperado do vácuo. A escolha de um destes valores implica que uma direção para o mínimo do potencial foi escolhida, sendo os mínimos do potencial relacionados pela simetria de reflexão.

O problema agora é identificar se este mínimo local é o mínimo global, pois caso seja, pode-se afirmar que quando $\phi \rightarrow \infty$, o potencial será limitado por baixo, e portanto, estável. A importância de encontrar o mínimo global está no fato de que podem existir outros mínimos no potencial para diferentes valores dos campos. Porém, garantir que um destes mínimos é o mínimo global garante que o potencial é limitado por baixo. No caso do potencial em (3.1), o mínimo global ocorre em $\phi = \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$, pois ao avaliar qualquer um destes valores no potencial

$$V_0 \equiv V \left(\phi = \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \right) = -\frac{\mu^4}{4\lambda},\tag{3.6}$$

não existirá valor de ϕ que deixará o valor do potencial menor que V_0 . Para ver isto, considere o seguinte valor $\phi = \alpha \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$ com α sendo qualquer valor pertencente aos números reais. Avaliando este valor de ϕ no potencial, então

$$\begin{aligned}V(\alpha) \equiv V \left(\phi = \alpha \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \right) &= -\frac{\alpha^2 \mu^4}{2\lambda} + \frac{\alpha^4 \mu^4}{4\lambda}, \\ &= (\alpha^4 - 2\alpha^2) \frac{\mu^4}{4\lambda}, \\ &= (\alpha^4 - 2\alpha^2) V_0.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Dessa forma, o potencial está em escrito em termos de um parâmetro adimensional α que multiplica o valor do potencial quando avaliado no mínimo V_0 . Assim, encontrar o mínimo valor de α garante que (3.6) é o mínimo global do potencial. Assim, derivando em relação a α e igualando a zero

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\alpha} &= (4\alpha^3 - 4\alpha)V_0 = 0, \\ \Rightarrow \alpha &= \pm 1, \text{ ou } \alpha = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

O valor de $\alpha = 0$ claramente é o máximo local encontrado anteriormente em (3.8). Já $\alpha = \pm 1$ corresponde aos valores $\phi = \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$. Portanto, V_0 é o menor valor do potencial e $\phi = \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$ são os valores de mínimo global. Dessa forma, pode-se concluir que o potencial é limitado por baixo e, portanto, estável.

Essa mesma análise pode ser levada para o Modelo Padrão, com a ressalva de ser caracterizado por grupos de gauge, tendo assim diferentes direções para o mínimo do potencial. Como é desejado que a quebra espontânea de simetria preserve a carga elétrica, então o mínimo do potencial ocorre somente na direção do campo neutro do dubleto de Higgs. Esse mínimo corresponde ao mínimo global, pois só há um acoplamento quártico no Modelo Padrão, e portanto, basta que ele seja maior que zero, como concluído recentemente. Em modelos com mais campos escalares, deve-se encontrar o mínimo do potencial em todas as direções no espaço de todos os campos. Além disso, a introdução de novos acoplamentos quárticos, necessários para que a teoria seja renormalizável, aumenta o grau de dificuldade do problema, visto que o mínimo global depende do comportamento destes acoplamentos quárticos. O método apresentado por [55] visa solucionar este problema ao introduzir razões adimensionais dos campos invariantes a suas magnitudes.

Para demonstrar este método, consideremos o seguinte potencial invariante por um grupo de gauge não abeliano \mathcal{G} mais a reflexão, com as componentes do campo escalar pertencendo a uma representação irredutível de n dimensões

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}m^2\phi_i^*\phi_i + \frac{1}{4}\lambda(\phi_i^*\phi_i)^2 + \frac{1}{4}\lambda_1 f_{ijkl}\phi_i^*\phi_j\phi_k^*\phi_l + \frac{1}{4}\lambda_2 g_{ijkl}\phi_i^*\phi_j\phi_k^*\phi_l + \dots, \quad (3.9)$$

onde a soma sobre os índices i está implícita, e f_{ijkl} , g_{ijkl} são tensores simétricos indicando simetrias diferentes entre os produtos dos campos. Este potencial é invariante sob a transformação do grupo

$$\phi'_i = U(\theta)_{ij}\phi_j, \quad (3.10)$$

em que $U(\theta)$ é uma matriz unitária de n dimensões correspondendo ao elemento do grupo

$$U(\theta) = \exp[-i\theta_i T_i],$$

em que T_i são os geradores do grupo e θ_i são os parâmetros de grupo especificando um elemento do grupo.

Para ver a invariância do potencial (3.9) sob (3.10), basta considerar o produto bilinear dos campos

$$\begin{aligned}\phi_i^* \phi_i' &= \phi_j^* [U(\theta)]_{ji}^* U(\theta)_{ik} \phi_k, \\ &= \phi_j^* \delta_{jk} \phi_k, \\ &= \phi_j^* \phi_j.\end{aligned}$$

O vácuo, definido como o valor onde o potencial é mínimo, respeita somente o subgrupo \mathcal{G}' do grupo de simetria \mathcal{G} . Denotando v como o valor do vácuo, então a afirmação anterior pode ser posta da seguinte forma: $U(\theta)v = v$ somente se $U(\theta)$ for um elemento do subgrupo \mathcal{G}' , caso contrário $U(\theta)v \neq v$.

Quando se tenta encontrar o mínimo do potencial há duas dificuldades significantes: a primeira delas é que há muitas componentes de ϕ e encontrar soluções para acoplamentos arbitrários ao tomar a primeira derivada parcial é muito difícil. Por exemplo, a partir de (3.9), tem-se que

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_a^*} = -\frac{m^2}{2} \phi_a + \frac{\lambda}{2} \phi_a (\phi_i^* \phi_i) + \frac{\lambda_1 f_{ajkl}}{2} (\phi_j \phi_k^* \phi_l) + \frac{\lambda_2 g_{ajkl}}{2} (\phi_j \phi_k^* \phi_l) + \dots = 0, \quad (3.11)$$

o que demonstra a dificuldade deste problema ao tentar encontrar solução para ϕ_i .

A segunda dificuldade está relacionada ao fato do mínimo ocorrer em vários vales no espaço de ϕ , isto é, existe um conjunto de valores de ϕ que minimizam o potencial, assim como vários conjuntos associados de geradores do grupo. Em outras palavras, o vácuo é degenerado e os vários valores possíveis do vácuo estão relacionados por transformações de gauge. Isso foi visto para o Modelo Padrão na seção 1.2. Devido a esta invariância do vácuo, é possível definir a órbita de ϕ_a como o conjunto de estados $\phi^{(a)}$, sendo expressos como

$$\phi^{(a)} = U(\theta) \phi_a, \quad (3.12)$$

com $U(\theta)$ um elemento do grupo \mathcal{G} . Todos os elementos $\phi^{(a)}$ da órbita são equivalentes sob a ação do *little group*, assim como ϕ_a , em que o *little group* é o subgrupo de \mathcal{G} que deixa ϕ_a invariante. Como o vácuo é degenerado e os valores possíveis estão relacionados por transformações de gauge, então a introdução da órbita resume o problema, já que encontrar uma solução é equivalente a encontrar todas as outras. De forma geral, há um contínuo de órbitas que respeitam o mesmo *little group*. Assim, encontrar o mínimo absoluto de (3.9) é equivalente a encontrar a órbita que minimiza (3.9) e o seu *little group*.

Para encontrar as órbitas será utilizado dois teoremas importantes que se preocupam com invariantes e órbitas [69]:

Teorema 1: Polinomiais invariantes $P(\phi)$ especificam órbitas de ϕ .

Teorema 2: Existe um conjunto básico de polinomiais invariantes $I_a(\phi)$, tal que todo polinomial invariante $P(\phi)$ pode ser expresso como um polinomial dos I_a : $P(\phi) = \bar{P}[I_a(\phi)]$.

O número l de invariantes básicos é diferente para cada representação diferente do grupo. É possível visualizar uma órbita como um ponto no espaço l -dimensional de I_a .

A observação crucial feita em [55] se dá a partir das razões invariantes adimensionais, escritas genericamente como

$$\theta = \frac{f_{ijkl}\phi_i^*\phi_j\phi_k^*\phi_l}{|\phi|^4}, \quad (3.13)$$

onde $|\phi|^2 = \phi_i^*\phi_i$, também podem ser usadas para especificar o conjunto de órbitas que minimizam o potencial, tornando-se uma ferramenta poderosa para encontrar o mínimo. Essas razões adimensionais serão chamadas de parâmetros orbitais. Elas contêm todas as informações necessárias para determinar o mínimo do potencial e, além disso, seu uso possibilita a redução do número de variáveis do problema.

Reescrevendo o potencial em (3.9), com os parâmetros orbitais, tem-se a seguinte expressão

$$V(\phi) = -\frac{m^2}{2}|\phi|^2 + \frac{|\phi|^4}{4}(\lambda + \lambda_1\theta_1(\hat{\phi}_i) + \lambda_2\theta_2(\hat{\phi}_i) + \dots), \quad (3.14)$$

em que $\hat{\phi}_i = \frac{\phi_i}{|\phi|}$. Como é desejado que o potencial seja limitado por baixo quando $|\phi| \rightarrow \infty$, então é imposta a seguinte condição

$$\lambda + \lambda_1\theta_1(\hat{\phi}_i) + \lambda_2\theta_2(\hat{\phi}_i) + \dots > 0. \quad (3.15)$$

Ao escolher uma direção particular de ϕ , os parâmetros orbitais tomarão valores definidos, o que o fará ser uma constante no potencial. O mínimo do potencial nesta direção ocorre para

$$|\phi|_0^2 = \frac{m^2}{\lambda + \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \dots}, \quad (3.16)$$

em que $\theta_1, \theta_2, \dots$ são constantes devido a escolha de uma direção do potencial. Avaliando o potencial neste mínimo, obtém-se

$$\begin{aligned} V_0 \equiv V(\phi = |\phi|_0) &= -\frac{1}{4} \frac{m^4}{\lambda + \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \dots}, \\ V_0 &= -\frac{1}{4} m^2 |\phi|_0^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

A escolha de diferentes valores de $\theta_i(\hat{\phi}_i)$, significando diferentes direções tomadas por ϕ , altera o valor do mínimo do potencial. O mínimo absoluto ocorre então para o menor valor do mínimo direcional, neste caso

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_i} = \frac{1}{4} |\phi|^4 \lambda_i, \quad \text{em que } \lambda_i \equiv \lambda_1, \lambda_2, \dots \quad (3.18)$$

Como V é uma função linear, e portanto, monótona em θ_i , então o mínimo absoluto se encontra na fronteira da região do espaço gerado por θ_i , sendo chamado de espaço orbital. Este espaço é limitado tanto por cima quanto por baixo, isto é

$$\theta_{i\text{mín.}} \leq \theta_i(\hat{\phi}_i) \leq \theta_{i\text{máx.}},$$

pois são parâmetros adimensionais definidos em (3.13) a partir de $\hat{\phi}_i$ com módulo menor que um. Por exemplo, considerando um espaço orbital formado por θ_1 e θ_2 , é possível definir a seguinte constante

$$C = \lambda + \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2, \quad (3.19)$$

para valores $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ e C , isso representará uma linha no plano $\theta_1 - \theta_2$. Devido a condição imposta em (3.15), esta linha só interceptará o espaço orbital quando $C > 0$. Ao aumentar o valor de C , mantendo $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ constantes, essa linha varrerá o espaço orbital. O menor valor de C , respeitando a condição (3.15), será o mínimo absoluto de V .

A generalização do procedimento para duas ou mais representações irredutíveis dos campos é feita facilmente. O potencial para duas representações irredutíveis, neste caso, é

$$\begin{aligned} V(\phi, \chi) = & -\frac{1}{2}M^2|\phi|^2 - \frac{1}{2}m^2|\chi|^2 + \frac{1}{4}(A + A_1\theta_1(\hat{\phi}_i) + A_2\theta_2(\hat{\phi}_i) + \dots)|\phi|^4 \\ & + \frac{1}{4}(C + C_1\omega_1(\hat{\chi}_i) + C_2\omega_2(\hat{\chi}_i) + \dots)|\chi|^4 \\ & + \frac{1}{2}(B + B_1\gamma_1(\hat{\phi}_i, \hat{\chi}_i) + B_2\gamma_2(\hat{\phi}_i, \hat{\chi}_i) + \dots)|\phi|^2|\chi|^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

O mínimo absoluto do vácuo é encontrado de forma análoga ao que fora feita para o potencial (3.14), com a condição adicional de que a Hessiana, avaliada no vácuo, deve ser positiva, assim como seu determinante. Uma análise mais detalhada do mínimo absoluto do potencial é vista em [55]. Por ora, concentraremos em encontrar condições de estabilidade do potencial quando $|\phi| \rightarrow \infty$ e/ou $|\chi| \rightarrow \infty$. Neste caso, polinomiais de grau menores que quatro podem ser desprezados, já que para grandes valores de $|\phi|$ e $|\chi|$ somente os termos $|\phi|^4$, $|\chi|^4$, $|\phi|^2|\chi|^2$ são relevantes. Em outras palavras, somente a parte quártica do potencial será utilizada nesta análise. Dessa forma,

$$\begin{aligned} V(\phi, \chi)_4 = & \frac{1}{4}(A + A_1\theta_1(\hat{\phi}_i) + A_2\theta_2(\hat{\phi}_i) + \dots)|\phi|^4 \\ & + \frac{1}{4}(C + C_1\omega_1(\hat{\chi}_i) + C_2\omega_2(\hat{\chi}_i) + \dots)|\chi|^4 \\ & + \frac{1}{2}(B + B_1\gamma_1(\hat{\phi}_i, \hat{\chi}_i) + B_2\gamma_2(\hat{\phi}_i, \hat{\chi}_i) + \dots)|\phi|^2|\chi|^2, \\ & \equiv \mathbf{h}^T \Lambda \mathbf{h}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde $\mathbf{h} = (|\phi|^2, |\chi|^2) \geq 0$ com a matriz Λ tendo a seguinte forma

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A' & B'/2 \\ B'/2 & C' \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

onde foram definidos que

$$\begin{aligned} A' &= A + A_1\theta_1(\hat{\phi}_i) + A_2\theta_2(\hat{\phi}_i) + \dots, \\ B' &= B + B_1\gamma_1(\hat{\phi}_i, \hat{\chi}_i) + B_2\gamma_2(\hat{\phi}_i, \hat{\chi}_i) + \dots, \\ C' &= C + C_1\omega_1(\hat{\chi}_i) + C_2\omega_2(\hat{\chi}_i) + \dots \end{aligned}$$

Em (3.15) foi imposta a condição para a estabilidade do potencial no caso em que havia somente a representação irredutível de um campo escalar com n componentes. Agora, o potencial tem duas representações irredutíveis e a condição para que ele seja estável se torna mais complicada. Felizmente, a introdução dos parâmetros orbitais permitiu escrever a parte quártica do potencial na forma bilinear: $V(\phi, \chi) = \mathbf{h}^T \Lambda \mathbf{h}$ como mostrado em (3.21). Nesta forma, torna-se possível encontrar as condições em que o potencial é estável a partir da copositividade de uma matriz, como será visto a seguir.

3.1.1 Copositividade de uma matriz

A definição de copositividade de uma matriz é muito similar a definição de matrizes definidas positivas. As matrizes positivas são um subconjunto das matrizes copositivas, de acordo com [56]. Assim, uma matriz simétrica A é copositiva se sua forma quadrática satisfazer $x^T A x \geq 0$ para todos os vetores $x \geq 0$ no ortante não negativo do espaço euclidiano \mathbb{R}_+^n . A notação $x \geq 0$ significa que suas componentes x_i devem ser maiores ou iguais a zero. Por complementação, uma matriz copositiva A é estritamente copositiva se satisfazer $x^T A x > 0$ para todos os vetores $x > 0$. É óbvio que uma matriz A não negativa, isto é, com $a_{ij} \geq 0$, de qualquer ordem é copositiva.

Para ilustrar esta definição, consideremos uma matriz simétrica A de ordem 2 é copositiva se

$$\begin{aligned} a_{11} &\geq 0, \quad a_{22} \geq 0, \\ a_{12} + \sqrt{a_{11}a_{22}} &\geq 0. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Para provar isto, considere um vetor x definido como

$$x = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

com $t \geq 0$. Usando a definição de copositividade, tem-se que

$$\begin{pmatrix} t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = a_{11}t^2 + 2a_{12}t + a_{22} \geq 0 \tag{3.25}$$

para todo $t \geq 0$. Como a (3.25) é a equação de uma parábola, então se $a_{11} < 0$, a parábola tem concavidade para baixo, não satisfazendo a equação adequadamente. Logo, é necessário que $a_{11} \geq 0$. Caso $a_{11} = 0$, então é necessário que $a_{12} \geq 0$ e $a_{22} \geq 0$. Para o caso em que $a_{11} > 0$, será analisado o discriminante da parábola. Como é desejado que ela seja maior ou igual a zero, o discriminante deve ser não positivo. Assim,

$$\begin{aligned} \Delta &= 4a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} \leq 0, \\ &= 4(a_{12} - \sqrt{a_{11}a_{22}})(a_{12} + \sqrt{a_{11}a_{22}}) \leq 0. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Então, há duas situações possíveis, sendo elas

$$a_{12} - \sqrt{a_{11}a_{22}} \geq 0 \text{ e } a_{12} + \sqrt{a_{11}a_{22}} \leq 0, \text{ ou} \quad (3.27)$$

$$a_{12} - \sqrt{a_{11}a_{22}} \leq 0 \text{ e } a_{12} + \sqrt{a_{11}a_{22}} \geq 0. \quad (3.28)$$

A primeira situação em (3.27), se $a_{12} \leq 0$, então não há solução para a primeira desigualdade. Já para a segunda situação em (3.28), se $a_{12} \leq 0$, então existe solução para as desigualdades, sendo obtida a terceira condição de (3.23).

A partir desta análise, é possível perceber que o potencial (3.21) tem a forma quadrática necessária para que seja usado os critérios de copositividade. Como $\mathbf{h} = (|\phi|^2, |\chi|^2) \geq 0$, então o potencial será estável se a matriz Λ em (3.22) for copositiva, isto é, se

$$\begin{aligned} A' &\geq 0, \quad C' \geq 0, \\ B' + \sqrt{A'C'} &\geq 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Se o potencial em questão tiver termos cúbicos, então é usado a condição de estabilidade forte de um potencial, isto é, basta que a parte quártica do potencial seja maior que zero, e as condições de estabilidade tomam a seguinte forma

$$\begin{aligned} A' &> 0, \quad C' > 0, \\ B' + \sqrt{A'C'} &> 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

De acordo com o critério de Sylvester [70], se uma matriz A de ordem n é copositiva, cada submatriz principal de A de ordem $n - 1$ é também copositiva, e assim por diante. Dessa forma, toda submatriz principal de ordem 2 terá a seguinte condição

$$a_{ij} + \sqrt{a_{ii}a_{jj}} \geq 0 \quad (3.31)$$

para todo i, j , com $i \neq j$. Assim, uma matriz de ordem 3 tem as seguintes condições para copositividade

$$\begin{aligned} a_{ii} &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3; \\ \bar{a}_{12} &= a_{12} + \sqrt{a_{11}a_{22}} \geq 0, \\ \bar{a}_{13} &= a_{13} + \sqrt{a_{11}a_{33}} \geq 0, \\ \bar{a}_{23} &= a_{23} + \sqrt{a_{22}a_{33}} \geq 0, \\ \sqrt{a_{11}a_{22}a_{33}} + a_{12}\sqrt{a_{33}} + a_{13}\sqrt{a_{22}} + a_{23}\sqrt{a_{11}} + \sqrt{2\bar{a}_{12}\bar{a}_{13}\bar{a}_{23}} &\geq 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Há outros critérios para determinação de matrizes copositivas, que podem ser úteis para ordens maiores que 3, podendo ser encontrados em [56]. Entretanto, para o fim deste texto, os critérios de copositividade já apresentados serão suficientes. A seguir, nas próximas subseções serão derivados as condições de estabilidade do vácuo para dois modelos que estendem o Modelo Padrão, utilizando os métodos apresentados até agora.

3.1.2 Condições de estabilidade do vácuo para o Modelo de dubleto de Higgs inerte

Esta extensão do Modelo Padrão consiste de dois dubletos eletrofracos de Higgs H_1 e H_2 , definidos analogamente como em (1.22)

$$H_1 = \begin{pmatrix} H_1^+ \\ H_1^0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^0 \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

com uma simetria adicional discreta \mathbb{Z}_2 , isto é, $H_1 \rightarrow -H_1$ e $H_2 \rightarrow -H_2$, contendo um candidato escalar para a matéria escura [71]. Somente um dos campos H_1 ou H_2 adquire valor no vácuo, sendo por este motivo, chamado de inerte. Maiores detalhes acerca da fenomenologia podem ser encontrados em [65]. Para este texto, é suficiente encontrar as condições de estabilidade do potencial, como forma de validar os métodos apresentados.

O potencial escalar mais geral para este modelo é

$$\begin{aligned} V(H_1, H_2) = & -\mu_1^2(H_1^\dagger H_1) - \mu_2^2(H_2^\dagger H_2) + \lambda_1(H_1^\dagger H_1)^2 + \lambda_2(H_2^\dagger H_2)^2 \\ & + \lambda_3(H_1^\dagger H_1)(H_2^\dagger H_2) + \lambda_4(H_1^\dagger H_2)(H_2^\dagger H_1) \\ & + \frac{1}{2} [\lambda_5(H_1^\dagger H_2)^2 + \lambda_5^*(H_2^\dagger H_1)^2]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Definindo os seguintes parâmetros orbitais

$$\theta_1 \equiv \theta_1(H_1, H_2) = \frac{(H_1^\dagger H_2)(H_2^\dagger H_1)}{|H_1|^2 |H_2|^2}, \quad (3.35)$$

$$\theta_2 \equiv \theta_2(H_1, H_2) = \frac{(H_1^\dagger H_2)^2 + (H_2^\dagger H_1)^2}{|H_1|^2 |H_2|^2}, \quad (3.36)$$

permite-nos escrever o potencial da seguinte forma

$$\begin{aligned} V = & -\mu_1^2 |H_1|^2 - \mu_2^2 |H_2|^2 + \lambda_1 |H_1|^4 + \lambda_2 |H_2|^4 + \lambda_3 |H_1|^2 |H_2|^2 \\ & + \lambda_4 \theta_1 |H_1|^2 |H_2|^2 + \frac{1}{2} |\lambda_5| \theta_2 |H_1|^2 |H_2|^2, \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde foi usado a redefinição $H_{1,i} \rightarrow e^{i\theta_5/4} H_{1,i}$ e $H_{2,i} \rightarrow e^{-i\theta_5/4} H_{2,i}$, em que i é o índices das componentes do campo, permitindo a absorção da fase do acoplamento $\lambda_5 = |\lambda_5| e^{i\theta_5}$. Assim, todos os acoplamentos presentes podem ser considerados reais, sem perda de generalidade. É possível parametrizar o produto dos campos em (3.35) da seguinte forma

$$H_1^\dagger H_2 \equiv H_{1,i}^* H_{2,i} = \sqrt{|\theta_1|} e^{i\phi/2}. \quad (3.38)$$

com $0 \leq |\theta_1| \leq 1$. Não há perda de generalidade ao escrever θ_1 como $|\theta_1|$, já que a sua definição em (3.35) é positiva. Usando esta parametrização em (3.36), chega-se a seguinte forma para θ_2

$$\theta_2 = 2|\theta_1| \cos \phi. \quad (3.39)$$

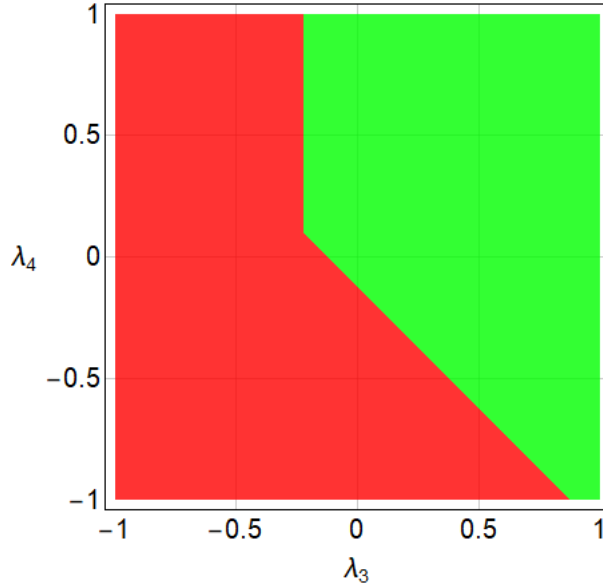


Figura 24 – A região verde representa os valores permitidos para λ_3 e λ_4 em que o potencial é estável, a nível de árvore. A região vermelha representa os valores em que o potencial será instável.

Dessa forma, considerando somente a parte quártico do potencial escalar, tem-se que

$$V_4 = \lambda_1 |H_1|^4 + \lambda_2 |H_2|^4 + \lambda_3 |H_1|^2 |H_2|^2 + \lambda_4 |\theta_1| |H_1|^2 |H_2|^2 + |\lambda_5| |\theta_1| \cos \phi |H_1|^2 |H_2|^2, \quad (3.40)$$

permitindo escrevê-lo numa forma bilinear quadrática. Assim, definindo $\mathbf{h} = (|H_1|^2, |H_2|^2)$, então $V_4 = \mathbf{h}^T \Lambda \mathbf{h}$, com

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \frac{1}{2}[\lambda_3 + |\theta_1|(\lambda_4 + |\lambda_5| \cos(\phi))] \\ \frac{1}{2}[\lambda_3 + |\theta_1|(\lambda_4 + |\lambda_5| \cos(\phi))] & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Para determinar a estabilidade de V_4 no regime de grandes valores dos campos, é suficiente encontrar o mínimo em $|\mathbf{h}| = 1$. Dessa forma, é imediato que $\phi = \pi$. Como V_4 é uma função monótona em $|\theta_1|$, então, como visto na seção anterior, o mínimo ocorre na fronteira, ou seja, em $|\theta_1| = 0$ quando $\lambda_4 - |\lambda_5| \geq 0$ ou $|\theta_1| = 1$ quando $\lambda_4 - |\lambda_5| < 0$. Usando o critério de copositividade (3.23), então chega-se as seguintes condições de estabilidade do vácuo

$$\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 + 2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \geq 0, \quad \lambda_3 + \lambda_4 - |\lambda_5| + 2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \geq 0. \quad (3.42)$$

A fim de exemplificar as condições obtidas acima, a região de estabilidade do potencial escalar se encontra na Figura 24. A escolha dos valores foi retirado de [66], sendo: $\lambda_1 = 0,1264$, $\lambda_2 = 0,1$ e $\lambda_5 = 0,1$.

3.1.3 Condições de estabilidade do vácuo para o Modelo *triplet seesaw*

O mecanismo que dá massa aos neutrinos ainda é desconhecido. Os valores pequenos das massas [43] sugerem que provavelmente um mecanismo diferente de geração

de massa pode estar acontecendo, de acordo com [67]. O Modelo *triplet seesaw* do tipo II sugere que este mecanismo ocorra ao introduzir um tripleto eletrofraco escalar no Modelo Padrão que viola o número leptônico ao ser acoplado aos léptons canhotos [67]

$$\frac{1}{2}Y_{\Delta,ij}L_i^TC(i\tau_2)\Delta L_j + \text{h.c.}, \quad (3.43)$$

em que $Y_{\Delta,ij}$ o acoplamento de Yukawa, L_i o dubleto leptônico do Modelo Padrão, definido em (1.15), C o operador de conjugação de carga e Δ o tripleto escalar, gerando uma matriz de massa para os neutrinos após a quebra espontânea de simetria eletrofraca. O novo tripleto escalar é definido da seguinte forma

$$\Delta \equiv \begin{pmatrix} \frac{\Delta^+}{\sqrt{2}} & \Delta^{++} \\ \Delta^0 & -\frac{\Delta^+}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

O potencial mais geral que acomoda Δ e o dubleto de Higgs do Modelo Padrão contém oito parâmetros que podem ser tomados como reais

$$\begin{aligned} V = & -\mu_H^2 H^\dagger H + \mu_\Delta^2 \text{Tr}(\Delta^\dagger \Delta) + \left[\frac{m_{H\Delta}}{2} H^T (i\tau_2) \Delta^\dagger H + \text{h.c.} \right] \\ & + \frac{1}{2} \lambda_H (H^\dagger H)^2 + \lambda_{H\Delta} \text{Tr}(\Delta^\dagger \Delta) (H^\dagger H) + \lambda'_{H\Delta} H^\dagger \Delta \Delta^\dagger H \\ & + \frac{\lambda_\Delta}{2} [\text{Tr}(\Delta^\dagger \Delta)]^2 + \frac{\lambda'_\Delta}{2} \text{Tr}(\Delta^\dagger \Delta \Delta^\dagger \Delta). \end{aligned} \quad (3.45)$$

O mecanismo de geração da massa do tripleto escalar, bem como a massa do Higgs, não será discutido neste texto, podendo ser encontrado em [67].

O potencial tem dez graus de liberdade, sendo quatro graus de liberdade devido a H , e seis a Δ . Porém, V depende de quatro quantidades somente, e isso pode ser visto, ao parametrizar os campos da seguinte forma

$$H^\dagger H = |H|^2, \quad \text{Tr}(\Delta^\dagger \Delta) = |\delta|^2, \quad (3.46)$$

$$H^\dagger \Delta \Delta^\dagger H = \xi |H|^2 |\delta|^2, \quad (3.47)$$

$$\text{Tr}[\Delta^\dagger \Delta \Delta^\dagger \Delta] = \zeta |\delta|^4, \quad (3.48)$$

em que estamos seguindo a notação utilizada por [67], mas vale ressaltar que esta parametrização é a aplicação do método dos parâmetros orbitais. Com isso, é possível analisar o potencial quártico em sua forma quadrática e obter as condições de estabilidade. A parte quártica do potencial (3.45) é, dessa forma,

$$V_4 = \frac{1}{2} \lambda_H |H|^4 + (\lambda_{H\Delta} + \xi \lambda'_{H\Delta}) |H|^2 |\delta|^2 + \frac{1}{2} (\lambda_\Delta + \zeta \lambda'_\Delta) |\delta|^4, \quad (3.49)$$

o que permite escrevê-lo na forma $\mathbf{h}^T \Lambda \mathbf{h}$, com $\mathbf{h} = (|H|^2, |\delta|^2)$ e Λ tem a seguinte forma

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_H}{2} & \frac{\lambda'_{H\Delta} \xi + \lambda_{H\Delta}}{2} \\ \frac{\lambda'_{H\Delta} \xi + \lambda_{H\Delta}}{2} & \frac{\lambda_\Delta + \zeta \lambda'_\Delta}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Usando (3.23), chega-se as seguintes condições de estabilidade

$$\lambda_H > 0, \quad (3.51)$$

$$G(\zeta) \equiv \lambda_\Delta + \zeta \lambda'_\Delta > 0, \quad (3.52)$$

$$F(\xi, \zeta) \equiv \lambda'_{H\Delta} \xi + \lambda_{H\Delta} + \sqrt{\lambda_H(\lambda_\Delta + \zeta \lambda'_\Delta)} > 0. \quad (3.53)$$

Para a análise dos valores permitidos pelos parâmetros ξ e ζ , será seguido a demonstração realizada em [68]. A partir de (3.43), notemos que $\text{Tr}\Delta = 0$, o que permite obter a seguinte identidade

$$\Delta\Delta^\dagger + \Delta^\dagger\Delta = \mathbf{1}\text{Tr}(\Delta^\dagger\Delta), \quad (3.54)$$

em que $\mathbf{1}$ é a matriz identidade de ordem 2. Imediatamente tem-se que

$$H^\dagger\Delta\Delta^\dagger H + H^\dagger\Delta^\dagger\Delta H = H^\dagger H\text{Tr}(\Delta^\dagger\Delta). \quad (3.55)$$

$H^\dagger\Delta^\dagger\Delta H$ é positiva semi-definida, já que $H^\dagger\Delta^\dagger\Delta H = (\Delta H)^\dagger(\Delta H) \geq 0$, o que permite, a partir de (3.55), a seguinte desigualdade

$$H^\dagger H\text{Tr}(\Delta^\dagger\Delta) - H^\dagger\Delta\Delta^\dagger H \geq 0, \quad (3.56)$$

e, assim, com o uso de (3.47)

$$\xi = \frac{H^\dagger\Delta\Delta^\dagger H}{H^\dagger H\text{Tr}(\Delta^\dagger\Delta)} \leq 1. \quad (3.57)$$

ξ é maior ou igual a zero, pois envolve a razão de quantidades positiva semi-definidas, já que a quantidade $H^\dagger\Delta\Delta^\dagger H = (\Delta^\dagger H)^\dagger(\Delta^\dagger H) \geq 0$, sendo possível concluir que

$$0 \leq \xi \leq 1. \quad (3.58)$$

Para ζ , o ponto de partida é utilizar o teorema de Cayley-Hamilton, que informa que toda matriz quadrada satisfaz sua própria equação característica. Para uma matriz A de ordem 2, a equação característica é

$$x^2 - x\text{Tr}A + \det A = 0, \quad (3.59)$$

em que x é o autovalor de A . Logo, pelo teorema de Cayley-Hamilton

$$A^2 - A\text{Tr}A + \mathbf{1}\det A = 0, \quad (3.60)$$

aplicando o traço, chega-se a

$$\text{Tr}A^2 - (\text{Tr}A)^2 + 2\det A = 0. \quad (3.61)$$

Dessa forma,

$$\text{Tr}(\Delta^\dagger\Delta\Delta^\dagger\Delta) - [\text{Tr}(\Delta^\dagger\Delta)]^2 + 2\det \Delta^\dagger\Delta = 0. \quad (3.62)$$

Mas, usando o fato de que $\det \Delta^\dagger \Delta = |\det \Delta|^2 \geq 0$, então (3.62) se transforma na seguinte desigualdade

$$\text{Tr}(\Delta^\dagger \Delta \Delta^\dagger \Delta) - [\text{Tr}(\Delta^\dagger \Delta)]^2 \leq 0, \quad (3.63)$$

e, assim, com o uso de (3.48)

$$\zeta = \frac{\text{Tr}(\Delta^\dagger \Delta \Delta^\dagger \Delta)}{[\text{Tr}(\Delta^\dagger \Delta)]^2} \leq 1. \quad (3.64)$$

Para o valor mínimo de ζ , consideremos uma transformação unitária de gauge $\mathcal{U}(x)$ que diagonaliza $\Delta^\dagger \Delta$, já que este produto é hermitiano. $\mathcal{U}(x)$ é qualquer elemento do grupo $\text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y$. Assim, $\Delta \rightarrow \mathcal{U}(x)\Delta\mathcal{U}^\dagger(x)$, daí

$$\text{Tr}(\Delta^\dagger \Delta \Delta^\dagger \Delta) \rightarrow M_1^4 + M_2^4 \text{ e } \text{Tr}(\Delta^\dagger \Delta) \rightarrow M_1^2 + M_2^2, \quad (3.65)$$

em que M_1^2 e M_2^2 são os autovalores de $\Delta^\dagger \Delta$. Portanto,

$$\zeta = \frac{M_1^4 + M_2^4}{(M_1^2 + M_2^2)^2}, \quad (3.66)$$

sendo possível perceber que ζ não pode ser igual a zero, pois significaria uma razão indeterminada. Ao denotar $z = M_1^2/M_2^2 \geq 0$, então ζ tem a seguinte forma

$$\zeta(z) = \frac{1 + z^2}{(1 + z)^2}. \quad (3.67)$$

Derivando em relação a z e igualando a zero, é obtido que quando $z = 1$, $\zeta = 1/2$, sendo este o valor mínimo. Portanto,

$$1/2 \leq \zeta \leq 1. \quad (3.68)$$

Porém, como notado por [67], a região permitida para os parâmetros não se encontra no retângulo $[0, 1] \times [1/2, 1]$ da Figura 25. Utilizando a transformação de gauge $\mathcal{U}(x)$ para o parâmetro ξ definido em (3.46), e sabendo que o dubleto de Higgs se comporta como $H \rightarrow \mathcal{U}(x)H$, nesta transformação, então chega-se ao seguinte resultado para ξ

$$\xi = \frac{M_2^2 |\phi^0|^2 + M_1^2 |\phi^+|^2}{(M_1^2 + M_2^2)(|\phi^0|^2 + |\phi^+|^2)}, \quad (3.69)$$

onde $|\phi^+|, |\phi^0|$ são as componentes do dubleto H transformado. É possível definir as seguintes quantidades

$$\cos^2(\theta_\Delta) \equiv c_\Delta^2 = \frac{M_1^2}{M_1^2 + M_2^2}, \quad \sin^2(\theta_\Delta) \equiv s_\Delta^2 = \frac{M_2^2}{M_1^2 + M_2^2}, \quad (3.70)$$

$$\cos^2(\theta_H) \equiv c_H^2 = \frac{|\phi^+|^2}{|\phi^+|^2 + |\phi^0|^2}, \quad \sin^2 \theta_H \equiv s_H^2 = \frac{|\phi^0|^2}{|\phi^+|^2 + |\phi^0|^2}. \quad (3.71)$$

Dessa forma, (3.66) e (3.69) são

$$\xi = c_\Delta^2 c_H^2 + s_\Delta^2 s_H^2, \quad (3.72)$$

$$\zeta = c_\Delta^4 + s_\Delta^4. \quad (3.73)$$

Usando $s_\Delta^4 = (1 - c_\Delta^2)^2$, então

$$\zeta = 1 - 2c_\Delta^2 + 2c_\Delta^4. \quad (3.74)$$

Utilizando $s_H^2 = 1 - c_H^2$ e $s_\Delta^2 = 1 - c_\Delta^2$ em (3.72), então é possível encontrar a seguinte relação

$$c_\Delta^2 = \frac{\xi + c_H^2 - 1}{2c_H^2 - 1}. \quad (3.75)$$

Substituindo em (3.73), tem-se que

$$\zeta = 1 - 2 \left(\frac{\xi + c_H^2 - 1}{2c_H^2 - 1} \right) + 2 \left(\frac{\xi + c_H^2 - 1}{2c_H^2 - 1} \right)^2 \geq 1 - 2\xi + 2\xi^2 \quad (3.76)$$

Dessa forma, é possível concluir que

$$2\xi^2 - 2\xi + 1 \leq \zeta \leq 1, \quad (3.77)$$

com a região permitida para os parâmetros ξ, ζ ilustrada na Figura 25.

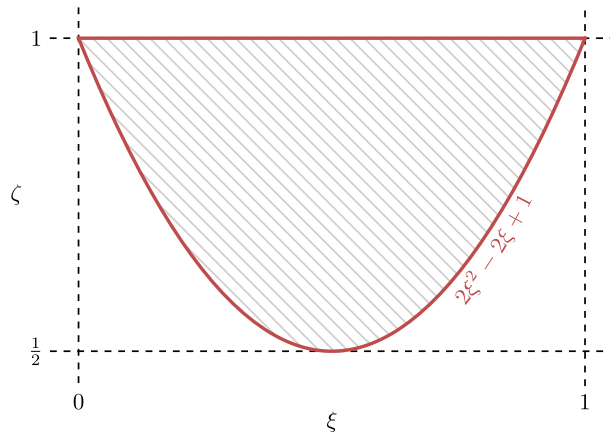


Figura 25 – Região dos parâmetros orbitais ξ e ζ . O mínimo do potencial ocorrerá na fronteira destacada em vermelho.

Como a função $G(\zeta)$ é linear, e portanto, monótona em ζ , a condição $G(\zeta) > 0$ em (3.52) é satisfeita ao avaliar $G(\zeta)$ em $\zeta = 1$ e $\zeta = 1/2$, pois estes são os valores da fronteira. Logo,

$$G(1) = \lambda_\Delta + \lambda'_\Delta \geq 0 \text{ e } G(1/2) = \lambda_\Delta + \frac{1}{2}\lambda'_\Delta \geq 0. \quad (3.78)$$

Já para (3.53), é necessário encontrar o mínimo satisfeito por ξ e ζ , sendo necessário encontrar o mínimo de $F(\xi, \zeta)$. A função F também é monótona, portanto, seu mínimo ocorre na fronteira definida na Figura 25. Portanto, o mínimo ocorrerá nos seguintes casos

$$\min F(\xi, 2\xi^2 - 2\xi + 1), F(0, 1) \text{ e } F(1, 1). \quad (3.79)$$

Os dois últimos casos são triviais de serem obtidos, dando as seguintes condições de estabilidade para o potencial escalar

$$\lambda_{H\Delta} + \sqrt{\lambda_H(\lambda_\Delta + \lambda'_\Delta)} > 0, \quad \lambda'_{H\Delta} + \lambda_{H\Delta} + \sqrt{\lambda_H(\lambda_\Delta + \lambda'_\Delta)} > 0. \quad (3.80)$$

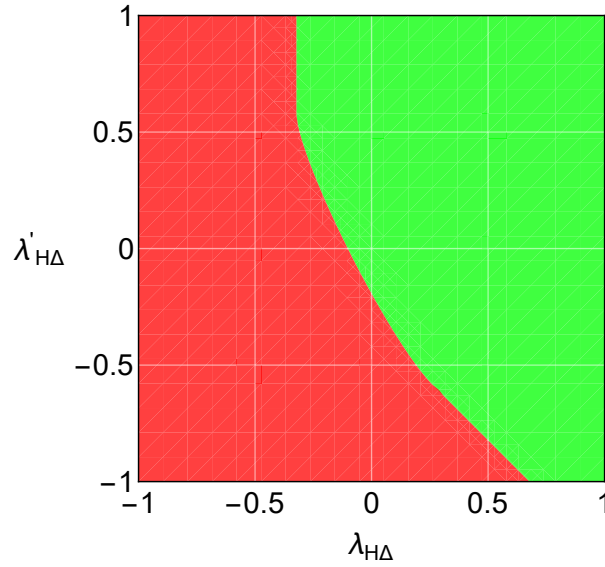


Figura 26 – A região verde corresponde a valores de $\lambda_{H\Delta}$ e $\lambda'_{H\Delta}$ que deixarão o potencial estável, a nível de árvore. Enquanto a região vermelha representa valores que o deixarão instável, para $\lambda_H = 1/4$, $\lambda_\Delta = -1/3$ e $\lambda'_\Delta = 3/4$.

Já para o primeiro caso, o mínimo ocorre quando $F'(\xi) = 0$

$$F'(\xi) = \lambda'_{H\Delta} + \frac{\sqrt{\lambda_H} \lambda'_\Delta (2\xi - 1)}{\sqrt{(\lambda_\Delta + (2\xi^2 - 2\xi + 1)\lambda'_\Delta)}} = 0, \quad (3.81)$$

obtendo como solução

$$\xi = \frac{1}{2} \pm |\lambda'_{H\Delta}| \sqrt{\frac{2\lambda_\Delta + \lambda'_\Delta}{\lambda'_\Delta (2\lambda_H - \lambda'^2_{H\Delta})}}. \quad (3.82)$$

Além disso, é necessário avaliar quais destas soluções satisfaz $F''(\xi) > 0$, assim como, garantir que esteja dentro do intervalo $0 \leq \xi \leq 1$. Isso acontece se e somente se

$$\lambda' \sqrt{\lambda_H} > |\lambda'_{H\Delta}| \sqrt{\lambda_\Delta + \lambda'_\Delta}. \quad (3.83)$$

Portanto, há duas novas condições de estabilidade. A primeira delas é quando a desigualdade (3.83) é satisfeita, sendo obtido que

$$\lambda_{H\Delta} + \frac{1}{2} \lambda'_{H\Delta} + \frac{1}{2} \sqrt{(2\lambda_H \lambda'_\Delta - \lambda'^2_{H\Delta}) \left(2 \frac{\lambda_\Delta}{\lambda'_\Delta} + 1\right)} > 0. \quad (3.84)$$

A segunda condição ocorre a partir da negação da desigualdade (3.83), isto é, quando

$$\lambda' \sqrt{\lambda_H} \leq |\lambda'_{H\Delta}| \sqrt{\lambda_\Delta + \lambda'_\Delta}. \quad (3.85)$$

Por fim, as condições de estabilidade para este potencial escalar são

$$\lambda_H, \lambda_\Delta + \lambda'_\Delta, \lambda_\Delta + \frac{1}{2}\lambda'_\Delta, \lambda_{H\Delta} + \sqrt{\lambda_H(\lambda_\Delta + \lambda'_\Delta)}, \lambda_{H\Delta} + \lambda'_{H\Delta} + \sqrt{\lambda_H(\lambda_\Delta + \lambda'_\Delta)} > 0$$

e

$$\left[\lambda'_\Delta \sqrt{\lambda_H} \leq |\lambda'_{H\Delta}| \sqrt{\lambda_\Delta + \lambda'_\Delta} \text{ ou } 2\lambda_{H\Delta} + \lambda'_{H\Delta} + \sqrt{(2\lambda_H \lambda'_\Delta - \lambda'_{H\Delta})^2} \left(2\frac{\lambda_\Delta}{\lambda'_\Delta} + 1 \right) > 0 \right].$$

(3.86)

A região permitida para os parâmetros $\lambda'_{H\Delta}$ e $\lambda_{H\Delta}$ está representada na Figura 26. Em [67], há uma breve análise das condições de estabilidade utilizadas na literatura, as quais são muito restritas por serem suficientes mas não necessárias, isto é, as antigas condições afirmavam que se um potencial obedece estas condições, então ele é necessariamente estável, porém nem todo potencial estável obedece estas condições.

A discussão e análise dos resultados apresentados não considera as correções quânticas dos modelos apresentados. Dessa forma, as regiões de estabilidade do potencial mostrada nas Figuras 24 e 25 são maiores do que deveriam ser. Como mostrado no capítulo anterior, as correções quânticas geram dependência de uma escala de energia nos parâmetros observáveis. Assim, é esperado que conforme a escala de energia aumente, os parâmetros observáveis adquiram valores que podem tornar o potencial instável. Na seção a seguir, será discutido métodos que permitam estudar a estabilidade do potencial quando se tem as correções quânticas.

3.2 Estabilidade quântica do potencial escalar

A estabilidade quântica do potencial escalar pode ser estudada a partir de diferentes métodos e técnicas, a depender do que é pretendido como objeto de estudo. É possível estudar o potencial efetivo, obtido a partir da integração dos campos na integral de caminho, de forma a encontrar condições em que o potencial seja confinado por baixo. Para isso, uma das técnicas utilizadas é fixar um campo clássico de fundo e calcular as perturbações a partir da integral de caminho. Esta técnica é útil, pois permite estudar se ocorre quebra espontânea de simetria do potencial escalar quando a massa do campo escalar é zero, tendo como um dos resultados o potencial de Coleman-Weinberg [57].

Uma outra forma de obter as condições de estabilidade do potencial é utilizar as equações do grupo de renormalização do modelo e resomar o potencial, isto é, introduzir a dependência da escala de energia nos parâmetros sem mudar a forma do potencial. Para o caso de uma Lagrangeana que contém somente um campo escalar real, esta tarefa é feita facilmente, pois a integração da equação do grupo de renormalização é separável, como será visto mais a frente. Entretanto, ao introduzir campos de gauge, campos fermiônicos e outros campos escalares, a tarefa se torna mais complicada, já que as equações do

grupo de renormalização, neste caso, são geralmente não-lineares e acopladas. Além disso, para renormalizar uma teoria é necessário escolher uma escala de renormalização para os parâmetros observáveis deste modelo, como por exemplo, os acoplamentos de gauge, os acoplamentos de Yukawa, etc. Entretanto, para vários parâmetros observáveis e campos, é possível ter várias escalas de renormalização, o que dificulta ainda mais o processo. Na seção 3.2.4, este problema será melhor discutido e apresentado uma solução, como mostrado por [58].

3.2.1 Ação Efetiva

Como ponto de partida para o estudo do potencial escalar contendo correções quânticas, é necessário introduzir a ação efetiva. Ela contém todas as informações, sejam elas clássicas ou quânticas, da teoria. Neste texto, a ação efetiva consistirá em integrar todos os campos na integral de caminho de Feynman, o que renderá uma constante infinita. Para haver uma dependência funcional, todos os campos serão integrados na presença de uma fonte externa clássica J . Não é possível calcular laços, pois todos os laços já foram realizados ao integrar os campos na integral de caminho. Assim, a ação efetiva é uma ferramenta poderosa, e a usaremos para encontrar o potencial efetivo.

Para isso, considere a amplitude vácuo-vácuo na presença de uma fonte externa clássica

$$Z[J] \equiv \langle \Omega | \Omega \rangle_J = \int \mathcal{D}\phi \exp \left(iS[\phi] + i \int d^4x \phi(x) J(x) \right), \quad (3.87)$$

em que J é um conjunto de correntes clássicas acopladas aos campos ϕ da teoria, podendo estes serem escalares, fermiônicos, vetoriais, etc. $Z[J]$ consiste de todos os diagramas, sejam eles conectados ou desconectados. Um diagrama é conectado se todos os vértices externos conectam aos outros vértices externos de alguma forma pelo diagrama. Por consequência, diagramas desconectados são aqueles que não atendem esta definição.



Figura 27 – Em (a), um exemplo de diagrama conectado para um campo escalar complexo autointeragente. Em (b), um possível diagrama desconectado para um campo escalar complexo autointeragente.

Como exemplo, consideremos a ação $S[\phi]$, em (3.87), sendo

$$S[\phi] = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right), \quad (3.88)$$

em que ϕ é um campo escalar real, com $\lambda > 0$, sendo um acoplamento adimensional muito pequeno. Dessa forma, a função partição $Z[J]$ tem a seguinte expansão em λ

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + J\phi \right) \right], \\ Z[J] &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 + J\phi \right) \right] \\ &\quad \times \left(1 - i \frac{\lambda}{4!} \int d^4z \phi(z)^4 + \frac{(-i)^2}{2!} \left(\frac{\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4z d^4w \phi^4(z) \phi^4(w) + \dots \right), \end{aligned} \quad (3.89)$$

sendo realizada uma expansão em série de Taylor na passagem da primeira para a segunda linha. Notemos que a expressão da expansão ainda está sendo integrada por $\mathcal{D}\phi$, de modo que é possível identificar a seguinte relação

$$\int \mathcal{D}\phi \phi(x) \exp \left(i S_0[\phi] + i \int d^4x \phi(x) J(x) \right) = -i \frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)}, \quad (3.90)$$

em que $Z_0[J]$ é a função partição livre, isto é, para quando $\lambda = 0$. Neste caso, pode-se mostrar que $Z_0[J]$ tem o seguinte formato

$$Z_0[J] = \mathcal{N} \exp \left(\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(y) \Delta(x-y) J(x) \right), \quad (3.91)$$

em que $\Delta(y-z)$ é o propagador escalar que satisfaz a seguinte equação

$$(\partial^2 + m^2) \Delta(x-y) = -i \delta(x-y).$$

A função partição $Z[J]$, portanto, é reescrita como

$$\begin{aligned} Z[J] &= Z_0[J] - i \frac{\lambda}{4!} \int d^4z (-i)^4 \frac{\delta^4 Z_0[J]}{\delta J(z)^4} + \frac{(-i)^2}{2!} \left(\frac{\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4z d^4w \frac{(-i)^8 \delta^8 Z_0[J]}{\delta J(z)^4 \delta J(w)^4} + \dots, \\ Z[J] &= \exp \left(-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4z (-i)^4 \frac{\delta^4}{\delta J(z)^4} \right) Z_0[J] \\ Z[J] &= Z_0[J] \left[1 + Z_0^{-1}[J] \left(e^{\left(-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4z (-i)^4 \frac{\delta^4}{\delta J(z)^4} \right)} - 1 \right) \right] Z_0[J] = Z_0[J] (1 + \theta[J]), \end{aligned} \quad (3.92)$$

sendo $\theta[J] = Z_0^{-1}[J] \left(e^{\left(-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4z (-i)^4 \frac{\delta^4}{\delta J(z)^4} \right)} - 1 \right) Z_0[J]$. Aplicando o logaritmo em ambos os lados da equação, encontra-se que

$$\begin{aligned} \ln Z[J] &= \ln Z_0[J] + \ln (1 + \theta[J]), \\ \ln Z[J] &= \ln Z_0[J] + \theta[J] - \frac{1}{2} \theta^2[J] + \frac{1}{3} \theta^3[J] + \dots \end{aligned} \quad (3.93)$$

Expandindo $\theta[J]$ em λ , permite identificar a seguinte expansão

$$\theta[J] = \lambda\theta_1[J] + \lambda^2\theta_2[J] + \dots, \quad (3.94)$$

em que

$$\theta_1[J] = \frac{-i}{4!} Z_0^{-1}[J] \int d^4z \frac{\delta^4 Z_0[J]}{\delta J(z)^4}, \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} \theta_2[J] &= -\frac{1}{2(4!)^2} Z_0^{-1}[J] \int d^4z d^4w \frac{\delta^4}{\delta J(z)^4} \frac{\delta^4 Z_0[J]}{\delta J(w)^4} \\ &= \frac{-i}{2 \cdot 4!} Z_0^{-1}[J] \int d^4w \frac{\delta^4}{\delta J(w)^4} Z_0[J] \theta_1[J]. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Dessa forma, (3.93) toma o seguinte formato

$$\begin{aligned} \ln Z[J] &= \ln Z_0[J] + \lambda\theta_1[J] + \lambda^2 \left(\theta_2[J] - \frac{1}{2}\theta_1^2[J] \right) \\ &\quad + \lambda^3 \left(\theta_3[J] - \theta_1[J]\theta_2[J] + \frac{1}{3}\theta_1^3[J] \right) \dots \end{aligned} \quad (3.97)$$

Realizando o cálculo de $\theta_1[J]$, obtém-se até a ordem λ que

$$\begin{aligned} \ln Z[J] &= \ln Z_0[J] - \frac{i\lambda}{4!} \left[-3\Delta(0)^2 \right. \\ &\quad - 6i \int d^4y d^4w d^4z J(y)J(w)\Delta(y-z)\Delta(w-z)\Delta(z-z) \\ &\quad \left. + \int d^4y d^4w d^4u d^4v J(y)J(w)J(u)J(v)\Delta(y-z)\Delta(w-z)\Delta(u-z)\Delta(v-z) \right] + \mathcal{O}(\lambda^2). \end{aligned} \quad (3.98)$$

Notemos que na situação $J = 0$, e isto valerá para todas as ordens, somente diagramas do tipo *bubble* estarão presentes, isto é, diagramas do tipo $\Delta(0)^2$. Como $Z[J]$ é amplitude vácuo-vácuo na presença de uma fonte externa, então $Z[0]$ corresponde ao vácuo da teoria livre de interações mais as correções quânticas do potencial na ausência da fonte externa. Assim, ao considerar a seguinte quantidade

$$\frac{Z[J]}{Z[0]} = \frac{Z_0[J] e^{i\frac{\lambda}{8}\Delta(0)^2 + i\frac{\lambda}{4} \int d^4y d^4w d^4z J(y)J(w)\Delta(y-z)\Delta(w-z)\Delta(z-z) + \dots}}{e^{i\frac{\lambda}{8}\Delta(0)^2 + \dots}}, \quad (3.99)$$

é possível concluir que estamos eliminando as correções quânticas do vácuo, uma vez que elas não são observáveis — não há correntes externas associadas aos seus diagramas —. Este resultado será muito importante mais à frente quando tratarmos das funções de Green conectadas.

Retornando à discussão da expansão em (3.97), todos os termos em parênteses da expressão (3.97) produzem apenas diagramas conectados — embora não será provado neste texto — permitindo chegar a mesma conclusão para $\ln Z[J]$. Com isso, a expressão (3.87) será reescrita como

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left(iS[\phi] + i \int d^4x \phi(x)J(x) \right) = e^{iW[J]}, \quad (3.100)$$

onde $iW[J]$ é a soma de todos os diagramas conectados, uma vez que $\ln Z[J]$ consiste somente de diagramas conectados. Portanto, a ação efetiva é definida a partir da transformada de Legendre

$$\Gamma[\phi] = W[J] - \int d^4x \phi(x)J(x), \quad (3.101)$$

também conhecida como ação efetiva 1PI, do inglês *one particle irreducible*. Diagramas 1PI são diagramas que não podem ser separados ao cortar uma linha interna, conforme ilustrado na Figura 28.

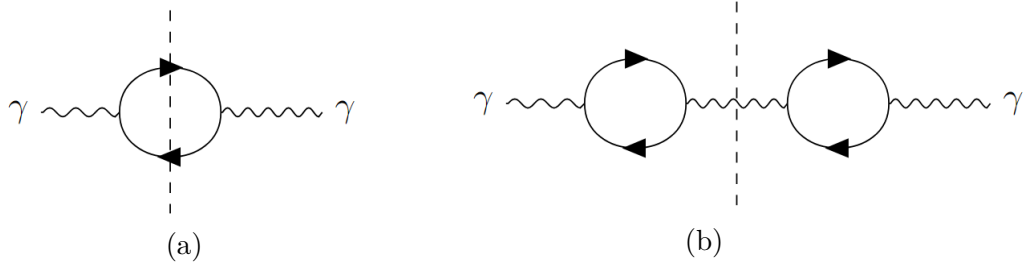


Figura 28 – Em (a), o propagador do fóton a um laço, como visto em 2.1.1. Note que ao passar uma linha interna, o diagrama não se divide em dois. Ao contrário, em (b), ao passar a linha, o diagrama se divide em dois propagadores a um laço, sendo portanto, um diagrama que não é 1PI.

A partir de (3.101) são obtidas as seguintes relações

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(y)} = -J(y), \quad (3.102)$$

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} = \phi(y). \quad (3.103)$$

A última relação deve ser entendida como o valor esperado do campo na presença de uma corrente externa

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} = \left[\frac{\langle \Omega | \phi(y) | \Omega \rangle}{\langle \Omega | \Omega \rangle} \right]_J. \quad (3.104)$$

Quando $J = 0$, então (3.104) é o valor esperado do campo no vácuo

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} \Big|_{J=0} = \frac{-i}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(y)} \Big|_{J=0} = \left[\frac{\langle \Omega | \phi(y) | \Omega \rangle}{\langle \Omega | \Omega \rangle} \right]_{J=0} \equiv \langle \phi \rangle. \quad (3.105)$$

Se consideramos o modelo tratado em (3.99), então $\langle \phi \rangle = 0$. De forma geral, campos fermiônicos e vetoriais também têm o valor esperado do vácuo igual a zero, caso não tivessem, existiria uma direção preferencial no espaço-tempo para estes campos no vácuo, o que não ocorre.

Derivando duas vezes em relação a $J(x_1)$ e $J(x_2)$ a igualdade em (3.100), tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_2) \delta J(x_1)} &= \left(i \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_2) \delta J(x_1)} - \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_2)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_1)} \right) \exp(iW[J]), \\ \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_2) \delta J(x_1)} &= i \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_2) \delta J(x_1)} - \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_2)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(x_1)}. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Ao avaliar (3.106) em $J = 0$, então o segundo termo entre parênteses vai a zero, uma vez que corresponde a $\langle \phi \rangle = 0$. Para o primeiro termo, considerando ϕ um campo escalar real, é possível visualizar seu formato, a partir de (3.99)

$$\frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_2) \delta J(x_1)} \Big|_{J=0} = i\Delta(x_2 - x_1) + \frac{i\lambda}{2} \int d^4 z \Delta(x_1 - z) \Delta(z - z) \Delta(z - x_2) + \mathcal{O}(\lambda^2).$$

Note que a expressão anterior consiste somente de diagramas de dois pontos x_2, x_1 conectados, devido à divisão por $Z[0]$. Dessa forma, define-se a função de Green conectada de 2 pontos como

$$G^{(2)}(x_2, x_1) = -\frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_2) \delta J(x_1)} \Big|_{J=0}, \quad (3.107)$$

satisfazendo a seguinte equação diferencial

$$\begin{aligned} (\partial^2 + m^2)G^{(2)}(x_2, x_1) &= -i\delta(x_2 - x_1) \\ &\quad - \frac{i\lambda}{2} (\partial^2 + m^2) \int d^4 z \Delta(x_1 - z) \Delta(z - z) \Delta(z - x_2) + \mathcal{O}(\lambda^2). \end{aligned} \quad (3.108)$$

Em termos de $W[J]$, pode-se definir a função de Green conectada de 2 pontos como

$$G^{(2)}(x_2, x_1) = -i \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_2) \delta J(x_1)} \Big|_{J=0}. \quad (3.109)$$

De forma geral, a n -ésima derivada funcional de $W[J]$ é a função de Green conectada de n pontos

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (-i)^{n-1} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (3.110)$$

Isso permite expandir $W[J]$ em uma série de Taylor funcional da seguinte forma

$$W[J] = \sum_n \frac{1}{n!} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n). \quad (3.111)$$

Retornando à função de Green conectada de 2 pontos (3.109), é possível reescrevê-la como

$$G^{(2)}(x_2, x_1) = -i \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \left(\frac{\delta W[J]}{\delta J(x_1)} \right) \Big|_{J=0} = -i \frac{\delta \phi(x_1)}{\delta J(x_2)}, \quad (3.112)$$

utilizando (3.103). Assim, encontra-se o resultado para a segunda derivada de (3.102)

$$\frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x_2) \delta \phi(x_1)} = i[G^{(2)}(x_2, x_1)]^{-1}. \quad (3.113)$$

No espaço dos momentos p , $[G^{(2)}(x_2, x_1)]^{-1}$ é expresso da seguinte forma a partir de (3.108)

$$\tilde{G}^{(2)}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2} - \frac{1}{p^2 - m^2} \left(-i \frac{\lambda}{2} \tilde{\Delta}(0) \right) \frac{1}{p^2 - m^2} + \mathcal{O}(\lambda^2), \quad (3.114)$$

em que o termo entre parênteses corresponde à correção a um laço da massa do campo escalar, encontrada no capítulo anterior

$$-i\Sigma = -i \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2}.$$

Assim, no espaço dos momentos, a ação efetiva em (3.113) tem a seguinte expressão

$$\Gamma^{(2)}(p^2) = p^2 - m^2 - \Sigma_\lambda, \quad (3.115)$$

em que Σ_λ representa a soma de todos os diagramas 1PI, de um ou mais laços, com 2 linhas externas. Assim como foi obtido um resultado geral para $W[J]$ em (3.111), o mesmo pode ser feito para a ação efetiva

$$\Gamma[\phi] = \sum_n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \phi(x_1) \dots \phi(x_n), \quad (3.116)$$

onde $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ é a soma de todos os diagramas de Feynman 1PI com n linhas externas. Há uma outra forma de expandir a ação efetiva, em termos dos momentos, isto é, a derivadas espaço-temporais de ϕ

$$\Gamma[\phi] = \int d^4x \left(-V_{\text{ef.}}[\phi] + \frac{1}{2} Z[\phi] (\partial_\mu \phi)^2 + \dots \right), \quad (3.117)$$

em que $V[\phi]$ é o potencial efetivo da teoria. Se tomarmos ϕ como uma constante, então a ação efetiva se reduz a integral do potencial efetivo

$$\Gamma[\phi] = - \int d^4x V_{\text{ef.}}[\phi]. \quad (3.118)$$

3.2.2 Potencial de Coleman-Weinberg

O potencial de um campo escalar real tem a seguinte forma

$$V = \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4, \quad (3.119)$$

contendo a simetria \mathbb{Z}_2 . Para $m^2 > 0$, o potencial não apresenta quebra espontânea de simetria, enquanto o oposto ocorre para $m^2 < 0$. Para o caso $m = 0$, ocorre a quebra espontânea de simetria por correções quânticas, como demonstrado por [57]. A importância do potencial de Coleman-Weinberg para o Modelo Padrão, como será visto adiante, é se para valores muito grandes do campo de Higgs $h \gg v^1$ pode existir um estado de menor energia que $h = v$.

Para demonstrar que, no caso $m = 0$, ocorre a quebra espontânea de simetria por correções quânticas, será utilizada o método do *background field method*. Dessa forma, é obtido o potencial efetivo, e com as condições de renormalização será possível mostrar que ocorre a quebra espontânea de simetria. Neste método, o campo é deslocado por um campo de fundo $\phi \rightarrow \phi_b + \phi$, logo a exponencial da ação efetiva é

$$e^{i\Gamma[\phi_b]} = e^{i \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \phi_b \partial^2 \phi_b - V(\phi_b) \right)} \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \phi \partial^2 \phi - \frac{1}{2} \phi^2 V''(\phi_b) - \frac{1}{3!} \phi^3 V'''(\phi_b) + \dots \right)}. \quad (3.120)$$

Não é possível calcular a integral acima para um potencial qualquer, embora seja facilmente calculável no caso de um laço. Neste caso, um laço significa um laço de ϕ com um número

¹ v é o VEV do campo de Higgs.

arbitrário de campos ϕ_b externos, já que ϕ_b não se propaga. Como ϕ^3 e ordens maiores não contribuem a um laço, isso porque ϕ^3 corresponderia a dois laços, por exemplo. Dessa forma, desconsiderando termos maiores ou iguais a ϕ^3 , então (3.120) se torna

$$e^{i\Gamma[\phi_b]} = e^{i \int d^4x (-\frac{1}{2}\phi_b \partial^2 \phi_b - V(\phi_b))} \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x (-\frac{1}{2}\phi \partial^2 \phi - \frac{1}{2}\phi^2 V''(\phi_b))}. \quad (3.121)$$

Assim, como a integral é gaussiana, é fácil de calcular e obter o seguinte resultado

$$e^{i\Gamma[\phi_b]} = \mathcal{N} e^{i \int d^4x (-\frac{1}{2}\phi_b \partial^2 \phi_b - V(\phi_b))} \frac{1}{\sqrt{\det(\partial^2 + V''[\phi_b])}}, \quad (3.122)$$

reduzindo o cálculo a um determinante de funcional. Utilizando o logaritmo natural em (3.122)

$$i\Gamma[\phi_b] = \ln \mathcal{N} + \ln \frac{1}{\sqrt{\det(\partial^2 + V''[\phi_b])}} + i \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\phi_b \partial^2 \phi_b - V(\phi_b) \right), \quad (3.123)$$

torna-se possível utilizar a propriedade de que o logaritmo natural do determinante é igual ao traço do logaritmo natural no segundo termo, isto é

$$\ln \frac{1}{\sqrt{\det(\partial^2 + V''[\phi_b])}} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln(\partial^2 + V''[\phi_b]). \quad (3.124)$$

O traço de operador é a soma dos autovalores, no caso de uma matriz finita. Neste caso, temos uma matriz “infinita” e, portanto, a soma dos autovalores se torna a integral sobre as posições, já que o traço é independente da base [34]. Dessa forma,

$$-\frac{1}{2} \text{Tr} \ln(\partial^2 + V''[\phi_b]) = -\frac{1}{2} \int d^4x \langle x | \ln(\partial^2 + V''[\phi_b]) | x \rangle, \quad (3.125)$$

em que foi inserido a integral sob o espaço-tempo, representando o traço, e $\langle x |$ representa a base em que o traço esta sendo efetuado.

A não ser que ϕ_b seja constante, então a integral acima (3.125) é extremamente difícil de calcular. No caso de ϕ_b ser constante, o potencial deixa de ser um funcional e passar a ser uma função comum, permitindo realizar vários procedimentos que permitam a efetuação da integral. Será identificado que $i\Delta\Gamma[\phi_b] = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln(\partial^2 + V''(\phi_b))$. Para prosseguirmos, será inserindo um estado completo de momentos $\langle k |$, logo

$$i\Delta\Gamma[\phi_b] = -\frac{1}{2} \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \langle x | k \rangle \ln(\partial^2 + V''(\phi_b)) \langle k | x \rangle. \quad (3.126)$$

Como $\langle x | k \rangle = e^{-ik \cdot x}$ e $\langle k | x \rangle = e^{ik \cdot x}$, então temos que

$$i\Delta\Gamma[\phi_b] = -\frac{1}{2} \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \ln(\partial^2 + V''(\phi_b)) e^{ik \cdot x}. \quad (3.127)$$

Escrevendo $\ln(\partial^2 + V''(\phi_b))$ como $\ln\left(1 + \frac{V''(\phi_b)}{\partial^2}\right) + \ln \partial^2$, permitirá realizar uma expansão em série de Taylor do primeiro logaritmo. O segundo logaritmo renderá uma constante

infinita na integral e, portanto, ao longo dos cálculos a seguir não será escrita. Essa constante infinita não nos trará problemas, podendo ser reabsorvida em $\ln \mathcal{N}$ da equação (3.123). Assim expandindo o primeiro logaritmo em série de Taylor

$$\ln \left(1 + \frac{V''(\phi_b)}{\partial^2} \right) = \frac{V''(\phi_b)}{\partial^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{V''(\phi_b)}{\partial^2} \right)^2 + \dots \quad (3.128)$$

Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{V''(\phi_b)}{\partial^2} \right) e^{ik \cdot x} &= \frac{V''(\phi_b)}{\partial^2} e^{ik \cdot x} - \frac{1}{2} \left(\frac{V''(\phi_b)}{\partial^2} \right)^2 e^{ik \cdot x} + \dots, \\ \ln \left(1 + \frac{V''(\phi_b)}{\partial^2} \right) e^{ik \cdot x} &= \frac{V''(\phi_b)}{\partial^2 e^{-ik \cdot x}} - \frac{1}{2} \frac{(V''(\phi_b))^2}{\partial^4 e^{-ik \cdot x}} + \dots, \\ \ln \left(1 + \frac{V''(\phi_b)}{\partial^2} \right) e^{ik \cdot x} &= -\frac{V''(\phi_b)}{k^2} e^{ik \cdot x} - \frac{1}{2} \left(\frac{V''(\phi_b)}{k^2} \right)^2 e^{ik \cdot x} + \dots, \\ \ln \left(1 + \frac{V''(\phi_b)}{\partial^2} \right) e^{ik \cdot x} &= \ln \left(1 - \frac{V''(\phi_b)}{k^2} \right) e^{ik \cdot x}. \end{aligned} \quad (3.129)$$

Como o operador ∂^2 já atuou no exponencial, então as exponenciais de (3.127) se cancelam, restando somente

$$i\Delta\Gamma[\phi_b] = -\frac{1}{2} \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln \left(1 - \frac{V''(\phi_b)}{k^2} \right). \quad (3.130)$$

A integral acima é divergente no espaço dos momentos, então já é esperado uma renormalização de polinômios de até quarto grau no potencial (3.119). Para identificarmos a divergência, será preciso passar a integral para o espaço Euclidiano da seguinte forma

$$k^2 \rightarrow -k_E^2, \quad d^4k = id^4k_E,$$

obtem-se que

$$i\Delta\Gamma[\phi_b] = -\frac{i}{2} \int d^4x \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \ln \left(1 + \frac{V''(\phi_b)}{k_E^2} \right). \quad (3.131)$$

Usando coordenadas hiperesféricas em quatro dimensões [72], temos que

$$i\Delta\Gamma[\phi_b] = -\frac{i}{32\pi^4} \int d^4x \int d\Omega_4 \int_0^\infty dk_E k_E^3 \ln \left(1 + \frac{V''(\phi_b)}{k_E^2} \right). \quad (3.132)$$

Como o integrando é invariante sob rotações, então é possível efetuar a integral da parte angular $d\Omega_4$ diretamente

$$\int d\Omega_4 \equiv \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \sin \theta_1 \sin^2 \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 = 2\pi^2.$$

Logo,

$$i\Delta\Gamma[\phi_b] = -\frac{i}{16\pi^2} \int d^4x \int_0^\infty dk_E k_E^3 \ln \left(1 + \frac{V''(\phi_b)}{k_E^2} \right). \quad (3.133)$$

Assim, a divergência está na integral em k_E . Antes de regularizar esta integral, vale utilizar de alguns artifícios de modo a torná-la mais fácil de integrar. Para isso, considere que

$$I = \int_0^\infty dk_E k_E^3 \ln \left(1 + \frac{V''(\phi_b)}{k_E^2} \right). \quad (3.134)$$

Pode-se reescrever I como uma integral dupla, como mostrado abaixo

$$\begin{aligned} I &= - \int_0^\infty dk_E k_E^3 \ln \left(1 + \frac{V''(\phi_b)}{\ell} \right) \Bigg|_{\ell=k_E^2}^{\ell=\infty}, \\ &= V''(\phi_b) \int_0^\infty \int_{k_E^2}^\infty \frac{k_E^3}{\ell(\ell + V''(\phi_b))} d\ell dk_E, \end{aligned} \quad (3.135)$$

onde foi derivado $\ln \left(1 + \frac{V''(\phi_b)}{\ell} \right)$ em relação a ℓ e usado o teorema fundamental do cálculo. Fazendo a mudança de ordem de integração de (3.135), então

$$\begin{aligned} I &= V''(\phi_b) \int_0^\infty \int_0^{\sqrt{\ell}} \frac{k_E^3}{\ell(\ell + V''(\phi_b))} dk_E d\ell, \\ &= \frac{V''(\phi_b)}{4} \int_0^\infty \frac{\ell}{\ell + V''(\phi_b)} d\ell. \end{aligned} \quad (3.136)$$

A integral em (3.136), embora divergente, é razoavelmente mais fácil de integrar. Regulando a integral por meio do *hard cutoff*, isto é, ao invés de integrar até o infinito, é integrado até um limite, neste caso, Λ que tem dimensões de energia², como pode ser visto por meio de uma análise dimensional em (3.133) e (3.136). Dessa forma,

$$I = \frac{V''(\phi_b)}{4} \int_0^\Lambda \frac{\ell}{\ell + V''(\phi_b)} d\ell. \quad (3.137)$$

Adicionando $V''(\phi_b) - V''(\phi_b)$ ao numerador de (3.137) e realizando a integral, obtém-se que

$$I = \Lambda \frac{V''(\phi_b)}{4} + \frac{(V''(\phi_b))^2}{4} \ln \left(\frac{V''(\phi_b)}{\Lambda + V''(\phi_b)} \right). \quad (3.138)$$

Realizando um deslocamento em $\Lambda + V''(\phi_b) \rightarrow \Lambda$, permitirá simplificar o argumento do logaritmo ao troco de uma constante finita em I , como mostrado abaixo

$$I = (\Lambda - V''(\phi_b)) \frac{V''(\phi_b)}{4} + \frac{(V''(\phi_b))^2}{4} \ln \left(\frac{V''(\phi_b)}{\Lambda} \right). \quad (3.139)$$

É possível desconsiderar o termo $\frac{V''(\phi_b)^2}{4}$, já que ele não renderá nenhuma informação adicional. Portanto, o resultado final de (3.133) é

$$i\Delta\Gamma[\phi_b] = -\frac{i}{16\pi^2} \int d^4x \left[\Lambda \frac{V''(\phi_b)}{4} + \frac{(V''(\phi_b))^2}{4} \ln \left(\frac{V''(\phi_b)}{\Lambda} \right) \right], \quad (3.140)$$

que continua sendo uma quantidade divergente, já que a regularização por *hard cutoff* ainda implica efetuar o limite $\Lambda \rightarrow \infty$. A ação efetiva de (3.123) com ϕ_b constante é

$$\Gamma[\phi_b] = - \int d^4x \left[V(\phi_b) + \Lambda \frac{V''(\phi_b)}{64\pi^2} + \frac{(V''(\phi_b))^2}{64\pi^2} \ln \left(\frac{V''(\phi_b)}{\Lambda} \right) \right]. \quad (3.141)$$

Usando a relação obtida em (3.118), então encontramos a expressão para o potencial efetivo

$$V_{\text{ef.}}(\phi_b) = V(\phi_b) + \Lambda \frac{V''(\phi_b)}{64\pi^2} + \frac{(V''(\phi_b))^2}{64\pi^2} \ln \left(\frac{V''(\phi_b)}{\Lambda} \right). \quad (3.142)$$

Para renormalizá-lo, consideremos o potencial renormalizado tendo a seguinte forma

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m_R^2(1 + \delta_m)\phi^2 + \frac{\lambda_R}{4!}(1 + \delta_\lambda)\phi^4, \quad (3.143)$$

o que permite identificar $V''(\phi_b)$ como

$$V''(\phi_b) = m_R^2 + \frac{\lambda_R}{2}\phi_b^2 + \mathcal{O}(\lambda_R^2), \quad (3.144)$$

com os contratermos assumidos a começar em ordem λ_R^2 . Dessa forma, o potencial efetivo é

$$\begin{aligned} V_{\text{ef.}}(\phi) &= \frac{1}{2}m_R^2(1 + \delta_m)\phi^2 + \frac{\lambda_R}{4!}(1 + \delta_\lambda)\phi^4 \\ &+ \frac{\Lambda}{64\pi^2} \left(m_R^2 + \frac{\lambda_R}{2}\phi^2 \right) + \frac{1}{64\pi^2} \left(m_R^2 + \frac{\lambda_R}{2}\phi^2 \right)^2 \ln \frac{m_R^2 + \frac{\lambda_R}{2}\phi^2}{\Lambda}, \end{aligned} \quad (3.145)$$

em que foi substituído ϕ_b por ϕ , o que não acarretará perda de generalidade.

Agora, para analisar se a simetria \mathbb{Z}_2 é espontaneamente quebrada quando $m_R = 0$, é necessário definir $m_R = 0$ cuidadosamente. Normalmente, é identificado m_R como a massa de ϕ , entretanto essa definição é problemática, já que caso fosse, então estaríamos pressupondo que m_R^2 é maior que zero, e portanto, um grau de liberdade físico de ϕ . A solução é identificar que $m_R^2 = V''_{\text{ef.}}(0)$, e impor a seguinte condição de renormalização $m_R^2 = V''_{\text{ef.}}(0) = 0$. É natural supor que a condição de renormalização de λ seja da seguinte forma $\lambda_R = V''''_{\text{ef.}}(0)$. Para ver o que acontece nesta condição, temos de analisar a quarta derivada do potencial efetivo, que até o momento tem a seguinte forma

$$V_{\text{ef.}}(\phi) = \frac{\lambda_R}{4!}\phi^4 \left[1 + \delta_\lambda + \frac{3\lambda_R}{32\pi^2} \ln \left(\frac{\lambda_R\phi^2}{2\Lambda} \right) \right]. \quad (3.146)$$

Derivando quatro vezes, então

$$V_{\text{ef.}}''''(\phi) = \frac{\lambda_R}{64\pi^2} \left[64\pi^2 + 64\pi^2\delta_\lambda + 25\lambda_R + 6\lambda_R \ln \left(\frac{\lambda_R\phi^2}{2\Lambda} \right) \right], \quad (3.147)$$

ficando evidente que não é possível tomar $V_{\text{ef.}}''''(0)$ como condição de renormalização, sendo necessário tomar em algum valor diferente de zero para ϕ . Assim, tomando a condição de renormalização como $\lambda_R = V_{\text{ef.}}''''(\mu)$, em que μ é uma escala arbitrária, encontra-se o seguinte valor para o contratermo

$$\delta_\lambda = -\frac{3\lambda_R}{32\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\lambda_R\mu^2}{2\Lambda} \right) + \frac{25}{6} \right]. \quad (3.148)$$

Dessa forma, é obtido o potencial de Coleman-Weinberg

$$V_{\text{ef.}}(\phi) = \frac{\lambda_R}{4!} \phi^4 \left\{ 1 + \frac{3\lambda_R}{32\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\phi^2}{\mu^2} \right) - \frac{25}{6} \right] \right\}. \quad (3.149)$$

No caso em que $\phi^2 \leq \mu^2$, temos que o termo $\ln \left(\frac{\phi^2}{\mu^2} \right) \leq 0$, o que leva a aparente conclusão que existe um máximo na origem e um mínimo em um valor diferente de zero, sendo denominado de ϕ_0 . Assim, para encontrar o mínimo, deriva-se o potencial em relação a ϕ . O valor ϕ_0 que minimiza o potencial é determinado a partir da seguinte equação

$$\lambda_R \ln \left(\frac{\phi_0^2}{\mu^2} \right) = \frac{11}{3} \lambda_R - \frac{32}{3} \pi^2. \quad (3.150)$$

Como $\frac{32}{3} \pi^2 \approx 105$, então esta equação já está muito fora do regime perturbativo, indicando a necessidade de incluir correções de ordens maiores de λ .

Antecipando-se um pouco nos resultados, a inclusão da correção de ordens maiores de λ não resolverá o problema em questão, isto é, se ocorre a quebra espontânea de simetria por correções quânticas. Entretanto, a metodologia apresentada por [57], que será desenvolvida a seguir, traz *insights* importantes para as equações do grupo de renormalização.

3.2.3 Resomação de grandes logaritmos

A escala de renormalização μ em (3.149) é totalmente arbitrária, sua única função é definir a constante renormalizada λ_R e a escala de renormalização do campo ϕ . Esta última afirmação não foi apresentada no texto explicitamente, já que a um laço, um modelo contendo somente o campo escalar não recebe nenhuma correção quântica em ϕ [48]. A renormalização do campo ϕ acontece a partir do termo $Z[\phi]$ presente em (3.117). Um pequena mudança na escala μ implicará uma pequena mudança em λ_R e em ϕ , de tal forma, que a ação efetiva obedecerá a seguinte equação [57]

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda_R} + \gamma \int d^4x \phi(x) \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \right) \Gamma = 0, \quad (3.151)$$

em que β_λ é a equação do grupo de renormalização para o acoplamento λ , e γ é chamado de dimensão anômala. Para descobrir a forma de γ , lembremos de (2.186), a relação entre o campo renormalizado e o não renormalizado, sem os índices a

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{Z_\phi}} \phi^{(0)}. \quad (3.152)$$

Diferenciando em relação a μ , e multiplicando o resultado por μ , encontramos que

$$Z_\phi^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2Z_\phi} \mu \frac{\partial Z_\phi}{\partial \mu} \phi + \mu \frac{\partial \phi}{\partial \mu} \right) = 0. \quad (3.153)$$

Assim, ao definir γ da seguinte forma

$$\gamma = -\frac{1}{2Z_\phi} \mu \frac{\partial Z_\phi}{\partial \mu}, \quad (3.154)$$

chega-se a

$$\mu \frac{\partial \phi}{\partial \mu} = \gamma \phi. \quad (3.155)$$

Aplicando (3.151) a (3.116), encontramos

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda_R} + n\gamma \right) \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = 0. \quad (3.156)$$

Estas são as equações diferenciais do grupo de renormalização, também chamadas de equação de Callan-Symanzik [73, 74]. Usando (3.151) em (3.117), encontramos diretamente que [57]

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda_R} + \gamma \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) V_{\text{ef.}}(\phi) = 0, \quad (3.157)$$

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda_R} + \gamma \phi \frac{\partial}{\partial \phi} + 2\gamma \right) Z(\phi) = 0, \quad (3.158)$$

para o caso em que $V_{\text{ef.}}(\phi)$ e $Z(\phi)$ são funções ordinárias de ϕ e não funcionais. Seguindo o raciocínio de [57], é conveniente trabalhar com a seguinte quantidade adimensional

$$V^{(4)} = \frac{\partial^4 V_{\text{ef.}}}{\partial \phi^4}. \quad (3.159)$$

Derivando (3.157) quatro vezes em relação a ϕ , permite obter

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda_R} + \gamma \phi \frac{\partial}{\partial \phi} + 4\gamma \right) V^{(4)} = 0. \quad (3.160)$$

Como as quantidades adimensionais $V^{(4)}$ e Z só podem depender de ϕ, μ a partir da razão ϕ/μ , é útil definir que

$$t = \ln \frac{\phi}{\mu}. \quad (3.161)$$

Dessa forma, temos que

$$\mu \frac{\partial V^{(4)}}{\partial \mu} = \mu \frac{\partial V^{(4)}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \mu} \quad (3.162)$$

$$= -\frac{\partial V^{(4)}}{\partial t}; \quad (3.163)$$

$$\gamma \phi \frac{\partial V^{(4)}}{\partial \phi} = \gamma \phi \frac{\partial V^{(4)}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \phi} \quad (3.164)$$

$$= \gamma \frac{\partial V^{(4)}}{\partial t}, \quad (3.165)$$

com estas relações também valendo para Z . Assim, (3.160) toma a seguinte forma

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t} + \bar{\beta}\frac{\partial}{\partial\lambda_R} + 4\bar{\gamma}\right)V^{(4)}(t, \lambda_R) = 0, \quad (3.166)$$

onde $\bar{\beta} = \frac{\beta}{(1-\gamma)}$ e $\bar{\gamma} = \frac{\gamma}{(1-\gamma)}$. O mesmo pode ser aplicado para (3.158)

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t} + \bar{\beta}\frac{\partial}{\partial\lambda_R} + 2\bar{\gamma}\right)Z(t, \lambda_R) = 0. \quad (3.167)$$

As condições de renormalização são facilmente obtidas a partir desta redefinição

$$V^{(4)}(0, \lambda_R) = \lambda_R, \quad Z(0, \lambda_R) = 1. \quad (3.168)$$

Logo, se avaliarmos as equações (3.166) e (3.167) em $t = 0$, obtemos que

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{2} \frac{\partial Z(0, \lambda_R)}{\partial t}, \quad (3.169)$$

$$\bar{\beta} = \frac{\partial V^{(4)}(0, \lambda_R)}{\partial t} - 4\bar{\gamma}\lambda_R. \quad (3.170)$$

Assim, se soubermos os termos com derivadas no lado direito destas equações, descobriremos $\bar{\beta}$ e $\bar{\gamma}$. Entretanto, não sabemos estes termos com derivadas de forma exata, apenas alguns termos em uma expansão em série de potência de $\bar{\beta}$ e $\bar{\gamma}$. Vamos imaginar, porém, que saibamos exatamente $\bar{\beta}$ e $\bar{\gamma}$. Assim, é fácil construir a solução geral de

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t} + \bar{\beta}\frac{\partial}{\partial\lambda_R} + n\bar{\gamma}\right)F(t, \lambda_R) = 0, \quad (3.171)$$

em que as equações (3.166) e (3.167) são casos especiais desta. Vamos definir a função $\lambda'(t, \lambda_R)$ a partir da solução da seguinte equação diferencial

$$\frac{d\lambda'}{dt} = \bar{\beta}(\lambda'), \quad (3.172)$$

com a seguinte condição de contorno

$$\lambda'(0, \lambda_R) = \lambda_R. \quad (3.173)$$

Essa parametrização permite escrever (3.171) como uma equação diferencial dependente somente de t , se identificarmos

$$\frac{\partial}{\partial t} - \bar{\beta}\frac{\partial}{\partial\lambda_R}, \quad (3.174)$$

como uma derivada total, ou material, em relação a t . Assim, (3.171) tem a seguinte forma

$$-\frac{dF}{dt} + n\bar{\gamma}F = 0, \quad (3.175)$$

cuja solução é [57]

$$F(t, \lambda_R) = f(\lambda'(t, \lambda_R)) \exp\left[n \int_0^t \bar{\gamma}(\lambda'(t, \lambda_R)) dt\right], \quad (3.176)$$

onde f é uma função arbitrária. As condições de renormalização para Z e $V^{(4)}$, (3.168), possibilitam encontrar f :

$$Z(t, \lambda_R) = \exp \left[2 \int_0^t \bar{\gamma}(\lambda'(t, \lambda_R)) dt \right], \quad (3.177)$$

$$V^{(4)} = \lambda'(t, \lambda_R) [Z(t, \lambda_R)]^2. \quad (3.178)$$

Este é um resultado espetacular, já que Z e $V^{(4)}$ são determinados para todos os valores de t , em termos de suas primeiras derivadas em relação a $t = 0$, isto é, em termos de $\bar{\beta}$ e $\bar{\gamma}$.

Entretanto, assumimos que conheceríamos $\bar{\beta}$ e $\bar{\gamma}$ de forma exata, entretanto sabemos somente alguns termos. Vamos supor que construiremos uma solução aproximada de $\lambda'(t, \lambda_R)$ ao substituir $\bar{\beta}$ em (3.172) pelo termo a um laço, a partir de um valor pequeno de λ_R . Esperamos que esta aproximação seja válida para um intervalo em t , desde que λ' permaneça pequeno neste intervalo. Assim, termos de ordens maiores, isto é, termos a dois laços, três laços, etc., serão desprezíveis neste intervalo. Se tivermos sorte, a aproximação para λ' permanecerá pequena para grandes valores de t , dessa forma, teremos uma aproximação melhorada². Assim, analisemos $V^{(4)}$, a partir da relação (3.149)

$$V^{(4)} = \lambda_R + \frac{3\lambda_R^2}{16\pi^2} t, \quad (3.179)$$

em que fora feito uma redefinição na escala μ para que o fator $25/6$ não esteja presente. Na aproximação a um laço, sabemos que, neste caso, $Z = 1$, logo

$$\bar{\gamma} = 0,$$

a partir de (3.169). Dessa forma, (3.170) é

$$\bar{\beta} = \frac{3\lambda_R^2}{16\pi^2}. \quad (3.180)$$

Assim, a equação diferencial (3.172) tem a seguinte forma

$$\frac{d\lambda'}{dt} = \frac{3\lambda'^2}{16\pi^2}, \quad (3.181)$$

sendo a equação do grupo de renormalização obtida em (2.226), quando $N = 1$, $g = 0$, $\text{Tr}(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\dagger) = 0$ e $\lambda_R \rightarrow \frac{\lambda_R}{3}$. A solução de (3.181) é

$$\lambda'(t, \lambda_R) = \frac{\lambda_R}{1 - \frac{3\lambda_R}{16\pi^2} t}. \quad (3.182)$$

Como $\lambda'(t, \lambda_R)$ é o acoplamento quártico efetivo melhorado, a partir de (3.178), então o potencial efetivo a um laço tem o seguinte formato

$$V_{\text{ef.}}(\phi) = \frac{\lambda_R}{1 - \frac{3\lambda_R}{32\pi^2} \ln \frac{\phi^2}{\mu^2}} \frac{\phi^4}{4!}. \quad (3.183)$$

² Do inglês, *improved approximation*. Termo retirado do artigo [57].

É interessante perceber que quando $\frac{3\lambda_R}{32\pi^2} \ln \frac{\phi^2}{\mu^2} < 1$, então

$$V_{\text{ef.}}(\phi) \approx \frac{\phi^4}{4!} \left(1 + \frac{3\lambda_R}{32\pi^2} \ln \frac{\phi^2}{\mu^2} \right), \quad (3.184)$$

sendo a expressão obtida em (3.149). Assim, melhoramos o potencial efetivo, a partir da aproximação a um laço, em um processo também conhecido como resomação.

3.2.4 Potencial efetivo multiescala

Na análise anterior, o potencial efetivo a um laço continha apenas um campo escalar, o que torna a obtenção dos parâmetros efetivos relevantes relativamente fácil, em relações a outros modelos, como o dubleto de Higgs inerte 3.1.2 e o *triplet seesaw* 3.1.3. Nessas duas extensões do Modelo Padrão, o potencial a nível de árvore contém mais de um campo escalar, além de conter campos vetoriais, o que leva o potencial efetivo a um laço destas teorias terem escalas de massa diferentes. Potenciais efetivos a um laço que exibem diferentes escalas de massa são chamados de multiescala. Estes potenciais são mais complicados que os potenciais de escala única, como o potencial de Coleman-Weinberg (3.149), uma vez que as correções radiativas introduzem termos que são proporcionais à $\left(\ln \frac{m_i^2}{\mu^2} \right)^n$, em que m_i são os autovalores de massa dos campos envolvidos no modelo. Estes podem variar significativamente, dependendo dos acoplamentos envolvidos. Essa situação torna-se problemática quando os autovalores das massas são muito distintos, não sendo possível escolher um único valor de μ de modo que as razões $\frac{m_i}{\mu}$ sejam da mesma ordem, a fim de evitar que os logaritmos cresçam excessivamente. Neste caso, os logaritmos invalidariam a expansão perturbativa do potencial efetivo.

No caso do potencial de Coleman-Weinberg, foi possível contornar o problema de logaritmos muito grandes ao resomá-lo no acoplamento quártico e, dessa forma, o potencial efetivo foi melhorado. Infelizmente, a situação para potenciais com mais de um campo escalar se torna mais complicada, pois não há como resomar o potencial efetivo considerando somente uma escala de renormalização μ .

Para resolver este problema, em seu trabalho [58] apresenta um novo método para melhorar o potencial efetivo usando a equação de grupo de renormalização com apenas uma escala de renormalização. Isso será feito ao escolher condições iniciais adequadas para resolver as equações do grupo de renormalização, de forma a estender o trabalho realizado por Coleman-Weinberg, apresentado na seção anterior, para potenciais mais gerais. Como consequência, será possível analisar a estabilidade do potencial efetivo melhorado a partir das condições de estabilidade obtidas a nível de árvore.

Considere a seguinte generalização do potencial de Coleman-Weinberg contendo N campos escalares, assim como k acoplamentos. Denotando $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ como os acoplamentos e $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_N)$ como os campos escalares. Há ℓ autovalores de

massa dependentes dos campos $m = (m_1, \dots, m_\ell)$, sendo estes funções dos campos e dos acoplamentos. Nesta notação, o espaço dos parâmetros é gerado por $(\mu; \lambda, \phi)$. O potencial efetivo da teoria até um laço é

$$V_{\text{ef}}(\mu; \lambda, \phi) = V^{(0)}(\lambda, \phi) + \hbar V^{(1)}(\mu; \lambda, \phi), \quad (3.185)$$

onde \hbar é indicado para representar a ordem do laço da correção quântica, e o sobrescrito indica a ordem da correção ao potencial efetivo. Note que no limite $\hbar \rightarrow 0$, o potencial efetivo retorna à expressão do potencial clássico, como esperado. A expressão generalizada de (3.149) para o potencial a um laço é

$$V^{(1)}(\mu; \lambda, \phi) = \frac{1}{64\pi^2} \sum_i n_i m_i^4(\lambda, \phi) \left[\ln \frac{m_i^2(\lambda, \phi)}{\mu^2} - \zeta_i \right], \quad (3.186)$$

onde o índice i se refere aos tipos de partículas, e os autovalores de massa a nível de árvore são denotadas por $m_i(\lambda, \phi)$. O fator n_i é responsável por indicar o número de graus de liberdade que uma partícula tem, estando relacionado ao spin da partícula s_i

$$n_i = (-1)^{2s_i} Q_a N_a (2s_i + 1),$$

em que $Q_i = 1, 2$ para partículas descarregadas e carregadas, respectivamente, e $N_i = 1, 3$ para partículas que não carregam e carregam cor, respectivamente. Os valores de ζ_i são iguais a $\frac{5}{6}$ para bósons vetoriais, e $\frac{3}{2}$ para bósons escalares e férmions, quando se utiliza a regularização dimensional no esquema MS .

Para ilustrar a dificuldade de renormalização com potenciais escalares contendo mais de um campo escalar, consideremos um modelo com dois escalares reais ϕ_1 e ϕ_2 de forma que a Lagrangeana será

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)(\partial^\mu \phi_1) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)(\partial^\mu \phi_2) - V(\phi_1, \phi_2), \quad (3.187)$$

com $V(\phi_1, \phi_2)$ igual a

$$V(\phi_1, \phi_2) = \frac{m_1^2}{2}\phi_1^2 + \frac{m_2^2}{2}\phi_2^2 + \frac{\lambda_1}{4!}\phi_1^4 + \frac{\lambda_1}{4!}\phi_2^4 + \frac{\lambda_3}{4}\phi_1^2\phi_2^2. \quad (3.188)$$

Para encontrar os autovalores de massa a nível de árvore, deriva-se, neste caso, o potencial em relação aos campos ϕ_1 e ϕ_2 duas vezes, obtendo

$$M_{ij}^2 = \begin{pmatrix} m_1^2 + \frac{\lambda_1 \phi_1^2}{2} + \frac{\lambda_3 \phi_2^2}{2} & \lambda_3 \phi_1 \phi_2 \\ \lambda_3 \phi_1 \phi_2 & m_2^2 + \frac{\lambda_2 \phi_2^2}{2} + \frac{\lambda_3 \phi_1^2}{2} \end{pmatrix}, \quad (3.189)$$

em que M_{ij} pode ser considerada a matriz de massa ao quadrado efetiva a nível de árvore com $i, j = 1, 2$. Para simplificar o tratamento do problema, consideraremos sem perda de generalidade $\lambda_3 = 0$. Dessa forma M_{ij} é diagonal e os autovalores são rapidamente obtidos

$$M_{ii}^2 = m_i^2 + \frac{\lambda_i \phi_i^2}{2}. \quad (3.190)$$

Assim, o termo de correção a um laço ao potencial efetivo é obtido a partir de (3.186)

$$V^{(1)}(\mu; \lambda, \phi) = \frac{1}{64\pi^2} \left(m_1^2 + \frac{\lambda_1 \phi_1^2}{2} \right)^2 \left[\ln \frac{m_1^2 + \frac{\lambda_1 \phi_1^2}{2}}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right] + \frac{1}{64\pi^2} \left(m_2^2 + \frac{\lambda_2 \phi_2^2}{2} \right)^2 \left[\ln \frac{m_2^2 + \frac{\lambda_2 \phi_2^2}{2}}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right]. \quad (3.191)$$

Logo, se um destes autovalores for muito distinto do outro, então somente μ^2 não será suficiente para a renormalização do potencial, uma vez que um dos termos logaritmos terá saído do regime perturbativo.

Seguindo com o argumento dos autores do artigo [58], é possível reescrever o logaritmo do termo a um laço como

$$\ln \frac{m_i^2(\lambda, \phi)}{\mu^2} = \ln \frac{m_i^2(\lambda, \phi)}{\mathcal{M}^2} + \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\mu^2}, \quad (3.192)$$

em que \mathcal{M} é uma função diferente de zero com dimensão de massa igual a um, sendo referida como escala pivô. Por exemplo, como mostram os autores, pode-se escolher \mathcal{M} como a variável radial na configuração de espaço dos campos escalares

$$\mathcal{M}^2 = \rho^2 = \sum_{j=1}^N \phi_j^2, \quad (3.193)$$

embora qualquer outra escolha da escala pivô é igualmente válida. Assim, é possível escrever (3.186) como

$$V^{(1)}(\mu; \lambda, \phi) = \frac{1}{64\pi^2} \sum_i n_i m_i^4(\lambda, \phi) \left[\ln \frac{m_i^2(\lambda, \phi)}{\mathcal{M}^2} - \zeta_i \right] + \frac{1}{64\pi^2} \sum_i n_i m_i^4(\lambda, \phi) \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\mu^2}. \quad (3.194)$$

Devido a arbitrariedade da escolha de \mathcal{M} , uma diferente escolha para a escala pivô, deixa (3.194) invariante. Isto é, existe uma transformação entre elas que permite deixar o potencial $V^{(1)}$ invariante, sendo esperado, devido ao caráter da renormalização.

O uso da expressão definida em (3.194) é vantajosa, visto que a dependência da escala está contida no termo logaritmo, se \mathcal{M} é independente de μ . Este será referenciado como logaritmo pivô.

A partir de (3.157), sabemos que a equação de Callan-Symanzik para o potencial efetivo é

$$\mu \frac{dV_{\text{ef.}}}{d\mu} \equiv \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \sum_{i=1}^k \beta_i \frac{\partial}{\partial \lambda_i} + \sum_{j=1}^N \gamma_j \phi_j \frac{\partial}{\partial \phi_j} \right) V_{\text{ef.}}(\mu; \lambda, \phi) = 0, \quad (3.195)$$

em que fora feita a generalização para N campos e k acoplamentos. A equação (3.195) é uma equação diferencial parcial no domínio do espaço dos parâmetros gerados por $(\mu; \lambda, \phi)$,

podendo ser resolvida pelo métodos das características. Este método consiste em reduzir uma equação diferencial parcial em equações diferenciais ordinárias, notando que os termos que multiplicam as derivadas parciais sejam EDOs. A equação de Callan-Symanzik é claramente um exemplo de uma equação diferencial parcial que pode utilizar este método. Para isso, note que na transformação $t = \ln \frac{\bar{\mu}}{\mu}$, a equação (3.195) se torna

$$\frac{dV_{\text{ef.}}}{d\mu} = \left(-\frac{\partial}{\partial t} + \bar{\beta}_i \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}_i} + \bar{\gamma}_j \bar{\phi}_j \frac{\partial}{\partial \bar{\phi}_j} \right) V_{\text{ef.}}(t, \bar{\lambda}, \bar{\phi}) = 0, \quad (3.196)$$

com

$$\bar{\beta}_i = \frac{d\bar{\lambda}_i}{dt}, \quad \bar{\gamma}_i \bar{\phi}_i = \frac{d\bar{\phi}_i}{dt},$$

sendo uma generalização do que fora feito na seção anterior no potencial de Coleman-Weinberg. Assim, integrando as funções, tem-se que

$$\bar{\lambda}_i = \bar{\lambda}_i(t, \lambda_*), \quad \bar{\phi}_i(t, \lambda_*, \phi_*) = \phi_* \exp \left(\int_0^t \gamma_i(\bar{\lambda}) dt' \right), \quad (3.197)$$

com as seguintes condições iniciais

$$\bar{\lambda}_i(0, \lambda_*) = \lambda_*, \quad \bar{\phi}_i(0, \lambda_*, \phi_*) = \phi_*. \quad (3.198)$$

As soluções $\bar{\lambda}_i$ e $\bar{\phi}_i$ são conhecidas como curvas características no espaço dos parâmetros, sendo claro também que $V_{\text{ef.}}$ é constante ao longo dessas curvas. Dessa forma, sua solução pode ser rapidamente determinando a partir do problema de valor inicial. Isto é, ao longo das curvas características tem-se que

$$V_{\text{ef.}}(t, \bar{\lambda}_i, \bar{\phi}_i) = V_{\text{ef.}}(0, \lambda_*, \phi_*). \quad (3.199)$$

Seguindo os autores [58], escolhe-se a condição inicial para qual as correções a um laço vão a zero

$$V^{(1)}(\mu; \lambda, \phi) = 0, \quad (3.200)$$

o que permite eliminar um dos parâmetros em função dos outros. Dessa forma, é possível escrever a condição de renormalização μ em termos de λ e ϕ , podendo parametrizar as condições iniciais como $\xi = (\lambda_*, \phi_*)$ e $\mu = \mu_*(\lambda_*, \phi_*)$, isto é, quando $t = 0$. A partir de (3.194)

$$\begin{aligned} V^{(1)}(\mu; \lambda, \phi) &= \frac{1}{64\pi^2} \sum_i n_i m_i^4(\lambda, \phi) \left[\ln \frac{m_i^2(\lambda, \phi)}{\mathcal{M}^2} - \zeta_i \right] \\ &+ \frac{1}{64\pi^2} \sum_i n_i m_i^4(\lambda, \phi) \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\mu^2} = 0, \end{aligned} \quad (3.201)$$

cuja solução para μ é

$$\mu = \mathcal{M} \exp \left[\frac{1}{2} \frac{A(\lambda_*, \phi_*, \mathcal{M})}{B(\lambda_*, \phi_*)} \right] = \mu_*(\lambda_*, \phi_*), \quad (3.202)$$

em que

$$A(\lambda_*, \phi_*, \mathcal{M}) = \frac{1}{64\pi^2} \sum_i n_i m_i^4(\lambda_*, \phi_*) \left[\ln \frac{m_i^2(\lambda_*, \phi_*)}{\mathcal{M}^2} - \zeta_i \right], \quad (3.203)$$

$$B(\lambda_*, \phi_*) = \frac{1}{64\pi^2} \sum_i n_i m_i^4(\lambda_*, \phi_*). \quad (3.204)$$

Importante ressaltar que a transformação $t = \ln \frac{\bar{\mu}}{\mu_*}$ toma o seguinte formato

$$t = \frac{1}{2} \ln \frac{\bar{\mu}^2}{\mathcal{M}^2} - \frac{1}{2} \frac{A(\bar{\lambda}, \bar{\phi}, \mathcal{M})}{B(\bar{\lambda}, \bar{\phi})}. \quad (3.205)$$

Portanto, a partir de (3.199), o potencial efetivo é

$$V_{\text{ef.}}(t, \bar{\lambda}_i, \bar{\phi}_i) = V^{(0)}(\lambda_*, \phi_*), \quad (3.206)$$

sendo necessário inverter as relações (3.197), assim como fora feito em (3.178).

Conclui-se que ao resolver as equações do grupo de renormalização com o método das características, é possível utilizar técnicas padrões do grupo de renormalização para melhorar um potencial efetivo multiescala. É válido ressaltar que este potencial melhorado é o potencial a nível de árvore avaliado em uma escala dependente dos campos. Isto significa que não há dependência explícita da escala e, em particular, nenhuma dependência explícita de logaritmos estão presentes. Portanto, como é possível escrever o potencial melhorado a um laço em uma forma a nível de árvore, as condições de estabilidade obtidas a nível de árvore permanecem válidas a um laço. Para dois laços ou mais, o artigo discutido neste texto [58] é referenciado para a leitura.

Vimos na seção 3.1 que quando o potencial escalar a nível de árvore, avaliado em $\phi \rightarrow \infty$, pode ser reescrito como

$$V^{(0)} = \mathbf{h}^T \Lambda \mathbf{h}, \quad (3.207)$$

com $\mathbf{h} = (|\phi_1|^2, \dots, |\phi_n|^2)$, então este potencial será finito, ou limitado por baixo, se a matriz Λ for copositiva. Com o método apresentado para o potencial efetivo a um laço, podemos escrevê-lo na forma de (3.207), em que os acoplamentos e os campos são avaliados em uma escala t inicial adequada. Isso implica que as condições de estabilidades a nível de árvore, obtidas a partir da copositividade de Λ , são válidas para o potencial efetivo melhorado, desde que estas condições sejam escritas em termos dos acoplamentos avaliados em t no limite $\phi \rightarrow \infty$. Evidentemente, isso só é válido se os acoplamentos permanecerem perturbativos. A partir de (3.205), podemos usar a invariância sob transformações da escala pivô para escolher \mathcal{M} como a escala radial (3.193). Dessa forma,

$$t = \frac{1}{2} \ln \frac{\rho^2}{\mu^2} + \frac{1}{2} \frac{a(\lambda, \frac{\phi}{\rho})}{b(\lambda, \frac{\phi}{\rho})} + \mathcal{O}(\hbar), \quad (3.208)$$

em que foram definidos

$$a = \frac{1}{64\pi^2} \frac{\sum_i n_i m_i^4 \ln\left(\frac{m_i^2}{\rho^2}\right) - \zeta_i}{\rho^4}, \quad (3.209)$$

$$b = \frac{1}{64\pi^2} \frac{\sum_i n_i m_i^4}{\rho^4}, \quad (3.210)$$

sendo fácil notar que as variáveis a e b só dependerão da variável angular $\frac{\phi}{\rho}$, uma vez que m_i depende tão somente de λ, ϕ . No limite $\rho \rightarrow \infty$

$$t \rightarrow \frac{1}{2} \ln \frac{\rho^2}{\mu^2}. \quad (3.211)$$

Assim, t é uma função monótona dos campos escalares neste limite. Isso implica que podemos estudar a estabilidade do potencial efetivo a um laço melhorado avaliando as condições de estabilidade a nível de árvore, com os acoplamentos computados numa escala grande de energia. O uso das condições de estabilidade a nível de árvore, para avaliar o potencial efetivo a um laço, foi defendido por [75]. Entretanto, de acordo com [58], nunca houve uma prova rigorosa da validade deste uso. Assim, o método desenvolvido por [58] pôde confirmar que o uso é válido.

Como está justificado o uso das condições de estabilidade obtidas a nível de árvore para avaliarmos a estabilidade do potencial a um laço, é possível obter gráficos de regiões para este caso. No Modelo de dubleto de Higgs inerte, as equações do grupo de renormalização, para três famílias de férmions, são [66]

$$\begin{aligned} \beta_{\lambda_1} &= \frac{3}{4}g_1^4 + \frac{3}{2}g_1^2g_2^2 + \frac{9}{4}g_2^4 - 12y_t^4 - 3g_1^2\lambda_1 + 9g_2^2\lambda_1 + 12y_t^2\lambda_1 \\ &\quad + 12\lambda_1^2 + 4\lambda_3^2 + 4\lambda_3\lambda_4 + 2\lambda_4^2 + 2\lambda_5^2, \\ \beta_{\lambda_2} &= \frac{3}{4}g_1^4 + \frac{3}{2}g_1^2g_2^2 + \frac{9}{4}g_2^4 - 3g_1^2\lambda_2 - 9g_2^2\lambda_2 + 12\lambda_2^2 + 4\lambda_3^2 + 4\lambda_3\lambda_4 + 2\lambda_4^2 + 2\lambda_5^2, \\ \beta_{\lambda_3} &= \frac{3}{4}g_1^4 - \frac{3}{2}g_1^2g_2^2 + \frac{9}{4}g_2^4 - 3g_1^2\lambda_3 - 9g_2^2\lambda_3 + 6\lambda_3y_t^2 + 6\lambda_1\lambda_3 \\ &\quad + 6\lambda_2\lambda_3 + 4\lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_4 + 2\lambda_2\lambda_4 + 2\lambda_4^2 + 2\lambda_5^2, \\ \beta_{\lambda_4} &= 3g_1^2g_2^2 - 3g_1^2\lambda_4 - 9g_2^2\lambda_4 + 6y_t^2\lambda_4 + 2\lambda_1\lambda_4 + 2\lambda_2\lambda_4 + 8\lambda_3\lambda_4 + 4\lambda_4^2 + 8\lambda_5^2, \\ \beta_{\lambda_5} &= \lambda_5(-3g_1^2 - 9g_2^2 + 6y_t^2 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 8\lambda_3 + 12\lambda_4), \\ \beta_{g_i} &= k_i g_i, \text{ em que } k_i = (7, -3, -7), \end{aligned}$$

com $\beta_{f_i} \equiv 16\pi^2 \mu \frac{df_i}{d\mu}$. Utilizando as mesmas condições de estabilidade (3.42), a região onde o potencial é estável até 10^{12} GeV e 10^8 GeV está representada na Figura 29. Os valores iniciais utilizados são os mesmos que compõe o gráfico da região da Figura 24. Além disso, a escala de renormalização escolhida foi a massa do bóson Z , com o acoplamento de Yukawa do quark top $y_t \approx 0,95$, como feito em [66], assim como os valores dos acoplamentos de gauge.

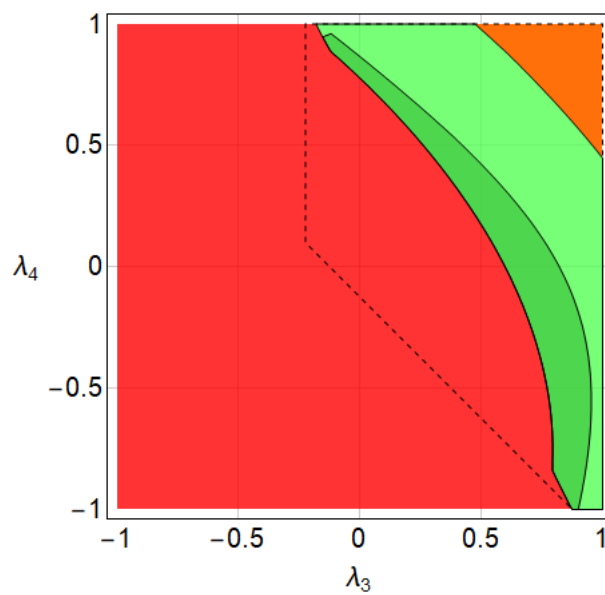


Figura 29 – O pontilhado preto representa a fronteira da região clássica. A região verde escura representa a estabilidade do potencial até 10^{12} GeV. A região verde clara representa a estabilidade até 10^8 GeV. A região laranja é o regime de não perturbatividade, isto é, $|\lambda_i| \geq 4\pi$. É esperado a diminuição da região estável em regimes de altas energias, visto que alguns parâmetros podem se tornas negativos.

Para o Modelo *triplet seesaw*, as equações do grupo de renormalização foram retiradas de [67], sendo elas as seguintes

$$\begin{aligned}
\beta_{g_i} &= b_i g_i^3 \text{ com } b_i = \left(\frac{47}{10}, -\frac{5}{2}, -7 \right), \\
\beta_{\lambda_H} &= \frac{27}{100} g_1^4 + \frac{9}{10} g_1^2 g_2^2 + \frac{9}{4} g_2^4 - \left(\frac{9}{5} g_1^2 + 9 g_2^2 \right) \lambda_H + 12 \lambda_H^2 + 6 \lambda_{H\Delta}^2 + 6 \lambda_{H\Delta} \lambda'_{H\Delta} + \frac{5}{2} \lambda'_{H\Delta}{}^2 \\
&\quad + 12 \lambda_H y_t^2 - 12 y_t^4, \\
\beta_{\lambda_{H\Delta}} &= \frac{27}{25} g_1^4 - \frac{18}{5} g_1^2 g_2^2 + 6 g_2^4 - \left(\frac{9}{2} g_1^2 + \frac{33}{2} g_2^2 \right) \lambda_{H\Delta} + 6 \lambda_H \lambda_{H\Delta} + 2 \lambda_H \lambda'_{H\Delta} + 4 \lambda_{H\Delta}^2 \\
&\quad + 8 \lambda_{\Delta} \lambda_{H\Delta} + 6 \lambda'_{\Delta} \lambda_{H\Delta} + \lambda'_{H\Delta}{}^2 + 3 \lambda_{\Delta} \lambda'_{H\Delta} + \lambda'_{\Delta} \lambda'_{H\Delta} + 6 \lambda_{H\Delta} y_t^2, \\
\beta_{\lambda'_{H\Delta}} &= \frac{36}{5} g_1^2 g_2^2 - \left(\frac{9}{2} g_1^2 + \frac{33}{2} g_2^2 \right) \lambda'_{H\Delta} + 2 \lambda_H \lambda'_{H\Delta} + 8 \lambda_{H\Delta} \lambda'_{H\Delta} + 4 \lambda'_{H\Delta}{}^2 + 2 \lambda_{\Delta} \lambda'_{H\Delta} \\
&\quad + 4 \lambda'_{\Delta} \lambda'_{H\Delta} + 6 \lambda'_{H\Delta} y_t^2, \\
\beta_{\lambda_{\Delta}} &= \frac{108}{25} g_1^4 - \frac{72}{5} g_1^2 g_2^2 + 30 g_2^4 - \left(\frac{36}{5} g_1^2 + 24 g_2^2 \right) \lambda_{\Delta} + 4 \lambda_{H\Delta}^2 + 4 \lambda_{H\Delta} \lambda'_{H\Delta} \\
&\quad + 14 \lambda_{\Delta}^2 + 12 \lambda_{\Delta} \lambda'_{\Delta} + 3 \lambda'_{\Delta}{}^2, \\
\beta_{\lambda'_{\Delta}} &= \frac{144}{5} g_1^2 g_2^2 - 12 g_2^4 + 2 \lambda'_{H\Delta}{}^2 - \left(\frac{36}{5} g_1^2 + 24 g_2^2 \right) \lambda'_{\Delta} + 12 \lambda_{\Delta} \lambda'_{\Delta} + 9 \lambda'_{\Delta}{}^2.
\end{aligned}$$

É requisitado as condições de estabilidade válidas da escala de renormalização, neste caso, a massa do bóson Z , até a escala de Planck de energia, da ordem de 10^{19} GeV. Na Figura 30, está a região dos acoplamentos $\lambda_{H\Delta}$ e $\lambda'_{H\Delta}$ que permitem o potencial escalar ser estável. As condições iniciais para os outros acoplamentos são os mesmos que geraram a Figura 26.

Por fim, pode-se concluir, a partir destes dois modelos apresentados, que há a tendência da diminuição da região estável para o potencial escalar, a medida que a escala de energia aumenta, considerando correções a um laço. O mesmo é esperado para o Modelo 3-3-1, como será visto nos próximos capítulos.

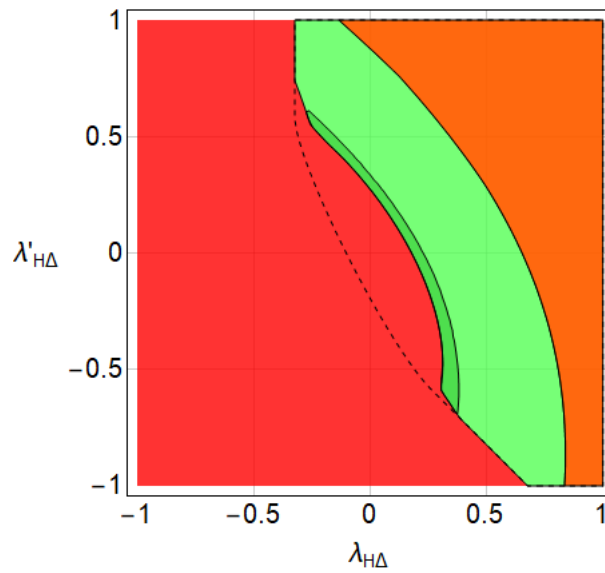


Figura 30 – A região verde escura representa a estabilidade do potencial até 10^{19} GeV, enquanto a região verde clara representa a estabilidade até 10^{12} GeV. A região laranja é o regime de não perturbatividade, enquanto a região vermelha é a região instável do potencial escalar. O pontilhado representa a fronteira obtida classicamente.

4 O Modelo 331

Atualmente, é amplamente reconhecido que o Modelo Padrão da Física de partículas não constitui uma descrição abrangente [34, 37], no sentido de oferecer uma explicação suficiente para todos os fenômenos observados. Exemplos dessas lacunas incluem a presença de matéria escura [76], o mecanismo relacionado à geração da massa dos neutrinos [77–79], o problema da violação CP forte [80, 81], e a discrepância envolvendo a assimetria matéria-antimatéria [40]. Diante disso, torna-se necessário considerar extensões do Modelo Padrão como uma abordagem essencial para a interpretação de novos conjuntos de dados e para a reprodução daqueles já confirmados pelo Modelo Padrão. Nesse contexto, a investigação de extensões do Modelo Padrão que buscam explicar, se não a totalidade, ao menos a maioria dos dados observados, aparece como um forte campo de estudo.

A concepção de ampliar o Modelo Padrão remonta a um período não recente, destacando-se, sobretudo, no contexto das Teorias de Grande Unificação. Em 1974, Georgi e Glashow [50] propuseram unificar todas as três interações fundamentais em uma única força, originada da invariância local mediante transformações de $SU(5)$. Nesse cenário, são identificados 24 bósons de gauge, enquanto os férmions se organizam em duas representações distintas de $SU(5)$, a fim de acomodar léptons e quarks.

Uma das justificações para que esta teoria fosse válida, conforme expresso pelos referidos autores, residia na perspectiva de que $\sin^2 \theta_W = 0,375$, em que θ_W denota o ângulo de Weinberg, conforme definido no Capítulo 1 em (1.68). Entretanto, medições mais recentes [43] indicam que $\sin^2 \theta_W = 0,23121$, distanciando-se substancialmente do valor inicialmente postulado. Adicionalmente, surgem incongruências neste modelo, notadamente no que concerne à taxa de decaimento do próton, que se revela inferior às expectativas [82]. Importante salientar que o modelo, em sua formulação original, carece de um mecanismo intrínseco para explicar a geração de massa dos neutrinos. Não obstante as limitações supramencionadas, esta proposta figura como uma das primeiras tentativas de unificar as três interações fundamentais da natureza, proporcionando perspectivas sobre as possíveis extensões do Modelo Padrão.

No presente capítulo, é apresentada a formulação do modelo baseado na invariância local dos grupos $SU(3)_C \times SU(3)_L \times U(1)_N$, designado também como 331, como uma das propostas de extensão do Modelo Padrão, no qual o grupo de simetria associado ao setor eletrofraco é ampliado de $SU(2)_L$ para $SU(3)_L$. A motivação para a expansão da simetria no setor eletrofraco teve origem na observação, em 1977, da produção de três estados finais de múons decorrentes da colisão de dois neutrinos altamente energéticos [83]. Esses novos resultados experimentais incitaram Lee e Weinberg [84] a estender o setor eletrofraco do Modelo Padrão de $SU(2)_L \times U(1)_Y$ para $SU(3)_L \times U(1)_N$, onde N representa a hipercarga

associada a essa extensão, dado que o grupo $SU(2)$ é um subgrupo de $SU(3)$. Na época, os próprios autores consideravam a proposta de extensão do Modelo Padrão como prematura, embora potencialmente valiosa caso viesse a se mostrar necessária.

No ano de 1980, correntes neutras no contexto do Modelo 331 foram objeto de estudo por [85], apresentando uma representação dos campos distinta daquela explorada por [84]. Em 1992, outro Modelo 331 foi analisado por [86], caracterizado por uma representação também divergente das anteriores, no entanto, [86] introduziu bósons de gauge massivos duplamente carregados, associados a uma violação explícita do número leptônico. Destaca-se, assim, que não existe uma única forma de realizar a extensão do Modelo Padrão para $SU(3)_C \times SU(3)_L \times U(1)_N$. Tal expansão para o Modelo 331 não pode ser arbitrariamente definida, uma vez que é imperativo garantir o cancelamento das anomalias de gauge, as quais, neste contexto, são neutralizadas por meio do número de famílias [87, 88], em oposição a uma abordagem geracional. Essa característica peculiar do Modelo 331 oferece uma explicação parcial para o número de famílias observado no Modelo Padrão.

Diversas abordagens são possíveis para construir modelos livres de anomalias, com o Modelo 331 econômico [89, 90] apresentando o menor número de campos e incorporando tripletos escalares para a geração de massa dos férmions, sem recorrer à inclusão de um sexteto escalar, como proposto por [86]. Desta forma, ao longo do presente texto, a estrutura do Modelo 331 será analisada em detalhes, incluindo as duas quebras espontâneas de simetria que se manifestam no modelo.

4.1 A Lagrangeana do Modelo 331

Seguindo a mesma ordem feita no Capítulo 1, dividiremos a Lagrangeana em quatro partes

$$\mathcal{L}_{331} = \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{WD} + \mathcal{L}_{Yuk} + \mathcal{L}_H. \quad (4.1)$$

A densidade Lagrangeana \mathcal{L}_{YM} assemelha-se à contribuição de Yang-Mills do Modelo Padrão, como expresso pela Equação (1.2). Notavelmente, em contraste com o Modelo Padrão, os bósons de gauge W_μ^a são agora representados na adjunta de $SU(3)_L$, constituindo um vetor de 8 componentes, onde $a = 1, \dots, 8$. Essa adaptação na representação dos bósons de gauge demanda ajustes na formulação, os quais são matematicamente expressos por

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^A G^{\mu\nu A} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{\mu\nu a} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^0 W^{0\mu\nu}, \quad (4.2)$$

em que $G_{\mu\nu}^A$ são os tensores de força da interação forte, como definido em (1.3). Define-se $W_{\mu\nu}^a$ como

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g_L f^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \quad (4.3)$$

sendo os tensores de força do grupo $SU(3)_L$. Para o tensor de força do grupo $U(1)_N$, tem-se que

$$W_{\mu\nu}^0 = \partial_\mu W_\nu^0 - \partial_\nu W_\mu^0, \quad (4.4)$$

cujas constante de acoplamento será denominada g_X .

4.1.1 Setor fermiônico

Devido à extensão para o grupo $SU(3)_L$, os férmions do Modelo Padrão envolvidos na interação fraca, conforme delineado em (1.16) e (1.18), são agora representados no Modelo 331 pela representação fundamental $\mathbf{3}$ (tripletto) de $SU(3)_L$. Contudo, essa ampliação não é de natureza trivial, uma vez que, em $SU(3)$, a representação $\bar{\mathbf{3}}$ não é equivalente à representação $\mathbf{3}$, como elucidado no Apêndice A. Tal distinção implica a possibilidade de existência de dois tripletos leptônicos em diferentes representações, a título de exemplo.

O Modelo 331 econômico, proposto por [89], se diferencia do modelo apresentado por [86] ao incorporar neutrinos destros ν_{aR} no triplete leptônico. Além disso, conforme afirmado pelo autor [89], o Modelo 331 econômico requer um número inferior de múltiplos de Higgs para a quebra espontânea de simetria, que possibilita a aquisição de massas pelos férmions. Nesse contexto, os campos fermiônicos presentes no Modelo 331 econômico são detalhadamente abordados por [89, 90], sendo definidos como

$$\text{triplete leptônico : } F_{aL} = (\nu_a, e_a, \nu_a^C)_L \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, -1/3), \quad (4.5)$$

$$\text{primeiro triplete quarkônico : } \mathbf{Q}_L = (\mathbf{u}_1, \mathbf{d}_1, \mathbf{u}_4)_L \sim (\mathbf{3}, \mathbf{3}, 1/3), \quad (4.6)$$

$$\text{segundo triplete quarkônico : } \mathbf{Q}_{bL} = (\mathbf{d}_b, \mathbf{u}_b, \mathbf{d}_{b+2})_L \sim (\mathbf{3}, \bar{\mathbf{3}}, 0), \quad (4.7)$$

$$\text{singlete leptônico : } e_{aR} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1), \quad (4.8)$$

$$\text{singlete } up \text{ quarkônico : } \mathbf{u}_{sR} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, 2/3), \quad (4.9)$$

$$\text{singlete } down \text{ quarkônico : } \mathbf{d}_{tR} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3), \quad (4.10)$$

em que $a = 1, 2, 3$, $b = 2, 3$, $s = 1, \dots, 4$ e $t = 1, \dots, 5$. A novidade em relação ao Modelo Padrão é a presença do neutrino destro, como já mencionado, mas também a adição de novos quarks exóticos: \mathbf{u}_4 , \mathbf{d}_4 , \mathbf{d}_5 , presentes no primeiro e segundo triplete quarkônico, respectivamente. Os outros campos $\nu_a, e_a, \mathbf{u}_1, \mathbf{d}_1, \mathbf{u}_b, \mathbf{d}_b$ são os neutrinos, léptons, quarks up e quarks $down$, já presentes no Modelo Padrão. O neutrino destro aparece no triplete leptônico sob a operação de conjugação de carga

$$\nu_{aR}^C = C \bar{\nu}_{aR}^T, \quad (4.11)$$

em que C é operador de conjugação de carga, sendo igual a $-i\gamma^2$ quando operado em campos destros [48]. Sob uma transformação de Lorentz, temos que [48]

$$(\nu_{aR}^C)' = -i\gamma^2 \Lambda_R^* \bar{\nu}_{aR}^T, \quad (4.12)$$

em que Λ_R é a transformação de Lorentz em campos fermiônicos destros. Utilizando a seguinte identidade [48]

$$\Lambda_L \gamma^2 = \gamma^2 \Lambda_R^*,$$

onde Λ_L é a transformação de Lorentz em campos fermiônicos canhotos, encontramos que

$$(\nu_{aR}^C)' = -i\Lambda_L \gamma^2 \bar{\nu}_{aR}^T = \Lambda_L \nu_{aR}^C, \quad (4.13)$$

isto é, ν_{aR}^C se transforma como um campo canhoto, e por isso está incluído dentro do tripleto leptônico, sendo um singlete sob $SU(2)_L$.

Percebamos que há uma troca dos sabores das duas primeiras componentes dos campos que participam de $SU(3)_L$ quando se muda a representação, visto nos tripletos quarkônicos (4.6),(4.7). Esta troca ocorre para que se mantenha o mesmo valor de *isospin* associados a estes campos. Por exemplo, \mathbf{Q}_L é constituído dos quarks *up*, *down* e um novo quark *up*. Sabe-se que o *isospin* do quark *up* e *down* é igual a $\pm 1/2$, respectivamente, ao aplicar o operador T_3 em \mathbf{Q}_L , como visto em (A.13). Assim, como o gerador T_3 adquire um sinal negativo na representação $\bar{\mathbf{3}}$, como apresentado em (A.16), então as duas primeiras componentes de \mathbf{Q}_b tem suas posições trocadas quando comparadas a \mathbf{Q}_L . Isto é, existem dubletos de $SU(2)_L$ integrados a estes tripletos de $SU(3)_L$, o que permitirá, na primeira quebra espontânea de simetria, que os campos de mesmos *isospin* se agrupem em um só dubleto de $SU(2)_L$, como será visto na primeira quebra espontânea de simetria.

Por fim, após estas considerações, a Lagrangeana do setor fermiônico é

$$\mathcal{L}_{WD} = i\bar{F}_{aL} \not{D} F_{aL} + i\bar{\mathbf{Q}}_L \not{D} \mathbf{Q}_L + i\bar{\mathbf{Q}}_{bL} \not{D} \mathbf{Q}_{bL} + i\bar{e}_{aR} \not{D} e_{aR} + i\bar{\mathbf{u}}_{sR} \not{D} \mathbf{u}_{sR} + i\bar{\mathbf{d}}_{tR} \not{D} \mathbf{d}_{tR}, \quad (4.14)$$

com as seguintes derivadas covariantes para cada termo

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_L \frac{\lambda_L^A}{2} W_\mu^a - i\frac{g_X}{6} W_\mu^0, \text{ para o tripleto leptônico}, \quad (4.15)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - i\frac{g_X}{2} W_\mu^0, \text{ para o singlete leptônico}, \quad (4.16)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_3 \frac{\lambda^A}{2} A_\mu^A + ig_L \frac{\lambda_L^A}{2} W_\mu^a + i\frac{g_X}{6} W_\mu^0, \text{ para o primeiro tripleto quarkônico}, \quad (4.17)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_3 \frac{\lambda^A}{2} A_\mu^A - ig_L \frac{\lambda_L^{A*}}{2} W_\mu^a, \text{ para o segundo tripleto quarkônico}, \quad (4.18)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_3 \frac{\lambda^A}{2} A_\mu^A + i\frac{g_X}{3} W_\mu^0, \text{ para o singlete } up \text{ quarkônico}, \quad (4.19)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_3 \frac{\lambda^A}{2} A_\mu^A - i\frac{g_X}{6} W_\mu^0, \text{ para o singlete } down \text{ quarkônico}, \quad (4.20)$$

em que $A = 1, \dots, 8$.

4.1.2 Acoplamentos de Yukawa

Novamente, como no Modelo Padrão, há uma enorme simetria global até o presente momento. Por exemplo, a partir de (4.14), tem-se a seguinte transformação global

$$F_{aL} \rightarrow F'_{aL} = U_{ab} F_{bL}, \quad (4.21)$$

em que U_{ab} é uma matriz unitária 3×3 , que deixa \mathcal{L}_{WD} invariante. Logo, considerando todas as transformações globais em (4.14), temos a seguinte simetria global

$$U(3)_F \times U(1)_{Q_1} \times U(2)_Q \times U(3)_e \times U(4)_u \times U(5)_d. \quad (4.22)$$

Assim como no Modelo Padrão, esta enorme simetria global será reduzida ao introduzir os acoplamentos de Yukawa. Diferentemente do Modelo Padrão, em que fora introduzido somente um dubleto escalar, no Modelo 331 econômico serão introduzidos três tripletos escalares [90] sob $SU(3)_L$, a saber

$$\rho = (\rho_1^+, \rho_2^0, \rho_3^+) \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, 2/3), \quad (4.23)$$

$$\eta = (\eta_1^0, \eta_2^-, \eta_3^0) \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, -1/3), \quad (4.24)$$

$$\chi = (\chi_1^0, \chi_2^-, \chi_3^0) \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, -1/3). \quad (4.25)$$

Assim, a Lagrangeana de Yukawa mais geral, renormalizável e invariante sob o grupo local de gauge do modelo é dada por [90]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yuk} = & -\alpha_t \bar{\mathbf{Q}}_L \mathbf{d}_{tR} \rho - \alpha_{bs} \bar{\mathbf{Q}}_{bL} \mathbf{u}_{sR} \rho^* - Y_{aa'} \epsilon_{ijk} (\bar{F}_{aL})_i (F_{a'L}^C)_j \rho_k^* \\ & - Y'_{aa'} \bar{F}_{aL} e_{a'R} \rho - \beta_s \bar{\mathbf{Q}}_L \mathbf{u}_{sR} \eta - \beta_{bt} \bar{\mathbf{Q}}_{bL} \mathbf{d}_{tR} \eta^* \\ & - \gamma_s \bar{\mathbf{Q}}_L \mathbf{u}_{sR} \chi - \gamma_{bt} \bar{\mathbf{Q}}_{bL} \mathbf{d}_{tR} \chi^* + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

em que ϵ_{ijk} corresponde ao tensor de Levi-Civita, com $\epsilon_{123} = 1$, tendo os índices i, j, k como referência às componentes dos campos. Dessa forma, a título exemplificativo, tem-se que

$$Y_{aa'} \epsilon_{123} (\bar{F}_{aL})_1 (F_{a'L}^C)_2 \rho_3^* \equiv Y_{aa'} \nu_{aL} e_{a'L}^C \rho_3^-.$$

Vale ressaltar que os termos $\alpha_t, \alpha_{bs}, Y_{aa'}, Y'_{aa'}, \beta_s, \beta_{bt}, \gamma_s$ e γ_{bt} são, *a priori*, entradas complexas dos acoplamentos de Yukawa, quando escritas em sua forma matricial.

É comum na literatura envolvendo o Modelo 331 impor a simetria \mathbb{Z}_2 [89, 91–96] da seguinte forma

$$\chi \rightarrow -\chi, \quad \mathbf{u}_{4R} \rightarrow -\mathbf{u}_{4R}, \quad \mathbf{d}_{(4,5)R} \rightarrow -\mathbf{d}_{(4,5)R},$$

com os demais campos tendo comportamento par sob esta transformação. Logo, $\gamma_s = 0$ para $s = 1, 2, 3$, devido a não invariância da Lagrangeana sob \mathbb{Z}_2 . Além disso, de forma a manter a invariância da Lagrangeana, as seguintes modificações também têm de ser feitas

$$\alpha_t \rightarrow \alpha_a, \quad \alpha_{bs} \rightarrow \alpha_{ba}, \quad \beta_s \rightarrow \beta_a, \quad \beta_{bt} \rightarrow \beta_{ba}, \quad \gamma_{bt} \rightarrow \gamma_{b(b+2)},$$

o que permite escrever a expressão (4.26) como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yuk, \mathbb{Z}_2} = & -\alpha_a \bar{\mathbf{Q}}_L \mathbf{d}_{aR} \rho - \alpha_{ba} \bar{\mathbf{Q}}_{bL} \mathbf{u}_{aR} \rho^* - Y_{aa'} \epsilon_{ijk} (\bar{F}_{aL})_i (F_{a'L}^C)_j \rho_k^* \\ & - Y'_{aa'} \bar{F}_{aL} e_{a'R} \rho - \beta_a \bar{\mathbf{Q}}_L \mathbf{u}_{aR} \eta - \beta_{ba} \bar{\mathbf{Q}}_{bL} \mathbf{d}_{aR} \eta^* \\ & - \gamma_4 \bar{\mathbf{Q}}_L \mathbf{u}_{4R} \chi - \gamma_{b(b+2)} \bar{\mathbf{Q}}_{bL} \mathbf{d}_{(b+2)R} \chi^* + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

A imposição da simetria discreta neste contexto, além de conferir simplicidade ao modelo, proporciona uma interpretação do campo escalar χ como o agente responsável pela primeira quebra espontânea de simetria [90, 92]. Este campo escalar encontra-se acoplado exclusivamente aos quarks exóticos de quarta e quinta geração, nomeadamente u_{4R}, d_{4R}, d_{5R} . Conforme indicado pelo Particle Data Group (PDG) [43], o limite inferior para a massa dos quarks exóticos é estabelecido em 1,3 TeV. Logo, em virtude da relação proporcional entre a massa dos férmions, derivada do mecanismo de Higgs, e o Valor Esperado no Vácuo (VEV) do campo escalar, conclui-se que o VEV de χ deve ser igual ou superior a 1,3 TeV.

Em contraste, os campos η e ρ estão acoplados aos férmions do Modelo Padrão, implicando que seus respectivos VEVs compartilham a mesma ordem de grandeza que o VEV do Modelo Padrão, conforme será discutido mais adiante. Adicionalmente, a imposição desta simetria desempenha um papel na mitigação de correntes neutras com troca de sabores, conhecidas como correntes neutras com troca de sabores (do inglês, *flavor-changing neutral current, FCNC*) [97]. Além disso, a implementação bem-sucedida do mecanismo de Peccei-Quinn pode ser realizada através da simetria \mathbb{Z}_2 , como mostrado pelos autores em [98]. Em determinadas circunstâncias, a estabilização da matéria escura também é alcançada por meio dessa simetria [99].

4.1.3 Setor escalar

A parte final da Lagrangeana consiste dos tripletos de Higgs, suas interações com os campos de gauge e as interações entre si. As derivadas covariantes de cada tripleto são definidas como

$$D_\mu \rho = \left(\partial_\mu + ig_L \frac{\lambda_L^A}{2} W_\mu^a + \frac{i}{3} g_X W_\mu^0 \right) \rho, \quad (4.28)$$

$$D_\mu \eta = \left(\partial_\mu + ig_L \frac{\lambda_L^A}{2} W_\mu^a - \frac{i}{6} g_X W_\mu^0 \right) \eta, \quad (4.29)$$

$$D_\mu \chi = \left(\partial_\mu + ig_L \frac{\lambda_L^A}{2} W_\mu^a - \frac{i}{6} g_X W_\mu^0 \right) \chi, \quad (4.30)$$

com a Lagrangeana \mathcal{L}_H tendo o seguinte formato

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu \rho)^\dagger (D^\mu \rho) + (D_\mu \eta)^\dagger (D^\mu \eta) + (D_\mu \chi)^\dagger (D^\mu \chi) - V(\rho, \eta, \chi). \quad (4.31)$$

O potencial escalar $V(\rho, \eta, \chi)$ mais geral que é invariante sob as transformações do grupo $SU(3)_L \times U(1)_X$, com a adição da simetria discreta \mathbb{Z}_2 , é dado por [90]

$$\begin{aligned} V(\rho, \eta, \chi) = & -\mu_1^2 \eta^\dagger \eta - \mu_2^2 \rho^\dagger \rho - \mu_3^2 \chi^\dagger \chi + \lambda_1 (\eta^\dagger \eta)^2 + \lambda_2 (\rho^\dagger \rho)^2 + \lambda_3 (\chi^\dagger \chi)^2 \\ & + \lambda_4 (\chi^\dagger \chi) (\eta^\dagger \eta) + \lambda_5 (\chi^\dagger \chi) (\rho^\dagger \rho) + \lambda_6 (\eta^\dagger \eta) (\rho^\dagger \rho) + \lambda_7 (\chi^\dagger \eta) (\eta^\dagger \chi) \\ & + \lambda_8 (\chi^\dagger \rho) (\rho^\dagger \chi) + \lambda_9 (\eta^\dagger \rho) (\rho^\dagger \eta) + \lambda_{10} (\chi^\dagger \eta)^2 - \frac{\lambda_{15}}{\sqrt{2}} \epsilon_{ijk} \eta_i \rho_j \chi_k + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

em que os parâmetros $\mu_1^2, \mu_2^2, \mu_2^2$ são positivos. O último termo quebra a simetria \mathbb{Z}_2 de forma suave, isto é, a transformação $\chi \rightarrow -\chi$ não é respeitada. Entretanto, retirar esse termo implica o surgimento de um áxion QCD com uma taxa pequena de decaimento [91], que já fora descartado por experimentos. Além disso, importante ressaltar que diferentemente dos outros parâmetros λ_i, λ_{15} tem dimensão de energia.

4.2 Anomalias de gauge

Concluindo a apresentação do Modelo 331 econômico, antecedendo as quebras espontâneas de simetria, é crucial examinarmos o cancelamento das anomalias de gauge nesse contexto. Em contraste com o Modelo Padrão, onde o cancelamento das anomalias opera geração por geração, no Modelo 331, o cancelamento ocorre pelo número de famílias [88]. Nesse cenário, os diagramas triangulares sujeitos à análise compreendem [88]: $[\text{SU}(3)_C]^3, [\text{SU}(3)_L]^3, [\text{SU}(3)_C]^2[\text{U}(1)_N], [\text{SU}(3)_L]^2[\text{U}(1)_N], [\text{U}(1)_N]^3$, e $[\text{U}(1)_N][\text{gráviton}]^2$, conforme representado por diagramas de Feynman na Figura 31.

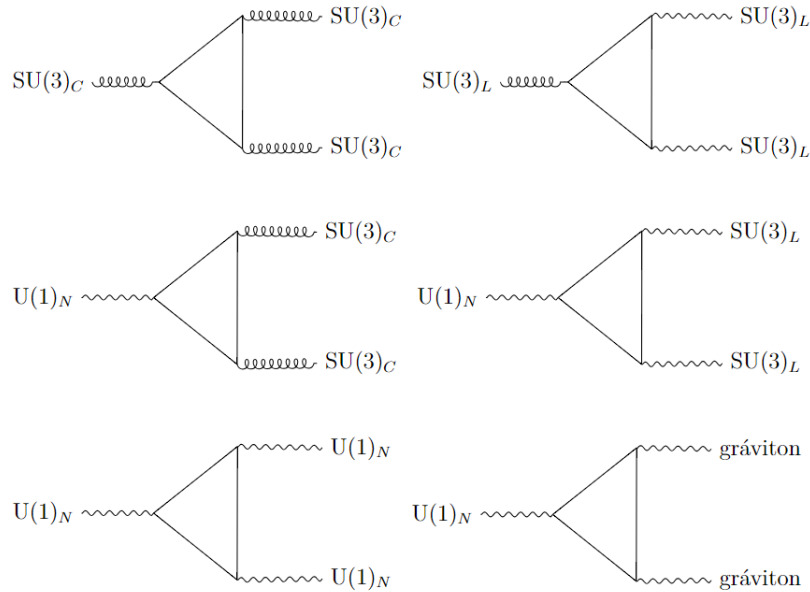


Figura 31 – Todas as anomalias não triviais dos modelos 331, como mencionado por [88].

No âmbito das equações derivadas desses diagramas, convencionaremos n_1 como o número de famílias do tripleto leptônico, n_2 para o primeiro tripleto quarkônico, e assim sucessivamente até n_6 .

A diferença dos cálculos, em relação ao Modelo Padrão, é o cancelamento das anomalias pelo número de famílias, e não por geração. Como consequência, as equações obtidas a partir dos diagramas acima têm a presença do número de famílias de cada campo fermiônico. As equações de cada diagrama, respectivamente, são [100]

$$3n_2 + 3n_3 - n_5 - n_6 = 0, [\text{SU}(3)_C]^3 \quad (4.33)$$

$$n_1 - 3(n_3 - n_2) = 0, [\text{SU}(3)_L]^3 \quad (4.34)$$

$$3n_2x_2 + 3n_3x_3 - n_5x_5 - n_6x_6 = 0, [\text{SU}(3)_C]^2[\text{U}(1)_N] \quad (4.35)$$

$$n_1x_1 + 3n_2x_2 + 3n_3x_3 = 0, [\text{SU}(3)_L]^2[\text{U}(1)_N] \quad (4.36)$$

$$3n_1x_1^3 + 9n_2x_2^3 + 9n_3x_3^3 - n_4x_4^3 - 3n_5x_5^3 - 3n_6x_6^3 = 0, [\text{U}(1)_N]^3 \quad (4.37)$$

$$3n_1x_1 + 9n_2x_2 + 9n_3x_3 - n_4x_4 - 3n_5x_5 - 3n_6x_6 = 0 [\text{U}(1)_N][\text{gráviton}]^2, \quad (4.38)$$

em que x_i são as cargas associadas ao grupo $\text{U}(1)_N$. A partir da equação (4.34), é possível chegar a duas conclusões: o número de famílias do tripleto leptônico deve ser um múltiplo de 3, já que n_1 é um número natural, e $n_3 > n_2$. Assim, o número de famílias do segundo tripleto leptônico $\bar{\mathbf{Q}}_{bL}$ terá que ser maior que \mathbf{Q}_{1L} . A menor configuração possível [88, 100] é escolher $n_3 = 2$ e $n_2 = 1$, de forma que $n_1 = 3$. Podemos tomar também $n_4 = 3$, de forma a ter o mesmo número de famílias para o singleto leptônico. Com estes resultados, as equações se resumem a

$$n_5 + n_6 = 9, \quad (4.39)$$

$$3x_2 + 6x_3 - n_5x_5 - n_6x_6 = 0, \quad (4.40)$$

$$3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0, \quad (4.41)$$

$$3x_1^3 + 9x_2^3 + 18x_3^3 - 3x_4^3 - 3n_5x_5^3 - 3n_6x_6^3 = 0, \quad (4.42)$$

$$3x_1 + 9x_2 + 18x_3 - 3x_4 - 3n_5x_5 - 3n_6x_6 = 0. \quad (4.43)$$

Os valores de x_i e o número de famílias n_i mostrados em (4.5),(4.6),(4.7), (4.8), (4.9) e (4.10) satisfazem a equação acima, e portanto, o Modelo 331 econômico estudado neste texto é livre de anomalias de gauge. Outros estudos do Modelo 331, visando o cancelamento de anomalias, são analisados em [87, 88, 100, 101].

4.3 A estrutura do vácuo do Modelo 331

No âmbito do Modelo Padrão, apresentado no Capítulo 1, é notório que o potencial escalar se revela significativamente mais simplificado quando comparado ao Modelo 331 econômico. Essa simplificação decorre do reduzido número de graus de liberdade envolvidos.

No Modelo Padrão, a quebra espontânea de simetria é realizada através de um dubleto de $SU(2)_L$, o qual apresenta quatro graus de liberdade. Destes, três estão vinculados aos bósons de Nambu-Goldstone, restando apenas o bóson de Higgs h . A consequência direta dessa configuração é a facilitação do processo de minimização do potencial escalar no Modelo Padrão, bem como a identificação mais direta dos bósons de Nambu-Goldstone e do bóson de Higgs.

A disparidade de cenário torna-se evidente ao contemplar o Modelo 331 econômico, uma vez que o potencial escalar (4.32) compreende dezoito parâmetros, dos quais três, nomeadamente μ_1, μ_2, μ_3 , estão relacionados à minimização do potencial. Adicionalmente, os campos escalares possuem dezoito graus de liberdade, e após a quebra espontânea da simetria

$$SU(3)_L \times U(1)_N \rightarrow U(1)_Q,$$

permanecem ainda dez graus de liberdade, associados aos bósons escalares físicos. Esse cenário confere ao modelo uma fenomenologia notavelmente mais rica e complexa em comparação ao Modelo Padrão. Vale ressaltar que os oito graus de liberdade remanescentes estão relacionados aos bósons de Nambu-Goldstone, sendo cinco deles associados à primeira quebra de simetria, enquanto os três restantes estão vinculados à última.

As interações entre os escalares, representadas pelos parâmetros quárticos λ_i e pelo parâmetro cúbico λ_{15} , induzem misturas entre os bósons escalares físicos e os bósons de Nambu-Goldstone. Isso confere uma complexidade substancial à tarefa de expressar os campos ϕ , η , e χ em termos dos bósons reais e dos bósons de Nambu-Goldstone, quando comparado ao Modelo Padrão. Certas expressões tornam-se muito complexas, levando-nos a adotar a abordagem de diagonalização dos autoestados de massa dos bósons escalares, conforme previamente realizado em [92, 93, 102].

A viabilidade da diagonalização é possível mediante a adoção de uma hierarquia específica, notadamente $v_\chi \gg v_\eta, v_\rho$, onde v_χ , v_η e v_ρ indicam os valores esperados do vácuo para os campos χ , ρ e η , respectivamente. Essa hierarquia, crucial para simplificar a análise, é ressaltada em estudos prévios sobre as transições de fase no Modelo 331, como referenciado em [103, 104].

Sob essa aproximação e no contexto do gauge unitário, no qual os bósons de Nambu-Goldstone são considerados nulos, os bósons escalares, expressos nas equações (4.23), (4.24) e (4.25), adquirem a seguinte forma

$$\chi \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_3 - iH_5 \end{pmatrix}, \quad \eta \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} h \sin \theta - \cos \theta H \\ -\sqrt{2} \sin \alpha_1 H_1^- \\ H_U - iH_4 \end{pmatrix}, \quad \rho \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos \alpha_1 H_1^+ \\ \cos \theta h + \sin \theta H \\ \sqrt{2} H_2^+ \end{pmatrix}, \quad (4.44)$$

onde

$$\cos \theta = -\sin \alpha_1 = \frac{v_\rho}{v}, \quad \sin \theta = \cos \alpha_1 = \frac{v_\eta}{v}, \quad (4.45)$$

com $v = \sqrt{v_\eta^2 + v_\rho^2} \approx 246 \text{ GeV}$ [90], correspondendo ao VEV do Modelo Padrão. Neste texto, realizaremos as duas etapas da quebra espontânea de simetria, de forma a perceber as suas peculiaridades, em relação ao Modelo Padrão, e como se dará os termos de interação ao fim de cada quebra, sempre que for possível.

4.4 Primeira quebra espontânea de simetria

O campo χ será o responsável por dar massa aos novos bósons de gauge, bem como os quarks exóticos $\mathbf{u}_4, \mathbf{d}_{(4,5)}$, devido ao VEV adquirido pelo triplete χ [90]

$$\langle \chi \rangle = \frac{v_\chi}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

A primeira quebra espontânea de simetria é expressa como

$$\text{SU}(3)_L \times \text{U}(1)_N \xrightarrow{\langle \chi \rangle} \text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y,$$

desempenhando o papel de restaurar o Modelo Padrão. Contudo, é importante ressaltar que, nesse cenário, novas partículas emergem, introduzindo uma nova estrutura na Física subjacente.

Dos nove geradores do Modelo 331 envolvidos na quebra de simetria - sendo oito relacionados ao grupo $\text{SU}(3)_L$ e o último ao $\text{U}(1)_N$ - observa-se que cinco destes não preservam o vácuo invariante. É importante destacar que os geradores T_L^1, T_L^2 e T_L^3 , definidos como $\frac{\lambda_L^1}{2}, \frac{\lambda_L^2}{2}$ e $\frac{\lambda_L^3}{2}$, respectivamente, preservam a invariância do vácuo, como esperado. Isto é, tem-se que

$$T_L^1 \langle \chi \rangle = \frac{v_\chi}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad T_L^2 \langle \chi \rangle = \frac{v_\chi}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad (4.47)$$

$$T_L^3 \langle \chi \rangle = \frac{v_\chi}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (4.48)$$

Dessa forma, pelo teorema de Nambu-Goldstone, os bósons de gauge associados a estes geradores não ganham massa, não sendo uma surpresa, pois estes geradores estão relacionados aos geradores do grupo $\text{SU}(2)_L$ que, na segunda quebra espontânea de simetria, darão massa aos bósons de gauge do Modelo Padrão W^\pm e Z^0 .

Há ainda uma combinação não trivial que deixa o vácuo invariante

$$\frac{Y}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} T^8 + N \mathbf{1}_{3 \times 3} \equiv \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} + N & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} + N & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} + N \end{pmatrix}, \quad (4.49)$$

em que Y é a hipercarga fraca do Modelo Padrão. Para χ temos que $N = -1/3$, e dessa forma $Y/2\langle\chi\rangle = 0$. O bóson sem massa associado a esta transformação é B_μ , definido em (1.5). Portanto, é esperado que existam quatro bósons de gauge sem massa, relacionados a estes geradores não quebrados. Por outro lado, os geradores T^4, T^5, T^6 e T^7 não deixam o vácuo invariante

$$T_L^4\langle\chi\rangle = \frac{v_\chi}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0, \quad T_L^5\langle\chi\rangle = \frac{v_\chi}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0, \quad (4.50)$$

$$T_L^6\langle\chi\rangle = \frac{v_\chi}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0, \quad T_L^7\langle\chi\rangle = \frac{v_\chi}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0, \quad (4.51)$$

sendo responsáveis por darem massa a quatro bósons de gauge. O outro bóson massivo de gauge virá de uma combinação entre os geradores T^8 e $\mathbf{1}_{3\times 3}$ que não deixa o vácuo invariante.

Seguindo de (4.44), temos para χ o seguinte

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_\chi + H_3(x) - iH_5(x) \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

em que $H_5(x), H_3(x)$ zeram quando avaliados no vácuo, isto é, reproduzem (4.46).

A partir da derivada covariante de χ , vista em (4.30), temos que

$$\begin{aligned} D_\mu\chi &= \begin{pmatrix} i\frac{g_L}{2\sqrt{2}}(W_\mu^4 - iW_\mu^5)(v_\chi + H_3 - iH_5) \\ i\frac{g_L}{2\sqrt{2}}(W_\mu^6 - iW_\mu^7)(v_\chi + H_3 - iH_5) \\ \partial_\mu\frac{(H_3 - iH_5)}{\sqrt{2}} - i\left(g_L\frac{W_\mu^8}{\sqrt{3}} + \frac{g_X}{6}W_\mu^0\right)\left(\frac{v_\chi + H_3 - iH_5}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i\frac{g_L}{2}X_\mu^0(v_\chi + H_3 - iH_5) \\ i\frac{g_L}{2}Y_\mu^-(v_\chi + H_3 - iH_5) \\ \partial_\mu\frac{(H_3 - iH_5)}{\sqrt{2}} - i\left(g_L\frac{W_\mu^8}{\sqrt{3}} + \frac{g_X}{6}W_\mu^0\right)\left(\frac{v_\chi + H_3 - iH_5}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

em que definimos as combinações dos bósons da seguinte $W_\mu^4, W_\mu^5, W_\mu^6, W_\mu^7$ da seguinte forma

$$Y_\mu^\pm = \frac{W_\mu^6 \pm iW_\mu^7}{\sqrt{2}}, \quad X_\mu^0 = \frac{W_\mu^4 - iW_\mu^5}{\sqrt{2}}, \quad X_\mu^{0*} = \frac{W_\mu^4 + iW_\mu^5}{\sqrt{2}}, \quad (4.53)$$

tal que os sinais $\pm, 0$ correspondem às cargas elétricas destes bósons de gauge, já que cada componente de $D_\mu\chi$ tem a mesma carga da definição de χ em (4.25). Logo, o termo cinético de χ toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} (D_\mu\chi)^\dagger(D^\mu\chi) &= \frac{1}{2}\partial_\mu H_3\partial^\mu H_3 + \frac{1}{2}\partial_\mu H_5\partial^\mu H_5 + \frac{g_L^2}{4}X_\mu^0X^{\mu 0*}[(v_\chi + H_3)^2 + H_5^2] \\ &+ \frac{g_L^2}{4}Y_\mu^-Y^{+\mu}[(v_\chi + H_3)^2 + H_5^2] + \left(g_L\frac{W_\mu^8}{\sqrt{3}} + \frac{g_X}{6\sqrt{2}}W_\mu^0\right)^2 [(v_\chi + H_3)^2 + H_5^2]. \end{aligned} \quad (4.54)$$

A partir da combinação de W_μ^8, W_μ^0 do último termo, é possível reescrevê-lo como

$$\left(g_L \frac{W_\mu^8}{\sqrt{6}} + \frac{g_X}{6\sqrt{2}} W_\mu^0 \right)^2 = \frac{12g_L^2 + g_X^2}{72} (\cos \theta_X W_\mu^8 - \sin \theta_X W_\mu^0)^2, \quad (4.55)$$

com

$$\cos \theta_X = \frac{g_L}{\sqrt{g_L^2 + \frac{g_X^2}{12}}}, \quad \sin \theta_X = -\frac{g_X}{2\sqrt{3}\sqrt{g_L^2 + \frac{g_X^2}{12}}}, \quad \tan \theta_X = -\frac{g_X}{2\sqrt{3}g_L}. \quad (4.56)$$

Assim, define-se o novo campo neutro de gauge Z'_μ como

$$Z'_\mu = \cos \theta_X W_\mu^8 - \sin \theta_X W_\mu^0, \quad (4.57)$$

e também o campo ortogonal a este B_μ , visto no Modelo Padrão

$$B_\mu = \sin \theta_X W_\mu^8 + \cos \theta_X W_\mu^0, \quad (4.58)$$

o que nos leva a escrever a seguinte matriz de rotação entre os campos B_μ, Z'_μ e W_μ^8, W_μ^0

$$\begin{pmatrix} B_\mu \\ Z'_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_X & \sin \theta_X \\ -\sin \theta_X & \cos \theta_X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^0 \\ W_\mu^8 \end{pmatrix}. \quad (4.59)$$

Dessa forma, (4.54) é reescrita como

$$\begin{aligned} (D_\mu \chi)^\dagger (D^\mu \chi) &= \frac{1}{2} \partial_\mu H_3 \partial^\mu H_3 + \frac{1}{2} \partial_\mu H_5 \partial^\mu H_5 + \frac{v_\chi^2 g_L^2}{4} X_\mu^0 X^{\mu 0*} \left(1 + \frac{H_3(x)}{v_\chi} \right)^2 \\ &+ \frac{v_\chi^2 g_L^2}{4} Y_\mu^- Y^{+\mu} \left(1 + \frac{H_3(x)}{v_\chi} \right)^2 + v_\chi^2 \frac{12g_L^2 + g_X^2}{72} Z'_\mu Z'^\mu \left(1 + \frac{H_3(x)}{v_\chi} \right)^2 \\ &+ \frac{g_L^2}{4} X_\mu^0 X^{\mu 0*} H_5^2 + \frac{g_L^2}{4} Y_\mu^- Y^{+\mu} H_5^2 + \frac{12g_L^2 + g_X^2}{72} Z'_\mu Z'^\mu H_5^2, \end{aligned}$$

com as massas dos bósons $X_\mu^0, X_\mu^{0*}, Y_\mu^\pm$ e Z'_μ sendo iguais a

$$m_{X^0}^2 = \frac{g_L^2 v_\chi^2}{4}, \quad m_{Y^\pm}^2 = \frac{g_L^2 v_\chi^2}{4}, \quad m_{Z'}^2 = v_\chi^2 \frac{12g_L^2 + g_X^2}{36}. \quad (4.60)$$

Portanto, a forma final do termo cinético de χ é

$$\begin{aligned} (D_\mu \chi)^\dagger (D^\mu \chi) &= \frac{1}{2} \partial_\mu H_3 \partial^\mu H_3 + \frac{1}{2} \partial_\mu H_5 \partial^\mu H_5 + m_{X^0}^2 X_\mu^0 X^{\mu 0*} \left(1 + \frac{H_3(x)}{v_\chi} \right)^2 \\ &+ m_{Y^\pm}^2 Y_\mu^- Y^{+\mu} \left(1 + \frac{H_3(x)}{v_\chi} \right)^2 + \frac{m_{Z'}^2}{2} Z'_\mu Z'^\mu \left(1 + \frac{H_3(x)}{v_\chi} \right)^2 \\ &+ \frac{m_{X^0}^2}{v_\chi^2} X_\mu^0 X^{\mu 0*} H_5^2 + \frac{m_{Y^\pm}^2}{v_\chi^2} Y_\mu^- Y^{+\mu} H_5^2 + \frac{m_{Z'}^2}{2v_\chi^2} Z'_\mu Z'^\mu H_5^2, \end{aligned}$$

Como era esperado, os cinco geradores quebrados estão relacionados aos cinco bósons de gauge massivos. Todos estes não estão presentes no Modelo Padrão, significando novas partículas a serem encontradas, assim como os novos bósons escalares.

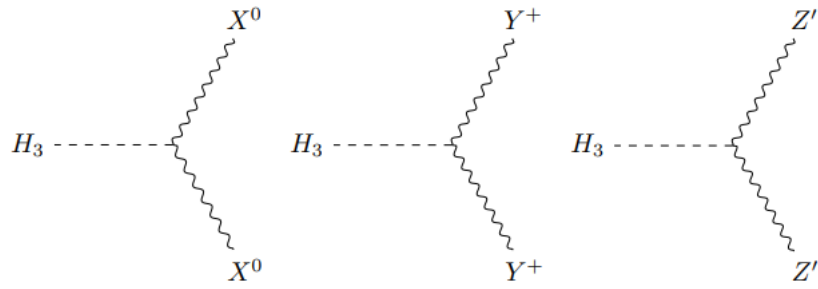


Figura 32 – As interações cúbicas do bóson escalar H_3 com os novos bósons de gauge do Modelo 331 econômico.

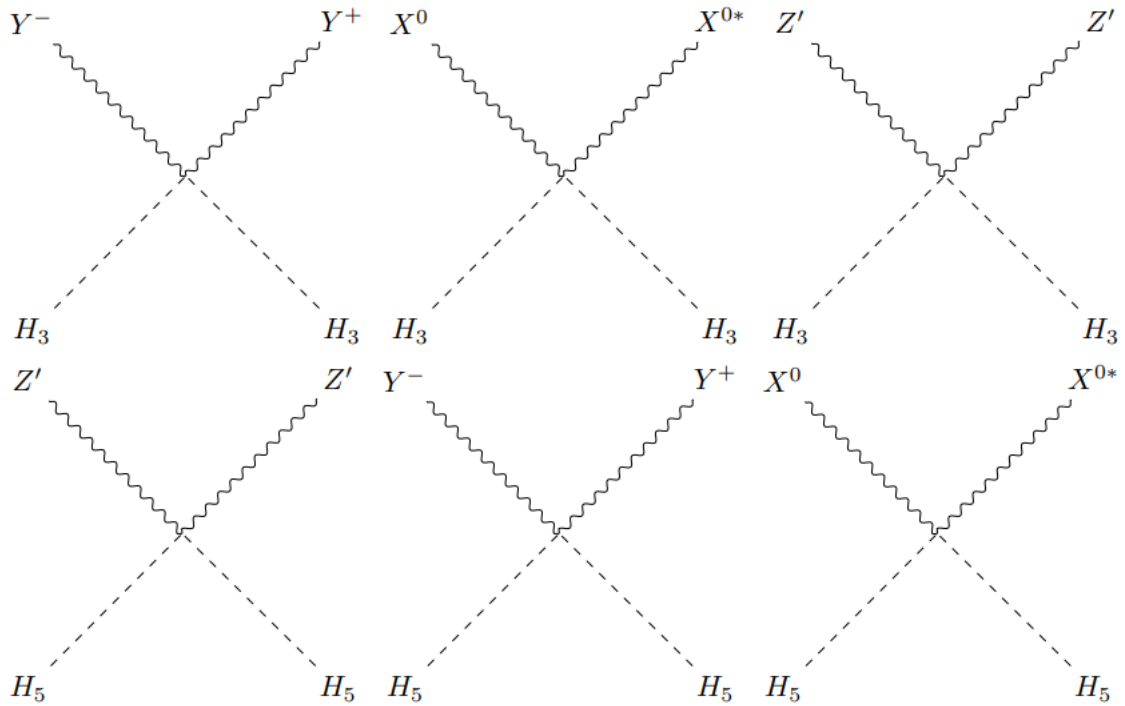


Figura 33 – As interações quárticas entre os bósons escalares H_3 e H_5 com os bósons de gauge. O bóson escalar H_5 consiste somente de interações de ordem quártica.

4.4.1 Quarks de quarta e quinta geração

Apenas os quarks de quarta e quinta geração, presentes na terceira linha de (4.27), adquirem massa nesta etapa. Consequentemente, a Lagrangeana avaliada em χ_0 assume a seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yuk, Z_2}^{(4,5)} = & -\frac{v_\chi \gamma_4}{\sqrt{2}} \bar{\mathbf{u}}_{4L} \mathbf{u}_{4R} \left(1 + \frac{H_3}{v_\chi} - \frac{iH_5}{v_\chi} \right) \\ & -\frac{v_\chi \gamma^{b(b+2)}}{\sqrt{2}} \bar{\mathbf{d}}_{(b+2)L} \mathbf{d}_{(b+2)R} \left(1 + \frac{H_3}{v_\chi} + \frac{iH_5}{v_\chi} \right) + \text{H.c.} \end{aligned} \quad (4.61)$$

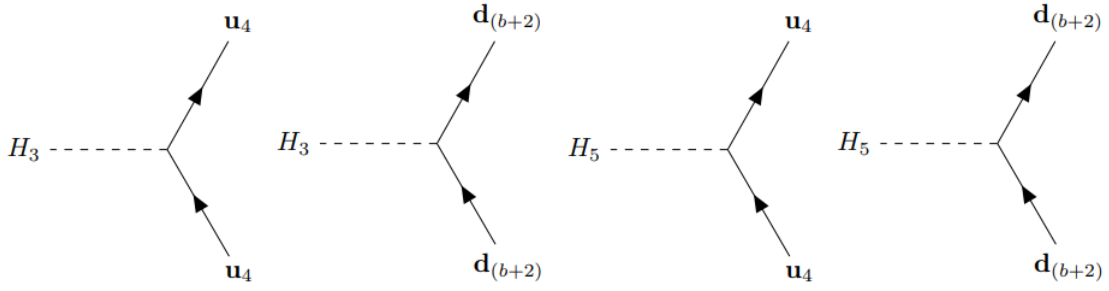


Figura 34 – A interação de Yukawa dos novos quarks pesados de quarta e quinta geração. Dados do Particle Data Group [43] indicam que a massa para os quarks *down* de quarta geração tem limite inferior de 46 GeV a partir da colisão elétron-pósitron, e limite inferior de 1,57 TeV para decaimento envolvendo o bóson de Higgs e o quark bottom. O limite inferior da massa do quark *up* de quarta geração é de 1,35 TeV no decaimento para o bóson *W* e o quark top.

A partir dos termos conjugados hermitianos, é possível definir um spinor de Dirac para estes novos quarks

$$\mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{4L} \\ \mathbf{u}_{4R} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_{(b+2)} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{(b+2)L} \\ \mathbf{d}_{(b+2)R} \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, $\mathcal{L}_{Yuk, \mathbb{Z}_2}^{(4,5)}$ é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yuk, \mathbb{Z}_2}^{(4,5)} &= -\frac{v_\chi \gamma_4}{\sqrt{2}} \bar{\mathbf{u}}_4 \mathbf{u}_4 \left(1 + \frac{H_3}{v_\chi}\right) + i \frac{\gamma_4}{\sqrt{2}} (\bar{\mathbf{u}}_{4L} \mathbf{u}_{4R} - \bar{\mathbf{u}}_{4R} \mathbf{u}_{4L}) H_5 \\ &\quad - \frac{v_\chi \gamma_{b(b+2)}}{\sqrt{2}} \bar{\mathbf{d}}_{(b+2)} \mathbf{d}_{(b+2)} \left(1 + \frac{H_3}{v_\chi}\right) - i \frac{\gamma_{b(b+2)}}{\sqrt{2}} (\bar{\mathbf{d}}_{(b+2)L} \mathbf{d}_{(b+2)R} - \bar{\mathbf{d}}_{(b+2)R} \mathbf{d}_{(b+2)L}) H_5 \\ &= -\frac{v_\chi \gamma_4}{\sqrt{2}} \bar{\mathbf{u}}_4 \mathbf{u}_4 \left(1 + \frac{H_3}{v_\chi}\right) + i \frac{\gamma_4}{\sqrt{2}} \bar{\mathbf{u}}_4 \gamma^5 \mathbf{u}_4 H_5 \\ &\quad - \frac{v_\chi \gamma_{b(b+2)}}{\sqrt{2}} \bar{\mathbf{u}}_{(b+2)} \mathbf{u}_{(b+2)} \left(1 + \frac{H_3}{v_\chi}\right) - i \frac{\gamma_{b(b+2)}}{\sqrt{2}} \bar{\mathbf{u}}_{(b+2)} \gamma^5 \mathbf{u}_{(b+2)} H_5 \end{aligned} \quad (4.62)$$

em que γ^5 surge a partir das decomposições dos termos em canhotos e destros, como mostrado em [34]. A forma de Dirac permite identificar as massas destes novos quarks

$$m_{u_4} = \frac{v_\chi \gamma_4}{\sqrt{2}}, \quad m_{d_4} = \frac{v_\chi \gamma_{24}}{\sqrt{2}}, \quad m_{d_5} = \frac{v_\chi \gamma_{35}}{\sqrt{2}}, \quad (4.63)$$

onde identificamos que $\gamma_4, \gamma_{24}, \gamma_{35}$ são reais.

É relevante examinar os efeitos da aplicação do operador *CP* na Lagrangeana em questão. Nesse contexto, concentraremos nossa atenção na Lagrangeana que engloba exclusivamente o quark exótico \mathbf{u}_4 , observando que a análise a seguir é extensiva a $\mathbf{u}_{(b+2)}$. Assim, consideremos

$$CP : \mathcal{L}_{Yuk, \mathbb{Z}_2}^4 = -\frac{v_\chi \gamma_4}{\sqrt{2}} \bar{\mathbf{u}}_4 \mathbf{u}_4 \left(1 + \frac{H_3^{CP}}{v_\chi}\right) - i \frac{\gamma_4}{\sqrt{2}} \bar{\mathbf{u}}_4 \gamma^5 \mathbf{u}_4 H_5^{CP},$$

onde o produto $\bar{\mathbf{u}}_4 \mathbf{u}_4$ é invariante sob *CP* [34]. O mesmo não ocorre para $\bar{\mathbf{u}}_4 \gamma^5 \mathbf{u}_4$, adquirindo um sinal negativo. Assim, se quisermos que esta Lagrangeana seja invariante por *CP*, é

necessário que

$$H_3^{CP} \rightarrow H_3, \quad H_5^{CP} \rightarrow -H_5. \quad (4.64)$$

Dessa forma, dizemos que H_3 é par sob transformações CP , enquanto H_5 é ímpar.

4.4.2 Termos cinéticos dos férmions

A reorganização dos termos cinéticos fermiônicos é feita a partir das substituições dos novos campos de gauge em suas derivadas covariantes, definidas em (4.15) a (4.20). Para melhor entendimento, os cálculos serão realizados para cada campo, começando a partir do tripleto leptônico. Vale ressaltar que os campos W_μ^1, W_μ^2 e W_μ^3 permanecem inalterados. Além disso, será útil as seguintes relações, obtidas da inversão da matriz de rotação em (4.59)

$$W_\mu^0 = \cos \theta_X B_\mu - \sin \theta_X Z'_\mu, \quad W_\mu^8 = \sin \theta_X B_\mu + \cos \theta_X Z'_\mu. \quad (4.65)$$

Assim, começando da derivada covariante do primeiro tripleto leptônico (4.15)

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_L \frac{\lambda^i}{2} W_\mu^i + i \frac{g_L}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & W_\mu^4 - iW_\mu^5 \\ 0 & 0 & W_\mu^6 - iW_\mu^7 \\ W_\mu^4 + iW_\mu^5 & W_\mu^6 + iW_\mu^7 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} g_L \frac{W_\mu^8}{2\sqrt{3}} - g_X \frac{W_\mu^0}{6} & 0 & 0 \\ 0 & g_L \frac{W_\mu^8}{2\sqrt{3}} - g_X \frac{W_\mu^0}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -g_L \frac{W_\mu^8}{\sqrt{3}} - g_X \frac{W_\mu^0}{6} \end{pmatrix}, \quad (4.66)$$

com o índice $i = 1, 2, 3$. Assim, utilizando as relações (4.59) e (4.65), tem-se os seguintes resultados para as combinações de W_μ^8, W_μ^0

$$\begin{aligned} \frac{g_L}{2\sqrt{3}} W_\mu^8 - \frac{g_X}{6} W_\mu^0 &= \left(\frac{g_L \sin \theta_X}{2\sqrt{3}} - \frac{g_X \cos \theta_X}{6} \right) B_\mu + \left(\frac{g_L \cos \theta_X}{2\sqrt{3}} + \frac{g_X \sin \theta_X}{6} \right) Z'_\mu \\ &= -\frac{g_1}{2} B_\mu + \frac{g_1}{6} (\cot \theta_X - 2 \tan \theta_X) Z'_\mu; \\ \frac{g_L}{\sqrt{3}} W_\mu^8 + \frac{g_X}{6} W_\mu^0 &= \left(\frac{g_L \sin \theta_X}{\sqrt{3}} + \frac{g_X \cos \theta_X}{6} \right) B_\mu + \left(\frac{g_L \cos \theta_X}{\sqrt{3}} - \frac{g_X \sin \theta_X}{6} \right) Z'_\mu \\ &= -\frac{g_1}{3} (\cot \theta_X + \tan \theta_X) Z'_\mu, \end{aligned} \quad (4.67)$$

em que a constante de acoplamento g_1 do grupo $U(1)_Y$ do Modelo Padrão fora definida da seguinte forma

$$g_1 = \left(\frac{g_L g_X}{2\sqrt{g_L^2 + \frac{g_X^2}{12}}} \right) \equiv \frac{g_X \cos \theta_X}{2}. \quad (4.68)$$

Dessa forma, a derivada covariante para F_{aL} é reescrita como

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_L \frac{\lambda^i}{2} W_\mu^i + i \frac{g_L}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_\mu^0 \\ 0 & 0 & Y_\mu^- \\ X_\mu^{0*} & Y_\mu^+ & 0 \end{pmatrix} - i \frac{g_1}{2} B_\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.69)$$

$$+ i \frac{g_1}{6} Z'_\mu \begin{pmatrix} \cot \theta_X - 2 \tan \theta_X & & & 0 \\ & 0 & & \cot \theta_X - 2 \tan \theta_X \\ & & 0 & \\ 0 & & & -2(\cot \theta_X + \tan \theta_X) \end{pmatrix}.$$

Ao analisar a derivada covariante acima do tripleto leptônico, é possível notar que o neutrino ν_{aR}^C terá interações diferentes quando comparado com ν_{aL} e e_{aL} . Assim, este tripleto será dividido em dois campos: o dubleto L_a do Modelo Padrão; e o singlete ν_{aR}^C . Dessa forma, $i\bar{F}_{aL}\not{D}F_{aL}$ se torna, após uma pequena álgebra, o seguinte

$$i\bar{F}_{aL}\not{D}F_{aL} = i\bar{L}_a\gamma^\mu \left(\partial_\mu + ig_L \frac{\sigma^i}{2} W_\mu^i - i \frac{g_1}{2} B_\mu \right) L_a - \frac{g_1}{6} (\cot \theta_X - 2 \tan \theta_X) \bar{L}_a \not{Z}' L_a$$

$$+ i\bar{\nu}_{aR}^C \gamma^\mu \left(\partial_\mu - i \frac{g_1}{3} (\cot \theta_X + \tan \theta_X) Z'_\mu \right) \nu_{aR}^C - \frac{g_L}{\sqrt{2}} \bar{L}_a \not{V} \nu_{aR}^C + \text{H.c.}, \quad (4.70)$$

com σ^i são as matrizes de Pauli. Definimos também o dubleto V_μ da seguinte forma

$$V_\mu = \begin{pmatrix} X_\mu^0 \\ Y_\mu^- \end{pmatrix}. \quad (4.71)$$

Assim, além das interações presentes no Modelo Padrão, há novas interações que permitem a mudança de sabor entre léptons, devido à presença dos termos $\bar{L}_a \not{Z}' L_a$ e $\bar{L}_a \not{V} N_a^C$. Para terminar o setor cinético dos léptons, a nova derivada covariante do singlete leptônico (4.16) é

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_1 B_\mu - ig_1 \tan \theta_X Z'_\mu. \quad (4.72)$$

Dessa forma, o termo cinético de e_{aR} é dado por

$$i\bar{e}_{aR}\not{D}e_{aR} = i\bar{e}_{aR}\gamma^\mu (\partial_\mu - ig_1 B_\mu) e_{aR} + g_1 \tan \theta_X \bar{e}_{aR} \not{Z}' e_{aR}. \quad (4.73)$$

Para o setor dos quarks, analisaremos somente a parte da derivada covariante que contém o setor eletrofraco. Assim, a derivada covariante do primeiro tripleto quarkônico é, após uma pequena álgebra, a seguinte

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_L \frac{\lambda^i}{2} W_\mu^i + i \frac{g_L}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_\mu^0 \\ 0 & 0 & Y_\mu^- \\ X_\mu^{0*} & Y_\mu^+ & 0 \end{pmatrix} + ig_1 B_\mu \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad (4.74)$$

$$- i \frac{g_1}{6} Z'_\mu \begin{pmatrix} \cot \theta_X + 2 \tan \theta_X & & & 0 \\ & 0 & & \cot \theta_X + 2 \tan \theta_X \\ & & 0 & \\ 0 & & & -2(\cot \theta_X - \tan \theta_X) \end{pmatrix}.$$

A fim de tornar mais claro que esta primeira quebra de simetria retorna ao Modelo Padrão, é possível, assim como fora feito para o tripleto leptônico, separar \mathbf{Q}_1 em um dubleto e um singlete, da seguinte forma

$$\begin{aligned} i\bar{\mathbf{Q}}_1 \not{D} \mathbf{Q}_1 &= i\bar{\mathbf{Q}}_{1L} \gamma^\mu \left(\partial_\mu + i\frac{g_L}{2} \sigma^i W_\mu^i + i\frac{g_1}{6} B_\mu \right) \mathbf{Q}_{1L} + \frac{g_1}{6} (\cot \theta_X + 2 \tan \theta_X) \bar{\mathbf{Q}}_{1L} \not{Z}' \mathbf{Q}_{1L} \\ &+ i\bar{\mathbf{u}}_{4L} \gamma^\mu \left(\partial_\mu + i\frac{2g_1}{3} B_\mu + i\frac{g_1}{3} (\cot \theta_X - \tan \theta_X) Z'_\mu \right) \mathbf{u}_{4L} - \frac{g_L}{\sqrt{2}} \bar{\mathbf{Q}}_{1L} \not{V} \mathbf{u}_{4L} + \text{H.c.}, \end{aligned} \quad (4.75)$$

em que \mathbf{Q}_{1L} é definido como

$$\mathbf{Q}_{1L} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{1L} \\ \mathbf{d}_{1L} \end{pmatrix}, \quad (4.76)$$

isto é, o dubleto de quarks em $SU(2)_L$ contendo somente a primeira geração. Para o segundo tripleto quarkônico, teremos o seguinte

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - ig_L \frac{\lambda^{i*}}{2} W_\mu^i - i\frac{g_L}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_\mu^{0*} \\ 0 & 0 & Y_\mu^+ \\ X_\mu^0 & Y_\mu^- & 0 \end{pmatrix} + ig_1 B_\mu \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &+ i\frac{g_1}{6} Z'_\mu \begin{pmatrix} \cot \theta_X & 0 & 0 \\ 0 & \cot \theta_X & 0 \\ 0 & 0 & -2 \cot \theta_X \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Como \mathbf{Q}_{bL} está na representação antifundamental de $SU(3)_L$, então recuperar o dubleto do Modelo Padrão envolve um pouco de álgebra, como visto a seguir. Assim, consideremos o termo cinético

$$\begin{aligned} i\bar{\mathbf{Q}}_{bL} \not{D} \mathbf{Q}_{bL} &\equiv i\bar{\mathbf{Q}}_{bL} \gamma^\mu \left(\partial_\mu - i\frac{g_L}{2} \sigma^{i*} W_\mu^i + i\frac{g_1}{6} B_\mu \right) \mathbf{Q}_{bL} + \frac{g_1}{6} \cot \theta_X \bar{\mathbf{Q}}_{bL} \not{Z}' \mathbf{Q}_{bL} \\ &+ i\bar{\mathbf{d}}_{(b+2)L} \gamma^\mu \left(\partial_\mu - i\frac{g_1}{3} B_\mu - i\frac{g_1}{3} \cot \theta_X Z'_\mu \right) \mathbf{d}_{(b+2)L} \\ &+ \frac{g_L}{\sqrt{2}} \bar{\mathbf{Q}}_{bL} \not{V} \mathbf{d}_{(b+2)L} + \text{H.c.}, \end{aligned} \quad (4.78)$$

com a seguinte definição para o dubleto \mathbf{Q}_{bL}

$$\mathbf{Q}_{bL} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{bL} \\ \mathbf{u}_{bL} \end{pmatrix}, \quad (4.79)$$

A partir da expansão do termo $\sigma^{i*} W_\mu^i$ em (4.78), temos que

$$\begin{aligned} -i\frac{g_L}{2} \bar{\mathbf{Q}}_{bL} \sigma^{i*} W_\mu^i \mathbf{Q}_{bL} &= i\frac{g_L}{2} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{d}}_{bL} & \bar{\mathbf{u}}_{bL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 + iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 - iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{bL} \\ \mathbf{u}_{bL} \end{pmatrix} \\ &= i\frac{g_L}{2} \left[\bar{\mathbf{d}}_{bL} W_\mu^3 \mathbf{d}_{bL} + \bar{\mathbf{u}}_{bL} (W_\mu^1 - iW_\mu^2) \mathbf{d}_{bL} + \bar{\mathbf{d}}_{bL} (W_\mu^1 + iW_\mu^2) \mathbf{u}_{bL} - \bar{\mathbf{u}}_{bL} W_\mu^3 \mathbf{u}_{bL} \right] \\ &= i\frac{g_L}{2} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{bL} & \bar{\mathbf{d}}_{bL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{bL} \\ \mathbf{d}_{bL} \end{pmatrix} = i\frac{g_L}{2} \bar{\mathbf{Q}}'_{bL} \sigma^i W_\mu^i \mathbf{Q}'_{bL}, \end{aligned} \quad (4.80)$$

em que fora usado a operação de conjugação do grupo $SU(2)$ $\sigma^{i*} = -\sigma^2 \sigma^i \sigma^2$. Além disso, definiu-se o seguinte

$$\mathbf{Q}'_{bL} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{bL} \\ \mathbf{d}_{bL} \end{pmatrix}. \quad (4.81)$$

Dessa forma, é possível agrupar este dubleto ao dubleto \mathbf{Q}_{1L} para a derivada covariante referente ao Modelo Padrão do setor eletrofraco

$$i\bar{\mathbf{Q}}_{iL}\gamma^\mu \left(\partial_\mu + i\frac{g_L}{2}\sigma^i W_\mu^i + i\frac{g_1}{6}B_\mu \right) \mathbf{Q}_{iL}, \quad (4.82)$$

com $i = 1, 2, 3$. Vale ressaltar que esta junção não é válida para as interações contendo Z'_μ e V_μ , o que significa que os quarks de uma família tem diferentes acoplamentos quando comparados aos quarks das outras duas famílias, como pode ser visto de (4.75) e (4.78). Resta somente analisar os singletos *up* e *down*, que depois de uma pequena álgebra, seus termos cinéticos covariante do setor eletrofraco são

$$i\bar{\mathbf{u}}_{sR}\not{D}\mathbf{u}_{sR} = i\bar{\mathbf{u}}_{sR}\gamma^\mu \left(\partial_\mu + i\frac{2g_1}{3}B_\mu + i\frac{2g_1}{3}\tan\theta_X Z'_\mu \right) \mathbf{u}_{sR}, \quad (4.83)$$

$$i\bar{\mathbf{d}}_{tR}\not{D}\mathbf{d}_{tR} = i\bar{\mathbf{d}}_{tR}\gamma^\mu \left(\partial_\mu - i\frac{g_1}{3}B_\mu - i\frac{g_1}{3}\tan\theta_X Z'_\mu \right) \mathbf{d}_{tR}, \quad (4.84)$$

com $s = 1, \dots, 4$ e $t = 1, \dots, 5$. Não é por acaso que nesta primeira quebra de simetria ocorre a decomposição dos campos tripletos em $SU(3)_L$ em dubletos e singletos de $SU(2)_L$, já que $SU(2) \times U(1)$ é um subgrupo do grupo $SU(3)$. Dessa forma, a representação tripleto de $SU(3)_L$ é decomposta da seguinte forma

$$\mathbf{3} = \mathbf{2}_Y + \mathbf{1}_Y,$$

em que $\mathbf{2}$ é um dubleto de $SU(2)$, $\mathbf{1}$ um singlete, e o subscrito Y representa a hipercarga associada à representação. O mesmo ocorre para a representação adjunta, isto é, os bósons de gauge de $SU(3)_L$ serão decompostos em

$$\mathbf{8} = \mathbf{3}_Y + \mathbf{2}_Y + \mathbf{2}_{Y^*} + \mathbf{1}_Y,$$

onde $\mathbf{3}$ é a representação adjunta do grupo $SU(2)$, em que neste caso, estão os bósons W_μ^1, W_μ^2 e W_μ^3 . As representações $\mathbf{2}_Y$ e $\mathbf{2}_{Y^*}$ estão representados pelo dubleto V_μ e seu conjugado, definidos em (4.71).

4.4.3 Termos cinéticos dos bósons de gauge

O termo cinético dos bósons de gauge de $SU(3)_L$ (4.3) também sofrerão modificações, já que é necessário redefini-los a partir de (4.53). Assim,

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^1 = & \partial_\mu W_\nu^1 - \partial_\nu W_\mu^1 - g_L f^{1jk} W_\mu^j W_\nu^k \\ & - \frac{g_L}{2} (W_\mu^4 W_\nu^7 - W_\mu^7 W_\nu^4 + W_\mu^6 W_\nu^5 - W_\mu^5 W_\nu^6), \end{aligned} \quad (4.85)$$

com $j, k = 2, 3$ e $f^{147} = f^{165} = \frac{1}{2}$. As relações inversas de (4.53) são facilmente obtidas, sendo elas

$$W_\mu^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_\mu^0 + X_\mu^{0*}), \quad W_\mu^5 = \frac{i}{\sqrt{2}}(X_\mu^0 - X_\mu^{0*}) \quad (4.86)$$

$$W_\mu^6 = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_\mu^+ + Y_\mu^-), \quad W_\mu^7 = -\frac{i}{\sqrt{2}}(Y_\mu^+ - Y_\mu^-). \quad (4.87)$$

Logo,

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^1 = & \partial_\mu W_\nu^1 - \partial_\nu W_\mu^1 - g_L f^{1jk} W_\mu^j W_\nu^k \\ & - i \frac{g_L}{2} (Y_\mu^+ X_\nu^0 + X_\mu^{0*} Y_\nu^- - X_\mu^0 Y_\nu^+ - Y_\mu^- X_\nu^{0*}). \end{aligned} \quad (4.88)$$

O mesmo pode ser feito para $W_{\mu\nu}^2$ e $W_{\mu\nu}^3$

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^2 = & \partial_\mu W_\nu^2 - \partial_\nu W_\mu^2 - g_L f^{2jk} W_\mu^j W_\nu^k \\ & - \frac{g_L}{2} (W_\mu^4 W_\nu^6 - W_\mu^6 W_\nu^4 + W_\mu^5 W_\nu^7 - W_\mu^7 W_\nu^5), \end{aligned} \quad (4.89)$$

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^3 = & \partial_\mu W_\nu^3 - \partial_\nu W_\mu^3 - g_L f^{3jk} W_\mu^j W_\nu^k \\ & - \frac{g_L}{2} (W_\mu^4 W_\nu^5 - W_\mu^5 W_\nu^4 + W_\mu^7 W_\nu^6 - W_\mu^6 W_\nu^7), \end{aligned} \quad (4.90)$$

com $j, k = 1, 3$ e $j, k = 1, 2$, respectivamente. Além disso, fora usado que $f^{246} = f^{257} = f^{345} = f^{376} = \frac{1}{2}$. Dessa forma, com o uso de (4.86) e (4.87), $W_{\mu\nu}^2$ e $W_{\mu\nu}^3$ resulta em

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^2 = & \partial_\mu W_\nu^2 - \partial_\nu W_\mu^2 - g_L f^{2jk} W_\mu^j W_\nu^k \\ & - \frac{g_L}{2} (X_\mu^0 Y_\nu^+ + X_\mu^{0*} Y_\nu^- - Y_\mu^+ X_\nu^0 - Y_\mu^- X_\nu^{0*}), \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^3 = & \partial_\mu W_\nu^3 - \partial_\nu W_\mu^3 - g_L f^{3jk} W_\mu^j W_\nu^k \\ & - i \frac{g_L}{2} (X_\mu^{0*} X_\nu^0 - X_\mu^0 X_\nu^{0*} + Y_\mu^- Y_\nu^+ - Y_\mu^+ Y_\nu^-). \end{aligned} \quad (4.92)$$

Para $W_{\mu\nu}^4$ e $W_{\mu\nu}^5$, será útil definir as seguintes combinações

$$X_{\mu\nu}^{0*} = \frac{W_{\mu\nu}^4 + iW_{\mu\nu}^5}{\sqrt{2}}, \quad X_{\mu\nu}^0 = \frac{W_{\mu\nu}^4 - iW_{\mu\nu}^5}{\sqrt{2}}, \quad (4.93)$$

o que nos permite ter

$$-\frac{1}{4}(W_{\mu\nu}^4 W^{4\mu\nu} + W_{\mu\nu}^5 W^{5\mu\nu}) = -\frac{1}{2} X_{\mu\nu}^{0*} X^{0\mu\nu}. \quad (4.94)$$

O uso da definição em (4.93), permite identificar que

$$\begin{aligned} X_{\mu\nu}^{0*} = & \partial_\mu X_\nu^{0*} - \partial_\nu X_\mu^{0*} - \frac{g_L}{2\sqrt{2}}(W_\mu^7 W_\nu^1 - W_\mu^1 W_\nu^7) - \frac{g_L}{2\sqrt{2}}(W_\mu^6 W_\nu^2 - W_\mu^2 W_\nu^6) \\ & - \frac{g_L}{2\sqrt{2}}(W_\mu^5 W_\nu^3 - W_\mu^3 W_\nu^5) - \frac{\sqrt{3}g_L}{2\sqrt{2}}(W_\mu^5 W_\nu^8 - W_\mu^8 W_\nu^5) - i \frac{g_L}{2\sqrt{2}}(W_\mu^1 W_\nu^6 - W_\mu^6 W_\nu^1) \\ & - i \frac{g_L}{2\sqrt{2}}(W_\mu^7 W_\nu^2 - W_\mu^2 W_\nu^7) - i \frac{g_L}{2\sqrt{2}}(W_\mu^3 W_\nu^4 - W_\mu^4 W_\nu^3) - i \frac{\sqrt{3}g_L}{2\sqrt{2}}(W_\mu^8 W_\nu^4 - W_\mu^4 W_\nu^8), \end{aligned} \quad (4.95)$$

em que $f^{458} = \sqrt{3}/2$. É possível simplificar a expressão acima ao notar que

$$\begin{aligned} -\frac{g_L}{2\sqrt{2}}W_\mu^7W_\nu^1 - i\frac{g_L}{2\sqrt{2}}W_\mu^7W_\nu^2 &= i\frac{g_L}{2\sqrt{2}}W_\mu^7(iW_\nu^1 - W_\nu^2), \\ -\frac{g_L}{2\sqrt{2}}W_\mu^6W_\nu^2 + i\frac{g_L}{2\sqrt{2}}W_\mu^6W_\nu^1 &= \frac{g_L}{2\sqrt{2}}W_\mu^6(iW_\nu^1 - W_\nu^2), \\ \frac{g_L}{2\sqrt{2}}W_\mu^3W_\nu^5 - i\frac{g_L}{2\sqrt{2}}W_\mu^3W_\nu^4 &= -i\frac{g_L}{2\sqrt{2}}W_\mu^3(W_\nu^4 + iW_\nu^5), \\ \frac{\sqrt{3}g_L}{2\sqrt{2}}W_\mu^8W_\nu^5 - i\frac{\sqrt{3}g_L}{2\sqrt{2}}W_\mu^8W_\nu^4 &= -i\frac{\sqrt{3}g_L}{2\sqrt{2}}W_\mu^8(W_\nu^4 + iW_\nu^5). \end{aligned}$$

Utilizando as definições de (4.53) nas somas em (4.95), obtém-se o seguinte

$$\begin{aligned} X_{\mu\nu}^{0*} &= \partial_\mu X_\nu^{0*} - \partial_\nu X_\mu^{0*} + \frac{g_L}{2}Y_\mu^+(iW_\nu^1 - W_\nu^2) - \frac{g_L}{2}Y_\nu^+(iW_\mu^1 - W_\mu^2) \\ &\quad - i\frac{g_L}{2}\left(W_\mu^3 + \sqrt{3}\sin\theta_X B_\mu + \sqrt{3}\cos\theta_X Z'_\mu\right)X_\nu^{0*} \\ &\quad + i\frac{g_L}{2}\left(W_\nu^3 + \sqrt{3}\sin\theta_X B_\nu + \sqrt{3}\cos\theta_X Z'_\nu\right)X_\mu^{0*}, \end{aligned} \quad (4.96)$$

em que fora usado a transformação de W_μ^8 em termos de B_μ e Z'_μ da relação (4.65). A expressão para $X_{\mu\nu}^0$ é facilmente obtida ao tomar o complexo conjugado de (4.96)

$$\begin{aligned} X_{\mu\nu}^0 &= \partial_\mu X_\nu^0 - \partial_\nu X_\mu^0 - \frac{g_L}{2}Y_\mu^-(iW_\nu^1 + W_\nu^2) + \frac{g_L}{2}Y_\nu^-(iW_\mu^1 + W_\mu^2) \\ &\quad + i\frac{g_L}{2}\left(W_\mu^3 + \sqrt{3}\sin\theta_X B_\mu + \sqrt{3}\cos\theta_X Z'_\mu\right)X_\nu^0 \\ &\quad - i\frac{g_L}{2}\left(W_\nu^3 + \sqrt{3}\sin\theta_X B_\nu + \sqrt{3}\cos\theta_X Z'_\nu\right)X_\mu^0. \end{aligned} \quad (4.97)$$

O mesmo procedimento pode ser feito para $W_{\mu\nu}^6$ e $W_{\mu\nu}^7$ ao definir as seguintes relações

$$Y_{\mu\nu}^\pm = \frac{W_{\mu\nu}^6 \pm iW_{\mu\nu}^7}{\sqrt{2}}, \quad (4.98)$$

permitindo a realização da seguinte equação

$$-\frac{1}{2}Y_{\mu\nu}^+Y^{-\mu\nu} = -\frac{1}{4}(W_{\mu\nu}^6W^{6\mu\nu} + W_{\mu\nu}^7W^{7\mu\nu}). \quad (4.99)$$

Para encontrar $Y_{\mu\nu}^+$, a definição (4.98) é expandida com o uso de (4.53), e das permutações da constante de estrutura antissimétrica f^{abc} , o que permite encontrar

$$\begin{aligned} Y_{\mu\nu}^+ &= \partial_\mu Y_\nu^+ - \partial_\nu Y_\mu^+ - \frac{g_L}{2\sqrt{2}}(W_\mu^5W_\nu^1 - W_\mu^1W_\nu^5) - \frac{g_L}{2\sqrt{2}}(W_\mu^2W_\nu^4 - W_\mu^4W_\nu^2) \\ &\quad - \frac{g_L}{2\sqrt{2}}(W_\mu^3W_\nu^7 - W_\mu^7W_\nu^3) - \frac{\sqrt{3}g_L}{2\sqrt{2}}(W_\mu^7W_\nu^8 - W_\mu^8W_\nu^7) - i\frac{g_L}{2\sqrt{2}}(W_\mu^1W_\nu^4 - W_\mu^4W_\nu^1) \\ &\quad - i\frac{g_L}{2\sqrt{2}}(W_\mu^2W_\nu^5 - W_\mu^5W_\nu^2) - i\frac{g_L}{2\sqrt{2}}(W_\mu^6W_\nu^3 - W_\mu^3W_\nu^6) - i\frac{\sqrt{3}g_L}{2\sqrt{2}}(W_\mu^8W_\nu^6 - W_\mu^6W_\nu^8). \end{aligned} \quad (4.100)$$

Novamente, é possível simplificar a expressão acima ao notar as seguintes fatorações

$$\begin{aligned}
 -\frac{g_L}{2\sqrt{2}}W_\mu^5W_\nu^1 + i\frac{g_L}{2\sqrt{2}}W_\mu^5W_\nu^2 &= i\frac{g_L}{2\sqrt{2}}W_\mu^5(iW_\nu^1 + W_\nu^2), \\
 \frac{g_L}{2\sqrt{2}}W_\mu^4W_\nu^2 + i\frac{g_L}{2\sqrt{2}}W_\mu^4W_\nu^1 &= \frac{g_L}{2\sqrt{2}}W_\mu^4(iW_\nu^1 + W_\nu^2), \\
 -\frac{g_L}{2\sqrt{2}}W_\mu^3W_\nu^7 + i\frac{g_L}{2\sqrt{2}}W_\mu^3W_\nu^6 &= i\frac{g_L}{2\sqrt{2}}W_\mu^3(W_\nu^6 + iW_\nu^7), \\
 \frac{\sqrt{3}g_L}{2\sqrt{2}}W_\mu^8W_\nu^7 - i\frac{\sqrt{3}g_L}{2\sqrt{2}}W_\mu^8W_\nu^6 &= -i\frac{\sqrt{3}g_L}{2\sqrt{2}}W_\mu^8(W_\nu^6 + iW_\nu^7).
 \end{aligned}$$

Dessa forma, utilizando as definições de (4.53), é obtido a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
 Y_{\mu\nu}^+ &= \partial_\mu Y_\nu^+ - \partial_\nu Y_\mu^+ + \frac{g_L}{2}X_\mu^{0*}(iW_\nu^1 + W_\nu^2) - \frac{g_L}{2}X_\nu^{0*}(iW_\mu^1 + W_\mu^2) \\
 &+ i\frac{g_L}{2}(W_\mu^3 - \sqrt{3}\sin\theta_X B_\mu - \sqrt{3}\cos\theta_X Z'_\mu)Y_\nu^+ \\
 &- i\frac{g_L}{2}(W_\nu^3 - \sqrt{3}\sin\theta_X B_\nu - \sqrt{3}\cos\theta_X Z'_\nu)Y_\mu^+.
 \end{aligned} \tag{4.101}$$

$Y_{\mu\nu}^-$ também é obtido a partir do complexo conjugado de $Y_{\mu\nu}^+$. Logo,

$$\begin{aligned}
 Y_{\mu\nu}^- &= \partial_\mu Y_\nu^- - \partial_\nu Y_\mu^- + \frac{g_L}{2}X_\mu^0(-iW_\nu^1 + W_\nu^2) - \frac{g_L}{2}X_\nu^0(-iW_\mu^1 + W_\mu^2) \\
 &- i\frac{g_L}{2}(W_\mu^3 - \sqrt{3}\sin\theta_X B_\mu - \sqrt{3}\cos\theta_X Z'_\mu)Y_\nu^- \\
 &+ i\frac{g_L}{2}(W_\nu^3 - \sqrt{3}\sin\theta_X B_\nu - \sqrt{3}\cos\theta_X Z'_\nu)Y_\mu^-.
 \end{aligned} \tag{4.102}$$

Para completar, faltam analisar os termos referentes a $W_{\mu\nu}^8$ e $W_{\mu\nu}^0$. Para este propósito, é proveitoso estabelecer a seguinte definição

$$W_{\mu\nu}^0 = \cos\theta_X B_{\mu\nu} - \sin\theta_X Z'_{\mu\nu}, \quad W_{\mu\nu}^8 = \sin\theta_X B_{\mu\nu} + \cos\theta_X Z'_{\mu\nu}, \tag{4.103}$$

já que dessa forma, vale a seguinte igualdade

$$-\frac{1}{4}(W_{\mu\nu}^0 W^{0\mu\nu} + W_{\mu\nu}^8 W^{8\mu\nu}) = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z'_{\mu\nu}Z'^{\mu\nu}. \tag{4.104}$$

Para determinar a expressão de $B_{\mu\nu}$ e $Z'_{\mu\nu}$, é suficiente realizar a inversão de (4.103), resultando em

$$B_{\mu\nu} = \cos\theta_X W_{\mu\nu}^0 + \sin\theta_X W_{\mu\nu}^8, \quad Z'_{\mu\nu} = \cos\theta_X W_{\mu\nu}^8 - \sin\theta_X W_{\mu\nu}^0. \tag{4.105}$$

A partir da expressão (4.3), o tensor de força $W_{\mu\nu}^8$ tem a seguinte definição

$$W_{\mu\nu}^8 = \partial_\mu W_\nu^8 - \partial_\nu W_\mu^8 - g_L f^{8bc} W_\mu^b W_\nu^c. \tag{4.106}$$

Os únicos valores de b, c que tornam a constante de estrutura f^{8bc} diferente de zero são iguais a $b, c = 4, 5, 6, 7$ e suas permutações. Logo, ao expandir (4.106), obtêm-se que

$$\begin{aligned}
 W_{\mu\nu}^8 &= \partial_\mu W_\nu^8 - \partial_\nu W_\mu^8 \\
 &- \frac{\sqrt{3}g_L}{2}(W_\mu^6 W_\nu^7 + W_\mu^4 W_\nu^5 - W_\mu^7 W_\nu^6 - W_\mu^5 W_\nu^4).
 \end{aligned} \tag{4.107}$$

Portanto, ao empregar as relações (4.86) e (4.87), chega-se a

$$W_{\mu\nu}^8 = \partial_\mu W_\nu^8 - \partial_\nu W_\mu^8 + i \frac{\sqrt{3}g_L}{2} (Y_\mu^- Y_\nu^+ + X_\mu^0 X_\nu^{0*} - Y_\mu^+ Y_\nu^- - X_\mu^{0*} X_\nu^0). \quad (4.108)$$

Dessa forma, ao empregar (4.108) para $B_{\mu\nu}$, obtemos, após algumas manipulações algébricas, o seguinte resultado

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + i \frac{\sqrt{3}g_L}{2} \sin \theta_X (Y_\mu^- Y_\nu^+ + X_\mu^0 X_\nu^{0*} - Y_\mu^+ Y_\nu^- - X_\mu^{0*} X_\nu^0). \quad (4.109)$$

Da relação de $\sin \theta_X$ em (4.56), bem como a definição de g_1 em (4.68), pode-se reescrever $B_{\mu\nu}$ como

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu - i \frac{g_1}{2} (Y_\mu^- Y_\nu^+ + X_\mu^0 X_\nu^{0*} - Y_\mu^+ Y_\nu^- - X_\mu^{0*} X_\nu^0). \quad (4.110)$$

O mesmo procedimento é feito para $Z'_{\mu\nu}$, sendo obtido o seguinte

$$Z'_{\mu\nu} = \partial_\mu Z'_\nu - \partial_\nu Z'_\mu - i \frac{g_1}{2} \cot \theta_X (Y_\mu^- Y_\nu^+ + X_\mu^0 X_\nu^{0*} - Y_\mu^+ Y_\nu^- - X_\mu^{0*} X_\nu^0). \quad (4.111)$$

4.4.4 Termos cinéticos dos bósons escalares

A representação tripleto dos bósons ρ e η também podem ser decompostas em um dubleto e um singlete, de forma semelhante ao que fora feito para os férmions. Cabe ressaltar que nesta etapa, ainda não serão realizadas as transformações feitas em 4.44 para ρ e η , deixando para a próxima seção, quando trataremos da segunda quebra espontânea de simetria.

Assim, começando pelo bóson ρ , a partir da derivada covariante (4.28), temos que

$$D_\mu \rho = \begin{pmatrix} \partial_\mu \rho_1^+ + \frac{ig_L}{2} (W_\mu^1 - iW_\mu^2) \rho_2^0 + i \frac{g_L}{2} W_\mu^3 \rho_1^+ + i \left(g_L \frac{W_\mu^8}{2\sqrt{3}} + \frac{g_X}{3} W_\mu^0 \right) \rho_1^+ + i \frac{g_L}{\sqrt{2}} X_\mu^0 \rho_3^+ \\ \partial_\mu \rho_2^0 + \frac{ig_L}{2} (W_\mu^1 + iW_\mu^2) \rho_1^+ - i \frac{g_L}{2} W_\mu^3 \rho_2^0 + i \left(g_L \frac{W_\mu^8}{2\sqrt{3}} + \frac{g_X}{3} W_\mu^0 \right) \rho_2^0 + i \frac{g_L}{\sqrt{2}} Y_\mu^- \rho_3^+ \\ \partial_\mu \rho_3^+ + i \left(-g_L \frac{W_\mu^8}{\sqrt{3}} + \frac{g_X}{3} W_\mu^0 \right) \rho_3^+ + i \frac{g_L}{\sqrt{2}} (X_\mu^{0*} \rho_1^+ + Y_\mu^+ \rho_2^0) \end{pmatrix}, \quad (4.112)$$

em que já foram usadas as definições (4.53), restando substituir somente W_μ^8 e W_μ^0 . Para isso, consideraremos primeiro a seguinte combinação

$$i \left(g_L \frac{W_\mu^8}{2\sqrt{3}} + \frac{g_X}{3} W_\mu^0 \right),$$

que ao utilizar as relações (4.56), (4.65) e (4.68), chega-se a

$$i \left(g_L \frac{W_\mu^8}{2\sqrt{3}} + \frac{g_X}{3} W_\mu^0 \right) = i \frac{g_1}{2} B_\mu + i \frac{g_1}{6} (\cot \theta_X + 4 \tan \theta_X) Z'_\mu. \quad (4.113)$$

Já para a combinação

$$i \left(-g_L \frac{W_\mu^8}{\sqrt{3}} + \frac{g_X}{3} W_\mu^0 \right),$$

temos que

$$i \left(-g_L \frac{W_\mu^8}{\sqrt{3}} + \frac{g_X}{3} W_\mu^0 \right) = ig_1 B_\mu - i \frac{g_1}{3} (\cot \theta_X - 2 \tan \theta_X) Z'_\mu. \quad (4.114)$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} D_\mu \rho = & \\ & \begin{pmatrix} \partial_\mu \rho_1^+ + \frac{ig_L}{2} (W_\mu^1 - iW_\mu^2) \rho_2^0 + i \frac{g_L}{2} W_\mu^3 \rho_1^+ + i \left(\frac{g_1}{2} B_\mu + \frac{g_1}{6} (\cot \theta_X + 4 \tan \theta_X) Z'_\mu \right) \rho_1^+ \\ \partial_\mu \rho_2^0 + \frac{ig_L}{2} (W_\mu^1 + iW_\mu^2) \rho_1^+ - i \frac{g_L}{2} W_\mu^3 \rho_2^0 + i \left(\frac{g_1}{2} B_\mu + \frac{g_1}{6} (\cot \theta_X + 4 \tan \theta_X) Z'_\mu \right) \rho_2^0 \\ \partial_\mu \rho_3^+ + i \left(g_1 B_\mu + \frac{g_1}{3} (\cot \theta_X - 2 \tan \theta_X) Z'_\mu \right) \rho_3^+ \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} i \frac{g_L}{\sqrt{2}} X_\mu^0 \rho_3^+ \\ i \frac{g_L}{\sqrt{2}} Y_\mu^- \rho_3^+ \\ i \frac{g_L}{\sqrt{2}} (X_\mu^{0*} \rho_1^+ + Y_\mu^+ \rho_2^0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Devido a decomposição do tripleto **3** de $SU(3)_L$ em um dubleto **2** de $SU(2)_L$ e um singlete **1**, esta derivada covariante será reescrita como

$$D_\mu \rho = \begin{pmatrix} D_\mu \mathcal{H} + i \frac{g_L}{\sqrt{2}} V_\mu \rho_3^+ \\ D_\mu \rho_3^+ + i \frac{g_L}{\sqrt{2}} V_\mu^\dagger \mathcal{H} \end{pmatrix}, \quad (4.115)$$

em que \mathcal{H} é o seguinte dubleto

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \rho_1^+ \\ \rho_2^0 \end{pmatrix}, \quad (4.116)$$

cuja derivada covariante é

$$D_\mu = \partial_\mu + i \frac{g_L}{2} \sigma^i W_\mu^i + i \left(\frac{g_1}{2} B_\mu + \frac{g_1}{6} (\cot \theta_X + 4 \tan \theta_X) Z'_\mu \right), \quad (4.117)$$

onde σ^i são as matrizes de Pauli. Vale notar que como V_μ é um dubleto, então o produto $V_\mu^\dagger \mathcal{H}$, na segunda linha de (4.115), é um singlete antissimétrico, devido ao produto $\mathbf{2} \times \bar{\mathbf{2}} = \mathbf{1}_A \times \mathbf{3}_S^1$. Já a derivada covariante do singlete ρ_3^+ é

$$D_\mu = \partial_\mu + i \left(g_1 B_\mu + \frac{g_1}{3} (\cot \theta_X - 2 \tan \theta_X) Z'_\mu \right). \quad (4.118)$$

Logo, o termo cinético de ρ toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} (D_\mu \rho)^\dagger (D^\mu \rho) = & (D_\mu \mathcal{H})^\dagger (D^\mu \mathcal{H}) + (D_\mu \rho_3^+)^\dagger (D^\mu \rho_3^+) + \frac{g_L^2}{2} (\rho_3^- V_\mu^\dagger V^\mu \rho_3^+ + \mathcal{H}^\dagger V_\mu V^{\mu\dagger} \mathcal{H}) \\ & + i \frac{g_L}{\sqrt{2}} [(D_\mu \mathcal{H})^\dagger V^\mu \rho_3^+ + (D_\mu \rho_3^+)^\dagger V^{\mu\dagger} \mathcal{H} - \rho_3^- V_\mu^\dagger (D^\mu \mathcal{H}) - \mathcal{H}^\dagger V_\mu (D^\mu \rho_3^+)]. \end{aligned} \quad (4.119)$$

¹ Importante ressaltar que **3** é o tripleto do grupo $SU(2)$, neste caso.

Já para o bóson η , a partir de sua derivada covariante (4.29), temos

$$D_\mu \eta = \begin{pmatrix} \partial_\mu \eta_1^0 + \frac{ig_L}{2}(W_\mu^1 - iW_\mu^2)\eta_2^- + i\frac{g_L}{2}W_\mu^3\eta_1^0 + i\left(g_L\frac{W_\mu^8}{2\sqrt{3}} - \frac{g_X}{6}W_\mu^0\right)\eta_1^0 + i\frac{g_L}{\sqrt{2}}X_\mu^0\eta_3^0 \\ \partial_\mu \eta_2^- + \frac{ig_L}{2}(W_\mu^1 + iW_\mu^2)\eta_1^0 - i\frac{g_L}{2}W_\mu^3\eta_2^- + i\left(g_L\frac{W_\mu^8}{2\sqrt{3}} - \frac{g_X}{6}W_\mu^0\right)\eta_2^- + i\frac{g_L}{\sqrt{2}}Y_\mu^-\eta_3^0 \\ \partial_\mu \eta_3^0 - i\left(g_L\frac{W_\mu^8}{\sqrt{3}} + \frac{g_X}{6}W_\mu^0\right)\eta_3^0 + i\frac{g_L}{\sqrt{2}}(X_\mu^{0*}\eta_1^0 + Y_\mu^+\eta_2^-) \end{pmatrix}. \quad (4.120)$$

Para as combinações envolvendo W_μ^8 e W_μ^0 , são obtidos as seguintes relações

$$i\left(g_L\frac{W_\mu^8}{2\sqrt{3}} - \frac{g_X}{6}W_\mu^0\right) = -i\frac{g_1}{2}B_\mu + i\frac{g_1}{6}(\cot\theta_X - 2\tan\theta_X)Z'_\mu, \quad (4.121)$$

$$-i\left(g_L\frac{W_\mu^8}{\sqrt{3}} + \frac{g_X}{6}W_\mu^0\right) = -i\frac{g_1}{3}\csc\theta_X \sec\theta_X Z'_\mu. \quad (4.122)$$

Assim, ao definirmos o seguinte dubleto de $SU(2)_L$

$$\phi = \begin{pmatrix} \eta_1^0 \\ \eta_2^- \end{pmatrix}, \quad (4.123)$$

(4.120) se torna o seguinte

$$D_\mu \eta = \begin{pmatrix} D_\mu \phi + i\frac{g_L}{\sqrt{2}}V_\mu\eta_3^0 \\ D_\mu \eta_3^0 + i\frac{g_L}{\sqrt{2}}V_\mu^\dagger\phi \end{pmatrix}, \quad (4.124)$$

em que a derivada covariante de ϕ é

$$D_\mu = \partial_\mu + i\frac{g_L}{2}\sigma^i W_\mu^i - i\frac{g_1}{2}B_\mu + i\frac{g_1}{6}(\cot\theta_X - 2\tan\theta_X)Z'_\mu, \quad (4.125)$$

enquanto a derivada covariante de η_3^0 é

$$D_\mu = \partial_\mu - i\frac{g_1}{3}\csc\theta_X \sec\theta_X Z'_\mu. \quad (4.126)$$

Da mesma forma que fora feito para ρ , a expansão do termo cinético de η resulta em

$$\begin{aligned} (D_\mu \eta)^\dagger (D^\mu \eta) &= (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) + (D_\mu \eta_3^0)^\dagger (D^\mu \eta_3^0) + \frac{g_L^2}{2}(\eta_3^{0*} V_\mu^\dagger V^\mu \eta_3^0 + \phi^\dagger V_\mu V^\mu \phi) \\ &+ i\frac{g_L}{\sqrt{2}}[(D_\mu \phi)^\dagger V^\mu \eta_3^0 + (D_\mu \eta_3^0)^\dagger V^\mu \phi - \eta_3^{0*} V_\mu^\dagger (D^\mu \phi) - \phi^\dagger V_\mu (D^\mu \eta_3^0)]. \end{aligned} \quad (4.127)$$

4.4.5 Potencial escalar

Conforme visto, os tripletos ρ e η são decompostos em dois dubletos \mathcal{H} , ϕ e dois singletos ρ_3^+ , η_3^0 . Assim, é interessante reescrevermos o potencial escalar em termos destes novos campos, bem como suas interações com H_3 e H_5 . Dessa forma, ao final da segunda

quebra espontânea de simetria, visto a seguir, poderemos encontrar as massas dos bósons escalares deste modelo. Assim, após uma pequena álgebra, temos que (4.32) se torna

$$\begin{aligned}
V = & -\mu_1^2(\phi^\dagger\phi) - \mu_1^2(\eta_3^{0*}\eta_3^0) - \mu_2^2(\mathcal{H}^\dagger\mathcal{H}) - \mu_2^2(\rho_3^-\rho_3^+) - \frac{\mu_3^2}{2}[(v_\chi + H_3)^2 + H_5^2] \\
& + \lambda_1(\phi^\dagger\phi + \eta_3^{0*}\eta_3^0)^2 + \lambda_2(\mathcal{H}^\dagger\mathcal{H} + \rho_3^-\rho_3^+)^2 + \frac{\lambda_3}{4}[(v_\chi + H_3)^2 + H_5^2]^2 \\
& + \frac{\lambda_4}{2}[(v_\chi + H_3)^2 + H_5^2](\phi^\dagger\phi + \eta_3^{0*}\eta_3^0) + \frac{\lambda_5}{2}[(v_\chi + H_3)^2 + H_5^2](\mathcal{H}^\dagger\mathcal{H} + \rho_3^-\rho_3^+) \\
& + \lambda_6(\phi^\dagger\phi + \eta_3^{0*}\eta_3^0)(\mathcal{H}^\dagger\mathcal{H} + \rho_3^-\rho_3^+) + \frac{\lambda_7}{2}[(v_\chi + H_3)^2 + H_5^2](\eta_3^0\eta_3^{0*}) \\
& + \frac{\lambda_8}{2}[(v_\chi + H_3)^2 + H_5^2](\rho_3^+\rho_3^-) + \lambda_9(\phi^\dagger\mathcal{H} + \eta_3^{0*}\rho_3^+)(\mathcal{H}^\dagger\phi + \rho_3^-\eta_3^0) \\
& + \frac{\lambda_{10}}{2}(v_\chi + H_3 - iH_5)^2(\eta_3^0)^2 - \frac{\lambda_{15}}{2}\epsilon_{ij3}\phi_i\mathcal{H}_j(v_\chi + H_3 - iH_5) + \text{h.c.},
\end{aligned} \tag{4.128}$$

em que na última linha o tensor de Levi-Civita ϵ_{ijk} é reduzido para ϵ_{ij3} , pois a única componente não nula de χ na quebra espontânea de simetria é a terceira componente. Assim, as terceiras componentes de η e ρ não se manifestam, já que $\epsilon_{i33} = \epsilon_{3j3} = 0$, o que permitiu substituir η e ρ pelos dubletos ϕ e \mathcal{H} .

4.5 Segunda quebra espontânea de simetria

Esta etapa consiste na quebra espontânea de simetria do grupo $SU(2)_L \times U(1)_Y$ para o grupo $U(1)_Q$, em que Q é a carga eletromagnética. A quebra espontânea de simetria, neste caso, ocorre devido aos campos η e ρ adquirirem os VEVs da seguinte forma [90]

$$\langle \eta \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_\eta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \rho \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_\rho \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.129}$$

Como na seção anterior, separamos os tripletos de $SU(3)_L$ em dubletos e singletos de $SU(2)_L$, então a expressão anterior se traduz em

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_\eta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \mathcal{H} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_\rho \end{pmatrix}, \quad \langle \rho_3^+ \rangle = 0, \quad \langle \eta_3^0 \rangle = 0. \tag{4.130}$$

Nesta segunda etapa, os geradores T_L^1, T_L^2, T_L^3 do grupo $SU(2)_L$ não deixam o vácuo invariante

$$T_L^1 \langle \phi \rangle = \frac{v_\eta}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad T_L^2 \langle \phi \rangle = \frac{v_\eta}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0, \tag{4.131}$$

$$T_L^3 \langle \phi \rangle = \frac{v_\eta}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad T_L^1 \langle \mathcal{H} \rangle = \frac{v_\rho}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0, \tag{4.132}$$

$$T_L^2 \langle \mathcal{H} \rangle = \frac{v_\rho}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0, \quad T_L^3 \langle \mathcal{H} \rangle = \frac{v_\rho}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0. \tag{4.133}$$

Os três geradores quebrados darão massa para os três bósons de gauge do Modelo Padrão W^\pm, Z^0 , a partir do mecanismo de Higgs. Assim como ocorreu no Modelo Padrão, visto no Capítulo 1, a combinação linear $\mathcal{Q} = T_L^3 + Y/2$ deixará o vácuo invariante, em que \mathcal{Q} é a carga elétrica. A partir da relação obtida em (4.49), tem-se, considerando somente o subgrupo $SU(2)_L$, o seguinte resultado

$$\mathcal{Q}\langle\phi\rangle = \frac{v_\eta}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \mathcal{Q}\langle\mathcal{H}\rangle = \frac{v_\rho}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (4.134)$$

Ao considerar o grupo $SU(3)_L$, é possível obter a seguinte relação para a carga elétrica, a partir de (4.49)

$$\mathcal{Q} = T^3 - \frac{1}{\sqrt{3}}T^8 + N\mathbf{1}_{3\times 3} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + N & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} + N & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} + N \end{pmatrix}. \quad (4.135)$$

Como \mathcal{Q} deixa o vácuo invariante, então restará um bóson de gauge sem massa, sendo este o fóton, representado pelo campo eletromagnético A_μ .

4.5.1 Interações bósons escalares e vetoriais

Nesta seção, procederemos à análise das interações dos bósons escalares com os bósons de gauge, complementada pela análise das massas dos bósons de gauge. Com o intuito de atingir esse objetivo de maneira sistemática e esclarecedora, torna-se indispensável a expressão dos campos ϕ e \mathcal{H} em termos dos campos físicos pertinentes, valendo-nos das relações explicitadas em (4.44) para o gauge unitário. Esse enfoque proporcionará uma descrição esclarecedora, permitindo-nos avançar na compreensão das dinâmicas envolvidas.

Cabe ressaltar que as relações delineadas em (4.44) desempenham um papel crucial na simplificação e organização das expressões, proporcionando uma formulação mais elegante e compreensível. Este formalismo, baseado no gauge unitário, não apenas simplifica os cálculos, mas também revela a estrutura subjacente das interações, promovendo uma compreensão mais profunda e abrangente do sistema em questão.

Dessa forma, ao adotarmos esse enfoque metodológico, almejamos não apenas apresentar os resultados finais das massas dos bósons de gauge e suas interações com os bósons escalares, mas também fornecer uma fundação teórica robusta e coerente que sustente esses resultados, como apresentado pelos autores em [105].

$$\phi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} h \sin \theta - H \cos \theta \\ -\sqrt{2} \sin \alpha_1 H_1^- \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos \alpha_1 H_1^+ \\ h \cos \theta + H \sin \theta \end{pmatrix}, \quad (4.136)$$

$$\eta_3^0 \equiv \frac{(H_U - iH_4)}{\sqrt{2}}, \quad \rho_3^\pm \equiv H_2^\pm, \quad (4.137)$$

em que identificaremos h como o bóson de Higgs, enquanto $H, H_1^\pm, H_2^\pm, H_U, H_4$ são os novos bósons escalares do modelo.

As relações obtidas no Capítulo 1, encontradas em (1.67), (1.68), (1.69) e (1.70), assumem uma importância fundamental nesta etapa. Estas relações, exemplificadas a seguir

$$W_\mu^\pm = \frac{W_\mu^1 \mp iW_\mu^2}{\sqrt{2}}, \quad (4.138)$$

$$A_\mu = \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu, \quad Z_\mu = \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu, \quad (4.139)$$

$$\cos \theta_W = \frac{g_L}{\sqrt{g_L^2 + g_1^2}}, \quad \sin \theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_L^2 + g_1^2}}, \quad (4.140)$$

também se manifestarão no atual contexto, uma vez que estamos reproduzindo a quebra espontânea de simetria do Modelo Padrão. Além disso, é crucial ressaltar que tais relações desempenham um papel fundamental na simplificação dos cálculos subsequentes. Portanto, a inclusão das relações inversas de W_μ^3 e B_μ se mostra vantajosa para o prosseguimento da análise

$$W_\mu^3 = \sin \theta_W A_\mu + \cos \theta_W Z_\mu, \quad B_\mu = \cos \theta_W A_\mu - \sin \theta_W Z_\mu. \quad (4.141)$$

Duas relações proveitosas, que aparecerão nas derivadas covariantes de ϕ e \mathcal{H} são as seguintes

$$\begin{aligned} g_L W_\mu^3 + g_1 B_\mu &= 2g_L \sin \theta_W A_\mu + 2g_L \sin \theta_W \cot(2\theta_W) Z_\mu, \\ g_L W_\mu^3 - g_1 B_\mu &= g_L \sec \theta_W Z_\mu, \end{aligned} \quad (4.142)$$

possibilitando identificar a carga elétrica $e = g_L \sin \theta_W$, como mostrado em (1.101). É possível também defini-la como $e = g_1 \cos \theta_W$. Diante disso, é possível relacionar os ângulos θ_X e θ_W da seguinte forma

$$\begin{aligned} g_1 \cos \theta_W &= g_L \sin \theta_W \\ \frac{g_X}{2g_L} \cos \theta_X \cos \theta_W &= \sin \theta_W \\ -\sqrt{3} \sin \theta_X &= \tan \theta_W, \end{aligned} \quad (4.143)$$

onde na segunda e terceira linha foram utilizadas as relações definidas em (4.68) e (4.56), respectivamente. A partir de dados informados pelo Particle Data Group (PDG) [43], $\sin^2 \theta_W = 0,23121$, encontrando um ângulo de Weinberg de aproximadamente igual a $28,7^\circ$. Dessa forma, é possível estimar o ângulo θ_X , a partir da relação encontrada em (4.143), resultando em

$$\theta_X \approx -18^\circ. \quad (4.144)$$

Prosseguindo com o cálculo para a derivada covariante de ϕ (4.125), com o uso das relações informadas em (4.139),(4.140),(4.141),(4.142), encontra-se que

$$D_\mu = \partial_\mu \mathbf{1}_{2 \times 2} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} g_L \sec \theta_W Z_\mu & \sqrt{2} g_L W_\mu^+ \\ \sqrt{2} g_L W_\mu^- & -2e A_\mu - 2e \cot(2\theta_W) Z_\mu \end{pmatrix} + i \frac{g_1}{6} (\cot \theta_X - 2 \tan \theta_X) Z'_\mu \mathbf{1}_{2 \times 2}, \quad (4.145)$$

em que $\mathbf{1}_{2 \times 2}$ é a matriz identidade de ordem 2. Há muitos acoplamentos nesta derivada covariante, sendo a carga elétrica e a única diretamente medida. Assim, utilizando que

$$g_L = \frac{e}{\sin \theta_W}, \quad g_1 = \frac{e}{\cos \theta_W} \quad \text{e} \quad \tan \theta_W = -\sqrt{3} \sin \theta_X \quad (4.146)$$

chega-se ao seguinte resultado após uma pequena álgebra

$$D_\mu = \partial_\mu \mathbf{1}_{2 \times 2} + i \frac{e}{2} \begin{pmatrix} \csc \theta_W \sec \theta_W Z_\mu & \sqrt{2} \csc \theta_W W_\mu^+ \\ \sqrt{2} \csc \theta_W W_\mu^- & -2A_\mu - 2 \cot(2\theta_W) Z_\mu \end{pmatrix} + i \frac{e}{2} \frac{\tan^2 \theta_W - 1}{\sin \theta_W \sqrt{3 - \tan^2 \theta_W}} Z'_\mu \mathbf{1}_{2 \times 2}. \quad (4.147)$$

A expressão da derivada covariante mostrada acima é muito complicada pelo excesso de termos, o que tornará a tarefa de acompanhar os cálculos a seguir demasiadamente moroso. Assim, será mais cômodo se adotarmos as seguintes relações

$$g_{Z'} = \frac{1}{\sin \theta_W \sqrt{3 - \tan^2 \theta_W}}, \quad (4.148)$$

$$\mathcal{Z}_\mu \equiv \csc \theta_W \sec \theta_W Z_\mu + g_{Z'} (\tan^2 \theta_W - 1) Z'_\mu, \quad (4.149)$$

$$\mathcal{A}_\mu \equiv -2A_\mu - 2 \cot(2\theta_W) Z_\mu + g_{Z'} (\tan^2 \theta_W - 1) Z'_\mu, \quad (4.150)$$

de forma que

$$D_\mu = \partial_\mu \mathbf{1}_{2 \times 2} + i \frac{e}{2} \begin{pmatrix} \mathcal{Z}_\mu & \sqrt{2} \csc \theta_W W_\mu^+ \\ \sqrt{2} \csc \theta_W W_\mu^- & \mathcal{A}_\mu \end{pmatrix}. \quad (4.151)$$

Para facilitar ainda mais os cálculos, escreveremos a derivada covariante de ϕ como

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + i \frac{e}{2} \mathcal{M}_\mu \phi, \quad (4.152)$$

em que definimos \mathcal{M}_μ como a seguinte matriz hermitiana

$$\mathcal{M}_\mu = \begin{pmatrix} \mathcal{Z}_\mu & \sqrt{2} \csc \theta_W W_\mu^+ \\ \sqrt{2} \csc \theta_W W_\mu^- & \mathcal{A}_\mu \end{pmatrix}. \quad (4.153)$$

Assim, obtemos que

$$(D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + i \frac{e}{2} \partial_\mu \phi^\dagger \mathcal{M}^\mu \phi - i \frac{e}{2} \phi^\dagger \mathcal{M}_\mu \partial^\mu \phi + \frac{e^2}{4} \phi^\dagger \mathcal{M}_\mu \mathcal{M}^\mu \phi. \quad (4.154)$$

O primeiro termo corresponde ao termo cinético dos campos escalares h, H, H_1^\pm

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi &= \frac{\sin^2 \theta}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \sin \theta \cos \theta \partial_\mu h \partial^\mu H + \frac{\cos^2 \theta}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H \\ &\quad + \sin^2 \alpha_1 \partial_\mu H_1^+ \partial^\mu H_1^-, \end{aligned} \quad (4.155)$$

enquanto os outros termos são as interações destes campos escalares com os campos de gauge. Importante ressaltar que $-i\frac{e}{2}\phi^\dagger \mathcal{M}_\mu \partial^\mu \phi$ é o conjugado hermitiano de $i\frac{e}{2}\partial_\mu \phi^\dagger \mathcal{M}^\mu \phi$. Dessa forma, ao calcular um destes termos, temos automaticamente o outro. Logo, para $i\frac{e}{2}\partial_\mu \phi^\dagger \mathcal{M}^\mu \phi$ temos que

$$\begin{aligned} &= \frac{ie}{4} (\partial_\mu h \sin \theta - \partial_\mu H \cos \theta) (h \sin \theta - H \cos \theta + v_\eta) \mathcal{Z}^\mu + \frac{ie}{2} \sin^2 \alpha_1 \partial_\mu H_1^+ \mathcal{A}^\mu H_1^- \\ &\quad - \frac{ie \sin \alpha_1}{2 \sin \theta_W} \left[(\partial_\mu h \sin \theta - \partial_\mu H \cos \theta) W^{+\mu} H_1^- + \partial_\mu H_1^+ W^{-\mu} (h \sin \theta - H \cos \theta + v_\eta) \right], \end{aligned} \quad (4.156)$$

de forma que $i\frac{e}{2}\partial_\mu \phi^\dagger \mathcal{M}^\mu \phi - i\frac{e}{2}\phi^\dagger \mathcal{M}_\mu \partial^\mu \phi$ é

$$\begin{aligned} &= \frac{ie}{2} \sin^2 \alpha_1 (\partial_\mu H_1^+ \mathcal{A}^\mu H_1^- - \partial_\mu H_1^- \mathcal{A}^\mu H_1^+) \\ &\quad - \frac{ie \sin \alpha_1}{2 \sin \theta_W} (\partial_\mu h \sin \theta - \partial_\mu H \cos \theta) (W^{+\mu} H_1^- - W^{-\mu} H_1^+) \\ &\quad - \frac{ie \sin \alpha_1}{2 \sin \theta_W} (h \sin \theta - H \cos \theta + v_\eta) (\partial_\mu H_1^+ W^{-\mu} - \partial_\mu H_1^- W^{+\mu}). \end{aligned} \quad (4.157)$$

Do último termo de (4.154) é obtido o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{4} \phi^\dagger \mathcal{M}_\mu \mathcal{M}^\mu \phi &= (h \sin \theta - H \cos \theta + v_\eta)^2 \left(\frac{e^2 \mathcal{Z}^\mu \mathcal{Z}_\mu}{8} + \frac{e^2}{4 \sin^2 \theta_W} W^{+\mu} W_\mu^- \right) \\ &\quad - \frac{e^2}{4 \sin \theta_W} \sin \alpha_1 (h \sin \theta - H \cos \theta + v_\eta) (H_1^- W_\mu^+ + H_1^+ W_\mu^-) (\mathcal{Z}^\mu + \mathcal{A}^\mu) \\ &\quad + \frac{e^2 \sin^2 \alpha_1}{4} H_1^+ H_1^- \left(2 \csc^2 \theta_W W^{+\mu} W_\mu^- + \mathcal{A}^\mu \mathcal{A}_\mu \right). \end{aligned} \quad (4.158)$$

Restam analisar os termos vistos em (4.127), de forma a obter a expressão envolvendo somente os campos físicos de η , após as duas quebras espontâneas de simetria. Para melhor entendimento do resultado final, os cálculos serão feitos por partes, começando por $(D_\mu \eta_3^0)^\dagger D^\mu \eta_3^0$ de (4.127), cuja derivada covariante está escrita em (4.126), e agora toma a seguinte forma com as relações (4.146) e (4.148)

$$D_\mu \eta_3^0 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu (H_U - iH_4) + ie \frac{g_{Z'}}{\sqrt{2}} Z'_\mu (H_U - iH_4). \quad (4.159)$$

Assim, após uma pequena álgebra, é obtida a seguinte expressão

$$\begin{aligned} (D_\mu \eta_3^0)^\dagger D^\mu \eta_3^0 &\equiv \frac{1}{2} \partial_\mu H_U \partial^\mu H_U + \frac{1}{2} \partial_\mu H_4 \partial^\mu H_4 + \frac{e^2 g_{Z'}^2}{2} Z'_\mu Z'^\mu (H_U^2 + H_4^2) \\ &\quad + \frac{e g_{Z'}}{2} Z'_\mu (H_4 \partial^\mu H_U - H_U \partial^\mu H_4). \end{aligned} \quad (4.160)$$

com o uso das relações mostradas em (4.146).

Prosseguindo o cálculo para (4.127), o próximo termo a ser reescrito em termos dos campos físicos é $\frac{g_L^2}{2}(\eta_3^{0*}V_\mu^\dagger V^\mu \eta_3^0 + \phi^\dagger V_\mu V^{\mu\dagger} \phi)$, que toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{g_L^2}{2}(\eta_3^{0*}V_\mu^\dagger V^\mu \eta_3^0 + \phi^\dagger V_\mu V^{\mu\dagger} \phi) &\equiv \frac{e^2}{4\sin^2\theta_W}(H_U^2 + H_4^2)(Y_\mu^- Y^{+\mu} + X_\mu^0 X^{0*\mu}) \\ &+ \frac{e^2}{4\sin^2\theta_W}[(h\sin\theta - H\cos\theta + v_\eta)^2 X_\mu^0 X^{0*\mu} + 2\sin^2\alpha_1 H_1^+ Y_\mu^- H_1^- Y^{+\mu}] \\ &- \frac{e^2\sin\alpha_1}{2\sqrt{2}\sin^2\theta_W}(h\sin\theta - H\cos\theta + v_\eta)(X_\mu^0 H_1^- Y^{+\mu} + X^{0*\mu} H_1^+ Y_\mu^-). \end{aligned} \quad (4.161)$$

Por fim, os termos da segunda linha de (4.127) tomam a seguinte forma

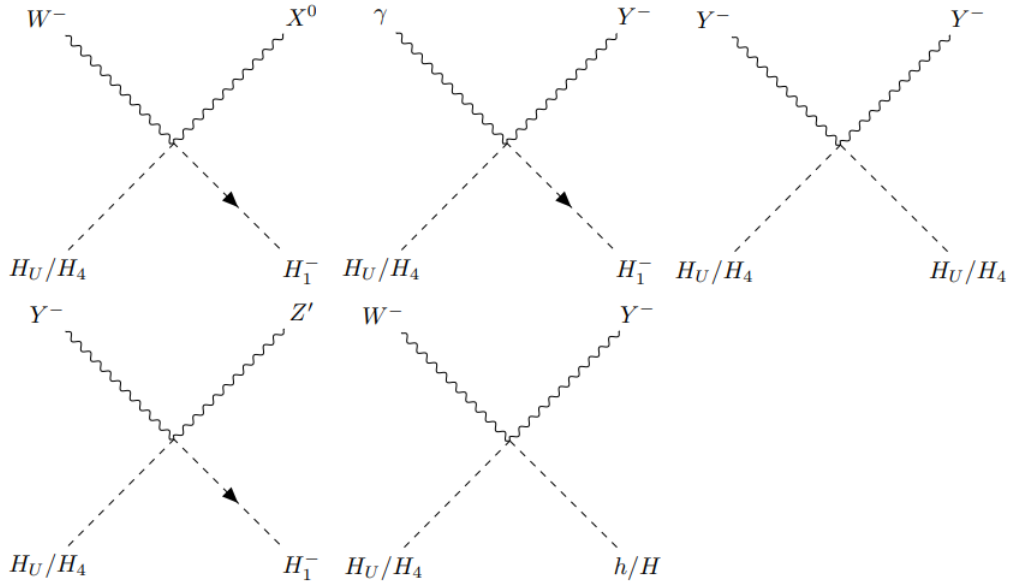


Figura 35 – Alguns diagramas de Feynman contendo interações quárticas entre os bósons escalares H_U, H_4 e os outros bósons: h, H, γ, Z', W^- , obtidos a partir das expressões (4.161) e (4.162).

$$\begin{aligned} i\frac{g_L}{\sqrt{2}}[(D_\mu\phi)^\dagger V^\mu \eta_3^0 + (D_\mu\eta_3^0)V^{\mu\dagger}\phi - \text{H.c.}] &\equiv \frac{ie(H_U - iH_4)}{2\sqrt{2}\sin\theta_W}(\sin\theta\partial_\mu h - \cos\theta\partial_\mu H)X^{0\mu} \\ &- \frac{ie\sin\alpha_1}{2\sin\theta_W}(H_U - iH_4)\partial_\mu H_1^+ Y^{-\mu} + \frac{e^2(H_U - iH_4)}{2\sqrt{2}\sin\theta_W}(h\sin\theta - H\cos\theta + v_\eta)\mathcal{Z}_\mu X^{0\mu} \\ &- \frac{e^2\sin\alpha_1}{2\sqrt{2}\sin^2\theta_W}(H_U - iH_4)W_\mu^- H_1^+ X^{0\mu} + \frac{e^2(H_U - iH_4)}{4\sin^2\theta_W}(h\sin\theta - H\cos\theta + v_\eta)W_\mu^+ Y^{-\mu} \\ &- \frac{e^2\sin\alpha_1(H_U - iH_4)}{4\sin\theta_W}H_1^+ \mathcal{A}_\mu Y^{-\mu} - \frac{ie\sin\alpha_1}{2\sin\theta_W}Y^{+\mu}H_1^- (\partial_\mu H_U - i\partial_\mu H_4) \\ &+ \frac{ie(\partial_\mu H_U - i\partial_\mu H_4)}{2\sqrt{2}\sin\theta_W}X^{0*\mu}(h\sin\theta - H\cos\theta) - \frac{e^2 g_{Z'}\sin\alpha_1(H_U - iH_4)}{2\sin\theta_W}Z'_\mu Y^{+\mu}H_1^- \\ &- \frac{e^2 g_{Z'}(H_U - iH_4)}{2\sqrt{2}\sin\theta_W}Z'_\mu X^{0*\mu}(h\sin\theta - H\cos\theta + v_\eta) + \text{H.c.} \end{aligned} \quad (4.162)$$

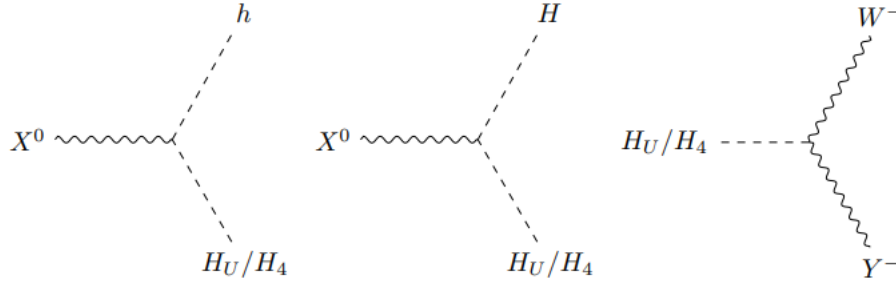


Figura 36 – Alguns diagramas de Feynman obtidos da expressão (4.162) contendo interações cúbicas dos bósons escalares H_U, H_4 .

Com isso, conclui-se a análise da derivada covariante de η após as duas quebras espontâneas de simetria, restando apenas examinar a derivada covariante de ρ , definida após a primeira quebra de simetria em (4.119). O procedimento adotado para η será replicado neste caso, consistindo na reescrita das funções trigonométricas de θ_X em termos de θ_W , utilizando as relações (4.146). Ademais, os campos W_μ^3 e B_μ serão reescritos em termos de A_μ e Z_μ , conforme as relações definidas em (4.142).

Entretanto, visando proporcionar maior clareza ao leitor, iniciaremos o processo pela derivada covariante de \mathcal{H} em (4.117), incorporando desde já o emprego das relações supracitadas

$$D_\mu \equiv \partial_\mu \mathbf{1}_{2 \times 2} + i \frac{e}{2} \begin{pmatrix} 2A_\mu + 2 \cot(2\theta_W) Z_\mu & \sqrt{2} \csc \theta_W W_\mu^+ \\ \sqrt{2} \csc \theta_W W_\mu^- & -\csc \theta_W \sec \theta_W Z_\mu \end{pmatrix} - i \frac{e}{2} g_{Z'} \sec^2 \theta_W Z'_\mu \mathbf{1}_{2 \times 2}. \quad (4.163)$$

A partir das relações definidas em (4.149), (4.150), encontra-se, neste caso, que

$$2A_\mu + 2 \cot(2\theta_W) Z_\mu - g_{Z'} \sec^2 \theta_W Z'_\mu \equiv -\mathcal{A}_\mu - 2g_{Z'} Z'_\mu, \quad (4.164)$$

$$-\csc \theta_W \sec \theta_W Z_\mu - g_{Z'} \sec^2 \theta_W Z'_\mu \equiv -\mathcal{Z}_\mu - 2g_{Z'} Z'_\mu, \quad (4.165)$$

permitindo reescrever (4.163) da seguinte forma

$$D_\mu = \partial_\mu \mathbf{1}_{2 \times 2} - i \frac{e}{2} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_\mu + 2g_{Z'} Z'_\mu & -\sqrt{2} \csc \theta_W W_\mu^+ \\ -\sqrt{2} \csc \theta_W W_\mu^- & \mathcal{Z}_\mu + 2g_{Z'} Z'_\mu \end{pmatrix}, \quad (4.166)$$

sendo possível definir a seguinte matriz hermitiana \mathcal{N}_μ como

$$\mathcal{N}_\mu = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_\mu + 2g_{Z'} Z'_\mu & -\sqrt{2} \csc \theta_W W_\mu^+ \\ -\sqrt{2} \csc \theta_W W_\mu^- & \mathcal{Z}_\mu + 2g_{Z'} Z'_\mu \end{pmatrix}, \quad (4.167)$$

o que nos leva a

$$D_\mu \mathcal{H} = \partial_\mu \mathcal{H} - i \frac{e}{2} \mathcal{N}_\mu \mathcal{H}. \quad (4.168)$$

Dessa forma, é obtida a seguinte expressão para o termo cinético covariante de \mathcal{H}

$$(D_\mu \mathcal{H})^\dagger (D^\mu \mathcal{H}) = \partial_\mu \mathcal{H}^\dagger \partial^\mu \mathcal{H} - i \frac{e}{2} \partial_\mu \mathcal{H}^\dagger \mathcal{N}^\mu \mathcal{H} + i \frac{e}{2} \mathcal{H}^\dagger \mathcal{N}_\mu \partial^\mu \mathcal{H} + \frac{e^2}{4} \mathcal{H}^\dagger \mathcal{N}_\mu \mathcal{N}^\mu \mathcal{H}. \quad (4.169)$$

O primeiro termo corresponde aos termos cinéticos puros de h, H, H_1^+

$$\begin{aligned} \partial_\mu \mathcal{H}^\dagger \partial^\mu \mathcal{H} &= \frac{\cos^2 \theta}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \sin \theta \cos \theta \partial_\mu h \partial^\mu H + \frac{\sin^2 \theta}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H \\ &\quad + \cos^2 \alpha_1 \partial_\mu H_1^+ \partial^\mu H_1^-. \end{aligned} \quad (4.170)$$

Assim, temos que a partir da soma desta última expressão com (4.155), os termos cinéticos puros de h, H, H_1^\pm simplificam como

$$\partial_\mu \mathcal{H}^\dagger \partial^\mu \mathcal{H} + \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H + \partial_\mu H_1^+ \partial^\mu H_1^-. \quad (4.171)$$

Os termos $-i\frac{e}{2} \partial_\mu \mathcal{H}^\dagger \mathcal{N}^\mu \mathcal{H} + i\frac{e}{2} \mathcal{H}^\dagger \mathcal{N}_\mu \partial^\mu \mathcal{H}$ são avaliados da seguinte forma, após uma pequena álgebra

$$\begin{aligned} &= \frac{ie \cos^2 \alpha_1}{2} \mathcal{A}_\mu (\partial_\mu H_1^+ H_1^- - \partial_\mu H_1^- H_1^+) + ieg_Z' \cos^2 \alpha_1 Z'_\mu (\partial_\mu H_1^+ H_1^- - \partial_\mu H_1^- H_1^+) \\ &\quad - \frac{ie \cos \alpha_1}{2 \sin \theta_W} (\partial_\mu h \cos \theta + \partial_\mu H \sin \theta) (W^{+\mu} H_1^- - W^{-\mu} H_1^+) \\ &\quad - \frac{ie \cos \alpha_1}{2 \sin \theta_W} (h \cos \theta + H \sin \theta + v_\rho) (W_\mu^- \partial^\mu H_1^+ - W_\mu^+ \partial^\mu H_1^-). \end{aligned} \quad (4.172)$$

É possível simplificar a expressão (4.172) ao somá-la com (4.157), utilizando as relações apresentadas em (4.45). Isto é,

$$\begin{aligned} & - \cos \alpha_1 \cos \theta \partial_\mu h W^{+\mu} H_1^- - \sin \alpha_1 \sin \theta \partial_\mu h W^{+\mu} H_1^- = 0, \\ & - \cos \alpha_1 h \cos \theta W_\mu^- \partial^\mu H_1^+ - \sin \alpha_1 h \sin \theta W_\mu^- \partial^\mu H_1^+ = 0. \end{aligned} \quad (4.173)$$

Logo, a expressão simplifica para

$$\begin{aligned} i\frac{e}{2} \partial_\mu \phi^\dagger \mathcal{M}^\mu \phi - i\frac{e}{2} \partial_\mu \mathcal{H}^\dagger \mathcal{N}^\mu \mathcal{H} + \text{H.c.} &= \frac{ie}{2} \mathcal{A}_\mu (\partial_\mu H_1^+ H_1^- - \partial_\mu H_1^- H_1^+) \\ &\quad - \frac{ie}{2 \sin \theta_W} \partial_\mu H (W^{+\mu} H_1^- - W^{-\mu} H_1^+) - \frac{ie}{2 \sin \theta_W} H (W_\mu^- \partial^\mu H_1^+ - W_\mu^+ \partial^\mu H_1^-), \end{aligned} \quad (4.174)$$

ou seja, o bóson de Higgs h não participa das interações com os novos bósons escalares H_1^\pm e os bósons de gauge W_μ^\pm , na aproximação $v_\chi \gg v_\rho, v_\eta$ realizada em (4.44). Na realidade, como mostrado em [105], há outros termos a serem considerados ao passar dos autoestados eletrofracos para os autoestados de massa. Entretanto, como discutido pelos autores, estas correções podem ser desprezadas por produzirem correntes neutras com troca de sabores pelo bóson de Higgs a nível de árvore.

Para o último termo de (4.169), encontra-se a seguinte expressão, após algumas

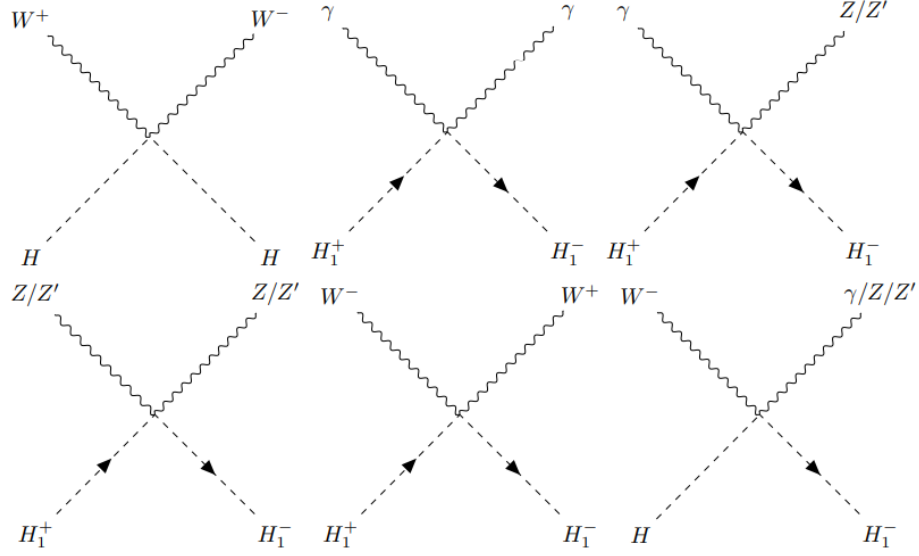


Figura 37 – Exemplos de interações quárticas que envolvem bóson carregados, obtidas a partir da expressão (4.177).

manipulações algébricas

$$\begin{aligned}
 \frac{e^2}{4} \mathcal{H}^\dagger \mathcal{N}_\mu \mathcal{N}^\mu \mathcal{H} &= \frac{e^2 \cos^2 \alpha_1}{4} H_1^+ H_1^- \left(\mathcal{A}_\mu \mathcal{A}^\mu + 2 \csc^2 \theta_W W^{+\mu} W_\mu^- \right) \\
 &+ e^2 g_{Z'} \cos^2 \alpha_1 H_1^+ H_1^- \left(\mathcal{A}_\mu Z'^\mu + g_{Z'} Z'^\mu Z'_\mu \right) \\
 &- \frac{e^2 \cos \alpha_1}{4 \sin \theta_W} (h \cos \theta + H \sin \theta + v_\rho) (\mathcal{A}_\mu + \mathcal{Z}_\mu) (W^{+\mu} H_1^- + W^{-\mu} H_1^+) \\
 &- \frac{e^2 g_{Z'} \cos \alpha_1}{\sin \theta_W} (h \cos \theta + H \sin \theta + v_\rho) (W^{+\mu} H_1^- + W^{-\mu} H_1^+) Z'_\mu \\
 &+ (h \cos \theta + H \sin \theta + v_\rho)^2 \left(\frac{e^2}{8} \mathcal{Z}^\mu \mathcal{Z}_\mu + \frac{e^2}{4 \sin^2 \theta_W} W^{+\mu} W_\mu^- \right) \\
 &+ \frac{e^2}{2} g_{Z'} (h \cos \theta + H \sin \theta + v_\rho)^2 \left(\mathcal{Z}_\mu Z'^\mu + g_{Z'} Z'^\mu Z'_\mu \right).
 \end{aligned} \tag{4.175}$$

Esta expressão pode ser simplificada quando somada a expressão apresentada em (4.158), devido aos seguintes resultados obtidos com o uso das expressões (4.45)

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha_1 v_\rho + \sin \alpha_1 v_\eta &= 0, \\
 \sin \alpha_1 h \sin \theta + \cos \alpha_1 h \cos \theta &= 0, \\
 -\sin \alpha_1 H \cos \theta + \cos \alpha_1 H \sin \theta &= H, \\
 (h \sin \theta - H \cos \theta + v_\eta)^2 + (h \cos \theta + H \sin \theta + v_\rho)^2 &= (h + v)^2 + H^2,
 \end{aligned} \tag{4.176}$$

em que $v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\eta^2}$, correspondendo ao VEV do Modelo Padrão.

Dessa forma, encontra-se que

$$\begin{aligned}
& \frac{e^2}{4} (\mathcal{H}^\dagger \mathcal{N}_\mu \mathcal{N}^\mu \mathcal{H} + \phi^\dagger \mathcal{M}_\mu \mathcal{M}^\mu \phi) = [(h+v)^2 + H^2] \left(\frac{e^2}{8} \mathcal{Z}^\mu \mathcal{Z}_\mu + \frac{e^2}{4 \sin^2 \theta_W} W^{+\mu} W_\mu^- \right) \\
& + \frac{e^2}{4} H_1^+ H_1^- (\mathcal{A}_\mu \mathcal{A}^\mu + 2 \csc^2 \theta_W W^{+\mu} W_\mu^-) - \frac{e^2}{4 \sin \theta_W} H (\mathcal{A}_\mu + \mathcal{Z}_\mu) (W^{+\mu} H_1^- + W^{-\mu} H_1^+) \\
& + e^2 g_{Z'} \cos^2 \alpha_1 H_1^+ H_1^- \mathcal{A}_\mu Z'^\mu + e^2 g_{Z'} (h \cos \theta + H \sin \theta + v_\rho)^2 \mathcal{Z}_\mu Z'^\mu \\
& - \frac{e^2 g_{Z'} \cos \alpha_1}{\sin \theta_W} (h \cos \theta + H \sin \theta + v_\rho) (W^{+\mu} H_1^- + W^{-\mu} H_1^+) Z'_\mu \\
& + \frac{e^2}{2} g_{Z'}^2 [(h \cos \theta + H \sin \theta + v_\rho)^2 + 2 \cos^2 \alpha_1 H_1^+ H_1^-] Z'^\mu Z'_\mu.
\end{aligned} \tag{4.177}$$

A derivada covariante de ρ_3 , que agora será renomeado como H_2^+ devido às redefinições realizadas em (4.44), toma a seguinte forma

$$D_\mu H_2^+ = \partial_\mu H_2^+ + ie A_\mu H_2^+ - ie \tan \theta_W Z_\mu + ieg_{Z'} (\tan^2 \theta_W - 1) Z'_\mu H_2^+. \tag{4.178}$$

Logo, para o termo cinético covariante, encontra-se, após uma pequena álgebra, o seguinte

$$\begin{aligned}
& (D_\mu H_2^+)^\dagger D^\mu H_2^+ = \partial_\mu H_2^- \partial^\mu H_2^+ + ie (\partial_\mu H_2^+ H_2^- - \partial_\mu H_2^- H_2^+) (A^\mu - \tan \theta_W Z^\mu) \\
& + ieg_{Z'} (\partial_\mu H_2^+ H_2^- - \partial_\mu H_2^- H_2^+) (\tan^2 \theta_W - 1) Z'^\mu + e^2 H_2^- H_2^+ (\mathcal{A}_\mu \mathcal{A}^\mu + \tan^2 \theta_W Z_\mu Z^\mu) \\
& + e^2 g_{Z'}^2 (\tan^2 \theta_W - 1)^2 H_2^- H_2^+ Z'^\mu Z'_\mu - 2e^2 H_2^+ H_2^- (\tan^2 \theta_W Z_\mu - g_{Z'} (\tan^2 \theta_W - 1) Z'_\mu) A^\mu \\
& - 2e^2 g_{Z'} H_2^+ H_2^- \tan \theta_W Z_\mu Z'^\mu.
\end{aligned} \tag{4.179}$$

Assim, restam analisar mais três termos descritos em (4.119): $\frac{g_L^2}{2} (\rho_3^- V_\mu^\dagger V^\mu \rho_3^+ + \mathcal{H}^\dagger V_\mu V^\mu \mathcal{H})$ e $i \frac{g_L}{\sqrt{2}} [(D_\mu \mathcal{H})^\dagger V^\mu \rho_3^+ + (D_\mu \rho_3^+)^\dagger V^\mu \mathcal{H}] + \text{H.c.}$. Vale ressaltar que nos cálculos a seguir, e nos anteriores, está sendo utilizada a seguinte redefinição de g_L em termos de e , a partir da relação (4.146). Para o primeiro termo, temos

$$\begin{aligned}
& \frac{g_L^2}{2} (\rho_3^- V_\mu^\dagger V^\mu \rho_3^+ + \mathcal{H}^\dagger V_\mu V^\mu \mathcal{H}) \equiv \frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} H_2^+ H_2^- (X_\mu^0 X^{0*\mu} + Y_\mu^- Y^{+\mu}) \\
& + \frac{e^2}{4 \sin^2 \theta_W} (h \cos \theta + H \sin \theta + v_\rho)^2 Y_\mu^- Y^{+\mu} + \frac{e^2 \cos^2 \alpha_1}{2 \sin^2 \theta_W} H_1^+ H_1^- X_\mu^0 X^{0*\mu} \\
& + \frac{e^2 \cos \alpha_1}{2\sqrt{2} \sin^2 \theta_W} (h \cos \theta + H \sin \theta + v_\rho) (X_\mu^0 Y^{+\mu} H_1^- + X^{0*\mu} Y_\mu^- H_1^+).
\end{aligned} \tag{4.180}$$

Enquanto para o segundo termo, obtém-se que

$$\begin{aligned}
& i \frac{g_L}{\sqrt{2}} [(D_\mu \mathcal{H})^\dagger V^\mu \rho_3^+ + (D_\mu \rho_3^+)^\dagger V^\mu \mathcal{H}] + \text{H.c.} \equiv \frac{ie}{\sqrt{2} \sin \theta_W} H_2^+ \partial_\mu H_1^- X^{0\mu} \\
& + \frac{ie}{2 \sin \theta_W} H_2^+ (\cos \theta \partial_\mu h + \sin \theta \partial_\mu H) Y^{-\mu} - \frac{e^2 \cos \alpha_1}{2\sqrt{2} \sin \theta_W} H_1^- (\mathcal{A}_\mu + 2g_{Z'} Z'_\mu) X^{0\mu} H_2^+ \\
& + \frac{e^2 \cos \alpha_1}{\sin^2 \theta_W} H_2^+ W_\mu^+ Y^{-\mu} H_1^- + \frac{e^2}{\sqrt{2} \sin^2 \theta_W} (h \cos \theta + H \sin \theta + v_\rho) H_2^+ W_\mu^- X^{0\mu} \\
& - \frac{e^2}{2 \sin \theta_W} (h \cos \theta + H \sin \theta + v_\rho) (\mathcal{Z}_\mu + 2g_{Z'} Z'_\mu) Y^{-\mu} H_2^+ + \frac{ie \cos \alpha_1}{\sqrt{2} \sin \theta_W} \partial_\mu H_2^- H_1^+ X^{0*\mu} \\
& \frac{ie}{2 \sin \theta_W} \partial_\mu H_2^- Y^{+\mu} (h \cos \theta + H \sin \theta).
\end{aligned} \tag{4.181}$$

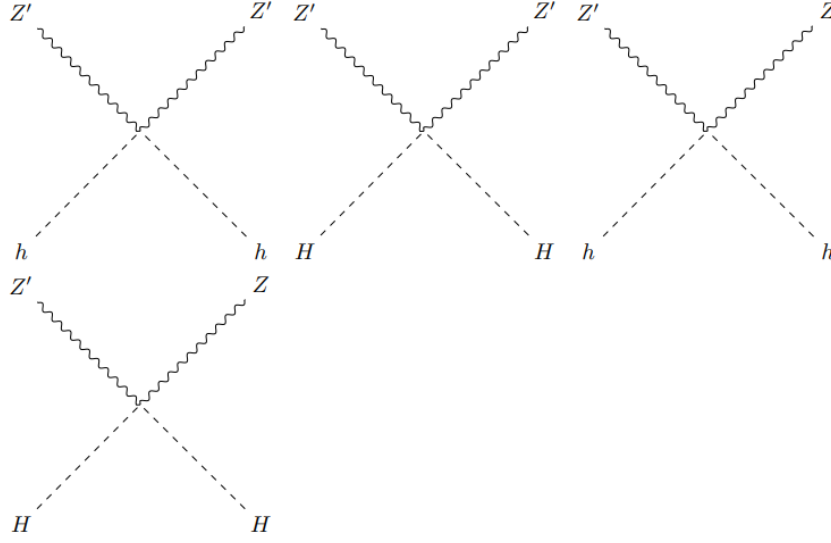


Figura 38 – Interações quárticas entre o bóson de Higgs h e os bósons Z, Z' . As regras de Feynman podem ser obtidas a partir da expressão (4.177), ou do artigo [105] para modelos 331 genéricos.

Dessa forma, conclui-se todas as interações do setor escalar com os bósons de gauge, estando em acordo como mostrado pelos autores em [105]. É claramente notável que o Modelo 331 é muito mais rico fenomenologicamente em interações do que o Modelo Padrão, ao introduzir novas partículas escalares e vetoriais, sendo as últimas procuradas por colisores de partículas, em especial, o novo bóson neutro Z' .

Durante a apresentação dos resultados, o atento leitor se depara com muitas interações entre Z_μ e Z'_μ , como nos termos: $\mathcal{Z}_\mu \mathcal{Z}^\mu, \mathcal{Z}_\mu Z'^\mu$, dificultando, então, encontrar a expressão das massas destes bósons. O mesmo vale para os bósons $X_\mu^{0(*)}, Y_\mu^\pm$ e W_μ^\pm , embora estes tenham expressões mais simples.

Para as massas de Z'_μ e Z_μ , analisaremos os termos $(D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi)$ e $(D_\mu \mathcal{H})^\dagger (D^\mu \mathcal{H})$ avaliados no vácuo, a partir das relações (4.154) e (4.169), respectivamente. Assim,

$$\langle (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) \rangle \equiv \frac{e^2}{4} \langle \phi \rangle \mathcal{M}_\mu \mathcal{M}^\mu \langle \phi \rangle = \frac{e^2 v_\eta^2}{8} \mathcal{Z}_\mu \mathcal{Z}^\mu + \frac{e^2 v_\eta^2}{4 \sin^2 \theta_W} W_\mu^+ W^{-\mu}, \quad (4.182)$$

$$\begin{aligned} \langle (D_\mu \mathcal{H})^\dagger (D^\mu \mathcal{H}) \rangle &\equiv \frac{e^2}{4} \langle \mathcal{H} \rangle \mathcal{N}_\mu \mathcal{N}^\mu \langle \mathcal{H} \rangle = \frac{e^2 v_\rho^2}{8} \mathcal{Z}_\mu \mathcal{Z}^\mu + \frac{e^2 v_\rho^2}{4 \sin^2 \theta_W} W_\mu^+ W^{-\mu} \\ &+ \frac{e^2}{2} g_{Z'} v_\rho^2 (\mathcal{Z}_\mu Z'^\mu + g_{Z'} Z'^\mu Z'_\mu). \end{aligned} \quad (4.183)$$

Rapidamente é possível identificar a massa dos bósons W_μ^\pm

$$m_{W^\pm}^2 = \frac{e^2 (v_\rho^2 + v_\eta^2)}{4 \sin^2 \theta_W} = \frac{e^2 v^2}{4 \sin^2 \theta_W}, \quad (4.184)$$

em que fora utilizado na última passagem $v^2 = v_\eta^2 + v_\rho^2$. Temos que os termos

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_\mu \mathcal{Z}^\mu &= \csc^2 \theta_W \sec^2 \theta_W Z^\mu Z_\mu + 2g_{Z'} \csc \theta_W \sec \theta_W (\tan^2 \theta_W - 1) Z_\mu Z'^\mu \\ &\quad + g_{Z'}^2 (\tan^2 \theta_W - 1)^2 Z'^\mu Z'_\mu, \end{aligned} \quad (4.185)$$

$$\mathcal{Z}_\mu Z'^\mu + g_{Z'} Z'^\mu Z'_\mu = \csc \theta_W \sec \theta_W Z_\mu Z'^\mu + g_{Z'} \tan^2 \theta_W Z'^\mu Z'_\mu, \quad (4.186)$$

o que possibilita identificar a massa do bóson Z_μ , a correção à massa do bóson Z'_μ , e a mistura entre eles sendo denominada $m_{ZZ'}$, como

$$m_Z^2 = \frac{e^2(v_\rho^2 + v_\eta^2)}{4} \csc^2 \theta_W \sec^2 \theta_W = \frac{e^2 v^2}{4} \csc^2 \theta_W \sec^2 \theta_W, \quad (4.187)$$

$$m_{Z'}^2 = \frac{e^2 g_{Z'}^2}{4} [(\tan^2 \theta_W - 1)^2 v^2 + 4 \tan^2 \theta_W v_\rho^2] = \frac{e^2 g_{Z'}^2}{4} (\sec^4 \theta_W v^2 - 4 \tan^2 \theta_W v_\eta^2), \quad (4.188)$$

$$m_{ZZ'}^2 = \frac{e^2 g_{Z'} \csc \theta_W \sec \theta_W}{4} [\sec^2 \theta_W v^2 - 2v_\eta^2]. \quad (4.189)$$

Vale ressaltar que $m_{Z'}^2$, apresentada em (4.188) é a correção sofrida à $m_{Z'}^2$, mostrada em (4.60). Esta, por sua vez, está escrita em termos de g_L, g_X , sendo necessário utilizar as relações definidas em (4.56), (4.143), (4.146) e (4.148) para deixar em termos de $e, g_{Z'}$ e θ_W . Assim, a partir de (4.60)

$$\frac{v_X^2}{36} (12g_L^2 + g_X^2) \equiv e^2 g_{Z'}^2 v_X^2. \quad (4.190)$$

Dessa forma, a massa do bóson Z' é

$$m_{Z'}^2 = \frac{e^2 g_{Z'}^2}{4} (\sec^4 \theta_W v^2 - 4 \tan^2 \theta_W v_\eta^2 + 4v_X^2), \quad (4.191)$$

estando todas as expressões em total acordo com [90], com análises mais detalhadas também podendo ser encontradas neste artigo.

As massas dos bósons $X_\mu^{0(*)}$ e Y_μ^\pm também sofrem correções devido a última quebra espontânea de simetria, sendo encontradas a partir das expressões encontradas em (4.119) e (4.127), quando avaliadas no vácuo

$$\frac{g_L^2}{2} \langle \mathcal{H} | V_\mu V^{\mu\dagger} | \mathcal{H} \rangle = \frac{e^2 v_\rho^2}{4 \sin^2 \theta_W} X_\mu^0 X^{0*\mu}, \quad (4.192)$$

$$\frac{g_L^2}{2} \langle \phi | V_\mu V^{\mu\dagger} | \phi \rangle = \frac{e^2 v_\eta^2}{4 \sin^2 \theta_W} Y_\mu^- Y^{+\mu}. \quad (4.193)$$

Dessa forma, as massas apresentadas para estes bósons em (4.60), são agora corrigidas como

$$m_{X^0}^2 = \frac{e^2(v_X^2 + v_\rho^2)}{4 \sin^2 \theta_W}, \quad m_{Y^\pm}^2 = \frac{e^2(v_X^2 + v_\eta^2)}{4 \sin^2 \theta_W}. \quad (4.194)$$

4.5.2 Massa dos férmions

Esta fase final também desempenha um papel crucial na conferência de massa aos férmions do Modelo Padrão. No entanto, é importante observar a presença de um termo adicional relacionado à massa do neutrino, que não estava contemplado na formulação original do Modelo Padrão apresentada no Capítulo 1.

A fenomenologia ganha complexidade adicional devido à introdução de bósons escalares, tanto carregados quanto neutros, que interagem com os férmions. Conforme exploraremos, a inclusão de correntes neutras que facilitam a troca entre diferentes sabores (FCNC) surgirá no setor dos quarks, demandando a aplicação de técnicas específicas para torná-las pequenas.

Começando pelo setor leptônico, a partir da Lagrangeana apresentada em (4.27)

$$\mathcal{L}_{Yuk}^{[e]} = -Y_{aa'}\epsilon_{ijk}(\bar{F}_{aL})_i(F_{a'L}^C)_j\rho^* - Y'_{aa'}\bar{F}_{aL}e_{a'R}\rho, \quad (4.195)$$

é obtida a seguinte expressão quando utilizada a definição realizada em (4.44), assim como a definição do tensor de Levi-Civita,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yuk}^{[e]} = & -Y_{aa'}H_2^-(\bar{\nu}_{aL}e_{a'L}^C - \bar{e}_{aL}\nu_{a'L}^C) - Y_{aa'}\cos\alpha_1H_1^-(\bar{e}_{aL}\nu_{a'R} - \bar{\nu}_{aR}e_{a'L}^C) \\ & - \frac{Y_{aa'}}{\sqrt{2}}H\sin\theta(\bar{\nu}_{aR}^C\nu_{a'L}^C - \bar{\nu}_{aL}\nu_{a'R}) - \frac{Y_{aa'}}{\sqrt{2}}(h\cos\theta + v_\rho)(\bar{\nu}_{aR}^C\nu_{a'L}^C - \bar{\nu}_{aL}\nu_{a'R}) \\ & - Y'_{aa'}H_2^+e_{a'R}\bar{\nu}_{aR}^C - Y'_{aa'}\cos\alpha_1H_1^+e_{a'R}\bar{\nu}_{aL} - \frac{Y'_{aa'}}{\sqrt{2}}H\sin\theta\bar{e}_{aL}e_{a'R} \\ & - \frac{Y'_{aa'}}{\sqrt{2}}(h\cos\theta + v_\rho)\bar{e}_{aL}e_{a'R} + \text{H.c.} \end{aligned} \quad (4.196)$$

O último termo consiste na interação do bóson de Higgs com os léptons carregados, assim como a massa destes. Diagonalizando $Y'_{aa'}$ como

$$Y'_{aa'} = U_{ak}^{e*}M_{kk}^eV_{ka'}^e, \quad (4.197)$$

de forma análoga ao que fora feito em (1.30), isto é, U_{ka}^e e $V_{ka'}^e$ são matrizes unitárias 3×3 . É importante ressaltar que M_{kk}^e indica que esta matriz é diagonal, como esperado. Dessa forma, tem-se que

$$\begin{aligned} -\frac{Y'_{aa'}}{\sqrt{2}}(h\cos\theta + v_\rho)\bar{e}_{aL}e_{a'R} &= -\frac{(h\cos\theta + v_\rho)}{\sqrt{2}}\bar{e}_{aL}U_{ak}^{e*}M_{kk}^eV_{ka'}^e e_{a'R}, \\ &= -\frac{(h\cos\theta + v_\rho)}{\sqrt{2}}\bar{e}'_{kL}M_{kk}^e e'_{kR}, \end{aligned} \quad (4.198)$$

em que redefiniu-se os campos $e_{L(R)}$ da seguinte forma

$$e'_{kL} = U_{ka}^e e_{aL}, \quad e'_{kR} = V_{ka'}^e e_{a'R}. \quad (4.199)$$

Como $\cos\theta = v_\rho/v$, então é possível fazer a seguinte identificação, de forma a obter a correspondência com o Modelo Padrão

$$-\frac{v_\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{h}{v} + 1\right)(y'_e\bar{e}_L\bar{e}_R + y'_\mu\bar{\mu}_L\mu_R + y'_\tau\bar{\tau}_L\tau_R) + \text{H.c.}, \quad (4.200)$$

o que permite identificar as massas dos léptons carregados como

$$(m_e, m_\mu, m_\tau) = \frac{v_\rho}{\sqrt{2}}(y'_e, y'_\mu, y'_\tau). \quad (4.201)$$

A relação entre os y_i^2 do Modelo 331 para os y_i , apresentada em (1.80), do Modelo Padrão é facilmente obtida

$$v_\rho y'_i = v y_i. \quad (4.202)$$

Para os outros termos com acoplamentos $Y'_{aa'}$, obtêm-se que

$$\begin{aligned} -Y'_{aa'} H_2^+ e_{a'R} \bar{\nu}_{aR}^C &= -H_2^+ \bar{\nu}_{aR}^C U_{ak}^{e*} M_{kk}^e e'_{kR}, \\ -Y'_{aa'} \cos \alpha_1 H_1^+ e_{a'R} \bar{\nu}_{aL} &= -\cos \alpha_1 H_1^+ \bar{\nu}_{aL} U_{ak}^{e*} M_{kk}^e e'_{kR}, \\ -\frac{Y'_{aa'}}{\sqrt{2}} H \sin \theta \bar{e}_{aL} e_{a'R} &= -\frac{H}{\sqrt{2}} \sin \theta \bar{e}'_{kL} M_{kk}^e e'_{kR}. \end{aligned} \quad (4.203)$$

Como apresentado em [106, 107], os termos acoplados a $Y_{aa'}$ podem ser reescritos como

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_{aL} e_{a'L}^C - \bar{e}_{aL} \nu_{a'L}^C &\equiv -2\bar{e}_{aL} \nu_{a'L}^C, \\ \bar{e}_{aL} \nu_{a'R} - \bar{\nu}_{aR}^C e_{a'L}^C &\equiv 2\bar{e}_{aL} \nu_{a'R}, \\ \bar{\nu}_{aR}^C \nu_{a'L}^C - \bar{\nu}_{aL} \nu_{a'R} &= -2\bar{\nu}_{aL} \nu_{a'R}, \end{aligned} \quad (4.204)$$

o que deixa as primeiras duas linhas de (4.196) igual a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yuk}^{[e]} \supset 2Y_{aa'} H_2^- \bar{e}_{aL} \nu_{a'L}^C - 2Y_{aa'} \cos \alpha_1 H_1^- \bar{e}_{aL} \nu_{a'R} \\ + \sqrt{2} Y_{aa'} H \sin \theta \bar{\nu}_{aL} \nu_{a'R} + \sqrt{2} Y_{aa'} (h \cos \theta + v_\rho) \bar{\nu}_{aL} \nu_{a'R} + \text{H.c.} \end{aligned} \quad (4.205)$$

Diagonalizando $Y_{aa'}$ da seguinte forma

$$Y_{aa'} = U_{aj}^{N*} M_{jj}^N V_{ja'}^N, \quad (4.206)$$

é possível redefinir os campos $\nu_{L(R)}$ como

$$\nu'_{jL} = U_{ja}^N \nu_{aL}, \quad \nu'_{jR} = V_{ja'}^N \nu_{a'R}. \quad (4.207)$$

Assim, (4.205) toma a seguinte forma, após realizar as redefinições e a diagonalização de $Y_{aa'}$ ³

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yuk}^{[e]} \supset 2H_2^- \bar{e}_{aL} U_{aj}^{N*} M_{jj}^N V_{ja'}^N \nu_{a'L}^C - 2 \cos \alpha_1 H_1^- \bar{e}_{aL} U_{aj}^{N*} M_{jj}^N \nu'_{jR} \\ + \sqrt{2} H \sin \theta \bar{\nu}'_{jL} M_{jj}^N \nu'_{jR} + \sqrt{2} v_\rho \left(\frac{h}{v} + 1 \right) \bar{\nu}'_{jL} M_{jj}^N \nu'_{jR} + \text{H.c.} \end{aligned} \quad (4.208)$$

Ao utilizar a redefinição para e_{aL} , a partir de (4.199), encontra-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yuk}^{[e]} \supset 2H_2^- \bar{e}_{kL} U_{ka}^e U_{aj}^{N*} M_{jj}^N V_{ja'}^N \nu_{a'L}^C - 2 \cos \alpha_1 H_1^- \bar{e}_{kL} U_{ka}^e U_{aj}^{N*} M_{jj}^N \nu'_{jR} \\ + \sqrt{2} H \sin \theta \bar{\nu}'_{jL} M_{jj}^N \nu'_{jR} + \sqrt{2} v_\rho \left(\frac{h}{v} + 1 \right) \bar{\nu}'_{jL} M_{jj}^N \nu'_{jR} + \text{H.c.}, \end{aligned} \quad (4.209)$$

² O índice aqui i se refere ao sabor da família do elétron. Por exemplo, $i = e, \mu, \tau$.

³ Exceto para o primeiro termo acoplado a H_2^- .

definindo a matriz PMNS, abreviação de **Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata** [108], da seguinte forma [34]

$$\mathcal{V}_{kj} = U_{ka}^e U_{aj}^{N*}. \quad (4.210)$$

Logo, após algumas manipulações algébricas, $\mathcal{L}_{Yuk}^{[e]}$ é reescrito como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yuk}^{[e]} = & 2H_2^- \bar{e}_{kL} \mathcal{V}_{kj} M_{jj}^N V_{ja'}^N \nu_{a'L}^C - 2\frac{v_\eta}{v} H_1^- \bar{e}_{kL} \mathcal{V}_{kj} M_{jj}^N \nu_{jR} \\ & + \sqrt{2}\frac{v_\eta}{v} H \bar{\nu}_{jL} M_{jj}^N \nu_{jR} + \sqrt{2}v_\rho \left(\frac{h}{v} + 1\right) \bar{\nu}_{jL} M_{jj}^N \nu_{jR} \\ & - H_2^+ \bar{\nu}_{jR}^C V_{ja}^{N*} U_{ak}^{e*} M_{kk}^e e_{kR} - \frac{v_\eta}{v} H_1^+ \bar{\nu}_{jL} \mathcal{V}_{jk}^\dagger M_{kk}^e e_{kR} \\ & - \frac{H}{\sqrt{2}} \frac{v_\eta}{v} \bar{e}_{kL} M_{kk}^e e_{kR} - \frac{v_\rho}{\sqrt{2}} \left(\frac{h}{v} + 1\right) \bar{e}_{kL} M_{kk}^e e_{kR} + \text{H.c.}, \end{aligned} \quad (4.211)$$

sendo descartado o símbolo ' dos campos transformados. Com o uso dos termos conjugados hermitianos, é possível definir os campos leptônicos na forma de Dirac

$$e_k \equiv \begin{pmatrix} e_{kL} \\ e_{kR} \end{pmatrix}, \quad \nu_k \equiv \begin{pmatrix} \nu_{kL} \\ \nu_{kR} \end{pmatrix} \quad (4.212)$$

De forma que a expressão (4.211) agora é escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yuk}^{[e]} = & -H_2^- \bar{e}_i M_{ij}^2 V_{jk}^N \nu_k^C - H_2^+ \bar{\nu}_k^C V_{kj}^{N*} M_{ji}^{2*} e_i - \frac{v_\eta}{v} H_1^- \bar{e}_i M_{ij}^1 \nu_j - \frac{v_\eta}{v} H_1^+ \bar{\nu}_j M_{ji}^{1*} e_i \\ & - H \frac{v_\eta}{v} \bar{\nu}_j \mathcal{M}_{jj}^N \nu_j - v_\rho \left(\frac{h}{v} + 1\right) \bar{\nu}_j \mathcal{M}_{jj}^N \nu_j - H \frac{v_\eta}{v} \bar{e}_j \mathcal{M}_{jj}^e e_j - v_\rho \left(\frac{h}{v} + 1\right) \bar{e}_j \mathcal{M}_{jj}^e e_j, \end{aligned} \quad (4.213)$$

em que os índices foram reorganizados, de forma a definir as seguintes matrizes

$$\begin{aligned} M_{ij}^1 & \equiv \begin{pmatrix} 0 & 2\mathcal{V}_{ij} M_{jj}^N \\ M_{ii}^e \mathcal{V}_{ij} & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{ij}^2 \equiv \begin{pmatrix} -2\mathcal{V}_{ij} M_{jj}^N & 0 \\ 0 & M_{ii}^e U_{ij}^e \end{pmatrix}, \\ \mathcal{M}_{jj}^N & \equiv \begin{pmatrix} M_{jj}^N & 0 \\ 0 & M_{jj}^N \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_{jj}^e \equiv \begin{pmatrix} M_{jj}^e & 0 \\ 0 & M_{jj}^e \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.214)$$

Importante ressaltar que neste Modelo 331, a massa dos neutrinos não está de acordo com os dados experimentais, sendo a concordância observada somente quando considerada correções a um laço, conforme visto em [106].

Para os quarks, os acoplamentos de Yukawa envolvendo o campo χ já foram analisados na seção anterior, restando para agora somente os acoplamentos envolvendo ρ e η

$$\mathcal{L}_{Yuk}^{[q]} = -\alpha_a \bar{\mathbf{Q}}_L \mathbf{d}_{aR} \rho - \alpha_{ba} \bar{\mathbf{Q}}_{bL} \mathbf{u}_{aR} \rho^* - \beta_a \bar{\mathbf{Q}}_L \mathbf{u}_{aR} \eta - \beta_{ba} \bar{\mathbf{Q}}_{bL} \mathbf{d}_{aR} \eta^*. \quad (4.215)$$

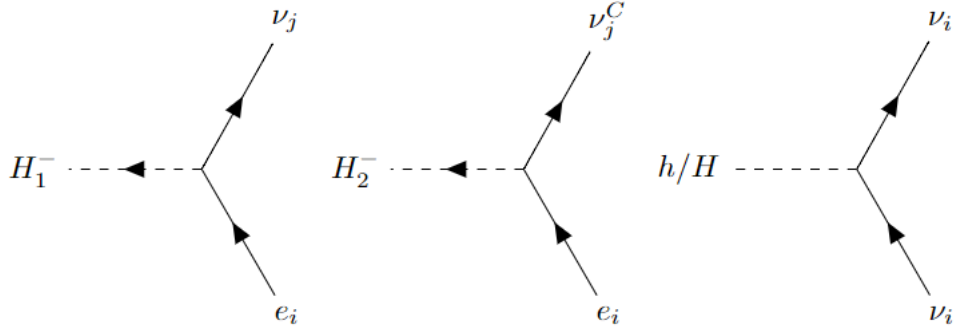


Figura 39 – Alguns exemplos das novas interações no setor leptônico de Yukawa, quando comparadas ao Modelo Padrão.

Utilizando as redefinições de (4.44), assim como a definição dos quarks \mathbf{Q}_L e \mathbf{Q}_{bL} das relações (4.6) e (4.7), obtém-se o seguinte após uma longa álgebra

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{Yuk}^{[q]} = & -\frac{H_1^+}{v}(\alpha_a \bar{\mathbf{u}}_{1L} v_\eta + \beta_{ba} \bar{\mathbf{u}}_{bL} v_\rho) \mathbf{d}_{aR} - H_2^+ \alpha_a \bar{\mathbf{u}}_{4L} \mathbf{d}_{aR} \\
 & -\frac{H_1^-}{v}(\alpha_{ba} \bar{\mathbf{d}}_{bL} v_\eta + \beta_a \bar{\mathbf{d}}_{1L} v_\rho) \mathbf{u}_{aR} - H_2^- \alpha_{ba} \bar{\mathbf{d}}_{(b+2)L} \mathbf{u}_{aR} \\
 & -\frac{H}{\sqrt{2}v}(\alpha_a \bar{\mathbf{d}}_{1L} v_\eta - \beta_{ba} \bar{\mathbf{d}}_{bL} v_\rho) \mathbf{d}_{aR} - \frac{H}{\sqrt{2}v}(\alpha_{ba} \bar{\mathbf{u}}_{bL} v_\eta - \beta_a \bar{\mathbf{u}}_{1L} v_\rho) \mathbf{u}_{aR} \\
 & -\frac{H_U}{\sqrt{2}}(\beta_{ba} \bar{\mathbf{d}}_{(b+2)L} \mathbf{d}_{aR} + \beta_a \bar{\mathbf{u}}_{4L} \mathbf{u}_{aR}) - i\frac{H_4}{\sqrt{2}}(\beta_{ba} \bar{\mathbf{d}}_{(b+2)L} \mathbf{d}_{aR} - \beta_a \bar{\mathbf{u}}_{4L} \mathbf{u}_{aR}) \\
 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{h}{v} + 1\right)(\alpha_a v_\rho \bar{\mathbf{d}}_{1L} + \beta_{ba} v_\eta \bar{\mathbf{d}}_{bL}) \mathbf{d}_{aR} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{h}{v} + 1\right)(\beta_a v_\eta \bar{\mathbf{u}}_{1L} + \alpha_{ba} v_\rho \bar{\mathbf{u}}_{bL}) \mathbf{u}_{aR}.
 \end{aligned} \tag{4.216}$$

Os últimos dois termos estão relacionados às massas dos quarks *down* e *up*, respectivamente. Como mostrado em [105, 109, 110], não é possível diagonalizar simultaneamente α_a, β_{ba} ou β_a, α_{ba} , tendo como consequência o surgimento de FCNC a nível de árvore, sendo algo indesejável devido às restrições obtidas pelos dados em baixas energias, mencionado em [105]. Neste caso, FCNC aparecem nos termos com interações com os bósons H, H_U, H_4 , em que os dois últimos estão relacionados às trocas de sabores entre os quarks de quarta e quinta geração.

Seguindo estes trabalhos, as matrizes de Yukawa dos quarks *down* serão denotadas da seguinte forma

$$\alpha_a \rightarrow Y_{ij}^{2d}, \quad \beta_{ba} \rightarrow Y_{ij}^{1d}, \tag{4.217}$$

com $i, j = 1, 2, 3$. Claramente, somente a primeira linha da matriz Y^{2d} é diferente de zero, enquanto a primeira linha da matriz Y^{1d} é igual a zero. Dessa forma, temos que

$$M_{ij}^d = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_\rho Y_{ij}^{2d} + v_\eta Y_{ij}^{1d}), \tag{4.218}$$

o que nos permite rescrever o primeiro termo da última linha de (4.216) como

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{h}{v} + 1\right) \bar{\mathbf{d}}_{iL} M_{ij}^d \mathbf{d}_{jR}. \tag{4.219}$$

A matriz M_{ij}^d pode ser biadiagonalizada como

$$M_{ij}^d = U_{ik}^{d*} D_{kk}^d V_{kj}^d, \quad (4.220)$$

em que D_{kk}^d é a matriz diagonal com entradas das massas dos quarks *down*. Logo, é possível a redefinição dos campos *down* como

$$d'_{kL} = U_{ki}^d d_{iL}, \quad d'_{kR} = V_{kj}^d d_{jR}. \quad (4.221)$$

Dessa forma, o termo (4.219) é igual a

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{h}{v} + 1 \right) \bar{\mathbf{d}}'_{kL} D_{kk}^d \mathbf{d}'_{kR}. \quad (4.222)$$

O mesmo procedimento pode ser realizado para os quarks *up*, no último termo de (4.216), o que possibilita a seguinte redefinição dos campos

$$u'_{kL} = U_{ki}^u u_{iL}, \quad u'_{kR} = V_{kj}^u u_{jR}, \quad (4.223)$$

a partir da biadiagonalização de M_{ij}^u

$$M_{ij}^u = \frac{1}{\sqrt{2}} (v_\rho Y_{ij}^{1u} + v_\eta Y_{ij}^{2u}), \quad (4.224)$$

sendo possível identificar que $\beta_a \rightarrow Y_{ij}^{2u}$, $\alpha_{ba} \rightarrow Y_{ij}^{1u}$. Assim, o termo de interação do Higgs com os quarks *up* toma o seguinte formato

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{h}{v} + 1 \right) \bar{\mathbf{u}}'_{kL} D_{kk}^u \mathbf{u}'_{kR}, \quad (4.225)$$

em que D_{kk}^u é a matriz diagonal das massas dos quarks *up*.

De forma a elucidar o surgimento do FCNC, consideremos o termo de interação dos quarks *down* com H em (4.216) escrito na redefinição de (4.221)

$$-\frac{H}{\sqrt{2}v} \bar{\mathbf{d}}'_{kL} U_{ki}^d (Y_{ij}^{2d} v_\eta - Y_{ij}^{1d} v_\rho) V_{jm}^{d*} \mathbf{d}_{mR}, \quad (4.226)$$

cujo termo de interesse é

$$N_{km}^d = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{ki}^d (Y_{ij}^{2d} v_\eta - Y_{ij}^{1d} v_\rho) V_{jm}^{d*}. \quad (4.227)$$

Utilizando (4.218), tem-se que

$$Y_{ij}^{2d} = \frac{\sqrt{2}}{v_\rho} M_{ij}^d - \frac{v_\eta}{v_\rho} Y_{ij}^{1d}. \quad (4.228)$$

Assim, é possível reescrever N^d como

$$N_{km}^d = \frac{v_\eta}{v_\rho} D_{km}^d - \frac{v_\eta}{\sqrt{2}} \left(\frac{v_\eta}{v_\rho} + \frac{v_\rho}{v_\eta} \right) U_{ki}^d Y_{ij}^{1d} V_{jm}^{d*}, \quad (4.229)$$

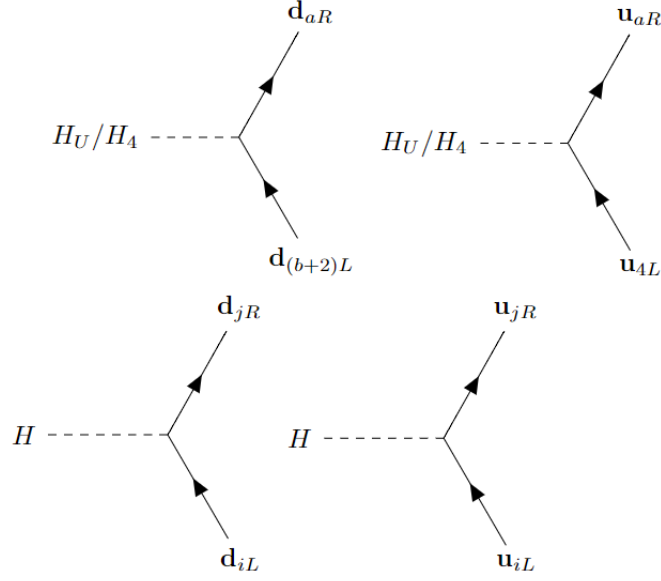


Figura 40 – Alguns exemplos das correntes FCNC no setor quarkônico. O método desenvolvido neste texto seguiu os autores [109, 110], de forma que estas correntes dependam da matriz CKM.

com $D_{km}^d \equiv D_{kk}^d$, pois esta matriz é diagonal.

Claramente, o último termo de (4.229) é o responsável pelo aparecimento do FCNC. Os autores [109] mostram que é possível trocar o termo $\frac{v_\eta}{\sqrt{2}} U_{ki}^d Y_{ij}^{1d} V_{jm}^{d*}$ por $\mathcal{U}_{k1}^\dagger \mathcal{U}_{1m} D_{kk}^d$ ⁴, em que \mathcal{U} é a matriz CKM, desde que Y_{ij}^{1d} e Y_{ij}^{2d} tenham o seguinte formato

$$Y_{ij}^{1d} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}, \quad Y_{ij}^{2d} \equiv \begin{pmatrix} x & x & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.230)$$

com x representando a entrada não nula das matrizes. Ora, mas este é exatamente o formato de α_a e β_{ba} . Assim, é possível escrever que [110]

$$N_{km}^d = \frac{v_\eta}{v_\rho} D_{km}^d - \left(\frac{v_\eta}{v_\rho} + \frac{v_\rho}{v_\eta} \right) \mathcal{U}_{k1}^\dagger \mathcal{U}_{1m} D_{kk}^d. \quad (4.231)$$

É importante ressaltar que o índice 1 de \mathbf{d}_{1L} não fora atribuído a nenhum tipo de quark *down*. Os autores em [110] argumentam que caso o índice 1 seja atribuído ao quark bottom, então a expressão acima toma o seguinte formato

$$N_{km}^d = \frac{v_\eta}{v_\rho} D_{km}^d - \left(\frac{v_\eta}{v_\rho} + \frac{v_\rho}{v_\eta} \right) \mathcal{U}_{k3}^\dagger \mathcal{U}_{3m} D_{kk}^d, \quad (4.232)$$

sendo a única configuração que consegue suprimir a FCNC no setor dos quarks *down*, devido aos pequenos valores de \mathcal{U}_{13} , \mathcal{U}_{23} , \mathcal{U}_{31} , \mathcal{U}_{32} , cujos módulos são [43]

$$\mathcal{U}_{13} = 0,00369, \quad \mathcal{U}_{23} = 0,04182, \quad \mathcal{U}_{31} = 0,00857, \quad \mathcal{U}_{32} = 0,04110.$$

⁴ Não há soma no índice k .

Seguindo também o trabalho de [105], para que não haja FCNC no setor dos quark up , as matrizes Y_{ij}^{1u} e Y_{ij}^{2u} devem ter o seguinte formato

$$Y_{ij}^{1u} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & x \\ 0 & x & x \end{pmatrix}, \quad Y_{ij}^{2u} \equiv \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.233)$$

Assim, a partir da interação dos quarks up com o bóson escalar H (4.216), escritos na redefinição dos campos (4.223), tem-se

$$-\frac{H}{\sqrt{2}v} \bar{\mathbf{u}}'_{kL} U_{ki}^u (Y_{ij}^{1u} v_\eta - Y_{ij}^{2u} v_\rho) V_{jm}^{u*} \mathbf{u}'_{mR}, \quad (4.234)$$

de tal forma que definiremos N^u como

$$N_{km}^u = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{ki}^u (Y_{ij}^{1u} v_\eta - Y_{ij}^{2u} v_\rho) V_{jm}^{u*}. \quad (4.235)$$

A partir de (4.224), encontramos que

$$Y_{ij}^{1u} = \frac{\sqrt{2}}{v_\rho} M_{ij}^u - \frac{v_\eta}{v_\rho} Y_{ij}^{2u}, \quad (4.236)$$

e substituindo em N_{km}^u , é obtido

$$N_{km}^u = \frac{v_\eta}{v_\rho} D_{km}^u - \frac{v_\eta}{\sqrt{2}} \left(\frac{v_\eta}{v_\rho} + \frac{v_\rho}{v_\eta} \right) U_{ki}^u Y_{ij}^{2u} V_{jm}^{u*}. \quad (4.237)$$

Assim, devido ao formato da matriz Y_{ij}^{2u} em (4.233), proposto por [109], somente Y_{11}^{2u} é diferente de zero. Logo, de acordo com o autor, é possível tomarmos $U_{11}^u = 1, V_{11}^{u*} = 1$, sem perda de generalidade. Dessa forma, temos

$$\frac{v_\eta}{\sqrt{2}} U_{ki}^u Y_{ij}^{2u} V_{jm}^{u*} \equiv \frac{v_\eta}{\sqrt{2}} Y_{11}^{2u} = D_{11}^u. \quad (4.238)$$

Assim,

$$N_{km}^u \equiv -\frac{v_\rho}{v_\eta} \text{diag}(m_{u1}, 0, 0) + \frac{v_\eta}{v_\rho} \text{diag}(0, m_{u2}, m_{u3}). \quad (4.239)$$

Por fim, para o setor neutro resta analisar as interações com H_U e H_4 . A análise é bem semelhante para cada uma delas, mudando somente o sinal, como visto em (4.216). Assim, analisaremos somente a interação envolvendo H_U , podendo ser reescrita como

$$-\frac{H_U}{\sqrt{2}} \left(\bar{\mathbf{d}}_{(i+2)L} Y_{ij}^{1d} \mathbf{d}_{jR} + \frac{\sqrt{2}}{v_\eta} D_{11}^u \bar{\mathbf{u}}_{4L} \mathbf{u}_{1R} \right), \quad (4.240)$$

em que fora utilizado (4.238) no último termo, com $b = 2, 3$. Como o último termo já está em sua forma final, focaremos nos quarks *down*. Para isso, será útil redefinirmos $\mathbf{d}_{(i+2)L}$ como

$$\mathbf{d}_{(i+2)L} = U_{bk}^{d*} \mathbf{d}'_{(k+2)L}. \quad (4.241)$$

Esta redefinição não altera os acoplamentos de Yukawa vistos em (4.61), desde que também seja feita a seguinte transformação em $\mathbf{d}_{(i+2)R}$

$$\mathbf{d}_{(i+2)R} = U_{ik}^{d*} \mathbf{d}'_{(k+2)L}. \quad (4.242)$$

Como U_{ij}^d é uma transformação unitária, então os termos cinéticos de $\mathbf{d}_{(i+2)L(R)}$ não sofrem nenhuma alteração. Com a redefinição realizada em (4.221), chega-se a

$$-\frac{H_U}{\sqrt{2}} \bar{\mathbf{d}}'_{(k+2)L} U_{ki}^d Y_{ij}^{1d} V_{jm}^{d*} \mathbf{d}'_{mR}, \quad (4.243)$$

permitindo realizar a troca desta matriz de Yukawa pela matriz CKM, como visto anteriormente, chegando ao seguinte resultado⁵

$$-\frac{H_U}{v_\eta} \bar{\mathbf{d}}'_{(k+2)L} \mathcal{U}_{k1}^\dagger \mathcal{U}_{1m} D_{kk}^d \mathbf{d}'_{mR}. \quad (4.244)$$

Para o termo com interação em H_1^+ , pode-se reescrevê-los como

$$-\frac{H_1^+}{v} \bar{\mathbf{u}}_{iL} (Y_{ij}^{1d} v_\rho + Y_{ij}^{2d} v_\eta) \mathbf{d}_{jR}. \quad (4.245)$$

Inserindo de forma inteligente a identidade⁶ na expressão anterior, temos

$$\begin{aligned} & -\frac{H_1^+}{v} \bar{\mathbf{u}}_{kL} U_{kl}^{d*} U_{li}^d (Y_{ij}^{1d} v_\rho + Y_{ij}^{2d} v_\eta) V_{jn}^{d*} V_{nm}^d \mathbf{d}_{mR} \\ & = -\frac{H_1^+}{v} \bar{\mathbf{u}}_{kL} U_{kl}^{d*} U_{li}^d (Y_{ij}^{1d} v_\rho + Y_{ij}^{2d} v_\eta) V_{jn}^{d*} \mathbf{d}'_{nR}, \end{aligned} \quad (4.246)$$

em que na passagem da igualdade fora utilizado a redefinição (4.221). Da expressão (4.228), e da bidiagonalização realizada em (4.220), encontra-se que

$$-\sqrt{2} \frac{H_1^+}{v} \bar{\mathbf{u}}_{kL} U_{kl}^{d*} \left(\frac{v_\eta}{v_\rho} D_{ln}^d - \left(\frac{v_\eta}{v_\rho} - \frac{v_\rho}{v_\eta} \right) \mathcal{U}_{l1}^\dagger \mathcal{U}_{1n} D_{ll}^d \right) \mathbf{d}'_{nR}. \quad (4.247)$$

A partir da redefinição dos campos up em (4.223), a expressão acima é

$$-\sqrt{2} \frac{H_1^+}{v} \bar{\mathbf{u}}_{mL} \mathcal{U}_{ml}^\dagger \left(\frac{v_\eta}{v_\rho} D_{ln}^d - \left(\frac{v_\eta}{v_\rho} - \frac{v_\rho}{v_\eta} \right) \mathcal{U}_{l1}^\dagger \mathcal{U}_{1n} D_{ll}^d \right) \mathbf{d}'_{nR}, \quad (4.248)$$

onde fora utilizada a definição da matriz CKM. O mesmo pode ser feito para o termo com interação em H_1^- , que por um procedimento semelhante, chega-se a

$$-\sqrt{2} \frac{H_1^-}{v} \bar{\mathbf{d}}'_{mL} \mathcal{U}_{ml} \left(\frac{v_\eta}{v_\rho} D_{ln}^u - \left(\frac{v_\eta}{v_\rho} - \frac{v_\rho}{v_\eta} \right) D_{11}^u \right) \mathbf{u}'_{nR}. \quad (4.249)$$

⁵ Novamente, não há soma no índice k .

⁶ Na prática, o delta de Kronecker está sendo inserido, devido a unitariedade das matrizes U^d e V^d .

4.5.3 Termo cinético dos léptons

A reorganização dos campos leptônicos é muito similar ao que foi feito no Capítulo 1 para o Modelo Padrão. A diferença, além dos novos termos vistos em (4.70), é a presença da matriz PMNS entre os neutrinos ν_L e os elétrons e_L . Para ver isso, consideremos o primeiro termo de (4.70), reescritas a partir das relações definidas em (4.140)

$$\begin{aligned} & i\bar{\nu}_{iL}\not{\partial}\nu_{iL} + i\bar{e}_{iL}\not{\partial}e_{iL} - \frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}(\bar{\nu}_{iL}\mathcal{W}^+e_{iL} + \bar{e}_{iL}\mathcal{W}^-\nu_{iL}) \\ & - \frac{e\not{Z}}{2\sin\theta_W\cos\theta_W}(\bar{\nu}_{iL}\nu_{iL} - \bar{e}_{iL}e_{iL} + 2\sin^2\theta_W\bar{e}_{iL}e_{iL}) + e\mathcal{A}\bar{e}_{iL}e_{iL}, \end{aligned} \quad (4.250)$$

em que $i = 1, 2, 3$. Os termos diagonais $\bar{\nu}_{iL}\nu_{iL}$ e $\bar{e}_{iL}e_{iL}$ não sofrem alterações em sua forma quando redefinidos com as relações de (4.199) e (4.207). Assim, a aparição da matriz PMNS surge no terceiro termo em (4.250) como

$$\begin{aligned} & i\bar{\nu}'_{kL}\not{\partial}\nu'_{kL} + i\bar{e}'_{kL}\not{\partial}e'_{kL} - \frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}(\bar{\nu}'_{jL}\mathcal{V}_{jk}^\dagger\mathcal{W}^+e'_{kL} + \bar{e}'_{kL}\mathcal{W}^-\mathcal{V}_{kj}\nu'_{jL}) \\ & - \frac{e\not{Z}}{2\sin\theta_W\cos\theta_W}(\bar{\nu}'_{kL}\nu'_{kL} - \bar{e}'_{kL}e'_{kL} + 2\sin^2\theta_W\bar{e}'_{kL}e'_{kL}) + e\mathcal{A}\bar{e}'_{kL}e'_{kL}, \end{aligned} \quad (4.251)$$

em que $j, k = 1, 2, 3$, a partir das redefinições em (4.199) e (4.207). Seguindo o mesmo procedimento, os termos restantes de (4.70) são reescritos, após uma pequena álgebra, como⁷

$$\begin{aligned} & + \frac{eg_{Z'}(1 - \tan^2\theta_W)\not{Z}'}{2}(\bar{\nu}'_{kL}\nu'_{kL} + \bar{e}'_{kL}e'_{kL}) + i\bar{\nu}'_{kR}\not{\partial}\nu'_{kR} - eg_{Z'}\bar{\nu}'_{kR}\not{Z}'\nu'_{kR} \\ & - \frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}(\bar{\nu}'_{kL}U_{kj}^N\mathcal{X}^0V_{jl}^N\nu'_{lR} + \bar{e}'_{kL}U_{kj}^e\mathcal{Y}^-V_{jl}^N\nu'_{lR}) + \text{H.c.}, \end{aligned} \quad (4.252)$$

onde utilizou-se a redefinição de ν_{aR} em termos de ν'_{jR} , a partir de (4.207). Retirando as indicações ', o termo cinético leptônico do Modelo 331 é igual a

$$\begin{aligned} & i\bar{F}_{aL}\not{\partial}F_{aL} \equiv i\bar{\nu}_{kL}\not{\partial}\nu_{kL} + i\bar{e}_{kL}\not{\partial}e_{kL} - \frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}(\bar{\nu}_{jL}\mathcal{V}_{jk}^\dagger\mathcal{W}^+e_{kL} + \bar{e}_{kL}\mathcal{W}^-\mathcal{V}_{kj}\nu_{jL}) \\ & - \frac{e\not{Z}}{2\sin\theta_W\cos\theta_W}(\bar{\nu}_{kL}\nu_{kL} - \bar{e}_{kL}e_{kL} + 2\sin^2\theta_W\bar{e}_{kL}e_{kL}) + e\mathcal{A}\bar{e}_{kL}e_{kL} \\ & + \frac{eg_{Z'}(1 - \tan^2\theta_W)\not{Z}'}{2}(\bar{\nu}_{kL}\nu_{kL} + \bar{e}_{kL}e_{kL}) + i\bar{\nu}'_{kR}\not{\partial}\nu'_{kR} - eg_{Z'}\bar{\nu}'_{kR}\not{Z}'\nu'_{kR} \\ & - \frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}(\bar{\nu}_{kL}U_{kj}^N\mathcal{X}^0V_{jl}^N\nu_{lR} + \bar{e}_{kL}U_{kj}^e\mathcal{Y}^-V_{jl}^N\nu_{lR}) + \text{H.c.}. \end{aligned} \quad (4.253)$$

Por fim, o termo de derivada covariante cinético de e_{aR} , mostrado em (4.73), é reescrito como

$$i\bar{e}_{aR}\not{\partial}e_{aR} \equiv i\bar{e}_{iR}\not{\partial}e_{iR} + e\mathcal{A}\bar{e}_{iR}e_{iR} - e\tan\theta_W\not{Z}\bar{e}_{iR}e_{iR} - eg_{Z'}\sin^2\theta_W\not{Z}'\bar{e}_{iR}e_{iR}, \quad (4.254)$$

onde fora realizada a redefinição (4.199), retirando as indicações '. Dessa forma, conclui-se os termos cinéticos dos léptons nos autoestados de massa após as quebras espontâneas de simetria. As regras de Feynman podem ser facilmente obtidas, estando em concordância como apresentado em [105].

⁷ A constante $g_{Z'}$ foi definida em (4.148).

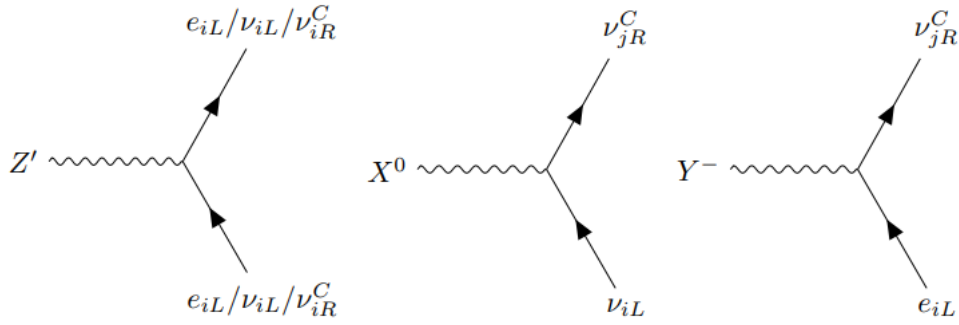


Figura 41 – As novas interações dos férmions do Modelo Padrão mais o neutrino destro, com os novos bósons de gauge advindos do Modelo 331.

4.5.4 Termo cinético dos quarks

Na seção anterior, foi possível agrupar os dubletos leptônicos \mathbf{Q}_{1L} e \mathbf{Q}_{bL} , derivados da primeira quebra espontânea de simetria, em um só dubleto \mathbf{Q}_{iL} , com o resultado final da derivada covariante do Modelo Padrão sendo mostrado em (4.82). Assim, já temos o resultado para este termo, obtido em (1.103). Logo, a atenção será focada às novas interações, obtidas de (4.75) e (4.78)

$$\begin{aligned}
 & + \frac{g_1}{6} (\cot \theta_X + 2 \tan \theta_X) \bar{\mathbf{Q}}_{1L} \not{Z}' \mathbf{Q}_{1L} + \frac{g_1}{6} \cot \theta_X \bar{\mathbf{Q}}_{bL} \not{Z}' \mathbf{Q}_{bL} \\
 & + i \bar{\mathbf{u}}_{4L} \gamma^\mu \left(\partial_\mu + i \frac{2g_1}{3} B_\mu + i \frac{g_1}{3} (\cot \theta_X - \tan \theta_X) Z'_\mu \right) \mathbf{u}_{4L} - \frac{g_L}{\sqrt{2}} \bar{\mathbf{Q}}_{1L} \not{V} \mathbf{u}_{4L} \\
 & + i \bar{\mathbf{d}}_{(b+2)L} \gamma^\mu \left(\partial_\mu - i \frac{g_1}{3} B_\mu - i \frac{g_1}{3} \cot \theta_X Z'_\mu \right) \mathbf{d}_{(b+2)L} \\
 & + \frac{g_L}{\sqrt{2}} \bar{\mathbf{Q}}_{bL} \not{V} \mathbf{d}_{(b+2)L} + \text{H.c.} \quad (4.255)
 \end{aligned}$$

Com o uso das relações entre g_1, θ_X e e, θ_W , feitas em (4.146), os dois primeiros termos de (4.255) se tornam

$$\frac{eg_{Z'}}{6} (3 + \tan^2 \theta_W) (\bar{\mathbf{u}}_{1L} \not{Z}' \mathbf{u}_{1L} + \bar{\mathbf{d}}_{1L} \not{Z}' \mathbf{d}_{1L}) - \frac{eg_{Z'}}{6} (3 - \tan^2 \theta_W) (\bar{\mathbf{u}}_{bL} \not{Z}' \mathbf{u}_{bL} + \bar{\mathbf{d}}_{bL} \not{Z}' \mathbf{d}_{bL}),$$

ficando evidente que uma geração de quarks *up* e *down* terá a interação com Z' de forma diferente em relação às duas outras gerações. Como os termos são diagonais, então podemos tratar $\mathbf{u}_{1L}, \mathbf{u}_{bL}$ e $\mathbf{d}_{1L}, \mathbf{d}_{bL}$ nos autoestados de massa, já que as matrizes $\mathbf{U}^d, \mathbf{U}^u$ são unitárias.

Para \mathbf{u}_{4L} e $\mathbf{d}_{(b+2)L}$ teremos

$$\begin{aligned}
 & i \bar{\mathbf{u}}_{4L} \not{\partial} \mathbf{u}_{4L} - \frac{2e}{3} \not{A} \bar{\mathbf{u}}_{4L} \mathbf{u}_{4L} + \frac{2e}{3} \tan \theta_W \not{Z} \bar{\mathbf{u}}_{4L} \mathbf{u}_{4L} + eg_{Z'} \left(1 - \frac{2}{3} \tan^2 \theta_W \right) \not{Z}' \bar{\mathbf{u}}_{4L} \mathbf{u}_{4L} \\
 & + i \bar{\mathbf{d}}_{(b+2)L} \not{\partial} \mathbf{d}_{(b+2)L} + \frac{e}{3} \not{A} \bar{\mathbf{d}}_{(b+2)L} \mathbf{d}_{(b+2)L} - \frac{e}{3} \tan \theta_W \not{Z} \bar{\mathbf{d}}_{(b+2)L} \mathbf{d}_{(b+2)L} \\
 & - eg_{Z'} \left(1 - \frac{1}{3} \tan^2 \theta_W \right) \not{Z}' \bar{\mathbf{d}}_{(b+2)L} \mathbf{d}_{(b+2)L}, \quad (4.256)
 \end{aligned}$$

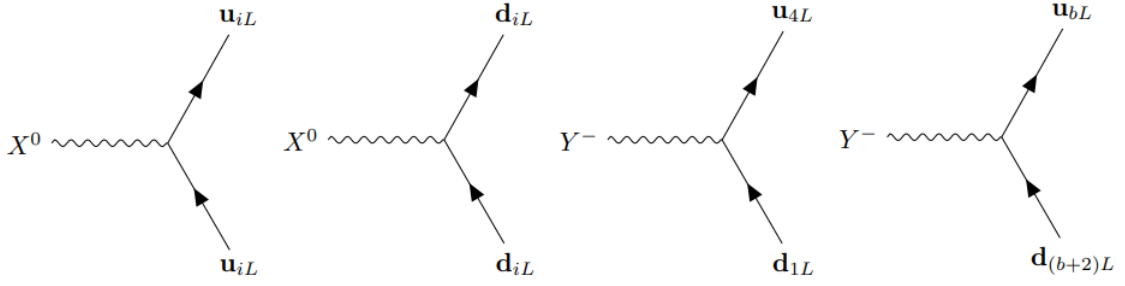


Figura 42 – As interações entre os quarks do Modelo Padrão com os novos quarks de quarta e quinta geração, por intermédio dos bósons de gauge X^0, Y^- .

com os campos acima já escritos nos autoestados de massa, em concordância com [105]. Para finalizar, restam analisar os termos que interagem com o dubleto V^μ , sendo iguais a

$$\begin{aligned}
 & -\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\bar{\mathbf{u}}_{1L}\not{X}^0\mathbf{u}_{4L}-\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\bar{\mathbf{d}}_{1L}\not{Y}^-\mathbf{u}_{4L} \\
 & +\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\bar{\mathbf{d}}_{bL}\not{X}^0\mathbf{d}_{(b+2)L}+\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\bar{\mathbf{u}}_{bL}\not{Y}^-\mathbf{d}_{(b+2)L}+\text{H.c.}
 \end{aligned} \tag{4.257}$$

Para finalizar esta seção, resta apenas escrever os termos cinéticos covariantes de $\mathbf{u}_{sR}, \mathbf{d}_{tR}$, a partir de suas expressões (4.83), (4.84). Após algumas manipulações algébricas, chega-se ao seguinte resultado

$$\begin{aligned}
 & i\bar{\mathbf{u}}_{sR}\not{\partial}\mathbf{u}_{sR}-\frac{2e}{3}(\not{A}-\tan\theta_W\not{Z}-g_{Z'}\tan^2\theta_W\not{Z}')\bar{\mathbf{u}}_{sR}\mathbf{u}_{sR} \\
 & +i\bar{\mathbf{d}}_{tR}\not{\partial}\mathbf{d}_{tR}+\frac{e}{3}(\not{A}-\tan\theta_W\not{Z}-g_{Z'}\tan^2\theta_W\not{Z}')\bar{\mathbf{d}}_{tR}\mathbf{d}_{tR}.
 \end{aligned} \tag{4.258}$$

4.5.5 Termos cinéticos dos bósons de gauge

Os resultados obtidos na seção 4.4.3 para os bósons de gauge W_μ^i , com $i = 1, 2, 3$, serão de grande utilidade para reescrevê-los em termos dos autoestados de massa. Além disso, os resultados obtidos do Capítulo 1 também valerão, sendo a única diferença, o acréscimo dos novos bósons. Para deixarmos esta constatação mais clara, começaremos dos bósons $W_{\mu\nu}^1$ e $W_{\mu\nu}^2$, das respectivas equações (4.88), (4.91). Fazendo a seguinte combinação

$$W_{\mu\nu}^\pm = \frac{W_{\mu\nu}^1 \mp iW_{\mu\nu}^2}{\sqrt{2}}, \tag{4.259}$$

obtemos, após um pouco de álgebra, o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
 W_{\mu\nu}^+ & = \partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+ - \frac{ie}{\sin\theta_W}(W_\nu^3 W_\mu^+ - W_\mu^3 W_\nu^+) \\
 & \quad + \frac{ie}{\sqrt{2}\sin\theta_W}(X_\mu^0 Y_\nu^+ - Y_\mu^+ X_\nu^0), \\
 W_{\mu\nu}^- & = \partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^- + \frac{ie}{\sin\theta_W}(W_\nu^3 W_\mu^- - W_\mu^3 W_\nu^-) \\
 & \quad - \frac{ie}{\sqrt{2}\sin\theta_W}(X_\mu^{0*} Y_\nu^- - Y_\mu^- X_\nu^{0*}).
 \end{aligned} \tag{4.260}$$

Comparando com (1.115), a diferença reside na presença dos novos bósons X^0, X^{0*}, Y^\pm , que apareceram na primeira quebra espontânea de simetria. Substituindo W_μ^3 por A_μ, Z_μ , a partir de (4.141), temos que

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^+ &= \partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+ - ie(A_\nu W_\mu^+ - A_\mu W_\nu^+) - ie \cot \theta_W (Z_\nu W_\mu^+ - Z_\mu W_\nu^+) \\ &\quad + \frac{ie}{\sqrt{2} \sin \theta_W} (X_\mu^0 Y_\nu^+ - Y_\mu^+ X_\nu^0), \\ W_{\mu\nu}^- &= \partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^- + ie(A_\nu W_\mu^- - A_\mu W_\nu^-) + ie \cot \theta_W (Z_\nu W_\mu^- - Z_\mu W_\nu^-) \\ &\quad - \frac{ie}{\sqrt{2} \sin \theta_W} (X_\mu^{0*} Y_\nu^- - Y_\mu^- X_\nu^{0*}). \end{aligned} \quad (4.261)$$

Os termos $X_{\mu\nu}^{0*}$ e $X_{\mu\nu}^0$, (4.96) e (4.97) respectivamente, serão reescritos em termos dos autoestados de massa. Como uma expressão é o complexo conjugado de outra, então analisaremos somente $X_{\mu\nu}^{0*}$, que após uma leve álgebra, tem o seguinte formato nos autoestados de massa A_μ, Z_μ, W_μ^\pm

$$\begin{aligned} X_{\mu\nu}^{0*} &= \partial_\mu X_\nu^{0*} - \partial_\nu X_\mu^{0*} + \frac{ie}{\sqrt{2} \sin \theta} Y_\mu^+ W_\nu^- - \frac{ie}{\sqrt{2} \sin \theta} Y_\nu^+ W_\mu^- \\ &\quad - \frac{ie}{2 \cos \theta_W \sin \theta_W} \left(Z_\mu + \cos \theta_W \sqrt{3 - \tan^2 \theta_W} Z'_\mu \right) X_\nu^{0*} \\ &\quad + \frac{ie}{2 \cos \theta_W \sin \theta_W} \left(Z_\nu + \cos \theta_W \sqrt{3 - \tan^2 \theta_W} Z'_\nu \right) X_\mu^{0*}. \end{aligned} \quad (4.262)$$

Os termos $Y_{\mu\nu}^+, Y_{\mu\nu}^-$, vistos em (4.101) e (4.102) respectivamente, também terão de ser reescritos. A expressão obtida para $Y_{\mu\nu}^+$ é

$$\begin{aligned} Y_{\mu\nu}^+ &= \partial_\mu Y_\nu^+ - \partial_\nu Y_\mu^+ + \frac{ie}{\sqrt{2} \sin \theta_W} X_\mu^{0*} W_\nu^+ - \frac{ie}{\sqrt{2} \sin \theta_W} X_\nu^{0*} W_\mu^+ \\ &\quad + \frac{ie}{2 \sin \theta_W \cos \theta_W} \left(\cos 2\theta_W Z_\mu - \cos \theta_W \sqrt{3 - \tan^2 \theta_W} Z'_\mu \right) Y_\nu^+ + ie A_\mu Y_\nu^+ \\ &\quad - \frac{ie}{2 \sin \theta_W \cos \theta_W} \left(\cos 2\theta_W Z_\nu - \cos \theta_W \sqrt{3 - \tan^2 \theta_W} Z'_\nu \right) Y_\mu^+ - ie A_\nu Y_\mu^+, \end{aligned} \quad (4.263)$$

enquanto que para $Y_{\mu\nu}^-$, basta tomar o complexo conjugado de $Y_{\mu\nu}^+$.

De forma a obter os termos cinéticos de A_μ e Z_μ , far-se-á a seguinte combinação linear entre $W_{\mu\nu}^3$ e $B_{\mu\nu}$, definidos em (4.92) e (4.109) respectivamente,

$$Z_{\mu\nu} = \cos \theta_W W_{\mu\nu}^3 - \sin \theta_W B_{\mu\nu}, \quad (4.264)$$

$$A_{\mu\nu} = \sin \theta_W W_{\mu\nu}^3 + \cos \theta_W B_{\mu\nu}, \quad (4.265)$$

de forma a valer a seguinte quantidade

$$Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} \equiv W_{\mu\nu}^3 W^{3\mu\nu} + B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}. \quad (4.266)$$

As formas de $Z_{\mu\nu}$ e $A_{\mu\nu}$ são obtidas facilmente, a partir das relações definidas ao longo desta subseção, sendo iguais a

$$Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu + \frac{ie}{2}(\tan \theta_W - \cot \theta_W)(Y_\mu^- Y_\nu^+ - Y_\mu^+ Y_\nu^-) \quad (4.267)$$

$$+ \frac{ie}{2}(\tan \theta_W + \cot \theta_W)(X_\mu^{0*} X_\nu^0 - X_\mu^0 X_\nu^{0*}),$$

$$A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie(Y_\mu^- Y_\nu^+ - Y_\mu^+ Y_\nu^-). \quad (4.268)$$

Com isso, podemos concluir a quebra espontânea do Modelo 331 ao final das duas quebras espontâneas de simetria. Espera-se que após a leitura, fique evidente ao leitor que, se comparado ao Modelo Padrão, este modelo tem uma fenomenologia muito mais intrincada e rica, principalmente quando visto após a segunda quebra espontânea de simetria. Importante salientar que a aproximação feita em (4.44) fora feita de forma a trazer clareza nos termos, sendo a expressão completa para os acoplamentos encontrada em [105].

5 Estabilidade do vácuo do Modelo 331

O Capítulo anterior foi devotado ao estudo do Modelo 331 econômico, a fim de estudar em detalhes a fenomenologia do modelo a nível clássico, exceto as massas dos escalares, que será visto neste Capítulo. Além disso, foi possível obter o setor referente ao Modelo Padrão, como era esperado, uma vez que os grupos de gauge do setor eletrofraco do Modelo Padrão são um subgrupo do Modelo 331.

Neste capítulo, nos dedicaremos ao estudo da estabilidade clássica e a um laço do potencial escalar, definido em (4.32), a fim de encontrar restrições acerca dos valores de λ_i , que como veremos, também estão relacionados às massas das partículas escalares. Para isso, utilizaremos dos métodos apresentado no Capítulo 3 aplicados ao Modelo 331 econômico. Importante ressaltar que este estudo resultou no trabalho [111], sendo este Capítulo uma síntese do que fora apresentado ao longo da dissertação e do artigo. Destaca-se que, a fim de deixar em igualdade ao trabalho apresentado em [111], os escalares H_3 e H_U serão renomeados, respectivamente, para H' e H_3 , mantendo-se a nomenclatura dos outros escalares, conforme apresentado no Capítulo 4.

5.1 Estabilidade a nível clássico

A estabilidade do potencial escalar do Modelo 331 econômico foi apresentada por [90], a partir do método dos parâmetros orbitais, mostrados em (3.13), junto com a copositividade de uma matriz 3×3 (3.32). Assim, definiremos os parâmetros orbitais para o potencial escalar (4.32) como

$$\theta_1 = \frac{(\chi^\dagger \eta)(\eta^\dagger \chi)}{|\chi|^2 |\eta|^2}, \quad \theta_2 = \frac{(\chi^\dagger \rho)(\rho^\dagger \chi)}{|\chi|^2 |\rho|^2}, \quad \theta_3 = \frac{(\rho^\dagger \eta)(\eta^\dagger \rho)}{|\rho|^2 |\eta|^2}, \quad (5.1)$$

$$\theta_4 = \frac{(\chi^\dagger \eta)^2}{|\chi|^2 |\eta|^2} + \text{H.c.}, \quad \theta_5 = \varepsilon_{ijk} \frac{\eta_i \rho_j \chi_k}{|\eta| |\rho| |\chi|} + \text{H.c.} \quad (5.2)$$

Note que θ_5 está relacionado ao acoplamento cúbico do potencial escalar, isto é, associado ao termo λ_{15} . Entretanto, para que seja usado o método da copositividade, este parâmetro não se mostrará relevante, uma vez que iremos trabalhar somente com termos quárticos, como discutido no Capítulo 3. Além disso, os termos λ_{10} e λ_{15} serão tomados como parâmetros reais, sem trazer nenhum prejuízo, uma vez que é possível absorver as fases aos campos escalares, como mencionado por [90]. Portanto, o potencial escalar toma a

seguinte forma quando escrito com os parâmetros orbitais

$$\begin{aligned}
V(\eta, \rho, \chi) = & -\mu_1^2|\eta|^2 - \mu_2^2|\rho|^2 - \mu_3^2|\chi|^2 + \lambda_1|\eta|^4 + \lambda_2|\rho|^4 + \lambda_3|\chi|^4 \\
& + (\lambda_4 + \lambda_7\theta_1 + \lambda_{10}\theta_4)|\eta|^2|\chi|^2 + (\lambda_5 + \lambda_8\theta_2)|\rho|^2|\chi|^2 \\
& + (\lambda_6 + \lambda_9\theta_3)|\eta|^2|\rho|^2 - \frac{\lambda_{15}}{\sqrt{2}}|\eta||\rho||\chi|,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

sendo identificado a parte quártica do potencial como

$$\begin{aligned}
V_4(\eta, \rho, \chi) = & \lambda_1|\eta|^4 + \lambda_2|\rho|^4 + \lambda_3|\chi|^4 \\
& + (\lambda_4 + \lambda_7\theta_1 + \lambda_{10}\theta_4)|\eta|^2|\chi|^2 + (\lambda_5 + \lambda_8\theta_2)|\rho|^2|\chi|^2 \\
& + (\lambda_6 + \lambda_9\theta_3)|\eta|^2|\rho|^2.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

A partir de $V(\eta, \rho, \chi)$ é possível analisar o espectro de massas dos escalares, a fim de encontrar maiores restrições nos valores de λ_i . Para isso, relembremos do Capítulo anterior que os valores esperado do vácuo (VEV) ocorrem da seguinte forma

$$\langle \chi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, v_\chi), \quad \langle \eta \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_\eta, 0, 0), \quad \langle \rho \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, v_\rho, 0). \tag{5.5}$$

Assim, derivando o potencial em relação ao módulo de cada campo, $|\eta|$, $|\rho|$, $|\chi|$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial |\eta|} = & |\eta| \left[-2\mu_1^2 + 4\lambda_1|\eta|^2 + 2(\lambda_4 + \lambda_7\theta_1 + \lambda_{10}\theta_4)|\chi|^2 \right. \\
& \left. + 2(\lambda_6 + \lambda_9\theta_3)|\rho|^2 - \frac{\lambda_{15}\theta_5}{\sqrt{2}} \frac{|\rho||\chi|}{|\eta|} \right],
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial V}{\partial |\rho|} = |\rho| \left[-2\mu_2^2 + 4\lambda_2|\rho|^2 + 2(\lambda_5 + \lambda_8\theta_2)|\chi|^2 + 2(\lambda_6 + \lambda_9\theta_3)|\eta|^2 - \frac{\lambda_{15}\theta_5}{\sqrt{2}} \frac{|\eta||\chi|}{|\rho|} \right], \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial |\chi|} = & |\chi| \left[-2\mu_3^2 + 4\lambda_3|\chi|^2 + 2(\lambda_4 + \lambda_7\theta_1 + \lambda_{10}\theta_4)|\eta|^2 \right. \\
& \left. + 2(\lambda_5 + \lambda_8\theta_2)|\rho|^2 - \frac{\lambda_{15}\theta_5}{\sqrt{2}} \frac{|\eta||\rho|}{|\chi|} \right].
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Os valores de θ que possibilitam o vácuo de (5.5), como mostrado em [90], são

$$\theta_i = 0, \text{ e } \theta_5 = 2, \tag{5.9}$$

em que $i = 1, \dots, 4$. Assim, ao igualar as primeiras derivadas parciais a zero, e avaliando os campos no vácuo, obtém-se as seguintes expressões para μ_i^2

$$2\mu_1^2 = 2\lambda_1 v_\eta^2 + \lambda_4 v_\chi^2 + \lambda_6 v_\rho^2 - \lambda_{15} \frac{v_\rho v_\chi}{v_\eta}, \tag{5.10}$$

$$2\mu_2^2 = 2\lambda_2 v_\rho^2 + \lambda_5 v_\chi^2 + \lambda_6 v_\eta^2 - \lambda_{15} \frac{v_\eta v_\chi}{v_\rho}, \tag{5.11}$$

$$2\mu_3^2 = 2\lambda_3 v_\chi^2 + \lambda_4 v_\eta^2 + \lambda_5 v_\rho^2 - \lambda_{15} \frac{v_\eta v_\rho}{v_\chi}. \tag{5.12}$$

Com estas equações, é possível analisar a matriz de massa dos três escalares CP pares, h, H, H_3 , a partir da segunda derivada do potencial, em relação aos campos, avaliada no vácuo. Lembremos que λ_{15} é um acoplamento com dimensão de energia, e portanto, será útil escrevê-lo como $\lambda_{15} = \kappa v_\chi$, em que tomamos $\kappa \ll 1$, uma vez que um valor muito grande pode prejudicar a simetria discreta \mathbb{Z}_2 . Assim, a matriz de massa dos escalares h, H e H_3 é

$$M_{\text{CP-par}}^2 = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 v_\eta^2 + \kappa \frac{v_\rho v_\chi^2}{2v_\eta} & \lambda_6 v_\eta v_\rho - \kappa \frac{v_\chi^2}{2} & \lambda_4 v_\eta v_\chi - \kappa \frac{v_\rho v_\chi}{2} \\ \lambda_6 v_\eta v_\rho - \kappa \frac{v_\chi^2}{2} & 2\lambda_2 v_\rho^2 + \kappa \frac{v_\eta v_\chi^2}{2v_\rho} & \lambda_5 v_\rho v_\chi - \kappa \frac{v_\eta v_\chi}{2} \\ \lambda_4 v_\eta v_\chi - \kappa \frac{v_\rho v_\chi}{2} & \lambda_5 v_\rho v_\chi - \kappa \frac{v_\eta v_\chi}{2} & 2\lambda_3 v_\chi^2 + \kappa \frac{v_\eta v_\rho}{2} \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

A diagonalização de $M_{\text{CP-par}}^2$ tem expressões enormes e não muito úteis praticamente. Entretanto, pode-se usar da hierarquia dos VEV, $v_\chi \gg v_\eta, v_\rho$, para determinar expressões analíticas aproximadas. Para isso, seguindo [111], utilizaremos a teoria de perturbação não degenerada nesta matriz, definindo os seguintes parâmetros

$$\varepsilon_1 = \frac{v_\rho}{v_\chi} \ll 1, \quad \varepsilon_2 = \frac{v_\eta}{v_\chi} \ll 1. \quad (5.14)$$

Assim, $M_{\text{CP-par}}^2$ se decompõe da seguinte forma

$$M_{\text{CP-par}}^2 = v_\chi^2 (M_0^2 + M_1^2 + M_2^2), \quad (5.15)$$

em que

$$M_0^2 = \begin{pmatrix} \frac{\kappa v_\rho}{2v_\eta} & -\frac{\kappa}{2} & 0 \\ -\frac{\kappa}{2} & \frac{\kappa v_\eta}{2v_\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda_3 \end{pmatrix}, \quad M_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_4 \varepsilon_2 - \frac{\kappa}{2} \varepsilon_1 \\ 0 & 0 & \lambda_5 \varepsilon_1 - \frac{\kappa}{2} \varepsilon_2 \\ \lambda_4 \varepsilon_2 - \frac{\kappa}{2} \varepsilon_1 & \lambda_5 \varepsilon_1 - \frac{\kappa}{2} \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

$$M_2^2 = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \varepsilon_2^2 & \lambda_6 \varepsilon_1 \varepsilon_2 & 0 \\ \lambda_6 \varepsilon_1 \varepsilon_2 & 2\lambda_2 \varepsilon_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\kappa}{2} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Dessa forma, aplicando a teoria de perturbação até a ordem $\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2$, as massas destes escalares são

$$m_h^2 \approx \frac{2}{v^2}(\lambda_1 v_\eta^4 + \lambda_2 v_\rho^4 + \lambda_6 v_\eta^2 v_\rho^2) - \frac{1}{2\lambda_3 v^2} \left(\lambda_4 v_\eta^2 + \lambda_5 v_\rho^2 - \frac{\lambda_{15} v_\eta v_\rho}{v_\chi} \right)^2, \quad (5.18)$$

$$m_H^2 \approx \frac{\lambda_{15} v^2 v_\chi}{2v_\eta v_\rho} + \frac{2v_\eta^2 v_\rho^2}{v^2} (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_6) + \frac{v_\eta v_\rho \left[2(\lambda_4 - \lambda_5) v_\eta v_\rho v_\chi + \lambda_{15} (v_\eta^2 - v_\rho^2) \right]^2}{2v^2 v_\chi (\lambda_{15} v^2 - 4\lambda_3 v_\eta v_\rho v_\chi)}, \quad (5.19)$$

$$m_{H'}^2 \approx 2\lambda_3 v_\chi^2 + \frac{\lambda_{15} v_\eta v_\rho}{2v_\chi} - \frac{\lambda_4^2 \lambda_{15} v_\eta^4 v_\chi^2}{A} - \frac{\lambda_5^2 \lambda_{15} v_\rho^4 v_\chi^2}{A} + \frac{v_\eta^3 v_\rho v_\chi \left[4\lambda_3 \lambda_4^2 v_\chi^2 + (\lambda_3 + 2\lambda_4) \lambda_{15}^2 \right]}{A} + \frac{v_\eta v_\rho^3 v_\chi \left[4\lambda_3 \lambda_5^2 v_\chi^2 + (\lambda_3 + 2\lambda_5) \lambda_{15}^2 \right]}{A} - \frac{\lambda_{15} v_\eta^2 v_\rho^2 \left[(\lambda_4 \lambda_5 + 2\lambda_3 \lambda_4 + 2\lambda_3 \lambda_5) 2v_\chi^2 + \lambda_{15}^2 \right]}{A}, \quad (5.20)$$

onde A é definido como

$$A = 2\lambda_3 v_\chi^2 (4\lambda_3 v_\eta v_\rho v_\chi - \lambda_{15} v^2). \quad (5.21)$$

Como informado em [111], estas expressões, quando comparadas aos valores numéricos exatos, mostram um erro relativo igual a 3%, o que nos possibilita concluir que estas expressões estão em boa aproximação. Além disso, é importante notar que $m_{H'} > m_H > m_h$, uma vez que H' tem como termo principal v_χ^2 devido a primeira quebra espontânea de simetria. Os outros bósons escalares têm as seguintes massas [90, 111]

$$M_{H_1^\pm}^2 = \frac{v_{\text{SM}}^2}{2v_\eta v_\rho} (\lambda_{15} v_\chi + \lambda_9 v_\eta v_\rho), \quad M_{H_2^\pm}^2 = \frac{v_\rho^2 + v_\chi^2}{2v_\rho v_\chi} (\lambda_{15} v_\eta + \lambda_8 v_\rho v_\chi), \quad (5.22)$$

$$M_{H_3, H_4}^2 = \frac{v_\eta^2 + v_\chi^2}{2v_\eta v_\chi} (v_\rho \lambda_{15} + v_\eta v_\chi (\lambda_7 \pm 2\lambda_{10})), \quad (5.23)$$

$$M_{H_5}^2 = \frac{\lambda_{15}}{2v_\eta v_\rho v_\chi} (v_\eta^2 v_\rho^2 + v_{\text{SM}}^2 v_\chi^2). \quad (5.24)$$

Importante notar que no caso $\lambda_{10} = 0$, uma simetria $U(1)$ global aparece no potencial escalar, de forma que H_3 e H_4 serão as componentes real e imaginária de um campo escalar complexo neutro.

Uma vez que as expressões dos escalares foram definidas, é possível restringir os acoplamentos a partir de dados experimentais das massas. Antes disso, é importante encontrarmos limites para os valores dos VEV, uma vez que a massa dos escalares também dependem deles. Seguindo a análise realizada em [111], notemos que os bósons Z e Z' realizam uma mistura, como pode ser visto a partir de (4.188). A mudança de base para uma diagonal Z_1, Z_2 é feita por uma transformação $SO(2)$, com o ângulo da transformação definido como

$$\theta_Z = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2m_{Z Z'}^2}{m_Z^2 - m_{Z'}^2} \right), \quad (5.25)$$

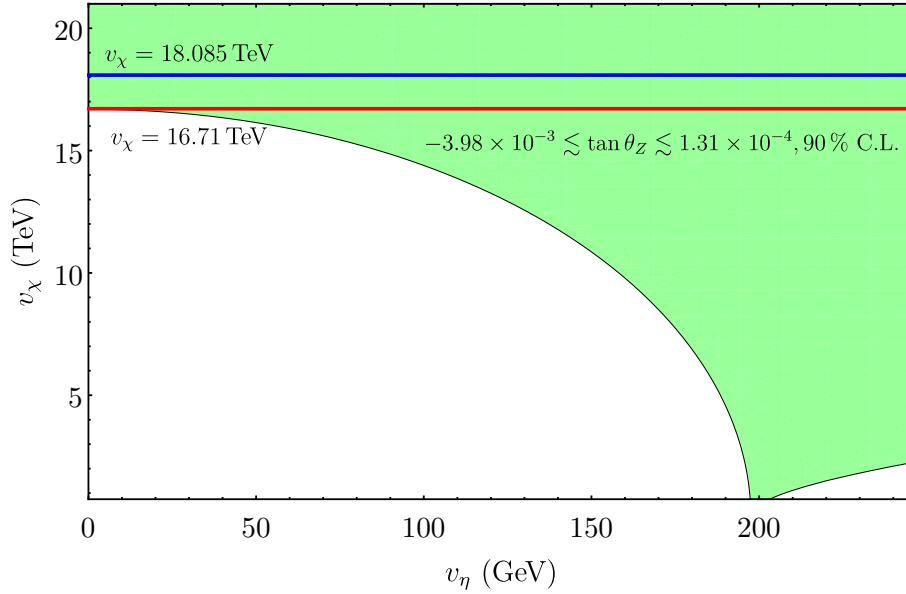


Figura 43 – Imagem obtida de [111]. Os valores de v_η e v_χ são identificados dentro dessa região a partir da parametrização dos termos em (4.188) em função destes VEV.

em que o valor está restrito a $-3.98 \times 10^{-3} \lesssim \theta_Z \lesssim 1.31 \times 10^{-4}$ [112].

Sabe-se que a massa do bóson Z , cuja massa está definida em (4.188), é igual a $m_Z = 91.1876 \pm 0.0021$ GeV [43], o que nos permite parametrizar $m_{Z'Z'}$ e $m_{Z'}$ em termos de v_η e v_χ para gerar a região mostrada na Figura 43. Além disso, dados experimentais [43] mostram que a massa esperada para um novo bóson vetorial carregado, como é o caso de Y^\pm , é superior a 6 TeV. A partir da hierarquia dos VEV, a expressão para $m_{Y^\pm}^2$, definida em (4.194), tem a seguinte forma aproximada

$$m_{Y^\pm}^2 \approx \frac{e^2}{4 \sin^2 \theta_W} v_\chi^2. \quad (5.26)$$

Como $\sin^2 \theta_W = 0.23121 \pm 0.00004$ [43], e $e = \sqrt{4\pi\alpha}$, onde $\alpha^{-1} \approx 128$ [43]. Então, para $m_{Y^\pm} = 6$ TeV, encontra-se que $v_\chi \gtrsim 18.1$ TeV. Importante ressaltar que para este valor de v_χ , não há restrições sobre os valores de v_η . Por uma questão de praticidade, assumiremos que $\theta_Z = 0$, a fim de obter v_η . Para isso, equacionando $m_{Z'Z'}^2 = 0$ (4.188), então obtemos que

$$v_\eta = \sqrt{2}v \sec \theta_W \approx 197.52 \text{ GeV}, \quad (5.27)$$

onde $v = \sqrt{246}$ GeV. Pela relação $v^2 = v_\rho^2 + v_\eta^2$, definida na Seção 4.3, encontramos que $v_\eta \approx 147$ GeV.

Podemos estimar também algumas restrições dos acoplamentos λ_i , a partir da positividade das massas ao quadrado das equações (5.22)-(5.24), e dos experimentos que buscam escalares carregados informam que o valor mínimo deve ser $m_{H^\pm} > 155$ GeV. Logo,

$$\lambda_7 \geq -\frac{\lambda_{15}v_\rho}{v_\eta v_\chi}, \quad \lambda_8 \geq \frac{2m_{H^\pm}^2}{v_\rho^2 + v_\chi^2} - \frac{\lambda_{15}v_\eta}{v_\rho v_\chi}, \quad \lambda_9 \geq \frac{2m_{H^\pm}^2}{v^2} - \frac{\lambda_{15}v_\chi}{v_\eta v_\rho}. \quad (5.28)$$

As expressões obtidas em (5.18)-(5.20) serão úteis para definirmos a região de estabilidade do modelo a um laço.

Por fim, concluímos essa breve análise fenomenológica do modelo, a partir de alguns dados já existentes na literatura para restringir os valores dos acoplamentos. As próximas restrições virão das condições da copositividade aplicadas a V_4 , definido em (5.4).

5.1.1 Condições de estabilidade

Nesta seção, nos dedicaremos a encontrar as condições de estabilidade do modelo a partir da copositividade para grandes valores dos campos, como visto de forma geral no Capítulo 3. Para isso, reescreveremos V_4 (5.4) em forma matricial como

$$V_4(\eta, \rho, \chi) = \begin{pmatrix} |\eta|^2 & |\rho|^2 & |\chi|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & (\lambda_6 + \lambda_9\theta_3)/2 & (\lambda_4 + \lambda_7\theta_1 + \lambda_{10}\theta_4)/2 \\ \star & \lambda_2 & (\lambda_5 + \lambda_8\theta_2)/2 \\ \star & \star & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\eta|^2 \\ |\rho|^2 \\ |\chi|^2 \end{pmatrix} \\ = \mathbf{h}^T \Lambda \mathbf{h}, \quad (5.29)$$

em que $\mathbf{h} = (|\eta|^2, |\rho|^2, |\chi|^2)^T$. Note que \star representa os termos transpostos da matriz, uma vez que a matriz é simétrica. Além disso, o parâmetro orbital θ_4 pode ser definido em termos de θ_1 , de forma análoga ao que fora realizado em (3.38). Logo, tem-se que $\theta_4 = 2\theta_1 \cos \omega_1$.

A discussão que seguirá aqui já fora realizada também na Subseção 3.1.2, o que nos poupará algum tempo. Como visto nesta Subseção, para encontrar a estabilidade de V_4 é suficiente determinar o mínimo em $\mathbf{h} = 1$, tornando imediato que $\omega_1 = \pi$. Os outros valores de ω são calculados ao notar que V_4 é uma função monótona destes parâmetros, ou seja, o mínimo do potencial está em alguns valores de θ na fronteira do espaço gerado por eles. Pode-se pensar, inicialmente, que a fronteira é um cubo de lado igual a um. Porém, como mostrado em [90], a fronteira é um pouco menor

$$0 \leq \theta_1 \leq 1, \quad 0 \leq \theta_2 \leq 1, \\ \max \left[0, \sqrt{\theta_1\theta_2} - \sqrt{(1-\theta_1)(1-\theta_2)} \right]^2 \leq \theta_3 \leq \left[\sqrt{\theta_1\theta_2} + \sqrt{(1-\theta_1)(1-\theta_2)} \right]^2. \quad (5.30)$$

Há oito casos que minimizam o potencial, embora somente cinco deles contribuam para encontrar as condições de estabilidade. Aos outros três casos, a discussão detalhada se encontra em [90]. Assim, os cinco casos são

- (i) $\theta_{1,2,3} = 0$, se $\lambda_7 - 2\lambda_{10} \geq 0$, $\lambda_8 \geq 0$ e $\lambda_9 \geq 0$;
- (ii) $\theta_{1,2} = 0$ e $\theta_3 = 1$, se $\lambda_7 - 2\lambda_{10} \geq 0$, $\lambda_8 \geq 0$ e $\lambda_9 < 0$;
- (iii) $\theta_{1,3} = 0$ e $\theta_2 = 1$, se $\lambda_7 - 2\lambda_{10} \geq 0$, $\lambda_8 < 0$ e $\lambda_9 \geq 0$;

(iv) $\theta_{2,3} = 0$ e $\theta_1 = 1$, se $\lambda_7 - 2\lambda_{10} < 0$, $\lambda_8 \geq 0$ e $\lambda_9 \geq 0$;

(v) $\theta_{1,2,3} = 1$, se $\lambda_7 - 2\lambda_{10} < 0$, $\lambda_8 < 0$ e $\lambda_9 < 0$.

Dessa forma, ao aplicar a copositividade de uma matriz 3×3 simétrica (3.32), juntamente com os cinco casos dos parâmetros orbitais, encontramos que

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad \lambda_3 > 0, \quad (5.31)$$

$$\lambda_4 + 2\sqrt{\lambda_1\lambda_3} > 0, \quad \lambda_4 + \lambda_7 - 2|\lambda_{10}| + 2\sqrt{\lambda_1\lambda_3} > 0, \quad (5.32)$$

$$\lambda_5 + 2\sqrt{\lambda_2\lambda_3} > 0, \quad \lambda_5 + \lambda_8 + 2\sqrt{\lambda_2\lambda_3} > 0, \quad (5.33)$$

$$\lambda_6 + 2\sqrt{\lambda_1\lambda_2} > 0, \quad \lambda_6 + \lambda_9 + 2\sqrt{\lambda_1\lambda_2} > 0, \quad (5.34)$$

$$C_1\sqrt{\lambda_2} + C_2\sqrt{\lambda_1} + C_3\sqrt{\lambda_3} + 2\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} + \sqrt{\bar{C}_1\bar{C}_2\bar{C}_3} > 0, \quad (5.35)$$

em que $C_1 = \{\lambda_4, \lambda_4 + \lambda_7 - 2|\lambda_{10}|\}$, $C_2 = \{\lambda_5, \lambda_5 + \lambda_8\}$, $C_3 = \{\lambda_6, \lambda_6 + \lambda_9\}$, $\bar{C}_1 = C_1 + 2\sqrt{\lambda_1\lambda_3}$, $\bar{C}_2 = C_2 + 2\sqrt{\lambda_2\lambda_3}$ e $\bar{C}_3 = C_3 + 2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$. Note que há no total dezessete equações a serem satisfeitas simultaneamente para encontrar valores permitidos dos acoplamentos λ no espaço dos parâmetros. Como veremos a seguir, estas inequações serão utilizadas para o potencial efetivo a um laço, a fim de encontrar regiões no espaço de parâmetros em que o potencial seja estável até uma determinada escala de energia.

5.2 Estabilidade a um laço

Como vimos no Capítulo 2, as interações a um laço geram novas interações que, a esta ordem, não estão presente na Lagrangeana original. Assim, esperamos que a região de estabilidade de qualquer modelo seja modificada quando se consideram os cálculos a um laço. Além disso, a partir dos cálculos de um laço, os parâmetros do modelo adquirem dependência de uma escala de energia, como consequência do procedimento de renormalização, sendo estes parâmetros renomeados como *running couplings*. Este procedimento gera equações diferenciais de primeira ordem conhecidas como equações do grupo de renormalização, calculadas para uma teoria $SU(N)$ geral no Capítulo 2.

Para modelos como o Modelo Padrão e suas extensões, como os modelos 331, não é uma tarefa simples determinar e resolver as equações do grupo de renormalização, ou RGE¹ devido ao grande número de parâmetros, principalmente, aos vários acoplamentos quárticos presente no Modelo 331 econômico. Na determinação das equações do grupo de renormalização do Modelo 331 econômico, o pacote RGEBeta [113] foi utilizado, devido à sua simplicidade de instalação e uso.

As equações do grupo de renormalização do Modelo 331 econômico a um laço serão expressas da seguinte forma genérica $\frac{dX}{dt} \equiv \beta_X/(4\pi)^2$, onde está sendo definido t

¹ Do inglês *Renormalization Group Equation*.

como um parâmetro real, em que $t = \log \mu / \mu_0$, com $\mu_0 = m_Z$, como feito em [111]. Além disso, X representa um acoplamento genérico do modelo. Usando o programa, são obtidas as seguintes funções β

$$\beta_{g_X} = \frac{26}{3}g_X^3, \quad \beta_{g_L} = -\frac{13}{2}g_L^3, \quad \beta_{g_3} = -5g_3^3, \quad (5.36)$$

$$\beta_{\alpha_{33}} = \alpha_{33} \left(-\frac{4}{3}g_X^2 - 4g_L^2 - 8g_3^2 + 5\alpha_{33}^2 + \frac{1}{2}\gamma_{35}^2 \right), \quad (5.37)$$

$$\beta_{\gamma_4} = \gamma_4 \left(-\frac{5}{3}g_X^2 - 4g_L^2 - 8g_3^2 + 5\gamma_4^2 + 3\gamma_{24}^2 + 3\gamma_{35}^2 \right) \quad (5.38)$$

$$\beta_{\gamma_{24}} = \gamma_{24} \left(-\frac{1}{3}g_X^2 - 4g_L^2 - 8g_3^2 + 3\gamma_4^2 + 5\gamma_{24}^2 + 3\gamma_{35}^2 \right), \quad (5.39)$$

$$\beta_{\gamma_{35}} = \gamma_{35} \left(-\frac{1}{3}g_X^2 - 4g_L^2 - 8g_3^2 + \frac{1}{2}\alpha_{33}^2 + 3\gamma_4^2 + 3\gamma_{24}^2 + 5\gamma_{35}^2 \right), \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} \beta_{\lambda_1} = & \frac{2}{27}g_X^4 + \frac{4}{9}g_X^2g_L^2 + \frac{13}{6}g_L^4 - \left(\frac{4}{3}g_X^2 + 16g_L^2 \right) \lambda_1 + 28\lambda_1^2 + 4\lambda_{10}^2 \\ & + 3\lambda_4^2 + 3\lambda_6^2 + 2\lambda_4\lambda_7 + \lambda_7^2 + 2\lambda_6\lambda_9 + \lambda_9^2, \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} \beta_{\lambda_2} = & \frac{32}{27}g_X^4 + \frac{16}{9}g_X^2g_L^2 + \frac{13}{6}g_L^4 - \left(\frac{16}{3}g_X^2 + 16g_L^2 \right) \lambda_2 + 28\lambda_2^2 + 3\lambda_5^2 \\ & + 3\lambda_6^2 + 2\lambda_5\lambda_8 + \lambda_8^2 + 2\lambda_6\lambda_9 + \lambda_9^2 - 6\alpha_{33}^4 + 12\alpha_{33}^2\lambda_2, \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} \beta_{\lambda_3} = & \frac{2}{27}g_X^4 + \frac{4}{9}g_X^2g_L^2 + \frac{13}{6}g_L^4 - \left(\frac{4}{3}g_X^2 + 16g_L^2 \right) \lambda_3 + 28\lambda_3^2 + 3\lambda_4^2 \\ & + 3\lambda_5^2 + 2\lambda_4\lambda_7 + \lambda_7^2 + 2\lambda_5\lambda_8 + \lambda_8^2 - 6\gamma_4^4 - 6\gamma_{24}^4 - 6\gamma_{35}^4 \\ & + 12 \left(\gamma_4^2 + \gamma_{24}^2 + \gamma_{35}^2 \right) \lambda_3 + 4\lambda_{10}^2, \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} \beta_{\lambda_4} = & \frac{4}{27}g_X^4 - \frac{4}{9}g_X^2g_L^2 + \frac{11}{6}g_L^4 - \left(\frac{4}{3}g_X^2 + 16g_L^2 \right) \lambda_4 + 8\lambda_{10}^2 + 16\lambda_1\lambda_4 \\ & + 16\lambda_3\lambda_4 + 4\lambda_4^2 + 6\lambda_5\lambda_6 + 4\lambda_1\lambda_7 + 4\lambda_3\lambda_7 + 2\lambda_7^2 + 2\lambda_6\lambda_8 \\ & + 2\lambda_5\lambda_9 + 6 \left(\gamma_4^2 + \gamma_{24}^2 + \gamma_{35}^2 \right) \lambda_4, \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} \beta_{\lambda_5} = & \frac{16}{27}g_X^4 + \frac{8}{9}g_X^2g_L^2 + \frac{11}{6}g_L^4 - \left(\frac{10}{3}g_X^2 + 16g_L^2 \right) \lambda_5 + \lambda_2\lambda_5 + 16\lambda_3\lambda_5 \\ & + 4\lambda_5^2 + 6\lambda_4\lambda_6 + 2\lambda_6\lambda_7 + 4\lambda_2\lambda_8 + 4\lambda_3\lambda_8 + 2\lambda_8^2 + 2\lambda_4\lambda_9 \\ & + 6 \left(\alpha_{33}^2 + \gamma_4^2 + \gamma_{24}^2 + \gamma_{35}^2 \right) \lambda_5, \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned} \beta_{\lambda_6} = & \frac{16}{27}g_X^4 + \frac{8}{9}g_X^2g_L^2 + \frac{11}{6}g_L^4 - \left(\frac{10}{3}g_X^2 + 16g_L^2 \right) \lambda_6 + 6\lambda_4\lambda_5 + 16\lambda_1\lambda_6 \\ & + 16\lambda_2\lambda_6 + 4\lambda_6^2 + 2\lambda_5\lambda_7 + 2\lambda_4\lambda_8 + 4\lambda_1\lambda_9 + 4\lambda_2\lambda_9 + 2\lambda_9^2 + 6\alpha_{33}^2\lambda_6, \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned}\beta_{\lambda_7} = & \frac{4}{3}g_X^2g_L^2 + \frac{5}{2}g_L^4 - \left(\frac{4}{3}g_X^2 + 16g_L^2\right)\lambda_7 + 40\lambda_{10} + 4\lambda_1\lambda_7 + 4\lambda_3\lambda_7 \\ & + 8\lambda_4\lambda_7 + 6\lambda_7^2 + 2\lambda_8\lambda_9 + 6\left(\gamma_4^2 + \gamma_{24}^2 + \gamma_{35}^2\right)\lambda_7,\end{aligned}\quad (5.47)$$

$$\begin{aligned}\beta_{\lambda_8} = & -\frac{8}{3}g_X^2g_L^2 + \frac{5}{2}g_L^4 - \left(\frac{10}{3}g_X^2 + 16g_L^2\right)\lambda_8 + 4\lambda_2\lambda_8 + 4\lambda_3\lambda_8 + 8\lambda_5\lambda_8 \\ & + 6\lambda_8^2 + 2\lambda_7\lambda_9 + 6\left(\alpha_{33}^2 + \gamma_4^2 + \gamma_{24}^2 + \gamma_{35}^2\right)\lambda_8 - 12\gamma_{35}^2\alpha_{33}^2,\end{aligned}\quad (5.48)$$

$$\begin{aligned}\beta_{\lambda_9} = & -\frac{8}{3}g_X^2g_L^2 + \frac{5}{2}g_L^2 - \left(\frac{10}{3}g_X^2 + 16g_L^2\right)\lambda_9 + 2\lambda_7\lambda_8 + 4\lambda_1\lambda_9 + 4\lambda_2\lambda_9 \\ & + 8\lambda_6\lambda_9 + 6\lambda_9^2 + 6\alpha_{33}^2\lambda_9,\end{aligned}\quad (5.49)$$

$$\beta_{\lambda_{10}} = \lambda_{10} \left[-\frac{4}{3}g_X^2 - 16g_L^2 + 4\lambda_3 + 8\lambda_4 + 4\lambda_1 + 16\lambda_7 + 6\left(\gamma_4^2 + \gamma_{24}^2 + \gamma_{35}^2\right) \right], \quad (5.50)$$

$$\beta_{\lambda_{15}} = \lambda_{15}[-2g_N^2 - 12g_L^2 + 3(\gamma_{24}^2 + \gamma_{25}^2 + \gamma_4^2 + \alpha_{33}^2) + 2(\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 - \lambda_7 - \lambda_8 - \lambda_9)]. \quad (5.51)$$

Perceba que as equações relacionadas aos acoplamentos de Yukawa foram obtidas somente para os quarks mais pesados, $\alpha_{33}, \gamma_4, \gamma_{24}, \gamma_{35}$, uma vez que estes contribuem de forma significativa para as equações do grupo de renormalização. O mesmo é feito para o Modelo Padrão ao considerar somente a contribuição do quark top, que neste caso, está sendo representado pelo acoplamento α_{33} . Além disso, a simetria $U(1)$ se mostra presente para $\beta_{\lambda_{10}}$ quando $\lambda_{10} = 0$, de forma que será tomado $\lambda_{10} = 0$, por trazer simplicidade ao modelo, como feito em [111]. Uma situação similar ocorre para λ_{15} , que é a simetria $U(1)_{PQ}$, estudada em [91], do qual a simetria discreta \mathbb{Z}_2 é um subgrupo.

Como discutido extensivamente na Seção 3.2.4, é possível utilizarmos os *running couplings* nas condições de estabilidade obtidas da copositividade, isto é, substituímos os parâmetros λ_i por $\lambda_i(t)$ nas equações (5.31)-(5.35). Dessa forma, o objetivo é identificar restrições acerca das massas das novas partículas introduzidas pelo modelo. Especificamente, serão determinados limites em função das massas dos quarks exóticos e do escalar mais pesado, $m_{H'}$, já que estas partículas ganham massa predominantemente na primeira quebra espontânea de simetria. Além disso, veremos quais são os valores permitidos no espaço de parâmetros λ que deixam o potencial estável em altas energias. Para isso, as funções β foram resolvidas pelo *Mathematica* com a seguinte condição inicial

$$g_N = 0.374, \quad g_L = 0.664, \quad g_3 = 1.22, \quad (5.52)$$

$$v_\eta = 197.52 \text{ GeV}, \quad v_\rho = 147 \text{ GeV}, \quad v_\chi = 18.1 \text{ TeV}, \quad (5.53)$$

$$\lambda_1 = 0.1, \quad \lambda_2 = 0.15, \quad \lambda_4 = 0.032, \quad \lambda_5 = -0.055, \quad \lambda_7 = 0, \quad (5.54)$$

$$\lambda_8 = 0, \quad \lambda_9 = -0.5, \quad \lambda_{10} = 0, \quad \lambda_{15} = 25 \text{ GeV}, \quad \alpha_{33} = 0.5, \quad (5.55)$$

em que $g_3 = \sqrt{4\pi\alpha_s}$ com $\alpha_s = 0.1180 \pm 0.009$ [43]. O valor de g_N foi encontrado a partir das relação $e = g_X \cos \theta_X \cos \theta_W$, uma vez que $\theta_X = -18^\circ$ [111], chegando ao seguinte resultado $g_N = 0.374$.

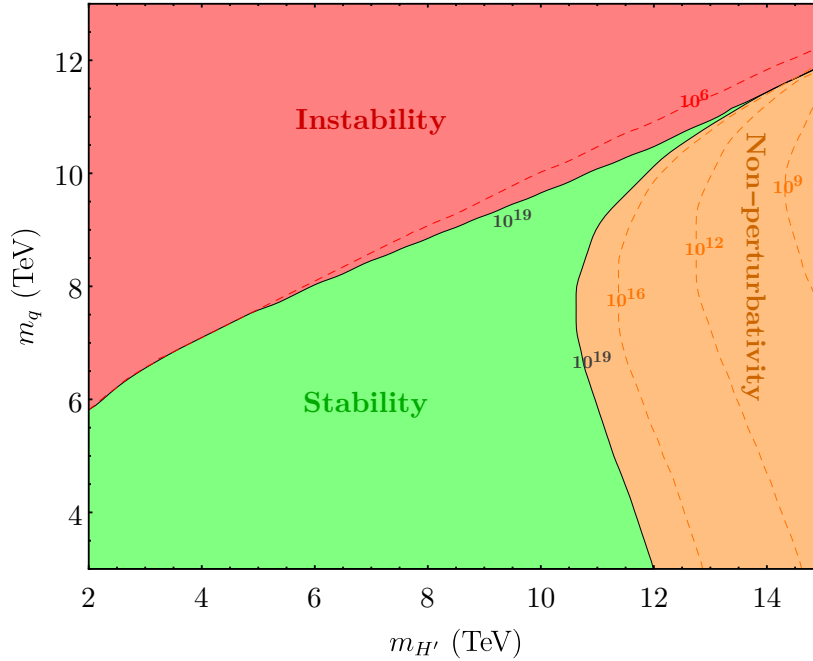


Figura 44 – *Imagem obtida de [111]*. A estabilidade do vácuo a um laço para o Modelo 331 econômico para os valores permitidos de m_q e $m_{H'}$. A região da não perturbatividade (em laranja) é definida para $\lambda_i > 4\pi$. A fronteira (linha preta) entre as três regiões ocorre na escala de Planck 10^{19} GeV. Diferentemente do que ocorre no cenário não perturbativo, a fronteira entre a estabilidade (verde) e instabilidade (vermelho) exhibe uma convergência mais rápida de escala.

Os acoplamentos de Yukawa dos quarks exóticos (os quais são assumidos como iguais, uma vez que não há razão, *a priori*, para considerar suas massas, m_q , diferentes) e λ_3 são variáveis nesta parte da análise, já que os variamos para encontrar a região de estabilidade do modelo em função de $m_q, m_{H'}$. Como consequência, λ_6 se torna uma função de λ_3 a fim de que a massa do Higgs, m_h , (5.18) seja mantida constante. Assim, aplicando as condições de estabilidade (5.31)-(5.35), é obtida a seguinte região da Figura 44.

Para entender o comportamento deste gráfico, é necessário avaliarmos o comportamento das funções β_{λ_3} e dos acoplamentos de Yukawa dos quarks exóticos. Em β_{λ_3} (5.43), as contribuições dos quark exóticos do tipo, $\gamma_4^4, \gamma_{24}^4$ e γ_{35}^4 são negativas, enquanto as contribuições de λ_3 e λ_3^2 são positivas. A medida que $m_{H'}$ cresce, λ_3 também irá crescer², devido a contribuição positiva para β_{λ_3} . Entretanto, a medida que m_q cresce, a função β_3 decresce por consequência. Este comportamento entre estes acoplamentos persiste até o ponto em que o potencial escalar se torna instável, chegando a um valor máximo de aproximadamente 14 TeV para $m_{H'}$, e 11 TeV para m_q .

Esta relação entre os acoplamentos está também ilustrada na Figura 45, em que m_q é representado como função de $\log \mu/\text{GeV}$. É fácil ver que para diferentes valores de

² Neste caso, estamos considerando somente o primeiro termo de (5.20).

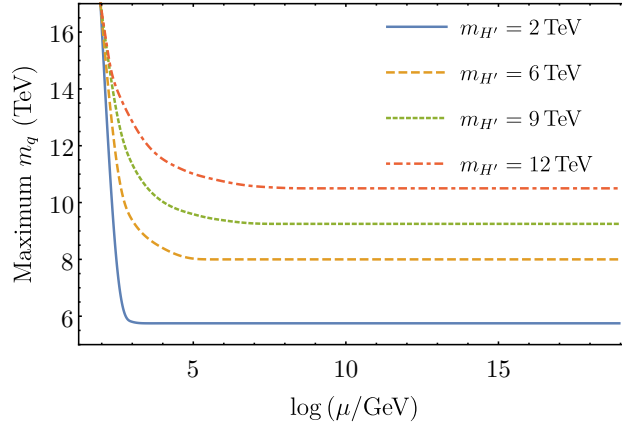


Figura 45 – *Imagem retirada de [111]*. O valor máximo da massa do quark exótico m_q como função de $m_{H'}$ e da escala de energia μ . Perceba que a medida que μ se aproxima de m_Z , sendo o ponto de subtração da renormalização, m_q tem valores arbitrariamente grandes. Isto é esperado, já que o vácuo é classicamente estável independente do valor de m_q . Assim, a medida de que os *running couplings* começam a evoluir, m_q eventualmente atinge um valor estável.

$m_{H'}$, m_q atinge diferentes valores máximos. Por exemplo, quando $m_{H'} = 12 \text{ TeV}$, o valor máximo de m_q é aproximadamente 11 TeV, mantendo-se constante para escalas de energias $\gtrsim 10^8 \text{ GeV}$, um detalhe não aparente da Figura 44.

Outra forma de examinar a estabilidade do vácuo até a escala de Planck, a fim de restringir valores para o modelo, é analisar diretamente os acoplamentos quárticos. Esta forma é particularmente relevante, uma vez que um destes parâmetros podem mostrar a intensidade do portal entre o setor do Modelo Padrão e do novo setor do Modelo 331. Um exemplo disso é observado em estudos de matéria escura a partir do portal de Higgs em modelos com singletos escalares reais [114–116].

Com esta motivação, analisaremos o espaço dos parâmetros gerados por $\lambda_4 - \lambda_5$, e $\lambda_4 - \lambda_7$, Figura 46, a fim de impor restrições adicionais aos valores permitidos. No estudo conduzido em [111], caso as massas dos quarks exóticos fossem menores que 9 TeV, então as regiões obtidas a um laço eram praticamente idênticas às regiões clássicas. Portanto, $m_q = 9 \text{ TeV}$, a fim de obter regiões mais interessantes. Além disso, a dependência de m_h em λ_4 requer a variação de λ_6 , de forma similar ao que fora feito para obter a região da Figura 44. Interessantemente, a estabilidade do potencial não é observada na escala de Planck, neste caso, sendo observada para valores abaixo de 10^{16} GeV . No estudo deste caso, os autores em [111] perceberam restrições adicionais aos valores de λ_7 , a partir da positividade da massa ao quadrado calculada a um laço. λ_7 deve ser maior ou igual a zero, caso contrário, m_{H_3, H_4}^2 seriam negativos, complementando o estudo realizado anteriormente por [90].

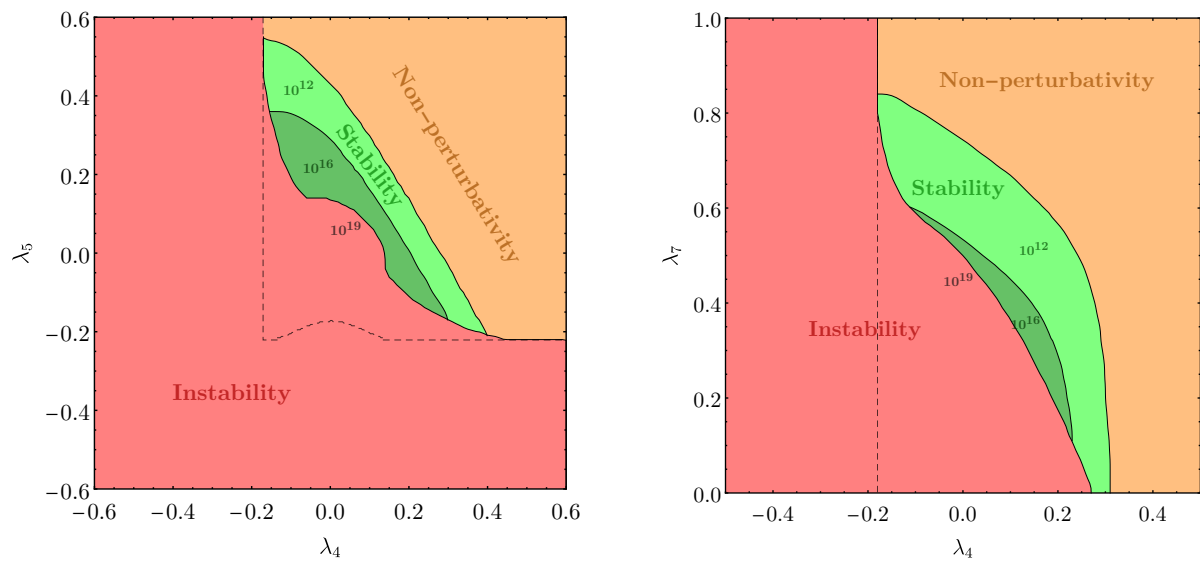


Figura 46 – *Imagem obtida de [111]*. A linha pontilhada representa a fronteira da região clássica. A região verde claro ilustra os valores permitidos para que o potencial seja estável até 10^{12} GeV, enquanto a região verde escura para 10^{16} GeV. Perceba que a estabilidade até a escala de Planck 10^{19} GeV não é possível dentro deste contexto.

6 Conclusões

Neste texto, estudamos em maiores detalhes o Modelo Padrão, as equações do grupo de renormalização, assim como a estabilidade do potencial escalar do Modelo 331 a nível clássico e a um laço. A motivação principal para estudar extensões do Modelo Padrão é a necessidade de explicar dados experimentais, como por exemplo, o mecanismo de massa dos neutrinos, que não está presente no Modelo Padrão, como visto no Capítulo 1. Ademais, percebemos no Capítulo 1 como se dá a construção de um modelo em Física de partículas, ao estudar quais os requisitos são necessários, como por exemplo, a ausência de anomalias de gauge, a presença do mecanismo de Higgs, dentre outras, para que o modelo seja consistente.

O estudo do Capítulo 2 visa compreender melhor o processo de regularização e renormalização a um laço, inicialmente para a Eletrodinâmica Quântica, e seguindo para uma teoria $SU(N)$ genérica. Sabe-se que a um laço, interações não previstas para a teoria aparecem, modificando o comportamento dos parâmetros. A principal dificuldade técnica encontrada foram os infinitos que surgem nas integrais a um laço, sendo utilizada a regularização dimensional para resolver o problema. Entretanto, ao expandirmos o resultado da integral para $d = 4 - \epsilon$, percebemos uma singularidade em $\epsilon \rightarrow 0$, isto é, a divergência da integral não desapareceu. Na realidade, os parâmetros que escrevemos na Lagrangeana a nível de árvore não se comportam como o esperado, uma vez que ignoramos a medida em que ele fora feito. Dessa forma, ao renormalizarmos a teoria, estaremos associando o valor de um parâmetro a uma escala de energia a que ele está sendo medido, ou neste caso, renormalizado. Assim, espera-se que com a leitura do texto, entenda-se que o processo de renormalização não se mostre como um “truque” para esconder infinitos, mas um procedimento necessário para que sejam comparada a teoria com o experimento.

No Capítulo 3, a estabilidade de um potencial escalar foi apresentada e estudada para dois modelos: dubleto de Higgs inerte e *triplet seesaw*, de forma a validar o método dos parâmetros orbitais e copositividade, comparando com resultados existentes na literatura. Uma vez que o objetivo deste trabalho é estudar o modelo 331 econômico e a estabilidade do seu potencial escalar a nível de um laço, fora apresentado também o método utilizado para avaliar as condições de estabilidade do potencial a um laço. Em resumo, o método permite que o potencial efetivo seja avaliado pelo potencial a nível de árvore, desde que os parâmetros sejam substituídos pelos *running couplings*. Como as condições de estabilidade foram obtidas pelo potencial escalar a nível de árvore, então foi possível, neste caso, avaliar a estabilidade dos modelos supracitados, a fim de comparar com a literatura, o que felizmente, se mostrou compatível.

O estudo do modelo 331 econômico de forma similar ao que fora feito para o

Modelo Padrão foi realizado, a fim de entender melhor sua estrutura e quais possíveis interações estão sendo introduzidas, assim como as novas partículas. É muito comum encontrar na literatura, somente as massas das partículas escalares, fermiônicas e vetoriais, sendo extremamente difícil encontrar as interações entre elas, salvo quando interesse particular de estudo. Dessa forma, espera-se que o Capítulo 4 sirva de base para entender as interações das partículas físicas, isto é, aquelas que após a quebra espontânea de simetria poderão ser encontradas. Além disso, as relações encontradas permitiram ser utilizadas para o estudo da estabilidade do modelo a um laço.

O objetivo principal deste trabalho são os resultados apresentados no Capítulo 5, uma vez que estes resultados também foram submetidos ao *arXiv* [111]. Assim, tudo o que foi estudado ao longo dos outros capítulos tinha como objetivo entender o trabalho realizado neste Capítulo. Foram encontradas relações entre massas dos escalares mais pesados e dos quarks mais pesados, de forma inédita, obtidas a partir da análise do potencial escalar a um laço. Estas relações se mostram muito frutíferas para outros possíveis estudos de modelos 331, a fim de comparar resultados. Além disso, o modelo apresentou um limite superior para a massa do quark e do escalar mais pesado, podendo ser verificado em futuros experimentos do LHC. Caso os limites das massas obtidas em [111] se mostrem válidas, avançaremos um pequeno passo para o melhor entendimento do Universo em que vivemos.

Conclui-se então que os métodos apresentados neste trabalho puderam resultar em estudos inéditos, a fim de possibilitar métodos mais eficazes para se analisar a estabilidade do potencial escalar. Além disso, possibilita o estudo da metaestabilidade do modelo, assim como o estudo em temperatura finita com correções a um laço. Vale ressaltar ainda que a estabilidade do Modelo Padrão na literatura é feita em dois ou mais laços. Dessa forma, o trabalho realizado por [111], e apresentado neste texto, permite futuras comparações entre a análise da estabilidade a um laço com dois laço, ou mais.

Referências

- [1] A. Salam and J. Ward, “Electromagnetic and weak interactions,” *Physics Letters* **13** no. 2, (1964) 168–171. 15
- [2] S. Weinberg, “A Model of Leptons,” *Phys. Rev. Lett.* **19** (Nov, 1967) 1264–1266. 15
- [3] S. L. Glashow, “Partial-symmetries of weak interactions,” *Nuclear Physics* **22** no. 4, (1961) 579–588. 15
- [4] P. A. M. Dirac and R. H. Fowler, “The quantum theory of the electron,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* **117** no. 778, (1928) 610–624. 15
- [5] C. D. Anderson, “The positive electron,” *Phys. Rev.* **43** (Mar, 1933) 491–494. 15
- [6] F. L. Wilson, “Fermi’s Theory of Beta Decay,” *American Journal of Physics* **36** no. 12, (12, 1968) 1150–1160. 15
- [7] J. Chadwick, “Possible Existence of a Neutron,” *Nature* **129** no. 3252, (Feb, 1932) 312. 15
- [8] H. Yukawa, “On the Interaction of Elementary Particles. I,” *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series* **17** (1935) 48–57. 15
- [9] C. L. Vieira and A. A. P. Videira, “Carried by History: Cesar Lattes, Nuclear Emulsions, and the Discovery of the Pi-meson,” *Physics in Perspective* **16** no. 1, (Mar., 2014) 3–36. 15
- [10] R. P. Feynman, “The Theory of Positrons,” *Physical Review* **76** no. 6, (Sept., 1949) 749–759. 15, 38
- [11] R. P. Feynman, “Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics,” *Physical Review* **76** no. 6, (Sept., 1949) 769–789. 15, 38
- [12] J. Schwinger, “Quantum Electrodynamics. I. A Covariant Formulation,” *Physical Review* **74** no. 10, (Nov., 1948) 1439–1461. 15, 38
- [13] J. Schwinger, “On quantum-electrodynamics and the magnetic moment of the electron,” *Phys. Rev.* **73** (Feb, 1948) 416–417. 15, 38, 53
- [14] S. Tomonaga, “On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields,” *Progress of Theoretical Physics* **1** no. 2, (Aug., 1946) 27–42. 15, 38

- [15] J. Cowan, C. L., F. Reines, F. B. Harrison, H. W. Kruse, and A. D. McGuire, “Detection of the Free Neutrino: A Confirmation,” *Science* **124** no. 3212, (July, 1956) 103–104. 16
- [16] C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes, and R. P. Hudson, “Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay,” *Physical Review* **105** no. 4, (Feb., 1957) 1413–1415. 16
- [17] T. D. Lee and C. N. Yang, “Question of Parity Conservation in Weak Interactions,” *Physical Review* **104** no. 1, (Oct., 1956) 254–258. 16
- [18] R. L. Garwin, L. M. Lederman, and M. Weinrich, “Observations of the failure of conservation of parity and charge conjugation in meson decays: the magnetic moment of the free muon,” *Phys. Rev.* **105** (Feb, 1957) 1415–1417. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.105.1415>. 16
- [19] J. I. Friedman and V. L. Telegdi, “Nuclear emulsion evidence for parity nonconservation in the decay chain $\pi^+ - \mu^+ - e^+$,” *Phys. Rev.* **105** (Mar, 1957) 1681–1682. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.105.1681.2>. 16
- [20] R. P. Feynman and M. Gell-Mann, “Theory of the fermi interaction,” *Phys. Rev.* **109** (Jan, 1958) 193–198. 16
- [21] C. N. Yang and R. L. Mills, “Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance,” *Phys. Rev.* **96** (Oct, 1954) 191–195. 16
- [22] M. Gell-Mann and Y. Ne’eman, “Current-generated algebras,” *Annals of Physics* **30** no. 2, (1964) 360–369. 16
- [23] M. Gell-Mann, “Symmetries of Baryons and Mesons,” *Physical Review* **125** no. 3, (Feb., 1962) 1067–1084. 16
- [24] G. Zweig, *An $SU(3)$ model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 2*, pp. 22–101. CERN, 2, 1964. 16
- [25] P. G. O. Freund and Y. Nambu, “Broken $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$ symmetry of strong interactions,” *Phys. Rev. Lett.* **12** (Jun, 1964) 714–717. 16
- [26] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, “Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. 1.,” *Phys. Rev.* **122** (1961) 345–358. 16
- [27] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, “Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. II.,” *Phys. Rev.* **124** (1961) 246–254. 16
- [28] P. W. Higgs, “Broken symmetries and the masses of gauge bosons,” *Phys. Rev. Lett.* **13** (Oct, 1964) 508–509. 16

- [29] F. Englert and R. Brout, “Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons,” *Phys. Rev. Lett.* **13** (Aug, 1964) 321–323. 16
- [30] A. Collaboration, “Observation of a new particle in the search for the standard model higgs boson with the atlas detector at the lhc,” *Physics Letters B* **716** no. 1, (2012) 1–29. 16, 27
- [31] G. R. Carlo M. Becchi, *An introduction to relativistic processes and the standard model of electroweak interactions*. Springer Cham, 2014. 20
- [32] S. L. Adler, “Axial-Vector Vertex in Spinor Electrodynamics,” *Phys. Rev.* **177** (Jan, 1969) 2426–2438. 20
- [33] J. S. Bell and R. W. Jackiw, “A PCAC puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the σ -model,” *Nuovo Cimento* **60** (1969) 47–61. 20
- [34] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2013. 20, 21, 24, 26, 37, 41, 42, 45, 49, 51, 53, 60, 65, 74, 103, 120, 133, 158
- [35] S. L. Adler and W. A. Bardeen, “Absence of higher-order corrections in the anomalous axial-vector divergence equation,” *Phys. Rev.* **182** (Jun, 1969) 1517–1536. 20
- [36] L. Alvarez-Gaumé and E. Witten, “Gravitational anomalies,” *Nuclear Physics B* **234** no. 2, (1984) 269–330. 21
- [37] P. Ramond, *Journeys Beyond The Standard Model*. Frontiers in Physics. Avalon Publishing, 2003. 22, 27, 36, 37, 120
- [38] N. Cabibbo, “Unitary symmetry and leptonic decays,” *Phys. Rev. Lett.* **10** (Jun, 1963) 531–533. 24
- [39] M. Kobayashi and T. Maskawa, “CP-Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction,” *Progress of Theoretical Physics* **49** no. 2, (02, 1973) 652–657. 24
- [40] A. D. Sakharov, “Violation of cp in variance, c asymmetry, and baryon asymmetry of the universe,” *Phys. Usp.* **34** no. 5, (1991) 392–393. 24, 120
- [41] S. Mertens, “Direct neutrino mass experiments,” *Journal of Physics: Conference Series* **718** (May, 2016) 022013. 25
- [42] B. R. H. John F. Donoghue, Eugene Golowich, *Dynamics of the Standard Model*. Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology. Cambridge University Press, 2 ed., 2023. 25

- [43] R. W. et al. (Particle Data Group), “Review of Particle Physics,” *Progress of Theoretical and Experimental Physics* **2022** no. 8, (08, 2022) 083C01. 27, 29, 90, 120, 125, 133, 146, 161, 173, 177
- [44] S. L. Glashow, J. Iliopoulos, and L. Maiani, “Weak interactions with lepton-hadron symmetry,” *Phys. Rev. D* **2** (Oct, 1970) 1285–1292. 34
- [45] K. Weierstrass, “Über die theorie der analytischen facultäten.” *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **1856** no. 51, (1856) 1–60.
<https://doi.org/10.1515/crll.1856.51.1>. 41
- [46] D. V. S. Michael E. Peskin, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995. 42, 51, 53, 60
- [47] E. A. Uehling, “Polarization effects in the positron theory,” *Phys. Rev.* **48** (Jul, 1935) 55–63. 44
- [48] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*. Frontiers in Physics. Addison-Wesley, 2nd ed., 1994. 49, 50, 54, 55, 107, 122, 123
- [49] X. Fan, T. G. Myers, B. A. D. Sukra, and G. Gabrielse, “Measurement of the electron magnetic moment,” *Phys. Rev. Lett.* **130** (Feb, 2023) 071801.
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.130.071801>. 53
- [50] H. Georgi and S. L. Glashow, “Unity of all elementary-particle forces,” *Phys. Rev. Lett.* **32** (Feb, 1974) 438–441. 56, 120
- [51] M. E. Machacek and M. T. Vaughn, “Two Loop Renormalization Group Equations in a General Quantum Field Theory. 1. Wave Function Renormalization,” *Nucl. Phys. B* **222** (1983) 83–103. 56
- [52] M. E. Machacek and M. T. Vaughn, “Two-loop renormalization group equations in a general quantum field theory (ii). yukawa couplings,” *Nuclear Physics B* **236** no. 1, (1984) 221–232. 56, 67, 78
- [53] M. E. Machacek and M. T. Vaughn, “Two Loop Renormalization Group Equations in a General Quantum Field Theory. 3. Scalar Quartic Couplings,” *Nucl. Phys. B* **249** (1985) 70–92. 56
- [54] T. P. Cheng, E. Eichten, and L.-F. Li, “Higgs phenomena in asymptotically free gauge theories,” *Phys. Rev. D* **9** (Apr, 1974) 2259–2273. 77
- [55] J. S. Kim, “General method for analyzing higgs potentials,” *Nuclear Physics B* **196** no. 2, (1982) 285–300. 81, 83, 85, 86

- [56] K. Kannike, “Vacuum stability conditions from copositivity criteria,” *The European Physical Journal C* **72** no. 7, (Jul, 2012) 2093. 81, 87, 88
- [57] S. Coleman and E. Weinberg, “Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking,” *Phys. Rev. D* **7** (Mar, 1973) 1888–1910. 81, 96, 102, 107, 108, 109, 110
- [58] L. Chataignier, T. Prokopec, M. G. Schmidt, and B. Świeżewska, “Single-scale renormalisation group improvement of multi-scale effective potentials,” *Journal of High Energy Physics* **2018** no. 3, (Mar, 2018) 14. 81, 97, 111, 113, 114, 115, 116
- [59] ATLAS Collaboration, M. Aaboud *et al.*, “Measurement of the Higgs boson mass in the $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4\ell$ and $H \rightarrow \gamma\gamma$ channels with $\sqrt{s} = 13$ TeV pp collisions using the ATLAS detector,” *Phys. Lett. B* **784** (2018) 345–366, [arXiv:1806.00242 \[hep-ex\]](#). 81
- [60] CMS Collaboration, A. M. Sirunyan *et al.*, “A measurement of the Higgs boson mass in the diphoton decay channel,” *Phys. Lett. B* **805** (2020) 135425, [arXiv:2002.06398 \[hep-ex\]](#). 81
- [61] G. Degrandi, S. D. Vita, J. Elias-Miró, J. R. Espinosa, G. F. Giudice, G. Isidori, and A. Strumia, “Higgs mass and vacuum stability in the Standard Model at NNLO,” *Journal of High Energy Physics* **2012** no. 8, (Aug, 2012) 98. 81
- [62] A. Andreassen, W. Frost, and M. D. Schwartz, “Consistent use of the standard model effective potential,” *Physical Review Letters* **113** no. 24, (Dec, 2014) 241801. 81
- [63] M. Kadastik, K. Kannike, A. Racioppi, and M. Raidal, “Implications of the 125 GeV Higgs boson for scalar dark matter and for the CMSSM phenomenology,” *Journal of High Energy Physics* **2012** no. 5, (May, 2012) 61. 81
- [64] M. Gonderinger, H. Lim, and M. J. Ramsey-Musolf, “Complex scalar singlet dark matter: Vacuum stability and phenomenology,” *Physical Review D* **86** no. 4, (Aug, 2012) 043511. 81
- [65] N. G. Deshpande and E. Ma, “Pattern of symmetry breaking with two higgs doublets,” *Phys. Rev. D* **18** (Oct, 1978) 2574–2576. 81, 89
- [66] S. Jangid, P. Bandyopadhyay, P. B. Dev, and A. Kumar, “Vacuum stability in inert higgs doublet model with right-handed neutrinos,” *Journal of High Energy Physics* **2020** no. 8, (Aug, 2020) 154. 81, 90, 116
- [67] C. Bonilla, R. M. Fonseca, and J. Valle, “Consistency of the triplet seesaw model revisited,” *Physical Review D* **92** no. 7, (Oct, 2015) 075028. 81, 91, 93, 96, 118

- [68] G. Moulhaka and M. C. Peyranère, “Vacuum stability conditions for higgs potentials with $su(2)_l$ triplets,” *Physical Review D* **103** no. 11, (Jun, 2021) 115006. 81, 92
- [69] H. Weyl, *The classical groups: Their invariants and representations*. Mathematics. Princeton Univ Pr, 2nd ed., 1946. 84
- [70] G. T. Gilbert, “Positive definite matrices and sylvester’s criterion,” *The American Mathematical Monthly* **98** no. 1, (1991) 44–46. 88
- [71] G. Branco, P. Ferreira, L. Lavoura, M. Rebelo, M. Sher, and J. P. Silva, “Theory and phenomenology of two-Higgs-doublet models,” *Physics Reports* **516** no. 1-2, (Jul, 2012) 1–102. 89
- [72] L. Blumenson, “A derivation of n-dimensional spherical coordinates,” *The American Mathematical Monthly* **67** no. 1, (1960) 63–66. 104
- [73] C. G. Callan, “Broken scale invariance in scalar field theory,” *Phys. Rev. D* **2** (Oct, 1970) 1541–1547. 108
- [74] K. Symanzik, “Small distance behaviour in field theory and power counting,” *Communications in Mathematical Physics* **18** no. 3, (1970) 227 – 246. 108
- [75] M. Sher, “Electroweak higgs potential and vacuum stability,” *Physics Reports* **179** no. 5, (1989) 273–418. 116
- [76] A. Arbey and F. Mahmoudi, “Dark matter and the early universe: A review,” *Progress in Particle and Nuclear Physics* **119** (July, 2021) 103865. 120
- [77] J. Schechter and J. W. F. Valle, “Neutrino masses in $SU(2) \otimes U(1)$ theories,” *Phys. Rev. D* **22** (Nov, 1980) 2227–2235. 120
- [78] S. Centelles Chuliá, R. Srivastava, and J. W. Valle, “Seesaw roadmap to neutrino mass and dark matter,” *Physics Letters B* **781** (June, 2018) 122128. 120
- [79] E. Bertuzzo, S. Jana, P. A. Machado, and R. Zukanovich Funchal, “Neutrino masses and mixings dynamically generated by a light dark sector,” *Physics Letters B* **791** (Apr., 2019) 210214. 120
- [80] R. D. Peccei, *The Strong CP Problem and Axions*, p. 317. Springer Berlin Heidelberg, 2008. 120
- [81] R. D. Peccei and H. R. Quinn, “CP conservation in the presence of pseudoparticles,” *Phys. Rev. Lett.* **38** (Jun, 1977) 1440–1443. 120

- [82] A. Bueno, A. J. Melgarejo, S. Navas, Z. Dai, Y. Ge, M. Laffranchi, A. Meregaglia, and A. Rubbia, “Nucleon decay searches with large liquid argon TPC detectors at shallow depths: atmospheric neutrinos and cosmogenic backgrounds,” *Journal of High Energy Physics* **2007** no. 04, (Apr, 2007) 041–041. 120
- [83] B. C. Barish, J. F. Bartlett, *et al.*, “Observation of trimuon production by neutrinos,” *Phys. Rev. Lett.* **38** (Mar, 1977) 577–580. 120
- [84] B. W. Lee and S. Weinberg, “SU(3) \otimes U(1) gauge theory of the weak and electromagnetic interactions,” *Phys. Rev. Lett.* **38** (May, 1977) 1237–1240. 120, 121
- [85] M. Singer, J. W. F. Valle, and J. Schechter, “Canonical neutral-current predictions from the weak-electromagnetic gauge group SU(3) \times U(1),” *Phys. Rev. D* **22** (Aug, 1980) 738–743. 121
- [86] F. Pisano and V. Pleitez, “SU(3) \otimes U(1) model for electroweak interactions,” *Phys. Rev. D* **46** (Jul, 1992) 410–417. 121, 122
- [87] W. A. Ponce, J. B. Florez, and L. A. Sanchez, “Analysis of SU(3) \times SU(3) \times U(1) local gauge theory,” *International Journal of Modern Physics A* **17** no. 05, (Feb, 2002) 643–659. 121, 127
- [88] W. A. Ponce, *Systematic Study of 331 Models*. AIP, 2002. 121, 126, 127
- [89] R. Foot, H. N. Long, and T. A. Tran, “SU(3) $_L\otimes$ U(1) $_N$ and SU(4) $_L\otimes$ U(1) $_N$ gauge models with right-handed neutrinos,” *Phys. Rev. D* **50** (Jul, 1994) R34–R38. 121, 122, 124
- [90] B. L. Sánchez-Vega, G. Gambini, and C. E. Alvarez-Salazar, “Vacuum stability conditions of the economical 3-3-1 model from copositivity,” *The European Physical Journal C* **79** no. 4, (Apr, 2019) 299. 121, 122, 124, 125, 129, 144, 155, 169, 170, 172, 174, 179
- [91] B. L. Sánchez-Vega, E. R. Schmitz, and J. C. Montero, “New constraints on the 3-3-1 model with right-handed neutrinos,” *The European Physical Journal C* **78** no. 2, (Feb, 2018) 166. 124, 126, 177
- [92] E. C. M., R. Martinez, and F. Ochoa, “Neutrino masses in a 331 model with right-handed neutrinos without doubly charged higgs bosons via inverse and double seesaw mechanisms,” *Physical Review D* **86** no. 7, (Oct, 2012) 073015. 124, 125, 128
- [93] R. A. Diaz, R. Martinez, and F. Ochoa, “Scalar sector of the SU(3) \times SU(3) \times U(1) model,” *Physical Review D* **69** no. 9, (May, 2004) 095009. 124, 128

- [94] J. K. Mizukoshi, C. A. de S. Pires, F. S. Queiroz, and P. S. Rodrigues da Silva, “Wimps in a 3-3-1 model with heavy sterile neutrinos,” *Phys. Rev. D* **83** (Mar, 2011) 065024. 124
- [95] A. G. Dias, C. de S. Pires, and P. R. da Silva, “Naturally light right-handed neutrinos in a 3-3-1 model,” *Physics Letters B* **628** no. 1-2, (Nov, 2005) 85–92. 124
- [96] P. V. Dong, T. T. Huong, D. T. Huong, and H. N. Long, “Fermion masses in the economical 3-3-1 model,” *Phys. Rev. D* **74** (Sep, 2006) 053003. 124
- [97] D. G. Dumm, F. Pisano, and V. Pleitez, “Flavor changing neutral currents in $SU(3)_L \otimes U(1)_Y$ models,” *Modern Physics Letters A* **09** no. 17, (1994) 1609–1615. 125
- [98] J. C. Montero and B. L. Sánchez-Vega, “Natural peccei-quinn symmetry in the 3-3-1 model with a minimal scalar sector,” *Phys. Rev. D* **84** (Sep, 2011) 055019. 125
- [99] J. C. Montero, A. R. Romero Castellanos, and B. L. Sánchez-Vega, “Axion dark matter in a 3 – 3 – 1 model,” *Phys. Rev. D* **97** (Mar, 2018) 063015. 125
- [100] P. Byakti and P. B. Pal, “Generalized 331 models.” 2020. 127
- [101] A. Addazi, G. Ricciardi, S. Scarlatella, R. Srivastava, and J. W. F. Valle, “Interpreting B anomalies within an extended 331 gauge theory,” *Phys. Rev. D* **106** no. 3, (2022) 035030, [arXiv:2201.12595 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/2201.12595). 127
- [102] J. P. Pinheiro and C. A. de S. Pires, “On the Higgs spectra of the 3-3-1 model,” *Phys. Lett. B* **836** (2023) 137584, [arXiv:2210.05426 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/2210.05426). 128
- [103] V. Q. Phong, V. T. Van, and H. N. Long, “Electroweak phase transition in the reduced minimal 3-3-1 model,” *Physical Review D* **88** no. 9, (Nov, 2013) 096009. 128
- [104] J. S. Borges and R. O. Ramos, “Symmetry breaking patterns of the 3-3-1 model at finite temperature,” *The European Physical Journal C* **76** no. 6, (Jun, 2016) 344. 128
- [105] Q.-H. Cao and D.-M. Zhang, “Collider phenomenology of the 3-3-1 model,” [arXiv:1611.09337 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/1611.09337). 145, 151, 154, 159, 162, 164, 166, 168
- [106] P. V. Dong, H. N. Long, and D. V. Soa, “Neutrino masses in the economical 3-3-1 model,” *Physical Review D* **75** no. 7, (Apr, 2007) 073006. 157, 158
- [107] S. Bilenky, C. Giunti, and W. Grimus, “Phenomenology of neutrino oscillations,” *Progress in Particle and Nuclear Physics* **43** (Jan, 1999) 1–86. 157

- [108] Z. Maki, M. Nakagawa, and S. Sakata, “Remarks on the Unified Model of Elementary Particles,” *Progress of Theoretical Physics* **28** no. 5, (11, 1962) 870–880. 158
- [109] G. Branco, W. Grimus, and L. Lavoura, “Relating the scalar flavour-changing neutral couplings to the CKM matrix,” *Physics Letters B* **380** no. 12, (Jul, 1996) 119126. 159, 161, 162
- [110] M. Sher, “Flavor-changing neutral currents in the Higgs sector,” *Modern Physics Letters A* **37** no. 22, (Jul, 2022) 2230011. 159, 161
- [111] G. C. Dorsch, A. A. Louzi, B. L. Sánchez-Vega, and A. Viglioni, “Vacuum stability in the one-loop approximation of a 331 model,” *The European Physical Journal C* **84** no. 5, (May, 2024) 471. 169, 171, 172, 173, 176, 177, 178, 179, 180, 182
- [112] D. COGOLLO, H. DINIZ, C. A. DE S. PIRES, and P. S. RODRIGUES DA SILVA, “Fermion family number and the zz mixing in the 3-3-1 model with right-handed neutrinos,” *Modern Physics Letters A* **23** no. 40, (2008) 3405–3410. 173
- [113] A. E. Thomsen, “Introducing RGBeta: a Mathematica package for the evaluation of renormalization group β -functions,” *The European Physical Journal C* **81** no. 5, (2021) 408. 175
- [114] S. Profumo, L. Ubaldi, and C. Wainwright, “Singlet scalar dark matter: Monochromatic gamma rays and metastable vacua,” *Phys. Rev. D* **82** no. 12, (Dec., 2010) 123514. 179
- [115] W.-L. Guo and Y.-L. Wu, “The real singlet scalar dark matter model,” *J. High Energ. Phys.* **2010** no. 10, (Oct., 2010) 83. 179
- [116] L. Feng, S. Profumo, and L. Ubaldi, “Closing in on singlet scalar dark matter: LUX, invisible Higgs decays and gamma-ray lines,” *J. High Energ. Phys.* **2015** no. 3, (Mar., 2015) 45. 179

Apêndices

APÊNDICE A – SU(3)

De forma a entender melhor a representação dos campos presentes no modelo 331, é útil revisar a álgebra e o grupo SU(3). Assim, considere o vetor $\Psi \equiv \psi_i$, com $i = 1, 2, 3$, em um espaço vetorial de 3 dimensões. Uma transformação arbitrária neste espaço é

$$\Psi' = U\Psi, \quad (\text{A.1})$$

em que U é uma matriz unitária 3×3 . Requisitando que o produto interno entre Ψ se mantenha invariante, isto é

$$\Psi'^{\dagger}\Psi' = \Psi^{\dagger}\Psi. \quad (\text{A.2})$$

O uso de (A.1) permite encontrar que

$$U^{\dagger}U = 1. \quad (\text{A.3})$$

A partir do determinante, podemos encontrar a seguinte equação

$$|\det U| = 1 \rightarrow \det U = e^{i\alpha}, \quad (\text{A.4})$$

em que α é um número real qualquer. Se tomarmos que $\alpha = 0$, então estaremos estudando o grupo de matrizes unitárias 3×3 , com determinante igual a 1, sendo chamado de SU(3). De forma geral, há 9 matrizes independentes quando se considera o espaço das matrizes unitárias 3×3 . A condição de que o determinante seja igual a um, elimina uma destas matrizes, além de dar outra condição para a representação dos oito geradores do grupo. Para ver isso, considere a ação do grupo SU(3) U

$$U = e^{iT^a\theta^a}, \quad (\text{A.5})$$

com $a = 1, \dots, 8$ e θ^a os ângulos das rotações neste espaço. Esta representação é possível, pois em uma transformação infinitesimal, temos que

$$U \approx 1 + iT^a\theta^a. \quad (\text{A.6})$$

Se dividirmos o ângulo, de forma que $\theta^a \rightarrow \frac{\theta^a}{N}$, então temos que

$$U^N = \left(1 + \frac{iT^a\theta^a}{N}\right)^N,$$

isto é, a ação infinitesimal exponenciada N vezes. No limite em que $N \rightarrow \infty$, temos que

$$U = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{iT^a\theta^a}{N}\right)^N = e^{iT^a\theta^a}. \quad (\text{A.7})$$

O uso do determinante em (A.5) implica que

$$1 = \det e^{iT^a \theta^a}. \quad (\text{A.8})$$

A partir da identidade $\det e^X = e^{\text{Tr}X} = 1$, concluímos que as matrizes T^a devem ter traço nulo. Logo, a matriz identidade de ordem 3, que faz parte do espaço de matrizes unitárias 3×3 , não faz parte dos geradores de $SU(3)$. Além disso, temos que

$$U^\dagger U = e^{-iT^{a\dagger} \theta^a} e^{iT^a \theta^a} = 1 \rightarrow T^{a\dagger} = T^a, \quad (\text{A.9})$$

isto é, os geradores além de terem traço nulo, devem ser hermitianos. As matrizes de Gell-Mann, apresentadas em (1.13), satisfazem estas condições. Tomando $T^a = \frac{\lambda^a}{2}$, permite escrever a comutação dos geradores como

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c, \quad (\text{A.10})$$

enquanto para a anticomutação temos que

$$\{T^a, T^b\} = \frac{\delta^{ab}}{3} + id^{abc} T^c, \quad (\text{A.11})$$

em que d^{abc} é simétrico na troca de índices. A partir de (A.10), vemos que T^3 e T^8 comutam, o que não é uma surpresa, já que a partir de (1.13), as matrizes λ^3 e λ^8 são diagonais. Isso será importante para definirmos as representações dos estados de um vetor neste espaço.

A.1 Representações

Podemos representar o vetor Ψ na forma fundamental $\mathbf{3}$, também chamado de tripleteo

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Devido a existência de dois geradores diagonais em $SU(3)$, T^3 e T^8 , podemos escrever os estados ψ_i em um diagrama, a partir dos autovalores destes estados. Não só isso, é possível escrever os estados a partir de combinações lineares de T^3 e T^8 . Assim, podemos definir o operador *isospin* I_3 , e o operador *hipercarga* Y , da seguinte forma

$$I_3 = T^3, \quad Y = \frac{2}{\sqrt{3}} T^8. \quad (\text{A.13})$$

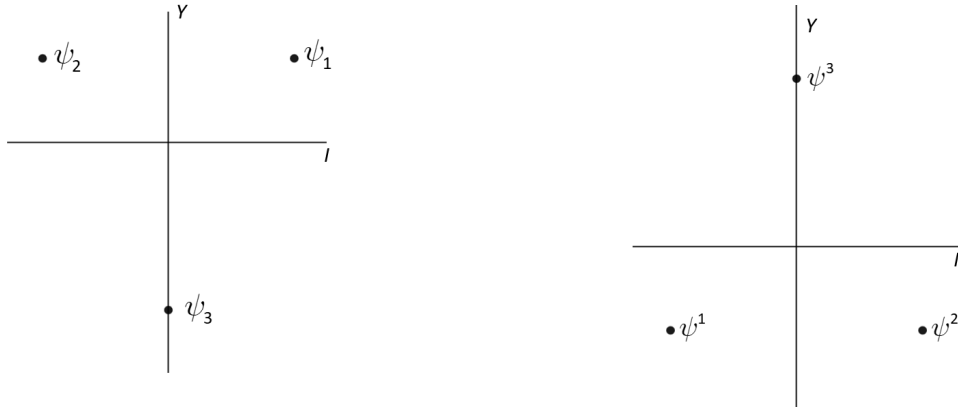
Dessa forma, temos que

$$I_3 \Psi = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

e

$$Y\Psi = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

Logo, o estado ψ_1 pode ser descrito como $(1/2, 1/3)$, o estado ψ_2 como $(-1/2, 1/3)$, e ψ_3 como $(0, -2/3)$, estando representados em uma diagrama de peso na Figura 47a.



(a) A representação fundamental $\mathbf{3}$ de Ψ . (b) A representação antifundamental $\bar{\mathbf{3}}$ de $\bar{\Psi}$.

Figura 47 – As representações fundamental e antifundamental de $SU(3)$ no diagrama de pesos, do inglês *weight diagrams*. Estas representações irredutíveis podem ser combinadas de forma a gerar outras representações.

Diferentemente de $SU(2)$, em que a representação fundamental $\mathbf{2}$ é equivalente a representação antifundamental $\bar{\mathbf{2}}$, em $SU(3)$ isto não acontece. Isto é, a representação antifundamental de $SU(3)$ não é equivalente a fundamental. As matrizes de Gell-Mann na representação antifundamental são obtidas a partir da conjugação destas

$$\bar{\lambda}^a = -\lambda^{a*}. \quad (\text{A.16})$$

Assim, consideremos um vetor $\bar{\Psi} \equiv \psi^i$ na representação $\bar{\mathbf{3}}$

$$\bar{\Psi} \equiv \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.17})$$

A regra de transformação do vetor, neste caso, é

$$\bar{\Psi}' = \bar{U}\bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}' = e^{-iT^a\theta^a}\bar{\Psi}, \quad (\text{A.18})$$

ou seja, ψ^i se transforma como ψ_i^* . A representação dos estados no diagrama de pesos é obtido de forma análoga ao que fora feito em (A.14) e (A.15)

$$-I_3\bar{\Psi} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & +1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.19})$$

e

$$-Y\bar{\Psi} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

Portanto, os estados na representação antifundamental podem ser descritos como $(-1/2, -1/3)$ para ψ^1 , $(1/2, -1/3)$ para ψ^2 , e $(0, 2/3)$ para ψ^3 . Estas estão representadas na Figura 47b.

Há a representação adjunta do grupo $SU(3)$, também chamado de octeto **8**. Neste caso, vamos considerar a matriz $\boldsymbol{\eta} \equiv \frac{\lambda^a}{\sqrt{2}}\eta^a$, com $a = 1, \dots, 8$

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \eta_3 + \frac{\eta_8}{\sqrt{3}} & \eta_1 - i\eta_2 & \eta_4 - i\eta_5 \\ \eta_1 + i\eta_2 & -\eta_3 + \frac{\eta_8}{\sqrt{3}} & \eta_6 - i\eta_7 \\ \eta_4 + i\eta_5 & \eta_6 + i\eta_7 & -2\frac{\eta_8}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\eta_3}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1^* & -\frac{\eta_3}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & \rho_3 \\ \rho_2^* & \rho_3^* & -2\frac{\eta_8}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.21})$$

em que esta renomeação das componentes da matriz ocorre para simplificar a classificação dos estados, como visto mais a frente.

Por ser adjunto, a transformação de $\boldsymbol{\eta}$ ocorre da seguinte forma

$$\boldsymbol{\eta}' = \mathbf{U}\boldsymbol{\eta}\mathbf{U}^\dagger = e^{iT^a\theta^a}\boldsymbol{\eta}e^{-iT^a\theta^a}, \quad (\text{A.22})$$

em que $T^a \equiv (T^a)^{bc}$, pois os geradores também devem estar na representação adjunta. Para $SU(3)$, os geradores na representação adjunta são os fatores antissimétricos f^{abc} , isto é

$$(T^a)^{bc} = -if^{abc}.$$

A classificação dos estados para as representações fundamental e antifundamental puderam ser realizadas ao notarmos que T^3 e T^8 nesta representação eram diagonais. Infelizmente, o mesmo não ocorre na representação adjunta, já que os geradores são antissimétricos. De qualquer forma, é útil avaliarmos as formas destas matrizes. Começando por T^3 , temos que

$$(T^3)^{ij} = -i(f^3)^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.23})$$

Analisando cuidadosamente a matriz (A.23), é possível perceber que há três blocos de matrizes, a saber

$$J_z = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i/2 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad -\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & i/2 \\ -i/2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.24})$$

Ora, mas estas são as matrizes do grupo $SU(2)$ quando na representação triplete e dubleto, respectivamente, deste grupo. Assim, η_1, η_2 e η_3 pertencem ao triplete, η_4, η_5 ao primeiro dubleto, η_6, η_7 ao segundo dubleto, e por fim, η_8 ao singlete. É possível fazer uma transformação unitária em cada bloco de matriz, de forma a diagonalizar a matriz J_z . Assim, temos que

$$\mathcal{P}^\dagger(J_z\eta_i) = I_3\mathcal{P}^\dagger\eta_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.25})$$

A diagonalização permite encontrar que

$$\mathcal{P}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.26})$$

Daí, temos que

$$\mathcal{P}^\dagger\eta_i = \begin{pmatrix} \frac{\eta_1 - i\eta_2}{\sqrt{2}} \\ \eta_3 \\ \frac{\eta_1 + i\eta_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \eta_3 \\ \rho_1^* \end{pmatrix}. \quad (\text{A.27})$$

A partir de I_3 em (A.26), sabemos os valores de isospin para cada componente do vetor acima: $I_3 = 1$ para ρ_1 , $I_3 = 0$ para η_3 , e $I_3 = -1$ para ρ_1^* . A diagonalização também pode ser feita para os dubletos, permitindo encontrar que: $I_3 = 1/2$ para ρ_2 , $I_3 = -1/2$ para ρ_2^* , $I_3 = -1/2$ para ρ_3 e $I_3 = 1/2$ para ρ_3^* . Por fim, para η_8 , temos que $I_3 = 0$, por ser singlete.

Para completar a classificação de $\boldsymbol{\eta}$, temos de analisar T^8 na representação adjunta

$$(T^8)^{ij} = -i(f^8)^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.28})$$

Novamente, é possível perceber que há dois blocos de matrizes que atuam em η_4, η_5, η_6 e η_7

$$I_8 = \begin{pmatrix} 0 & -i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.29})$$

O procedimento de diagonalização, permite encontrar que

$$\mathcal{U}^\dagger \left(\frac{2}{\sqrt{3}} I_8 \eta_i \right) = Y \mathcal{U}^\dagger \eta_i, \quad i = 4, 5 \text{ ou } i = 6, 7 \quad (\text{A.30})$$

Sendo obtido que

$$\mathcal{U}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.31})$$

Assim, temos que

$$\mathcal{U}^\dagger \eta_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \eta_{4(6)} + i\eta_{5(7)} \\ \eta_{4(6)} - i\eta_{5(7)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{2(3)}^* \\ \rho_{2(3)} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.32})$$

Assim, $Y = -1$ para $\rho_{2(3)}^*$, $Y = 1$ para $\rho_{2(3)}$, e $Y = 0$ para o restante. Dessa forma, é possível classificar o octeto no seguinte diagrama de pesos como ilustrado na Figura 48

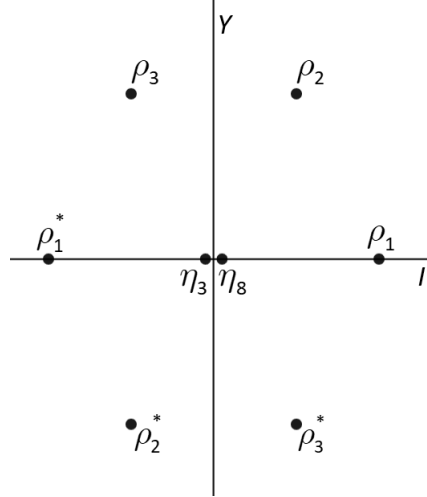


Figura 48 – A representação adjunta $\mathbf{8}$ no diagrama de pesos. Esta representação é utilizada para representar os mésons, partículas formadas por um par quark-antiquark.

Estas não são as únicas representações irredutíveis, há o sexteto $\mathbf{6}$, $\bar{\mathbf{6}}$, o decuplete $\mathbf{10}$, o 15-pleto $\mathbf{15}$, o 27-pleto $\mathbf{27}$, e dentre outras várias. Estas representações irredutíveis aparecem na decomposição de representações redutíveis. Por exemplo, ao construirmos o tensor $\mathbf{X} \equiv X_{ij}$ da seguinte forma

$$\mathbf{X} = \Psi \otimes \Psi \equiv \psi_i \psi_j^T, \quad (\text{A.33})$$

temos que a regra de transformação em $SU(3)$ é dada por

$$X'_{ij} = \psi'_i (\psi'_j)^T = U \psi_i \psi_j^T U^T = U X_{ij} U^T. \quad (\text{A.34})$$

A regra de transformação tem a mesma forma se tomarmos a transposta

$$(X'_{ij})^T = U X_{ij}^T U^T. \quad (\text{A.35})$$

Ou seja, se $X_{ij}^T = \pm X_{ij}$, então a transformação deixa invariante a parte simétrica e antissimétrica de X_{ij} . Isso permite decompô-lo em duas representações

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{X} - \mathbf{X}^T), \quad \mathbf{S} = \frac{1}{2} (\mathbf{X} + \mathbf{X}^T). \quad (\text{A.36})$$

\mathbf{A} tem 3 componentes independentes, e pode ser escrito como

$$\mathbf{A} \equiv \epsilon_{ijk} \epsilon^{pqk} X_{pq}, \quad (\text{A.37})$$

isto é, \mathbf{A} se transforma na representação $\bar{\mathbf{3}}$, já que ϵ_{ijk} é invariante sob $SU(3)$, e $\epsilon^{pqk} X_{pq}$ se transforma como $\bar{\Psi}$. Por fim, \mathbf{S} tem 6 componentes independentes. Logo, é possível escrever esta decomposição da seguinte forma:

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{6}. \quad (\text{A.38})$$

Outras decomposições úteis são

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{8}, \quad (\text{A.39})$$

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{8} \otimes \mathbf{8} \otimes \mathbf{10}, \quad (\text{A.40})$$

$$\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{8} \otimes \mathbf{8} \otimes \bar{\mathbf{10}} \otimes \mathbf{27}. \quad (\text{A.41})$$

ÍNDICE

- FCNC*, 125, 159
- background field method*, 102
- hardcutoff*, 105
- 1PI, 45, 48

- acoplamento de Yukawa, 20, 30, 79
- acoplamento escalar quártico, 67, 80
- Anomalia
 - gauge, 21
 - global, 24
 - gravitacional, 21
- autoestados de massa, 32, 34
- autointerações quárticas, 36
- ação efetiva, 81

- biadiagonalizada, 160
- bóson de Higgs, 27, 146
- bósons Nambu-Goldstone, 27, 128

- Callan-Symanzik, 108, 113
- campos de Grassman, 55
- carga efetiva, 45
- carga global, 50
 - quiral, 50
- condições de estabilidade, 81
- conjugação de carga, 37, 122
- constante de Euler-Mascheroni, 41
- constante estrutura fina, 53
- contratermo, 46, 48, 106
- coordenadas hipersféricas, 104
- copositividade, 81, 87, 169
- correntes carregadas, 34
- correntes neutras, 34
- correções radiativas, 38, 80, 81, 111
- corte de ramificação, 42
- critério de Sylvester, 88

- decomposição de Gordon, 52
- decomposição escalar complexo, 66
- degenerado, 84
- Derivada covariante
 - 331, 123
 - campos vetoriais, 18
 - fermiônico, 19
 - Higgs, 25
- derivada material, 109
- Diagramas de Feynman
 - bubble*, 99
 - caixa, 75
 - conectados, 97
 - desconectados, 97
 - triangulares, 21
- dimensão anômala, 107
- dubleto de Higgs, 20, 30, 78

- escala de Planck, 81
- espaço Euclideano, 104
- estabilidade do vácuo, 81

- forma de Dirac, 31, 32, 35
- forma de Euler, 26
- função de Green
 - 2 pontos, 101
 - n pontos, 101
- função gama, 41
 - Weierstrass, 41
- função partição, 98
 - livre, 98
- fórmula integral de Cauchy, 43

- gauge de Feynman, 39
- gauge de Lorentz, 56
- gauge unitário, 30–32, 36, 128
- geradores, 22

-
- ghosts, 54
 - grupo abeliano, 38
 - grupo de renormalização, 38, 45, 47, 60
 - acoplamento de gauge, 66
 - acoplamento de Yukawa, 72
 - acoplamento escalar quártico, 77
 - Hessiana, 86
 - hipercargas, 22
 - identidade de Fierz, 74
 - integral de caminho de Feynman, 39
 - interação
 - eletromagnética, 33
 - fraca, 33
 - invariante Casimir, 61, 70, 77, 78
 - Jacobiano, 55
 - Matrizes
 - CKM, 24
 - Gell-Mann, 18
 - Pauli, 17, 18
 - PMNS, 158
 - matéria escura, 125
 - mecanismo de Peccei-Quinn, 125
 - Mecanismo GIM, 34
 - medida, 54
 - metaestabilidade, 81
 - minimal subtraction scheme, 46
 - mistura bósons neutros, 32
 - modelo de Georgi-Glashow, 56
 - momento magnético do elétron, 52
 - multiescala, 111
 - método das características, 114
 - neutrino destro, 122
 - número bariônico, 24
 - números leptônicos, 22
 - parametrização de Kibble, 27, 30
 - paridade, 37
 - parâmetros de Feynman, 40, 47, 51
 - parâmetros orbitais, 169
 - potencial de Coulomb, 42
 - potencial efetivo, 81, 96, 102
 - Coleman-Weinberg, 107
 - melhorado, 110, 115
 - princípio de Schwarz, 44
 - procedimento Faddeev-Popov, 39, 54
 - produto direto, 78
 - propagador do elétron, 47
 - propagador do fóton, 39
 - propagador escalar, 69, 98
 - propagador ghost, 56
 - quark exótico, 122
 - quebra espontânea de simetria, 81, 83, 96
 - regras de Feynman, 38, 43, 58
 - regularização, 38
 - regularização dimensional, 40, 47, 51, 60
 - renormalização, 38, 46, 102
 - representação adjunta, 137
 - representação irreduzível, 87
 - representação tripleto, 137
 - resomação, 81, 96, 111
 - running coupling, 45
 - simetria CP, 37
 - simetria quiral, 49
 - singleto antissimétrico, 142
 - spinor de Dirac, 51
 - spinor de Weyl, 17
 - série de Taylor, 98
 - tensor de Levi-Civita, 124
 - Tensores de força
 - cor, 17
 - eletromagnético, 38
 - hipercarga, 17
 - isospin, 17
 - teorema de Adler-Bardeen, 20

-
- teorema de Cayley-Hamilton, 92
 - teorema de Nambu-Goldstone, 26, 129
 - teorema spin-estatística, 56
 - teoria de perturbação não degenerada,
171
 - transformada de Legendre, 100
 - transformação CP, 134
 - transformação de gauge, 17, 27, 30, 34,
50, 84
 - transformação ortogonal, 28
 - transformação quirial, 49
 - transição de sabores, 34
 - triplete escalar, 91
 - valor esperado do vácuo, 25, 81, 100
 - áxion QCD, 126
 - ângulo de Weinberg, 28, 146
 - órbita, 84
 - espaço orbital, 85
 - parâmetros orbitais, 85
 - órbitas
 - parâmetros orbitais, 89