

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Saneamento, Meio Ambiente e Recursos Hídricos

Thales Basílio da Circuncisão

**ESTIMAÇÃO DE HIDROGRAMAS DE PROJETO A PARTIR DA MODELAGEM DAS  
RELAÇÕES DE DEPENDÊNCIA ENTRE PICO, VOLUME E DURAÇÃO**

Belo Horizonte  
2025

Thales Basílio da Circuncisão

**ESTIMAÇÃO DE HIDROGRAMAS DE PROJETO A PARTIR DA MODELAGEM DAS  
RELAÇÕES DE DEPENDÊNCIA ENTRE PICO, VOLUME E DURAÇÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Saneamento, Meio Ambiente e Recursos Hídricos da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Saneamento, Meio Ambiente e Recursos Hídricos

Área de concentração: Recursos Hídricos

Linha de pesquisa: Modelagem de Processos Hidrológicos

Orientador: Wilson dos Santos Fernandes

Coorientador: Francisco Eustáquio Oliveira e Silva

Belo Horizonte  
2025

C578e

Circuncisão, Thales Basílio da.

Estimação de hidrogramas de projeto a partir da modelagem das relações de dependência entre pico, volume e duração [recurso eletrônico] / Thales Basílio da Circuncisão. – 2025.

1 recurso online (136 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Wilson dos Santos Fernandes.

Coorientador; Francisco Eustáquio Oliveira e Silva.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Inclui bibliografia.

1. Engenharia sanitária - Teses. 2. Recursos hídricos - Desenvolvimento - Teses. 3. Hidrologia - Teses. 4. Modelagem - Teses. 5. Administração de risco - Teses. 6. Inundações - Teses. I. Fernandes, Wilson dos Santos. II. Silva, Francisco Eustáquio Oliveira e. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.

CDU: 628(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM SANEAMENTO, MEIO AMBIENTE E RECURSOS HÍDRICOS

ATA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE **THALES BASÍLIO DA CIRCUNCISÃO**  
NÚMERO DE REGISTRO: **814**

Às 09:15 horas do dia 28 de março de 2025, reuniu-se na Escola de Engenharia da UFMG a Comissão Examinadora de DISSERTAÇÃO DE MESTRADO, indicada pelo Colegiado do PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM SANEAMENTO, MEIO AMBIENTE E RECURSOS HÍDRICOS, para julgar, em exame final, o trabalho final intitulado:

**"ESTIMAÇÃO DE HIDROGRAMAS DE PROJETO A PARTIR DA MODELAGEM DAS  
RELAÇÕES DE DEPENDÊNCIA ENTRE PICO, VOLUME E DURAÇÃO"**

requisito parcial para a obtenção do Grau de MESTRE em SANEAMENTO, MEIO AMBIENTE E RECURSOS HÍDRICOS, Área de Concentração: HIDRÁULICA E RECURSOS HÍDRICOS

Abrindo a sessão, o Orientador, Prof. Wilson dos Santos Fernandes, após dar conhecimento aos presentes o teor das Normas Regulamentares do Trabalho Final, passou a palavra ao candidato para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa pelo candidato. Logo após, a Comissão se reuniu sem a presença do candidato e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foram atribuídas as seguintes indicações:

| BANCA EXAMINADORA                                  | INSTITUIÇÃO | INDICAÇÃO |
|----------------------------------------------------|-------------|-----------|
| Prof. Dr. Wilson dos Santos Fernandes - Orientador | UFMG        | APROVADO  |
| Prof. Dr. Veber Afonso Figueiredo Costa            | UFMG        | APROVADO  |
| Prof. Dr. Francisco Eustáquio Oliveira e Silva     | UFMG        | APROVADO  |
| Prof. Dr. Dirceu Silveira Reis Junior              | UnB         | APROVADO  |

Pelas indicações, o candidato foi considerado APROVADO.

O resultado final foi comunicado publicamente ao candidato pelo Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ATA, que será assinada por todos os membros participantes da Comissão Examinadora. Belo Horizonte, 28 de março de 2025.

Assinatura dos membros da banca examinadora:



Documento assinado eletronicamente por **Wilson dos Santos Fernandes, Professor do Magistério Superior**, em 09/04/2025, às 10:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francisco Eustáquio Oliveira e Silva, Professor do Magistério Superior**, em 09/04/2025, às 10:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Dirceu Silveira Reis Junior, Usuário Externo**, em 09/04/2025, às 10:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Veber Afonso Figueiredo Costa, Professor do Magistério Superior**, em 28/04/2025, às 09:57, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufmg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **4063686** e o código CRC **37BC0801**.

---

Referência: Processo nº 23072.218117/2025-66

SEI nº 4063686



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Escola de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Saneamento, Meio Ambiente e Recursos Hídricos

"Estimação de hidrogramas de projeto a partir da modelagem das relações de dependência entre pico, volume e duração"

**THALES BASÍLIO DA CIRCUNCISÃO**

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Prof. WILSON DOS SANTOS FERNANDES

Prof. VEBER AFONSO FIGUEIREDO COSTA

Prof. FRANCISCO EUSTÁQUIO OLIVEIRA E SILVA

Prof. DIRCEU SILVEIRA REIS JUNIOR

Aprovada pelo Colegiado do PG SMARH

Versão Final aprovada por

Prof. Eduardo Coutinho de Paula  
Fernandes  
Coordenador

Prof. Wilson dos Santos  
Orientador

Belo Horizonte, 28 de março de 2025.



Documento assinado eletronicamente por **Wilson dos Santos Fernandes, Professor do Magistério Superior**, em 09/04/2025, às 10:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francisco Eustaquio Oliveira e Silva, Professor do Magistério Superior**, em 09/04/2025, às 10:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Dirceu Silveira Reis Junior, Usuário Externo**, em 09/04/2025, às 10:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Veber Afonso Figueiredo Costa, Professor do Magistério Superior**, em 28/04/2025, às 09:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Eduardo Coutinho de Paula, Coordenador(a) de curso de pós-graduação**, em 05/06/2025, às 14:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufmg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **4063703** e o código CRC **9EEE39FD**.

*Dedico este trabalho ao meu amado filho Issac  
e à minha amada esposa Yosie*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, primeiramente, a Deus, pelo dom da vida e pela saúde.

À minha amada esposa Yosie e meu filho Isaac, por fazerem essa caminhada mais leve e pela compreensão pelo tempo a mais à frente do computador, durante as noites e fins de semana, para me dedicar a essa pesquisa.

Aos meus pais, Ednaldo e Simone, por sempre acreditarem na força da educação e por sempre serem o suporte necessário para me dedicar à minha formação. Aos meus avôs Márcio e José Maria, por sempre acreditarem em mim.

Ao Professor Francisco Eustáquio Oliveira e Silva, pela paciência com a qual conduziu todo esse processo, desde a primeira conversa até a finalização desta dissertação. Tenho de agradecer pelos conselhos, amizade e contribuições para a concretização desse trabalho. Sou grato, também, aos colegas do grupo de pesquisa capitaneado pelo Prof. Francisco (Luísa, Vinicius, Camila, Ana Luísa e Gustavo), pelas enriquecedoras reuniões semanais e sugestões para meu trabalho.

Ao Professor Wilson dos Santos Fernandes, por todo o apoio durante a aplicação da metodologia, sobretudo com os códigos de separação de eventos, e pelas palavras reconfortantes durante essa caminhada. Com certeza, é uma inspiração que levo para minha carreira.

Aos professores Viviane Borda Pinheiro Rocha e Veber Afonso Figueiredo Costa pelas contribuições realizadas durante os seminários. A todos os professores, técnicos e servidores que tive contato no SMARH: Eber, Nilo, Palmier, Talita e Jorge entre outros com quem tive a oportunidade de aprender durante esse processo.

Ao Prof. Dr. Salvatore Grimaldi da Universidade de Tuscia (Itália) pelas valiosas contribuições acerca da modelagem via funções cópula em hidrologia.

Agradeço aos servidores da Agência Nacional de Águas e Saneamento Básico, por propiciarem uma eficiente obtenção de dados hidrométricos nas estações brasileiras.

Aos coordenadores e líderes da STATUM Geotecnia, pelo apoio durante as horas dedicadas às disciplinas, muito obrigado!

Aos colegas de turma e amigos que fiz durante essa caminhada, especialmente Vitor Martins e Fernando Feliciano, pela parceria durante todo o processo.

*“A estatística é a gramática da ciência.”*

Karl Pearson

## RESUMO

A avaliação do risco associado à ocorrência de enchentes em bacias monitoradas e não monitoradas se faz necessária para variadas aplicações em hidrologia e hidráulica. Para algumas dessas aplicações, como a gestão de eventos de inundações, projeto e verificação da segurança de estruturas hidráulicas de reservação, é primordial o conhecimento não só da vazão de pico associada a um risco hidrológico, mas também do volume e duração relativos ao hidrograma de projeto. Em caso de bacias não monitoradas, ou com monitoramento deficitário, pode-se adotar técnicas de regionalização para transferência das variáveis que regem o hidrograma observado em bacias monitoradas.

Nesse contexto, o presente estudo tem como objetivo avaliar abordagens estatísticas para a estimação de quantis e derivação da forma de hidrogramas sintéticos de projeto por meio de dados de deflúvio obtidos em bacias brasileiras, submetidas aos mais diferentes regimes hidroclimáticos. A proposta é modelar a dependência entre vazão, volume e duração por meio de funções cópula, estimar seus parâmetros para regiões homogêneas e estimar a forma do hidrograma a partir de funções densidade de probabilidade. Ao todo, foram avaliados centenas de eventos de cheia de 26 (vinte e seis) bacias hidrográficas brasileiras localizadas nas bacias dos rios Amazonas, São Francisco, Paraná e Tocantins-Araguaia, obtidos a partir de telemetria para correta descrição da forma, volume e duração dos eventos.

Como resultado, verifica-se que a análise de frequência tendo por base modelos multivariados não é trivial, sendo necessária uma avaliação cuidadosa das estruturas de dependência e dos modelos disponíveis para a modelagem. A cópula Gumbel se mostrou mais adequada para os dados em questão. Além disso, foram obtidas duas regiões homogêneas, localizadas no centro-oeste brasileiro e no alto São Francisco, havendo maior dificuldade em se obter regiões hidrologicamente homogêneas na bacia amazônica,. Por fim, a distribuição Beta, devido o suporte finito e versatilidade, foi considerada mais propícia à modelagem da forma frente um cenário de alta variabilidade, em que os hidrogramas amazônicos se apresentaram mais simétricos que os demais.

Palavras-chave: hidrogramas de projeto, risco hidrológico, dependência volume-vazão-pico.

## **ABSTRACT**

Assessing the risk associated with the occurrence of floods in monitored and unmonitored basins is necessary for various applications in hydrology and hydraulics. For some of these applications, such as flood event management and the design and safety verification of hydraulic reservoir structures, it is essential to know not only the peak flow associated with a hydrological risk, but also the volume and duration of the design hydrograph. In the case of unmonitored or poorly monitored basins, regionalization techniques can be used to transfer the variables governing the observed hydrograph to monitored basins.

In this context, the aim of this study is to evaluate statistical approaches for estimating quantiles and deriving the shape of synthetic design hydrographs using runoff data obtained from Brazilian basins subjected to a wide range of hydroclimatic regimes. The aim is to model the dependence between flow, volume and duration using copula functions, estimate copula parameters for homogeneous regions and estimate the shape of the hydrograph using probability density functions. In all, hundreds of flood events from 26 Brazilian river basins located in the Amazon, São Francisco, Paraná and Tocantins-Araguaia river basins were evaluated, obtained from telemetry to correctly describe the shape, volume and duration of the events.

As a result, frequency analysis based on multivariate models is not trivial, requiring careful evaluation of dependency structures and the models available for modeling. The Gumbel copula proved to be the most suitable for the data in question. In addition, it was more difficult to obtain hydrologically homogeneous regions in the Amazon basin, with two regions being obtained for the data, located in central-west Brazil and the upper São Francisco. Finally, the Beta distribution, due to its finite support and versatility, was more suitable for modeling the shape in a scenario of high variability, in which the Amazonian hydrographs were more symmetrical than the others.

**Keywords:** design hydrographs, hydrological risk, volume-peak flow dependency.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                                                                       |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 – Representação gráfica do operador da função cópula.....                                                                                    | 30 |
| Figura 2 – Exemplos de plotagem de pares de probabilidades com assimetria na cauda superior (esquerda) e assimetria na cauda inferior (direita). .... | 33 |
| Figura 3 – Exemplos da modelagem de cópulas Gumbel, Frank e Tawn. ....                                                                                | 34 |
| Figura 4 – Ilustração referente aos períodos de retorno bivariados. ....                                                                              | 39 |
| Figura 5 - Comparação entre os hidrogramas empíricos e as funções Beta e GSTSP (Serinaldi & Grimaldi 2011). ....                                      | 43 |
| Figura 6 – Exemplo de amostragem de vazões máximas anuais. ....                                                                                       | 44 |
| Figura 7 – Exemplo de amostragem por meio de “ <i>Peak Over Threshold</i> ”, com o limiar em vermelho.....                                            | 45 |
| Figura 8 – Fluxograma proposto para o presente trabalho. ....                                                                                         | 47 |
| Figura 9 – Estações fluviométricas consideradas para o estudo.....                                                                                    | 49 |
| Figura 10 – Estações fluviométricas selecionadas na bacia amazônica. ....                                                                             | 50 |
| Figura 11 – Estações fluviométricas selecionadas na bacia dos rios Tocantins-Araguaia.....                                                            | 50 |
| Figura 12 – Estações fluviométricas selecionadas na bacia hidrográfica do rio São Francisco.....                                                      | 51 |
| Figura 13 – Estações fluviométricas selecionadas na bacia hidrográfica do rio Paraná. ....                                                            | 52 |
| Figura 14 – Exemplo de hidrograma sem aderência entre o escoamento de base e o início e final do evento.....                                          | 66 |
| Figura 15 – Exemplos de eventos amostrados com o escoamento de base. ....                                                                             | 67 |
| Figura 16 – Exemplos de eventos amostrados já com a separação de escoamento de base. ....                                                             | 68 |
| Figura 17 – Diagrama quantil-quantil com dados da estação 19985000 ajustados à distribuição Generalizada de Pareto. ....                              | 72 |
| Figura 18 – Diagrama quantil-quantil com dados da estação 28200000 ajustados à distribuição Generalizada de Pareto. ....                              | 72 |
| Figura 19 – Diagrama quantil-quantil com dados da estação 41780002 ajustados à distribuição Generalizada de Pareto. ....                              | 72 |
| Figura 20 – Avaliação gráfica do ajuste dos dados de volume da estação 19985000 à distribuição Log-Normal. ....                                       | 74 |

|                                                                                                                                |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 21 – Avaliação gráfica do ajuste dos dados de duração da estação 19985000 à distribuição Gama. ....                     | 74 |
| Figura 22 – Avaliação gráfica do ajuste dos dados de volume da estação 28200000 à distribuição Log-Normal. ....                | 75 |
| Figura 23 – Avaliação gráfica do ajuste dos dados de duração da estação 28200000 à distribuição Gama. ....                     | 75 |
| Figura 24 – Avaliação gráfica do ajuste dos dados de volume da estação 41210001 à distribuição Lognormal. ....                 | 76 |
| Figura 25 – Avaliação gráfica do ajuste dos dados de duração da estação 41210001 à distribuição Gama. ....                     | 76 |
| Figura 26 – Intervalo para o coeficiente de correlação de Kendall para os pares de Vazão de Pico x Volume. ....                | 78 |
| Figura 27 – Intervalo para o coeficiente de correlação de Kendall para os pares de Volume x Duração. ....                      | 79 |
| Figura 28 – Intervalo para o coeficiente de correlação de Kendall para os pares de Vazão de Pico x Duração. ....               | 79 |
| Figura 29 – Geração de pares a partir das cópulas ajustadas com dados de vazão x volume e volume x duração. ....               | 84 |
| Figura 30 – Estimativas de quantis multivariados por probabilidades. ....                                                      | 86 |
| Figura 31 – Comparação entre quantis local e regional para a estação 12510500 (Região Amazônica). ....                         | 93 |
| Figura 32 – Comparação entre quantis local e regional para a estação 25090000 (Região do Tocantins-Araguaia – Região 02). .... | 94 |
| Figura 33 – Comparação entre quantis local e regional para a estação 41210001 (Região do São Francisco – Região 01). ....      | 94 |
| Figura 34 – Comparação entre quantis local e regional para a estação 60640000 (Região do Paraná – Região 02). ....             | 94 |
| Figura 35 – Ajuste das funções densidade de probabilidade ao hidrograma normalizado médio da estação 12510500. ....            | 96 |
| Figura 36 – Ajuste das funções densidade de probabilidade ao hidrograma normalizado médio da estação 13439000. ....            | 97 |
| Figura 37 – Ajuste das funções densidade de probabilidade ao hidrograma normalizado médio da estação 20200000. ....            | 97 |

|                                                                                                                                                      |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 38 – Ajuste das funções densidade de probabilidade ao hidrograma normalizado médio da estação 41195050.....                                   | 98  |
| Figura 39 – Funções densidade de probabilidade Beta ajustadas para cada uma das estações, além dos intervalos relativos aos eventos amostrados. .... | 100 |

## LISTA DE TABELAS

|                                                                                                                                                    |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tabela 1 - Cópias arquimedianas bidimensionais e suas respectivas funções geradoras. ....                                                          | 32  |
| Tabela 2 – Critérios para a escolha das bacias contempladas neste estudo. ....                                                                     | 48  |
| Tabela 3 - Postos selecionados para o estudo de caso. ....                                                                                         | 52  |
| Tabela 4 – Características físicas das bacias selecionadas .....                                                                                   | 54  |
| Tabela 5 – Valores críticos referentes ao teste de discordância para regiões homogêneas.....                                                       | 62  |
| Tabela 6 – Parâmetros estimados da distribuição Generalizada de Pareto. ....                                                                       | 70  |
| Tabela 7 – Resultado do teste de Cunnane. ....                                                                                                     | 71  |
| Tabela 8 – Parâmetros estimados para volume e duração dos eventos. ....                                                                            | 73  |
| Tabela 9 – Valores do coeficiente de correlação de Kendall para as variáveis aleatórias apreciadas.....                                            | 77  |
| Tabela 10 - Mediana e intervalos relativos aos coeficientes de correlação obtidos entre as variáveis aleatórias avaliadas.....                     | 78  |
| Tabela 11 – Matriz de correlação para os valores do coeficiente de correlação de Kendall e atributos físicos das bacias. ....                      | 81  |
| Tabela 12 – Valores obtidos para o critério de informação de Akaike para as cópias ajustadas para volume e duração. ....                           | 81  |
| Tabela 13 – Parâmetros de cópias e dependências de cauda estimados. ....                                                                           | 82  |
| Tabela 14 - Valores medianos e intervalos relativos aos parâmetros estimados por bacia.....                                                        | 83  |
| Tabela 15 – Parâmetros de cópias e dependências de cauda estimados com base no <i>framework</i> regional.....                                      | 92  |
| Tabela 16 – Valores da raiz do erro quadrático médio das distribuições consideradas. ....                                                          | 95  |
| Tabela 17 – Valores da raiz do erro quadrático médio das distribuições consideradas. ....                                                          | 99  |
| Tabela 18 – Desvios padrão dos parâmetros de forma da distribuição Beta. ....                                                                      | 104 |
| Tabela 19 – Valores medianos do tempo de pico, assimetria e curtose das distribuições Beta representativas dos eventos amostrados.....             | 105 |
| Tabela 20 – Matriz de correlação para área de drenagem, coeficiente de compactidade, tempo de pico, assimetria e curtose para todas as bacias..... | 106 |

|                                                                                                                                                                                    |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tabela 21 – Matriz de correlação para área de drenagem, coeficiente de compacidade, tempo de pico, assimetria e curtose para a bacia amazônica e região do Tocantins-Araguaia..... | 107 |
| Tabela 22 – Matriz de correlação para área de drenagem, coeficiente de compacidade, tempo de pico, assimetria e curtose para a região homogênea 01.....                            | 107 |
| Tabela 23 – Matriz de correlação para área de drenagem, coeficiente de compacidade, tempo de pico, assimetria e curtose para a região homogênea 02.....                            | 108 |

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

$E[Y]$  – Valor esperado da variável aleatória “Y”

$p$  – Probabilidade de superação de um determinado quantil

$T$  – Tempo de retorno

$F(x, y)$  – Distribuição acumulada conjunta das variáveis  $x$  e  $y$

$F_X(x)$  – Distribuição acumulada de probabilidades da variável  $x$

$F_Y(y)$  – Distribuição acumulada de probabilidades da variável  $y$

$C(.)$  – Função cópula

$\phi(.)$  – Função geradora da cópula

$\theta$  – Parâmetro de cópula arquimediana

$u$  – Probabilidade de não superação de dada variável aleatória

$v$  – Probabilidade de não superação de dada variável aleatória

$\rho$  – Coeficiente de correlação de Spearman

$\tau$  – Coeficiente de correlação de Kendall

$\lambda_U$  – Dependência na cauda superior

$T^{\vee}(x, y)$  – Tempo de retorno conjunto “OR”

$T^{\wedge}(x, y)$  – Tempo de retorno conjunto “AND”

$\mu$  – Tempo médio entre dois eventos sucessivos

$\hat{\theta}_k^{(R)}$  – k-ésimo parâmetro do modelo multivariado regional

$\gamma$  – Estatística do teste de Cunnane

$\chi^2$  – Distribuição do Qui-Quadrado

n – Tamanho da amostra

RHN – Rede Hidrometeorológica Nacional

SNIRH – Sistema Nacional de Recursos Hídricos

ANA – Agência Nacional de Águas e Saneamento Básico

POT – *Peaks Over Threshold*

DEM – Modelo Digital de Elevação

INMET – Instituto Nacional de Meteorologia

E – Leste

N – Norte

AD – Área de Drenagem

Kc – Coeficiente de Compacidade

Dd – Densidade de Drenagem

$A^2$  - Estatística de Anderson-Darling

$k$  – Parâmetro de forma da distribuição Generalizada de Pareto

$\alpha$  – Parâmetro de escala da distribuição Generalizada de Pareto

$\xi$  – Parâmetro de posição da distribuição Generalizada de Pareto

$f(x)$  – Função densidade de probabilidade da variável “x”

$\theta$  – Parâmetro de escala da distribuição gama

$\eta$  – Parâmetro de forma da distribuição gama

Q – Vazão de pico

V – Volume Escorado

D – Duração

$l(\theta)$  – Função de verossimilhança do parâmetro de cópula

$S_n$  – Estatística de Cramér-von-Mises

$AIC$  – Critério de informação de Akaike

$D_i$  – Medida de discordância

$H$  – Medida de heterogeneidade

$\alpha$  – Parâmetro de forma referente à cauda inferior da distribuição beta

$\beta$  - Parâmetro de forma referente à cauda superior da distribuição beta

RMSE – Raiz do Erro Quadrático Médio

$r$  – Coeficiente de correlação de Pearson

$Tp$  – Tempo de pico

## SUMÁRIO

|       |                                                                                                   |    |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1     | INTRODUÇÃO .....                                                                                  | 21 |
| 2     | OBJETIVOS .....                                                                                   | 25 |
| 2.1   | Objetivo geral .....                                                                              | 25 |
| 2.2   | Objetivos específicos .....                                                                       | 25 |
| 3     | REVISÃO DA LITERATURA .....                                                                       | 26 |
| 3.1   | Análise de frequência multivariada de variáveis hidrológicas .....                                | 26 |
| 3.1.1 | Definição de função Cópula .....                                                                  | 28 |
| 3.1.2 | Cópuas arquimedianas .....                                                                        | 31 |
| 3.1.3 | Medidas de correlação entre variáveis aleatórias .....                                            | 35 |
| 3.1.4 | Dependência de cauda .....                                                                        | 37 |
| 3.1.5 | Tempos de retorno multivariados .....                                                             | 38 |
| 3.1.6 | Estimação regional do parâmetro de cópula .....                                                   | 40 |
| 3.2   | Estimativa da forma do hidrograma a partir do emprego de funções densidade de probabilidade ..... | 42 |
| 3.3   | Análise de frequência por meio de séries de duração parcial ( <i>Peak Over Threshold</i> ) .....  | 44 |
| 4     | MATERIAL E MÉTODOS .....                                                                          | 47 |
| 4.1   | Modelagem multivariada .....                                                                      | 47 |
| 4.1.1 | Aquisição dos dados .....                                                                         | 47 |
| 4.1.2 | Separação de eventos de cheia .....                                                               | 53 |
| 4.1.3 | Levantamento das características físicas e hidroclimáticas das bacias consideradas .....          | 54 |
| 4.1.4 | Análise de frequência univariada – determinação das distribuições marginais .....                 | 55 |
| 4.1.5 | Avaliação estatística de dependência entre variáveis hidrológicas .....                           | 59 |
| 4.1.6 | Ajuste das funções cópula .....                                                                   | 59 |
| 4.2   | Definição das regiões homogêneas .....                                                            | 60 |
| 4.3   | Modelagem da forma dos hidrogramas .....                                                          | 63 |
| 5     | RESULTADOS E DISCUSSÃO .....                                                                      | 65 |
| 5.1   | Modelagem multivariada de vazão, volume e duração via funções cópulas .....                       | 65 |
| 5.1.1 | Seleção dos eventos de cheia e amostragem dos quantis observados .....                            | 65 |
| 5.1.2 | Análise de frequência univariada .....                                                            | 70 |
| 5.1.3 | Avaliação da correlação entre vazão de pico, volume e duração .....                               | 77 |
| 5.1.4 | Ajuste das funções cópula .....                                                                   | 81 |
| 5.1.5 | Estimativas de quantis .....                                                                      | 86 |
| 5.2   | Avaliação dos modelos de cópula regionais .....                                                   | 91 |

|       |                                                                   |     |
|-------|-------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.2.1 | Delimitação das regiões homogêneas.....                           | 91  |
| 5.2.2 | Estimativa dos parâmetros de cópula regionais .....               | 92  |
| 5.2.3 | Estimativa dos quantis regionais .....                            | 93  |
| 5.3   | Modelagem da forma dos hidrogramas.....                           | 95  |
| 6     | CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES.....                                    | 109 |
|       | REFERÊNCIAS.....                                                  | 114 |
|       | APÊNDICE A – SÉRIES HISTÓRICAS DE VAZÃO AVALIADAS.....            | 124 |
|       | APÊNDICE B – MOMENTOS-L DAS DISTRIBUIÇÕES GAMA E LOG-NORMAL ..... | 133 |
|       | APÊNDICE C – DISTRIBUIÇÃO DO QUI-QUADRADO .....                   | 134 |

## 1 INTRODUÇÃO

Historicamente, os estudos relacionados eventos extremos de cheia restringem-se à análise de vazões de pico. Entretanto, para a modelagem das variáveis que regem eventos de enchente em que, além da vazão de pico, a correta descrição de forma, duração e volume da enchente são requeridas, a análise de frequência univariada, técnica largamente empregada, apresenta uma importante limitação: não permite, valendo-se da estimação de quantis individualizados, considerar as relações de dependência estatística entre as variáveis aleatórias. Nesses casos a literatura científica releva a análise multivariada, a qual busca, em essência, estabelecer correlações entre as variáveis aleatórias avaliadas (Grimaldi & Serinaldi, 2006; Mediero et al., 2010; Gaál et al., 2015; Rizwan et al., 2019).

Nos casos em que registros fluviométricos são insuficientes ou inexistentes, uma alternativa é estimar os hidrogramas de enchente a partir do emprego de modelos determinísticos de transformação da chuva em vazão. Neles o hietograma de precipitações efetivas é derivado de um evento pluviométrico e o hidrograma, usualmente, é estimado a partir de uma função de transferência por meio da qual se obtém a evolução temporal do deflúvio. É comum nesses casos se assumir que a probabilidade de excedência da precipitação é igual ao do hidrograma obtido, o que, devido à quantidade elevada de variáveis intervenientes, é uma hipótese frágil (Viglione et al., 2009). Além disso, se faz necessária a definição da umidade antecedente da bacia (Rogger et al., 2012), o que depende de conhecimento da geologia do local e monitoramento das condições geotécnicas de saturação do solo em escala de bacia, que não é usual.

Diante desse quadro, trabalhos científicos recentes evidenciaram o uso de técnicas probabilísticas para a estimativa multivariada de quantis de hidrograma sintéticos de projeto. Nesses estudos, procedeu-se à classificação de eventos de cheia, em função da duração e intensidade de precipitações e enchentes, em conjunto com a modelagem estatística da dependência entre vazão de pico e volume escoado, além de modelagem da forma do hidrograma a partir de função densidade de probabilidade (Brunner et al., 2017; Fischer & Schumann, 2023). Complementarmente, outros pesquisadores avaliaram a inserção da duração dos eventos de cheia como variável

aleatória nos modelos multivariados (Grimaldi & Serinaldi, 2006; Sraj, Bezak & Brilly, 2014; Lacko et al., 2022).

Frente os desafios da modelagem multivariada, uma série de pesquisadores se dedicaram ao desenvolvimento/aplicação de técnicas, a princípio, mais adequadas à estimativa de quantis multivariados para cenários de baixa probabilidade de excedência. A literatura científica releva, entre outras, duas categorias: a utilização de distribuições conjuntas clássicas, que apresentam limitações e premissas que tornam sua utilização mais desafiadora (Bacchi et al., 1993; Goel et al., 1998; Yue et al., 2002) e a utilização de funções cópula (Salvadori & De Michele, 2004; Favre et al., 2004; Grimaldi & Serinaldi, 2006; Chowdhary et al. 2011; Brunner et al., 2017; Rizwan et al., 2019; Haile, 2022), que apresentam maior flexibilidade com relação à natureza das dependências e da modelagem em si, sendo que, para a estimativa de quantis máximos, é de extrema importância a existência de dependência na cauda superior.

Especificamente para a estimativa de quantis relativos a hidrogramas de cheia em bacias não monitoradas são apresentadas algumas alternativas, dentre as quais a regionalização de parâmetros de modelos de hidrogramas por meio de regressão múltipla (Brunner et al., 2018) e a utilização do modelo “*index-flood*” para a estimativa regional de quantis, tendo por base um modelo multivariado, em bacias localizadas em regiões hidrologicamente homogêneas (Chebana & Ouarda, 2011; M.-A. Ben Aissia et al., 2015). Para se aferir a aplicabilidade de tais técnicas, se fazem necessários dados consistentes de um número suficiente de bacias hidrográficas, sob a perspectiva de se garantir uma adequada estimação de parâmetros e a avaliação pormenorizada dos modelos regionais.

Devido às limitações da rede de monitoramento hidrológico brasileiro, é necessário o emprego de técnicas de regionalização para a obtenção de hidrogramas relativos a eventos extremos em locais sem monitoramento hidrométrico (Piol et al., 2018; Morais et al., 2020; Piol et al., 2023). A avaliação de eventos de inundações e a verificação de estruturas hidráulicas implantadas nesses locais, em geral, é realizada a partir do emprego dessa técnica.

Outra condição para a modelagem dos hidrogramas está relacionada à especificação da sua forma, a qual traz informações acerca do comportamento na ascensão, recessão e tempo de pico associados aos eventos de cheia. A literatura ressalta, de maneira consistente, o emprego de funções densidade de probabilidade para que, a partir dos parâmetros estimados, seja possível munir sua forma normalizada com os quantis obtidos e, por fim, se construir hidrogramas sintéticos para diferentes probabilidades de excedência. Para este fim, Nadarajah (2007), Rai et al. (2009) e Serinaldi & Grimaldi (2011) avaliaram a utilização de funções com domínio finito. Brunner et al. (2017) e Fischer & Schumann (2023) avaliaram a utilização de funções, tais quais a Gama e a função Log-normal, que não apresentam suporte finito. Brunner et al. (2018) constataram que, no caso de regionalização de hidrogramas sintéticos, a maior dificuldade reside na transferência dos parâmetros que se referem a sua forma.

Mediante o exposto, o presente trabalho tem por finalidade a aplicação de técnicas probabilísticas de estimação, com base em modelos multivariados, de quantis, para obtenção de hidrogramas sintéticos de projeto, a partir de dados de deflúvio de bacias brasileiras com variadas características geomorfológicas e hidroclimáticas. Observando-se a literatura científica, três questões emergiram e, assim, orientaram o desenvolvimento do estudo:

- Qual a função cópula mais adequada para a modelagem de dados de vazão, volume e duração de eventos de cheia nas bacias brasileiras analisadas?
- É possível que as relações de dependência nessas bacias sejam capturadas a partir das relações regionais?
- Qual função densidade de probabilidade utilizar para modelagem da forma do hidrograma frente um cenário de variabilidade?

Para respondê-las foram coletados dados telemétricos de bacias brasileiras, observando-se critérios relacionados ao intervalo temporal entre leituras subsequentes, grau de regularização, área de drenagem, entre outras características.

A partir de eventos de cheia amostrados foram extraídos dados de vazão, volume e duração, os quais embasaram uma avaliação multivariada de distintas funções cópula com ênfase na dependência na cauda superior (pergunta 1). Na sequência foram ajustados parâmetros de cópulas para regiões homogêneas, definidas segundo a

metodologia de Hosking & Wallis (1997), e também regiões hidrográficas, avaliando as diferenças entre os quantis estimados com base nas cópulas individuais e nas cópulas regionais (pergunta 02).

Por fim, foi realizada uma avaliação acerca das formas dos hidrogramas relativos aos eventos de cheia amostrados, ensejando-se o ajuste de uma função densidade de probabilidade a hidrogramas normalizados (pergunta 03). Além disso, foram avaliadas as diferenças entre os eventos obtidos, tendo em vista as distintas bacias hidrográficas analisadas.

O corpo da presente dissertação encontra-se dividido em 6 capítulos, incluindo-se este da Introdução. Os objetivos do estudo são sumariamente apresentados no Capítulo 2. No capítulo 3, é apresentada uma revisão de literatura, sendo descritos os principais trabalhos científicos que versam sobre os temas em análise. No capítulo 4, as etapas metodológicas são pormenorizadas. No capítulo 5, os resultados obtidos são descritos e analisados em função dos objetivos específicos delineados e à luz da literatura científica avaliada. Ao final, no Capítulo 6, as conclusões do estudo e recomendações para estudos futuros são apresentadas.

## **2 OBJETIVOS**

### **2.1 Objetivo geral**

Avaliar técnicas probabilísticas para a obtenção de hidrogramas de projeto em bacias brasileiras submetidas a diferentes regimes hidroclimáticos.

### **2.2 Objetivos específicos**

- Avaliar modelos de cópula para caracterizar as distribuições conjuntas entre vazões de pico, volume escoado e duração de eventos de cheia nas bacias analisadas, com vistas à dependência na cauda superior;
- Avaliar as relações de dependência regionais a partir de modelos para a estimativa de parâmetros de cópula em regiões homogêneas e regiões hidrográficas; e
- Avaliar função densidade de probabilidade mais aplicável para a representação da forma de hidrogramas normalizados.

### 3 REVISÃO DA LITERATURA

#### 3.1 Análise de frequência multivariada de variáveis hidrológicas

Na avaliação de risco em hidrologia, a principal estatística utilizada é a de período de retorno (ou tempo de retorno “T”), que reflete o tempo médio entre dois eventos de cheia com magnitude superior a um determinado quantil. Tomando-se como uma variável geométrica Y o número de anos necessários para que esse quantil seja superado, dentro de um processo de Bernoulli, sabe-se que o valor esperado dessa variável é:

$$E[Y] = \frac{1}{p} \quad (1)$$

em que:

- “p” é probabilidade de superação do quantil.

Nesse caso, o tempo de retorno equivale ao valor esperado da variável Y, e consiste no inverso da probabilidade superação anual de determinado quantil, conforme apresentado na Equação (2).

$$T = \frac{1}{p} \quad (2)$$

Uma vez que a probabilidade “p” está relacionada com o tempo de retorno, faz-se necessária a adoção de uma relação entre as magnitudes dos eventos de interesse e uma distribuição de probabilidades, processo chamado de “análise de frequência”. Assim, para o caso de avaliação univariada, a estimativa de quantis extremos de variáveis hidrológicas é realizada com base em uma função distribuição de probabilidades, cujos parâmetros populacionais são estimados com base em dados amostrais.

O primeiro passo é a definição da amostra, que deve ser representativa da variável aleatória, i.e., sem erros de natureza ocasional ou sistemática e cujo tamanho confira confiabilidade para que os parâmetros estimados reflitam, de fato, o processo modelado. Ademais, o processo hidrológico representado deve ser homogêneo, em

que todas as observações são oriundas de uma mesma população, e independente, em que não haja autocorrelação entre as realizações no processo.

Vale frisar que alguns processos hidrológicos são regidos pela relação de dependência entre distintas variáveis aleatórias, não sendo possível a predição de quantis valendo-se de uma função densidade de probabilidades univariada, a depender do objetivo. Nesse caso, para a definição do tempo de retorno, é necessário estimar a probabilidade conjunta entre as variáveis hidrológicas, conservando a relação de dependência entre elas em eventos observados.

Tradicionalmente, a estimativa de probabilidades conjuntas é realizada por meio de distribuições de probabilidade clássicas, em que as funções marginais dizem respeito às distribuições das variáveis aleatórias avaliadas, oriundas dessa função densidade de probabilidade conjunta. Nesse caso, há a limitação de que as distribuições marginais devem ser oriundas de uma mesma família de distribuição de probabilidades, o que, a depender do processo hidrológico em questão, não é aplicável para a estimativa das probabilidades conjuntas (Genest & Favre, 2007).

Nesse contexto, Goel et al. (1998) realizaram a modelagem multivariada de vazões e volumes, por meio de séries de duração parcial, ajustando uma função densidade de probabilidade normal bivariada, sendo realizada a transformação de *Box-Cox* para a normalização das variáveis. A partir da avaliação dos resultados, verificou-se que a utilização de modelagem bivariada entre vazões e volumes escoados era promissora. Também Yue et al. (2002) avaliaram a construção de hidrogramas por meio da função densidade de probabilidade Gama, utilizando-se trios de vazão, volume e duração, valendo-se do mesmo procedimento.

As variáveis envolvidas na formação de cheias têm, geralmente, distribuições assimétricas à direita, sendo os eventos extremos representados nas caudas superiores dessas distribuições. Por conseguinte, a avaliação de probabilidades conjuntas é mais adequadamente realizada a partir de distribuições conjuntas que apresentem dependência na cauda superior. Um exemplo desse tipo de modelagem é a usada por Bacchi et al. (1993), em que foi utilizada a distribuição exponencial bivariada para estimação de probabilidades conjuntas entre a duração e a intensidade

de eventos pluviométricos, a qual apresentou resultados satisfatórios frente à utilização de curvas Intensidade, Duração e Frequência (IDF) tradicionalmente empregadas.

Tendo em conta as limitações do emprego de funções densidade de probabilidade conjuntas clássicas, sobretudo o fato de que as distribuições marginais devam ser oriundas da mesma distribuição, alguns pesquisadores, ao início do Século XXI, propõem como alternativa o emprego de funções cópula para análises de frequência multivariada em hidrologia (Salvadori & De Michele, 2004; Favre et al., 2004; Grimaldi & Serinaldi, 2006; Chowdhary et al. 2011; Brunner et al., 2017; Rizwan et al., 2019; Haile, 2022).

Tsakiris, Kordalis & Tsakiris (2015), por exemplo, realizaram a comparação entre a cópula Gumbel e a função bivariada de Gumbel para dados de volume, vazão e duração de eventos de cheia em Quebec, Canada. Suas conclusões apontaram que, para fins de gestão de eventos de enchente e determinação de eventos de projeto, a abordagem por meio de funções cópula apresentou mais acurácia e maior simplicidade, além de revelar-se uma abordagem mais geral para a análise de frequência, frente ao modelo da função bivariada de Gumbel. Apesar dessas vantagens, outros autores destacam que a escolha da abordagem deve ser realizada com senso crítico, em função da finalidade e processo físico em análise (Ashkar & Aucoin, 2011).

### 3.1.1 Definição de função Cópula

As cópulas são funções que propiciam a estimação de probabilidades conjuntas por meio da relação de dependência entre as variáveis aleatórias, tendo por vantagens a admissão de diferentes distribuições de probabilidade para a modelagem da dependência entre variáveis aleatórias, a variedade de formas para estruturação dessa dependência e admissão um vasto intervalo de valores de correlação, o que é comum em modelagem hidrológica (Favre et al., 2004).

A primeira referência ao termo cópula em estudos estatísticos foi feita por Abe Sklar (1959), em seu teorema homônimo, descrevendo cópulas como funções que

combinam conjuntamente distribuições unidimensionais à forma multivariada. O Teorema de Sklar versa o seguinte (Nelsen, 2006):

*“Seja  $H$  é uma distribuição de probabilidades conjunta, com marginais  $F_X(x)$ , e  $F_Y(y)$ . Então, existe uma cópula  $C$  tal que para todos os  $x$  e  $y$  contidos em  $R$ ,*

$$H(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)).$$

*Se  $F$  e  $G$  são contínuas, então  $C$  é única. Entretanto,  $C$  é determinada apenas nos domínios de  $F$  e  $G$ . Por outro lado, se  $C$  é uma cópula e  $F$  e  $G$  são distribuições de probabilidade, então a função  $H$  é uma distribuição conjunta com marginais  $F$  e  $G$ ” (p.18).*

Em suma, pode-se descrever as cópulas como funções matemáticas que combinam as distribuições marginais de duas variáveis aleatórias, formando, assim, uma distribuição conjunta. A função cópula tem como premissa a manutenção da estrutura de dependência entre as variáveis, independente das funções marginais que as descrevem (Grimaldi & Serinaldi, 2005).

Sejam  $F_X(x)$  e  $F_Y(y)$  as distribuições de probabilidade acumulada das variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  e  $H(x, y)$  a função densidade de probabilidade conjunta dessas variáveis. A cópula bivariada é um operador conforme apresentado nas Equações ((3) e (4).

$$F(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)), x, y \in R. \quad (3)$$

Logo,

$$C(F_X(x), F_Y(y)) = P(X < x, Y < y) \quad (4)$$

em que:

- $F(x, y)$  é a distribuição conjunta de qualquer par de variáveis aleatórias contínuas  $[X, Y]$ ; e
- $F_X(x)$  e  $F_Y(y)$  são probabilidades de não superação associadas às variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , obtidas por meio das distribuições marginais das funções cópula.

A função densidade de probabilidade conjunta pode ser estimada, para o caso de utilização de funções cópula, conforme apresentado abaixo.

$$f_{x,y} = \frac{\partial^2 F_{x,y}(x,y)}{\partial x \partial y} = c(F_X(x), F_Y(y)) f_x(x) f_y(y) \quad (5)$$

em que:

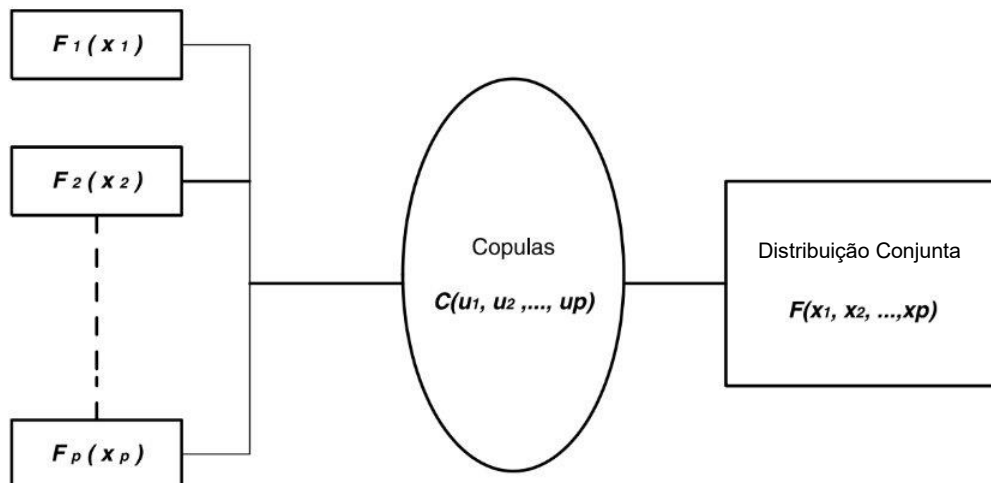
$$c(F_X(x), F_Y(y)) = \frac{\partial^2 C(F_X(x), F_Y(y))}{\partial F_X(x) \partial F_Y(y)} \quad (6)$$

Uma vez que as funções cópula operam sobre pares de valores de probabilidade acumulada, o domínio se dá no quadrado unitário, ou seja, no numérico  $[0,1] \times [0,1]$ . Ademais, como o resultado de uma função cópula é a probabilidade conjunta, este estará, também, no domínio  $[0,1]$ . Em suma, uma cópula bivariada se dá como o apresentado na Equação (7).

$$C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1] \quad (7)$$

A Figura 1 representa, graficamente, o operador da função cópula.

**Figura 1 – Representação gráfica do operador da função cópula.**



Fonte: Favre et al. (2004)

Para o caso bivariado, uma cópula é uma função de probabilidades conjuntas se satisfaz as seguintes propriedades (Nelsen, 2006):

$$C(0, F_Y(y)) = C(F_X(x), 0) = 0 \quad (8)$$

$$C(1, F_Y(y)) = F_Y(y) \text{ e } C(F_X(x), 1) = F_X(x) \quad (9)$$

$$C(u, v) - C(F_X(x), v) - C(u, F_Y(y)) + C(F_X(x), F_Y(y)) \geq 0 \quad \forall F_X(x) \leq u; F_Y(y) \leq v \quad (10)$$

Segundo Triantafyllou (2024), as funções cópula funcionam de maneira similar a uma operação binária no intervalo  $[0,1]$ , ou seja, a função cópula  $C(\cdot)$  atribui a cada par  $(u, v)$ , no intervalo  $[0,1]$ , um número  $C(u, v)$ , também no intervalo  $[0,1]$ , sendo este referente à probabilidade conjunta entre as variáveis em estudo.

### 3.1.2 Cópulas arquimedianas

A estimativa de probabilidades conjuntas por meio de funções cópula pode ser realizada por meio de uma infinidade de modelos de cópula, englobando variados níveis de dependência e assimetria. A literatura científica focada em estudos hidrológicos releva as cópulas da família arquimediana. Nelsen (2006) devota um capítulo de seu livro para versar sobre essa classe, por ser a mais popular e mais aplicada em diversos campos do conhecimento.

As famílias de cópulas arquimedianas englobam uma importante variedade de estruturas de dependência. Essa classe tem a possibilidade de assumir dependência caudal assimétrica, fazendo com que seja uma forte candidata para a modelagem de dados com estruturas de dependência assimétrica. Ademais, existe relativa facilidade para a construção de cópulas arquimedianas, o que reside no fato de essas famílias possibilitarem a redução do estudo de dependência multivariada à utilização de uma função univariada, simbolizada pela função geradora  $\phi(\cdot)$  (Bianchi, 2008).

Vale destacar que o termo “arquimediana” advém do axioma arquimediano dos números reais positivos: “se  $a, b$  são números reais positivos, logo, existe um número inteiro  $n$  tal que  $na > b$ ” (Nelsen, 2006).

A cópula arquimediana é expressa por:

$$C[F_X(x), F_Y(y)] = \phi^{-1}[\phi(F_X(x)) + \phi(F_Y(y))] \quad (11)$$

em que  $\phi(\cdot)$  é a função geradora da cópula que deve ser contínua e convexa no domínio  $(0,1)$ , além de, por hipótese, satisfazer as seguintes condições:

$$\phi(1) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} < 0 \quad (13)$$

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} \geq 0 \quad (14)$$

Não obstante, as cópulas arquimedianas apresentam as seguintes propriedades (Anjos *et al.*, 2004):

- Propriedade de simetria:  $C(u, v) = C(v, u)$ ;
- Propriedade associativa:  $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w)) \forall u, v, w \in (0,1)$ ; e
- Se  $\phi(\cdot)$  é a geradora de  $C(\cdot)$ , logo, para uma constante  $k > 0$ ,  $k\phi(\cdot)$  é função geradora de  $C(\cdot)$ .

Tradicionalmente, de acordo com os estudos científicos que lançam luz às cópulas arquimedianas consultados (Anjos *et al.*, 2004; Nelsen, 2006), essas famílias de cópulas são formuladas em função de um parâmetro " $\theta$ ", que torna possível quantificar e classificar a relação de dependência entre as variáveis aleatórias modeladas. A depender da família de cópula em análise, o parâmetro de cópula é a estatística que varia em função do nível de dependência entre as variáveis aleatórias.

Há inúmeras famílias de cópulas arquimedianas. Na Tabela 1, apresentam-se aquelas mais usadas em estudos relacionados à hidrologia estatística.

**Tabela 1 - Cópulas arquimedianas bidimensionais e suas respectivas funções geradoras.**

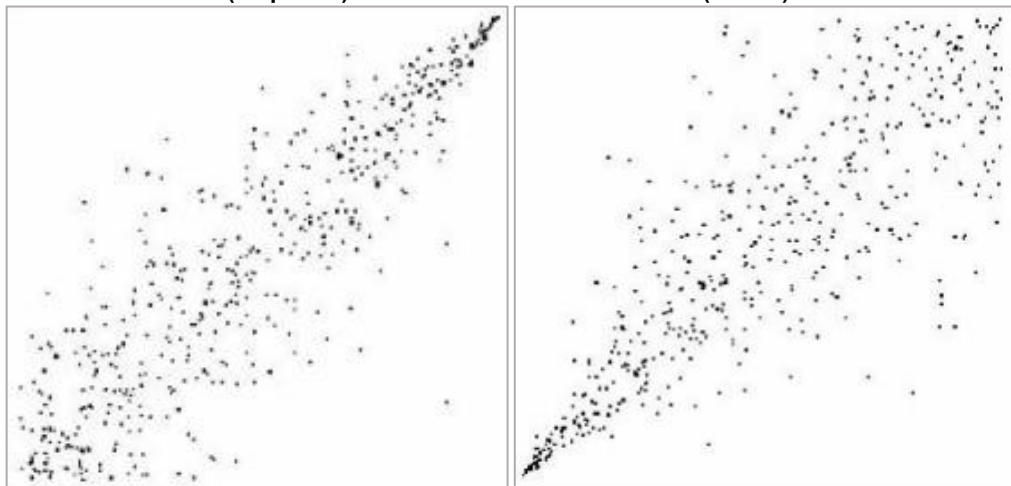
| Cópulas arquimedianas |                                                                                             |                                                  |                                     |
|-----------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-------------------------------------|
| Nome                  | $C_\theta(u, v)$                                                                            | $\phi_\theta(t)$                                 | $\theta \in$                        |
| Clayton               | $\max([u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-1/\theta}, 0)$                                      | $(t^{-\theta} - 1)/\theta$                       | $[-1, \infty] \setminus \{0\}$      |
| Gumbel                | $\exp(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}})$                             | $(-\ln t)^\theta$                                | $[1, \infty)$                       |
| Frank                 | $-\frac{1}{\theta} \ln(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1})$ | $-\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$ | $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$ |

| Cópulas arquimedianas |                                                                                   |                            |               |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|---------------|
| Joe                   | $1 - [(1 - u)^\theta + (1 - v)^\theta - (1 - u)^\theta(1 - v)^\theta]^{1/\theta}$ | $-\ln[1 - (1 - t)^\theta]$ | $[1, \infty)$ |

Fonte: Nelsen (2006), Bianchi (2008) e Triantafyllou (2024).

Conforme mencionado, as cópulas arquimedianas abrangem variadas possibilidades de dependência de cauda. A cópula de Clayton apresenta dependência na cauda inferior, as famílias de Joe e Gumbel apresentam na cauda superior e a cópula Frank não apresenta dependência de cauda, por se tratar de uma cópula simétrica (Bianchi, 2008).

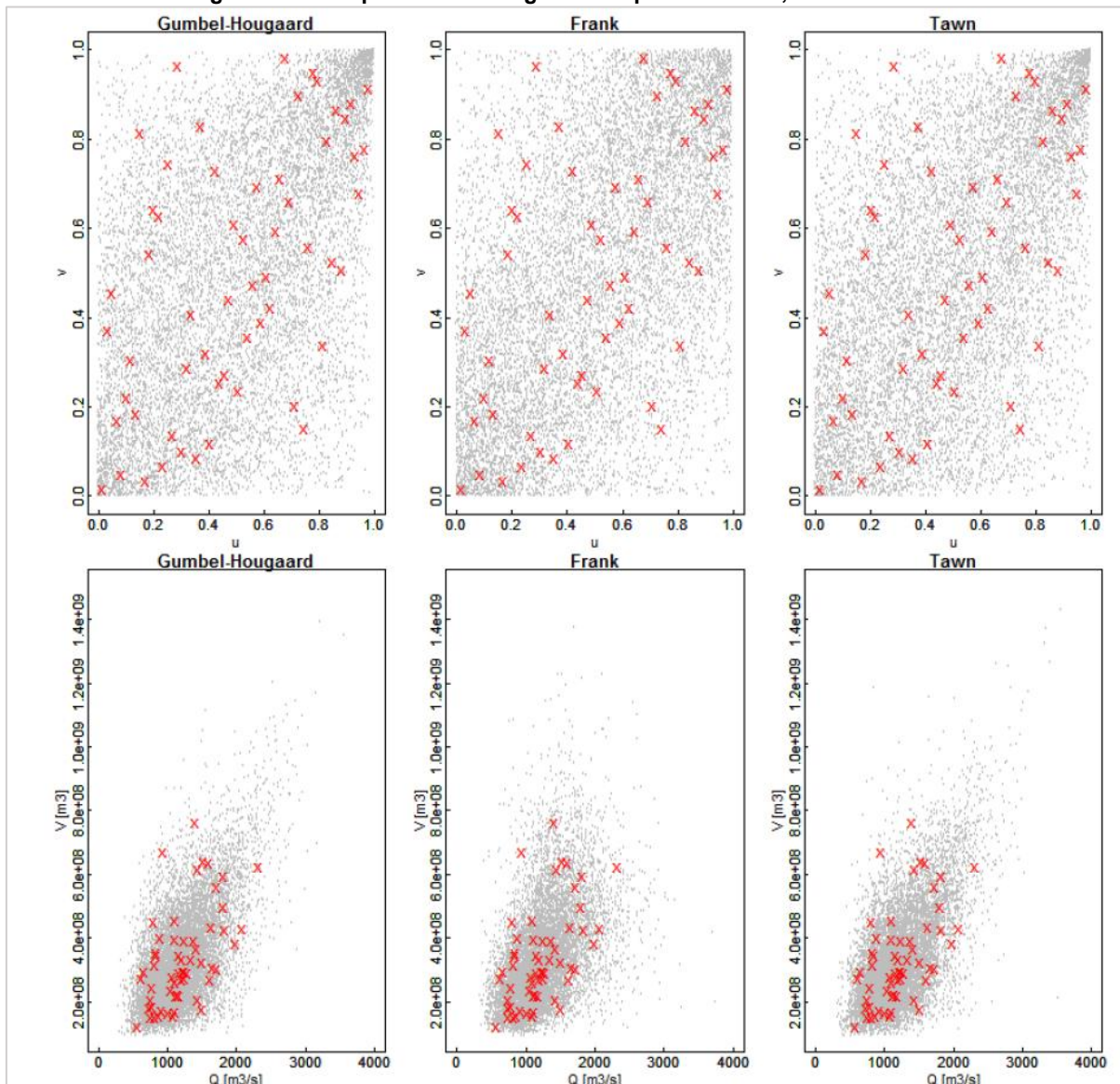
**Figura 2 – Exemplos de plotagem de pares de probabilidades com assimetria na cauda superior (esquerda) e assimetria na cauda inferior (direita).**



Fonte: Nelsen (2006)

Sraj, Bezak & Brilly (2014), por exemplo, avaliaram as cópulas Gumbel, Frank e Tawn, conforme indicado na Figura 3, com vistas à modelagem de dados de vazão de pico e volume escoado referentes a eventos de cheia. Os autores verificaram que a cópula Gumbel foi a mais apropriada para a modelagem de pares de vazão de pico e volume escoado e volume escoado e duração, tendo em vista resultados de testes de hipóteses e avaliações acerca da dependência na cauda superior.

Figura 3 – Exemplos da modelagem de cópulas Gumbel, Frank e Tawn.



Fonte: Sraj, Bezak & Brilly, 2014

Brunner et al. (2017), por sua vez, avaliaram diversas cópulas da família arquimediana para a modelagem conjunta de dados de vazão de pico e volume escoado de cheias em bacias suíças. A princípio, foi empregado o teste de hipóteses baseado na estatística de Cramér-von-Mises para a escolha do modelo mais adequado, sendo os modelos com maior percentual de não rejeição aqueles baseados nas cópulas de Gumbel e Joe, os quais apresentam dependência na cauda superior. Destaca-se que o propósito do teste de hipóteses não é a discriminação de modelos, mas sim atestar a hipótese nula de aderência.

Rizwan et al. (2019) também compararam as cópulas Gumbel, Clayton e Frank para dados de vazão de pico e volume escoado de eventos de cheia em bacias paquistanesas. A partir de testes de hipóteses, baseados no teste de Kolmogorov-Smirnov, o modelo mais adequado foi aquele que adveio da cópula Gumbel.

### 3.1.3 Medidas de correlação entre variáveis aleatórias

Para a modelagem multivariada via funções cópula é de extrema relevância o entendimento do grau de relação entre duas variáveis aleatórias, uma vez que, sobretudo para as famílias arquimedianas, a estimativa de probabilidades conjuntas é realizada tendo como base as medidas de dependência entre as variáveis em análise (Genest & Favre, 2007). Tais medidas são representadas no modelo pelo parâmetro de cópula “ $\theta$ ” que, por sua vez, tem relação com as informações referentes à correlação entre as variáveis aleatórias em estudo. Vale aqui registrar que um elevado coeficiente de correlação não representa, necessariamente, uma relação de causa e efeito entre duas variáveis, somente há a indicação de que uma variação conjunta das variáveis apresenta uma tendência (Pinto & Naghetini, 2006).

Para a modelagem via cópula, dois parâmetros que quantificam o grau de correlação entre duas variáveis aleatórias têm destaque, quais sejam: os coeficientes de correlação de Spearman ( $\rho$ ) e de Kendall ( $\tau$ ). Ambas as medidas são estimadas em função da classificação dos pares de variáveis aleatórias, o que é vantajoso pois, segundo Genest & Favre (2007), inferências acerca das estruturas de dependência entre variáveis devem ser baseadas em posições.

O coeficiente de correlação de Spearman pode ser estimado a partir da Equação (15).

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})(S_i - \bar{S})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2 \sum_{i=1}^n (S_i - \bar{S})^2}} \in [-1,1] \quad (15)$$

sendo:

$$\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i = \frac{n+1}{2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i = \bar{S}$$

em que:

-  $R_i$  e  $S_i$  são os ranqueamentos das variáveis aleatórias em questão; e

-  $n$  é o tamanho da amostra.

$\hat{\rho}$  é um estimador não enviesado do coeficiente de correlação populacional determinado a partir da Equação ((16).

$$\rho = 12 \iint_0^1 uv dC(u, v) - 3 = 12 \iint_0^1 C(u, v) dv du - 3. \quad (16)$$

O coeficiente de correlação de Kendall tem como estimador o apresentado na Equação (17).

$$\hat{\tau} = \frac{P_n - Q_n}{\binom{n}{2}} = \frac{4}{n(n-1)} (P_n - 1) \quad (17)$$

em que  $P_n$  e  $Q_n$  são, respectivamente, o número de pares concordantes ou discordante. Dois pares  $(x_i, y_i)$  e  $(x_j, y_j)$  são ditos concordantes se  $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$  e discordantes se  $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$ .  $n$  diz respeito ao tamanho da amostra.

A Equação (17) é um estimador não enviesado do coeficiente populacional determinado a partir da Equação (18) e da Equação (19).

$$\tau = 4 \iint_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1 \quad (18)$$

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} dt. \quad (19)$$

Com a solução da integral apresentada na Equação (19), é possível se determinar a relação entre  $\tau$  e o parâmetro de cópula  $\theta$ . Para a cópula de Clayton, a relação é dada pela Equação (20) e para a cópula de Gumbel pela Equação (21).

$$\tau = \frac{\theta}{\theta + 2} \quad (20)$$

$$\tau = \frac{\theta - 1}{\theta} \quad (21)$$

No caso de correlações entre pico, volume e duração de eventos de cheia, a maior parte dos estudos utiliza o coeficiente de correlação de Kendall para avaliar a dependência entre vazão, volume e duração. Vale aqui destacar os estudos de Serinaldi & Grimaldi (2006), Sraj, Bezak & Brilly (2014) e Lacko et al. (2022), em que o valor da correlação entre vazão de pico x volume e volume x duração supera aquela obtida para vazão de pico x duração. Um fator importante é que há alternância entre a preponderância entre os dois primeiros pares, sendo por vezes verificada uma maior correlação entre vazão de pico x volume e, outras, entre volume x duração dos eventos de cheia.

#### 3.1.4 Dependência de cauda

No âmbito de análises multivariadas de eventos extremos, como cheias e/ou secas, é importante ponderar acerca do comportamento das distribuições nas caudas inferior e superior. Conforme já mencionado, cópulas arquimedianas apresentam a versatilidade de apresentar dependência em ambas as caudas e não apresentar dependência, no caso de cópulas simétricas.

No contexto de eventos extremos máximos, o conceito de dependência de cauda superior é fundamental e concerne à capacidade de associar eventos extremos entre as duas variáveis aleatórias, sendo medida pelo coeficiente de dependência de cauda ( $\lambda_U$ ) (Raquena, Mediero & Garrote, 2013), cuja definição matemática é apresentada na Equação (22). No caso de cópulas, a dependência na cauda superior é dada pela Equação (23).

$$\lambda_U = \lim_{w \rightarrow 1^-} P(F_X(x) > w \mid F_Y(y) > w) \quad (22)$$

$$\lambda_U = \lim_{w \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2w + C_\theta(w, w)}{1 - w} \quad (23)$$

Em essência, a ideia da dependência de cauda está ligada ao grau de dependência entre os pares no quadrante superior direito da função. No caso das cópulas arquimedianas, apenas as cópulas Joe e Gumbel apresentam dependência na cauda superior, cujo estimador, em função do parâmetro de cópula, é dado pela Equação (24).

$$\hat{\lambda}_U = 2 - 2^{1/\theta} \quad (24)$$

em que  $\theta$  é o parâmetro da cópula arquimediana.

Poulin et al. (2007) avaliaram a importância da consideração da dependência de cauda na modelagem bivariada a partir de funções cópula, baseando-se em dados anuais de vazão e volume de eventos de enchente no Rio Loire (França). Os resultados mostraram que as cópulas Clayton e Frank superestimam os quantis estimados, ao passo que a cópula Gumbel resulta em quantis mais realistas, isso é, probabilidades conjuntas mais próximas às probabilidades dos eventos em questão.

### 3.1.5 Tempos de retorno multivariados

Ao contrário do caso univariado, a definição de período de retorno para o caso bivariado não é exclusiva, ou seja, os pares não são os mesmos para determinado tempo de retorno, sendo essa definição realizada em função do problema em questão (Serinaldi, 2015). Uma definição generalizada do período retorno é dada por Salvadori; De Michele & Durante (2011):

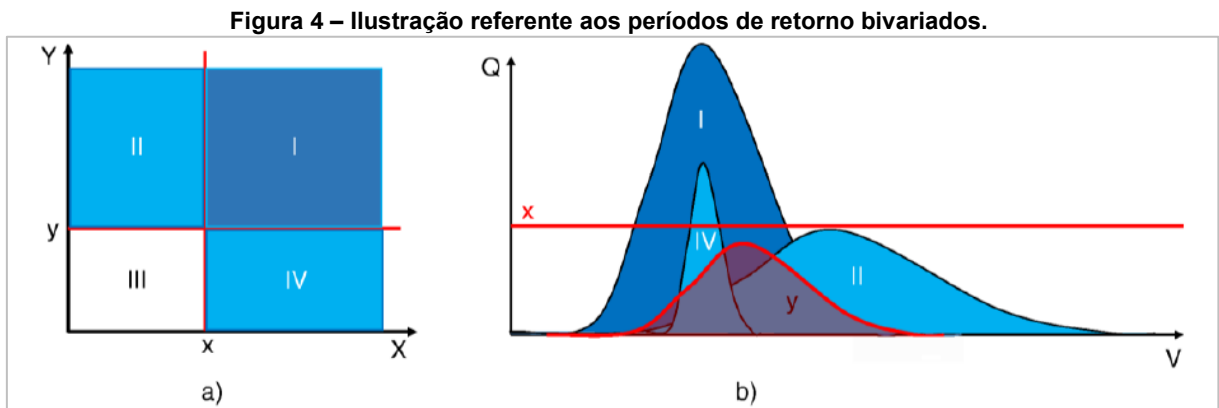
$$T_D = \frac{\mu}{P[X \in D]} \quad (25)$$

em que:

- D é um conjunto de todos os valores que possam ocasionar risco maior que o previsto;
- $\mu$  é o tempo médio entre duas realizações de X; e

-  $P[X \in D]$  é a probabilidade de que a variável aleatória  $X$  assumam valores contidos no conjunto  $D$ .

No caso multivariado, o período de retorno conjunto pode ser calculado a partir de quatro diferentes abordagens, conforme representado na Figura 4 e discriminadas a seguir.



Fonte: Brunner et al. (2016)

- Quadrante I: ambas as variáveis ( $X$  e  $Y$ ) excedem os valores  $x$  e  $y$ ;
- Quadrante II: A variável  $Y$  excede  $y$ , mas  $X$  não excede  $x$ ;
- Quadrante III: Nenhuma das variáveis excedem os valores de referência; e
- Quadrante IV: A variável  $X$  excede  $x$ , mas  $Y$  não excede  $y$ .

Brunner et al. (2016) versam sobre os períodos de retorno multivariados destacando que, em análise de frequência de variáveis aleatórias relacionadas aos eventos de cheia, o interesse é maior nos quadrantes I, II ou IV. Os períodos de retorno relativos a esses quadrantes são calculados pela Equação (26), e concernem ao período de retorno conjunto “OR”.

$$T^V(x, y) = \frac{\mu}{P[X > x \vee Y > y]} = \frac{\mu}{1 - F_{XY}(x, y)} \quad (26)$$

O período de retorno relativo ao quadrante I é calculado pela Equação (27) refere-se ao período de retorno conjunto “AND”.

$$T^{\wedge}(x, y) = \frac{\mu}{P[X > x \wedge Y > y]} = \frac{\mu}{1 - F_X(x) - F_Y(y) + F_{XY}(x, y)} \quad (27)$$

em que  $\mu$  é o tempo médio entre dois eventos sucessivos. No caso de cópulas, os períodos de retorno são dados por:

$$T^{\vee}(u, v) = \frac{\mu}{1 - C(u, v)} \quad (28)$$

$$T^{\wedge}(x, y) = \frac{\mu}{1 - u - v + C(u, v)} \quad (29)$$

Em geral, em estudos relacionados à hidrologia estatística emprega-se o tempo de retorno do conjunto “OR” (Brunner et al., 2017; Rizwan et al., 2019). Excepcionalmente, em alguns estudos como o desenvolvido por Lacko et al. (2022), a estimativa de quantis para os tempos de retorno “OR” e “AND” são apresentados. É certo, contudo, que não há um consenso quanto ao período de retorno bivariado que deve ser empregado.

### 3.1.6 Estimação regional do parâmetro de cópula

A necessidade de se estimar quantis em locais não monitorados, despertou o interesse de alguns pesquisadores. Nos parágrafos subsequentes são sumariadas algumas publicações que abordaram esse tema e cujas propostas metodológicas foram relevantes para construção do presente estudo.

O presente subitem não tem como finalidade apresentar em detalhes os conceitos e processos requeridos para o desenvolvimento de uma análise de frequência completa por meio de regionalização. De fato, o objetivo é destacar as publicações que orientaram a construção do presente estudo, seja no que tange à proposta metodológica, seja em relação à discussão dos resultados. Tais trabalhos estão descritos de forma sumária nos parágrafos subsequentes.

Chebana & Ouarda (2009) propuseram a modelagem regional para fins de análise de frequência multivariada com o uso do método “*index-flood*” (Hosking & Wallis, 1987). Para este fim, a estimativa de um k-ésimo parâmetro de um modelo multivariado ( $\hat{\theta}_k^{(R)}$ ),

para uma região homogênea, é dada pelo estimador apresentado na Equação (30), em que o valor do parâmetro calculado por bacia é ponderado pelo tamanho da amostra “n” das bacias.

$$\hat{\theta}_k^{(R)} = \frac{\sum n_i \hat{\theta}_k^{(i)}}{\sum n_i}, \quad k = 1, \dots, s \quad (30)$$

No referido estudo, os autores verificaram, comparando-se os quantis gerados, que a técnica empregada apresentou melhor performance para regiões com maior homogeneidade quanto à geração de escoamento superficial. Ademais, constatou-se nos referidos estudos que a influência do tamanho das amostras sobre o método não era relevante.

M.-A. Ben Aissia et al. (2015) avaliaram, para dados de 26 (vinte e seis) bacias em Québec (Canadá), a utilização do método “*index-flood*” bivariado para vazão e volume. Nesse contexto, foi considerada a cópula Frank para a modelagem multivariada, sendo constatado que a homogeneidade exerce maior parcela de importância na performance dos modelos.

Outros trabalhos, tais quais Zhang et al. (2015) e Tosunoglu & Can (2016), utilizaram o método “*index-flood*” para a modelagem multivariada regional de eventos de seca nas regiões da China e Turquia, utilizando funções cópula para a modelagem desses eventos. Os resultados demonstram que, além de eventos de enchente, tal abordagem pode ser valiosa para modelagem de eventos de seca.

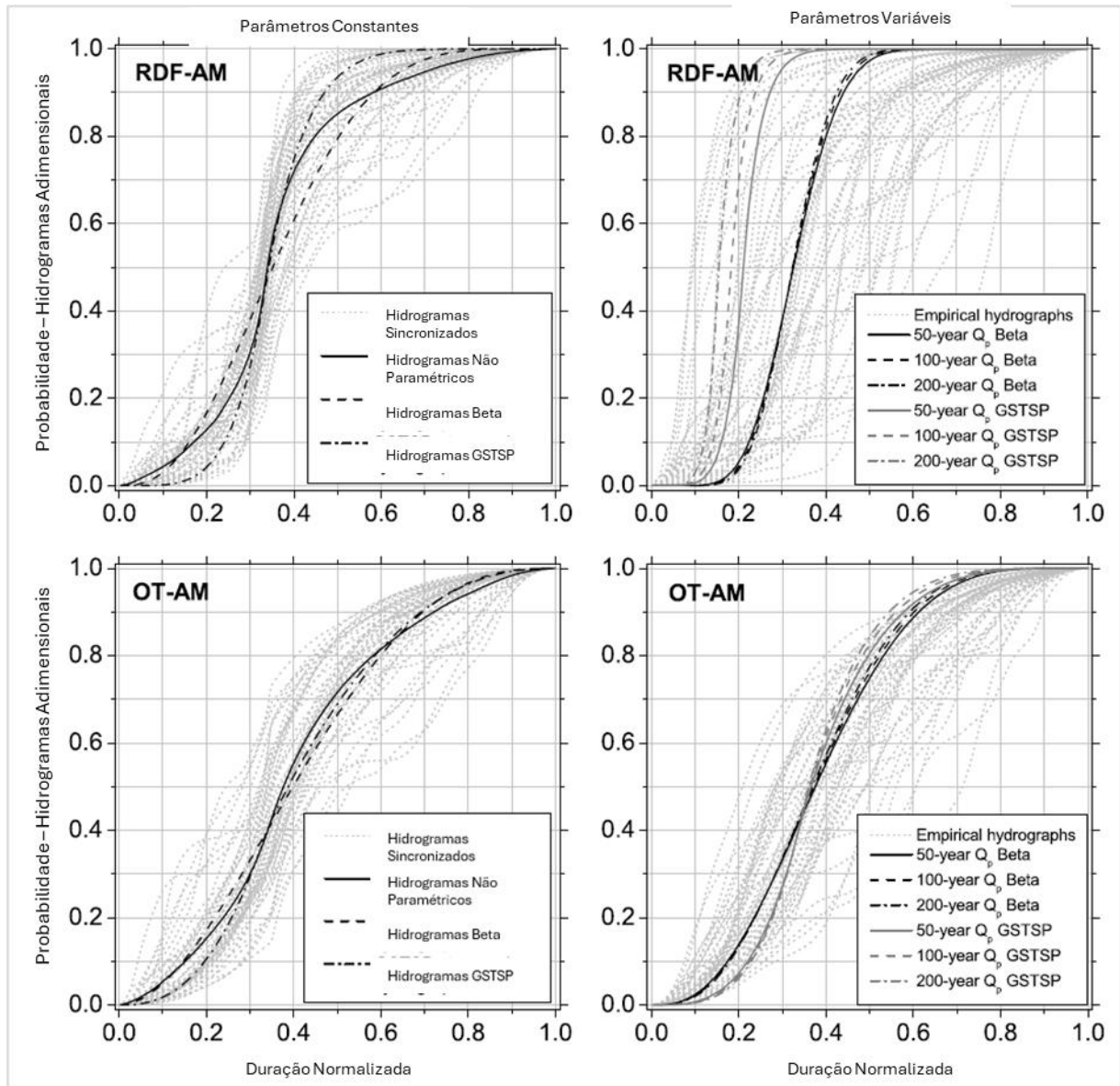
Em suma, esses trabalhos têm como base a publicação de Chebana & Ouara (2009), havendo pouca disponibilidade, na literatura científica recente relacionada à modelagem de extremos hidrológicos, de publicações que reflitam os procedimentos propostos pelos autores para aplicação em funções cópula. Nesse contexto, os procedimentos metodológicos adotados nesta dissertação seguem a mesma linha proposta pelos autores supramencionados. De fato, é possível aprofundar no método em questão. Entretanto, como o foco da presente dissertação é a aferição do comportamento das cópulas na cauda superior, a revisão de literatura restringe-se ao apresentado.

### **3.2 Estimativa da forma do hidrograma a partir do emprego de funções densidade de probabilidade**

A forma da ascensão, recessão e tempo de pico do hidrograma é de primordial importância para a construção dos hidrogramas de projeto, e pode ser modelada por funções densidade de probabilidade, a partir da normalização do gráfico, de modo que sua área seja unitária (Bhunya et al. 2007) e a função não negativa. Nadarajah (2007) e Rai et al. (2009) modelaram funções com domínio finito, sendo a função objetivo baseada na similaridade do tempo de pico ( $t_p$ ) e o domínio da função definido entre zero e o tempo de base ( $t_b$ ). Os autores avaliaram diversas funções densidades de probabilidade para representar os hidrogramas.

Serinaldi & Grimaldi (2011) compararam o ajuste de distribuições com suporte finito (função Beta e distribuição generalizada padrão de potência bidirecional – GSTSP) em hidrogramas empíricos normalizados, no âmbito da derivação de hidrogramas de projeto. Tal comparação foi motivada pela limitação da distribuição Beta em representar hidrogramas leptocúrticos, ou seja, de pico “achatado”. A Figura 5 apresenta a comparação entre as distribuições e os hidrogramas empíricos normalizados. Verifica-se elevada dispersão entre os hidrogramas normalizados, o que levanta ainda mais questionamentos em relação à incerteza na estimação de parâmetros representativos para a forma.

**Figura 5 - Comparação entre os hidrogramas empíricos e as funções Beta e GSTSP (Serinaldi & Grimaldi 2011).**



Fonte: Serinaldi & Grimaldi (2011)

No caso de hidrogramas modelados sinteticamente, deve-se atentar para, além de a área sobre o gráfico ser unitária, o domínio da função se dar entre 0 e 1, de modo que seja possível a obtenção de uma função normalizada média empírica para cada bacia, visando compará-la com funções densidades de probabilidade (Brunner et al., 2017).

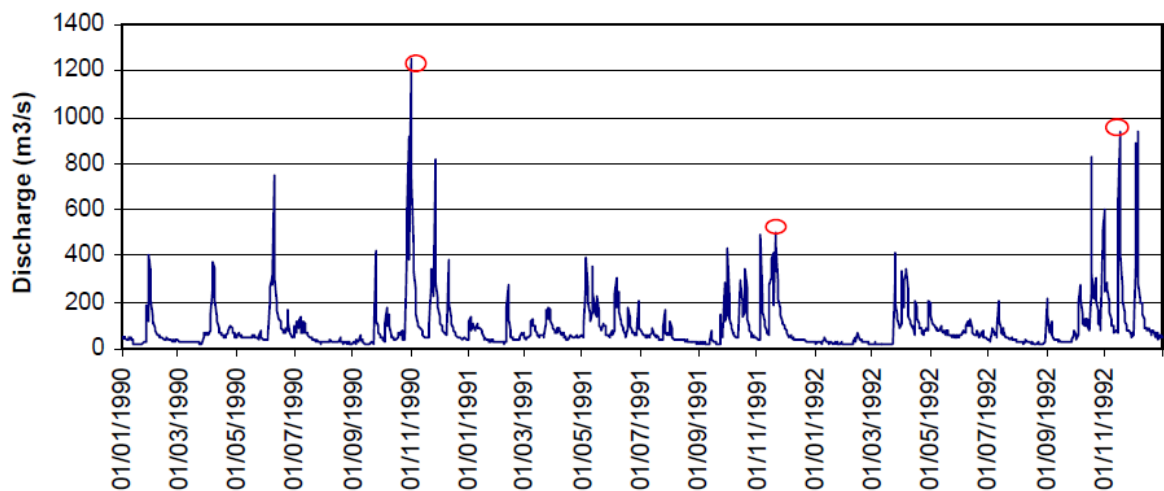
Brunner et al. (2017) avaliaram variadas funções densidades de probabilidade para definição da forma. Os autores verificaram, com base na Raiz do Erro Quadrático Médio, que o melhor ajuste foi obtido ao se utilizar a distribuição Log-Normal.

Fischer et al. (2023), por sua vez, ajustaram funções densidades de probabilidade aos hidrogramas normalizados e avaliaram a aderência pelo erro quadrático médio. A função Log-Normal obteve o menor erro, para eventos com apenas um pico. No caso de eventos com mais de um pico, considerou-se a função de Cauchy para a modelagem da forma.

### 3.3 Análise de frequência por meio de séries de duração parcial (*Peak Over Threshold*)

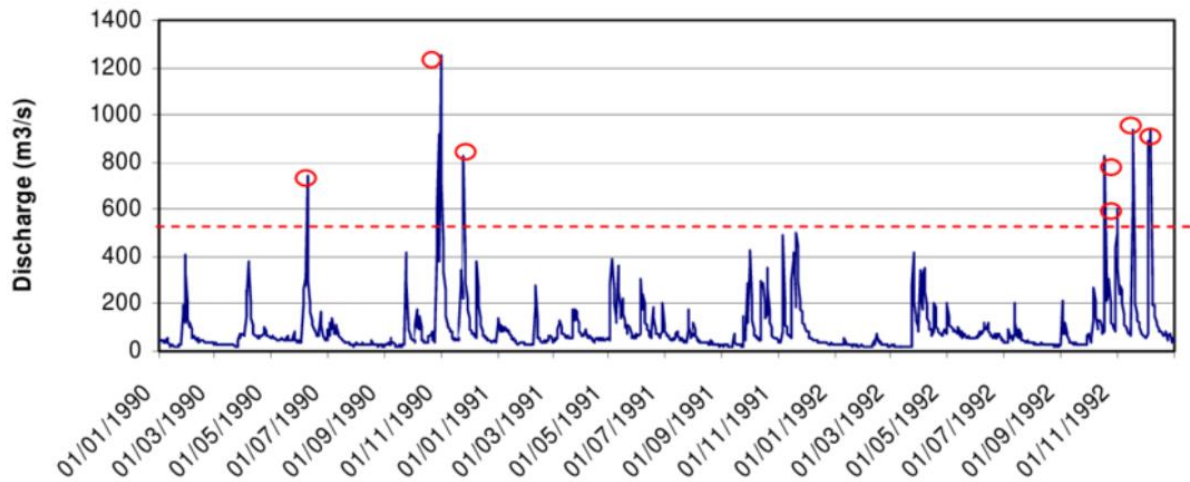
Usualmente, para análise de frequência de variáveis aleatórias relacionadas a processos hidrológicos extremos, a avaliação de máximos anuais é empregada para seleção da amostra. Entretanto, para estender a amostra, pode-se proceder, em alguns casos, uma análise de frequência para eventos que excedam um limiar (Pan et al., 2022), processo denominado “*Peak Over Threshold - POT*”. Na Figura 6 e Figura 7 são verificados, para uma série histórica de vazões, os valores amostrados pelo máximo anual e por POT.

Figura 6 – Exemplo de amostragem de vazões máximas anuais.



Fonte: Proudhomme et al. (2010)

Figura 7 – Exemplo de amostragem por meio de “Peak Over Threshold”, com o limiar em vermelho.



Fonte: Proudhomme et al. (2010)

O presente subitem não tem por finalidade apresentar em detalhes os conceitos e processos requeridos para o desenvolvimento de uma análise de frequência por meio de séries de duração parcial. De fato, o objetivo é destacar as publicações que orientaram a construção do presente estudo, seja no que tange a proposta metodológica, seja em relação à discussão dos resultados. Elas estão descritas de forma sumária nos parágrafos subsequentes.

Kjeldsen & Prosdocimi (2023) ponderam que a escolha do limiar deve se dar de maneira que seja garantida, entre outras, a hipótese de independência em relação aos eventos selecionados. Madsen et al. (1997) concluíram, baseado em simulações de Monte Carlo, que modelos baseados em POT são preferíveis em relação aos modelos baseados nos valores máximos anuais se o número médio anual de excedência ao limiar for superior a 1,67. Brunner et al. (2017), por sua vez, utilizaram como critério o estabelecimento de um número mínimo de excedências igual a quatro.

Referências mais antigas, como Taesombut e Yevjevich (2007) e Langbein (1949, p. 879) apresentam que, em média, o limiar deve ser escolhido de modo que sejam selecionadas não mais que três excedências anuais. Já Cunanne (1973) recomenda, sem restrições, o uso de séries de duração parcial, sobretudo para amostras com menor número de anos. Cunanne (1979) apresenta um teste de hipóteses para averiguar se a hipótese de independência serial dos eventos, e a hipótese de distribuição do número de excedências como um processo de Poisson, são válidas.

O teste é baseado no número de excedências anual médio do posto ( $\hat{v}$ ), consistindo na soma do quadrado da padronização dos valores de excedência de um ano “k” ( $m_k$ ).

$$\gamma = \sum_{k=1}^n \left( \frac{m_k - \hat{v}}{\hat{v}} \right)^2 \quad (31)$$

A estatística  $\gamma$  segue uma distribuição do Qui-Quadrado com (N-1) graus de liberdade, em que N consiste no número de anos registrados. Nesse sentido, há rejeição da hipótese de um processo poissoniano se ocorre o apresentado na Equação (32), sendo  $\alpha$  a significância e  $\eta$  os graus de liberdade.

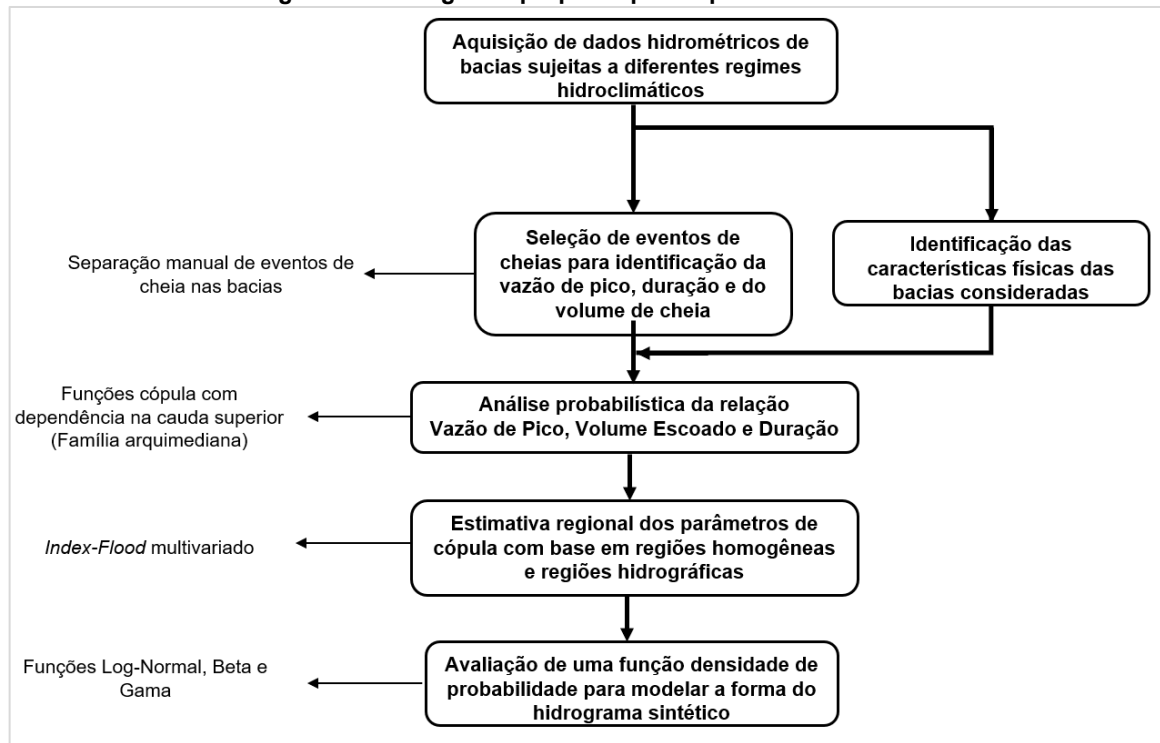
$$\gamma = \sum_{k=1}^n \left( \frac{m_k - \hat{v}}{\hat{v}} \right)^2 > \chi^2_{1-\alpha;\eta} \quad (32)$$

A determinação do limiar para a análise de frequência com emprego das séries de duração parciais é uma tarefa primordial para o sucesso em sua aplicação. Assim, Solari et al. (2017) apresentam um procedimento com o intuito de automatizar a determinação do “*threshold*”, valendo-se do teste de hipóteses de Anderson-Darling, sendo válido o menor valor simulado para que não seja rejeitada a hipótese nula, que diz respeito à aderência com a distribuição Generalizada de Pareto. Ademais, a publicação ressalta a necessidade de se aferir a hipótese de Poisson para validar o limiar escolhido.

## 4 MATERIAL E MÉTODOS

Os procedimentos metodológicos do presente trabalho são apresentados nos itens subsequentes. O fluxograma contendo a sequência de atividades é apresentado na Figura 8.

Figura 8 – Fluxograma proposto para o presente trabalho.



Fonte: o autor.

### 4.1 Modelagem multivariada

#### 4.1.1 Aquisição dos dados

Para a realização do estudo de caso, o qual foi realizado em bacias brasileiras submetidas a distintos regimes hidroclimáticos, se fizeram necessárias as obtenções de dados de vazão com discretização temporal tal que haja a possibilidade de determinação de eventos de enchentes e caracterização temporal da vazão durante as tormentas das bacias. Para a modelagem dos parâmetros que regem um hidrograma de cheia, é necessário o máximo de precisão na determinação da vazão e tempo de pico, do tempo de início e fim do evento, além da estimativa do volume escoado durante o evento.

A primeira premissa para a escolha das bacias, sob a qual foram definidos os filtros apresentados posteriormente, é a adequada representação dos eventos de cheia ali

ocorridos. Para preservar essa premissa, foram avaliados alguns bancos de dados hidrométricos brasileiros, considerando-se sua finalidade.

Devido à cobertura abrangente e diversas finalidades, optou-se pela aquisição de dados hidrométricos do banco de dados coletados pela Rede Hidrometeorológica Nacional (RHN), a qual faz parte do Sistema Nacional de Recursos Hídricos (SNIRH) e é coordenado pela Agência Nacional de Águas e Saneamento Básico (ANA). Por meio do portal “*Hidroweb*”, que disponibiliza dados diários das variáveis hidrológicas em questão, e do portal “*Hidrotelemetria*”, que reporta valores atualizados a cada 15 (quinze) minutos, é possível o acesso aos dados de estações pluviométricas e fluviométricas presentes em todo o território brasileiro.

Para a seleção das estações consideradas no estudo foram aplicados alguns filtros: finalidade, presença de estruturas de regularização, disponibilidade de registros de vazões e área de drenagem da estação, além da presença de dados pluviométricos dentro ou em região próxima à bacia hidrográfica.

Com relação à finalidade da estação, foram excluídas as estações que fazem parte da Rede Energética, visando a não consideração de registros em locais a jusante de estruturas de regularização, cujo valor disponível não reflita, necessariamente, o escoamento direto produzido pela bacia.

Quanto à área de drenagem das bacias hidrográficas contribuintes às estações foram selecionadas aquelas com área inferior a 5.000 km<sup>2</sup>. Tal valor foi determinado de modo a minimizar a probabilidade de seleção de eventos oriundos de chuvas pontuais nas bacias (Pádua, 2015). A Tabela 2 apresenta as premissas para a escolha das bacias alvo do presente estudo.

**Tabela 2 – Critérios para a escolha das bacias contempladas neste estudo.**

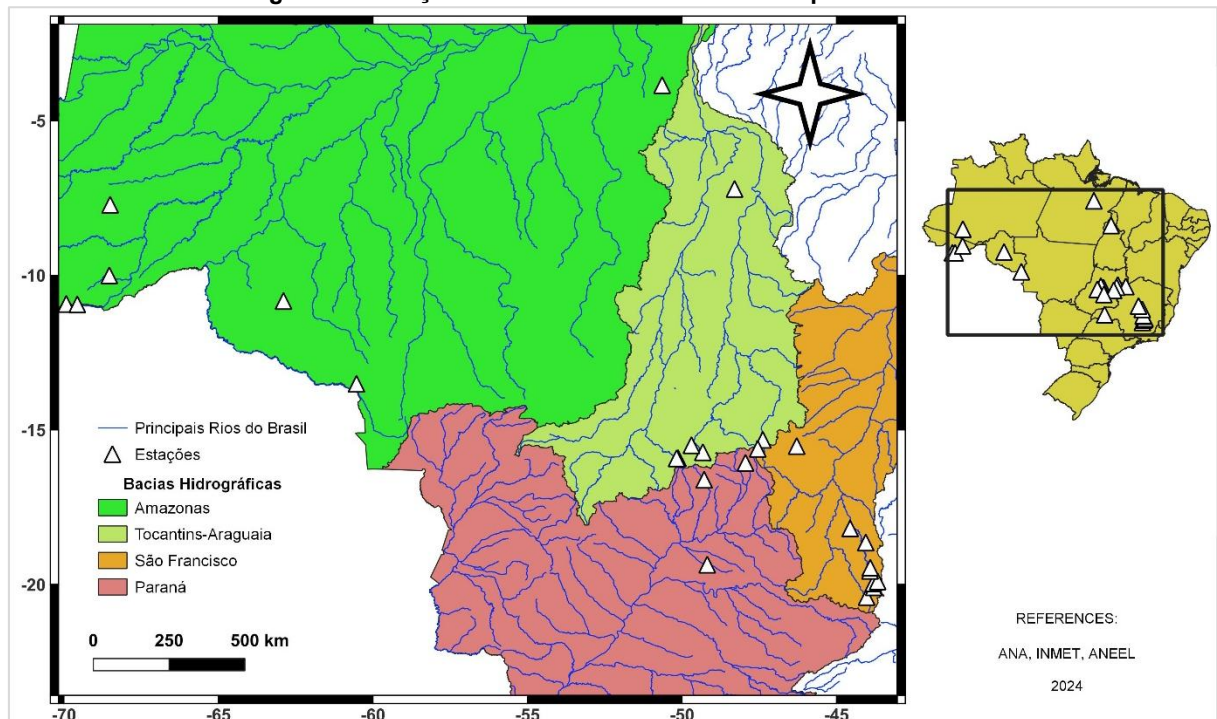
| <b>Características das Bacias</b> |                                                         |
|-----------------------------------|---------------------------------------------------------|
| Área de Drenagem                  | < 5.000 km <sup>2</sup>                                 |
| Tipo de Dado                      | Telemétrico e Convencional                              |
| Tipo de Vazão                     | Observada ou Medida                                     |
| Regularização                     | Sem presença de regularização no curso d'água principal |

Fonte: o autor.

Na primeira avaliação foram selecionadas 45 estações, localizadas nas regiões Centro-Oeste, sudeste e Norte do Brasil, especificamente nas bacias do Rio Amazonas, Tocantins-Araguaia, São Francisco e Paraná. Em um segundo momento foram avaliadas as séries históricas de dados telemétricos e convencionais de deflúvio nessas bacias, verificando-se a quantidade de falhas e consistência dos dados. Ao final restaram 26 estações, cujas informações foram consideradas no presente estudo.

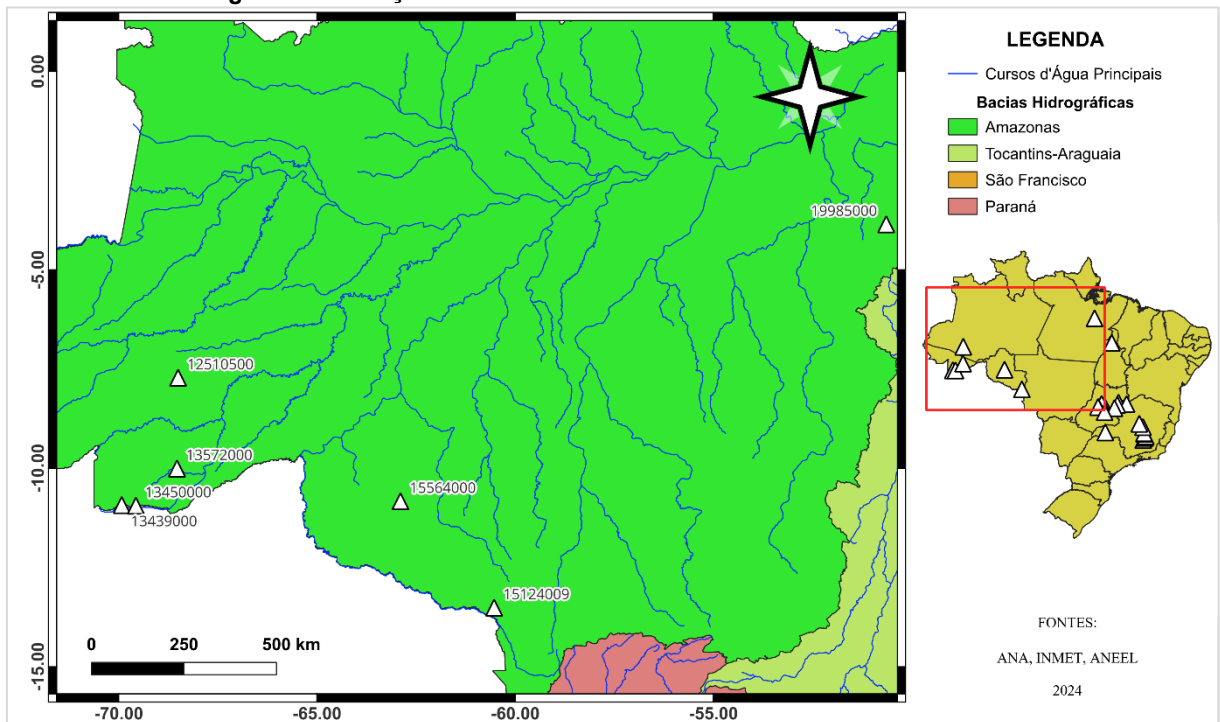
A localização das bacias consideradas é evidenciada nas Figuras 9 a 13.

**Figura 9 – Estações fluviométricas consideradas para o estudo.**



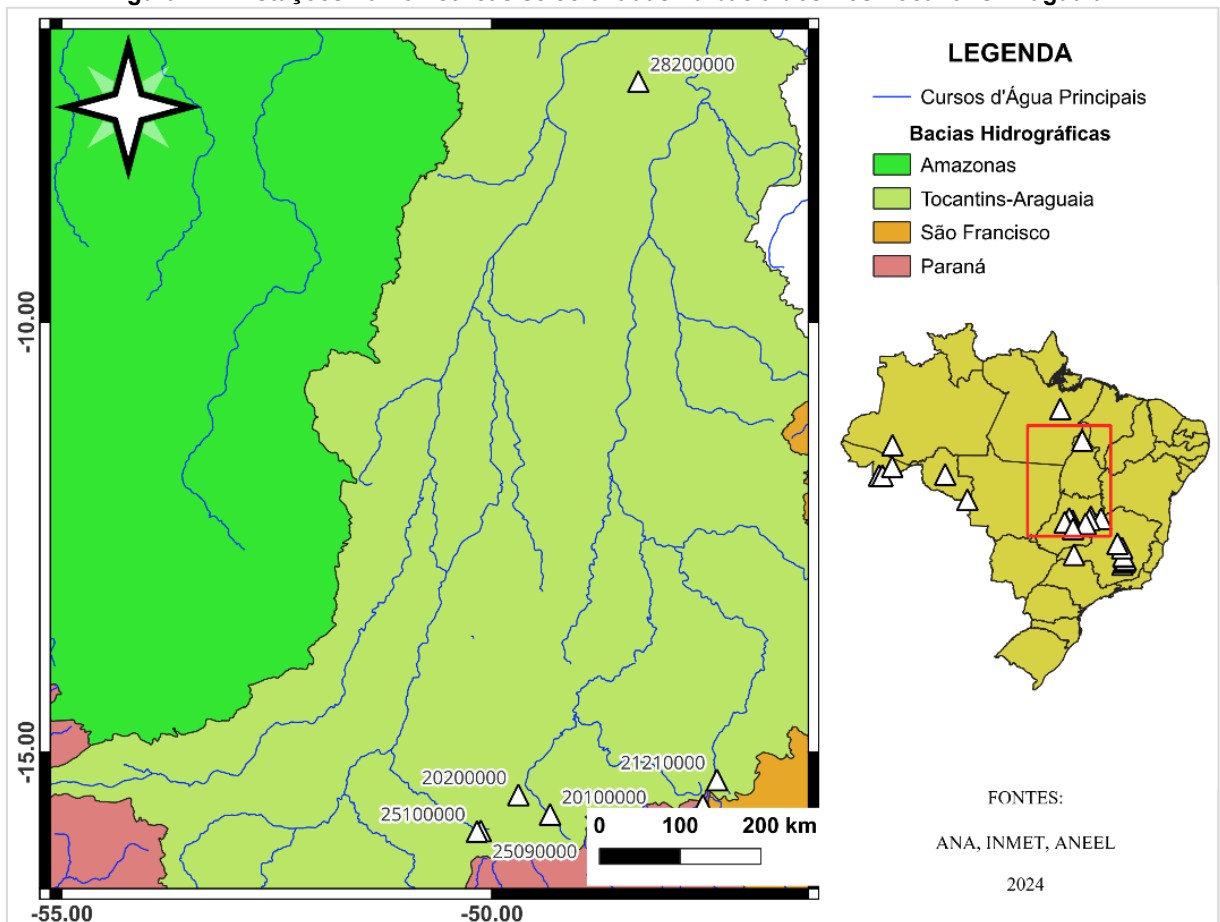
Fonte: o autor

Figura 10 – Estações fluviométricas selecionadas na bacia amazônica.



Fonte: o autor

Figura 11 – Estações fluviométricas selecionadas na bacia dos rios Tocantins-Araguaia.



Fonte: o autor.

Figura 12 – Estações fluviométricas selecionadas na bacia hidrográfica do rio São Francisco.

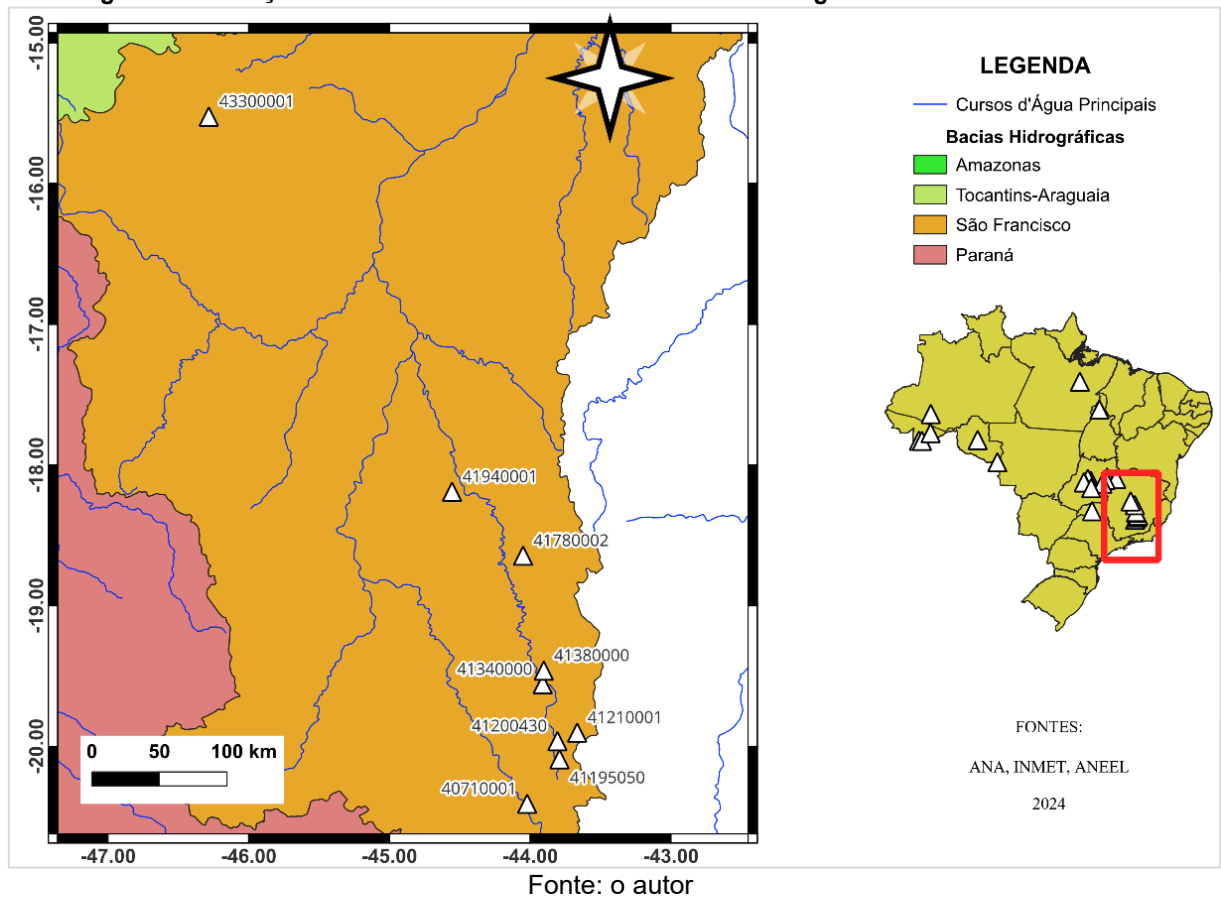
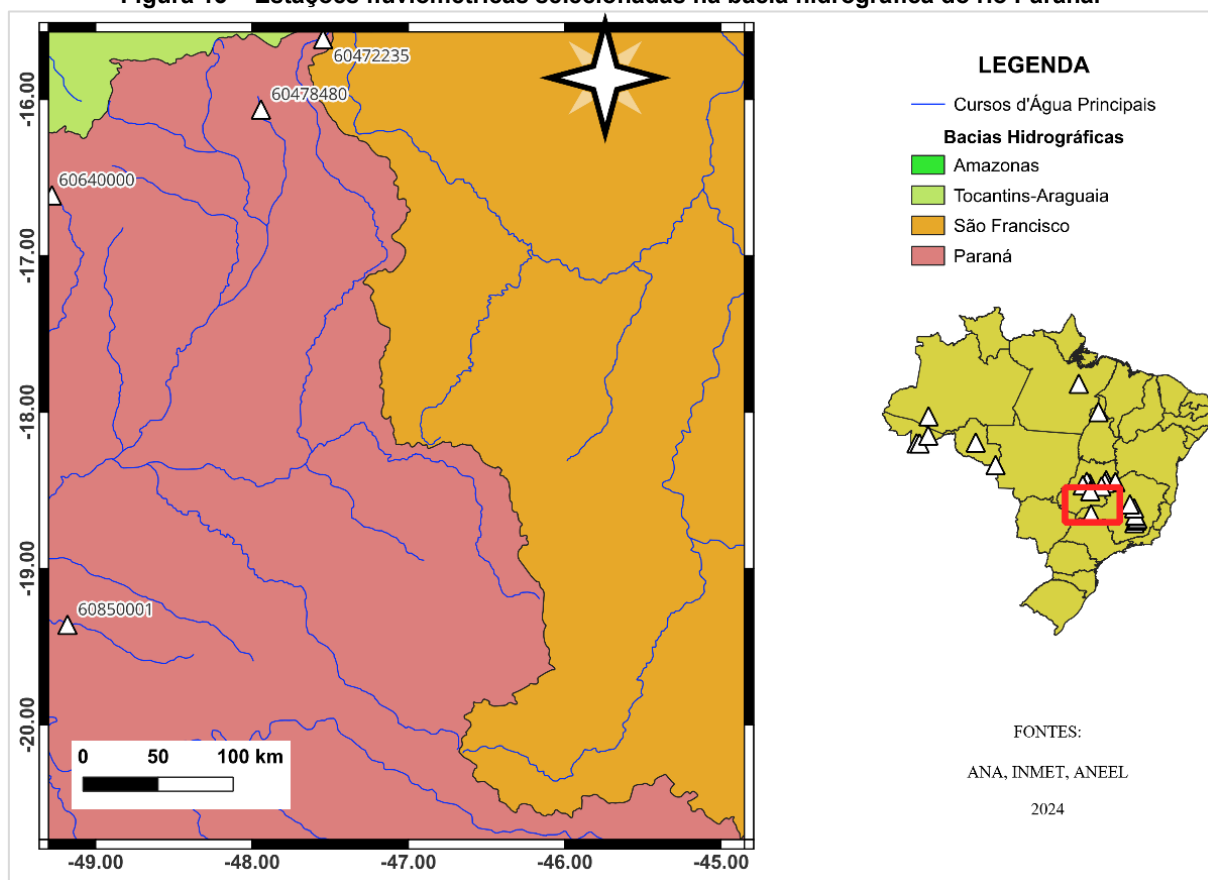


**Figura 13 – Estações fluviométricas selecionadas na bacia hidrográfica do rio Paraná.**



Fonte: o autor

As bacias selecionadas encontram-se catalogadas na Tabela 3, com o respectivo comprimento da série em anos e dados de cadastro planimétrico.

**Tabela 3 - Postos selecionados para o estudo de caso.**

| Código   | Nome                   | Coordenadas Geográficas |          | Bacia Hidrográfica | Comprimento da Série (Anos) |
|----------|------------------------|-------------------------|----------|--------------------|-----------------------------|
|          |                        | E                       | N        |                    |                             |
| 13450000 | Assis Brasil           | -10,9436                | -69,5656 | Amazônica          | 21                          |
| 13439000 | Aldeia dos Patos       | -10,9261                | -69,9233 | Amazônica          | 8                           |
| 12510500 | Ponte do Rio Liberdade | -7,719                  | -68,502  | Amazônica          | 12                          |
| 13572000 | Espalha                | -10,005                 | -68,5294 | Amazônica          | 10                          |
| 15564000 | Jaruaru                | -10,8317                | -62,8925 | Amazônica          | 12                          |
| 15124009 | Cabixi                 | -13,5125                | -60,53   | Amazônica          | 5                           |
| 19985000 | Pacajás                | -3,8511                 | -50,6397 | Amazônica          | 10                          |
| 28200000 | Ponte Rio Lontra       | -7,2075                 | -48,2958 | Tocantins-Araguaia | 12                          |
| 25100000 | B. Cachoeira Grande    | -15,9222                | -50,1717 | Tocantins-Araguaia | 8                           |
| 25090000 | Fazenda Paciência      | -15,9147                | -50,1278 | Tocantins-Araguaia | 13                          |
| 20200000 | Uruana                 | -15,4961                | -49,6908 | Tocantins-Araguaia | 8                           |
| 20100000 | Jaraguá                | -15,7242                | -49,3219 | Tocantins-Araguaia | 8                           |
| 21210000 | Fazenda Espírito Santo | -15,3222                | -47,3817 | Tocantins-Araguaia | 11                          |
| 43300001 | Fazenda Carvalho       | -15,5242                | -46,2844 | São Francisco      | 9                           |

| Código   | Nome                           | Coordenadas Geográficas |          | Bacia Hidrográfica | Comprimento da Série (Anos) |
|----------|--------------------------------|-------------------------|----------|--------------------|-----------------------------|
|          |                                | E                       | N        |                    |                             |
| 41940001 | Ponte do Bicudo                | -18,1908                | -44,5556 | São Francisco      | 6                           |
| 41780002 | Presidente Juscelino – Jusante | -18,645                 | -44,0506 | São Francisco      | 7                           |
| 41380000 | Ponte Preta                    | -19,4619                | -43,9036 | São Francisco      | 4                           |
| 41340000 | Ponte Raul Soares              | -19,5597                | -43,9111 | São Francisco      | 7                           |
| 41210001 | Caeté                          | -19,9028                | -43,6664 | São Francisco      | 10                          |
| 41200430 | Raposos                        | -19,9631                | -43,8067 | São Francisco      | 8                           |
| 40710001 | Belo Vale                      | -20,4083                | -44,0217 | São Francisco      | 8                           |
| 41195050 | Rio Acima                      | -20,0919                | -43,7919 | São Francisco      | 8                           |
| 60640000 | Montante de Goiânia            | -16,6136                | -49,2797 | Paraná             | 12                          |
| 60850001 | F. Buriti do Prata             | -19,3597                | -49,1803 | Paraná             | 7                           |
| 60472235 | Piripau                        | -15,6144                | -47,5456 | Paraná             | 10                          |
| 60478480 | Captação da Saneago            | -16,0647                | -47,9425 | Paraná             | 8                           |

Fonte: o autor

#### 4.1.2 Separação de eventos de cheia

Realizada a seleção das estações, o próximo passo foi a separação de eventos de cheia. Um importante desafio durante essa etapa foi a definição de processos de separação desses eventos, visto que não foi possível empregar métodos automáticos, uma que os processos avaliados eram aplicáveis a dados diários. A discretização temporal das séries temporais de vazões consideradas é de 15 minutos.

Por conseguinte, a opção mais plausível foi a separação manual de eventos de cheia, sendo determinados data e hora de início e fim desses eventos. Para tal, foi estimado o escoamento de base nessas bacias, sendo, primeiramente, utilizado o filtro recursivo de Eckardt (2005). Registra-se que, para os dados em questão, o escoamento de base ora estimado serviu apenas como balizador durante a etapa de amostragem de eventos, uma vez que não houve correspondência entre os dados de vazão no início e fim dos eventos e o escoamento de base estimado. Empregou-se o método da inclinação constante, descrito por Chow et al. (1988) e utilizado por Fischer et al. (2021), em que o escoamento de base é definido pela segmento de reta definido pelas vazões ao início e fim do evento.

#### 4.1.3 Levantamento das características físicas e hidroclimáticas das bacias consideradas

As seguintes características geomorfológicas foram obtidas: área de drenagem, perímetro da bacia, comprimento do curso d'água principal, número de canais, comprimento de canais de drenagem, elevações máxima e mínima da bacia, precipitação média anual e vazão média de longo termo. Com isso, foi possível o cálculo de variáveis como tempo de concentração, coeficiente de compacidade, densidade de drenagem e vazão normalizada pela área da bacia.

Para a obtenção dos valores característicos das bacias, utilizou-se o Modelo Digital de Elevação do programa Copernicus DEM (MDE COP-30), que é extraído da missão TanDEM-X e Terra SAR-Z, entre os anos 2011 e 2015. O MDE COP-30 tem pixels de 30,0 m. Cremon et al. (2022) concluíram que os dados altimétricos relativos ao MDE COP-30 são uma boa alternativa para mapeamento topográfico em setores nacionais.

A precipitação média mensal das estações pluviométricas foi obtida a partir da apreciação de dados de estações automáticas do Instituto Nacional de Meteorologia (INMET) e daquelas cujas responsabilidades são da Agência Nacional de Águas e Saneamento Básico (ANA). Para bacias com mais de uma estação pluviométrica considerou-se a média aritmética dos registros. Algumas das características hidroclimáticas das bacias escolhidas são detalhadas na Tabela 4.

**Tabela 4 – Características físicas das bacias selecionadas**

| <b>Código</b> | <b>Nome</b>            | <b>Área de Drenagem (km<sup>2</sup>)</b> | <b>Coeficiente de Compacidade (kc)</b> | <b>Precipitação Média Anual (mm)</b> | <b>Densidade de Drenagem (km/km<sup>2</sup>)</b> |
|---------------|------------------------|------------------------------------------|----------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------------------|
| 12510500      | Ponte do Rio Liberdade | 3450                                     | 1,99                                   | 2000                                 | 1,49                                             |
| 13439000      | Aldeia dos Patos       | 2100                                     | 1,82                                   | 2100                                 | 2,24                                             |
| 13450000      | Assis Brasil           | 3760                                     | 1,98                                   | 1600                                 | 2,5                                              |
| 13572000      | Espalha                | 3210                                     | 1,69                                   | 1750                                 | 1,35                                             |
| 15124009      | Cabixi                 | 3600                                     | 1,91                                   | 1950                                 | 1,39                                             |
| 15564000      | Jaruaru                | 133                                      | 3,75                                   | 1900                                 | 7,77                                             |
| 19985000      | Pacajás                | 2682                                     | 3,42                                   | 1900                                 | 3,27                                             |
| 20100000      | Jaraguá                | 1970                                     | 1,72                                   | 1700                                 | 1,20                                             |
| 20200000      | Uruana                 | 3700                                     | 1,73                                   | 1700                                 | 1,19                                             |
| 21210000      | Fazenda Espírito Santo | 533                                      | 1,68                                   | 1600                                 | 1,35                                             |
| 25090000      | Fazenda Paciência      | 103                                      | 1,47                                   | 1700                                 | 1,44                                             |
| 25100000      | B. Cachoeira Grande    | 229                                      | 1,45                                   | 1700                                 | 1,31                                             |

| Código   | Nome                  | Área de Drenagem (km <sup>2</sup> ) | Coeficiente de Compacidade (kc) | Precipitação Média Anual (mm) | Densidade de Drenagem (km/km <sup>2</sup> ) |
|----------|-----------------------|-------------------------------------|---------------------------------|-------------------------------|---------------------------------------------|
| 28200000 | Ponte Rio Lontra      | 1330                                | 1,62                            | 1700                          | 1,36                                        |
| 40710001 | Belo Vale             | 2770                                | 1,59                            | 1500                          | 2,10                                        |
| 41195050 | Rio Acima             | 1453                                | 1,5                             | 1500                          | 1,97                                        |
| 41200430 | Raposos               | 1930                                | 1,46                            | 1600                          | 1,53                                        |
| 41210001 | Caeté                 | 16                                  | 1,54                            | 1500                          | 1,62                                        |
| 41340000 | Ponte Raul Soares     | 4860                                | 1,98                            | 1500                          | 2,03                                        |
| 41380000 | Ponte Preta           | 564                                 | 1,6                             | 1400                          | 1,29                                        |
| 41780002 | P.Juscelino – Jusante | 3980                                | 2,10                            | 1300                          | 1,27                                        |
| 41940001 | Ponte do Bicudo       | 2070                                | 1,59                            | 1200                          | 1,20                                        |
| 43300001 | Fazenda Carvalho      | 3160                                | 2,16                            | 1300                          | 1,19                                        |
| 60472235 | Piripau               | 127                                 | 1,53                            | 1550                          | 2,24                                        |
| 60478480 | Captação da Saneago   | 47,5                                | 1,38                            | 1450                          | 2,66                                        |
| 60640000 | Montante de Goiânia   | 1740                                | 1,68                            | 1500                          | 1,85                                        |
| 60850001 | F. Buriti do Prata    | 2460                                | 1,74                            | 1500                          | 1,66                                        |

Fonte: o autor

#### 4.1.4 Análise de frequência univariada – determinação das distribuições marginais

No presente estudo, empregou-se o método “*Peak Over Threshold*” para análise de frequência univariada das características dos hidrogramas de cheia, i.e., da vazão de pico, do volume escoado e da duração do evento (início e fim do esc. direto). Uma premissa importante para a utilização desse método é a garantia da independência serial entre os dados da amostra (Kjeldsen & Prosdocimi, 2023). Com esse intuito, admitiu-se um intervalo mínimo de 12h entre eventos consecutivos.

#### **Vazões de pico**

Como evidenciado no item 4.1.1, os postos escolhidos para a aplicação da presente metodologia apresentam um período limitado de monitoramento, fazendo com que, no caso da utilização de análise de frequência com máximos anuais, o tamanho das amostras fosse relativamente pequeno. Nesse sentido, optou-se pela utilização das séries de duração parcial ou POT (*Peaks Over Threshold*).

Nessa abordagem, são considerados eventos cujo valor é superior ao de um limiar estabelecido. Assim sendo, um dos pontos críticos para sua aplicação é a seleção de um limiar que garanta que eventos consecutivos sejam independentes (Naghetini & Pinto, 2006).

Para a determinação do “*Threshold*”, empregou-se o procedimento apresentado por Solari et al. (2017), em que a estimativa do limiar se dá com a utilização do teste de hipóteses de Anderson-Darling em valores simulados sinteticamente, sendo indicada a utilização do menor dos valores simulados em que não seja rejeitada a hipótese nula.

O teste de Anderson-Darling consiste em um teste para a avaliação do ajuste baseado na estatística homônima -  $A^2$  (Stephens, 1974), em que é estimada a distância entre a distribuição empírica e a distribuição teórica a ser avaliada. Nessa abordagem é dado maior peso aos dados nas caudas do que àqueles localizados na porção central da distribuição. A Equação (33) apresenta o cálculo da referida estatística de teste, com base nos valores da função distribuição de probabilidades acumuladas ( $z_i$ ).

$$A^2 = -\frac{1}{n} \sum \{(2i - 1)[\log(z_i) + \log(1 - z_{(n+1-i)})]\} - n \quad (33)$$

Sinclair et al. (1990) apresentaram uma estatística modificada do teste de Anderson Darling ( $A_R^2$ ), em que é dado maior peso aos dados da cauda superior em relação aos dados da cauda inferior. A referida estatística de teste é calculada pela Equação (34).

$$A_R^2 = \frac{n}{2} - \sum [2 - \left(\frac{2i - 1}{n}\right) \log(1 - z_i) + 2z_i] \quad (34)$$

Para a determinação do “*Threshold*” foi testado o ajuste dos picos amostrados à distribuição Generalizada de Pareto (GPD), que é tradicionalmente utilizada para esse fim (Kjeldsen & Prosdocimi, 2023), sendo estimados os parâmetros por meio do Método dos Momentos-L. A função densidade de probabilidade da distribuição Generalizada de Pareto (Equação (35)) tem três parâmetros, a saber: o parâmetro de forma ( $k$ ), o parâmetro de escala ( $\alpha$ ) e o parâmetro de posição ( $\xi$ ), que é relativo ao “*Threshold*”. Na parametrização utilizada, um parâmetro de forma positivo representa que a distribuição é limitada superiormente, enquanto um parâmetro de forma negativo representa que a distribuição não tem limitação, com cauda pesada.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \left(1 + k \frac{x - \xi}{\alpha}\right)^{-1-\frac{1}{k}} & \text{se } k \neq 0 \\ \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\frac{x - \xi}{\alpha}\right) & \text{se } k = 0 \end{cases} \quad (35)$$

Seguindo Solari et al. (2017), assumiu-se o menor valor de “*Threshold*” cujo “p-valor” do teste de Anderson-Darling resulte em não rejeição da hipótese nula.

Adicionalmente, para fins de se aferir a independência serial e a hipótese de as excedências se comportarem como um processo de Poisson, foi conduzido o teste de Cunnane, sob o nível de significância de 0,05, conforme descrito no item 3.3.

### **Volumes**

Para os dados de volume total foi considerada a distribuição Log-Normal. Sua seleção ocorreu após a avaliação visual do ajuste alcançado da análise de gráficos quantil-quantil e do teste de hipóteses de Kolmogorov-Smirnov, cuja hipótese nula não foi rejeitada em nenhuma bacia. A função densidade de probabilidades Log-Normal possui dois parâmetros: média e desvio padrão dos valores de  $\ln(X)$ . Sua formulação matemática é descrita pela Equação (36).

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma_{\ln(X)}\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(X) - \mu_{\ln(X)}}{\sigma_{\ln(X)}}\right)^2\right\}, \text{ para } x > 0 \quad (36)$$

### **Durações**

A análise das durações revelou que as distribuições empíricas apresentavam significativas variações de forma, sempre com assimetria à direita. Nesse contexto, optou-se pela distribuição de Gama, devido a sua versatilidade. Para essa definição também se empreendeu o teste de hipóteses de Kolmogorov-Smirnov e a análise de gráficos quantil-quantil.

A função densidade de probabilidade da distribuição Gama encontra-se apresentada na Equação (37), sendo  $\theta$  o parâmetro de escala e  $\eta$  o parâmetro de forma da distribuição.

$$f(x) = \frac{(x/\theta)^{\eta-1} \exp(-x/\theta)}{\theta \Gamma(\eta)}, \text{ para } x, \theta \text{ e } \eta > 0 \quad (37)$$

O fator  $\Gamma(\eta)$  é relativo à normalização, que faz com que a área total sob o gráfico seja unitária, sendo representado pela função Gama completa  $\Gamma(\cdot)$  do parâmetro de forma  $\eta$  (Naghetini & Pinto, 2006), sendo dada por:

$$\Gamma(\eta) = \int_0^{\infty} x^{\eta-1} e^{-x} dx \quad (38)$$

#### 4.1.5 Avaliação estatística de dependência entre variáveis hidrológicas

Para a modelagem de funções cópula é primordial a compreensão das relações de dependência entre as variáveis aleatórias em estudo. Nesse contexto, deve-se estimar coeficientes de correlação que reflitam a relação entre pares de variáveis aleatórias. Foram definidos três pares, a saber: vazão de pico x volume escoado, volume escoado x duração e vazão de pico x duração.

Como exposto no item 3.1.3, usualmente são utilizados os coeficientes de correlação de Pearson e de Kendall para a modelagem multivariada, uma vez que as correlações são estimadas com base no ranqueamento dos pares, não nos valores. Uma vez que a literatura avaliada utiliza o coeficiente de correlação de Kendall, optou-se por empregá-lo para avaliar as correlações, cuja estimativa ocorre a partir do emprego da Equação (17). Os valores do coeficiente de correlação dos pares de quantis foram estimados para as bacias, por região hidrográfica e para todos os eventos analisados.

#### 4.1.6 Ajuste das funções cópula

Compreendidas as relações de dependência, se fez necessária a estimativa das probabilidades referentes aos quantis amostrados. Para esse fim, empregou-se as distribuições marginais ajustas previamente (subitem 4.1.4). Por meio das funções acumuladas de probabilidades estimou-se, individualmente, a probabilidade de não excedência para cada quantil, obtendo-se assim trios de probabilidades para vazão, volume e duração.

Com as probabilidades associadas, foram ajustados os modelos Gumbel e Joe para as probabilidades dos pares vazão de pico e volume escoado e volume escoado e duração, por apresentarem dependência na cauda superior (Nelsen, 2006). Foi empregado o método da máxima pseudo-verossimilhança (cuja função de verossimilhança é estimada a partir de dados simulados) para a estimativa do parâmetro de cópula. Esse método consiste na maximização do logaritmo da função pseudo-verossimilhança ( $l(\theta)$ ), com a finalidade de se obter um estimador para o parâmetro de cópula. A referida função é apresentada na Equação (39).

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln [c_{\theta}(F_{n,X}(X_i), F_{n,Y}(Y_i))] = \sum_{i=1}^n \ln [c_{\theta}(\hat{u}_i, \hat{v}_i)], \quad (39)$$

Ressalte-se que foram estimados parâmetros de cópula para as bacias de modo individual. Além disso, o ajuste foi verificado a partir do teste de hipóteses baseado na estatística de Cramér-von-Mises ( $S_n$ ), ao nível de significância de 5%, cujo p-valor foi estimado via “*bootstrap*”. O teste estima a diferença entre a cópula empírica ( $\hat{C}_n$ ) e a cópula paramétrica ( $\hat{C}_{\theta_n}$ ).

$$S_n = \sum_{i=1}^n \{\hat{C}_n(\hat{u}_i, \hat{v}_i) - \hat{C}_{\theta_n}(\hat{u}_i, \hat{v}_i)\}^2, \quad (40)$$

A avaliação dos modelos considerou o critério de informação de Akaike (AIC), a partir do qual é possibilitado o ranqueamento de modelos, sendo considerado o mais adequado aquele que resultar em um menor valor de AIC (Burnham & Anderson, 2004). Em um modelo com “k” parâmetros, o Critério de Informação de Akaike pode ser obtido pela Equação (41), em que  $L_n(\hat{\theta}_n)$  equivale à função de pseudo-verossimilhança para o estimador  $\hat{\theta}_n$ .

$$AIC = -2 \log L_n(\hat{\theta}_n) + 2k \quad (41)$$

Estimados os parâmetros de cópula, foi realizada a geração de 5.000 pares aleatórios de probabilidades, seguindo-se o modelo bivariado ajustado. Para tais pares foram calculados os quantis em função dos parâmetros das distribuições Generalizada de Pareto, Log-Normal e Gama para vazão de pico, volume escoado e duração dos eventos, respectivamente. Assim, para os pares de probabilidade e por meio das cópulas ajustadas, foram estimadas as probabilidades conjuntas.

Nesse estudo optou-se pela estimativa e análise das probabilidades de excedência iguais a 0,80; 0,50; 0,20; 0,10; 0,05; 0,02; 0,01; 0,005; 0,002 e 0,001.

## 4.2 Definição das regiões homogêneas

Para o experimento referente ao segundo objetivo específico, foram ajustadas funções cópula regionais para regiões homogêneas, seguindo o critério estabelecido por

Hosking & Wallis (1997), e para regiões hidrográficas (Amazonas, São Francisco, Tocantins-Araguaia e Paraná). Nesse sentido, os próximos subitens descrevem os procedimentos metodológicos empregados para a modelagem regional multivariada nas bacias escolhidas.

Chebana (2022) argumenta que, para fins de análise de frequência regional, a homogeneidade da região é um fator determinante. Assim, uma alternativa é a utilização de testes estatísticos para avaliar a hipótese de homogeneidade das regiões, anteriormente à análise de frequência regional. Nesse sentido, foram utilizadas as medidas de discordância e heterogeneidade para a definição das regiões homogêneas no presente trabalho.

### **Avaliação da discordância**

A avaliação da discordância tem por finalidade a detecção de postos discordantes em uma região. Em uma região homogênea com  $N$  postos, o vetor de momentos-L amostrais regionais ( $\vec{u}_R$ ) é calculado como sendo a média aritmética dos vetores de momentos-L locais ( $\vec{u}_i$ ), como se segue.

$$\vec{u}_R = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{u}_i = [t^R, t_3^R, t_4^R]^T \quad (42)$$

É considerada, também, a matriz de covariância  $S$ , que é compreendida por:

$$S = \sum_{i=1}^N (\vec{u}_i - \vec{u}_R)(\vec{u}_i - \vec{u}_R)^T \quad (43)$$

Assim, a medida de discordância para um dado posto  $i$  é dada por:

$$D_i = \frac{1}{3} N (\vec{u}_i - \vec{u}_R)^T A^{-1} (\vec{u}_i - \vec{u}_R) \quad (44)$$

Hosking & Wallis (1997) apresentam valores críticos para a medida de discordância em função do número de postos da região, conforme evidenciado na Tabela 5.

Tabela 5 – Valores críticos referentes ao teste de discordância para regiões homogêneas

| Número de postos na região | Valor crítico |
|----------------------------|---------------|
| 5                          | 1,333         |
| 6                          | 1,648         |
| 7                          | 1,917         |
| 8                          | 2,140         |
| 9                          | 2,329         |
| 10                         | 2,491         |
| 11                         | 2,632         |
| 12                         | 2,757         |
| 13                         | 2,869         |
| 14                         | 2,971         |
| ≥ 15                       | 3,000         |

Fonte: Hosking &amp; Wallis (1997)

Valendo-se desses valores foram definidas como regiões homogêneas aquelas nas quais os valores de discordância não ultrapassaram os valores críticos.

### **Medida de homogeneidade**

Para a avaliação da homogeneidade de uma região Hosking & Wallis (1997) propuseram uma medida cuja apreciação é realizada a partir de critérios em relação ao coeficiente de variação L (CV-L), pois exerce grande influência nos quantis estimados. Nesse contexto, a avaliação da homogeneidade se dá comparando-se a dispersão dos momentos amostrais regionais e a dispersão provável da região homogênea. O desvio-padrão ponderado do CV-L amostral é dado pela Equação (45).

$$V = \sqrt{\left( \left( \sum_{i=1}^N n_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^N n_i \|t^i - t^R\| \right)} \quad (45)$$

Para o cálculo da medida de heterogeneidade ( $H$ ), Hosking & Wallis (1997) propõem simulações de “ $N$ ” postos por intermédio de uma distribuição Kapa, sendo obtidos valores simulados do desvio-padrão de CV-L. Assim, a medida de heterogeneidade é obtida com base na média ( $\mu_{Vsim}$ ) e desvio-padrão ( $\sigma_{Vsim}$ ) da amostra de CV-L obtida, conforme evidenciado na Equação (46).

$$H = \frac{V - \mu_{Vsim}}{\sigma_{Vsim}} \quad (46)$$

Para a avaliação da medida de heterogeneidade são adotados os seguintes valores limite:

- $H < 1$ : região homogênea;
- $1 \leq H < 2$ : região possivelmente homogênea; e
- $H \geq 2$ : região definitivamente heterogênea.

Partindo-se dessa abordagem foram separados grupos de bacias hidrográficas, sendo eles:

- Grupo 01: estações localizadas na região do Alto São Francisco (Rio das Velhas e Rio Paraopeba);
- Grupo 02: estações localizadas na região Centro-Oeste;
- Grupo 03: estações localizadas na região amazônica.

Assim, procedeu-se com todas as bacias referentes aos três grupos, sendo avaliadas as bacias discordantes e as medidas de heterogeneidade, com a finalidade de estabelecer regiões homogêneas e aplicar a estimativa dos parâmetros de cópula valendo-se da Equação (30). Além disso, foram ajustadas cópulas por região hidrográfica, sendo comparados os quantis estimados.

### 4.3 Modelagem da forma dos hidrogramas

Para a descrição da forma dos hidrogramas, foram ajustadas funções densidade de probabilidade sobre hidrogramas normalizados médios, sendo estimados parâmetros por bacia hidrográfica. Para tal, segundo verificado na literatura científica, foram ajustadas as funções densidade de probabilidade Log-Normal, Gama e Beta.

A função densidade de probabilidades Log-Normal tem dois parâmetros: média e desvio padrão dos valores de  $\ln(X)$ , sendo apresentada na Equação (36). A distribuição Gama é apresentada na Equação (37), sendo  $\theta$  o parâmetro de escala e  $\eta$  o parâmetro de forma da distribuição.

A função densidade de probabilidade Beta é uma distribuição com suporte finito (0 a 1), definida por dois parâmetros de forma ( $\alpha$  e  $\beta$ ) e cuja representação matemática é descrita pela Equação (47).

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, \text{ para } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } \alpha, \beta > 0, \quad (47)$$

em que  $B(\alpha, \beta)$  corresponde à função Beta completa, a qual é definida pela Equação (48).

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \quad (48)$$

A normalização de cada um dos eventos de cheia amostrados foi realizada, de modo que o domínio da função fosse uniforme, i.e., definido entre 0 e 1, e a área sob o gráfico fosse unitária, a fim de permitir o ajuste de uma função densidade de probabilidade. Para esse processo, procedeu-se como descrito em Brunner et al. (2017), dividindo-se as abcissas pela duração total do evento e as ordenadas pelo quociente entre volume escoado e duração do evento, que configura a vazão escoada média.

Executada a normalização, foi calculado o hidrograma normalizado médio por bacia, a partir do qual foram ajustadas as funções densidade de probabilidade. Isso se deu a partir do estabelecimento de um intervalo de parâmetros das distribuições. O modelo que apresentou o menor RMSE (Raiz do Erro Quadrático Médio), representado na Equação (49), foi selecionado.

$$RMSE = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(\hat{q}_i - q_i)^2}{n}} \quad (49)$$

em que  $\hat{q}_i$  é o valor obtido via função densidade probabilidade,  $q_i$  é o valor do hidrograma normalizado e  $n$  é o número de observações.

## **5 RESULTADOS E DISCUSSÃO**

Os resultados alcançados com a aplicação dos procedimentos metodológicos propostos são apresentados no presente capítulo.

### **5.1 Modelagem multivariada de vazão, volume e duração via funções cópulas**

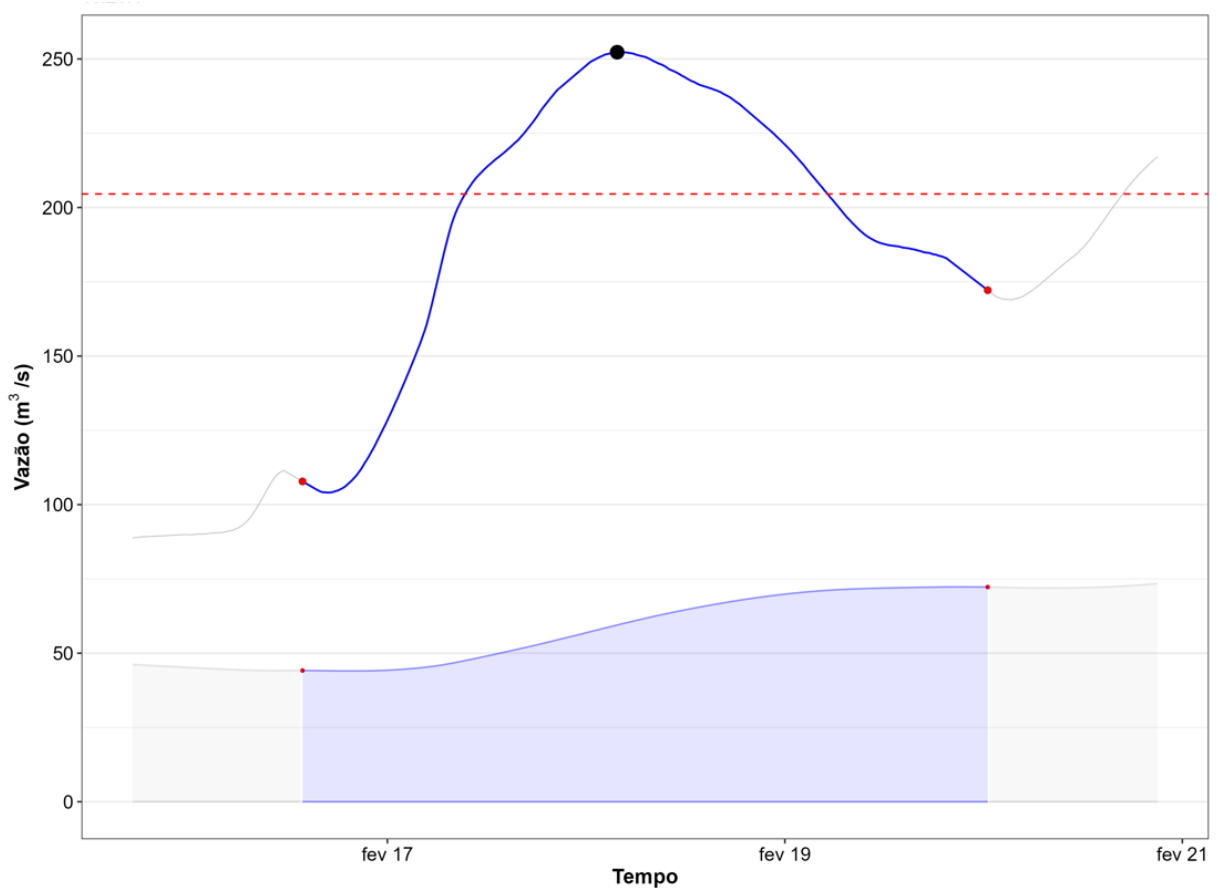
#### **5.1.1 Seleção dos eventos de cheia e amostragem dos quantis observados**

Com base nas séries históricas de vazão, foram amostrados 507 eventos de cheia para as 26 bacias avaliadas, correspondendo a uma média aritmética aproximada de 19 eventos por bacia.

Um fator limitador foi a quantidade e qualidade dos dados relativos a estações que atendam aos critérios estabelecidos de área de drenagem, discretização temporal dos dados medidos, presença de estruturas de regularização no curso d'água principal e tipo de vazão (medida ou observada). Ainda assim, foram amostrados centenas de eventos em diferentes regiões hidrográficas do Brasil.

Um desafio importante durante a etapa de seleção dos eventos foi a separação do escoamento de base, cuja primeira tentativa foi realizada utilizando-se o filtro recursivo proposto por Eckhardt (2005), que resultou em uma estimativa do escoamento de base inferior ao início e fim dos hidrogramas (Figura 14), culminando em valores iniciais e finais de vazão diferentes de zero. Uma possível justificativa para tal é que tal método foi previsto para dados com discretização diária, não sendo aplicável para os fins aqui estabelecidos. Não obstante, Su et al. (2016) constataram que existem limitações estruturais nos filtros recursivos para estimativa do escoamento básico, tal qual a discrepância entre o escoamento de base estimado e o teórico.

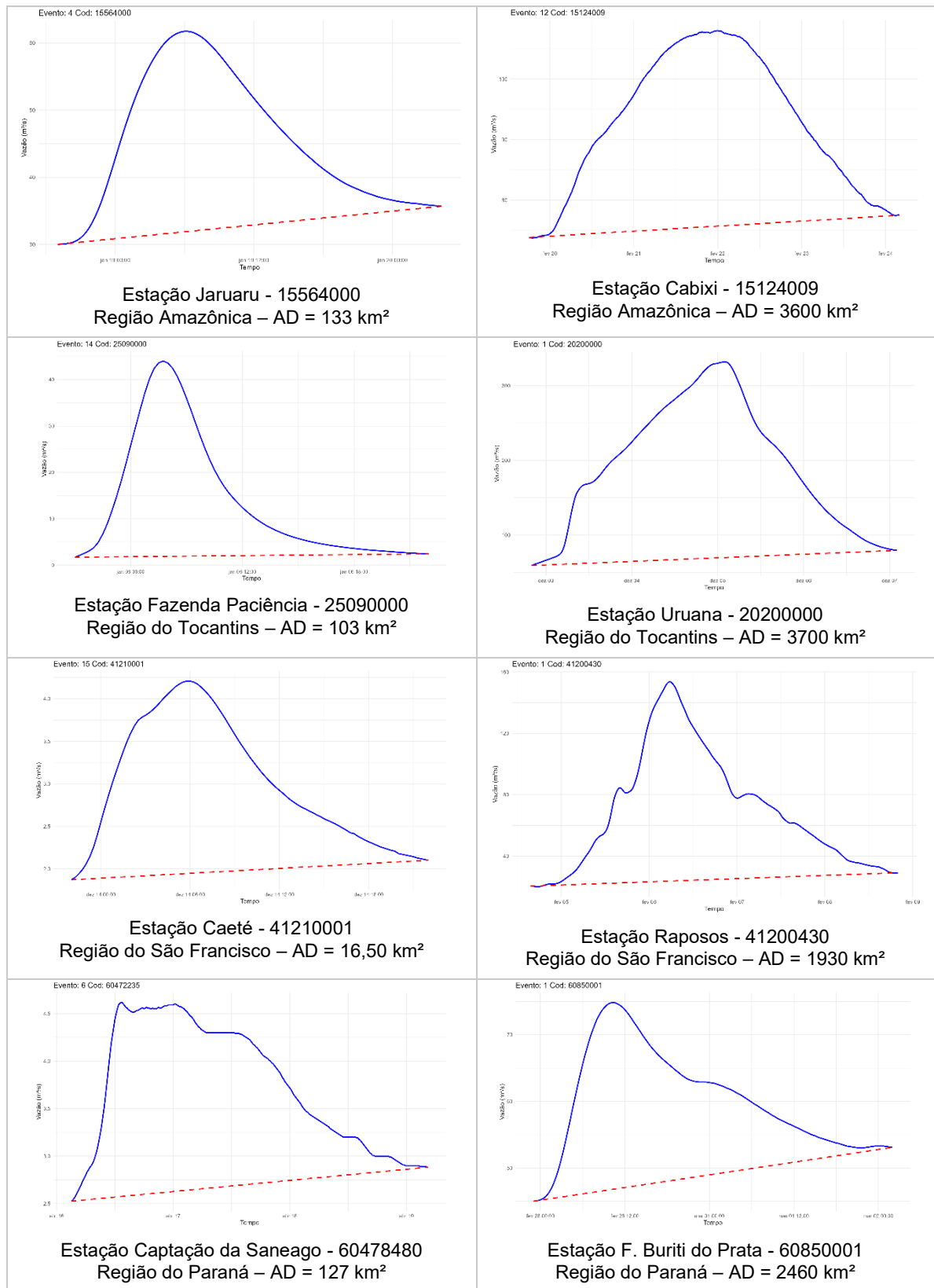
**Figura 14 – Exemplo de hidrograma sem aderência entre o escoamento de base e o início e final do evento.**



Fonte: o autor.

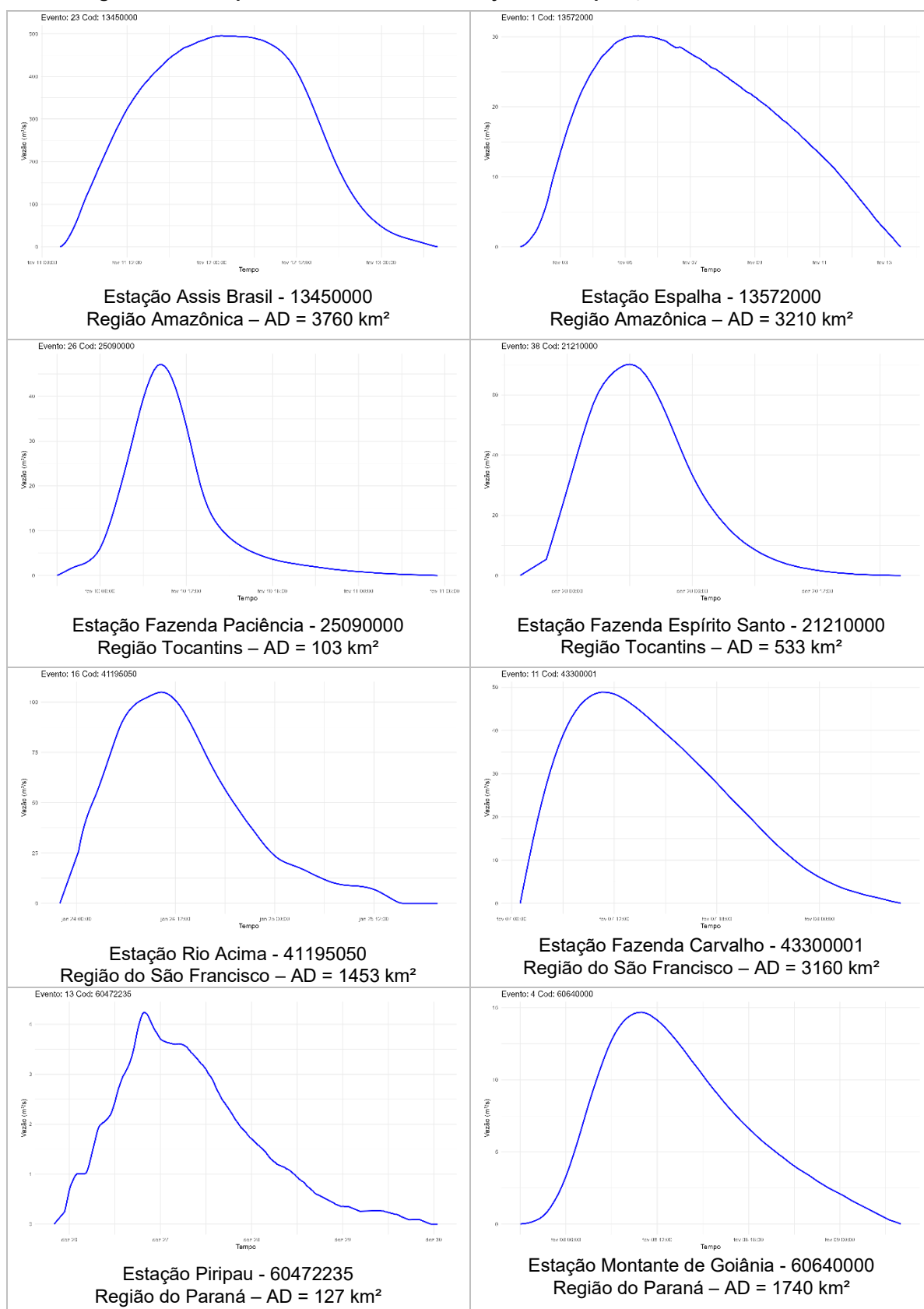
Como alternativa, em concordância com Fischer et al. (2021), utilizou-se o método da declividade constante (Chow et al., 1988), em que o escoamento de base é assumido como uma reta que liga o evento do tempo inicial ao tempo final do evento. Embora os filtros recursivos apresentem maior complexidade, a simplicidade do referido método, além de sua aplicabilidade às centenas de eventos em questão para os fins de estimativa de volume escoado, evidencia satisfatoriedade para os dados aqui estudados. Tal constatação vai ao encontro do apresentado por Linsley et al. (1949): quando da utilização de técnicas de separação para a estimativa de volume de escoamento direto, os resultados não diferem de um método para outro, sendo mais importante a aplicação uniforme de um método em todo o estudo.

**Figura 15 – Exemplos de eventos amostrados com o escoamento de base.**



Fonte: o autor

**Figura 16 – Exemplos de eventos amostrados já com a separação de escoamento de base.**



Fonte: o autor

Tendo como base os eventos amostrados, e apresentados nas Figuras 15 e 16, percebe-se que há variabilidade na forma dos hidrogramas. Esse fato será mais bem discutido no item 5.3, em que são apreciados os ajustes das formas dos hidrogramas normalizados por bacia e funções densidade de probabilidade.

Na bacia amazônica, percebem-se hidrogramas com maior simetria em relação aos demais, com picos menos “achatados” e com a cauda superior não tão bem definida. Isso ocorre, em parte, pelas áreas de drenagem maiores, pelos elevados volumes de precipitação experimentadas na região e pela condição mais homogênea de uso do solo, que corresponde, de maneira predominante, a áreas de vegetação densa.

Na região do Tocantins-Araguaia, em que há as menores áreas de drenagem, houve a maior concentração de hidrogramas assimétricos à direita, com cauda superior mais bem definida. Além da influência das menores áreas de drenagem nesse comportamento, pode-se citar, também, o uso do solo nas regiões (próximas a centros urbanos e áreas de agricultura). O mesmo comportamento foi percebido nos eventos ocorridos na região da bacia do São Francisco, entretanto com maior “achatamento” dos picos, o que pode ser explicado pelas áreas de drenagem mais elevadas em relação às estações do Tocantins-Araguaia.

Os eventos amostrados na região da bacia do Paraná, por sua vez, não apresentaram um padrão como as demais, havendo eventos assimétricos à esquerda e à direita e eventos simétricos, com predominância de eventos assimétricos à direita. Uma possível justificativa para tal é a proximidade das estações a grandes capitais, o que pode causar uma não uniformidade nos eventos de cheia devido à variações no uso do solo.

Embora o número de bacias estudadas seja reduzido (vinte e seis), foi possível caracterizar centenas de eventos de cheia em diferentes regiões do Brasil, propiciando uma avaliação do comportamento dos hidrogramas frente aos distintos comportamentos hidroclimáticos presentes entre as regiões Norte, Centro-Oeste e Sudeste.

### 5.1.2 Análise de frequência univariada

#### 5.1.2.1 Ajuste das excedências de vazão à distribuição Generalizada de Pareto (GPD)

A distribuição Generalizada de Pareto (GPD) conta com três parâmetros (posição, escala e forma). Na abordagem POT, o parâmetro de posição é dado pelo “*Threshold*”, sendo este estabelecido a partir da metodologia apresentada por Solari et al. (2017), conforme descrito no item 4.1.4. Os parâmetros estimados da distribuição Generalizada de Pareto apresentam-se na Tabela 6.

**Tabela 6 – Parâmetros estimados da distribuição Generalizada de Pareto.**

| <b>Código</b> | <b>Nome</b>            | <b><math>\xi</math></b> | <b><math>k</math></b> | <b><math>\alpha</math></b> |
|---------------|------------------------|-------------------------|-----------------------|----------------------------|
| 12510500      | Ponte do Rio Liberdade | 562,68                  | 0,20                  | 150,26                     |
| 13439000      | Aldeia dos Patos       | 60,00                   | -0,09                 | 150,15                     |
| 13450000      | Assis Brasil           | 560,45                  | -0,19                 | 220,12                     |
| 13572000      | Espalha                | 100,02                  | 0,25                  | 17,97                      |
| 15124009      | Cabixi                 | 107,08                  | 0,94                  | 47,29                      |
| 15564000      | Jaruaru                | 56,26                   | 0,08                  | 19,64                      |
| 19985000      | Pacajás                | 379,21                  | 0,05                  | 106,72                     |
| 20100000      | Jaraguá                | 47,09                   | -0,25                 | 30,01                      |
| 20200000      | Uruana                 | 204,56                  | -0,26                 | 37,12                      |
| 21210000      | Fazenda Espírito Santo | 37,81                   | -0,01                 | 48,11                      |
| 25090000      | Fazenda Paciência      | 36,88                   | -0,20                 | 24,48                      |
| 25100000      | B. Cachoeira Grande    | 48,09                   | -0,21                 | 30,08                      |
| 28200000      | Ponte Rio Lontra       | 56,01                   | 0,33                  | 42,43                      |
| 40710001      | Belo Vale              | 147,53                  | -0,46                 | 86,89                      |
| 41195050      | Rio Acima              | 93,08                   | -0,62                 | 26,95                      |
| 41200430      | Raposos                | 125,21                  | -0,48                 | 58,86                      |
| 41210001      | Caeté                  | 3,06                    | -0,27                 | 2,19                       |
| 41340000      | Ponte Raul Soares      | 319,65                  | -0,42                 | 175,21                     |
| 41380000      | Ponte Preta            | 61,13                   | -0,14                 | 26,72                      |
| 41780002      | P. Juscelino – Jusante | 271,62                  | -0,15                 | 170,68                     |
| 41940001      | Ponte do Bicudo        | 113,69                  | 0,13                  | 50,12                      |
| 43300001      | Fazenda Carvalho       | 153,40                  | 0,04                  | 73,69                      |
| 60472235      | Piripau                | 4,32                    | -0,55                 | 1,03                       |
| 60478480      | Captação da Saneago    | 3,85                    | -0,24                 | 4,46                       |
| 60640000      | Montante de Goiânia    | 62,59                   | -0,43                 | 8,29                       |
| 60850001      | F. Buriti do Prata     | 73,14                   | -0,38                 | 20,72                      |

Fonte: o autor

A estimativa do “*Threshold*” foi validada pelo teste de Cunnane, em que é testada a hipótese de que as excedências anuais se comportam como um processo de *Poisson* (item 3.3). Assim, os valores da estatística de teste foram calculados e comparados com a distribuição do Qui-Quadrado (APÊNDICE C), sendo inferior para todos os

casos (Tabela 7), não havendo rejeição da hipótese nula (distribuição conforme processo de Poisson) para nenhuma das estações estudadas.

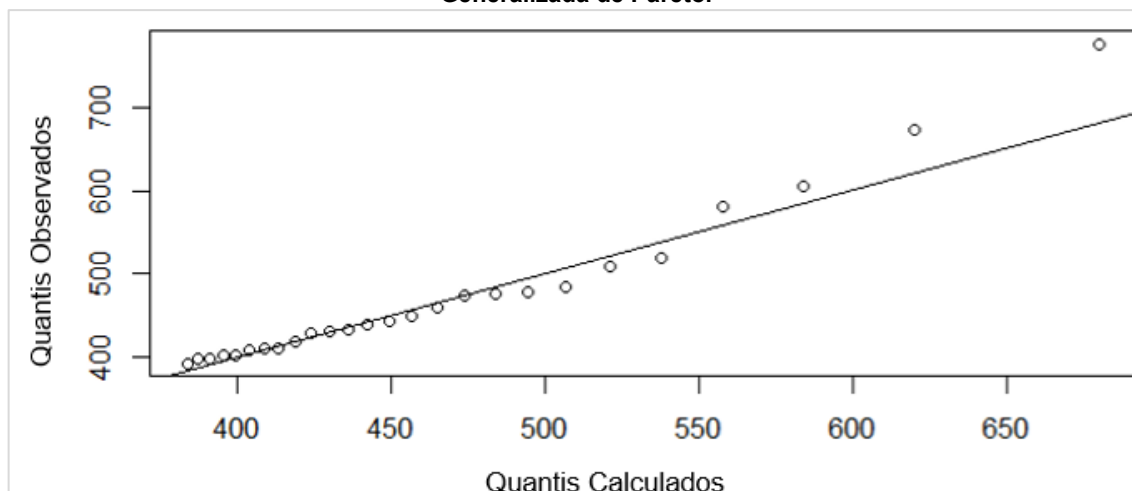
**Tabela 7 – Resultado do teste de Cunnane.**

| <b>Código</b> | <b>Nome</b>            | <b><math>\hat{u}</math></b> | <b><math>\gamma</math></b> | <b><math>\chi^2_{0,95;\eta}</math></b> |
|---------------|------------------------|-----------------------------|----------------------------|----------------------------------------|
| 12510500      | Ponte do Rio Liberdade | 2,00                        | 1,00                       | 12,6                                   |
| 13439000      | Aldeia dos Patos       | 10,33                       | 0,04                       | 5,99                                   |
| 13450000      | Assis Brasil           | 3,00                        | 1,67                       | 19,7                                   |
| 13572000      | Espalha                | 3,00                        | 1,11                       | 12,6                                   |
| 15124009      | Cabixi                 | 5,33                        | 0,02                       | 5,99                                   |
| 15564000      | Jaruaru                | 2,00                        | 3,00                       | 9,24                                   |
| 19985000      | Pacajás                | 4,50                        | 1,16                       | 9,49                                   |
| 20100000      | Jaraguá                | 2,40                        | 1,60                       | 9,49                                   |
| 20200000      | Uruana                 | 1,43                        | 0,84                       | 12,6                                   |
| 21210000      | Fazenda Espírito Santo | 3,67                        | 1,14                       | 9,24                                   |
| 25090000      | Fazenda Paciência      | 2,18                        | 1,04                       | 19,7                                   |
| 25100000      | B. Cachoeira Grande    | 4,40                        | 0,17                       | 9,49                                   |
| 28200000      | Ponte Rio Lontra       | 2,29                        | 1,04                       | 12,6                                   |
| 40710001      | Belo Vale              | 5,00                        | 0,80                       | 9,24                                   |
| 41195050      | Rio Acima              | 3,00                        | 0,89                       | 9,24                                   |
| 41200430      | Raposos                | 4,14                        | 1,91                       | 12,6                                   |
| 41210001      | Caeté                  | 5,50                        | 0,66                       | 12,6                                   |
| 41340000      | Ponte Raul Soares      | 2,00                        | 2,44                       | 11,1                                   |
| 41380000      | Ponte Preta            | 2,67                        | 1,22                       | 5,99                                   |
| 41780002      | P.Juscelino – Jusante  | 2,25                        | 0,15                       | 7,81                                   |
| 41940001      | Ponte do Bicudo        | 3,20                        | 0,66                       | 9,49                                   |
| 43300001      | Fazenda Carvalho       | 4,83                        | 0,98                       | 9,24                                   |
| 60472235      | Piripau                | 2,67                        | 1,03                       | 9,24                                   |
| 60478480      | Captação da Saneago    | 2,75                        | 1,16                       | 7,81                                   |
| 60640000      | Montante de Goiânia    | 2,60                        | 2,54                       | 9,49                                   |
| 60850001      | F. Buriti do Prata     | 3,00                        | 3,33                       | 9,49                                   |

Fonte: o autor

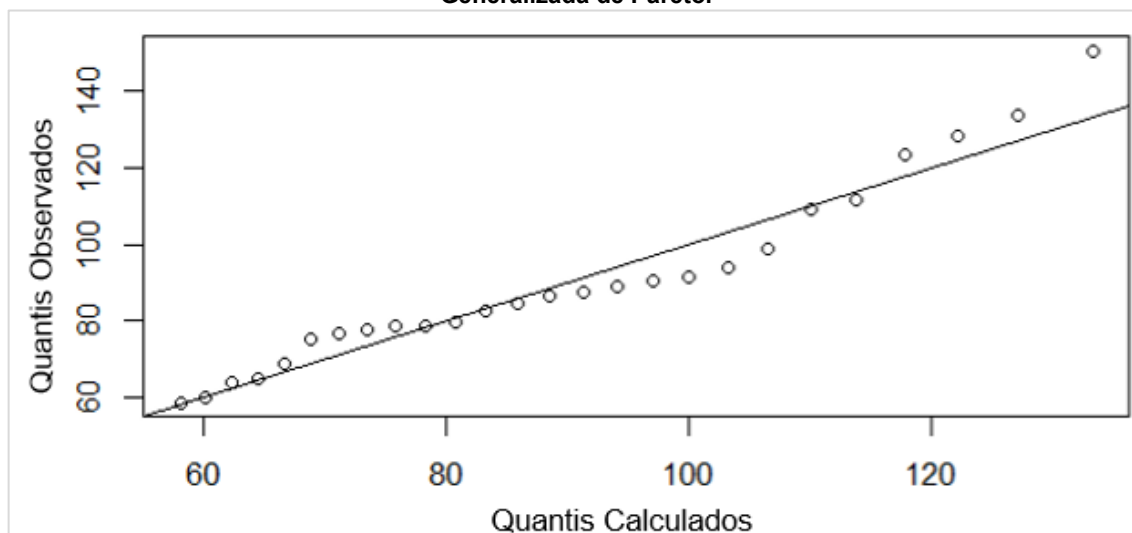
Os valores indicam que a hipótese de que os picos amostrados são independentes (Processo de Poisson) não pode ser rejeitada, sendo assim, a distribuição em questão pode ser empregada para a estimativa das probabilidades relativas aos quantis amostrados nos eventos. Na Figura 17 à Figura 19 são apresentados diagramas quantil-quantil dos dados de vazão de algumas das bacias do presente estudo. Verifica-se que o ajuste é razoável.

**Figura 17 – Diagrama quantil-quantil com dados da estação 19985000 ajustados à distribuição Generalizada de Pareto.**



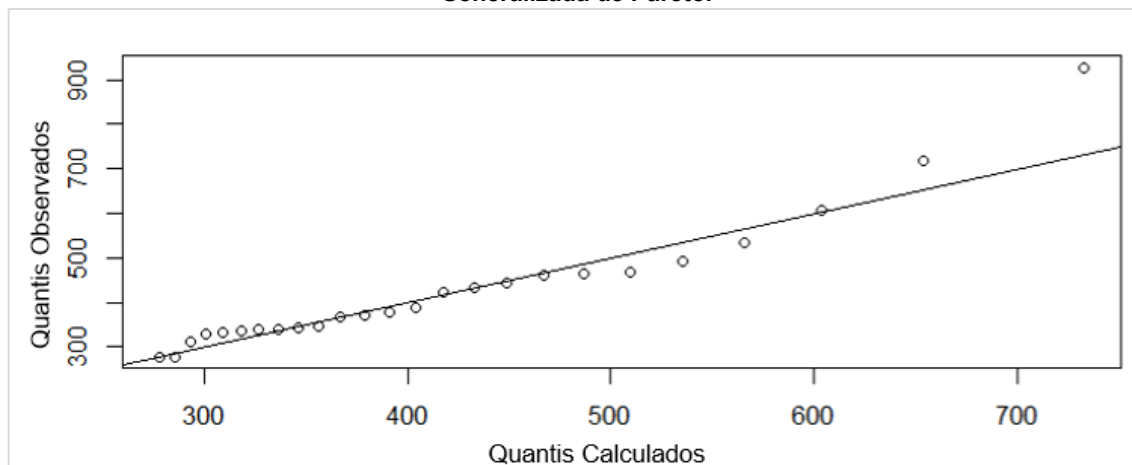
Fonte: o autor

**Figura 18 – Diagrama quantil-quantil com dados da estação 28200000 ajustados à distribuição Generalizada de Pareto.**



Fonte: o autor

**Figura 19 – Diagrama quantil-quantil com dados da estação 41780002 ajustados à distribuição Generalizada de Pareto.**



Fonte: o autor

### 5.1.2.2 Ajuste dos dados de volume e duração

Como descrito no item 4.1.4, foram empregadas as distribuições Log-Normal e Gama para ajuste aos dados de volume e duração amostrados, respectivamente. Nesse sentido, os parâmetros foram estimados e o ajuste testado a partir do teste de Kolmogorov-Smirnov, como apresenta a Tabela 8.

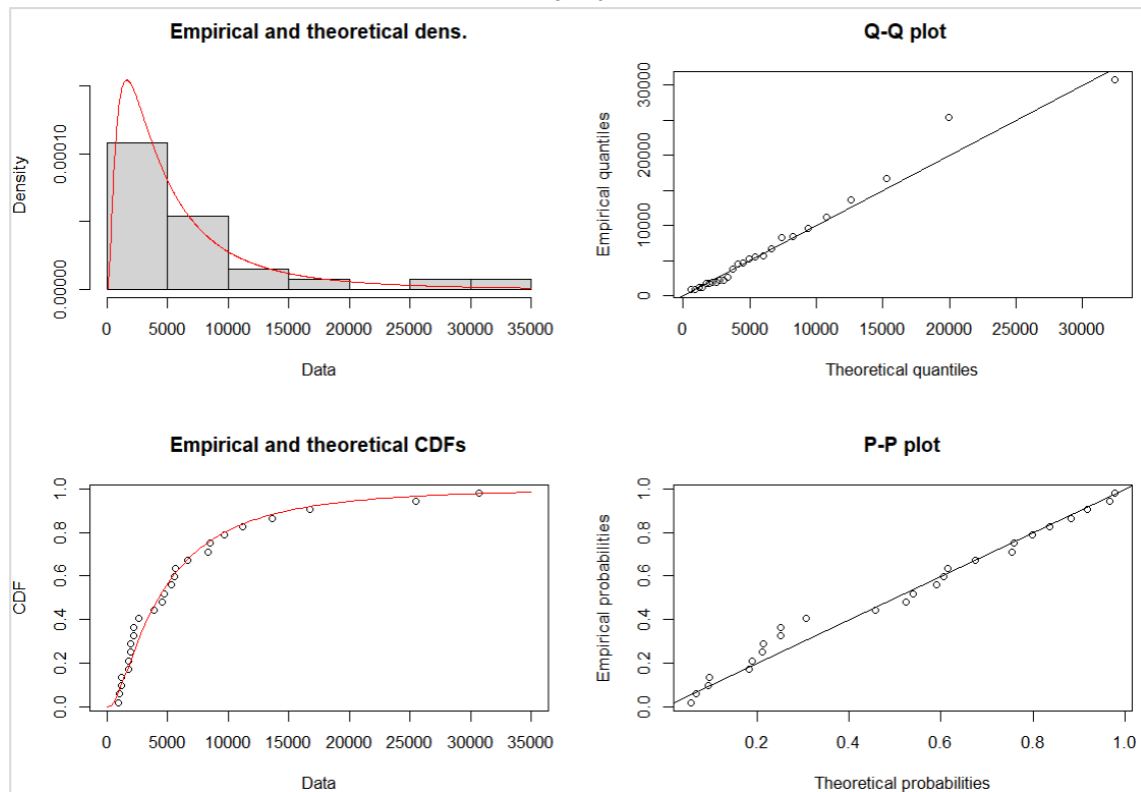
**Tabela 8 – Parâmetros estimados para volume e duração dos eventos.**

| Código   | Nome                   | Volume        |                  | Duração  |        |
|----------|------------------------|---------------|------------------|----------|--------|
|          |                        | $\mu_{ln(X)}$ | $\sigma_{ln(X)}$ | $\theta$ | $\eta$ |
| 12510500 | Ponte do Rio Liberdade | 9,15          | 0,43             | 9,25     | 15,00  |
| 13439000 | Aldeia dos Patos       | 6,20          | 1,07             | 4,92     | 8,38   |
| 13450000 | Assis Brasil           | 8,39          | 0,70             | 9,06     | 8,46   |
| 13572000 | Espalha                | 7,22          | 0,96             | 99,88    | 3,65   |
| 15124009 | Cabixi                 | 6,51          | 0,67             | 21,20    | 6,87   |
| 15564000 | Jaruaru                | 5,99          | 0,77             | 18,65    | 5,95   |
| 19985000 | Pacajás                | 8,36          | 0,98             | 52,71    | 3,91   |
| 20100000 | Jaraguá                | 5,30          | 1,05             | 17,23    | 3,17   |
| 20200000 | Uruana                 | 7,22          | 0,96             | 353,37   | 0,65   |
| 21210000 | Fazenda Espírito Santo | 3,55          | 1,39             | 2,08     | 7,93   |
| 25090000 | Fazenda Paciência      | 3,46          | 0,98             | 1,74     | 10,91  |
| 25100000 | B. Cachoeira Grande    | 3,44          | 1,46             | 5,37     | 3,93   |
| 28200000 | Ponte Rio Lontra       | 6,89          | 0,83             | 52,50    | 4,53   |
| 40710001 | Belo Vale              | 6,96          | 1,28             | 19,14    | 4,45   |
| 41195050 | Rio Acima              | 4,68          | 1,76             | 15,42    | 2,46   |
| 41200430 | Raposos                | 6,57          | 0,94             | 18,16    | 3,84   |
| 41210001 | Caeté                  | 1,25          | 0,63             | 5,26     | 4,54   |
| 41340000 | Ponte Raul Soares      | 7,22          | 1,48             | 27,82    | 2,08   |
| 41380000 | Ponte Preta            | 4,86          | 1,10             | 13,89    | 2,51   |
| 41780002 | P. Juscelino – Jusante | 7,34          | 0,67             | 10,31    | 7,32   |
| 41940001 | Ponte do Bicudo        | 5,69          | 0,50             | 6,19     | 8,23   |
| 43300001 | Fazenda Carvalho       | 6,42          | 0,97             | 24,73    | 2,68   |
| 60472235 | Piripau                | 1,97          | 1,15             | 28,84    | 1,87   |
| 60478480 | Captação da Saneago    | 1,73          | 0,98             | 4,71     | 5,32   |
| 60640000 | Montante de Goiânia    | 4,77          | 1,83             | 51,05    | 1,46   |
| 60850001 | F. Buriti do Prata     | 6,22          | 1,07             | 44,20    | 2,69   |

Fonte: o autor

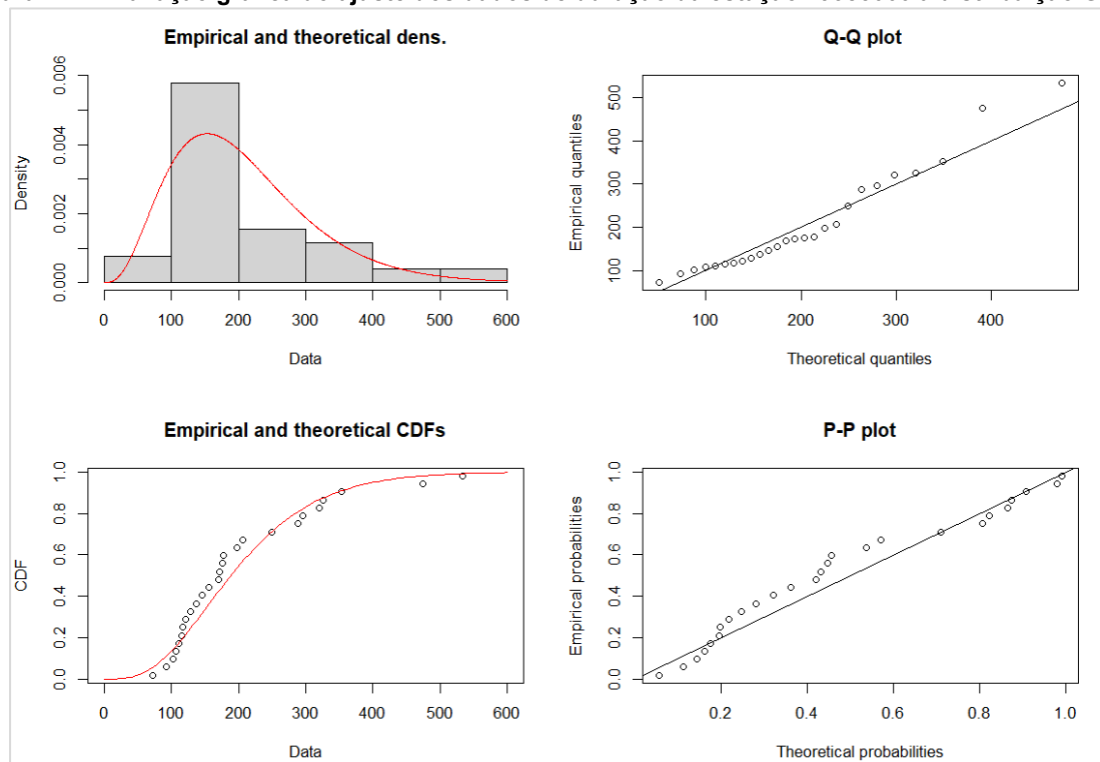
A Figura 20 à Figura 25 apresentam os ajustes dos dados de volume e duração às respectivas distribuições. Verifica-se, nesse contexto, um razoável ajuste à luz dos gráficos apresentados, o que é mais uma evidência a favor da hipótese nula (ajuste dos dados às distribuições).

**Figura 20 – Avaliação gráfica do ajuste dos dados de volume da estação 19985000 à distribuição Log-Normal.**



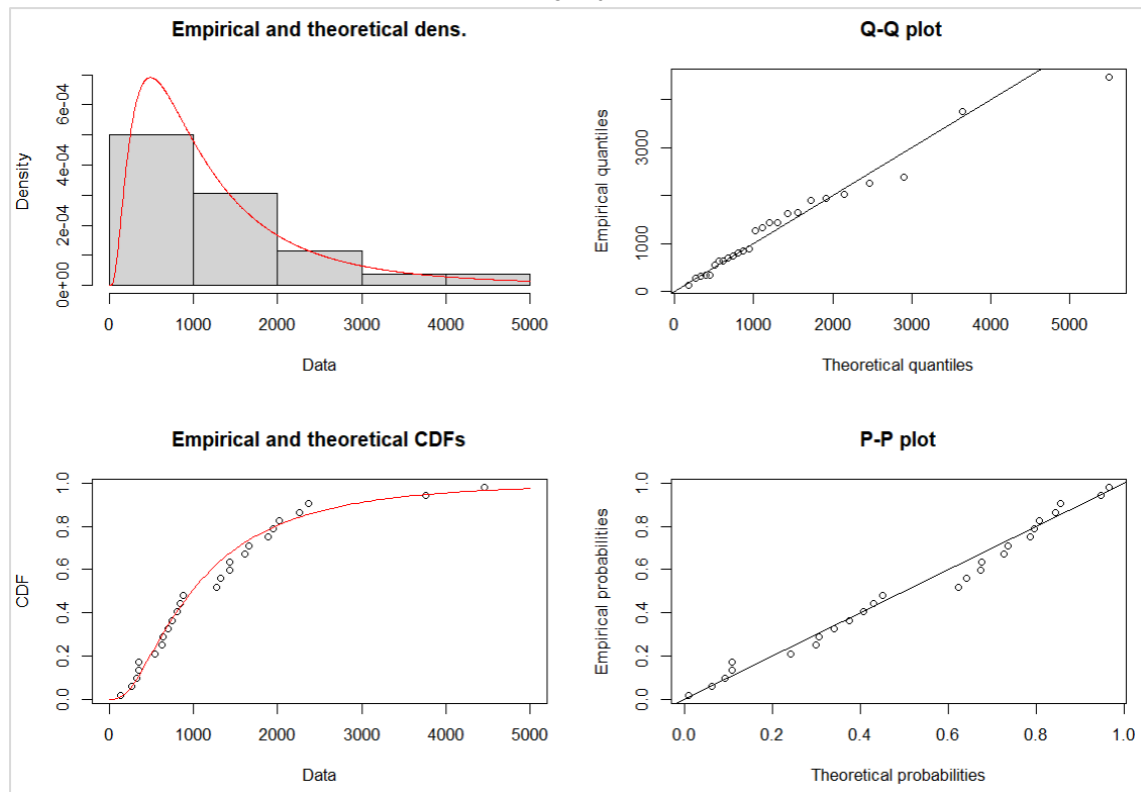
Fonte: o autor

**Figura 21 – Avaliação gráfica do ajuste dos dados de duração da estação 19985000 à distribuição Gama.**



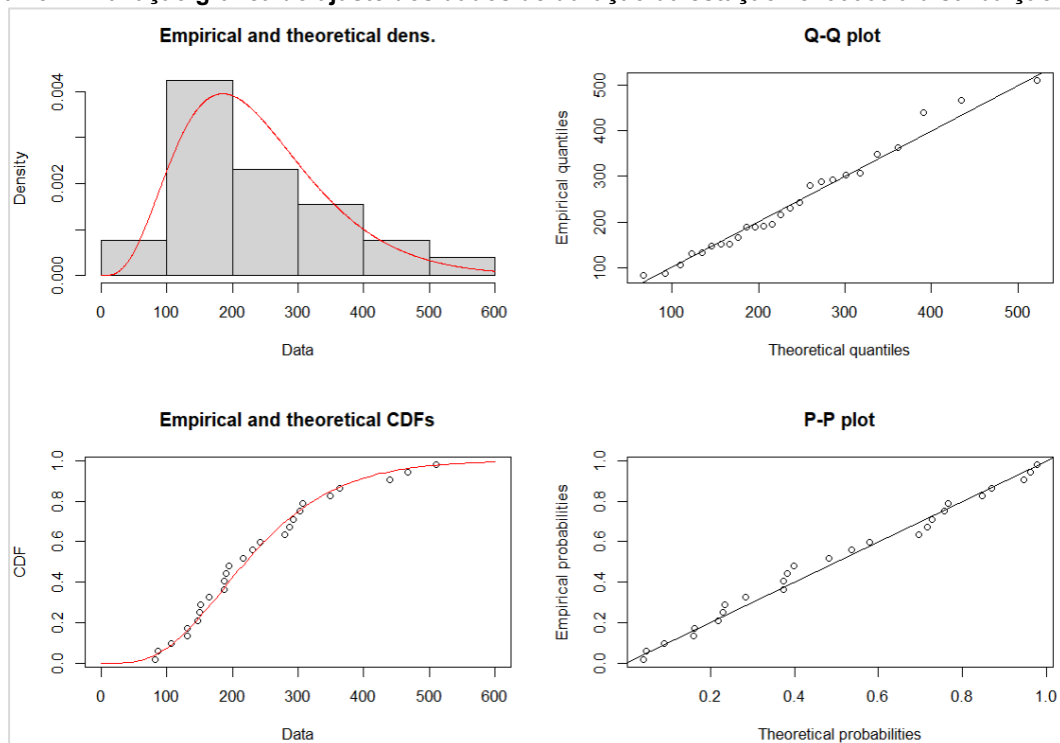
Fonte: o autor

**Figura 22 – Avaliação gráfica do ajuste dos dados de volume da estação 28200000 à distribuição Log-Normal.**



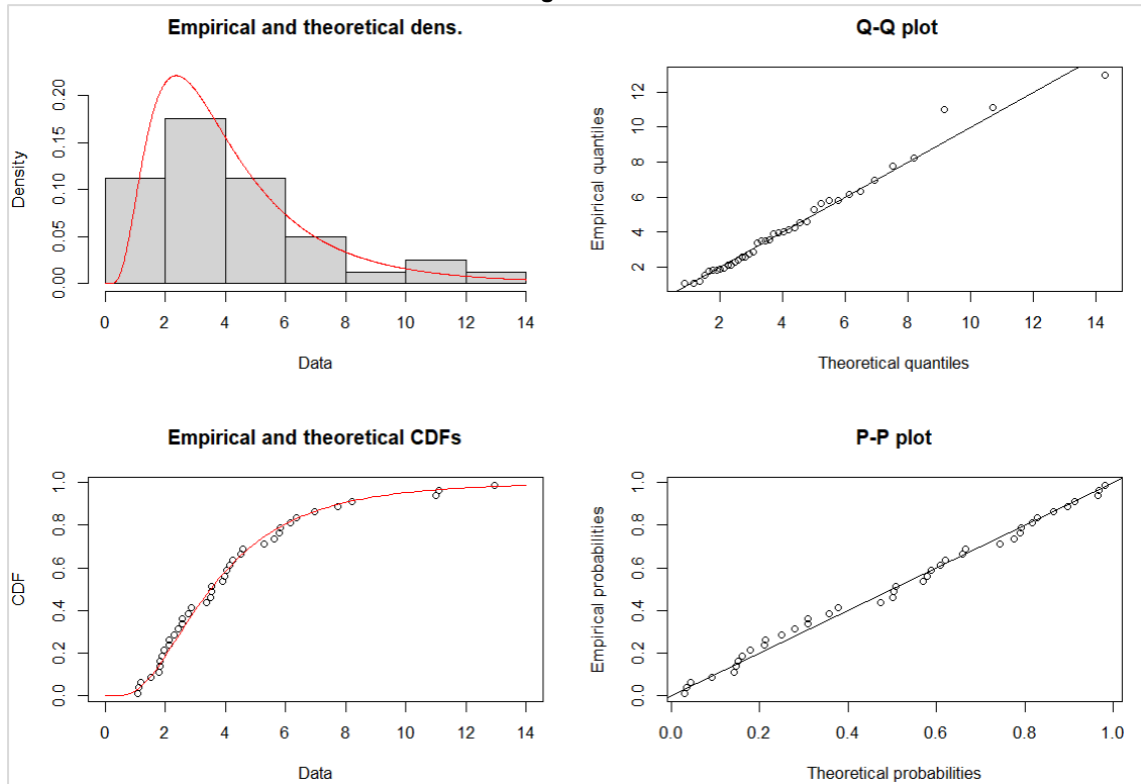
Fonte: o autor

**Figura 23 – Avaliação gráfica do ajuste dos dados de duração da estação 28200000 à distribuição Gama.**



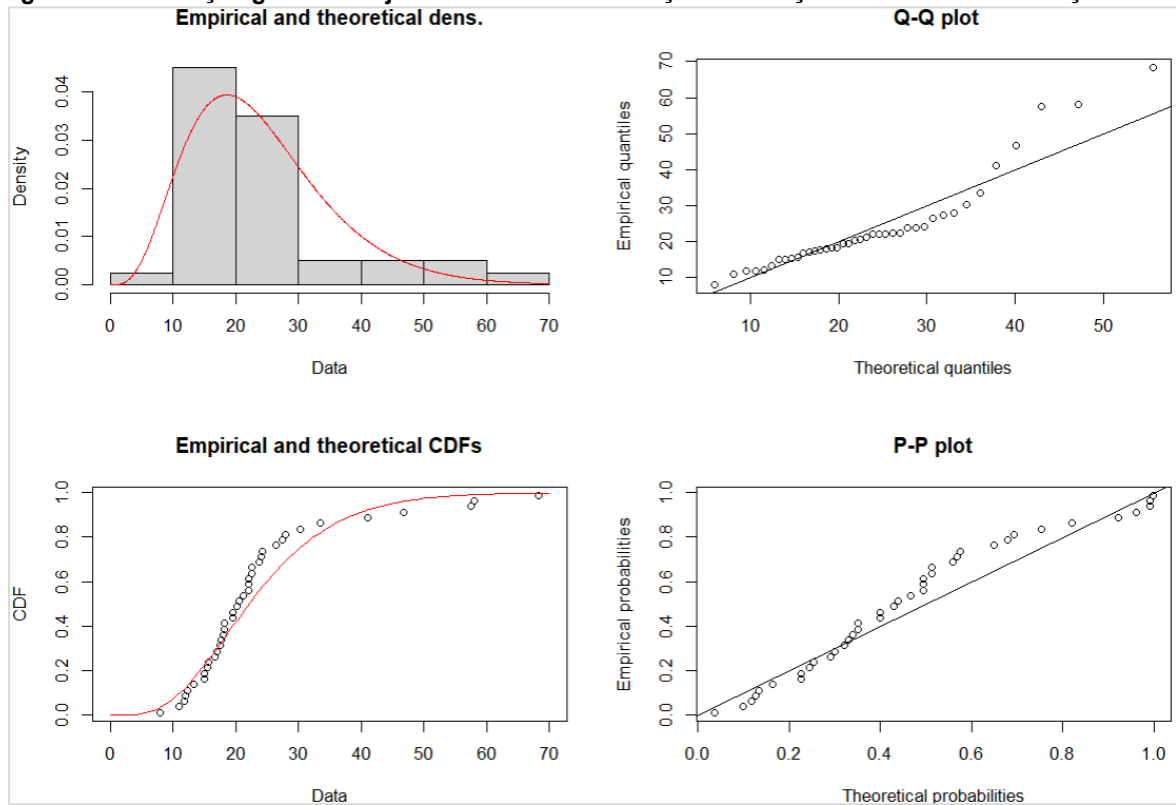
Fonte: o autor

**Figura 24 – Avaliação gráfica do ajuste dos dados de volume da estação 41210001 à distribuição Lognormal.**



Fonte: o autor

**Figura 25 – Avaliação gráfica do ajuste dos dados de duração da estação 41210001 à distribuição Gama.**



Fonte: o autor

### 5.1.3 Avaliação da correlação entre vazão de pico, volume e duração

Para a modelagem conjunta entre vazão, volume escoado e duração dos eventos de cheia, o primeiro passo é entender a estrutura da dependência entre as variáveis aleatórias. Para este fim, foi adotado o coeficiente de correlação de Kendall, o qual é largamente utilizado em estudos voltados à modelagem hidrológica (Serinaldi & Grimaldi, 2006; Sraj, Bezak & Brilly, 2014; Lacko et al., 2022). Os resultados acerca das correlações entre os pares pico x volume, volume x duração e pico x duração são apresentados e discutidos no presente item.

**Tabela 9 – Valores do coeficiente de correlação de Kendall para as variáveis aleatórias apreciadas.**

| <b>Código</b> | <b>Nome</b>            | <b>Área de Drenagem (km²)</b> | <b>Pico x Volume</b> | <b>Volume x Duração</b> | <b>Pico x Duração</b> |
|---------------|------------------------|-------------------------------|----------------------|-------------------------|-----------------------|
| 12510500      | Ponte do Rio Liberdade | 3450                          | 0,577                | 0,510                   | 0,218                 |
| 13439000      | Aldeia dos Patos       | 2100                          | 0,616                | 0,447                   | 0,141                 |
| 13450000      | Assis Brasil           | 3760                          | 0,663                | 0,483                   | 0,245                 |
| 13572000      | Espalha                | 3210                          | 0,367                | 0,895                   | 0,367                 |
| 15124009      | Cabixi                 | 3600                          | 0,495                | 0,714                   | 0,341                 |
| 15564000      | Jaruaru                | 133                           | 0,641                | 0,692                   | 0,333                 |
| 19985000      | Pacajás                | 2682                          | 0,655                | 0,815                   | 0,532                 |
| 20100000      | Jaraguá                | 1970                          | 0,587                | 0,762                   | 0,368                 |
| 20200000      | Uruana                 | 3700                          | 0,562                | 0,771                   | 0,410                 |
| 21210000      | Fazenda Espírito Santo | 533                           | 0,628                | 0,383                   | 0,050                 |
| 25090000      | Fazenda Paciência      | 103                           | 0,500                | 0,304                   | 0,059                 |
| 25100000      | B. Cachoeira Grande    | 229                           | 0,742                | 0,545                   | 0,391                 |
| 28200000      | Ponte Rio Lontra       | 1330                          | 0,686                | 0,783                   | 0,518                 |
| 40710001      | Belo Vale              | 2770                          | 0,648                | 0,495                   | 0,187                 |
| 41195050      | Rio Acima              | 1453                          | 0,650                | 0,800                   | 0,450                 |
| 41200430      | Raposos                | 1930                          | 0,378                | 0,822                   | 0,200                 |
| 41210001      | Caeté                  | 16                            | 0,330                | 0,506                   | -0,111                |
| 41340000      | Ponte Raul Soares      | 4860                          | 0,619                | 0,810                   | 0,619                 |
| 41380000      | Ponte Preta            | 564                           | 0,333                | 0,648                   | -0,028                |
| 41780002      | P.Juscelino – Jusante  | 3980                          | 0,640                | 0,569                   | 0,348                 |
| 41940001      | Ponte do Bicudo        | 2070                          | 0,444                | 0,611                   | 0,056                 |
| 43300001      | Fazenda Carvalho       | 3160                          | 0,793                | 0,713                   | 0,547                 |
| 60472235      | Piripau                | 127                           | 0,383                | 0,764                   | 0,198                 |
| 60478480      | Captação da Saneago    | 47.5                          | 0,309                | 0,455                   | 0,055                 |
| 60640000      | Montante de Goiânia    | 1740                          | 0,590                | 0,769                   | 0,359                 |
| 60850001      | F. Buriti do Prata     | 2460                          | 0,618                | 0,929                   | 0,546                 |

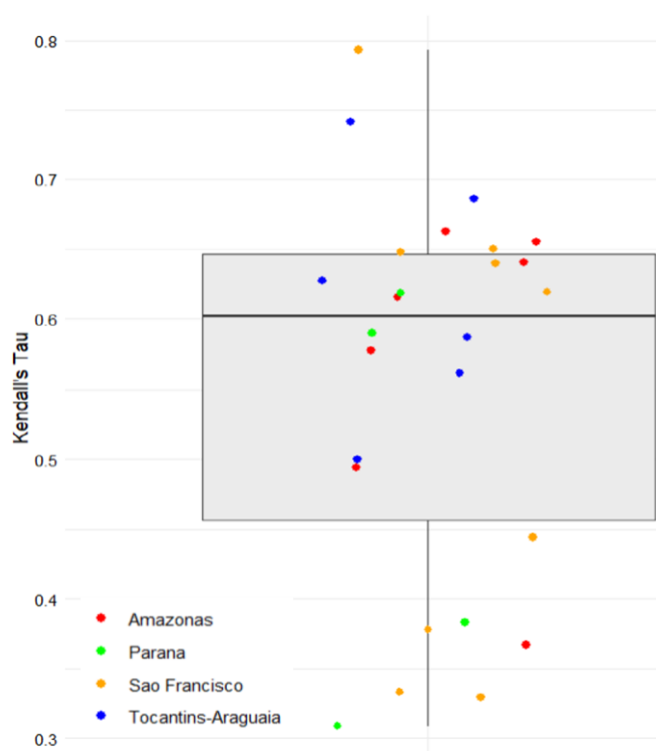
Fonte: o autor

**Tabela 10 - Mediana e intervalos relativos aos coeficientes de correlação obtidos entre as variáveis aleatórias avaliadas.**

| Bacia              | Pico x Volume            | Volume x Duração         | Pico x Duração            |
|--------------------|--------------------------|--------------------------|---------------------------|
| Amazonas           | 0,616<br>(0,367 – 0,663) | 0,692<br>(0,447 – 0,815) | 0,333<br>(0,141 – 0,532)  |
| Tocantins-Araguaia | 0,608<br>(0,500 – 0,742) | 0,654<br>(0,304 – 0,783) | 0,379<br>(0,050 – 0,410)  |
| São Francisco      | 0,619<br>(0,330 – 0,793) | 0,648<br>(0,495 – 0,822) | 0,200<br>(-0,111 – 0,619) |
| Paraná             | 0,487<br>(0,309 – 0,618) | 0,767<br>(0,455 – 0,929) | 0,278<br>(0,054 – 0,546)  |

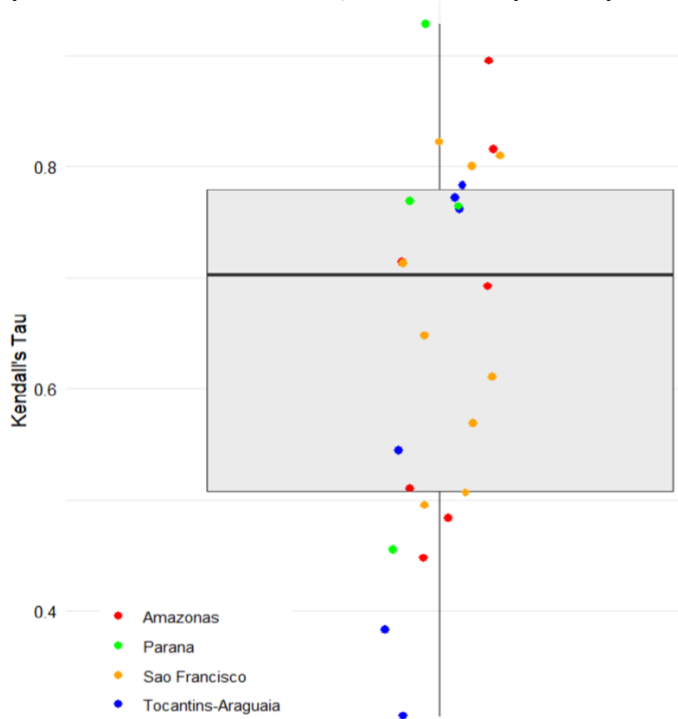
Fonte: o autor

**Figura 26 – Intervalo para o coeficiente de correlação de Kendall para os pares de Vazão de Pico x Volume.**



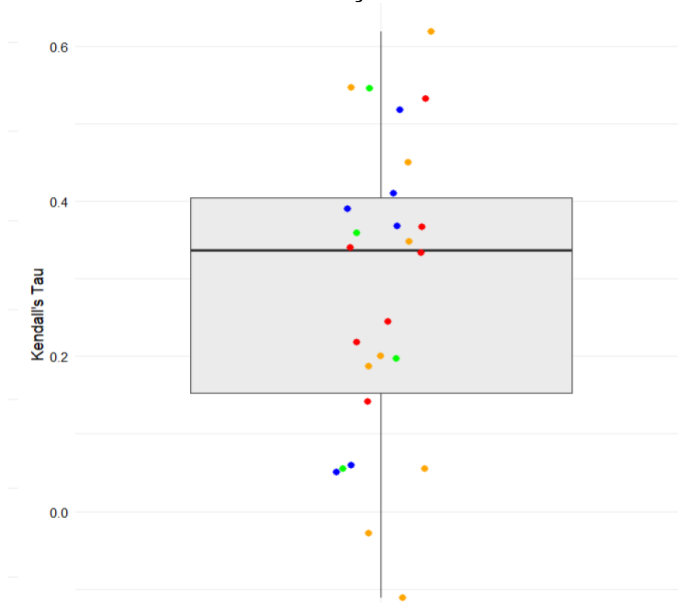
Fonte: o autor

**Figura 27 – Intervalo para o coeficiente de correlação de Kendall para os pares de Volume x Duração.**



Fonte: o autor

**Figura 28 – Intervalo para o coeficiente de correlação de Kendall para os pares de Vazão de Pico x Duração.**



Fonte: o autor

Verifica-se que, em consonância com a literatura científica, há maior correlação entre vazão-volume e volume-duração se comparadas à correlação entre volume-duração.

Vale aqui citar que, embora alguns dos trabalhos apresentem maior relação entre vazão-volume, a correlação entre volume-duração foi superior à correlação entre vazão-volume, o que é verificado, também, por trabalhos como Sraj, Bezak & Brilly (2014) e Lacko et al. (2022). Em encontro com todos os trabalhos consultados (Serinaldi & Grimaldi, 2006; Sraj, Bezak & Brilly, 2014; Lacko et al., 2022), a correlação entre vazão e duração foi a menor em relação aos demais pares.

Percebe-se que os valores obtidos são elevados, sobretudo para os pares de volume x duração, que chegam a 0,90 em alguns casos. Do ponto de vista do processo hidrológico avaliado, tal relação bem pronunciada faz sentido uma vez que, quanto maior a duração do evento, maior tende a ser o volume escoado na bacia durante a tormenta. Alguns autores, como Serinaldi & Grimaldi (2006), argumentam que o método de estimativa de escoamento de base pode exercer influência na dependência entre as variáveis. Entretanto, trabalhos como Kramakar & Simonovic (2009) e Ganguli & Reddy (2013) evidenciam que o comportamento da dependência é função não só de premissas na separação de eventos/escoamento de base, mas também de características intrínsecas às bacias hidrográficas e comportamento espacial dos eventos de precipitação.

Na Tabela 11 são detalhados os valores do coeficiente de correlação linear de Pearson entre os atributos físicos das bacias (Área de Drenagem, Densidade de Drenagem e Coeficiente de Compacidade) e os valores obtidos para o coeficiente de correlação de Kendall entre vazão de pico, volume escoado e duração. Verifica-se que a maior correlação se dá entre a correlação entre vazão de pico e duração e a Área de Drenagem, da ordem de 0,54, indicando uma correlação razoável entre as variáveis aleatórias. Quanto à Densidade de Drenagem, verifica-se valores baixos, que indicam uma não existência de correlação. O Coeficiente de Compacidade, por sua vez, apresenta correlações medianas para os pares que envolvem vazão de pico e baixa correlação para os pares que envolvem volume e duração. Tais resultados evidenciam que, para os dados em questão, fatores geométricos das bacias hidrográficas em questão podem exercer, ainda que de maneira limitada, influência sobre a ocorrência de eventos de cheia.

**Tabela 11 – Matriz de correlação para os valores do coeficiente de correlação de Kendall e atributos físicos das bacias.**

| -      | AD    | Dd   | kc   | Tal QV | Tal VD | Tal QD |
|--------|-------|------|------|--------|--------|--------|
| AD     | 1.00  |      |      |        |        |        |
| Dd     | -0.24 | 1.00 |      |        |        |        |
| kc     | 0.16  | 0.77 | 1.00 |        |        |        |
| Tal QV | 0.33  | 0.12 | 0.37 | 1.00   |        |        |
| Tal VD | 0.32  | 0.03 | 0.18 | 0.02   | 1.00   |        |
| Tal QD | 0.54  | 0.07 | 0.35 | 0.65   | 0.69   | 1.00   |

Fonte: o autor

#### 5.1.4 Ajuste das funções cópula

Com base nos parâmetros obtidos no item 5.1.2, foram estimadas as probabilidades associadas à vazão, volume e duração relativas aos eventos amostrados. Assim, foram ajustados os modelos de cópula para as famílias arquimedianas de Joe e Gumbel, empregando-se o método da Máxima Verossimilhança. O ajuste foi realizado por bacia hidrográfica, sendo utilizado o critério de informação de Akaike (AIC) para ranquear o desempenho dos modelos.

Na Tabela 3 e na Tabela 4 são discriminados os resultados do critério de informação de Akaike para os modelos gerados para os pares de pico x volume e volume x duração, respectivamente. Na aplicação do teste de Cramer-von-Mises, sob uma significância de 5,00%, a hipótese nula não foi rejeitada para nenhum dos modelos.

**Tabela 12 – Valores obtidos para o critério de informação de Akaike para as cópulas ajustadas para volume e duração.**

| Código   | AIC – Gumbel<br>(Volume x Duração) | AIC – Joe<br>(Volume x Duração) | AIC – Gumbel<br>(Vazão x Volume) | AIC – Joe<br>(Volume x Duração) |
|----------|------------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|
| 12510500 | -8,891                             | -5,443                          | -6,902                           | -5,443                          |
| 13439000 | -17,106                            | -13,833                         | -7,249                           | -13,833                         |
| 13450000 | -22,590                            | -15,447                         | -14,200                          | -15,447                         |
| 13572000 | -26,441                            | -17,377                         | -0,371                           | -17,377                         |
| 15124009 | -23,312                            | -17,016                         | 1,787                            | -17,016                         |
| 15564000 | -17,584                            | -12,618                         | -7,019                           | -12,618                         |
| 19985000 | -43,736                            | -39,840                         | -16,813                          | -39,840                         |
| 20100000 | -33,832                            | -30,374                         | -11,723                          | -30,374                         |
| 20200000 | 0,607                              | 1,680                           | -0,362                           | 1,680                           |
| 21210000 | -15,318                            | -10,631                         | -17,691                          | -10,631                         |
| 25090000 | -10,186                            | -9,849                          | 0,607                            | -9,849                          |
| 25100000 | -15,183                            | -11,349                         | -1,528                           | -11,349                         |
| 28200000 | -47,140                            | -42,708                         | -11,467                          | -42,708                         |
| 40710001 | -10,713                            | -8,231                          | -0,774                           | -8,231                          |

| Código   | AIC – Gumbel<br>(Volume x Duração) | AIC – Joe<br>(Volume x Duração) | AIC – Gumbel<br>(Vazão x Volume) | AIC – Joe<br>(Volume x Duração) |
|----------|------------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|
| 41195050 | -28,141                            | -22,055                         | -0,067                           | -22,055                         |
| 41200430 | -3,417                             | -1,150                          | 0,233                            | -1,150                          |
| 41210001 | -22,736                            | -19,209                         | 2,000                            | -19,209                         |
| 41340000 | 2,000                              | -0,091                          | -0,091                           | -0,091                          |
| 41380000 | -9,084                             | -8,217                          | -4,971                           | -8,217                          |
| 41780002 | -20,436                            | -14,570                         | -19,962                          | -14,570                         |
| 41940001 | -7,485                             | -8,300                          | 0,876                            | -8,300                          |
| 43300001 | -29,560                            | -21,603                         | -20,095                          | -21,603                         |
| 60472235 | 1,920                              | 2,000                           | 2,000                            | 2,000                           |
| 60478480 | 1,408                              | 1,976                           | 2,000                            | 1,976                           |
| 60640000 | -36,577                            | -29,380                         | 1,982                            | -29,380                         |
| 60850001 | -7,698                             | -7,476                          | 1,976                            | -7,476                          |

Fonte: o autor

**Tabela 13 – Parâmetros de cópula e dependências de cauda estimados.**

| Código   | Volume x Duração |                   | Vazão x Volume |                   |
|----------|------------------|-------------------|----------------|-------------------|
|          | $\hat{\theta}$   | $\hat{\lambda}_U$ | $\hat{\theta}$ | $\hat{\lambda}_U$ |
| 12510500 | 3,000            | 0,740             | 2,566          | 0,690             |
| 13439000 | 1,917            | 0,564             | 1,468          | 0,397             |
| 13450000 | 1,930            | 0,568             | 1,247          | 0,257             |
| 13572000 | 3,253            | 0,763             | 1,441          | 0,382             |
| 15124009 | 3,556            | 0,785             | 1,528          | 0,426             |
| 15564000 | 3,179            | 0,756             | 2,320          | 0,652             |
| 19985000 | 3,977            | 0,810             | 2,087          | 0,606             |
| 20100000 | 3,030            | 0,743             | 2,044          | 0,596             |
| 20200000 | 4,383            | 0,829             | 2,096          | 0,608             |
| 21210000 | 1,821            | 0,537             | 1,851          | 0,546             |
| 25090000 | 1,865            | 0,550             | 1,743          | 0,512             |
| 25100000 | 4,689            | 0,841             | 1,714          | 0,502             |
| 28200000 | 4,749            | 0,843             | 3,148          | 0,754             |
| 40710001 | 2,000            | 0,586             | 1,744          | 0,512             |
| 41195050 | 4,712            | 0,842             | 3,734          | 0,796             |
| 41200430 | 4,312            | 0,826             | 1,000          | 0,000             |
| 41210001 | 2,007            | 0,587             | 1,115          | 0,138             |
| 41340000 | 2,069            | 0,602             | 1,508          | 0,416             |
| 41380000 | 2,384            | 0,663             | 2,837          | 0,723             |
| 41780002 | 1,359            | 0,335             | 1,673          | 0,487             |
| 41940001 | 3,681            | 0,793             | 2,965          | 0,737             |
| 43300001 | 1,531            | 0,427             | 1,307          | 0,300             |
| 60472235 | 3,000            | 0,917             | 2,566          | 0,236             |
| 60478480 | 5,258            | 0,859             | 4,161          | 0,819             |
| 60640000 | 8,698            | 0,740             | 1,221          | 0,690             |
| 60850001 | 1,917            | 0,564             | 1,468          | 0,397             |

Fonte: o autor

Na Tabela 14 são apresentados o valor mediano e os valores máximo e mínimo de parâmetro de cópula, que é diretamente proporcional à dependência na cauda superior (Equação (24)).

Para a dependência entre pico/volume e volume/duração, percebe-se que as dependências de cauda para a bacia amazônica são superiores às demais, sendo inferior para a bacia do São Francisco. Muitos são os fatores intervenientes nesse fato, por exemplo, uma maior uniformidade na bacia amazônica, do ponto de vista de uso do solo, e, além de distintos usos do solo, uma maior dispersão para os dados no São Francisco, que reverberam em menores valores. Vale aqui levantar uma limitação do presente estudo, que é a não possibilidade de apreciação dos eventos de precipitação geradores dos eventos em questão, o que, possivelmente, exerce influência nos resultados aqui discutivos.

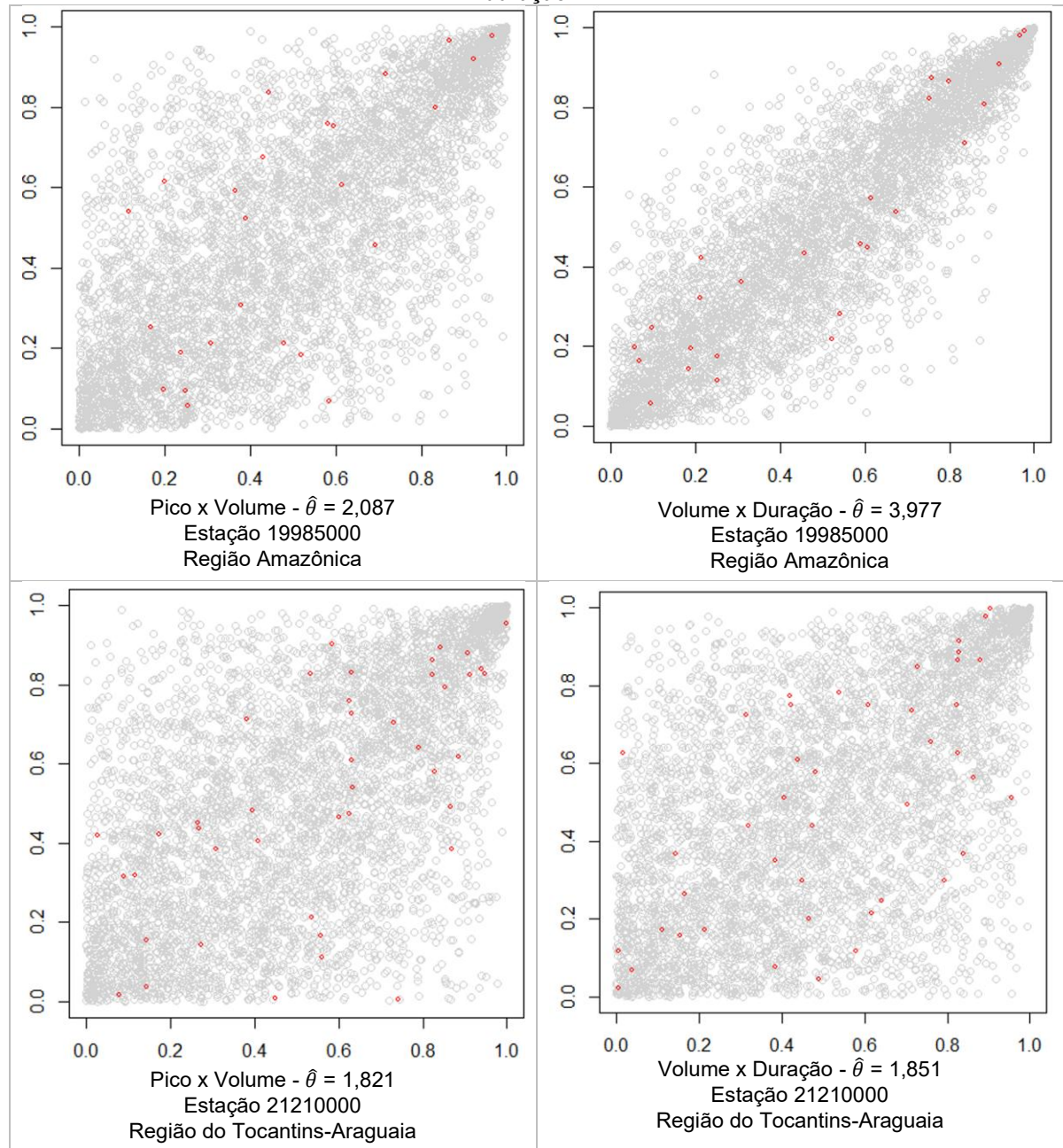
**Tabela 14 - Valores medianos e intervalos relativos aos parâmetros estimados por bacia.**

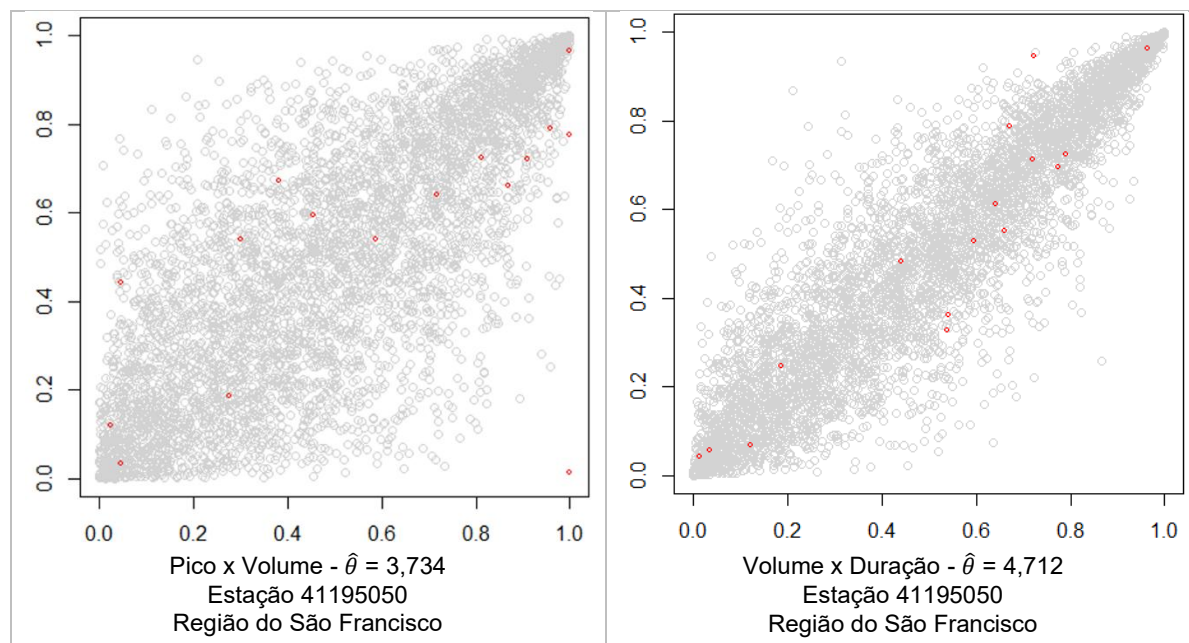
| Variável         | Parâmetros de Cópula Estimados ( $\hat{\theta}$ ) - Modelo de Gumbel |                          |                          |                          |                          |
|------------------|----------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
|                  | Amazonas                                                             | Tocantins-Araguaia       | São Francisco            | Paraná                   | Brasil                   |
| Pico x Volume    | 2,198<br>(1,528 – 2,604)                                             | 2,034<br>(1,714 – 3,148) | 1,863<br>(1,000 – 3,734) | 1,973<br>(1,610 – 4,161) | 1,948<br>(1,000 – 4,161) |
| Volume x Duração | 3,080<br>(1,875 – 4,273)                                             | 2,641<br>(1,821 – 4,749) | 2,565<br>(1,359 – 4,712) | 4,689<br>(1,531 – 8,698) | 2,319<br>(1,359 – 8,698) |

Fonte: o autor

Na Figura 29 são retratados alguns dos valores de probabilidades simulados a partir das cópulas Gumbel ajustadas por bacia. É perceptível que, para valores maiores de parâmetros de cópula ( $\hat{\theta}$ ), existe maior concentração dos pares para elevadas probabilidades de não excedência, ou seja, os pares encontram-se com menores dispersões na cauda superior, cuja estatística representativa é aquela apresentada no item 3.1.4 ( $\hat{\lambda}_U$ ).

**Figura 29 – Geração de pares a partir das cópulas ajustadas com dados de vazão x volume e volume x duração.**





Fonte: o autor

Os modelos ajustados pela cópula Gumbel, para a maior parte dos casos, resultaram valores inferiores de AIC em relação à cópula Joe, indicando que o referido modelo ajusta de modo mais adequado os pares de probabilidade, com a menor complexidade. Essa conclusão é consistente com os trabalhos de Sraj, Bezak & Brilly (2014), Tsakiris, Kordalis & Tsakiris (2015), Brunner et al. (2017), Rizwan et al. (2019), entre outros. Tal fato se dá pela existência da dependência na cauda superior, que é condizente com a finalidade da análise de frequência multivariada para máximos em hidrologia.

Somado a isso, vale argumentar que a importância do parâmetro de cópula reside no fato de que ele representa a tendência de ocorrência simultânea de eventos extremos em relação a duas variáveis aleatórias (Serinaldi, Bárdossy & Kilsby, 2014). Isso vai ao encontro com o argumentado por Chebana (2023): a dependência de cauda assume um papel importante, combinando valores extremos para distintas variáveis aleatórias.

É válido clarificar que, em função dos resultados obtidos na presente aplicação e em trabalhos científicos ao redor do mundo, os ajustes para dados máximos de vazão, volume e duração, de forma geral, são mais adequados para as cópulas com dependência na cauda superior (Gumbel e Joe). Esses modelos são mais fiéis o

fenômeno físico em estudo, uma vez que possibilitam, quanto maior seja a dependência de cauda, a obtenção de quantis máximos, isto é, baixas probabilidades de excedências para ambas as variáveis em questão, o que não é possível em cópulas com dependência na cauda inferior e cópulas simétricas.

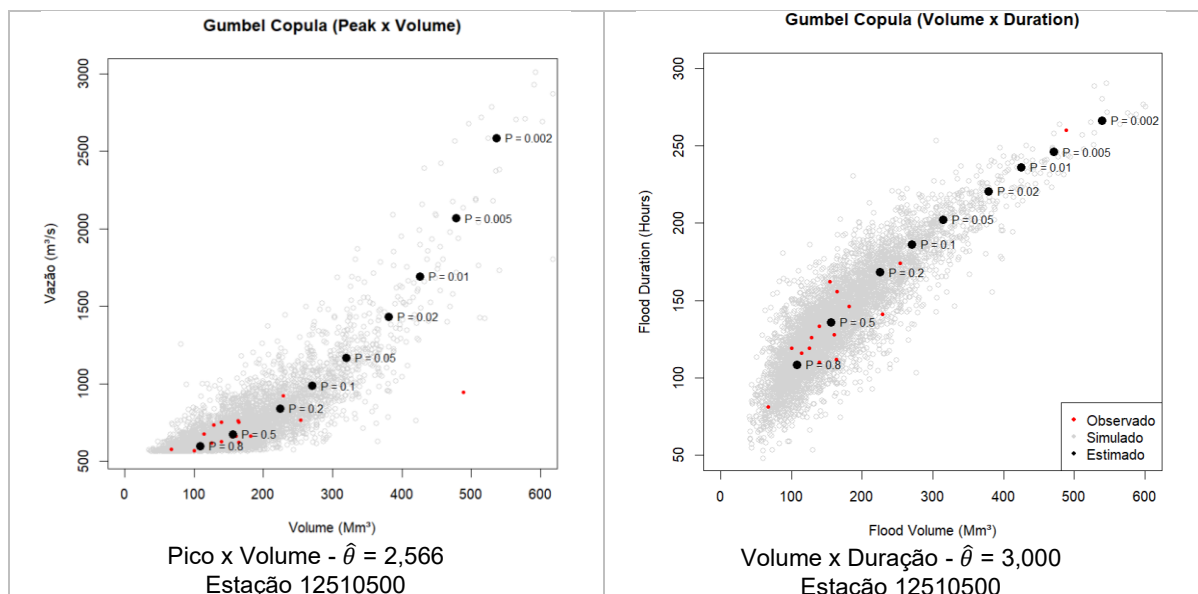
As constatações apresentadas acima, canceladas pela literatura científica, evidenciam que a modelagem multivariada de variáveis hidrológicas não é trivial. Assim, deve-se considerar não apenas o teste de hipóteses ou os critérios de ranqueamento, mas o fenômeno físico modelado, a qualidade dos dados e as características das funções cópula determinadas como candidatas.

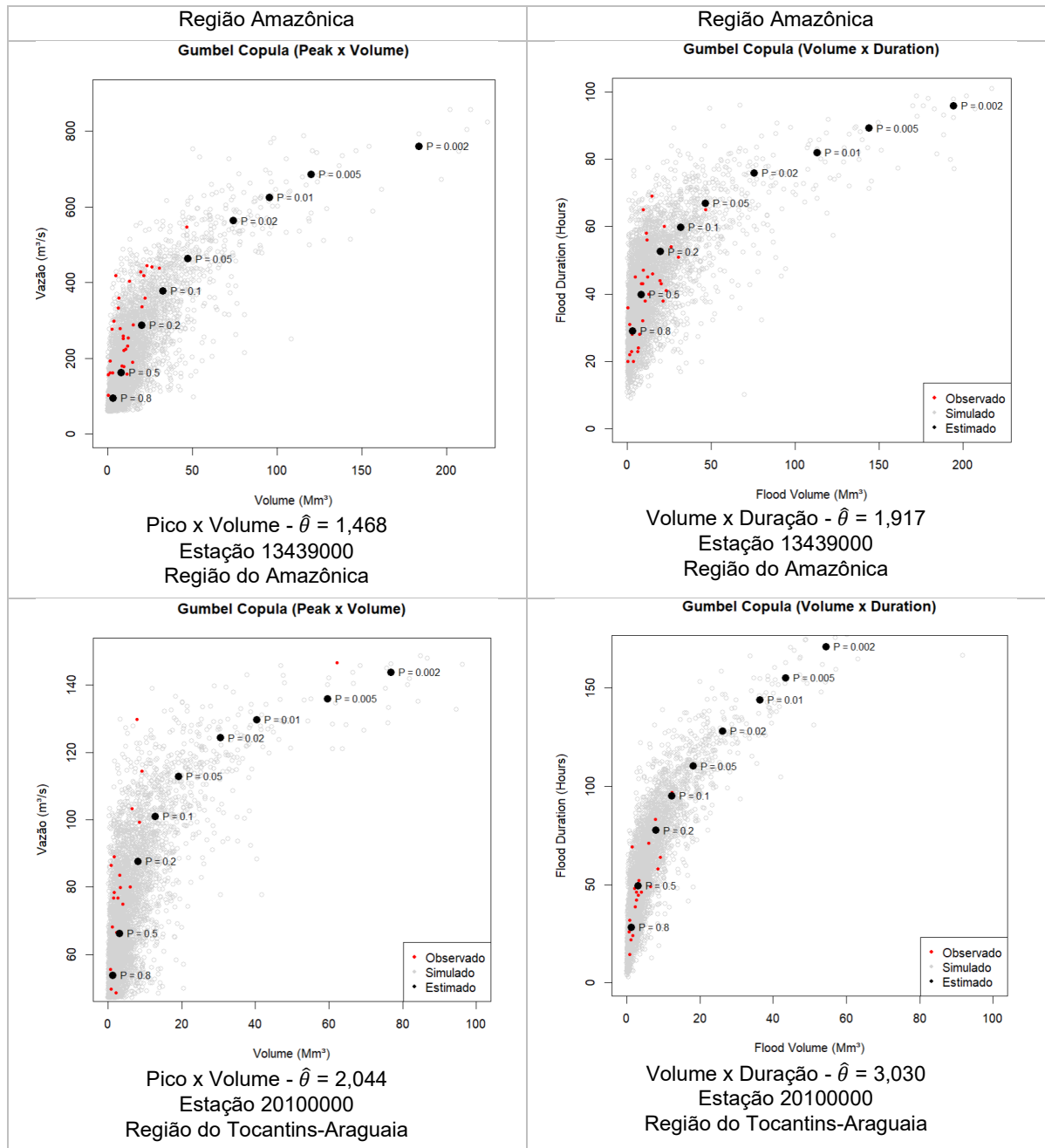
### 5.1.5 Estimativas de quantis

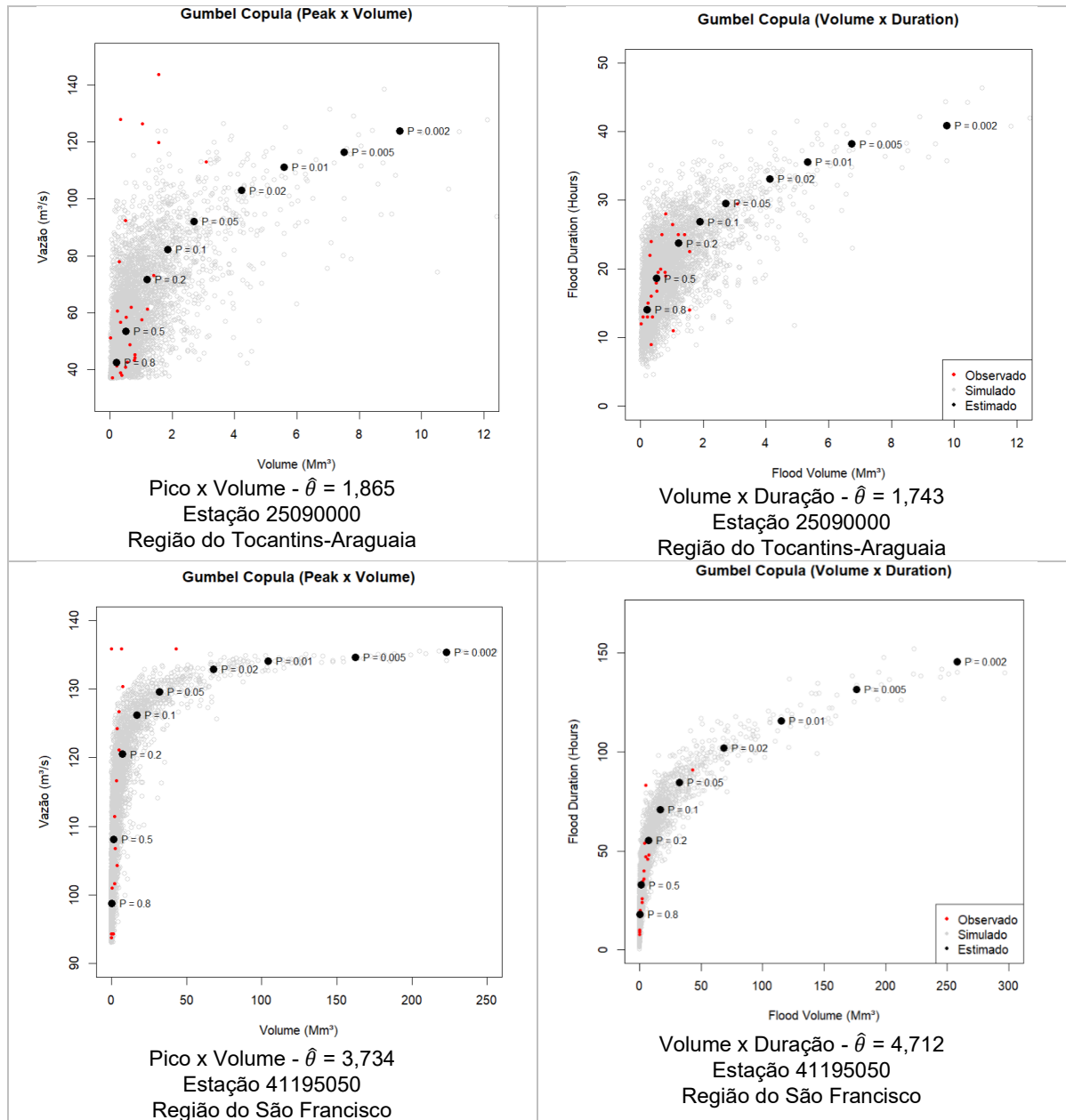
Como descrito no item 4.1.6, foram estimados quantis para diferentes níveis de probabilidade de superação, sem entrar no mérito de períodos de retorno multivariados. A finalidade é discutir, dentre diferentes parâmetros de cópula, parâmetros das distribuições marginais e regiões, as diferenças entre os quantis gerados pelo modelo Vazão de Pico x Volume e Volume x Duração.

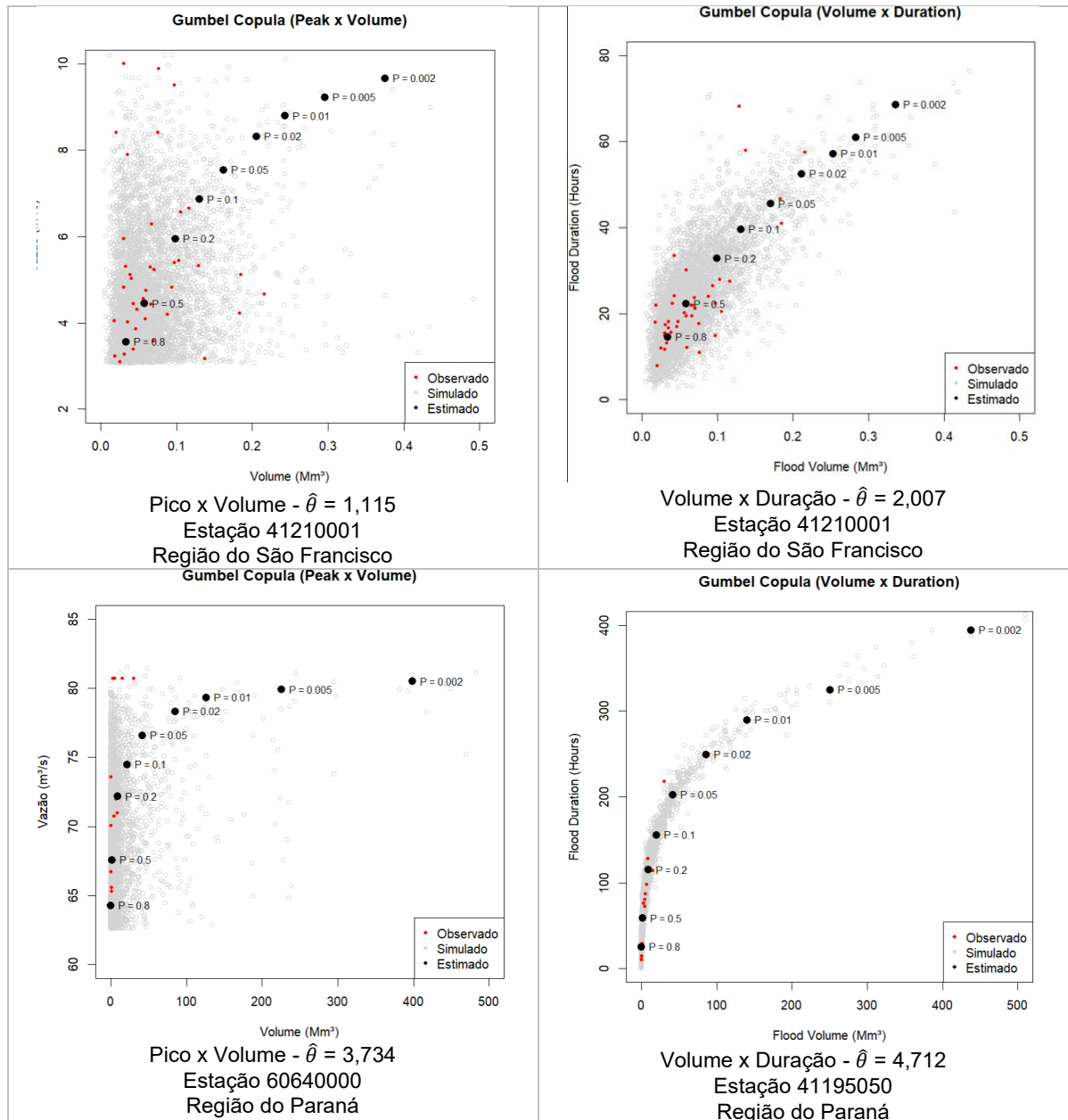
Na Figura 30 são apresentadas estimativas de quantis por probabilidade conjunta de excedência, em conjunto com pares relativos a eventos observados nas bacias e pares obtidos via simulação.

**Figura 30 – Estimativas de quantis por probabilidades.**









Fonte: o autor

Para os casos de Pico x Volume, de modo geral, percebe-se ligeira variação na distribuição gráfica dos quantis, sendo perceptível um comportamento assintótico com relação à vazão na grande parte dos casos. Para a estação 12510500, entretanto, há distinção nessa forma, havendo crescimento exponencial dos valores de vazão. Isso se dá pois, nessa bacia em específico, o parâmetro de forma da distribuição marginal da vazão (Generalizada de Pareto) assume um valor superior a zero ( $k > 0$ ), atribuindo comportamento distinto à cauda superior da distribuição, como apresentado por From & Suthakaran Ratnasingam (2022).

Já nos casos dos pares Volume x Duração, o comportamento é parecido entre as estações avaliadas. Isso se dá pela simplicidade e padrão das distribuições marginais (Log-Normal e Gama), que não apresentaram variações importantes como no caso da Generalizada de Pareto para os dados de vazão.

Outro fator a se discutir é que, conforme já apreciado por Serinaldi (2013), a incerteza relacionada à estimativa dos quantis multivariados está ligada aos valores de parâmetros de cópula ( $\hat{\theta}$ ) e, por conseguinte, aos valores de dependência na cauda superior ( $\hat{\lambda}_U$ ). Isso pode ser auferido com base na dispersão dos valores simulados nos gráficos apresentados na Figura 30. Vale frisar que a quantificação de incertezas relativas à estimação desses quantis não é uma das finalidades desta dissertação, sendo uma válida recomendação para futuras pesquisas.

Por fim, não são verificadas diferenças significativas entre os quantis estimados para o volume escoado, variável comum entre os dois modelos simulados, não havendo padrão regional ou variações em relação à probabilidade de excedência associada. As diferenças entre quantis de volumes, em geral, são inferiores a 10%, chegando, isoladamente, a 30% em poucos casos.

## **5.2 Avaliação dos modelos de cópula regionais**

Neste item, são apresentados e discutidos os resultados obtidos para o segundo objetivo específico, relativo aos modelos de cópula regionais.

### **5.2.1 Delimitação das regiões homogêneas**

Com base nos procedimentos metodológicos descritos no item 4.2, foram obtidas duas regiões homogêneas dentre os 26 postos que constituem os dados do presente trabalho. Na primeira tentativa, foram testadas regiões homogêneas na região do alto São Francisco, na região centro-oeste e na região amazônica.

Devido à elevada distância, somada ao baixo número de bacias, as regiões homogêneas testadas na bacia amazônica não atenderam aos critérios de discordância e homogeneidade estabelecidos por Hosking & Wallis (1997). Assim, não houve a possibilidade de obtenção de um grupo de estações homogêneas.

Para a região das sub-bacias 40 e 41, no alto São Francisco, os níveis de discordância, em função de vazão, volume e duração, resultaram em valores inferiores ao admissível para todas as bacias. Além disso, a homogeneidade, para todos os casos, foi inferior a um, indicando homogeneidade no grupo formado pelos postos 40710001, 41195050, 41200430, 41210001, 41340000, 41380000, 41780002, 41940001. Denomina-se tal região homogênea como “Região 01” na discussão dos resultados deste item e do item 5.3.

Na região centro-oeste, cabeceira das bacias do Tocantins-Araguaia, São Francisco e Paraná, foram testadas combinações com todas as bacias dessas regiões citadas. O grupo formado por 25100000, 25090000, 20100000, 20200000, 21210000, 43300001, 60640000, 60478480 apresentou valores de discordância válidos e valores máximos de homogeneidade entre um e dois, o que evidencia região possivelmente homogênea, em função de vazão, volume e duração. Esse grupo é denominado como “Região 02” para a discussão dos resultados deste e do item 5.3.

### 5.2.2 Estimativa dos parâmetros de cópula regionais

Com base na Equação (30), os parâmetros de cópula foram estimados tanto para as regiões homogêneas quanto para as regiões hidrográficas. Tais parâmetros, juntamente com as respectivas dependências de cauda, são discretizados na Tabela 15.

**Tabela 15 – Parâmetros de cópula e dependências de cauda estimados com base no *framework* regional.**

| Região             | Volume x Duração |                   | Vazão x Volume |                   |
|--------------------|------------------|-------------------|----------------|-------------------|
|                    | $\hat{\theta}$   | $\hat{\lambda}_U$ | $\hat{\theta}$ | $\hat{\lambda}_U$ |
| Região 01          | 2,471            | 0,676             | 1,770          | 0,521             |
| Região 02          | 2,822            | 0,722             | 1,795          | 0,529             |
| Amazônia           | 3,080            | 0,748             | 2,198          | 0,629             |
| Tocantins-Araguaia | 2,641            | 0,700             | 2,034          | 0,594             |
| São Francisco      | 2,565            | 0,690             | 1,863          | 0,549             |
| Paraná             | 4,689            | 0,841             | 1,973          | 0,579             |

Fonte: o autor

A Região 01, que faz parte da Bacia do São Francisco, apresenta parâmetros de cópula similares aos obtidos para a região hidrográfica, embora representem menores valores de dependência na cauda superior. Tal constatação mostra que, embora a Região 01 seja homogênea do ponto de vista de geração de escoamento superficial, isso não significa que as dependências sejam superiores em relação à região hidrográfica. No caso da Região 02, que apresenta bacias do São Francisco, Paraná e Tocantins-Araguaia, ocorre o contrário. Os valores obtidos para a região homogênea são superiores em relação às bacias do São Francisco e Tocantins-Araguaia, e inferiores para a bacia do Rio Paraná, que apresenta valores bem maiores que os demais.

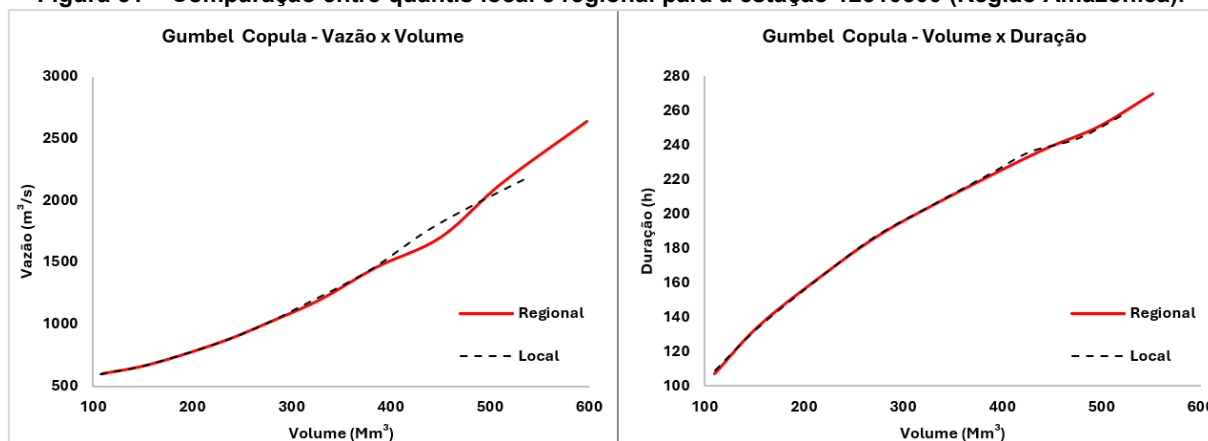
Como já citado, não foi possível a obtenção de regiões hidrologicamente homogêneas na região amazônica. Entretanto, a estimativa do parâmetro de cópula para a região hidrográfica em questão mostra a mesma tendência que a mostrada no item 5.1.4, sendo a segunda maior no caso do volume x duração e a maior no caso da vazão de pico x volume escoado.

### 5.2.3 Estimativa dos quantis regionais

Por fim, foi conduzida a estimação de quantis, com base nos parâmetros de cópula local e regional (item 5.2.2), visando a comparação entre as envoltórias geradas a partir de tais procedimentos. Assim, foram definidos quatro postos, com pelo menos um localizado em cada região hidrográfica, para viabilizar a discussão embasada na literatura científica existente.

Na bacia localizada em região amazônica (Ponte do Rio Liberdade - 12510500), percebe-se que, para as maiores probabilidades de excedência, existe maior concordância entre os quantis estimados. Na cauda superior, entretanto, há discrepâncias importantes entre as variáveis estimadas, sobretudo a vazão de pico, com cerca de 500 m<sup>3</sup>/s de diferença. Isso é explicado pela diferença entre o parâmetro de cópula local ( $\hat{\theta} = 2,556$ ) e aquele estimado regionalmente ( $\hat{\theta} = 2,198$ ), entretanto, o fato de não ser possível a obtenção de regiões hidrologicamente homogêneas na região amazônica fazem com que haja maior discrepância entre as curvas, o que corrobora com Chebana & Ouarda (2009) e M.-A. Bem Aissia et al. (2015).

**Figura 31 – Comparação entre quantis local e regional para a estação 12510500 (Região Amazônica).**

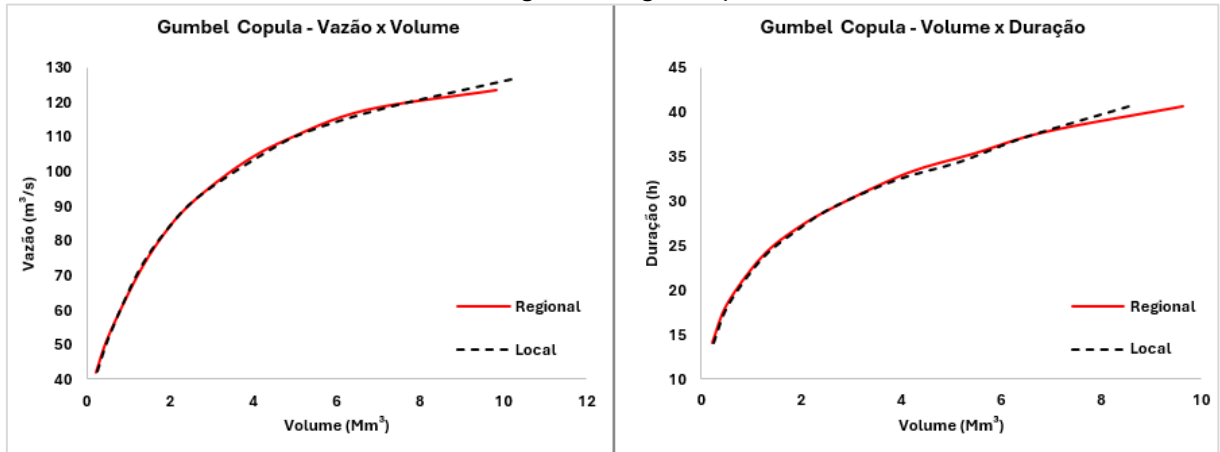


Fonte: o autor

Na bacia da região do Tocantins-Araguaia (Figura 32), percebe-se maior aderência em relação às curvas local e regional, sendo verificada, também, discrepância na região da cauda superior. De maneira similar, ocorre na bacia do São Francisco (Figura 33) e do Paraná (Figura 34). A constatação das diferenças de quantis na cauda superior quando da variação do parâmetro de cópula vai ao encontro com o

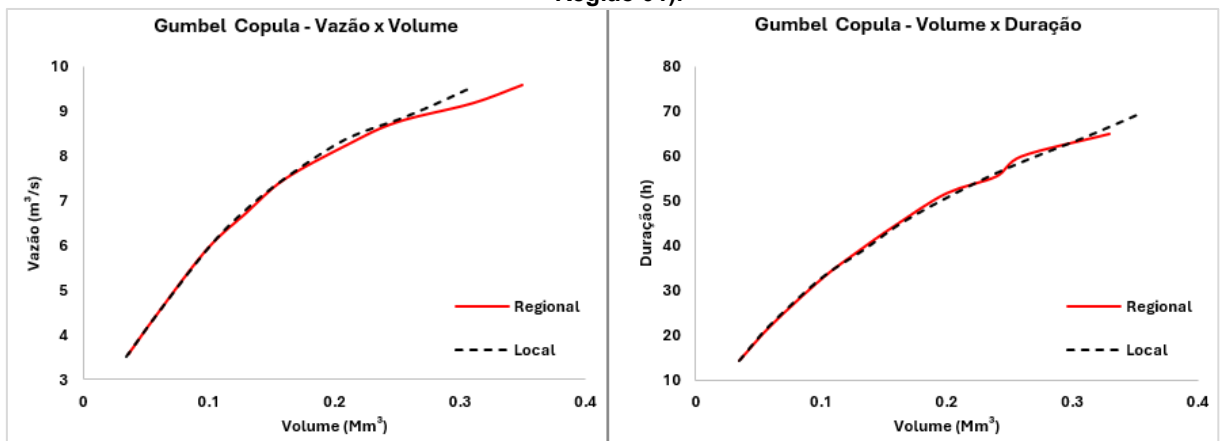
constatado por Poulin et al. (2007) e Serinaldi (2013), evidenciando a sensibilidade dos quantis extremos frente a variação do parâmetro de cópula.

**Figura 32 – Comparação entre quantis local e regional para a estação 25090000 (Região do Tocantins-Araguaia – Região 02).**



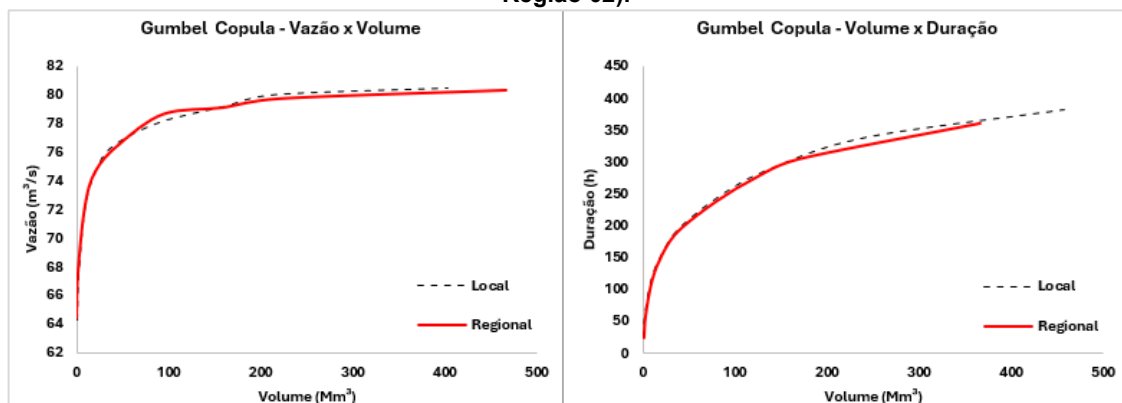
Fonte: o autor

**Figura 33 – Comparação entre quantis local e regional para a estação 41210001 (Região do São Francisco – Região 01).**



Fonte: o autor

**Figura 34 – Comparação entre quantis local e regional para a estação 60640000 (Região do Paraná – Região 02).**



Fonte: o autor

### 5.3 Modelagem da forma dos hidrogramas

Neste item, são apresentados e discutidos os resultados obtidos para o terceiro objetivo específico, que diz respeito à modelagem da forma de hidrogramas normalizados a partir de uma função densidade de probabilidade específica. Os procedimentos metodológicos adotados para tal são apresentados no item 4.3.

Após a normalização dos hidrogramas, de modo que o suporte seja finito (0 a 1) e a área sob o gráfico seja unitária, foram ajustadas as funções densidade de probabilidade Gama, Log-normal e Beta aos hidrogramas médios ajustados por bacia. A métrica considerada para a avaliação dos ajustes foi a raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE), cujos valores obtidos, por estação, são discretizados na Tabela 16, cujos resultados evidenciam que, em 12 das bacias, o valor de RMSE da distribuição Beta é inferior às demais, evidenciando um melhor ajuste.

**Tabela 16 – Valores da raiz do erro quadrático médio das distribuições consideradas.**

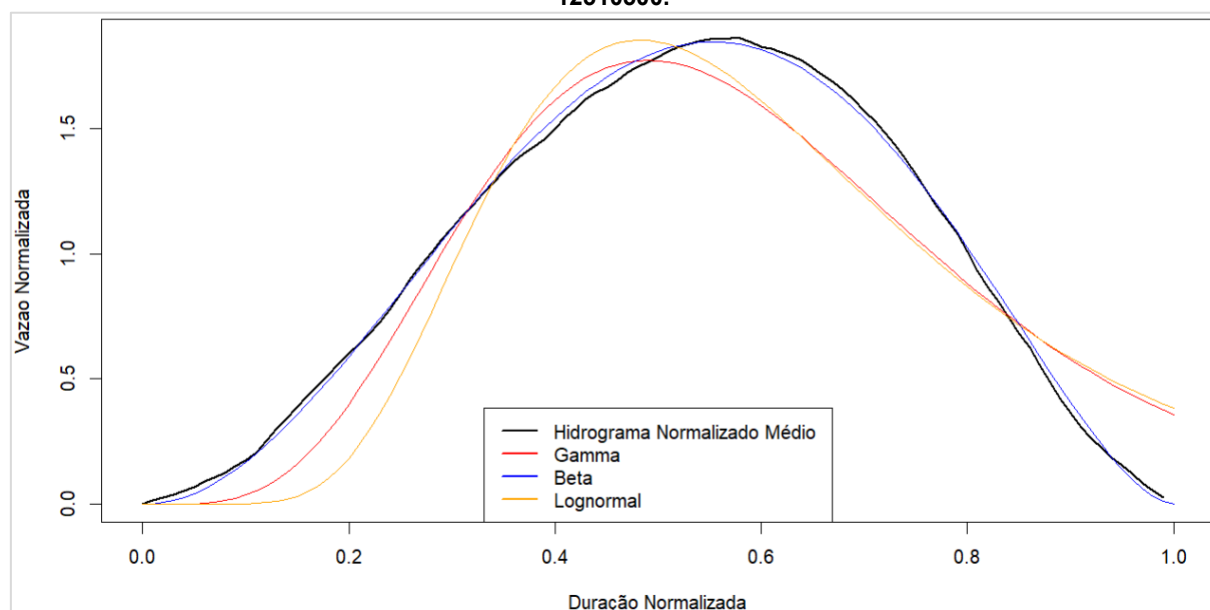
| <b>Código</b> | <b>Nome</b>            | <b>Área de Drenagem (km<sup>2</sup>)</b> | <b>RMSE Log-Normal</b> | <b>RMSE Beta</b> | <b>RMSE Gama</b> |
|---------------|------------------------|------------------------------------------|------------------------|------------------|------------------|
| 12510500      | Ponte do Rio Liberdade | 3450                                     | 0,82                   | 0,87             | 1,01             |
| 13439000      | Aldeia dos Patos       | 2100                                     | 1,14                   | 0,88             | 1,48             |
| 13450000      | Assis Brasil           | 3760                                     | 0,91                   | 0,68             | 1,30             |
| 13572000      | Espalha                | 3210                                     | 0,89                   | 0,67             | 1,14             |
| 15124009      | Cabixi                 | 3600                                     | 0,83                   | 1,02             | 0,80             |
| 15564000      | Jaruaru                | 133                                      | 0,95                   | 0,61             | 1,22             |
| 19985000      | Pacajás                | 2682                                     | 0,99                   | 0,95             | 0,93             |
| 20100000      | Jaraguá                | 1970                                     | 0,91                   | 0,63             | 1,23             |
| 20200000      | Uruana                 | 3700                                     | 0,73                   | 1,40             | 1,11             |
| 21210000      | Fazenda Espírito Santo | 533                                      | 0,81                   | 0,76             | 1,10             |
| 25090000      | Fazenda Paciência      | 103                                      | 1,52                   | 2,05             | 2,03             |
| 25100000      | B. Cachoeira Grande    | 229                                      | 1,06                   | 0,98             | 1,56             |
| 28200000      | Ponte Rio Lontra       | 1330                                     | 0,92                   | 1,11             | 1,28             |
| 40710001      | Belo Vale              | 2770                                     | 1,22                   | 0,91             | 1,19             |
| 41195050      | Rio Acima              | 1453                                     | 0,89                   | 0,87             | 1,33             |
| 41200430      | Raposos                | 1930                                     | 0,91                   | 0,69             | 1,31             |
| 41210001      | Caeté                  | 16                                       | 0,73                   | 0,82             | 1,15             |
| 41340000      | Ponte Raul Soares      | 4860                                     | 0,70                   | 1,06             | 1,03             |
| 41380000      | Ponte Preta            | 564                                      | 0,77                   | 0,93             | 0,87             |
| 41780002      | P.Juscelino – Jusante  | 3980                                     | 0,73                   | 1,02             | 1,14             |
| 41940001      | Ponte do Bicudo        | 2070                                     | 0,95                   | 0,68             | 1,09             |
| 43300001      | Fazenda Carvalho       | 3160                                     | 1,03                   | 0,46             | 1,34             |
| 60472235      | Piripau                | 127                                      | 0,00                   | 0,81             | 0,00             |

| Código   | Nome                | Área de Drenagem (km <sup>2</sup> ) | RMSE Log-Normal | RMSE Beta | RMSE Gama |
|----------|---------------------|-------------------------------------|-----------------|-----------|-----------|
| 60478480 | Captação da Saneago | 47.5                                | 0,00            | 1,75      | 0,00      |
| 60640000 | Montante de Goiânia | 1740                                | 1,22            | 1,21      | 1,04      |
| 60850001 | F. Buriti do Prata  | 2460                                | 0,90            | 0,87      | 1,04      |

Fonte: o autor

Além dos valores de RMSE, foi realizada uma avaliação visual dos ajustes das distribuições aos hidrogramas normalizados. Conforme constatado no item 5.1.1, existe variabilidade em relação à forma dos eventos de cheia entre as diferentes regiões, havendo hidrogramas simétricos e assimétricos à esquerda e à direita. A Figura 35 evidencia que a distribuição Beta se ajusta de maneira satisfatória a um hidrograma com assimetria à esquerda.

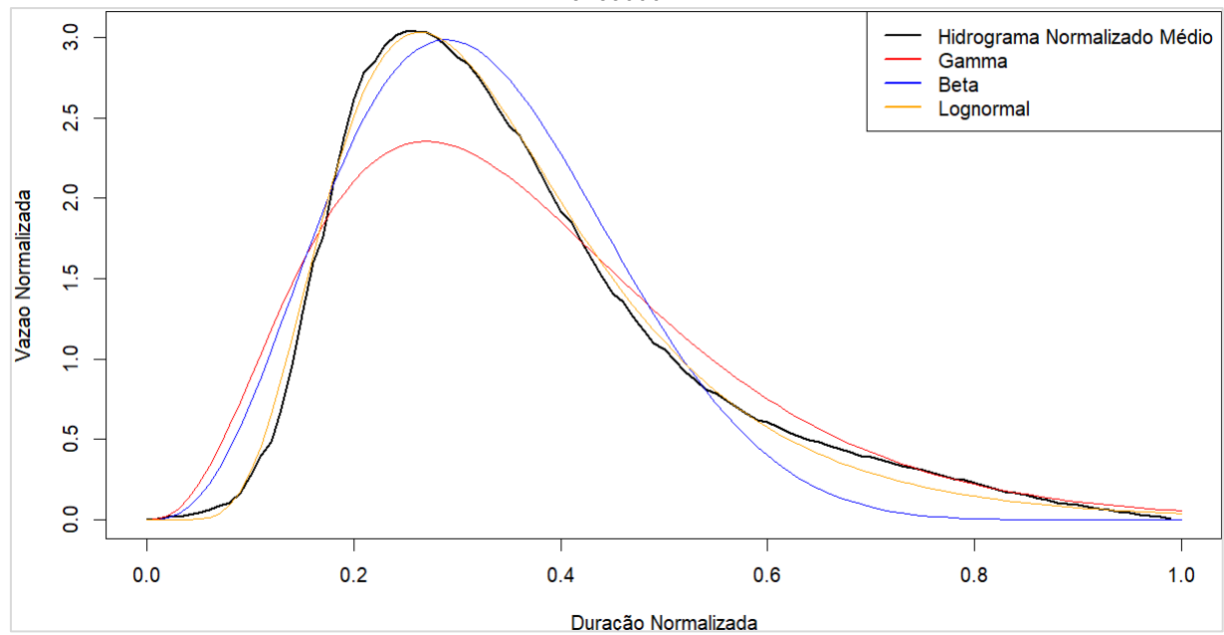
**Figura 35 – Ajuste das funções densidade de probabilidade ao hidrograma normalizado médio da estação 12510500.**



Fonte: o autor

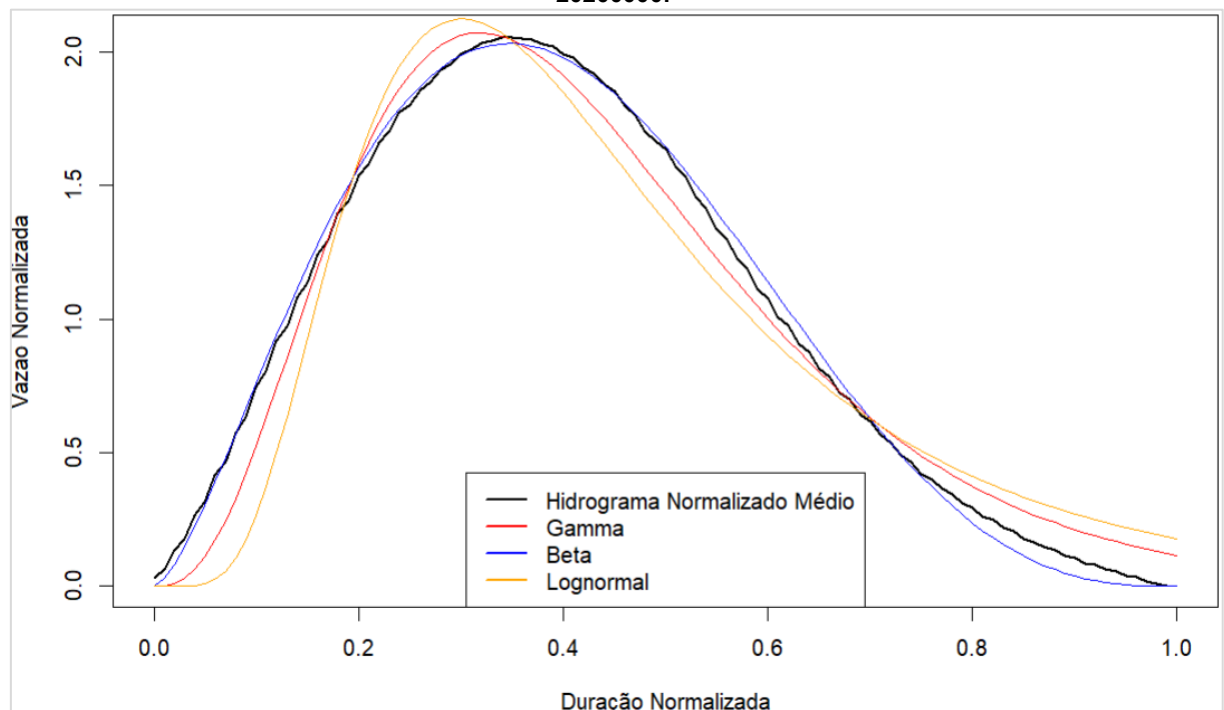
Já a Figura 36 mostra que a função Log-Normal se ajusta melhor a um hidrograma com maior assimetria à direita e pico mais achatado. A Figura 37 e a Figura 38 evidenciam que, para uma assimetria não tão pronunciável à direita, a função Beta se ajusta bem aos hidrogramas médios.

**Figura 36 – Ajuste das funções densidade de probabilidade ao hidrograma normalizado médio da estação 13439000.**



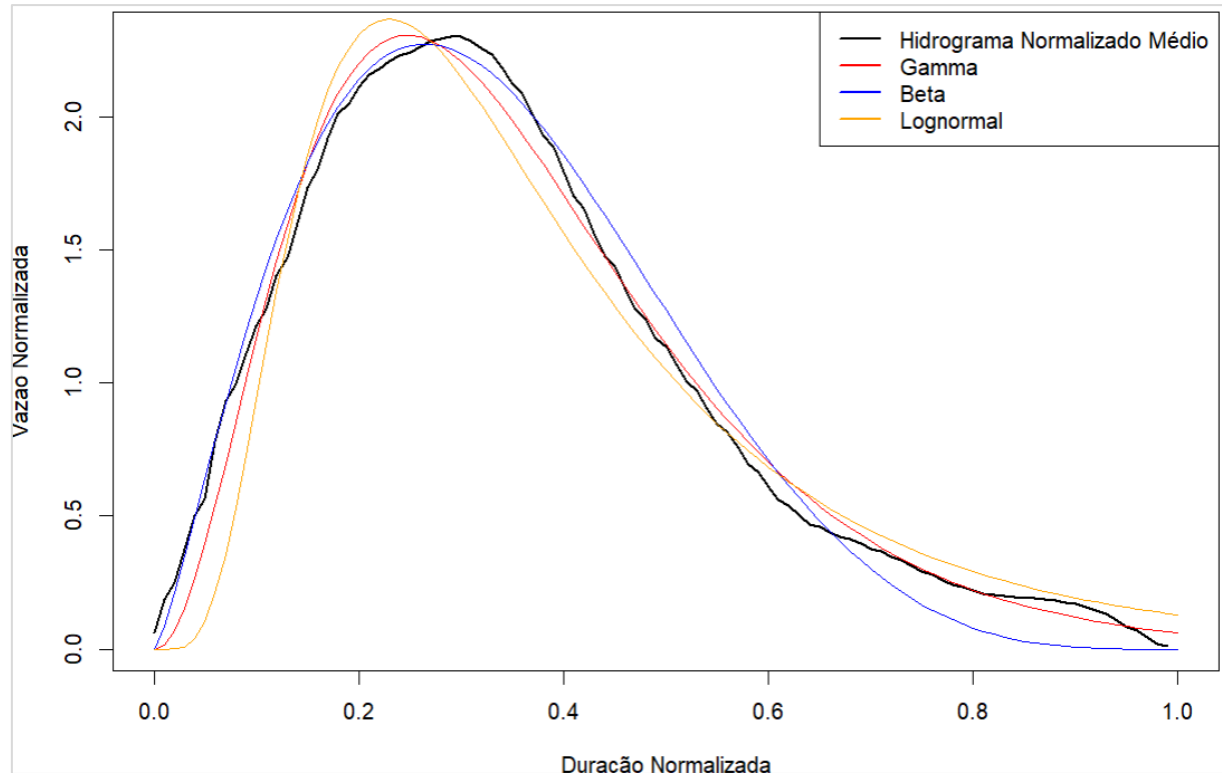
Fonte: o autor

**Figura 37 – Ajuste das funções densidade de probabilidade ao hidrograma normalizado médio da estação 20200000.**



Fonte: o autor

**Figura 38 – Ajuste das funções densidade de probabilidade ao hidrograma normalizado médio da estação 41195050.**



Fonte: o autor

Os resultados mostrados até então evidenciam forte vantagem à distribuição Beta para a representação da forma de ascensão, recessão e tempo de pico de hidrogramas de cheia em distintas bacias brasileiras. Tanto eventos com assimetria positiva ou negativa quanto simétricos são bem modelados a partir da referida distribuição. Tal constatação foi obtida uma vez das diferenças existentes entre os regimes hidroclimáticos das regiões estudadas, não obstante à diferença de magnitude das bacias hidrográficas e possíveis diferenças de uso do solo, o que não foi avaliado na presente dissertação.

Trabalhos como Brunner et al. (2017) e Fischer & Schumann (2023) apresentam a distribuição Log-Normal como a mais adequada para a modelagem da forma de hidrogramas nas regiões da Suíça e Alemanha, respectivamente. Uma possível justificativa para a diferença entre as constatações do presente trabalho e dos trabalhos citados é que os eventos modelados nas regiões supramencionadas não têm a variabilidade aqui apresentada, sendo, predominantemente, muito assimétricos

à direita, sobressaindo a distribuição Log-Normal, conforme representado na Figura 36.

Além disso, é perceptível que, para as funções Log-normal e Gama, a não existência de um suporte finito é um ponto de limitação, uma vez que os hidrogramas modelados com essas distribuições não têm ordenada igual a zero quanto o tempo normalizado vale 1 (um). Em contrapartida, a distribuição Beta, por apresentar suporte finito entre 0 e 1, respeita a condição de contorno imposta de as coordenadas iniciais e final dos hidrogramas normalizados serem (0,0) e (1,0), respectivamente.

As constatações aqui apresentadas são consistentes com o observado por Serinaldi & Grimaldi (2011), que argumentam que a função Beta é a principal opção para hidrogramas adimensionais, podendo não ser adequada para alguns casos específicos, sobretudo quando a forma tem comportamento segundo uma distribuição leptocurtica, ou seja, com pico mais bem pronunciado. Isso pode ser verificado na Figura 36, em que a distribuição Log-Normal foi mais adequada para a modelagem.

Em suma, percebe-se que a modelagem de forma dos hidrogramas adimensionais não é uma etapa trivial, não havendo uma família que seja universalmente mais aceita ou adequada para tal avaliação. Em funções de características geométricas, geomorfológicas e hidroclimáticas das bacias hidrográficas, que exercem influência direta na resposta frente aos eventos de enchente, o processo de representação de um hidrograma pode ser realizado por meio de variadas opções, que devem ser ponderadas.

Adotando-se, por conseguinte, a distribuição Beta para os dados em questão, foram obtidos mais resultados concernentes ao terceiro objetivo específico. Os parâmetros de forma da distribuição Beta, tempo de pico, assimetria e curtose são discretizados por bacia na Tabela 17, cujos hidrogramas adimensionais, modelados pela distribuição Beta, são apresentados na Figura 39.

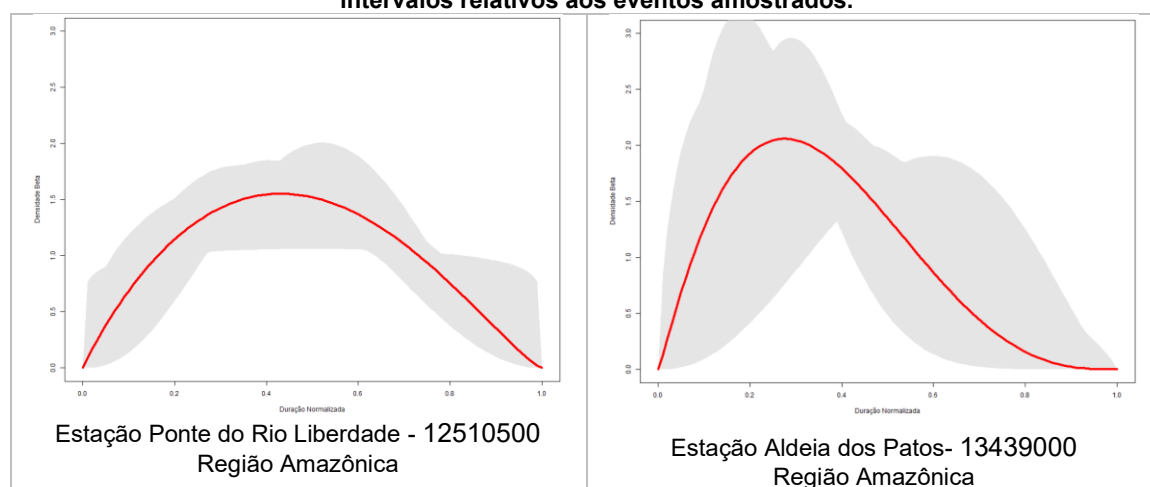
**Tabela 17 – Valores da raiz do erro quadrático médio das distribuições consideradas.**

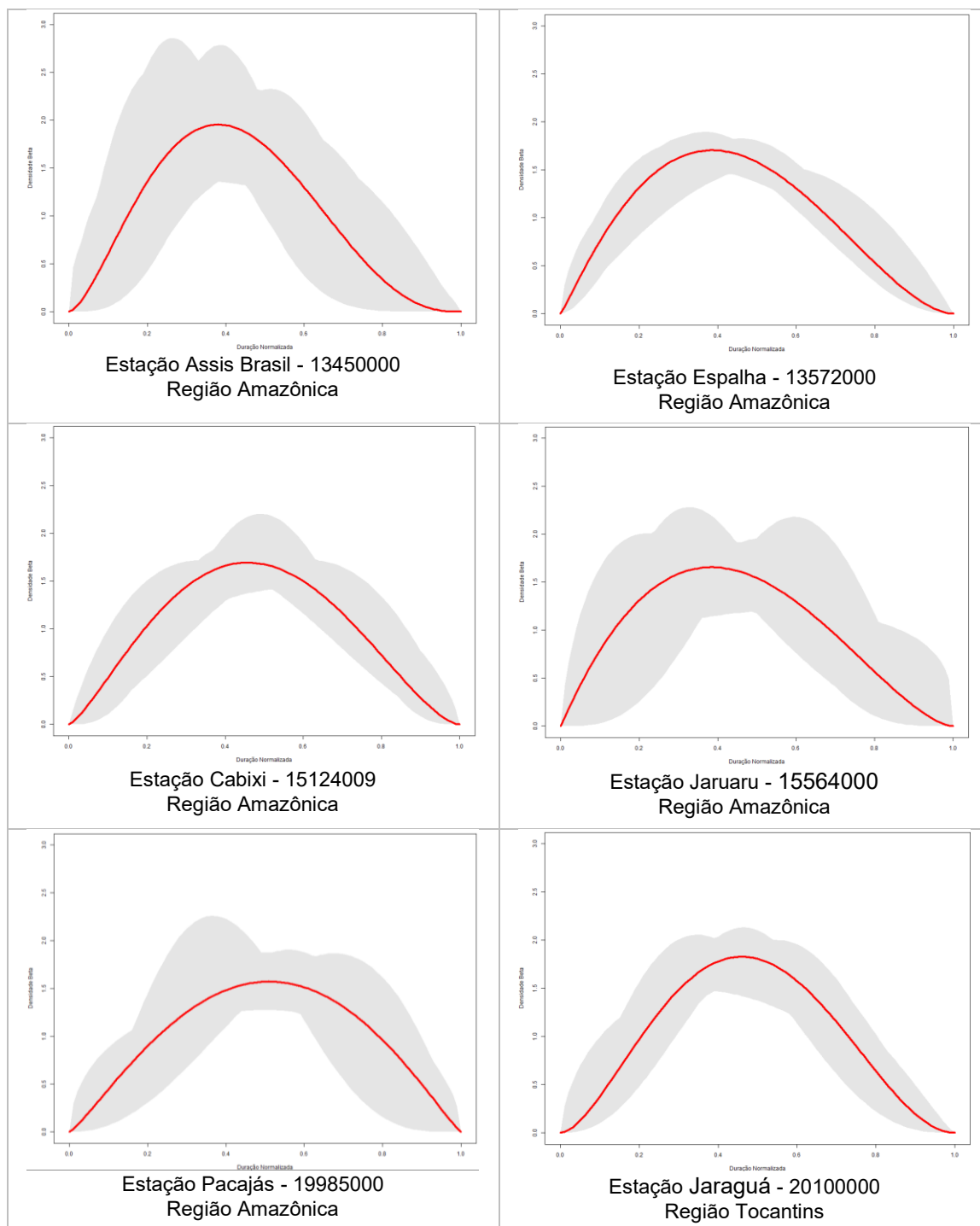
| <b>Código</b> | <b>Nome</b>            | $\alpha$ | $\beta$ | $T_p$ | <b>Assimetria</b> | <b>Curtose</b> |
|---------------|------------------------|----------|---------|-------|-------------------|----------------|
| 12510500      | Ponte do Rio Liberdade | 1,969    | 2,375   | 0,413 | 0,137             | 0,240          |

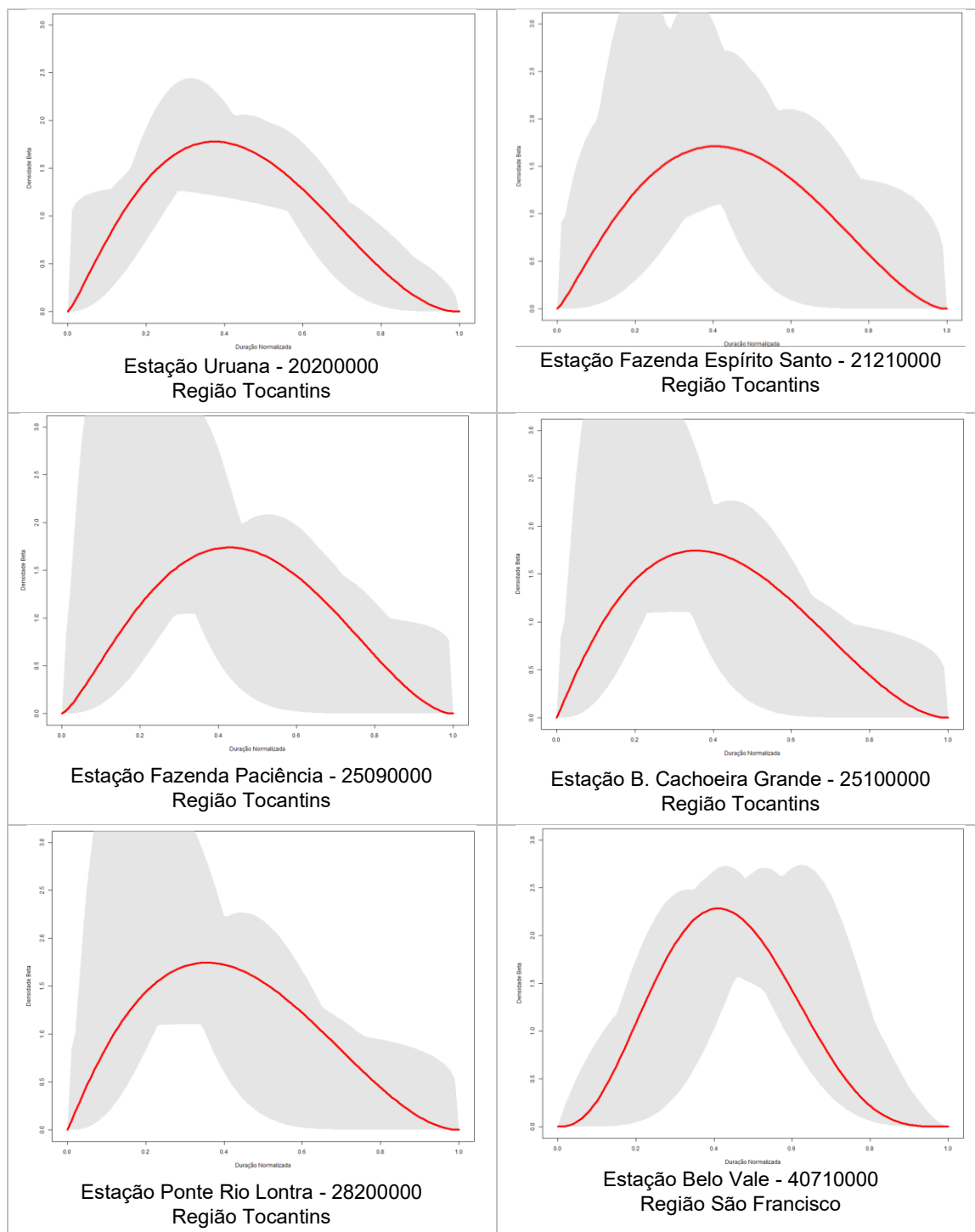
| Código   | Nome                   | $\alpha$ | $\beta$ | $Tp$  | Assimetria | Curtose |
|----------|------------------------|----------|---------|-------|------------|---------|
| 13439000 | Aldeia dos Patos       | 2,203    | 4,065   | 0,282 | 0,406      | 0,175   |
| 13450000 | Assis Brasil           | 2,739    | 4,052   | 0,363 | 0,250      | 0,136   |
| 13572000 | Espalha                | 2,106    | 2,739   | 0,389 | 0,186      | 0,211   |
| 15124009 | Cabixi                 | 2,429    | 2,607   | 0,471 | 0,050      | 0,192   |
| 15564000 | Jaruaru                | 2,277    | 2,877   | 0,405 | 0,163      | 0,192   |
| 19985000 | Pacajás                | 2,277    | 2,292   | 0,497 | 0,005      | 0,219   |
| 20100000 | Jaraguá                | 2,733    | 3,038   | 0,460 | 0,071      | 0,158   |
| 20200000 | Uruana                 | 2,300    | 3,113   | 0,381 | 0,208      | 0,183   |
| 21210000 | Fazenda Espírito Santo | 2,569    | 3,856   | 0,355 | 0,265      | 0,149   |
| 25090000 | Fazenda Paciência      | 2,493    | 4,280   | 0,313 | 0,348      | 0,148   |
| 25100000 | B. Cachoeira Grande    | 2,271    | 4,224   | 0,283 | 0,406      | 0,167   |
| 28200000 | Ponte Rio Lontra       | 2,019    | 2,831   | 0,358 | 0,240      | 0,217   |
| 40710001 | Belo Vale              | 3,943    | 4,479   | 0,458 | 0,075      | 0,089   |
| 41195050 | Rio Acima              | 2,263    | 2,825   | 0,409 | 0,155      | 0,194   |
| 41200430 | Raposos                | 3,356    | 4,767   | 0,385 | 0,211      | 0,101   |
| 41210001 | Caeté                  | 2,022    | 3,707   | 0,274 | 0,413      | 0,199   |
| 41340000 | Ponte Raul Soares      | 2,257    | 3,200   | 0,364 | 0,239      | 0,184   |
| 41380000 | Ponte Preta            | 2,944    | 3,078   | 0,483 | 0,029      | 0,148   |
| 41780002 | P.Juscelino - Jusante  | 2,896    | 3,112   | 0,473 | 0,048      | 0,148   |
| 41940001 | Ponte do Bicudo        | 2,733    | 3,033   | 0,460 | 0,070      | 0,158   |
| 43300001 | Fazenda Carvalho       | 2,524    | 3,816   | 0,351 | 0,270      | 0,152   |
| 60472235 | Piripau                | 2,009    | 3,409   | 0,295 | 0,365      | 0,205   |
| 60478480 | Captação da Saneago    | 2,886    | 3,543   | 0,426 | 0,133      | 0,137   |
| 60640000 | Montante de Goiânia    | 3,123    | 3,454   | 0,464 | 0,065      | 0,130   |
| 60850001 | F. Buriti do Prata     | 3,371    | 4,929   | 0,376 | 0,226      | 0,099   |

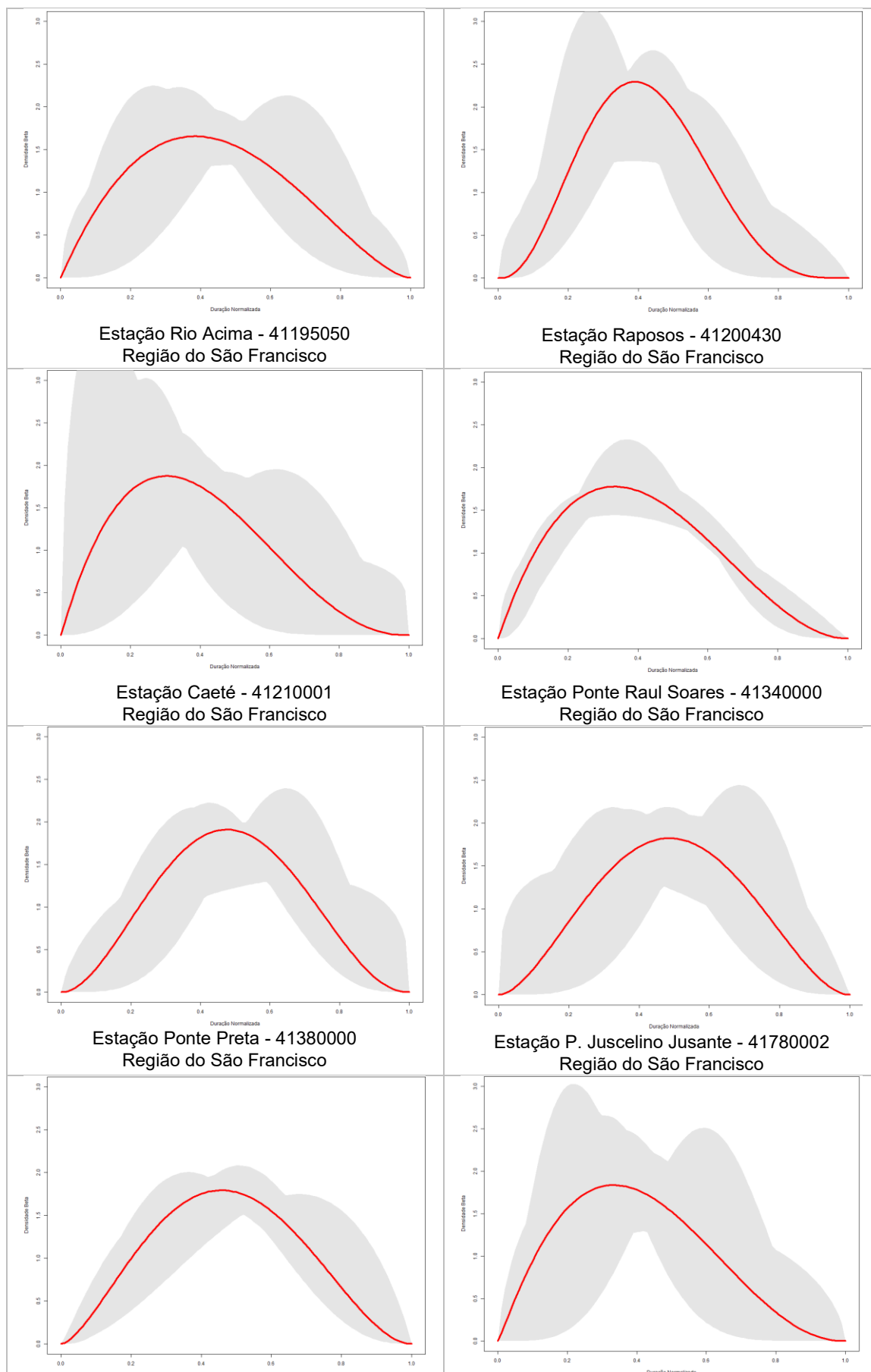
Fonte: o autor

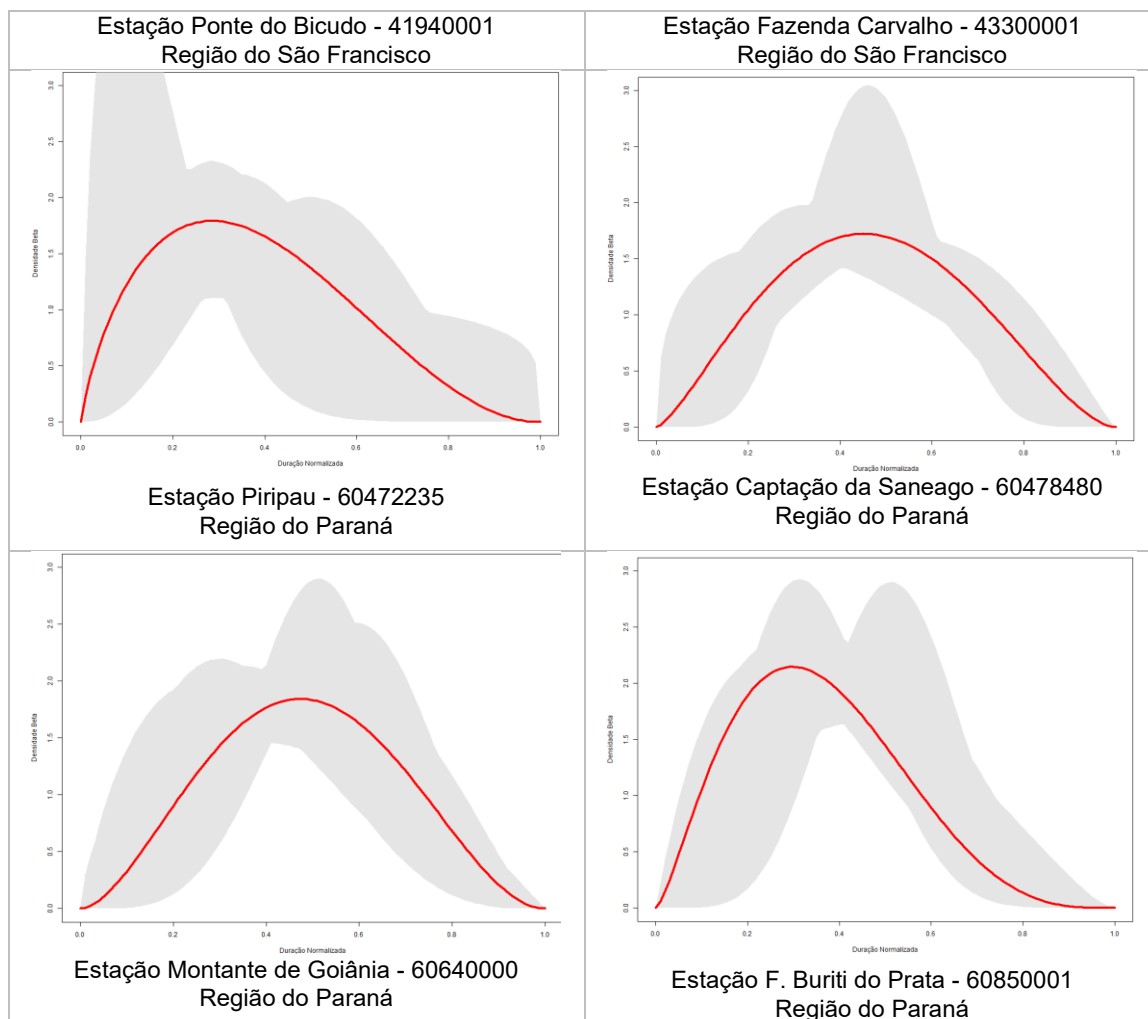
**Figura 39 – Funções densidade de probabilidade Beta ajustadas para cada uma das estações, além dos intervalos relativos aos eventos amostrados.**











Fonte: o autor

Com base na Figura 39, é perceptível a variabilidade de forma dos hidrogramas médios normalizados nas diferentes bacias e regiões hidrográficas avaliadas no presente trabalho. Tais variações ocorrem, sobretudo, com relação à característica de assimetria, curtose e intervalos de hidrogramas obtidos por bacia. Com o intuito de parametrizar a variabilidade nesse contexto, foram calculados os desvios padrão dos parâmetros de forma da distribuição Beta por região hidrográfica.

**Tabela 18 – Desvios padrão dos parâmetros de forma da distribuição Beta.**

| Bacia Hidrográfica | Desvio Padrão de $\alpha$ | Desvio Padrão de $\beta$ |
|--------------------|---------------------------|--------------------------|
| Amazônia           | 0,647                     | 1,323                    |
| Tocantins-Araguaia | 0,882                     | 2,318                    |
| São Francisco      | 1,034                     | 1,466                    |
| Paraná             | 1,542                     | 1,897                    |

Fonte: o autor

Com base nos valores de desvios padrão discriminados na Tabela 18, a bacia amazônica obteve os menores desvios para os dois parâmetros de forma. A bacia do Paraná obteve o maior desvio padrão para o parâmetro de forma referente à cauda inferior e a bacia do Tocantins o maior desvio padrão para o parâmetro de forma referente à cauda superior.

Adicionalmente, foram extraídos os valores de tempo de pico ( $t_p$ ) e coeficiente de assimetria das distribuições referentes aos parâmetros estimados por bacia hidrográfica (Tabela 17). Tais parâmetros foram utilizados como métrica para as discussões acerca dos hidrogramas e caracterização por regiões hidrográficas.

**Tabela 19 – Valores medianos do tempo de pico, assimetria e curtose das distribuições Beta representativas dos eventos amostrados.**

| <b>Região</b>      | <b>Tempo de Pico</b> | <b>Assimetria</b> |
|--------------------|----------------------|-------------------|
| Amazônia           | 0,394                | 0,171             |
| Tocantins-Araguaia | 0,349                | 0,215             |
| São Francisco      | 0,366                | 0,224             |
| Paraná             | 0,369                | 0,163             |
| Brasil             | 0,370                | 0,205             |

Fonte: o autor

Percebe-se que, na bacia amazônica e na bacia do Paraná, os tempos de pico são maiores, fazendo, por conseguinte, com que a assimetria seja menor. No caso da bacia do Paraná, percebe-se maior variabilidade geométrica em relação aos parâmetros calculados por evento amostrado, além de menor amostragem em relação à bacia amazônica.

Na bacia amazônica, percebe-se hidrogramas com maiores tempos de pico e menor variabilidade, o que sugere um maior padrão em relação à sua forma, mais simétricas em relação às demais bacias. Existem algumas possíveis explicações para tal resultado: maiores áreas de drenagem nas bacias escolhidas nessa região, menor variabilidade em relação ao uso do solo, ou seja, maior parte em floresta densa, além da possível influência das características hidráulicas das camadas superficiais de solo na região e ao próprio processo de formação de escoamento.

Na bacia do São Francisco, existe maior variabilidade nos hidrogramas, obtendo-se valores ordinários de tempo de pico. Isso se dá, sobretudo, pela maior variabilidade no uso do solo, pelo porte mediano das bacias e pela maior proximidade de grandes centros urbanos, sobretudo na região da bacia do Rio das Velhas, na qual a maior parte das estações estudadas, para a região hidrográfica em questão, se insere.

Na bacia do Tocantins-Araguaia também existe variabilidade em relação ao uso do solo, além de também haver proximidade em relação a áreas urbanas, além de menores áreas de drenagem. Tais características potencialmente explicam as diferenças em relação aos resultados obtidos para a bacia amazônica.

Por fim, com base nos parâmetros medianos da distribuição beta discretizados por bacia, a fim de auxiliar na discussão dos resultados alcançados, avaliou-se, com o emprego do coeficiente de correlação de Pearson, as relações entre atributos físicos das bacias (área de drenagem, densidade de drenagem e coeficiente de compacidade) e parâmetros descritivos da forma da distribuição Beta, tais quais tempo de pico e curtose.

**Tabela 20 – Matriz de correlação para área de drenagem, coeficiente de compacidade, tempo de pico, assimetria e curtose para todas as bacias.**

| -       | AD          | kc          | dd          | Tp    | Curtose |
|---------|-------------|-------------|-------------|-------|---------|
| AD      | 1,00        |             |             |       |         |
| Kc      | 0,16        | 1,00        |             |       |         |
| Dd      | -0,24       | 0,77        | 1,00        |       |         |
| Tp      | <b>0,33</b> | <b>0,28</b> | <b>0,06</b> | 1,00  |         |
| Curtose | <b>0,03</b> | <b>0,31</b> | <b>0,14</b> | -0,14 | 1,00    |

Fonte: o autor

Os resultados indicam baixa correlação entre os atributos físicos e as métricas descritivas dos hidrogramas normalizados, levando-se em conta o espaço amostral das 26 bacias hidrográficas estudadas. Isso demonstra, conforme evidenciado pelas constatações anteriores, certa variabilidade em relação aos eventos amostrados.

A variabilidade em termos de regimes hidroclimáticos, o que envolvem os processos hidrológicos de geração de escoamento superficial (tipo de solo, distribuição espacial das precipitações, além do uso do solo, entre outros). Uma vez que houve menor variabilidade nesse contexto, foram obtidas as correlações entre os mesmos

parâmetros para a região do Tocantins-Araguaia e bacia amazônica, conforme indicado na Tabela 21.

**Tabela 21 – Matriz de correlação para área de drenagem, coeficiente de compacidade, tempo de pico, assimetria e curtose para a bacia amazônica e região do Tocantins-Araguaia**

| -       | AD          | kc          | dd          | Tp   | Curtose |
|---------|-------------|-------------|-------------|------|---------|
| AD      | 1,00        |             |             |      |         |
| kc      | 0,16        | 1,00        |             |      |         |
| dd      | -0,30       | 0,88        | 1,00        |      |         |
| tp      | <b>0,46</b> | <b>0,51</b> | <b>0,17</b> | 1,00 |         |
| Curtose | <b>0,32</b> | <b>0,33</b> | <b>0,10</b> | 0,42 | 1,00    |

Fonte: o autor

Percebe-se, com base na Tabela 21, que as correlações das 13 (treze) bacias da região amazônica e do Tocantins-Araguaia são superiores em relação àquela obtida para todos os casos. Embora não sejam significativas, as correlações são moderadas (Witz et al., 1990), o que, em compasso com uma menor variabilidade em relação aos intervalos de hidrogramas normalizados, evidenciam maior padrão em relação às enchentes na região norte.

É válido destacar que o tempo de pico e a assimetria têm correlação ligeiramente superior com o coeficiente de compacidade das bacias, em comparação com a área de drenagem.

**Tabela 22 – Matriz de correlação para área de drenagem, coeficiente de compacidade, tempo de pico, assimetria e curtose para a região homogênea 01.**

| -       | AD           | kc          | dd           | tp    | Curtose |
|---------|--------------|-------------|--------------|-------|---------|
| AD      | 1,00         |             |              |       |         |
| kc      | 0,79         | 1,00        |              |       |         |
| dd      | 0,26         | -0,08       | 1,00         |       |         |
| tp      | <b>0,24</b>  | <b>0,20</b> | <b>-0,34</b> | 1,00  |         |
| Curtose | <b>-0,15</b> | <b>0,16</b> | <b>0,03</b>  | -0,49 | 1,00    |

Percebe-se, para a região homogênea 01, localizada no alto São Francisco, que há baixas correlações entre as variáveis descritivas dos hidrogramas e os atributos físicos das bacias hidrográficas (área de drenagem, coeficiente de compacidade e densidade de drenagem). A densidade de drenagem obteve maior correlação entre as tais, sendo moderada.

**Tabela 23 – Matriz de correlação para área de drenagem, coeficiente de compacidade, tempo de pico, assimetria e curtose para a região homogênea 02.**

| -       | AD          | kc          | dd           | tp    | Curtose |
|---------|-------------|-------------|--------------|-------|---------|
| AD      | 1,00        |             |              |       |         |
| Kc      | 0,79        | 1,00        |              |       |         |
| Dd      | -0,48       | -0,53       | 1,00         |       |         |
| Tp      | <b>0,28</b> | <b>0,10</b> | <b>0,40</b>  | 1,00  |         |
| Curtose | <b>0,46</b> | <b>0,14</b> | <b>-0,65</b> | -0,41 | 1,00    |

No caso da região homogênea 02, que compreende as regiões do alto São Francisco, alto Araguaia e alto Paraná, percebe-se que, sobretudo, a curtose dos hidrogramas apresenta relações mais bem definidas com a área de drenagem e, de maneira mais elevada, com a densidade de drenagem das bacias hidrográficas, sendo a maior correlação obtida no estudo, igual a -0,65, cuja justificativa pode estar relacionada à menor magnitude das bacias da região. Além disso, o tempo de pico apresenta correlação moderada com a densidade de drenagem das bacias.

Tais constatações são consistentes com o apresentado por Brunner et al. (2018), que verificaram que há maior dificuldade em relação ao estabelecimento de relações entre a forma do hidrograma e características físicas das bacias.

É importante salientar que, em função da quantidade e qualidade dos dados, existe evidente limitação no presente estudo, pelo número de bacias hidrográficas. Sugere-se, em pesquisas futuras, que seja aumentado o número de bacias, de modo a melhor caracterizar tais relações e aferir se as correlações aqui constatadas fazem parte de um padrão regional ou, apenas, existem no recorte relativo ao espaço amostral em questão.

## 6 CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES

O presente trabalho teve como objetivo a aplicação de métodos estatísticos para a estimativa de quantis e forma de hidrogramas sintéticos de projeto em bacias brasileiras, localizadas em distintas regiões hidrográficas, sob distintos regimes hidroclimáticos. Para tal, foram selecionados postos de monitoramento fluviométrico nas bacias amazônica, do São Francisco, do Tocantins-Araguaia e Paraná, sendo amostrados centenas de eventos de enchentes em 26 (vinte e seis) bacias com até 5.000 km<sup>2</sup>.

O desafio inicial foi a seleção dos postos frente aos critérios impostos, que envolvem limitação da área de drenagem, ausência de estruturas de regularização de vazões no curso d'água principal e aquisição de dados via telemetria (a cada quinze minutos). Verificou-se escassa quantidade de estações de monitoramento. Além disso, foi realizada uma avaliação preliminar dos dados nas estações selecionadas *a priori*, o que diminuiu ainda mais a quantidade de dados.

Selecionados os postos, foram amostrados eventos de cheia, sendo obtidos valores de vazão de pico, volume escoado e duração desses eventos. A estimativa do escoamento de base ocorreu por meio do emprego do método da inclinação constante, em que, o segmento de reta que interliga as vazões ao início e ao fim do evento define sua magnitude.

Foram ajustadas distribuições de probabilidade aos dados de vazão de pico, volume e duração dos eventos de cheia. O método de séries de durações parciais foi empregado, sendo o limiar definido observando-se a independência dos eventos, a qual respeitou um intervalo mínimo de 12h entre cheias consecutivas, e a maximização do número de eventos para aplicação dos métodos descritos.

Partindo para a modelagem multivariada, o primeiro passo foi a avaliação da dependência estatística entre as variáveis aleatórias consideradas. Verificou-se que os pares de volume e duração apresentaram maiores correlações, o que corroborou a hipótese de que a duração devia ser avaliada como variável aleatória, e não apenas estimada indiretamente em função de vazão e volume escoado, como em Brunner et al. (2017) e Fischer e Schuman (2023). Os resultados de correlação obtidos vão ao

encontro de estudos descritos na literatura em estudos realizados em diferentes regiões do mundo (Serinaldi & Grimaldi, 2006; Sraj, Bezak & Brilly, 2014; Lacko et al., 2022). Na região amazônica foram verificados os maiores valores de correlação. Já os menores foram verificados na bacia dos rios Tocantins-Araguaia. Infere-se que esse comportamento decorra de uma maior homogeneidade em relação ao uso do solo nas bacias amazônicas, se comparado com as demais.

A modelagem das funções cópula ocorreu por meio do emprego de famílias de cópula que assumem que exista uma dependência na cauda superior. Por tratar-se de uma análise de eventos de cheia preteriu-se a utilização de cópulas simétricas ou com dependência na cauda inferior, a princípio, adequadas à avaliação de secas e precipitações/vazões médias. Em consonância com a literatura (Sraj, Bezak & Brilly, 2014, Tsakiris, Kordalis & Tsakiris, 2015, Brunner et al., 2017, Rizwan et al., 2019), a cópula Gumbel revelou-se mais adequada aos dados analisados, quando comparada à cópula Joe.

Em relação aos modelos regionais de cópula, experimentou-se extrema dificuldade em se obter, pelos critérios estabelecidos por Hosking & Wallis (1997), regiões homogêneas nas estações amazônicas. Foram delimitadas duas regiões: a primeira, na porção do alto São Francisco, especificamente das bacias dos rios das Velhas e Paraopeba; a segunda compreendendo estações localizadas nas bacias dos rios Tocantins-Araguaia, São Francisco e Paraná. Não foram verificadas diferenças significativas entre os valores de parâmetros de cópula estimados por regiões homogêneas e por regiões hidrográficas. Entretanto, para a estimativa de quantis, a homogeneidade das regiões é de extrema importância. Embora não significativas, tais diferenças evidenciam variações em relação aos quantis gerados nas regiões de cauda superior, corroborando, mais uma vez, a importância da dependência de cauda na obtenção dos valores.

Por fim, os eventos foram normalizados e as funções densidade de probabilidade Gama, Log-Normal e Beta foram avaliadas. Para os dados analisados, a distribuição Beta foi a que apresentou um melhor ajuste, pelo seu suporte finito e adaptabilidade de forma. Esse último critério foi preponderante, dada a elevada variabilidade nas formas dos eventos de cheia amostrados. Os hidrogramas da região amazônica

revelaram-se com menor dispersão e mais simétricos. Já os hidrogramas da região dos rios Tocantins-Araguaia apresentaram maior assimetria à direita.

Conforme já discutido pela literatura (Brunner et al., 2018), a regionalização dos parâmetros relacionados à forma dos hidrogramas é um processo complexo. No presente trabalho foram avaliadas as correlações entre tempo de pico e curtose com atributos físicos das bacias estudadas. Não se obteve elevadas correlações para nenhuma das regiões analisadas. Dentre as variáveis explicativas avaliadas, a densidade de drenagem e o coeficiente de compacidade foram as que apresentaram maiores correlações com os parâmetros descritivos da forma do hidrograma.

É importante mencionar que o número de estações/eventos de cheia selecionados dificulta uma avaliação pormenorizada dos resultados da regionalização. Independentemente, acredita-se que os critérios adotados para seleção das estações, em especial, a discretização temporal das informações consideradas (15 min), permitem uma representação suficientemente adequada das variáveis aleatórias que definem os hidrogramas de cheia. Esse fator é crítico para aplicação da presente abordagem metodológica.

Os resultados adquiridos apresentam consonância com a literatura atual. Resta claro que o emprego de ferramentas estatísticas para a estimativas de quantis extremos de cheia requer o conhecimento dos processos físicos que se deseja reproduzir. Isso é confirmado, sobretudo, na análise de frequência multivariada em que, para além dos dados em si, se requer a avaliação da correlação entre as variáveis aleatórias ~para definição do modelo mais adequado. A incerteza intrínseca aos dados, representada por exemplo pela dispersão/ escassez de medições para definição dos ramos inferior e superior das curvas-chave, impacta diretamente as estimativas estatísticas e, por conseguinte, exige uma análise criteriosa.

Em síntese, as principais conclusões do presente estudo são:

- Nas bacias avaliadas, as correlações entre as variáveis aleatórias que descrevem um hidrograma de cheia (vazão de pico, volume escoado e duração), que são descritores das estruturas de dependências, se dão em

consonância com valores típicos de outras partes do mundo, a saber: correlações mais elevadas para pares de vazão de pico x volume escoado e volume escoado x duração, sendo menos elevadas para vazão de pico x duração;

- As correlações entre volume e duração são superiores para a maior parte das bacias avaliadas;
- Em um contexto multivariado, uma vez descrita a estrutura de dependência, os modelos devem ser escolhidos em função dos níveis de dependência e da finalidade da modelagem. Destaca-se que, embora testes de hipóteses e critérios de informações sejam ferramentas valiosas na modelagem de processos hidrológicos extremos, é importante que os modelos sejam representativos do processo físico em questão;
- Em concordância com a literatura científica, a cópula Gumbel se mostrou mais adequada para a modelagem multivariada de pares de vazão de pico x volume escoado e volume escoado x duração;
- A definição de regiões homogêneas, do ponto de vista de geração de cheias, evidenciou, para os dados deste estudo, maior dificuldade para estabelecimento de regiões dessa natureza na região amazônica;
- A distribuição Beta se revelou mais adequada à estimativa da forma de hidrogramas de cheia normalizados, o que é explicado pela sua versatilidade e suporte finito; e
- As correlações entre as características dos hidrogramas normalizados e as características físicas das bacias não se apresentam de maneira bem pronunciada, em consonância com a literatura científica. Independentemente, o número de estações avaliadas e a extensão das séries temporais cerceiam uma análise mais aprofundada.

Por fim, apresentam-se algumas recomendações para pesquisas futuras:

- Aumentar o limite superior da área de drenagem aqui admitida (5.000 km<sup>2</sup>), sob a perspectiva de elevar o tamanho da amostra o número de eventos amostrados;

- Incorporar estimativas de intensidade de chuva aos modelos multivariados (cópulas), de modo a possibilitar que sejam tratadas como uma variável aleatória capaz de alterar a forma e magnitude dos hidrogramas;
- Avaliar o emprego de *Vine* cópulas para extensão da análise de dependência entre as variáveis aleatórias consideradas; e
- Quantificar as incertezas nas estimativas por meio da avaliação dos parâmetros de cópula/dependência na cauda superior.

## REFERÊNCIAS

AAS, K. et al. Pair-copula constructions of multiple dependence. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 44, n. 2, p. 182–198, abr. 2009.

ANJOS, Ulisses U.; FERREIRA, Flavio H.; KOLEV, Nikolai V. e MENDES, Beatriz V.M. Modelando Dependências via Cópuas. **Minicurso do 16º SINAPE**. Caxambu, MG, 2004.

ANNIS, A. et al. Quantifying the relative impact of hydrological and hydraulic modelling parameterizations on uncertainty of inundation maps. **Hydrological Sciences Journal**, v. 65, n. 4, p. 507–523, 13 jan. 2020.

ANTÔNIO, M. et al. Regionalization of reference streamflows for the Araguaia River basin in Brazil. **Semina-ciencias Agrarias**, v. 41, n. 3, p. 829–829, 7 abr. 2020.

ASHKAR, F.; AUCOIN, F. A broader look at bivariate distributions applicable in hydrology. **Journal of Hydrology**, v. 405, n. 3-4, p. 451–461, ago. 2011.

BACCHI, B.; BECCIU, G.; KOTTEGODA, NATH. T. Bivariate exponential model applied to intensities and durations of extreme rainfall. **Journal of Hydrology**, v. 155, n. 1-2, p. 225–236, mar. 1994.

BHUNYA, P. K. et al. Suitability of Gamma, Chi-square, Weibull, and Beta distributions as synthetic unit hydrographs. v. 334, n. 1-2, p. 28–38, 20 fev. 2007.

BIANCHI, Marta Cristina Colozza Bianchi. Teste gráfico para o ajuste de cópuas arquimedianas usando variáveis BIPIT: um estudo de simulação / Marta Cristina Colozza Bianchi -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2008.

BRUNNER, M. I. et al. Flood type specific construction of synthetic design hydrographs. v. 53, n. 2, p. 1390–1406, 1 fev. 2017.

BRUNNER, M. I. et al. Uncertainty Assessment of Synthetic Design Hydrographs for Gauged and Ungauged Catchments. **Water Resources Research**, v. 54, n. 3, p. 1493–1512, mar. 2018.

BRUNNER, M. I. et al. Synthetic design hydrographs for ungauged catchments: a comparison of regionalization methods. **Stochastic Environmental Research and Risk Assessment**, v. 32, n. 7, p. 1993–2023, 1 jul. 2018.

BURNHAM, K. P.; ANDERSON, D. R. (EDS.). Model Selection and Multimodel Inference. New York, NY: **Springer New York**, 2004.

CHEBANA, F.; OUARDA, T. B. M. J. Depth and homogeneity in regional flood frequency analysis. **Water Resources Research**, v. 44, n. 11, nov. 2008.

CHEBANA, F.; OUARDA, T. B. M. J. Index flood-based multivariate regional frequency analysis. **Water Resources Research**, v. 45, n. 10, out. 2009.

CHEBANA, F.; OUARDA, T. B. M. J. Multivariate quantiles in hydrological frequency analysis. **Environmetrics**, v. 22, n. 1, p. 63–78, 24 jan. 2011.

CHOW, V. T.; MAIDMENT, D. R.; MAYS, L. W. Applied hydrology. New York: Mcgraw-Hill, 1988.

COSTA, Karoline Tenório da. Avaliação de distribuições de probabilidades das vazões médias diárias máximas anuais do Brasil/ Karoline Tenório da Costa - 2014. xvi, 194 f.: il.

CUNNANE, C. A particular comparison of annual maximum and partial duration series methods of flood frequency prediction, **Journal of Hydrology**, v.18, p. 257-271, 1973.

CUNNANE, C., A note on the Poisson assumption in partial duration series models, **Water Resources Research**, v.15, n. 2, p. 489-494, 1979.

CZADO, C.; NAGLER, T. Vine Copula Based Modeling. **Annual Review of Statistics and Its Application**, v. 9, n. 1, p. 453–477, 7 mar. 2022.

DROBOT, R. et al. Design Floods Considering the Epistemic Uncertainty. 13 maio 2021.

ECKHARDT, K. How to construct recursive digital filters for baseflow separation. **Hydrological Processes**, v. 19, n. 2, p. 507–515, 2005.

ÉDIPO HENRIQUE CREMON et al. Avaliação da altimetria do MDE COP-30 no Centro-Oeste do Brasil. RBC. **Revista brasileira de cartografia/Revista brasileira de cartografia**, v. 74, n. 3, p. 536–546, 5 set. 2022.

FATEH CHEBANA. Multivariate Frequency Analysis of Hydro-Meteorological Variables. [s.l.] Elsevier, 2022.

FAVRE, A.-C. et al. Multivariate hydrological frequency analysis using copulas. **Water Resources Research**, v. 40, n. 1, jan. 2004.

FISCHER, S.; SCHUMANN, A. Generation of type-specific synthetic design flood hydrographs. p. 1–16, 28 mar. 2023.

FISCHER, S.; SCHUMANN, A.; BÜHLER, P. A statistics-based automated flood event separation. **Journal of Hydrology X**, v. 10, p. 100070, jan. 2021.

FISCHER, S.; SCHUMANN, A. H. Regionalisation of flood frequencies based on flood type-specific mixture distributions. **Journal of Hydrology X**, v. 13, p. 100107–100107, 1 dez. 2021.

FROM, S. G.; SUTHAKARAN RATNASINGAM. Some efficient closed-form estimators of the parameters of the generalized Pareto distribution. **Environmental and Ecological Statistics**, v. 29, n. 4, p. 827–847, 12 set. 2022.

GAÁL, L. et al. Dependence between flood peaks and volumes: a case study on climate and hydrological controles. **Hydrological Sciences Journal**, v. 60, n. 6, p. 968–984, 28 abr. 2015.

GANGULI, P.; M. JANGA REDDY. Probabilistic assessment of flood risks using trivariate copulas. **Theoretical and Applied Climatology**, v. 111, n. 1-2, p. 341–360, 25 maio 2012.

GENEST, C.; FAVRE, A.-C. Everything You Always Wanted to Know about Copula Modeling but Were Afraid to Ask. **Journal of Hydrologic Engineering**, v. 12, n. 4, p. 347–368, jul. 2007.

GOEL, N. K.; SETH, S. M.; CHANDRA, S. Multivariate Modeling of Flood Flows. **Journal of hydraulic engineering**, v. 124, n. 2, p. 146–155, 1 fev. 1998.

GRÄLER, B. et al. Multivariate return periods in hydrology: a critical and practical review focusing on synthetic design hydrograph estimation. **Hydrology and Earth System Sciences**, v. 17, n. 4, p. 1281–1296, 2 abr. 2013.

GRØNNEBERG, S.; HJORT, N. L. The Copula Information Criteria. **Scandinavian Journal of Statistics**, v. 41, n. 2, p. 436–459, 27 jan. 2014.

GRIMALDI, S.; SERINALDI, F. Asymmetric copula in multivariate flood frequency analysis. **Advances in Water Resources**, v. 29, n. 8, p. 1155–1167, ago. 2006.

HAILE, M. M. Bivariate Flood Frequency Analysis: A case study of Rib River, Upper Blue Nile Basin, Ethiopia. **ARRUS Journal of Engineering and Technology**, v. 2, n. 2, p. 46–64, 12 fev. 2022.

HARRELL, F. E.; SPRINGERLINK ONLINE SERVICE. Regression Modeling Strategies : With Applications to Linear Models, Logistic and Ordinal Regression, and Survival Analysis. **Cham: Springer International Publishing**, 2015.

HELFER, F. et al. Calibrated Eckhardt's filter versus alternative baseflow separation methods: A silica-based approach in a Brazilian catchment. **Journal of Hydrology**, v. 644, p. 132073, 21 set. 2024.

HOFERT, M. et al. Elements of Copula Modeling with R. Cham: Springer International Publishing : Imprint : Springer, 2018.

J R M HOSKING; WALLIS, J. R. Regional frequency analysis : an approach based on L-moments. Cambridge ; New York: Cambridge University Press, 1997.

KARMAKAR, S.; SIMONOVIC, S. P. Bivariate flood frequency analysis. Part 2: a copula-based approach with mixed marginal distributions. **Journal of Flood Risk Management**, v. 2, n. 1, p. 32–44, mar. 2009.

KOUROS OWZAR; PRANAB KUMAR SEN. Copulas: Concepts and novel applications. **METRON**, v. 61, n. 3, p. 323–353, 1 jan. 2003.

Koutsoyiannis, D. (2023). Stochastics of Hydroclimatic Extremes - A Cool Look at Risk [Monograph]. Kallipos, Open Academic Editions. <http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-1>

LACKO, M. et al. Joint Modelling of Flood Hydrograph Peak, Volume and Duration Using Copulas—Case Study of Sava and Drava River in Croatia, Europe. **Water**, v. 14, n. 16, p. 2481–2481, 12 ago. 2022.

LANGBEIN, W. B. Annual Floods and Partial-Duration Floods Series. In: Transactions American Geophysical Union, vol. 30, N. 6, Dec., 1949.

LINSLEY, R. K.; KOHLER, M. A.; JOSEPH. Applied Hydrology. [s.l: s.n.].

LYUBCHICH, V. Elements of Copula Modeling With R. Technometrics, v. 62, n. 3, p. 416–416, 2 jul. 2020.

MADSEN, H.; RASMUSSEN, P.; ROSBJERG, D. Comparison of annual maximum series and partial duration series methods for modeling extreme hydrologic events: 1. At-site modeling. v. 33, n. 4, p. 747–757, 1 abr. 1997.

MATHEUS SIQUEIRA PIOL et al. Estimative of reference flows for water resources planning and control: hydrologic regional indicators application. **Revista Brasileira de Ciências Ambientais**, v. 58, n. 2, p. 171–181, 1 jan. 2023.

MCNEIL, A. J. Sampling nested Archimedean copulas. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v. 78, n. 6, p. 567–581, 21 maio 2008.

MEDIERO, L.; JIMÉNEZ-ÁLVAREZ, A.; GARROTE, L. Design flood hydrographs from the relationship between flood peak and volume. **Hydrology and Earth System Sciences**, v. 14, n. 12, p. 2495–2505, 10 dez. 2010.

MERZ, R.; BLÖSCHL, G. Flood frequency regionalisation—spatial proximity vs. catchment attributes. **Journal of Hydrology**, v. 302, n. 1-4, p. 283–306, fev. 2005.

M.-A. BEN AISSIA et al. Bivariate index-flood model: case study in Québec, Canada. v. 60, n. 2, p. 247–268, 7 jan. 2015.

NADARAJAH, S. Probability models for unit hydrograph derivation. **Journal of Hydrology**, v. 344, n. 3-4, p. 185–189, out. 2007.

NAGHETTINI, M. Hidrologia Estatística. Cham: Springer International Publishing AG, 2016.

NELSEN, R. B. An Introduction to Copulas. [s.l.] **Springer Science & Business Media**, 2007.

NG, D. W. W. et al. The study of properties on generalized Beta distribution. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 1132, p. 012080, nov. 2018.

OLIVEIRA, R.T.A. et al. Estudo comparativo de famílias de cópulas via simulações. *Sigmae*, v.10, 2021.

PÁDUA, Luiz Henrique Resende de. Regionalização de hidrogramas unitários em bacias não monitoradas do Estado de Minas Gerais/Luiz Henrique Resende de Pádua - 2015. xiii, 174 f.: il.

PAN, X. et al. Regional flood frequency analysis based on peaks-over-threshold approach: A case study for South-Eastern Australia. **Journal of Hydrology: Regional Studies**, v. 47, p. 101407–101407, 1 jun. 2023.

PIOL, M. V. A. et al. Performance evaluation of flow duration curves regionalization methods. **RBRH**, v. 24, 2019.

POULIN, A. et al. Importance of Tail Dependence in Bivariate Frequency Analysis. v. 12, n. 4, p. 394–403, 1 jul. 2007.

PRAMANIK, N.; PANDA, R. K.; SEN, D. Development of design flood hydrographs using probability density functions. **Hydrological Processes**, p. n/a-n/a, 2009.

PRUDHOMME, Christel et al. Methodology for analysing the space-time development of large-scale floods at the river basin, regional and continental scales. 2010.

RAZAVI, T.; COULIBALY, P. Streamflow Prediction in Ungauged Basins: Review of Regionalization Methods. **Journal of Hydrologic Engineering**, v. 18, n. 8, p. 958–975, ago. 2013.

REDDY, M. J.; GANGULI, P. Bivariate Flood Frequency Analysis of Upper Godavari River Flows Using Archimedean Copulas. **Water Resources Management**, v. 26, n. 14, p. 3995–4018, 11 set. 2012.

REQUENA, A. I.; MEDIERO, L.; GARROTE, L. A bivariate return period based on copulas for hydrologic dam design: accounting for reservoir routing in risk estimation. **Hydrology and Earth System Sciences**, v. 17, n. 8, p. 3023–3038, 1 ago. 2013.

REQUENA, A. I.; CHEBANA, F.; MEDIERO, L. A complete procedure for multivariate index-flood model application. **Journal of Hydrology**, v. 535, p. 559–580, 1 abr. 2016.

RIZWAN, M. et al. Deriving Design Flood Hydrographs Based on Copula Function: A Case Study in Pakistan. **Water**, v. 11, n. 8, p. 1531, 24 jul. 2019.

ROGGER, M. et al. Runoff models and flood frequency statistics for design flood estimation in Austria – Do they tell a consistent story? **Journal of Hydrology**, v. 456-457, p. 30–43, ago. 2012.

SALVADORI, G.; DE MICHELE, C. Frequency analysis via copulas: Theoretical aspects and applications to hydrological events. **Water Resources Research**, v. 40, n. 12, dez. 2004.

SALVADORI, G.; DE MICHELE, C.; DURANTE, F. On the return period and design in a multivariate framework. **Hydrology and Earth System Sciences**, v. 15, n. 11, p. 3293–3305, 4 nov. 2011.

SALVADORI, G. et al. A multivariate copula-based framework for dealing with hazard scenarios and failure probabilities. **Water Resources Research**, v. 52, n. 5, p. 3701–3721, maio 2016.

SERINALDI, F. **An uncertain journey around the tails of multivariate hydrological distributions**. *Water Resources Research*, v. 49, n. 10, p. 6527–6547, out. 2013.

SERINALDI, F. Dismissing return periods! **Stochastic Environmental Research and Risk Assessment**, v. 29, n. 4, p. 1179–1189, 9 jul. 2014.

SERINALDI, F.; BÁRDOSSY, A.; KILSBY, C. G. Upper tail dependence in rainfall extremes: would we know it if we saw it? **Stochastic Environmental Research and Risk Assessment**, v. 29, n. 4, p. 1211–1233, 11 set. 2014.

SERINALDI, F.; GRIMALDI, S. Synthetic Design Hydrographs Based on Distribution Functions with Finite Support. **Journal of hydrologic engineering**, v. 16, n. 5, p. 434–446, 1 maio 2011.

SINCLAIR, C. D.; SPURR, B. D.; AHMAD, M. I. Modified anderson darling test. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, v. 19, n. 10, p. 3677–3686, jan. 1990.

SMITHERS, J. Methods for design flood estimation in South Africa. **Water SA**, v. 38, n. 4, 11 set. 2012.

SRAJ, M.; BEZAK, N.; BRILLY, M. Bivariate flood frequency analysis using the copula function: a case study of the Litija station on the Sava River. **Hydrological Processes**, v. 29, n. 2, p. 225–238, 30 jan. 2014.

STEPHENS, M. A. EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons. **Journal of the American Statistical Association**, v. 69, n. 347, p. 730–737, set. 1974.

SU, C. et al. On the structural limitations of recursive digital filters for base flow estimation. **Water Resources Research**, v. 52, n. 6, p. 4745–4764, jun. 2016.

VIRAPHOL TAESOMBUT; YEVJEVICH, V. M. Use of partial flood series for estimating distribution of maximum annual flood peak. 3 jan. 2007.

TALLAKSEN, L. M. A review of baseflow recession analysis. **Journal of Hydrology**, v. 165, n. 1-4, p. 349–370, fev. 1995.

TARASOVA, L. et al. Causative classification of river flood events. *Wires. Water*, v. 6, n. 4, 2019.

TOMIROTTI, M.; MIGNOSA, P. A methodology to derive Synthetic Design Hydrographs for river flood management. **Journal of Hydrology**, v. 555, p. 736–743, dez. 2017.

TOSUNOGLU, F.; CAN, I. Application of copulas for regional bivariate frequency analysis of meteorological droughts in Turkey. **Natural Hazards**, v. 82, n. 3, p. 1457–1477, 26 fev. 2016.

THOMAS RODDING KJELDSSEN; ILARIA PROSDOCIMI. Use of peak over threshold data for flood frequency estimation: An application at the UK national scale. **Journal of hydrology**, v. 626, p. 130235–130235, 1 nov. 2023.

TRIAANTAFYLLOU, I. S. Archimedean Copulas-Based Estimation under One-Parameter Distributions in Coherent Systems. **Mathematics**, v. 12, n. 2, p. 334–334, 19 jan. 2024.

TSAKIRIS, G.; KORDALIS, N.; TSAKIRIS, V. Flood Double Frequency Analysis: 2D-Archimedean Copulas vs Bivariate Probability Distributions. **Environmental Processes**, v. 2, n. 4, p. 705–716, 9 set. 2015.

V. GHAFORI et al. Regional Frequency Analysis of Droughts Using Copula Functions (Case Study: Part of Semiarid Climate of Fars Province, Iran). **Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering**, v. 44, n. 4, p. 1223–1235, 13 ago. 2019.

VALENZUELA, P. et al. Rainfall thresholds for the triggering of landslides considering previous soil moisture conditions (Asturias, NW Spain). **Landslides**, v. 15, n. 2, p. 273–282, 23 ago. 2017.

VANEM, E. Bivariate regional extreme value analysis for significant wave height and wave period. **Applied Ocean Research**, v. 101, p. 102266, ago. 2020.

VIGLIONE, A.; MERZ, R.; BLÖSCHL, G. On the role of the runoff coefficient in the mapping of rainfall to flood return periods. **Hydrology and Earth System Sciences**, v. 13, n. 5, p. 577–593, 12 maio 2009.

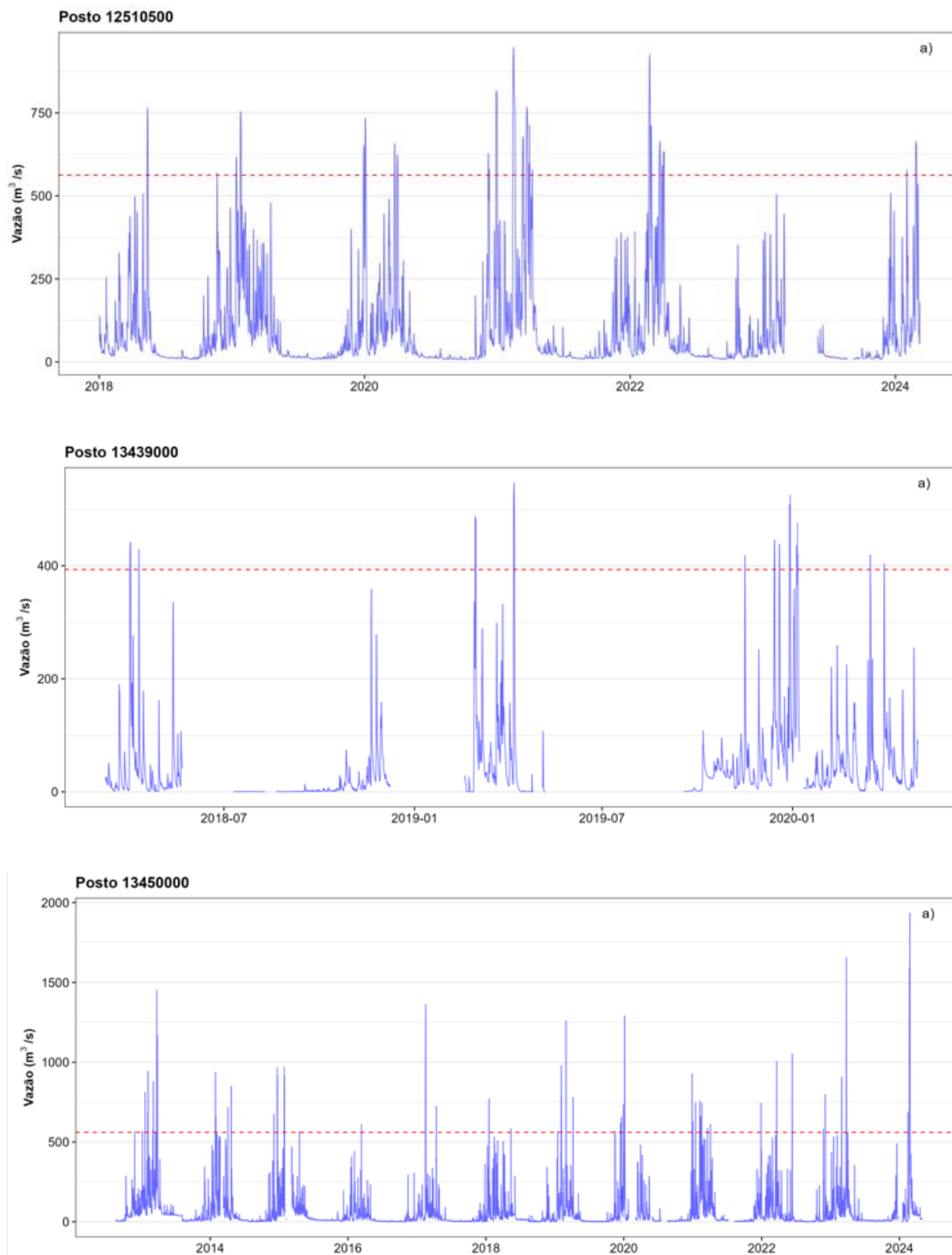
WITZ, K. et al. Applied Statistics for the Behavioral Sciences. **Journal of Educational Statistics**, v. 15, n. 1, p. 84, 1990.

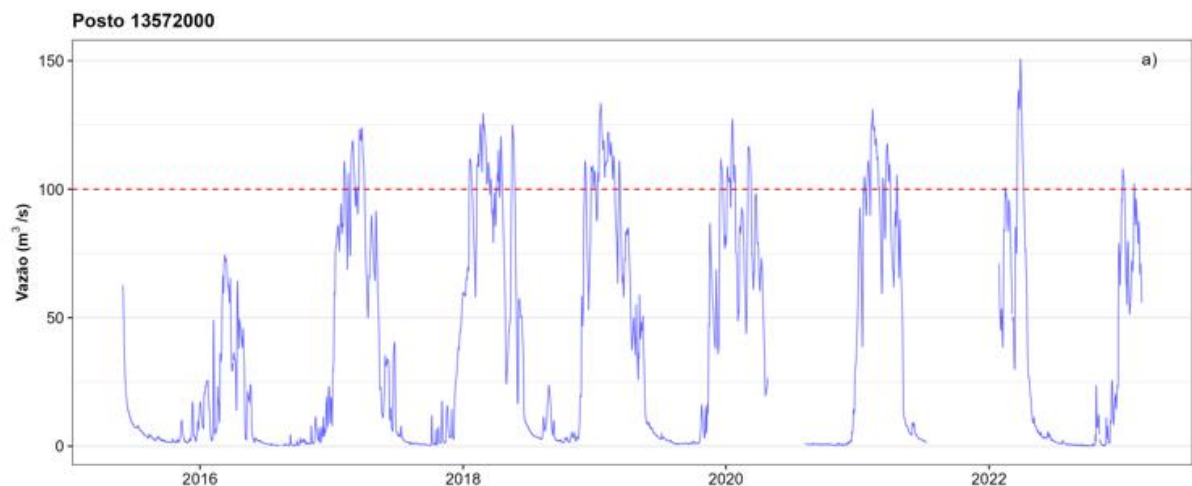
YANG, W. et al. Can the two-parameter recursive digital filter baseflow separation method really be calibrated by the conductivity mass balance method? **Hydrology and earth system sciences**, v. 25, n. 4, p. 1747–1760, 6 abr. 2021.

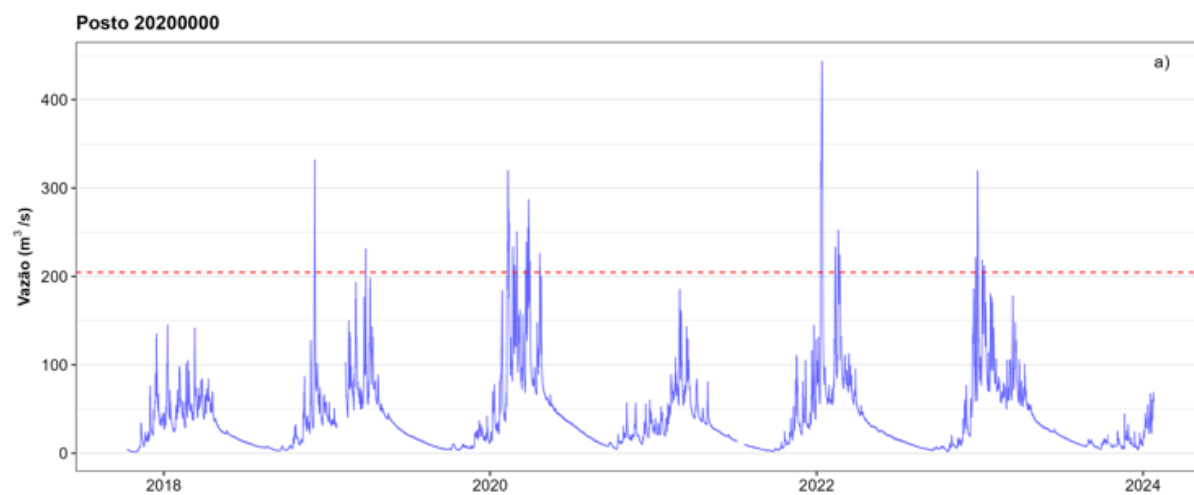
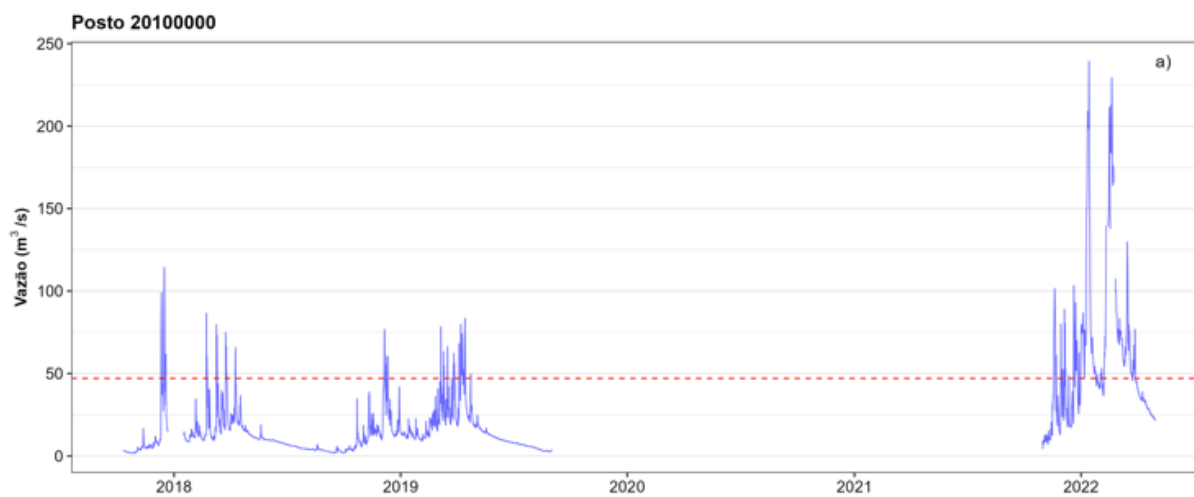
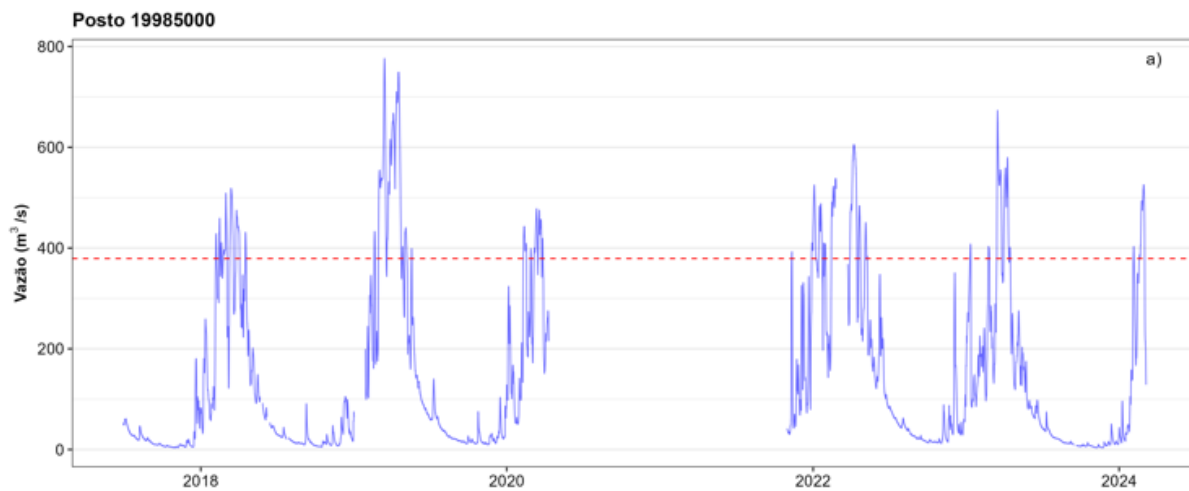
YUE, S. et al. Approach for Describing Statistical Properties of Flood Hydrograph. **Journal of Hydrologic Engineering**, v. 7, n. 2, p. 147–153, mar. 2002.

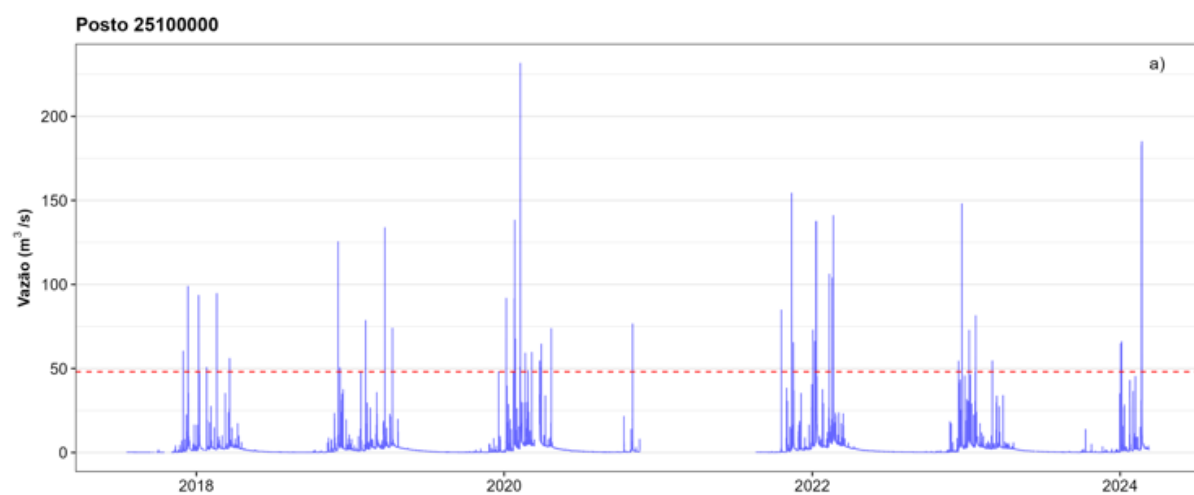
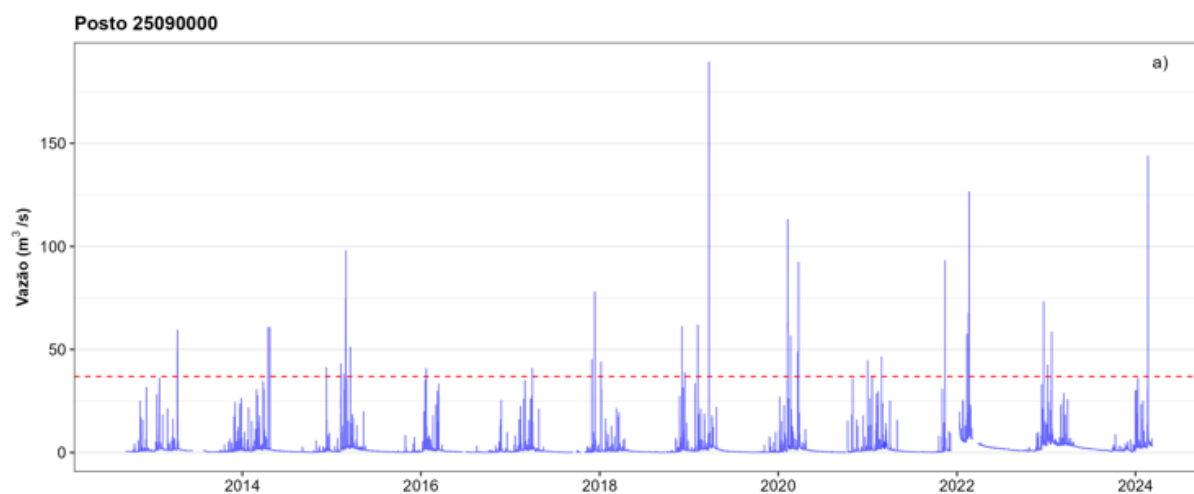
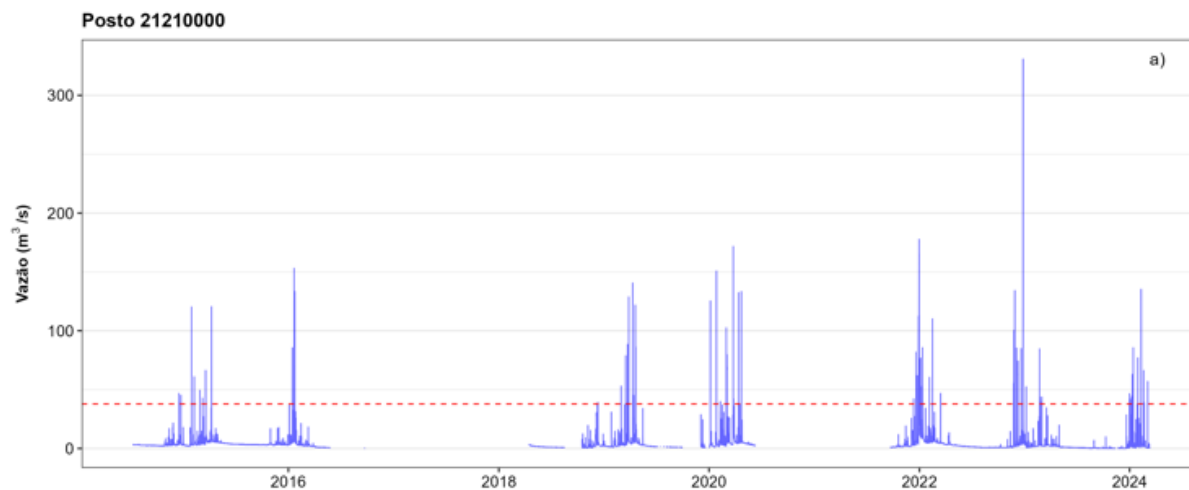
ZHANG, Q. et al. Regional Frequency Analysis of Droughts in China: A Multivariate - Perspective. **Water Resources Management**, v. 29, n. 6, p. 1767–1787, 8 jan. 2015.

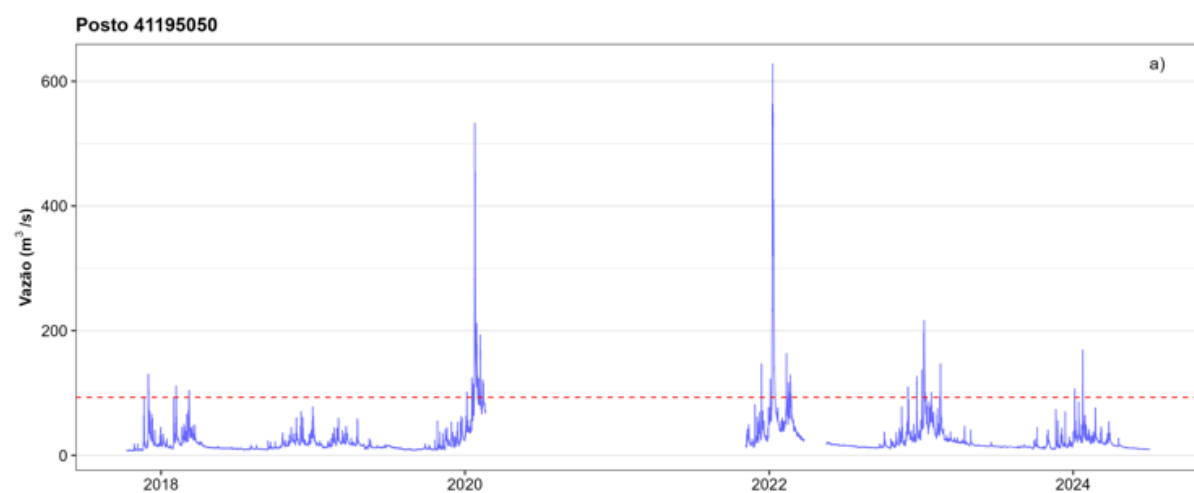
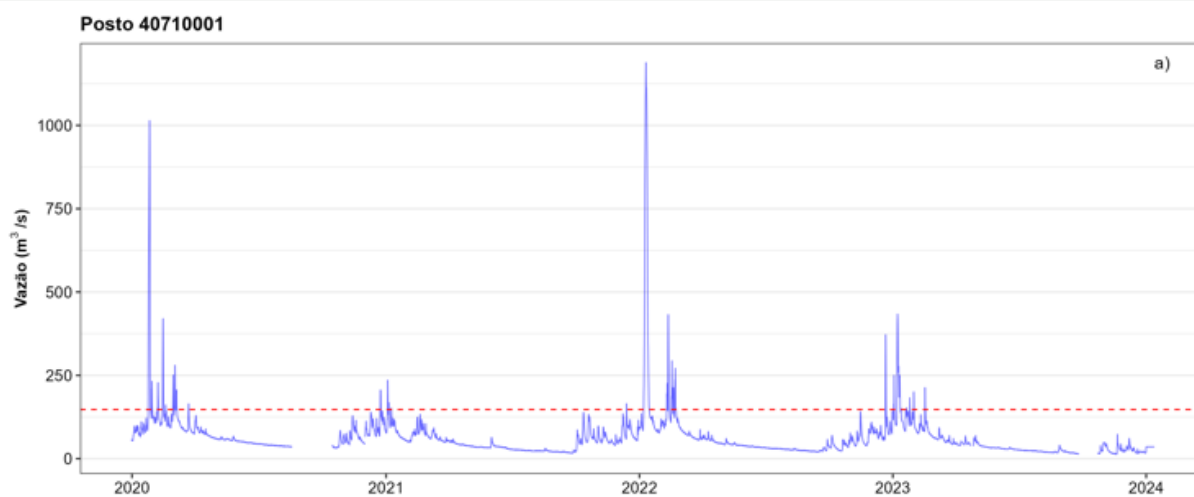
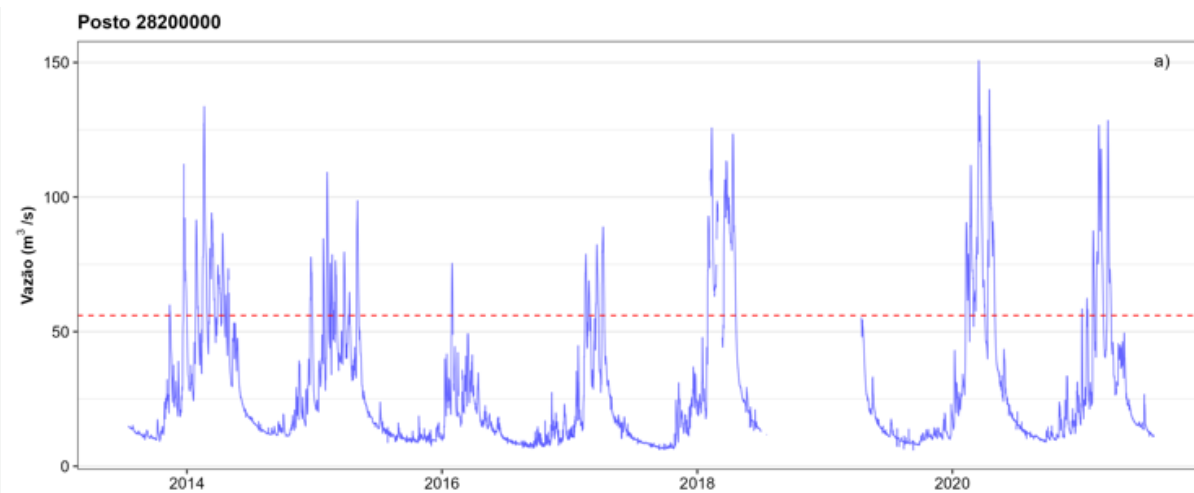
## APÊNDICE A – SÉRIES HISTÓRICAS DE VAZÃO AVALIADAS

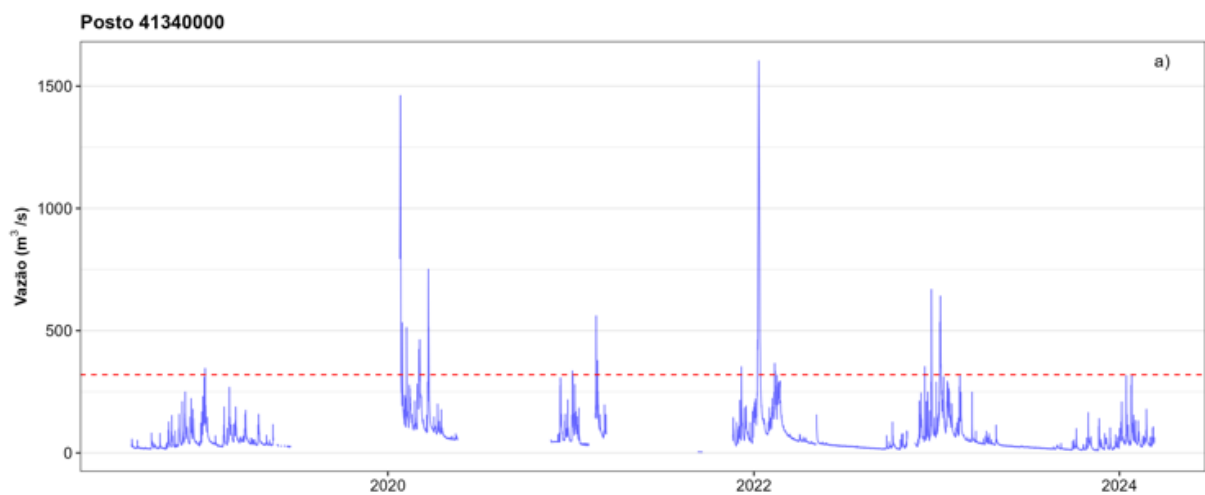
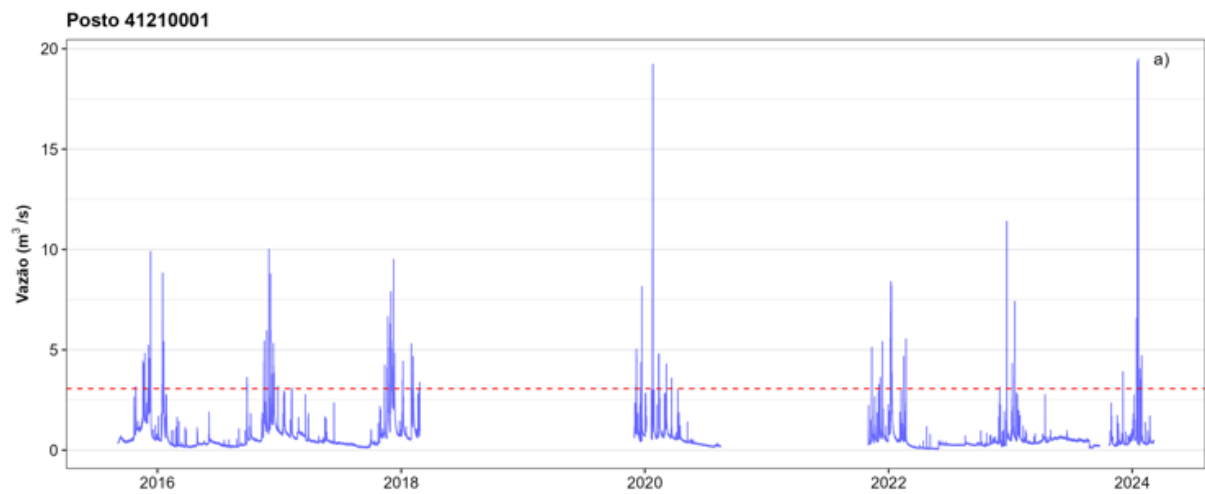
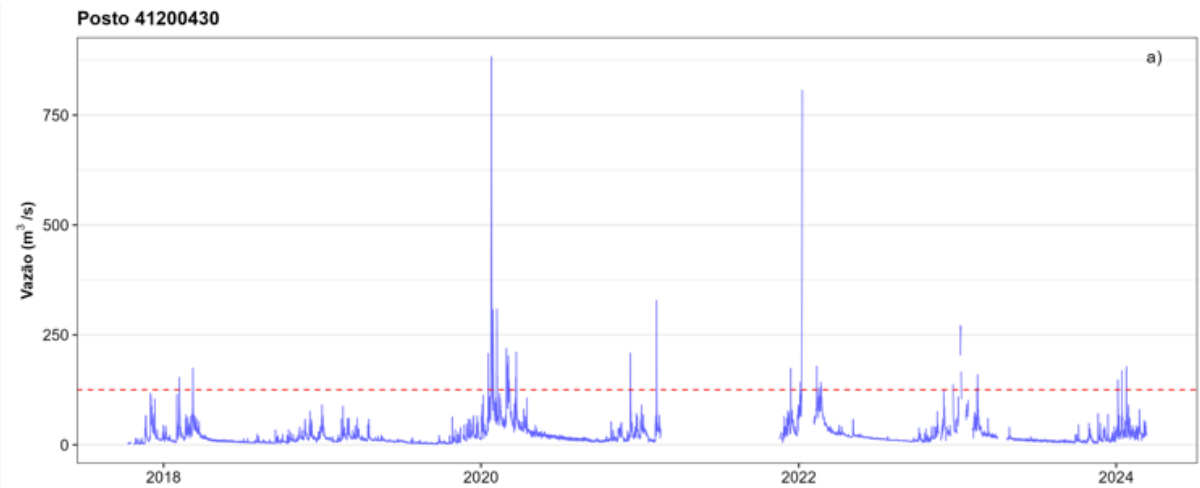


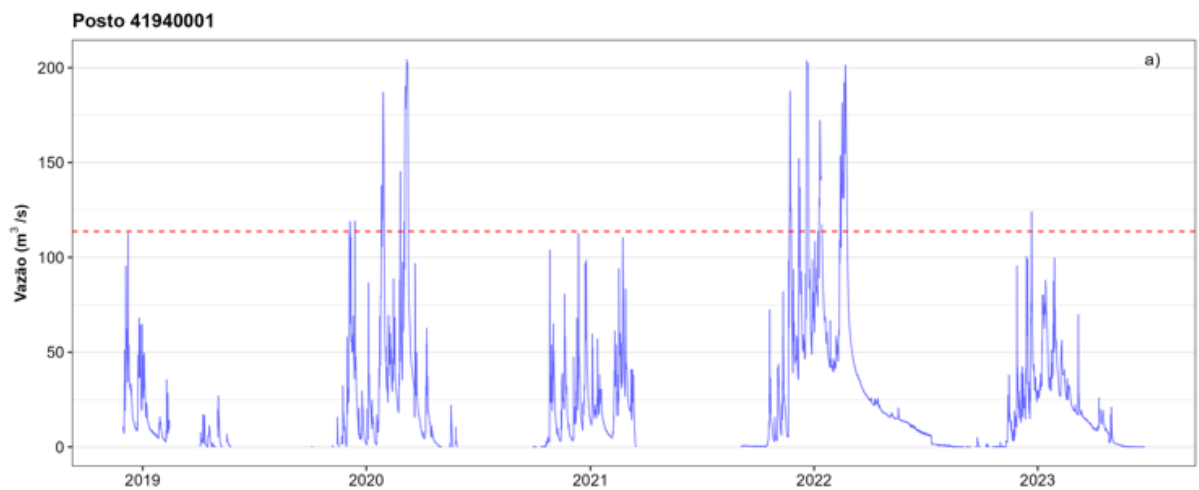
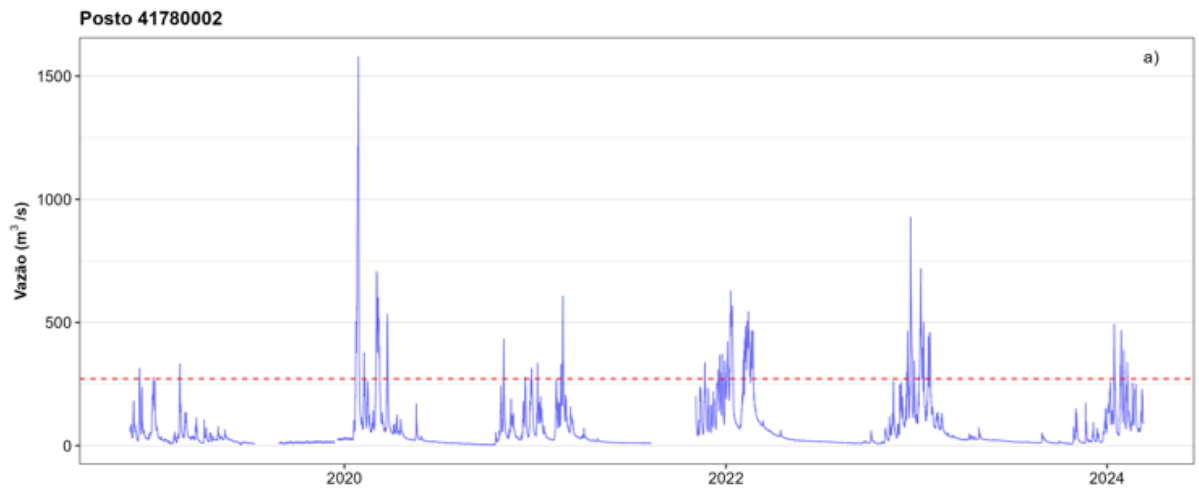


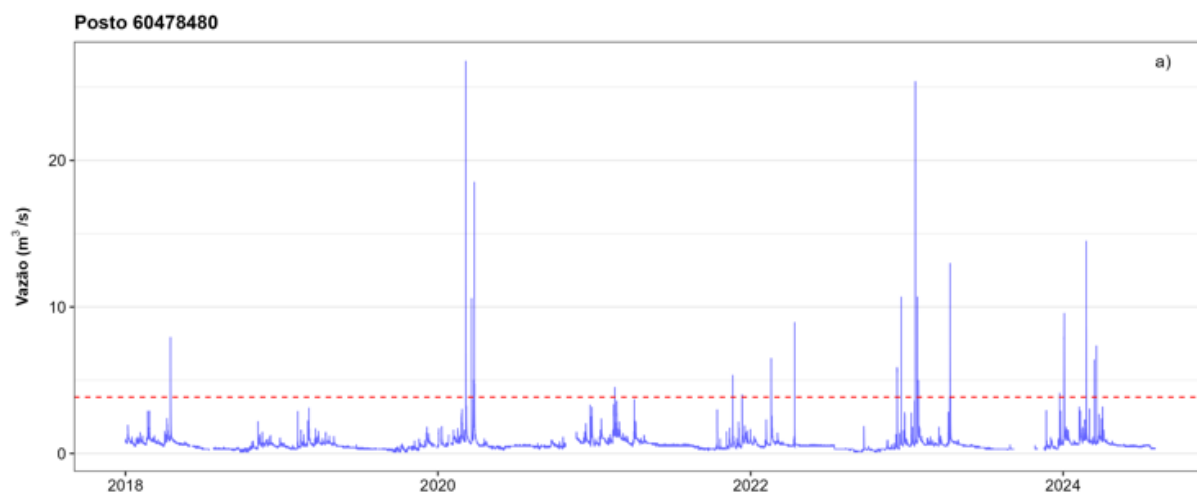
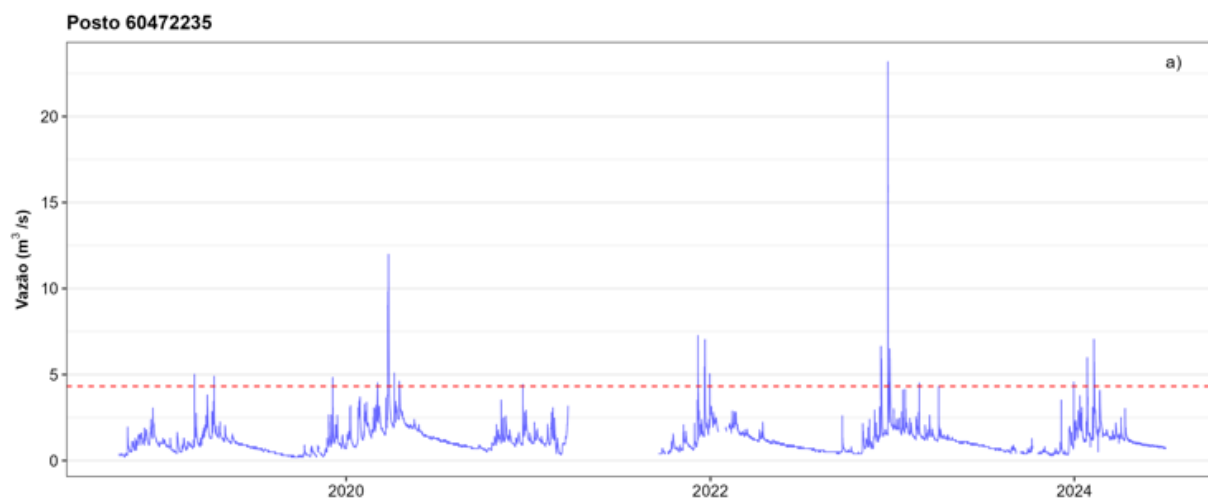
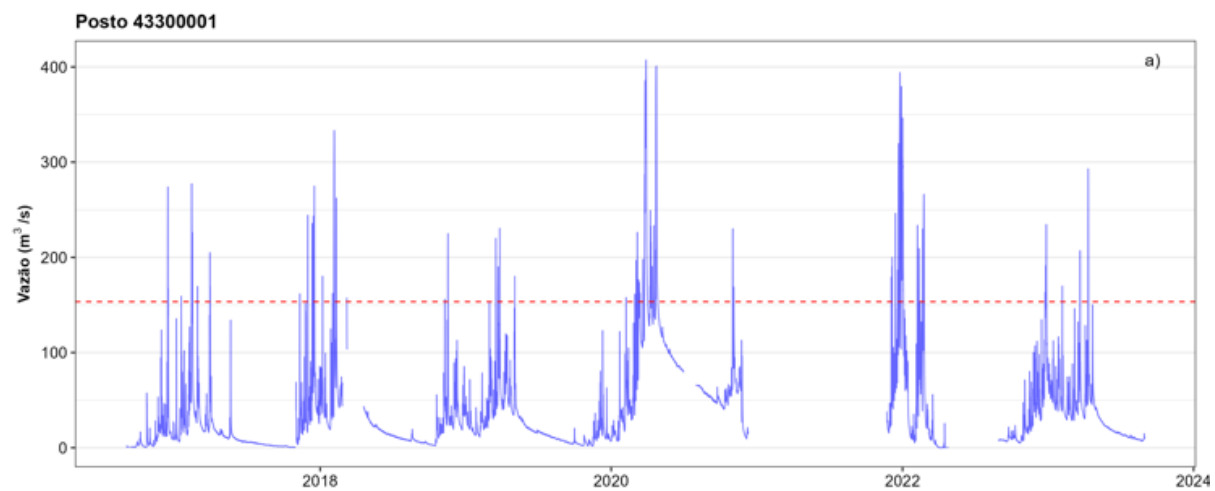


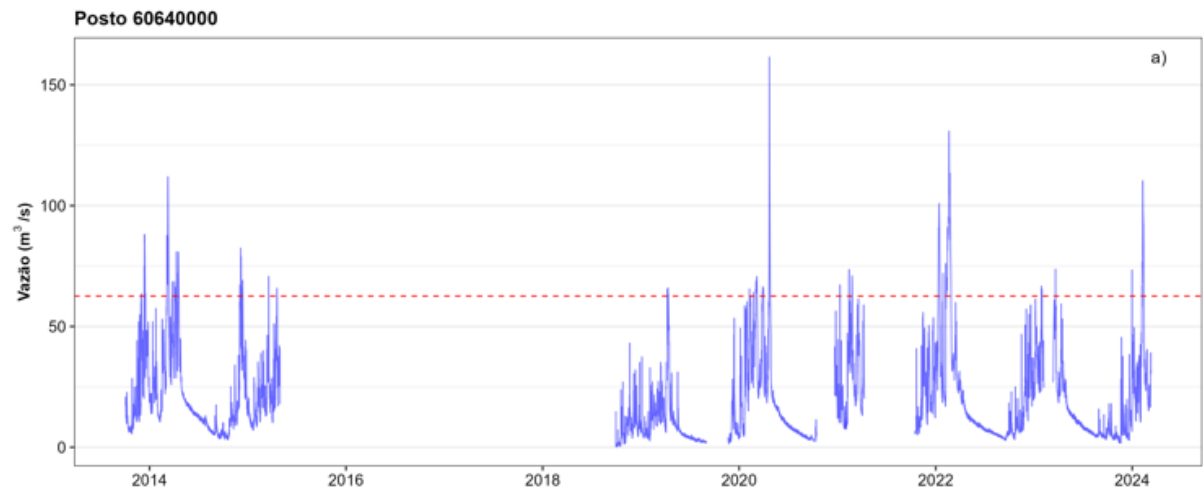












## APÊNDICE B – MOMENTOS-L DAS DISTRIBUIÇÕES GAMA E LOG-NORMAL

- **Distribuição Gama**

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{\Gamma(\eta + 0,5)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\eta + 1)}$$

$$\hat{\theta} = \frac{l_1}{\hat{\eta}}$$

- **Distribuição Log-Normal**

$$\hat{\sigma}_Y = 2 \operatorname{erf}^{-1}(t)$$

$$\hat{\mu}_Y = \ln l_1 - \frac{\hat{\sigma}_Y^2}{2}$$

Em que  $\operatorname{erf}(w) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^w e^{-u^2} du$ , sendo a inversa  $\operatorname{erf}^{-1}(t)$  equivalente a  $u/\sqrt{2}$ , em que  $u$  é a variável Normal padrão equivalente a  $\Phi[(t + 1)/2]$ .

## APÊNDICE C – DISTRIBUIÇÃO DO QUI-QUADRADO

| $\nu$ | $1 - \alpha$ |       |       |       |       |        |        |        |        |        |
|-------|--------------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
|       | 0,995        | 0,99  | 0,975 | 0,95  | 0,90  | 0,10   | 0,05   | 0,025  | 0,01   | 0,005  |
| 1     | 7,88         | 6,63  | 5,02  | 3,84  | 2,71  | 0,0158 | 0,0039 | 0,0010 | 0,0002 | 0,0000 |
| 2     | 10,6         | 9,21  | 7,38  | 5,99  | 4,61  | 0,211  | 0,103  | 0,0506 | 0,0201 | 0,0100 |
| 3     | 12,8         | 11,3  | 9,35  | 7,81  | 6,25  | 0,584  | 0,352  | 0,216  | 0,115  | 0,072  |
| 4     | 14,9         | 13,3  | 11,1  | 9,49  | 7,78  | 1,06   | 0,711  | 0,484  | 0,297  | 0,207  |
| 5     | 16,7         | 15,1  | 12,8  | 11,1  | 9,24  | 1,61   | 1,15   | 0,831  | 0,554  | 0,412  |
| 6     | 18,5         | 16,8  | 14,4  | 12,6  | 10,6  | 2,20   | 1,64   | 1,24   | 0,872  | 0,676  |
| 7     | 20,3         | 18,5  | 16,0  | 14,1  | 12,0  | 2,83   | 2,17   | 1,69   | 1,24   | 0,989  |
| 8     | 22,0         | 20,1  | 17,5  | 15,5  | 13,4  | 3,49   | 2,73   | 2,18   | 1,65   | 1,34   |
| 9     | 23,6         | 21,7  | 19,0  | 16,9  | 14,7  | 4,17   | 3,33   | 2,70   | 2,09   | 1,73   |
| 10    | 25,2         | 23,2  | 20,5  | 18,3  | 16,0  | 4,87   | 3,94   | 3,25   | 2,56   | 2,16   |
| 11    | 26,8         | 24,7  | 21,9  | 19,7  | 17,3  | 5,58   | 4,57   | 3,82   | 3,05   | 2,60   |
| 12    | 28,3         | 26,2  | 23,3  | 21,0  | 18,5  | 6,30   | 5,23   | 4,40   | 3,57   | 3,07   |
| 13    | 29,8         | 27,7  | 24,7  | 22,4  | 19,8  | 7,04   | 5,89   | 5,01   | 4,11   | 3,57   |
| 14    | 31,3         | 29,1  | 26,1  | 23,7  | 21,1  | 7,79   | 6,57   | 5,63   | 4,66   | 4,07   |
| 15    | 32,8         | 30,6  | 27,5  | 25,0  | 22,3  | 8,55   | 7,26   | 6,26   | 5,23   | 4,60   |
| 16    | 34,3         | 32,0  | 28,8  | 26,3  | 23,5  | 9,31   | 7,96   | 6,91   | 5,81   | 5,14   |
| 17    | 35,7         | 33,4  | 30,2  | 27,6  | 24,8  | 10,1   | 8,67   | 7,56   | 6,41   | 5,70   |
| 18    | 37,2         | 34,8  | 31,5  | 28,9  | 26,0  | 10,9   | 9,39   | 8,23   | 7,01   | 6,26   |
| 19    | 38,6         | 36,2  | 32,9  | 30,1  | 27,2  | 11,7   | 10,1   | 8,91   | 7,63   | 6,84   |
| 20    | 40,0         | 37,6  | 34,2  | 31,4  | 28,4  | 12,4   | 10,9   | 9,59   | 8,26   | 7,43   |
| 21    | 41,4         | 38,9  | 35,5  | 32,7  | 29,6  | 13,2   | 11,6   | 10,3   | 8,90   | 8,03   |
| 22    | 42,8         | 40,3  | 36,8  | 33,9  | 30,8  | 14,0   | 12,3   | 11,0   | 9,54   | 8,64   |
| 23    | 44,2         | 41,6  | 38,1  | 35,2  | 32,0  | 14,8   | 13,1   | 11,7   | 10,2   | 9,26   |
| 24    | 45,6         | 43,0  | 39,4  | 36,4  | 33,2  | 15,7   | 13,8   | 12,4   | 10,9   | 9,89   |
| 25    | 46,9         | 44,3  | 40,6  | 37,7  | 34,4  | 16,5   | 14,6   | 13,1   | 11,5   | 10,5   |
| 26    | 48,3         | 45,6  | 41,9  | 38,9  | 35,6  | 17,3   | 15,4   | 13,8   | 12,2   | 11,2   |
| 27    | 49,6         | 47,0  | 43,2  | 40,1  | 36,7  | 18,1   | 16,2   | 14,6   | 12,9   | 11,8   |
| 28    | 51,0         | 48,3  | 44,5  | 41,3  | 37,9  | 18,9   | 16,9   | 15,3   | 13,6   | 12,5   |
| 29    | 52,3         | 49,6  | 45,7  | 42,6  | 39,1  | 19,8   | 17,7   | 16,0   | 14,3   | 13,1   |
| 30    | 53,7         | 50,9  | 47,0  | 43,8  | 40,3  | 20,6   | 18,5   | 16,8   | 15,0   | 13,8   |
| 40    | 66,8         | 63,7  | 59,3  | 55,8  | 51,8  | 29,1   | 26,5   | 24,4   | 22,2   | 20,7   |
| 50    | 79,5         | 76,2  | 71,4  | 67,5  | 63,2  | 37,7   | 34,8   | 32,4   | 29,7   | 28,0   |
| 60    | 92,0         | 88,4  | 83,3  | 79,1  | 74,4  | 46,5   | 43,2   | 40,5   | 37,5   | 35,5   |
| 70    | 104,2        | 100,4 | 95,0  | 90,5  | 85,5  | 55,3   | 51,7   | 48,8   | 45,4   | 43,3   |
| 80    | 116,3        | 112,3 | 106,6 | 101,9 | 96,6  | 64,3   | 60,4   | 57,2   | 53,5   | 51,2   |
| 90    | 128,3        | 124,1 | 118,1 | 113,1 | 107,6 | 73,3   | 69,1   | 65,6   | 61,8   | 59,2   |
| 100   | 140,2        | 135,8 | 129,6 | 124,3 | 118,5 | 82,4   | 77,9   | 74,2   | 70,1   | 67,3   |

