

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

# A desigualdade isoperimétrica e uma aplicação

Belo Horizonte

2012

ARIANA PATRICI SANTOS QUINTÃO PEREIRA

# A desigualdade isoperimétrica e uma aplicação

Monografia apresentada ao departamento de matemática do instituto de ciências exatas da universidade federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para obtenção do título de especialista em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Dutenhefner

Belo Horizonte

2012

## **Agradecimentos**

Agradeço primeiramente à Deus por me prover saúde e coragem para realizar todos os meus anseios;

Agradeço ao meu marido Júnio Quintão por me apoiar sempre;

Aos professores do curso de especialização em matemática da UFMG, em especial o meu orientador, o professor Francisco Dutenhefner, pela boa vontade que sempre demonstrou comigo e

Aos grandes amigos Luciana, Rômulo e Luiza, que tive o prazer de conquistar neste curso, por compartilharem comigo momentos de alegria e sufoco.

Muito obrigada!

## Resumo

Este trabalho tem como principais objetivos provar o teorema da desigualdade isoperimétrica e em seguida apresentar uma aplicação do mesmo.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Desigualdade isoperimétrica</b>	<b>10</b>
2.1	Definições . . . . .	10
2.2	Área limitada por uma curva simples fechada . . . . .	13
2.3	A desigualdade isoperimétrica . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Polígonos Convexos que não Pavimentam o Plano</b>	<b>26</b>
3.1	Definições . . . . .	26
3.2	Pavimentações monoédricas com polígonos de 6 ou menos lados	30
3.3	Uma aplicação da desigualdade isoperimétrica . . . . .	32
3.4	Demonstração do teorema 2 . . . . .	33
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>43</b>

# Lista de Figuras

2.1	Uma curva fechada simples. . . . .	11
2.2	Uma curva fechada (não simples). . . . .	11
2.3	Uma curva fechada simples $C$ sobre o toro $T$ ; $C$ não limita uma região em $T$ . . . . .	13
2.4	$C$ está orientada positivamente. . . . .	13
2.5	Caso simples . . . . .	14
2.6	Caso geral . . . . .	17
2.7	Sistema de coordenadas $xy$ em relação a curva $C$ . . . . .	19
2.8	Sistema de coordenadas $x_1y_1$ em relação à curva $C$ . . . . .	23
3.1	Polígonos . . . . .	27
3.2	Não polígonos . . . . .	27
3.3	Contorno do polígono: uma linha . . . . .	27
3.4	Contorno mais interior do polígono: uma superfície . . . . .	28
3.5	Polígono convexo . . . . .	28
3.6	Polígono não convexo . . . . .	28
3.7	Pavimentação parcial da linha poligonal preta . . . . .	29
3.8	Nós e vértices . . . . .	30
3.9	Pavimentações monoédricas por triângulos, quadriláteros e hexágonos regulares . . . . .	31
3.10	Pavimentação monoédrica por pentágono não regular . . . . .	31
3.11	Região quadrangular $S(r)$ . . . . .	34
3.12	Pavimentação $N_1$ . . . . .	35

3.13 Pavimentação $N_1$ contida no interior da região quadrangular	
$S(r + \beta)$ . . . . .	36
3.14 Esboço . . . . .	37
3.15 Pavimentação $N$ . . . . .	38
3.16 Ângulos em cada nó . . . . .	39
3.17 Pavimentação $N$ contida no interior da região quadrangular	
$S(r + 2\beta)$ . . . . .	41

# Capítulo 1

## Introdução

Os principais objetivos deste trabalho são: provar o teorema da desigualdade isoperimétrica e apresentar uma aplicação dele.

Segundo [2], o teorema da desigualdade isoperimétrica talvez seja o teorema mais antigo da geometria diferencial global e está relacionado com o seguinte problema isoperimétrico:

*Dentre todas as curvas simples fechadas no plano com um dado comprimento  $l$ , qual delas limita a maior área?*

A solução deste problema, ou seja, o círculo, já era conhecida pelos gregos, mas, uma prova satisfatória do mesmo só surgiu em 1870 com Weierstrass, que, ao contrário dos matemáticos que tentaram resolver antes dele, não assumiu que uma solução deveria existir. Weierstrass apresentou uma prova completa da existência de uma solução para o problema, porém, sua prova era um tanto complicada, já que ela usava sua teoria chamada de cálculo das variações.

Mais tarde foram encontradas provas mais diretas. A prova que apresentare-

mos neste trabalho é devida a E. Schmidt (1939) [6].

Depois de provar o teorema da desigualdade isoperimétrica, apresentamos um teorema relativo a polígonos convexos que não pavimentam o plano. Para provar este teorema, lançamos mão da desigualdade isoperimétrica. Dessa forma, apresentamos uma aplicação dessa desigualdade.

# Capítulo 2

## Desigualdade isoperimétrica

### 2.1 Definições

**Definição 2.1** (Curva parametrizada diferenciável). *Uma curva parametrizada diferenciável do plano é uma aplicação diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  de um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^2$ .*

Uma função diferenciável em um intervalo fechado  $[a, b]$  é a restrição de uma função diferenciável definida em um intervalo aberto contendo  $[a, b]$ .

Se  $\alpha$  é uma curva *diferenciável*, implica dizer que  $\alpha$  é uma correspondência que leva cada  $t \in I$  em um ponto  $\alpha(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ , de tal maneira que as funções  $x(t)$  e  $y(t)$  são diferenciáveis de classe  $C^\infty$ .

A variável  $t$  é chamada de *parâmetro* da curva e o subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  dos pontos  $\alpha(t), t \in I$  é chamado *traço* da curva.

Uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita *regular* se  $\forall t \in I, \alpha'(t) \neq 0$ .

Uma *curva plana fechada* é uma curva parametrizada regular  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\alpha$  e todas as suas derivadas coincidam em  $a$  e  $b$ , ou seja:

$$\alpha(a) = \alpha(b), \alpha'(a) = \alpha'(b), \alpha''(a) = \alpha''(b), \alpha'''(a) = \alpha'''(b) \dots$$

Uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita *simples* se não possui auto interseções; isto é: se  $t_1, t_2 \in I, t_1 \neq t_2$ , então,  $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ .

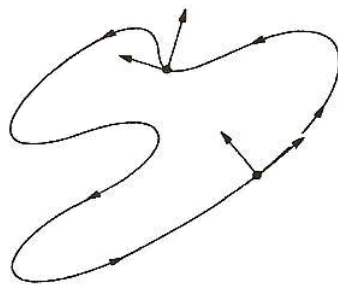


Figura 2.1: Uma curva fechada simples.

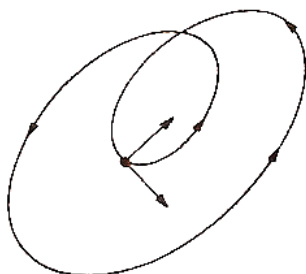


Figura 2.2: Uma curva fechada (não simples).

Dada uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  e dado  $t_0 \in I$ , a aplicação  $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$  é denominada *função comprimento de arco* da curva  $\alpha$  a partir de  $t_0$ . Esta função é diferenciável de classe  $C^\infty$ , pois  $\alpha$  é uma curva regular.

**Definição 2.2** (Curva regular parametrizada pelo comprimento do arco).  
 Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita *parametrizada pelo comprimento de*

arco, se para cada  $t_0, t_1 \in I, t_0 \leq t_1$  o comprimento do arco da curva  $\alpha$  de  $t_0$  a  $t_1$  é igual a  $t_1 - t_0$ . Isto é:

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = t_1 - t_0$$

Em geral, consideramos curvas  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizadas pelo comprimento de arco  $s$ ; logo,  $l$  é o comprimento da curva  $\alpha$ .

**Proposição 2.1.** *Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  está parametrizada pelo comprimento do arco se, e somente se,  $\forall t \in I, |\alpha'(t)| = 1$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $\alpha$  esteja parametrizada pelo comprimento de arco e  $t_0 \in I$ . Considere a função  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$  que para cada  $t \in I$  associa  $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$ . Se  $t_0 \leq t$ , então, por hipótese,  $\int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt = t - t_0$ ; se  $t \leq t_0$ , então,  $-s(t) = \int_t^{t_0} |\alpha'(t)| dt = t_0 - t$ . Portanto, para todo  $t \in I, s(t) = t - t_0$ , donde  $s'(t) = 1$ . Como  $s'(t) = |\alpha'(t)|$ , concluímos que  $|\alpha'(t)| = 1, \forall t \in I$ . A recíproca é imediata.  $\square$

Pelo teorema de Jordan, uma curva simples fechada  $C$  no plano, delimita uma região deste plano, chamada de *interior* de  $C$ . Esta afirmação é válida por se tratar de uma curva no plano. Já no espaço, a afirmação deixa de ser válida. Basta tomarmos como exemplo,  $C$  sendo um meridiano em um toro, claramente,  $C$  não delimita um região no toro.

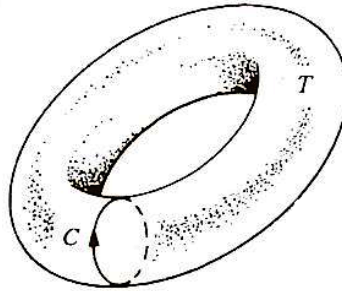


Figura 2.3: Uma curva fechada simples  $C$  sobre o toro  $T$ ;  $C$  não limita uma região em  $T$ .

Quanto a orientação de uma curva simples fechada, seu parâmetro  $t$  pode ser escolhido de forma que  $C$  tenha *orientação positiva*. Diz-se que  $C$  tem *orientação positiva*, quando percorremos a curva e seu interior fica à nossa esquerda, como mostra a figura abaixo.

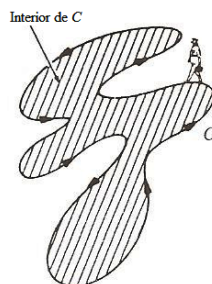


Figura 2.4:  $C$  está orientada positivamente.

## 2.2 Área limitada por uma curva simples fechada

Na seção anterior vimos que uma curva simples fechada  $C$  no plano delimita uma região deste plano, chamada de interior de  $C$ . Daí, quando fizermos referência à área delimitada por uma curva simples fechada  $C$ , estaremos considerando a área do interior de  $C$ .

Utilizaremos a fórmula a seguir para o cálculo da área  $A$  da região delimitada por uma curva simples fechada, com orientação positiva:

**Lema 2.1.** *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva simples fechada, positivamente orientada e definida por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . Então:*

$$A = - \int_a^b y(t)x'(t)dt = \int_a^b x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2} \int_a^b (xy' - yx')dt \quad (2.1)$$

Apesar desta fórmula (2.1) ser consequência do teorema de Green, vamos apresentar uma demonstração direta. Para isso, vamos considerar dois casos:

**Caso 1 (Simples).** *A curva é formada por dois segmentos de reta paralelos ao eixo  $O_y$  e pelos gráficos das funções  $y = f_1(x)$  e  $y = f_2(x)$ ,  $x \in [x_0, x_1]$ ,  $f_1 > f_2$ .*

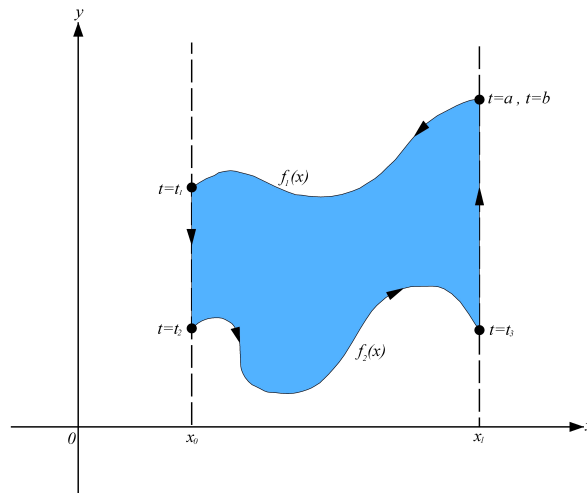


Figura 2.5: Caso simples

*Demonstração.* Para provar a fórmula (2.1), no caso 1, é necessário provar cada uma das seguintes igualdades:

**Igualdade 1:**  $-\int_a^b y(t)x'(t)dt = \int_a^b x(t)y'(t)dt$ .

**Igualdade 2:**  $A = - \int_a^b y(t)x'(t)dt.$

**Igualdade 3:**  $A = \frac{1}{2} \int_a^b (xy' - yx')dt.$

Prova da igualdade 1:

Derivando o produto  $xy$ , vem:

$$(xy)' = x'y + xy' \Rightarrow xy' = (xy)' - x'y$$

Integrando ambos os membros da igualdade anterior, no intervalo  $[a, b]$ , vem:

$$\begin{aligned} \int_a^b xy' dt &= \int_a^b (xy)' dt - \int_a^b x'y dt \Rightarrow \\ \int_a^b xy' dt &= xy \Big|_a^b - \int_a^b x'y dt \Rightarrow \\ \int_a^b xy' dt &= \underbrace{x(b)y(b) - x(a)y(a)}_{= 0, \text{ pois } \alpha \text{ é uma curva fechada}} - \int_a^b x'y dt \Rightarrow \\ \int_a^b xy' dt &= - \int_a^b x'y dt \Rightarrow \\ - \int_a^b x'y dt &= \int_a^b xy' dt \end{aligned}$$

Prova da igualdade 2:

Pela figura (2.5) é claro que a área limitada pela curva é dada por:

$$A = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx - \int_{x_0}^{x_1} f_2(x)dx$$

A curva é positivamente orientada, utilizando a notação da figura (2.5), vamos mostrar que:

$$A = \underbrace{- \int_a^{t_1} y(t)x'(t)dt}_{(i)} - \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt}_{(ii)} - \underbrace{\int_{t_2}^{t_3} y(t)x'(t)dt}_{(iii)} - \underbrace{\int_{t_3}^b y(t)x'(t)dt}_{(iv)}$$

Parametrizando (i), temos:

$$\alpha(t) = (t, f_1(t)), t \in [x_0, x_1], \text{ logo, } x(t) = t \Rightarrow x'(t) = 1$$
$$\therefore - \int_a^{t_1} y(t)x'(t)dt = + \int_{t_1}^a y(t)x'(t)dt = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x) \cdot 1dx = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx$$

Parametrizando (ii), temos:

$$\alpha(t) = (x_0, t) \Rightarrow \alpha'(t) = (0, 1) \Rightarrow - \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt = - \int_{t_1}^{t_2} t \cdot 0 = 0$$

Parametrizando (iii), temos:

$$\alpha(t) = (t, f_2(t)), t \in [x_0, x_1], \text{ logo, } x(t) = t \Rightarrow x'(t) = 1$$
$$\therefore - \int_{t_2}^{t_3} y(t)x'(t)dt = - \int_{x_0}^{x_1} f_2(x) \cdot 1dx = - \int_{x_0}^{x_1} f_2(x)dx$$

Parametrizando (iv), temos:

$$\alpha(t) = (x_1, t) \Rightarrow \alpha'(t) = (0, 1) \Rightarrow - \int_{t_3}^b y(t)x'(t)dt = - \int_{t_3}^b t \cdot 0 = 0$$

Dessa forma mostramos que:

$$- \int_a^{t_1} y(t)x'(t)dt - \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt - \int_{t_2}^{t_3} y(t)x'(t)dt - \int_{t_3}^b y(t)x'(t)dt =$$
$$\int_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx - \int_{x_0}^{x_1} f_2(x)dx = - \int_a^b y(t)x'(t)dt = A.$$

Prova da igualdade 3:

Das igualdades 1 e 2, provamos que:  $A = - \int_a^b y(t)x'(t)dt$  e  $A = \int_a^b x(t)y'(t)dt$ . Somando estas equações, concluímos que:

$$2A = \int_a^b x(t)y'(t)dt - \int_a^b y(t)x'(t)dt \Rightarrow 2A = \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt \Rightarrow$$
$$A = \frac{1}{2} \int_a^b (xy' - yx')dt$$

□

**Caso 2** (Geral). *Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma curva parametrizada, simples e positivamente orientada. Como está ilustrado na figura (2.6), é possível dividir a área limitada por  $\alpha$  em um número finito de regiões do tipo da figura (2.5). Daí, utilizando em cada uma destas regiões o que foi demonstrado no caso simples, é possível demonstrar a expressão (2.1) no caso geral.*

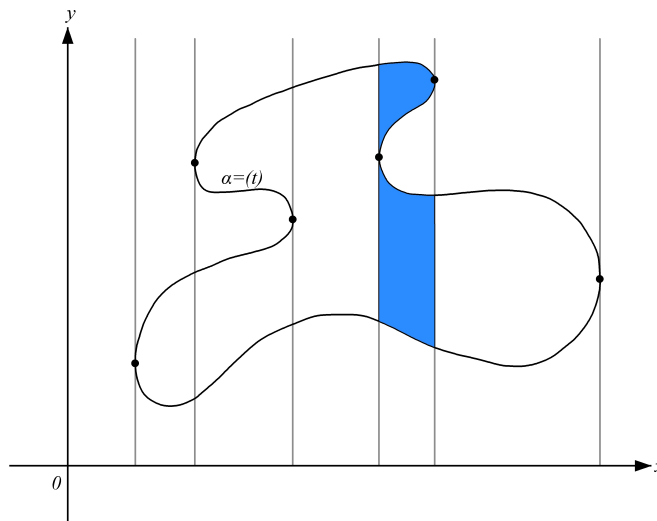


Figura 2.6: Caso geral

## 2.3 A desigualdade isoperimétrica

*Dentre todas as curvas simples fechadas no plano com um dado comprimento  $l$ , qual delas limita a maior área?*

Segundo a referência [2], o teorema da *desigualdade isoperimétrica* talvez seja o teorema mais antigo da geometria diferencial global e está relacionado com o problema isoperimétrico acima.

A solução deste problema, ou seja, o círculo, já era conhecida pelos gregos, mas, uma prova satisfatória do mesmo só surgiu em 1870 com Weierstrass, que, ao contrário dos matemáticos que tentaram resolver antes dele, não assumiu que uma solução deveria existir. Weierstrass apresentou uma prova completa da existência de uma solução para o problema, porém, sua prova era um tanto complicada, já que ela usava sua teoria chamada de cálculo das variações.

Mais tarde foram encontradas provas mais diretas. A prova que apresentaremos a seguir é devida a E. Schmidt (1939) [6].

**Teorema 1** (Desigualdade isoperimétrica). *Seja  $C$  uma curva plana simples e fechada com comprimento  $l$ , e seja  $A$  a área da região limitada por  $C$ . Então,*

$$l^2 - 4\pi A \geq 0. \tag{2.2}$$

*Além disso, a igualdade é verdadeira se, e somente se,  $C$  é um círculo.*

*Demonstração.* Sejam  $E$  e  $F$  retas paralelas que não intersectam a curva fechada  $C$ . Agora, considere o movimento destas duas retas até que elas toquem  $C$  pela primeira vez. Obtemos assim duas retas paralelas,  $E'$  e  $F'$ , tangentes à  $C$ , de forma que a curva  $C$  está totalmente contida na faixa limitada por  $E'$  e  $F'$ . Considere também um círculo  $S^1$  que seja tangente a  $E'$  e  $F'$  e não intersecta  $C$ . Seja  $O$  o centro de  $S^1$  e introduza o sistema de

coordenadas cartesianas com a origem em  $O$  e o eixo  $Ox$  perpendicular a  $E'$  e  $F'$ . Veja figura (2.7).

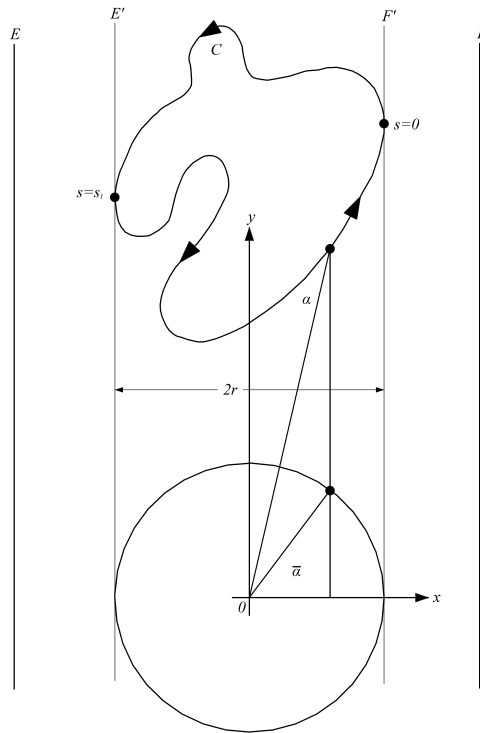


Figura 2.7: Sistema de coordenadas  $xy$  em relação a curva  $C$

Primeiro, neste sistema de coordenadas  $xy$ , podemos parametrizar  $C$  pelo comprimento de arco  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  de modo que  $C$  tenha orientação positiva.

Em seguida, conforme está ilustrado na figura (2.7), podemos supor que o círculo  $S^1$  está parametrizado por:

$$\bar{\alpha}(s) = (x(s), \bar{y}(s)), s \in [0, l],$$

sendo que a primeira coordenada,  $x(s)$ , das parametrizações de  $C$  e de  $S^1$  são iguais.

Como o círculo  $S^1$  tem raio  $r$ , sendo  $2r$  a distância entre  $E'$  e  $F'$ , utilizando (2.1) podemos calcular as áreas,  $A$  e  $\pi r^2$ , limitadas por  $C$  e por  $S^1$  do seguinte modo:

$$A = \int_0^l x(s)y'(s)ds$$

$$\pi r^2 = - \int_0^l \overline{y(s)} x'(s)ds.$$

Somando estas duas expressões obtemos:

$$A + \pi r^2 = \int_0^l xy'ds - \int_0^l \overline{y}x'ds = \int_0^l (xy' - \overline{y}x')ds. \quad (2.3)$$

Podemos obter um limitante superior para esta última integral fazendo uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz. Para isso, considere os vetores  $(x', y')$  e  $(-\overline{y}, x)$  no plano. Calculando o produto escalar, obtemos:

$$xy' - \overline{y}x' = \langle (x', y'), (-\overline{y}, x) \rangle \leq |(x', y')| |(-\overline{y}, x)| = |\alpha'| |\overline{\alpha}|,$$

sendo que a igualdade é assumida somente quando os vetores  $(x', y')$  e  $(-\overline{y}, x)$  apontam para a mesma direção. Deste modo, substituindo esta desigualdade em (2.3) obtemos:

$$A + \pi r^2 = \int_0^l (xy' - \overline{y}x')ds \leq \int_0^l |\alpha'| |\overline{\alpha}| ds = \int_0^l |\overline{\alpha}| ds = \int_0^l r ds = rl.$$

Então, concluímos que:

$$A + \pi r^2 \leq rl. \quad (2.4)$$

Agora, como a *média geométrica* de dois números positivos é menor do que ou igual a *média aritmética* destes dois números,  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \leq \frac{a+b}{2}$ , obtemos:

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{\pi r^2} \leq \frac{1}{2} (A + \pi r^2) \leq \frac{1}{2} rl. \quad (2.5)$$

Elevando ao quadrado, vem:

$$A \cdot \pi r^2 \leq \frac{1}{4} (A + \pi r^2)^2 \leq \frac{1}{4} (rl)^2.$$

Multiplicando por 4, vem:

$$4A\pi r^2 \leq (A + \pi r^2)^2 \leq r^2 l^2. \quad (2.6)$$

Do primeiro e do terceiro membros da desigualdade acima, chegamos ao seguinte resultado:

$$4A\pi r^2 \leq r^2 l^2$$

Simplificando  $r^2$  em ambos os membros, temos que  $4\pi A \leq l^2$ , ou seja,  $l^2 - 4\pi A \geq 0$  que é exatamente a desigualdade desejada (2.2).

Para concluir a demonstração do teorema, precisamos somente demonstrar que a igualdade em (2.2) é verdadeira somente quando a curva  $C$  é uma circunferência. Então, vamos assumir que  $l^2 - 4\pi A = 0$ , ou seja, que  $l^2 = 4\pi A$ . Substituindo esta igualdade em (2.6), vem:

$$4A\pi r^2 \leq (A + \pi r^2)^2 \leq 4A\pi r^2.$$

Como o primeiro e o terceiro membros desta desigualdade são iguais vemos, então, que

$$(A + \pi r^2)^2 = 4A\pi r^2.$$

Desenvolvendo o quadrado obtemos:

$$\begin{aligned}
 A^2 + 2A\pi r^2 + (\pi r^2)^2 &= 4A\pi r^2 \Rightarrow A^2 - 2A\pi r^2 + (\pi r^2)^2 = 0 \\
 \Rightarrow (A - \pi r^2)^2 &= 0 \Rightarrow A - \pi r^2 = 0 \Rightarrow \\
 A &= \pi r^2.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Além disso, como estamos supondo que  $l^2 = 4\pi A$ , (2.6) implica:

$$4A\pi r^2 \leq (A + \pi r^2)^2 \leq r^2 l^2 = 4A\pi r^2$$

e como o primeiro e o último termo são iguais, vemos que  $(A + \pi r^2)^2 = r^2 l^2$ , ou seja,

$$A + \pi r^2 = lr. \tag{2.8}$$

Daí, como  $A = \pi r^2$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
 l &= \frac{A + \pi r^2}{r} = \frac{\pi r^2 + \pi r^2}{r} = \frac{2\pi r^2}{r} \Rightarrow \\
 l &= 2\pi r.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Então, quando supomos que se verifica a igualdade em (2.2), então também temos uma igualdade em (2.4). Como (2.4) foi obtida pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, sabemos que a igualdade é válida somente quando os vetores  $(x', y')$  e  $(-\bar{y}, x)$  apontam para a mesma direção. Como o vetor  $(x', y')$  é unitário e como o vetor  $(-\bar{y}, x)$  tem módulo  $r$ , podemos concluir então que  $(x', y') = \frac{1}{r}(-\bar{y}, x)$  e, portanto,

$$y' = \frac{1}{r} x. \tag{2.10}$$

Observe agora que a igualdade (2.9) implica que  $r = \frac{l}{2\pi}$  não depende da direção das retas  $E'$  e  $F'$  e, portanto, podemos repetir toda a demonstração realizada a partir da figura (2.7) para retas paralelas a qualquer direção.

Então, sejam  $\overline{E}$  e  $\overline{F}$  retas paralelas, tangentes a curva  $C$ , ambas perpendiculares a  $E$  e a  $F$ , de modo que  $C$  está contida na faixa horizontal limitada por elas. Como acabamos de observar, a distância entre estas duas retas também é  $2r$ , distância entre as retas  $E$  e  $F$ . Veja figura (2.8).

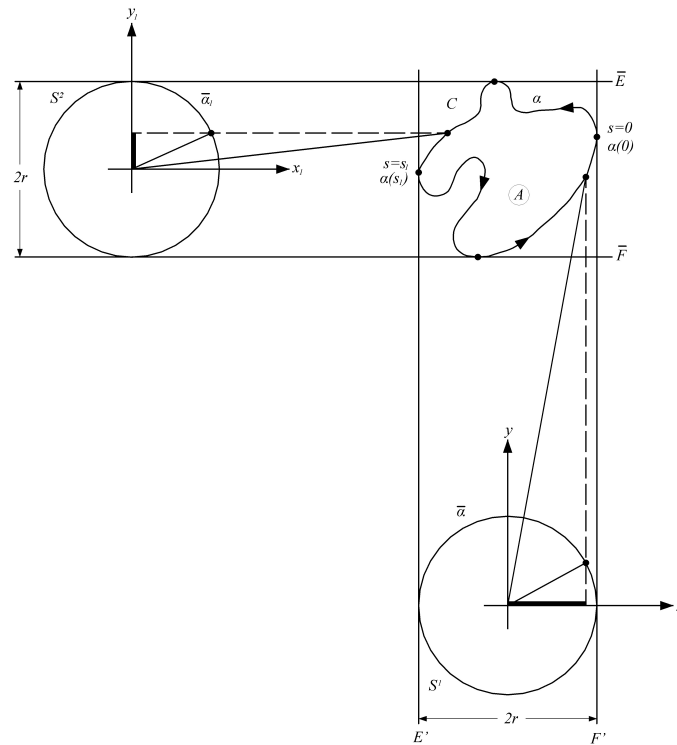


Figura 2.8: Sistema de coordenadas  $x_1y_1$  em relação à curva  $C$

Como no caso anterior, considere um círculo  $S^2$  tangente às retas  $\overline{E}$  e  $\overline{F}$  de modo que  $S^2$  não intersecta a curva  $C$ . Sejam  $(a, b)$  as coordenadas do centro do círculo  $S^2$  no sistema de coordenadas  $xy$ .

Com origem neste ponto  $(a, b)$ , considere um novo sistema de coordenadas  $x_1y_1$  com o eixo  $x_1$  paralelo a reta  $\overline{E}$ , veja figura (2.8). Como este sistema de coordenadas  $x_1y_1$  pode ser obtido do sistema de coordenadas  $xy$  por uma translação pelo vetor  $(a, b)$ , podemos considerar a seguinte parametrização  $\alpha_1(s) = (x_1(s), y_1(s))$   $s \in [0, l]$ , pelo comprimento de arco, da curva  $C$ , no

sistema de coordenadas  $x_1y_1$ :

$$\begin{cases} x_1(s) = x(s) - a \\ y_1(s) = y(s) - b \end{cases} \quad (2.11)$$

Derivando a primeira destas relações obtemos também que:

$$x'_1 = x'. \quad (2.12)$$

Analisando a figura (2.8) vemos, então, que no sistema de coordenadas  $x_1y_1$  o círculo  $S^2$  tem parametrização da forma

$$\bar{\alpha}_1(s) = (\bar{x}_1(s), y_1(s)) \quad s \in [0, l],$$

sendo que, agora, a segunda coordenada,  $y_1(s)$ , das parametrizações de  $C$  e de  $S^2$ , no sistema de coordenada  $x_1y_1$ , são iguais.

No que segue, vamos repetir os argumentos já utilizados para as curvas  $C$  e  $S^1$ , de parametrizações  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  e  $\bar{\alpha}(s) = (x(s), \bar{y}(s))$  no sistema de coordenadas  $xy$ , mas agora para as curvas  $C$  e  $S^2$ , de parametrizações  $\alpha_1(s) = (x_1(s), y_1(s))$  e  $\bar{\alpha}_1(s) = (\bar{x}_1(s), y_1(s))$  no sistema de coordenadas  $x_1y_1$ .

Então, utilizando (2.1), podemos calcular as áreas,  $A$  e  $\pi r^2$ , limitadas por  $C$  e  $S^2$  do seguinte modo:

$$A = - \int_0^l y_1(s) x'_1(s) ds$$

$$\pi r^2 = \int_0^l \bar{x}_1(s) y'_1(s) ds$$

Somando estas duas equações, vem:

$$A + \pi r^2 = \int_0^l \bar{x}_1 y_1' ds - \int_0^l y_1 x_1' ds = \int_0^l (\bar{x}_1 y_1' - y_1 x_1') ds$$

Considerando os vetores  $(x_1', y_1')$  e  $(-y_1, \bar{x}_1)$  do plano, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, vemos que:

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 &= \int_0^l (\bar{x}_1 y_1' - y_1 x_1') ds = \\ &= \int_0^l \langle (x_1', y_1'), (-y_1, \bar{x}_1) \rangle ds \leq \int_0^l |\alpha_1'| |\bar{\alpha}_1| ds = \int_0^l |\bar{\alpha}_1| ds = rl. \end{aligned}$$

Mas, como já provamos em (2.8) que  $A + \pi r^2 = rl$ , vemos que a desigualdade acima é, de fato, uma igualdade. Como esta desigualdade foi obtida por Cauchy-Schwarz, concluímos que os vetores  $(x_1', y_1')$  e  $(-y_1, \bar{x}_1)$  apontam na mesma direção e, portanto  $(x_1', y_1') = \frac{1}{r} \cdot (-y_1, \bar{x}_1)$  que implica:

$$x_1' = -\frac{1}{r} y_1 \tag{2.13}$$

Usando (2.11), (2.12), (2.10) e (2.13) vemos que:

$$\begin{aligned} x^2 + (y - b)^2 &= x^2 + y_1^2 = (ry')^2 + (-rx_1')^2 \\ &= r^2 (y'^2 + x_1'^2) = r^2 (y'^2 + x'^2) \\ &= r^2 |\alpha'|^2 = r^2. \end{aligned}$$

Logo  $x^2 + (y - b)^2 = r^2$ . Isto significa que a curva parametrizada  $C$ ,  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  é um círculo de centro  $(0, b)$  e raio  $r$ , no sistema de coordenadas  $xy$ .

Isto termina a demonstração do teorema da desigualdade isoperimétrica.  $\square$

## Capítulo 3

# Polígonos Convexos que não Pavimentam o Plano

### 3.1 Definições

De acordo com a referência [3]:

Um *polígono* é uma figura geométrica plana cujo contorno é fechado e formado por uma quantidade finita de *segmentos de reta*, que são seus lados. Em outras palavras, o contorno de um polígono é uma *linha poligonal* fechada. Frequentemente, a palavra *polígono* refere-se apenas ao contorno. Entretanto, às vezes, refere-se ao contorno mais a região plana, que é seu interior.

Por exemplo, para calcular a área de um quadrado consideramos a região interior e para calcular o perímetro de um quadrado consideramos somente uma linha poligonal quadrada. Deste modo, o fato de os polígonos poderem ser considerados ora uma linha, ora uma superfície não traz nenhum problema grave.

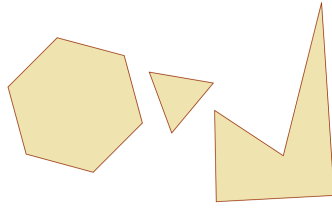


Figura 3.1: Polígonos

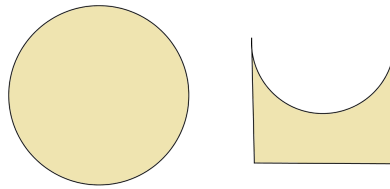


Figura 3.2: Não polígonos

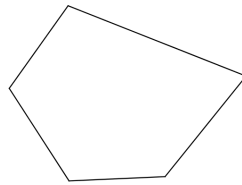


Figura 3.3: Contorno do polígono: uma linha

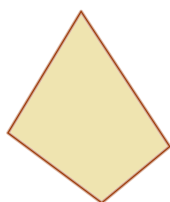


Figura 3.4: Contorno mais interior do polígono: uma superfície

*Polígono convexo*, é aquele em que todos os ângulos internos são menores que  $180^\circ$ . Abaixo seguem exemplos de polígonos convexos e não-convexos:

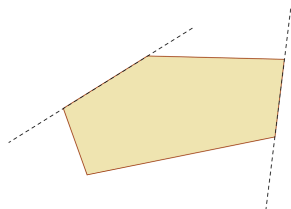


Figura 3.5: Polígono convexo

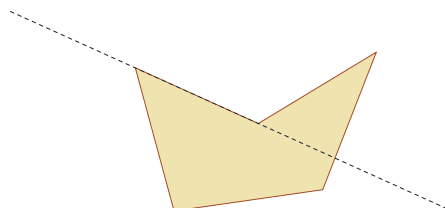


Figura 3.6: Polígono não convexo

Quanto a *pavimentar*, é o mesmo que ladrilhar, cobrir uma área com polígonos sem sobreposição. Os polígonos de uma pavimentação também podem ser chamados de *ladrilhos*.

*Cobrir* significa que a cobertura poligonal pode se estender além dos limites da superfície a ser coberta. Dessa forma, a soma das áreas dos polígonos da cobertura pode ser maior que a área da superfície a ser coberta.

Uma *pavimentação* pode ser classificada em *parcial* ou *ideal*.

*Pavimentação parcial*: Seja  $L$  uma linha poligonal simples e fechada. Uma pavimentação da região poligonal  $P$  limitada por  $L$  é uma subdivisão de  $P$  em um número *finito* de polígonos tais que: a união de todos esses polígonos e suas fronteiras é igual a  $P$  e a interseção do interior de dois desses polígonos é vazia.

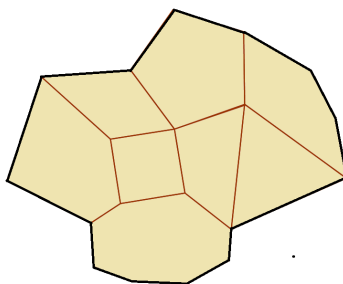


Figura 3.7: Pavimentação parcial da linha poligonal preta

*Pavimentação ideal*: Uma pavimentação ideal do plano é uma subdivisão do plano em uma quantidade *enumerável* de polígonos tais que: a união de todos esses polígonos e suas fronteiras é todo o plano e a interseção do interior de dois desses polígonos é vazia.

*Pavimentação monoédrica ou pura*: São pavimentações constituídas de polígonos congruentes entre si.

Os vértices dos polígonos de uma pavimentação são denominados *nós*. Nesta definição é importante chamar a atenção para o fato de que um dado polígono da pavimentação, pode ter em sua fronteira, uma quantidade de nós maior que a quantidade de vértices. Por exemplo, na figura abaixo o polígono 1 é um pentágono, com 5 vértices e 6 nós. Já o polígono 2 tem a mesma quantidade de nós e de vértices.

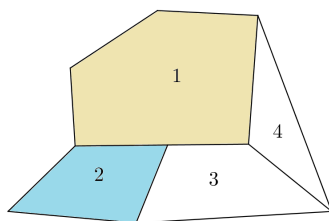


Figura 3.8: Nós e vértices

As *arestas* de uma pavimentação são os segmentos de reta que tem por extremidades dois *nós* consecutivos de um mesmo lado de um polígono. Dessa forma as arestas da pavimentação podem ser lados ou parte de lados de polígonos que as definem. Por exemplo, na figura 3.8, o polígono 1 é um pentágono, naturalmente com cinco lados, mas na pavimentação, este polígono possui seis arestas em sua fronteira.

## 3.2 Pavimentações monoédricas com polígonos de 6 ou menos lados

Vamos supor que dispomos de uma quantidade infinita de cópias de uma determinada forma geométrica. Se for possível encaixá-la, sem falhas ou sobreposição, cobrindo todo o plano, dizemos que esta forma geométrica pavimenta o plano e que este padrão é uma pavimentação monoédrica do plano.

Considerando polígonos regulares, a figura a seguir nos mostra que é possível pavimentar o plano apenas com triângulos equiláteros, apenas com quadrados ou apenas com hexágonos regulares.

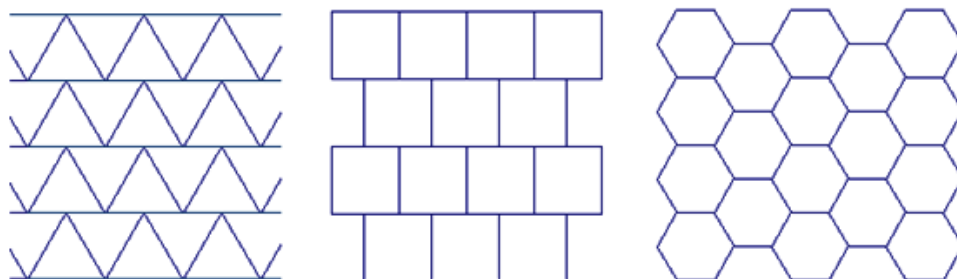


Figura 3.9: Pavimentações monoédricas por triângulos, quadriláteros e hexágonos regulares

Quanto a pentágonos regulares, eles não servem como ladrilhos do plano, pois o ângulo de  $360^\circ$  não é múltiplo do valor do ângulo interno de um pentágono regular  $108^\circ$ . Entretanto existem pentágonos não regulares que podem ser utilizados para pavimentar todo plano. A figura (3.10) é um exemplo de uma pavimentação mónoédrica por pentágonos não regulares, desenvolvida por Marjorie Rice, segundo [7].



Figura 3.10: Pavimentação monoédrica por pentágono não regular

Dessa forma, vimos que é possível construir pavimentações monoédricas do plano por polígonos de três, quatro, cinco e seis lados. Mas será que pavimentações deste tipo podem ser construídas com polígonos convexos de sete ou mais lados? O teorema a seguir, primeiramente demonstrado por Ivan Niven em 1978 [5], garante que isto é impossível.

**Teorema 2.** *Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  quaisquer números reais positivos. É impossível pavimentar o plano com qualquer coleção de polígonos convexos, cada polígono com 7 ou mais lados, área maior que  $\alpha$  e perímetro menor que  $\beta$ .*

Nas próximas seções apresentaremos uma demonstração deste teorema como uma aplicação da desigualdade isoperimétrica.

### 3.3 Uma aplicação da desigualdade isoperimétrica

Para provar o teorema 2, precisaremos do *teorema de Euler* e do lema 3.1 a seguir. A prova do *teorema de Euler* pode ser encontrada na referência [4] e a prova do lema será apresentada utilizando o teorema 1 desta monografia, ou seja, a *desigualdade isoperimétrica*, cuja prova foi apresentada no capítulo 2.

**Teorema 3** (Teorema de Euler). *Seja dada uma pavimentação parcial do plano com  $f$  polígonos,  $v$  nós e  $a$  arestas. Então, é válida a seguinte igualdade:*

$$v - a + f = 1 \tag{3.1}$$

**Lema 3.1.** *Se  $P$  é um polígono de perímetro menor que  $\beta$ , então, a área de  $P$  é menor que  $\beta^2$ .*

*Demonstração.* Vamos mostrar que a *desigualdade isoperimétrica* implica este resultado.

De fato, sejam  $A$  a área limitada por um polígono de perímetro menor que  $\beta$  e  $A_C$  a área de um círculo cuja fronteira tem comprimento igual a  $\beta$ . Pela desigualdade isoperimétrica, temos:

$$\beta^2 - 4\pi A_C = 0 \Rightarrow A_C = \frac{\beta^2}{4\pi} < \beta^2.$$

Logo:

$$A < A_C < \beta^2.$$

□

### 3.4 Demonstração do teorema 2

A demonstração se dará por absurdo. Vamos supor que o plano pode ser pavimentado por uma coleção de polígonos convexos, cada um com 7 ou mais lados, área maior que  $\alpha$  e perímetro menor que  $\beta$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são números reais e positivos pré definidos.

Nosso objetivo é demonstrar que estas hipóteses levam a um contradição.

De fato, vamos mostrar que existe um quadrado de lado suficientemente grande que não pode ser coberto por polígonos que satisfazem as hipóteses consideradas.

*Demonstração.* Vamos considerar um sistema de coordenadas  $(x, y)$  no plano da pavimentação e uma região quadrangular  $S(r)$  contendo todos os pontos  $(x, y)$  que satisfazem  $|x| \leq r$  e  $|y| \leq r$ , onde  $r$  é um número real e positivo. Vamos mostrar que existe  $r$  suficientemente grande que nos dará a contradição desejada.

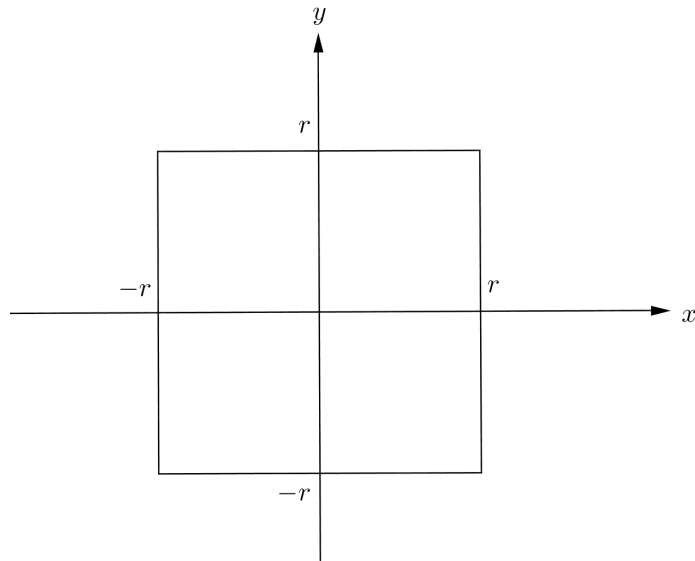


Figura 3.11: Região quadrangular  $S(r)$

Seja  $N_1$  a pavimentação parcial do plano construída da seguinte maneira:

- Se um polígono da pavimentação do plano contém algum ponto da região quadrangular  $S(r)$ , então, este polígono pertence a pavimentação parcial  $N_1$
- Se algum polígono da pavimentação não tiver ponto em comum com  $S(r)$ , mas for cercado por peças que tenham pelo menos um ponto em comum com  $S(r)$ , então, esse polígono também faz parte da pavimentação  $N_1$ . Essa condição garante que a pavimentação  $N_1$  cobre toda a região sem deixar buracos.

Vamos considerar também uma região quadrangular  $S(r + \beta)$ , que corresponde à região quadrangular de vértices  $(\pm (r + \beta), \pm (r + \beta))$ .

Como o perímetro de cada polígono é menor que  $\beta$ , segue que a pavimentação  $N_1$  está toda contida no interior dessa região quadrangular  $S(r + \beta)$ .

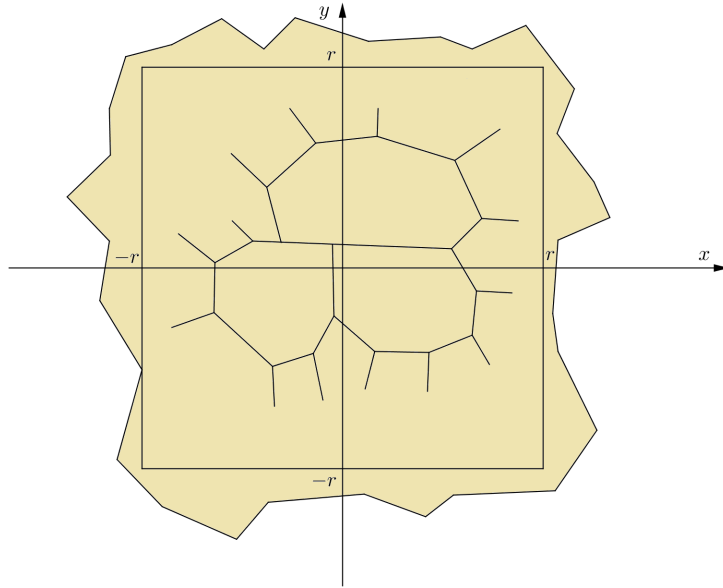


Figura 3.12: Pavimentação  $N_1$

De fato: Suponhamos que algum vértice de algum polígono da pavimentação  $N_1$  esteja fora do quadrado de lado  $(r + \beta)$ . Por exemplo, na figura 3.14, estamos admitindo que o vértice  $v_5$  de um polígono de 7 lados da pavimentação  $N_1$  possui um vértice fora do quadrado de lado  $(r + \beta)$ . Para este polígono, sej  $d$  a diagonal que liga o vértice  $v_5$  ao vértice  $v_1$  e  $l_1, l_2, \dots, l_7$  os lados desse polígono. Veja a figura (3.14). Então, pela desigualdade triangular,

$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 > d > \beta$$

$$l_5 + l_6 + l_7 > d > \beta$$

Somando as desigualdades acima, vem:

$$l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_7 > 2d > 2\beta > \beta$$

$$\Rightarrow \textit{Perimetro} > \beta$$

Absurdo, pois, por hipótese do teorema 2, o perímetro de cada polígono é menor que  $\beta$ .

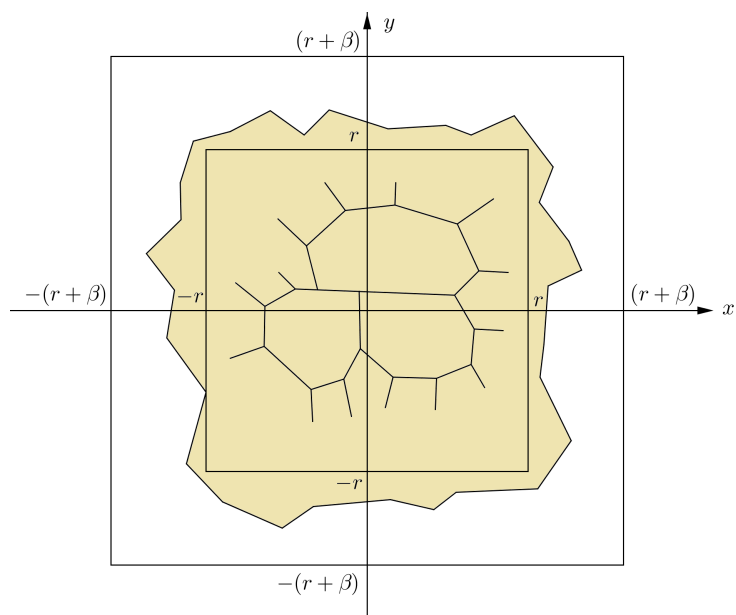


Figura 3.13: Pavimentação  $N_1$  contida no interior da região quadrangular  $S(r + \beta)$

Como cada polígono da pavimentação tem área maior que  $\alpha$  e  $N_1$  está inteiramente contida em  $S(r + \beta)$ , então, podemos afirmar que  $N_1$  possui uma quantidade finita de polígonos.

De maneira análoga à que definimos a pavimentação  $N_1$  que cobre sem deixar buracos a região quadrangular  $S(r)$ , vamos definir outra pavimentação,  $N$ , como sendo àquela que cobre inteiramente a região quadrangular  $S(r + \beta)$ . Veja a figura 3.15.

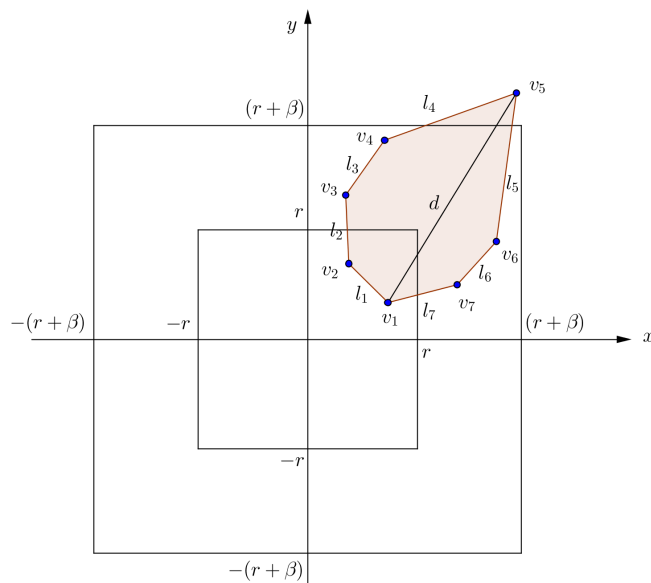


Figura 3.14: Esboço

Mostramos que a pavimentação  $N_1$  possui uma quantidade finita de polígonos. Por argumentos análogos, podemos afirmar que a pavimentação  $N$  também possui uma quantidade finita de polígonos.

Então, vamos definir alguns elementos dessas pavimentações:

- Pavimentação  $N_1$  : possui  $f_1$  polígonos e  $v_1$  nós;
- Pavimentação  $N$  : possui  $f$  polígonos,  $v$  nós e  $a$  arestas.

Aplicando o *teorema de Euler* à pavimentação  $N$ , vem:

$$v + f = a + 1 \Rightarrow v + f > a. \quad (3.2)$$

Agora, seja  $\sum \alpha_i$  o somatório dos ângulos internos, em cada nó, de todos os polígonos da pavimentação  $N_1$ . Para exemplificar, veja a figura a seguir. O

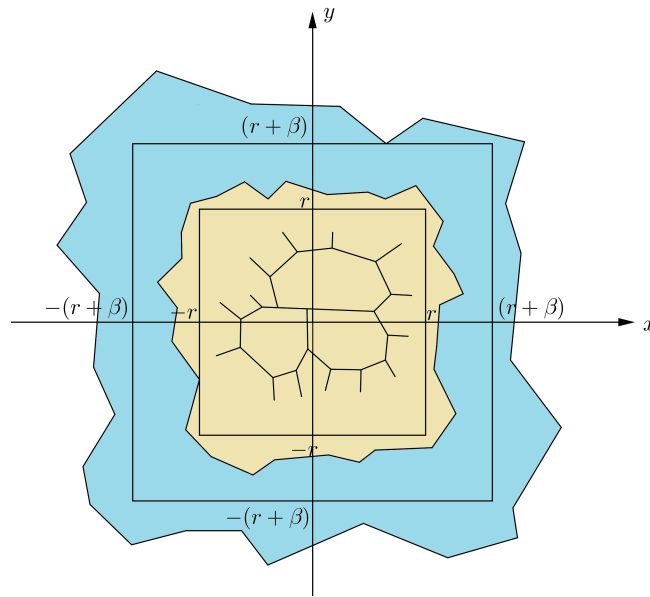


Figura 3.15: Pavimentação  $N$

polígono  $I$  é um triângulo com quatro nós em sua fronteira. Assim, a soma dos ângulos internos, em cada nó, do polígono  $I$  é igual a  $a + b + c + d$ . Por outro lado, o polígono  $II$  é um quadrilátero com quatro nós em sua fronteira. A soma dos ângulos internos, em cada um de seus nós é igual a  $e + f + g + h$  e o polígono  $III$  também é um quadrilátero com quatro nós em sua fronteira. A soma dos ângulos internos em cada um de seus nós é igual a  $i + j + k + l$ . Dessa forma, temos:

$$\sum \alpha_i = (a + b + c + d) + (e + f + g + h) + (i + j + k + l)$$

Vamos agora determinar um limitante inferior e um limitante superior para  $\sum \alpha_i$ :

*Limitante inferior:* Seja  $X$  um polígono qualquer da pavimentação  $N_1$ . Como o número de nós,  $n$ , na fronteira de  $X$  é maior ou igual ao número de vértices dessa fronteira, temos que  $n \geq 7$ , pois  $X$  tem pelo menos 7 lados. Daí, a soma  $S$  dos ângulos internos de cada nó do polígono  $X$  é tal que  $S \geq (n - 2)\pi \geq$

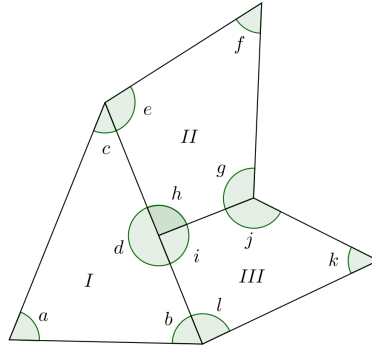


Figura 3.16: Ângulos em cada nó

$(7 - 2)\pi = 5\pi$ . Efetuando esse cálculo pra cada um dos  $f_1$  polígonos de  $N_1$  temos:  $\sum \alpha_i \geq 5\pi f_1$ .

*Limitante superior:* Em cada um dos  $v_1$  nós da pavimentação  $N_1$ , a soma de todos os ângulos deste nó é sempre menor ou igual a  $2\pi$ . Daí,  $\sum \alpha_i \leq 2\pi v_1$ .

Dos limitantes acima, temos:

$$2\pi v_1 \geq \sum \alpha_i \geq 5\pi f_1 \Rightarrow 2\pi v_1 \geq 5\pi f_1 \Rightarrow 2v_1 \geq 5f_1 \quad (3.3)$$

Agora, analisando o número ( $v$ ), na pavimentação  $N$ , temos que  $N$  possui  $a$  arestas e cada aresta conecta dois nós. Então, o dobro do número de arestas é maior ou igual ao número de nós, ou seja,  $2a \geq v$ . Além disso,

- cada nó está ligado a pelo menos duas arestas  $\Rightarrow$  cada vértice está sendo contado duas vezes pelo número  $2a$ .
- Cada nó, no interior de  $N$ , pertence a pelo menos 3 polígonos  $\Rightarrow$  Nestes nós concorrem pelo menos três arestas e esse nó está sendo contado pelo menos três vezes pelo número  $2a$ .

Agora, cada um dos  $v_1$  nós de  $N_1$  é um nó no interior da região pavimentada por  $N$ . Segue que  $N$  possui pelo menos  $v_1$  nós interiores. Contando cada um deles três vezes e os demais  $v - v_1$  nós de  $N$  duas vezes, vem:

$$2a \geq v \Rightarrow 2a \geq 3v_1 + 2(v - v_1) \Rightarrow 2a \geq v_1 + 2v \quad (3.4)$$

De (3.2) temos que  $v + f > a$ . Multiplicando essa desigualdade por 2 e substituindo em (3.4), vem:

$$2v + 2f > 2a \Rightarrow 2v + 2f > v_1 + 2v \Rightarrow 2f > v_1$$

Utilizando a desigualdade acima multiplicada por 2 e a desigualdade (3.3), concluimos que:

$$\begin{cases} 2v_1 \geq 5f_1 \\ 4f > 2v_1 \end{cases} \Rightarrow 4f > 2v_1 \geq 5f_1 \Rightarrow 4f > 5f_1 \quad (3.5)$$

Por outro lado, existem  $f_2 = f - f_1$  polígonos de  $N$  que não fazem parte de  $N_1$ . Então, multiplicando ambos os membros de  $f_2 = f - f_1$  por quatro, vem:  $4f_1 + 4f_2 = 4f$ . Substituindo esse valor em (3.5), temos:

$$4f_1 + 4f_2 = 4f > 5f_1 \Rightarrow 4f_2 > 5f_1 - 4f_1 \Rightarrow 4f_2 > f_1 \quad (3.6)$$

Além disso, cada polígono de  $N_1$  tem perímetro menor que  $\beta$  e área menor que  $\beta^2$  (lema 3.1), daí, os  $f_1$  polígonos de  $N_1$  têm área total menor que  $\beta^2 f_1$ . Mas, esses polígonos cobrem a região  $S(r)$ , cuja área é  $4r^2$ . Assim:

$$4r^2 < \text{Área}(N_1) \leq \beta^2 f_1 \Rightarrow \beta^2 f_1 \geq 4r^2 \quad (3.7)$$

Analisando agora a área limitada pelos  $f_2$  polígonos que pertencem a  $N$  e não pertencem a  $N_1$ , do mesmo modo que fizemos para a pavimentação  $N$ ,

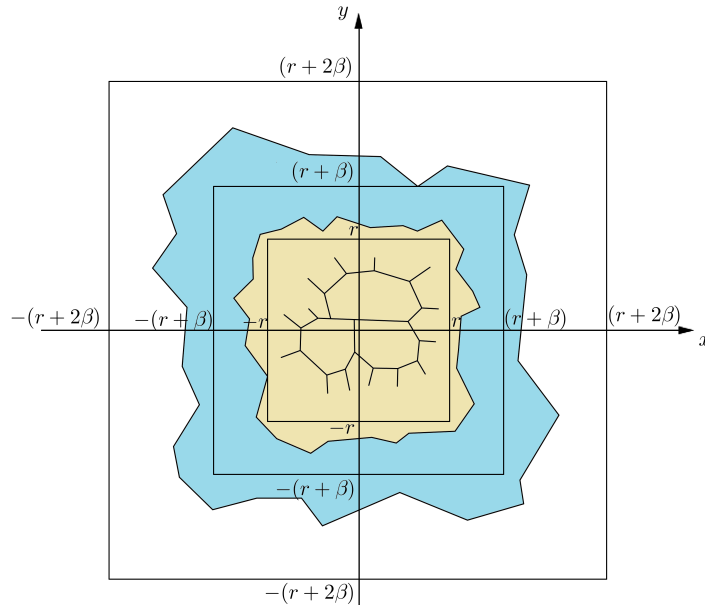


Figura 3.17: Pavimentação  $N$  contida no interior da região quadrangular  $S(r + 2\beta)$

podemos afirmar que esses polígonos estão contidos completamente na região  $S(r + 2\beta)$ , pois, cada polígono tem perímetro menor que  $\beta$ .

Daí estes  $f_2$  polígonos estão fora da região  $S(r)$  e no interior da região quadrangular  $S(r + 2\beta)$ . A área desse anel quadrangular é dada por:

$$[2(r + 2\beta)]^2 - (2r)^2 = 4(r + 2\beta)^2 - 4r^2$$

Portanto a área dos  $f_2$  polígonos é menor que  $4(r + 2\beta)^2 - 4r^2$  (limitante superior).

Por outro lado, cada um dos  $f_2$  polígonos têm área maior que  $\alpha$ . Logo, a área total dos  $f_2$  polígonos é maior que  $\alpha f_2$  (limitante inferior). Então:

$$\begin{aligned} \alpha f_2 \leq \text{Área}(f_2 \text{ poligonos}) &\leq 4(r + 2\beta)^2 - 4r^2 \Rightarrow \\ 4(r + 2\beta)^2 - 4r^2 &\geq \alpha f_2 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Desenvolvendo (3.8), encontramos:

$$4(r^2+4r\beta+4\beta^2)-4r^2 \geq \alpha f_2 \Rightarrow 4r^2+16r\beta+16\beta^2-4r^2 \geq \alpha f_2 \Rightarrow 16\beta(r+\beta) \geq \alpha f_2$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade acima por  $4\beta^2$ , obtemos:

$$64\beta^3(r+\beta) \geq 4\beta^2\alpha f_2$$

Utilizando as inequações (3.6) e (3.7), vem:

$$64\beta^3(r+\beta) \geq 4\beta^2\alpha f_2 > \beta^2\alpha f_1 > 4\alpha r^2 \Rightarrow 64\beta^3(r+\beta) > 4\alpha r^2$$

Dividindo ambos os membros dessa desigualdade por  $4\alpha r$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{4\alpha r^2}{4\alpha r} &< \frac{64\beta^3 r}{4\alpha r} + \frac{64\beta^4}{4\alpha r} \Rightarrow r < 16\beta^3\alpha^{-1} + \frac{16\beta^4\alpha^{-1}}{r} \Rightarrow \\ r^2 - 16\beta^3\alpha^{-1}r - 16\beta^4\alpha^{-1} &< 0, \quad \forall r > 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Esta desigualdade implica que a função do segundo grau na variável  $r$ ,  $f(r) = r^2 - 16\beta^3\alpha^{-1}r - 16\beta^4\alpha^{-1}$  é tal que  $f(r) < 0$  para todo número real  $r > 0$ . Mas isto é um absurdo pois o gráfico de  $f$  é uma parábola com concavidade para cima e portanto deve assumir valores positivos para  $r$  suficientemente grande.

Essa contradição finaliza a prova do teorema 2.

□

A contradição acima é consequência de termos assumido que é possível cobrir a região quadrangular  $S(r+\beta)$ , com polígonos que satisfazem as hipóteses do teorema 2.

## Referências Bibliográficas

- [1] ALENCAR, Hilário; SANTOS, Walcy. *Geometria Diferencial das Curvas Planas*, 4. ed. Rio de Janeiro: Publicações Matemáticas do IMPA, 2003. 255 p.
- [2] CARMO, Manfredo Perdigão do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010. 607 p.
- [3] IMENES, Luiz Márcio Pereira; LELLIS, Marcelo Cestari. *Microdicionário de Matemática*, São Paulo: Scipione, 1998. 351 p.
- [4] LIMA, Elon Lages et al. *A Matemática do Ensino Médio*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1998. 3 v. (Coleção do Professor de Matemática).
- [5] NIVEN, Ivan. *Convex Polygons Cannot Tile the Plane*, In: The American Mathematical Monthly, 1978. v. 85, n° 10, p. 785-792.
- [6] SCHMIDT, E. Uber das isoperimetrische Problem im Raum von n Dimensionen, Math. Z. 44 1939. 140 -144.
- [7] SHATTSCHNEIDER, Doris, *Tiling the plane with congruent pentagons - a problem for anyone to contribute to: a survey of the growing but incomplete story of pentagonal tilings of the plane*, Mathematics Magazine, vol. 51, no 1, January 1978, pp 29-44.
- [8] TENENBLAT, Keti. *Introdução à Geometria Diferencial*, 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2008. 270 p.