Quebra Dinâmica da Simetria Quiral como Possível Mecanismo Gerador da Massa do Bóson de Higgs

Yuri Rodrigues Batista

Agosto de 2012

Quebra Dinâmica da Simetria Quiral como Possível Mecanismo Gerador da Massa do Bóson de Higgs

Yuri Rodrigues Batista

Orientadora: Maria Carolina Nemes

Co-orientador: Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio

Dissertação apresentada à UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, como requisito parcial para a obtenção do grau de mestre em Física

Agosto de 2012

Agradecimentos

Agradeço a minha mãe a meu pai e a minha irmã pelo apoio incondicional em todos os momentos de minha vida.

A minha orientadora, Maria Carolina Nemes, pelo carinho e atenção que sempre teve com a minha pessoa.

Aos meus amigos de pós graduação Kaká, Fábio e Joilson.

Resumo

O Modelo Padrão é uma teoria de campos renormalizável que contém a Cromo-dinâmica Quântica e uma versão unificada das interações eletromagnética e fraca. Através da quebra espontânea de simetria, as partículas massivas da teoria adquirem massa e a simetria local SU(3)×U(1) da lagrangiana é mantida. O Modelo Padrão prevê a existência de uma partícula elementar massiva, o bóson de Higgs. Podemos nos perguntar se bóson de Higgs é elementar ou composto. Este trabalho investiga um mecanismo alternativo a geração de massa do Modelo Padrão proposto por W. A. Bardeen *et al.*[2], que sugere um bóson de Higgs composto. A quebra dinâmica da simetria quiral de uma interação quártica entre quarks e antiquarks gera um condensado de quarks $\bar{t}t$. Este condensado seria o responsável por gerar massa aos mediadores da interação fraca e ao bóson de Higgs. Contudo, este mecanismo alternativo foi contestado por Tony Gherghetta[6]. Utilizamos a técnica de Regularização Implícita e a invariância de rótulo do momento interno para mostrar que o modelo de W. A. Bardeen *et al.*[2] é consistente.

Abstract

The Standard Model aims at unifying electromagnetic and weak interactions. It is a renormalizable field theory that uses spontaneous symmetry breaking to generate mass for the weak mediators, via the Higgs mechanism. In this context, the model raises up the following question: is the Higgs boson an elementary or composite particle? In the present work, we study the second alternative, by investigating a proposal by W. A. Bardeen et. al[2], which considers a Nambu-Jona-Lasinio type model in which a quartic interaction among quarks suffers a dynamical chiral symmetry breaking, and generates a $\bar{t}t$ condensate. T. Gherghetta *et al.*[6] verified that the calculations done by W. A. Bardeen *et al.* [2] presented ambiguities for integrals with divergence greater than logaritmic. In the present work we show that these ambiguities turn out to be surface integrals with null value if one chooses an appropriate regularization scheme. Our approach consists of using implicit regularization, with the constraints that energy and momentum are conserved for all vertices and for all routing in the Feynman diagrams.

Sumário

1 Aspectos de Simetrias das Interações Fortes **4**

1.1 Isospin e o Grupo $SU(2)_f$ 4

1.2 Classificação em Multipletos e Isospin 7

1.3 Transformações Infinitesimais do Grupo $SU(2)_f$ nas Antipartículas 10

1.4 Estados Ligados de Partículas-Anti-partículas 11

1.5 Simetria Quiral 12

1.6 Soluções da Equação de Dirac Relacionadas com Partículas e Antipartículas . 14

1.7 Spin e o Conceito de Helicidade 15

1.8 Equação de Dirac sem Massa 18

2 Aspectos de Teoria de Calibre e o Modelo Padrão **20**

2.1 O Modelo Padrão 21

2.2 Quebra Dinâmica de Simetria Através de Interações Quárticas 23

3 Tratamento de Divergências e Ambiguidades **26**

3.1 Parametrização das Divergências Logarítmicas e Quadráticas 27

3.2 Termos de Superfície 29

4 Cálculo de Propagadores e Quebra Dinâmica de Simetria **32**

4.1 Geração Dinâmica de Massa nos Propagadores 32

A Interação Quártica Entre Quarks **48**

B Simetrias do Termo de Interação Quártica **50**

B.1 Simetria $SU(2)_f$ 50

B.2 Simetria $U(1)_f$ 52

B.3 Simetria $U(1)_5$ 53

Introdução

O Modelo Padrão inclui um setor escalar necessário para prover massas aos bósons de calibre a partir do princípio da quebra espontânea de simetria $\mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{U}(1)_Y$. A principal predição deste esquema é a existência de uma partícula escalar chamada bóson de Higgs.

Dentre os bósons do Modelo Padrão, a partícula de Higgs é a que possui maior massa (aproximadamente 126 GeV/c^2). Isto leva a conjectura de que ela possa ser uma partícula composta. Assim sendo, não está excluída a possibilidade de que sua massa possa ser gerada por um mecanismo diferente da quebra espontânea de simetria, por exemplo uma geração dinâmica de massa provocada por interações fortes de quarks e antiquarks. O bóson de Higgs sendo um estado composto não teria o problema de hierarquia no Modelo Padrão[9], pois correções quânticas a massa dele seriam limitadas pela escala da massa do condensado.

A introdução desse mecanismo foi primeiramente implementada por W. A. Bardeen[2], que construiu um esquema mínimo que incorpora a quebra dinâmica de simetria. Trata-se de uma teoria quântica de campos bem definida numa escala de energia Λ com a interação quártica nos férmions mais pesados. Esse modelo leva ao resultado central de o bóson de Higgs ser uma partícula composta: o problema do "*fine tuning*", ou seja, a determinação do valor da constante de acoplamento e do limite superior de energia em que a teoria tem validade para reproduzir os resultados experimentais fica isolado na equação de *gap*. O problema do "*fine tuning*" consiste na determinação da escala de energia Λ e da constante de acoplamento de forma que resultados experimentais conhecidos sejam reproduzidos.

Neste trabalho vamos revisitar a análise de W. A. Bardeen[2] com o objetivo de eliminar possíveis ambiguidades que foram levantadas em um trabalho posterior de Tony Gherghetta[6], que em princípio invalidaria essa análise.

As ambiguidades levantadas por Tony Gherghetta[6] dizem respeito a termos de superfície, que a princípio são ambíguos, oriundos de "*shifts*" nas variáveis de integração, podendo desta forma contaminar as predições.

Na nossa análise eliminaremos essas ambiguidades de uma maneira independente de regularização parametrizando estes termos superfície de uma forma que eles fiquem explicitamente determinados por invariância de rótulos nos laços dos diagramas de Feynman.

Desta forma, resgatamos o poder de preditibilidade do modelo proposto por W. A. Bardeen[2], tornando-o um bom ponto de partida para o estudo de interações efetivas entre quarks para a formação de estados compostos escalares, ou seja, um modelo onde o bóson de Higgs possa ser visto como uma partícula composta.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: o Capítulo 1 será dedicado às simetrias mais relevantes para este tabalho. A simetria relacionada ao isospin forte nos permite interpretar os sabores de quarks u e d como estados degenerados com relação às interações fortes. As tabelas de multipletos dos mésons leves, podem ser interpretadas como sendo estados de isospin total, mas cada um deles possui projeção de isospin diferente. Temos simetria quiral para partículas de Dírac com massa tendendo a zero, pois a helicidade não se altera na mudança de referencial de Lorentz. Essas simetrias devem ser obedecidas para as lagrangianas que descrevem o modelo em questão.

No Capítulo 2, apresentamos os fundamentos do Modelo Padrão e um método alternativo a este modelo, proposto por W. A. Bardeen[2]. A geração de massa para os mediadores da interação eletro-fraca é realizada através da substituição do setor de Higgs por uma interação quártica entre os quarks t e b. Obteremos a equação de *gap*, que está relacionada com a formação do condensado $\bar{t}t$.

No Capítulo 3, será apresentado a relação entre as integrais divergentes encontradas nos cálculos das amplitudes com termos de superfície. O valor das amplitudes de espalhamento, em diagramas com laço, não deve depender da rotulação do momento interno, por isso os termos de superfície devem ser nulos.

As ambiguidades encontradas por Tony Gherghetta[6] nos cálculos de W. A. Bardeen[2] serão analisadas no Capítulo 4. Utilizando os resultados do Capítulo 3, veremos que as ambiguidades serão eliminadas.

No apêndice A, o termo da interação quártica entre os quarks é explicitado, enquanto que o apêndice B é dedicado a apresentar as simetrias presentes nesta interação.

Capítulo 1

Aspectos de Simetrias das Interações Fortes

Este capítulo é dedicado à apresentação detalhada dos conceitos físicos que relacionam as simetrias, os sistemas de classificação de partículas e a estrutura das densidades de lagrangeanas das teorias de campo, com enfoque em uma teoria baseado no modelo de Nambu-Jona-Lasínio.

1.1 Isospin e o Grupo SU$(2)_f$

Houve dois fatores que induziram Heisenberg a considerar o nêutron e o próton como estados degenerados sob o ponto de vista da interação nuclear forte. Os prótons e os nêutrons possuem, aproximadamente, a mesma massa. Em comprimentos da escala do núcleo atômico, a interação nuclear forte é várias ordens de grandezas superior à interação eletromagnética. Este fato empírico é conhecido como 'independência com relação a carga das forças fortes'.

As partículas que interagem fortemente são formadas por quarks que aparecem em seis tipos, classificados pelo número quântico sabor: up, down, charm, strange, top e bottom. O próton p e o nêutron n são constituidos, respectivamente, pelos quarks (uud) e (udd). A diferença da constituição do p e n está entre um dos quarks. Portanto a degenerescência de energia de p e n implica na degenerescência em massa dos quarks u e d. Devido a essa degenerescência, qualquer combinação entre esses estados($|u\rangle$ e $|d\rangle$), terá o mesmo autovalor. Tal transformação pode ser representada como:

$$|u\rangle \rightarrow |u'\rangle = \kappa|u\rangle + \lambda|d\rangle \tag{1.1}$$

$$|d\rangle \rightarrow |d'\rangle = \rho|u\rangle + \zeta|d\rangle \tag{1.2}$$

Para procurar a transformação linear mais geral entre eles pode-se usar a seguinte base:

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Um estado normalizado arbitrário referente a combinação linear dos estados 1.3 pode ser representado por:

$$|q\rangle = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Onde u e d são as amplitudes dos estados $|u\rangle$ e $|d\rangle$ respectivamente. As transformações nos estados $|u\rangle$ e $|d\rangle$, que estão nas equações 1.1 e 1.2, podem ser representadas por:

$$|q\rangle \rightarrow |q'\rangle = \hat{\mathbf{V}}|q\rangle \qquad \hat{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \rho & \zeta \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Podemos considerar as alterações em $|q\rangle$ como sendo resultado de transformações infinitesimais. Sob esta perspectiva, as matrizes $\mathbf{V}$ diferem infinitesimalmente da situação na qual não há mudança.

$$\hat{\mathbf{V}}_{inf} = \mathbb{I}_2 + i\xi \tag{1.6}$$

A matriz ξ é composta por elementos infinitesimais complexos:

$$\xi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Mas quando a matriz $\hat{\mathbf{V}}_{inf}$ atua no estado $|q\rangle$, a norma do estado transformado $|q'\rangle$ deve continuar a ser 1. Esta condição é chamada de unitariedade:

$$\langle q|q\rangle = 1 \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}
\langle q'|q'\rangle = \langle q|\hat{\mathbf{V}}^{\dagger}_{inf}\hat{\mathbf{V}}_{inf}|q\rangle = \langle q|(\mathbb{I}_2 - i\xi^{\dagger})(\mathbb{I}_2 + i\xi)|q\rangle = 1 \quad &\Rightarrow \\
(\mathbb{I}_2 - i\xi^{\dagger})(\mathbb{I}_2 + i\xi) = \mathbb{I}_2 + i(\xi - \xi^{\dagger}) - \xi^{\dagger}\xi \quad &\Rightarrow \\
\langle q'|q'\rangle = \mathbb{I}_2 + i(\xi - \xi^{\dagger}) - \xi^{\dagger}\xi &
\end{aligned} \tag{1.9}$$

O último termo deve ser desprezado, pois ele é infinitesimal em segunda ordem. Para satisfazer 1.9 é necessário que o termo entre parênteses seja nulo:

$$\xi = \xi^{\dagger} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha = \alpha^* & \Rightarrow \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ \delta = \delta^* & \Rightarrow \quad \delta \in \mathbb{R} \\ \beta = \gamma^* \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = a \\ \delta = d \\ \beta = b - ic & \Rightarrow \quad \gamma = b + ic \end{cases} \tag{1.10}$$

Com estas condições, a matriz ξ pode ser escrita como:

$$\xi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b - ic \\ b + ic & d \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

De acordo com 1.11 e 1.6 matriz $\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{inf}}$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{V}}_{inf} = \begin{pmatrix} 1 + ia & c + ib \\ -c + ib & 1 + id \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

Outra condição que será imposta, por motivos que serão mostrados mais tarde, é que o determinante de $\mathbf{V}_{inf}$ seja 1:

$$\det \hat{\mathbf{V}}_{inf} = \begin{vmatrix} 1 + ia & c + ib \\ -c + ib & 1 + id \end{vmatrix} = 1 \tag{1.13}$$

$$(1 + ia)(1 + id) + (c + ib)(c - ib) = 1 \quad \Rightarrow$$
$$1 + i(a + d) - ad + c^2 + b^2 = 1 \quad \Rightarrow$$

$$a + d = 0 \Rightarrow a = -d \tag{1.14}$$

$$-ad + c^2 + b^2 = 0 \tag{1.15}$$

Os termos de 1.15 são infinitesimais em segunda ordem e devem ser despresados, pois tendem a zero mais rapidamente que os termos lineares de 1.14. Substituindo 1.14 na expressão 1.11, ξ fica:

$$\xi = \begin{pmatrix} a & b - ic \\ b + ic & -a \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

Se definirmos:

$$a = \frac{\epsilon_3}{2} \qquad b = \frac{\epsilon_1}{2} \qquad c = \frac{\epsilon_2}{2} \tag{1.17}$$

$$\hat{\tau_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\tau_2} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\tau_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

Então:

$$\xi = \epsilon_1 \cdot \frac{\hat{\tau_1}}{2} + \epsilon_2 \cdot \frac{\hat{\tau_2}}{2} + \epsilon_3 \cdot \frac{\hat{\tau_3}}{2} = \epsilon_i \cdot \frac{\hat{\tau_i}}{2} \tag{1.19}$$

As matrizes τ constituem uma base de operadores. Qualquer combinação linear infinitesimal destas matrizes, provocam uma mudança infinitesimal no estado inicial $|q\rangle$, conservando sua norma e não alterando sua degenerescência com relação à força nuclear forte. A transformação infinitesimal finalmente pode ser escrita como:

$$\hat{\mathbf{V}}_{inf} = \mathbb{I}_2 + i\overrightarrow{\epsilon} \cdot \frac{\overrightarrow{\tau}}{2} \tag{1.20}$$

$$|q'\rangle = \left(\mathbb{I}_2 + i\overrightarrow{\epsilon} \cdot \frac{\overrightarrow{\tau}}{2}\right)|q\rangle \tag{1.21}$$

O nome do grupo que obedece a essa lei de transformação 1.21 é $\mathrm{SU}(2)_f$. A letra "S"surge do inglês 'special', e é consequência de $\det \hat{\mathbf{V}}_{inf} = 1$. Como a transformação preserva a norma, então a transformação é unitária, por isso o nome do grupo possui a letra "U". E finalmente, o subscrito f diz que essa simetria SU(2) atua nos sabores. Os geradores desse grupo, por definição, são as matrizes apresentadas em 1.18. A invariância expressa por essa transformação de simetria no espaço dos sabores u e d é chamada de isospin forte.

Transformações infinitesimais de interesse físico, são frequentemente descritas pelo grupo de Lie. No caso descrito nesta secção, a combinação linear das matrizes τ, consegue descrever todas as transformações possíveis nos estados $|u\rangle$ e $|d\rangle$. No grupo de Lie, essas matrizes são chamadas de geradores.

A álgebra das transformações dos auto-estados de spin S_z é idêntica à dos quarks u e d. Portanto, pode-se pensar que estes quarks possuem algo intrínseco análogo ao spin para as interações fortes. Neste contexto nasce o conceito de isospin. Os quarks u e d possuem o número quântico associado à projeção de isospin no eixo z, $\hat{T}_3^{\frac{1}{2}}$, igual a $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$ respectivamente. O número quântico associado ao isospin total $\hat{T}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$. O índice $\frac{1}{2}$ indica que o número quântico associado ao isospin dos quarks u e d é $\frac{1}{2}$.

As matrizes $\hat{\tau}$ não comutam entre si e portanto pertencem a um grupo não-abeliano. Se definirmos $\overrightarrow{\hat{T}}^{\frac{1}{2}} \equiv \sum_i^3 \dfrac{\hat{\tau}_i}{2}$,então a relação de comutação fica:

$$[\hat{T}_i^{\frac{1}{2}}, \hat{T}_j^{\frac{1}{2}}] = i\epsilon_{ijk}\hat{T}_k^{\frac{1}{2}} \quad . \tag{1.22}$$

Seja

$$\overrightarrow{\epsilon} = \frac{\overrightarrow{\alpha}}{n} \qquad \text{onde} \qquad \overrightarrow{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \tag{1.23}$$

onde α são três parâmetros finitos que pertencem ao conjuntos dos números reais. O operador que descreve n transformações infinitesimais, pode ser obtido tomando o limite $n \to \infty$ em 1.21:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\mathbb{I}_2 + i\overrightarrow{\epsilon} \cdot \frac{\overrightarrow{\hat{\tau}}}{2} \right)^n = e^{i\alpha\cdot\frac{\tau}{2}} \tag{1.24}$$

A transformação finita é:

$$|q'\rangle = e^{i\overrightarrow{\alpha}\cdot\frac{\overrightarrow{\hat{\tau}}}{2}}|q\rangle \tag{1.25}$$

1.2 Classificação em Multipletos e Isospin

Há um sistema de classificação de estados chamado de multipletos. Suponha que para um operador hamiltoniano $\hat{H}$, que possui um conjunto de autoestados degenerados, exista um outro operador hermitiano $\hat{B}$ que comuta com ele. Se os autoestados degenerados em $\hat{H}$ possuírem autovalores em $\hat{B}$ diferentes entre si, então é possível classificar os autoestados degenerados com relação a energia, em multipletos. Para exemplificar, considere os estados de quarks $|u\rangle$ e $|d\rangle$. O operador hamiltoniano das interações fortes $\hat{H}_2$, representado pela matriz diagonal $H \cdot \mathbb{I}_{2\times 2}$, possui os autovalores degenerados para estes quarks. Os autovalores do operador de projeção de isospin $\hat{\tau}_3$ para os autoestados $|u\rangle$ e $|d\rangle$ são, respectivamente, $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$. O operador $\hat{H}_2$ é invariante sob a transformação infinitesimal $\mathrm{SU}(2)_f$:

$$\mathbf{\hat{V}}\hat{H}_2\mathbf{\hat{V}}^{-1} = \hat{H}_2 \ , \tag{1.26}$$

e os autovalores de $\hat{\tau}_3$ são constantes de movimento:

$$i\frac{d\tau_3(t)}{dt} = 0 \ , \tag{1.27}$$

devido a relação de comutação entre $\hat{H}_2$ e $\hat{\tau}_3$ ser nula. Há uma simetria sob a ação da transformação 1.20. Isto resulta na lei de conservação de isospin. A interação eletromagnética, como dito anteriormente, quebra esta simetria. A lagrangeana desta teoria também deve ser invariante sob a transformação infinitesimal do grupo $\mathrm{SU}(2)_f$.

Em sistemas compostos por vários quarks, o isospin total do sistema $\hat{T}$ é uma soma vetorial dos isospins destes quarks:

$$\hat{T} = \frac{1}{2}\hat{\tau}_1 + \frac{1}{2}\hat{\tau}_2 + \cdots + \frac{1}{2}\hat{\tau}_A \tag{1.28}$$

A comutação entre os operadores hamiltoniano e o isospin total é:

$$[\hat{H},\hat{T}] = \frac{1}{2}[\hat{H},(\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \cdots + \hat{\tau}_A)] = \frac{1}{2}[\hat{H},\hat{\tau}_1] + \frac{1}{2}[\hat{H},\hat{\tau}_2] + \cdots + \frac{1}{2}[\hat{H},\hat{\tau}_A] = 0 \tag{1.29}$$

O operador $\hat{T}$ já tem uma das condições necessárias para poder classificar estados em multipletos. A relação de comutação entre as componentes de $\hat{T}$, tem a mesma forma da relação de comutação das matrizes $\hat{\vec{\tau}}$ do caso mais simples,

$$\begin{aligned}
[\hat{T}_i,\hat{T}_j] &= \left[\frac{1}{2}(\hat{\tau}_{1i} + \hat{\tau}_{2i} + \cdots + \hat{\tau}_{Ai}), \frac{1}{2}(\hat{\tau}_{1j} + \hat{\tau}_{2j} + \cdots + \hat{\tau}_{Aj})\right] = \\
&= \frac{1}{4}\{(\hat{\tau}_{1i}+\hat{\tau}_{2i}+\cdots+\hat{\tau}_{Ai})\cdot(\hat{\tau}_{1j}+\hat{\tau}_{2j}+\cdots+\hat{\tau}_{Aj})-(\hat{\tau}_{1j}+\hat{\tau}_{2j}+\cdots+\hat{\tau}_{Aj})\cdot(\hat{\tau}_{1i}+\hat{\tau}_{2i}+\cdots+\hat{\tau}_{Ai})\} = \\
&= \frac{1}{4}[(\hat{\tau}_{1i}\hat{\tau}_{1j} - \hat{\tau}_{1j}\hat{\tau}_{1i}) + (\hat{\tau}_{1i}\hat{\tau}_{2j} - \hat{\tau}_{2j}\hat{\tau}_{1i}) + (\hat{\tau}_{1i}\hat{\tau}_{3j} - \hat{\tau}_{3j}\hat{\tau}_{1i}) + \cdots + (\hat{\tau}_{Ai}\hat{\tau}_{Aj} - \hat{\tau}_{Aj}\hat{\tau}_{Ai})] = \\
&= \left[\frac{1}{2}\hat{\tau}_{1i}, \frac{1}{2}\hat{\tau}_{1j}\right] + \left[\frac{1}{2}\hat{\tau}_{1i}, \frac{1}{2}\hat{\tau}_{2j}\right] + \left[\frac{1}{2}\hat{\tau}_{1i}, \frac{1}{2}\hat{\tau}_{3j}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{2}\hat{\tau}_{Ai}, \frac{1}{2}\hat{\tau}_{Aj}\right] = \\
&= \sum_{n,m=1}^{A} \frac{1}{4}[\tau_{ni}, \tau_{mj}] \quad ,
\end{aligned} \tag{1.30}$$

onde m e n são índices referente às partículas e i e j se referem às coordenadas do isopin. Mas os operadores de isospin entre partículas distintas estão em espaços vetoriais diferentes, por isso a relação de comutação entre τ_{ni}, τ_{mj} é zero se $m \neq n$:

$$[\hat{T}_i,\hat{T}_j] = \sum_{n=1}^{A}\left[\frac{1}{2}\hat{\tau}_{ni}, \frac{1}{2}\hat{\tau}_{nj}\right] = \frac{1}{2}i\sum_{n=1}^{A}\epsilon_{ijk}\cdot\hat{\tau}_{nk} = i\epsilon_{ijk}\hat{T}_k$$

$$[\hat{T}_i, \hat{T}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{T}_k \tag{1.31}$$

Os autovalores de $\mathbf{T}^2$, T_3 e H, são bons números quânticos para descreverem o sistema e classificar os estados em multipletos. Os autovalores de $\mathbf{T}^2$ são $T(T+1)$, onde $T = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$ Os autovalores de T_3 são $-T$, $-T+1$, …, $T-1$, T, em um total de $2T+1$ autovalores. Para exemplificar tomemos um sistema com isospin $T = 1$. O objetivo será encontrar matrizes que satisfaçam as relações de comutação desejadas e verificar que os autoestados degenerados de H possuem autovalores diferentes para $\hat{T}_3$. Se estes autoestados puderem ser associados a partículas, pode-se classifica-las em multipletos. Os elementos das matrizes que satisfazem a relação de comutação podem ser escritos como:

$$(T_i^1)_{jk} = -i\epsilon_{ijk}, \tag{1.32}$$

e fornecem as seguintes matrizes que representam os geradores:

$$\mathbf{T}_1^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{T}_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{T}_3^1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.33}$$

Como o objetivo é mostrar que esta representação é compatível com a classificação em multipletos, deve haver um operador hermitiano que possua todos os autovalores diferentes. Um operador hermitiano $\hat{T}_3^1$ satisfaz esta condição. Os autovetores da matriz que representa a projeção de isospin na direção z, $\hat{T}_3^1$, são:

$$|1 \quad 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |1 \quad 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |1 \quad -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.34}$$

Podemos escrever então:

$$\hat{T}_3^1|1 \quad 1\rangle = |1 \quad 1\rangle \tag{1.35}$$

$$\hat{T}_3^1|1 \quad 0\rangle = 0 \tag{1.36}$$

$$\hat{T}_3^1|1 \quad -1\rangle = -|1 \quad -1\rangle \quad . \tag{1.37}$$

Para cada autovetor há um autovalor diferente de $\hat{T}_3^1$. O operador hamiltoniano de interação, representado por $\hat{H}_3 = H \cdot \mathbb{I}_{3\times3}$, comuta com $\hat{T}_3^1$, é hermitiano e possui autovalores degenerados para os autoestados de $\hat{T}_3^1$. Quando se constrói o diagrama de multipleto para um determinado isospin total T, a cada projeção de T_3 há uma partícula correspondente. Como os estados de $\hat{T}_3^1$ se comportam sob uma transformação infinitesimal analogamente ao caso do isospin do próton e nêutron, as transformações infinitesimais que generalizam 1.25 são descritas por matrizes de ordem $(2T+1) \times (2T+1)$ que satisfazem a relação de comutação 1.31:

$$|n'^T\rangle = e^{i\vec{\alpha}\cdot\frac{\hat{T}}{2}}|n^T\rangle \ , \tag{1.38}$$

onde n representa algum dos $(2T+1)$ autoestados de $\hat{T}_3^1$. No caso em que o isospin total é $T = 1$, a transformação infinitesimal de um estado é:

$$\begin{aligned}
|\psi'^1\rangle = e^{i(\epsilon \mathbf{T}^1)}|\psi^1\rangle \qquad &\Rightarrow \\
|\psi'^1\rangle = [\mathbb{I}_3 + i(\epsilon \mathbf{T}^1)]|\psi^1\rangle \qquad &\Rightarrow \\
|\psi'^1\rangle = |\psi^1\rangle + i(\epsilon \mathbf{T}^1)|\psi^1\rangle \qquad &\Rightarrow \\
|\psi'^1\rangle = |\psi^1\rangle + i(\epsilon_j \mathbf{T}_j^1)|\psi^1\rangle &
\end{aligned} \tag{1.39}$$

De acordo com a definição dos elementos da matriz $\overrightarrow{\overrightarrow{T}}$ 1.32:

$$(T_i^1)_{jk} = -i\epsilon_{ijk} \Rightarrow (T_j^1)_{ik} = i\epsilon_{ijk} \tag{1.40}$$

Então:

$$\begin{aligned}
|\psi'^1\rangle = |\psi^1\rangle + i(\epsilon_j \mathbf{T}_j^1)|\psi^1\rangle &\Rightarrow \\
|\psi_i'^1\rangle = |\psi_i^1\rangle + i\epsilon_j (\mathbf{T}_j^1)_{ik}|\psi_k^1\rangle &\Rightarrow \\
|\psi_i'^1\rangle = [\delta_{ik} + i\epsilon_j (i\epsilon_{ijk})]|\psi_k^1\rangle &\Rightarrow \\
|\psi_i'^1\rangle = [\delta_{ik} - \epsilon_j \epsilon_{ijk}]|\psi_k^1\rangle &
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Os autovetores $|\psi_i^1\rangle$ são os autovetores do estado tripleto definidos em 1.34. Cada valor do índice corresponde a um destes auto-estados.

1.3 Transformações Infinitesimais do Grupo SU(2)$_f$ nas Antipartículas

Os mésons são partículas formadas por quarks e antiquarks. Os antiquarks se transformam de forma diferente que os quarks sob uma transformação SU$(2)_f$. O número quântico T_3 dos antiquarks, possui sinal oposto ao dos quarks, enquanto que T possui mesmo valor. Por exemplo, o quark u possui $T = \frac{1}{2}$, $T_3 = \frac{1}{2}$, enquanto que o antiquark $\overline{u}$ possui $T = \frac{1}{2}$, $T_3 = -\frac{1}{2}$. A representação das anti-partículas é dada como o complexo conjugado da representação das partículas, pois somente assim é possível obter estes números quânticos quando atuam os operadores nos auto-estados.

Na situação em que o estado é uma combinação linear de antiquarks $\overline{u}$ e $\overline{d}$:

$$|q'^*\rangle = (e^{i\overrightarrow{\alpha}\cdot\frac{\hat{\tau}}{2}})^* \quad |q^*\rangle = e^{-i\overrightarrow{\alpha}\cdot\frac{\hat{\tau}^*}{2}} \quad |q^*\rangle\ , \tag{1.42}$$

onde

$$|q^*\rangle = \begin{pmatrix} \overline{u} \\ \overline{d} \end{pmatrix}\ . \tag{1.43}$$

Os geradores das transformações infinitesimais dos antiquarks são:

$$-\frac{\hat{\tau}_1^*}{2} = -\frac{\hat{\tau}_1}{2} \quad , \quad -\frac{\hat{\tau}_2^*}{2} = \frac{\hat{\tau}_2}{2} \quad \text{e} \quad -\frac{\hat{\tau}_3^*}{2} = -\frac{\hat{\tau}_3}{2}\ . \tag{1.44}$$

Apesar das relações de comutação serem satisfeitas, há uma diferença entre os geradores dos quarks e antiquarks. É necessário procurar uma matriz unitária que faça com que os geradores de ambas as transformações sejam os mesmos. Algebricamente, a transformação infinitesimal na anti-partícula pode ser expressa como:

$$|q'^*\rangle = \hat{\mathbf{V}}^*_{inf}|q^*\rangle \tag{1.45}$$

$$|q'^*\rangle = \left(\mathbb{I}_2 - i\overrightarrow{\epsilon}\cdot\frac{\hat{\overrightarrow{\tau}}^*}{2}\right)|q^*\rangle \tag{1.46}$$

Aplicando uma matriz unitária na expressão acima temos

$$\hat{\mathbf{U}}|q'^*\rangle = \hat{\mathbf{U}}\left(\mathbb{I}_2 - i\overrightarrow{\epsilon}\cdot\frac{\hat{\overrightarrow{\tau}}^*}{2}\right)\hat{\mathbf{U}}^{-1}\hat{\mathbf{U}}|q^*\rangle \quad . \tag{1.47}$$

A matriz $\hat{\mathbf{U}}$ que satisfaz a condição:

$$\hat{\mathbf{U}}\left(-\hat{\overrightarrow{\tau}}^*\right)\hat{\mathbf{U}}^{-1} = \hat{\overrightarrow{\tau}} \qquad \text{é} \tag{1.48}$$

$$\hat{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{1.49}$$

Os estados nos quais os novos geradores $\hat{\overrightarrow{\tau}}$ dos antiquarks atuam são $\hat{\mathbf{U}}|q'^*\rangle$ ao invés de $|q'^*\rangle$. Portanto, de acordo com 1.47, temos:

$$\hat{\mathbf{U}}|q'^*\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{u} \\ \overline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{d} \\ -\overline{u} \end{pmatrix} . \tag{1.50}$$

A projeção de isospin $\hat{\tau}_3$ do antiquark $\overline{u}$ é $T_3 = -\frac{1}{2}$. Para verificar a afirmação, aplicando $\hat{\tau}_3$ ao auto-estado de $\hat{\mathbf{U}}\overline{u}$:

$$\frac{1}{2}\hat{\tau}_3\left(\hat{\mathbf{U}}\cdot|\overline{u}\rangle\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{1.51}$$

1.4 Estados Ligados de Partículas-Anti-partículas

Os mésons são formados por quarks e antiquarks. Em analogia com a mecânica quântica, pode-se formar um estado de méson que possua isospin total τ e projeção de isopin τ_3 nula. Na teoria do momento angular intrínseco (spin) o estado singleto é igual à

$$|S=0\ S_z=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|S=\frac{1}{2}\,;S_z=+\frac{1}{2}\right\rangle\otimes\left|S=\frac{1}{2}\,;S_z=-\frac{1}{2}\right\rangle - \right.$$
$$\left. - \left|S=\frac{1}{2}\,;S_z=-\frac{1}{2}\right\rangle\otimes\left|S=\frac{1}{2}\,;S_z=\frac{1}{2}\right\rangle\right) \quad . \tag{1.52}$$

Omitindo o produto tensorial e substituindo por spin up (+) quando $S_z = -\frac{1}{2}$ ou down (-) quando $S_z = -\frac{1}{2}$, tem-se

$$|0\ 0\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle\Big) \quad . \tag{1.53}$$

Para o isospin, deve-se reescrever 1.52 substituindo S e S_z por T e T_3 respectivamente. Além disto, o primeiro termo do produto tensorial é um antiquark. É o estado de antiquark 1.50 que será substituído na construção do singleto de isospin, pois este estado possui as mesmas regras de transformação dos quarks. Logo:

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\overline{d}\rangle|d\rangle - |-\overline{u}\rangle|u\rangle\right) \tag{1.54}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\overline{d}\rangle|d\rangle + |\overline{u}\rangle|u\rangle\right) \tag{1.55}$$

Este é o estado singleto de isospin.

1.5 Simetria Quiral

Para partículas de Dirac em que a massa tende a zero, a simetria quiral é exata. Quando comparamos a massa do quark top com limite superior de energia no qual o modelo de Bardeen é válido, verifica-se que a massa deste quark é despresível, portanto a simetria quiral é relevante nesta situação. A equação de Dirac é

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[-i\alpha_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \beta m\right]\psi, \tag{1.56}$$

onde m é a massa de repouso do férmion e as matrizes α_i e β podem ser definidas como:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_i \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{1.57}$$

As soluções em ondas planas da equação de Dirac para as partículas são:

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{E - \sigma_i p_i}{m}\varphi \end{pmatrix} e^{-i(Et - p_i x_i)} \quad , \tag{1.58}$$

onde φ é um vetor coluna com duas entradas, p_i são as componentes do momento linear, e E é dado por

$$E = \sqrt{(\overrightarrow{p})^2 + m^2} \quad . \tag{1.59}$$

Já as soluções em ondas planas para as anti-partículas são:

$$\psi = \begin{pmatrix} -\frac{E + \sigma_i p_i}{m}\chi \\ \chi \end{pmatrix} e^{i(Et - p_i x_i)} \quad , \tag{1.60}$$

O operador momento e energia são definidos da seguinte forma:

A expressão relativística clássica para partícula livre entre E e $\overrightarrow{p}$, deve satisfaz:

$$(E)^2 = (\overrightarrow{p})^2 + m^2 \tag{1.61}$$

onde E é a energia da partícula.

A versão quântica de 1.61 em termos dos operadores $\hat{H}$ e $\hat{\overrightarrow{p}}$:

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\right]\psi = \left[\left(-i\overrightarrow{\nabla}\right)^2 + m^2\right]\psi \Rightarrow \tag{1.62}$$

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \left(-\nabla^2 + m^2\right)\psi \tag{1.63}$$

Dirac então postulou a sua equação, e ela deveria obedecer a relação relativística 1.63. A equação de Dirac é:

$$\begin{aligned}
\hat{H}\psi(\overrightarrow{x}, t) = (\alpha_i\hat{p}_i + \beta m)\psi(\overrightarrow{x}, t) \qquad &\Rightarrow \\
i\frac{\partial\psi}{\partial t} &= \left[-i\alpha_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \beta m\right]\psi \Rightarrow \\
i\frac{\partial\psi}{\partial t} &= \left[-i\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right) + \beta m\right]\psi
\end{aligned} \tag{1.64}$$

Elevando ao quadrado os operadores de ambos os membros:

$$\begin{aligned}
\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi &= \left(-i\alpha_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \beta m\right)\left(-i\alpha_j\frac{\partial}{\partial x_j} + \beta m\right)\psi \Rightarrow \\
-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} &= -\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2\frac{\partial^2\psi}{(\partial x_i)^2} - \sum_{\substack{i,j=1\\ i>j}}^{3}(\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i)\frac{\partial^2\psi}{(\partial x_i x_j)} - \\
&\quad - im\sum_{i=1}^{3}(\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)\frac{\partial\psi}{\partial x_i} + \beta^2 m^2\psi
\end{aligned} \tag{1.65}$$

Para que esta equação satisfaça 1.63, então:

$$\begin{cases}
\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0 & i = 1, 2, 3 \\
\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 0 & i = 1, 2, 3; \quad i \neq j \\
\alpha_i^2 = \beta^2 = 1 &
\end{cases} \tag{1.66}$$

Nenhum conjunto de números satisfaz estas condições, mas o objetivo é alcançado quando interpreta-se os αs e β s como matrizes. Há varias definições de matrizes que satisfazem as condições acima, uma possível é:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_i \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{1.67}$$

É importante notar que a matrizes α e β são de ordem 4×4. As matrizes σ e $\mathbb{I}_2$ são as matrizes de Pauli e identidade respectivamente. A matriz α representa o operador spin das partículas descritas por essa teoria. Na equação de Dirac, o spin surge naturalmente.

1.6 Soluções da Equação de Dirac Relacionadas com Partículas e Antipartículas

A equação de Dirac conseguiu eliminar o problema de que $\rho = \psi^\dagger\psi$ fosse menor que zero, mas não teve êxito em eliminar as soluções negativas na energia, posteriormente esse resultado foi reinterpretado e deu origem ao conceito de anti-partícula. As soluções de energias negativa não podem ser eliminadas, pois desta forma não é possível ter um conjunto completo de soluções para a equação de Dirac. Para demonstrar que a equação de Dirac fornece autovalores negativos para a energia, é necessário inicialmente obter a solução da equação de Dirac em ondas planas:

$$\psi = \omega e^{-ipx} \quad ; \quad \omega = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-i(p_0 t - p_i x_i)} \tag{1.68}$$

O vetor coluna ω contém 4 entradas. Aplicando este resultado na equação de Dirac 1.64:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[-i\alpha_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \beta m\right]\psi \Rightarrow & \\ i\frac{\partial[\omega e^{-i(p_0 t - p_i x_i)}]}{\partial t} &= -i\alpha_i\frac{\partial}{\partial x_i}[\omega e^{-i(p_0 t - p_i x_i)}] + \beta m[\omega e^{-i(p_0 t - p_i x_i)}] \Rightarrow \\ p_0[\omega e^{-i(p_0 t - p_i x_i)}] &= (\alpha_i p_i + \beta m)[\omega e^{-i(p_0 t - p_i x_i)}] \Rightarrow \\ p_0\omega &= (\alpha_i p_i + \beta m)\omega \end{aligned} \tag{1.69}$$

Usando a definição de ω, α e β:

$$\begin{aligned} p_0\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \sigma_i p_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma_i p_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{m} \\ \mathbf{m} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad \Rightarrow & \\ p_0\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_i p_i & \mathbf{m} \\ \mathbf{m} & -\sigma_i p_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} & \end{aligned} \tag{1.70}$$

Então:

$$\begin{cases} p_0\varphi = \sigma_i p_i\varphi + m\chi \quad \Rightarrow \quad \chi = \dfrac{p_0 - \sigma_i p_i}{m}\varphi \\ \\ p_0\chi = m\varphi - \sigma_i p_i\chi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \dfrac{p_0 + \sigma_i p_i}{m}\chi \end{cases} \tag{1.71}$$

O objetivo é calcular a energia, ao substituir a segunda equação de 1.71 na primeira:

$$\chi = \frac{(p_0 - \sigma_i p_i)}{m}\frac{(p_0 + \sigma_i p_i)}{m}\chi \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{{p_0}^2 - (\sigma_i p_i)^2}{m^2} \tag{1.72}$$

Agora é necessário calcular o termo $(\sigma_i p_i)^2$, então:

$$\sigma_i p_i = \sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3 \Rightarrow$$
$$\sigma_i p_i = p_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + p_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\sigma_i p_i = \begin{pmatrix} p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 \end{pmatrix} \quad (1.73)$$

O quadrado deste termo é:

$$(\sigma_i p_i)^2 = \begin{pmatrix} p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$(\sigma_i p_i)^2 = \begin{pmatrix} {p_3}^2 + {p_1}^2 + {p_2}^2 & 0 \\ 0 & {p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$(\sigma_i p_i)^2 = (\overrightarrow{p})^2 \mathbb{I}_2 \quad (1.74)$$

Substituindo 1.74 em 1.72, e considerando que $(p_o)^2 = E^2$, ressurge a solução das energias negativas:

$$1 = \frac{E^2 - (\sigma_i p_i)^2}{m^2}$$
$$1 = \frac{E^2 - (\overrightarrow{p})^2}{m^2}$$
$$E = \pm\sqrt{(\overrightarrow{p})^2 + m^2} \quad (1.75)$$

1.7 Spin e o Conceito de Helicidade

Na seção 1.2, foi discutido sobre as condições necessárias para descrever um conjunto de estados degenerados em energia por intermédio dos multipletos. Concluiu-se que eram necessárias 2 condições: a primeira é encontrar um operador hermitiano que comutasse com o operador energia, e a segunda condição é que todos os autovalores dos estados degenerados em energia fossem diferentes para esse operador hermitiano.

A partir de agora o objetivo será encontrar este operador que desempenha papel semelhante para os spinores que descrevem partícula que obedecem a equação de Dirac. Não se sabe qual é este operador, mas tentando adaptar a mecânica quântica para esta situação inédita e será proposto que este operador é o spin e será verificado se esta suposição leva a resultados coerentes ou não.

Para iniciar a discussão de uma forma mais simples, será considerado que a partícula descrita pela equação de Dirac esteja em repouso, $p_i = 0$, então o operador energia terá a seguinte forma, de acordo com a equação de Dirac e a definição das matrizes α e β:

$$\hat{H} = \beta m \quad \Rightarrow \quad \hat{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{m} \\ \mathbf{m} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (1.76)$$

Uma tentativa de definir o operador de spin que comuta com o operador energia é:

$$\hat{\Sigma}_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \tag{1.77}$$

Para a situação particular em que o momento linear da partícula é zero, o operador $\hat{\Sigma}_i$ contém a característica de comutação com $\hat{H}$ desejada:

$$\left[\hat{\Sigma}_i, \hat{H}\right] = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{m} \\ \mathbf{m} & \mathbf{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{m} \\ \mathbf{m} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\left[\hat{\Sigma}_i, \hat{H}\right] = 0 \tag{1.78}$$

A demonstração abaixo mostra que, no cenário em que $\overrightarrow{p} \neq 0$, o operador $\hat{\Sigma}$ não comuta com o operador energia.

O operador energia $\hat{H}$ e sua relação de comutação com o operador spin pode ser escrita como:

$$\hat{H} = (\alpha_i \hat{p}_i + \beta m) \qquad \Rightarrow \qquad \hat{H} = \begin{pmatrix} \sigma_i p_i & m \\ m & -\sigma_i p_i \end{pmatrix} \tag{1.79}$$

$$\left[\hat{H}, \hat{\Sigma}_j\right] = \begin{pmatrix} \sigma_i p_i & m \\ m & -\sigma_i p_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_i p_i & m \\ m & -\sigma_i p_i \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left[\hat{H}, \hat{\Sigma}_j\right] = \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} p_i \sigma_k & 0 \\ 0 & -p_i \sigma_k \end{pmatrix} \tag{1.80}$$

Isto significa que é necessário procurar algum outro operador hermitiano para comutar com $\hat{H}$ e fornecer números quânticos diferentes para estados degenerados. Um operador que satisfaz estas condições é o operador helicidade. O significado físico é que ele é um operador que "projeta" o spin no momento linear da partícula, ou seja, ele é formado pelo produto escalar entre o operador dos spins $\hat{\overrightarrow{\Sigma}}$ e versor do momento linear $\hat{\mathbf{p}}$:

$$\hat{h}(p) = \hat{\mathbf{p}} \hat{\overrightarrow{\Sigma}} = \frac{p_i}{|\overrightarrow{p}|} \hat{\Sigma}_i = \begin{pmatrix} \frac{p_i}{|\overrightarrow{p}|} \sigma_i & 0 \\ 0 & \frac{p_i}{|\overrightarrow{p}|} \sigma_i \end{pmatrix} \tag{1.81}$$

É fácil verificar que;

$$\left[\hat{H}, \hat{h}(p)\right] = 0 \tag{1.82}$$

Os autovalores do operador helicidade são ± 1. Para analisar qual é a helicidade da partícula deve-se considerar qual é o sentido da componente do momento linear que está na "direção" do spin. Se o sentido é o mesmo, então a partícula possui helicidade positiva, se o sentido é oposto, então a helicidade é negativa.

Conclusões relevantes ocorrem quando analisa-se os autovetores do operador $\hat{h}(p)$ quando se considera a equação de Dirac com massa. Será visto que dependendo do referencial escolhido, a helicidade da partícula poder ser positiva ou negativa. Esta conclusão pode ser obtida a partir do conceito de helicidade. Se a partícula possui massa e tem momento $\overrightarrow{p}$ em um referencial, em algum outro referencial ela poderá ter momento $-\overrightarrow{p}$, como o spin fica inalterado, então a helicidade pode mudar dependendo do referencial.

Mas a partícula pode ter massa tendendo a zero e estar em um regime ultra relativístico, ou não possuir massa. Nestes casos a helicidade deve permanecer inalterada, pois não há nenhum referencial inercial que possa inverter o momento da partícula.

Para chegar a estas conclusões formalmente, é necessário calcular os autovetores de $\hat{H}$ e $\hat{h}(p)$ para depois interpretar esses resultados Inicialmente precisa-se achar os autoestados da equação de Dirac para energias positivas e negativas para depois analisar como eles se comportam com a mudança de referencial.

Os autoestados para energias positivas, $p^{\mu} = (E, \overrightarrow{p})$, são obtidas utilizando o resultado 1.71:

$$\chi = \frac{p_0 - \sigma_i p_i}{m}\varphi \tag{1.83}$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{E-\overrightarrow{\sigma}\overrightarrow{p}}{m}\varphi \end{pmatrix} e^{-i(Et-\overrightarrow{p}\overrightarrow{x})} \quad \Rightarrow \quad \psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{E-\overrightarrow{\sigma}\overrightarrow{p}}{m}\varphi \end{pmatrix} e^{-ipx} \tag{1.84}$$

Mas qual deve ser a forma de φ para que ele seja também autovetor de $\hat{h}(p)$? Os autovalores de $\hat{h}(p)$ são ± 1, então:

$$\hat{h}(p)\omega = \begin{pmatrix} \frac{\overrightarrow{\sigma}\overrightarrow{p}}{|\overrightarrow{p}|} & 0 \\ 0 & \frac{\overrightarrow{\sigma}\overrightarrow{p}}{|\overrightarrow{p}|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{E-\overrightarrow{\sigma}\overrightarrow{p}}{m}\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} \frac{\overrightarrow{\sigma}\overrightarrow{p}}{|\overrightarrow{p}|} & 0 \\ 0 & \frac{\overrightarrow{\sigma}\overrightarrow{p}}{|\overrightarrow{p}|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{E-\overrightarrow{\sigma}\overrightarrow{p}}{m}\varphi \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{E-\overrightarrow{\sigma}\overrightarrow{p}}{m}\varphi \end{pmatrix} \tag{1.85}$$

Portanto a condição necessária para que se tenha autovalor $+1$ (-1) é:

$$\frac{\overrightarrow{\sigma}\overrightarrow{p}}{|\overrightarrow{p}|}\varphi_+ = \varphi_+ \qquad \left(\frac{\overrightarrow{\sigma}\overrightarrow{p}}{|\overrightarrow{p}|}\varphi_- = -\varphi_-\right) \tag{1.86}$$

A forma que φ_+ e φ_- devem ter para satisfazer a exigência acima é:

$$\varphi_+ = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\overrightarrow{\sigma}\overrightarrow{p}}{|\overrightarrow{p}|}\right)\varphi \qquad \text{e} \qquad \varphi_- = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\overrightarrow{\sigma}\overrightarrow{p}}{|\overrightarrow{p}|}\right)\varphi \tag{1.87}$$

Suponha que para um referencial inercial a partícula possua helicidade positiva e momento linear $\overrightarrow{p}$. Há outro referencial inercial no qual o momento linear é $-\overrightarrow{p}$, como o spin não sofre alteração com a mudança de referencial, então a helicidade muda de sinal. Na expressão acima, a alteração $\overrightarrow{p} \rightarrow -\overrightarrow{p}$, transforma φ_+ em φ_-.

A helicidade da partícula massiva depende do referencial no qual se trabalha.

1.8 Equação de Dirac sem Massa

Agora será demonstrado que para partículas sem massa, a helicidade permanece a mesma, não importando o referencial inercial adotado.

O sistema de equações 1.71 impõe a forma de φ e χ para que o spinor seja solução em ondas planas da equação de Dirac. Tomando o limite $m \to 0$, o sistema então fica:

$$\begin{cases} p_0\varphi = \sigma_i p_i \varphi & \Rightarrow \quad \varphi = \dfrac{\vec{\sigma}\vec{p}}{p_0}\varphi \\ \\ p_0\chi = -\sigma_i p_i \chi & \Rightarrow \quad \chi = -\dfrac{\vec{\sigma}\vec{p}}{p_0}\chi \end{cases} \tag{1.88}$$

No caso particular da solução das energias positivas, $p_0 = E = |\vec{p}|$ então fica evidente que φ e χ são autoestados com helicidade $+1$ e -1 respectivamente

$$\varphi = \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{|\vec{p}|}\varphi \tag{1.89}$$

$$\chi = -\frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{|\vec{p}|}\chi \tag{1.90}$$

Define-se a matriz γ^5 como o operador quiral. Esse operador foi definido de forma a comutar com o operador $\hat{H}$ quando se toma o limite de $m \to 0$ e a não comutar com $\hat{H}$ quando $m \neq 0$.

Portanto, um férmion com $m \to 0$ possui helicidade $+1$. Não haverá nenhum referencial no qual esse autovalor se altere, por isso seu estado será autovetor de γ^5. Se o férmion possuir massa, ele pode até ter helicidade $+1$ em um referencial inercial, mas haverá outro no qual ele terá helicidade -1, e por seu estado não será autoestado do operador quiral. A massa mistura estados de diferentes quiralidade. O operador γ^5 é definido como:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.91}$$

Os autovalores deste operador são chamados de quiralidade. A quiralidade é igual a helicidade para férmions e menos a helicidade para os anti-férmions. O número quântico quiral é bom para caracterizar estados, no limite $m \to 0$.

Os spinores que descrevem partículas massivas, não são autovetores do operador quiral, por isso definem-se operadores que conseguem projetar as componentes do spinor nos autovetores de γ^5. Os projetores P_R e P_L projetam a componente do spinor que possua autovalor $+1$ e -1 respectivamente.

$$P_R = \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right) \qquad P_L = \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right) \tag{1.92}$$

Como o operador quiral comuta com o operador energia quando $m \to 0$, há uma simetria neste sistema. É possível deduzir qual é a forma do operador responsável pela transformação infinitesimal devido à simetria quiral. Utilizando a fórmula de Baker-Hausdorff[1]:

$$e^{iG}He^{-iG} = H + [iG, H] + \big[iG, [iG, H]\big] + \cdots \tag{1.93}$$

e $[\gamma^5, H] = 0$, então:

$$e^{i\beta\gamma^5}He^{-i\beta\gamma^5} = H \tag{1.94}$$

A transformação quiral global U(1), também chamada de $\mathrm{U}(1)_5$, é definida como:

$$\psi \to \psi' = e^{-i\beta\gamma^5}\psi \tag{1.95}$$

A densidade lagrangeana tem que ser invariante perante a transformação $\mathrm{U}(1)_5$, se ela tiver como objetivo descrever fenômenos físicos que envolvem partículas sem massa ou no regime ultra-relativístico[4].

Outra transformação infinitesimal relevante é a $\mathrm{SU}(2)_5$:

$$\psi \to e^{-(i\vec{\beta}\vec{\tau}\gamma^5)}\psi \tag{1.96}$$

Se a densidade lagrangeana for invariante simultaneamente às transformações SU(2) e $\mathrm{SU}(2)_5$, pode-se dizer que ela tem simetria $\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)_5$ e é possível redefinir os geradores, para obter a simetria $\mathrm{SU}(2)_L \times\mathrm{SU}(2)_R$.

Os geradores dos grupos SU(2) e $\mathrm{SU}(2)_5$ são respectivamente:

$$\hat{Q}_i = \frac{\tau_i}{2} \tag{1.97}$$

$$\hat{Q}_{i5} = \gamma^5\frac{\tau_i}{2} \tag{1.98}$$

As relações de comutação entre os geradores dos dois grupos são:

$$\begin{aligned} \left[\hat{Q}_i, \hat{Q}_j\right] &= i\epsilon_{ijk}\hat{Q}_k \\ \left[\hat{Q}_i, \hat{Q}_{j5}\right] &= i\epsilon_{ijk}\hat{Q}_{k5} \\ \left[\hat{Q}_{i5}, \hat{Q}_{j5}\right] &= i\epsilon_{ijk}\hat{Q}_{k5} \end{aligned} \tag{1.99}$$

Os geradores redefinidos são:

$$\hat{Q}_{iR} = \frac{1}{2}\left(\hat{Q}_i + \hat{Q}_{i5}\right) \qquad \hat{Q}_{iL} = \frac{1}{2}\left(\hat{Q}_i - \hat{Q}_{i5}\right) \tag{1.100}$$

As relações de comutação entre $\hat{Q}_{iL}$ e $\hat{Q}_{iR}$ são:

$$\begin{aligned} \left[\hat{Q}_{iR}, \hat{Q}_{jR}\right] &= i\epsilon_{ijk}\hat{Q}_{kR} \\ \left[\hat{Q}_{iL}, \hat{Q}_{jL}\right] &= i\epsilon_{ijk}\hat{Q}_{kL} \\ \left[\hat{Q}_{iR}, \hat{Q}_{jL}\right] &= 0 \end{aligned} \tag{1.101}$$

Capítulo 2

Aspectos de Teoria de Calibre e o Modelo Padrão

Leis físicas fundamentais são derivadas em termos da construção matemática, a ação $S \equiv \int dtL = \int d^4x\mathscr{L}$, onde L é a lagrangeana da teoria e $\mathscr{L}$ é sua densidade. A ação pode ser pensada como a formulação da teoria. A construção dessas ações está sujeita a princípios físicos fundamentais tais como covariância, localidade, invariancia sob todas as simetrias que caracterizam o sistema físico a ser descrito e deve ser real. A simetria mais conhecida talvez seja aquela relativa a conservação de carga do eletromagnetismo. Esta simetria corresponde a uma simetria local U(1), conforme discutido anteriormente, e o teorema de Noether nos garante a existência de uma corrente conservada na teoria. Talvez o aspecto mais importante das simetrias locais é o fato de que elas determinam as interações dos campos na lagrangeana livre com a corrente conservada. Exigir a invariancia de calibre em qualquer teoria clássica ou quântica, abeliana ou não, confere à teoria um caráter preditivo do ponto de vista teórico. Naturalmente o teste final serão experiências feitas no laboratório.

Em seguida exemplificamos esses conceitos e suas formulações matemáticas com a invariancia de calibre na eletrodinâmica. Consideremos n campos de Dirac e sua densidade lagrangeana:

$$\mathscr{L} = \sum_{i=1}^{n} \left(i\overline{\psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_i - m\overline{\psi}_i \psi_i \right) \ , \tag{2.1}$$

Define-se então um grupo de transformações locais abelianas, U(1) nos campos,

$$\psi_i'(x) = e^{(-iq_i\Theta(x))}\psi_i(x) \tag{2.2}$$

onde o parâmetro q_i é um autovalor do gerador Q de U(1). A densidade lagrangeana acima é invariante por transformações U(1). Pelo teorema de Noether sabemos então que existe uma corrente conservada

$$j_u(x) = \sum_i q_i \overline{\psi}_i \gamma_\mu \psi_i \tag{2.3}$$

e portanto, a conservação de carga. Isso implica que a equação 2.2 deve deixar a densidade lagrangeana 2.1 invariante. Para isso é necessário introduzir um campo extra para compensar os termos novos que vão aparecer, proporcionais a $\partial_\mu\Theta(x)$. Isto pode ser conseguido introduzindo-se o que se chama de derivada covariante:

$$D_\mu \psi_i(x) = \left[\partial_\mu + iq_i e A_\mu(x)\right] \psi_i(x) \tag{2.4}$$

o fator e é uma constante arbitrária. O campo A_μ deve se transformar como:

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{c}\partial_\mu \Theta(x) \tag{2.5}$$

A construção de teorias de calibre não abelianas, que incluam simetrias internas tais como sabor e cor no caso da QCD, procede de maneira similar, com a diferença de que o grupo de transformação do tipo

$$A_\mu \to igA_\mu^a T^a \tag{2.6}$$

e o número de campos de calibre necessários para manter a invariância corresponde ao número de geradores do grupo.

2.1 O Modelo Padrão

Após analise de dados experimentais assumiu-se que as correntes das interações fraca eram:

$$\begin{aligned} J^\mu(x) &= \sum_l \overline{\psi}_l(x)\gamma^\mu \left(1-\gamma^5\right)\psi_{\nu_l}(x) \\ J^{\mu\dagger}(x) &= \sum_l \overline{\psi}_{\nu_l}(x)\gamma^\mu \left(1-\gamma^5\right)\psi_l(x)\ , \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde os índices l e ν_l abrangem os campos dos léptons carregados e neutrinos respectivamente. As correntes acima estão relacionadas com as simetrias de uma lagrangeana invariante de calibre $\mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{U}(1)$ composta pelos campos

$$\Psi(x)_L = \begin{pmatrix} \psi_{\nu_l L} \\ \psi_l(x)_L \end{pmatrix}\ , \qquad \psi_{\nu_l R} \quad e \qquad \psi_l(x)_R\ . \tag{2.8}$$

Onde $\Psi(x)_L$, $\psi_{\nu_l R}$ e $\psi_l(x)_R$ que são o dubleto e singletos sob transformações $\mathrm{SU}(2)_L$ respectivamente. Mas além das correntes carregadas do isospin fraco, que está na equação 2.7, a corrente neutra do isospin fraco é prevista como uma outra corrente associada a simetria $\mathrm{SU}(2)_L$. A corrente fraca da hipercarga está associada a simetria U(1). Um problema surge na tentativa de fornecer massa aos bósons de calibre e aos férmions através de termos quadráticos nos campos. A invariancia de calibre é quebrada e a teoria torna-se não renormalizável. O Modelo Padrão, como sabemos, unifica as forças eletromagnética e fraca. O grupo de simetria que efetiva esta unificação é o grupo SU(2)⊗U(1) que vem do estudo das correntes fracas complementadas pela idéia da unificação mais simples possível com o eletromagnetismo. Essas simetrias são locais e a construção de derivadas covariantes (que vão garantir a simetria de calibre) impõe os campos de calibre W_a^μ para SU(2) e B^μ para U(1). Os campos de matéria consistem de quarks e léptons.

A lagrangeana completa, invariante de calibre do Modelo Padrão é:

$$\mathscr{L}_{mp} = \mathscr{L}_{calibre} + \mathscr{L}_{matéria} + \mathscr{L}_{Higgs} + \mathscr{L}_{Yukawa} + \mathscr{L}_{cfix} + \mathscr{L}_{fantasmas} \ , \tag{2.9}$$

o termo $\mathscr{L}_{calibre}$ descreve a parte cinética dos campos de calibre e a interação entre eles:

$$\mathscr{L}_{calibre} = -\frac{1}{4} W^{a}_{\mu\nu} W^{\mu\nu a} - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \ , \tag{2.10}$$

onde:

$$W^{a}_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu} W^{a}_{\nu} - \partial_{\nu} W^{a}_{\mu} - g\epsilon^{abc} W^{b}_{\mu} W^{c}_{\nu} \quad \text{e} \tag{2.11}$$

$$B_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu} B_{\nu} - \partial_{\nu} B_{\mu} \ , \tag{2.12}$$

onde ϵ^{abc} são constantes de estrutura do grupo SU(2). O termo $\mathscr{L}_{matéria}$ contém a parte cinética dos campos de matéria e a interação destes com os campos de gauge:

$$\mathscr{L}_{matéria} = i\overline{(\psi_{l_A})}_L \gamma^{\mu} \left(\partial_{\mu} + i g_2 W^{j}_{\mu} \tau^{j} - \frac{i}{2} g_1 B_{\mu} \right) (\psi_{l_A})_L + \tag{2.13}$$

$$+ i\overline{(\psi_{e_A})}_R \gamma^{\mu} \left(\partial_{\mu} - i g_1 B_{\mu} \right) (\psi_{e_A})_R + \tag{2.14}$$

$$+ i\overline{(\psi_{q_A})}_L \gamma^{\mu} \left(\partial_{\mu} + i g_2 W^{a}_{\mu} T^{a} + \frac{i}{6} g_1 B_{\mu} \right) (\psi_{q_A})_L + \tag{2.15}$$

$$+ i\overline{(\psi_{d_A})}_R \gamma^{\mu} \left(\partial_{\mu} - \frac{i}{3} g_1 B_{\mu} \right) (\psi_{d_A})_R + \tag{2.16}$$

$$+ i\overline{(\psi_{u_A})}_R \gamma^{\mu} \left(\partial_{\mu} + \frac{2i}{3} g_1 B_{\mu} \right) (\psi_{u_A})_R \tag{2.17}$$

onde

$$(\psi_{q_A})_L \equiv \begin{pmatrix} (\psi^{1}_{q_A})_L \\ (\psi^{2}_{q_A})_L \end{pmatrix} , \qquad \overline{(\psi_{q_A})}_L \equiv \begin{pmatrix} \overline{(\psi^{1}_{q_A})}_L & \overline{(\psi^{2}_{q_A})}_L \end{pmatrix} . \tag{2.18}$$

Os espinores estão na notação quiral:

$$(\psi^{i}_{q_A})_L \equiv \begin{pmatrix} q^{i}_{A} \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad (\psi_{d_A})_R \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{d}^{c}_{A} \end{pmatrix} , \qquad (\psi_{u_A})_R \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{u}^{c}_{A} \end{pmatrix} , \tag{2.19}$$

o índice A especifica a geração dos quarks da lagrangeana, e o índice i pode ser igual a 1 ou 2 e indica qual componente do dubleto abaixo será usada:

$$q_1 \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} , \qquad q_2 \equiv \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} , \qquad q_3 \equiv \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} , \tag{2.20}$$

$q^{1}_{3} = t$ e $q^{2}_{3} = b$ por exemplo. As definições de $\overline{u}^{c}_{A}$ e $\overline{d}^{c}_{A}$ são:

$$u^{c}_{1} \equiv u^{c} \ , \qquad u^{c}_{2} \equiv c^{c} \ , \qquad u^{c}_{3} \equiv t^{c} \tag{2.21}$$

$$d^{c}_{1} \equiv d^{c} \ , \qquad d^{c}_{2} \equiv s^{c} \ , \qquad d^{c}_{3} \equiv b^{c} \ , \tag{2.22}$$

as matrizes τ^j que aparecem na lagrangeana são as matrizes de Pauli, g_2 e g_1 são constantes de acoplamento associadas aos grupos SU(2) e U(1) respectivamente. A definição dos demais termos serão omitidas, pois não são relevantes para este trabalho, mas pode ser encontrado em S. Pokorski[8].

Neste trabalho utilizaremos apenas os termos $\mathscr{L}_{calibre}$ e $\mathscr{L}_{matéria}$ referente aos quarks t e b, uma descrição abrangente da lagrangeana do Modelo Padrão pode ser encontrada em S. Pokorski[8]

2.2 Quebra Dinâmica de Simetria Através de Interações Quárticas

A quebra de simetria sempre teve um papel importante na Física. Um exemplo relacionado a este trabalho é a descrição dos espectros de massa de mésons leves. Certamente a teoria correta para isto é a Cromodinâmica Quântica, porém no regime de interações fortes, sua solução perturbativa não é adequada. No entanto um modelo efetivo que inclui as simetrias principais das partículas, foi desenvolvido por NJL e tem tido relativo sucesso na descrição de propriedades de mésons leves. Nesse modelo a ação do glúon é substituída de maneira efetiva por interações quárticas entre os quarks. O ingrediente fundamental para a obtenção das massas mesônicas, é a quebra dinâmica de simetria quiral, responsável pela massa das partículas não elementares.

No que se refere ao problema bem conhecido de incompatibilidade de teorias de calibre com bósons massivos, o Modelo Padrão, para conseguir descrever essas massas sem ter que prescindir da invariancia, evocou-se a existência de um setor escalar, onde a partícula escalar, conhecida como Bóson de Higgs, através de uma quebra espontânea de simetria, daria massa as demais partículas. Outros mecanismos foram propostos, um dos quais será discutido em detalhe neste trabalho W. A. Bardeen[2], alternativamente propôs incluir no Modelo Padrão uma interação quártica envolvendo os quarks top e bottom e conseguir assim, de forma análoga ao que se fez na área de hádrons a baixas energias, um mecanismo para gerar massas para os bósons de calibre do Modelo Padrão. Essa interação quártica suposta por W. A. Bardeen[2] tem a forma:

$$\mathscr{L}_q = G\left(\overline{\psi}_L^a\, t_{Ra}\right)\left(\bar{t}_R^b\, \psi_{Lb}\right) \qquad ; \qquad \psi_L = \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}\,, \tag{2.23}$$

onde os índices a e b correm nos índices de cor. Essa lagrangeana possui as simetrias $U(1)_f \otimes U(1)_5 \otimes SU(2)_f$, a prova está no apêndice B. Conforme a equaçãoA.8, $\mathscr{L}_q$ pode ser reescrita como:

$$\mathscr{L}_q \;=\; \frac{G}{4}\left[\left(\bar{t}^a t_a\right)\left(\bar{t}^b t_b\right) - \left(\bar{t}^a \gamma^5 t_a\right)\left(\bar{t}^b \gamma^5 t_b\right)\right] + \frac{G}{4}\left[\bar{b}^a\left(1+\gamma^5\right) t_a\right]\left[\bar{t}^b\left(1-\gamma^5\right) b_b\right] \tag{2.24}$$

O setor responsável pela quebra dinâmica de simetria será o canal $\bar{t}t$. No modelo de NJL, para obter a equação que representa a formação do condensado dos férmions envolvidos, fazemos a aproximação de campo médio na lagrangeana. Nesta interação quártica proposta por W. A. Bardeen*et al.*[2] são os termos referentes ao canal $\bar{t}t$ que formarão o condensado $\bar{t}t$. Ao fazer a aproximação de campo médio na lagrangeana, a equação de campo que ela fornece é semelhante à equação de campo de Dirac, onde o termo:

$$m_t = -\frac{G}{2}\langle \bar{t}t \rangle \tag{2.25}$$

faz o papel da massa na equação de Dirac. Esta é a origem do argumento de que o condensado quark-antiquark gera uma massa dinâmica. A equação de *gap* é a conseqüência da definição do vácuo da teoria ter este condensado de quark-antiquark $\bar{t}t$:

$$-\frac{2m}{G} = \langle \bar{t}t \rangle = -iN_c \lim_{y \to x} S_F\left(x - y; M\right) \ ,$$

onde $S_F\left(x - y; M\right)$ é o propagador de Dirac para os férmions.

$$\begin{aligned}
-\frac{2m_t}{G} &= -iN_c \, Tr \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{k} - m_t} \\
-\frac{2m_t}{G} &= -iN_c \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{Tr\left(\gamma^\mu k_\mu + \mathbb{I}_4 m_t\right)}{k^2 - {m_t}^2} \\
\frac{2m_t}{G} &= 4m_t i N_c \int_0^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - {m_t}^2} \\
1 &= 2iGN_c \int_0^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - {m_t}^2} \ ,
\end{aligned} \tag{2.26}$$

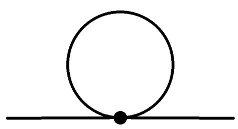
definindo,

$$I_{quad}({m_t}^2) \equiv \int_0^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - {m_t}^2} \ , \tag{2.27}$$

então a equação de *gap* pode ser reescrita na forma

$$1 = 2iGN_c I_{quad}({m_t}^2) \ . \tag{2.28}$$

O diagrama que representa a equação de *gap* é:



A lagrangeana invariante de calibre e com a interação quártica que será relevante para este trabalho é:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} = &-\frac{1}{4} W^a_{\mu\nu} W^{\mu\nu a} - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} + i\overline{\psi}^a_L \gamma^\mu \left(\partial_\mu + ig_2 W^j_\mu \tau^j + \frac{i}{6} g_1 B_\mu\right) \psi_{Lb} + \\
&+ \frac{G}{4}\left[\left(\bar{t}^a t_a\right)\left(\bar{t}^b t_b\right) - \left(\bar{t}^a \gamma^5 t_a\right)\left(\bar{t}^b \gamma^5 t_b\right)\right] + \frac{G}{4}\left[\bar{b}^a \left(1 + \gamma^5\right) t_a\right]\left[\bar{t}^b \left(1 - \gamma^5\right) b_b\right] + \\
&+ i\bar{b}_R \gamma^\mu \left(\partial_\mu - \frac{i}{3} g_1 B_\mu\right) b_R + i\bar{t}_R \gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{2i}{3} g_1 B_\mu\right) t_R \ ,
\end{aligned} \tag{2.29}$$

os índices que especificam a geração de quarks foram omitidos, pois para os cálculos que serão efetuados, somente os quarks t e b são relevantes.

De cálculos extensivos com o Modelo de NJL, sabe-se que cálculos perturbativos envolvendo a interação quártica introduzem ambiguidades. Com base nisto Tony Gherghetta[6] refez alguns dos cálculos de W. A. Bardeen *et al.*[2] mostrando explicitamente ambiguidades nos cálculos e pondo em cheque a conclusão dos mesmos.

O objetivo do presente trabalho é mostrar que a existência de uma simetria proveniente da liberdade de escolha de rótulos nos diagramas de Feynmam, seria violada caso essas ambiguidades existissem. No que segue nos dedicamos a este trabalho.

Capítulo 3

Tratamento de Divergências e Ambiguidades

A implementação do uso da regularização somente implícita tem se mostrado adequada em teorias renormalizáveis[5]. A ideia é de separar, através de identidades puramente algébrica, ao nível do integrando, o conteúdo divergente e ambiguidades provenientes de regularização da parte finita de uma amplitude física. Os diagramas de Feynman possuem momentos iniciais e finais das partículas envolvidas no espalhamento (momento externo), mas também podem haver laços, e o momento associado a estes é chamado de momento interno. A técnica consiste utilizar uma identidade algébrica de forma que as integrais divergentes não dependam dos momentos externos, para isto utilizamos:

$$\frac{1}{(k-q_i)^2 - m^2} = \frac{1}{k^2 - m^2} - \frac{k^2 - 2q_i q}{(k^2 - m^2)\left[(k-q_i)^2 - m^2\right]} \, , \tag{3.1}$$

onde k é o momento interno associado ao laço do diagrama, q_i e m são os momentos externos e a massa das partículas que participam do espalhamento respectivamente. Note que o segundo termo, sob o sinal de integração, é menos divergente que o primeiro, Caso este ainda seja divergente, aplica-se a identidade 3.1 quantas vezes forem necessárias para efetuar a separação das divergências dos momentos externos.

Sendo a teoria renormalizável, os infinitos são absorvidos nas constantes de renormalização e as ambiguidades determinadas em geral por simetrias. Quando a teoria é não renormalizável, como é o caso do modelo de NJL por exemplo, a ideia de separar as partes dependentes de regularização das partes finitas persiste, exceto que nesse caso as divergências devem ser funções do parâmetro da escala que determina a validade da teoria. Regularizações explícitas utilizadas diretamente na amplitude de partida tem se mostrado pouco adequadas do ponto de vista de respeitar simetrias[7]. Existem regularizações que preservam as simetrias importantes no modelo de Nambu, por exemplo, que são construídas exatamente para este fim e compatibilizam, por exemplo, dois reguladores diferentes como Pauli-Villars e *Proper Time*. Deste modo as simetrias tem sido preservadas e uma quantidade considerável de dados experimentais tem sido bem descritas desta forma. Utilizaremos a Regularização Implícita que funciona com o segue.

Vamos nos limitar a cálculos de ordem de um laço e por isso faremos cálculos explícitos de todos os ingredientes necessários nessa ordem. Generalizações para integrais de ordem mais altas e com mais índices de Lorentz que as abordadas aqui podem ser encontradas nas referências[5]. As integrais que são no máximo quadraticamente divergentes são do tipo:

$$I_{quad}(m^2) \equiv \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \tag{3.2}$$

$$I^{\mu\nu}_{quad}(m^2) \equiv \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^2} \ , \tag{3.3}$$

Onde o subscrito Λ indica a presença de uma regularização qualquer considerada apenas implicitamente.

Vamos mostrar que as integrais com índice de Lorentz podem ser transformadas na integral básica 3.2, sendo que o preço a pagar é o surgimento de um termo de superfície indeterminado. Essa é uma ambiguidade típica inerente ao cálculo perturbativo. Ao usarmos uma regularização explícita na amplitude de partida, estaremos atribuindo um valor a essas ambiguidades e esta talvez é a razão de discrepâncias encontradas na literatura com diferentes métodos de regularização. Em nosso caso, como mostraremos, elas serão fixadas pelas simetrias do modelo. Neste método utilizamos para as integrais divergentes uma parametrização completamente geral, de maneira a poder explicitar eventuais termos ambíguos. Para isto começamos as integrais com grau de divergência logarítmica, uma vez que suas derivadas com relação a massa são finitas, essa propriedade deve ser obedecida por qualquer regularização.

$$I_{log}(m^2) \equiv \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \tag{3.4}$$

$$I^{\mu\nu}_{log}(m^2) \equiv \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^3} \tag{3.5}$$

Observemos ainda a relação entre essas integrais e termos de superfície,

$$I^{\mu\nu}_{log}(m^2) - \frac{g^{\mu\nu}}{4} I_{log}(m^2) = -\frac{1}{4} \int_k \frac{\partial}{\partial k^\mu} \left[\frac{k^\nu}{(k^2 - m^2)^2} \right] \ , \tag{3.6}$$

onde foi definido que $\int_k \equiv \int_0^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$. De forma análoga para as integrais quadráticas,

$$I^{\mu\nu}_{quad}(m^2) - \frac{g^{\mu\nu}}{2} I_{quad}(m^2) = -\frac{1}{2} \int_k \frac{\partial}{\partial k^\mu} \left[\frac{k^\nu}{(k^2 - m^2)} \right] \ . \tag{3.7}$$

As ambiguidades serão dadas em termos das parametrizações das divergências em questão.

3.1 Parametrização das Divergências Logarítmicas e Quadráticas

Agora será investigado a forma parametrizada independente de regularização que as integrais com divergência logarítmica e quadrática podem ter. Os resultados tabelados das integrais abaixo serão úteis posteriormente:

$$\int_k \frac{1}{(k^2-m^2)^3} = -\frac{b}{2m^2} \tag{3.8}$$

$$\int_k \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2-m^2)^4} = -g^{\mu\nu}\frac{b}{12m^2} \tag{3.9}$$

$$b \equiv \frac{1}{(4\pi)^2} \ . \tag{3.10}$$

As parametrizações desejadas devem ser compatíveis como as relações puramente algébricas das derivadas de $I_{log}(m^2)$ e $I^{\mu\nu}_{log}(m^2)$. Nos cálculos destas derivadas utilizaremos, quando necessário, as relações acima 3.8, 3.9 e 3.10:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial m^2}\left[I_{log}(m^2)\right] = \frac{\partial}{\partial m^2}\int_k \frac{1}{(k^2-m^2)^2} = \\ = \int_k^\Lambda \frac{\partial}{\partial m^2}\left[\frac{1}{(k^2-m^2)^2}\right] = 2\int_k \frac{1}{(k^2-m^2)^3} = \\ = -\frac{i}{(4\pi)^4 m^2} = -\frac{b}{m^2} \ ,\end{aligned} \tag{3.11}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial m^2}\left[I^{\mu\nu}_{log}(m^2)\right] = \frac{\partial}{\partial m^2}\int_k \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2-m^2)^3} = \\ = \int_k \frac{\partial}{\partial m^2}\left[\frac{k^\mu k^\nu}{(k^2-m^2)^3}\right] = 3\int_k \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2-m^2)^4} = \\ = -\frac{3ig^{\mu\nu}}{12\,(4\pi)^4 m^2} = -\frac{bg^{\mu\nu}}{4m^2} \ .\end{aligned} \tag{3.12}$$

Como estas relações são algébricas devem ser obedecidas por qualquer regularização. Podemos então escrever a parametrização mais geral compatível com essas relações:

$$I_{log}(m^2) = c + b\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \tag{3.13}$$

$$I^{\mu\nu}_{log}(m^2) = \frac{g^{\mu\nu}}{4}\left[c' + b\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)\right] \ , \tag{3.14}$$

onde c é uma constante arbitraria. Subtraindo estes termos,

$$I^{\mu\nu}_{log}(m^2) - \frac{g^{\mu\nu}}{4} I_{log}(m^2) = \frac{g^{\mu\nu}}{4}\left(c' - c\right) \ , \tag{3.15}$$

comparando o segundo membro de 3.15 com 3.6, é fácil ver que esse é o termo de superfície:

$$\frac{g^{\mu\nu}}{4}\left(c'-c\right) = -\frac{1}{4}\int_k \frac{\partial}{\partial k^\mu}\left[\frac{k^\nu}{(k^2-m^2)^2}\right] \tag{3.16}$$

Conclusões análogas podem ser deduzidas para as integrais quadraticamente divergentes.

Quando derivamos estas integrais obtemos:

$$\frac{dI_{quad}(m^2)}{dm^2} = I_{log}(m^2) \; , \tag{3.17}$$

$$\frac{dI^{\mu\nu}_{quad}(m^2)}{dm^2} = 2I^{\mu\nu}_{log}(m^2) \tag{3.18}$$

As parametrizações compatíveis com estas relações são:

$$I_{quad}(m^2) = c_1\Lambda^2 + bm^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) - (a_1 - b)m^2 \tag{3.19}$$

$$I^{\mu\nu}_{quad}(m^2) = \frac{g^{\mu\nu}}{2}\left[c_1'\Lambda^2 + bm^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) - (a_1 - b)m^2\right] \; , \tag{3.20}$$

subtraindo este termos:

$$I^{\mu\nu}_{quad}(m^2) - \frac{g^{\mu\nu}}{2} I_{quad}(m^2) = \frac{g^{\mu\nu}}{2}\left(c_1' - c_1\right) \; , \tag{3.21}$$

comparando este resultado com 3.7:

$$\frac{g^{\mu\nu}}{2}\left(c_1' - c_1\right) = -\frac{1}{2}\int_k \frac{\partial}{\partial k^\mu}\left[\frac{k^\nu}{(k^2 - m^2)}\right] \; . \tag{3.22}$$

Há uma arbitrariedade na escolha de c, c', c_1 e c_1', mas estes termos estão ligados a integrais de superfície. Na próxima seção discutiremos a relação dos termos de superfície com o princípio da IRM.

3.2 Termos de Superfície

Uma propriedade dos diagramas de Feynman é que o momento linear tem de ser uma grandeza conservada nos vértices, se o momento interno for rotulado arbitrariamente e a conservação do momento linear for respeitada, o valor da amplitude de espalhamento não deve sofrer alteração, portanto diagramas de Feynman devem obedecer a uma simetria, a invariância de rótulo do momento interno (IRM). Será mostrado que os termos de superfície tem valor nulo devido a IRM.

Uma amplitude de espalhamento escalar representada por um diagrama de Feynman com laço, depende do momento interno k, desde que a conservação do momento linear nos vértices seja satisfeita, para qualquer rótulo α adicionado ao momento interno, a amplitude de espalhamento deve resultar no mesmo valor. A amplitude de espalhamento com rótulo arbitrário pode ser representada matematicamente por:

$$A \equiv \int_k f(k + \alpha, q_i) \; , \tag{3.23}$$

ao aplicarmos a identidade 3.1, as integrais da parte divergente não dependerão do momento externo. As divergências consideradas serão, no máximo, quadráticas, portanto a amplitude de espalhamento pode ter a seguinte forma:

$$\int_k f(k+\alpha, q_i) = \int_k f_{quad}(k+\alpha, q_i) + \int_k f_{lin}(k+\alpha, q_i) + \int_k f_{log}(k+\alpha, q_i) + \int_k f_{fin}(k+\alpha, q_i) \ , \tag{3.24}$$

os índices *quad*, *lin*, *log* indicam que as integrais das funções são quadraticamente, linearmente e logaritimamente divergentes respectivamente e fin indica que a integral é finita. A função $f(k+\alpha)$ pode ser expandida em série da seguinte forma:

$$f(k+\alpha) = f(k) + \alpha_\sigma \frac{\partial}{\partial k_\sigma} f(k) + \frac{\alpha_\sigma \alpha_\rho}{2!} \frac{\partial^2}{\partial k_\sigma \partial k_\rho} f(k) + \cdots \tag{3.25}$$

$$f(k+\alpha) = e^{\left(\alpha_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu}\right)} \ . \tag{3.26}$$

Se a amplitude de espalhamento possui a propriedade de IRM, então,

$$\int_k [f(k+\alpha, q_i) - f(k+\beta, q_i)] = 0 \tag{3.27}$$

deve ser satisfeita para quaisquer rótulos α e β. Se esta expressão for expandida em série utilizando 3.26,

$$\begin{aligned} &\int_k [f(k+\alpha, q_i) - f(k+\beta, q_i)] = \\ &= \left[1 + \alpha_\sigma \frac{\partial}{\partial k_\sigma} + \frac{\alpha_\sigma \alpha_\rho}{2!} \frac{\partial^2}{\partial k_\sigma \partial k_\rho} + \cdots \right] \left[\int_k f_{quad}(k, q_i) + \int_k f_{lin}(k, q_i) + \right. \\ &+ \left. \int_k f_{log}(k, q_i) + \int_k f_{fin}(k, q_i)\right] - \left[1 + \beta_\sigma \frac{\partial}{\partial k_\sigma} + \frac{\beta_\sigma \beta_\rho}{2!} \frac{\partial^2}{\partial k_\sigma \partial k_\rho} + \cdots \right] \times \\ &\times \left[\int_k f_{quad}(k, q_i) + \int_k f_{lin}(k, q_i) + \int_k f_{log}(k, q_i) + \int_k f_{fin}(k, q_i)\right] = \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned} &= (\alpha_\sigma - \beta_\sigma) \int_k \frac{\partial}{\partial k_\sigma} f_{quad}(k, q_i) + (\alpha_\sigma - \beta_\sigma) \int_k \frac{\partial}{\partial k_\sigma} f_{lin}(k, q_i) + \\ &+ (\alpha_\sigma - \beta_\sigma) \int_k \frac{\partial}{\partial k_\sigma} f_{log}(k, q_i) + (\alpha_\sigma - \beta_\sigma) \int_k \frac{\partial}{\partial k_\sigma} f_{fin}(k, q_i) + \cdots = \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned} &= (\alpha_\sigma - \beta_\sigma)\, h_{\mu\nu}(q_i) \int_k \frac{\partial}{\partial k_\sigma} \left[\frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^2}\right] + (\alpha_\sigma - \beta_\sigma)\, h_{\mu\nu}(q_i) \int_k \frac{\partial}{\partial k_\sigma} \left[\frac{k^\mu}{(k^2 - m^2)^2}\right] + \\ &+ (\alpha_\sigma - \beta_\sigma) \int_k \frac{\partial}{\partial k_\sigma} f_{log}(k, q_i) + (\alpha_\sigma - \beta_\sigma) \int_k \frac{\partial}{\partial k_\sigma} f_{fin}(k, q_i) + \cdots \ , \end{aligned} \tag{3.30}$$

devido ao teorema de Gauss, as integrais de superfície das funções finitas e logaritimamente divergentes são nulas. Aplicando a condição de IRM,

$$(\alpha_\sigma - \beta_\sigma)\, h_{\mu\nu}(q_i) \int_k \frac{\partial}{\partial k_\sigma} \left[\frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - m^2)^2}\right] + (\alpha_\sigma - \beta_\sigma)\, h_{\mu\nu}(q_i) \int_k \frac{\partial}{\partial k_\sigma} \left[\frac{k^\mu}{(k^2 - m^2)^2}\right] + \cdots = 0. \tag{3.31}$$

Como α e β podem admitir quaisquer valores, pois são rótulos arbitrários, os termos de superfície devem ser nulos:

$$\int_k \frac{\partial}{\partial k_\sigma}\left[\frac{k^\mu k^\nu}{(k^2-m^2)^2}\right]=0 \qquad \text{e} \qquad \int_k \frac{\partial}{\partial k_\sigma}\left[\frac{k^\mu}{(k^2-m^2)^2}\right]=0\ . \tag{3.32}$$

Há uma generalização[5], que demonstra que todos os termos de superfície são nulos. Comparando 3.32 com 3.6 e 3.7, percebe-se que devido ao IRM, a diferença entre as integrais logaritimamente divergentes e quadraticamente divergentes deve ser nula.

A primeira simetria básica que podemos considerar é a conservação de energia-momento imposta por uma das regras de Feynman, isto é, em cada vértice a energia-momento deve ser conservada independentemente da maneira através da qual escolhermos separá-las no diagrama (um laço) em questão.

No próximo capítulo vamos aplicar essa técnica, e mostrar que a invariância de rótulo pode ser quebrada a menos que os termos de superfície obedeçam a parametrização geral aqui proposta.

Capítulo 4

Cálculo de Propagadores e Quebra Dinâmica de Simetria

W. A. Bardeen *et al.*[2] propuseram um mecanismo alternativo ao bóson de Higgs do Modelo Padrão, no qual ele é um estado composto. Se for confirmada realmente a existência do bóson de Higgs, uma outra questão surgirá, ele é composto ou elementar? Porém Tony Gherghetta[6] notou que os cálculos das amplitudes de espalhamento realizados por W. A. Bardeen*et al.*[2] foram feitos de forma inconsistente, pois ele realizava *shift* no momento interno nas integrais divergentes sem acrescentar termos de superfície ao cálculo. Os cálculos dos propagadores ficavam dependentes destes termos de superfície. O objetivo deste trabalho é mostrar que a proposta de Bardeen está livre de ambiguidades, pois IRM nos assegura que estes termos de superfície, que dependem dos rótulos, tem que ser nulos.

4.1 Geração Dinâmica de Massa nos Propagadores

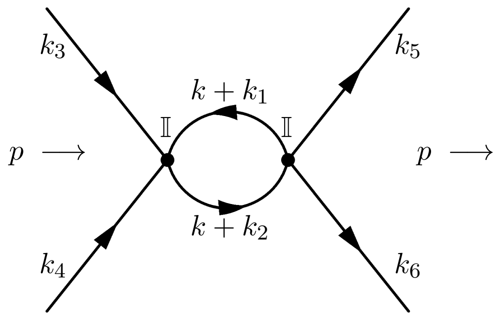
No Modelo Padrão é o campo de Higgs o responsável por tornar os outros campos, exceto o eletromagnético, massivos. O campo de Higgs é introduzido na lagrangeana da teoria eletro-fraca, que apresenta simetria local SU(2)⊗U(1). Como este campo não possui valor esperado no vácuo nulo, verifica-se a quebra espontânea da simetria local SU(2) quando se faz a expansão em torno do ponto de mínimo do campo de Higgs na lagrangeana. Na proposta de W. A. Bardeen *et al.*[2](equação 2.24) o setor de Higgs é excluído, em seu lugar é colocada uma interação quártica entre os quarks t e b de forma análoga ao modelo de NJL:

$$\mathscr{L}_q = +\frac{G}{4}\left[\left(\bar{t}^a t_a\right)\left(\bar{t}^b t_b\right) - \left(\bar{t}^a \gamma^5 t_a\right)\left(\bar{t}^b \gamma^5 t_b\right)\right] + \frac{G}{4}\left[\bar{b}^a\left(1+\gamma^5\right)t_a\right]\left[\bar{t}^b\left(1-\gamma^5\right)b_b\right] \ , \quad (4.1)$$

no vácuo há um condensado $\bar{t}t$. Perceba que não há termos de massa nesta lagrangeana, mas como o valor esperado do vácuo não é nulo, o condensado $\bar{t}t$ será o responsável pelos propagadores, calculados a seguir, adquirirem massa. Veremos que esta teoria prediz a existência de um propagador escalar massivo, ele é interpretado como sendo o bóson de Higgs composto pelo condensado $\bar{t}t$. Os bósons de calibre W também adquirem massa dinamicamente a partir deste condensado.

Calcularemos amplitudes de espalhamento provenientes dos termos de interação da lagrangeana 4.1, para depois corrigirmos em segunda ordem os propagadores.

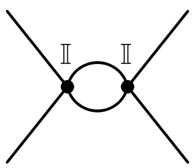
Um diagrama originário do termo de interação $\left(\bar{t}^a t_a\right)\left(\bar{t}^b t_b\right)$ é:



onde k_3, k_4, k_5 e k_6 são os momentos externos, k é o momento interno, k_1 e k_2 são os rótulos arbitrários do momento interno. Dois férmions participam do espalhamento. O momento inicial do sistema é p, então $k_3 + k_4 = p$ e $k_5 + k_6 = p$. Ao aplicarmos o princípio da conservação do momento no primeiro vértice do diagrama, teremos a relação entre os rótulos arbitrários(k_1 e k_2) e os momentos internos e o momento externo:

$$\begin{aligned} k_3 + k_4 + k + k_1 - k - k_2 &= 0 \\ k_3 + k_4 - k_2 + k_1 &= 0 \\ p &= k_2 - k_1 \ , \end{aligned} \tag{4.2}$$

O resultado deve depender somente do momento externo total p, pois não pode haver dependência da amplitude de espalhamento com os rótulos arbitrários. O diagrama pode então ser escrito como:



$$= \int_k Tr\left[\mathbb{I}\frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m_t}\mathbb{I}\frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m_t}\right] \ , \tag{4.3}$$

onde as linhas dos férmion nos diagramas de Feynman foram omitidas por simplicidade. Após tomar o traço da integral acima:

$$\begin{aligned} &\int_k Tr\left[\mathbb{I}\frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m_t}\mathbb{I}\frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m_t}\right] = \\ &2\int_k \left(\frac{1}{(k+k_1)^2 - {m_t}^2} + \frac{1}{(k+k_2)^2 - {m_t}^2} + \frac{4{m_t}^2 - (k_1 - k_2)^2}{\left[(k+k_1)^2 - {m_t}^2\right]\left[(k+k_2)^2 - {m_t}^2\right]}\right) \ , \end{aligned} \tag{4.4}$$

verifica-se que todas as integrais são divergentes, por isso é necessário aplicar a identidade 3.1 duas vezes, para que as integrais divergentes dependam do momento interno k e dos rótulos k_1 e k_2 enquanto que a parte finita dependa apenas do momento externo $p = k_2 - k_1$. Após aplicar a expressão acima na primeira integral divergente de 4.4 (as outras integrais são similares), obtemos:

$$\int_k Tr\left[\mathbb{I}\frac{1}{\not{k}+\not{k}_1-m_t}\mathbb{I}\frac{1}{\not{k}+\not{k}_2-m_t}\right]=2\Bigg\{\int_k\frac{1}{k^2-{m_t}^2}-\int_k\frac{2\,(kk_1)}{\left(k^2-{m_t}^2\right)^2}+$$

$$+\int_k\frac{2{k_1}^2\,(kk_1)+4\,(kk_1)^2}{\left(k^2-{m_t}^2\right)^3}-\int_k\frac{2{k_1}^4\,(kk_1)+8{k_1}^2\,(kk_1)^2+8\,(kk_1)^3}{\left(k^2-{m_t}^2\right)^3\left[(k+k_1)^2-{m_t}^2\right]}-$$

$$-\int_k\frac{{k_1}^2}{\left(k^2-{m_t}^2\right)^2}+\int_k\frac{{k_1}^4+2{k_1}^2\,(k_1k)}{\left(k^2+{m_t}^2\right)^2\left[(k+k_1)^2-{m_t}^2\right]}+\int_k\frac{1}{(k+k_2)^2-{m_t}^2}+$$

$$+\int_k\frac{4{m_t}^2-p^2}{\left[(k+k_1)^2-{m_t}^2\right]\left[(k+k_2)^2-{m_t}^2\right]}\Bigg\} \tag{4.5}$$

O segundo e terceiro termo de 4.5 tem valor nulo. Para o cálculo das integrais finitas, devemos utilizar os parâmetros de Feynman, e posteriormente

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\left(\overline{\Lambda}^2\right)}\right]=\frac{{k_1}^2\,(2x-1)}{\Lambda^4} \tag{4.6}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\ln\overline{\Lambda}^2\right]=\frac{{k_1}^2\,(2x-1)}{\overline{\Lambda}^2}\,, \tag{4.7}$$

onde $\overline{\Lambda}^2$ é uma função de x. Desta forma:

$$\int_k\frac{{k_1}^4+2{k_1}^2\,(k_1k)}{\left(k^2+{m_t}^2\right)^2\left[(k+k_1)^2-{m_t}^2\right]}=-b{k_1}^2\int_0^1 dx\ln\left[\frac{{m_t}^2-{k_1}^2x(1-x)}{{m_t}^2}\right] \tag{4.8}$$

$$\int_k\frac{2{k_1}^4\,(kk_1)+8{k_1}^2\,(kk_1)^2+8\,(kk_1)^3}{\left(k^2-{m_t}^2\right)^3\left[(k+k_1)^2-{m_t}^2\right]}=b{k_1}^2\int_0^1 dx\;x\ln\left[\frac{{m_t}^2-{k_1}^2x(1-x)}{{m_t}^2}\right]\,, \tag{4.9}$$

onde $\dfrac{i}{(4\pi)^2}\equiv b$. A última integral de 4.5 possui divergencia logarítmica, ela será expandida em série. A série de Taylor com expansão de uma função em torno do ponto $k-k_1$ é:

$$f[(k-k_1),(k-k_2)]=f[(k-k_1),(k-k_2)]\Big|_{k-k_1}+$$

$$+k_1\frac{\partial}{\partial k^\mu}f[(k-k_1),(k-k_2)]\Big|_{k-k_1}+$$

$$+{k_1}^\mu{k_1}^\nu\frac{\partial^2}{\partial k^\mu\partial k^\nu}f[(k-k_1),(k-k_2)]\Big|_{k-k_1}+\cdots\,, \tag{4.10}$$

usando essa fórmula no último termo do integrando de 4.5, obtemos:

$$\frac{1}{\left[(k+k_1)^2-m_t{}^2\right]\left[(k+k_2)^2-m_t{}^2\right]}=$$
$$=\frac{1}{(k^2-m_t{}^2)\left\{[k+(k_2-k_1)]^2-m_t{}^2\right\}}+$$
$$+k_1{}^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{1}{(k^2-m_t{}^2)\left\{[k+(k_2-k_1)]^2-m_t{}^2\right\}}\right]+\cdots\quad, \tag{4.11}$$

integrando em k, temos que:

$$\int_k\frac{1}{\left[(k+k_1)^2-m_t{}^2\right]\left[(k+k_2)^2-m_t{}^2\right]}=$$
$$=\int_k\frac{1}{(k^2-m_t{}^2)\left\{[k+(k_2-k_1)]^2-m_t{}^2\right\}}+$$
$$+k_1{}^\mu\int_k\frac{\partial}{\partial k^\mu}\left[\frac{1}{(k^2-m_t{}^2)\left\{[k+(k_2-k_1)]^2-m_t{}^2\right\}}\right]+\cdots\,, \tag{4.12}$$

A última integral de 4.12 é uma integral de superfície de uma função logaritimamente divergente, e devido ao teorema de Gauss, seu valor é nulo, então:

$$\int_k\frac{4m_t{}^2-p^2}{\left[(k+k_1)^2-m_t{}^2\right]\left[(k+k_2)^2-m_t{}^2\right]}=\int_k\frac{4m_t{}^2-p^2}{[k^2-m_t{}^2]\left\{[k-(k_2-k_1)]^2-m_t{}^2\right\}}\,, \tag{4.13}$$

que é igual a:

$$\int_k\frac{4m_t{}^2-p^2}{[k^2-m_t{}^2]\left\{[k-(k_2-k_1)]^2-m_t{}^2\right\}}=$$
$$\left[4m_t{}^2-p^2\right]\left\{\int_k\frac{1}{(k^2-m_t{}^2)^2}-b\int_0^1dx\ln\left[\frac{m_t{}^2-p^2x(1-x)}{m_t{}^2}\right]\right\} \tag{4.14}$$

Vamos definir:

$$Z_0\left[k_n{}^2,\overline{m}^2\right]\equiv\int_0^1dx\ln\left[\frac{m^2-(k_n)^2x(1-x)}{m^2}\right] \tag{4.15}$$
$$Z_1\left[k_n{}^2,m^2\right]\equiv\int_0^1dx\,x\ln\left[\frac{m^2-(k_n)^2x(1-x)}{m^2}\right] \tag{4.16}$$
$$I_{log}(m^2)\equiv\int_k\frac{1}{(k^2-m^2)^2} \tag{4.17}$$
$$I_{log}^{\mu\nu}(m^2)\equiv\int_k\frac{k^\mu k^\nu}{(k^2-m^2)^3} \tag{4.18}$$
$$I_{quad}(m^2)\equiv\int_k\frac{1}{(k^2-m^2)} \tag{4.19}$$

Aplicando as definições acima, 4.8, 4.9 e 4.14 em 4.5:

$$\begin{aligned}\int_k Tr\left[\mathbb{I}\frac{1}{\not k+\not k_1-m_t}\mathbb{I}\frac{1}{\not k+\not k_2-m_t}\right] &= 4I_{quad}({m_t}^2)+\\ +2k_{1\mu}k_{1\nu}\left[4I^{\mu\nu}_{log}({m_t}^2)-g^{\mu\nu}I_{log}({m_t}^2)\right] &+2k_{2\mu}k_{2\nu}\left[4I^{\mu\nu}_{log}({m_t}^2)-g^{\mu\nu}I_{log}({m_t}^2)\right]-\\ +2b{k_1}^2\left\{Z_0\left[{k_1}^2,{m_t}^2\right]-2Z_1\left[{k_1}^2,{m_t}^2\right]\right\} &+2b{k_2}^2\left\{Z_0\left[{k_2}^2,{m_t}^2\right]-2Z_1\left[{k_2}^2,{m_t}^2\right]\right\}+\\ &+2\left[4{m_t}^2-p^2\right]\left\{I_{log}({m_t}^2)-bZ_0\left[p^2,{m_t}^2\right]\right\}\ ,\end{aligned} \tag{4.20}$$

conforme a equação 3.6, a diferença entre as integrais com divergencia logarítmica dará origem a um termo de superfície:

$$4I^{\mu\nu}_{log}(m^2)-g^{\mu\nu}I_{log}(m^2)=-2\int_k\frac{\partial}{\partial k^\mu}\left[\frac{k^\nu}{(k^2-m^2)^2}\right]\ , \tag{4.21}$$

logo,

$$\begin{aligned}\int_k Tr\left[\mathbb{I}\frac{1}{\not k+\not k_1-m_t}\mathbb{I}\frac{1}{\not k+\not k_2-m_t}\right] &= 4I_{quad}({m_t}^2)+\\ +2b{k_1}^2\left\{Z_0\left[{k_1}^2,{m_t}^2\right]-2Z_1\left[{k_1}^2,{m_t}^2\right]\right\} &+2b{k_2}^2\left\{Z_0\left[{k_2}^2,{m_t}^2\right]-2Z_1\left[{k_2}^2,{m_t}^2\right]\right\}+\\ &+2\left[4{m_t}^2-p^2\right]\left\{I_{log}({m_t}^2)-bZ_0\left[p^2,{m_t}^2\right]\right\}-\\ &-4\left\{(k_{1\mu}k_{1\nu}+k_{2\mu}k_{2\nu})\int_k\frac{\partial}{\partial k^\mu}\left[\frac{k^\nu}{(k^2-{m_t}^2)^2}\right]\right\}\ ,\end{aligned} \tag{4.22}$$

como $Z_0[{k_1}^2,{m_t}^2]=2Z_1[{k_1}^2,{m_t}^2]$, a segunda linha da expressão acima tem valor nulo, então:

$$\begin{aligned}\int_k Tr\left[\mathbb{I}\frac{1}{\not k+\not k_1-m_t}\mathbb{I}\frac{1}{\not k+\not k_2-m_t}\right] &= 4I_{quad}({m_t}^2)+\\ &+2\left[4{m_t}^2-p^2\right]\left\{I_{log}({m_t}^2)-bZ_0\left[p^2,{m_t}^2\right]\right\}-\\ &-4\left\{(k_{1\mu}k_{1\nu}+k_{2\mu}k_{2\nu})\int_k\frac{\partial}{\partial k^\mu}\left[\frac{k^\nu}{(k^2-{m_t}^2)^2}\right]\right\}\ .\end{aligned} \tag{4.23}$$

Podemos reescrever este resultado utilizando a parametrização de I_{log}, obtida na seção 3.1,

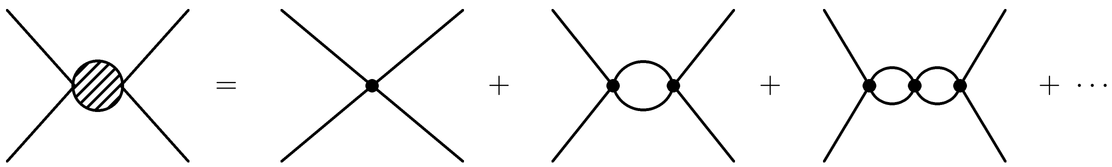
$$I_{log}(m^2)=b\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)+c\ , \tag{4.24}$$

e a expressão para $Z_0\left[p^2,m^2\right]$. Substituindo estas relações em 4.23:

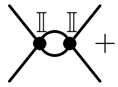
$$\begin{aligned}\int_k Tr\left[\mathbb{I}\frac{1}{\not k+\not k_1-m_t}\mathbb{I}\frac{1}{\not k+\not k_2-m_t}\right] &= 4I_{quad}({m_t}^2)+\\ +2b\left[4{m_t}^2-p^2\right]\int_0^1 dx\ &\left\{\ln\left(\frac{\Lambda^2}{{m_t}^2}\right)-\ln\left[\frac{{m_t}^2-p^2x(1-x)}{{m_t}^2}\right]\right\}-\\ &-4\left\{(k_{1\mu}k_{1\nu}+k_{2\mu}k_{2\nu})\int_k\frac{\partial}{\partial k^\mu}\left[\frac{k^\nu}{(k^2-{m_t}^2)^2}\right]\right\}\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\int_k Tr\left[\mathbb{I}\frac{1}{\not k+\not k_1-m_t}\mathbb{I}\frac{1}{\not k+\not k_2-m_t}\right]=4I_{quad}({m_t}^2)+$$
$$+\,2b\left[4{m_t}^2-p^2\right]\int_0^1 dx\,\ln\left(\frac{\Lambda^2}{{m_t}^2-p^2x(1-x)}\right)-$$
$$-\,4\left\{(k_{1\mu}k_{1\nu}+k_{2\mu}k_{2\nu})\int_k\frac{\partial}{\partial k^\mu}\left[\frac{k^\nu}{(k^2-{m_t}^2)^2}\right]\right\}\ . \quad (4.26)$$

Vamos agora calcular a soma das amplitudes de espalhamento férmion-férmion proveniente do termo de interação $\left(\bar{t}^a t_a\right)\left(\bar{t}^b t_b\right)$ da lagrangeana, também chamado de canal escalar $\bar{t}t$. Obteremos um propagador escalar $\Gamma_s\left(p^2\right)$ que é o propagador para o estado ligado gerado dinamicamente do condensado escalar $\bar{t}t$. Este estado ligado faz o papel do bóson de Higgs[2]. A representação diagramática da soma das amplitudes que contribuirão para este propagador é:



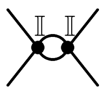
A série que representa esta soma é[6]:

$$\Gamma_s(p^2)=\frac{iG}{2}\left(1+\frac{iG}{2}N_c\right.$$

$$\left.+\cdots\right)\ , \quad (4.27)$$

o segundo termo é "pequeno" em relação ao primeiro, e termos de ordem maior ou igual à 3 serão desconsiderados. Podemos utilizar a expansão em série de Taylor da função abaixo:

$$f(x)=\frac{1}{1-x}\approx 1+x \quad (4.28)$$

na expressão 4.27:

$$\Gamma_s(p^2)=\frac{iG}{2}\left(1-\frac{iG}{2}N_c\right.$$

$$\left.\right)^{-1} \quad (4.29)$$

Para finalizar o cálculo acima, será utilizada a equação 4.26, que é a expressão numérica para o diagrama acima, e a equação de *gap* 2.28:

$$1=2iGN_cI_{quad}({m_t}^2)\ . \quad (4.30)$$

Portanto:

$$\Gamma_s(p^2) = \frac{iG}{2}\Bigg\{ 1 - 2iGN_c I_{quad}({m_t}^2) - \\ - iGN_c \left[2b\left[4{m_t}^2 - p^2\right] \int_0^1 dx \; \ln\left(\frac{\Lambda^2}{{m_t}^2 - p^2 x(1-x)}\right) \right. \\ \left. - 4\left[(k_{1\mu}k_{1\nu} + k_{2\mu}k_{2\nu}) \int_k \frac{\partial}{\partial k^\mu}\left[\frac{k^\nu}{(k^2 - {m_t}^2)^2}\right]\right] \quad \right] \Bigg\}^{-1} \tag{4.31}$$

$$\Gamma_s(p^2) = \frac{(4\pi)^2}{2N_c}\Bigg\{ \left(p^2 - 4m^2\right)\int_0^1 dx \; \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2 - p^2 x(1-x)}\right) + \\ + \frac{2}{b}\left[(k_{1\mu}k_{1\nu} + k_{2\mu}k_{2\nu}) \int_k \frac{\partial}{\partial k^\mu}\left[\frac{k^\nu}{(k^2 - {m_t}^2)^2}\right]\right]\Bigg\}^{-1} . \tag{4.32}$$

Este propagador possui um polo em $p = 2m_t$, a origem deste polo está diretamente ligada com a implementação da equação de *gap*. Como a equação de *gap* surge com a suposição da formação do condensado quark-antiquark, então dizemos que $\Gamma_s(p^2)$ é o propagador para o estado ligado gerado dinamicamente do condensado escalar $\bar{t}t$. Bardeen[2] utilizou o método de regularização *cuttoff* para o cálculos dos diagramas de Feynman, ele realizou *shift* nas variáveis de integração em integrais com grau de divergência maior que logarítmica, e não levou em consideração os termos de superfície que surgem, quando se faz tal procedimento, por esse motivo seus resultados aparentemente não possuem ambiguidades. Porém Tony Gherghetta[6] percebeu que os resultados dos propagadores que Bardeen[2] calculou, possuíam termos de superfície que dependiam do rótulo do momento interno. Como o rótulo do momento pode assumir qualquer valor desde que a conservação da energia-momento nos vértices seja satisfeita, os resultados estavam permeados de ambiguidades. Mas ao separar a parte divergente da parte finita da forma realizada neste trabalho, percebe-se que pelo princípio da IRM as ambiguidades são termos de superfície que devem ter valor nulo. O resultado do cálculo de Gherghetta[6] para este propagador é:

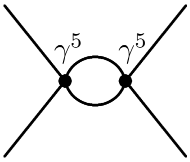
$$\Gamma_s(p^2) = \frac{(4\pi)^2}{2N_c}\left[\frac{1}{2}\Delta(\alpha)p^2 + \left[p^2 - 4m^2\right]\int_0^1 dx \; \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2 - p^2x(1-x)}\right)\right]^{-1} , \tag{4.33}$$

As ambiguidades estão no termo $\Delta(\alpha)$. Ao compararmos o resultado acima com a equação 4.32, percebemos que:

$$\frac{1}{2}\Delta(\alpha)p^2 = \frac{2}{b}\left[(k_{1\mu}k_{1\nu} + k_{2\mu}k_{2\nu}) \int_k \frac{\partial}{\partial k^\mu}\left[\frac{k^\nu}{(k^2 - {m_t}^2)^2}\right]\right] . \tag{4.34}$$

De acordo com 3.6 e 3.15 este termo de superfície deve ser nulo. Desta forma elimina-se as ambiguidades do propagador $\Gamma_s(p^2)$. Os cálculos das próximas amplitudes e propagadores deste trabalho são análogos ao realizado, por isso serão omitidos.

A lagrangeana utilizada neste trabalho contém o termo interagente $\left(\bar{t}^a\gamma^5 t_a\right)\left(\bar{t}^b\gamma^5 t_b\right)$, também chamado de canal pseudoescalar, o diagrama de Feynman de dois vértices que este termo origina é:



$$= \int_k Tr\left[\gamma^5 \frac{1}{\not{k}+\not{k}_1-m_t}\gamma^5 \frac{1}{\not{k}+\not{k}_2-m_t}\right] . \tag{4.35}$$

Seguindo as mesmas etapas do cálculo da amplitude 4.3, temos que 4.35 é:

$$\begin{aligned}\int_k Tr\left[\gamma^5 \frac{1}{\not{k}+\not{k}_1-m_t}\gamma^5 \frac{1}{\not{k}+\not{k}_2-m_t}\right] = \\ = -4I_{quad}(m^2) + 2bp^2\int_0^1 dx\ \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2-p^2x(1-x)}\right) + \\ +4\left[(k_{1\mu}k_{1\nu}+k_{2\mu}k_{2\nu})\int_k \frac{\partial}{\partial k^\mu}\left[\frac{k^\nu}{(k^2-{m_t}^2)^2}\right]\right] .\end{aligned} \tag{4.36}$$

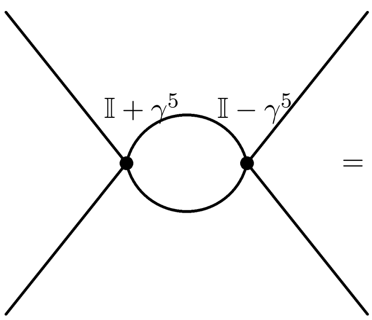
A lagrangeana possui um sinal negativo no termo do canal pseudoescalar, é por isso que no cálculo do propagador proveniente da soma dos diagramas deste canal, devemos considerar o negativo de 4.36. O propagador pode ser expresso como:

$$\begin{aligned}\Gamma_p(p^2) = \frac{(4\pi)^2}{2N_c}\left[p^2\int_0^1 dx\ \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2-p^2x(1-x)}\right) - \right. \\ \left. -\frac{2}{b}\left[(k_{1\mu}k_{1\nu}+k_{2\mu}k_{2\nu})\int_k \frac{\partial}{\partial k^\mu}\left[\frac{k^\nu}{(k^2-{m_t}^2)^2}\right]\right]\right]^{-1} ,\end{aligned} \tag{4.37}$$

enquanto que no artigo de Gherghetta[6]:

$$\Gamma_p(p^2) = \frac{(4\pi)^2}{2N_c}\left[\frac{1}{2}\Delta(\alpha)p^2 + p^2\int_0^1 dx\ \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2-p^2x(1-x)}\right)\right]^{-1} , \tag{4.38}$$

Novamente aparece o termo de superfície que dá origem às ambiguidades. $\Delta(\alpha)=0$, pois ele representa um termo de superfície nulo quando impomos a IRM. O polo deste propagador é nulo, por isso que ele representa um modo de Goldstone. Na teoria de NJL, sabemos que o vácuo é definido para conter o condensado $\bar{t}t$. Quando o valor esperado para o vácuo de uma lagrangeana não é nulo, haverá modos não-massivos, estes são os modos de Goldstone. A parte interagente referente ao canal $\bar{t}b$ da lagrangeana é $\left[\bar{b}^a\left(1+\gamma^5\right)t_a\right]\left[\bar{t}^b\left(1-\gamma^5\right)b_b\right]$. A representação diagramática da amplitude deste termo é:



$$= \int_k Tr\left[\left(\mathbb{I}+\gamma^5\right)\frac{1}{\not{k}+\not{k}_1-m_t}\left(\mathbb{I}-\gamma^5\right)\frac{1}{\not{k}+\not{k}_2-m_b}\right] \tag{4.39}$$

e tem como resultado:

$$\int_k Tr\left[\left(\mathbb{I}+\gamma^5\right)\frac{1}{\not k+\not k_1-m_t}\left(\mathbb{I}-\gamma^5\right)\frac{1}{\not k+\not k_2-m_b}\right]=$$
$$=8I_{quad}-8p^2b\int_0^1 dx(1-x)\ln\left(\frac{\Lambda^2}{(m_t{}^2-xp^2)\,(1-x)}\right)-$$
$$-4k_{1\mu}k_{1\nu}\int_k\frac{\partial}{\partial k_\mu}\frac{k^\nu}{(k^2-m_t{}^2)^2}-4k_{2\mu}k_{2\nu}\int_k\frac{\partial}{\partial k_\mu}\frac{k^\nu}{k^4}\,. \quad (4.40)$$

Foi considerado que $m_b\to 0$. Após a soma dos diagramas com bolhas provenientes do canal fermiônico $\bar{t}b$, obtemos que o propagador é:

$$\Gamma_F(p^2)=\frac{(4\pi)^2}{8N_c}\left[p^2\int_0^1 dx\,(1-x)\ln\left(\frac{\Lambda^2}{(m_t^2-p^2x)\,(1-x)}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{b}4k_{1\mu}k_{1\nu}\int_k\frac{\partial}{\partial k_\mu}\frac{k^\nu}{(k^2-m_t{}^2)^2}+\frac{1}{b}k_{2\mu}k_{2\nu}\int_k\frac{\partial}{\partial k_\mu}\frac{k^\nu}{k^4}\right]^{-1}, \quad (4.41)$$

No trabalho de Tony Gherghetta[6]:

$$\Gamma_F(p^2)=\frac{(4\pi)^2}{8N_c}\left[\frac{1}{4}\Delta(\alpha)p^2+p^2\int_0^1 dx\,(1-x)\ln\left(\frac{\Lambda^2}{(m_t^2-p^2x)\,(1-x)}\right)\right]^{-1}, \quad (4.42)$$

pela mesma discussão apresentada, os termos de superfície tem valor nulo.

Realizaremos cálculos para obter o inverso do propagador de W a partir a versão invariante de calibre da lagrangeana 2.29:

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}W^a_{\mu\nu}W^{\mu\nu a}-\frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}+i\overline{\psi}^a_L\gamma^\mu\left(\partial_\mu+ig_2W^j_\mu\tau^j+\frac{i}{6}g_1B_\mu\right)\psi_{Lb}+$$
$$+\frac{G}{4}\left[\left(\bar{t}^at_a\right)\left(\bar{t}^bt_b\right)-\left(\bar{t}^a\gamma^5t_a\right)\left(\bar{t}^b\gamma^5t_b\right)\right]+\frac{G}{4}\left[\bar{b}^a\left(1+\gamma^5\right)t_a\right]\left[\bar{t}^b\left(1-\gamma^5\right)b_b\right]+$$
$$+i\bar{b}_R\gamma^\mu\left(\partial_\mu-\frac{i}{3}g_1B_\mu\right)b_R+i\bar{t}_R\gamma^\mu\left(\partial_\mu+\frac{2i}{3}g_1B_\mu\right)t_R \quad (4.43)$$

define-se os campos dos bósons $W^\pm$ como combinações lineares dos campos de calibre W_1^μ e W_2^μ enquanto que o campo eletromagnético A^μ e o bóson neutro Z^0 são formados pela combinação linear dos campos de calibre W_3^μ e B_μ. Neste trabalho foi calculado o inverso do propagador dos bósons $W^\pm$ devido à interações com os campos dos quarks. Um dos termos da lagrangeana acima que contribuirão com este propagador:

$$ig_2\overline{\psi}_L\tau_1\gamma^\mu\psi_LW_{1\mu}+ig_2\overline{\psi}_L\tau_2\gamma^\mu\psi_LW_{2\mu}=$$
$$=g_2i\left\{\begin{pmatrix}\bar{t}_L & \bar{b}_L\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma^\mu t_L\\ \gamma^\mu b_L\end{pmatrix}W_{1\mu}+\right.$$
$$\left.+\begin{pmatrix}\bar{t}_L & \bar{b}_L\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma^\mu t_L\\ \gamma^\mu b_L\end{pmatrix}W_{2\mu}\right\} \quad (4.44)$$

$$ig_2\overline{\psi}_L\tau_1\gamma^\mu\psi_L W_{1\mu} + \frac{i}{2}g_2\overline{\psi}_L\tau_2\gamma^\mu\psi_L W_{2\mu} =$$
$$= ig_2\left[\left(\bar{t}_L\gamma^\mu b_L\right)\left(W_{1\mu} - iW_{2\mu}\right) + \left(\bar{b}_L\gamma^\mu t_L\right)\left(W_{1\mu} + iW_{2\mu}\right)\right] =$$
$$= ig_2\left\{\left[\left(\bar{t}_L\gamma^\mu b_L\right) + \left(\bar{b}_L\gamma^\mu t_L\right)\right]W_{1\mu} + i\left[\left(\bar{b}_L\gamma^\mu t_L\right) - \left(\bar{t}_L\gamma^\mu b_L\right)\right]W_{2\mu}\right\} \ , \quad (4.45)$$

são estes termos interagentes que aparecem no ordenamento temporal no cálculo de W. A. Bardeen *et al.*[2] do inverso do propagador do bóson W(na notação deste autor, ele omite os campos de calibre externos e os que aparecem nos termos interagentes):

$$\frac{1}{{g_2}^2}D_W^{\mu\nu}(p)^{-1} = \frac{1}{{g_2}^2}\left(p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}\int d^4x \left\langle T\,\bar{t}_L\gamma^\mu b_L(0)\,\bar{b}_L\gamma^\mu t_L(x)\right\rangle \ . \quad (4.46)$$

Será omitido os índices do propagador W por simplicidade. Se fizermos contrações de Wick específicas com estes termos interagentes, obtemos o $\Pi^{\mu\nu}$:

$$G^{\mu\nu}(x,y) = \langle 0|W^\mu(x)W^\nu(y)|0\rangle +$$
$$+ \langle 0|W^\mu(x)(\bar{t}_L\gamma_\alpha W^\alpha b_L)_{x_1}(\bar{b}_L\gamma_\beta W^\beta t_L)_{x_2}W^\nu(y)|0\rangle + \cdots \quad (4.47)$$

Os termos b_L e t_L serão expressos em função de t e b, além disto, será utilizado a relação de anti-comutação, $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$, para permutar as frações $\left(\frac{1\pm\gamma_5}{2}\right)$ para à esquerda de γ^μ:

$$G^{\mu\nu}(x,y) = \langle 0|W^\mu(x)W^\nu(y)|0\rangle + (ig_2)^2\times$$
$$\times\langle 0|T\left\{W^\mu(x)\mathbf{N}\left[\bar{t}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\gamma_\alpha W^\alpha\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)b\right]_{x_1}\mathbf{N}\left[\bar{b}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\gamma_\beta W^\beta\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)t\right]_{x_2}W^\nu(y)\right\}|0\rangle +$$
$$+\cdots \quad (4.48)$$

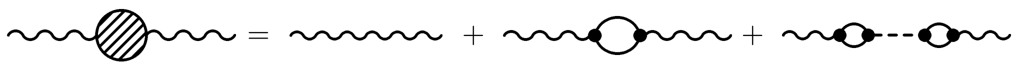
$$G^{\mu\nu}(x,y) = \langle 0|W^\mu(x)W^\nu(y)|0\rangle +$$
$$+(ig_2)^2\langle 0|\iint d^4x_1\,d^4x_2\,W^\mu(x)\mathbf{N}\left[\bar{t}\gamma_\alpha W^\alpha\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)b\right]_{x_1}\mathbf{N}\left[\bar{b}\gamma_\beta W^\beta\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)t\right]_{x_2}W^\nu(y)|0\rangle +$$
$$+\cdots \quad (4.49)$$

$$G^{\mu\nu}(x,y) = \langle 0|W^\mu(x)W^\nu(y)|0\rangle +$$
$$+ (ig_2)^2\langle 0|\iint d^4x_1\,d^4x_2 W^\mu(x)\left[\bar{t}\gamma_\alpha W^\alpha\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)b\right]_{x_1}\left[\bar{b}\gamma_\beta W^\beta\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)t\right]_{x_2}W^\nu(y)|0\rangle +$$
$$+\cdots = \quad (4.50)$$

$$
\begin{aligned}
G^{\mu\nu}(x,y) &= iD_F^{\mu\nu}(x-y)+ \\
&+(g_2)^2 D_F^{\mu\nu}(x-x_1)\frac{i}{4}\int_k Tr\left[\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\frac{1}{\not k+\not k_1-m_b}\gamma_\beta(1-\gamma_5)\frac{1}{\not k+\not k_2-m_t}\right]D_F^{\mu\nu}(x_2-y)+ \\
&+\cdots\,, \qquad (4.51)
\end{aligned}
$$

a integral representa o $\Pi^{\mu\nu}$.

Para realizar o cálculo do propagador do bóson W, serão considerados os seguinte diagramas de Feynman:



O tracejado da última figura são todas as outras infinitas contribuições fermiônicas para o propagador de W. A fórmula que representa o inverso do propagador de W é:

$$
\frac{1}{(g_2)^2}D_W^{\mu\nu}(p)^{-1} = \frac{1}{(g_2)^2}\left(p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu}p^2\right) + \Pi^{\mu\nu}(p) - \frac{1}{8}J^\mu(p)\Gamma_F(p)J^\nu(p)\,. \qquad (4.52)
$$

O propagador do bóson W deve ser transverso para que ele seja invariante de calibre, a técnica utilizada neste trabalho é compatível com esta exigência. Com a finalidade de provar a transversalidade, utilizaremos os resultados de Battistel *et al.*[3], porém a parametrização de Feynman utilizada no cálculo de J^μ neste trabalho, não é possível provar a transversalidade, por isso será utilizada uma outra parametrização de Feynman. Calcularemos primeiramente os diagramas de Feynman pertinentes à este propagador. Nos resultados apresentados abaixo, os termos de superfície são desconsiderados devido à IRM. O $\Pi^{\mu\nu}$ é representado por:

$$
\Pi^{\mu\nu}(p) = \frac{i}{8}\int_k Tr\left[\gamma^\mu\left(1-\gamma^5\right)\frac{1}{\not k+\not k_1-m_b}\gamma^\nu\left(1-\gamma^5\right)\frac{1}{\not k+\not k_2-m_t}\right]\,, \qquad (4.53)
$$

onde $m_b \to 0$. Após o cálculo de $\Pi^{\mu\nu}$, temos que:

$$
\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu} = \frac{i}{8}\Big\{&2\Theta^{\mu\nu} + 8b{m_t}^2\left[Z_0\left({m_t}^2,0;p^2;{m_t}^2\right) - Z_1\left({m_t}^2,0;p^2;{m_t}^2\right)\right]g^{\mu\nu} - \\
&- 4{m_t}^2 I_{log}\left({m_t}^2\right)g^{\mu\nu} + 2\varphi^{\mu\nu}\Big\}\,, \qquad (4.54)
\end{aligned}
$$

onde:

$$
Z_k\left({m_t}^2,{m_b}^2;p^2;{m_t}^2\right) = \int_0^1 dx\, x^k \ln\left(\frac{p^2x(1-x)+\left({m_t}^2-{m_b}^2\right)x-{m_t}^2}{-{m_t}^2}\right) \qquad (4.55)
$$

$$
\begin{aligned}
\Theta^{\mu\nu} =& 4\left(p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu}p^2\right)\times \\
&\times\left\{2b\left[Z_2\left({m_t}^2,0;p^2;{m_t}^2\right) - Z_1\left({m_t}^2,0;p^2;{m_t}^2\right)\right] + \frac{1}{3}I_{log}\left(m_t^2\right)\right\} \qquad (4.56)
\end{aligned}
$$

$$\varphi^{\mu\nu} = -\frac{k_{2\alpha}k_{2\beta} + k_{1\alpha}k_{1\beta} + k_{1\alpha}k_{2\beta}}{3}\left\{\frac{1}{6}\int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu}\left[\frac{k^\nu k^\alpha k^\beta}{(k^2 - m_t{}^2)^3}\right] + \right.$$
$$+ g^{\alpha\beta}\int_k \frac{\partial}{\partial k_\nu}\left[\frac{k^\mu}{(k^2 - m_t{}^2)^2}\right] + g^{\alpha\mu}\int_k \frac{\partial}{\partial k_\beta}\left[\frac{k^\nu}{(k^2 - m_t{}^2)^2}\right] + g^{\alpha\nu}\int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu}\left[\frac{k^\beta}{(k^2 - m_t{}^2)^2}\right]\left.\right\} +$$
$$+\frac{(k_1^\mu + k_2^\mu)(k_{1\alpha} + k_{2\alpha})}{2}\int_k \frac{\partial}{\partial k_\alpha}\left[\frac{k^\nu}{(k^2 - m_t{}^2)^2}\right] + \frac{(k_1^\nu + k_2^\nu)(k_{1\beta} + k_{2\beta})}{2}\int_k \frac{\partial}{\partial k_\beta}\left[\frac{k^\mu}{(k^2 - m_t{}^2)^2}\right] -$$
$$-\int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu}\left(\frac{k^\nu}{k^2 - m_t{}^2}\right) + \frac{(k_1{}^2 + k_2{}^2 + m_t{}^2)}{2}\int_k \frac{\partial}{\partial k_\nu}\left[\frac{k^\mu}{(k^2 - m_t{}^2)^2}\right] \quad (4.57)$$

Perceba que $\varphi^{\mu\nu}$ é composto por termos de superfície. Os termos que compõem $\Pi^{\mu\nu}$ serão reescritos em uma forma mais conveniente se reescreveremos a diferença entre Z_0 e Z_1 como:

$$Z_0\left(m_t{}^2, 0; p^2; m_t{}^2\right) - Z_1\left(m_t{}^2, 0; p^2; m_t{}^2\right) =$$
$$\int_0^1 dx \ln\left(\frac{\left(m_t{}^2 - p^2 x\right)(1-x)}{m_t{}^2}\right) - \int_0^1 dx\, x \ln\left(\frac{\left(m_t{}^2 - p^2 x\right)(1-x)}{m_t{}^2}\right) \quad (4.58)$$

$$Z_0\left(m_t{}^2, 0; p^2; m_t{}^2\right) - Z_1\left(m_t{}^2, 0; p^2; m_t{}^2\right) =$$
$$= \int_0^1 dx\, (1-x)\ln\left(\frac{\left(m_t{}^2 - p^2 x\right)(1-x)}{m_t{}^2}\right). \quad (4.59)$$

Portanto o $\Pi^{\mu\nu}$, é:

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{i}{8}\Big\{2\Theta^{\mu\nu} - 8bm_t{}^2 g^{\mu\nu}\left[\int_0^1 dx\,(1-x)\ln\left(\frac{m_t{}^2}{\left(m_t{}^2 - p^2 x\right)(1-x)}\right)\right] -$$
$$- 8m_t{}^2 g^{\mu\nu}\left[\int_0^1 dx\,(1-x) I_{log}(m_t{}^2)\right] + 2\varphi^{\mu\nu}\Big\}, \quad (4.60)$$

ao utilizar a parametrização 4.24 do $I_{log}\left(m^2\right)$:

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{i}{8}\Big\{2\Theta^{\mu\nu} - 8bm_t{}^2 g^{\mu\nu}\left[\int_0^1 dx\,(1-x)\ln\left(\frac{m_t{}^2}{\left(m_t{}^2 - p^2 x\right)(1-x)}\right)\right] -$$
$$- 8bm_t{}^2 g^{\mu\nu}\left[\int_0^1 dx\,(1-x)\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m_t^2}\right)\right] + 2\varphi^{\mu\nu}\Big\}$$

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{i}{4}\Theta^{\mu\nu} - ibm_t{}^2 g^{\mu\nu}\left[\int_0^1 dx\,(1-x)\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\left(m_t{}^2 - p^2 x\right)(1-x)}\right)\right] + \frac{i}{4}\varphi^{\mu\nu}. \quad (4.61)$$

Similarmente, reescreveremos o $\Theta^{\mu\nu}$ em uma forma mais conveniente:

$$\Theta^{\mu\nu} = 4\left(p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu}p^2\right)\times$$
$$\times\left\{2b\left[Z_2\left(m_t{}^2, 0; p^2; m_t{}^2\right) - Z_1\left(m_t{}^2, 0; p^2; m_t{}^2\right)\right] + \frac{1}{3}I_{log}\left(m_t^2\right)\right\}. \quad (4.62)$$

A diferença entre os $Z's$ pode ser expressa como:

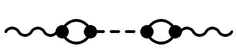
$$Z_2\left(m_t{}^2, 0; p^2; m_t{}^2\right) - Z_1\left(m_t{}^2, 0; p^2; m_t{}^2\right) = \\ = \int_0^1 dx\; x(1-x)\ln\left(\frac{\left(m_t{}^2 - p^2 x\right)(1-x)}{m_t{}^2}\right) . \quad (4.63)$$

Temos que o $\Theta^{\mu\nu}$ é:

$$\Theta^{\mu\nu} = 8b\left(p^\mu p^\nu - g^{\mu\nu}p^2\right)\int_0^1 dx\; x(1-x)\left[\ln\left(\frac{\left(m_t{}^2 - p^2 x\right)(1-x)}{m_t{}^2}\right) - \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m_t{}^2}\right)\right] \quad (4.64)$$

$$\Theta^{\mu\nu} = -8bp^2\left(\frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - g^{\mu\nu}\right)\int_0^1 dx\; x(1-x)\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\left(m_t{}^2 - p^2 x\right)(1-x)}\right) \quad (4.65)$$

O último termo do inverso do propagador de W que falta ser calculado é:



$$= \frac{1}{8} J^\mu(p)\Gamma_F(p)J^\nu(p) \quad (4.66)$$

O termo $J^\mu(p)$ pode ser escrito[6], em termos de integral, como:

$$J^\mu(p) = i\int_k Tr\left[\gamma^\mu\left(1-\gamma^5\right)\frac{1}{\not{k} + \not{k}_1 - m_b}\left(1+\gamma^5\right)\frac{1}{\not{k} + \not{k}_2 - m_t}\right] , \quad (4.67)$$

após tomar o traço da integral,

$$J^\mu(p) = i\int_k \frac{8m_t\left(k+k_1\right)^\mu}{\left[\left(k+k_1\right)^2 - m_b{}^2\right]\left[\left(k+k_2\right)^2 - m_t{}^2\right]} , \quad (4.68)$$

onde $m_b \to 0$. Devido ao princípio da IRM, para qualquer rotulação de k_1 e k_2, a amplitude de espalhamento fornecerá o mesmo resultado, nesta integral os rótulos utilizados são $k_1 = 0$ e $k_2 = -p$. Após utilizar a parametrização de Feynman obtemos:

$$\frac{1}{k^2\left[(k-p)^2 - m_t{}^2\right]} = \int_0^1 dx \frac{1}{\left\{xk^2 + (1-x)\left[(k-p)^2 - m_t{}^2\right]\right\}^2}, \quad (4.69)$$

podemos manipular o denominador da expressão acima para induzi-lo a ter a forma genérica $\left[(k')^2 - M^2\right]^n$, assim obtemos:

$$k' = k - (1-x)p \quad (4.70)$$

$$M^2 = \left(m_t{}^2 - p^2 x\right)(1-x) , \quad (4.71)$$

após substituir 4.69 , 4.71 e os rótulos de k_1 e k_2 na integral de $J^{\mu}(p)$:

$$\begin{aligned}J^{\mu}(p) = 8im_t \int_{k'}\int_0^1 dx\, \frac{k'^{\mu} + (1-x)p^{\mu}}{\left(k'^2 - M^2\right)^2} = \\ = 8im_t \int_0^1 dx(1-x)p^{\mu} I_{log}\left(M^2\right) = \\ = 8ibm_t p^{\mu} \int_0^1 dx(1-x)\ln\left[\frac{\Lambda^2}{({m_t}^2 - p^2x)(1-x)}\right] .\end{aligned} \tag{4.72}$$

Ao desprezar os termos de superfície das equações 4.61 e 4.38 e após isto, substitui-las juntamente 4.72 na expressão abaixo:

$$\begin{aligned}\Pi^{\mu\nu}(p) - \frac{1}{8}J^{\mu}(p)\Gamma_F(p)J^{\nu}(p) = \\ = \frac{i}{4}\Theta^{\mu\nu} - ibm_t{}^2 g^{\mu\nu}\left[\int_0^1 dx\ (1-x)\ln\left(\frac{\Lambda^2}{({m_t}^2 - p^2x)(1-x)}\right)\right] - \\ - \frac{1}{8}\frac{p^{\mu}p^{\nu}}{p^2}\left[\frac{64\,(m_t)^2\, b^2\left\{\int_0^1 dx(1-x)\ln\left[\frac{\Lambda^2}{({m_t}^2 - p^2x)(1-x)}\right]\right\}^2}{8ibp^2\left\{\int_0^1 dx(1-x)\ln\left[\frac{\Lambda^2}{({m_t}^2 - x)(1-x)}\right]\right\}}\right]\end{aligned} \tag{4.73}$$

$$\begin{aligned}\Pi^{\mu\nu}(p) - \frac{1}{8}J^{\mu}(p)\Gamma_F(p)J^{\nu}(p) = \\ = \frac{i}{4}\Theta^{\mu\nu} + ibm_t{}^2\left[\int_0^1 dx\ (1-x)\ln\left(\frac{\Lambda^2}{({m_t}^2 - p^2x)(1-x)}\right)\right]\left[\frac{p^{\mu}p^{\nu}}{p^2} - g^{\mu\nu}\right] ,\end{aligned} \tag{4.74}$$

substituindo o valor $\Theta^{\mu\nu}$ obtido na expressão 4.65:

$$\begin{aligned}\Pi^{\mu\nu}(p) - \frac{1}{8}J^{\mu}(p)\Gamma_F(p)J^{\nu}(p) = \\ = ib\left(\frac{p^{\mu}p^{\nu}}{p^2} - g^{\mu\nu}\right)\left[-2p^2\int_0^1 dx\ x(1-x)\ln\left(\frac{\Lambda^2}{({m_t}^2 - p^2x)(1-x)}\right) + \right. \\ \left. + m_t{}^2\int_0^1 dx\ (1-x)\ln\left(\frac{\Lambda^2}{({m_t}^2 - p^2x)(1-x)}\right)\right] ,\end{aligned} \tag{4.75}$$

Portanto o inverso do propagador do bóson W, utilizando 4.52 e a expressão acima, é:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(g_2)^2}D_W^{\mu\nu}(p)^{-1} = \left(\frac{p^{\mu}p^{\nu}}{p^2} - g^{\mu\nu}\right) \times \\ \times\left\{p^2\left[\frac{1}{g_2} - 2ib\int_0^1 dx\ x(1-x)\ln\left(\frac{\Lambda^2}{({m_t}^2 - p^2x)(1-x)}\right)\right] + \right. \\ \left. + ibm_t{}^2\int_0^1 dx\ (1-x)\ln\left(\frac{\Lambda^2}{({m_t}^2 - p^2x)(1-x)}\right)\right\} .\end{aligned} \tag{4.76}$$

O resultado obtido por Gherghetta[6] possuía uma função $h(x)$ somando o resultado acima, nesta função está os rótulos arbitrários e termos de superfície, ele argumenta que o inverso do propagador havia ambiguidades que quebravam a invariância de calibre devido a forma inadequada que Bardeen *et al.*[2] manipulava integrais divergentes. A técnica utilizada neste trabalho para o cálculo mostra que, ao separar o momento externo das integrais divergentes e considerar os termos de superfície iguais a zero devido à IRM, $h(x) = 0$ e não há ambiguidades no cálculo do propagador de W. De acordo com a condição da massa na casca, a massa do bóson W é o polo do propagador acima,

$$M_W{}^2 = p^2 = \overline{g}_2{}^2\left(p^2\right)\ \overline{f}_2{}^2\left(p^2\right)\ , \tag{4.77}$$

onde:

$$\frac{1}{\overline{g}_2{}^2\left(p^2\right)} = \frac{1}{g_2} - 2ib\int_0^1 dx\ x(1-x)\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\left(m_t{}^2 - p^2x\right)(1-x)}\right) \tag{4.78}$$

$$\overline{f}_2{}^2\left(p^2\right) = \int_0^1 dx\ (1-x)\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\left(m_t{}^2 - p^2x\right)(1-x)}\right)\ . \tag{4.79}$$

O bóson W absorve massa do condensado $\bar{t}t$. O modelo de W. A. Bardeen *et al*[2] portanto é um modelo efetivo sem ambiguidades. Se for confirmado a existência do bóson de Higgs, a quebra dinâmica da simetria quiral a partir de interações quárticas é um mecanismo possível para descrever a natureza do Higgs(um estado composto) e explicar como os mediadores das interações fraca adquirem massa.

Conclusão

No presente trabalho abordamos o problema de um mecanismo construído para dar massa aos bósons de calibre sem, no entanto quebrar essa simetria. O mecanismo mais estudado, e talvez hoje, o mais aceito pela comunidade científica, é a existência de um setor escalar no Modelo Padrão onde ocorreria uma quebra espontânea de simetria gerando uma partícula escalar, batizada de bóson de Higgs. Dado o sucesso do Modelo Padrão assim construído para descrever processos envolvendo a interação eletrofraca, o estudo de propriedades dessa partícula, ou até mesmo de sua existência é de vital importância para a comprovação do Modelo Padrão. Recentemente foi anunciada a descoberta de uma partícula com essas características, o que de fato fortalece o modelo de teoria eletrofraca. Resta-nos ainda saber compreender as características dessa partícula, por exemplo se é uma partícula elementar ou composta. As duas possibilidades já foram investigadas.

Neste trabalho estudamos uma extensão do Modelo Padrão que inclui uma interação quártica entre os quarks top e bottom e, seguindo a ideia seminal de W. A. Bardeen[2] supomos que a interação forte entre esses quarks será responsável pela geração de um condensado $\bar{t}t$ no vácuo da teoria. A partir daí, o problema da naturalidade como o da existência de uma massa para os bósons de calibre $W^{\pm}$ ficam resolvidos pelo menos em princípio.

Como é bem conhecido o cálculo perturbativo para esses canais contém divergências (até quadráticas) e ambiguidades provenientes de separação entre as partes divergentes e finitas da amplitude. Em um trabalho recente mostramos que a simetria relativa a própria construção dos diagramas de Feynman, a invariância de rótulo, obriga as ambiguidades a se anularem. A importância dessa simetria é resgatar o modelo o modelo de quebra dinâmica de simetria como proposto por W.A.Bardeen[2] e criticados por Tony Gherghetta[6] com base nas amplitudes inerentes aos cálculos de amplitudes divergentes em Teoria Quântica de Campos.

A técnica aqui empregada para fazer os cálculos de forma independente foi originalmente proposta no contexto de teorias renormalizáveis e aqui utilizada pela primeira vez no contexto de teoria efetiva.

Apêndice A

Interação Quártica Entre Quarks

O termo de interação quártica utilizada para calcular as amplitudes de espalhamento neste trabalho é[2]

$$\mathscr{L}_q = G\left(\overline{\psi}^a_L\, t_{Ra}\right)\left(\overline{t}^b_R\, \psi_{Lb}\right) \qquad ; \qquad \psi_L = \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix} , \tag{A.1}$$

então:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_q &= G\left[\begin{pmatrix} \overline{t}^a_L\, t_{Ra} & \overline{b}^a_L\, t_{Ra} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{t}^b_R\, t_{Lb} \\ \overline{t}^b_R\, b_{Lb} \end{pmatrix}\right] \Rightarrow \\ \mathscr{L}_q &= G\left[\left(\overline{t}^a_L\, t_{Ra}\right)\left(\overline{t}^b_R\, t_{Lb}\right) + \left(\overline{b}^a_L\, t_{Ra}\right)\left(\overline{t}^b_R\, b_{Lb}\right)\right] , \end{aligned} \tag{A.2}$$

mas os projetores P_R e P_L podem ser escritos como:

$$P_R = \frac{1+\gamma^5}{2} \quad ; \quad P_L = \frac{1-\gamma^5}{2} , \tag{A.3}$$

portanto,

$$t_R = \frac{1+\gamma^5}{2}\, t \quad ; \quad t_L = \frac{1-\gamma^5}{2}\, t \tag{A.4}$$

$$\overline{t}_R = \overline{t}\ \frac{1-\gamma^5}{2} \quad ; \quad \overline{t}_L = \overline{t}\ \frac{1+\gamma^5}{2} . \tag{A.5}$$

Relações análogas podem ser obtidas para o quark b ao substituir $t \to b$. Ao aplicar A.4 e A.5 em $\mathscr{L}$:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_q = G\Bigg\{ &\left[\overline{t}^a\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)t_a\right]\left[\overline{t}^b\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)t_b\right] + \\ &+ \left[\overline{b}^a\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)t_a\right]\left[\overline{t}^b\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)b_b\right]\Bigg\} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\mathscr{L}_q = G\Bigg\{\left[\bar{t}^a\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)t_a\right]\left[\bar{t}^b\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)t_b\right]+ \\ + \left[\bar{b}^a\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)t_a\right]\left[\bar{t}^b\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)b_b\right]\Bigg\} \quad \text{(A.6)}$$

O primeiro termo da parte interagente da lagrangeana acima é:

$$\left[\bar{t}^a\left(1+\gamma^5\right)t_a\right]\left[\bar{t}^b\left(1-\gamma^5\right)t_b\right] = \\ = \left(\bar{t}^a t_a\right)\left(\bar{t}^b t_b\right) - \left(\bar{t}^a t_a\right)\left(\bar{t}^b\gamma^5 t_b\right) + \left(\bar{t}^a\gamma^5 t_a\right)\left(\bar{t}^b t_b\right) - \left(\bar{t}^a\gamma^5 t_a\right)\left(\bar{t}^b\gamma^5 t_b\right) = \\ = \left(\bar{t}^a t_a\right)\left(\bar{t}^b t_b\right) - \left(\bar{t}^a\gamma^5 t_a\right)\left(\bar{t}^b\gamma^5 t_b\right) \ , \quad \text{(A.7)}$$

substituindo A.7 em A.6:

$$\mathscr{L}_q = \frac{G}{4}\left[\left(\bar{t}^a t_a\right)\left(\bar{t}^b t_b\right) - \left(\bar{t}^a\gamma^5 t_a\right)\left(\bar{t}^b\gamma^5 t_b\right)\right] + \\ + \frac{G}{4}\left[\bar{b}^a\left(1+\gamma^5\right)t_a\right]\left[\bar{t}^b\left(1-\gamma^5\right)b_b\right] \ , \quad \text{(A.8)}$$

ao obter as regras de Feynman desta lagrangeana, é possível obter as amplitudes de espalhamento que está no trabalho de W. A. Bardeen *et al.*[2].

No próximo apêndice, será demonstrado que esta lagrangeana é invariante sob transformação $U(1)_5$, esta lagrangeana será reescrita em uma forma conveniente, o último termo de A.8 é:

$$\left[\bar{b}^a\left(1+\gamma^5\right)t_a\right]\left[\bar{t}^b\left(1-\gamma^5\right)b_b\right] = \\ = \left(\bar{b}^a t_a\right)\left(\bar{t}^b b_b\right) - \left(\bar{b}^a t_a\right)\left(\bar{t}^b\gamma^5 b_b\right) + \left(\bar{b}^a\gamma^5 t_a\right)\left(\bar{t}^b b_b\right) - \left(\bar{b}^a\gamma^5 t_a\right)\left(\bar{t}^b\gamma^5 b_b\right) \ , \quad \text{(A.9)}$$

desta forma a lagrangeana é

$$\mathscr{L}_q = \frac{G}{4}\left[\left(\bar{t}^a t_a\right)\left(\bar{t}^b t_b\right) - \left(\bar{t}^a\gamma^5 t_a\right)\left(\bar{t}^b\gamma^5 t_b\right)\right] + \\ + \frac{G}{4}\left[\left(\bar{b}^a t_a\right)\left(\bar{t}^b b_b\right) - \left(\bar{b}^a t_a\right)\left(\bar{t}^b\gamma^5 b_b\right) + \left(\bar{b}^a\gamma^5 t_a\right)\left(\bar{t}^b b_b\right) - \left(\bar{b}^a\gamma^5 t_a\right)\left(\bar{t}^b\gamma^5 b_b\right)\right] \quad \text{(A.10)}$$

Apêndice B

Simetrias do Termo de Interação Quártica

Este apêndice apresenta a demonstração de que a lagrangeana do modelo de NJL, equação A.1, reapresentada abaixo por conveniência, apresenta simetria $U(1)_f \otimes U(1)_5 \otimes SU(2)_f$.

$$\mathscr{L}_q = G\left(\overline{\psi}_L^a\, t_{Ra}\right)\left(\bar{t}_R^b\, \psi_{Lb}\right) \qquad ; \qquad \psi_L = \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix} \tag{B.1}$$

B.1 Simetria $SU(2)_f$

Conforme apresentado na seção 1.1, um spinor que sofre uma transformação $SU(2)_f$, obedece a seguinte relação:

$$\psi \to e^{-i\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}}\psi\ , \tag{B.2}$$

enquanto que seu adjunto, definido como:

$$\overline{\psi} = \psi^\dagger \begin{pmatrix} \gamma^0 & 0 \\ 0 & \gamma^0 \end{pmatrix}\ , \tag{B.3}$$

sob a transformação infinitesimal $SU(2)_f$, tem o seguinte comportamento:

$$\begin{aligned}\overline{\psi} \to \psi^\dagger \left(e^{-i\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}}\right)^\dagger \begin{pmatrix} \gamma^0 & 0 \\ 0 & \gamma^0 \end{pmatrix} &= \\ = \psi^\dagger \left(\mathbb{I}_2 \cos\alpha + i\frac{\vec{\tau}}{2}\sin\alpha\right)\begin{pmatrix} \gamma^0 & 0 \\ 0 & \gamma^0 \end{pmatrix} &= \\ = \overline{\psi}\left(\cos\alpha + i\frac{\vec{\tau}}{2}\sin\alpha\right)\ ,\end{aligned} \tag{B.4}$$

então:

$$\overline{\psi} \to \overline{\psi} e^{i\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}}\ . \tag{B.5}$$

A lagrangeana pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\left(\overline{\psi}_L^a\, t_{Ra}\right)\left(\overline{t}_R^b\, \psi_{Lb}\right) =$$
$$= \left[\overline{\psi}^a \left(\begin{array}{cc} \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\, t_a\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\, t_a\right) \end{array} \right)\right]\left[\left(\begin{array}{cc} \overline{t}^b \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right) & 0 \\ 0 & \overline{t}^b \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right) \end{array} \right)\psi_b\right] , \quad \text{(B.6)}$$

realizando a transformação infinitesimal $\mathrm{SU}(2)_f$ em $\overline{\psi}$ e ψ:

$$\left(\overline{\psi}_L^a\, t_{Ra}\right)\left(\overline{t}_R^b\, \psi_{Lb}\right) \rightarrow$$
$$\rightarrow \left[\overline{\psi}^a \left(\mathbb{I}_2 \cos\alpha + i\frac{\hat{\overrightarrow{\tau}}}{2}\sin\alpha\right)\left(\begin{array}{cc} \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right) t_a & 0 \\ 0 & \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right) t_a \end{array} \right)\right] \times$$
$$\times \left[\left(\begin{array}{cc} \overline{t}^b \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right) & 0 \\ 0 & \overline{t}^b \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right) \end{array} \right)\left(\mathbb{I}_2 \cos\alpha - i\frac{\hat{\overrightarrow{\tau}}}{2}\sin\alpha\right)\psi_b\right] . \quad \text{(B.7)}$$

As matrizes $\mathbb{I}_2$ e $\hat{\overrightarrow{\tau}}$ comutam com as matrizes diagonais. Por isso:

$$\left(\overline{\psi}_L^a\, t_{Ra}\right)\left(\overline{t}_R^b\, \psi_{Lb}\right) \rightarrow$$
$$\rightarrow \left[\overline{\psi}^a \left(\begin{array}{cc} \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right) t_a & 0 \\ 0 & \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right) t_a \end{array} \right)\left(\mathbb{I}_2 \cos\alpha + i\frac{\hat{\overrightarrow{\tau}}}{2}\sin\alpha\right)\right] \times$$
$$\times \left[\left(\mathbb{I}_2 \cos\alpha - i\frac{\hat{\overrightarrow{\tau}}}{2}\sin\alpha\right)\left(\begin{array}{cc} \overline{t}^b \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right) & 0 \\ 0 & \overline{t}^b \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right) \end{array} \right)\psi_b\right] . \quad \text{(B.8)}$$

$$\left(\overline{\psi}_L^a\, t_{Ra}\right)\left(\overline{t}_R^b\, \psi_{Lb}\right) \rightarrow$$
$$\rightarrow \left[\overline{\psi}^a \left(\begin{array}{cc} \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right) t_a & 0 \\ 0 & \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right) t_a \end{array} \right) e^{i\overrightarrow{\alpha}\cdot\frac{\hat{\overrightarrow{\tau}}}{2}}\right] \times$$
$$\times \left[e^{-i\overrightarrow{\alpha}\cdot\frac{\hat{\overrightarrow{\tau}}}{2}}\left(\begin{array}{cc} \overline{t}^b \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right) & 0 \\ 0 & \overline{t}^b \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right) \end{array} \right)\psi_b\right] \quad \text{(B.9)}$$

$$\left(\overline{\psi}_L^a\, t_{Ra}\right)\left(\overline{t}_R^b\, \psi_{Lb}\right) \rightarrow$$
$$\rightarrow \left[\overline{\psi}^a \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right) t_a\right] e^{i\overrightarrow{\alpha}\cdot\frac{\overrightarrow{\tau}}{2}}\, e^{-i\overrightarrow{\alpha}\cdot\frac{\overrightarrow{\tau}}{2}} \left[\overline{t}^b \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\psi_b\right] =$$
$$= \left(\overline{\psi}_L^a\, t_{Ra}\right)\left(\overline{t}_R^b\, \psi_{Lb}\right)\ , \quad \text{(B.10)}$$

que prova a simetria deste termo interagente.

B.2 Simetria U(1)$_f$

Será usada a expressão A.10 para a lagrangeana:

$$\mathscr{L}_q = +\frac{G}{4}\left[\left(\overline{t}^a t_a\right)\left(\overline{t}^b t_b\right) - \left(\overline{t}^a\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t}^b\gamma^5 t_b\right)\right] +$$
$$+\frac{G}{4}\left[\left(\overline{b}^a t_a\right)\left(\overline{t}^b b_b\right) - \left(\overline{b}^a t_a\right)\left(\overline{t}^b\gamma^5 b_b\right) + \left(\overline{b}^a\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t}^b b_b\right) - \left(\overline{b}^a\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t}^b\gamma^5 b_b\right)\right] \quad \text{(B.11)}$$

O spinor se comporta da seguinte forma sob transformações infinitesimais do grupo U(1)$_f$:

$$t_a \rightarrow e^{-i\alpha} t_a\ , \quad \text{(B.12)}$$

enquanto que seu adjunto,

$$\overline{t}_a \rightarrow \left(t_a e^{-i\alpha}\right)^\dagger \gamma^0 = \left(t_a\right)^\dagger e^{i\alpha}\gamma^0 = t_a^\dagger\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)\gamma^0 =$$
$$= t_a^\dagger\gamma^0\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right) = \overline{t}_a e^{i\alpha}\ . \quad \text{(B.13)}$$

Agora será calculado como os termos de $\mathscr{L}_q$ se comportam sob as transformações infinitesimais U(1)$_f$. Os termos interagentes:

$$\left(\overline{t}^a t_a\right) \rightarrow \overline{t}^a e^{i\alpha} e^{-i\alpha} t_a = \left(\overline{t}^a t_a\right) \quad \text{(B.14)}$$

e

$$\left(\overline{t}^a\gamma^5 t_a\right) \rightarrow \overline{t}^a e^{i\alpha}\gamma^5 e^{-i\alpha} t_a =$$
$$= \overline{t}^a\left[\left(\cos\beta + i\sin\beta\right)\gamma^5\left(\cos\beta - i\sin\beta\right)\right] t_a =$$
$$= \overline{t}^a\left[\gamma^5\left(\cos\beta + i\sin\beta\right)\left(\cos\beta - i\sin\beta\right)\right] t_a =$$
$$= \overline{t}^a\gamma^5 e^{i\alpha} e^{-i\alpha} t_a = \overline{t}^a\gamma^5 t_a\ , \quad \text{(B.15)}$$

são invariantes. Os demais termos da lagrangeana que não foram mencionados se transformam de forma similar aos casos apresentados, logo:

$$\mathscr{L}_q \rightarrow \mathscr{L}_q\ , \quad \text{(B.16)}$$

para a simetria U(1)$_f$

B.3 Simetria U(1)$_5$

Quando a transformação infinitesimal do grupo U(1)$_5$, equação 1.95 da seção 1.8, atua no spinor t_a, este sofre a seguinte alteração:

$$t_a \to e^{-i\beta\gamma^5} \tag{B.17}$$

Podemos expandir em séries a exponencial acima:

$$\begin{aligned}
e^{i\beta\gamma^5} &= 1 + i\gamma^5\beta + \left(i\gamma^5\right)^2\frac{\beta^2}{2!} + \left(i\gamma^5\right)^3\frac{\beta^3}{3!} + \left(i\gamma^5\right)^4\frac{\beta^4}{4!} + \cdots \\
&= 1 - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} + \cdots + i\gamma^5\beta - i\gamma^5\frac{\beta^3}{3!} + i\gamma^5\frac{\beta^5}{5!} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\beta^{2n}}{2n!} + i\gamma^5\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\beta^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \quad \Rightarrow \\
e^{i\beta\gamma^5} &= \cos\beta + i\gamma^5\sin\beta
\end{aligned} \tag{B.18}$$

Similarmente :

$$e^{-i\beta\gamma^5} = \cos\beta - i\gamma^5\sin\beta \tag{B.19}$$

A transformação do adjunto de t_a é:

$$\begin{aligned}
\bar{t}^a \to t^{a\dagger}\left(e^{-i\beta\gamma^5}\right)^\dagger\gamma^0 &= t^{a\dagger}e^{i\beta\gamma^5}\gamma^0 = \\
&= t^{a\dagger}\left(\cos\beta + i\gamma^5\sin\beta\right)\gamma^0 = \\
&= t^{a\dagger}\gamma^0\left(\cos\beta - i\gamma^5\sin\beta\right) = \bar{t}^a e^{-i\beta\gamma^5} \quad \Rightarrow \\
\bar{t}^a &\to \bar{t}^a e^{-i\beta\gamma^5}
\end{aligned} \tag{B.20}$$

Sob a transformação infinitesimal do grupo U(1)$_5$, $\left(\bar{t}^a t_a\right)\left(\bar{t}^b t_b\right)$, se comporta como:

$$\begin{aligned}
\left(\bar{t}^a t_a\right) \to \bar{t}^a e^{-i\beta\gamma^5}e^{-i\beta\gamma^5}t_a &= \\
&= \bar{t}^a e^{-2i\beta\gamma^5}t_a = \bar{t}^a\left(\cos 2\beta - i\gamma^5\sin 2\beta\right)t_a = \\
&= \cos 2\beta\left(\bar{t}^a t_a\right) - i\sin 2\beta\left(\bar{t}^a\gamma^5 t_a\right) \Rightarrow \\
\left(\bar{t}^a t_a\right) &\to \cos 2\beta\left(\bar{t}^a t_a\right) - i\sin 2\beta\left(\bar{t}^a\gamma^5 t_a\right)
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\left(\overline{t^a}t_a\right)\left(\overline{t^b}t_b\right) &\to \left(\overline{t^a}e^{-i\beta\gamma^5}e^{-i\beta\gamma^5}t_a\right)\left(\overline{t^b}e^{-i\beta\gamma^5}e^{-i\beta\gamma^5}t_b\right) = \\
&= \left[\cos 2\beta\left(\overline{t^a}t_a\right) - i\sin 2\beta\left(\overline{t^a}\gamma^5 t_a\right)\right]\left[\cos 2\beta\left(\overline{t^b}t_b\right) - i\sin 2\beta\left(\overline{t^b}\gamma^5 t_b\right)\right] = \\
&= \cos^2 2\beta\left(\overline{t^a}t_a\right)\left(\overline{t^b}t_b\right) - i\cos 2\beta\sin 2\beta\left(\overline{t^a}t_a\right)\left(\overline{t^b}\gamma^5 t_b\right) - \\
&- i\cos 2\beta\sin 2\beta\left(\overline{t^a}\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t^b}t_b\right) - \sin^2 2\beta\left(\overline{t^a}\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t^b}\gamma^5 t_b\right)
\end{aligned} \tag{B.21}$$

Já o termo $\left(\overline{t^a}\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t^b}\gamma^5 t_b\right)$, se transforma da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\left(\overline{t^a}\gamma^5 t_a\right) &\rightarrow \overline{t^a}e^{-i\beta\gamma^5}\gamma^5 e^{-i\beta\gamma^5} t_a = \\
&= \overline{t^a}\left[\left(\cos\beta - i\gamma^5\sin\beta\right)\gamma^5\left(\cos\beta - i\gamma^5\sin\beta\right)\right] t_a = \\
&= \overline{t^a}\left(\gamma^5\cos^2\beta - 2i\cos\beta\sin\beta - \gamma^5\sin^2\beta\right) t_a = \\
&= \cos 2\beta\left(\overline{t^a}\gamma^5 t_a\right) - i\sin 2\beta\left(\overline{t^a}t_a\right) \\
&\left(\overline{t^a}\gamma^5 t_a\right) \rightarrow \cos 2\beta\left(\overline{t^a}\gamma^5 t_a\right) - i\sin 2\beta\left(\overline{t^a}t_a\right)
\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
\left(\overline{t^a}\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t^b}\gamma^5 t_b\right) &\rightarrow \left[\cos 2\beta\left(\overline{t^a}\gamma^5 t_a\right) - i\sin 2\beta\left(\overline{t^a}t_a\right)\right]\left[\cos 2\beta\left(\overline{t^b}\gamma^5 t_b\right) - i\sin 2\beta\left(\overline{t^b}t_b\right)\right] = \\
&= \cos^2 2\beta\left(\overline{t^a}\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t^b}\gamma^5 t_b\right) - i\cos 2\beta\sin 2\beta\left(\overline{t^a}\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t^b}t_b\right) - \\
&- i\cos 2\beta\sin 2\beta\left(\overline{t^a}t_a\right)\left(\overline{t^b}\gamma^5 t_b\right) - \sin^2 2\beta\left(\overline{t^a}t_a\right)\left(\overline{t^b}t_b\right) \qquad \text{(B.22)}
\end{aligned}$$

Outro termo que aparece na lagrangeana é:

$$\begin{aligned}
&\left(\overline{b}^a t_a\right)\left(\overline{t}^b\gamma^5 b_b\right) \rightarrow \\
&\left[\cos 2\beta\left(\overline{b}^a t_a\right) - i\sin 2\beta\left(\overline{b}^a\gamma^5 t_a\right)\right]\left[\cos 2\beta\left(\overline{t}^b\gamma^5 b_b\right) - i\sin 2\beta\left(\overline{t}^b b_b\right)\right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos^2 2\beta\left(\overline{b}^a t_a\right)\left(\overline{t}^b\gamma^5 b_b\right) - i\cos 2\beta\sin 2\beta\left(\overline{b}^a t_a\right)\left(\overline{t}^b b_b\right) - \\
&- i\cos 2\beta\sin 2\beta\left(\overline{b}^a\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t}^b\gamma^5 b_b\right) - \sin^2 2\beta\left(\overline{b}^a\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t}^b b_b\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\overline{b}^a t_a\right)\left(\overline{t}^b\gamma^5 b_b\right) &\rightarrow \cos^2 2\beta\left(\overline{b}^a t_a\right)\left(\overline{t}^b\gamma^5 b_b\right) - \frac{i}{2}\sin\beta\left(\overline{b}^a t_a\right)\left(\overline{t}^b b_b\right) - \\
&- \frac{i}{2}\sin\beta\left(\overline{b}^a\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t}^b\gamma^5 b_b\right) - \sin^2 2\beta\left(\overline{b}^a\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t}^b b_b\right) \qquad \text{(B.23)}
\end{aligned}$$

similarmente

$$\begin{aligned}
\left(\overline{b}^a\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t}^b b_b\right) &\rightarrow \cos^2 2\beta\left(\overline{b}^a\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t}^b b_b\right) - \frac{i}{2}\sin\beta\left(\overline{b}^a\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t}^b\gamma^5 b_b\right) - \\
&- \frac{i}{2}\sin\beta\left(\overline{b}^a t_a\right)\left(\overline{t}^b b_b\right) - \sin^2 2\beta\left(\overline{b}^a t_a\right)\left(\overline{t}^b\gamma^5 b_b\right) \qquad \text{(B.24)}
\end{aligned}$$

Aplicando as equações B.21, B.22, B.23 e B.24 em $\mathscr{L}_q$. Vamos começar pelo termo:

$$\left(\overline{t}^a t_a\right)\left(\overline{t^b} t_b\right) - \left(\overline{t^a}\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t^b}\gamma^5 t_b\right) \rightarrow$$
$$\left(\cos^2 2\beta + \sin^2 2\beta\right)\left(\overline{t^a} t_a\right)\left(\overline{t^b} t_b\right) - i\left(\cos 2\beta \sin 2\beta - \cos 2\beta \sin 2\beta\right)\left[\left(\overline{t^a} t_a\right)\left(\overline{t^b}\gamma^5 t_b\right)\right] -$$
$$-i\left(\cos 2\beta \sin 2\beta - \cos 2\beta \sin 2\beta\right)\left[\left(\overline{t^a}\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t^b} t_b\right)\right] - \left(\cos^2 2\beta + \sin^2 2\beta\right)\left[\left(\overline{t^a}\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t^b}\gamma^5 t_b\right)\right] =$$
$$= \left(\overline{t^a} t_a\right)\left(\overline{t^b} t_b\right) - \left(\overline{t^a}\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t^b}\gamma^5 t_b\right)$$

$$\left(\overline{t^a} t_a\right)\left(\overline{t^b} t_b\right) - \left(\overline{t^a}\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t^b}\gamma^5 t_b\right) \quad \rightarrow \quad \left(\overline{t^a} t_a\right)\left(\overline{t^b} t_b\right) - \left(\overline{t^a}\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t^b}\gamma^5 t_b\right) \tag{B.25}$$

Analogamente:

$$\left(\overline{b^a} t_a\right)\left(\overline{t^b} b_b\right) - \left(\overline{b^a}\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t^b}\gamma^5 b_b\right) \quad \rightarrow \quad \left(\overline{b^a} t_a\right)\left(\overline{t^b} b_b\right) - \left(\overline{b^a}\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t^b}\gamma^5 b_b\right) \tag{B.26}$$

E finalmente:

$$\left[\left(\overline{b}^a\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t}^b b_b\right) - \left(\overline{b}^a t_a\right)\left(\overline{t}^b\gamma^5 b_b\right)\right] \rightarrow$$
$$\rightarrow \cos^2 2\beta\left(\overline{b}^a\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t}^b b_b\right) - \frac{i}{2}\sin\beta\left(\overline{b}^a\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t}^b\gamma^5 b_b\right) - \frac{i}{2}\sin\beta\left(\overline{b}^a t_a\right)\left(\overline{t}^b b_b\right) -$$
$$-\sin^2 2\beta\left(\overline{b}^a t_a\right)\left(\overline{t}^b\gamma^5 b_b\right) - \cos^2 2\beta\left(\overline{b}^a t_a\right)\left(\overline{t}^b\gamma^5 b_b\right) + \frac{i}{2}\sin\beta\left(\overline{b}^a t_a\right)\left(\overline{t}^b b_b\right) +$$
$$+\frac{i}{2}\sin\beta\left(\overline{b}^a\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t}^b\gamma^5 b_b\right) + \sin^2 2\beta\left(\overline{b}^a\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t}^b b_b\right) =$$

$$= \left(\sin^2 2\beta + \cos^2 2\beta\right)\left(\overline{b}^a\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t}^b b_b\right) - \left(\sin^2 2\beta + \cos^2 2\beta\right)\left(\overline{b}^a t_a\right)\left(\overline{t}^b\gamma^5 b_b\right) =$$
$$= \left(\overline{b}^a\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t}^b b_b\right) - \left(\overline{b}^a t_a\right)\left(\overline{t}^b\gamma^5 b_b\right)$$

logo,

$$\left[\left(\overline{b}^a\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t}^b b_b\right) - \left(\overline{b}^a t_a\right)\left(\overline{t}^b\gamma^5 b_b\right)\right] \rightarrow \left(\overline{b}^a\gamma^5 t_a\right)\left(\overline{t}^b b_b\right) - \left(\overline{b}^a t_a\right)\left(\overline{t}^b\gamma^5 b_b\right) \tag{B.27}$$

Portanto esta lagrangeana é invariante sob transformações do grupo $\mathrm{U}(1)_5$:

$$\mathscr{L}_q \rightarrow \mathscr{L}_q \tag{B.28}$$

Portanto, a lagrangeana $\mathscr{L}_q$ possui simetria $\mathrm{U}(1)_f \otimes \mathrm{U}(1)_5 \otimes \mathrm{SU}(2)_f$.

Referências Bibliográficas

[1] G.B. Arfken and H.J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier, 2005.

[2] William A. Bardeen, Christopher T. Hill, and Manfred Lindner. Minimal dynamical symmetry breaking of the standard model. *Phys. Rev. D*, 41:1647–1660, Mar 1990.

[3] O. A. Battistel and M. C. Nemes. *Phys. Rev. D*, 59:055010, Feb 1999.

[4] Mandl F. and Shaw G. *Quantum Field Theory 2 Ediction*. WILEY, 2010.

[5] L. C. Ferreira, A. L. Cherchiglia, Brigitte Hiller, Marcos Sampaio, and M. C. Nemes. *Phys. Rev. D*, 86:025016, Jul 2012.

[6] Tony Gherghetta. *Phys. Rev. D*, 50:5985–5992, Nov 1994.

[7] S. P. Klevansky. *Rev. Mod. Phys.*, 64:649–708, Jul 1992.

[8] S. Pokorski. *Gauge Field Theories*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2000.

[9] M. Veltman. *Acta Physica Polonica B*, 12:437–457, May 1981.