

*Estudo de Interferência de Elétrons
em Dispositivos Mesoscópicos
no Regime Hall Quântico*

Juliana Caldeira Brant

Juliana Caldeira Brant

***Estudo de Interferência de Elétrons
em Dispositivos Mesoscópicos
no Regime Hall Quântico***

*Orientador: Prof. Elmo Salomão Alves
Co-orientador: Prof. Flávio O. Plentz Filho*

***Dissertação apresentada à Universidade Federal de Minas Gerais
como requisito parcial para obtenção do grau de
MESTRE EM FÍSICA***

Belo Horizonte, Março de 2006

Agradecimentos

Ao meu orientador Prof. Elmo Salomão Alves pela paciência e pelo apoio em todos os momentos;

Ao meu co-orientador Prof. Flávio Plentz e ao meu colaborador Daniel Elias pela ajuda na parte experimental do trabalho;

Aos colegas e aos professores do Laboratório pela amizade e pelo apoio em todos os momentos;

Aos amigos da física pelo carinho e pelo incentivo;

À minha família e ao meu namorado Júlio pelo apoio incondicional;

Ao Instituto do Milênio de Nanociências (CNPq - PADCT), pelo apoio à pesquisa no laboratório;

Ao CNPq e à FAPEMIG pelo apoio financeiro;

À Deus.

Resumo

Neste trabalho, são apresentados os conceitos básicos necessários para se entender o funcionamento de dispositivos semicondutores que operam como interferômetros de elétrons. Esses dispositivos são construídos em amostras de GaAs/AlGaAs, onde existe um gás bidimensional de elétrons de alta mobilidade. O gás de elétrons é confinado em uma região de dimensões comparáveis ao seu comprimento de onda de Fermi. Aplicando-se campos magnéticos intensos, criam-se, no gás, sub-bandas magneto-elétricas unidimensionais. Nessa situação, os estados que transportam corrente estão espacialmente localizados próximo às bordas do dispositivo. Esses estados de borda funcionam como feixes de elétrons e contatos pontuais quânticos – QPC's – funcionam como divisores de feixes. Padrões de interferência são observados na corrente elétrica em um dos contatos do dispositivo em função da diferença de fase entre os dois feixes. Essa fase pode ser modificada através de mudanças de caminho ou alterações no fluxo magnético no efeito Aharonov-Bohm. Correlações entre as correntes nos diversos terminais do dispositivo podem ser medidas através da densidade espectral das flutuações dessas correntes. Neste trabalho, apresentamos uma revisão dos resultados recentes obtidos na literatura com análogos eletrônicos dos interferômetros de Mach-Zehnder e Hanbury Brown-Twiss. Além disso, analisamos uma proposta de um interferômetro eletrônico análogo ao Fabry-Perot ótico, que pretendemos fabricar.

Abstract

In this work we introduce the basic concepts required to understand how electronic interferometers work. The interferometers are semiconductor devices based in GaAs/AlGaAs heterojunctions where a high mobility two-dimensional electron gas is formed. The electron gas is confined in a small region of dimension comparable to its Fermi wavelength. In a high magnetic field, the degenerate two-dimensional electron gas develops into one-dimensional magnetoelectric subbands. In this case, the states responsible for the electronic transport are localized near the edges of the device. These edge states play the role of electron beams and quantum point contacts– QPC's – act as electron beam splitters. The interference patterns are observed in the electric current in one of the electrical contacts as a function of the phase difference between two beams. This phase can be modified by changing the path length or by changing the magnetic flux in the Aharonov-Bohm effect. Current correlations measurements in different contacts of the device are related to the spectral density of the fluctuations in these currents. In this work, we review results of electronic analogues of the Mach-Zehnder and Hanbury Brown-Twiss interferometers that have been reported recently. We also analyze an electronic analogue of the optical Fabry-Perot interferometer that we are trying to make.

Sumário

Agradecimentos.....	II
Resumo.....	III
Abstract.....	IV
Sumário.....	V
Capítulo 1 – Introdução.....	1
Capítulo 2 – Conceitos Básicos.....	3
2.1 – Comprimentos Característicos e Regimes de Transporte.....	3
Comprimentos importantes.....	3
Regimes de transporte.....	4
Sistema balístico quântico.....	5
2.2 – Gás bidimensional de elétrons.....	6
Gás bidimensional de elétrons confinado.....	10
Capítulo 3 – Regime de Transporte Coerente.....	16
3.1 – Os contatos.....	16
3.2 – Condutância de um Dispositivo Balístico.....	17
Condutância de um dispositivo com dois terminais.....	18
Condutância de um dispositivo com vários terminais – fórmula de Büttiker.....	24
Capítulo 4 – Elementos de um Interferômetro Eletrônico.....	29
4.1 – Regime Hall Quântico.....	29
Feixe de elétrons.....	35
4.2 – Contato Pontual Quântico — QPC.....	36

Capítulo 5 – Interferência – Medidas de Corrente e de Ruído.....	41
5.1 – Variações de Fase.....	41
Mudança de Caminho.....	41
Efeito Aharonov-Bohm.....	42
5.2 – Corrente Média – Interferência entre Ondas.....	43
5.3 – Flutuações na Corrente – Correlação entre Intensidades.....	43
Ruído de tiro e ruído térmico clássicos.....	44
Ruído de tiro e ruído térmico quânticos.....	44
Flutuações de equilíbrio.....	45
Flutuações de transporte no limite $T = 0$	46
Flutuações em um dispositivo de dois terminais.....	47
Capítulo 6 – Interferômetros.....	53
6.1 – Matriz de Espalhamento de um Interferômetro.....	53
6.2 – Os Interferômetros Eletrônicos de Mach-Zehnder e de Hanbury Brown-Twiss..	54
Interferômetro eletrônico de Mach-Zehnder.....	54
Interferômetro eletrônico de Hanbury Brown-Twiss.....	57
6.3 – Proposta de um Interferômetro de Fabry-Perot eletrônico.....	59
Capítulo 5 – Considerações Finais.....	66
Apêndice A – Matriz de Espalhamento.....	67
Referências.....	72

Capítulo 1 - Introdução

Em um dispositivo semicondutor que opera no regime de transporte coerente, os elétrons permanecem no mesmo estado quântico ao longo de todo o dispositivo. Além disso, as dimensões do dispositivo são comparáveis ao comprimento de onda dos elétrons. Dessa forma, podem-se observar efeitos de interferência que têm origem na natureza ondulatória dos elétrons e nas propriedades da estatística quântica que eles obedecem devido ao fato de serem férmions.

Inicialmente, a idéia para este trabalho de mestrado era construir e realizar medidas de transporte em um dispositivo eletrônico semicondutor que funciona de forma análoga ao interferômetro óptico de Fabry-Perot. Paralelamente, pretendíamos estudar os aspectos teóricos envolvidos no transporte coerente em dispositivos mesoscópicos, especialmente aqueles relacionados a efeitos de interferência.

Um dispositivo semelhante já havia sido fabricado em nossos laboratórios pelos professores C. Chaubet e F. Plentz e pelo estudante D. C. Elias, no entanto ele não funcionou devido a problemas nos contatos elétricos. Tentamos, então, fabricar um dispositivo similar, porém mais simples. Essa fabricação envolveu técnicas de fotolitografia e de litografia por feixe de elétrons, ambas disponíveis nos laboratórios do departamento de física da UFMG. Realizamos uma primeira etapa, que consistiu em testes da litografia óptica e da litografia por feixe de elétrons, afim de determinar em que condições devemos realizá-las de forma a construir estruturas pequenas ($\sim 1\mu\text{m}$) e com formas bem definidas. No entanto, quando passaríamos para a etapa de fabricação do dispositivo tivemos problemas nos equipamentos de litografia por feixe eletrônico e na evaporadora térmica, que impediram a conclusão do processo de fabricação do dispositivo.

Assim, optamos por relatar, nesta dissertação, os conceitos básicos e os modelos usados para descrever o funcionamento de dispositivos no regime de transporte coerente, em especial aqueles que funcionam como interferômetros eletrônicos. Apresentamos, também, o dispositivo proposto e analisamos o comportamento das variáveis que podem ser medidas.

No segundo capítulo, apresentamos as definições básicas necessárias para se caracterizar o regime de transporte de um dispositivo. Em seguida, descrevemos como é possível atingir o regime de transporte coerente usando um gás bidimensional de elétrons de

alta mobilidade, que se forma em uma heterojunção de AlGaAs/GaAs. Analisamos, também, o gás bidimensional de elétrons sob confinamento, que é o sistema eletrônico no qual se baseiam os interferômetros eletrônicos.

No capítulo 3, descrevemos um dispositivo que opera no regime de transporte coerente. Primeiro, apresentamos as características atribuídas aos contatos para que eles funcionem como reservatórios de elétron. Em seguida, detalhamos o método usado para determinar a condutância em um dispositivo simples, em dispositivos com dois terminais e em um dispositivo com vários contatos. Nesse método, o transporte no dispositivo é analisado como um problema de espalhamento, em que o dispositivo é caracterizado por uma matriz de espalhamento.

No capítulo 4, mostramos que, no regime Hall quântico, ocorre a formação de canais de borda que atuam como feixes de elétrons nos interferômetros eletrônicos. Descrevemos, também, o contato pontual quântico – QPC – que atua como divisor de feixe para os elétrons.

O capítulo 5 é dedicado à descrição das grandezas que devem ser controladas e das que devem ser medidas em um interferômetro eletrônico. As formas de variação da fase dos feixes eletrônicos são descritas na primeira seção. Mostramos que, em um interferômetro linear, é a corrente que apresenta um padrão de interferência, enquanto nas flutuações na corrente aparecem as correlações que caracterizam um interferômetro de intensidade. Mostramos alguns exemplos de sistemas nos quais essas flutuações foram medidas.

Os interferômetros eletrônicos são apresentados no capítulo 6. Primeiro, mostramos como se determina a matriz de espalhamento de um interferômetro. Em seguida, apresentamos dois desses interferômetros que foram realizados e descritos recentemente. Por fim, descrevemos o funcionamento do interferômetro de Fabry-Perot eletrônico que pretendemos construir.

Capítulo 2 - Conceitos Básicos

2.1 - Comprimentos Característicos e Regimes de Transporte

Para entender as propriedades de transporte eletrônico de um sistema, deve-se determinar se esse transporte é balístico ou difusivo e se é clássico ou quântico. Cada um desses regimes requer uma abordagem teórica diferente. A classificação de um sistema quanto a esse aspecto é feita de acordo com as relações entre os seguintes comprimentos característicos: as dimensões do sistema, o livre caminho médio das cargas móveis, o comprimento de relaxação de fase e o comprimento de onda de Fermi. Esses comprimentos dependem do material utilizado, da temperatura e dos campos aplicados no sistema. Um mesmo dispositivo pode operar em regimes de transporte diferentes dependendo da temperatura de trabalho ou da intensidade do campo magnético aplicado.

Comprimentos importantes

Dispositivos mesoscópicos têm dimensões definidas por meio de técnicas litográficas e, por isso, podem ser tão pequenos quanto a técnica usada permitir.

O **livre caminho médio** l_m é definido como a distância média que um elétron percorre antes de sofrer um espalhamento elástico que altera o seu momento inicial. Espalhamentos elásticos ocorrem em interações dos elétrons com defeitos do cristal e com impurezas. Nessas interações, a energia e o módulo do momento do elétron são conservados, no entanto, a direção do vetor momentum \vec{p} , pode mudar muito.

O **comprimento de relaxação de fase**, ou comprimento de coerência, l_ϕ é definido como a distância média que um elétron percorre antes de sofrer um espalhamento inelástico, que destrói o seu estado coerente inicial. O mecanismo de espalhamento inelástico mais comum é a interação elétron-fônon. Essa interação modifica a energia do elétron e torna sua fase aleatória.

O **comprimento de onda** λ de de Broglie está relacionado à energia cinética do elétron pela fórmula:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{h}{(2mE)^{1/2}}.$$

Esse comprimento define a escala na qual a natureza ondulatória dos elétrons se torna importante.

Em um condutor há elétrons com energias cinéticas diferentes. No entanto, somente elétrons com valores de energia próximos ao da energia de Fermi E_F , contribuem para o processo de condução. O comprimento de onda de Broglie dos elétrons com essa energia é chamado de **comprimento de onda de Fermi** λ_F .

Na presença de um campo magnético, a energia dos elétrons é quantizada em níveis de Landau. O **comprimento magnético** $l_B = \sqrt{\hbar/eB}$ é uma medida da extensão espacial aproximada da autofunção associada ao nível de Landau, como será mostrado posteriormente. Esse comprimento pode ser variado por meio do campo magnético, fornecendo mais uma forma de reduzir a dimensionalidade do sistema.

Regimes de transporte

De acordo com a relação entre diversas escalas de comprimento do sistema — as suas dimensões, o livre caminho médio, o comprimento de relaxação de fase e o comprimento de onda de de Broglie dos elétrons — podemos definir quatro regimes de transporte: transporte difusivo clássico, transporte difusivo quântico, transporte balístico clássico e transporte balístico quântico. Temos que diferenciar, então, clássico de quântico e difusivo de balístico.

Quando chamamos o transporte de clássico queremos dizer que os fenômenos relacionados a esse regime podem ser explicados tratando os elétrons como partículas, usando uma abordagem clássica. Isso é adequado quando todos os comprimentos envolvidos são maiores que o comprimento de onda de Fermi. Já o transporte quântico é aquele em que algum efeito de interesse está relacionado à natureza ondulatória do elétron. Para que a natureza ondulatória dos elétrons se manifeste o comprimento de onda de Fermi deve ser comparável a algum dos outros comprimentos relevantes do sistema. Além disso, para que seja possível observar efeitos de interferência, a fase do elétron deve permanecer inalterada por um comprimento apreciável.

A diferenciação entre difusivo e balístico é feita considerando-se a trajetória dos elétrons. Se, ao se mover pela amostra, os elétrons sofrem um grande número de colisões de forma que o seu movimento seja semelhante a uma caminhada aleatória, então o regime é difusivo. Se o elétron for capaz de se deslocar pela extensão da amostra sem sofrer colisões, então o regime é balístico.

Podemos então, definir os regimes de transporte pelas seguintes relações entre os comprimentos.

Transporte difusivo clássico: $\lambda, l_m, l_\phi \ll L$.

Transporte difusivo quântico: $\lambda, l_m \ll l_\phi, L$.

Transporte balístico clássico: $\lambda \ll L < l_m, l_\phi$.

Transporte balístico quântico: $\lambda, L < l_m < l_\phi$.

O regime de transporte no qual estamos interessado é o regime balístico quântico, também chamado de transporte coerente, no qual poderemos observar efeitos de interferência.

Sistema balístico quântico

Para construir dispositivos que operem no regime de transporte coerente, usamos amostras de alta mobilidade e trabalhamos em baixas temperaturas. Mostraremos que, nessas condições, o transporte é balístico quântico.

Primeiramente, vamos tratar do comprimento de onda de de Broglie, que em nossos sistemas corresponde ao comprimento de onda de Fermi, pois são os elétrons próximos ao nível de Fermi os responsáveis pela corrente no dispositivo. Para uma distribuição bidimensional de elétrons o comprimento de onda de Fermi está relacionado à densidade de elétrons por unidade de área n_e pela relação $\lambda_f = \sqrt{2\pi/n_e}$, como será mostrado posteriormente. A densidade de elétrons por unidade de área pode ser obtida por meio de medidas de efeito Hall. Para uma densidade típica de elétrons entre 10^{11} cm^{-2} e 10^{12} cm^{-2} , o comprimento de onda de Fermi varia entre 80 nm e 25 nm .

A mobilidade μ e o livre caminho médio l_m estão relacionados por $\mu = |e|l_m/mv_F$. Como a mobilidade e a velocidade de Fermi v_F podem ser determinadas a partir de medidas de efeito Hall, então podemos determinar o livre caminho médio com essas medidas. Para

um gás de elétrons com uma mobilidade da ordem de $10^6 \text{ cm}^2/\text{Vs}$, e com uma densidade de portadores de 10^{12} cm^{-2} , o livre caminho médio é de $20 \mu\text{m}$.

Para que as dimensões do dispositivo sejam pequenas e comparáveis ao comprimento de onda de Fermi, usam-se técnicas de litografia por feixe de elétrons. Com esse tipo de litografia é possível construir dispositivos cujas dimensões características variam entre 100nm e $10 \mu\text{m}$. Além disso, os canais de condução de um dispositivo podem ser reduzidos além dos limites impostos pela técnica de litografia por meio de campos elétricos aplicados em determinadas regiões. Para isso, os dispositivos são dotados de *gates* — regiões metalizadas — onde aplicam-se tensões elétricas negativas. O campo elétrico produzido sob os *gates* expulsa os elétrons dessa região.

Assim, é possível obter dispositivos cujas dimensões são menores que o livre caminho médio e são comparáveis ao comprimento de onda de Fermi dos elétrons. Em baixas temperaturas, há uma redução das interações elétron-fônon, possibilitando que o comprimento de coerência se torne maior que os outros comprimentos. Nessas condições, o regime de transporte no dispositivo é balístico quântico.

2.2 - Gás bidimensional de elétrons

Vamos nos concentrar em amostras nas quais um gás bidimensional de elétrons – 2DEG (*Two-Dimensional Electron Gás*) é produzido em heteroestruturas de dopagem modulada baseadas em GaAs e em AlGaAs. O AlGaAs é dopado com impurezas doadoras e o GaAs não é dopado. Como o *gap* entre as bandas de valência e de condução do AlGaAs é maior que o do GaAs, há uma descontinuidade entre essas bandas, como mostrado na Figura 2.1. O nível de Fermi do GaAs encontra-se no meio do *gap*, enquanto nível de Fermi do AlGaAs está deslocado na direção da banda de condução, devido à dopagem negativa. Os elétrons livres do n-AlGaAs migram para o GaAs, onde o potencial é menor, e deixam para trás as impurezas doadoras carregadas positivamente. Esse rearranjo de cargas altera a forma das bandas e um poço de potencial para os elétrons se forma na banda de condução do GaAs, próximo à junção.

Uma das características importantes do 2DEG formado pelo processo de dopagem modulada é a alta mobilidade, devida à separação espacial entre os elétrons de condução e as impurezas doadoras. Além disso, como os elétrons que compõem o 2DEG são provenientes

das impurezas doadoras no AlGaAs, a densidade de portadores pode ser controlada com a dopagem durante o crescimento da amostra.

Os elétrons que estão no poço são livres para se mover nas direções x e y , mas estão confinados na direção z . Se apenas um nível do poço estiver ocupado, então temos um gás bidimensional de elétrons na junção, como mostraremos a seguir.

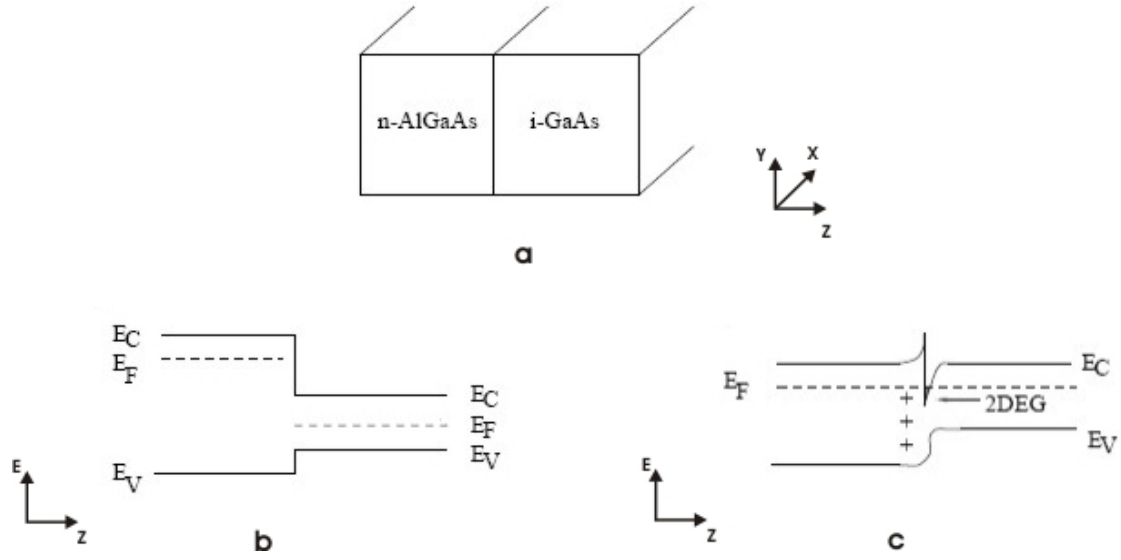


Figura 2.1. (a) Representação de uma heterojunção de n-AlGaAs/i-GaAs. (b) Alinhamento das bandas de valência e de condução do n-AlGaAs e do i-GaAs antes da redistribuição das cargas. (c) Bandas de valência e de condução da heterojunção. Um gás bidimensional de elétrons se forma no GaAs, próximo à interface.

Para descrever o movimento dos elétrons na banda de condução do GaAs, podemos usar a equação de massa efetiva de banda única:

$$\left[E_c + \frac{(\hbar \vec{\nabla} + e\vec{A})^2}{2m} + U(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}) = E \Psi(\vec{r}), \quad (2.1)$$

onde E_c é o mínimo de energia da banda de condução, \vec{A} é o potencial vetor, m é a massa efetiva e $U(\vec{r})$ é o potencial devido à distribuição de cargas, fronteiras, *gates*, etc.

Essa equação incorpora a ação do potencial periódico do GaAs sobre os elétrons através da massa efetiva, $m = 0,067m_e$, onde m_e é a massa do elétron. A aproximação de massa efetiva é válida se o número de elétrons na banda de condução for pequeno, de forma que todos eles estejam próximos ao mínimo da banda.

Na ausência de campo magnético aplicado, $\vec{A} = 0$. Identificando $U(\vec{r})$ como o potencial que confina os elétrons na região próxima à junção $U(\vec{r}) = U(z)$, onde z é a direção de crescimento da amostra, podemos escrever:

$$\left[E_c + \frac{(i\hbar\vec{\nabla})^2}{2m} + U(z) \right] \Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}).$$

A solução dessa equação pode ser escrita na seguinte forma:

$$\Psi(\vec{r}) = Z_n(z) \exp(ik_x x) \exp(ik_y y),$$

com uma relação de dispersão dada por:

$$E = E_c + \varepsilon_n + \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2),$$

em que o índice n denomina as diferentes sub-bandas, cada uma com uma autofunção $Z_n(z)$, na direção z e com uma energia ε_n , k_x e k_y são os vetores de onda nas direções x e y , respectivamente. Para baixas temperaturas e baixas densidades de elétrons, que é a situação na qual vamos trabalhar, apenas a primeira sub-banda está ocupada. Nesse caso, podemos ignorar a direção z e tratar os elétrons como um sistema bidimensional, ou seja, temos o 2DEG.

A equação que descreve o comportamento do gás bidimensional de elétrons submetido a condições gerais é então:

$$\left[E_s + \frac{(i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A})^2}{2m} + U(x, y) \right] \Psi(x, y) = E\Psi(x, y) \quad (2.2)$$

onde $E_s = E_c + \varepsilon_l$, sendo ε_l a auto-energia da autofunção $Z_l(z)$.

Vamos agora relacionar a densidade bidimensional de elétrons do 2DEG, que é uma quantidade mensurável, com o valor da energia de Fermi. A densidade de estados $\rho_{2D}(E)$ de um gás bidimensional de elétrons é dada por

$$\rho_{2D}(E) = \frac{1}{S} \frac{d}{dE} N_{2D}(E) = \frac{m}{\pi\hbar^2} \mathcal{G}(E - E_s), \quad (2.3)$$

onde $N_{2D}(E)$ é o número total de estados com energia menor que E e $\mathcal{G}(x)$ é a função degrau unitário, definida por

$$\mathcal{G}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}. \quad (2.4)$$

Assim, para energia maior ou igual a E_s , a densidade de estados é constante e igual à $m/\pi\hbar^2$ e é zero de outra forma.

Os elétrons ocupam cada nível de energia E de acordo com a distribuição de Fermi-Dirac,

$$f_{FD}(E) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{(E - \mu)}{k_B T}\right]}, \quad (2.5)$$

onde μ é o potencial químico, k_B é a constante de Boltzmann e T é a temperatura do sistema. Quando o sistema está submetido a baixas temperaturas, de forma que $k_B T \ll E_F$, podemos aproximar a função distribuição por seu valor em temperatura nula, ou seja,

$$f_{FD}(E) \approx \mathcal{G}(E_F - E).$$

Quando um sistema condutor pode ser analisado usando-se a aproximação acima, ele é chamado de condutor degenerado^[2.1].

Como já foi dito, o comprimento de onda de Fermi nas estruturas que vamos usar está em torno de $50nm$, o que dá uma energia de Fermi de aproximadamente $9meV$. Além disso, para uma temperatura $T \cong 4K$ de operação dos dispositivos, em que $k_B T \cong 0,35meV$, $E_F \cong 25k_B T$ então, na maior parte dos casos, vamos tratar nossos sistemas como condutores degenerados. Nesse limite, a densidade n_e de elétrons no gás bidimensional é dada por

$$n_e = \int_0^\infty \rho_{2D}(E) f_{FD}(E) dE = \int_0^\infty \frac{m}{\pi\hbar^2} \mathcal{G}(E - E_s) \mathcal{G}(E_F - E) dE,$$

ou seja,

$$n_e = \frac{m}{\pi\hbar^2} (E_F - E_s).$$

Como $E_F = E_s + \frac{(\hbar k_F)^2}{2m}$, então

$$k_F = \sqrt{2\pi n_e}$$

e

$$\lambda_F = \sqrt{2\pi/n_e},$$

que é a expressão usada anteriormente para determinar o comprimento de onda de Fermi a partir da densidade bidimensional de elétrons.

Gás bidimensional de elétrons confinado

Vamos, agora, descrever a ação de outros potenciais que confinam o gás bidimensional de elétrons em certas regiões do plano. Normalmente, o 2DEG está restrito a um canal de condução que é definido litograficamente sobre a amostra. Esse canal é, em geral, mais longo na direção que os elétrons se movem, que definiremos como a direção x . Na direção y , o potencial que restringe o movimento dos elétrons pode ser produzido tanto por processos de litografia como também por *gates* ou por um campo magnético externo, perpendicular ao plano do 2DEG. As dimensões do canal serão chamadas de L_x e L_y , nas direções x e y , respectivamente.

Chamaremos de $U(y)$ o potencial que define o canal. O campo magnético $\vec{B} = B\hat{z}$, uniforme, perpendicular ao plano do 2DEG, será descrito por meio do potencial vetor $\vec{A} = (-By, 0, 0)$. Redefiniremos o referencial de energia de forma que $E_s = 0$. Com isso, podemos descrever a dinâmica dos elétrons com o seguinte hamiltoniano:

$$H = \left[\frac{(p_x + eBy)^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + U(y) \right], \quad (2.6)$$

onde $p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ e $p_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}$.

Como esse Hamiltoniano comuta com o operador p_x , podemos escrever as autofunções como

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{L_x}} \exp(ik_x x) Y(y), \quad (2.7)$$

em que $Y(y)$ é solução da equação

$$\left[\frac{(\hbar k_x + eBy)^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + U(y) \right] Y(y) = EY(y). \quad (2.8)$$

Como tanto o potencial $U(y)$ quanto o campo magnético atuam no sentido de confinar os elétrons, então as soluções da equação acima estão associadas a um espectro discreto de energia $E_n(k_x)$. Cada valor de n corresponde a uma sub-banda, ou modo transversal. O espaçamento entre as diferentes sub-bandas é proporcional ao confinamento — quanto maior for o campo magnético ou quanto mais estreito for o canal, maior será o espaçamento entre os modos.

Temos maior interesse em campos magnéticos intensos, em que o confinamento gerado pelo campo magnético é predominante e aquele gerado pela litografia pode ser tratado como uma perturbação. Dessa forma, descreveremos primeiro a ação do campo magnético sobre o 2DEG e depois incluiremos a influência do potencial $U(y)$ que define o canal.

Assim, com $U(y) = 0$ temos a equação

$$\left[\frac{(p_x + eBy)^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} \right] \Psi(x, y) = E\Psi(x, y),$$

que pode ser reescrita na forma

$$\left[\frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_c^2 (y + y_k)^2 \right] Y(y) = EY(y), \quad (2.9)$$

em que $y_k = \frac{\hbar k_x}{eB}$ e $\omega_c = \frac{|e|B}{m}$ é a frequência de ciclotron e $\Psi(x, y) = X(x)Y(y)$.

Essa é a equação de Schrödinger unidimensional para um potencial parabólico cujo mínimo está na posição $y = -y_k$. As soluções, não normalizadas, dessa equação são conhecidas e dadas por:

$$Y_{n,k}(y) = u_n(q + q_k);$$

$$E_L(n, k) = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c,$$

onde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, $q = \sqrt{\frac{m\omega_c}{\hbar}}y$, $q_k = \sqrt{\frac{m\omega_c}{\hbar}}y_k$ e $u_n(x) = \exp(-x^2/2)H_n(x)$, sendo $H_n(x)$ o n-ésimo polinômio de Hermite.

Assim, as funções de onda normalizadas dos elétrons nos níveis de Landau são dadas por

$$\Psi_{n,k}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{L_x}} \exp(ikx) \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{1}{\pi l_B^2} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{1}{2l_B^2} (y + y_k)^2 \right] H_n \left(\frac{y + y_k}{l_B} \right) \quad (2.10)$$

onde fizemos $l_B^2 = \hbar/|e|B$ e $k = k_x$, para simplificar a notação.

Os níveis de energia E_L são as sub-bandas magnéticas, mais conhecidas como níveis de Landau. Esses níveis estão separados em energia por um valor $\hbar\omega_c$ e cada um tem uma degenerescência

$$d_L = \frac{mS}{\pi\hbar^2} \hbar\omega_c = \frac{|e|BS}{\pi\hbar}, \quad (2.11)$$

onde $S = L_x L_y$ é a área do canal de condução. Assim, cada nível de Landau tem d_L estados disponíveis para os elétrons, já incluindo a degenerescência de spin. Todos os elétrons do 2DEG dentro de faixas de energia de $\hbar\omega_c$, a partir de $E = 0$, são acomodados pelo nível de Landau que corresponde a essa faixa de energia.

Como o 2DEG em baixas temperaturas é um condutor degenerado, então, os níveis de Landau com energia menor que o nível de Fermi estão preenchidos, enquanto os de energia maior permanecem vazios. Para um dado valor de campo magnético podemos determinar o preenchimento dos níveis de Landau p_ν dividindo a densidade bidimensional de elétrons da amostra n_e pela degenerescência dos níveis de Landau por unidade de área, $n_L = d_L/S = 2eB/h$. Assim, temos

$$p_\nu = \frac{n_e}{n_L} = \frac{\hbar n_e}{2eB}.$$

A partir de p_ν podemos encontrar o fator de preenchimento ν , que é um número inteiro que indica o número de níveis de Landau que têm elétrons. Se p_ν é um número inteiro, então $\nu = p_\nu$, mas se p_ν não é inteiro, então $\nu = \text{Int}(p_\nu + 1)$. À medida que aumentamos a magnitude do campo magnético, aumenta a separação entre as sub-bandas e aumenta, também, a degenerescência dos níveis. Com isso, os níveis de Landau se deslocam para energias maiores e o fator de preenchimento diminui.

A velocidade de grupo $v(n, k) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E(n, k)}{\partial k}$ para os elétrons de uma sub-banda magnética é nula, pois a energia dos níveis de Landau é independente do vetor de onda k .

Vamos agora introduzir o potencial $U(y)$ no problema. Um potencial com a forma mostrada na figura 2.2 descreve bem um canal definido litograficamente, desde que ele não seja muito estreito, ou seja, ele deve ter uma largura maior que alguns comprimentos de onda de Fermi. Canais estreitos são melhor descritos por um potencial parabólico.

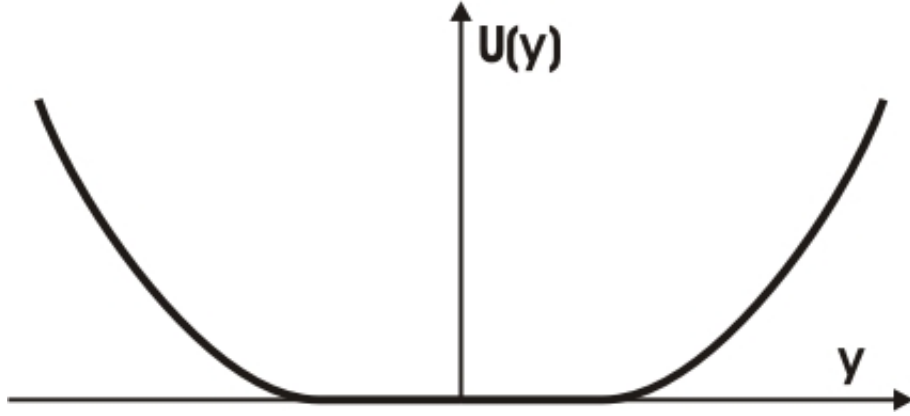


Figura 2.2. Forma aproximada do potencial que confina os elétrons no canal de condução.

Para aplicar teoria de perturbação em primeira ordem, devemos entender como são os auto-estados associados aos níveis de Landau, dados pela equação (2.10). Todos os elétrons em um mesmo nível de Landau têm a mesma energia. No entanto, elétrons com diferentes vetores de onda k , têm suas funções de onda $Y_{n,k}(y)$ centradas em posições diferentes, dadas por $y = -y_k$. Como $y_k = \hbar k / eB$ então, quanto maior o módulo de k , mais afastado do centro do canal está o centro da autofunção. Esse deslocamento das autofunções faz com que os estados com k positivo se localizem em uma metade do canal, enquanto a outra metade é ocupada pelos elétrons com k negativo. Além disso, a extensão espacial de $\Psi_{n,k}$ na direção y pode ser estimada a partir da envoltória exponencial da função na direção y , $\exp\left[-(y + y_k)^2 / 2l_B^2\right]$. Quando a exponencial é igual à e^{-1} então $y = -y_k \pm \sqrt{2}l_B$. Assim, vemos que a extensão espacial de $\Psi_{n,k}$ é da ordem de $l_B = \sqrt{\hbar / |e|B}$ em torno de $-y_k$ (para $B = 1T$ $\sqrt{\hbar / eB} \approx 26nm$).

Supondo que o potencial $U(y)$ não varie muito na extensão de cada auto-estado, podemos escrever a correção em primeira ordem para a energia como

$$E_{U(y)} = \langle n, k | U(y) | n, k \rangle = U(y_k).$$

Assim, a relação de dispersão do sistema passa a ser

$$E(n, k) \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c + U(y_k), \quad (2.12)$$

e a velocidade de grupo, nesse caso é dada por

$$v(n, k) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E(n, k)}{\partial k} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial U(y_k)}{\partial k} = \frac{1}{eB} \frac{\partial U(y)}{\partial y}. \quad (2.13)$$

Como mostrado na figura 2.3, a forma dos níveis de Landau fica semelhante à do potencial $U(y)$, já que podemos mapear y em k pela relação $y_k = \hbar k / eB$. Os níveis de Landau modificados são sub-bandas unidimensionais chamadas de sub-bandas magneto-elétricas, já que se formam pela ação combinada do campo magnético e do potencial $U(y)$.

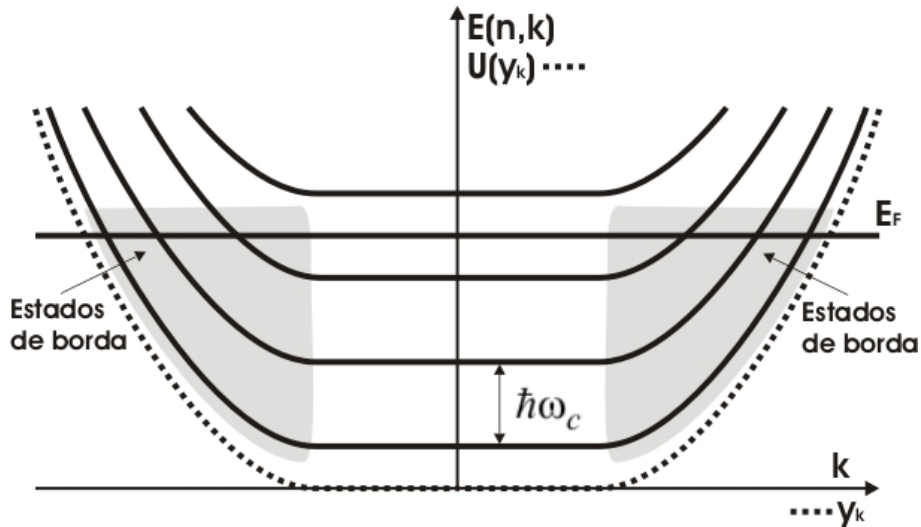


Figura 2.3. Sub-bandas magneto-elétricas formadas pela ação do potencial $U(y)$ e de um campo magnético na direção $+z$. Os estados de borda têm energia diferente da energia dos níveis de Landau, enquanto os estados de *bulk*, no centro da amostra, têm a mesma energia que os níveis de Landau.

Os estados próximos às bordas do dispositivo têm velocidade de grupo diferente de zero, por isso podem transportar corrente elétrica. Além disso, os estados em bordas opostas têm velocidade de grupo em direções opostas e, portanto, conduzem correntes em direções opostas. A separação espacial entre os estados que conduzem corrente em direções opostas é importante para o funcionamento de interferômetros eletrônicos.

Até aqui, não consideramos a interação do campo magnético com o spin dos elétrons. Essa interação levanta a degenerescência de spin e faz com que cada nível de Landau se divida em dois, um para cada orientação de spin dos elétrons. A energia dos novos níveis de Landau é dada por

$$E_L^\pm(n, k) = E_s + \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c \pm \frac{1}{2} g \mu_B B,$$

onde g é o fator g do GaAs, μ_B é o magnéton de Bohr e o sinal do último termo diferencia os estados de spins diferentes.

A diferença de energia entre os níveis $E_L^+(n,k)$ e $E_L^-(n,k)$ é muito pequena, se $B \sim 10T$ e $T = 1K$, $g\mu_B B \sim 2k_B T$. Assim, a separação entre os níveis de spins diferentes só pode ser resolvida no regime de campos intensos e temperaturas muito baixas. Mas, mesmo se esse for o caso, a única diferença introduzida na análise feita anteriormente é a diminuição da degenerescência dos níveis de Landau pela metade, o que altera apenas o fator de preenchimento. As características espaciais dos estados não mudam, pois as funções de onda continuam sendo as mesmas. A velocidade de grupo também continua igual, pois o termo adicional na energia não depende de k .

Como as medidas de transporte são insensíveis ao spin dos elétrons, podemos sempre considerar sub-bandas degeneradas em spin, pois a análise para sub-bandas degeneradas ou não-degeneradas é a mesma, apenas os resultados é que são diferentes por um fator 2. Assim, vamos convencionar ao longo do texto que as sub-bandas magneto-elétricas são degeneradas em spin, pois se esse não for o caso pode-se facilmente realizar as correções necessárias.

Capítulo 3 - Regime de Transporte Coerente

Neste trabalho, estamos interessados em dispositivos eletrônicos mesoscópicos que funcionam como análogos eletrônicos de interferômetro ópticos. Esses dispositivos funcionam no regime de transporte balístico quântico, ou coerente, com campos magnéticos intensos aplicados.

Descreveremos o transporte coerente nesses dispositivos na ausência de campo magnético e, posteriormente, estenderemos a análise para o regime de campos magnéticos intensos.

A análise do transporte no regime balístico é diferente da que se costuma usar para o transporte difusivo. Os contatos nas extremidades de um condutor balístico têm um papel importante na análise e a relação entre corrente e tensão no dispositivo, dada pela condutância entre dois contatos, é descrita como um problema de espalhamento, seguindo o formalismo de Landauer.

Vamos considerar condições de trabalho nas quais o espalhamento no dispositivo é elástico, de forma que o comprimento de coerência dos elétrons seja maior que as dimensões do dispositivo. Assim, o regime de transporte no dispositivo é coerente.

3.1 - Os contatos

No transporte coerente, a energia e o módulo da velocidade de um elétron, que entra no condutor através de um contato, permanecem constantes até esse elétron chegar em outro contato. Assim, podemos dizer que é nos contatos que os elétrons ganham e perdem energia.

Os contatos serão tratados como reservatórios onde os elétrons podem trocar energia para atingir o equilíbrio termodinâmico. Em equilíbrio, ou seja, quando não há transporte, os elétrons de todos os contatos podem ser caracterizados por um mesmo potencial químico de equilíbrio μ_0 . Em $T = 0K$, o potencial químico de equilíbrio é igual à energia de Fermi. Como estamos interessados no transporte, potenciais elétricos serão aplicados aos contatos. Nesse caso, os elétrons em um contato α passam a ser identificados por um potencial eletroquímico μ_α , que é a soma do potencial químico de equilíbrio com a energia potencial

elétrica dos elétrons no contato, ou seja, $\mu_\alpha = \mu_0 + eV_\alpha$, onde V_α é tensão aplicada ao contato α .

Vamos considerar, também, que os contatos emitem elétrons de forma seletiva, mas absorvem todos elétrons. Os elétrons que deixam um contato em direção ao condutor têm uma distribuição de energia que segue a função distribuição de Fermi-Dirac, com μ dado pelo potencial eletroquímico que caracteriza aquele contato. No entanto, qualquer elétron que venha do condutor para um contato é absorvido, independente de sua energia.

Estamos interessados no transporte em uma situação próxima ao equilíbrio. Isso quer dizer que as diferenças de potencial V_{ext} aplicadas ao sistema devem deslocar o potencial eletroquímico apenas ligeiramente em torno do potencial químico de equilíbrio, ou seja, $eV_{ext} \ll \mu_0$ ou $\mu_\alpha \approx \mu_0$ para todos os contatos. Além disso, a temperatura baixa faz com que $\mu_\alpha \approx \mu_0 \approx E_F$. Nessa situação, os potenciais eletroquímicos μ_α são chamados de quase níveis de Fermi e, no limite degenerado, a função distribuição para os elétrons que estão em equilíbrio com o contato α pode ser escrita como $f_\alpha(E) \approx \mathcal{G}(\mu_\alpha - E)$.

A energia dos elétrons na parte ativa do sistema não varia, pois todos os espalhamentos são elásticos, então os elétrons que se originam em um determinado contato são caracterizados pelo potencial eletroquímico daquele contato até deixarem a parte ativa do sistema. Portanto, os estados permitidos nessa parte do sistema são preenchidos de acordo com a função distribuição do contato de origem dos elétrons.

Em geral, em medidas de transporte aplicamos uma corrente entre dois contatos do sistema e medimos diferenças de potencial entre eles ou entre outros dois contatos, como é o caso das medidas com quatro terminais. A diferença de potencial entre dois contatos é determinada pela diferença entre seus potenciais eletroquímicos e é dada por $\Delta V = \Delta\mu/e$.

3.2 - Condutância de um Dispositivo Balístico

Em um dispositivo com vários terminais, a condutância $G_{jk,lm} = I_{jk}/V_{lm}$ relaciona a corrente I_{jk} entre os terminais j e k com a diferença de potencial V_{lm} medida entre os contatos l e m . Assim, ela é uma grandeza que caracteriza o dispositivo, portanto vamos mostrar como se calcula a condutância de sistemas que operam no regime de transporte coerente.

Primeiramente, vamos calcular a condutância em um condutor balístico estreito, que é o dispositivo de dois terminais mais simples possível. Esse cálculo servirá para entender quais são os estados responsáveis pela corrente resultante nos sistemas balísticos em que há formação de modos transversos unidimensionais. Em seguida, vamos descrever a correção que deve ser feita à condutância de um condutor balístico estreito, de forma a descrever um dispositivo de dois terminais genérico. Finalizando, vamos descrever uma forma de se encontrar a matriz de condutância, que relaciona as correntes e os potenciais em todos os contatos de um dispositivo com um número qualquer de terminais.

Condutância de um dispositivo com dois terminais

Considere um sistema de dois terminais em que o canal de condução é um condutor balístico retangular de comprimento L_x e largura L_y , como mostrado na figura 3.1.

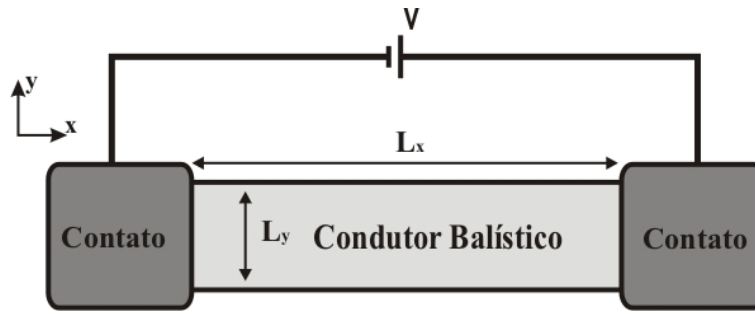


Figura 3.1. Condutor balístico ligado a dois contatos entre os quais foi aplicada uma diferença de potencial elétrico V .

A direção x é a direção da corrente. Nessa direção, os elétrons estão livres para se mover, pois $x \gg \lambda_F$. Na direção y , os elétrons estão confinados, pois $L_y \sim \lambda_F \ll x$. Nesse caso, ocorre a formação de sub-bandas transversas unidimensionais, ou modos transversos unidimensionais, como mostradas na figura 3.2. Se não houver campo magnético aplicado ao sistema, a equação que descreve a dinâmica dos elétrons pode ser separada em duas, uma para a direção x e outra para a direção y e a relação de dispersão, que descreve a forma das sub-bandas, será do tipo:

$$E_n(k_x) = E_n + \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m}, \quad (3.1)$$

onde E_n é o autovalor de energia correspondente n-ésima autofunção da equação relacionada à direção y e k_x é o vetor de onda na direção x . A separação entre duas sub-bandas consecutivas é $\Delta E_{n,n+1} = E_{n+1} - E_n$. Se o potencial que confina os elétrons na direção y puder ser representado, por exemplo, por uma função quadrática do tipo, $U(y) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 y^2$, então o espaçamento entre sub-bandas é independente do índice e é igual à $\hbar \omega_0$.

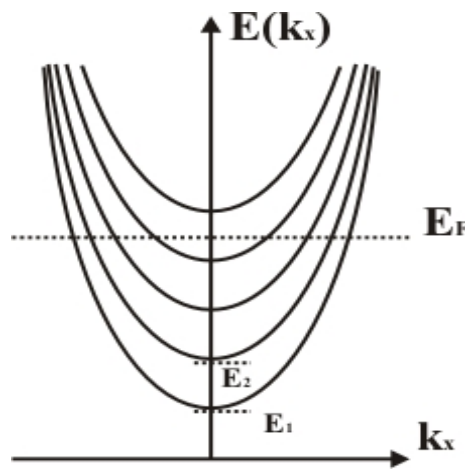


Figura 3.2. Sub-bandas elétricas formadas ao se confinar o 2DEG em um canal estreito na direção y e longo na direção x .

Para determinar a condutância, calculamos a razão entre a corrente entre dois terminais e a diferença de potencial aplicada entre eles. Para o cálculo da corrente, observamos que os elétrons com vetores de onda k_x de sinais diferentes são provenientes de contatos diferentes, já que suas velocidades $v(E) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k_x} = \frac{\hbar k_x}{m}$ têm sinais opostos. Assim,

no limite degenerado, os estados com k_x positivo estão preenchidos até uma energia igual ao potencial eletroquímico do contato à esquerda, μ_{esq} , enquanto os estados com k_x negativo estão preenchidos até a energia correspondente ao potencial eletroquímico do contato à direita, μ_{dir} . Calculamos, então, separadamente, as frações da corrente transportada pelos estados com k_x positivo e negativo, e, em seguida, subtraímos essas duas contribuições para encontrar a corrente resultante.

A corrente I_n^+ , transportada pelos estados com k_x positivo, na n -ésima sub-banda, é dada por

$$I_n^+ = e \int_{E_n}^{\infty} v(E) \rho_{1D}(E) \mathcal{G}(\mu_{esq} - E) dE. \quad (3.2)$$

A densidade de estados de um gás de elétrons unidimensional, considerando apenas os estados com k_x positivo e incluindo a degenerescência em spin, é dada por

$$\rho_{1D}(E) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial E}{\partial k_x} \right)^{-1}. \quad (3.3)$$

Assim, podemos reescrever I_n^+ como

$$I_n^+ = e \int_{E_n}^{\mu_{esq}} \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k_x} \times \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial E}{\partial k_x} \right)^{-1} dE = e \int_{E_n}^{\mu_{esq}} \frac{2}{h} dE = \frac{2e}{h} (\mu_{esq} - E_n).$$

A corrente transportada pelos estados com k_x negativo, na n -ésima sub-banda, é dada por uma equação análoga, substituindo-se μ_{esq} por μ_{dir} :

$$I_n^- = \frac{2e}{h} (\mu_{dir} - E_n).$$

Assim, assumindo que $\mu_{esq} > \mu_{dir}$, a corrente resultante na sub-banda n será:

$$I_n = \frac{2e}{h} (\mu_{esq} - \mu_{dir}). \quad (3.4)$$

Os estados com energia menor que μ_{dir} estão todos ocupados e há um mesmo número de elétrons se movem para a direita e para a esquerda. Assim, os estados responsáveis pela corrente resultante no sistema são aqueles próximos ao nível de Fermi, entre μ_{esq} e μ_{dir} , como mostra o resultado acima.

Para calcular a corrente total, que vai do contato da esquerda para o contato da direita, somamos a contribuição de todas as sub-bandas com energia mínima $E_n < E_F$. Assim, vamos somar I_n , com n variando de 1 até o número N_{max} de canais de condução ou sub-bandas, ou seja,

$$I = \sum_{n=1}^{N_{max}} \frac{2e}{h} (\mu_{esq} - \mu_{dir}) = \frac{2e}{h} N_{max} (\mu_{esq} - \mu_{dir}),$$

onde N_{max} é determinado de forma que $E_{N_{max}} < E_F < E_{N_{max}+1}$.

Como a tensão elétrica entre os dois contatos é $V = (\mu_{esq} - \mu_{dir})/e$, então a condutância do canal é dada por:

$$G_{2terminais} = \frac{2e^2}{h} N_{max}. \quad (3.5)$$

Essa expressão mostra que a condutância de um condutor balístico é quantizada em unidades de $2e^2/h$, onde o fator 2 é devido à degenerescência de spin.

Percebemos, ao derivar a expressão acima, que a quantização da condutância é uma consequência direta da formação de sub-bandas unidimensionais, pois, nesse caso, a dependência em energia da velocidade de grupo — equação (3.3) — cancela a dependência em energia da densidade de estados.

Os estados preenchidos de cada sub-banda são aqueles com $-k_F < k_y < k_F$, onde $k_y = n(2\pi/L_y)$, com $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Como o espaçamento entre os valores permitidos de k_y é $2\pi/L_y$, podemos estimar o número N de sub-bandas com energia mínima menor que a energia de Fermi,

$$N = \text{Int} \left(\frac{2k_F}{2\pi/L_y} \right) = \text{Int} \left(\frac{L_y}{\lambda_F/2} \right),$$

onde $\text{Int}(x)$ é igual à parte inteira de x .

Consequentemente, se $L_y \gg \lambda_F$, o número de sub-bandas que conduzem corrente é muito grande e uma variação pequena de L_y provoca uma variação pequena no valor total da condutância. Dessa forma, a condutância varia continuamente com L_y , de acordo com:

$$G_{2terminais} = \frac{2e^2}{h} \left(\frac{L_y}{\lambda_F/2} \right).$$

No caso de $L_y \sim \lambda_F$ a condutância tem uma variação discreta com L_y , em forma de degraus:

$$G_{2terminais} = \frac{2e^2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{G} \left(L_y - \frac{n\lambda_F}{2} \right). \quad (3.6)$$

Medidas que confirmam a quantização da condutância em função da largura do canal foram relatadas por van Wees et al^[3.1]. Essas medidas foram realizadas variando-se a largura do canal da amostra usando uma estrutura conhecida como contato pontual quântico ou QPC (*quantum point contact*). O QPC é formado por dois *gates* metálicos depositados sobre a

amostra como representado na figura 3.3. Quando se aplica uma tensão negativa nesses *gates*, os elétrons sob eles são expulsos, formando uma constricção no canal de condução. Quando diminuimos a tensão nos *gates*, essa constricção fica cada vez mais estreita, até fechar completamente o canal de condução.

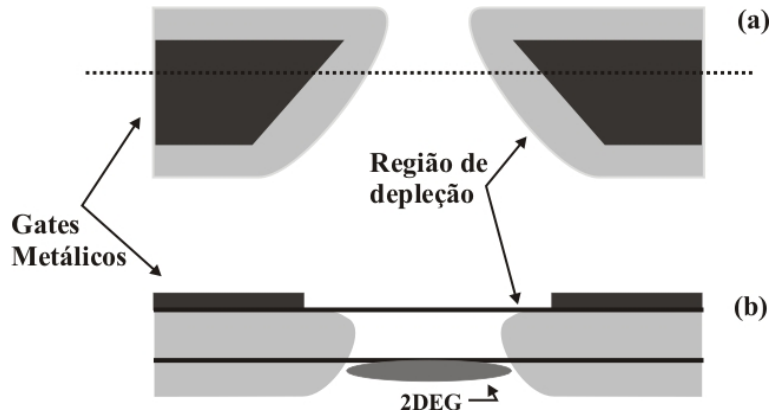


Figura 3.3. (a) Vista de cima da região de um dispositivo onde está o QPC. (b) Vista lateral no corte indicado pela linha pontilhada em (a). A forma do potencial do canal de condução é alterada pelo potencial aplicado aos *gates*, restringindo a região acessível ao 2DEG.

van Wees et al^[3.1] utilizaram uma amostra em que $\lambda_F = 42nm$, com espaçamento entre *gates* de $250nm$. Nesse dispositivo eles observaram 16 platôs na resistência elétrica, ao variar a tensão nos *gates* entre $-0,6V$ e $-2,2V$. A partir das medidas de resistência eles obtiveram um gráfico que mostra dependência da condutância com a voltagem aplicada aos *gates*, como mostra a figura 3.4.

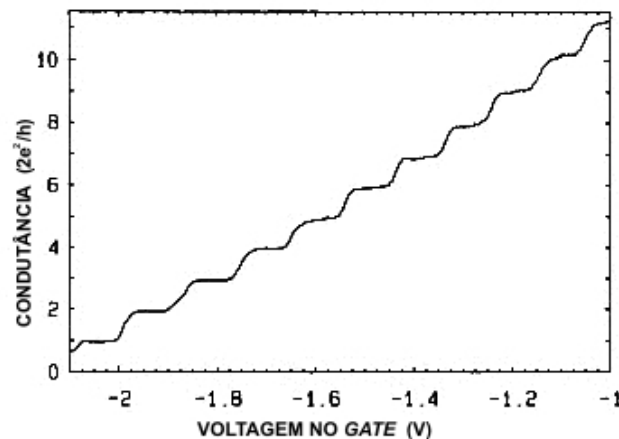


Figura 3.4. A figura mostra a quantização da condutância em um canal estreito em função da tensão nos *gates* do QPC que define a largura do canal. A figura foi extraída de: van Wees, B. J. et al. Quantized conductance of point contacts in two-dimensional electron gas. *Phys. Rev. Lett.* **60**, 848-850 (1988).

A condutância de um dispositivo genérico de dois terminais é descrita pela equação de Landauer,

$$G_{2\text{terminais}} = \frac{2e^2}{h} NT,$$

onde N representa o número de canais de condução unidimensionais e T é a probabilidade de transmissão dos elétrons de um contato para outro do dispositivo.

Para entender melhor essa expressão, vamos dividir o dispositivo em partes: a região onde ocorre espalhamento, os condutores balísticos e os contatos, como mostrado na figura 3.5. A região onde ocorre o espalhamento apresenta uma probabilidade T dos elétrons serem transmitidos do contato 1 para o contato 2. Essa probabilidade é determinada pelas características do dispositivo, por sua geometria, pela presença de potenciais aplicados, etc. Como descrito anteriormente, cada condutor balístico tem N canais de condução unidimensionais. Os contatos 1 e 2 são caracterizados por potenciais eletroquímicos μ_1 e μ_2 , respectivamente.

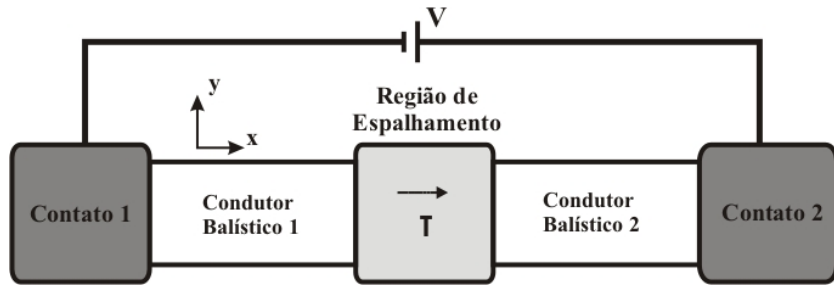


Figura 3.5. Representação esquemática de um dispositivo com dois terminais.

Para calcular a corrente resultante nos contatos precisamos considerar a reflexão pela região de espalhamento. Usando a aproximação de condutor degenerado, podemos dizer que a corrente é carregada pelos estados entre μ_1 e μ_2 . Assim, temos no contato 1 duas contribuições: I_1^+ , que sai do contato 1 em direção ao contato 2, e I_1^- , que é a parte de I_1^+ refletida na região de espalhamento. No contato 2, temos I_2^+ , que é a parte de I_1^+ que foi transmitida de 1 para 2 através da região de espalhamento. Portanto,

$$I_1^+ = \frac{2e}{h} N(\mu_1 - \mu_2),$$

$$I_1^- = \frac{2e}{h} N(1-T)(\mu_1 - \mu_2).$$

Assim,

$$I_1 = I_1^+ - I_1^- = \frac{2e}{h} NT (\mu_1 - \mu_2) \quad (3.7)$$

e

$$I_2 = -I_2^+ = -\frac{2e}{h} NT (\mu_1 - \mu_2). \quad (3.8)$$

Como $(\mu_1 - \mu_2) = eV$, então a corrente I do contato 1 para o contato 2 é dada por

$$I = I_1 = -I_2 = \frac{2e^2}{h} NTV. \quad (3.9)$$

Assim, a condutância de um dispositivo de dois terminais é dada por

$$G_{2\text{terminais}} = \frac{2e^2}{h} NT. \quad (3.10)$$

Condutância de um dispositivo com vários terminais — fórmula de Büttiker

A condutância em um dispositivo com vários terminais (contatos) pode ser determinada a partir de uma matriz de condutância G , que relaciona a corrente com o potencial em cada um dos contatos. A corrente I_α em um contato α é dada por

$$I_\alpha = \sum_{\beta} G_{\alpha\beta} V_\beta, \quad (3.11)$$

onde $G_{\alpha\beta}$ são os elementos da matriz de condutância, V_β é o potencial no contato β e a soma inclui todos os contatos, inclusive o α . A convenção de sinal para a corrente em um contato é: positiva quando a corrente sai do contato em direção ao dispositivo e negativa em caso contrário.

Novamente, dividiremos o dispositivo em partes, como mostrado na figura 3.6. Ele é composto por uma região de espalhamento ligada aos contatos por meio de condutores balísticos. A figura é apenas uma representação pictórica de um dispositivo real, com o objetivo de facilitar o entendimento.

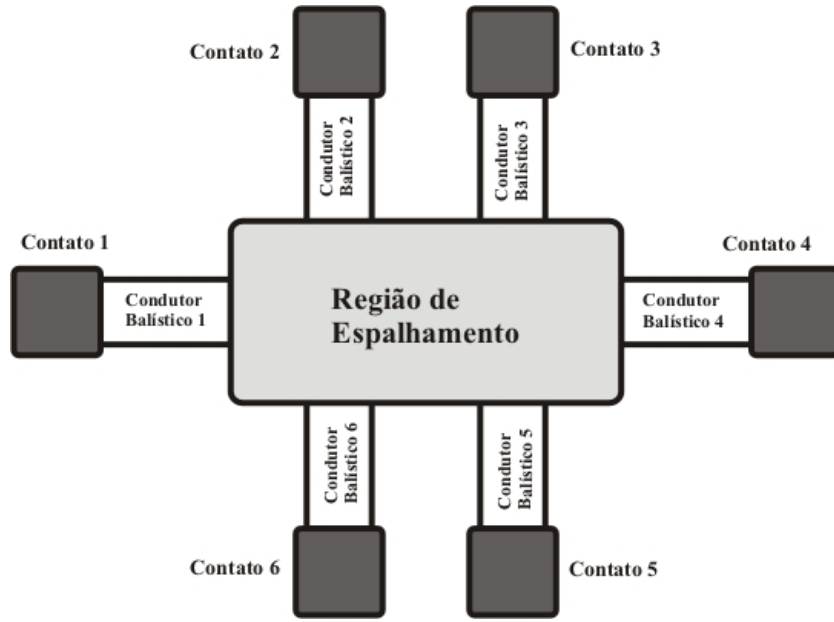


Figura 3.6. Representação esquemática de um dispositivo com vários terminais.

Quando o transporte é coerente, cada dispositivo pode ser caracterizado, em cada energia, por uma matriz de espalhamento S , que relaciona a amplitude das ondas que entram na região de espalhamento com a amplitude das ondas que saem dessa região. A matriz de espalhamento de um dispositivo é determinada pela equação de Schrödinger de massa efetiva para o 2DEG (2.2), e suas propriedades são descritas no apêndice A. Mostraremos que os elementos da matriz de condutância G podem ser obtidos através dos elementos da matriz de espalhamento S . Para isso vamos introduzir os estados de espalhamento para o sistema. Os auto-estados dos condutores balísticos se acoplam na região de espalhamento do dispositivo obedecendo às condições de continuidade de uma função de onda. Esse acoplamento gera os estados de espalhamento $\Psi_{\alpha m}$, compostos pela onda no condutor α que incide na região de espalhamento pelo canal m , pelas ondas refletidas em todos os canais do condutor α e pelas ondas transmitidas em todos os canais de todos os outros condutores ligados à região de espalhamento do dispositivo.

Segundo Büttiker^[3.2], quando a relação de dispersão nos condutores balísticos é do tipo

$$E_{\alpha m}(k) = E_{\alpha m}(0) + \frac{\hbar^2 k^2}{2m},$$

com autofunções da forma

$$\exp(ik_{\alpha m} x_{\alpha}) \Phi_{\alpha m}(y_{\alpha}),$$

os estados de espalhamento são dados por

$$\Psi_{\alpha m}(\alpha) = \sum_n^{M_\alpha} \left[\delta_{mn} e^{ik_{\alpha m} x_\alpha} \Phi_{\alpha m}(y_\alpha) + \left(\frac{v_{\alpha m}}{v_{\alpha n}} \right)^{1/2} s_{\alpha \alpha n m} e^{-ik_{\alpha n} x_\alpha} \Phi_{\alpha n}(y_\alpha) \right], \quad (3.12)$$

no condutor α , e por

$$\Psi_{\alpha m}(\beta) = \sum_n^{M_\beta} \left(\frac{v_{\alpha m}}{v_{\beta n}} \right)^{1/2} s_{\beta \alpha n m} e^{-ik_{\beta n} x_\beta} \Phi_{\beta n}(y_\beta), \quad (3.13)$$

no condutor $\beta \neq \alpha$. x_α e y_α são coordenadas cartesianas locais no contato α , definidas como mostra a figura 3.7, $k_{\alpha m}$ é a componente do vetor de onda paralela à x_α , $s_{\beta \alpha n m}$ é um elemento da uma matriz de espalhamento do dispositivo, $v_{\alpha n}$ é a velocidade de grupo na sub-banda n do condutor α e M_α é o número de sub-bandas no condutor α com energia mínima $E_{\alpha m}(0)$ menor que o quase nível de Fermi μ_α .

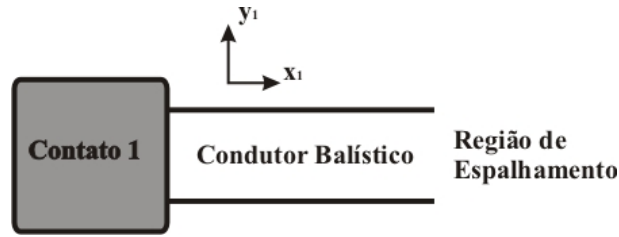


Figura 3.7. Definição das coordenadas cartesianas locais.

Existe um conjunto de estados de espalhamento para cada energia, pois a matriz de espalhamento é diferente para cada E e o valor de $k_{\alpha m}$ é dado pela solução da equação $E = E_{\alpha m}(k)$. Esses estados, juntamente com quaisquer estados ligados que existam no interior da região de espalhamento, formam um conjunto completo e mutuamente ortogonal de estados.

Partindo dos estados de espalhamento e usando técnicas de segunda quantização Büttiker chega à seguinte expressão para a corrente no contato α

$$I_\alpha = \frac{e}{h} \int dE \left\{ [M_\alpha(E) - R_{\alpha\alpha}(E)] f_\alpha(E) - \sum_\beta [T_{\alpha\beta}(E) f_\beta(E)] \right\}, \quad (3.14)$$

onde $R_{\alpha\alpha}(E) = \text{Tr} [S_{\alpha\alpha}^\dagger(E) S_{\alpha\alpha}(E)]$ é a probabilidade total de reflexão de volta para o contato α , $T_{\alpha\beta}(E) = \text{Tr} [S_{\alpha\beta}^\dagger(E) S_{\alpha\beta}(E)]$ é a probabilidade total de transmissão do contato

β para o contato α e $f_\alpha(E)$ e $f_\beta(E)$ são as funções de distribuição dos elétrons nos contatos α e β , respectivamente. As matrizes $S_{\alpha\alpha}$ e $S_{\alpha\beta}$ têm dimensões $M_\alpha \times M_\alpha$ e $M_\alpha \times M_\beta$, respectivamente, e são submatrizes de S .

A expressão (3.14) foi derivada para modos transversos sem degenerescência de spin. Portanto, se as sub-bandas forem degeneradas em spin devemos multiplicar a expressão acima por 2. Como trabalharemos com sub-bandas degeneradas em spin, incluiremos essa degenerescência nos elementos de G daqui para frente.

Os quase níveis de Fermi μ_α são dados por $\mu_\alpha = \mu_0 + eV_\alpha$, onde μ_0 é o potencial químico de equilíbrio. Como os quase níveis de Fermi diferem pouco do potencial químico de equilíbrio, então podemos escrever a função distribuição no contato α $f_\alpha(E)$ como

$$f_\alpha(E) = \left(\frac{df}{d\mu} \right)_{\mu=\mu_0} (\mu_\alpha - \mu_0) = - \left(\frac{df}{dE} \right)_{eq} eV_\alpha.$$

Com isso, reescrevemos a corrente nos contato α

$$I_\alpha = \frac{2e^2}{h} \int dE \left(-\frac{df}{dE} \right) \left\{ [M_\alpha(E) - R_{\alpha\alpha}(E)] V_\alpha - \sum_\beta T_{\alpha\beta}(E) V_\beta \right\}. \quad (3.15)$$

Com as expressões (3.15) e (3.11) podemos escrever os elementos da matriz de condutância como

$$G_{\alpha\alpha} = \frac{2e^2}{h} \int dE \left(-\frac{df}{dE} \right) [M_\alpha(E) - R_{\alpha\alpha}(E)] \quad (3.16)$$

e

$$G_{\alpha\beta} = \frac{2e^2}{h} \int dE \left(-\frac{df}{dE} \right) T_{\alpha\beta}(E). \quad (3.17)$$

No limite degenerado $f = \mathcal{G}(E_F - E)$, então $(-df/dE) = \delta(E - E_F)$, e (3.15) pode ser escrita como

$$I_\alpha = \frac{2e^2}{h} \left\{ [M_\alpha(E_F) - R_{\alpha\alpha}(E_F)] V_\alpha - \sum_\beta T_{\alpha\beta}(E_F) V_\beta \right\}. \quad (3.18)$$

Assim, no limite degenerado, os elementos da matriz de condutância são dados por

$$G_{\alpha\alpha} = \frac{2e^2}{h} [M_\alpha(E_F) - R_{\alpha\alpha}(E_F)], \quad (3.19)$$

$$G_{\alpha\beta} = -\frac{2e^2}{h} T_{\alpha\beta}(E_F). \quad (3.20)$$

Como os elementos da matriz G são obtidos dos elementos da matriz S , então, as propriedades da matriz S determinam as propriedades da Matriz G . Usando as relações entre os elementos da matriz de espalhamento, mostradas no apêndice A, podemos determinar que os elementos da matriz G obedecem a regra de soma

$$\sum_{\beta} G_{\alpha\beta} = \sum_{\beta} G_{\beta\alpha}, \quad (3.21)$$

que garante a conservação da corrente, e a regra de transposição associada à inversão do campo magnético

$$\left[G_{\alpha\beta} \right]_{+B} = \left[G_{\beta\alpha} \right]_{-B}, \quad (3.22)$$

que vem da invariância do Hamiltoniano quando invertemos o momento e o campo magnético simultaneamente.

Capítulo 4 - Elementos de um Interferômetro Eletrônico

Nos capítulos anteriores, apresentamos os conceitos básicos necessários para se entender o regime de transporte balístico. Daqui para frente, usaremos tais conceitos para explicar como é possível fabricar dispositivos que funcionem como interferômetros eletrônicos.

Para construir um interferômetro óptico, precisamos, essencialmente, de um feixe de luz coerente e de espelhos semitransparentes. Analogamente, descreveremos como se produz um feixe coerente de elétrons — por meio de estados de borda no regime Hall quântico — e como se fabricam espelhos semitransparentes para elétrons — utilizando contatos pontuais quânticos.

4.1 - Regime Hall Quântico

O efeito Hall clássico é uma técnica básica de caracterização de semicondutores. Descreveremos esse efeito para uma amostra que contém um 2DEG. Para as medidas, a amostra é processada, normalmente, como dispositivo na forma de uma ponte Hall, representada na figura 4.1.

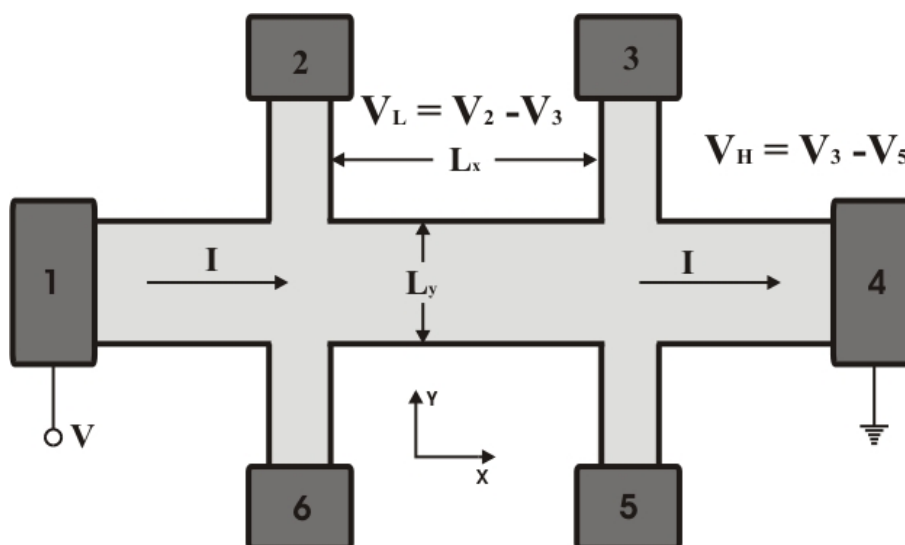


Figura 4.1. Representação esquemática de uma ponte Hall com seis contatos numerados de 1 a 6.

Um campo magnético constante e uniforme, de módulo B é aplicado perpendicularmente ao plano do dispositivo, cujo canal de condução tem largura L_y e comprimento L_x . Com uma corrente elétrica I , constante, através desse canal, mede-se a tensão longitudinal V_L e a tensão Hall V_H em função do campo magnético. Em campos magnéticos pouco intensos, a tensão Hall é proporcional ao campo magnético e a inclinação da reta obtida fornece a densidade n_s de portadores da amostra:

$$n_s = \frac{I}{e} \left(\frac{dV_H}{dB} \right)^{-1}.$$

A mobilidade está relacionada com a resistividade $\rho_{xx} = V_L L_y / I L_x$ pela relação:

$$\mu = \frac{1}{en_s \rho_{xx}} = \frac{I L_x}{n_s V_L L_y},$$

e pode, então, ser obtida com as medidas da tensão longitudinal no regime de campo magnético de baixa intensidade.

No entanto, em baixas temperaturas e em campos magnéticos intensos, uma série de oscilações é observada na tensão longitudinal em função do campo magnético, enquanto a tensão Hall apresenta uma série de platôs. Cada platô corresponde a uma resistência Hall $R_H = V_H / I$ dada por:

$$R_H = \frac{h}{2e^2} \frac{I}{N},$$

onde $N = 1, 2, 3, \dots$. Esse efeito é chamado de efeito Hall quântico e as oscilações da tensão longitudinal são conhecidas como oscilações Shubnikov-de Haas.

Para explicar esses fenômenos usaremos o modelo quântico desenvolvido, na seção 2.2 para o gás bidimensional de elétrons confinado e o formalismo desenvolvido na seção 3.2 para um dispositivo com vários contatos, que nesse caso é a ponte Hall. Vimos que, quando o 2DEG é confinado por um campo magnético intenso e um potencial $U(y)$, ocorre a formação das sub-bandas magneto-elétricas

$$E(n, k) \approx \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c + U(y_k), \quad (4.1)$$

associadas aos auto-estados dados pela equação (2.10):

$$\Psi_{n,k}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{L_x}} \exp(ikx) \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{1}{\pi l_B^2} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{1}{2l_B^2} (y + y_k)^2 \right] H_n \left(\frac{y + y_k}{l_B} \right). \quad (4.2)$$

De forma análoga à que foi feita na seção 3.2 trataremos o transporte na ponte Hall como um problema de espalhamento, mostrado na figura 4.2. Usaremos os auto-estados dados pela equação (4.2) para escrever os estados de espalhamento no regime Hall quântico. Esses estados são dados pelas equações (3.12) e (3.13), onde substituímos $\exp(ik_{\beta n}x_{\beta})\Phi_{\beta n}(y_{\beta})$ por $\Psi_{k,n}(x_{\beta},y_{\beta})$ dado pela equação (4.2). Como temos estados de espalhamento, então a condutância na ponte Hall, no limite degenerado, é dada pelas equações:

$$G_{\alpha\alpha} = \frac{2e^2}{h} [M_{\alpha}(E_F) - R_{\alpha\alpha}(E_F)]$$

e

$$G_{\alpha\beta} = -\frac{2e^2}{h} T_{\alpha\beta}(E_F),$$

obtidas na seção 3.2.

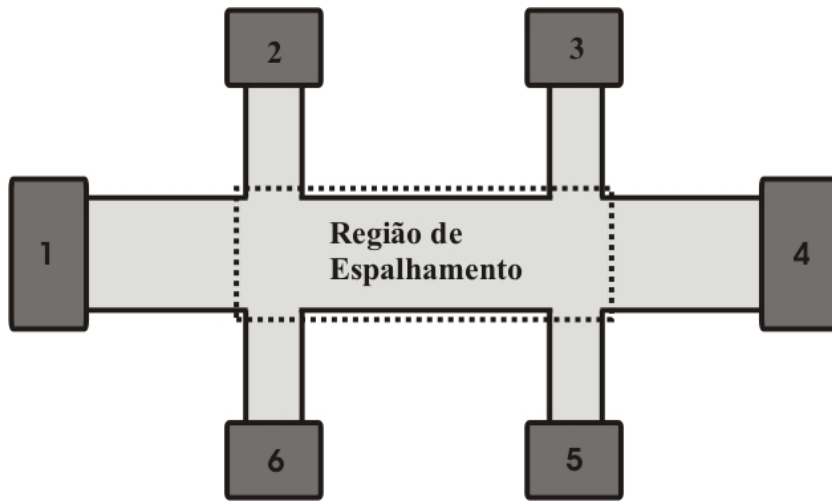


Figura 4.2. Definição da região de espalhamento da ponte Hall..

Assim, para conhecer a matriz G da ponte Hall, precisamos encontrar sua matriz de espalhamento na energia igual à E_F , da qual obteremos $R_{\alpha\alpha}(E_F)$ e $T_{\alpha\beta}(E_F)$. Para isso, vamos supor uma situação de campo magnético fixo, em que a energia de Fermi não coincide com a energia de nenhum nível de Landau de *bulk*. Assim, devemos ter em mente que os estados que têm energia igual à E_F são estados de borda e que os estados em lados opostos do canal têm velocidades com sentidos opostos. No meio do canal, existem apenas

os estados de Landau de *bulk* ocupados. Dessa forma, só existem canais de condução entre dois contatos que compartilham uma mesma borda na região de espalhamento.

Na figura 4.3, está representada uma ponte Hall em que apenas dois níveis de Landau estão preenchidos. Os canais de borda são formados pelos estados com energia E_F . Vamos nos guiar por essa figura para determinar a matriz de espalhamento. Para simplificar a notação, daqui para frente não vamos explicitar a dependência em energia da matriz S quando o valor da energia for E_F .

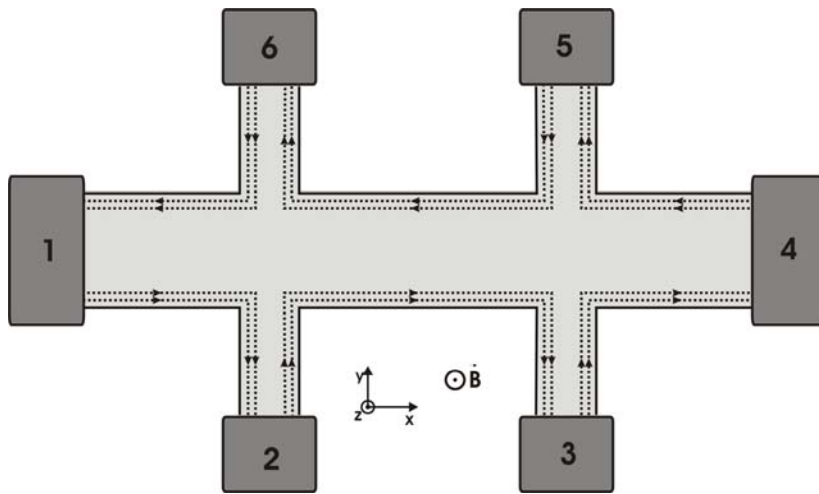


Figura 4.3. Formação dos estados de borda (linhas pontilhadas) em uma ponte Hall sob ação de um campo magnético \mathbf{B} .

Temos seis contatos e cada um deles tem ν canais de condução, onde ν é o fator de preenchimento dos níveis de Landau. Assim a matriz de espalhamento tem $(6 \times \nu)^2$ elementos. Podemos perceber, pela figura, que não há espalhamento entre estados que entram e que saem de um contato, pois eles estão em bordas opostas, então todos os elementos do tipo $s_{\alpha\alpha, mn}$ são nulos. Os outros elementos, do tipo $s_{\alpha\beta, mn}$, são não nulos apenas se houver canais de borda que saem do contato β em direção ao contato α . Na ponte Hall mostrada na figura 4.3, isso ocorre apenas se $\alpha = \beta + 1$ ou para $\beta = 6$ e $\alpha = 1$. Assim, dos $(6 \times \nu)^2$ elementos da matriz S , apenas $6 \times \nu^2$ podem ser diferentes de zero. Não precisamos nos preocupar com o valor desses elementos, pois estamos interessados nas probabilidades totais de transmissão entre dois contatos:

$$T_{\alpha\beta} = Tr\left(S_{\alpha\beta}^\dagger S_{\alpha\beta}\right) = \sum_n \sum_m |s_{\alpha\beta, mn}|^2.$$

Uma matriz S apresenta a seguinte propriedade:

$$\sum_{\alpha} \sum_m |s_{\alpha\beta, mn}|^2 = I = \sum_{\beta} \sum_n |s_{\alpha\beta, mn}|^2.$$

Como $s_{\alpha\beta, mn}$ só é diferente de zero se α for o contato que segue o contato β , quando percorremos os contatos no sentido horário, então

$$\sum_m |s_{\alpha\beta, mn}|^2 = \delta_{\alpha, \beta+1} = \sum_n |s_{\alpha\beta, mn}|^2.$$

Assim, podemos escrever $T_{\alpha\beta}$ como

$$T_{\alpha\beta} = \sum_n \delta_{\alpha, \beta+1} = \nu \delta_{\alpha, \beta+1},$$

onde ν é o fator de preenchimento.

Com isso, temos todos os elementos da matriz de condutância. Eles são dados por:

$$G_{\alpha\alpha} = \frac{2e^2}{h} \times \nu;$$

$$G_{\alpha\beta} = -\left(\frac{2e^2}{h} \times \nu\right) (\delta_{\alpha, \beta+1})$$

onde α e β variam ciclicamente pelo índice dos contatos.

Portanto, a equação matricial que relaciona a corrente e a tensão elétrica nos vários contatos é

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \frac{2e^2}{h} \begin{bmatrix} \nu & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nu \\ -\nu & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nu & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\nu & \nu \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix}.$$

Usando essa matriz podemos determinar a resistência elétrica que é medida entre qualquer par de contatos do circuito. Primeiro, escolhemos os contatos entre os quais passa a corrente. Como medimos apenas diferenças de potencial, podemos atribuir a qualquer um dos contatos um potencial zero. Os demais potenciais V_{α} são, então, determinados usando-se a condição de que $I_{\alpha} = 0$ para todos os contatos α por onde não circula corrente.

Assim, na configuração mostrada na figura 4.1 usamos as condições:

$$V_4 = 0,$$

$$V_1 = V,$$

$$I_1 = -I_4 = I$$

e

$$I_2 = I_3 = I_5 = I_6 = 0$$

Dessa forma, temos

$$\begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2e^2}{h} \begin{bmatrix} v & 0 & 0 & 0 & 0 & -v \\ -v & v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -v & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -v & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -v & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -v & v \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V \\ V_2 \\ V_3 \\ 0 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix}.$$

Logo:

$$V_2 = V = V_3,$$

$$V_5 = V_6 = 0$$

e

$$I = \frac{2e^2 v}{h} (V - V_6) = \frac{2e^2 v}{h} V_3 = \frac{2e^2 v}{h} V.$$

Portanto, obtemos, para essa situação,

$$R_L = \frac{V_2 - V_3}{I} = 0$$

e

$$R_H = \frac{V_3 - V_5}{I} = \frac{h}{2e^2 v},$$

que são os resultados obtidos no efeito Hall quântico.

O ponto mais importante para explicar o efeito Hall quântico, segundo Büttiker^[4.1], é exatamente a impossibilidade de um elétron ser retroespalhado, tendo a direção de seu momento invertida. Como já vimos, não há estados disponíveis para levar o elétron de uma borda à outra da amostra. Assim, os elétrons podem ser espalhados entre canais em uma mesma borda, no entanto eles não podem ser retroespalhados, pois para isso eles teriam que ir de uma borda para a outra da amostra, o que não é possível. Dessa forma, os estados de uma borda são ocupados por elétrons que têm origem em apenas um contato e, por isso, eles são caracterizados por um único potencial eletroquímico.

Ainda segundo Büttiker^[4.1], quando os contatos não se comportam da forma ideal descrita no capítulo 3 então, a quantização da resistência Hall e da resistência longitudinal se modifica. Dessa forma, medidas de efeito Hall servem para testar a qualidade dos contatos do dispositivo.

Feixe de elétrons

Mostraremos, em seguida, que nos dispositivos que operam como interferômetros de elétrons, são os canais de borda que funcionam como feixes de elétrons. Para ter apenas um feixe, devemos trabalhar no regime Hall quântico, com um fator de preenchimento $\nu = 1$. Nessa condição, podemos escrever a corrente nos contatos como

$$I_\alpha = \sum_\beta G_{\alpha\beta} V_\beta = \frac{2e^2}{h} \left[(1 - |s_{\alpha\alpha}|^2) V_\alpha - \sum_{\beta \neq \alpha} (|s_{\alpha\beta}|^2 V_\beta) \right].$$

Novamente, usamos a propriedade da matriz S :

$$\sum_\alpha \sum_m |s_{\alpha\beta, mn}|^2 = I = \sum_\beta \sum_n |s_{\alpha\beta, mn}|^2,$$

que no caso de uma única sub-banda preenchida, $m = n = 1$, pode ser escrita como

$$\sum_\alpha |s_{\alpha\beta}|^2 = I = \sum_\beta |s_{\alpha\beta}|^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_\alpha &= \frac{2e^2}{h} \left[\left(\sum_\beta |s_{\alpha\beta}|^2 - |s_{\alpha\alpha}|^2 \right) V_\alpha - \sum_{\beta \neq \alpha} (|s_{\alpha\beta}|^2 V_\beta) \right] \\ &= \frac{2e^2}{h} \left[\sum_\beta |s_{\alpha\beta}|^2 V_\alpha - \sum_\beta (|s_{\alpha\beta}|^2 V_\beta) \right]. \end{aligned}$$

Logo

$$I_\alpha = \frac{2e^2}{h} \sum_\beta \left[|s_{\alpha\beta}|^2 (V_\alpha - V_\beta) \right], \quad (4.3)$$

ou

$$I_\alpha = \frac{2e}{h} \sum_\beta \left[|s_{\alpha\beta}|^2 (\mu_\alpha - \mu_\beta) \right]. \quad (4.4)$$

Vemos, então, que os estados responsáveis pela corrente resultante no sistema têm energia em uma faixa cujos limites são o maior e o menor dos potenciais eletroquímicos dos contatos. Como esses potenciais têm valor sempre próximo ao valor de E_F , então a energia

dos estados que geram corrente está dentro de uma pequena faixa em torno da energia de Fermi. Além disso, os canais de borda estão espacialmente localizados. A corrente se propaga em equipotenciais dadas por:

$$U(x, y) = E_F - \frac{l}{2} \hbar \omega_c \quad (4.5)$$

onde $U(x, y)$ é o potencial que define a geometria do dispositivo. Assim, cada canal de borda tem uma extensão espacial transversa da ordem de l_B em torno da linha dada pela equação (4.5).

Esses canais atuam, então, como feixes de elétrons com energia restrita a uma faixa $\Delta\mu$ e com uma extensão transversa da ordem de l_B .

A coerência do feixe de elétrons formado por um canal de borda num dispositivo está relacionada com a qualidade da amostra na qual ele foi construído e com as condições nas quais ele opera. Como já vimos, é possível construir dispositivos cujas dimensões são menores que o livre caminho médio do material. Assim, trabalhando em baixas temperaturas e com baixas tensões aplicadas, podemos garantir que o comprimento de coerência dos elétrons seja maior que as dimensões do dispositivo.

4.2 - Contato Pontual Quântico — QPC

Mostramos que para conseguir um feixe de elétrons coerente num dispositivo ele deve operar no regime Hall quântico. No entanto, para criar um interferômetro precisamos também, de um divisor de feixe. Devemos introduzir algum elemento no sistema que torne possível o espalhamento de elétrons entre canais localizados em bordas opostas do sistema. Esse elemento será o QPC.

Um QPC é formado a partir de dois *gates* metálicos depositados sobre o canal de condução, como mostrado na figura 4.4. Uma diferença de potencial negativa aplicada nos *gates*, em relação ao 2DEG, modifica a forma do potencial que confina os elétrons no canal de condução.

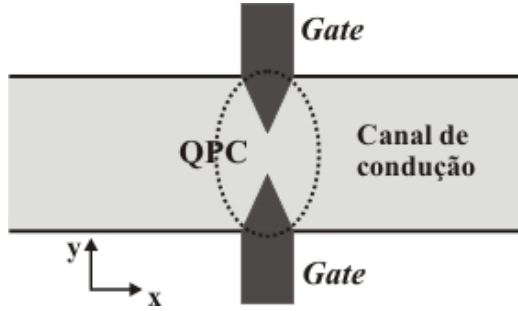


Figura 4.4. Representação esquemática da geometria dos *gates* metálicos sobre o canal de condução para a formação de um contato pontual quântico.

Várias publicações investigam o transporte através de QPC's em sistemas submetidos à ação de campos magnéticos de várias intensidades^{[4.2], [4.3], [4.4], [4.5], [4.6]}. A partir dessas referências, podemos dizer que, se a distância entre os gates é grande, ou se queremos uma primeira aproximação, então o potencial do QPC na direção transversa, $U(y)$, pode ser descrito por um poço quadrado. No entanto, Büttiker^[4.7] ressalta que o QPC é induzido eletrostaticamente e por isso o potencial deve ser uma função suave. Assim quando o QPC é estreito, ele pode ser descrito por um potencial em forma de sela^{[4.5], [4.6]}.

Como vamos trabalhar com um único nível de Landau preenchido, queremos que a distância entre os gates seja pequena, pois o potencial do QPC tem que aproximar os canais em bordas opostas para que possa ocorrer reflexão. Assim, estamos interessados na descrição do QPC como um potencial de sela.

Büttiker^[4.7] discute o problema geral de espalhamento por um potencial de sela dado pela função:

$$V(x, y) = V_0 - \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2,$$

onde V_0 é o potencial do ponto de sela e a curvatura dos potenciais nas direções x e y é expressa por meio das frequências ω_x e ω_y , respectivamente. Nesse potencial também se formam sub-bandas, assim temos um número de canais de condução igual ao número de sub-bandas cuja energia mínima $E_n = V_0 + \hbar\omega_y(n + \frac{1}{2})$ é menor que E_F . Büttiker apresenta resultados para a probabilidade de transmissão entre dois canais $T_{\alpha\beta}$ na presença de campo magnético. Nessa situação, $T_{\alpha\beta} \neq 0$ só para $\alpha = \beta$, ou seja, em um potencial em forma de sela não ocorre espalhamento entre canais diferentes. Para o caso de campo magnético intenso ($\omega_c > \omega_x, \omega_y$) existe mais uma peculiaridade. Apenas um canal de condução,

chamado de γ , tem probabilidade de transmissão $0 < T_\gamma < 1$; canais com índice $\alpha > \gamma$ são completamente refletidos, e canais com índice $\alpha < \gamma$ são completamente transmitidos.

Podemos controlar qual o canal será parcialmente refletido e qual sua probabilidade de transmissão variando a tensão aplicada nos *gates* do QPC. Isso mostra que o QPC pode servir como um semi-espelho, mas apenas para um canal. Como estamos interessados na situação em que existe apenas um canal de condução no dispositivo, então o QPC pode ser usado como semi-espelho.

Nos interferômetros eletrônicos o transporte é coerente, conseqüentemente podemos descrever o QPC por uma matriz de espalhamento S^{QPC} . Os elementos de uma matriz S são números complexos relacionados entre si, portanto as ondas refletidas e transmitidas pelo QPC sofrem variações inter-relacionadas de amplitude e de fase. Assim, vamos encontrar as relações entre os elementos de S^{QPC} , pois elas serão úteis quando for necessário calcular a matriz S de um dispositivo onde existam QPC's.

Como já vimos, para ter apenas um feixe de elétrons no interferômetro, trabalhamos no regime Hall quântico com fator de preenchimento $\nu = 1$. Nessa situação, o QPC pode receber apenas dois feixes incidentes, um vindo de cada lado, como mostra a figura 4.5.

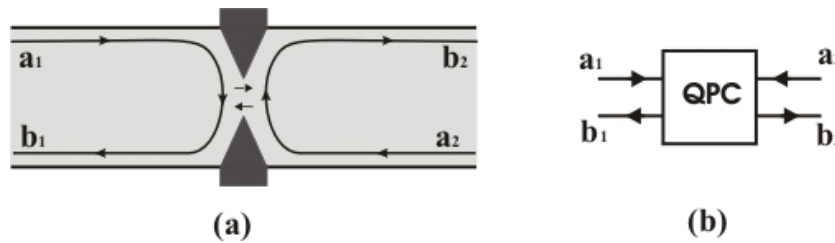


Figura 4.5. (a) Transmissão e reflexão de um estado de borda pelo QPC. (b) Representação esquemática de um QPC que recebe uma onda de cada lado.

As amplitudes das ondas incidentes a_1 e a_2 estão relacionadas com as amplitudes das ondas que saem do QPC b_1 e b_2 , pela equação matricial

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & t' \\ t & r' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Sabemos que os elementos da matriz S obedecem à regra de soma

$$\sum_{\alpha} |s_{\alpha\beta}|^2 = I = \sum_{\beta} |s_{\alpha\beta}|^2,$$

assim, temos:

$$|r|^2 + |t|^2 = R + T = 1,$$

$$|r'|^2 + |t'|^2 = R' + T' = 1,$$

$$|r'|^2 + |t|^2 = R' + T = 1,$$

e

$$|r|^2 + |t'|^2 = R + T' = 1.$$

De onde podemos extrair

$$R = R' \quad (4.6)$$

e

$$T = T' \quad (4.7)$$

Além disso, $S^\dagger S = SS^\dagger = I$. Logo, temos mais 1 relação entre os elementos de S^{QPC}

$$r^* t + r' t'^* = 0 = r t^* + r'^* t' \Rightarrow r^* t = -r' t'^* \quad (4.8)$$

Se quisermos evidenciar as fases introduzidas pela reflexão ou pela transmissão basta escrever $r = \sqrt{R} e^{i\delta_r}$, $r' = \sqrt{R'} e^{i\delta_{r'}}$, $t = \sqrt{T} e^{i\delta_t}$ e $t' = \sqrt{T'} e^{i\delta_{t'}}$.

Usando as relações (4.6), (4.7) e (4.8), podemos escrever a seguinte relação entre as fases

$$(\delta_t - \delta_r) = (\delta_{t'} - \delta_{r'}) \pm \pi$$

Vamos convencionar que a parte do feixe que é transmitida não sofre variação de fase, ou seja, $\delta_t = \delta_{t'} = 0$ e que a fase adquirida na reflexão é igual independente do lado em que o feixe incida, logo $\delta_r = \delta_{r'} = \pm \pi/2$. Com isso, podemos escrever

$$t = t^* = t' = t'^* = \sqrt{T} \quad (4.9)$$

e

$$r^* = -r' = -i\sqrt{R} = \sqrt{R} e^{-i\frac{\pi}{2}}. \quad (4.10)$$

Encontramos, então, todas as relações entre os elementos de S^{QPC} e podemos escrevê-la, em função da probabilidade de transmissão T , como

$$S^{QPC} = \begin{bmatrix} i\sqrt{(1-T)} & \sqrt{T} \\ \sqrt{T} & i\sqrt{(1-T)} \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

O valor de T depende da tensão nos *gates* do QPC e pode ser ajustado para valores entre 0 e 1 de acordo com a necessidade. Assim, a matriz S^{QPC} , dada pela equação (4.11), tem toda

informação necessária para descrever a ação de um QPC num dispositivo em que apenas um nível de Landau está preenchido.

Capítulo 5 - Interferência – Medidas de Corrente e de Ruído

Temos, então, os elementos necessários para construir um dispositivo que funciona como um interferômetro. Os feixes de elétrons são os canais de borda e os divisores de feixe são os QPC. Basta criar um canal de condução com a geometria adequada e acrescentar os QPC nas regiões onde queremos dividir o feixe, para termos um interferômetro.

Para facilitar o entendimento, vamos fazer um paralelo entre interferômetros ópticos e interferômetros eletrônicos. Os vários interferômetros ópticos têm finalidades diversas. Em um interferômetro linear mede-se a intensidade da luz que sai dele em função de variações controladas na diferença de fase entre as ondas. Nos interferômetros de intensidade, medem-se correlações entre intensidades de feixes de luz. Os interferômetros eletrônicos devem ter funcionamento análogo ao dos interferômetros ópticos. Por isso, precisamos saber quais grandezas estão associadas à intensidade das ondas eletrônicas e à correlação entre as intensidades.

Primeiro, veremos que a fase dos feixes eletrônicos podem ser variadas pela ação de *gates* ou através do efeito Aharonov-Bohm. Em seguida, vamos mostrar que a corrente média nos contatos é sensível às variações de fase no interior do dispositivo, enquanto a correlação entre intensidades é obtida através de medidas de flutuações no valor da corrente em torno da média. Devemos ressaltar que, nos capítulos anteriores, usamos o termo corrente para referir à corrente média.

5.1 - Variações de Fase

Podemos variar a fase de um feixe de elétrons, em relação a outro, alterando o comprimento do caminho que ele percorre ou por meio do efeito Aharonov-Bohm.

Mudança de Caminho

Quando um elétron percorre um caminho C para ir de um ponto A a outro ponto B do dispositivo, ele adquire um fase dada por

$$\phi_{i,A,B} = \int_C k dl$$

onde k é o vetor de onda e a integral é calculada ao longo do caminho C . Nos interferômetros eletrônicos, os caminhos permitidos se localizam próximos às bordas dos dispositivos. Com isso, se mudarmos o formato dessas bordas, usando *gates*, então mudamos o caminho percorrido pelo elétron, como mostrado na figura 5.1.

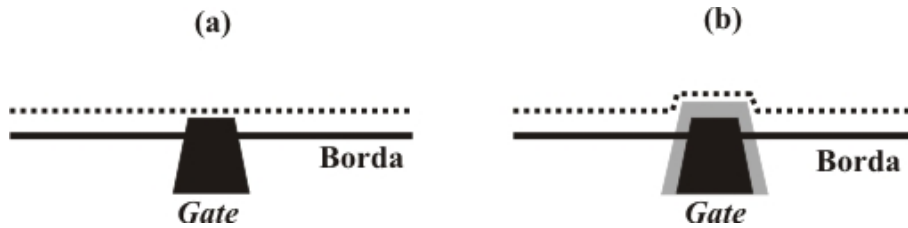


Figura 5.1. Ação de um *gate* próximo à borda do canal. (a) *Gate* inativo: nenhuma diferença de potencial foi aplicada entre o *gate* e o 2DEG e a posição do canal de borda é definida apenas pelo potencial da borda do dispositivo. (b) *Gate* ativo: com uma diferença de potencial negativa aplicada no *gate* em relação ao 2DEG, a posição dos canais de borda é definida pela soma dos potenciais do *gate* e da borda do dispositivo.

Efeito Aharonov-Bohm

Para descrever o efeito Aharonov-Bohm, precisamos da seguinte situação: um feixe de elétrons passa por um divisor gerando dois novos feixes. Esses feixes percorrem caminhos diferentes e depois se encontram, novamente, em outro divisor, como mostrado na figura 5.2. Quando a área delimitada por esses caminhos contém um fluxo magnético Φ_B , então os feixes ganham fases diferentes em cada percurso, com uma diferença de fase entre eles dada por $\Delta\varphi_{AB} = 2\pi\Phi_B/\Phi_0$.

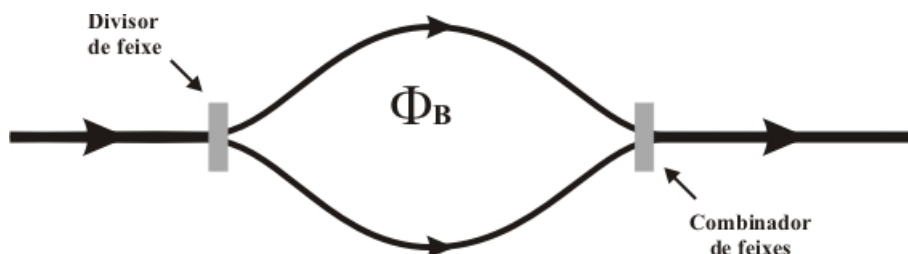


Figura 5.2. Em um divisor, um feixe se divide em dois outros que percorrem caminhos diferentes em torno de uma região onde existe um fluxo magnético. O combinador reúne novamente esses dois feixes.

5.2 - Corrente Média – Interferência entre Ondas

Como já vimos, a corrente média em um contato α de um dispositivo que opera no regime em que $\nu = I$, é dada por

$$I_\alpha = \frac{2e}{h} \sum_\beta \left[|s_{\alpha\beta}|^2 (\mu_\alpha - \mu_\beta) \right],$$

onde $s_{\alpha\beta}$ são os elementos da matriz de espalhamento que descreve esse dispositivo e μ_α e μ_β são os potenciais eletroquímicos nos contatos α e β , respectivamente. Cada elemento $s_{\alpha\beta}$ da matriz de espalhamento do dispositivo contém toda informação sobre as variações de fase e de intensidade do feixe transmitido do contato β para o contato α . Se o feixe incidente a partir de β é dividido, refletido, recombinado, etc, até chegar em α , então, o elemento de matriz $s_{\alpha\beta}$ deve conter toda essa informação. Assim, se estivermos implementando um interferômetro linear, medidas da corrente média em função da variação de fase revelam o padrão de interferência entre as ondas no dispositivo.

5.3 - Flutuações na Corrente – Correlação entre Intensidades

A correlação temporal $\langle gf \rangle$ entre duas funções $g(t)$ e $f(t)$ é definida como

$$\langle gf \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(\tau) f(\tau+t) d\tau.$$

Para $g(t) = f(t)$, $\langle g^2 \rangle$ é chamada de autocorrelação. Portanto, quando queremos medir a correlação entre duas correntes devemos considerar seus valores instantâneos e não médios como vínhamos fazendo até aqui. No entanto, podemos escrever a corrente dependente do tempo $I(t)$ como

$$I(t) = I + \Delta I(t), \quad (5.1)$$

onde I é a corrente média e $\Delta I(t)$ são as flutuações da corrente em torno da média. Assim, a correlação temporal $\langle I_\alpha I_\beta \rangle$ entre duas correntes $I_\alpha(t)$ e $I_\beta(t)$ pode ser escrita como

$$\langle I_\alpha I_\beta \rangle = \langle \Delta I_\alpha \Delta I_\beta \rangle - I_\alpha I_\beta. \quad (5.2)$$

Logo, a correlação entre as flutuações na corrente em dois contatos pode ser obtida da correlação entre as correntes, pois as duas diferem apenas por uma constante.

A correlação $\langle \Delta I_\alpha \Delta I_\beta \rangle_\nu$ entre as flutuações de duas correntes em uma banda de frequência $\Delta\nu$ em torno da frequência ν está relacionada com a densidade espectral $S_{\Delta I_\alpha \Delta I_\beta}(\nu)$ por

$$S_{\Delta I_\alpha \Delta I_\beta}(\nu) = \frac{\langle \Delta I_\alpha \Delta I_\beta \rangle_\nu}{\Delta\nu}. \quad (5.3)$$

A correlação entre correntes nos interferômetros de elétrons será encontrada, então, medindo-se a densidade espectral das flutuações dessas correntes em torno de seus valores médios. As flutuações na corrente têm duas fontes principais: o ruído de tiro e o ruído térmico, onde ruído quer dizer flutuações em torno do valor médio.

Ruído de tiro e ruído térmico clássicos

O ruído de tiro, ou *shot noise*, é devido ao fato de a corrente elétrica ser gerada pelo movimento de cargas discretas^[5.1]. Classicamente, esse ruído está associado a uma corrente gerada por uma fonte que emite elétrons obedecendo a uma distribuição de Poisson. Nesse caso, a sua densidade espectral S_e é dada por

$$S_e = 2eI, \quad (5.4)$$

onde e é a carga do elétron e I é a corrente média.

O ruído térmico^[5.1], também conhecido com ruído Johnson ou Johnson-Nyquist^[5.2],^[5.3], é uma consequência do movimento aleatório das cargas devido à energia térmica. Diferente do ruído de tiro, ele ocorre mesmo em equilíbrio, quando não há transporte elétrico no dispositivo e é caracterizado por uma densidade espectral

$$S_T = 4k_B T G, \quad (5.5)$$

onde k_B é a constante de Boltzman T é a temperatura e G é a condutância do dispositivo.

Ruído de tiro e ruído térmico quânticos

Os ruídos de tiro e térmico quânticos^[5.4] são as flutuações nas quais estamos interessados pois, no regime de transporte coerente eles expressam correlações entre as correntes num dispositivo, e são exatamente essas correlações que precisamos medir em um interferômetro de elétrons.

As relações que serão apresentadas nesta seção são baseadas nos resultados de Büttiker^[5.5] para as autocorrelações e para as correlações entre flutuações nas correntes em um condutor no regime de transporte coerente. Ele realizou os cálculos aplicando as técnicas de segunda quantização aos estados de espalhamento, apresentados no capítulo 3. Os resultados podem ser aplicados a dispositivos com vários terminais e com várias sub-bandas nos condutores balísticos. Além disso, eles servem tanto para sub-bandas elétricas quanto para sub-bandas magneto-elétricas, pois são independentes da forma das funções de onda transversais nos condutores balísticos. No entanto, como estamos interessados no regime Hall quântico com fator de preenchimento igual a 1, vamos apresentar as expressões de Büttiker já adaptadas para o caso em que há apenas um modo nos condutores balísticos.

As densidades espectrais serão representadas por $\langle \Delta I_\alpha \Delta I_\beta \rangle_{\Delta\nu}$, onde $\Delta\nu$ é a banda de frequência da medida e não fazemos menção ao ν porque as densidades espectrais são independentes do seu valor. O resultado geral^[5.5] para as densidades espectrais das correlações entre as correntes nos contatos dos dispositivos é o seguinte

$$\langle \Delta I_\alpha \Delta I_\beta \rangle_{\Delta\nu} = 2G_0 \sum_{\delta, \gamma} \int dE \left\{ \left[\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\beta\gamma} \delta_{\beta\delta} s_{\alpha\gamma}^* s_{\alpha\delta} - \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\alpha\delta} s_{\beta\delta}^* s_{\beta\gamma} + s_{\alpha\gamma}^* s_{\alpha\delta} s_{\beta\delta}^* s_{\beta\gamma} \right] \times f_\gamma(E) [1 - f_\delta(E)] \right\}, \quad (5.6)$$

onde $G_0 = 2e^2/h$, $s_{\alpha\beta}$ são os elementos da matriz S do dispositivo e f_γ é a função de distribuição no contato γ .

No caso dos interferômetros, a expressão acima é facilmente calculada, pois vários termos da matriz de espalhamento são nulos. Além disso, é possível estudar dois limites nos quais a expressão (5.6) fica simples; o limite de equilíbrio, quando os potenciais eletroquímicos de todos os contatos são iguais e o limite de temperatura nula.

Flutuações de equilíbrio

Na situação de equilíbrio, os potenciais eletroquímicos de todos os contatos são iguais, portanto todos os modos estão preenchidos de acordo com a mesma função de distribuição $f(E)$. O ruído é puramente térmico e decorre das flutuações na ocupação dos

estados que saem de um contato. Nesse caso, $\Delta I_\alpha(t) = I_\alpha(t)$ portanto, temos as seguintes densidades espectrais para as flutuações de equilíbrio

$$\langle (I_\alpha)^2 \rangle_{\Delta\nu} = 4k_B T G_0 \int dE \left(-\frac{df}{dE} \right) [1 - R_\alpha] \quad (5.7)$$

e

$$\langle I_\alpha I_\beta \rangle_{\Delta\nu} = -2k_B T G_0 \int dE \left(-\frac{df}{dE} \right) [T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}], \quad (5.8)$$

onde k_B é a constante de Boltzman, T é a temperatura, $R_\alpha = |s_{\alpha\alpha}|^2$, $T_{\alpha\beta} = |s_{\alpha\beta}|^2$ e $f(E)[1 - f(E)] = k_B T (-df/dE)$.

Reconhecemos nas equações (5.7) e (5.8) os elementos $G_{\alpha\alpha}$ e $G_{\alpha\beta}$ da matriz de condutância do dispositivo, encontrados no capítulo 3, (3.16) e (3.17). Podemos, então, escrever

$$\langle (I_\alpha)^2 \rangle_{\Delta\nu} = 4k_B T G_{\alpha\alpha}$$

e

$$\langle I_\alpha I_\beta \rangle_{\Delta\nu} = 2k_B T [G_{\alpha\beta} + G_{\beta\alpha}],$$

onde $G_{\alpha\alpha}$ é positivo e $G_{\alpha\beta}$ é negativo.

Vemos, então, que as flutuações de equilíbrio em um mesmo contato estão sempre correlacionadas e que essa correlação é positiva. As flutuações em dois contatos diferentes, no entanto, só estão correlacionadas se pelo menos um tiver probabilidade diferente de zero de transmitir para o outro, e essas correlações são sempre negativas.

As densidades espectrais das flutuações em equilíbrio são interessantes, pois através delas podemos obter a temperatura dos elétrons no dispositivo. Basta variar a reflexão para o contato α , que é $G_{\alpha\alpha}$, e medir $\langle (I_\alpha)^2 \rangle_{\Delta\nu}$. O resultado é uma reta cuja inclinação é $4k_B T$.

Flutuações de transporte no limite $T = 0$

Para que haja transporte, dois ou mais contatos devem ter potenciais eletroquímicos diferentes. Quando $T = 0$, o ruído térmico é completamente eliminado, e só temos ruído de tiro. As densidades espectrais dessas flutuações são^[5.5]

$$\langle (\Delta I_\alpha)^2 \rangle_{\Delta V} = 2G_0 \sum_{\delta, \gamma, \delta \neq \gamma} \int dE \left\{ \left[|s_{\alpha\delta}|^2 |s_{\alpha\gamma}|^2 \right] f_\gamma(E) [1 - f_\delta(E)] \right\} \quad (5.9)$$

e

$$\langle \Delta I_\alpha \Delta I_\beta \rangle_{\Delta V} = -2G_0 \int dE \left\{ \sum_\gamma s_{\alpha\gamma}^* s_{\beta\gamma} f_\gamma(E) \times \sum_\delta s_{\alpha\delta} s_{\beta\delta}^* f_\delta(E) \right\}. \quad (5.10)$$

Novamente, as autocorrelações são positivas e as correlações são negativas, pois o valor do termo entre chaves na segunda integral é sempre positivo, já que é a multiplicação de um número pelo seu complexo conjugado.

Em geral, quando construímos um dispositivo que funciona como interferômetro eletrônico, um dos contatos funciona como fonte – no qual o potencial eletroquímico é dado por $\mu_0 + eV$ – enquanto os outros contatos estão abertos ou aterrados. Sempre que $eV \gg k_B T$ podemos usar a aproximação expressa por (5.9) e (5.10), pois o ruído de tiro é predominante em relação ao ruído térmico.

Flutuações em um dispositivo de dois terminais

Vamos apresentar, agora, a expressão encontrada por Büttiker^[5.5] para a densidade espectral das flutuações na corrente em um dispositivo de dois terminais, onde há vários modos transversos.

Quando não há transporte a densidade espectral das flutuações é dada por

$$\langle I^2 \rangle_{\Delta V} = 4k_B T G \quad (5.11)$$

onde T é a temperatura e G é a condutância de um dispositivo de dois terminais obtida da equação (3.17). Esse valor é o mesmo que o do ruído térmico clássico, portanto existe uma correspondência entre os dois casos.

Para que haja transporte aplica-se uma diferença de potencial elétrico V entre os contatos. Nesse caso, $eV = \mu_1 - \mu_2$, e $I_1 = -I_2 = I = G_0 V T_{21}$ onde T_{21} é a probabilidade total de transmissão entre os contatos 1 e 2 dada por $T_{21} = \sum_n T_n$ onde T_n é a probabilidade de transmissão do modo n . Além disso, a regra de conservação da corrente implica em $\Delta I_1 = -\Delta I_2$, logo $\langle (\Delta I_1)^2 \rangle_{\Delta V} = \langle (\Delta I_2)^2 \rangle_{\Delta V} = -\langle \Delta I_1 \Delta I_2 \rangle_{\Delta V}$.

Para considerar apenas o ruído de tiro, usamos o limite em que $T = 0$. Nesse limite, $f_\gamma(E) = \mathcal{G}(\mu_\gamma - E)$, então se eV é pequeno em relação a E_F , a densidade espectral das flutuações é dada por

$$\langle (\Delta I)^2 \rangle_{\Delta V} = 2G_0 eV \sum_{n=1}^M T_n (1 - T_n). \quad (5.12)$$

onde M é o número total de modos no dispositivo.

Vemos, então, que só existe ruído se pelo menos um dos modos no dispositivo tiver probabilidade de transmissão diferente de zero e de um. Por isso, o ruído de tiro em condutores no limite degenerado é chamado de ruído de partição, pois ele só existe quando pelo menos um dos modos é parcialmente transmitido. Além disso, ele é dito subpoissoniano, pois é, em geral, menor que o ruído de tiro clássico, como mostra claramente a equação (5.12) se comparada à equação (5.4) onde $I = G_0 V \sum_n^M T_n$. No entanto, se $(1 - T_n) \approx 1$, então

$$\langle (\Delta I)^2 \rangle = 2G_0 eV \sum_{n=1}^M T_n = 2eI,$$

que é exatamente a expressão clássica para a densidade espectral do ruído de tiro. Essa coincidência entre os valores faz sentido, pois a expressão clássica é obtida para uma fonte que emite elétrons seguindo uma distribuição poissoniana. Esse tipo de emissão ocorre quando os elétrons têm que atravessar uma barreira de potencial muito elevada. Nessa situação, o preenchimento dos estados permitidos depois da barreira é muito pequeno, o que corresponde a situação em que $T_n \ll 1$ ou $(1 - T_n) \approx 1$.

Vamos considerar, agora, o ruído total na situação em que há transporte e $T \neq 0$. Para $k_B T$ e eV pequenos em relação à E_F , a densidade espectral das flutuações na corrente é dada, segundo Büttiker^[5.5], por

$$\langle (\Delta I)^2 \rangle_{\Delta V} = 2G_0 \sum_{n=1}^M \left[2k_B T T_n^2 + R_n T_n eV \coth \left(\frac{eV}{2k_B T} \right) \right]. \quad (5.13)$$

Essa expressão mostra que o comportamento do ruído em um dispositivo de dois terminais depende de suas características de transmissão e também da razão entre a diferença de potencial elétrico aplicada e a temperatura.

Vários experimentos^{[5.6]-[5.10]} comprovam a validade da expressão (5.13) para a densidade espectral do ruído em um dispositivo de dois terminais. Em todos esses

experimentos, o dispositivo é semelhante: um canal de condução é definido em uma amostra com gás bidimensional de elétrons de alta mobilidade onde depositam-se *gates* metálicos para formar um QPC, como mostrado na figura 5.3.

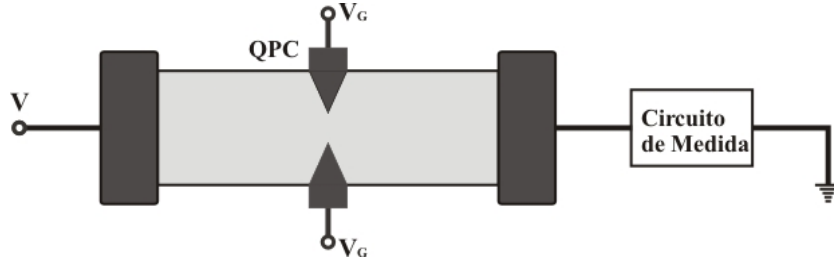


Figura 5.3: Dispositivo de dois terminais, com um QPC sobre o canal de condução, ligado a um circuito para medida de corrente e de ruído.

Num dispositivo desse tipo, a tensão V_G nos *gates* controla a probabilidade de transmissão dos modos através do QPC. Assim, medindo-se a condutância do dispositivo em função de V_G pode-se determinar a correspondência entre V_G e T_{21} .

Se V e T são fixas, o ruído depende apenas das probabilidades de transmissão dos modos. Quando $eV > 2k_B T$, em (5.13), o termo $\coth(eV/2k_B T) \approx 1$ assim, temos a seguinte dependência para o ruído

$$\left\langle (\Delta I)^2 \right\rangle_{\Delta\nu} \approx 4G_0 k_B T \sum_{n=1}^{N_{QPC}} T_n^2 + 2eG_0 V \sum_{n=1}^{N_{QPC}} T_n (1 - T_n), \quad (5.14)$$

onde N_{QPC} é o número de modos que têm probabilidade não nula de serem transmitido pelo QPC. Esse número diminui a medida que V_G vai ficando mais negativa. Para os modos $n < N_{QPC}$, $T_n = 1$, enquanto $T_{N_{QPC}} \propto V_G$. Assim, o primeiro termo à direita na equação (5.14) varia monotonicamente com V_G . O segundo termo, por sua vez, é proporcional à $T_{N_{QPC}} (1 - T_{N_{QPC}})$ e assim tem um valor máximo sempre que $T_{N_{QPC}} = 1/2$.

Reznikov et al.^[5,6] mediram o *excess noise* – a diferença entre o ruído com e sem corrente – em função de V_G , em um dispositivo como o descrito acima. Assim, eles esperavam encontrar uma densidade espectral que apresentasse o comportamento descrito apenas pelo segundo termo à esquerda, na equação (5.14),

$$\left\langle (\Delta I)^2 \right\rangle_{\Delta\nu}^{excess} \approx 2eG_0 V \sum_{n=1}^{N_{QPC}} T_n (1 - T_n).$$

Suas medidas foram feitas à $T = 1,5K$ e para valores de $V = V_{DS} = 0,5mV, 1mV, 1,5mV, 2mV$ e $3mV$ e os resultados estão mostrados na figura 5.4. Nesta figura, estão mostradas a condutância e a densidade espectral do *excess noise*, ambas em função da tensão nos *gates* do QPC.

As curvas que representam a densidade espectral do ruído têm picos em valores de V_G que correspondem a valores semi-inteiros de G_0 na medida da condutância, o que significa $T_{N_{QPC}} = 1/2$. Além dos picos, a medida da densidade espectral do *excess noise* apresenta um comportamento crescente em função de V_G . Reznikov et al. atribuíram esse comportamento ao ruído térmico gerado pelo aquecimento do gás de elétrons.

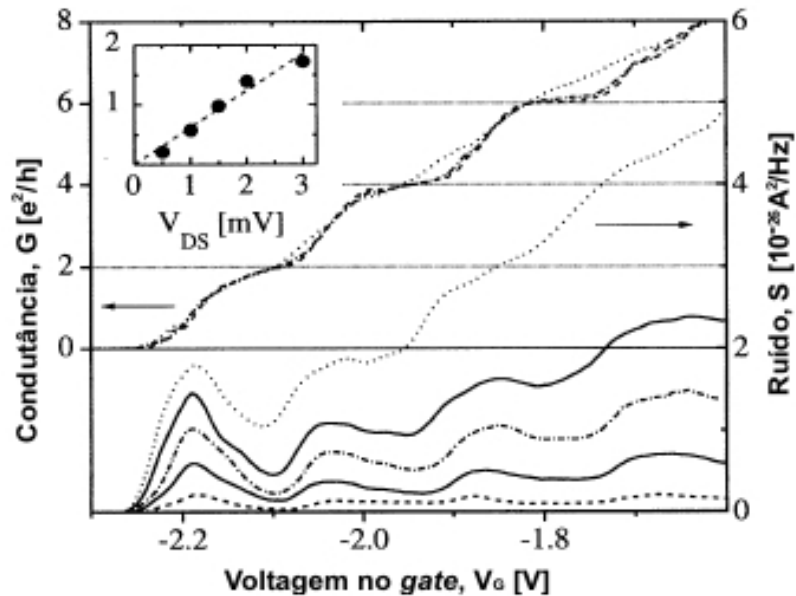


Figura 5.4: Medidas da condutância G e da densidade espectral do ruído S em função da tensão V_g aplicada nos *gates* do QPC. As curvas da medida do ruído estão mostradas para as tensões entre os contatos $V_{DS} = 0,5mV, 1mV, 1,5mV, 2mV$ e $3mV$, de baixo para cima, respectivamente. As medidas da condutância estão mostradas para $V_{DS} = 0,5mV, 1,5mV$ e $3mV$ (mesmo tipo de linha das curvas de ruído para os mesmos valores de V_{DS}). O detalhe no canto superior direito mostra a dependência da amplitude do primeiro pico com os valores de V_{DS} . A figura foi extraída de Reznikov, M et al. Temporal correlation of electrons: suppression of shot noise in a ballistic quantum point contact. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3340 - 3343 (1995).

Outra possibilidade para estudar o ruído no dispositivo do QPC é manter os valores de V_G e de T fixos e variar o valor da tensão elétrica aplicada ao canal. Nesse caso,

podemos identificar dois casos limites. Quando $2k_B T \gg eV$, temos apenas a contribuição do ruído térmico

$$\langle (\Delta I)^2 \rangle_{\Delta V} = 4G_0 k_B T \sum_n^{N_{QPC}} T_n = 4k_B T G,$$

que é independente da diferença de potencial entre os contatos. No entanto, quando $eV \gg 2k_B T$ a densidade espectral do ruído varia linearmente com V , como dado pela equação (5.14).

Kumar et al.^[5.7] mediram a temperatura T^* do ruído na corrente que atravessa o QPC em função de $V = V_{DS}$, com $N_{QPC} = 1$, onde $T^* = \langle (\Delta I)^2 \rangle_{\Delta V} / 4Gk_B$. Foram realizados dois conjuntos de medidas. Primeiro, manteve-se $T_l = 1/2$ e mediu-se T^* à temperaturas $T = 38mK$, $80mK$ e $180mK$. Como mostrado na figura 5.5, os valores medidos concordam bem com a curva teórica, obtida de (5.13) sem nenhum parâmetro de ajuste. Em seguida, manteve-se $T = 38mK$ e mediu-se T^* com $T_l = 1/6, 1/4, 1/2$ e $3/4$. Novamente, os resultados, mostrados na figura 5.6, concordam bem com a curva teórica.

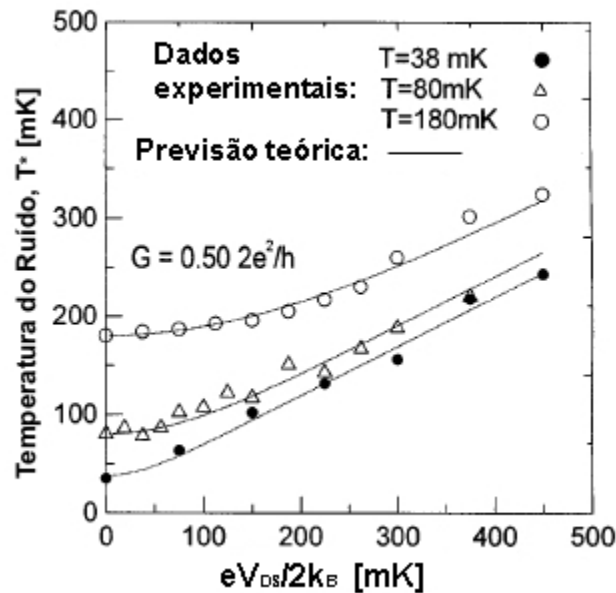


Figura 5.5. Temperatura do ruído T^* em função de $eV_{DS}/2k_B$ para $T_l = 1/2$ e temperaturas $T = 38mK$, $80mK$ e $180mK$. As linhas são curvas teóricas obtidas a partir da equação (5.13) para os respectivos valores de T e T_l . Figura extraída de Kumar, A. et al. Experimental test of the quantum noise reduction theory. *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2778 - 2781 (1996).

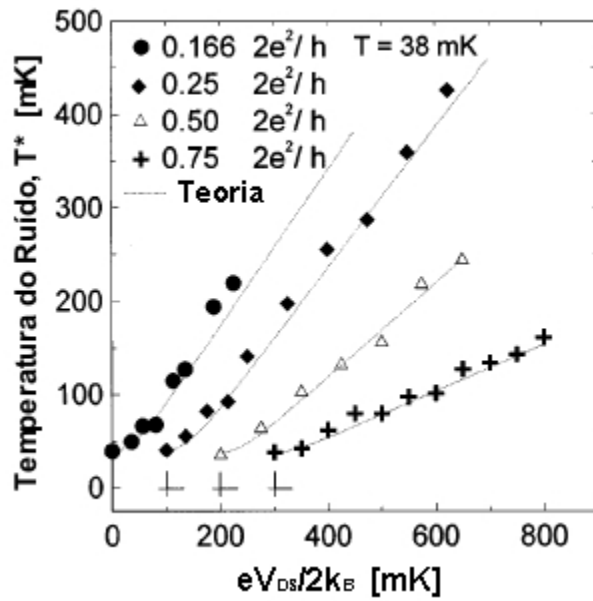


Figura 5.6. Temperatura do ruído T^* em função de $eV_{DS}/2k_B$ para temperatura $T = 38$ mK e para $G_0 T_1 = 0, 166G_0, 0, 25G_0, 0, 50G_0$ e $0, 75G_0$, de acordo com a legenda. As linhas são curvas teóricas obtidas a partir da equação (5.13) para os respectivos valores de T e T_1 . Figura extraída de Kumar, A. et al. Experimental test of the quantum noise reduction theory. *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2778 - 2781 (1996)

Capítulo 6 - Interferômetros

Nos capítulos anteriores foram apresentados os conceitos básicos necessários para se entender o funcionamento de um dispositivo que opere como um interferômetro eletrônico. Neste capítulo, vamos sugerir uma forma para se determinar a matriz de espalhamento do dispositivo quando este opera no regime Hall quântico com um único canal de borda. Em seguida, vamos apresentar alguns interferômetros que foram reportados na literatura. Por fim, vamos apresentar a proposta de um dispositivo cujo funcionamento deve ser análogo ao de um interferômetro de Fabry-Perot.

6.1 - Matriz de Espalhamento de um Interferômetro

Em um interferômetro eletrônico estamos interessados na dependência da corrente média com as variações de fase no dispositivo, ou com as correlações entre as flutuações nas correntes dos vários contatos. Essas informações são obtidas a partir dos elementos da matriz de espalhamento. Assim, precisamos determinar essa matriz.

Os interferômetros eletrônicos, aqui estudados, operam no regime Hall quântico com fator de preenchimento igual a um. Dessa forma, para encontrar os elementos da matriz S de um interferômetro, realizamos um procedimento semelhante àquele usado para encontrar a matriz de espalhamento para a ponte Hall. Primeiro, desenhamos o dispositivo e os canais de borda, que são parcialmente refletidos e transmitidos em um QPC quando o dispositivo está no regime Hall Quântico. Em seguida, escolhemos o sentido do campo magnético, que tem direção perpendicular ao 2DEG, e representamos a direção de circulação da corrente nos canais de borda de acordo com esse sentido.

Para determinar um elemento $s_{\alpha\beta}$, devemos somar a contribuição de todos os caminhos possíveis entre β e α . Se há um único caminho direto para o contato α , então $s_{\alpha\beta} = e^{i\phi_{\alpha\beta}}$, onde $\phi_{\alpha\beta}$ depende da distância do caminho percorrido para ir do contato α para o β . Se o caminho passa por um ou mais QPC's, então, além de ganhar uma fase associada à distância percorrida, a onda eletrônica deve ter sua amplitude e sua fase modificadas de acordo com a matriz de espalhamento do QPC, dada no capítulo 3. Outra possibilidade é um caminho que passa por uma curva fechada, onde pode-se circular n vezes antes de continuar

o percurso. Nesse caso, é como se existissem infinitos caminhos e todos devem ser considerados, sendo que, cada volta completa pela parte fechada do caminho acrescenta, além da fase que depende do perímetro do caminho, uma fase associada ao efeito Aharonov-Bohm, igual à $2\pi(AB/\phi_0)$, onde A é a área delimitada pelo caminho fechado, B é o campo magnético e $\phi_0 = h/e$.

Conhecendo os elementos da matriz S , as diferenças de potencial aplicadas entre os contatos e a temperatura de operação de um dispositivo, podemos prever o comportamento da corrente e do ruído em todos os seus contatos.

6.2 - Os Interferômetros Eletrônicos de Mach-Zehnder e de Hanbury

Brown-Twiss

Vamos apresentar nesta seção os resultados de alguns experimentos com interferômetros análogos aos interferômetros ópticos de Mach-Zehnder e de Hanbury Brown-Twiss. O primeiro é um interferômetro linear, enquanto o segundo é um interferômetro de intensidade.

Interferômetro eletrônico de Mach-Zehnder

O interferômetro eletrônico de Mach-Zehnder foi realizado experimentalmente por Ji et al.^[6.1]. O esquema óptico do interferômetro, o esquema do dispositivo e sua foto de microscopia eletrônica, estão mostrados na figura 6.1.

No interferômetro óptico, representado na figura 6.1(a), um feixe de luz monocromática incide no divisor de feixe $BS1$ e é dividido em dois. Após serem refletidos pelos espelhos $M1$ e $M2$, esses feixes são recombinados para novamente se dividirem em $BS2$, originando dois feixes que são detectados em $D1$ e $D2$. Quando a fase em um dos caminhos varia, os sinais detectados em $D1$ e $D2$ oscilam fora de fase. Quando nenhum fóton é perdido, a soma dos sinais de $D1$ e $D2$ é igual à intensidade do feixe incidente S .

O funcionamento do interferômetro eletrônico, mostrado nas figuras 6.1(b) e 6.1(c), é semelhante. Um canal de borda sai do contato S em direção ao QPC 1, onde se divide em dois novos canais que se propagam por bordas diferentes até o QPC 2, onde, novamente, se dividem. Cada canal que sai do QPC 2 vai em direção a um dos contatos que funcionam como detectores, $D1$ e $D2$.

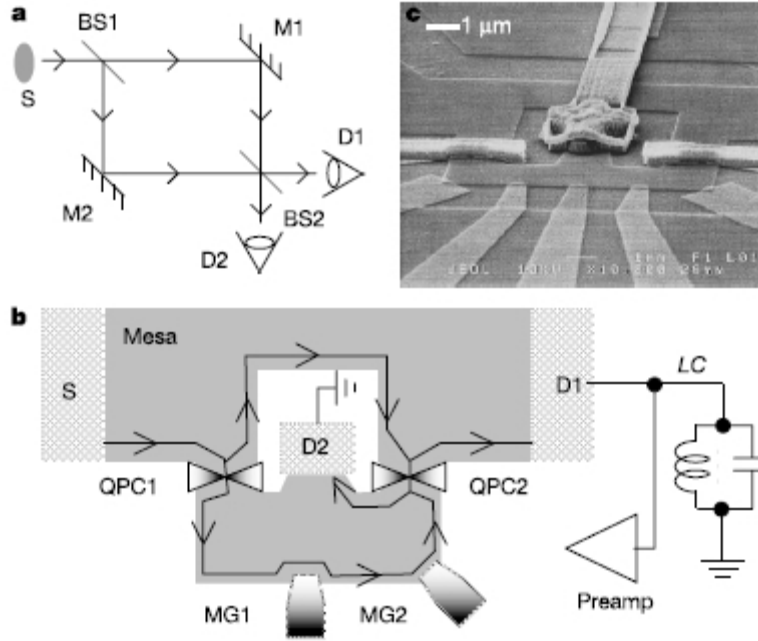


Figura 6.1. (a) Esquema do interferômetro óptico de Mach-Zehnder. S é uma fonte de luz, $BS1$ e $BS2$ são divisores feixe, $M1$ e $M2$ são espelhos e $D1$ e $D2$ são detetores. (b) Esquema do interferômetro eletrônico de Mach-Zehnder. S , $D1$ e $D2$ são contatos ôhmicos, sendo que S funciona como fonte e $D1$ e $D2$ funcionam como detetores. $QPC1$ e $QPC2$ são os contatos pontuais quânticos que funcionam como divisores de feixe e $MG1$ e $MG2$ são *gates* de modulação, que servem para variar a área do dispositivo. (c) Micrografia do dispositivo obtida com um microscópio de varredura de elétrons. Figura extraída de Ji, Y et al. An electronic Mach-Zehnder interferometer. *Nature* **422**, 415 - 418 (2003).

As probabilidades de transmissão T_{SD1} , entre S e $D1$, e T_{SD2} , entre S e $D2$, são dadas por

$$T_{SD1} = |t_1 t_2 + r_1 r_2 e^{i\phi}|^2 = |t_1 t_2|^2 + |r_1 r_2|^2 - 2|t_1 t_2 r_1 r_2| \cos \phi,$$

e

$$T_{SD2} = |t_1 r_2 + r_1 t_2 e^{i\phi}|^2 = |t_1 r_2|^2 + |r_1 t_2|^2 + 2|t_1 t_2 r_1 r_2| \cos \phi,$$

onde t_1 , t_2 , r_1 e r_2 são as amplitudes de transmissão e reflexão dos QPC's 1 e 2, que obedecem as relações apresentadas no capítulo 4, e ϕ é a diferença entre as fases adquiridas pelos feixes ao percorrerem caminhos diferentes.

As correntes nos contatos $D1$ e $D2$ são proporcionais às probabilidades de transmissão de S para cada um deles e oscilam fora de fase ao variamos ϕ . Além disso, $T_{SD1} + T_{SD2} = 1$, ou seja, a soma das correntes que saem do dispositivo pelos contatos $D1$ e $D2$ é igual à corrente que entra no dispositivo pelo contato S .

A visibilidade das oscilações na corrente em um dos detectores do interferômetro é definida como

$$v = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \quad (6.1)$$

onde I_{max} e I_{min} são as correntes máxima e mínima neste detector. Dessa forma, fixando a transmissão em um dos QPC's temos a visibilidade em função da probabilidade de transmissão no outro QPC. Ji et al. fixaram a probabilidade de transmissão do QPC 2 em $T_2 = 1/2$ e mediram a visibilidade em função da probabilidade de transmissão pelo QPC 1 T_1 , que teoricamente deveria ser $v = 2\sqrt{T_1(1-T_1)}$, e obtiveram o resultado mostrado na figura 6.2. Eles ajustaram a visibilidade com a expressão $v = 2\eta\sqrt{T_1(1-T_1)}$, onde η é um parâmetro que foi associado a possíveis efeitos de decoerência ou de *phase averaging*, como mostrado na figura 6.2.

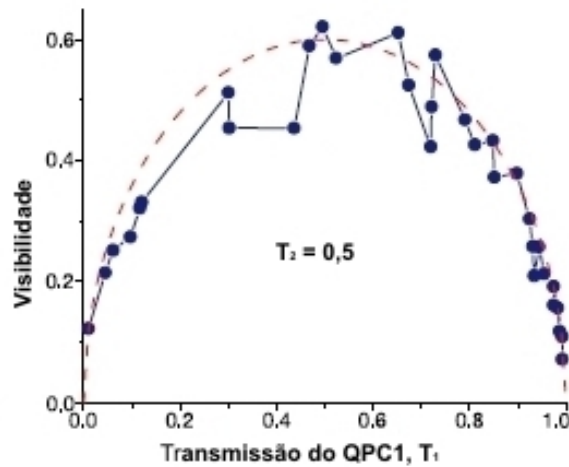


Figura 6.2. Visibilidade do padrão de interferência em função da probabilidade de transmissão pelo QPC 1 T_1 com $T_2 = 1/2$. Os círculos são os pontos experimentais e a curva tracejada é o ajuste feito com a equação $v = 2\eta\sqrt{T_1(1-T_1)}$, para $\eta = 0,6$. Figura extraída de Ji, Y et al. An electronic Mach-Zehnder interferometer. *Nature* **422**, 415-418 (2003).

A fase, no experimento realizado por Ji et al., foi alterada de duas formas diferentes: variando-se o campo magnético B e variando-se a área A , determinada pelos caminhos dos dois feixes. As duas maneiras alteram a fase do efeito Aharonov-Bohm que é $\phi_{AB} = 2\pi AB/\phi_0$, onde $\phi_0 = h/e$. O campo magnético que é aplicado no dispositivo é gerado

por uma bobina supercondutora. Quando ela é deixada no modo persistente, o campo magnético decai suavemente a uma taxa de $\sim 0,12\text{mT}\text{h}^{-1}$. Dessa forma, a medida que o tempo passa o campo magnético no dispositivo diminui suavemente. A alteração da área do dispositivo é feita variando-se continuamente o potencial elétrico negativo aplicado a um dos *gates* de modulação, MG1 ou MG2. Os resultados das medidas de corrente em função do tempo e da tensão no *gate* de modulação com $T_1 = T_2 = 1/2$ são mostrados na figura 6.3.

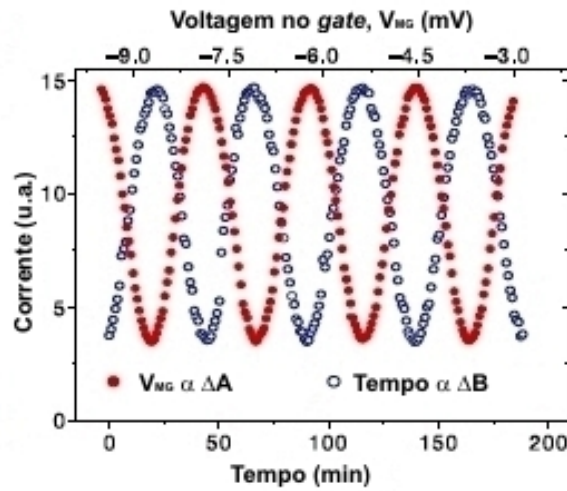


Figura 6.3. Corrente no contato D1 em função do tempo — círculos cheios — e em função da tensão no *gate* de modulação V_G — círculos vazios. Figura extraída de Ji, Y et al. An electronic Mach-Zehnder interferometer. *Nature* **422**, 415-418 (2003).

Interferômetro eletrônico de Hanbury Brown-Twiss

A configuração de Hanbury Brown-Twiss — HBT — constitui um interferômetro de intensidade. Ele serve para medir a correlação entre as intensidades de dois feixes obtidos a partir da luz de uma fonte térmica. Foi observado que esses feixes estão positivamente correlacionados, evidenciando a propriedade de *bunching* apresentada pelos fótons, devido ao fato de eles serem bósons.

No caso de elétrons, espera-se que, em uma configuração do tipo HBT, as flutuações nas correntes em saídas diferentes sejam anticorrelacionadas, como previsto pela expressão (5.10), válida no limite em que $eV \gg k_B T$.

Uma configuração HBT para elétrons foi realizada por Henny et al.^[6.2] usando um dispositivo no regime Hall quântico com $\nu = 1$, como o mostrado na figura 6.4. Nesse dispositivo, eles mediram a autocorrelação das flutuações na corrente transmitida I_t , medida no contato 2, em função da corrente $I = G_0 V$ injetada pelo contato 1 e mediram, também, a correlação entre a corrente refletida I_r , medida no contato 3, e a corrente transmitida, também em função de I . A previsão é que as correlações sejam lineares em I e dadas por

$$\langle (\Delta I_t)^2 \rangle_{\Delta v} = \langle (\Delta I_r)^2 \rangle_{\Delta v} = -\langle \Delta I_t \Delta I_r \rangle_{\Delta v} = 2eIT_{QPC}(1 - T_{QPC}),$$

onde T_{QPC} é a probabilidade de transmissão do QPC. Os resultados das medidas realizadas em uma temperatura de $2,5K$ e para $T_{QPC} = 0,5$ estão mostrados na figura 6.5. Esses resultados são bem ajustados com $\langle (\Delta I_t)^2 \rangle_{\Delta v} = 0,23(2eI)$ e $\langle \Delta I_t \Delta I_r \rangle_{\Delta v} = -0,26(2eI)$, o que está bem próximo do esperado, e mostra clara anticorrelação entre as correntes transmitida e refletida.

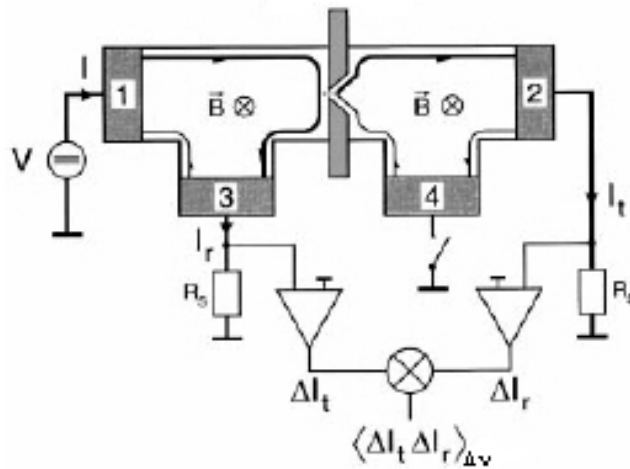


Figura 6.4. Representação do dispositivo implementado por Henny et al., que funciona como um interferômetro de Hanbury Brown-Twiss. Estão mostrados, também, os elementos que compõem o circuito usado para realizar as medidas. Figura extraída de Henny, M et al. The fermionic Hanbury Brown Twiss experiment. *Science* **284**, 296 – 298 (1999).

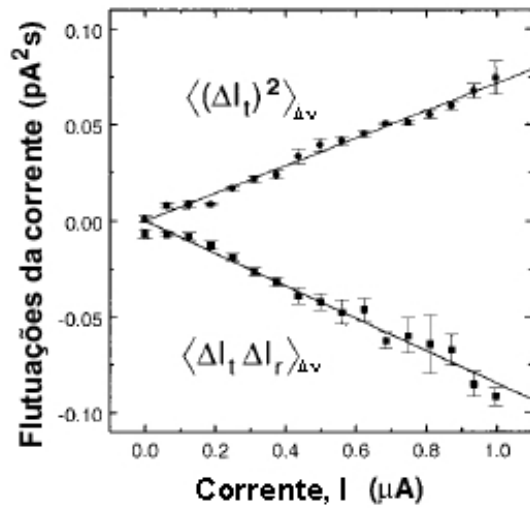


Figura 6.5. Medidas da autocorrelação das flutuações na corrente transmitida e da correlação entre as flutuações nas correntes transmitida e refletida em função da corrente injetada. Figura extraída de Henny, M et al. The fermionic Hanbury Brown Twiss experiment. *Science* **284**, 296 – 298 (1999).

6.3 - Proposta de um Interferômetro de Fabry-Perot eletrônico

O interferômetro de Fabry-Perot é um interferômetro de primeira ordem no qual o feixe de luz incidente é dividido diversas vezes e depois recombinado para formar o padrão de interferência^[6.3], como mostrado na figura 6.6.

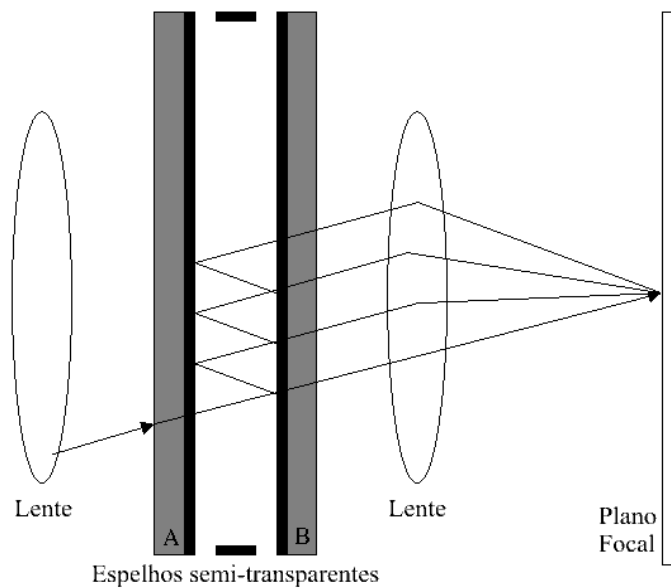


Figura 6.6. Configuração de um Fabry-Perot óptico. Um feixe de luz que incide no interferômetro é refletido repetidas vezes nos dois espelhos semitransparentes A e B. A luz transmitida através do espelho B é projetada no anteparo.

A intensidade da luz no feixe transmitido é dada por

$$I_T = I_0 \frac{T_A T_B}{\left(1 - \sqrt{R_A R_B}\right)^2} \frac{1}{1 + F \sin^2\left(\frac{\Delta}{2}\right)},$$

onde T_A , T_B , R_A e R_B são as transmitâncias e refletância dos espelhos semitransparentes, Δ é a diferença de fase entre dois feixes consecutivos e

$$F = \frac{4\sqrt{R_A R_B}}{\left(1 - \sqrt{R_A R_B}\right)^2}.$$

Vamos, agora, apresentar um dispositivo eletrônico que, idealmente, deve apresentar uma corrente transmitida que varia de forma semelhante à intensidade do feixe de luz transmitido no Fabry-Perot. Primeiramente, vamos mostrar a configuração com os canais de borda e calcular a matriz de espalhamento do dispositivo. Em seguida, determinaremos a matriz de condutância.

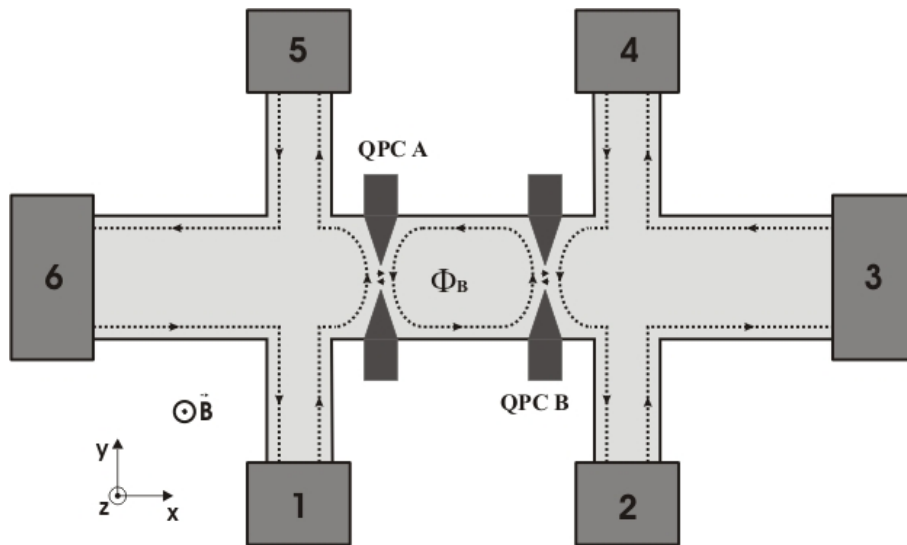


Figura 6.7. Representação de um dispositivo semicondutor que pode funcionar como um interferômetro de Fabry-Perot eletrônico. No regime Hall quântico com $\nu=1$, forma-se um canal de borda, representado pela linha pontilhada, por onde flui a corrente, na direção indicada.

Para determinar os elementos da matriz S^{FP} , basta seguir os canais de borda. Há muitos elementos nulos, pois vários contatos só estão ligados a um único outro contato. Vamos encontrar, primeiro, os elementos da primeira coluna, que estão relacionados às ondas que saem do contato 1. Temos então

$$s_{11} = s_{31} = s_{41} = s_{61} = 0,$$

pois não é possível ir do contato 1 para os contatos 3, 4 e 6, ou voltar para o contato 1 através dos canais de borda do dispositivo. O próximo elemento a ser calculado é s_{2l} . Devemos então observar que para ir do contato 1 para o contato 2 existem infinitos caminhos, portanto

$$s_{2l} = t_A e^{i\delta_{AB}} t_B + t_A e^{i\delta_{AB}} r_B e^{i\delta_{BA}} r_A e^{i\delta_{AB}} t_B + t_A e^{i\delta_{AB}} \left(r_B e^{i\delta_{BA}} r_A e^{i\delta_{AB}} \right)^2 t_B \\ + t_A e^{i\delta_{AB}} \left(r_B e^{i\delta_{BA}} r_A e^{i\delta_{AB}} \right)^3 t_B + \dots,$$

onde temos uma série geométrica de razão $r_A r_B e^{i(\delta_{AB} + \delta_{BA})}$, logo

$$s_{2l} = t_A t_B e^{i\delta_{AB}} \times \frac{1}{1 - r_A r_B e^{i(\delta_{BA} + \delta_{AB})}},$$

onde t_A , t_B , r_A e r_B são os elementos das matrizes de espalhamento dos QPC's A e B, e δ_{AB} é a fase adquirida no caminho que vai do QPC A para o QPC B, enquanto δ_{BA} é a fase adquirida no caminho que vai do QPC B para o QPC A. δ_{AB} e δ_{BA} incluem tanto a fase de caminho quanto a fase gerada pelo efeito Aharonov-Bohm. De forma semelhante, podemos calcular s_{5l} , obtendo

$$s_{5l} = r_A + T_A r_B e^{i(\delta_{BA} + \delta_{AB})} \times \frac{1}{1 - r_A r_B e^{i(\delta_{BA} + \delta_{AB})}}.$$

onde $T_A = |t_A|^2 = t_A t_A$.

Os elementos das outras colunas podem ser obtidos de forma semelhante, portanto a matriz de espalhamento do Fabry-Perot eletrônico proposto é

$$S^{FP} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{t_A t_B e^{i\delta_{AB}}}{1 - r_A r_B e^{i\Delta}} & 0 & 0 & r_B + \frac{T_B r_A e^{i\Delta}}{1 - r_A r_B e^{i\Delta}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ r_A + \frac{T_A r_B e^{i\Delta}}{1 - r_A r_B e^{i\Delta}} & 0 & 0 & \frac{t_A t_B e^{i\delta_{BA}}}{1 - r_A r_B e^{i\Delta}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

onde $\Delta = \delta_{AB} + \delta_{BA}$.

Usando S^{FP} podemos obter a matriz de condutância no limite degenerado a partir das equações (3.19) e (3.20). Dessa forma temos

$$G_{FP} = \begin{bmatrix} G_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_0 \\ -G_0 T_{FP} & G_0 & 0 & -G_0 R_{FP} & 0 & 0 \\ 0 & -G_0 & G_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G_0 & G_0 & 0 & 0 \\ -G_0 R_{FP} & 0 & 0 & -G_0 T_{FP} & G_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -G_0 & G_0 \end{bmatrix},$$

onde

$$T_{FP} = \frac{T_A T_B}{(1 - \sqrt{R_A R_B})^2} \times \frac{1}{1 + F \sin^2(\Delta/2)}$$

e

$$R_{FP} = 1 - \frac{T_A T_B}{(1 - \sqrt{R_A R_B})^2} \times \frac{1}{1 + F \sin^2(\Delta/2)},$$

sendo $F = 4\sqrt{R_A R_B} (1 - \sqrt{R_A R_B})^{-2}$, $T_B = |t_B|^2$, $R_A = |r_A|^2$, $R_B = |r_B|^2$ e $G_0 = 2e^2/h$.

Usando a matriz de condutância podemos calcular a corrente em todos os terminais. No entanto, como queremos um comportamento análogo ao do Fabry-Perot óptico, então aplicamos uma diferença de potencial V entre os contatos 1 e 2 e entre os contatos 1 e 5 enquanto os outros contatos são deixados abertos. Assim, temos a situação mostrada na figura 6.8, onde a corrente resultante circula apenas nos canais de borda dados por linhas contínuas, que ligam 1 à 2 e à 5.

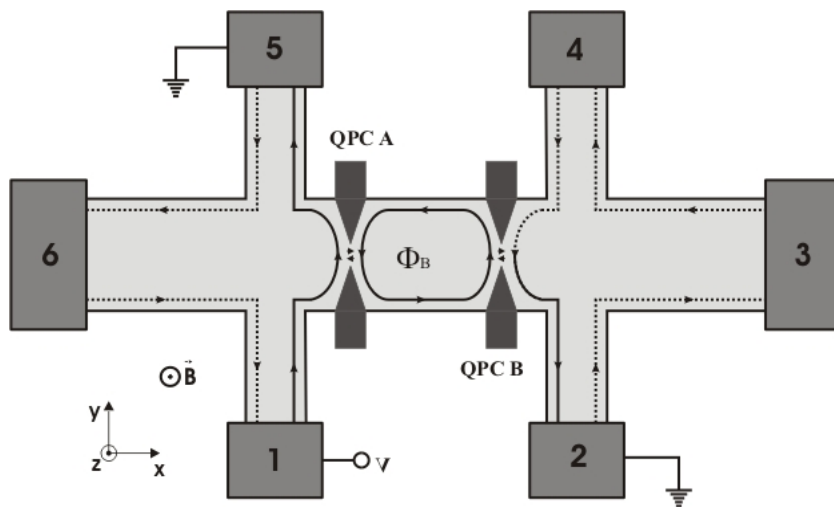


Figura 6.8. Dispositivo que funciona como um interferômetro de Fabry-Perot eletrônico. O contato 1 é mantido em um potencial V , enquanto os contatos 2 e 5 estão aterrados e os outros contatos não são conectados. Os estados de borda pelos quais circula corrente estão representados pelas linhas contínuas.

Nos contatos abertos a corrente é nula, portanto

$$I_3 = I_4 = I_6 = 0.$$

Além disso, podemos escrever $V_1 = V$ e $V_2 = V_5 = 0$, assim temos

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ 0 \\ 0 \\ I_5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_0 \\ -G_0 T_{FP} & G_0 & 0 & -G_0 R_{FP} & 0 & 0 \\ 0 & -G_0 & G_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G_0 & G_0 & 0 & 0 \\ -G_0 R_{FP} & 0 & 0 & -G_0 T_{FP} & G_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -G_0 & G_0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ V_3 \\ V_4 \\ 0 \\ V_6 \end{bmatrix}.$$

De onde podemos concluir que

$$V_6 = V_4 = V_3 = 0,$$

$$I_1 = G_0 V,$$

$$I_2 = -G_0 T_{FP} V,$$

e

$$I_5 = -G_0 R_{FP} V.$$

Podemos, então escrever

$$I_i = I_t + I_r,$$

onde $I_i = |I_1|$, $I_t = |I_2|$ e $I_r = |I_5|$.

Vamos agora entender o comportamento da corrente transmitida em função da fase, que é o que caracteriza o Fabry-Perot. Temos

$$I_t = VG_0 \frac{T_A T_B}{(1 - \sqrt{R_A R_B})^2} \frac{I}{1 + F \text{sen}^2(\Delta/2)}, \quad (6.2)$$

que é máxima sempre que $\text{sen}^2(\Delta/2) = 0$, portanto é periódica em variações de 2π na fase.

No caso mais comum, usa-se $R_A = R_B = R$ e $T_A = T_B = T = 1 - R$, assim

$$I_t = VG_0 \frac{I}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \text{sen}^2(\Delta/2)}. \quad (6.3)$$

A corrente transmitida em função da fase Δ , para vários valores de $T = 1 - R$, está mostrada na figura 6.9.

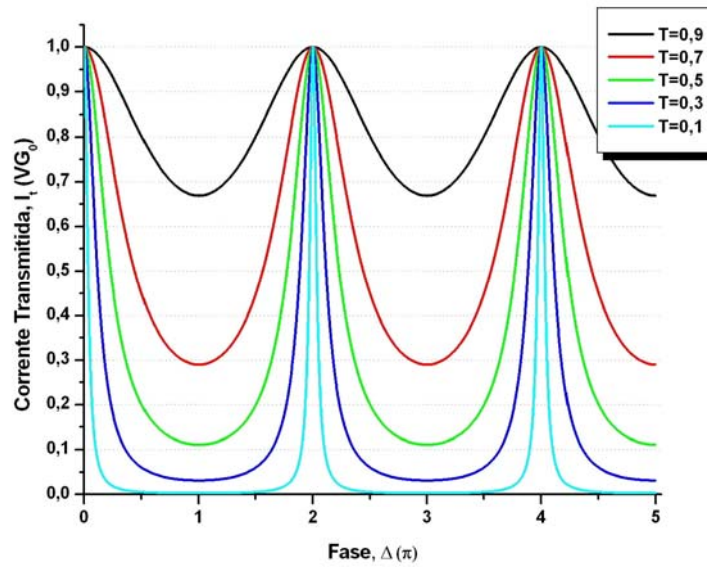


Figura 6.9. Corrente transmitida em função da fase para vários valores da probabilidade de transmissão T dos QPC's.

Com a visibilidade de um interferômetro dada por (6.1), podemos perceber, pela figura 6.9, que a visibilidade aumenta a medida que o valor de T diminui. Usando a equação (6.3), encontramos a visibilidade da interferência na corrente transmitida em função de T

$$v = \frac{2(1-T)}{1+(1-T)^2}. \quad (6.4)$$

Na figura 6.10, está representada a função $v(T)$ dada pela equação (6.4). Vemos então que a visibilidade aumenta continuamente a medida que a probabilidade de transmissão dos QPC's diminui. No entanto, observando-se a figura 6.9 percebemos que os picos na corrente se tornam mais estreitos a medida que diminuimos a probabilidade de transmissão dos QPC's. Assim, se estivermos medindo a corrente em uma situação de visibilidade alta, precisamos variar a fase em intervalos pequenos, para não perder nenhum pico de corrente.

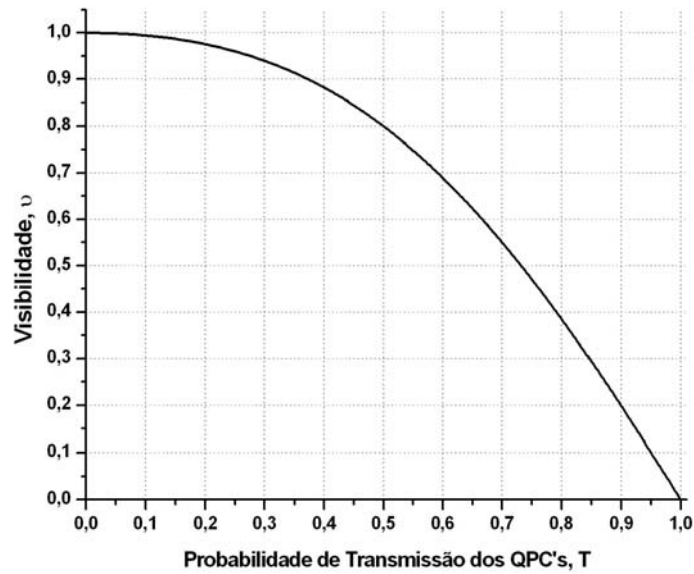


Figura 6.10. Visibilidade do padrão de interferência na corrente transmitida em função da probabilidade de transmissão dos QPC's para o interferômetro de Fabry-Perot.

A variação da fase é feita através da variação do campo magnético, do qual depende a fase adquirida em cada volta entre os QPC's A e B devido ao efeito Aharonov-Bohm $\Delta_{AB} = 2\pi \Phi_B / \Phi_0$, onde Φ_B é o fluxo magnético através da área delimitada pelo caminho fechado entre os QPC's e $\Phi_0 = h/e$.

Mostramos, então, que a dependência da corrente com a fase no dispositivo proposto é realmente semelhante à variação da intensidade da luz em um interferômetro óptico de Fabry-Perot.

Capítulo 7 - Considerações Finais

Mostramos o que é necessário para implementar um interferômetro de elétrons. Partimos de uma heteroestrutura semicondutora em que se forma um gás bidimensional de elétrons de alta mobilidade. Por meio de litografia, definem-se potenciais que confinam esse gás de elétrons em uma região de formato adequado. Esse confinamento, juntamente com a ação do campo magnético, gera estados localizados nas bordas da amostra que transportam a corrente elétrica. Em baixas temperaturas e sob a ação de pequenas diferenças de potencial, os elétrons se movem ao longo de toda extensão do dispositivo sem perder a coerência. Isso torna possível a observação de efeitos de interferência nas correntes que fluem através do dispositivo.

Toda a discussão foi baseada em um modelo ideal de condutor balístico, no qual considera-se que não ocorre nenhum tipo de espalhamento inelástico no interior dos dispositivos, mas apenas nos contatos. Apesar de assumir que podem acontecer eventos de espalhamento elástico no interior do condutor nenhum efeito relacionado a isso aparece na teoria. Esse tipo de espalhamento pode gerar efeitos de *phase averaging* que deverão ser acrescentados ao modelo. Dessa forma, quando se realizam medidas podem ser observados efeitos de perda de coerência que tornam o comportamento do dispositivo diferente do comportamento ideal esperado.

Apesar de já entendermos de forma satisfatória os elementos teóricos necessários para se explicar os fenômenos que ocorrem em um dispositivo no regime coerente, ainda existem muitos pontos nos quais precisamos aprofundar o conhecimento, os efeitos de *phase averaging* e de perda de coerência são, por exemplo, dois assuntos que merecem ser estudados.

Mesmo tendo apreciado o estudo do transporte em dispositivos coerentes, nosso objetivo continua sendo a fabricação de um dispositivo no qual possamos realizar medidas, que poderão ser comparadas com os valores previstos pelo modelo estudado.

Apêndices A – Matriz de Espalhamento

Uma matriz de espalhamento serve para descrever o funcionamento de um dispositivo baseado em um gás bidimensional de elétrons, que opera no regime de transporte coerente. A dinâmica dos elétrons nesse dispositivo é determinada pela equação de Schrödinger de massa efetiva bidimensional

$$\left[E_s + \frac{(i\hbar\nabla + e\vec{A})^2}{2m} + U(x, y) \right] \Psi(x, y) = E\Psi(x, y) \quad (\text{A.1}).$$

Para encontrar a essa matriz S dividimos o dispositivo em partes, como no capítulo 2: condutores balísticos ligando os contatos à parte ativa do dispositivo. As soluções da equação (A.1), nas diferentes partes formam as funções de onda do dispositivo. Elas têm constantes multiplicativas – amplitudes – que são determinadas a partir das condições de continuidade da função de onda e de sua derivada nos limites entre as regiões. Eliminando as amplitudes que vêm das soluções na parte ativa do dispositivo em favor das que vêm das soluções nos condutores balísticos encontramos relações que envolvem apenas as amplitudes das funções de onda nos condutores balísticos. A matriz de espalhamento relaciona a amplitude das ondas incidentes na região de espalhamento do dispositivo com a amplitude das ondas que saem dessa região. Assim, para encontrar os elementos da matriz de espalhamento, basta escrevendo as relações entre as amplitudes das funções de onda nos condutores balísticos de forma que a amplitude de cada onda que sai da parte ativa do dispositivo dependa apenas das amplitudes das ondas que entram nessa região.

Como vimos, nos condutores balísticos formam-se sub-bandas unidimensionais. Em um condutor α , o número de sub-bandas $M_\alpha(E)$ com energia mínima menor que E é o número de modos de propagação nesse condutor. Como existem dois estados com energia E em cada sub-banda e eles têm vetores de onda em direções opostas, então cada modo é formado por uma onda que incide na região de espalhamento e por outra que sai dessa região. O número total $M_T(E)$ de modos de propagação em um dispositivo com N contatos é dado por

$$M_T(E) = \sum_\alpha^N M_\alpha(E).$$

Assim, a matriz de espalhamento do dispositivo tem dimensões $M_T \times M_T$.

As amplitudes das ondas incidentes e das ondas espalhadas pela região ativa do dispositivo são escritas como os vetores $\{a\}$ e $\{b\}$, respectivamente, e estão relacionados pela matriz S do dispositivo da seguinte forma:

$$\{b\} = S \{a\}. \quad (\text{A.2})$$

A probabilidade de transmissão da onda incidente no modo m no condutor α para o modo n do condutor β , $T_{\alpha\beta, mn}$ é dada por

$$T_{\alpha\beta, mn} = |s_{\alpha\beta, mn}|^2. \quad (\text{A.3})$$

Se $\alpha = \beta$

$$R_{\alpha\alpha, mn} = |s_{\alpha\alpha, mn}|^2, \quad (\text{A.4})$$

é a probabilidade de reflexão.

Assumimos que as correntes que entram e que saem de um contato, são proporcionais ao módulo ao quadrado das amplitudes das ondas que entram e que saem dele. Dessa forma, para garantir a conservação da corrente devemos ter

$$\sum_{\alpha} \sum_m |a_{\alpha m}|^2 = \sum_{\beta} \sum_n |b_{\beta n}|^2, \quad (\text{A.5})$$

onde cada elemento do vetor é identificado por dois índices, um para o contato — α ou β — e outro para o modo — m ou n — assim,

$$\{a\}^\dagger \{a\} = \{b\}^\dagger \{b\}. \quad (\text{A.6})$$

Usando (A.6) e (A.2) podemos escrever

$$\{a\}^\dagger \{a\} = \{S \{a\}\}^\dagger \{S \{a\}\} = \{a\}^\dagger S^\dagger S \{a\},$$

portanto a matriz S é unitária

$$S^\dagger S = I = S S^\dagger, \quad (\text{A.7})$$

o que, em termos de seus elementos pode ser escrito como

$$\sum_{\alpha} \sum_m s_{\alpha\beta, mn}^* s_{\alpha\gamma, ml} = \delta_{\beta\gamma} \delta_{ml} = \sum_{\alpha} \sum_m s_{\gamma\alpha, lm} s_{\beta\alpha, nm}^*. \quad (\text{A.8})$$

De (A.8) temos, então

$$\sum_{\alpha} \sum_m |s_{\alpha\beta, mn}|^2 = I = \sum_{\alpha} \sum_m |s_{\beta\alpha, nm}|^2, \quad (\text{A.9})$$

O lado esquerdo da relação (A.9) mostra que a soma das probabilidades de transmissão da onda proveniente do contato β , pelo modo n , para todos os outros contatos em todos os modos é igual a 1. Da mesma forma, a soma das probabilidades de transmissão das ondas provenientes de todos os modos de todos os contatos para o modo m do contato α , dada no lado direito da equação, também é igual a 1.

Além disso, o fato de S ser unitária faz com que as submatrizes, $S_{\alpha\beta}$ obedecem às equações

$$\sum_{\alpha} S_{\alpha\beta}^{\dagger} S_{\alpha\gamma} = I_{\beta} \delta_{\beta\gamma}, \quad (\text{A.10})$$

e

$$\sum_{\alpha} S_{\beta\alpha} S_{\gamma\alpha}^{\dagger} = I_{\beta} \delta_{\beta\gamma}, \quad (\text{A.11})$$

onde I_{β} é uma matriz unidade de dimensões $M_{\beta} = \text{Tr}(I_{\beta})$. As relações (A.10) e (A.11) podem ser escritas em termos das probabilidades totais de reflexão e de transmissão, $R_{\alpha\alpha} = \text{Tr}(S_{\alpha\alpha}^{\dagger} S_{\alpha\alpha})$ e $T_{\alpha\beta} = \text{Tr}(S_{\alpha\beta}^{\dagger} S_{\alpha\beta})$. Assim,

$$M_{\alpha} = R_{\alpha\alpha} + \sum_{\beta} T_{\alpha\beta} \quad (\text{A.12})$$

e

$$M_{\alpha} = R_{\alpha\alpha} + \sum_{\beta} T_{\beta\alpha}. \quad (\text{A.13})$$

Agora, vamos usar a propriedade de unitariedade da matriz S para entender como ela se transforma quando invertemos a direção do campo magnético aplicado ao sistema. Já sabemos que para encontrar S devemos resolver a equação (A.1). Tomando o complexo conjugado dessa equação e invertendo a direção do campo magnético (trocando o sinal de \vec{A}) temos

$$\left[E_s + \frac{(i\hbar\nabla + e\vec{A})^2}{2m} + U(x, y) \right] \Psi^*(x, y) = E \Psi^*(x, y). \quad (\text{A.14})$$

Comparando-se (A.14) com (A.1), vemos que

$$\left[\Psi(x, y) \right]_{+B} = \left[\Psi^*(x, y) \right]_{-B}.$$

Assim, conhecendo-se as soluções de (A.1) para um campo magnético $+B$, podemos obter as suas soluções para $-B$ simplesmente tomando os respectivos complexos conjugados. No

entanto, essa operação inverte a direção de propagação das ondas. Se $\Psi(x, y)$ representa uma onda que entra na região de espalhamento, então $\Psi^*(x, y)$ representa uma onda que sai dessa região e vice-versa. Dessa forma, temos, para $+B$

$$\{b\} = [S]_{+B} \{a\},$$

de onde obtemos

$$\{b^*\} = [S^*]_{+B} \{a^*\}.$$

Para $-B$ temos

$$\{a^*\} = [S]_{-B} \{b^*\},$$

ou

$$\{b^*\} = [S^{-1}]_{-B} \{a^*\}.$$

Vemos, então que

$$[S^*]_{+B} = [S^{-1}]_{-B},$$

mas

$$[S^{-1}]_{-B} = [S^\dagger]_{-B},$$

assim,

$$[S^*]_{+B} = [S^\dagger]_{-B},$$

ou seja

$$[S]_{+B} = [S^t]_{-B}. \quad (\text{A.15})$$

Em termos dos elementos de S , (A.15) pode ser escrita como

$$[s_{\alpha\beta, mn}]_{+B} = [s_{\beta\alpha, nm}]_{-B}.$$

Assim, temos, para as probabilidades de espalhamento entre os modos

$$[T_{\alpha\beta, mn}]_{+B} = [T_{\beta\alpha, nm}]_{-B}$$

e

$$[R_{\alpha\alpha, mn}]_{+B} = [R_{\alpha\alpha, nm}]_{-B}.$$

E, para as probabilidades totais de espalhamento entre os contatos, temos

$$[T_{\alpha\beta}]_{+B} = [T_{\beta\alpha}]_{-B}$$

e

$$[R_{\alpha\alpha}]_{+B} = [R_{\alpha\alpha}]_{-B}.$$

Conhecendo as propriedades da matriz de espalhamento podemos derivar as propriedades de grandezas físicas que dependem dessa matriz, como é o caso da condutância.

Referências

Capítulo 2

[2.1] DATTA, Supriyo. **Electronic transport in mesoscopic systems**. Cambridge; New York: Cambridge University Press, 1995. 377 p.

Capítulo 3

[3.1] van Wees, B. J. et al. Quantized conductance of point contacts in two-dimensional electron gas. *Phys. Rev. Lett.* **60**, 848 – 850 (1988).

[3.2] Büttiker, M. Scattering theory of current and intensity noise correlations in conductors and wave guides. *Phys. Rev. B* **46**, 12485 – 12507 (1992).

Capítulo 4

[4.1] Büttiker, M. Absence of backscattering in the quantum Hall effect in multiprobe conductors. *Phys. Rev. B* **38**, 9375 – 9389 (1988).

[4.2] Berggren, K.F., Roos, G. & van Houten, H. Characterization of very narrow quasi-one-dimensional quantum channels. *Phys. Rev. B* **37**, 10118 – 10124 (1988).

[4.3] van Wees, B. J. et al. Quantized conductance of magnetoelectric subbands in ballistic point contacts. *Phys. Rev. B* **38**, 3625 – 3627 (1988).

[4.4] van Houten, H. et al. Coherent electron focusing with quantum point contacts in a two-dimensional electron gas. *Phys. Rev. B* **39**, 8556 – 8575 (1989).

[4.5] van Wees, B. J. et al. Anomalous integer quantum Hall effect in the ballistic regime with quantum point contacts. *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1181 – 1184 (1989).

[4.6] van Wees, B. J. et al. Quantum ballistic and adiabatic electron transport studied with quantum point contacts. *Phys. Rev. B* **43**, 12431 – 12453 (1991).

[4.7] Büttiker, M. Quantized transmission of a saddle-point constriction. *Phys. Rev. B* **41**, 7906 – 7909 (1990).

Capítulo 5

- [5.1] RODEN, Martin S. **Analog and Digital Communication Systems**. 3rd ed. Englewood Cliffs. Prentice Hall International, 1991. p. 131 – 135.
- [5.2] Johnson, J. B. Thermal Agitation of Electricity in Conductors. *Phys. Rev.* **32**, 97 - 109 (1928).
- [5.3] Nyquist, H. Thermal Agitation of Electric Charge in Conductors. *Phys. Rev.* **32**, 110 - 113 (1928).
- [5.4] Beenakker, C. & Schönemberger, C. Quantum Shot Noise. *Physics Today* **55**, 37- 42 (2003).
- [5.5] Büttiker, M. Scattering theory of current and intensity noise correlations in conductors and wave guides. *Phys. Rev. B* **46**, 12485 – 12507 (1992).
- [5.6] Reznikov, M et al. Temporal correlation of electrons: suppression of shot noise in a ballistic quantum point contact *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3340 - 3343 (1995).
- [5.7] Kumar, A. et al. Experimental test of the quantum noise reduction theory. *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2778 – 2781 (1996)
- [5.8] de-Picciotto, R. et al. Direct observation of a fractional charge. *Nature* **389**, 162 – 164 (1997).
- [5.9] Saminadayar, L. et al. Observation of the $e/3$ fractional charged Laughling quasiparticle. *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2526 – 2529 (1997).
- [5.10] Reznikov, M et al. Observation of quasiparticles with one-fifth of an electron's charge. *Nature* **399**, 238 – 241 (1999).

Capítulo 6

- [6.1] Ji, Y et al. An electronic Mach-Zehnder interferometer. *Nature* **422**, 415 – 418 (2003).
- [6.2] Henny, M et al. The fermionic Hanbury Brown Twiss experiment. *Science* **284**, 296 – 298 (1999).
- [6.3] FOWLES, Grant R. **Introduction to modern optics**. 2nd ed. New York: Dover Publications, 1989. p. 86 – 96.