

**Inibindo a decoerência de memórias quânticas  
em cavidades de microondas realísticas**

José Geraldo Gonçalves de Oliveira Júnior

Agosto de 2006

**Inibindo a decoerência de memórias quânticas em  
cavidades de microondas realísticas**

José Geraldo Gonçalves de Oliveira Júnior

Orientadora: Profa. Maria Carolina Nemes

Dissertação apresentada à UNIVERSIDADE  
FEDERAL DE MINAS GERAIS, como requisito  
parcial para a obtenção do grau de MESTRE EM  
FÍSICA.

Agosto de 2006

*À Luana.*

## “A TRISTE PARTIDA”

Setembro passou, com outubro e novembro  
Já tamo em dezembro  
Meu Deus, que é de nós?  
Assim fala o pobre do seco Nordeste,  
Com medo da peste,  
Da fome feroz.

A treze do mês ele fez a experiência,  
Perdeu sua crença  
Nas pedras de sá.  
Mas nôta experiência com gosto se agarra,  
Pensando na barra  
Do alegre Natá.

Rompeu-se o Natá, porém barra não veio,  
O só, bem vermeio  
Nasceu munto além.  
Na copa da mata, buzina a cigarra,  
Ninguém vê a barra,  
Pois barra não tem.

Sem chuva na terra descamba janêro,  
Depois, feverêro  
E o mêrmo verão.  
Entonce o rocêro, pensando consigo,  
Dis: isso é castigo!  
Não chove mais não!

Apela pra março, que é o mês preferido  
Do Santo querido,  
Senhô São José.  
Mas nada de chuva! Tá tudo sem jeito,  
Lhe foge do peito  
O resto da fé.

Agora pensando seguiu ôtra tria,  
Chamando a fãmia

Começa a dizê:  
Eu Vendo meu burro, meu jeque e o cavalo,  
Nós vamo a São Palo  
Vivê ou morrê.

Nós vamo a São Palo, que a coisa tá feia;  
Por terras aleia  
Nós vamo vagá  
Se o nosso destino não for tão mesquinho,  
Pro mêrmo cantinho  
Nós torna a vortá.

E vende o seu burro, o jumento e o cavalo,  
Inté mêrmo o galo  
Vendêro também,  
Pois logo aparece feliz fazendêro,  
Por pôco dinheiro  
Lhe compra o que tem.

Em riba do carro se junta a fãmia;  
Chegou o triste dia,  
Já vai viajá.  
A seca terrive, que tudo devora,  
Lhe bota pra fora  
Da terra natá.

O carro já corre no topo da serra.  
Oiando pra terra,  
Seu berço, seu lá,  
Aquele nortista, partido de pena,  
De longe inda acena:  
Adeus, Ceará!

No dia seguinte, já tudo enfadado,  
E o carro embalado,  
Vêloz a corrê,  
Tão triste, coitado, falando saudoso,

Um fio choroso  
Escrama, a dizê:

– De pena e sodade, papai, sei que eu morro!  
Meu pobre cachorro,  
Quem dá de come?  
Já ôto pergunta: – Mãezinha, e meu gato?  
Com fome sem trato,  
Mimi vai morrê!

E a linda pequena, tremendo de medo:  
– Mamãe, meus brinquedos!  
Meu pé de fulô!  
Meu pé de rosêra, coitado, ele seca!  
E a minha boneca  
Também lá ficou.

E assim vão deixando, com choro e gemido,  
Do berço querido  
O céu lindo e azu.  
Os pais, pesaroso, nos fio pensando,  
E o carro rodando  
Na estrada do Su.

Chegaro em São Palo sem cobre, quebrado.  
O pobre, acanhado,  
Percura um patrão.  
Só vê cara estranha, da mais feia gente,

Tudo é diferente  
Do caro torrão.

Trabaia dois ano, três ano e mais ano,  
E sempre no prano  
De um dia inda vim.  
Mas nunca ele pode, só veve devendo,  
E assim vai sofrendo  
Tormento sem fim.

Se alguma notícia das banda do Norte  
Tem ele por sorte  
O gosto de uvi,  
Lhe bate no peito sodade de móio,  
E as água dos óio  
Começa a caí.

Do mundo afastado, sofrendo desprezo,  
Ali veve preso,  
Devendo ao patrão.  
O tempo rolando, vai dia, vem dia,  
E aquela famia  
Não vorta mais não!

Distante da terra tão seca mais boa,  
Exposto à garoa,  
A lama e o paú,  
Faz pena o nortista, tão forte, tão bravo,  
Vivê como escravo  
Nas terra do Su.

*Patativa do Assaré*

# AGRADECIMENTOS

De início, quero agradecer a Carolina pelo apoio, incentivo, compreensão e paciência indispensáveis para a conclusão deste trabalho. Pelo exemplo de pessoa, profissional e amiga durante os encontros. Além do mais, por ter me acolhido com afeição, gerando um ambiente de trabalho agradável e prazeroso.

Ao Zé pela calma, atenção e exatidão durante as nossas conversas, sempre ensinando de forma humilde, solícita e amiga. Valeu Zé!

Meus agradecimentos ao Terra, Marcelinho e Daniel pela convivência sempre amigável, pela acolhida no *Enlight* e por sempre estarem a postos para ensinar e discutir física.

Aos Piauí: Alexandre, André, Heliques, Irismar, Jonathan e Maurizan, pela amizade e por invadirem a sala de mestrado com o *sotaque* nordestino fazendo-me recordar permanentemente da minha terra.

Aos meus amigos Alex, Leo *Diagonal*, Edson, Julia, Clarissa, Gabi, Maurício, Wilson, Guilherme e também aqueles que não me lembro agora (foi mal o esquecimento!) que direta ou indiretamente fizeram o meu processo de adaptação e permanência em BH ser mais tênue.

Aos meus pais, por eu estar aqui hoje e pelo amor que transborda por entre seus braços, abraços e carinhos. A vocês, deixo os meus agradecimentos mais sinceros e profundos que às vezes o meu silêncio não os deixa aparecer. À amável e bela Luana, minha filha e causa primária de motivação. A sua existência me basta. Obrigado pela sua compreensão e por enfrentar com tanta coragem a distância que nos separa e a saudade que nos assola. Aos meu queridos irmãos e irmãs: Déa, Kau, Teu, Gete e Bel; Aos meus lindos sobrinhos Pipili e Xandinho; À minha linda sobrinha Chumbinho. Sem vocês o que seria da minha vida?

À minha querida Ana Carla. Pelo amor, carinho e dedicação durante esses anos de convivência.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro que foi absolutamente necessário.

## RESUMO

Neste trabalho estudamos a dinâmica da interação átomo–campo no interior de cavidades ópticas realísticas e descrevemos quantitativamente experimentos típicos de eletrodinâmica quântica de cavidades. Em seguida, estabelecemos um procedimento que permite monitorar o *tempo de retenção* de uma memória quântica em cavidades com alto fator de qualidade usando as idéias de J. G. Peixoto de Faria, P. Nussenzveig, A. F. R. de Toledo Piza & M. C. Nemes, *Los Alamos e–print server*, [xxx.lanl.gov/quant-ph/0012037](http://xxx.lanl.gov/quant-ph/0012037) para o aumento do tempo de decaimento de um fóton. Outrossim, analisamos os efeitos que contribuem para a diminuição do *tempo de retenção* durante o monitoramento.

## ABSTRACT

In this work we study the dynamics of the atom–field interaction in a realistic optical cavity and we describe typical experiments in cavity quantum electrodynamics. Afterwards, we establish a procedure to control the holding time of a quantum memory in a cavity with high quality factor, using the ideas of J. G. Peixoto de Faria, P. Nussenzveig, A. F. R. de Toledo Piza & M. C. Nemes, *Los Alamos e-print server*, [xxx.lanl.gov/quant-ph/0012037](http://xxx.lanl.gov/quant-ph/0012037) about increasing the decay time of a single photon state. Moreover, we analyze effects that contribute to the reduction of the holding time during experiments.

# INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas do século passado, houve uma crescente necessidade no armazenamento e processamento de dados computacionais que, adicionado aos sucessos das pesquisas nos fundamentos da Mecânica Quântica (especialmente em física da matéria condensada e óptica quântica), levaram à busca de um *computador quântico*, i.e., um computador que funcionasse de acordo às Leis da Mecânica Quântica. Na década de 80, duas novas áreas de estudo para alcançar esse desenvolvimento de consolidaram, a saber, *computação e informação quântica*. A computação quântica preocupa-se com as formas de estabelecer o armazenamento e processamento da informação quântica. E a *informação quântica* ocupa-se com o informe contido em um sistema físico, como podemos perceber nas palavra de J. Preskill – *Information, after all, is something that is encoded in the state of a physical system . . .* – no início da seção 1.1 da referência [1] ou quando começa a seção seguinte dizendo: *The moral we draw is that “information is physical” and it is instructive to consider what physics has to tell us about information.*

De maneira semelhante à clássica, a computação quântica possui seu próprio “bit” de informação, i.e., a menor unidade de informação, chamado *qubit* (abreviação da expressão em inglês *quantum bit*). Esta informação quântica fica “codificada” no estado de um sistema físico denominado “potador de *qubit*”. No âmbito da óptica quântica os portadores de *qubit* em geral são átomos de dois níveis e/ou o campo eletromagnético (CEM). Atualmente, diversos sistemas que permitem a realização experimental de operações lógicas entre *qubits* já foram propostos. Em especial, se destacam experimentos envolvendo interação entre o átomo e o CEM armazenado no interior de cavidades ópticas (experimentos de eletrodinâmica quântica de cavidades – CQED).

Em um experimento típico de CQED, Maître *et al.* [3] relataram que um *qubit* inicialmente sendo transportado por um átomo de dois níveis pode ser transferido para o modo do CEM no interior de uma cavidade de auto

$Q$ . Em seguida um segundo átomo, após um tempo de retardo  $\tau$ , recolheu o *qubit* armazenado no modo do CEM dentro da cavidade. A transferência do *qubit* entre um átomo e o campo se processa mediante uma interação ressonante. Neste ensaio, a cavidade executou a função de um importante componente do *hardware* de um computador quântico, a saber, a *memória quântica*, i.e., um dispositivo capaz de armazenar *qubits*. O tempo que tal dispositivo é capaz de armazenar a informação quântica é chamado de *tempo de retenção* (da expressão em inglês *holding time*). Em geral, o principal “inimigo” da retenção de uma memória quântica é o ambiente em sua volta que submete o sistema a processos de dissipação e decoerência extinguindo o *qubit* armazenado em um intervalo de tempo muito curto. Para implementar uma memória quântica mais efetiva, é absolutamente necessário proteger a informação armazenada dos efeitos do ambiente sobre a memória.

Neste trabalho temos como objetivo propor uma maneira realizável de aumentar o tempo que um *qubit* pode permanecer no interior de uma memória quântica em cavidades ópticas preservando a sua coerência. Ou seja, apresentar uma forma de aumentar o *tempo de retenção* de uma cavidade de alto fator de qualidade. Para isso, imaginamos um feixe atômico de densidade  $\lambda$  e com  $N$  pulsos sendo enviado para transpor a cavidade. Consideramos o arranjo experimental regulado para que cada átomo experimente números pares de oscilações de Rabi completa durante sua interação com CEM no interior da cavidade. Em cada nutação de Rabi o átomo do feixe recolhe o *qubit* do interior da cavidade e em seguida o devolve ao campo. Quando o átomo retira o *qubit* do modo do CEM, protege-o dos efeitos de dissipação. Com  $N$  pulsos atômicos, o *qubit* dentro da cavidade fica sendo compartilhado com o feixe atômico, resguardando-o das perdas da cavidade.

Organizamos essa dissertação como segue: no primeiro capítulo fizemos uma rápida exposição do ferramental utilizado no desenvolvimento deste trabalho. Em particular, focamos a evolução de um estado físico arbitrário na presença e/ou ausência de um reservatório. No capítulo seguinte, revisamos a teoria da interação entre a luz e a matéria, considerando os dois casos para o campo: i) no caso em que o CEM admite uma descrição clássica e ii) quando o campo necessita de uma descrição quântica. Em ambos os ca-

sos, o átomo é tratado como um sistema quântico de dois níveis. No terceiro capítulo, analisamos quantitativamente a interferometria atômica de Ramsey e cavidades realísticas de alto e baixo fator de qualidade. Para isso, descrevemos experimentos de CQED realizados por Maître e colaboradores na referência [3]. O quarto capítulo dedicamos a nossa proposta de aumentar a *tempo de retenção* de uma memória quântica em cavidades com alto fator de qualidade, *i.e.*, monitorar a coerência e retenção de um *qubit* armazenado no modo do campo na cavidade. Deixamos as conclusões e discussões para o quinto e último capítulo.

# Conteúdo

<b>Agradecimentos</b>	<b>i</b>
<b>Resumo</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Introdução</b>	<b>iv</b>
<b>1 Conceitos básicos</b>	<b>1</b>
1.1 Estado físico na mecânica quântica . . . . .	1
1.2 O operador evolução . . . . .	2
1.3 O operador densidade . . . . .	3
1.3.1 Para estados puros . . . . .	3
1.3.2 Para estados de mistura estatística . . . . .	5
1.4 A equação mestra . . . . .	7
1.4.1 A evolução do sistema de interesse . . . . .	8
1.4.2 As aproximações de Born e markoviana . . . . .	11
1.4.3 Equação mestra para um oscilador na R.W.A. . . . .	12
<b>2 A interação átomo–campo</b>	<b>16</b>
2.1 A interação com o campo clássico . . . . .	17
2.2 A interação com o campo quantizado. O modelo Jaynes–Cum- mings . . . . .	20
2.2.1 O MJC na RWA . . . . .	21
2.2.2 O limite ressonante do MJC . . . . .	24

<b>3</b>	<b>Análise de cavidades realísticas</b>	<b>26</b>
3.1	A interferometria atômica de Ramsey . . . . .	29
3.2	Dois exemplo de experimentos em cavidades com alto $Q$ . . . . .	32
3.2.1	O decaimento de um fóton em cavidades com perdas . . . . .	33
3.2.2	Tranferência de coerência entre dois átomos. . . . .	38
<b>4</b>	<b>Inibindo a decoerência de um <i>qubit</i></b>	<b>46</b>
4.1	Monitorando e preservando a coerência de um <i>qubit</i> . . . . .	48
4.1.1	Monitoramento com a passagem de um átomo . . . . .	49
4.1.2	Monitoramento com a passagem de $N$ átomos . . . . .	53
4.2	O efeito do átomo ausente . . . . .	56
4.3	Efeito da dispersão da velocidade atômica . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>62</b>
<b>A</b>	<b>Interação de estado atômico com CEM clássico via densidade reduzida</b>	<b>63</b>
<b>B</b>	<b>Um <i>qubit</i> em cavidades com perdas</b>	<b>66</b>
<b>C</b>	<b>O MJC com <math>\delta = 0</math> em cavidades com perdas</b>	<b>70</b>

# Lista de Figuras

3.1	Esquema geral de todo o aparato nos experimentos de CQED com átomos de Rydberg. Figura retirada de [25]. . . . .	27
3.2	Ilustração de um átomo de Rydberg. No centro está o núcleo representado por uma pequena <i>bola</i> esférica e em verde está a orbita circular do elétron excitado. Figura retirada de [27]. . . . .	28
3.3	Em vermelho(azul) a probabilidade $P_{ge}(P_{ee})$ de detectar o átomo em $g(e)$ , respectivamente, versus a dessintonia $\vartheta$ em unidades de 10 kHz, para um tempo de voo de $T = 216 \mu s$ entre $R_1$ e $R_2$ . . . . .	32
3.4	Diagrama dos dois caminhos possíveis pelo átomo na interferometria Ramsey. . . . .	33
3.5	Probabilidade condicional $\mathcal{P}_{ge}$ versus o tempo $\tau$ , em unidades de $\mu s$ , entre a passagem dos átomos. Na figura usamos [3]: $\Omega/2\pi = 48 \text{ kHz}$ e $1/\kappa = 168 \mu s$ . . . . .	37
3.6	Segundo experimento: transferência de coerência entre dois átomos. Figura retirada de [30]. . . . .	39
3.7	Probabilidade condicional $\Pi_{ge}$ versus dessintonia $\vartheta$ , em unidades de 10 kHz, aplicada ao primeiro(segundo) átomo em $R_1(R_2)$ , respectivamente. Onde usamos [3]: $T = \tau + 216 \mu s$ , $\Omega/2\pi = 48 \text{ kHz}$ , $1/\kappa = 168 \mu s$ e $\omega_{eg} = 51.1 \text{ GHz}$ . . . . .	44
3.8	Visibilidade das franjas da probabilidade condicional $\Pi_{ge}$ versus o tempo $\tau$ , em unidades de $\mu s$ , entre a passagem dos átomos. Onde usamos [3]: $\Omega/2\pi = 48 \text{ kHz}$ e $1/\kappa = 168 \mu s$ . . . . .	45
4.1	<i>Qubit</i> armazenado no interior de uma cavidade de alto $Q$ . Figura retirada de [27]. . . . .	47

4.2 Átomo de Rydberg monitorando o estado do campo no interior de  
 $C$  durante a sua passagem. Figura retirada de [27]. . . . . 52

# Capítulo 1

## Conceitos básicos

Neste capítulo faremos, de maneira breve, uma apresentação do ferramental utilizado ao longo desse trabalho. Assumiremos que o leitor já tenha uma certa familiaridade com os fundamentos da mecânica e óptica quântica. Caso contrário, acreditamos ser relevante uma consulta às referências citadas ao longo do capítulo.

### 1.1 Estado físico na mecânica quântica

A principal característica do método clássico da descrição de fenômenos consiste no pressuposto da total independência dos processos físicos em relação às condições de observação. Em física clássica parte-se do princípio de que é possível observar um fenômeno sem que o observador provoque qualquer interferência na medida do mesmo. Além disso, considera-se *a priori* que seja possível obter resultados experimentais cada vez mais exatos sem que se estabeleça algum limite para o grau de precisão.

No início do século XX apareceram fenômenos que fugiam completamente dessa descrição clássica e que sugeriam uma *dualidade* onda partícula como característica intrínseca dos objetos. A ruptura conceitual foi uma das mais radicais que se viu na História da Física. De fato, esse processo não se limitou aos mecanismos dinâmicos envolvidos nas teorias clássicas mas exigiu uma revisão da própria base cinemática (o conceito de *estado* de uma partícula)

envolvida na sua formulação.

Não é possível, portanto, deduzir a Mecânica Quântica (M.Q.) a partir de mecanismos anteriores ou construí-la como uma extensão de uma teoria clássica. Descrições da Estrutura Algébrica da Teoria de Heisenberg, Schrödinger e postulados da M.Q. podem ser encontrados em vários livros textos (veja por exemplo em [4], [5] e [6]).

A caracterização do *estado* de uma partícula quântica se dá através de um vetor abstrato  $|\psi(t)\rangle$  que pertence a um espaço vetorial linear, dotado de produto interno chamado espaço de Hilbert [5].

A dinâmica desses objetos é dada pela equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle \quad (1.1)$$

com a restrição física de que

$$|\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle|^2 < \infty \quad . \quad (1.2)$$

O operador  $\hat{H}(t)$  é o gerador da evolução chamado hamiltoniano e é um operador hermiteano, assim como todos os observáveis quânticos.

## 1.2 O operador evolução

A equação diferencial (1.1) rege a evolução do vetor de estado  $|\psi(t)\rangle$  e sua solução geral é dada por [6]

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad , \quad (1.3)$$

onde  $\hat{U}(t, t_0)$  é um operador linear unitário denominado operador evolução e  $|\psi(t_0)\rangle$  é o vetor de estado no tempo  $t_0$ .

Dado um tempo  $t' > t$ , da eq.(1.3) obtemos

$$|\psi(t')\rangle = \hat{U}(t', t) |\psi(t)\rangle \quad . \quad (1.4)$$

Fica claro então, através de uma breve análise das eqs.(1.3) e (1.4), que o operador evolução satisfaz as propriedades

$$\hat{U}(t_0, t_0) = \mathbf{1} \quad (1.5)$$

$$\hat{U}(t', t) \hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t', t_0) \quad . \quad (1.6)$$

Substituindo a eq.(1.3) em (1.1), obtemos uma equação diferencial para o operador evolução, a saber

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H}(t) \hat{U}(t, t_0) . \quad (1.7)$$

Para sistemas isolados, onde o energia é conservada, o hamiltoneano será independente tempo. Com isso a eq.(1.1) terá como solução geral

$$|\psi(t)\rangle = e^{\frac{1}{i\hbar} \hat{H}(t-t_0)} |\psi(t_0)\rangle \quad (1.8)$$

e o operador evolução assumirá a forma

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp\left[\frac{1}{i\hbar} \hat{H}(t - t_0)\right] , \quad (1.9)$$

satisfazendo as propriedades (1.5) e (1.6) bem como a eq.(1.7). Mas o operador evolução só terá esta forma *se e somente se* o hamiltoneano for independente do tempo. Em outros casos, onde o hamiltoneano for dependente do tempo, o operador evolução terá uma outra estrutura (veja o cap.2 da referência [6], por exemplo). Porém, a eq.(1.7) é completamente geral e será sempre obedecida.

## 1.3 O operador densidade

### 1.3.1 Para estados puros

Chama-se de estado *puro* um dado estado físico que, para todo tempo  $t$ , for completamente caracterizado por um vetor de estado  $|\psi(t)\rangle$ . Conhecido o vetor de estado, pode-se calcular o valor esperado de um observável do sistema, representado por um operador hermiteano  $\hat{O}$ , como [6]

$$\langle \hat{O} \rangle(t) = \langle \psi(t) | \hat{O} | \psi(t) \rangle . \quad (1.10)$$

Fazendo uso da operação traço<sup>1</sup>, podemos reescrever a equação acima como traço do produto entre o observável  $\hat{O}$  e um operador  $|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ , a

---

<sup>1</sup>O traço de um operador  $X$  é definido como a soma dos seus elementos diagonais, a saber:  $\text{tr}(X) = \sum_i \langle a_i | X | a_i \rangle$ , onde os vetores  $\{|a_i\rangle\}$  formam uma base completa no mesmo

saber,

$$\langle \hat{O} \rangle(t) = \text{tr}(\bullet)(\hat{O}|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|) = \text{tr}(\hat{O}|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|) \quad , \quad (1.11)$$

definindo assim um operador  $\hat{\rho}(t)$  tal que

$$\langle \hat{O} \rangle(t) = \text{tr}(\hat{O}\hat{\rho}(t)) \quad . \quad (1.12)$$

Comparando as duas últimas equações percebe-se de imediato que

$$\hat{\rho}(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| \quad . \quad (1.13)$$

Este operador  $\hat{\rho}(t)$  é definido [5] como o *operador densidade* do estado puro  $|\psi(t)\rangle$  e também descreve completamente o estado físico associado ao vetor de estado. Neste caso,  $\hat{\rho}(t)$  é um projetor sobre o estado  $|\psi(t)\rangle$  e obedece às seguintes propriedades [8]:

a) hermiticidade:

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}^\dagger(t) \quad , \quad (1.14)$$

b) traço unitário:

$$\text{tr}(\hat{\rho}(t)) = 1 \quad , \quad (1.15)$$

c) positividade semidefinida:

$$\hat{\rho}(t) > 0 \quad , \quad (1.16)$$

d) idempotência:

$$\hat{\rho}^2(t) = \hat{\rho}(t) \quad . \quad (1.17)$$

---

espaço de Hilbert do operador  $X$ . Agora considere que  $X$  é um operador definido em um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , tal que,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\alpha \otimes \mathcal{H}_\beta$ . Sejam também os vetores  $\{|a_i^\alpha\rangle\}(\{|a_i^\beta\rangle\})$  que formam uma base completa em  $\mathcal{H}_\alpha(\mathcal{H}_\beta)$ , respectivamente. Desta maneira, os vetores  $\{|a_i^\alpha\rangle \otimes |a_j^\beta\rangle\}$  definem uma base completa no espaço total  $\mathcal{H}$ . O traço parcial do operador  $X$ , sobre o espaço  $\mathcal{H}_{\beta(\alpha)}$ , será dado por  $\text{tr}_{\mathcal{H}_{\beta(\alpha)}}(X) = \sum_k \langle a_k^{\beta(\alpha)} | X | a_k^{\beta(\alpha)} \rangle$ . Após essa operação (chamada de *traço parcial*), teremos um novo operador  $\text{tr}_{\mathcal{H}_{\beta(\alpha)}}(X)$  que atua apenas no espaço  $\mathcal{H}_{\alpha(\beta)}$ , respectivamente.

Como ambos  $|\psi(t)\rangle$  e  $\hat{\rho}(t)$  representam o mesmo estado físico, é natural que também exista uma equação de evolução para o operador densidade. E de fato há, sendo conhecida como equação de Liouville–von Neumann [6]. Diferenciando em relação ao tempo ambos os lados da eq.(1.13) e fazendo uso da eq.(1.1), podemos encontrá-la. Observe:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) &= \left(\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle\right)\langle\psi(t)| + |\psi(t)\rangle\left(\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\right) \\ &= \frac{1}{i\hbar}\hat{H}|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| - \frac{1}{i\hbar}|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\hat{H} \end{aligned}$$

e finalmente encontramos

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)] \quad , \quad (1.18)$$

sendo essa a equação procurada. Independentemente da forma ou dependência temporal do hamiltoniano, a equação de Liouville–von Neumann será sempre obedecida.

### 1.3.2 Para estados de mistura estatística

Na seção anterior vimos uma forma alternativa de representar um estado físico puro através do operador densidade associado ao estado em questão. Para sistemas simples ou com poucos graus de liberdade, é em princípio possível obter toda informação sobre o sistema e encontrar o vetor de estado que o represente completamente em qualquer instante  $t$ . Porém, para sistemas com um número considerável de graus de liberdade fica muito difícil determinar um vetor de estado que descreva todo o sistema. Podemos, de maneira qualitativa, ter uma idéia dessa dificuldade observando que para descrever um sistema com  $N$  partículas em um dado tempo  $t$  precisaremos conhecer o estado de cada uma das  $N$  partículas no mesmo instante. Logo, fica praticamente impossível saber toda informação do sistema e uma interpretação probabilística se faz necessária. Devido a essa desinformação, podemos afirmar que o sistema pode estar no estado  $|\psi_1(t)\rangle$  com probabilidade  $p_1$ , ou no estado  $|\psi_2(t)\rangle$  com probabilidade  $p_2$ , ou no estado  $|\psi_3(t)\rangle$  com probabilidade  $p_3$ , ... , ou no estado  $|\psi_n(t)\rangle$  com probabilidade  $p_n$ , ... .

Define-se então o operador densidade<sup>2</sup> de *mistura estatística* [5] que descreve o estado do sistema através de uma *mistura propabilística* de estados puros, possíveis ao sistema, com suas respectivas probabilidades, a saber,

$$\hat{\rho}(t) = \sum_i p_i(t) \hat{\rho}_i(t) \quad , \quad (1.19)$$

onde

$$\hat{\rho}_i(t) = |\psi_i(t)\rangle\langle\psi_i(t)| \quad (1.20)$$

$$\sum_i p_i(t) = 1 \quad \text{com} \quad 0 \leq p_i(t) \leq 1 \quad . \quad (1.21)$$

Aqui, como antes, a média sobre um observável  $\hat{O}$  do sistema será dada pela eq.(1.12) e as propriedades (1.14 – 1.16) continuam valendo. Mas, devido à eq.(1.21), a propriedade (1.17) será substituída por

$$\hat{\rho}^2(t) \leq \hat{\rho}(t) \quad (1.22)$$

e a igualdade só se dará quando, na eq.(1.19), as probabilidades  $\{p_i(t)\}$  possam ser substituídas por  $p_i(t) = \delta_{i,1}$ . Se isso for possível o sistema está em um estado puro, deixando claro que este é um caso particular da mistura estatística.

Se o hamiltoniano  $\hat{H}(t)$  do sistema for completamente conhecido, então as probabilidades  $\{p_i(t)\}$  serão independentes do tempo [5] e a evolução temporal do sistema obedecerá a eq.(1.18), mostrando o carácter universal da equação de Liouville–von Neumann.

Podemos então ter uma “receita de bolo” para a solução de um dado problema: i) determine o hamiltoniano do sistema de interesse; ii) em seguida, obtenha a equação de Liouville–von Neumann em questão; e iii) dadas as condições iniciais, resolva a equação. Apesar de ser sempre esse o procedimento, nem sempre é tão fácil encontrar a solução.

---

<sup>2</sup>Esse não é o único motivo para se usar o operador densidade. Misturas estatísticas podem ocorrer em sistemas físicos simples. Como exemplo, podemos tomar o experimento Stern-Gerlach [6] que após a passagem dos átomos de prata pelo campo magnético  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ , teremos que descrever o estado total como uma mistura estatísticas de átomos com *spin* para cima ou para baixo.

## 1.4 A equação mestra

Sistemas físicos isolados são pouco realísticos e constituem uma idealização da natureza. Raros são os sistemas que podem ser tratados sem levar em conta sua interação com o ambiente a sua volta. Na “vida real” predominam aqueles que possuem algum tipo de interação com o ambiente. Sob estas circunstâncias, torna-se importante encontrar uma equação que descreva a dinâmica do sistema de interesse levando em consideração sua interação com o meio em que está imerso. Uma equação deste tipo é conhecida como *equação mestra* e possui um caráter mais abrangente na descrição da evolução de fenômenos físicos microscópicos que percebem a presença do ambiente.

Antes de iniciar a dedução da equação mestra de interesse, faremos algumas considerações [7] sobre o ambiente e o sistema microscópico que desejamos estudar:

- I – O sistema de interesse  $\mathcal{A}$  interage com o ambiente  $\mathcal{R}$  que possui um número muito maior de graus de liberdade;
- II – A capacidade térmica de  $\mathcal{R}$  é muito grande. Desta maneira, não há modificação macroscópica do estado de  $\mathcal{R}$  sob a influência do acoplamento com  $\mathcal{A}$  ( $\mathcal{R}$  pode ser considerado um reservatório);
- III – Há duas escalas de tempo distintas [7]:
  - i) uma muito curta  $\tau_c$ , caracterizando as flutuações da perturbação exercida por  $\mathcal{R}$  em  $\mathcal{A}$ , e
  - ii) uma muito longa  $T_R$ , caracterizando a taxa de variação (tempo de evolução) de  $\mathcal{A}$ .
- IV – Considera-se um acoplamento, entre  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{R}$ , de fraco efeito durante o tempo de correlação  $\tau_c$  das flutuações<sup>3</sup> de  $\mathcal{R}$ .

---

<sup>3</sup>Essa situação é recordativo ao regime de colisões fracas no movimento browniano.

### 1.4.1 A evolução do sistema de interesse

Quando o sistema que desejamos descrever percebe um ambiente com um número muito grande de graus de liberdade, a sua evolução será não-unitária [8] e não podemos escrever uma equação de Liouville–von Neumann da evolução em questão. Porém, isso não se aplica quando consideramos o sistema global, ambiente  $\mathcal{R}$  mais sistema de interesse  $\mathcal{A}$ <sup>4</sup>. Podemos então encontrar uma equação exata para o sistema global e depois fazer a operação *traço parcial* sobre as variáveis de  $\mathcal{R}$ . Com esse procedimento, estaremos determinando uma equação de evolução para  $\mathcal{A}$  que em geral descreve um processo não-unitário.

Considere então o hamiltoniano do sistema global

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_{\mathcal{A}}(t) + \hat{H}_{\mathcal{R}}(t) + \hat{H}_I(t) \quad , \quad (1.23)$$

onde  $\hat{H}_{\mathcal{A}}(t)$ ,  $\hat{H}_{\mathcal{R}}(t)$  e  $\hat{H}_I(t)$  são os hamiltonianos do sistema de interesse  $\mathcal{A}$ , do ambiente  $\mathcal{R}$  e da interação entre eles, respectivamente.

O estado  $\hat{\rho}_g(t)$  do sistema global obedece à eq.(1.18) para todo tempo  $t$ . Isso nos permite escrever

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_g(t) = \frac{1}{i\hbar} \left[ \hat{H}(t), \hat{\rho}_g(t) \right] \quad , \quad (1.24)$$

que, na representação de interação, torna-se

$$\frac{d}{dt}\bar{\rho}_g(t) = \frac{1}{i\hbar} \left[ \bar{H}_I(t), \bar{\rho}_g(t) \right] \quad , \quad (1.25)$$

sendo

$$\bar{\rho}_g(t) = e^{i(\hat{H}_{\mathcal{A}}+\hat{H}_{\mathcal{R}})t/\hbar} \hat{\rho}_g(t) e^{-i(\hat{H}_{\mathcal{A}}+\hat{H}_{\mathcal{R}})t/\hbar} \quad (1.26)$$

$$\bar{H}_I(t) = e^{i(\hat{H}_{\mathcal{A}}+\hat{H}_{\mathcal{R}})t/\hbar} \hat{H}_I(t) e^{-i(\hat{H}_{\mathcal{A}}+\hat{H}_{\mathcal{R}})t/\hbar} \quad . \quad (1.27)$$

Podemos integrar a eq.(1.25) de  $t_0$  até  $t$ , o que fornece

$$\bar{\rho}_g(t) = \bar{\rho}_g(t_0) + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_a \left[ \bar{H}_I(t_a), \bar{\rho}_g(t_a) \right] \quad , \quad (1.28)$$

---

<sup>4</sup>Isso acaba se aplicando sempre, ou quase sempre, pois não conhecemos o estado de  $\mathcal{R}$ .

que, por sua vez, pode ser substituída na própria eq.(1.25), resultando em

$$\frac{d}{dt}\bar{\rho}_g(t) = \frac{1}{i\hbar} \left[ \bar{H}_I(t), \bar{\rho}_g(t_0) \right] + \left( \frac{1}{i\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt_a \left[ \bar{H}_I(t), [\bar{H}_I(t_a), \bar{\rho}_g(t_a)] \right]. \quad (1.29)$$

Esta última equação pode ser novamente integrada, num processo de iteração, de  $t_0$  a  $t'$  tornando-se

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_g(t') = \bar{\rho}_g(t_0) &+ \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^{t'} dt_a \left[ \bar{H}_I(t_a), \bar{\rho}_g(t_0) \right] \\ &+ \left( \frac{1}{i\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^{t'} dt_b \int_{t_0}^{t_b} dt_a \left[ \bar{H}_I(t_b), [\bar{H}_I(t_a), \bar{\rho}_g(t_a)] \right]. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Se continuarmos a fazer essa iteração indefinidamente obteremos, após algumas trocas de variáveis, a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_g(t) = \bar{\rho}_g(t_0) &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{i\hbar} \right)^n \int_{t_0}^t dt_{\alpha_{n-1}} \int_{t_0}^{t_{\alpha_{n-1}}} dt_{\alpha_{n-2}} \dots \\ &\dots \int_{t_0}^{t_{\alpha_1}} dt_{\alpha_0} \left[ \bar{H}_I(t_{\alpha_{n-1}}), [\bar{H}_I(t_{\alpha_{n-2}}), \dots, [\bar{H}_I(t_{\alpha_0}), \bar{\rho}_g(t_0)] \dots] \right] \end{aligned} \quad (1.31)$$

onde  $t > t_1 > t_2 > \dots > t_n > \dots > t_0$ .

Novamente podemos substituir esta última equação na eq.(1.25) e finalmente chegar a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bar{\rho}_g(t) = \frac{1}{i\hbar} \left[ \bar{H}_I(t), \bar{\rho}_g(t_0) \right] &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{i\hbar} \right)^{n+1} \int_{t_0}^t dt_{\alpha_{n-1}} \int_{t_0}^{t_{\alpha_{n-1}}} dt_{\alpha_{n-2}} \\ &\dots \int_{t_0}^{t_{\alpha_1}} dt_{\alpha_0} \left[ \bar{H}_I(t), \left[ \bar{H}_I(t_{\alpha_{n-1}}), [\bar{H}_I(t_{\alpha_{n-2}}), \dots, [\bar{H}_I(t_{\alpha_0}), \bar{\rho}_g(t_0)] \dots] \right] \right] \end{aligned} \quad (1.32)$$

sempre respeitando, por construção, a desigualdade  $t > t_1 > t_2 > \dots > t_n > \dots > t_0$  para todo e qualquer  $n$  do somatório.

Entretanto, estamos interessados na evolução do sistema  $\mathcal{A}$ . Para isso, precisamos fazer uma operação traço parcial sobre as variáveis do reservatório. Teremos como resultado

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bar{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar} \text{tr}_{\mathcal{R}} \left( \left[ \bar{H}_I(t), \bar{\rho}_g(t_0) \right] \right) &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{i\hbar} \right)^{n+1} \int_{t_0}^t dt_{\alpha_{n-1}} \int_{t_0}^{t_{\alpha_{n-1}}} dt_{\alpha_{n-2}} \\ &\dots \int_{t_0}^{t_{\alpha_1}} dt_{\alpha_0} \text{tr}_{\mathcal{R}} \left( \left[ \bar{H}_I(t), \left[ \bar{H}_I(t_{\alpha_{n-1}}), \dots, [\bar{H}_I(t_{\alpha_0}), \bar{\rho}_g(t_0)] \dots \right] \right] \right), \end{aligned} \quad (1.33)$$

onde  $\bar{\rho}(t)$  é o operador densidade reduzido do sistema  $\mathcal{A}$  na representação de interação.

Para continuar na dedução da equação mestra, iremos supor que no tempo  $t_0$  a interação foi ligada<sup>5</sup>. Nesse momento o estado global será um estado produto dos estados de  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{R}$ . Além disso, o nosso ambiente pode ser considerado um reservatório<sup>6</sup> em um estado estacionário [7]. Isso lhe fornecerá algumas características importantes:

- i) será independente do tempo ;
- ii) comutará com  $\hat{H}_{\mathcal{R}}$  ;
- iii) e será um operador que possui elementos apenas na digonal principal.

Também podemos supor que  $\bar{H}_I$  não tem elementos na diagonal principal<sup>7</sup> na representação em que  $\bar{H}_{\mathcal{R}}$  é diagonal [8]. Essa suposição nos leva a

$$\text{tr}_{\mathcal{R}}\left(\left[\bar{H}_I(t), \bar{\rho}_g(t_0)\right]\right) = \left[\text{tr}_{\mathcal{R}}(\bar{H}_I(t)\varrho), \bar{\rho}(t_0)\right] = 0 \quad , \quad (1.34)$$

onde definimos  $\varrho$  como o estado do reservatório e consideramos

$$\bar{\rho}_g(t_0) = \bar{\rho}(t_0) \otimes \varrho \quad .$$

Como consequência, a eq.(1.33) restringe-se a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bar{\rho}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^{n+1} \int_{t_0}^t dt_{\alpha_{n-1}} \int_{t_0}^{t_{\alpha_{n-1}}} dt_{\alpha_{n-2}} \\ &\quad \dots \int_{t_0}^{t_{\alpha_1}} dt_{\alpha_0} \text{tr}_{\mathcal{R}}\left(\left[\bar{H}_I(t), \left[\bar{H}_I(t_{\alpha_{n-1}}), \dots, \left[\bar{H}_I(t_{\alpha_0}), \bar{\rho}(t_0) \otimes \varrho\right] \dots\right]\right]\right) . \end{aligned} \quad (1.35)$$

Esta é uma equação diferencial exata para a evolução do sistema  $\mathcal{A}$ . Porém, é de resolução difícil e precisaremos de algumas aproximações adicionais.

<sup>5</sup>Essa é uma suposição forte. Porém estamos interessados a resolver problemas que respeitem essa condição inicial, o que “justifica” um pouco essa hipótese. Aqui começa a primeira aproximação (dentre outras) que iremos fazer para chegar na equação mestra.

<sup>6</sup>O ambiente é sempre considerado um reservatório em uma mistura de estados em equilíbrio térmico à temperatura constante [8].

<sup>7</sup>Na verdade, o que se faz é definir um novo hamiltoneano livre  $\check{H}_0(t) = \check{H}_{\mathcal{A}}(t) + \check{H}_{\mathcal{R}}(t)$  tal que inclua os elementos diagonais de  $\bar{H}_I$ .

### 1.4.2 As aproximações de Born e markoviana

Até aqui apenas uma aproximação foi feita e fizemos considerações a respeito do reservatório. Considerações estas, que estão muito próximas do encontrado nas situações físicas de interesse. Como resultado, a eq.(1.35) é exata, para todo e qualquer estado inicial do sistema  $\mathcal{A}$ , e dita não-markoviana [9] porque depende de todo o seu passado. Na forma como se encontra é intratável e algumas aproximações são necessárias.

A próxima aproximações é a aproximação de Born (veja em [8] ou [9], *e.g.*). Esta considera um acoplamento entre o sistema  $\mathcal{A}$  e o reservatório fraco o suficiente para que dinâmica de interesse seja descrita pelo primeiro termo na eq.(1.35). Tornando-a

$$\frac{d}{dt}\bar{\rho}(t) = \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t d\tau \operatorname{tr}_{\mathcal{R}} \left( \left[ \bar{H}_I(t), [\bar{H}_I(\tau), \bar{\rho}(\tau) \otimes \varrho] \right] \right) . \quad (1.36)$$

A segunda será a aproximação markoviana (veja em [8], [9] ou [7], *e.g.*). Aqui se faz necessário analisar duas escalas de tempos: i) uma muito curta  $\tau_c$  que caracteriza o tempo das flutuações<sup>8</sup> de  $\mathcal{R}$  em  $\mathcal{A}$ , e ii) outra muito longa  $T_R$  que caracteriza o tempo de evolução<sup>9</sup> do estado de  $\mathcal{A}$ . O núcleo de memória [8]

$$K(t - \tau)(\bullet) = \operatorname{tr}_{\mathcal{R}} \left( \left[ \bar{H}_I(t), [\bar{H}_I(\tau), \bullet \otimes \varrho] \right] \right) \quad (1.37)$$

só é importante para tempos  $|t - \tau| < \tau_c$ . Como  $\tau_c$  é muito pequeno, os efeitos de memória podem ser desconsiderados e o estado atual do sistema de interesse não dependerá do que aconteceu no passado. Essa é a *aproximação markoviana*.

Fazendo uma mudança de variável  $\tau \longrightarrow t - \tau$  na integração na eq.(1.36) e fazendo  $t_0 = 0$  ficamos com

$$\frac{d}{dt}\bar{\rho}(t) = \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_0^t d\tau \operatorname{tr}_{\mathcal{R}} \left( \left[ \bar{H}_I(t), [\bar{H}_I(t - \tau), \bar{\rho}(t - \tau) \otimes \varrho] \right] \right) . \quad (1.38)$$

<sup>8</sup>É nessa escala de tempo que se caracteriza o tempo de memória  $\tau_{mem}$ . Ou seja, nos informa quão longe devemos voltar no passado para descrever o estado de  $\mathcal{A}$  no presente.

<sup>9</sup>Nessa escala de tempo se caracteriza o tempo de relaxação  $\tau_{rel}$  [8].

A aproximação markoviana permite que  $\bar{\rho}(t - \tau)$  seja substituída por  $\bar{\rho}(t)$  na equação acima. Contudo, esta aproximação naturalmente leva ao chamado *limite quasi-estacionário* e isso nos possibilita fazer o limite superior da integral tender ao infinito [7]. Tornando

$$\frac{d}{dt}\bar{\rho}(t) = \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_0^\infty d\tau \operatorname{tr}_{\mathcal{R}} \left( \left[ \bar{H}_I(t), [\bar{H}_I(t - \tau), \bar{\rho}(t) \otimes \varrho] \right] \right) . \quad (1.39)$$

Essa última equação é uma equação genérica, pois não fizemos nenhuma suposição sobre o sistema e a forma da sua interação com o ambiente. Logo, ela é o ponto de partida para a obtenção de uma equação mestra em particular. Para isso, precisamos saber qual é o nosso sistema de interesse e o tipo de interação que há entre ele e o reservatório. Essa tarefa faremos na próxima seção e seguiremos de perto a referência [10].

### 1.4.3 Equação mestra para um oscilador na R.W.A.

Aqui, encontraremos a equação mestra para um oscilador harmônico que possui uma interação posição-posição, na aproximação de ondas girantes (Rotating Wave Approximation – R.W.A.), com o reservatório [11], constituído de um conjunto infinito de osciladores harmônicos.

Primeiro considere o hamiltoneano total do sistema que será dado por [10]

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_{\mathcal{R}} + \hat{H}_I , \quad (1.40)$$

sendo

$$\hat{H}_A = \hbar\omega_0(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \mathbf{1}/2) , \quad (1.41)$$

$$\hat{H}_{\mathcal{R}} = \hbar \sum_i \omega_i (\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i + \mathbf{1}/2) , \quad (1.42)$$

$$\hat{H}_I = \hbar \sum_i (g_i^* \hat{a}^\dagger \hat{b}_i + g_i \hat{a} \hat{b}_i^\dagger) , \quad (1.43)$$

onde  $\omega_0$  é a frequência do oscilador de interesse,  $\omega_i$  é a frequência do  $i$ -ésimo oscilador pertencente ao reservatório,  $g_i$  é uma constante de acoplamento entre o  $i$ -ésimo oscilador do banho com o de interesse e os  $\hat{a}(\{\hat{b}_i\})$  e  $\hat{a}^\dagger(\{\hat{b}_i^\dagger\})$

são os operadores criação e destruição associados com o modo de frequência  $\omega_0(\{\omega_i\})$ , respectivamente.

Por simplicidade, faremos

$$\begin{aligned}\hat{F}_1 &= \sum_i g_i^* \hat{b}_i \\ \hat{F}_2 &= \sum_i g_i \hat{b}_i^\dagger\end{aligned}\quad (1.44)$$

e o hamiltoneano de interação será escrito como

$$\hat{H}_I = \hbar(\hat{F}_1 \hat{a}^\dagger + \hat{F}_2 \hat{a}) \quad . \quad (1.45)$$

Para o reservatório, considera-se um estado em equilíbrio térmico [12], que será dado por:

$$\varrho = \prod_i \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega_i}{k_B T}\right) \right] \exp\left(-\frac{\hbar\omega_i \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i}{k_B T}\right) \quad , \quad (1.46)$$

onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura. Para este estado, teremos

$$\langle \hat{b}_i \rangle_{\mathcal{R}} = \langle \hat{b}_j^\dagger \rangle_{\mathcal{R}} = 0 \quad (1.47)$$

$$\langle \hat{b}_i \hat{b}_j \rangle_{\mathcal{R}} = \langle \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j^\dagger \rangle_{\mathcal{R}} = 0 \quad (1.48)$$

$$\langle \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j \rangle_{\mathcal{R}} = \bar{n}_i \delta_{i,j} \quad (1.49)$$

$$\langle \hat{b}_i \hat{b}_j^\dagger \rangle_{\mathcal{R}} = (1 + \bar{n}_i) \delta_{i,j} \quad (1.50)$$

para cada oscilador que o constitui, onde  $\langle \bullet \rangle_{\mathcal{R}} = \text{tr}_{\mathcal{R}}(\bullet \varrho)$  e  $\bar{n}_i$  é o número médio de excitações no  $i$ -ésimo oscilador dado por

$$\bar{n}_i = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_i}{k_B T}\right) - 1} \quad . \quad (1.51)$$

Expandindo o duplo comutador na eq.(1.39), reescrevendo a expressão na representação de Schrödinger<sup>10</sup> e reordenando os termos, encontramos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) &= \frac{1}{i\hbar} \left[ \hat{H}_A, \hat{\rho}(t) \right] \\ &+ \left\{ \left[ \int_0^\infty d\tau \left\{ \left\langle \hat{F}_1(t) \hat{F}_2(t-\tau) \right\rangle_{\mathcal{R}} \hat{a}(-\tau) \right\} \hat{\rho}(t), \hat{a}^\dagger \right] \right. \\ &\left. + \left[ \int_0^\infty d\tau \left\{ \left\langle \hat{F}_2(t) \hat{F}_1(t-\tau) \right\rangle_{\mathcal{R}} \hat{a}^\dagger(-\tau) \right\} \hat{\rho}(t), \hat{a} \right] + \text{c.h.} \right\}\end{aligned}\quad (1.52)$$

<sup>10</sup>Para retornar à representação de Schrödinger precisamos desfazer a operação que fizemos no início da seção (1.4.1) com o estado global e conseqüentemente com o estado de interesse também.

onde

$$\hat{F}_1(t') = \sum_i g_i^* \hat{b}_i e^{-i\omega_i t'} \quad (1.53)$$

$$\hat{F}_2(t') = \sum_i g_i \hat{b}_i^\dagger e^{i\omega_i t'} \quad (1.54)$$

$$\hat{a}(t') = e^{-i\omega_0 t'} \hat{a} \quad (1.55)$$

$$\hat{a}^\dagger(t') = e^{i\omega_0 t'} \hat{a}^\dagger \quad (1.56)$$

e c.h. indica conjugação hermitiana.

Como o reservatório possui um número muito grande de graus de liberdade, podemos considerá-lo infinito e fazer as seguintes mudanças [8]:

$$\sum_i \longrightarrow \int_0^\infty D(\omega) d\omega \quad (1.57)$$

$$g_i \longrightarrow g(\omega) \quad (1.58)$$

$$\bar{n}_i \longrightarrow \bar{n}(\omega) \quad (1.59)$$

onde  $D(\omega)$  é a densidade de modos no reservatório.

Levando isso em consideração, as médias sobre as variáveis do reservatório na eq.(1.52) ficam

$$\left\langle \hat{F}_1(t) \hat{F}_2(t - \tau) \right\rangle_{\mathcal{R}} \hat{a}(-\tau) = \sum_i |g_i|^2 e^{-i(\omega_i - \omega_0)\tau} (1 + \bar{n}_i) \hat{a} \quad (1.60)$$

$$\longrightarrow \int_0^\infty d\omega D(\omega) |g(\omega)|^2 e^{-i(\omega - \omega_0)\tau} (1 + \bar{n}(\omega)) \hat{a}$$

$$\left\langle \hat{F}_2(t) \hat{F}_1(t - \tau) \right\rangle_{\mathcal{R}} \hat{a}^\dagger(-\tau) = \sum_i |g_i|^2 e^{i(\omega_i - \omega_0)\tau} \bar{n}_i \hat{a}^\dagger \quad (1.61)$$

$$\longrightarrow \int_0^\infty d\omega D(\omega) |g(\omega)|^2 e^{i(\omega - \omega_0)\tau} \bar{n}(\omega) \hat{a}^\dagger$$

Substituindo essas últimas equações na eq.(1.52), podemos fazer as integrações. Primeiro integrando no tempo, levando em consideração que

$$\int_0^\infty d\tau e^{\pm i(\omega - \omega_0)\tau} = \pi \delta(\omega - \omega_0) \pm iPP \left[ \frac{1}{\omega - \omega_0} \right], \quad (1.62)$$

onde  $iPP \left[ \frac{1}{\omega - \omega_0} \right]$  é a parte principal de  $1/(\omega - \omega_0)$ , que provoca um leve desvio na frequência natural do sistema, podendo ser desprezada [8], e em

seguida integramos em  $\omega$ . O resultado disso é

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}_{\mathcal{A}}, \hat{\rho}(t)] + \left\{ \left[ \kappa(1 + \bar{n})\hat{a}\hat{\rho}(t), \hat{a}^\dagger \right] + \left[ \kappa\bar{n}\hat{a}^\dagger\hat{\rho}(t), \hat{a} \right] + \text{c.h.} \right\}$$

onde  $\kappa = \pi D(\omega_0)|g(\omega_0)|^2$  é a chamada constante de amortecimento e fizemos  $\bar{n}(\omega_0) = \bar{n}$ . Reescrevendo a equação teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = & \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}_{\mathcal{A}}, \hat{\rho}(t)] + \kappa(1 + \bar{n})\left\{ \left[ \hat{a}\hat{\rho}(t), \hat{a}^\dagger \right] + \left[ \hat{a}, \hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger \right] \right\} \\ & + \kappa\bar{n}\left\{ \left[ \hat{a}^\dagger\hat{\rho}(t), \hat{a} \right] + \left[ \hat{a}^\dagger, \hat{\rho}(t)\hat{a} \right] \right\} . \end{aligned} \quad (1.63)$$

Esta é a equação mestra que estávamos a procura e que descreverá a evolução temporal do sistema  $\mathcal{A}$ , consideradas sua energia e a interação entre  $\mathcal{A}$  e um reservatório constituído de infinitos osciladores.

## Capítulo 2

# A interação átomo–campo

O campo eletromagnético (CEM) pode ser absorvido ou emitido por um átomo [13] e caracterizar completamente esse tipo de interação é uma tarefa muito difícil, pois um átomo real possui uma complexa estrutura espectral [14]. Entretanto, para muitos casos de interesse físico, aproximações controladas são feitas com o intuito de descrever um comportamento simplificado da interação. Em especial, quando o átomo é neutro<sup>1</sup> e suas dimensões são bem menores que o comprimento de onda do CEM incidente, é feita a *aproximação de dipolo* (veja as referências [15] e [12] para maiores detalhes). Nesta situação, o átomo é aproximado como um sistema com apenas dois níveis de energia simplificando substancialmente a descrição do problema. Esta, por exemplo, é a configuração encontrada em experimentos de eletrodinâmica quântica de cavidade (CQED, do inglês “*cavity quantum electrodynamics*”). Apesar de aparentemente “brusca”, a *aproximação de dipolo* descreve extremamente bem a interação átomo–campo em CQED [16].

Nas subseções que seguem, descreveremos os aspectos fundamentais de um átomo interagindo na *aproximação de dipolo* como um campo clássico e em seguida sua interação com um campo quantizado. Um tratamento com maior detalhe pode ser encontrado nos livros de Óptica Quântica ([12], [13] e [14]).

---

<sup>1</sup>Ou seja, quando a soma das cargas é nula  $\sum_i q_i = 0$ .

## 2.1 A interação com o campo clássico

Neste modelo de interação átomo–campo, considera-se apenas o átomo como sendo um sistema quântico enquanto o CEM é tratado classicamente.

Na *aproximação de dipolo* o hamiltoniano do sistema átomo–campo será dado por [12]

$$\hat{H} = \hbar\omega_e |e\rangle\langle e| + \hbar\omega_g |g\rangle\langle g| - \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{E}(t) \quad (2.1)$$

onde temos: i)  $|e\rangle$  ( $|g\rangle$ ) representa o autoestado excitado (desexcitado) do hamiltoniano da evolução livre do átomo com autovalor  $\hbar\omega_e$  ( $\hbar\omega_g$ ), respectivamente; ii)  $\hat{\mathbf{p}}$  é o operador vetorial momento de dipolo; e iii)  $\mathbf{E}(t)$  sendo o vetor campo elétrico do CEM que se acopla ao dipolo atômico.

Sem perda de generalidade, podemos considerar o CEM se propagando no eixo  $\underline{ox}$  e polarizado na direção  $\underline{oz}$ . Com isso, o hamiltoniano de interação tornar-se-á

$$\hat{H}_{IC} = -\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{E}(t) = -\hat{p}_z E(x, t) \quad . \quad (2.2)$$

O operador momento de dipolo possui uma simetria espacial e paridade ímpar [13]. Como consequência, o seu valor esperado nos estados excitado e desexcitado serão nulos e o operador  $\hat{p}_z$  terá apenas elementos nulos na sua diagonal principal. Além disso, ele é um observável e precisa ser um operador hermiteano. Podemos então escrevê-lo como

$$\hat{p}_z = \mathbf{1} \hat{p}_z \mathbf{1} = \wp_{eg} |e\rangle\langle g| + \wp_{eg}^* |g\rangle\langle e| \quad (2.3)$$

onde  $\wp_{eg} = \langle e | \hat{p}_z | g \rangle$  é o elemento de matriz do operador momento de dipolo e onde a relação de completudeza  $\mathbf{1} = |e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|$  foi usada.

Com essas considerações a eq.(2.1) pode ser reescrita como

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hbar\omega_{eg} \hat{\sigma}_z - (\wp_{eg} \hat{\sigma}_+ + \wp_{eg}^* \hat{\sigma}_-) E(x, t) + \frac{\hbar}{2} (\omega_e + \omega_g) \mathbf{1} \quad (2.4)$$

onde  $\omega_{eg} = (\omega_e - \omega_g)$  é a diferença de frequência (frequência de transição) entre os estados excitado e desexcitado e os  $\hat{\sigma}$ 's são as matrizes de Pauli [5]. O último termo desta equação é uma constante e pode ser desconsiderado.

Descrevendo o campo elétrico como  $E(x, t) = \mathcal{E}(x) \cos(\nu t)$  e considerando  $\wp = |\wp|e^{-i\phi}$ , teremos

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hbar \omega_{eg} \hat{\sigma}_z - |\wp| \mathcal{E}(x) \left( \hat{\sigma}_+ e^{-i\phi} \cos(\nu t) + \hat{\sigma}_- e^{-i\phi} \cos(\nu t) \right) \quad . \quad (2.5)$$

Para um estado inicial arbitrário  $|\psi(t)\rangle$ , sua evolução na representação de Schrödinger obedecerá a eq.(1.1). Ou seja:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle &= \hat{H} |\psi(t)\rangle \\ &= \hat{H}_0 |\psi(t)\rangle + \hat{H}_{IC} |\psi(t)\rangle \end{aligned} \quad (2.6)$$

sendo que fizemos  $\hat{H}_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_{eg} \hat{\sigma}_z$ .

Por conveniência, faremos a evolução do estado atômico na representação de interação. Deste modo, a equação acima torna-se

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \bar{H}_{IC} |\Psi(t)\rangle \quad (2.7)$$

onde

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} |\psi(t)\rangle \\ \bar{H}_{IC} &= e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{H}_{IC} e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} \\ &= -|\wp| \mathcal{E}(x) \left[ \hat{\sigma}_+ e^{i(\omega_{eg} t - \phi)} \cos(\nu t) + \hat{\sigma}_- e^{-i(\omega_{eg} t - \phi)} \cos(\nu t) \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Fazendo

$$\cos(\nu t) \longrightarrow \frac{1}{2} (e^{i\nu t} + e^{-i\nu t})$$

na eq.(2.9) e considerando a *aproximação de ondas girantes*<sup>2</sup> [12] (do inglês “rotating wave approximation” – RWA), encontraremos

$$\bar{H}_{IC} = -\frac{|\wp| \mathcal{E}}{2} \left[ \hat{\sigma}_+ e^{-i\phi} e^{i(\omega_{eg} - \nu)t} + \hat{\sigma}_- e^{i\phi} e^{-i(\omega_{eg} - \nu)t} \right] \quad . \quad (2.10)$$

Na equação acima desconsideramos a dependência espacial da amplitude do campo elétrico, pois como estamos na *aproximação de dipolo* o comprimento de onda do CEM é muito grande comparado com o tamanho característico do átomo. Como consequência a amplitude varia muito lentamente na posição onde se encontra o átomo justificando a troca  $\mathcal{E}(x) \longrightarrow \mathcal{E}$ .

---

<sup>2</sup>Nesta aproximação desconsideram-se os termos proporcionais a  $e^{\pm i(\omega_{eg} + \nu)t}$ . Estes são conhecidos como *contra-girantes* e em muitos casos de interesses eles não aparecem.

O estado atômico na representação de interação no tempo  $t$  pode ser escrito como

$$|\Psi(t)\rangle = c_e(t)|e\rangle + c_g(t)|g\rangle \quad . \quad (2.11)$$

Substituindo as equações (2.10) e (2.11) na (2.7) teremos

$$\frac{d}{dt}c_e(t)|e\rangle + \frac{d}{dt}c_g(t)|g\rangle = i\frac{\Omega_R}{2}c_g(t)e^{i(\vartheta t-\phi)}|e\rangle + i\frac{\Omega_R}{2}c_e(t)e^{-i(\vartheta t-\phi)}|g\rangle \quad (2.12)$$

onde  $\Omega_R = |\wp|\mathcal{E}/\hbar$  é a frequência de Rabi e  $\vartheta = (\omega_{eg} - \nu)$  é a dessintonia entre a frequência de transição atômica e a do campo elétrico.

Comparando o lado esquerdo com o direito desta última equação, teremos duas equações diferenciais acopladas

$$\frac{d}{dt}c_e(t) = i\frac{\Omega_R}{2}c_g(t)e^{i(\vartheta t-\phi)} \quad (2.13)$$

$$\frac{d}{dt}c_g(t) = i\frac{\Omega_R}{2}c_e(t)e^{-i(\vartheta t-\phi)} \quad (2.14)$$

que possuem a solução única

$$c_e(t) = \left\{ c_e(0) \left[ \cos(\bar{\Omega}t/2) - i\frac{\vartheta}{\bar{\Omega}} \sin(\bar{\Omega}t/2) \right] + i c_g(0) \frac{\Omega_R}{\bar{\Omega}} \sin(\bar{\Omega}t/2) e^{-i\phi} \right\} e^{i\vartheta t/2} \quad (2.15)$$

$$c_g(t) = \left\{ c_g(0) \left[ \cos(\bar{\Omega}t/2) + i\frac{\vartheta}{\bar{\Omega}} \sin(\bar{\Omega}t/2) \right] + i c_e(0) \frac{\Omega_R}{\bar{\Omega}} \sin(\bar{\Omega}t/2) e^{i\phi} \right\} e^{-i\vartheta t/2} \quad (2.16)$$

onde definimos  $\bar{\Omega} = (\Omega_R^2 + \vartheta^2)^{1/2}$ .

Como exemplo, para melhor entender a dinâmica atômica nesta interação, consideremos um átomo inicialmente no estado excitado ( $c_e(0) = 1$  e  $c_g(0) = 0$ ) que interage ressonantemente ( $\vartheta = 0$ ) com o CEM. Nessas condições o estado atômico num tempo  $t > 0$  será:

$$|\Psi(t)\rangle = \cos(\Omega_R t/2)|e\rangle + i \sin(\Omega_R t/2)e^{i\phi}|g\rangle \quad (2.17)$$

Transcorrido um tempo  $t = \frac{(\pi/2)}{\Omega_R}$  o estado será

$$|\Psi(\pi/2\Omega_R)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |e\rangle + ie^{i\phi}|g\rangle \right] \quad (2.18)$$

e se encontrará em um estado de superposição coerente com probabilidade  $1/2$  de ser encontrado no estado excitado ou desexcitado. Nessa situação diz-se que o átomo sofreu um pulso  $\pi/2$ . De maneira semelhante, se o átomo inicialmente estiver no estado excitado e evoluir por um tempo  $t = \pi/\Omega_R$  teremos

$$|\Psi(\pi/\Omega_R)\rangle = ie^{i\phi}|g\rangle \quad (2.19)$$

significando que o átomo estará desexcitado ao término da evolução. Neste caso o átomo sofre um pulso  $\pi$ .

Para um tempo de evolução  $\frac{2\pi}{\Omega_R}$  o estado final será

$$|\Psi(2\pi/\Omega_R)\rangle = -|e\rangle \quad (2.20)$$

e o átomo sofreu um pulso  $2\pi$  com probabilidade 1 de ser encontrado no estado excitado. Ele retorna ao estado inicial a menos de uma fase global<sup>3</sup>.

Desta maneira, podemos perceber que a função de um campo clássico ao interagir com um átomo de dois níveis é “girar” o estado atômico na sua base de autovetores.

## 2.2 A interação com o campo quantizado. O modelo Jaynes–Cummings

Em situações particulares da interação átomo–campo, como por exemplo nas *zonas de Ramsey* [17], considerar o CEM sendo um subsistema clássico descreve muito bem a dinâmica atômica. Entretanto, para experimentos em cavidades de microondas de alto fator de qualidade, onde pode-se observar estados não–clássicos da luz [18], é necessário levar em conta o comportamento

---

<sup>3</sup>Essa fase aparece quando uma partícula de *spin*  $1/2$  (neste caso o átomo) sofre uma rotação de  $2\pi$ . Veja por exemplo [6] para uma descrição detalhada do assunto.

quantizado do campo. O modelo Jaynes–Cummings (MJC), apesar de ser a forma mais simples de caracterizar a interação entre radiação e matéria, vem se mostrando ser muito preciso na descrição da dinâmica átomo–campo [16] e tem uma dinâmica muito rica. Este modelo é completamente quantizado e foi inicialmente proposto por Jaynes e Cummings [19].

O desenvolvimento a seguir aborda as ideias principais do MJC e nos restringiremos à sua versão na RWA, para a qual o modelo possui solução analítica. Também seguiremos de perto o tratamento dado nas referências [20], [21] e [16].

### 2.2.1 O MJC na RWA

De maneira diferente do caso anterior, o MJC reproduz a interação da radiação quantizada com a matéria, considerando um átomo de dois níveis acoplado a um oscilador harmônico quântico. Este acoplamento é do tipo posição–posição [11] e, na RWA, o hamiltoneano de interação é representado pelo operador [16]

$$\hat{\mathcal{V}}_{JC} = \hbar G (\hat{a} \hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-) \quad (2.21)$$

onde  $G$  é uma constante de acoplamento,  $\hat{a}$  ( $\hat{a}^\dagger$ ) é o operador que aniquila (cria) uma excitação no modo do CEM e os  $\hat{\sigma}$ 's são as matrizes de Pauli [5] que  $\hat{\sigma}_-$  ( $\hat{\sigma}_+$ ) desexcita (excita) o estado atômico, respectivamente. Analisando este hamiltoneano<sup>4</sup>, percebemos de maneira qualitativa o processo de emissão e absorção da luz pela matéria. Ou seja, no momento da criação de uma excitação no modo do CEM o átomo será levado para o estado desexcitado e quando há uma excitação aniquilada no CEM o estado atômico se tornará excitado num processo de regresso ao estado inicial. Isso é uma característica do regime de interação na RWA onde o estado global átomo+campo fica “girando” (regressando ao estado inicial) e o número total de excitações se conserva.

---

<sup>4</sup>Na aproximação de ondas girantes os termos contra–girantes são desconsiderados e esta análise qualitativa só é válida nessa situação. Ou seja, este raciocínio é válido apenas em primeira ordem da interação. As ordens superiores incluem os termos contra–girantes.

O hamiltoneano total da evolução será

$$\hat{H}_{JC} = \hat{H}_0 + \hat{\mathcal{V}}_{JC} \quad (2.22)$$

onde

$$\hat{H}_0 = \frac{\hbar\omega_{eg}}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\mathbf{1}}{2} \right) \quad (2.23)$$

é o hamiltomiano de evolução do sistema global livre de interação. Nesta equação  $\omega$  é a frequência do modo do CEM e  $\omega_{eg}$  é a frequência de transição atômica entre os estados excitado e desexcitado. Os operadores  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  são bosônicos, respeitando a relação de comutação  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \mathbf{1}$ , e descrevem o modo do CEM.

É relevante analisar a relação de comutação entre o hamiltoneano do MJC e o operador que mede o número de excitações presentes no sistema átomo+campo, denominado *operador número de excitações*, definido como [21]

$$\hat{N}_{exc} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \quad (2.24)$$

Com uma simples conta percebemos que este comuta com o hamiltoneano total. Ou seja:

$$\begin{aligned} [\hat{N}_{exc}, \hat{H}_{JC}] &= [\hat{N}_{exc}, \hat{H}_0 + \hat{\mathcal{V}}_{JC}] = [\hat{N}_{exc}, \hat{\mathcal{V}}_{JC}] \\ &= \hbar G [\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-, \hat{a} \hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-] \\ &= \hbar (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- - \hat{a} \hat{\sigma}_+ - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a} \hat{\sigma}_+) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Isso significa que o número de excitações é conservado, embasando a nossa análise qualitativa feita anteriormente para o hamiltoneano  $\hat{\mathcal{V}}_{JC}$ . Pode-se dizer que, devido à forma do hamiltoneano de interação, apenas as transições entre os estados  $|e, n\rangle$  e  $|g, n+1\rangle$  são permitidas quando o sistema compartilha  $n+1$  excitações. Esta informação será relevante para uma solução simplificada do MJC com dissipação à temperatura nula (veja apêndice B) que precisaremos para o desenvolvimento deste trabalho.

Os autoestados do hamiltoneano Jaynes-Cummings serão ([16], [21] e [20])

$$|+, n\rangle = \sin \theta_n |e, n\rangle + \cos \theta_n |g, n+1\rangle \quad (2.26)$$

$$|-, n\rangle = \cos \theta_n |e, n\rangle - \sin \theta_n |g, n+1\rangle \quad (2.27)$$

onde o ângulo  $\theta_n$  é definido via as relações

$$\sin \theta_n = \frac{\Omega_n}{\sqrt{(\Delta_n - \delta)^2 + \Omega_n^2}} \quad (2.28)$$

$$\cos \theta_n = \frac{\Delta_n - \delta}{\sqrt{(\Delta_n - \delta)^2 + \Omega_n^2}} \quad (2.29)$$

e seguimos as definições frequentemente usadas ([16], [21]) com

$$\Delta_n = \sqrt{\Omega_n^2 + \delta^2} \quad (2.30)$$

$$\Omega_n = 2G\sqrt{n+1} \quad (2.31)$$

$$\delta = \omega_{eg} - \omega \quad (2.32)$$

sendo  $\Omega_n$  a frequência de Rabi generalizada e  $\delta$  a dessintonia entre os dois subsistemas.

Os autoestados descritos acima, nas eqs. (2.26) e (2.27), são estados do sistema átomo-campo que possuem pelo menos uma excitação ( $n = 1$ ) a ser compartilhada. Estes são chamados de estados “*vestidos*”, porque são emaranhados e não podemos atribuir um estado puro ao átomo. Considera-se então que o átomo encontra-se “*vestido*” pelo campo. Entretanto, além desses autoestados há um outro que não possui excitação a ser compartilhada. Este é o estado fundamental  $|g, 0\rangle$  e não foi citado acima. O conjunto de autovetores

$$\left\{ |+, n\rangle, |-, n\rangle, |g, 0\rangle \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

forma uma base no espaço de Hilbert global do sistema átomo+campo e seus respectivos autovalores são

$$E_{|+, n\rangle} = \hbar\omega(n+1) + \frac{\hbar\Delta_n}{2} \quad (2.33)$$

$$E_{|-, n\rangle} = \hbar\omega(n+1) - \frac{\hbar\Delta_n}{2} \quad (2.34)$$

$$E_{|g, 0\rangle} = \frac{\hbar}{2} \delta \quad (2.35)$$

### 2.2.2 O limite ressonante do MJC

Estaremos no limite ressonante quando a dessintonia for nula. Então, fazendo  $\delta = 0$  nas equações (2.29) e (2.30) teremos

$$\Delta_n = \Omega_n \implies \sin \theta_n = \cos \theta_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.36)$$

e os autoestados de  $\hat{H}_{JC}$  serão

$$|+, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e, n\rangle + |g, n+1\rangle) \quad (2.37)$$

$$|-, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e, n\rangle - |g, n+1\rangle) \quad (2.38)$$

com autovalores

$$E_{|+, n\rangle} = \hbar\omega(n+1) + \frac{\hbar\Omega_n}{2} \quad (2.39)$$

$$E_{|-, n\rangle} = \hbar\omega(n+1) - \frac{\hbar\Omega_n}{2} \quad (2.40)$$

O autoestado fundamental  $|g, 0\rangle$  ficará inalterado, mas o seu autovalor terá valor nulo  $E_{|g, 0\rangle} = 0$ . Isso nos permite concluir que na interação ressonante o estado fundamental não evolui.

Subtraindo a eq. (2.39) pela (2.40) teremos

$$E_{|+, n\rangle} - E_{|-, n\rangle} = \hbar\Omega_n = 2\hbar G\sqrt{n+1} \quad (2.41)$$

Fica claro que na ausência de interação átomo–campo (fazendo  $G = 0$ ) no limite ressonante, os autoestados do hamiltoneano de evolução livre

$$\hat{H}_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\mathbf{1}}{2} \right) = \frac{\hbar\omega}{2} \left( \hat{\sigma}_z + 2\hat{a}^\dagger \hat{a} + \mathbf{1} \right) \quad (2.42)$$

serão degenerados [21]. A interação levanta essa degenerescência e estabelece um *gap* entre os autovalores dos estados “*vestidos*” igual a  $2\hbar G\sqrt{n+1}$  que depende da quantidade de excitações presentes no CEM.

Para ilustrar o MJC, com o propósito de tornar mais clara a dinâmica dessa interação completamente quantizada, considere o estado inicial do sistema átomo–campo sendo

$$|\psi(0)\rangle = |e, n\rangle \quad .$$

Na ressonância, este estado evoluirá na representação de interação como

$$\begin{aligned}
 |\Psi(t)\rangle &= e^{-i\hat{V}_{JC}t/\hbar}|e, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\hat{V}_{JC}t/\hbar}(|+, n\rangle + |-, n\rangle) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{-i\Omega_n t/2}|+, n\rangle + e^{i\Omega_n t/2}|-, n\rangle \right) \\
 &= \cos(\Omega_n t/2)|e, n\rangle - i \sin(\Omega_n t/2)|g, n+1\rangle
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Podemos perceber de imediato, ao recordar a eq.(2.17), a semelhança com o estado encontrado na seção anterior. Os conceitos de pulsos  $\pi/2$ ,  $\pi$  e  $2\pi$  continuam os mesmos, entretanto aqui a frequência de Rabi  $\Omega_n = 2G\sqrt{n+1}$  não é constante e depende do comportamento quântico do CEM através dos números de excitações. Um caso particular é para  $n=0$  onde teremos a frequência de Rabi do vácuo  $\Omega_0 = 2G$ . Em experimentos de cavidades de microondas de alto fator de qualidade foi possível observar as oscilações de Rabi (para  $n=0, 1, 2, 3$ ) e testar diretamente a quantização do campo [22]. Aqui também fica claro que apenas em tempos bem definidos podemos atribuir ao átomo um estado fatorável ao do campo. Esses tempos são múltiplos inteiros de  $\pi/\Omega_n$ , caso contrário o átomo estará “vestido” pelo CEM.

# Capítulo 3

## Análise de cavidades realísticas

Neste capítulo focaremos nossa atenção na análise quantitativa de cavidades realísticas nos experimentos de CQED realizados pelo grupo de Paris com átomos de Rydberg [24], em especial nos que são descritos em [3]. Neste trabalho, Maître e colaboradores observaram a transferência da menor unidade de informação quântica (conhecida como *qubit*) [1] entre dois átomos de dois níveis mediada por uma cavidade de alto  $Q$ <sup>1</sup>. No experimento, a cavidade é uma *memória quântica* efetiva porque a transferência da informação se completa após um tempo de atraso entre a passagem dos átomos.

De maneira geral, os experimentos (esquematizado na figura 3.1) realizados pelo grupo de Paris são constituídos por um forno  $O$  que envia átomos de Rubídio, um *box*  $B$  que seleciona a velocidade atômica e os prepara em um estado circular de Rydberg com número quântico principal  $N = 51$  (estado

---

<sup>1</sup>A qualidade de uma cavidade de microondas é determinada pelo seu valor de  $Q$ . O fator de qualidade pode ser determinado observando como a energia armazenada em seu interior é perdida. Esse parâmetro é definido como  $Q = 2\pi \cdot (\text{energia armazenada}) / (\text{energia perdida por ciclo})$ , onde o termo *por ciclo* se refere às duas reflexões que cada fóton sofre nos espelhos da cavidade para retornar à posição inicial. Pode-se mostrar [23] que o fator de qualidade da cavidade é dado por  $Q = \nu_0 / \delta\nu$ , onde  $\nu_0$  é a frequência de ressonância da cavidade e  $\delta\nu$  é a largura espectral. As de alto fator de qualidade possuem um  $Q \sim 3 \times 10^8$ , denominado assim cavidade de alto  $Q$ . De maneira semelhante, as de baixo fator de qualidade detem um  $Q \sim 10^3$  sendo chamadas de cavidade com baixo  $Q$ . Daqui para frente usaremos esta notação.

excitado  $|e\rangle$ ) ou  $N = 50$  (estado desexcitado  $|g\rangle$ ), duas zonas de Ramsey<sup>2</sup>  $R_1$  e  $R_2$  para realizarem interferometria Ramsey, uma cavidade  $C$  de alto  $Q$ , um detector  $D$  de estado atômico e duas fontes de microondas  $S$  e  $S'$  que alimentam a cavidade  $C$  e as zonas de Ramsey, respectivamente.

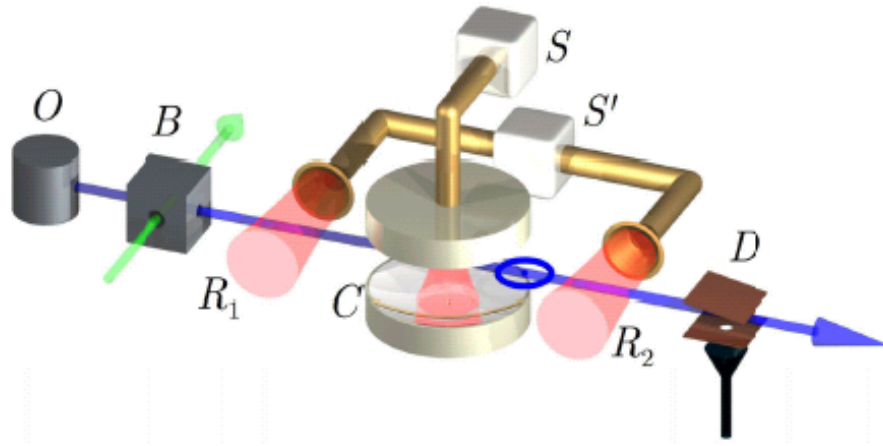


Figura 3.1: Esquema geral de todo o aparato nos experimentos de CQED com átomos de Rydberg. Figura retirada de [25].

Nesses experimentos, átomos são lançados em estados circulares [24] e atravessam todo o aparato antes de serem detectados em  $D$ . No seu trajeto, ao avançar no interior da primeira zona de Ramsey  $R_1$  o átomo interage quase ressonantemente com o campo de microondas<sup>3</sup> alimentado pela fonte  $S'$ . Em seguida, evolui livremente até entrar na cavidade  $C$  onde interage ressonantemente com um outro campo de microondas alimentado pela fonte  $S$ . Dando continuidade, o átomo novamente evolui livremente entre  $C$  e a

<sup>2</sup>Zonas de Ramsey também são cavidades de microondas, porém de baixo  $Q$ .

<sup>3</sup>Esse campo nas zonas de Ramsey possui um tempo de relaxação muito curto (da ordem de nanossegundos), devido à baixíssima qualidade dessa cavidade, permitindo que seja descrito classicamente e não emaranhe com o estado atômico [17].

segunda zona de Ramsey. Em  $R_2$  há uma interação átomo–campo análogo à que ocorreu em  $R_1$ , porque as zonas são idênticas e a fonte do campo é a mesma para ambas. Entretanto, tanto o campo da fonte  $S'$  como o átomo adquirem uma fase proporcional ao tempo de vôo atômico entre as duas zonas. Depois de  $R_2$  o átomo é detectado em  $D$  e determina-se seu estado de chegada. A presença das duas zonas de Ramsey no aparato permite fazer interferometria Ramsey [26] do estado atômico tornando possível analisar o que se passa entre  $R_1$  e  $R_2$ .

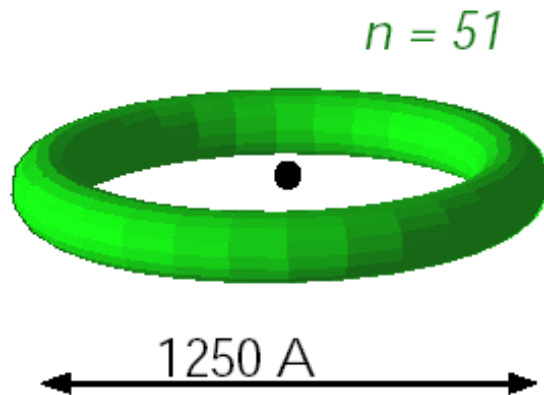


Figura 3.2: Ilustração de um átomo de Rydberg. No centro está o núcleo representado por uma pequena *bola* esférica e em verde está a órbita circular dos elétrons excitados. Figura retirada de [27].

Os tempos de interação entre o átomo e os campos no aparato, são monitorados pela velocidade de vôo atômico ou por *efeito Stark*. Neste último caso, um campo elétrico estático é aplicado transversalmente à trajetória atômica produzindo uma mudança na frequência de transição. Como efeito, o átomo deixa de interagir ressonantemente com o campo para interagir dispersivamente. Nesta interação não há troca de energia e o átomo ganha

apenas uma fase global [21]. Experimentos de CQED no limite dispersivo da interação átomo–campo são realizações efetivas de medição do número de excitações no interior de cavidades (veja, *e.g.*, [28] e [29]). Esse é um exemplo de *medida quântica não-demolidora*, constituindo uma fértil e interessante área de pesquisa em óptica quântica.

A seguir, descreveremos a interferometria Ramsey e os experimentos realizados por Maître e colaboradores em [3].

### 3.1 A interferometria atômica de Ramsey

Uma zona de Ramsey é uma cavidade de microonda de baixo  $Q$  e isso implica em um tempo muito curto de relaxação da radiação de microondas no seu interior. Desta maneira, precisa ser continuamente abastecida pela fonte  $S'$ . A priori esse campos deveriam ser descritos quânticamente, mas devido às propriedades das correlações existentes entre átomo de Rydberg, modo relevante da cavidade, fonte clássica externa e uma forte dissipação, podemos descrever o campo como sendo clássico apesar do número médio de fótons ser aproximadamente igual a um [17].

De acordo com os resultados da seção (2.1), um átomo inicialmente preparado no estado excitado que interage quase ressonantemente com um campo clássico por um tempo  $t_R$  estará, na representação de interação, no estado

$$\begin{aligned} |\Psi(t_R)\rangle &= \left[ \cos(\bar{\Omega}t_R/2) - i \frac{\vartheta}{\Omega} \sin(\bar{\Omega}t_R/2) \right] e^{i\vartheta t_R/2} |e\rangle + \\ &+ i \frac{\Omega_R}{\Omega} \sin(\bar{\Omega}t_R/2) e^{i\phi} e^{-i\vartheta t_R/2} |g\rangle . \end{aligned} \quad (3.1)$$

Considerando que a interação na zona de Ramsey é muito próxima da ressonância<sup>4</sup>  $\vartheta \ll \Omega_R$  teremos

$$|\Psi(t_R)\rangle \approx \cos(\Omega_R t_R/2) e^{i\vartheta t_R/2} |e\rangle + i \sin(\Omega_R t_R/2) e^{i\phi} e^{-i\vartheta t_R/2} |g\rangle , \quad (3.2)$$

---

<sup>4</sup>Dados experimentais fornecidos em algumas referências (*e.g.*, [22] e [18]), mostram que a frequência de Rabi é de  $\sim 295$  kHz. Já a dessintonia entre a frequência de transição atômica e a do campo para a realização da interferometria Ramsey é no máximo de alguns poucos kHz.

onde fizemos  $\bar{\Omega} = \sqrt{\Omega_R^2 + \vartheta^2} \approx \Omega_R$  nos argumentos do seno e cosseno. Essa aproximação só é válida para valores de  $\vartheta$  de poucos kHz. Isso garante que a contribuição da dessintonia seja diminuta no seno e cosseno.

Para realizar a interfererometria Ramsey o átomo deve sofrer um pulso  $\pi/2$  (*e.g.*, veja [2]) em cada zona. Assim, para um tempo

$$t_R = \frac{(\pi/2)}{\Omega_R} \quad (3.3)$$

de interação átomo-campo, o termo  $\vartheta t_R/2 = \vartheta\pi/4\Omega_R$  será muito pequeno e podemos fazer

$$e^{\pm i\vartheta t_R/2} \approx 1 \quad (3.4)$$

na eq.(3.2). Com isso, o átomo sai da primeira zona de Ramsey no estado

$$|\Psi(\pi/2\Omega_R)\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |e\rangle + ie^{i\phi}|g\rangle \right] . \quad (3.5)$$

De maneira semelhante, poderíamos achar o estado final logo acima fazendo

$$e^{\pm i\vartheta t} \approx 1 \quad (3.6)$$

na equação para o hamiltoniano (2.10) e evoluindo o estado desejado por um tempo (3.4). Isso significa que, para uma dessintonia pequena  $\vartheta \ll \Omega_R$  e tempos da evolução muito curtos obedecendo a desigualdade

$$\vartheta t \ll 1 \quad , \quad (3.7)$$

o hamiltoniano efetivo da evolução na representação de interação será

$$\bar{H}_{R1} = -\frac{\hbar\Omega_R}{2} \left[ \hat{\sigma}_+ e^{-i\phi} + \hat{\sigma}_- e^{i\phi} \right] . \quad (3.8)$$

Após sair da primeira zona, o átomo e o campo da fonte  $S'$  evoluem livremente por um tempo de vôo

$$T = d/v_a \quad ,$$

onde  $v_a$  é a velocidade atômica e  $d$  é a distância que separa as duas zonas. Imediatamente após, o átomo adentra a segunda zona de Ramsey. Mas agora

o hamiltoniano (2.10) adquire uma fase proporcional a  $T$  em virtude da evolução livre atômica e do campo da fonte  $S'$ . Desse modo, o hamiltoniano da evolução em  $R_2$  torna-se

$$\bar{H}_{IC}^{R_2} = -\frac{\hbar\Omega_R}{2} \left[ \hat{\sigma}_+ e^{-i\phi} e^{i\vartheta(t+T)} + \hat{\sigma}_- e^{i\phi} e^{-i\vartheta(t+T)} \right] . \quad (3.9)$$

Como o átomo sofrerá outro pulso  $\pi/2$  na segunda zona de Ramsey, o tempo de evolução do sistema átomo-campo será muito curto e continuará obedecendo à desigualdade (3.7). Poderemos então, de maneira semelhante à primeira zona de Ramsey, fazer a aproximação (3.6) no hamiltoniano (3.9). Isso nos fornece um hamiltoniano na representação de interação efetiva da evolução em  $R_2$  dado por

$$\bar{H}_{R_2} = -\frac{\hbar\Omega_R}{2} \left[ \hat{\sigma}_+ e^{-i\phi} e^{i\vartheta T} + \hat{\sigma}_- e^{i\phi} e^{-i\vartheta T} \right] \quad (3.10)$$

onde a termo  $\vartheta T$  na exponencial complexa não pode ser desprezado, pois o tempo  $T$  é grande comparado com o tempo  $\pi/2\Omega_R$ . É este termo que será responsável pela interferometria dos estados atômicos. Com um procedimento semelhante à seção (2.1), podemos determinar o estado atômico num tempo  $t$  que obedeça a eq.(3.7).

Considerando o estado inicial sendo (3.5), o estado evoluído pelo hamiltoniano (3.10) será

$$\begin{aligned} |\Phi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \cos(\Omega_R t/2) - \sin(\Omega_R t/2) e^{i\vartheta T} \right] |e\rangle + \\ &+ \frac{i e^{i\phi}}{\sqrt{2}} \left[ \cos(\Omega_R t/2) e^{i\vartheta T} + \sin(\Omega_R t/2) \right] |g\rangle \end{aligned} \quad (3.11)$$

Para que o estado acima sofra um pulso  $\pi/2$  faremos  $t = t_R$ . Isso nos fornecerá

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2} \left( 1 - e^{i\vartheta T} \right) |e\rangle + \frac{i e^{i\phi}}{2} \left( e^{i\vartheta T} + 1 \right) |g\rangle \quad (3.12)$$

que é o estado atômico imediatamente após a segunda zona de Ramsey.

Logo em seguida, o átomo é detectado em  $D$ . A probabilidade de ser encontrado no estado desexcitado(excitado), sendo que entrou excitado em

$R_1$ , será, respectivamente

$$P_{ge}(\vartheta) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos(\vartheta T) \right] \quad (3.13)$$

$$P_{ee}(\vartheta) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos(\vartheta T) \right] \quad (3.14)$$

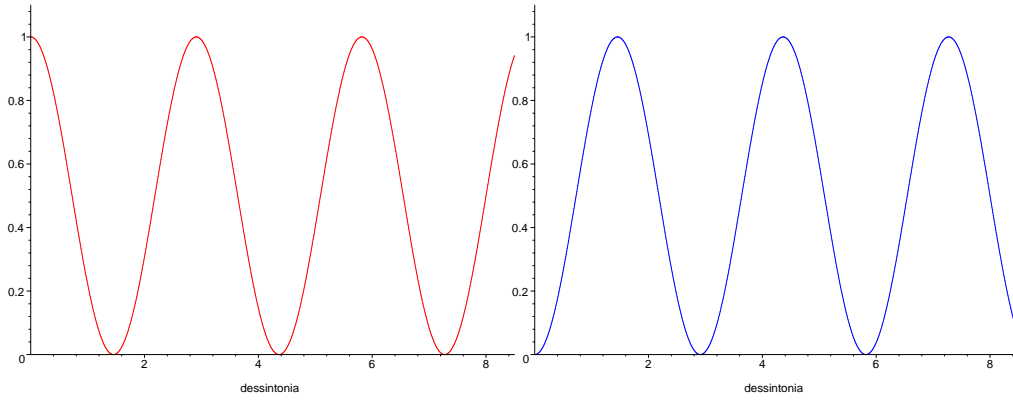


Figura 3.3: Em vermelho(azul) a probabilidade  $P_{ge}(P_{ee})$  de detectar o átomo em  $g(e)$ , respectivamente, versus a dessorintonia  $\vartheta$  em unidades de 10 kHz, para um tempo de vôo de  $T = 216 \mu\text{s}$  entre  $R_1$  e  $R_2$ .

Dado que o átomo foi preparado em  $e$  antes de  $R_1$ , a probabilidade  $P_{ge}$  de detectá-lo no nível  $g$  depois de  $R_2$  será o módulo quadrado da soma das duas amplitudes que correspondem aos dois caminhos possíveis dentro do interferômetro. Observe o esquema da figura 3.4.

## 3.2 Dois exemplo de experimentos em cavidades com alto $Q$ .

Em um dos seus trabalhos, X. Maître *et al.* em [3] realizaram basicamente dois experimentos relevantes que permitiram analisar as propriedades de cavidades de alto  $Q$  como uma possível memória quântica. No primeiro experimento, os autores observaram o decaimento de um estado de Fock [13] do CEM no interior da cavidade  $C$ . Neste, eles puderam examinar e medir o seu

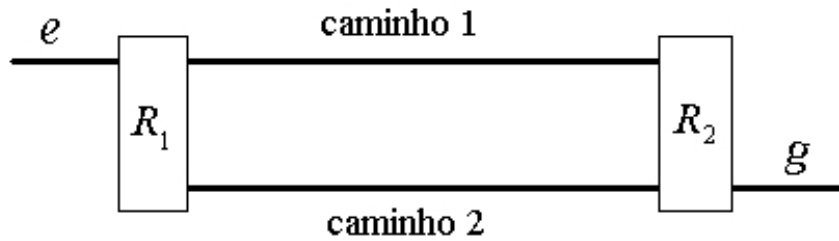


Figura 3.4: Diagrama dos dois caminhos possíveis pelo átomo na interferometria Ramsey.

*tempo de retenção*<sup>5</sup>. Já no segundo foram mais além. Transferiram entre dois átomos uma superposição coerente usando uma cavidade como mediador da transação.

Esta seção é devotada à análise quantitativa desses experimentos e reproduziremos os resultados por eles obtidos. Além de servir como *pano de fundo* para o desenvolvimento deste trabalho, acreditamos ser esta uma forma instrutiva de apresentar e analisar a física de cavidades de microondas.

### 3.2.1 O decaimento de um fóton em cavidades com perdas

Neste primeiro experimento, os autores permutaram uma excitação entre dois átomos tendo a cavidade  $C$  como o mediador da troca. Essa cavidade  $C$  é constituída por dois espelhos esféricos de nióbio cuidadosamente polidos, numa configuração tipo Fabry–Perot e é resfriada à temperatura de  $\sim 1\text{K}$ , o que torna seus espelhos supercondutores. O procedimento usado é descrito a seguir:

- i) O primeiro átomo é preparado em  $e$  e lançado através do aparato. Em

---

<sup>5</sup>É o tempo que tal dispositivo (neste caso a cavidade) consegue reter a informação (*qubit*) do estado quântico. Mais a frente, definiremos quantitativamente este tempo.

$R_1$  nada sofre. Em seguida, interage ressonantemente com o estado de vácuo do CEM no interior da cavidade  $C$  e sofre um pulso  $\pi$  deixando a excitação para trás. Logo depois, nada sofre em  $R_2$  e é detectado em  $D$  no estado desexcitado.

- ii) Um segundo átomo, idêntico ao primeiro, é preparado em  $g$  e nada sofre em  $R_1$ . Após um tempo de atraso (*delay*)  $\tau$ , ele adentra  $C$  e, de maneira análoga ao primeiro, sofre um pulso  $\pi$  retirando a excitação armazenada na cavidade. Posteriormente, nada sobre em  $R_2$  e é detectado no estado excitado.

Repetindo o experimento muitas vezes variando o tempo  $\tau$ , obtiveram uma curva da probabilidade de se detectar o segundo átomo em  $e$  sendo que o primeiro foi detectado em  $g$ . Essa probabilidade condicional em função de  $\tau$  é uma observação indireta do decaimento de um fóton em cavidades de alto  $Q$ .

### O primeiro átomo sofrendo pulso $\pi$ em $C$ .

No interior da cavidade  $C$  o CEM é descrito quanticamente e a interação átomo-campo é modelada pelo MJC, que neste caso estará no limite ressonante. No entanto, a cavidade não possui um fator  $Q$  infinito o que significa a existência de perdas. Para tratar os processos de dissipação e decoerência devido a essas perdas, usaremos o MJC ressonante com dissipação (veja, *e.g.*, o apêndice C ou [21]).

Quando o átomo no estado excitado iniciar sua entrada em  $C$  o estado global átomo+campo será dado por

$$\bar{\rho}_{AC}(0) = |e\rangle\langle e| \otimes |0\rangle\langle 0| . \quad (3.15)$$

De acordo com os resultados do apêndice C, o estado acima evoluirá para

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{AC}(t) = & \bar{\rho}_{2,2}(t) |e, 0\rangle\langle e, 0| + \bar{\rho}_{3,3}(t) |g, 1\rangle\langle g, 1| + \\ & + \bar{\rho}_{4,4}(t) |g, 0\rangle\langle g, 0| + \left[ \bar{\rho}_{2,3}(t) |e, 0\rangle\langle g, 1| + \text{c.h.} \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_{2,2}(t) &= e^{-\kappa t} \left[ \cos(\Omega t/2) + \frac{\kappa}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right]^2 \\ \bar{\rho}_{2,3}(t) &= i \frac{\Omega_0}{\Omega} e^{-\kappa t} \left[ \cos(\Omega t/2) + \frac{\kappa}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right] \sin(\Omega t/2) \\ \bar{\rho}_{3,3}(t) &= e^{-\kappa t} \left[ \frac{\Omega_0}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right]^2 \\ \bar{\rho}_{4,4}(t) &= 1 - \left[ \bar{\rho}_{2,2}(t) + \bar{\rho}_{3,3}(t) \right] .\end{aligned}$$

Após um tempo  $t' = \pi/\Omega$ , o sistema terá sofrido um pulso  $\pi$  e, ao termino, o estado se encontra-rá em

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_{AC}(\pi/\Omega) &= \frac{\kappa^2}{\Omega^2} e^{-\kappa\pi/\Omega} |e, 0\rangle\langle e, 0| + \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2} e^{-\kappa\pi/\Omega} |g, 1\rangle\langle g, 1| + \\ &+ \left[ 1 - e^{-\kappa\pi/\Omega} \left( 1 + 2 \frac{\kappa^2}{\Omega^2} \right) \right] |g, 0\rangle\langle g, 0| + \\ &+ \left[ i \frac{\kappa\Omega_0}{\Omega^2} e^{-\kappa\pi/\Omega} |e, 0\rangle\langle g, 1| + \text{c.h.} \right] .\end{aligned}$$

Depois do átomo ser medido em  $g$  o estado do campo se reduz a

$$\bar{\rho}_C(\pi/\Omega) = \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2} e^{-\kappa\pi/\Omega} |1\rangle\langle 1| + \left[ 1 - e^{-\kappa\pi/\Omega} \left( 1 + 2 \frac{\kappa^2}{\Omega^2} \right) \right] |0\rangle\langle 0| \quad (3.17)$$

Este é um estado de mistura estatística dos estados de Fock, com zero ou um fóton.

### Evolução livre do estado do campo

Depois que o primeiro átomo passa e é medido em  $D$ , o estado do campo no interior da cavidade evolui livremente sujeito à dissipação por um tempo  $\tau$  entre a passagem dos átomos. No apêndice B, a evolução de um modo do CEM à temperatura nula é considerada.

Da mesma forma que as equações (B.11) à (B.13), o estado do campo, representado pela expressão (3.17), após evoluir livremente por um tempo  $\tau$  será

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_C(\pi/\Omega + \tau) &= \left[ 1 + \frac{\kappa^2}{\Omega^2} \right] e^{-\kappa(\pi+2\tau\Omega)/\Omega} |1\rangle\langle 1| + \\ &+ \left\{ 1 - e^{-\kappa(\pi+2\tau\Omega)/\Omega} \left[ 1 + \frac{\kappa^2}{\Omega^2} (1 + e^{2\kappa\tau}) \right] \right\} |0\rangle\langle 0|\end{aligned} \quad (3.18)$$

onde usamos  $\Omega_0^2 = \Omega^2 + \kappa^2$ .

Pode-se observar que quanto maior o  $Q$  da cavidade (significando uma menor a constante de decaimento  $\kappa$ ), menor será a contribuição do vácuo para o estado do campo.

### O segundo átomo sofrendo pulso $\pi$ em $C$ .

Imediatamente antes da entrada do segundo átomo na cavidade, o estado integral do sistema é denotado por

$$\bar{\rho}_{AC}(\pi/\Omega + \tau) = \bar{d} |g, 1\rangle\langle g, 1| + \bar{f} |g, 0\rangle\langle g, 0| \quad (3.19)$$

onde fizemos

$$\bar{d} = \left[1 + \frac{\kappa^2}{\Omega^2}\right] e^{-\kappa(\pi+2\tau\Omega)/\Omega} \quad (3.20)$$

$$\bar{f} = \left\{1 - e^{-\kappa(\pi+2\tau\Omega)/\Omega} \left[1 + \frac{\kappa^2}{\Omega^2} (1 + e^{2\kappa\tau})\right]\right\} . \quad (3.21)$$

Após o segundo átomo interagir com o campo na cavidade, de maneira idêntica ao primeiro átomo, o estado acima evoluirá para

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{AC}(\pi/\Omega + \tau + t) = & \bar{a}(t) |e, 0\rangle\langle e, 0| + \bar{\bar{d}}(t) |g, 1\rangle\langle g, 1| + \quad (3.22) \\ & + \bar{\bar{f}}(t) |g, 0\rangle\langle g, 0| + \left[\bar{\bar{b}}(t) |e, 0\rangle\langle g, 1| + \text{c.h.}\right] \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{a}(t) &= \bar{d} e^{-\kappa t} \left[\frac{\Omega_0}{\Omega} \sin(\Omega t/2)\right]^2 \\ \bar{\bar{b}}(t) &= -i \bar{d} \frac{\Omega_0}{\Omega} e^{-\kappa t} \left[\cos(\Omega t/2) - \frac{\kappa}{\Omega} \sin(\Omega t/2)\right] \sin(\Omega t/2) \\ \bar{\bar{d}}(t) &= \bar{d} e^{-\kappa t} \left[\cos(\Omega t/2) - \frac{\kappa}{\Omega} \sin(\Omega t/2)\right]^2 \\ \bar{\bar{f}}(t) &= (\bar{d} + \bar{f}) - \left[\bar{\bar{a}}(t) + \bar{\bar{d}}(t)\right] \end{aligned}$$

Posterior a um tempo  $\pi/\Omega$ , o sistema terá experimentado um pulso  $\pi$  e o estado final átomo+campo será

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{AC}(\pi/\Omega + \tau + \pi/\Omega) = & \bar{a}(\pi/\Omega) |e, 0\rangle\langle e, 0| + \bar{\bar{d}}(\pi/\Omega) |g, 1\rangle\langle g, 1| + \\ & + \bar{\bar{f}}(\pi/\Omega) |g, 0\rangle\langle g, 0| + \\ & + \left[\bar{\bar{b}}(\pi/\Omega) |e, 0\rangle\langle g, 1| + \text{c.h.}\right] . \quad (3.23) \end{aligned}$$

Para determinar o estado do segundo átomo antes de ser detectado, tomaremos o traço parcial sobre as variáveis do campo na eq.(3.23). Esta operação nos fornece o estado atômico

$$\bar{\rho}_{A_2} = \bar{a}(\pi/\Omega) |e\rangle\langle e| + \left[ \bar{d}(\pi/\Omega) + \bar{f}(\pi/\Omega) \right] |g\rangle\langle g| \quad (3.24)$$

imediatamente antes de ser “enxergado” pelo detector.

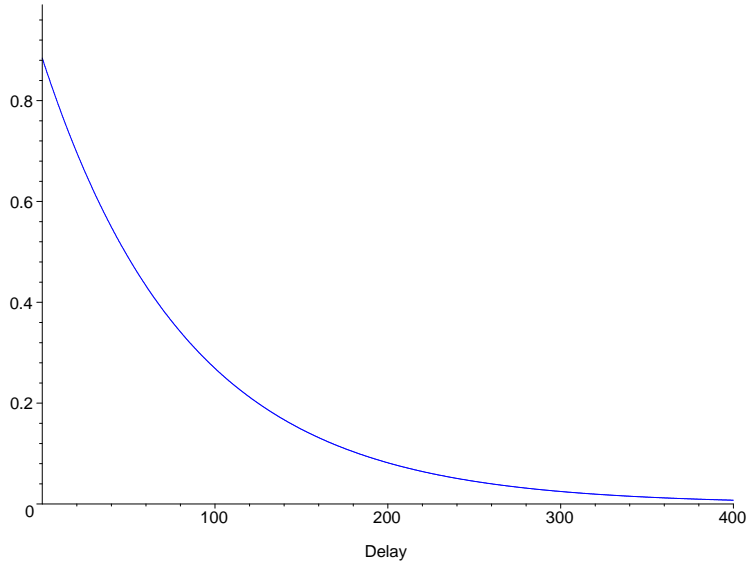


Figura 3.5: Probabilidade condicional  $\mathcal{P}_{ge}$  versus o tempo  $\tau$ , em unidades de  $\mu s$ , entre a passagem dos átomos. Na figura usamos [3]:  $\Omega/2\pi = 48 \text{ kHz}$  e  $1/\kappa = 168 \mu s$ .

Assim, a probabilidade de encontrar o segundo átomo em  $e$  uma vez que o primeiro estava em  $g$  será:

$$\mathcal{P}_{ge}(\tau) = \frac{\text{tr}(\bar{\rho}_{A_2} |e\rangle\langle e|)}{\text{tr}(\bar{\rho}_{A_2})} . \quad (3.25)$$

De maneira explícita, a equação acima torna-se

$$\mathcal{P}_{ge}(\tau) = \gamma(\kappa, \Omega) e^{-2\kappa\tau} \quad (3.26)$$

sendo  $\gamma(\kappa, \Omega)$  uma constante dada por

$$\gamma(\kappa, \Omega) = \frac{\left(1 + \frac{\kappa^2}{\Omega^2}\right)^2}{\left(1 - \frac{\kappa^2}{\Omega^2} e^{-\kappa\pi/\Omega}\right)} e^{-2\kappa\pi/\Omega} \quad (3.27)$$

que depende apenas das propriedades da cavidade através de  $\kappa$  e  $\Omega$ .

A probabilidade condicional cai exponencialmente a medida que aumenta-se o tempo de atraso  $\tau$  entre a passagem dos átomos, evidenciando as perdas da cavidade.

### 3.2.2 Tranferência de coerência entre dois átomos.

Quanto a este segundo experimento, os autores implementaram uma *memória quântica* em cavidade. Conseguiram transferir uma superposição coerente atômica para o modo do CEM no interior de uma cavidade de alto  $Q$  e após um tempo de atraso  $\tau$  passaram-na para um segundo átomo. A interferometria Ramsey, permitiu analisar a coerência transferida para o segundo átomo e observar a retenção da cavidade.

Decrevemos abaixo o procedimento usado:

- i) O primeiro átomo foi preparado em  $e$  e lançado através do aparato. Em  $R_1$  sofre um pulso  $\pi/2$  e é injetado em  $C$  numa superposição coerente entre  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ . Em seguida, interage ressonantemente com o estado de vácuo do CEM no interior de  $C$  e sofre um pulso  $\pi$  tranferindo esta coerência (como uma superposição de estados com zero e um fóton) ao campo. Logo depois, nada sofre em  $R_2$  e é detectado em  $D$  no estado desexcitado.
- ii) O segundo átomo é preparado em  $g$ , nada sofre em  $R_1$ , após um tempo de atraso (*delay*)  $\tau$  adentra  $C$  e sofre um pulso  $\pi$  levando consigo a coerência armazenada na cavidade. Logo depois, entra em  $R_2$  numa superposição dos estados  $e$  e  $g$ . Um pulso de  $\pi/2$  é aplicado para análise da coerência transmitida com ajuda da interferometria Ramsey.

Repetindo o experimento muitas vezes, variando a dessintonia  $\vartheta$  por alguns pouco kHz e o tempo  $\tau$ , obtêm-se curvas da probabilidade condicional de se detectar o segundo átomo em  $e$  sendo que o primeiro foi detectado em  $g$ . Estas curvas exibem franjas de interferência atômica, semelhante aquelas da figura 3.3, revelando a coerência transmitida ao segundo átomo.

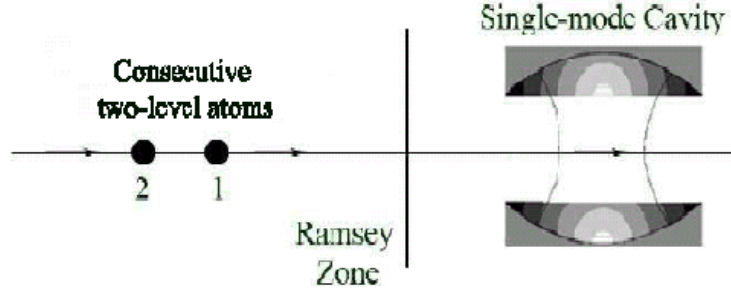


Figura 3.6: Segundo experimento: transferência de coerência entre dois átomos. Figura retirada de [30].

### A passagem do primeiro átomo

Consideremos o primeiro átomo preparado em  $|e\rangle$  e enviado através do aparato. O seu estado inicial será

$$|\Phi_1(0)\rangle = |e\rangle \quad (3.28)$$

Neste estado entra na primeira zona de Ramsey e sofre um pulso  $\pi/2$ . A interação átomo–campo nestas zonas é da para que a desigualdade

$$\vartheta \ll \Omega_R \quad , \quad (3.29)$$

entre a dessintonia  $\vartheta$  e a frequência de Rabi  $\Omega_R$ , seja sempre respeitada. Quando isso é assegurado, temos uma interação muito próxima da ressonância.

Nessas condições (como vimos na seção 3.1), após sofrer um pulso  $\pi/2$  o átomo inicialmente preparado em  $|e\rangle$  afasta-se de  $R_1$  no estado

$$|\Phi_1(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |e\rangle + i e^{i\phi} |g\rangle \right] \quad . \quad (3.30)$$

Em seguida, penetra em  $C$ . O campo no interior da cavidade está no

estado de vácuo e o sistema completo átomo+campo estará no estado

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{A_1C} = & \frac{1}{2} \left[ |e,0\rangle\langle e,0| + |g,0\rangle\langle g,0| \right] - \\ & - \left[ \frac{i}{2} e^{-i\phi} |e,0\rangle\langle g,0| + \text{c.h.} \right] . \end{aligned} \quad (3.31)$$

Como no experimento anterior, há perdas na cavidade e o átomo interage ressonantemente com o CEM no interior dela, sendo apropriado o uso do MJC no limite ressonante com dissipação. Nesse modelo (veja apêndice C), o sistema após sofrer um pulso  $\pi$  se encontrará no estado

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{A_1C}(\pi/2) = & \frac{\kappa^2}{2\Omega^2} e^{-\kappa\pi/\Omega} |e,0\rangle\langle e,0| + \frac{\Omega_0^2}{2\Omega^2} e^{-\kappa\pi/\Omega} |g,1\rangle\langle g,1| + \\ & + \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{2\kappa^2}{\Omega^2} \right] e^{-\kappa\pi/\Omega} \right\} |g,0\rangle\langle g,0| + \\ & + \left[ i \frac{\kappa\Omega_0}{2\Omega^2} e^{-\kappa\pi/\Omega} |e,0\rangle\langle g,1| - \right. \\ & - i \frac{\kappa e^{-i\phi}}{2\Omega} e^{-\kappa\pi/2\Omega} |e,0\rangle\langle g,0| - \\ & \left. - \frac{\Omega_0 e^{-i\phi}}{2\Omega} e^{-\kappa\pi/2\Omega} |g,1\rangle\langle g,0| + \text{c.h.} \right] . \end{aligned} \quad (3.32)$$

Este é um estado em que há algum emaranhamento entre os subsistemas e o átomo encontra-se *vestido* pelo campo. Com isso, não podemos atribuir um estado bem definido para ambos separadamente. Mas, fazendo uma medida em um dos subsistemas, podemos saber o estado do outro, com que está correlacionado quanticamente. Após sair da cavidade o átomo nada sofre em  $R_2$  e é medido em  $D$  no estado desexcitado. Deste modo, o estado do campo torna-se

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_C(\pi/2) = & \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\kappa^2}{\Omega^2} \right] e^{-\kappa\pi/\Omega} |1\rangle\langle 1| - \\ & - \left[ \frac{\Omega_0 e^{-i\phi}}{2\Omega} e^{-\kappa\pi/2\Omega} |1\rangle\langle 0| + \text{c.h.} \right] + \\ & + \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{2\kappa^2}{\Omega^2} \right] e^{-\kappa\pi/\Omega} \right\} |0\rangle\langle 0| \end{aligned} \quad (3.33)$$

que é um estado misto dos estados de Fock com *zero* e *um* fóton.

### Evolução livre do estado no interior da cavidade

Antes que o segundo átomo passe, o campo no interior da cavidade evolui livremente sujeito à dissipação em virtude de suas perdas. Essa evolução dissipativa produz uma atenuação dos termos não diagonais do operador densidade do sistema, levando-o para uma mistura estatística num processo conhecido como *decoerência* [21]. Esse processo é o principal fator limitante do tempo em que a cavidade consegue armazenar o estado quântico de forma que não perca a sua coerência. Para que a cavidade funcione como uma memória quântica mais efetiva, é necessário tentar evitar os efeitos do reservatório sobre o sistema. O estudo de um tal possível mecanismo é o nosso principal objetivo e o trataremos no próximo capítulo.

Posteriormente à passagem do primeiro átomo, o campo em  $C$  evolui por um tempo  $\tau$  antes da chegada do segundo átomo. Como na seção anterior, usando os resultados do apêndice B, o estado do campo dado pela eq.(3.33) após evoluir livremente por um tempo  $\tau$  sujeito a perdas será

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_C(\pi/2 + \tau) = & \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\kappa^2}{\Omega^2} \right] e^{-\kappa(2\tau + \pi/\Omega)} |1\rangle\langle 1| - \\ & - \left[ \frac{\Omega_0 e^{-i\phi}}{2\Omega} e^{-\kappa(2\tau + \pi/\Omega)/2} |1\rangle\langle 0| + \text{c.h.} \right] + \\ & + \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\kappa^2}{\Omega^2} \right) e^{-2\kappa\tau} + \frac{\kappa^2}{\Omega^2} \right] e^{-\kappa\pi/\Omega} \right\} |0\rangle\langle 0| \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde usamos  $\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \kappa^2}$ .

### A passagem do segundo átomo

Dando continuidade ao experimento, um segundo átomo é preparado em  $g$  e enviado para transpor todo o aparato. Este nada sofre na primeira zona de Ramsey e em seguida adentra  $C$ . No momento em que o átomo percebe o campo da cavidade, o estado do sistema global de interesse será

$$\hat{\rho}_{A_2C} = |g\rangle\langle g| \otimes \hat{\rho}_C(\pi/2 + \tau) . \quad (3.35)$$

Como este átomo é idêntico ao primeiro, a sua interação com o CEM no

interior de  $C$  será semelhante à do primeiro, porém agora o estado do campo não é o vácuo e as condições iniciais são outras.

Depois que o sistema átomo+campo em  $C$  evoluir por um tempo  $\pi/\Omega$  terá experimentado um pulso  $\pi$  e estará no estado

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{A_2C}(\pi/\Omega) = & \tilde{a}(\pi/\Omega) |e, 0\rangle\langle e, 0| + \tilde{d}(\pi/\Omega) |g, 1\rangle\langle g, 1| + \quad (3.36) \\ & + \tilde{f}(\pi/\Omega) |g, 0\rangle\langle g, 0| + \left[ \tilde{b}(\pi/\Omega) |e, 0\rangle\langle g, 1| + \right. \\ & \left. + \tilde{c}(\pi/\Omega) |e, 0\rangle\langle g, 0| + \tilde{h}(\pi/\Omega) |g, 1\rangle\langle g, 0| + \text{c.h.} \right] \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\pi/\Omega) &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\kappa^2}{\Omega^2} \right]^2 e^{-2\kappa(\tau + \pi/\Omega)} \\ \tilde{b}(\pi/\Omega) &= i \frac{\kappa \Omega_0}{2\Omega^2} \left[ 1 + \frac{\kappa^2}{\Omega^2} \right] e^{-2\kappa(\tau + \pi/\Omega)} \\ \tilde{c}(\pi/\Omega) &= i \frac{e^{-i\phi}}{2} \left[ 1 + \frac{\kappa^2}{\Omega^2} \right] e^{-\kappa(\tau + \pi/\Omega)} \\ \tilde{d}(\pi/\Omega) &= \frac{\kappa^2}{2\Omega^2} \left[ 1 + \frac{\kappa^2}{\Omega^2} \right] e^{-2\kappa(\tau + \pi/\Omega)} \\ \tilde{h}(\pi/\Omega) &= \frac{\kappa \Omega_0}{2\Omega^2} e^{-i\phi} e^{-\kappa(\tau + \pi/\Omega)} \\ \tilde{f}(\pi/\Omega) &= 1 - \frac{1}{2} \left[ \frac{\kappa^2}{\Omega^2} e^{-\kappa\pi/\Omega} + \left( 1 + \frac{\kappa^2}{\Omega^2} \right) \left( 1 + 2 \frac{\kappa^2}{\Omega^2} \right) e^{-2\kappa(\tau + \pi/\Omega)} \right] \end{aligned}$$

Antes do segundo átomo ser medido em  $D$ , ele passará por  $R_2$  experimentando um pulso  $\pi/2$  com o objetivo de examinar a coerência que a cavidade conseguiu armazenar por um tempo  $\tau$ . Mas, ao sair da cavidade não se pode determinar o estado atômico devido ao entrelaçamento existente entre átomo e campo. Com isso, a única forma de definir o estado atômico entre  $C$  e  $R_2$  é fazendo um traço parcial na eq.(3.36) sobre as variáveis do campo. Feito isso o estado atômico imediatamente antes de  $R_2$  será

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{A_2}(\pi/\Omega) = & \tilde{a}(\pi/\Omega) |e\rangle\langle e| + \left[ \tilde{d}(\pi/\Omega) + \tilde{f}(\pi/\Omega) \right] |g\rangle\langle g| + \\ & + \left[ \tilde{c}(\pi/\Omega) |e\rangle\langle g| + \text{c.h.} \right] \quad (3.37) \end{aligned}$$

que não é um estado puro devido à dissipação da coerência no interior da cavidade. Desta maneira, para modelar a evolução do estado atômico misto no

interior de uma zona de Ramsey, usaremos os resultado obtidos no apêndice A.

Depois de transpor a segunda zona de Ramsey, o átomo experimentou um pulso  $\pi/2$  e seu estado final torna-se

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{A_2}(\pi/\Omega + \pi/2\Omega_R) = & \bar{p}|e\rangle\langle e| + \bar{q}|g\rangle\langle g| + \\ & + [\bar{u}|e\rangle\langle g| + \text{c.h.}] \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{1}{2} \left\{ \left[ 1 - \frac{\kappa^2}{2\Omega^2} e^{-\kappa\pi/\Omega} \right] + \left[ 1 + \frac{\kappa^2}{\Omega^2} \right] e^{-\kappa(\tau+\pi/\Omega)} \cos(\vartheta T - \omega_{eg}\tau) \right\} \\ \bar{q} &= \frac{1}{2} \left\{ \left[ 1 - \frac{\kappa^2}{2\Omega^2} e^{-\kappa\pi/\Omega} \right] - \left[ 1 + \frac{\kappa^2}{\Omega^2} \right] e^{-\kappa(\tau+\pi/\Omega)} \cos(\vartheta T - \omega_{eg}\tau) \right\} \\ \bar{u} &= -\frac{i}{2} e^{i(\vartheta T - \omega_{eg}\tau + \phi)} \left\{ \left[ 1 + \frac{\kappa^2}{\Omega^2} \right]^2 e^{-2\kappa(\tau+\pi/\Omega)} - \left[ 1 - \frac{\kappa^2}{2\Omega^2} e^{-\kappa\pi/\Omega} \right] + \right. \\ & \quad \left. + i \left[ 1 + \frac{\kappa^2}{\Omega^2} \right] e^{-\kappa(\tau+\pi/\Omega)} \sin(\vartheta T - \omega_{eg}\tau) \right\} \end{aligned}$$

e  $\omega_{eg}$  é a frequência de transição atômica.

Como o objetivo desse experimento é examinar, via interferometria atômica, a coerência armazenada em  $C$ , devemos encontrar a probabilidade condicional de se medir o segundo átomo em  $e$  sendo que o primeiro foi observado em  $g$ .

Esta probabilidade será dada por:

$$\Pi_{ge}(\vartheta) = \frac{\text{tr}[\hat{\rho}_{A_2}(\pi/\Omega + \pi/2\Omega_R) |e\rangle\langle e|]}{\text{tr}[\hat{\rho}_{A_2}(\pi/\Omega + \pi/2\Omega_R)]} \quad (3.39)$$

que explicitamente torna-se

$$\Pi_{ge}(\vartheta) = \frac{1}{2} \left[ 1 + V(\kappa, \Omega, \tau) \cos(\vartheta T - \omega_{eg}\tau) \right] \quad (3.40)$$

onde  $V(\kappa, \Omega, \tau)$  é a visibilidade das franjas de interferência, dada por

$$V(\kappa, \Omega, \tau) = \Gamma(\kappa, \Omega) e^{-\kappa\tau} \quad (3.41)$$

com

$$\Gamma(\kappa, \Omega) = \frac{\left(1 + \frac{\kappa^2}{\Omega^2}\right)}{\left(1 - \frac{\kappa^2}{2\Omega^2} e^{-\kappa\pi/\Omega}\right)} e^{-\kappa\pi/\Omega} . \quad (3.42)$$

uma constante que, semelhante a eq.(3.27), depende apenas das propriedades da cavidade.

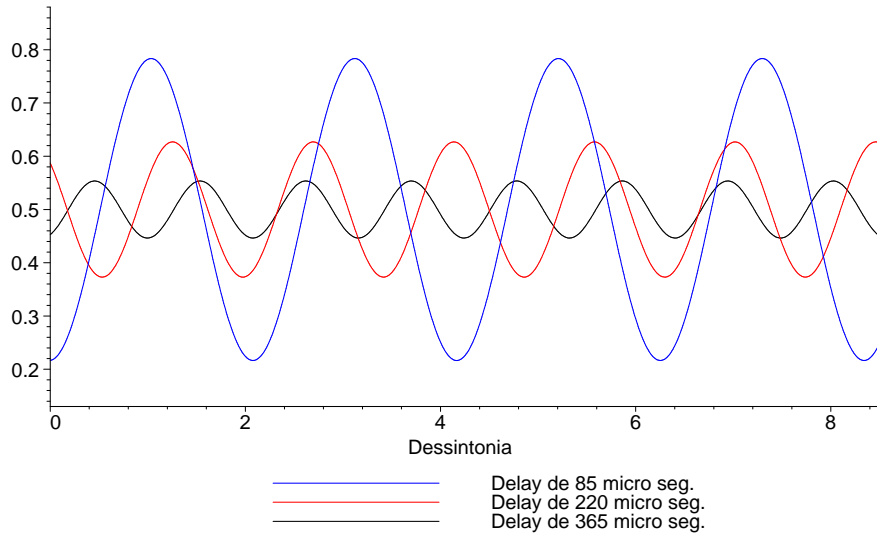


Figura 3.7: Probabilidade condicional  $\Pi_{ge}$  versus dessintonia  $\vartheta$ , em unidades de 10 kHz, aplicada ao primeiro(segundo) átomo em  $R_1(R_2)$ , respectivamente. Onde usamos [3]:  $T = \tau + 216 \mu s$ ,  $\Omega/2\pi = 48 \text{ kHz}$ ,  $1/\kappa = 168 \mu s$  e  $\omega_{eg} = 51.1 \text{ GHz}$ .

Nas figuras 3.7 e 3.8 mostramos alguns gráficos para a probabilidade e visibilidade utilizando os dados retirados de [3].

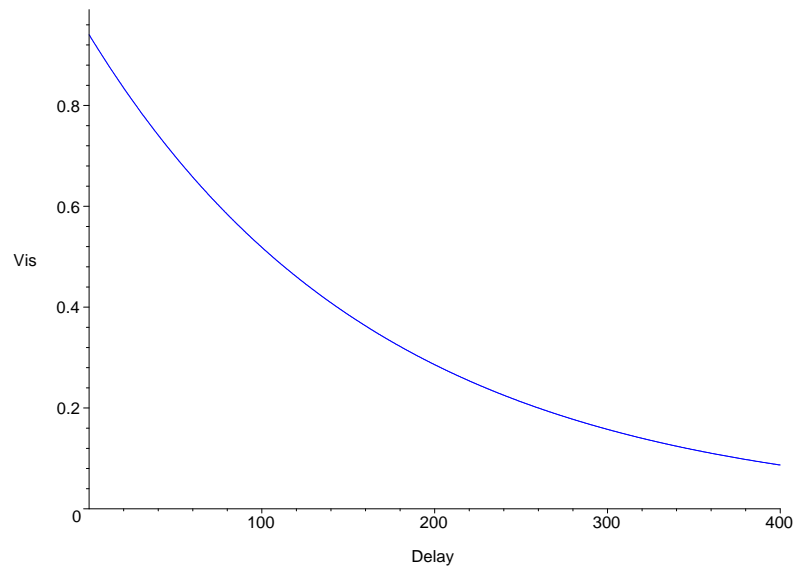


Figura 3.8: Visibilidade das franjas da probabilidade condicional  $\Pi_{ge}$  versus o tempo  $\tau$ , em unidades de  $\mu s$ , entre a passagem dos átomos. Onde usamos [3]:  $\Omega/2\pi = 48 \text{ kHz}$  e  $1/\kappa = 168 \mu s$ .

# Capítulo 4

## Inibindo a decoerência de um *qubit*

Na teoria da informação quântica, o bit quântico (*qubit*, da abreviação de *quantum bit*) possui uma posição de destaque. Define-se *qubit* como a menor unidade de informação quântica, o que justifica a sua importância. De maneira bem diferente do bit clássico, o quântico pode também se encontrar em uma superposição coerente entre o bit **0** e **1** dando-lhe infinitas possibilidades para armazenar informação. Essa característica pode dar uma idéia do quanto pode ser promissor um computador quântico.

No formalismo da mecânica quântica, o *qubit* é representado como um vetor normalizado num espaço de Hilbert bidimensional [1]. Por exemplo, dada a base ortonormal  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  neste espaço, o vetor

$$|\psi\rangle = e^{i\xi} \left[ \cos \alpha |0\rangle + e^{i\beta} \sin \alpha |1\rangle \right] \quad (4.1)$$

é uma forma genérica de descrever um *qubit*. É relevante observar que escrevemos o vetor (4.1) escolhendo uma base arbitrária onde a única exigência é ser ortonormal do espaço de Hilbert bidimensional. Devido a esta arbitriedade<sup>1</sup>, tal base bidimensional pode ser uma base ortonormal de um sistema físico de interesse, como por exemplo os estados  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$  de um átomo de Rydberg [24]. Percebe-se de imediato que esses sistemas devem

---

<sup>1</sup>Na verdade, qualquer estado de um sistema físico de dois níveis forma um *qubit*.

possuir apenas dois níveis e são conhecidos como “portadores de *qubits*”.

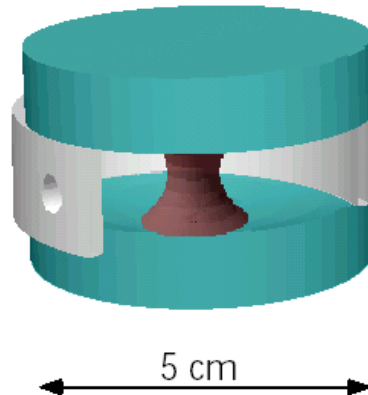


Figura 4.1: *Qubit* armazenado no interior de uma cavidade de alto  $Q$ . Figura retirada de [27].

A computação quântica, i.e., o processamento e o armazenamento da informação quântica, envolve a interação entre “portadores de *qubits*”. No âmbito da Óptica Quântica, esses portadores são, em geral, átomos e fótons. Em um experimento típico de CQED, X. Maître *et al.* [3] transportaram um *qubit* de um átomo de dois níveis e o armazenaram no modo do CEM da cavidade na forma de uma superposição de estados de Fock com zero e um fóton. Este permaneceu no interior da cavidade por um certo intervalo de tempo e em seguida foi transferido para um segundo átomo idêntico ao primeiro. Neste experimento o *qubit* foi transferido do átomo para o campo (e vice-versa) por meio de interação ressonante. Podemos então considerar o modo do campo no interior da cavidade como uma memória quântica, i.e., um dispositivo capaz de armazenar *qubits*. Entretanto, o tempo de retenção desta memória, i.e., o tempo que tal dispositivo consegue conservar a coerência do *qubit*, geralmente é muito limitado pelas perdas da cavidade.

Neste capítulo, tentaremos monitorar o tempo de retenção da cavidade e a coerência de um *qubit* enviando um feixe atômico desexcitado que atravessa-

sará a cavidade. Num primeiro momento, consideramos que o experimento foi ajustado para que cada átomo presente no feixe experimente um pulso de  $2\pi$  ou seus múltiplos inteiros. Em cada nutação completa de Rabi, o átomo inicialmente em  $g$  apanha a excitação presente no campo e a devolve no término do ciclo. Deste modo, em cada pulso de  $2\pi$  o átomo retira a excitação da cavidade por um determinado tempo protegendo-a dos processos de dissipação, sendo este o principal fator limitante do tempo de retenção. Tal procedimento contribui para o aumento do tempo de retenção da cavidade porque o *qubit* fica sendo “compartilhado” com o feixe atômico atenuando os efeitos das perdas. Em seguida, examinamos os efeitos da dispersão da velocidade atômica sobre o monitoramento do tempo de retenção. A existência de um desvio na velocidade provoca pulsos imperfeitos durante a passagem de cada átomo através da cavidade podendo provocar modificações no estado do campo.

Em [31], Peixoto de Faria e colaboradores mostraram que um acoplamento átomo-campo ressonante modifica o tempo de decaimento do estado de um fóton em uma cavidade dissipativa. Aqui, usamos um esquema similar ao descrito em [31] para mostrar como reduzir ainda mais a decoerência de um *qubit* armazenado em uma cavidade com perdas, melhorando o tempo de retenção associado.

## 4.1 Monitorando e preservando a coerência de um *qubit*

Para fins de informação quântica, é essencial preservar os termos de coerência do operador densidade do estado armazenado. Uma boa memória quântica, i.e., um dispositivo capaz de armazenar informação quântica, deveria ser apta a guardar o *qubit* preservando sua coerência por um tempo longo quando comparado com a dissipação imposta pelo meio. Em vista disso, define-se o *tempo de retenção*  $T_r$  de uma memória quântica como o tempo característico de amortecimento dos elementos não-diagonais do estado quântico armazenado durante a evolução em seu interior. Como exemplo, considere

um *qubit* inicialmente preparado no estado (4.1) e armazenado no modo CEM selecionado pela cavidade  $C$ . Devido às perdas da cavidade, o estado do campo evoluirá sujeito à dissipação e depois de um tempo  $\Delta t$  será dado por

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_C(\Delta t) = & \left[ 1 - \sin^2 \alpha e^{-2\kappa \Delta t} \right] |0\rangle\langle 0| + \sin^2 \alpha e^{-2\kappa \Delta t} |1\rangle\langle 1| + \\ & + \sin \alpha \cos \alpha e^{-\kappa \Delta t} \left[ e^{i\beta} |1\rangle\langle 0| + \text{c.h.} \right] , \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde  $\kappa$  é a constante de dissipação da cavidade e c.h. indica conjugação hermitiana. Para se determinar o tempo de retenção faremos

$$\frac{\Delta t}{T_r} = \kappa \Delta t , \quad (4.3)$$

onde  $\Delta t$  é o intervalo de tempo que o *qubit* evoluiu no interior da memória quântica. Por simples comparação, do lado esquerdo com o direito da equação acima, fica claro que o tempo de retenção da cavidade é o inverso da sua constante de amortecimento. Ou seja,

$$T_r = \frac{1}{\kappa} . \quad (4.4)$$

#### 4.1.1 Monitoramento com a passagem de um átomo

De maneira geral, podemos escrever um estado arbitrário de um *qubit* armazenado no campo de uma cavidade como sendo

$$\bar{\rho}_C(0) = \rho_{00}^{(C)} |0\rangle\langle 0| + \rho_{11}^{(C)} |1\rangle\langle 1| + \left[ \rho_{10}^{(C)} |1\rangle\langle 0| + \text{c.h.} \right] . \quad (4.5)$$

Considere a inexistência de algum tipo de monitoramento sobre o estado do campo (4.5) que permita alterar o tempo de retenção da cavidade. Semelhante ao exemplificado acima, após decorrido um intervalo de tempo  $\Delta t$  este estado evoluirá para

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_C(\Delta t) = & \left[ \rho_{00}^{(C)} + (1 - e^{-2\kappa \Delta t}) \rho_{11}^{(C)} \right] |0\rangle\langle 0| + \rho_{11}^{(C)} e^{-2\kappa \Delta t} |1\rangle\langle 1| + \\ & + \left[ \rho_{10}^{(C)} e^{-\kappa \Delta t} |1\rangle\langle 0| + \text{c.h.} \right] . \end{aligned} \quad (4.6)$$

Uma maneira de medir a perda de coerência do estado em (4.5) é avaliando o defeito de idempotência [17]

$$\begin{aligned} \varsigma_C(\Delta t) &= 1 - \text{tr} \left[ \bar{\rho}_C^2(\Delta t) \right] = 2 \det \left[ \bar{\rho}_C(\Delta t) \right] \\ &= 2 e^{-2\kappa\Delta t} \left\{ \left[ 1 - \rho_{11}^{(C)} e^{-2\kappa\Delta t} \right] \rho_{11}^{(C)} - |\rho_{10}^{(C)}|^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

que apresenta um tempo característico de amortecimento de  $T_r/2$ , revelando um amortecimento duas vezes mais rápido que os termos não-diagonais do estado de interesse.

Agora, vamos considerar a possibilidade de monitorar o estado do campo no interior da cavidade enviando átomos de dois níveis no estado desexcitado que atravessem a cavidade. Esses átomos irão interagir ressonantemente com o campo e, dependendo do tempo de interação efetiva, poderão se afastar de  $C$  no mesmo estado de entrada.

Primeiro consideramos um átomo em  $|g\rangle$  enviado para transpor a cavidade e o experimento ajustado para que o tempo de interação efetivo átomo-campo seja de  $T = 2\pi/\Omega$ . Imediatamente antes da entrada do átomo o estado global será

$$\bar{\rho}_{AC}(0) = |g\rangle\langle g| \otimes \bar{\rho}_C(0) \quad (4.8)$$

e transcorrido o tempo  $T$  o sistema sofreu um pulso  $2\pi$  e o estado final se encontrará em

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{AC}(T) &= |g\rangle\langle g| \otimes \left\{ \left[ \rho_{00}^{(C)} + (1 - e^{-\kappa T}) \rho_{11}^{(C)} \right] |0\rangle\langle 0| + \right. \\ &\quad \left. + \rho_{11}^{(C)} e^{-\kappa T} |1\rangle\langle 1| - \left[ \rho_{10}^{(C)} e^{-\kappa T/2} |1\rangle\langle 0| + \text{c.h.} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

lembrando apenas que  $\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \kappa^2}$  é a frequência de Rabi modificada<sup>2</sup> pelo acoplamento com o ambiente. O tempo de retenção da cavidade durante a evolução  $\Delta t = T$  será

$$\frac{\Delta t}{T_{r \rightarrow T}^{(M)}} = \frac{\kappa T}{2} \quad \implies \quad T_{r \rightarrow T}^{(M)} = \frac{2}{\kappa} \quad \implies \quad T_{r \rightarrow T}^{(M)} = 2 T_r, \quad (4.10)$$

---

<sup>2</sup>Estamos sempre supondo que o sistema átomo+campo+cavidade está sujeito ao regime dinâmico subamortecido, i.e.,  $\kappa < \Omega$ .

onde definimos  $T_{r \rightarrow T}^{(M)}$  como o *tempo de retenção monitorado por um átomo que sofre pulso  $2\pi$* .

Pode-se perceber que o tempo de retenção da cavidade duplicou. Entretanto, um fator de fase  $e^{i\pi}$  adquirida pelo estado  $|g, 1\rangle$  é responsável pela inversão do sinal nos termos de coerência e esse monitoramento mostra-se útil apenas para situações onde esta inversão de sinal não seja relevante. Nas demais aplicações, onde é necessário preservar a fase destes elementos, o experimento deverá ser ajustado de forma a permitir que o átomo enviado para monitorar a retenção da cavidade possa experimentar duas nutações de Rabi, i.e., dois pulsos de  $2\pi$ , durante sua interação com o campo. Nestas condições, o estado átomo+campo após as nutações se achará em

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{AC}(2T) = & |g\rangle\langle g| \otimes \left\{ \left[ \rho_{00}^{(C)} + (1 - e^{-2\kappa T}) \rho_{11}^{(C)} \right] |0\rangle\langle 0| + \right. \\ & \left. + \rho_{11}^{(C)} e^{-2\kappa T} |1\rangle\langle 1| + \left[ \rho_{10}^{(C)} e^{-\kappa T} |1\rangle\langle 0| + \text{c.h.} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde consideramos o estado inicial (4.8). O tempo de retenção para esta evolução será

$$\frac{\Delta t}{T_{r \rightarrow 2T}^{(M)}} = \kappa T \quad \Longrightarrow \quad T_{r \rightarrow 2T}^{(M)} = \frac{2}{\kappa} \quad \Longrightarrow \quad T_{r \rightarrow 2T}^{(M)} = 2T_r \quad (4.12)$$

e semelhantemente ao primeiro caso, onde o átomo sofre apenas uma nutilaço, o tempo de retenção da cavidade aumenta duas vezes quando comparado à evolução sem monitoramento.

Nos experimentos de CQED é possível enviar átomos com velocidades com poucas dezenas de m/s alcançadas por técnicas de *resfriamento à laser*. Sendo o “tempo de vida” do estado circular de um átomo de Rydberg [24] da ordem de 30 ms [2] e considerando velocidades típicas de  $\sim 35$  m/s [32], o átomo percorrerá uma distância da ordem de um metro. Essa é uma distância muito maior que o comprimento efetivo  $\sqrt{\pi}w$  de interação com o campo na cavidade, onde  $w$  é a “cintura” do modo eletromagnético transversal no interior de  $C$  e é da ordem de 6 mm [2]. Deste modo, podemos imaginar um átomo passando pela cavidade com uma velocidade que torne possível executar  $2m$  oscilações de Rabi, i.e.,  $2m$  pulsos de  $2\pi$ , com

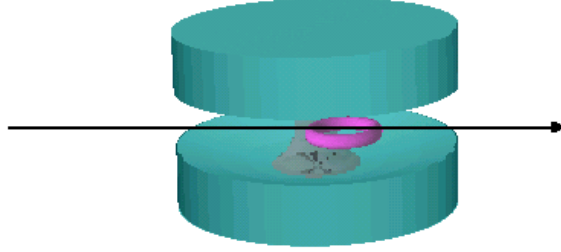


Figura 4.2: Átomo de Rydberg monitorando o estado do campo no interior de  $C$  durante a sua passagem. Figura retirada de [27].

$m \in \mathbb{N}$ . Por exemplo, um átomo com velocidade  $v$  ao cruzar a cavidade ficará interagindo com o campo por um tempo efetivo

$$t_{\text{int.}} = \frac{d_{\text{ef}}}{v} = \frac{\sqrt{\pi}w}{v} . \quad (4.13)$$

A razão entre  $t_{\text{int.}}$  e  $T$  fornecerá o número de nuações sofridas pelo átomo. Para  $v \sim 36.5$  m/s teremos

$$\frac{t_{\text{int.}}}{T} = \frac{\sqrt{\pi}w}{v} \frac{\Omega}{2\pi} \sim 14 \quad \implies \quad m = 7 \quad (4.14)$$

onde usamos  $\Omega/2\pi = 48$ kHz [3].

Como efeito, considerando um átomo sofrendo  $2m$  nuações de Rabi durante sua passagem no interior de  $C$ , o estado global imediatamente após a saída do átomo será

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{AC}(2mT) = & |g\rangle\langle g| \otimes \left\{ \left[ \rho_{00}^{(C)} + (1 - e^{-2m\kappa T})\rho_{11}^{(C)} \right] |0\rangle\langle 0| + \right. \\ & \left. + \rho_{11}^{(C)} e^{-2m\kappa T} |1\rangle\langle 1| + \left[ \rho_{10}^{(C)} e^{-m\kappa T} |1\rangle\langle 0| + \text{c.h.} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

com o tempo de retenção neste caso sendo

$$\frac{\Delta t}{T_{r \rightarrow 2mT}^{(M)}} = m\kappa T \quad \implies \quad T_{r \rightarrow 2mT}^{(M)} = \frac{2}{\kappa} \quad \implies \quad T_{r \rightarrow 2mT}^{(M)} = 2T_r ,$$

$$(4.16)$$

repetindo o resultado de dobrar a retenção.

### 4.1.2 Monitoramento com a passagem de $N$ átomos

Quando um átomo inicialmente preparado em  $g$  interage por um tempo  $mT$  com o campo na cavidade em uma superposição entre os estados de zero e um fóton, o estado global será fatorável e o átomo sairá com o mesmo estado que entrou. Deste modo, podemos concentrar nossa atenção no estado do campo visto que sabemos como se dará a evolução atômica quando o intervalo temporal da interação átomo–campo for múltiplo inteiro de  $2\pi/\Omega$ .

O nosso objetivo é preservar a coerência do *qubit* armazenado e simultaneamente monitorar o tempo de retenção durante a sua permanência no interior da cavidade  $C$ . Como o *tempo de retenção* é fornecido pelo tempo característico de amortecimento dos termos não–diagonais do estado do campo, será suficiente para os nossos propósitos nos ater apenas na análise destes elementos. Consideremos então um feixe com  $N$  átomos sendo enviado para monitorar a coerência do *qubit* e o tempo de retenção da cavidade. Examinaremos três casos onde cada átomo presente no feixe execute 1, 2 e  $2m$  nutações de Rabi.

– **Primeiro caso** –

Quando o primeiro átomo presente no feixe transpuser a cavidade  $C$  e executar um pulso de  $2\pi$ , o termo de coerência do campo ficará sendo

$$\rho_{10}^{(C)}(T) = -\rho_{10}^{(C)}(0) e^{-\kappa T/2} . \quad (4.17)$$

Entretanto, entre a saída do primeiro e a chegada do segundo átomo pode haver um intervalo de tempo  $\tau_1$  em que a cavidade estará vazia. Assim sendo, o campo evoluirá livremente sujeito à dissipação e o termo de coerência (4.17) ganhará um fator  $e^{-\kappa\tau_1}$ , ou seja

$$\rho_{10}^{(C)}(T + \tau_1) = -\rho_{10}^{(C)}(0) e^{-\kappa(T + 2\tau_1)/2} . \quad (4.18)$$

Depois o segundo átomo passará sofrendo um pulso de  $2\pi$  e logo em seguida o campo permanecerá sujeito a dissipação por um tempo  $\tau_2$ , num processo semelhante ao descrito logo acima, antes do ingresso do terceiro átomo. Ao término desta evolução, o termo de coerência do campo será

$$\rho_{10}^{(C)}(2T + \tau_1 + \tau_2) = \rho_{10}^{(C)}(0) e^{-\kappa(T + \tau_1 + \tau_2)} . \quad (4.19)$$

Continuando neste processo de interação átomo–campo durante um pulso de  $2\pi$  seguido de uma evolução livre  $\tau_i$  entre a saída do  $i$ -ésimo e a entrada do  $(i + 1)$ -ésimo átomo na cavidade, teremos após a saída do  $N$ -ésimo do feixe

$$\begin{aligned} \rho_{10}^{(C)}(NT + \sum_{i=1}^N \tau_i) &= (-1)^N \rho_{10}^{(C)}(0) e^{-\kappa(NT + \sum_{i=1}^N 2\tau_i)/2} \\ &= \rho_{10}^{(C)}(0) e^{-\kappa(NT + 2\mathcal{T} - 2iN\pi/\kappa)/2} \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde fizemos  $\mathcal{T} = \sum_{i=1}^N \tau_i$ .

Neste caso, consideraremos  $N$  sendo um número par para manter o sinal original do termo não–diagonal. Deste modo, a eq.(4.20) ficará

$$\rho_{10}^{(C)}(NT + \mathcal{T}) = \rho_{10}^{(C)}(0) e^{-\kappa(NT + 2\mathcal{T})/2} . \quad (4.21)$$

O tempo de retenção durante o tempo  $\Delta t = NT + \mathcal{T}$  em que o *qubit* permaneceu no interior da cavidade, pode ser encontrado fazendo

$$\frac{\Delta t}{T_{r \rightarrow NT + \mathcal{T}}^{(M)}} = \frac{\kappa(NT + 2\mathcal{T})}{2} \quad \implies \quad \frac{NT + \mathcal{T}}{T_{r \rightarrow NT + \mathcal{T}}^{(M)}} = \frac{\kappa(NT + 2\mathcal{T})}{2}$$

o que fornece

$$T_{r \rightarrow NT + \mathcal{T}}^{(M)} = \frac{2}{\kappa} \frac{(NT + \mathcal{T})}{(NT + 2\mathcal{T})} \quad (4.22)$$

onde  $\mathcal{T}$  é o tempo total em que a cavidade evolui sem átomo em seu interior.

– **Segundo caso** –

Agora, consideremos que cada átomo presente no feixe interage com o campo no interior de  $C$  durante um tempo de  $2T$ , suficiente para executar duas

nutações de Rabi. Aqui, da mesma forma que no primeiro caso, consideraremos uma janela de tempo entre a saída de um átomo e a entrada de seu sucessor.

Estando o termo não-diagonal do estado do campo inicialmente em  $\rho_{10}^{(C)}(0)$ , após a passagem do primeiro átomo se tornará

$$\rho_{10}^{(C)}(2T) = \rho_{10}^{(C)}(0) e^{-\kappa T} . \quad (4.23)$$

Em seguida o campo evoluirá sujeito às perdas da cavidade durante um tempo  $\tau_1$  e teremos

$$\rho_{10}^{(C)}(2T + \tau_1) = \rho_{10}^{(C)}(0) e^{-\kappa(T+\tau_1)} , \quad (4.24)$$

imediatamente antes da entrada do segundo átomo.

Todos os  $N$  átomos do feixe irão interagir da mesma forma com o campo em  $C$  e cada um deles acrescentará um fator  $e^{-\kappa T}$  multiplicando o termo  $\rho_{10}^{(C)}(0)$ . Além disso, também estamos considerando uma janela de tempo  $\tau_i$  entre a saída do  $i$ -ésimo átomo e a entrada do seu sucessor. Como resultado, um fator  $e^{-\kappa \tau_i}$  ao término da passagem deste  $i$ -ésimo átomo estará multiplicando o termo  $\rho_{10}^{(C)}(0)$ . Consequentemente, no momento em que todo o feixe atômico tiver atravessado completamente a cavidade, o termo não-diagonal do estado do campo em seu interior será

$$\rho_{10}^{(C)}(2NT + \mathcal{T}) = \rho_{10}^{(C)}(0) e^{-\kappa(N\mathcal{T} + \mathcal{T})} , \quad (4.25)$$

onde novamente definimos  $\mathcal{T} = \sum_{i=1}^N \tau_i$ .

O tempo de retenção da permanência do *qubit* no interior da cavidade durante o tempo  $\Delta t = 2NT + \mathcal{T}$  neste caso será

$$\frac{\Delta t}{T_{r \rightarrow 2NT + \mathcal{T}}^{(M)}} = \kappa (N\mathcal{T} + \mathcal{T}) \quad \Longrightarrow \quad \frac{2NT + \mathcal{T}}{T_{r \rightarrow 2NT + \mathcal{T}}^{(M)}} = \kappa (N\mathcal{T} + \mathcal{T})$$

que nos fornece

$$T_{r \rightarrow 2NT + \mathcal{T}}^{(M)} = \frac{1}{\kappa} \frac{(2NT + \mathcal{T})}{(N\mathcal{T} + \mathcal{T})} . \quad (4.26)$$

– **Terceiro caso** –

Aqui consideramos que, cada átomo pertencente ao feixe interagirá com o campo por um tempo de  $2mT$  e cada um sofrerá  $2m$  oscilações de Rabi. Assim sendo, o termo  $\rho_{10}^{(C)}(0)$  do campo inicialmente preparado em (4.5) será acrescido de um fator multiplicativo  $e^{-\kappa m T}$  para cada átomo que passe por  $C$ . Além do mais, como nos outros casos, há a evolução do campo sujeito apenas às perdas da cavidade que adiciona  $e^{-\kappa \tau_i}$  ao termo não-diagonal do estado do campo para cada  $i$ -ésimo átomo do feixe. Portanto, quando todo o feixe atômico enviado para monitorar o tempo de retenção de  $C$  e o estado do campo em seu interior transpuser a cavidade, o termo não diagonal do campo será

$$\rho_{10}^{(C)}(2mNT + \mathcal{T}) = \rho_{10}^{(C)}(0) e^{-\kappa(mNT + \mathcal{T})} \quad (4.27)$$

e o tempo de retenção será

$$T_{r \rightarrow 2mNT + \mathcal{T}}^{(M)} = \frac{1}{\kappa} \frac{(2mNT + \mathcal{T})}{(mNT + \mathcal{T})}, \quad (4.28)$$

onde  $\mathcal{T}$  foi definido como nos casos anteriores.

## 4.2 O efeito do átomo ausente

Para se evitar que dois ou mais átomos passem pela cavidade  $C$  simultaneamente, a densidade  $\lambda$  do feixe atômico é reduzida a um valor inferior a unidade. Em vista disso, um feixe com  $N$  pulsos atômicos possuirá em média  $\lambda N$  pulsos com um átomo presente e outros  $(1 - \lambda)N$  sem átomos. Torna-se necessário examinar os efeitos dos “átomos ausentes” no feixe atômico que monitora o campo na cavidade.

Nos resultados da seção anterior, consideramos janelas de tempos  $\tau_i$  entre a saída do  $i$ -ésimo átomo e a entrada de seu sucessor. Esses intervalos de tempo  $\tau_i$  estão diretamente relacionados com a ausência do átomo no pulso posterior ao  $i$ -ésimo. Ou seja,  $\mathcal{T} = \sum_{i=1}^N \tau_i$  reproduz todo o intervalo de tempo no qual o campo na cavidade passa evoluindo sujeito apenas à

dissipação. Quando levamos em conta a densidade do feixe atômico, podemos escrever esse tempo como

$$\mathcal{T} = (1 - \lambda)N t_{\text{pulso}} \quad , \quad (4.29)$$

onde  $t_{\text{pulso}}$  é o tempo de duração de cada pulso.

1. Seja  $t_{\text{pulso}} = T$ . Fazendo

$$\begin{aligned} N &\longrightarrow \lambda N \\ \mathcal{T} &\longrightarrow (1 - \lambda)N T \end{aligned}$$

na eq.(4.22), o tempo de retenção monitorado por  $N$  pulsos atômicos cada qual sofrendo um ciclo de Rabi completo torna-se

$$T_{r \rightarrow N T}^{(M)} = \frac{1}{\kappa} \frac{2}{(2 - \lambda)} \quad . \quad (4.30)$$

2. Seja então  $t_{\text{pulso}} = 2T$ . De maneira semelhante fazendo

$$\begin{aligned} N &\longrightarrow \lambda N \\ \mathcal{T} &\longrightarrow (1 - \lambda)N 2T \end{aligned}$$

na eq.(4.26), o tempo de retenção monitorado por  $N$  pulsos atômicos cada qual sofrendo dois ciclos de Rabi completos também torna-se

$$T_{r \rightarrow 2N T}^{(M)} = \frac{1}{\kappa} \frac{2}{(2 - \lambda)} \quad . \quad (4.31)$$

3. E quando  $t_{\text{pulso}} = 2mT$ , trocando

$$\begin{aligned} N &\longrightarrow \lambda N \\ \mathcal{T} &\longrightarrow (1 - \lambda)N 2mT \end{aligned}$$

em (4.28), o tempo de retenção monitorado por  $N$  pulsos atômicos cada qual sofrendo  $2m$  ciclos de Rabi completos também fica

$$T_{r \rightarrow 2mN T}^{(M)} = \frac{1}{\kappa} \frac{2}{(2 - \lambda)} \quad . \quad (4.32)$$

Pode-se perceber que o tempo de retenção da cavidade  $C$  quando monitorada por um feixe atômico de densidade  $\lambda$ , independe do número de oscilações de Rabi que cada um dos  $\lambda N$  átomos do feixe sofre antes de emergir. Este *tempo de retenção monitorado*  $T_r^{(M)}$  será sempre dado por

$$T_r^{(M)} = \frac{1}{\kappa} \frac{2}{(2 - \lambda)} \quad . \quad (4.33)$$

Atualmente, os valores para a densidade do feixe chegam a  $\lambda = 0.6$  [18]. Para esse valor teríamos

$$\frac{T_r^{(M)}}{T_r} = \frac{2}{(2 - \lambda)} \sim 1.43 \quad (4.34)$$

que equivale um ganho de  $\sim 43\%$  na retenção do *qubit* no interior da cavidade de alto  $Q$ .

### 4.3 Efeito da dispersão da velocidade atômica

Em experimentos de CQED, o controle da velocidade atômica é feita com muita precisão, mas há sempre uma dispersão aleatória durante o processo de seleção que varia<sup>3</sup> entre  $\pm 2$  m/s [2] do valor  $v_0$  desejado. Desta maneira, esse “erro” na velocidade atômica provocará pequenas mudanças no tempo efetivo de interação provocando modificações no estado do campo.

Se um feixe com  $N$  átomos for enviado para monitorar o estado do campo na cavidade, o tempo efetivo de interação entre o  $i$ -ésimo átomo e o campo será

$$t_i = \frac{L}{v_i} = \frac{L}{v_0 + \Delta v_i} \quad , \quad (4.35)$$

onde  $L$  é o comprimento efetivo da cavidade,  $v_i$  é a velocidade atômica,  $v_0$  é a velocidade ótima e  $\Delta v_i = v_i - v_0$  é uma pequena variação em torno da velocidade ótima.

O tempo ótimo de interação deve ser tal que o átomo execute dois ciclos de Rabi perfeitos, i.e.,

$$\frac{L}{v_0} = 2T \quad . \quad (4.36)$$

---

<sup>3</sup>Na verdade, essa dispersão depende da velocidade  $v_0$  a ser selecionada.

Nos experimentos realizados com cavidade, o comprimento efetivo da interação é de alguns milímetros,  $L \sim 10.6$  mm, e a frequência de Rabi é de  $\Omega/2\pi = 48$  kHz. Deste modo, a velocidade atômica ótima será de  $\sim 249.1$  m/s para que o tempo de interação com o campo seja  $2T$ . Portanto, podemos considerar a seguinte desigualdade

$$\frac{\Delta v_i}{v_0} \ll 1 \quad , \quad \forall i \quad . \quad (4.37)$$

Expandindo o denominador da eq.(4.35) numa série binomial e fazendo uso das eqs.(4.36) e (4.37), teremos

$$\begin{aligned} t_i &= \frac{L}{v_o} \left( 1 + \frac{\Delta v_i}{v_o} \right)^{-1} = \frac{L}{v_o} \left[ 1 - \frac{\Delta v_i}{v_o} + \left( \frac{\Delta v_i}{v_o} \right)^2 + \dots \right] \\ &\approx \frac{L}{v_o} \left( 1 - \frac{\Delta v_i}{v_o} \right) = \frac{L}{v_o} - \frac{L}{v_o} \frac{\Delta v_i}{v_o} = 2T - \frac{L}{v_o} \frac{\Delta v_i}{v_o} \\ &\approx 2T - \frac{L}{v_o} \frac{\Delta v_i}{v_o} \quad . \end{aligned} \quad (4.38)$$

No processo de monitoramento descrito nas seções anteriores, não foi necessário determinar o estado atômico depois da cavidade. Isso aconteceu porque o átomo era todo o tempo enviado no estado desexcitado e o tempo de interação efetivo ajustado para que experimentasse um pulso de  $2\pi$  ou múltiplos deste.

Agora, vamos novamente considerar que  $N$  átomos em  $g$  são enviados para monitorar o *qubit* armazenado em  $C$ . A velocidade atômica é selecionada para que cada um sofra duas nuações de Rabi dentro da cavidade. Entretanto, como há um “erro” na magnitude da velocidade durante o processo de seleção, o tempo de interação do  $i$ -ésimo átomo com o campo será  $t_i = 2T + \Delta T_i$ , onde através de (4.38) e da desigualdade (4.37) temos

$$\Delta T_i = -\frac{L}{v_o} \frac{\Delta v_i}{v_o} \quad \implies \quad \frac{|\Delta T_i|}{2T} \sim \frac{\Delta v_i}{v_0} \ll 1 \quad . \quad (4.39)$$

Dado que o estado atômico não será determinado depois de transpor a cavidade, o elemento não-diagonal do estado do campo após a passagem do primeiro átomo será (veja apêndice C)

$$\begin{aligned}
\rho_{10}^{(C)}(t_1) &= \rho_{10}^{(C)}(0)e^{-\kappa t_1/2} \left[ \cos(\Omega t_1/2) - \frac{\kappa}{\Omega} \sin(\Omega t_1/2) \right] \\
&= \rho_{10}^{(C)}(0)e^{-\kappa(2T+\Delta T_1)/2} \left[ \cos(\Omega \Delta T_1/2) - \frac{\kappa}{\Omega} \sin(\Omega \Delta T_1/2) \right] \\
&\approx \rho_{10}^{(C)}(0)e^{-\kappa(2T+\Delta T_1)/2} \left[ 1 - \frac{\kappa \Delta T_1}{2} - \frac{\Omega^2 \Delta T_1^2}{8} \right] \quad (4.40)
\end{aligned}$$

onde consideramos

$$\begin{aligned}
\Omega |\Delta T_i| &\ll 1 \quad , \quad \forall i \\
\kappa/\Omega &\ll 1 \quad . \quad (4.41)
\end{aligned}$$

Como estamos interessados neste momento nas consequências sobre o armazenamento do *qubit* devido à dispersão da velocidade atômica, examinaremos a passagem dos átomos no limite do monitoramento contínuo, i.e., o tempo em que a cavidade é deixada vazia é desprezível. Deste modo, após a passagem do segundo átomo teremos

$$\begin{aligned}
\rho_{10}^{(C)}(t_2) &= \rho_{10}^{(C)}(t_1)e^{-\kappa t_2/2} \left[ \cos(\Omega t_2/2) - \frac{\kappa}{\Omega} \sin(\Omega t_2/2) \right] \\
&= \rho_{10}^{(C)}(t_1)e^{-\kappa(2T+\Delta T_2)/2} \left[ \cos(\Omega \Delta T_2/2) - \frac{\kappa}{\Omega} \sin(\Omega \Delta T_2/2) \right] \\
&\approx \rho_{10}^{(C)}(t_1)e^{-\kappa(2T+\Delta T_2)/2} \left[ 1 - \frac{\kappa \Delta T_2}{2} - \frac{\Omega^2 \Delta T_2^2}{8} \right] \\
&\approx \rho_{10}^{(C)}(0)e^{-\kappa(4T+\Delta T_1+\Delta T_2)/2} \times \\
&\quad \times \left[ 1 - \frac{\kappa \Delta T_1}{2} - \frac{\Omega^2 \Delta T_1^2}{8} \right] \cdot \left[ 1 - \frac{\kappa \Delta T_2}{2} - \frac{\Omega^2 \Delta T_2^2}{8} \right] \quad (4.42)
\end{aligned}$$

Assim sendo, o elemento não-diagonal, após a passagem do  $N$ -ésimo átomo, é dado pela expressão

$$\begin{aligned}
\rho_{01}^{(C)}(2NT + \Delta T) &\simeq \rho_{01}^{(C)} \exp \left[ -\frac{\kappa}{2} \left( 2NT + \sum_{j=1}^N \Delta T_j \right) \right] \times \\
&\quad \times \prod_{j=1}^N \left( 1 - \frac{\Omega^2 \Delta T_j^2}{8} - \frac{\kappa \Delta T_j}{2} \right) \quad . \quad (4.43)
\end{aligned}$$

onde fizemos  $\Delta T = \sum_{i=1}^N \Delta T_i$ .

Para determinar o tempo de retenção faremos

$$\begin{aligned} \exp\left[\frac{2NT + \Delta T}{T_{r \rightarrow v}^M}\right] &= \exp\left[-\frac{\kappa}{2}(2NT + \Delta T)\right] \times \\ &\times \prod_{j=1}^N \left(1 - \frac{\Omega^2 \Delta T_j^2}{8} - \frac{\kappa \Delta T_j}{2}\right), \end{aligned} \quad (4.44)$$

que fornece

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_{r \rightarrow v}^M} &= \frac{1}{2NT + \Delta T} \left[ \frac{\kappa}{2}(2NT + \Delta T) - \right. \\ &\left. - \sum_{j=1}^N \ln\left(1 - \frac{\Omega^2 \Delta T_j^2}{8} - \frac{\kappa \Delta T_j}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Empregando as desigualdades (4.41), a eq.(4.45) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_{r \rightarrow v}^M} &\simeq \frac{\kappa}{2} + \frac{1}{2NT + \Delta T} \left[ \kappa \Delta T + \frac{\Omega^2}{8} \sum_{j=1}^N \Delta T_j^2 \right] \\ &\simeq \frac{\kappa}{2} + \frac{1}{1 + \Delta T/2NT} \left[ \frac{\kappa \Delta T}{2NT} + \frac{\Omega^2}{16NT} \sum_{j=1}^N \Delta T_j^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

A distribuição de velocidade é Maxwelliana [3], sendo simétrica com relação a  $v_0$ . Deste modo, no limite  $N \rightarrow \infty$  temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Delta v_j = 0 &\implies \frac{\Delta T}{2NT} = -\frac{1}{v_0 N} \sum_{i=1}^N \Delta v_i = 0 \\ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Delta v_j^2 = \Delta v^2 &\implies \frac{1}{2NT} \sum_{i=1}^N \Delta T_i^2 = 2T \left(\frac{\Delta v}{v_0}\right)^2 \end{aligned} \quad (4.47)$$

e a equação (4.46) pode ser reescrita como

$$T_{r \rightarrow v}^M = \frac{2}{\kappa} \left[ 1 + \frac{\pi \Omega}{\kappa} \left(\frac{\Delta v}{v_0}\right)^2 \right]^{-1}. \quad (4.48)$$

Atualmente, os parâmetros experimentais fixam  $\kappa/\Omega$  e  $\Delta v/v_0$  em torno de  $10^{-2}$ . Para estes valores, a dispersão da velocidade atômica provoca uma diminuição de 3% do que seria esperado para o tempo efetivo de retenção  $T_r^M$  quando comparado ao caso ideal  $\lambda \rightarrow 1$ .

# Capítulo 5

## Conclusão

Neste trabalho apresentamos um estudo quantitativo das cavidades de microondas utilizadas para criar efeitos quânticos em Eletrodinâmica Quântica de Cavidades. Elas são basicamente de dois tipos: as zonas de Ramsey que apresentam forte dissipação e uma cavidade supercondutora a baixíssima temperatura (número médio de fótons térmicos abaixo de 0.1 [2]) onde se cria superposições de estados do CEM. Neste trabalho modelamos a dinâmica nas zonas de Ramsey de forma a reproduzir os dados experimentais disponíveis. Depois consideramos a adequação de cavidade supercondutora para servir como uma memória quântica, *i.e.*, um dispositivo capaz de armazenar superposições. Para proteger a superposição quântica propomos um efeito conhecido como “efeito prateleira” no qual a passagem de um átomo ressonante com a cavidade “protege” o fóton da ação deletéria do ambiente. Mostramos que, com as condições experimentais atuais e a passagem de um átomo, é possível obter um tempo de retenção  $\sim 50\%$  melhor do que apenas o fator de qualidade da cavidade supercondutora proporcionaria.

# Apêndice A

## Interação de estado atômico com CEM clássico via densidade reduzida

Na seção 2.1 descrevemos a interação átomo–campo para o átomo inicialmente preparado em um estado puro. Para encontrar a dinâmica deste caso, resolvemos a equação de Schrödinger (1.1) na representação de interação. Entretanto, uma descrição para esta interação quando o estado atômico possui algum grau de mistura se faz necessária em determinadas situações nos experimentos de CQED. Nesta situação, a dinâmica atômica obedecerá a equação de Liouville–von Neumann (1.39), que na representação de interação torna–se

$$\frac{d}{dt}\bar{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar} \left[ \bar{H}_{IC}, \bar{\rho}(t) \right] \quad (\text{A.1})$$

sendo  $\bar{\rho}(t)$  o estado atômico no tempo  $t$  e  $\bar{H}_{IC}$  o hamiltoniano da interação como o CEM clássico dado pela eq.(2.10).

O átomo de interesse é um sistema de dois níveis que se comporta como um férmion [33]. Então, como o campo possui um tratamento clássico, podemos encontrar equações diferenciais para cada elemento do operador densidade atômico expandindo o comutador no lado direito da eq.(A.1). Feito isso, teremos

APÊNDICE A. INTERAÇÃO DE ESTADO ATÔMICO COM CEM CLÁSSICO VIA DENSIDADE

$$\frac{d}{dt}\bar{\rho}_{1,1}(t) = \frac{i\Omega_R}{2} \left[ \bar{\rho}_{2,1}(t) e^{-i(\phi-\vartheta t)} - \bar{\rho}_{1,2}(t) e^{i(\phi-\vartheta t)} \right] \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{d}{dt}\bar{\rho}_{1,2}(t) = \frac{i\Omega_R}{2} \left[ \bar{\rho}_{2,2}(t) - \bar{\rho}_{1,1}(t) \right] e^{-i(\phi-\vartheta t)} \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{d}{dt}\bar{\rho}_{2,1}(t) = \frac{\Omega_R}{2i} \left[ \bar{\rho}_{2,2}(t) - \bar{\rho}_{1,1}(t) \right] e^{i(\phi-\vartheta t)} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{d}{dt}\bar{\rho}_{2,2}(t) = \frac{\Omega_R}{2i} \left[ \bar{\rho}_{2,1}(t) e^{-i(\phi-\vartheta t)} - \bar{\rho}_{1,2}(t) e^{i(\phi-\vartheta t)} \right] \quad (\text{A.5})$$

onde consideramos

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{1,1}(t) &= \langle e | \bar{\rho}(t) | e \rangle \\ \bar{\rho}_{1,2}(t) &= \langle e | \bar{\rho}(t) | g \rangle \\ \bar{\rho}_{2,1}(t) &= \bar{\rho}_{1,2}^*(t) \\ \bar{\rho}_{2,2}(t) &= \langle g | \bar{\rho}(t) | g \rangle \quad . \end{aligned}$$

Para um estado misto inicial arbitrário dado por

$$\bar{\rho}(0) = p |e\rangle\langle e| + q |g\rangle\langle g| + [u |e\rangle\langle g| + \text{c.h.}] \quad (\text{A.6})$$

com  $p + q = 1$ , a solução do sistema (A.2) à (A.5) será:

$$\bar{\rho}_{1,1}(t) = p + \left[ (q-p) \frac{\Omega_R^2}{\Omega^2} - 2 \frac{\vartheta \Omega_R}{\Omega^2} \Re(u e^{i\phi}) \right] \sin^2(\bar{\Omega} t/2) + \quad (\text{A.7})$$

$$+ \frac{\Omega_R}{\Omega} \Im(u e^{i\phi}) \sin(\bar{\Omega} t)$$

$$\bar{\rho}_{1,2}(t) = i \frac{(q-p)}{2} \frac{\Omega_R}{\Omega} \sin(\bar{\Omega} t) e^{-i(\phi-\vartheta t)} + u \left[ \cos(\bar{\Omega} t) - i \frac{\vartheta}{\Omega} \sin(\bar{\Omega} t) \right] e^{i\vartheta t} +$$

$$+ \left[ (q-p) \frac{\vartheta \Omega_R}{\Omega^2} + 2 \frac{\Omega_R^2}{\Omega^2} \Re(u e^{i\phi}) \right] \sin^2(\bar{\Omega} t/2) e^{-i(\phi-\vartheta t)} \quad (\text{A.8})$$

$$\bar{\rho}_{2,2}(t) = q - \left[ (q-p) \frac{\Omega_R^2}{\Omega^2} - 2 \frac{\vartheta \Omega_R}{\Omega^2} \Re(u e^{i\phi}) \right] \sin^2(\bar{\Omega} t/2) -$$

$$- \frac{\Omega_R}{\Omega} \Im(u e^{i\phi}) \sin(\bar{\Omega} t) \quad (\text{A.9})$$

onde  $\bar{\rho}_{2,1}(t) = \bar{\rho}_{1,2}^*(t)$ .

APÊNDICE A. INTERAÇÃO DE ESTADO ATÔMICO COM CEM CLÁSSICO VIA DENSIDADE

Seguindo naturalmente, a solução da eq.(A.1), para as condições iniciais dadas pela expressão (A.6), será

$$\bar{\rho}(t) = \bar{\rho}_{1,1}(t) |e\rangle\langle e| + \bar{\rho}_{2,2}(t) |g\rangle\langle g| + \left[ \bar{\rho}_{1,2}(t) |e\rangle\langle g| + \text{c.h.} \right] \quad (\text{A.10})$$

onde os  $\bar{\rho}_{i,j}$  são fornecidos pelas eqs.(A.7) à (A.9).

Como um exemplo simples, simularemos um pulso  $\pi/2$  no estado atômico (A.6) numa interação muito próxima da ressonância no interior de uma zona de Ramsey. Nessa configuração, vale a desigualdade  $\vartheta \ll \Omega_R$  e podemos fazer a aproximação (3.4). Portanto, o estado final após o pulso  $\pi/2$  será

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\pi/2\Omega_R) \approx & \left[ \frac{1}{2} + \Im(u e^{i\phi}) \right] |e\rangle\langle e| + \left[ \frac{1}{2} - \Im(u e^{i\phi}) \right] |g\rangle\langle g| + \\ & + \left\{ \left[ i \frac{(q-p)}{2} e^{-i\phi} + \Re(u e^{i\phi}) e^{-i\phi} \right] |e\rangle\langle g| + \text{c.h.} \right\} . \end{aligned}$$

# Apêndice B

## Um *qubit* em cavidades com perdas

Nos últimos anos há uma crescente busca pelo armazenamento e processamento da informação quântica. Nisto baseia-se a essência da computação quântica [1]. A menor unidade de informação quântica é denominada *qubit* (bit quântico) podendo estar no estado  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$  ou numa superposição coerente de ambos. Este é um típico sistema de dois níveis e possui uma representação no espaço de Hilbert bidimensional [1]. No âmbito da óptica quântica, uma das formas de se armazenar um *qubit* é no CEM dentro de cavidades com alto fator de qualidade. Este armazenamento da informação quântica é de fato uma *memória quântica* [3]. A cavidade, devido à configuração geométrica de seus espelhos supercondutores, seleciona um determinado modo do CEM e nele é “guardado”<sup>1</sup> o *qubit*. Entretanto, este modo interage diretamente com os fônons cristalinos [33] das paredes da cavidade, levando a processos de dissipação e decoerência [8] do estado nele armazenado. Modelaremos estes processos de perdas encontrando uma equação mestra para a evolução do estado do campo dentro da cavidade.

Na secção (1.4.3) encontramos uma equação mestra para um oscilador que percebe um ambiente à temperatura finita. Esta é a situação que pre-

---

<sup>1</sup>Para isso, a frequência que determina a quantidade de energia ( $\hbar\omega$ ) do bit quântico precisa ser ressonante com a do campo.

tendemos modelar onde, aqui, o oscilador é o estado do campo dentro da cavidade e o ambiente é um número muito grande de fônons cristalinos.

Considerando então que o hamiltoneano de evolução livre do campo de frequência  $\omega$  é dado por [13]

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \mathbf{1}/2 \right) \quad (\text{B.1})$$

e que as cavidades de microondas são resfriadas a temperaturas muito baixas  $T \sim 0.6K$  [18], teremos, a partir da eq.(1.63),

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar} \left[ \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \mathbf{1}/2 \right), \hat{\rho}(t) \right] + \kappa \left\{ \left[ \hat{a} \hat{\rho}(t), \hat{a}^\dagger \right] + \left[ \hat{a}, \hat{\rho}(t) \hat{a}^\dagger \right] \right\} \quad (\text{B.2})$$

onde  $\hat{\rho}(t)$  é o estado que desejamos encontrar e fizemos  $\bar{n} = 0$  devido às baixas temperaturas do aparato.

Na representação de interação, esta equação torna-se

$$\frac{d}{dt} \bar{\rho}(t) = \kappa \left( 2 \hat{a} \bar{\rho}(t) \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \bar{\rho}(t) - \bar{\rho}(t) \hat{a}^\dagger \hat{a} \right) . \quad (\text{B.3})$$

Ao fazer  $\bar{n} = 0$  estamos considerando o ambiente como infinitos osciladores todos à temperatura nula. Desta maneira, sua atuação sobre o sistema de interesse será de retirar energia durante a evolução. Então o valor esperado do operador número de excitações do campo,

$$\hat{N}_{CEM} = \hat{b}^\dagger \hat{b} \quad (\text{B.4})$$

durante toda a evolução, respeitará a seguinte desigualdade

$$0 \leq \langle \hat{N}_{CEM}(t) \rangle \leq \langle \hat{N}_{CEM}(0) \rangle . \quad (\text{B.5})$$

Logo, o problema de encontrar a solução para cada elemento  $\bar{\rho}_{i,j}(t)$  simplifica significativamente. Por exemplo, para estados com *uma* excitação em

$t = 0$  teremos uma evolução limitada ao subespaço caracterizado pelo número de excitações *zero* ou *um*.

A equação (B.3) fornece um sistema de 3 equações diferenciais acopladas para os elementos  $\bar{\rho}_{i,j}(t)$ . Ao determinar a solução de cada elemento estaremos determinando completamente  $\bar{\rho}(t)$ . O sistema de equações será

$$\frac{d}{dt}\bar{\rho}_{1,1}(t) = -2\kappa\bar{\rho}_{1,1}(t) \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{d}{dt}\bar{\rho}_{1,2}(t) = -\kappa\bar{\rho}_{1,2}(t) \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{d}{dt}\bar{\rho}_{2,2}(t) = 2\kappa\bar{\rho}_{1,1}(t) \quad (\text{B.8})$$

onde  $\bar{\rho}_{1,1}(t) = \langle 1|\bar{\rho}(t)|1\rangle$ ,  $\bar{\rho}_{1,2}(t) = \langle 1|\bar{\rho}(t)|0\rangle$  e  $\bar{\rho}_{2,2}(t) = \langle 0|\bar{\rho}(t)|0\rangle$ .

Considerando um estado do campo inicialmente preparado em

$$\bar{\rho}(0) = \bar{\rho}_{1,1}(0)|1\rangle\langle 1| + \bar{\rho}_{2,2}(0)|0\rangle\langle 0| + \bar{\rho}_{1,2}(0)|1\rangle\langle 0| + \bar{\rho}_{1,2}^*(0)|0\rangle\langle 1| \quad (\text{B.9})$$

que torna-se na representação matricial

$$\bar{\rho}(0) = \begin{pmatrix} \bar{\rho}_{1,1}(0) & \bar{\rho}_{1,2}(0) \\ \bar{\rho}_{1,2}^*(0) & \bar{\rho}_{2,2}(0) \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

com  $\bar{\rho}_{1,1}(0) + \bar{\rho}_{2,2}(0) = 1$ , a solução do sistema de equações diferenciais (B.6) à (B.8) será

$$\bar{\rho}_{1,1}(t) = \bar{\rho}_{1,1}(0)e^{-2\kappa t} \quad (\text{B.11})$$

$$\bar{\rho}_{1,2}(t) = \bar{\rho}_{1,2}(0)e^{-\kappa t} \quad (\text{B.12})$$

$$\bar{\rho}_{2,2}(t) = \bar{\rho}_{1,1}(0)(1 - e^{-2\kappa t}) + \bar{\rho}_{2,2}(0) \quad (\text{B.13})$$

Desta maneira, a eq.(B.3) terá como solução

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(t) = & \bar{\rho}_{1,1}(0)e^{-2\kappa t}|1\rangle\langle 1| + \bar{\rho}_{1,2}(0)e^{-\kappa t}|1\rangle\langle 0| + \bar{\rho}_{1,2}^*(0)e^{-\kappa t}|0\rangle\langle 1| \\ & + \left[ \bar{\rho}_{1,1}(0)(1 - e^{-2\kappa t}) + \bar{\rho}_{2,2}(0) \right] |0\rangle\langle 0| \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

dado o estado inicial (B.9). Para tempos muito longos ( $t \rightarrow \infty$ ) o ambiente terá retirado toda energia do sistema de interesse e o estado do campo será o vácuo.

# Apêndice C

## O MJC com $\delta = 0$ em cavidades com perdas

No interior de cavidades de microondas, o tratamento teórico da interação átomo–campo se faz com o MJC [16]. Como vimos na seção (2.2), este modelo trata da interação entre radiação e matéria onde ambos possuem um tratamento quântico. Neste modelo o “mundo” limita–se a um modo do CEM e ao átomo de dois níveis, o que torna essa dinâmica particular e idealizada. Para um tratamento mais realístico, que descreva essa interação dentro de cavidades com perdas é necessário incluir o ambiente que a priori não foi considerado.

Nos experimentos de CQED (veja [2] e referências lá contidas) há um campo aprisionado na cavidade e átomos de Rydberg [24] cruzando–a (observe a figura 3.1). Entretanto, como discutido no apêndice B, o sistema percebe o meio à sua volta através de um acoplamento com o campo. Isso nos permite usar a equação mestra encontrada na seção (1.4.3) para um oscilador harmônico interagindo com um banho de infinitos osciladores. Aqui neste caso que desejamos tratar, o hamiltoneano da evolução livre do sistema de interesse da eq.(1.63) será o próprio hamiltoneano do MJC ressonante. Ou seja:

$$\hat{H}_{\mathcal{A}} = \hat{H}_{JC} = \frac{\hbar\omega}{2} \left( \hat{\sigma}_z + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + \mathbf{1} \right) + \hbar G \left( \hat{a} \hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- \right) , \quad (\text{C.1})$$

onde, como no apêndice anterior, representamos o campo no interior da cavi-

dade através dos operadores  $\hat{a}$  de aniquilação e  $\hat{a}^\dagger$  de criação.

A equação mestra que descreverá a dinâmica da interação ressonante entre átomo–campo no interior de cavidades de microondas será

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = & \frac{1}{i\hbar} \left[ \frac{\hbar\omega}{2} \left( \hat{\sigma}_z + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + \mathbf{1} \right) + \hbar G \left( \hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- \right), \hat{\rho}(t) \right] \\ & + \kappa \left\{ \left[ \hat{a}\hat{\rho}(t), \hat{a}^\dagger \right] + \left[ \hat{a}, \hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

lembrando que, devido a baixa temperatura do aparato, fizemos  $\hat{n} = 0$ .

Na representação de interação a equação acima se tornará

$$\frac{d}{dt}\bar{\rho}(t) = -i G \left[ \hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-, \bar{\rho}(t) \right] + \kappa \left\{ \left[ \hat{a}\bar{\rho}(t), \hat{a}^\dagger \right] + \left[ \hat{a}, \bar{\rho}(t)\hat{a}^\dagger \right] \right\} . \quad (\text{C.3})$$

A solução geral desta equação é formalmente determinada pelo método de superoperadores que possuem uma álgebra de Lie fechada (veja, *e.g.*, [8], [11] e [34] para uma apresentação detalhada do método). Entretanto, o nosso interesse é resolvê-la quando o sistema átomo–campo inicialmente compartilham apenas uma excitação. Com essa condição inicial, a solução fica bem simplificada e pode ser encontrada por métodos simples. De fato, nessas circunstâncias, esta equação já foi resolvida por Peixoto de Faria em [21] onde se determinam as equações de movimento para os blocos da matriz densidade  $\bar{\rho}(t)$ . Aqui, de maneira um pouco diferente, determinaremos as equações de movimento para cada elemento desta matriz. A única vantagem disso, comparado com as soluções em [21], é que poderemos observar cada elemento que constitui o operador densidade do sistema de interesse.

Como vimos na seção (2.2.1), o hamiltoneano Jaynes–Cummings preserva o número de excitações. De maneira semelhante ao apêndice B, o *operador número de excitações*, durante toda a dinâmica dissipativa, obedecerá a desigualdade [21]:

$$0 \leq \hat{N}_{exc}(t) \leq \hat{N}_{exc}(0) . \quad (\text{C.4})$$

Isso determina uma evolução do sistema átomo–campo limitada ao subespaço caracterizado pelo número de excitações *zero* ou *um* para estados preparados inicialmente com *uma* excitação.

Usando o mesmo procedimeto do apêndice B, podemos obter um sistema de 6 equações diferenciais para os elementos do operador densidade  $\bar{\rho}_{i,j}(t)$  a partir da eq.(C.3). Este sistema será:

$$\frac{d}{dt}\bar{\rho}_{2,2}(t) = -2G \Im[\bar{\rho}_{2,3}(t)] \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{d}{dt}\bar{\rho}_{2,3}(t) = -iG[\bar{\rho}_{3,3}(t) - \bar{\rho}_{2,2}(t)] - \kappa\bar{\rho}_{2,3}(t) \quad (\text{C.6})$$

$$\frac{d}{dt}\bar{\rho}_{2,4}(t) = -iG\bar{\rho}_{3,4}(t) \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{d}{dt}\bar{\rho}_{3,3}(t) = 2G \Im[\bar{\rho}_{2,3}(t)] - 2\kappa\bar{\rho}_{3,3}(t) \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{d}{dt}\bar{\rho}_{3,4}(t) = -iG\bar{\rho}_{2,4}(t) - \kappa\bar{\rho}_{3,4}(t) \quad (\text{C.9})$$

$$\frac{d}{dt}\bar{\rho}_{4,4}(t) = 2\kappa\bar{\rho}_{3,3}(t) \quad (\text{C.10})$$

onde  $\Im[\bullet]$  é a parte imaginária de  $\bullet$  e consideramos

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{1,1}(t) &= \langle e, 1 | \bar{\rho}(t) | e, 1 \rangle & \bar{\rho}_{2,3}(t) &= \langle e, 0 | \bar{\rho}(t) | g, 1 \rangle \\ \bar{\rho}_{1,2}(t) &= \langle e, 1 | \bar{\rho}(t) | e, 0 \rangle & \bar{\rho}_{2,4}(t) &= \langle e, 0 | \bar{\rho}(t) | g, 0 \rangle \\ \bar{\rho}_{1,3}(t) &= \langle e, 1 | \bar{\rho}(t) | g, 1 \rangle & \bar{\rho}_{3,3}(t) &= \langle g, 1 | \bar{\rho}(t) | g, 1 \rangle \\ \bar{\rho}_{1,4}(t) &= \langle e, 1 | \bar{\rho}(t) | g, 0 \rangle & \bar{\rho}_{3,4}(t) &= \langle g, 1 | \bar{\rho}(t) | g, 0 \rangle \\ \bar{\rho}_{2,2}(t) &= \langle e, 0 | \bar{\rho}(t) | e, 0 \rangle & \bar{\rho}_{4,4}(t) &= \langle g, 0 | \bar{\rho}(t) | g, 0 \rangle \end{aligned}$$

sendo os elementos  $\bar{\rho}_{1,j}(t)$ , com  $j = 1, 2, 3$  e  $4$ , sempre nulos, porque a primeira linha do operador densidade está relacionado com os estados de duas excitações.

Para um estado átomo-campo inicialmente preparado em

$$\bar{\rho}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & b^* & d & h \\ 0 & c^* & h^* & f \end{pmatrix} \quad (\text{C.11})$$

com  $a + d + f = 1$ , a solução do sistema será

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{2,2}(t) = & \frac{e^{-\kappa t}}{\Omega^2} \left\{ a \Omega^2 + \left[ (a + d) \Omega_0^2 - 2 \Im(b) \kappa \Omega_0 - 2 a \Omega^2 \right] \sin^2(\Omega t/2) + \right. \\ & \left. + 2 \left[ a \kappa - \Im(b) \Omega_0 \right] \Omega \sin(\Omega t/2) \cos(\Omega t/2) \right\} \quad (\text{C.12}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{2,3}(t) = & \frac{e^{-\kappa t}}{\Omega^2} \left\{ b \Omega^2 + i \Omega_0 \left[ (a + d) \kappa - 2 \Im(b) \Omega_0 \right] \sin^2(\Omega t/2) + \right. \\ & \left. + i(a - d) \Omega_0 \Omega \sin(\Omega t/2) \cos(\Omega t/2) \right\} \quad (\text{C.13}) \end{aligned}$$

$$\bar{\rho}_{2,4}(t) = \frac{e^{-\kappa t/2}}{\Omega^2} \left\{ c \Omega^2 \cos(\Omega t/2) + \left[ c \kappa - i h \Omega_0 \right] \Omega \sin(\Omega t/2) \right\} \quad (\text{C.14})$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{3,3}(t) = & \frac{e^{-\kappa t}}{\Omega^2} \left\{ d \Omega^2 + \left[ (a + d) \Omega_0^2 - 2 \Im(b) \kappa \Omega_0 - 2 d \Omega^2 \right] \sin^2(\Omega t/2) + \right. \\ & \left. + 2 \left[ \Omega_0 \Im(b) - d \kappa \right] \Omega \sin(\Omega t/2) \cos(\Omega t/2) \right\} \quad (\text{C.15}) \end{aligned}$$

$$\bar{\rho}_{3,4}(t) = \frac{e^{-\kappa t/2}}{\Omega^2} \left\{ h \Omega^2 \cos(\Omega t/2) - \Omega \left[ h \kappa + i c \Omega_0 \right] \sin(\Omega t/2) \right\} \quad (\text{C.16})$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{4,4}(t) = & 1 - \frac{e^{-\kappa t}}{\Omega^2} \left\{ (a + d) \Omega^2 + 2 \left[ (a + d) \kappa^2 - 2 \Im(b) \kappa \Omega_0 \right] \sin^2(\Omega t/2) + \right. \\ & \left. + 2(a - d) \kappa \Omega \sin(\Omega t/2) \cos(\Omega t/2) \right\} \quad (\text{C.17}) \end{aligned}$$

onde  $\Omega_0 = 2G$  é a frequência de Rabi no vácuo determinada pela eq.(2.31) e  $\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \kappa^2}$  será a frequência de Rabi modificada<sup>1</sup> pelo acoplamento com o banho.

Deste modo, a solução da eq.(C.3), quando o sistema átomo-campo inicialmente compartilharem apenas uma excitação, usando a eq.(C.11), será

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(t) = & \bar{\rho}_{2,2}(t) |e, 0\rangle \langle e, 0| + \bar{\rho}_{3,3}(t) |g, 1\rangle \langle g, 1| + \\ & + \bar{\rho}_{4,4}(t) |g, 0\rangle \langle g, 0| + \left[ \bar{\rho}_{2,3}(t) |e, 0\rangle \langle g, 1| + \right. \\ & \left. + \bar{\rho}_{2,4}(t) |e, 0\rangle \langle g, 0| + \bar{\rho}_{3,4}(t) |g, 1\rangle \langle g, 0| + \text{c.h.} \right] \quad (\text{C.18}) \end{aligned}$$

onde os  $\bar{\rho}_{i,j}(t)$ , com  $i$  e  $j = 2, 3$  e  $4$ , são dados pelas equações (C.12) à (C.17). Pode-se perceber que para tempos muito longos ( $t \rightarrow \infty$ ) o estado

<sup>1</sup>Aqui assumimos de antemão o regime subamortecido [21] onde  $\kappa < \Omega_0$ .

global será o fundamental  $|g, 0\rangle\langle g, 0|$ , como esperado para uma cavidade dissipativa.

# Bibliografia

- [1] J. Preskill, *Lectures Notes in Quantum Information and Computation*, available at URL <http://www.theory.caltech.edu/~preskill/ph229>.
- [2] J. M. Raimond, M. Brune & S. Haroche, *Rev. Mod. Phys.*, **73**, 565 (2001).
- [3] X. Maître, E. Hagley, G. Nogues, C. Wunderlich, P. Goy, M. Brune, J. M. Raimond & S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.*, **79**, 769 (1997).
- [4] H. M. Nussenzveig, *Ótica, Relatividade e Física Quântica. Curso de Física Básica*, (Edgard Blücher Ltda, 2000);  
R. Eisberg & R. Resnick, *Física Quântica. Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas*, (Editora Campus, 1983).
- [5] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu & F. Laloë, *Quantum Mechanics*, (John Wiley et Sons, 1977, vol.1).
- [6] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, (Addison–Wesley Publishing Company, 1994, Revised Edition).
- [7] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc & G. Grynberg, *Atom-Photon Interactions: Basic Processes and Applications*, (John Wiley & Sons, New York, 1992).
- [8] J. G. Peixoto de Faria, *Aspectos da Dinâmica Browniana do Oscilador Harmônico Quântico e Cálculos de Densidades Reduzidas Pela Técnica das Álgebras de Lie: Aplicações à Óptica Quântica*, (UFMG/ICEx/Departamento de Física, Belo Horizonte, Dissertação de Mestrado, 1997);

- [9] H. J. Carmichael, *Statistical Methods in Quantum Optics 1. Master Equations and Fokker-Planck Equations*, (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1999).
- [10] J. G. Peixoto de Faria, *Estudo Dirigido. Sistemas quânticos abertos e equações mestras*, Notas não publicadas, (UESC/Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Ilhéus, 2004);
- [11] H. E. Borges, *Mecânica Estatística Quântica de Sistemas Abertos Markovianos: Uma Abordagem por Álgebras de Lie*, (UFMG/ICEx/Departamento de Física, Belo Horizonte, Tese de Doutorado, 1996);
- [12] M. O. Scully & M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, (Cambridge University Press, 1997);
- [13] L. Mandel & E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, (Cambridge University Press, 1995).
- [14] J.-S. Peng & G.-X. Li, *Introduction to Modern Quantum Optics*, (World Scientific Publishing, 1998).
- [15] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc & G. Grynberg, *Photons and Atoms: Introduction to Quantum Electrodynamics*, (Wiley, New York, 1989).
- [16] P. Meystre, *Phys. Rep.*, **219**, n. 3-6, 243 (1992).
- [17] J. il Kim, *Análise de Tempos Curtos para Descoerência. Um modelo Microscópico para a Zona de Ramsey*,(UFMG/ICEx/Departamento de Física, Belo Horizonte, Tese de Doutorado, 1999);  
J. il Kim, M. C. Nemes, A. F. R. de Toledo Piza & H. E. Borges, *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 207 (1996);  
J. il Kim, K. M. Fonseca Romero, A. M. Horiguti, L. Davidovich, M. C. Nemes & A. F. R. de Toledo Piza, *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 4737 (1999).
- [18] G. Nogues, A. Rauschenbeutel, S. Osnaghi, M. Brune, J. M. Raimond & S. Haroche, *Nature*, **400**, 239 (1999).

- [19] E. T. Jaynes & F. W. Cummings, *Proc. of the IEEE*, **51**, 89 (1963).
- [20] J. G. Peixoto de Faria, *Estudo Dirigido II – Óptica Quântica. Diagonalização do hamiltoniano Jaynes–Cummings*, Notas não publicadas, (UESC/ Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Ilhéus, 2004);
- [21] J. G. Peixoto de Faria, *Aspectos do Entrelaçamento em sistemas Quânticos Abertos*, (UFMG/ICEx/Departamento de Física, Belo Horizonte, Tese de Doutorado, 2001);
- [22] M. Brune, F. Schmidt–Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J. M. Raimond & S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.*, **76**, 1800 (1996).
- [23] B. E. A. Saleh & M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics*, (John Wiley & Sons, 1991).
- [24] R. G. Hulet & D. Kleppner, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1430 (1983);  
P. Nussenzveig, F. Bernardot, M. Brune, J. Hare, J. M. Raimond, S. Haroche & W. Gawlik, *Phys. Rev. A* **48**, 3991 (1993).
- [25] J. M. Raimond, G. Rempe, *Inform. Soc. Technol. – Quantum Information Processing and Communication in Europe*, (Brussels, march 2005), <http://www.cordis.lu/ist/fet/home.html>
- [26] N. F. Ramsey, *Molecular Beams*, (Oxford Univ. Press, Oxford, 1985).
- [27] <http://www.lkb.ens.fr/recherche/qedcav/english/perso/Directory.html>.
- [28] M. Brune, S. Haroche, J. M. Raimond, L. Davidovich & N. Zagury, *Phys. Rev. A*, **45**, 5193 (1992).
- [29] P. Grangier & J. A. Levenson & J.–P. Poizat, *Nature*, **396**, 537 (1998).
- [30] R. Lo Franco, G. Compagno, A. Messina & A. Napoli, *Los Alamos e–print server*, [xxx.lanl.gov/quant-ph/0607207](http://xxx.lanl.gov/quant-ph/0607207).
- [31] J. G. Peixoto de Faria, P. Nussenzveig, A. F. R. de Toledo Piza & M. C. Nemes, *Los Alamos e–print server*, [xxx.lanl.gov/quant-ph/0012037](http://xxx.lanl.gov/quant-ph/0012037).

- [32] M. Brune, S. Haroche, V. Lefevre, J. M. Raimond & N. Zagury, *Phys. Rev. Letters*, **65**, 976 (1990).
- [33] S. R. A. Salinas, *Introdução à Física Estatística*, (Edusp–Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo,1999).
- [34] A. R. Bosco de Magalhães, *Estudo do Controle da Decoerência e da Dissipação em Cavidades de Microondas Acopladas*, (UFMG/ICEx/Departamento de Física, Belo Horizonte, Tese de Doutorado, 2004);
- [35] M. Brune, P. Nussenzveig, F. Schmidt–Kaler, F. Bernardot, A. Maali, J. M. Raimond & S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 5193 (1994).
- [36] Q. A. Turchette, C. J. Hood, W. Lange, H. Mabuchi & H. J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 4710 (1995).
- [37] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond & S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 4887 (1996).
- [38] P. Grangier, *ibid*, **400**, 215 (1999).
- [39] G. Nogue, A. Rauschenbeutel, S. Osnaghi, P. Bertet, M. Brune, J. M. Raimond, S. Haroche, L. G. Lutterbach & L. Davidovich *Phys. Rev. A*, **62**, 054101 (2000).
- [40] M. O. Terra Cunha & M. C. Nemes, *Phys. Lett. A*, **305**, 313 (2002).