

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Tese de Doutorado

**Identidades satisfeitas por álgebras com estruturas
adicionais e multiplicidades limitadas por constante**

Reyssila Franciane Dutra do Nascimento Vieira

Belo Horizonte
2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Reyssila Franciane Dutra do Nascimento Vieira

Identidades satisfeitas por álgebras com estruturas adicionais e
multiplicidades limitadas por constante

Tese apresentada ao corpo docente de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutora em Matemática.

Orientador: Rafael Bezerra dos Santos
Orientadora: Ana Cristina Vieira

Belo Horizonte
2025

2025, Reyssila Franciane Dutra do Nascimento Vieira.

Todos os direitos reservados

	Vieira, Reyssila Franciane Dutra do Nascimento.
V658i	Identidades satisfeitas por álgebras com estruturas adicionais e multiplicidades limitadas por constante [recurso eletrônico] / Reyssila Franciane Dutra do Nascimento Vieira. Belo Horizonte — 2025. 1 recurso online (83 f. il.): pdf. Orientador: Rafael Bezerra dos Santos. Coorientadora: Ana Cristina Vieira. Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. Referências: f. 80-83 1. Matemática – Teses. 2. Álgebra - Teses. 3. Caracteres de grupos – Teses. 4. Identidades (Matemática) – Teses. 5. Multiplicidade (Matemática) – Teses. I. Santos, Rafael Bezerra dos. II. Vieira, Ana Cristina. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. IV. Título. CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irénquer Vismeg Lucas
Cruz - CRB 6ª Região - nº 819.



FOLHA DE APROVAÇÃO

*Identities satisfied by algebras with additional structures and
multiplicities limited by constant*

REYSSILA FRANCIANE DUTRA DO NASCIMENTO VIEIRA

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Prof. Rafael Bezerra dos Santos
Orientador – UFMG

Profa. Ana Cristina Vieira
Coorientadora – UFMG

Prof. Antônio Giambardino
Univ. Palermo

Profa. Dafne Campos Lima Bessades
UFJF

Profa. Manuela da Silva Souza
UFBA

Profa. Maria Luiza Oliveira Santos
UFF

Belo Horizonte, 25 de fevereiro de 2025.

Aos meus queridos pais, Eliane e Francisco.

*À minha amada família,
Eloá e Márcio.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela proteção, bênçãos e por sempre me dar forças nos momentos de fraquezas e dificuldades. À Nossa Senhora Aparecida, à São Judas Tadeu e a todos os anjos e santos pela proteção e intercessão. Obrigada por me darem força e sabedoria para superar as dificuldades e por mais essa conquista.

Ao meu marido, Márcio, companheiro de todas as horas. Obrigada por compartilhar dos meus sonhos, por acolher minhas angústias, alegrias e por sempre me incentivar.

A minha filha Eloá, por me fazer mais corajosa, centrada e persistente. Obrigada por me proporcionar os momentos mais felizes da minha vida.

A minha afilhada Luísa, por todos os momentos de alegria, que foram fundamentais nesta jornada para concluir o doutorado.

Aos meus pais, Eliane e Francisco, por todo apoio e amor incondicional que sempre me deram e por me sustentarem por meio de suas constantes orações.

As minhas avós, Silvia e Tereza (in memorian), além da minha tia Maria pela torcida e orações.

À minha orientadora Ana Cristina Vieira, por toda ajuda, disponibilidade, ensinamentos, paciência, incentivo e atenção. Obrigada por se fazer presente em todos os momentos deste percurso, por acreditar no meu trabalho e por ser esse grande exemplo que sempre me motiva a ser melhor.

Ao meu orientador Rafael Bezerra dos Santos, por toda ajuda e confiança. Obrigada por acreditar em mim e, por ter contribuído para meu crescimento profissional, pessoal e por todos as nossas discussões.

Aos meus irmãos acadêmicos, por fazer dos seminários momentos de trocas de conhecimentos e aprendizado. Em especial, Pedro, Wesley e Juan que estiveram presentes ao longo do doutorado sempre se colocando à disposição para discutir sobre PI-teoria.

A todos os amigos da Pós-graduação em Matemática na UFMG pela convivência, ajuda e pelos momentos de distrações.

Aos professores Antônio Giambruno, Dafne Bessades, Manuela Souza e Maria Luiza Santos por aceitarem fazer parte da banca examinadora e pelas sugestões que enriqueceram este trabalho.

Aos funcionários do ICEX, em especial às secretárias da pós Andrea e Kelli, pela disponibilidade e por sempre estarem dispostas a resolver tudo.

A CAPES pelo apoio financeiro.

A todos que torceram e rezaram por essa conquista, muito obrigada!

”O sucesso nasce do querer, da determinação e persistência em se chegar a um objetivo. Mesmo não atingindo o alvo, quem busca vence obstáculos, no mínimo fará coisas admiráveis.”

José de Alencar

Resumo

Nesta tese, estabelecemos condições para que as multiplicidades na decomposição do cocaracter de uma dada álgebra sejam limitadas por constante via identidades satisfeitas pela álgebra. Tais condições são estabelecidas no contexto de álgebras com estruturas adicionais e as situações são estudadas para álgebras munidas de involução e para superálgebras com involução graduada. Além disso, para uma álgebra graduada por um grupo finito determinamos uma condição necessária e suficiente para que as multiplicidades sejam limitadas por constante através de identidades particulares que a álgebra satisfaz e para uma álgebra graduada por um grupo finito e munida de uma involução graduada, apresentamos uma caracterização para que esta tenha multiplicidades limitadas por 1 a partir de identidades específicas que são satisfeitas por ela.

Palavras-chave: cocaracter; multiplicidades; identidades.

Abstract

In this dissertation, we establish conditions for the multiplicities in the cocharacter decomposition of a given algebra to be bounded by a constant via identities satisfied by the algebra. Such conditions are established in the context of algebras with additional structures and we study such situations for algebras endowed with involution and for superalgebras with graded involution. Moreover, for an algebra graded by a finite group, we determine a necessary and sufficient condition for the multiplicities to be bounded by constant via particular identities that the algebra satisfies and for an algebra A graded by a finite group and endowed with a graded involution, we present a characterization for A to have multiplicities bounded by 1 from specific identities that are satisfied by it.

Keywords: cocharacter; multiplicities; identities.

Sumário

1	Introdução	11
2	Álgebras munidas de uma involução	18
2.1	*-álgebras	18
2.2	O (n_1, n_2) -cocaracter	21
2.3	*-álgebras com multiplicidades limitadas por constante	26
3	Álgebras G-graduadas	30
3.1	Álgebras G -graduadas	30
3.2	O $\langle n \rangle$ -cocaracter	33
3.3	Álgebras G -graduadas com multiplicidades limitadas por constante	39
4	Álgebras C_2-graduadas munidas de uma involução graduada	42
4.1	*-superálgebras	42
4.2	O $\langle n \rangle$ -cocaracter	45
4.3	*-superálgebras com multiplicidades limitadas por constante	50
5	Álgebras G-graduadas munidas de uma involução graduada	55
5.1	$(G, *)$ -álgebras	55
5.2	O cálculo de $m_{\langle \lambda \rangle}$	58
5.3	Caracterização das $(G, *)$ -álgebras com multiplicidades limitadas por 1	64
6	Considerações finais	78
	Referências	80

Capítulo 1

Introdução

Ao longo desse texto, G é um grupo multiplicativo, cujo elemento neutro é 1, C_n é um grupo cíclico de ordem n , F é um corpo de característica zero e A é uma álgebra associativa sobre F .

Considerando $F\langle X \rangle$ a álgebra livre associativa gerada por um conjunto enumerável X de variáveis, dizemos que um polinômio em $F\langle X \rangle$ é uma identidade polinomial de uma álgebra se este se anula quando avaliado em quaisquer elementos da álgebra. Se A satisfaz uma identidade não nula, então dizemos que A é uma PI-álgebra.

Pode-se dizer que em 1948, Kaplansky [22] foi um dos precursores no estudo da PI-teoria e desde então, diversos resultados interessantes na PI-teoria foram publicados. Atualmente, esta é a área de pesquisa de muitos matemáticos em diversas regiões do Brasil e do exterior.

Um objeto importante na teoria é o conjunto $Id(A)$ de todas as identidades satisfeitas por uma álgebra A . Esse conjunto é um T -ideal de $F\langle X \rangle$, ou seja, é um ideal invariante sob todos os endomorfismos de $F\langle X \rangle$.

Em 1950, Specht conjecturou que, sobre um corpo de característica zero, o T -ideal de uma álgebra associativa é finitamente gerado como um T -ideal e em 1987, Kemer [23] apresentou a demonstração para essa conjectura. Com isso, para descrever todas as identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra A é suficiente encontrarmos um conjunto gerador de $Id(A)$ como um T -ideal. Vale destacar a possibilidade de álgebras distintas possuírem o mesmo T -ideal, por isso, estudamos a classe das álgebras que satisfazem as identidades polinomiais de uma dada álgebra A , chamada de variedade gerada por A e denotada por $\mathcal{V} = var(A)$.

Ao considerar uma álgebra A , temos que o seu T -ideal é gerado por polinômios multilineares. Desta forma, destacamos o espaço P_n dos polinômios multilineares nas n primeiras variáveis e o espaço quociente $P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$.

Em 1972, Regev [38] introduziu a sequência de codimensões de uma álgebra, cujo n -

ésimo termo é denotado por $c_n(A)$ e corresponde à dimensão do espaço quociente $P_n(A)$ sobre F . Para $\mathcal{V} = \text{var}(A)$, definimos $c_n(\mathcal{V}) = c_n(A)$. Ainda em [38], Regev mostrou que se A é uma PI-álgebra sobre um corpo de característica zero, então existem constantes $\alpha, \beta > 0$ tais que $c_n(A) \leq \beta \alpha^n$, para todo $n \geq 1$.

Existe uma ação natural do grupo simétrico S_n sobre P_n , através da permutação das variáveis. Pelo fato de $P_n \cap \text{Id}(A)$ ser invariante sob esta ação, temos que o espaço quociente $P_n(A)$ é um S_n -módulo. O seu S_n -caracter é definido como o n -ésimo cocaracter de A e é denotado por $\chi_n(A)$. Para $\mathcal{V} = \text{var}(A)$, definimos $\chi_n(A) = \chi_n(\mathcal{V})$.

Sabemos que, se o corpo tem característica zero, existe uma correspondência biunívoca entre os S_n -carateres irredutíveis e as partições $\lambda \vdash n$. Logo, podemos decompor $\chi_n(A)$ como uma soma de S_n -caracteres irredutíveis $\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$, onde χ_λ representa o caracter irredutível associado à partição $\lambda \vdash n$ e $m_\lambda \geq 0$ é sua respectiva multiplicidade.

A partir desta decomposição, podemos considerar a sequência de cocomprimentos $\{l_n(A)\}_{n \geq 1}$, onde para cada $n \geq 1$, consideramos $l_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda$. Em 1999 [31], Mishchenko, Regev e Zaicev utilizaram esta sequência para caracterizar álgebras com crescimento polinomial no seguinte sentido: existe uma constante k tal que para todo n , para todo $\lambda \vdash n$, $l_n(A) \leq k$ se, e somente se, $c_n(A)$ é limitada por uma função polinomial, onde $c_n(A) = \dim(P_n(A))$.

É importante enfatizar que a descrição do T -ideal de uma álgebra ainda é um problema em aberto para diversas álgebras, como por exemplo, as álgebras de matrizes $M_n(F)$, para $n \geq 3$. Devido a esta dificuldade, na tentativa de obter informações sobre as identidades satisfeitas pela álgebra, passamos a estudar a decomposição do seu cocaracter. Em especial, estudamos as multiplicidades que aparecem na decomposição do cocaracter.

Convém lembrar aqui alguns fatos importantes a respeito de S_n -caracteres. Obviamente, temos que

$$c_n(A) = \chi_n(A)(1) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda(1) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda d_\lambda,$$

onde d_λ representa o grau do caracter irredutível χ_λ cujo valor pode ser calculado por meio da Fórmula do Gancho ([40, Teorema 3.10.2]), dada por $d_\lambda = \frac{n!}{\prod_{i,j} h_{i,j}^\lambda}$, onde $h_{i,j}^\lambda$ é a quantidade de blocos do diagrama de Young D_λ à direita e na mesma linha do bloco que se encontra na posição (i, j) mais a quantidade de blocos que estão abaixo e na mesma coluna desse bloco contando o próprio bloco.

Além disso, a respeito das multiplicidades, sabemos que em 1983, Berele e Regev [3], mostraram que se A é uma PI-álgebra então as multiplicidades que aparecem na decomposição do seu n -ésimo cocaracter são polinomialmente limitadas. Então, uma pergunta natural nesse momento é: Existe uma cota melhor para essas multiplicidades?

Estudiosos da área da PI-teoria ficaram interessados em procurar cotas superiores para as multiplicidades que aparecem na decomposição do cocaracter. Diante disso, perceberam que a propriedade distributiva no contexto de variedades (veja [19, Definição 7.3.4]) é uma ferramenta que traz resultados promissores como podemos ver no seguinte resultado.

Proposição 1.0.1. [1] *Sejam $\mathcal{V}$ uma variedade e $\chi_n(\mathcal{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$ o seu n -ésimo cocaracter. Então $\mathcal{V}$ tem a propriedade distributiva se, e somente se, $m_\lambda \leq 1$ para todo $\lambda \vdash n$ e para todo $n \geq 1$.*

Em 1976, Ananin e Kemer provaram o teorema a seguir.

Teorema 1.0.2. [1] *Sejam $\mathcal{V}$ uma variedade. Então $\mathcal{V}$ tem a propriedade distributiva se, e somente se, existem escalares α e β não simultaneamente nulos tais que $\mathcal{V}$ satisfaz*

$$\alpha[x_1, x_2]x_2 + \beta x_2[x_1, x_2] \equiv 0.$$

Logo, pela Proposição 1.0.1 e o Teorema 1.0.2, temos o seguinte resultado:

Corolário 1.0.3. *Sejam A uma álgebra e $\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$ o seu n -ésimo cocaracter. Então $m_\lambda \leq 1$ para todo $n \geq 1$ e $\lambda \vdash n$ se, e somente se, A satisfaz a identidade $\alpha[x_1, x_2]x_2 + \beta x_2[x_1, x_2] \equiv 0$, para algum $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.*

Portanto, temos que a propriedade distributiva além de garantir uma cota superior para as multiplicidades, também está diretamente relacionada a certas identidades satisfeitas pela álgebra. Além disso, embora não conhecido o conjunto gerador de identidades de uma álgebra, sabemos que se a multiplicidade é limitada por 1 então conhecemos pelo menos o tipo de uma das identidades satisfeitas pela álgebra.

Dando continuidade ao estudo de multiplicidades e identidades, em 1999, Mishchenko, Regev e Zaicev em [31] caracterizaram as álgebras cujas multiplicidades que aparecem na decomposição do n -ésimo cocaracter são limitadas por uma constante (não necessariamente igual a um) via identidades satisfeitas pela álgebra. Além disso, esses autores provaram que ao excluir a álgebra UT_2 , isto é, a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem 2, da variedade então obtemos multiplicidades limitadas por constante. Tal resultado será enunciado a seguir:

Teorema 1.0.4. [31] *Sejam $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras e $\chi_n(\mathcal{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$ o seu n -ésimo cocaracter. Então as seguintes condições são equivalentes.*

- 1) *Existe uma constante k tal que para todo n e para qualquer $\lambda \vdash n$ temos $m_\lambda \leq k$.*
- 2) *$UT_2 \notin \mathcal{V}$.*

3) $\mathcal{V}$ satisfaz uma identidade do tipo

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i x_1^i x_2 x_1^{n-i} \equiv 0,$$

onde α_i 's são constantes não todas nulas.

Diante disso, pesquisadores da área começaram a estudar a extensão dos resultados acima no contexto de álgebras com estruturas adicionais.

No contexto de álgebras G -graduadas onde G é um grupo finito qualquer, em 2018, Giambruno, Polcino Milies e Valenti provaram a extensão do resultado de Ananin e Kemer (Corolário 1.0.3) no contexto de álgebras G -graduadas, conforme enunciaremos a seguir.

Teorema 1.0.5. [16] *Sejam G um grupo finito, A uma álgebra G -graduada e $\chi_{\langle n \rangle}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}$ o seu $\langle n \rangle$ -cocaracter. Então $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$ para todo $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$ se, e somente se, existem escalares α, β, γ e δ , com $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ e $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$, para os quais A satisfaz as identidades*

$$\alpha x_{1,1}[x_{1,1}, x_{2,1}] + \beta[x_{1,1}, x_{2,1}]x_{1,1} \equiv 0; \quad (1.1)$$

$$\gamma x_{1,g}x_{2,h} + \delta x_{2,h}x_{1,g} \equiv 0; \quad (1.2)$$

para todo $g, h \in G$ com $g \neq h$.

Neste artigo, os autores também estudaram a extensão da propriedade distributiva, caracterizando as variedades distributivas via identidades.

Teorema 1.0.6. [16] *Sejam $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras G -graduadas e F um corpo de característica zero. Então $\mathcal{V}$ é distributiva se, e somente se, existem escalares α, β, γ e δ , com $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ e $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$, para os quais A satisfaz as identidades*

$$\alpha x_{1,1}[x_{1,1}, x_{2,1}] + \beta[x_{1,1}, x_{2,1}]x_{1,1} \equiv 0;$$

e

$$\gamma x_{1,g}x_{2,h} + \delta x_{2,h}x_{1,g} \equiv 0;$$

para todo $g, h \in G$ com $g \neq h$.

Logo, dos Teoremas 1.0.5 e 1.0.6 temos o seguinte resultado:

Corolário 1.0.7. *Sejam A uma álgebra G -graduada e $\chi_{\langle n \rangle}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}$ o seu $\langle n \rangle$ -cocaracter. Então $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$ para todo $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$ se, e somente se, A tem a propriedade distributiva.*

Em 2013, Cirrito e Giambruno, provaram o teorema a seguir:

Teorema 1.0.8. [4] *Sejam A uma álgebra G -graduada e $\chi_{\langle n \rangle}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}$ o seu $\langle n \rangle$ -cocaracter. Então existe uma constante k tal que para todo n e $\langle \lambda \rangle \vdash n$, temos $m_{\langle \lambda \rangle} \leq k$ se, e somente se $UT_2 \notin \text{var}^G(A)$ para qualquer G -graduação em UT_2 .*

Ressaltamos que o teorema acima generaliza o resultado provado anteriormente por Otera [37] no caso em que G é um grupo cíclico de ordem 2, ou seja, o resultado de caracterização de superálgebras com multiplicidades limitadas por constante via exclusão de superálgebras da variedade.

Um dos nossos objetivos nesta tese é apresentar um resultado relacionando álgebras G -graduadas com multiplicidades limitadas por constante via G -identidades, o que será feito no Capítulo 2.

Vamos agora ressaltar as extensões dos resultados citados no caso ordinário no contexto de $*$ -álgebras. Em 2009, Giambruno e Mishchenko, provaram a caracterização de $*$ -álgebras com multiplicidades limitadas por 1 via $*$ -identidades.

Teorema 1.0.9. [15] *Sejam A uma $*$ -álgebra e $\chi_{(n_1, n_2)}(A) = \sum_{(\lambda_1, \lambda_2) \vdash (n_1, n_2)} m_{\lambda_1, \lambda_2} (\chi_{\lambda_1} \otimes \chi_{\lambda_2})$ o seu (n_1, n_2) -cocaracter. Então, para todo $n = n_1 + n_2$ e $(\lambda_1, \lambda_2) \vdash (n_1, n_2)$, temos $m_{\lambda_1, \lambda_2} \leq 1$, se, e somente se, A satisfaz*

$$y_1 z_2 \equiv 0 \text{ ou } [y_1, z_2] \equiv 0 \text{ ou } y_1 \circ z_2 \equiv 0,$$

ou seja, se A satisfaz pelo menos uma identidade do grupo

$$y_1 z_2 + \gamma z_2 y_1 \equiv 0,$$

onde $\gamma \in \{0, 1, -1\}$.

Para o próximo resultado, vamos considerar a subálgebra de UT_4 dada por $M = F(e_{11} + e_{44}) + F(e_{22} + e_{33}) + Fe_{12} + Fe_{34}$. Munimos essa álgebra da involução reflexão e a denotamos por M_* . Consideramos também $(M_2(F), s)$ a álgebra das matrizes 2×2 sobre F munida da involução simplética. Em 2020, Rizzo demonstrou que:

Teorema 1.0.10. [39] *Sejam A uma álgebra com involução $*$ satisfazendo uma identidade não trivial, e $\chi_{(n_1, n_2)}(A) = \sum_{(\lambda_1, \lambda_2) \vdash (n_1, n_2)} m_{\lambda_1, \lambda_2} (\chi_{\lambda_1} \otimes \chi_{\lambda_2})$ o seu (n_1, n_2) -cocaracter. Se $M_*, (M_2(F), s) \notin \text{var}^*(A)$, então existe uma constante k tal que para todo $n = n_1 + n_2$ e $(\lambda_1, \lambda_2) \vdash (n_1, n_2)$ a desigualdade $m_{\lambda_1, \lambda_2} \leq k$ é verdadeira.*

O teorema acima caracteriza multiplicidades limitadas por constante via exclusão de álgebras da variedade, porém não fornece uma equivalência considerando $*$ -identidades. Diante disso, motivados pelo Teorema 1.0.4, apresentamos no Capítulo 1 um resultado que visa obter uma cota superior por uma constante para as multiplicidades via $*$ -identidades.

Comentamos agora, os resultados que generalizam as caracterizações envolvendo multiplicidades e identidades no contexto de $*$ -superálgebras. Por [2, Teorema 13(b)], se A é uma $*$ -superálgebra e $\chi_{\langle n \rangle}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}$ o seu $\langle n \rangle$ -cocaracter, então existem constantes α e t tais que $m_{\langle \lambda \rangle} \leq \alpha n^t$, para todo $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$.

Em 2021, Martino provou uma caracterização de $*$ -superálgebras com multiplicidades limitadas por 1 via identidades.

Teorema 1.0.11. [30] *Sejam A uma $*$ -superálgebra munida com uma involução graduada e $\chi_{\langle n \rangle}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}$ o seu $\langle n \rangle$ -cocaracter. Então para todo $n \geq 1$ e $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$, temos $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$ se, e somente se, A satisfaz pelo menos uma identidade em cada um dos itens abaixo*

- | | |
|--|--|
| 1) $y_{1,1}y_{2,g} + \gamma_1 y_{2,g}y_{1,1} \equiv 0$; | 4) $z_{1,1}z_{2,g} + \gamma_4 z_{2,g}z_{1,1} \equiv 0$; |
| 2) $z_{1,1}y_{2,g} + \gamma_2 y_{2,g}z_{1,1} \equiv 0$; | 5) $y_{1,g}z_{2,g} + \gamma_5 z_{2,g}y_{1,g} \equiv 0$; |
| 3) $y_{1,1}z_{2,g} + \gamma_3 z_{2,g}y_{1,1} \equiv 0$; | 6) $y_{1,1}z_{2,1} + \gamma_6 z_{2,1}y_{1,1} \equiv 0$; |

onde $\gamma_i \in \{0, 1, -1\}$ e $1 \leq i \leq 6$.

Para o próximo resultado, vamos considerar novamente a álgebra $M = F(e_{11} + e_{44}) + F(e_{22} + e_{33}) + Fe_{12} + Fe_{34}$. Denotaremos por M_* esta álgebra munida da graduação trivial e da involução reflexão e M^{gri} denotará a álgebra M munida da graduação $(F(e_{11} + e_{44}) + F(e_{22} + e_{33}), Fe_{12} + Fe_{34})$ com a involução reflexão. Além disso, consideramos $(M_{2,0}(F), s)$, a álgebra de matrizes 2×2 munida da graduação trivial e involução simplética e por último, $(M_{1,1}(F), s)$ será a álgebra $M_2(F)$ munida da graduação $(Fe_{11} + Fe_{22}, Fe_{12} + Fe_{21})$ e involução simplética. Em [20], Ioppolo trabalhou com $*$ -superalgebras com multiplicidades limitadas por constante conforme veremos a seguir.

Teorema 1.0.12. *Sejam A uma F -álgebra finitamente gerada. Se $M_*, M^{gri}, (M_{2,0}(F), s), (M_{1,1}(F), s) \notin \text{var}^{gri}(A)$, então existe uma constante k tal que $m_{\langle \lambda \rangle} \leq k$, para todo $\langle \lambda \rangle \vdash n$.*

Assim, um dos nossos objetivos nesta tese é apresentar um resultado relacionando $*$ -superálgebras com multiplicidades limitadas por constante via $(C_2, *)$ -identidades.

Assim como nos contextos anteriores, temos por [2, Teorema 13(b)], que se A é uma $(G, *)$ -álgebra e $\chi_{\langle n \rangle}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}$ o seu $\langle n \rangle$ -cocaracter, então existem constantes α e t tais que $m_{\langle \lambda \rangle} \leq \alpha n^t$, para todo $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$. Nesta tese vamos estender os resultados dados por Martino em [30] e apresentar uma caracterização de $(G, *)$ -álgebras com multiplicidades limitadas por 1 via identidades.

Para cumprir nossos objetivos, dividimos esta tese em quatro capítulos, onde no Capítulo 1 apresentaremos as $*$ -álgebras, as ferramentas utilizadas para o cálculo das

multiplicidades que aparecem na decomposição do $\ast$ -cocaracter e resultados envolvendo multiplicidades limitadas por uma constante.

No Capítulo 2 apresentaremos as álgebras G -graduadas e as principais ferramentas utilizadas para o cálculo das multiplicidades que aparecem na decomposição do $\langle n \rangle$ -cocaracter. Também provamos resultados envolvendo multiplicidades limitadas por uma constante.

No Capítulo 3 apresentaremos resultados sobre as $\ast$ -superálgebras e as ferramentas utilizadas para o cálculo das multiplicidades que aparecem na decomposição do $\langle n \rangle$ -cocaracter. Além disso, provamos resultados envolvendo multiplicidades limitadas por uma constante.

No Capítulo 4, definiremos as $(G, \ast)$ -álgebras, apresentaremos as principais propriedades sobre esta estrutura e as ferramentas utilizadas para o cálculo das multiplicidades que aparecem na decomposição do $\langle n \rangle$ -cocaracter. Provaremos também um resultado de caracterização de $(G, \ast)$ -álgebras cujas multiplicidades são limitadas por 1 via $(G, \ast)$ -identidades.

Finalizaremos a tese com alguns comentários a respeito de futuros trabalhos relacionados aos assuntos tratados. Os resultados obtidos neste texto se encontram nos artigos [41] e [42] que estão em fase final de redação e devem ser submetidos em breve à publicação.

Capítulo 2

Álgebras munidas de uma involução

Neste capítulo, definimos o conceito de $*$ -álgebra e introduzimos ferramentas fundamentais da PI-teoria nesse contexto. Essas ferramentas foram importantes para que Giambruno e Mishchenko, em [15], estendessem a caracterização de Ananin e Kemer (Corolário 1.0.3) a esse cenário. O objetivo principal deste capítulo consiste em apresentar resultados das $*$ -álgebras com multiplicidades limitadas por constante a partir de suas $*$ -identidades. Estes resultados se encontram em [42]. Para informações detalhadas sobre a teoria de PI-álgebras, sugerimos [9] e [19].

2.1 $*$ -álgebras

Seja F um corpo de característica zero e A uma álgebra associativa sobre F . Começaremos definindo $*$ -álgebras e, em seguida, exibiremos alguns exemplos.

Definição 2.1.1. *Dizemos que uma aplicação linear $*$: $A \rightarrow A$ é uma involução na álgebra A se $(a^*)^* = a$ e $(ab)^* = b^*a^*$, para todo $a, b \in A$. Se A é uma álgebra munida de uma involução $*$ dizemos que A é uma $*$ -álgebra.*

Observe que uma involução nada mais é que um antiautomorfismo de ordem no máximo 2.

A seguir, denotamos por e_{ij} as matrizes elementares usuais, para todos $1 \leq i, j \leq n$. Além disso, denotamos por $M_n(F)$ a álgebra das matrizes $n \times n$ sobre o corpo F e consideramos a sua subálgebra UT_n das matrizes triangulares superiores $n \times n$ sobre F .

Exemplo 2.1.2. *Se A é uma álgebra comutativa, a aplicação identidade é uma involução em A , chamada de involução trivial. Uma involução não trivial, chamada de involução troca, pode ser definida na álgebra comutativa $F \oplus F$ dada por $(a, b)^* = (b, a)$. Denotamos essa última álgebra por D_* .*

Exemplo 2.1.3. Considerando a álgebra UT_n , temos que a aplicação $*$: $UT_n \rightarrow UT_n$ dada por

$$(e_{ij})^* = e_{n-j+1, n-i+1}$$

é uma involução sobre UT_n , chamada de involução reflexão, ou seja, o resultado após a involução é a matriz obtida ao refletir os elementos ao longo de sua diagonal secundária para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Exemplo 2.1.4. A álgebra

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in F \right\}$$

munida da involução reflexão é uma *-álgebra, que denotamos por M_* .

Exemplo 2.1.5. Considere $M_2(F)$ munida da involução simplética:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Então, $M_2(F)$ é uma *-álgebra que denotaremos por $(M_2(F), s)$.

Exemplo 2.1.6. Considere a seguinte subálgebra de UT_4 e M

$$A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in F \right\}$$

munida com a involução reflexão ao longo da diagonal secundária: se $a = \alpha(e_{11} + e_{44}) + \gamma e_{12} + \delta e_{34}$ então $a^* = \alpha(e_{11} + e_{44}) + \gamma e_{34} + \delta e_{12}$. Denotamos essa *-álgebra por A_2^* .

Se A é uma *-álgebra, podemos decompor A em uma soma direta de subespaços $A = A^+ \oplus A^-$, onde $A^+ = \{a \in A \mid a^* = a\}$ e $A^- = \{a \in A \mid a^* = -a\}$ são, respectivamente, os subespaços dos elementos simétricos e antissimétricos de A .

Considere X um conjunto enumerável de variáveis. Escrevendo X como uma união disjunta de dois conjuntos $X = Y \cup Z$ onde $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ e $Z = \{z_1, z_2, \dots\}$, definimos a *-álgebra livre $F\langle Y \cup Z \rangle$, livremente gerada pelo conjunto $Y \cup Z$, onde as variáveis em Y são simétricas e as variáveis em Z são antissimétricas. Chamamos os elementos $f \in F\langle Y \cup Z \rangle$ de *-polinômios.

Dizemos que um *-polinômio

$$f = f(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m)$$

é uma *-identidade de uma *-álgebra A , e escrevemos $f \equiv 0$ em A , se

$$f(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) = 0,$$

para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in A^+$ e $b_1, \dots, b_m \in A^-$.

Temos como interesse fundamental estudar o conjunto de todas as *-identidades de uma determinada *-álgebra. Por isso, definimos o conjunto

$$Id^*(A) = \{f \in F\langle Y \cup Z \rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } A\},$$

consistindo de todas as *-identidades de A . Observe que $Id^*(A)$ é um ideal de $F\langle Y \cup Z \rangle$ invariante sob todos os endomorfismos de $F\langle Y \cup Z \rangle$ que comutam com $*$. Um *-ideal com essa propriedade é chamado de T^* -ideal, por isso, sempre que nos referirmos ao T^* -ideal de A , estaremos nos referindo ao ideal $Id^*(A)$.

Como F tem característica zero, $Id^*(A)$ é determinado pelos seus *-polinômios multilineares. Usamos a notação $\langle f_1, \dots, f_m \rangle_{T^*}$ para indicar que $Id^*(A)$ é gerado como T^* -ideal pelos *-polinômios $f_1, \dots, f_m \in F\langle X \cup Y \rangle$.

Analogamente à definição correspondente no caso ordinário, a classe de todas as *-álgebras que satisfazem as *-identidades de uma dada *-álgebra A é chamada de variedade de *-álgebras (ou *-variedade) gerada por A e será denotada por $\mathcal{V} = var^*(A)$.

Antes de continuarmos nossa discussão, recordamos que dado um conjunto qualquer de r variáveis distintas $\{x_1, \dots, x_r\}$ definimos $St_r(x_1, \dots, x_r) = \sum_{\sigma \in S_r} (\text{sgn } \sigma) x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(r)}$ como o polinômio standard de grau r onde S_r denota o grupo simétrico de grau r e $\text{sgn } \sigma$ é o sinal da permutação σ .

A seguir daremos alguns exemplos onde é possível determinar o T^* -ideal de algumas álgebras. Tais resultados podem ser consultados em [14, 32, 29, 27].

Exemplo 2.1.7. *Para as *-álgebras descritas anteriormente temos:*

$$1) \quad Id^*(D_*) = \langle [y_1, y_2], [y_1, z_2], [z_1, z_2] \rangle_{T^*},$$

$$2) \quad Id^*(M_*) = \langle z_1 z_2 \rangle_{T^*},$$

$$3) \quad Id^*((M_2(F), s)) = \langle [y_1, y_2], [y_1, z_2] \rangle_{T^*},$$

$$4) \quad Id^*(A_2^*) = \langle St_3(y_1, y_2, y_3), y_1 z y_2, z_1 z_2 \rangle_{T^*}.$$

Para $n \geq 1$, consideramos o espaço dos *-polinômios multilineares dado por

$$P_n^* := \text{span}_F \{w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n, w_i = y_i \text{ ou } w_i = z_i, i = 1, \dots, n\},$$

onde S_n denota o grupo simétrico de ordem n . Observe que se $f \in P_n^*$, então as variáveis y_i e z_i não podem aparecer simultaneamente em um mesmo monômio de f , com $i =$

$1, \dots, n$, e exatamente uma delas aparece em cada monômio. Além disso, observe que $\dim_F P_n^* = 2^n n!$.

Para $n \geq 1$, consideramos o espaço quociente

$$P_n^*(A) = \frac{P_n^*}{P_n^* \cap Id^*(A)}.$$

A dimensão do espaço quociente $P_n^*(A)$ é denominada n -ésima $*$ -codimensão de A e é denotada por $c_n^*(A)$.

A sequência de $*$ -codimensões é análoga a sequência de codimensões definida por Regev [38] no caso ordinário. Nos últimos anos, essa sequência tornou-se um dos principais objetos de pesquisa no estudo do comportamento assintótico das identidades satisfeitas por álgebras. Diversas caracterizações e classificações têm sido apresentadas considerando essa sequência. Para o leitor interessado em um estudo detalhado, recomendamos [14] e [19].

Determinar essa sequência pode não ser uma tarefa simples, em geral as técnicas utilizadas para determiná-la envolve argumentos de combinatória e teoria de representações de grupos finitos. Em [28], La Mattina, do Nascimento e Vieira descreveram a sequência de $*$ -codimensões da $*$ -álgebra A_2^* .

Exemplo 2.1.8. De [28, Lema 3.8] temos que $c_n^*(A_2^*) = 4n - 1$, para todo $n \geq 3$.

O nosso objetivo principal e foco nesse trabalho consiste em estudar o espaço $P_n^*(A)$ do ponto de vista da teoria de representações de grupos finitos. De fato, é bem conhecido (veja [11]) que $P_n^*(A)$ é um $\mathbb{Z}_2 \wr S_n$ -módulo, onde $\mathbb{Z}_2 \wr S_n$ denota o produto entrelaçado de $\mathbb{Z}_2 \cong \{1, *\}$ pelo grupo S_n . Portanto, podemos considerar $\chi_n^*(A)$ o seu caracter, chamado de $*$ -cocaracter de A . De acordo com [10, Teorema 1.3], existe uma relação direta entre o $*$ -cocaracter de uma $*$ -álgebra e a teoria de representações do grupo simétrico, agindo em certos subespaços de P_n^* . De fato, tal teoria é muito bem conhecida e portanto faremos uso dela na próxima seção, nos restringindo a tais subespaços. A seguir, explicaremos essa abordagem de maneira mais clara.

2.2 O (n_1, n_2) -cocaracter

Dado $n \geq 1$ escrevemos $n = n_1 + n_2$ como a soma de dois inteiros não negativos, denotaremos por P_{n_1, n_2} o espaço dos $*$ -polinômios multilineares em que as primeiras n_1 variáveis são simétricas e as restantes $n_2 = n - n_1$ variáveis são antissimétricas. Além disso, uma bipartição (λ_1, λ_2) é tal que $\lambda_1 \vdash n_1$ e $\lambda_2 \vdash n_2$ onde $n_1 = 0, 1, \dots, n$. Escrevemos $(\lambda_1, \lambda_2) \vdash (n_1, n_2)$ nesse caso.

Observe que, para cada par (n_1, n_2) , existem $\binom{n}{n_1, n_2}$ subespaços isomorfos à P_{n_1, n_2} em P_n^* , onde $\binom{n}{n_1, n_2} = \frac{n!}{n_1!n_2!}$ denota o coeficiente multinomial. Além disso, temos que

$$P_n^* \cong \bigoplus_{n_1=0}^n \binom{n}{n_1, n_2} P_{n_1, n_2}.$$

Consideramos o seguinte espaço quociente

$$P_{n_1, n_2}(A) = \frac{P_{n_1, n_2}}{P_{n_1, n_2} \cap Id^*(A)}$$

e definimos $c_{n_1, n_2}(A) := \dim_F P_{n_1, n_2}(A)$ como a (n_1, n_2) -ésima *-codimensão de A . Pelo observado acima, segue que

$$c_n^*(A) = \sum_{n_1=0}^n \binom{n}{n_1, n_2} c_{(n_1, n_2)}(A). \quad (2.1)$$

Note que o espaço P_{n_1, n_2} possui uma ação natural do grupo $S_{n_1} \times S_{n_2}$, onde S_{n_1} age permutando as primeiras n_1 variáveis simétricas e S_{n_2} age permutando as seguintes n_2 variáveis antissimétricas. Logo, P_{n_1, n_2} é um $S_{n_1} \times S_{n_2}$ -módulo.

Exemplo 2.2.1. Consideremos $n = 5$ e escreva $n = n_1 + n_2$, onde $n_1 = 3$ e $n_2 = 2$. Sejam $\sigma = ((132), (45)) \in S_3 \times S_2$ e $f = y_1 z_4 z_5 y_3 y_2 \in P_{3,4}$. Então

$$\sigma f = y_{\sigma(1)} z_{\sigma(4)} z_{\sigma(5)} y_{\sigma(3)} y_{\sigma(2)} = y_3 z_5 z_4 y_2 y_1.$$

Desde que $P_{n_1, n_2} \cap Id^*(A)$ é invariante sob a ação descrita acima, temos que $P_{n_1, n_2}(A)$ também tem estrutura de $S_{n_1} \times S_{n_2}$ -módulo à esquerda. Denotamos o $S_{n_1} \times S_{n_2}$ -caracter de $P_{n_1, n_2}(A)$ por $\chi_{(n_1, n_2)}(A)$ e o chamamos de (n_1, n_2) -cocaracter de A .

É conhecido que existe uma correspondência biunívoca entre a bipartição $(\lambda_1, \lambda_2) \vdash (n_1, n_2)$ e os $S_{n_1} \times S_{n_2}$ -caracteres irredutíveis. Além disso, os $S_{n_1} \times S_{n_2}$ -caracteres irredutíveis são produtos tensoriais dos caracteres irredutíveis de S_{n_1} e S_{n_2} . Portanto $\chi_{(n_1, n_2)}(A)$ pode ser escrito na forma

$$\chi_{(n_1, n_2)}(A) = \sum_{(\lambda_1, \lambda_2) \vdash (n_1, n_2)} m_{\lambda_1, \lambda_2} (\chi_{\lambda_1} \otimes \chi_{\lambda_2}), \quad (2.2)$$

onde $\chi_{\lambda_1} \otimes \chi_{\lambda_2}$ denota o $S_{n_1} \times S_{n_2}$ -caracter irredutível correspondente a (λ_1, λ_2) e m_{λ_1, λ_2} é a multiplicidade correspondente. Além disso, o grau do $S_{n_1} \times S_{n_2}$ -caracter irredutível $\chi_{\lambda_1} \otimes \chi_{\lambda_2}$ é dado por $d_{\lambda_1} d_{\lambda_2}$, onde d_{λ_i} , $i = 1, 2$, é o grau do S_{n_i} -caracter irredutível χ_{λ_i} calculado pela Fórmula do Gancho [40, Teorema 3.10.2]. Consequentemente, temos

$$c_{(n_1, n_2)}(A) = \chi_{(n_1, n_2)}(A)(1) = \sum_{(\lambda_1, \lambda_2) \vdash (n_1, n_2)} m_{\lambda_1, \lambda_2} d_{\lambda_1} d_{\lambda_2}. \quad (2.3)$$

Como no caso ordinário, temos a seguinte observação.

Observação 2.2.2. *Se A é uma $*$ -álgebra cujo (n_1, n_2) -cocaracter é decomposto como em (2.2) e $B \in \text{var}^*(A)$ é tal que $\chi_{(n_1, n_2)}(B) = \sum_{(\lambda_1, \lambda_2) \vdash (n_1, n_2)} m'_{\lambda_1, \lambda_2} (\chi_{\lambda_1} \otimes \chi_{\lambda_2})$. Então, $m'_{\lambda_1, \lambda_2} \leq m_{\lambda_1, \lambda_2}$, para toda bipartição $(\lambda_1, \lambda_2) \vdash (n_1, n_2)$.*

Afim de obter informações mais precisas sobre as multiplicidades m_{λ_1, λ_2} que aparecem na decomposição do (λ_1, λ_2) -cocaracter descrito em (2.2), nos baseamos nos resultados conhecidos sobre as representações do grupo linear geral GL_m . A teoria desenvolvida aqui pode ser consultada detalhadamente em [10] e [11].

Sejam $m \geq 1$ e F_m o espaço dos $*$ -polinômios nas variáveis $y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_m$. Consideremos os espaços vetoriais

$$U = \text{span}_F\{y_1, \dots, y_m\} \text{ e } V = \text{span}_F\{z_1, \dots, z_m\}.$$

O grupo $GL(U) \times GL(V) \cong GL_m^2$ age naturalmente à esquerda sobre o subespaço $U \oplus V$ de F_m e esta ação pode ser estendida diagonalmente à uma ação sobre F_m . Considere $n \geq m$ e denote por F_m^n o subespaço dos $*$ -polinômios homogêneos de F_m com grau n . Temos que o grupo GL_m^2 age sobre F_m^n e $F_m^n \cap \text{Id}^*(A)$ é invariante sob essa ação. Portanto, o espaço quociente

$$F_m^n(A) = \frac{F_m^n}{F_m^n \cap \text{Id}^*(A)}$$

é um GL_m^2 -módulo à esquerda, cujo caracter será denotado por $\psi_n^*(A)$.

É bem conhecido [veja 11] que existe uma correspondência biunívoca entre os GL_m^2 -submódulos irredutíveis de $F_m^n(A)$ e pares de partições (λ_1, λ_2) com $\lambda_1 \vdash n_1$ e $\lambda_2 \vdash n_2$, $n_1 = 0, 1, \dots, n$ e $n_2 = n - n_1$ onde λ_1 e λ_2 têm no máximo m partes. Se denotarmos por $\psi_{\lambda_1, \lambda_2}$ o GL_m^2 -caracter irredutível correspondente ao par (λ_1, λ_2) , podemos escrever

$$\psi_n^*(A) = \sum_{\substack{(\lambda_1, \lambda_2) \vdash n \\ h(\lambda_1), h(\lambda_2) \leq m}} \tilde{m}_{\lambda_1, \lambda_2} \psi_{\lambda_1, \lambda_2}, \quad (2.4)$$

onde $\tilde{m}_{\lambda_1, \lambda_2}$ é a multiplicidade de $\psi_{\lambda_1, \lambda_2}$ e $h(\lambda_i)$, $i = 1, 2$, denota o número de partes da partição λ_i .

É possível relacionar o (n_1, n_2) -cocaracter e o GL_m^2 -caracter de uma $*$ -álgebra A conforme abaixo.

Teorema 2.2.3 (10, 11). *Para todo $n = n_1 + n_2$, consideramos $\chi_{(n_1, n_2)}(A)$ e $\psi_n^*(A)$ o (n_1, n_2) -cocaracter e o GL_m^2 -caracter de A como dados em (2.2) e (2.4), respectivamente. Então temos $m_{\lambda_1, \lambda_2} = \tilde{m}_{\lambda_1, \lambda_2}$, para todo par de partições (λ_1, λ_2) tais que $h(\lambda_1), h(\lambda_2) \leq m$.*

De acordo com [9, Teorema 12.4.12], cada GL_m^2 -módulo irredutível é cíclico e é gerado por um polinômio f_{λ_1, λ_2} não nulo associado a (λ_1, λ_2) com $\lambda_1 \vdash n_1$ e $\lambda_2 \vdash n_2$, chamado

vetor de altura máxima, definido da seguinte forma:

$$f_{\lambda_1, \lambda_2} = \prod_{i=1}^{(\lambda_1)_1} St_{h_i(\lambda_1)}(y_1, \dots, y_{h_i(\lambda_1)}) \prod_{i=1}^{(\lambda_2)_1} St_{h_i(\lambda_2)}(z_1, \dots, z_{h_i(\lambda_2)}) \quad (2.5)$$

onde $St_r(x_1, \dots, x_r)$ é o polinômio standard de grau r e $h_i(\lambda_j)$ é a altura da i -ésima coluna do diagrama de Young correspondente a partição $\lambda_j \vdash n_j$ para $j = 1, 2$.

Além disso, f_{λ_1, λ_2} pode ser escrito unicamente como combinação linear de vetores $f_{T_{\lambda_1, \lambda_2}}$ como construiremos a seguir.

Uma multitabela $T_{\lambda_1, \lambda_2} = (T_{\lambda_1}, T_{\lambda_2})$ é um par formado por tabelas de Young T_{λ_1} e T_{λ_2} associadas a uma partição $\lambda_1 \vdash n_1$ e $\lambda_2 \vdash n_2$, respectivamente. A multitabela padrão $\tilde{T}_{\lambda_1, \lambda_2}$ é o par $(T_{\lambda_1}, T_{\lambda_2})$ cujos inteiros $1, 2, \dots, n$ nesta ordem, preenchem de cima para baixo, da esquerda para direita, coluna por coluna, a tabela T_{λ_1} até a tabela T_{λ_2} .

Exemplo 2.2.4. *Seja $n = 5$ e escreva $n = n_1 + n_2$ onde $n_1 = 3$ e $n_2 = 2$. Considere o par de partição $(\lambda_1, \lambda_2) \vdash (n_1, n_2)$, onde $\lambda_1 = (2, 1)$ e $\lambda_2 = (1^2)$. Então, uma multitabela T_{λ_1, λ_2} é dada por*

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \right). \quad (2.6)$$

A multitabela padrão correspondente ao par de partição $(\lambda_1, \lambda_2) \vdash (3, 2)$ é descrita a seguir

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} \right). \quad (2.7)$$

Para uma multitabela qualquer T_{λ_1, λ_2} , definimos o vetor de altura máxima associado a T_{λ_1, λ_2} como sendo o polinômio $f_{T_{\lambda_1, \lambda_2}} := f_{\lambda_1, \lambda_2} \sigma^{-1}$, onde $\sigma \in S_n$ é a única permutação que transforma a multitabela $\tilde{T}_{\lambda_1, \lambda_2}$ na multitabela T_{λ_1, λ_2} e a ação à direita de S_n sobre $F_m^n(A)$ é definida pela troca dos lugares das variáveis em cada monômio.

Exemplo 2.2.5. *Para a multitabela T_{λ_1, λ_2} dada em (2.6), temos que $\sigma = (1 \ 5 \ 2) \in S_5$ é a única permutação que transforma a tabela T_{λ_1, λ_2} na multitabela padrão. Logo, o vetor de altura máxima associado a T_{λ_1, λ_2} é o polinômio*

$$\begin{aligned} f_{T_{\lambda_1, \lambda_2}} &= [y_1, y_2]y_1[z_1, z_2](1 \ 5 \ 2)^{-1} \\ &= (y_1y_2y_1z_1z_2 - y_1y_2y_1z_2z_1 - y_2y_1y_1z_1z_2 + y_2y_1y_1z_2z_1)(1 \ 2 \ 5) \\ &= z_2y_1y_1z_1y_2 - z_1y_1y_1z_2y_2 - z_2y_2y_1z_1y_1 + z_1y_2y_1z_2y_1. \end{aligned}$$

Os vetores de altura máxima são objetos fundamentais para se obter as multiplicidades m_{λ_1, λ_2} , conforme vemos no próximo resultado.

Teorema 2.2.6. [10] *A multiplicidade $\tilde{m}_{\lambda, \mu}$ em (2.4) é não nula se, e somente se, existe uma multitabela $(T_{\lambda_1}, T_{\lambda_2})$, tal que $f_{T_{\lambda_1, \lambda_2}} \notin Id^*(A)$. Além disso, $\tilde{m}_{\lambda_1, \lambda_2}$ é igual ao número máximo de vetores de altura máxima associados às multitabelas do tipo $(\lambda_1, \lambda_2) \vdash (n_1, n_2)$ que são linearmente independentes módulo $F_m^n(A)$.*

A seguir, apresentaremos um exemplo de como usar a teoria desenvolvida aqui para calcular exatamente as multiplicidades dos (n_1, n_2) -cocaracteres.

Lema 2.2.7. [28, Lema 3.11] Para a álgebra A_2^* temos que seus únicos (n_1, n_2) -cocaracteres não nulos são:

$$\chi_{(n),\emptyset} + 2\chi_{(n-1,1),\emptyset} \quad e \quad 2\chi_{(n-1),(1)}.$$

Demonstração. De acordo com o Exemplo 2.1.8 e das equações (2.1) e (2.3) temos que

$$4n - 1 = c_n^*(A_2^*) = d_{(n)} + 2d_{(n-1,1)} + 2\binom{n}{n-1}d_{(n-1)}d_{(1)}.$$

Logo, basta mostrarmos que $m_{(n),\emptyset} \geq 1$, $m_{(n-1),(1)} \geq 2$ e $m_{(n-1,1),\emptyset} \geq 2$.

Considere o vetor de altura máxima $f_{T_{((n),\emptyset)}} = y^n$ associado ao par de partições $((n), \emptyset)$. Fazendo a avaliação $y = e_{11} + e_{44}$, obtemos $f_{T_{((n),\emptyset)}} \notin Id^*(A_2^*)$ e, portanto, $m_{(n),\emptyset} = 1$.

Para o par de partições $((n-1), (1))$, consideramos as multitabelas

$$\tilde{T}_{(n-1),(1)} = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline \end{array} \right) \quad e \quad f_{\tilde{T}_{(n-1),(1)}} = y^{n-1}z$$

$$T_{(n-1),(1)} = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline n & 2 & \cdots & n-1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \right) \quad e \quad f_{T_{(n-1),(1)}} = zy^{n-1}.$$

Fazendo a avaliação $y = e_{11} + e_{44}$ e $z = e_{12} - e_{34}$, obtemos $f_{\tilde{T}_{(n-1),(1)}}$, $f_{T_{(n-1),(1)}} \notin Id^*(A_2^*)$. Considerando essa mesma avaliação, podemos verificar que esses polinômios são linearmente independentes módulo $Id^*(A_2^*)$. Logo, pelo Teorema 4.2.6 temos $m_{(n-1),(1)} \geq 2$.

Agora, para o par de partições $((n-1,1), \emptyset)$ considere os vetores de altura máxima correspondentes às multitabelas:

$$\tilde{T}_{(n-1,1),\emptyset} = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & \cdots & n \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}, \emptyset \right) \quad e \quad f_{\tilde{T}_{(n-1,1),\emptyset}} = [y_1, y_2]y_1^{n-2}$$

$$T_{(n-1,1),\emptyset} = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline n & 3 & \cdots & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}, \emptyset \right) \quad e \quad f_{T_{(n-1,1),\emptyset}} = y_1^{n-2}[y_1, y_2].$$

Fazendo a avaliação $y_1 = e_{11} + e_{44}$ e $y_2 = e_{12} + e_{34}$, temos que $f_{\tilde{T}_{(n-1,1),\emptyset}}$, $f_{T_{(n-1,1),\emptyset}} \notin Id^*(A_2^*)$. Similarmente, é possível provar que esses polinômios são linearmente independentes módulo $Id^*(A_2^*)$ e assim $m_{(n-1,1),\emptyset} \geq 2$. Portanto, o resultado segue. $\square$

Observe que as multiplicidades que aparecem nas decomposições acima são todas limitadas pela constante $k = 2$. Apresentamos agora um exemplo onde as multiplicidades dos (n_1, n_2) -cocaracteres são limitadas por 1.

Lema 2.2.8. *Para a álgebra D_* temos que $m_{\lambda_1, \lambda_2} \leq 1$ para todo par de partições (λ_1, λ_2) .*

Demonstração. De fato, como $[x_1, x_2] \equiv 0$ em D_* , para todo $x_i \in \{y_i, z_i\}$, segue que para quaisquer multipartições (λ_1, λ_2) e multitabelas $(T_{\lambda_1}, T_{\lambda_2})$ temos que $f_{T_{\lambda_1}, T_{\lambda_2}} \equiv f_{\lambda_1, \lambda_2}$ módulo $Id^*(D_*)$ e portanto temos no máximo um único vetor de altura máxima linearmente independente em $F_m^n(D_*)$. Logo o resultado sai pelo Teorema 2.2.6. $\square$

Exemplo 2.2.9. *Considere a *-álgebra M_* e $\chi_{(n_1, n_2)}(M_*)$ o seu (n_1, n_2) -cocaracter. De acordo com [32] temos:*

$$m_{\lambda, \mu} = \begin{cases} 1, & \text{se } \lambda = (n) \text{ e } \mu = \emptyset; \\ q + 1, & \text{se } \lambda = (p + q, p) \text{ e } \mu = (1), \text{ onde } 2p + q + 1 = n \text{ e } p, q \geq 0; \\ q + 1, & \text{se } \lambda = (p + q, p) \text{ e } \mu = \emptyset, \text{ onde } 2p + q = n \text{ e } p \geq 1, q \geq 0; \\ q + 1, & \text{se } \lambda = (p + q, p, 1) \text{ e } \mu = \emptyset, \text{ onde } 2p + q + 1 = n \text{ e } p \geq 1, q \geq 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Consequentemente, obtemos um exemplo de uma *-álgebra cujas multiplicidades não são limitadas por constante. Passamos então a buscar condições necessárias e suficientes para que as multiplicidades sejam limitadas por alguma constante, como discutiremos na próxima seção.

2.3 *-álgebras com multiplicidades limitadas por constante

Em 2009, Giambruno e Mishchenko [15] caracterizaram as variedades de *-álgebras cujas multiplicidades que aparecem no seu (n_1, n_2) -cocaracter são limitadas por 1, apresentando assim a extensão do resultado de Ananin e Kemer no contexto de *-álgebras. Enunciamos esse resultado a seguir.

Lembramos que, para uma álgebra A , o produto de Jordan entre dois elementos a e b é dado por $a \circ b = ab + ba$.

Teorema 2.3.1. [15] *Sejam A uma *-álgebra e $\chi_{(n_1, n_2)}(A) = \sum_{(\lambda_1, \lambda_2) \vdash (n_1, n_2)} m_{\lambda_1, \lambda_2} (\chi_{\lambda_1} \otimes \chi_{\lambda_2})$ o seu (n_1, n_2) -cocaracter. Então para todo $n = n_1 + n_2$ e para todo $(\lambda_1, \lambda_2) \vdash (n_1, n_2)$ temos $m_{\lambda_1, \lambda_2} \leq 1$, se, e somente se, A satisfaz*

$$y_1 z_2 \equiv 0 \quad \text{ou} \quad [y_1, z_2] \equiv 0 \quad \text{ou} \quad y_1 \circ z_2 \equiv 0,$$

ou seja, se A satisfaz pelo menos uma identidade do grupo

$$y_1 z_2 + \gamma z_2 y_1 \equiv 0,$$

onde $\gamma \in \{0, 1, -1\}$.

Exemplo 2.3.2. Note que a *-álgebra D_* satisfaz a identidade $[y_1, z_2]$ e portanto suas correspondentes multiplicidades são limitadas por 1, conforme provamos em Lema 2.2.8. Por outro lado, considerando a avaliação $y_1 \mapsto e_{11} + e_{44}$ e $z_2 \mapsto e_{12} - e_{34}$ podemos ver que A_2^* não satisfaz nenhuma identidade do tipo $y_1 z_2 + \gamma z_2 y_1 \equiv 0$, com $\gamma \in \{0, 1, -1\}$, e portanto suas multiplicidades não são limitadas por 1. Conforme visto no Lema 2.2.7, temos que $m_{(n-1), (1)} = 2$ na decomposição do $(n-1, 1)$ -cocaracter de A_2^* .

Exemplo 2.3.3. Observe que, pelo Exemplo 2.1.7, a *-álgebra $(M_2(F), s)$ satisfaz a identidade $[y_1, z_2]$. Portanto, segue do Teorema 2.3.1 que $m_{\lambda_1, \lambda_2} \leq 1$, para todo $n = n_1 + n_2$ e $(\lambda_1, \lambda_2) \vdash (n_1, n_2)$. De fato, em [10, Teorema 4.1], Drensky e Giambruno mostraram que todas as multiplicidades são limitadas por 1.

Vamos agora iniciar uma investigação sobre *-álgebras com multiplicidades limitadas por uma constante, não necessariamente igual a 1. Conforme o Exemplo 2.2.9, M_* é uma *-álgebra cujas multiplicidades que aparecem no seu (n_1, n_2) -cocaracter não são limitadas por uma constante, enquanto que para $(M_2(F), s)$ isto ocorre. Diante disso e motivados pelo Teorema 1.0.4, provaremos uma sequência de resultados nesta seção relacionando multiplicidades limitadas por constante e *-identidades.

Nos próximos resultados desta seção, denotaremos por A uma *-álgebra e $\chi_{(n_1, n_2)}(A) = \sum_{(\lambda_1, \lambda_2) \vdash (n_1, n_2)} m_{\lambda_1, \lambda_2} (\chi_{\lambda_1} \otimes \chi_{\lambda_2})$ será o seu (n_1, n_2) -cocaracter.

Teorema 2.3.4. [42] Se existe uma constante k tal que $m_{\lambda_1, \lambda_2} \leq k$, então A satisfaz uma identidade de grau $n > k$, do tipo

$$f(y, z) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y^{i-1} z y^{n-i}, \quad (2.8)$$

onde, para $1 \leq i \leq n$, $\alpha_i \in F$ não são simultaneamente nulos.

Demonstração. Considere $n \geq k + 1$ e escreva $n = n_1 + n_2$ onde $n_1 = n - 1$ e $n_2 = 1$. Dado o par de partições $(\lambda_1, \lambda_2) = ((n-1), (1)) \vdash (n_1, n_2)$ consideramos a multitabela

$$T_{\lambda_1, \lambda_2}^i : \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \cdots & i-1 & n & i+1 & \cdots & n-1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline \end{array} \right),$$

cujas permutação associada é $\sigma = (n \ i)$. Logo, o vetor de altura máxima associado a multitabela $T_{\lambda_1, \lambda_2}^i$ é da forma $f_{T_{\lambda_1, \lambda_2}^i} = y^{i-1} z y^{n-i}$.

Para $i = 1, \dots, n$, temos n tabelas do tipo $T_{\lambda_1, \lambda_2}^i$ e n vetores de altura máxima $f_{T_{\lambda_1, \lambda_2}^i}$ associados. Desde que $m_{\lambda_1, \lambda_2} \leq k < n$, segue do Teorema 2.2.6 que existem α_i 's não simultaneamente nulos tais que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_{T_{\lambda_1, \lambda_2}^i} = 0 \mod Id^*(A).$$

Logo, A satisfaz uma identidade do tipo $\sum_{i=1}^n \alpha_i y^{i-1} z y^{n-i} \equiv 0$, como queríamos. $\square$

Por outro lado, temos o seguinte resultado, provado por Rizzo [39] em 2020 a respeito de multiplicidades limitadas por constante a partir da exclusão de *-álgebras da variedade.

Teorema 2.3.5. [39] *Se M_* , $(M_2(F), s) \notin \text{var}^*(A)$, então existe uma constante k tal que para todo $n = n_1 + n_2$ e $(\lambda_1, \lambda_2) \vdash (n_1, n_2)$ a desigualdade $m_{\lambda_1, \lambda_2} \leq k$ é verdadeira.*

A partir da Observação 2.2.2 e do Exemplo 2.2.9, se A é uma *-álgebra para a qual existe uma constante k tal que $m_{\lambda_1, \lambda_2} \leq k$, para todo $n = n_1 + n_2$ e $(\lambda_1, \lambda_2) \vdash (n_1, n_2)$, então $M_* \notin \text{var}^*(A)$. Por outro lado, não podemos dizer que $(M_2(F), s) \notin \text{var}^*(A)$ e portanto, não podemos concluir a recíproca do teorema anterior.

O próximo resultado é sobre as variedades de álgebras que satisfazem identidades do tipo (2.8) em determinadas condições.

Teorema 2.3.6. [42] *Se A satisfaz alguma identidade do tipo*

$$f(y, z) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y^{i-1} z y^{n-i}, \quad \text{com} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0,$$

então M_* , $(M_2(F), s) \notin \text{var}^*(A)$.

Demonstração. Se A satisfaz $f(y, z) \equiv 0$, então $M_* \notin \text{var}^*(A)$. De fato, suponha que $M_* \in \text{var}^*(A)$ e sejam $\bar{y} = \beta(e_{11} + e_{44}) + (e_{22} + e_{33})$ e $\bar{z} = e_{12} - e_{34}$ em M_* onde β é um escalar não nulo. Então $\bar{y}^{i-1} \bar{z} \bar{y}^{n-i} = \beta^{i-1} e_{12} - \beta^{n-i} e_{34}$ e,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta^{i-1} e_{12} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta^{n-i} e_{34} = 0$$

o que implica em

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta^{i-1} e_{12} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta^{n-i} e_{34} = 0.$$

Desde que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta^{i-1} e_{12} = 0$, temos que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta^{i-1} = 0$. Como F é infinito, escolhemos distintos $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1} \in F$ e obtemos o sistema de equações lineares

$$\Delta \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0,$$

onde $\Delta = (\beta_i^j)$ é a matriz de Vandermonde. Portanto, temos que $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, absurdo. Logo, M_* não satisfaz $f(y, z)$.

Agora, suponha que $(M_2(F), s) \in \text{var}^*(A)$ e sejam $\bar{y} = e_{11} + e_{22}$ e $\bar{z} = e_{21}$ em $(M_2(F), s)$. Então, $f(\bar{y}, \bar{z}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_{21} = 0$ e isto implica em $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, absurdo. Logo, $(M_2(F), s)$ não satisfaz $f(y, z)$.

Com isso, concluímos que M_* , $(M_2(F), s) \notin \text{var}^*(A)$. □

Assim, usando os Teoremas 2.3.5 e 2.3.6, temos o resultado no contexto de *-álgebras envolvendo identidades e multiplicidades limitadas por constante.

Corolário 2.3.7. *Se A satisfaz alguma identidade do tipo*

$$f(y, z) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y^{i-1} z y^{n-i}, \quad \text{com} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0,$$

então existe uma constante k tal que $m_{\lambda_1, \lambda_2} \leq k$ para todo $n = n_1 + n_2$ e $(\lambda_1, \lambda_2) \vdash (n_1, n_2)$.

Capítulo 3

Álgebras G -graduadas

Neste capítulo, definimos o conceito de álgebras G -graduadas e introduzimos ferramentas fundamentais da PI-teoria nesse contexto. Essas ferramentas foram importantes para que Giambruno, Milies e Valenti, em [16], estendessem a caracterização de Ananin e Kemer (Corolário 1.0.3) a esse cenário. Apresentaremos uma caracterização alternativa das multiplicidades limitadas por constante por meio das identidades graduadas satisfeitas pela álgebra. Este resultado pode ser encontrado em [42].

3.1 Álgebras G -graduadas

Começaremos definindo álgebras G -graduadas e, em seguida, exibiremos alguns exemplos. Para isso, considere G um grupo multiplicativo qualquer cujo elemento neutro será denotado por $1 = 1_G$.

Definição 3.1.1. *Uma álgebra A é graduada por um grupo G , ou simplesmente, A é uma álgebra G -graduada, se A pode ser escrita como soma direta de subespaços vetoriais $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$, tais que $A^{(g)} A^{(h)} \subseteq A^{(gh)}$, para todos $g, h \in G$.*

Assim, ao considerar uma álgebra G -graduada $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$, os elementos $a \in A$ podem ser escritos de maneira única como $a = \sum_{g \in G} a_g$, onde $a_g \in A^{(g)}$. Se A é uma álgebra G -graduada unitária cuja unidade é 1_A , então $1_A \in A^{(1)}$.

Um elemento $a \in A^{(g)}$ é chamado de homogêneo de grau g e denotamos por $\deg(a) = g$ o seu grau homogêneo. Os subespaços vetoriais $A^{(g)}$ são chamados de componentes homogêneas de A de grau g . Um subespaço B de A é chamado de uma subálgebra G -graduada se B é uma subálgebra e $B = \bigoplus_{g \in G} (B \cap A^{(g)})$ é uma G -gradação de B .

No caso em que $G = C_2$ é o grupo cíclico de ordem 2, uma álgebra C_2 -graduada A é conhecida como uma superálgebra.

O suporte de uma álgebra G -graduada A é definido como

$$\text{supp}(A) = \{g \in G \mid A^{(g)} \neq \{0\}\}.$$

Toda álgebra A é uma álgebra G -graduada quando munida da G -gradação trivial, onde $A^{(1)} = A$ e $A^{(g)} = \{0\}$, para todo $g \in G \setminus \{1\}$.

Exemplo 3.1.2. *Seja $A = M_n(F)$ a álgebra de matrizes $n \times n$ sobre F . Fixe uma n -upla $\alpha = (g_1, \dots, g_n) \in G^n$. Para cada $g \in G$, considere o seguinte subespaço:*

$$(M_n(F))^{(g)} = \text{span}_F\{e_{ij} \mid g_i^{-1}g_j = g\}.$$

Observe que $M_n(F) = \bigoplus_{g \in G} (M_n(F))^{(g)}$ é uma G -gradação para $M_n(F)$, chamada de G -gradação elementar induzida pela n -upla α .

Exemplo 3.1.3. *Dado $g \in G$, denotaremos por UT_2^g a álgebra UT_2 munida da G -gradação elementar induzida pelo par $(1, g)$, isto é,*

$$UT_2^{(1)} = Fe_{11} + Fe_{22}, \quad UT_2^{(g)} = Fe_{12} \quad \text{e} \quad UT_2^{(h)} = \{0\}, \quad \forall h \in G \setminus \{1, g\}.$$

Além disso, denotamos simplesmente por UT_2^1 a álgebra UT_2 munida da G -gradação trivial.

Vale ressaltar que Valenti e Zaicev [43] mostraram que, a menos de isomorfismo, toda G -gradação em UT_n é elementar.

Exemplo 3.1.4. *Seja G um grupo de ordem par e considere $g \in G$ com $|g| = 2$. Defina*

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in F \right\}.$$

Temos que K é uma álgebra G -graduada munida da graduação:

$$K^{(1)} = Fe_{22} + Fe_{13}, \quad K^{(g)} = Fe_{12} + Fe_{23} \quad \text{e} \quad K^{(r)} = \{0\}, \quad \text{para todo } r \in G \setminus \{1, g\}.$$

Denotamos essa álgebra G -graduada por K^g .

Exemplo 3.1.5. *Fixe $g \in G \setminus \{1\}$ e considere $\mathcal{G}_2$ como a subálgebra da álgebra de Grassmann gerada como álgebra por $1, e_1, e_2$, isto é, $\mathcal{G}_2 = \langle 1, e_1, e_2 \mid e_i e_j = -e_j e_i \rangle$. Definimos $\mathcal{G}_2^{1,g}$ como a álgebra $\mathcal{G}_2$ munida da seguinte G -gradação:*

$$(\mathcal{G}_2^{1,g})^{(1)} = F1 + Fe_1, \quad (\mathcal{G}_2^{1,g})^{(g)} = Fe_2 + Fe_1 e_2, \quad (\mathcal{G}_2^{1,g})^{(h)} = \{0\}, \quad \text{para todo } h \in G \setminus \{1, g\}.$$

Sejam G um grupo finito de ordem k e X um conjunto enumerável de variáveis não comutativas. Considere $X = \bigcup_{g \in G} X^{(g)}$ como a união disjunta dos conjuntos $X^{(g)} = \{x_{1,g}, x_{2,g}, x_{3,g}, \dots\}$. Consideramos $F\langle X|G \rangle$ a álgebra associativa livre gerada pelo conjunto X sobre F , cujos elementos serão chamados de G -polinômios. Para um monômio $x_{1,g_1} \cdots x_{t,g_t} \in F\langle X|G \rangle$ definimos o seu grau homogêneo como o produto $g_1 \cdots g_t$.

Para cada $g \in G$, consideramos $\mathcal{F}^{(g)}$ o subespaço de $F\langle X|G \rangle$ gerado por todos os monômios de grau homogêneo g . Assim, $F\langle X|G \rangle = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{F}^{(g)}$ é uma G -gradação em $F\langle X|G \rangle$. Dessa forma, dizemos que $F\langle X|G \rangle$ é a álgebra livre G -graduada.

Um G -polinômio $f = f(x_{1,g_{i_1}}, \dots, x_{n,g_{i_n}}) \in F\langle X|G \rangle$ é uma G -identidade para uma álgebra G -graduada A se $f(a_{g_{i_1}}, \dots, a_{g_{i_n}}) = 0$, para todos $a_{g_{i_1}} \in A^{(g_{i_1})}, \dots, a_{g_{i_n}} \in A^{(g_{i_n})}$. Nesse caso escrevemos $f \equiv 0$ em A . De modo geral, estamos interessados em estudar o conjunto de todas as identidades graduadas de uma dada álgebra, por isso, definimos

$$Id^G(A) = \{f \in F\langle X|G \rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } A\}$$

o conjunto de todas as G -identidades de A . É bem conhecido que $Id^G(A)$ é um ideal invariante sob todos os endomorfismos graduados de $F\langle X|G \rangle$, chamado de T_G -ideal de A . Usamos a notação $Id^G(A) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle_{T_G}$ para indicar que $Id^G(A)$ é gerado pelos polinômios $f_1, \dots, f_m \in F\langle X|G \rangle$ como um T_G -ideal.

Definimos a G -variedade gerada por A , $var^G(A)$, como a classe de todas as álgebras G -graduadas B tais que $Id^G(A) \subseteq Id^G(B)$.

Determinar um conjunto gerador para o T_G -ideal de A não é uma tarefa fácil em geral. A seguir exibiremos alguns exemplos onde é possível determinar tal conjunto de polinômios.

Exemplo 3.1.6. Dado $g \in G \setminus \{1\}$ segue de [4, Teorema 2.3] que

$$Id^G(UT_2^1) = \langle [x_{1,1}, x_{2,1}][x_{3,1}, x_{4,1}], x_{1,h} \mid h \in G \setminus \{1\} \rangle_{T_G} \text{ e}$$

$$Id^G(UT_2^g) = \langle [x_{1,1}, x_{2,1}], x_{1,g}x_{2,g}, x_{1,h} \mid h \in G \setminus \{1\} \rangle_{T_G}.$$

Exemplo 3.1.7. [6] Considerando a álgebra G -graduada do Exemplo 3.1.4. Para todo $h \in G \setminus \{1, g\}$ temos

$$Id^G(K^g) = \langle [x_{1,1}, x_{2,1}], x_{1,g}x_{2,g}x_{3,g}, x_{1,1}x_{2,g}x_{3,g}, x_{1,g}x_{2,g}x_{3,1}, x_{1,1}x_{2,g}x_{3,1}, x_{1,h} \rangle_{T_G}$$

Exemplo 3.1.8. [12] Fixe $g \in G \setminus \{1\}$ e sejam $r \in \{1, g\}$ e $s \in G \setminus \{1, g\}$. Então,

$$Id^G(\mathcal{G}_2^{1,g}) = \langle [x_{1,1}, x_{2,1}], [[x_{1,1}, x_{2,g}], x_{3,g}], x_{1,g}x_{2,g}, x_{1,s} \rangle_{T_G}.$$

Vale destacar que em característica zero, $Id^G(A)$ é completamente determinado por seus G -polinômios multilineares. Dessa forma, consideramos o espaço dos G -polinômios multilineares de grau n dado por

$$P_n^G = \text{span}_F \{x_{\sigma(1),g_{i_1}} \cdots x_{\sigma(n),g_{i_n}} \mid \sigma \in S_n, g_{i_1}, \dots, g_{i_n} \in G\}.$$

Em particular, estamos interessados em investigar o espaço $P_n^G \cap Id^G(A)$. Por isso, consideramos o espaço quociente

$$P_n^G(A) = \frac{P_n^G}{P_n^G \cap Id^G(A)}$$

e denotamos por $c_n^G(A)$ a sua dimensão, denominada n -ésima G -codimensão de A . Observe que tal sequência nos permite, de certa maneira, medir o crescimento das identidades graduadas satisfeitas pela álgebra. Embora o estudo de tal sequência não seja o foco deste trabalho, o comportamento assintótico dessa sequência se tornou um dos principais objetos de pesquisa na PI-teoria. Para o leitor interessado nesse estudo, recomendamos as referências [24, 44].

Considere $g \in G \setminus \{1\}$ e defina N_3^g como a álgebra

$$N_3 := F(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + Fe_{12} + Fe_{13} + Fe_{23}$$

munida da G -gradação elementar induzida pela 3-upla $(1, g, g) \in G^3$.

Em [25], La Mattina descreveu completamente as G -identidades e a sequência de G -codimensões da álgebra N_3^g .

Exemplo 3.1.9. Para $g \in G \setminus \{1\}$ e $r \in G \setminus \{1, g\}$ temos

$$Id^G(N_3^g) = \langle [x_{1,1}, x_{2,1}], [x_{1,g}, x_{2,1}, x_{3,1}], x_{1,g}x_{2,g}, x_{1,r} \rangle \text{ e } c_n^G(N_3^g) = 1 + n^2.$$

Estamos interessados em estudar de maneira mais profunda a estrutura do espaço $P_n^G(A)$. Em particular, sob a perspectiva da teoria de representações de grupos finitos. Enfatizamos que, no caso em que G é um grupo abeliano finito, o espaço $P_n^G(A)$ tem uma ação natural do produto entrelaçado $G \wr S_n$, a qual se relaciona diretamente com a teoria de representações do grupo simétrico (veja [19, Capítulo 10]). Como estamos interessados em grupos finitos arbitrários, teremos que restringir nosso estudo a subespaços de P_n^G como veremos na próxima seção.

3.2 O $\langle n \rangle$ -cocaracter

Fixe $G = \{1 = g_1, g_2, \dots, g_k\}$ e n um inteiro não negativo. Escrevemos $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ como a soma de k inteiros não negativos e denotamos por $\langle n \rangle = (n_1, n_2, \dots, n_k)$

a composição de n em k partes. Uma multipartição $\langle \lambda \rangle = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \vdash \langle n \rangle$ é tal que $\lambda_i \vdash n_i$ para $1 \leq i \leq k$. Denotamos por $\langle \lambda \rangle \vdash n$ quando $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$, para alguma composição $\langle n \rangle$ de n .

Para cada $\langle n \rangle = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ fixo, denotamos por $P_{\langle n \rangle}$ o espaço vetorial gerado pelos monômios de P_n^G em que as primeiras n_1 variáveis são de grau homogêneo 1, as seguintes n_2 variáveis são de grau homogêneo g_2 , e assim por diante de modo que as n_k últimas variáveis sejam de grau homogêneo g_k .

Observe que, para qualquer escolha de $\langle n \rangle = (n_1, \dots, n_k)$, existem $\binom{n}{\langle n \rangle}$ subespaços isomorfos a $P_{\langle n \rangle}$ em P_n^G , onde $\binom{n}{\langle n \rangle} = \binom{n}{n_1, \dots, n_k}$ denota o coeficiente multinomial dado por $\frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}$. Além disso, temos que

$$P_n^G \cong \bigoplus_{\langle n \rangle} \binom{n}{\langle n \rangle} P_{\langle n \rangle}.$$

Agora, considerando o espaço quociente

$$P_{\langle n \rangle}(A) = \frac{P_{\langle n \rangle}}{P_{\langle n \rangle} \cap Id^G(A)},$$

e definindo $c_{\langle n \rangle}(A) := \dim_F P_{\langle n \rangle}(A)$ a $\langle n \rangle$ -codimensão de A . Como consequência de [19, Teorema 10.4.5] temos que

$$c_n^G(A) = \sum_{\langle n \rangle} \binom{n}{\langle n \rangle} c_{\langle n \rangle}(A). \quad (3.1)$$

Considerando o espaço quociente $P_{\langle n \rangle}(A)$ e o grupo $S_{\langle n \rangle} = S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_k}$, podemos definir uma ação à esquerda de $S_{\langle n \rangle}$ sobre $P_{\langle n \rangle}$ dada pela permutação dos k conjuntos de variáveis separadamente, isto é, S_{n_i} age nas respectivas n_i -variáveis de grau homogêneo g_i . Assim, temos que $P_{\langle n \rangle}$ é um $S_{\langle n \rangle}$ -módulo à esquerda.

Exemplo 3.2.1. *Seja $|G| = 3$ e consideremos $\langle 6 \rangle = (3, 2, 1)$, $\sigma = (1\ 2\ 3) \times (4\ 5) \times (6) \in S_{\langle 6 \rangle}$ e $f = x_{1,g_1} x_{6,g_3} x_{5,g_2} x_{3,g_1} x_{2,g_1} x_{4,g_2} \in P_{\langle 6 \rangle}$. Então*

$$\sigma f = x_{\sigma(1),g_1} x_{\sigma(6),g_3} x_{\sigma(5),g_2} x_{\sigma(3),g_1} x_{\sigma(2),g_1} x_{\sigma(4),g_2} = x_{2,g_1} x_{6,g_3} x_{4,g_2} x_{1,g_1} x_{3,g_1} x_{5,g_2}.$$

Como o T_G -ideal de A é invariante sob a ação descrita acima, temos que $P_{\langle n \rangle}(A)$ também tem estrutura de $S_{\langle n \rangle}$ -módulo. Denotamos o $S_{\langle n \rangle}$ -caracter de $P_{\langle n \rangle}(A)$ por $\chi_{\langle n \rangle}(A)$ e o chamamos de $\langle n \rangle$ -cocaracter de A .

É conhecido que existe uma correspondência biunívoca entre as multipartições $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$ e os $S_{\langle n \rangle}$ -caracteres irredutíveis. Além disso, é conhecido que os $S_{\langle n \rangle}$ -caracteres irredutíveis são produtos tensoriais dos caracteres irredutíveis de $S_{n_1}, S_{n_2}, \dots, S_{n_k}$. Portanto,

$\chi_{\langle n \rangle}(A)$ pode ser escrito na forma

$$\chi_{\langle n \rangle}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}, \quad (3.2)$$

onde $\chi_{\langle \lambda \rangle} = \chi_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \chi_{\lambda_k}$ denota o $S_{\langle n \rangle}$ -caracter irreduzível correspondente a $\langle \lambda \rangle$ e $m_{\langle \lambda \rangle}$ é sua respectiva multiplicidade.

Além disso, temos que

$$c_{\langle n \rangle}(A) = \chi_{\langle n \rangle}(A)(1) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m_{\langle \lambda \rangle} d_{\langle \lambda \rangle},$$

onde $d_{\langle \lambda \rangle}$ denota o grau do $S_{\langle n \rangle}$ -caracter irreduzível $\chi_{\langle \lambda \rangle}$ que é dado por $d_{\lambda_1} \cdots d_{\lambda_k}$, onde d_{λ_i} denota o grau do S_{n_i} -caracter irreduzível χ_{λ_i} , calculado pela Fórmula do Gancho.

Observação 3.2.2. *Sejam A e B álgebras G -graduadas cujos $\langle n \rangle$ -cocaracteres são, respectivamente, $\chi_{\langle n \rangle}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}$ e $\chi_{\langle n \rangle}(B) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m'_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}$. Se $B \in \text{var}^G(A)$ então $m'_{\langle \lambda \rangle} \leq m_{\langle \lambda \rangle}$, para todo $n = n_1 + \cdots + n_k$ e $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$.*

Afim de obter informações mais precisas sobre as multiplicidades $m_{\langle \lambda \rangle}$ que aparecem na decomposição do $\langle n \rangle$ -cocaracter $\chi_{\langle n \rangle}(A)$ descrito em (3.2), nos baseamos nos resultados conhecidos para o grupo linear geral GL_m . A teoria desenvolvida aqui pode ser consultada detalhadamente em [9, Seção 12.4].

Sejam $m \geq 1$ e F_m^G o espaço dos G -polinômios nas variáveis $x_{1,g_1}, \dots, x_{m,g_1}, x_{1,g_2}, \dots, x_{m,g_2}, \dots, x_{1,g_k}, \dots, x_{m,g_k}$, e consideremos os espaços vetoriais $U_1 = \text{span}_F\{x_{1,g_1}, \dots, x_{m,g_1}\}$, $U_2 = \text{span}_F\{x_{1,g_2}, \dots, x_{m,g_2}\}, \dots, U_k = \text{span}_F\{x_{1,g_k}, \dots, x_{m,g_k}\}$.

O grupo $GL(U_1) \times \cdots \times GL(U_k) \cong GL_m^k$ age naturalmente à esquerda sobre o subespaço $U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ de F_m^G , e temos que esta ação pode ser estendida diagonalmente à uma ação sobre F_m^G . Considere $n \geq m$ e denote por $F_{m,n}^G$ o subespaço dos G -polinômios homogêneos em F_m^G de grau n , temos que o grupo GL_m^k age diagonalmente sobre $F_{m,n}^G$ e, assim, $F_{m,n}^G$ tem estrutura de GL_m^k -módulo. Desde que $F_{m,n}^G \cap Id^G(A)$ é invariante sob essa ação, segue que o espaço quociente

$$F_{m,n}^G(A) = \frac{F_{m,n}^G}{F_{m,n}^G \cap Id^G(A)}$$

é um GL_m^k -módulo, cujo caracter será denotado por $\psi_n^G(A)$.

Para uma composição $\langle n \rangle$ de n , é conhecido que existe uma correspondência biunívoca entre os GL_m^k -módulos irreduzíveis e as multipartições $\langle \lambda \rangle = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash \langle n \rangle$, onde λ_i é uma partição de n_i em no máximo m partes, para todo $i = 1, \dots, k$. Portanto, se denotarmos por $\psi_{\langle \lambda \rangle}$ o GL_m^k -caracter irreduzível correspondente a multipartição $\langle \lambda \rangle$ então podemos escrever

$$\psi_n^G(A) = \sum_{\langle n \rangle} \sum_{\substack{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle \\ h(\lambda_i) \leq m, \forall i}} \tilde{m}_{\langle \lambda \rangle} \psi_{\langle \lambda \rangle}, \quad (3.3)$$

onde $\tilde{m}_{\langle \lambda \rangle}$ é a multiplicidade correspondente a $\psi_{\langle \lambda \rangle}$ e $h(\lambda_i)$ denota o número de partes da partição $\lambda_i \vdash n_i$.

A relação entre as decomposições (3.2) e (3.3) é estabelecida pelo seguinte teorema (veja [11]).

Teorema 3.2.3. *Seja A uma álgebra G -graduada e considere $\chi_{\langle n \rangle}(A)$ e $\psi_n^G(A)$ o $\langle n \rangle$ -cocaracter e o GL_m^k -cocaracter de A como dados em (3.2) e (3.3), respectivamente. Então, $m_{\langle \lambda \rangle} = \tilde{m}_{\langle \lambda \rangle}$, para todo $n = n_1 + \dots + n_k$ e $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$ tal que $h(\lambda_i) \leq m$, para todo $1 \leq i \leq k$.*

De acordo com [9, Teorema 12.4.12], cada GL_m^k -módulo irredutível é cíclico e é gerado por um polinômio $f_{\langle \lambda \rangle}$ não nulo associado a uma multipartição $\langle \lambda \rangle$ de $\langle n \rangle$, chamado vetor de altura máxima.

Para uma composição $\langle n \rangle$ e uma multipartição $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$ definimos vetor de altura máxima associado a $\langle \lambda \rangle$ como

$$f_{\langle \lambda \rangle} = \prod_{j=1}^{(\lambda_1)_1} St_{h_j(\lambda_1)}(x_{1,1}, \dots, x_{h_j(\lambda_1),1}) \cdots \prod_{j=1}^{(\lambda_k)_1} St_{h_j(\lambda_k)}(x_{1,g_k}, \dots, x_{h_j(\lambda_k),g_k})$$

onde $St_r(x_1, \dots, x_r)$ é o polinômio standard de grau r e $h_j(\lambda_i)$ representa a altura da j -ésima coluna do diagrama D_{λ_i} . Além disso, $f_{\langle \lambda \rangle}$ pode ser escrito unicamente como combinação linear de vetores $f_{T_{\langle \lambda \rangle}}$ como construiremos a seguir.

Uma multitabela $T_{\langle \lambda \rangle} = (T_{\lambda_1}, T_{\lambda_2}, \dots, T_{\lambda_k})$ é uma k -upla formada por tabelas de Young T_{λ_i} associadas à uma partição $\lambda_i \vdash n_i$, para $1 \leq i \leq k$. A multitabela padrão $\tilde{T}_{\langle \lambda \rangle}$ é a multitabela cujos inteiros $1, 2, \dots, n$ nesta ordem, preenchem de cima para baixo, da esquerda para direita, coluna por coluna, a tabela $\tilde{T}_{\lambda_1}$ até a tabela $\tilde{T}_{\lambda_k}$.

Exemplo 3.2.4. *Sejam $\langle 6 \rangle = (3, 2, 0, 1, 0, \dots, 0)$ e $\langle \lambda \rangle = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_k)$ tal que $\lambda_1 = (2, 1) \vdash 3$, $\lambda_2 = (1^2) \vdash 2$, $\lambda_3 = \emptyset$, $\lambda_4 = (1) \vdash 1$, $\lambda_i = \emptyset$ para $5 \leq i \leq k$. Então, a k -upla abaixo representa uma multitabela $T_{\langle \lambda \rangle}$ associada à multipartição $\langle \lambda \rangle \vdash 6$,*

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}, \emptyset, \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array}, \emptyset, \dots, \emptyset \right). \quad (3.4)$$

A multitabela padrão correspondente a $\langle \lambda \rangle$ é descrita a seguir

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}, \emptyset, \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array}, \emptyset, \dots, \emptyset \right). \quad (3.5)$$

Para uma multitabela qualquer $T_{\langle \lambda \rangle}$, definimos o vetor de altura máxima associado a $T_{\langle \lambda \rangle}$ como sendo o polinômio $f_{T_{\langle \lambda \rangle}} := f_{\langle \lambda \rangle} \sigma^{-1}$, onde $\sigma \in S_n$ é a única permutação que transforma a multitabela padrão $\tilde{T}_{\langle \lambda \rangle}$ na multitabela $T_{\langle \lambda \rangle}$ e a ação à direita de S_n sobre $F_{m,n}^G(A)$ é definida pela troca dos lugares das variáveis em cada monômio.

Exemplo 3.2.5. *Sejam $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$ e $T_{\langle \lambda \rangle}$ a multipartição e tabela definidas no Exemplo 3.2.4. Então,*

$$f_{\langle \lambda \rangle} = St_2(x_{1,g_1}, x_{2,g_1})x_{1,g_1}x_{1,g_2}^2x_{1,g_4}$$

é o vetor de altura máxima associado a $\langle \lambda \rangle$. A permutação associada a $T_{\langle \lambda \rangle}$ é dada por $\sigma = (165)(34)$ e o vetor de altura máxima associado a $T_{\langle \lambda \rangle}$ é o polinômio

$$\begin{aligned} f_{\langle \lambda \rangle}\sigma^{-1} &= St_2(x_{1,g_1}, x_{2,g_1})x_{1,g_1}x_{1,g_2}^2x_{1,g_4}(156)(34) \\ &= x_{1,g_4}x_{2,g_1}x_{1,g_2}x_{1,g_1}x_{1,g_1}x_{1,g_2} - x_{1,g_4}x_{1,g_1}x_{1,g_2}x_{1,g_1}x_{2,g_1}x_{2,g_2}. \end{aligned}$$

O próximo resultado nos fornece um método efetivo para o cálculo das multiplicidades que aparecem na decomposição (3.2).

Teorema 3.2.6. [9] *Seja $\psi_n^G(A)$ o GL_m^k -caracter de A como dado em (3.3). Então, $\tilde{m}_{\langle \lambda \rangle} \neq 0$ se, e somente se, existe uma multitabela $T_{\langle \lambda \rangle}$, tal que $f_{T_{\langle \lambda \rangle}} \notin Id^G(A)$. Além disso, $\tilde{m}_{\langle \lambda \rangle}$ é igual ao número máximo de vetores de altura máxima associados às multitabelas do tipo $\langle \lambda \rangle$ que são linearmente independentes em $F_{m,n}^G(A)$.*

De agora em diante, será conveniente usarmos a notação $\langle \lambda \rangle = ((\lambda_1)_{g_1}, \dots, (\lambda_k)_{g_k})$, onde $(\lambda_i)_{g_i}$ significa que (λ_i) é a partição de n_i , $1 \leq i \leq k$. Além disso, as partições vazias serão omitidas nessa notação.

A seguir daremos um exemplo de como calcular, na prática, as multiplicidades da decomposição do cocaracter de uma álgebra G -graduada usando as ferramentas acima.

Lema 3.2.7. *Para a álgebra N_3^g , os únicos $\langle n \rangle$ -caracteres não nulos são*

$$\chi_{((n)_1)} = 2\chi_{((n-1)_1, (1)_g)} + \chi_{((n-2, 1)_1, (1)_g)}.$$

Demonstração. Pelo Exemplo 3.1.9 e usando a Equação (3.1), podemos observar que

$$1 + n^2 = c_n^G(N_3^g) = d_{(n)} + 2 \binom{n}{n-1} d_{(n-1)} d_{(1)} + \binom{n}{n-1} d_{(n-2, 1)} d_{(1)}.$$

Logo, basta mostrarmos que $m_{\langle \lambda' \rangle}, m_{\langle \lambda'' \rangle} \geq 1$ e $m_{\langle \lambda''' \rangle} \geq 2$, onde $\langle \lambda' \rangle = ((n)_1)$, $\langle \lambda'' \rangle = ((n-1)_1, (1)_g)$ e $\langle \lambda''' \rangle = ((n-2, 1)_1, (1)_g)$.

Considere os vetores de altura máxima $f_{T_{\langle \lambda' \rangle}} = x_{1,1}^n$ e $f_{T_{\langle \lambda'' \rangle}} = x_{1,1}x_{1,g}x_{1,1}^{n-3}x_{2,1} - x_{2,1}x_{1,g}x_{1,1}^{n-3}x_{1,1}$ associados as multipartições $\langle \lambda' \rangle$ e $\langle \lambda'' \rangle$, respectivamente. Desde que estes polinômios não são G -identidades de N_3^g então, pelo Teorema 3.2.6, devemos ter $m_{\langle \lambda' \rangle}, m_{\langle \lambda'' \rangle} \geq 1$. Para a multipartição $\langle \lambda''' \rangle$, consideramos as multitabelas

$$T_{\langle \lambda'' \rangle} = \left(\boxed{1 \mid 2 \mid \cdots \mid n-1}_1, \boxed{n}_g \right),$$

$$T'_{\langle \lambda'' \rangle} = \left(\boxed{n \mid 2 \mid \cdots \mid n-1}_1, \boxed{1}_g \right)$$

e os vetores de altura máxima correspondentes $f_{T_{\langle \lambda'' \rangle}} = x_{1,1}^{n-1} x_{1,g}$ e $f_{T'_{\langle \lambda'' \rangle}} = x_{1,g} x_{1,1}^{n-1}$, os quais não são identidades de N_3^g . Além disso, afirmamos que estes polinômios são linearmente independentes modulo $\text{Id}^G(N_3^g)$. De fato, seja

$$\alpha f_{T_{\langle \lambda'' \rangle}} + \beta f_{T'_{\langle \lambda'' \rangle}} \in \text{Id}^G(N_3^g).$$

Considerando a avaliação $\varphi(x_{1,1}) = e_{11} + e_{22} + e_{33} + e_{23}$ e $\varphi(x_{1,g}) = e_{12}$, temos $\alpha = \beta = 0$. Portanto, $m_{\langle \lambda'' \rangle} \geq 2$ e a prova segue. $\square$

De maneira similar, podemos provar o seguinte resultado.

Exemplo 3.2.8. [6] *As únicas multiplicações com multiplicidades não nulas correspondente aos caracteres irredutíveis na decomposição do $\langle n \rangle$ -cocaracter da álgebra K^g são:*

$$m_{\langle \lambda \rangle} = \begin{cases} 1, & \text{se } \langle \lambda \rangle = ((n)_1); \\ 1, & \text{se } \langle \lambda \rangle = ((n-2)_1, (2)_g); \\ 1, & \text{se } \langle \lambda \rangle = ((n-2)_1, (1^2)_g); \\ 2, & \text{se } \langle \lambda \rangle = ((n-1)_1, (1)_g). \end{cases}$$

Exemplo 3.2.9. [6] *Considere a álgebra G -graduada $\mathcal{G}_2^{1,g}$. As únicas multiplicidades não nulas correspondentes aos caracteres irredutíveis na decomposição do $\langle n \rangle$ -cocaracter da álgebra $\mathcal{G}_2^{1,g}$ são:*

$$m_{\langle \lambda \rangle} = \begin{cases} 1, & \text{se } \langle \lambda \rangle = ((n)_1); \\ 1, & \text{se } \langle \lambda \rangle = ((n-1)_1, (1)_g); \\ 2, & \text{se } \langle \lambda \rangle = ((n-2, 1)_1, (1)_g). \end{cases}$$

Exemplo 3.2.10. [4] *Considere a álgebra UT_2^g , $g \in G \setminus \{1\}$, e $\chi_{\langle n \rangle}(UT_2^g)$ o seu $\langle n \rangle$ -cocaracter. Então, as únicas multiplicidades não nulas são:*

$$m_{\langle \lambda \rangle} = \begin{cases} 1, & \text{se } \langle \lambda \rangle = ((n)_1); \\ q+1, & \text{se } \langle \lambda \rangle = ((p+q, p)_1, (1)_g), \text{ onde } 2p+q+1 = n. \end{cases}$$

Exemplo 3.2.11. *Considere a álgebra UT_2^1 e $\chi_{\langle n \rangle}(UT_2^1)$ o seu $\langle n \rangle$ -cocaracter. Então, segue do caso ordinário [31, Lema 1] que as multiplicidades não nulas não são limitadas por constante.*

Note que as multiplicidades que aparecem na decomposição do $\langle n \rangle$ -cocaracter das álgebras G -graduadas dos Exemplos 3.1.4 e [3.1.5] são limitadas por uma constante. Já as multiplicidades da álgebra G -graduada do Exemplo 3.1.6 não são limitadas por constante. Enfatizamos também que as álgebras descritas no Lema 3.2.7 e nos Exemplos 3.2.8 e 3.2.9 são exemplos de álgebras G -graduadas cujas multiplicidades do $\langle n \rangle$ -cocaracter não são limitadas por 1.

Na próxima seção, caracterizaremos as álgebras G -graduadas via G -identidades cujas multiplicidades que aparecem na decomposição do $\langle n \rangle$ -cocaracter são limitadas por constante.

3.3 Álgebras G -graduadas com multiplicidades limitadas por constante

Em 2018, Giambruno, Milies e Valenti [16] caracterizaram as variedades de álgebras G -graduadas cujas multiplicidades que aparecem no seu $\langle n \rangle$ -cocaracter são limitadas por 1, apresentando assim a extensão do resultado de Ananin e Kemer no contexto de álgebras G -graduadas. Enunciamos esse resultado a seguir.

Teorema 3.3.1. [16] *Sejam G um grupo finito, A uma álgebra G -graduada e $\chi_{\langle n \rangle}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}$ o seu $\langle n \rangle$ -cocaracter. Então $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$ para todo n e para todo $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$ se, e somente se, existem escalares α, β, γ e δ , com $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ e $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$, tais que A satisfaz as identidades*

$$\begin{aligned} \alpha x_{1,1}[x_{1,1}, x_{2,1}] + \beta [x_{1,1}, x_{2,1}]x_{1,1} &\equiv 0; \\ e \\ \gamma x_{1,g}x_{2,h} + \delta x_{2,h}x_{1,g} &\equiv 0, \end{aligned}$$

para todo $g, h \in G$ com $g \neq h$.

Observe que $\gamma x_{1,1}x_{2,g} + \delta x_{2,g}x_{1,1}$ não é uma identidade de K^g nem de $\mathcal{G}_2^{1,g}$, para $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$. Portanto, como vimos nos Exemplos 3.2.8 e 3.2.9, as álgebras K^g e $\mathcal{G}_2^{1,g}$ não possuem multiplicidades limitadas por 1.

Exemplo 3.3.2. *Seja $g \in G \setminus \{1\}$ e denote por $K^{1,g}$ a álgebra K do Exemplo 3.1.4 munida da seguinte G -gradação:*

$$(K^{1,g})^{(1)} = Fe_{22} + Fe_{12}, (K^{1,g})^{(g)} = Fe_{23} + Fe_{13} \text{ e } (K^{1,g})^{(r)} = \{0\},$$

para todo $r \in G \setminus \{1, g\}$. Um cálculo simples nos mostra que $x_{1,1}[x_{2,1}, x_{3,1}]$, $x_{1,g}x_{2,1}$ e $x_{1,r}$ são identidades de $K^{1,g}$. Portanto, $K^{1,g}$ satisfaz as hipóteses do teorema acima. De fato, em [6, Lema 3.8] os autores exibiram completamente a decomposição dos $\langle n \rangle$ -cocaracteres de $K^{1,g}$, mostrando que todas suas multiplicidades são limitadas por 1.

Diante desses resultados e motivados pelo Teorema 1.0.4, iniciamos uma busca por resultados envolvendo álgebras G -graduadas e multiplicidades limitadas por uma constante qualquer. Analisando a decomposição do $\langle n \rangle$ -cocaracter das álgebras UT_2^g no Exemplo 3.2.10 vimos que suas multiplicidades não são limitadas por uma constante. Consequentemente, se A é uma álgebra G -graduada cujas multiplicidades são limitadas por constante, então pela Observação 3.2.2, temos que $UT_2^g \notin \text{var}^G(A)$, para todo $g \in G$.

A seguir, provaremos uma sequência de resultados relacionando multiplicidades limitadas por constante e G -identidades. Nos enunciados, G denota um grupo finito, A é uma álgebra G -graduada e $\chi_{\langle n \rangle}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}$ o seu $\langle n \rangle$ -cocaracter.

Teorema 3.3.3. [42] *Se existe uma constante q tal que $m_{\langle \lambda \rangle} \leq q$, então A satisfaz identidades de grau $n > q$, do tipo*

$$f_g := \sum_{i=1}^n \alpha_i^g x_{1,1}^{i-1} x_{2,g} x_{1,1}^{n-i}, \quad (3.6)$$

para cada $g \in G$ e $\alpha_i^g \in F$ não simultaneamente nulos.

Demonstração. Inicialmente, observamos que, como $m_{\langle \lambda \rangle} \leq q$, para toda multipartição $\langle \lambda \rangle$, isto vale particularmente para uma multipartição do tipo $((\lambda_1)_1)$. Então segue de [31, Observação (a)] que A satisfaz uma identidade do tipo

$$f_1 := \sum_{i=1}^n \alpha_i^1 x_{1,1}^{i-1} x_{2,1} x_{1,1}^{n-i}.$$

Consideramos agora $n \geq q + 1$ e $g \in G \setminus \{1\}$. Seja $\lambda = ((n-1)_1, (1)_g)$ a multipartição cujo vetor de altura máxima associado é $f_{\langle \lambda \rangle} = x_{1,1}^{n-1} x_{2,g}$. Para cada $i = 1, \dots, n$, consideramos a multitabela

$$T_{\langle \lambda \rangle}^i = \left(\boxed{1} \boxed{2} \cdots \boxed{i-1} \boxed{n} \boxed{i+1} \cdots \boxed{n-1} \boxed{1}, \boxed{i} \boxed{g} \right)$$

cujas permutação correspondente é $\sigma_i = (n \ i)$. Logo, o vetor de altura máxima associado a $T_{\langle \lambda \rangle}^i$ é

$$f_{T_{\langle \lambda \rangle}^i} = f_{\langle \lambda \rangle} \sigma_i^{-1} = x_{1,1}^{i-1} x_{2,g} x_{1,1}^{n-i}.$$

Observe que, para $1 \leq i \leq n$, temos n tabelas do tipo $T_{\langle \lambda \rangle}^i$ e n vetores de altura máxima $f_{T_{\langle \lambda \rangle}^i}$ associados. Desde que $m_{\langle \lambda \rangle} \leq q < n$, pelo Teorema 3.2.6, para cada $g \in G$, $g \neq 1$, existem α_i^g não todos nulos tais que

$$f_g = \sum_{i=1}^n \alpha_i^g f_{T_{\langle \lambda \rangle}^i} = 0 \text{ mod } Id^G(A).$$

Logo, A satisfaz identidades do tipo $\sum_{i=1}^n \alpha_i^g x_{1,1}^{i-1} x_{2,g} x_{1,1}^{n-i}$, como queríamos. $\square$

O próximo resultado relaciona as variedades de álgebras que satisfazem identidades do tipo f_g descritas no lema anterior e a exclusão de álgebras da variedade.

Lema 3.3.4. [42] *Se para cada $g \in G$, temos que A satisfaz uma identidade do tipo*

$$f_g = \sum_{i=1}^n \alpha_i^g x_{1,1}^{i-1} x_{2,g} x_{1,1}^{n-i}$$

onde α_i^g não são todos nulos então $UT_2^g \notin \text{var}^G(A)$, para todo $g \in G$.

Demonstração. Para $g = 1$ e $f_1 \in Id^G(A)$, segue do Teorema 1.0.4 que $UT_2^1 \notin var^G(A)$. Agora considere $g \in G \setminus \{1\}$ e $f_g \in Id^G(A)$.

Afirmamos que f_g não é uma identidade de UT_2^g . De fato, suponha por absurdo que $f_g \in Id^G(UT_2^g)$ e considere a avaliação $\varphi(\bar{x}_{1,1}) = \beta e_{11} + e_{22}$ e $\varphi(x_{1,g}) = e_{12}$, onde $\beta \in F$ é um escalar não nulo. Então,

$$\varphi(f_g) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^g \beta^{i-1} e_{12} = 0$$

e, conseqüentemente, $\sum_{i=1}^n \alpha_i^g \beta^{i-1} = 0$. Como F é infinito, escolhemos distintos $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1} \in F$ e obtemos o sistema de equações lineares

$$\Delta \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0,$$

onde $\Delta = (\beta_i^j)$ é a matriz de Vandermonde. Portanto, temos que $\alpha_0 = \dots = \alpha_n = 0$ e $f_g = 0$, um absurdo. Logo, UT_2^g não satisfaz f_g e portanto $UT_2^g \notin var^G(A)$, para todo $g \in G$. Assim, $UT_2^g \notin var^G(A)$, para todo $g \in G$. $\square$

Em 2013, Cirrito e Giambruno [4] provaram uma relação entre as multiplicidades limitadas por constante e a exclusão das álgebras UT_2^g da variedade, onde $g \in G$.

Teorema 3.3.5. [4] *Existe uma constante q tal que $m_{\langle \lambda \rangle} \leq q$, para todo n e $\langle \lambda \rangle \vdash n$, se e somente se, $UT_2^g \notin var^G(A)$, para todo $g \in G$.*

Vamos finalizar este capítulo unindo o teorema acima e os resultados obtidos e assim, teremos o principal resultado desta seção. Tal resultado nos fornece uma relação entre G -identidades, multiplicidades limitadas por constante e exclusão de álgebras G -graduadas da variedade, estendendo assim o Teorema 1.0.4 para o contexto de álgebras G -graduadas.

Teorema 3.3.6. [42] *As seguintes condições são equivalentes:*

- 1) *Existe uma constante q tal que para todo n e para qualquer $\langle \lambda \rangle \vdash n$ temos $m_{\langle \lambda \rangle} \leq q$.*
- 2) *A satisfaz identidades do tipo $f_g = \sum_{i=1}^n \alpha_i^g x_{1,1}^{i-1} x_{2,g} x_{1,1}^{n-i}$, para todo $g \in G$.*
- 3) *$UT_2^g \notin var^G(A)$, para todo $g \in G$.*

Demonstração. A demonstração segue do Lema 3.3.4 e dos Teoremas 3.3.3 e 3.3.5. $\square$

Capítulo 4

Álgebras C_2 -graduadas munidas de uma involução graduada

Neste capítulo, definiremos as $*$ -superálgebras e exibiremos exemplos e ferramentas utilizadas para provar a caracterização de $*$ -superálgebras com multiplicidades limitadas por 1 via identidades, provada por Martino em [30]. Vale destacar que tal resultado motivou o estudo da caracterização para o caso de álgebras G -graduadas munidas de uma involução graduada, que será tratada no próximo capítulo. Temos como objetivo principal apresentar resultados de $*$ -superálgebras com multiplicidades limitadas por constante a partir de suas $(C_2, *)$ -identidades que se encontram em [42].

4.1 $*$ -superálgebras

Neste capítulo, fixaremos $G = C_2$ um grupo multiplicativo de ordem 2, g o seu gerador e $A = A^{(1)} \oplus A^{(g)}$ uma superálgebra munida de uma involução $*$.

Definição 4.1.1. *Sejam A uma superálgebra e $*$ uma involução em A . Se $(A^{(1)})^* = A^{(1)}$ e $(A^{(g)})^* = A^{(g)}$ então dizemos que A é uma $(C_2, *)$ -álgebra, ou ainda, que A é um $*$ -superálgebra.*

No caso em que A é uma $*$ -superálgebra dizemos que $*$ é uma involução graduada.

Notamos que qualquer $*$ -álgebra munida da C_2 -gradação trivial é uma $*$ -superálgebra. Logo, o estudo das $*$ -superálgebras generaliza o estudo das álgebras com involução.

Se A é uma superálgebra comutativa, então a involução trivial é uma involução graduada em A . Portanto, toda superálgebra comutativa é uma $*$ -superálgebra quando munida da involução trivial.

Exemplo 4.1.2. *Considere a superálgebra $F \oplus F$ munida da C_2 -gradação $(F \oplus F)^{(1)} = \{(a, a) \mid a \in F\}$ e $(F \oplus F)^{(g)} = \{(a, -a) \mid a \in F\}$. A involução troca, definida no*

Exemplo 2.1.2. é uma involução graduada nessa superálgebra e, portanto, temos uma *-superálgebra.

Se A é uma *-superálgebra, podemos decompor as componentes $A^{(1)}$ e $A^{(g)}$ em uma soma direta de subespaços, onde $A^{(1)} = (A^{(1)})^+ \oplus (A^{(1)})^-$ e $A^{(g)} = (A^{(g)})^+ \oplus (A^{(g)})^-$, em que $(A^{(h)})^+ = \{a \in A^{(h)} \mid a^* = a\}$ e $(A^{(h)})^- = \{a \in A^{(h)} \mid a^* = -a\}$, com $h \in \{1, g\}$. Com isso, toda *-superálgebra pode ser decomposta em uma soma direta de quatro subespaços:

$$A = (A^{(1)})^+ \oplus (A^{(1)})^- \oplus (A^{(g)})^+ \oplus (A^{(g)})^-.$$

Chamaremos os subespaços $(A^{(1)})^+$, $(A^{(1)})^-$, $(A^{(g)})^+$ e $(A^{(g)})^-$ de componentes simétrica par, antissimétrica par, simétrica ímpar e antissimétrica ímpar de A , respectivamente.

Exemplo 4.1.3. A álgebra M apresentada no Exemplo 2.1.4 munida da graduação trivial e da involução reflexão é uma *-superálgebra que denotaremos nesta seção por M_* . Além disso, a álgebra M com a C_2 -graduação dada por

$$M^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in F \right\} \quad e \quad M^{(g)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid c, d \in F \right\}$$

e com a involução reflexão é uma *-superálgebra, a qual será denotada por M^{gr_i} .

Exemplo 4.1.4. A álgebra $M_2(F)$ munida da graduação trivial e involução simplética, definida no Exemplo 2.1.5, é uma *-superálgebra e será denotada por $(M_{2,0}(F), s)$. Em $M_2(F)$ consideramos também a C_2 -graduação não trivial

$$M_2(F)^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in F \right\} \quad e \quad M_2(F)^{(g)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid b, c \in F \right\}$$

e a involução simplética. Denotaremos essa última *-superálgebra por $(M_{1,1}(F), s)$.

Consideremos X um conjunto infinito enumerável de variáveis. Escrevendo X como uma união disjunta de quatro conjuntos $X = Y^{(1)} \cup Z^{(1)} \cup Y^{(g)} \cup Z^{(g)}$, onde $Y^{(1)} = \{y_{1,1}, y_{2,1}, \dots\}$, $Z^{(1)} = \{z_{1,1}, z_{2,1}, \dots\}$, $Y^{(g)} = \{y_{1,g}, y_{2,g}, \dots\}$ e $Z^{(g)} = \{z_{1,g}, z_{2,g}, \dots\}$, definimos a *-superálgebra livre $\mathcal{F} = F\langle X \mid C_2, * \rangle$ dando uma superestrutura em $\mathcal{F}$ ao determinar que as variáveis em $Y^{(1)} \cup Z^{(1)}$ são homogêneas de grau 1 e aquelas em $Y^{(g)} \cup Z^{(g)}$ são homogêneas de grau g . Também definimos uma involução sobre $\mathcal{F}$ exigindo que as variáveis em $Y^{(1)} \cup Y^{(g)}$ são simétricas e as variáveis em $Z^{(1)} \cup Z^{(g)}$ são antissimétricas.

Dessa forma, temos que $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{(1)} + \mathcal{F}^{(g)}$, onde $\mathcal{F}^{(1)}$ é o subespaço gerado por todos os monômios nas variáveis em X que têm um número par de variáveis de grau 1 e $\mathcal{F}^{(g)}$

é o subespaço gerado por todos os monômios nas variáveis em X que têm um número ímpar de variáveis de grau g . Visto que $(\mathcal{F}^{(1)})^* = \mathcal{F}^{(1)}$ e $(\mathcal{F}^{(g)})^* = \mathcal{F}^{(g)}$, temos que $\mathcal{F}$ tem estrutura de $(C_2, *)$ -superálgebra. Os elementos de $\mathcal{F}$ são chamados de $(C_2, *)$ -polinômios.

Iremos nos referir às variáveis em $Y^{(1)}$ como sendo simétricas pares, $Z^{(1)}$ como sendo antissimétricas pares, $Y^{(g)}$ como sendo simétricas ímpares e as variáveis em $Z^{(g)}$ como sendo antissimétricas ímpares.

Dizemos que um $(C_2, *)$ -polinômio

$$f = f(y_{1,1}, \dots, y_{m,1}, z_{1,1}, \dots, z_{n,1}, y_{1,g}, \dots, y_{p,g}, z_{1,g}, \dots, z_{q,g})$$

é uma $(C_2, *)$ -identidade para uma $(C_2, *)$ -superálgebra A , e escrevemos $f \equiv 0$ em A , se

$$f(a_{1,1}^+, \dots, a_{m,1}^+, a_{1,1}^-, \dots, a_{n,1}^-, a_{1,g}^+, \dots, a_{p,g}^+, a_{1,g}^-, \dots, a_{q,g}^-) = 0,$$

para quaisquer $a_{1,1}^+, \dots, a_{m,1}^+ \in (A^{(1)})^+$, $a_{1,1}^-, \dots, a_{n,1}^- \in (A^{(1)})^-$, $a_{1,g}^+, \dots, a_{p,g}^+ \in (A^{(g)})^+$ e $a_{1,g}^-, \dots, a_{q,g}^- \in (A^{(g)})^-$.

O ideal das $(C_2, *)$ -identidades de A é o conjunto

$$Id^{(C_2, *)}(A) = \{f \in \mathcal{F} \mid f \equiv 0 \text{ em } A\}.$$

É claro que $Id^{(C_2, *)}(A)$ é um ideal de $\mathcal{F}$ invariante sob todos os endomorfismos de $\mathcal{F}$ que preservam a C_2 -graduação e comutam com a involução, isto é, $Id^{(C_2, *)}(A)$ é um $T_{(C_2, *)}$ -ideal de $\mathcal{F}$.

Como F tem característica zero, $Id^{(C_2, *)}(A)$ é determinado pelos seus $(C_2, *)$ -polinômios multilineares. Usamos a notação $\langle f_1, \dots, f_m \rangle_{T_{(C_2, *)}}$ para indicar que $Id^{(C_2, *)}(A)$ é gerado como T_2^* -ideal por $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{F}$.

Analogamente à definição correspondente no caso ordinário, a classe de todas as $(C_2, *)$ -superálgebras que satisfazem as $(C_2, *)$ -identidades de uma dada $(C_2, *)$ -superálgebra A é chamada de variedade de $(C_2, *)$ -superálgebras (ou $(C_2, *)$ -variedade) gerada por A e será denotada por $\mathcal{V} = var^{(C_2, *)}(A)$.

Nos próximos exemplos, denotaremos por $x_{i,h}$ uma variável qualquer no conjunto $\{y_{i,h}, z_{i,h}\}$, $h \in C_2$. Os itens do exemplo seguinte podem ser consultados em [7, 18, 29, 32].

Exemplo 4.1.5. Para as $(C_2, *)$ -álgebras descritas anteriormente temos:

- 1) $Id^{(C_2, *)}(M_*) = \langle z_{1,1}z_{2,1}, x_{1,g} \rangle_{T_{(C_2, *)}};$
- 2) $Id^{(C_2, *)}(M^{gri}) = \langle z_{1,1}, x_{1,g}x_{2,g} \rangle_{T_{(C_2, *)}};$
- 3) $Id^{(C_2, *)}((M_{1,1}(F), s)) = \langle [x_{1,1}, x_{2,1}], y_{1,g} \rangle_{T_{(C_2, *)}};$
- 4) $Id^{(C_2, *)}((M_{2,0}(F), s)) = \langle [y_{1,1}, y_{2,1}], [y_{1,1}, z_{2,1}], x_{1,g} \rangle_{T_{(C_2, *)}}.$

Para $n \geq 1$, consideramos o espaço dos $(C_2, *)$ -polinômios multilineares de grau n dado por

$$P_n^{(C_2, *)} = \text{span}_F \{w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(n)} \mid w_i \in \{y_{i,1}, y_{i,g}, z_{i,1}, z_{i,g}\}, 1 \leq i \leq n; \sigma \in S_n\}.$$

Observe que se $f \in P_n^{(C_2, *)}$, então as variáveis $y_{i,1}$, $y_{i,g}$, $z_{i,1}$ e $z_{i,g}$ não podem aparecer simultaneamente em um mesmo monômio de f , com $i = 1, \dots, n$, mas exatamente uma delas aparece em cada monômio. Além disso, observe que $\dim_F P_n^{(C_2, *)} = 4^n n!$.

Para $n \geq 1$, consideramos o espaço quociente

$$P_n^{(C_2, *)}(A) = \frac{P_n^{(C_2, *)}}{P_n^{(C_2, *)} \cap Id^{(C_2, *)}(A)}$$

e denotamos por $c_n^{(C_2, *)}(A)$ a sua dimensão, chamada de n -ésima $(C_2, *)$ -codimensão de A .

Assim como nos outros contextos, vários autores têm estudado a sequência de $(C_2, *)$ -codimensões no intuito de caracterizar $(C_2, *)$ -variedades através do comportamento assintótico desta sequência. Para o leitor interessado nesse estudo, recomendamos a referência [13] e [18].

Considere a seguinte subálgebra de UT_4

$$A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in F \right\}$$

com graduação dada por:

$$A_2^{(1)} = F(e_{11} + e_{44}) \text{ e } A_2^{(g)} = Fe_{12} + Fe_{34}.$$

A álgebra A_2 munida com a involução reflexão e essa graduação é uma $*$ -superálgebra e a denotamos por A_2^{gri} . Em [21], Ioppolo e La Mattina descreveram completamente o $T_{(C_2, *)}$ -ideal e a sequência de $(C_2, *)$ -codimensões desta $*$ -superálgebra.

Exemplo 4.1.6. De acordo com [21, Teorema 5.1] temos que

$$Id^{(C_2, *)}(A_2^{gri}) = \langle z_{1,1}, x_{1,g}x_{2,g}, y_{1,1}x_{1,g}y_{2,1} \rangle_{T_{(C_2, *)}}.$$

De [28, Lema 3.8], temos que $c_n^{(C_2, *)}(A_2^{gri}) = 4n + 1$.

4.2 O $\langle n \rangle$ -cocaracter

Para um inteiro $n \geq 1$, escrevemos $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ como a soma de quatro inteiros não negativos e denotamos por $\langle n \rangle$ a quádrupla (n_1, n_2, n_3, n_4) . Uma multipartição

$\langle \lambda \rangle = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ é tal que $\lambda_i \vdash n_i$ é uma partição de n_i para $1 \leq i \leq 4$ que denotamos por $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$.

Para cada composição $\langle n \rangle = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ fixa, denotamos por $P_{\langle n \rangle}$ o espaço dos $(C_2, *)$ -polinômios multilineares em que as primeiras n_1 variáveis são simétricas pares, as seguintes n_2 variáveis são antissimétricas pares, as próximas n_3 variáveis são simétricas ímpares e as últimas n_4 variáveis são antissimétricas ímpares.

Observe que, para cada escolha de $\langle n \rangle$, existem $\binom{n}{\langle n \rangle}$ subespaços isomorfos a $P_{\langle n \rangle}$. Além disso, temos

$$P_n^{(C_2, *)} \cong \bigoplus_{\langle n \rangle} \binom{n}{\langle n \rangle} P_{\langle n \rangle}.$$

Considerando o seguinte espaço quociente

$$P_{\langle n \rangle}(A) = \frac{P_{\langle n \rangle}}{P_{\langle n \rangle} \cap \text{Id}^{(C_2, *)}(A)},$$

definimos $c_{\langle n \rangle}(A) = \dim_F P_{\langle n \rangle}(A)$ a $\langle n \rangle$ -codimensão de A . Pelo observado acima, segue que

$$c_n^{(C_2, *)}(A) = \sum_{\langle n \rangle} \binom{n}{\langle n \rangle} c_{\langle n \rangle}(A). \quad (4.1)$$

Considerando o espaço quociente $P_{\langle n \rangle}(A)$ e o grupo $S_{\langle n \rangle} = S_{n_1} \times S_{n_2} \times S_{n_3} \times S_{n_4}$ podemos definir uma ação à esquerda de $S_{\langle n \rangle}$ sobre $P_{\langle n \rangle}$ dada pela permutação dos quatro conjuntos de variáveis separadamente, isto é, S_{n_1} age permutando as primeiras n_1 variáveis simétricas pares, S_{n_2} age permutando as seguintes n_2 variáveis antissimétricas pares, e assim por diante. Com isso, temos que $P_{\langle n \rangle}$ é um $S_{\langle n \rangle}$ -módulo à esquerda.

Exemplo 4.2.1. *Sejam $\langle 8 \rangle = (4, 2, 1, 1)$, $\sigma = ((1432), (56), (7), (8))$ e $f = y_{1,1}z_{8,g}y_{2,1}y_{4,1}y_{7,g}z_{5,1}z_{6,1}y_{3,1} \in P_{\langle 8 \rangle}$. Então*

$$\begin{aligned} \sigma f &= y_{\sigma(1),1}z_{\sigma(8),g}y_{\sigma(2),1}y_{\sigma(4),1}y_{\sigma(7),g}z_{\sigma(5),1}z_{\sigma(6),1}y_{\sigma(3),1} \\ &= y_{4,1}z_{8,g}y_{1,1}y_{3,1}y_{7,g}z_{6,1}z_{5,1}y_{2,1}. \end{aligned}$$

Como o $T_{(C_2, *)}$ -ideal de A é invariante sob a ação descrita acima, temos que $P_{\langle n \rangle}(A)$ também tem estrutura de $S_{\langle n \rangle}$ -módulo. Denotaremos o $S_{\langle n \rangle}$ -caracter de $P_{\langle n \rangle}(A)$ por $\chi_{\langle n \rangle}(A)$ e o chamaremos de $\langle n \rangle$ -cocaracter de A .

É conhecido que existe uma correspondência biunívoca entre as multipartições $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$ e os $S_{\langle n \rangle}$ caracteres irredutíveis. Além disso, os $S_{\langle n \rangle}$ -caracteres irredutíveis são produtos tensoriais dos caracteres irredutíveis de S_{n_1} , S_{n_2} , S_{n_3} e S_{n_4} . Portanto $\chi_{\langle n \rangle}(A)$ pode ser escrito na forma

$$\chi_{\langle n \rangle}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}, \quad (4.2)$$

onde $\chi_{\langle \lambda \rangle} = \chi_{\lambda_1} \otimes \chi_{\lambda_2} \otimes \chi_{\lambda_3} \otimes \chi_{\lambda_4}$ denota o $S_{\langle n \rangle}$ -caracter irredutível correspondente a $\langle \lambda \rangle$ e $m_{\langle \lambda \rangle}$ é sua respectiva multiplicidade.

Portanto,

$$c_{\langle n \rangle}(A) = \chi_{\langle n \rangle}(A)(1) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m_{\langle \lambda \rangle} d_{\langle \lambda \rangle}, \quad (4.3)$$

onde $d_{\langle \lambda \rangle}$ denota o grau do $S_{\langle n \rangle}$ -caracter irredutível $\chi_{\langle \lambda \rangle}$ dado por $d_{\langle \lambda \rangle} = d_{\lambda_1} d_{\lambda_2} d_{\lambda_3} d_{\lambda_4}$, onde d_{λ_i} é o grau do S_{n_i} -caracter irredutível χ_{λ_i} , calculado pela Fórmula do Gancho.

Como no caso ordinário, temos a seguinte observação sobre as sequências de $\langle n \rangle$ -cocaracteres.

Observação 4.2.2. *Sejam A e B $\ast$ -superálgebras cujos $\langle n \rangle$ -cocaracteres são, respectivamente, $\chi_{\langle n \rangle}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}$ e $\chi_{\langle n \rangle}(B) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m'_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}$. Se $B \in \text{var}^{(C_2, \ast)}(A)$ então $m'_{\langle \lambda \rangle} \leq m_{\langle \lambda \rangle}$, para todo $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ e $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$.*

Afim de obter informações mais precisas sobre as multiplicidades $m_{\langle \lambda \rangle}$ que aparecem na decomposição do $\langle n \rangle$ -cocaracter $\chi_{\langle n \rangle}(A)$ descrito em (4.2), nos baseamos nos resultados conhecidos para o grupo linear geral GL_m . A teoria desenvolvida aqui pode ser consultada detalhadamente em [9, Seção 12.4].

Sejam $m \geq 1$ e F_m o espaço dos $(C_2, \ast)$ -polinômios nas variáveis $y_{1,1}, \dots, y_{m,1}, z_{1,1}, \dots, z_{m,1}, y_{1,g}, \dots, y_{m,g}, z_{1,g}, \dots, z_{m,g}$, e consideremos os espaços vetoriais $U_1 = \text{span}_F\{y_{1,1}, \dots, y_{m,1}\}$, $U_2 = \text{span}_F\{z_{1,1}, \dots, z_{m,1}\}$, $U_3 = \text{span}_F\{y_{1,g}, \dots, y_{m,g}\}$ e $U_4 = \text{span}_F\{z_{1,g}, \dots, z_{m,g}\}$.

O grupo $GL(U_1) \times GL(U_2) \times GL(U_3) \times GL(U_4) \cong GL_m^4$ age naturalmente à esquerda sobre o subespaço $U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4$ de F_m e temos que esta ação pode ser estendida diagonalmente à uma ação sobre F_m . Considere $n \geq m$ e denote por F_m^n o subespaço dos $(C_2, \ast)$ -polinômios homogêneos de F_m com grau n , temos que o grupo GL_m^4 age diagonalmente sobre F_m^n e, assim F_m^n tem estrutura de GL_m^4 -módulo. Desde que $F_m^n \cap \text{Id}^{(C_2, \ast)}(A)$ é invariante sob essa ação, segue que o espaço quociente

$$F_m^n(A) = \frac{F_m^n}{F_m^n \cap \text{Id}^{(C_2, \ast)}(A)}$$

é um GL_m^4 -módulo à esquerda, cujo caracter será denotado por $\psi_n^{gr}(A)$.

Para uma composição $\langle n \rangle$ de n , é conhecido a existência de uma correspondência biunívoca entre os GL_m^4 -módulos irredutíveis e as multipartições de $\langle \lambda \rangle = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ de $\langle n \rangle$, onde λ_i é uma partição de n_i em no máximo m partes, para todo $i = 1, \dots, 4$. Portanto se denotarmos por $\psi_{\langle \lambda \rangle}$ o GL_m^4 -caracter irredutível correspondente a multipartição $\langle \lambda \rangle$ então podemos escrever

$$\psi_n^{(C_2, \ast)}(A) = \sum_{\langle n \rangle} \sum_{\substack{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle \\ h(\langle \lambda \rangle) \leq m}} \tilde{m}_{\langle \lambda \rangle} \psi_{\langle \lambda \rangle}, \quad (4.4)$$

onde $\tilde{m}_{\langle \lambda \rangle}$ é a multiplicidade de $\psi_{\langle \lambda \rangle}$ e $h(\langle \lambda \rangle) = \max\{h(\lambda_i), i = 1, 2, 3, 4\}$, sendo $h(\lambda_i)$ o número de partes da partição $\lambda_i \vdash n_i$.

Analogamente ao caso de álgebras com involução (veja [11, Teorema 3]), é possível relacionar o $\langle n \rangle$ -cocaracter e o GL_m^4 -cocaracter de uma $*$ -superálgebra A .

Teorema 4.2.3. *Seja A uma $*$ -superálgebra e considere $\chi_{\langle n \rangle}(A)$ e $\psi_n^{(C_2, *)}(A)$ o $\langle n \rangle$ -cocaracter e o GL_m^4 -cocaracter de A como dados em (4.2) e (4.4), respectivamente. Então, $m_{\langle \lambda \rangle} = \tilde{m}_{\langle \lambda \rangle}$ para todas multipartições $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$ tais que $h(\langle \lambda \rangle) \leq m$.*

De acordo com [9, Teorema 12.4.12], cada GL_m^4 -módulo irredutível é cíclico e é gerado por um polinômio $f_{\langle \lambda \rangle}$ não nulo associado a uma multipartição $\langle \lambda \rangle$ de $\langle n \rangle$, chamado vetor de altura máxima, definido conforme abaixo:

Para uma composição $\langle n \rangle$ e uma multipartição $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$ definimos o vetor de altura máxima associado a $\langle \lambda \rangle$ como

$$f_{\langle \lambda \rangle} = \prod_{i=1}^{(\lambda_1)_1} St_{h_i(\lambda_1)}(y_{1,1}, \dots, y_{h_i(\lambda_1),1}) \cdots \prod_{i=1}^{(\lambda_4)_1} St_{h_i(\lambda_4)}(z_{1,g}, \dots, z_{h_i(\lambda_4),g}), \quad (4.5)$$

onde $St_r(x_1, \dots, x_r)$ é o polinômio standard de grau r e $h_i(\lambda_j)$ é a altura da i -ésima coluna do diagrama de Young correspondente a partição $\lambda_j \vdash n_j$.

Além disso, $f_{\langle \lambda \rangle}$ pode ser escrito unicamente como combinação linear de vetores $f_{T_{\langle \lambda \rangle}}$ como construiremos a seguir.

Uma multitabela $T_{\langle \lambda \rangle} = (T_{\lambda_1}, T_{\lambda_2}, T_{\lambda_3}, T_{\lambda_4})$ é uma quádrupla formada por tabelas de Young T_{λ_i} associadas à uma partição $\lambda_i \vdash n_i$, para $1 \leq i \leq 4$. A multitabela padrão $\tilde{T}_{\langle \lambda \rangle}$ é a multitabela cujos inteiros $1, 2, \dots, n$ nesta ordem, preenchem de cima para baixo, da esquerda para direita, coluna por coluna, a tabela $\tilde{T}_{\lambda_1}$ até a tabela $\tilde{T}_{\lambda_4}$.

Exemplo 4.2.4. *Sejam $\langle 4 \rangle = (2, 0, 2, 0)$ e $\langle \lambda \rangle = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ tal que $\lambda_1 = (1^2) \vdash 2$, $\lambda_2 = \emptyset$, $\lambda_3 = (1^2)$, $\lambda_4 = \emptyset$. Então, a quádrupla abaixo representa uma multitabela $T_{\langle \lambda \rangle}$ associada à multipartição $\langle \lambda \rangle$,*

$$\left(\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, \emptyset, \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}, \emptyset \right). \quad (4.6)$$

A multitabela padrão correspondente a $\langle \lambda \rangle$ é descrita a seguir

$$\left(\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, \emptyset, \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}, \emptyset \right). \quad (4.7)$$

Para uma multitabela qualquer $T_{\langle \lambda \rangle}$, definimos o vetor de altura máxima associado a $T_{\langle \lambda \rangle}$ como sendo o polinômio $f_{T_{\langle \lambda \rangle}} := f_{\langle \lambda \rangle} \sigma^{-1}$, onde $\sigma \in S_n$ é a única permutação que transforma $\tilde{T}_{\langle \lambda \rangle}$ na multitabela $T_{\langle \lambda \rangle}$ e a ação à direita de S_n sobre $F_m^n(A)$ é definida pela troca dos lugares das variáveis em cada monômio.

Exemplo 4.2.5. *Sejam $\langle \lambda \rangle$ e $T_{\langle \lambda \rangle}$ a multipartição e tabela definidas no Exemplo 4.2.4. Então*

$$f_{\langle \lambda \rangle} = [y_{1,1}, y_{2,1}][y_{1,g}, y_{2,g}]$$

é o vetor de altura máxima associado a $\langle \lambda \rangle$. A permutação associada a $T_{\langle \lambda \rangle}$ é dada por $\sigma = (14)$ e o vetor de altura máxima associado a $T_{\langle \lambda \rangle}$ é o polinômio $f_{T_{\langle \lambda \rangle}} \sigma^{-1} = [y_{1,1}, y_{2,1}][y_{1,g}, y_{2,g}](14) = y_{2,g}y_{2,1}y_{1,g}y_{1,1} - y_{2,g}y_{1,1}y_{1,g}y_{2,1} - y_{1,g}y_{2,1}y_{2,g}y_{1,1} + y_{1,g}y_{1,1}y_{2,g}y_{2,1}$.

O próximo resultado, relaciona os vetores de altura máxima às multiplicidades do Teorema 4.2.3.

Teorema 4.2.6 ([9], Teorema 12.4.12). *A multiplicidade $\tilde{m}_{\langle \lambda \rangle}$ em (4.4) é não nula se, e somente se, existe uma multitabela $T_{\langle \lambda \rangle}$, tal que $f_{T_{\langle \lambda \rangle}} \notin Id^{(C_2, *)}(A)$. Além disso, $\tilde{m}_{\langle \lambda \rangle}$ é igual ao número máximo de vetores $f_{T_{\langle \lambda \rangle}} \notin Id^{(C_2, *)}(A)$ que são linearmente independentes em $F_m^n(A)$.*

De agora em diante, será conveniente usarmos a notação

$$\langle \lambda \rangle = ((\lambda_1)_{1+}, (\lambda_2)_{1-}, (\lambda_3)_{g+}, (\lambda_4)_{g-})$$

onde $(\lambda_1)_{1+}$ significa que (λ_1) é a partição de n_1 , $(\lambda_2)_{1-}$ significa que (λ_2) é a partição de n_2 , $(\lambda_3)_{g+}$ significa que (λ_3) é a partição de n_3 , e $(\lambda_4)_{g-}$ significa que (λ_4) é a partição de n_4 . Além disso, as partições vazias serão omitidas nessa notação.

A seguir daremos um exemplo de como calcular, na prática, as multiplicidades da decomposição do cocaracter de uma $*$ -superálgebra usando as ferramentas acima.

Lema 4.2.7 ([28], Lema 3.11). *Para a álgebra A_2^{gri} , os únicos $\langle n \rangle$ -cocaracteres não nulos são*

$$\chi_{((n)_{1+})}, \quad 2\chi_{((n-1)_{1+}, (1)_{g+})} \quad \text{e} \quad 2\chi_{((n-1)_{1+}, (1)_{g-})}.$$

Demonstração. Pelo Exemplo 4.1.6 e usando as Equações (4.1) e (4.3), podemos observar que

$$4n + 1 = c_n^{gri}(A_2^{gri}) = d_{((n)_{1+})} + 2 \binom{n}{n-1} d_{((n-1)_{1+})} d_{((1)_{g+})} + 2 \binom{n}{n-1} d_{((n-1)_{1+})} d_{((1)_{g-})}.$$

Logo, basta mostrarmos que $m_{\langle \lambda_1 \rangle} \geq 1$ e $m_{\langle \lambda_2 \rangle}, m_{\langle \lambda_3 \rangle} \geq 2$, onde $\langle \lambda_1 \rangle = ((n)_{1+})$, $\langle \lambda_2 \rangle = ((n-1)_{1+}, (1)_{g+})$ e $\langle \lambda_3 \rangle = ((n-1)_{1+}, (1)_{g-})$.

Considere o único vetor de altura máxima $f_{T_{\lambda_1}} = y_{1,1}^n$ associado à multipartição $\langle \lambda_1 \rangle$. Fazendo a avaliação $y_{1,1} = e_{11} + e_{44}$, obtemos $f_{T_{\lambda_1}} \notin Id^{(C_2, *)}(A_2^{gri})$ e, portanto, $m_{\lambda_1} = 1$.

Para a multipartição $\langle \lambda_2 \rangle$, consideramos as multitabelas

$$T_{\langle \lambda_2 \rangle} = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \hline \end{array} \right)_{1+}, \left(\begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline \end{array} \right)_{g+} \quad \text{e} \quad f_{T_{\langle \lambda_2 \rangle}} = y_{1,1}^{n-1} y_{1,g}$$

$$T'_{\langle \lambda_2 \rangle} = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline n & 2 & \cdots & n-1 \\ \hline \end{array} \right)_{g-}, \left(\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \right)_{1+} \quad \text{e} \quad f_{T'_{\langle \lambda_2 \rangle}} = y_{1,g} y_{1,1}^{n-1}.$$

Fazendo a avaliação $y_{1,1} = e_{11} + e_{44}$ e $y_{1,g} = e_{12} + e_{34}$, obtemos $f_{T_{\langle \lambda_2 \rangle}}, f_{T'_{\langle \lambda_2 \rangle}} \notin Id^{(C_2,*)}(A_2^{gri})$. Considerando essa mesma avaliação, podemos verificar que esses polinômios são linearmente independentes módulo $Id^{(C_2,*)}(A_2^{gri})$. Pelo Teorema 4.2.6, temos $m_{\langle \lambda_2 \rangle} \geq 2$.

Agora, para a multipartição $\langle \lambda_3 \rangle$, considere os vetores de altura máxima correspondentes às multitabelas:

$$T_{\langle \lambda_3 \rangle} = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \hline \end{array} \Big|_{1+}, \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline \end{array} \Big|_{g-} \right) \quad \text{e} \quad f_{T_{\langle \lambda_3 \rangle}} = y_{1,1}^{n-1} z_{1,g}$$

$$T'_{\langle \lambda_3 \rangle} = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline n & 2 & \cdots & n-1 \\ \hline \end{array} \Big|_{1+}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \Big|_{g-} \right) \quad \text{e} \quad f_{T'_{\langle \lambda_3 \rangle}} = z_{1,g} y_{1,1}^{n-1}.$$

Fazendo a avaliação $y_{1,1} = e_{11} + e_{44}$ e $z_{1,g} = e_{12} - e_{34}$, temos que $f_{T_{\langle \lambda_3 \rangle}}, f_{T'_{\langle \lambda_3 \rangle}} \notin Id^{(C_2,*)}(A_2^{gri})$. Similarmente, é possível provar que esses polinômios são linearmente independentes módulo $Id^{(C_2,*)}(A_2^{gri})$ e, assim, $m_{\langle \lambda_3 \rangle} \geq 2$. Portanto, o resultado segue. $\square$

Usando as ferramentas apresentadas, é possível provar o seguinte resultado.

Exemplo 4.2.8. [20] Considere as *-superálgebras do Exemplo 4.1.3. Considerando o $\langle n \rangle$ -cocaracter de M_* , $\chi_{\langle n \rangle}(M_*) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash n} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}$, temos que

$$m_{\langle \lambda \rangle} = \begin{cases} 1, & \text{se } \langle \lambda \rangle = ((n)_{1+}); \\ q+1, & \text{se } \langle \lambda \rangle = ((p+q, p)_{1+}, (1)_{1-}), \quad 2p+q = n-1; \\ q+1, & \text{se } \langle \lambda \rangle = ((p+q, p)_{1+}), \quad 2p+q = n; \\ q+1, & \text{se } \langle \lambda \rangle = ((p+q, p, 1)_{1+}), \quad 2p+q = n-1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado, em $\chi_{\langle n \rangle}(M^{gri}) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash n} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}$, temos as seguintes multiplicidades

$$m_{\langle \lambda \rangle} = \begin{cases} 1, & \text{se } \langle \lambda \rangle = ((n)_{1+}); \\ q+1, & \text{se } \langle \lambda \rangle = ((p+q, p)_{1+}, (1)_{g+}); \\ q+1, & \text{se } \langle \lambda \rangle = ((p+q, p)_{1+}, (1)_{g-}); \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

onde $p, q \geq 0$ e $2p+q+1 = n$.

Exemplo 4.2.9. A *-superálgebra $(M_{2,0}(F), s)$ do Exemplo 4.1.4 possui multiplicidades limitadas por 1, de acordo com o Exemplo 2.3.3.

4.3 *-superálgebras com multiplicidades limitadas por constante

Em 2021, Martino [30] caracterizou as variedades de *-superálgebras cujas multiplicidades que aparecem na decomposição do seu $\langle n \rangle$ -cocaracter são limitadas por 1, forne-

cendo a extensão do resultado de Ananin e Kemer no contexto de *-superálgebras. Tal resultado é uma das principais motivações para um estudo mais geral que veremos no próximo capítulo. Enunciamos esse resultado a seguir.

Teorema 4.3.1. [30] *Sejam A uma *-superálgebra munida com uma involução graduada e $\chi_{\langle n \rangle}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}$ o seu $\langle n \rangle$ -cocaracter. Então para todo $n \geq 1$ e $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$, temos $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$ se, e somente se, A satisfaz pelo menos uma identidade de cada item*

$$\begin{array}{ll} 1) y_{1,1}y_{2,g} + \gamma_1 y_{2,g}y_{1,1} \equiv 0; & 4) z_{1,1}z_{2,g} + \gamma_4 z_{2,g}z_{1,1} \equiv 0; \\ 2) z_{1,1}y_{2,g} + \gamma_2 y_{2,g}z_{1,1} \equiv 0; & 5) y_{1,g}z_{2,g} + \gamma_5 z_{2,g}y_{1,g} \equiv 0; \\ 3) y_{1,1}z_{2,g} + \gamma_3 z_{2,g}y_{1,1} \equiv 0; & 6) y_{1,1}z_{2,1} + \gamma_6 z_{2,1}y_{1,1} \equiv 0; \end{array}$$

onde $\gamma_i \in \{0, 1, -1\}$ e $1 \leq i \leq 6$.

Exemplo 4.3.2. *Considere a *-superálgebra A_2^{gri} do Exemplo 4.1.6. Fazendo a avaliação $y_{1,1} \mapsto e_{11} + e_{44}$ e $y_{2,g} \mapsto e_{12} + e_{34}$ temos que $y_{1,1}y_{2,g} + \gamma_1 y_{2,g}y_{1,1}$ não é uma identidade de A_2^{gri} , para $\gamma_1 \in \{0, 1, -1\}$. Logo, A_2^{gri} não satisfaz todas as identidades do Teorema 4.3.1. Portanto, considerando o seu $\langle n \rangle$ -cocaracter, temos que suas multiplicidades não são limitadas por 1. O Lema 4.2.7 descreve o valor das multiplicidades não nulas.*

Exemplo 4.3.3. *Considere a *-superálgebra $(M_{1,1}(F), s)$ definida no Exemplo 4.1.4. Pelo Exemplo 4.1.5, temos que $M_{1,1}(F)$ satisfaz $y_{1,g} \equiv 0$ e $[x_{1,1}, x_{2,1}] \equiv 0$ com $x = y$ ou $x = z$. Logo, $M_{1,1}(F)$ satisfaz identidades em cada um dos itens 1, 2, 5, 6. Como $(M_{1,1}(F)^{(1)})^+ = F(e_{11} + e_{22})$, $(M_{1,1}(F)^{(1)})^- = F(e_{11} - e_{22})$, $(M_{1,1}(F)^{(g)})^+ = \{0\}$ e $(M_{1,1}(F)^{(g)})^- = Fe_{12} + Fe_{21}$, fazendo a avaliação $\bar{y}_{1,1} = e_{11} + e_{22}$, $\bar{z}_{1,1} = e_{11} - e_{22}$ e $\bar{z}_{1,g} = e_{12} + e_{21}$, nos itens 3 e 4, obtemos que $M_{1,1}(F)$ satisfaz $[y_{1,1}, z_{1,g}] \equiv 0$ e $z_{1,1} \circ z_{1,g} \equiv 0$. Portanto, pelo Teorema 4.3.1, as multiplicidades são limitadas por 1.*

Diante do Teorema 4.3.1 e motivados pelo Teorema 1.0.4, iniciamos uma busca por resultados envolvendo *-superálgebras e multiplicidades limitadas por uma constante qualquer. Observe que o Exemplo 4.2.8 nos fornece uma *-superálgebra cujas multiplicidades que aparecem no seu $\langle n \rangle$ -cocaracter não são limitadas por uma constante. Já no Exemplo 4.2.9, temos uma *-superálgebra cujas multiplicidades que aparecem no seu $\langle n \rangle$ -cocaracter são limitadas por uma constante igual a 1. No Lema 4.2.7 temos uma *-superálgebra cujas multiplicidades são limitadas por uma constante $k \geq 2$.

A seguir, provamos uma sequência de resultados relacionando multiplicidades limitadas por constante e $(C_2, *)$ -identidades. Estaremos sempre considerando A uma *-superálgebra satisfazendo uma identidade não trivial e $\chi_{\langle n \rangle}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash n} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}$ o seu $\langle n \rangle$ -cocaracter.

Teorema 4.3.4. [42] *Se existe uma constante q tal que $m_{\langle\lambda\rangle} \leq q$, então A satisfaz identidades de grau $n > q$, dos tipos:*

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^n \alpha_i y_{1,1}^{i-1} y_{2,g} y_{1,1}^{n-i}, \\ h &= \sum_{i=1}^n \beta_i y_{1,1}^{i-1} z_{1,1} y_{1,1}^{n-i}; \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde $\alpha_i, \beta_i \in F$ são constantes não todas nulas em cada polinômio.

Demonstração. Considere $n \geq q + 1$ e $\langle\lambda\rangle = ((n-1)_{1+}, (1)_{g+})$. Seja $T_{\langle\lambda\rangle}^i$ a multitabela abaixo

$$T_{\langle\lambda\rangle}^i : \left(\boxed{1} \boxed{2} \cdots \boxed{i-1} \boxed{n} \boxed{i+1} \cdots \boxed{n-1} \right)_{1+}, \boxed{i}_{g+},$$

cujas permutação associada é $\sigma = (n \ i)$. Logo, o vetor de altura máxima correspondente a $T_{\langle\lambda\rangle}^i$ é $f_{T_{\langle\lambda\rangle}^i} = f_{\langle\lambda\rangle} \sigma^{-1} = y_{1,1}^{i-1} y_{1,g} y_{1,1}^{n-i}$.

Observe que, para $1 \leq i \leq n$, temos n tabelas do tipo $T_{\langle\lambda\rangle}^i$ e n vetores de altura máxima $f_{T_{\langle\lambda\rangle}^i}$ associados. Como $m_{\langle\lambda\rangle} \leq q < n$, segue do Teorema 4.2.6 que existem α_i não todos nulos tais que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_{T_{\langle\lambda\rangle}^i} \equiv 0 \pmod{Id^{(C_2,*)}(A)}.$$

Logo, A satisfaz uma identidade do tipo

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_{1,1}^{i-1} y_{1,g} y_{1,1}^{n-i} \equiv 0.$$

Analogamente, consideramos a partição $\langle\lambda\rangle = ((n-1)_{1+}, (1)_{1-})$ podemos provar que A satisfaz

$$h = \sum_{i=1}^n \beta_i y_{1,1}^{i-1} z_{1,1} y_{1,1}^{n-i}$$

e assim concluímos o resultado. □

O próximo resultado é sobre as variedades de álgebras que satisfazem identidades do tipo (4.8) de um tipo particular.

Lema 4.3.5. [42] *Sejam A uma *-superálgebra e $\chi_{\langle n \rangle}(A) = \sum_{\langle\lambda\rangle \vdash n} m_{\langle\lambda\rangle} \chi_{\langle\lambda\rangle}$ o seu $\langle n \rangle$ -cocaracter. Se A satisfaz uma identidade de cada tipo:*

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^n \alpha'_i y_{1,1}^{i-1} y_{2,g} y_{1,1}^{n-i}, \\ h &= \sum_{i=1}^n \beta_i y_{1,1}^{i-1} z_{1,1} y_{1,1}^{n-i}; \end{aligned}$$

onde as constantes α'_i s não são todas nulas em f e $\sum_{i=1}^n \beta_i \neq 0$ em h , então M_* , M^{gri} , $(M_{2,0}(F), s)$, $(M_{1,1}(F), s) \notin var^{gri}(A)$.

Demonstração. Se A satisfaz $f \equiv 0$ então $M^{gri} \notin \text{var}^{(C_2,*)}(A)$. De fato, suponha que $M^{gri} \in \text{var}^{(C_2,*)}(A)$ e sejam $\bar{y}_{1,1} = \delta(e_{11} + e_{44}) + (e_{22} + e_{33})$ e $\bar{y}_{1,g} = e_{12} + e_{34}$ em M^{gri} , onde δ é um escalar não nulo. Então, $\bar{y}_{1,1}^{k-1} \bar{y}_{1,g} \bar{y}_{1,1}^{n-k} = \delta^{k-1} e_{12} + \delta^{n-k} e_{34}$ e,

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \delta^{k-1} e_{12} + \sum_{k=1}^n \alpha_k \delta^{n-k} e_{34} = 0$$

isto é,

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \delta^{k-1} e_{12} = 0 \text{ e } \sum_{k=1}^n \alpha_k \delta^{n-k} e_{34} = 0.$$

Logo, temos que $\sum_{k=1}^n \alpha_k \delta^{k-1} = 0$. Como F é infinito, escolhemos distintos $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1} \in F$ e obtemos o sistema de equações lineares

$$\Delta \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$$

onde $\Delta = (\gamma_i^j)$ é a matriz de Vandermonde. Portanto, temos que $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, absurdo. Logo, M^{gri} não satisfaz f .

Se A satisfaz $h \equiv 0$, então $M_* \notin \text{var}^{(C_2,*)}(A)$. De fato, suponha que $M_* \in \text{var}^{(C_2,*)}(A)$ e sejam $\bar{y}_{1,1} = \delta(e_{11} + e_{44}) + (e_{22} + e_{33})$ e $\bar{z}_{1,1} = e_{12} - e_{34}$ em M_* onde δ é um escalar não nulo. Então $\bar{y}_{1,1}^{k-1} \bar{z}_{1,1} \bar{y}_{1,1}^{n-k} = \delta^{k-1} e_{12} - \delta^{n-k} e_{34}$ e,

$$\sum_{k=1}^n \beta_k \delta^{k-1} e_{12} - \sum_{k=1}^n \beta_k \delta^{n-k} e_{34} = 0$$

isto é,

$$\sum_{k=1}^n \beta_k \delta^{k-1} e_{12} = 0 \text{ e } \sum_{k=1}^n \beta_k \delta^{n-k} e_{34} = 0.$$

Assim, temos que $\sum_{k=1}^n \beta_k \delta^{k-1} = 0$.

Como F é infinito, escolhemos distintos $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1} \in F$ e obtemos o sistema de equações lineares

$$\Delta \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = 0$$

onde $\Delta = (\gamma_i^j)$ é a matriz de Vandermonde. Portanto, temos que $\beta_1 = \dots = \beta_n = 0$, absurdo.

Se A satisfaz $h \equiv 0$, então $(M_{1,1}(F), s) \notin \text{var}^{(C_2,*)}(A)$. De fato, suponha que $(M_{1,1}(F), s) \in \text{var}^{(C_2,*)}(A)$ e sejam $\bar{y}_{1,1} = e_{11} + e_{22}$ e $\bar{z}_{1,1} = e_{11} - e_{22}$ em $(M_{1,1}(F), s)$. Então, $\bar{y}_{1,1}^{k-1} \bar{z}_{1,1} \bar{y}_{1,1}^{n-k} =$

$e_{11} - e_{22}$ e,

$$\sum_{k=1}^n \beta_k e_{11} - \sum_{k=1}^n \beta_k e_{22} = 0.$$

Desde que $\sum_{k=1}^n \beta_k \neq 0$, temos um absurdo.

Se A satisfaz $h \equiv 0$, então $(M_{2,0}(F), s) \notin \text{var}^{(C_2,*)}(A)$. De fato, suponha que $(M_{2,0}(F), s) \in \text{var}^{(C_2,*)}(A)$ e sejam $\bar{y}_{1,1} = e_{11} + e_{22}$ e $\bar{z}_{1,1} = e_{12}$ em $(M_{2,0}(F), s)$. Então $\bar{y}_{1,1}^{k-1} \bar{z}_{1,1} \bar{y}_{1,1}^{n-k} = e_{12}$ e

$$\sum_{k=1}^n \beta_k e_{12} = 0.$$

Desde que $\sum_{k=1}^n \beta_k \neq 0$, temos um absurdo.

Com isso, concluímos que $M_*, M^{gri}, (M_{2,0}(F), s), (M_{1,1}(F), s) \notin \text{var}^{(C_2,*)}(A)$. $\square$

Ao considerar A uma *-superálgebra finitamente gerada satisfazendo identidades como f e h do teorema anterior, teremos que as *-superálgebras $M_*, M^{gri}, (M_{2,0}(F), s)$, e $(M_{1,1}(F), s)$ estarão excluídas de $\text{var}^{(C_2,*)}(A)$. Com isso, aplicando o Teorema 1.0.12, vamos ter o seguinte.

Corolário 4.3.6. *Se A satisfaz uma identidade de cada tipo:*

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^n \alpha_i y_{1,1}^{i-1} y_{2,g} y_{1,1}^{n-i}, \\ h &= \sum_{i=1}^n \beta_i y_{1,1}^{i-1} z_{1,1} y_{1,1}^{n-i}; \end{aligned}$$

onde as constantes α_i 's não são todas nulas em f e $\sum_{i=1}^n \beta_i \neq 0$ em h , então existe uma constante k tal que para todo $n \geq 1$ e $\langle \lambda \rangle \vdash n$, $m_{\langle \lambda \rangle} \leq k$.

Capítulo 5

Álgebras G -graduadas munidas de uma involução graduada

Neste capítulo, vamos recordar os conceitos de $(G, *)$ -álgebras, além de algumas ferramentas importantes da PI-teoria nesse contexto. Tais ferramentas serão utilizadas para demonstrar uma caracterização envolvendo as multiplicidades que aparecem na decomposição do $\langle n \rangle$ -cocaracter e as $(G, *)$ -identidades. Os resultados obtidos se encontram em [41].

5.1 $(G, *)$ -álgebras

Sejam $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$ uma álgebra graduada por um grupo G e $*$ uma involução sobre A . Se $(A^{(g)})^* = A^{(g)}$ para todo $g \in G$, isto é, se $*$ preserva as componentes homogêneas, então dizemos que $*$ é uma involução graduada.

Observe que para uma involução graduada $*$ e elementos não nulos $a, a^* \in A^{(g)}$ e $b, b^* \in A^{(h)}$ temos $ab \in A^{(gh)}$. Por outro lado, $(ab)^* = b^*a^* \in A^{(hg)}$. Desde que a involução é graduada, devemos ter $A^{(gh)} = A^{(hg)}$ e, portanto, $gh = hg$, para todos $g, h \in \text{supp}(A)$. Por esta razão, quando $*$ é uma involução graduada sobre A podemos considerar, sem perda de generalidade, que G é um grupo abeliano e além disso, para nossos propósitos, G será finito.

Observamos que nem toda involução definida sobre uma álgebra é graduada. Como exemplo, considere o grupo G de ordem pelo menos 3 e a álgebra M , definida no Exemplo 2.1.4, munida da involução reflexão e G -gradação dada por

$$M^{(1)} = F(e_{11} + e_{44}) \oplus F(e_{22} + e_{33}), \quad M^{(g)} = Fe_{12}, \quad M^{(h)} = Fe_{34} \quad \text{e} \quad M^{(r)} = \{0\},$$

onde $g, h \in G \setminus \{1\}$, $g \neq h$, $r \in G \setminus \{1, g, h\}$. Claramente, a involução reflexão nessa álgebra não é uma involução graduada quando consideramos a gradação descrita acima.

Definição 5.1.1. Uma álgebra G -graduada A munida de uma involução graduada $*$ é chamada de $(G, *)$ -álgebra.

Toda álgebra comutativa G -graduada é uma $(G, *)$ -álgebra quando munida de involução trivial. Além disso, toda $*$ -álgebra munida com a G -graduação trivial é uma $(G, *)$ -álgebra. Chamamos atenção também para o fato de que, quando $G \cong \mathbb{Z}_2$, uma $(\mathbb{Z}_2, *)$ -álgebra nada mais é do que uma $*$ -superálgebra. Ou seja, o estudo das $(G, *)$ -álgebras generaliza o estudo das $*$ -superálgebras e $*$ -álgebras.

Exemplo 5.1.2. A álgebra FC_2 com G -graduação trivial e munida da involução dada por $(a_1 + a_2g)^* = a_1 - a_2g$ é uma $(G, *)$ -álgebra e a denotaremos por $(FC_2)_*$.

Exemplo 5.1.3. Considere

$$\mathcal{G}_2 = \langle 1, e_1, e_2 \mid e_i e_j = -e_j e_i \rangle.$$

Dados $g, h \in G$, com $g \neq h$ e $gh \neq 1$ defina a seguinte graduação: $\mathcal{G}_2^{(1)} = \text{span}_F\{1\}$, $\mathcal{G}_2^{(g)} = \text{span}_F\{e_2\}$, $\mathcal{G}_2^{(h)} = \text{span}_F\{e_1\}$, $\mathcal{G}_2^{(gh)} = \text{span}_F\{e_1 e_2\}$ e $\mathcal{G}_2^{(r)} = \{0\}$ para todo $r \in G \setminus \{1, g, h, gh\}$. Agora, defina a involução $*$ em $\mathcal{G}_2$ tal que $(e_i)^* = -e_i$, para $i = 1, 2$. Portanto a graduação e a involução definidas acima fornecem uma estrutura de $(G, *)$ -álgebra a $\mathcal{G}_2$, a qual será denotada por $\mathcal{G}_{2,*}^{g,h}$.

Exemplo 5.1.4. Denotamos por $M_{1,*}$ a álgebra M com a G -graduação trivial e involução reflexão. Dado $g \in G \setminus \{1\}$, denotamos por $M_{g,*}$ a álgebra M com involução reflexão e G -graduação dada por

$$\begin{aligned} (M_{g,*})^{(1)} &= F(e_{11} + e_{44}) \oplus F(e_{22} + e_{33}) \\ (M_{g,*})^{(g)} &= F e_{12} \oplus F e_{34} \\ (M_{g,*})^{(h)} &= \{0\}, \text{ para todo } h \in G \setminus \{1, g\}. \end{aligned}$$

Se A é uma $(G, *)$ -álgebra e B é uma subálgebra de A , dizemos que B é uma $(G, *)$ -subálgebra de A se B é uma subálgebra G -graduada de A e $B^* = B$. Observe que a componente homogênea $A^{(1)}$ é uma $(G, *)$ -subálgebra de A com G -graduação trivial e involução induzida.

Uma $(G, *)$ -álgebra A pode ser decomposta em uma soma direta de $2|G|$ subespaços

$$A = \bigoplus_{g \in G} ((A^{(g)})^+ \oplus (A^{(g)})^-),$$

onde para cada $g \in G$ temos que

$$(A^{(g)})^+ = \{a \in A^{(g)} \mid a^* = a\} \quad \text{e} \quad (A^{(g)})^- = \{a \in A^{(g)} \mid a^* = -a\}$$

chamadas, respectivamente, de componentes homogêneas simétrica e antissimétrica de grau g .

Considere X um conjunto enumerável de variáveis não comutativas. Escrevendo X como uma união disjunta da forma $Y \cup Z$, onde $Y = \bigcup_{g \in G} Y^{(g)}$, com $Y^{(g)} = \{y_{1,g}, y_{2,g}, \dots\}$ e $Z = \bigcup_{g \in G} Z^{(g)}$ com $Z^{(g)} = \{z_{1,g}, z_{2,g}, \dots\}$. Consideramos $\mathcal{F} = F\langle Y \cup Z \rangle$ a álgebra livre gerada pelo conjunto $Y \cup Z$ sobre F é chamada de $(G, *)$ -álgebra livre sobre F . De fato, $\mathcal{F}$ tem uma estrutura de $(G, *)$ -álgebra ao determinarmos que as variáveis em $Y^{(g)} \cup Z^{(g)}$ são homogêneas de grau g e exigindo que as variáveis em Y são simétricas e as variáveis em Z são antissimétricas.

Dessa forma, temos que $\mathcal{F} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{F}_g$, onde $\mathcal{F}_g = \text{span}_F \{w_{i_1, g_{j_1}} \cdots w_{i_t, g_{j_t}} \mid g_{j_1} \cdots g_{j_t} = g, w_i \in \{y_i, z_i\}\}$ é o subespaço gerado por todos os monômios de grau homogêneo g . Os elementos $f \in \mathcal{F}$ são chamados de $(G, *)$ -polinômios.

Definição 5.1.5. *Um $(G, *)$ -polinômio $f = f(y_{1,1}, \dots, y_{i_1,1}, z_{1,1}, \dots, z_{j_1,1}, \dots, y_{1,g_t}, \dots, y_{i_t,g_t}, z_{1,g_t}, \dots, z_{j_t,g_t}) \in \mathcal{F}$ é dito uma $(G, *)$ -identidade de uma $(G, *)$ -álgebra A , e escrevemos $f \equiv 0$ em A , se*

$$f(a_{1,1}^+, \dots, a_{i_1,1}^+, a_{1,1}^-, \dots, a_{j_1,1}^-, \dots, a_{1,g_t}^+, \dots, a_{i_t,g_t}^+, a_{1,g_t}^-, \dots, a_{j_t,g_t}^-) = 0,$$

para todos $a_{1,1}^+, \dots, a_{i_1,1}^+ \in (A^{(1)})^+$, $a_{1,1}^-, \dots, a_{j_1,1}^- \in (A^{(1)})^-$, $\dots$, $a_{1,g_t}^+, \dots, a_{i_t,g_t}^+ \in (A^{(g_t)})^+$, $a_{1,g_t}^-, \dots, a_{j_t,g_t}^- \in (A^{(g_t)})^-$.

O conjunto

$$Id^{(G,*)}(A) = \{f \in \mathcal{F} \mid f \equiv 0 \text{ em } A\}$$

é um ideal de $\mathcal{F}$ chamado de ideal das $(G, *)$ -identidades de A . Usamos a notação $Id^{(G,*)}(A) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle_{T_{(G,*)}}$ para indicar que $Id^{(G,*)}(A)$ é gerado por $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{F}$.

É conhecido que $Id^{(G,*)}(A)$ é um $T_{(G,*)}$ -ideal de $\mathcal{F}$, isto é, $Id^{(G,*)}(A)$ é um ideal invariante por todos os endomorfismos de $\mathcal{F}$ que preservam a G -gradação e comutam com a involução $*$.

Definimos a $(G, *)$ -variedade gerada por A , denotada por $var^{(G,*)}(A)$, como a classe de todas as $(G, *)$ -álgebras B tais que $Id^{(G,*)}(A) \subset Id^{(G,*)}(B)$.

A seguir apresentamos um conjunto finito de $(G, *)$ -identidades que geram os $T_{(G,*)}$ -ideais das respectivas álgebras em cada exemplo. Ao longo de todo o capítulo, denotaremos por $x_{i,g}$ uma variável qualquer no conjunto $\{y_{i,g}, z_{i,g}\}$.

Exemplo 5.1.6. [5] *Considere a $(G, *)$ -álgebra $\mathcal{G}_{2,*}^{g,h}$ definida no Exemplo 5.1.3 e r percorrendo todos elementos no conjunto $G \setminus \{1, g, h, gh\}$. Temos que*

$$Id^{(G,*)}(\mathcal{G}_{2,*}^{g,h}) = \langle z_{1,1}, y_{1,g}, y_{1,h}, y_{1,gh}, z_{1,g}z_{2,g}, z_{1,g}z_{2,gh}, z_{1,h}z_{2,h}, z_{1,h}z_{2,gh}, z_{1,gh}z_{2,gh}, x_{1,r} \rangle_{T_{(G,*)}}.$$

Exemplo 5.1.7. [35] *Para $g \in G \setminus \{1\}$, temos que:*

- 1) $Id^{(G,*)}((FC_2)_*) = \langle [x_{1,1}, x_{2,1}], x_{1,h} \mid h \in G \setminus \{1\} \rangle_{T_{(G,*)}};$
- 2) $Id^{(G,*)}(M_{1,*}) = \langle z_{1,1}z_{2,1}, x_{1,h} \mid h \in G \setminus \{1\} \rangle_{T_{(G,*)}};$
- 3) $Id^{(G,*)}(M_{g,*}) = \langle z_{1,1}, x_{1,g}x_{2,g}, x_{1,h} \mid h \in G \setminus \{1, g\} \rangle_{T_{(G,*)}}.$

Como F é um corpo de característica zero, $Id^{(G,*)}(A)$ é determinado por $(G, *)$ -polinômios multilineares. Assim, definimos

$$P_n^{(G,*)} = \text{span}_F \{ w_{\sigma(1)} w_{\sigma(2)} \cdots w_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n, w_i \in \{y_{i,g}, z_{i,g}\}, 1 \leq i \leq n, g \in G \}$$

o espaço dos $(G, *)$ -polinômios multilineares de grau n . Observe que $\dim_F(P_n^{(G,*)}) = 2^n |G|^n n!$.

De maneira similar aos demais casos, definimos $c_n^{(G,*)}(A)$ como a dimensão do espaço quociente

$$P_n^{(G,*)}(A) = \frac{P_n^{(G,*)}}{P_n^{(G,*)} \cap Id^{(G,*)}(A)},$$

chamada de n -ésima $(G, *)$ -codimensão de A . Ao leitor interessado em estudar o comportamento assintótico de tal sequência, recomendamos as referências [34, 35, 36].

Finalizamos essa seção com um exemplo. Para isso, consideramos a seguinte subálgebra de UT_6 ,

$$T_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & & & \\ 0 & a & d & & & 0 \\ 0 & 0 & a & & & \\ & & & a & d & e \\ & 0 & & 0 & a & -b \\ & & & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, \dots, e \in F \right\}.$$

Dado $g \in G \setminus \{1\}$, denotamos por T_3^g a $(G, *)$ -álgebra T_3 munida da involução reflexão e G -gradação induzida pela 6-upla $(1, g, g, 1, 1, g) \in G^6$.

Lema 5.1.8. [5] Para $g \in G \setminus \{1\}$ temos $c_n^{(G,*)}(T_3^g) = 1 + 2n + 2 \binom{n}{2} e$

$$Id^{(G,*)}(T_3^g) = \langle z_{1,1}, x_{1,g}x_{2,g}, x_{1,h}, [y_{1,g}, y_{1,1}] \mid h \in G \setminus \{1, g\} \rangle_{T_{(G,*)}}.$$

5.2 O cálculo de $m_{\langle \lambda \rangle}$

A partir de agora, vamos considerar $G = \{g_1 = 1, g_2, \dots, g_k\}$ um grupo abeliano finito de ordem k . Para um inteiro $n \in \mathbb{N}$, escrevemos $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_{2k}$, onde cada n_i é um número inteiro não negativo, com $1 \leq i \leq 2k$. Denotamos por $\langle n \rangle = (n_1, n_2, \dots, n_{2k})$ uma composição de n em $2k$ partes. Uma multipartição $\langle \lambda \rangle = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k}) \vdash \langle n \rangle$ é

tal que $\lambda_i \vdash n_i$ para $1 \leq i \leq 2k$ e denotamos por $\langle \lambda \rangle \vdash n$ quando $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$, para alguma composição $\langle n \rangle$ de n .

Para cada $\langle n \rangle = (n_1, n_2, \dots, n_{2k})$ fixo, denotamos por $P_{\langle n \rangle}$ o espaço gerado pelos monômios de $P_n^{(G,*)}$ onde as primeiras n_1 variáveis são simétricas de grau homogêneo 1, as próximas n_2 variáveis são antissimétricas de grau homogêneo 1, e assim por diante de modo que as penúltimas n_{2k-1} variáveis são simétricas de grau homogêneo g_k e as últimas n_{2k} variáveis são antissimétricas de grau homogêneo g_k .

Observe que há $\binom{n}{\langle n \rangle}$ subespaços isomorfos a $P_{\langle n \rangle}$ em $P_n^{(G,*)}$. De fato, temos

$$P_n^{(G,*)} \cong \bigoplus_{\langle n \rangle} \binom{n}{\langle n \rangle} P_{\langle n \rangle}. \quad (5.1)$$

Consideramos o espaço quociente

$$P_{\langle n \rangle}(A) = \frac{P_{\langle n \rangle}}{P_{\langle n \rangle} \cap Id^{(G,*)}(A)}$$

e definimos $c_{\langle n \rangle}(A) = \dim P_{\langle n \rangle}(A)$ como a $\langle n \rangle$ -codimensão de A . De acordo com (5.1), a relação entre a n -ésima $(G, *)$ -codimensão de A e suas $\langle n \rangle$ -codimensões é dada por

$$c_n^{(G,*)}(A) = \sum_{\langle n \rangle} \binom{n}{\langle n \rangle} c_{\langle n \rangle}(A). \quad (5.2)$$

Considerando o espaço quociente $P_{\langle n \rangle}(A)$ e o grupo $S_{\langle n \rangle} = S_{n_1} \times \dots \times S_{n_{2k}}$, podemos definir uma ação à esquerda do grupo $S_{\langle n \rangle}$ sobre $P_{\langle n \rangle}$ pela permutação dos $2k$ conjuntos de variáveis separadamente, isto é, S_{n_1} age nas primeiras n_1 variáveis simétricas de grau homogêneo 1, S_{n_2} permuta as respectivas n_2 variáveis antissimétricas de grau homogêneo 1, e assim por diante. Com essa ação, temos que $P_{\langle n \rangle}$ é um $S_{\langle n \rangle}$ -módulo à esquerda.

Exemplo 5.2.1. *Seja $|G| = 3$ e consideremos $\langle 7 \rangle = (1, 0, 3, 1, 2, 0)$,*

$$\sigma = ((1)_{(1)+}, (234)_{(g_2)+}, (5)_{(g_2)-}, (67)_{(g_3)+}) \quad e \quad f = y_{7,g_3} y_{2,g_2} y_{3,g_2} y_{1,1} z_{5,g_2} y_{6,g_3} y_{4,g_2} \in P_{\langle 7 \rangle}.$$

Então

$$\begin{aligned} \sigma f &= y_{\sigma(7),g_3} y_{\sigma(2),g_2} y_{\sigma(3),g_2} y_{\sigma(1),1} z_{\sigma(5),g_2} y_{\sigma(6),g_3} y_{\sigma(4),g_2} \\ &= y_{6,g_3} y_{3,g_2} y_{4,g_2} y_{1,1} z_{5,g_2} y_{7,g_3} y_{2,g_2}. \end{aligned}$$

Como o $T_{(G,*)}$ -ideal de A é invariante sob a ação descrita acima, temos que $P_{\langle n \rangle}(A)$ também possui uma estrutura de $S_{\langle n \rangle}$ -módulo. Denotamos o $S_{\langle n \rangle}$ -caracter de $P_{\langle n \rangle}(A)$ por $\chi_{\langle n \rangle}(A)$ e o chamamos de $\langle n \rangle$ -cocaracter de A .

É conhecido que existe uma correspondência biunívoca entre as multipartições $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$ e os $S_{\langle n \rangle}$ -caracteres irreduzíveis. Além disso, é conhecido que os $S_{\langle n \rangle}$ -caracteres irreduzíveis são produtos tensoriais dos caracteres irreduzíveis de $S_{n_1}, S_{n_2}, \dots, S_{n_{2k}}$, respectivamente. Portanto, $\chi_{\langle n \rangle}(A)$ pode ser escrito na forma

$$\chi_{\langle n \rangle}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}, \quad (5.3)$$

onde $\chi_{\langle\lambda\rangle} = \chi_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \chi_{\lambda_{2k}}$ denota o $S_{\langle n \rangle}$ -caracter irredutível correspondente a $\langle\lambda\rangle$ e $m_{\langle\lambda\rangle}$ é sua respectiva multiplicidade.

Além disso, temos que

$$c_{\langle n \rangle}(A) = \chi_{\langle n \rangle}(A)(1) = \sum_{\langle\lambda\rangle \vdash \langle n \rangle} m_{\langle\lambda\rangle} d_{\langle\lambda\rangle} \quad (5.4)$$

onde $d_{\langle\lambda\rangle}$ denota o grau do $\langle\lambda\rangle$ -caracter irredutível $\chi_{\langle\lambda\rangle}$ e é dado por $d_{\langle\lambda\rangle} = d_{\lambda_1} \cdots d_{\lambda_{2k}}$, onde d_{λ_i} denota o grau do S_{n_i} -caracter irredutível χ_{λ_i} .

Afim de obter informações mais precisas sobre as multiplicidades $m_{\langle\lambda\rangle}$ que aparecem na decomposição do $\langle n \rangle$ -cocaracter $\chi_{\langle n \rangle}(A)$ descrito em (5.3), recorreremos novamente aos resultados conhecidos para o grupo linear geral GL_m . A teoria desenvolvida aqui pode ser consultada detalhadamente em [9, Seção 12.4].

Sejam $m \geq 1$ e $F_m^{(G,*)}$ o espaço dos $(G, *)$ -polinômios nas variáveis $y_{1,1}, z_{1,1}, \dots, y_{m,1}, z_{m,1}, \dots, y_{1,g_k}, z_{1,g_k}, \dots, y_{m,g_k}, z_{m,g_k}$ e considere os seguintes espaços

$$U_1 = \text{span}_F\{y_{1,1}, \dots, y_{m,1}\}, \quad U_2 = \text{span}_F\{z_{1,1}, \dots, z_{m,1}\}, \dots,$$

$$U_{2k-1} = \text{span}_F\{y_{1,g_k}, \dots, y_{m,g_k}\} \text{ e } U_{2k} = \text{span}_F\{z_{1,g_k}, \dots, z_{m,g_k}\}.$$

O grupo $GL(U_1) \times \cdots \times GL(U_{2k}) \cong GL_m^{2k}$ age naturalmente à esquerda sobre o subespaço $U_1 \oplus \cdots \oplus U_{2k}$ de $F_m^{(G,*)}$ e temos que esta ação pode ser estendida diagonalmente à uma ação sobre $F_m^{(G,*)}$. Considere $n \geq m$ e denote por $F_{m,n}^{(G,*)}$ o subespaço dos $(G, *)$ -polinômios homogêneos em $F_m^{(G,*)}$ de grau n , temos que o grupo GL_m^{2k} age diagonalmente sobre $F_{m,n}^{(G,*)}$ e, assim, $F_{m,n}^{(G,*)}$ tem estrutura de GL_m^{2k} -módulo. Desde que $F_{m,n}^{(G,*)} \cap Id^{(G,*)}(A)$ é invariante sob essa ação, segue que o espaço quociente

$$F_{m,n}^{(G,*)}(A) = \frac{F_{m,n}^{(G,*)}}{F_{m,n}^{(G,*)} \cap Id^{(G,*)}(A)}$$

é um GL_m^{2k} -módulo, cujo caracter será denotado por $\psi_n^{(G,*)}(A)$.

Para uma composição $\langle n \rangle$ de n , é conhecido que existe uma correspondência biunívoca entre os GL_m^{2k} -módulos irredutíveis e as multipartições de $\langle\lambda\rangle = (\lambda_1, \dots, \lambda_{2k})$ de $\langle n \rangle$, onde λ_i é uma partição de n_i em no máximo m partes, para todo $i = 1, \dots, 2k$. Portanto, se denotarmos por $\psi_{\langle\lambda\rangle}$ o GL_m^{2k} -caracter irredutível correspondente a multipartição $\langle\lambda\rangle$ então podemos escrever

$$\psi_n^{(G,*)}(A) = \sum_{\langle n \rangle \vdash n} \sum_{\substack{\langle\lambda\rangle \vdash \langle n \rangle \\ h(\lambda_i) \leq m, \forall i}} \tilde{m}_{\langle\lambda\rangle} \psi_{\langle\lambda\rangle}, \quad (5.5)$$

onde $\tilde{m}_{\langle\lambda\rangle}$ é a multiplicidade correspondente a $\psi_{\langle\lambda\rangle}$ e $h(\lambda_i)$ denota o número de partes da partição $\lambda_i \vdash n_i$.

Análogo ao caso de $*$ -superálgebra [33, Teorema 3.1] temos o seguinte teorema.

Teorema 5.2.2. *Seja A uma $(G, *)$ -álgebra e para todo $\langle n \rangle$ considere $\chi_{\langle n \rangle}(A)$ e $\psi_n^{(G, *)}(A)$ o $\langle n \rangle$ -cocaracter e o GL_m^{2k} -caracter de A , respectivamente, como dados em (5.3) e (5.5). Então, $m_{\langle\lambda\rangle} = \tilde{m}_{\langle\lambda\rangle}$ para todas multipartições $\langle\lambda\rangle \vdash \langle n \rangle$ tais que $h(\langle\lambda\rangle) \leq m$.*

Neste capítulo, será conveniente usarmos a notação

$$\langle\lambda\rangle = ((\lambda_{i_1})_{g_{i_1}^+}, (\lambda_{i_2})_{g_{i_2}^-}, \dots), \quad (5.6)$$

onde $(\lambda_{i_1})_{g_{i_1}^+}$ significa que (λ_{i_1}) é a partição de n_{2i_1-1} , $(\lambda_{i_2})_{g_{i_2}^-}$ significa que (λ_{i_2}) é a partição de n_{2i_2} e assim por diante. Similarmente, a composição $(n_1, \dots, n_{2k})$ de n será denotada por $(n_{1+}, n_{2-}, \dots, n_{2k g_k^-})$. Além disso, omitiremos as composições nulas e as partições vazias nesta notação.

Por exemplo, a composição de $\langle 7 \rangle = (4, 2, 0, 1, 0, \dots, 0)$ será denotada por $(4_{1+}, 2_{1-}, 1_{g_2^-})$ e temos como exemplo de uma multipartição $\langle\lambda\rangle = ((\lambda_1)_{1+}, (\lambda_2)_{1-}, (\lambda_4)_{g_2^-})$, onde $\lambda_1 = (2, 1^2) \vdash 4$, $\lambda_2 = (1^2) \vdash 2$, $\lambda_3 = \emptyset$, $\lambda_4 = (1) \vdash 1$ e $\lambda_i = \emptyset$, para $i \geq 5$.

De acordo com [9, Teorema 12.4.12], cada GL_m^{2k} -módulo irredutível é cíclico e é gerado por um polinômio $f_{\langle\lambda\rangle}$ não nulo associado a uma multipartição $\langle\lambda\rangle \vdash \langle n \rangle$, chamado vetor de altura máxima.

Para uma composição $\langle n \rangle$ e uma multipartição $\langle\lambda\rangle \vdash \langle n \rangle$ definimos o vetor de altura máxima associado a $\langle\lambda\rangle$ como

$$f_{\langle\lambda\rangle} = \prod_{j=1}^{(\lambda_1)_1} St_{h_j(\lambda_1)}(y_{1,1}, \dots, y_{h_j(\lambda_1),1}) \cdots \prod_{j=1}^{(\lambda_{2k})_1} St_{h_j(\lambda_{2k})}(z_{1,g_k}, \dots, z_{h_j(\lambda_{2k}),g_k})$$

onde $St_r(x_1, \dots, x_r)$ é o polinômio standard de grau r e $h_j(\lambda_i)$ representa a altura da j -ésima coluna da tabela de Young T_{λ_i} associada a $\lambda_i \vdash n_i$. Além disso, $f_{\langle\lambda\rangle}$ pode ser escrito unicamente como combinação linear de vetores $f_{T_{\langle\lambda\rangle}}$ como construiremos a seguir.

Uma multitabela $T_{\langle\lambda\rangle} = (T_{\lambda_1}, T_{\lambda_2}, \dots, T_{\lambda_{2k}})$ é uma $2k$ -upla formada por tabelas de Young T_{λ_i} associadas à uma partição $\lambda_i \vdash n_i$, para $1 \leq i \leq 2k$. A multitabela padrão $\tilde{T}_{\langle\lambda\rangle}$ é a multitabela cujos inteiros $1, 2, \dots, n$ nesta ordem, preenchem de cima para baixo, da esquerda para direita, coluna por coluna, a tabela $\tilde{T}_{\lambda_1}$ até a tabela $\tilde{T}_{\lambda_{2k}}$.

Exemplo 5.2.3. *Sejam $\langle 7 \rangle = (4_{1+}, 2_{1-}, 1_{g_2^-})$ e $\langle\lambda\rangle = ((2, 1^2)_{1+}, (1^2)_{1-}, (1)_{g_2^-}) \vdash \langle 7 \rangle$ considerada anteriormente. Então, uma multitabela $T_{\langle\lambda\rangle}$ associada à multipartição $\langle\lambda\rangle$ é dada por*

$$T_{\langle\lambda\rangle} = \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array} \right)_{1+}, \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}_{1-}, \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline \end{array}_{g_2^-} \right). \quad (5.7)$$

E a multitabela padrão associada a multipartição $\langle\lambda\rangle$ é da forma:

$$\tilde{T}_{\langle\lambda\rangle} = \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \right)_{1+}, \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array}_{1-}, \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline \end{array}_{g_2^-} \right). \quad (5.8)$$

Para uma multitabela qualquer $T_{\langle\lambda\rangle}$, definimos o vetor de altura máxima associado a $T_{\langle\lambda\rangle}$ como sendo o polinômio $f_{T_{\langle\lambda\rangle}} := f_{\langle\lambda\rangle}\sigma^{-1}$, onde $\sigma \in S_n$ é a única permutação que transforma a multitabela padrão $\tilde{T}_{\langle\lambda\rangle}$ na multitabela $T_{\langle\lambda\rangle}$ e a ação à direita de S_n sobre $F_{m,n}^{(G,*)}(A)$ é definida pela troca dos lugares das variáveis em cada monômio.

Exemplo 5.2.4. *Seja $\tilde{T}_{\langle\lambda\rangle}$ a multitabela padrão em 5.8. Então,*

$$f_{\tilde{T}_{\langle\lambda\rangle}} := St_3(y_{1,1}, y_{2,1}, y_{3,1})y_{1,1}St_2(z_{1,1}, z_{2,1})z_{1,g_2},$$

é o polinômio associado a $\tilde{T}_{\langle\lambda\rangle}$. Para a multitabela 5.7, temos que $\sigma = (16)(35) \in S_7$ é a única permutação que transforma $\tilde{T}_{\langle\lambda\rangle}$ na multitabela $T_{\langle\lambda\rangle}$ e o vetor de altura máxima associado a $T_{\langle\lambda\rangle}$ é o $(G, *)$ -polinômio

$$f_{T_{\langle\lambda\rangle}} := St_3(y_{1,1}, y_{2,1}, y_{3,1})y_{1,1}St_2(z_{1,1}, z_{2,1})z_{1,g_2}(16)(35).$$

O próximo resultado, relaciona os vetores de altura máxima às multiplicidades do Teorema 5.2.2.

Teorema 5.2.5. *A multiplicidade $\tilde{m}_{\langle\lambda\rangle}$ em (5.5) é não nula se, e somente se, existe uma multitabela $T_{\langle\lambda\rangle}$, tal que $f_{T_{\langle\lambda\rangle}} \notin Id^{(G,*)}(A)$. Além disso, $\tilde{m}_{\langle\lambda\rangle}$ é igual ao número máximo de vetores de altura máxima associados às multitabelas do tipo $\langle\lambda\rangle$ que são linearmente independentes módulo $F_{m,n}^{(G,*)}(A)$.*

Exemplo 5.2.6. *Considere a $(G, *)$ -álgebra $\mathcal{G}_{2,*}^{g,h}$ definida no Exemplo 5.1.3. Segue de [5] que os únicos $\langle n \rangle$ -cocaracteres não nulos de $\mathcal{G}_{2,*}^{g,h}$ são:*

$$\chi_{((n)_{1+})}, \chi_{((n-1)_{1+}, (1)_{g-})}, \chi_{((n-1)_{1+}, (1)_{h-})}, \chi_{((n-1)_{1+}, (1)_{gh-})} \quad e \quad \chi_{((n-2)_{1+}, (1)_{g-}, (1)_{h-})}.$$

Observe que todas as multiplicidades que aparecem acima são limitadas pela constante $q = 1$. A seguir, daremos um exemplo de uma $(G, *)$ -álgebra cujas multiplicidades do $\langle n \rangle$ -cocaracter são limitadas por uma constante $q > 1$ e mostraremos na prática como usar a teoria desenvolvida aqui para determinar as decomposições dos $\langle n \rangle$ -cocaracteres.

Exemplo 5.2.7. [5] *Para a $(G, *)$ -álgebra T_3^g temos que seus únicos $\langle n \rangle$ -cocaracteres não nulos são*

$$\chi_{((n)_{1+})}, \chi_{((n-1)_{1+}, (1)_{g+})}, 2\chi_{((n-1)_{1+}, (1)_{g-})} + \chi_{((n-2)_{1+}, (1)_{g-})}.$$

Demonstração. De acordo com (5.2), (5.4) e Lema 5.1.8, podemos notar que

$$c_n^{(G,*)}(T_3^g) = d_{(n)} + \binom{n}{n-1}d_{(n-1)}d_{(1)} + 2\binom{n}{n-1}d_{(n-1)}d_{(1)} + \binom{n}{n-1}d_{(n-2,1)}d_{(1)}.$$

Logo, basta mostrarmos que

$$m_{\langle\lambda_1\rangle} \geq 1, \quad m_{\langle\lambda_2\rangle} \geq 1, \quad m_{\langle\lambda_3\rangle} \geq 2 \text{ e } m_{\langle\lambda_4\rangle} \geq 1,$$

para as multipartições $\langle\lambda_1\rangle = ((n)_{1+})$, $\langle\lambda_2\rangle = ((n-1)_{1+}, (1)_{g+})$, $\langle\lambda_3\rangle = ((n-1)_{1+}, (1)_{g-})$ e $\langle\lambda_4\rangle = ((n-2, 1)_{1+}, (1)_{g-})$.

Considere os vetores de altura máxima $f_1 = y_{1,1}^n$ e $f_2 = y_{1,1}^{n-1}y_{1,g}$. Considerando as avaliações $y_{1,1} \mapsto e_{11} + \dots + e_{66}$ e $y_{1,g} \mapsto e_{13} + e_{46}$ concluímos que f_1 e f_2 não são identidades de T_3^g .

Considere a multitabela abaixo associada a partição $\langle\lambda_4\rangle$,

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & \cdots & n-1 \\ \hline n & & & \\ \hline \end{array} \right)_{1+}, \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}_{g-}$$

cujos vetores de altura máxima associado é $f_{T_{\langle\lambda_4\rangle}} = y_{1,1}z_{1,g}y_{1,1}^{n-3}y_{2,1} - y_{2,1}z_{1,g}y_{1,1}^{n-2}$. Considerando a avaliação $y_{1,1} \mapsto e_{11} + \dots + e_{66}$, $y_{2,1} \mapsto e_{23} + e_{45}$ e $z_{1,g} \mapsto e_{12} - e_{56}$ obtemos $f_4 = e_{13} - e_{46}$. Portanto, $f_{T_{\langle\lambda_4\rangle}} \neq 0$ em T_3^g .

Para a multipartição $\langle\lambda_3\rangle$ consideramos as multitabelas

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \hline \end{array} \right)_{1+}, \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline \end{array}_{g-},$$

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline n & 2 & \cdots & n-1 \\ \hline \end{array} \right)_{1+}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}_{g-},$$

cujos vetores de altura máxima são, respectivamente, $y_{1,1}^{n-1}z_{1,g}$ e $z_{1,g}y_{1,1}^{n-1}$. É claro que esses vetores não são identidades de T_3^g , então resta mostrarmos que estes são linearmente independentes módulo $Id^{(G,*)}(T_3^g)$. Considere a combinação $\alpha y_{1,1}^{n-1}z_{1,g} + \beta z_{1,g}y_{1,1}^{n-1} \equiv 0$ em $Id^{(G,*)}(T_3^g)$. Tome a avaliação $y_{1,1} \mapsto e_{11} + \dots + e_{66} + e_{23} + e_{45}$ e $z_{1,g} \mapsto e_{12} - e_{56}$ obtemos $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.

Então, temos $m_{\langle\lambda_1\rangle} \geq 1$, $m_{\langle\lambda_2\rangle} \geq 1$, $m_{\langle\lambda_3\rangle} \geq 2$ e $m_{\langle\lambda_4\rangle} \geq 1$ e o resultado segue. $\square$

Exemplo 5.2.8. [35] Considerando a $(G, *)$ -álgebra $(FC_2)_*$, definida no Exemplo 5.1.2, temos que $\chi_{\langle n \rangle}((FC_2)_*) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}$, onde

$$m_{\langle \lambda \rangle} = \begin{cases} 1, & \text{se } \langle \lambda \rangle = ((n-r)_{1+}, (r)_{1-}); \quad 0 \leq r \leq n; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 5.2.9. [32] Considerando as $(G, *)$ -álgebras do Exemplo 5.1.4, temos que:

$\chi_{\langle n \rangle}(M_{1,*}) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash n} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}$, onde

$$m_{\langle \lambda \rangle} = \begin{cases} 1, & \text{se } \langle \lambda \rangle = ((n)_{1+}); \\ q+1, & \text{se } \langle \lambda \rangle = ((p+q, p)_{1+}, (1)_{1-}), \quad 2p+q = n-1; \\ q+1, & \text{se } \langle \lambda \rangle = ((p+q, p)_{1+}), \quad 2p+q = n; \\ q+1, & \text{se } \langle \lambda \rangle = ((p+q, p, 1)_{1+}), \quad 2p+q = n-1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Em 2023, de Oliveira, dos Santos e Vieira [35] calcularam o $\langle n \rangle$ -cocaracter de $\chi_{\langle n \rangle}(M_{g,*}) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash n} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}$. Assim, temos que:

$$m_{\langle \lambda \rangle} = \begin{cases} 1, & \text{se } \langle \lambda \rangle = ((n)_{1+}); \\ q+1, & \text{se } \langle \lambda \rangle = ((p+q, p)_{1+}, (1)_{g+}); \\ q+1, & \text{se } \langle \lambda \rangle = ((p+q, p)_{1+}, (1)_{g-}); \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

onde $p, q \geq 0$ e $2p + q + 1 = n$.

Observe que o exemplo anterior nos fornece $(G, *)$ -álgebras cujas multiplicidades dos $\langle n \rangle$ -caracteres não são limitadas por constante.

5.3 Caracterização das $(G, *)$ -álgebras com multiplicidades limitadas por 1

O objetivo desta seção consiste em apresentar uma caracterização via identidades de álgebras G -graduadas munidas de uma involução graduada com multiplicidades na decomposição do $\langle n \rangle$ -cocaracter limitadas por 1, onde G é um grupo abeliano finito.

Para atingir nossos objetivos, provaremos uma sequência de resultados, cujas principais ferramentas para as demonstrações foram citadas nas seções anteriores. Os resultados se encontram na referência [41].

Em todos os resultados a partir de agora, consideraremos $G = \{g_1 = 1, g_2, \dots, g_k\}$ um grupo abeliano finito de ordem k e A será uma $(G, *)$ -álgebra cujo $\langle n \rangle$ -cocaracter é dado por

$$\chi_{\langle n \rangle}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}.$$

Teorema 5.3.1 (41). *Sejam A uma $(G, *)$ -álgebra e $\chi_{\langle n \rangle}(A)$ o seu $\langle n \rangle$ -cocaracter. Se para todo $n = n_1 + n_2 + \dots + n_{2k}$ e $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$, temos $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$, então A satisfaz pelo menos*

uma identidade de cada um dos itens abaixo

$$\begin{array}{llll}
 1) & y_{1,1}z_{2,1} + \gamma_1 z_{2,1}y_{1,1} & \equiv 0; & 4k-3) \quad z_{1,1}z_{2,g_k} + \gamma_{4k-3} z_{2,g_k}z_{1,1} \equiv 0; \\
 2) & y_{1,1}y_{2,g_2} + \gamma_2 y_{2,g_2}y_{1,1} & \equiv 0; & 4k-2) \quad y_{1,g_2}z_{2,g_2} + \gamma_{4k-2} z_{2,g_2}y_{1,g_2} \equiv 0; \\
 3) & y_{1,1}z_{2,g_2} + \gamma_3 z_{2,g_2}y_{1,1} & \equiv 0; & 4k-1) \quad y_{1,g_2}y_{2,g_3} + \gamma_{4k-1} y_{2,g_3}y_{1,g_2} \equiv 0; \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 2k-2) & y_{1,1}y_{2,g_k} + \gamma_{2k-2} y_{2,g_k}y_{1,1} & \equiv 0; & 4k) \quad y_{1,g_2}z_{2,g_3} + \gamma_{4k} z_{2,g_3}y_{1,g_2} \equiv 0; \\
 2k-1) & y_{1,1}z_{2,g_k} + \gamma_{2k-1} z_{2,g_k}y_{1,1} & \equiv 0; & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 2k) & z_{1,1}y_{2,g_2} + \gamma_{2k} y_{2,g_2}z_{1,1} & \equiv 0; & 6k-5) & y_{1,g_2}y_{2,g_k} + \gamma_{6k-5} y_{2,g_k}y_{1,g_2} \equiv 0; \\
 2k+1) & z_{1,1}z_{2,g_2} + \gamma_{2k+1} z_{2,g_2}z_{1,1} & \equiv 0; & 6k-6) & y_{1,g_2}z_{2,g_k} + \gamma_{6k-6} z_{2,g_k}y_{1,g_2} \equiv 0; \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 4k-4) & z_{1,1}y_{2,g_k} + \gamma_{4k-4} y_{2,g_k}z_{1,1} & \equiv 0; & 2k^2-k) & y_{1,g_k}z_{2,g_k} + \gamma_{2k^2-k} z_{2,g_k}y_{1,g_k} \equiv 0;
 \end{array}$$

onde $\gamma_i \in \{0, 1, -1\}$ para $1 \leq i \leq 2k^2 - k$.

Demonstração. Suponha que, para todo $n = n_1 + n_2 + \dots + n_{2k}$ e todo $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$ temos $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$. Em particular, consideramos $n = 2$ e $\langle \lambda \rangle = ((1)_{1+}, (1)_{1-})$. Para esta multipartição, temos dois vetores de altura máxima: $f_1 = y_{1,1}z_{2,1}$ e $f_2 = z_{2,1}y_{1,1}$.

Desde que $m_{((1)_{1+}, (1)_{1-})} \leq 1$, segue do Teorema 5.2.5 que os vetores de altura máxima f_1 e f_2 são linearmente dependentes módulo $Id^{(G,*)}(A)$. Portanto, existe $\alpha \in F$ tal que

$$y_{1,1}z_{2,1} + \alpha z_{2,1}y_{1,1} \equiv 0. \quad (5.9)$$

Aplicando a involução em (5.9) obtemos

$$-z_{2,1}y_{1,1} - \alpha y_{1,1}z_{2,1} \equiv 0. \quad (5.10)$$

Note que se $\alpha = 0$ então $y_{1,1}z_{2,1} \equiv 0$. Se $\alpha \neq 0$, somando as equações (5.9) e (5.10) temos:

$$(1 - \alpha)y_{1,1}z_{2,1} - (1 - \alpha)z_{2,1}y_{1,1} \equiv 0. \quad (5.11)$$

Agora, se $1 - \alpha = 0$, então $\alpha = 1$ e da equação (5.9), temos $y_{1,1} \circ z_{2,1} \equiv 0$. Se $1 - \alpha \neq 0$, então da equação (5.11) temos que $[y_{1,1}, z_{2,1}] \equiv 0$. Com isso, concluímos que A satisfaz uma identidade do tipo

$$y_{1,1}z_{2,1} + \alpha z_{2,1}y_{1,1} \equiv 0,$$

onde $\alpha \in \{0, 1, -1\}$.

Levando em consideração a notação estabelecida em (5.6), fazemos um raciocínio análogo para todas as demais partições do mesmo tipo, ou seja, para

$$((1)_{g^+}, (1)_{g^-}) \text{ e } ((1)_{g^\epsilon}, (1)_{h^\gamma}),$$

com $g, h \in G$ distintos e para $\epsilon, \gamma \in \{+, -\}$. Assim concluímos que A satisfaz uma identidade como a anterior com as respectivas variáveis em cada um dos itens do enunciado do teorema e assim, a demonstração segue. $\square$

Agora, vamos apresentar uma série de resultados que irão nos permitir concluir que a recíproca do Teorema 5.3.1 é verdadeira.

Observe que se A satisfaz pelo menos uma identidade de cada item listado no Teorema 5.3.1, então módulo $Id^{(G,*)}(A)$, as variáveis de qualquer $(G, *)$ -polinômio pode ser reordenada, logo, se $n = 2$, módulo $Id^{(G,*)}(A)$, teremos apenas um vetor de altura máxima e, assim as multiplicidades em qualquer $\langle n \rangle$ -cocaracter são limitadas por 1. Por isso, nos nossos resultados a partir de agora, nos preocuparemos apenas com a situação $n \geq 3$.

Exemplo 5.3.2. *Sejam $\langle \lambda \rangle = ((1^3)_{1+}, (1^2)_{1-}, (1)_{g_2^-})$ uma multipartição de 6 e $T_{\langle \lambda \rangle}$ a multitabela a seguir*

$$T_{\langle \lambda \rangle} = \left(\begin{array}{c|c|c} \boxed{4} & & \\ \hline \boxed{3} & \boxed{2} & \\ \hline \boxed{5} & \boxed{1} & \boxed{6} \end{array} \right)_{1+ \quad 1- \quad g_2^-},$$

cuja permutação associada é $\sigma = (1 \ 4 \ 2 \ 3 \ 5)$. Observe que o vetor de altura máxima associado a $T_{\langle \lambda \rangle}$ é

$$\begin{aligned} f_{T_{\langle \lambda \rangle}} &= St_3(y_{1,1}, y_{2,1}, y_{3,1}) St_2(z_{1,1}, z_{2,1}) z_{1,g_2} \sigma^{-1} \\ &= z_{1,1} y_{3,1} z_{2,1} y_{2,1} y_{1,1} z_{1,g_2} - z_{1,1} y_{3,1} z_{2,1} y_{1,1} y_{2,1} z_{1,g_2} \\ &- z_{1,1} y_{2,1} z_{2,1} y_{3,1} y_{1,1} z_{1,g_2} - z_{1,1} y_{1,1} z_{2,1} y_{2,1} y_{3,1} z_{1,g_2} \\ &+ z_{1,1} y_{1,1} z_{2,1} y_{3,1} y_{2,1} z_{1,g_2} + z_{1,1} y_{2,1} z_{2,1} y_{1,1} y_{3,1} z_{1,g_2} \\ &- z_{2,1} y_{3,1} z_{1,1} y_{2,1} y_{1,1} z_{1,g_2} + z_{2,1} y_{3,1} z_{1,1} y_{1,1} y_{2,1} z_{1,g_2} \\ &+ z_{2,1} y_{2,1} z_{1,1} y_{3,1} y_{1,1} z_{1,g_2} + z_{2,1} y_{1,1} z_{1,1} y_{2,1} y_{3,1} z_{1,g_2} \\ &- z_{2,1} y_{1,1} z_{1,1} y_{3,1} y_{2,1} z_{1,g_2} - z_{2,1} y_{2,1} z_{1,1} y_{1,1} y_{3,1} z_{1,g_2}. \end{aligned}$$

Supondo que $y_{1,1} z_{1,1} - z_{1,1} y_{1,1} \equiv 0$ em A temos

$$\begin{aligned} f_{T_{\langle \lambda \rangle}} &\equiv y_{3,1} y_{2,1} y_{1,1} z_{1,1} z_{2,1} z_{1,g_2} - y_{3,1} y_{1,1} y_{2,1} z_{1,1} z_{2,1} z_{1,g_2} \\ &- y_{2,1} y_{3,1} y_{1,1} z_{1,1} z_{2,1} z_{1,g_2} - y_{1,1} y_{2,1} y_{3,1} z_{1,1} z_{2,1} z_{1,g_2} \\ &+ y_{1,1} y_{3,1} y_{2,1} z_{1,1} z_{2,1} z_{1,g_2} + y_{2,1} y_{1,1} y_{3,1} z_{1,1} z_{2,1} z_{1,g_2} \\ &- y_{3,1} y_{2,1} y_{1,1} z_{2,1} z_{1,1} z_{1,g_2} + y_{3,1} y_{1,1} y_{2,1} z_{2,1} z_{1,1} z_{1,g_2} \\ &+ y_{2,1} y_{3,1} y_{1,1} z_{2,1} z_{1,1} z_{1,g_2} + y_{1,1} y_{2,1} y_{3,1} z_{2,1} z_{1,1} z_{1,g_2} \\ &- y_{1,1} y_{3,1} y_{2,1} z_{2,1} z_{1,1} z_{1,g_2} - y_{2,1} y_{1,1} y_{3,1} z_{2,1} z_{1,1} z_{1,g_2}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} f_{T_{\langle \lambda \rangle}} &= (y_{3,1}y_{2,1}y_{1,1} - y_{3,1}y_{1,1}y_{2,1} - y_{2,1}y_{3,1}y_{1,1} - y_{1,1}y_{2,1}y_{3,1} \\ &\quad + y_{1,1}y_{3,1}y_{2,1} + y_{2,1}y_{1,1}y_{3,1})(z_{1,1}z_{2,1} - z_{2,1}z_{1,1})z_{1,g_2} \\ &= St_3(y_{1,1}, y_{2,1}, y_{3,1})\sigma_1 St_2(z_{1,1}, z_{2,1})\sigma_2 z_{1,g_2}\sigma_3, \end{aligned}$$

onde $St_3(y_{1,1}, y_{2,1}, y_{3,1})\sigma_1$, com $\sigma_1 = (12)$ é um vetor de altura máxima associado a partição $\lambda_1 \vdash n_1$, com $n_1 = 3$, $St_2(z_{1,1}, z_{2,1})\sigma_2$, com $\sigma_2 = 1$ é um vetor de altura máxima associado a partição $\lambda_2 \vdash n_2$, com $n_2 = 2$ e $z_{1,g_2}\sigma_3$, com $\sigma_3 = 1$ é um vetor de altura máxima associado a partição $\lambda_4 \vdash n_4$, com $n_4 = 1$.

Em geral, dado um vetor de altura máxima associado a uma multipartição $\langle \lambda \rangle = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k})$, podemos escrevê-lo como produto de vetores de altura máxima associados a cada partição $\lambda_1 \vdash n_1$, $\lambda_2 \vdash n_2$, $\dots$, $\lambda_{2k} \vdash n_{2k}$, como veremos no resultado a seguir.

Lema 5.3.3. *Se A satisfaz pelo menos uma identidade de cada um dos $2k^2 - k$ itens de identidades apresentados no enunciado do Teorema 5.3.1 então para uma multipartição $\langle \lambda \rangle = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k}) \vdash \langle n \rangle$, o vetor de altura máxima associado a uma multitabela do tipo $\langle \lambda \rangle$ é equivalente, a menos de sinal, ao produto de vetores de altura máxima associados a multipartições do tipo $(\emptyset, \dots, \emptyset, \lambda_i, \emptyset, \dots, \emptyset)$ para $1 \leq i \leq 2k$. Além disso,*

$$m_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k})} \leq m_{(\lambda_1, \emptyset, \dots, \emptyset)} m_{(\emptyset, \lambda_2, \dots, \emptyset)} \cdots m_{(\emptyset, \dots, \emptyset, \lambda_{2k})}.$$

Demonstração. Considere uma multipartição $\langle \lambda \rangle$ e as suas respectivas multitabelas $T_{\langle \lambda \rangle}$, cujo vetor de altura máxima associado a $T_{\langle \lambda \rangle}$ é dado por:

$$\begin{aligned} f_{T_{\langle \lambda \rangle}} &= \left(\prod_{j=1}^{(\lambda_1)_1} St_{h_j(\lambda_1)}(y_{1,1}, \dots, y_{h_j(\lambda_1),1}) \right) \left(\prod_{j=1}^{(\lambda_2)_1} St_{h_j(\lambda_2)}(z_{1,1}, \dots, z_{h_j(\lambda_2),1}) \right) \\ &\quad \cdots \left(\prod_{j=1}^{(\lambda_{2k})_1} St_{h_j(\lambda_{2k})}(z_{1,g_k}, \dots, z_{h_j(\lambda_{2k}),g_k}) \right) \sigma^{-1}, \end{aligned}$$

onde σ é a única permutação que transforma a multitabela padrão na multitabela $T_{\langle \lambda \rangle}$.

Suponha que A satisfaz pelo menos uma identidade em cada item do Teorema 5.3.1. Logo, módulo $Id^{(G,*)}(A)$, todas as respectivas variáveis de $f_{T_{\langle \lambda \rangle}}$ comutam ou anticomutam, com exceção das variáveis de mesmo grau homogêneo que são ambas simétricas ou ambas antissimétricas. Isso significa que, cada monômio de $f_{T_{\langle \lambda \rangle}}$ pode ser reescrito como combinação linear de monômios da forma

$$y_{i_1,1} \cdots y_{i_{h_j(\lambda_1)},1} z_{i_1,1} \cdots z_{i_{h_j(\lambda_2)},1} \cdots z_{i_1,g_k} \cdots z_{i_{h_j(\lambda_{2k})},g_k}.$$

Desde que o polinômio standard é alternado e multilinear, podemos recuperar os polinômios

$$f_{\lambda_1} := \prod_{j=1}^{(\lambda_1)_1} St_{h_j(\lambda_1)}(y_{1,1}, \dots, y_{h_j(\lambda_1),1}), \quad f_{\lambda_2} := \prod_{j=1}^{(\lambda_2)_1} St_{h_j(\lambda_2)}(z_{1,1}, \dots, z_{h_j(\lambda_2),1}),$$

$$\dots, f_{\lambda_{2k}} := \prod_{j=1}^{(\lambda_{2k})_1} St_{h_j(\lambda_{2k})}(z_{1,g_k}, \dots, z_{h_j(\lambda_{2k}),g_k})$$

a menos de uma reordenação entre as posições de suas respectivas variáveis. Isto é, para cada $1 \leq i \leq 2k$, existe uma permutação $\sigma_i \in S_{n_i}$ tal que

$$f_{T_{\langle \lambda \rangle}} \equiv \pm f_{\lambda_1} \sigma_1^{-1} f_{\lambda_2} \sigma_2^{-1} \cdots f_{\lambda_{2k}} \sigma_{2k}^{-1} \pmod{Id^{(G,*)}(A)}.$$

Assim, concluímos que

$$f_{T_{\langle \lambda \rangle}} \equiv \pm f_{T_{\lambda_1}} f_{T_{\lambda_2}} \cdots f_{T_{\lambda_{2k}}},$$

onde $f_{T_{\lambda_1}} := f_{\lambda_1} \sigma_1^{-1}$ é um vetor de altura máxima associado a partição $\lambda_1 \vdash n_1$, $f_{T_{\lambda_2}} := f_{\lambda_2} \sigma_2^{-1}$ é um vetor de altura máxima associado a partição $\lambda_2 \vdash n_2$, e assim por diante de modo que $f_{T_{\lambda_{2k}}} := f_{\lambda_{2k}} \sigma_{2k}^{-1}$ um vetor de altura máxima associado a partição $\lambda_{2k} \vdash n_{2k}$. Em outras palavras, $f_{T_{\langle \lambda \rangle}}$ é equivalente ao produto dos vetores de altura máxima associados as partições λ_i de n_i .

A segunda afirmação segue imediatamente da primeira parte deste teorema e dos Teoremas 5.2.2 e 5.2.5. $\square$

Como consequência do resultado acima, vemos que para provar a recíproca do Teorema 5.3.1 é suficiente mostrarmos que as multiplicidades do tipo $m_{(\mu_{g^\epsilon})}$ são limitadas por 1, para todo $g \in G$ e $\epsilon \in \{+, -\}$. Vamos começar com o seguinte caso.

Lema 5.3.4. *Se A satisfaz uma identidade*

$$y_{1,1}z_{2,1} + \gamma z_{2,1}y_{1,1} \equiv 0,$$

para algum $\gamma \in \{0, 1, -1\}$, então $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$, para todas multipartições do tipo $\langle \lambda \rangle \vdash (n_{1^\epsilon})$ com $\epsilon \in \{+, -\}$.

Demonstração. Observamos que $A^{(1)}$ pode ser vista como uma $*$ -álgebra munida da involução induzida de A . Pelo Teorema 2.3.1, segue que se A satisfaz uma identidade do tipo $y_{1,1}z_{2,1} + \gamma z_{2,1}y_{1,1} \equiv 0$, com $\gamma \in \{0, 1, -1\}$, então $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$, para toda multipartição $\langle \lambda \rangle$ do tipo $((\lambda_1)_{1+}, (\lambda_2)_{1-})$. Em particular, temos que $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$ para as multipartições do tipo $\langle \lambda \rangle = ((\lambda_1)_{1+})$ e $\langle \lambda \rangle = ((\lambda_2)_{1-})$. $\square$

A partir de agora passamos a estudar as multiplicidades correspondentes as composições $(0, \dots, n, \dots, 0) = (n_{g^\epsilon})$ de n e multipartições do tipo $\langle \lambda \rangle = (\mu_{g^\epsilon}) \vdash (n_{g^\epsilon})$, onde $\epsilon \in \{+, -\}$ e $g \in G \setminus \{1\}$.

Lema 5.3.5. *Seja $g \in G \setminus \{1\}$ e assumamos que A satisfaz pelo menos uma das identidades*

$$y_{1,g^2}y_{2,g} \equiv 0 \text{ ou } z_{1,g^2}y_{2,g} \equiv 0,$$

então $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$, onde $\langle \lambda \rangle$ é uma partição do tipo $(\mu_{g^+}) \vdash (n_{g^+})$.

Demonstração. Suponha que A satisfaz a identidade $y_{1,g^2}y_{2,g}$ e tome $n \geq 3$. Desde que $y_{1,g} \circ y_{3,g}$ é um $(G, *)$ -polinômio simétrico de grau homogêneo g^2 , temos que $(y_{1,g} \circ y_{3,g})y_{2,g} \equiv 0$ módulo $Id^{(G,*)}(A)$. Logo, $y_{1,g}y_{3,g}y_{2,g} \equiv -y_{3,g}y_{1,g}y_{2,g}$ e aplicando a involução obtemos $y_{2,g}y_{3,g}y_{1,g} \equiv -y_{2,g}y_{1,g}y_{3,g}$. Consequentemente, para $n \geq 3$, temos que

$$P_{(n_{g^+})}(A) = \text{span}_F\{y_{1,g}y_{2,g} \cdots y_{n,g}\}.$$

Nesse caso, obtemos $m_{(\mu_{g^+})} \leq 1$.

Suponha que A satisfaz $z_{1,g^2}y_{2,g}$. Desde que $[y_{1,g}, y_{3,g}]$ é um $(G, *)$ -polinômio anti-simétrico de grau homogêneo g^2 , temos que $[y_{1,g}, y_{3,g}]y_{2,g} \equiv 0$. Logo, o resultado segue de forma análoga ao caso anterior. $\square$

Observação 5.3.6. Usando os mesmos argumentos do caso ordinário na prova do Teorema 2.4.5 de [19], temos que $P_{\langle n \rangle}(A)$ pode ser visto como um somando direto de $P_{\langle n \rangle}$. Desde que $P_{\langle n \rangle} \cong FS_{\langle n \rangle}$, vamos ter que $m_{\langle \lambda \rangle} \leq d_{\langle \lambda \rangle}$ na decomposição do $S_{\langle n \rangle}$ -cocaracter de A . Este fato será usado em algumas das demonstrações dos resultados a seguir.

Lema 5.3.7. Seja $g \in G \setminus \{1\}$ e suponha que A satisfaz a identidade $y_{1,g}y_{3,g}y_{2,g} + y_{2,g}y_{3,g}y_{1,g} \equiv 0$. Então, temos $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$, para toda partição $\langle \lambda \rangle \vdash (3_{g^+})$.

Demonstração. De fato, sabemos que $P_{(3_{g^+})}(A)$ é linearmente gerado pelos polinômios $y_{\sigma(1),g}y_{\sigma(2),g}y_{\sigma(3),g}$, $\sigma \in S_3$. Usando a identidade $y_{1,g}y_{3,g}y_{2,g} + y_{2,g}y_{3,g}y_{1,g} \equiv 0$ temos

$$\begin{aligned} y_{1,g}y_{2,g}y_{3,g} &\equiv -y_{3,g}y_{2,g}y_{1,g}; \\ y_{1,g}y_{3,g}y_{2,g} &\equiv -y_{2,g}y_{3,g}y_{1,g}; \\ y_{2,g}y_{1,g}y_{3,g} &\equiv -y_{3,g}y_{1,g}y_{2,g}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$P_{(3_{g^+})}(A) = \text{span}_F\{y_{1,g}y_{2,g}y_{3,g}, y_{1,g}y_{3,g}y_{2,g}, y_{2,g}y_{1,g}y_{3,g}\}$$

e assim, $\dim_F P_{(3_{g^+})}(A) \leq 3$. Se para alguma multipartição $\langle \lambda \rangle \vdash \langle 3 \rangle$ tivermos que $m_{\langle \lambda \rangle} \geq 2$, então $d_{\langle \lambda \rangle} \geq m_{\langle \lambda \rangle} \geq 2$ e assim

$$\dim_F P_{(3_{g^+})}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash (3_{g^+})} m_{\langle \lambda \rangle} d_{\langle \lambda \rangle} \geq 4,$$

um absurdo. Portanto, devemos ter $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$, para toda partição $(\mu_{g^+}) \vdash (3_{g^+})$. $\square$

Lema 5.3.8. Seja $g \in G \setminus \{1\}$ e suponha que A satisfaz as seguintes identidades

$$y_{1,g}y_{3,g}y_{2,g} + y_{2,g}y_{3,g}y_{1,g} \equiv 0 \tag{5.12}$$

$$y_{1,g}y_{2,g}y_{4,g}y_{3,g} + y_{2,g}y_{4,g}y_{3,g}y_{1,g} \equiv 0. \tag{5.13}$$

Então, temos $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$, para toda partição $\langle \lambda \rangle \vdash (4_{g^+})$.

Demonstração. Por hipótese, módulo $Id^{(G,*)}(A)$, temos que

$$\begin{aligned}
 y_{1,g}y_{2,g}y_{3,g}y_{4,g} &\equiv -y_{2,g}y_{3,g}y_{4,g}y_{1,g} \equiv y_{2,g}y_{1,g}y_{4,g}y_{3,g} \equiv -y_{4,g}y_{1,g}y_{2,g}y_{3,g} \equiv \\
 y_{4,g}y_{3,g}y_{2,g}y_{1,g} &\equiv -y_{1,g}y_{4,g}y_{3,g}y_{2,g} \equiv -y_{3,g}y_{2,g}y_{1,g}y_{4,g} \equiv y_{3,g}y_{4,g}y_{1,g}y_{2,g}; \\
 y_{2,g}y_{1,g}y_{3,g}y_{4,g} &\equiv -y_{2,g}y_{4,g}y_{3,g}y_{1,g} \equiv y_{3,g}y_{4,g}y_{2,g}y_{1,g} \equiv -y_{3,g}y_{1,g}y_{2,g}y_{4,g} \equiv \\
 y_{4,g}y_{3,g}y_{1,g}y_{2,g} &\equiv -y_{4,g}y_{2,g}y_{1,g}y_{3,g} \equiv y_{1,g}y_{2,g}y_{4,g}y_{3,g} \equiv -y_{1,g}y_{3,g}y_{4,g}y_{2,g}; \\
 y_{4,g}y_{2,g}y_{3,g}y_{1,g} &\equiv -y_{2,g}y_{3,g}y_{1,g}y_{4,g} \equiv y_{2,g}y_{4,g}y_{1,g}y_{3,g} \equiv -y_{1,g}y_{4,g}y_{2,g}y_{3,g} \equiv \\
 y_{1,g}y_{3,g}y_{2,g}y_{4,g} &\equiv -y_{4,g}y_{1,g}y_{3,g}y_{2,g} \equiv y_{3,g}y_{1,g}y_{4,g}y_{2,g} \equiv -y_{3,g}y_{2,g}y_{4,g}y_{1,g}.
 \end{aligned}$$

Portanto, os polinômios $y_{1,g}y_{2,g}y_{3,g}y_{4,g}$, $y_{2,g}y_{1,g}y_{3,g}y_{4,g}$ e $y_{4,g}y_{2,g}y_{3,g}y_{1,g}$ geram $P_{(4_{g+})}(A)$, e assim $\dim_F P_{(4_{g+})}(A) \leq 3$. Se, para alguma partição $\langle \lambda \rangle \vdash (4_{g+})$, tivermos $m_{\langle \lambda \rangle} \geq 2$, então $d_{\langle \lambda \rangle} \geq m_{\langle \lambda \rangle} \geq 2$. Logo,

$$\dim_F P_{(4_{g+})}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash (4_{g+})} m_{\langle \lambda \rangle} d_{\langle \lambda \rangle} \geq 4,$$

um absurdo. Portanto, $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$, para toda partição $\langle \lambda \rangle \vdash (4_{g+})$. $\square$

A seguir, apresentaremos alguns exemplos para auxiliar na demonstração dos próximos resultados. Suponhamos que A satisfaz as identidades (5.12) e (5.13) e considere o espaço quociente $P_{(5_{g+})}(A)$. Considere o $(G, *)$ -polinômio

$$y_{2,g}y_{1,g}y_{3,g}y_{4,g}y_{5,g} \in P_{(5_{g+})}(A).$$

Observe que as variáveis $y_{2,g}$ e $y_{1,g}$ estão em posições distintas das usuais, isto é, aquelas em que os índices das variáveis coincidam com suas posições. Como nosso objetivo é ordenar as variáveis e conseqüentemente ter uma cota superior para a dimensão do espaço $P_{(5_{g+})}(A)$, recorremos a identidade (5.13). Assim, temos:

$$\begin{aligned}
 y_{2,g}y_{1,g}y_{3,g}y_{4,g}y_{5,g} &\equiv -y_{2,g}y_{3,g}y_{4,g}y_{5,g}y_{1,g} \\
 &\equiv y_{5,g}y_{2,g}y_{3,g}y_{4,g}y_{1,g}.
 \end{aligned}$$

Observe que na última congruência as variáveis $y_{5,g}$ e $y_{1,g}$ estão em posições ímpares, ou seja, de mesma paridade dos índices das variáveis. Nesse caso, recorrendo a (5.12), temos:

$$\begin{aligned}
 y_{5,g}y_{2,g}y_{3,g}y_{4,g}y_{1,g} &\equiv -y_{5,g}y_{2,g}y_{1,g}y_{4,g}y_{3,g} \\
 &\equiv y_{1,g}y_{2,g}y_{5,g}y_{4,g}y_{3,g} \\
 &\equiv -y_{1,g}y_{2,g}y_{3,g}y_{4,g}y_{5,g}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$y_{2,g}y_{1,g}y_{3,g}y_{4,g}y_{5,g} \equiv -y_{1,g}y_{2,g}y_{3,g}y_{4,g}y_{5,g}.$$

Consideramos agora o $(G, *)$ -polinômio $y_{1,g}y_{5,g}y_{3,g}y_{4,g}y_{2,g} \in P_{(5_{g+})}(A)$. Segue da identidade (5.13) que:

$$\begin{aligned} y_{1,g}y_{5,g}y_{3,g}y_{4,g}y_{2,g} &\equiv -y_{4,g}y_{1,g}y_{5,g}y_{3,g}y_{2,g} \\ &\equiv y_{3,g}y_{4,g}y_{1,g}y_{5,g}y_{2,g} \\ &\equiv -y_{5,g}y_{3,g}y_{4,g}y_{1,g}y_{2,g} \\ &\equiv y_{5,g}y_{4,g}y_{1,g}y_{2,g}y_{3,g}. \end{aligned}$$

Pela identidade (5.12), temos:

$$\begin{aligned} y_{5,g}y_{4,g}y_{1,g}y_{2,g}y_{3,g} &\equiv -y_{5,g}y_{2,g}y_{1,g}y_{4,g}y_{3,g} \\ &\equiv y_{1,g}y_{2,g}y_{5,g}y_{4,g}y_{3,g} \\ &\equiv -y_{1,g}y_{2,g}y_{3,g}y_{4,g}y_{5,g} \end{aligned}$$

Portanto,

$$y_{1,g}y_{5,g}y_{3,g}y_{4,g}y_{2,g} \equiv -y_{1,g}y_{2,g}y_{3,g}y_{4,g}y_{5,g}.$$

De modo geral, utilizando as identidades (5.12) e (5.13) e alguns cálculos extensivos, vemos que para qualquer $\sigma \in S_5$ temos $y_{\sigma(1),g}y_{\sigma(2),g}y_{\sigma(3),g}y_{\sigma(4),g}y_{\sigma(5),g} \equiv \pm y_{1,g}y_{2,g}y_{3,g}y_{4,g}y_{5,g}$ e então $P_{(5_{g+})}(A) = \text{span}_F\{y_{1,g}y_{2,g} \cdots y_{5,g}\}$.

Lema 5.3.9. *Assuma que A satisfaz as identidades (5.12) e (5.13). Então, para $n > 4$ temos $P_{(n_{g+})}(A) = \text{span}_F\{y_{1,g}y_{2,g} \cdots y_{n,g}\}$. Consequentemente, $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$, para toda partição $\langle \lambda \rangle \vdash (n_{g+})$ com $n > 4$.*

Demonstração. Provemos por indução sobre n . De fato, para $n = 5$ vimos no exemplo anterior que $P_{(5_{g+})}(A) = \text{span}_F\{y_{1,g}y_{2,g}y_{3,g}y_{4,g}y_{5,g}\}$ e portanto o resultado segue nesse caso. Agora, considere $n > 5$ e assumamos que para $i < n$, temos $P_{(i_{g+})}(A) = \text{span}_F\{y_{1,g}y_{2,g} \cdots y_{i,g}\}$. Isso nos diz que, em $P_{(n_{g+})}(A)$, as $n - 1$ primeiras variáveis de qualquer monômio podem ser ordenadas de maneira crescente. Portanto,

$$P_{(n_{g+})}(A) = \text{span}\{y_{1,g}y_{2,g} \cdots y_{j-1,g}y_{j+1,g} \cdots y_{n,g}y_{j,g} \mid 1 \leq j \leq n\}.$$

Usando a relação (5.12) $y_{1,g}y_{2,g}y_{3,g} \equiv -y_{3,g}y_{2,g}y_{1,g}$, temos que

$$y_{1,g}y_{2,g} \cdots y_{j-1,g}y_{j+1,g} \cdots y_{n,g}y_{j,g} \equiv y_{1,g}y_{2,g} \cdots y_{j-1,g}y_{j+1,g} \cdots y_{j,g}y_{n-2,g}y_{n,g}.$$

Desde que, pela hipótese de indução, as $n - 1$ primeiras variáveis podem ser reordenadas, concluímos que $P_{(n_{g+})}(A) = \text{span}_F\{y_{1,g}y_{2,g} \cdots y_{n,g}\}$. Finalmente, desde que

$$\dim P_{(n_{g+})}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash (n_{g+})} m_{\langle \lambda \rangle} d_{\langle \lambda \rangle} = 1,$$

então devemos ter $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$, para toda partição $\langle \lambda \rangle \vdash (n_{g+})$. □

Lema 5.3.10. *Assuma que A satisfaz a identidade $y_{1,g}y_{3,g}y_{2,g} - y_{2,g}y_{1,g}y_{3,g} \equiv 0$. Então, para $n \geq 3$ temos $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$, para toda partição $\langle \lambda \rangle \vdash (n_{g+})$.*

Demonstração. Iniciaremos a prova mostrando, por indução em n , que

$$P_{(n_{g+})}(A) = \text{span}_F\{y_{1,g}y_{2,g} \cdots y_{n-1,g}y_{n,g}, y_{1,g}y_{2,g} \cdots y_{n,g}y_{n-1,g}\}.$$

Assuma que $n = 3$ e considere o espaço $P_{(3_{g+})}(A)$, gerado pelos seguintes $(G, *)$ -polinômios

$$y_{1,g}y_{2,g}y_{3,g}, y_{2,g}y_{1,g}y_{3,g}, y_{1,g}y_{3,g}y_{2,g}, y_{3,g}y_{1,g}y_{2,g}, y_{3,g}y_{2,g}y_{1,g}, y_{2,g}y_{3,g}y_{1,g}.$$

Como A satisfaz

$$y_{1,g}y_{3,g}y_{2,g} - y_{2,g}y_{1,g}y_{3,g} \equiv 0,$$

temos que

$$y_{1,g}y_{2,g}y_{3,g} \equiv y_{3,g}y_{1,g}y_{2,g} \quad \text{e} \quad y_{2,g}y_{3,g}y_{1,g} \equiv y_{1,g}y_{2,g}y_{3,g};$$

$$y_{1,g}y_{3,g}y_{2,g} \equiv y_{2,g}y_{1,g}y_{3,g} \quad \text{e} \quad y_{3,g}y_{2,g}y_{1,g} \equiv y_{1,g}y_{3,g}y_{2,g}.$$

Portanto,

$$P_{(3_{g+})}(A) = \text{span}_F\{y_{1,g}y_{2,g}y_{3,g}, y_{1,g}y_{3,g}y_{2,g}\}.$$

Assuma que

$$P_{(n-1_{g+})}(A) = \text{span}_F\{y_{1,g}y_{2,g} \cdots y_{n-2,g}y_{n-1,g}, y_{1,g}y_{2,g} \cdots y_{n-3,g}y_{n-1,g}y_{n-2,g}\}.$$

Isso nos diz que, em $P_{(n_{g+})}(A)$, as $n - 1$ primeiras variáveis de qualquer monômio podem ser sempre organizadas de modo que o maior índice entre elas esteja sempre na última ou na penúltima posição entre elas. Então, $P_{(n_{g+})}(A)$ é gerado pelos $(G, *)$ -polinômios da forma

$$y_{1,g}y_{2,g} \cdots y_{n-2,g}y_{n-1,g}y_{n,g}, y_{1,g}y_{2,g} \cdots y_{n-3,g}y_{n-1,g}y_{n-2,g}y_{n,g},$$

$$y_{1,g} \cdots y_{n-2,g}y_{n,g}y_{n-1,g}y_{i,g}, y_{1,g} \cdots y_{n-1,g}y_{n,g}y_{i,g},$$

para algum $1 \leq i \leq n - 3$. Usando a relação $y_{1,g}y_{2,g}y_{3,g} \equiv y_{2,g}y_{3,g}y_{1,g}$ acima e a hipótese de indução, temos que as duas últimas identidades podem ser escritas como combinação linear das duas primeiras, módulo $Id^{(G,*)}(A)$. Logo, temos que $P_{(n_{g+})}(A)$ é gerado pelos polinômios $y_{1,g}y_{2,g} \cdots y_{n-2,g}y_{n,g}y_{n-1,g}$ e $y_{1,g}y_{2,g} \cdots y_{n-2,g}y_{n-1,g}y_{n,g}$ e portanto, $\dim_F P_{(n_{g+})}(A) \leq 2$. Observe que se $m_{\langle \lambda \rangle} \geq 2$, para alguma partição $\langle \lambda \rangle \vdash (n_{g+})$, então teríamos

$$\dim P_{(n_{g+})}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash (n_{g+})} m_{\langle \lambda \rangle} d_{\langle \lambda \rangle} \geq 4,$$

o que é absurdo. Portanto, nesse caso, devemos ter $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$, para todo $\langle \lambda \rangle \vdash (n_{g+})$, como queríamos. □

Lema 5.3.11. *Seja $g \in G \setminus \{1\}$ e assuma que A satisfaz pelo menos uma identidade de cada um dos seguintes itens abaixo*

$$1) \quad y_{1,g^2}y_{2,g} + \gamma_i y_{2,g}y_{1,g^2} \equiv 0;$$

$$2) \quad z_{1,g^2}y_{2,g} + \gamma_l y_{2,g}z_{1,g^2} \equiv 0;$$

$$3) \quad y_{1,g}z_{2,g^3} + \gamma_m z_{2,g^3}y_{1,g} \equiv 0;$$

onde $\gamma_i, \gamma_l, \gamma_m \in \{0, 1, -1\}$. Então, para $n \geq 3$, temos $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$, para toda partição $\langle \lambda \rangle$ do tipo $(\mu_{g^+}) \vdash (n_{g^+})$.

Demonstração. Inicialmente, observe que se $\gamma_i = 0$ ou $\gamma_l = 0$ então A satisfaz a identidade $y_{1,g^2}y_{2,g} \equiv 0$ ou $z_{1,g^2}y_{2,g} \equiv 0$. Portanto, o resultado segue do Lema 5.3.5. Passamos então a estudar os demais casos.

Suponhamos que A satisfaz a identidade do item 1) com $\gamma_i = 1$. Passamos então a analisar as identidades do item 2). Se $\gamma_l = 0$, temos

$$y_{1,g^2}y_{2,g} + y_{2,g}y_{1,g^2} \equiv 0 \quad \text{e} \quad z_{1,g^2}y_{2,g} \equiv 0.$$

Portanto, o resultado segue do Lema 5.3.5.

Agora se $\gamma_i = 1$ e $\gamma_l = 1$, temos

$$y_{1,g^2}y_{2,g} + y_{2,g}y_{1,g^2} \equiv 0 \quad \text{e} \quad z_{1,g^2}y_{2,g} + y_{2,g}z_{1,g^2} \equiv 0.$$

Desde que $y_{1,g} \circ y_{3,g}$ e $[y_{1,g}, y_{3,g}]$ são, respectivamente, $(G, *)$ -polinômios simétricos e antissimétricos de grau homogêneo g^2 , temos

$$(y_{1,g} \circ y_{3,g})y_{2,g} + y_{2,g}(y_{1,g} \circ y_{3,g}) \equiv 0 \quad \text{e} \quad [y_{1,g}, y_{3,g}]y_{2,g} + y_{2,g}[y_{1,g}, y_{3,g}] \equiv 0.$$

Somando as duas identidades acima, obtemos $y_{1,g}y_{3,g}y_{2,g} + y_{2,g}y_{1,g}y_{3,g} \equiv 0$. Assim,

$$\begin{aligned} y_{1,g}y_{3,g}y_{2,g} &\equiv -y_{2,g}y_{1,g}y_{3,g} \\ &\equiv y_{3,g}y_{2,g}y_{1,g} \\ &\equiv -y_{1,g}y_{3,g}y_{2,g} \end{aligned}$$

e, com isso concluímos que $2y_{1,g}y_{3,g}y_{2,g} \equiv 0$, ou seja, $y_{1,g}y_{3,g}y_{2,g} \in Id^{(G,*)}(A)$. Portanto, para $n \geq 3$ temos que $P_{(n_{g^+})} \subseteq Id^{(G,*)}(A)$, e assim, $\dim_F P_{(n_{g^+})}(A) = 0$. Consequentemente, concluímos nesse caso que $m_{\langle \lambda \rangle} = 0$, para toda partição $\langle \lambda \rangle$ do tipo $(\mu_{g^+}) \vdash (n_{g^+})$, e assim o lema segue.

Agora consideramos o caso em que $\gamma_i = 1$ e $\gamma_l = -1$. Neste caso, temos que A satisfaz as identidades

$$y_{1,g^2}y_{2,g} + y_{2,g}y_{1,g^2} \equiv 0, \tag{5.14}$$

$$z_{1,g^2}y_{2,g} - y_{2,g}z_{1,g^2} \equiv 0, \quad (5.15)$$

Similarmente ao caso anterior, a partir dos polinômios $y_{1,g} \circ y_{3,g}$ e $[y_{1,g}, y_{3,g}]$ obtemos como consequência a identidade

$$y_{1,g}y_{3,g}y_{2,g} + y_{2,g}y_{3,g}y_{1,g} \equiv 0. \quad (5.16)$$

Se $n = 3$, de acordo com Lema 5.3.7 obtemos $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$, para toda partição $\langle \lambda \rangle$ do tipo $(\mu_{g^+}) \vdash (3_{g^+})$. Portanto, consideramos o caso em que $n \geq 4$.

As equações (5.14) e (5.15) não são suficientes para concluirmos que $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$ quando $n \geq 4$, então vamos considerar as identidades que aparecem no item 3), isto é, A satisfaz uma identidade do tipo $y_{1,g}z_{2,g^3} + \gamma_m z_{2,g^3}y_{1,g} \equiv 0$, para algum $\gamma_m \in \{0, 1, -1\}$. Suponha que $\gamma_m = 0$, ou seja, A tem como identidade o polinômio

$$y_{1,g}z_{2,g^3} \equiv 0. \quad (5.17)$$

Defina o $(G, *)$ -polinômio $f = y_{2,g}y_{4,g}y_{3,g} - y_{3,g}y_{4,g}y_{2,g}$ e observe que f é antissimétrico de grau g^3 . Usando a identidade (5.17) obtemos $y_{1,g}f \equiv 0$ em A e assim $y_{1,g}y_{2,g}y_{4,g}y_{3,g} - y_{1,g}y_{3,g}y_{4,g}y_{2,g} \in Id^{(G,*)}(A)$. Usando novamente a identidade (5.16) obtemos

$$y_{1,g}y_{2,g}y_{4,g}y_{3,g} \equiv 0 \text{ em } A.$$

Logo, para $n \geq 4$, temos $P_{(n_{g^+})} \subset Id^{(G,*)}(A)$ nessa situação e assim $m_{\langle \lambda \rangle} = 0$, para toda partição $\langle \lambda \rangle$ do tipo $(\mu_{g^+}) \vdash (n_{g^+})$.

Vamos considerar agora a situação em que $\gamma_i = 1$, $\gamma_l = -1$ e $\gamma_m = 1$. Neste caso, temos a identidade

$$y_{1,g}z_{2,g^3} + z_{2,g^3}y_{1,g} \equiv 0.$$

Considerando o endomorfismo que leva a variável z_{2,g^3} no polinômio f definido acima e usando a identidade (5.16), obtemos como consequência da identidade acima o polinômio

$$y_{1,g}y_{2,g}y_{4,g}y_{3,g} + y_{2,g}y_{4,g}y_{3,g}y_{1,g} \equiv 0. \quad (5.18)$$

Logo, segue dos Lemas 5.3.8 e 5.3.9 que $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$, para todo $\langle \lambda \rangle \vdash (n_{g^+})$ com $n \geq 4$.

Na situação em que $\gamma_i = 1$, $\gamma_l = -1$ e $\gamma_m = -1$, a demonstração segue análoga a do último caso.

Portanto, resta considerarmos o caso em que $\gamma_i = -1$. Se $\gamma_l = 1$ temos que $y_{1,g^2}y_{2,g} - y_{2,g}y_{1,g^2} \equiv 0$ e $z_{1,g^2}y_{2,g} + y_{2,g}z_{1,g^2} \equiv 0$. Nesse caso, procedemos de maneira análoga ao caso em que $\gamma_i = 1$ e $\gamma_l = -1$. Finalmente, consideramos o caso em que $\gamma_i = -1$ e $\gamma_l = -1$, isto é, temos as seguintes identidades

$$y_{1,g^2}y_{2,g} - y_{2,g}y_{1,g^2} \equiv 0,$$

$$z_{1,g^2}y_{2,g} - y_{2,g}z_{1,g^2} \equiv 0.$$

Consideramos o endomorfismo que leva as variáveis y_{1,g^2} e z_{1,g^2} , respectivamente, nos $(G, *)$ -polinômios $y_{1,g} \circ y_{3,g}$ e $[y_{1,g}, y_{3,g}]$, simétrico e antissimétrico, respectivamente, de grau homogêneo g^2 . Somamos as identidades obtidas temos

$$y_{1,g}y_{3,g}y_{2,g} - y_{2,g}y_{1,g}y_{3,g} \equiv 0.$$

Portanto, pelo Lema 5.3.10, segue que $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$, para toda partição $\langle \lambda \rangle \vdash (n_{g^+})$ com $n \geq 3$, concluindo assim a prova do lema. $\square$

De maneira análoga ao Lema 5.3.11, podemos estabelecer identidades similares a requeridas no lema anterior para garantirmos que $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$, para toda partição $\langle \lambda \rangle \vdash (n_{g^-})$, onde $g \in G \setminus \{1\}$. Enunciamos o lema equivalente abaixo, cuja demonstração segue análoga ao lema anterior.

Lema 5.3.12. *Sejam $g \in G \setminus \{1\}$ e assuma que A satisfaz pelo menos uma identidade de cada um dos itens a seguir*

$$1) \quad y_{1,g^2}z_{2,g} + \gamma_p z_{2,g}y_{1,g^2} \equiv 0;$$

$$2) \quad z_{1,g^2}z_{2,g} + \gamma_q z_{2,g}z_{1,g^2} \equiv 0;$$

$$3) \quad z_{1,g}y_{2,g^3} + \gamma_r y_{2,g^3}z_{1,g} \equiv 0;$$

com $\gamma_p, \gamma_q, \gamma_r \in \{0, 1, -1\}$. Então, para $n \geq 3$, temos $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$, para toda partição $\langle \lambda \rangle$ do tipo $(\mu_{g^-}) \vdash (n_{g^-})$.

Agora estamos em condições de apresentar a demonstração da recíproca do Teorema 5.3.1.

Teorema 5.3.13. *[41] Se A satisfaz pelo menos uma identidade de cada um dos $2k^2 - k$ itens de identidades apresentados no enunciado do Teorema 5.3.1, então para todo $\langle n \rangle$ e $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$, com $n \geq 1$, temos $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$.*

Demonstração. Suponha que A satisfaz pelo menos uma identidade em cada item do Teorema 5.3.1. De acordo com o Lema 5.3.3, os vetores de altura máxima associados as multipartições do tipo $(\lambda_1, \dots, \lambda_{2k})$, são, a menos de sinal, produtos de vetores de altura máxima das multipartições dos tipos

$$(\lambda_1, \emptyset, \dots, \emptyset), (\emptyset, \lambda_2, \dots, \emptyset), \dots, (\emptyset, \dots, \emptyset, \lambda_{2k}),$$

respectivamente. Com isso, temos que

$$m_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k})} \leq m_{(\lambda_1, \emptyset, \dots, \emptyset)} m_{(\emptyset, \lambda_2, \dots, \emptyset)} \cdots m_{(\emptyset, \dots, \emptyset, \lambda_{2k})}.$$

Como A satisfaz $y_{1,1}z_{2,1} + \gamma_1 z_{2,1}y_{1,1} \equiv 0$, pelo Lema 5.3.4, temos que $m_{(\lambda_1, \emptyset, \dots, \emptyset)} \leq 1$ e $m_{(\emptyset, \lambda_2, \dots, \emptyset)} \leq 1$. Dado $g \in G \setminus \{1\}$, temos que A satisfaz pelo menos uma identidade de cada item dos Lemas 5.3.11 e 5.3.12. Portanto, $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$, para todas partições $\lambda \vdash (n_{g^\epsilon})$, com $\epsilon \in \{+, -\}$. Consequentemente, $m_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k})} \leq 1$ e o teorema está provado. $\square$

Unindo os Teoremas 5.3.1 e 5.3.13, estabelecemos condições necessárias e suficientes sobre o $T_{(G,*)}$ -ideal de uma $(G, *)$ -álgebra A para que as multiplicidades na decomposição de seu $\langle n \rangle$ -cocaracter sejam limitadas por 1.

Teorema 5.3.14. [41] *Para todo $\langle n \rangle$, com $n \geq 1$, e $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$, temos $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$, se, e somente se, A satisfaz pelo menos uma identidade de cada um dos $2k^2 - k$ itens de identidades apresentados no enunciado do Teorema 5.3.1.*

Para finalizar, podemos nos questionar a respeito da limitação das multiplicidades na decomposição do $(G, *)$ -cocaracter por uma constante qualquer. Utilizando argumentos análogos aos apresentados na demonstração do Teorema 4.3.4, podemos provar o seguinte.

Teorema 5.3.15. *Se existe uma constante q tal que para todo $\langle n \rangle$, com $n \geq 1$, e $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$ temos $m_{\langle \lambda \rangle} \leq q$, então A satisfaz uma identidade de grau $n \geq q$ de cada tipo:*

$$\begin{aligned} f &:= \sum_{i=1}^n \alpha_i y_{1,1}^{i-1} y_{2,g} y_{1,1}^{n-i} e \\ h &:= \sum_{i=1}^n \beta_i y_{1,1}^{i-1} z_{1,1} y_{1,1}^{n-i}; \end{aligned} \tag{5.19}$$

onde as constantes α'_i s e β'_i s não são todas nulas em cada polinômio.

Além disso, é importante questionar o que ocorre com uma $(G, *)$ -álgebra que satisfaz identidades como as listadas em (5.19). Para isso, consideramos uma generalização da $*$ -superálgebra $(M_{1,1}(F), s)$, definindo para cada $g \in G \setminus \{1\}$, uma $(G, *)$ -álgebra como sendo a álgebra $M_2(F)$ com involução simplética e G -graduação induzida pelo par $(1, g) \in G^2$, que denotaremos por $(M_{2,g}(F), s)$. Com isso, temos o seguinte resultado.

Teorema 5.3.16. *Se A é uma PI-álgebra e satisfaz uma $(G, *)$ -identidade de cada tipo:*

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^n \alpha_i y_{1,1}^{i-1} y_{2,g} y_{1,1}^{n-i} e \\ h &= \sum_{i=1}^n \beta_i y_{1,1}^{i-1} z_{1,1} y_{1,1}^{n-i}; \end{aligned}$$

onde as constantes α'_i s não são todas nulas em f e $\sum_{i=1}^n \beta_i \neq 0$ em h então $M_{1,*}$, $M_{g,*}$, $(M_{2,0}(F), s)$, $(M_{2,g}(F), s) \notin \text{var}^{(G,*)}(A)$, para todo $g \in G \setminus \{1\}$.

Demonstração. A demonstração segue análoga a do Lema 4.3.5 pois se A satisfaz $f \equiv 0$ então $M_{1,*} \notin \text{var}^{(G,*)}(A)$ e se A satisfaz $h \equiv 0$ então $(M_{2,0}(F), s)$, $M_{g,*} \notin \text{var}^{(G,*)}(A)$,

5.3 Caracterização das $(G, *)$ -álgebras com multiplicidades limitadas por 1 77

para todo $g \in G \setminus \{1\}$. Além disso, como $(M_{2,g}(F))^{(1)} = Fe_{11} + Fe_{22}$, temos que a mesma avaliação feita na prova do Lema 4.3.5 mostra que $(M_{2,g}(F), s)$ não satisfaz a identidade h , ou seja, $(M_{2,g}(F), s) \notin \text{var}^{(G,*)}(A)$, para todo $g \in G \setminus \{1\}$.

□

Vamos finalizar a tese com a próxima seção, onde faremos considerações a respeito deste último resultado.

Capítulo 6

Considerações finais

Em 1976, Ananin e Kemer em [1] caracterizaram álgebras cujas multiplicidades na decomposição do cocaracter são limitadas por um, via identidades. Em seguida, a situação foi estudada para álgebras com estruturas adicionais, sendo o resultado inicialmente estendido para o caso de álgebras com involução por Giambruno e Mishchenko em [15]. Neste mesmo artigo, os autores também provaram uma caracterização para álgebras C_2 -graduadas, ou seja, para superálgebras.

O caso de álgebras G -graduadas foi tratado por Giambruno, Polcino Milies e Valenti em [16]. Posteriormente, Martino estendeu a caracterização para álgebras munidas com C_2 -gradação e involução graduada, ou seja, para $*$ -superálgebras e também para superálgebras com superinvolução em [30].

Motivados por esses resultados, nesta tese, caracterizamos as $(G, *)$ -álgebras cujas multiplicidades que aparecem na decomposição do $\langle n \rangle$ -cocaracter são limitadas por 1 via $(G, *)$ -identidades.

Em 1999, Mishchenko, Regev e Zaicev em [31] provaram que dada uma álgebra A qualquer, as multiplicidades do seu cocaracter são limitadas por uma constante se, e somente se, $UT_2(F) \notin \text{var}(A)$. Este resultado, foi estudado por Giambruno e Cirrito em [4] no contexto de álgebras G -graduadas, foi estudado por Rizzo em [39] no contexto de $*$ -álgebras e por Ioppolo em [20] no contexto de $*$ -superálgebras.

Em [31] Mishchenko, Regev e Zaicev também provaram que $UT_2(F) \notin \text{var}(A)$ se, e somente se, A satisfaz uma identidade do tipo $\sum_{i=0}^n \alpha_i x_1^i x_2 x_1^{n-i} \equiv 0$, onde α_i 's são constantes não todas nulas. Motivados por esse resultado, nosso trabalho consistiu em buscar versões dessa equivalência para os contextos de $*$ -álgebras, álgebras G -graduadas e $*$ -superálgebras, obtendo assim versões mais próximas do teorema provado em [31]. Após obter os resultados desejados, uma pergunta natural é:

É possível estender o Teorema 1.0.4 para o contexto de $(G, *)$ -álgebras?

Como no caso ordinário, se A é uma $(G, *)$ -álgebra cujo $\langle n \rangle$ -cocaracter é decomposto como em (5.3) e $B \in \text{var}^{(G,*)}(A)$ é tal que $\chi_{\langle n \rangle}(B) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m'_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}$ então $m'_{\langle \lambda \rangle} \leq m_{\langle \lambda \rangle}$, para toda $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$. Logo, pelo Exemplo 5.2.9, se existe uma constante q tal que para todo $n \geq 1$ e $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$ a desigualdade $m_{\langle \lambda \rangle} \leq q$ é verdadeira, então $M_{1,*}, M_{g,*} \notin \text{var}^{(G,*)}(A)$.

Com isso, podemos nos questionar: vale a recíproca? Acreditamos que será necessária a exclusão de outras $(G, *)$ -álgebras para chegar a conclusão de que as multiplicidades são limitadas por constante. Inspirados pelo Teorema 1.0.12, enunciamos a seguir uma conjectura motivando trabalhos futuros para uma $(G, *)$ -álgebra A satisfazendo uma identidade não trivial com $\langle n \rangle$ -cocaracter $\chi_{\langle n \rangle}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle} m_{\langle \lambda \rangle}$.

Conjectura 6.0.1. *Se $M_{1,*}, M_{g,*}, (M_{2,0}(F), s), (M_{2,g}(F), s) \notin \text{var}^{(G,*)}(A)$, para todo $g \in G \setminus \{1\}$, então existe uma constante q tal que para todo $n \geq 1$ e $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$ a desigualdade $m_{\langle \lambda \rangle} \leq q$ é verdadeira.*

Se a conjectura acima for confirmada, com o uso do Teorema 5.3.16, teremos também confirmada a seguinte conjectura que garante multiplicidades limitadas por constante a partir de identidades especiais para $(G, *)$ -álgebras.

Conjectura 6.0.2. *Se A satisfaz uma identidade de cada tipo:*

$$\begin{aligned} f &:= \sum_{i=1}^n \alpha_i y_{1,1}^{i-1} y_{2,g} y_{1,1}^{n-i} e \\ h &:= \sum_{i=1}^n \beta_i y_{1,1}^{i-1} z_{1,1} y_{1,1}^{n-i}, \end{aligned}$$

onde as constantes α_i 's não são todas nulas em f e $\sum_{i=1}^n \beta_i \neq 0$ em h , então existe uma constante q tal que para todo $n \geq 1$ e $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$, temos $m_{\langle \lambda \rangle} \leq q$.

Referências

- [1] A. Z. Ananin and A. R. Kemer, *Varieties of associative algebras whose lattices of subvarieties are distributive*. (Russian) Sibirsk. Mat. Z. **17** (4) (1976) 723-730.
- [2] A. Berele, *Cocharacter sequences for algebras with Hopf algebra actions*. J. Algebra **185** (1996) 869-885.
- [3] A. Berele and A. Regev, *Applications of hook Young diagrams de P.I. algebras*. J. Algebra **82** (1983) 559-567 .
- [4] A. Cirrito and A. Giambruno, *Group graded algebras and multiplicities bouded by a constant*. J. Pure Appl. Algebra **217** (2013) 259-268.
- [5] W. Q. Cota, R. B. dos Santos and A. C. Vieira, *Algebras with Graded involution and $(G, *)$ -colength bounded by 4*. (2024) Submitted.
- [6] W. Q. Cota, A. Ioppolo, F. Martino and A. C. Vieira, *On the colength sequence of G -graded algebras*. Linear Algebra and its Applications **701** (2024) 61-96.
- [7] J. P. Cruz and A. C. Vieira, *Central polynomials of the second-order matrix algebra with graded involution*. J. Algebra **639** (2024) 574-595.
- [8] O. M. Di Vincenzo, *On the graded identities of $M_{1,1}(F)$* . Israel J. Math. **80** (1992) 323-335.
- [9] V. Drensky, *Free algebras and PI-algebras, Graduate course in algebra*. Springer-Verlag Singapore, Singapore, 2000.
- [10] V. Drensky and A. Giambruno, *Cocharacters, codimensões and Hilbert series of the polynomial identities for 2×2 matrices with involution*. Canad. J. Math. **46** (1994) 718-733 .
- [11] A. Giambruno, *$GL_m \times GL_m$ -representations and $*$ -polynomial identities*. Comm. Algebra **14** (1986) 787–796.

-
- [12] A. Giambruno, D. La Mattina, P. Misso, *Polynomial identities on superalgebras: classifying linear growth*. J. Pure Appl. Algebra **207** (2006) 215–240.
 - [13] A. Giambruno, A. Ioppolo and D. La Mattina, *Superalgebras with involutions or superinvolutions and almost polynomial growth of the codimensions*. Algebr. Represent. Theory **22** (2019), no.4, 961-976.
 - [14] A. Giambruno and S. Mishchenko, *Polynomial growth of the $*$ -codimensions and Young diagrams*. Comm. Algebra **29** (1) (2001) 277-284.
 - [15] A. Giambruno and S. Mishchenko, *Super-cocharacter, star-cocharacters and multiplicities bounded by one*. Manuscripta Math. **128** (2009) 483-504 .
 - [16] A. Giambruno, C. P. Milies and Valenti, *Cocharacters of group graded algebras and multiplicities bounded by one*. Linear and Multilinear Algebra **66** (8) (2018) 1709-1715.
 - [17] A. Giambruno and A. Regev, *Wreath products and P.I. algebras*. J. Pure Appl. Algebra **35** (1985) 133-149.
 - [18] A. Giambruno, R. B. dos Santos and A. C. Vieira, *Identities of $*$ -superalgebras and almost polynomial growth*. Linear Multilinear Algebra, vol **64** (3) (2015) 484-501.
 - [19] A. Giambruno and M. Zaicev, *Polynomial identities and asymptotic methods*. Math. Surveys Monogr., vol. 122, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
 - [20] A. Ioppolo, *Some results concerning the multiplicities of cocharacters of superalgebras with graded involution*. Linear Algebra and its Appl. **594** (2020) 51-70.
 - [21] A. Ioppolo and D. La Mattina, *Polynomial codimension growth of algebras with involutions and superinvolutions*. J. Algebra **472** (2017) 519–545.
 - [22] I. Kaplansky, *Rings with a polynomial identity*. Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948) 496-500.
 - [23] A. R. Kemer, *Finite basis property of identities of associative algebras*. Algebra and Logic (1987), 362-397.
 - [24] P. Koshlukov and D. La Mattina, *Graded algebras with polynomial growth of their codimensions*. J. Algebra. **434** (2015) 115-137.
 - [25] D. La Mattina, *Almost polynomial growth: classifying varieties of graded algebras*. Israel J. Math. **207** (2015) 53-75.

-
- [26] D. La Mattina, *Characterizing varieties of colength ≤ 4* . Commun. Algebra **37** (2009) 1793-1807.
- [27] D. La Mattina and F. Martino, *Polynomial growth and star-varieties*. J. Pure Appl. Algebra **220** (2016) 246–262.
- [28] D. La Mattina, T. S. do Nascimento and A. C. Vieira, *Minimal star-varieties of polynomial growth and bounded colength*. J. Pure Appl. Algebra **222** (2018) 1765 - 1785.
- [29] V. Levchenko, *Finite basis property of identities with involution of a second order matrix algebra*. Serdica **8** (1982) 42–56.
- [30] F. Martino, *Classifying algebras with graded involutions or superinvolutions with multiplicities of their cocharacter bounded by one*. Algebr Represent Theory **24** (2021) 317-326 .
- [31] S. P. Mishchenko, A. Regev and M. V. Zaicev, *A characterization of P.I. algebras with bounded multiplicities of the cocharacters*. J. Algebra **219** (1999) 356-368.
- [32] S. P. Mishchenko and A. Valenti, *A star-variety with almost polynomial growth*. J. Algebra **223** (2000) 66-84.
- [33] T. S. do Nascimento and A. C. Vieira, *Superalgebras with graded involution and star-graded colength bounded by 3*. Linear Multilinear Algebra. **67** (2019) 1999-2020.
- [34] M. A. de Oliveira, R. B. dos Santos and A. C. Vieira, *Polynomial growth of the codimensions sequence of algebras with group graded involution*. Israel J. Math. **261** (2024) 445-471.
- [35] M. A. de Oliveira, R. B. dos Santos and A. C. Vieira, *Cocharacters and colengths of varieties of algebras with graded involution*. To appear in Comm. Algebra.
- [36] L. M. Oliveira, R. B. dos Santos and A. C. Vieira, *Varieties of group graded algebras with graded involution of almost polynomial growth*. Algebr. Represent. Theory. **26** (2023) 663-677.
- [37] F. C. Otera, *Finitely generated PI-superalgebras with bounded multiplicities of the cocharacteres*. Comm. Algebra **33** (2005) 1693–1707.
- [38] A. Regev, *Existence of identities in $A \otimes B$* . Israel J. Math. **11** (1972) 131-152.
- [39] C. Rizzo, *Algebras with involution and multiplicities bounded by a constant*. J. Algebra **547** (2020) 556-578.

-
- [40] B. E. Sagan, The symmetric group - representations, combinatorial algorithms and symmetric functions. 1st ed. Belmont (CA): Wadsworth; 1991.
 - [41] R. B. dos Santos, A. C. Vieira and R. F. D. N. Vieira, *Characterization of algebras with graded involution with multiplicities bounded by one*. Preprint.
 - [42] R. B. dos Santos, A. C. Vieira and R. F. D. N. Vieira, *Identities satisfied by algebras with additional structures and multiplicities bounded by constant*. Preprint.
 - [43] A. Valenti and M. Zaicev, *Abelian gradings on upper-triangular matrices*. Arch. Math. **80** (2003) 12-17.
 - [44] A. Valenti, *Group graded algebras and almost polynomial growth*. J. Algebra **334** (2011) 247-254.