UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Alexandre Alves da Rocha

Explorando as Capacidades do Método Wavelet para Modelagem de Propagação de Ondas de Rádio: Um Enfoque em Eficiência e Precisão na Predição de Cobertura Radioelétrica

Belo Horizonte

2024

Alexandre Alves da Rocha

Explorando as Capacidades do Método Wavelet para Modelagem de Propagação de Ondas de Rádio: Um Enfoque em Eficiência e Precisão na Predição de Cobertura Radioelétrica

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Cássio Gonçalves do Rego

Belo Horizonte

2024

Rocha, Alexandre Alves da.
R672e Explorando as capacidades do Método Wavelet para modelagem de propagação de ondas de rádio [recurso eletrônico] : um enfoque em eficiência e precisão na predição de cobertura radioelétrica / Alexandre Alves da Rocha. – 2024.
1 recurso online (156 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Cássio Gonçalves do Rego.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Bibliografia: f. 145-154.
Inclui índice.

1. Engenharia elétrica – Teses. 2. Sistemas de comunicação – Teses. 3. Equações diferenciais parabólicas – Teses. 4. Ondas de rádio – Propagação – Teses. 5. Wavelets (Matemática) – Teses. 6. Modelagem computacional – Teses. I. Rego, Cássio Gonçalves do. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 621.3(043)

Ficha catalográfica elaborada pelo Bibliotecário Marcio A. A. Gomes CRB/6 2812
Biblioteca Prof. Mário Werneck, Escola de Engenharia da UFMG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

ESCOLA DE ENGENHARIA

COLEGIADO DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

"Explorando As Capacidades do Método Wavelet Para Modelagem de Propagação de Ondas de Rádio: Um Enfoque em Eficiência e Precisão na Predição de Cobertura Radioelétrica"

Alexandre Alves da Rocha

Tese de Doutorado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 09 de agosto de 2024.

Por:

_____

Prof. Dr. Cássio Gonçalves do Rego
DELT (UFMG) - Orientador

_____

Prof. Dr. Jhonattan Cordoba Ramirez
DELT (UFMG)

_____

Prof. Dr. Glaucio Lopes Ramos
ETM (UFSJ)

_____

Prof. Dr. Luiz Alencar dos Reis da Silva Mello
DEE (PUC Rio)

_____

Prof. Dr. Taufik Abrão
DEEL (UEL)

_____

Prof. Dr. Sandro Trindade Mordente Gonçalves
DEE (CEFET-MG)

Documento assinado eletronicamente por **Cassio Goncalves do Rego**, **Professor do Magistério Superior**, em 12/08/2024, às 13:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Glaucio Lopes Ramos**, **Usuário Externo**, em 14/08/2024, às 13:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Sandro Trindade Mordente Gonçalves**, **Usuário Externo**, em 14/08/2024, às 14:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Taufik Abrao**, **Usuário Externo**, em 16/08/2024, às 17:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Jhonattan Cordoba Ramirez**, **Professor do Magistério Superior**, em 16/08/2024, às 18:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Luiz Alencar Reis da Silva Mello**, **Usuário Externo**, em 26/08/2024, às 12:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3450565** e o código CRC **C1C20AE0**.

Referência: Processo nº 23072.244450/2024-40 SEI nº 3450565

A Deus, meu refúgio e fortaleza nos momentos mais difíceis, minha eterna gratidão.

À minha família, em especial à memória de minha mãe, Maria das Vitórias, cujo caráter, determinação, cumplicidade, companheirismo, apoio e amor incondicional sempre me inspiraram e guiaram ao longo desta jornada.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha profunda gratidão a todos que estiveram ao meu lado ao longo desta jornada, contribuindo de maneira direta e indireta para a concretização desta pesquisa.

A minha família, cuja dedicação incansável, apoio incondicional e constante incentivo foram fundamentais em minha jornada. Agradeço à minha esposa, Joelma, pela sua perseverança, resiliência e confiança inabaláveis; ao meu filho, Bernardo, pela motivação que sustentou minha determinação; e aos meus irmãos e irmãs, que sempre estiveram ao meu lado e colaboram diariamente para perpetuar os valores deixados por nossa mãe.

Reconheço o papel fundamental do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE/UFMG) e seus dedicados professores em minha formação científica. Destaco especialmente a excepcional orientação do Professor Cássio Gonçalves do Rego, cuja perspicácia, apoio constante e confiança foram cruciais para minha evolução como pesquisador.

Estendo meus agradecimentos aos membros da banca, que generosamente dedicaram seu tempo e vasto conhecimento para avaliar meu trabalho, oferecendo críticas construtivas e sugestões valiosas que contribuirão para o aprimoramento desta pesquisa.

Aos colegas do Grupo de Antenas, Propagação e Teoria Eletromagnética (GAPTEM), agradeço por enriquecerem o processo de pesquisa com discussões e debates, tornando-o mais gratificante e leve.

À Faculdade de Ciências Econômicas (FACE/UFMG), meu reconhecimento pela significativa contribuição para minha formação profissional e acadêmica, assim como ao apoio consistente da equipe do STI. Aos diretores com os quais tive a oportunidade de trabalhar e contribuir, meu sincero agradecimento. Aos colegas da FACE que participaram neste processo, agradeço pela colaboração e apoio ao longo desta jornada.

Agradeço a todos os amigos que sempre estiveram ao meu lado, acreditando em mim e me apoiando ao longo desta jornada.

Por fim, Agradeço a Deus por Sua orientação, força e sabedoria que me permitiram concluir esta tese e alcançar meus objetivos.

A todos mencionados e a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para este feito, meu mais sincero obrigado.

"As ondas eletromagnéticas são como mensageiros silenciosos do universo, transportando informações invisíveis através do espaço."

RESUMO

No presente trabalho, é apresentada uma análise abrangente da abordagem denominada Método Wavelet em Passos Divididos aplicados na solução de Equações Parabólicas (SSW-PE) na modelagem de propagação de ondas de rádio. O SSW-PE introduz inovações significativas, como a aplicação de abordagens de ângulos de feixes estreitos e amplo, denominadas NAPE e WAPE, respectivamente. Além disso, são incorporadas variações de refratividade, modificações na modelagem de terrenos para uma melhor representação e considerações de condições de contorno de superfície mistas. Ressalta-se também o detalhamento e imposição de critérios de amostragem para prevenir instabilidades numéricas e a consequente amplificação de erros e oscilações numéricas. O objetivo desta tese é explorar esses aspectos inovadores e fornecer um guia completo para a replicação eficaz do algoritmo, promovendo o avanço dos estudos de propagação utilizando *Wavelets*. A eficácia e aplicabilidade dessa abordagem são validadas por meio de estudos comparativos com soluções bem estabelecidas, incluindo a versão do Método de Fourier em Passos Divididos com Transformada Discreta Mista para a resolução de Equações Parabólicas (DMFT-SSPE). Além disso, são realizadas comparações com campanhas de medições de casos reais de propagação. A análise estatística confirma o potencial inovador do algoritmo SSW-PE, que também oferece eficiência computacional para simulações rápidas e consistentes. Dessa forma, esta tese contribui com uma análise abrangente e inovadora, fornecendo recursos tangíveis para a comunidade de pesquisa interessada em expandir essa metodologia. Em síntese, este estudo introduz com sucesso uma abordagem inovadora para solucionar equações parabólicas em previsões de cobertura radioelétrica, com foco no método SSW-PE, um notável avanço em eficiência computacional. Os resultados promissores confirmam seu potencial revolucionário na modelagem de propagação eletromagnética, especialmente em ambientes realísticos.

Palavras-chave: Método Wavelet em Passos Divididos, NAPE, WAPE, eficiência computacional, modelagem de propagação de rádio, predição de cobertura radioelétrica, equações parabólicas, propagação de ondas de rádio, refratividade, modelagem de terrenos.

ABSTRACT

In this work, a comprehensive analysis of the Split-Step Wavelet Method applied to the solution of the Parabolic Equations (SSW-PE) in modeling radio wave propagation is presented. The SSW-PE introduces significant innovations, such as the application of narrow and wide beam angle approaches, referred to as NAPE and WAPE, respectively. Additionally, variations in refractivity, modifications in terrain modeling for better representation, and considerations of mixed surface boundary conditions are incorporated. The detailing and imposition of sampling criteria to prevent numerical instabilities and the consequent amplification of errors and numerical oscillations are also highlighted. The objective of this thesis is to explore these innovative aspects and provide a complete guide for the effective replication of the algorithm, promoting the advancement of propagation studies using *Wavelets*. The effectiveness and applicability of this approach are validated through comparative studies with well-established solutions, including the version of the Split-Step Fourier Method with Discrete Mixed Transform for solving the Parabolic Equations (DMFT-SSPE). Additionally, comparisons with measurement campaigns of real propagation cases are conducted. Statistical analysis confirms the innovative potential of the SSW-PE algorithm, which also offers computational efficiency for fast and consistent simulations. Thus, this thesis contributes a comprehensive and innovative analysis, providing tangible resources for the research community interested in expanding this methodology. In summary, this study successfully introduces an innovative approach to solve parabolic equations in radio coverage predictions, focusing on the SSW-PE method, a remarkable advancement in computational efficiency. The promising results confirm its revolutionary potential in electromagnetic propagation modeling, especially in realistic environments.

Keywords: Split-Step Wavelet Method, NAPE, WAPE, computational efficiency, radio propagation modeling, radio coverage prediction, parabolic equations, radio wave propagation, refractivity, terrain modeling.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Modelagem de Propagação Paraxial. 29
Figura 2 – Modelagem de marcha para a propagação no sentido direto. 30
Figura 3 – Representação do Ângulo de Elevação no Método de Equação Parabólica de Feixes Estreitos. 32
Figura 4 – Representação do Ângulo de Elevação no Método WAPE. 34
Figura 5 – Modelo de propagação de 2WPE ondas propagantes diretas e retroespalhamento geradas a partir de reflexões no terreno. 35
Figura 6 – Malha curvilínea para um perfil de terreno 3-D. 37
Figura 7 – Seção Vertical do Terreno e Domínio de Computacional. 39
Figura 8 – Software de código aberto PETOOL com janelas de análise 2-D e 3-D. 41
Figura 9 – Interpretação da Solução em Passos Divididos. 50
Figura 10 – O cenário de propagação. 53
Figura 11 – O cenário de propagação como um guia de onda. 55
Figura 12 – A discretização da formulação SSPE. 58
Figura 13 – Janela Hanning. 59
Figura 14 – Função Wavelet Morlet. 63
Figura 15 – Demonstração da Propriedade de Dilatação da Wavelet Morlet. 64
Figura 16 – Propriedade de Translação das Funções Wavelet. 65
Figura 17 – Função Wavelet e Função de Escalonamento Associada para Daubechies (db4). 66
Figura 18 – Função Wavelet e Função de Escalonamento Associada para Meyer. . . 67
Figura 19 – Função Wavelet e Função de Escalonamento Associada para Coiflet (coif2). 67
Figura 20 – Função Wavelet e Função de Escalonamento Associada para Daubechies (db6). 68
Figura 21 – Função Wavelet e Função de Escalonamento Associada para Symlet (sym6). 68
Figura 22 – Função Wavelet Chapéu Mexicano. 69
Figura 23 – Função Wavelet para Haar e sua escalonadora associada. 69
Figura 24 – Banco de Filtros para Transformada Wavelet Discreta em Três Níveis de Resolução. 72
Figura 25 – Estrutura Hierárquica da Reconstrução Discreta de Wavelets em Três Níveis de Resolução. 73
Figura 26 – Campo Inicial do Sinal Radiado pelo CSP com Família de *Wavelets* $n_v = 5$ e $L = 3$. 79

Figura 26 – Campo Inicial do Sinal Radiado pelo CSP com Família de *Wavelets* $n_v = 5$ e $L = 3$ (continuação). 80
Figura 27 – Amplitude do Sinal Radiado pelo CSP com Família de *Wavelets* para $n_v = 5$ e $L = 3$. 81
Figura 27 – Amplitude do Sinal Radiado pelo CSP com Família de *Wavelets* $n_v = 5$ e $L = 3$ (continuação). 82
Figura 28 – Campo irradiado pelo CSP com $x_{w0} = -50$ e $W_0 = 5$ metros. 85
Figura 29 – Campo Compactado Utilizando a Transformada *Wavelet* Symlet 6 com Limiar de Compressão $V_s = 10^{-3}$. 85
Figura 30 – Coeficientes de Aproximação e Detalhes para o Campo CSP Amostrado com $L = 3$. 86
Figura 31 – Diagrama do Algoritmo Wavelet em Passos Divididos. 90
Figura 32 – Discretização do Domínio Computacional para o Método Wavelet em Passos Divididos. 91
Figura 33 – Algoritmo para Cálculo da Matriz de Propagação. 94
Figura 34 – Esquematização do Método de Imagem Local. 95
Figura 35 – Discretização das Condições de Contorno com o Método de Imagem Local. 96
Figura 36 – Propagação livre de obstáculos em ambiente homogêneo. 99
Figura 37 – Campo na posição $x = 40$ km para propagação livre de obstáculos em ambiente homogêneo. 99
Figura 38 – Propagação em um perfil de terreno plano com condutor elétrico perfeito. 100
Figura 39 – Campo observado na posição $x = 40$ km em um perfil de terreno plano com condutor elétrico perfeito. 101
Figura 40 – Propagação em Terreno Plano PEC sob a influência da Atmosfera Padrão. 102
Figura 41 – Variação do Campo Observado na Posição $x = 40$ km em Terreno Plano PEC sob a Influência da Atmosfera Padrão. 102
Figura 42 – Propagação eletromagnética na presença de uma obstrução cunha em terreno com perdas. 103
Figura 43 – Variação do campo observado na posição $x = 40$ km em um cenário com obstrução cunha e terreno com perdas. 103
Figura 44 – Comparação de eficiência computacional entre os métodos SSW e SSF. 104
Figura 45 – Diagrama Conceitual do Algoritmo SSW-PE 105
Figura 46 – Algoritmo para Cálculo da Matriz de Propagação - lSSW. 109
Figura 47 – Algoritmo para Cálculo da Propagação por uso de Wavelet. 113
Figura 48 – Distribuição do Campo Auxiliar Normalizado em Cenário Suburbano de Cúcuta, Colômbia. 117
Figura 49 – Comparação de Perdas de Propagação entre SSW-PE e DMFT-SSPE em Cúcuta, Colômbia. 118

Figura 50 – Comparação das Perdas de Percurso Medidas e Estimadas em Diferentes Técnicas em Mjels, Norte de Jutland, Dinamarca. 119
Figura 51 – Análise das Perdas ao Longo do Percurso em Jerslev: Comparação entre Medições e Estimativas Numéricas. 121
Figura 52 – Dispersão das Estimativas de Perdas ao longo do Percurso entre Diferentes Técnicas e Medições em Jerslev, Norte de Jutland, Dinamarca. . 122
Figura 53 – Sistema de Transporte Metroferroviário em Belo Horizonte. 123
Figura 54 – Distribuição Normalizada do Campo Elétrico ao Longo do Trajeto entre Minas Shopping e São Gabriel, BH/MG/BRA. 124
Figura 55 – Análise das Perdas ao Longo do Percurso entre Minas Shopping e São Gabriel, BH/MG/BRA: Comparação entre Diferentes Técnicas Numéricas. 125
Figura 56 – Comparação da Potência Recebida entre Diferentes Técnicas Numéricas no Perfil Vertical na Estação São Gabriel, BH/MG/BRA. 126
Figura 57 – Distribuição do Campo Elétrico ao Longo do Enlace CCO e Horto, BH/MG/BRA. 128
Figura 58 – Análise das Perdas ao Longo do Percurso entre CCO e Horto, BH/MG/BRA: Comparação entre Diferentes Técnicas Numéricas. 128
Figura 59 – Comparação da Potência Recebida no Perfil Vertical na Estação Horto, BH/MG/BRA. 129
Figura 60 – Distribuição do Campo Elétrico ao Longo do Trajeto entre CCO e Santa Tereza, BH/MG/BRA. 130
Figura 61 – Análise das Perdas ao Longo do Percurso entre CCO e Santa Tereza, BH/MG/BRA: Comparação entre Diferentes Técnicas Numéricas. . . . 131
Figura 62 – Comparação da Potência Recebida no Perfil Vertical na Estação Santa Tereza, BH/MG/BRA. 131
Figura 63 – Distribuição Normalizada do Campo Elétrico ao Longo do Trajeto entre Minas Shopping e Santa Inês, BH/MG/BRA. 132
Figura 64 – Análise das Perdas ao Longo do Percurso entre Minas Shopping e Santa Inês, BH/MG/BRA: Comparação entre Diferentes Técnicas Numéricas. 133
Figura 65 – Comparação da Potência Recebida no Perfil Vertical na Estação Santa Inês, BH/MG/BRA. 134
Figura 66 – Distribuição Normalizada do Campo Elétrico ao Longo do Trajeto entre Vilarinho e Primeiro de Maio, BH/MG/BRA. 135
Figura 67 – Análise das Perdas ao Longo do Percurso entre Vilarinho e Primeiro de Maio, BH/MG/BRA: Comparação entre Diferentes Técnicas Numéricas. 135
Figura 68 – Comparação da Potência Recebida no Perfil Vertical na Estação Primeiro de Maio, BH/MG/BRA. 136
Figura 69 – Distribuição Normalizada do Campo Elétrico ao Longo do Trajeto entre Vilarinho e Minas Shopping, BH/MG/BRA. 137

Figura 70 – Análise das Perdas ao Longo do Percurso entre Vilarinho e Minas Shopping, BH/MG/BRA: Comparação entre Diferentes Técnicas Numéricas. 138
Figura 71 – Comparação da Potência Recebida no Perfil Vertical na Estação Minas Shopping, BH/MG/BRA. 138

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Comparação das Propriedades das Famílias de *Wavelets* para Representação do Campo Eletromagnético. 76
Tabela 2 – Comparação da Taxa de Compressão e Erro Quadrático Médio (RMSE) das Famílias de *Wavelets* para a Representação do Campo Eletromagnético. 80
Tabela 3 – Análise da Ordem das *Wavelets* para $W_0 = 3$ e $x_{w0} = -50$ metros com Família de *Wavelet* Symlet. 82
Tabela 4 – Análise de Ordem das *Wavelets* para $W_0 = 10$ e $x_{w0} = -50$ metros com Família de *Wavelet* Symlet. 83
Tabela 5 – Análise de ordem das *Wavelets* para $W_0 = 3$ e $x_{w0} = -500$ metros com Família *Wavelet* Symlet. 83
Tabela 6 – Análise de ordem das *Wavelets* para $W_0 = 10$ e $x_{w0} = -500$ metros com Família *Wavelet* de Symlet. 83
Tabela 7 – Análise dos Níveis de Decomposição na Precisão do Sinal Comprimido com Família de *Wavelet* Symlet. 84
Tabela 8 – Avaliação do Limiar de Compressão na Taxa de Compactação e Erro para Família de *Wavelet* Symlet. 84
Tabela 9 – Parâmetros Estatísticos do Estudo de Caso em Mjels 120
Tabela 10 – Estatísticas de Erro e Tempo de Simulação para Diferentes Técnicas no Estudo de Caso de Jerslev 122
Tabela 11 – Comparação do Tempo de Processamento entre Diferentes Técnicas Numéricas no Percurso entre Minas Shopping e São Gabriel, BH/MG/BRA. 127
Tabela 12 – Comparação do Tempo de Processamento entre Diferentes Técnicas Numéricas no Percurso entre CCO e Horto, BH/MG/BRA. 129
Tabela 13 – Comparação do Tempo de Processamento entre Diferentes Técnicas Numéricas no Percurso entre CCO e Santa Tereza, BH/MG/BRA. . . 132
Tabela 14 – Comparação do Tempo de Processamento entre Diferentes Técnicas Numéricas no Percurso entre Minas Shopping e Santa Inês, BH/MG/BRA. 134
Tabela 15 – Comparação do Tempo de Processamento entre Diferentes Técnicas Numéricas no Percurso entre Vilarinho e Primeiro de Maio, BH/MG/BRA. 136
Tabela 16 – Comparação do Tempo de Processamento entre Diferentes Técnicas Numéricas no Percurso entre Vilarinho e Minas Shopping, BH/MG/BRA. 139

Lista de Algoritmos

I Processo de Cálculo da Matriz de Propagação 94

II Cálculo da matriz de propagação SM. 109

III Propagação do campo sem inclusão de efeitos do meio. 113

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

1WPE - One-Way Parabolic Equation.

2-DPE - Equações Parabólicas bidimensionais.

2WPE - Two-Way Parabolic Equation.

3-DPE - Equações Parabólicas tridimensionais.

BC - Condições de Contorno.

COIF - Família de Funções Wavelet de Coifman.

CSP - Ponto de Fonte Complexa.

DB - Família de Funções Wavelet de Daubechies.

DMFT - Transformada Discreta de Fourier.

DMFT-SSPE - Método de Fourier em Passos Divididos com Transformada Discreta Mista.

DST - Transformada Discreta da Função Seno.

EM - Eletromagnéticas.

FD - Método das Diferenças Finitas.

FDTD - Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo.

FEM - Método dos Elementos Finitos.

FFT - Transformada Rápida de Fourier.

FWT - Transformada Rápida Wavelet.

GTD - Teoria Geométrica da Difração.

IFWT - Inversa da Transformada Rápida Wavelet.

LSSW - Matriz de Propagação Wavelet Local.

MFT - Transformada de Fourier Mista.

MRA - Análise de Multirresolução.

NAPE - Método das Equações Parabólicas de Feixe Estreito.

PE	- Equação Parabólica.
PEC	- Condutor Elétrico Perfeito.
PML	- Camadas Perfeitamente Casadas.
QMF	- Filtro de Quadratura Espelhada.
SPE	- Equação Parabólica Clássica.
SSF	- Método de Fourier em Passos Divididos.
SSPE	- Equação Parabólica com Método de Fourier em Passos Divididos.
SSW-PE	- Método Wavelet em Passos Divididos.
SYM	- Família de Funções Wavelet de Symlets.
TDPE	- Equações Parabólicas no domínio do tempo.
UTD	- Teoria Uniforme de Difração.
WAPE	- Método das Equações Parabólicas de Feixe Largo.

LISTA DE SÍMBOLOS

α_1	Constante que define a condição de contorno transversal.
α_2	Constante que define a condição de contorno transversal.
δ	Parâmetro utilizado na separação dos operadores exponenciais.
ϵ	Permissividade ou constante dielétrica.
ϵ_r	Permissividade relativa.
E	Intensidade do campo elétrico.
f	Frequência.
i	Número imaginário unitário ($\sqrt{-1}$).
k	Número de onda.
λ	Comprimento de onda.
N	Refratividade.
n	Índice de refração.
N_{p_a}	Tamanho total da camada de absorção.
N_x	Número de segmentos ao longo da coordenada x.
N_z	Número de segmentos ao longo da coordenada z.
ψ	Componente escalar do campo.
σ	Condutividade.
θ	Ângulo de propagação.
U	Componentes do campo elétrico ou magnético em regime harmônico no tempo.
u	Função auxiliar de campo elétrico.
$\tilde{u}(x)$	Campo eletromagnético discretizado ao longo da coordenada z.
$\tilde{U}$	Campo propagado no domínio espectral.
x	Coordenada relacionada a posição.

x_{max}	Distância máxima.
x_s	Posição inicial da propagação.
x_{p_x}	Pontos discretos no eixo x.
z	Coordenada relacionada a altura.
z_{max}	Altura máxima.
z_{p_z}	Pontos discretos no eixo z.
$\mathcal{J}$	Janela Hanning para absorção gradual do campo.

SUMÁRIO

1 Introdução 23
1.1 Contextualização e Motivação 23
1.2 Publicações 24
1.3 Organização do Texto 25
2 Método de Equações Parabólicas 27
2.1 Introdução 27
2.2 Estrutura e Fundamentos do Método PE 28
2.2.1 Perspectivas na Variação do Ângulo de Elevação 33
2.2.2 Características e Modelagem do Retroespalhamento 35
2.2.3 Avanços e Desafios na Modelagem Tridimensional 37
2.3 Técnicas de Solução em Equações Parabólicas 38
2.4 Modelagem e Condições de Contorno 42
2.5 Evolução na Abordagem do Modelamento de Terrenos Irregulares 44
2.6 Avanços nas Pesquisas com Métodos de Propagação Eletromagnética no GAPTEM 45
2.7 Conclusão 46
3 Método de Passos Divididos para Equações Parabólicas 48
3.1 A formulação em Passos Divididos 48
3.1.1 Efeitos da Variação do Índice de Refração com a Distância 49
3.1.2 Aplicação da Transformada de Fourier 51
3.1.3 Discretização com Transformada Seno 54
3.2 Modelo Geral do Método SSPE 57
3.2.1 Configuração Numérica e Discretização do Domínio 57
3.2.2 Imposição de Condições de Contorno 58
3.3 Conclusão 59
4 Wavelets 61
4.1 Introdução às Wavelets: História, Propriedades e Aplicações 61
4.2 Definição e Origem das Wavelets 61
4.2.1 História e Desenvolvimento das Wavelets 61
4.3 Fundamentos das Transformadas Wavelet 63
4.3.1 Construção e Propriedades das Famílias Wavelet 63
4.3.2 Principais Funções Wavelet e Suas Características 66
4.3.3 Transformada Wavelet Discreta: Teoria e Aplicações 69
4.3.4 Implementação da Transformada Rápida Wavelet 71
4.4 Representação Esparsa com Wavelets 73

4.5 Parâmetros e Características das Wavelets . . . 74
4.5.1 Momentos Nulos e Suporte Compacto . . . 75
4.5.2 Regularidade e simetria . . . 75
4.5.3 Seleção de Wavelets para Propagação Eletromagnética . . . 76
4.6 Análise de Parâmetros das Wavelets . . . 77
4.6.1 Avaliação das Famílias de Wavelets (Daubechies, Coiflets e Symlets) 78
4.6.2 Influência da Ordem das Wavelets na Taxa de Compressão e Erro . 82
4.6.3 Efeito dos Níveis de Decomposição na Precisão do Sinal . . . 83
4.6.4 Avaliação do Limiar de Compressão na Taxa de Compactação e Erro 84
4.7 Conclusão . . . 86
5 Método Wavelet em passos divididos . . . 88
5.1 Introdução . . . 88
5.2 Histórico e Desenvolvimento dos Métodos Baseados em Wavelet . . . 88
5.3 O método SSW . . . 89
5.3.1 Descrição teórica da etapas do método . . . 91
5.3.2 Método Clássico de Cálculo da Matriz de Propagação . . . 92
5.3.3 Análise das Condições de Contorno com o Método de Imagem Local 94
5.3.4 Análise dos Limiares de Compressão no Método SSW . . . 97
5.4 Validação Numérica e Demonstração de Eficácia do Método SSW . . . 98
5.4.1 Propagação Livre de Obstáculos em Ambiente Homogêneo . . . 98
5.4.2 Perfil de Terreno Plano com Condutor Elétrico Perfeito e Ausência de Variações Atmosféricas . . . 100
5.4.3 Impacto da Atmosfera Padrão em Terreno Plano PEC . . . 101
5.4.4 Impacto da Obstrução por Cunha em Terreno com Perdas . . . 102
5.4.5 Análise de Desempenho Computacional . . . 104
5.5 O Aprimoramento do Método Wavelet em Passos Divididos . . . 104
5.5.1 Primeiro Passo: Definição e Modelagem dos Parâmetros da Fonte . 106
5.5.2 Segundo Passo: Modelagem do Terreno Investigado . . . 107
5.5.3 Terceiro Passo: Definição da Malha Discretizada do Ambiente . . . 108
5.5.4 Quarto Passo: Definição dos Parâmetros da Wavelet e Configuração da Matriz de Propagação . . . 108
5.5.5 Quinto Passo: Obtenção do Perfil de Refratividade . . . 110
5.5.6 Sexto Passo: Obtenção do Filtro de Atenuação . . . 111
5.5.7 Sétimo Passo: Início do Ciclo de Repetição para a Função de Campo Auxiliar . . . 111
5.5.8 Oitavo Passo: Aplicação dos Parâmetros de Refração . . . 112
5.5.9 Nono Passo: Aplicação da Abordagem Discreta para os Coeficientes 112
5.5.10 O Décimo Passo: Construção do campo auxiliar . . . 113
5.5.11 O Décimo Primeiro Passo: Propagação da Wavelet . . . 113

5.5.12 O Décimo Segundo Passo: Multiplicação pelo Operador Espacial-p . 114
5.5.13 O Décimo Terceiro Passo: Propagação dos Coeficientes 114
5.5.14 O Décimo Quarto Passo: Obtenção da Solução Particular 114
5.5.15 O Décimo Quinto Passo: A Fase Final de Cálculo no Ciclo de Repetição 115
5.5.16 O Décimo Sexto Passo: O Processo de Tomada de Decisão Relacionado à Propagação 116
5.6 Avaliação de Desempenho do Algoritmo SSW-PE: Estudos de Caso 116
5.6.1 Análise Comparativa de Modelos de Propagação de Rádio em Ambiente Suburbano: Estudo de Caso em Cúcuta, Colômbia 117
5.6.2 Análise Comparativa de Técnicas de Propagação de Ondas em Terreno Irregular: Estudo de Caso em Mjels, Norte de Jutland . . . 119
5.6.3 Análise das Perdas de Propagação e Eficiência Computacional:Estudo de Caso em em Jerslev 120
5.6.4 Investigação da Propagação de Rádio no Transporte Metroferroviário de Belo Horizonte 123
5.6.4.1 Avaliação do Enlace entre Centro de Controle Operacional e Estação Horto 127
5.6.4.2 Avaliação do Enlace entre Centro de Controle Operacional e Estação Santa Tereza 130
5.6.4.3 Avaliação do Enlace entre Minas Shopping e Estação Santa Inês 132
5.6.4.4 Avaliação do Enlace entre Vilarinho e Estação Primeiro de Maio 134
5.6.4.5 Avaliação do Enlace entre Vilarinho e Estação Minas Shopping 137
5.6.5 Conclusões dos Estudos de Casos: Avaliação e Aplicabilidade do Algoritmo SSW-PE 139
5.7 Conclusão 140
6 Conclusões e Propostas de Continuidade da Pesquisa 141
6.1 Considerações Finais 141
6.2 Propostas de Continuidade da Pesquisa 143
REFERÊNCIAS 145
ÍNDICE 155

1 Introdução

1.1 Contextualização e Motivação

No contexto atual, marcado pela crescente demanda por comunicações sem fio de alta velocidade e capacidade de transmissão, impulsionada pelos avanços tecnológicos, surge a necessidade premente de métodos mais eficientes na solução de problemas relacionados ao espalhamento e perdas em corpos eletricamente grandes. Nesse sentido, o uso de *Wavelets* tem se destacado como uma alternativa promissora, visando aprimorar a eficiência computacional.

Recentemente, foi proposto um algoritmo para reduzir o custo computacional e os requisitos de armazenamento e memória dos métodos baseados em Transformadas Rápidas de Fourier (FFT) - o método *Wavelet* em Passos Divididos (SSW) [1]. Uma das principais vantagens atribuídas ao SSW em relação a outros métodos reside no uso da Transformada Rápida *Wavelet* (FWT), que possibilita uma análise mais detalhada tanto temporal quanto espacialmente. As *Wavelets* têm possibilitado resultados mais rápidos e precisos, motivando a exploração de seu potencial para redução do custo computacional em soluções iterativas de problemas de eletromagnetismo [1–5]. Diferentemente de abordagens anteriores [6], as *Wavelets* não são usadas como funções de base para o modelo, mas sim para expandir as iterações nas etapas de propagação.

O objetivo fundamental deste trabalho é aprimorar a técnica de modelagem de propagação de ondas eletromagnéticas por meio do uso de *Wavelets* na solução de Equações Parabólicas (PE), apresentando o algoritmo SSW-PE. Este algoritmo introduz inovações significativas, como a aplicação de abordagens NAPE e WAPE, incorporando variações de refratividade, modificações na modelagem de terrenos para uma melhor representação e considerações de condições de contorno de superfície mistas. Destaca-se também o detalhamento e imposição de critérios de amostragem para prevenir instabilidades numéricas e mitigar a amplificação de erros e oscilações numéricas. Além disso, serão estabelecidos critérios para garantir estabilidade, precisão e eficiência, fornecendo uma diagramação conceitual do algoritmo para incentivar pesquisas futuras sobre os benefícios das *Wavelets*.

Os benefícios dessa técnica serão explorados em uma análise realista de vários cenários de propagação, conduzindo análises comparativas com métodos consolidados e experimentos em ambientes reais, com o objetivo de validar a eficácia e a aplicabilidade do SSW-PE como uma ferramenta robusta para modelagem e caracterização de canais de rádio. Os resultados obtidos fornecerão informações sólidas para o desenvolvimento de sistemas de comunicação mais eficientes, contribuindo significativamente para avanços no

campo de propagação de ondas de rádio.

1.2 Publicações

Durante o desenvolvimento desta tese, foram produzidas as seguintes publicações:

- **Rocha, Alexandre; PARADA, DIEGO ; TAMI, DIEGO ; GUEVARA, DINAEL ; REGO, CÁSSIO G.** (2024). An Efficient and Accurate Algorithm for Electromagnetic Wave Propagation Modeling Based on Wavelet Transforms. *JOURNAL OF MICROWAVES, OPTOELECTRONICS AND ELECTROMAGNETIC APPLICATIONS, v. 23*p. e2024279458 [7].

  Esta publicação apresenta o método Wavelet em Passos Divididos (SSW-PE) na modelagem da propagação de ondas de rádio. Inovações introduzidas pelo SSW-PE incluem abordagens NAPE e WAPE, incorporação de variações de refratividade e modificações na modelagem de terrenos. A eficácia é validada por estudos comparativos com soluções estabelecidas, incluindo DMFT-SSPE, e medições de casos reais. O potencial inovador do SSW-PE é confirmado por análises estatísticas, oferecendo eficiência computacional para simulações rápidas e consistentes.

- **ROCHA, A. A.; REGO, CASSIO G.** (2022). Método Wavelet Para Solução de Equações Parabólicas Aplicadas à Problemas de Predição de Cobertura Radioelétrica. *20o. Simpósio Brasileiro de Micro-ondas e Optoeletrônica (SBMO 2022), 2022, Natal/RN. Anais do 20o. Simpósio Brasileiro de Micro-ondas e Optoeletrônica, 2022, v. 2022* [8].

  Neste artigo, é apresentada uma abordagem para a resolução de equações parabólicas utilizando *Wavelets* aplicadas à previsão de cobertura radioelétrica. Este método é proposto como uma alternativa às técnicas já consolidadas baseadas em transformadas de Fourier.

- **Rocha, Alexandre; PARADA, DIEGO ; TAMI, DIEGO ; GUEVARA, DINAEL ; REGO, CÁSSIO G.** (2024). Efficient Radio Coverage Prediction Using Split-Step Wavelet Parabolic Equation Method. *21o. Simpósio Brasileiro de Micro-ondas e Optoeletrônica (SBMO 2024), 2024, Bento Gonçalves/RS* (*submetido, aguardando parecer*).

  Neste artigo, é apresentado um estudo sobre o uso do algoritmo SSW-PE, destacado por sua abordagem refinada e inovadora, que resulta em maior eficiência computacional e precisão. Os aprimoramentos na representação do terreno, consideração de condições de contorno e revisão do critério de Nyquist são abordados na pesquisa. Análises comparativas são realizadas para confirmar a superioridade do SSW-PE sobre técnicas existentes.

A estrutura desta tese foi cuidadosamente planejada para guiar o leitor desde os fundamentos até o aprimoramento e validação do algoritmo proposto, o SSW-PE. Detalhes sobre essa organização serão apresentados na Seção 1.3.

1.3 Organização do Texto

Após a contextualização e objetivos aqui apresentados, no Capítulo 2 será abordado o método de Equações Parabólicas (PE), reconhecido como um dos métodos numéricos mais confiáveis para simular a propagação de ondas radioelétricas na troposfera. A teoria do método PE será revisitada e serão apresentados os avanços recentes na aplicação desse método aos problemas de propagação eletromagnética. Será estabelecida a estrutura do método, incluindo a configuração, as abordagens quanto ao ângulo de elevação, o retroespalhamento e o espaço tridimensional. Também serão discutidos um levantamento histórico do algoritmo PE e os avanços em pesquisas, as melhorias nas condições de contorno e as abordagens sobre o perfil de terreno. Finalmente, serão apresentadas as pesquisas desenvolvidas no Grupo de Antenas, Propagação e Teoria Eletromagnética, destacando-se os aspectos inovadores do método PE e as oportunidades de pesquisa.

No Capítulo 3 será discutida a implementação numérica do método de Passos Divididos para Equações Parabólicas, com ênfase na precisão e eficiência por meio do uso da transformada de Fourier. Inicialmente, a Equação Parabólica Clássica será estruturada em uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, adequada para resolução por meio de transformadas de Fourier, estabelecendo-se a base teórica para a abordagem numérica adotada. Em seguida, serão delineadas as soluções numéricas para os métodos PE NAPE e WAPE, destacando-se a propagação iterativa do campo em etapas discretas. A discretização do domínio nos eixos vertical e horizontal será explicada, assim como a aplicação das condições de contorno para garantir a precisão dos resultados. Finalmente, estratégias para lidar com condições de contorno complexas, como o uso da Transformada de Fourier Mista, serão introduzidas.

A seguir, no Capítulo 4 as *Wavelets* serão apresentadas e suas propriedades, bem como a constituição de suas famílias, serão expostas. Na primeira parte, será discutido o histórico das *Wavelets*. Em seguida, serão introduzidas as transformadas *Wavelets*, incluindo a formação das famílias, as propriedades de translação e escalonamento. Por fim, será abordado o processo de compressão de dados. Essas análises são fundamentais para compreender as características essenciais das *Wavelets* e sua aplicação na análise de sinais, constituindo elementos básicos para o método híbrido.

No Capítulo 5 será apresentada uma análise abrangente da proposta principal desta tese, o método *Wavelet* em passos divididos, denominado SSW-PE. O método SSW-PE será desenvolvido, fundamentado nas transformações *Wavelets*, critérios de compreensão,

regularidade, simetria e escolha das famílias *Wavelets* introduzidos previamente. Será apresentada uma visão geral do método, e pontos específicos serão abordados, como a construção da matriz de propagação, a camada de absorção, o método das imagens, as influências do relevo e da atmosfera e a complexidade computacional.

O Capítulo 6 apresentará as considerações finais sobre a pesquisa e propostas de continuidade para com a pesquisa.

2 Método de Equações Parabólicas

Método de Equações Parabólicas (PE) reconhecido como um dos métodos numéricos mais confiáveis para simular a propagação de ondas radioelétricas na troposfera, é baseado numa aproximação da equação de onda que descreve a energia propagando-se em um cone centrado numa direção preferencial, denominada direção paraxial.

O objetivo deste capítulo é revisitar a teoria do método PE e, subsequentemente, apresentar os avanços mais recentes na aplicação desse método aos problemas de propagação eletromagnética. Para além disso, é primordial produzir um conhecimento que será fundamental para a continuidade e produção do foco principal da tese, que consiste na solução de Equações Parabólicas. A correta interpretação e efetiva definição dos conceitos atrelados ao método PE serão utilizadas como base para os capítulos posteriores, onde os avanços propostos pela pesquisa serão abordados especificamente.

Na Seção 2.1, é apresentada uma introdução sobre as equações parabólicas. Na Seção 2.2, é estabelecida a estrutura do método. Em seguida, são estabelecidas as abordagens quanto ao ângulo de elevação, apresentando as expansões do método NAPE e do método WAPE. Por fim, questões sobre o retroespalhamento e o espaço tridimensional são discutidas. Na Seção 2.3, um levantamento histórico do algoritmo PE e os avanços estabelecidos em pesquisas abordando o modelo e consequentemente contribuindo com melhorias para a técnica são apresentados. Em seguida, na Seção 2.4, o histórico das pesquisas que envolvem melhorias e propostas quanto às condições de contorno empregadas na modelagem PE é revisitado. Na Seção 2.5, as abordagens quanto às tratativas sobre o perfil de terreno e o histórico de pesquisas são apresentados. Finalmente, na Seção 2.6, as pesquisas desenvolvidas e em elaboração no Grupo de Antenas, Propagação e Teoria Eletromagnética são trazidas ao conhecimento, a fim de estabelecer uma contemporaneidade sobre o método em estudo. Na Seção 2.7, serão apresentadas as conclusões, destacando-se os aspectos inovadores do método PE e as oportunidades de pesquisa nesse campo propiciadas por ele.

2.1 Introdução

Uma ferramenta numérica capaz de calcular as perdas de percurso (*path loss* - PL) entre quaisquer dois pontos marcados em mapas digitais é buscada por engenheiros de telecomunicações e especialistas em levantamento de radio-propagação. Para isso, a equação de onda eletromagnética em três dimensões (3-D) precisa ser resolvida, considerando diversos efeitos eletromagnéticos, como o relevo irregular do terreno, a vegetação, a curvatura da Terra, a refratividade atmosférica e a presença de obstáculos como prédios

e carros. Além disso, todos os componentes relevantes de espalhamento que contribuem para a perda de percurso devem ser incorporados [9]. Infelizmente, essa abordagem ainda não está completamente ao nosso alcance.

Atualmente, a estratégia numérica prevalente consiste em projetar a propagação em um perfil que contenha o transmissor e o receptor, reduzindo assim o problema tridimensional a cenários bidimensionais (2-D) que incorporam o alcance considerando posição e altura. Dentro desse contexto, softwares atrativos e eficazes para previsão de propagação bidimensional têm emergido ao longo da última década, fundamentados em várias técnicas, entre as quais se destaca o método de Equações Parabólicas [10]. Este método, objeto de estudo central nesta tese, é reconhecido por sua atratividade e eficácia. Ao lado dele, outras abordagens têm surgido, tais como o método dos Momentos (MoM) [11], o método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (FDTD) [12], a Matriz de Linhas de Transmissão (TLM) [13] e o Traçado de Raios [14].

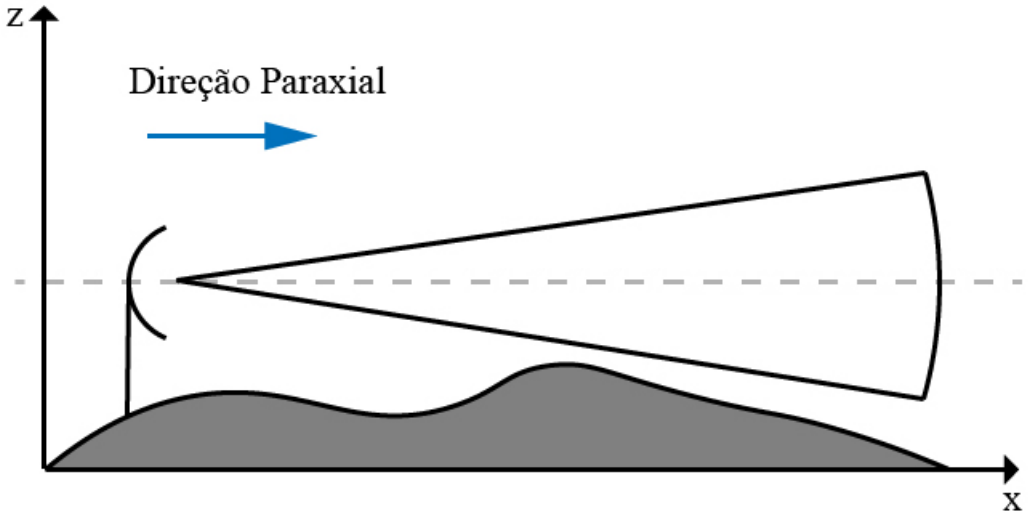
Os dois métodos mais empregados para a solução das Equações Parabólicas baseiam-se no método das Diferenças Finitas (*finite-difference* - FD) e no método de Fourier em Passos Divididos (*Split-Step Fourier* - SSF). O método das Diferenças Finitas apresenta a vantagem de permitir uma implementação direta de fronteiras complexas. No entanto, o método de Fourier é considerado mais eficiente numericamente, permitindo incrementos maiores na malha, o que o torna particularmente adequado para propagar ondas em longas distâncias. O cálculo é executado incrementalmente. Em cada etapa, a onda é transformada do domínio espacial para o espectral por meio de uma transformada ao longo da posição vertical. A refratividade, a condição de contorno do solo e a configuração irregular do relevo podem ser consideradas nos métodos de Passos Divididos. Para incorporar a refratividade no domínio espacial, utiliza-se o método das Telas de Fase (*Phase-Screens method*) [9]. Diversos algoritmos podem ser empregados para modelar o relevo, incluindo a Transformada Discreta Mista de Fourier (*Discrete Mixed Fourier Transform* - DMFT) proposta por Dockery e Kuttler [15].

2.2 Estrutura e Fundamentos do Método PE

O método de Equações Parabólicas foi inicialmente aplicado à modelagem da propagação acústica submarina por Leontovich e Fock na década de 1940 [16]. Naquela época, a detecção precoce de submarinos representava um desafio significativo, exigindo um entendimento aprofundado da propagação acústica em águas profundas e rasas, considerando variáveis como densidade da água, perfis do fundo marinho, correntes e outros fatores. Posteriormente, o método PE se tornou amplamente utilizado na modelagem da propagação de ondas eletromagnéticas por meio de guias de onda Terra-troposfera.

Em 1946, Leontovich e Fock [16] buscavam resolver o problema da estratificação

Figura 1 – Modelagem de Propagação Paraxial.



Fonte: Adaptado de [9].

vertical na propagação atmosférica e, assim, o método PE foi proposto como uma abordagem de análise avançada das ondas em propagação direta.

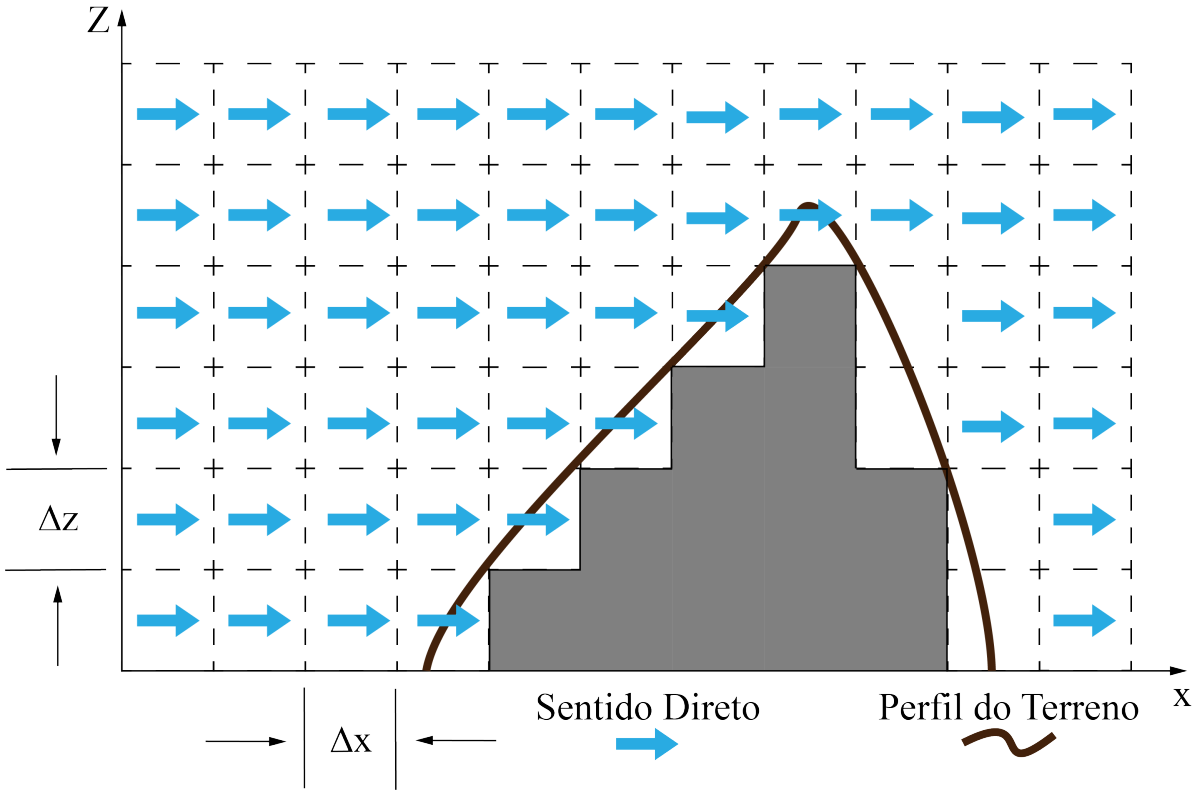
O problema clássico é representado por um cenário eletromagnético bidimensional, onde as ondas se propagam ao longo da direção do eixo x, sendo a componente do campo eletromagnético independente do eixo y. A Terra atua como limite inferior e o cenário se estende infinitamente sem limites superiores. Um exemplo esquemático de propagação troposférica é ilustrado na Figura 1, onde as direções de propagação a serem modeladas estão contidas no cone paraxial. Esse problema é regido pela equação escalar de Helmholtz [9]

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U = 0, \tag{2.1}$$

onde $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ é o número de onda no vácuo, ω é a frequência angular e U representa as componentes do campo elétrico ou magnético em regime harmônico no tempo. Ao longo deste trabalho, assume-se a supressão da dependência temporal, que é dada por $\exp(-i\omega t)$, sendo $i = \sqrt{(-1)}$.

A equação de onda homogênea, também conhecida como equação de Helmholtz (Equação (2.1)), é uma Equação Diferencial Parcial elíptica (EDP) que descreve a propagação de ondas em um meio homogêneo e isotrópico, sem fontes ou correntes elétricas. A solução da Equação de Helmholtz permite descrever a propagação de ondas e a distribuição de energia em um meio em função da frequência e das condições iniciais e de contorno, permitindo analisar e prever diversos fenômenos físicos e efeitos de propagação. Para facilitar a representação, adota-se a função auxiliar de campo $u(x, z) = \exp(-ikx)\, U$, o que leva à seguinte formulação:

Figura 2 – Modelagem de marcha para a propagação no sentido direto.



Fonte: Adaptado de [17].

$$\frac{\partial^2 u(x,z)}{\partial x^2} + 2ik\frac{\partial u(x,z)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x,z)}{\partial z^2} + k^2(n^2-1)u(x,z) = 0, \tag{2.2}$$

onde n é o índice de refração do meio homogêneo troposférico.

Mais especificamente, ao realizar a fatoração na equação de Helmholtz, Equação (2.2), obtêm-se duas equações que contêm o operador pseudodiferencial Q, caracterizando respectivamente as ondas eletromagnéticas de propagação direta (*forward*) e de retroespalhamento (*backward*).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} -ik(1-Q)u & \text{propagação direta,} \\ -ik(1+Q)u & \text{propagação reversa,} \end{cases} \tag{2.3}$$

onde:

$$Q = \sqrt{1+q} \quad \text{e} \quad q = \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + (n^2-1). \tag{2.4}$$

As Equações 2.3 são do tipo pseudo-diferencial de primeira ordem em relação a z, o que justifica o uso do termo "parabólico". A aproximação feita ao resolver cada termo

separadamente é uma aproximação paraxial. Nesse trabalho, considera-se a propagação direta e omite-se a equação que caracteriza a componente de retroespalhamento.

A solução formal é obtida ao calcular o campo em uma posição anterior e aplicar a Equação Parabólica, avançando em intervalos discretos ao longo da distância de propagação desejada. A Figura 2 ilustra essa abordagem de marcha para a propagação direta, a qual deve ser resolvida simultaneamente em todos os pontos do domínio de integração.

O método de marcha empregado nas PE possibilita calcular eficientemente o campo em cada ponto de interesse. Assim a solução para propagação direta, Equação (2.3), é expressa como:

$$u(x+\Delta x, z) = \exp(-ik\Delta x(1-Q))\; u(x,z), \tag{2.5}$$

e a aproximação utilizada é dada por:

$$\sqrt{(1+q)} \approx \frac{a_0 + a_1 q}{b_0 + b_1 q}. \tag{2.6}$$

Dessa forma, a Equação (2.3) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}\Big\{ &\left(b_0 + b_1(n^2-1)\right)\frac{\partial u(x,z)}{\partial x} + (b_1 k^{-2})\frac{\partial^3 u(x,z)}{\partial z^2 \partial x} \\ &+ik\left((b_0 - a_0) + (b_1 - a_1)(n^2-1)\right) + ik^{-1}(b_1 - a_1)\frac{\partial^2 u(x,z)}{\partial z^2}\Big\} = 0,\end{aligned} \tag{2.7}$$

que pode ser considerada de forma geral como:

$$A_0\frac{\partial u(x,z)}{\partial x} + A_1\frac{\partial^3 u(x,z)}{\partial z^2 \partial x} + A_2 + A_3\frac{\partial^2 u(x,z)}{\partial z^2} = 0, \tag{2.8}$$

onde os coeficientes são definidos como:

$$\begin{aligned} A_0 &= b_0 + b_1(n^2-1), \\ A_1 &= b_1 k^{-2}, \\ A_2 &= ik\left((b_0 - a_0) + (b_1 - a_1)(n^2-1)\right), \\ A_3 &= ik^{-1}(b_1 - a_1). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Utilizando a aproximação por expansão de primeira ordem da série de Taylor, onde $a_0 = 1$, $a_1 = 0,5$, $b_0 = 1$, $b_1 = 0$, os coeficientes se reduzem para: $A_0 = 1$, $A_1 = 0$, $A_2 = -0,5ik(n^2-1)$ e $A_3 = -0.5ik^{-1}$, resultando na seguinte forma simplificada da Equação (2.8):

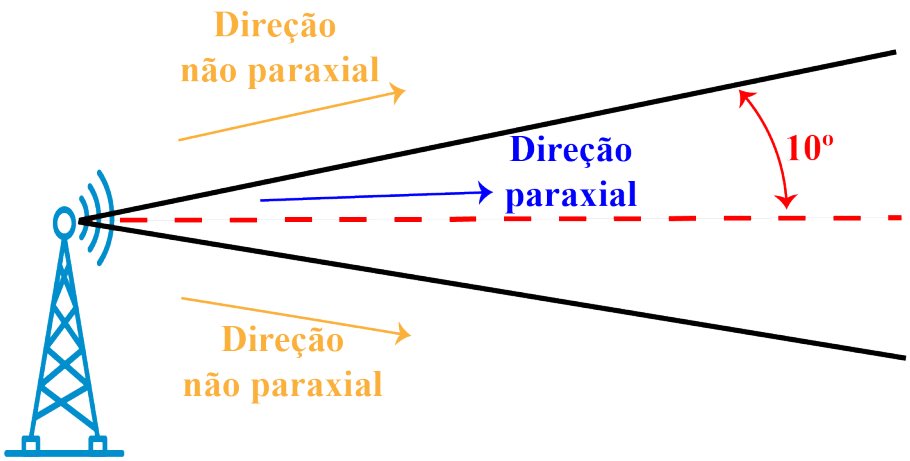
$$\frac{\partial u(x,z)}{\partial x} - 0,5ik(n^2-1) - 0,5ik^{-1}\frac{\partial^2 u(x,z)}{\partial z^2} = 0. \tag{2.10}$$

A partir da manipulação da Equação (2.10) e multiplicando por $2ik$, obtemos a Equação Parabólica Clássica, também denominada *Standard Parabolic Equation* (SPE) [9], para a propagação direta:

$$\frac{\partial^2 u(x,z)}{\partial z^2} + 2ik\frac{\partial u(x,z)}{\partial x} + k^2(n^2(x,z) - 1)u(x,z) = 0. \tag{2.11}$$

Diferentes formas de calcular aproximadamente o operador Q determinam o ângulo de elevação de propagação das PE, cuja precisão, pode ser garantida apenas quando o ângulo de elevação está dentro de uma faixa específica. A modelagem padrão adota a aproximação de primeira ordem da expansão de Taylor, retendo apenas os primeiros dois termos, o que limita a precisão da aproximação e resulta em uma pequena faixa de ângulos de elevação geralmente não superior a 10°. Por esse motivo, essa abordagem é conhecida como método NAPE, cuja representação é ilustrada na Figura 3.

Figura 3 – Representação do Ângulo de Elevação no Método de Equação Parabólica de Feixes Estreitos.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Inicialmente, a modelagem das PE demandava poder computacional e algoritmos de cálculo, até que em 1973, Hardin e Tappert [18] importaram o método de Fourier em Passos Divididos (*Split-Step Fourier*) da pesquisa acústica subaquática. Desde então, esse método tem sido aplicado com eficácia. Posteriormente, Dockery [19, 20] introduziu o método SSF-PE (também denominado SSPE) na propagação de dutos troposféricos (*Tropospheric Ducting Propagation* - TDP), obtendo excelentes resultados de cálculo. Desde a década de 1980, a derivação teórica da modelagem das PE tem sido aperfeiçoada. Com base na estrutura, o estudo do método PE pode ser dividido em três aspectos:

- Expansão do limite máximo computável do ângulo de elevação, ou seja, a propagação considerando o método NAPE e sua evolução para o método WAPE, abordado na seção 2.2.1.

- Consideração da componente de retroespalhamento, ou seja, da transição da modelagem unidirecional (*One-Way Parabolic Equation* - 1WPE) para a modelagem bidirecional (*Two-Way Parabolic Equation* - 2WPE) das Equações Parabólicas, apresentada na seção 2.2.2.

- Expansão das Equações Parabólicas para o espaço tridimensional (3-D), isto é, a passagem das Equações Parabólicas bidimensionais (2-DPE) para as Equações Parabólicas tridimensionais (3-DPE), discutido na seção 2.2.3.

2.2.1 Perspectivas na Variação do Ângulo de Elevação

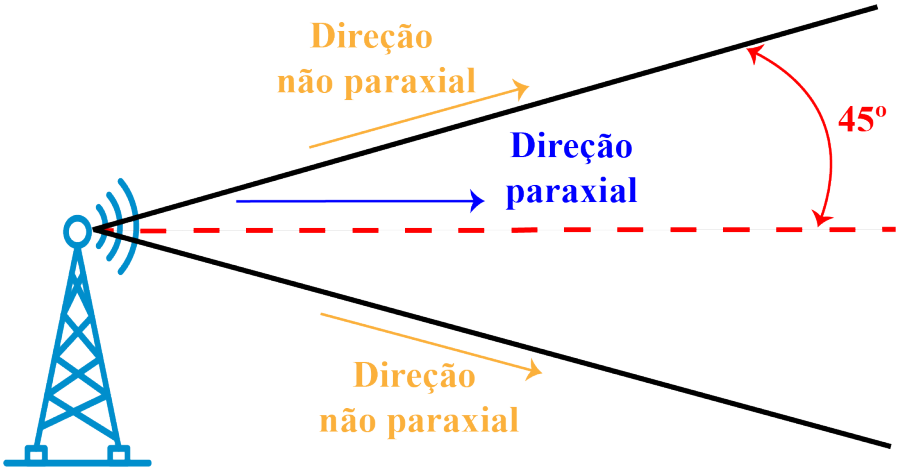
A expansão do NAPE para WAPE é considerada um desafio significativo para as pesquisas baseadas no método PE. O princípio subjacente à derivação exige uma aproximação do operador pseudodiferencial Q com o menor erro possível. Vários modelos foram propostos em diversos trabalhos de investigação para lidar com ângulos largos, incluindo o método Claerbout PE [21], a modelagem de Feit-Fleck [22], e o método de Padé [23]. A contribuição de Feit-Fleck é amplamente aceita e o WAPE é frequentemente referido como o método de Feit-Fleck em textos científicos, pois os autores foram os pioneiros nesse modelo, permitindo a expansão do ângulo de elevação para cerca de 30°.

Em 1983, uma nova forma de WAPE baseada no método de Feit-Fleck foi formalmente proposta por Thomson e Chapman [24], a qual se tornou amplamente adotada. Kuttler [25], comparando os erros de cálculo entre WAPE e NAPE utilizando ângulos e amplitudes exatas de Bragg como referência, confirmou o bom desempenho do WAPE em casos de grandes ângulos de elevação.

A proposta para lidar com ângulos de propagação maiores consiste em representar o operador Q da seguinte forma: $Q = \sqrt{1 + A + B}$ e aproximá-lo como $Q \approx \sqrt{1 + A} + \sqrt{1 + B} - 1$, onde $A = \partial^2/k^2\partial z^2$ e $B = n^2 - 1$. Utilizando a identidade do operador $\sqrt{1 + A} = 1 + A(\sqrt{1 + A} + 1)^{-1}$, a Equação Parabólica de Feixe Largo [24] é expressa da seguinte maneira:

$$\frac{\partial u(x,z)}{\partial x} - \left[ik^{-1} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}} + 1 \right)^{-1} + ik\Big(n(x,z) - 1 \Big) \right] u(x,z) = 0. \tag{2.12}$$

Figura 4 – Representação do Ângulo de Elevação no Método WAPE.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Em 2007, o método de mudança de terreno e o método FD foram combinados por Holm [26] para estabelecer o método PE de Claerbout, permitindo a expansão do ângulo de elevação para a faixa entre 40° e 45°. A representação para o modelo é ilustrada na Figura 4. Alternativamente, a equação de Claerbout pode ser obtida utilizando a aproximação de Padé de primeira ordem da seguinte forma:

$$(1+q)^{1/2} \approx \frac{(1+0.75q)}{(1+0.25q)}, \tag{2.13}$$

portanto, $a_0 = 1$, $a_1 = 0.75$, $b_0 = 1$, $b_1 = 0.25$.

Substituindo esses termos em $A_0 = 1 + 0.25(n^2 - 1)$, $A_1 = 0.25k^{-2}$, $A_2 = -0.5ik(n^2 - 1)$ e $A_3 = -0.5ik^{-1}$ na Equação (2.8), obtemos a seguinte equação para satisfazer o WAPE:

$$k^2(n^2+3)\frac{\partial u(x,z)}{\partial x} + \frac{\partial^3 u(x,z)}{\partial z^2 \partial x} - 2ik^3(n^2-1)u(x,z) - 2ik\frac{\partial^2 u(x,z)}{\partial x^2} = 0. \tag{2.14}$$

O método de Padé utiliza uma expressão racional para se aproximar do componente de propagação direta, tornando-o adequado para aproximar fórmulas racionais de alta ordem, alcançando um ângulo teórico de aproximadamente 70°. O método FD é comumente utilizado na modelagem de Padé, pois o método SSF não consegue chegar a uma solução. Esse método é amplamente aplicado para o cálculo da seção transversal de radar de alvos eletricamente grandes e propagação eletromagnética em áreas urbanas ou de pequeno alcance.

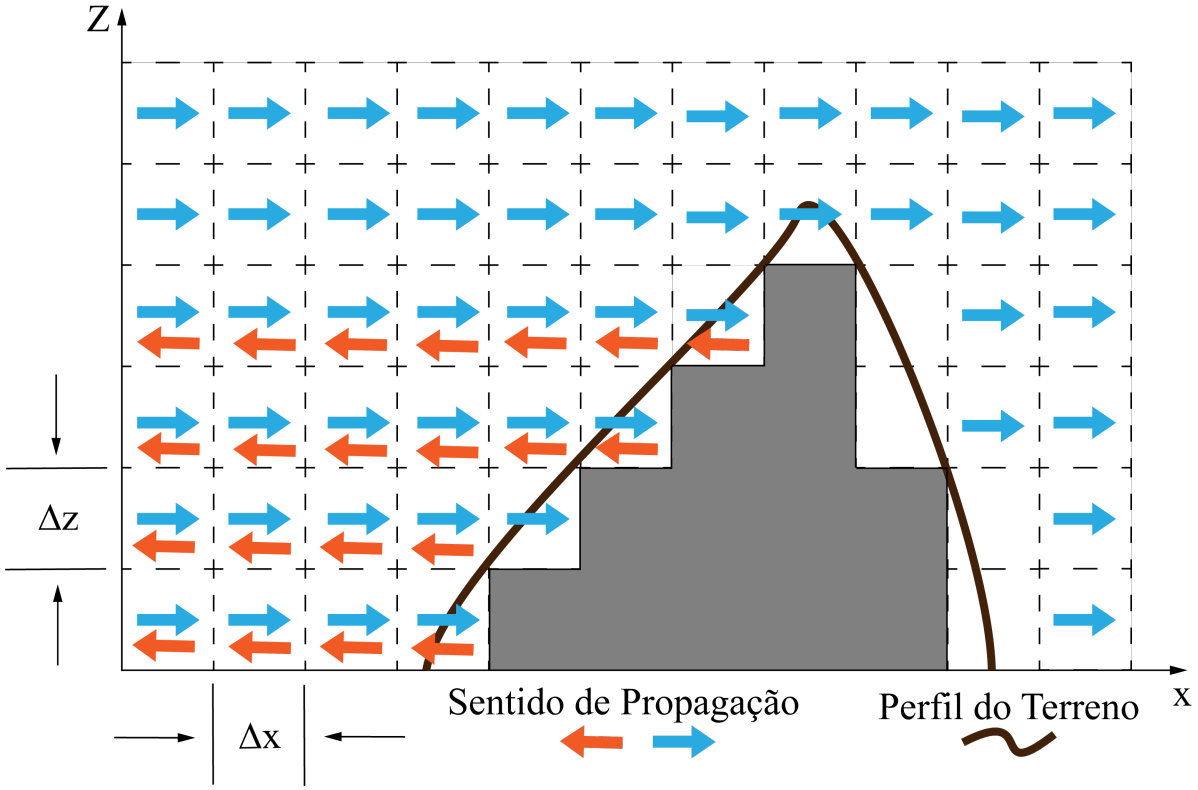
Em 2014, uma tentativa de resolver o PE de Padé utilizando o método SSF, desconsiderando os efeitos da refração atmosférica foi feita por Yang *et al.* [27]. No entanto, essa técnica é principalmente aplicada a problemas de propagação de ondas eletromagnéticas urbanas de curto alcance.

Esses avanços em WAPE são relevantes para a modelagem precisa de fenômenos de propagação eletromagnética, especialmente em casos que envolvem ângulos de elevação maiores. Tais métodos são essenciais para a análise e previsão de diversos efeitos de propagação, tornando-se uma importante área de estudo para o campo da propagação eletromagnética em meios heterogêneos.

2.2.2 Características e Modelagem do Retroespalhamento

O método PE padrão, apresentado na Seção 2.2, é um modelo unidirecional de propagação direta, pois ignora o termo de propagação reverso. O modelo PE padrão não leva em conta o efeito da interação entre as ondas de propagação para direta e reversa, especialmente se houver vales ou montanhas com encostas íngremes ao longo do caminho de propagação. Na presença de tais obstáculos, os efeitos não apenas das ondas de propagação direta, mas também das ondas refletidas, refratadas e difratadas no sentido oposto, devem ser previstos com precisão para obter resultados confiáveis. A Figura 5 ilustra o cenário de propagação 2WPE, contendo as componentes de propagação direta e o retroespalhamento na presença de obstáculos.

Figura 5 – Modelo de propagação de 2WPE ondas propagantes diretas e retroespalhamento geradas a partir de reflexões no terreno.



Fonte: Adaptado de [17].

Em 1992, Collins *et al.* [23] propuseram a utilização da modelagem PE bidirecional em pesquisas acústicas subaquáticas, que posteriormente foi aplicada ao campo da propagação de ondas de rádio. Em 2009, Ozgun [28] aplicou a 2WPE para resolver problemas de propagação de ondas de pulso temporal, em cenários com obstáculos, como gumes de faca, as ondas são parcialmente refletidas e guiadas de volta, invertendo a direção paraxial na formulação das PE. A imposição das condições de contorno determina o campo inicial da onda refletida. A abordagem em escada é aplicada ao obstáculo em cada etapa, permitindo resolver situações de múltiplas reflexões em bordas múltiplas por meio da implementação recursiva do algoritmo de divisão de Fourier. O cálculo é considerado completo quando a condição de convergência é satisfeita. Ao comparar os resultados do cálculo com os da teoria geométrica da difração. É observada uma diferença mínima entre 1WPE e 2WPE atrás do obstáculo, mas múltiplas reflexões de ida e volta têm efeitos evidentes à frente do obstáculo.

Em 2011, Apaydin e Sevgi [29, 30] foram os primeiros a combinar 2WPE com o método dos elementos finitos (FEM), aplicando a implementação recursiva em retroespalhamento para transformar a propagação em duas vias. Foi feita a comparação entre 2W-SSF-PE e 2W-FEM-PE em termos de desempenho de cálculo, e o resultado demonstrou que ambas as abordagens podem calcular a propagação bidirecional de ondas de rádio em terrenos irregulares, mas o SSF apresenta uma vantagem óbvia em velocidade, especialmente em problemas de alta frequência e longo alcance. Entretanto, o ângulo de inclinação da antena pode afetar o valor do cálculo na simulação, com o valor aumentando em cinco a dez vezes se o ângulo de inclinação mudar em 1°. Em 2011, Ozgun *et al.* [31] combinaram a Transformada Discreta Mista de Fourier com o método 2WPE.

Em 2012, Wang e Long [32] também adotaram essa abordagem, obtendo alta aplicabilidade e precisão para ambientes de propagação complexos. Recentemente, Ozgun, Apaydin e Sevgi [28–31, 33–37] acumularam um grande volume de pesquisas nesse sentido. Para diferentes tipos de terreno e condições de contorno complexas, eles desenvolveram uma aplicação de código aberto baseada no programa MATLAB [38]. Em 2014, Ozgun *et al.* [39] e Wang e Long [40] discutiram a derivação da 2WPE.

O algoritmo de 2WPE é basicamente uma implementação iterativa do 1WPE, alternando a direção da propagação de maneira direta e reversa para estimar os efeitos de múltiplas reflexões. A física do problema exige que o campo seja parcialmente refletido pela faceta do terreno. Para alcançar isso, o algoritmo de duas vias, ilustrado na Figura 5, é empregado da seguinte maneira: primeiro, o campo inicial do campo retroespalhado é obtido ao impor as condições de contorno na faceta (ou seja, o campo tangencial deve ser zero na superfície condutora elétrica perfeita (PEC)), e em seguida, esse campo inicial é propagado de volta na direção $(-x)$ invertendo os sinais de k e Δx.

Esse algoritmo permite lidar adequadamente com a propagação em regiões pró-

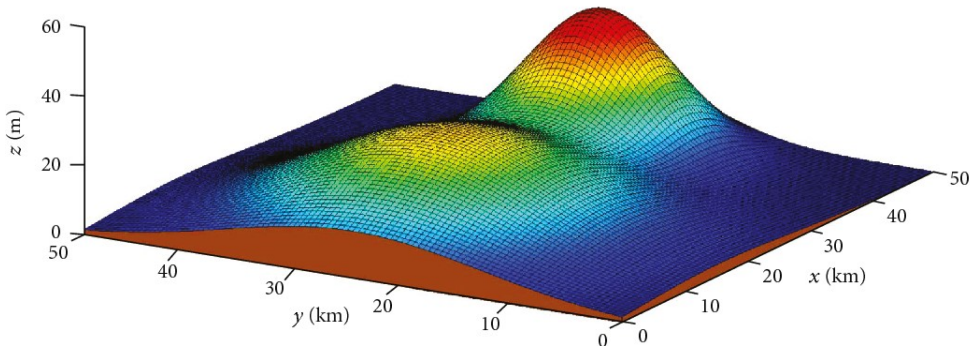
ximas ao terreno, sendo especialmente útil em problemas de ondas eletromagnéticas em terrenos acidentados ou complexos. O retroespalhamento é um assunto que, mesmo após diversos trabalhos e abordagens, ainda está em fase de desenvolvimento, uma vez que a fórmula proposta por Wang e Long ainda precisa ser validada [39] através de comparações analíticas, numéricas e medições experimentais.

2.2.3 Avanços e Desafios na Modelagem Tridimensional

Pesquisas têm se desenvolvido visando a aplicabilidade de modelos tridimensionais para a propagação lateral eletromagnética, que inclui espalhamento lateral, difração lateral e o efeito de despolarização. Esses fatores afetam a propagação real em terrenos irregulares, especialmente em situações com gradientes transversais íngremes. Para o espaço 3-D, as PE bidimensionais não geram precisão suficiente.

No início da década de 1990, o modelo escalar PE tridimensional foi introduzido por Levy [41], utilizado para calcular o problema de difração por trás de edifícios urbanos. Na Figura 6, o modelo no espaço 3-D é ilustrado. Apesar de ter quase a mesma forma de equação que outros métodos, o modelo escalar 3-D tem apenas uma equação que pode refletir apenas as características de propagação de um campo eletromagnético em uma determinada componente no espaço 3-D. Em contraste, o modelo vetorial 3-DPE é composto por três equações, que abrangem todos as componentes do campo, com suas respectivas condições de contorno.

Figura 6 – Malha curvilínea para um perfil de terreno 3-D.



Fonte: Adaptado de [42].

Em 1999, Zaporozhets [43, 44] propôs o modelo vetorial 3-DPE baseado no método FD para resolver problemas de propagação de ondas de rádio urbanas e cálculos de RCS bistático de alvos eletricamente grandes. Esse modelo foi posteriormente desenvolvido por Awadallah *et al.* [45, 46] e Levy [9] para ambientes 3-D com terrenos irregulares. Janaswamy [47], em 2003, foi o primeiro a examinar a propagação de ondas de rádio urbanas usando o modelo vetorial 3-DPE baseado em SSF. Em 2011, Apaydin e Sevgi [30]

transformaram o 2WPE em uma forma 3-D para verificar os resultados comparando a cobertura da seção transversal. No entanto, configurar adequadamente um 3-DPE é desafiador devido ao complexo ambiente troposférico. Portanto, Awadallah *et al.* [45] propuseram um modelo pseudo 3-D em 2005. Essa abordagem é essencialmente uma versão 2-D que é usada na rotina de Equação Parabólica Eletromagnética Troposférica (*Tropospheric Electromagnetic Parabolic Equation Routine* - TEMPER). A TEMPER bidimensional utiliza dados unidimensionais do terreno para calcular características de propagação de ondas de rádio em múltiplas direções simultaneamente. Os resultados são combinados para aproximar o ambiente 3-D. O modelo pseudo 3-D tem sido amplamente aplicado para avaliar espalhamento lateral e difração em ambientes urbanos e transversais não homogêneos. Comparando o 2-DPE, 3-DPE e pseudo 3-DPE, observou-se que a influência da propagação lateral de edifícios verticais em ambientes urbanos é maior do que a influência de terrenos em ambientes de terreno irregular. Isso significa que o 2-DPE, 3-DPE e pseudo 3-DPE mantêm boa consistência em ambientes de terreno troposférico, especialmente aqueles com altos níveis de energia. No entanto, diferenças surgem em níveis de potência de baixa energia. Em 2010, Silva *et al.* [48] expressaram um campo vetorial 3-D por meio de coordenadas esféricas. No entanto, esse método ainda não foi estudado para o efeito da despolarização em terrenos irregulares.

O gradual aprimoramento do sistema de informação geográfica 3-D nos últimos anos tornou a previsão da propagação eletromagnética 3-D em grande escala uma tendência inevitável. O estudo do modelo das PE vetorial 3-D também se tornou cada vez mais popular e se consolidou como o principal meio de modelagem de propagação de ondas 3-D. Assim como no desenvolvimento do 2WPE, o custo computacional é o principal obstáculo, especialmente a parte iterativa do programa de solução 3-D. A taxa de convergência depende da altura e largura lateral do domínio computacional, o que continua sendo um desafio considerável para a computação em tempo real em grande escala.

2.3 Técnicas de Solução em Equações Parabólicas

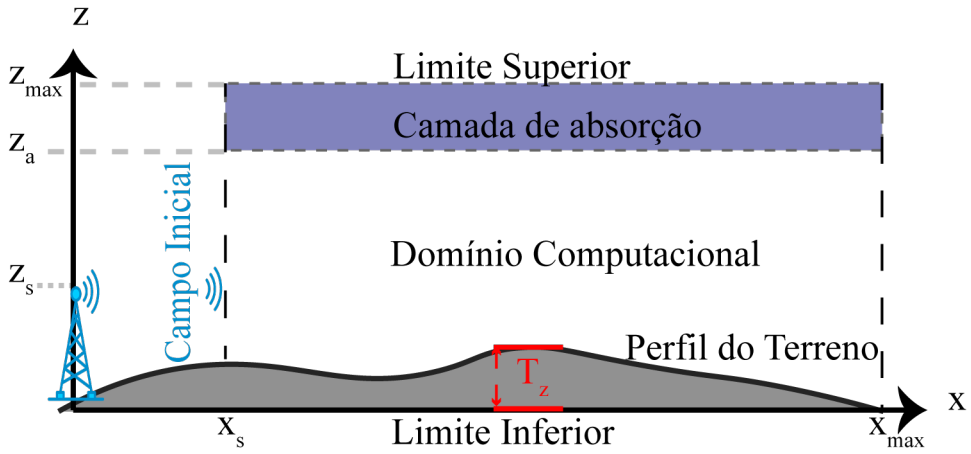
Os algoritmos das PE incluem os três métodos de solução comumente usados: SSF, FD e FEM. SSF é um método analítico, enquanto os métodos FD, FEM e outros métodos finitos são métodos numéricos. A escolha desses algoritmos é determinada por questões específicas relacionadas ao problema investigado.

As vantagens do SSF não implicam que outros métodos percam sua competitividade. Os métodos finitos são superiores devido à sua capacidade e flexibilidade para lidar com condições de contorno complexas, sendo especialmente adequados para problemas de propagação de curto alcance, como guias de ondas ou propagação de ondas eletromagnéticas urbanas e problemas de espalhamento. Diferente do uso clássico dos métodos finitos,

nem todo o domínio é discretizado. Na abordagem atual, apenas partes específicas são discretizadas, simplificando o processo. O procedimento ainda segue um processo passo a passo, empregando um método unidimensional em cada etapa do intervalo, o que permite uma abordagem mais eficiente do problema.

Em 1976, o método FD foi proposto por Claerbout, e em seguida, alguns estudiosos desenvolveram um algoritmo completo com estudos detalhados sobre TDP, conforme descrito em [9, 49, 50]. Nos últimos dez anos, o FEM desenvolveu-se rapidamente, e vários pesquisadores publicaram artigos que descrevem a derivação do processo de solução e a verificação dos resultados. Além disso, o desenvolvimento de condições de contorno, conforme ilustrado na Figura 7, como as camadas perfeitamente casadas (PML) e as condições de contorno transparentes (TBC) [51–53].

Figura 7 – Seção Vertical do Terreno e Domínio de Computacional.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

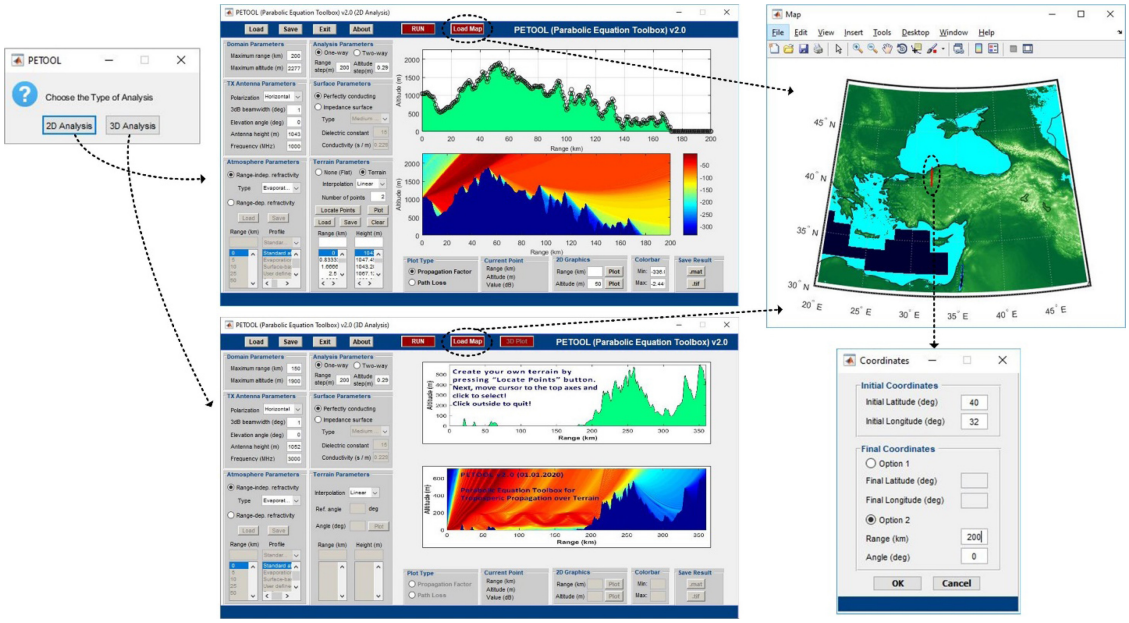
Em 2010, Apaydin e Sevgi [34] realizaram comparações sistemáticas entre o FEM e o SSF usando uma aplicação denominada LINPE na frequência de 300 MHz. O resultado corroborou a avaliação de que o SSF possui vantagens de velocidade, enquanto o FEM está longe de resolver os problemas de propagação de ondas terrestres de longo alcance na prática. Além disso, reforça que a precisão do FEM não é tão boa quanto a do SSF. Ademais, em dutos, o custo computacional do FEM pode aumentar com frequências mais altas.

Em 2011, Iqbal [54] comparou o FEM com o SSF considerando o duto atmosférico. Os resultados numéricos obtidos exibem alta similaridade. Em 2012, Apaydin e Sevgi [33] conduziram uma comparação detalhada dos dois métodos na forma 3-D. O estudo pode servir de referência para problemas de TDP, embora a comparação considere a propagação das ondas eletromagnéticas em guias de ondas.

Desde o final dos anos 1970 e a introdução de soluções numéricas, vários pesquisa-

dores têm estudado técnicas de solução das PE usando diferentes métodos com resultados significativos. Na Figura 7, a seção vertical e o domínio computacional investigado por essas técnicas são ilustrados. No início da década de 1990, Levy [9] e Hitney *et al.* [55] introduziram a abordagem híbrida aos métodos das PE. Eles combinaram PE com raios ópticos e outras tecnologias relacionadas, utilizando suas respectivas vantagens para obter melhores resultados de simulação e previsão. No início dos anos 2000, um sistema teórico relativamente completo foi desenvolvido para a solução de problemas das PE, com pesquisadores como Craig [56], Levy [9, 41], Dockery [15, 19, 20, 57], Kuttler [25, 58–60], Barrios [61–63] e Hitney [55, 64] fazendo contribuições significativas. Com base nesse sistema, o Reino Unido e os Estados Unidos desenvolveram várias ferramentas e softwares de previsão de propagação de rádio para aplicações militares e de engenharia. O mais representativo foi o Space and Naval Warfare Systems Center San Diego. Esta ferramenta foi baseada no Modelo de Propagação Avançado (*Advanced Propagation Model*- APM) [65] e foi chamada de Sistema Avançado de Previsão de Efeitos Refrativos (*Advanced Refractive Effects Prediction System* - AREPS) [66]. O AREPS sintetiza Terra, raios ópticos, óptica estendida, PE e possui resultados de previsão mais precisos. O AREPS é frequentemente usado como dados de referência. O Laboratório de Física Aplicada da Universidade Johns Hopkins nos Estados Unidos desenvolveu o modelo TEMPER [67] baseado em SSF. Esse modelo tem acompanhado o progresso dos estudos de TDP para melhorar e atualizar códigos. Em 2011, Ozgun *et al.* desenvolveram um software de código aberto de interface gráfica de usuário baseado em MATLAB [38], PETOOL [31], que introduziu 2WPE em SSF para prever a propagação através de terrenos complexos. Na Figura 8, o PETOOL é ilustrado. Além do PETOOL, pacotes simples do MATLAB e alguns outros softwares baseados no MATLAB usando PE foram disponibilizados gratuitamente [10, 68, 69], o que pode favorecer a disseminação da informação, conciliando a teoria e a prática para que novos pesquisadores embarquem neste campo.

Figura 8 – Software de código aberto PETOOL com janelas de análise 2-D e 3-D.



Fonte: [31].

Problemas de computação eletromagnética realista dificilmente podem ser resolvidos com geometrias idealizadas para obter resultados matematicamente precisos. Porém, as medições experimentais reais são muito difíceis e caras, assim como a propagação de ondas terrestres de longo alcance. Portanto, um desafio é garantir a confiabilidade do cálculo da simulação. Logo, os pesquisadores propuseram um conjunto de soluções originais e sistemáticas, considerando que a confiabilidade é alcançada após uma série de validação, verificação e testes de calibração. Por meio da comparação abrangente de vários métodos numéricos e métodos analíticos, o desempenho e as limitações de vários métodos são esclarecidos para obter resultados de simulação confiáveis.

Além dos três métodos mencionados, alguns pesquisadores recentemente tentaram propor novos algoritmos. Em 2011, Iqbal [70] usou pela primeira vez o método Wavelet em Passos Divididos (*Split-Step Wavelet* - SSW) para resolver problemas das PE. O SSW foi verificado por meio de uma comparação com o AREPS. Em 2012, Iqbal [6] também propôs um novo método baseado em wavelet e FEM. Esta abordagem obteve bom desempenho em ambientes não homogêneos horizontalmente. No entanto, esse método tem grandes requisitos de malha que ocupam uma quantidade considerável de memória. Em 2013, Zhao *et al.* [71] integraram o teorema de convolução em SSF para melhorar os erros de cálculo causados por ignorar mudanças no índice de refração atribuído a aumentos na distância lateral. O resultado foi satisfatório. Notavelmente, a estabilidade deve ser melhorada ao calcular problemas de grande alcance de altura. Além disso, este método envolve uma grande quantidade de cálculos por causa da matriz de coeficientes.

Uma parte importante dos algoritmos das PE é a modelagem da fonte, também

denominada de problema de campo inicial por alguns pesquisadores. Na Figura 7, são apresentados o esboço e a localização da fonte transmissora, juntamente com a posição de interesse do campo inicial para o domínio computacional. O estudo da modelagem da fonte tem sido aperfeiçoado. Na maioria dos modelos de propagação de ondas eletromagnéticas de longo alcance 2-D, o padrão de feixe de antena gaussiana é escolhido porque pode ajustar a largura do feixe e a inclinação do feixe, além de fornecer uma boa representação para antenas paraboloides. O estabelecimento de uma relação entre o campo distante da antena transmissora, o campo próximo (campo de abertura) e o padrão do feixe por meio da função Green pode ajudar na obtenção do campo inicial. Com base nisso, a função também deve converter o campo inicial de espaço ilimitado espelhando o princípio para a distribuição de campo inicial do meio-espaço acima do limite inferior. Notavelmente, em relação aos problemas de propagação de longo alcance declarados anteriormente, em problemas de propagação de curto alcance, as diferenças de excitação não podem ser negligenciadas na modelagem de fonte. Em 2013, Apaydin e Sevgi [72] conduziram um estudo comparativo e detalhado sobre modelagem de fonte precisa. Eles tomaram como fonte o padrão de feixe gaussiano e a fonte de linha, amplamente utilizados em métodos analíticos respectivamente, realizando uma série de validação, verificação e testes de calibração, por método de momentos, FEM-PE, SSF-PE e outros métodos, obtendo resultados de comparação significativos.

2.4 Modelagem e Condições de Contorno

As condições de contorno podem ser divididas em limite superior e inferior. Na Figura 7, o esboço e a localização dessas condições são apresentados. Diferentes soluções numéricas específicas são derivadas do SSF, dependendo dos tipos de condições de contorno. Anteriormente, o limite de condução ideal e suave foi adotado, permitindo a resolução dos problemas das PE por meio da transformada de seno ou cosseno, de acordo com a polarização horizontal ou vertical. Entretanto, essa abordagem causava grandes erros na prática. Em 1991, Kuttler e Dockery [58] trataram especificamente da modelagem TDP através do método PE e introduziram a Transformada Mista de Fourier . Com base nisso, Dockery [73] propôs o DMFT em 1996, que realiza cálculos numéricos com o uso de computadores, melhorando a velocidade do cálculo. Entretanto, a presença de frequência e rugosidade da superfície do mar trouxe problemas de instabilidade nos resultados numéricos do DMFT no contexto do TEMPER.

Para resolver tais problemas, Kuttler e Janaswamy [74] desenvolveram o DMFT com retroespalhamento em 2002. Mais recentemente, pesquisadores propuseram um método misto de diferença direta e retroespalhamento para reduzir a complexidade computacional e a instabilidade. Foi proposto um algoritmo DMFT aprimorado, baseado no diferencial de segunda ordem, que é o algoritmo de combinação de intervalos. Este algoritmo reagrupa as

zonas de convergência e elimina pontos cegos para melhorar o fenômeno "Big V". Entretanto, a integração desse algoritmo em problemas de TDP e a comparação abrangente desse algoritmo com o DMFT com retroespalhamento para verificar a melhoria na velocidade e precisão requerem mais pesquisas.

Em 2012, Sprouse e Awadallah [75] propuseram condições de contorno de impedância dependentes do ângulo para apresentar as propriedades dielétricas da interface arbitrária de maneira precisa, garantindo que a decomposição de onda plana do campo atenda a cada componente espectral correspondente às condições de contorno de impedância. Este método provou ser estável ao ser aplicado a exemplos numéricos de SSF-PE. Além disso, no modelo TEMPER, fatores como a rugosidade da superfície do mar também influenciam as condições do limite inferior. Esses fatores têm um impacto crescente na física macroscópica e nas condições climáticas do ambiente de propagação.

As questões relacionadas ao limite superior referem-se à propagação infinita real e natural em direção à região ascendente (para a troposfera), que é truncada para uma altura de computação limitada. Para evitar o limite artificial resultante da reflexão parasitária, três tipos de soluções estão disponíveis atualmente: 1) Janela de funções, 2) PML e 3) TBC. Essas soluções têm características correspondentes e podem ser resolvidas por meio de diferentes métodos. A solução de adicionar Janela de funções é a mais fácil de aplicar. Essa solução é baseada em SSF e serve como um filtro que atenua as ondas acima de uma determinada altura. A janela de Tukey, também chamada de janela de Hanning por alguns pesquisadores, é comumente usada como a função de janela. Uma alternativa é a solução PML , que facilitou o desenvolvimento de uma solução completa-PML [76]. Nessa abordagem, uma substituição do sistema de coordenadas é realizada, convertendo a coordenada vertical Z em uma coordenada plana complexa. A PML é extremamente eficiente em problemas de espalhamento.

Em resposta a problemas relacionados à PML, o TBC tem se desenvolvido rapidamente. O TBC é proposto para garantir a maior precisão possível dentro do escopo do cálculo. O TBC é caracterizado por um efeito de absorção aprimorado à medida que o ângulo de incidência aumenta.

Para algumas aplicações e ferramentas práticas, como sistemas de avaliação de desempenho de radar, os modelos de propagação requerem cálculos em tempo real com vários parâmetros em um grande domínio de interesse, o que pode exigir compromissos na precisão. Nesse contexto, as condições locais de fronteira transparente (*local transparent boundary conditions* - LTBC) são propostas, priorizando a velocidade de cálculo em detrimento da minimização do campo refletido. O LTBC possui a vantagem de ajustar o termo de correção de contorno a cada etapa de propagação de maneira direta, fornecendo soluções rápidas e com pouca memória.

2.5 Evolução na Abordagem do Modelamento de Terrenos Irregulares

Antes do método PE ser amplamente aplicado à propagação de ondas de rádio em terrenos irregulares, o GTD era o principal método usado para resolver esse problema. No entanto, o GTD só podia lidar com terrenos com formas ideais, como cunhas e bordas. Em 1986, Ayasli [77] estabeleceu um modelo de mascaramento de terreno que definia uniformemente os valores de campo do caminho de propagação abaixo da superfície como zero.

Em 1998, Newkirk utilizou esse modelo no TEMPER. No mesmo período, Levy [41] aprimorou o algoritmo PE, permitindo que ele lidasse com terrenos arbitrários usando o modelo digital de terreno como entrada. Barrios [63, 78], em 1994, introduziu o conceito de decaimento e mudança de limites para o tratamento de terrenos arbitrários. No entanto, esses conceitos foram aplicados apenas em situações de alto ângulo de elevação, e os resultados foram insatisfatórios.

Nesse mesmo ano, Barrios adotou o método de transformação de deslocamento do terreno para apresentar o modelo das PE do terreno. Esse método foi aplicado aos cálculos reais de propagação da marinha. O método de transformação de deslocamento do terreno, proposto por Beilis e Tappert [79] em 1979, reconstrói um sistema de coordenadas acima de um terreno irregular por meio da conversão de coordenadas, transformando os terrenos em terreno plano, resolvendo assim o problema através do SSF.

Em 1998, Janaswamy [42] aprimorou o método Beilis-Tappert e estabeleceu o método do mapa conforme. Esse método introduz interpolação de grade para determinar a distribuição do campo eletromagnético em grades de altura. Na Figura 6, a abordagem é ilustrada. Em 2000, Donohue e Kuttler [80] propuseram o mapa de deslocamento linear por partes (*Piecewise Linear Shift Map* - PLSM) para compensar a desvantagem do modelo Beilis-Tappert em lidar com a curvatura da terra. Esse método foi verificado como a abordagem mais precisa para lidar com terrenos irregulares na modelagem PE. No entanto, o PLSM também tem limitações, que se tornam evidentes em situações de grande declive (maiores que 15°), resultando em erros relativamente grandes.

Para resolver esse problema, o TEMPER [67] combinou gumes e PLSM, criando assim um novo método híbrido. Se a inclinação for menor que 15°, o PLSM é usado; caso contrário, o gume de faca é usado. Ao utilizar o método híbrido, uma filtragem adicional deve ser realizada para evitar que o limite de truncamento cause erros de cálculo decorrentes da conversão e mudança de altura.

Em 2012, Li *et al.* [81] simularam a propagação com base em SSF e PLSM para terrenos simples e complexos, respectivamente. Os resultados mostram que o comprimento e a altura dos terrenos irregulares afetam significativamente a atenuação da propagação das ondas de rádio. Combinados, 2WPE e 3-D PE são estabelecidos para lidar com o

retroespalhamento, espalhamento lateral e difração causados por terrenos irregulares. Em 2012, Wang e Long [32] incorporaram o método de mudança de limite ao 2WPE, substituindo assim a aproximação de escada por modelos de terreno irregulares. O método aprimorado é insensível à natureza elétrica do solo e dos telhados dos edifícios, proporcionando resultados confiáveis. Em 2014, Apaydin e Sevgi [82] simularam ondas de rádio na banda MF/HF propagando-se em terrenos irregulares com diversas características, obtendo bons resultados.

2.6 Avanços nas Pesquisas com Métodos de Propagação Eletromagnética no GAPTEM

O desenvolvimento de diversas pesquisas nas áreas de Telecomunicações e Eletromagnetismo Aplicado tem sido dedicado pelo Grupo de Antenas, Propagação e Teoria Eletromagnética (GAPTEM) da UFMG, abrangendo o ensino, pesquisa e extensão. O principal objetivo dessas pesquisas é a aplicação da teoria eletromagnética na resolução de problemas de engenharia relacionados à síntese e análise de antenas e dispositivos de micro-ondas, caracterização da propagação radioelétrica e do canal rádio, previsão de desempenho de sistemas de comunicação sem fio, além da criação de ferramentas teóricas e numéricas específicas para essas questões.

Entre os tópicos abordados pelo grupo, destaca-se o estudo dos métodos de Equações Parabólicas. Em 2016, foram investigados problemas de propagação de ondas eletromagnéticas através do método PE no Domínio do Tempo (TDPE). O enfoque recaiu sobre terrenos eletricamente suaves, desconsiderando o retroespalhamento e utilizando o método de Crank-Nicolson [83], a fim de garantir a estabilidade da solução.

Em 2018, problemas de radiopropagação foram abordados por meio da solução numérica SSPE, fornecendo soluções para as abordagens NAPE e WAPE. Nesse algoritmo, foi incluído o método DMFT para tratar a análise de ambientes com perdas de propagação devido a condições de impedância nas superfícies, gerando assim uma abordagem híbrida DMFT-SSPE. Também em 2018, analisou-se problemas de radiopropagação utilizando o método PE e a formulação TDPE, considerando a abordagem NAPE. A formulação foi validada e verificada em perfis canônicos (terras planas e cunhas) e reais.

Em 2019, aplicou-se o TDPE para análise da propagação em duas dimensões, na direção paraxial x e altura z, do campo eletromagnético com incidência rasante e polarização vertical, sobre perfis de relevo suavemente irregulares. Foram apresentadas as aproximações para NAPE e WAPE no domínio do tempo, para a propagação em atmosfera homogênea e as condições de contorno de impedância do solo, considerando que não há variação da permissividade elétrica na direção y, perpendicular ao plano de incidência. O domínio computacional superior foi limitado usando uma camada de absorção descrita

pela janela de Hanning [84, 85].

Em 2021, a ferramenta computacional baseada no algoritmo DMFT-SSPE [86] foi aprimorada. Dentre as melhorias efetuadas, destacam-se dois eixos estruturantes: 1) O desenvolvimento de metodologias simples e eficientes para extrair parâmetros de cenários realísticos, como o diagrama de radiação de antenas comerciais e perfis topográficos de qualquer localidade. 2) A implementação de uma técnica que adiciona efeitos de retroespalhamento [17, 28, 31] do campo eletromagnético. Além disso, integra-se um estudo de engenharia realizado ao longo de uma via férrea de metrô, em ambiente urbano, que mensurou a cobertura de rádio na faixa de frequência de VHF, utilizando equipamentos profissionais que coletaram a base de dados. Por meio de uma análise estatística dos níveis de potência recebida e da rugosidade dos enlaces, foi avaliada a precisão das soluções NAPE e WAPE. A ferramenta computacional disponibiliza uma interface gráfica para parâmetros de entrada e resultados da simulação.

2.7 Conclusão

Neste capítulo, foi apresentado o método de Equações Parabólicas (PE), utilizado para resolver problemas de propagação de ondas terrestres troposféricas. Uma breve revisão dos aspectos principais das PE, incluindo sua estrutura, algoritmos, condições de contorno e modelagem de terrenos irregulares, foi realizada. Após três décadas de desenvolvimento, a pesquisa sobre o método de equações parabólicas na modelagem de propagação de ondas terrestres troposféricas amadureceu gradativamente. No entanto, isso não implica o fim da pesquisa nesta área, e muitas questões ainda precisam ser estudadas detalhadamente.

Dentro do desenvolvimento do método PE, há propostas para aprimorar a técnica, visando ganhos de desempenho e precisão. É necessário verificar o desempenho dos novos métodos na solução das PE em ambientes complexos de propagação de ondas terrestres por meio de comparações detalhadas com as soluções clássicas. Além disso, para os três algoritmos mais utilizados, é preciso estabelecer uma classificação mais abrangente e detalhada, considerando seus escopos de aplicação e desempenhos computacionais. O campo da propagação de ondas oferece vastas oportunidades para pesquisas em superfícies rugosas e requer a consideração de efeitos de despolarização e outros problemas adicionais no ambiente 3-D, combinando-se com a entrada de dados do ambiente digital. Nesse contexto, métodos híbridos com implementação de programas adaptativos também têm se destacado como tópicos de pesquisa atuais, permitindo superar as desvantagens de um único método.

As recentes pesquisas desenvolvidas no GAPTEM têm evidenciado o caráter inovador e atual dos estudos envolvendo as Equações Parabólicas. Como parte da proposta central desta tese, que se concentra na investigação das transformadas *Wavelets* em

conjunto com as PE [4], visando viabilizar eficiência computacional aliada à precisão das análises de ondas eletromagnéticas, o Capítulo 3 abordará a perspectiva numérica do método de Equações Parabólicas em Passos Divididos. Serão expostas suas propriedades, a constituição do algoritmo e os critérios para sua implantação. O objetivo é estabelecer um algoritmo estruturado que permitirá a integração dos benefícios do SSPE com as transformadas *Wavelets* [3], visando combinar as vantagens dos métodos PE e garantir eficiência computacional e uso racional de recursos.

3 Método de Passos Divididos para Equações Parabólicas

No Capítulo 2, foi apresentado o potencial do Método de Equações Parabólicas e sua abordagem numérica, que proporcionam resultados confiáveis na análise de problemas de propagação eletromagnética. Este método, pioneiramente desenvolvido por Leontovich e Fock [16] para resolver o desafio da estratificação vertical na propagação atmosférica, demanda agora uma estruturação mais aprofundada dos modelos clássicos. O foco principal deste capítulo concentra-se na implementação numérica da solução em passos divididos, utilizando-se a transformada de Fourier com ênfase em precisão e eficiência. Os conceitos aqui discutidos incluem o alinhamento e o estabelecimento de procedimentos que representam avanços propostos pela pesquisa. Estes serão especificamente recuperados e abordados nos capítulos subsequentes, alinhando-se ao objetivo geral desta tese.

Inicia-se, na Seção 3.1, com a descrição da transformação da Equação Parabólica Clássica em uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, adequada para resolução por meio de transformadas de Fourier. O objetivo é estabelecer a base teórica para a abordagem numérica adotada.

Em seguida, na Seção 3.2, são delineadas as soluções numéricas para os métodos PE NAPE e WAPE, destacando a propagação iterativa do campo em etapas discretas. Esta seção busca explicar como a discretização do domínio nos eixos vertical e horizontal é realizada e como as condições de contorno são aplicadas para garantir a precisão dos resultados. Por fim, são introduzidas estratégias para lidar com condições de contorno complexas, como o uso da Transformada de Fourier Mista.

3.1 A formulação em Passos Divididos

O ponto de partida é a Equação Parabólica Clássica (*Standard Parabolic Equation* - SPE), que considera a propagação direta e é expressa pela Equação (2.11). Primeiramente, realizamos uma reestruturação da SPE para obter:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u(x,z)}{\partial z^2} + 2ik\frac{\partial u(x,z)}{\partial x} + k^2(n^2(x,z)-1)u(x,z) = 0,\\
&2ik\frac{\partial u(x,z)}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u(x,z)}{\partial z^2} - k^2(n^2(x,z)-1)u(x,z),\\
&2ik\frac{\partial u(x,z)}{\partial x} = \left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2(n^2(x,z)-1)\right)u(x,z),\\
&\frac{\partial u(x,z)}{\partial x} = \frac{ik}{2}\left(\frac{1}{k}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + (n^2(x,z)-1)\right)u(x,z).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Uma interpretação preliminar sugere que essa equação assemelha-se a uma equação diferencial ordinária em relação à distância, com exceção de que o coeficiente de $u(x,z)$ no

lado direito constitui um operador diferencial em relação à coordenada z. Quando uma transformação de Fourier direta é aplicada em relação à altura z, um termo de convolução é introduzido, incorporando a transformada de Fourier do perfil do índice de refração. No entanto, essa abordagem, infelizmente, não oferece perspectivas de uma solução simples [9]. Portanto, é necessário que um método seja encontrado para considerar separadamente o impacto do termo do índice de refração.

3.1.1 Efeitos da Variação do Índice de Refração com a Distância

O ponto de partida é o pressuposto de que o índice de refração não varia com a distância (x). Nesse contexto, é possível formalmente expressar a solução como mostrado em [9]:

$$u(x+\Delta x, z) = \exp\left\{\frac{ik\Delta x}{2}\left[\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \Big(n^2(z) - 1\Big)\right]\right\}\, u(x,z). \tag{3.2}$$

O objetivo é alcançado ao separar os termos no expoente e escrever a exponencial como um produto de fatores contendo apenas $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$. Assim, os fatores em $\mathcal{A}$ podem ser expressos por meio de transformadas de Fourier, enquanto os fatores em $\mathcal{B}$ atuam por meio de multiplicação simples. A separação mais simples é expressa por:

$$\mathcal{S} = \exp\left\{\frac{ik\Delta x}{2}\Big(n^2(z) - 1\Big)\right\}\exp\left\{\frac{ik\Delta x}{2}\left[\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\right\}, \tag{3.3}$$

onde $\mathcal{A} = (1/k^2)(\partial^2/\partial z^2)$, $\mathcal{B} = n^2(z) - 1$, façamos $\delta = (ik\Delta x)/2$.

Essa separação não é precisa em um meio não homogêneo, já que os dois operadores no expoente não comutam, a menos que o índice de refração seja constante. Quando o índice de refração n varia com a altura z, temos:

$$\frac{\partial^2\big[(n^2(z)-1)u(x,z)\big]}{\partial z^2} \neq \big[n^2(z)-1\big]\frac{\partial^2 u(x,z)}{\partial z^2}. \tag{3.4}$$

No entanto, se as variações do índice de refração com a altura forem relativamente lentas, o erro causado pela separação da exponencial permanece pequeno. Especificamente, ao definir o comutador como $[\mathcal{A},\mathcal{B}] = \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}$ e manipulá-lo, obtemos:

$$[\mathcal{A},\mathcal{B}]u(x,z) = -\frac{1}{2k^2}\left(\frac{\partial^2 n^2(z)}{\partial z^2} + 2\frac{\partial n^2(z)}{\partial z}\frac{\partial u(x,z)}{\partial z}\right)u(x,z). \tag{3.5}$$

O erro $\mathcal{E}$ causado pela separação é expresso como $\mathcal{E} = \exp(\delta\mathcal{A})\exp(\delta\mathcal{B}) - \exp[\delta(\mathcal{A}+\mathcal{B})]$. Ao expandir as exponenciais usando séries de Taylor, o erro pode ser expresso como uma série em Δx. O termo de erro dominante ϵ é dado por:

$$\epsilon = \frac{k^2}{8}(\Delta x)^2[\mathcal{A},\mathcal{B}]. \tag{3.6}$$

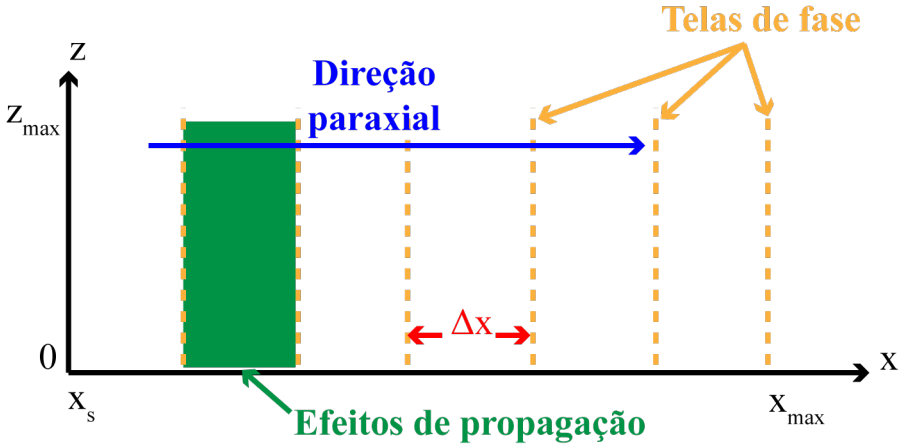
Portanto, o erro é de segunda ordem em relação ao passo de distância. Da Equação (3.5), observa-se que ele também depende das variações de altura do índice de refração.

Para a separação, a solução em passos divididos na distância avançada $x + \Delta x$ é expressa como:

$$u(x + \Delta x, z) = \exp\left\{\frac{ik\Delta x}{2}\left[\left(n^2(z) - 1\right)\right]\right\} \exp\left\{\frac{ik\Delta x}{2}\left[\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\right\} u(x, z). \tag{3.7}$$

Essa solução em passos divididos pode ser compreendida como o campo se propagando por uma série de telas de fase, conforme ilustrado na Figura 9. Inicialmente, o campo é propagado através de uma fatia de meio homogêneo representada pela exponencial $\mathcal{A}$, que pode ser entendida como o propagador, onde os efeitos de propagação são impostos. Em seguida, é aplicada uma tela de fase modulada por variações no índice de refração, usando a exponencial $\mathcal{B}$. A aproximação feita ao substituir o problema original pelo problema de tela de fase separa os efeitos difrativos (operador $\mathcal{A}$) dos efeitos refrativos (operador $\mathcal{B}$), negligenciando os efeitos do comutador. As telas de fase são ortogonais à direção paraxial.

Figura 9 – Interpretação da Solução em Passos Divididos.



Fonte: Adaptado de [9].

A abordagem de separação empregada neste contexto é a mais simples disponível. No entanto, é importante mencionar que existem alternativas exploradas por [9, 24–26], conforme as quais podem resultar em um erro de terceira ordem em relação ao passo de distância Δx, ao mesmo tempo em que acarretam um acréscimo modesto na carga computacional [9]. Para aplicações relacionadas à propagação de ondas de rádio, onde os gradientes de índice de refração geralmente permanecem em níveis reduzidos, a abordagem simples apresentada na Equação (3.7) é geralmente considerada apropriada.

Caso haja dependência da distância no índice de refração, é necessário redefinir o

operador do índice de refração como a integral:

$$\mathcal{B}_x = \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} n(\xi, z)\, d\xi. \tag{3.8}$$

Essa integral é frequentemente aproximada pela expressão:

$$\mathcal{B} = n\left(x + \frac{\Delta x}{2}, z\right), \tag{3.9}$$

o que corresponde à substituição do meio com dependência da distância por uma sequência de segmentos onde o índice de refração varia linearmente com o alcance. Ao utilizar a separação $\mathcal{S}$, definida na Equação (3.3), e substituir o termo $\mathcal{B}$ pela aproximação apresentada na Equação (3.9), resulta-se no erro derivado dessa aproximação, representado por:

$$\mathcal{E} = e^{\delta\mathcal{A}}e^{\delta\mathcal{B}_x} - e^{\delta(\mathcal{A}+\mathcal{B}_x)} + e^{\delta\mathcal{A}}e^{\delta(\mathcal{B}-\mathcal{B}_x)}. \tag{3.10}$$

Considerando que $\mathcal{B} - \mathcal{B}_x$ é de segunda ordem no passo do alcance, o último termo se revela de terceira ordem no passo do alcance e, portanto, pode ser negligenciado. O termo de erro dominante é semelhante ao apresentado na Equação (3.6):

$$\epsilon = \frac{k^2}{8}(\Delta x)^2[\mathcal{A}, \mathcal{B}_x]. \tag{3.11}$$

A formulação para o comutador $[\mathcal{A}, \mathcal{B}_x]$ é análoga àquela descrita na Equação (3.4), com a diferença que as derivadas em relação à altura são substituídas pelas suas médias em um intervalo.

A ação exponencial em $\mathcal{B}$ consiste, essencialmente, na multiplicação direta por um escalar exponencial. A dificuldade central reside na construção do operador pseudodiferencial exponencial em $\mathcal{A}$, visando simplificar os procedimentos de cálculo. Isso pode ser realizado através da aplicação das transformadas de Fourier para a propagação no vácuo [9]. Nesse cenário, o índice de refração permanece naturalmente constante e a ausência de fronteiras é observada. A divisão do operador exponencial original já mitigou o desafio das flutuações do índice de refração. No entanto, ainda é imperativo considerar as fronteiras do domínio, e a concepção subjacente às transformadas de Fourier requer ajustes para assegurar uma aplicação precisa.

3.1.2 Aplicação da Transformada de Fourier

A Transformada de Fourier desempenha um papel fundamental na análise e síntese de circuitos, abrangendo desde o design de filtros até o processamento de sinais e a reconstrução de imagens. É importante notar que as relações entre os domínios do tempo e da frequência no eletromagnetismo são análogas às relações entre os domínios

espacial e do número de onda. A forma mais simples de uma onda plana em propagação, como ao longo do eixo x, pode ser expressa como $\Phi(r,t) \propto \exp\left(-i(\omega t - kx)\right)$, em que k e x representam, respectivamente, o número de onda e a posição. Similarmente, $\exp(-i\omega t)$ pode ser interpretado como $\exp(ikx)$.Diversas características merecem destaque [17]:

- Uma janela de tempo (ou frequência) retangular induz uma variação de feixe, refletida pela função $sinc(\cdot)$, no domínio da frequência (ou tempo).
- Analogamente, uma abertura (ou matriz) retangular no domínio espacial resulta em uma variação de feixe, também refletida pela função $sinc(\cdot)$, no domínio do número de onda.
- Quanto mais ampla a abertura da antena, mais estreito é o feixe do sinal; inversamente, quanto mais estreito o pulso no domínio do tempo, mais ampla é a banda de frequência.

O método PE em Passos Divididos, que é extensivamente aplicado e se baseia em operações sequenciais de transformada de Fourier entre os domínios espacial e do número de onda. Problemas de propagação em duas e três dimensões, levando em consideração perfis de terreno realistas e variações atmosféricas não homogêneas, foram resolvidos com sucesso usando esse método [9, 17, 31, 36]. Ressalta-se o princípio fundamental de uma transformação na engenharia, que é a busca por uma representação alternativa para um sinal em estudo. A Transformada de Fourier se destaca como a transformada mais amplamente utilizada na engenharia elétrica. As relações entre os domínios do tempo e da frequência são construídas a partir da Transformada de Fourier e sua Transformada Inversa, conforme:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{(i2\pi ft)}\, dt, \tag{3.12}$$

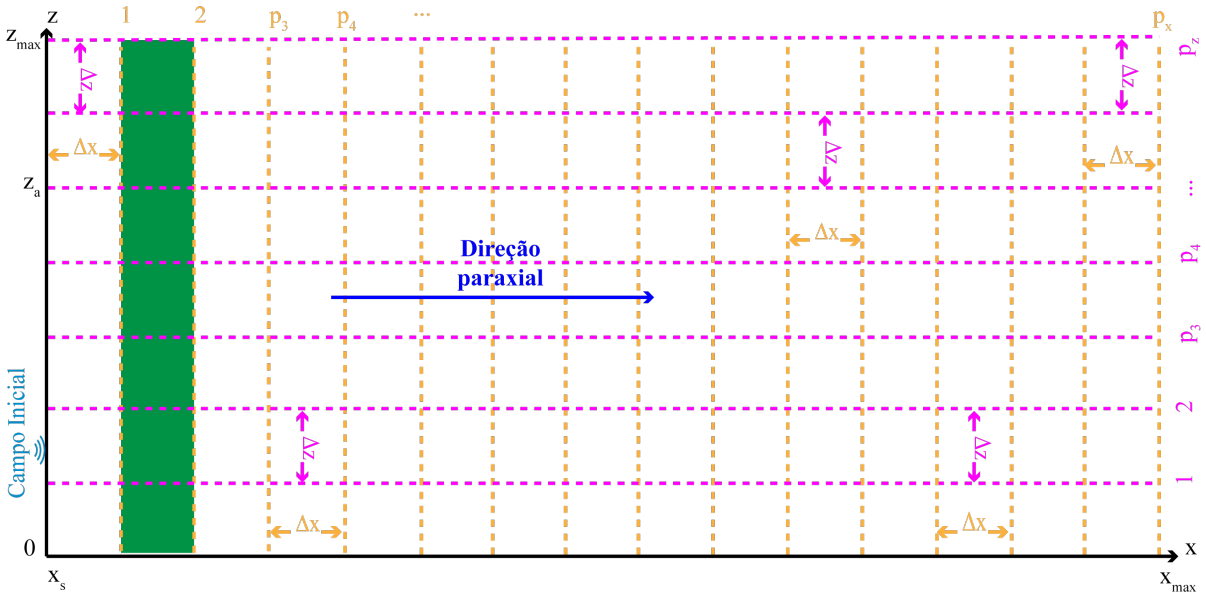
$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)\, e^{(-i2\pi ft)}\, df, \tag{3.13}$$

onde, $s(t)$, $S(f)$ e f representam, respectivamente, o sinal no domínio do tempo, o sinal no domínio da frequência e a frequência. Esta técnica é válida para sinais reais ou complexos e, de maneira geral, assume a forma de uma função complexa de f. Ela é aplicável tanto a sinais temporais periódicos quanto não periódicos, desde que obedeçam a determinadas condições. Importante destacar que a Série de Fourier é uma situação específica desta técnica. Matematicamente, ela é definida para sinais temporais contínuos e requer a observação do sinal temporal em uma janela de tempo de extensão infinita para a transição para o domínio da frequência. Sob estas circunstâncias, a técnica mencionada fornece o comportamento em frequência de um sinal temporal para cada frequência, com resolução

de frequência nula. Para calcular numericamente este processo em um computador, é necessário aplicar discretização e integração numérica.

Com o objetivo de possibilitar a realização numérica e aplicação da Transformada de Fourier, é considerado essencial estabelecer premissas sólidas em relação ao cenário de propagação. Nesse contexto, a escolha adequada das condições de contorno (BC) transversais e longitudinais é de extrema importância. A Figura 10 apresenta a região projetada de propagação em um espaço bidimensional, onde z e x representam as coordenadas de altura e alcance, respectivamente. Essa região é segmentada verticalmente em N_z segmentos e longitudinalmente em N_x.

Figura 10 – O cenário de propagação.



Fonte: Adaptado de [17].

A condição de contorno transversal sobre a superfície terrestre é formulada como:

$$\alpha_1 \frac{\partial u(x,z)}{\partial x} + \alpha_2 u(x,z) = 0. \tag{3.14}$$

Nessa equação, (α_1) e (α_2) são consideradas constantes. De maneira geral, a introdução de uma condição de contorno de impedância (IBC) ou condição de contorno de Cauchy (CBC), ou seja, para uma superfície terrestre com perdas, é realizada através de $(\alpha_1 = 1)$, $(\alpha_2 = ik\sqrt{\epsilon - 1})$ e $(\alpha_1 = 1)$, $(\alpha_2 = ik\sqrt{\epsilon - 1}/\epsilon)$ para polarizações horizontal e vertical, respectivamente. Aqui, $(\epsilon = \epsilon_r + i60\sigma_g\lambda)$ representa a constante dielétrica relativa complexa em termos da permitividade relativa (ϵ_r) e condutividade (σ_g) do solo com perdas ao longo da posição (x). Para a superfície PEC $(\sigma \to \infty)$, a condição de contorno de impedância é substituída por DBC (Condição de Contorno de Dirichlet) ou NBC (Condição de Contorno de Neumann), correspondendo às polarizações horizontal e vertical, respectivamente. Nos

casos em que ($\alpha_1 = 0$) e ($\alpha_2 = 1$), temos DBC e NBC, respectivamente, sobre a superfície PEC.

Dado que o problema de propagação ocorre em um domínio físico que se estende verticalmente até o infinito, torna-se necessário realizar uma truncagem adequada em uma altura específica. Aqui, sugere-se a seleção de Z_a, como mostrado na Figura 10, como o ponto de partida dessa região de absorção, previamente ilustrada na Figura 7. Portanto, é imperativo que a condição de contorno superior, isto é, a condição de região aberta ou de espaço livre, seja obedecida para evitar reflexões não físicas. Essas reflexões artificiais podem ser reduzidas pela introdução de camadas de absorção acima da altura de interesse. À medida que as ondas se propagam para cima e se estendem em direção ao infinito ou sofrem curvatura devido a variações de refração, uma função de janela (como Hamming ou Tukey) [84] pode ser aplicada ao perfil vertical do campo acima da altura selecionada em cada alcance, visando eliminar os efeitos de reflexão.

A condição de contorno de radiação ao longo de x é expressa como:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-ik\right)u(x,z)\Big|_{x\to\pm\infty} \to 0. \tag{3.15}$$

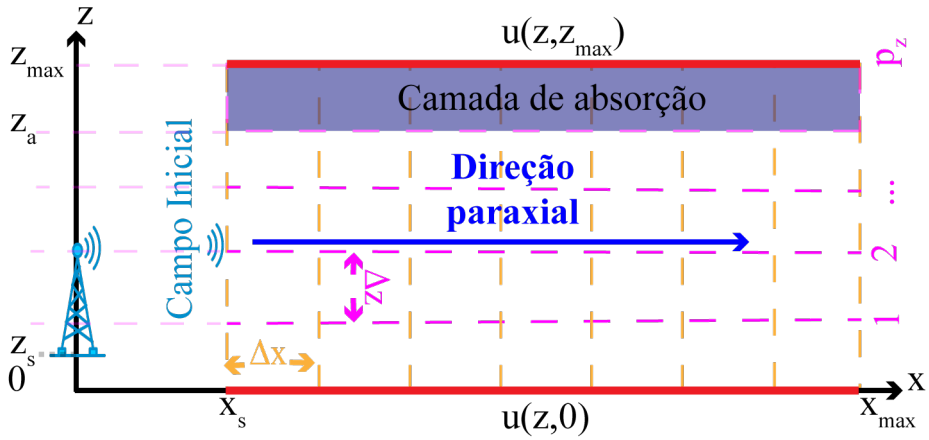
Embora as propagações eletromagnéticas bidimensionais descrevam a propagação unidirecional e não possam abranger as ondas retroespalhadas, essa limitação não é considerada severa [17] ao investigar as ondas originadas de um transmissor e recebidas por um receptor.

Com o objetivo de estabelecer uma abordagem de discretização e apresentar um caso específico do uso das Transformadas de Fourier, o foco será direcionado para a simplificação do problema ilustrado na Figura 10, considerando-o como um guia de ondas. A solução desse problema será abordada por meio da aplicação da Transformada Discreta da Função Seno (*Discrete Sine Transform* - DST), como apresentado na Seção 3.1.3.

3.1.3 Discretização com Transformada Seno

Antes de proceder com a discretização, o problema ilustrado na Figura 10 é considerado como um guia de ondas. O domínio de integração é delimitado pelas fronteiras horizontais localizadas em $z = 0$ e $z = z_{\max}$, e as condições de contorno $u(x,0) = u(x,z_{\max}) = 0$ são impostas para todo $x \geq x_s$.A Figura 11 ilustra o problema, assim como as variáveis envolvidas.

Figura 11 – O cenário de propagação como um guia de onda.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

O índice de refração pode variar com a altura e a extensão dentro do domínio. A abordagem mais apropriada para o problema do guia de ondas é a discretização das equações de propagação em relação à altura z para a aplicação de uma Transformada Discreta adequada da Função Seno. Isso assegura que as condições de contorno no topo e na base do domínio sejam devidamente consideradas. Um incremento de altura Δz é escolhido de modo que $z_{max} = N_z \Delta z$ para um valor inteiro N_z. O campo u é discretizado em altura como $\tilde{u}(x) = (u_1(x), ..., u_{N_z-1}(x))$, utilizando-se a notação $u_j(x) = u(x, j\Delta z)$.

A derivada parcial de segunda ordem em relação a z é aproximada usando a expressão convencional de diferenças finitas:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(x,z) \backsim \frac{u(x,z+\Delta z) + u(x,z-\Delta z) - 2u(x,z)}{\Delta z^2} = w(x,z). \tag{3.16}$$

O operador discreto $\mathcal{D}^2$ corresponde à discretização da derivada parcial de segunda ordem. Definimos $\mathcal{D}^2\tilde{u}(x) = \tilde{u}(w)$ onde:

$$\begin{aligned} w_1(x) &= \frac{u_2(x) - 2u_1(x)}{\Delta z^2}, \\ w_{j+1}(x) &= \frac{u_{j+1}(x) + u_{j+1}(x) - 2u_j(x)}{\Delta z^2}, \quad \forall\, j = 2, ..., N_z - 2, \\ w_{N_z-1}(x) &= \frac{u_{N_z-2}(x) - 2u_{N_z-1}(x)}{\Delta z^2}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Essa é a discretização adequada da derivada parcial de segunda ordem para os pontos Δz e $(N_z - 1)\Delta z$, uma vez que u satisfaz as condições de contorno, $u(x,0) = u(x, N_Z\Delta z) = 0$ para todos os valores de $x \geq x_s$. A Transformada Discreta da Função Seno $\mathcal{S}$ de tamanho N_z é necessária para resolver o problema. Dado um vetor $\tilde{u} = (u_1, ..., u_{N_z-1})$ de tamanho $N_z - 1$, $\mathcal{S}\tilde{u} = \tilde{U}$ é calculada da seguinte maneira:

$$U_{p_z} = \sqrt{\frac{2}{N_z}} \sum_{j=1}^{N_z-1} u_j sin\left(\frac{\pi j p_z}{N_z}\right), \ \forall\, j = 1, ..., N_z - 1. \tag{3.18}$$

Se N_z for uma potência de 2, a Transformada Discreta da Função Seno pode ser implementada de forma eficiente usando uma Transformada Rápida de Fourier (FFT) de tamanho $N_z/2$. Com a normalização escolhida, a Transformada Discreta da Função Seno é sua própria inversa e preserva a norma do produto escalar, ou seja:

$$\sum_{p_z=1}^{N_z-1} |U_{p_z}|^2 = \sum_{j=1}^{N_z-1} |u_j|^2. \tag{3.19}$$

Nosso objetivo é calcular o efeito do operador difrativo $\exp(\delta\mathcal{B})$, considerando o intervalo $x_s, x_s + \Delta x$ e analisando o campo propagado nesse intervalo. De forma equivalente, $\tilde{u}$ satisfaz a equação diferencial parcial:

$$\mathcal{D}^2\tilde{u}(x) + 2ik\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} = 0. \tag{3.20}$$

Ao rearranjarmos os termos, obtemos a Transformada Discreta da Função Seno $\tilde{U}$ de $\mathcal{D}^2\tilde{u}$ como:

$$\tilde{W}_{p_z} = -4sin^2\left(\frac{\pi p_z}{2N_z}\right)U_{p_z},\ \forall\ p_z = 1, ..., N_z - 1. \tag{3.21}$$

Dessa forma, a transformada discreta da Equação (3.20) pode ser expressa diretamente como:

$$\frac{\partial U_{p_z}}{\partial x} = -\frac{2i}{k}sin^2\left(\frac{\pi p_z}{2N_z}\right)U_{p_z},\ \forall\ p_z = 1, ..., N_z - 1. \tag{3.22}$$

A solução é dada por

$$\tilde{U}(x + \Delta x) = \tilde{P}\tilde{U}(x), \tag{3.23}$$

onde o propagador $\tilde{P}$ é definido:

$$\tilde{P}_{p_z} = exp\left[-\frac{2i\Delta x}{k}sin^2\left(\frac{\pi p_z}{2N_z}\right)\right],\ \forall\ p_z = 1, ..., N_z - 1. \tag{3.24}$$

Ao retornarmos ao domínio espacial, obtemos a solução completa do método PE com a Transformada Discreta da Função Seno, que pode ser expressa como:

$$\tilde{u}(x, z) = \exp\left(\frac{ik(n^2 - 1)\Delta x}{2}\right)\mathcal{S}\left\{\tilde{P}\mathcal{S}\{\tilde{u}(x)\}\right\}. \tag{3.25}$$

É importante observar que, aqui também, a solução é determinada de forma única, e uma versão discreta da propriedade de conservação de energia é mantida se o índice de refração for real. A precisão da solução depende da discretização da derivada de segunda ordem em relação à altura.

Com base nas relações de substituição e discretização apresentadas para a DST, por similaridade e considerando que a SPE, Equação (2.11), acaba por ser uma equação diferencial ordinária de primeira ordem que pode ser resolvida diretamente por Transformada de Fourier, trataremos na Seção 3.2 a abordagem apropriada para o uso dessa.

3.2 Modelo Geral do Método SSPE

A Equação Parabólica Clássica, conforme expressa na Equação (2.11), é transformada em uma equação diferencial ordinária de primeira ordem que pode ser resolvida diretamente por meio de uma transformada de Fourier do domínio espacial para o domínio espectral. No contexto de problemas reais, em que o índice de refração n pode ser uma função da altura e/ou alcance (ou seja, $n = n(x, z)$), essa abordagem é apropriada, uma vez que a equação é resolvida para cada incremento pequeno da posição, Δx, o qual é escolhido de forma suficientemente pequena para assegurar que, dentro de qualquer intervalo Δx, o índice de refração possa ser considerado constante em relação a x. A solução numérica NAPE do SSPE é fornecida conforme [9, 17, 58]:

$$u(x + \Delta x, z) = \exp\left[\frac{ik\Delta x}{2}\left(n^2(x, z) - 1\right)\right] F^{-1}\left\{\exp\left[\frac{-ip^2\Delta x}{2k}\right] F\left[u(x, z)\right]\right\}. \quad (3.26)$$

onde F indica uma Transformada de Fourier e $p = k \sin\theta$, sendo θ o ângulo de propagação.

De maneira similar, a solução numérica para a Equação (2.12), que se refere à equação parabólica WAPE, é definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, z) = \exp&\left[\frac{ik\Delta x}{2}\left(n(x, z) - 1\right)\right] \\ &\times F^{-1}\left\{\exp\left[\frac{-ip^2\Delta x}{k}\left(\sqrt{1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2} + 1\right)^{-1}\right] F\left[u(x, z)\right]\right\}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

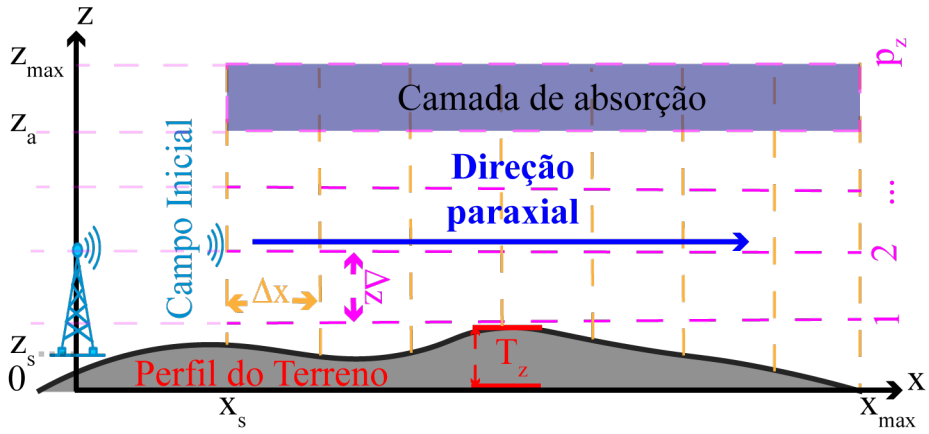
3.2.1 Configuração Numérica e Discretização do Domínio

O método SSPE geralmente trata-se de um problema de valor inicial, onde a propagação começa a partir de uma posição de referência, e o campo ao longo da direção vertical é calculado em etapas utilizando transformações de Fourier. A discretização do domínio, com os parâmetros N_x e N_z, que indicam o número de segmentos ao longo dos eixos x e z. Inicialmente, o campo é conhecido na posição inicial da propagação, x_s, e é propagado iterativamente até alcançar a distância máxima, x_{max}, e a altura máxima, z_{max}, conforme ilustrado na Figura 12. Para isso, o domínio é discretizado nos eixos x e z com passos definidos por Δx e Δz. As Equações (3.28) representam essa discretização, onde x_{p_x} e z_{p_z} são os pontos discretos nos respectivos eixos, e N_x e N_z indicam o número total de pontos de amostragem em cada eixo.

$$\begin{aligned} x_{p_x} &= x_s + p_x\Delta x, \ para\ p_x \in \{0, \ldots, N_x - 1\}, \\ z_{p_z} &= p_z\Delta z, \ para\ p_z \in \{0, \ldots, N_z - 1\}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde $N_x = (x_{max} - x_s)/\Delta x$ e $N_z = z_{max}/\Delta z$ são os números de pontos de amostragem ao longo dos eixos x e z, respectivamente.

Figura 12 – A discretização da formulação SSPE.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

3.2.2 Imposição de Condições de Contorno

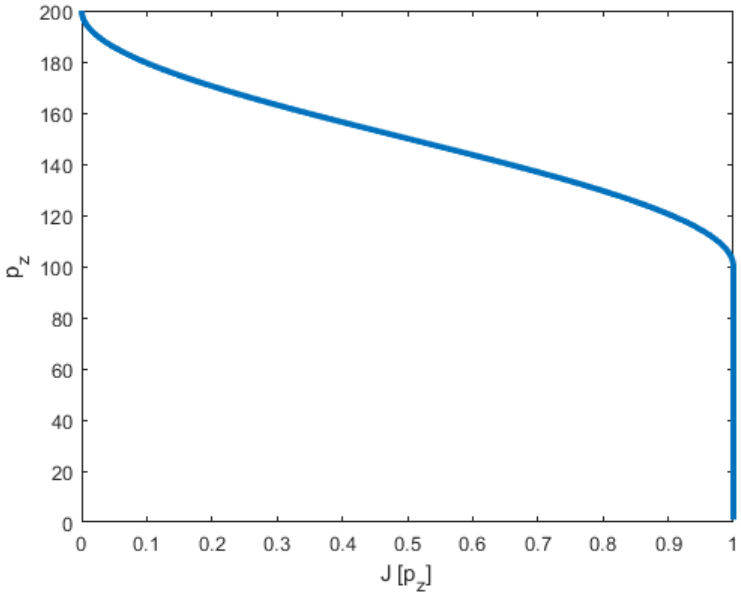
Para aplicar o método SSPE corretamente, é necessário que condições de contorno sejam impostas nas bordas superior e inferior do domínio numérico, conforme previamente discutido nas Seções 2.4 e 3.1.2.

Devido à natureza da propagação, que envolve uma região verticalmente aberta, é essencial que as ondas propagadas sejam completamente absorvidas na borda superior para evitar reflexões não físicas. Isso é alcançado reduzindo gradualmente o campo próximo à borda superior. Neste trabalho, optamos por utilizar uma janela de Hanning [84], que assegura a absorção gradual do campo, evitando reflexões indesejadas e promovendo a atenuação adequada do campo na segunda metade do domínio vertical. Conforme:

$$\mathcal{J}[p_z] = \begin{cases} \{1 + cos\,[\pi(p_z/N_z)]\}\,/2, & p_z \in [N_z - N_{p_a}, N_z] \\ 1, & p_z \in [0, N_z - N_{p_a}], \end{cases} \tag{3.29}$$

onde N_{p_a} representa o tamanho total da camada de absorção, na posição z_a. Matematicamente, essa função de janela Hanning garante que $\mathcal{J}\,[p_z \leq (N_z - N_a)] = 1$ e $J(N_z) = 0$. Um exemplo é ilustrado na Fig. 13.

Figura 13 – Janela Hanning.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Para as condições de contorno sobre a superfície do solo, é adotada a formulação presente na Equação (3.15), juntamente com as premissas estabelecidas na Seção 3.1.2. Na Fig. 12, a discretização do ambiente e a metodologia de aplicação das condições de contorno são ilustradas. O método SSPE padrão não consegue lidar automaticamente com superfícies com propriedades de solos mistos, portanto, nesses casos, pode ser incorporado por meio do uso da Transformada de Fourier Mista (MFT) [57, 58].

3.3 Conclusão

Neste capítulo, foi detalhada a formulação do modelo numérico SSPE para a simulação de propagação de ondas. A abordagem adotada baseou-se na discretização do domínio em eixos vertical e horizontal, com passos e critérios bem definidos, permitindo a análise precisa do comportamento das ondas ao longo do espaço. Além disso, foram impostas condições de contorno nas bordas do domínio para garantir resultados realistas, especialmente na absorção adequada das ondas propagadas. A utilização da janela de Hanning para esse fim demonstrou uma preocupação em evitar reflexões indesejadas, promovendo uma atenuação gradual do campo.

Um aspecto relevante é a incorporação das condições de contorno sobre a superfície do solo. A formulação adotada, juntamente com premissas estabelecidas anteriormente, visa garantir a correta modelagem da interação entre as ondas e o solo, aspecto fundamental em muitos cenários práticos de propagação de ondas. Além disso, foi introduzida uma discussão sobre a incapacidade do método padrão lidar automaticamente com condições

mistas de superfície, sendo sugerido o uso de modelos similares ao MFT, o que pode proporcionar melhores resultados ao lidar com solos com perdas, evidenciando uma abordagem abrangente na busca por soluções eficazes em situações complexas.

Um aspecto relevante é a incorporação das condições de contorno sobre a superfície do solo. A formulação adotada, juntamente com premissas estabelecidas anteriormente, visa garantir a correta modelagem da interação entre as ondas e o solo, aspecto fundamental em muitos cenários práticos de propagação de ondas. Além disso, é introduzido uma discussão sobre a incapacidade do método padrão lidar automaticamente com condições mistas de superfície, sendo a sugestão o uso de modelos similares ao MFT, o que pode proporcionar melhores resultados ao lidar com solos com perdas, evidenciando uma abordagem abrangente na busca por soluções eficazes em situações complexas.

A ênfase na exatidão e precisão dos resultados é uma característica proeminente deste capítulo. Ao explorar detalhes sobre a discretização do domínio e a aplicação cuidadosa das condições de contorno, demonstrou-se um compromisso com a obtenção de resultados confiáveis na simulação de propagação de ondas.

Em prosseguimento ao objetivo de estabelecer um modelo que proporcione precisão e eficiência computacional, o Capítulo 4 apresenta as *Wavelets*, suas transformadas, expõe suas propriedades, a constituição de suas famílias e a técnica de compreensão de dados.

4 Wavelets

4.1 Introdução às Wavelets: História, Propriedades e Aplicações

O objetivo deste Capítulo é apresentar as *Wavelets* e expor suas propriedades e a constituição de suas famílias.

Na primeira parte é abordado seu histórico. Na sequência, são introduzidas as transformadas *Wavelets*, a formação das famílias, as propriedades de translação e escalonamento. Ao final, é introduzido o processo de compressão de dados.

4.2 Definição e Origem das Wavelets

Inicialmente, o termo *wavelet* foi adotado para explicar uma nova técnica de prospecção de petróleo, desenvolvida por Jean Morlet [87], em 1970, a qual consistia na análise dos sinais sísmicos. O problema de analisar sinais que possuíam componentes com altíssima frequência em um curto intervalo de tempo e componentes com baixa frequência em um longo intervalo de tempo foi enfrentado pelo geofísico francês. Um novo método foi criado por Morlet para decompor esses sinais, aos quais foram denominados *Wavelet* de forma constante, mais tarde definidos como *Wavelet* Morlet [87]. O nome destinado às *wavelets* era, em francês, *ondelette*, cujo significado é pequena onda. Posteriormente, foi traduzido para o inglês, *wave*, tornando-se mais tarde amplamente conhecido como *wavelet*.

4.2.1 História e Desenvolvimento das Wavelets

Embora tenham sido desenvolvidas nas geociências, especialmente na geofísica, as *wavelets* foram concebidas no contexto da matemática aplicada, sendo creditadas ao pioneirismo do matemático Alfred Haar, que introduziu a teoria do sistema de funções ortogonais em 1910 [88]. A função descrita por Haar é atualmente conhecida como *wavelet* Haar. Esta família de funções pode ser expandida para formar uma base ortogonal para o conjunto de funções de quadros integráveis em $\mathbb{R}$.

O trabalho de Haar foi amplamente ignorado por muito tempo, pois suas *wavelets* não eram sequer contínuas. No entanto, em 1937, o físico Paul Levy, enquanto pesquisava sobre o movimento Browniano [89], descobriu que a função base de Haar era mais adequada para estudar certos aspectos de seu trabalho em comparação com as funções base de Fourier. Além disso, a função base de Haar podia ser dilatada, comprimida e transladada,

permitindo sua adaptação a diferentes intervalos e proporcionando maior precisão em comparação com a função base de Fourier, que possui suporte infinito.

Posteriormente, diversos matemáticos contribuíram para os estudos das *wavelets*. Em 1989, Stephane Mallat [90] estabeleceu as relações entre as funções *wavelets* e os algoritmos piramidais implementados por bancos de filtros de quadratura espelhada (*Quadrature Mirror Filter - QMF*), viabilizando a implementação da transformada *wavelet* em sua forma discreta atual. Seu método de multirresolução inseriu as *wavelets* no cerne do processamento digital de sinais. Yves Meyer [91] construiu a primeira *wavelet* não-trivial. Ao contrário das *wavelets* Haar, as *wavelets* de Meyer são continuamente diferenciáveis, embora não possuam suporte compacto. Ingrid Daubechies [92], baseando-se no trabalho de Mallat, desenvolveu um conjunto de funções *wavelet* de base ortonormal, que são mais sofisticadas e amplamente utilizadas nas aplicações de *wavelets* atuais [2].

Na época, a Transformada de Fourier era a ferramenta mais popular para análise de sinais, sendo o pilar do processamento de sinais moderno, eficiente para sinais estacionários e capaz de fornecer informações sobre as componentes de frequência presentes no sinal. No entanto, sua limitação na localização temporal tornava-a inadequada para sinais não-estacionários, cujo conteúdo de frequência variava ao longo do tempo. A abordagem de Morlet permitiu a análise de componentes de alta frequência usando uma janela temporal curta, ou componentes de baixa frequência usando uma janela temporal longa, utilizando um conjunto de funções derivadas de uma Gaussiana, com suporte compacto no tempo e na frequência. Devido à sua natureza curta e ondulatória, Morlet denominou seu trabalho de *Wavelets* de forma constante, marcando a primeira vez em que a terminologia *wavelet* foi usada para representar uma "onda pequena".

As transformadas *wavelets* representam uma evolução na análise de sinais não-estacionários, fornecendo informações sobre conteúdo de frequência e localização temporal no sinal investigado. A relevância das *wavelets* foi reconhecida em 2017, quando o matemático Yves Meyer recebeu o Prêmio Abel por seu destaque no desenvolvimento da teoria matemática das *wavelets*, que foi essencial na detecção de ondas gravitacionais geradas pela colisão de dois buracos negros.

As *wavelets* tiveram um grande impacto em toda a comunidade científica e são aplicadas em diversas áreas, incluindo compressão de dados, remoção de ruídos, codificação de fonte e canal, engenharia biomédica, soluções numéricas para equações diferenciais parciais, fractais, análise de turbulência e análise financeira, entre outras. Assim, a teoria das *wavelets* se situa na interseção entre a matemática e outras ciências, exemplificando como uma teoria puramente matemática pode ser extremamente relevante e útil para a resolução de problemas.

Novas descobertas e contribuições continuam a ser feitas na área de *wavelets*, com a introdução de diferentes definições, refletindo a dinâmica do conceito de *wavelets*.

Portanto, definir uma *wavelet* nos dias atuais é uma tarefa extremamente desafiadora.

4.3 Fundamentos das Transformadas Wavelet

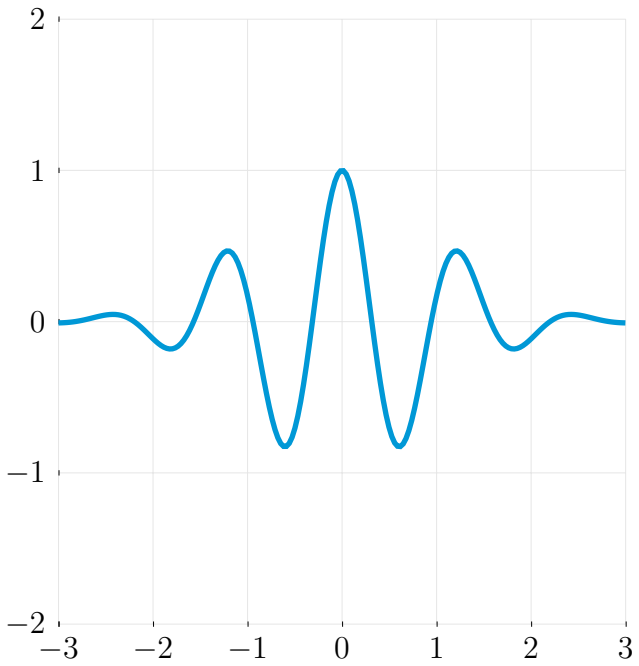
Nesta seção, é apresentada a transformada *Wavelet* discreta. Primeiramente, é demonstrado como construir uma base *Wavelet*. Em seguida, são apresentadas a transformada *Wavelet* discreta e a transformada rápida associada. É então introduzida a representação esparsa com *Wavelet*. Por fim, são discutidas as características da *Wavelet* e a escolha dos parâmetros.

O conjunto de números naturais é denotado por $\mathbb{N}$, o conjunto de inteiros por $\mathbb{Z}$ e o conjunto de números reais por $\mathbb{R}$.

4.3.1 Construção e Propriedades das Famílias Wavelet

Nesta seção, é explicada a construção de uma família *Wavelet* e sua base correspondente.

Figura 14 – Função Wavelet Morlet.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Uma *wavelet* é uma função $\psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ tal que ψ possui média zero, como mostrado na Equação (4.1):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(z)\, dz = 0, \tag{4.1}$$

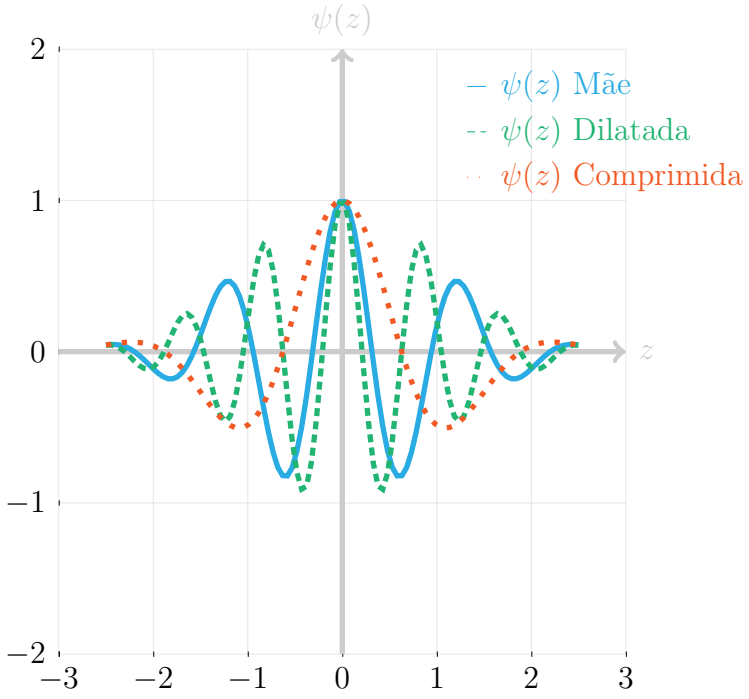
com $||\psi||_2 = 1$.

A partir da função definida na Equação (4.1), chamada de função Mãe (*Mother Wavelet*) ou simplesmente Função *Wavelet*, é possível definir a família *Wavelet*. A Figura 14 ilustra um exemplo dessa função, a *Wavelet* de Morlet. Denotando esta família por $\mathcal{F}$, temos:

$$\mathcal{F} = \left\{ \psi_{(l,p)}(z) = 2^{-l/2}\, \psi\left(2^{-l} z - p\right) \right\}_{(l,p) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}}, \tag{4.2}$$

com $2^{-l/2}$ sendo um fator de normalização de energia para manter $||\psi_{(l,p)}||_2 = 1$, cada *wavelet*-filha preserva a energia da *wavelet*-mãe, onde l corresponde ao nível de dilatação. Isso possibilita a dilatação da *Wavelet* para abranger as partes inferiores do espectro, capturando variações mais lentas do sinal. A Figura 15 ilustra a propriedade de dilatação das *Wavelets*.

Figura 15 – Demonstração da Propriedade de Dilatação da Wavelet Morlet.

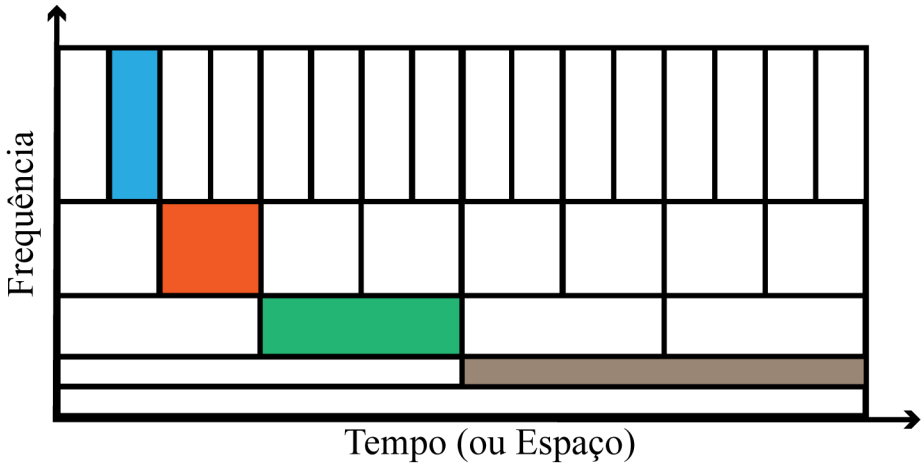


Fonte: Elaborado pelo Autor.

Além disso, p corresponde às translações necessárias para abranger o domínio espacial. Quando $l \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{Z}$, então $\mathcal{F}$ constitui uma base ortonormal de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ [3]. A propriedade de translação das *Wavelets*, que permite ajustar sua posição ao longo do eixo do tempo ou do espaço, é ilustrada na Figura 16. Essa capacidade de translação está estreitamente relacionada à abordagem de multi-resolução, na qual diferentes versões da *Wavelet* são utilizadas para analisar diferentes escalas de um sinal. Na prática, a decomposição é calculada apenas para $l \in [1, L]$, onde L representa o nível máximo de

decomposição, e a família deixa de ser uma base devido à falta de cobertura da parte inferior do espectro.

Figura 16 – Propriedade de Translação das Funções Wavelet.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

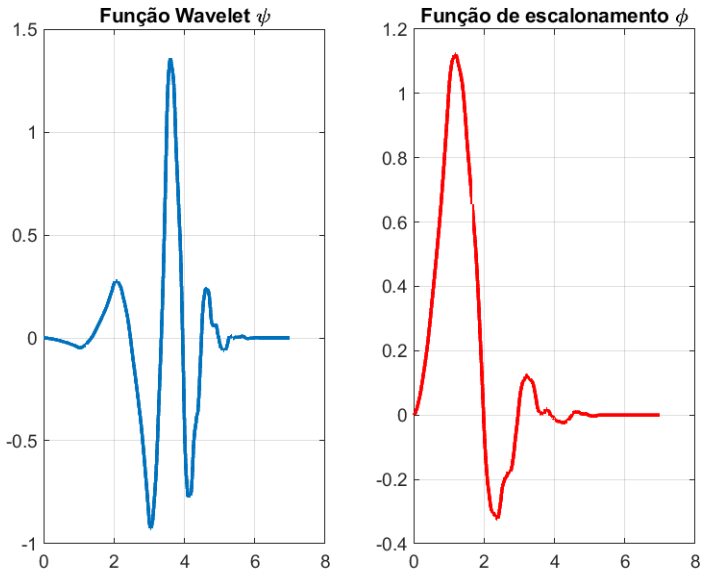
Desse modo, a família *Wavelet* é definida por dilatações (ou compressões) e translações de uma única função *wavelet-mãe*.

Uma função adicional, a função de escalonamento (*scalling Function*) $\phi_{(L,p)} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, com média diferente de zero, é então adicionada à família. Denotando esta por $\mathcal{B}$, temos:

$$\mathcal{B} = \left\{ \phi_{(L,p)}\,(z)\,, \psi_{(l,p)}\,(z) \right\}_{(l,p)\,\in\,[1,L]\times\mathbb{Z}}, \tag{4.3}$$

com o objetivo de obter uma base ortonormal de $\mathcal{L}^2\,(\mathbb{R})$. Na Figura 17 é apresentado um exemplo de função *wavelet* para a família Daubechies, juntamente com sua respectiva função escalonadora.

Figura 17 – Função Wavelet e Função de Escalonamento Associada para Daubechies (db4).



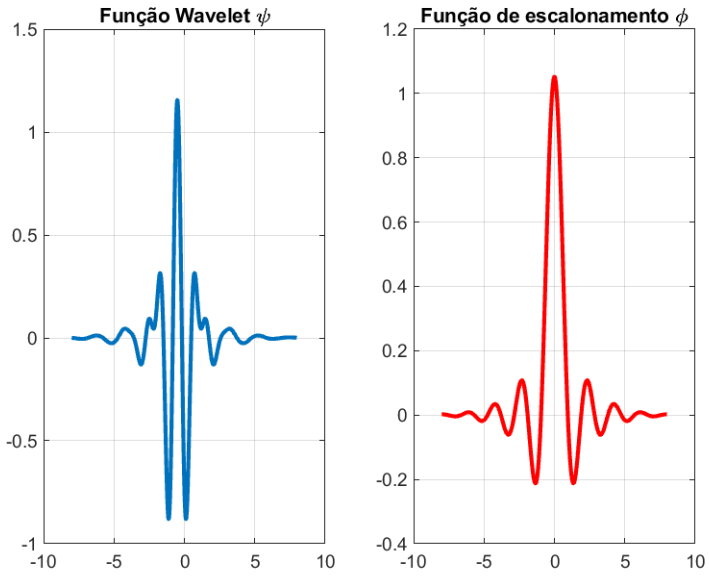
Fonte: Elaborado pelo Autor.

Todo o domínio espacial é coberto pelas funções de translação e escalonamento. As *wavelets* são bem localizadas no domínio espacial e espectral. Com o aumento de l, o suporte das ondas é dobrado e as variações mais lentas do sinal são consideradas. A função de escalonamento cobre desde a parte mais baixa até o contínuo do domínio espectral. Para as *wavelets*, o aumento de l permite cobrir partes inferiores do espectro. Para concluir, uma base ortonormal de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ com funções localizadas no espaço e na frequência é obtida. Agora que a base das *wavelets* foi apresentada, a transformada discreta a ela associada é introduzida.

4.3.2 Principais Funções Wavelet e Suas Características

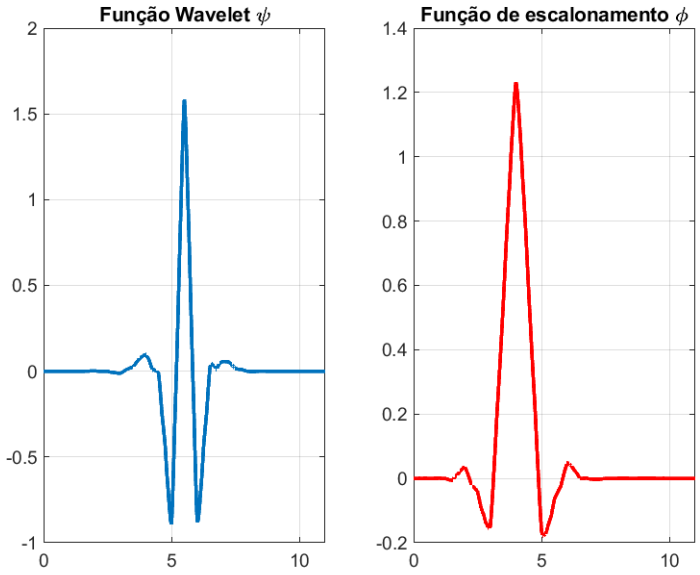
Dentre os diversos fatores que impulsionaram a difusão da teoria de *wavelets* nos últimos anos, destacam-se os estudos que introduziram funções ou famílias de funções apropriadas para serem utilizadas como *wavelets*. Alguns exemplos de funções *wavelet* e suas respectivas funções escalonadoras são apresentados. As famílias de funções são comumente representadas pela abreviação do pesquisador que as desenvolveu (*coif* para Coifman - Figura 19 ou *db* para Daubechies - Figura 20) ou por alguma denominação dada (*sym* para Symlets - Figura 21), seguida por um número que geralmente representa uma característica da função. Como característica geral, observa-se que todas as funções decaem rapidamente para zero.

Figura 18 – Função Wavelet e Função de Escalonamento Associada para Meyer.



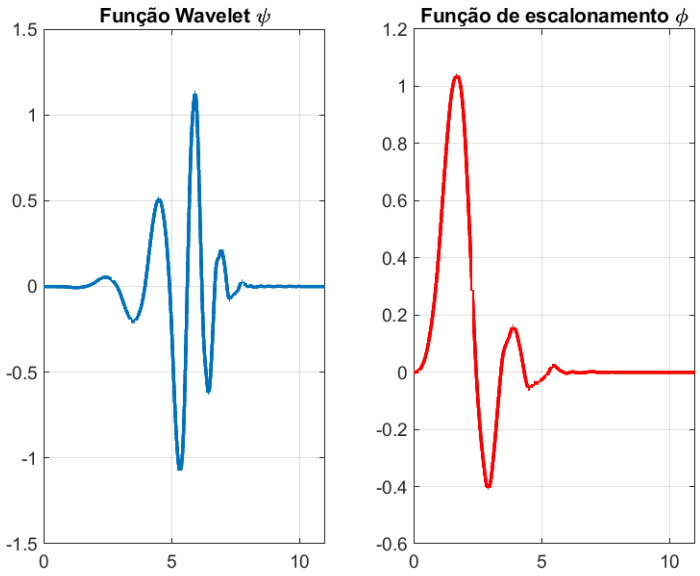
Fonte: Elaborado pelo Autor.

Figura 19 – Função Wavelet e Função de Escalonamento Associada para Coiflet (coif2).



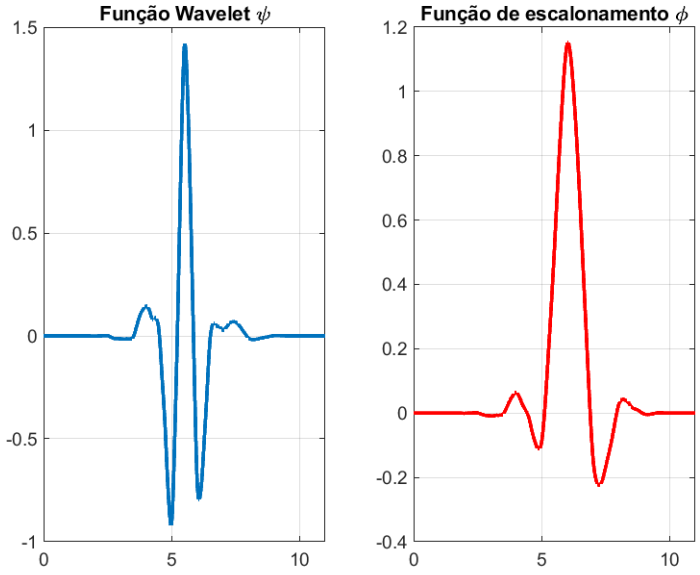
Fonte: Elaborado pelo Autor.

Figura 20 – Função Wavelet e Função de Escalonamento Associada para Daubechies (db6).



Fonte: Elaborado pelo Autor.

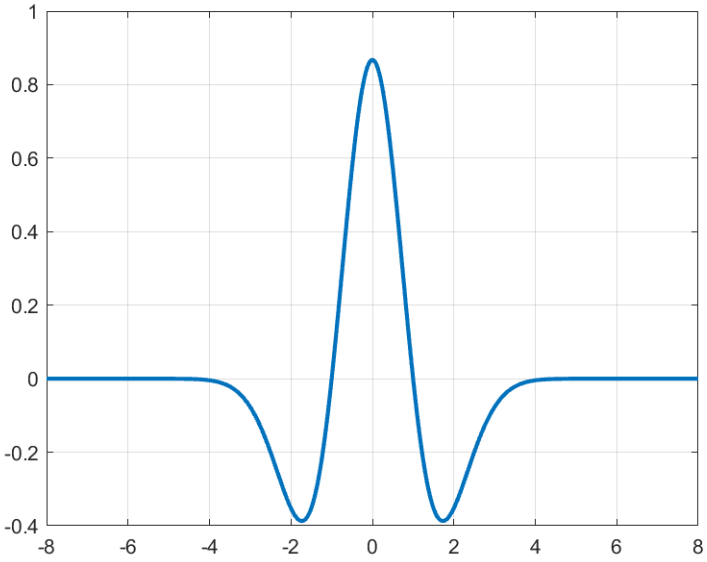
Figura 21 – Função Wavelet e Função de Escalonamento Associada para Symlet (sym6).



Fonte: Elaborado pelo Autor.

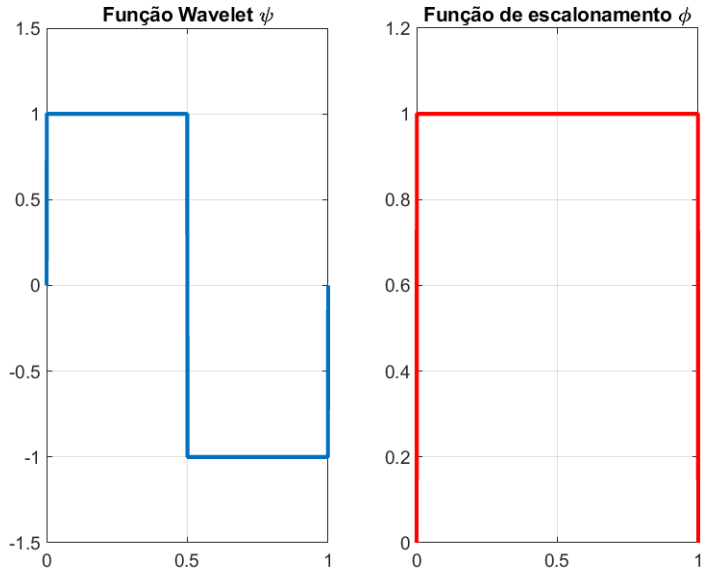
As *wavelets Morlet* - Figura 14 e *chapéu mexicano* - Figura 22 não possuem escalonadoras e são simétricas. A *wavelet Haar* - Figura 23 é a única função descontínua, com três pontos de descontinuidade. As funções *wavelets* oscilam mais que suas escalonadoras associadas. A *Wavelet coif2* exibe alguns pontos angulares. As *Wavelets db6* e *sym6* são bastante suaves.

Figura 22 – Função Wavelet Chapéu Mexicano.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Figura 23 – Função Wavelet para Haar e sua escalonadora associada.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

4.3.3 Transformada Wavelet Discreta: Teoria e Aplicações

Uma função discreta u pode ser representada como uma soma de uma componente de aproximação u_a associada à função de escalonamento e uma componente de detalhe de multirresolução u_d associada às funções *wavelets* dilatadas. A representação de

multirresolução de nível L é dada por:

$$\begin{aligned} u[p_z] &= u_a[p_z] + u_d[p_z] \\ &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} a_{(L,p)}\phi_{(L,p)}[p_z] + \sum_{l=1}^{L}\sum_{p\in\mathbb{Z}} d_{(l,p)}\psi_{(l,p)}[p_z] \\ &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} a_{(L,p)}\ 2^{-L/2}\ \phi[2^{-L}\ p_z - p] + \sum_{l=1}^{L}\sum_{p\in\mathbb{Z}} d_{(l,p)}\ 2^{-l/2}\ \psi[2^{-l}p_z - p], \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde $a_{(L,p)}$ são denominados coeficientes de aproximação e d_l, p, com $l \in [1, L]$, são chamados de coeficientes de detalhes.

Os coeficientes de aproximação podem ser calculados com o produto interno do sinal u com a função de escalonamento ϕ_L. Eles descrevem o sinal com uma resolução mais baixa e levam em consideração as variações mais lentas. Os coeficientes de detalhes, por sua vez, podem ser obtidos com o produto interno entre u e as *wavelets* em diferentes níveis de l. Os coeficientes de detalhes, d_l, fornecem as variações mais rápidas do sinal com l diminuindo e, assim, os detalhes do sinal são obtidos. Assim, uma decomposição multi-resolução do sinal é obtida.

É importante notar que as formulações anteriores são apresentadas para um domínio infinito. Na prática, o cálculo é realizado em um domínio finito para aplicabilidade da transformada *wavelet* discreta. Neste caso, condições de contorno periódicas são adotadas para manter uma base ortonormal [3]. Sendo assim, considerando que o domínio ao longo do eixo z é finito, de tamanho N_z, os índices p são limitados aqui a $[0, N_l - 1]$ para cada nível l, com $N_l = N_z/2^l$. O número total de coeficientes é N_z.

Da mesma forma, os coeficientes de translação p são limitados a $[0, N_z/2^l[$ para $l \in [1, L]$. Para a função de escalonamento, os coeficientes são limitados a $p \in [0, N_z/2^L[$.

Por razões de clareza, a seguir, os coeficientes são representados por um vetor U de dimensão N_z. O índice duplo (l, p) é usado para representar os elementos de U, de modo que

$$U_{(l,p)} = \begin{cases} a_{(L,p)},\ para\ l = 0,\ p \in [0, N_L - 1], \\ d_{(l,p)},\ para\ l \in [1, L],\ p \in [0, N_l - 1], \end{cases} \tag{4.5}$$

$$= \begin{cases} a_{(L,p)},\ para\ l = 0,\ p \in [0, N_z/2^L - 1], \\ d_{(l,p)},\ para\ l \in [1, L],\ p \in [0, N_z/2^l - 1]. \end{cases} \tag{4.6}$$

Além disso, para fins de concisão, as funções de escalonamento e *wavelets* são designadas como *wavelets* daqui em diante. Assim, a representação é expressa por

$$u[p_z] = \sum_{l=0}^{L}\sum_{p} U_{(l,p)}\chi_{(l,p)}[p_z], \tag{4.7}$$

sendo

$$\chi_{(l,p)}[p_z] = \begin{cases} \phi_{(L,p)}, \ para\ l = 0, \\ \psi_{(l,p)}, \ para\ l \in [1, L]. \end{cases} \tag{4.8}$$

Por causa da ortogonalidade da base, esses coeficientes podem ser calculados como os produtos internos de u e os elementos base. Na prática, os produtos internos não são calculados. Os coeficientes são obtidos com o algoritmo da Transformada Rápida *Wavelet* (FWT), apresentado na seção 4.3.4, que apresenta uma melhor eficiência de cálculo.

4.3.4 Implementação da Transformada Rápida Wavelet

Qualquer par de funções de escalonamento e *wavelet* ϕ e ψ, é determinado por dois filtros espelho conjugados [3], de modo que suas sequências de resposta ao impulso correspondentes h e g, satisfazem as seguintes equações:

$$\phi[p_z] = \sqrt{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} h_p \ \phi[2p_z - p], \tag{4.9}$$

$$\psi[p_z] = \sqrt{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} g_p \ \phi[2p_z - p], \tag{4.10}$$

onde h_p e g_p são os elementos de h e g, respectivamente.

Uma implementação utilizando esses filtros permite uma rápida decomposição *wavelet* de um determinado sinal dado devido à decimação em cada etapa e ao fato de que esses filtros possuem um suporte de tamanho pequeno. Neste contexto, os coeficientes são obtidos pela iteração:

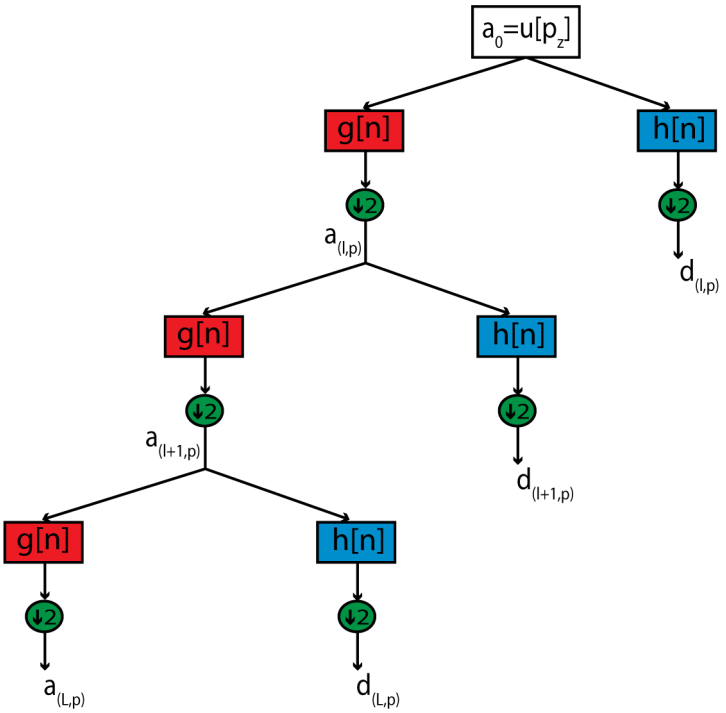
$$a_{l+1,p} = \sum_{q \in \mathbb{N}} h_{p-2q} \ a_{l,q}, \tag{4.11}$$

$$d_{l+1,p} = \sum_{q \in \mathbb{N}} g_{p-2q} \ a_{l,q}, \tag{4.12}$$

A inicialização a_0 corresponde ao próprio sinal $u[p_z]$. Coeficientes $a_{l,p}$ e $d_{(l,p)}$ são então obtidos sucessivamente por convoluções com os filtros espelho e redução da resolução, como mostrado na Figura 24. A função de escalonamento atua como um filtro passa-baixa (LPF - *Low Pass Filter*), enquanto a função *Wavelet* desempenho o papel de um filtro passa-alta (HPF - *High Pass Filter*).

Dessa forma, a técnica utilizada na análise de *wavelets* discreta consiste em projetar filtros passa-alta e passa-baixa que dividam o espectro do sinal exatamente ao meio. Assim, pode-se inferir, a partir do filtro ilustrado na Figura 24, que o número de elementos correspondentes a $d_{(l+1,p)} = u[p_z]/2$, $d_{(l+1,p)} = u[p_z]/4$ e $d_{(L,p)} = u[p_z]/8$, assim como $a_{(L,p)} = u[p_z]/8$.

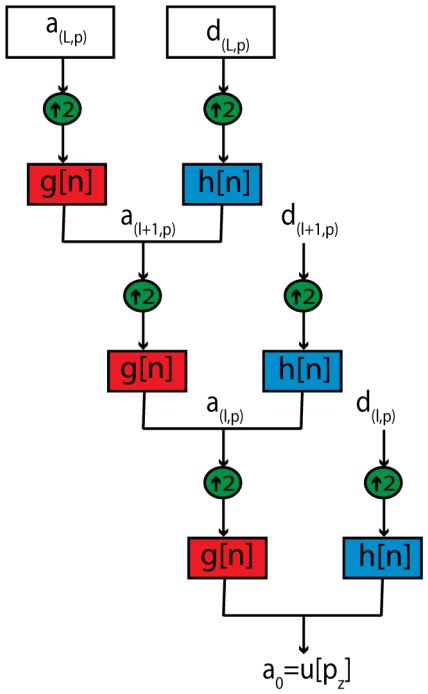
Figura 24 – Banco de Filtros para Transformada Wavelet Discreta em Três Níveis de Resolução.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Para recomposição do sinal, filtros espelho são empregados após a interpolação, que consiste no aumento do número de medidas, conforme mostrado na Figura 25. Desse modo, obtemos a_0, que correspondente a $u[p_z]$, obtido a partir dos coeficientes.

Figura 25 – Estrutura Hierárquica da Reconstrução Discreta de Wavelets em Três Níveis de Resolução.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Este algoritmo se mostra eficaz, pois os coeficientes são calculados para cada nível l por meio de convoluções, e não para cada posição p_z. Em um domínio de tamanho finito N_z, a complexidade resulta em $O(N_z)$, sendo menor do que a complexidade da Transformada Rápida de Fourier, que é de $O(N_z log(N_z))$. Além disso, a representação esparsa proporcionada pelas *Wavelets* constitui uma vantagem significativa, conforme detalhado na seção 4.4.

4.4 Representação Esparsa com Wavelets

A transformada *Wavelet* é aplicada em compressão de dados devido à sua capacidade de representação esparsa [3]. Esta propriedade proporciona uma vantagem significativa em termos de uso reduzido de memória para armazenamento de informações. Esta abordagem é amplamente utilizada no processamento de sinais. O algoritmo de compressão de dados descarta valores abaixo de um determinado limiar, definindo tais coeficientes como nulos.

Uma seleção cuidadosa da família *Wavelet* e do limiar de compressão, definido aqui como V_s, permite uma aproximação rápida do nível de corte, devido ao rápido decaimento

dos coeficientes. Este algoritmo é representado por

$$\tilde{U}_{(l,p)} = \begin{cases} 0, \ para \ |U_{(l,p)}| \leq V_s, \\ U_{(l,p)}, \ para \ |U_{(l,p)}| > V_s. \end{cases} \tag{4.13}$$

onde $\tilde{U}_{(l,p)}$ é o vetor esparso resultante da compressão dos dados. Note-se que um limiar mais alto gera uma matriz mais esparsa. Este limite, utilizado para compressão de dados, é denominado *hard threshold* [3].

Após a compressão, o número de coeficientes não nulos (N_c) é tipicamente muito menor que o tamanho original do sinal (N_z), definindo, assim, uma taxa de compressão $TC = N_c/N_z$. Dessa forma, o sinal é aproximado por um conjunto de coeficientes esparsos. Como a base é ortonormal, a energia do sinal correspondente aos coeficientes *Wavelet* é $||u||_2^2 = \sum_{l,p} |U_{(l,p)}|^2$. A precisão da aproximação depende do limiar de corte e o erro é aproximadamente $\mathcal{E} = 20 \ log \ V_s$. Por exemplo, um limiar $V_s = 10^{-2}$ produz uma precisão de $-40 \ dB$.

No entanto, a obtenção de uma boa taxa de compressão depende principalmente de dois parâmetros [3,90]: os momentos nulos e o suporte compacto da *Wavelet* selecionada. Maiores detalhes são apresentados na seção 4.5.

4.5 Parâmetros e Características das Wavelets

Nesta seção, são relembradas brevemente algumas propriedades importantes das *wavelets* e seus efeitos sobre os coeficientes obtidos após a decomposição. As duas propriedades principais são o número de momentos nulos e o suporte compacto das *wavelets*.

Um fator significativo a ser considerado é a escolha da *wavelet* adequada para a análise de um determinado sinal. Estudos nessa área [3] podem ser úteis para formalizar e simplificar a determinação de uma função apropriada. Em outras palavras, as propriedades das *wavelets* podem facilitar sua escolha para análise de um sinal, eliminando a necessidade de métodos baseados em testes exaustivos.

Na decomposição de um sinal pela transformada *wavelet*, propriedades como regularidade, suavidade e suporte compacto são determinantes na seleção da *wavelet* a ser utilizada. *Wavelets* com maior suporte aumentam a resolução em frequência, mas diminuem a resolução temporal do sinal transformado. Por isso, deve-se escolher uma *wavelet* cujo suporte não comprometa nenhuma das resoluções. Momentos nulos e suavidade estão matematicamente relacionados; quanto maior o número de momentos nulos de uma *wavelet*, mais suave ela é. E quanto maior a suavidade da *wavelet*, maior é a probabilidade de reconstrução perfeita do sinal decomposto pela transformada *wavelet*. O estudo da regularidade requer conhecimento sobre análise de multirresolução (MRA) e das propriedades que garantem a ortogonalidade ou a existência da função de escalonamento

ou *wavelet* [92, 93]. Discussões importantes que relacionam a quantidade de momentos nulos com a regularidade são encontradas em [3, 90, 94, 95].

Um elevado número de momentos nulos permite melhor compressão das partes regulares do sinal; entretanto, o aumento do número de momentos nulos também amplia o tamanho do suporte das *wavelets*, o que pode ser problemático quando o sinal é singular (por exemplo, descontínuo). Para medir a regularidade local [3] de um sinal, não é crucial utilizar uma *wavelet* com um suporte de frequências baixas, mas sim com momentos nulos. Se a *wavelet* possui um dado número de momentos nulos, então a transformada *wavelet* pode ser interpretada como um operador diferencial multiescala de ordem igual ao número de momentos nulos.

4.5.1 Momentos Nulos e Suporte Compacto

A propriedade do número de momentos nulos de uma *wavelet*, denotado aqui por n_v, é definida pela seguinte relação matemática [3, 90]:

$$\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \geq (n_v - 1),\ \int_{[0,1]} Z^k\ \psi(\alpha) = 0. \tag{4.14}$$

Essa propriedade indica a capacidade de uma *wavelet* de aproximar um polinômio em um suporte finito e, consequentemente, um sinal suave, utilizando poucos coeficientes. De fato, em um sinal suave, se n_v aumenta, os coeficientes *wavelet* desse sinal diminuem rapidamente para zero. Assim, poucos coeficientes são necessários para descrever com o sinal com precisão, resultando em uma alta taxa de compressão. Para cada família de *wavelets*, uma *wavelet-mãe* pode ser especificada para qualquer valor de n_v. Por outro lado, se uma *wavelet* possui n_v momentos nulos, então seu suporte é de, no mínimo, $2n_v - 1$. No entanto, para representar variações acentuadas da função com poucos coeficientes, é necessário um suporte o menor possível. Assim, ambos os critérios não podem ser otimizados simultaneamente.

4.5.2 Regularidade e simetria

Ao se aplicar uma compressão a um sinal, um erro é introduzido no sinal reconstruído. Quando a base da *wavelet* apresenta maior regularidade, esse erro se torna mais suave e menos perceptível, contribuindo para uma melhor qualidade da reconstrução do sinal.

A regularidade de uma *wavelet* refere-se à suavidade da função *wavelet* e de sua derivada. *Wavelets* com maior regularidade são capazes de representar sinais suaves com maior precisão, resultando em coeficientes *wavelet* que decaem rapidamente para zero.

Isso é particularmente importante em aplicações onde a suavidade do sinal reconstruído é crítica.

Para nossas aplicações, erros mais suaves impactam menos o espectro do sinal, que é utilizado para propagar ondas eletromagnéticas. A preservação da forma do espectro é essencial, pois qualquer distorção pode afetar a propagação e a integridade da onda eletromagnética.

Além disso, para a propagação de ondas eletromagnéticas, é preferível escolher uma *wavelet* mais simétrica. A simetria da *wavelet* assegura que o erro introduzido durante a compressão e decomposição do sinal seja distribuído de forma uniforme, mantendo o mesmo nível de precisão em ambos os lados do sinal. Isso é particularmente importante em aplicações onde a propagação de ondas precisa ser uniforme e sem distorções.

4.5.3 Seleção de Wavelets para Propagação Eletromagnética

Para a representação do campo eletromagnético, é necessária uma família *wavelet* discreta devido ao domínio discreto utilizado. Além disso, como o propagador de espaço livre é simétrico em relação ao eixo z, *wavelets* simétricas ou quase simétricas são consideradas escolhas mais adequadas para garantir uma análise precisa e equilibrada em ambos os lados do sinal. Foram selecionadas três principais famílias de *wavelets* para essa finalidade: Daubechies [96], Coiflets [3] e Symlet [97]. As propriedades dessas famílias, como suporte compacto, simetria e número de momentos nulos, são resumidas na tabela 1.

Tabela 1 – Comparação das Propriedades das Famílias de *Wavelets* para Representação do Campo Eletromagnético.

Família	Daubechies	Coiflets	Symlets
Momentos nulos(n_v)	τ	2τ	τ
Suporte	$2\tau - 1$	$6\tau - 1$	$2\tau - 1$
Simetria	-	$+$	$++$

Fonte: Elaborado pelo Autor.

A escolha de uma *wavelet* adequada é essencial para a análise de sinais físicos, que são predominantemente funções suaves. Portanto, o número de momentos nulos (n_v) deve ser suficientemente alto para permitir uma descrição precisa do sinal com poucos coeficientes. Isso é fundamental para alcançar uma alta taxa de compressão e minimizar a distorção do sinal durante a decomposição e reconstrução.

A família *wavelet* de Daubechies [96] possui suporte mínimo, o que significa que cada *wavelet* e função de escalonamento afeta apenas um número limitado de coeficientes adjacentes. No entanto, essas *wavelets* são assimétricas, o que pode introduzir distorções em sinais que requerem uma representação simétrica. Na Figura 20, uma base *wavelet*

de Daubechies de ordem seis é apresentada, ilustrando tanto a função de escalonamento quanto a *wavelet-mãe*. Esta base, com $\tau = 6$, possui $n_v = \tau$, indicando que ela tem seis momentos nulos. Isso permite que a *wavelet* represente polinômios de até grau cinco com precisão, o que é benéfico para a compressão e a análise de sinais suaves, pois os coeficientes *wavelet* para esses sinais tendem a decair rapidamente, resultando em uma representação esparsa. Além disso, devido ao seu suporte mínimo, as *wavelets* de Daubechies são eficientes em termos de cálculo, tornando-as adequadas para aplicações em tempo real e em grandes conjuntos de dados.

A família Coiflets [3] é ilustrada na Figura 19 com uma representação de ordem 2. As Coiflets são amplamente utilizadas devido à sua propriedade de simetria e ao equilíbrio entre regularidade e suporte. Essa simetria é particularmente vantajosa em aplicações que exigem preservação da forma do sinal, como em compressão de dados e análise de sinais com componentes oscilatórios. No entanto, as Coiflets não possuem suporte de tamanho mínimo, o que significa que elas abrangem um intervalo maior de dados. Este aspecto pode ser problemático se o sinal apresentar muitas singularidades ou detalhes menores que o suporte da *wavelet*, já que a resolução temporal pode ser prejudicada. Apesar disso, as Coiflets mantêm um bom desempenho em uma ampla gama de aplicações devido à sua capacidade de representar sinais suaves com precisão, enquanto minimizam artefatos decorrentes da transformação.

A família Symlet [97] é quase simétrica e foi desenvolvida como uma modificação das *wavelets* Daubechies para melhorar a simetria enquanto mantém um suporte compacto. Essa característica torna as Symlets mais adequadas para aplicações que exigem maior simetria, como na propagação de ondas eletromagnéticas, onde a preservação da forma do sinal é essencial. Na Figura 21, uma Symlet de ordem 6 é ilustrada, mostrando a função de escalonamento e a *wavelet-mãe*. Assim como as Daubechies, as Symlets de ordem 6 possuem $n_v = 6$ momentos nulos, proporcionando uma boa representação para sinais suaves com menos coeficientes. No entanto, a vantagem adicional das Symlets é a sua maior simetria, que pode reduzir artefatos de fase na análise do sinal.

4.6 Análise de Parâmetros das Wavelets

Nesta seção, serão realizados testes numéricos dos principais parâmetros das *Wavelets*, com o objetivo de investigar as funções, famílias e suas propriedades na análise de problemas radioelétricos. A compressão de dados será abordada por meio da representação esparsa de $\tilde{U}_{(l,p)}$, juntamente com a definição do limiar de compressão, que serão comparados. Por fim, será determinada a taxa de compressão.

A radiação do feixe pode ser obtida analiticamente através das funções de Green. Para o caso 2-D, a Equação (4.15) é utilizada, enquanto para o caso 3-D, é aplicada a

Equação (4.16), onde $\tilde{r}$ representa a distância entre o ponto de observação e a origem do feixe, definida pela Equação (4.17). O Ponto de Fonte Complexa (*Complex Source Point* - CSP) pode ser aproximado para um feixe Gaussiano se $kW_0 > 5$, sendo então considerado um feixe colimado. O campo correspondente a este feixe apresenta uma variação suave.

$$G(\tilde{r}) = \frac{jH_0^{(2)}(k_0\tilde{r})}{4}, \tag{4.15}$$

$$G(\tilde{r}) = -\frac{exp(-jk_0\tilde{r})}{4\pi\tilde{r}}, \tag{4.16}$$

$$\tilde{r} = \sqrt{(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2 + (z-z_s)^2}. \tag{4.17}$$

4.6.1 Avaliação das Famílias de Wavelets (Daubechies, Coiflets e Symlets)

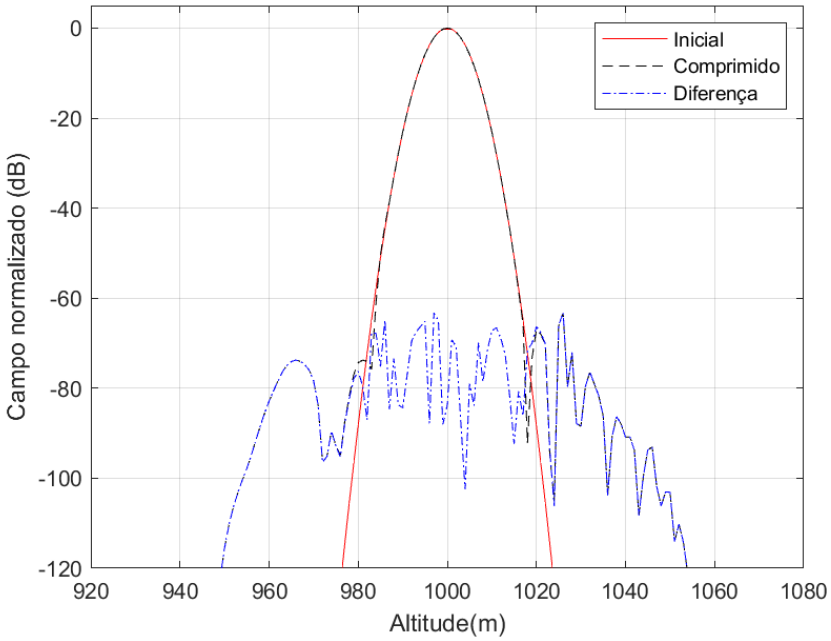
No primeiro caso: investiga-se o comportamento da técnica em relação à escolha das famílias. Com o objetivo de validar os parâmetros mencionados na seção 4.5.3, foram realizadas avaliações utilizando as famílias de *Wavelets* de Daubechies, Coiflets e Symlets.

Para a análise das famílias de *Wavelets*, foram considerados os seguintes parâmetros: frequência $f_0 = 300$ MHz, posição inicial $x_{w0} = -50$ metros, $y_s = 0$, $z_s = 1000$ metros e largura $W_0 = 5$ metros. O número total de coeficientes utilizados para a amostragem foi de $N_z = 2048$ pontos, com uma variação de $\Delta z = 1$ metro. Além disso, outros parâmetros foram definidos: número de momentos nulos $n_V = 5$; nível máximo de decomposição $L = 3$; limiar de compressão $V_s = 10^{-3}$. Em seguida, os coeficientes foram obtidos por meio da transformada rápida *Wavelet*, e o sinal foi comprimido.

Após a compressão do sinal, sua taxa e a raiz do erro quadrático médio (RMSE) são investigadas em comparação com o campo inicial. A Figura 26 representa o campo inicial, o campo comprimido e a diferença entre os sinais radiados. Além disso, a Figura 27 ilustra a amplitude dos coeficientes da decomposição *Wavelet*.

Figura 26 – Campo Inicial do Sinal Radiado pelo CSP com Família de *Wavelets* $n_v = 5$ e $L = 3$.

(a) Daubechies



(b) Coiflets

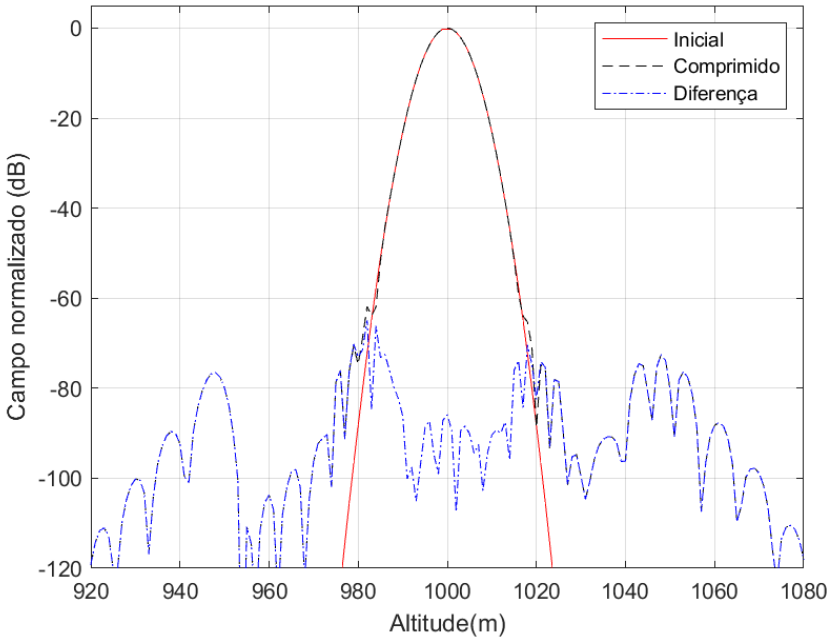
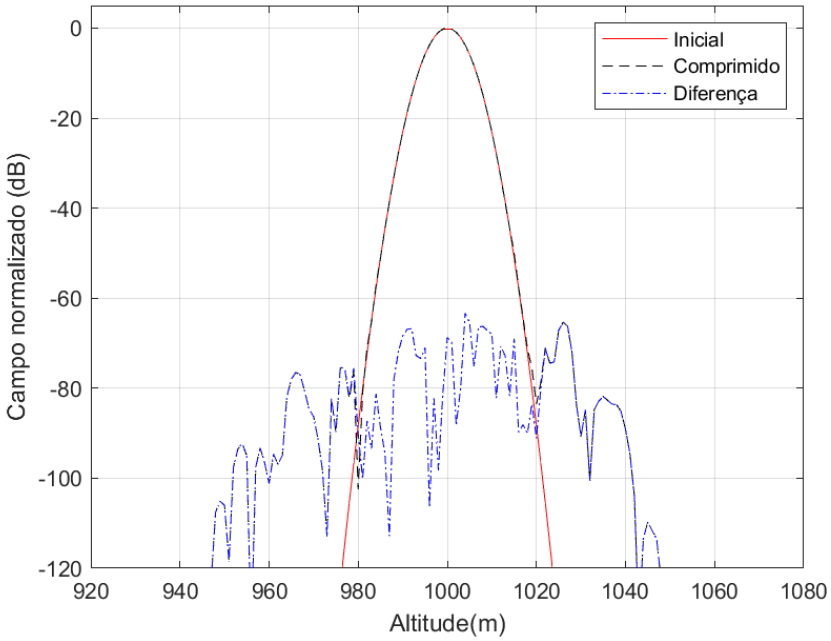


Figura 26 – Campo Inicial do Sinal Radiado pelo CSP com Família de *Wavelets* $n_v = 5$ e $L = 3$ (continuação).

(c) Symlet



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Tabela 2 – Comparação da Taxa de Compressão e Erro Quadrático Médio (RMSE) das Famílias de *Wavelets* para a Representação do Campo Eletromagnético.

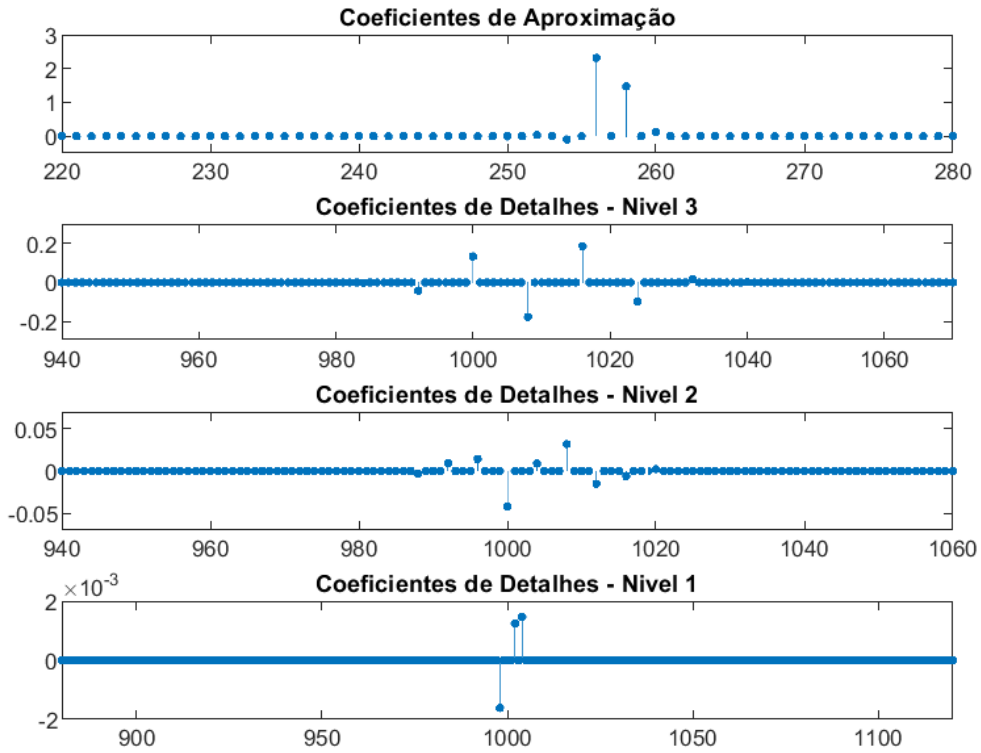
Família	Daubechies	Coiflets	Symlets
Coeficiente diferentes de zero (N_c)	26	28	25
TC (%)	98,73	98,63	98,78
RMSE (dB)	-85,87	-90,68	-86,93

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Para todas as famílias de Wavelets consideradas, observa-se uma redução significativa no número de coeficientes não nulos, conforme evidenciado pela taxa de compressão dos dados. Essa métrica, definida como $TC = N_c/N_z$ na seção 4.4, está resumida para o caso analisado na tabela 2. A propriedade de simetria da família Symlet, uma das Wavelets investigadas, resulta na coincidência entre a posição do máximo dos coeficientes e o campo máximo. Os resultados demonstram consistência entre as três famílias, atendendo ao critério de erro esperado imposto por V_s, indicando que o erro é insignificante em todos os testes. Por fim, a família Symlet emerge como a escolha preferencial devido à sua simetria e à maior taxa de compressão (TC), permitindo representar o campo inicial com apenas alguns coeficientes e alcançar uma alta taxa de compressão.

Figura 27 – Amplitude do Sinal Radiado pelo CSP com Família de *Wavelets* para $n_v = 5$ e $L = 3$.

(a) Daubechies



(b) Coiflets

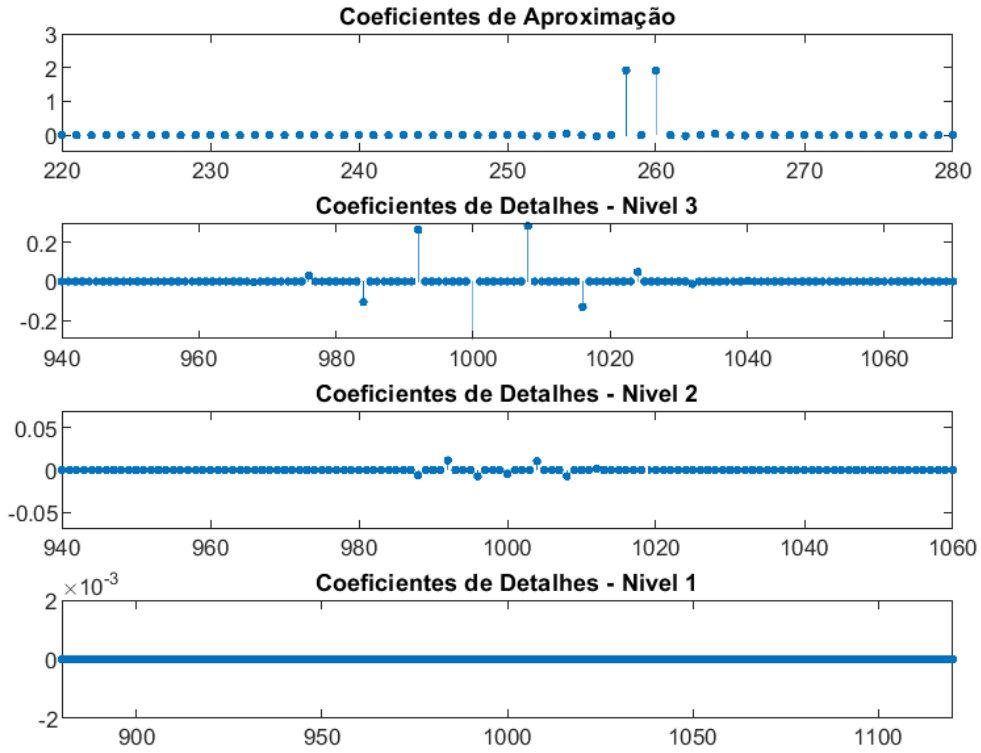
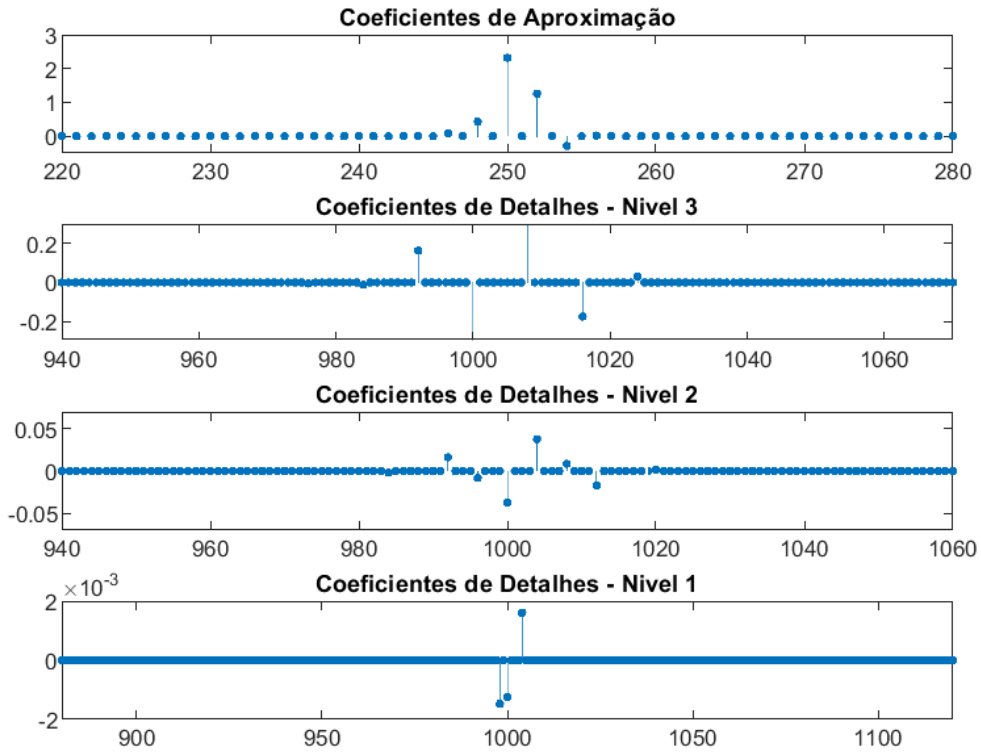


Figura 27 – Amplitude do Sinal Radiado pelo CSP com Família de *Wavelets* $n_v = 5$ e $L = 3$ (continuação).

(c) Symlet



Fonte: Elaborado pelo Autor.

4.6.2 Influência da Ordem das Wavelets na Taxa de Compressão e Erro

No segundo caso: As investigações sobre a compressão são realizadas para avaliar a família *Wavelet* quando diferentes ordens τ são utilizadas. Para isso, o feixe complexo utilizado no exemplo anterior é mantido, mas o tamanho da cintura do feixe, ou seja, o parâmetro W_0 é alterado para as $W_0 = 3$ e 10 metros.

Tabela 3 – Análise da Ordem das *Wavelets* para $W_0 = 3$ e $x_{w0} = -50$ metros com Família de *Wavelet* Symlet.

Ordem τ	2	3	4	5	6	7	8
N_c	68	39	33	22	21	19	20
TC (%)	96.67	98,09	98,38	98,92	98,97	99,07	99,02
RMSE (dB)	-85,16	-85,14	-89,65	-86,03	-89,06	-88,92	-91,41

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Nesse teste, os parâmetros apresentados na seção 4.5.1 são validados. As avaliações

foram conduzidas com a família *Wavelet* Symlet. Os resultados estão apresentados nas tabelas 3 e 4.

Tabela 4 – Análise de Ordem das *Wavelets* para $W_0 = 10$ e $x_{w0} = -50$ metros com Família de *Wavelet* Symlet.

Ordem τ	2	3	4	5	6	7	8
N_c	69	38	28	24	20	18	18
TC (%)	96,63	98,14	98,63	98,82	99,02	99,12	99,12
RMSE (dB)	-80,42	-84,42	-88,14	-87,30	-88,18	-91,16	-95,03

Fonte: Elaborado pelo Autor.

O CSP foi posicionado em $x_{w0} = -500$. A compressão foi reavaliada e os resultados estão apresentados nas tabelas 5 e 6.

Tabela 5 – Análise de ordem das *Wavelets* para $W_0 = 3$ e $x_{w0} = -500$ metros com Família *Wavelet* Symlet.

Ordem τ	2	3	4	5	6	7	8
N_c	89	48	39	39	39	39	39
TC (%)	95,65	97,65	98,09	98,09	98,09	98,09	98,09
RMSE (dB)	-79,80	-85,26	-90,35	-93,32	-93,26	-93,38	-93,14

Fonte: Elaborado pelo Autor.

A propagação do campo irradiado por um CPS com uma variação suave foi analisada. A taxa de compressão (TC) mostrou-se ligeiramente menor para ordens (τ) mais baixas, enquanto a tendência do erro médio não demonstrou uma relação direta com τ. Os valores de RMSE ficaram consistentemente abaixo dos limites estabelecidos pelo limiar de compressão, confirmando a eficácia da compressão nos parâmentos testados.

Tabela 6 – Análise de ordem das *Wavelets* para $W_0 = 10$ e $x_{w0} = -500$ metros com Família *Wavelet* de Symlet.

Ordem τ	2	3	4	5	6	7	8
N_c	39	43	33	33	34	33	34
TC (%)	98,09	97,90	98,38	98,38	98,33	98,38	98,33
RMSE (dB)	-93,14	-84,23	-87,26	-90,71	-94,56	-90,89	-94,80

Fonte: Elaborado pelo Autor.

4.6.3 Efeito dos Níveis de Decomposição na Precisão do Sinal

No terceiro caso: estuda-se a influência do nível de decomposição na precisão do sinal comprimido. O CSP adotado no primeiro teste é retomado, ou seja, $W_0 = 5$ metros e

posição inicial $x_{w0} = -50$ metros. O limiar de compressão foi definido como $V_s = 10^{-4}$. Podemos observar nos resultados apresentados na tabela 7, que para diferentes níveis de decomposição a precisão do sinal não é afetada significativamente.

Tabela 7 – Análise dos Níveis de Decomposição na Precisão do Sinal Comprimido com Família de *Wavelet* Symlet.

L	2	3	4	5	6	7	8
N_c	36	41	50	58	67	77	84
TC (%)	98,24	97,99	97,55	97,16	96,72	96,24	95,89
RMSE (dB)	-115,68	-112,45	-112,73	-111,11	-109,49	-111,89	-111,89

Fonte: Elaborado pelo Autor.

4.6.4 Avaliação do Limiar de Compressão na Taxa de Compactação e Erro

No quarto caso: foi realizada uma avaliação da influência dos valores impostos pelo limiar de compressão. Um valor fixo máximo para o nível de decomposição $L = 3$ foi definido, mantendo-se os demais parâmetros conforme adotado no terceiro caso. Os resultados apresentados Tabela 8 demostram que a taxa de compressão dos dados e o erro médio quadrático estão diretamente ligados ao limiar V_s. O RMSE entre os campos inicial e compactado atende ao erro estimado em $20logV_s$.

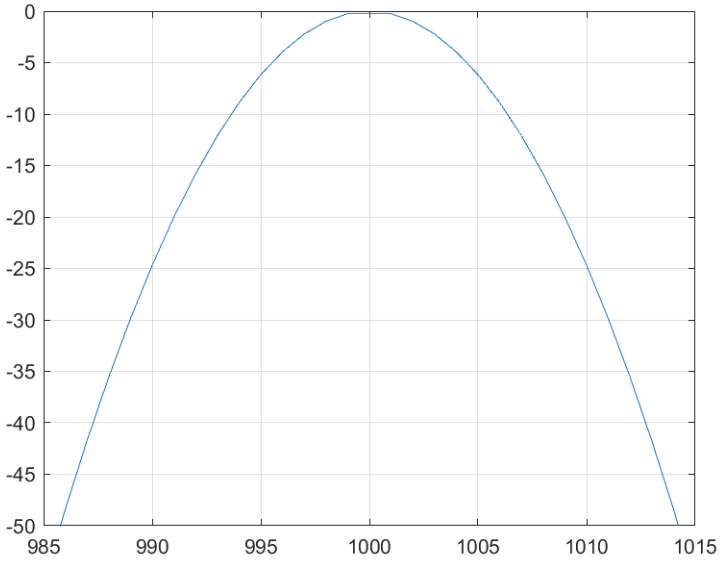
Tabela 8 – Avaliação do Limiar de Compressão na Taxa de Compactação e Erro para Família de *Wavelet* Symlet.

V_s	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}
N_c	15	25	41	50	60	65	68
TC (%)	99,26	98,77	97,99	97,55	97,07	96,82	96,67
RMSE (dB)	-67,24	-87,39	-112,45	-128,74	-153,27	-177,38	-190,96

Fonte: Elaborado pelo Autor.

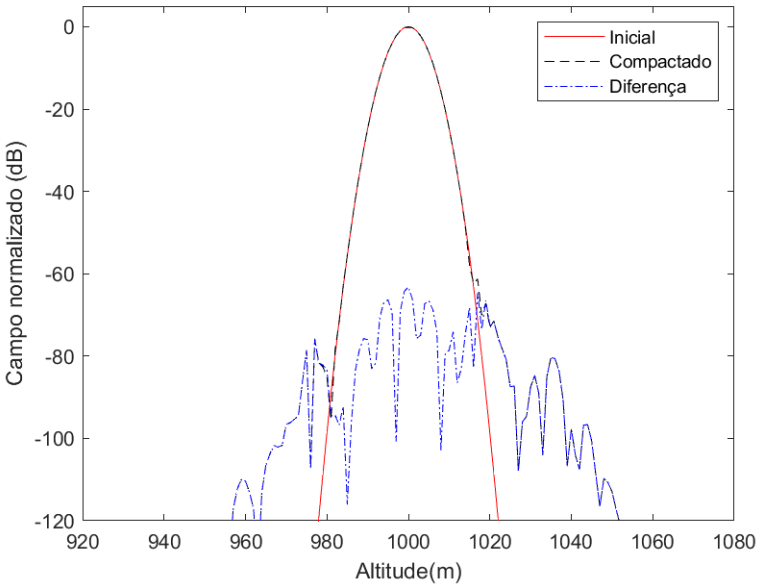
O campo irradiado pelo CSP, ilustrado na Figura 28, foi compactado pelo método *Wavelet* utilizando a família Symlet com $N_v = 6$. Na Figura 29, observa-se a versão compactada do campo, onde, ao aplicar o limiar de compressão $V_s = 10^{-3}$ os coeficientes N_c foram siginificativamente menores que os elementos da amostragem N_z, resultando em um RMSE inferior ao erro estimado.

Figura 28 – Campo irradiado pelo CSP com $x_{w0} = -50$ e $W_0 = 5$ metros.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Figura 29 – Campo Compactado Utilizando a Transformada *Wavelet* Symlet 6 com Limiar de Compressão $V_s = 10^{-3}$.

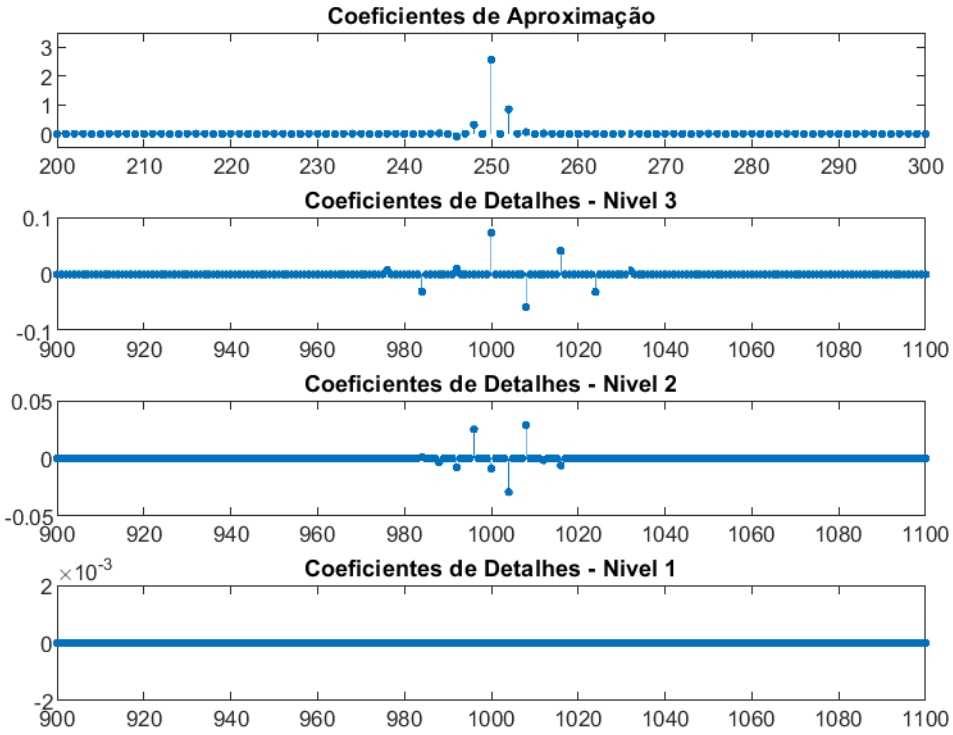


Fonte: Elaborado pelo Autor.

Os coeficientes de aproximação e detalhes, para o nível de decomposição $L = 3$, são apresentados na Figura 30. Constatou-se que todos coeficientes do nível de detalhe $L = 1$ foram definidos como zero. O sinal descrito pelas *Wavelets* nas dilatações apropriadas, especificamente nos níveis 2 e 3. Isso demonstra a eficiência do método *Wavelet* Symlet em

compactar o sinal, mantendo a precisão com um número reduzido de coeficientes, conforme estabelecido pelos parâmetros de compressão. Assim, a eficácia do limiar de compressão V_s foi reafirmada, atendendo ao critério de erro estimado.

Figura 30 – Coeficientes de Aproximação e Detalhes para o Campo CSP Amostrado com $L = 3$.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

4.7 Conclusão

Neste capítulo, foi introduzida a transformada *wavelet* discreta e seu método de compressão associado.

Inicialmente, descreveu-se a decomposição de sinais em *wavelets* localizadas no domíno da frequência, seguida pela explicação do método de compressão de dados através da redução de coeficientes da *wavelet*.

Foram discutidos os principais parâmetros das *wavelets* e apresentadas as famílias comumente utilizadas na transformada discreta de *wavelet*.

Por fim, um estudo de casos foi realizado para examinar os impactos da seleção de parâmetros na transformada rápida de *wavelet*, abordando aspectos como escolha das famílias, taxa de compressão, nível máximo de decomposição e limiar de compressão em

diferentes contextos de radiação do campo produzido por um CSP.

O Capítulo 5, o Método Wavelet em passos divididos é apresentado, onde as transformadas *Wavelets* são retomadas e um modelo híbrido é introduzido para analisar ambientes de propagação na resolução de equações parabólicas.

5 Método Wavelet em passos divididos

5.1 Introdução

Neste capítulo, é apresentada uma análise abrangente da proposta principal desta tese, o método *Wavelet* em passos divididos, denominado SSW-PE, na modelagem da propagação de ondas de rádio.

O método SSW-PE é desenvolvido, fundamentado nas transformações *Wavelets*, critérios de compreensão, regularidade, simetria e escolha das famílias *Wavelets* introduzidos no capítulo 4.

A visão geral do método é apresentada e são abordados pontos específicos: a construção da matriz de propagação, a camada de absorção, o método das imagens, as influências do relevo e da atmosfera e a complexidade computacional.

Inovações são introduzidas pelo SSW-PE, como a aplicação das abordagens NAPE e WAPE. Além disso, são demonstradas a incorporação de variações de refratividade, modificações na modelagem do terreno para melhor representação e considerações das condições de contorno da superfície. Além de seus aspectos inovadores, o objetivo deste trabalho é fornecer um guia completo para a replicação eficaz do algoritmo, promovendo assim o avanço dos estudos de propagação usando *Wavelets*. A eficácia e aplicabilidade desta abordagem são validadas através de estudos comparativos com soluções bem estabelecidas, incluindo a versão de Transformada Discreta Mista de Fourier (DMFT) do método de Equação Parabólica em Passos Divididos (SSPE). Comparações com medições de casos reais de propagação também são conduzidas.

A análise estatística confirma o potencial inovador do algoritmo SSW-PE, que também oferece eficiência computacional para simulações rápidas e consistentes. Assim, este capítulo contribui para uma análise abrangente e inovadora, fornecendo recursos tangíveis para a comunidade de pesquisa interessada em expandir esta metodologia.

5.2 Histórico e Desenvolvimento dos Métodos Baseados em Wavelet

O emprego das *Wavelets* na resolução de equações parabólicas já foi demonstrado por [6, 70]. Esses algoritmos, fundamentados na expansão da função de escalonamento, têm a capacidade de modelar a propagação com precisão comparável ao SSF, mantendo uma complexidade de computação equivalente, uma vez que as transformadas de Fourier são utilizadas em cada etapa de propagação.

Introduzido em 2020 por Zhou [1], o método *Wavelet* em passos divididos, também

conhecido como SSW, reforça a inovação no uso das *Wavelets* na análise de propagações de ondas eletromagnéticas de longo alcance. Em constante desenvolvimento [5], o algoritmo SSW emerge como uma alternativa inovadora na modelagem e caracterização de canais de rádio, incorporando transformadas de Wavelet em algoritmos de propagação de rádio destinados a analisar estudos de caso mais realistas e fornecer análises de canais para apoiar a validação, verificação e confirmação do potencial da técnica.

As Wavelets são ferramentas matemáticas poderosas que permitem a decomposição de sinais [90, 92] de rádio em componentes que podem ser mais eficientemente analisados, contribuindo para uma caracterização de canal mais precisa. Vantagens em termos de complexidade computacional e eficiência de memória são oferecidas pela FWT em comparação com a FFT, representando um avanço significativo na modelagem de canais de rádio.

Além disso, o método SSW-PE, apresentado nessa tese, permite a consideração de múltiplos fatores que afetam a propagação de ondas de rádio, como topografia e perfis irregulares de terreno, bem como a refração atmosférica, oferecendo uma abordagem promissora para a modelagem de propagação de ondas de rádio.

Essa abordagem garante tempos de simulação rápidos e eficientes, superando as limitações dos métodos tradicionais e possibilitando previsões precisas em cenários homogêneos e não homogêneos, assim como em ambientes realistas. Ao combinar a eficiência computacional das *Wavelets* com a precisão da modelagem de propagação, contribui-se para o avanço das redes de comunicação sem fio e a resolução de desafios de engenharia complexos.

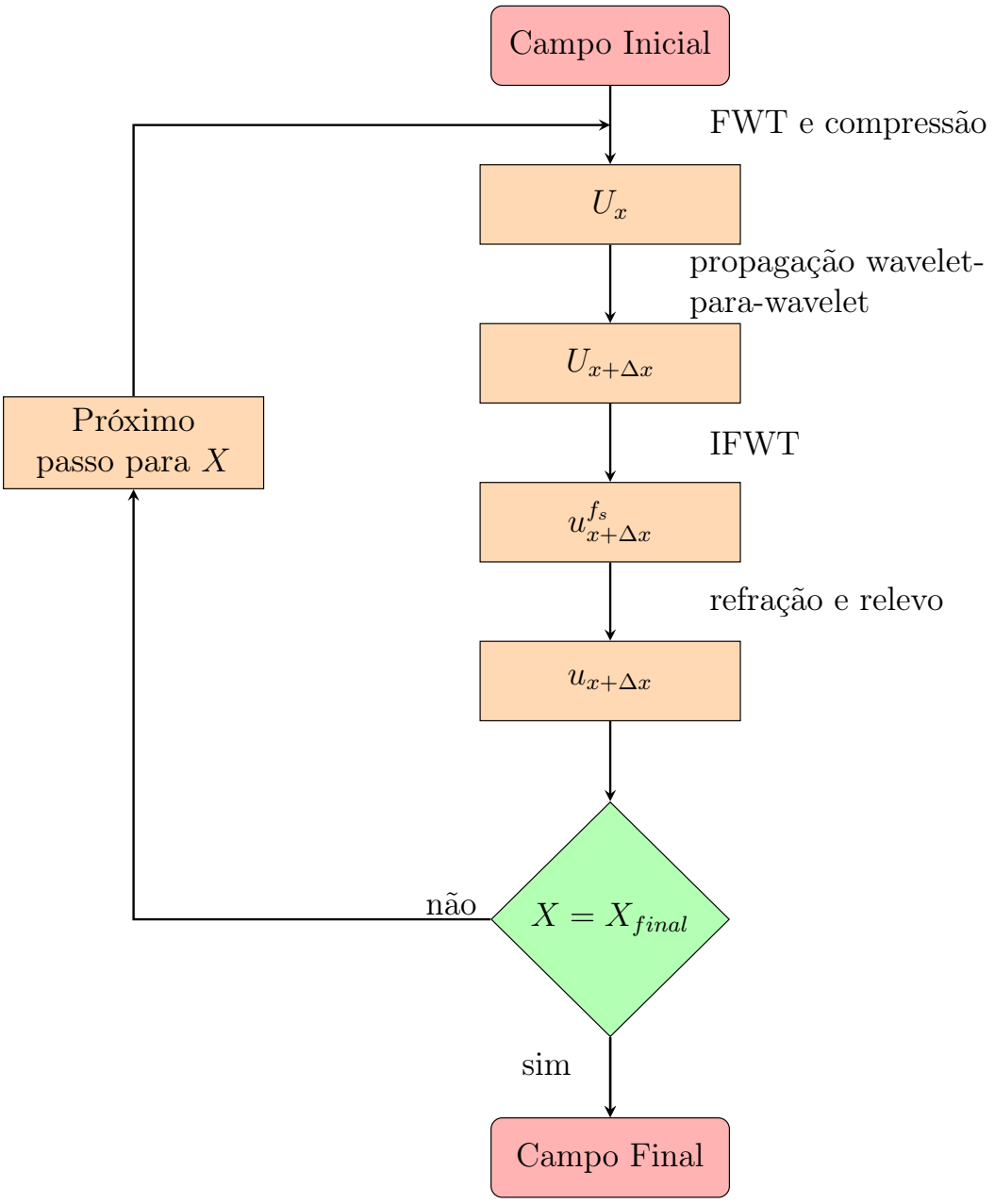
5.3 O método SSW

O método *Wavelet* em passos divididos foi apresentado como uma alternativa ao SSF em 2-D [1] e pode ser estendido para 3-D [4, 5], também baseado no método de divisão em etapas. Seu diferencial é o uso da FWT [90] no lugar da FFT. Por esse motivo, foi denominado como o método *Wavelet* em passos divididos. O objetivo principal é reduzir o tempo de computação com base na multirresolução da transformada rápida *Wavelet* ao longo da vertical, resultando em uma complexidade menor se comparada à transformada rápida de Fourier. Além disso, a decomposição da *Wavelet* produz com eficiência uma representação esparsa do sinal. Dessa forma, a propagação é realizada por uma combinação linear das ondas propagadas individualmente. Essas propagações individuais são armazenadas como dados pré-calculados, visando obter um tempo de computação reduzido em comparação com o SSF, mantendo uma boa precisão.

O SSW é um método iterativo utilizado para calcular o campo eletromagnético a distâncias crescentes da fonte geradora, alternando entre o domínio *Wavelet* e o domínio

espacial. O solo deve ser considerado um condutor elétrico perfeito. O esquema apresentado na Figura 31 resume o algoritmo SSW.

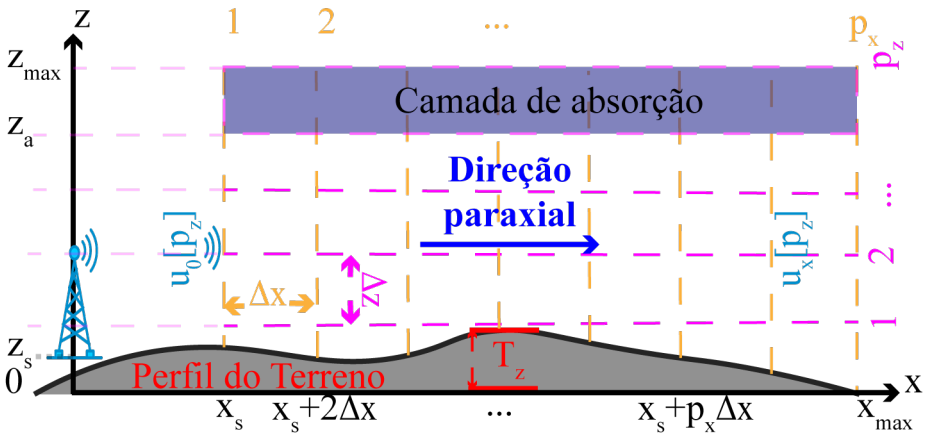
Figura 31 – Diagrama do Algoritmo Wavelet em Passos Divididos.



Fonte: Adaptado de [5].

A modelagem do domínio computacional para o método *Wavelet* em passos divididos segue as premissas impostas no método SSPE. Assim, conforme ilustrado na Figura 12 e alinhado às Equações (3.28), o domínio é definido como finito por razões numéricas. A propagação é calculada até $x = x_{max}$ em um domínio de tamanho $z \in [0, z_{max}]$, sendo o domínio discretizado ao longo de x e z. A Figura 32 ilustra o domínio discretizado para aplicação com as *Wavelets*.

Figura 32 – Discretização do Domínio Computacional para o Método Wavelet em Passos Divididos.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

O número de pontos para os eixos x e z é definido por $N_x = (x_{max} - x_s)/\Delta x$ e $N_z = z_{max}/\Delta z$, onde Δx e Δz estabelecem as etapas ao longo de x e z, respectivamente. A versão discretizada de $u(x, z)$ ao longo de z é denotada como $u_x[p_z]$.

5.3.1 Descrição teórica da etapas do método

O esquema ilustrado na Figura 31 resume as etapas pertinentes ao SSW [1]. A descrição de uma etapa do SSW em Δx para obtenção de $u_{x+\Delta x}$ a partir de u_x é calculada conforme a seguir:

1. O campo $u_x[p_z] = [u_{x,z}]_{z\in[0,N_z]}$ é representado por um vetor esparso dos coeficientes *Wavelet* de $u_x[p_z]$, obtido usando uma transformada rápida *Wavelet*, ou seja, o operador W e uma compressão de limiar V_s, definida pelo operador C, conforme introduzido no capítulo 4. Assim, tem-se:

$$U_x[p_z] = CWu_x[p_z]. \tag{5.1}$$

   Uma compressão alta permite que uma propagação mais rápida seja obtida, enquanto uma compressão baixa resulta em melhor precisão.

2. Os coeficientes propagados $U_x + \Delta x[p_z]$ são obtidos utilizando-se o propagador M, sendo os coeficientes limitados pelo limiar V_p, de modo que:

$$U_{x+\Delta x}[p_z] = MU_x[p_z]. \tag{5.2}$$

   Todas as propagações *Wavelet*-a-*Wavelet* são conduzidas pelo propagador, correspondendo a uma matriz de propagação. Essa etapa de propagação é considerada

no domínio *Wavelet*. Na seção 5.3.2 são apresentados os detalhes para obtenção da matriz M.

3. O campo propagado no ambiente livre de obstáculos $u^{fs}_{x+\Delta x}$ é obtido ao aplicar-se a inversa da transformada rápida *Wavelet* (IFWT), representada por W^{-1}, de modo que:

$$u^{fs}_{x+\Delta x}[p_z] = W^{-1}U_{x+\Delta x}[p_z]. \tag{5.3}$$

onde $u^{fs}_{x+\Delta x}$ é expresso no domínio espacial.

4. O terreno é considerado usando o método de imagem local [1]. A refração [73] e o relevo são considerados no domínio espacial, assim como no método SSF. Algoritmos mais precisos [47,78,98] também podem ser empregados. Essas operações são representadas pelos operadores **L**, **R** e **H** para o relevo, a refração e a camada de absorção, respectivamente. Assim, temos:

$$u_{x+\Delta x}[p_z] = \mathbf{H}\ \mathbf{R}\ \mathbf{L}u^{fs}_{x+\Delta x}. \tag{5.4}$$

Observe-se que mais dois parâmetros precisam ser tratados: os limites V_s e V_p, assunto que será abordado na seção 5.3.4.

5.3.2 Método Clássico de Cálculo da Matriz de Propagação

Nesta seção, é abordado o cálculo da matriz de propagação M, que deve ser de tamanho $(N_z,\ N_z)$, conforme proposto em [1]. São consideradas as propriedades de dilatação e translação das *Wavelets* para preencher a matriz de forma eficiente.

O elemento $M_{(l,p)(l',p^{l'}_t)}$ corresponde ao nível l e posição p da transformada *Wavelet* aplicada à *Wavelet* propagada de nível l' na posição p_t. Para fins de eficiência, o nível 0 é tratado como o nível L.

Inicialmente, a propriedade de translação das *Wavelets* é adotada. As grades de posição delas são dilatadas em dois para cada nível. Considerando dois níveis l e l' para o nível posterior e anterior à propagação, temos essa propriedade definida da seguinte forma:

- se $l = l'$, então uma translação de 1 em l corresponde à mesma translação em l'.
- se $l' < l$, então há $2^{l-l'}$ vezes mais *Wavelets* em l' do que em l. Assim, uma translação 1 em l corresponde a uma translação de $2^{l-l'}$ no nível l'.
- se $l' > l$, há $2^{l-l'}$ vezes menos *Wavelets* em l' do que em l. Assim, uma translação de $2^{l-l'}$ em l corresponde a uma translação de 1 em l'.

Além disso, essa propriedade revela que, à medida que l diminuiu, uma translação de menos de 2^{L-l} induz a uma decomposição *Wavelet* diferente, devido à falta de coincidência das grades em níveis diferentes. Portanto, todas as 2^{L-l} *Wavelets* precisam ser propagadas para um nível l, resultando na translação de $p_t^l \in [0, 2^{L-l}[$ para todo $l \in [1, L]$.

O cálculo de M é realizado em etapas, da seguinte forma:

- Uma *Wavelet* centrada $\chi_{(l',0)}[p_z]$ para todo $p_z \in [0, N_z - 1]$ de cada nível $l' \in [1, L]$ é propagada em Δx usando SSF.
- O campo associado à *Wavelet* é obtido ao calcular a inversa da FWT de uma decomposição de *Wavelet*, onde apenas o coeficiente central do nível l' é colocado em 1. Assim, $\chi_{(l',\Delta x)}[p_z]$.
- As *Wavelets* são transladadas. Para um nível l', todas as $2^{l-l'}$ propagações elementares precisam ser obtidas. Para reduzir o número de propagações, a propriedade de translação é utilizada. Dessa forma, cada *Wavelet* propagada de nível l' é transladada de $p_t^l \in [0, 2^{L-l}[$ ao longo de z para obter $\chi_{(l',\Delta x)}[p_z + p_t]$ para todo $p_z + p_t \in [0, N_z - 1]$.
- As ondas propagadas $\chi_{(l',\Delta x)}[p_z + p_t^{l'}]$ são então decompostas e compactadas com o limiar V_p, para obter $M_{(l,p)(l',p_t^{l'})}$. Finalmente, os outros elementos são preenchidos com as réplicas das propagações elementares, e na matriz estarão contidas os resultados para todos os níveis e posições.

O pseudo-código que resume os procedimentos empregados para obtenção da matriz M é apresentado no Algoritmo 1.

Figura 33 – Algoritmo para Cálculo da Matriz de Propagação.

Algoritmo I: Processo de Cálculo da Matriz de Propagação

Entrada: L - Nível máximo de decomposição
T - Família *Wavelet*
Saída: M - Matriz de propagação

para todo $l' \in [1, L]$ **faça**
  $\chi_{(l',0)}[p_z] \longleftarrow$ *Wavelet* da Família T;
  $\chi_{(l',\Delta x)}[p_z] \longleftarrow$ a propagação de $\chi_{(l',0)}[p_z]$;
  $M_{(l,p)(l',0)} \longleftarrow$ a Transformada rápida *Wavelet* de $\chi_{(l',\Delta x)}[p_z]$;
  para todo $l \in [1, L]$ **faça**
    caso $l \leq l'$ **faça**
      para todo $p_z + p_t \in [0, N_z - 1]$ **faça**
        $M_{(l,p)(l',p_z+p_t)} \longleftarrow$ a translação $M_{(l,p)(l',0)}$;
    caso $l > l'$ **faça**
      para todo $p_t^l \in [0, 2^{L-l}[$ **faça**
        $\chi_{(l',\Delta x)}[p_t^{l'}] \longleftarrow$ a translação de $\chi_{(l',\Delta x)}[p_z]$;
        $M_{(l,p)(l',p_t^{l'})} \longleftarrow$ a transformada rápida *Wavelet* em $\chi_{(l',\Delta x)}[p_t^{l'}]$;
        $M \longleftarrow$ as translações.

retorna M

Fonte: Adaptado de [1].

A matriz é pré-calculada apenas uma vez para um determinado cenário. No total, ela possui tamanho (N_z, N_z) e seu cálculo requer apenas $L + 1$ propagações e 2^L decomposições. Portanto, a principal desvantagem do propagador é o tamanho da memória, que aumenta rapidamente com N_z.

Finalmente, um limiar V_m é aplicado aos coeficientes de M para garantir eficiência e esparsidade.

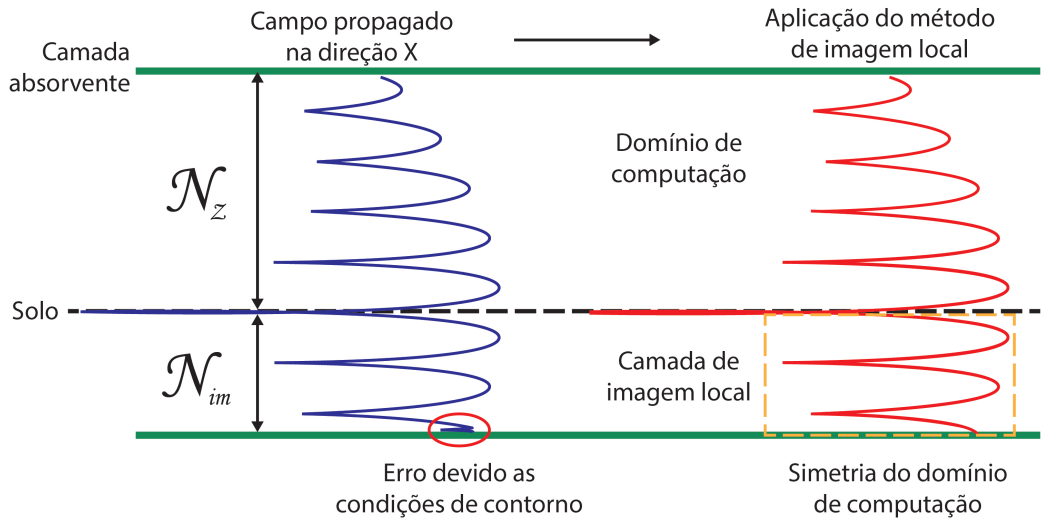
A propagação é, então, calculada com um produto matriz-vetor entre o propagador pré-computado M e os coeficientes *Wavelets* do campo U_{p_x}.

Na seção 5.3.3 é apresentada uma maneira eficiente de avaliar as condições de contorno para o terreno e para o topo do ambiente discretizado.

5.3.3 Análise das Condições de Contorno com o Método de Imagem Local

Nesta seção, são abordadas as condições de contorno do ambiente discretizado por meio do uso do método de imagem local, uma abordagem pioneira quando se utilizada o SSW.

Figura 34 – Esquematização do Método de Imagem Local.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Ao considerar as condições de contorno no limite inferior do problema, tem-se o perfil do ambiente investigado. Logo, o terreno é o parâmetro em análise. Conforme apresentado em [1], é levado em consideração o método de imagem local.

Ao contrário das abordagens SSF [9], não é possível alterar a transformada *Wavelet* para considerar o solo de maneira eficiente, pois isso não está relacionado a uma condição de contorno particular. O primeiro método que pode ser utilizado é o teorema da imagem [99], mas o domínio de computação deve ser duplicado. Uma camada de absorção deve ser adicionada na parte inferior do domínio, o que não é eficiente em termos de custo computacional, pois a carga de computação aumenta significativamente.

Outra abordagem introduzida em [1] foi o algoritmo de imagem local, que adiciona uma camada de imagem mais fina. O ponto principal desse método é que, a cada etapa de propagação, o campo na camada fina da imagem seja atualizado por simetria. O algoritmo de imagem local é ilustrado na Figura 35.

Ao considerar as condições de contorno de um PEC, o método proposto por [1] segue três etapas:

1. Em x, o campo u_x é conhecido em N_z pontos. Em seguida, ele é estendido para u_x^t,

adicionando uma camada de imagem local sob u em N_{im} pontos. Nessa camada, o campo é a imagem da parte superior. O novo vetor u_x^t é de tamanho $N_z + N_{im}$, sendo definido por:

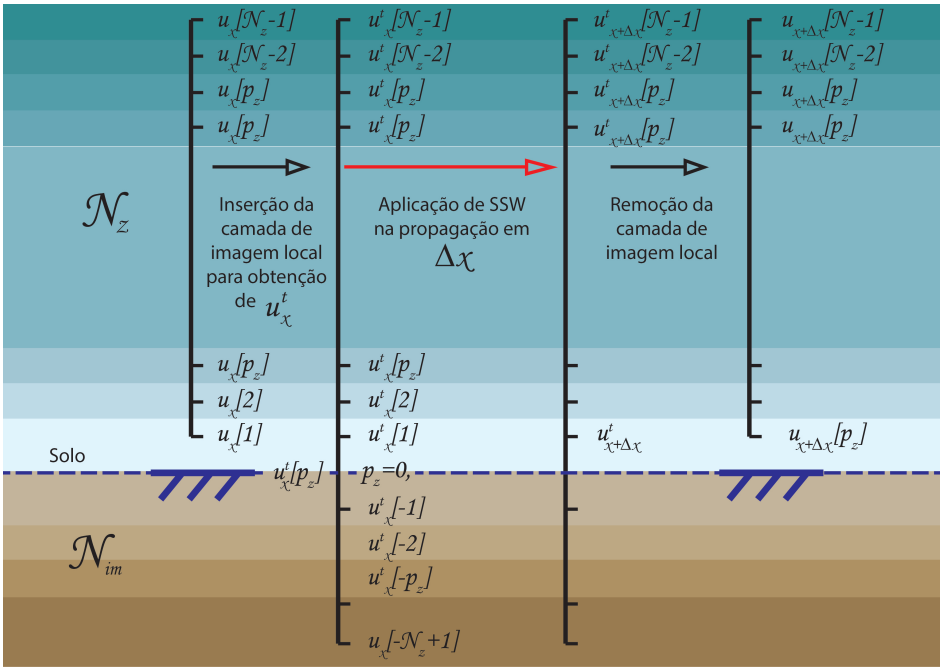
$$u_x^t[p_z] = \begin{cases} u_x[p_z] & para\ p_z \in [1, N_z - 1], \\ 0, & para\ p_z = 0, \\ -u_x[-p_z], & para\ p_z \in [-N_{im}, -1]. \end{cases} \tag{5.5}$$

2. O campo u_x^t é propagado usando o método SSW, para obter $u_{x+\Delta x}^t$.

3. A fina camada de imagem é removida. O Campo propagado é definido como:

$$u_{x+\Delta x}[p_z] = u_{x+\Delta x}^t \quad para\ p_z \in [0, N_z - 1]. \tag{5.6}$$

Figura 35 – Discretização das Condições de Contorno com o Método de Imagem Local.



Fonte: Adaptado de [1].

Esse método é repetido em cada etapa, sendo denominado método da imagem local [1], pois apenas a imagem do campo nas proximidades do solo é utilizada. Na parte inferior da camada da imagem, nenhuma camada de absorção é aplicada, e um reflexo espúrio também é observado, resultando em um erro na parte inferior do domínio. No entanto, N_{im} é escolhido de modo a garantir que esse erro não afete o domínio de computação. Além disso, o campo é atualizado a cada passo, utilizando a Equação (5.5), o que elimina essa discrepância.

Na prática, N_{im} é selecionado para ser maior do que a largura de uma *Wavelet* após a propagação, uma vez que essa largura é conhecida e N_{im} é, portanto, pré-calculado.

Nesse contexto, $N_{im} << Nz$, pois o suporte de propagação de uma *Wavelet* é muito menor do que o domínio computacional.

O método da imagem local [1] pode ser estendido para simular a propagação sobre um terreno dielétrico. Desse modo, em um ambiente realista no qual não podemos considerar um condutor perfeito, nos aproximamos pela condições de contorno de Leontovich [100]. Assim, o terreno pode ser aproximado com uma impedância sendo iluminado por um onda plana. Essa abordagem é realizada usando a mudança de variável com DMFT [73], a onda espacial e a onda terrestre são tratadas separadamente, como no DSSF. Então, por linearidade, ambas as contribuições são somados para obter o campo total.

Para a componente de onda espacial, o mesmo método é aplicado a w, do campo obtido de u pela mudança de variável definida na Equação (5.8). Portanto, w segue a condição de contorno de Dirichlet e é propagado com o SSW com o teorema da imagem local [1]. Então, u é recuperado de w utilizando o método DMFT clássico. As etapas são definidas conforme a seguir:

1. A solução do campo é estabelecida como

$$u_x[p_z] \; para \; p_z \in [0, N_z - 1], \tag{5.7}$$

2. O cálculo de w_x para $p_z \in [1, N_z - 1]$ é realizado conforme a equação:

$$w_x[p_z] = \frac{u_x[p_z + 1] - u_x[p_z - 1]}{2\Delta z} + \alpha u_x[p_z]. \tag{5.8}$$

3. A propagação de w_x de p_z para $[p_z + 1]$ é realizada utilizando o método SSW, conforme apresentado. Uma camada de imagem local é adicionada aqui. Como resultado, obtém-se $w_x[p_z + 1]$.

4. $u_x[p_z + 1]$ é recuperado de $w_x[p_z + 1]$ por meio do algoritmo DMFT.

Com este esquema, a simulação da propagação sobre um terreno de impedância pode ser realizada utilizando a teoria da imagem local.

5.3.4 Análise dos Limiares de Compressão no Método SSW

Na seção 5.3.1, são requeridos dois parâmetros numéricos pelo método SSW, V_s e V_p, necessários para a propagação. Ambos têm um grande impacto na propagação do campo, uma vez que a precisão e a velocidade do método dependem diretamente deles. Na verdade, durante o processo de propagação, dois termos de erro são introduzidos por V_s e V_p, os quais se acumulam.

Uma fórmula heurística para o erro de compressão foi fornecida [1]. A precisão da aproximação depende do limiar e do erro, sendo aproximados conforme:

$$\mathcal{E} = 20\ log\ V_\nu, \tag{5.9}$$

onde ν é s ou p. Assim, para um limiar $V_s = 10^{-2}$ produz uma precisão de $-40\ dB$.

Foram realizados diversos testes numéricos para validar o SSW em [1, 4], evidenciando a vantagem do SSW sobre o DSSF em termos de tempo de computação quando a taxa de compressão é alta. Além disso, é demonstrado pelos testes que o erro adicionado pelo SSW é desprezível e pode ser gerenciado com o ajuste dos parâmetros que definem os limiares de compressão V_s e V_p.

5.4 Validação Numérica e Demonstração de Eficácia do Método SSW

Nesta seção, são apresentados resultados de testes numéricos com o objetivo de validar e demonstrar o potencial do método SSW. Os casos canônicos são empregados para a aplicação do algoritmo. Os estudos analisados têm como referência resultados obtidos com outras técnicas numéricas baseadas nos métodos SSF.

Os parâmetros adotados para as *Wavelets*, nos casos em estudo, são os seguintes:

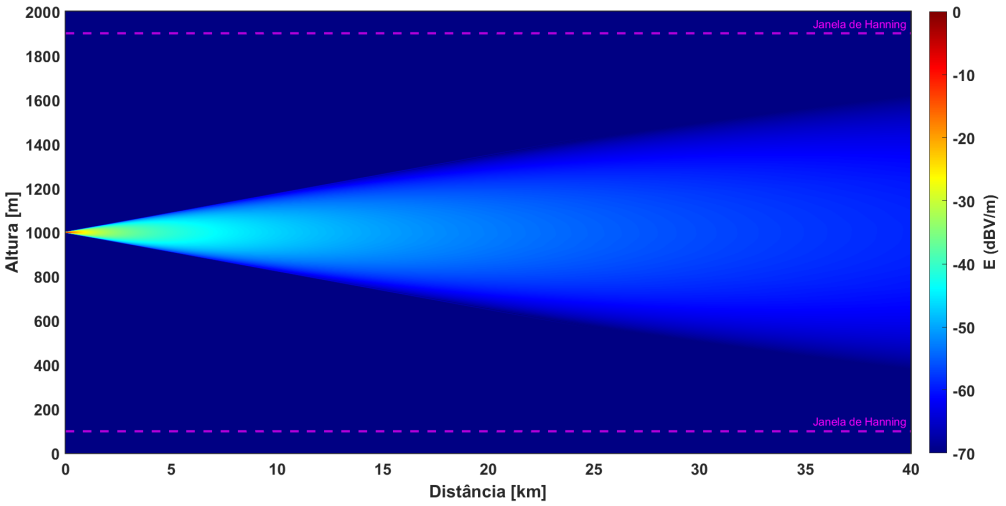
- Família *Wavelet* Symlet;
- Número de momentos nulo $n_v = 6$;
- Nível máximo de decomposição $L = 3$;
- Limiar de compressão $V_s = 10^{-3}$.

5.4.1 Propagação Livre de Obstáculos em Ambiente Homogêneo

Neste primeiro caso de estudo, é demonstrada a aplicabilidade da solução numérica fornecida pelo método SSW para análise de ondas eletromagnéticas (EM) em ambientes sem variações atmosféricas. O ambiente investigado é um perfil de terreno considerado sem obstruções, sendo determinado como terra plana. Os efeitos atmosféricos não são levados em consideração, de modo que a atmosfera é definida como homogênea. A análise foi estabelecida para um padrão de antena Gaussiana com largura de feixe $\theta_{bw} = 1$ e ângulo de elevação $\theta_{tilt} = 0$, posicionado a uma altura $z_s = 1000$ metros. A frequência empregada é definida em 5.4 GHz. Assim, o transmissor está propagando um feixe colimado na direção paraxial. O domínio é considerado até uma distância de $x_{max} = 40$ km. Sendo a variação dos deslocamentos ao longo dos eixos $\Delta x = 25$ e $\Delta z = 0,5$ metros.

Na Figura 36 é apresentado comportamento do campo propagado ao longo do domínio investigado.

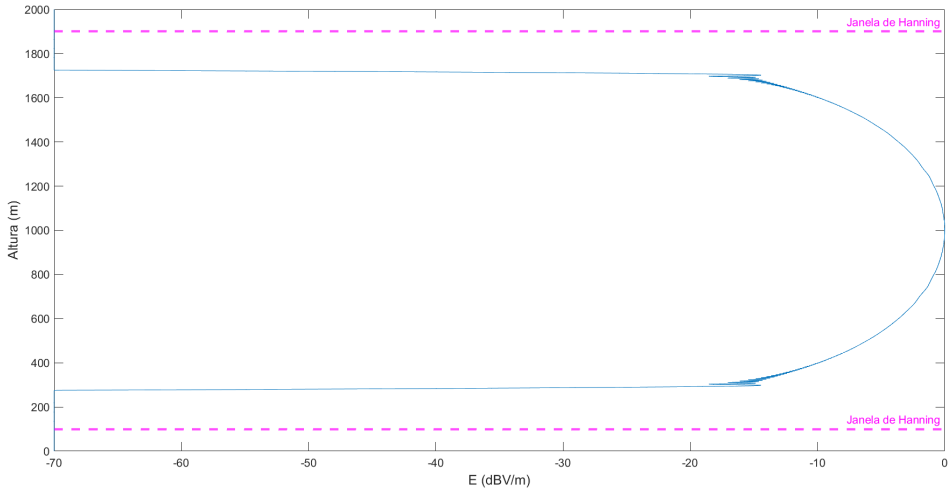
Figura 36 – Propagação livre de obstáculos em ambiente homogêneo.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Na Figura 37, a frente de onda para o campo propagado é apresentada na posição do observador a uma distância de 40 km.

Figura 37 – Campo na posição $x = 40$ km para propagação livre de obstáculos em ambiente homogêneo.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

O objetivo deste estudo de caso foi demonstrar o algoritmo SSW como uma solução numérica para equações parabólicas. A fonte foi posicionada em uma altura suficientemente

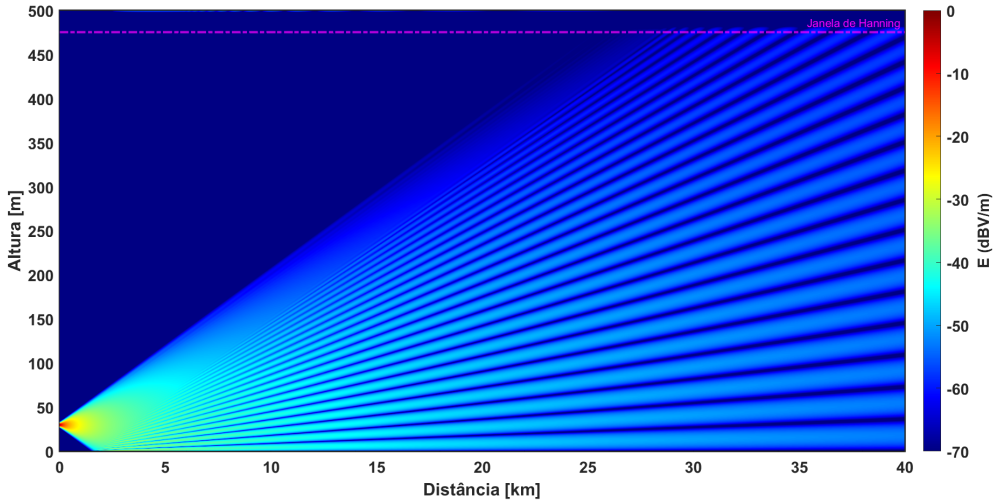
elevada para evitar que o feixe atingisse o plano terra, e consequentemente, evitando os efeitos de reflexão.

5.4.2 Perfil de Terreno Plano com Condutor Elétrico Perfeito e Ausência de Variações Atmosféricas

Neste segundo caso de estudo, demonstra-se que o método SSW apresenta potencial para análise de problemas EM, levando em consideração a presença de camadas de absorção.

O ambiente investigado é um perfil de terreno plano. Os efeitos atmosféricos são desprezados. A antena Gaussiana, utilizada na Seção 5.4.1, é posicionada a uma altura de $z_s = 30$ metros, mantendo-se a distância máxima em relação ao terreno. A variação dos deslocamentos ao longo dos eixos é definida como $\Delta x = 25$ e $\Delta z = 0,5$ metros. O número de pontos de amostragem para o eixo z é reduzido para $N_z = 1000$.

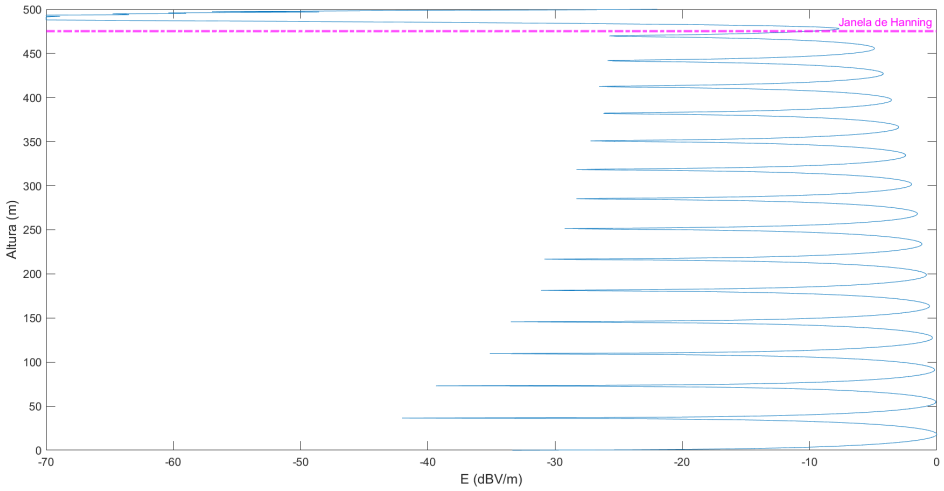
Figura 38 – Propagação em um perfil de terreno plano com condutor elétrico perfeito.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Na Figura 38, é apresentado o comportamento do campo propagado ao longo do domínio investigado. Por sua vez, na Figura 39, temos o campo observado na posição final do domínio investigado.

Figura 39 – Campo observado na posição $x = 40$ km em um perfil de terreno plano com condutor elétrico perfeito.



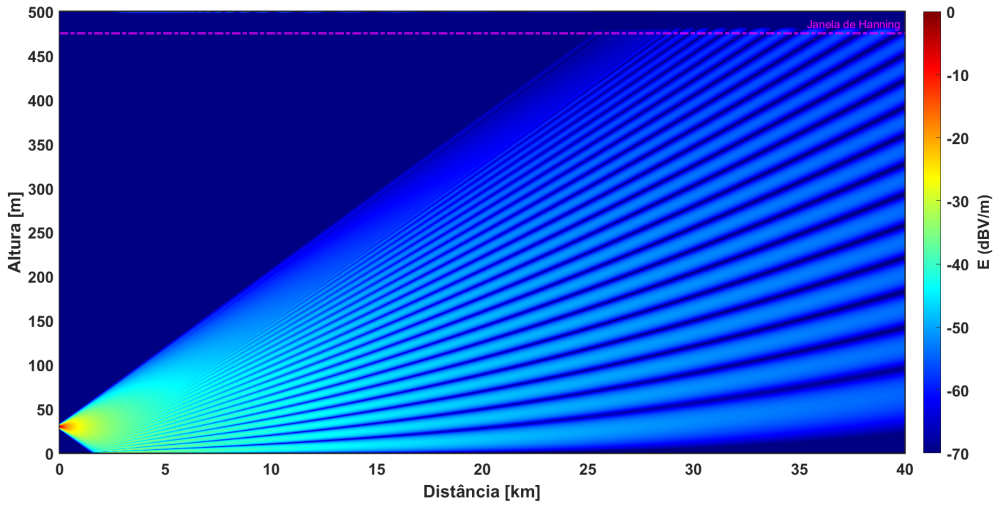
Fonte: Elaborado pelo Autor.

Conforme abordado na Seção 4.4, a capacidade de representação esparsa [3] torna a técnica vantajosa. Durante o processo de propagação, o limiar de compressão é definido como $V_s = 10^{-3}$, introduzindo um erro estimado, se comparado às técnicas de Fourier, de aproximadamente $\mathcal{E} = 20; log; V_s = -60dB$. Além da escolha criteriosa do número de momentos nulos e o suporte compacto da *Wavelet*, alinhados ao descrito na Seção 4.5.

5.4.3 Impacto da Atmosfera Padrão em Terreno Plano PEC

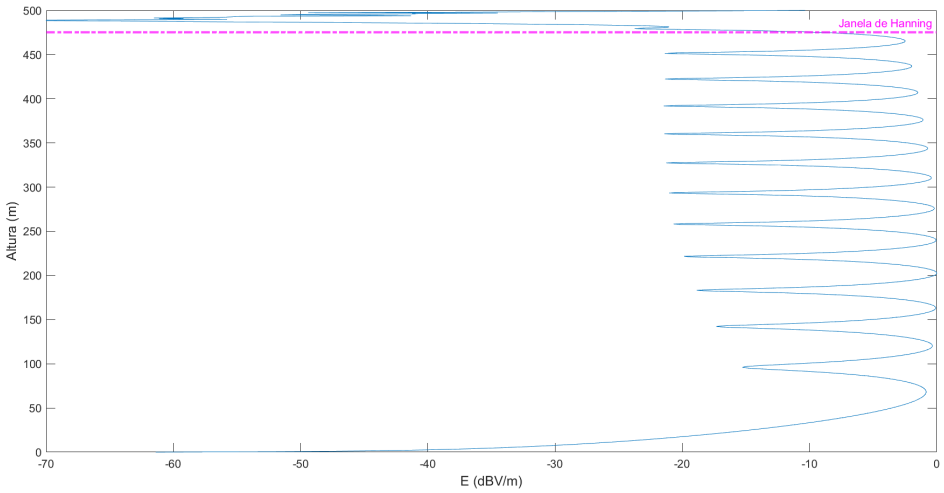
Neste terceiro caso de estudo, demonstra-se a viabilidade da aplicação de modelos que tratam os efeitos atmosféricos e as condições do terreno. O ambiente da Seção 5.4.2 foi alterado para ser considerado um condutor elétrico perfeito, e os efeitos atmosféricos foram inseridos. O perfil de refratividade foi estabelecido para uma atmosfera padrão. Nas Figuras 40 e 41, são ilustrados o comportamento do campo propagado e o observado na posição final do domínio investigado, respectivamente.

Figura 40 – Propagação em Terreno Plano PEC sob a influência da Atmosfera Padrão.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Figura 41 – Variação do Campo Observado na Posição $x = 40$ km em Terreno Plano PEC sob a Influência da Atmosfera Padrão.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

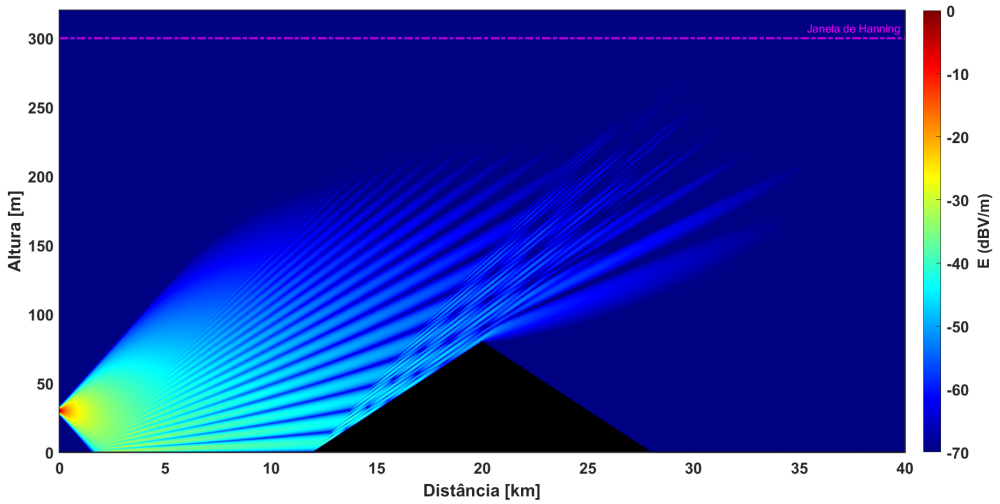
5.4.4 Impacto da Obstrução por Cunha em Terreno com Perdas

Neste quarto caso de estudo, investiga-se a aplicabilidade da técnica em situações em que o perfil de terreno sofre variações e apresenta perdas. É relevante notar que os efeitos de retroespalhamento são contemplados pelo algoritmo.

O cenário descrito na Seção 5.4.3 foi modificado para incluir perdas e a presença de um obstáculo do tipo cunha. A cunha está posicionada centralmente a uma distância de $x = 20$ km, com sua base estendendo-se por 16 km e o topo do obstáculo elevado a

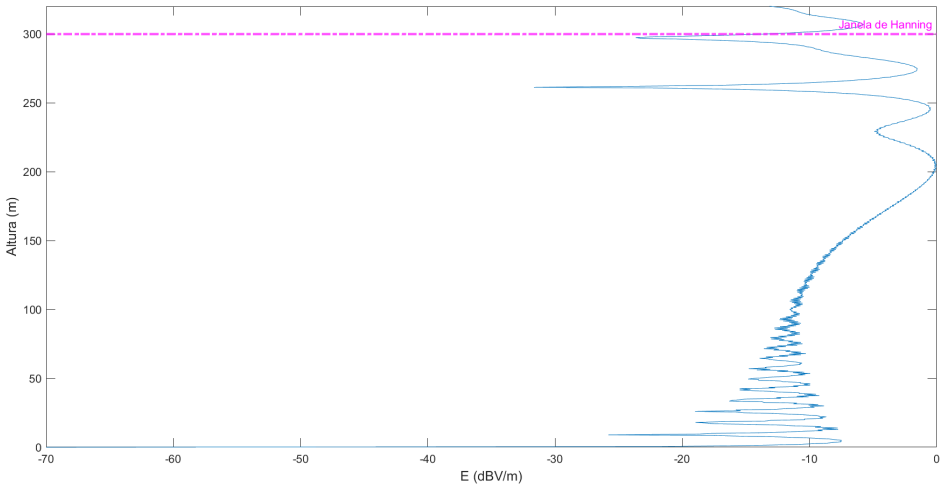
80 metros. Os parâmetros eletromagnéticos da superfície do terreno adotam os seguintes valores: $\epsilon_r = 15$ e $\sigma = 0,5\ S/m$. O perfil de refratividade permanece constante para uma atmosfera padrão. O comportamento do campo propagado e do campo observado na posição final do domínio investigado são ilustrados nas Figuras 42 e 43, respectivamente.

Figura 42 – Propagação eletromagnética na presença de uma obstrução cunha em terreno com perdas.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Figura 43 – Variação do campo observado na posição $x = 40$ km em um cenário com obstrução cunha e terreno com perdas.



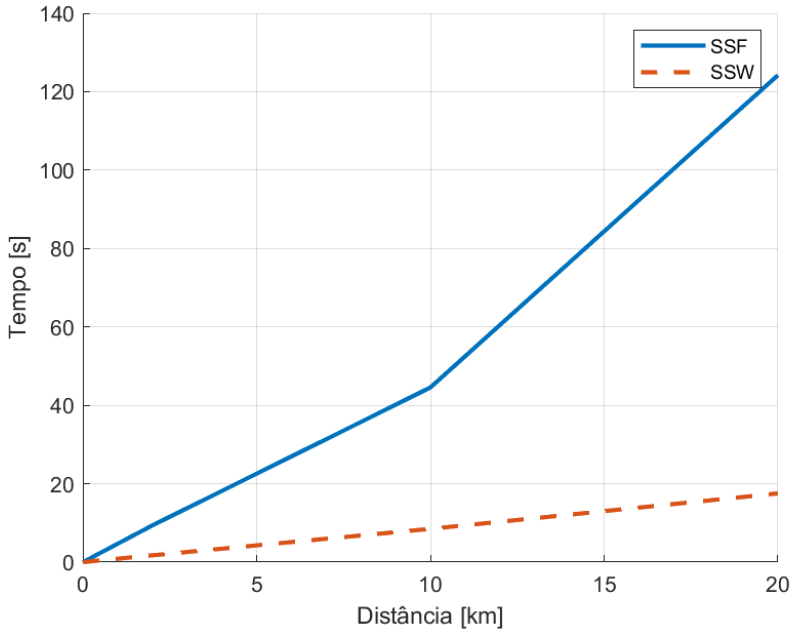
Fonte: Elaborado pelo Autor.

5.4.5 Análise de Desempenho Computacional

Uma comparação entre os tempos de execução dos algoritmos SSW e SSF é apresentada na Figura 44. Um dos principais objetivos do método SSW é a redução do tempo de computação.

A diminuição do tempo é resultado da aplicação da multirresolução da transformada rápida *Wavelet* ao longo da vertical, o que resulta em uma complexidade menor em comparação com a transformada rápida de Fourier. A eficiência é aprimorada pela combinação linear das ondas propagadas e pelo armazenamento dos dados pré-calculados.

Figura 44 – Comparação de eficiência computacional entre os métodos SSW e SSF.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Pode-se observar que a complexidade do método SSW é da ordem de $O(N_z)$, enquanto o SSF possui uma complexidade da ordem de $O(N_z\ log(N_z))$.

5.5 O Aprimoramento do Método Wavelet em Passos Divididos

A abordagem SSW-PE [7], adotada neste estudo, representa uma reinterpretação e nova perspectiva do algoritmo, caracterizada por sua notável capacidade de lidar com ambientes não homogêneos. Diferentemente dos métodos numéricos tradicionais, que requerem discretizações muito finas para obter precisão, o SSW-PE oferece uma solução eficiente que supera essa limitação. Isso é alcançado por meio da capacidade de multirresolução espaço-tempo das *Wavelet* e da adoção do modelo de discretização de terreno em escada.

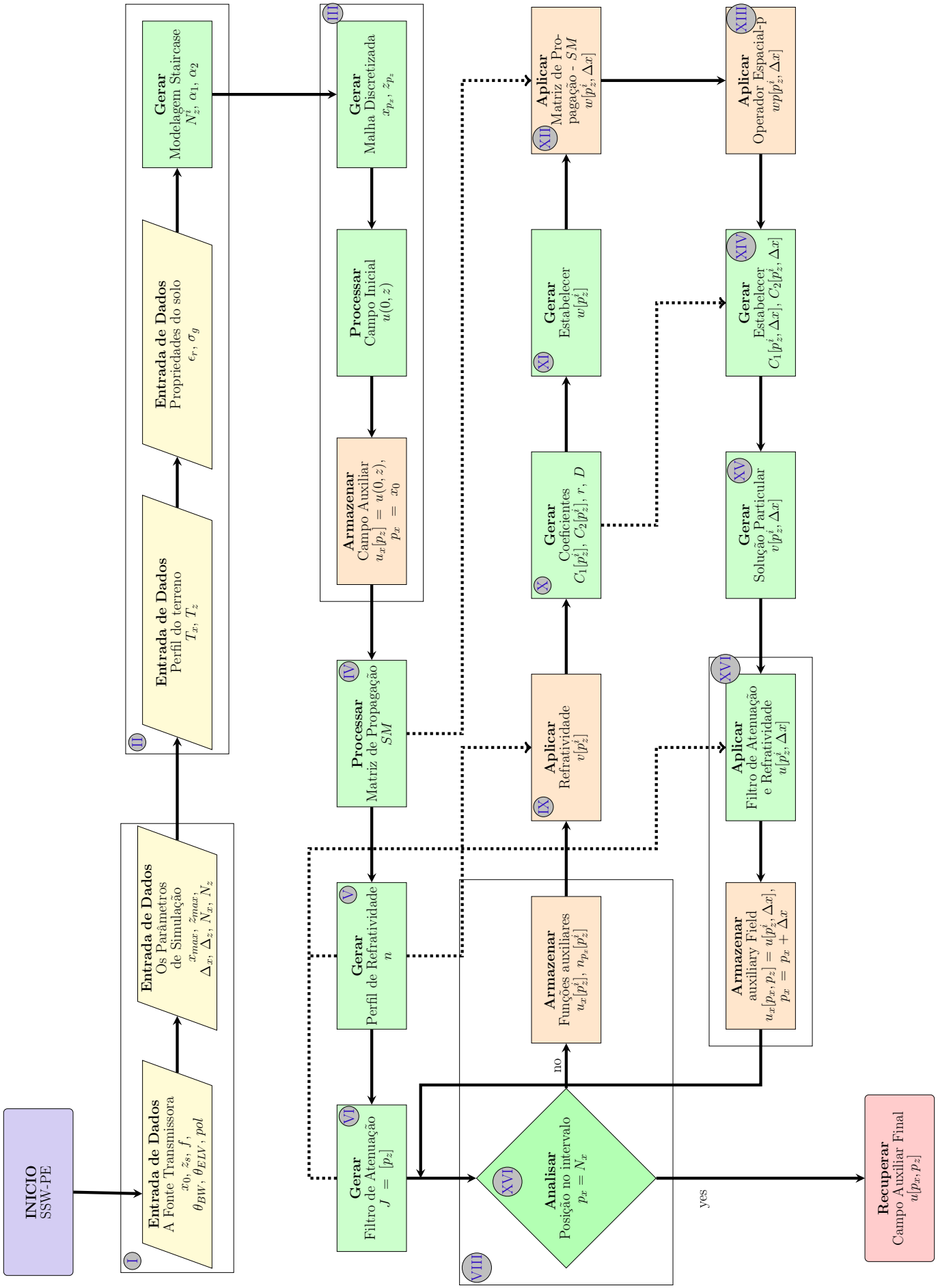


Figura 45 – Diagrama Conceitual do Algoritmo SSW-PE

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Dessa forma, torna-se possível considerar os diversos fatores delineados na Seção 5.1, que impactam a modelagem da propagação de ondas de rádio.

Nesta seção, objetiva-se estabelecer meticulosamente as etapas para o desenvolvimento e implementação do algoritmo SSW-PE. Sua capacidade de fornecer resultados precisos, mesmo em cenários não homogêneos, torna-o uma ferramenta valiosa no desenvolvimento de redes de comunicação sem fio mais eficazes e na resolução de desafios complexos de engenharia relacionados à propagação de rádio. Portanto, é essencial que o processo de discretização seja realizado com grande cuidado para evitar possíveis instabilidades numéricas. Nesse contexto, as etapas para a implementação da abordagem híbrida proposta para o algoritmo SSW-PE, abordando as vantagens do DMFT-SSPE, são detalhadas conforme estruturado no diagrama esquemático ilustrado na Figura 45.

Para fins didáticos, a elaboração das dezesseis etapas do algoritmo SSW-PE proposto foi segmentada em subseções, a saber, Seções 5.5.1–5.5.16, sendo cada uma delas discutida em detalhes.

5.5.1 Primeiro Passo: Definição e Modelagem dos Parâmetros da Fonte

Neste passo, propõe-se que a fonte seja modelada pelo padrão do feixe de uma antena, caracterizada por uma distribuição Gaussiana. Essa abordagem de modelagem é amplamente preferida na maioria dos modelos de propagação de rádio bidimensionais de longa distância, pois oferece flexibilidade para ajustar a largura e inclinação do feixe, a frequência de operação e a polarização, além de fornecer uma representação aproximada para antenas parabólicas [101, 102]. No início da propagação, é de essencial determinar o perfil inicial do campo vertical com base nos parâmetros do padrão da antena na posição inicial (x_0). Durante o processo de modelagem da fonte, são considerados fatores como a altura da antena (z_s) e o ângulo de elevação (θ_{ELV}).

Nesta etapa, também é necessário especificar a faixa do cenário observado, abrangendo tanto a distância (x_{max}) quanto a altura máxima (z_{max}) sob observação. Detalhes relacionados aos parâmetros de simulação devem ser fornecidos, incluindo a definição do número de discretizações ao longo das coordenadas longitudinal e transversal, representadas por N_x e N_z, respectivamente. Esses valores são influenciados pelos critérios de discretização estabelecidos para os passos Δx e Δz.

Para prevenir instabilidades numéricas, o processo de discretização deve ser conduzido com cautela, levando em consideração o critério de Nyquist [31, 36]. O critério de estabilidade numérica adotado para o modelo SSW-PE visa evitar a amplificação de erros e oscilações numéricas que poderiam comprometer a solução do modelo PE. Seguindo esse critério, garante-se estabilidade e obtêm-se soluções computacionalmente confiáveis e precisas. Isso é alcançado ao alinhar o passo de discretização ao longo das coordenadas

transversais de forma que a expressão estabelecida na Equação (5.10) seja satisfeita.

Seja o critério de Nyquist:

$$\Delta z = \pi / k \sin(\theta_{max}). \tag{5.10}$$

Para mais detalhes, consulte o diagrama esquemático.

5.5.2 Segundo Passo: Modelagem do Terreno Investigado

Na modelagem da propagação eletromagnética sobre terrenos irregulares utilizando PE, o cenário pode ser simplificado tratando o terreno como uma sequência de degraus horizontais. Essa simplificação é obtida ao discretizar o terreno utilizando o modelo de escada (*Staircase Model*), considerando as perdas. Esse método, conhecido como método da escada, é altamente eficiente e permite o uso de passos de alcance maiores [9].

O campo eletromagnético se propaga em segmentos de altura constante, aplicando as condições adequadas na superfície do solo. Quando ocorrem variações na altura do terreno, a difração nas quinas é omitida, e o campo é definido como zero nas superfícies verticais [17]. Nesse ponto, adota-se um critério de discretização vertical relativa, definindo-se N_z^i, que se refere ao número de discretizações acima do nível do solo em cada segmento de altura.

Durante esta etapa, é essencial tratar das condições de contorno necessárias para completar o cenário de propagação bidimensional. Selecionam-se, assim, as Condições de Contorno transversais e longitudinais apropriadas. A região é dividida em N_x segmentos longitudinais e N_z segmentos verticais. As BCs transversais que devem ser satisfeitas na superfície da Terra são expressas como [31]:

$$\alpha_1 \frac{\partial u(x,z)}{\partial z} + \alpha_2 u(x,z) = 0, \tag{5.11}$$

onde α_1 e α_2 representam constantes. Para solo com perdas, introduz-se uma BC de impedância ou a BC do tipo Cauchy, com valores específicos atribuídos a α_1 e α_2, dependendo da polarização (horizontal ou vertical). Esses valores são determinados com base na constante dielétrica relativa complexa ϵ, que, por sua vez, depende da permissividade relativa (ϵ_r) e da condutividade (σ_g) da superfície do solo com perdas em cada passo de alcance [17].

Para mais detalhes, consulte o diagrama esquemático.

5.5.3 Terceiro Passo: Definição da Malha Discretizada do Ambiente

A discretização do domínio deve ser realizada considerando os parâmetros N_x e N_z. Na posição inicial de propagação x_s, o campo a ser propagado é conhecido e deve ser determinado por modelagem analítica. Em seguida, esse campo é propagado ao longo das posições de interesse p_x através de um processo iterativo até alcançar a distância máxima x_{max} e a altura máxima sob observação z_{max}.

A discretização do domínio ao longo dos eixos x e z segue as premissas detalhadas nas Seções 3.2.1 e 5.3, mantendo a coerência com os modelos ilustrados nas Figuras 12 e 32.

As Equações (3.28) são recuperadas conforme definido abaixo:

$$\begin{aligned} x_{p_x} &= x_s + p_x \Delta x, \ \ for\ p_x \in \{0, \ldots, N_x - 1\}, \\ z_{p_z} &= p_z \Delta z, \ \ for\ p_z \in \{0, \ldots, N_z - 1\}, \end{aligned} \tag{5.12}$$

onde $N_x = (x_{max} - x_s)/\Delta x$ e $N_z = z_{max}/\Delta z$ representam o número de pontos de amostragem ao longo dos eixos x e z, respectivamente. Aqui, Δx e Δz representam os tamanhos dos passos ao longo dos eixos x e z, conforme mencionado na Seção 5.5.1.

Com a discretização do domínio estabelecida, a versão discretizada do perfil do campo $u(x, z)$ ao longo de z é armazenada e denotada como $u_x[p_z]$. Para garantir a precisão e evitar instabilidades numéricas, o processo de discretização deve ser conduzido com cuidado, observando o critério de Nyquist revisitado na Seção 5.5.1. O critério de estabilidade numérica adotado para o modelo SSW-PE, definido pela Equação (5.10), busca prevenir a amplificação de erros e oscilações numéricas que poderiam comprometer a solução do modelo PE. Ao seguir esse critério, assegura-se a estabilidade e obtêm-se soluções computacionalmente confiáveis e precisas.

Para mais detalhes, consulte o diagrama esquemático.

5.5.4 Quarto Passo: Definição dos Parâmetros da Wavelet e Configuração da Matriz de Propagação

Nesta etapa, as informações necessárias para realizar as transformações *Wavelet* são introduzidas, selecionadas com base em critérios como compressão, regularidade, simetria e escolha da família [3].

Duas abordagens possíveis para definir SM são detalhadas em [1,4] e [5]. Em [1,4], a matriz é definida com dimensões de (N_z, N_z), referida como SSW, contendo todos os elementos de propagação. Já em [5], as dimensões são $(2^L, N_z)$, referida como SSW local (lSSW), incluindo apenas elementos não redundantes. Esta última abordagem utiliza propriedades *Wavelet* para adicionar versatilidade ao método e reduzir requisitos de

armazenamento. Na prática, o uso de memória para armazenar SM é significativamente reduzido [5] devido ao pequeno tamanho do suporte *Wavelet* (N_z^s) para o domínio observado ($N_z^s \ll N_z$). Neste estudo, a abordagem lSSW é adotada em conjunto com detalhes de implementação computacional utilizados pelo algoritmo numérico DMFT-SSPE, visando mitigar problemas de instabilidade numérica, minimizar o uso de memória e melhorar a eficiência computacional.

Figura 46 – Algoritmo para Cálculo da Matriz de Propagação - lSSW.

Algoritmo II: Cálculo da matriz de propagação SM.

Input: L - Nível máximo de decomposição Wavelet
Output: SM - Matriz de Propagação

for $l' \in [1, L]$ **do**
  $A^U_{(l',p_z)} \longleftarrow$ Aplicação da FWT a um vetor nulo de wavelet com tamanho igual ao suporte compacto;
  $A^U_{(l',p_z)} \longleftarrow$ Ajustar amplitude unitária na posição central;
  $\chi_{(l,0)}[p_z] \longleftarrow$ IFWT $A^U_{(l',p_z)}$;
  $\chi_{(l',\Delta x)}[p_z] \longleftarrow$ propagar DMFT-SSPE de $\chi_{(l,0)}[p_z]$ by Δx;
  $q_{max} \longleftarrow 2^{L-l'}$ Número de operadores necessários para o nível;
  for $p_t \in [1, q_{max}]$ **do**
    $\chi_{(l',\Delta x)}[p_z + p_t] \longleftarrow$ definido pela translação de $\chi_{(l',\Delta x)}[p_z]$ ao longo de p_t pontos;
    $SM_{l',p_t} \longleftarrow$ aplicação de FWT e compressão V_p on $\chi_{(l',\Delta x)}[p_z + p_t]$;

Fonte: Adaptado de [5].

O cálculo de SM deve ser realizado seguindo o procedimento sistemático proposto, que consiste nos seguintes passos, conforme detalhado no Algoritmo II:

Primeiramente, a biblioteca $A^U_{(l',p_z)}$ de coeficientes *Wavelet* é obtida. Para cada nível de resolução, ou seja, para todos os valores de $l' \in [1, L]$, os coeficientes *Wavelet* são determinados definindo-se um vetor auxiliar nulo com um tamanho equivalente ao suporte compacto da família e nível *Wavelet* predefinidos. Esse vetor é então submetido à transformação *Wavelet*, resultando em um vetor esparso. Posteriormente, a posição central desse vetor em cada nível *Wavelet* é ajustada para unidade. Após essa etapa, o sinal é restaurado através da transformação inversa, significando que o *Wavelet* é determinado na posição $\chi_{(l',0)}$ ao longo de $p_z \in [0, N_z - 1]$ ao transformar inversamente um conjunto de coeficientes *Wavelet* nulos em todas as posições de $A^U_{(l',p_z)}$, exceto na posição central ($A^U_{(l',0)}$), onde é definido com amplitude unitária antes da aplicação da IFWT.

Em seguida, a biblioteca de coeficientes *Wavelet* $\chi_{(l',0)}[p_z]$ obtida deve ser propagada por Δx para cada nível *Wavelet*. O nível máximo de decomposição *Wavelet* q_{max} é responsável por definir o número de translações do sinal em cada nível usando o método DMFT-SSPE.

Posteriormente, os *Wavelets* são transladados como uma combinação de matrizes restritas pela matriz de propagação SM para reduzir o número de transformadas de Fourier necessárias. Assim, cada *Wavelet* propagado no nível l' é transladado de $p_t \in [0, 2^{L-l'}]$ ao longo de p_z para obter $\chi_{(l',\Delta x)}[p_z + p_t]$ para todos os valores de $p_z + p_t \in [0, N_z - 1]$.

Finalmente, os *Wavelet* $\chi_{(l',\Delta x)}[p_z + p_t]$ são decompostos e comprimidos com o limiar V_p para obter SM_{l',p_t}.

Para atingir esse objetivo, as vantagens das propriedades *Wavelet* [3, 90] são exploradas, incluindo o uso de translações temporais e de domínio de escala, invariança de escala e translação, preservação de energia e decomposição multirresolução. Na obtenção de $A^U_{(l',p_z)}$, o suporte compacto das *Wavelets* é utilizado, resultando em uma dimensão de vetor significativamente menor do que a discretização em p_z. Além disso, a propriedade que leva a uma matriz altamente esparsa contendo apenas coeficientes significativos é aproveitada, reduzindo assim o armazenamento de informações.

Para mais detalhes, consulte o diagrama esquemático.

5.5.5 Quinto Passo: Obtenção do Perfil de Refratividade

O perfil de refratividade é obtido considerando-se as condições atmosféricas do duto de superfície, podendo ser modelado ao longo do domínio em N_z. O índice de refração n está relacionado à constante dielétrica ϵ_r do meio, de modo que $n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$, onde a permeabilidade (relativa) μ_r é definida como 1 para o ar. O índice de refração do ar na superfície da Terra é aproximadamente $n \approx 1.0003$. Para conveniência, o perfil de refratividade N, definido como $N = (n - 1) \times 10^6$ em unidades N (adimensionais), é utilizado. O índice de refração do ar diminui com a altitude, à medida que o ar se torna menos denso, exibindo uma dependência aproximadamente linear na parte inferior da atmosfera.

Em uma atmosfera padrão [103], o gradiente de refratividade é $dn/dh = -40N/km$ para observações de longa distância. A atmosfera padrão é caracterizada por uma diminuição da temperatura, pressão e umidade com a altitude. Embora a pressão atmosférica geralmente diminua com a altitude, anomalias no perfil de temperatura podem ocorrer, incluindo rápidas diminuições e aumentos em faixas específicas de altitude. Como resultado, podem surgir camadas com gradientes de refratividade extremamente negativos. Outro efeito que leva a gradientes de refratividade extremamente elevados é causado pela rápida diminuição da umidade acima de grandes corpos d'água.

Devido a esses fenômenos, numerosos estudos têm sido conduzidos em busca de métodos de modelagem aprimorados. Recomenda-se que os leitores explorem abordagens de pesquisa alternativas dentro do escopo da metodologia proposta.

Para mais detalhes, consulte o diagrama esquemático.

5.5.6 Sexto Passo: Obtenção do Filtro de Atenuação

A imposição de condições de contorno na extremidade superior do domínio numérico computacional é essencial devido à natureza do problema de propagação, que abrange uma região verticalmente aberta. Para garantir que as ondas de rádio sejam completamente absorvidas ao alcançar o limite superior, evitando assim reflexões não físicas, é necessário satisfazer a condição de radiação de Sommerfeld, expressa por $(u_x[p_z])_{p_z \to \infty} = 0$ [84].

Para evitar reflexões indesejáveis que possam afetar os resultados numéricos, o campo na borda superior deve ser reduzido gradualmente, evitando a truncagem abrupta ao longo da coordenada vertical z. Essa redução gradual pode ser obtida através de diversas abordagens, como o uso de regiões de absorção, a aplicação de funções de janelamento (como a janela de Tukey ou a janela de Hanning) ou a introdução de uma parte imaginária no índice de refração para atenuar as ondas de rádio. Neste trabalho, uma janela de Hanning é implementada e calculada de acordo com o método proposto por [84], conforme discutido na Seção 3.2.2, utilizando-se a Equação (3.29):

$$\mathcal{J}[p_z] = \begin{cases} \{1 + cos\,[\pi(p_z/N_z)]\}\,/2, & p_z \in [N_z - N_{p_a}, N_z] \\ 1, & p_z \in [0, N_z - N_{p_a}], \end{cases} \tag{5.13}$$

onde N_z^H representa a largura total da camada de absorção. Matematicamente, essa função de janela garante que $J\left[p_z \leq (N_z - N_z^H)\right] = 1$ e $J(N_z) = 0$. Conforme ilustrado na Fig. 13.

Para mais detalhes, consulte o diagrama esquemático.

5.5.7 Sétimo Passo: Início do Ciclo de Repetição para a Função de Campo Auxiliar

Nesta etapa, o ciclo de repetição é iniciado, variando de $p_x = x_s$ até N_x. A função de campo auxiliar $u_x[p_z^i]$ é determinada com base na função de campo auxiliar, sendo atribuído u_0 quando $p_x = 0$, ou u_x para outros valores de p_x. Essa atribuição considera as condições relacionadas ao deslocamento do campo para a posição modelada, aplicando a abordagem de Escada para representar o terreno em p_x. Simultaneamente, o índice de refração local $n_{p_x} = n[N_z - N_z^i : N_z]$ é pré-alocado para corresponder à posição correspondente no perfil do terreno.

Para mais detalhes, consulte o diagrama esquemático.

5.5.8 Oitavo Passo: Aplicação dos Parâmetros de Refração

Nesta fase, os parâmetros de refração são aplicados conforme a equação a seguir, ajustando a função de campo $u[p_z^i]$ de acordo com os métodos NAPE e WAPE:

$$v[p_z^i] = \begin{cases} u[p_z^i] \exp\left(ik((n_{p_x})^2 - 1)\frac{\Delta x}{2}\right), & \text{para NAPE,} \\ u[p_z^i] \exp(ik(n_{p_x} - 1)\Delta_x), & \text{para WAPE.} \end{cases} \tag{5.14}$$

A Equação (5.14) ajusta a função de campo utilizando a exponencial complexa, que incorpora os efeitos do índice de refração local n_{p_x}. Esta aplicação é essencial para assegurar a precisão na modelagem, considerando as variações do índice de refração ao longo do percurso.

Para mais detalhes, consulte o diagrama esquemático.

5.5.9 Nono Passo: Aplicação da Abordagem Discreta para os Coeficientes

Para a obtenção dos coeficientes C_1, C_2, r e D, utiliza-se a discretização baseada em [15], empregando um fator ponderado de $0,5$ aos primeiros e últimos termos (ou seja, $p_z^i = 0$ e $p_z^i = N_z^i$).

Para completar a definição da transformação, são necessários os seguintes procedimentos:

$$C_1[p_z^i] = D \sum_{p_z^i=0}^{N_z^i} v[p_z^i] r^{p_z^i}, \tag{5.15}$$

$$C_2[p_z^i] = D \sum_{p_z^i=0}^{N_z^i} v[N_z^i - p_z^i](-r)^{N_z^i}, \tag{5.16}$$

onde,

$$D = \frac{2(1 - r^2)}{(1 + r^2)(1 - r^{2(N_z^i)})}, \tag{5.17}$$

e r, $-r^{-1}$ são as raízes da equação quadrática:

$$r^2 + 2r\alpha\Delta z - 1 = 0, \tag{5.18}$$

sendo que r depende da polarização do transmissor:

$$r = \begin{cases} \sqrt{1 + (\alpha\Delta z)^2} - \alpha\Delta z, & \text{for vertical,} \\ -\sqrt{1 + (\alpha\Delta z)^2} - \alpha\Delta z, & \text{for horizontal.} \end{cases} \tag{5.19}$$

Para mais detalhes, consulte o diagrama esquemático.

5.5.10 O Décimo Passo: Construção do campo auxiliar

Na etapa atual, a construção do campo auxiliar do método é baseada na implementação proposta pelo DMFT, conforme descrito por Kuttler [60]. O campo auxiliar é formado de acordo com a Equação (5.20), onde o vetor da função $w[p_z^i]$ é definido em relação aos valores do vetor de entrada $v[p_z^i]$, obtidos no passo mencionado na Seção 5.5.8, levando em consideração o espaçamento Δz e o coeficiente α recuperados no passo descrito na Seção 5.5.2.

Dessa forma, temos:

$$w[p_z^i] \equiv \frac{v[p_z^i + 1] - v[p_z^i - 1]}{2\Delta z} + \alpha v[p_z^i], \tag{5.20}$$

onde p_z^i pertence ao intervalo $[1, N_z^i - 1]$.

Para mais detalhes, consulte o diagrama esquemático.

5.5.11 O Décimo Primeiro Passo: Propagação da Wavelet

Figura 47 – Algoritmo para Cálculo da Propagação por uso de Wavelet.

Algoritmo III: Propagação do campo sem inclusão de efeitos do meio.

input : L - Nível máximo de decomposição da Wavelet,
SM - Matriz de Propagação,
$w[p_z^i]$ - Função de campo,
q_{max} - Número de operadores necessários por nível

output : $w[p_z^i, \Delta x]$ - campo propagado sem efeitos do meio

1 $W[p_z^i] \longleftarrow CWw[p_z^i]$ decomposição Wavelet do campo e compressão (V_s);
2 **foreach** $l' \in [1, L]$ **do**
3 $nel \longleftarrow q_{max}[l']\times$ número de coeficientes não nulos de $W[p_z^i]$;
4 $U_{dilated} \longleftarrow$ vetor de zeros de tamanho nel;
5 $U_{dilated}[(1 : q_{max}[l'] : nel)] \longleftarrow W[p_z^i]$ coeficientes Wavelet dilatados em q posições;
6 $W[p_z^i, \Delta x][l'] \longleftarrow W[p_z^i, \Delta x][l'] + (SM_{l,q_{max}[l']} * U_{dilated})$ por convolução ;
7 $w[p_z^i, \Delta x] \longleftarrow$ inversa da Transformada Wavelet de $W[p_z^i, \Delta x]$;

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Neste contexto, a função modificada $w[p_z^i]$ é submetida à propagação usando a matriz de propagação. O cálculo de $w[p_z^i]$ segue um procedimento cuidadoso conforme indicado no Algoritmo III.

Primeiramente, aplicamos a Transformada Rápida Wavelet e comprimimos os dados V_s na função auxiliar $w[p_z^i]$. Em seguida, procedemos à dilatação de $w[p_z^i]FWT$ para

cada nível de decomposição l' conforme necessário para o respectivo nível. A propagação em Δx é realizada por meio da convolução dos elementos relevantes em $SMl, q_{max}[l']$. Por fim, aplicamos a IFWT ao resultado da convolução, permitindo-nos estabelecer $w[p_z^i, \Delta x]$.

Para mais detalhes, consulte o diagrama esquemático.

5.5.12 O Décimo Segundo Passo: Multiplicação pelo Operador Espacial-p

Nesta etapa, o processo de multiplicação pelo operador espacial-p é aplicado de acordo com a solução de propagação selecionada. Este procedimento é executado da seguinte maneira:

$$wp[p_z^i, \Delta x] = \begin{cases} w[p_z^i, \Delta x] \exp\left(ip^2 \frac{\Delta x}{2k}\right), & \text{para NAPE,} \\ w[p_z^i, \Delta x] \exp\left(-\frac{ip^2 \Delta x}{k}\left(\sqrt{1-\frac{p^2}{k^2}}+1\right)^{-1}\right), & \text{para WAPE.} \end{cases} \tag{5.21}$$

Aqui, p é um vetor de tamanho N_z^i, com seus elementos gerados com incrementos uniformes, variando de p_{max}/N_z^i até p_{max}. O valor máximo de p é calculado como $p_{max} = k \sin\theta_{max}$, onde k é o número de onda e θ_{max} é o ângulo de incidência máximo.

Para mais detalhes, consulte o diagrama esquemático.

5.5.13 O Décimo Terceiro Passo: Propagação dos Coeficientes

Nesta etapa, o processo consiste em executar o seguinte procedimento para a propagação dos coeficientes C_1 e C_2, obtidos na Seção 5.5.9:

$$C_1[p_z^i, \Delta x] = C_1[p_z^i] \exp\left(\frac{i\Delta x}{2k}\left(\frac{\log r}{\Delta z}\right)^2\right), \tag{5.22}$$

$$C_2[p_z^i, \Delta x] = C_2[p_z^i] \exp\left(\frac{i\Delta x}{2k}\left(\frac{\log(-r)}{\Delta z}\right)^2\right), \tag{5.23}$$

onde r deve ser recuperado, conforme pré-estabelecido na Seção 5.5.9.

Para mais detalhes, consulte o diagrama esquemático.

5.5.14 O Décimo Quarto Passo: Obtenção da Solução Particular

Nesta etapa, focamos na obtenção da solução particular para a equação resultante do processo de propagação. A solução é composta por uma combinação da solução particular da equação não homogênea e de uma combinação linear adequada das soluções gerais da equação homogênea, conforme expresso na Equação 5.24.

$$v[p_z^i, \Delta x] = v_p[p_z^i] + Ar^{p_z^i} + B(-r)^{(N_z^i - p_z^i)}. \tag{5.24}$$

Para alcançá-la, iniciamos fatorando a Equação (5.20) de diferenças em termos triangulares superiores e inferiores. Em seguida, aplicamos as recorrências descritas nas Equações (5.25) e (5.26), para $p_z^i = 1, ..., N_z^i - 1$, com $y[0]$ e $v_p[N_z^i]$ sendo arbitrários.

$$y[p_z^i] - ry[p_z^i - 1] = 2\Delta z wp[p_z^i, \Delta x], \tag{5.25}$$

$$v_p[p_z^i + 1] + \frac{1}{r} v_p[p_z^i] = y[p_z^i], \tag{5.26}$$

Posteriormente, definimos os coeficientes A e B conforme Equações (5.27) e (5.28), respectivamente.

$$A = C_1[p_z^i, \Delta x] D \sum_{p_z^i=0}^{N_z^i} v_p[p_z^i] r^{p_z^i}, \tag{5.27}$$

$$B = C_2[p_z^i, \Delta x] D \sum_{p_z^i=0}^{N_z^i} v_p[N_z^i - p_z^i](-r)^{N_z^i}. \tag{5.28}$$

Para mais detalhes, consulte o diagrama esquemático.

5.5.15 O Décimo Quinto Passo: A Fase Final de Cálculo no Ciclo de Repetição

Nesta fase, os parâmetros de refratividade e a Janela de Hanning são aplicados pelo operador espacial associado ao índice de refração, de acordo com a solução adotada para a propagação, como indicado abaixo:

$$u[p_z^i, \Delta x] = \begin{cases} v[p_z^i, \Delta x] \exp\left(ik(n^2 - 1)\frac{\Delta x}{2}\right) J[p_z^i], & \text{para NAPE,} \\ v[p_z^i, \Delta x] \exp(ik(n-1)\Delta_x) J[p_z^i], & \text{para WAPE.} \end{cases} \tag{5.29}$$

Em seguida, o valor de $u[p_z^i, \Delta x]$ é atribuído tanto a u_x quanto ao vetor auxiliar que acumula as posições de propagação, $u[p_x, p_z]$.

Uma vez que este processo é concluído, considera-se que as informações relacionadas à propagação no passo p_x estão finalizadas, e o índice p_x é incrementado em uma posição, ou seja, $p_x + 1 = \Delta x + \Delta x$.

Para mais detalhes, consulte o diagrama esquemático.

5.5.16 O Décimo Sexto Passo: O Processo de Tomada de Decisão Relacionado à Propagação

Neste ponto, é avaliado se p_x alcançou a posição final $x_{\max}$ do ambiente em análise. Caso contrário, o ciclo de repetição é reiniciado automaticamente, retornando à sétima etapa, descrita na Seção 5.5.7. Se p_x alcançou a posição final, o vetor de campo auxiliar $u[p_x, p_z]$ é concluído e encaminhado. Este vetor pode então ser processado com o propósito de gerar relatórios, incluindo a criação de gráficos, análise de perdas de percurso e cálculo de potência.

Para mais detalhes, consulte o diagrama esquemático.

5.6 Avaliação de Desempenho do Algoritmo SSW-PE: Estudos de Caso

Nesta seção, serão abordados estudos comparativos entre o SSW-PE, apresentado na Seção 5.5, e outros modelos de propagação de rádio em diferentes ambientes geográficos, com o objetivo de avaliar sua eficácia e aplicabilidade em cenários diversos. Serão examinados quatro casos distintos: Cúcuta, Colômbia; Mjels, Norte de Jutland; Jerslev, também em Jutland; e o sistema de transporte metroferroviário de Belo Horizonte, Brasil.

Em Cúcuta, Colômbia, foi modelado um cenário suburbano, utilizando dados topográficos e considerando a propagação em uma frequência de 2,0 GHz. A comparação entre os modelos SSW-PE e DMFT-SSPE revelará resultados consistentes, destacando-se a eficiência computacional do SSW-PE.

No caso de Mjels, Dinamarca, será analisado um terreno irregular, com a técnica SSW-PE sendo comparada ao DMFT-SSPE e medições reais, com foco em sua eficiência computacional.

Em Jerslev, outro cenário em Jutland, os resultados do SSW-PE serão comparados, evidenciando-se a eficiência computacional do método.

Por fim, no sistema de transporte metroferroviário de Belo Horizonte, Brasil, o SSW-PE será aplicado para analisar a propagação de ondas em uma extensa ferrovia. Os resultados obtidos serão confrontados com medições reais e o DMFT-SSPE, ressaltando-se a eficiência computacional do SSW-PE.

No desenrolar deste capítulo, pretende-se evidenciar a eficácia do algoritmo SSW-PE como uma ferramenta precisa e eficiente para a modelagem de propagação de ondas eletromagnéticas em uma variedade de contextos do mundo real. Sua capacidade de fornecer resultados precisos com um tempo de processamento significativamente reduzido o torna uma opção promissora para diversas aplicações em comunicações sem fio e sistemas de radar. O propósito desses estudos é não apenas validar o algoritmo proposto, mas

também explorar suas aplicações em diversos contextos de propagação eletromagnética, contribuindo significativamente para pesquisas sobre modelagem e análise de propagação de ondas.

5.6.1 Análise Comparativa de Modelos de Propagação de Rádio em Ambiente Suburbano: Estudo de Caso em Cúcuta, Colômbia

Nesta seção, apresenta-se um cenário sub-urbano na cidade de Cúcuta, Colômbia, onde se considera um perfil de terreno selecionado com comprimento aproximado de 15 km. A superfície deste perfil é considerada como solo padrão, com a variação de refratividade modelada de acordo com a recomendação ITU-R P.453-14 [103], baseada nas condições ambientais da cidade. As informações do perfil do terreno foram obtidas utilizando o conjunto de dados da NASA Shuttle Radar Topography Mission (SRTM) Versão 3.0. A avaliação foi conduzida em uma frequência de 2,0 GHz, com polarização vertical e o transmissor posicionado a uma altura de 100 m. Um perfil de perda de percurso horizontal foi calculado usando um passo horizontal de $\Delta x = 50$ m nas técnicas SSW-PE e DMFT-SSPE, enquanto os pontos de recepção foram mantidos a uma altura de 10 m ao longo do terreno.

A distribuição normalizada da função auxiliar de campo ao longo do perfil topográfico investigado é mostrada na Figura 48. Na análise do algoritmo SSW-PE apresentada na ilustração, observa-se que o comportamento de propagação do campo e sua dispersão na presença de obstáculos e propriedades do terreno são consistentes.

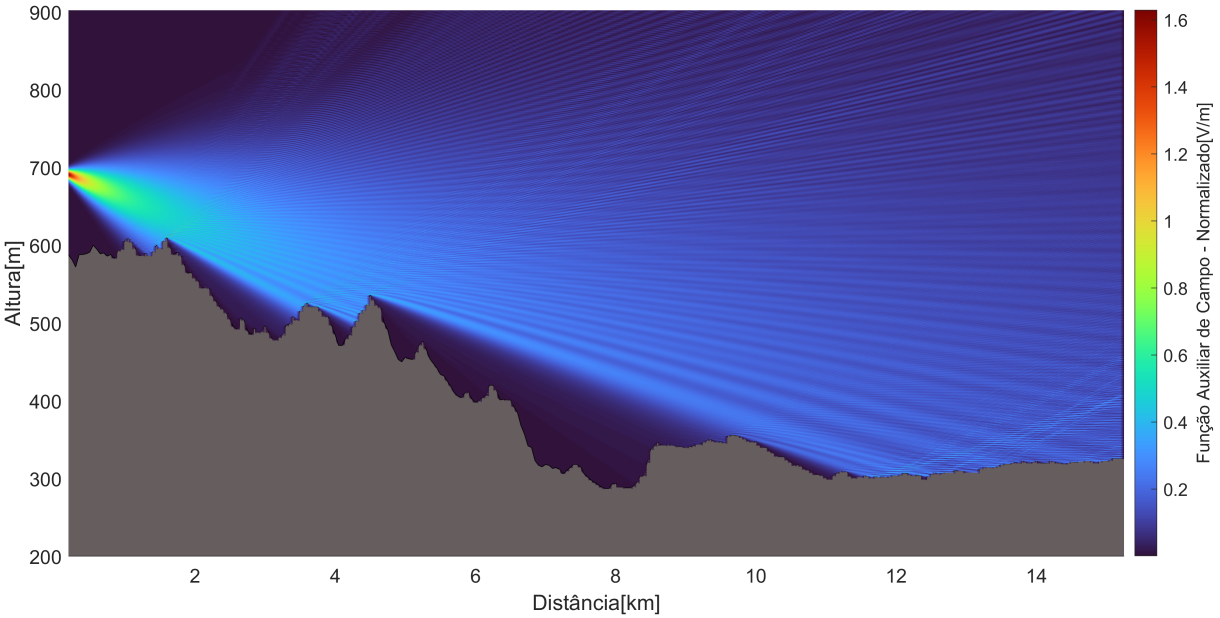


Figura 48 – Distribuição do Campo Auxiliar Normalizado em Cenário Suburbano de Cúcuta, Colômbia.

A Figura 49 mostra a comparação entre o algoritmo SSW-PE proposto e o

algoritmo numérico DMFT-SSPE. O perfil horizontal dos resultados de perda de percurso é ilustrado, demonstrando a similaridade dos resultados entre os algoritmos.

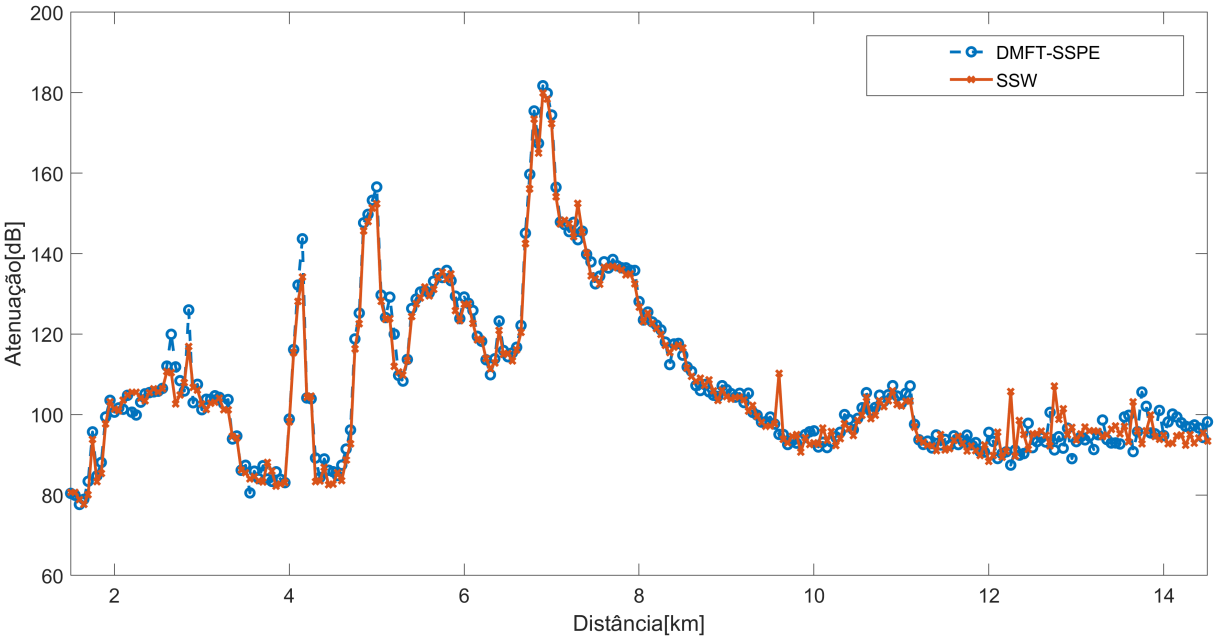


Figura 49 – Comparação de Perdas de Propagação entre SSW-PE e DMFT-SSPE em Cúcuta, Colômbia.

Os resultados obtidos foram comparados com o algoritmo consolidado DMFT-SSPE, que foi validado em trabalhos anteriores [101, 104]. Nesses estudos, os resultados de perda de percurso obtidos com ambos os modelos de propagação de rádio foram comparados entre si.

A eficiência do modelo está intimamente ligada à seleção da família de Wavelets apropriada, que equilibra dilatação, translação e compressão. Isso resulta em uma complexidade reduzida em comparação com o algoritmo SSF. A complexidade das Wavelets é em torno de $O(N_e)$ na etapa inicial, em contraste com o modelo tradicional, que apresenta complexidade $O(N_z \ \log \ N_z)$. Aqui, N_e é determinado pela soma dos coeficientes não nulos na decomposição Wavelet.

$$O(N_e) = \sum_{(l,p_t^l)\in(SM)} (1 - \delta_{(l,p_t^l),0}) \sum_{(p_z)\in(U_x)} (1 - \delta_{p_z,0}). \tag{5.30}$$

Devido à taxa de compressão das Wavelets, N_e é tipicamente muito menor que o número de passos (N_z) do domínio computacional transversal. A complexidade total também é influenciada pela escolha de SM, que é uma matriz de alocação, e os estudos realizados com o modelo lSSW demonstram que a complexidade do SM pré-alocado alinha-se com a previsão de [5].

$$O(SM) = \sum_{l\in[1,L]} N_z^s \, log\,(N_z^s) + \sum_{l\in[1,L]} 2^{L-l} N_z^s. \tag{5.31}$$

5.6.2 Análise Comparativa de Técnicas de Propagação de Ondas em Terreno Irregular: Estudo de Caso em Mjels, Norte de Jutland

É apresentado um caso específico com o propósito de compará-lo ao DMFT-SSPE, MoM, FDTD e uma campanha de medição. Um cenário previamente validado e bem estabelecido na literatura foi adotado [105, 106].

Neste cenário prático, a campanha de medição ocorreu no norte de Jutland, próximo a Aalborg, Dinamarca. A área de estudo, conhecida como Mjels, apresenta um terreno irregular com áreas rurais, árvores e alguns edifícios, cobrindo um trecho de aproximadamente 5 km. Os dados do terreno foram obtidos a partir de mapas digitais com uma resolução de 50 m, conforme ilustrado na Figura 50.

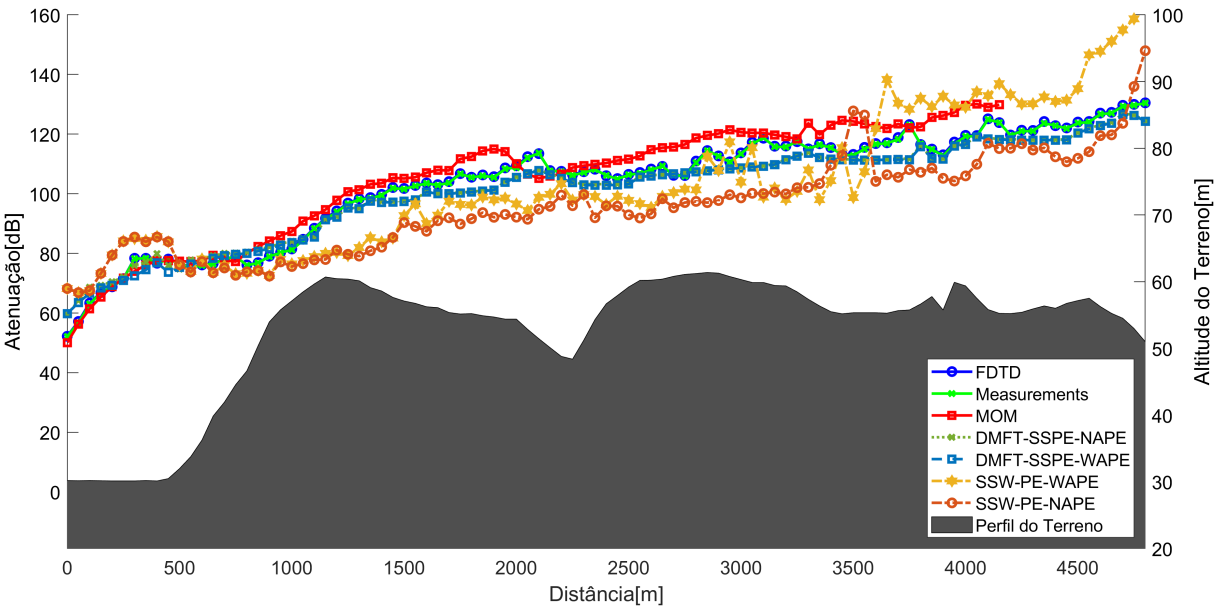


Figura 50 – Comparação das Perdas de Percurso Medidas e Estimadas em Diferentes Técnicas em Mjels, Norte de Jutland, Dinamarca.

Durante a campanha de medição, um transmissor composto por uma antena de dipolo de meia onda com altura de 10, 4 m e polarização vertical irradiou em uma frequência de sinal de 144 MHz com uma potência de saída de 10 W. Uma estação receptora, posicionada no terreno a uma altura de 2, 4 m, registrou a intensidade do campo elétrico no espaço amostral.

Propriedades elétricas padrão para caracterização do solo foram aplicadas nos métodos numéricos, resultando em valores de $\epsilon_r = 15$ e $\sigma = 0.012\ S/m$. Seguindo critérios

de discretização, foram utilizados tamanhos de passo de $\Delta x = 50\ m$ e $\Delta z = 1\ m$. O domínio vertical foi limitado a $z_{\max} = 200\ m$. A Figura 50 ilustra as perdas de percurso medidas, comparando-as entre as técnicas MoM, FDTD, DMFT-SSPE-NAPE, DMFT-SSPE-WAPE, SSW-PE-NAPE e SSW-PE-WAPE ao longo do perfil do terreno.

Tabela 9 – Parâmetros Estatísticos do Estudo de Caso em Mjels

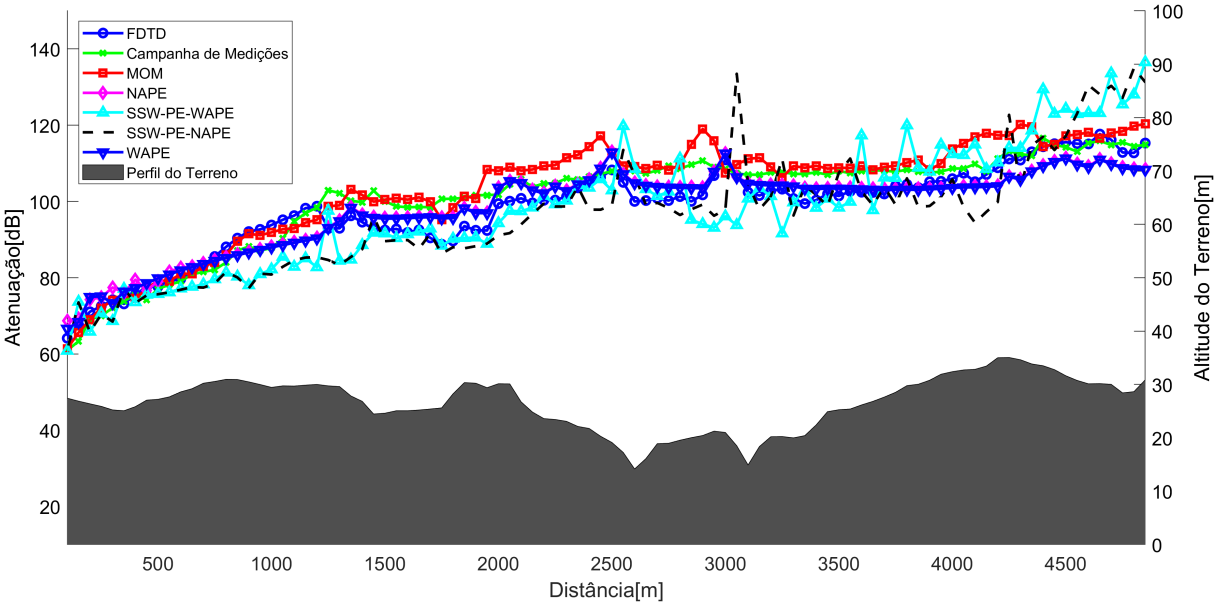
Método	**Erro Médio [dB]**	**Desvio Padrão [dB]**	**Tempo de Simulação**
FDTD	0,2101	0,2586	48,1 horas
MoM	4,9136	5,8516	6,4 horas
DMFT-SSPE-NAPE	3,3439	3,9097	28,64 segundos
DMFT-SSPE-WAPE	3,4317	4,0378	28,64 segundos
SSW-PE-NAPE	10,7649	11,7612	0,74 segundos
SSW-PE-WAPE	11,2079	14,2352	1,23 segundos

A Tabela 9 apresenta estatísticas de erro para este caso, com as medições servindo como referência para calcular o erro médio absoluto e o desvio padrão. Além da comparação estatística, uma avaliação da eficiência computacional foi realizada para revelar o tempo de processamento necessário para obter resultados com cada técnica. Essa análise reforça e valida a eficácia da técnica SSW-PE, demonstrando sua capacidade de alcançar uma convergência de resultados eficiente e notável em comparação com outras abordagens numéricas.

5.6.3 Análise das Perdas de Propagação e Eficiência Computacional:Estudo de Caso em em Jerslev

Neste caso prático, a campanha de medição [105, 106] foi realizada no norte de Jutland, próximo a Aalborg, Dinamarca. O ambiente analisado, denominado Jerslev, apresenta um perfil irregular com áreas rurais, árvores e alguns edifícios, abrangendo aproximadamente $5,5\ km$. Os dados do terreno foram adquiridos a partir de mapas digitais com uma resolução de $50\ m$, conforme ilustrado na Figura 51. Durante a campanha de medição, uma antena de dipolo de meia onda, com altura de $10,4\ m$ e polarização vertical, foi utilizada como transmissor, irradiando $10\ W$ em uma frequência de sinal de 144 MHz. A intensidade do campo elétrico no espaço amostral foi registrada por uma estação receptora, posicionada ao longo do terreno a uma altura de $2,4\ m$.

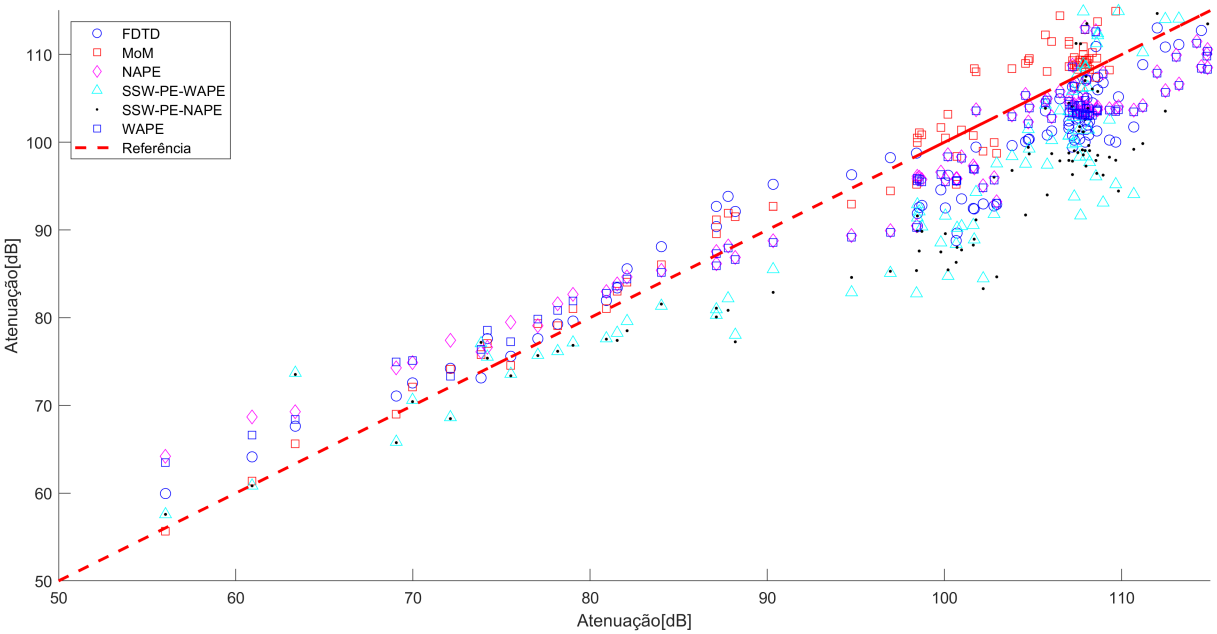
Figura 51 – Análise das Perdas ao Longo do Percurso em Jerslev: Comparação entre Medições e Estimativas Numéricas.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

As propriedades elétricas padrão para a caracterização do solo foram utilizadas para obter os resultados do método numérico, com $\epsilon_r = 15$ e $\sigma = 0.012\ S/m$. Seguindo critérios de discretização, alinhados aos da Seção 5.5.1, foram empregados $\Delta x = 50\ m$ e $\Delta z = 1\ m$. Um limite de domínio vertical foi definido em $z_{max} = 200\ m$. A Figura 52 ilustra as perdas ao longo do percurso medidas, comparada entre as técnicas MoM, FDTD, SSPE-NAPE, SSPE-WAPE, SSW-PE-NAPE e SSW-PE-WAPE ao longo do perfil do terreno.

Figura 52 – Dispersão das Estimativas de Perdas ao longo do Percurso entre Diferentes Técnicas e Medições em Jerslev, Norte de Jutland, Dinamarca.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Tabela 10 – Estatísticas de Erro e Tempo de Simulação para Diferentes Técnicas no Estudo de Caso de Jerslev

Método	Erro Médio [dB]	Desvio Padrão [dB]	Tempo de Simulação
FDTD	4,1554	5,0334	50,3 horas
MoM	3,0226	3,7738	6,9 horas
NAPE	4,0079	4,5595	31,72 segundos
SSW-PE-NAPE	8,5287	10,1518	0,57 segundos
SSW-PE-WAPE	7,3020	8,8188	0,89 segundos
WAPE	4,0785	4,6369	31,72 segundos

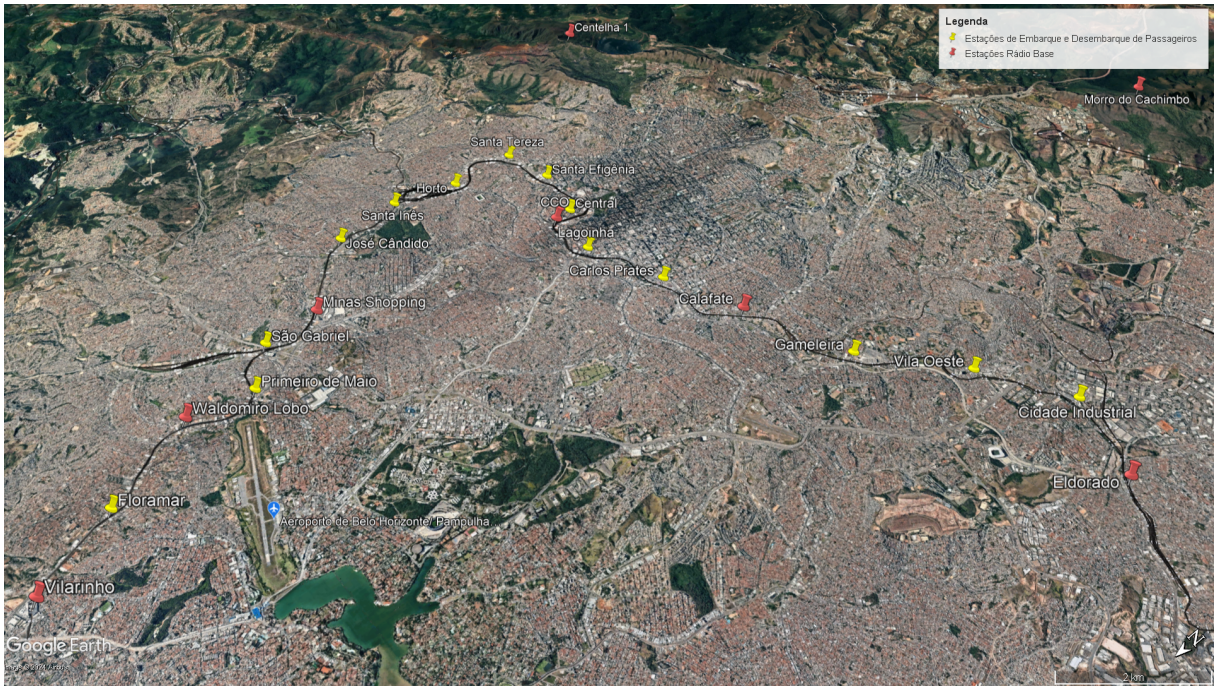
Fonte: Elaborado pelo Autor.

A Tabela 10 apresenta estatísticas de erro para o caso, com as medições servindo como referência para o cálculo do erro médio absoluto e do desvio padrão. Além disso, a dispersão entre as técnicas numéricas e as medições é ilustrada na Figura 52. A análise dos dados confirma que as técnicas numéricas produzem resultados similares, e o algoritmo SSPW-PE fornece uma solução similar em ambos os cenários, seja utilizando o modelo NAPE ou WAPE. Além da comparação estatística, uma avaliação da eficiência computacional é realizada, revelando o tempo de processamento necessário para obter resultados com cada técnica. Isso fortalece e valida a eficácia da técnica SSW-PE, demonstrando sua capacidade de alcançar uma boa convergência de resultados e uma notável eficiência computacional em comparação com outras abordagens numéricas.

5.6.4 Investigação da Propagação de Rádio no Transporte Metroferroviário de Belo Horizonte

Neste cenário específico, a campanha de medição [107] foi conduzida dentro do sistema de transporte metroferroviário em Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil (BH/MG/BRA). Este sistema se estende por aproximadamente 28 km e engloba 19 estações de embarque e desembarque de passageiros, conforme ilustrado na Figura 53. Em 2019, a Companhia Brasileira de Trens Urbanos (CBTU) realizou um estudo de propagação de rádio para avaliar a cobertura deste novo sistema ao longo da ferrovia.

Figura 53 – Sistema de Transporte Metroferroviário em Belo Horizonte.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Durante a fase de levantamento de campo, oito locais potenciais para a instalação de Estações de Rádio Base (ERB) foram identificados, conforme ilustrado na Figura 53. Posteriormente, um teste de condução foi executado, no qual um transmissor foi colocado nos locais pré-determinados das ERB, enquanto um sistema de recepção foi instalado em um trem de passageiros. Este sistema registrou dados georreferenciados sobre a potência do sinal recebido conforme o trem percorria a ferrovia. O sistema de transmissão utilizou uma antena monopolo vertical com ganho de $8,15\ dBi$, conectada a um repetidor bidirecional para rádio digital com capacidade máxima de potência de transmissão de $50\ W$.

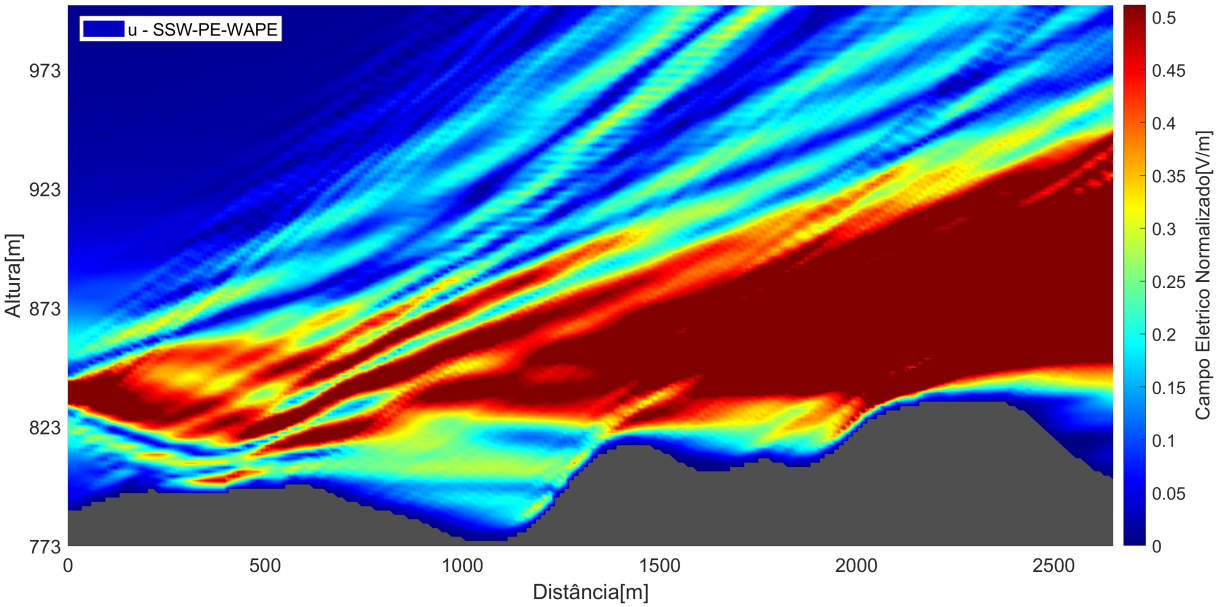
A metodologia da campanha de medição foi projetada para operar o sistema de transmissão em uma frequência de 163,94625 MHz com uma potência de saída de $20\ W$. O sistema de recepção registrou o nível do sinal recebido a cada 10 segundos a uma altura de 2 metros conforme o trem viajava ao longo da ferrovia. O trem fez paradas em cada

estação ao longo do percurso para facilitar o embarque e desembarque de passageiros. Os dados coletados estão disponíveis em [107].

Dados de elevação para o terreno relevante aos links analisados foram obtidos a partir de dados fornecidos pela Embrapa Monitoramento por Satélite [108], por meio do projeto Brasil em Relevo. Os modelos digitais de elevação têm uma resolução espacial de 90 metros e utilizam o sistema de coordenadas geográficas WGS-84. Esses dados foram processados usando software de geoprocessamento, e o terreno foi discretizado com um espaçamento horizontal de 12 metros.

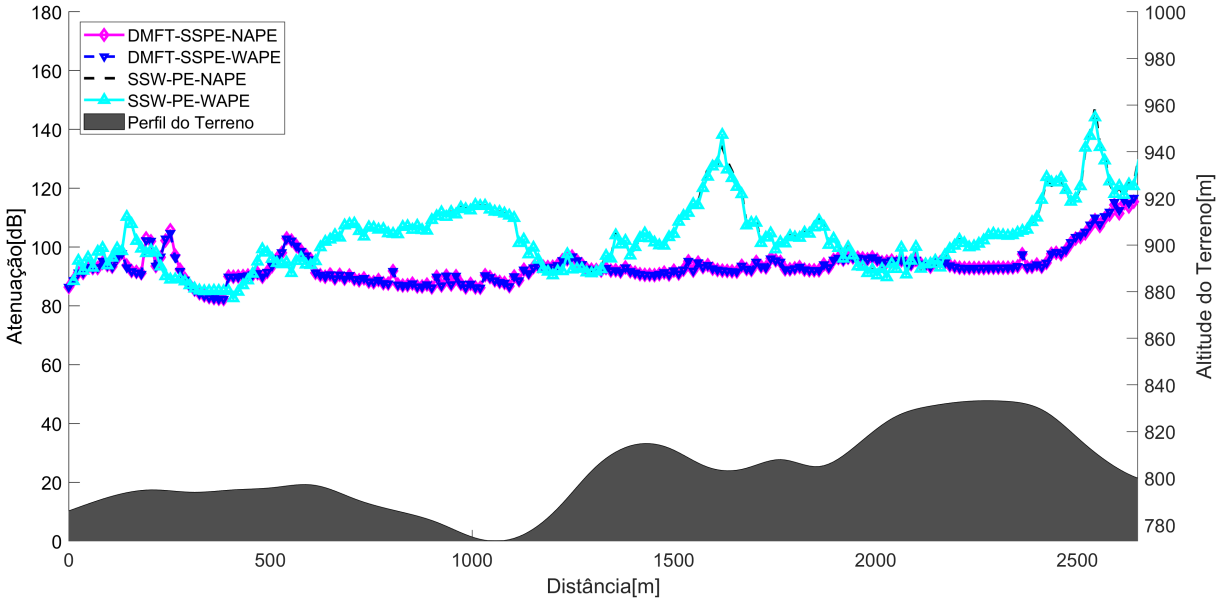
Para fins de análise, apresentamos a ligação entre a Estação Rádio Base (ERB), localizada na estação de transmissão denominada Minas Shopping, e a distribuição do campo elétrico, bem como a atenuação ao longo do caminho direcionado à Estação São Gabriel, conforme ilustrado nas Figuras 54 e 55, respectivamente.

Figura 54 – Distribuição Normalizada do Campo Elétrico ao Longo do Trajeto entre Minas Shopping e São Gabriel, BH/MG/BRA.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

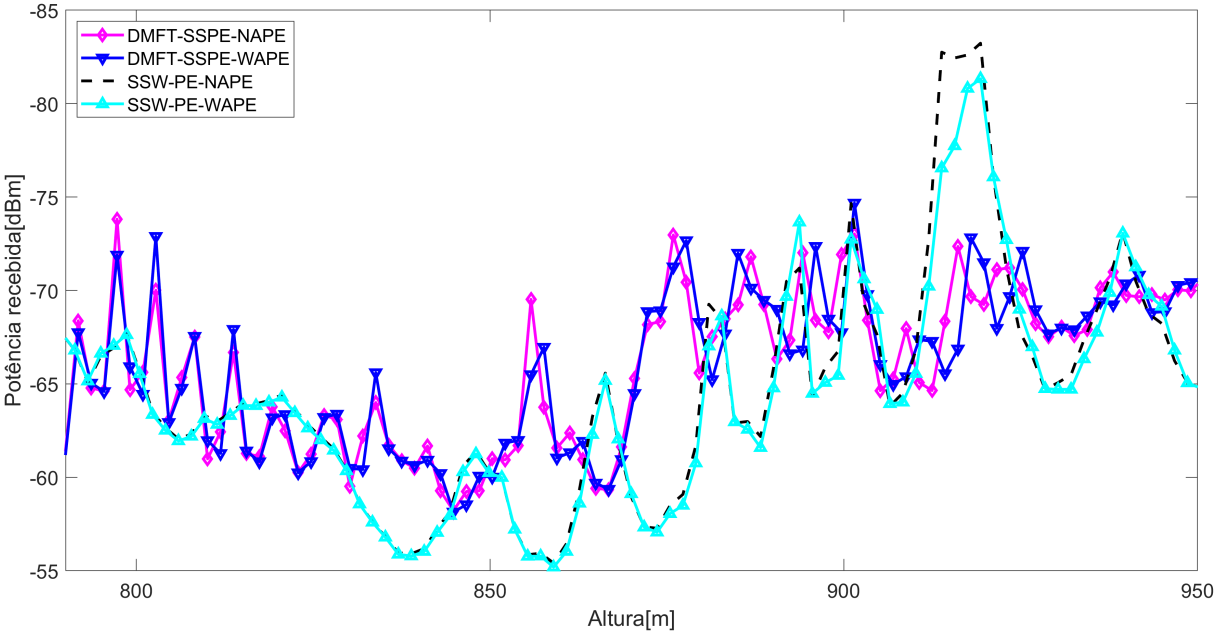
Figura 55 – Análise das Perdas ao Longo do Percurso entre Minas Shopping e São Gabriel, BH/MG/BRA: Comparação entre Diferentes Técnicas Numéricas.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

No caso de perdas ao longo do percurso, é fornecida uma comparação entre as técnicas DMFT-SSPE-NAPE, DMFT-SSPE-WAPE, SSW-PE-NAPE e SSPW-PE-WAPE. Para obter resultados por métodos numéricos, foram utilizadas propriedades elétricas do solo padrão com um valor de permitividade relativa (ε_r) de 15 e condutividade (σ) de 0,012 S/m para caracterização. De acordo com os critérios de discretização, os valores de Δz foram alinhados com o critério de Nyquist, conforme descrito na Seção 5.5.1. Um limite de domínio vertical ($z_{\max}$) foi definido em 2000 metros.

Figura 56 – Comparação da Potência Recebida entre Diferentes Técnicas Numéricas no Perfil Vertical na Estação São Gabriel, BH/MG/BRA.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Após a análise dos dados, observou-se que os resultados obtidos pelas técnicas numéricas DMFT-SSPE e SSW-PE são semelhantes. Como esperado, tanto os modelos DMFT-SSPE quanto SSW-PE produzem resultados similares quando consideradas as soluções NAPE e WAPE. A sobreposição dos dados obtidos por meio das abordagens de feixe estreito e largo para ambas as técnicas de solução numérica mencionadas anteriormente é ilustrada na Figura 55.

Subsequentemente, informações sobre o tempo de processamento das técnicas são apresentadas na Tabela 11, destacando a eficiência computacional do algoritmo SSW-PE. A investigação é concluída com a análise do perfil de propagação vertical na localização do receptor, nomeadamente a Estação São Gabriel, a uma distância de 1015 metros do transmissor, onde uma potência recebida de -76 dBm foi medida durante a campanha de medição [107]. A potência recebida para este perfil vertical na distância mencionada é ilustrada na Figura 56, onde uma oscilação inicial de aproximadamente 8 dB é observada nas técnicas numéricas.

Tabela 11 – Comparação do Tempo de Processamento entre Diferentes Técnicas Numéricas no Percurso entre Minas Shopping e São Gabriel, BH/MG/BRA.

Método	**Tempo de Simulação**
DMFT-SSPE-NAPE	10,56 segundos
DMFT-SSPE-WAPE	24,77 segundos
SSW-PE-NAPE	1,71 segundos
SSW-PE-WAPE	2,10 segundos

Fonte: Elaborado pelo Autor.

A posição específica escolhida para comparação com as medições foi determinada com base na natureza do trabalho de referência [107], onde a campanha de medição foi conduzida em pontos de transmissão específicos determinados pelas estações transmissoras do serviço de trem urbano na cidade de Belo Horizonte, MG, Brasil. Dado o perfil de transmissão estabelecido entre os locais investigados, foi possível realizar a comparação com o ponto disposto na análise do perfil de transmissão vertical.

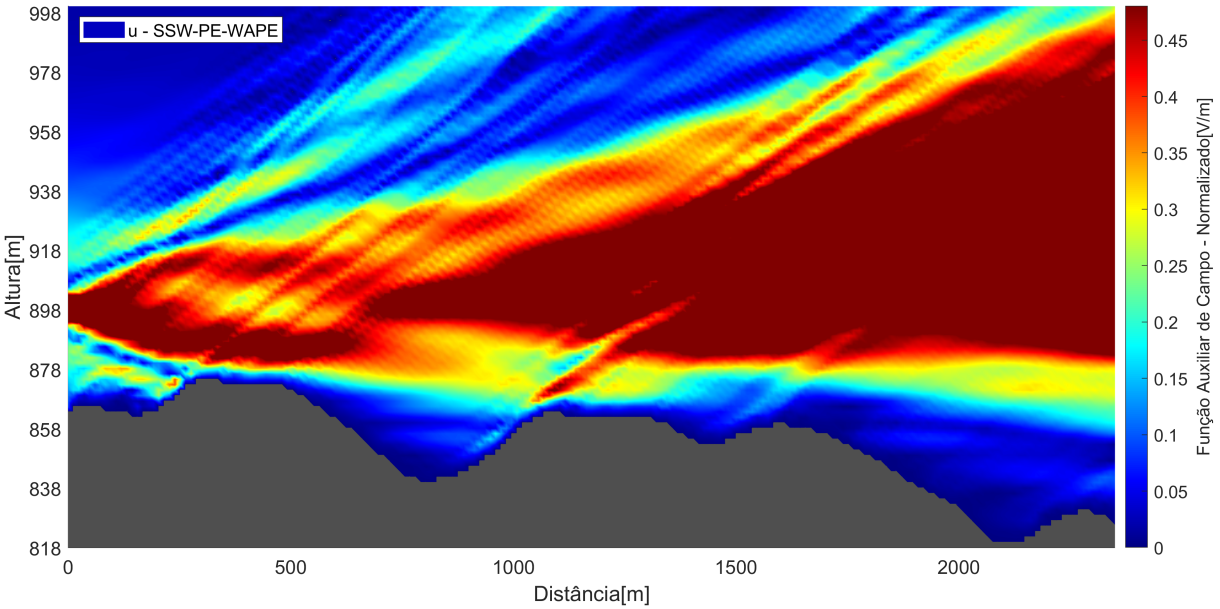
Com a análise detalhada do enlace entre Minas Shopping e São Gabriel concluída, onde destacamos a distribuição do campo elétrico, a atenuação ao longo do percurso e a eficiência das técnicas numéricas aplicadas, voltou-se a atenção para a continuidade das avaliações dos enlaces do serviço de trem urbano de Belo Horizonte. Nas próximas seções, investigar-se-á a propagação de rádio e a integridade do sinal em diversos trechos adicionais: entre o Centro de Controle Operacional (CCO) e a Estação Horto na Seção 5.6.4.1, CCO e Santa Tereza na Seção 5.6.4.2, Minas Shopping e Santa Inês na Seção 5.6.4.3, Vilarinho e Primeiro de Maio na Seção 5.6.4.4, e Vilarinho e Minas Shopping na Seção 5.6.4.5. Cada uma dessas análises seguirá uma abordagem metodológica consistente, permitindo uma visão abrangente e comparativa do desempenho do SSW-PE, demonstrando seu potencial e identificando eventuais pontos de melhoria.

5.6.4.1 Avaliação do Enlace entre Centro de Controle Operacional e Estação Horto

Nesta seção, realiza-se uma análise detalhada do enlace entre a ERB no CCO e a Estação Horto. As premissas sobre a caracterização do solo e a fonte transmissora permanecem conforme descrito na Seção 5.6.4.

A distribuição do campo elétrico ao longo do trajeto é mostrada na Figura 57. Este gráfico proporciona uma visão abrangente da intensidade do campo elétrico ao longo do percurso, permitindo uma avaliação preliminar da qualidade do sinal em diferentes pontos.

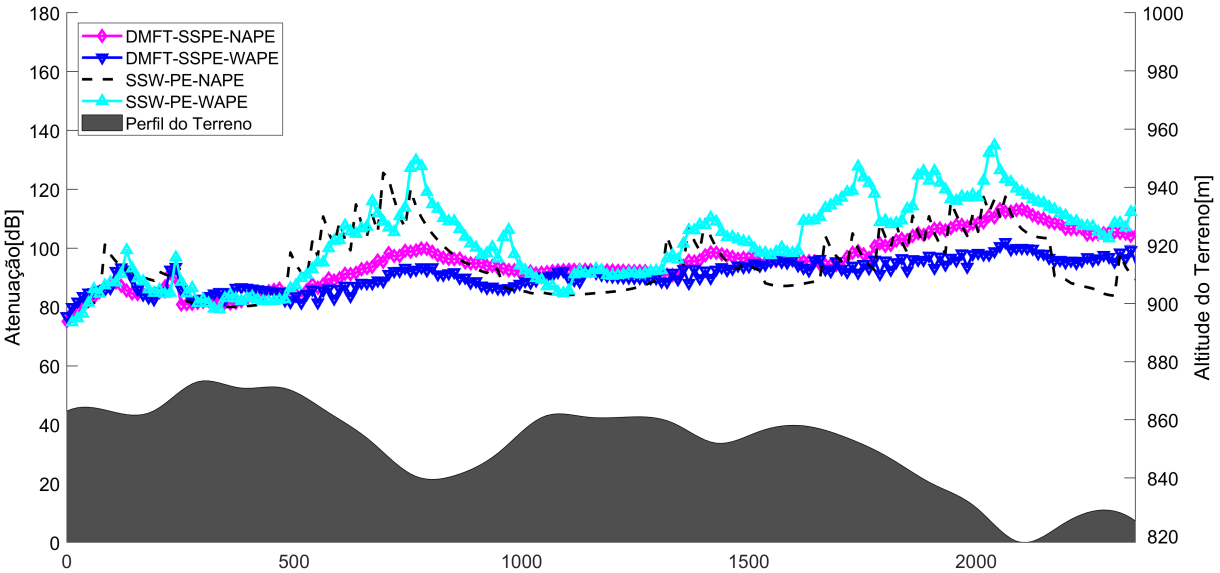
Figura 57 – Distribuição do Campo Elétrico ao Longo do Enlace CCO e Horto, BH/MG/BRA.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

A Figura 58 ilustra a variação do sinal no trajeto entre o CCO e o Horto, comparando diferentes técnicas numéricas adotadas, conforme discutido na Seção 5.6.4. Esta análise permitiu a identificação de áreas com potencial degradação do sinal e a avaliação da consistência dos dados.

Figura 58 – Análise das Perdas ao Longo do Percurso entre CCO e Horto, BH/MG/BRA: Comparação entre Diferentes Técnicas Numéricas.

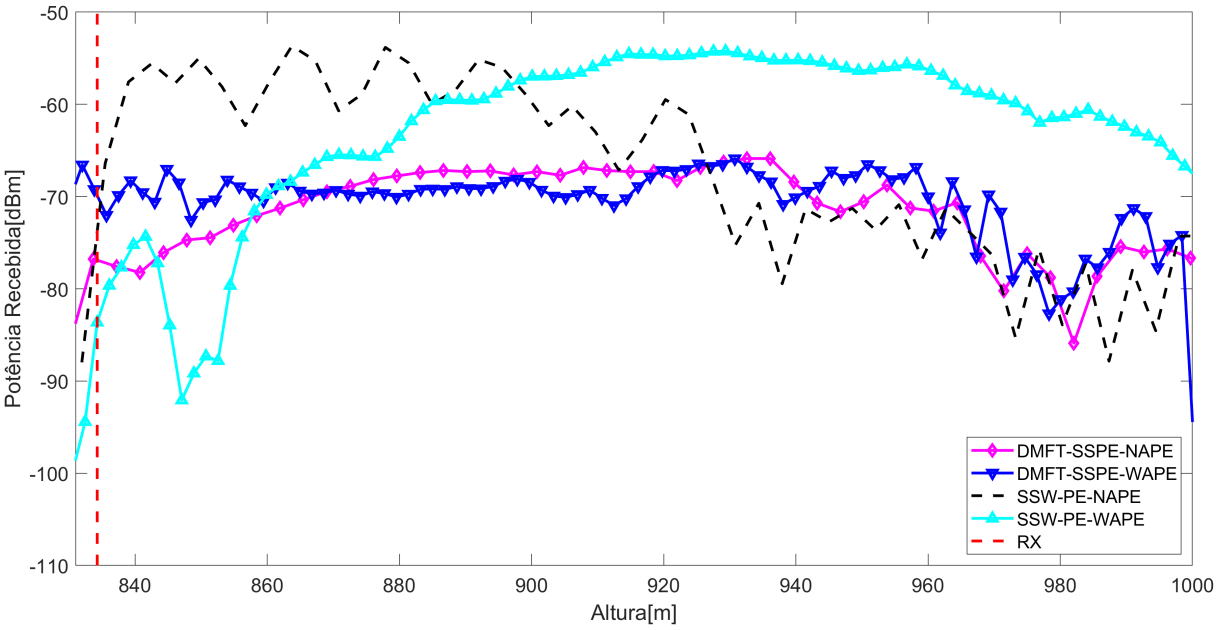


Fonte: Elaborado pelo Autor.

Além disso, na Figura 59, é apresentada a comparação da potência recebida na

Estação Horto. A uma distância de 2379 metros do transmissor, onde uma potência recebida de -110 dBm foi medida durante a campanha de medição. Observa-se uma oscilação inicial de aproximadamente 14.4 dB entre as técnicas numéricas, com concordância de dados no ponto de recepção entre o DMFT-SSPE-WAPE e o SSW-PE-NAPE, e uma variação de 6.4 dB entre o SSW-PE-WAPE e o DMFT-SSPE-NAPE.

Figura 59 – Comparação da Potência Recebida no Perfil Vertical na Estação Horto, BH/MG/BRA.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Restrições impostas pelo uso de modelos numéricos simplificados são constatadas, como a não consideração de fenômenos como multipercurso, difração e condições meteorológicas e ambientais. Esse aspecto sugere a possibilidade de melhorias na modelagem para avanços na calibração do SSW-PE. Entretanto, ao comparar o tempo de processamento, apresentado na Tabela 12, confirma-se o potencial de eficiência computacional da técnica SSW-PE.

Tabela 12 – Comparação do Tempo de Processamento entre Diferentes Técnicas Numéricas no Percurso entre CCO e Horto, BH/MG/BRA.

Método	**Tempo de Simulação**
DMFT-SSPE-NAPE	20,26 segundos
DMFT-SSPE-WAPE	28,71 segundos
SSW-PE-NAPE	0,64 segundos
SSW-PE-WAPE	0,78 segundos

Fonte: Elaborado pelo Autor.

A análise do enlace entre o CCO e a Estação Santa Tereza, discutida na Se-

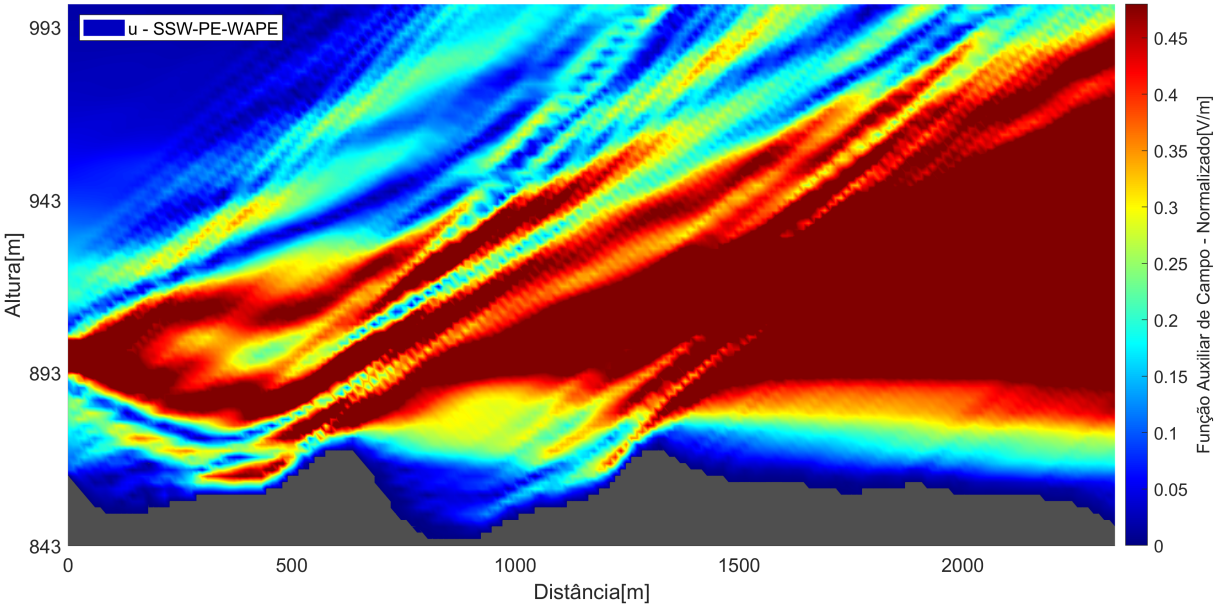
ção 5.6.4.2, proporcionará continuidade na avaliação do potencial de eficiência e precisão do SSW-PE.

5.6.4.2 Avaliação do Enlace entre Centro de Controle Operacional e Estação Santa Tereza

Nesta seção, é realizada uma análise detalhada do enlace entre a Estação Santa Tereza e o CCO, onde está localizada a ERB. As premissas relacionadas à caracterização do solo e à configuração da fonte transmissora são mantidas, conforme descrito na Seção 5.6.4.

A distribuição do campo elétrico ao longo do trajeto é apresentada na Figura 60, proporcionando uma visão abrangente da intensidade do campo elétrico ao longo do perfil.

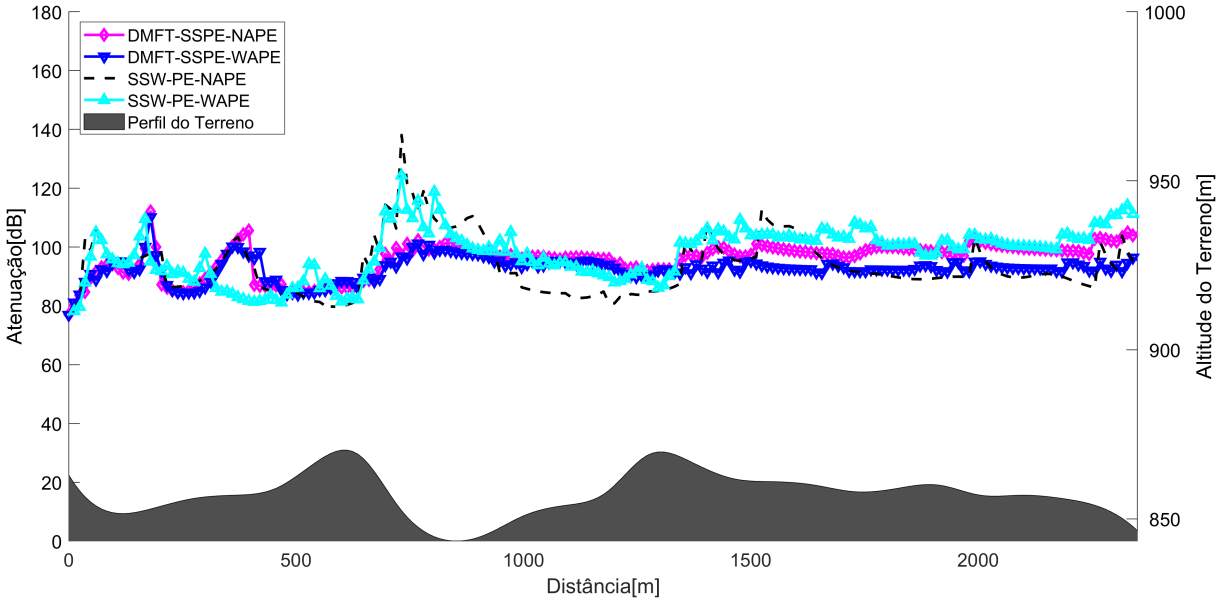
Figura 60 – Distribuição do Campo Elétrico ao Longo do Trajeto entre CCO e Santa Tereza, BH/MG/BRA.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Para uma análise mais detalhada das perdas ao longo do percurso, a Figura 61 ilustra a variação do sinal entre o CCO e a Estação Horto, mantendo a comparação das diversas técnicas numéricas utilizadas, conforme discutido na Seção 5.6.4.

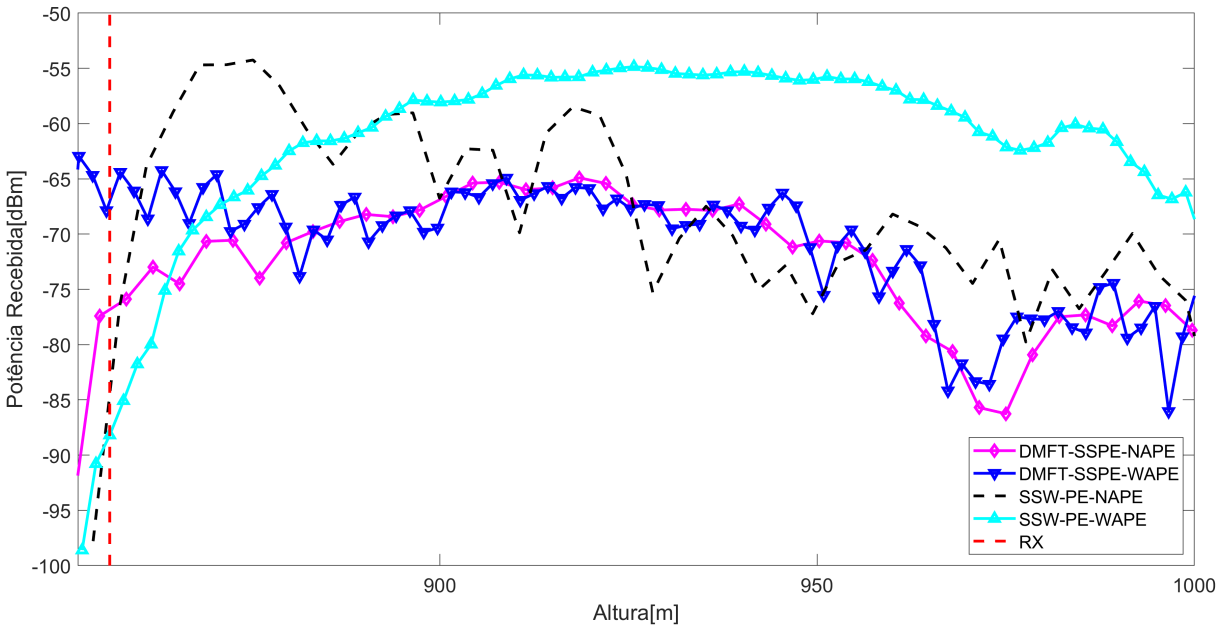
Figura 61 – Análise das Perdas ao Longo do Percurso entre CCO e Santa Tereza, BH/MG/BRA: Comparação entre Diferentes Técnicas Numéricas.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

A Figura 62 apresenta a comparação da potência recebida na Estação Horto, localizada a 2367 metros do transmissor, onde foi medida uma potência de -109 dBm. Observou-se uma oscilação de aproximadamente 20.33 dB entre o SSW-PE e DMFT-SSPE-WAPE e uma variação de 10.7 dB entre o SSW-PE e o DMFT-SSPE-NAPE.

Figura 62 – Comparação da Potência Recebida no Perfil Vertical na Estação Santa Tereza, BH/MG/BRA.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

A Tabela 13 mostra o potencial de eficiência computacional da técnica SSW-PE ao comparar o tempo de processamento.

Tabela 13 – Comparação do Tempo de Processamento entre Diferentes Técnicas Numéricas no Percurso entre CCO e Santa Tereza, BH/MG/BRA.

Método	**Tempo de Simulação**
DMFT-SSPE-NAPE	21,01 segundos
DMFT-SSPE-WAPE	21,22 segundos
SSW-PE-NAPE	0,58 segundos
SSW-PE-WAPE	0,81 segundos

Fonte: Elaborado pelo Autor.

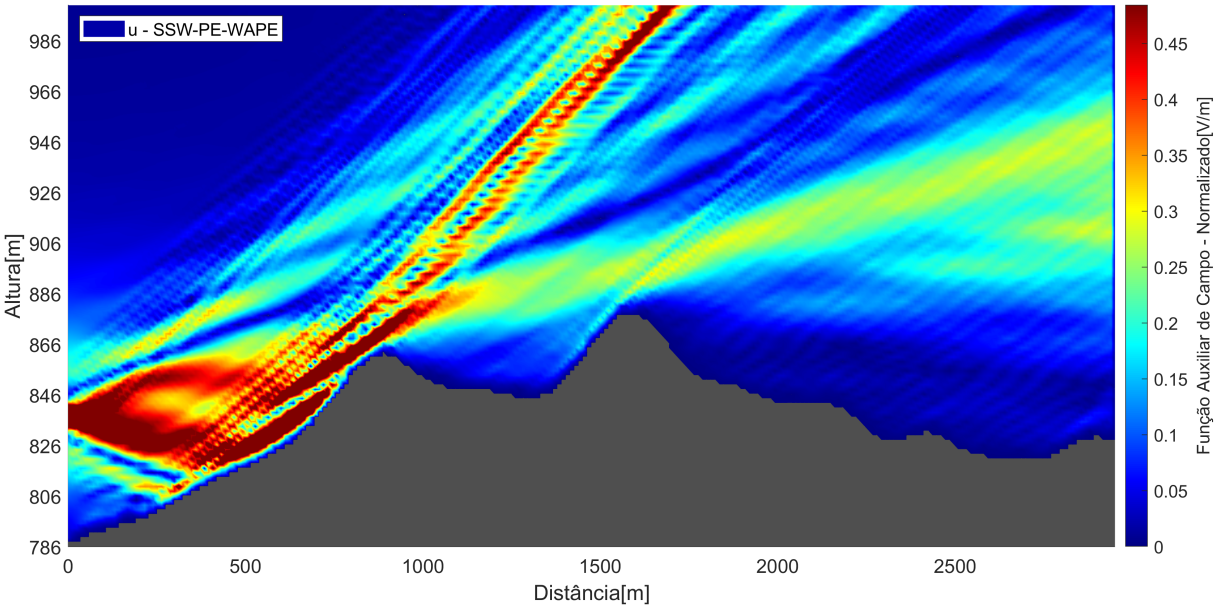
A análise do enlace entre o Minas Shopping e a Estação Santa Inês, discutida na Seção 5.6.4.3, proporcionará continuidade na avaliação do potencial de eficiência e precisão do SSW-PE.

5.6.4.3 Avaliação do Enlace entre Minas Shopping e Estação Santa Inês

Nesta seção, é realizada uma análise do enlace entre a Estação Santa Inês e o Minas Shopping, onde está localizada a ERB.

A Figura 63 ilustra a distribuição do campo elétrico ao longo do trajeto.

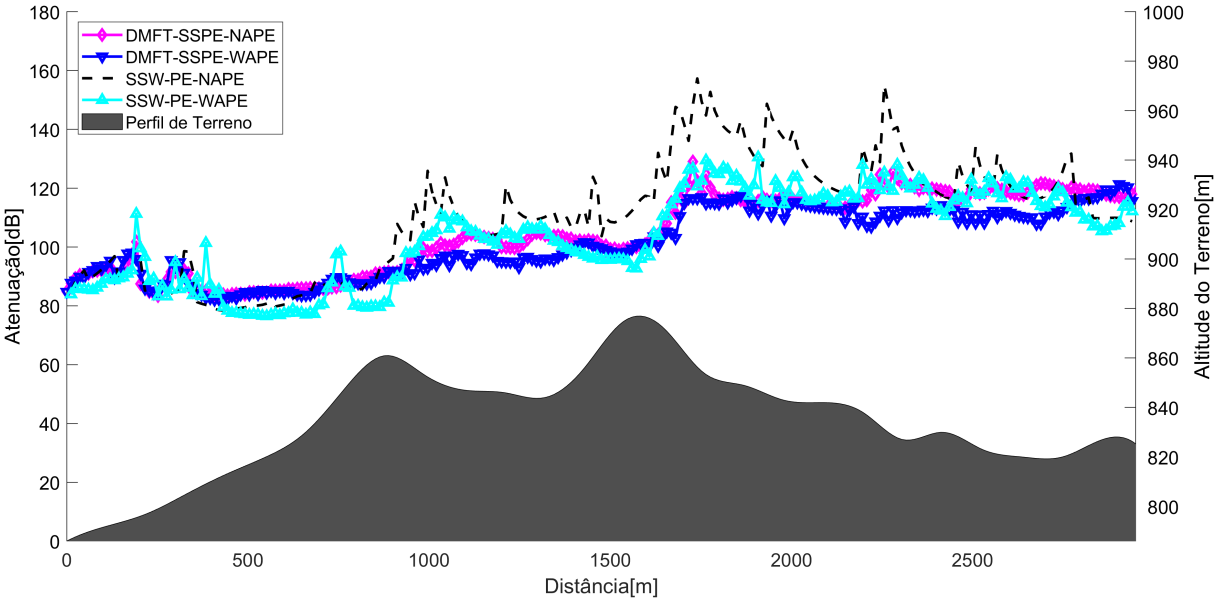
Figura 63 – Distribuição Normalizada do Campo Elétrico ao Longo do Trajeto entre Minas Shopping e Santa Inês, BH/MG/BRA.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Para uma análise das perdas ao longo do percurso, a Figura 64 ilustra a variação do sinal entre o Minas Shopping e a Estação Santa Inês.

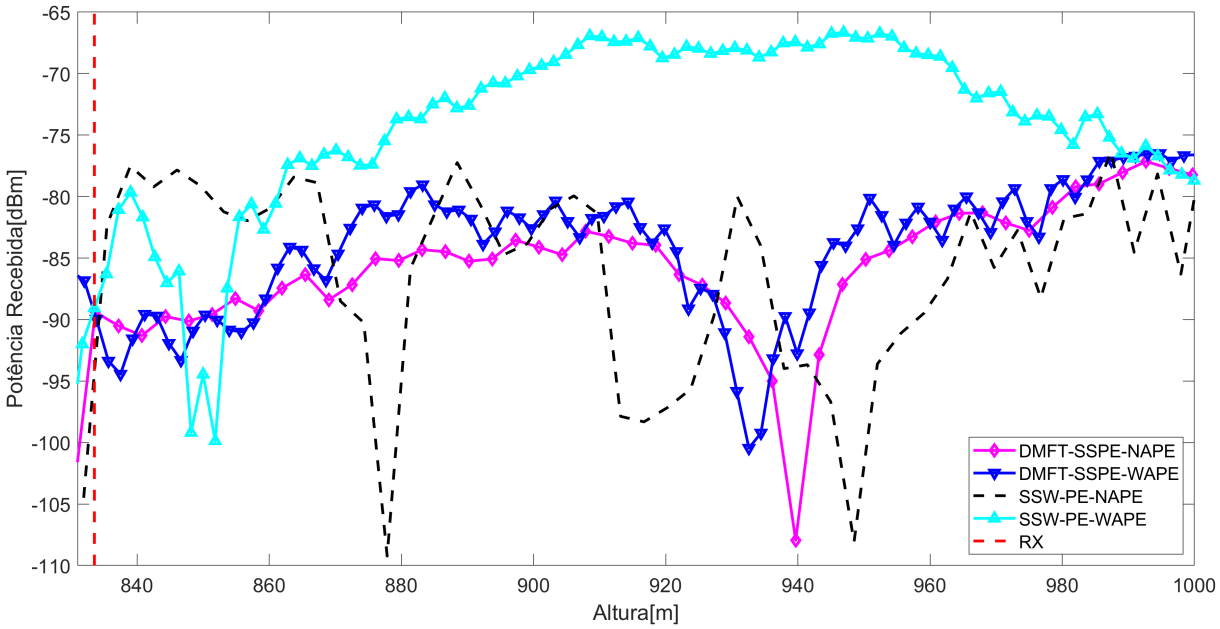
Figura 64 – Análise das Perdas ao Longo do Percurso entre Minas Shopping e Santa Inês, BH/MG/BRA: Comparação entre Diferentes Técnicas Numéricas.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

A Figura 65 apresenta a comparação da potência recebida na Estação Santa Inês, localizada a 2966 metros do transmissor, onde foi medida uma potência recebida de -106 dBm. Observou-se uma oscilação de aproximadamente 5 dB entre o SSW-PE e o DMFT-SSPE, registrando aproximadamente -90 dBm para o SSW-PE.

Figura 65 – Comparação da Potência Recebida no Perfil Vertical na Estação Santa Inês, BH/MG/BRA.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Ao comparar o tempo de processamento, conforme mostrado na Tabela 14, confirma-se o potencial de eficiência computacional da técnica SSW-PE, mesmo com tempo de processamento aproximados.

Tabela 14 – Comparação do Tempo de Processamento entre Diferentes Técnicas Numéricas no Percurso entre Minas Shopping e Santa Inês, BH/MG/BRA.

Método	**Tempo de Simulação**
DMFT-SSPE-NAPE	23,15 segundos
DMFT-SSPE-WAPE	24,89 segundos
SSW-PE-NAPE	1,23 segundos
SSW-PE-WAPE	3,41 segundos

Fonte: Elaborado pelo Autor.

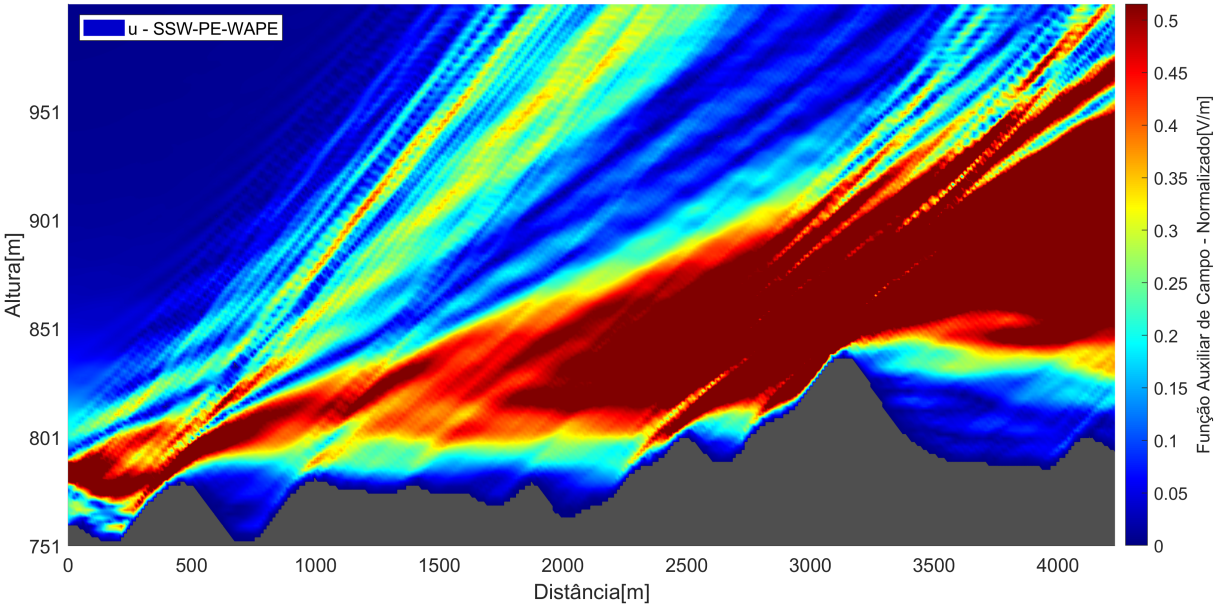
A análise do enlace entre o Vilarinho e a Estação Primeiro de Maio, discutida na Seção 5.6.4.4, proporcionará continuidade na avaliação do potencial de eficiência e precisão do SSW-PE.

5.6.4.4 Avaliação do Enlace entre Vilarinho e Estação Primeiro de Maio

Nesta seção, é realizada uma análise detalhada do enlace entre a Estação Primeiro de Maio e o Vilarinho, onde está localizada a ERB.

A distribuição do campo elétrico ao longo do trajeto é apresentada na Figura 66.

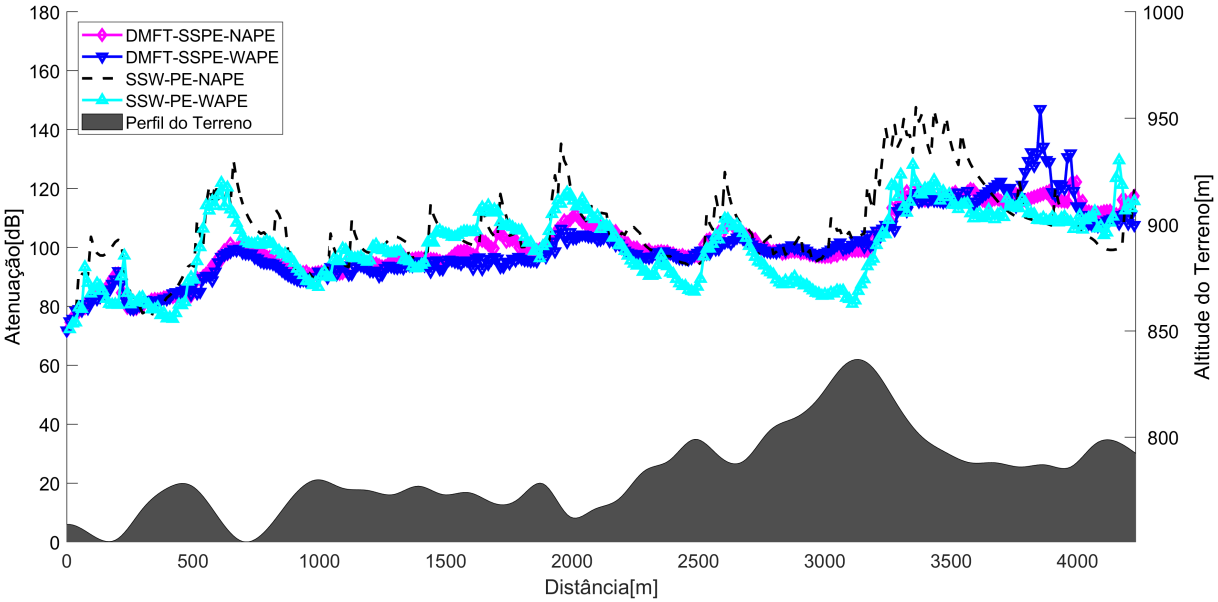
Figura 66 – Distribuição Normalizada do Campo Elétrico ao Longo do Trajeto entre Vilarinho e Primeiro de Maio, BH/MG/BRA.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Para uma análise das perdas ao longo do percurso, a Figura 67 ilustra a variação do sinal entre o Vilarinho e a Estação Primeiro de Maio.

Figura 67 – Análise das Perdas ao Longo do Percurso entre Vilarinho e Primeiro de Maio, BH/MG/BRA: Comparação entre Diferentes Técnicas Numéricas.

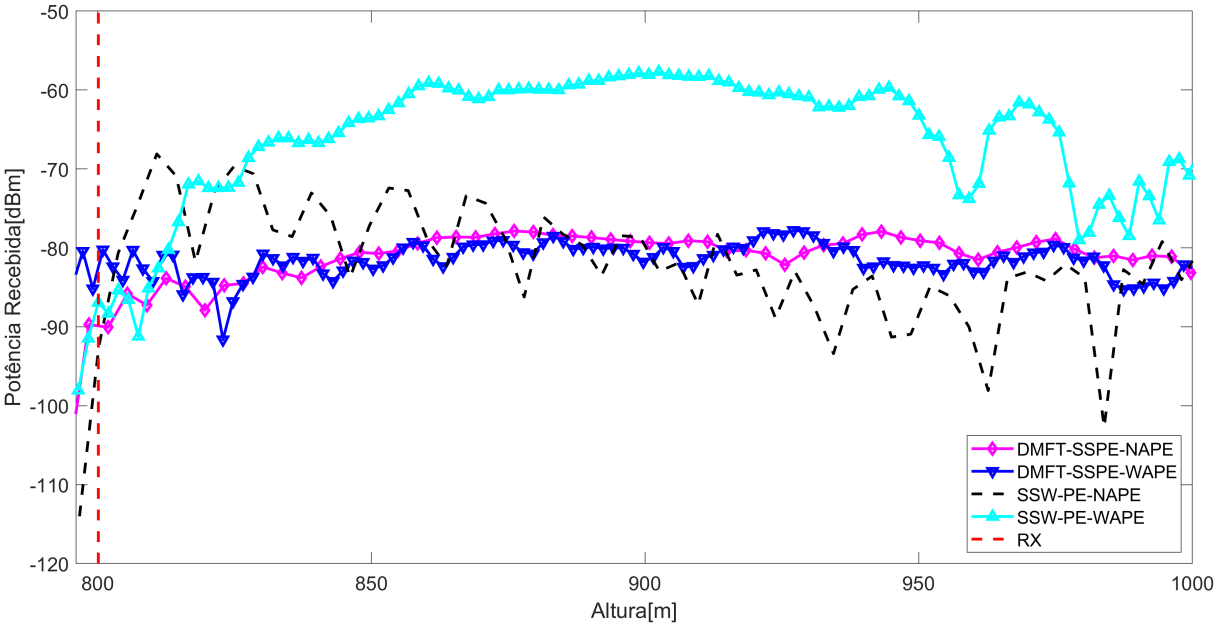


Fonte: Elaborado pelo Autor.

A Figura 68 apresenta a comparação da potência recebida na Estação Primeiro de Maio, localizada a 4270 metros do transmissor. Durante a campanha de medição, foi

medida uma potência de -114 dBm. Observou-se uma diferença de aproximadamente 1,7 dB entre as previsões do SSW-PE-WAPE e do DMFT-SSPE-WAPE, com o último prevendo -89,7 dBm.

Figura 68 – Comparação da Potência Recebida no Perfil Vertical na Estação Primeiro de Maio, BH/MG/BRA.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

A Tabela 15mostra a comparação dos tempos de processamento, confirmando a eficiência computacional da técnica SSW-PE.

Tabela 15 – Comparação do Tempo de Processamento entre Diferentes Técnicas Numéricas no Percurso entre Vilarinho e Primeiro de Maio, BH/MG/BRA.

Método	**Tempo de Simulação**
DMFT-SSPE-NAPE	28.62 segundos
DMFT-SSPE-WAPE	34.66 segundos
SSW-PE-NAPE	3,04 segundos
SSW-PE-WAPE	4,98 segundos

Fonte: Elaborado pelo Autor.

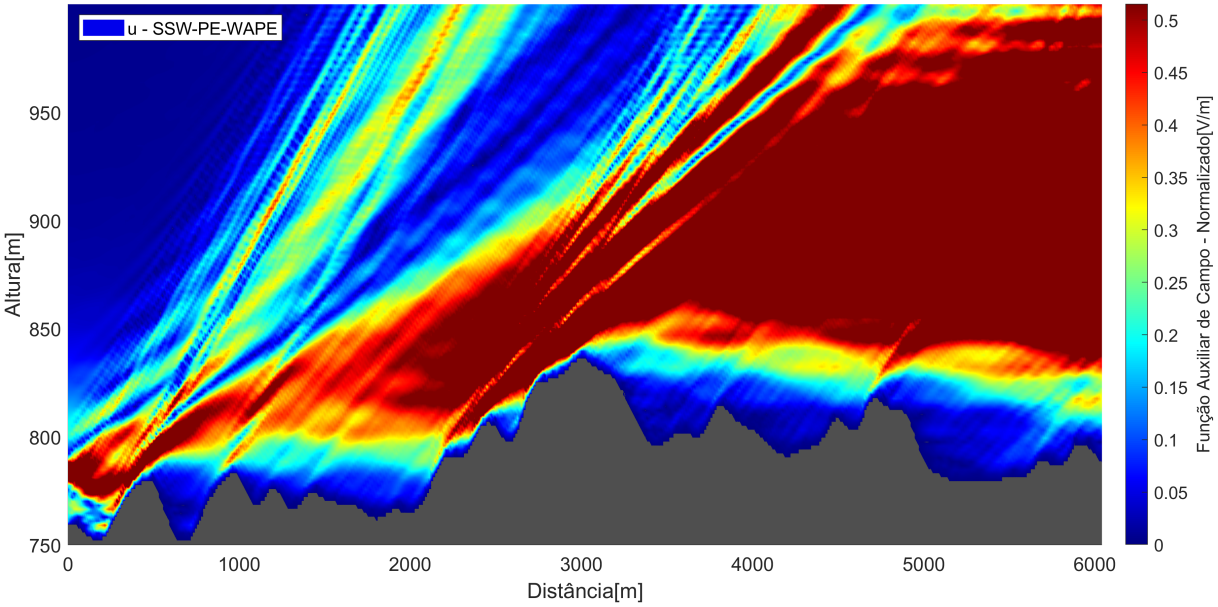
A análise do enlace entre o Vilarinho e a Estação Minas Shopping, discutida na Seção 5.6.4.5, dará continuidade à avaliação do potencial de eficiência e precisão do SSW-PE.

5.6.4.5 Avaliação do Enlace entre Vilarinho e Estação Minas Shopping

Nesta seção, é realizada uma análise do enlace entre a Estação Minas Shopping e o Vilarinho, onde está localizada a ERB.

A distribuição do campo elétrico ao longo do trajeto é apresentada na Figura 69.

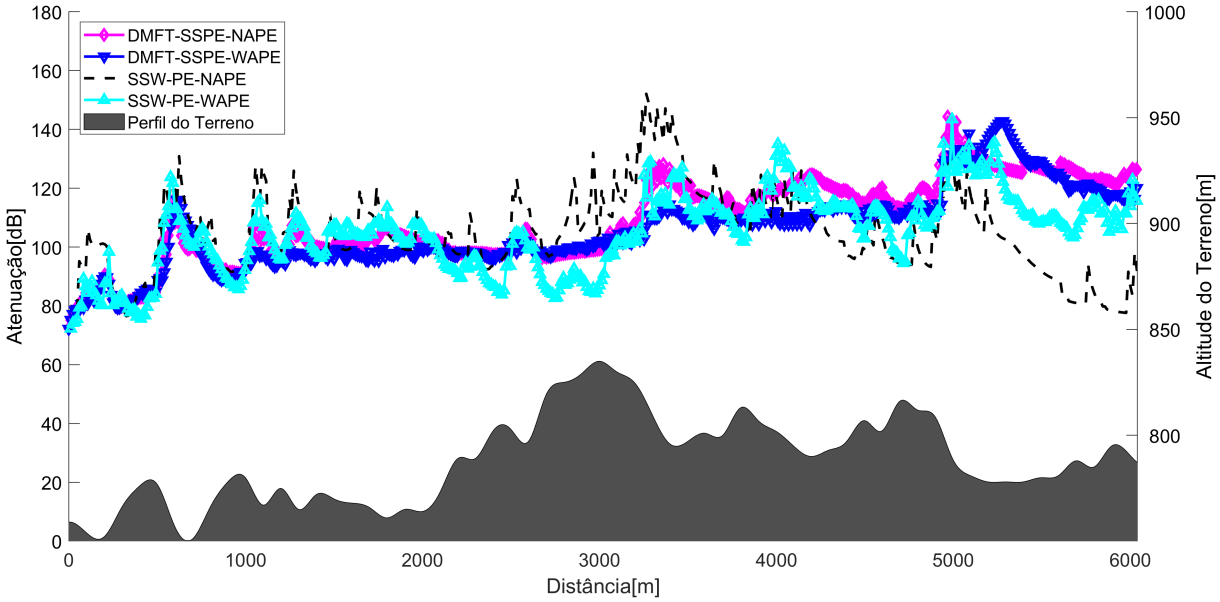
Figura 69 – Distribuição Normalizada do Campo Elétrico ao Longo do Trajeto entre Vilarinho e Minas Shopping, BH/MG/BRA.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Para analisar as perdas ao longo do percurso, a Figura 70 ilustra a variação do sinal entre o Vilarinho e a Estação Minas Shopping.

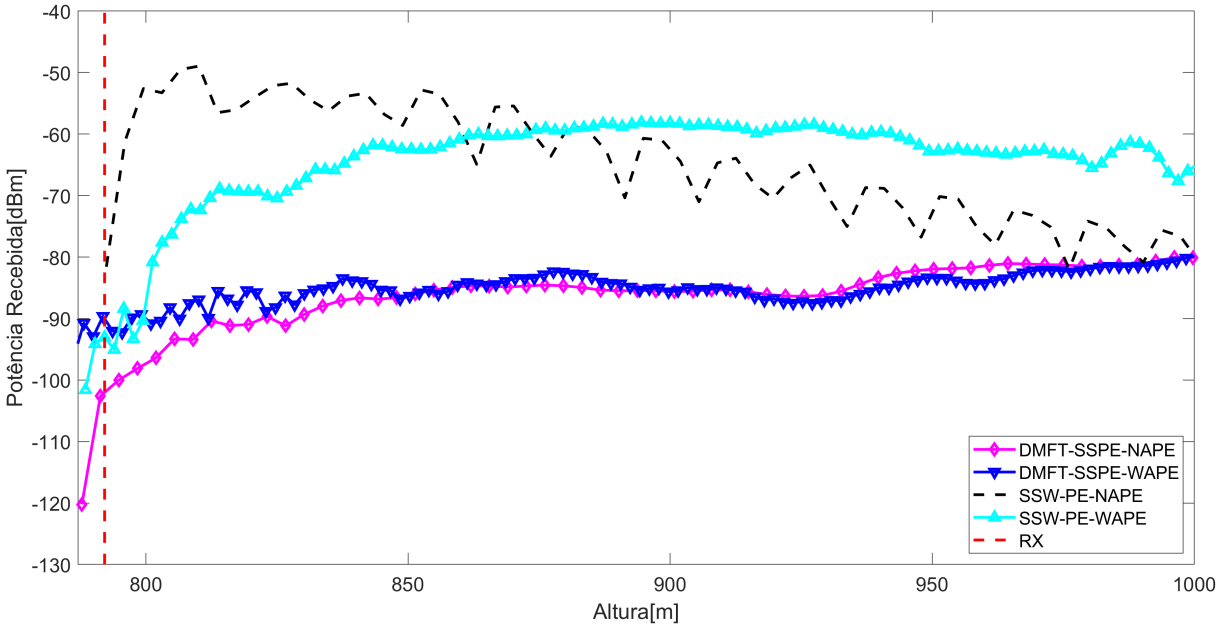
Figura 70 – Análise das Perdas ao Longo do Percurso entre Vilarinho e Minas Shopping, BH/MG/BRA: Comparação entre Diferentes Técnicas Numéricas.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

A Figura 71 apresenta a comparação da potência recebida na Estação Minas Shopping, localizada a 6093 metros do transmissor. Durante a campanha de medição, foi medida uma potência de -108 dBm. Observou-se uma oscilação de aproximadamente 3,42 dB entre o SSW-PE-WAPE e o DMFT-SSPE-WAPE, sendo registrado aproximadamente -89,62 dBm para o SSW-PE-WAPE.

Figura 71 – Comparação da Potência Recebida no Perfil Vertical na Estação Minas Shopping, BH/MG/BRA.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Ao comparar o tempo de processamento, conforme mostrado na Tabela 16, confirma-se o potencial de eficiência computacional da técnica SSW-PE.

Tabela 16 – Comparação do Tempo de Processamento entre Diferentes Técnicas Numéricas no Percurso entre Vilarinho e Minas Shopping, BH/MG/BRA.

Método	**Tempo de Simulação**
DMFT-SSPE-NAPE	36,11 segundos
DMFT-SSPE-WAPE	44,28 segundos
SSW-PE-NAPE	3,23 segundos
SSW-PE-WAPE	4,77 segundos

Fonte: Elaborado pelo Autor.

As conclusões dos estudos de caso, incluindo as análises dos enlaces discutidos, serão apresentadas na Seção 5.6.5.

5.6.5 Conclusões dos Estudos de Casos: Avaliação e Aplicabilidade do Algoritmo SSW-PE

Nesta Seção, é destacada a eficácia do algoritmo SSW-PE como uma alternativa eficiente e precisa para previsões de propagação de ondas eletromagnéticas.

O método aprimorado SSW-PE, apresentado na Seção 5.5, foi investigado e analisado, colocando à prova o guia abrangente do SSW-PE, que compreende uma série de etapas detalhadas que possibilitam e incentivam a comunidade científica a investigar as vantagens do uso das *Wavelets* em comparação com os modelos estabelecidos baseados em Fourier.

Os estudos realistas conduzidos aqui permitiram a observação de resultados obtidos pelo SSW-PE em comparação com outras técnicas numéricas e campanhas de medição. Nos estudos de caso realizados em Mjels e Jerslev na Dinamarca, Cúcuta na Colômbia e no sistema de transporte metroviário localizado em Belo Horizonte no Brasil, foi confirmado que o SSW-PE reproduziu com sucesso as atenuações ao longo do percurso em terrenos com perdas, independentemente do modelo de propagação utilizado (NAPE ou WAPE). Além disso, foi demonstrado que o algoritmo é caracterizado por sua eficiência computacional, requerendo significativamente menos tempo de processamento em comparação com outras abordagens numéricas.

Em resumo, é destacada a utilidade do SSW-PE como uma ferramenta valiosa para modelagem de propagação de ondas, com potencial de aplicação em diversos cenários do mundo real. O SSW-PE oferece uma combinação de precisão e eficiência, tornando-o adequado para uma ampla gama de aplicações em comunicações sem fio, sistemas de radar e outros campos relacionados.

5.7 Conclusão

Neste capítulo, foi introduzido o método *Wavelet* em passos divididos, abordando seu histórico, descrição e aplicação prática em diversos cenários.

Primeiramente, na Seção 5.2, foi apresentado um breve histórico sobre a abordagem *Wavelet* na resolução de equações parabólicas, contextualizando sua evolução e destacando suas principais características e vantagens.

Na Seção 5.3, foi detalhado o método *Wavelet* em passos divididos, seguido pelos estudos conduzidos para validar o potencial dessa abordagem na Seção 5.4.

Na Seção 5.5, foi apresentado o aprimoramento do modelo SSW, denominado SSW-PE. Este método iterativo calcula a propagação de um campo nos domínios *Wavelet* e espacial. Após a aplicação de um FWT e imposição de taxa de compressão, os coeficientes esparsos são propagados usando uma matriz pré-computada que armazena apenas informações significativas, garantindo eficiência sem perda de dados. O diagrama conceitual do algoritmo destacou o uso eficiente de *Wavelets* para cálculos de propagação, permitindo a consideração dos efeitos ambientais e atmosféricos para uma análise abrangente de ambientes realísticos.

Por fim, na Seção 5.6, estudos de casos práticos testaram o SSW-PE em ambientes realistas, comparando-o com medições e técnicas como MOM, FDTD e DMFT-SSPE. Os resultados demonstraram a robustez, eficiência e confiabilidade do SSW-PE. Em Cúcuta, Colômbia, destacou-se a eficiência computacional. Em Mjels, Dinamarca, e Jerslev, Jutland, o SSW-PE foi preciso em terrenos irregulares. No sistema metroferroviário de Belo Horizonte, Brasil, comprovou-se a eficácia em analisar a propagação de ondas em cenários complexos.

Conclui-se que o método SSW-PE apresenta características robustas de eficácia, eficiência e confiabilidade. Destaca-se a utilidade do SSW-PE como uma ferramenta valiosa para modelagem de propagação de ondas, com potencial de aplicação em diversos cenários realísticos.

No Capítulo 6,serão indicadas as perspectivas e implicações do algoritmo SSW-PE para pesquisas futuras, encerrando assim a tese apresentada. Estas perspectivas incluirão possíveis melhorias no algoritmo, a exploração de novas aplicações e a integração com outras tecnologias emergentes, visando ampliar ainda mais o alcance e a eficácia do SSW-PE em diversas áreas da engenharia e das ciências aplicadas.

6 Conclusões e Propostas de Continuidade da Pesquisa

Neste capítulo são apresentadas as considerações finais sobre a pesquisa e propostas de continuidade da pesquisa.

6.1 Considerações Finais

Esta tese foi constituída pelo estudo e desenvolvimento de uma nova técnica híbrida de equações parabólicas e transformações — *Wavelets* — para o desenvolvimento de modelos de propagação de ondas de rádio em meios homogêneos e não homogêneos, aplicados a casos bidimensionais. Ainda, considerou-se a possibilidade da técnica ser estendida a casos tridimensionais. A principal motivação para a escolha dessa abordagem foi a capacidade de investigar cenários realísticos com alta eficiência computacional, aliada à possibilidade de comparação entre técnicas já consolidadas, assim como aquelas em estudos de pesquisas desenvolvidos pelo GAPTEM.

Neste contexto, foram introduzidas as *Wavelets* e suas propriedades, que as estabelecem como um avanço significativo na análise de sinais, fornecendo informações detalhadas sobre o conteúdo de frequências e a localização temporal dos sinais investigados. O caráter inovador dessa abordagem foi reconhecido com a premiação Abel, concedida ao matemático Yves Meyer em 2017. A aplicação das *Wavelets* juntamente com equações parabólicas em pesquisas de modelos de propagação de ondas de rádio foi introduzida em 2011 e, recentemente, a técnica foi utilizada como um modelo alternativo para a redução dos custos computacionais na análise de propagações de longo alcance.

Ao longo deste trabalho, foi investigado o algoritmo SSW, que foi comparado aos métodos SSPE, incluindo o DMFT-SSPE. A implementação dessa investigação exigiu o estudo de diversos algoritmos, buscando evitar instabilidades numéricas que certas combinações de parâmetros poderiam causar. Assim, foram realizados estudos para resolver esses problemas de instabilidade, permitindo uma implementação robusta do algoritmo proposto. Testes canônicos foram desenvolvidos para validar a proposta, garantindo a confiabilidade da técnica.

Uma vez validada a formulação proposta para o SSW-PE, o objetivo da pesquisa foi avaliar o desempenho da implementação quando comparada aos modelos já consolidados, considerando superfícies do solo com perdas e efeitos da atmosfera padrão, especialmente em modelos realísticos. De maneira geral, observou-se que as *Wavelets* apresentaram resultados promissores, oferecendo uma diversidade de possibilidades no emprego da técnica.

Nesta pesquisa, foram discutidos os resultados dos estudos comparativos entre o SSW-PE, outros modelos de propagação de rádio e campanha de medições reais em diferentes ambientes geográficos. Alguns casos distintos foram examinados: Cúcuta, Colômbia; Mjels, Norte de Jutland; Jerslev, também em Jutland na Dinamarca; e o sistema de transporte metroferroviário de Belo Horizonte, Brasil. Foi confirmado o sucesso na investigação das atenuações ao longo do percurso em terrenos com perdas, independentemente do modelo de propagação utilizado (NAPE ou WAPE), enfatizando a eficiência computacional do método. Além disso, foi demonstrado que o algoritmo é caracterizado por sua eficiência computacional, requerendo significativamente menos tempo de processamento em comparação com outras abordagens numéricas.

Os estudos realizados evidenciam a eficácia do algoritmo SSW-PE como uma ferramenta precisa e eficiente para a modelagem de propagação de ondas eletromagnéticas em uma variedade de contextos do mundo real. Sua capacidade de fornecer resultados precisos com um tempo de processamento significativamente reduzido o torna uma opção promissora para diversas aplicações em comunicações sem fio e sistemas de radar. Este trabalho não só valida o algoritmo proposto, mas também explora suas aplicações em diversos contextos de propagação eletromagnética, contribuindo significativamente para pesquisas sobre modelagem e análise de propagação de ondas. O potencial do SSW-PE em fornecer soluções eficazes e economicamente viáveis foi confirmado, posicionando-o como uma técnica de destaque no campo da propagação de ondas de rádio.

Além dos resultados promissores obtidos nesta tese, é importante ressaltar que há áreas que ainda demandam atenção e aprimoramento. Entre as limitações identificadas, destaca-se a necessidade de implementação de um modelo 2WPE para uma análise mais abrangente e precisa da propagação de ondas eletromagnéticas. Além disso, a inclusão de dutos de evaporação e a modelagem para 3-DPE são aspectos que merecem investigação adicional para aumentar a precisão e a eficácia dos modelos propostos. Essas áreas representam oportunidades valiosas para futuras pesquisas, visando aprimorar ainda mais a compreensão e a aplicabilidade das técnicas desenvolvidas neste estudo.

Conclui-se, portanto, que esta pesquisa não apenas avançou significativamente no desenvolvimento de uma nova abordagem para a modelagem de propagação de ondas eletromagnéticas, mas também demonstrou seu potencial para aplicações práticas em diversas áreas, desde comunicações sem fio até sistemas de radar. Os resultados obtidos fornecem uma base sólida para futuras investigações, destacando a importância de continuar a explorar e aperfeiçoar a técnica proposta. Ao enfrentar as limitações identificadas e abordar questões pendentes, como a implementação de modelos mais complexos e a inclusão de fenômenos adicionais, é possível expandir ainda mais o alcance e a utilidade dessa abordagem inovadora.

Portanto, esta tese não apenas contribui para o avanço do conhecimento científico

no campo da propagação de ondas eletromagnéticas, mas também oferece uma plataforma sólida para futuras pesquisas, promovendo o desenvolvimento de soluções mais eficazes e eficientes para os desafios enfrentados em diversas aplicações práticas.

6.2 Propostas de Continuidade da Pesquisa

Foram identificados poucos estudos que abordam o modelo híbrido das *Wavelets* em conjunto com equações parabólicas até o momento. Diante desse cenário, surge uma vasta gama de possibilidades de pesquisa que demandam uma abordagem mais abrangente e aprofundada.

Nesse contexto, destacam-se as diversas oportunidades de investigação que se apresentam. Para garantir a continuidade e o aprimoramento da pesquisa, propõem-se as seguintes atividades:

- Avaliar o desempenho do algoritmo SSW-PE em ambientes reais de propagação de ondas eletromagnéticas, priorizando a precisão da modelagem em cenários complexos, como áreas urbanas densamente povoadas ou regiões montanhosas.
- Conduzir uma análise de otimização dos parâmetros do SSW-PE, com o objetivo de maximizar sua eficácia na predição de propagação de ondas em diferentes frequências e condições atmosféricas, garantindo resultados mais precisos e confiáveis em diversas situações operacionais, desde comunicações de curto alcance até sistemas de radar de longo alcance.
- Incorporar o termo de retroespalhamento em ambas as soluções do SSW-PE, analisando a incidência desse fenômeno de espalhamento em seus resultados.
- Investigar a integração de dados adicionais, como informações topográficas mais detalhadas e dados climáticos em tempo real, ao modelo SSW-PE, com propósito de enriquecer sua capacidade de previsão e adaptação a mudanças ambientais, utilizando técnicas de aprendizado de máquina para análise e incorporação automática de novos dados ao modelo.
- Desenvolver estratégias para padronizar e consolidar conjuntos de dados de propagação de ondas eletromagnéticas, provenientes de diferentes fontes e contextos geográficos, em um banco de dados unificado, permitindo uma análise mais abrangente e robusta do desempenho do SSW-PE em uma variedade de cenários de propagação, facilitando a comparação e validação dos resultados.
- Consolidação e aprimoramento da formulação do SSW-PE, com o objetivo de garantir a estabilidade numérica, e aperfeiçoamento da eficiência da matriz de propagação

das *Wavelets*, eliminando informações redundantes e aproveitando as propriedades de translação das *Wavelets*.

REFERÊNCIAS

[1] ZHOU, H.; DOUVENOT, R.; CHABORY, A. Modeling the long-range wave propagation by a split-step wavelet method. *Journal of Computational Physics*, v. 402, p. 109042, 2020. ISSN 0021-9991. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002199911930748X>.

[2] GRAPS, A. An introduction to wavelets. *IEEE Computational Science and Engineering*, v. 2, n. 2, p. 50–61, 1995.

[3] MALLAT, S. *A Wavelet Tour of Signal Processing, Third Edition: The Sparse Way*. 3rd. ed. USA: Academic Press, Inc., 2008. ISBN 0123743702.

[4] ZHOU, H.; CHABORY, A.; DOUVENOT, R. A 3-d split-step fourier algorithm based on a discrete spectral representation of the propagation equation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 65, n. 4, p. 1988–1995, 2017.

[5] BONNAFONT, T.; DOUVENOT, R.; CHABORY, A. A local split-step wavelet method for the long range propagation simulation in 2d. *Radio Science*, v. 56, n. 2, p. 1–11, 2021.

[6] IQBAL, A.; JEOTI, V. Numerical modeling of radio wave propagation in horizontally inhomogeneous environment using split-step wavelet method. In: *2012 4th International Conference on Intelligent and Advanced Systems (ICIAS2012)*. [S.l.: s.n.], 2012. v. 1, p. 200–205.

[7] ROCHA, A. et al. An efficient and accurate algorithm for electromagnetic wave propagation modeling based on wavelet transforms. *Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications*, Sociedade Brasileira de Microondas e Optoeletrônica e Sociedade Brasileira de Eletromagnetismo, v. 23, n. 1, p. e2024279458, 2024. ISSN 2179-1074. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/2179-10742024v23i1279458>.

[8] ALEXANDRE, A.; CÁSSIO, G. R. E. Método wavelet para solução de equações parabólicas aplicadas a problemas de predição de cobertura radioelétrica. In: *SBMO 2022 (20º Simpósio Brasileiro de Micro-ondas)*. Natal, RN: [s.n.], 2022.

[9] LEVY, M. *Parabolic Equation Methods for Electromagnetic Wave Propagation*. [S.l.: s.n.], 2000. v. 45. ISBN 9780852967645.

[10] SEVGI, L.; ULUISIK, C.; AKLEMAN, F. A matlab-based two-dimensional parabolic equation radiowave propagation package. *Antennas and Propagation Magazine, IEEE*, v. 47, p. 164 – 175, 09 2005.

[11] TUNC, C. et al. Fast integral equation solutions: Application to mixed path terrain profiles and comparisons with parabolic equation method. In: _____. [S.l.: s.n.], 2006. p. 55–63. ISBN 978-3-540-30635-1.

[12] AKLEMAN, F.; SEVGI, L. A novel finite-difference time-domain wave propagator. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 48, n. 5, p. 839–841, 2000.

[13] OZYALCIN, M.; AKLEMAN, F.; SEVGI, L. A novel tlm-based time-domain wave propagator. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 51, n. 7, p. 1679–1680, 2003.

[14] SEVGI, L. A ray-shooting visualization matlab package for 2d ground-wave propagation simulations. *Antennas and Propagation Magazine, IEEE*, v. 46, p. 140 – 145, 09 2004.

[15] DOCKERY, D.; KUTTLER, J. An improved impedance-boundary algorithm for fourier split-step solutions of the parabolic wave equation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 44, n. 12, p. 1592–1599, 1996.

[16] LEONTOVICH, M.; FZCK, V. Solution of propagation of electromagnetic waves along the earth's surface by the method of parabolic equations. *J. Physics USSR vol. 10 pp. 13-23*, 1946.

[17] APAYDIN, G. *Radio wave propagation and parabolic equation modeling*. Hoboken, New Jersey: Wiley IEEE Press, 2017. ISBN 9781119432166.

[18] HARDIN, R. H. Application of the split-step fourier method to the numerical solution of nonlinear and variable coefficient wave equations. *Siam Review*, v. 15, p. 423, 1973.

[19] Dockery, G. D.; Konstanzer, G. C. Recent advances in prediction of tropospheric propagation using the parabolic equation. *Johns Hopkins APL Technical Digest*, v. 8, p. 404–412, dez. 1987.

[20] DOCKERY, G. Modeling electromagnetic wave propagation in the troposphere using the parabolic equation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 36, n. 10, p. 1464–1470, 1988.

[21] CLAERBOUT, J. F. Fundamentals of geophysical data processing. 1 1985. Disponível em: <https://www.osti.gov/biblio/5783154>.

[22] FEIT, M. D.; FLECK, J. A. Light propagation in graded-index optical fibers. *Appl. Opt.*, OSA, v. 17, n. 24, p. 3990–3998, Dec 1978. Disponível em: <http://www.osapublishing.org/ao/abstract.cfm?URI=ao-17-24-3990>.

[23] COLLINS, M. D.; EVANS, R. B. A two-way parabolic equation for acoustic backscattering in the ocean. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 91, n. 3, p. 1357–1368, 1992. Disponível em: <https://doi.org/10.1121/1.402465>.

[24] THOMSON, D. J.; CHAPMAN, N. R. A wide-angle split-step algorithm for the parabolic equation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 74, n. 6, p. 1848–1854, 1983. Disponível em: <https://doi.org/10.1121/1.390272>.

[25] KUTTLER, J. Differences between the narrow-angle and wide-angle propagators in the split-step fourier solution of the parabolic wave equation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 47, n. 7, p. 1131–1140, 1999.

[26] HOLM, P. D. Wide-angle shift-map pe for a piecewise linear terrain—a finite-difference approach. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 55, n. 10, p. 2773–2789, 2007.

[27] YANG, Y. et al. Fourier transform solution of split-step padé parabolic equation. *Dianbo Kexue Xuebao/Chinese Journal of Radio Science*, v. 29, p. 450–454+475, 06 2014.

[28] OZGUN, O. Recursive two-way parabolic equation approach for modeling terrain effects in tropospheric propagation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 57, n. 9, p. 2706–2714, 2009.

[29] Apaydin, G. et al. A novel two-way finite-element parabolic equation groundwave propagation tool: Tests with canonical structures and calibration. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 49, n. 8, p. 2887–2899, 2011.

[30] Apaydin, G.; Sevgi, L. Two-way propagation modeling in waveguides with three-dimensional finite-element and split-step fourier-based pe approaches. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, v. 10, p. 975–978, 2011.

[31] OZGUN, O. et al. Petool: Matlab-based one-way and two-way split-step parabolic equation tool for radiowave propagation over variable terrain. *Computer Physics Communications*, v. 182, n. 12, p. 2638–2654, 2011. ISSN 0010-4655. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465511002669>.

[32] WANG, K.; LONG, Y. Propagation modeling over irregular terrain by the improved two-way parabolic equation method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 60, n. 9, p. 4467–4471, 2012.

[33] APAYDIN, G. et al. Two-way split-step fourier and finite element based parabolic equation propagation tools: Comparisons and calibration. In: *2010 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 1–4.

[34] APAYDIN, G.; SEVGI, L. Numerical investigations of and path loss predictions for surface wave propagation over sea paths including hilly island transitions. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 58, n. 4, p. 1302–1314, 2010.

[35] APAYDIN, G.; SEVGI, L. Calibration of three-dimensional parabolic-equation propagation models with the rectangular waveguide problem. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, v. 54, n. 6, p. 102–116, 2012.

[36] OZGUN, O. et al. Two-way split-step parabolic equation algorithm for tropospheric propagation: Tests and comparisons. In: *2010 10th Mediterranean Microwave Symposium*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 14–17.

[37] APAYDIN, G.; SEVGI, L. A novel split-step parabolic-equation package for surface-wave propagation prediction along multiple mixed irregular-terrain paths. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, v. 52, n. 4, p. 90–97, 2010.

[38] THE MATHWORKS, INC. *MATLAB version 9.3.0.713579 (R2017b)*. Natick, Massachusetts, 2017.

[39] OZGUN, O. et al. Comments on "propagation modeling over irregular terrain by the improved two-way parabolic equation method". *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 62, n. 7, p. 3894–3894, 2014.

[40] WANG, K.; LONG, Y. Reply to "comments on 'propagation modeling over irregular terrain by the improved two-way parabolic equation method'". *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 62, n. 7, p. 3895–3896, 2014.

[41] LEVY, M. Parabolic equation modelling of propagation over irregular terrain. In: *1991 Seventh International Conference on Antennas and Propagation, ICAP 91 (IEE)*. [S.l.: s.n.], 1991. p. 816–819 vol.2.

[42] JANASWAMY, R. A curvilinear coordinate-based split-step parabolic equation method for propagation predictions over terrain. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 46, n. 7, p. 1089–1097, 1998.

[43] ZAPOROZHETS, A.; LEVY, M. Bistatic rcs calculations with the vector parabolic equation method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 47, n. 11, p. 1688–1696, 1999.

[44] ZAPOROZHETS, A. Application of vector parabolic equation method to urban radiowave propagation problems. *IEE Proceedings - Microwaves, Antennas and Propagation*, v. 146, p. 253–256(3), August 1999. ISSN 1350-2417.

[45] AWADALLAH, R. et al. Effects of lateral terrain variations on tropospheric radar propagation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 53, n. 1, p. 420–434, 2005.

[46] ID, R. et al. Modeling radar propagation in three-dimensional environments. *Johns Hopkins APL Technical Digest*, v. 25, 04 2004.

[47] JANASWAMY, R. Path loss predictions in the presence of buildings on flat terrain: a 3-d vector parabolic equation approach. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 51, n. 8, p. 1716–1728, 2003.

[48] SILVA, M. A. N. da; COSTA, E.; LINIGER, M. Analysis of the effects from lateral variations of irregular terrain based on a three-dimensional parabolic equation. In: *Proceedings of the Fourth European Conference on Antennas and Propagation*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 1–4.

[49] MARCUS, S.; DEGANI, D. Domain decomposition for finite difference solutions of parabolic equations in wave propagation. In: *Proceedings of IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium and URSI National Radio Science Meeting*. [S.l.: s.n.], 1994. v. 3, p. 2088–2091 vol.3.

[50] VALTR, P.; PECHAC, P. Tropospheric refraction modeling using ray-tracing and parabolic equation. *Radioengineering*, v. 14, 12 2005.

[51] SIRKOVA, I. Comparison between a local and a nonlocal transparent boundary condition applied to the tropospheric ducting propagation problem. *Microwave and Optical Technology Letters*, v. 25, p. 44–47, 2000.

[52] SIRKOVA, I.; FIGUEROA, H. E. H. Local transparent boundary condition applied to the modeling of tropospheric ducting propagation. *Microwave and Optical Technology Letters - MICROWAVE OPT TECHNOL LETT*, v. 21, p. 343–346, 06 1999.

[53] SIRKOVA, I.; MIKHALEV, M. Parabolic wave equation method applied to the tropospheric ducting propagation problem: A survey. *Electromagnetics*, v. 26, p. 155–173, 02 2006.

[54] IQBAL, A.; JEOTI, V. Numerical evaluation of radiowave propagation in evaporation ducts using fem. In: *2011 National Postgraduate Conference*. [S.l.: s.n.], 2011. p. 1–6.

[55] HITNEY, H. Hybrid ray optics and parabolic equation methods for radar propagation modeling. In: *92 International Conference on Radar*. [S.l.: s.n.], 1992. p. 58–61.

[56] CRAIG, M. L. K. Parabolic equation modelling of the effects of multipath and ducting on radar systems. *IEE Proceedings F (Radar and Signal Processing)*,

v. 138, p. 153–162(9), April 1991. ISSN 0956-375X. Disponível em: <https://digital-library.theiet.org/content/journals/10.1049/ip-f-2.1991.0021>.

[57] DOCKERY, G. Method for modelling sea surface clutter in complicated propagation environments. *IEE Proceedings F (Radar and Signal Processing)*, v. 137, p. 73–79(6), April 1990. ISSN 0956-375X. Disponível em: <https://digital-library.theiet.org/content/journals/10.1049/ip-f-2.1990.0011>.

[58] KUTTLER, J. R.; DOCKERY, G. D. Theoretical description of the parabolic approximation/fourier split-step method of representing electromagnetic propagation in the troposphere. *Radio Science*, v. 26, n. 02, p. 381–393, 1991.

[59] KUTTLER, J. R.; HUFFAKER, J. D. Solving the parabolic wave equation with a rough surface boundary condition. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 94, n. 4, p. 2451–2453, 1993. Disponível em: <https://doi.org/10.1121/1.407469>.

[60] KUTTLER, J. R.; JANASWAMY, R. Improved fourier transform methods for solving the parabolic wave equation. *Radio Science*, v. 37, n. 2, p. 1–11, 2002.

[61] BARRIOS, A. Parabolic equation modeling in horizontally inhomogeneous environments. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 40, n. 7, p. 791–797, 1992.

[62] BARRIOS, A. Terrain modelling using the split-step parabolic equation method. In: *92 International Conference on Radar*. [S.l.: s.n.], 1992. p. 66–69.

[63] BARRIOS, A. A terrain parabolic equation model for propagation in the troposphere. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 42, n. 1, p. 90–98, 1994.

[64] HITNEY, H. Evaporation duct propagation and near-grazing angle scattering from a rough sea. In: *IEEE 1999 International Geoscience and Remote Sensing Symposium. IGARSS'99 (Cat. No.99CH36293)*. [S.l.: s.n.], 1999. v. 5, p. 2631–2633 vol.5.

[65] BARRIOS, A. E.; PATTERSON, W. L.; SPRAGUE, R. Advanced propagation model (apm) version 2.1.04 computer software configuration item (csci) documents. In: . [S.l.: s.n.], 2002.

[66] SPRAGUE, R. A.; BABU, P. A new propagation prediction tool for earth-space geometries for the advanced refractive effects prediction system (areps). In: *MILCOM 2008 - 2008 IEEE Military Communications Conference*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 1–6.

[67] DOCKERY, G. D. et al. An overview of recent advances for the temper radar propagation model. In: *2007 IEEE Radar Conference*. [S.l.: s.n.], 2007. p. 896–905.

[68] AKLEMAN, F.; SEVGI, L. A novel mom-and sspe-based groundwave-propagation field-strength prediction simulator. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, v. 49, n. 5, p. 69–82, 2007.

[69] PARABOLIC Equation Method. In: ELECTROMAGNETIC Modeling and Simulation. John Wiley & Sons, Ltd, 2014. cap. 15, p. 515–594. ISBN 9781118716410. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781118716410.ch15>.

[70] IQBAL, A.; JEOTI, V. A split step wavelet method for radiowave propagation modelling in tropospheric ducts. 12 2011.

[71] ZHAO SI-XUN HUANG, L.-c. K. Xiao-feng. New method to solve electromagnetic parabolic equation. *Applied Mathematics and Mechanics*, v. 34, 11 2013.

[72] APAYDIN, G.; SEVGI, L. Groundwave propagation at short ranges and accurate source modeling [testing ourselves]. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, v. 55, n. 3, p. 244–262, 2013.

[73] DOCKERY, D.; KUTTLER, J. An improved impedance-boundary algorithm for fourier split-step solutions of the parabolic wave equation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 44, n. 12, p. 1592–1599, 1996.

[74] KUTTLER, J. R.; JANASWAMY, R. Improved fourier transform methods for solving the parabolic wave equation. *Radio Science*, v. 37, n. 2, p. 1–11, 2002.

[75] SPROUSE, C. R.; AWADALLAH, R. S. An angle-dependent impedance boundary condition for the split-step parabolic equation method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 60, n. 2, p. 964–970, 2012.

[76] BERENGER, J.-P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, v. 114, n. 2, p. 185–200, 1994. ISSN 0021-9991. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999184711594>.

[77] AYASLI, S. Seke: A computer model for low altitude radar propagation over irregular terrain. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 34, n. 8, p. 1013–1023, 1986.

[78] BARRIOS, A. A terrain parabolic equation model for propagation in the troposphere. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 42, n. 1, p. 90–98, 1994.

[79] BEILIS, A.; TAPPERT, F. D. Coupled mode analysis of multiple rough surface scattering. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 66, n. 3, p. 811–826, 1979. Disponível em: <https://doi.org/10.1121/1.383685>.

[80] DONOHUE, D.; KUTTLER, J. Propagation modeling over terrain using the parabolic wave equation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 48, n. 2, p. 260–277, 2000.

[81] LI, G. C.; GUO, L. X.; ZHANG, T. T. Research on the microwave propagation in the evaporation duct with obstacles. In: *Manufacturing Science and Technology, ICMST2011*. [S.l.]: Trans Tech Publications Ltd, 2012. (Advanced Materials Research, v. 383), p. 840–845.

[82] APAYDIN, G.; SEVGI, L. Matlab-based fem - parabolic-equation tool for path-loss calculations along multi-mixed-terrain paths [wireless corner]. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, v. 56, n. 3, p. 221–236, 2014.

[83] CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Numerical Methods for Engineers*. [S.l.]: McGraw-Hill Higher Education, 2010. ISBN 9780071267595.

[84] ZHANG, P. et al. Effect of window function on absorbing layers top boundary in parabolic equation. In: *Proceedings of 2014 3rd Asia-Pacific Conference on Antennas and Propagation*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 849–852.

[85] EVANGELISTA, M. M.; REGO, C. G. do. Equação parabólica no domínio do tempo aplicada ao problema de predição de cobertura radioelétrica. In: *Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - PPGEE*. Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, 2016. Disponível em: <https://ppgee.ufmg.br/defesas/1200M.PDF>.

[86] ROZO, D. A. P.; RAMOS, G. L.; REGO, C. G. do. Métodos de equação parabólica aplicados à previsão de cobertura radioelétrica. In: *Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - PPGEE*. Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, 2018. Disponível em: <https://ppgee.ufmg.br/defesas/1487M.PDF>.

[87] GROSSMANN, A.; MORLET, J. Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, v. 15, n. 4, p. 723–736, 1984. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/0515056>.

[88] HAAR, A. Zur theorie der orthogonalen funktionensysteme. *Mathematische Annalen*, v. 69, n. 3, p. 331–371, Sep 1910. ISSN 1432-1807. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01456326>.

[89] DUHEM, P. C. Book Review Précis de Physiothérapie Clinique . Paul Duhem. 603 pp. Paris: Gauthier-Villars, 1937. 130 Fr. fr. *New England Journal of Medicine*, v. 217, n. 27, p. 1116–1116, dez. 1937. ISSN 0028-4793, 1533-4406. Disponível em: <http://www.nejm.org/doi/abs/10.1056/NEJM193712302172726>.

[90] MALLAT, S. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 11, n. 7, p. 674–693, 1989.

[91] MEYER, Y. *Ondelettes et opérateurs*. [S.l.]: Paris : Hermann, 1990.

[92] DAUBECHIES, I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v. 41, n. 7, p. 909–996, 1988. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cpa.3160410705>.

[93] DAUBECHIES, I. *Ten Lectures on Wavelets*. USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. ISBN 0898712742.

[94] STEFFEN, P. et al. Theory of regular m-band wavelet bases. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 41, n. 12, p. 3497–3511, 1993.

[95] HELLER, P. N. Rank m wavelets with n vanishing moments. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, v. 16, n. 2, p. 502–519, 1995. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/S0895479893245486>.

[96] DAUBECHIES, I. *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*. 1993.

[97] HONG, T. kyung; KENNETT, B. L. N. *Journal of Computational Physics 183, 577–622 (2002) doi:10.1006/jcph.2002.7202 On a Wavelet-Based Method for the Numerical Simulation of Wave Propagation*. 2001.

[98] DONOHUE, D.; KUTTLER, J. Propagation modeling over terrain using the parabolic wave equation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 48, n. 2, p. 260–277, 2000.

[99] LINDELL, I. V. Methods for electromagnetic field analysis. 1 1992. Disponível em: <https://www.osti.gov/biblio/6588267>.

[100] DYKHNE, A. M.; KAGANOVA, I. M. The leontovich boundary conditions and calculation of effective impedance of inhomogeneous metal. *Optics Communications*, Elsevier BV, v. 206, n. 1-3, p. 39–56, maio 2002. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/s0030-4018(02)01396-2>.

[101] PARADA, D. et al. A modified radiopropagation multipath model for constant refractivity gradient profiles. *Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications*, Sociedade Brasileira de Microondas e Optoeletrônica e Sociedade Brasileira de Eletromagnetismo, v. 22, n. 2, p. 298–312, 2023. ISSN 2179-1074.

[102] Zhang, P. et al. Applying the parabolic equation to tropospheric groundwave propagation: A review of recent achievements and significant milestones. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, v. 58, n. 3, p. 31–44, 2016.

[103] UNION, I. C. *ITU-R P.453-14 The radio refractive index: its formula and refractivity data, ITU Recommendation"*. [S.l.: s.n.], 2019.

[104] PARADA, D. A. et al. A comparative study between sspe methods and a ho-fdtd algorithm for em propagation over lossy terrains. In: *12th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP 2018)*. [S.l.: s.n.], 2018. p. 1–3.

[105] HVIID, J. et al. Terrain-based propagation model for rural area-an integral equation approach. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 43, n. 1, p. 41–46, 1995.

[106] BATISTA, C. G.; REGO, C. Gonçalves do. A high-order unconditionally stable fdtd-based propagation method. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, v. 12, p. 809–812, 2013.

[107] OLIVEIRA, R.; RAMOS, G. L.; REGO, C. G. do. Predição de cobertura radioelétrica usando métodos de equação parabólica em ambiente metroviário urbano na faixa de vhf. In: *Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - PPGEE*. Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, 2021. Disponível em: <https://ppgee.ufmg.br/defesas/1867M.PDF>.

[108] TERRITORIAL, E. *Satélites de Monitoramento*. [S.l.: s.n.], 2023.

ÍNDICE

1WPE, 32
2-DPE, 33, 37
2WPE, 32, 38
3-DPE, 33, 37

Análise Multirresolução, 62

Backward, 30
Banco de Filtros, 71
BC, 53, 107
Boundary Conditions, 38

Complex Source Point, 77
Compressão de Dados, 61, 73, 77, 84, 97, 100, 113
Condições de Contorno, 38, 53, 54, 58, 94, 107
Condutor Elétrico Perfeito, 89, 100, 101
CSP, 77, 82, 83

Discrete Mixed Fourier Transform, 28
Discrete Sine Transform, 54
DMFT, 28, 42, 45, 97, 113
DMFT-SSPE, 45, 88, 117, 119, 120, 123
DSSF, 97
DST, 54

EM, 98
Equação Parabólica Clássica, 48, 57
Equações Parabólicas bidimensionais, 33
Equações Parabólicas tridimensionais, 33
Esparsa, 63, 73

FD, 28, 38, 119, 120
FEM, 36, 38
FFT, 88, 89
Filtro de Quadratura Espelhada, 62
Filtro Espelho, 71
Finite-Difference Method, 28
Forward, 30
Função de Escalonamento, 61, 65, 66, 69, 71
Função de Translação, 61
Função Mãe, 64
Função Wavelet, 66
FWT, 88, 89, 91, 92

Geometrical Theory of Diffraction, 35
GTD, 35, 44

Hard Threshold, 74

IFWT, 91, 113
Inversa da Transformada Rápida Wavelet, 91

Janela Hanning, 43, 58, 111, 115
Janela Turkey, 43, 111

LSSW, 108

Matriz de Propagação, 88, 91, 92, 108, 109, 113, 140
MFT, 59
Modelagem Bidirecional, 32
Modelagem Unidirecional, 32
MOM, 119, 120
Momentos Nulos, 74–76
Mother Wavelet, 64
MRA, 62
Multirresolução, 69, 89
Método da Imagem Local, 94, 97
Método das Diferenças Finitas, 28
Método das Equações Parabólicas de Feixes Estreito, 32
Método das Equações Parabólicas de Feixes Largo, 32
Método de Equações Parabólicas, 27

Método de Fourier em Passos Divididos, 28
Método dos Elementos Finitos, 36

NAPE, 33, 48, 57, 88, 112, 119, 120, 123
Nyquist, 106, 108

One-Way Parabolic Equation, 32

Paraxial, 27, 29, 30, 35
PEC, 89, 100, 101
Perfectly Matched Layer, 43
PML, 43
Propagação Direta, 30
Propriedade de Dilatação, 64
Propriedade de Translação, 65
Propriedades de Dilatação, 92
Propriedades de Translação, 92

QMF, 62
Quadrature Mirror Filter, 62

Regularidade, 75
Retroespalhamento, 30

Scalling Function, 61, 65
Simetria, 75–77
SPE, 48, 56
Split-Step Fourier, 28, 32, 38
SSF, 28, 89, 92, 94, 98
SSPE, 32, 57, 58, 88, 119, 120
SSW, 88, 91, 97, 98
SSW-PE, 88, 104, 106, 108, 116, 117, 119, 120, 123
Staircase Model, 107
Standard Parabolic Equation, 48
Suporte Compacto, 75, 76

Teoria Geométrica da Difração, 35
Transformada de Fourier, 51, 56
Transformada de Fourier Mista, 59
Transformada Discreta da Função Seno, 54, 55
Transformada Discreta Mista de Fourier, 88
Transformada Rápida de Fourier, 73
Transformada Rápida Wavelet, 69, 91
Transformada Wavelet, 61, 94
Transformada Wavelet Discreta, 63, 69, 71
Two-Way Parabolic Equation, 32

WAPE, 33, 48, 57, 88, 112, 119, 120, 123
Wavelet, 41, 61, 63, 66, 71, 75, 77, 78, 84, 88, 89, 98, 104, 108, 113

Índice de Refração, 29, 41, 48–50, 54, 57, 110, 112, 115