

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Pedro Quintino da Silva Neto

**Álgebras e superálgebras fundamentais e a classificação de variedades com
multiplicidades limitadas por um**

Belo Horizonte-MG
2025

Pedro Quintino da Silva Neto

Álgebras e superálgebras fundamentais e a classificação de variedades com multiplicidades limitadas por um

Tese de doutorado apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais.

Orientadora: Ana Cristina Vieira

Orientador: Rafael Bezerra dos Santos

2025, Pedro Quintino da Silva Neto.
Todos os direitos reservados

Silva Neto, Pedro Quintino da.

S586a Álgebras e superálgebras fundamentais e a classificação de variedades com multiplicidades limitadas por um [recurso eletrônico] / Pedro Quintino da Silva Neto.

Belo Horizonte — 2025.
1 recurso online (65 f. il.): pdf.

Orientadora: Ana Cristina Vieira
Orientador: Rafael Bezerra dos Santos.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f. 62-65

1. Matemática – Teses. 2. Teorema fundamental de álgebra – Teses. 3. Superálgebra – Teses. 3. Identidades polinomiais – Teses. I. Vieira, Ana Cristina. II. Santos, Rafael Bezerra dos. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. IV. Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irénquer Vismeg
Lucas Cruz - CRB 6ª Região - nº 819.



FOLHA DE APROVAÇÃO

*Álgebras e superálgebras fundamentais e a classificação
de variedades com multiplicidades limitadas por um*

PEDRO QUINTINO DA SILVA NETO

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Prof.ª Ana Cristina Vieira
Orientadora - UFMG

Prof. Antônio Giamb Bruno
Univ. Palermo, Itália

Prof. Plamen Emilov Kochloukov
Unicamp

Prof.ª Thais Silva do Nascimento
UFMT

Documento assinado digitalmente
gov.br VIVIANE RIBEIRO TOMAZ DA SILVA
Data: 15/11/2025 08:09:36-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof.ª Viviane Ribeiro Tomaz da Silva
UFSJ

Belo Horizonte, 14 de novembro de 2025.

Agradecimentos

Agradeço profundamente aos meus familiares, em especial à minha mãe, Lourdes Quintino, pelo apoio constante em todos os momentos da minha vida.

Aos meus amigos Douglas, Igor e Vanessa Araújo, agradeço pelo incentivo e pelos memes enviados, que sempre me arrancaram um sorriso quando eu mais precisava.

Aos meus colegas da UFMG, em particular aos colegas da PI-Teoria, agradeço pelas conversas, discussões e distrações que tornaram essa caminhada muito mais leve e palpável.

À Vanessa Lopes, agradeço pelo companheirismo e pelo incentivo que me ajudaram a seguir adiante.

Registro minha profunda gratidão à minha orientadora, Ana Cristina, pela imensa paciência e pela orientação ao longo de todo este trabalho. Ao meu coorientador, Rafael Bezerra, agradeço pelo incentivo decisivo que tornou possível minha entrada no doutorado. Agradeço também aos meus companheiros de república Genilson, Mateus e Zike, pela convivência e amizade. Estendo meus agradecimentos aos professores e funcionários da UFMG, ao professor Rosivaldo, da Unimontes, e aos membros da banca examinadora, em especial ao professor Antonio Giambruno, por me receber tão gentilmente e pela disposição em colaborar com este trabalho.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro, essencial para a realização desta pesquisa.

“A persistência é o caminho do êxito.”

Charles Chaplin

Resumo

Seja A uma álgebra sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero. A teoria de representações do grupo simétrico S_n possui um papel importante no estudo das identidades polinomiais de uma álgebra A . Neste contexto, associa-se a A uma sequência de S_n -caracteres $\{\chi_n(A)\}_{n \geq 1}$, chamados de cocaracteres de A , e um problema central na teoria é determinar a decomposição de cada $\chi_n(A)$ em caracteres irredutíveis e para isto, a multiplicidade de cada um destes caracteres deve ser determinada. Nesta tese, classificamos, a menos de PI-equivalência, as álgebras fundamentais cujas sequências de cocaracteres possuem multiplicidades limitadas por um. Como consequência, obtemos uma completa classificação, a menos de PI-equivalência, de todas as álgebras cujos cocaracteres possuem multiplicidades limitadas por um. Além disso, ampliamos o estudo apresentado das álgebras fundamentais com multiplicidades limitadas por um para o contexto das superálgebras e mostramos que, a menos de isomorfismo, D^{gr} é a única superálgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental com \mathbb{Z}_2 -expoente igual a 2 e com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um.

Palavras-chave: cocaracter; multiplicidades; álgebras fundamentais; identidades polinomiais.

Abstract

Let A be an algebra over an algebraically closed field of characteristic zero. The representation theory of the symmetric group S_n plays an important role in the study of the polynomial identities of an algebra A . In this context, one associates to A a sequence of S_n -characters $\{\chi_n(A)\}_{n \geq 1}$, called cocharacters of A , and a central problem is to determine the decomposition of each $\chi_n(A)$ into irreducible characters. In this thesis, we classify, up to PI-equivalence, the fundamental algebras whose cocharacter sequences have multiplicities bounded by one. As a consequence, we obtain a complete classification, up to PI-equivalence, of all algebras whose cocharacters have multiplicities bounded by one. Furthermore, we extend the presented study of fundamental algebras with multiplicities bounded by one to the context of superalgebras and show that, up to isomorphism, D^{gr} is the only \mathbb{Z}_2 -fundamental superalgebra with \mathbb{Z}_2 -exponent equal to 2 and with \mathbb{Z}_2 -multiplicities bounded by one.

Keywords: cocharacter; multiplicities; fundamental algebras; polynomial identities.

Sumário

Introdução	9
1 Generalidades	13
1.1 Álgebras e cocaracteres	13
1.2 Superálgebras e \mathbb{Z}_2 -cocaracteres	18
2 A classificação no caso ordinário	24
2.1 Álgebras fundamentais	24
2.2 Álgebras com multiplicidades limitadas por 1	31
3 Extensão dos resultados para superálgebras	39
3.1 Superálgebras \mathbb{Z}_2 -fundamentais	39
3.2 Superálgebras e \mathbb{Z}_2 -multiplicidades	44
3.3 A superálgebra D^{gr}	48
4 O caso \mathbb{Z}_2-graduado	53
4.1 Caso inicial	53
4.2 Conjecturas para os demais casos	60
Referências	62

Introdução

Nesta tese, consideramos A uma álgebra associativa sobre um corpo algebricamente fechado F de característica zero e estamos interessados no estudo do espaço quociente

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap \text{Id}(A)},$$

onde P_n é o espaço dos polinômios multilineares com n variáveis fixas e $\text{Id}(A)$ é o conjunto formado por todas as identidades satisfeitas por A , o qual é um ideal da álgebra livre associativa $F\langle X \rangle$ gerada pelo conjunto enumerável de variáveis $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ sobre F .

Desde que o ideal $\text{Id}(A)$ é um T -ideal, ou seja, é invariante por todos os endomorfismos da álgebra livre $F\langle X \rangle$, é evidente que a ação do grupo simétrico S_n no espaço P_n induz uma estrutura de S_n -módulo no espaço $P_n(A)$. O S_n -caracter de $P_n(A)$ é denotado por $\chi_n(A)$ e denominado n -ésimo cocaracter de A . Além disso, em característica zero, podemos escrever

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda, \quad (1)$$

onde χ_λ é o S_n -caracter irredutível associado à partição λ de n e m_λ é a respectiva multiplicidade.

Podemos dizer que um dos desafios da PI-teoria é determinar a decomposição do n -ésimo cocaracter de A . Para isto, devemos determinar todas as multiplicidades m_λ aparecendo em (1).

Aqui, estamos interessados em uma situação particular. Dizemos que uma álgebra A possui multiplicidades limitadas por um se, para todo $n \geq 1$ e qualquer partição λ de n , a multiplicidade m_λ do caracter irredutível χ_λ aparecendo na decomposição do n -ésimo cocaracter de A satisfaz $m_\lambda \leq 1$.

Em [5], Ananin e Kemer caracterizaram os T -ideais das álgebras A que possuem multiplicidades limitadas por um. Especificamente, os autores demonstraram que uma álgebra A possui multiplicidades limitadas por um se, e somente se, A satisfaz uma identidade do tipo $\alpha[x_1, x_2]x_2 + \beta x_2[x_1, x_2]$, onde $\alpha, \beta \in F$ não são simultaneamente nulos.

Recentemente, diversos pesquisadores trabalharam na extensão do resultado original de Ananin e Kemer de 1976 para o contexto de álgebras munidas de estruturas adicionais.

Em 2009, Giambruno e Mishchenko [14] estenderam o resultado de Ananin e Kemer para o contexto de superálgebras e álgebras munidas de involução.

Em 2018, Giambruno, Polcino Milies e Valenti [17] demonstraram um resultado análogo para álgebras graduadas por um grupo finito. Em 2021, Martino [29] estendeu o resultado de Ananin e Kemer para superálgebras munidas de involução graduada ou de superinvolução e este resultado foi estendido recentemente em [40] para álgebras G -graduadas munidas de involução graduada, onde G é um grupo abeliano finito.

É importante ressaltar que, apesar das caracterizações dadas nos trabalhos citados acima, ainda não existe, em qualquer um dos contextos citados, uma classificação das PI-álgebras com multiplicidades limitadas por um e fomos levados a nos perguntar: é possível obter tal classificação?

Nesta tese, respondemos à questão anterior apresentando uma lista completa das álgebras, a menos de PI-equivalência, com multiplicidades limitadas por um. Esse resultado, que faz parte da referência [19], é obtido a partir de descrições precisas das chamadas álgebras fundamentais que possuem multiplicidades limitadas por um.

De fato, o conceito de álgebras fundamentais atualmente vem ganhando cada vez mais destaque na PI-teoria. Este conceito foi desenvolvido primeiramente por Kemer [24], em termos de polinômios alternados que não são identidades de A . Recentemente, tal conceito foi definido em uma linguagem mais atual, que pode ser conferido em [1], [18] e [23].

Considerando A uma álgebra de dimensão finita com uma decomposição de Wedderburn-Malcev dada por $A = \bar{A} + J(A)$, e s_A como o menor inteiro positivo de modo que $J(A)^{s_A+1} = \{0\}$, Giambruno, Polcino Milies e Zaicev [18] demonstraram que A é fundamental se, e somente se, para todo n suficientemente grande, existe um S_n -caracter χ_λ aparecendo com multiplicidade não nula em $\chi_n(A)$ de modo que o diagrama de Young D_λ associado a λ possui exatamente $s_A - 1$ boxes abaixo das suas $\dim_F \bar{A}$ primeiras linhas.

Aqui neste trabalho, primeiramente classificamos as álgebras fundamentais com multiplicidades limitadas por um e, fazendo uso desta classificação, encontramos uma classificação mais geral através de um fato crucial: toda álgebra de dimensão finita é PI-equivalente a uma soma direta finita de álgebras fundamentais (veja [1], Proposição 17.2.34).

Após obter a classificação procurada no contexto de álgebras sem estruturas adicionais, estendemos o estudo das álgebras fundamentais com multiplicidades limitadas por um para o contexto das superálgebras. Lembre-se que uma superálgebra é uma álgebra A sobre F admitindo uma decomposição em dois subespaços $A = A^{(0)} \dot{+} A^{(1)}$ de modo que $A^{(0)}A^{(0)} + A^{(1)}A^{(1)} \subset A^{(0)}$ e $A^{(0)}A^{(1)} + A^{(1)}A^{(0)} \subset A^{(1)}$. Neste caso dizemos que A é uma superálgebra com graduação $(A^{(0)}, A^{(1)})$. Além disso, consideramos o espaço

$$P_n^{gr}(A) = \frac{P_n^{gr}}{P_n^{gr} \cap \text{Id}^{gr}(A)}$$

onde $\text{Id}^{gr}(A)$ é o T_2 -ideal das identidades graduadas de A , o qual é invariante por qualquer endomorfismo de $F\langle Y \cup Z \rangle$, a superálgebra associativa livre sobre F , que preserva a graduação e P_n^{gr} é o espaço dos \mathbb{Z}_2 -polinômios multilineares de grau n .

Temos que o grupo hiperoctaedral $\mathbb{Z}_2 \wr S_n$ age naturalmente em P_n^{gr} , o qual induz uma estrutura de $\mathbb{Z}_2 \wr S_n$ -módulo no espaço

$$P_n^{gr}(A) = \frac{P_n^{gr}}{P_n^{gr} \cap \text{Id}^{gr}(A)}.$$

Denotaremos por $\chi_n^{gr}(A)$ o $\mathbb{Z}_2 \wr S_n$ -caracter de $P_n^{gr}(A)$, chamado de \mathbb{Z}_2 -cocaracter de A , e lembrando que existe uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{Z}_2 \wr S_n$ -caracteres irredutíveis e multipartições $\langle \lambda \rangle \vdash n$, como estamos trabalhando em característica zero, podemos escrever

$$\chi_n^{gr}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash n} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}, \quad (2)$$

onde $\chi_{\langle \lambda \rangle}$ é o $\mathbb{Z}_2 \wr S_n$ -caracter irredutível associado à multipartição $\langle \lambda \rangle$ e $m_{\langle \lambda \rangle}$ é a respectiva multiplicidade.

Analogamente ao caso ordinário, dizemos que uma superálgebra A possui \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um se, para todo $n \geq 1$ e qualquer multipartição $\langle \lambda \rangle$ de n , a $\mathbb{Z}_2 \wr S_n$ -multiplicidade m_{λ} do caracter irredutível $\chi_{\langle \lambda \rangle}$ na decomposição do n -ésimo \mathbb{Z}_2 -cocaracter de A (como dado em (2)) satisfaz $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$.

Em [14], Giambruno e Mishchenko estenderam o resultado de Ananin e Kemer, caracterizando as superálgebras com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um através de \mathbb{Z}_2 -identidades satisfeitas pela superálgebra. Especificamente, os autores demonstraram que A possui \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um se, e somente se, existem constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in F$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ e $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$, de modo que $\alpha y_1 z_2 + \beta z_2 y_1$, $\gamma y_1 [y_1, y_2] + \delta [y_1, y_2] y_1 \in \text{Id}^{gr}(A)$.

Observamos que, considerando a situação acima, a \mathbb{Z}_2 -identidade $\gamma y_1 [y_1, y_2] + \delta [y_1, y_2] y_1$ garante que $A^{(0)}$ é uma álgebra com multiplicidades limitadas por um. Assim, o estudo das superálgebras com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um consiste no estudo das superálgebras cuja componente par é PI-equivalente a alguma das álgebras da classificação correspondente no caso ordinário.

Nesse sentido, estendemos o estudo das álgebras fundamentais para o contexto das superálgebras, definindo as chamadas superálgebras \mathbb{Z}_2 -fundamentais para obter informações sobre as superálgebras com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um. Um dos resultados que provamos é que se A é uma superálgebra de dimensão finita com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um, então o \mathbb{Z}_2 -expoente de A é menor ou igual a 2.

Contribuímos com resultados originais, dentre os quais, demonstramos que se D^{gr} é a álgebra $F + cF$, $c^2 = 1$, com graduação (F, cF) então, D^{gr} é, a menos de isomorfismo,

a única superálgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um com \mathbb{Z}_2 -expoente igual a 2. Além disso, discutimos alguns resultados para o caso em que o \mathbb{Z}_2 -expoente é igual a 1.

Para alcançar os nossos objetivos, organizamos a tese em quatro capítulos.

O primeiro capítulo reúne definições e resultados essenciais da PI-teoria que servirão de base para as discussões desenvolvidas nos capítulos posteriores.

No segundo capítulo, apresentamos o resultado principal dessa tese, ou seja, apresentamos a classificação completa das álgebras com multiplicidades limitadas por um.

No terceiro capítulo, estendemos a discussão para o contexto de superálgebras. Mostramos que resultados acerca de álgebras fundamentais se comportam de modo análogo quando consideramos as chamadas álgebras \mathbb{Z}_2 -fundamentais. Além disso, demonstramos que D^{gr} é, a menos de isomorfismo, a única superálgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental com multiplicidades limitadas por um e \mathbb{Z}_2 -expoente 2.

No último capítulo, fazendo uso da classificação dada no contexto ordinário, apresentamos a solução para o problema de classificação considerando uma das possibilidades para a componente par. Neste caso, classificamos as superálgebras de dimensão finita com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um e $\exp^{gr}(A) = 1$ tais que $A^{(0)}$ é PI-equivalente a $F \oplus N$, onde N é uma superálgebra nilpotente. Por fim, discutimos problemas que estão sendo tratados em pesquisas em andamento, os quais deverão compor trabalhos futuros relacionados a esta tese na intenção de concluir a classificação geral de superálgebras com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um.

Capítulo 1

Generalidades

Este capítulo é dedicado à apresentação de conceitos e resultados essenciais da PI-teoria que constituem a base para o desenvolvimento dos capítulos seguintes. Na primeira seção, discutiremos o caso ordinário, correspondente a álgebras sem estrutura adicional. Na segunda seção, ampliaremos os conceitos e resultados para o contexto de superálgebras, estabelecendo as conexões necessárias para o desenvolvimento desta tese.

1.1 Álgebras e cocaracteres

Ao longo do texto, F denotará um corpo algebricamente fechado de característica zero e $F\langle X \rangle$ denotará a álgebra livre no conjunto enumerável de variáveis $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ sobre F .

Recordemos que, se A é uma F -álgebra associativa e $f = f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$ é um polinômio tal que $f(a_1, \dots, a_n) = 0$, para todos $a_1, \dots, a_n \in A$, então dizemos que f é uma identidade polinomial de A e escrevemos $f \equiv 0$ em A . Neste caso, também dizemos que A satisfaz f . Além disso, A é dita uma PI-álgebra se satisfaz algum polinômio não nulo em $F\langle X \rangle$.

Denotaremos por $\text{Id}(A)$ o T -ideal de A , ou seja,

$$\text{Id}(A) = \{f \in F\langle X \rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } A\}.$$

Denotaremos também por $\text{var}(A)$ a variedade gerada por A , ou seja, $\text{var}(A)$ é a classe de todas as álgebras satisfazendo as identidades de A . Se A e B são álgebras satisfazendo as mesmas identidades, isto é, se $\text{Id}(A) = \text{Id}(B)$, então temos $\text{var}(A) = \text{var}(B)$ e, neste caso, escrevemos $A \sim_T B$.

Observamos que $\text{Id}(A)$ é um T -ideal de $F\langle X \rangle$, ou seja, é invariante por qualquer endomorfismo de $F\langle X \rangle$. Além disso, Kemer [25] mostrou que, em característica zero, $\text{Id}(A)$ é finitamente gerado como T -ideal. Se f_1, \dots, f_r são geradores de um T -ideal I , denotaremos este fato por $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle_T$.

É bastante conhecido que, utilizando o processo de multilinearização, é sempre possível encontrar uma identidade multilinear a partir de uma identidade qualquer de A .

Assim sendo, consideramos o espaço P_n dos polinômios multilineares em n variáveis, isto é,

$$P_n = \text{span}_F \{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}.$$

A partir disso, definimos o espaço quociente

$$P_n(A) := \frac{P_n}{P_n \cap \text{Id}(A)}.$$

Observe que o valor numérico dado pela dimensão de $P_n(A)$ nos fornece informações sobre o comportamento das identidades de A . Diante deste fato, em 1972, Regev [39] definiu a sequência de codimensões de A , objeto da nossa próxima definição.

Definição 1.1.1. *Seja A uma álgebra e $n \geq 1$ um inteiro. A n -ésima codimensão de A é o inteiro não negativo*

$$c_n(A) = \dim_F P_n(A).$$

A sequência $\{c_n(A)\}_{n \geq 1}$ é denominada sequência de codimensões de A . Se $\mathcal{V} = \text{var}(A)$, então definimos $c_n(\mathcal{V}) = c_n(A)$.

Como exemplo, se UT_2 é a álgebra de matrizes triangulares superiores 2×2 e $\mathcal{G} = \langle 1, e_1, e_2, \dots \mid e_i e_j = -e_j e_i \rangle$ é a álgebra de Grassmann unitária de dimensão infinita, então $c_n(UT_2) = 2^{n-1}(n-2) + 2$ e $c_n(\mathcal{G}) = 2^{n-1}$, para todo $n \geq 1$ (veja [28] e [27], respectivamente). Deste modo, vemos que as sequências de codimensões de \mathcal{G} e de UT_2 crescem exponencialmente.

Um fato bastante conhecido é que se, A satisfaz uma identidade não nula, então a sequência $\{c_n(A)\}_{n \geq 1}$ é limitada exponencialmente (veja [39]), ou seja, existem constantes α, β tais que $c_n(A) \leq \alpha \beta^n$, para todo $n \geq 1$. Além disso, Giambruno e Zaicev demonstraram que o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$ existe e é um inteiro não negativo. De fato, eles provaram o seguinte.

Teorema 1.1.2 (Veja [22], Proposições 1 e 2). *Seja A uma álgebra sobre um corpo F de característica zero satisfazendo uma identidade polinomial não-nula. Então existem um inteiro não negativo d e constantes $C_1 > 0$, C_2 , t_1 e t_2 tais que*

$$C_1 n^{t_1} d^n \leq c_n(A) \leq C_2 n^{t_2} d^n.$$

De acordo com o teorema anterior, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A)} = d$ e denominaremos este inteiro por PI-exponente de A , denotado $\text{exp}(A)$.

Além disso, em [22], os autores apresentaram um método para o cálculo do PI-exponente de uma álgebra de dimensão finita. Para apresentar esse resultado, necessitamos primeiramente falar da decomposição de Wedderburn-Malcev de uma álgebra de dimensão finita.

Para duas álgebras A e B , denotaremos por $A \oplus B$ a sua soma direta no sentido de álgebras e por $A \dot{+} B$ a sua soma direta no sentido de espaços vetoriais.

Teorema 1.1.3 (Veja [21], Teorema 3.4.3). *Sejam A uma álgebra de dimensão finita sobre F e $J(A)$ o seu radical de Jacobson. Então, existe uma subálgebra semissimples maximal B de A tal que $A = B \dot{+} J(A)$.*

Além disso, lembre-se que se F é um corpo algebricamente fechado, então toda álgebra simples de dimensão finita é isomorfa a uma álgebra de matrizes $M_n(F)$, para algum $n \geq 1$. A seguir, apresentamos um método bastante prático para se calcular o PI-expoente de uma álgebra de dimensão finita.

Lema 1.1.4 (Veja [22]). *Seja A uma álgebra de dimensão finita e considere $A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_q \dot{+} J(A)$ uma decomposição de Wedderburn-Malcev de A , onde B_i é simples, para todo $i = 1, \dots, q$. Então,*

$$\exp(A) = \max\{\dim_F A_{i_1} \oplus \cdots \oplus A_{i_s}\},$$

onde as A_{i_i} 's são álgebras distintas no conjunto $\{B_1, \dots, B_q\}$ satisfazendo a condição $A_{i_1} J A_{i_2} J \cdots J A_{i_{s-1}} J A_{i_s} \neq \{0\}$.

Ainda no contexto das álgebras de dimensão finita, a decomposição do radical de Jacobson constitui uma ferramenta fundamental para o estudo de álgebras cuja parte semissimples apresenta apenas uma componente simples. Por essa razão, apresentamos tal decomposição no próximo lema.

Lema 1.1.5 (Veja [11]). *Seja A uma álgebra de dimensão finita e suponha que $A = B \dot{+} J$, onde B é uma álgebra simples e J é o radical de Jacobson de A . Então J pode ser decomposto como uma soma de B -bimódulos*

$$J = J_{01} \dot{+} J_{10} \dot{+} J_{11} \dot{+} J_{00},$$

tal que, para $i \in \{0, 1\}$, J_{ik} é um módulo fiel à esquerda ou um 0-módulo à esquerda de acordo com $i = 1$ ou $i = 0$, respectivamente. Analogamente, J_{ik} é um módulo fiel à direita ou um 0-módulo à direita de acordo com $k = 1$ ou $k = 0$, respectivamente.

Claramente, se A é uma álgebra satisfazendo as hipóteses do lema anterior e 1_B é a unidade de B , então

$$1_B a 1_B = a, \quad 1_B b = b \quad \text{e} \quad c 1_B = c,$$

para quaisquer $a \in J_{11}$, $b \in J_{10}$ e $c \in J_{01}$. Além disso, $b 1_B = 0$ e $1_B c = 0$.

Lembre-se que uma álgebra A tem crescimento polinomial (da sequência de codimensões) se sua sequência de codimensões é limitada polinomialmente, isto é, se existem constantes q, k tais que $c_n(A) \leq qn^k$, para todo $n \geq 1$. Pelo Teorema 1.1.2, observamos que a sequência de codimensões $\{c_n(A)\}_{n \geq 1}$ é limitada polinomialmente se, e somente se, $\exp(A) \leq 1$. Kemer, em [26], foi o primeiro a caracterizar álgebras com crescimento polinomial, provando o seguinte teorema.

Teorema 1.1.6. *Seja A uma álgebra. Então, $\{c_n(A)\}_{n \geq 1}$ é limitada polinomialmente se, e somente se, $\mathcal{G}, UT_2(F) \notin \text{var}(A)$, ou seja, $\text{Id}(A) \not\subset \text{Id}(\mathcal{G})$ e $\text{Id}(A) \not\subset \text{Id}(UT_2)$.*

Pelo teorema anterior, temos que $\exp(A) \geq 2$ se, e somente se, $\text{Id}(A) \subset \text{Id}(\mathcal{G})$ ou $\text{Id}(A) \subset \text{Id}(UT_2)$. Além disso, como consequência deste teorema, temos que a sequência de codimensões de uma PI-álgebra ou é polinomialmente limitada ou cresce exponencialmente.

Se A é uma álgebra e n é um inteiro positivo, é bastante conhecido que a ação de S_n em P_n induz uma estrutura de S_n -módulo em $P_n(A)$. O S_n -caracter de $P_n(A)$ é denotado por $\chi_n(A)$ e denominado n -ésimo cocaracter de A . Logo, como existe uma correspondência biunívoca entre S_n -caracteres irredutíveis e partições $\lambda \vdash n$, podemos escrever

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda, \quad (1.1)$$

onde χ_λ representa o caracter irredutível associado à partição $\lambda \vdash n$ e $m_\lambda \geq 0$ representa a respectiva multiplicidade.

A sequência de cocaracteres de uma álgebra pode dar informações mais precisas sobre as identidades satisfeitas por uma álgebra. De fato, o próximo teorema, devido a Ananin e Kemer, mostra que o conhecimento das multiplicidades na decomposição de $\chi_n(A)$ pode fornecer dados sobre polinômios em $\text{Id}(A)$.

Teorema 1.1.7 (Veja [21], Teorema 7.3.5). *Dada uma álgebra A , temos $m_\lambda \leq 1$, para todo $n \geq 1$ e para todo $\lambda \vdash n$ se, e somente se, existem constantes $\alpha, \beta \in F$ não simultaneamente nulas, tais que*

$$\alpha[x_1, x_2]x_2 + \beta x_2[x_1, x_2] \in \text{Id}(A). \quad (1.2)$$

Vamos dizer que uma álgebra A possui multiplicidades limitadas por um se esta satisfaz as hipóteses do teorema anterior, ou seja, se para todo $n \geq 1$ e toda partição $\lambda \vdash n$, a multiplicidade m_λ do caracter irredutível χ_λ na decomposição do n -ésimo cocaracter de A satisfaz $m_\lambda \leq 1$. Apesar da grande importância do teorema anterior, o problema de classificar, a menos de PI-equivalência, as álgebras com multiplicidades limitadas por um não havia sido resolvido até então. A solução deste problema será apresentado no Capítulo 2 desta tese e faz parte do trabalho [19].

É importante observar que a decomposição dada em (1.1) motiva a seguinte definição.

Definição 1.1.8. *Seja A uma álgebra. Então o n -ésimo cocoprimento de A é o inteiro não negativo*

$$l_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda.$$

Se A e B são álgebras tais que $\text{Id}(A) \subseteq \text{Id}(B)$, então $P_n(B)$ é isomorfo a um módulo quociente de $P_n(A)$. Logo, se $\chi_n(B) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$ e $\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m'_\lambda \chi_\lambda$, então, necessariamente, $m_\lambda \leq m'_\lambda$ e, neste caso, escrevemos simplesmente $\chi_n(B) \leq \chi_n(A)$.

Observe que, em geral, não é verdade que duas álgebras que apresentam a mesma sequência de cocaracteres satisfazem as mesmas identidades polinomiais. Entretanto, essa implicação mostra-se verdadeira se os T -ideais correspondentes estão contidos um no outro. De fato, suponha que $\text{Id}(A) \subseteq \text{Id}(B)$ e $\chi_n(A) = \chi_n(B)$, para quaisquer $n \geq 1$. Como $\text{Id}(A) \subseteq \text{Id}(B)$, segue que $P_n(B)$ é isomorfo a um quociente de $P_n(A)$, o que, por sua vez, implica que $P_n \cap \text{Id}(A) = P_n \cap \text{Id}(B)$, para qualquer $n \geq 1$. Portanto, $\text{Id}(A) = \text{Id}(B)$.

Destacamos que, se \mathcal{V} é uma variedade de álgebras, então definiremos $\exp(\mathcal{V}) := \exp(A)$ e $l_n(\mathcal{V}) := l_n(A)$, onde A é uma álgebra tal que $\text{var}(A) = \mathcal{V}$.

A seguir, enunciamos um resultado que fornece diversas caracterizações para as álgebras de crescimento polinomial.

Teorema 1.1.9 ([21], Teorema 7.2.14). *Seja \mathcal{V} uma variedade de álgebras. As seguintes condições são equivalentes:*

1. $c_n(\mathcal{V}) \leq \alpha n^t$, para algumas constantes α, t ;
2. $\exp(\mathcal{V}) \leq 1$;
3. $\mathcal{G}, UT_2 \notin \mathcal{V}$;
4. $\mathcal{V} = \text{var}(A)$, onde $A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m$ com B_1, \dots, B_m álgebras de dimensão finita tais que $\dim_F B_i/J(B_i) \leq 1$, para todo $i = 1, \dots, m$;
5. Existe uma constante q tal que

$$\chi_n(A) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ n - \lambda_1 \leq q}} m_\lambda \chi_\lambda$$

para todo $n \geq 1$.

Além do papel destacado no teorema anterior, relembramos aqui que a álgebra de Grassmann de dimensão infinita desempenha uma outra função central na PI-teoria, pois permite identificar quando uma variedade pode ser gerada por uma álgebra de dimensão finita. Esse resultado é enunciado no teorema a seguir.

Teorema 1.1.10 ([21], Teorema 7.2.4). *Se \mathcal{V} é uma variedade de álgebras, então ou $\mathcal{G} \in \mathcal{V}$ ou \mathcal{V} é gerada por uma álgebra de dimensão finita.*

Além disso, o T -ideal e a n -ésima codimensão de \mathcal{G} já foram estudados e são apresentados no próximo lema.

Lema 1.1.11 (Veja [27] e [36]). *Temos que:*

1. $\text{Id}(\mathcal{G}) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_T$;
2. $\chi_n(\mathcal{G}) = \sum_{j=1}^n \chi_{(j, 1^{n-j})}$, $n \geq 1$.

Por fim, seja $t \geq 1$ e considere \mathcal{G}_t como a álgebra de Grassmann unitária de dimensão finita com $t+1$ geradores. Logo, \mathcal{G}_t é a subálgebra de \mathcal{G} gerada por $\{1, e_1, e_2, \dots, e_t\}$. Em 2008, La Mattina classificou as subvariedades da variedade gerada por \mathcal{G} . Apresentamos este resultado como o próximo teorema.

Teorema 1.1.12 ([32], Teorema 23). *Seja A uma álgebra tal que $A \in \text{var}(\mathcal{G})$. Então $A \sim_T N$ ou $A \sim_T \mathcal{G}$ ou $A \sim_T B \oplus N$, onde $B \in \{C, \mathcal{G}_{2k} \mid k \geq 1\}$, onde C é uma álgebra comutativa não nilpotente e N é uma álgebra nilpotente.*

1.2 Superálgebras e \mathbb{Z}_2 -cocaracteres

Recordemos que uma álgebra A é uma superálgebra se A pode ser escrita como a soma direta de dois subespaços $A = A^{(0)} \dot{+} A^{(1)}$ de modo que

$$A^{(0)}A^{(0)} + A^{(1)}A^{(1)} \subset A^{(0)} \quad \text{e} \quad A^{(0)}A^{(1)} + A^{(1)}A^{(0)} \subset A^{(1)}.$$

Isto significa que A é uma álgebra \mathbb{Z}_2 -graduada e, neste caso, diremos simplesmente que A é uma superálgebra com graduação $(A^{(0)}, A^{(1)})$.

Os subconjuntos $A^{(0)}$ e $A^{(1)}$ são chamados, respectivamente, componente homogênea par e componente homogênea ímpar de A . Denominaremos os elementos de $A^{(0)}$ e $A^{(1)}$ por elementos homogêneos de grau 0 e de grau 1, respectivamente. Diremos que uma subálgebra B de A é uma \mathbb{Z}_2 -subálgebra se $B = (B \cap A^{(0)}) \dot{+} (B \cap A^{(1)})$. De modo análogo, definimos um ideal I de A como um \mathbb{Z}_2 -ideal quando $I = (I \cap A^{(0)}) \dot{+} (I \cap A^{(1)})$. Um exemplo de um \mathbb{Z}_2 -ideal de uma superálgebra A é o seu radical de Jacobson $J(A)$.

Claramente, toda álgebra A é uma superálgebra com graduação $(A, \{0\})$ e, neste caso, diremos que A é uma superálgebra com graduação trivial e não faremos distinção de notação entre A como álgebra e A como superálgebra com graduação trivial.

Denotaremos por \mathcal{G}^{gr} a álgebra de Grassmann com graduação $(\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1)$, onde

$$\mathcal{G}_0 = \text{span}_F \{1, e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{2k}; k \geq 1\},$$

$$\mathcal{G}_1 = \text{span}_F \{e_{i_1} \cdots e_{i_{2k-1}} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{2k-1}; k \geq 1\}.$$

Além disso, denotaremos por $e_{ij} \in M_n(F)$ as matrizes elementares usuais e por UT_2^{gr} a álgebra UT_2 com graduação $(Fe_{11} + Fe_{22}, Fe_{12})$. Considerando $D = F \dot{+} cF$, onde $c^2 = 1$, denotaremos por D^{gr} a álgebra D munida da graduação (F, cF) .

Lembre-se que a álgebra livre associativa $F\langle X \rangle$ possui estrutura de superálgebra. De fato, considere X como a união disjunta de dois conjuntos enumeráveis $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ e $Z = \{z_1, z_2, \dots\}$. Definimos os subespaços $\mathcal{F}^{(0)}$ e $\mathcal{F}^{(1)}$ como os subespaços de $F\langle Y \cup Z \rangle$ gerados por todos os monômios com uma quantidade par de variáveis em Z e por todos os monômios com uma quantidade ímpar de variáveis em Z , respectivamente. A partir de agora denotaremos a superálgebra $F\langle Y \cup Z \rangle$ apenas por \mathcal{F} e denominaremos os elementos de \mathcal{F} por \mathbb{Z}_2 -polinômios.

Dada uma superálgebra A , dizemos que um \mathbb{Z}_2 -polinômio $f(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m) \in \mathcal{F}$ é uma \mathbb{Z}_2 -identidade de A se, para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in A^{(0)}$ e $b_1, \dots, b_m \in A^{(1)}$, temos que $f(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) = 0$. Denotaremos o conjunto de todas as \mathbb{Z}_2 -identidades de A por $\text{Id}^{gr}(A)$. Além disso, denotaremos por $var^{gr}(A)$ a supervarietade gerada por A , ou seja, $var^{gr}(A)$ é a classe de todas as superálgebras satisfazendo as \mathbb{Z}_2 -identidades de A . Se A e B são superálgebras tais que A e B satisfazem as mesmas \mathbb{Z}_2 -identidades, então $var^{gr}(A) = var^{gr}(B)$ e, neste caso, denotaremos $A \sim_{T_2} B$.

Observamos que $\text{Id}^{gr}(A)$ é um T_2 -ideal de \mathcal{F} , ou seja, é invariante sob qualquer endomorfismo de \mathcal{F} que preserva a graduação. Se f_1, \dots, f_n são geradores de um T_2 -ideal I de \mathcal{F} , então denotaremos este fato por $I = \langle f_1, \dots, f_n \rangle_{T_2}$.

Os T_2 -ideais das superálgebras \mathcal{G} , \mathcal{G}^{gr} , UT_2 , UT_2^{gr} e D^{gr} já foram estudados e compõem o lema a seguir.

Lema 1.2.1 (Veja [15], [16], [41]). *Temos que*

1. $\text{Id}^{gr}(UT_2) = \langle [y_1, y_2][y_3, y_4], z \rangle_{T_2}$;
2. $\text{Id}^{gr}(\mathcal{G}) = \langle [y_1, y_2, y_3], z \rangle_{T_2}$;
3. $\text{Id}^{gr}(D^{gr}) = \langle [y_1, y_2], [y, z], [z_1, z_2] \rangle_{T_2}$;
4. $\text{Id}^{gr}(UT_2^{gr}) = \langle [y_1, y_2], z_1 z_2 \rangle_{T_2}$;
5. $\text{Id}^{gr}(\mathcal{G}^{gr}) = \langle [y_1, y_2], [y, z], z_1 z_2 + z_2 z_1 \rangle_{T_2}$.

Como pode ser visto em [8], temos que, em característica zero, $\text{Id}^{gr}(A)$ é completamente determinado pelas suas \mathbb{Z}_2 -identidades multilineares. Denotaremos por P_n^{gr} o espaço vetorial gerado pelos \mathbb{Z}_2 -polinômios multilineares de grau n de \mathcal{F} , ou seja,

$$P_n^{gr} = \text{span}_F \{w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(n)} \mid w_{\sigma(i)} = y_i \text{ ou } w_{\sigma(i)} = z_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Logo, podemos definir o espaço quociente

$$P_n^{gr}(A) = \frac{P_n^{gr}}{P_n^{gr} \cap \text{Id}^{gr}(A)}.$$

Analogamente ao caso ordinário, o valor numérico dado pela dimensão de $P_n^{gr}(A)$ nos fornece informações sobre o comportamento das \mathbb{Z}_2 -identidades de A . Diante disto, definimos a sequência de \mathbb{Z}_2 -codimensões de A .

Definição 1.2.2. *Sejam A uma superálgebra e $n \geq 1$ um número inteiro. A n -ésima \mathbb{Z}_2 -codimensão de A é o inteiro não negativo*

$$c_n^{gr}(A) = \dim_F P_n^{gr}(A).$$

A sequência $\{c_n^{gr}(A)\}_{n \geq 1}$ é denominada sequência de \mathbb{Z}_2 -codimensões de A . Se $\mathcal{V} = \text{var}^{gr}(A)$, então definimos $c_n^{gr}(\mathcal{V}) = c_n(A)$.

É fácil ver que, como as superálgebras \mathcal{G} e UT_2 possuem graduação trivial, então $c_n^{gr}(\mathcal{G}) = 2^{n-1}$ e $c_n^{gr}(UT_2) = 2^{n-1}(n-2) + 2$. Além disso, temos que $c_n^{gr}(\mathcal{G}^{gr}) = 2^n$, e $c_n^{gr}(D^{gr}) = 2^n$ (veja [16] e [15]). Deste modo, vemos que as sequências de \mathbb{Z}_2 -codimensões de \mathcal{G} , \mathcal{G}^{gr} , UT_2 e D^{gr} crescem exponencialmente. Além disso, por [41], a sequência de \mathbb{Z}_2 -codimensões de UT_2^{gr} também cresce exponencialmente.

Dizemos que a sequência de \mathbb{Z}_2 -codimensões de uma superálgebra A é limitada exponencialmente se existem constantes α, β tais que $c_n^{gr}(A) \leq \alpha\beta^n$, para todo inteiro positivo n . Observamos que o fato de uma superálgebra A satisfazer alguma \mathbb{Z}_2 -identidade polinomial não trivial não implica, em geral, que $c_n^{gr}(A)$ seja exponencialmente limitada. De fato, um contraexemplo imediato é dado por $A = F\langle X \rangle$ com a graduação trivial. Temos que A satisfaz a \mathbb{Z}_2 -identidade $z \equiv 0$, mas claramente $c_n^{gr}(A)$ não é limitada exponencialmente. Porém, Giambruno e Regev demonstraram o seguinte resultado.

Lema 1.2.3 (Veja [20]). *Sejam A uma superálgebra que satisfaz uma identidade ordinária não trivial e $n \geq 1$ um número inteiro. Então*

$$c_n(A) \leq c_n^{gr}(A) \leq 2^n c_n(A).$$

Logo, como consequência do lema anterior, vemos que se A é uma superálgebra que satisfaz alguma identidade ordinária não nula, então a sequência de \mathbb{Z}_2 -codimensões de A é limitada exponencialmente. Neste contexto, Giambruno e La Mattina demonstraram que o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n^{gr}(A)}$ existe e é um inteiro não negativo.

Teorema 1.2.4 (Veja [10], Teorema 2). *Seja A uma superálgebra e suponha que A satisfaz alguma identidade ordinária não nula. Então, existem um inteiro não negativo d e constantes $C_1 > 0$, C_2 , t_1 e t_2 tais que*

$$C_1 n^{t_1} d^n \leq c_n^{gr}(A) \leq C_2 n^{t_2} d^n.$$

Denominamos o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n^{gr}(A)}$ como \mathbb{Z}_2 -expoente de A e o denotamos por $\exp^{gr}(A)$. Além disso, se A é uma superálgebra de dimensão finita, os autores apresentaram um método para o cálculo de $\exp^{gr}(A)$.

Para apresentarmos este resultado, necessitaremos estender a decomposição de Wedderburn-Malcev para o contexto de superálgebras. Para isso, fixemos uma notação. Assim como no contexto ordinário, para duas superálgebras A e B , optamos por denotar por $A \oplus B$ a sua soma direta no sentido de superálgebras.

Teorema 1.2.5 (Veja [21], Teorema 3.5.4). *Sejam A uma superálgebra de dimensão finita sobre F e $J(A)$ o seu radical de Jacobson. Então, existe uma \mathbb{Z}_2 -subálgebra semissimples maximal B de A tal que $A = B \dot{+} J(A)$.*

A seguir, apresentamos um método para se calcular o \mathbb{Z}_2 -expoente de uma superálgebra de dimensão finita.

Lema 1.2.6 (Veja [10]). *Seja A uma superálgebra de dimensão finita e considere $A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_q \dot{+} J(A)$ uma decomposição de Wedderburn-Malcev de A como superálgebra, onde B_i é uma superálgebra simples, para todo $i = 1, \dots, q$. Então,*

$$\exp^{gr}(A) = \max\{\dim_F A_{i_1} \oplus \cdots \oplus A_{i_s}\},$$

onde as A_{i_i} 's são superálgebras distintas no conjunto $\{B_1, \dots, B_q\}$ satisfazendo a condição $A_{i_1} J A_{i_2} J \cdots A_{i_{s-1}} J A_{i_s} \neq \{0\}$.

Ainda no contexto das superálgebras de dimensão finita, podemos, naturalmente, estender a decomposição do radical de Jacobson, conforme vemos no próximo resultado.

Lema 1.2.7 (Veja [12], Lema 1). *Seja A uma superálgebra de dimensão finita e suponha que $A = B \dot{+} J$, onde B é uma superálgebra simples e J é o radical de Jacobson de A . Então J pode ser decomposto como uma soma de B -bimódulos \mathbb{Z}_2 -graduados*

$$J = J_{01} \dot{+} J_{10} \dot{+} J_{11} \dot{+} J_{00},$$

tal que, para $i \in \{0, 1\}$, J_{ik} é um módulo \mathbb{Z}_2 -graduado fiel à esquerda ou um 0-módulo \mathbb{Z}_2 -graduado à esquerda de acordo com $i = 1$ ou $i = 0$, respectivamente. Analogamente, J_{ik} é um módulo \mathbb{Z}_2 -graduado fiel à direita ou um 0-módulo \mathbb{Z}_2 -graduado à direita de acordo com $k = 1$ ou $k = 0$, respectivamente.

Agora, lembre-se que uma superálgebra A tem crescimento polinomial (da sequência de \mathbb{Z}_2 -codimensões) se sua sequência de \mathbb{Z}_2 -codimensões é limitada polinomialmente, isto é, existem constantes q, k tais que $c_n^{gr}(A) \leq qn^k$, para todo inteiro positivo n . Pelo Teorema 1.2.4, observamos que a sequência de \mathbb{Z}_2 -codimensões $\{c_n^{gr}(A)\}_{n \geq 1}$ é limitada

polinomialmente se, e somente se, $\exp^{gr}(A) \leq 1$. Além disso, em [16], Giambruno, Michchenco e Zaicev caracterizaram as superálgebras de crescimento polinomial via exclusão de superálgebras da variedade. Apresentamos este resultado como o próximo teorema.

Teorema 1.2.8 (Veja [16], Teorema 2). *Uma superálgebra A possui crescimento polinomial de sua sequência de \mathbb{Z}_2 -codimensões se, e somente se, \mathcal{G} , \mathcal{G}^{gr} , UT_2 , UT_2^{gr} , $D^{gr} \notin \text{var}^{gr}(A)$.*

Agora, considere $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ como o grupo multiplicativo de ordem 2 e S_n como o grupo simétrico no conjunto $\{1, \dots, n\}$. Definimos o grupo hiperoctaedral $\mathbb{Z}_2 \wr S_n = \{(a_1, \dots, a_n; \sigma) \mid \sigma \in S_n, a_i \in \mathbb{Z}_2, i = 1, \dots, n\}$ com multiplicação dada por

$$(a_1, \dots, a_n, \sigma)(b_1, \dots, b_n, \theta) = (a_1 b_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, a_n b_{\sigma^{-1}(n)}; \sigma\theta).$$

Temos que $\mathbb{Z}_2 \wr S_n$ age em P_n^{gr} com ação à esquerda definida do seguinte modo: se $k = (a_1, \dots, a_n, \sigma) \in \mathbb{Z}_2 \wr S_n$, então $ky_i = y_i$ e $kz_i = z_i$ ou $-z_i$ de acordo com a_i , para $i = 1, \dots, n$. Logo, dada uma superálgebra A , como P_n^{gr} possui estrutura de $\mathbb{Z}_2 \wr S_n$ -módulo e como $\text{Id}^{gr}(A)$ é invariante por todos os endomorfismos que preservam a graduação, temos que

$$P_n^{gr}(A) = \frac{P_n^{gr}}{P_n^{gr} \cap \text{Id}^{gr}(A)}$$

é um $\mathbb{Z}_2 \wr S_n$ -módulo. Denominamos o $\mathbb{Z}_2 \wr S_n$ -caracter associado correspondente por n -ésimo \mathbb{Z}_2 -cocaracter de A e o denotamos por $\chi_n^{gr}(A)$.

Dados $n \geq 1$ e $r \leq n$ inteiros não negativos, consideramos $\lambda^{(0)} \vdash r$, $\lambda^{(1)} \vdash n - r$ e denotamos o par de partições $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)})$ por $\langle \lambda \rangle$. Tal par é dito uma multipartição de n e escrevemos $\langle \lambda \rangle \vdash n$.

Lembre-se que existe uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{Z}_2 \wr S_n$ -caracteres irreduzíveis e multipartições $\langle \lambda \rangle = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)})$ de modo que $\lambda^{(0)} \vdash r$ e $\lambda^{(1)} \vdash n - r$ para $r = 1, \dots, n$ (veja [21]).

Denotaremos por $\chi_{\langle \lambda \rangle}$ o $\mathbb{Z}_2 \wr S_n$ -caracter irreduzível associado a $\langle \lambda \rangle$. Além disso, se r e s são inteiros não negativos e $\langle \lambda \rangle = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)})$ é uma multipartição de modo que $\lambda^{(0)} \vdash r$ e $\lambda^{(1)} \vdash s$, adotaremos as notações $|\lambda^{(0)}| = r$ e $|\lambda^{(1)}| = s$. Assim, nesse caso, $\langle \lambda \rangle$ é uma multipartição de $|\lambda^{(0)}| + |\lambda^{(1)}| = r + s$. Logo, temos que

$$\chi_n^{gr}(A) = \sum_{|\lambda^{(0)}| + |\lambda^{(1)}| = n} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}, \quad (1.3)$$

onde $m_{\langle \lambda \rangle}$ é a respectiva multiplicidade do $\mathbb{Z}_2 \wr S_n$ -caracter irreduzível $\chi_{\langle \lambda \rangle}$. Na próxima definição, estendemos o conceito de cocomprimento para o contexto de superálgebras.

Definição 1.2.9. *O n -ésimo \mathbb{Z}_2 -cocomprimento de uma superálgebra A é o inteiro não negativo*

$$l_n^{gr}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash n} m_{\langle \lambda \rangle}.$$

Perceba que, assim como no contexto ordinário, se A e B são superálgebras tais que $\text{Id}^{gr}(A) \subseteq \text{Id}^{gr}(B)$, então se $\chi_n^{gr}(B) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash n} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}$ e $\chi_n^{gr}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash n} m'_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}$, necessariamente, $m_{\langle \lambda \rangle} \leq m'_{\langle \lambda \rangle}$ e, neste caso, escrevemos simplesmente $\chi_n^{gr}(B) \leq \chi_n^{gr}(A)$. Além disso, também é fácil ver que, se $\text{Id}^{gr}(A) \subseteq \text{Id}^{gr}(B)$ e $\chi_n^{gr}(A) = \chi_n^{gr}(B)$, então $\text{Id}^{gr}(B) = \text{Id}^{gr}(A)$.

As superálgebras \mathcal{G}^{gr} e D^{gr} desempenham um papel central nesse trabalho. As seqüências de \mathbb{Z}_2 -cocaracteres dessas superálgebras foram dadas em [15] e [16], de acordo com o próximo lema.

Lema 1.2.10. *Seja $n \geq 1$ um inteiro. Então*

$$\chi_n^{gr}(D^{gr}) = \sum_{i=0}^n \chi_{(n-i), (i)} \quad e \quad \chi_n^{gr}(\mathcal{G}^{gr}) = \sum_{i=0}^n \chi_{(n-i), (1^i)}.$$

Por fim, apresentamos um resultado bastante conhecido que será importante neste trabalho e que pode ser visto, por exemplo, como consequência dos Teoremas 11.4.2 e 11.4.3 de [21] juntamente com [2].

Teorema 1.2.11. *Uma supervariedade \mathcal{V} é gerada por uma superálgebra de dimensão finita se, e somente se, $\mathcal{G}, \mathcal{G}^{gr} \notin \mathcal{V}$.*

Capítulo 2

A classificação no caso ordinário

Neste capítulo, apresentaremos a classificação das álgebras com multiplicidades limitadas por um. Os resultados aqui presentes estão divididos em duas seções e fazem parte da referência [19]. Na primeira seção, introduzimos as álgebras fundamentais, descrevemos resultados sobre essa importante classe de álgebras e veremos que elas fazem um papel destacado na classificação estabelecida. Na segunda seção, apresentamos o resultado principal desta tese, ou seja, apresentamos a classificação das álgebras com multiplicidades limitadas por um.

2.1 Álgebras fundamentais

As álgebras fundamentais foram estudadas inicialmente por Kemer [24] e desempenham um papel central na demonstração de seu célebre teorema da representabilidade, o qual afirma que, se A é uma álgebra finitamente gerada sobre um corpo F de característica zero, então existe uma álgebra de dimensão finita B sobre uma extensão K de F de modo que $\text{var}(A) = \text{var}(B)$.

Em seus trabalhos, Kemer definiu as álgebras fundamentais utilizando-se de polinômios alternados. Aqui, utilizaremos conceitos mais atuais e faremos uso, principalmente, de uma caracterização das álgebras fundamentais dada por Giambruno, Polcino Milies e Zaicev em [18].

Primeiramente, vamos considerar A como uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado F e estabeleceremos algumas notações que serão usadas ao longo de todo o texto.

Consideremos $A = \bar{A} \dot{+} J(A)$ uma decomposição de Wedderburn-Malcev de A , onde $\bar{A} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_q$, cada A_i é uma álgebra simples, e $J(A)$ é o radical de Jacobson de A . Temos que o radical de Jacobson $J(A)$ é um ideal nilpotente de A e vamos denotar por s_A o menor inteiro não negativo tal que $J(A)^{s_A+1} = \{0\}$.

Para definirmos álgebras fundamentais, necessitamos de mais alguns objetos gerais que apresentaremos agora, de acordo com a definição dada em [3], que é equivalente àquela que foi dada por Kemer.

Vamos considerar que A não é simples e que $r = \dim_F J(A)$. Definimos a álgebra $A' = \bar{A} * F\langle x_1, \dots, x_r \rangle$ que é o produto livre de \bar{A} e a álgebra associativa livre $F\langle x_1, \dots, x_r \rangle$.

Agora, seja I o ideal de A' gerado por todas as avaliações de identidades polinomiais de A por elementos de A' e denote por \mathcal{A} a álgebra quociente A'/I . Definimos ainda o ideal K de \mathcal{A} gerado pelas variáveis x_1, \dots, x_r , e a álgebra \mathcal{A}_{s_A} como a álgebra quociente \mathcal{A}/K^{s_A} . Claramente, \mathcal{A}/K^{s_A} satisfaz todas as identidades polinomiais de A . Além disso, no próximo lema, vemos que a álgebra \mathcal{A}_{s_A} satisfaz condições dadas pelo próximo resultado.

Lema 2.1.1 (Veja [3], Proposição 7.5). *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. \mathcal{A}_{s_A} possui dimensão finita;
2. $J(\mathcal{A}_{s_A})^{s_A} = \{0\}$.

Lembrando a decomposição de \bar{A} em componentes simples $\bar{A} = A_1 \oplus \dots \oplus A_q$, para cada $i \in \{1, \dots, q\}$, definimos

$$B_i = A_1 \oplus \dots \oplus A_{i-1} \oplus A_{i+1} \oplus \dots \oplus A_q \dot{+} J(A).$$

Enfim, estamos em condições de definir as álgebras fundamentais.

Definição 2.1.2. *Uma álgebra de dimensão finita A é fundamental se ou A é simples ou*

$$\text{Id}(A) \subsetneq \bigcap_{i=1}^q \text{Id}(B_i) \cap \text{Id}(\mathcal{A}_{s_A}).$$

Observamos que, de acordo com a definição anterior, álgebras nilpotentes de dimensão finita são fundamentais. A seguir, temos um primeiro exemplo de uma álgebra fundamental que não é simples e não é nilpotente e que já foi bastante estudada em diversos contextos.

Exemplo 2.1.3. *Se $A = UT_2$, então A é uma álgebra fundamental. De fato, seja $A = A_1 \oplus A_2 \dot{+} J(A)$ uma decomposição de Wedderburn-Malcev de A , onde $A_1 = Fe_{11}$, $A_2 = Fe_{22}$ e $J(A) = Fe_{12}$. De acordo com a notação da definição anterior, temos*

$$B_1 = A_2 \dot{+} J(A) \text{ e}$$

$$B_2 = A_1 \dot{+} J(A).$$

Observe que, pelo Lema 1.1.4, essas álgebras possuem crescimento polinomial. Além disso, $s_A = 1$, ou seja, o índice de nilpotência de $J(\mathcal{A}_{s_A})$ é igual a 1. O que implica que \mathcal{A}_{s_A} é

semisimples. Como $\text{Id}(A) \subset \text{Id}(\mathcal{A}_{s_A})$, é fácil concluir que \mathcal{A}_{s_A} também tem crescimento polinomial. Logo, $B_1 \oplus B_2 \oplus \mathcal{A}_{s_A}$ possui crescimento polinomial. Então, como $A = UT_2$ possui crescimento exponencial, concluímos que

$$\text{Id}(A) \subsetneq \bigcap_{i=1}^q \text{Id}(B_i) \cap \text{Id}(\mathcal{A}_{s_A}).$$

Portanto, UT_2 é uma álgebra fundamental.

É importante destacarmos que álgebras fundamentais também são conhecidas na literatura como álgebras básicas (veja [3], [23]). De fato, uma importante característica destas álgebras é que elas servem como blocos básicos para a construção de álgebras de dimensão finita em termos de PI-equivalência, como podemos ver no próximo lema.

Lema 2.1.4 ([1], Proposição 17.2.34). *Se A é uma álgebra de dimensão finita, então A é PI-equivalente a uma soma direta finita de álgebras fundamentais.*

Ressaltamos que as álgebras fundamentais têm sido estudadas também no contexto de álgebras munidas de estruturas adicionais. Em particular, o resultado anterior foi estendido para o caso de superálgebras em [9] e para álgebras com involução em [13].

Em 2020, Giambruno, Polcino Millies e Zaicev caracterizaram álgebras fundamentais através da sua sequência de cocaracteres. Apresentamos este resultado como o próximo lema, onde usamos as notações previamente estabelecidas.

Lema 2.1.5 ([18], Teorema 6). *Seja A uma álgebra de dimensão finita tal que $t_a = \dim_F \bar{A} \geq 1$. Então A é fundamental se, e somente se, para todo n suficientemente grande, existe uma partição $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_u)$ de n com $\lambda_{t_a+1} + \dots + \lambda_u = s_A$ tal que $m_\lambda \neq 0$ em $\chi_n(A)$.*

Como contribuição original, inicialmente vamos apresentar a caracterização das álgebras fundamentais com crescimento polinomial das codimensões, refinando o resultado anterior. Para isso, usamos um conceito que está diretamente relacionado com as álgebras fundamentais que são as chamadas álgebras reduzidas (veja [1], [3] e [21]), as quais são tema da nossa próxima definição.

Definição 2.1.6. *Seja A uma álgebra de dimensão finita e $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_q \dot{+} J(A)$ uma decomposição de Wedderburn-Malcev de A . Então, A é reduzida se A é nilpotente ou, a menos de uma reordenação dos índices, temos que $A_1 J(A) A_2 \dots J(A) A_q \neq \{0\}$.*

O próximo resultado relaciona as álgebras fundamentais e as reduzidas.

Lema 2.1.7 ([3], Corolário 5.13). *Se A é uma álgebra fundamental, então A é reduzida.*

Perceba que não vale a recíproca do resultado anterior. De fato, basta observar que, pelo Lema 2.1.5, a álgebra $A = F \oplus N$ não é fundamental se N é uma álgebra nilpotente não nula, mas A é obviamente reduzida.

A seguir, estabelecemos um fato interessante sobre as álgebras reduzidas de crescimento polinomial da sequência de codimensões.

Proposição 2.1.8. *Seja A uma álgebra de dimensão finita e com crescimento polinomial. Então A é reduzida se, e somente se, $\dim_F \bar{A} \leq 1$.*

Demonstração. Suponha que A tenha crescimento polinomial e seja reduzida. Se $\bar{A} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_q$ é uma decomposição de \bar{A} como soma direta de álgebras simples, pelo Lema 1.1.4, temos $\exp(A) = \dim_F \bar{A}$. Usando que A tem crescimento polinomial, pelo Teorema 1.1.9, concluímos que $\dim_F \bar{A} \leq 1$. A recíproca é obviamente verdadeira. \square

Na próxima proposição, daremos a nossa caracterização.

Proposição 2.1.9. *Seja A uma álgebra com crescimento polinomial de sua sequência de codimensões. Então A é fundamental se, e somente se, ou A é nilpotente, ou $A \cong F$ ou $A \cong F \dot{+} J(A)$ e, para todo n suficientemente grande, existe uma partição $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_u) \vdash n$ de modo que $\lambda_2 + \cdots + \lambda_u = s_A$ e χ_λ possui multiplicidade não nula em $\chi_n(A)$.*

Demonstração. Primeiramente, observamos que como A possui crescimento polinomial, então, pelo Teorema 1.1.6, temos $\mathcal{G} \notin \text{var}(A)$. Logo, pelo Teorema 1.1.10, podemos assumir que A é uma álgebra de dimensão finita.

Suponhamos que A seja fundamental e consideremos $t_A = \dim_F \bar{A}$. Então, pelo Lema 2.1.7, A é reduzida e, pela proposição anterior, $t_A = \dim_F \bar{A} \leq 1$. Agora, se $t_A = 0$, então A é nilpotente. Por outro lado, se $t_A = 1$, então $A \cong F$ ou $A \cong F \dot{+} J(A)$ com $J(A) \neq \{0\}$. No segundo caso o resultado segue como consequência do Lema 2.1.5.

Para a recíproca, observamos que se A é nilpotente ou se $A \cong F$ então A é fundamental. Agora, para a situação restante, novamente pelo Lema 2.1.5, temos que A é fundamental. \square

A seguir, apresentamos algumas álgebras que serão essenciais para o desenvolvimento deste trabalho e que foram estudadas em [11].

$$A_1 = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_1^* = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix};$$

$$A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in F \right\};$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} F & F & F \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_4^* = \begin{pmatrix} 0 & F & F \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}.$$

Os geradores dos T -ideais e a decomposição do n -ésimo cocaracter das álgebras acima já foram estabelecidos e compõem o próximo lema. Vamos adotar a notação $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ e comutadores de ordem superior são definidos recursivamente, ou seja, $[x_1, x_2, x_3, \dots, x_k] = [[x_1, x_2, \dots, x_{k-1}], x_k]$.

Lema 2.1.10 (Veja [11], Lemas 3, 4 e 6). *Seja $n \geq 4$. Então, temos que:*

1. $\text{Id}(A_1) = \langle [x_1, x_2]x_3 \rangle_T$ e $\chi_n(A_1) = \chi_{(n)} + \chi_{(n-1,1)}$;
2. $\text{Id}(A_1^*) = \langle x_3[x_1, x_2] \rangle_T$ e $\chi_n(A_1^*) = \chi_{(n)} + \chi_{(n-1,1)}$;
3. $\text{Id}(A_2) = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$ e $\chi_n(A_2) = \chi_{(n)} + \chi_{(n-1,1)} + \chi_{(n-2,1^2)}$;
4. $\text{Id}(A_4) = \langle [x_1, x_2]x_3x_4 \rangle_T$ e $\chi_n(A_4) = \chi_{(n)} + 2\chi_{(n-1,1)} + \chi_{(n-2,1^2)} + \chi_{(n-2,2)}$;
5. $\text{Id}(A_4^*) = \langle x_1x_2[x_3, x_4] \rangle_T$ e $\chi_n(A_4^*) = \chi_{(n)} + 2\chi_{(n-1,1)} + \chi_{(n-2,1^2)} + \chi_{(n-2,2)}$.

Observação 2.1.11. *Apesar de termos enunciado o resultado anterior para $n \geq 4$, é fácil ver que o n -ésimo cocaracter das álgebras A_1 , A_1^* e A_2 possuem multiplicidades limitadas por 1 para $1 \leq n \leq 3$. Isso implica que essas álgebras possuem multiplicidades limitadas por um.*

Observe que $l_n(A_1) = l_n(A_1^*) = 2$, $l_n(A_2) = 3$ e que $l_n(A_4) = l_n(A_4^*) = 5$. Além disso, como veremos no resultado de La Mattina [31] apresentado a seguir, as álgebras A_1 , A_1^* e A_2 desempenham um papel essencial na classificação das álgebras que possuem cocomprimento limitado por 4, para todo n suficientemente grande.

Teorema 2.1.12 ([31]). *Seja A uma álgebra. Então, para todo n suficientemente grande, temos que:*

1. $l_n(A) = 0$ se, e somente se, $A \sim_T N$;
2. $l_n(A) = 1$ se, e somente se, $A \sim_T C \oplus N$;
3. $l_n(A) = 2$ se, e somente se, $A \sim_T A_1 \oplus N$ ou $A \sim_T A_1^* \oplus N$;
4. $l_n(A) = 3$ se, e somente se, $A \sim_T A_1 \oplus A_1^* \oplus N$ ou $A \sim_T A_2 \oplus N$;
5. $l_n(A) = 4$ se, e somente se, $A \sim_T A_1 \oplus A_2 \oplus N$ ou $A \sim_T A_1^* \oplus A_2 \oplus N$;

onde C é uma álgebra comutativa não nilpotente e N é uma álgebra nilpotente.

Agora, demonstramos que as álgebras definidas acima são fundamentais.

Proposição 2.1.13. *As álgebras A_1, A_1^*, A_2, A_4 e A_4^* são fundamentais.*

Demonstração. Primeiramente, observe que $s_{A_1} = s_{A_1^*} = 1$ e $s_{A_2} = s_{A_4} = s_{A_4^*} = 2$. Pelo Lema 2.1.10, temos que, para todo n suficientemente grande, $\chi_{(n-1,1)}$ aparece com multiplicidade não nula em $\chi_n(A_1)$ e $\chi_n(A_1^*)$, além disso, $\chi_{(n-2,1^2)}$ aparece com multiplicidade não nula em $\chi_n(A_2)$, $\chi_n(A_4)$ e $\chi_n(A_4^*)$. Portanto, pelo Lema 2.1.5, concluímos que A_1, A_1^*, A_2, A_4 e A_4^* são álgebras fundamentais. \square

Além disso, em [18] (veja [7], também) os autores demonstraram o seguinte resultado que é essencial para este trabalho.

Lema 2.1.14 ([18], Proposição 10). *A álgebra de Grassmann de dimensão finita \mathcal{G}_t é fundamental se, e somente se, t é um número par. Em particular, se t é um número par, temos que $\chi_n(\mathcal{G}_t) = \sum_{j=n-t}^n \chi_{(j,1^{n-j})}$.*

Convém relembrar aqui que $\text{Id}(\mathcal{G}_2) = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$, ou seja, as álgebras \mathcal{G}_2 e A_2 são PI-equivalentes e ambas são fundamentais. Porém, se B é uma álgebra PI-equivalente a uma álgebra fundamental A , não temos necessariamente que B é fundamental. Como exemplo, temos $\mathcal{G}_3 \sim_T \mathcal{G}_2$ e \mathcal{G}_3 não é fundamental (veja [18]).

Também podemos observar que a soma direta de álgebras fundamentais não é necessariamente uma álgebra fundamental. De fato, considere as álgebras A e B tais que $A \cong B \cong F$. Claramente, A e B são fundamentais, mas a soma direta $A \oplus B \cong F \oplus F \sim_T F$ possui crescimento polinomial de sua sequência de codimensões. Portanto, pela Proposição 2.1.9, $A \oplus B$ não é fundamental.

Vamos finalizar esta seção deduzindo um resultado que nos mostra que é possível estabelecer condições para encontrar uma álgebra fundamental que é PI-equivalente a soma direta de duas álgebras fundamentais. Este resultado segue como consequência dos resultados de Aljadeff e Karasik [4] que mostraram que se A e B são álgebras de dimensão finita cujas partes semissimples \overline{A} e \overline{B} apresentam pelo menos uma componente simples em comum, então podemos construir uma álgebra C , que "herda" muitas das propriedades de A e de B , e que é PI-equivalente a $A \oplus B$.

Apresentaremos o resultado de Aljadeff e Karasik no próximo lema e, por completude e clareza no que diz respeito à estrutura da álgebra C , também apresentaremos uma demonstração detalhada.

Lema 2.1.15 (Veja [4], Lema 2.17). *Sejam A e B álgebras de dimensão finita com decomposições de Wedderburn-Malcev $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n \dot{+} J(A)$ e $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m \dot{+} J(B)$,*

respectivamente. Suponha que exista um inteiro positivo k tal que, após conveniente ordenação, $A_1 \oplus \cdots \oplus A_k \cong B_1 \oplus \cdots \oplus B_k \cong U$. Então, $A \oplus B$ é PI-equivalente a

$$C = U \oplus A_{k+1} \oplus \cdots \oplus A_n \oplus B_{k+1} \oplus \cdots \oplus B_m \dot{+} J(A) \dot{+} J(B).$$

Demonstração. Considere C , com estrutura de espaço vetorial descrita acima, e tome

$$D = [U \oplus A_{k+1} \oplus \cdots \oplus A_n \dot{+} J(A)] \oplus [U \oplus B_{k+1} \oplus \cdots \oplus B_m \dot{+} J(B)] = A \oplus B.$$

Seja $\phi : C \rightarrow D$ uma imersão de espaços vetoriais dada por

$$\phi(u, a_{k+1}, \dots, a_n, b_{k+1}, \dots, b_m, j_a, j_b) = ((u, a_{k+1}, \dots, a_n, j_a), (u, b_{k+1}, \dots, b_m, j_b)).$$

Note que a imagem de ϕ é fechada com relação a multiplicação. Logo, C possui estrutura de álgebra dada pela imagem de ϕ , visto que ϕ é uma imersão. Então, podemos considerar ϕ como uma imersão de álgebras e concluímos que $\text{Id}(C) \supset \text{Id}(A \oplus B)$. Por outro lado, A e B estão imersas em C , portanto $\text{Id}(C) \subset \text{Id}(A) \cap \text{Id}(B) = \text{Id}(A \oplus B)$ e segue que $\text{Id}(C) = \text{Id}(A \oplus B)$. \square

Vamos denominar a álgebra C construída no resultado anterior como a fusão das álgebras A e B e, no próximo resultado, vamos mostrar que se A e B são álgebras fundamentais com partes semissimples isomorfas, então a fusão de A e B , que como vimos é PI-equivalente a $A \oplus B$, preserva essa propriedade.

Proposição 2.1.16. *Sejam A e B álgebras fundamentais com decomposições de Wedderburn-Malcev dadas por $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_q \dot{+} J(A)$, $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_q \dot{+} J(B)$, respectivamente. Suponha que $A_1 \oplus \cdots \oplus A_q \cong B_1 \oplus \cdots \oplus B_q$. Então existe uma álgebra fundamental C tal que $C \sim_T A \oplus B$.*

Demonstração. Considere C como a fusão das álgebras A e B dada pelo Lema 2.1.15. Vamos mostrar que C é uma álgebra fundamental. Observe que, como $A_1 \oplus \cdots \oplus A_q \cong B_1 \oplus \cdots \oplus B_q$, então a dimensão da parte semissimples de C é exatamente $t_a = \dim_F(A_1 \oplus \cdots \oplus A_q) = \dim_F(B_1 \oplus \cdots \oplus B_q)$. Além disso, note que $s_C = \max\{s_A, s_B\}$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $s_C = s_A$. Então, como A é fundamental, pelo Lema 2.1.5, para todo n suficientemente grande existe uma partição $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_u) \vdash n$ tal que $\lambda_{t_a+1} + \cdots + \lambda_u = s_A$ e χ_λ aparece com multiplicidade não nula em $\chi_n(A)$. Logo, como $C \sim_T A \oplus B$, então $A \in \text{var}(C)$ e concluímos que χ_λ também aparece com multiplicidade não nula em $\chi_n(C)$. Portanto, pelo Lema 2.1.5, temos que C também é fundamental. \square

Observação 2.1.17. *Perceba que, pela proposição anterior e pela Proposição 2.1.13, existem álgebras fundamentais PI-equivalentes a $A_1 \oplus A_1^*$, $A_1 \oplus A_2$, $A_1^* \oplus A_2$.*

Observação 2.1.18. *Suponha que B_1, \dots, B_k são álgebras de dimensão finita tais que $\overline{B_1} \cong \dots \cong \overline{B_k}$. Então é possível fundir todas essas álgebras em uma única álgebra. O processo se dá iterativamente: primeiramente, realizamos a fusão de B_1 e B_2 , então realizamos a fusão da álgebra resultante do processo anterior com B_3 , continuamos indutivamente esse processo até que todas as álgebras tenham sido fundidas.*

2.2 Álgebras com multiplicidades limitadas por 1

Nesta seção, consideraremos A uma álgebra cuja decomposição do n -ésimo cocaracter é dada como em (1.1) e apresentamos o resultado principal da referência [19], ou seja, classificaremos as álgebras cujas multiplicidades são limitadas por um.

Lembramos aqui que Ananin e Kemer em [5] caracterizaram as álgebra com multiplicidades limitadas por um através das identidades satisfeitas pelas álgebras, conforme enunciado no Teorema 1.1.7. De acordo com (1.2), tais identidades são do tipo $\alpha[x_1, x_2]x_2 + \beta x_2[x_1, x_2] \equiv 0$, onde $\alpha, \beta \in F$ são não simultaneamente nulos.

Vamos iniciar analisando as condições que devemos impor sobre as constantes α e β dadas no teorema de Ananin e Kemer de modo a termos uma álgebra fundamental com multiplicidades limitadas por um e com $s_A \geq 1$.

Lema 2.2.1. *Se A é uma álgebra não nilpotente com multiplicidades limitadas por um, então um dos casos a seguir ocorre:*

1. $\chi_n(A) = \chi_{(n)}$, para todo $n \geq 5$;
2. *A satisfaz uma das seguintes identidades polinômiais:*

$$[x_1, x_2]x_2 \equiv 0, \quad x_2[x_1, x_2] \equiv 0, \quad [x_1, x_2, x_2] \equiv 0.$$

Além disso, se A for uma álgebra fundamental com $s_A \geq 1$, então o primeiro caso não ocorre.

Demonstração. Pelo Lema 1.1.7, A satisfaz $\alpha[x_1, x_2]x_2 + \beta x_2[x_1, x_2] \equiv 0$ para alguns $\alpha, \beta \in F$ não simultaneamente nulos. Observe, primeiramente, que se $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \alpha + \beta \neq 0$ e $\alpha - \beta \neq 0$, então, por [[5], Lema 1], A satisfaz as identidades $[x_1, x_2]x_3x_4 \equiv 0, x_1[x_2, x_3]x_4 \equiv 0, x_1x_2[x_3, x_4] \equiv 0$. É fácil ver, que para $n \geq 4, x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \equiv x_1 \cdots x_n \pmod{\text{Id}(A)}$, para quaisquer $\sigma \in S_n$, e isso implica que $\chi_n(A) = \chi_{(n)}$ para todo $n \geq 4$.

Por outro lado, se $\alpha = \beta$, então $[x_1, x_2^2] \in \text{Id}(A)$ e por [[5], Lema 3] temos que $[x_1, x_2]x_3x_4x_5, x_1[x_2, x_3]x_4x_5, x_1x_2[x_3, x_4]x_5, x_1x_2x_3[x_4, x_5] \in \text{Id}(A)$. Também nesse caso temos que $\chi_n(A) = \chi_{(n)}$ para todo $n \geq 5$.

Portanto, podemos assumir que um dos casos ocorre: $\alpha = 0$, $\beta = 0$ ou $\alpha = -\beta$. Logo temos que $[x_1, x_2]x_2$, $x_2[x_1, x_2]$ ou $[x_1, x_2]x_2 - x_2[x_1, x_2] = [x_1, x_2, x_2]$ se anulam em A .

Agora, observe que se $\chi_n(A) = \chi_{(n)}$ para todo $n \geq 5$, então, pelo Lema 2.1.5, concluímos que A não pode ser fundamental com $s_A \geq 1$. Isto conclui a demonstração. \square

Lembre-se que no Lema 1.1.11 vimos que $\text{Id}(\mathcal{G}) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_T$. Agora, utilizando linearização e a identidade de Jacobi é fácil mostrar que $[x_1, x_2, x_3] \in \langle [x_1, x_2, x_2] \rangle_T$. Além disso, em [5, Lema 1], os autores demonstraram que

$$[x_1, x_2]x_3x_4, x_1[x_2, x_3]x_4 \in \langle [x_1, x_2]x_2 \rangle_T$$

e

$$x_1x_2[x_3, x_4], x_1[x_2, x_3]x_4 \in \langle x_2[x_1, x_2] \rangle_T.$$

Portanto, aplicando o Lema 2.1.10, nós obtemos o resultado a seguir.

Observação 2.2.2.

1. Se $[x_1, x_2]x_2 \in \text{Id}(A)$, então $A \in \text{var}(A_4)$.
2. Se $x_2[x_1, x_2] \in \text{Id}(A)$, então $A \in \text{var}(A_4^*)$.
3. Se $[x_1, x_2, x_2] \in \text{Id}(A)$, então $A \in \text{var}(\mathcal{G})$.

Pelo Lema 1.1.11, observamos que a álgebra de Grassmann possui multiplicidades limitadas por um. Combinando este fato com o Lema 2.2.1, conseguimos demonstrar um resultado mais forte na próxima proposição. Nela, demonstramos que $\text{var}(\mathcal{G})$ é, a menos de PI-equivalência, a única variedade com multiplicidades limitadas por um que não pode ser gerada por uma álgebra de dimensão finita.

Proposição 2.2.3. *Seja \mathcal{V} uma variedade de álgebras com multiplicidades limitadas por um. Se $\mathcal{G} \in \mathcal{V}$, então $\mathcal{V} = \text{var}(\mathcal{G})$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{V} = \text{var}(A)$. Como A possui multiplicidades limitadas por 1, então faremos uso do Lema 2.2.1. Logo, como \mathcal{G} não é nilpotente, segue que $\chi_n(A) = \chi_{(n)}$ ou A satisfaz uma das identidades a seguir: $[x_1, x_2]x_2 \equiv 0$, $x_2[x_1, x_2] \equiv 0$ ou $[x_1, x_2, x_2] \equiv 0$.

Se $\chi_n(A) = \chi_{(n)}$, então $\sum_{j=1}^n \chi_{(j, 1^{n-j})} = \chi_n(\mathcal{G}) \leq \chi_n(A) = \chi_{(n)}$, o que é uma contradição. Logo, necessariamente, A satisfaz uma das três identidades acima.

Se $[x_1, x_2]x_2 \in \text{Id}(A)$, então, pela Observação 2.2.2, $A \in \text{var}(A_4)$, mas como $\mathcal{G} \in \mathcal{V}$, então chegamos a uma contradição. De modo análogo, se $x_2[x_1, x_2] \in \text{Id}(A)$, então $A \in \text{var}(A_4^*)$ e novamente temos uma contradição.

Portanto, $[x_1, x_2, x_2] \in \text{Id}(A)$. Logo, pela Observação 2.2.2, temos que $A \in \text{var}(\mathcal{G})$ e, portanto, $\mathcal{V} = \text{var}(\mathcal{G})$. \square

Agora, veremos um resultado mais geral que diz respeito a álgebras cujas multiplicidades são limitadas por uma constante fixa que, eventualmente, pode ser diferente de um. A definição de álgebra com multiplicidades limitadas por uma constante é análoga à definição de álgebras com multiplicidades limitadas por um, porém, por completude, optamos por escrever a próxima definição.

Definição 2.2.4. *Dizemos que uma álgebra A possui multiplicidades limitadas por uma constante se existe uma constante K tal que, para todo $n \geq 1$ e qualquer partição λ de n , a multiplicidade m_λ do caracter irredutível χ_λ na decomposição do n -ésimo cocaracter de A satisfaz $m_\lambda \leq K$.*

As álgebras com multiplicidades limitadas por uma constante foram caracterizadas em [34], mas o resultado também pode ser encontrado em [21]. Exibimos este resultado como o próximo teorema.

Teorema 2.2.5 ([21], Teorema 7.4.6). *Uma álgebra A possui multiplicidades limitadas por uma constante se, e somente se, $UT_2 \notin \text{var}(A)$.*

A seguir, mostramos que toda álgebra de dimensão finita com multiplicidades limitadas por uma constante possui crescimento polinomial de sua sequência de codimensões.

Proposição 2.2.6. *Se A é uma álgebra de dimensão finita com multiplicidades limitadas por uma constante, então a sequência de codimensões de A é limitada polinomialmente.*

Demonstração. Como A é uma álgebra de dimensão finita, pelo Lema 1.1.10, temos que $\mathcal{G} \notin \text{var}(A)$. Por outro lado, temos, pelo Teorema 2.2.5, que $UT_2 \notin \text{var}(A)$. Portanto, pelo Teorema 1.1.9, concluímos que A tem crescimento polinomial da sequência de codimensões. \square

Perceba que, pelo resultado anterior, álgebras fundamentais com multiplicidades limitadas por um possuem crescimento polinomial de sua sequência de codimensões.

Nosso próximo objetivo é descrever as álgebras fundamentais não nilpotentes que possuem multiplicidades limitadas por 1. Para isso, faremos uso dos Lemas 2.1.5 e 2.1.10, da Proposição 2.1.16 e do Teorema 2.1.12. Mas primeiramente, considere a próxima observação.

Observação 2.2.7. *Por [[31], Lema 2], as álgebras $A_1 \oplus A_2$ e $A_1^* \oplus A_2$ não possuem multiplicidades limitadas por 1. Então, pelo Teorema 2.1.12, não existem álgebras fundamentais com multiplicidades limitadas por um e cocomprimento igual a 4.*

No nosso próximo passo, classificaremos as álgebras fundamentais A não nilpotentes que possuem cocomprimento limitado por três. Para isso, vamos considerar dois casos: $l_n(A) \leq 2$ e $l_n(A) = 3$.

Proposição 2.2.8. *Seja A uma álgebra fundamental não nilpotente. Se $l_n(A) \leq 2$, então ou $A \sim_T F$ ou $A \sim_T A_1$ ou $A \sim_T A_1^*$.*

Demonstração. Se $l_n(A) = 0$, então $A \sim_T N$, para alguma uma álgebra nilpotente N e temos uma contradição. Se $l_n(A) = 1$, então $A \sim_T C \oplus N$, onde C é uma álgebra comutativa. Logo, pelo Lema 2.1.5, $J(A) = \{0\}$ e, pelas Proposições 2.1.9 e 2.2.6 segue que $A \sim_T F$.

Se $l_n(A) = 2$, então $A \sim_T A_1 \oplus N$ ou $A \sim_T A_1^* \oplus N$. Logo, pelo Lema 2.1.10, temos que $\chi_n(A) = \chi_{(n)} + \chi_{(n-1,1)}$, para n suficientemente grande, e, pelo Lema 2.1.5, concluímos que $s_A = 1$. Como A possui multiplicidades limitadas por um e $l_n(A) = 2$, segue que $A \sim_T A_1$ ou $A \sim_T A_1^*$. \square

Agora, trataremos o caso em que $l_n(A) = 3$, para n suficientemente grande.

Proposição 2.2.9. *Se A é uma álgebra fundamental não nilpotente com multiplicidades limitadas por um e cocomprimento igual a 3, para n suficientemente grande, então temos que $A \sim_T A_2$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.1.12, temos que $A \sim_T A_1 \oplus A_1^* \oplus N$ ou $A \sim_T A_2 \oplus N$. Por outro lado, por [[31], Lema 1], a álgebra $A_1 \oplus A_1^*$ não possui multiplicidades limitadas por um. Logo, $A \sim_T A_2 \oplus N$. Como consequência, temos que $\chi_n(A) = \chi_{(n)} + \chi_{(n-1,1)} + \chi_{(n-2,1^2)}$ para todo n suficientemente grande e, pelo Lema 2.1.5, isso implica que $s_A = 2$.

Pelo Lema 2.2.1, temos que A satisfaz alguma das identidades $[x_1, x_2]x_2 \equiv 0$, $x_2[x_1, x_2] \equiv 0$ ou $[x_1, x_2, x_2] \equiv 0$ e, pela Observação 2.2.2, A pertence a alguma das variedades $var(A_4)$, $var(A_4^*)$ ou $var(\mathcal{G})$. Agora, se $A \in var(A_4)$, como $A \sim_T A_2 \oplus N$, temos que $A_2 \in var(A) \subseteq var(A_4)$ e chegamos a uma contradição. Analogamente não podemos ter $A \in var(A_4^*)$. Portanto, $A \in var(\mathcal{G})$.

Como A possui multiplicidades limitadas por um e $s_A = 2$, segue que para valores pequenos de n temos que $\chi_n(A) = \chi_{(n)} + \chi_{(n-1,1)} + \chi_{(n-2,1^2)} + m_{(n-2,2)}\chi_{(n-2,2)}$, onde $m_{(n-2,2)} = 1$ ou $m_{(n-2,2)} = 0$.

Se para algum n temos $m_{(n-2,2)} = 1$, então $\chi_n(A) \not\leq \chi_n(\mathcal{G})$ e $A \notin var(\mathcal{G})$, contradição. Portanto $m_{(n-2,2)} = 0$ e concluímos que $A \sim_T A_2$. \square

Na próxima proposição, utilizamos a Proposição 2.1.9 juntamente com o resultado básico de que uma álgebra de dimensão finita é PI-equivalente a uma soma direta finita de álgebras fundamentais para mostrarmos que toda álgebra de crescimento polinomial é PI-equivalente a uma soma direta de uma álgebra fundamental com uma álgebra nilpotente.

Proposição 2.2.10. *Seja A uma álgebra de dimensão finita com crescimento polinomial. Então A é PI-equivalente a uma álgebra fundamental ou $A \sim_T B \oplus N$, onde B é uma álgebra fundamental e N é uma álgebra nilpotente.*

Demonstração. Se A é fundamental, então não temos nada para fazer. Logo, suponha que A não seja fundamental. Então, em particular, A não é nilpotente. Note que se A é comutativa, então A é PI-equivalente a F , uma álgebra fundamental. Então A não é nem comutativa e nem nilpotente.

Pelo Lema 2.1.4, A é PI-equivalente a uma soma direta finita de álgebras fundamentais, e, como A possui crescimento polinomial, cada um dos elementos dessa soma direta possui crescimento polinomial. Portanto, pela Proposição 2.1.9, $A \sim_T B_1 \oplus \cdots \oplus B_k \oplus N_1 \oplus \cdots \oplus N_q$, onde B_i é uma álgebra fundamental com parte semissimples isomorfa a F e N_j é uma álgebra nilpotente, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, q$. Agora, usaremos a fusão dada pelo Lema 2.1.15 nos elementos da componente $B_1 \oplus \cdots \oplus B_k$. Para isso, prosseguiremos como na Observação 2.1.18. Denotaremos a álgebra resultante desse processo por B . Como B_i é uma álgebra fundamental para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, então, pela Proposição 2.1.16, temos que B é fundamental e $B \sim_T B_1 \oplus \cdots \oplus B_k$. Portanto, $A \sim_T B \oplus N$, onde $N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_q$. \square

Note que, pela proposição anterior, se estamos interessados em observar a n -ésima codimensão ou o n -ésimo cocaracter de uma álgebra de dimensão finita A então, eventualmente, basta olharmos para os respectivos valores numéricos de uma álgebra fundamental B que pertence à variedade gerada por A . Em particular, como veremos no próximo corolário, eventualmente o n -ésimo cocaracter de A irá coincidir com o n -ésimo cocaracter de uma álgebra fundamental.

Corolário 2.2.11. *Seja A uma álgebra de dimensão finita com crescimento polinomial. Então existe uma álgebra fundamental de dimensão finita B tal que, para todo n suficientemente grande, $\chi_n(A) = \chi_n(B)$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.2.10, existe uma álgebra fundamental B tal que $A \sim_T B \oplus N$, onde N é uma álgebra nilpotente. Logo, $\chi_n(A) = \chi_n(B)$ para todo $n \geq q$, onde q é o índice de nilpotência de N . \square

Quando trabalhamos com uma álgebra fundamental não nilpotente A que possui crescimento polinomial de sua sequência de codimensões e tem a decomposição de Wedderburn-Malcev $A = \overline{A} + J(A)$, o Lema 2.1.5 e a Proposição 2.1.9 garantem que, para todo n suficientemente grande, existe pelo menos uma partição $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_u)$ de n tal que $\lambda_2 + \cdots + \lambda_u = s_A$ e o caracter irreduzível χ_λ possui multiplicidade não nula em $\chi_n(A)$. Além disso, por [18] (Observação 5), toda partição λ tal que $\lambda_2 + \cdots + \lambda_u > s_A$ possui multiplicidade nula em $\chi_n(A)$. Também, sob as mesmas hipóteses, o valor da multiplicidade $m_{(n)}$ é igual a 1 em $\chi_n(A)$.

Faremos uso destes fatos, examinando os valores possíveis para s_A , para classificar as álgebras cujas multiplicidades no seu n -ésimo cocaracter são limitadas por um, para todo $n \geq 1$.

Para alcançarmos nosso objetivo, no resultado a seguir, damos início descrevendo as álgebras fundamentais A com multiplicidades limitadas por um para valores específicos de s_A .

Proposição 2.2.12. *Seja A uma álgebra fundamental não nilpotente e suponha que A possui multiplicidades limitadas por um. Temos que*

(1) *Se $s_A = 1$, então $A \sim_T B$, onde $B \in \{A_1, A_1^*\}$;*

(2) *Se $s_A = 2$, então $A \sim_T A_2$.*

Demonstração. Suponha que $s_A = 1$. Pelo Lema 2.1.5, a multiplicidade m_λ do caracter irreduzível associado à partição $\lambda = (n-1, 1)$ é não nula para todo n suficientemente grande. Logo, como A possui multiplicidades limitadas por um, $l_n(A) = 2$. Então, pela Proposição 2.2.8, temos que ou $A \sim_T A_1$ ou $A \sim_T A_1^*$.

Agora, suponha que $s_A = 2$. Pelo Lema 2.1.5, para $\lambda = (n-2, 2)$ ou $\lambda = (n-2, 1^2)$, temos que $m_\lambda \neq 0$ para todo n suficientemente grande. Como A é uma álgebra fundamental com multiplicidades limitadas por um e $s_A = 2$, pelas Proposições 2.2.8 e 2.2.9 e Observação 2.2.7, concluímos que $l_n(A) = 3$ e temos que $A \sim_T A_2$. \square

No próximo teorema, mostraremos que, utilizando a notação da proposição anterior, se o valor de s_A é grande o suficiente, então as únicas álgebras fundamentais com multiplicidades limitadas por um que temos são, a menos de PI-equivalência, as álgebras \mathcal{G}_{2k} , $k \geq 2$.

Teorema 2.2.13. *Seja A uma álgebra fundamental não nilpotente e não comutativa. Se $s_A \geq 3$ e A possui multiplicidades limitadas por um, então $A \sim_T \mathcal{G}_{2k}$, para algum $k \geq 2$.*

Demonstração. Como A é fundamental e possui multiplicidades limitadas por um, então, pelo Lema 2.2.1 e Observação 2.2.2, temos que um dos casos acontece: $A \in \text{var}(A_4^*)$, $A \in \text{var}(A_4)$ ou $A \in \text{var}(\mathcal{G})$.

Nos primeiros dois casos, pelo Lema 2.1.10, nós chegamos a uma contradição. De fato, para todo $n \geq 4$ e toda partição $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_u) \vdash n$, se χ_λ aparece com multiplicidade não nula em $\chi_n(A_4^*)$ (analogamente em $\chi_n(A_4)$), então $\lambda_2 + \dots + \lambda_u \leq 2$.

Portanto, necessariamente, $A \in \text{var}(\mathcal{G})$. Como A possui dimensão finita e não é nem comutativa e nem nilpotente, Pelo Teorema 1.1.12, temos que $A \sim_T \mathcal{G}_{2k} \oplus N$, para algum $k \geq 1$ e para alguma álgebra nilpotente $N \in \text{var}(\mathcal{G})$.

Então, para todo n suficientemente grande, $\chi_n(A) = \chi_n(\mathcal{G}_{2k})$. Como \mathcal{G}_{2k} é fundamental, $s_{\mathcal{G}_{2k}} = 2k$ e, como A também é fundamental, segue que $s_A = 2k$.

Suponha que para algum valor pequeno de n existe uma partição $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_u) \vdash n$ tal que χ_λ possui multiplicidade nula em $\chi_n(\mathcal{G}_{2k})$ mas possui multiplicidade não nula em $\chi_n(\mathcal{G}_{2k} \oplus N)$. Pela decomposição do cocaracter de \mathcal{G}_{2k} e como $N \in \text{var}(\mathcal{G})$, segue que $\lambda_2 + \dots + \lambda_u > 2k$, contradizendo o fato de que $s_A = 2k$. Logo, $\chi_n(\mathcal{G}_{2k}) = \chi_n(\mathcal{G}_{2k} \oplus N)$, para todo $n \geq 1$ e concluímos que $A \sim_T \mathcal{G}_{2k}$.

Perceba também que, como $s_{\mathcal{G}_2} = 2$ devemos ter $k \geq 2$. Isto concluí a demonstração. \square

Na próxima proposição, nós coletamos os resultados anteriores e apresentamos a classificação das álgebras fundamentais com multiplicidades limitadas por um. Claramente, as álgebra nilpotentes com multiplicidades limitadas por um fazem parte dessa classificação.

Proposição 2.2.14. *Sejam A uma álgebra fundamental não nilpotente. Então A possui multiplicidades limitadas por um se, e somente se, A é PI-equivalente a uma das álgebras a seguir: F , A_1 , A_1^* , \mathcal{G}_{2k} , $k \geq 1$.*

Demonstração. Suponha que A é uma álgebra fundamental com multiplicidades limitadas por um. Se A é simples, então é fácil ver que $A \cong F$. Logo, vamos supor que A não é simples. Se $s_A \in \{1, 2\}$, então, pela Proposição 2.2.12, $A \sim_T B$, onde $B \in \{A_1, A_1^*, A_2\}$. Se $s_A \geq 3$, então, pelo Teorema 2.2.13, temos que $A \sim_T \mathcal{G}_{2k}$, para algum $k \geq 2$. Uma vez que $\mathcal{G}_2 \sim_T A_2$, o resultado segue.

A volta segue imediatamente do Teorema anterior juntamente com o Lema 2.1.10 e a Observação 2.1.11. \square

Concluiremos esta seção com o resultado principal desta tese, o qual classifica as álgebras com multiplicidades limitadas por um.

Teorema 2.2.15. *Seja A uma álgebra com multiplicidades limitadas por um. Então A é PI-equivalente a uma das álgebras \mathcal{G} , N , $F \oplus N$, $A_1 \oplus N_1$, $A_1^* \oplus N_2$, $\mathcal{G}_{2k} \oplus N_3$, onde $k \geq 1$ e N, N_1, N_2, N_3 são álgebras nilpotentes com multiplicidades limitadas por um tais que N_1 satisfaz a identidade $[x_1, x_2]x_2$, N_2 satisfaz a identidade $x_2[x_1, x_2]$ e $N_3 \in \text{var}(\mathcal{G})$.*

Demonstração. Suponha que A possui multiplicidades limitadas por um. Se $\mathcal{G} \in \text{var}(A)$, então, pela Proposição 2.2.3, $A \sim_T \mathcal{G}$ e o resultado segue. Portanto, assumiremos que $\mathcal{G} \notin \text{var}(A)$. Pelo Lema 1.1.10, podemos assumir que A é uma álgebra de dimensão finita. Logo, pela Proposição 2.2.6, a álgebra A possui crescimento polinomial de sua sequência de codimensões. Então, pela Proposição 2.2.10, temos que $A \sim_T B \oplus N$, onde B é uma álgebra fundamental e N é uma álgebra nilpotente. Se B é nilpotente ou simples, então $A \sim_T N$ ou $A \sim_T F \oplus N$, respectivamente.

Portanto, assumiremos que $A \sim_T B \oplus N$, onde B não é nem simples e nem nilpotente e N é uma álgebra nilpotente com multiplicidades limitadas por um. Pela Proposição 2.2.14, segue que $B \in \{A_1, A_1^*, \mathcal{G}_{2k} \mid k \geq 1\}$.

Por outro lado, pelo Lema 2.2.1 e pela Observação 2.2.2, temos que um dos casos acontece: $A \in \text{var}(A_4)$, $A \in \text{var}(A_4^*)$ ou $A \in \text{var}(\mathcal{G})$.

Se $A \in \text{var}(A_4)$ então, como nem A_1^* e nem \mathcal{G}_{2k} (para todo $k \geq 1$) pertence a $\text{var}(A_4)$, segue que $B = A_1$. Além disso, como neste caso A satisfaz a identidade $[x_1, x_2]x_2$, concluímos que $A \sim_T A_1 \oplus N_1$, onde N_1 é uma álgebra nilpotente satisfazendo a mesma identidade.

Para o caso em que $A \in \text{var}(A_4^*)$ um argumento similar mostra que $A \sim_T A_1^* \oplus N_2$, onde N_2 é uma álgebra nilpotente satisfazendo a identidade $x_2[x_1, x_2]$. Se, em vez disso, $A \in \text{var}(\mathcal{G})$, então, pelo Teorema 2.2.13, temos que $A \sim_T \mathcal{G}_{2k} \oplus N_3$, onde $N_3 \in \text{var}(\mathcal{G})$.

Por outro lado, perceba que \mathcal{G} e $\mathcal{G}_{2k} \oplus N_3$ pertencem a $\text{var}(\mathcal{G})$, $A_1 \oplus N_1$ satisfaz a identidade $[x_1, x_2]x_2$, e $A_1^* \oplus N_2$ satisfaz $x_2[x_1, x_2]$. Logo, segue que as álgebras $F \oplus N$, \mathcal{G} , $A_1 \oplus N_1$, $A_1^* \oplus N_2$, $\mathcal{G}_{2k} \oplus N_3$ satisfazem alguma identidade da forma $\alpha[x_1, x_2]x_2 + \beta x_2[x_1, x_2]$ com $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Portanto, pelo Teorema 1.1.7, essas álgebras possuem multiplicidades limitadas por um. \square

Capítulo 3

Extensão dos resultados para superálgebras

A partir deste capítulo, trabalharemos na extensão dos resultados anteriores para o contexto de superálgebras, dividindo os resultados aqui em três seções. Na primeira, estendemos uma série de resultados a respeito de álgebras fundamentais para o contexto de superálgebras. Na segunda, apresentamos algumas superálgebras e resultados auxiliares para a seção seguinte e que serão úteis na seção dedicada a trabalhos futuros. Por fim, na terceira seção, demonstramos que D^{gr} é, a menos de isomorfismo, a única superálgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental com \mathbb{Z}_2 -expoente 2 e \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por 1.

3.1 Superálgebras \mathbb{Z}_2 -fundamentais

Nosso principal objetivo é obter informações a respeito de superálgebras com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um, de acordo com a próxima definição.

Definição 3.1.1. *Dizemos que uma superálgebra A possui \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um se, para todo $n \geq 1$ e para toda multipartição $\langle \lambda \rangle$ de n , temos que $m_{\langle \lambda \rangle} \leq 1$ em $\chi_n^{gr}(A)$.*

Em [14], Giambruno e Mishchenko estenderam o resultado de Ananin e Kemer e caracterizaram as superálgebras com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um através de \mathbb{Z}_2 -identidades satisfeitas pela superálgebra. Apresentamos esse resultado como o próximo teorema.

Teorema 3.1.2 (Veja [14], Teorema 1). *Seja A uma superálgebra. Então A possui \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um se, e somente se, existem constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in F$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ e $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$ de modo que*

$$\alpha y_1 z_2 + \beta z_2 y_1, \gamma y_1 [y_1, y_2] + \delta [y_1, y_2] y_1 \in \text{Id}^{gr}(A).$$

Assim como no caso ordinário, nos nossos estudos faremos uso de uma classe importante de superálgebras, as chamadas superálgebras \mathbb{Z}_2 -fundamentais, que iremos definir a seguir. A partir de agora, vamos fixar algumas notações a serem utilizadas nesta e nas próximas seções.

Para uma superálgebra de dimensão finita A , consideraremos uma decomposição de Wedderburn-Malcev $A = \bar{A} \dot{+} J(A)$ como superálgebra, onde $J(A)$ é o radical de Jacobson de A e \bar{A} é uma \mathbb{Z}_2 -subálgebra semissimples maximal de A , ou seja, $\bar{A} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_q$ onde cada A_i é uma superálgebra simples, $i = 1, \dots, q$. Como $J(A)$ é nilpotente, denotaremos por s_A o menor inteiro não negativo tal que $J(A)^{s_A+1} = \{0\}$.

Aproveitamos este momento para recordar a classificação das superálgebras simples de dimensão finita. Para isso, lembremos primeiramente que, para $k \geq l \geq 0$, $k \geq 1$, temos que a superálgebra $M_{k,l}(F)$ é a álgebra $M_{k+l}(F)$ munida da graduação

$$\left(\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & Q \\ R & 0 \end{pmatrix} \right),$$

onde P, Q, R, S são matrizes de ordem $k \times k$, $k \times l$, $l \times k$ e $l \times l$, respectivamente. Recordemos também que a álgebra $M_n(F + cF) = M_n(F) + M_n(cF)$, $c^2 = 1$, é uma superálgebra com graduação $(M_n(F), M_n(cF))$. O próximo teorema traz a classificação das superálgebras simples de dimensão finita.

Teorema 3.1.3 ([21], Teorema 3.5.3). *Seja A uma superálgebra simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado F de característica zero. Então A é isomorfa a $M_{k,l}(F)$, $k \geq l \geq 0$, $k \geq 1$, ou a $M_n(F + cF)$, $c^2 = 1$.*

Vamos agora considerar A como uma superálgebra de dimensão finita que não seja simples. Recordemos que $J(A)$ é um \mathbb{Z}_2 -ideal de A e consideremos $r = \dim_F J(A)^{(0)}$ e $s = \dim_F J(A)^{(1)}$. Defina

$$A' = \bar{A} * F\langle y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_s \rangle$$

o produto livre de \bar{A} e $F\langle y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_s \rangle$.

Além disso, consideremos I como o ideal de A' gerado por todas as avaliações das \mathbb{Z}_2 -identidades polinomiais de A por elementos em A' . Denotaremos por \mathcal{A} a álgebra A'/I e por \mathcal{A}_{s_A} a álgebra \mathcal{A}/K^{s_A} , onde K é o ideal gerado pelas variáveis $y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_s$.

Lema 3.1.4 (Veja [2], Proposição 4.6). *Valem as seguintes afirmações:*

1. \mathcal{A}_{s_A} possui dimensão finita;
2. $J(\mathcal{A}_{s_A})^{s_A} = \{0\}$.

Analogamente ao caso ordinário, vamos considerar $\bar{A} = A_1 \oplus \cdots \oplus A_q$ uma decomposição de \bar{A} em componentes simples e, para todo $i \in \{1, \dots, q\}$, vamos definir

$$B_i = A_1 \oplus \cdots \oplus A_{i-1} \oplus A_{i+1} \oplus \cdots \oplus A_q + J(A).$$

A seguir, conforme [[38], Definição 3.3], podemos estender o conceito de álgebras \mathbb{Z}_2 -fundamentais para o contexto de superálgebras.

Definição 3.1.5. *Uma superálgebra de dimensão finita A é \mathbb{Z}_2 -fundamental se ou A é simples ou*

$$\text{Id}^{gr}(A) \subsetneq \bigcap_{i=1}^q \text{Id}^{gr}(B_i) \cap \text{Id}^{gr}(\mathcal{A}_{s_A}).$$

Exemplo 3.1.6. *Perceba que, dada uma álgebra fundamental A , então se considerarmos A como superálgebra com graduação trivial, temos que A é uma superálgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental. Desta forma, temos que UT_2 é uma superálgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental. Além disso, analogamente ao Exemplo 2.1.3, temos que UT_2^{gr} também é uma superálgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental.*

Destacamos que na literatura as superálgebras \mathbb{Z}_2 -fundamentais também são denominadas por superálgebras básicas (veja [2] e [4]). Analogamente ao caso ordinário, as superálgebras \mathbb{Z}_2 -fundamentais desempenham o importante papel de blocos básicos na construção de superálgebras de dimensão finita, no sentido de que toda superálgebra de dimensão finita é T_2 -equivalente a uma soma direta finita de superálgebras \mathbb{Z}_2 -fundamentais. Destacamos este fato crucial como o nosso próximo lema.

Lema 3.1.7 (Veja [38], Teorema 3.4). *Se A é uma superálgebra de dimensão finita, então A é T_2 -equivalente a uma soma direta finita de superálgebras \mathbb{Z}_2 -fundamentais.*

Se A é uma superálgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental, então, por vezes, diremos apenas que A é \mathbb{Z}_2 -fundamental. Além disso, se A é uma superálgebra de dimensão finita, então denotaremos, respectivamente, por $\bar{A}^{(0)}$ e por $\bar{A}^{(1)}$ a componente par e a componente ímpar da sua parte semissimples.

Em 2024, Pascucci [38] caracterizou as superálgebras \mathbb{Z}_2 -fundamentais através da sequência de \mathbb{Z}_2 -cocaracteres. Precisamente, a autora apresentou o resultado a seguir, onde consideramos uma superálgebra cuja decomposição do n -ésimo \mathbb{Z}_2 -cocaracter é dada como em (1.3).

Lema 3.1.8 (Veja [38], Teorema 6.2). *Sejam A uma superálgebra de dimensão finita que não é simples, $d_0 = \dim_F \bar{A}^{(0)}$ e $d_1 = \dim_F \bar{A}^{(1)}$.*

Então A é \mathbb{Z}_2 -fundamental se, e somente se, para todo n suficientemente grande, existe uma multipartição $\langle \lambda \rangle = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)})$ com $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_k^{(0)}) \vdash n_0$, $\lambda^{(1)} =$

$(\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_l^{(1)}) \vdash n_1$ para $n_0 + n_1 = n$ tal que $\lambda_{d_0+1}^{(0)} + \dots + \lambda_k^{(0)} + \lambda_{d_1+1}^{(1)} + \dots + \lambda_l^{(1)} = s_A$ e $m_{\langle \lambda \rangle} \neq 0$ em $\chi_n^{gr}(A)$.

Destacamos que o resultado acima é uma adaptação para superálgebras do resultado original da autora que engloba álgebras G -graduadas, G um grupo finito, onde consideramos $G = \mathbb{Z}_2$. Além disso, salientamos que um resultado análogo para superálgebras foi desenvolvido em 2022 por Giambruno e La Mattina [9], porém, por conveniência com relação à apresentação do \mathbb{Z}_2 -cocaracter de algumas superálgebras, optamos por fazer uso do resultado de Pascucci.

A seguir, estendemos naturalmente o conceito de álgebras reduzidas para superálgebras \mathbb{Z}_2 -reduzidas.

Definição 3.1.9. *Seja A uma superálgebra de dimensão finita com $J = J(A)$ e $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_q + J$ uma decomposição de Wedderburn-Malcev de A como superálgebra. Então, A é \mathbb{Z}_2 -reduzida se A é nilpotente ou, a menos de uma reordenação dos índices, temos que $A_1 J A_2 \dots J A_q \neq \{0\}$.*

Agora, vamos relacionar as superálgebras \mathbb{Z}_2 -fundamentais com as superálgebras \mathbb{Z}_2 -reduzidas.

Lema 3.1.10 ([4], Proposição 19.5.14). *Se A é uma superálgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental, então A é \mathbb{Z}_2 -reduzida.*

Destacamos que a recíproca não vale. De fato, basta considerar um contraexemplo análogo ao apresentado na Seção 2.1 do capítulo anterior no caso ordinário.

Agora, destacamos uma relação entre superálgebras \mathbb{Z}_2 -fundamentais e o crescimento assintótico de sua sequência de \mathbb{Z}_2 -codimensões.

Proposição 3.1.11. *Seja A uma superálgebra de dimensão finita e com crescimento polinomial. Então A é \mathbb{Z}_2 -reduzida se, e somente se, $\dim_F \bar{A} \leq 1$.*

Demonstração. Suponha que A seja \mathbb{Z}_2 -reduzida e tome $\bar{A} = A_1 \oplus \dots \oplus A_q$ uma decomposição de \bar{A} como soma direta de superálgebras simples. Como A é \mathbb{Z}_2 -reduzida, pelo Lema 1.2.6, temos que $\exp^{gr}(A) = \dim_F \bar{A}$. Portanto, como A tem crescimento polinomial, pelo Teorema 1.2.4, concluímos que $\dim_F \bar{A} \leq 1$. A recíproca é óbvia. \square

Agora vamos usar a proposição anterior para contribuir com um resultado de caracterização de superálgebras \mathbb{Z}_2 -fundamentais de crescimento polinomial.

Proposição 3.1.12. *Seja A uma superálgebra com crescimento polinomial de sua sequência de \mathbb{Z}_2 -codimensões. Então, A é \mathbb{Z}_2 -fundamental se, e somente se, ou A é nilpotente ou $A \cong F$ ou $A \cong F \dot{+} J(A)$ e, para todo n suficientemente grande, existe uma multipartição $\langle \lambda \rangle = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)})$ com $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_k^{(0)}) \vdash n_0$, $\lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_l^{(1)}) \vdash n_1$ e $n_0 + n_1 = n$ tal que $\lambda_2^{(0)} + \dots + \lambda_k^{(0)} + \lambda_1^{(1)} + \dots + \lambda_l^{(1)} = s_A$ e $m_{\langle \lambda \rangle} \neq 0$ em $\chi_n^{gr}(A)$.*

Demonstração. Primeiramente, observamos que, sendo A de crescimento polinomial, obviamente temos $\mathcal{G}, \mathcal{G}^{gr} \notin \text{var}^{gr}(A)$. Logo, pelo Teorema 1.2.11 podemos considerar que A é uma superálgebra de dimensão finita.

Suponha que A é \mathbb{Z}_2 -fundamental e considere $t_A = \dim_F \bar{A}$. Então, pelo Lema 3.1.10, A é \mathbb{Z}_2 -reduzida e temos que $t_A = \dim_F \bar{A} \leq 1$. Se $t_A = 0$, então A é nilpotente. Agora, se $t_A = 1$, então $A \cong F$ ou $A \cong F + J(A)$ com $J(A) \neq \{0\}$. Para o segundo caso o resultado segue pelo Lema 3.1.8.

Reciprocamente, se A é nilpotente ou $A \cong F$, então A é \mathbb{Z}_2 -fundamental. No caso restante nós temos que A é \mathbb{Z}_2 -fundamental pelo Lema 3.1.8. \square

Agora, observe que a fusão apresentada no Lema 2.1.15 pode ser naturalmente estendida para o contexto de superálgebras. Apresentamos esse resultado como o próximo lema.

Lema 3.1.13 (Veja [4], Lema 2.17). *Sejam A e B superálgebras de dimensão finita com respectivas decomposições de Wedderburn-Malcev dadas por $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n \dot{+} J(A)$ e $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m \dot{+} J(B)$ como superálgebras. Suponha que existe um inteiro positivo k de modo que $A_1 \oplus \cdots \oplus A_k \cong B_1 \oplus \cdots \oplus B_k \cong U$. Então, $A \oplus B$ é T_2 -equivalente à superálgebra*

$$C = U \oplus A_{k+1} \oplus \cdots \oplus A_n \oplus B_{k+1} \oplus \cdots \oplus B_m \dot{+} J(A) \dot{+} J(B).$$

Demonstração. Considere C , com estrutura de espaço vetorial descrito acima, e tome

$$D = [U \oplus A_{k+1} \oplus \cdots \oplus A_n \dot{+} J(A)] \oplus [U \oplus B_{k+1} \oplus \cdots \oplus B_m \dot{+} J(B)]$$

com graduação trivialmente herdada de A e de B , ou seja,

$$D^{(0)} = [U \oplus A_{k+1} \oplus \cdots \oplus A_n \dot{+} J(A)]^{(0)} \oplus [U \oplus B_{k+1} \oplus \cdots \oplus B_m \dot{+} J(B)]^{(0)},$$

$$D^{(1)} = [U \oplus A_{k+1} \oplus \cdots \oplus A_n \dot{+} J(A)]^{(1)} \oplus [U \oplus B_{k+1} \oplus \cdots \oplus B_m \dot{+} J(B)]^{(1)}.$$

Tome $\phi : C \rightarrow D$ uma imersão de espaços vetoriais dada por

$$\phi(u, a_{k+1}, \dots, a_n, b_{k+1}, \dots, b_m, j_a, j_b) = ((u, a_{k+1}, \dots, a_n, j_a), (u, b_{k+1}, \dots, b_m, j_b)).$$

Como vimos no caso ordinário, a imagem de ϕ é fechada para o produto. Portanto, C possui estrutura de álgebra dada pela imagem de ϕ , visto que ϕ é uma imersão. Logo, podemos considerar ϕ como uma imersão de F -álgebras. Agora, observe que ϕ preserva graduação, logo, ϕ é um imersão de superálgebras. Então, $\text{Id}^{gr}(C) \supset \text{Id}^{gr}(A \oplus B)$. Mas, por outro lado, A e B estão imersas em C . Logo $\text{Id}^{gr}(C) \subset \text{Id}^{gr}(A \oplus B)$ e o resultado segue. \square

Vamos denominar a superálgebra C construída no resultado anterior como a \mathbb{Z}_2 -fusão das superálgebras A e B . É fácil ver que a \mathbb{Z}_2 -fusão de superálgebras \mathbb{Z}_2 -fundamentais não precisa ser uma superálgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental, mas se A e B são superálgebras \mathbb{Z}_2 -fundamentais com partes semissimples isomorfas, então a \mathbb{Z}_2 -fusão de A e B também preserva essa propriedade.

Proposição 3.1.14. *Sejam A e B superálgebras \mathbb{Z}_2 -fundamentais com decomposições de Wedderburn-Malcev $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_q \dot{+} J(A)$ e $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_q \dot{+} J(B)$ como superálgebras, respectivamente. Suponha que $A_1 \oplus \cdots \oplus A_q \cong B_1 \oplus \cdots \oplus B_q$. Então, existe uma superálgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental C tal que $C \sim_{T_2} A \oplus B$.*

Demonstração. Considere C como a \mathbb{Z}_2 -fusão das superálgebras A e B dada pelo Lema 3.1.13. Vamos mostrar que C é uma superálgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental. Observe que, como $A_1 \oplus \cdots \oplus A_q \cong B_1 \oplus \cdots \oplus B_q$, então a dimensão da parte semissimples de C é exatamente $t_a = \dim_F(A_1 \oplus \cdots \oplus A_q) = \dim_F(B_1 \oplus \cdots \oplus B_q)$.

Além disso, observamos que $s_C = \max\{s_A, s_B\}$. Suponha, sem perda de generalidade, que $s_C = s_A$. Então, como A é \mathbb{Z}_2 -fundamental, considerando as notações do Lema 3.1.8, existe uma multipartição $\langle \lambda \rangle = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)})$ com $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_k^{(0)}) \vdash n_0$, $\lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_l^{(1)}) \vdash n_1$ e $n_0 + n_1 = n$ tal que $m_{\langle \lambda \rangle} \neq 0$ em $\chi_n^{gr}(A)$ e $\lambda_{d_0+1}^{(0)} + \cdots + \lambda_k^{(0)} + \lambda_{d_1+1}^{(1)} + \cdots + \lambda_l^{(1)} = s_A$. Logo, como $C \sim_{T_2} A \oplus B$, vamos ter $A \in var^{gr}(C)$ e como consequência, $\chi_{\langle \lambda \rangle}$ também aparece com multiplicidade não nula em $\chi_n^{gr}(C)$. Portanto, pelo Lema 3.1.8, temos que C também é \mathbb{Z}_2 -fundamental. \square

Finalizamos essa seção com uma importante observação.

Observação 3.1.15. *Sejam B_1, \dots, B_k superálgebras tais que $\overline{B_1} \cong \cdots \cong \overline{B_k}$. Perceba que, utilizando o mesmo raciocínio desenvolvido na Observação 2.1.18, é possível fundir todas essas superálgebras em uma única superálgebra e obter como resultado uma superálgebra B que é T_2 -equivalente a $B_1 \oplus \cdots \oplus B_k$ e, além disso, B é uma superálgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental.*

3.2 Superálgebras e \mathbb{Z}_2 -multiplicidades

O objetivo desta seção é apresentar alguns resultados que dizem respeito a \mathbb{Z}_2 -cocaracteres, \mathbb{Z}_2 -cocomprimentos e T_2 -ideais de algumas superálgebras que serão importantes no desenvolvimento do restante deste capítulo. A maioria das superálgebras que discutimos aqui são determinadas fornecendo graduações para subálgebras de UT_n , para algum $n \geq 2$. A seguir, consideremos as superálgebras de nosso interesse, as quais foram estudadas em [12] e [42].

Aqui vamos considerar as álgebras A_1 e A_1^* já estudadas no contexto ordinário, mas fizemos a opção de manter as notações originais dos artigos em que foram estudadas. Assim, vamos denotar estas álgebras da seguinte maneira

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad U_1^* = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para estas álgebras, consideraremos a graduação trivial $(U_1, \{0\})$ e $(U_1^*, \{0\})$, respectivamente, e também

$$U_{1,1} \text{ para ser a álgebra } U_1 \text{ com graduação } \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right);$$

$$\text{e } U_{1,1}^* \text{ para ser a álgebra } U_1^* \text{ com graduação } \left(\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Vamos também considerar a álgebra de Grassmann de dimensão finita \mathcal{G}_2 e usaremos as seguintes notações:

$$\mathcal{G}_{2,1} \text{ para esta álgebra com graduação trivial } (\mathcal{G}_2, \{0\});$$

$$\mathcal{G}_{2,2} \text{ para esta álgebra com graduação } (F1 + Fe_1, Fe_2 + Fe_1e_2);$$

$$\mathcal{G}_{2,3} \text{ para esta álgebra com graduação } (F1 + Fe_1e_2, Fe_1 + Fe_2).$$

Além disso, consideramos a álgebra

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in F \right\}$$

como uma superálgebra com graduação $(F(e_{11} + e_{22}), Fe_{12})$ e a álgebra

$$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in F \right\}$$

como superálgebra com graduação $(F(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + Fe_{13}, F(e_{12} + e_{23}))$.

Finalmente, consideramos $U_{3,1} = \begin{pmatrix} F & F & F \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ com graduação trivial $(U_{3,1}, \{0\})$;

$$U_{3,4} = \begin{pmatrix} F & F & F \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ com graduação } \left(\begin{pmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & F & F \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right);$$

$$U_{4,1} = U_{3,1}^* = \begin{pmatrix} 0 & F & F \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix} \text{ com graduação trivial } (U_{4,1}, \{0\});$$

e

$$U_{4,4} = U_{3,4}^* = \begin{pmatrix} 0 & F & F \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}, \text{ com graduação } \left(\begin{pmatrix} 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Os próximos lemas reúnem resultados de Giambruno, La Mattina e Misso [12] e Vieira [42] e nos fornecem o T_2 -ideal e o n -ésimo \mathbb{Z}_2 -cocaracter das superálgebras definidas acima.

Lema 3.2.1 (Veja [12]). *Temos que:*

1. $\text{Id}^{gr}(U) = \langle [y_1, y_2], [y, z], z_1 z_2 \rangle_{T_2}$;
2. $\text{Id}^{gr}(U_1) = \langle y_1 [y_2, y_3], z \rangle_{T_2}$;
3. $\text{Id}^{gr}(U_1^*) = \langle [y_1, y_2] y_3, z \rangle_{T_2}$;
4. $\text{Id}^{gr}(U_{1,1}) = \langle [y_2, y_2], yz, z_1 z_2 \rangle_{T_2}$;
5. $\text{Id}^{gr}(U_{1,1}^*) = \langle [y_1, y_2], zy, z_1 z_2 \rangle_{T_2}$;
6. $\text{Id}^{gr}(U_2) = \langle [y_1, y_2], [z_1, z_2], [y, z], z_1 z_2 z_3 \rangle_{T_2}$;
7. $\text{Id}^{gr}(U_{3,1}) = \langle [y_1, y_2] y_3 y_4, z \rangle_{T_2}$;
8. $\text{Id}^{gr}(U_{3,4}) = \langle [y_1, y_2], z_1 z_2, z y_1 y_2 \rangle_{T_2}$;
9. $\text{Id}^{gr}(U_{4,4}) = \langle [y_1, y_2], z_1 z_2, y_1 y_2 z \rangle_{T_2}$;
10. $\text{Id}^{gr}(U_{4,1}) = \text{Id}^{gr}(U_{3,1}^*) = \langle [y_1, y_2] y_3 y_4, z \rangle_{T_2}$;
11. $\text{Id}^{gr}(\mathcal{G}_{2,1}) = \langle [y_1, y_2, y_3], [y_1, y_2][y_3, y_4], z \rangle_{T_2}$;
12. $\text{Id}^{gr}(\mathcal{G}_{2,2}) = \langle [y_1, y_2], [[y_1, z], y_2], z_1 z_2 \rangle_{T_2}$;
13. $\text{Id}^{gr}(\mathcal{G}_{2,3}) = \langle [y_1, y_2], [y, z], z_1 z_2 z_3, z_1 z_2 + z_2 z_1 \rangle_{T_2}$.

Lema 3.2.2 (Veja [42] e [12]). *Temos as seguintes decomposições de \mathbb{Z}_2 -cocaracteres.*

1. $\chi_n^{gr}(U_1) = \chi_n^{gr}(U_1^*) = \chi_{(n),\emptyset} + \chi_{(n-1,1),\emptyset}$;
2. $\chi_n^{gr}(U_{1,1}) = \chi_n^{gr}(U_{1,1}^*) = \chi_{(n),\emptyset} + \chi_{(n-1),(1)}$;
3. $\chi_n^{gr}(U) = \chi_{(n),\emptyset} + \chi_{(n-1),(1)}$;
4. $\chi_n^{gr}(U_2) = \chi_{(n),\emptyset} + \chi_{(n-1),(1)} + \chi_{(n-2),(2)}$;

5. $\chi_n^{gr}(U_{3,1}) = \chi_n^{gr}(U_{4,1}) = \chi_{(n),\emptyset} + 2\chi_{(n-1,1),\emptyset} + \chi_{(n-2,2),\emptyset} + \chi_{(n-2,1^2),\emptyset}$
6. $\chi_n^{gr}(U_{3,4}) = \chi_n^{gr}(U_{4,4}) = \chi_{(n),\emptyset} + 2\chi_{(n-1),(1)} + \chi_{(n-2,1),(1)}$
7. $\chi_n^{gr}(\mathcal{G}_{2,1}) = \chi_{(n),\emptyset} + \chi_{(n-1,1),\emptyset} + \chi_{(n-2,1^2),\emptyset}$;
8. $\chi_n^{gr}(\mathcal{G}_{2,2}) = \chi_{(n),\emptyset} + 2\chi_{(n-1),(1)} + \chi_{(n-2,1),(1)}$;
9. $\chi_n^{gr}(\mathcal{G}_{2,3}) = \chi_{(n),\emptyset} + \chi_{(n-1),(1)} + \chi_{(n-2),(1^2)}$.

A seguir, provamos que todas as superálgebras definidas nesta seção são \mathbb{Z}_2 -fundamentais.

Proposição 3.2.3. *As superálgebras definidas acima são \mathbb{Z}_2 -fundamentais.*

Demonstração. Observe primeiramente que se $A \in \{U_1, U_1^*, U_{1,1}, U_{1,1}^*, U\}$ então $s_A = 1$. Por outro lado, se $A \in \{U_2, U_{3,1}, U_{3,3}, U_{3,3}^*, U_{4,1}, U_{3,4}, U_{4,4}, \mathcal{G}_{2,1}, \mathcal{G}_{2,2}, \mathcal{G}_{2,3}\}$ então $s_A = 2$. Logo, pelos Lemas 3.1.8 e 3.2.2, o resultado segue. \square

Agora, apresentaremos três resultados que podem ser conferidos em [42] e que serão extremamente úteis no decorrer das próximas seções.

Lema 3.2.4 (Veja [42], Proposição 4.2). *Temos que:*

1. $\chi_n^{gr}(U_1 \oplus U_1^*) = \chi_{(n),\emptyset} + 2\chi_{(n-1,1),\emptyset}$;
2. Se $A \in \{U_{1,1} \oplus U, U_{1,1}^* \oplus U, U_{1,1} \oplus U_{1,1}^*\}$, então $\chi_n^{gr}(A) = \chi_{(n),\emptyset} + 2\chi_{(n-1),(1)}$;
3. Se $A \in \{U_1 \oplus U_{1,1}, U_1^* \oplus U_{1,1}^*, U_1 \oplus U_{1,1}^*, U_1^* \oplus U_{1,1}, U_1 \oplus U, U_1^* \oplus U\}$, então

$$\chi_n^{gr}(A) = \chi_{(n),\emptyset} + \chi_{(n-1,1),\emptyset} + \chi_{(n-1),(1)}.$$

Para provar os próximos resultados, usaremos a classificação de superálgebras que possuem \mathbb{Z}_2 -cocomprimentos limitados por 2, o qual apresentamos abaixo.

Lema 3.2.5 (Veja [42], Teorema 7.2). *Para uma superálgebra A e n suficientemente grande, temos:*

1. $l_n^{gr}(A) = 0$ se, e somente se, $A \sim_{T_2} N$;
2. $l_n^{gr}(A) = 1$ se, e somente se, $A \sim_{T_2} C \oplus N$, onde C é uma superálgebra comutativa;
3. $l_n^{gr}(A) = 2$ se, e somente se, $A \sim_{T_2} B \oplus N$, onde $B \in \{U, U_1, U_{1,1}, U_1^*, U_{1,1}^*\}$;

onde N denota uma superálgebra nilpotente.

Além da classificação apresentada no lema anterior, para os nossos objetivos, necessitaremos de uma caracterização das superálgebras que possuem cocomprimento maior do que 2. Esse resultado foi apresentado em [42] e irá compor o teorema a seguir.

Teorema 3.2.6 (Veja [42], Teorema 7.2). *Para uma superálgebra de dimensão finita A as seguintes condições são equivalentes:*

- (1) $l_n^{gr}(A) \leq 2$, para qualquer $n \geq 1$;
- (2) $U_2, U_{3,1}, U_{3,4}, U_{4,1}, U_{4,4}, \mathcal{G}_{2,i}, B \notin \text{var}^{gr}(A)$ onde B é a soma direta de superálgebras distintas entre $U, U_1, U_{1,1}, U_1^*, U_{1,1}^*$ e $i = 1, 2, 3$.

Finalizamos esta seção apresentando um resultado provado por Otera em 2005, que é mais geral e caracteriza as \mathbb{Z}_2 -variedades cujas \mathbb{Z}_2 -multiplicidades são limitadas por uma constante K através de exclusão de álgebras da \mathbb{Z}_2 -variedade.

Teorema 3.2.7 (Veja [37], Teorema 4). *Seja A uma superálgebra de dimensão finita. Então A possui \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por uma constante K se, e somente se, $UT_2, UT_2^{gr} \notin \text{var}^{gr}(A)$.*

Na próxima seção, com uso de algumas informações dadas até agora, mostraremos que a superálgebra D^{gr} é, a menos de isomorfismo, a única superálgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental com \mathbb{Z}_2 -expoente 2 e \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um.

3.3 A superálgebra D^{gr}

Para iniciar os estudos sobre a superálgebra D^{gr} , necessitaremos primeiro apresentar as superálgebras a seguir:

$$UT_3^{gr0} = \begin{pmatrix} F & F & F \\ 0 & F & F \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix} \text{ com graduação trivial;}$$

$$UT_3^{gr1} = \begin{pmatrix} F & F & F \\ 0 & F & F \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix} \text{ com graduação } \left(\begin{pmatrix} F & F & 0 \\ 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right);$$

$$UT_3^{gr2} = \begin{pmatrix} F & F & F \\ 0 & F & F \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix} \text{ com graduação } \left(\begin{pmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & F & F \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & F & F \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right);$$

$$UT_3^{gr3} = \begin{pmatrix} F & F & F \\ 0 & F & F \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix} \text{ com graduação } \left(\begin{pmatrix} F & 0 & F \\ 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right);$$

$$UC_1 = \begin{pmatrix} F \dot{+} cF & F \dot{+} cF \\ 0 & F \end{pmatrix} \text{ com graduação } \left(\begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} cF & cF \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right);$$

$$UC_2 = \begin{pmatrix} F & F+cF \\ 0 & F+cF \end{pmatrix} \text{ com graduação } \left(\begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & cF \\ 0 & cF \end{pmatrix} \right);$$

$$M_2(F) \text{ com graduação trivial;}$$

$$M_{1,1}(F), \text{ ou seja, } M_2(F) \text{ com graduação } \left(\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & F \\ F & 0 \end{pmatrix} \right).$$

As superálgebras descritas acima são importantes devido ao seu papel na caracterização das \mathbb{Z}_2 -variedades com \mathbb{Z}_2 -expoente maior do que 2. Apresentamos este resultado como o próximo teorema.

Teorema 3.3.1 (Veja [6], Teorema 12). *Seja A uma superálgebra de dimensão finita. Então $\exp^{gr}(A) > 2$ se, e somente se, pelo menos uma das superálgebras descritas acima pertence a $\text{var}^{gr}(A)$.*

A seguinte observação é essencial para o desenvolvimento desta seção.

Observação 3.3.2. *Note que UT_2 é uma \mathbb{Z}_2 -subálgebra de $M_2(F)$, UC_1 e UC_2 , e também é isomorfa a uma \mathbb{Z}_2 -subálgebra de UT_3^{grj} , $j \in \{0, 1, 2, 3\}$. Além disso, UT_2^{gr} é uma \mathbb{Z}_2 -subálgebra da superálgebra $M_{1,1}(F)$. Logo, pelo teorema anterior, temos que se A é uma superálgebra com \mathbb{Z}_2 -expoente maior do que 2, então, em particular, vamos ter que UT_2 ou UT_2^{gr} pertencem a $\text{var}^{gr}(A)$.*

O lema a seguir nos fornece informações sobre a estrutura de uma superálgebra de dimensão finita A tal que $UT_2, UT_2^{gr} \notin \text{var}^{gr}(A)$.

Lema 3.3.3 (Veja a demonstração do Lema 6 em [37]). *Sejam A uma superálgebra de dimensão finita e $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k \dot{+} J(A)$ uma decomposição de Wedderburn-Malcev de A como superálgebra. Se existem $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $i \neq j$, tais que $B_i J(A) B_j \neq \{0\}$, então temos $UT_2 \in \text{var}^{gr}(A)$ ou $UT_2^{gr} \in \text{var}^{gr}(A)$.*

O próximo resultado segue diretamente pelo Teorema 3.2.7 e Observação 3.3.2.

Proposição 3.3.4. *Seja A uma superálgebra de dimensão finita com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um. Então $\exp^{gr}(A) \leq 2$.*

Agora, vamos estudar as superálgebras com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por 1 e \mathbb{Z}_2 -expoente exatamente 2. Daremos início com a proposição a seguir.

Proposição 3.3.5. *Seja A uma superálgebra de dimensão finita com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um. Se $\exp^{gr}(A) = 2$, então $D^{gr} \in \text{var}^{gr}(A)$.*

Demonstração. Como A possui dimensão finita, então, pelo Teorema 1.2.11, temos que $\mathcal{G}, \mathcal{G}^{gr} \notin var^{gr}(A)$. Além disso, como A possui \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um, pelo Teorema 3.2.7, temos que $UT_2, UT_2^{gr} \notin var^{gr}(A)$.

Por outro lado, desde que $\exp^{gr}(A) = 2$, pelo menos uma das superálgebras listadas no Teorema 1.2.8 deve pertencer a $var^{gr}(A)$. Portanto, como $\mathcal{G}, \mathcal{G}^{gr}, UT_2, UT_2^{gr} \notin var^{gr}(A)$, concluímos que $D^{gr} \in var^{gr}(A)$. \square

Na próxima proposição, relacionamos o resultado anterior com as álgebras \mathbb{Z}_2 -fundamentais.

Proposição 3.3.6. *Se A é uma superálgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental com \mathbb{Z}_2 -expoente 2 e \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um, então $A \cong D^{gr} \dot{+} J(A)$.*

Demonstração. Como A é \mathbb{Z}_2 -fundamental, pelo Lema 3.1.10, temos que A é \mathbb{Z}_2 -reduzida. Logo, pelo Lema 1.1.4, concluímos que $\dim_F \bar{A} = \exp^{gr}(A) = 2$. Então, pelo Teorema 3.1.3, temos as seguintes possibilidades: ou $\bar{A} \cong D^{gr}$ ou $\bar{A} = B_1 \oplus B_2$ tal que $B_1 \cong B_2 \cong F$ e \bar{A} possui graduação trivial.

Vamos supor que o segundo caso aconteça. Sendo A superálgebra \mathbb{Z}_2 -reduzida com $\exp^{gr}(A) = 2$, temos que, a menos de uma reordenação dos índices, $B_1 J(A) B_2 \neq \{0\}$. Logo, pelo Lema 3.3.3, temos que ou $UT_2 \in var^{gr}(A)$ ou $UT_2^{gr} \in var^{gr}(A)$. Em qualquer um desses casos, pelo Teorema 3.2.7, temos uma contradição visto que A possui \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um. Portanto, concluímos que $\bar{A} \cong D^{gr}$ e o resultado segue. \square

A seguir, relacionamos a Proposição 3.3.5 com o Teorema 3.1.2 para garantirmos a existência de uma \mathbb{Z}_2 -identidade específica no T_2 -ideal de uma álgebra de dimensão finita com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um.

Proposição 3.3.7. *Seja A uma superálgebra de dimensão finita com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um. Se $\exp(A) = 2$, então $[y, z] \in \text{Id}^{gr}(A)$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.2, temos que existem constantes não simultaneamente nulas α, β tais que $\alpha yz + \beta zy \in \text{Id}^{gr}(A)$. Por outro lado, pela Proposição 3.3.5, temos $D^{gr} \in var^{gr}(A)$ e D^{gr} satisfaz uma identidade do tipo destacado se, e somente se, $\alpha = -\beta$. Logo, o resultado segue. \square

Vejam a seguir que duas superálgebras específicas com \mathbb{Z}_2 -expoente 2 não possuem \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um.

Proposição 3.3.8. *As superálgebras $D^{gr} \oplus U_{1,1}$ e $D^{gr} \oplus U_{1,1}^*$ não possuem multiplicidades limitadas por um.*

Demonstração. Observamos que $\exp^{gr}(D^{gr}) = 2$, $\exp^{gr}(U_{1,1}) = 1$ e $\exp^{gr}(U_{1,1}^*) = 1$. Além disso, como consequência do Lema 1.2.6, temos que se A e B são superálgebras de dimensão finita, então, $\exp^{gr}(A \oplus B) = \max\{\exp^{gr}(A), \exp^{gr}(B)\}$. Assim, obtemos que $\exp^{gr}(D^{gr} \oplus U_{1,1}) = \exp^{gr}(D^{gr} \oplus U_{1,1}^*) = 2$.

Logo, se assumirmos que estas superálgebras possuem \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um, pela Proposição 3.3.7, $[y, z]$ é uma \mathbb{Z}_2 -identidade de cada uma delas e chegamos a uma contradição, pois, pelo Lema 3.2.1, $[y, z] \notin \text{Id}^{gr}(U_{1,1})$ e $[y, z] \notin \text{Id}^{gr}(U_{1,1}^*)$. Portanto, temos que $D^{gr} \oplus U_{1,1}$ e $D^{gr} \oplus U_{1,1}^*$ não possuem \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por 1. \square

Antes de prosseguir, necessitamos de um lema geral a respeito de superálgebras de dimensão finita do tipo $A = F \dot{+} J(A)$ que será essencial para o resultado em seguida e que pode ser encontrado em [12].

Lema 3.3.9 (Veja [12], Lema 8). *Seja $A = F \dot{+} J(A)$ uma superálgebra de dimensão finita. Se $J_{01} \neq \{0\}$ (respectivamente $J_{10} \neq \{0\}$), então existe uma \mathbb{Z}_2 -subálgebra B de A tal que $B \sim_{T_2} U_1$ ou $B \sim_{T_2} U_{1,1}$ (respectivamente $B \sim_{T_2} U_1^*$ ou $B \sim_{T_2} U_{1,1}^*$). Sendo mais precisos, se $J_{01}^{(0)} \neq \{0\}$, então $B \sim_{T_2} U_1$; se $J_{01}^{(1)} \neq \{0\}$, então $B \sim_{T_2} U_{1,1}$; se $J_{10}^{(0)} \neq \{0\}$, então $B \sim_{T_2} U_1^*$; se $J_{10}^{(1)} \neq \{0\}$, então $B \sim_{T_2} U_{1,1}^*$.*

Agora, estudaremos as superálgebras do tipo $A = D^{gr} \dot{+} J(A)$ com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um fazendo uso da decomposição apresentada no Lema 1.2.7.

Proposição 3.3.10. *Seja $A = D^{gr} \dot{+} J(A)$ uma superálgebra de dimensão finita. Se $J_{01} \neq \{0\}$ ou $J_{10} \neq \{0\}$, então A não possui \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um.*

Demonstração. Suponhamos que A possui \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um. Observe que a unidade de $D^{gr} = F \dot{+} cF$ é 1_F , logo podemos considerar as \mathbb{Z}_2 -subálgebras de A dadas por $B_1 = F + J_{01}$ e $B_2 = F + J_{10}$. Pelo Lema 3.3.9, se $J_{01}^{(1)} \neq \{0\}$ então, temos que $U_{1,1} \in \text{var}^{gr}(A)$ enquanto que se $J_{10}^{(1)} \neq \{0\}$ então $U_{1,1}^* \in \text{var}^{gr}(A)$.

Desta forma, se $J_{01}^{(1)} \neq \{0\}$ ou $J_{10}^{(1)} \neq \{0\}$, teremos que $D^{gr} \oplus U_{1,1} \in \text{var}^{gr}(A)$ ou $D^{gr} \oplus U_{1,1}^* \in \text{var}^{gr}(A)$ e pela Proposição 3.3.8 temos uma contradição, visto que A possui \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um. Logo $J_{01}^{(1)} = J_{10}^{(1)} = \{0\}$.

Agora, considere $j \in J_{01}^{(0)}$. Lembre-se que $c \in A^{(1)}$ e $c^2 = 1$. Pela Proposição 3.3.7, temos que

$$j = jcc = ccj = 0.$$

Com isso temos que $J_{01} = \{0\}$. De modo análogo concluímos que $J_{10} = \{0\}$. \square

A seguir, apresentamos o resultado mais importante desta seção, demonstrando que, a menos de isomorfismo, D^{gr} é a única superálgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um e \mathbb{Z}_2 -expoente maior ou igual a 2. Para isso, perceba primeiramente que o resultado anterior implica que se A é uma superálgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental

com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um e \mathbb{Z}_2 -expoente 2, então podemos considerar $A = (D^{gr} \dot{+} J_{11}) \oplus J_{00}$.

Teorema 3.3.11. *Seja A uma superálgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um tal que $\exp^{gr}(A) = 2$. Então $A \cong D^{gr}$.*

Demonstração. Como já observado, podemos considerar $A = (D^{gr} \dot{+} J_{11}) \oplus J_{00}$. Perceba que, para n suficientemente grande, temos que $\chi_n^{gr}(A) = \chi_n^{gr}(B)$, onde $B = D^{gr} \dot{+} J_{11}$. Pela Proposição 3.3.7, temos que B satisfaz $[y, z] \equiv 0$. Vamos mostrar que $[y_1, y_2] \in \text{Id}^{gr}(B)$.

Considerando $j_1, j_2 \in B^{(0)}$, usando que $c \in B^{(1)}$ e a \mathbb{Z}_2 -identidade $[y, z] \equiv 0$, temos

$$j_1 j_2 = j_1 j_2 c c = j_2 c j_1 c = j_2 j_1 c c = j_2 j_1.$$

Logo, $[y_1, y_2] \equiv 0$ em B . Agora, mostraremos que $[z_1, z_2] \in \text{Id}^{gr}(B)$.

Note primeiramente que, como $[y, z] \in \text{Id}^{gr}(B)$, então $z_1 z_2 z_3 \equiv z_3 z_1 z_2 \pmod{\text{Id}^{gr}(B)}$. Considere $j_1, j_2 \in B^{(1)}$. Então,

$$j_1 j_2 = c c j_1 j_2 = c j_2 c j_1 = c c j_2 j_1 = j_2 j_1.$$

Assim, $[z_1, z_2] \equiv 0$ em B e concluímos que $B \in \text{var}^{gr}(D^{gr})$. Portanto, $B \sim_{T_2} D^{gr}$.

Desta forma, para todo n suficientemente grande temos $\chi_n^{gr}(A) = \chi_n^{gr}(D^{gr})$. Nessas condições, pelo Lema 1.2.10, temos que

$$\chi_n^{gr}(A) = \chi_{(n), \emptyset} + \sum_{i=1}^n \chi_{(n-i), (i)}, \text{ para todo } n \text{ suficientemente grande.}$$

Como A é \mathbb{Z}_2 -fundamental e $\dim_F \bar{A} = 2$, utilizando o Lema 3.1.8 concluímos que $s_A = 0$. Portanto, temos que $J_{11} = J_{00} = \{0\}$. \square

Capítulo 4

O caso \mathbb{Z}_2 -graduado

Neste capítulo, vamos estudar superálgebras com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um. Iniciamos fazendo uma importante observação que será fundamental para os nossos estudos.

Observação 4.0.1. *Dada uma superálgebra $A = A^{(0)} + A^{(1)}$ com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um, a partir dos Teoremas 3.1.2 e 1.1.7, podemos concluir que $A^{(0)}$ é uma álgebra com multiplicidades limitadas por um.*

Utilizando a observação anterior, podemos fazer uso do Teorema 2.2.15 e afirmar que se A é uma superálgebra com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um, então $A^{(0)}$ é PI-equivalente a uma das álgebras

$$\mathcal{G}, \quad N, \quad F \oplus N, \quad A_1 \oplus N_1, \quad A_1^* \oplus N_2, \quad \mathcal{G}_{2k} \oplus N_3 \quad (4.1)$$

onde $k \geq 1$ e N, N_1, N_2, N_3 são álgebras nilpotentes com multiplicidades limitadas por um tais que N_1 satisfaz a identidade $[x_1, x_2]x_2$, N_2 satisfaz a identidade $x_2[x_1, x_2]$ e $N_3 \in \text{var}(\mathcal{G})$. Logo, se estamos interessados em estender a classificação das álgebras com multiplicidades limitadas por um para o contexto de superálgebras, devemos trabalhar com os casos dados em (4.1).

4.1 Caso inicial

É de nosso interesse encontrar a classificação das superálgebras com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um através de estudos detalhados sobre superálgebras \mathbb{Z}_2 -fundamentais que apresentam essas características.

Ao longo desta seção, vamos considerar a Observação 4.0.1 e apresentar o estudo que está sendo realizado a respeito das superálgebras \mathbb{Z}_2 -fundamentais A com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um tais que $A^{(0)} \sim_T F \oplus N$ e $\exp^{gr}(A) = 1$, onde N é uma

álgebra nilpotente com multiplicidades limitadas por um. Nessas condições, pelo Lema 3.1.12, conclui-se que ou $A = F$ ou $A = F \dot{+} J(A)$ e, para todo n suficientemente grande, existe uma multipartição $\langle \lambda \rangle = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)})$ com

$$\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_k^{(0)}) \vdash n_0, \lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_l^{(1)}) \vdash n_1, n_0 + n_1 = n$$

tal que $m_{\langle \lambda \rangle} \neq 0$ em $\chi_n^{gr}(A)$ e

$$\lambda_2^{(0)} + \dots + \lambda_k^{(0)} + \lambda_1^{(1)} + \dots + \lambda_l^{(1)} = s_A.$$

A estratégia que seguiremos consiste em considerar a decomposição do radical de Jacobson de A dada pelo Lema 1.2.7, descartar algumas de suas componentes e, a partir da análise das possíveis \mathbb{Z}_2 -identidades satisfeitas por A , obter resultados sobre a classificação procurada.

Para atingir nossos objetivos, trabalharemos com as superálgebras que foram definidas no Capítulo 3 e vamos provar inicialmente um resultado a respeito de superálgebras de dimensão finita do tipo $A = F \dot{+} J(A)$ com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um e com $A^{(0)} \sim_T F \oplus N$.

Proposição 4.1.1. *Seja $A = F \dot{+} J(A)$ uma superálgebra de dimensão finita com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um. Se $A^{(0)} \sim_T F \oplus N$, então $J_{01}^{(0)} = J_{10}^{(0)} = [J_{11}^{(0)}, J_{11}^{(0)}] = \{0\}$. Além disso, $U_1, U_1^* \notin \text{var}^{gr}(A)$.*

Demonstração. Considere $\langle \lambda \rangle = (\lambda^{(0)}, \emptyset)$ uma multipartição de n tal que $m_{\langle \lambda \rangle} \neq 0$ em $\chi_n^{gr}(A)$. Observe que, como $A^{(0)} \sim_T F \oplus N$, então, para todo n suficientemente grande, necessariamente temos $\langle \lambda \rangle = ((n), \emptyset)$.

Agora, note que se $J_{01}^{(0)} \neq \{0\}$ ou $J_{10}^{(0)} \neq \{0\}$ ou $[J_{11}^{(0)}, J_{11}^{(0)}] \neq \{0\}$, então, para todo $n \geq 2$, temos que o caracter associado à multipartição $((n-1, 1), \emptyset)$ teria multiplicidade não nula em $\chi_n^{gr}(A)$, chegando a uma contradição. Portanto, concluímos que $J_{01}^{(0)} = J_{10}^{(0)} = [J_{11}^{(0)}, J_{11}^{(0)}] = \{0\}$. Além disso, pelo Lema 3.2.2, é fácil ver que $U_1, U_1^* \notin \text{var}^{gr}(A)$. \square

Antes de prosseguir, vamos fazer uma observação importante a respeito das identidades a serem satisfeitas na situação em que vamos trabalhar.

Nosso trabalho será com superálgebras não nilpotentes e com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um. Neste caso, podemos considerar uma identidade $\alpha yz + \beta zy$ dada pelo Teorema 3.1.2 e buscamos analisar possíveis valores para as constantes $\alpha, \beta \in F$. Afirmamos que esse trabalho se resume a olhar para as identidades

$$zy \equiv 0, \quad yz \equiv 0 \quad \text{e} \quad [y, z] \equiv 0.$$

De fato, suponha que $A = F \dot{+} J(A)$ seja uma superálgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental tal que $\alpha yz + \beta zy \in \text{Id}^{gr}(A)$ com $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ e $\alpha \neq -\beta$.

Neste caso, não é difícil concluir que $J_{11}^{(1)} = J_{10}^{(1)} = J_{01}^{(1)} = \{0\}$. Logo, também temos $J_{00}^{(1)} J_{01}^{(0)} = J_{01}^{(0)} J_{00}^{(1)} = \{0\}$.

A partir das igualdades encontradas e o Lema 3.1.8, concluímos que a componente ímpar $A^{(1)}$ não contribui para o cálculo de s_A , visto que, para n suficientemente grande, muitas variáveis pares recebem valor de F e, caso tenhamos alguma variável ímpar, o polinômio se anula.

Em particular, no caso em $A^{(0)} \sim_T F \oplus N$, teríamos $s_A = 0$, uma contradição, pois $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$. Portanto, nessas condições, basta considerarmos os casos em que ou $zy \equiv 0$ ou $yz \equiv 0$ ou $[y, z] \equiv 0$. Com isso, temos o próximo resultado.

Proposição 4.1.2. *Seja A uma superálgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um tal que $A^{(0)} \sim_T F \oplus N$ e $\exp^{gr}(A) = 1$.*

1. Se $zy \in \text{Id}^{gr}(A)$, então $A = F$ ou $A \sim_{T_2} U_{1,1}^*$.
2. Se $yz \in \text{Id}^{gr}(A)$, então $A = F$ ou $A \sim_{T_2} U_{1,1}$.
3. Se $[y, z] \in \text{Id}^{gr}(A)$ então $A = (F \dot{+} J_{11}) \oplus J_{00}$.

Demonstração. Suponha que $zy \in \text{Id}^{gr}(A)$. Observe primeiramente que, pelo Lema 3.2.1, $U_{1,1}, U, U_2, U_{3,1}, U_{3,4}, U_{4,1}, U_{4,4}, \mathcal{G}_{2,i} \notin \text{var}^{gr}(A)$, $i = 1, 2, 3$. Além disso, pela Proposição 4.1.1 e Lema 3.2.4, $B \notin \text{var}^{gr}(A)$, onde B é uma soma direta de superálgebras distintas dentre as superálgebras $U, U_1, U_{1,1}, U_1^*, U_{1,1}^*$.

Desta forma, pelo Teorema 3.2.6, temos que A possui \mathbb{Z}_2 -cocomprimento limitado por 2. Como A não é nilpotente, então, pelo Lema 3.2.5, temos que $A \sim_{T_2} F \oplus N$ ou $A \sim_{T_2} U_{1,1}^* \oplus N$. Suponha que $A \sim_{T_2} F \oplus N$. Então, como A é \mathbb{Z}_2 -fundamental, temos, pelo Lema 3.1.12, que $s_A = 0$ e concluímos que $A = F$. Por outro lado, se $A \sim_{T_2} U_{1,1}^* \oplus N$, então, novamente pelo Lema 3.1.12, concluímos que $s_A = 1$. Logo, $N^2 = 0$ e temos que $\text{Id}^{gr}(N) \supset \text{Id}^{gr}(U_{1,1}^*)$. Portanto, $A \sim_{T_2} U_{1,1}^*$. O caso em que $yz \in \text{Id}^{gr}(A)$ é análogo.

Para provar o item 3, observe que pela Proposição 4.1.1, temos que $J_{01}^{(0)} = J_{10}^{(0)} = \{0\}$. Note que, como A satisfaz $[y, z] \equiv 0$, então, pelo Lema 3.2.1, temos que $U_{1,1}, U_{1,1}^* \notin \text{Id}^{gr}(A)$. Então, pelo Lema 3.3.9, temos que $J_{01}^{(1)} = J_{10}^{(1)} = \{0\}$. Portanto, concluímos que $J_{01} = J_{10} = \{0\}$ e o resultado segue. \square

Observação 4.1.3. *Perceba que, sob as hipóteses da proposição anterior, teríamos no terceiro caso que para todo n suficientemente grande, $\chi_n^{gr}(A) = \chi_n^{gr}(F \dot{+} J_{11})$.*

Tendo em vista a observação anterior, voltamos a nossa atenção para superálgebras \mathbb{Z}_2 -fundamentais do tipo $F \dot{+} J_{11}$ e conseguimos demonstrar o seguinte resultado.

Proposição 4.1.4. *Sejam $A = F \dot{+} J_{11}$ uma superálgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um tal que $A^{(0)} \sim_T F \oplus N$ e suponha que $[y, z] \in \text{Id}^{gr}(A)$. Se $[z_1, z_2], z_1 z_2 + z_2 z_1 \in \text{Id}^{gr}(A)$, então $A = F$ ou $A \sim_{T_2} U$.*

Utilizando o resultado anterior, juntamente com a Proposição 4.1.2 e Lema 3.1.8, é fácil estender o resultado anterior conforme a próxima proposição.

Proposição 4.1.5. *Sejam A uma álgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um tal que $A^{(0)} \sim_T F \oplus N$, $\exp^{gr}(A) = 1$ e $[y, z] \in \text{Id}^{gr}(A)$. Se $[z_1, z_2], z_1 z_2 + z_2 z_1 \in \text{Id}^{gr}(A)$, então $A = F$ ou $A \sim_{T_2} U$.*

Para prosseguir com a nossa investigação, é essencial conhecer todas as \mathbb{Z}_2 -subvariedades próprias de D^{gr} , descritas por La Mattina em [30]. Para tanto, definimos primeiramente uma superálgebra. Para $k \geq 2$, considere E como a matriz identidade de ordem $k \times k$ e $E_1 = \sum_{i=1}^{k-1} e_{i,i+1}$. Lembre-se que se $g = (g_1, \dots, g_k) \in \mathbb{Z}_2^k$, então g define uma graduação em UT_k quando tomamos $UT_k^{(0)} = \text{span}\{e_{ij} \mid g_i + g_j = 0\}$ e $UT_k^{(1)} = \text{span}\{e_{ij} \mid g_i + g_j = 1\}$.

Denotaremos por

$$C_k = C_k(F) = \left\{ \alpha E + \sum_{1 \leq i < j \leq k} \alpha_i E_1^i \mid \alpha, \alpha_i \in F \right\} \subset UT_k,$$

a subálgebra comutativa de UT_k com graduação elementar induzida por $g = (0, 1, 0, 1, \dots) \in \mathbb{Z}_2^k$. O T_2 -ideal e a n -ésima \mathbb{Z}_2 -codimensões de C_k já foram estudados e constituem o próximo teorema.

Teorema 4.1.6 (Veja [33], Teorema 4.3). *Seja $k \geq 2$. Então*

1. $\text{Id}^{gr}(C_k) = \langle [y_1, y_2], [y, z], [z_1, z_2], z_1 \cdots z_k \rangle_{T_2}$;
2. $c_n^{gr}(C_k) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \approx \frac{1}{(k-1)!} n^{k-1}$.

Além disso, a sequência de \mathbb{Z}_2 -cocaracteres de C_k já foi investigada e compõe a próxima proposição.

Teorema 4.1.7 (Veja [35], Teorema 8.3). *Para $k \geq 2$, temos que*

$$\chi_n^{gr}(C_k) = \chi_{(n), \emptyset} + \sum_{j=1}^{k-1} \chi_{(n-j), (j)}.$$

A seguir, descrevemos as \mathbb{Z}_2 -subvariedades próprias de $\text{var}^{gr}(D^{gr})$.

Teorema 4.1.8 (Veja [30], Teorema 8.3). *Seja $A \in \text{var}^{gr}(D^{gr})$. Então ou $A \sim_{T_2} D^{gr}$ ou $A \sim_{T_2} N$ ou $A \sim_{T_2} C \oplus N$ ou $A \sim_{T_2} C_k \oplus N$, para algum $k \geq 2$, onde N é uma superálgebra nilpotente e C é uma superálgebra comutativa com graduação trivial.*

O próximo resultado evidencia a relevância da superálgebra C_k , $k \geq 2$, na classificação das superálgebras \mathbb{Z}_2 -fundamentais com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um.

Proposição 4.1.9. *Sejam $A = F \dot{+} J_{11}$ uma superálgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um tal que $A^{(0)} \sim_T F \oplus N$ e $[y, z] \in \text{Id}^{gr}(A)$. Se $[z_1, z_2] \in \text{Id}^{gr}(A)$, então $A = F$ ou $A \sim_{T_2} C_k$.*

Demonstração. Primeiramente, note que, pela Proposição 4.1.1, $[y_1, y_2] \in \text{Id}^{gr}(A)$. Logo, nessas condições, temos que $A \in \text{var}^{gr}(D^{gr})$. Pelo Teorema 4.1.8, temos que $A \sim_{T_2} N$, $A \sim_{T_2} C \oplus N$ ou $A \sim_{T_2} C_k \oplus N$, $k \geq 2$, onde C é uma superálgebra comutativa com graduação trivial e N é uma superálgebra nilpotente. Necessariamente, temos $A \sim_{T_2} C \oplus N$ ou $A \sim_{T_2} C_k \oplus N$.

Suponha inicialmente que $A \sim_{T_2} C \oplus N$. Nesta situação, pela Proposição 3.1.12, concluímos que $A = F$. Por outro lado se $A \sim_{T_2} C_k \oplus N$, então, como A é \mathbb{Z}_2 -fundamental, pelo Lema 3.1.8 e pelo Teorema 4.1.7, concluímos que $s_A = s_{C_k} = k - 1$. Logo, pelo Teorema 4.1.6, $N \in \text{var}^{gr}(C_k)$ e o resultado segue. \square

Para continuar com a nossa investigação, é necessário conhecer todas as subvariedades de \mathcal{G}^{gr} . Para isso, introduzimos mais uma superálgebra. Para todo $k \geq 1$, denotaremos por \mathcal{G}_k^{gr} a álgebra \mathcal{G}_k com graduação induzida por \mathcal{G}^{gr} . O T_2 -ideal e a sequência de \mathbb{Z}_2 -codimensões de \mathcal{G}_k^{gr} já foram estudados e são tema do próximo teorema.

Teorema 4.1.10. *(Veja [33], Teorema 7.1) Seja $k \geq 1$. Então*

1. $\text{Id}^{gr}(\mathcal{G}_k^{gr}) = \langle [y_1, y_2], [y, z], z_1 z_2 + z_2 z_1, z_1 z_2 \cdots z_{k+1} \rangle_{T_2}$.
2. $c_n^{gr}(\mathcal{G}_k^{gr}) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \frac{1}{k!} n^k$.

A sequência de cocaracteres de \mathbb{Z}_2 -cocaracteres de \mathcal{G}_k^{gr} também já foi estudada e apresentamos esse resultado no próximo teorema.

Teorema 4.1.11 (Veja [35], Teorema 7.3). *Para $k \geq 1$, temos que*

$$\chi_n^{gr}(\mathcal{G}_k^{gr}) = \chi_{(n), \emptyset} + \sum_{j=1}^k \chi_{(n-j), (1^j)}.$$

A seguir, apresentamos as \mathbb{Z}_2 -subvariedades de $\text{var}^{gr}(\mathcal{G}^{gr})$ descrita por La Mattina.

Teorema 4.1.12 (Veja [30], Teorema 7.3). *Seja $A \in \text{var}^{gr}(\mathcal{G}^{gr})$. Então $A \sim_{T_2} \mathcal{G}^{gr}$, $A \sim_{T_2} N$, $A \sim_{T_2} C \oplus N$ ou $A \sim_{T_2} \mathcal{G}_k^{gr} \oplus N$, para algum $k \geq 1$, onde N é uma superálgebra nilpotente e C é uma superálgebra comutativa com graduação trivial.*

Agora, assim como fizemos com C_k , veremos a seguir o papel desempenhado pela superálgebra \mathcal{G}_k^{gr} , $k \geq 1$, na classificação das superálgebras \mathbb{Z}_2 -fundamentais com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um.

Proposição 4.1.13. *Sejam $A = F \dot{+} J_{11}$ uma superálgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um tal que $A^{(0)} \sim_T F \oplus N$ e $[y, z] \in \text{Id}^{gr}(A)$. Se $[z_1, z_2] \notin \text{Id}^{gr}(A)$ e $z_1 z_2 + z_2 z_1 \in \text{Id}^{gr}(A)$, então $A \sim_{T_2} \mathcal{G}_k^{gr}$.*

Demonstração. Inicialmente, note que, pela Proposição 4.1.1, $[y_1, y_2] \in \text{Id}^{gr}(A)$. Logo, temos que $A \in \text{var}^{gr}(\mathcal{G}_k^{gr})$. Então, pelo Teorema 4.1.12, um dos casos acontece: $A \sim_{T_2} C \oplus N$ ou $A \sim_{T_2} \mathcal{G}_k^{gr} \oplus N$, onde C é uma superálgebra comutativa com graduação trivial e N é uma superálgebra nilpotente.

Suponha primeiramente que $A \sim_{T_2} C \oplus N$. Assim, para n suficientemente grande, $\chi_n(A) = \chi_{(n), \emptyset}$. Portanto, como A é \mathbb{Z}_2 -fundamental, temos que $A = F$, o que é uma contradição, pois $[z_1, z_2] \notin \text{Id}^{gr}(A)$. Logo, devemos ter $A \sim_{T_2} \mathcal{G}_k^{gr} \oplus N$. Novamente, usando que A é \mathbb{Z}_2 -fundamental, concluímos que $s_A = s_{\mathcal{G}_k^{gr}} = k$. Isso implica que $N^{k+1} = 0$. Pelo Teorema 4.1.10, concluímos que $N \in \text{var}^{gr}(\mathcal{G}_k^{gr})$ e o resultado segue. \square

Agora trataremos os casos em que $[z_1, z_2]$ e $z_1 z_2 + z_2 z_1$ não são \mathbb{Z}_2 -identidades da superálgebra A . Neste caso, vamos considerar as superálgebras $C_l \oplus \mathcal{G}_k^{gr}$, $l \geq 2$ e $k \geq 1$, e necessitamos de um resultado técnico que pode ser encontrado em [14].

Lema 4.1.14 (Veja a demonstração do Teorema 1 em [14]). *Seja A uma superálgebra com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um.*

1. *Módulo $\text{Id}^{gr}(A)$, temos que:*

$$P_{r, n-r} \equiv \text{span}\{z_{i_1} \cdots z_{i_{n-r}} y_{j_1} \cdots y_{j_r}\}$$

ou

$$P_{r, n-r} \equiv \text{span}\{y_{i_1} \cdots y_{i_r} z_{j_1} \cdots z_{j_{n-r}}\};$$

2. *Se $yz, zy \notin \text{Id}^{gr}(A)$, então módulo $\text{Id}^{gr}(A)$, temos que:*

$$P_{0, n} \equiv \text{span}\{z_1 \cdots z_n, z_1 \cdots z_{n-2} z_n z_{n-1}\}.$$

Note que, se $A = F \dot{+} J_{11}$ é uma superálgebra tal que $[y, z] \in \text{Id}^{gr}(A)$ e de modo que $[z_1, z_2], z_1 z_2 + z_2 z_1 \notin \text{Id}^{gr}(A)$, então necessariamente $yz, zy \notin \text{Id}^{gr}(A)$. De fato, suponha que $yz \in \text{Id}^{gr}(A)$, então $J_{11}^{(1)} = \{0\}$ e concluímos que $z \in \text{Id}^{gr}(A)$, temos uma contradição. De modo análogo, é fácil ver que $zy \notin \text{Id}^{gr}(A)$.

Além disso, se nessas condições admitirmos que $A^{(0)} \sim_T F \oplus N$, então pelo Lema 4.1.14 para todo n suficientemente grande, módulo $\text{Id}^{gr}(A)$, temos que:

$$P_{r, n-r} \equiv \text{span}\{y_{i_1} \cdots y_{i_r} z_{j_1} \cdots z_{j_{n-r}}, y_{i_1} \cdots y_{i_r} z_{j_1} \cdots z_{j_{n-r-2}} z_{j_{n-r}} z_{j_{n-r-1}}\},$$

onde $i_1 < \cdots < i_r$, $j_1 < \cdots < j_{n-r}$. Combinando essa descrição com uma análise detalhada das superálgebras \mathbb{Z}_2 -fundamentais que satisfazem tais propriedades, obtemos o resultado a seguir.

Proposição 4.1.15. *Seja $A = F \dot{+} J_{11}$ uma superálgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um tal que $A^{(0)} \sim_T F \oplus N$ e suponha que $[y, z] \in \text{Id}^{gr}(A)$. Se $[z_1, z_2], z_1 z_2 + z_2 z_1 \notin \text{Id}^{gr}(A)$, então $A \sim_{T_2} C_l \oplus \mathcal{G}_k^{gr}$.*

Agora, note que, analogamente a Proposição 2.2.10 para o caso ordinário, temos que uma superálgebra de dimensão finita com crescimento polinomial de sua sequência de \mathbb{Z}_2 -codimensões é T_2 -equivalente a soma direta de uma superálgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental com uma superálgebra nilpotente, como vemos na próxima proposição.

Proposição 4.1.16. *Seja A uma superálgebra de dimensão finita com crescimento polinomial de sua sequência de \mathbb{Z}_2 -codimensões. Então A é T_2 -equivalente a uma superálgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental ou $A \sim_{T_2} B \oplus N$, onde B é uma superálgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental e N é uma superálgebra nilpotente.*

Demonstração. Se A é \mathbb{Z}_2 -fundamental, então não temos nada para fazer. Logo, suponha que A não seja \mathbb{Z}_2 -fundamental.

Pelo Lema 3.1.7, A é T_2 -equivalente a uma soma direta finita de superálgebras \mathbb{Z}_2 -fundamentais, e, como A possui crescimento polinomial, cada um dos elementos dessa soma direta possui crescimento polinomial. Portanto, pela Proposição 3.1.12 $A \sim_{T_2} B_1 \oplus \cdots \oplus B_k \oplus N_1 \oplus \cdots \oplus N_q$, onde B_i é uma superálgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental com parte semisimples isomorfa a F e N_j é uma superálgebra nilpotente, $i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, q$. Agora, usaremos a \mathbb{Z}_2 -fusão dada pelo Lema 3.1.13 nos elementos da componente $B_1 \oplus \cdots \oplus B_k$. Para isso, prosseguiremos como na Observação 3.1.15. Denotaremos a superálgebra resultante desse processo por B . Como B_i é uma superálgebra \mathbb{Z}_2 -fundamental para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, então, pela Proposição 3.1.14, temos que B é \mathbb{Z}_2 -fundamental e $B \sim_{T_2} B_1 \oplus \cdots \oplus B_k$. Portanto, $A \sim_{T_2} B \oplus N$, onde $N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_q$. \square

Logo, aplicando o resultado anterior juntamente com a classificação das superálgebras \mathbb{Z}_2 -fundamentais obtidas nessa seção, concluímos o seguinte teorema.

Teorema 4.1.17. *Seja A uma superálgebra tal $A^{(0)} \sim_T F \oplus N$ e suponha que $\exp^{gr}(A) = 1$. Se A possui \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um, então $A \sim_{T_2} F$ ou $A \sim_{T_2} U \oplus N_1$ ou $A \sim_{T_2} U_{1,1} \oplus N_2$ ou $A \sim_{T_2} U_{1,1}^* \oplus N_3$ ou $A \sim_{T_2} C_l \oplus N_4$ ou $A \sim_{T_2} \mathcal{G}_k^{gr} \oplus N_5$ ou $A \sim_{T_2} C_l \oplus \mathcal{G}_k^{gr} \oplus N_6$, $l \geq 2$ e $k \geq 1$.*

Por fim, observe que, assim como na classificação obtida para o caso ordinário, é necessário impor condições nas partes nilpotentes das álgebras apresentadas no teorema anterior para garantir que a recíproca seja verdadeira.

4.2 Conjecturas para os demais casos

Encerramos esta tese destacando que já se encontram em desenvolvimento trabalhos voltados para os demais casos em (4.1) na Observação 4.0.1. Assim, nesta seção, discutimos problemas que estão sendo tratados em pesquisas em andamento, os quais deverão compor trabalhos futuros relacionados.

Em particular, quando A é uma superálgebra com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um tal que $A^{(0)} \sim_{T_2} A_1 \oplus N_1$ ou $A^{(0)} \sim_{T_2} A_1^* \oplus N_2$, onde N_1 satisfaz a identidade $[x_1, x_2]x_2$ e N_2 satisfaz a identidade $x_2[x_1, x_2]$, além das superálgebras já descritas, torna-se necessário investigar as seguintes superálgebras apresentadas em [12]:

$$\begin{aligned}
 U_{3,2} &= \begin{pmatrix} F & F & F \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ com graduação } \left(\begin{pmatrix} F & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right); \\
 U_{3,2}^* &= \begin{pmatrix} 0 & F & F \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}, \text{ com graduação } \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & F & F \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right); \\
 U_{3,3} &= \begin{pmatrix} F & F & F \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ com graduação } \left(\begin{pmatrix} F & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right); \\
 U_{3,3}^* &= \begin{pmatrix} 0 & F & F \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}, \text{ com graduação } \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

Os T_2 -ideais dessas superálgebras são conhecidos e compõem o próximo Lema.

Lema 4.2.1 (Veja [12], Lema 15). *Temos que:*

1. $\text{Id}^{gr}(U_{3,2}) = \langle [y_1, y_2]y_3, zy, z_1z_2 \rangle_{T_2}$;
2. $\text{Id}^{gr}(U_{3,2}^*) = \langle y_1[y_2, y_3], yz, z_1z_2 \rangle_{T_2}$;
3. $\text{Id}^{gr}(U_{3,3}) = \langle [y_1, y_2]y_3, [y_1, y_2]z, zy, z_1z_2z_3 \rangle_{T_2}$;
4. $\text{Id}^{gr}(U_{3,3}^*) = \langle y_1[y_2, y_3], z[y_1, y_2], yz, z_1z_2z_3 \rangle_{T_2}$.

Não é difícil demonstrar que essas superálgebras são \mathbb{Z}_2 -fundamentais e que possuem \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um.

Seguindo passos análogos aos que foram dados na investigação para o caso em que $A^{(0)} \sim_T F \oplus N$ somos levados às seguintes conjecturas motivando investigações sobre

superálgebras A com \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um tais que $A^{(0)} \sim_T A_1 \oplus N_1$ e $A^{(0)} \sim_T A_1^* \oplus N_2$.

Conjectura 4.2.1. *Seja A uma superálgebra tal que $A^{(0)} \sim_T A_1 \oplus N_1$, onde N_1 satisfaz a identidade $[x_1, x_2]x_2$, e suponha que $\exp^{gr}(A) = 1$. Se A possui \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um, então $A \sim_{T_2} U_1^* \oplus N$ ou $A \sim_{T_2} U_{3,2} \oplus N$ ou $A \sim_{T_2} U_{3,3} \oplus N$ ou $A \sim_{T_2} U_{3,2} \oplus U_{3,3} \oplus N$ ou $U_1^* \oplus C_k \oplus N$ ou $U_1^* \oplus \mathcal{G}_l^{gr} \oplus N$ ou $U_1^* \oplus C_k \oplus \mathcal{G}_l^{gr} \oplus N$, onde N é uma álgebra nilpotente.*

Conjectura 4.2.2. *Seja A uma superálgebra tal que $A^{(0)} \sim_T A_1^* \oplus N_2$, onde N_2 satisfaz a identidade $x_1[x_1, x_2]$, e suponha que $\exp^{gr}(A) = 1$. Se A possui \mathbb{Z}_2 -multiplicidades limitadas por um, então $A \sim_{T_2} U_1 \oplus N$ ou $A \sim_{T_2} U_{3,2}^* \oplus N$ ou $A \sim_{T_2} U_{3,3}^* \oplus N$ ou $A \sim_{T_2} U_{3,2}^* \oplus U_{3,3}^* \oplus N$ ou $A \sim_{T_2} U_1 \oplus C_k \oplus N$ ou $A \sim_{T_2} U_1 \oplus \mathcal{G}_l^{gr} \oplus N$ ou $U_1 \oplus C_k \oplus \mathcal{G}_l^{gr} \oplus N$, onde N é uma álgebra nilpotente.*

Referências

- [1] E. Aljadeff, A. Giambruno, C. Procesi, A. Regev, *Rings with polynomial identities and finite dimensional representations of algebras*, Colloquium Publications, vol. 66, AMS, Providence, RI, 2020.
- [2] E. Aljadeff, A. Kanel-Belov, *Representability and Specht problem for G -graded algebras*, *Advances in Mathematics* 225 (5) (2010) 2391-2428.
- [3] E. Aljadeff, A. Kanel-Belov, Y. Karasik, *Kemer's theorem for affine PI-algebras over a field of characteristic zero*, *J. Pure Appl. Algebra*, 220 (8) (2016) 2771-2808.
- [4] E. Aljadeff, Y. Karasik, *Semisimple algebras and PI-invariants of finite dimensional algebras*, *Algebra Number Theory*, 18 (1) (2024) 133-164.
- [5] A.Z. Ananin, A. R. Kemer, *Varieties of associative algebras whose lattice of subvarieties are distributive*, (Russian), *Sibirsk. Mat. Z.*, 17 (4) (1976) 723-730.
- [6] F. Benanti, A. Giambruno, M. Pipitone, *Polynomial identities on superalgebras and exponential growth*, *J. Algebra*, 269 (2) (2003) 422-438.
- [7] O. M. Di Vincenzo, *A note on the identities of the Grassmann algebras*, *Boll. Unione Mat. Ital.*, 5 (3) (1991) 307-315.
- [8] V. Drensky, *Free Algebras and PI-algebras*, Graduate Course in Algebra, Springer-Verlag Singapore, Singapore, 2000.
- [9] A. Giambruno, D. La Mattina, *Superalgebras: Polynomial identities and asymptotics*, *J. Algebra*, 604 (2022) 614-635.
- [10] A. Giambruno, D. La Mattina, *Graded polynomial identities and codimensions: Computing the exponential growth*, *Advances in Mathematics*, 225 (2010) 859-881.
- [11] A. Giambruno, D. La Mattina, *PI-algebras with slow codimension growth*, *J. Algebra*, 284 (1) (2005) 371-391.

-
- [12] A. Giambruno, D. La Mattina, P. Misso, *Polynomial identities on superalgebras: classifying linear growth*, J. Pure Appl. Algebra, 207 (1) (2006) 215–240.
- [13] A. Giambruno, D. La Mattina, C. Polcino Milies, *Understanding star-fundamental algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., 149 (8) (2021) 3221–3233.
- [14] A. Giambruno, S. Mishchenko, *Super-cocharacters, star-cocharacters and multiplicities bounded by one*, Manuscripta Math., 128 (4) (2009) 483–504.
- [15] A. Giambruno, S. Mishchenko, *Polynomial growth of the $*$ -codimensions and Young diagrams*, Comm. Algebra, 29 (1) (2001).
- [16] A. Giambruno, S. Mishchenko, M. Zaicev, *Polynomial identities on superalgebras and almost polynomial growth*, Comm. Algebra, 29 (9) (2001).
- [17] A. Giambruno, C. Polcino Milies, A. Valenti, *Cocharacters of group graded algebras and multiplicities bounded by one*, Linear Multilinear Algebra, 66 (8) (2018) 1709–1715.
- [18] A. Giambruno, C. Polcino Milies, M. Zaicev, *A characterization of fundamental algebras through S_n -characters*, J. Algebra, 541 (2020) 51–60.
- [19] A. Giambruno, P. Quintino, A. C. Vieira, *On the classification of fundamental algebras with bounded cocharacter multiplicities*, Submitted.
- [20] A. Giambruno, A. Regev, *Wreath products and PI-algebras*, J. Pure Appl. Algebra, 35 (1985) 133–149.
- [21] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial identities and asymptotic methods*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 122, AMS, Providence, RI, 2005.
- [22] A. Giambruno, M. Zaicev, *Exponential codimension growth of PI-algebras: an exact estimate*. Adv. Math., 142 (2) (1999) 221–243.
- [23] A. Kanel-Belov, I. Karasik, L. H. Rowen, *Computational aspects of polynomial identities*. Vol. 1. Kemer’s theorems, second edition, Monographs and Research Notes in Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 2016.
- [24] A. R. Kemer, *Ideals of identities of associative algebras*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 87, AMS, Providence, RI, 1991.
- [25] A. R. Kemer, *Finite basis property of identities of associative algebras*, Algebra and Logic, 26 (5) (1987) 362–397.

-
- [26] A. R. Kemer, *T-ideals with power growth of the codimensions are Specht*, (Russian), *Sibirsk. Mat. Z.*, 19 (1978) 54-69.
- [27] D. Krakowski, A. Regev, *The polynomial identities of the Grassmann algebra*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 181 (1973) 429-438.
- [28] Y. N. Malcev, *A basis for the identities of the algebra of upper triangular matrices*, (russian), *Algebra i Logica*, 10 (1971) 393-400.
- [29] F. Martino, *Classifying algebras with graded involutions or superinvolutions with multiplicities of their cocharacter bounded by one*, *Algebr. Represent. Theory*, 24 (2) (2021) 317-326.
- [30] D. La Mattina, *Varieties of superalgebras of almost polynomial growth*, *J. Algebra*, 336 (1) (2011).
- [31] D. La Mattina, *Characterizing varieties of colength ≤ 4* , *Comm. Algebra*, 37 (5) (2009) 1793-1807.
- [32] D. La Mattina, *Varieties of algebras of polynomial growth*, *Boll. Unione Mat. Ital.*, 1 (3) (2008) 525-538.
- [33] D. La Mattina, S. Mauceri, P. Misso, *Polynomial growth and identities of superalgebras and star-algebras*, *J. Pure Appl. Algebra*, 213 (11) (2009) 2087-2094.
- [34] S. P. Mishchenko, A. Regev, M. V. Zaicev, *A characterization of PI algebras with bounded multiplicities of the cocharacters*, *J. Algebra*, 219 (1) (1999) 356-368.
- [35] T. S. do Nascimento, R. B. dos Santos, A. C. Vieira, *Graded cocharacters of minimal subvarieties of supervarieties of almost polynomial growth*, *J. Pure Appl. Algebra*, 219 (4) (2015) 913-929.
- [36] J. B. Olsson, A. Regev, *Colength sequence of some T-ideals*, *J. Algebra*, 38 (1) (1976) 100-111.
- [37] F. C. Otera, *Finitely generated PI-superalgebras with bounded multiplicities of the cocharacters*, *Comm. Algebra*, 33 (6) (2005) 1693-1707.
- [38] H. Pascucci, *Some characterizations of fundamental graded algebras*, *J. Algebra*, 666 (2025) 607-632.
- [39] A. Regev, *Existence of identities in $A \otimes B$* , *Israel J. Math.*, 11 (1972) 131-152.

-
- [40] R. B. dos Santos, A. C. Vieira, R. F. N. Vieira, *Algebras with additional structures and multiplicities bounded by a constant* - <https://doi.org/10.48550/arXiv.2510.03583>.
- [41] A. Valenti, *The graded identities of upper triangular matrices of size two*, J. Pure Appl. Algebra, 172 (2-3) (2002).
- [42] A. C. Vieira, *Supervarieties of small graded colength*, J. Pure Appl. Algebra, 217 (2) (2013) 322-333.