

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
CENTRO DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISAS EM ADMINISTRAÇÃO

MARCOS VINICIUS LOPES PEREIRA

**ENCOLHIMENTO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIAS E ÍNDICES
DE INCERTEZA: A UTILIZAÇÃO DO *BOOTSTRAP* NA SELEÇÃO
DE PORTFÓLIOS**

Belo Horizonte
Setembro de 2020

Marcos Vinicius Lopes Pereira

**Encolhimento da Matriz de Covariâncias e Índices de Incerteza: a
Utilização do *Bootstrap* na Seleção de Portfólios**

Tese apresentada ao Centro de Pós-Graduação e Pesquisas em Administração da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Administração.

Linha de Pesquisa: Finanças

Orientador: Prof. Dr. Robert Aldo Iquiapaza

Belo Horizonte
Setembro de 2020

Ficha Catalográfica

P436e
2020
Pereira, Marcos Vinicius Lopes.
Encolhimento da matriz de covariâncias e índices de incerteza
[manuscrito] : a utilização do *bootstrap* na seleção de portfólios /
Marcos Vinicius Lopes Pereira. – 2020.
286 f.: il e tabs.

Orientador: Robert Aldo Iquiapaza.
Tese (doutorado) – Universidade Federal de Minas Gerais,
Centro de Pós-Graduação e Pesquisas em Administração.
Inclui bibliografia (f. 171-204) e apêndices.

1. Investimentos – Administração – Teses. 2. Finanças – Teses.
3. *Bootstrap* (Estatística) – Teses. I. Iquiapaza, Robert Aldo.
II. Universidade Federal de Minas Gerais. Centro de Pós-Graduação e
Pesquisas em Administração. III. Título.

CDD: 658.15

Elaborado por Leonardo Vasconcelos Renault CRB-6/2211
Biblioteca da FACE/UFGM – LVR/138/2020



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
CENTRO DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISAS EM ADMINISTRAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO

ATA DE DEFESA DE TESE

ATA DA DEFESA DE TESE DE DOUTORADO EM ADMINISTRAÇÃO do Senhor **MARCOS VINICIUS LOPES PEREIRA**, REGISTRO N° 256/2020. No dia 25 de setembro de 2020, às 08:30 horas, reuniu-se remotamente, por videoconferência, a Comissão Examinadora de Tese, indicada pelo Colegiado do Centro de Pós-Graduação e Pesquisas em Administração do CEPEAD, em 08 de setembro de 2020, para julgar o trabalho final intitulado "**Encolhimento da Matriz de Covariâncias e Índices de Incerteza: a Utilização do Bootstrap na Seleção de Portfólios**", requisito para a obtenção do **Grau de Doutor em Administração**, linha de pesquisa: **Finanças**. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Dr. Robert Aldo Iquiapaza Coaguila, após dar conhecimento aos presentes o teor das Normas Regulamentares do Trabalho Final, passou a palavra ao candidato para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do candidato. Logo após, a Comissão se reuniu sem a presença do candidato, para julgamento e expedição do seguinte resultado final:

(X) APROVAÇÃO

() REPROVAÇÃO

O resultado final foi comunicado publicamente ao candidato pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Senhor Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ATA, que será assinada por todos os membros participantes da Comissão Examinadora. Belo Horizonte, 25 de setembro de 2020.

Prof. Dr. Robert Aldo Iquiapaza Coaguila
Orientador - CEPEAD/UFMG

Aureliano Angel Bressan
CEPEAD/UFMG

Carolina Magda da Silva Roma
ICEAC/FURG

André Alves Portela Santos
PPGECO/UFSC

Renato Dourado Maia
PPGMCS/Unimontes



Documento assinado eletronicamente por **Robert Aldo Iquiapaza Coaguila, Professor do Magistério Superior**, em 25/09/2020, às 12:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Carolina Magda da Silva Roma, Usuário Externo**, em 25/09/2020, às 12:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **André Alves Portela Santos, Usuário Externo**, em 25/09/2020, às 12:28, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Aureliano Angel Bressan, Professor do Magistério Superior**, em 25/09/2020, às 15:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Renato Dourado Maia, Membro**, em 25/09/2020, às 17:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0276048** e o código CRC **52045B57**.

*Aos meus dois portfólios eficientes,
Angélica e Pedro.*

Agradecimentos

A jornada de um doutorando não é fácil, pois trata-se de um período de exercício intelectual intenso. Apesar disso, muitas vezes ela não é possível ou disponível para todos que a desejem e por isso me considero um privilegiado. Entretanto, toda a estrutura ao redor bem como as pessoas envolvidas podem deixar essa caminhada menos árdua. Gostaria de retribuir a todos que me apoiaram de alguma forma nesse período, sei que isso nem sempre é possível mas faço aqui minha singela menção de profundo agradecimento:

À minha esposa Angélica e meu filho Pedro pelo amor e apoio incondicionais cuja magnitude sequer pode ser representada em palavras.

Aos colegas da área TAU (UFSJ) que aprovaram meu afastamento integral durante parte do doutorado. Aos colegas do CELTA (UFSJ) pela colaboração, críticas e parcerias científicas exitosas, em especial aos professores Leonardo Carneiro de Araújo e Michel Carlo Rodrigues Leles. Aos colegas e contemporâneos de pós-graduação, em especial às colegas Simone Evangelista Fonseca, Camila Teresa Martucheli e Andréia de Oliveira Santos pelas parcerias que foram essenciais para o término desta pesquisa, mesmo que indiretamente. Ao amigo e colega de graduação e mestrado, professor Alexandre Ramos Fonseca por ter gentilmente cedido recursos computacionais para a concretização desta pesquisa.

Ao professor Robert Aldo Iquiapaza, pela orientação, paciência e contribuições dadas no decorrer da pesquisa. Ao professor Aureliano Angel Bressan pelos ensinamentos, sugestões e críticas relevantes dadas aos meus trabalhos ao longo do curso, e também pela disponibilidade e atenção em responder minhas dúvidas aleatórias enviadas por *e-mail*. À banca de seleção do doutorado no CEPEAD, composta à época pelos professores Aureliano Angel Bressan, Bruno Pérez Ferreira e Francisco Vidal Barbosa, pela oportunidade que permitiu o primeiro passo nessa nova jornada acadêmica. Aos demais professores do CEPEAD pelos ensinamentos e conversas informais igualmente enriquecedoras, em especial aos professores Bruno Pérez Ferreira, Antônio Artur De Souza, Ana Paula Paes De Paula, Carlos Alberto Gonçalves, Hudson Fernandes Amaral e Marcos Antônio de Camargos. Ao professor Richard Michaud, por ser tão atencioso ao responder minhas dúvidas sobre seu trabalho e por compartilhar suas perspectivas futuras. Ao professor Luiz Alberto Bertucci, faço aqui um sincero agradecimento póstumo, por ter me apresentado os princípios das Finanças Modernas de forma tão elegante e transformadora.

À Alexandra Elbakyan, por sua enorme contribuição dada à ciência.

Por último, mas não menos importante, agradeço a Deus por ter colocado as pessoas certas nos momentos chave dessa minha caminhada.

*“I’d compare stock pickers to astrologers
but I don’t want to bad mouth astrologers.”
(Eugene Fama)*

Resumo

Os agentes atuantes no mercado de capitais, que visam à obtenção de rendimentos a partir de investimentos, deparam-se com decisões que envolvem ganhos esperados associados aos riscos inerentes. Para um dado tipo de investidor, ou gestor de carteiras, é fundamental a obtenção de estimativas de média e covariância dos retornos dos ativos financeiros para buscar portfólios eficientes. O aprimoramento do processo de seleção de portfólios pode vir tanto com a melhoria em seus insumos quanto das políticas de investimento. Na presente pesquisa, utilizou-se da técnica denominada *bootstrap* para promover aprimoramentos nesse contexto. A partir do *bootstrap* de ativos, ou seja, do sorteio aleatório de grupos de ativos distintos, obtiveram-se múltiplas projeções de carteiras. Em posse de tal informação, foi possível a criação de duas inovações: uma forma alternativa de encolhimento para a matriz de covariâncias e índices de incerteza individualizados por ativo. Adicionalmente, fora proposto um índice de sensibilidade sistêmico para os pesos dos portfólios, em função da matriz de covariâncias dos retornos. Foi realizado um comparativo de diferentes formas de encolhimento da matriz de covariâncias e os resultados apontaram que um bom condicionamento numérico nem sempre é refletido em baixa sensibilidade dos pesos. Existe uma razão de compromisso entre a sensibilidade dos pesos, distanciamento da estimativa amostral e o condicionamento numérico que devem ser levadas em consideração para a escolha do método de encolhimento mais apropriado. Um comparativo com estratégias de seleção de portfólios, presentes na literatura, foi feito utilizando dados referentes ao mercado financeiro norte-americano e, apesar de nenhuma delas ter superado estatisticamente o índice de Sharpe da alocação ingênua ($1/N$), detectaram-se melhorias de desempenho fora da amostra em relação a portfólios de mínima variância ou média-variância tradicionais. Os índices de incerteza individualizados foram utilizados na modificação de uma estratégia de seleção de portfólios, presente na literatura, que permite a incorporação simultânea de retorno esperado, variância e incerteza. Nesse caso, não foi identificada distinção entre a versão original e a estratégia modificada. Verificou-se que o processo de combinação de múltiplas projeções, escolhidas pelo *bootstrap* de ativos, leva à criação de “carteiras fatoriais”, direcionadas aos fatores intrínsecos dos retornos, sem que seja necessária a estimação prévia de quantos ou quais sejam esse fatores de risco. Tal abordagem mostrou-se uma alternativa para controlar o nível de exposição ao risco idiossincrático dos portfólios sem perda substancial do α de Jensen (“retorno anormal”).

Palavras-chave: portfólios, *bootstrap*, incerteza, sensibilidade.

Abstract

Capital market agents, which aim to obtain return from investments, end up facing decisions that involve expected gains associated with the inherent risks. For a given type of investor, or portfolio manager, it is essential to obtain the mean and the covariance estimates of the returns on the financial assets to build efficient portfolios. Improving the portfolio selection process can come from both better inputs as much as investment policies. In this research, we used the bootstrap technique to promote improvements in this context. From the bootstrap of assets, that is, the random drawing of subsets of distinct assets, multiple projections of portfolios were obtained. In possession of such information, it was possible to create two innovations: a alternative way to shrink the covariance matrix and individualized uncertainty indexes per asset. Additionally, a systemic sensitivity index for the weights of the portfolios was proposed, as a function of the covariance matrix of the returns. A comparison of different forms of shrinkage of the covariance matrix was carried out and the results showed that good numerical conditioning is not always reflected in low sensitivity of the weights. There is a trade-off between the sensitivity of the weights, distance from the sample estimate and the numerical conditioning that must be taken into account when choosing the most appropriate shrinkage method. A comparison with strategies present in the literature was made using data related to the US financial market and, although none of them statistically exceeded the Sharpe ratio from the naive allocation ($1/N$), out-of-sample performance improvements were detected in relation to portfolios of minimum variance or mean-variance traditional approaches. The individualized uncertainty indices were used to modify a portfolio selection strategy, present in the literature, which allows the simultaneous incorporation of expected return, variance and uncertainty. In this case, no distinction was identified between the original version and the modified strategy. It was found that the process of combining multiple projections, chosen by the asset bootstrap, leads to the creation of “factor portfolios”, driven to the intrinsic factors of the returns, without the prior estimation of how many or what these risk factors are necessarily. Such an approach proved to be an alternative to control the level of exposure to idiosyncratic risk in portfolios without substantial loss of Jensen’s α (“abnormal return”).

Keywords: portfolios, bootstrap, uncertainty, sensitivity.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Estatísticas de citações do artigo de Markowitz (1952a)	37
Figura 2 – Estatísticas de citações do artigo de Ho (1998)	37
Figura 3 – Fronteira eficiente, CML e funções de utilidade tangenciando a CML .	46
Figura 4 – Efeitos da diversificação sobre o risco do portfólio	49
Figura 5 – Fronteira eficiente da MPT e 25 fronteiras simuladas	66
Figura 6 – Fluxograma simplificado do procedimento para gerar a portfólios reamostrados	67
Figura 7 – Fronteira eficiente reamostrada (REF) “encolhida” em função do processo de média das fronteiras simuladas	68
Figura 8 – Mapa de alocação dos pesos em função do nível de risco	68
Figura 9 – Efeitos do fracionamento da base de dados sobre o viés (ao quadrado) de uma regressão linear agregada	71
Figura 10 – Efeitos do fracionamento da base de dados sobre a variância de uma regressão linear agregada	71
Figura 11 – Comparativo de características de risco-retorno da fronteira eficiente da MPT em relação à GEF	73
Figura 12 – Comparativo de características de risco-diversificação dos portfólios eficientes da MPT em relação aos obtidos na GEF	74
Figura 13 – Características de risco-retorno e risco-diversificação da GEF em função do nível de incerteza (θ) quando ignorada a informação da média dos retornos ($\gamma \rightarrow \infty$)	74
Figura 14 – Média amostral de dados aleatórios extraídos de uma distribuição normal com $\mu_1 = 0,005$ e seu respectivo intervalo de confiança de 95%	79
Figura 15 – Média amostral de dados aleatórios extraídos de uma distribuição normal com $\mu_2 = 0,0025$ e seu respectivo intervalo de confiança de 95%	79
Figura 16 – Desvio padrão amostral de dados aleatórios extraídos de uma distribuição normal com $\sigma_1 = 0,08$ e seu respectivo intervalo de confiança de 95%	79
Figura 17 – Desvio padrão amostral de dados aleatórios extraídos de uma distribuição normal com $\sigma_2 = 0,04$ e seu respectivo intervalo de confiança de 95%	79
Figura 18 – Covariância amostral de dados aleatórios extraídos de uma distribuição normal bivariada com $\sigma_{12} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 = -0,00096$	80
Figura 19 – Coeficiente de correlação amostral de Pearson de dados aleatórios extraídos de uma distribuição normal bivariada com $\rho_{12} = -0,3$	80
Figura 20 – Portfólio de variância mínima estimado	81

Figura 21 – Portfólio tangente estimado para um $r_f = 0,1\%$	81
Figura 22 – Fronteira eficiente real comparada com fronteiras estimadas para $T =$ 100 a $T = 200$ observações	81
Figura 23 – Fronteira eficiente real comparada com fronteiras estimadas para $T =$ 7000 a $T = 8000$ observações	81
Figura 24 – Sensibilidade dos pesos ($\mathbf{x}$) diante de uma mudança infinitesimal em σ_1 em função da correlação (ρ_{12}), mantendo-se os desvios padrão constantes e distintos	83
Figura 25 – Sensibilidade dos pesos ($\mathbf{x}$) diante de uma mudança infinitesimal em σ_1 para diferentes níveis do risco σ_1 , mantendo-se σ_2 e ρ_{12} constantes . . .	83
Figura 26 – Sensibilidade dos pesos ($\mathbf{x}$) diante de uma mudança infinitesimal em ρ_{12} em função da correlação (ρ_{12}), mantendo-se os desvios padrão constantes e distintos	84
Figura 27 – Sensibilidade dos pesos ($\mathbf{x}$) diante de uma mudança infinitesimal em ρ_{12} para diferentes níveis do risco σ_1 , mantendo-se σ_2 e ρ_{12} constantes .	84
Figura 28 – Comparativo de fronteiras eficientes restritas ($x_i \geq 0$) provenientes de diferentes abordagens	93
Figura 29 – Índice de diversificação para portfólios eficientes restritos ($x_i \geq 0$) provenientes de diferentes abordagens	94
Figura 30 – Mapa de alocação de pesos dos portfólios da fronteira EF em função do nível de risco	94
Figura 31 – Mapa de alocação de pesos dos portfólios da fronteira REF ($h =$ 18, $sim = 500$) em função do nível de risco	94
Figura 32 – Mapa de alocação de pesos dos portfólios da fronteira BAG ($\nu = 0,7$) em função do nível de risco	94
Figura 33 – Distribuição dos pesos estimados da abordagem MIN_{REF} para a base de dados FF Industry ($N = 10$), considerando 120 simulações	101
Figura 34 – Distribuição dos pesos estimados da abordagem MIN_{BAG} para a base de dados FF Industry ($N = 10$), considerando 3 como tamanho das subcarteiras e 120 sorteios	101
Figura 35 – Distribuição dos pesos estimados da abordagem MIN_{REF} para a base de dados FF Industry ($N = 10$), considerando 252 portfólios simulados	102
Figura 36 – Distribuição dos pesos estimados da abordagem MIN_{BAG} para a base de dados FF Industry ($N = 10$), considerando 5 como tamanho das subcarteiras e 252 sorteios	102
Figura 37 – Evolução temporal da mediana, 1.º quartil e 3.º quartil dos índices de incerteza para a base de dados Dow Jones ($N = 28$) e $\nu = 0,4$	104
Figura 38 – Evolução temporal da mediana, 1.º quartil e 3.º quartil dos índices de incerteza para a base de dados Dow Jones ($N = 28$) e $\nu = 0,7$	104

Figura 39 – Evolução temporal da mediana, 1.º quartil e 3.º quartil dos índices de incerteza para a base de dados FF Industry ($N = 49$) e $\nu = 0,4$	104
Figura 40 – Evolução temporal da mediana, 1.º quartil e 3.º quartil dos índices de incerteza para a base de dados FF Industry ($N = 49$) e $\nu = 0,7$	104
Figura 41 – Evolução temporal da mediana, 1.º quartil e 3.º quartil dos índices de incerteza para a base de dados FF Size-B/M ($N = 96$) e $\nu = 0,4$	105
Figura 42 – Evolução temporal da mediana, 1.º quartil e 3.º quartil dos índices de incerteza para a base de dados FF Size-B/M ($N = 96$) e $\nu = 0,7$	105
Figura 43 – Evolução de $\ln(\ \Sigma_i - \Sigma_\infty\ _2)$ quando o tamanho de subgrupos é igual a 3	134
Figura 44 – Convergência dos 3 maiores autovalores de Σ_i em relação aos obtidos de Σ_∞ com P sorteios distintos, supondo ser o tamanho de subgrupos é igual a 3	134
Figura 45 – Evolução de $\ln(\ \Sigma_i - \Sigma_\infty\ _2)$ quando o tamanho de subgrupos é igual a 4	134
Figura 46 – Convergência dos 3 maiores autovalores de Σ_i em relação aos obtidos de Σ_∞ com P sorteios distintos, supondo ser o tamanho de subgrupos é igual a 4	134
Figura 47 – Evolução de $\ln(\ \Sigma_i - \Sigma_\infty\ _2)$ quando o tamanho de subgrupos é igual a 5	135
Figura 48 – Convergência dos 3 maiores autovalores de Σ_i em relação aos obtidos de Σ_∞ com P sorteios distintos, supondo ser o tamanho de subgrupos é igual a 5	135
Figura 49 – Sensibilidade dos pesos do encolhimento BAG em função do tamanho dos subgrupos de ativos (fatores de risco (FF5), $\tau = 60$, escala logarítmica)	136
Figura 50 – Condicionamento da matriz de covariâncias encolhida (fatores de risco (FF5), $\tau = 60$, escala logarítmica)	137
Figura 51 – Norma-2 da diferença entre a matriz de covariâncias amostral e a encolhida (fatores de risco (FF5), $\tau = 60$, escala logarítmica)	137
Figura 52 – Função de valor hipotética	210
Figura 53 – Esboço da função de utilidade da riqueza	210
Figura 54 – Função representativa da variância dos retornos de um portfólio com projeções em curvas de nível no plano X_1X_2	212
Figura 55 – Função representativa da esperança dos retornos de um portfólio com projeções de linhas no plano X_1X_2	212
Figura 56 – Sobreposição das projeções, no plano X_1X_2 , das superfícies de esperança e variância dos retornos	213
Figura 57 – Região viável destacada na qual são obtidos portfólios restritos	213
Figura 58 – Sequência de portfólios eficientes partindo-se do PVM viável cujo término é a coordenada (1,0)	214
Figura 59 – Efeito da não-negatividade dos pesos na obtenção da fronteira eficiente da Figura 58	214

Figura 60 – Sequência de portfólios eficientes, cujo término é a coordenada (1,0), para o caso do PVM ser inviável	215
Figura 61 – Efeito da não-negatividade dos pesos na obtenção da fronteira eficiente da Figura 60	215
Figura 62 – Funções de densidade de probabilidade dos retornos de ativos financeiros	216
Figura 63 – Retorno esperado de um portfólio de 2 ativos em função do peso x_1 . .	218
Figura 64 – Retorno esperado de um portfólio de 3 ativos em função dos pesos x_1 e x_2	218
Figura 65 – Variância dos retornos de um portfólio de 2 ativos em função do peso x_1	219
Figura 66 – Variância dos retornos de um portfólio de 3 ativos em função dos pesos x_1 e x_2	219
Figura 67 – Portfólios gerados aleatoriamente evidenciando a barreira da fronteira eficiente	220
Figura 68 – Fronteira eficiente, CAL e portfólios notáveis	220
Figura 69 – Variância dos retornos para diferentes níveis de correlação entre os ativos envolvidos	222
Figura 70 – Desvio padrão dos retornos para diferentes níveis de correlação entre os ativos envolvidos	222
Figura 71 – Portfólios tangentes com r_f menor que o retorno esperado do PVM . .	229
Figura 72 – Portfólios tangentes com r_f maior que o retorno esperado do PVM . .	229
Figura 73 – Exemplos de soluções degeneradas obtidas devido a imperfeições dos algoritmos de otimização. A solução de maior risco converge à coordenada (0,0).	232
Figura 74 – Combinação de informações <i>a priori</i> com “visões” sugeridas por Black e Litterman (1992).	237

Lista de tabelas

Tabela 1 – Artigos relevantes sobre modelos de precificação de ativos financeiros, fatores de risco associados e hipóteses sobre a caracterização do movimento dos preços. As publicações foram selecionadas em um período anterior ao ano de 2013.	44
Tabela 2 – Artigos recentes sobre modelos de precificação de ativos financeiros, fatores de risco associados e hipóteses sobre a caracterização do movimento dos preços. As publicações foram selecionadas em um período a partir do ano de 2013.	45
Tabela 3 – Artigos relevantes sobre anomalias associadas aos ativos financeiros. As publicações foram selecionadas em um período anterior ao ano de 2013.	53
Tabela 4 – Artigos recentes sobre anomalias associadas aos ativos financeiros. As publicações foram selecionadas em um período a partir do ano de 2013.	54
Tabela 5 – Análises das distribuições de pesos obtidas por diferentes formas de reamostragem	103
Tabela 6 – Lista das bases de dados consideradas na pesquisa	109
Tabela 7 – Lista de estratégias de seleção de portfólios consideradas na pesquisa	113
Tabela 8 – Estatísticas descritivas da base de dados Dow Jones ($N = 28$), em valores percentuais.	125
Tabela 9 – Estatísticas descritivas da base de dados FF Industry ($N = 10$), em valores percentuais.	126
Tabela 10 – Estatísticas descritivas da base de dados FF Industry ($N = 49$), em valores percentuais.	127
Tabela 11 – Estatísticas descritivas da base de dados FF Size-B/M ($N = 96$), em valores percentuais.	128
Tabela 11 – Estatísticas descritivas da base de dados FF Size-B/M ($N = 96$), em valores percentuais.	129
Tabela 12 – Estatísticas descritivas da <i>proxy</i> do ativo livre de risco (r_f) e dos fatores de risco, em valores percentuais.	130
Tabela 13 – Efeito volatilidade nas bases de dados utilizadas.	132
Tabela 14 – Comparativo de características de séries obtidas a partir de encolhimentos da matriz de covariâncias amostral (Σ) em uma janela móvel. Resultados referentes à base de dados dos 5 fatores de risco (FF5) . . .	139
Tabela 15 – Comparativo de características de séries obtidas a partir de encolhimentos da matriz de covariâncias amostral (Σ) em uma janela móvel. Resultados referentes à base de dados dos 5 fatores de risco (FF5) . . .	140

Tabela 16 – Comparativo de características de séries obtidas a partir de encolhimentos da matriz de covariâncias amostral (Σ) em uma janela móvel. Resultados referentes à base de dados FF Industry ($N = 10$)	142
Tabela 17 – Comparativo de características de séries obtidas a partir de encolhimentos da matriz de covariâncias amostral (Σ) em uma janela móvel. Resultados referentes à base de dados FF Industry ($N = 10$)	143
Tabela 18 – Avaliação do desempenho fora da amostra das estratégias de investimento ao utilizar como insumo a matriz de covariâncias encolhida linearmente (LEDOIT; WOLF, 2003). Ausência de custos de transação.	151
Tabela 19 – Segmentação do desempenho fora da amostra, apresentado na Tabela 18, em dois subperíodos. Ausência de custos de transação.	152
Tabela 20 – Regressões dos retornos em excesso ($r_i - r_f$), para avaliação fora da amostra de cada estratégia da Tabela 18, em relação aos modelos fatoriais referentes aos ativos da base de dados Dow Jones ($N = 28$); Fev/1995-Abr/2016, 255 meses. Ausência de custos de transação.	155
Tabela 21 – Regressões dos retornos em excesso ($r_i - r_f$), para avaliação fora da amostra de cada estratégia da Tabela 18, em relação aos modelos fatoriais referentes aos ativos da base de dados FF Industry ($N = 49$); Jan/1975-Dez/2019, 540 meses. Ausência de custos de transação.	156
Tabela 22 – Regressões dos retornos em excesso ($r_i - r_f$), para avaliação fora da amostra de cada estratégia da Tabela 18, em relação aos modelos fatoriais referentes aos ativos da base de dados FF Size-B/M ($N = 96$); Jan/1975-Dez/2019, 540 meses. Ausência de custos de transação.	157
Tabela 23 – Avaliação do desempenho fora da amostra das estratégias de investimento ao utilizar como insumo a matriz de covariâncias encolhida linearmente (LEDOIT; WOLF, 2003). Custos de transação de 50 pontos base (0,5%).	159
Tabela 24 – Segmentação do desempenho fora da amostra, apresentado na Tabela 23, em dois subperíodos. Custos de transação de 50 pontos base (0,5%).	160
Tabela 25 – Regressões dos retornos em excesso ($r_i - r_f$), para avaliação fora da amostra de cada estratégia da Tabela 23, em relação aos modelos fatoriais referentes aos ativos da base de dados Dow Jones ($N = 28$); Mar/1995-Abr/2016, 254 meses. Custos de transação de 50 pontos base (0,5%).	161
Tabela 26 – Regressões dos retornos em excesso ($r_i - r_f$), para avaliação fora da amostra de cada estratégia da Tabela 23, em relação aos modelos fatoriais referentes aos ativos da base de dados FF Industry ($N = 49$); Fev/1975-Dez/2019, 539 meses. Custos de transação de 50 pontos base (0,5%).	162

Tabela 27 – Regressões dos retornos em excesso ($r_i - r_f$), para avaliação fora da amostra de cada estratégia da Tabela 23, em relação aos modelos fatoriais referentes aos ativos da base de dados FF Size-B/M ($N = 96$); Fev/1975-Dez/2019, 539 meses. Custos de transação de 50 pontos base (0,5%).	163
Tabela 28 – Artigos relevantes relacionados à pesquisa sobre a função de utilidade dos agentes financeiros	208
Tabela 29 – Artigos relevantes sobre algoritmos, técnicas de estimação e critérios que auxiliam o processo de seleção de portfólios	234
Tabela 30 – Artigos relevantes sobre a construção de portfólios e suas extensões. As publicações foram selecionadas em um período anterior ao ano de 2013.	235
Tabela 31 – Artigos recentes sobre a construção de portfólios e suas extensões. As publicações foram selecionadas em um período a partir do ano de 2013.	236
Tabela 32 – Artigos relevantes sobre metodologias robustas voltadas à construção de portfólios. As publicações foram selecionadas em um período anterior ao ano de 2013.	239
Tabela 32 – Artigos relevantes sobre metodologias robustas voltadas à construção de portfólios. As publicações foram selecionadas em um período anterior ao ano de 2013.	240
Tabela 33 – Artigos recentes sobre metodologias robustas voltadas à construção de portfólios. As publicações foram selecionadas em um período a partir do ano de 2013.	241
Tabela 34 – Artigos relevantes focados na construção de portfólios multi-períodos ou dinâmicos. As publicações foram selecionadas em um período anterior ao ano de 2013.	242
Tabela 35 – Artigos recentes focados na construção de portfólios multiperíodos ou dinâmicos. As publicações foram selecionadas em um período a partir do ano de 2013.	244
Tabela 36 – Artigos relevantes relacionados com a construção de portfólios que possuam dados brasileiros ou tenham sido publicados em periódicos nacionais	245
Tabela 37 – Avaliação do desempenho fora da amostra das estratégias VT e RRT ($\bar{\beta}^+$) ao utilizar como insumo a matriz de covariâncias encolhida linearmente (LEDOIT; WOLF, 2003). Ausência de custos de transação.	248
Tabela 38 – Segmentação do desempenho fora da amostra, apresentado na Tabela 37, em dois subperíodos. Ausência de custos de transação.	249

Tabela 39 – Regressões dos retornos em excesso ($r_i - r_f$), para avaliação fora da amostra de cada estratégia da Tabela 37, em relação aos modelos fatoriais referentes aos ativos da base de dados Dow Jones ($N = 28$); Fev/1995-Abr/2016, 255 meses. Ausência de custos de transação. . . .	250
Tabela 40 – Regressões dos retornos em excesso ($r_i - r_f$), para avaliação fora da amostra de cada estratégia da Tabela 37, em relação aos modelos fatoriais referentes aos ativos da base de dados FF Industry ($N = 49$); Jan/1975-Dez/2019, 540 meses. Ausência de custos de transação. . . .	251
Tabela 41 – Regressões dos retornos em excesso ($r_i - r_f$), para avaliação fora da amostra de cada estratégia da Tabela 37, em relação aos modelos fatoriais referentes aos ativos da base de dados FF Size-B/M ($N = 96$); Jan/1975-Dez/2019, 540 meses. Ausência de custos de transação. . . .	252
Tabela 42 – Avaliação do desempenho fora da amostra das estratégias VT e RRT ($\bar{\beta}^+$) ao utilizar como insumo a matriz de covariâncias encolhida não-linearmente (LEDOIT; WOLF, 2020). Ausência de custos de transação.	254
Tabela 43 – Segmentação do desempenho fora da amostra, apresentado na Tabela 42, em dois subperíodos. Ausência de custos de transação.	255
Tabela 44 – Regressões dos retornos em excesso ($r_i - r_f$), para avaliação fora da amostra de cada estratégia da Tabela 42, em relação aos modelos fatoriais referentes aos ativos da base de dados Dow Jones ($N = 28$); Fev/1995-Abr/2016, 255 meses. Ausência de custos de transação. . . .	256
Tabela 45 – Regressões dos retornos em excesso ($r_i - r_f$), para avaliação fora da amostra de cada estratégia da Tabela 42, em relação aos modelos fatoriais referentes aos ativos da base de dados FF Industry ($N = 49$); Jan/1975-Dez/2019, 540 meses. Ausência de custos de transação. . . .	257
Tabela 46 – Regressões dos retornos em excesso ($r_i - r_f$), para avaliação fora da amostra de cada estratégia da Tabela 42, em relação aos modelos fatoriais referentes aos ativos da base de dados FF Size-B/M ($N = 96$); Jan/1975-Dez/2019, 540 meses. Ausência de custos de transação. . . .	258

Lista de abreviaturas e siglas

AMH	Hipótese de Mercados Adaptativos, do inglês <i>Adaptative Market Hypothesis</i>
API	Biblioteca de funções auxiliares, do inglês <i>Application Programming Interface</i>
APT	Teoria de Precificação por Arbitragem, do inglês <i>Arbitrage Pricing Theory</i>
B/M	Índice <i>book-to-market</i> , ou seja, a razão entre o valor contábil e o valor de mercado da empresa
BAB	Fator de risco que considera a diferença de retornos entre portfólios criados baseando-se nos β 's passados, do inglês <i>Beta Against Beta</i>
BAG	<i>bagging</i> ou <i>bootstrap aggregating</i>
CAL	Linha de Alocação de Capitais, do inglês <i>Capital Allocation Line</i>
CAPM	Modelo de Precificação de Ativos Financeiros, do inglês <i>Capital Asset Pricing Model</i>
CMA	Fator de risco que considera o nível de investimento
CML	Linha de Mercado de Capitais, do inglês <i>Capital Market Line</i>
CVaR	Valor em Risco Condicional, do inglês <i>Conditional Value-at-Risk</i>
DCC	<i>Dynamic Conditional Correlation model</i> , idem DCC-GARCH
DJIA	<i>Dow Jones Industrial Average</i>
EF	Fronteira Eficiente, do inglês <i>Efficient Frontier</i>
EMH	Hipótese de Mercado Eficiente, do inglês <i>Efficient Market Hypothesis</i>
ENT	Portfólio que usa informações de média-variância aliadas a incerteza dos pesos
ENT+	Modificação da abordagem ENT para considerar incertezas individualizadas
ERC	Portfólios cujas contribuições de risco são igualmente ponderadas, do inglês <i>Equally Weighted Risk Contribution</i>

EUA	Estados Unidos da América
EW	Portfólios igualmente ponderados, do inglês <i>Equally Weighted</i> . Também denominados de ingênuos, do inglês <i>naive</i>
FF	Refere-se aos autores Eugene Fama e Kenneth R. French
FF3	Modelo de três fatores de Fama-French
FF5	Modelo de cinco fatores de Fama-French
FFC	Modelo de quatro fatores de Fama-French-Carhart
FFCL	Modelo FFC com a adição do fator liquidez
GEF	Fronteira Eficiente Generalizada, do inglês <i>Generalised Efficient Frontier</i>
GARCH	<i>Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity model</i>
ISO	<i>International Organization for Standardization</i>
LIQ	Fator de risco que considera a liquidez
HML	Fator de risco que considera o índice <i>book-to-market</i>
MDP	Portfólio que maximiza o índice de diversificação, do inglês <i>Most Diversified Portfolio</i>
MIN	Portfólio de variância mínima com restrição de vendas a descoberto ($x_i \geq 0$)
Mom	Fator de risco <i>momentum</i> que considera a inércia dos retornos do ano anterior
MPT	Teoria Moderna dos Portfólios, do inglês <i>Modern Portfolio Theory</i>
MV	Portfólio de média-variância, para um nível específico de aversão ao risco, com restrição de vendas a descoberto ($x_i \geq 0$)
OLS	Método dos Mínimos Quadrados Ordinários, do inglês <i>Ordinary Least Squares</i>
P/E	Índice de preço por lucro de uma ação, do inglês <i>Price Earnings ratio</i>
PGD	Processo Gerador de Dados
PMR	Portfólio eficiente cujo retorno esperado é igual ao valor máximo do vetor $\hat{\mu}_i$

PR1YR	idem Mom
PT	Portfólio Tangente
PVM	Portfólio de Variância Mínima
REC	Retorno Esperado Constante
REF	Fronteira Eficiente Reamostrada, do inglês <i>Resampled Efficient Frontier</i>
RMW	Fator de risco que considera a lucratividade
RRT	<i>Reward-to-Risk Timing</i> , uma estratégia de seleção de portfólios
SBAG	<i>subset bootstrap aggregating</i>
SMB	Fator de risco que considera o tamanho das empresas
SJR	<i>SCImago Journal Rank indicator</i> , fator de impacto de publicações científicas
T-Bill	<i>Treasury Bill</i> , obrigações de curto prazo emitidas pelo tesouro dos EUA
VaR	Valor em Risco, do inglês <i>Value-at-Risk</i>
US	idem EUA
VW	Portfólios ponderados pelo valor de mercado, do inglês <i>Value Weighted</i>
VT	<i>Volatility Timing</i> , uma estratégia de seleção de portfólios

Lista de símbolos

$\mathbf{A}^\top$	Transposta da matriz $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^{-1}$	Inversa da matriz $\mathbf{A}$
$\text{Adj}(\mathbf{A})$	Adjunta da matriz $\mathbf{A}$
$\ \mathbf{A}\ _n$	Norma-n de vetor ou matriz
α	Intercepto dos modelos de precificação, também denominado de retorno anormal
β	Parâmetro do modelo CAPM, ou, também pode se referir aos parâmetros (β_i) dos modelos multifatoriais de precificação
$\bar{\beta}_i$	β médio condicional do ativo i com relação a K fatores de risco
$\bar{\beta}_i^+$	Máximo entre zero e β médio do ativo i
$\mathbf{C}$	Matriz, de dimensão $N \times N$, de correlações dos retornos
$\text{cov}(x,y)$	função covariância entre x e y
Δ	Operador diferença
$ \overline{\Delta x} $	É o <i>turnover</i> médio do portfólio
$\det(\mathbf{A})$	Determinante da matriz $\mathbf{A}$
$\mathcal{DR}$	Índice de diversificação do portfólio $\mathbf{x}$
E	Expectativa, ou esperança, dos retornos do portfólio conforme a notação utilizada em Markowitz (1952a)
$\mathbb{E}[\cdot]$	Operador expectativa
η	Parâmetro de controle das estratégias de investimento baseadas em <i>volatility timing</i>
$\mathbf{I}$	Matriz identidade
$\in$	“pertence ao” ou “é membro do”
IQR	amplitude interquartil, do inglês <i>interquartile range</i>
κ	Constante de proporcionalidade do custo de transação

γ	Coefficiente de aversão ao risco
κ_γ	Taxa máxima que um investidor, com função de utilidade quadrática e aversão ao risco (γ), estaria disposto a pagar em cada período para abandonar a alocação ingênua ($1/N$)
λ	Multiplicador de Lagrange
$\ln(.)$	Função logaritmo natural
M	Tamanho do subgrupo de ativos distintos escolhidos dentre os N disponíveis
$\boldsymbol{\mu}$	Vetor, de dimensão $N \times 1$, contendo as expectativas dos retornos para os N ativos considerados
μ_i	Expectativa, ou esperança, de retorno do ativo i
$\hat{\mu}_i$	Média amostral dos retornos do ativo i
μ_i^+	Máximo entre zero e a média do ativo i
N	Número total de ativos financeiros considerados
$N_{95\%}$	Quantidade média de ativos que concentram pelo menos 95% do patrimônio investido
$\mathcal{N}(0,1)$	Distribuição normal de média zero e variância unitária
ν	Parâmetro que pertence ao intervalo $[0, 1]$ e serve de controle para o parâmetro M
$\boldsymbol{\Omega}$	Matriz resultante da agregação de múltiplos portfólios de variância mínima
P	Número de combinações distintas de N ativos em grupos de M $\binom{N}{M}$
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\boldsymbol{R}$	Matriz, de dimensão $T \times N$, que contém todos os retornos dos N ativos ao longo de T períodos
r_f	Retorno esperado do ativo livre de risco
R_M	Retorno do portfólio de mercado ou de sua <i>proxy</i>
r_{it}	Retorno do ativo i no tempo t
r_t^k	Retorno do portfólio, referente à estratégia de seleção k , no tempo t

σ	Vetor, de dimensão $N \times 1$, contendo o desvio padrão dos retornos para os N ativos considerados
Σ	Matriz, de dimensão $N \times N$, de covariâncias dos retornos
$\hat{\Sigma}$	Matriz de covariâncias estimada da amostra
Σ_{∞}	Matriz de covariâncias encolhida pela agregação de P portfólios oriundos do <i>bootstrap</i> de ativos
Σ_i	Aproximação de Σ_{∞} para um número de sorteios i inferior à P
$\hat{\sigma}_i$	Desvio padrão amostral dos retornos do ativo i
σ_i^2 ou σ_{ii}	Variância dos retornos do ativo i
$\hat{\sigma}_{ij}$	Covariância amostral dos retornos do ativo i com o ativo j
σ_{ij}	Covariância dos retornos do ativo i com o ativo j
ρ_{ij}	Coefficiente de correlação de Pearson entre os retornos do ativo i com o ativo j
S	Matriz de covariâncias populacional
SR	Índice de Sharpe do portfólio
$\hat{S}$	Matriz de covariâncias encolhida linearmente
F	Matriz de covariâncias estimada pelo modelo de índice único (mercado)
$\tilde{S}$	Matriz de covariâncias encolhida não-linearmente
U	Autovetores da matriz de covariâncias
$\tilde{D}$	Matriz cuja diagonal são os autovalores encolhidos não-linearmente da matriz de covariâncias
T	Número total de períodos nos quais os retornos dos ativos foram coletados
τ	Tamanho da janela de estimação
θ	Coefficiente ou nível de incerteza, também denominado de entropia
$\mathcal{U}[0, 1]$	Distribuição uniforme
V	Variância dos retornos do portfólio conforme a notação utilizada em Markowitz (1952a)

$Var(x)$	Função variância do portfólio $\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{x}$	Portfólio, ou seja, um vetor, de dimensão $N \times 1$, contendo todos os pesos referentes à cada um dos N ativos considerados
x_i	Fração da riqueza investida, ou peso, no ativo i para um portfólio $\boldsymbol{x}$
x_{it}^k	Peso do ativo i no tempo t referente à estratégia de seleção k

Sumário

I	INTRODUÇÃO	27
1	INTRODUÇÃO	28
1.1	Problema de pesquisa	32
1.2	Objetivos	35
1.2.1	Objetivo geral	35
1.2.2	Objetivos específicos	35
1.3	Justificativa e Relevância	35
1.4	Contribuições	37
1.5	Estrutura da Tese	38
2	REFERENCIAL TEÓRICO	39
2.1	Teoria Moderna dos Portfólios (MPT)	39
2.1.1	Contribuições da MPT	42
2.2	Caracterização dos retornos e modelos de precificação	43
2.2.1	Modelo de Precificação de Ativos Financeiros	43
2.2.2	Modelo de Precificação por Arbitragem	49
2.2.3	Hipótese de Mercado Eficiente	50
2.2.4	Modelos Multifatoriais	55
2.2.5	Características associadas à robustez	57
2.3	Melhorias nos insumos	58
2.4	Melhorias nas políticas	62
2.4.1	Estratégias simplificadas	62
2.4.2	Estratégias baseadas nas covariâncias	63
2.4.3	Estratégias baseadas em reamostragens	64
2.4.4	Fronteira Eficiente Generalizada	71
II	PROBLEMAS E ALTERNATIVAS	75
3	DIFICULDADES DA APLICAÇÃO DA MPT	76
3.1	Sensibilidade dos pesos	77
3.1.1	Impacto analítico das covariâncias	82
3.2	Recapitulação	87
4	SORTEIO DE SUBCONJUNTOS DE ATIVOS	88
4.1	Seleção de portfólios a partir do <i>subset bagging</i>	89
4.1.1	Exemplo BAG ($N = 2$ e 3)	90

4.1.2	Comparativo com a fronteira eficiente reamostrada (REF)	91
4.2	Encolhimento da matriz de covariâncias	95
4.3	Índices de incerteza a partir do <i>subset bagging</i>	98
4.3.1	Comparativo de distribuições de pesos obtidas por reamostragem	100
4.3.2	Evolução temporal da amplitude interquartil dos pesos do método BAG	102
4.3.3	Utilização do vetor de incerteza específica por ativo	105
4.4	Recapitulação	106
III	METODOLOGIA	107
5	METODOLOGIA	108
5.1	Dados	108
5.1.1	Efeito Volatilidade	110
5.2	Delineamento do Comparativo de Encolhimentos	110
5.2.1	Estimadores da matriz de covariâncias	110
5.2.2	Convergência do Encolhimento BAG	111
5.2.3	Sensibilidade dos Pesos	111
5.3	Delineamento do Comparativo de Estratégias	112
5.3.1	Estratégias de seleção de portfólios	112
5.3.2	Avaliação de desempenho das estratégias	114
5.3.3	Abordagem computacional	118
5.4	Limitações	120
IV	RESULTADOS	123
6	DADOS	124
6.1	Exclusão de Dados	124
6.2	Estatística Descritiva	124
6.2.1	Dow Jones	124
6.2.2	FF Industry (N = 10)	124
6.2.3	FF Industry (N = 49)	125
6.2.4	FF Size-B/M (N = 100)	127
6.2.5	Fatores de risco	130
6.3	Efeito Volatilidade	131
7	COMPARATIVO DE ENCOLHIMENTOS	133
7.1	Convergência do Encolhimento BAG	133
7.2	Sensibilidade dos pesos	135
7.2.1	Sensibilidade do encolhimento BAG	136

7.2.2	Comparativo de sensibilidades dos pesos	138
7.3	Discussão dos resultados	144
8	COMPARATIVO DE ESTRATÉGIAS	146
8.1	Avaliação de desempenho	146
8.1.1	Ausência de custos de transação	147
8.1.2	Impacto dos custos de transação (50 pontos base (0,5%))	158
8.2	Discussão dos resultados	164
9	CONCLUSÕES	167
	Referências	171
	APÊNDICES	205
	APÊNDICE A – NOTAÇÕES MATEMÁTICAS	206
A.1	Notação vetorial e matricial	206
	APÊNDICE B – TEORIA MODERNA DOS PORTFÓLIOS	207
B.1	Teoria da Utilidade Esperada	207
B.1.1	Evolução de pesquisas relativas à função de utilidade	207
B.1.2	Crítica à teoria da utilidade esperada	208
B.2	Seleção de Portfólios	210
B.3	Operacionalização da Seleção de Portfólios	216
B.3.1	Retorno e Risco	216
B.3.2	Portfólios Eficientes	220
	APÊNDICE C – ESTADO DA ARTE	233
C.1	Metodologias Auxiliares	233
C.2	Seleção de Portfólios	233
C.2.1	Modelo de Black-Litterman	235
C.3	Portfólios Robustos	238
C.4	Portfólios Multi-períodos	240
C.5	No Brasil	242
	APÊNDICE D – DESEMPENHO DAS ESTRATÉGIAS DE VOLA- TILITY TIMING	246
	APÊNDICE E – CÓDIGOS FONTE	259
E.1	Impacto da reamostragem sobre estimativas	259

E.2	Sensibilidade da solução ótima a configurações do algoritmo	262
E.3	Encolhimento da matriz de covariâncias	268
E.4	Algoritmos de seleção de portfólios	273
E.4.1	MIN e MV	273
E.4.2	ERC	275
E.4.3	MDP	275
E.4.4	REF	276
E.4.5	ENT e ENT+	278
E.4.6	BAG	282
E.4.7	VT e RRT	284
E.5	Indicadores de desempenho	285

Parte I

Introdução

1 Introdução

Os agentes atuantes no mercado de capitais, que visam à obtenção de rendimentos a partir de investimentos, deparam-se com decisões que envolvem ganhos esperados associados aos riscos inerentes. No entanto, a previsão de tais ganhos não depende somente das expectativas estimadas. São necessárias, previamente, a análise e a quantificação do risco dos ativos financeiros envolvidos.

Dessa forma, tal risco vincula-se à variabilidade dos retornos de um dado ativo financeiro (MARKOWITZ, 1959). As fontes de riscos podem ser segmentadas de forma a verificar o seu impacto sobre acionistas e empresas; por exemplo, a empresa é suscetível ao risco operacional e financeiro, já os acionistas podem ser afetados por mudanças de taxas de juros, liquidez, risco de mercado, entre outros.

Com relação aos retornos de um dado ativo financeiro, inicialmente, em estudos referentes ao movimento dos preços, estabeleceu-se o pressuposto de que tais retornos são aleatórios (BACHELIER, 1900; FAMA, 1965a,b; SAMUELSON, 1965). Portanto, os riscos relativos a esse contexto podem ser associados às distribuições de probabilidades. A primeira abordagem, e a mais comum, é, mesmo desconhecendo a distribuição real dos retornos, realizar uma aproximação levando-se em conta apenas a expectativa de retorno e sua dispersão em torno de seu valor esperado (MARKOWITZ, 1952a, 2014). O risco pode ser quantificado em uma variedade de formas (ROMAN; MITRA, 2009) mas, na abordagem de Markowitz (1952a), a *proxy* escolhida para o risco foi a variância dos retornos. Outras formas de caracterização do risco, focadas na chance de perda, são propostas na literatura a fim de preencher lacunas deixadas pela variância (BERTSIMAS; LAUPRETE; SAMAROV, 2004; ROMAN; MITRA, 2009; LEE; EID JUNIOR, 2018), por exemplo, o Valor em Risco ou VaR (do inglês, *Value at Risk*) ou o Valor em Risco Condicional (do inglês, *Conditional Value at Risk*).

As medidas de risco e retorno constituem tópicos de interesse dos agentes econômicos tomadores de decisões de investimento nos mercados financeiros e de capitais. De acordo com Bodie, Kane e Marcus (2014), os mercados financeiros normalmente são segmentados em mercado monetário e mercado de capitais. Os instrumentos do mercado monetário incluem títulos de dívida de curto prazo, negociáveis, líquidos e de baixo risco. Em contraposição, o mercado de capitais inclui títulos de mais longo prazo e mais arriscados. Os agentes econômicos são influenciados pelas estimativas de risco e retorno, pois, a partir disso, realizam suas decisões de investimento em produtos disponíveis no mercado financeiro e de capitais. Outros fatores podem influenciar tais investimentos, como a aversão dos investidores ao risco.

A tolerância ou não dos investidores ao risco, segundo Chavas (2004, p. 37), pode ser caracterizada em três tipos de comportamento do investidor que refletem seu nível de preferência diante das decisões de investimentos condicionadas aos riscos: (i) aversão ao risco – o retorno esperado exigido aumenta quando o risco se eleva; (ii) neutralidade ao risco – o retorno esperado exigido não varia em função do risco a que está exposto o investimento; (iii) propensão ao risco – o retorno esperado exigido diminui quando o risco se eleva.

Outras características podem ser levantadas sobre as distribuições dos retornos, como a incerteza. A incerteza, segundo a interpretação de Friedman (1976) sobre o trabalho de Knight (1921), está associada com eventos em que não é possível a associação de probabilidades numéricas. LeRoy e Singell (1987) consideram que Knight (1921) compartilha a visão moderna que agentes devem sempre agir como se tivessem probabilidades subjetivas. A quantificação da incerteza, assim como ocorre com o risco, também é tema de vários estudos (ANDERSON; GHYSELS; JUERGENS, 2009).

Assim, a necessidade dos agentes em considerar medidas de retorno, risco, perfil de aversão e incertezas fomentou o surgimento de pesquisas sobre a gestão de investimentos e alocação de recursos financeiros em carteiras ou portfólios. Tal gestão considera modelos e metodologias que permitem a avaliação das características dos ativos financeiros. É necessária parcimônia na realização de investimentos, visto que há de se considerar a estimação de retornos esperados ou os riscos de ativos envolvidos na tomada de decisão de investimento, ou ainda considerar tais estimativas simultaneamente a depender da metodologia.

A gestão de portfólios ganhou visibilidade a partir da década de 1950 com a publicação do artigo seminal de Markowitz (1952a) no qual são definidas as bases para o que futuramente foi denominado de Teoria Moderna dos Portfólios, do inglês *Modern Portfolio Theory* (MPT). Essa teoria não surgiu de forma isolada, pois faz parte de um arcabouço construído, em conjunto com outros autores, e que propiciou uma evolução teórico-metodológica da área de finanças, como pode ser verificado mais detalhadamente em Iquiapaza, Amaral e Bressan (2009). Nessa evolução, é proposto um modelo que esboça a função de utilidade da riqueza e, associados a ela, são definidos pressupostos de forma a considerar que os indivíduos racionais agem de forma a maximizá-la (FRIEDMAN; SAVAGE, 1948; MARKOWITZ, 1952b).

Markowitz (1952a) apresenta uma visão sobre um fenômeno desconsiderado ou subestimado por autores que o precederam, o risco. Além disso, a referida pesquisa se volta à exploração da seguinte questão por parte dos investidores: maximizar riquezas mediante riscos inerentes na formação de portfólios. O problema de pesquisa escolhido pelo autor consiste em como alocar recursos em forma de um portfólio de ativos de risco, sendo que os pesos (x_i) presentes nesse portfólio deverão ser escolhidos de forma a considerar a

expectativa dos retornos (E) como algo desejável e a variância dos retornos (V) como algo indesejável. Essa proposição de Markowitz (1952a) envolveu a associação da informação do risco com as variâncias e covariâncias dos retornos dos ativos financeiros. Ela apresenta um modelo de média-variância que permite a seleção de um portfólio de ativos arriscados dentre os quais se dispõem a encontrar uma melhor relação entre expectativa de retornos e risco de acordo com a aversão ao risco do agente. Markowitz (1952a) fornece uma visão preliminar, conceitual e gráfica do problema de seleção de portfólios. Já no estudo apresentado por Markowitz (1959), encontra-se uma descrição detalhada, matematizada e aplicável dessa temática denominada MPT.

Fabozzi, Gupta e Markowitz (2002) avaliam o legado da MPT e discorrem sobre extensões comuns em contextos de aplicações práticas. Kolm, Tütüncü e Fabozzi (2014) explicam que, mesmo após mais de 60 anos da publicação do trabalho de Markowitz (1952a), eles perceberam que a adoção da MPT é concentrada em grandes gestoras de fundos quantitativamente orientadas. Tal posicionamento dos autores se baseia no argumento de que a otimização de portfólios tende a ser pouco confiável na prática. Especificamente, a otimização baseada na relação risco-retorno pode ser muito sensível às mudanças nos insumos (entradas), especialmente quando as estimativas de risco e retorno não são adequadamente estimadas, ou quando a formulação do problema de otimização utiliza múltiplas restrições que possuem interações entre si. Segundo Michaud e Michaud (1998, p. viii-ix), apesar de Markowitz (1952a) propor um útil e conveniente ferramental teórico na definição da otimalidade de portfólios, na prática a proposta consiste em um procedimento altamente propenso a erros e instável, uma vez que a metodologia tem propensão para resultar em portfólios de “maximização do erro” e de “investimentos irrelevantes”.

Em função da dificuldade de aplicação ou da sensibilidade dos portfólios gerados, foram criadas extensões da MPT que permitiram contornar alguns problemas detectados pela literatura. A literatura (BEST; GRAUER, 1991; MICHAUD, 1989) apresenta diversas críticas à proposta de Markowitz (1952a), sendo válido ressaltar que algumas dessas considerações feitas ao modelo de otimização média-variância apresentam incoerências quanto às premissas definidas originalmente (apresentadas detalhadamente no Apêndice, Seção B.2) para o desenvolvimento proposto pelo autor. A maior dificuldade na utilização do modelo proposto em Markowitz (1952a) está justamente na concretização de algumas das premissas propostas, posteriormente revisitadas ao longo do texto, e dentre as quais destacam-se alguns exemplos:

- a) Existe uma dificuldade em inferir expectativas futuras consistentes para as distribuições de probabilidades dos retornos dos ativos;
- b) As distribuições podem destoar da aproximação de normalidade para os retornos;
- c) As distribuições de probabilidade não são estáticas, e sim dinâmicas, ou seja, são funções do tempo, como reconhecido pelo próprio autor;

- d) Em virtude da restrição imposta aos pesos, torna-se, em alguns casos, impossível obter solução analítica para o problema, sendo necessário encontrar soluções aproximadas por meio de algoritmos de otimização que são operacionalizados com o uso de recursos computacionais.

Fabozzi, Markowitz *et al.* (2012) revisam a ideia original dos trabalhos de Markowitz (1952a, 1959) e apontam que os avanços na MPT estão interligados, resumidamente, a duas formas de abordagens:

- a) Desenvolvimento de técnicas de estimação que proporcionem estimativas de média-variância mais robustas, ou seja, melhoria nos **insumos**;
- b) Técnicas (ou algoritmos) de otimização que resultem em portfólios mais robustos às estimativas de média-variância, ou seja, modificações na **política** de alocação.

Kolm, Tütüncü e Fabozzi (2014), em reconhecimento às lacunas relativas à abordagem original proposta por Markowitz (1952a, 1959), fazem ainda considerações de que o método serve mais como um ponto de partida para a montagem de carteiras. A formulação clássica de média-variância tem sido frequentemente estendida em direções distintas que visam a uma gestão prática de portfólios. Essas extensões incluem, mas não se limitam, a pontos desconsiderados inicialmente como:

- a) A inclusão de custos de transação (tais como os custos de impacto no mercado) e os efeitos fiscais;
- b) A adição de vários tipos de restrições que levam em conta diretrizes específicas de investimento e características institucionais;
- c) Modelagem e quantificação do impacto dos erros de estimação na predição do risco-retorno dos portfólios;
- d) Extensões multiperíodo da otimização média-variância para incorporar efeitos intertemporais como necessidades de cobertura (*hedging*), mudanças de condições do mercado, custos de impacto no mercado e decaimento do “alfa”. Considera-se o alfa como a predição de retorno em excesso para cada dado ativo no universo de investimento.

Diante da complexidade da gestão de portfólios e a natureza competitiva e/ou adaptativa dos mercados financeiros (LO, 2004), tem-se que é praticamente improvável encontrar uma solução final e completa para o problema. Há de se considerar e questionar metodologias que se mostrem isentas de erros de estimação ou previsão, sem ressalvas em relação às distribuições ou aos pressupostos apresentados. É necessário realizar questionamentos que visem à evolução da pesquisa, para o contexto de gestão de portfólios. Alguns questionamentos teóricos podem ser levantados, por exemplo: “O movimento dos preços dos ativos é de fato aleatório?”, “O mercado é eficiente? Se sim, em quais condições?”, “A

possível ineficiência de mercado impacta a construção de portfólios?”, “As distribuições dos retornos dos ativos são normais ou podem ser aproximadamente normais?”.

Inclusive, reflexões tais como: “Em casos de desvio da normalidade das distribuições dos retornos, os portfólios são muito afetados?”, “De que forma os portfólios são sensíveis em função das estimativas feitas?”. Outros questionamentos práticos, e que podem ser explicados durante a evolução deste trabalho, são os seguintes: “O que afeta a sensibilidade dos pesos?”, “Qual o impacto dos custos de transação na seleção dos ativos e no desempenho?”, “O investidor obtém benefícios ao utilizar a alocação de portfólios baseada em média-variância?”, “Qual o desempenho do portfólio ótimo frente à *proxy* da carteira de mercado ou frente a uma carteira ingênua?”, “As modificações propostas na seleção de portfólios trarão complexidade de forma a inibir seu uso?”.

Portanto, a pesquisa está inserida no contexto de gestão de portfólios, voltada principalmente para a aplicação, análise de características e evolução de técnicas que possibilitem a criação de portfólios. Em específico, esta pesquisa é direcionada ao interesse do investidor individual, ou gestor de carteiras, que apenas se importa com informações estáticas de média e covariância dos retornos dos ativos financeiros, e que, em função disso, deve buscar um portfólio na fronteira eficiente da MPT. O escopo deste estudo está delimitado em utilizações relativas aos ativos transacionados em mercados financeiros, logo, não se avaliou seu uso em contextos fora do esperado. Os estudos empíricos posteriores foram feitos a partir de dados referentes a ativos financeiros dos EUA, além do uso de fatores associados a esse mercado. Nesse cenário, tem-se que este trabalho se insere na linha de pesquisa de Finanças e no contexto relativo aos Mercados Financeiros e de Capitais.

1.1 Problema de pesquisa

Estudos sobre novas metodologias de seleção de portfólios tipicamente sugerem métodos que garantam estabilidade dos pesos ao atender pressupostos específicos. Entretanto, pouco é mencionado sobre o porquê e em quais cenários tais metodologias obtêm êxito ou o que compartilham entre si em termos de características dos portfólios obtidos (KIM; KIM; AHN *et al.*, 2013; KIM; KIM; FABOZZI, 2014b). Por exemplo, a insensibilidade dos pesos a pequenos erros nas estimativas ou a desvios ínfimos em relação aos pressupostos é uma das características de metodologias robustas para obtenção de portfólios. Caso essa sensibilidade seja o ponto fundamental da criação de portfólios, então metodologias ingênuas (em inglês, *naive*), que investem igualmente em N ativos (igualmente ponderados, do inglês *Equally Weighted* (EW)), podem ser consideradas como alternativas válidas.

Tu e Zhou (2011) argumentam que a maioria das extensões de Markowitz (1952a) na seleção de portfólios apresentam desempenho inferior às estratégias¹ ingênuas, assim como levam investidores à perda de dinheiro em uma perspectiva ajustada ao risco para diversas bases de dados reais. Pflug, Pichler e Wozabal (2012) demonstram que, em função do aumento da incerteza a respeito das distribuições de probabilidades envolvidas, a decisão ótima tende a ser uma estratégia de investimento igualmente ponderada (EW ou 1/N). Tal fato também é considerado por de Jong (2018) em seu modelo.

A sensibilidade referente aos pesos dos portfólios tem recebido atenção crescente, conforme percebido no Apêndice C, devido à associação com os custos de transação e às restrições de liquidez, o que também impactará o desempenho da carteira. Adicionalmente, há que se diferenciar a sensibilidade em duas perspectivas: a “estática”, que se preocupa com a mudança dos pesos para um período à frente e a “dinâmica”, que avalia mudanças intertemporais dos pesos. A sensibilidade dos pesos também consiste em um ponto importante e uma característica desejável para a robustez, porém não é o aspecto principal a ser considerado na construção de portfólios.

A discussão proposta por Michaud (1989) a respeito da obtenção de portfólios “maximizadores de erro” está vinculada, em parte, à percepção de que os pesos dos portfólios podem ser demasiadamente ajustados para minimizar o erro em relação aos dados da amostra utilizada, e por consequência, ter um desempenho prejudicado para testes fora da amostra. A melhoria de abordagens de seleção de portfólios, por exemplo, pode ser associada com algumas características chave como a sensibilidade dos pesos aos dados de entrada ou a desvios dos pressupostos e a capacidade dos modelos de capturar a informação relevante e realizar extrapolações consistentes para a formação de carteiras (CHOPRA; ZIEMBA, 1993; ARDIA *et al.*, 2017).

Nesse contexto, foram seguidos alguns direcionamentos possíveis, sendo esses: a análise da sensibilidade dos pesos e como isso impacta a sua determinação, a criação de portfólios com foco no controle da sensibilidade dos pesos em relação aos insumos do modelo e o aprofundamento na análise das características dos portfólios gerados em função de sua diversificação ou correlação com fatores que determinam os retornos das carteiras.

Soluções particulares que promovem melhorias na MPT já foram abordadas na literatura. Com relação às melhorias dos **insumos**, tem-se os trabalhos de Ledoit e Wolf (2003, 2004a,b) que propõem formas de encolhimento da matriz de covariâncias, além de destacar que a matriz de covariâncias amostral não apresenta condicionamento numérico quando o número de ativos é superior ao número de períodos de tempo.

¹ O termo “estratégia”, presente ao longo do texto, se refere a técnicas ou políticas de seleção de portfólios. Em nenhum ponto do texto ele deve ser confundido com a área de pesquisa em Administração denominada “Estratégia”. Tal termo foi escolhido porque ele é usual na literatura da área de gestão de carteiras/investimentos.

Com relação às melhorias relacionadas com a **política** de investimento, cita-se a abordagem de [Michaud e Michaud \(1998\)](#). O estudo apresenta uma metodologia de seleção de portfólios baseada em simulações de Monte Carlo, com os insumos do modelo de média-variância. Os portfólios gerados são obtidos pela média dentre todas as carteiras encontradas nas simulações. Uma das fragilidades de tal técnica é a de realizar simulações com a situação de máximo erro de estimação. Uma melhoria na **política** de investimentos que, em alguns casos, é equivalente ao encolhimento da matriz de covariâncias ([LEDOIT; WOLF, 2003, 2004b](#)) é proposta por [de Jong \(2018\)](#), ao incorporar um termo de incerteza na formulação original da MPT. Tal termo direciona o portfólio ótimo para o igualmente ponderado (EW ou $1/N$) conforme ocorre o aumento da incerteza.

Em problemas genéricos de estimação, fora do contexto de portfólios, existem abordagens que usam reamostragens voltadas a gerar melhorias nas estimativas. [Breiman \(1996\)](#) propõe uma técnica que promove melhoria na acurácia em casos de instabilidade de métodos de estimação. Essa melhoria é obtida ao particionar os dados originais em subconjuntos, com dados sorteados aleatoriamente com reposição, provenientes da base de dados original. A técnica propõe a realização de estimativas para cada subconjunto, sendo que cada estimativa parcial é agregada em uma inferência final. Tal processo de estimação é denominado de *bootstrap aggregating*, ou simplesmente *bagging*. A ideia fundamental é a mesma proposta por [Michaud e Michaud \(1998\)](#), diferenciando-se pela forma como a reamostragem é feita, seja ela por simulações ou por sorteios dos dados originais. [Ho \(1998\)](#) utiliza uma forma diferente de reamostragem baseada no sorteio aleatório de variáveis (sem repetição), ou subespaços, dentre as disponíveis para realizar as estimações das projeções e posteriores agregações. Tal variação pode ser denominada de *subset bagging*. O *bootstrap* ou suas técnicas derivadas possuem aplicações recentes envolvendo o contexto de finanças, podem ser destacados trabalhos que envolvem: (i) testes de hipótese para identificar diferença estatística do índice de Sharpe ou da variância entre séries temporais contendo retornos financeiros ([LEDOIT; WOLF, 2008, 2011](#)); (ii) testes de raiz unitária e cointegração utilizando o *wild bootstrap* ([CAVALIERE; TAYLOR, 2009](#); [CAVALIERE; RAHBEEK; TAYLOR, 2010](#); [CAVALIERE; RAHBEEK; TAYLOR, 2014](#); [CAVALIERE; DE ANGELIS et al., 2018](#)). Nesses exemplos as técnicas derivadas do *bootstrap* promoveram robustez a efeitos como retornos correlacionados, distribuições com caudas mais longas que a normal ou a presença de heteroscedasticidade.

A abordagem de [Ho \(1998\)](#) pode ser adaptada ao contexto de seleção de portfólios de modo a promover estimativas de melhor condicionamento numérico, pois o problema de seleção de portfólios também apresenta instabilidade nas estimativas. Ao considerar as observações de [Ledoit e Wolf \(2003\)](#) sobre as dimensões da matriz de covariâncias, observa-se que a metodologia de [Ho \(1998\)](#) é adequada por aumentar os graus de liberdade de cada projeção. Além disso, as distribuições relativas aos pesos, obtidos das projeções, podem fornecer informações sobre a incerteza de cada ativo e contribuir com metodologias

já existentes. Por exemplo, [de Jong \(2018\)](#) atribui o mesmo grau de incerteza para todos os ativos em sua política de seleção de portfólios.

Dessa forma, diante do contexto e do direcionamento da pesquisa descritos anteriormente, tem-se a seguinte pergunta: *A utilização do bootstrap para encolhimento de covariâncias e análise de incerteza contribuem para o desempenho de portfólios?*

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo geral

Analisar a contribuição do *bootstrap* para a estimação de covariâncias e índices de incerteza no contexto da otimização do desempenho de portfólios.

1.2.2 Objetivos específicos

- a) Avaliar o impacto das múltiplas projeções, obtidas das carteiras de ativos sorteados aleatoriamente, sobre a matriz de covariâncias a fim de obter uma formulação de “encolhimento” para a seleção de portfólios;
- b) Avaliar o uso da dispersão dos pesos de múltiplas projeções, obtidas das carteiras de ativos sorteados aleatoriamente, como índices de incerteza e na seleção de portfólios;
- c) Propor uma forma de análise da sensibilidade dos pesos, de portfólios eficientes, em função das covariâncias e utilizá-la para diferenciar formas distintas de encolhimento da matriz de covariâncias;
- d) Avaliar o desempenho das estratégias propostas, de encolhimento da matriz de covariâncias e de incorporação de índices de incerteza, em testes fora da amostra considerando cenários com ausência e presença de custos de transação.

1.3 Justificativa e Relevância

Em virtude da importância da MPT e da reamostragem, esta pesquisa visa contribuir para o desenvolvimento do conhecimento relacionado à temática de seleção e caracterização de portfólios que, essencialmente, utilizem informações de média e covariâncias na formação de carteiras. Além disso, esta pesquisa busca colaborar para o avanço dos estudos financeiros voltados a novas métricas auxiliares que permitam quantificar a “incerteza” de formas alternativas às já existentes. Por exemplo, índices presentes na literatura inferem a incerteza a partir da volatilidade implícita de contratos de opções de ativos financeiros ([CBOE, 2019](#)) ou por incertezas relativas a políticas econômicas ([BAKER;](#)

BLOOM; DAVIS, 2016). O enfoque foi dado ao uso de múltiplas projeções de portfólios, ao utilizar procedimentos de reamostragem (MICHAUD; MICHAUD, 1998; BREIMAN, 1996; HO, 1998), a fim de promover melhorias no contexto da MPT (MARKOWITZ, 1952a, 1959) e da quantificação de incerteza.

A proposta deste estudo é de analisar e compreender o impacto das múltiplas projeções sobre a construção de carteiras e, incorporá-las na forma de um encolhimento da matriz de covariâncias, similar ao que já ocorre na literatura (LEDOIT; WOLF, 2003, 2020). Adicionalmente, foram propostas formas de avaliar a sensibilidade dos pesos em relação às mudanças nos insumos e, a partir disso, realizar um comparativo entre técnicas de encolhimento da matriz de covariâncias presentes na literatura. A sensibilidade dos pesos tem impacto importante nos retornos dos portfólios por serem considerados custos de transação. Múltiplas projeções de portfólios podem auxiliar ainda na quantificação da “incerteza” acerca dos pesos, pois cada projeção traz consigo uma estimativa de peso e ao longo de várias simulações será construída uma distribuição de pesos possíveis para cada ativo financeiro da amostra. A partir de uma medida de dispersão dos pesos, como a distância interquartil, é possível quantificar a incerteza do ativo financeiro e extrair índices individualizados. Tais índices foram utilizados no aprimoramento da metodologia proposta por de Jong (2018) ao permitir a diferenciação do grau de incerteza de cada um dos ativos financeiros envolvidos na seleção de portfólios.

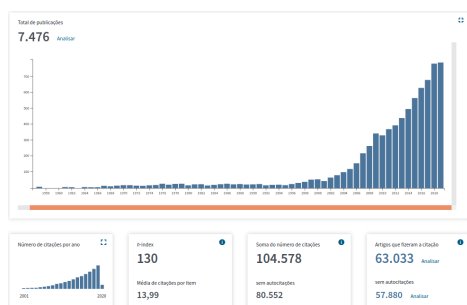
A presente análise visou trazer metodologias de reamostragens para o contexto de seleção de portfólios a fim de melhorar as inferências obtidas. Aplicações na seleção de portfólios já foram avaliadas, por exemplo, por Michaud e Michaud (1998). O emprego no contexto de classificação e regressão foram utilizadas, por exemplo, na criação do algoritmo da “Floresta Aleatória” (*Random Forest*) (BREIMAN, 2001a). Técnicas de reamostragens possuem pressupostos e características diferentes e, portanto, podem apresentar resultados distintos. De uma perspectiva de Teoria de Finanças, os portfólios resultantes de processos de reamostragem apresentam retornos que podem ser explicados por modelos de equilíbrio. Tais retornos são determinados pelo carregamento apresentado em relação aos fatores de risco (SHARPE, 1964; FAMA; FRENCH, 1993, 2015). Os modelos de equilíbrio serviram como base para diferenciar a abordagem desenvolvida das já existentes na literatura.

Em termos práticos, os estudos relativos à gestão de portfólios podem beneficiar os investidores na exploração da relação risco-retorno melhorada, proteção contra incertezas e diversificação de risco aprimorada. O presente estudo pretende beneficiar o investidor individual, ou gestor de carteiras, que se utilize de informações estáticas de médias e covariâncias para realizar a construção de portfólios. A evolução de técnicas para seleção de portfólios deve buscar melhorias na gestão ativa, ou seja, na obtenção do excesso de retorno ajustado ao risco (“ α ”) ou um melhor controle da estratificação do risco (sistêmico e idiossincrático). Pretende-se, portanto, ir além de abordagens como a que fora proposta

por [Treyner e Black \(1973\)](#).

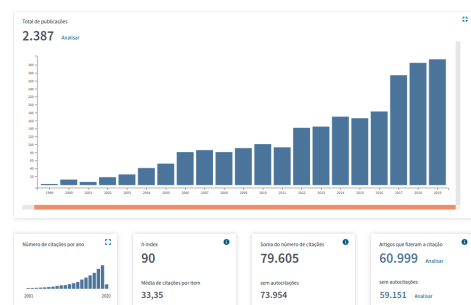
Para identificar a relevância do tema de pesquisa, de forma complementar, foi feita uma busca de artigos em uma mesma base de dados que indexa periódicos internacionais ([CLARIVATE ANALYTICS, 2020](#)). A procura retornou estatísticas de citações para dois artigos base da pesquisa: [Markowitz \(1952a\)](#) e [Ho \(1998\)](#). A partir das Figuras 1 e 2 pode-se confirmar que os assuntos abordados em ambos os artigos apresentam impacto crescente ao longo dos anos. O comportamento da Figura 1 reflete a importância ainda na atualidade de pesquisas relacionadas com seleção de portfólios.

Figura 1 – Estatísticas de citações do artigo de [Markowitz \(1952a\)](#)



Fonte: [Clarivate Analytics \(2020\)](#).

Figura 2 – Estatísticas de citações do artigo de [Ho \(1998\)](#)



Fonte: [Clarivate Analytics \(2020\)](#).

É notável o fato de que existem pesquisas em termos numéricos a respeito do tema em questão e que diversos autores ainda apontam melhorias possíveis com diferentes abordagens. Logo, em função da relevância persistente do tema na atualidade, do interesse prático oriundo da gestão ativa de investimentos, do controle mais aprimorado da relação risco-retorno e da necessidade de melhor entendimento das sensibilidades dos portfólios, pode-se considerar que a presente pesquisa sobre “Encolhimento da Matriz de Covariâncias e Índices de Incerteza: a Utilização do *Bootstrap* na Seleção de Portfólios” está justificada.

1.4 Contribuições

Em relação às contribuições da tese, tem-se que estas podem ser divididas em teóricas e práticas. Da perspectiva teórica, o tema de pesquisa contribuiu para o estudo de seleção de portfólios, tendo como auxílio técnicas de estimação baseadas em reamostragem e/ou *bootstrap*. Fora proposta uma política de seleção de portfólios baseada em múltiplas projeções que foi transformada em uma melhoria de insumo por meio da proposição de uma nova forma de realizar o encolhimento para a matriz de covariâncias. Além disso, verificou-se que o processo de combinação de múltiplas projeções leva à criação de “carteiras fatoriais”, direcionadas aos fatores intrínsecos dos retornos, sem que seja necessária a estimação prévia de quantos ou quais sejam esses fatores de risco. Adicionalmente, foram criados índices de incerteza por ativo além de uma formulação de indicadores de sensibilidade dos

pesos que podem ou não serem utilizados no contexto de portfólios. Da perspectiva prática, o investidor (ou gestor de carteiras) que apenas se importa com informações estáticas de média e covariância dos retornos, e que toma sua decisão em função disso, tem uma alternativa para controlar o nível de exposição do risco idiossincrático de suas carteiras sem perda substancial do α de Jensen (“retorno anormal”) (JENSEN, 1968).

1.5 Estrutura da Tese

Apresentados a questão da pesquisa e os objetivos geral e específicos no Capítulo 1, no Capítulo 2, descreve-se o referencial teórico relativo à MPT e a outras abordagens específicas que foram utilizadas na presente pesquisa, dentre elas o sorteio de ativos. No Capítulo 3, são discutidas lacunas e dificuldades da utilização da MPT, e, ao final, é proposta uma forma de mensurar a sensibilidade dos pesos em função dos insumos. No Capítulo 4, são apresentadas três possibilidades de uso do sorteio de ativos: (i) encolhimento da matriz de covariâncias; (ii) criação de índices de incerteza individuais e (iii) seleção de portfólios. O delineamento de como foi feito o comparativo de métodos de encolhimentos e de estratégias de seleção de portfólios, baseadas no referencial, é encontrado no Capítulo 5. No Capítulo 6 são avaliadas as características das bases de dados utilizadas na presente pesquisa. Resultados relativos à aplicação do sorteio de ativos com o intuito de promover o encolhimento da matriz de covariâncias são apresentados no Capítulo 7. Resultados relativos ao comparativo de estratégias de investimento, baseadas na MPT, são apresentados no Capítulo 8. Conclusões, limitações e trabalhos futuros são apontadas no Capítulo 9.

Os Apêndices contêm informações complementares ou introdutórias do que foi exposto ao longo da tese. No Apêndice A, é descrito o estilo de notação matemática utilizada a fim de facilitar a leitura das equações presentes ao longo do texto. No Apêndice B é apresentada a MPT de forma mais detalhada com o intuito de explicar os seus fundamentos, além da revisão focada na obtenção analítica e numérica de portfólios definidos pela MPT. No Apêndice C, é apresentada uma revisão de literatura genérica, relacionada com a seleção de portfólios, contendo abordagens estabelecidas e recentes em que são incluídas tabelas com breves descrições de alguns artigos relevantes para a temática, sendo que tais tabelas são agrupadas por assunto e seus elementos são ordenados por “relevância”. No Apêndice D, são apresentados resultados suplementares de técnicas mencionadas na pesquisa, mas que não são oriundas da MPT. No Apêndice E, são apresentados códigos fonte utilizados ao decorrer da presente pesquisa.

2 Referencial Teórico

Neste capítulo, são apresentados trabalhos diretamente relacionados com a presente pesquisa, em que são expostos os principais desafios relativos à seleção de portfólios de média-variância, a caracterização e avaliação dos retornos dos portfólios por meio de modelos de equilíbrio e as formas de melhoria dos insumos e das políticas de investimento.

2.1 Teoria Moderna dos Portfólios (MPT)

Markowitz (1952a) apresenta uma visão sobre um fenômeno desconsiderado ou subestimado por autores que o precederam quando se trata de decisões de investimento, o risco. Os trabalhos de Markowitz (1952a, 1959) focam no problema de como alocar recursos em forma de um portfólio de ativos arriscados, quando os agentes são racionais e tendem a maximizar suas utilidades esperadas. Nesse cenário são feitas duas **aproximações**: os retornos de ativos financeiros podem ser explicados por distribuições de probabilidades objetivas e a função de utilidade do agente racional pode ser considerada como sendo quadrática. Nesse caso, os pesos (x_i), presentes nesse portfólio, deverão ser escolhidos de forma a considerar a expectativa dos retornos (E) como algo desejável; já a variância dos retornos (V), como algo indesejável. A proposição feita está vinculada a um modelo de média-variância (retorno-risco) que permite a seleção de um portfólio de ativos arriscados em que é encontrada a melhor expectativa de retornos para um dado nível de risco e vice-versa. Tais portfólios são denominados eficientes. As deduções envolvidas são baseadas em agentes racionais que buscam a maximização da utilidade esperada (VON NEUMANN; MORGENTERN, 1944; FRIEDMAN; SAVAGE, 1948; MARKOWITZ, 1952b). Um melhor detalhamento dos fundamentos da MPT pode ser encontrado no Apêndice B.

Os motivos relativos à utilização das expectativas e variâncias dos retornos estão ligados a uma aproximação da função de utilidade esperada dos agentes. Tal expansão, em série de Taylor, permite obter o valor aproximado de qualquer função de utilidade desde que a série seja convergente e a função seja contínua e 2-vezes diferenciável no ponto de avaliação. Markowitz (1959, p. 116-125) justifica e compara as aproximações utilizadas para avaliar as expectativas de retornos de longo prazo. Posteriormente, Markowitz (1993) descreve o processo que o levou à escolha de tal abordagem:

Sob certos pressupostos, em cada período o investidor racional maximiza o valor esperado da função de utilidade de um único período que depende apenas da riqueza no final do período, como explicado por Bellman (1957). Pareceu natural, então, aproximar esta função de utilidade de um único período por uma quadrática, e aproximar a utilidade esperada por uma função de média e variância que é resultante da avaliação do valor

esperado da quadrática. Tal abordagem foi ilustrada em alguns exemplos no meu livro de 1959, e mais extensivamente por Young e Trent (1969), Levy e Markowitz (1979), e outros (MARKOWITZ, 1993, p. 5, tradução do autor).

Algumas premissas, adotadas por Markowitz (1952a), foram definidas a fim de construir os desenvolvimentos subsequentes de seu trabalho:

- a) As estimativas de desempenho futuro dos ativos disponíveis¹ já foram obtidas. O artigo isenta-se em gerar tais estimativas.
- b) Define restrições no espaço (região viável), pois os pesos (x_i) só podem assumir valores maiores que zero. Tal premissa refere-se à construção de portfólios sem alavancagem, ou seja, não são permitidas vendas a descoberto;
- c) Os retornos dos ativos seguem uma distribuição normal conjunta, ou seja, podem ser caracterizados apenas pelos parâmetros de média (μ_i), variância (σ_i^2 ou σ_{ii}) e suas covariâncias (σ_{ij});
- d) O somatório dos pesos deve ser igual a 1, ou seja, tal somatório dos percentuais investidos em cada ativo deve ser igual a 100% do total investido;
- e) É considerado um modelo estático para os retornos, ou seja, os retornos não são funções do tempo.

A decisão de abstrair a existência de um processo de estimação das expectativas de retornos e de covariâncias dos mesmos pode ser verificada em trechos como os seguintes:

O processo de selecionar um portfólio pode ser dividido em duas etapas. A primeira etapa inicia-se com observação e experiência e termina com crenças sobre os desempenhos futuros dos títulos disponíveis. A segunda etapa inicia-se com as crenças relevantes sobre desempenhos futuros e termina com a escolha do portfólio. Este artigo é relativo à segunda etapa. (...) Nós não consideramos a primeira etapa: a formação de crenças relevantes baseadas em observações (MARKOWITZ, 1952a, p. 77, tradução do autor).

É apresentada a simplificação de que os retornos apresentam comportamento estático, porém a existência de uma possível dinâmica não é descartada:

É conveniente, neste ponto, considerar um modelo estático. Em vez de falar de séries temporais dos retornos para o i -ésimo título ($r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{it}, \dots$), será dito “o fluxo de retornos” (r_i) para o i -ésimo título. (...) No caso dinâmico, se o investidor desejasse maximizar o retorno “antecipado” do portfólio, ele colocaria todos os seus fundos nesse título com retornos antecipados máximos (MARKOWITZ, 1952a, tradução do autor).

Markowitz (1952a), ao final de seu artigo, sugere obter os insumos, para seu modelo de média-variância, a partir de dados de algum período do passado, mas deixa em aberto que melhores abordagens possam existir:

¹ Estimativas em termos de distribuições de probabilidades dos ativos.

Uma sugestão quanto à tentativa μ_i, σ_{ij} é utilizar μ_i, σ_{ij} para algum período do passado. Eu acredito que melhores métodos, que levem em conta mais informações, possam ser encontrados (MARKOWITZ, 1952a, tradução do autor).

É notável que a variância é uma função representativa de risco que penaliza igualmente ganhos e perdas elevados da mesma forma. Tendo consciência desse fato, Markowitz (1959) propõe utilizar a semi-variância como medida alternativa de risco. Tal medida incorpora parte da informação de momentos superiores à variância. Markowitz (1959, p. 188) expõe os prós e contras da utilização da semi-variância e que as diferenças envolvem custo, conveniência, familiaridade e caráter dos portfólios produzidos pela análise. A variância é superior nos três primeiros critérios. Segundo o autor, o custo de tempo computacional era de 2 a 4 vezes maior para encontrar portfólios baseados em semi-variância do que a partir de variâncias. Por um lado, portfólios podem ser obtidos apenas com informações de médias, variâncias e covariâncias; por outro lado, portfólios obtidos a partir de semi-variâncias necessitam de todos os dados da distribuições conjunta. A semi-variância é uma medida menos familiar que a variância, mas isso é algo que pode ser transitório. A semi-variância tende a apresentar melhores portfólios e se concentra na redução de perdas. Caso as distribuições de retornos sejam simétricas, então a variância e a semi-variância fornecerão portfólios idênticos. Markowitz (1959) recomenda iniciar as análises com medidas mais simples, e depois de alguma experiência, utilizar outras funções de utilidade.

Ao final do trabalho de Markowitz (1952a), pode ser destacada uma afirmação de que o terceiro momento dos retornos (assimetria), que é desconsiderado das análises, pode estar associado à propensão por apostar. Tal afirmação complementa a justificativa da não utilização de momentos superiores nas análises e deixa em aberto novas possibilidades de estudos.

Markowitz (1959, p. 205) resume a análise de portfólios em três partes principais para devida atenção:

- a) A informação relativa aos ativos sobre os quais a análise se baseia;
- b) O critério para identificar portfólios bons e ruins, o qual define os objetivos da análise;
- c) Os procedimentos computacionais pelos quais os portfólios que atendam o critério definido são derivados das entradas obtidas das informações iniciais.

Todo arcabouço, criado por Markowitz (1952a, 1959), que utiliza inferências a respeito de médias e covariâncias de ativos financeiros aliadas a métodos de otimização, a fim de permitir a seleção de portfólios eficientes, denomina-se Teoria Moderna dos Portfólios.

2.1.1 Contribuições da MPT

A MPT serviu de base para o surgimento de diversos modelos de precificação de ativos em condições de equilíbrio, como o Modelo de Precificação de Ativos Financeiros, do inglês *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) (SHARPE, 1964; LINTNER, 1965; MOSSIN, 1966), modelo complementar e utilizado na gestão e avaliação de portfólios. Além disso, outro marco que pode ser considerado importante nesse contexto da gestão de portfólios são os trabalhos relacionados com a precificação de derivativos, como os propostos por Black e Scholes (1973), Merton (1973b) e Black (1989).

Ross (1976) propõe uma alternativa ao CAPM, a Teoria de Precificação por Arbitragem, do inglês *Arbitrage Pricing Theory* (APT). A APT supõe que o retorno esperado dos ativos de risco resulta de uma combinação linear de k fatores, mas não determina diretamente a quantidade de fatores que influirão no processo de formação dos preços intrínsecos dos ativos. O CAPM pode ser visto como um caso particular da APT no qual o único fator utilizado é relacionado ao portfólio de mercado. Os trabalhos de Fama e French (1993, 2015) e Carhart (1997) utilizam-se do CAPM e da APT para criar modelos multifatoriais que incorporam fatores de risco que direcionam os retornos dos ativos financeiros. É verificado que tais modelos multifatoriais apresentam poder explicativo superior ao do CAPM (FAMA; FRENCH, 1993, 2015; CARHART, 1997).

Por outro lado, a hipótese de que o movimento dos preços dos ativos do mercado financeiro é aleatório foi formulada inicialmente por Bachelier (1900), quando definiu os fundamentos da teoria do passeio aleatório, ou *random walk*. Jovanovic e Le Gall (2001) argumentam que as bases de tal teoria foram diretamente extraídas também do trabalho de Regnault (1863). Posteriormente, no contexto de finanças, surgiram trabalhos focados na característica do passeio aleatório presente no movimento dos preços de ativos financeiros (FAMA, 1965a,b; SAMUELSON, 1965). Caso o mercado esteja em equilíbrio e o movimento dos preços siga um passeio aleatório, toda informação disponível acerca dos ativos está refletida em seu preço, não sendo possível a obtenção de ganhos anormais sem incorrer em algum risco. Tal consideração permitiu a concretização da denominada Hipótese de Mercado Eficiente, do inglês *Efficient Market Hypothesis* (EMH), feita por Fama (1970, 1991). Modificações na EMH (FAMA, 1991) admitem que ela pode coexistir com a possibilidade de previsão do valor esperado de determinados fatores de risco.

Em paralelo aos desenvolvimentos científicos do século XX, ocorreram mudanças notórias relativas às novas tecnologias ou mesmo questões socioeconômicas globais (ESPOSITO; MASTROIANNI, 1998; KNIGHT, 1998; FERDINAND, 2000; BROWN; GOOLSBEE, 2002; FLOUDAS; GOUNARIS, 2008; GADBAW, 2010). Tais mudanças, em determinados casos, contribuíram para o desenvolvimento das pesquisas em finanças, destacando-se algumas com reflexo no cenário atual:

- a) A criação do computador pessoal e a evolução da tecnologia da informação no mundo;
- b) A criação e expansão da internet que permitiu um acesso “democratizado” às informações de todos os tipos;
- c) A globalização das economias com uma maior competitividade entre mercados;
- d) A possibilidade de transacionar ativos em qualquer parte do mundo e com agilidade por meios eletrônicos;
- e) A evolução de métodos de otimização, de simulação computacional e de cálculos numéricos que permitem analisar e/ou solucionar problemas de alta complexidade.

2.2 Caracterização dos retornos e modelos de precificação

Esta seção pretende apresentar modelos de equilíbrio utilizados na precificação de ativos financeiros bem como algumas de suas extensões. Uma maior atenção foi dada aos dois modelos mais influentes: o CAPM e o APT. Além disso, é apresentada a EMH como consequência dos pressupostos de equilíbrio do mercado. Ao final da seção, são apresentados alguns modelos multifatoriais que surgiram a fim de aumentar o poder explicativo do modelo CAPM. Alguns dos estudos fundamentais sobre o assunto estão resumidos na Tabela 1, e na Tabela 2 encontram-se estudos recentes.

2.2.1 Modelo de Precificação de Ativos Financeiros

A história por trás do desenvolvimento paralelo do CAPM é explorada por Sullivan (2006). Sullivan (2006) aponta quatro responsáveis por tal teoria: Treynor (1961, 1962), Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966). Apenas os trabalhos de Treynor (1961, 1962) não foram publicados, apesar da breve menção aos seus desenvolvimentos em Sharpe (1964). O modelo CAPM é baseado na seleção eficiente de portfólios proposta por Markowitz (1952a, 1959).

Inicialmente, Sharpe (1964) propôs uma teoria microeconômica que procurou explicar a precificação de ativos em condições de risco. Além de lidar com a escolha de ativos sobre condições de risco, o modelo proposto por Sharpe (1964) também está relacionado a uma teoria de equilíbrio de precificação de ativos de mercado sobre condições de risco.

É definida, como fundamento da teoria, a escolha de um investimento ótimo para um indivíduo. Dois parâmetros são considerados como variáveis importantes nessa escolha: o valor esperado dos retornos (expectativa) e o desvio padrão dos retornos (risco). O modelo considera que o investidor escolherá o investimento, ou a combinação de investimentos, que

Tabela 1 – Artigos relevantes sobre modelos de precificação de ativos financeiros, fatores de risco associados e hipóteses sobre a caracterização do movimento dos preços. As publicações foram selecionadas em um período anterior ao ano de 2013.

Artigo	Descrição	Periódico	SJR ¹	Citações ²
Black e Scholes (1973)	Modelo de precificação de opções sobre ações	Journal of Political Economy	13,5	8.964
Fama e French (1993)	Modelo de três fatores (FF3)	Journal of Financial Economics	13,2	6.146
Carhart (1997)	Modelo FF3 com a inclusão do fator <i>momentum</i>	The Journal of Finance	21,0	2.357
Merton (1973a)	CAPM Intertemporal	Econometrica	14,4	1.898
Tobin (1958)	Preferências na seleção de portfólios considerando a existência de um ativo livre de risco	The Review of Economic Studies	14,9	1.126
Lintner (1965)	CAPM	The Review of Economics and Statistics	6,3	2.621
Fama (1991)	EMH	The Journal of Finance	21,0	771
Mossin (1966)	CAPM	Econometrica	14,4	1.064
Pástor e Stambaugh (2003)	Avaliam os modelos FF3 e FFC adicionados do fator liquidez (FFCL)	Journal of Political Economy	13,5	1.117
Fama e French (1995)	Testes com o FF3	The Journal of Finance	21,0	463
Fama e French (2010)	O retorno agregado de fundos mútuos é, em geral, inferior ao do portfólio de mercado se forem considerados os custos da gestão ativa	The Journal of Finance	21,0	285
Ross (1976)	APT	Journal of Economic Theory	3,3	1.599
Sharpe (1964)	CAPM	The Journal of Finance	21,0	199
Fama (1970)	EMH	The Journal of Finance	21,0	86
Rubinstein (1973)	CAPM - Avaliação de outros momentos no modelo de precificação	The Journal of Financial and Quantitative Analysis	5,1	162
Lo (2004)	AMH	The Journal of Portfolio Management	0,9	316
Kraus e Litzenberger (1976)	CAPM - Inserção do 3º momento no modelo de precificação	The Journal of Finance	21,0	13
Fama (1965a)	Passeio aleatório dos preços dos ativos financeiros	Financial Analysts Journal	1,0	220
Ingersoll (1975)	CAPM - Inserção do 3º momento no modelo de precificação	Journal of Financial and Quantitative Analysis	5,1	31
Kendall e Hill (1953)	Não encontrou padrões ou ciclos no movimento de preços de ativos financeiros	Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)	–	–

Fonte: Elaboração própria.

Nota: As publicações foram ordenadas pelo produto entre o fator de impacto do periódico (SJR) e o respectivo número de citações.

¹ Fator de impacto do periódico ([SCIMAGO, 2007](#)).

² Informações estimadas pelas respectivas editoras ([CHAMBERLAIN et al., 2017](#)).

maximizará sua utilidade esperada (satisfação). Assim, a decisão pode ser realizada em dois estágios: primeiro encontra o conjunto de investimentos eficientes; segundo, escolhe um dentro desse conjunto. Um portfólio é considerado eficiente se, e somente se, não exista outra alternativa que maximize a expectativa para um dado nível de risco ou minimize o risco para uma dada expectativa.

É considerado que o mercado apresenta uma taxa pura de retorno (taxa livre de

Tabela 2 – Artigos recentes sobre modelos de precificação de ativos financeiros, fatores de risco associados e hipóteses sobre a caracterização do movimento dos preços. As publicações foram selecionadas em um período a partir do ano de 2013.

Artigo	Descrição	Periódico	SJR ¹	Citações ²
Fama e French (2015)	Modelo de cinco fatores (FF5)	Journal of Financial Economics	13,2	243
Fama e French (2017)	Testes internacionais com o FF5	Journal of Financial Economics	13,2	5
Zabarankin, Pavlikov e Uryasev (2014)	CAPM com Conditional Drawdown-at-Risk (CDaR)	European Journal of Operational Research	2,5	8
Campbell (2014)	Revisão das contribuições de Eugene Fama, Lars Peter Hansen e Robert Shiller nos estudos empíricos sobre precificação de ativos	The Scandinavian Journal of Economics	1,9	2

Fonte: Elaboração própria.

Nota: As publicações foram ordenadas pelo produto entre o fator de impacto do periódico (SJR) e o respectivo número de citações.

¹ Fator de impacto do periódico ([SCIMAGO, 2007](#)).

² Informações estimadas pelas respectivas editoras ([CHAMBERLAIN et al., 2017](#)).

risco) e outra taxa proporcional ao risco em que se está exposto. Com o objetivo de derivar as condições para equilíbrio no mercado de capitais, são necessários dois pressupostos: mesma taxa pura de interesse para todos os investidores e homogeneidade das expectativas dos investidores.

O CAPM assume que o mercado de capitais é ideal nos seguintes sentidos: (i) os mercados são grandes, e os investidores são tomadores de preço; (ii) não há nenhum imposto nem custos de transação; (iii) todos os ativos de risco são negociados publicamente; (iv) os investidores podem tomar emprestado e emprestar qualquer montante por uma taxa fixa isenta de risco. Com essas suposições, todos os investidores manterão o mesmo portfólio de risco, variando-se apenas a proporção entre esse portfólio e o ativo livre de risco em função da sua aversão ao risco. É proposto que combinações do ativo livre de risco com portfólios eficientes gerarão uma linha que liga o ativo livre de risco à fronteira eficiente. O CAPM pressupõe que, em equilíbrio, o portfólio de mercado é a única carteira de média-variância que tangencia a fronteira eficiente.

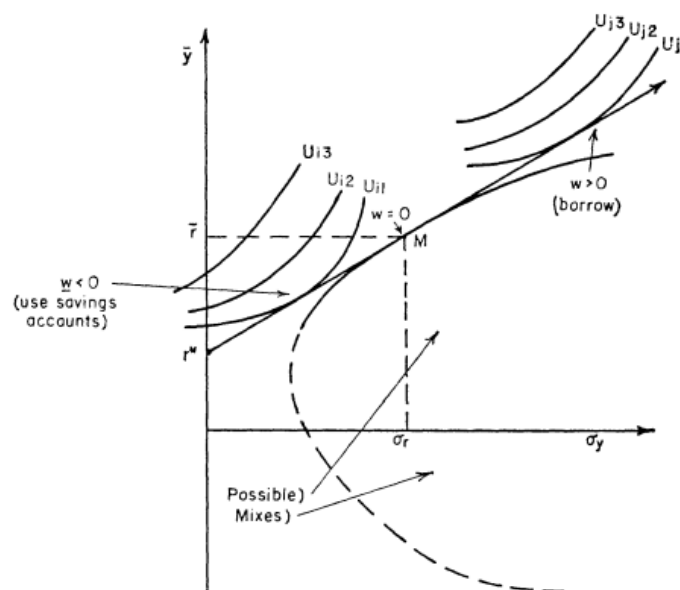
[Lintner \(1965\)](#) apresenta, em seu trabalho, o teorema da separação no qual são apresentados alguns pressupostos. Inicialmente são feitas premissas relativas ao mercado: (i) todos os investidores podem investir qualquer parte de seu capital em ativos livres de risco, que pagam uma taxa de juros determinada; (ii) todos os investidores podem investir qualquer fração de seu capital em qualquer conjunto finito de ativos de risco; (iii) os ativos de risco são negociados em um mercado perfeito, livre de custos e taxas de transação; (iv) todos os investidores podem captar recursos para investir em ativos de risco, à mesma taxa paga pelos ativos livres de risco; (v) os investidores fazem suas aquisições e vendas em pontos discretos no tempo. Com relação às premissas relativas aos investidores: (i) cada investidor já decidiu qual é a porção de seus investimentos que será aplicada em ativos de risco; (ii) cada investidor já decidiu a taxa de retorno esperada e o risco aceito para seu

portfólio.

Além disso, são considerados os retornos esperados como finitos, as variâncias são diferentes de zero e finitas e as correlações dos retornos são menores que 1 em valor absoluto. Se qualquer mistura de ativos tem o mesmo retorno esperado, então o investidor irá preferir a opção de menor variância, e, se qualquer mistura de ativos tiver a mesma variância, então o investidor irá preferir a com maior expectativa de retorno. O teorema da separação afirma que, das premissas dos custos de captação e do comportamento do investidor, a composição proporcional ótima do portfólio de ações independe da proporção do investimento bruto em ações do investimento total líquido.

Na Figura 3, são exibidas a fronteira eficiente e a Linha de Mercado de Capitais, do inglês *Capital Market Line* (CML). Tal linha resulta de combinação de um portfólio eficiente com o ativo livre de risco. Existe apenas um ponto no qual a CML tangencia a fronteira eficiente e é o ponto em que está presente o portfólio com melhor relação retorno por risco (portfólio de mercado). As funções de utilidades dos investidores irão, em seu ponto ótimo, tangenciar a CML para obter a melhor relação risco e retorno para uma dada aversão ao risco especificada. São avaliadas, matematicamente, as formulações de maximização da função utilidade do investidor quando: (i) existe a possibilidade de vendas a descoberto (alavancagem) em que o investidor é capaz de tomar recursos emprestados, a uma taxa igual à do ativo livre de risco, e investi-los em um dado portfólio de risco; (ii) não existe a possibilidade de realizar vendas a descoberto.

Figura 3 – Fronteira eficiente, CML e funções de utilidade tangenciando a CML



Fonte: Lintner (1965, p. 19)

Mossin (1966) investiga as propriedades de um mercado para os ativos de risco com base em um modelo de equilíbrio geral, em que os investidores individuais buscam

maximizar o retorno esperado e a variância dos retornos de seus portfólios. O autor inicia discutindo sobre os estudos de portfólios ótimos de ativos de risco. Esses estudos consideram os investidores como possuidores de uma preferência e que esses tomam decisões buscando maximizar ganhos baseados nessa preferência, mas que estão sujeitos à restrição do orçamento.

O autor afirma que a descrição de Sharpe (1964) do “caráter” do mercado é semelhante à apresentada por ele e que as principais conclusões de Sharpe (1964) são parecidas com as dele. Contudo ele critica sua falta de precisão na especificação das condições de equilíbrio.

Mossin (1966) assume que existe um grande número de indivíduos relacionados, e considera o comportamento do indivíduo. E este tem que selecionar uma carteira na qual tem N ativos diferentes para escolher. O retorno de cada ativo é considerado uma variável aleatória cuja distribuição é conhecida para o indivíduo. É considerado que, para determinar o equilíbrio geral de preços, deve-se especificar a igualdade entre oferta e demanda de cada ativo. Desta forma, a atribuição no equilíbrio de um ótimo de Pareto, ou seja, seria impossível ter alguma redistribuição que aumente a utilidade de cada indivíduo, sem ao mesmo tempo reduzir a utilidade de um ou mais indivíduos do mercado.

Após o equilíbrio atingido, cada indivíduo tem carteiras específicas com rendimentos e as variações de rendimento específicos de acordo com o esperado por ele. Mossin (1966) afirma ainda que uma linha de mercado (CML) pode ser derivada a partir das condições de equilíbrio geral (se existir). A linha de mercado é uma linha reta, o que significa que a taxa de variação entre o retorno esperado e o desvio padrão de retorno é constante. Uma carteira exclusivamente composta pelo ativo livre de risco mostra um grau de extrema aversão ao risco do indivíduo. Assim, quanto mais para cima da linha de mercado o indivíduo está localizado, mais ele está disposto a assumir o risco, com o objetivo de conseguir o retorno esperado.

Para que o conceito de equilíbrio e da linha de mercado tenha sentido, é essencial que o indivíduo se comporte racionalmente, caso contrário, não fará sentido. O preço de redução do risco não é apenas relacionado com a taxa de variação entre o rendimento esperado e o risco. Assim é possível afirmar que o “preço de redução do risco” é a quantidade do retorno esperado sacrificado para reduzir o risco. O risco é medido, pelo valor do desvio padrão dos rendimentos, assim a dimensão da redução de risco é o de uma taxa de juros. Assim pode-se suspeitar que os mecanismos equilibrantes do mercado são tais que todas essas margens de risco são de alguma forma “ponderadas” em um preço de mercado global de redução de riscos.

O modelo CAPM, apesar de sua simplicidade de formulação, presente na EQ. (2.1), apresenta uma abrangência de aplicações nas áreas relativas a finanças, não apenas a temas vinculados diretamente ao mercado de capitais. Uma vantagem do CAPM está no

seu poder explicativo presente em apenas em dois fatores: o retorno do ativo livre de risco e o prêmio pelo risco (excesso de retorno do portfólio de mercado em relação ao ativo livre de risco). Como crítica, pode ser considerada a incapacidade do modelo CAPM de explicar plenamente os retornos dos ativos. Tal fato é compreensível em função da simplicidade do modelo, o que é parcialmente resolvido com a adoção de um maior número de fatores que governem o movimento dos preços além do retorno do portfólio de mercado. Outro ponto que deve ser considerado trata das dificuldades em se estimar a carteira de mercado, qual *proxy* para o ativo livre de risco deva ser escolhida ou até mesmo se existe um ativo livre de risco (SOLNIK, 1977; NIELSEN, 1990). Apesar das possíveis deficiências, tem-se que o modelo CAPM é testável, segundo Guermat (2014). O modelo CAPM permitiu segregar o risco de portfólios em duas componentes: os riscos sistêmico e não sistêmico² conforme a EQ. (2.2).

$$r_i = r_f + \beta_i(R_M - r_f) + \varepsilon_i \quad (2.1)$$

$$\sigma_i^2 = \underbrace{\beta_i^2 \sigma_M^2}_{\text{risco sistêmico}} + \underbrace{\sigma_\varepsilon^2}_{\text{risco específico}} \quad (2.2)$$

Em que:

$r_i \rightarrow$ retornos do ativo ou portfólio i ;

$R_M \rightarrow$ retornos do portfólio de mercado;

$r_f \rightarrow$ retorno do ativo livre de risco;

$(R_M - r_f) \rightarrow$ prêmio pelo risco ou excesso de retorno do portfólio de mercado em relação ao ativo livre de risco;

$\varepsilon_i \rightarrow$ inovação não explicada pelo modelo;

$\beta_i \rightarrow$ sensibilidade dos retornos do ativo i em relação aos retornos do mercado;

$\sigma_i^2 \rightarrow$ variância dos retornos do ativo i ;

$\sigma_M^2 \rightarrow$ variância dos retornos do portfólio de mercado;

$\sigma_\varepsilon^2 \rightarrow$ variância da inovação ε_i ou risco específico de i .

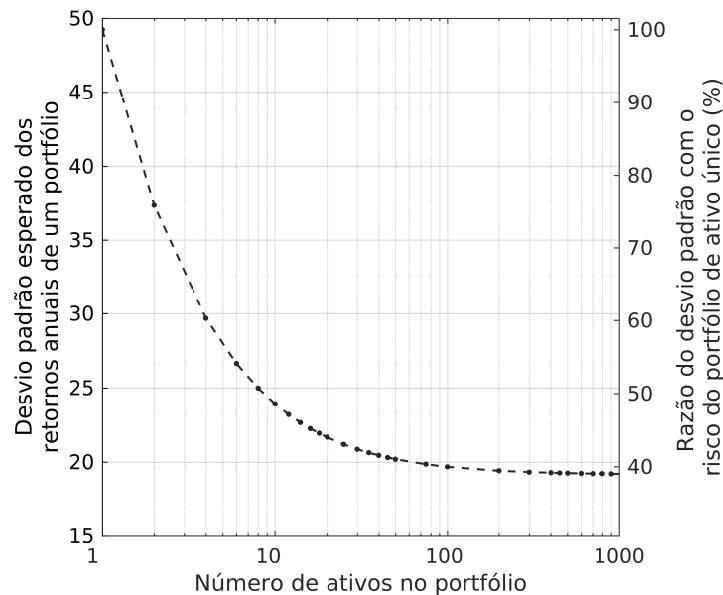
Os pressupostos subjacentes às EQs. (2.1) e (2.2) consideram que: (i) $Var(r_f) = 0$; (ii) $cov(r_f, R_M) = 0$; (iii) $cov(R_M, \varepsilon_i) = 0$; (iv) $cov(r_f, \varepsilon_i) = 0$.

A Figura 4 exibe a evolução do risco de um portfólio em função do número de ativos utilizados na sua construção. O risco residual que não pode ser eliminado com essa diversificação é denominado de risco sistêmico, ou de mercado. O risco que pode ser eliminado com a diversificação é denominado de risco não sistêmico, específico, ou idiossincrático. Statman (1987) realiza uma análise empírica e identifica que os benefícios

² Também denominado de específico ou idiossincrático.

da diversificação se esgotam a partir de 30 a 40 ativos, dependendo do perfil do investidor. No Brasil, [de Oliveira e de Paula \(2008\)](#) encontram um grau ótimo de diversificação de 12 ativos para usuários de *home brokers*.

Figura 4 – Efeitos da diversificação sobre o risco do portfólio



Fonte: Adaptado de [Statman \(1987\)](#).

2.2.2 Modelo de Precificação por Arbitragem

[Ross \(1976\)](#) formulou a APT. A grande vantagem do modelo APT é que seus testes empíricos não estão centrados no portfólio de mercado. A APT supõe que o retorno esperado dos ativos com risco resulta de uma combinação linear de k fatores, mas não determina diretamente a quantidade de fatores que influirão no processo de formação dos preços intrínsecos dos ativos. A formação dos preços resultará de influências exercidas pelo risco sistêmico e por fatores macroeconômicos sobre o mercado, no entanto, tais fatores não são facilmente observáveis. O número k de fatores dependerá diretamente do tamanho do conjunto de ativos a serem estudados, isto é, existe uma relação de proporcionalidade entre o número de ativos utilizados na pesquisa empírica e o número de fatores a serem estimados. Infere-se que tais fatores se relacionam a determinados eventos inesperados (inovações) que influenciarão diretamente na volatilidade das taxas de retorno esperadas. O risco não-sistêmico (idiossincrático) que também é considerado na APT é derivado de eventos que são específicos a cada ativo de risco e, portanto, não influenciarão de forma representativa o desempenho econômico dos demais ativos.

[Roll e Ross \(1980\)](#) afirmam que os testes contra o APT são fracos e que a alternativa para tal tem um efeito explicativo independente no excesso de retorno. Utilizando o espaço

para rebater as críticas ao modelo proposto, os autores demonstram que várias anomalias empíricas devem ser reexaminadas no contexto do APT. Ao afirmarem que por possuírem um modelo mais amplo, e que não depende de um portfólio indeterminado, os autores conseguem uma explicação mais ampla da precificação de ativos. Além disso, é considerado que:

É importante compreender que qualquer portfólio bem diversificado pode ter a mesma função (do portfólio de mercado) e que, em geral, k carteiras bem diversificadas podem ser encontradas de forma a aproximarem os k fatores melhor do que qualquer índice de mercado único (ROLL; ROSS, 1980, p. 1080, traduzido pelo autor).

O modelo APT, conforme exibido na EQ. (2.3), possui um maior poder explicativo em relação ao CAPM. Tal modelo é baseado no valor esperado dos retornos (E_i) e os fatores ($\tilde{\delta}_k$) comuns a todos os ativos. Entretanto, é deixado em aberto quais são os fatores que interferem na precificação do ativo. Talvez, os autores tenham tentado englobar muitos fatores de uma só vez, ou criaram um modelo para uma precificação, mas sem considerar quais os fatores determinantes desse modelo. Logo, quando se tenta explicar muito e não é feita uma delimitação de quais características podem ser inseridas, os autores não parecem interessados na solução, mas sim em um modelo no qual o pesquisador pode escolher os fatores.

$$\tilde{r}_i = E_i + \beta_{1k}\tilde{\delta}_1 + \cdots + \beta_{ik}\tilde{\delta}_k + \tilde{\epsilon}_i \quad (2.3)$$

Autores como Fama e French (1992, 1993) e Gonçalves, Iquiapaza e Bressan (2012) utilizam características das empresas a fim de obter fatores explicativos dos retornos. O uso de variáveis macroeconômicas como fatores pode ser verificado em Chen, Roll e Ross (1986). Bhansali *et al.* (2012) propõem uma segregação em dois fatores explicativos baseados no crescimento (*equity*) e na inflação (*bonds*). Ait-Sahalia e Xiu (2017) obtêm os fatores por meio da Análise de Componentes Principais, do inglês *Principal Components Analysis* (PCA). Yip e Xu (2000) utilizam tanto a PCA quanto a Análise de Componentes Independentes, do inglês *Independent Components Analysis* (ICA), na seleção de fatores explicativos.

2.2.3 Hipótese de Mercado Eficiente

Dimson e Mussavian (1998) resumem os principais artigos relacionados com a EMH, de forma a apresentar o contexto de surgimento da teoria, as evidências e contraevidências encontradas na literatura.

O trabalho mais relevante, nesse contexto, é o de Fama (1970) que propõe uma teoria a respeito da eficiência dos mercados. Tal teoria é focada, principalmente, em como e se os preços dos ativos, em qualquer ponto no tempo, “refletem plenamente” as informações

disponíveis. A teoria não possui formulação matematizada, porém, está contida em um contexto de um modelo específico de equilíbrio de mercado, ou seja, o modelo especifica a natureza do equilíbrio de mercado quando os preços “refletem plenamente” a informação disponível. As premissas da literatura empírica são baseadas em que as condições do equilíbrio de mercado podem ser declaradas em termos de retornos esperados. Tal premissa é o fundamento de que o retorno esperado reflete o “jogo justo” dos modelos de mercado eficiente. A parte empírica do trabalho pode ser dividida em três categorias (ou formas) da EMH, dependendo da natureza do subconjunto de informações de interesse:

- a) *Testes da Forma Forte*: dizem respeito à questão de saber se os investidores ou grupos individuais têm acesso monopolístico a qualquer informação relevante para a formação dos preços (informação privilegiada). Investidores que sejam detentores de informações privilegiadas possuem vantagens apenas relativas às suas próprias empresas, e não em relação ao mercado como um todo. Para efeito da maioria dos investidores, o modelo de mercado eficiente parece ser uma boa primeira (e segunda) aproximação da realidade;
- b) *Testes da Forma Semi-forte*: envolvem o subconjunto de informações de interesse que inclui todas as informações disponíveis publicamente. São avaliados, em outros estudos, que informações contidas nos *split* de ações relativas aos pagamentos futuros de dividendos da empresa estão, em média, inteiramente refletidas no preço de uma ação dividida no momento do split;
- c) *Testes da Forma Fraca*: envolvem o subconjunto de informações presentes nos históricos de preços e nas sequências dos retornos. Apesar de algumas evidências consistentes de dependência positiva em mudanças de preços entre dias consecutivos, semanalmente, ou outras, verifica-se que tais anomalias não são suficientemente importantes para rejeitar a eficiência de modelos de mercado, ou ainda realizar estratégias de negociações com retornos anormais devido a fatores de penalização, tais como custos de transação. Não existe muita evidência contra o modelo do jogo justo, ou seja, de que o movimento dos preços siga um “passeio aleatório”.

Resumidamente, Fama (1970) afirma que evidências do modelo de eficiência de mercado são extensas e que provas contraditórias são esparsas. O autor ainda afirma que, apesar disso, ainda existe muito a ser feito. Principalmente quando se trata do entendimento melhor do processo gerador do equilíbrio dos retornos esperados, o que tornará mais sofisticados os testes de eficiência de mercado.

Em um trabalho posterior, Fama (1991), ao invés de oferecer uma revisão de literatura sobre a eficiência de mercado, que é praticamente impossível devido à quantidade de trabalhos relacionados, trata de alguns pontos a respeito de seu aprendizado com a evolução das pesquisas sobre o tema. O autor revisita a categorização feita no seu trabalho

anterior (FAMA, 1970):

- a) *Forma Forte (informações privadas)*: existe uma literatura de estudos relativos a informações privilegiadas, a maioria dos casos analisou o comportamento de fundos de pensão e gestores de fundos mútuos. A utilização de modelos multifatoriais trouxe resultados que refletem que, na média, tais gestores possuem retornos negativos anormais;
- b) *Forma Semi-forte (estudos de eventos)*: existe uma vasta literatura sobre estudo de eventos em questões relacionadas a finanças corporativas. Na média, preços de ações ajustam-se rapidamente a informações sobre decisões de investimento, mudanças de dividendos, mudanças na estrutura de capital e em transações envolvendo o controle da empresa;
- c) *Forma Fraca (previsibilidade de retornos)*: o interesse de pesquisa na previsibilidade dos retornos dos ativos a partir de dados passados e outras variáveis é um estudo recorrente. Trabalhos recentes sugerem que retornos esperados geram reversões longas e com decaimento lento distantes de suas médias incondicionais.

2.2.3.1 Literatura de Anomalias

Evidências empíricas contrárias à EMH surgiram na literatura ao longo dos anos, tais pesquisas são denominadas de **literatura de anomalias** por Fama (1998). Essas pesquisas influenciaram outros ramos de pesquisa como o da **Economia e Finanças Comportamentais**. Dentre a vasta literatura disponível e no contexto ligado à seleção de portfólios, foram selecionados alguns trabalhos que investigam tais ineficiências. A Tabela 3 apresenta um resumo de trabalhos relevantes, e na Tabela 4 são apresentados trabalhos recentes.

Um mercado eficiente deve apresentar reação instantânea a notícias e evidências quando de seu surgimento de forma a ajustar o preço no momento de sua divulgação. Rendleman, Jones e Latané (1982) analisam o comportamento dos preços de ações quando do noticiamento de proventos (*earnings*). Rendleman, Jones e Latané (1982) verificam que existe correlação entre a magnitude do anúncio e retornos anormais acumulados futuros, ou seja, anúncios de proventos muito positivos tendem a gerar retornos positivos futuros fora da data do seu anúncio. Isso também ocorre no sentido inverso quando são analisados anúncios negativos. Outro trabalho que evidencia uma persistência de retornos em função de desempenhos passados foi o de Jegadeesh e Titman (1993). Tal comportamento evidencia uma inércia nos retornos, ou seja, um efeito *momentum*. Tal fato é inconsistente com a forma fraca de eficiência.

A forma semi-forte de eficiência pressupõe, implicitamente, que as sugestões de analistas do mercado financeiro não tem poder preditivo, pois toda informação pública já

Tabela 3 – Artigos relevantes sobre anomalias associadas aos ativos financeiros. As publicações foram selecionadas em um período anterior ao ano de 2013.

Artigo	Descrição	Periódico	SJR ¹	Citações ²
Jegadeesh e Titman (1993)	Identificação do efeito <i>momentum</i>	The Journal of Finance	21,0	1.528
Fama e French (1996)	Anomalias, não captadas pelo CAPM, tendem a desaparecer quando utilizado o modelo FF3	The Journal of Finance	21,0	995
Fama (1998)	Reafirmação da HME, crítica ferrenha à literatura de anomalias e às finanças comportamentais	Journal of Financial Economics	13,2	1.280
Lakonishok, Shleifer e Vishny (1994)	Estratégias fundamentalistas apresentam rendimento persistente em função do comportamento subótimo típico do investidor e não devido à fatores de risco	The Journal of Finance	21,0	633
Fama e French (1988)	Rendimentos de dividendos conseguem prever retornos futuros no longo prazo	Journal of Financial Economics	13,2	988
Keim e Stambaugh (1986)	Efeito janeiro e outros tipos de sazonalidades	Journal of Financial Economics	13,2	639
Campbell e Shiller (1988)	Previsibilidade de preços e dividendos futuros	The Journal of Finance	21,0	357
Barber, Lehavy <i>et al.</i> (2001)	Indicadores de consenso de recomendações de analistas de mercado levam a retornos anormais	The Journal of Finance	21,0	310
Womack (1996)	Identificação de que analistas possuem <i>market timing</i> e capacidade de selecionar ativos	The Journal of Finance	21,0	295
Berk e Green (2004)	Gestores de fundos de performance anormal atraem novos recursos, custos e complexidade que direcionam o α para zero	Journal of Political Economy	13,5	455
Seyhun (1986)	Avaliação de retornos anormais obtidos por agentes com informações privilegiadas	Journal of Financial Economics	13,2	402
Jegadeesh, Kim <i>et al.</i> (2004)	Mudanças de consenso de analistas demonstram ser preditores robustos dos retornos	The Journal of Finance	21,0	225
Fama e French (2012)	Testes internacionais do FF3 e FFC utilizando portfólios globais e locais	Journal of Financial Economics	13,2	310
Jenter (2005)	Diretores de empresa tendem a ter visões contrárias do mercado com respeito ao preço das ações de suas empresas	The Journal of Finance	21,0	111
Bollen e Busse (2005)	Retornos anormais de fundos mútuos possuem curta duração	The Review of Financial Studies	13,0	170
Rendleman, Jones e Latané (1982)	Efeito <i>momentum</i> decorrente de anúncios passados de retornos inesperados	Journal of Financial Economics	13,2	89
Timmermann (2008)	Avalia previsibilidade dos retornos utilizando diversos modelos e considera a tarefa difícil	International Journal of Forecasting	1,7	60
Roll (1994)	Na prática, a maioria dos comportamentos anormais, fortemente evidentes em estudos empíricos, não são observados	Financial Management	1,5	28
Anatolyev (2009)	Ferramental e testes não paramétricos para previsão de retornos	Journal of Business & Economic Statistics	2,6	5
Givoly e Palmon (1985)	Avaliação de retornos anormais obtidos por agentes com informações privilegiadas	The Journal of Business	–	–
Jaffe (1974)	Avaliação de retornos anormais obtidos por agentes com informações privilegiadas	The Journal of Business	–	–

Fonte: Elaboração própria.

Nota: As publicações foram ordenadas pelo produto entre o fator de impacto do periódico (SJR) e o respectivo número de citações.

¹ Fator de impacto do periódico (SCIMAGO, 2007).

² Informações estimadas pelas respectivas editoras (CHAMBERLAIN *et al.*, 2017).

está refletida nos preços. Entretanto, na literatura, é possível encontrar evidências de que retornos anormais podem ser obtidos utilizando mudanças nas recomendações dos analistas ou mesmo a partir de um indicador de consenso entre as recomendações (WOMACK, 1996; JEGADEESH; KIM *et al.*, 2004; BARBER; LEHAVY *et al.*, 2001).

A possibilidade dos agentes, com acesso a informações privilegiadas, extraírem

Tabela 4 – Artigos recentes sobre anomalias associadas aos ativos financeiros. As publicações foram selecionadas em um período a partir do ano de 2013.

Artigo	Descrição	Periódico	SJR ¹	Citações ²
Frazzini e Pedersen (2014)	Evidências empíricas de retornos anormais para estratégias contrárias ao β (BAB), as avaliações utilizam os modelos FF3, FFC e FFCL	Journal of Financial Economics	13,2	163
Fama e French (2016)	Estratégias BAB podem ser explicadas pelos fatores RMW e CMA, mas o <i>momentum</i> ainda persiste apesar de não ser recomendada sua adição ao modelo	The Review of Financial Studies	13,0	33
Barroso e Santa-Clara (2015)	O risco de estratégias de <i>momentum</i> pode ser previsto	Journal of Financial Economics	13,2	32
Chordia, Subrahmanyam e Tong (2014)	Políticas de estímulo à liquidez e redução dos custos de transação melhoram a eficiência do mercado	Journal of Accounting and Economics	7,7	46
Eraker e Ready (2015)	Comportamento do investidor frente à empresas pequenas com rendimentos médios altamente negativos, porém com assimetria positiva	Journal of Financial Economics	13,2	9
Chau, Deesomsak e Koutmos (2016)	Comportamento de investimento direcionado por sentimentos	International Review of Financial Analysis	0,8	2

Fonte: Elaboração própria.

Nota: As publicações foram ordenadas pelo produto entre o fator de impacto do periódico (SJR) e o respectivo número de citações.

¹ Fator de impacto do periódico (SCIMAGO, 2007).

² Informações estimadas pelas respectivas editoras (CHAMBERLAIN *et al.*, 2017).

lucro de ações da própria empresa já foi documentada em estudos como [Jaffe \(1974\)](#), [Givoly e Palmon \(1985\)](#) e [Seyhun \(1986\)](#). Tal fato contraria a EMH na sua forma forte.

[Lakonishok, Shleifer e Vishny \(1994\)](#) argumentam que esses fenômenos (anomalias) são uma evidência de mercado ineficiente mais especificamente, de erros sistemáticos nas previsões dos analistas de mercado.

Os efeitos de **preço por lucro** (P/E), **tamanho** da empresa, **book-to-market** (B/M), **momentum** e **reversão a longo prazo** estão atualmente entre os fenômenos mais enigmáticos na área de finanças empíricas. [Fama e French \(1995, 1996\)](#) defendem que esses efeitos podem ser explicados como uma manifestação de fatores associados a prêmios ou fatores de risco.

[Fama \(1998\)](#) refuta a existência de anomalias e argumenta que retornos anormais tendem a desaparecer com o tempo ou com mudanças metodológicas nas avaliações empíricas. O estudo de [Chordia, Subrahmanyam e Tong \(2014\)](#) encontrou atenuações nas anomalias encontradas na literatura.

Uma recente anomalia encontrada por [Frazzini e Pedersen \(2014\)](#) indica que tomar posições compradas em ativos com β baixo simultaneamente com posições vendidas em ativos com β elevado produz retornos ajustados ao risco significativamente positivos, tal fator de risco ou estratégia foi denominado de *Beta Against Beta* (BAB).

2.2.3.2 Uma Teoria de Consenso

Lo (2004) propõe uma modificação à EMH, a Hipótese de Mercados Adaptativos, do inglês *Adaptative Market Hypothesis* (AMH), que inclui considerações sobre evolução e adaptação dos agentes em função de fatores como a competitividade, número de participantes no mercado, entre outros. O autor propõe a “síntese” de uma teoria na direção do consenso entre a EMH e as evidências comportamentais, ineficiências ou anomalias presentes na literatura. Segundo Lo (2004), a AMH considera dinâmicas de mercado mais complexas, com ciclos e tendências, pânico, manias, bolhas, crises e outros fenômenos que são rotineiramente vistos na “ecologia natural” dos mercados. A AMH ainda está em desenvolvimento, e não são apresentadas pelo autor nenhuma formulação matematizada, modelos ou formas de testar qualquer hipótese relacionada.

2.2.4 Modelos Multifatoriais

Diante de críticas quanto ao poder explicativo do modelo CAPM, quando utilizado em retornos realizados, e inspirados pelo CAPM Intertemporal (MERTON, 1973a) e pelo modelo APT, surgiram extensões que incorporam outros fatores de risco além do prêmio pelo risco de mercado. O primeiro modelo multifatorial relevante, nesse contexto, foi proposto por Fama e French (1993), que adicionou fatores de risco relacionados ao tamanho das empresas e ao seu índice B/M. O índice B/M é a razão entre o valor do patrimônio líquido contábil e o valor de mercado da empresa. O modelo de Fama e French (1993) também é denominado como modelo de três fatores de Fama-French (FF3). Carhart (1997) sugere a adição de um novo fator (PR1YR ou Mom) baseando-se no efeito *momentum* dos retornos do ano anterior, definindo assim o modelo de quatro fatores de Fama-French-Carhart (FFC). Pástor e Stambaugh (2003) adicionam um fator associado à liquidez ao FFC, definindo um modelo de cinco fatores (FFCL), e o incorporam em testes com o FF3 e o FFC. Fama e French (2015) propõem um modelo de cinco fatores (FF5) que é uma extensão do FF3 incluindo fatores relacionados a investimento e lucratividade das empresas.

A formulação do modelo de índice único, baseado no CAPM, pode ser verificada na EQ. (2.4). A base do poder explicativo do modelo de índice único estava sedimentada em evidências de que os retornos dos ativos são dependentes do retorno do mercado descontado de uma taxa livre de risco. Evidências empíricas de outros direcionadores para os retornos foram encontradas, e novos fatores foram incorporados ao modelo original. Destacam-se o modelo de três fatores proposto por Fama e French (1993) exposto na EQ. (2.5), o modelo de quatro fatores proposto por Carhart (1997) exposto na EQ. (2.6), o modelo proposto por Pástor e Stambaugh (2003) exposto na EQ. (2.7) e finalmente o modelo de cinco

fatores proposto por [Fama e French \(2015\)](#) exposto na EQ. (2.8).

$$r_{it} - r_{ft} = \alpha_i + b_i(R_{Mt} - r_{ft}) + e_{it} \quad (2.4)$$

$$r_{it} - r_{ft} = \alpha_i + b_i(R_{Mt} - r_{ft}) + s_iSMB_t + h_iHML_t + e_{it} \quad (2.5)$$

$$r_{it} - r_{ft} = \alpha_i + b_i(R_{Mt} - r_{ft}) + s_iSMB_t + h_iHML_t + m_iMom_t + e_{it} \quad (2.6)$$

$$r_{it} - r_{ft} = \alpha_i + b_i(R_{Mt} - r_{ft}) + s_iSMB_t + h_iHML_t + m_iMom_t + l_iLIQ_t + e_{it} \quad (2.7)$$

$$r_{it} - r_{ft} = \alpha_i + b_i(R_{Mt} - r_{ft}) + s_iSMB_t + h_iHML_t + r_iRMW_t + c_iCMA_t + e_{it} \quad (2.8)$$

Em que:

r_{it} → é o retorno do ativo ou portfólio i para o tempo t ;

r_{ft} → é o retorno do ativo livre de risco (r_f) para o tempo t ;

R_{Mt} → é o retorno do portfólio que seja uma *proxy* de mercado ponderado por valor para o tempo t ;

SMB_t (**Small Minus Big**) → é a diferença entre o retorno de um portfólio diversificado de ações com baixo valor de mercado e o retorno de um portfólio diversificado de ações com alto valor de mercado para o tempo t ;

HML_t (**High Minus Low**) → é a diferença entre o retorno de portfólios diversificados com empresas que apresentam alto versus baixo índice B/M para o tempo t ;

Mom_t (**momentum**) → é um fator que captura a anomalia da “inércia dos retornos” do ano anterior para o tempo t ;

LIQ_t → é a diferença entre portfólios gerados pelos maiores betas de liquidez previstos versus os portfólios de menores betas de liquidez previstos para o tempo t ;

RMW_t (**Robust Minus Weak**) → é calculado pela diferença entre os retornos de um portfólio de ações com lucratividade robusta e fraca para o tempo t ;

CMA_t (**Conservative Minus Aggressive**) → é calculado pela diferença dos retornos de um portfólio diversificado de empresas com baixo e alto nível de investimento para o tempo t ;

e_{it} → é o resíduo de média zero do ativo ou portfólio i para o tempo t .

A maior parte da variância de r_{it} é explicada pela EQ. (2.4). As anomalias, ou retornos anormais, podem ser capturadas pelo intercepto da EQ. (2.4) sendo que tal métrica também é conhecida como α de Jensen ([JENSEN, 1968](#)). Os fatores adicionais realizam contribuições algumas vezes significativas estatisticamente, mas sem ter um aumento substancial no poder explicativo da EQ. (2.4) ([FAMA; FRENCH, 1993](#)). A criação dos modelos multifatoriais está intimamente ligada com a necessidade de explicar imperfeições

ou anomalias presentes nos retornos dos ativos. A discussão gira em torno da possibilidade de tais efeitos serem reflexo de ineficiências do mercado ou se eles representam literalmente fatores de risco adicionais que fornecem retornos proporcionais ao carregamento do portfólio em determinada característica.

Fama e French (2016) argumentam que, por exemplo, a anomalia *Beta Against Beta* (BAB) (FRAZZINI; PEDERSEN, 2014) é explicada por fatores relacionados com o nível de investimento e lucratividade das empresas. Os autores também não recomendam o uso do fator *momentum* (*PR1YR* ou *Mom*); entre outros motivos, eles apontam a falha ao deixar *momentum* residual nos retornos não explicados quando utilizado o modelo de seis fatores.

Os modelos multifatoriais foram utilizados, ao longo deste trabalho, para avaliar e servir como base para comparativo entre os portfólios provenientes de estratégias distintas.

2.2.5 Características associadas à robustez

Kim, Kim, Ahn *et al.* (2013) analisam o comportamento de portfólios, obtidos de formulações robustas, a fim de determinar se reduzir a sensibilidade à estimativa de erros na entrada é tudo o que modelos robustos fazem, e investigam qualquer efeito colateral nessas formulações. Tal trabalho foca nos relacionamentos entre os fatores fundamentais e modelos robustos a fim de determinar se portfólios robustos consistentemente investem mais em fatores opostos ao movimento individual dos ativos.

Kim, Kim, Ahn *et al.* (2013), com o objetivo de testar as hipóteses levantadas, realizam regressões com fatores de risco para explicar como portfólios robustos se comportam comparados àqueles gerados pelo modelo de média-variância de Markowitz (1952a, 1959). Os resultados encontrados evidenciaram que portfólios robustos consistentemente demonstram alta correlação (coeficiente de determinação ajustado ou R^2 ajustado) com o FF3 (FAMA; FRENCH, 1993). Tal correlação cresce à medida que é elevado o “parâmetro de controle” da robustez do portfólio. As conclusões relacionadas aos experimentos levam a crer que modelos robustos tendem a apostar nos fatores fundamentais que regem o mercado ao invés de movimentos individuais dos ativos que compõem o portfólio. Kim, Kim e Fabozzi (2014b) definem um portfólio com máxima dependência nos fatores (*factor portfolio*) e verificam que, conforme a robustez do processo de seleção de carteiras aumenta, os pesos ótimos se aproximam desse portfólio com variância que é maximamente explicada pelos fatores de risco para o caso do modelo FF3.

Uma suposição que pode ser levantada é que o processo de obtenção de portfólios robustos, nesse caso, está intimamente ligado à forma como são construídos os fatores de modelos como o FF3.

2.3 Melhorias nos insumos

A sensibilidade dos pesos (x_i) dos portfólios em relação às alterações nos insumos do modelo (médias e covariâncias) influencia diretamente na variação dos pesos entre instantes de tempo distintos, ou seja, na mudança das quantidades investidas em cada ativo que é denominada *turnover* dos portfólios. O *turnover* associado aos custos de transação reduz o desempenho podendo até inviabilizar uma determinada estratégia de seleção de portfólios. Segundo [Best e Grauer \(1991\)](#), os pesos do portfólio são extremamente sensíveis a mudanças nas médias dos ativos individuais, entretanto tal sensibilidade não é refletida nos retornos do portfólio. Para um caso particular analisado com $N = 10$, mudanças de 50% na média de um ativo provocaram a retirada de metade dos componentes da carteira, entretanto as características de média e variância mudaram menos de 13% ([BEST; GRAUER, 1991](#)).

[Jobson e Korkie \(1980\)](#), ao simular distribuições normais multivariadas, concluem que os estimadores amostrais de média e covariâncias não são adequados para pequenas amostras e recomendam o uso de estimadores do tipo “James-Stein” ([STEIN, 1955; JAMES; STEIN, 1992](#)). A recomendação dos autores foi seguida por [DeMiguel, Garlappi e Uppal \(2009\)](#), que compararam o desempenho de 14 modelos de alocações de ativos tendo como referência o portfólio ingênuo (EW ou $1/N$). [DeMiguel, Garlappi e Uppal \(2009\)](#) utilizaram, entre outros, o estimador de Bayes-Stein, a abordagem “Dados-e-Modelo” ([PÁSTOR, 2000; PÁSTOR; STAMBAUGH, 2000](#)), portfólios estimados por meio de fatores não-observados ([MACKINLAY; PÁSTOR, 2000](#)) e o portfólio ponderado por valor (VW) ([SHARPE, 1963, 1964](#)). Uma das observações feitas por [DeMiguel, Garlappi e Uppal \(2009\)](#) demonstra que o desempenho fora da amostra de estratégias de média-variância, baseadas em estimadores amostrais, é muito inferior à estratégia $1/N$. Isso indica que erros em estimar médias e covariâncias corroem todos os ganhos da diversificação eficiente. Além disso, nenhum dos estimadores avaliados conseguiu superar estatisticamente a estratégia $1/N$ em termos de índice de Sharpe. Em simulações com insumos estimados para o mercado norte-americano, os autores identificaram que estimativas confiáveis só seriam obtidas com número de observações superiores a 3000 meses. Um dos motivos para determinar tal tamanho da amostra é a diferença de grandeza entre o valor médio em relação ao seu respectivo desvio padrão, e essa discussão será retomada no Capítulo 3. A dificuldade em se estimar os insumos e principalmente a média também foi percebida, anteriormente, por [Merton \(1980\)](#).

De acordo com [Santos e Tessari \(2012\)](#), estimadores de encolhimento têm sido usados na literatura para reduzir o ruído inerente aos estimadores de médias e covariâncias. Em seu artigo seminal, [Stein \(1955\)](#), a partir da aplicação do método de encolhimento na estimação das médias, encontrou que o *trade-off* ótimo entre viés e erro de estimação pode ser manipulado simplesmente tomando uma média ponderada do estimador viesado e do

não-viesado (SANTOS; TESSARI, 2012). Este método consiste em “encolher” o estimador não-viesado, mas que contém erro de estimação, em direção a um alvo fixo representado pelo estimador viesado, puxando-se os coeficientes mais extremos em direção aos valores centrais e, desta forma, produzindo uma matriz de covariância positiva-definida e bem condicionada (SANTOS; TESSARI, 2012). Já Ledoit e Wolf (2003), empregaram esta abordagem para diminuir a sensibilidade das carteiras ótimas de Markowitz (1952a, 1959) à incerteza das entradas, propondo um método Bayesiano alternativo para o encolhimento da matriz de covariâncias ao controlar a ponderação ótima entre a estimativa obtida pelo modelo de índice único e a covariância amostral.

DeMiguel e Nogales (2009) e DeMiguel, Garlappi, Nogales *et al.* (2009) encontraram indícios de que o portfólio de variância mínima é menos impactado pelo erro de estimação. Além disso, ao utilizar melhorias na obtenção da matriz de covariâncias (LEDOIT; WOLF, 2003), alcançaram desempenho estatisticamente superior que a estratégia 1/N em termos de índice de Sharpe. Na sequência, focalizar-se-ão a alguns exemplos dessas alternativas de melhoria na estimação da matriz de covariâncias, apesar das diversas alternativas presentes na literatura (LEDOIT; WOLF, 2004a; LEDOIT; PÉCHÉ, 2011; LEDOIT; WOLF, 2012, 2015).

A estimação da matriz de covariâncias, que é uma das fontes de sensibilidade dos pesos quando essa serve como insumo de abordagens de seleção de portfólios, é discutida por Ledoit e Wolf (2003). Segundo os autores, existem situações em que a matriz de covariâncias estimada fica próxima da singularidade. Isso não é desejado quando a matriz de covariâncias é utilizada para calcular sua inversa ou mesmo quando ela faz parte de formulações com soluções numéricas. A fim de detalhar esse problema, de acordo com o discutido por Ledoit e Wolf (2003), é considerada uma matriz $\mathbf{R}$ ($T \times N$) de T observações em um sistema de N variáveis aleatórias (i.i.d.) que representa T retornos de um universo de N ativos. Por questão de simplicidade, é considerado que os retornos de cada ativo possuem média zero, dessa forma a estimativa populacional da matriz de covariância pode ser obtida da EQ. (2.9).

$$\mathbf{S} = \frac{1}{T} \cdot \underbrace{\mathbf{R}^\top}_{(N \times T)} \cdot \underbrace{\left(\mathbf{I} - \frac{1}{T} \mathbf{1}\mathbf{1}^\top \right)}_{(T \times T)} \cdot \underbrace{\mathbf{R}}_{(T \times N)} \quad (2.9)$$

Ledoit e Wolf (2003) afirmam que o posto³ de $\mathbf{S}$, caso $N \geq T$, é no máximo igual ao posto da matriz $\mathbf{I} - \frac{1}{T} \mathbf{1}\mathbf{1}^\top$ que é $T - 1$ e, devido a isso, $\mathbf{S}$ será singular (não invertível). Tal aspecto pode ser verificado utilizando as propriedades do posto de matrizes das EQs. (2.10), (2.11) e (2.12). A matriz de covariâncias $\mathbf{S}$ deve ter posto maior ou igual a N para ser invertível, pois ela é $N \times N$. A dedução que levou à EQ. (2.13) trouxe a confirmação

³ O posto (ou, do inglês, *rank*) de uma matriz equivale ao número de linhas (ou colunas) linearmente independentes.

de que, para que $\mathbf{S}$ não seja singular, são necessárias duas condições: a primeira é que $\text{posto}(\mathbf{R}) \geq N$, o que é trivial; a segunda é a garantia, não tão óbvia, de que $N \leq (T - 1)$.

$$\text{posto}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \min(\text{posto}(\mathbf{A}), \text{posto}(\mathbf{B})) \quad (2.10)$$

$$\text{posto}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \text{posto}(\mathbf{A}) + \text{posto}(\mathbf{B}) \quad (2.11)$$

$$\text{posto}(\mathbf{A}) = \text{posto}(\mathbf{A}^\top) \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} & \text{posto}(\mathbf{S}) \geq N \\ & \min \left(\text{posto}(\mathbf{R}), \min \left(\text{posto} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{T} \mathbf{1}\mathbf{1}^\top \right), \text{posto}(\mathbf{R}^\top) \right) \right) \geq N \\ & \min \left(\text{posto}(\mathbf{R}), \text{posto} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{T} \mathbf{1}\mathbf{1}^\top \right) \right) \geq N \\ & \min \left(\text{posto}(\mathbf{R}), \underbrace{\text{posto}(\mathbf{I})}_T - \underbrace{\text{posto} \left(\frac{1}{T} \mathbf{1}\mathbf{1}^\top \right)}_1 \right) \geq N \\ & \min(\text{posto}(\mathbf{R}), T - 1) \geq N \end{aligned} \quad (2.13)$$

A possibilidade de singularidade da covariância amostral não é o único problema a ser enfrentado no processo de estimação. Ledoit e Wolf (2003) informam que, para a matriz de covariâncias, problemas relativos a amostras pequenas surgem a menos que T seja uma ordem de magnitude superior a N . Ledoit e Wolf (2004a), em resumo, avaliam os possíveis cenários:

Quando a dimensão N da matriz é maior que o número de observações T , a matriz de covariâncias amostral não é sequer invertível. Quando a razão N/T é menor que 1 mas não desprezível, a matriz de covariâncias é invertível mas numericamente mal-condicionada, o que significa que invertê-la amplifica o erro de estimação drasticamente. Para um valor elevado de N é difícil encontrar observações suficientes para fazer N/T desprezível, e portanto é importante desenvolver estimadores bem-condicionados para matrizes de covariância de elevada dimensão (LEDOIT; WOLF, 2004a, p. 366, tradução do autor).

Posteriormente, Ledoit e Wolf (2020) propõem um estimador, baseados nos autovaleiros da matriz de covariâncias, que permite obter matrizes bem condicionadas mesmo em situações em que sua contraparte amostral seja singular. A fim de realizar um posterior comparativo, foram escolhidos dois tipos de encolhimento da matriz de covariâncias dentre os disponíveis na literatura: o linear (LEDOIT; WOLF, 2003) e o não-linear (LEDOIT; WOLF, 2020).

A equação principal do processo de encolhimento linear pode ser verificada na EQ. (2.14). A matriz de encolhimento linear proposta por Ledoit e Wolf (2003) é dependente de um parâmetro (k/T) que determina a intensidade do encolhimento. Ledoit e Wolf

(2003) definem um encolhimento na “direção do mercado”, ou seja, utilizam informações em $\mathbf{F}$ provenientes do modelo de índice único (SHARPE, 1963).

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{k}{T} \cdot \mathbf{F} + \left(1 - \frac{k}{T}\right) \cdot \Sigma \quad (2.14)$$

Outra abordagem de encolhimento, proposta por Ledoit e Wolf (2020), apresenta uma alternativa analítica e não-linear projetada para situações nas quais o número de ativos (N) é elevado se comparado ao número de observações (T) presentes nas séries de retornos. A equação principal do processo de encolhimento não-linear pode ser verificada na EQ. (2.15). A matriz encolhida $\tilde{\mathbf{S}}$ depende dos autovetores da matriz de covariâncias amostral ($\mathbf{U}$) e de uma matriz cuja diagonal são os autovalores encolhidos ($\tilde{\mathbf{D}}$).

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{U} \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{U}^\top \quad (2.15)$$

A literatura aqui revisitada trata de variantes de métodos incondicionais, mas outras formas de melhorias nos insumos, relativos a covariâncias e correlações, não abordadas no presente trabalho, podem considerar:

- a) estimadores baseados em dados de alta frequência (BARNDORFF-NIELSEN; SHEPHARD, 2004; DE POOTER; MARTENS; VAN DIJK, 2008; LIU, 2009);
- b) estimadores baseados em modelos de fatores (CHAN; KARCESKI; LAKONISHOK, 1999);
- c) estimadores que tratam de métodos condicionais, ou seja, assumem que os retornos são condicionalmente heterocedásticos. No contexto de seleção de portfólios, foi proposta uma forma da utilização de características dinâmicas das séries em conjunto com o encolhimento não-linear (ENGLE; LEDOIT; WOLF, 2019). A vantagem da técnica proposta por Engle, Ledoit e Wolf (2019) é de permitir o uso de modelos multivariados de correlação condicional dinâmica, do inglês *Dynamic Conditional Correlation* (DCC ou DCC-GARCH), em cenários cujas dimensões são elevadas (N da ordem de 1000). Posteriormente, De Nard, Ledoit e Wolf (2019) incorporam informações da dinâmica dos fatores de risco (SHARPE, 1964; FAMA; FRENCH, 2015), ao processo de previsão dos insumos proposto por Engle, Ledoit e Wolf (2019), e recomendam o uso do modelo que utilize apenas o fator de mercado pois ele superou o desempenho da alternativa que fez uso dos cinco fatores. Outros trabalhos relevantes nessa linha são propostos por Zumbach (2007), Creal, Koopman e Lucas (2011), Hafner e Reznikova (2012), Nakagawa, Imamura e Yoshida (2018), Trucíos *et al.* (2019) e Moura, Santos e Ruiz (2020).

2.4 Melhorias nas políticas

2.4.1 Estratégias simplificadas

De fato, há uma sensibilidade dos portfólios obtidos por otimizações de média-variância em relação aos EW (BEST; GRAUER, 1991). Os portfólios EW possuem a característica de sensibilidade nula a mudanças nas estruturas das distribuições; além disso, estratégias ótimas de seleção de portfólios tendem às ingênuas conforme cresce a incerteza nos modelos (PFLUG; PICHLER; WOZABAL, 2012; DE JONG, 2018). Em alguns cenários, estratégias ingênuas, que definem pesos EW, podem superar as provenientes de otimizações de média-variância (DEMIGUEL; GARLAPPI; UPPAL, 2009). Tu e Zhou (2011) promovem um estudo comparativo que combina portfólios EW com estratégias sofisticadas de seleção e verificam uma superioridade das estratégias combinadas em relação às suas contrapartes originais.

Kirby e Ostdiek (2012) assumem correlação nula entre os ativos e criam estratégias simplificadas para obtenção de portfólios que apenas se baseia na volatilidade incondicional de cada ativo (*volatility timing* ou VT) ou na sua associação com o retorno esperado (*reward-to-risk timing* ou RRT). Em busca da diminuição do erro de estimação é desprezada a importância dos termos de covariâncias. Tais estratégias de seleção de portfólio sempre geram pesos positivos, possuem solução analítica e não necessitam do uso de algoritmos de otimização para a obtenção dos pesos. A EQ. (2.16) apresenta a formulação para a obtenção dos pesos da estratégia VT, na qual η é o termo que determina o quão agressivamente os pesos são ajustados diante de mudanças na volatilidade. A EQ. (2.17) apresenta a formulação para a obtenção dos pesos da estratégia RRT, na qual $\mu_i^+ = \max(\mu_i, 0)$ e μ_i é a média incondicional estimada para o ativo i . Isso é equivalente a assumir que o investidor elimina qualquer ativo de $\mu_i \leq 0$ como possibilidade de investimento. A estimativa de μ_i^+ pode ser substituída por $\bar{\beta}_i^+ = \max(\bar{\beta}_i, 0)$ na qual $\bar{\beta}_i$ é o β médio condicional do ativo i com relação a K fatores de risco, ou seja, $\bar{\beta}_i = (1/K) \sum_{j=1}^K \beta_{ij}$. É importante frisar que no cálculo de $\bar{\beta}_i$, não se considera o intercepto.

$$x_{\text{VT}_i} = \frac{(1/\sigma_i^2)^\eta}{\sum_{i=1}^N (1/\sigma_i^2)^\eta}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.16)$$

$$x_{\text{RRT}_i} = \frac{(\mu_i^+/\sigma_i^2)^\eta}{\sum_{i=1}^N (\mu_i^+/\sigma_i^2)^\eta}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.17)$$

Santos (2019) demonstra que o método proposto por Kirby e Ostdiek (2012) equivale à uma combinação de dois portfólios de média-variância: um deles completamente investido que depende apenas da diagonal da matriz de covariâncias, enquanto o outro é um portfólio *long-short* de soma zero que leva em conta todos os termos de covariâncias.

2.4.2 Estratégias baseadas nas covariâncias

Alguns autores têm escolhido voltar suas atenções aos portfólios de variância mínima que, apesar de também serem impactados pelo erro de estimação, são menos sensíveis que os de média-variância (LEDOIT; WOLF, 2003; DEMIGUEL; GARLAPPI; NOGALES *et al.*, 2009; DEMIGUEL; NOGALES, 2009). Tal fato originou uma busca por outros tipos de portfólios que também são baseados apenas nas covariâncias. DeMiguel, Garlappi, Nogales *et al.* (2009) demonstraram que impor restrições na norma do vetor de pesos traz a generalização de um grupo de métodos voltados ao encolhimento da matriz de covariâncias, tal generalização contempla os casos particulares das abordagens de Jagannathan e Ma (2003), Ledoit e Wolf (2003, 2004a), e o portfólio EW estudado em DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009).

Maillard, Roncalli e Teïletche (2010) e Qian (2011) verificam as propriedades dos portfólios cujas contribuições de risco são igualmente ponderadas (do inglês *Equally Weighted Risk Contribution* (ERC)). Trata-se de uma formulação em que cada ativo contribui igualmente para a variância do portfólio Roncalli (2013, p. 138) e, dessa forma, a contribuição ao risco de cada ativo ($\mathcal{RC}_i$) segue a EQ. (2.18). A obtenção dos pesos do portfólio ERC, portanto, é realizada de acordo com o problema de otimização da EQ. (2.19). Um estimador de rápido ou de baixo custo, em termos computacionais, para a obtenção do portfólio ERC é sugerido por Griveau-Billion, Richard e Roncalli (2013).

$$\mathcal{RC}_i = x_i \cdot \frac{(\Sigma \mathbf{x})_i}{\sqrt{\mathbf{x}^\top \Sigma \mathbf{x}}} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \sum_{i,j=1}^N \left(x_i (\Sigma \mathbf{x})_i - x_j (\Sigma \mathbf{x})_j \right)^2 \\ \text{sujeito a:} \quad & \begin{cases} \mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1 \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Choueifaty e Coignard (2008) focam seus estudos sobre a questão da diversificação dos portfólios. Os autores propõem um indicador para medir tal característica conforme o exposto na EQ. (2.20), trata-se do “índice de diversificação” (do inglês *Diversification Ratio* ($\mathcal{DR}$)). A ideia central é comparar a contribuição das covariâncias para a redução do risco em relação à situação que considera as covariâncias fora da diagonal nulas. O $\mathcal{DR}$, portanto, apresenta valor mínimo igual a 1 para a situação de ausência de ganhos com a diversificação.

$$\mathcal{DR} = \frac{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\mathbf{x}^\top \Sigma \mathbf{x}}} \quad (2.20)$$

Em que $\boldsymbol{\sigma}$ é o vetor contendo o desvio padrão dos retornos (volatilidade) de cada ativo e Σ é a matriz de covariâncias.

Choueifaty e Coignard (2008) argumentam que existe um único portfólio que maximiza o índice de diversificação (do inglês *Most Diversified Portfolio* (MDP)). Se todos os ativos disponíveis possuem a mesma volatilidade, então o MDP é igual ao portfólio de variância mínima. A fim de encontrar tal portfólio, Choueifaty e Coignard (2008) propõem um procedimento em duas etapas: (i) calcular o portfólio de mínima correlação, conforme a EQ. (2.21); (ii) reescalonar os pesos pelas volatilidades individuais ($\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N]^\top$), de acordo com a EQ. (2.22); (iii) corrigir o somatório dos pesos para 1, conforme a EQ. (2.23). Tal procedimento é equivalente ao de maximizar o índice de diversificação.

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \mathbf{x}^\top \mathbf{C} \mathbf{x} \\ \text{sujeito a:} \quad & \begin{cases} \mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1 \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Em que $\mathbf{C}$ é a matriz de correlações entre os retornos dos ativos.

$$\mathbf{x}_{\text{MDP}} = \left(\frac{x_1}{\sigma_1}, \frac{x_2}{\sigma_2}, \dots, \frac{x_N}{\sigma_N} \right) \quad (2.22)$$

$$\mathbf{x}_{\text{MDP}}^* = \frac{\mathbf{x}_{\text{MDP}}}{\mathbf{1}^\top \mathbf{x}_{\text{MDP}}} \quad (2.23)$$

2.4.3 Estratégias baseadas em reamostragens

Em um contexto mais geral de estimação, têm-se diferentes formas de aplicação de processos de reamostragens (GOOD, 1999). A fim de simplificar a análise, foram agrupadas as técnicas de reamostragens em três tipos:

- a) **reamostragem de dados por simulação** – nesse caso, as distribuições de probabilidades vinculadas aos dados são consideradas como conhecidas. A partir dos parâmetros estimados para as distribuições, são geradas novas amostras que são utilizadas como insumos para o posterior processo de estimação que pode envolver ou não um comitê de estimadores. No contexto de seleção de portfólios, a técnica de Michaud e Michaud (1998) está contida nesse tipo de reamostragem e pressupõe normalidade nas distribuições dos dados históricos para gerar simulações e construir a fronteira eficiente a partir da média das fronteiras obtidas nas diversas simulações;
- b) **bootstrap de dados** – nesse caso, a base de dados original é particionada em vários subconjuntos (“bolsa” ou *bag*) por meio de sorteio aleatório com reposição (*bootstrap*), nos quais cada subconjunto possui um número menor de dados em relação à base de dados original. As i-ésimas estimativas provenientes de cada subconjunto são agregadas posteriormente. Tal metodologia também é conhecida como *bagging* (***bootstrap aggregating***) e tem sua descrição presente nos trabalhos de Breiman (1996), Bickel, Götze e van Zwet (1997) e Bühlmann e

Yu (2002). Essa técnica possui a característica de manter a distribuição original dos dados, mas penaliza cada i -ésima estimativa com uma redução do número de graus de liberdade;

- c) ***bootstrap de variáveis*** – nesse caso, também tem-se o particionamento da base de dados original em subconjuntos, mas cada subconjunto possui um número reduzido de variáveis permitindo-se a manter ou não a quantidade de observações de cada variável (*subset bagging*). As i -ésimas estimativas provenientes de cada subconjunto são agregadas posteriormente. Trabalhos relacionados a tal abordagem são presentes em Ho (1998), Fern e Brodley (2003) e Scherbart e Nattkemper (2009). Essa técnica mantém a distribuição original dos dados e pode promover o aumento do número de graus de liberdade para cada i -ésima estimativa. No contexto de seleção de portfólios, as variáveis sorteadas são os ativos financeiros (SHEN; WANG, 2017; ARAÚJO; PEREIRA, 2017).

O elemento principal do *bagging* é a instabilidade do método de estimação original. Se perturbações nos dados provocam mudanças significativas nos parâmetros estimados, então o procedimento de *bagging* pode melhorar a acurácia do método de estimação (BREIMAN, 1996). Krogh e Vedelsby (1994) demonstram que o erro proveniente da agregação de estimativas é garantido como sendo menor ou igual ao erro médio quadrático dos componentes individuais. Apesar dos pontos positivos, as técnicas baseadas em reamostragens ou *bootstrap* podem gerar viés nas estimativas (CHEN; HALL, 2003).

Serão revisitadas a abordagem proposta por Michaud e Michaud (1998) (Seção 2.4.3.1) e a possibilidade do uso do *bootstrap* de ativos (Seção 2.4.3.2).

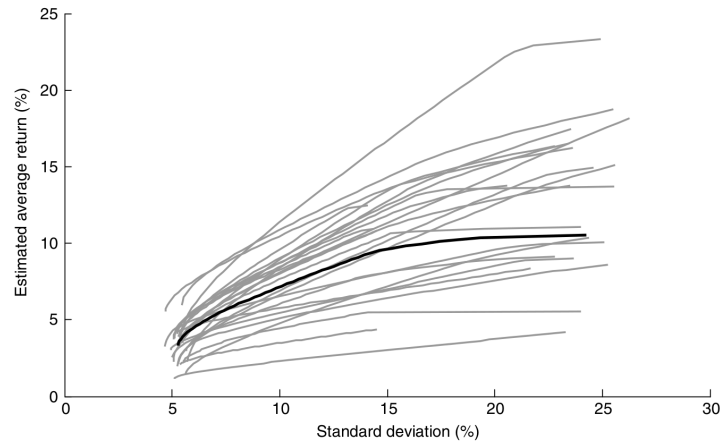
2.4.3.1 Fronteira Eficiente Reamostrada

A Fronteira Eficiente Reamostrada, do inglês *Resampled Efficient Frontier* (REF), desenvolvida e patenteada por Michaud e Michaud (1998, 1999), é um método numérico que insere a informação de incerteza nas estimativas de risco-retorno. Tal estratégia permite obter portfólios mais estáveis ou menos sensíveis às mudanças nas entradas do modelo. O procedimento utiliza o método de simulações de Monte Carlo para produzir múltiplos conjuntos de estimativas estatisticamente equivalentes de risco-retorno baseadas nas estimativas originais. Essas inferências são utilizadas na geração de múltiplas fronteiras eficientes, representando as muitas alternativas de desempenho dos ativos relativos aos erros de estimação das entradas. A fronteira eficiente reamostrada é obtida tomando-se a média dentre todas as fronteiras obtidas dos dados estatisticamente equivalentes em termos de risco-retorno.

A fronteira eficiente da MPT é baseada em estimativas que possuem incerteza. Logo, a fronteira também irá incorporar tal incerteza. Um exemplo que demonstra a variância da fronteira eficiente da MPT, na presença de restrição de vendas a descoberto ($x_i \geq 0$), pode

ser verificado na Figura 5. Nesse caso é obtida a fronteira eficiente da MPT ao utilizar $\hat{\mu}$ e $\hat{\Sigma}$, previamente definidos, e cada fronteira reamostrada é gerada a partir de simulações de Monte Carlo dos insumos originais e exibidas de acordo com suas próprias estimativas $\hat{\mu}_i$ e $\hat{\Sigma}_i$. Michaud e Michaud (1998) argumentam que tais fronteiras são estatisticamente equivalentes e podem ser utilizadas para reduzir impactos do erro de estimação.

Figura 5 – Fronteira eficiente da MPT e 25 fronteiras simuladas



Fonte: Michaud e Michaud (1998, p. 38).

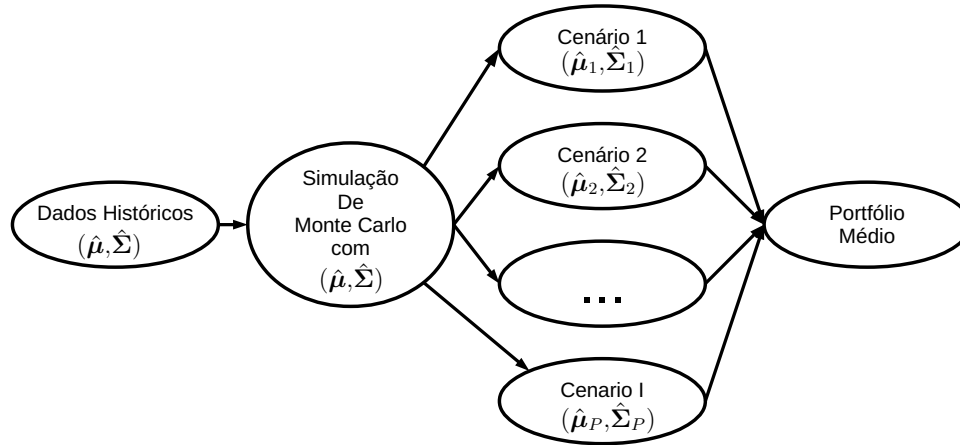
O procedimento de criação da REF é descrito em Michaud e Michaud (1998, p. 37) e em Fabozzi, Kolm *et al.* (2007b, p. 365). Tal procedimento considera que são geradas fronteiras “estatisticamente equivalentes” a partir dos insumos obtidos nas simulações de Monte Carlo. O procedimento é descrito a seguir, e seu fluxograma resumido é exibido na Figura 6:

- a) Passo 1: Estime o vetor de retornos esperados ($\hat{\mu}$) e a matriz de covariâncias dos retornos ($\hat{\Sigma}$);
- b) Passo 2: Utilize $\hat{\mu}$ e $\hat{\Sigma}$ para calcular um arco específico da fronteira eficiente, por exemplo, do PVM ao portfólio eficiente cujo retorno esperado seja o valor máximo presente no vetor $\hat{\mu}$. Tal portfólio será denominado de PMR;
- c) Passo 3: Particione o intervalo $[\mu_{\text{PVM}}, \mu_{\text{PMR}}]$ em M pontos igualmente espaçados ($m = 1, \dots, M$);
- d) Passo 4: Extraia T retornos de uma distribuição normal multivariada $\mathcal{N}(\hat{\mu}, \hat{\Sigma})$;
- e) Passo 5: Estime os novos vetor de retornos esperados ($\hat{\mu}_i$) e a matriz de covariância ($\hat{\Sigma}_i$);
- f) Passo 6: Utilize $\hat{\mu}_i$ e $\hat{\Sigma}_i$ para obter novos portfólios. Para cada nível de valor esperado presente na partição, do passo 3, calcule o correspondente portfólio eficiente. Dessa forma serão obtidos os portfólios $\mathbf{x}_{1,i}, \dots, \mathbf{x}_{M,i}$;

- g) Passo 7: Armazene os portfólios do passo 6;
- h) Passo 8: Repita os passos de 4 a 7 por I vezes, sendo I um valor elevado;
- i) Passo 9: Após a reamostragem dos portfólios ter sido concluída, tem-se que cada nível de valor esperado da partição terá gerado portfólios equivalentes. Para cada partição, os pesos do portfólio reamostrado são calculados como a média de todos aqueles de mesma partição, conforme EQ. (2.24).

$$\bar{\mathbf{x}}_m = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \mathbf{x}_{m,i} \quad (2.24)$$

Figura 6 – Fluxograma simplificado do procedimento para gerar a portfólios reamostrados



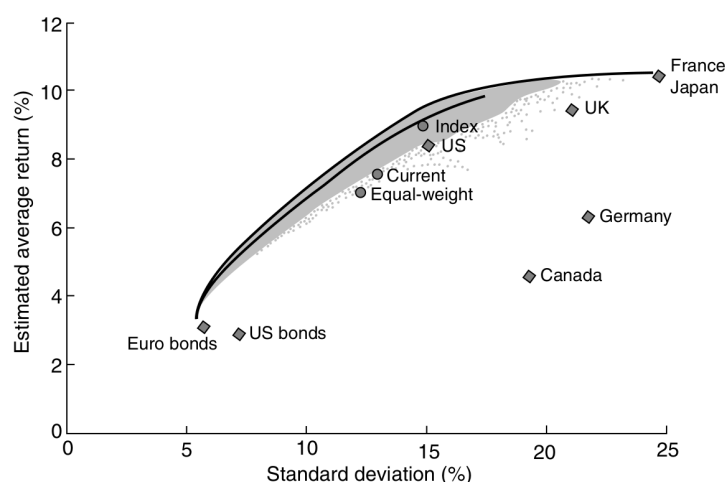
Fonte: Elaboração própria.

Ao exibir os resultados da Figura 5 em função de $\hat{\mu}$ e $\hat{\Sigma}$ originais, tem-se que todas as fronteiras simuladas se posicionam abaixo da fronteira da MPT. Tal fato é verificado na Figura 7. O arco de portfólios gerados na REF se localiza abaixo da fronteira da MPT e é encolhido em relação à mesma. Michaud e Michaud (1998) argumentam que, apesar do encolhimento, o arco da REF traz portfólios equivalentes à MPT. Isso significa que os portfólios PVM e PMR da MPT são equivalentes aos PVM e PMR obtidos na REF. A equivalência entre portfólios não se dá, portanto, em nível de risco, e sim pelo ranqueamento definido pelo particionamento feito no Passo 3.

A evolução dos pesos dos portfólios da fronteira da MPT comparada com os provenientes da REF pode ser verificada na Figura 8. A comparação é feita em termos do ranqueamento dos portfólios equivalentes. Segundo Michaud e Michaud (1998), os portfólios provenientes da REF apresentam melhor diversificação principalmente quando o valor esperado de retorno se aproxima do máximo disponível.

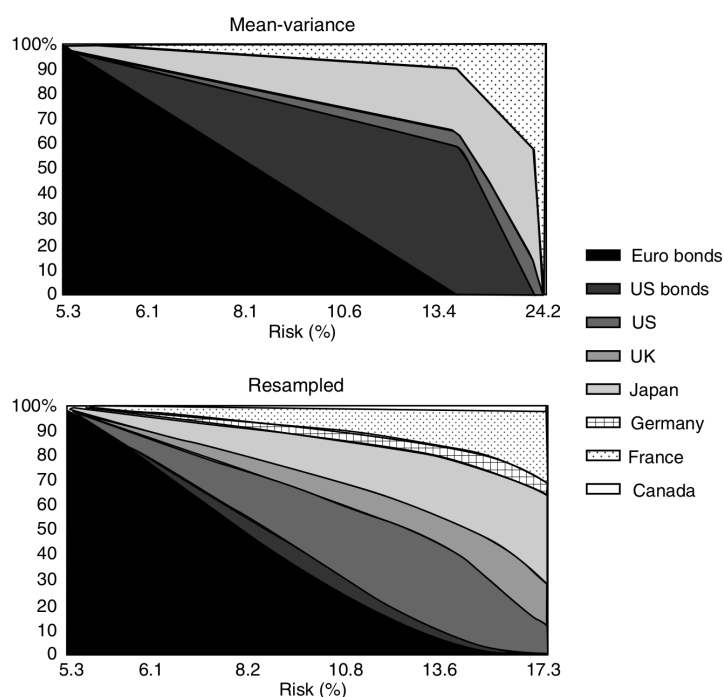
Harvey, Liechty e Liechty (2008) tentam reproduzir um jogo de investimento que compara a determinação de pesos de portfólios utilizando um jogador que usa métodos

Figura 7 – Fronteira eficiente reamostrada (REF) “encolhida” em função do processo de média das fronteiras simuladas



Fonte: Michaud e Michaud (1998, p. 43).

Figura 8 – Mapa de alocação dos pesos em função do nível de risco



Fonte: Michaud e Michaud (1998, p. 47).

bayesianos e outro que usa métodos de Monte Carlo baseados na estratégia de reamostragem proposta por Michaud e Michaud (1998). Markowitz e Usmen (2003) demonstraram que o jogador de Michaud e Michaud (1998) sempre vence. Harvey, Liechty e Liechty (2008) realizam críticas às penalidades impostas ao jogador bayesiano⁴. Os seus resultados finais,

⁴ Um jogador que utiliza estatística bayesiana, ou seja, diante de distribuições de probabilidades previamente formadas (*priori*), atualiza suas crenças por meio de novas evidências obtidas nos dados.

além de contrastarem com os do jogo original, também demonstram que, para um dado jogo mais relevante, o jogador bayesiano sempre vence.

Similarmente à conclusão obtida por [Fletcher e Hillier \(2001\)](#), [Scherer \(2006\)](#) argumenta que, na ausência de teoria que embase os resultados, não é possível identificar qual método irá superar o outro quando se comparam estratégias de média-variância, métodos bayesianos e a REF, pois não é possível conhecer a verdadeira distribuição dos dados. [Scherer \(2006\)](#) explica que:

A chave é entender que métodos bayesianos são literalmente impossíveis de serem avaliados em testes fora da amostra. Para cada distribuição, uma *priori* será encontrada que irá superar a REF (e vice-versa). Igualmente, para cada *priori*, uma distribuição será encontrada em que a REF seja superior. O fato de que um método supera o outro para uma base de dados específica significa pouco ([SCHERER, 2006](#), tradução do autor).

[Fabozzi, Kolm et al. \(2007b\)](#) ressaltam que a REF é subótima em termos de maximização da utilidade esperada e portanto é inconsistente com os axiomas de [von Neumann e Morgenstern \(1944\)](#) e com o comportamento de um “investidor racional”. Os autores fazem ainda algumas ressalvas a respeito do procedimento:

Como o portfólio reamostrado é calculado por meio de um procedimento de simulação no qual, em cada passo, um problema de otimização precisa ser resolvido, essa abordagem pode ser “pesada” em termos computacionais⁵, especialmente para grandes portfólios. É importante encontrar um bom custo-benefício entre o número de passos de reamostragem a serem executados em tempo razoável; e, ao mesmo tempo, atingir a precisão necessária para medir os efeitos do erro de estimação nos portfólios otimizados. Devido à média no cálculo do portfólio reamostrado, todos os ativos provavelmente possuirão peso diferente de zero. Uma possibilidade é incluir restrições que limitem tanto o *turnover* quanto o número de ativos com pesos diferentes de zero. Novamente, no entanto, devido ao processo de cálculo da média, os pesos dos portfólios resultantes podem não mais satisfazer as restrições impostas. Em geral, apenas restrições convexas (por exemplo, lineares) impostas a cada processo de otimização ainda serão satisfeitas para o portfólio reamostrado. Esta é uma séria limitação da abordagem do portfólio reamostrado para aplicações práticas ([FABOZZI; KOLM et al., 2007b](#), p. 366-367, tradução do autor).

2.4.3.2 Outras formas de reamostragem

[Breiman \(1996\)](#) recomenda a utilização da agregação de múltiplas estimativas, de acordo com o procedimento de *bagging*, em situações de instabilidade dos parâmetros estimados diante de mudanças nos dados. O uso do *bagging* tornou-se comum no contexto de aprendizado de máquina (do inglês, *Machine Learning*) ([BREIMAN, 2001a](#); [GOOD-FELLOW; BENGIO; COURVILLE, 2016](#); [SCHÖLKOPF; SMOLA; BACH, 2018](#)), mas sua aplicação não se limita a esse caso, visto que um dos exemplos utilizado por [Breiman \(1996, p. 132\)](#) envolve uma regressão linear.

⁵ Tradução para *computationally cumbersome*.

É construído, neste ponto do texto, um exemplo ilustrativo para demonstrar os efeitos de procedimentos envolvendo *bagging*; serão considerados dados provenientes do modelo $y_i = f(\mathbf{x}_i) + \sigma\varepsilon_i$, no qual cada $\mathbf{x}_i$ é gerado de distribuições uniformes independentes de 10 dimensões ($\mathbf{x}_i \sim \mathcal{U}^{10}[0, 1]$) e cada ε_i é retirado de uma distribuição normal padrão ($\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$). Para o caso em que $f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^5 i \cdot x_j$ e $\sigma = 3$, tem-se que somente as 5 primeiras variáveis independentes determinam a variável dependente e as demais introduzem interferências no processo de estimação. São comparadas três possibilidades de estimadores: (i) mínimos quadrados ordinários, do inglês *Ordinary Least Squares* (OLS); (ii) mínimos quadrados com particionamento da amostra (BAG, ou *bagging*); (iii) mínimos quadrados com particionamento das variáveis ou subconjuntos (SBAG, ou *subset bagging*). Os parâmetros de BAG e SBAG foram obtidos da agregação de 50 regressões oriundas de diferentes conjuntos determinados por um particionamento específico da base de dados original que contém 5000 observações. A Figura 9 mostra a evolução do viés ao quadrado, calculado conforme a EQ. (2.25), dos estimadores considerados diante da variação da proporção (fração) dos dados utilizados nos estimadores agregados. A Figura 10 mostra a evolução da variância média dos parâmetros estimados, calculados conforme a EQ. (2.26), considerados diante da variação da proporção (fração) dos dados utilizados nos estimadores agregados. As Figuras 9 e 10 foram obtidas a partir do Código E.1.

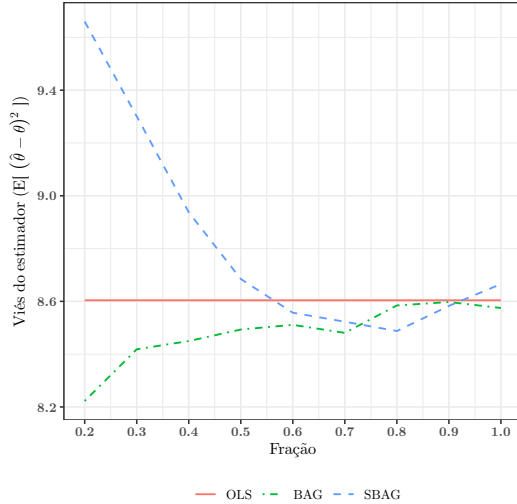
$$\text{Viés}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta}) = \|E[(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^2]\|^2 \quad (2.25)$$

$$\overline{\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\theta}})} = E[\text{Traço}(E[(\hat{\boldsymbol{\theta}} - E[\hat{\boldsymbol{\theta}}])^2])] \quad (2.26)$$

É possível verificar, a partir das Figuras 9 e 10, que processos de reamostragem promoveram alterações no viés e na variância dos parâmetros podendo gerar melhorias em relação ao estimador OLS. Observações similares são apresentadas por Friedman e Hall (2007, p. 674) para casos de estimadores não-lineares denominados de “Árvores de Regressão” (do inglês, *Regression Trees*) (BREIMAN *et al.*, 1984). O exemplo de aplicação na estimação de modelos lineares foi meramente ilustrativo, visto que, no contexto de regressão linear, têm-se alternativas melhores do que a reamostragem para redução de variância ou viés, por exemplo a utilização de testes-F entre modelos restritos e irrestritos a fim de selecionar apenas as variáveis relevantes.

Para situações de elevada dimensionalidade dos dados, nas quais o número de variáveis é superior ao de observações ($N \gg T$), tem-se a possibilidade do uso de metodologias relacionadas com a combinação de estimativas baseadas em subespaços sem a necessidade de identificar previamente as variáveis principais do sistema (STREHL; GHOSH, 2002). Ho (1998) propôs o uso de subespaços escolhidos aleatoriamente para a obtenção de “Florestas de Decisão” (do inglês, *Decision Forests*). Tal modificação promoveu melhora na acurácia em relação aos métodos utilizados anteriormente e, em conjunto com outros estudos (AMIT; GEMAN, 1997; DIETTERICH, 2000b,a; BREIMAN, 2001b), resultou

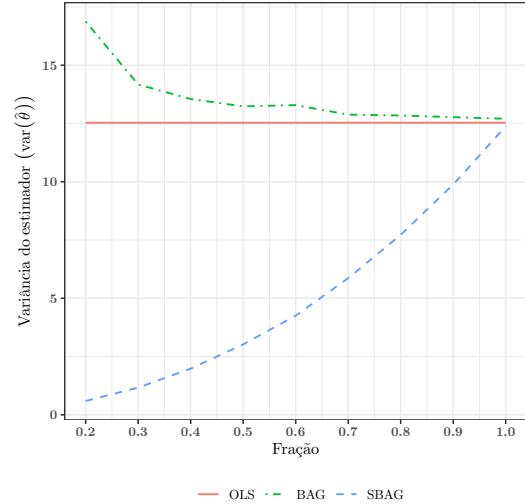
Figura 9 – Efeitos do fracionamento da base de dados sobre o viés (ao quadrado) de uma regressão linear agregada



Fonte: Elaboração própria.

Nota: Viés do estimador obtido por simulações: *bootstrap* com 10000 experimentos independentes com 100 observações cada.

Figura 10 – Efeitos do fracionamento da base de dados sobre a variância de uma regressão linear agregada



Fonte: Elaboração própria.

Nota: Variância do estimador obtida por simulações: *bootstrap* com 10000 experimentos independentes com 100 observações cada.

na posterior criação das “Florestas Aleatórias” (do inglês, *Random Forest*) (BREIMAN, 2001a).

O ponto chave da presente discussão sobre reamostragem é que tais processos podem ser aplicados na seleção de portfólios. Isso se deve ao fato de que os portfólios são estimativas baseadas em modelos não lineares e com elevada sensibilidade diante de variações nos insumos. O uso de metodologias que utilizem agregação de portfólios obtidos de subespaços reamostrados aleatoriamente foi apresentado em Shen e Wang (2017) e Araújo e Pereira (2017). Entretanto, ainda existe espaço para discussões mais aprofundadas e análises a respeito das características apresentadas por tais portfólios em relação a outras metodologias presentes na literatura.

2.4.4 Fronteira Eficiente Generalizada

O trabalho de de Jong (2018) define uma “generalização” da MPT, conforme a EQ. (2.27), que reduz os efeitos de erros de estimação, ao inserir um componente de diversificação no problema de média-variância. Tal abordagem foi denominada de fronteira eficiente generalizada (GEF). O custo adicionado à função objetivo é proporcional ao logaritmo natural do somatório dos pesos. A autora considera que tal generalização explica diversas técnicas anteriores relatadas como extensões da MPT (otimização bayesiana,

otimização baseada em entropia, paridade de risco, matriz de covariância encolhida, entre outras).

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{x}^\top \Sigma \mathbf{x} - \frac{1}{\gamma} \cdot \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\mu} - \theta \cdot \mathbf{1}^\top \ln(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a:} \quad & \begin{cases} \mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1 \\ \mathbf{x} > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Em que γ é o coeficiente de aversão ao risco, θ é o nível de incerteza ou entropia, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ e $\Sigma \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Para $\theta = 0$ (certeza plena), a EQ. (2.27) colapsa na função objetivo da MPT, e quando $\theta \rightarrow \infty$ (incerteza total), o portfólio ótimo tende ao ingênuo ($1/N$). O termo de entropia incorpora a suposição de que, em situações de incerteza máxima, as distribuições são desconhecidas, e, portanto, a melhor escolha torna-se a alocação ingênua.

A formulação da EQ. (2.27) não possui solução analítica, portanto só é resolvida por meio de métodos numéricos. Outro detalhe, que deve ser destacado, é que a função objetivo não é definida quando algum peso individual assume o valor menor ou igual a zero, por isso deve ser utilizada uma tolerância ϵ que é um valor pequeno e positivo que determinará o limite inferior dos pesos x_i . Uma observação que deve ser explicada sobre a formulação da EQ. (2.27) é que a função $\ln(\cdot)$ apresenta resultados negativos para valores de pesos de portfólios, pois eles são menores que 1. Portanto o termo “ $-\theta \cdot \mathbf{1}^\top \ln(\mathbf{x})$ ” tende a $+\infty$ quando algum dos pesos x_i se aproxima de zero e atinge seu mínimo quando $\mathbf{x}$ é o portfólio ingênuo ($1/N$). Outra questão que pode ser apontada é que o termo “ $\mathbf{1}^\top \ln(\mathbf{x})$ ” representa um somatório que cresce à medida que o número de ativos (N) do problema aumenta. Além disso, nesse somatório, existe uma ponderação igualitária para cada entropia dos pesos x_i do portfólio. Há de se mencionar que [de Jong \(2018\)](#) utiliza um conceito adicional em suas argumentações, trata-se do índice de diversificação ([CHOUEIFATY; COIGNARD, 2008](#)) que é exibido na EQ. (2.20). Além disso, a avaliação da diversificação é feita em relação ao nível de risco do portfólio; dessa forma é construída uma “fronteira de diversificação”.

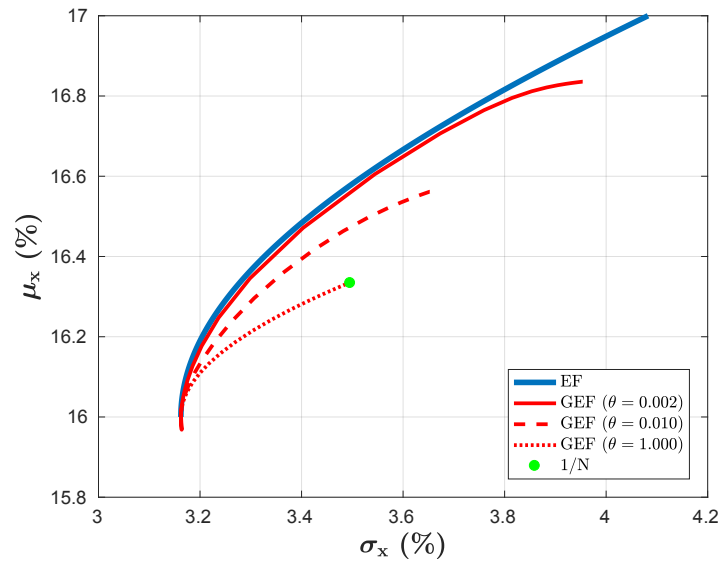
A fim de exemplificar os efeitos do termo de entropia na formulação proposta por [de Jong \(2018\)](#) em relação à MPT, foi construído um exemplo de sua utilização. Ao considerar os insumos das EQs. (2.28) e (2.29), tem-se a construção das fronteiras presentes nas Figuras 11 e 12. Na Figura 11, são exibidas a fronteira eficiente da MPT e três fronteiras provenientes da otimização da EQ. (2.27). Foram considerados os valores de $\theta = 0,002$, $0,01$ e 1 . Nesses casos, foram observados o “encolhimento” das fronteiras em relação ao da MPT, um posicionamento inferior à fronteira da MPT em que o distanciamento é definido por θ , além da convergência para o portfólio ingênuo ($1/N$), conforme ocorre o aumento de θ . Com relação à fronteira de diversificação, exibida na Figura 12, tem-se que o aumento

de θ provoca uma melhoria de diversificação dos portfólios obtidos.

$$\boldsymbol{\mu} = [0,09 \quad 0,11 \quad 0,11] \quad (2.28)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0,002 & 0 & 0,001 \\ 0 & 0,002 & 0,001 \\ 0,001 & 0,001 & 0,003 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Figura 11 – Comparativo de características de risco-retorno da fronteira eficiente da MPT em relação à GEF

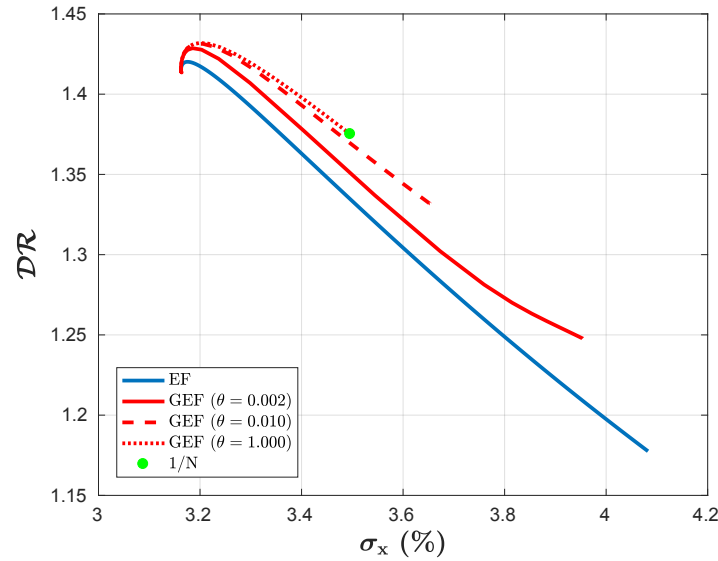


Fonte: Elaboração própria.

Nota: A abcissa refere-se ao desvio padrão dos retornos (σ_x). A ordenada refere-se à média dos retornos (μ_x). A legenda refere-se à fronteira eficiente da MPT (EF), às fronteiras eficientes generalizadas (GEF) e ao portfólio ingênuo (1/N ou EW).

A Figura 13 apresenta a evolução das características da EQ. (2.27) quando são ignoradas as informações de retornos esperados ($\boldsymbol{\mu}$), ou seja, para o caso de extrema aversão ao risco ($\gamma \rightarrow \infty$). Na Figura 13, são marcados portfólios notáveis: PVM (portfólio de variância mínima), PT (portfólio tangente), ERC (portfólio de contribuições de risco igualmente ponderadas (MAILLARD; RONCALLI; TEÏLETCHÉ, 2010)) e o portfólio ingênuo (1/N). É possível verificar que, em função do nível de incerteza θ , o portfólio em questão se origina no PVM ($\theta = 0$), passa pelo ERC e converge para o 1/N em situação de máxima incerteza ($\theta = \infty$).

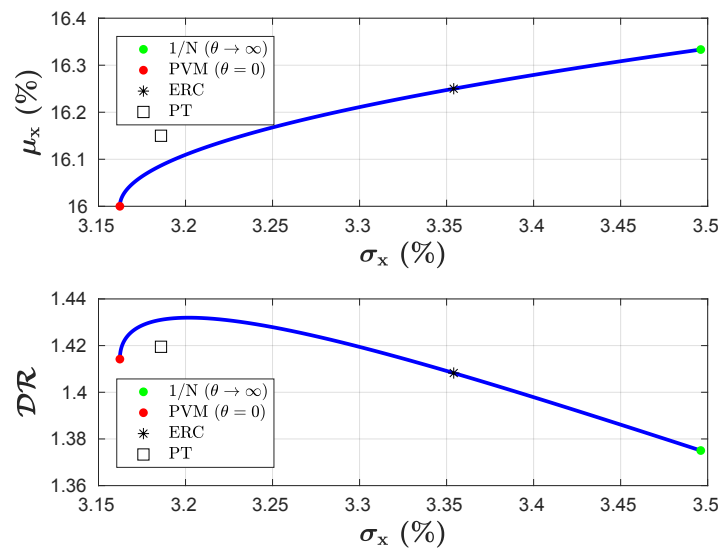
Figura 12 – Comparativo de características de risco-diversificação dos portfólios eficientes da MPT em relação aos obtidos na GEF



Fonte: Elaboração própria.

Nota: A abcissa refere-se ao desvio padrão dos retornos (σ_x). A ordenada refere-se ao índice de diversificação ($\mathcal{DR}$), EQ. (2.20). A legenda refere-se à fronteira eficiente da MPT (EF), às fronteiras eficientes generalizadas (GEF) e ao portfólio ingênuo ($1/N$ ou EW).

Figura 13 – Características de risco-retorno e risco-diversificação da GEF em função do nível de incerteza (θ) quando ignorada a informação da média dos retornos ($\gamma \rightarrow \infty$)



Fonte: Elaboração própria.

Nota: Os portfólios destacados são: ingênuo ($1/N$ ou EW), variância mínima (PVM), contribuições de risco igualmente ponderadas (ERC) e tangente (PT).

Parte II

Problemas e Alternativas

3 Dificuldades da aplicação da MPT

A formulação da seleção de portfólios, como um problema de otimização de média-variância, permite extensões a fim de tornar sua utilização mais próxima de cenários práticos. Algumas lacunas e dificuldades da aplicação de tal metodologia são descritas a seguir.

O impacto e a seleção de portfólios considerando os custos de transação podem ser avaliados realizando adaptações na formulação original (POGUE, 1970; MERTON, 1971; DAVIS; NORMAN, 1990; KONNO; WIJAYANAYAKE, 2001). Os custos de transação têm papel importante na gestão de portfólios, pois serão refletidos no desempenho da carteira. Segundo Michaud (1989), outras restrições como liquidez dos ativos, de alavancagem e de posições devem ser consideradas a fim de aproximar a seleção de portfólios de contextos práticos. Pachamanova e Fabozzi (2016, p. 282-291) detalham as restrições adicionais mais comuns ao processo de seleção de portfólio:

- a) Restrições de vendas a descoberto ou de não-negatividade dos pesos ($x_i \geq 0$);
- b) Restrições de investimento em ativos financeiros específicos, setores ou países ($l_i \leq x_i \leq u_i$);
- c) Restrições de *turnover* do portfólio, que envolvem limitação da alteração de pesos entre instantes distintos de tempo ($|x_{i,t+1} - x_{i,t}| \leq u_i$);
- d) Restrições da exposição do portfólio a diferentes fatores de risco, para aqueles gestores que utilizem modelos fatoriais para avaliar tal exposição;
- e) Restrições de cardinalidade, ou seja, a limitação do número de ativos no portfólio ($\sum_{i=1}^N \delta_i \leq K$, em que δ_i é uma variável binária);
- f) Restrições de posição ou de negociação mínima ($|x_i| \geq l_i \cdot \delta_i$), ou seja, l_i é a menor posição permitida para o ativo i quando ele for selecionado para a carteira ($\delta_i = 1$);
- g) Restrições de arredondamento de lote, visto que ações não são infinitamente divisíveis e são negociadas em lotes (múltiplos de 100, 500, 1000, etc.);
- h) Restrições de erro de rastreamento, para portfólios que pretendam manter desempenho próximo a um referencial (*benchmark*);
- i) Restrições relaxadas (*soft*) que são desejáveis de serem atendidas entretanto podem ser violadas frente a uma penalidade particular.

Pachamanova e Fabozzi (2016, p. 291) apontam que podem ocorrer conflitos entre os modelos dos retornos esperados, os modelos fatoriais e as restrições, uma vez que tais componentes chaves são gerados separadamente e fundidos no processo de seleção de

portfólios. A maioria das restrições pode ser tratada ao alterar a formulação do problema de otimização. Entretanto, algumas delas, como o *turnover* e o custo de transação, sofrem impactos diretos da sensibilidade dos pesos mediante variações nas estimativas dos insumos (médias e covariâncias). Faz-se necessário então revisitar a questão da evolução das estimativas dos insumos em função do tamanho da amostra e da sensibilidade dos pesos diante de tal evolução. Além disso, foram propostas análises dessas sensibilidades.

3.1 Sensibilidade dos pesos

Conforme o modelo de Retorno Esperado Constante (REC), descrito no Apêndice B.3.1, é feito um pressuposto de que os retornos discretos são estacionários, correlacionados entre os ativos, não autocorrelacionados e seguem uma distribuição normal conjunta. Hull (2015, p. 312) indica uma forma de simular dois processos estocásticos correlacionados, sendo tal simulação vinculada ao processo de Wiener generalizado que descreve o movimento do logaritmo dos preços dos ativos. Para simular a amostragem de processos estocásticos com distribuição normal padrão ϵ_1 e ϵ_2 com correlação ρ , é recomendado utilizar a EQ. (3.1).

$$\epsilon_1 = u \quad \text{e} \quad \epsilon_2 = u \cdot \rho + v \cdot \sqrt{1 - \rho^2} \quad (3.1)$$

Em que u e v são amostrados como variáveis não correlacionadas de distribuição normal padrão ($\mathcal{N}(0,1)$).

Duas variáveis aleatórias correlacionadas de distribuição normal foram simuladas a fim de exemplificar problemas relativos à estimação de parâmetros das mesmas utilizando dados históricos. Foi considerado um Processo Gerador de Dados (PGD) caracterizado pelos parâmetros definidos nas EQs. (3.2) a (3.5).

$$\rho_{12} = -0,3 \quad (3.2)$$

$$\boldsymbol{\mu} = [\mu_1 \quad \mu_2]^\top = [0,005 \quad 0,0025]^\top \quad (3.3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1 \quad \sigma_2]^\top = [0,08 \quad 0,04]^\top \quad (3.4)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00640 & -0,00096 \\ -0,00096 & 0,00160 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Nas Figuras 14 e 15, estão exibidas as saídas do estimador da média populacional, por meio da média amostral, de cada distribuição em função do número de observações. Tal estimador é definido pela EQ. (3.6). Nas Figuras 16 e 17, estão exibidas as saídas do estimador não viesado do desvio padrão populacional, por meio do desvio padrão amostral, de cada distribuição em função do número de observações. Tal estimador é definido pela EQ. (3.7). Os respectivos intervalos de confiança da média e do desvio padrão amostrais são obtidos, respectivamente, pelas EQs. (3.8) e (3.9), nas quais $t_{p,gl}$ e $\chi_{p,gl}^2$ são as funções

quantis das distribuições t-Student e Qui-quadrado avaliadas para uma probabilidade p e gl graus de liberdade.

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{it} \quad \text{para } i = 1, \dots, N \quad (3.6)$$

$$\hat{\sigma}_i = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_{it} - \hat{\mu}_i)^2} \quad \text{para } i = 1, \dots, N \quad (3.7)$$

$$\left(\hat{\mu}_i - t_{\frac{\alpha}{2}, T-1} \cdot \frac{\hat{\sigma}_i}{\sqrt{T}}, \quad \hat{\mu}_i + t_{1-\frac{\alpha}{2}, T-1} \cdot \frac{\hat{\sigma}_i}{\sqrt{T}} \right) \quad (3.8)$$

$$\left(\hat{\sigma}_i \sqrt{\frac{T-1}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, T-1}^2}}, \quad \hat{\sigma}_i \sqrt{\frac{T-1}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, T-1}^2}} \right) \quad (3.9)$$

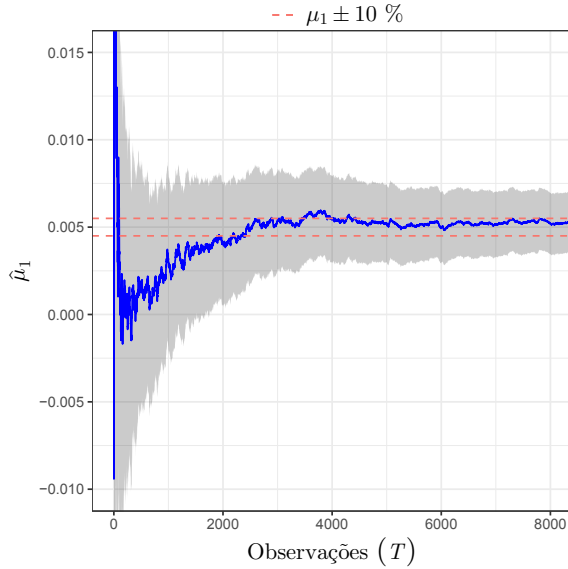
A partir das Figuras 14 e 15, é possível perceber que a estimativa de média converge para o intervalo de 10% em torno do valor real apenas com um número de observações (T) superior a 2000. Tal quantidade de dados supera o que normalmente está disponível em se tratando de informações financeiras cujas frequências de amostragens tipicamente são mensais, trimestrais, etc. Tal inferência pode ser aplicada em dados diários com período maior que 8 anos ($\sim 2000/252$), entretanto podem ocorrer mudanças estruturais nas distribuições ou mesmo elas podem não possuir a característica de normalidade nessa frequência específica. Além da estimativa, o intervalo de confiança desempenha um papel importante na identificação do sinal (positivo ou negativo) da média estimada ($\hat{\mu}_i$). Dado que as médias reais são positivas, nas Figuras 14 e 15, o intervalo de confiança apresentou apenas valores positivos a partir de 1750 e 188 observações, respectivamente. O sinal da média determina, no modelo de média-variância, se a posição no determinado ativo será comprada ou vendida, e isso impacta diretamente o desempenho futuro da carteira. Conclusões obtidas por DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009) refletem as consequências do erro na estimação da média e indicam a superioridade de estratégias ingênuas (EW) para casos com número de observações inferior a 3000.

Nas Figuras 16 e 17, é possível perceber que a estimativa de desvio padrão converge para o intervalo de 10% em torno do valor real com um número de observações inferior a 50. Tal observação sugere que a estimação do desvio padrão, com precisão razoável, necessita de uma quantidade menor dos dados em relação à estimação do valor médio.

As Figuras 18 e 19 também sugerem que as covariâncias e correlações entre os retornos dos ativos possam ser estimadas, com precisão razoável, com uma quantidade inferior à do valor médio. O intervalo de confiança da correlação é obtido seguindo Bonett e Wright (2000).

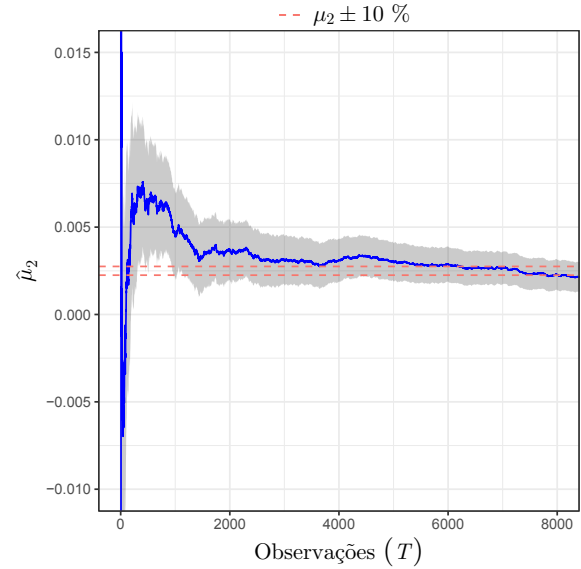
O impacto do erro de estimação da média ($\hat{\mu}_i$), desvio padrão ($\hat{\sigma}_i$) e covariâncias ($\hat{\sigma}_{ij}$) pode ser verificado nas estimativas derivadas delas. Os pesos do PVM, apresentados no Apêndice B.3.2.1, e os pesos do **Portfólio Tangente** (PT), apresentados no Apêndice

Figura 14 – Média amostral de dados aleatórios extraídos de uma distribuição normal com $\mu_1 = 0,005$ e seu respectivo intervalo de confiança de 95%



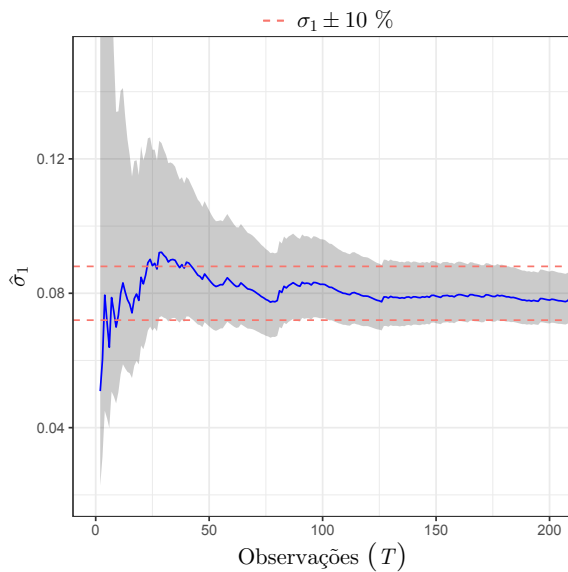
Fonte: Elaboração própria com dados simulados.

Figura 15 – Média amostral de dados aleatórios extraídos de uma distribuição normal com $\mu_2 = 0,0025$ e seu respectivo intervalo de confiança de 95%



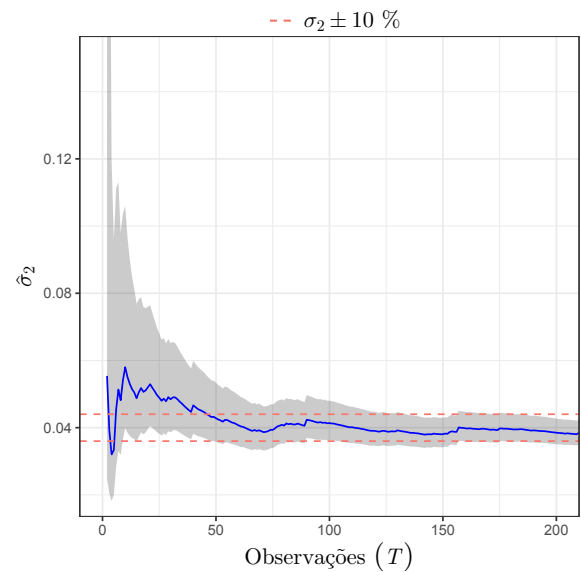
Fonte: Elaboração própria com dados simulados.

Figura 16 – Desvio padrão amostral de dados aleatórios extraídos de uma distribuição normal com $\sigma_1 = 0,08$ e seu respectivo intervalo de confiança de 95%



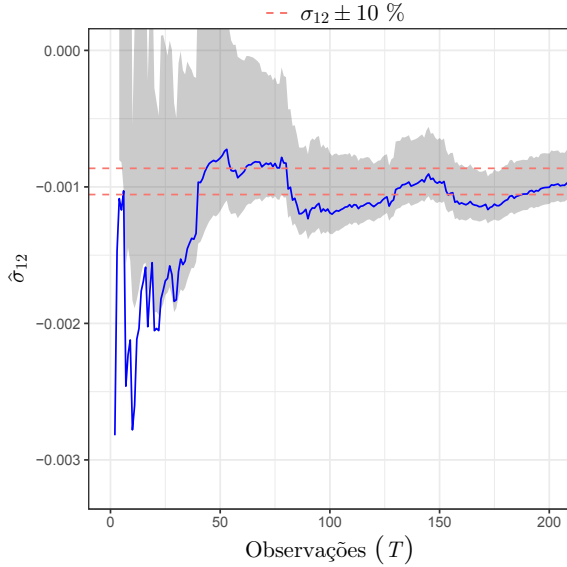
Fonte: Elaboração própria com dados simulados.

Figura 17 – Desvio padrão amostral de dados aleatórios extraídos de uma distribuição normal com $\sigma_2 = 0,04$ e seu respectivo intervalo de confiança de 95%



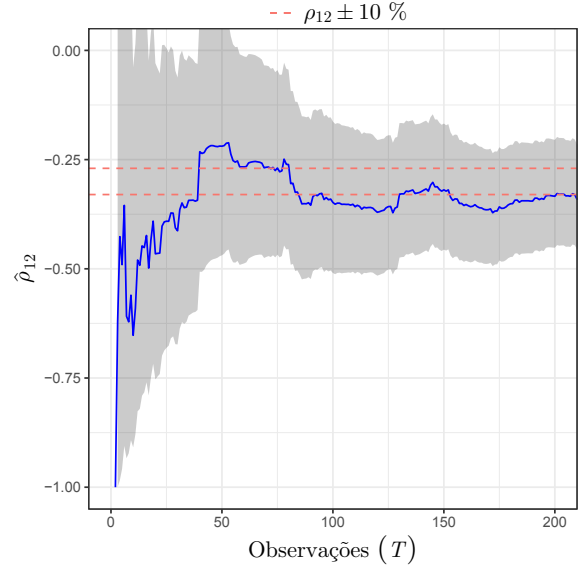
Fonte: Elaboração própria com dados simulados.

Figura 18 – Covariância amostral de dados aleatórios extraídos de uma distribuição normal bivariada com $\sigma_{12} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 = -0,00096$



Fonte: Elaboração própria com dados simulados.

Figura 19 – Coeficiente de correlação amostral de Pearson de dados aleatórios extraídos de uma distribuição normal bivariada com $\rho_{12} = -0,3$



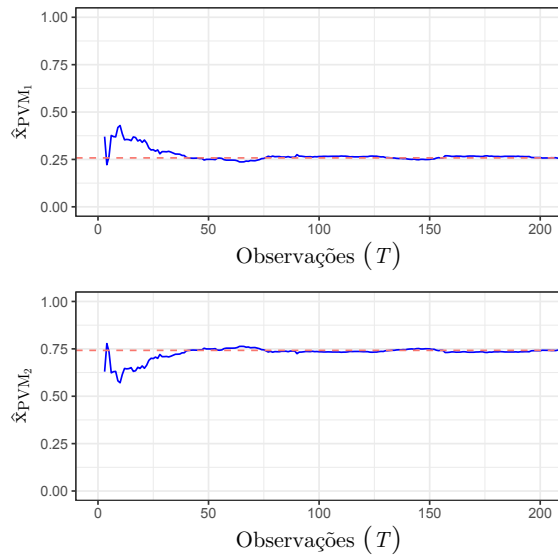
Fonte: Elaboração própria com dados simulados.

B.3.2.2, são consequência do processo anterior, já sua evolução em função do tamanho da amostra é exibida nas Figuras 20 e 21, respectivamente. É possível verificar que os pesos estimados do PVM possuem uma convergência mais rápida em relação aos pesos estimados para o PT, ou seja, se aproximam dos valores reais utilizando um número de observações inferior. Isso se deve ao fato de que a obtenção dos pesos do PVM não envolve dados relativos à estimação do valor médio.

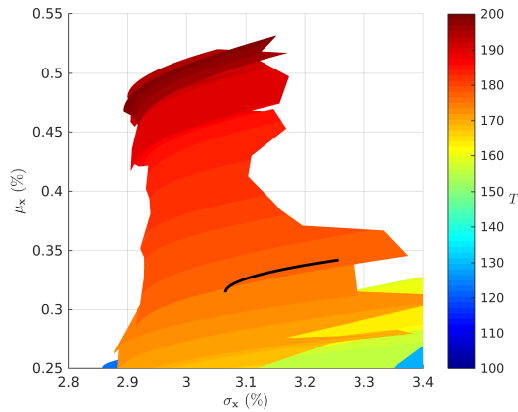
Conforme o teorema de separação dos fundos (Apêndice B.3.2.3), na ausência de restrições adicionais à do investimento pleno ($\mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1$), são necessários apenas duas carteiras para gerar os demais portfólios da fronteira eficiente que, nesse caso, é contínua. Considerando os infinitos portfólios existentes na fronteira, apenas o PVM depende somente do risco dos ativos (covariâncias) pois os demais são obtidos da relação ótima de retorno para níveis específicos de risco. A sensibilidade da posição espacial da fronteira eficiente é exibida nas Figuras 22 e 23. São calculados arcos que se originam no PVM e terminam no PT. Na Figura 22, é utilizado um número menor de observações para a obtenção dos portfólios em relação à quantidade utilizada na Figura 23.

Uma quantidade pequena de dados históricos expõe o modelo de média-variância a erros na estimação. Entretanto, a utilização de um horizonte de longo prazo para estimação aumenta a possibilidade de enfrentar problemas oriundos da não estacionariedade dos parâmetros. Broadie (1993) investiga a razão de compromisso entre erro de estimação e

Figura 20 – Portfólio de variância mínima estimado

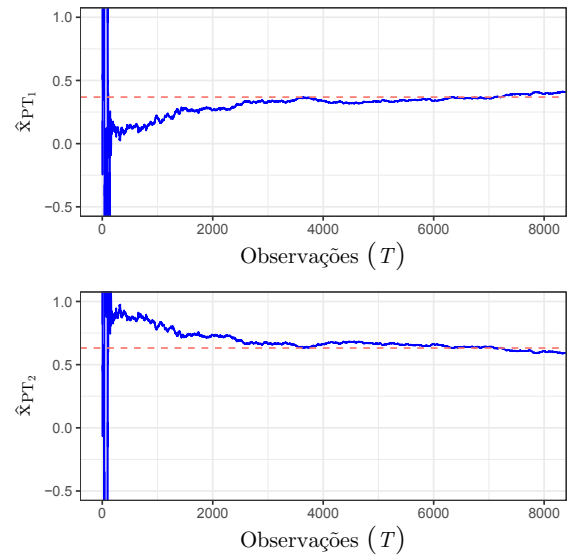


Fonte: Elaboração própria com dados simulados.

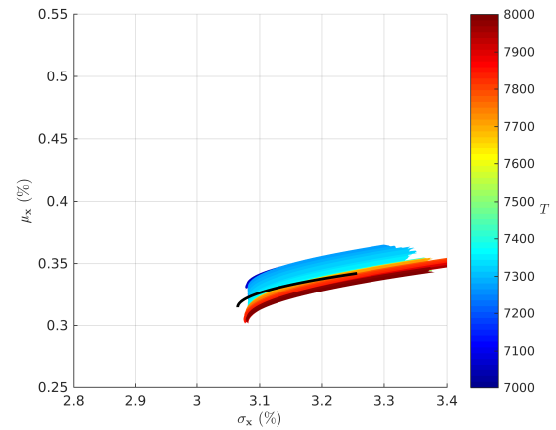
Figura 22 – Fronteira eficiente real comparada com fronteiras estimadas para $T = 100$ a $T = 200$ observações

Fonte: Elaboração própria com dados simulados.

Nota: Fronteira eficiente real destacada como uma linha sólida preta.

Figura 21 – Portfólio tangente estimado para um $r_f = 0,1\%$ 

Fonte: Elaboração própria com dados simulados.

Figura 23 – Fronteira eficiente real comparada com fronteiras estimadas para $T = 7000$ a $T = 8000$ observações

Fonte: Elaboração própria com dados simulados.

Nota: Fronteira eficiente real destacada como uma linha sólida preta.

estacionariedade dos parâmetros.

Segundo [Scott e Horvath \(1980\)](#), o modelo de média-variância pode descrever completamente a utilidade esperada para certos tipos de distribuições de retornos como a Normal, a Uniforme e a Binomial. Caso a distribuição seja assimétrica, então momentos

mais elevados e seus respectivos coeficientes de aversão devem ser considerados. [Scott e Horvath \(1980\)](#) concluem, a respeito da direção das preferências, que o terceiro momento central possui coeficiente de aversão com sinal positivo, e o quarto momento central possui coeficiente de aversão negativo. [Markowitz \(2014\)](#) revê e compara aproximações da utilidade esperada para vários tipos de funções de utilidade e para diferentes ordens de aproximação da série de Taylor. A conclusão obtida por [Markowitz \(2014, p. 354\)](#) comprova com dados que a aproximação de segunda ordem é adequada na maioria dos casos e argumenta que existe uma confusão de que a análise de média-variância só é aplicável na prática quando as distribuições dos retornos são gaussianas, ou as funções de utilidade são quadráticas. Vale observar que o modelo de média-variância, proposto por [Markowitz \(1952a, 1959\)](#), foi pensado como uma formulação de período único, e não como um processo contínuo de estimação de pesos (multi-períodos).

Posterioridades análises foram feitas partindo-se da formulação de período único, por simplicidade. Além disso, conforme discutido nesta Seção, as covariâncias podem ser estimadas com uma quantidade menor de observações quando se compara às estimativas das médias. Diante de tais fatos, a análise de sensibilidade foi concentrada nos impactos das covariâncias sobre a formação de portfólios.

3.1.1 Impacto analítico das covariâncias

Características da matriz de covariâncias além da garantia dos graus de liberdade ($T \geq N + 1$), apontados por [Ledoit e Wolf \(2003\)](#), devem ser consideradas. Como demonstrado na literatura ([MARKOWITZ, 1959](#); [ZIVOT, 2018](#)), e revisitado no Apêndice B.3, os pesos dos portfólios eficientes dependem dos desvios padrão dos retornos individuais e das correlações entre os retornos dos ativos, ao considerar o cenário em que não existam restrições adicionais à do investimento pleno ($\mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1$). Nesse contexto, para o caso do portfólio de variância mínima (PVM), contendo 2 ativos, seus pesos podem ser obtidos pela EQ. (3.10).

$$\mathbf{x}_{\text{PVM}}^* = [x_1^*, x_2^*]^\top = \left[\frac{(\sigma_2^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2)}{(\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)}, \frac{(\sigma_1^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2)}{(\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)} \right]^\top \quad (3.10)$$

Os pesos $\mathbf{x}_{\text{PVM}}^*$ serão próximos dos valores verdadeiros quanto menor for a incerteza relativa às estimativas dos desvios padrão ($\hat{\sigma}_1$ e $\hat{\sigma}_2$) e da correlação ($\hat{\rho}_{12}$). Entretanto, faz-se necessária a avaliação dos impactos nos pesos de $\mathbf{x}_{\text{PVM}}^*$ em função das variações em cada um das variáveis que o originam. Para tal análise, pode-se verificar a derivada parcial dos pesos em relação a cada insumo ($\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \sigma_1}$, $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \sigma_2}$ e $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho_{12}}$). As equações das derivadas parciais dos pesos do portfólio de variância mínima, informado na EQ. (3.10), com relação a cada insumo podem ser verificadas nas EQs. (3.11), (3.12) e (3.13).

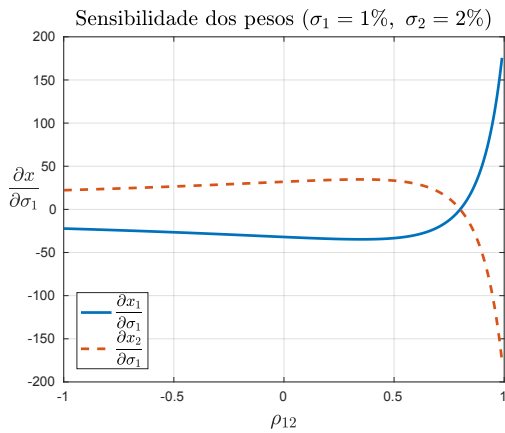
$$\frac{\partial \mathbf{x}_{PVM}^*}{\partial \sigma_1} = \frac{1}{(\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)} \cdot \begin{bmatrix} -\rho_{12}\sigma_2 \\ 2\sigma_1 - \rho_{12}\sigma_2 \end{bmatrix} - \frac{1}{(\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)^2} \cdot \begin{bmatrix} (2\sigma_1 - 2\rho_{12}\sigma_2)(\sigma_2^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2) \\ (2\sigma_1 - 2\rho_{12}\sigma_2)(\sigma_1^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}_{PVM}^*}{\partial \sigma_2} = \frac{1}{(\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)} \cdot \begin{bmatrix} 2\sigma_2 - \rho_{12}\sigma_1 \\ -\rho_{12}\sigma_1 \end{bmatrix} - \frac{1}{(\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)^2} \cdot \begin{bmatrix} (2\sigma_2 - 2\rho_{12}\sigma_1)(\sigma_2^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2) \\ (2\sigma_2 - 2\rho_{12}\sigma_1)(\sigma_1^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}_{PVM}^*}{\partial \rho_{12}} = \frac{1}{(\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)} \cdot \begin{bmatrix} -\sigma_1\sigma_2 \\ -\sigma_1\sigma_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{(\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)^2} \cdot \begin{bmatrix} 2\sigma_1\sigma_2(\sigma_2^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2) \\ 2\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

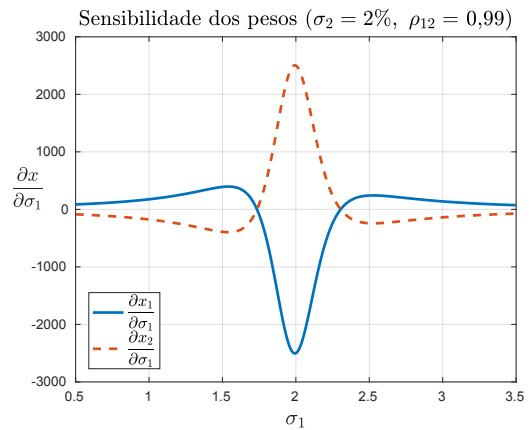
A sensibilidade dos pesos em relação às variações infinitesimais em σ_1 foi avaliada de acordo com o que foi obtido na EQ. (3.11). Na Figura 24, foi verificado o impacto da correlação dos retornos (ρ_{12}) sobre a sensibilidade ao se considerar os desvios padrão $\sigma_1 = 1\%$ e $\sigma_2 = 2\%$. É possível notar uma região próxima de $\rho_{12} = 0,8$ cuja sensibilidade ($\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \sigma_1}$) é reduzida ao ponto de poder ser anulada. Entretanto, para a maior parte da região avaliada, a sensibilidade apresenta valor em módulo maior que 1. Quando a correlação se aproxima de 1, tem-se um crescimento exponencial da sensibilidade dos pesos para variações infinitesimais em σ_1 . Na Figura 25, foi avaliado o impacto do valor do desvio padrão σ_1 sobre a sensibilidade ao se considerar o desvio padrão $\sigma_2 = 2\%$ e a correlação $\rho_{12} = 0,99$. Tal gráfico foi escolhido a fim de perceber os impactos na sensibilidade quando dois ativos são quase perfeitamente correlacionados. Foi verificado que a região de mais elevada sensibilidade ocorre quando os valores de desvio padrão se aproximam, ou seja, $\sigma_1 \approx \sigma_2$ quando $\rho_{12} = 0,99$. A sensibilidade dos pesos em relação a variações infinitesimais em σ_2 , obtida na EQ. (3.12), tem formulação e comportamento similar ao da EQ. (3.11).

Figura 24 – Sensibilidade dos pesos ($\mathbf{x}$) diante de uma mudança infinitesimal em σ_1 em função da correlação (ρ_{12}), mantendo-se os desvios padrão constantes e distintos



Fonte: Elaboração própria.

Figura 25 – Sensibilidade dos pesos ($\mathbf{x}$) diante de uma mudança infinitesimal em σ_1 para diferentes níveis do risco σ_1 , mantendo-se σ_2 e ρ_{12} constantes

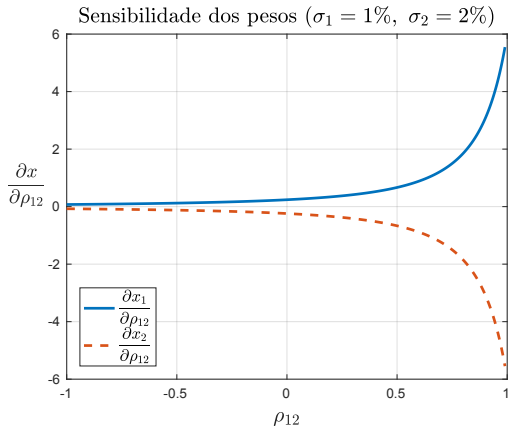


Fonte: Elaboração própria.

A EQ. (3.13) reflete a sensibilidade dos pesos diante de mudanças na correlação dos retornos ($\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho_{12}}$). Baseado na EQ. (3.11), foi gerada a Figura 26 na qual é exibido o impacto

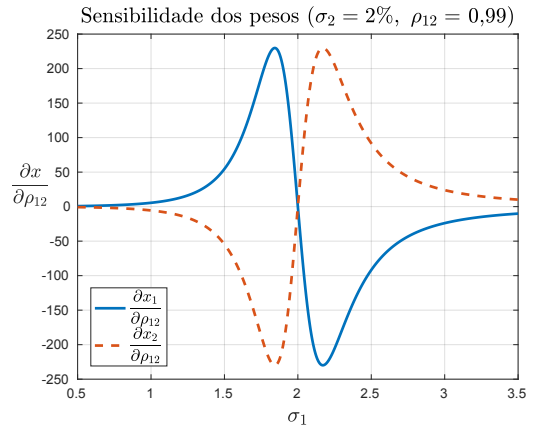
da correlação dos retornos (ρ_{12}) sobre a sensibilidade ao se considerar os desvios padrão $\sigma_1 = 1\%$ e $\sigma_2 = 2\%$. Foi verificado que, conforme a correlação (ρ_{12}) se aproxima de 1, a sensibilidade cresce exponencialmente. Na Figura 27, foram considerados os parâmetros $\sigma_2 = 2\%$ e $\rho_{12} = 0,99$ e, diante disso, verificou-se que houve um aumento da sensibilidade quando σ_1 se aproxima de σ_2 , mas, na região de igualdade entre eles, ocorre a sensibilidade nula.

Figura 26 – Sensibilidade dos pesos ($\mathbf{x}$) diante de uma mudança infinitesimal em ρ_{12} em função da correlação (ρ_{12}), mantendo-se os desvios padrão constantes e distintos



Fonte: Elaboração própria.

Figura 27 – Sensibilidade dos pesos ($\mathbf{x}$) diante de uma mudança infinitesimal em ρ_{12} para diferentes níveis do risco σ_1 , mantendo-se σ_2 e ρ_{12} constantes



Fonte: Elaboração própria.

Ao verificar as EQs. (3.11), (3.12) e (3.13), percebe-se que o comportamento das sensibilidades dos pesos em função da variação de diferentes parâmetros tem componentes em comum. Trata-se dos termos $(\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)^{-1}$ e $(\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)^{-2}$. Naturalmente, quando os denominadores dependentes de $\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$ tendem a zero ocorre um “efeito explosivo” nas sensibilidades dos pesos. Quando $\rho_{12} \approx 1$, tem-se que o polinômio dos denominadores se torna próximo de $\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$, ou seja, $(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 + \sigma_2)$. Comprova-se então o porquê das regiões de elevada sensibilidade surgirem quando a $\rho_{12} \approx 1$ e $\sigma_1 \approx \sigma_2$, conforme verificado nas Figuras 24, 25, 26 e 27. Vale ressaltar o fato de que o termo cujo denominador apresenta-se ao quadrado tende a acentuar a sensibilidade dos pesos, e isso se deve ao fato de que σ_1 e σ_2 se referem a valores percentuais, ou seja, $0 < \sigma_1 < 1$ e $0 < \sigma_2 < 1$.

Nesse contexto de 2 ativos, conclui-se, então, que, para minimizar os efeitos da sensibilidades dos pesos em função de mudanças nas estimativas dos insumos, tem-se que devam ser escolhidos ativos cujas correlações entre os retornos (ρ_{12}) sejam menores que 1. Em casos de ativos cujos retornos sejam correlacionados, devem-se buscar valores

diferentes e distantes para os respectivos desvios padrão dos retornos. Entretanto, quando o número de ativos é superior a 2, tal análise torna-se mais complexa, dado o aumento do número de variáveis a serem consideradas, e fatalmente deve-se recorrer a uma síntese trazida pela abordagem matricial. Análises similares relacionadas a sensibilidades dos pesos já foram feitas previamente na literatura em [Best e Grauer \(1991, 1992\)](#), [Ji \(2013\)](#) e [Palczewski e Palczewski \(2014\)](#).

Ao tentar obter uma formulação condensada para o problema da sensibilidade dos pesos, revisitou-se a equação matricial obtida para o portfólio de variância mínima com restrição de somatório dos pesos unitário, obtida na EQ. (B.37) e revisitada na EQ. (3.15). Pode ser demonstrado que tal equação serve tanto para o caso de 2 ativos como o de N ativos. Os pesos ótimos para o portfólio de variância mínima ($\mathbf{x}$) são obtidos da solução do sistema linear $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b}$. Tem-se que Σ é a matriz de covariâncias dos retornos e λ é o multiplicador de Lagrange. Para o caso de 2 ativos, tem-se que o determinante da matriz $\mathbf{A}$ é $-2\sigma_1^2 + 4\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2^2$. Nesse caso, verifica-se que os denominadores encontrados nas EQs. (3.11), (3.12) e (3.13) são dependentes do determinante da matriz $\mathbf{A}$. Tal observação é coerente com as feitas anteriormente, pois um sistema com determinante próximo de zero causará problemas quanto à estimação dos pesos bem como sua sensibilidade a mudanças nos insumos. Entretanto, ainda não se pode estender tal conclusão para o caso de N ativos.

$$\begin{bmatrix} 2\sigma_1^2 & 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & 1 \\ 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & 2\sigma_2^2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2\Sigma & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^\top & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{z}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (3.17)$$

É necessário avaliar a sensibilidade do vetor $\mathbf{z}$ diante de mudanças infinitesimais em qualquer parâmetro p (σ_i e ρ_{ij}), ou seja, $\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial p}$. Tal sensibilidade depende essencialmente da inversa da matriz $\mathbf{A}$, visto que o vetor $\mathbf{b}$ é constante para a obtenção do portfólio de variância mínima. Uma propriedade importante da inversa de qualquer matriz quadrada, quando a mesma admite inversa, é exibida na EQ. (3.18), na qual $Adj(\mathbf{A})$ refere-se à matriz adjunta de $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot Adj(\mathbf{A}) \quad (3.18)$$

O determinante de $\mathbf{A}$ é função dos parâmetros p , portanto pode ser utilizada a regra do produto de funções diferenciáveis, segundo o raciocínio das EQs. (3.19) a (3.22). A matriz adjunta de $\mathbf{A}$ é de difícil obtenção analítica conforme o número de ativos N cresce, entretanto, sua obtenção é desnecessária para a presente análise. O principal resultado da

EQ. (3.22) traz a confirmação de que a sensibilidade dos pesos do portfólio de variância mínima, em relação a qualquer insumo, é diretamente proporcional aos termos $\det(\mathbf{A})^{-1}$ e $\det(\mathbf{A})^{-2}$.

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial p} = \frac{\partial(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b})}{\partial p} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \text{Adj}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{b} \right) \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial p} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \frac{\partial(\text{Adj}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{b})}{\partial p} + (\text{Adj}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{b}) \cdot \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{\det(\mathbf{A})} \right) \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial p} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \frac{\partial(\text{Adj}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{b})}{\partial p} - \left(\frac{\text{Adj}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{b}}{\det(\mathbf{A})^2} \right) \cdot \frac{\partial(\det(\mathbf{A}))}{\partial p} \quad (3.22)$$

Conforme o determinante de $\mathbf{A}$ se aproxima de zero, tem-se uma indefinição nos pesos, mas simultaneamente ocorre um aumento quadrático da sensibilidade dos pesos em função de $\det(\mathbf{A})^{-2}$. Dessa forma, é possível considerar os termos $\det(\mathbf{A})^{-1}$ e $\det(\mathbf{A})^{-2}$ como **índices de sensibilidade** extraídos do sistema como um todo. Vale lembrar que $\mathbf{A}$ possui a matriz de covariâncias (Σ) em sua composição. A EQ. (3.22) não é modificada ao se considerar portfólios eficientes que levem em conta as médias dos retornos como insumos, ou seja, variáveis p adicionais. Em tal situação, o vetor $\mathbf{b}$ deixa de ser unitário e torna-se dependente das médias dos retornos em excesso.

O índice obtido nesta subseção, dado por $\det(\mathbf{A})^{-2}$, foi utilizado para avaliar a sensibilidade dos pesos provenientes de perturbações nos termos σ_{ij} obtidos de diferentes estimativas da matriz de covariâncias ou mesmo do encolhimento da covariância amostral. Como análise complementar, foi avaliado o distanciamento da informação, em relação à estimativa amostral, e a estabilidade numérica da matriz resultante. O “distanciamento” dos estimadores, em relação ao obtido da matriz de covariâncias amostral, foi feito por meio da norma-2 da diferença entre elas, ou seja, conforme a EQ. (3.23).

$$\|\Delta\Sigma\|_2 = \|\Sigma_{amostral} - \Sigma_{encolhida}\|_2 \quad (3.23)$$

A norma-2 de $\Delta\Sigma$ foi estimada como o maior valor singular obtido da decomposição de valores singulares de $\Delta\Sigma$ (ANDERSON; BAI *et al.*, 1999). Outra informação adicional apresentada é o número de condicionamento recíproco apresentado na EQ. (3.24), considerando que tal número serve como indicador do condicionamento numérico de uma determinada matriz. O resultado da EQ. (3.24), que utilizam o produto da norma-1¹ entre uma dada matriz e sua inversa, tende a zero quando $\mathbf{A}$ se aproxima da singularidade e se aproxima de 1 quando a matriz é bem condicionada numericamente (ANDERSON; BAI *et al.*, 1999; DONGARRA *et al.*, 1979; GOLUB; VAN LOAN, 2013).

$$rcond(\mathbf{A}) = \frac{1}{\|\mathbf{A}\|_1 \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_1} \quad (3.24)$$

¹ A norma-1 de uma matriz é o valor máximo dentre as somas dos valores absolutos de cada coluna.

Espera-se que tanto o indicador de sensibilidade dos pesos, extraído da EQ. (3.22), como os complementares exibidos nas EQs. (3.23) e (3.24) possam fornecer um comparativo entre os diferentes métodos de encolhimento da matriz de covariâncias. Além disso, tal análise traz informações úteis a respeito das características do estimador da matriz de covariâncias, proposto na EQ. (4.23), baseado na agregação de múltiplas estimativas provenientes de subcarteiras.

3.2 Recapitulação

Neste capítulo foram revisitados os problemas relativos ao uso do modelo de média-variância e foi dado foco no impacto de mudanças nos insumos sobre os pesos, ou seja, na sensibilidade dos pesos. O vetor de média apresenta a necessidade de um número elevado de observações para permitir estimativas confiáveis. Já a matriz de covariâncias deve ser estimada adequadamente em função do número de observações em conjunto com a dimensão do número de ativos. Adicionalmente, fora proposto um indicador para refletir a sensibilidade dos pesos gerados por diferentes tipos de estimadores da matriz de covariâncias.

4 Sorteio de Subconjuntos de Ativos

Neste capítulo, pretende-se discutir as possibilidades e ganhos do uso de projeções obtidas por meio do sorteio aleatório de subconjuntos de ativos, inspirado em Ho (1998) e apresentado na Seção 2.4.3, relativa ao contexto de seleção de portfólios. Tal abordagem também pode ser denominada de *subset bagging*.

A terminologia *bagging* e a sigla BAG, daqui por diante, serão utilizadas apenas para se referir aos métodos baseados em sorteio de ativos. Vale ressaltar que o sorteio dos ativos foi feito com reposição, mas sem a repetição dos mesmos em cada subconjunto. É importante frisar que o método BAG foi comparado empiricamente à técnica da Fronteira Eficiente Reamostrada, a fim de diferenciá-las, pois ambas apresentam em sua essência o processo de reamostragem. Para evidenciar tais diferenças foram feitos teste de hipótese para verificar se ambas as abordagens geram pesos simulados que aderem ao mesmo tipo de distribuição, no caso a normal. Além disso, foi verificado graficamente se as características de retorno-risco e diversificação são as mesmas quando utilizados os mesmos insumos.

A partir da distribuição dos pesos obtidos do processo de obtenção de portfólios provenientes do sorteio de subconjuntos de ativos, têm-se as seguintes possibilidades:

- a) Utilizar uma medida de tendência central (média aritmética, mediana, etc.) como inferência de peso para o portfólio;
- b) Utilizar uma medida de dispersão (variância, amplitude interquartil, etc.) como inferência da incerteza associada ao peso.

A fim de quantificar a informação de incerteza proveniente dos pesos, foi escolhida a **amplitude interquartil** como medida de dispersão. Tal informação pode ser associada com a incerteza pois em situações de “plena certeza” não é esperada uma variabilidade de tais estimativas de pesos. Já na inferência de pesos do portfólios utilizou a **média aritmética** como medida de tendência central.

A partir do processo da criação de carteiras provenientes do *subset bagging*, podem ser desenvolvidas, a princípio, três aplicações: (i) a seleção de portfólios a partir das estimativas agregadas das subcarteiras; (ii) o encolhimento, exato ou aproximado, da matriz de covariâncias ao se obter a fórmula analítica do processo de agregação das subcarteiras. (iii) a obtenção de índices de incerteza baseados nas distribuições dos pesos das subcarteiras.

O vetor de incerteza específica por ativo foi utilizado em versões modificadas da formulação de de Jong (2018), apresentadas na seção 4.3.3.

4.1 Seleção de portfólios a partir do *subset bagging*

O cálculo da REF, proposto por [Michaud e Michaud \(1998\)](#), realiza simulações de Monte Carlo para melhorar a estimativa de seus portfólios. Uma abordagem alternativa, proposta no presente trabalho e inspirada em [Ho \(1998\)](#), é considerar que a fronteira reamostrada também pode ser obtida pela média ponderada das fronteiras calculadas de subgrupos de portfólios dentro de um mesmo conjunto de dados. Tal alternativa cria múltiplas estimativas (portfólios eficientes de cada subgrupo), e essas inferências são posteriormente agregadas para a obtenção de um “portfólio ótimo”. A ponderação na etapa de agregação pode ser associada a um grau de confiança, seja ele equivalente, estabelecido arbitrariamente ou obtido a partir de outras questões (liquidez, setor, opiniões de especialistas, etc.). No presente trabalho, foi considerado que todos os portfólios obtidos de subgrupos possuem o mesmo grau de confiança, ou seja, foi feita a agregação por média aritmética entre portfólios dos subgrupos. Entretanto, é possível utilizar outras medidas de tendência central de distribuições (mediana, moda, etc.) embora nesses casos já não implique em graus de confiança idênticos.

A construção da fronteira eficiente utilizando a agregação de portfólios obtidos do sorteio aleatório de subgrupos de ativos financeiros (BAG) segue as seguintes etapas:

1. Considere um conjunto T de dados históricos, contendo N ativos. Usando um procedimento de sorteio aleatório, são escolhidos M ativos distintos pertencentes ao conjunto original de forma que $(M < N)$ e $(M < T)$, a fim de garantir que a matriz de covariâncias não seja singular. Nessa etapa, tem-se um aumento dos graus de liberdade para as estimações posteriores;
2. É realizada a estimação dos insumos do modelo de média-variância para os M ativos sorteados utilizando-se os dados históricos e uma técnica específica para tal, por exemplo estimativas amostrais e com covariâncias “encolhidas”. Nesse ponto, é possível flexibilizar a etapa de estimação para diversas alternativas disponíveis na literatura;
3. Para cada estimativa obtida em (2), é selecionado um portfólio ótimo específico do subgrupo de M ativos. Por exemplo, pode-se estimar o portfólio de variância mínima ou o portfólio que maximiza a utilidade esperada supondo um dado nível de aversão ao risco. É atribuído peso zero para os ativos que não estão presentes no subgrupo M ;
4. Os M ativos serão devolvidos ao conjunto original. O processo descrito dos itens (1) a (3) é repetido P vezes. Dessa forma, os sorteios de ativos ocorrem com reposição;

5. A etapa de agregação fornecerá um portfólio final resultante da média aritmética simples dos pesos obtidos dos P sorteios reescalando-se para o somatório dos pesos ser unitário.

A REF considera simulações de Monte Carlo com fronteiras obtidas a partir de otimizações contendo $N + N^2$ parâmetros estimados, ou seja, N provenientes de $\hat{\mu}$ e N^2 de $\hat{\Sigma}$, dos quais $N(N - 1)/2$ são distintos. Já a alternativa BAG utiliza-se de $M + M^2$ parâmetros estimados, sendo $M < N$. O processo de agregação dessa abordagem visa obter o portfólio médio dentre as estimativas de cada subcarteira.

Os efeitos de um valor específico de M podem ser distintos para diferentes valores de N . É necessário promover uma equalização do parâmetro do tamanho dos subgrupos para permitir um comparativo de efeitos entre diferentes valores de N . O parâmetro de controle (ν) define o número de elementos (M) presentes no subgrupo de ativos, e tal relação é definida na EQ. (4.1). É necessário mencionar que ν pertence ao intervalo de 0 a 1, e o símbolo $\lceil a \rceil$ indica o valor de a arredondado para o próximo inteiro acima. A informação carregada pelos M ativos dependerá do quão distante esse valor é de N , ou seja, a informação agregada de M ativos é distinta para bases de dados com total de ativos (N) diferentes. O parâmetro ν foi idealizado para definir um tamanho de grupo “normalizado” que permita a comparação do efeito do BAG entre bases de dados de N distintos.

$$M = \lceil N^\nu \rceil \quad (4.1)$$

A distribuição dos pesos das subcarteiras da abordagem BAG pode fornecer indicadores de incertezas dos pesos dos ativos, como verificado na Seção 4.3. Ao se avaliar apenas portfólios com restrições de vendas a descoberto ($x_i \geq 0$), tem-se que os pesos ficarão confinados no intervalo $[0, 1]$. Para o caso de máxima incerteza sobre a estimativa do peso x_i , tem-se que a distribuição irá se aproximar da uniforme e o valor esperado do peso irá convergir para 0,5. Caso todos os pesos x_i se aproximem de 0,5, então o portfólio resultante, após ser reescalado para o somatório de pesos ser unitário, tenderá ao ingênuo ($1/N$). Resumidamente, para situações de extrema incerteza a respeito das estimativas dos pesos, a metodologia BAG resultará no portfólio ingênuo, o que é coerente com as discussões feitas por Pflug, Pichler e Wozabal (2012) e de Jong (2018).

4.1.1 Exemplo BAG ($N = 2$ e 3)

Para fins de exemplo, foi considerado o cenário de seleção de portfólios utilizando a estratégia BAG com permissão de vendas a descoberto, pois, nesse contexto, é possível a avaliação das soluções analíticas.

Para o caso de $N = 2$, só existem dois subgrupos distintos possíveis de $M = 1$ ativos cada, ou seja, a carteira formada pelo ativo 1 e a formada pelo ativo 2. Independentemente

da função utilidade que se queira otimizar, existem apenas duas possibilidades para o vetor de pesos: $\mathbf{x} = [0, 0]^\top$ ou $\mathbf{x} = [0, 1]^\top$. Ao se agregar as duas carteiras pela média aritmética, tem-se o portfólio resultante $\mathbf{x} = [0,5, 0,5]^\top$, que não necessita reescalonamento. Portanto, para o caso de $N = 2$, a abordagem BAG sempre retornará o portfólio ingênuo ($1/N$).

Para o caso de $N = 3$, existe a possibilidade de separação em grupos de $M = 1$ e $M = 2$ ativos. Para $M = 1$, independente de N , o portfólio resultante será o ingênuo ($1/N$). Para $M = 2$, tem-se 3 subgrupos distintos possíveis: $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ e $\{2, 3\}$. O número de subgrupos distintos sempre será definido pela EQ. (4.2). Para obter o portfólio de variância mínima de 2 ativos, sem reescalonamento de pesos, tem-se a solução proveniente da EQ. (4.3). Os pesos são considerados zero para cada um dos $N - M$ ativos que não participa daquele subgrupo específico. A etapa de agregação não pode ser feita diretamente com cada média dos vetores $\mathbf{x}_{ij}$, pois é necessário reposicionar os valores obtidos em um outro vetor $\mathbf{x}$ que possua N elementos. Ao adicionar a equação de $x_k = 0$ ($k = 1, 2$ ou 3) ao sistema linear original da EQ. (4.3), tem-se a formulação da metodologia BAG para $N = 3$ e $M = 2$ presente na EQ. (4.4) que já considera a agregação. Em seguida, é feita a normalização dos pesos obtidos da EQ. (4.4) pela EQ. (4.5).

$$\binom{N}{M} = \frac{N!}{M!(N-M)!} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{x}_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{ii} & \sigma_{ij} \\ \sigma_{ji} & \sigma_{jj} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad (4.4)$$

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{1}^\top \mathbf{x}} \quad (4.5)$$

4.1.2 Comparativo com a fronteira eficiente reamostrada (REF)

Com o intuito de verificar diferenças entre a fronteira eficiente reamostrada (REF) e a abordagem proveniente da agregação do sorteio de ativos (BAG), buscou-se a reprodução dos resultados obtidos por [Michaud e Michaud \(1998\)](#). [Michaud e Michaud \(1998, p. 16\)](#) fornecem dados de retornos mensais de ativos internacionais dolarizados para o período de janeiro de 1978 a dezembro de 1995. Os ativos considerados são: *Euro Bonds*, *US Bonds*, *US*, *UK*, *Japan*, *Germany*, *France* e *Canada*. O prêmio percentual em relação à taxa de juros de curto prazo é informado na EQ. (4.6). As volatilidades percentuais (desvio padrão dos retornos) são informadas na EQ. (4.7). As correlações entre os ativos foram estimadas

conforme a EQ. (4.8).

$$\boldsymbol{\mu} = [0,27 \quad 0,25 \quad 0,71 \quad 0,79 \quad 0,88 \quad 0,53 \quad 0,88 \quad 0,39]^\top \quad (4.6)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [1,56 \quad 2,01 \quad 4,30 \quad 6,01 \quad 7,04 \quad 6,22 \quad 7,03 \quad 5,50]^\top \quad (4.7)$$

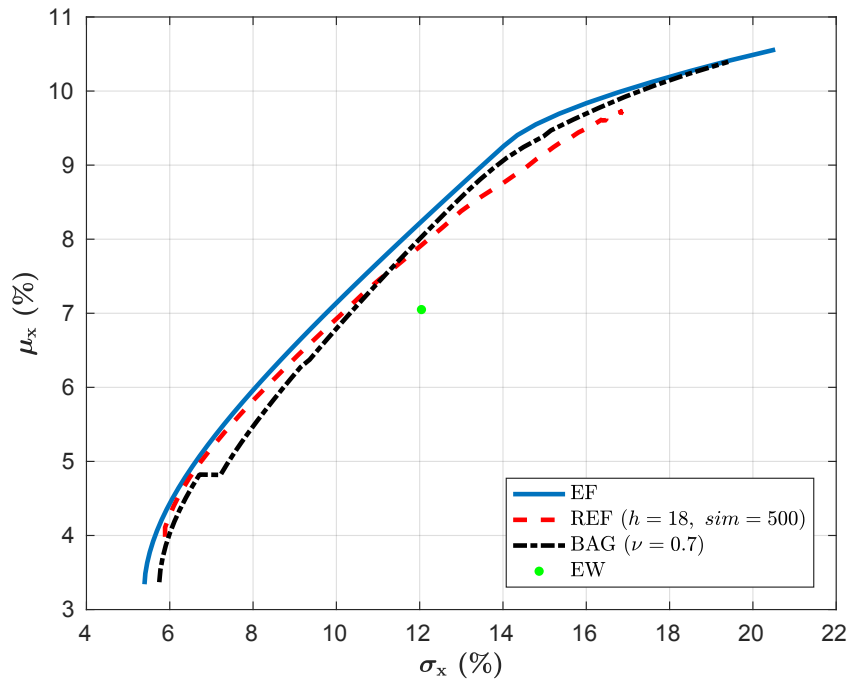
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0,92 & 0,42 & 0,29 & 0,16 & 0,28 & 0,26 & 0,33 \\ 0,92 & 1 & 0,36 & 0,25 & 0,14 & 0,27 & 0,22 & 0,26 \\ 0,42 & 0,36 & 1 & 0,56 & 0,22 & 0,34 & 0,44 & 0,71 \\ 0,29 & 0,25 & 0,56 & 1 & 0,4 & 0,48 & 0,54 & 0,58 \\ 0,16 & 0,14 & 0,22 & 0,4 & 1 & 0,35 & 0,42 & 0,25 \\ 0,28 & 0,27 & 0,34 & 0,48 & 0,35 & 1 & 0,62 & 0,3 \\ 0,26 & 0,22 & 0,44 & 0,54 & 0,42 & 0,62 & 1 & 0,41 \\ 0,33 & 0,26 & 0,71 & 0,58 & 0,25 & 0,3 & 0,41 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Na Figura 28, é apresentado um comparativo das fronteiras eficientes obtidas considerando que existem restrições para vendas a descoberto, ou seja, os pesos são forçados a serem positivos ($x_i \geq 0$). Tal comparativo apresenta o resultado da fronteira eficiente (EF), a fronteira eficiente reamostrada (REF) e a fronteira obtida do sorteio de ativos (BAG, $\nu = 0,7$). Também é apresentada a relação risco-retorno do portfólio ingênuo (EW ou 1/N). A abordagem REF foi obtida a partir de simulações de 18 anos de retornos para cada uma das 500 fronteiras, conforme sugerido por Michaud e Michaud (1998). A abordagem BAG utilizou subgrupos de 5 ativos ($M = \lceil N^\nu \rceil = \lceil 8^{0,7} \rceil$), ou seja, o portfólio resultante foi gerado da agregação de 56 portfólios distintos.

As estratégias REF e BAG apresentaram, de acordo com a Figura 28, resultados próximos em termos de média-variância, e ambas tiveram suas respectivas fronteiras posicionadas abaixo à de Markowitz (1952a, 1959). Michaud e Michaud (1998) argumentam que o comportamento dentro da amostra da abordagem REF era esperado, entretanto sua diversificação é superior à dos portfólios presentes na fronteira eficiente de Markowitz (1952a, 1959). Além disso, ou por causa dessa diversificação, Michaud e Michaud (1998) apresentam resultados em que a REF tem desempenho fora da amostra superior à da fronteira eficiente de Markowitz (1952a, 1959).

O índice de diversificação (CHOUËFATY; COIGNARD, 2008), exibido na EQ. (2.20), pode ser utilizado para confirmar alguns dos argumentos de Michaud e Michaud (1998) sobre diferenças de diversificação entre abordagens. A Figura 29 apresenta a evolução do índice de diversificação do portfólio em função do nível de risco (σ_x). É possível confirmar, a partir de tal indicador, que os portfólios da abordagem REF apresentam, em geral, melhor diversificação que os presentes na EF. Apesar da aparente similaridade em termos de risco-retorno das abordagens REF e BAG, conforme a Figura 28, tem-se que suas características de diversificação em função do nível de risco são mais aparentes na Figura 29.

Figura 28 – Comparativo de fronteiras eficientes restritas ($x_i \geq 0$) provenientes de diferentes abordagens



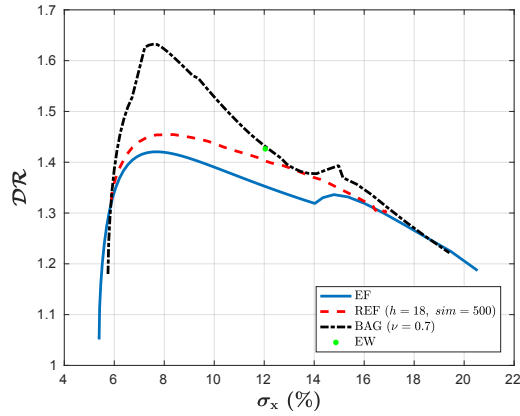
Fonte: Elaboração própria.

Nota: A abscissa refere-se ao desvio padrão dos retornos (σ_x). A ordenada refere-se à média dos retornos (μ_x). A legenda refere-se às fronteiras eficientes: da MPT (EF), a reamostrada (REF) e a obtida pelo sorteio de ativos (BAG). Além disso, é exibida a característica de risco-retorno do portfólio ingênuo (1/N ou EW).

Outra forma de avaliar a diversificação consiste em analisar a evolução dos pesos dos portfólios em função do seu nível de risco. O mapa de alocação de pesos em função do risco relativo à fronteira eficiente de Markowitz (1952a, 1959) pode ser verificado na Figura 30. Os mapas de alocação das abordagens REF e BAG podem ser vistos nas Figuras 31 e 32, respectivamente. É possível verificar na fronteira EF uma maior concentração dos pesos quando se comparam as alocações de mesmo nível de risco das estratégias REF e BAG. As Figuras 30 e 31 são reproduções dos resultados da Figura 8 diferenciando-se provavelmente pelo número de simulações ou por desempenhos dos algoritmos de otimização.

A partir desse comparativo feito, pôde ser verificado que, apesar das essências dos métodos REF e BAG envolverem reamostragens de dados, eles podem apresentar comportamentos distintos em termos de risco-retorno ou em relação à diversificação apresentada.

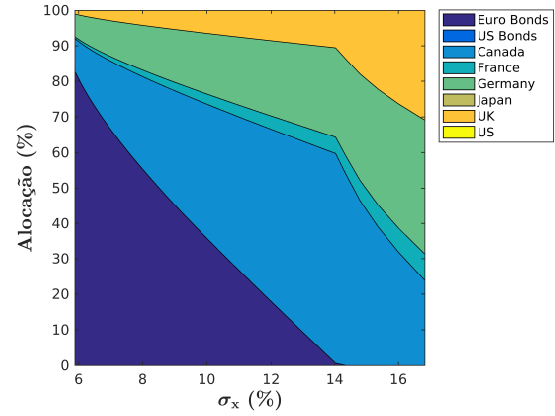
Figura 29 – Índice de diversificação para portfólios eficientes restritos ($x_i \geq 0$) provenientes de diferentes abordagens



Fonte: Elaboração própria.

Nota: A abscissa refere-se ao desvio padrão dos retornos (σ_x). A ordenada refere-se ao índice de diversificação ($\mathcal{DR}$), EQ. (2.20).

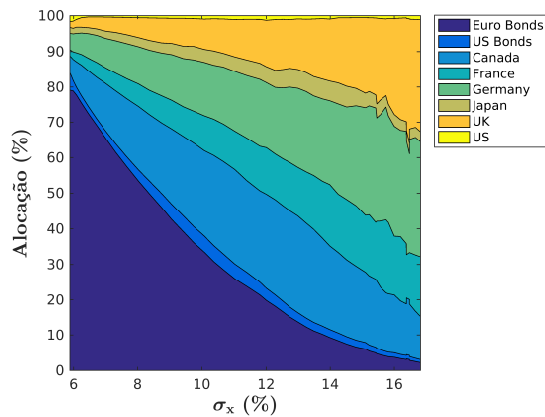
Figura 30 – Mapa de alocação de pesos dos portfólios da fronteira EF em função do nível de risco



Fonte: Elaboração própria.

Nota: A abscissa refere-se ao desvio padrão dos retornos (σ_x). A ordenada refere-se ao percentual alocado em cada ativo financeiro.

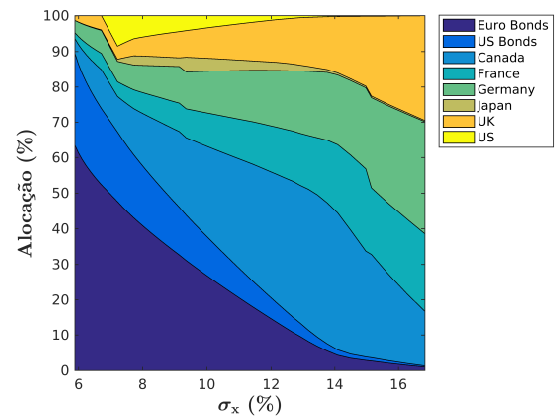
Figura 31 – Mapa de alocação de pesos dos portfólios da fronteira REF ($h = 18, sim = 500$) em função do nível de risco



Fonte: Elaboração própria.

Nota: A abscissa refere-se ao desvio padrão dos retornos (σ_x). A ordenada refere-se ao percentual alocado em cada ativo financeiro.

Figura 32 – Mapa de alocação de pesos dos portfólios da fronteira BAG ($\nu = 0,7$) em função do nível de risco



Fonte: Elaboração própria.

Nota: A abscissa refere-se ao desvio padrão dos retornos (σ_x). A ordenada refere-se ao percentual alocado em cada ativo financeiro.

4.2 Encolhimento da matriz de covariâncias

Nesta subseção, buscar-se-á a obtenção de uma fórmula analítica para o encolhimento da matriz de covariâncias provocado pela agregação de estimativas oriundas de subcarteiras cujos ativos foram sorteados aleatoriamente sem repetição, mas com reposição. Será tomada como base a perspectiva da obtenção de portfólios eficientes de variância mínima com a permissão de vendas a descoberto, conforme foi revisitado na EQ. (B.45).

A essência da técnica que será discutida consiste em sortear ativos para a obtenção de subcarteiras, em seguida agregar tais portfólios para a criação de uma alocação final. A etapa de agregação pode ser feita de diversas formas, por exemplo, a partir da média aritmética, da média geométrica, da média ponderada, da mediana ou da moda. Na presente dedução analítica, escolheu-se a média aritmética por mera questão de promover simplicidade nos equacionamentos.

Para o caso de um conjunto de dois ativos ($N = 2$), tem-se que só são disponíveis duas formas de sortear os ativos. Nesse caso, são possíveis subconjuntos com carteiras de 1 ($M = 1$) ou 2 ($M = 2$) ativos. Para $M = 1$, a carteira $x_1 = [1, 0]^\top$, a carteira $x_2 = [0, 1]^\top$ e a carteira agregada será $x^* = \frac{1}{2}[1, 1]^\top$. Portanto, para $M = 1$, a carteira agregada sempre será a ingênua ($1/N$), independente dos termos de covariâncias. Para $M = 2$, só existe uma carteira disponível que é o portfólio eficiente de variância mínima considerando todos os ativos conforme é obtido pela EQ. (B.45).

Para o caso de $N = 3$, tem-se a possibilidade de agrupamentos com $M = 1, 2$ e 3 . Para $M = 1$ e $M = 3$, ocorre a obtenção do portfólio ingênuo e o de variância mínima, respectivamente. Para $M = 2$, têm-se três portfólios possíveis obtidos de combinações distintas $\left(\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!}\right)$. O portfólio resultante da agregação de subcarteiras de variância mínima pode ser obtido pela EQ. (4.9) e (4.10). Cada subcarteira da EQ. (4.9) é resultante do portfólio de variância mínima, sem a normalização de pesos, quando um dos ativos tem peso arbitrariamente forçado a ser zero.

$$\mathbf{x} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$x^* = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{1}^\top \mathbf{x}} \quad (4.10)$$

Para o caso de $N = 4$, tem-se a possibilidade de agrupamentos com $M = 1, 2, 3$ e 4 . Para $M = 1$ e $M = 4$, ocorre a obtenção do portfólio ingênuo e o de variância mínima, respectivamente. Para $M = 2$, têm-se seis portfólios possíveis obtidos de combinações distintas de ativos $\left(\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!}\right)$. Considerando $M = 2$, vê-se que a EQ. (4.11) exhibe as subcarteiras possíveis sem considerar a etapa de normalização dos pesos. Para $M = 3$, têm-se quatro portfólios possíveis obtidos de combinações distintas de ativos $\left(\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!}\right)$.

Considerando $M = 3$, decorre que a EQ. (4.12) exhibe as subcarteiras possíveis sem considerar a etapa de normalização dos pesos.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = & \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & \sigma_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & \sigma_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 & \sigma_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sigma_{41} & 0 & 0 & \sigma_{44} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \\ & \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} & 0 \\ 0 & \sigma_{32} & \sigma_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 & \sigma_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sigma_{42} & 0 & \sigma_{44} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} & \sigma_{34} \\ 0 & 0 & \sigma_{43} & \sigma_{44} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = & \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 & \sigma_{14} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 & \sigma_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & 0 & \sigma_{44} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & \sigma_{33} & \sigma_{34} \\ \sigma_{41} & 0 & \sigma_{43} & \sigma_{44} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \\ & \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ 0 & \sigma_{32} & \sigma_{33} & \sigma_{34} \\ 0 & \sigma_{42} & \sigma_{43} & \sigma_{44} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.12)$$

O encolhimento da matriz de covariâncias não é aparentemente visível, pois as estimativas individuais não estão condensadas nas EQs. (4.9), (4.11) e (4.12). Faz-se necessária uma associação de termos de forma a ser possível um retorno para o formato da EQ. (B.45).

As diferentes estimativas de subcarteiras são feitas, essencialmente, anulando-se os termos de covariâncias que não participam do grupo. Pode ser definida uma operação matricial que permite realizar essa tarefa. Primeiramente, seja definida a matriz identidade ($\mathbf{I}_{N \times N}$) como a soma de duas outras matrizes $\mathbf{I}_a$ e $\mathbf{I}_b$ conforme a EQ. (4.13). $\mathbf{I}_a$ terá seus elementos na diagonal unitários, se as respectivas colunas foram sorteadas, e zero, caso contrário. $\mathbf{I}_b$ terá seus elementos na diagonal unitários, se as respectivas colunas não foram sorteadas, e zero, caso contrário. Tanto $\mathbf{I}_a$ quanto $\mathbf{I}_b$ possuem a propriedade de anular as linhas de matrizes (ou vetores) que elas pré-multiplicam ou anular colunas de matrizes (ou vetores) que elas pós-multiplicam, conforme o exemplo das EQs. (4.14) e (4.15).

$$\mathbf{I}_{N \times N} = \mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b \quad (4.13)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{I_a} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & \sigma_{34} \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & \sigma_{43} & \sigma_{44} \end{bmatrix}}_{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & \sigma_{34} \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & \sigma_{43} & \sigma_{44} \end{bmatrix}}_{\Sigma} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{I_a} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 & 0 \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Com o auxílio das matrizes I_a e I_b , cada subcarteira da EQ. (4.9) pode ser reescrita como $(I_a \Sigma I_a + I_b)^{-1} I_a \mathbf{1}$, conforme feito na EQ. (4.16). É possível verificar que as estimativas individuais possuem um fator comum que é o vetor unitário ($\mathbf{1}$) que, ao ser colocado em evidência, conduz à EQ. (4.17). O termo que multiplica o vetor unitário serve como base do processo de encolhimento proveniente do sorteio de ativos.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = & \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{31} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \\ & \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{31} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \\ & \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{31} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = & \frac{1}{3} \cdot \left(\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{31} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ & \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{31} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \\ & \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{31} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Para facilitar a visualização, o mesmo raciocínio da EQ. (4.17) pode ser visto na forma matricial nas EQs. (4.18), (4.19), (4.20), (4.21) e (4.22). A EQ. (4.22), análoga do numerador de EQ. (B.45), traz o termo $P \cdot \Omega^{-1}$ que se trata da **matriz de covariâncias encolhida** por tal metodologia na qual P é o número de combinações distintas possíveis para grupos de M ativos. Apesar de ser uma solução para o caso específico de 3 ativos com

subgrupos de 2 ativos, tem-se que a mesma abordagem pode ser empregada para N ativos. A razão para esse argumento é que cada subcarteira é determinada por $(\mathbf{I}_a \Sigma \mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b)^{-1} \mathbf{I}_a \mathbf{1}$, basta apenas definir os componentes do grupo.

$$\mathbf{x} = \frac{1}{3}(\mathbf{I}_{a_1} \Sigma \mathbf{I}_{a_1} + \mathbf{I}_{b_1})^{-1} \mathbf{I}_{a_1} \mathbf{1} + \frac{1}{3}(\mathbf{I}_{a_2} \Sigma \mathbf{I}_{a_2} + \mathbf{I}_{b_2})^{-1} \mathbf{I}_{a_2} \mathbf{1} + \frac{1}{3}(\mathbf{I}_{a_3} \Sigma \mathbf{I}_{a_3} + \mathbf{I}_{b_3})^{-1} \mathbf{I}_{a_3} \mathbf{1} \quad (4.18)$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{3} \underbrace{\left((\mathbf{I}_{a_1} \Sigma \mathbf{I}_{a_1} + \mathbf{I}_{b_1})^{-1} \mathbf{I}_{a_1} + (\mathbf{I}_{a_2} \Sigma \mathbf{I}_{a_2} + \mathbf{I}_{b_2})^{-1} \mathbf{I}_{a_2} + (\mathbf{I}_{a_3} \Sigma \mathbf{I}_{a_3} + \mathbf{I}_{b_3})^{-1} \mathbf{I}_{a_3} \right)}_{\Omega} \cdot \mathbf{1} \quad (4.19)$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{3} \Omega \cdot \mathbf{1} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{x} = (3 \cdot \Omega^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{1} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{x} = (P \cdot \Omega^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{1} \quad (4.22)$$

Os pesos para o portfólio de variância mínima, sem restrição de vendas a descoberto, que utilize do sorteio de ativos, podem ser obtidos pela normalização dos pesos da EQ. (4.22). Portanto, a matriz de covariâncias ($N \times N$) encolhida, a partir de P sorteios possíveis de subcarteiras, é definida na EQ. (4.23).

$$\Sigma_{\infty} = P \cdot \Omega^{-1} \quad (4.23)$$

O método de encolhimento da matriz de covariâncias, proposto nesta seção, mudou o foco da abordagem de seleção de portfólios a partir de subcarteiras de uma perspectiva de modificação de política para uma abordagem baseada em melhoria de insumos.

4.3 Índices de incerteza a partir do *subset bagging*

Conforme revisado por Matos (2017), **índices** são indicadores multidimensionais que reúnem diferentes unidades de análise em uma única medição, usando um método padronizado e proporcionando desejavelmente a capacidade de ser testado. Também podem ser denominados de indicadores compostos.

A EQ. (4.24) apresenta uma formulação genérica da criação de índices, que pode ser vista, por exemplo, no trabalho de Decancq e Lugo (2013) para um contexto de mensuração de indicadores voltados ao bem estar social.

$$I(\mathbf{s}|\beta) = \left[\frac{w_1 I_1(s_1)^{\beta} + \dots + w_P I_P(s_P)^{\beta}}{w_1 + \dots + w_P} \right]^{1/\beta} \quad (4.24)$$

O índice $I(\mathbf{s}|\beta)$ é definido como a média ponderada de ordem β dos P indicadores transformados $I_i(s_i)$. Em que $\mathbf{s}$ é o vetor de indicadores a serem agregados e os pesos w_i são todos não-negativos, além de frequentemente ser assumido que $\sum_{i=1}^P w_i = 1$. Dessa forma o denominador da EQ. (4.24) pode ser ignorado.

O procedimento de ponderação, ou seja, a determinação dos w_i , tem um papel crucial na literatura relativa a indicadores compostos (DECANCQ; LUGO, 2013; MATOS, 2017). Decancq e Lugo (2013) destacam três formas mais comuns de ponderações para a construção de índices, são elas: pesos igualmente ponderados, ponderação baseada em dados e ponderação normativa. A forma de escolha dos pesos representa uma relação de compromisso entre as diversas dimensões analisadas (DECANCQ; LUGO, 2013). Medidas de dispersão podem ser vistas como índices, por exemplo, para o caso de $w_i = \frac{1}{N-1}$, $\beta = 2$ e $I_i(s_i) = (s_i - \bar{s})$ tem-se um caso particular em que o índice se refere ao desvio padrão amostral dos componentes do vetor $\mathbf{s}$.

Estratégias de seleção de portfólios baseadas em reamostragens têm como subproduto um conjunto de pesos, de tal forma que é obtido um vetor $\mathbf{s}$ de estimativas de pesos para cada ativo. Tais conjuntos de pesos podem fornecer indicadores de incerteza por meio de sua dispersão, sejam eles específicos dos ativos ou mais gerais quando são posteriormente agregados em um único indicador. A dispersão dos pesos obtidos por meio de P simulações reflete a instabilidade causada pelo processo de estimação. Essa dispersão é aqui considerada como uma forma de quantificar a incerteza, visto que é esperada uma piora na qualidade dos insumos e uma consequente indefinição nos pesos em momentos de turbulência nos mercados financeiros. Para a presente pesquisa foi escolhida a criação de indicadores de incerteza por ativo tomando-se uma medida de dispersão dos pesos não-paramétrica, a amplitude interquartil do vetor $\mathbf{s}$. Portanto, os indicadores de incerteza foram definidos conforme a EQ. (4.25). De tal forma que o vetor $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_N]$ contém o indicador de incerteza proposto para cada um dos N ativos considerados na amostra.

$$u_i = \text{IQR}(\mathbf{s}) \quad \text{ou} \quad u_i = \text{IQR}([s_i \ s_2 \ \dots \ s_P]) \quad (4.25)$$

Em que IQR é a função que calcula a amplitude interquartil.

Para o caso do método BAG, a amplitude interquartil mede um intervalo de dispersão para as estimativas dos pesos em relação aos seus valores esperados quando são simulados subgrupos de ativos. Quanto mais o subgrupo se aproxima do total de ativos N menor será a amplitude interquartil. Portanto, o tamanho do subgrupo utilizado nas simulações pode impactar na quantificação da incerteza e isso pode ser contornado com uma normalização do vetor $\mathbf{u}$ pelo somatório de todas as incertezas individuais, ou seja, $\mathbf{u}^\top \cdot (\mathbf{u}^\top \mathbf{1})^{-1}$.

A seguir, foram diferenciadas as distribuições de pesos obtidas por métodos de reamostragem considerados nesta pesquisa. Além disso, são exibidos exemplos de como construir indicadores de incerteza a partir de portfólios reamostrados.

4.3.1 Comparativo de distribuições de pesos obtidas por reamostragem

Para fins de comparação, serão calculadas as distribuições dos pesos de portfólios de variância mínima irrestritos obtidos por duas metodologias distintas que apresentam características de reamostragem de dados: (i) MIN_{REF} – portfólios gerados a partir de estimativas provenientes de reamostragens de simulações de distribuições normais multivariadas (MICHAUD; MICHAUD, 1998); (ii) MIN_{BAG} – portfólios de subcarteiras construídas a partir da matriz de retornos originais, mas com sorteio de ativos com reposição (SHEN; WANG, 2017; ARAÚJO; PEREIRA, 2017).

A fim de construir um exemplo ilustrativo, estimou-se a matriz de covariâncias amostral ao considerar a base de dados FF Industry ($N = 10$), fornecida por Kenneth R. French, que contempla portfólios ponderados por valor de 10 setores da indústria dos EUA. Posteriormente, na seção 6.2.2, são apresentadas mais características dessa base de dados utilizadas nesse exemplo.

Simulações foram feitas para diferenciar as abordagens de reamostragens ao utilizar a matriz de covariâncias estimada previamente. Foram simuladas 120 carteiras da abordagem MIN_{REF} e MIN_{BAG} , e seus respectivos resultados estão nas Figuras 33 e 34. Tal número de simulações foi determinado pela seguinte regra: para um número de ativos igual a 10 e um tamanho de subcarteiras definido como 3, obtêm-se 120 combinações distintas de ativos¹. Cada carteira da abordagem MIN_{REF} foi gerada a partir de 216 realizações de uma distribuição normal multivariada, ou seja, 18 anos de dados mensais.

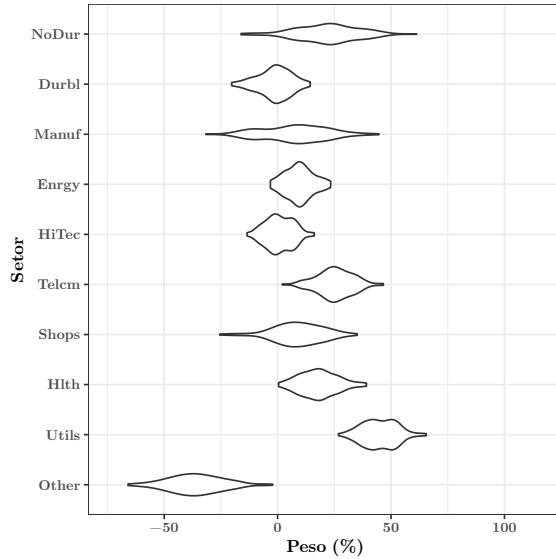
Na Tabela 5, foi conduzido o teste de Shapiro-Wilk (ROYSTON, 1982a,b, 1995) com hipótese nula de normalidade da distribuição dos pesos obtidos nas Figuras 33 e 34. Os resultados não indicaram rejeição da hipótese nula para os pesos obtidos pela estratégia MIN_{REF} . Entretanto, houve rejeição da hipótese nula para a distribuição de alguns dos pesos obtidos pela estratégia MIN_{BAG} ao se considerar um nível de significância menor que 5%. As seguintes distribuições de pesos, com valores-p entre parênteses, rejeitaram tal hipótese a 5%: NoDur (0,026), Hlth (0,041) e Other (0,020). Adicionalmente, na Tabela 5, foi conduzido o teste Kolmogorov-Smirnov (CONOVER, 1999) com hipótese nula de que os pesos obtidos da abordagem MIN_{REF} eram provenientes da mesma distribuição de MIN_{BAG} . As seguintes distribuições de pesos, com valores-p entre parênteses, não rejeitaram tal hipótese a 1%: Durbl (0,492) e HiTec (0,062).

Como complemento, foram simuladas 252 carteiras da abordagem MIN_{REF} e MIN_{BAG} , e seus respectivos resultados estão nas Figuras 35 e 36. Tal número de simulações foi determinado pela seguinte regra: para um número de ativos igual a 10 e um tamanho de subcarteiras definido como 5, obtêm-se 252 combinações distintas de ativos.

Na Tabela 5, foi conduzido o teste de Shapiro-Wilk (ROYSTON, 1982a,b, 1995)

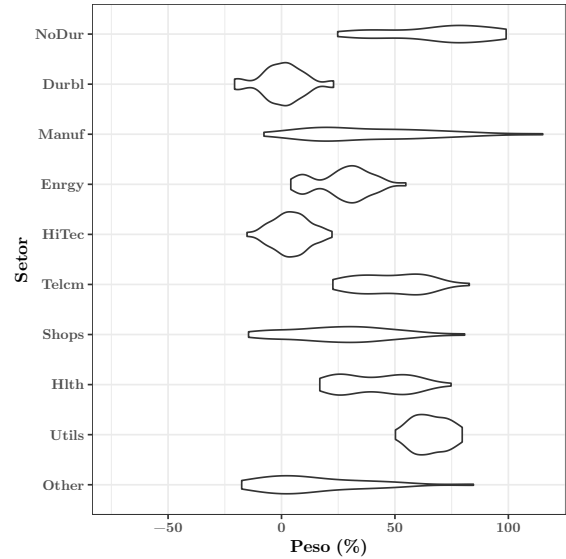
¹ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$

Figura 33 – Distribuição dos pesos estimados da abordagem MIN_{REF} para a base de dados FF Industry (N = 10), considerando 120 simulações



Fonte: Elaboração própria.

Figura 34 – Distribuição dos pesos estimados da abordagem MIN_{BAG} para a base de dados FF Industry (N = 10), considerando 3 como tamanho das subcarteiras e 120 sorteios

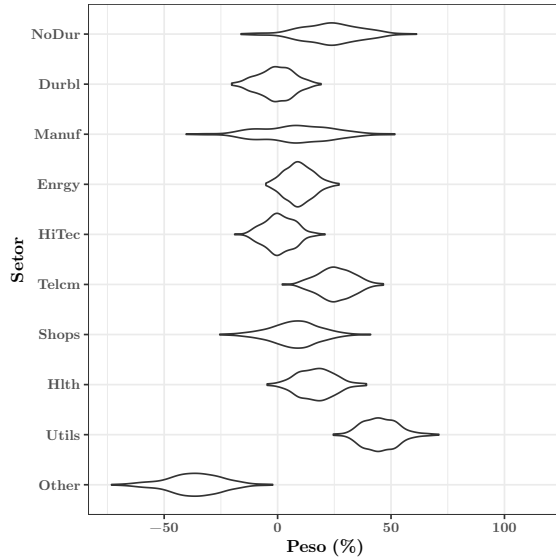


Fonte: Elaboração própria.

com hipótese nula de normalidade da distribuição dos pesos obtidos nas Figuras 35 e 36. Os resultados não indicaram rejeição da hipótese nula para os pesos obtidos pela estratégia MIN_{REF} . Entretanto, houve rejeição da hipótese nula para a distribuição de alguns dos pesos obtidos pela estratégia MIN_{BAG} , ao se considerar um nível de significância menor que 5%. As seguintes distribuições de pesos, com valores-p entre parênteses, rejeitaram tal hipótese a 5%: NoDur (0,000), Manuf (0,033), Enrgy (0,000), HiTec (0,001), Telcm (0,000), Hlth (0,000), Utils (0,048) e Other (0,000). Adicionalmente, na Tabela 5, foi conduzido o teste Kolmogorov-Smirnov (CONOVER, 1999) com hipótese nula de que os pesos obtidos da abordagem MIN_{REF} eram provenientes da mesma distribuição de MIN_{BAG} . A seguinte distribuição de pesos, com valor-p entre parênteses, não rejeitou tal hipótese a 1%: HiTec (0,333).

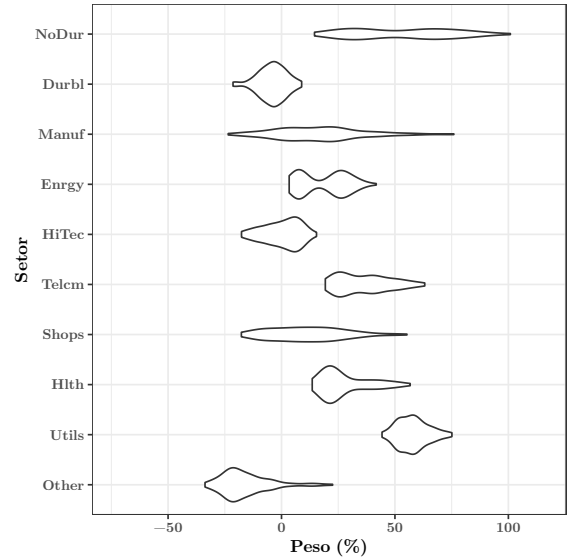
Foram escolhidos como base para a criação do índice de incertezas os pesos da abordagem MIN_{BAG} , entretanto nada se pode afirmar a respeito da superioridade sobre a abordagem MIN_{REF} em termos da qualidade da informação contida nos pesos. Entretanto, o exemplo ilustrativo apontou um fato importante, pois, apesar de REF e BAG serem procedimentos baseados em reamostragem, foram apresentados indícios empíricos que suas **distribuições** de pesos são **distintas**.

Figura 35 – Distribuição dos pesos estimados da abordagem MIN_{REF} para a base de dados FF Industry ($N = 10$), considerando 252 portfólios simulados



Fonte: Elaboração própria.

Figura 36 – Distribuição dos pesos estimados da abordagem MIN_{BAG} para a base de dados FF Industry ($N = 10$), considerando 5 como tamanho das subcarteiras e 252 sorteios



Fonte: Elaboração própria.

4.3.2 Evolução temporal da amplitude interquartil dos pesos do método BAG

Os pesos de portfólios são estimados utilizando uma janela específica de dados (τ). Portanto a amplitude interquartil dos pesos reamostrados varia em função da localização dessa janela no tempo. Pelo método BAG tem-se a determinação do vetor de pesos ($\mathbf{x}$) em cada simulação de acordo com a janela de dados, pois é sorteado um grupo de ativos distintos por vez. Como os índices de incerteza são individualizados por ativo então isso resulta em uma série temporal para cada um dos N ativos. Em função disso, buscou-se a apresentação dessas informações de forma condensada ao exibir graficamente a mediana, 1.º quartil e 3.º quartil dos índices de incerteza para um horizonte móvel (τ) ao longo de bases de dados previamente selecionadas.

Considerou-se as bases de dados Dow Jones ($N = 28$), FF Industry ($N = 49$) e FF Size-B/M ($N = 96$), a fim de construir um exemplo ilustrativo da evolução dos índices de incerteza. Tais bases de dados são posteriormente apresentadas e caracterizadas na Tabela 6 e na seção 6.2. Foram calculados portfólios de variância mínima² para um horizonte móvel de 5 anos ($\tau = 60$). Para cada janela de dados são feitas P simulações para a obtenção de portfólios de variância mínima e a partir desses construiu-se as distribuições dos pesos e consequentemente os índices de incerteza por ativo ($\mathbf{u}$).

² Com permissão de vendas a descoberto ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}$).

Tabela 5 – Análises das distribuições de pesos obtidas por diferentes formas de reamostragem

Setor da Indústria	120 sorteios/simulações			252 sorteios/simulações		
	Teste de Normalidade		Teste de similaridade de distribuições	Teste de Normalidade		Teste de similaridade de distribuições
	MIN_{REF}	MIN_{BAG}		MIN_{REF}	MIN_{BAG}	
NoDur	0,991	0,93 **	0,797 ***	0,995	0,952 ***	0,54 ***
Durbl	0,985	0,968	0,153	0,994	0,983	0,27 ***
Manuf	0,986	0,954	0,508 ***	0,992	0,977 **	0,198 ***
Enrgy	0,987	0,95	0,733 ***	0,994	0,892 ***	0,488 ***
HiTec	0,989	0,99	0,244 *	0,996	0,96 ***	0,103
Telcm	0,994	0,965	0,681 ***	0,997	0,938 ***	0,417 ***
Shops	0,987	0,981	0,492 ***	0,996	0,979 *	0,206 ***
Hlth	0,988	0,937 **	0,617 ***	0,996	0,874 ***	0,433 ***
Utils	0,989	0,973	0,869 ***	0,99 *	0,979 **	0,635 ***
Other	0,995	0,927 **	0,95 ***	0,995	0,912 ***	0,71 ***

Fonte: Elaborada pelo autor.

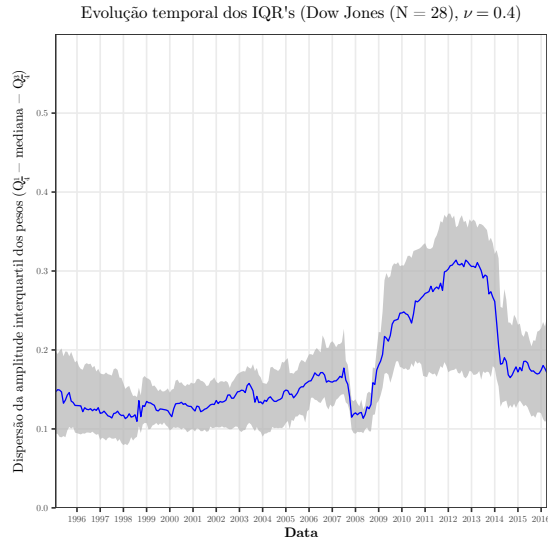
Nota: O tamanho da janela de horizonte móvel de estimação considerada foi de $\tau = 60$ (5 anos). O horizonte de simulação (h) para a fronteira eficiente reamostrada foi de 18 anos. O teste de normalidade aplicado foi o de Shapiro-Wilk. O teste de Kolmogorov-Smirnov para duas amostras independentes pretendeu averiguar se elas provêm de populações com a mesma distribuição. O período de tempo considerado é o de Jan/1970 a Dez/2019. São reportados da seguinte forma os valores-p: * $p < 0,1$, ** $p < 0,05$, *** $p < 0,01$.

As Figuras 37 e 38 apresentam a evolução temporal dos índices de incerteza para a base de dados Dow Jones ($N = 28$). Tais indicadores apontam para um aumento na incerteza ao final de 1999, ao redor de 2009 e ao final de 2011. Além disso, ocorre uma redução na incerteza no final de 2007 e em meados de 2014. Conforme esperado, quando ν cresce tem-se o aumento do tamanho dos subgrupos de ativos e uma consequente redução da dispersão dos pesos. Tal observação vem da comparação entre as Figuras 37 e 38 pois ocorre um achatamento da amplitude dos índices de incerteza em decorrência do aumento de ν .

As Figuras 39 e 40 apresentam a evolução temporal dos índices de incerteza para a base de dados FF Industry ($N = 49$). Tais indicadores apontam para um aumento da incerteza prévio a 1988, ao final de 1998 e ao redor de 2009. Também é verificada uma redução abrupta na incerteza em 1993. Conforme esperado, quando ν cresce tem-se o aumento do tamanho dos subgrupos de ativos e uma consequente redução da dispersão dos pesos. Tal observação vem da comparação entre as Figuras 39 e 40 pois ocorre um achatamento da amplitude dos índices de incerteza em decorrência do aumento de ν .

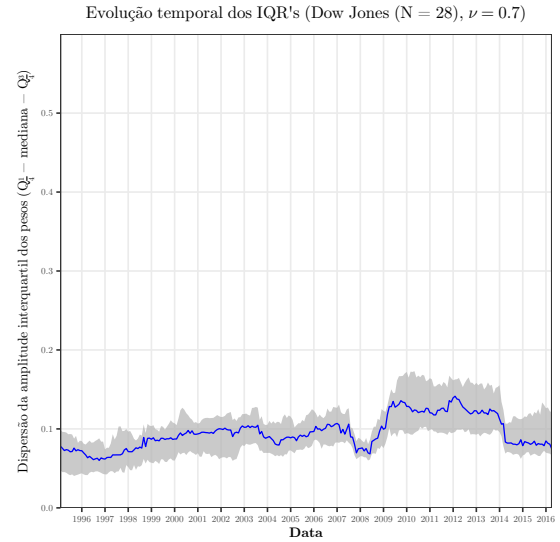
As Figuras 41 e 42 apresentam a evolução temporal dos índices de incerteza para a base de dados FF Size-B/M ($N = 96$). Tais indicadores apontam para um aumento da incerteza prévio a 1988, ao final de 1998 e ao redor de 2009. Também é verificada uma redução abrupta na incerteza em 1993. Conforme esperado, quando ν cresce tem-se o aumento do tamanho dos subgrupos de ativos e uma consequente redução da dispersão dos pesos. Tal observação vem da comparação entre as Figuras 41 e 42 pois ocorre um achatamento da amplitude dos índices de incerteza em decorrência do aumento de ν .

Figura 37 – Evolução temporal da mediana, 1.º quartil e 3.º quartil dos índices de incerteza para a base de dados Dow Jones ($N = 28$) e $\nu = 0,4$.



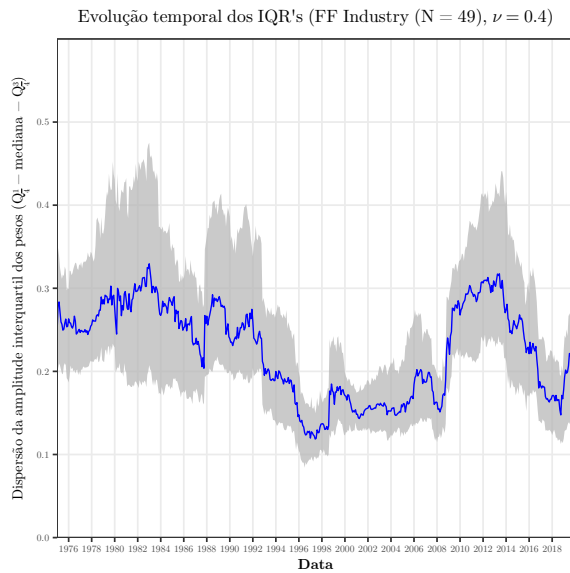
Fonte: Elaboração própria.

Figura 38 – Evolução temporal da mediana, 1.º quartil e 3.º quartil dos índices de incerteza para a base de dados Dow Jones ($N = 28$) e $\nu = 0,7$.



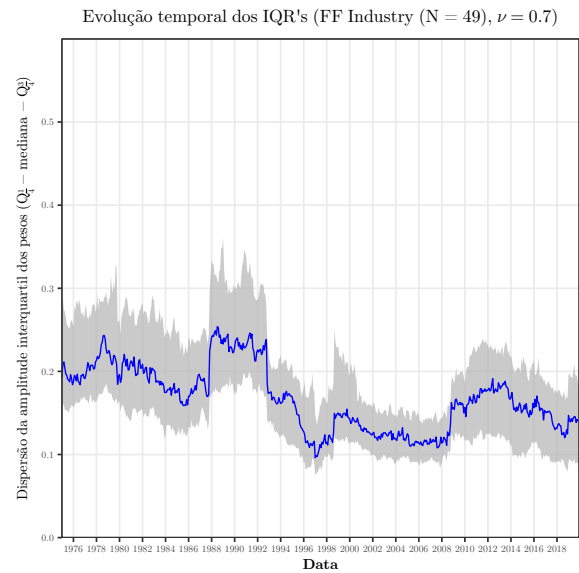
Fonte: Elaboração própria.

Figura 39 – Evolução temporal da mediana, 1.º quartil e 3.º quartil dos índices de incerteza para a base de dados FF Industry ($N = 49$) e $\nu = 0,4$.



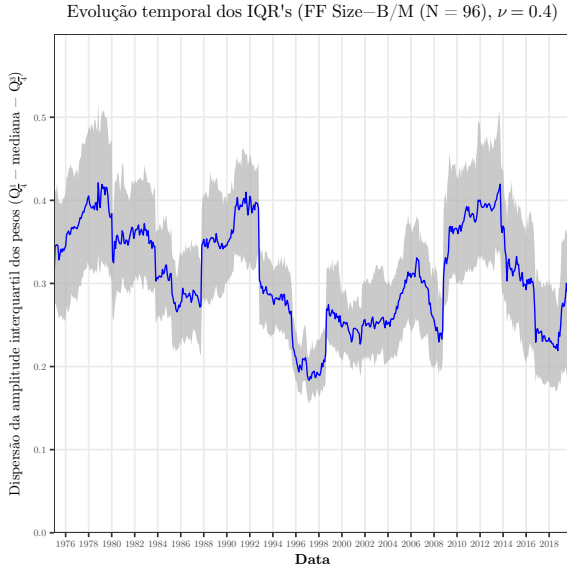
Fonte: Elaboração própria.

Figura 40 – Evolução temporal da mediana, 1.º quartil e 3.º quartil dos índices de incerteza para a base de dados FF Industry ($N = 49$) e $\nu = 0,7$.



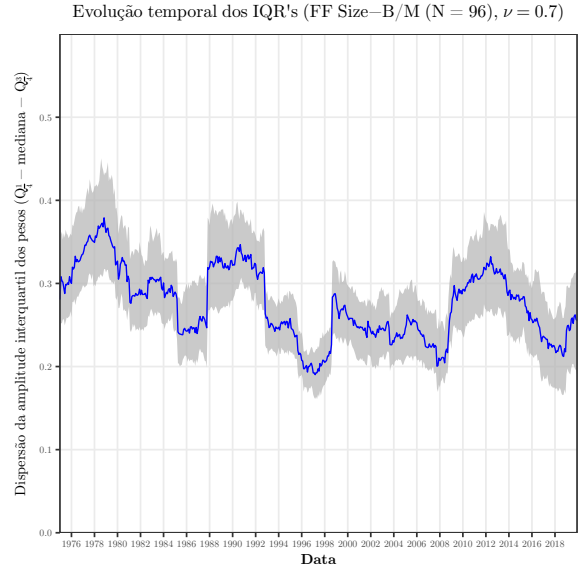
Fonte: Elaboração própria.

Figura 41 – Evolução temporal da mediana, 1.º quartil e 3.º quartil dos índices de incerteza para a base de dados FF Size-B/M ($N = 96$) e $\nu = 0,4$.



Fonte: Elaboração própria.

Figura 42 – Evolução temporal da mediana, 1.º quartil e 3.º quartil dos índices de incerteza para a base de dados FF Size-B/M ($N = 96$) e $\nu = 0,7$.



Fonte: Elaboração própria.

4.3.3 Utilização do vetor de incerteza específica por ativo

Nesta subseção, é proposta a incorporação das incertezas individuais, descritas na Seção 4.3, no processo de seleção de portfólios. Uma forma de utilizar o vetor de incertezas individuais é modificar a função objetivo proposta por de Jong (2018), exibida na EQ. (2.27). Na formulação de de Jong (2018), é considerado que as incertezas/entropias de cada peso tem igual ponderação.

Antes de discutir possibilidades de melhorias, é feita uma modificação na EQ. (2.27) de forma que o termo de entropia se torne mais justo com a inclusão do ajuste por $\frac{1}{N}$, pois $\mathbf{1}^\top \ln(\mathbf{x})$ representa o somatório das entropias dos pesos que cresce com o aumento do número de ativos (N). Tal modificação é apresentada na EQ. (4.26) e será associada à sigla ENT para posteriores referências.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{x}^\top \Sigma \mathbf{x} - \frac{1}{\gamma} \cdot \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\mu} - \theta \cdot \frac{1}{N} \cdot \mathbf{1}^\top \ln(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a:} \quad & \begin{cases} \mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1 \\ \mathbf{x} > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Outra modificação proposta é relativa à troca do vetor unitário do termo “ $\mathbf{1}^\top \ln(\mathbf{x})$ ” por um vetor de incertezas individualizado ($\mathbf{u}$) obtido da dispersão da distribuição dos pesos provenientes da metodologia BAG. Tal vetor necessita ser normalizado para remover

a influência de N , dessa forma tem-se a EQ. (4.27). A EQ. (4.27) será associada à sigla ENT+ em posteriores referências.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{x}^\top \Sigma \mathbf{x} - \frac{1}{\gamma} \cdot \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\mu} - \theta \cdot \frac{\mathbf{u}^\top}{\mathbf{u}^\top \mathbf{1}} \ln(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a:} \quad & \begin{cases} \mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1 \\ \mathbf{x} > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.27)$$

4.4 Recapitulação

Foram apresentadas possibilidades e ganhos do uso de projeções obtidas por meio do sorteio aleatório de subconjuntos de ativos financeiros, inspirado no trabalho de Ho (1998), relativo ao contexto de seleção de portfólios. A união dos pesos de cada projeção, ou subcarteira, leva à construção de distribuições de pesos para cada um dos N ativos disponíveis. Tal procedimento apresentou, em seus resultados, características distintas das que são obtidas pela técnica da Fronteira Eficiente Reamostrada (MICHAUD; MICHAUD, 1998). Verificou-se que informações de tendência central e dispersão podem ser extraídas das distribuições de pesos dos portfólios. Foram propostas formas para que tanto as medidas de tendência central como a de dispersão dos pesos possam ser incorporadas no processo de seleção de portfólios.

O uso de informações de tendência central, das distribuições dos pesos, permite obter portfólios similares em termos média-variância aos tradicionais porém com diversificação distinta. Em um caso particular, em que a medida de tendência central seja a média aritmética, obteve-se a equivalência do uso de múltiplas projeções a uma possibilidade de encolhimento da matriz de covariâncias.

O uso de medidas de dispersão, das distribuições dos pesos, permite a criação de índices de incerteza a respeito de cada ativo. Aumentos nas magnitudes dos indicadores de incerteza propostos, a princípio, coincidem com alguns períodos descritos na literatura como episódios de crises sistêmicas (FRY-MCKIBBIN; HSIAO; TANG, 2014; SILVENNOINEN; THORP, 2013; SANDOVAL; FRANCA, 2012; BALCILAR; OZU, 2013).

Parte III

Metodologia

5 Metodologia

Neste capítulo, são apresentados a escolha e descrição dos dados utilizados neste trabalho bem como os procedimentos metodológicos que guiarão o comparativo de técnicas referentes ao encolhimento da matriz de covariâncias e à seleção de portfólios. Trata-se de uma pesquisa que se caracteriza por ser: (i) descritiva, quanto aos objetivos; (ii) quantitativa, quanto à abordagem; (iii) *ex-post facto*, quanto aos procedimentos (GIL, 2006).

A metodologia proposta para a presente pesquisa visa comparar o modelo presente no objetivo da tese com o tradicional modelo de média-variância e técnicas que tenham em sua construção formas de minimizar os efeitos de erros de estimação, e aumento de desempenho, a que o processo de seleção de portfólios está sujeito. As estratégias de investimento selecionadas para fins de comparativos são definidas na Seção 2.4 e no Capítulo 4. Os resultados serão obtidos por meio de métodos numéricos de otimização, além do cálculo de métricas de desempenho e testes de hipótese associados. São apresentadas três alternativas de estimação da matriz de covariâncias: amostral, encolhimento linear e não-linear. O presente trabalho contemplou o comportamento das estratégias de seleção de portfólios para cenários do mercado financeiro dos EUA e obteve-se resultados para portfólios de ativos financeiros e para portfólios de portfólios. A frequência dos dados utilizada na análise bem como o rebalanceamento dos portfólios é o mensal. É utilizado um procedimento de horizonte móvel sobre os dados para a estimação dos insumos com tamanhos de janela de 5 a 10 anos.

5.1 Dados

As bases de dados selecionadas, para a presente pesquisa, são descritas na Tabela 6. Tratam-se de dados secundários. As bases de dados foram escolhidas, primeiramente, em razão da sua publicidade e para permitir a reprodução e comparação com resultados de trabalhos futuros. As bases de dados selecionadas fornecem dois tipos de informação para o processo de seleção de portfólios: (i) fatores de risco e (ii) um universo de ativos disponíveis.

O trabalho de Bruni *et al.* (2016) disponibilizou seis bases de dados para fins de avaliação de estratégias de investimento, dentre elas, cinco com ativos e uma com portfólios. Para cada base de dados é fornecida, adicionalmente, a série temporal do índice de mercado relacionado.

Outra fonte de dados de ativos de risco que é pública e gratuita é a fornecida por

Kenneth R. French. Trata-se de séries de retornos construídas considerando o viés de sobrevivência, entretanto, são formadas de portfólios que agregam empresas de características comuns. As bases de dados de Kenneth R. French são utilizadas em pesquisas recentes envolvendo estratégias de seleção de portfólios (DAI; WEN, 2018; OLIVARES-NADAL; DEMIGUEL, 2018; KREMER *et al.*, 2020).

Tabela 6 – Lista das bases de dados consideradas na pesquisa

Base de dados	Abreviação	N	Período	Fonte dos dados
3 fatores de risco (FAMA; FRENCH, 1993)	FF3	3+1	Jan/1970-Dez/2019	Kenneth R. French ¹
5 fatores de risco (FAMA; FRENCH, 2015)	FF5	5+1	Jan/1970-Dez/2019	Kenneth R. French ¹
Fator <i>momentum</i> (CARHART, 1997)	Mom	1	Jan/1970-Dez/2019	Kenneth R. French ¹
Componentes do índice de mercado DJIA (Dow Jones Industrial Average)	Dow Jones	28	Fev/1990-Abr/2016	Bruni <i>et al.</i> (2016)
10 portfólios de segmentos da indústria representando o mercado de ações dos EUA	FF Industry	10	Jan/1970-Dez/2019	Kenneth R. French ¹
49 portfólios de segmentos da indústria representando o mercado de ações dos EUA	FF Industry	49	Jan/1970-Dez/2019	Kenneth R. French ¹
100 portfólios de Fama e French (1992) provenientes de firmas ordenadas por tamanho e <i>book-to-market</i>	FF Size-B/M	100	Jan/1970-Dez/2019	Kenneth R. French ¹

Fonte: Elaboração própria.

Nota: Cada base de dados listada recebe uma *abreviação* para facilitar posteriores referências. Os retornos da *proxy* para o ativo livre de risco (r_f) estão incluídos nas bases de dados dos fatores de risco. N é o número de ativos de risco presente na referida base de dados. Período é o intervalo de tempo que compreende os dados.

¹ https://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html.

As bases de dados selecionadas na Tabela 6 são apenas um subgrupo das que foram disponibilizadas em cada fonte. Do conjunto disponibilizado por Bruni *et al.* (2016), destaca-se que o índice Dow Jones é construído por um conjunto de ativos cuja mudança em seus componentes é menos frequente que a dos demais índices de mercado. Dessa forma, espera-se que isso possa minimizar efeitos indesejados do viés de sobrevivência em análises posteriores relativas ao desempenho de estratégias de seleção de portfólios. Com relação às bases de dados fornecidas por Kenneth R. French, e selecionadas na Tabela 6, tem-se que foram escolhidos conjuntos de portfólios com N sendo o maior número possível. Dessa forma, cada portfólio é construído com um número menor de ativos, o que aumenta as chances da presença de risco não sistêmico nos componentes da base de dados.

5.1.1 Efeito Volatilidade

[Zakamulin \(2017\)](#) alerta sobre o fato de que a maior parte dos portfólios, contidos nas bases de dados fornecidas por Kenneth R. French, possuem uma relação negativa entre seus relativos índice de Sharpe e risco. Tal fato faz com que estratégias de seleção de portfólios baseadas no inverso das volatilidades individuais dos ativos tenham desempenho superior ao da estratégia ingênua ($1/N$), como é o caso das propostas de *volatility timing* e *reward-to-risk timing* ([KIRBY; OSTDIEK, 2012](#)). Esse viés, ou vantagem injusta segundo [Zakamulin \(2017\)](#), pode ser controlado observando-se o valor e significância do intercepto da regressão do modelo CAPM com a adição do fator *HML*. A fim de tentar evitar tal viés, tem-se que todas as estratégias de seleção de portfólios consideradas nesta pesquisa utilizam-se da matriz completa de covariâncias para a estimação do risco, pois dependem dos termos além dos presentes em sua diagonal. Com o intuito de evitar análises viesadas, observa-se que, posteriormente, para cada estratégia avaliada, foi estimado o desempenho ajustado perante fatores de risco ($R_M - r_f$, *SMB*, *HML*, *Mom*, *RMW* e *CMA*).

5.2 Delineamento do Comparativo de Encolhimentos

5.2.1 Estimadores da matriz de covariâncias

As estratégias de seleção de portfólios selecionadas tem seus desempenhos avaliados ao considerar três formas de estimativas para a matriz de covariâncias: a amostral e as obtidas por encolhimento linear ou não-linear. O encolhimento apresentado na Seção 4.2 foi avaliado apenas como parte de uma das estratégias de seleção de portfólios e fora aplicado adicionalmente sobre os estimadores escolhidos nesta subseção. Os estimadores escolhidos para tal aplicam as metodologias de encolhimento linear descrita por [Ledoit e Wolf \(2003\)](#) e encolhimento analítico não-linear desenvolvida em [Ledoit e Wolf \(2020\)](#), já apresentadas na Seção 2.3.

Cada elemento da matriz de covariâncias (Σ), apresentada em (B.17), é calculado conforme a EQ. (5.1).

$$cov(r_{it}, r_{jt}) = \sigma_{ij} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (r_{it} - \bar{r}_{it}) (r_{jt} - \bar{r}_{jt}) \quad (5.1)$$

O encolhimento linear utilizado, na presente pesquisa, é referente à EQ. (2.14), e o valor do parâmetro k escolhido é o valor padrão sugerido por [Ledoit e Wolf \(2003\)](#). Já o encolhimento não-linear utilizado refere-se à EQ. (2.15), e seu fator ótimo sugerido para a obtenção de $\tilde{D}$ é o mesmo de [Ledoit e Wolf \(2020\)](#).

5.2.2 Convergência do Encolhimento BAG

Foram avaliadas aproximações do resultado da EQ. (4.23) para um número de sorteios menor que o total de combinações distintas P . A convergência do somatório das subcarteiras foi avaliada de duas formas: (i) a partir da norma-2 da diferença entre a estimativa obtida para um número de sorteios i e a final obtida das P combinações, ou seja, $\|\Sigma_i - \Sigma_\infty\|_2$; (ii) a convergência dos 3 maiores autovalores da matriz estimada obtida para um número de sorteios i (Σ_i) em relação aos da matriz final (Σ_∞). Para avaliar se existe ou não convergência da agregação de estimativas, foi escolhida para o processo de estimação a amostra completa da base de dados FF Industry ($N = 49$). Foram estimadas as matrizes de covariância encolhidas supondo agregações em subgrupos de 3, 4 e 5 ativos. Como a referida base de dados possui 49 ativos, então as combinações distintas para subconjuntos de tamanhos 3, 4 e 5 foram 18.424, 211.876 e 1.906.884, respectivamente.

A semente do gerador de números aleatórios foi fixada em zero, fazendo com que a sequência de números inteiros sorteados “aleatoriamente” seja sempre a mesma. Tal escolha foi feita por questões de repetibilidade dos resultados.

5.2.3 Sensibilidade dos Pesos

Foi realizado um comparativo de diferentes formas de encolhimento da matriz de covariâncias. O comparativo foi feito da perspectiva de sensibilidade dos pesos e utilizando o indicador proposto na seção 3.1.1. Para a avaliação do efeito da sensibilidade dos pesos, foram escolhidos dados reais provenientes da base de dados dos fatores de risco, do modelo FF5, e da base FF Industry ($N = 10$). Tais fontes de dados foram utilizadas a título de exemplo e forneceram comportamentos similares a respeito dos indicadores de sensibilidade utilizados.

Adotou-se a estimação da matriz de covariâncias amostral por meio de janela móvel de tamanho τ , para janelas de tamanho 60, 90 e 120 meses. São apresentados apenas os resultados de $\tau = 60$ e $\tau = 120$, porque os demais levam a observações similares. Vale lembrar que as matrizes de covariâncias encolhidas são calculadas a partir da amostral.

A princípio foi avaliado o impacto do tamanho dos subconjuntos sobre a sensibilidade da matriz encolhida pela metodologia apresentada na EQ. (4.23). Em seguida, foram comparadas, a partir das métricas apresentadas na Seção 3.1.1, a sensibilidade dos pesos de diferentes formas de encolhimento da matriz de covariâncias. A saber, foram comparadas as seguintes formas:

- a) matriz de covariâncias **amostral**;
- b) matriz de covariâncias **diagonal**, que possui a mesma diagonal da amostral porém os termos fora dela são nulos. Tal abordagem é equivalente ao sugerido por Kirby e Ostdiek (2012);

- c) matriz de covariâncias encolhida linearmente (LEDOIT; WOLF, 2003);
- d) matriz de covariâncias encolhida não-linearmente (LEDOIT; WOLF, 2008);
- e) matriz de covariâncias encolhida por agregação de subcarteiras provenientes do sorteio de ativos (“BAG”), de acordo com a EQ. (4.23).

Para cada tipo de estimador ou encolhimento da matriz de covariâncias foi realizada uma comparação por meio de testes de hipótese não paramétricos para identificar diferenças entre eles. Foi utilizado o teste de Kruskal-Wallis (KRUSKAL; WALLIS, 1952; HOLLANDER; WOLFE, 1973) para identificar se existe diferença entre os diferentes tipos de encolhimento da matriz de covariâncias. Caso o teste de Kruskal-Wallis apresente indícios de diferença entre encolhimentos então é conduzido adicionalmente o teste de Conover-Iman (CONOVER; IMAN, 1979; CONOVER, 1999; DINNO, 2017) para múltiplas comparações aos pares.

5.3 Delineamento do Comparativo de Estratégias

5.3.1 Estratégias de seleção de portfólios

As estratégias de seleção de portfólios consideradas para fins de comparativo são apresentadas na Tabela 7. O painel A da Tabela 7 traz estratégias presentes na literatura e revisitadas na Seção 2.4 e o painel B traz estratégias construídas nesta pesquisa e definidas no Capítulo 4. É investigado o efeito, sob as estratégias, da utilização de formas alternativas para obter-se a matriz de covariâncias além da estimação amostral.

Com vistas a construir o comparativo de estratégias, foram escolhidas, primeiramente, as referências ou *benchmarks* que são o portfólio ingênuo (EW) cujos pesos são igualmente distribuídos ($x_i = 1/N$) e uma *proxy* do portfólio de mercado (ponderados pelo valor, do inglês *Value Weighted* (VW)). Tais portfólios servem de referência a ser superada estatisticamente por estratégias mais complexas, assim como sugerido por DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009).

As estratégias ERC e MDP, apresentadas na Seção 2.4.2, são incluídas no comparativo por terem suas estimativas baseadas apenas na matriz de covariâncias, entretanto não buscam diretamente a minimização da variância como a estratégia MIN.

A escolha de técnicas feita na Tabela 7 se deu de forma a compatibilizar as propostas feitas na presente pesquisa com alternativas similares presentes na literatura. Foi avaliado então se o sorteio de ativos promove melhorias nas estratégias MIN e MV. Além disso, será verificado se tais alterações diferem de alternativas presentes na literatura.

Outro comparativo foi feito entre abordagens que utilizam tipos diferentes de procedimentos de reamostragem para melhorar as propriedades dos portfólios estimados:

Tabela 7 – Lista de estratégias de seleção de portfólios consideradas na pesquisa

Estratégia	Parâmetros	Abreviação
Painel A. Estratégias de seleção de portfólios selecionadas da literatura		
<i>Portfólios de referência</i>		
Igualmente (uniformemente) ponderado com rebalanceamento mensal	—	1/N
Ponderado por valor (índice de mercado)	—	VW
<i>Portfólios baseados apenas nas covariâncias entre os ativos⁽¹⁾</i>		
Contribuições de risco igualmente ponderadas (MAILLARD; RONCALLI; TEÏLETCHÉ, 2010)	—	ERC
Máxima diversificação (CHOUEIFATY; COIGNARD, 2008)	—	MDP
<i>Portfólios eficientes com restrições de vendas a descoberto</i>		
Mínima variância	—	MIN
Máxima utilidade (média-variância) para um nível específico de aversão ao risco	$\gamma^{(2)}$	MV
<i>Portfólios eficientes reamostrados (MICHAUD; MICHAUD, 1998) com restrições de vendas a descoberto</i>		
Mínima variância	$h^{(3)}$	MIN-REF
Máxima utilidade (média-variância) para um nível específico de aversão ao risco	γ, h	MV-REF
<i>Portfólios eficientes que incorporam a incerteza dos pesos de forma igualmente ponderada (DE JONG, 2018)⁽¹⁾</i>		
Mínima variância-entropia	$\theta^{(4)}$	MIN-ENT
Máxima utilidade (média-variância-entropia) para um nível específico de aversão ao risco	γ, θ	MV-ENT
Painel B. Estratégias de seleção de portfólios desenvolvidas nesta pesquisa		
<i>Portfólios eficientes agregados de subcarteiras, com restrições de vendas a descoberto, oriundas do bootstrap de ativos</i>		
Bagging de mínima variância	$\nu^{(5)}$	MIN-BAG
Bagging de máxima utilidade (média-variância) para um nível específico de aversão ao risco	γ, ν	MV-BAG
<i>Portfólios eficientes que utilizam o índice de incerteza específico⁽⁶⁾</i>		
Mínima variância-entropia	θ, ν	MIN-ENT+
Máxima utilidade (média-variância-entropia) para um nível específico de aversão ao risco	γ, θ, ν	MV-ENT+

Fonte: Elaboração própria.

Nota: Cada estratégia listada recebe uma *abreviação* para facilitar posteriores referências.

⁽¹⁾ Tais formulações de seleção de portfólios não admitem pesos menores que zero, ou seja, não permitem vendas a descoberto.

⁽²⁾ Parâmetro de aversão ao risco.

⁽³⁾ Horizonte de anos para a simulação de uma distribuição normal multivariada.

⁽⁴⁾ Parâmetro de aversão à incerteza (entropia dos pesos).

⁽⁵⁾ Parâmetro de controle para o tamanho do subconjunto utilizado no *bootstrap* de ativos. O tamanho do subconjunto será N^ν arredondado para o próximo inteiro acima, ou seja, $\lceil N^\nu \rceil$ tal que $\nu \in [0,1]$.

⁽⁶⁾ Índice de incerteza específico por ativo. Trata-se da amplitude interquartil da agregação dos pesos dos portfólios de mínima variância irrestritos provenientes do *bootstrap* de ativos, calculados para um valor específico de ν .

- A abordagem desenvolvida por Michaud e Michaud (1998) que é baseada em reamostragens de uma distribuição normal multivariada. Tal distribuição é gerada a partir do vetor de média e da matriz de covariância obtidos a partir dos dados históricos. Na Tabela 7 tal abordagem é associada à sigla REF;
- A abordagem de sorteio de ativos com agregação dos portfólios resultantes (*subset bootstrap aggregating* ou **subset bagging**). Apenas os ativos são sorteados aleatoriamente, e não os dados provenientes dos mesmos. Há de se ressaltar que existem duas formas distintas para a aplicação de tal técnica: (i) realizar a média de portfólios dos subconjuntos de ativos, ou (ii) realizar o encolhimento da matriz de covariâncias e utilizá-la posteriormente na obtenção de portfólios. A segunda alternativa foi a escolhida nos comparativos subsequentes. Vale ressaltar que, outras possibilidades de *bagging*, como obter múltiplos portfólios provenientes de conjuntos reduzidos de observações, mas com todos os ativos,

não serão avaliados na presente pesquisa. Na Tabela 7 tal abordagem é associada à sigla BAG.

Um último comparativo foi feito entre abordagens que incorporam informações de incerteza na política de seleção de portfólios, ou seja, na função de utilidade:

- a) A proposta feita por [de Jong \(2018\)](#) na qual a incerteza é incorporada à função de utilidade por meio de um parâmetro ajustável θ , uma medida de incerteza relacionada à entropia dos pesos $\mathbf{x}$ e um vetor ponderação uniforme. Na Tabela 7 tal abordagem é associada à sigla ENT;
- b) Uma modificação da função de utilidade proposta por [de Jong \(2018\)](#) a fim de incluir um vetor com ponderação não uniforme para os diferentes pesos x_i presentes no universo de ativos disponíveis. Tal ponderação será obtida por meio do uso da técnica de sorteio de ativos com agregação dos portfólios de variância mínima irrestritos. O índice de incerteza individual do ativo x_i foi estimado pela amplitude interquartil dos pesos obtidos para x_i durante as simulações ao considerar um parâmetro ν específico para determinar o tamanho do subgrupo de ativos. Na Tabela 7 tal abordagem é associada à sigla ENT+.

5.3.2 Avaliação de desempenho das estratégias

Foi utilizado um procedimento de “horizonte móvel” sobre os dados a fim de comparar as diferentes técnicas que serão analisadas. Inicialmente, é escolhida uma janela para realizar o processo de estimação dos insumos do problema de otimização (vetor de médias, matriz de covariâncias, etc). O tamanho da janela de estimação será indicado como τ sendo $\tau < T$, em que T é o número total de retornos presentes na base de dados. Para o presente trabalho, foi escolhida a janela de estimação para $\tau = 60$, o que corresponde a 5 anos, apesar de que os resultados de valores de $\tau = 90$ e $\tau = 120$, foram omitidos pois não apresentaram mudanças aparentes nos resultados. Os valores de $\tau = 60$, $\tau = 120$ e $\tau = 240$ são sugeridos pela literatura quando se trata de dados relativos ao mercado financeiro dos EUA ([DEMIGUEL; GARLAPPI; UPPAL, 2009](#); [DEMIGUEL; NOGALES, 2009](#); [DEMIGUEL; GARLAPPI; NOGALES *et al.*, 2009](#); [KIRBY; OSTDIEK, 2012](#)).

Com relação às bases de dados apresentadas na Tabela 6 é importante destacar que o valor de τ escolhido forneceu matrizes de covariâncias amostrais invertíveis e mal-condicionadas, para as bases Dow Jones e FF Industry, ou não invertíveis, para a base FF Size-B/M, de acordo com o que já foi exposto por [Ledoit e Wolf \(2004a\)](#).

A cada iteração do procedimento de horizonte móvel são construídos os portfólios, das diferentes técnicas, com insumos obtidos por meio da janela de estimação de tamanho τ . O procedimento é repetido incluindo-se o dado do próximo mês e descartando-se o dado do mês mais antigo até que o final da base de dados seja alcançado. Ao final do processo,

são gerados $T - \tau$ vetores de pesos para cada estratégia, isto é, $\mathbf{x}_t^k$ para cada estratégia k e para $t = \tau, \dots, T - 1$.

Manter o portfólio $\mathbf{x}_t^k$ por um mês entrega o retorno fora da amostra no tempo $t + 1$, indicado como r_{t+1}^k , conforme a EQ. (5.2).

$$r_{t+1}^k = (\mathbf{x}_t^k)^\top \mathbf{r}_{t+1} \quad (5.2)$$

em que $\mathbf{r}_{t+1}$ indica o vetor de retornos dos ativos.

5.3.2.1 Indicadores de desempenho

Finalmente, a avaliação do desempenho da k -ésima técnica analisada foi feita utilizando-se critérios baseados nos retornos e pesos obtidos nos testes fora da amostra:

- a) A média dos retornos conforme indicado na EQ. (5.3);

$$\hat{\mu}^k = \frac{1}{T - \tau} \sum_{t=\tau}^{T-1} r_{t+1}^k \quad (5.3)$$

- b) O desvio padrão dos retornos (volatilidade) conforme indicado na EQ. (5.4).

$$\hat{\sigma}^k = \sqrt{\frac{1}{T - \tau - 1} \sum_{t=\tau}^{T-1} (r_{t+1}^k - \hat{\mu}^k)^2} \quad (5.4)$$

Associado à volatilidade, foi feito o teste de hipótese para avaliar diferenças estatísticas entre variâncias de técnicas de investimento (LEDOIT; WOLF, 2011). Tal teste foi construído para ser mais robusto em situações nas quais os retornos possuam caudas mais pesadas que a normal, quando os retornos das estratégias possuam correlação não nula durante períodos comuns ou em casos em que os retornos tenham características de séries temporais. Devido ao fato de que essas propriedades são comuns em dados provenientes de séries financeiras, não é recomendada a utilização do teste-F. A hipótese nula testada é a de que a variância de uma técnica é igual estatisticamente à de uma referência (σ_0^2), conforme exposto na EQ. (5.5);

$$H_0 : \log(\sigma^2) - \log(\sigma_0^2) = 0 \quad (5.5)$$

- c) Índice de Sharpe conforme indicado na EQ. (5.6) que utiliza o retorno médio da *proxy* para o ativo livre de risco ($\bar{r}_f$);

$$\widehat{SR}^k = \frac{\hat{\mu}^k - \bar{r}_f}{\hat{\sigma}^k} \quad (5.6)$$

Associado ao índice de Sharpe, foi feito o teste de hipótese para avaliar diferenças estatísticas entre índices de Sharpe de estratégias de investimento (LEDOIT;

WOLF, 2008). Tal teste é capaz de fornecer informações mais robustas mesmo em cenários nos quais a distribuição dos retornos possua caudas mais pesadas que a normal ou tenha natureza de série temporal. A hipótese nula testada é a de que o índice de Sharpe de uma estratégia é igual estatisticamente ao de uma referência ($\mathcal{SR}_0$), conforme exposto na EQ. (5.7). Para o presente caso, a referência considerada foi o portfólio ingênuo ($1/N$);

$$H_0 : \mathcal{SR} - \mathcal{SR}_0 = 0 \quad (5.7)$$

- d) O índice de diversificação ($\mathcal{DR}$) é obtido conforme a EQ. (2.20) para cada etapa de estimação, ou seja, para cada instante t . Ao final, é reportado o valor médio dos índices de diversificação calculados. Portanto tal indicador avalia as características de diversificação de cada estratégia k **dentro da amostra**;
- e) O *turnover* médio do portfólio ($|\overline{\Delta x}|$), definido como a média da soma das mudanças absolutas dos pesos disponíveis para os N ativos sobre $T - \tau - 1$ períodos, normalizados pelo total de períodos de negociação (DEMIGUEL; GARLAPPI; NOGALES *et al.*, 2009), conforme a EQ. (5.8)

$$\text{Turnover} = |\overline{\Delta x}| = \frac{1}{T - \tau - 1} \sum_{t=\tau}^{T-1} \sum_{i=1}^N (|x_{i,t+1}^k - x_{i,t}^k|) \quad (5.8)$$

em que $x_{i,t}^k$ indica o peso do portfólio no ativo i escolhido no tempo t sob a estratégia k , $x_{i,t+}^k = x_{i,t}^k(1 + r_{i,t+1}) / \sum_{i=1}^N (x_{i,t}^k(1 + r_{i,t+1}))$ é o peso do portfólio antes do rebalanceamento, mas em $t + 1$ e $x_{i,t+1}^k$ é o peso desejado do portfólio no tempo $t + 1$ (depois do rebalanceamento);

- f) O indicador κ_γ , ou custo κ_γ , é uma abordagem baseada em utilidade para medir o ganho de desempenho associado com uma dada estratégia de seleção de portfólios para um estimador da matriz de covariâncias específico (FLEMING; KIRBY; OSTDIEK, 2003, p. 477). É assumido que o investidor possui utilidade em cada período dada pela EQ. (5.9). Para identificar diferenças entre desempenhos de estratégias de seleção de portfólios, tem-se que é comparado o somatório das utilidades em cada período da estratégia k_1 em relação ao somatório das utilidades de uma estratégia k_2 . A taxa κ_γ é aquela que iguala os dois somatórios, ou seja, é o máximo retorno que um investidor de aversão ao risco γ estaria disposto a sacrificar a cada período para trocar para a estratégia k_2 , conforme visto na EQ. (5.10). Pode ser demonstrado que κ_γ é a raiz do polinômio da EQ. (5.11) cujo módulo é menor que 1. O valor de κ_γ é reportado anualizado e em pontos base nas análises posteriores.

$$U(r_{t+1}^k) = W_0 \left((1 + r_{t+1}^k) - \frac{\gamma}{2(1 + \gamma)} (1 + r_{t+1}^k)^2 \right) \quad (5.9)$$

$$\sum_{t=\tau}^{T-1} U(r_{t+1}^{k_1}) = \sum_{t=\tau}^{T-1} U(r_{t+1}^{k_2} - \kappa_\gamma) \quad (5.10)$$

$$\left(\frac{\gamma(T-\tau)}{2(1+\gamma)}\right)\kappa_\gamma^2 + \left((T-\tau) - \frac{\gamma}{(1+\gamma)}\left((T-\tau) + \sum_{t=\tau}^{T-1} r_{t+1}^{k_2}\right)\right)\kappa_\gamma + \left(\sum_{t=\tau}^{T-1} U(r_{t+1}^{k_1}) - \sum_{t=\tau}^{T-1} U(r_{t+1}^{k_2})\right) \quad (5.11)$$

- g) A fim de avaliar aproximadamente o número de ativos presentes nos portfólios, foi criado um indicador denominado $N_{95\%}$. Tal indicador é obtido a partir do ordenamento decrescente dos pesos do vetor $\mathbf{x}$. Em seguida, é identificado o número mínimo de ativos necessários para que o somatório dos pesos ordenados seja maior ou igual a 95%.

As referidas métricas foram avaliadas na ausência de custos de transação. Entretanto, o impacto dos custos de transação foi avaliado para os desempenhos ajustados ao risco, conforme é exposto na subseção 5.3.2.2, ao considerar custo fixo de 50 pontos base (0,5%) proporcional ao *turnover* de cada período na obtenção de retornos líquidos. Os retornos líquidos de custos de transação são definidos na EQ. (5.12) na qual κ é o fator do custo de transação.

$$r_{t+1(net)}^k = (1 + r_{t+1}^k)(1 - \kappa \sum_{i=1}^N (|x_{i,t+1}^k - x_{i,t+}^k|)) - 1 \quad (5.12)$$

5.3.2.2 Desempenho ajustado ao risco

Na Seção 2.2.4, são apresentados os modelos multifatoriais que, a partir da regressão dos retornos brutos e líquidos dos portfólios diante de fatores de risco, tornam possível obter o valor e significância estatística do intercepto (α) de cada estratégia avaliada nos testes fora da amostra. Valores de α positivos e significativos indicam eficácia da estratégia de gestão ativa selecionada ao considerar que seus respectivos erros padrão foram ajustados pelo procedimento HAC de Newey-West (NEWHEY; WEST, 1987, 1994). Além disso, cada técnica de seleção de portfólios foi analisada à luz dos carregamentos apresentados pelos retornos em relação a cada fator de risco. Estudos similares, descritos na Seção 2.2.5, foram feitos relativos ao comportamento de um grupo específico de técnicas perante o modelo FF3 (FAMA; FRENCH, 1993).

A conclusão de Kim, Kim, Ahn *et al.* (2013) e Kim, Kim e Fabozzi (2014b), ao avaliar uma categoria específica de portfólios robustos, é que a robustez está associada à máxima explicação dos retornos por modelos multifatoriais (FF3). Entretanto, a maior parte da literatura revisada nessa pesquisa não considera análises relativas ao carregamento percebido em regressões com modelos multifatoriais (por exemplo, FF3, FFC, FF5, etc.). Para as diversas estratégias avaliadas, buscou-se identificar se a melhoria no desempenho estava vinculada à uma maior associação com fatores de risco, conforme apontado por Kim, Kim, Ahn *et al.* (2013) e Kim, Kim e Fabozzi (2014b).

5.3.3 Abordagem computacional

5.3.3.1 Estimadores da matriz de covariâncias

O algoritmo utilizado para estimar a matriz de covariâncias da EQ. (2.14) foi adaptado do fornecido originalmente em MATLAB por Michael Wolf¹. Tal função é apresentada no Código E.3. O algoritmo utilizado para estimar a matriz de covariâncias da EQ. (2.15) foi adaptado do fornecido originalmente em MATLAB por Michael Wolf¹ e é apresentado no Código E.4. A seleção do estimador de covariâncias efetivamente utilizado é intermediado pela função apresentada no Código E.6.

5.3.3.2 Estratégias de seleção de portfólios

Muitas das estratégias de seleção de portfólios abordadas nesta pesquisa não possuem solução analítica e requerem métodos de otimização numérica para obter soluções aproximadas. Na tentativa de evitar problemas como os expostos na Figura 73, foi escolhida a biblioteca CVXR (FU; NARASIMHAN *et al.*, 2019), que fornece na linguagem R uma interface para os algoritmos desenvolvidos por Grant e Boyd (2008, 2014). A biblioteca CVXR, assim como a CVX, fornece a possibilidade de utilizar diferentes algoritmos de otimização sem necessidades de mudanças drásticas no código. Dentre as alternativas gratuitas disponibilizadas e relacionadas com solução de problemas quadráticos, destacam-se o ECOS (DOMAHIDI; CHU; BOYD, 2013) e o SCS (O'DONOGHUE *et al.*, 2016, 2019). Para a presente pesquisa, foi escolhido o SCS por apresentar comportamento mais estável e consistente quando se avalia a convergência do algoritmo para soluções que atendam as restrições, apesar de que o ECOS apresentou melhores resultados em termos de “valor ótimo”, mas com algumas situações esporádicas de não convergência da solução numérica.

Para calcular os portfólios com contribuições de risco igualmente ponderadas (ERC) propostos por Maillard, Roncalli e Teïletche (2010), foi utilizada a biblioteca fornecida por Feng e Palomar (2018) e Cardoso e Palomar (2019). O algoritmo pode ser verificado no Código E.9.

Para calcular os portfólios de máxima diversificação (MDP), foi utilizado o algoritmo apresentado no Código E.10. Tal código é de elaboração própria, mas baseado nos conceitos expostos por Choueifaty e Coignard (2008).

Os portfólios de mínima variância (MIN) com restrição de sinal ($x_i \geq 0$) foram obtidos utilizando o Código E.7. Já os portfólios eficientes em termos de média-variância para um nível específico de aversão ao risco (MV, γ) e com restrição de sinal ($x_i \geq 0$) foram obtidos utilizando o Código E.8. Vale ressaltar que a localização do máximo em funções quadráticas $f(x)$ é equivalente à minimização de $-f(x)$.

¹ Fonte: <https://www.econ.uzh.ch/en/people/faculty/wolf/publications.html>

As implementações dos portfólios reamostrados e análogos aos eficientes de mínima variância (MIN-REF) e de média-variância (MV-REF) são apresentados em Código E.11 e Código E.12, respectivamente. Foi escolhida uma forma alternativa de obter tais portfólios, pois não foi gerado um arco completo da fronteira para serem selecionados os portfólios desejados posteriormente. Com relação à estratégia MIN-REF, foi considerada a média dos portfólios de mínima variância simulados, sendo que tal abordagem está de acordo com Michaud e Michaud (1998):

Since all simulated efficient frontiers are equally likely, Resampled Efficiency (RE) defines the optimal minimum variance portfolio as the average of the portfolio weights of all the simulated minimum variance portfolios (MICHAUD; MICHAUD, 1998, p. 43).

Outra modificação relativa à estratégia MV-REF, feita no Código E.12, é a realização de média dos portfólios em termos de nível de valor esperado de retorno, e não em níveis de risco. Tal modificação foi necessária, pois os otimizadores disponíveis não forneciam a possibilidade de incluir restrições quadráticas. O número de portfólios reamostrados utilizados foi de 500, conforme sugerido por Michaud e Michaud (1998).

As técnicas MIN-BAG e MV-BAG utilizam as mesmas implementações utilizadas nas técnicas MIN e MV, respectivamente. Entretanto, a matriz de covariâncias passa previamente por encolhimento extra, apresentado na Seção 4.2. Para o cálculo da referida matriz de covariâncias, foram realizados 5000 sorteios de grupos de ativos, e tal implementação seguiu o que é apresentado no Código E.5. O vetor de médias (μ) utilizado nesse caso é o obtido pelo estimador amostral. Alternativas equivalentes, porém, de processamento mais lento podem ser verificadas no Código E.17 e no Código E.18.

As técnicas MIN-ENT e MV-ENT foram propostas por de Jong (2018). Tal abordagem foi modificada de forma a incluir a normalização do vetor de incertezas igualmente ponderado (l). Suas implementações são apresentadas no Código E.13 e no Código E.14. As formulações que incorporam o vetor de incertezas (l) específicos por empresa, MIN-ENT+ e MV-ENT+, utilizam as mesmas funções, mas passam essa informação adicional por meio da variável “uncertainty_vector” que será normalizada internamente. Os vetores de incerteza utilizados para cada instante de tempo utilizam a mesma janela de estimação do vetor de retornos e da matriz de covariâncias, porém são calculados previamente por meio de 5000 simulações de portfólios irrestritos de mínima variância. As funções utilizadas para gerar tais vetores de incerteza são exibidas no Código E.15 e no Código E.16.

Como material suplementar, são apresentadas também as funções para cálculo dos portfólios sugeridos por Kirby e Ostdiek (2012) no Código E.19 e no Código E.20.

5.3.3.3 Indicadores de desempenho

O teste de hipótese relativo às variâncias, conforme proposto em Ledoit e Wolf (2011), também foi disponibilizado por Wolf (2018). O índice de Sharpe ($\mathcal{SR}$) de uma

dada série de retornos foi calculado conforme o Código E.21. Os resultados dos testes de hipótese relacionados com a semelhança entre índices de Sharpe provenientes de duas séries de retorno foram obtidos por meio de bibliotecas fornecidas por Wolf (2018), de acordo com a metodologia proposta em Ledoit e Wolf (2008). Em ambos os casos, existem dois parâmetros arbitrados pelo usuário, o tamanho do bloco e o número de reamostragens por *bootstrap*. Idealmente, o tamanho do bloco deve ser calibrado empiricamente aos retornos de cada série em função da probabilidade de rejeição do teste. Entretanto, foi escolhido um valor fixo, pois esse processo de calibração é lento. Tal escolha gerou, em simulações não reportadas, a redução na capacidade de rejeição do teste (tamanho do teste) para valores abaixo de 5%. Os resultados da presente pesquisa utilizaram o tamanho do bloco de 3 e 5000 reamostragens por *bootstrap*. A implementação do cálculo do índice de diversificação ($\mathcal{DR}$) é apresentada no Código E.22. A implementação do cálculo do custo de indiferença de utilidade (κ_γ) entre duas séries de retornos é exibida no Código E.23. Com relação aos desempenhos ajustados ao risco, foi utilizado o método dos mínimos quadrados ordinários (OLS) para a estimação dos coeficientes das regressões dos modelos fatoriais.

5.4 Limitações

Nesta seção são apontadas limitações da presente pesquisa.

Há que se considerar limitações relativas às bases de dados utilizadas. Não foi evidenciado por Bruni *et al.* (2016) se foi dada alguma atenção ao problema do viés de sobrevivência na construção das bases de dados e por esse motivo somente a base que continha ativos do Dow Jones foi considerada para análises. As bases de dados contendo portfólios, fornecidas por Kenneth R. French, são geradas com a preocupação de reduzir ou eliminar o viés de sobrevivência. Entretanto, uma das consequências do processo de construção de portfólios é a provável redução do risco não-sistêmico (idiossincrático), conforme exposto na Figura 4, portanto tal fato é um ponto negativo das referidas bases de dados. Além disso, outros tipos de vieses ocorrem quando a construção de bases de dados, voltadas a seleção de portfólios, consideram ativos financeiros com características em comum. Isso pode gerar distorções como, por exemplo, o efeito volatilidade (ZAKAMULIN, 2017). O ideal é obter dados históricos que não apresentem viés de volatilidade, que permitam a apropriada diversificação do risco e que possuam características de empresas bem distribuídas (tamanho, *book-to-market*, investimento e lucratividade). Em função de limitações de acesso a dados, até o momento prévio às análises, não foi possível a construção de bases de dados mais adequadas.

Vale ressaltar que a metodologia de Zakamulin (2017) pode ser melhorada na avaliação do efeito volatilidade, pois ela é baseada num formato já ultrapassado equivalente a regredir média e variância. De acordo com Bueno (2015, p. 279), antes dos modelos

GARCH, a relação entre risco e retorno era obtida usando-se dados mensais para calcular a média e a variância anual. Em seguida, procedia-se a uma regressão de média contra variância. Com os modelos GARCH-M, tornou-se desnecessário adotar esse procedimento, pelo qual obrigatoriamente se perdiam as observações mensais incorporadas às médias anuais. Para mais detalhes, veja [Engle, Lilien e Robins \(1987\)](#).

O comparativo de formas de encolhimento da matriz de covariâncias também possui suas limitações. O distanciamento da matriz de covariâncias amostral (norma-2) pode impactar o desempenho de previsão fora da amostra, para o caso que tais matrizes sejam utilizadas como inferência para períodos à frente, entretanto tal efeito não foi avaliado. É recorrente na literatura a avaliação da perda de informação em relação à estimativa amostral, entretanto existem outras métricas para tal ([ENGLE; COLACITO, 2006](#); [LEDOIT; WOLF, 2017](#)). Não foi avaliado se a redução da sensibilidade dos pesos, apresentada na seção 3.1.1, fornece melhoria no erro de previsão fora da amostra das matrizes de covariâncias em relação à estimativa amostral.

As estratégias de seleção de portfólios construídas na presente pesquisa apresentam limitações oriundas do procedimento de *bagging*. Por exemplo, a abordagem de *subset bagging* pode causar algum viés nas estimativas, conforme apresentado na Seção 2.4.3. Entretanto, na presente pesquisa, não foi avaliado o impacto desse viés ou mesmo formas de compensá-lo ([CHEN; HALL, 2003](#)). Um ponto negativo da abordagem de criar subcarteiras com sorteio de ativos é que a quantidade de combinações distintas possíveis cresce exponencialmente com o número de ativos (N). O método de encolhimento da matriz de covariâncias obtido a partir do *bagging*, proposto na Seção 4.2, necessita de uma análise de convergência do somatório das estimativas individuais em relação à matriz de covariâncias “final”, quando número de sorteios realizado é inferior ao valor máximo de combinações distintas.

Os índices de incerteza propostos tem limitações relacionadas a questões de validação externa, ou seja, não foi avaliada sua correlação com índices já existentes como os baseados em incertezas de políticas econômicas ([BAKER; BLOOM; DAVIS, 2016](#)) ou naqueles que consideram a incerteza como reflexo da volatilidade implícita ([CBOE, 2019](#)). O parâmetro ν influencia nos índices de incerteza, ou seja, existe uma influência provocada pelo tamanho do subgrupo de ativos e por isso uma normalização foi feita para tentar minimizar esse efeito. Entretanto, tal tipo de normalização feita pode remover informações relevantes contidas originalmente.

Existem também limitações relativas às métricas escolhidas para avaliar o desempenho das estratégias de seleção de portfólios. A medida de risco utilizada foi o desvio padrão dos retornos, não sendo avaliado o impacto de outras abordagens que considerem assimetria nas distribuições como, por exemplo, o VaR e o CVaR. A diferença estatística entre os interceptos ou dos resíduos das regressões não foi avaliada quando analisado o

desempenho ajustado ao risco das estratégias de seleção de portfólios.

O período da amostra, apesar de longo, também pode ter impactado os resultados, pois foi verificado que, ao longo dos anos, as médias dos retornos sofreram uma queda e, conseqüentemente, com elas caíram o desempenho das estratégias. A escolha da periodicidade mensal, dado o longo período entre observações, pode ter atenuado possibilidades de ganho das estratégias.

A utilização de estimativas que não consideram a dinâmica dos retornos também pode ter omitido informações relevantes dos processos de seleção de portfólios. Por fim, a aproximação da utilidade esperada por uma função de média-variância traz consigo suas próprias limitações que podem não ser desprezíveis em um cenário de aumento de competitividade ao longo dos anos.

Parte IV

Resultados

6 Dados

Neste capítulo são apresentadas características das bases de dados utilizadas no presente trabalho e descritas na seção 5.1. Foram avaliadas as estatísticas descritivas e a verificação do efeito volatilidade para cada uma das bases de dados utilizadas.

6.1 Exclusão de Dados

Previamente às análises, foram removidos 4 portfólios da base de dados FF Size-B/M ($N = 100$). Tal base é construída separando-se as empresas em 100 grupos, sendo que essa separação surge das combinações entre empresas ordenadas por decis de tamanho (valor de mercado, do inglês *Market Equity*) e decis de do índice *book-to-market*. Foram removidos os portfólios “ME7 BM10”, “ME10 BM8”, “ME10 BM9” e “BIG HiBM” (ME10 BM10). O motivo para a remoção se dá pelo fato de que tais portfólios não possuem retornos em certos intervalos de tempo ao longo do período considerado para análises.

6.2 Estatística Descritiva

6.2.1 Dow Jones

A estatística descritiva da base de dados Dow Jones, disponibilizada por [Bruni et al. \(2016\)](#), pode ser verificada na Tabela 8. Os ativos presentes em tal base de dados não possuem informação dos nomes das empresas ou rótulos (*tickers*) dos ativos.

Foi conduzido o teste de Shapiro-Wilk ([ROYSTON, 1982a,b, 1995](#)) com hipótese nula de normalidade das séries de dados presentes na Tabela 8. Os resultados indicaram, em geral, a rejeição da hipótese nula com nível de significância menor que 1%. Os seguintes ativos, com valores-p entre parênteses, não rejeitaram tal hipótese a 1%: 4 (0,033), 9 (0,135), 11 (0,397), 13 (0,013) e 17 (0,072).

6.2.2 FF Industry ($N = 10$)

A estatística descritiva da base de dados FF Industry ($N = 10$), disponibilizada por Kenneth R. French, pode ser verificada na Tabela 9. Os ativos presentes em tal base de dados possuem códigos/abreviações dos setores da indústria norte-americana que foram utilizados para a criação dos respectivos portfólios. Esses portfólios são resultantes da combinação de vários ativos reais agrupados por setor e valor de mercado. Tais códigos/abreviações são baseados nos agrupamentos definidos no *Standard Industrial Classification*.

Tabela 8 – Estatísticas descritivas da base de dados Dow Jones ($N = 28$), em valores percentuais.

Variável	Mín.	$Q_{\frac{1}{4}}$	$Q_{\frac{2}{4}}$	$Q_{\frac{3}{4}}$	Máx.	Méd.	Desv. P.	Assim.	Curt.	Coef. Vari.
Ativo 1	-61,77	-5,52	1,77	10,26	49,44	2,45	13,38	-0,16	2,09	5,47
Ativo 2	-23,15	-3,84	1,63	6,89	42,8	1,87	9,48	0,57	1,52	5,07
Ativo 3	-20,05	-2,64	0,42	3,88	22,69	0,74	5,38	0,14	1,4	7,26
Ativo 4	-18,08	-2,45	0,89	4,29	20,31	1,06	5,67	0,11	0,81	5,34
Ativo 5	-34,6	-3,13	0,94	4,7	47,24	0,89	7,77	0,1	5,49	8,69
Ativo 6	-31,95	-2,3	0,96	4,42	21,06	0,94	5,57	-0,7	4,24	5,95
Ativo 7	-35,87	-3,96	0,85	6,98	44,19	1,12	10,25	0,02	2,01	9,14
Ativo 8	-21,16	-3,54	0,32	4,42	42,93	0,55	6,59	0,92	5,1	12,06
Ativo 9	-18,13	-2,78	1,02	4,97	22,17	1,05	6,31	0,14	0,63	5,99
Ativo 10	-20,7	-2,62	0,92	4,06	24,05	0,96	5,98	0,11	1,73	6,23
Ativo 11	-21,69	-3,52	1,37	5,13	21,39	1,08	7	0,04	0,38	6,47
Ativo 12	-23,18	-2,96	0,4	4,31	24,75	0,73	6,31	0,16	1,34	8,66
Ativo 13	-22,7	-4	1,9	7,06	30,75	1,76	8,11	0,14	0,86	4,62
Ativo 14	-29,14	-3,18	1,09	5,58	22,24	1,09	7,7	-0,31	1,12	7,09
Ativo 15	-45,73	-4,75	1,93	8,19	36,45	1,7	11,14	-0,16	1,26	6,57
Ativo 16	-26,56	-3,92	0,61	4,88	41,49	0,9	8,3	0,54	2,72	9,24
Ativo 17	-28,31	-3,24	0,76	5,34	22,86	0,81	7,54	-0,23	0,71	9,34
Ativo 18	-34,73	-4,19	1,66	8,9	50,42	2,61	11,92	0,31	1,14	4,56
Ativo 19	-40,03	-2,26	2,89	7,62	41,89	2,39	9,81	-0,53	3,31	4,11
Ativo 20	-25,67	-3,02	0,97	4,95	21,98	1,1	6,46	-0,06	1,3	5,9
Ativo 21	-15,46	-2,58	1,08	3,92	28,6	0,89	5,94	0,33	1,76	6,7
Ativo 22	-37,36	-2,85	2,06	6,49	40,35	1,82	8,84	-0,12	2,65	4,85
Ativo 23	-36,72	-3,61	1,5	6,53	29,31	1,01	8,57	-0,38	1,62	8,49
Ativo 24	-30,92	-2,4	1,8	5,46	29,17	1,18	7,1	-0,39	2,33	5,99
Ativo 25	-34,86	-3,6	0,99	5,91	79,95	1,11	9,79	1,36	13,75	8,85
Ativo 26	-30,63	-3,95	0,92	4,98	45,87	0,72	8,08	0,48	3,75	11,28
Ativo 27	-34,27	-4,81	1,25	6,9	42,33	1,22	9,68	0,33	2,55	7,95
Ativo 28	-25,67	-3,42	0,65	4,68	51,53	0,92	7,41	1,01	7,7	8,02

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: Os dados dos ativos compreendem o período de Fev/1990 a Abr/2016 com 315 observações mensais por ativo. As estatísticas apresentadas são: Mínimo (Mín.), 1º Quartil ($Q_{\frac{1}{4}}$), Mediana ($Q_{\frac{2}{4}}$), 3º Quartil ($Q_{\frac{3}{4}}$), Máximo (Máx.), Média (Méd.), Desvio Padrão Amostral (Desv. P.), Assimetria (Assim.), Curtose (Curt.) e Coeficiente de Variação (Coef. Vari.).

Os 10 setores¹ com suas respectivas abreviações, cujas estatísticas descritivas são exibidas na Tabela 9, são os seguintes: NoDur (*Consumer Nondurables*), Durbl (*Consumer Durables*), Manuf (*Manufacturing*), Enrgy (*Oil, Gas, and Coal Extraction and Products*), HiTec (*Business Equipment*), Telcm (*Telephone and Television Transmission*), Shops (*Wholesale, Retail, and Some Services*), Hlth (*Healthcare, Medical Equipment, and Drugs*), Utils (*Utilities*), Other (*Mines, Constr, BldMt, Trans, Hotels, Bus Serv, Entertainment, Finance*).

Foi conduzido o teste de Shapiro-Wilk (ROYSTON, 1982a,b, 1995) com hipótese nula de normalidade das séries de dados presentes na Tabela 9. Os resultados de todos os testes retornaram valor-p menor que 1%, portanto, rejeitando a hipótese de normalidade nas séries avaliadas para tal nível de significância.

6.2.3 FF Industry ($N = 49$)

A estatística descritiva da base de dados FF Industry ($N = 49$), disponibilizada por Kenneth R. French, pode ser verificada na Tabela 10. Os ativos presentes em tal base de dados possuem códigos/abreviações dos setores da indústria norte-americana que

¹ Fonte: <https://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/ftp/Siccodes49.zip>

Tabela 9 – Estatísticas descritivas da base de dados FF Industry (N = 10), em valores percentuais.

Variável	Mín.	$Q_{\frac{1}{4}}$	$Q_{\frac{2}{4}}$	$Q_{\frac{3}{4}}$	Máx.	Méd.	Desv. P.	Assim.	Curt.	Coef. Vari.
NoDur	-21,03	-1,29	1,09	3,76	18,88	1,08	4,29	-0,31	2,19	3,98
Durbl	-32,63	-2,78	0,88	4,44	42,63	0,87	6,4	0,09	4,67	7,33
Manuf	-27,33	-1,84	1,24	4,1	17,51	1	4,99	-0,51	2,58	5,01
Enrgy	-18,41	-2,41	0,92	4,65	24,56	1	5,65	0,02	1,07	5,64
HiTec	-25,96	-2,81	1,17	4,78	20,76	0,98	6,54	-0,24	1,31	6,64
Telcm	-16,35	-1,7	1,16	3,84	21,36	0,96	4,71	-0,26	1,21	4,9
Shops	-28,23	-1,96	1	4,42	25,86	1,05	5,21	-0,29	2,49	4,95
Hlth	-20,46	-1,88	1,1	3,93	29,52	1,03	4,89	0,02	2,54	4,73
Utils	-12,65	-1,45	1,04	3,42	18,84	0,92	4,03	-0,15	1,1	4,37
Other	-23,58	-2,09	1,41	4,14	20,22	0,94	5,28	-0,49	1,96	5,62

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: Os dados dos portfólios compreendem o período de Jan/1970 a Dez/2019 com 600 amostras mensais. As estatísticas apresentadas são: Mínimo (Mín.), 1º Quartil ($Q_{\frac{1}{4}}$), Mediana ($Q_{\frac{2}{4}}$), 3º Quartil ($Q_{\frac{3}{4}}$), Máximo (Máx.), Média (Méd.), Desvio Padrão Amostral (Desv. P.), Assimetria (Assim.), Curtose (Curt.) e Coeficiente de Variação (Coef. Vari.).

foram utilizados para a criação dos respectivos portfólios. Esses portfólios são resultantes da combinação de vários ativos reais agrupados por setor e valor de mercado. Tais códigos/abreviações são baseados nos agrupamentos definidos no *Standard Industrial Classification*.

Os 49 setores² com suas respectivas abreviações, cujas estatísticas descritivas são exibidas na Tabela 10, são os seguintes: Agric (*Agriculture*), Food (*Food Products*), Soda (*Candy & Soda*), Beer (*Beer & Liquor*), Smoke (*Tobacco Products*), Toys (*Recreation*), Fun (*Entertainment*), Books (*Printing and Publishing*), Hshld (*Consumer Goods*), Clths (*Apparel*), Hlth (*Healthcare*), MedEq (*Medical Equipment*), Drugs (*Pharmaceutical Products*), Chems (*Chemicals*), Rubbr (*Rubber and Plastic Products*), Txtls (*Textiles*), BldMt (*Construction Materials*), Cnstr (*Construction*), Steel (*Steel Works Etc*), FabPr (*Fabricated Products*), Mach (*Machinery*), ElcEq (*Electrical Equipment*), Autos (*Automobiles and Trucks*), Aero (*Aircraft*), Ships (*Shipbuilding, Railroad Equipment*), Guns (*Defense*), Gold (*Precious Metals*), Mines (*Non-Metallic and Industrial Metal Mining*), Coal (*Coal*), Oil (*Petroleum and Natural Gas*), Util (*Utilities*), Telcm (*Communication*), PerSv (*Personal Services*), BusSv (*Business Services*), Hardw (*Computers*), Softw (*Computer Software*), Chips (*Electronic Equipment*), LabEq (*Measuring and Control Equipment*), Paper (*Business Supplies*), Boxes (*Shipping Containers*), Trans (*Transportation*), Whlsl (*Wholesale*), Rtail (*Retail*), Meals (*Restaurants, Hotels, Motels*), Banks (*Banking*), Insur (*Insurance*), RIEst (*Real Estate*), Fin (*Trading*), Other (*Almost Nothing*).

Foi conduzido o teste de Shapiro-Wilk (ROYSTON, 1982a,b, 1995) com hipótese nula de normalidade das séries de dados presentes na Tabela 10. Os resultados de todos os testes retornaram valor-p menor que 1%, portanto, rejeitando a hipótese de normalidade nas séries avaliadas para tal nível de significância.

² Fonte: <https://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/ftp/Siccodes49.zip>

Tabela 10 – Estatísticas descritivas da base de dados FF Industry (N = 49), em valores percentuais.

Variável	Mín.	$Q_{\frac{1}{4}}$	$Q_{\frac{2}{4}}$	$Q_{\frac{3}{4}}$	Máx.	Méd.	Desv. P.	Assim.	Curt.	Coef. Vari.
Agric	-29,06	-2,83	0,82	4,67	28,88	0,94	6,42	0,02	1,79	6,8
Food	-17,88	-1,22	1,02	3,51	19,59	1,08	4,48	0,11	2,09	4,13
Soda	-26,26	-2,13	1,36	4,59	38,27	1,12	6,45	0,14	4,15	5,77
Beer	-19,76	-1,66	1,15	4,25	26,09	1,12	5,2	-0,05	2,5	4,63
Smoke	-24,93	-2,44	1,84	5,06	32,47	1,39	6,24	-0,15	2,47	4,48
Toys	-34,41	-3,62	1,08	5,32	26,88	0,82	7,13	-0,25	1,36	8,69
Fun	-31,86	-2,65	1,45	5,83	38,77	1,34	7,75	-0,22	2,98	5,78
Books	-25,19	-2,5	0,52	4,25	30,74	0,86	5,89	0,03	2,07	6,88
Hshld	-21,64	-1,74	1,09	3,63	18,54	0,87	4,66	-0,29	2,01	5,34
Clths	-30,9	-2,56	1,1	4,9	32,37	1,12	6,6	-0,06	2,45	5,89
Hlth	-39,11	-3,64	1,06	5,52	36,47	0,97	8,04	-0,07	2,74	8,25
MedEq	-20,56	-1,94	1,34	4,4	21,03	1,03	5,26	-0,4	1,4	5,11
Drugs	-19,11	-1,91	1,05	4,14	31,8	1,06	5,03	0,14	2,7	4,73
Chems	-28	-2,29	1,12	4,33	22,05	1,03	5,67	-0,18	2,24	5,53
Rubbr	-30,57	-2,34	1,32	4,38	31,95	1,03	5,98	-0,26	2,94	5,81
Txtls	-32,51	-2,88	1,17	5,01	59,04	0,97	7,39	0,4	8,89	7,65
BldMt	-30,67	-2,24	1,23	4,46	35,51	1,02	6,28	-0,08	3,84	6,15
Cnstr	-31,1	-3,39	0,88	5,28	24,01	0,91	7,18	-0,13	0,97	7,87
Steel	-32,91	-3,8	0,69	5,18	30,67	0,73	7,66	-0,18	1,95	10,5
FabPr	-26,67	-3,65	0,66	5,25	30,38	0,74	7,28	-0,13	1,26	9,85
Mach	-31,19	-2,73	1,34	4,82	23,05	1,02	6,38	-0,42	2,26	6,28
ElcEq	-32,2	-2,48	0,99	5,08	23,21	1,15	6,33	-0,23	1,63	5,5
Autos	-36,41	-3,02	0,85	4,75	49,57	0,85	6,96	0,2	5,62	8,16
Aero	-30,23	-2,38	1,52	5,09	25,33	1,24	6,65	-0,36	1,9	5,34
Ships	-32,27	-2,98	1,18	5,21	29,15	1,09	7,39	-0,05	1,5	6,8
Guns	-30,08	-2,48	1,44	5,22	32,64	1,34	6,5	-0,22	2,36	4,84
Gold	-33,57	-5,59	0,55	6,71	78,68	0,95	10,77	0,77	4,64	11,31
Mines	-34,75	-3,52	0,55	5,69	26,91	1,01	7,6	-0,29	1,75	7,53
Coal	-37,94	-5,42	0,6	6,74	46,06	0,9	10,82	0,2	1,64	11,98
Oil	-18,29	-2,43	0,96	4,55	24,66	1	5,64	0,03	1,04	5,63
Util	-12,65	-1,45	1,04	3,42	18,84	0,92	4,03	-0,15	1,1	4,37
Telcm	-16,35	-1,7	1,16	3,84	21,36	0,96	4,71	-0,26	1,21	4,9
PerSv	-28,25	-3,19	0,86	4,71	24,47	0,62	6,63	-0,3	1,72	10,63
BusSv	-27,67	-2,27	1,48	4,46	25,34	0,96	5,67	-0,45	2,44	5,94
Hardw	-33,5	-3,18	0,78	5,04	25,16	0,9	7,2	-0,19	1,65	7,96
Softw	-35,94	-4,47	1,53	5,81	73,65	1,06	10,32	0,6	5,27	9,75
Chips	-32,23	-3,19	1,62	5,9	27,27	1,11	7,55	-0,39	1,61	6,77
LabEq	-30,15	-3,29	1,28	5,06	21,56	1,06	7,09	-0,2	1,2	6,7
Paper	-26,35	-2,46	1,12	4,17	24,27	0,97	5,55	0,08	2,3	5,74
Boxes	-28,24	-2,15	1,11	4,36	20,87	1	5,75	-0,41	1,92	5,75
Trans	-27,9	-2,42	1,25	4,55	19,02	1	5,81	-0,27	1,29	5,83
Whlsl	-28,65	-2,18	1,25	4,01	18,12	0,96	5,44	-0,36	2,63	5,69
Rtail	-29,14	-2,08	0,84	4,58	27,07	1,09	5,51	-0,2	2,1	5,06
Meals	-31,33	-2,39	1,45	4,5	27,96	1,07	5,98	-0,57	3,03	5,56
Banks	-27,24	-2,19	1,17	4,81	25,06	1,01	6,05	-0,32	2,05	5,98
Insur	-26,46	-1,87	1,51	4,47	26,84	1,08	5,48	-0,3	2,27	5,09
RIEst	-39,42	-2,98	0,67	4,63	69,23	0,57	7,79	0,88	12,97	13,65
Fin	-25,91	-2,41	1,42	5	19,57	1,11	6,23	-0,43	1,29	5,62
Other	-27,2	-3,02	0,78	4,53	21,22	0,52	6,77	-0,5	1,83	13

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: Os dados dos portfólios compreendem o período de Jan/1970 a Dez/2019 com 600 observações mensais por ativo. As estatísticas apresentadas são: Mínimo (Mín.), 1º Quartil ($Q_{\frac{1}{4}}$), Mediana ($Q_{\frac{2}{4}}$), 3º Quartil ($Q_{\frac{3}{4}}$), Máximo (Máx.), Média (Méd.), Desvio Padrão Amostral (Desv. P.), Assimetria (Assim.), Curtose (Curt.) e Coeficiente de Variação (Coef. Vari.).

6.2.4 FF Size-B/M (N = 100)

A estatística descritiva da base de dados FF Size-B/M (N = 100), disponibilizada por Kenneth R. French, pode ser verificada na Tabela 11. Os ativos presentes em tal base de dados são portfólios gerados a partir do agrupamento de empresas, da indústria norte-americana, feito com base no tamanho e no índice *book-to-market*. Conforme mencionado anteriormente, foram removidos os portfólios “ME7 BM10”, “ME10 BM8”, “ME10 BM9”

e “BIG HiBM” (ME10 BM10) por razão de dados faltantes.

Foi conduzido o teste de Shapiro-Wilk (ROYSTON, 1982a,b, 1995) com hipótese nula de normalidade das séries de dados presentes na Tabela 11. Os resultados de todos os testes retornaram valor-p menor que 1%, portanto, rejeitando a hipótese de normalidade nas séries avaliadas para tal nível de significância.

Tabela 11 – Estatísticas descritivas da base de dados FF Size-B/M (N = 96), em valores percentuais.

(continua)										
Variável	Mín.	$Q_{\frac{1}{4}}$	$Q_{\frac{2}{4}}$	$Q_{\frac{3}{4}}$	Máx.	Méd.	Desv. P.	Assim.	Curt.	Coef. Vari.
SMALL LoBM	-34,57	-4,72	0,19	4,33	43,6	0,2	8,28	0,15	3,01	41,66
ME1 BM2	-30,69	-3,7	0,66	4,87	34,82	0,73	7,77	0,07	2,38	10,61
ME1 BM3	-31,93	-3,18	1,04	5,42	49,42	1	7,64	0,23	4,28	7,63
ME1 BM4	-30,6	-2,6	1,2	5,39	28,23	1,08	6,8	-0,27	1,8	6,29
ME1 BM5	-28,69	-2,45	0,91	4,88	26,38	1,04	6,37	-0,17	2,03	6,11
ME1 BM6	-27,99	-2,11	1,15	4,86	29,49	1,17	6,09	0,01	2,83	5,22
ME1 BM7	-29,23	-1,83	1,46	4,15	36,53	1,26	5,94	0,19	4,57	4,73
ME1 BM8	-28,05	-1,78	1,42	4,46	27,26	1,27	5,62	-0,2	2,9	4,43
ME1 BM9	-27,25	-1,74	1,43	4,4	31,03	1,43	5,74	-0,09	3,42	4,03
SMALL HiBM	-26,43	-2,03	1,15	4,74	35,23	1,39	6,33	0,03	3,77	4,56
ME2 BM1	-37,31	-4,77	0,74	5,9	39,03	0,49	8,7	-0,08	2,04	17,67
ME2 BM2	-31,2	-3,65	1,14	5,6	37,3	0,93	7,74	0,14	2,28	8,35
ME2 BM3	-31,06	-2,98	1,35	5,64	42,58	1,19	7,37	0,28	3,88	6,19
ME2 BM4	-30,29	-2,83	1,26	5,34	46,08	1,17	7,05	0,27	4,67	6,05
ME2 BM5	-30,44	-2,67	0,95	5,42	26,97	1,16	6,32	-0,19	2,09	5,46
ME2 BM6	-28,03	-2,25	1,45	4,58	29,05	1,05	5,92	-0,26	2,52	5,65
ME2 BM7	-28,2	-1,85	1,4	4,84	28,07	1,36	5,87	-0,15	2,51	4,31
ME2 BM8	-29,73	-1,8	1,31	4,91	25,6	1,34	5,92	-0,22	2,77	4,43
ME2 BM9	-31,62	-1,86	1,52	4,79	33,62	1,37	5,95	-0,28	3,69	4,35
ME2 BM10	-31,17	-2,46	1,57	5,37	37,48	1,37	7,08	-0,28	2,52	5,18
ME3 BM1	-34,58	-3,97	0,67	5,4	41,93	0,71	8,29	-0,07	2,11	11,66
ME3 BM2	-33,66	-3,57	1,43	5,56	25,61	0,99	7,23	-0,43	1,51	7,33
ME3 BM3	-30,81	-2,93	1,6	5,59	22,83	1,29	6,81	-0,25	1,28	5,27
ME3 BM4	-35,58	-2,48	1,36	4,96	30,35	1,04	6,18	-0,5	3,03	5,93
ME3 BM5	-29,7	-1,89	1,2	4,47	27,32	1,11	5,88	-0,42	2,61	5,29
ME3 BM6	-27,86	-1,71	1,58	4,98	22,5	1,38	5,9	-0,55	2,25	4,27
ME3 BM7	-22,33	-1,78	1,67	4,82	27,63	1,27	5,53	-0,39	1,9	4,36
ME3 BM8	-23,44	-1,58	1,53	4,64	33,04	1,22	5,55	-0,19	3,17	4,56
ME3 BM9	-25,99	-1,74	1,66	5,07	27,98	1,45	5,93	-0,38	2,74	4,1
ME3 BM10	-29,3	-2,5	1,72	5,26	31,35	1,29	7,08	-0,27	2,5	5,48
ME4 BM1	-32,96	-3,73	1,34	5,35	27,86	0,83	7,65	-0,41	1,29	9,27
ME4 BM2	-29,33	-3,17	1,27	5,33	22,64	0,98	6,68	-0,32	1,14	6,84
ME4 BM3	-29,65	-2,73	1,58	4,98	27,51	1,08	6,34	-0,45	2,03	5,87
ME4 BM4	-30,99	-2,48	1,49	4,53	29,6	1,1	6,13	-0,3	3,1	5,58
ME4 BM5	-26,7	-2,04	1,54	4,67	30,93	1,15	5,77	-0,33	2,36	5,02
ME4 BM6	-29,57	-1,68	1,56	4,26	25,26	1,2	5,42	-0,51	2,75	4,53
ME4 BM7	-27,1	-1,76	1,75	4,46	26,08	1,29	5,45	-0,52	2,67	4,24
ME4 BM8	-25,12	-1,92	1,57	4,84	24,86	1,23	5,72	-0,53	2,17	4,63
ME4 BM9	-29,09	-1,87	1,78	5,16	30,85	1,44	5,98	-0,37	2,87	4,16
ME4 BM10	-31,77	-3,18	1,25	5,1	40,21	0,9	7,77	-0,13	3,38	8,68
ME5 BM1	-28,99	-3,62	1,1	5,14	28,31	0,72	7,6	-0,24	1,21	10,61
ME5 BM2	-33,76	-2,6	1,01	5,15	35,15	1,02	6,61	-0,28	2,72	6,48
ME5 BM3	-32,2	-2,57	1,37	4,7	25,13	1,07	6,11	-0,42	2,28	5,71
ME5 BM4	-32,41	-1,96	1,76	4,89	27,35	1,43	5,97	-0,43	2,89	4,18
ME5 BM5	-24,89	-2,06	1,42	4,68	25,92	1,18	5,62	-0,41	1,84	4,74
ME5 BM6	-25,02	-1,74	1,57	4,58	22,51	1,21	5,55	-0,5	2,47	4,59

Tabela 11 – Estatísticas descritivas da base de dados FF Size-B/M (N = 96), em valores percentuais.

Variável	Mín.	(conclusão)								
		$Q_{\frac{1}{4}}$	$Q_{\frac{2}{4}}$	$Q_{\frac{3}{4}}$	Máx.	Méd.	Desv. P.	Assim.	Curt.	Coef. Vari.
ME5 BM7	-21,47	-1,99	1,47	4,44	25,81	1,24	5,32	-0,14	1,83	4,28
ME5 BM8	-25,73	-1,78	1,36	4,41	26,87	1,26	5,29	-0,29	2,77	4,2
ME5 BM9	-27,75	-1,52	1,76	4,54	30,41	1,37	5,69	-0,26	2,82	4,17
ME5 BM10	-27,57	-2,6	1,3	5,6	33,01	1,37	7,3	-0,12	2,43	5,34
ME6 BM1	-28,11	-3,56	1,19	5,75	31,11	0,79	7,43	-0,28	1,26	9,42
ME6 BM2	-29,2	-2,67	1,46	4,94	21,87	1,04	6,21	-0,52	2,12	5,95
ME6 BM3	-28,87	-2,34	1,36	4,74	25,95	1,14	5,85	-0,31	2,13	5,11
ME6 BM4	-23,09	-2,11	1,33	4,76	21,77	1,12	5,42	-0,54	2,01	4,84
ME6 BM5	-24,62	-1,81	1,16	4,27	21,79	1,07	5,31	-0,22	1,69	4,96
ME6 BM6	-22,57	-1,83	1,15	4,38	22,37	1,07	5,19	-0,29	1,54	4,87
ME6 BM7	-26	-1,47	1,39	4,28	23,15	1,27	5,28	-0,2	2,37	4,15
ME6 BM8	-23,64	-2,13	1,29	4,24	21,89	1,12	5,27	-0,13	1,8	4,73
ME6 BM9	-24,59	-1,92	1,59	4,87	26,45	1,34	5,81	-0,39	2,32	4,35
ME6 BM10	-28,45	-2,92	1,68	5,37	30,35	1,39	7,05	0,05	1,58	5,07
ME7 BM1	-25,72	-3,05	1,39	5,15	40,41	1,11	6,7	0,16	2,94	6,05
ME7 BM2	-26,16	-2,24	1,07	4,69	22,96	1	5,83	-0,42	2,01	5,86
ME7 BM3	-28,64	-2,1	1,19	4,43	24,73	1,06	5,6	-0,37	2,25	5,26
ME7 BM4	-30,72	-1,99	1,24	4,23	23,59	1,1	5,64	-0,48	3,38	5,14
ME7 BM5	-31,45	-1,83	1,04	4,26	21,7	0,97	5,47	-0,62	4,02	5,63
ME7 BM6	-24,77	-1,7	1,49	4,26	23,57	1,14	5,35	-0,22	1,57	4,7
ME7 BM7	-26,54	-1,99	1,54	4,37	26,5	1,28	5,35	-0,23	2,74	4,18
ME7 BM8	-25,05	-1,94	1,22	4,44	28,34	1,12	5,36	-0,04	2,31	4,77
ME7 BM9	-25,67	-2,06	1,61	4,56	32,99	1,19	6,1	-0,1	2,83	5,12
ME8 BM1	-26,1	-3,19	1,12	5,03	34,2	0,99	6,72	0,02	2,3	6,78
ME8 BM2	-25,95	-2,41	1,3	4,48	25,2	0,99	5,66	-0,37	2,11	5,7
ME8 BM3	-29,83	-2,17	1,12	4,33	16,3	1,08	5,47	-0,44	2,27	5,08
ME8 BM4	-26,62	-2,3	1,28	4,44	20,72	0,98	5,55	-0,48	2,24	5,69
ME8 BM5	-25,44	-1,53	1,25	4,37	26,7	1,26	5,25	-0,42	3,12	4,16
ME8 BM6	-31,79	-2,07	1,13	4,29	23,04	0,95	5,63	-0,51	2,96	5,93
ME8 BM7	-23,6	-1,57	1,3	4,2	20,94	1,19	5,2	-0,36	2,52	4,39
ME8 BM8	-17,3	-2,02	1,5	3,98	24,69	1,12	5,12	-0,03	1,57	4,55
ME8 BM9	-22,77	-2,25	1,48	4,65	20,78	1,18	5,66	-0,35	1,34	4,8
ME8 BM10	-27,38	-2,89	1,25	5,35	33,42	1,24	7,47	0,03	2,37	6,02
ME9 BM1	-24,29	-2,49	0,98	4,3	26,51	0,85	5,96	-0,1	1,47	7,02
ME9 BM2	-24,19	-1,98	1,08	4,18	22,6	0,97	5,15	-0,38	1,91	5,31
ME9 BM3	-25,74	-2,12	1,11	4,32	17,14	1,04	5,07	-0,4	1,4	4,89
ME9 BM4	-24,34	-2,04	0,98	4,25	19,54	1,09	5,24	-0,3	1,85	4,83
ME9 BM5	-23,47	-1,64	1,31	4,18	21,2	1,17	4,95	-0,32	2,1	4,23
ME9 BM6	-20,18	-1,58	1,2	3,88	16,9	1,01	4,64	-0,28	1,67	4,6
ME9 BM7	-24,82	-1,56	1,18	4,04	29,69	1,12	5,1	-0,27	3,99	4,56
ME9 BM8	-17,63	-1,56	1,04	3,92	18,23	0,97	4,69	-0,25	1,36	4,85
ME9 BM9	-32,61	-2,14	1,42	4,38	21,05	1,09	5,56	-0,47	3,42	5,08
ME9 BM10	-38,26	-2,8	1,27	5,38	86,22	1,2	7,95	1,42	22,94	6,65
BIG LoBM	-18,67	-1,91	1,03	3,91	22,67	0,89	4,93	-0,15	1,32	5,53
ME10 BM2	-23,83	-1,84	1,13	3,97	20,18	1,01	4,63	-0,33	1,65	4,57
ME10 BM3	-22,9	-1,69	1,16	3,89	19,6	1,05	4,67	-0,29	1,91	4,46
ME10 BM4	-22,81	-1,79	1,08	3,92	19,41	1,01	4,85	-0,33	2,09	4,78
ME10 BM5	-20,6	-1,99	1,14	3,94	25	0,91	4,82	-0,14	2,04	5,33
ME10 BM6	-22,9	-1,85	0,98	4,03	17,11	1,04	4,73	-0,18	1,32	4,53
ME10 BM7	-27,83	-2,1	0,97	3,85	22,07	0,73	5,29	-0,43	3,32	7,23

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: Os dados dos portfólios compreendem o período de Jan/1970 a Dez/2019 com 600 observações mensais por ativo. As estatísticas apresentadas são: Mínimo (Mín.), 1º Quartil ($Q_{\frac{1}{4}}$), Mediana ($Q_{\frac{2}{4}}$), 3º Quartil ($Q_{\frac{3}{4}}$), Máximo (Máx.), Média (Méd.), Desvio Padrão Amostral (Desv. P.), Assimetria (Assim.), Curtose (Curt.) e Coeficiente de Variação (Coef. Vari.).

6.2.5 Fatores de risco

A estatística descritiva da *proxy* do ativo livre de risco³ utilizada (r_f) e dos fatores de risco, baseados nos trabalhos de Carhart (1997) e Fama e French (1993, 2015), pode ser verificada na Tabela 12.

Tabela 12 – Estatísticas descritivas da *proxy* do ativo livre de risco (r_f) e dos fatores de risco, em valores percentuais.

Estatística	r_f	$R_M - r_f$	$SMB_{(3)}$	$SMB_{(5)}$	$HML_{(3)}$	$HML_{(5)}$	Mom	RMW	CMA
<i>Painel A: Retornos percentuais mensais</i>									
Mínimo	0	-23,24	-16,86	-14,91	-11,18	-11,18	-34,39	-18,33	-6,86
1º quartil	0,14	-1,982	-1,725	-1,597	-1,32	-1,32	-0,94	-0,845	-0,962
Média	0,379	0,563	0,124	0,155	0,318	0,318	0,615	0,279	0,316
Mediana	0,395	0,975	0,05	0,065	0,22	0,22	0,66	0,24	0,16
3º quartil	0,53	3,505	1,865	1,923	1,762	1,762	2,882	1,302	1,532
Máximo	1,35	16,1	21,7	18,32	12,87	12,87	18,36	13,33	9,56
Desvio P.	0,279	4,508	3,066	3,012	2,906	2,906	4,338	2,22	1,986
Assimetria	0,609	-0,564	0,567	0,425	0,096	0,096	-1,291	-0,335	0,355
Curtose	0,369	1,895	5,947	3,58	1,859	1,859	9,937	12,357	1,638
Coef. Vari.	0,736	8,006	24,686	19,484	9,146	9,146	7,054	7,967	6,278
<i>Painel B: Matriz de correlações dos retornos</i>									
	r_f	$R_M - r_f$	$SMB_{(3)}$	$SMB_{(5)}$	$HML_{(3)}$	$HML_{(5)}$	Mom	RMW	CMA
r_f	1								
$R_M - r_f$	-0,081**	1							
$SMB_{(3)}$	-0,036	0,276***	1						
$SMB_{(5)}$	-0,033	0,256***	0,984***	1					
$HML_{(3)}$	0,093**	-0,265***	-0,199***	-0,072*	1				
$HML_{(5)}$	0,093**	-0,265***	-0,199***	-0,072*	1	***			
Mom	0,068*	-0,162***	-0,034	-0,066	-0,19	***	1		
RMW	0,001	-0,243***	-0,424***	-0,369***	0,107***	0,107***	0,102**	1	
CMA	0,081**	-0,393***	-0,152***	-0,079*	0,7	***	0,01	0,025	1

Fonte: Elaborada pelo autor com base nos dados obtidos na [Kenneth R. French Data Library](#).

Nota: Os dados dos fatores de risco compreendem o período de Jan/1970 a Dez/2019 com 600 observações mensais por fator. Os fatores $SMB_{(3)}$ e $SMB_{(5)}$ são referentes aos modelos de 3 e 5 fatores, respectivamente. “Desvio P.” e “Coef. Vari.” indicam desvio padrão amostral e coeficiente de variação (σ/μ), respectivamente. Para a correlação de Pearson foi testada a hipótese $H_0: \rho = 0$. São reportados da seguinte forma os valores-p: * $p < 0,1$, ** $p < 0,05$, *** $p < 0,01$.

O período considerado na Tabela 12 abrange 50 anos de dados históricos entre 1970 e 2019. Os fatores do modelo FF3 (2x3) são construídos utilizando 6 portfólios ponderados por valor ordenados por tamanho e índice *book-to-market*. Os fatores do modelo FF5 (2x3) são construídos utilizando 18 portfólios ponderados por valor, 6 ordenados por tamanho e índice *book-to-market*, 6 ordenados por tamanho e lucratividade operacional e 6 ordenados por tamanho e investimento.

Foi conduzido o teste de Shapiro-Wilk (ROYSTON, 1982a,b, 1995) com hipótese nula de normalidade das séries de dados presentes na Tabela 12. Os resultados de todos os testes retornaram valor-p menor que 1%, portanto, rejeitando a hipótese de normalidade nas séries avaliadas para tal nível de significância. Tal fato é corroborado pelos valores de assimetria e curtose e pela diferença entre média e mediana apresentados na Tabela 12.

É possível notar na Tabela 12 que existe uma diferença entre os fatores SMB utilizados nos modelos FF3 e FF5. Isso é esperado pois a construção do fator SMB no modelo FF3 difere da feita no FF5 (FAMA; FRENCH, 2015, p. 6) em função das compensações dos efeitos de lucratividade operacional e investimento. Segundo Fama e

³ Taxa mensal proveniente do *Treasury Bill* (*T-Bill*) norte americano. Trata-se de um título de curto prazo.

French (2015), o fator *HML* pode ser considerado redundante, e, devido a tal fato, sugerem duas alternativas para o modelo FF5: (i) o fator *HML* pode ser removido sem maiores perdas no poder explicativo em relação ao FF5; (ii) a ortogonalização do fator *HML*, definido como *HML_O*, como a soma do intercepto e do resíduo oriundos da regressão do *HML* sobre $R_M - r_f$, *SMB*, *RMW* e *CMA*. Apesar das recomendações expostas, foi utilizado o modelo FF5 sem correção ou remoção do fator *HML* devido ao fato de que, em testes preliminares, não foram detectados indícios de colinearidade, pois o maior valor do fator de inflação da variância obtido de regressões com o modelo FF5 foi inferior a 2.

Conforme apontado por Fama e French (2015), a correlação de 0,7 apresentada entre o fator *HML* e *CMA* é dependente do tipo de agrupamento feito. Tal correlação ocorre em ordenações 2x2 e 2x3, entretanto tem seus efeitos minimizados em agrupamentos 2x2x2x2. Apesar disso, a correlação observada não causa surpresa, pois empresas com alto índice *book-to-market* tendem a ser empresas com baixo investimento (FAMA; FRENCH, 2015, p. 8).

Ainda com relação às correlações, apresentadas na Tabela 12, tem-se que todos os fatores de risco apresentam correlação significativamente diferente de zero em relação aos retornos em excesso do índice de mercado. Entretanto, apenas o fator *SMB* apresenta correlação positiva. Portanto, em geral, os fatores incorporam “anomalias” contrárias ao movimento do mercado.

6.3 Efeito Volatilidade

Foi avaliado, para as bases de dados apresentadas na Tabela 6, o efeito “anomalia” de baixa volatilidade identificada por Zakamulin (2017). Os resultados apresentados na Tabela 13 confirmam tal efeito, que já era esperado para as bases de dados fornecidas por Kenneth R. French. Entretanto, também foi verificado um efeito não esperado na base de dados referente ao Dow Jones ($N = 28$) que apresentou relação positiva e significativa entre o índice de Sharpe dos ativos individuais e seus respectivos riscos. A conclusão que pode ser feita é a seguinte: estratégias de seleção de portfólios baseadas no inverso da volatilidade de ativos individuais terão seu desempenho beneficiado quando avaliadas nas bases de dados FF Industry ($N = 10$ e $N = 49$) e FF Size-B/M ($N = 96$) e prejudicadas quando avaliadas na base de dados Dow Jones ($N = 28$). Outras estratégias, baseadas na minimização de risco, também podem sofrer do mesmo viés, se o risco total do portfólio for dominado pelos termos de risco individuais, e não pelas covariâncias, ou seja, caso a diversificação não seja suficiente para que as covariâncias contribuam com a maior parte do risco do portfólio.

Zakamulin (2017) afirma que o viés de baixa volatilidade, se existir, pode ser controlado pela exposição ao fator *HML*, ao menos para as bases fornecidas por Kenneth

Tabela 13 – Efeito volatilidade nas bases de dados utilizadas.

Base de dados	N	β_0	β_1
Dow Jones	28	0,188 **	0,81 **
FF Industry	10	0,883 ***	−2,606 ***
FF Industry	49	0,679 ***	−1,491 ***
FF Size-B/M	96	0,979 ***	−2,621 ***

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: Similar ao que foi obtido por [Zakamulin \(2017\)](#). N denota o número de ativos/portfólios em cada base de dados. Para cada ativo/portfólio presente na base de dados, foi estimada a regressão $\mathcal{SR}_i = \beta_0 + \beta_1 \sigma_i + e_i$, na qual $\mathcal{SR}_i$ e σ_i são o Índice de Sharpe e volatilidade do ativo/portfólio i , respectivamente. O índice de Sharpe e a volatilidade foram anualizados. Erros padrão ajustados pelo procedimento HAC de Newey-West ([NEWHEY; WEST, 1987, 1994](#)). São reportados da seguinte forma os valores-p: * $p < 0,1$, ** $p < 0,05$, *** $p < 0,01$.

R. French. Como informação suplementar, no Apêndice D, são apresentados resultados das estratégias propostas por [Kirby e Ostdiek \(2012\)](#): *volatility timing* (VT) e sua associação com o retorno esperado condicional baseada nos parâmetros β dos modelos multifatoriais (*reward-to-risk timing* ou RRT). Tais portfólios são estimados a partir das EQs. (2.16) e (2.17), respectivamente. Os resultados obtidos confirmam as afirmações de [Zakamulin \(2017\)](#) para as estratégias RRT, mas não são verificadas quando se trata das estratégias VT. Tais resultados confirmam as observações dos estudos de [Blitz e van Vliet \(2007\)](#) e [Blitz \(2016\)](#), ao sustentar o argumento de que o efeito de baixa volatilidade é distinto do que gera o fator *HML*.

7 Comparativo de Encolhimentos

Neste capítulo são comparadas diferentes formas para a estimação, ou encolhimento, da matriz de covariâncias dos retornos. Tal comparativo foi feito por meio de uma perspectiva do quão sensíveis são os pesos dos portfólios diante de mudanças nas estimativas das covariâncias. Ao final do capítulo é feita uma breve discussão dos resultados.

7.1 Convergência do Encolhimento BAG

Previamente às análises do encolhimento BAG foi realizada uma avaliação da convergência de sua estimativa quando o número de simulações (P) for inferior ao total de combinações distintas dos N ativos em subgrupos de tamanho M . Para tal foi escolhida a base de dados FF Industry ($N = 49$) para a construção de um exemplo.

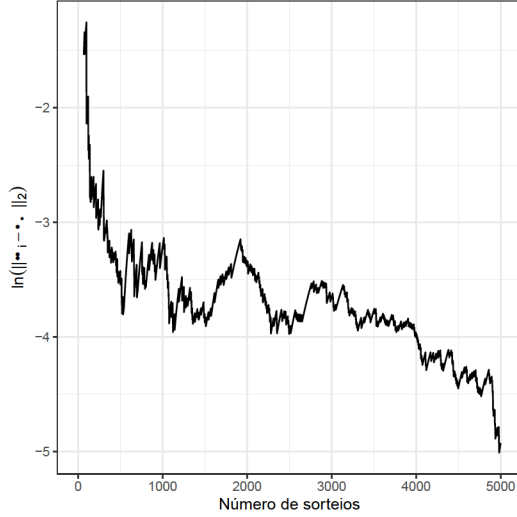
Para o número de ativos $N = 49$ e o tamanho de subgrupos igual a 3, têm-se $P = 18.424$ combinações distintas. Nas Figuras 43 e 44, são apresentadas as características da relação entre Σ_i e Σ_∞ quando o número i de sorteios se aproxima de 5.000. Pode ser percebido na Figura 43 que a maior parte da variação da norma-2 da diferença entre as matrizes ocorre antes dos 1.000 sorteios, e, após isso, tal queda é mais lenta até alcançar os 5.000 sorteios. A Figura 44 apresenta os 3 maiores autovalores da matriz Σ_∞ , considerando os P sorteios, como linhas tracejadas. É possível verificar na Figura 44 a convergência dos autovalores de Σ_i para os mesmos apresentados por Σ_∞ , entretanto, tal distância sofre grande redução antes dos 1.000 sorteios e tem sua aproximação em menor ritmo após isso.

Para o número de ativos $N = 49$ e o tamanho de subgrupos igual a 4, têm-se $P = 211.876$ combinações distintas. Nas Figuras 45 e 46, são apresentadas as características da relação entre Σ_i e Σ_∞ quando o número i de sorteios se aproxima de 5.000. É possível perceber pela Figura 46 que os 3 maiores autovalores convergem para o valor final em aproximadamente 4.000 sorteios.

Para o número de ativos $N = 49$ e o tamanho de subgrupos igual a 5, têm-se $P = 1.906.884$ combinações distintas. Nas Figuras 47 e 48, são apresentadas as características da relação entre Σ_i e Σ_∞ quando o número i de sorteios se aproxima de 5.000. É possível perceber pela Figura 48 que os 3 maiores autovalores convergem para o valor final em aproximadamente 3.500 sorteios.

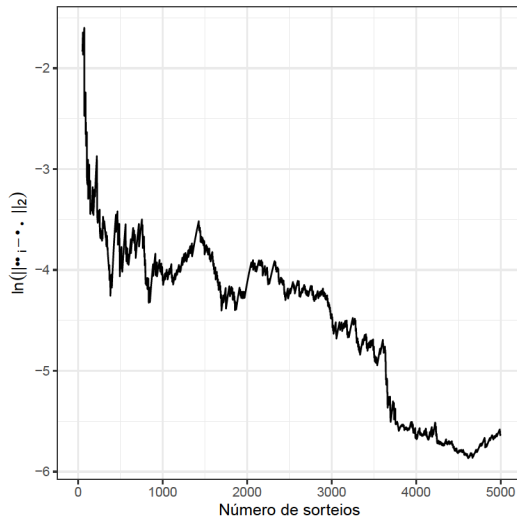
Baseando-se nos resultados das Figuras 43, 44, 45, 46, 47 e 48, percebe-se que a matriz Σ_i se aproxima de Σ_∞ para um número de sorteios menor que P , conforme esperado. Entretanto, trata-se de uma relação de custo-benefício entre o tempo computacional do procedimento e o erro da estimativa em relação ao esperado.

Figura 43 – Evolução de $\ln(\|\Sigma_i - \Sigma_\infty\|_2)$ quando o tamanho de subgrupos é igual a 3



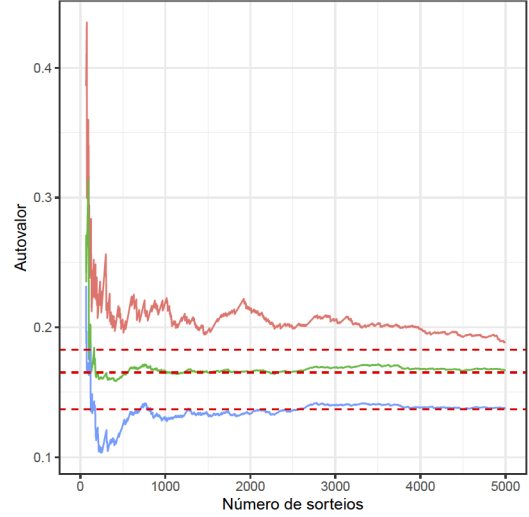
Fonte: Elaboração própria.

Figura 45 – Evolução de $\ln(\|\Sigma_i - \Sigma_\infty\|_2)$ quando o tamanho de subgrupos é igual a 4



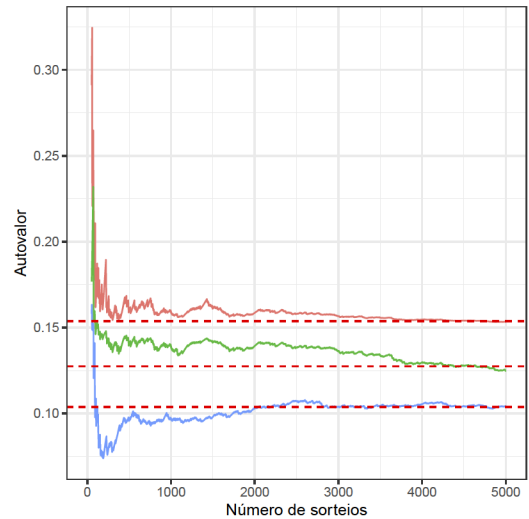
Fonte: Elaboração própria.

Figura 44 – Convergência dos 3 maiores autovalores de Σ_i em relação aos obtidos de Σ_∞ com P sorteios distintos, supondo ser o tamanho de subgrupos é igual a 3



Fonte: Elaboração própria.

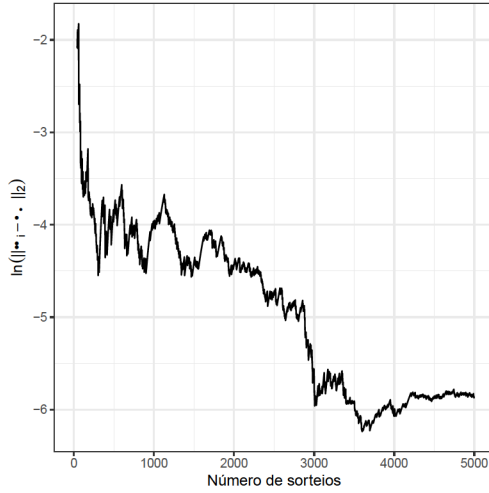
Figura 46 – Convergência dos 3 maiores autovalores de Σ_i em relação aos obtidos de Σ_∞ com P sorteios distintos, supondo ser o tamanho de subgrupos é igual a 4



Fonte: Elaboração própria.

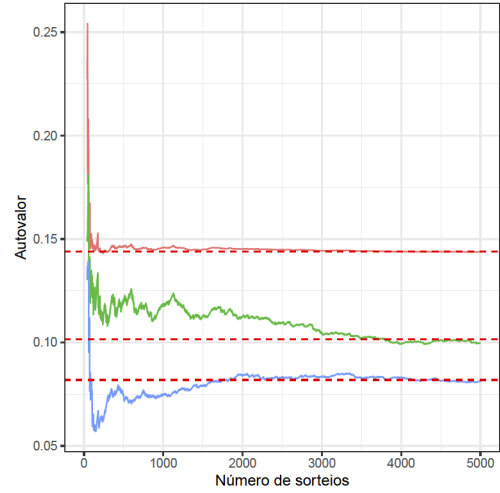
O processo para se obter Σ_∞ tem sua complexidade crescente de forma exponencial, conforme o aumento de N , entretanto, tal abordagem apresenta uma melhoria em relação à

Figura 47 – Evolução de $\ln(\|\Sigma_i - \Sigma_\infty\|_2)$ quando o tamanho de subgrupos é igual a 5



Fonte: Elaboração própria.

Figura 48 – Convergência dos 3 maiores autovalores de Σ_i em relação aos obtidos de Σ_∞ com P sorteios distintos, supondo ser o tamanho de subgrupos é igual a 5



Fonte: Elaboração própria.

realização de médias de portfólios obtidos da otimização numérica. O tempo computacional para a estimação de cada subcarteira $(I_a \Sigma I_a + I_b)^{-1} I_a \mathbf{1}$ é inferior ao de estimar o mesmo portfólio por meio de métodos de otimização numérica. Isso se deve ao fato que um procedimento depende essencialmente de multiplicações matriciais e cálculos de inversas e o outro depende de operações menos determinísticas de localização de um ponto ótimo de funções.

7.2 Sensibilidade dos pesos

A sensibilidade dos pesos reflete o impacto nos pesos de uma determinada estratégia de minimização de variância em função de seu insumo, ou seja, das estimativas obtidas para a matriz de covariâncias. Tal sensibilidade pode ser refletida em problemas na gestão dos portfólios, como por exemplo, mudanças bruscas nos pesos podem ser refletidas em aumento dos custos de transação que acabam por penalizar o desempenho. É apresentado um comparativo entre os indicadores, propostos na Seção 3.1.1, relativos à sensibilidade dos pesos, ao condicionamento numérico e ao distanciamento da estimativa amostral. Inicialmente são exibidos os indicadores de forma gráfica para o encolhimento BAG. Posteriormente, cada tipo de estimador ou encolhimento da matriz de covariâncias foi comparado por meio de testes de hipótese não paramétricos para identificar diferenças entre eles.

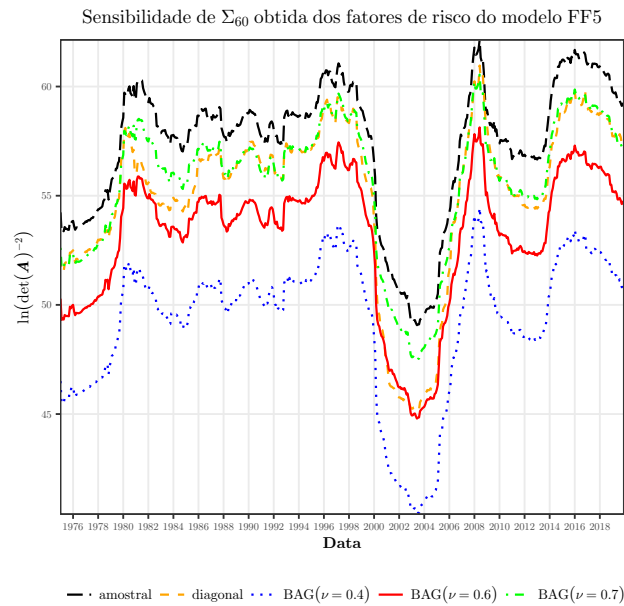
Foi utilizado o teste de Kruskal-Wallis (KRUSKAL; WALLIS, 1952; HOLLANDER;

WOLFE, 1973) para identificar se existe diferença entre os diferentes tipos de encolhimento da matriz de covariâncias. Caso o teste de Kruskal-Wallis apresente indícios de diferença entre encolhimentos então é conduzido o teste de Conover-Iman (CONOVER; IMAN, 1979; CONOVER, 1999; DINNO, 2017) para múltiplas comparações aos pares.

7.2.1 Sensibilidade do encolhimento BAG

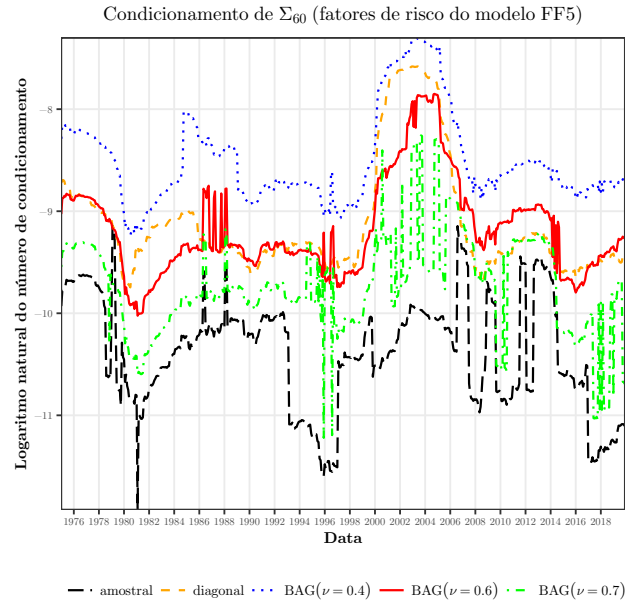
A Figura 49 se refere à base de dados dos fatores de risco do modelo FF5, janela de estimação móvel ($\tau = 60$ (5 anos)) e apresenta um comparativo entre a covariância amostral, a diagonal e diferentes encolhimentos obtidos da metodologia BAG ($\nu = 0,4, 0,6$ e $0,7$). É verificado na Figura 49 que a diminuição do parâmetro ν , ou seja, a redução do tamanho do subgrupo de ativos, provoca uma redução da sensibilidade dos pesos ($\det(\mathbf{A})^{-2}$) provenientes de estimativas da matriz encolhida. De acordo com as Figuras 51 e 50, percebe-se que o aumento do parâmetro ν provoca uma melhora no condicionamento da matriz encolhida, entretanto, também provoca um distanciamento da matriz encolhida em relação à amostral.

Figura 49 – Sensibilidade dos pesos do encolhimento BAG em função do tamanho dos subgrupos de ativos (fatores de risco (FF5), $\tau = 60$, escala logarítmica)



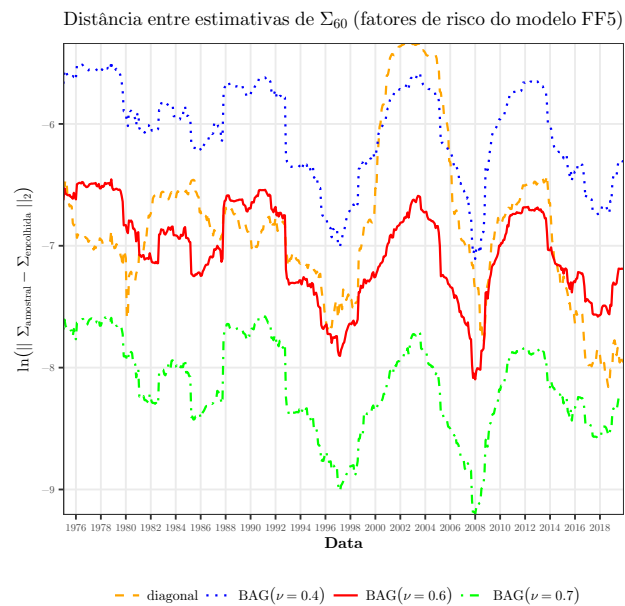
Fonte: Elaboração própria.

Figura 50 – Condicionamento da matriz de covariâncias encolhida (fatores de risco (FF5), $\tau = 60$, escala logarítmica)



Fonte: Elaboração própria.

Figura 51 – Norma-2 da diferença entre a matriz de covariâncias amostral e a encolhida (fatores de risco (FF5), $\tau = 60$, escala logarítmica)



Fonte: Elaboração própria.

7.2.2 Comparativo de sensibilidades dos pesos

Nesta subseção, foi feito o comparativo de sensibilidade dos pesos relativos a diferentes abordagens de encolhimento da matriz de covariâncias (diagonal, linear, não-linear e BAG) com relação à do estimador amostral. Além disso, também são avaliadas questões como o condicionamento numérico e o distanciamento em relação ao estimador amostral.

A Tabela 14 se refere à base de dados dos fatores de risco do modelo FF5, janela de estimação móvel ($\tau = 60$ (5 anos)) e apresenta um comparativo entre a covariância amostral, a diagonal, linear, não-linear e diferentes encolhimentos obtidos da metodologia BAG ($\nu = 0,4, 0,6$ e $0,7$). Para a base de dados avaliada e ao considerar um nível de significância de 5% foi rejeitada a hipótese de que os métodos de encolhimento avaliados possuem as mesmas sensibilidades, o mesmo condicionamento e que seriam equivalentes à estimativa amostral. Não foi rejeitada a hipótese do encolhimento linear possuir a mesma sensibilidade da estimativa amostral. Não foi rejeitada a hipótese do encolhimento diagonal e do BAG ($\nu = 0,6$) possuírem o mesmo nível de condicionamento numérico. Não foi rejeitada a hipótese da norma-2 do encolhimento amostral, linear e não-linear serem as mesmas.

A Tabela 15 se refere à base de dados dos fatores de risco do modelo FF5, janela de estimação móvel ($\tau = 120$ (10 anos)) e apresenta um comparativo entre a covariância amostral, a diagonal, linear, não-linear e diferentes encolhimentos obtidos da metodologia BAG ($\nu = 0,4, 0,6$ e $0,7$). Para a base de dados avaliada e ao considerar um nível de significância de 5% foi rejeitada a hipótese de que os métodos de encolhimento avaliados possuem as mesmas sensibilidades, o mesmo condicionamento e que seriam equivalentes à estimativa amostral. Não foi rejeitada a hipótese do encolhimento linear possuir a mesma sensibilidade da estimativa amostral. Não foi rejeitada a hipótese do encolhimento diagonal e do BAG ($\nu = 0,6$) possuírem o mesmo nível de condicionamento numérico. Não foi rejeitada a hipótese da norma-2 do encolhimento amostral e não-linear serem as mesmas.

Tabela 14 – Comparativo de características de séries obtidas a partir de encolhimentos da matriz de covariâncias amostral (Σ) em uma janela móvel. Resultados referentes à base de dados dos 5 fatores de risco (FF5)

$det(\mathbf{A})^{-2}$							$rcond(\mathbf{A})$						$\ \Sigma\ _2$					
Painel A. Teste de Kruskal-Wallis por postos																		
H	1.453,39 (0,00)						2.519,72 (0,00)						803,26 (0,00)					
Painel B. Teste de dominância estocástica entre múltiplos pares de estimadores da matriz de covariâncias																		
	Diagonal	Linear	Não-linear	BAG ($\nu = 0,4$)	BAG ($\nu = 0,6$)	BAG ($\nu = 0,7$)	Diagonal	Linear	Não-linear	BAG ($\nu = 0,4$)	BAG ($\nu = 0,6$)	BAG ($\nu = 0,7$)	Diagonal	Linear	Não-linear	BAG ($\nu = 0,4$)	BAG ($\nu = 0,6$)	BAG ($\nu = 0,7$)
Amostrai	-13,28 (0,00)	-1,49 (0,07)	-4,41 (0,00)	-38,69 (0,00)	-24,81 (0,00)	-10,78 (0,00)	47,42 (0,00)	9,55 (0,00)	7,38 (0,00)	66,66 (0,00)	46,28 (0,00)	23,27 (0,00)	-10,09 (0,00)	-1,46 (0,07)	-0,4 (0,34)	19,03 (0,00)	9,34 (0,00)	3,64 (0,00)
Diagonal		-11,79 (0,00)	-8,86 (0,00)	-25,41 (0,00)	-11,54 (0,00)	2,5 (0,01)		37,87 (0,00)	40,03 (0,00)	19,25 (0,00)	-1,14 (0,13)	-24,14 (0,00)		-8,63 (0,00)	-9,69 (0,00)	29,12 (0,00)	19,43 (0,00)	13,73 (0,00)
Linear			2,92 (0,00)	-37,2 (0,00)	-23,32 (0,00)	-9,29 (0,00)			2,17 (0,02)	57,11 (0,00)	36,73 (0,00)	13,72 (0,00)			-1,05 (0,15)	20,49 (0,00)	10,79 (0,00)	5,1 (0,00)
Não-linear				-34,28 (0,00)	-20,4 (0,00)	-6,36 (0,00)				59,28 (0,00)	38,9 (0,00)	15,89 (0,00)				19,44 (0,00)	9,74 (0,00)	4,05 (0,00)
BAG ($\nu = 0,4$)					-13,88 (0,00)	-27,91 (0,00)					20,38 (0,00)	43,39 (0,00)					9,7 (0,00)	15,39 (0,00)
BAG ($\nu = 0,6$)						-14,04 (0,00)						23,01 (0,00)						5,69 (0,00)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: As séries avaliadas são provenientes de características extraídas direta ou indiretamente da matriz de covariâncias, são elas: (i) a sensibilidade dos pesos ($det(\mathbf{A})^{-2}$), (ii) o condicionamento numérico ($rcond(\mathbf{A})$) e (iii) a Norma-2 ($\|\Sigma\|_2$). O tamanho da janela de horizonte móvel de estimação considerada foi de $\tau = 60$ (5 anos). As estatísticas de teste foram obtidas da transformação das séries avaliadas em escala logarítmica natural e seus respectivos valores-p são apresentados logo abaixo entre parêntesis. É destacado na tabela quando não é possível rejeitar a hipótese nula de similaridade entre séries para um nível de significância de 5%. O período de tempo considerado é o de Jan/1975 a Dez/2019.

Tabela 15 – Comparativo de características de séries obtidas a partir de encolhimentos da matriz de covariâncias amostral (Σ) em uma janela móvel. Resultados referentes à base de dados dos 5 fatores de risco (FF5)

$det(\mathbf{A})^{-2}$							$rcond(\mathbf{A})$						$\ \mathbf{\Sigma}\ _2$					
Painel A. Teste de Kruskal-Wallis por postos																		
H	1.627,07 (0,00)						2.582,85 (0,00)						1.831,98 (0,00)					
Painel B. Teste de dominância estocástica entre múltiplos pares de estimadores da matriz de covariâncias																		
	Diagonal	Linear	Não-linear	BAG ($\nu = 0,4$)	BAG ($\nu = 0,6$)	BAG ($\nu = 0,7$)	Diagonal	Linear	Não-linear	BAG ($\nu = 0,4$)	BAG ($\nu = 0,6$)	BAG ($\nu = 0,7$)	Diagonal	Linear	Não-linear	BAG ($\nu = 0,4$)	BAG ($\nu = 0,6$)	BAG ($\nu = 0,7$)
Amostrai	-15,69 (0,00)	-1,17 (0,12)	-3,13 (0,00)	-43,91 (0,00)	-28,37 (0,00)	-13,35 (0,00)	60,1 (0,00)	7,96 (0,00)	9,99 (0,00)	76,84 (0,00)	59,76 (0,00)	38,76 (0,00)	-21,51 (0,00)	-2,02 (0,02)	-0,15 (0,44)	36,85 (0,00)	18,77 (0,00)	7,58 (0,00)
Diagonal		-14,53 (0,00)	-12,56 (0,00)	-28,22 (0,00)	-12,68 (0,00)	2,34 (0,01)		52,14 (0,00)	50,11 (0,00)	16,74 (0,00)	-0,34 (0,37)	-21,34 (0,00)		-19,5 (0,00)	-21,37 (0,00)	58,36 (0,00)	40,29 (0,00)	29,1 (0,00)
Linear			1,96 (0,02)	-42,74 (0,00)	-27,2 (0,00)	-12,18 (0,00)			-2,03 (0,02)	68,88 (0,00)	51,79 (0,00)	30,8 (0,00)			-1,87 (0,03)	38,86 (0,00)	20,79 (0,00)	9,6 (0,00)
Não-linear				-40,78 (0,00)	-25,24 (0,00)	-10,22 (0,00)				66,85 (0,00)	49,76 (0,00)	28,77 (0,00)				36,99 (0,00)	18,92 (0,00)	7,73 (0,00)
BAG ($\nu = 0,4$)					-15,54 (0,00)	-30,56 (0,00)					17,09 (0,00)	38,08 (0,00)					18,07 (0,00)	29,27 (0,00)
BAG ($\nu = 0,6$)						-15,02 (0,00)						20,99 (0,00)						11,19 (0,00)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: As séries avaliadas são provenientes de características extraídas direta ou indiretamente da matriz de covariâncias, são elas: (i) a sensibilidade dos pesos ($det(\mathbf{A})^{-2}$), (ii) o condicionamento numérico ($rcond(\mathbf{A})$) e (iii) a Norma-2 ($\|\Sigma\|_2$). O tamanho da janela de horizonte móvel de estimação considerada foi de $\tau = 120$ (10 anos). As estatísticas de teste foram obtidas da transformação das séries avaliadas em escala logarítmica natural e seus respectivos valores-p são apresentados logo abaixo entre parêntesis. É destacado na tabela quando não é possível rejeitar a hipótese nula de similaridade entre séries para um nível de significância de 5%. O período de tempo considerado é o de Jan/1980 a Dez/2019.

A Tabela 16 se refere à base de dados FF Industry ($N = 10$), janela de estimação móvel ($\tau = 60$ (5 anos)) e apresenta um comparativo entre a covariância amostral, a diagonal, linear, não-linear e diferentes encolhimentos obtidos da metodologia BAG ($\nu = 0,4, 0,6$ e $0,7$). Para a base de dados avaliada e ao considerar um nível de significância de 5% foi rejeitada a hipótese de que os métodos de encolhimento avaliados possuem as mesmas sensibilidades, o mesmo condicionamento e que seriam equivalentes à estimativa amostral. Foi rejeitada a hipótese dos encolhimentos possuírem sensibilidades ou condicionamentos numéricos idênticos. Não foi rejeitada a hipótese da norma-2 do encolhimento amostral, linear, não-linear e BAG ($\nu = 0,7$) serem as mesmas.

A Tabela 17 se refere à base de dados FF Industry ($N = 10$), janela de estimação móvel ($\tau = 60$ (5 anos)) e apresenta um comparativo entre a covariância amostral, a diagonal, linear, não-linear e diferentes encolhimentos obtidos da metodologia BAG ($\nu = 0,4, 0,6$ e $0,7$). Para a base de dados avaliada e ao considerar um nível de significância de 5% foi rejeitada a hipótese de que os métodos de encolhimento avaliados possuem as mesmas sensibilidades, o mesmo condicionamento e que seriam equivalentes à estimativa amostral. Foi rejeitada a hipótese dos encolhimentos possuírem sensibilidades ou condicionamentos numéricos idênticos. Não foi rejeitada a hipótese da norma-2 do encolhimento amostral, linear e não-linear serem as mesmas.

Tabela 16 – Comparativo de características de séries obtidas a partir de encolhimentos da matriz de covariâncias amostral (Σ) em uma janela móvel. Resultados referentes à base de dados FF Industry ($N = 10$)

$det(\mathbf{A})^{-2}$							$rcond(\mathbf{A})$						$\ \Sigma\ _2$					
Painel A. Teste de Kruskal-Wallis por postos																		
H	2.909,95 (0,00)						3.196,51 (0,00)						1.281,51 (0,00)					
Painel B. Teste de dominância estocástica entre múltiplos pares de estimadores da matriz de covariâncias																		
	Diagonal	Linear	Não-linear	BAG ($\nu = 0,4$)	BAG ($\nu = 0,6$)	BAG ($\nu = 0,7$)	Diagonal	Linear	Não-linear	BAG ($\nu = 0,4$)	BAG ($\nu = 0,6$)	BAG ($\nu = 0,7$)	Diagonal	Linear	Não-linear	BAG ($\nu = 0,4$)	BAG ($\nu = 0,6$)	BAG ($\nu = 0,7$)
Amostral	-71,74 (0,00)	-4,68 (0,00)	-13,08 (0,00)	-77,96 (0,00)	-58 (0,00)	-34,77 (0,00)	107,1 (0,00)	11,53 (0,00)	20,86 (0,00)	92,1 (0,00)	71,32 (0,00)	43,94 (0,00)	-30,52 (0,00)	-0,53 (0,30)	0,76 (0,22)	7,42 (0,00)	4,37 (0,00)	1,54 (0,06)
Diagonal		-67,07 (0,00)	-58,66 (0,00)	-6,22 (0,00)	13,74 (0,00)	36,98 (0,00)		95,58 (0,00)	86,25 (0,00)	-15,01 (0,00)	-35,78 (0,00)	-63,17 (0,00)		-30 (0,00)	-31,29 (0,00)	37,94 (0,00)	34,89 (0,00)	32,06 (0,00)
Linear			8,41 (0,00)	-73,29 (0,00)	-53,33 (0,00)	-30,09 (0,00)			-9,33 (0,00)	80,57 (0,00)	59,8 (0,00)	32,41 (0,00)			-1,29 (0,10)	7,94 (0,00)	4,9 (0,00)	2,07 (0,02)
Não-linear				-64,88 (0,00)	-44,92 (0,00)	-21,68 (0,00)				71,24 (0,00)	50,47 (0,00)	23,08 (0,00)				6,66 (0,00)	3,61 (0,00)	0,78 (0,22)
BAG ($\nu = 0,4$)					-19,96 (0,00)	-43,19 (0,00)					20,77 (0,00)	48,16 (0,00)					3,05 (0,00)	5,88 (0,00)
BAG ($\nu = 0,6$)						-23,24 (0,00)						27,39 (0,00)						2,83 (0,00)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: As séries avaliadas são provenientes de características extraídas direta ou indiretamente da matriz de covariâncias, são elas: (i) a sensibilidade dos pesos ($det(\mathbf{A})^{-2}$), (ii) o condicionamento numérico ($rcond(\mathbf{A})$) e (iii) a Norma-2 ($\|\Sigma\|_2$). O tamanho da janela de horizonte móvel de estimação considerada foi de $\tau = 60$ (5 anos). As estatísticas de teste foram obtidas da transformação das séries avaliadas em escala logarítmica natural e seus respectivos valores-p são apresentados logo abaixo entre parêntesis. É destacado na tabela quando não é possível rejeitar a hipótese nula de similaridade entre séries para um nível de significância de 5%. O período de tempo considerado é o de Jan/1975 a Dez/2019.

Tabela 17 – Comparativo de características de séries obtidas a partir de encolhimentos da matriz de covariâncias amostral (Σ) em uma janela móvel. Resultados referentes à base de dados FF Industry ($N = 10$)

$det(\mathbf{A})^{-2}$							$rcond(\mathbf{A})$						$\ \Sigma\ _2$					
Painel A. Teste de Kruskal-Wallis por postos																		
H	2.665,26 (0,00)						2.906,47 (0,00)						1.534,05 (0,00)					
Painel B. Teste de dominância estocástica entre múltiplos pares de estimadores da matriz de covariâncias																		
	Diagonal	Linear	Não-linear	BAG ($\nu = 0,4$)	BAG ($\nu = 0,6$)	BAG ($\nu = 0,7$)	Diagonal	Linear	Não-linear	BAG ($\nu = 0,4$)	BAG ($\nu = 0,6$)	BAG ($\nu = 0,7$)	Diagonal	Linear	Não-linear	BAG ($\nu = 0,4$)	BAG ($\nu = 0,6$)	BAG ($\nu = 0,7$)
Amostrai	-70,43 (0,00)	-4,4 (0,00)	-11,61 (0,00)	-78,89 (0,00)	-58,59 (0,00)	-31,74 (0,00)	106,2 (0,00)	7,54 (0,00)	14,16 (0,00)	90,92 (0,00)	68,82 (0,00)	43,35 (0,00)	-30,95 (0,00)	-0,46 (0,32)	0,9 (0,18)	18,3 (0,00)	10,13 (0,00)	3,63 (0,00)
Diagonal		-66,03 (0,00)	-58,82 (0,00)	-8,46 (0,00)	11,84 (0,00)	38,69 (0,00)		98,66 (0,00)	92,04 (0,00)	-15,28 (0,00)	-37,37 (0,00)	-62,85 (0,00)		-30,49 (0,00)	-31,85 (0,00)	49,25 (0,00)	41,07 (0,00)	34,58 (0,00)
Linear			7,21 (0,00)	-74,49 (0,00)	-54,19 (0,00)	-27,34 (0,00)			-6,62 (0,00)	83,38 (0,00)	61,28 (0,00)	35,81 (0,00)			-1,36 (0,09)	18,76 (0,00)	10,59 (0,00)	4,1 (0,00)
Não-linear				-67,28 (0,00)	-46,98 (0,00)	-20,13 (0,00)				76,77 (0,00)	54,67 (0,00)	29,19 (0,00)				17,41 (0,00)	9,23 (0,00)	2,74 (0,00)
BAG ($\nu = 0,4$)					-20,3 (0,00)	-47,15 (0,00)					22,1 (0,00)	47,58 (0,00)					8,18 (0,00)	14,67 (0,00)
BAG ($\nu = 0,6$)						-26,85 (0,00)						25,48 (0,00)						6,49 (0,00)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: As séries avaliadas são provenientes de características extraídas direta ou indiretamente da matriz de covariâncias, são elas: (i) a sensibilidade dos pesos ($det(\mathbf{A})^{-2}$), (ii) o condicionamento numérico ($rcond(\mathbf{A})$) e (iii) a Norma-2 ($\|\Sigma\|_2$). O tamanho da janela de horizonte móvel de estimação considerada foi de $\tau = 120$ (10 anos). As estatísticas de teste foram obtidas da transformação das séries avaliadas em escala logarítmica natural e seus respectivos valores-p são apresentados logo abaixo entre parêntesis. É destacado na tabela quando não é possível rejeitar a hipótese nula de similaridade entre séries para um nível de significância de 5%. O período de tempo considerado é o de Jan/1980 a Dez/2019.

7.3 Discussão dos resultados

De uma perspectiva baseada nos resultados deste capítulo, tem-se que as métricas de encolhimento que mais se distanciam da covariância amostral apresentaram diminuição da sensibilidade dos pesos a mudanças nos insumos (σ_{ij}) além de apresentarem melhoria no condicionamento numérico da matriz encolhida.

Os encolhimentos linear (LEDOIT; WOLF, 2003) e não-linear (LEDOIT; WOLF, 2020) apresentaram, em geral, redução na sensibilidade dos pesos e melhoria no condicionamento numérico das matrizes de covariâncias. Entretanto, não foram identificadas diferenças da norma-2 entre tais encolhimentos e o estimador amostral, isso indica que não houve perda substancial da informação original.

Para o encolhimento BAG, independente da base de dados utilizada, houve a observação de que a redução de ν promove a diminuição da sensibilidade dos pesos e a melhoria no condicionamento na matriz de covariâncias encolhida, mas, em contrapartida, ocorre o distanciamento da estimativa amostral. Tal observação é coerente com o que foi discutido na Seção 4.1, pois, conforme o parâmetro ν se aproxima de zero, os portfólios resultantes se aproximam do ingênuo ($1/N$) que é insensível a mudanças nas covariâncias.

Ao revisitar as sensibilidades dos pesos expostas na Figura 49, calculada para uma janela de estimação de $\tau = 60$ meses, tem-se que era esperado um aumento da sensibilidade dos pesos em períodos de instabilidade ou crises. Esse argumento é coerente com a literatura que reporta um aumento da correlação entre os ativos e mercados em períodos de crise (SANDOVAL; FRANCA, 2012; SILVENNOINEN; THORP, 2013). A sensibilidade dos pesos ocorre em função do $\det(\mathbf{A})^{-2}$, e o aumento da correlação entre ativos pode tornar as colunas de $\mathbf{A}$ linearmente dependentes e gerar um efeito “explosivo” no inverso do determinante ao quadrado. Contudo, houve uma queda acentuada e não esperada da sensibilidade dos pesos entre 1998 e 2004, sendo que nesse período ocorreram crises no Brasil, Argentina e o estouro da bolha relacionada com as empresas de internet (*dot-com*) (FRY-MCKIBBIN; HSIAO; TANG, 2014), além das turbulências causadas pelos ataques terroristas aos EUA em 11/09/2001. É importante ressaltar que a estimativa obtida em um mês específico é feita com 5 anos de dados históricos anteriores a esse mês ($\tau = 60$) e isso provoca uma defasagem da sensibilidade por essa janela móvel. Observações similares podem ser feitas ao considerar a janela de estimação de $\tau = 120$ meses.

Os resultados das Tabelas 14, 15, 16 e 17, resumidamente, apontaram que apesar de possuir bom condicionamento numérico do encolhimento diagonal, isso nem sempre é refletido em baixa sensibilidade dos pesos. No caso do encolhimento diagonal, em que os termos de covariâncias são desprezados, é verificado que, em geral, a sensibilidade dos pesos é reduzida e o condicionamento numérico é aumentado. Entretanto, nem sempre o encolhimento diagonal apresentou o maior condicionamento numérico dentre as alter-

nativas e, em geral, é o que mais se distanciou da estimativa amostral. Pelos indicadores apresentados é verificado que existe uma razão de compromisso entre sensibilidade dos pesos, distanciamento da estimativa amostral e o condicionamento numérico que devem ser levadas em consideração para avaliar a estimativa da matriz de covariâncias.

O inverso do determinante quadrado ($\det(\mathbf{A})^{-2}$) fora proposto com a finalidade de mensurar o impacto da mudança nos insumos das covariâncias sobre a variação dos pesos nos portfólios. Tal indicador permitiu realizar comparações de sensibilidades dos pesos provenientes de diferentes encolhimentos da matriz de covariâncias. Adicionalmente, foram exibidas as mudanças no condicionamento numérico da matriz de covariâncias e seu distanciamento da estimativa amostral. A redução de sensibilidade e o aumento do condicionamento numérico são importantes pois, de acordo com os resultados de [Ledoit e Wolf \(2003, 2004b, 2020\)](#), melhoram o desempenho fora da amostra em termos de desvio padrão dos retornos, além refletirem em redução do *turnover* da carteira que consequentemente promove diminuição nos custos de transação. Portanto, a percepção da sensibilidade dos pesos do portfólio, ou da sensibilidade sistêmica, pode auxiliar o gestor de carteiras, ou o investidor, no processo de tomada de decisão pois tal indicador influencia diretamente o *turnover* esperado do portfólio.

8 Comparativo de Estratégias

Neste capítulo, são apresentadas informações relativas ao desempenho e avaliações ajustadas ao risco das estratégias de seleção de portfólios utilizadas.

São expostas tabelas contendo critérios de avaliação de desempenho fora da amostra ao considerar as bases de dados descritas na Seção 5.1. De forma complementar, é avaliada a regressão dos retornos em excesso das técnicas de investimento em relação aos modelos CAPM¹, FF3, FFC e FF5. As regressões feitas representam uma avaliação de desempenho ajustada ao risco. Todas as análises foram feitas ao considerar três formas possíveis de estimação da matriz de covariâncias: amostral, encolhimento linear e não-linear. O encolhimento BAG, apresentado na Seção 4.2, foi avaliado apenas como parte de uma das estratégias de seleção de portfólios e fora aplicado adicionalmente às três formas previamente mencionadas. Entretanto, são reportados apenas os resultados do encolhimento linear, por questões de redundância e similaridades entre as melhorias obtidas com o encolhimento não-linear. Ao final, é feita uma discussão sobre os principais resultados obtidos.

8.1 Avaliação de desempenho

Nesta seção, são apresentados os critérios de desempenho calculados para cada base de dados, além dos resultados das regressões dos modelos multifatoriais considerando ou não a presença de custos de transação.

As técnicas apresentadas na Tabela 7 foram avaliadas de acordo com o seguinte conjunto de parâmetros:

- a) A técnica MV foi avaliada para o coeficiente de aversão ao risco, sendo $\gamma = 1, 5$ e 10 . Foi escolhido $\gamma = 5$ pelo fato de sua volatilidade ficar mais próxima do portfólio VW. Todas as técnicas derivadas dessa utilizaram o mesmo valor de γ . Outros autores também costumam utilizar esse valor específico, por exemplo, em [DeMiguel, Garlappi, Nogales *et al.* \(2009\)](#);
- b) As técnicas MIN-REF e MV-REF foram avaliadas considerando uma média de 500 portfólios similares em cada caso. Os horizontes de simulação (h) escolhidos foram de 6, 12 e 18 anos. O aumento de h promove a convergência do portfólio estimado para a versão eficiente original (MIN ou MV), o que é esperado, pois o aumento do número de observações faz com que as estimativas se aproximem dos valores originais do Processo Gerador de Dados (PGD). Nesse caso, o PGD tem como insumos o vetor de médias amostrais e a matriz de covariâncias

¹ A sigla se refere, na verdade, ao modelo de índice de mercado, e não ao CAPM propriamente dito.

- (amostral ou encolhida). Os melhores desempenhos foram obtidos utilizando $h = 6$;
- c) As técnicas MIN-ENT, MV-ENT foram avaliadas com parâmetros de aversão à incerteza $\theta = 0,005\%$, $0,01\%$ e $0,1\%$. Os melhores desempenhos foram obtidos com $\theta = 0,1\%$. O aumento do parâmetro θ provoca uma aproximação do portfólio da estratégia $1/N$ e um distanciamento da estratégia eficiente original (MIN ou MV). As técnicas MIN-ENT+ e MV-ENT+ também utilizaram o mesmo valor de θ ;
- d) O parâmetro ν , que define o tamanho do subconjunto utilizado no *bootstrap* de ativos, foi avaliado para os valores de 0,25 a 0,8 com incrementos de 0,05. Para as estratégias BAG, tal parâmetro serviu de controle do número de ativos na carteira, para $\nu \rightarrow 0$ tem-se que a aproximação de $1/N$ e para $\nu \rightarrow 1$ tem-se a aproximação da carteira eficiente de original (MIN ou MV). Foram selecionados para MIN-BAG e MV-BAG os parâmetros $\nu = 0,7$ e $\nu = 0,45$, respectivamente. Tal escolha ocorreu de modo a compatibilizar o tamanho da carteira com o das estratégias REF para fins de comparativo. No caso das estratégias ENT+, o parâmetro ν impacta a criação do índice de incertezas individuais, sendo que $\nu \rightarrow 0$ torna a estratégia equivalente à ENT original. Foi selecionado para MIN-ENT+ e MV-ENT+ o parâmetro $\nu = 0,8$, apesar de que a variação desse parâmetro não provocou diferença perceptível no desempenho de tais estratégias;
- e) Foram realizados 5000 sorteios de subgrupos de ativos tanto para a criação do índice de incerteza específico por ativo (MIN-ENT+ e MV-ENT+) quanto para a obtenção de portfólios (MIN-BAG e MV-BAG).

A partir deste momento, será frequente a utilização de termos como “aumento” ou “redução” ao se comparar os parâmetros de desempenho das técnicas de seleção de portfólios. Tais afirmações não necessariamente indicam diferença estatística entre os parâmetros, e sim um comparativo baseado apenas nos valores apresentados nas tabelas. Quando tais diferenças forem estatisticamente diferentes, são exibidos os respectivos valores-p das estatísticas e suas hipóteses adjacentes.

8.1.1 Ausência de custos de transação

A Tabela 18 apresenta um comparativo entre diferentes formas de obtenção de portfólios de mínima e de média-variância, na ausência de custos de transação. O intuito do comparativo é tentar identificar se o procedimento de sorteio de ativos promove algum tipo de melhoria quando associado a técnicas já existentes. Dentre as estratégias avaliadas, nenhuma apresentou índice de Sharpe superior e estatisticamente distinto ao da $1/N$ simultaneamente em todas as bases de dados. Entretanto, todas as estratégias avaliadas

obtiveram valores de índice de Sharpe superiores ao da estratégia VW, apesar de tal diferença em termos estatísticos não ter sido testada de forma direta.

Com relação às estratégias apresentadas no painel A da Tabela 18, que utilizam como insumo apenas a matriz de covariâncias, têm-se as seguintes observações quando comparadas à 1/N:

- a) ERC – Apresentou volatilidade inferior e significativamente diferente para todas as bases de dados avaliadas; já o seu índice de Sharpe fora superior e significativamente diferente apenas na base de dados FF Size-B/M. Tem-se um aumento do índice de diversificação e do *turnover*. O número de ativos apresentado é similar ao da estratégia 1/N. Apresentou custo de indiferença de utilidade (κ_1) positivo apenas para a base de dados FF Size-B/M, ou seja, nesse caso um investidor com aversão ao risco $\gamma = 1$ e função utilidade quadrática estaria disposto a sacrificar uma taxa específica anualizada para abandonar a estratégia 1/N por esta;
- b) MDP – Sua volatilidade fora inferior e significativamente diferente para as bases FF Industry e FF Size-B/M, e não apresentou índice de Sharpe significativamente distinto. Seus índices de diversificação foram superiores aos das demais estratégias, como era esperado. Não apresentou custos de indiferença de utilidade positivos.

No painel B da Tabela 18, tem-se um comparativo de estratégias voltadas à minimização da variância que apresentaram os seguintes desempenhos:

- a) MIN – Apresentou volatilidade inferior e significativamente diferente da 1/N para todas as bases de dados avaliadas. Seu índice de Sharpe fora superior ao da 1/N exceto para a base de dados Dow Jones. Também foi identificado um aumento de seu *turnover*. Além disso, verifica-se o aumento do seu índice de diversificação mesmo utilizando uma quantidade de ativos muito inferior à da estratégia 1/N. Não apresentou custos de indiferença de utilidade positivos;
- b) MIN-REF ($h = 6$) – Em geral apresentou características próximas à MIN, diferenciando-se pelo ligeiro aumento no índice de diversificação e pela maior quantidade de ativos na carteira;
- c) MIN-BAG ($\nu = 0,7$) – Apresentou características e número de ativos na carteira próximos aos da estratégia MIN-REF, entretanto se diferenciou pela redução do *turnover* e por apresentar índice de Sharpe estatisticamente diferente inferior à 1/N para a base de dados Dow Jones;
- d) MIN-ENT ($\theta = 0,1\%$) – Apresentou características mais próximas da estratégia 1/N do que de MIN. É verificada volatilidade inferior e significativamente diferente da 1/N para todas as bases de dados avaliadas, mas não foi identificado

índice de Sharpe significativamente distinto de $1/N$. Ainda em relação à estratégia $1/N$, tem-se um aumento do índice de diversificação, aumento do *turnover* e diminuição do número de ativos presente na carteira. Não apresentou custos de indiferença de utilidade positivos;

- e) MIN-ENT+ ($\theta = 0,1\%$, $\nu = 0,8\%$) – Não apresentou desempenho distinto da estratégia MIN-ENT, entretanto observaram-se ligeiras reduções do índice de diversificação e do número de ativos na carteira. Outra mudança, apesar de pequena, sugere aumento no *turnover*.

No painel C da Tabela 18, tem-se um comparativo de estratégias voltadas à maximização da relação de média-variância que apresentaram os seguintes desempenhos:

- a) MV ($\gamma = 5$) – Não apresentou volatilidade estatisticamente distinta da estratégia $1/N$, exceto para a base de dados FF Size-B/M. Não foi verificado índice de Sharpe estatisticamente diferente da estratégia $1/N$ para nenhuma das bases de dados avaliadas. Apesar do menor número de ativos presentes na carteira dentre as estratégias avaliadas, seu índice de diversificação ficou próximo ao do apresentado pela $1/N$. Apresentou o maior *turnover* dentre todas as estratégias avaliadas. Seus custos de indiferença de utilidade foram positivos para as bases de dados Dow Jones e FF Industry;
- b) MV-REF ($\gamma = 5$, $h = 6$) – Em relação à estratégia MV tal abordagem de reamostragem promoveu redução da volatilidade e do *turnover*, aumento do índice de diversificação e do número de ativos na carteira. Seus custos de indiferença de utilidade foram positivos apenas para a bases de dados Dow Jones. Apresentou índices de Sharpe superiores ao da $1/N$ em todas as bases de dados, entretanto não apresentou significância estatística nessa diferença;
- c) MV-BAG ($\gamma = 5$, $\nu = 0,45$) – Sua volatilidade é inferior e estatisticamente diferente da estratégia $1/N$ para todas as bases de dados avaliadas. Seu índice de Sharpe fora superior e estatisticamente diferente da $1/N$ apenas para a base de dados FF Size-B/M. Seus custos de indiferença de utilidade foram positivos exceto para a base de dados Dow Jones. Em relação à estratégia MV-REF, diferenciou-se pela redução do *turnover*, apesar de possuir aproximadamente o mesmo número de ativos na carteira;
- d) MV-ENT ($\gamma = 5$, $\theta = 0,1\%$) – Em relação à estratégia MV, nota-se aumento do índice de Sharpe, do índice de diversificação e do número de ativos, além da redução da volatilidade e do *turnover*. Apresentou índices de Sharpe superiores ao da $1/N$ em todas as bases de dados, entretanto não apresentou significância estatística nessa diferença. Seus custos de indiferença de utilidade foram positivos apenas para a base de dados Dow Jones;

- e) MV-ENT+ ($\gamma = 5$, $\theta = 0,1$, $\nu = 0,8\%$) – Não apresentou desempenho distinto da estratégia MV-ENT, entretanto observaram-se ligeiras reduções do índice de diversificação e do número de ativos na carteira. Outra mudança, apesar de pequena, sugere aumento no *turnover*.

A Tabela 19 apresenta a segmentação da Tabela 18 em dois períodos para fins de verificar a robustez das diferentes técnicas. É percebido que, independente da base de dados utilizada, as estratégias 1/N e VW apresentaram no segundo período aproximadamente a mesma volatilidade do primeiro, porém com uma redução na média no segundo. Tal fato impactou desfavoravelmente o índice de Sharpe dessas estratégias no segundo período. As demais estratégias também apresentaram redução do índice de Sharpe, entretanto algumas delas tiveram associado a isso a redução de volatilidade. Na Tabela 18, todas as estratégias apresentaram valores de índice de Sharpe superiores à VW, porém com a segmentação da Tabela 19, as estratégias MIN e MDP não apresentaram essa consistência. Com relação às estratégias que superaram EW mesmo que numericamente, tem-se que, na Tabela 19, nenhuma delas foi consistentemente superior à EW ao se avaliar todos os subperíodos de todas as bases de dados.

Tabela 18 – Avaliação do desempenho fora da amostra das estratégias de investimento ao utilizar como insumo a matriz de covariâncias encolhida linearmente (LEDOIT; WOLF, 2003). Ausência de custos de transação.

Estratégia	Dow Jones (N = 28)							FF Industry (N = 49)							FF Size-B/M (N = 96)						
	μ	σ	$\mathcal{SR}$	$\mathcal{DR}$	$ \overline{\Delta x} $	κ_1	$N_{95\%}$	μ	σ	$\mathcal{SR}$	$\mathcal{DR}$	$ \overline{\Delta x} $	κ_1	$N_{95\%}$	μ	σ	$\mathcal{SR}$	$\mathcal{DR}$	$ \overline{\Delta x} $	κ_1	$N_{95\%}$
1/N	13,7	17,6	0,638	1,69	4,7	0	27	14	16,3	0,589	1,36	3,1	0	47	15,4	17,5	0,629	1,16	2,2	0	92
VW	8,7	16,8 (0,07)	0,373 (0,00)			-472		12,9	15,2 (0,00)	0,557 (0,53)			-94		12,9	15,2 (0,00)	0,557 (0,20)			-213	
<i>Painel A. Estratégias de seleção de portfólios que utilizam apenas informações de covariâncias</i>																					
ERC	12,3	16,2 (0,00)	0,609 (0,24)	1,78	5,7	-111	26	13,8	15,2 (0,00)	0,618 (0,05)	1,43	3,9	-4	45	15,5	17 (0,00)	0,652 (0,02)	1,17	2,6	13	89
MDP	12,3	16,2 (0,17)	0,612 (0,74)	2,04	14,2	-108	12	12,5	14 (0,00)	0,582 (0,95)	1,85	12,4	-112	10	13,8	16,5 (0,03)	0,57 (0,34)	1,37	13,6	-142	9
<i>Painel B. Estratégias de seleção de portfólios voltadas à minimização da variância</i>																					
MIN	8,8	14,3 (0,00)	0,447 (0,06)	1,75	13,1	-423	9	12,7	11,6 (0,00)	0,72 (0,19)	1,51	11,5	-62	7	13,9	14 (0,00)	0,678 (0,52)	1,22	16,4	-96	6
MIN-REF (h=6)	9,3	14,3 (0,00)	0,482 (0,09)	1,79	12,6	-374	13	12,7	11,6 (0,00)	0,715 (0,18)	1,54	11,7	-65	12	13,9	14,1 (0,00)	0,677 (0,48)	1,23	16,2	-94	14
MIN-BAG ($\nu=0,7$)	9,1	14,2 (0,00)	0,467 (0,03)	1,75	9,3	-397	13	13,1	11,8 (0,00)	0,734 (0,07)	1,48	9,6	-30	12	14,4	14,1 (0,00)	0,705 (0,20)	1,22	12,6	-52	12
MIN-ENT ($\theta=0,1\%$)	10,7	15,1 (0,00)	0,548 (0,10)	1,84	7,7	-251	24	13,2	13,2 (0,00)	0,664 (0,13)	1,5	6	-40	42	14,3	15,5 (0,00)	0,641 (0,74)	1,21	6,2	-77	83
MIN-ENT+ ($\theta=0,1\%$)	10,3	14,8 (0,00)	0,528 (0,07)	1,77	8,1	-292	22	13,3	13,1 (0,00)	0,679 (0,08)	1,44	6,8	-21	39	14,4	15,4 (0,00)	0,652 (0,50)	1,2	7	-64	80
<i>Painel C. Estratégias de seleção de portfólios voltadas à maximização da relação de média-variância</i>																					
MV ($\gamma=5$)	16,1	19,9 (0,17)	0,685 (0,74)	1,53	24	199	6	14	16,1 (0,63)	0,597 (0,92)	1,35	27,6	4	5	14,3	15,7 (0,00)	0,625 (0,96)	1,17	32,5	-88	4
MV-REF ($\gamma=5, h=6$)	13,9	17,7 (0,92)	0,647 (0,94)	1,7	19,7	22	15	13,4	13,8 (0,00)	0,648 (0,42)	1,51	19,9	-26	16	14,2	14,9 (0,00)	0,659 (0,57)	1,24	23,9	-79	25
MV-BAG ($\gamma=5, \nu=0,45$)	11,3	15,5 (0,04)	0,573 (0,37)	1,71	14	-198	16	14,1	14 (0,00)	0,693 (0,09)	1,37	15,2	44	17	15,4	15,4 (0,00)	0,713 (0,05)	1,17	18,5	31	21
MV-ENT ($\gamma=5, \theta=0,1\%$)	15,1	18,5 (0,47)	0,688 (0,65)	1,64	15,6	132	22	13,7	15 (0,00)	0,617 (0,64)	1,44	15,7	-13	39	14,6	15,9 (0,00)	0,642 (0,75)	1,21	14,9	-57	78
MV-ENT+ ($\gamma=5, \theta=0,1\%$)	14,8	18,1 (0,66)	0,68 (0,70)	1,62	16	100	21	13,8	14,9 (0,00)	0,629 (0,50)	1,4	16,1	1	36	14,7	15,8 (0,00)	0,648 (0,62)	1,2	15,2	-49	76

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: O tamanho da janela de horizonte móvel de estimação considerada foi de $\tau = 60$ (5 anos). As estratégias ENT+ utilizaram índices de incerteza individuais construídos com $\nu = 0,8$. As medidas de média (μ) e desvio padrão (σ) são percentuais e anualizados. Abaixo da estimativa de σ é apresentado o valor-p do teste de hipótese ($H_0 : \log(\sigma^2/\sigma_{1/N}^2) = 0$) entre parêntesis. O índice de Sharpe ($\mathcal{SR}$) é anualizado, e o valor-p do teste de hipótese ($H_0 : (\mathcal{SR} - \mathcal{SR}_{1/N}) = 0$) é apresentado entre parêntesis. O índice de diversificação ($\mathcal{DR}$) reportado é a média dos índices para cada janela de estimação. O turnover ($|\overline{\Delta x}|$) é informado em termos percentuais. $\kappa_1(\kappa_\gamma)$ é a taxa máxima anualizada que um investidor, com função de utilidade quadrática e aversão ao risco $\gamma = 1$, estaria disposto a pagar em cada período para abandonar a alocação ingênua (1/N). $N_{95\%}$ é a quantidade média de ativos que concentram pelo menos 95% do patrimônio investido. As respectivas bases de dados, período de validação e número de observações mensais por ativo são os seguintes: Dow Jones (N = 28), Fev/1995-Abr/2016 (255); FF Industry (N = 49), Jan/1975-Dez/2019 (540); FF Size-B/M (N = 96), Jan/1975-Dez/2019 (540).

Tabela 19 – Segmentação do desempenho fora da amostra, apresentado na Tabela 18, em dois subperíodos. Ausência de custos de transação.

Estratégia	Dow Jones ($N = 28$)						FF Industry ($N = 49$)						FF Size-B/M ($N = 96$)					
	Fev/1995-Set/2005			Out/2005-Abr/2016			Jan/1975-Jun/1997			Jul/1997-Dez/2019			Jan/1975-Jun/1997			Jul/1997-Dez/2019		
	μ	σ	SR	μ	σ	SR	μ	σ	SR	μ	σ	SR	μ	σ	SR	μ	σ	SR
1/N	16,6	17,3	0,742	10,7	17,9	0,536	17,8	16,5	0,662	10,2	16	0,515	19,7	17	0,755	11,2	18	0,513
VW	10,7	16,8 (0,36)	0,412 (0,00)	6,7	16,8 (0,19)	0,332 (0,00)	16,7	15 (0,00)	0,654 (0,83)	9,1	15,4 (0,29)	0,466 (0,62)	16,7	15 (0,00)	0,654 (0,10)	9,1	15,4 (0,00)	0,466 (0,62)
<i>Painel A. Estratégias de seleção de portfólios que utilizam apenas informações de covariâncias</i>																		
ERC	15,3	16,4 (0,01)	0,706 (0,37)	9,3	16 (0,00)	0,508 (0,42)	17,7	15,7 (0,00)	0,688 (0,16)	9,9	14,6 (0,00)	0,545 (0,20)	19,6	16,6 (0,00)	0,771 (0,28)	11,3	17,3 (0,00)	0,54 (0,09)
MDP	17	17,8 (0,70)	0,745 (0,98)	7,7	14,4 (0,00)	0,455 (0,48)	16,9	14,3 (0,00)	0,702 (0,72)	8,1	13,5 (0,00)	0,458 (0,59)	18	15,3 (0,00)	0,733 (0,79)	9,6	17,6 (0,64)	0,433 (0,35)
<i>Painel B. Estratégias de seleção de portfólios voltadas à minimização da variância</i>																		
MIN	12,3	15,7 (0,15)	0,547 (0,18)	5,3	12,6 (0,00)	0,328 (0,19)	16,3	11,6 (0,00)	0,815 (0,37)	9,1	11,4 (0,00)	0,627 (0,38)	17,4	14,2 (0,00)	0,741 (0,91)	10,5	13,8 (0,00)	0,616 (0,30)
MIN-REF ($h=6$)	12,9	15,6 (0,14)	0,588 (0,23)	5,7	12,8 (0,00)	0,356 (0,21)	16,4	11,7 (0,00)	0,818 (0,30)	9	11,4 (0,00)	0,616 (0,39)	17,6	14,2 (0,00)	0,757 (0,99)	10,3	13,9 (0,00)	0,599 (0,35)
MIN-BAG ($\nu=0,7$)	12,4	15,5 (0,04)	0,558 (0,12)	5,8	12,8 (0,00)	0,361 (0,16)	16,8	12,1 (0,00)	0,821 (0,20)	9,3	11,4 (0,00)	0,647 (0,20)	17,8	14,2 (0,00)	0,767 (0,90)	11	14 (0,00)	0,644 (0,12)
MIN-ENT ($\theta=0,1\%$)	14,4	15,7 (0,05)	0,679 (0,47)	7	14,4 (0,00)	0,406 (0,11)	17	13,1 (0,00)	0,77 (0,18)	9,3	13,1 (0,00)	0,561 (0,44)	18,1	15,2 (0,00)	0,743 (0,82)	10,5	15,7 (0,00)	0,545 (0,47)
MIN-ENT+ ($\theta=0,1\%$)	13,7	15,4 (0,02)	0,649 (0,35)	6,7	14,1 (0,00)	0,397 (0,11)	17,1	13,2 (0,00)	0,775 (0,17)	9,6	13 (0,00)	0,584 (0,26)	18,1	15,2 (0,00)	0,744 (0,84)	10,7	15,6 (0,00)	0,564 (0,25)
<i>Painel C. Estratégias de seleção de portfólios voltadas à maximização da relação de média-variância</i>																		
MV ($\gamma=5$)	19,7	21,7 (0,01)	0,732 (0,96)	12,5	17,9 (0,99)	0,634 (0,66)	17,7	16 (0,42)	0,674 (0,92)	10,4	16,1 (0,95)	0,522 (0,96)	17,8	16 (0,07)	0,687 (0,47)	10,7	15,5 (0,00)	0,563 (0,64)
MV-REF ($\gamma=5, h=6$)	17,7	18,7 (0,19)	0,742 (1,00)	10,1	16,6 (0,55)	0,541 (0,98)	17,1	14 (0,00)	0,73 (0,51)	9,7	13,6 (0,00)	0,567 (0,65)	18,1	15 (0,00)	0,752 (0,97)	10,3	14,7 (0,00)	0,566 (0,50)
MV-BAG ($\gamma=5, \nu=0,45$)	14,2	16,8 (0,45)	0,622 (0,21)	8,4	14,1 (0,01)	0,517 (0,88)	18,1	14,4 (0,00)	0,783 (0,15)	10,1	13,5 (0,00)	0,601 (0,36)	19,6	15,2 (0,00)	0,841 (0,20)	11,1	15,5 (0,00)	0,591 (0,20)
MV-ENT ($\gamma=5, \theta=0,1\%$)	19,1	19,5 (0,08)	0,787 (0,79)	11,2	17,4 (0,79)	0,578 (0,79)	17,4	15,2 (0,00)	0,697 (0,66)	9,9	14,8 (0,07)	0,538 (0,81)	18,3	15,9 (0,00)	0,717 (0,48)	10,9	15,8 (0,00)	0,567 (0,33)
MV-ENT+ ($\gamma=5, \theta=0,1\%$)	18,5	19 (0,15)	0,774 (0,85)	11	17,1 (0,69)	0,577 (0,80)	17,6	15,1 (0,00)	0,707 (0,56)	10,1	14,7 (0,04)	0,551 (0,70)	18,2	15,9 (0,00)	0,717 (0,47)	11,1	15,7 (0,00)	0,58 (0,26)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: As notas desta tabela são as mesmas apresentadas para a Tabela 18.

O desempenho ajustado ao risco referente à Tabela 18 foi avaliado na ausência de custos de transações e apresentado nas Tabelas 20, 21 e 22 referentes às bases de dados Dow Jones, FF Industry e FF Size B/M, respectivamente.

Com relação à Tabela 20, verificou-se que todas as estratégias avaliadas foram penalizadas por terem investido em empresas grandes, e isso é confirmado pelos coeficientes, negativos e significativos a 5%, apresentados quando o impacto do fator tamanho (*SMB*) é avaliado. A estratégia 1/N apresentou um valor de α que não é estatisticamente diferente de zero, para um nível de significância de 5%, de acordo com o modelo FF5. Seus retornos podem ser explicados pela exposição ao fator mercado ($b_i = 1,03$) e ao fator lucratividade (*RMW*) ($r_i = 0,25$), apesar da influência negativa do fator tamanho (*SMB*) ($s_i = -0,23$). Com relação às estratégias presentes nos painéis A e B, percebe-se que seus retornos podem ser explicados pela exposição ao fator mercado e ao fator lucratividade, com a influência negativa do fator tamanho. Entretanto, pode-se destacar o fato de que a estratégia MIN-BAG apresentou, em relação à MIN e MIN-REF, um valor superior do coeficiente de determinação ajustado. As estratégias MIN-ENT e MIN-ENT+ apresentaram parâmetros similares, porém com ligeira redução do intercepto e do coeficiente de determinação ajustado para a MIN-ENT+. Dentre as estratégias apresentadas no painel C, verifica-se que a MV, MV-REF, MV-ENT e MV-ENT+ exibiram valor de α estatisticamente diferente de zero, para um nível de significância de 5%, de acordo com o modelo FF5. Entretanto, foram penalizadas pelos fatores tamanho e investimento. A estratégia MV-BAG não apresentou intercepto significativamente diferente de zero, porém teve reduzida a penalização do fator investimento em conjunto com o aumento do coeficiente de determinação.

Com relação à Tabela 21, tem-se que a estratégia 1/N apresentou α negativo e estatisticamente diferente de zero, para um nível de significância de 5%, de acordo com o modelo FF5. Seus retornos podem ser explicados pela exposição ao fator mercado ($b_i = 1,06$), ao fator tamanho (*SMB*) ($s_i = 0,26$), ao fator *book-to-market* (*HML*) ($h_i = 0,11$), ao fator lucratividade (*RMW*) ($r_i = 0,29$) e ao fator investimento (*CMA*) ($c_i = 0,11$). As estratégias apresentadas no painel A não apresentaram intercepto positivo e significativo, além disso, tiveram a maior parte da informação dos retornos capturada pelos fatores de risco. Todas as estratégias no painel B apresentaram α positivo e significativo, para um nível de significância de 5%, de acordo com o modelo CAPM. Para as estratégias MIN-ENT e MIN-ENT+, tal retorno anormal pôde ser explicado pela exposição ao fator *book-to-market*, de acordo com o modelo FF3. Para as estratégias MIN, MIN-REF e MIN-BAG, seu retorno anormal pôde ser explicado pela exposição aos fatores *book-to-market*, lucratividade e investimento, de acordo com o modelo FF5. Vale ressaltar que a estratégia MIN-BAG apresentou coeficiente de determinação ajustado superior em relação às estratégias MIN e MIN-REF e isso reflete uma melhor captura da informação fatorial presentes nos retornos. As estratégias MIN-ENT e MIN-ENT+ apresentaram parâmetros similares, porém com ligeiro aumento do intercepto e do coeficiente de determinação ajustado para a MIN-

ENT+. Ao considerar o painel C, tem-se que todas as estratégias apresentaram α positivo e significativo, para um nível de significância de 5%, de acordo com o modelo FF3. Tal retorno anormal pôde ser explicado pela exposição ao fator *momentum*, de acordo com o modelo FFC. As estratégias MV-ENT e MV-ENT+ apresentaram parâmetros similares, porém com aumento no valor do intercepto e do coeficiente de determinação ajustado para a MV-ENT+.

Com relação à Tabela 22, tem-se que a estratégia 1/N apresentou α positivo e estatisticamente diferente de zero, para um nível de significância de 5%, de acordo com o modelo CAPM. Seus retornos anormais podem ser explicados pela exposição aos fatores tamanho e *book-to-market*, de acordo com o modelo FF3. Com relação às estratégias do painel A, apenas a ERC apresentou intercepto significativo na regressão do modelo CAPM, e o retorno anormal pôde ser explicado pelos fatores tamanho e *book-to-market* na regressão do modelo FF3. Com relação ao painel B, tem-se que todas as estratégias apresentaram α positivo e significativo, para um nível de significância de 5%, de acordo com o modelo CAPM. Para as estratégias MIN, MIN-REF e MIN-BAG, tal retorno anormal pode ser explicado pelo fator *book-to-market*, de acordo com o modelo FF3. Já as estratégias MIN-ENT e MIN-ENT+ tiveram seu retorno anormal explicado pelos fatores tamanho e/ou *book-to-market*. A estratégia MIN-BAG apresentou coeficiente de determinação ajustado superior em relação às estratégias MIN e MIN-REF. As estratégias MIN-ENT e MIN-ENT+ apresentaram parâmetros similares, porém com ligeiro aumento do intercepto para a MIN-ENT+. Com relação ao painel C, tem-se que as estratégias MV-REF, MV-BAG, MV-ENT e MV-ENT+ apresentaram α positivo e significativo, para um nível de significância de 5%, de acordo com o modelo CAPM. Para a estratégia MV-BAG, tal retorno anormal pode ser explicado pelos fatores tamanho, *book-to-market* e *momentum* conforme o modelo FFC. As demais estratégias do painel C têm seu retorno anormal explicado pela exposição aos fatores tamanho e *book-to-market*. A estratégia MV-BAG apresentou coeficiente de determinação ajustado superior em relação à MV e MV-REF. As estratégias MV-ENT e MV-ENT+ apresentaram parâmetros similares, porém com ligeiro aumento do intercepto para a MV-ENT+.

Tabela 20 – Regressões dos retornos em excesso ($r_i - r_f$), para avaliação fora da amostra de cada estratégia da Tabela 18, em relação aos modelos fatoriais referentes aos ativos da base de dados Dow Jones (N = 28); Fev/1995-Abr/2016, 255 meses. Ausência de custos de transação.

Estratégia	CAPM			FF3					FFC						FF5						
	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	$R^2_{A_j}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	SMB	HML	$R^2_{A_j}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	SMB	HML	Mom	$R^2_{A_j}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	SMB	HML	RMW	CMA	$R^2_{A_j}$
1/N	0.35 (0.01)	0.91 (0.00)	0.64	0.315 (0.01)	0.98 (0.00)	-0.3 (0.00)	0.16 (0.04)	0.7	0.359 (0.00)	0.95 (0.00)	-0.3 (0.00)	0.14 (0.09)	-0.06 (0.12)	0.7	0.202 (0.15)	1.03 (0.00)	-0.23 (0.00)	0.16 (0.21)	0.25 (0.01)	-0.05 (0.74)	0.71
VW	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Painel A. Estratégias de seleção de portfólios que utilizam apenas informações de covariâncias																					
ERC	0.297 (0.04)	0.81 (0.00)	0.61	0.265 (0.02)	0.89 (0.00)	-0.33 (0.00)	0.16 (0.04)	0.69	0.288 (0.02)	0.87 (0.00)	-0.33 (0.00)	0.15 (0.06)	-0.03 (0.41)	0.69	0.131 (0.33)	0.95 (0.00)	-0.24 (0.00)	0.14 (0.23)	0.27 (0.00)	-0.02 (0.85)	0.7
MDP	0.351 (0.04)	0.73 (0.00)	0.5	0.352 (0.02)	0.81 (0.00)	-0.43 (0.00)	0.05 (0.51)	0.6	0.357 (0.03)	0.81 (0.00)	-0.43 (0.00)	0.05 (0.56)	-0.01 (0.88)	0.59	0.238 (0.17)	0.87 (0.00)	-0.32 (0.00)	0.11 (0.38)	0.32 (0.00)	-0.18 (0.17)	0.62
Painel B. Estratégias de seleção de portfólios voltadas à minimização da variância																					
MIN	0.165 (0.41)	0.57 (0.00)	0.38	0.146 (0.37)	0.65 (0.00)	-0.39 (0.00)	0.12 (0.15)	0.5	0.132 (0.43)	0.65 (0.00)	-0.4 (0.00)	0.12 (0.12)	0.02 (0.68)	0.5	-0.039 (0.83)	0.73 (0.00)	-0.29 (0.00)	0.06 (0.56)	0.33 (0.00)	0.05 (0.66)	0.52
MIN-REF ($h=6$)	0.191 (0.34)	0.59 (0.00)	0.41	0.174 (0.25)	0.67 (0.00)	-0.4 (0.00)	0.11 (0.18)	0.54	0.16 (0.31)	0.68 (0.00)	-0.4 (0.00)	0.12 (0.15)	0.02 (0.69)	0.53	-0.006 (0.97)	0.76 (0.00)	-0.29 (0.00)	0.06 (0.57)	0.33 (0.00)	0.04 (0.74)	0.56
MIN-BAG ($\nu=0.7$)	0.16 (0.42)	0.61 (0.00)	0.44	0.141 (0.33)	0.69 (0.00)	-0.38 (0.00)	0.12 (0.14)	0.56	0.126 (0.40)	0.69 (0.00)	-0.39 (0.00)	0.12 (0.12)	0.02 (0.66)	0.56	-0.047 (0.77)	0.78 (0.00)	-0.28 (0.00)	0.05 (0.64)	0.33 (0.00)	0.08 (0.52)	0.58
MIN-ENT ($\theta=0.1\%$)	0.235 (0.13)	0.7 (0.00)	0.53	0.212 (0.10)	0.78 (0.00)	-0.38 (0.00)	0.13 (0.10)	0.63	0.207 (0.12)	0.79 (0.00)	-0.38 (0.00)	0.13 (0.10)	0.01 (0.88)	0.63	0.043 (0.77)	0.86 (0.00)	-0.27 (0.00)	0.09 (0.43)	0.33 (0.00)	0 (0.97)	0.65
MIN-ENT+ ($\theta=0.1\%$)	0.212 (0.20)	0.68 (0.00)	0.51	0.181 (0.17)	0.76 (0.00)	-0.36 (0.00)	0.15 (0.05)	0.62	0.175 (0.19)	0.76 (0.00)	-0.36 (0.00)	0.16 (0.05)	0.01 (0.83)	0.62	0.013 (0.93)	0.84 (0.00)	-0.26 (0.00)	0.1 (0.37)	0.31 (0.00)	0.05 (0.70)	0.64
Painel C. Estratégias de seleção de portfólios voltadas à maximização da relação de média-variância																					
MV ($\gamma=5$)	0.634 (0.01)	0.78 (0.00)	0.37	0.757 (0.00)	0.81 (0.00)	-0.44 (0.00)	-0.39 (0.00)	0.44	0.583 (0.01)	0.9 (0.00)	-0.47 (0.00)	-0.3 (0.00)	0.22 (0.00)	0.47	0.689 (0.01)	0.84 (0.00)	-0.26 (0.01)	-0.19 (0.24)	0.45 (0.00)	-0.59 (0.00)	0.49
MV-REF ($\gamma=5, h=6$)	0.457 (0.02)	0.77 (0.00)	0.46	0.536 (0.00)	0.82 (0.00)	-0.42 (0.00)	-0.23 (0.02)	0.53	0.42 (0.03)	0.88 (0.00)	-0.45 (0.00)	-0.17 (0.05)	0.15 (0.00)	0.55	0.406 (0.04)	0.88 (0.00)	-0.27 (0.00)	-0.15 (0.30)	0.42 (0.00)	-0.32 (0.03)	0.57
MV-BAG ($\gamma=5, \nu=0.45$)	0.262 (0.07)	0.74 (0.00)	0.55	0.305 (0.02)	0.8 (0.00)	-0.4 (0.00)	-0.1 (0.20)	0.63	0.236 (0.09)	0.83 (0.00)	-0.41 (0.00)	-0.07 (0.36)	0.09 (0.02)	0.64	0.184 (0.22)	0.85 (0.00)	-0.29 (0.00)	-0.06 (0.60)	0.32 (0.00)	-0.16 (0.14)	0.65
MV-ENT ($\gamma=5, \theta=0.1\%$)	0.525 (0.01)	0.83 (0.00)	0.48	0.608 (0.00)	0.87 (0.00)	-0.4 (0.00)	-0.25 (0.01)	0.54	0.497 (0.01)	0.92 (0.00)	-0.42 (0.00)	-0.2 (0.03)	0.14 (0.00)	0.56	0.531 (0.01)	0.9 (0.00)	-0.25 (0.00)	-0.11 (0.44)	0.37 (0.00)	-0.41 (0.01)	0.58
MV-ENT+ ($\gamma=5, \theta=0.1\%$)	0.502 (0.01)	0.81 (0.00)	0.48	0.581 (0.00)	0.85 (0.00)	-0.39 (0.00)	-0.23 (0.02)	0.54	0.467 (0.01)	0.91 (0.00)	-0.41 (0.00)	-0.18 (0.05)	0.15 (0.00)	0.56	0.503 (0.01)	0.89 (0.00)	-0.26 (0.00)	-0.11 (0.46)	0.35 (0.01)	-0.38 (0.02)	0.57

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: O tamanho da janela de horizonte móvel de estimação considerada foi de $\tau = 60$ (5 anos). Valores de α positivos e significativos a 5% são destacados na tabela. Erros padrão ajustados pelo procedimento HAC de Newey-West (NEWKEY; WEST, 1987, 1994).

Tabela 21 – Regressões dos retornos em excesso ($r_i - r_f$), para avaliação fora da amostra de cada estratégia da Tabela 18, em relação aos modelos fatoriais referentes aos ativos da base de dados FF Industry (N = 49); Jan/1975-Dez/2019, 540 meses. Ausência de custos de transação.

Estratégia	CAPM			FF3					FFC						FF5						
	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	SMB	HML	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	SMB	HML	Mom	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	SMB	HML	RMW	CMA	$R^2_{Aj.}$
1/N	0,074 (0,29)	1,03 (0,00)	0,92	-0,016 (0,78)	1,03 (0,00)	0,15 (0,01)	0,2 (0,00)	0,94	0,025 (0,66)	1,02 (0,00)	0,16 (0,00)	0,18 (0,00)	-0,05 (0,14)	0,94	-0,163 (0,00)	1,06 (0,00)	0,26 (0,00)	0,11 (0,00)	0,29 (0,00)	0,11 (0,00)	0,96
VW	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Painel A. Estratégias de seleção de portfólios que utilizam apenas informações de covariâncias																					
ERC	0,107 (0,12)	0,96 (0,00)	0,92	0,025 (0,66)	0,97 (0,00)	0,1 (0,06)	0,19 (0,00)	0,93	0,046 (0,42)	0,96 (0,00)	0,1 (0,04)	0,18 (0,00)	-0,03 (0,43)	0,93	-0,136 (0,00)	1,01 (0,00)	0,2 (0,00)	0,09 (0,00)	0,3 (0,00)	0,16 (0,00)	0,96
MDP	0,149 (0,16)	0,75 (0,00)	0,67	0,068 (0,51)	0,77 (0,00)	0,07 (0,05)	0,2 (0,00)	0,69	0,041 (0,68)	0,77 (0,00)	0,07 (0,07)	0,21 (0,00)	0,03 (0,31)	0,69	-0,095 (0,34)	0,82 (0,00)	0,13 (0,00)	0,02 (0,72)	0,21 (0,00)	0,36 (0,00)	0,71
Painel B. Estratégias de seleção de portfólios voltadas à minimização da variância																					
MIN	0,274 (0,00)	0,59 (0,00)	0,61	0,207 (0,02)	0,65 (0,00)	-0,14 (0,00)	0,22 (0,00)	0,67	0,179 (0,06)	0,66 (0,00)	-0,14 (0,00)	0,23 (0,00)	0,03 (0,29)	0,67	0,092 (0,33)	0,69 (0,00)	-0,1 (0,00)	0,11 (0,02)	0,13 (0,00)	0,26 (0,00)	0,68
MIN-REF ($h=6$)	0,255 (0,01)	0,62 (0,00)	0,66	0,188 (0,03)	0,67 (0,00)	-0,12 (0,00)	0,21 (0,00)	0,71	0,163 (0,07)	0,68 (0,00)	-0,13 (0,00)	0,22 (0,00)	0,03 (0,33)	0,71	0,072 (0,41)	0,71 (0,00)	-0,08 (0,01)	0,1 (0,02)	0,14 (0,00)	0,26 (0,00)	0,72
MIN-BAG ($\nu=0,7$)	0,246 (0,00)	0,67 (0,00)	0,76	0,188 (0,01)	0,72 (0,00)	-0,12 (0,00)	0,19 (0,00)	0,79	0,161 (0,04)	0,73 (0,00)	-0,12 (0,00)	0,2 (0,00)	0,03 (0,28)	0,8	0,054 (0,46)	0,76 (0,00)	-0,06 (0,04)	0,08 (0,05)	0,19 (0,00)	0,24 (0,00)	0,81
MIN-ENT ($\theta=0,1\%$)	0,161 (0,03)	0,8 (0,00)	0,86	0,086 (0,19)	0,83 (0,00)	0 (0,91)	0,2 (0,00)	0,88	0,09 (0,16)	0,83 (0,00)	0 (0,92)	0,2 (0,00)	-0,01 (0,87)	0,88	-0,049 (0,42)	0,87 (0,00)	0,07 (0,01)	0,1 (0,00)	0,22 (0,00)	0,2 (0,00)	0,9
MIN-ENT+ ($\theta=0,1\%$)	0,174 (0,01)	0,81 (0,00)	0,87	0,101 (0,10)	0,84 (0,00)	-0,02 (0,56)	0,2 (0,00)	0,9	0,105 (0,08)	0,84 (0,00)	-0,02 (0,58)	0,2 (0,00)	-0,01 (0,85)	0,9	-0,027 (0,64)	0,88 (0,00)	0,05 (0,05)	0,11 (0,00)	0,21 (0,00)	0,18 (0,00)	0,91
Painel C. Estratégias de seleção de portfólios voltadas à maximização da relação de média-variância																					
MV ($\gamma=5$)	0,191 (0,10)	0,86 (0,00)	0,67	0,256 (0,02)	0,85 (0,00)	-0,08 (0,05)	-0,16 (0,01)	0,68	0,034 (0,76)	0,91 (0,00)	-0,1 (0,01)	-0,04 (0,38)	0,28 (0,00)	0,74	0,127 (0,29)	0,89 (0,00)	-0,02 (0,74)	-0,22 (0,00)	0,23 (0,00)	0,14 (0,28)	0,69
MV-REF ($\gamma=5, h=6$)	0,178 (0,03)	0,81 (0,00)	0,79	0,198 (0,01)	0,81 (0,00)	-0,06 (0,04)	-0,04 (0,47)	0,79	0,051 (0,53)	0,85 (0,00)	-0,08 (0,00)	0,04 (0,40)	0,18 (0,00)	0,82	0,085 (0,31)	0,84 (0,00)	-0,02 (0,70)	-0,12 (0,04)	0,18 (0,00)	0,17 (0,09)	0,8
MV-BAG ($\gamma=5, \nu=0,45$)	0,199 (0,00)	0,86 (0,00)	0,88	0,215 (0,00)	0,87 (0,00)	-0,08 (0,00)	-0,02 (0,61)	0,88	0,101 (0,11)	0,9 (0,00)	-0,09 (0,00)	0,04 (0,30)	0,14 (0,00)	0,9	0,089 (0,16)	0,9 (0,00)	-0,02 (0,61)	-0,09 (0,02)	0,22 (0,00)	0,15 (0,04)	0,89
MV-ENT ($\gamma=5, \theta=0,1\%$)	0,131 (0,09)	0,91 (0,00)	0,85	0,143 (0,05)	0,9 (0,00)	0,01 (0,77)	-0,03 (0,48)	0,85	0,02 (0,80)	0,93 (0,00)	0 (0,90)	0,03 (0,54)	0,15 (0,00)	0,87	0,021 (0,78)	0,93 (0,00)	0,07 (0,04)	-0,11 (0,03)	0,22 (0,00)	0,14 (0,13)	0,86
MV-ENT+ ($\gamma=5, \theta=0,1\%$)	0,142 (0,05)	0,91 (0,00)	0,86	0,153 (0,03)	0,9 (0,00)	0 (0,92)	-0,03 (0,54)	0,86	0,032 (0,67)	0,93 (0,00)	-0,01 (0,62)	0,03 (0,45)	0,15 (0,00)	0,88	0,035 (0,64)	0,93 (0,00)	0,06 (0,08)	-0,1 (0,04)	0,21 (0,00)	0,13 (0,12)	0,87

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: O tamanho da janela de horizonte móvel de estimação considerada foi de $\tau = 60$ (5 anos). Valores de α positivos e significativos a 5% são destacados na tabela. Erros padrão ajustados pelo procedimento HAC de Newey-West (NEWKEY; WEST, 1987, 1994).

Tabela 22 – Regressões dos retornos em excesso ($r_i - r_f$), para avaliação fora da amostra de cada estratégia da Tabela 18, em relação aos modelos fatoriais referentes aos ativos da base de dados FF Size-B/M (N = 96); Jan/1975-Dez/2019, 540 meses. Ausência de custos de transação.

Estratégia	CAPM			FF3					FFC					FF5							
	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	<i>SMB</i>	<i>HML</i>	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	<i>SMB</i>	<i>HML</i>	<i>Mom</i>	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	<i>SMB</i>	<i>HML</i>	<i>RMW</i>	<i>CMA</i>	$R^2_{Aj.}$
1/N	0,156 (0,05)	1,08 (0,00)	0,88	-0,001 (0,99)	1,03 (0,00)	0,55 (0,00)	0,28 (0,00)	0,99	0,025 (0,40)	1,02 (0,00)	0,55 (0,00)	0,27 (0,00)	-0,03 (0,06)	0,99	-0,022 (0,29)	1,02 (0,00)	0,58 (0,00)	0,19 (0,00)	0,06 (0,05)	0,04 (0,20)	0,99
VW	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Painel A. Estratégias de seleção de portfólios que utilizam apenas informações de covariâncias																					
ERC	0,179 (0,02)	1,05 (0,00)	0,89	0,02 (0,57)	1,01 (0,00)	0,47 (0,00)	0,31 (0,00)	0,98	0,039 (0,26)	1,01 (0,00)	0,47 (0,00)	0,3 (0,00)	-0,02 (0,27)	0,98	-0,027 (0,25)	1,02 (0,00)	0,51 (0,00)	0,21 (0,00)	0,1 (0,00)	0,05 (0,13)	0,99
MDP	0,076 (0,44)	1 (0,00)	0,85	-0,078 (0,24)	1,03 (0,00)	0,17 (0,00)	0,37 (0,00)	0,91	-0,05 (0,47)	1,02 (0,00)	0,17 (0,00)	0,36 (0,00)	-0,03 (0,22)	0,91	-0,059 (0,37)	1,02 (0,00)	0,17 (0,00)	0,37 (0,00)	-0,02 (0,69)	-0,04 (0,45)	0,91
Painel B. Estratégias de seleção de portfólios voltadas à minimização da variância																					
MIN	0,193 (0,01)	0,85 (0,00)	0,85	0,109 (0,14)	0,89 (0,00)	-0,04 (0,23)	0,24 (0,00)	0,88	0,071 (0,33)	0,9 (0,00)	-0,04 (0,20)	0,26 (0,00)	0,05 (0,10)	0,88	0,015 (0,83)	0,92 (0,00)	0 (0,92)	0,16 (0,00)	0,13 (0,00)	0,17 (0,00)	0,88
MIN-REF (<i>h</i> =6)	0,184 (0,01)	0,86 (0,00)	0,87	0,095 (0,16)	0,9 (0,00)	-0,02 (0,60)	0,24 (0,00)	0,9	0,063 (0,35)	0,91 (0,00)	-0,02 (0,55)	0,26 (0,00)	0,04 (0,13)	0,9	0,01 (0,87)	0,93 (0,00)	0,02 (0,52)	0,17 (0,00)	0,12 (0,00)	0,15 (0,00)	0,9
MIN-BAG ($\nu=0,7$)	0,211 (0,00)	0,87 (0,00)	0,89	0,112 (0,07)	0,91 (0,00)	0,03 (0,39)	0,26 (0,00)	0,92	0,082 (0,18)	0,92 (0,00)	0,03 (0,45)	0,28 (0,00)	0,04 (0,12)	0,92	0,023 (0,67)	0,94 (0,00)	0,07 (0,02)	0,18 (0,00)	0,14 (0,00)	0,15 (0,00)	0,93
MIN-ENT ($\theta=0,1\%$)	0,141 (0,04)	0,97 (0,00)	0,91	0,013 (0,79)	0,97 (0,00)	0,25 (0,00)	0,28 (0,00)	0,96	0,016 (0,73)	0,97 (0,00)	0,25 (0,00)	0,28 (0,00)	0 (0,89)	0,96	-0,051 (0,21)	0,98 (0,00)	0,3 (0,00)	0,2 (0,00)	0,12 (0,00)	0,08 (0,05)	0,97
MIN-ENT+ ($\theta=0,1\%$)	0,154 (0,02)	0,96 (0,00)	0,91	0,027 (0,57)	0,96 (0,00)	0,26 (0,00)	0,27 (0,00)	0,96	0,028 (0,54)	0,96 (0,00)	0,26 (0,00)	0,27 (0,00)	0 (0,97)	0,96	-0,043 (0,30)	0,97 (0,00)	0,31 (0,00)	0,19 (0,00)	0,13 (0,00)	0,1 (0,02)	0,97
Painel C. Estratégias de seleção de portfólios voltadas à maximização da relação de média-variância																					
MV ($\gamma=5$)	0,173 (0,09)	0,92 (0,00)	0,78	0,05 (0,57)	0,92 (0,00)	0,22 (0,00)	0,27 (0,00)	0,82	-0,063 (0,48)	0,95 (0,00)	0,21 (0,00)	0,33 (0,00)	0,14 (0,00)	0,84	-0,037 (0,68)	0,95 (0,00)	0,26 (0,00)	0,16 (0,00)	0,13 (0,00)	0,17 (0,02)	0,83
MV-REF ($\gamma=5, h=6$)	0,167 (0,02)	0,92 (0,00)	0,88	0,051 (0,38)	0,93 (0,00)	0,17 (0,00)	0,27 (0,00)	0,92	-0,023 (0,69)	0,95 (0,00)	0,17 (0,00)	0,3 (0,00)	0,09 (0,00)	0,93	-0,01 (0,85)	0,95 (0,00)	0,19 (0,00)	0,17 (0,00)	0,08 (0,03)	0,15 (0,00)	0,93
MV-BAG ($\gamma=5, \nu=0,45$)	0,246 (0,00)	0,94 (0,00)	0,87	0,105 (0,05)	0,93 (0,00)	0,33 (0,00)	0,3 (0,00)	0,94	0,047 (0,38)	0,95 (0,00)	0,32 (0,00)	0,33 (0,00)	0,07 (0,00)	0,95	0,045 (0,39)	0,95 (0,00)	0,35 (0,00)	0,18 (0,00)	0,08 (0,04)	0,16 (0,00)	0,95
MV-ENT ($\gamma=5, \theta=0,1\%$)	0,157 (0,04)	0,98 (0,00)	0,88	0,02 (0,70)	0,96 (0,00)	0,33 (0,00)	0,29 (0,00)	0,94	-0,038 (0,46)	0,98 (0,00)	0,32 (0,00)	0,31 (0,00)	0,07 (0,00)	0,95	-0,046 (0,35)	0,98 (0,00)	0,36 (0,00)	0,17 (0,00)	0,1 (0,00)	0,13 (0,00)	0,95
MV-ENT+ ($\gamma=5, \theta=0,1\%$)	0,166 (0,03)	0,97 (0,00)	0,88	0,03 (0,57)	0,96 (0,00)	0,34 (0,00)	0,28 (0,00)	0,94	-0,03 (0,57)	0,97 (0,00)	0,33 (0,00)	0,31 (0,00)	0,07 (0,00)	0,95	-0,04 (0,42)	0,97 (0,00)	0,37 (0,00)	0,16 (0,00)	0,11 (0,00)	0,15 (0,00)	0,95

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: O tamanho da janela de horizonte móvel de estimação considerada foi de $\tau = 60$ (5 anos). Valores de α positivos e significativos a 5% são destacados na tabela. Erros padrão ajustados pelo procedimento HAC de Newey-West (NEWKEY; WEST, 1987, 1994).

8.1.2 Impacto dos custos de transação (50 pontos base (0,5%))

O impacto dos custos de transação sobre o desempenho das estratégias de seleção de portfólios apresentadas na Tabela 18 podem ser verificados na Tabela 23 quando considerados custos fixos de 50 pontos base (50 bps ou 0,5%) por transação. Na ausência de custos de transação, todas as estratégias superavam numericamente a VW, apesar de tal diferença não ter sido verificada por meio do teste de hipótese relativo. Após a aplicação dos custos de transação, foi percebido que as estratégias MDP, MV e MV-ENT não superaram a VW, mesmo que numericamente, de forma consistente em todas as bases de dados avaliadas. Com relação à EW, não foi identificada nenhuma outra estratégia que a superasse consistentemente em termos de índice de Sharpe após a aplicação dos custos de transação, mesmo que apenas numericamente. O impacto dos custos de transação pode ser percebido pela redução da média, do índice de Sharpe e do custo de indiferença de utilidade em todas as estratégias.

A Tabela 24 apresenta a segmentação da Tabela 23 em dois períodos para fins de verificação da robustez das diferentes técnicas. Com a segmentação da Tabela 24, somente as estratégias ERC, MIN-ENT, MIN-ENT+ e MV-BAG se mantiveram com índice de Sharpe superior à VW de forma consistente em todos os períodos e todas as bases de dados.

O desempenho ajustado ao risco referente à Tabela 23 é apresentado nas Tabelas 25, 26 e 27 referentes às bases de dados Dow Jones, FF Industry e FF Size-B/M, respectivamente. Em relação ao cenário de ausência de custos de transação, em geral, ocorreu a redução do valor do intercepto apresentado pelas estratégias. Dentre as estratégias apresentadas no painel C da Tabela 25, verifica-se que a MV, MV-ENT e MV-ENT+ exibiram valor de α estatisticamente diferente de zero, para um nível de significância de 5%, de acordo com o modelo FF5. Entretanto, tais técnicas foram penalizadas pelos fatores tamanho e investimento. Apenas a estratégia MIN-BAG manteve a presença de interceptos positivos e significativos após o impacto dos custos de transação quando avaliada a regressão do modelo CAPM nas bases de dados FF Industry e FF Size-B/M.

Tabela 23 – Avaliação do desempenho fora da amostra das estratégias de investimento ao utilizar como insumo a matriz de covariâncias encolhida linearmente (LEDOIT; WOLF, 2003). Custos de transação de 50 pontos base (0,5%).

Estratégia	Dow Jones (N = 28)							FF Industry (N = 49)							FF Size-B/M (N = 96)						
	μ	σ	$\mathcal{SR}$	$\mathcal{DR}$	$ \overline{\Delta x} $	κ_1	$N_{95\%}$	μ	σ	$\mathcal{SR}$	$\mathcal{DR}$	$ \overline{\Delta x} $	κ_1	$N_{95\%}$	μ	σ	$\mathcal{SR}$	$\mathcal{DR}$	$ \overline{\Delta x} $	κ_1	$N_{95\%}$
1/N	13,4	17,6	0,622	1,69	4,7	0	27	13,4	16,1	0,561	1,36	3,1	0	47	14,8	17,2	0,604	1,16	2,2	0	92
VW	8,7	16,8 (0,08)	0,37 (0,00)			-450		12,6	15,1 (0,00)	0,543 (0,73)			-67		12,6	15,1 (0,00)	0,543 (0,28)			-184	
<i>Painel A. Estratégias de seleção de portfólios que utilizam apenas informações de covariâncias</i>																					
ERC	12	16,2 (0,00)	0,586 (0,16)	1,78	5,7	-120	26	13,2	15 (0,00)	0,586 (0,09)	1,43	3,9	-7	45	14,8	16,7 (0,00)	0,625 (0,03)	1,17	2,6	12	89
MDP	11,5	16,2 (0,16)	0,558 (0,42)	2,04	14,2	-166	12	11,5	13,8 (0,00)	0,511 (0,55)	1,85	12,4	-161	10	12,7	16,4 (0,08)	0,504 (0,11)	1,37	13,6	-198	9
<i>Painel B. Estratégias de seleção de portfólios voltadas à minimização da variância</i>																					
MIN	8	14,3 (0,00)	0,387 (0,02)	1,75	13,1	-479	9	11,8	11,4 (0,00)	0,644 (0,41)	1,51	11,5	-102	7	12,6	13,8 (0,00)	0,59 (0,86)	1,22	16,4	-170	6
MIN-REF (h=6)	8,5	14,3 (0,00)	0,425 (0,03)	1,79	12,6	-426	13	11,7	11,5 (0,00)	0,639 (0,41)	1,54	11,7	-105	12	12,6	13,9 (0,00)	0,591 (0,85)	1,23	16,2	-167	14
MIN-BAG ($\nu=0,7$)	8,5	14,2 (0,00)	0,423 (0,02)	1,75	9,3	-430	13	12,2	11,7 (0,00)	0,669 (0,17)	1,48	9,6	-60	12	13,2	13,9 (0,00)	0,634 (0,62)	1,22	12,6	-105	12
MIN-ENT ($\theta=0,1\%$)	10,2	15,1 (0,00)	0,516 (0,06)	1,84	7,7	-271	24	12,5	13 (0,00)	0,62 (0,23)	1,5	6	-50	42	13,5	15,2 (0,00)	0,6 (0,90)	1,21	6,2	-95	83
MIN-ENT+ ($\theta=0,1\%$)	9,7	14,8 (0,00)	0,493 (0,04)	1,77	8,1	-316	22	12,6	13 (0,00)	0,632 (0,17)	1,44	6,8	-37	39	13,6	15,1 (0,00)	0,607 (0,93)	1,2	7	-86	80
<i>Painel C. Estratégias de seleção de portfólios voltadas à maximização da relação de média-variância</i>																					
MV ($\gamma=5$)	15	19,8 (0,19)	0,631 (0,95)	1,53	24	116	6	12,2	16 (0,85)	0,485 (0,45)	1,35	27,6	-123	5	11,9	15,6 (0,00)	0,483 (0,08)	1,17	32,5	-258	4
MV-REF ($\gamma=5, h=6$)	13	17,7 (0,95)	0,595 (0,82)	1,7	19,7	-44	15	12	13,8 (0,00)	0,549 (0,88)	1,51	19,9	-113	16	12,4	14,7 (0,00)	0,544 (0,24)	1,24	23,9	-197	25
MV-BAG ($\gamma=5, \nu=0,45$)	10,5	15,5 (0,05)	0,521 (0,19)	1,71	14	-249	16	12,9	13,9 (0,00)	0,614 (0,37)	1,37	15,2	-15	17	13,9	15,2 (0,00)	0,624 (0,62)	1,17	18,5	-60	21
MV-ENT ($\gamma=5, \theta=0,1\%$)	14,5	18,4 (0,50)	0,652 (0,79)	1,64	15,6	91	22	12,5	15 (0,00)	0,542 (0,77)	1,44	15,7	-74	39	13,3	15,7 (0,00)	0,568 (0,37)	1,21	14,9	-123	78
MV-ENT+ ($\gamma=5, \theta=0,1\%$)	14	18,1 (0,70)	0,642 (0,85)	1,62	16	57	21	12,6	14,9 (0,00)	0,552 (0,90)	1,4	16,1	-62	36	13,4	15,6 (0,00)	0,573 (0,44)	1,2	15,2	-117	76

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: O tamanho da janela de horizonte móvel de estimação considerada foi de $\tau = 60$ (5 anos). As estratégias ENT+ utilizaram índices de incerteza individuais construídos com $\nu = 0,8$. As medidas de média (μ) e desvio padrão (σ) são percentuais e anualizados. Abaixo da estimativa de σ é apresentado o valor-p do teste de hipótese ($H_0 : \log(\sigma^2/\sigma_{1/N}^2) = 0$) entre parêntesis. O índice de Sharpe ($\mathcal{SR}$) é anualizado, e o valor-p do teste de hipótese ($H_0 : (\mathcal{SR} - \mathcal{SR}_{1/N}) = 0$) é apresentado entre parêntesis. O índice de diversificação ($\mathcal{DR}$) reportado é a média dos índices para cada janela de estimação. O turnover ($|\overline{\Delta x}|$) é informado em termos percentuais. $\kappa_1(\kappa_\gamma)$ é a taxa máxima anualizada que um investidor, com função de utilidade quadrática e aversão ao risco $\gamma = 1$, estaria disposto a pagar em cada período para abandonar a alocação ingênua (1/N). $N_{95\%}$ é a quantidade média de ativos que concentram pelo menos 95% do patrimônio investido. As respectivas bases de dados, período de validação e número de observações mensais por ativo são os seguintes: Dow Jones (N = 28), Mar/1995-Abr/2016 (254); FF Industry (N = 49), Fev/1975-Dez/2019 (539); FF Size-B/M (N = 96), Fev/1975-Dez/2019 (539).

Tabela 24 – Segmentação do desempenho fora da amostra, apresentado na Tabela 23, em dois subperíodos. Custos de transação de 50 pontos base (0,5%).

Estratégia	Dow Jones ($N = 28$)						FF Industry ($N = 49$)						FF Size-B/M ($N = 96$)					
	Mar/1995-Set/2005			Out/2005-Abr/2016			Fev/1975-Jul/1997			Ago/1997-Dez/2019			Fev/1975-Jul/1997			Ago/1997-Dez/2019		
	μ	σ	SR	μ	σ	SR	μ	σ	SR	μ	σ	SR	μ	σ	SR	μ	σ	SR
1/N	16,3	17,4	0,723	10,5	17,9	0,523	17,1	16,2	0,634	9,8	16	0,487	18,8	16,4	0,729	10,8	18	0,492
VW	10,6	16,9 (0,37)	0,407 (0,00)	6,7	16,8 (0,19)	0,332 (0,00)	16,4	14,8 (0,00)	0,643 (0,85)	8,8	15,3 (0,27)	0,447 (0,70)	16,4	14,8 (0,00)	0,643 (0,17)	8,8	15,3 (0,00)	0,447 (0,65)
<i>Painel A. Estratégias de seleção de portfólios que utilizam apenas informações de covariâncias</i>																		
ERC	14,9	16,5 (0,01)	0,68 (0,28)	9	16 (0,00)	0,489 (0,33)	17	15,4 (0,00)	0,658 (0,52)	9,4	14,6 (0,00)	0,512 (0,27)	18,8	16 (0,00)	0,746 (0,26)	10,9	17,3 (0,00)	0,517 (0,13)
MDP	16,1	17,8 (0,71)	0,692 (0,78)	6,9	14,4 (0,00)	0,401 (0,30)	15,8	14,1 (0,00)	0,639 (0,96)	7,1	13,5 (0,00)	0,381 (0,32)	16,9	15 (0,00)	0,67 (0,50)	8,4	17,6 (0,65)	0,367 (0,14)
<i>Painel B. Estratégias de seleção de portfólios voltadas à minimização da variância</i>																		
MIN	11,4	15,8 (0,15)	0,485 (0,09)	4,6	12,6 (0,00)	0,27 (0,12)	15,4	11,4 (0,00)	0,749 (0,49)	8,1	11,4 (0,00)	0,542 (0,66)	15,9	13,8 (0,00)	0,658 (0,54)	9,1	13,7 (0,00)	0,523 (0,76)
MIN-REF ($h=6$)	12,1	15,7 (0,13)	0,531 (0,13)	5	12,8 (0,00)	0,299 (0,13)	15,4	11,4 (0,00)	0,751 (0,44)	8	11,4 (0,00)	0,531 (0,70)	16,1	13,8 (0,00)	0,672 (0,59)	9	13,9 (0,00)	0,512 (0,84)
MIN-BAG ($\nu=0,7$)	11,7	15,5 (0,03)	0,511 (0,07)	5,3	12,8 (0,00)	0,321 (0,11)	15,9	11,9 (0,00)	0,76 (0,33)	8,6	11,4 (0,00)	0,579 (0,39)	16,5	13,8 (0,00)	0,699 (0,74)	9,9	13,9 (0,00)	0,572 (0,34)
MIN-ENT ($\theta=0,1\%$)	13,9	15,8 (0,05)	0,645 (0,38)	6,5	14,4 (0,00)	0,376 (0,07)	16,3	12,9 (0,00)	0,731 (0,25)	8,7	13,1 (0,00)	0,514 (0,65)	17,2	14,7 (0,00)	0,702 (0,64)	9,9	15,6 (0,00)	0,505 (0,77)
MIN-ENT+ ($\theta=0,1\%$)	13,2	15,5 (0,02)	0,611 (0,27)	6,3	14,1 (0,00)	0,364 (0,06)	16,3	12,9 (0,00)	0,732 (0,26)	8,9	13 (0,00)	0,534 (0,45)	17,1	14,7 (0,00)	0,7 (0,60)	10	15,5 (0,00)	0,521 (0,51)
<i>Painel C. Estratégias de seleção de portfólios voltadas à maximização da relação de média-variância</i>																		
MV ($\gamma=5$)	18,9	21,7 (0,01)	0,698 (0,90)	11,1	17,8 (0,99)	0,556 (0,88)	16,2	16 (0,81)	0,58 (0,69)	8,2	16 (0,95)	0,391 (0,52)	15,2	15,6 (0,14)	0,533 (0,04)	8,7	15,5 (0,00)	0,433 (0,60)
MV-REF ($\gamma=5, h=6$)	17	18,7 (0,24)	0,708 (0,93)	9	16,6 (0,56)	0,47 (0,74)	15,8	13,9 (0,00)	0,644 (0,92)	8,1	13,5 (0,00)	0,452 (0,75)	16,2	14,6 (0,00)	0,636 (0,26)	8,6	14,7 (0,00)	0,455 (0,63)
MV-BAG ($\gamma=5, \nu=0,45$)	13,5	16,9 (0,43)	0,577 (0,13)	7,6	14,1 (0,01)	0,458 (0,60)	17,2	14,3 (0,00)	0,719 (0,31)	8,7	13,4 (0,00)	0,507 (0,82)	17,9	14,7 (0,00)	0,752 (0,74)	9,8	15,5 (0,00)	0,504 (0,85)
MV-ENT ($\gamma=5, \theta=0,1\%$)	18,7	19,4 (0,10)	0,768 (0,78)	10,2	17,4 (0,78)	0,524 (0,99)	16,4	15,1 (0,02)	0,634 (1,00)	8,6	14,8 (0,06)	0,45 (0,70)	16,8	15,5 (0,01)	0,643 (0,11)	9,8	15,8 (0,00)	0,496 (0,95)
MV-ENT+ ($\gamma=5, \theta=0,1\%$)	18	19 (0,18)	0,752 (0,85)	10,1	17,1 (0,68)	0,521 (0,99)	16,5	15,1 (0,01)	0,642 (0,93)	8,7	14,6 (0,04)	0,462 (0,79)	16,8	15,5 (0,01)	0,642 (0,10)	9,9	15,7 (0,00)	0,507 (0,80)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: As notas desta tabela são as mesmas apresentadas para a Tabela 23.

Tabela 25 – Regressões dos retornos em excesso ($r_i - r_f$), para avaliação fora da amostra de cada estratégia da Tabela 23, em relação aos modelos fatoriais referentes aos ativos da base de dados Dow Jones (N = 28); Mar/1995-Abr/2016, 254 meses. Custos de transação de 50 pontos base (0,5%).

Estratégia	CAPM			FF3					FFC						FF5						
	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	SMB	HML	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	SMB	HML	Mom	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	SMB	HML	RMW	CMA	$R^2_{Aj.}$
1/N	0,337 (0,02)	0,91 (0,00)	0,64	0,304 (0,01)	0,98 (0,00)	-0,31 (0,00)	0,16 (0,04)	0,7	0,347 (0,01)	0,96 (0,00)	-0,3 (0,00)	0,14 (0,09)	-0,06 (0,12)	0,7	0,192 (0,17)	1,03 (0,00)	-0,23 (0,00)	0,16 (0,20)	0,25 (0,01)	-0,05 (0,72)	0,71
VW	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Painel A. Estratégias de seleção de portfólios que utilizam apenas informações de covariâncias																					
ERC	0,277 (0,05)	0,82 (0,00)	0,61	0,246 (0,04)	0,89 (0,00)	-0,33 (0,00)	0,16 (0,04)	0,69	0,269 (0,03)	0,88 (0,00)	-0,33 (0,00)	0,15 (0,06)	-0,03 (0,42)	0,69	0,114 (0,40)	0,95 (0,00)	-0,24 (0,00)	0,15 (0,22)	0,28 (0,00)	-0,03 (0,83)	0,7
MDP	0,288 (0,09)	0,73 (0,00)	0,5	0,29 (0,06)	0,81 (0,00)	-0,43 (0,00)	0,05 (0,50)	0,6	0,294 (0,08)	0,81 (0,00)	-0,43 (0,00)	0,05 (0,54)	0 (0,92)	0,6	0,177 (0,31)	0,87 (0,00)	-0,32 (0,00)	0,11 (0,38)	0,32 (0,00)	-0,18 (0,17)	0,62
Painel B. Estratégias de seleção de portfólios voltadas à minimização da variância																					
MIN	0,1 (0,61)	0,57 (0,00)	0,38	0,083 (0,62)	0,65 (0,00)	-0,39 (0,00)	0,12 (0,15)	0,5	0,068 (0,69)	0,66 (0,00)	-0,4 (0,00)	0,13 (0,12)	0,02 (0,66)	0,5	-0,103 (0,57)	0,73 (0,00)	-0,29 (0,00)	0,07 (0,56)	0,34 (0,00)	0,05 (0,65)	0,53
MIN-REF ($h=6$)	0,13 (0,51)	0,59 (0,00)	0,42	0,115 (0,45)	0,67 (0,00)	-0,4 (0,00)	0,11 (0,17)	0,54	0,1 (0,53)	0,68 (0,00)	-0,4 (0,00)	0,12 (0,14)	0,02 (0,66)	0,54	-0,065 (0,70)	0,76 (0,00)	-0,29 (0,00)	0,06 (0,56)	0,33 (0,00)	0,04 (0,74)	0,56
MIN-BAG ($\nu=0,7$)	0,115 (0,56)	0,61 (0,00)	0,44	0,098 (0,50)	0,69 (0,00)	-0,38 (0,00)	0,12 (0,14)	0,56	0,082 (0,58)	0,7 (0,00)	-0,39 (0,00)	0,12 (0,11)	0,02 (0,64)	0,56	-0,09 (0,58)	0,78 (0,00)	-0,28 (0,00)	0,05 (0,63)	0,33 (0,00)	0,08 (0,52)	0,58
MIN-ENT ($\theta=0,1\%$)	0,202 (0,19)	0,71 (0,00)	0,53	0,181 (0,16)	0,78 (0,00)	-0,38 (0,00)	0,13 (0,10)	0,63	0,175 (0,18)	0,79 (0,00)	-0,38 (0,00)	0,13 (0,09)	0,01 (0,85)	0,63	0,012 (0,93)	0,86 (0,00)	-0,27 (0,00)	0,1 (0,42)	0,33 (0,00)	0 (0,98)	0,65
MIN-ENT+ ($\theta=0,1\%$)	0,176 (0,29)	0,68 (0,00)	0,51	0,148 (0,26)	0,76 (0,00)	-0,36 (0,00)	0,15 (0,05)	0,62	0,14 (0,29)	0,76 (0,00)	-0,36 (0,00)	0,16 (0,04)	0,01 (0,81)	0,62	-0,02 (0,89)	0,84 (0,00)	-0,26 (0,00)	0,11 (0,36)	0,31 (0,00)	0,05 (0,71)	0,64
Painel C. Estratégias de seleção de portfólios voltadas à maximização da relação de média-variância																					
MV ($\gamma=5$)	0,546 (0,03)	0,79 (0,00)	0,38	0,669 (0,00)	0,82 (0,00)	-0,44 (0,00)	-0,38 (0,00)	0,45	0,495 (0,04)	0,91 (0,00)	-0,47 (0,00)	-0,3 (0,00)	0,23 (0,00)	0,48	0,604 (0,02)	0,85 (0,00)	-0,26 (0,01)	-0,18 (0,26)	0,45 (0,00)	-0,6 (0,00)	0,5
MV-REF ($\gamma=5, h=6$)	0,385 (0,05)	0,78 (0,00)	0,47	0,463 (0,01)	0,83 (0,00)	-0,42 (0,00)	-0,22 (0,02)	0,54	0,347 (0,07)	0,88 (0,00)	-0,45 (0,00)	-0,17 (0,06)	0,15 (0,00)	0,56	0,336 (0,09)	0,88 (0,00)	-0,27 (0,00)	-0,14 (0,32)	0,43 (0,00)	-0,32 (0,03)	0,58
MV-BAG ($\gamma=5, \nu=0,45$)	0,203 (0,16)	0,74 (0,00)	0,55	0,247 (0,07)	0,8 (0,00)	-0,4 (0,00)	-0,1 (0,21)	0,63	0,178 (0,21)	0,84 (0,00)	-0,41 (0,00)	-0,07 (0,38)	0,09 (0,02)	0,64	0,127 (0,39)	0,86 (0,00)	-0,29 (0,00)	-0,06 (0,62)	0,33 (0,00)	-0,17 (0,13)	0,66
MV-ENT ($\gamma=5, \theta=0,1\%$)	0,474 (0,01)	0,83 (0,00)	0,49	0,558 (0,00)	0,87 (0,00)	-0,4 (0,00)	-0,25 (0,01)	0,55	0,446 (0,02)	0,93 (0,00)	-0,42 (0,00)	-0,19 (0,03)	0,14 (0,00)	0,57	0,483 (0,01)	0,91 (0,00)	-0,25 (0,00)	-0,11 (0,46)	0,37 (0,00)	-0,42 (0,01)	0,59
MV-ENT+ ($\gamma=5, \theta=0,1\%$)	0,45 (0,02)	0,82 (0,00)	0,49	0,528 (0,00)	0,86 (0,00)	-0,39 (0,00)	-0,23 (0,02)	0,55	0,413 (0,02)	0,92 (0,00)	-0,41 (0,00)	-0,17 (0,05)	0,15 (0,00)	0,57	0,453 (0,02)	0,89 (0,00)	-0,26 (0,00)	-0,1 (0,48)	0,36 (0,01)	-0,39 (0,01)	0,59

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: O tamanho da janela de horizonte móvel de estimação considerada foi de $\tau = 60$ (5 anos). Valores de α positivos e significativos a 5% são destacados na tabela. Erros padrão ajustados pelo procedimento HAC de Newey-West (NEWKEY; WEST, 1987, 1994).

Tabela 26 – Regressões dos retornos em excesso ($r_i - r_f$), para avaliação fora da amostra de cada estratégia da Tabela 23, em relação aos modelos fatoriais referentes aos ativos da base de dados FF Industry (N = 49); Fev/1975-Dez/2019, 539 meses. Custos de transação de 50 pontos base (0,5%).

Estratégia	CAPM			FF3					FFC						FF5						
	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	$R^2_{A_j}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	SMB	HML	$R^2_{A_j}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	SMB	HML	Mom	$R^2_{A_j}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	SMB	HML	RMW	CMA	$R^2_{A_j}$
1/N	0,054 (0,44)	1,02 (0,00)	0,92	-0,032 (0,58)	1,03 (0,00)	0,15 (0,01)	0,2 (0,00)	0,94	0,008 (0,88)	1,02 (0,00)	0,16 (0,00)	0,18 (0,00)	-0,05 (0,14)	0,94	-0,179 (0,00)	1,06 (0,00)	0,25 (0,00)	0,11 (0,00)	0,29 (0,00)	0,11 (0,00)	0,96
VW	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Painel A. Estratégias de seleção de portfólios que utilizam apenas informações de covariâncias																					
ERC	0,083 (0,22)	0,95 (0,00)	0,92	0,006 (0,92)	0,97 (0,00)	0,1 (0,07)	0,19 (0,00)	0,93	0,026 (0,65)	0,96 (0,00)	0,1 (0,04)	0,18 (0,00)	-0,02 (0,45)	0,93	-0,156 (0,00)	1,01 (0,00)	0,2 (0,00)	0,09 (0,01)	0,3 (0,00)	0,16 (0,00)	0,95
MDP	0,082 (0,44)	0,74 (0,00)	0,66	0,005 (0,96)	0,76 (0,00)	0,07 (0,07)	0,2 (0,00)	0,68	-0,023 (0,82)	0,77 (0,00)	0,06 (0,10)	0,21 (0,00)	0,04 (0,28)	0,68	-0,158 (0,11)	0,82 (0,00)	0,12 (0,01)	0,01 (0,84)	0,2 (0,00)	0,37 (0,00)	0,7
Painel B. Estratégias de seleção de portfólios voltadas à minimização da variância																					
MIN	0,212 (0,03)	0,59 (0,00)	0,61	0,149 (0,10)	0,65 (0,00)	-0,15 (0,00)	0,21 (0,00)	0,66	0,118 (0,21)	0,65 (0,00)	-0,15 (0,00)	0,22 (0,00)	0,04 (0,23)	0,66	0,034 (0,72)	0,69 (0,00)	-0,11 (0,00)	0,1 (0,04)	0,13 (0,01)	0,27 (0,00)	0,67
MIN-REF ($h=6$)	0,192 (0,04)	0,61 (0,00)	0,65	0,13 (0,13)	0,67 (0,00)	-0,13 (0,00)	0,2 (0,00)	0,7	0,102 (0,25)	0,67 (0,00)	-0,13 (0,00)	0,22 (0,00)	0,03 (0,28)	0,7	0,013 (0,88)	0,71 (0,00)	-0,09 (0,01)	0,09 (0,05)	0,13 (0,00)	0,27 (0,00)	0,71
MIN-BAG ($\nu=0,7$)	0,194 (0,02)	0,67 (0,00)	0,75	0,141 (0,06)	0,72 (0,00)	-0,12 (0,00)	0,18 (0,00)	0,79	0,111 (0,15)	0,72 (0,00)	-0,13 (0,00)	0,19 (0,00)	0,04 (0,22)	0,79	0,005 (0,94)	0,76 (0,00)	-0,07 (0,02)	0,07 (0,11)	0,19 (0,00)	0,26 (0,00)	0,81
MIN-ENT ($\theta=0,1\%$)	0,128 (0,09)	0,8 (0,00)	0,86	0,056 (0,39)	0,83 (0,00)	-0,01 (0,85)	0,2 (0,00)	0,88	0,059 (0,36)	0,83 (0,00)	-0,01 (0,86)	0,2 (0,00)	0 (0,91)	0,88	-0,08 (0,20)	0,87 (0,00)	0,06 (0,02)	0,1 (0,01)	0,22 (0,00)	0,2 (0,00)	0,9
MIN-ENT+ ($\theta=0,1\%$)	0,136 (0,06)	0,8 (0,00)	0,87	0,067 (0,28)	0,84 (0,00)	-0,02 (0,50)	0,2 (0,00)	0,89	0,07 (0,25)	0,84 (0,00)	-0,02 (0,51)	0,2 (0,00)	0 (0,90)	0,89	-0,062 (0,30)	0,87 (0,00)	0,04 (0,09)	0,1 (0,00)	0,21 (0,00)	0,19 (0,00)	0,91
Painel C. Estratégias de seleção de portfólios voltadas à maximização da relação de média-variância																					
MV ($\gamma=5$)	0,057 (0,63)	0,87 (0,00)	0,67	0,116 (0,30)	0,85 (0,00)	-0,07 (0,08)	-0,15 (0,02)	0,68	-0,105 (0,35)	0,91 (0,00)	-0,1 (0,01)	-0,04 (0,39)	0,28 (0,00)	0,74	-0,012 (0,92)	0,89 (0,00)	-0,01 (0,91)	-0,21 (0,00)	0,23 (0,00)	0,14 (0,30)	0,69
MV-REF ($\gamma=5, h=6$)	0,078 (0,34)	0,81 (0,00)	0,79	0,097 (0,23)	0,81 (0,00)	-0,06 (0,05)	-0,04 (0,49)	0,79	-0,05 (0,54)	0,84 (0,00)	-0,08 (0,00)	0,03 (0,46)	0,18 (0,00)	0,82	-0,016 (0,84)	0,84 (0,00)	-0,01 (0,73)	-0,12 (0,05)	0,18 (0,00)	0,17 (0,09)	0,8
MV-BAG ($\gamma=5, \nu=0,45$)	0,124 (0,06)	0,86 (0,00)	0,88	0,137 (0,03)	0,87 (0,00)	-0,08 (0,00)	-0,02 (0,64)	0,88	0,024 (0,70)	0,9 (0,00)	-0,09 (0,00)	0,03 (0,34)	0,14 (0,00)	0,9	0,011 (0,86)	0,9 (0,00)	-0,01 (0,68)	-0,09 (0,03)	0,22 (0,00)	0,15 (0,04)	0,89
MV-ENT ($\gamma=5, \theta=0,1\%$)	0,055 (0,48)	0,91 (0,00)	0,84	0,063 (0,39)	0,9 (0,00)	0,01 (0,61)	-0,03 (0,58)	0,84	-0,059 (0,44)	0,93 (0,00)	0 (0,98)	0,03 (0,51)	0,15 (0,00)	0,87	-0,058 (0,45)	0,93 (0,00)	0,08 (0,03)	-0,1 (0,05)	0,22 (0,00)	0,13 (0,16)	0,86
MV-ENT+ ($\gamma=5, \theta=0,1\%$)	0,063 (0,39)	0,91 (0,00)	0,85	0,071 (0,31)	0,9 (0,00)	0 (0,90)	-0,02 (0,64)	0,85	-0,049 (0,52)	0,93 (0,00)	-0,01 (0,70)	0,03 (0,43)	0,15 (0,00)	0,87	-0,046 (0,53)	0,94 (0,00)	0,07 (0,05)	-0,09 (0,07)	0,21 (0,00)	0,12 (0,15)	0,86

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: O tamanho da janela de horizonte móvel de estimação considerada foi de $\tau = 60$ (5 anos). Valores de α positivos e significativos a 5% são destacados na tabela. Erros padrão ajustados pelo procedimento HAC de Newey-West (NEWKEY; WEST, 1987, 1994).

Tabela 27 – Regressões dos retornos em excesso ($r_i - r_f$), para avaliação fora da amostra de cada estratégia da Tabela 23, em relação aos modelos fatoriais referentes aos ativos da base de dados FF Size-B/M (N = 96); Fev/1975-Dez/2019, 539 meses. Custos de transação de 50 pontos base (0,5%).

Estratégia	CAPM			FF3					FFC						FF5						
	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	SMB	HML	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	SMB	HML	Mom	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	SMB	HML	RMW	CMA	$R^2_{Aj.}$
1/N	0,137 (0,09)	1,07 (0,00)	0,88	-0,011 (0,72)	1,02 (0,00)	0,54 (0,00)	0,28 (0,00)	0,98	0,014 (0,64)	1,02 (0,00)	0,55 (0,00)	0,27 (0,00)	-0,03 (0,06)	0,99	-0,034 (0,12)	1,02 (0,00)	0,58 (0,00)	0,19 (0,00)	0,06 (0,06)	0,04 (0,20)	0,99
VW	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Painel A. Estratégias de seleção de portfólios que utilizam apenas informações de covariâncias																					
ERC	0,159 (0,05)	1,04 (0,00)	0,89	0,008 (0,83)	1,01 (0,00)	0,46 (0,00)	0,31 (0,00)	0,98	0,026 (0,45)	1,01 (0,00)	0,47 (0,00)	0,3 (0,00)	-0,02 (0,28)	0,98	-0,04 (0,09)	1,02 (0,00)	0,51 (0,00)	0,21 (0,00)	0,1 (0,00)	0,05 (0,12)	0,99
MDP	0,004 (0,97)	1 (0,00)	0,85	-0,147 (0,03)	1,03 (0,00)	0,17 (0,00)	0,38 (0,00)	0,9	-0,117 (0,09)	1,03 (0,00)	0,18 (0,00)	0,36 (0,00)	-0,04 (0,17)	0,9	-0,128 (0,05)	1,02 (0,00)	0,18 (0,00)	0,38 (0,00)	-0,01 (0,77)	-0,05 (0,33)	0,9
Painel B. Estratégias de seleção de portfólios voltadas à minimização da variância																					
MIN	0,105 (0,18)	0,84 (0,00)	0,84	0,027 (0,71)	0,89 (0,00)	-0,05 (0,14)	0,23 (0,00)	0,87	-0,013 (0,86)	0,89 (0,00)	-0,06 (0,11)	0,25 (0,00)	0,05 (0,07)	0,88	-0,068 (0,32)	0,92 (0,00)	-0,02 (0,66)	0,14 (0,00)	0,13 (0,00)	0,19 (0,00)	0,88
MIN-REF ($h=6$)	0,098 (0,19)	0,86 (0,00)	0,87	0,015 (0,83)	0,9 (0,00)	-0,02 (0,46)	0,24 (0,00)	0,9	-0,02 (0,76)	0,91 (0,00)	-0,03 (0,39)	0,25 (0,00)	0,04 (0,10)	0,9	-0,072 (0,24)	0,92 (0,00)	0,01 (0,73)	0,16 (0,00)	0,12 (0,00)	0,17 (0,00)	0,9
MIN-BAG ($\nu=0,7$)	0,142 (0,04)	0,87 (0,00)	0,89	0,049 (0,43)	0,91 (0,00)	0,02 (0,53)	0,25 (0,00)	0,92	0,016 (0,79)	0,91 (0,00)	0,02 (0,62)	0,27 (0,00)	0,04 (0,09)	0,92	-0,041 (0,45)	0,93 (0,00)	0,06 (0,04)	0,17 (0,00)	0,13 (0,00)	0,16 (0,00)	0,93
MIN-ENT ($\theta=0,1\%$)	0,104 (0,16)	0,96 (0,00)	0,91	-0,018 (0,71)	0,97 (0,00)	0,25 (0,00)	0,28 (0,00)	0,96	-0,016 (0,72)	0,96 (0,00)	0,25 (0,00)	0,28 (0,00)	0 (0,94)	0,96	-0,082 (0,05)	0,98 (0,00)	0,3 (0,00)	0,2 (0,00)	0,12 (0,00)	0,08 (0,05)	0,96
MIN-ENT+ ($\theta=0,1\%$)	0,113 (0,12)	0,95 (0,00)	0,91	-0,007 (0,88)	0,96 (0,00)	0,26 (0,00)	0,27 (0,00)	0,96	-0,008 (0,87)	0,96 (0,00)	0,26 (0,00)	0,27 (0,00)	0 (0,98)	0,96	-0,078 (0,06)	0,97 (0,00)	0,31 (0,00)	0,18 (0,00)	0,13 (0,00)	0,1 (0,01)	0,96
Painel C. Estratégias de seleção de portfólios voltadas à maximização da relação de média-variância																					
MV ($\gamma=5$)	0,005 (0,96)	0,91 (0,00)	0,78	-0,114 (0,21)	0,92 (0,00)	0,22 (0,00)	0,28 (0,00)	0,82	-0,226 (0,01)	0,94 (0,00)	0,21 (0,00)	0,33 (0,00)	0,14 (0,00)	0,84	-0,198 (0,03)	0,94 (0,00)	0,26 (0,00)	0,16 (0,00)	0,13 (0,01)	0,16 (0,03)	0,83
MV-REF ($\gamma=5, h=6$)	0,042 (0,56)	0,91 (0,00)	0,88	-0,07 (0,23)	0,93 (0,00)	0,17 (0,00)	0,27 (0,00)	0,92	-0,143 (0,01)	0,95 (0,00)	0,16 (0,00)	0,3 (0,00)	0,09 (0,00)	0,93	-0,131 (0,02)	0,95 (0,00)	0,19 (0,00)	0,17 (0,00)	0,08 (0,03)	0,15 (0,00)	0,92
MV-BAG ($\gamma=5, \nu=0,45$)	0,148 (0,07)	0,94 (0,00)	0,87	0,011 (0,83)	0,93 (0,00)	0,33 (0,00)	0,3 (0,00)	0,94	-0,046 (0,39)	0,95 (0,00)	0,32 (0,00)	0,33 (0,00)	0,07 (0,00)	0,95	-0,049 (0,35)	0,95 (0,00)	0,35 (0,00)	0,18 (0,00)	0,08 (0,04)	0,16 (0,00)	0,95
MV-ENT ($\gamma=5, \theta=0,1\%$)	0,078 (0,31)	0,97 (0,00)	0,88	-0,055 (0,28)	0,96 (0,00)	0,33 (0,00)	0,29 (0,00)	0,94	-0,112 (0,03)	0,98 (0,00)	0,32 (0,00)	0,32 (0,00)	0,07 (0,00)	0,94	-0,119 (0,02)	0,98 (0,00)	0,37 (0,00)	0,18 (0,00)	0,1 (0,00)	0,12 (0,01)	0,95
MV-ENT+ ($\gamma=5, \theta=0,1\%$)	0,086 (0,27)	0,97 (0,00)	0,88	-0,047 (0,37)	0,96 (0,00)	0,34 (0,00)	0,29 (0,00)	0,94	-0,105 (0,05)	0,97 (0,00)	0,33 (0,00)	0,31 (0,00)	0,07 (0,00)	0,94	-0,116 (0,02)	0,98 (0,00)	0,38 (0,00)	0,17 (0,00)	0,11 (0,00)	0,14 (0,00)	0,95

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: O tamanho da janela de horizonte móvel de estimação considerada foi de $\tau = 60$ (5 anos). Valores de α positivos e significativos a 5% são destacados na tabela. Erros padrão ajustados pelo procedimento HAC de Newey-West (NEWKEY; WEST, 1987, 1994).

8.2 Discussão dos resultados

Os resultados apresentados na Tabela 13 já apontavam vieses que impedem a identificação da existência de uma estratégia sistematicamente superior às demais. Entretanto, tanto o fato da base Dow Jones favorecer portfólios arriscados quanto as bases FF Industry e FF Size-B/M favorecerem os de minimização do risco não impedem a detecção de alguma melhoria em relação às proposições originais MIN e MV.

Dentre as bases de dados utilizadas, a Dow Jones apresentou penalização das estratégias com relação ao fator *SMB*. Tal fato era esperado, pois sua composição é definida pelas principais empresas, em termos de valor de mercado, do contexto norte-americano. A base de dados FF Industry é constituída de portfólios ponderados por valor separados por setores da indústria, logo não era esperada a exposição positiva ao fator *SMB*, exceto se o investimento ocorrer em portfólios de um dado setor da indústria que possuem valor de mercado inferior em relação aos demais setores. A base de dados FF Size-B/M é constituída de portfólios ponderados por valor e separados em termos de valor de mercado e índice *book-to-market*. Era de se esperar uma escolha de ativos direcionados aos que sejam pertencentes às empresas pequenas e de alto índice *book-to-market* refletindo em uma exposição positiva aos fatores *SMB* e *HML*.

Ainda sobre as bases de dados, verificou-se que não houve a mesma redução dos riscos das carteiras da base de dados FF Size-B/M quando comparada à FF Industry ou à Dow Jones. Tal fato pode ser percebido pelos índices de diversificação ($\mathcal{DR}$) apresentados, o que indica que, na base FF Size-B/M, ocorreu uma redução da presença do risco não-sistêmico (idiossincrático), minimizando os impactos da diversificação sobre o risco do portfólio. Era esperado que o coeficiente de determinação ajustado apresentasse valor elevado quando avaliados os retornos das estratégias na base de dados FF Size-B/M. Isso ocorreu porque tais portfólios podem ser utilizados para construir os fatores de risco. Entretanto não são esperados valores elevados do coeficiente de determinação ajustado nas demais bases de dados.

Para as estratégias REF, tem-se que a MIN-REF não apresentou alterações de desempenho aparentes em relação à MIN, entretanto foi detectado aumento do número de ativos na carteira e do coeficiente de determinação ajustado. Já a estratégia MV-REF, em relação à MV, promoveu redução da volatilidade e do *turnover*, além do aumento do índice de diversificação, do número de ativos e do coeficiente de determinação ajustado. O aumento no poder explicativo dos modelos multifatoriais sobre as estratégias REF implica uma redução na exposição ao risco não-sistêmico (idiossincrático).

As estratégias BAG apresentaram, em geral, redução de *turnover* e aumento do coeficiente de determinação ajustado em relação às estratégias de referência MIN e MV, respectivamente. Tal fato não se deve apenas ao aumento do número de ativos presentes

na carteira, pois, em outras estratégias, como as ENT e ENT+, os mesmos níveis de coeficiente de determinação ajustado só eram obtidos quando da proximidade das carteiras com a da estratégia 1/N. Além disso, para um número de ativos igual ou inferior ao das estratégias REF, tem-se também um valor superior de coeficiente de determinação ajustado nas estratégias BAG. Pelos valores apresentados do coeficiente de determinação ajustados obtidos, é possível inferir que as estratégias MIN-BAG e MIN ou MV-BAG e MV possuam interceptos e/ou exposições aos fatores distintos. Essa observação é similar à que é feita nos trabalhos de Kim, Kim, Ahn *et al.* (2013) e Kim, Kim e Fabozzi (2014b) que associam a robustez dos portfólios ao aumento do coeficiente de determinação em relação a modelos multifatoriais.

O processo de construção dos fatores de risco, sejam eles qual forem, envolve a extração do comportamento médio de grupos de ativos que compartilhem uma característica específica. O sorteio aleatório de ativos não é direcionado por características específicas, mas, ao agregar o comportamento médio de várias carteiras, tem-se que o resultado final esperado é o de um “comportamento comum” dos retornos que exclua particularidades. O efeito prático de tal procedimento é, portanto, a redução de ruído presentes nos retornos ou, mais apropriadamente, a redução da componente do risco idiossincrático. Não foi avaliado se existe uma forma de direcionar arbitrariamente o comportamento da estratégia BAG para um fator ou grupo de fatores selecionados. Apesar disso, pode ser destacado que se trata de um método que não depende da estimação prévia desses fatores de risco que direcionam os retornos.

Com relação às estratégias ENT e ENT+, percebeu-se que a inclusão do índice de incerteza individual não promoveu um distanciamento em termos de parâmetros de desempenho ou de coeficientes das regressões dos retornos em excesso diante dos fatores de risco. Isso também pode ser inferido pelos coeficientes de determinação ajustados, visto que não há indícios de que os resíduos das regressões sejam distintos quando comparadas estratégias de mesmo nível de incerteza (θ). Destaca-se o fato de que o valor de θ que propiciou melhor desempenho foi o que aproximou tais estratégias da 1/N.

Nenhuma das estratégias avaliadas foi capaz de superar consistentemente a estratégia ingênua (1/N) ou de sustentar valores de intercepto (α) positivos e significativos diante das regressões do modelo de cinco fatores de risco (FF5), excetuando-se o caso de interceptos positivos e comportamento contrário aos fatores de risco. Entretanto, para o presente caso de avaliação de estratégias com proibição de vendas a descoberto ($x_i \geq 0$), os retornos dos fatores de risco apresentam uma vantagem injusta. Isso ocorre porque, com a exceção do índice de mercado, os fatores são construídos de carteiras com a permissão de vendas a descoberto nos portfólios de alto valor de mercado (*Big*), de baixo índice *book-to-market* (*Low*), de fraca lucratividade operacional (*Weak*) e de investimento agressivo (*Aggressive*). A permissão de vendas a descoberto torna os portfólios mais eficientes em

termos de média-variância do que aqueles com restrição de sinal.

É possível que o desenho empírico feito nesta pesquisa, ao considerar bases de dados com $N < 100$, tenha prejudicado o desempenho das estratégias ao não evidenciar os benefícios dos métodos de encolhimento (regularização) utilizados. [Moura, Santos e Ruiz \(2020\)](#) exibem resultados nessa direção pois verificam que os métodos de regularização, associados com modelos condicionais de previsão da matriz de covariâncias, mostram seu potencial em alta dimensão ($N > 100$) ao superar estatisticamente o desempenho da estratégia ingênua ($1/N$).

9 Conclusões

Para um dado tipo de investidor, ou gestor de carteiras, é fundamental a obtenção de estimativas de média e covariância dos retornos dos ativos financeiros para buscar portfólios eficientes. O aprimoramento do processo de seleção de portfólios pode vir tanto com a melhoria em seus insumos quanto das políticas de investimento. O contexto da presente pesquisa foi a gestão de portfólios, voltada principalmente para a aplicação, análise de características e evolução de técnicas que possibilitem a criação de portfólios. Encontra-se inserida na linha de pesquisa de Finanças e associada a temas referentes aos Mercados Financeiros e de Capitais. Entretanto, o tema de seleção de portfólios tornou-se de interesse multidisciplinar envolvendo áreas como a estatística e a pesquisa operacional, por exemplo. Ao longo do texto, em resumo, buscou-se a conjugação de técnicas de estimação na etapa de obtenção de insumos, políticas baseadas na Teoria Moderna dos Portfólios na etapa de obtenção de carteiras e modelos de precificação na etapa de avaliação.

Na presente pesquisa, utilizou-se da técnica denominada *bootstrap* para promover aprimoramentos no contexto de seleção e gestão de portfólios. A proposta central foi de avaliar as características e usos de múltiplas projeções obtidas de carteiras formadas de subgrupos de ativos financeiros. Tal abordagem já fora aplicada com sucesso em outros contextos relativos a problemas de estimação (HO, 1998). Com o intuito de responder a questão de pesquisa, foi construída uma metodologia que permitiu obter os seguintes resultados: (i) a uma forma alternativa de encolhimento da matriz de covariâncias; (ii) criação de índices de incerteza individualizados por ativo; (iii) melhorias de desempenho fora da amostra. Em posse de tal informação, foi possível a criação de duas inovações: uma forma alternativa de encolhimento para a matriz de covariâncias e índices de incerteza individualizados por ativo. Respondendo à questão de pesquisa, o encolhimento baseado em *bootstrap* promoveu redução de *turnover*, diminuição nos custos de transação e consequentemente melhora no desempenho em relação a portfólios de mínima variância ou média-variância tradicionais. Entretanto, não foi verificada melhora quando incorporada a informação de incerteza, obtida do *bootstrap* de ativos, no processo de seleção de portfólios. Adicionalmente, a fim de fornecer um comparativo de técnicas de encolhimento, foi proposto um índice sistêmico para mensurar a sensibilidade dos pesos, de portfólios baseados na MPT, em função da matriz de covariâncias dos retornos.

Para permitir o cumprimento dos objetivos específicos propostos buscou-se de dados secundários mensais referentes ao mercado financeiro dos EUA divididos em três bases de dados, sendo a primeira de componentes do índice Dow Jones (Fev/1990 a Abr/2016), a segunda com portfólios formados de 49 setores da indústria (Jan/1970 a Dez/2019) e

a terceira formada de 100 portfólios agrupados por características de tamanho e índice *book-to-market* (Jan/1970 a Dez/2019). As bases de dados foram utilizadas para verificar características de diferentes estimadores da matriz de covariâncias e, posteriormente, também foram utilizadas para avaliar o desempenho de estratégias de seleção de portfólios derivadas da MPT.

Com respeito aos métodos de encolhimento, as características de cinco tipos de estimadores da matriz de covariâncias foram avaliadas, a saber: (i) amostral; (ii) diagonal; (iii) encolhimento linear (LEDOIT; WOLF, 2003); (iv) encolhimento não-linear (LEDOIT; WOLF, 2020); (v) encolhimento por agregação de projeções provenientes do sorteio de ativos (BAG). No comparativo, foram mensurados de cada estimativa da matriz de covariâncias a sua sensibilidade dos pesos, o seu condicionamento numérico e o seu “distanciamento” da estimativa amostral. A sensibilidade dos pesos é característica que influencia no rebalanceamento dos portfólios e isso impacta diretamente nos custos de transação e consequentemente reduz seu desempenho. Assim como os encolhimentos propostos por Ledoit e Wolf (2003, 2020), a alternativa BAG possui um parâmetro de controle (ν) das relações de compromisso que envolvem sensibilidade dos pesos, condicionamento numérico e distanciamento das estimativas amostrais. Os resultados apontaram que apesar de possuir bom condicionamento numérico do encolhimento diagonal, isso nem sempre é refletido em baixa sensibilidade dos pesos. No caso do encolhimento diagonal, em que os termos de covariâncias são desprezados, a sensibilidade dos pesos é reduzida de aproximadamente uma ordem de grandeza porém tal mudança é desprezível diante da magnitude da sensibilidade. Pelos indicadores apresentados é verificado que existe uma razão de compromisso entre sensibilidade dos pesos, distanciamento da estimativa amostral e o condicionamento numérico que devem ser levadas em consideração para a escolha do método de encolhimento mais apropriado. Também é verificado que, em geral, aumentos bruscos na sensibilidade se associam a eventos de crises sistêmicas, exceto para o intervalo entre os anos de 2001 e 2006.

Ao longo do processo de criação de índices de incerteza individuais, foi possível a diferenciação de dois tipos de processos de reamostragem: o primeiro vinculado a um pressuposto de normalidade dos dados (MICHAUD; MICHAUD, 1998) e o segundo focado em sortear subgrupos de ativos (HO, 1998; SHEN; WANG, 2017; ARAÚJO; PEREIRA, 2017). A distribuição dos pesos de vários portfólios simulados rejeitaram a hipótese de que os pesos oriundos do primeiro processo de reamostragem são similares aos do segundo. O critério arbitrado para definir a incerteza associada a um ativo foi a amplitude interquartil dos pesos obtidos do segundo tipo de reamostragem. O índice de incerteza individual foi utilizado na modificação de uma estratégia de seleção de portfólios, originalmente proposta por de Jong (2018).

O desempenho das estratégias de seleção de portfólios foi avaliado na ausência ou não de custos de transação. Os critérios utilizados relativos aos retornos foram média, volatilidade, índice de Sharpe, índice de diversificação, *turnover*, custo de indiferença de utilidade e número de ativos na carteira. Além disso, foi avaliado o desempenho ajustado ao risco por meio de regressões dos retornos em excesso perante fatores de risco (SHARPE, 1963; FAMA; FRENCH, 1993, 2015). A avaliação do desempenho de estratégias, baseadas em minimização da variância ou na maximização da relação média-variância, foi realizada a fim de distinguir possíveis melhorias de algo já presente na literatura. Ao avaliar o desempenho para as bases de dados escolhidas, nenhuma estratégia superou de forma sistemática e significativa a abordagem ingênua (1/N) em termos de índice de Sharpe, o que não é incomum na literatura (DEMIGUEL; GARLAPPI; UPPAL, 2009). Entretanto, foi identificado intercepto (α) positivo e significativo na regressão frente o fator mercado em vários cenários, mas tais retornos anormais foram explicados por outros fatores de risco. Uma comparação de estratégias baseadas em reamostragens foi feita, sendo a baseada no trabalho de Michaud e Michaud (1998) associada à sigla REF e a outra proveniente do encolhimento BAG. A alternativa BAG, em relação à REF, demonstrou maior capacidade de reduzir o *turnover* e o risco idiossincrático quando comparada a carteiras com aproximadamente o mesmo número de ativos. Além disso, a estratégia BAG também apresentou redução de *turnover* e do risco idiossincrático quando comparada às versões originais da MPT. Portanto, verificou-se que o processo de combinação de múltiplas projeções, escolhidas pelo *bootstrap* de ativos, leva à criação de “carteiras fatoriais”, direcionadas aos fatores intrínsecos dos retornos, sem que seja necessária a estimação prévia de quantos ou quais sejam esse fatores de risco. Outro comparativo foi feito entre a estratégia proposta por de Jong (2018) e a versão modificada contendo índices de incerteza individuais. Nesse caso, não foi identificada distinção entre as estratégias.

Como trabalhos futuros, é sugerida a utilização da métrica de sensibilidade dos pesos ($\det(\mathbf{A})^{-2}$) associada com outros indicadores. No atual estágio de desenvolvimento, não foram feitas análises relacionadas com a inferência de incertezas do sistema a partir do inverso do determinante quadrado, entretanto, não pode ser descartada a possibilidade de utilizá-lo futuramente como parte de um indicador para esse fim. A métrica de sensibilidade dos pesos pode ser associada com estimativas de volatilidade e/ou sentimento do investidor a fim de construir um indicador de incerteza global do mercado. A entropia dos pesos de carteiras reamostradas, que forneceram uma métrica de incerteza individual, pode ser mais explorada e aprimorada. O processo de agregação de múltiplas projeções de carteiras foi feito ao considerar uma ponderação uniforme entre todas as projeções, o que pode ser modificado de forma objetiva ou subjetiva pois um dado grupo de ativos ou setores pode ser mais confiável que outros. Além disso, podem ser avaliadas formas de compensar possíveis vieses na estimativa feita pelo processo de *subset bagging*. Como complemento ao

que foi proposto nesta pesquisa, sugerem-se a exploração de outras periodicidades além do enfoque em características dinâmicas das séries voltadas a previsões para os valores esperados dos retornos.

Referências

ADCOCK, C. J. Mean–variance–skewness efficient surfaces, Stein’s lemma and the multivariate extended skew-Student distribution. **European Journal of Operational Research**, v. 234, n. 2, p. 392–401, 2014. 60 years following Harry Markowitz’s contribution to portfolio theory and operations research. DOI: [10.1016/j.ejor.2013.07.011](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.07.011). Citado na p. 236.

AÏT-SAHALIA, Y.; XIU, D. Using principal component analysis to estimate a high dimensional factor model with high-frequency data. **Journal of Econometrics**, v. 201, n. 2, p. 384–399, 2017. THEORETICAL AND FINANCIAL ECONOMETRICS: ESSAYS IN HONOR OF C. GOURIEROUX. DOI: [10.1016/j.jeconom.2017.08.015](https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2017.08.015). Citado na p. 50.

ALLAIS, M. Le Comportement de l’Homme Rationnel devant le Risque: Critique des Postulats et Axiomes de l’Ecole Americaine. **Econometrica**, [Wiley, Econometric Society], v. 21, n. 4, p. 503–546, 1953. DOI: [10.2307/1907921](https://doi.org/10.2307/1907921). Citado nas pp. 208, 209.

ALMGREN, R. F.; CHRISS, N. Optimal execution of portfolio transactions. **Journal of Risk**, v. 3, n. 2, p. 5–39, 2001. DOI: [10.21314/JOR.2001.041](https://doi.org/10.21314/JOR.2001.041). Citado nas pp. 240, 242.

AMIT, Y.; GEMAN, D. Shape Quantization and Recognition with Randomized Trees. **Neural Computation**, v. 9, n. 7, p. 1545–1588, 1997. DOI: [10.1162/neco.1997.9.7.1545](https://doi.org/10.1162/neco.1997.9.7.1545). Citado na p. 70.

ANATOLYEV, S. Nonparametric Retrospection and Monitoring of Predictability of Financial Returns. **Journal of Business & Economic Statistics**, Taylor & Francis, v. 27, n. 2, p. 149–160, 2009. DOI: [10.1198/jbes.2009.0010](https://doi.org/10.1198/jbes.2009.0010). Citado na p. 53.

ANDERSON, E.; BAI, Z.; BISCHOF, C.; BLACKFORD, S.; DONGARRA, J. D. J.; CROZ, J. D.; GREENBAUM, A.; HAMMARLING, S.; MCKENNEY, A.; SORENSEN, D. **LAPACK Users’ Guide**. Third. Philadelphia, Pennsylvania, USA: SIAM, 1999. Citado na p. 86.

ANDERSON, E. W.; GHYSELS, E.; JUERGENS, J. L. The impact of risk and uncertainty on expected returns. **Journal of Financial Economics**, v. 94, n. 2, p. 233–263, 2009. DOI: [10.1016/j.jfineco.2008.11.001](https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2008.11.001). Citado na p. 29.

ANDREWS, D. W. K. Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation. **Econometrica**, [Wiley, Econometric Society], v. 59, n. 3, p. 817–858, 1991. DOI: [10.2307/2938229](https://doi.org/10.2307/2938229). Citado na p. 234.

AOUNI, B.; COLAPINTO, C.; LA TORRE, D. Financial portfolio management through the goal programming model: Current state-of-the-art. **European Journal of Operatio-**

nal Research, v. 234, n. 2, p. 536–545, 2014. 60 years following Harry Markowitz’s contribution to portfolio theory and operations research. DOI: [10.1016/j.ejor.2013.09.040](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.09.040). Citado na p. 236.

ARAÚJO, D. L.; PEREIRA, M. V. L. **Comparativo de estratégias para gestão de carteiras de investimento**. Belo Horizonte, 2017. Working Paper, versão inicial: Jul. 2016. Citado nas pp. 65, 71, 100, 168.

ARDIA, D.; BOLLIGER, G.; BOUDT, K.; GAGNON-FLEURY, J.-P. The impact of covariance misspecification in risk-based portfolios. **Annals of Operations Research**, v. 254, n. 1, p. 1–16, 2017. DOI: [10.1007/s10479-017-2474-7](https://doi.org/10.1007/s10479-017-2474-7). Citado na p. 33.

ARNOTT, R. D.; HSU, J.; KALESNIK, V.; TINDALL, P. The Surprising Alpha From Malkiel’s Monkey and Upside-Down Strategies. **The Journal of Portfolio Management**, v. 39, n. 4, p. 91–105, 2013. DOI: [10.3905/jpm.2013.39.4.091](https://doi.org/10.3905/jpm.2013.39.4.091). Citado na p. 236.

BACHELIER, L. Théorie de la spéculation. **Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure**, v. 3, n. 17, p. 21–86, 1900. Citado nas pp. 28, 42.

BAE, G. I.; KIM, W. C.; MULVEY, J. M. Dynamic asset allocation for varied financial markets under regime switching framework. **European Journal of Operational Research**, v. 234, n. 2, p. 450–458, 2014. 60 years following Harry Markowitz’s contribution to portfolio theory and operations research. DOI: [10.1016/j.ejor.2013.03.032](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.03.032). Citado na p. 244.

BAKER, S. R.; BLOOM, N.; DAVIS, S. J. Measuring Economic Policy Uncertainty. **The Quarterly Journal of Economics**, v. 131, n. 4, p. 1593–1636, 2016. DOI: [10.1093/qje/qjw024](https://doi.org/10.1093/qje/qjw024). Citado nas pp. 35, 121.

BALCILAR, M.; OZU, A. Performance of robust portfolio optimization in crisis periods. **Control & Cybernetics**, v. 42, n. 4, p. 855–871, 2013. Citado na p. 106.

BALI, T. G.; DEMIRTAS, K. O.; LEVY, H. Is There an Intertemporal Relation between Downside Risk and Expected Returns? **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 44, p. 883–909, 04 2009. DOI: [10.1017/S0022109009990159](https://doi.org/10.1017/S0022109009990159). Citado na p. 234.

BARBER, B. M.; LEHAVY, R.; MCNICHOLS, M.; TRUEMAN, B. Can Investors Profit from the Prophets: Security Analyst Recommendations and Stock Returns. **The Journal of Finance**, Blackwell Publishers, Inc., v. 56, n. 2, p. 531–563, 2001. DOI: [10.1111/0022-1082.00336](https://doi.org/10.1111/0022-1082.00336). Citado na p. 53.

BARBER, B. M.; LYON, J. D. Detecting long-run abnormal stock returns: The empirical power and specification of test statistics. **Journal of Financial Economics**, v. 43, n. 3, p. 341–372, 1997. DOI: [10.1016/S0304-405X\(96\)00890-2](https://doi.org/10.1016/S0304-405X(96)00890-2). Citado na p. 234.

BARNDORFF-NIELSEN, O. E.; SHEPHARD, N. Econometric Analysis of Realized Covariation: High Frequency Based Covariance, Regression, and Correlation in Financial Economics. **Econometrica**, Blackwell Publishing Ltd, v. 72, n. 3, p. 885–925, 2004. DOI: [10.1111/j.1468-0262.2004.00515.x](https://doi.org/10.1111/j.1468-0262.2004.00515.x). Citado na p. 61.

BARROSO, P.; SANTA-CLARA, P. Momentum has its moments. **Journal of Financial Economics**, v. 116, n. 1, p. 111–120, 2015. DOI: [10.1016/j.jfineco.2014.11.010](https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2014.11.010). Citado na p. 54.

BECKER, F.; GÜRTLER, M.; HIBBELN, M. Markowitz versus Michaud: portfolio optimization strategies reconsidered. **The European Journal of Finance**, Routledge, v. 21, n. 4, p. 269–291, 2015. DOI: [10.1080/1351847X.2013.830138](https://doi.org/10.1080/1351847X.2013.830138). Citado na p. 241.

BELLMAN, R. E. **Dynamic programming**. Princeton: Princeton University Press, 1957. Citado na p. 39.

BEN-TAL, A.; NEMIROVSKI, A. Robust Convex Optimization. **Mathematics of Operations Research**, v. 23, n. 4, p. 769–805, 1998. DOI: [10.1287/moor.23.4.769](https://doi.org/10.1287/moor.23.4.769). Citado na p. 241.

BENARTZI, S.; THALER, R. H. Myopic Loss Aversion and the Equity Premium Puzzle. **The Quarterly Journal of Economics**, Oxford University Press, v. 110, n. 1, p. 73–92, 1995. DOI: [10.2307/2118511](https://doi.org/10.2307/2118511). Citado na p. 208.

BERK, J. B.; GREEN, R. C. Mutual Fund Flows and Performance in Rational Markets. **Journal of Political Economy**, v. 112, n. 6, p. 1269–1295, 2004. DOI: [10.1086/424739](https://doi.org/10.1086/424739). Citado na p. 53.

BERNARD, C.; VANDUFFEL, S. Mean–variance optimal portfolios in the presence of a benchmark with applications to fraud detection. **European Journal of Operational Research**, v. 234, n. 2, p. 469–480, 2014. 60 years following Harry Markowitz’s contribution to portfolio theory and operations research. DOI: [10.1016/j.ejor.2013.06.023](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.06.023). Citado na p. 236.

BERNOULLI, D. Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk. Tradução: Louise Sommer. **Econometrica**, [Wiley, Econometric Society], v. 22, n. 1, p. 23–36, 1954. DOI: [10.2307/1909829](https://doi.org/10.2307/1909829). Citado nas pp. 207, 208.

BERTSIMAS, D.; LAUPRETE, G. J.; SAMAROV, A. Shortfall as a risk measure: properties, optimization and applications. **Journal of Economic Dynamics and Control**, v. 28, n. 7, p. 1353–1381, 2004. DOI: [10.1016/S0165-1889\(03\)00109-X](https://doi.org/10.1016/S0165-1889(03)00109-X). Citado na p. 28.

BERTSIMAS, D.; LO, A. W. Optimal control of execution costs. **Journal of Financial Markets**, v. 1, n. 1, p. 1–50, 1998. DOI: [10.1016/S1386-4181\(97\)00012-8](https://doi.org/10.1016/S1386-4181(97)00012-8). Citado nas pp. 240, 242.

- BERTSIMAS, D.; PACHAMANOVA, D. A. Robust multiperiod portfolio management in the presence of transaction costs. **Computers & Operations Research**, v. 35, n. 1, p. 3–17, 2008. Part Special Issue: Applications of OR in Finance. DOI: [10.1016/j.cor.2006.02.011](https://doi.org/10.1016/j.cor.2006.02.011). Citado na p. 242.
- BEST, M. J.; GRAUER, R. R. On the Sensitivity of Mean-Variance-Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Results. **The Review of Financial Studies**, [Oxford University Press, Society for Financial Studies], v. 4, n. 2, p. 315–342, 1991. DOI: [10.1093/rfs/4.2.315](https://doi.org/10.1093/rfs/4.2.315). Citado nas pp. 30, 58, 62, 85, 239.
- BEST, M. J.; GRAUER, R. R. The analytics of sensitivity analysis for mean-variance portfolio problems. **International Review of Financial Analysis**, v. 1, n. 1, p. 17–37, 1992. DOI: [10.1016/1057-5219\(92\)90012-S](https://doi.org/10.1016/1057-5219(92)90012-S). Citado na p. 85.
- BHANSALI, V.; DAVIS, J.; RENNISON, G.; HSU, J.; LI, F. The Risk in Risk Parity: A Factor-Based Analysis of Asset-Based Risk Parity. **The Journal of Investing**, Institutional Investor Journals Umbrella, v. 21, n. 3, p. 102–110, 2012. DOI: [10.3905/joi.2012.21.3.102](https://doi.org/10.3905/joi.2012.21.3.102). Citado na p. 50.
- BICKEL, P. J.; GÖTZE, F.; VAN ZWET, W. R. Resampling Fewer Than n Observations: Gains, Losses, And Remedies For Losses. **Statistica Sinica**, Institute of Statistical Science, Academia Sinica, v. 7, n. 1, p. 1–31, 1997. Citado na p. 64.
- BLACK, F. How we came up with the option formula. **The Journal of Portfolio Management**, v. 15, n. 2, p. 4–8, 1989. DOI: [10.3905/jpm.1989.409198](https://doi.org/10.3905/jpm.1989.409198). Citado na p. 42.
- BLACK, F.; LITTERMAN, R. Asset Allocation: Combining Investor View with Market Equilibrium. **The Journal of Fixed Income**, Institutional Investor Journals Umbrella, v. 1, n. 2, p. 7–18, 1991. DOI: [10.3905/jfi.1991.408013](https://doi.org/10.3905/jfi.1991.408013). Citado na p. 235.
- BLACK, F.; LITTERMAN, R. Global Portfolio Optimization. **Financial Analysts Journal**, CFA Institute, v. 48, n. 5, p. 28–43, 1992. DOI: [10.2469/faj.v48.n5.28](https://doi.org/10.2469/faj.v48.n5.28). Citado nas pp. 235, 237, 239.
- BLACK, F.; SCHOLES, M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. **Journal of Political Economy**, University of Chicago Press, v. 81, n. 3, p. 637–654, 1973. DOI: [10.1086/260062](https://doi.org/10.1086/260062). Citado nas pp. 42, 44.
- BLITZ, D. The Value of Low Volatility. **The Journal of Portfolio Management**, Institutional Investor Journals Umbrella, v. 42, n. 3, p. 94–100, 2016. DOI: [10.3905/jpm.2016.42.3.094](https://doi.org/10.3905/jpm.2016.42.3.094). Disponível em: <https://jpm.pm-research.com/content/42/3/94>. Citado na p. 132.

- BLITZ, D. C.; VAN VLIET, P. The Volatility Effect. **The Journal of Portfolio Management**, Institutional Investor Journals Umbrella, v. 34, n. 1, p. 102–113, 2007. DOI: [10.3905/jpm.2007.698039](https://doi.org/10.3905/jpm.2007.698039). Citado na p. 132.
- BODIE, Z.; KANE, A.; MARCUS, A. J. **Investments**. 10. ed. [S. l.]: McGraw-Hill/Irwin, 2014. Citado nas pp. 28, 222.
- BOLLEN, N. P. B.; BUSSE, J. A. Short-Term Persistence in Mutual Fund Performance. **The Review of Financial Studies**, v. 18, n. 2, p. 569–597, 2005. DOI: [10.1093/rfs/hhi007](https://doi.org/10.1093/rfs/hhi007). Citado na p. 53.
- BONETT, D. G.; WRIGHT, T. A. Sample size requirements for estimating pearson, kendall and spearman correlations. **Psychometrika**, v. 65, n. 1, p. 23–28, 2000. DOI: [10.1007/BF02294183](https://doi.org/10.1007/BF02294183). Citado na p. 78.
- BRANGER, N.; KRAFT, H.; MEINERDING, C. Partial information about contagion risk, self-exciting processes and portfolio optimization. **Journal of Economic Dynamics and Control**, v. 39, Supplement C, p. 18–36, 2014. DOI: [10.1016/j.jedc.2013.10.005](https://doi.org/10.1016/j.jedc.2013.10.005). Citado na p. 244.
- BRANGER, N.; LARSEN, L. S. Robust portfolio choice with uncertainty about jump and diffusion risk. **Journal of Banking & Finance**, v. 37, n. 12, p. 5036–5047, 2013. DOI: [10.1016/j.jbankfin.2013.08.023](https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2013.08.023). Citado na p. 241.
- BRANGER, N.; LARSEN, L. S.; MUNK, C. Robust portfolio choice with ambiguity and learning about return predictability. **Journal of Banking & Finance**, v. 37, n. 5, p. 1397–1411, 2013. DOI: [10.1016/j.jbankfin.2012.05.009](https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2012.05.009). Citado na p. 244.
- BREIMAN, L. Bagging Predictors. **Machine Learning**, v. 24, n. 2, p. 123–140, 1996. DOI: [10.1023/A:1018054314350](https://doi.org/10.1023/A:1018054314350). Citado nas pp. 34, 36, 64, 65, 69.
- BREIMAN, L. Random Forests. **Machine Learning**, v. 45, n. 1, p. 5–32, 2001a. DOI: [10.1023/A:1010933404324](https://doi.org/10.1023/A:1010933404324). Citado nas pp. 36, 69, 71.
- BREIMAN, L. Using Iterated Bagging to Debias Regressions. **Machine Learning**, v. 45, n. 3, p. 261–277, 2001b. DOI: [10.1023/A:1017934522171](https://doi.org/10.1023/A:1017934522171). Citado na p. 70.
- BREIMAN, L.; FRIEDMAN, J.; STONE, C. J.; OLSHEN, R. A. **Classification and regression trees**. [S. l.]: CRC press, 1984. Citado na p. 70.
- BRITTEN-JONES, M. The Sampling Error in Estimates of Mean-Variance Efficient Portfolio Weights. **The Journal of Finance**, Blackwell Publishers, Inc., v. 54, n. 2, p. 655–671, 1999. DOI: [10.1111/0022-1082.00120](https://doi.org/10.1111/0022-1082.00120). Citado na p. 234.

- BROADIE, M. Computing efficient frontiers using estimated parameters. **Annals of Operations Research**, v. 45, n. 1, p. 21–58, 1993. DOI: [10.1007/BF02282040](https://doi.org/10.1007/BF02282040). Citado nas pp. 80, 239.
- BRODIE, J.; DAUBECHIES, I.; DE MOL, C.; GIANNONE, D.; LORIS, I. Sparse and stable Markowitz portfolios. **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**, v. 106, n. 30, p. 12267–12272, 2009. DOI: [10.1073/pnas.0904287106](https://doi.org/10.1073/pnas.0904287106). Citado na p. 239.
- BROWN, J. R.; GOOLSBEE, A. Does the Internet Make Markets More Competitive? Evidence from the Life Insurance Industry. **Journal of Political Economy**, v. 110, n. 3, p. 481–507, 2002. DOI: [10.1086/339714](https://doi.org/10.1086/339714). Citado na p. 42.
- BRUNI, R.; CESARONE, F.; SCOZZARI, A.; TARDELLA, F. Real-world datasets for portfolio selection and solutions of some stochastic dominance portfolio models. **Data in Brief**, v. 8, p. 858–862, 2016. DOI: [10.1016/j.dib.2016.06.031](https://doi.org/10.1016/j.dib.2016.06.031). Citado nas pp. 108, 109, 120, 124.
- BUENO, R. L. S. **Econometria de Séries Temporais**. 2. ed. São Paulo: CENGAGE Learning, 2015. Citado na p. 120.
- BÜHLMANN, P.; YU, B. Analyzing bagging. **The Annals of Statistics**, The Institute of Mathematical Statistics, v. 30, n. 4, p. 927–961, 2002. DOI: [10.1214/aos/1031689014](https://doi.org/10.1214/aos/1031689014). Citado na p. 64.
- CAI, T. T.; ZHANG, C.-H.; ZHOU, H. H. Optimal rates of convergence for covariance matrix estimation. **The Annals of Statistics**, The Institute of Mathematical Statistics, v. 38, n. 4, p. 2118–2144, 2010. DOI: [10.1214/09-AOS752](https://doi.org/10.1214/09-AOS752). Citado nas pp. 233, 234.
- CALDEIRA, J. F.; MOURA, G. V.; PERLIN, M. S.; SANTOS, A. A. P. Portfolio management using realized covariances: Evidence from Brazil. **EconomiA**, v. 18, n. 3, p. 328–343, 2017. DOI: [10.1016/j.econ.2017.04.002](https://doi.org/10.1016/j.econ.2017.04.002). Citado na p. 245.
- CALDEIRA, J. F.; MOURA, G. V.; SANTOS, A. A. P. Bond portfolio optimization using dynamic factor models. **Journal of Empirical Finance**, v. 37, Supplement C, p. 128–158, 2016. DOI: [10.1016/j.jempfin.2016.03.004](https://doi.org/10.1016/j.jempfin.2016.03.004). Citado na p. 244.
- CALDEIRA, J. F.; MOURA, G. V.; SANTOS, A. A. P. Seleção de carteiras utilizando o modelo Fama-French-Carhart. **Revista Brasileira de Economia**, scielo, v. 67, p. 45–65, 2013. DOI: [10.1590/S0034-71402013000100003](https://doi.org/10.1590/S0034-71402013000100003). Citado nas pp. 243, 245.
- CALDEIRA, J. F.; MOURA, G. V.; SANTOS, A. A. P.; TESSARI, C. Seleção De Carteiras Com Modelos Fatoriais Heterocedásticos: Aplicação Para Fundos De Fundos Multimercados. **Revista de Administração Mackenzie**, v. 15, n. 2, 2014. Citado na p. 245.

CALDEIRA, J. F.; PORTUGAL, M. S. Estratégia Long-Short, Neutra ao Mercado, e Index Tracking Baseadas em Portfólios Cointegrados. **Revista Brasileira de Finanças**, v. 8, n. 4, p. 469–504, 2010. Citado na p. 245.

CALDEIRA, J.; MOURA, G.; SANTOS, A. A. P. Portfolio optimization using a parsimonious multivariate GARCH model: Application to the Brazilian stock market. **Economics Bulletin**, v. 32, n. 3, p. 1848–1857, 2012. Citado nas pp. 243, 245.

CAMPBELL, J. Y. Empirical Asset Pricing: Eugene Fama, Lars Peter Hansen, and Robert Shiller. **The Scandinavian Journal of Economics**, v. 116, n. 3, p. 593–634, 2014. DOI: [10.1111/sjoe.12070](https://doi.org/10.1111/sjoe.12070). Citado na p. 45.

CAMPBELL, J. Y.; SHILLER, R. J. Stock Prices, Earnings, and Expected Dividends. **The Journal of Finance**, Blackwell Publishing Ltd, v. 43, n. 3, p. 661–676, 1988. DOI: [10.1111/j.1540-6261.1988.tb04598.x](https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1988.tb04598.x). Citado na p. 53.

CARDOSO, J. V. M.; PALOMAR, D. P. **riskParityPortfolio: Design of Risk Parity Portfolios**. [S. l.], 2019. R package version 0.2.1. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=riskParityPortfolio>. Citado na p. 118.

CARHART, M. M. On Persistence in Mutual Fund Performance. **The Journal of Finance**, [American Finance Association, Wiley], v. 52, n. 1, p. 57–82, 1997. DOI: [10.1111/j.1540-6261.1997.tb03808.x](https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1997.tb03808.x). Citado nas pp. 42, 44, 55, 109, 130.

CASTELLANO, R.; CERQUETI, R. Mean-Variance portfolio selection in presence of infrequently traded stocks. **European Journal of Operational Research**, v. 234, n. 2, p. 442–449, 2014. 60 years following Harry Markowitz’s contribution to portfolio theory and operations research. DOI: [10.1016/j.ejor.2013.04.024](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.04.024). Citado na p. 236.

CAVALIERE, G.; DE ANGELIS, L.; RAHBEEK, A.; ROBERT TAYLOR, A. DETERMINING THE COINTEGRATION RANK IN HETEROSKEDASTIC VAR MODELS OF UNKNOWN ORDER. **Econometric Theory**, Cambridge University Press, v. 34, n. 2, p. 349–382, 2018. DOI: [10.1017/S0266466616000335](https://doi.org/10.1017/S0266466616000335). Citado na p. 34.

CAVALIERE, G.; RAHBEEK, A.; TAYLOR, A. M. R. Bootstrap Determination of the Co-Integration Rank in Heteroskedastic VAR Models. **Econometric Reviews**, Taylor & Francis, v. 33, n. 5-6, p. 606–650, 2014. DOI: [10.1080/07474938.2013.825175](https://doi.org/10.1080/07474938.2013.825175). Citado na p. 34.

CAVALIERE, G.; RAHBEEK, A.; TAYLOR, A. R. COINTEGRATION RANK TESTING UNDER CONDITIONAL HETEROSKEDASTICITY. **Econometric Theory**, Cambridge University Press, v. 26, n. 6, p. 1719–1760, 2010. DOI: [10.1017/S0266466609990776](https://doi.org/10.1017/S0266466609990776). Citado na p. 34.

CAVALIERE, G.; TAYLOR, A. R. HETEROSKEDASTIC TIME SERIES WITH A UNIT ROOT. **Econometric Theory**, Cambridge University Press, v. 25, n. 5, p. 1228–1276, 2009. DOI: [10.1017/S026646660809049X](https://doi.org/10.1017/S026646660809049X). Citado na p. 34.

CERIA, S.; STUBBS, R. A. Incorporating estimation errors into portfolio selection: Robust portfolio construction. **Journal of Asset Management**, v. 7, n. 2, p. 109–127, 2006. DOI: [10.1057/palgrave.jam.2240207](https://doi.org/10.1057/palgrave.jam.2240207). Citado na p. 240.

CHAMBERLAIN, S.; BOETTIGER, C.; HART, T.; RAM, K. **rcrossref: Client for Various ‘CrossRef’ ‘APIs’**. [S. l.], 2017. R package version 0.7.0. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=rcrossref>. Citado nas pp. 44, 45, 53, 54, 208, 234–236, 240–242, 244.

CHAN, L. K. C.; KARCESKI, J.; LAKONISHOK, J. On Portfolio Optimization: Forecasting Covariances and Choosing the Risk Model. **The Review of Financial Studies**, v. 12, n. 5, p. 937–974, 1999. DOI: [10.1093/rfs/12.5.937](https://doi.org/10.1093/rfs/12.5.937). Citado na p. 61.

CHAU, F.; DEESOMSAK, R.; KOUTMOS, D. Does investor sentiment really matter? **International Review of Financial Analysis**, v. 48, Supplement C, p. 221–232, 2016. DOI: [10.1016/j.irfa.2016.10.003](https://doi.org/10.1016/j.irfa.2016.10.003). Citado na p. 54.

CHAVAS, J.-P. **Risk Analysis in Theory and Practice**. [S. l.]: Academic Press, 2004. (Academic Press Advanced Finance Series). Citado na p. 29.

CHEN, N.-F.; ROLL, R.; ROSS, S. A. Economic Forces and the Stock Market. **The Journal of Business**, University of Chicago Press, v. 59, n. 3, p. 383–403, 1986. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2352710>. Citado na p. 50.

CHEN, S. X.; HALL, P. Effects of Bagging and Bias Correction on Estimators Defined by Estimating Equations. **Statistica Sinica**, Institute of Statistical Science, Academia Sinica, v. 13, n. 1, p. 97–109, 2003. Citado nas pp. 65, 121.

CHICAGO BOARD OPTIONS EXCHANGE. **VIX: CBOE Volatility Index**. [S. l.], 2019. White Paper. Disponível em: <https://cdn.cboe.com/resources/futures/vixwhite.pdf>. Citado nas pp. 35, 121.

CHOPRA, V. K.; ZIEMBA, W. T. The Effect of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice. **The Journal of Portfolio Management**, Institutional Investor Journals Umbrella, v. 19, n. 2, p. 6–11, 1993. DOI: [10.3905/jpm.1993.409440](https://doi.org/10.3905/jpm.1993.409440). Citado na p. 33.

CHORDIA, T.; SUBRAHMANYAM, A.; TONG, Q. Have capital market anomalies attenuated in the recent era of high liquidity and trading activity? **Journal of Accounting and Economics**, v. 58, n. 1, p. 41–58, 2014. DOI: [10.1016/j.jacceco.2014.06.001](https://doi.org/10.1016/j.jacceco.2014.06.001). Citado na p. 54.

CHOUEIFATY, Y.; COIGNARD, Y. Toward maximum diversification. **The Journal of Portfolio Management**, v. 35, n. 1, p. 40–51, 2008. DOI: [10.3905/JPM.2008.35.1.40](https://doi.org/10.3905/JPM.2008.35.1.40). Citado nas pp. [63](#), [64](#), [72](#), [92](#), [113](#), [118](#), [275](#).

CLARIVATE ANALYTICS. **Web of Science**. 2020. Disponível em: <http://apps-webofknowledge.ez27.periodicos.capes.gov.br/>. Citado na p. [37](#).

CLARKE, R.; DE SILVA, H.; THORLEY, S. Risk Parity, Maximum Diversification, and Minimum Variance: An Analytic Perspective. **The Journal of Portfolio Management**, v. 39, n. 3, p. 39–53, 2013. DOI: [10.3905/jpm.2013.39.3.039](https://doi.org/10.3905/jpm.2013.39.3.039). Citado na p. [236](#).

COELHO, P. R.; MCCLURE, J. E. Social context and the utility of wealth: Addressing the Markowitz challenge. **Journal of Economic Behavior & Organization**, v. 37, n. 3, p. 305–314, 1998. DOI: [10.1016/S0167-2681\(98\)00090-0](https://doi.org/10.1016/S0167-2681(98)00090-0). Citado na p. [207](#).

CONOVER, W. J. **Practical Nonparametric Statistics**. 3. ed. [S. l.]: John Wiley & Sons, 1999. Citado nas pp. [100](#), [101](#), [112](#), [136](#).

CONOVER, W. J.; IMAN, R. L. **On multiple-comparisons procedures**. [S. l.], 1979. Technical Report LA-7677-MS. Citado nas pp. [112](#), [136](#).

COSTA, O. L. V.; PAIVA, A. C. Robust portfolio selection using linear-matrix inequalities. **Journal of Economic Dynamics and Control**, v. 26, n. 6, p. 889–909, 2002. DOI: [10.1016/S0165-1889\(00\)00086-5](https://doi.org/10.1016/S0165-1889(00)00086-5). Citado nas pp. [240](#), [243](#), [245](#).

CREAL, D.; KOOPMAN, S. J.; LUCAS, A. A Dynamic Multivariate Heavy-Tailed Model for Time-Varying Volatilities and Correlations. **Journal of Business & Economic Statistics**, Taylor & Francis, v. 29, n. 4, p. 552–563, 2011. DOI: [10.1198/jbes.2011.10070](https://doi.org/10.1198/jbes.2011.10070). Citado na p. [61](#).

CUI, X. T.; ZHENG, X. J.; ZHU, S. S.; SUN, X. L. Convex relaxations and MIQCQP reformulations for a class of cardinality-constrained portfolio selection problems. **Journal of Global Optimization**, v. 56, n. 4, p. 1409–1423, 2013. DOI: [10.1007/s10898-012-9842-2](https://doi.org/10.1007/s10898-012-9842-2). Citado na p. [236](#).

CUI, X.; GAO, J.; LI, X.; LI, D. Optimal multi-period mean-variance policy under no-shorting constraint. **European Journal of Operational Research**, v. 234, n. 2, p. 459–468, 2014. 60 years following Harry Markowitz’s contribution to portfolio theory and operations research. DOI: [10.1016/j.ejor.2013.02.040](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.02.040). Citado na p. [244](#).

DAI, Z.; WEN, F. Some improved sparse and stable portfolio optimization problems. **Finance Research Letters**, v. 27, p. 46–52, 2018. DOI: [10.1016/j.frl.2018.02.026](https://doi.org/10.1016/j.frl.2018.02.026). Citado na p. [109](#).

- DANTZIG, G. B.; INFANGER, G. Multi-stage stochastic linear programs for portfolio optimization. **Annals of Operations Research**, v. 45, n. 1, p. 59–76, 1993. DOI: [10.1007/BF02282041](https://doi.org/10.1007/BF02282041). Citado na p. 242.
- DAVIS, M. H. A.; NORMAN, A. R. Portfolio Selection with Transaction Costs. **Mathematics of Operations Research**, v. 15, n. 4, p. 676–713, 1990. DOI: [10.1287/moor.15.4.676](https://doi.org/10.1287/moor.15.4.676). Citado nas pp. 76, 242.
- DE JONG, M. Portfolio optimisation in an uncertain world. **Journal of Asset Management**, v. 19, n. 4, p. 216–221, 2018. DOI: [10.1057/s41260-017-0066-3](https://doi.org/10.1057/s41260-017-0066-3). Citado nas pp. 33–36, 62, 71, 72, 88, 90, 105, 113, 114, 119, 168, 169.
- DE NARD, G.; LEDOIT, O.; WOLF, M. Factor Models for Portfolio Selection in Large Dimensions: The Good, the Better and the Ugly. **Journal of Financial Econometrics**, jan. 2019. DOI: [10.1093/jjfinec/nby033](https://doi.org/10.1093/jjfinec/nby033). Citado na p. 61.
- DE OLIVEIRA, F. N.; DE PAULA, E. L. Determinando o Grau Ótimo de Diversificação para Investidores Usuários de Home Brokers. **Revista Brasileira de Finanças**, Sociedade Brasileira de Finanças, v. 6, n. 3, p. 437–461, 2008. Citado nas pp. 49, 245.
- DE POOTER, M.; MARTENS, M.; VAN DIJK, D. Predicting the Daily Covariance Matrix for S&P 100 Stocks Using Intraday Data: But Which Frequency to Use? **Econometric Reviews**, Taylor & Francis, v. 27, n. 1-3, p. 199–229, 2008. DOI: [10.1080/07474930701873333](https://doi.org/10.1080/07474930701873333). Citado na p. 61.
- DECANCQ, K.; LUGO, M. A. Weights in Multidimensional Indices of Wellbeing: An Overview. **Econometric Reviews**, Taylor & Francis, v. 32, n. 1, p. 7–34, 2013. DOI: [10.1080/07474938.2012.690641](https://doi.org/10.1080/07474938.2012.690641). Citado nas pp. 98, 99.
- DEMIGUEL, V.; GARLAPPI, L.; NOGALES, F. J.; UPPAL, R. A Generalized Approach to Portfolio Optimization: Improving Performance by Constraining Portfolio Norms. **Management Science**, v. 55, n. 5, p. 798–812, 2009. DOI: [10.1287/mnsc.1080.0986](https://doi.org/10.1287/mnsc.1080.0986). Citado nas pp. 59, 63, 114, 116, 146, 239.
- DEMIGUEL, V.; GARLAPPI, L.; UPPAL, R. Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy? **The Review of Financial Studies**, v. 22, n. 5, p. 1915–1953, 2009. DOI: [10.1093/rfs/hhm075](https://doi.org/10.1093/rfs/hhm075). Citado nas pp. 58, 62, 63, 78, 112, 114, 169, 235.
- DEMIGUEL, V.; MARTÍN-UTRERA, A.; NOGALES, F. J. Size matters: Optimal calibration of shrinkage estimators for portfolio selection. **Journal of Banking & Finance**, v. 37, n. 8, p. 3018–3034, 2013. DOI: [10.1016/j.jbankfin.2013.04.033](https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2013.04.033). Citado na p. 241.

- DEMIGUEL, V.; NOGALES, F. J. Portfolio Selection with Robust Estimation. **Operations Research**, v. 57, n. 3, p. 560–577, 2009. DOI: [10.1287/opre.1080.0566](https://doi.org/10.1287/opre.1080.0566). Citado nas pp. 59, 63, 114, 239.
- DEMIGUEL, V.; NOGALES, F. J.; UPPAL, R. Stock Return Serial Dependence and Out-of-Sample Portfolio Performance. **The Review of Financial Studies**, v. 27, n. 4, p. 1031–1073, 2014. DOI: [10.1093/rfs/hhu002](https://doi.org/10.1093/rfs/hhu002). Citado na p. 244.
- DEMOS, G. L.; PIRES, T. H. S.; MOURA, G. V. Rebalanceamento Endógeno para Portfólios de Variância Mínima. **Revista Brasileira de Finanças**, v. 13, n. 4, p. 544–570, 2015. Citado na p. 245.
- DIETTERICH, T. G. An Experimental Comparison of Three Methods for Constructing Ensembles of Decision Trees: Bagging, Boosting, and Randomization. **Machine Learning**, v. 40, n. 2, p. 139–157, 2000a. DOI: [10.1023/A:1007607513941](https://doi.org/10.1023/A:1007607513941). Citado na p. 70.
- DIETTERICH, T. G. Ensemble Methods in Machine Learning. *In*. MULTIPLE Classifier Systems. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2000b. p. 1–15. DOI: [10.1007/3-540-45014-9_1](https://doi.org/10.1007/3-540-45014-9_1). Citado na p. 70.
- DIMSON, E.; MUSSAVIAN, M. A brief history of market efficiency. **European Financial Management**, Blackwell Publishers Ltd, v. 4, n. 1, p. 91–103, 1998. DOI: [10.1111/1468-036X.00056](https://doi.org/10.1111/1468-036X.00056). Citado na p. 50.
- DINNO, A. **conover.test: Conover-Iman Test of Multiple Comparisons Using Rank Sums**. [S. l.], 2017. R package version 1.1.5. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=conover.test>. Citado nas pp. 112, 136.
- DOMAHIDI, A.; CHU, E.; BOYD, S. ECOS: An SOCP solver for embedded systems. *In*. EUROPEAN Control Conference (ECC). [S. l.: s. n.], 2013. p. 3071–3076. Citado na p. 118.
- DONGARRA, J. J.; MOLER, C. B.; BUNCH, J. R.; STEWART, G. W. **LINPACK Users' Guide**. [S. l.]: Society for Industrial e Applied Mathematics, 1979. DOI: [10.1137/1.9781611971811](https://doi.org/10.1137/1.9781611971811). Citado na p. 86.
- DUARTE JUNIOR, A. M.; SILVA, R. P. R. Gestão de Riscos de Mercado Durante Períodos Turbulentos. **Revista de Finanças Aplicadas**, v. 2, p. 1–26, 2015. Citado na p. 245.
- DUPAČOVÁ, J.; KOPA, M. Robustness of optimal portfolios under risk and stochastic dominance constraints. **European Journal of Operational Research**, v. 234, n. 2, p. 434–441, 2014. 60 years following Harry Markowitz's contribution to portfolio theory and operations research. DOI: [10.1016/j.ejor.2013.06.018](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.06.018). Citado na p. 241.

EL GHAOU, L.; OKS, M.; OUSTRY, F. Worst-Case Value-At-Risk and Robust Portfolio Optimization: A Conic Programming Approach. **Operations Research**, v. 51, n. 4, p. 543–556, 2003. DOI: [10.1287/opre.51.4.543.16101](https://doi.org/10.1287/opre.51.4.543.16101). Citado na p. 239.

ENGLE, R. F.; LEDOIT, O.; WOLF, M. Large Dynamic Covariance Matrices. **Journal of Business & Economic Statistics**, Taylor & Francis, v. 37, n. 2, p. 363–375, 2019. DOI: [10.1080/07350015.2017.1345683](https://doi.org/10.1080/07350015.2017.1345683). Citado na p. 61.

ENGLE, R. F.; LILIEN, D. M.; ROBINS, R. P. Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The Arch-M Model. **Econometrica**, [Wiley, Econometric Society], v. 55, n. 2, p. 391–407, 1987. DOI: [10.2307/1913242](https://doi.org/10.2307/1913242). Citado na p. 121.

ENGLE, R.; COLACITO, R. Testing and Valuing Dynamic Correlations for Asset Allocation. **Journal of Business & Economic Statistics**, Taylor & Francis, v. 24, n. 2, p. 238–253, 2006. DOI: [10.1198/073500106000000017](https://doi.org/10.1198/073500106000000017). Citado na p. 121.

ENGLE, R.; FERSTENBERG, R.; RUSSELL, J. Measuring and Modeling Execution Cost and Risk. **The Journal of Portfolio Management**, v. 38, n. 2, p. 14–28, 2012. DOI: [10.3905/jpm.2012.38.2.014](https://doi.org/10.3905/jpm.2012.38.2.014). Citado na p. 235.

ERAKER, B.; READY, M. Do investors overpay for stocks with lottery-like payoffs? An examination of the returns of OTC stocks. **Journal of Financial Economics**, v. 115, n. 3, p. 486–504, 2015. DOI: [10.1016/j.jfineco.2014.11.002](https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2014.11.002). Citado na p. 54.

ESCOBAR, M.; FERRANDO, S.; RUBTSOV, A. Robust portfolio choice with derivative trading under stochastic volatility. **Journal of Banking & Finance**, v. 61, Supplement C, p. 142–157, 2015. DOI: [10.1016/j.jbankfin.2015.08.033](https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2015.08.033). Citado na p. 244.

ESPOSITO, E.; MASTROIANNI, M. Technological Evolution of Personal Computers and Market Implications. **Technological Forecasting and Social Change**, v. 59, n. 3, p. 235–254, 1998. DOI: [10.1016/S0040-1625\(98\)00031-6](https://doi.org/10.1016/S0040-1625(98)00031-6). Citado na p. 42.

FABOZZI, F. J.; GUPTA, F.; MARKOWITZ, H. M. The Legacy of Modern Portfolio Theory. **The Journal of Investing**, v. 11, n. 3, p. 7–22, 2002. DOI: [10.3905/joi.2002.319510](https://doi.org/10.3905/joi.2002.319510). Citado nas pp. 30, 233.

FABOZZI, F. J.; HUANG, D.; ZHOU, G. Robust portfolios: contributions from operations research and finance. **Annals of Operations Research**, v. 176, n. 1, p. 191–220, 2010. DOI: [10.1007/s10479-009-0515-6](https://doi.org/10.1007/s10479-009-0515-6). Citado nas pp. 238, 239.

FABOZZI, F. J.; KOLM, P. N.; PACHAMANOVA, D. A.; FOCARDI, S. M. Robust Portfolio Optimization: Recent trends and future directions. **The Journal of Portfolio Management**, Institutional Investor Journals Umbrella, v. 33, n. 3, p. 40–48, 2007a. DOI: [10.3905/jpm.2007.684751](https://doi.org/10.3905/jpm.2007.684751). Citado nas pp. 238, 240.

FABOZZI, F. J.; KOLM, P. N.; PACHAMANOVA, D. A.; FOCARDI, S. M. **Robust Portfolio Optimization and Management**. [S. l.]: John Wiley & Sons, 2007b. (The Frank J. Fabozzi Series). Citado nas pp. 66, 69.

FABOZZI, F. J.; MARKOWITZ, H. M.; KOLM, P. N.; GUPTA, F. Mean-Variance Model for Portfolio Selection. *In*. **ENCYCLOPEDIA of Financial Models**. [S. l.]: John Wiley & Sons, Inc., 2012. Citado na p. 31.

FAMA, E. F. Efficient Capital Markets: II. **The Journal of Finance**, Blackwell Publishing Ltd, v. 46, n. 5, p. 1575–1617, 1991. DOI: [10.1111/j.1540-6261.1991.tb04636.x](https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1991.tb04636.x). Citado nas pp. 42, 44, 51.

FAMA, E. F. Efficient capital markets: a review of theory and empirical work. **The Journal of Finance**, Blackwell Publishing Ltd, v. 25, n. 2, p. 383–417, 1970. DOI: [10.1111/j.1540-6261.1970.tb00518.x](https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1970.tb00518.x). Citado nas pp. 42, 44, 50–52.

FAMA, E. F. Market efficiency, long-term returns, and behavioral finance. **Journal of Financial Economics**, v. 49, n. 3, p. 283–306, 1998. DOI: [10.1016/S0304-405X\(98\)00026-9](https://doi.org/10.1016/S0304-405X(98)00026-9). Citado nas pp. 52–54.

FAMA, E. F. Random Walks in Stock Market Prices. **Financial Analysts Journal**, CFA Institute, v. 21, n. 5, p. 55–59, 1965a. DOI: [10.2469/faj.v21.n5.55](https://doi.org/10.2469/faj.v21.n5.55). Citado nas pp. 28, 42, 44.

FAMA, E. F. The Behavior of Stock-Market Prices. **The Journal of Business**, University of Chicago Press, v. 38, n. 1, p. 34–105, 1965b. DOI: [10.2307/2350752](https://doi.org/10.2307/2350752). Citado nas pp. 28, 42.

FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. A five-factor asset pricing model. **Journal of Financial Economics**, v. 116, n. 1, p. 1–22, 2015. DOI: [10.1016/j.jfineco.2014.10.010](https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2014.10.010). Citado nas pp. 36, 42, 45, 55, 56, 61, 109, 130, 131, 169.

FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Common risk factors in the returns on stocks and bonds. **Journal of Financial Economics**, v. 33, n. 1, p. 3–56, 1993. DOI: [10.1016/0304-405X\(93\)90023-5](https://doi.org/10.1016/0304-405X(93)90023-5). Citado nas pp. 36, 42, 44, 50, 55–57, 109, 117, 130, 169.

FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Dissecting Anomalies with a Five-Factor Model. **The Review of Financial Studies**, v. 29, n. 1, p. 69–103, 2016. DOI: [10.1093/rfs/hhv043](https://doi.org/10.1093/rfs/hhv043). Citado nas pp. 54, 57.

FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Dividend yields and expected stock returns. **Journal of Financial Economics**, v. 22, n. 1, p. 3–25, 1988. DOI: [10.1016/0304-405X\(88\)90020-7](https://doi.org/10.1016/0304-405X(88)90020-7). Citado na p. 53.

- FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. International tests of a five-factor asset pricing model. **Journal of Financial Economics**, v. 123, n. 3, p. 441–463, 2017. DOI: [10.1016/j.jfineco.2016.11.004](https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2016.11.004). Citado na p. 45.
- FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Luck versus Skill in the Cross-Section of Mutual Fund Returns. **The Journal of Finance**, Blackwell Publishing Inc, v. 65, n. 5, p. 1915–1947, 2010. DOI: [10.1111/j.1540-6261.2010.01598.x](https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.2010.01598.x). Citado na p. 44.
- FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Multifactor Explanations of Asset Pricing Anomalies. **The Journal of Finance**, Blackwell Publishing Ltd, v. 51, n. 1, p. 55–84, 1996. DOI: [10.1111/j.1540-6261.1996.tb05202.x](https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1996.tb05202.x). Citado nas pp. 53, 54.
- FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Size and Book-to-Market Factors in Earnings and Returns. **The Journal of Finance**, Blackwell Publishing Ltd, v. 50, n. 1, p. 131–155, 1995. DOI: [10.1111/j.1540-6261.1995.tb05169.x](https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1995.tb05169.x). Citado nas pp. 44, 54.
- FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Size, value, and momentum in international stock returns. **Journal of Financial Economics**, v. 105, n. 3, p. 457–472, 2012. DOI: [10.1016/j.jfineco.2012.05.011](https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2012.05.011). Citado na p. 53.
- FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. The Cross-Section of Expected Stock Returns. **The Journal of Finance**, Blackwell Publishing Ltd, v. 47, n. 2, p. 427–465, 1992. DOI: [10.1111/j.1540-6261.1992.tb04398.x](https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1992.tb04398.x). Citado nas pp. 50, 109.
- FAN, J.; ZHANG, J.; YU, K. Vast Portfolio Selection With Gross-Exposure Constraints. **Journal of the American Statistical Association**, Taylor & Francis, v. 107, n. 498, p. 592–606, 2012. DOI: [10.1080/01621459.2012.682825](https://doi.org/10.1080/01621459.2012.682825). Citado na p. 245.
- FASTRICH, B.; PATERLINI, S.; WINKER, P. Constructing optimal sparse portfolios using regularization methods. **Computational Management Science**, v. 12, n. 3, p. 417–434, 2015. DOI: [10.1007/s10287-014-0227-5](https://doi.org/10.1007/s10287-014-0227-5). Citado na p. 241.
- FENG, Y.; PALOMAR, D. P. SCRIP: Successive Convex Optimization Methods for Risk Parity Portfolio Design. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 63, n. 19, p. 5285–5300, 2018. DOI: [10.1109/TSP.2015.2452219](https://doi.org/10.1109/TSP.2015.2452219). Citado na p. 118.
- FERDINAND, P. The Internet, democracy and democratization. **Democratization**, Routledge, v. 7, n. 1, p. 1–17, 2000. DOI: [10.1080/13510340008403642](https://doi.org/10.1080/13510340008403642). Citado na p. 42.
- FERN, X. Z.; BRODLEY, C. E. Random Projection for High Dimensional Data Clustering: A Cluster Ensemble Approach. In FAWCETT, T.; MISHRA, N. (Ed.). **Proceedings of the Twentieth International Conference on Machine Learning (ICML-2003)**. Washington DC: AAAI Press, 2003. Citado na p. 65.

FLEMING, J.; KIRBY, C.; OSTDIEK, B. The economic value of volatility timing using “realized” volatility. **Journal of Financial Economics**, v. 67, n. 3, p. 473–509, 2003. DOI: [10.1016/S0304-405X\(02\)00259-3](https://doi.org/10.1016/S0304-405X(02)00259-3). Citado na p. 116.

FLETCHER, J.; HILLIER, J. An Examination of Resampled Portfolio Efficiency. **Financial Analysts Journal**, CFA Institute, v. 57, n. 5, p. 66–74, 2001. DOI: [10.2307/4480345](https://doi.org/10.2307/4480345). Citado nas pp. 69, 240.

FLIEGE, J.; WERNER, R. Robust multiobjective optimization & applications in portfolio optimization. **European Journal of Operational Research**, v. 234, n. 2, p. 422–433, 2014. 60 years following Harry Markowitz’s contribution to portfolio theory and operations research. DOI: [10.1016/j.ejor.2013.10.028](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.10.028). Citado na p. 241.

FLOUDAS, C. A.; GOUNARIS, C. E. A review of recent advances in global optimization. **Journal of Global Optimization**, v. 45, n. 1, p. 3, 2008. DOI: [10.1007/s10898-008-9332-8](https://doi.org/10.1007/s10898-008-9332-8). Citado na p. 42.

FRAZZINI, A.; PEDERSEN, L. H. Betting against beta. **Journal of Financial Economics**, v. 111, n. 1, p. 1–25, 2014. DOI: [10.1016/j.jfineco.2013.10.005](https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2013.10.005). Citado nas pp. 54, 57.

FRIEDMAN, J. H.; HALL, P. On bagging and nonlinear estimation. **Journal of Statistical Planning and Inference**, v. 137, n. 3, p. 669–683, 2007. Special Issue on Nonparametric Statistics and Related Topics: In honor of M.L. Puri. DOI: [10.1016/j.jspi.2006.06.002](https://doi.org/10.1016/j.jspi.2006.06.002). Citado na p. 70.

FRIEDMAN, M. **Price Theory: A Provisional Text**. Chicago: Aldine, 1976. Citado na p. 29.

FRIEDMAN, M.; SAVAGE, L. J. The Utility Analysis of Choices Involving Risk. **Journal of Political Economy**, v. 56, n. 4, p. 279–304, 1948. DOI: [10.1086/256692](https://doi.org/10.1086/256692). Citado nas pp. 29, 39, 207, 208.

FROST, P. A.; SAVARINO, J. E. For better performance: Constrain portfolio weights. **The Journal of Portfolio Management**, v. 15, n. 1, p. 29–34, 1988. DOI: [10.3905/jpm.1988.409181](https://doi.org/10.3905/jpm.1988.409181). Citado na p. 241.

FRY-MCKIBBIN, R.; HSIAO, C. Y.-L.; TANG, C. Contagion and Global Financial Crises: Lessons from Nine Crisis Episodes. **Open Economies Review**, v. 25, n. 3, p. 521–570, 2014. DOI: [10.1007/s11079-013-9289-1](https://doi.org/10.1007/s11079-013-9289-1). Citado nas pp. 106, 144.

FU, A.; NARASIMHAN, B.; KANG, D. W.; DIAMOND, S.; MILLER, J. **CVXR: Disciplined Convex Optimization**. [S. l.], 2019. <https://cvxr.rbind.io>. Citado na p. 118.

FU, J.; WEI, J.; YANG, H. Portfolio optimization in a regime-switching market with derivatives. **European Journal of Operational Research**, v. 233, n. 1, p. 184–192, 2014. DOI: [10.1016/j.ejor.2013.08.033](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.08.033). Citado na p. 244.

GADBAW, R. M. Systemic Regulation of Global Trade and Finance: A Tale of Two Systems. **Journal of International Economic Law**, v. 13, n. 3, p. 551–574, dez. 2010. DOI: [10.1093/jiel/jgq031](https://doi.org/10.1093/jiel/jgq031). Disponível em: <https://doi.org/10.1093/jiel/jgq031>. Citado na p. 42.

GARLAPPI, L.; UPPAL, R.; WANG, T. Portfolio Selection with Parameter and Model Uncertainty: A Multi-Prior Approach. **The Review of Financial Studies**, [Oxford University Press, Society for Financial Studies], v. 20, n. 1, p. 41–81, 2007. DOI: [10.1093/rfs/hhl003](https://doi.org/10.1093/rfs/hhl003). Citado na p. 239.

GÂRLEANU, N.; PEDERSEN, L. H. Dynamic portfolio choice with frictions. **Journal of Economic Theory**, v. 165, Supplement C, p. 487–516, 2016. DOI: [10.1016/j.jet.2016.06.001](https://doi.org/10.1016/j.jet.2016.06.001). Citado na p. 244.

GÂRLEANU, N.; PEDERSEN, L. H. Dynamic Trading with Predictable Returns and Transaction Costs. **The Journal of Finance**, v. 68, n. 6, p. 2309–2340, 2013. DOI: [10.1111/jofi.12080](https://doi.org/10.1111/jofi.12080). Citado nas pp. 240, 244.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. 6. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2006. Citado na p. 108.

GIVOLY, D.; PALMON, D. Insider Trading and the Exploitation of Inside Information: Some Empirical Evidence. **The Journal of Business**, University of Chicago Press, v. 58, n. 1, p. 69–87, 1985. DOI: [10.2307/2352910](https://doi.org/10.2307/2352910). Citado nas pp. 53, 54.

GLASSERMAN, P.; XU, X. Robust Portfolio Control with Stochastic Factor Dynamics. **Operations Research**, v. 61, n. 4, p. 874–893, 2013. DOI: [10.1287/opre.2013.1180](https://doi.org/10.1287/opre.2013.1180). Citado na p. 244.

GOLDFARB, D.; IYENGAR, G. Robust Portfolio Selection Problems. **Mathematics of Operations Research**, v. 28, n. 1, p. 1–38, 2003. DOI: [10.1287/moor.28.1.1.14260](https://doi.org/10.1287/moor.28.1.1.14260). Citado na p. 239.

GOLUB, G. H.; VAN LOAN, C. F. **Matrix Computations**. 4. ed. [S. l.]: Johns Hopkins University Press, 2013. (Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences). Citado na p. 86.

GONÇALVES, A. S.; IQUIAPAZA, R. A.; BRESSAN, A. A. Arbitragem com Fundamentos Latentes em um Modelo Fatorial de Efeitos Mistos. **Revista Brasileira de Finanças**, v. 10, n. 3, p. 317–335, 2012. Citado nas pp. 50, 245.

- GOOD, P. I. **Resampling Methods: A Practical Guide to Data Analysis**. [S. l.]: Birkhäuser Boston, 1999. DOI: [10.1007/0-8176-4444-X](https://doi.org/10.1007/0-8176-4444-X). Citado na p. 64.
- GOODFELLOW, I.; BENGIO, Y.; COURVILLE, A. **Deep Learning**. [S. l.]: MIT Press, 2016. Disponível em: <http://www.deeplearningbook.org>. Citado na p. 69.
- GRANT, M.; BOYD, S. **CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, version 2.1**. [S. l.: s. n.], 2014. <http://cvxr.com/cvx>. Citado na p. 118.
- GRANT, M.; BOYD, S. Graph implementations for nonsmooth convex programs. In BLONDEL, V.; BOYD, S.; KIMURA, H. (Ed.). **Recent Advances in Learning and Control**. [S. l.]: Springer-Verlag Limited, 2008. (Lecture Notes in Control and Information Sciences). http://stanford.edu/~boyd/graph_dcp.html. p. 95–110. Citado na p. 118.
- GRECHUK, B.; ZABARANKIN, M. Inverse portfolio problem with mean-deviation model. **European Journal of Operational Research**, v. 234, n. 2, p. 481–490, 2014. 60 years following Harry Markowitz's contribution to portfolio theory and operations research. DOI: [10.1016/j.ejor.2013.04.056](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.04.056). Citado na p. 236.
- GRINBLATT, M.; TITMAN, S. **Financial Markets and Corporate Strategy**. [S. l.]: McGraw-Hill, 2004. (Irwin Series in Finance, Insurance, and Real Estate: Financial management). Citado na p. 229.
- GRINOLD, R. C. Dynamic Portfolio Analysis. **The Journal of Portfolio Management**, v. 34, n. 1, p. 12–26, 2007. DOI: [10.3905/jpm.2007.698029](https://doi.org/10.3905/jpm.2007.698029). Citado na p. 242.
- GRINOLD, R. C. The Fundamental Law of Active Management. **The Journal of Portfolio Management**, v. 15, n. 3, p. 30–37, 1989. DOI: [10.3905/jpm.1989.409211](https://doi.org/10.3905/jpm.1989.409211). Citado na p. 235.
- GRIVEAU-BILLION, T.; RICHARD, J.-C.; RONCALLI, T. A Fast Algorithm for Computing High-Dimensional Risk Parity Portfolios. **SSRN Electronic Journal**, Elsevier BV, 2013. DOI: [10.2139/ssrn.2325255](https://doi.org/10.2139/ssrn.2325255). Citado nas pp. 63, 275.
- GUERMAT, C. Yes, the CAPM is testable. **Journal of Banking & Finance**, v. 46, p. 31–42, 2014. DOI: [10.1016/j.jbankfin.2014.05.001](https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2014.05.001). Citado na p. 48.
- HAFNER, C. M.; REZNIKOVA, O. On the estimation of dynamic conditional correlation models. **Computational Statistics & Data Analysis**, v. 56, n. 11, p. 3533–3545, 2012. 1st issue of the Annals of Computational and Financial Econometrics Sixth Special Issue on Computational Econometrics. DOI: [10.1016/j.csda.2010.09.022](https://doi.org/10.1016/j.csda.2010.09.022). Citado na p. 61.
- HAN, Y. Asset Allocation with a High Dimensional Latent Factor Stochastic Volatility Model. **The Review of Financial Studies**, [Oxford University Press, Society for Financial Studies], v. 19, n. 1, p. 237–271, 2006. DOI: [10.1093/rfs/hhj002](https://doi.org/10.1093/rfs/hhj002). Citado na p. 242.

- HARVEY, C. R.; LIECHTY, J. C.; LIECHTY, M. W. Bayes vs. Resampling: A Rematch. **Journal of Investment Management**, v. 6, n. 1, 2008. Citado nas pp. 67, 68, 240.
- HE, J.; WANG, Q.-G.; CHENG, P.; CHEN, J.; SUN, Y. Multi-Period Mean-Variance Portfolio Optimization With High-Order Coupled Asset Dynamics. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 60, n. 5, p. 1320–1335, 2015. DOI: [10.1109/TAC.2014.2370236](https://doi.org/10.1109/TAC.2014.2370236). Citado na p. 244.
- HO, T. K. The random subspace method for constructing decision forests. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v. 20, n. 8, p. 832–844, 1998. DOI: [10.1109/34.709601](https://doi.org/10.1109/34.709601). Citado nas pp. 34, 36, 37, 65, 70, 88, 89, 106, 167, 168.
- HOLLANDER, M.; WOLFE, D. A. **Nonparametric Statistical Methods**. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1973. p. 115–120. Citado nas pp. 112, 135.
- HUANG, D.; ZHU, S.; FABOZZI, F. J.; FUKUSHIMA, M. Portfolio selection under distributional uncertainty: A relative robust CVaR approach. **European Journal of Operational Research**, v. 203, n. 1, p. 185–194, 2010. DOI: [10.1016/j.ejor.2009.07.010](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2009.07.010). Citado na p. 239.
- HUBER, P. J.; RONCHETTI, E. **Robust statistics**. 2. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2009. Citado na p. 238.
- HULL, J. C. **Options, Futures, and Other Derivatives**. 9. ed. Boston: Pearson Education, 2015. Citado na p. 77.
- IDZOREK, T. A step-by-step guide to the Black-Litterman model: Incorporating user-specified confidence levels. In SATCHELL, S. (Ed.). **Forecasting Expected Returns in the Financial Markets**. Oxford: Academic Press, 2007. (Quantitative Finance Series). p. 17–38. DOI: [10.1016/B978-075068321-0.50003-0](https://doi.org/10.1016/B978-075068321-0.50003-0). Citado nas pp. 236, 237.
- INGERSOLL, J. Multidimensional Security Pricing. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, Cambridge University Press, v. 10, n. 5, p. 785–798, 1975. DOI: [10.2307/2330271](https://doi.org/10.2307/2330271). Citado na p. 44.
- INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. **80000–2:2009(E)**: Quantities and units – Part 2: Mathematical signs and symbols to be used in the natural sciences and technology. Geneva, Switzerland, 2009. Citado na p. 206.
- IQUIAPAZA, R. A.; AMARAL, H. F.; BRESSAN, A. A. Evolução da pesquisa em finanças: epistemologia, paradigma e críticas. **Organizações & Sociedade**, Universidade Federal da Bahia, v. 16, n. 49, p. 351–370, 2009. Citado nas pp. 29, 207.
- IQUIAPAZA, R. A.; VAZ, G. F. C.; BORGES, S. L. Avaliação de Portfólio de Estratégias de Investimento de Timing de Volatilidade e Timing de Recompensa ao Risco: O Caso Brasileiro. **Revista de Finanças Aplicadas**, v. 7, n. 2, p. 1–19, 2016. Citado na p. 245.

JAFFE, J. F. Special Information and Insider Trading. **The Journal of Business**, University of Chicago Press, v. 47, n. 3, p. 410–428, 1974. DOI: [10.2307/2352458](https://doi.org/10.2307/2352458). Citado nas pp. 53, 54.

JAGANNATHAN, R.; MA, T. Risk Reduction in Large Portfolios: Why Imposing the Wrong Constraints Helps. **The Journal of Finance**, Blackwell Publishing, v. 58, n. 4, p. 1651–1683, 2003. DOI: [10.1111/1540-6261.00580](https://doi.org/10.1111/1540-6261.00580). Citado na p. 63.

JAMES, W.; STEIN, C. Estimation with Quadratic Loss. In. **Breakthroughs in Statistics: Foundations and Basic Theory**. Edição: Samuel Kotz e Norman L. Johnson. New York, NY: Springer New York, 1992. p. 443–460. DOI: [10.1007/978-1-4612-0919-5_30](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0919-5_30). Citado na p. 58.

JEGADEESH, N.; KIM, J.; KRISCHE, S. D.; LEE, C. M. C. Analyzing the Analysts: When Do Recommendations Add Value? **The Journal of Finance**, Blackwell Publishing, Inc., v. 59, n. 3, p. 1083–1124, 2004. DOI: [10.1111/j.1540-6261.2004.00657.x](https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.2004.00657.x). Citado na p. 53.

JEGADEESH, N.; TITMAN, S. Returns to Buying Winners and Selling Losers: Implications for Stock Market Efficiency. **The Journal of Finance**, Blackwell Publishing Ltd, v. 48, n. 1, p. 65–91, 1993. DOI: [10.1111/j.1540-6261.1993.tb04702.x](https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1993.tb04702.x). Citado nas pp. 52, 53.

JENSEN, M. C. THE PERFORMANCE OF MUTUAL FUNDS IN THE PERIOD 1945–1964. **The Journal of Finance**, v. 23, n. 2, p. 389–416, 1968. DOI: [10.1111/j.1540-6261.1968.tb00815.x](https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1968.tb00815.x). Citado nas pp. 38, 56.

JENTER, D. Market Timing and Managerial Portfolio Decisions. **The Journal of Finance**, Blackwell Publishing, Inc., v. 60, n. 4, p. 1903–1949, 2005. DOI: [10.1111/j.1540-6261.2005.00783.x](https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.2005.00783.x). Citado na p. 53.

Jl, X. **Sensitivity Analysis of Minimum Variance Portfolios**. 2013. Diss. (Mestrado) – The University of Western Ontario, London, Ontario, Canada. Electronic Thesis and Dissertation Repository. 1554. Disponível em: <https://ir.lib.uwo.ca/etd/1554>. Citado na p. 85.

JOBSON, J. D.; KORKIE, B. Estimation for Markowitz Efficient Portfolios. **Journal of the American Statistical Association**, Taylor & Francis, v. 75, n. 371, p. 544–554, 1980. DOI: [10.1080/01621459.1980.10477507](https://doi.org/10.1080/01621459.1980.10477507). Citado na p. 58.

JOVANOVIC, F.; LE GALL, P. Does God practice a random walk? The ‘financial physics’ of a nineteenth-century forerunner, Jules Regnault. **The European Journal of the History of Economic Thought**, Routledge, v. 8, n. 3, p. 332–362, 2001. DOI: [10.1080/09672560110062960](https://doi.org/10.1080/09672560110062960). Citado na p. 42.

KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk. **Econometrica**, [Wiley, Econometric Society], v. 47, n. 2, p. 263–291, 1979. DOI: [10.2307/1914185](https://doi.org/10.2307/1914185). Citado nas pp. 208–210.

KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. Subjective probability: A judgment of representativeness. **Cognitive Psychology**, v. 3, n. 3, p. 430–454, 1972. DOI: [10.1016/0010-0285\(72\)90016-3](https://doi.org/10.1016/0010-0285(72)90016-3). Citado nas pp. 208, 209.

KAKOURIS, I.; RUSTEM, B. Robust portfolio optimization with copulas. **European Journal of Operational Research**, v. 235, n. 1, p. 28–37, 2014. DOI: [10.1016/j.ejor.2013.12.022](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.12.022). Citado na p. 241.

KAPSOS, M.; CHRISTOFIDES, N.; RUSTEM, B. Worst-case robust Omega ratio. **European Journal of Operational Research**, v. 234, n. 2, p. 499–507, 2014. 60 years following Harry Markowitz's contribution to portfolio theory and operations research. DOI: [10.1016/j.ejor.2013.04.025](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.04.025). Citado na p. 241.

KARMAKAR, N. A New Polynomial-time Algorithm for Linear Programming. *In*. PROCEEDINGS of the Sixteenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing. New York, NY, USA: ACM, 1984. (STOC '84), p. 302–311. DOI: [10.1145/800057.808695](https://doi.org/10.1145/800057.808695). Citado na p. 231.

KEIM, D. B.; STAMBAUGH, R. F. Predicting returns in the stock and bond markets. **Journal of Financial Economics**, v. 17, n. 2, p. 357–390, 1986. DOI: [10.1016/0304-405X\(86\)90070-X](https://doi.org/10.1016/0304-405X(86)90070-X). Citado na p. 53.

KENDALL, M. G.; HILL, A. B. The Analysis of Economic Time-Series-Part I: Prices. **Journal of the Royal Statistical Society**, [Royal Statistical Society, Wiley], v. 116, n. 1, p. 11–34, 1953. DOI: [10.2307/2980947](https://doi.org/10.2307/2980947). Citado na p. 44.

KERR, N. L.; TINDALE, R. S. Group Performance and Decision Making. **Annual Review of Psychology**, v. 55, n. 1, p. 623–655, 2004. DOI: [10.1146/annurev.psych.55.090902.142009](https://doi.org/10.1146/annurev.psych.55.090902.142009). Citado na p. 208.

KIM, J. H.; KIM, W. C.; FABOZZI, F. J. Recent advancements in robust optimization for investment management. **Annals of Operations Research**, 2017. DOI: [10.1007/s10479-017-2573-5](https://doi.org/10.1007/s10479-017-2573-5). Citado na p. 238.

KIM, J. H.; KIM, W. C.; FABOZZI, F. J. Recent Developments in Robust Portfolios with a Worst-Case Approach. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 161, n. 1, p. 103–121, 2014a. DOI: [10.1007/s10957-013-0329-1](https://doi.org/10.1007/s10957-013-0329-1). Citado na p. 241.

KIM, W. C.; FABOZZI, F. J.; CHERIDITO, P.; FOX, C. Controlling portfolio skewness and kurtosis without directly optimizing third and fourth moments. **Economics Letters**, v. 122, n. 2, p. 154–158, 2014. DOI: [10.1016/j.econlet.2013.11.024](https://doi.org/10.1016/j.econlet.2013.11.024). Citado na p. 241.

- KIM, W. C.; KIM, J. H.; AHN, S. H.; FABOZZI, F. J. What do robust equity portfolio models really do? **Annals of Operations Research**, v. 205, n. 1, p. 141–168, 2013. DOI: [10.1007/s10479-012-1247-6](https://doi.org/10.1007/s10479-012-1247-6). Citado nas pp. 32, 57, 117, 165, 241.
- KIM, W. C.; KIM, J. H.; FABOZZI, F. J. Deciphering robust portfolios. **Journal of Banking & Finance**, v. 45, Supplement C, p. 1–8, 2014b. DOI: [10.1016/j.jbankfin.2014.04.021](https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2014.04.021). Citado nas pp. 32, 57, 117, 165, 241.
- KIM, W. C.; KIM, J. H.; MULVEY, J. M.; FABOZZI, F. J. Focusing on the worst state for robust investing. **International Review of Financial Analysis**, v. 39, Supplement C, p. 19–31, 2015. DOI: [10.1016/j.irfa.2015.02.001](https://doi.org/10.1016/j.irfa.2015.02.001). Citado na p. 241.
- KIM, W. C.; KIM, M. J.; KIM, J. H.; FABOZZI, F. J. Robust portfolios that do not tilt factor exposure. **European Journal of Operational Research**, v. 234, n. 2, p. 411–421, 2014. 60 years following Harry Markowitz’s contribution to portfolio theory and operations research. DOI: [10.1016/j.ejor.2013.03.029](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.03.029). Citado na p. 241.
- KIRBY, C.; OSTDIEK, B. It’s All in the Timing: Simple Active Portfolio Strategies that Outperform Naïve Diversification. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, Cambridge University Press, v. 47, n. 2, p. 437–467, 2012. DOI: [10.1017/S0022109012000117](https://doi.org/10.1017/S0022109012000117). Citado nas pp. 62, 110, 111, 114, 119, 132, 239, 245, 246.
- KNIGHT, F. H. **Risk, Uncertainty and Profit**. Boston: Houghton Mifflin, 1921. Citado na p. 29.
- KNIGHT, M. Developing countries and the globalization of financial markets. **World Development**, v. 26, n. 7, p. 1185–1200, 1998. DOI: [10.1016/S0305-750X\(98\)00038-2](https://doi.org/10.1016/S0305-750X(98)00038-2). Citado na p. 42.
- KOLM, P. N.; TÜTÜNCÜ, R. H.; FABOZZI, F. J. 60 Years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. **European Journal of Operational Research**, v. 234, n. 2, p. 356–371, 2014. 60 years following Harry Markowitz’s contribution to portfolio theory and operations research. DOI: [10.1016/j.ejor.2013.10.060](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.10.060). Citado nas pp. 30, 31, 233, 236.
- KONNO, H.; WIJAYANAYAKE, A. Portfolio optimization problem under concave transaction costs and minimal transaction unit constraints. **Mathematical Programming**, v. 89, n. 2, p. 233–250, 2001. DOI: [10.1007/PL00011397](https://doi.org/10.1007/PL00011397). Citado na p. 76.
- KONNO, H.; YAMAZAKI, H. Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market. **Management Science**, INFORMS, v. 37, n. 5, p. 519–531, 1991. DOI: [10.1287/mnsc.37.5.519](https://doi.org/10.1287/mnsc.37.5.519). Citado na p. 235.
- KRAUS, A.; LITZENBERGER, R. H. Skewness preference and the valuation of risk assets. **The Journal of Finance**, Blackwell Publishing Ltd, v. 31, n. 4, p. 1085–1100, 1976. DOI: [10.1111/j.1540-6261.1976.tb01961.x](https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1976.tb01961.x). Citado na p. 44.

KREMER, P. J.; LEE, S.; BOGDAN, M.; PATERLINI, S. Sparse portfolio selection via the sorted ℓ_1 -Norm. **Journal of Banking & Finance**, v. 110, p. 1–15, 2020. DOI: [10.1016/j.jbankfin.2019.105687](https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2019.105687). Citado na p. 109.

KROGH, A.; VEDELSBY, J. Neural Network Ensembles, Cross Validation and Active Learning. In: PROCEEDINGS of the 7th International Conference on Neural Information Processing Systems. Denver, Colorado: MIT Press, 1994. (NIPS'94), p. 231–238. DOI: [10.5555/2998687.2998716](https://doi.org/10.5555/2998687.2998716). Citado na p. 65.

KRUSKAL, W. H.; WALLIS, W. A. Use of Ranks in One-Criterion Variance Analysis. **Journal of the American Statistical Association**, Taylor & Francis, v. 47, n. 260, p. 583–621, 1952. DOI: [10.1080/01621459.1952.10483441](https://doi.org/10.1080/01621459.1952.10483441). Citado nas pp. 112, 135.

LAKONISHOK, J.; SHLEIFER, A.; VISHNY, R. W. Contrarian Investment, Extrapolation, and Risk. **The Journal of Finance**, Blackwell Publishing Ltd, v. 49, n. 5, p. 1541–1578, 1994. DOI: [10.1111/j.1540-6261.1994.tb04772.x](https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1994.tb04772.x). Citado nas pp. 53, 54.

LEDOIT, O.; PÉCHÉ, S. Eigenvectors of some large sample covariance matrix ensembles. **Probability Theory and Related Fields**, v. 151, n. 1, p. 233–264, 2011. DOI: [10.1007/s00440-010-0298-3](https://doi.org/10.1007/s00440-010-0298-3). Citado nas pp. 59, 233, 234.

LEDOIT, O.; WOLF, M. A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices. **Journal of Multivariate Analysis**, v. 88, n. 2, p. 365–411, 2004a. DOI: [10.1016/S0047-259X\(03\)00096-4](https://doi.org/10.1016/S0047-259X(03)00096-4). Citado nas pp. 33, 59, 60, 63, 114, 233, 234.

LEDOIT, O.; WOLF, M. Analytical nonlinear shrinkage of large-dimensional covariance matrices. **Annals of Statistics**, The Institute of Mathematical Statistics, v. 48, n. 5, p. 3043–3065, 2020. DOI: [10.1214/19-AOS1921](https://doi.org/10.1214/19-AOS1921). Citado nas pp. 36, 60, 61, 110, 144, 145, 168, 246, 254, 269.

LEDOIT, O.; WOLF, M. Honey, I shrunk the sample covariance matrix. **The Journal of Portfolio Management**, v. 30, n. 4, p. 110–119, 2004b. DOI: [10.3905/jpm.2004.110](https://doi.org/10.3905/jpm.2004.110). Citado nas pp. 33, 34, 145, 233, 234.

LEDOIT, O.; WOLF, M. Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection. **Journal of Empirical Finance**, v. 10, n. 5, p. 603–621, 2003. DOI: [10.1016/S0927-5398\(03\)00007-0](https://doi.org/10.1016/S0927-5398(03)00007-0). Citado nas pp. 33, 34, 36, 59, 60, 63, 82, 110, 112, 144, 145, 151, 159, 168, 239, 241, 246, 248, 268.

LEDOIT, O.; WOLF, M. Nonlinear shrinkage estimation of large-dimensional covariance matrices. **The Annals of Statistics**, The Institute of Mathematical Statistics, v. 40, n. 2, p. 1024–1060, 2012. DOI: [10.1214/12-AOS989](https://doi.org/10.1214/12-AOS989). Citado nas pp. 59, 233, 234.

LEDOIT, O.; WOLF, M. Nonlinear Shrinkage of the Covariance Matrix for Portfolio Selection: Markowitz Meets Goldilocks. **The Review of Financial Studies**, v. 30, n. 12, p. 4349–4388, 2017. DOI: [10.1093/rfs/hhx052](https://doi.org/10.1093/rfs/hhx052). Citado na p. 121.

- LEDOIT, O.; WOLF, M. Robust performance hypothesis testing with the Sharpe ratio. **Journal of Empirical Finance**, v. 15, n. 5, p. 850–859, 2008. DOI: [10.1016/j.jempfin.2008.03.002](https://doi.org/10.1016/j.jempfin.2008.03.002). Citado nas pp. 34, 112, 115, 120, 233, 234.
- LEDOIT, O.; WOLF, M. Robust Performances Hypothesis Testing With the Variance. **Wilmott**, John Wiley & Sons, Ltd., v. 2011, n. 55, p. 86–89, 2011. DOI: [10.1002/wilm.10036](https://doi.org/10.1002/wilm.10036). Citado nas pp. 34, 115, 119.
- LEDOIT, O.; WOLF, M. Spectrum estimation: A unified framework for covariance matrix estimation and PCA in large dimensions. **Journal of Multivariate Analysis**, v. 139, Supplement C, p. 360–384, 2015. DOI: [10.1016/j.jmva.2015.04.006](https://doi.org/10.1016/j.jmva.2015.04.006). Citado nas pp. 59, 233, 234.
- LEE, S. C.; EID JUNIOR, W. Portfolio construction and risk management: theory versus practice. **RAUSP Management Journal**, Emerald Publishing Limited, v. 53, n. 3, p. 345–365, 2018. DOI: [10.1108/RAUSP-04-2018-009](https://doi.org/10.1108/RAUSP-04-2018-009). Citado na p. 28.
- LEROY, S. F.; SINGELL, L. D. Knight on Risk and Uncertainty. **Journal of Political Economy**, v. 95, n. 2, p. 394–406, 1987. DOI: [10.1086/261461](https://doi.org/10.1086/261461). Citado na p. 29.
- LEVY, H.; MARKOWITZ, H. M. Approximating Expected Utility by a Function of Mean and Variance. **The American Economic Review**, American Economic Association, v. 69, n. 3, p. 308–317, 1979. DOI: [10.2307/1807366](https://doi.org/10.2307/1807366). Citado nas pp. 40, 208.
- LEVY, H.; LEVY, M. The benefits of differential variance-based constraints in portfolio optimization. **European Journal of Operational Research**, v. 234, n. 2, p. 372–381, 2014. 60 years following Harry Markowitz’s contribution to portfolio theory and operations research. DOI: [10.1016/j.ejor.2013.04.019](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.04.019). Citado na p. 241.
- LI, D.; NG, W.-L. Optimal Dynamic Portfolio Selection: Multiperiod Mean-Variance Formulation. **Mathematical Finance**, Blackwell Publishers Inc, v. 10, n. 3, p. 387–406, 2000. DOI: [10.1111/1467-9965.00100](https://doi.org/10.1111/1467-9965.00100). Citado na p. 242.
- LINTNER, J. The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. **The Review of Economics and Statistics**, The MIT Press, v. 47, n. 1, p. 13–37, 1965. DOI: [10.2307/1924119](https://doi.org/10.2307/1924119). Citado nas pp. 42–46.
- LIU, H. Robust consumption and portfolio choice for time varying investment opportunities. **Annals of Finance**, v. 6, n. 4, p. 435–454, 2010. DOI: [10.1007/s10436-010-0164-4](https://doi.org/10.1007/s10436-010-0164-4). Citado na p. 242.
- LIU, Q. On portfolio optimization: How and when do we benefit from high-frequency data? **Journal of Applied Econometrics**, John Wiley & Sons, Ltd., v. 24, n. 4, p. 560–582, 2009. DOI: [10.1002/jae.1062](https://doi.org/10.1002/jae.1062). Citado na p. 61.

LO, A. W. The adaptive markets hypothesis: Market efficiency from an evolutionary perspective. **The Journal of Portfolio Management**, v. 30, n. 5, p. 15–29, 2004. DOI: [10.3905/jpm.2004.442611](https://doi.org/10.3905/jpm.2004.442611). Citado nas pp. 31, 44, 55.

MACHINA, M. J. Choice under Uncertainty: Problems Solved and Unsolved. **Journal of Economic Perspectives**, v. 1, n. 1, p. 121–154, 1987. DOI: [10.1257/jep.1.1.121](https://doi.org/10.1257/jep.1.1.121). Citado nas pp. 207, 208.

MACIEL, L.; GOMIDE, F.; BALLINI, R. Minimum Variance Fuzzy Possibilistic Portfolio. **Revista de Finanças Aplicadas**, v. 4, p. 1–27, 2014. Citado na p. 245.

MACKINLAY, A. C.; PÁSTOR, L. Asset Pricing Models: Implications for Expected Returns and Portfolio Selection. **The Review of Financial Studies**, v. 13, n. 4, p. 883–916, 2000. DOI: [10.1093/rfs/13.4.883](https://doi.org/10.1093/rfs/13.4.883). Citado na p. 58.

MAILLARD, S.; RONCALLI, T.; TEÏLETCHÉ, J. The Properties of Equally Weighted Risk Contribution Portfolios. **The Journal of Portfolio Management**, Institutional Investor Journals Umbrella, v. 36, n. 4, p. 60–70, 2010. DOI: [10.3905/jpm.2010.36.4.060](https://doi.org/10.3905/jpm.2010.36.4.060). Citado nas pp. 63, 73, 113, 118, 275.

MANSINI, R.; OGRYCZAK, W.; SPERANZA, M. G. Twenty years of linear programming based portfolio optimization. **European Journal of Operational Research**, v. 234, n. 2, p. 518–535, 2014. 60 years following Harry Markowitz's contribution to portfolio theory and operations research. DOI: [10.1016/j.ejor.2013.08.035](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.08.035). Citado na p. 236.

MARKOWITZ, H. M. Mean-variance approximations to expected utility. **European Journal of Operational Research**, v. 234, n. 2, p. 346–355, 2014. 60 years following Harry Markowitz's contribution to portfolio theory and operations research. DOI: [10.1016/j.ejor.2012.08.023](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.08.023). Citado nas pp. 28, 82, 208.

MARKOWITZ, H. M. Portfolio Selection. **The Journal of Finance**, Blackwell Publishing Ltd, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952a. DOI: [10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x](https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x). Citado nas pp. 19, 21, 28–31, 33, 36, 37, 39–41, 43, 57, 59, 82, 92, 93, 209–211, 213, 214, 220, 233, 235.

MARKOWITZ, H. M. **Portfolio selection**: Efficient Diversification of Investments. New York: [Wiley, Yale University Press], 1959. Citado nas pp. 28, 30, 31, 36, 39–41, 43, 57, 59, 82, 92, 93, 209, 210, 231, 233.

MARKOWITZ, H. M. The Utility of Wealth. **Journal of Political Economy**, v. 60, n. 2, p. 151–158, 1952b. DOI: [10.1086/257177](https://doi.org/10.1086/257177). Citado nas pp. 29, 39, 207–210.

MARKOWITZ, H. M. Trains of Thought. **The American Economist**, v. 37, n. 1, p. 3–9, 1993. DOI: [10.1177/056943459303700101](https://doi.org/10.1177/056943459303700101). Citado nas pp. 39, 40.

MARKOWITZ, H. M.; TODD, P.; XU, G.; YAMANE, Y. Computation of mean-semivariance efficient sets by the Critical Line Algorithm. **Annals of Operations Research**, v. 45, n. 1, p. 307–317, 1993. DOI: [10.1007/BF02282055](https://doi.org/10.1007/BF02282055). Citado na p. 235.

MARKOWITZ, H. M.; USMEN, N. Resampled frontiers versus diffuse bayes: an experiment. **Journal of Investment Management**, World Scientific, v. 1, n. 4, p. 9–25, 2003. Citado nas pp. 68, 240.

MATOS, G. A. S. **Public Value Governance Indicator for Brazilian States**. 2017. Tese (Doutorado em Administração) – Faculdade de Ciências Econômicas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Minas Gerais, 2017. Citado nas pp. 98, 99.

MEI, X.; DEMIGUEL, V.; NOGALES, F. J. Multiperiod portfolio optimization with multiple risky assets and general transaction costs. **Journal of Banking & Finance**, v. 69, Supplement C, p. 108–120, 2016. DOI: [10.1016/j.jbankfin.2016.04.002](https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2016.04.002). Citado na p. 244.

MERTON, R. C. An Intertemporal Capital Asset Pricing Model. **Econometrica**, [Wiley, Econometric Society], v. 41, n. 5, p. 867–887, 1973a. DOI: [10.2307/1913811](https://doi.org/10.2307/1913811). Citado nas pp. 44, 55.

MERTON, R. C. Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case. **The Review of Economics and Statistics**, The MIT Press, v. 51, n. 3, p. 247–257, 1969. DOI: [10.2307/1926560](https://doi.org/10.2307/1926560). Citado nas pp. 240, 242.

MERTON, R. C. On estimating the expected return on the market: An exploratory investigation. **Journal of Financial Economics**, v. 8, n. 4, p. 323–361, 1980. DOI: [10.1016/0304-405X\(80\)90007-0](https://doi.org/10.1016/0304-405X(80)90007-0). Citado na p. 58.

MERTON, R. C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. **Journal of Economic Theory**, v. 3, n. 4, p. 373–413, 1971. DOI: [10.1016/0022-0531\(71\)90038-X](https://doi.org/10.1016/0022-0531(71)90038-X). Citado nas pp. 76, 240, 242.

MERTON, R. C. Theory of Rational Option Pricing. **The Bell Journal of Economics and Management Science**, Wiley, RAND Corporation, v. 4, n. 1, p. 141–183, 1973b. DOI: [10.2307/3003143](https://doi.org/10.2307/3003143). Citado na p. 42.

MICHAUD, R. O. The Markowitz Optimization Enigma: Is ‘Optimized’ Optimal? **Financial Analysts Journal**, CFA Institute, v. 45, n. 1, p. 31–42, 1989. DOI: [10.2469/faj.v45.n1.31](https://doi.org/10.2469/faj.v45.n1.31). Citado nas pp. 30, 33, 76, 235.

MICHAUD, R. O.; MICHAUD, R. O. **Efficient Asset Management: A Practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation**. Boston, MA: Harvard Business School Press, 1998. Citado nas pp. 30, 34, 36, 64–68, 89, 91, 92, 100, 106, 113, 119, 168, 169, 240.

MICHAUD, R. O.; MICHAUD, R. O. **Portfolio optimization by means of resampled efficient frontiers**. US, dez. 1999. n. 6003018. Citado na p. 65.

MOSSIN, J. Equilibrium in a Capital Asset Market. **Econometrica**, [Wiley, Econometric Society], v. 34, n. 4, p. 768–783, 1966. DOI: [10.2307/1910098](https://doi.org/10.2307/1910098). Citado nas pp. 42–44, 46, 47.

MOURA, G. V.; SANTOS, A. A.; RUIZ, E. Comparing high-dimensional conditional covariance matrices: Implications for portfolio selection. **Journal of Banking & Finance**, v. 118, p. 105882, 2020. DOI: [10.1016/j.jbankfin.2020.105882](https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2020.105882). Citado nas pp. 61, 166.

NAIBERT, P.; CALDEIRA, J. Seleção de carteiras ótimas sob restrições nas normas dos vetores de alocação: uma avaliação empírica com dados da BM&FBOVESPA. **Revista Brasileira de Finanças**, v. 13, n. 3, p. 504–543, 2015. Citado na p. 245.

NAKAGAWA, K.; IMAMURA, M.; YOSHIDA, K. Risk-Based Portfolios with Large Dynamic Covariance Matrices. **International Journal of Financial Studies**, v. 6, n. 2, 2018. DOI: [10.3390/ijfs6020052](https://doi.org/10.3390/ijfs6020052). Citado na p. 61.

NEWKEY, W. K.; WEST, K. D. A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix. **Econometrica**, [Wiley, Econometric Society], v. 55, n. 3, p. 703–708, 1987. DOI: [10.2307/1913610](https://doi.org/10.2307/1913610). Citado nas pp. 117, 132, 155–157, 161–163, 250–252, 256–258.

NEWKEY, W. K.; WEST, K. D. Automatic Lag Selection in Covariance Matrix Estimation. **The Review of Economic Studies**, v. 61, n. 4, p. 631–653, out. 1994. DOI: [10.2307/2297912](https://doi.org/10.2307/2297912). Citado nas pp. 117, 132, 155–157, 161–163, 250–252, 256–258.

NIELSEN, L. T. Equilibrium in CAPM Without a Riskless Asset. **The Review of Economic Studies**, v. 57, n. 2, p. 315–324, abr. 1990. DOI: [10.2307/2297384](https://doi.org/10.2307/2297384). Citado na p. 48.

O'DONOGHUE, B.; CHU, E.; PARIKH, N.; BOYD, S. Conic Optimization via Operator Splitting and Homogeneous Self-Dual Embedding. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 169, n. 3, p. 1042–1068, 2016. Disponível em: <http://stanford.edu/~boyd/papers/scs.html>. Citado na p. 118.

O'DONOGHUE, B.; CHU, E.; PARIKH, N.; BOYD, S. **SCS: Splitting Conic Solver, version 2.1.2**. [S. l.: s. n.], 2019. <https://github.com/cvxgrp/scs>. Citado na p. 118.

OLIVARES-NADAL, A. V.; DEMIGUEL, V. Technical Note—A Robust Perspective on Transaction Costs in Portfolio Optimization. **Operations Research**, v. 66, n. 3, p. 733–739, 2018. DOI: [10.1287/opre.2017.1699](https://doi.org/10.1287/opre.2017.1699). Citado na p. 109.

PACHAMANOVA, D. A.; FABOZZI, F. J. **Portfolio construction and analytics**. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc, 2016. (The Frank J. Fabozzi series). Citado na p. 76.

PALCZEWSKI, A.; PALCZEWSKI, J. Theoretical and empirical estimates of mean–variance portfolio sensitivity. **European Journal of Operational Research**, v. 234, n. 2, p. 402–410, 2014. 60 years following Harry Markowitz’s contribution to portfolio theory and operations research. DOI: [10.1016/j.ejor.2013.04.018](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.04.018). Citado nas pp. 85, 236.

PÁSTOR, L. Portfolio Selection and Asset Pricing Models. **The Journal of Finance**, [American Finance Association, Wiley], v. 55, n. 1, p. 179–223, 2000. DOI: [10.2307/222554](https://doi.org/10.2307/222554). Citado na p. 58.

PÁSTOR, L.; STAMBAUGH, R. F. Comparing asset pricing models: an investment perspective. **Journal of Financial Economics**, v. 56, n. 3, p. 335–381, 2000. DOI: [10.1016/S0304-405X\(00\)00044-1](https://doi.org/10.1016/S0304-405X(00)00044-1). Citado na p. 58.

PÁSTOR, L.; STAMBAUGH, R. F. Liquidity Risk and Expected Stock Returns. **Journal of Political Economy**, The University of Chicago Press, v. 111, n. 3, p. 642–685, 2003. DOI: [10.1086/374184](https://doi.org/10.1086/374184). Citado nas pp. 44, 55.

PFLUG, G. C.; PICHLER, A.; WOZABAL, D. The 1/N investment strategy is optimal under high model ambiguity. **Journal of Banking & Finance**, v. 36, n. 2, p. 410–417, 2012. DOI: [10.1016/j.jbankfin.2011.07.018](https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2011.07.018). Citado nas pp. 33, 62, 90, 240.

PINAR, M. Ç.; TÜTÜNCÜ, R. H. Robust profit opportunities in risky financial portfolios. **Operations Research Letters**, v. 33, n. 4, p. 331–340, 2005. DOI: [10.1016/j.orl.2004.08.005](https://doi.org/10.1016/j.orl.2004.08.005). Citado na p. 242.

POGUE, G. A. An Extension Of The Markowitz Portfolio Selection Model To Include Variable Transactions’ Costs, Short Sales, Leverage Policies And Taxes. **The Journal of Finance**, Blackwell Publishing Ltd, v. 25, n. 5, p. 1005–1027, 1970. DOI: [10.1111/j.1540-6261.1970.tb00865.x](https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1970.tb00865.x). Citado nas pp. 76, 235.

POTRA, F. A.; WRIGHT, S. J. Interior-point methods. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 124, n. 1, p. 281–302, 2000. Numerical Analysis 2000. Vol. IV: Optimization and Nonlinear Equations. DOI: [10.1016/S0377-0427\(00\)00433-7](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00433-7). Citado na p. 231.

PRATT, J. W. Risk Aversion in the Small and in the Large. **Econometrica**, [Wiley, Econometric Society], v. 32, n. 1-2, p. 122–136, 1964. DOI: [10.2307/1913738](https://doi.org/10.2307/1913738). Citado na p. 208.

QIAN, E. Risk Parity and Diversification. **The Journal of Investing**, Institutional Investor Journals Umbrella, v. 20, n. 1, p. 119–127, 2011. DOI: [10.3905/joi.2011.20.1.119](https://doi.org/10.3905/joi.2011.20.1.119). Citado na p. 63.

QUALIS (CAPES): Classificações de Periódicos do Quadriênio 2013-2016. 2017. Disponível em: <http://qualis.capes.gov.br/webqualis/>. Citado na p. 245.

QUARANTA, A. G.; ZAFFARONI, A. Robust optimization of conditional value at risk and portfolio selection. **Journal of Banking & Finance**, v. 32, n. 10, p. 2046–2056, 2008. DOI: [10.1016/j.jbankfin.2007.12.025](https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2007.12.025). Citado na p. 239.

REGNAULT, J. **Calcul des Chances et Philosophie de la Bourse**. Paris: Mallet-Bachelier et Castel, 1863. Citado na p. 42.

RENDLEMAN, R. J.; JONES, C. P.; LATANÉ, H. A. Empirical anomalies based on unexpected earnings and the importance of risk adjustments. **Journal of Financial Economics**, v. 10, n. 3, p. 269–287, 1982. DOI: [10.1016/0304-405X\(82\)90003-4](https://doi.org/10.1016/0304-405X(82)90003-4). Citado nas pp. 52, 53.

ROLL, R. What Every CFO Should Know about Scientific Progress in Financial Economics: What Is Known and What Remains to Be Resolved. **Financial Management**, [Financial Management Association International, Wiley], v. 23, n. 2, p. 69–75, 1994. DOI: [10.2307/3665740](https://doi.org/10.2307/3665740). Citado na p. 53.

ROLL, R.; ROSS, S. A. An Empirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory. **The Journal of Finance**, Blackwell Publishing Ltd, v. 35, n. 5, p. 1073–1103, 1980. DOI: [10.1111/j.1540-6261.1980.tb02197.x](https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1980.tb02197.x). Citado nas pp. 49, 50.

ROMA, C. M.; IQUIAPAZA, R. A.; FERREIRA, B. Aplicação da fronteira eficiente por meio das técnicas de bootstrapping e Monte Carlo: uma paralelização entre BM&FBovespa e Nyse a partir das principais ADRs brasileiras. **Revista de Administração, Contabilidade e Economia**, v. 14, n. 1, p. 121–142, 2015. DOI: [10.18593/race.v14i1.4982](https://doi.org/10.18593/race.v14i1.4982). Citado na p. 245.

ROMAN, D.; MITRA, G. Portfolio selection models: a review and new directions. **Wilmott Journal**, v. 1, n. 2, p. 69–85, 2009. DOI: [10.1002/wilj.4](https://doi.org/10.1002/wilj.4). Citado na p. 28.

RONCALLI, T. **Introduction to Risk Parity and Budgeting**. [S. l.]: Chapman & Hall/CRC, 2013. (Financial Mathematics Series). Citado na p. 63.

ROSS, S. A. The arbitrage theory of capital asset pricing. **Journal of Economic Theory**, v. 13, n. 3, p. 341–360, 1976. DOI: [10.1016/0022-0531\(76\)90046-6](https://doi.org/10.1016/0022-0531(76)90046-6). Citado nas pp. 42, 44, 49.

ROYSTON, P. Algorithm AS 181: The W Test for Normality. **Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)**, [Wiley, Royal Statistical Society], v. 31, n. 2, p. 176–180, 1982a. DOI: [10.2307/2347986](https://doi.org/10.2307/2347986). Citado nas pp. 100, 124–126, 128, 130.

ROYSTON, P. An Extension of Shapiro and Wilk's W Test for Normality to Large Samples. **Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)**, [Wiley, Royal Statistical Society], v. 31, n. 2, p. 115–124, 1982b. DOI: [10.2307/2347973](https://doi.org/10.2307/2347973). Citado nas pp. 100, 124–126, 128, 130.

ROYSTON, P. Remark AS R94: A Remark on Algorithm AS 181: The W-test for Normality. **Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)**, [Wiley, Royal Statistical Society], v. 44, n. 4, p. 547–551, 1995. DOI: [10.2307/2986146](https://doi.org/10.2307/2986146). Citado nas pp. 100, 124–126, 128, 130.

RUBINSTEIN, M. Markowitz's "Portfolio Selection": A Fifty-Year Retrospective. **The Journal of Finance**, Blackwell Publishers, Inc., v. 57, n. 3, p. 1041–1045, 2002. DOI: [10.1111/1540-6261.00453](https://doi.org/10.1111/1540-6261.00453). Citado nas pp. 233, 235.

RUBINSTEIN, M. E. The Fundamental Theorem of Parameter-Preference Security Valuation. **The Journal of Financial and Quantitative Analysis**, [Cambridge University Press, University of Washington School of Business Administration], v. 8, n. 1, p. 61–69, 1973. DOI: [10.2307/2329748](https://doi.org/10.2307/2329748). Citado na p. 44.

SAMUELSON, P. A. Lifetime Portfolio Selection By Dynamic Stochastic Programming. **The Review of Economics and Statistics**, The MIT Press, v. 51, n. 3, p. 239–246, 1969. DOI: [10.2307/1926559](https://doi.org/10.2307/1926559). Citado nas pp. 240, 242.

SAMUELSON, P. A. Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly. **Industrial Management Review**, v. 6, n. 2, p. 41–49, 1965. Citado nas pp. 28, 42.

SANDOVAL, L.; FRANCA, I. D. P. Correlation of financial markets in times of crisis. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 391, n. 1, p. 187–208, 2012. DOI: [10.1016/j.physa.2011.07.023](https://doi.org/10.1016/j.physa.2011.07.023). Citado nas pp. 106, 144.

SANTOS, A. A. P. Disentangling the role of variance and covariance information in portfolio selection problems. **Quantitative Finance**, Routledge, v. 19, n. 1, p. 57–76, 2019. DOI: [10.1080/14697688.2018.1465197](https://doi.org/10.1080/14697688.2018.1465197). Citado na p. 62.

SANTOS, A. A. P. Beating the market with small portfolios: Evidence from Brazil. **EconomiA**, v. 16, n. 1, p. 22–31, 2015. DOI: [10.1016/j.econ.2014.11.003](https://doi.org/10.1016/j.econ.2014.11.003). Citado na p. 245.

SANTOS, A. A. P. The Out-of-Sample Performance of Robust Portfolio Optimization. **Brazilian Review of Finance**, v. 8, n. 2, p. 141–166, 2010. Citado nas pp. 243, 245.

SANTOS, A. A. P.; MOURA, G. V. Dynamic factor multivariate GARCH model. **Computational Statistics & Data Analysis**, v. 76, Supplement C, p. 606–617, 2014. CFE-network: The Annals of Computational and Financial Econometrics. DOI: [10.1016/j.csda.2012.09.010](https://doi.org/10.1016/j.csda.2012.09.010). Citado nas pp. 244, 245.

- SANTOS, A. A. P.; NOGALES, F. J.; RUIZ, E. Comparing Univariate and Multivariate Models to Forecast Portfolio Value-at-Risk. **Journal of Financial Econometrics**, v. 11, n. 2, p. 400–441, 2013. DOI: [10.1093/jjfinec/nbs015](https://doi.org/10.1093/jjfinec/nbs015). Citado na p. 244.
- SANTOS, A. A. P.; TESSARI, C. Quantitative Portfolio Optimization Techniques Applied to the Brazilian Stock Market. **Revista Brasileira de Finanças**, v. 10, n. 3, p. 369–393, 2012. DOI: [10.12660/rbfin.v10n3.2012.3865](https://doi.org/10.12660/rbfin.v10n3.2012.3865). Citado nas pp. 58, 59.
- SATCHELL, S.; SCOWCROFT, A. A demystification of the Black–Litterman model: Managing quantitative and traditional portfolio construction. **Journal of Asset Management**, v. 1, n. 2, p. 138–150, 2000. DOI: [10.1057/palgrave.jam.2240011](https://doi.org/10.1057/palgrave.jam.2240011). Citado na p. 237.
- SCHERBART, A.; NATTKEMPER, T. W. The Diversity of Regression Ensembles Combining Bagging and Random Subspace Method. In KÖPPEN, M.; KASABOV, N.; COGHILL, G. (Ed.). **Advances in Neuro-Information Processing**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009. p. 911–918. DOI: [10.1007/978-3-642-03040-6_111](https://doi.org/10.1007/978-3-642-03040-6_111). Citado na p. 65.
- SCHERER, B. A note on the out-of-sample performance of resampled efficiency. **Journal of Asset Management**, v. 7, n. 3, p. 170–178, 2006. DOI: [10.1057/palgrave.jam.2240211](https://doi.org/10.1057/palgrave.jam.2240211). Citado na p. 69.
- SCHÖLKOPF, B.; SMOLA, A. J.; BACH, F. **Learning with Kernels: Support Vector Machines, Regularization, Optimization, and Beyond**. [S. l.]: The MIT Press, 2018. (Adaptive Computation and Machine Learning series). Citado na p. 69.
- SCOTT, R. C.; HORVATH, P. A. On The Direction of Preference for Moments of Higher Order Than The Variance. **The Journal of Finance**, Blackwell Publishing Ltd, v. 35, n. 4, p. 915–919, 1980. DOI: [10.1111/j.1540-6261.1980.tb03509.x](https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1980.tb03509.x). Citado nas pp. 81, 82, 208.
- SEYHUN, H. N. Insiders’ profits, costs of trading, and market efficiency. **Journal of Financial Economics**, v. 16, n. 2, p. 189–212, 1986. DOI: [10.1016/0304-405X\(86\)90060-7](https://doi.org/10.1016/0304-405X(86)90060-7). Citado nas pp. 53, 54.
- SHARPE, W. F. A Simplified Model for Portfolio Analysis. **Management Science, INFORMS**, v. 9, n. 2, p. 277–293, 1963. DOI: [10.2307/2627407](https://doi.org/10.2307/2627407). Citado nas pp. 58, 61, 169.
- SHARPE, W. F. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk. **The Journal of Finance**, Blackwell Publishing Ltd, v. 19, n. 3, p. 425–442, 1964. DOI: [10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x](https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x). Citado nas pp. 36, 42–44, 47, 58, 61.

- SHARPE, W. F. The Sharpe Ratio. **The Journal of Portfolio Management**, v. 21, n. 1, p. 49–58, 1994. DOI: [10.3905/jpm.1994.409501](https://doi.org/10.3905/jpm.1994.409501). Citado na p. 234.
- SHEFRIN, H.; STATMAN, M. Behavioral Portfolio Theory. **The Journal of Financial and Quantitative Analysis**, Cambridge University Press, v. 35, n. 2, p. 127–151, 2000. DOI: [10.2307/2676187](https://doi.org/10.2307/2676187). Citado na p. 235.
- SHEN, W.; WANG, J. Portfolio Selection via Subset Resampling. In SINGH, S. P.; MARKOVITCH, S. (Ed.). **Proceedings of the Thirty-First AAAI Conference on Artificial Intelligence, February 4-9, 2017, San Francisco, California, USA**. [S. l.]: AAAI Press, 2017. p. 1517–1523. Disponível em: <http://aaai.org/ocs/index.php/AAAI/AAAI17/paper/view/14443>. Citado nas pp. 65, 71, 100, 168.
- SILVENNOINEN, A.; THORP, S. Financialization, crisis and commodity correlation dynamics. **Journal of International Financial Markets, Institutions and Money**, v. 24, p. 42–65, 2013. DOI: [10.1016/j.intfin.2012.11.007](https://doi.org/10.1016/j.intfin.2012.11.007). Citado nas pp. 106, 144.
- SIMAAN, Y. The opportunity cost of mean–variance choice under estimation risk. **European Journal of Operational Research**, v. 234, n. 2, p. 382–391, 2014. 60 years following Harry Markowitz’s contribution to portfolio theory and operations research. DOI: [10.1016/j.ejor.2013.01.025](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.01.025). Citado na p. 236.
- SJR - SCImago Journal & Country Rank. 2007. Disponível em: <http://www.scimagojr.com>. Citado nas pp. 44, 45, 53, 54, 208, 234–236, 240–242, 244.
- SMIMOU, K. International portfolio choice and political instability risk: A multi-objective approach. **European Journal of Operational Research**, v. 234, n. 2, p. 546–560, 2014. 60 years following Harry Markowitz’s contribution to portfolio theory and operations research. DOI: [10.1016/j.ejor.2013.01.024](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.01.024). Citado na p. 236.
- SOLNIK, B. H. TESTING INTERNATIONAL ASSET PRICING: SOME PESSIMISTIC VIEWS. **The Journal of Finance**, v. 32, n. 2, p. 503–512, 1977. DOI: [10.1111/j.1540-6261.1977.tb03288.x](https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1977.tb03288.x). Citado na p. 48.
- STATMAN, M. How Many Stocks Make a Diversified Portfolio? **The Journal of Financial and Quantitative Analysis**, Cambridge University Press, v. 22, n. 3, p. 353–363, 1987. DOI: [10.2307/2330969](https://doi.org/10.2307/2330969). Citado nas pp. 48, 49, 235, 245.
- STEIN, C. Inadmissibility of the Usual Estimator for the Mean of a Multivariate Normal Distribution. In NEYMAN, J. (Ed.). **Proceedings of the Third Berkeley Symposium On Mathematical Statistics And Probability**. Berkeley, CA: University of California Press, 1955. p. 197–206. Citado na p. 58.
- STEINBACH, M. C. Markowitz Revisited: Mean-Variance Models in Financial Portfolio Analysis. **Society for Industrial and Applied Mathematics Review**, v. 43, n. 1, p. 31–85, 2001. DOI: [10.1137/S0036144500376650](https://doi.org/10.1137/S0036144500376650). Citado na p. 242.

- STREHL, A.; GHOSH, J. Cluster Ensembles: A Knowledge Reuse Framework for Combining Multiple Partitions. **Journal of Machine Learning Research**, v. 3, p. 583–617, 2002. Citado na p. 70.
- SULLIVAN, E. J. A Brief History of the Capital Asset Pricing Model. In APUBEF 29th ANNUAL MEETING. **APUBEF Proceedings**. [S. l.: s. n.], 2006. Association of Pennsylvania University Business e Economic Faculties, p. 207–210. Citado na p. 43.
- TAKAHASHI, R. H. C. Otimização Escalar e Vetorial. Notas de aula. Belo Horizonte, 2007. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/~taka/>. Citado na p. 231.
- TAKEDA, A.; TAGUCHI, S.; TÛTÛNCÛ, R. H. Adjustable Robust Optimization Models for a Nonlinear Two-Period System. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 136, n. 2, p. 275–295, 2008. DOI: [10.1007/s10957-007-9288-8](https://doi.org/10.1007/s10957-007-9288-8). Citado na p. 242.
- TEVZADZE, R.; TORONJADZE, T.; UZUNASHVILI, T. Robust utility maximization for a diffusion market model with misspecified coefficients. **Finance and Stochastics**, Springer-Verlag, v. 17, n. 3, p. 535–563, 2013. DOI: [10.1007/s00780-012-0199-7](https://doi.org/10.1007/s00780-012-0199-7). Citado na p. 241.
- THOMÉ NETO, C.; LEAL, R. P. C.; ALMEIDA, V. d. S. Um Índice De Mínima Variância De Ações Brasileiras. **Economia Aplicada**, v. 15, p. 535–557, 2011. DOI: [10.1590/S1413-80502011000400002](https://doi.org/10.1590/S1413-80502011000400002). Citado na p. 245.
- TIMMERMAN, A. Elusive return predictability. **International Journal of Forecasting**, v. 24, n. 1, p. 1–18, 2008. DOI: [10.1016/j.ijforecast.2007.07.008](https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2007.07.008). Citado na p. 53.
- TOBIN, J. Liquidity Preference as Behavior Towards Risk. **The Review of Economic Studies**, [Oxford University Press, Review of Economic Studies, Ltd.], v. 25, n. 2, p. 65–86, 1958. DOI: [10.2307/2296205](https://doi.org/10.2307/2296205). Citado na p. 44.
- TREYNOR, J. L. Market Value, Time, and Risk. [S. l.], 1961. Disponível em: <https://ssrn.com/abstract=2600356>. Citado na p. 43.
- TREYNOR, J. L. Toward a Theory of Market Value of Risky Assets. [S. l.], 1962. Disponível em: <https://ssrn.com/abstract=628187>. Citado na p. 43.
- TREYNOR, J. L.; BLACK, F. How to Use Security Analysis to Improve Portfolio Selection. **The Journal of Business**, University of Chicago Press, v. 46, n. 1, p. 66–86, 1973. DOI: [10.1086/295508](https://doi.org/10.1086/295508). Citado na p. 37.
- TRUCÍOS, C.; ZEVALLOS, M.; HOTTA, L. K.; SANTOS, A. A. P. Covariance Prediction in Large Portfolio Allocation. **Econometrics**, v. 7, n. 2, 2019. DOI: [10.3390/econometrics7020019](https://doi.org/10.3390/econometrics7020019). Citado na p. 61.

TU, J.; ZHOU, G. Markowitz meets Talmud: A combination of sophisticated and naive diversification strategies. **Journal of Financial Economics**, v. 99, n. 1, p. 204–215, 2011. DOI: [10.1016/j.jfineco.2010.08.013](https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2010.08.013). Citado nas pp. 33, 62, 239.

TÜTÜNCÜ, R. H.; KOENIG, M. Robust Asset Allocation. **Annals of Operations Research**, v. 132, n. 1, p. 157–187, 2004. DOI: [10.1023/B:ANOR.0000045281.41041.ed](https://doi.org/10.1023/B:ANOR.0000045281.41041.ed). Citado na p. 239.

TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty. **Journal of Risk and Uncertainty**, v. 5, n. 4, p. 297–323, 1992. DOI: [10.1007/BF00122574](https://doi.org/10.1007/BF00122574). Citado nas pp. 208, 209.

TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 185, n. 4157, p. 1124–1131, 1974. DOI: [10.1126/science.185.4157.1124](https://doi.org/10.1126/science.185.4157.1124). Citado nas pp. 208, 209.

UTZ, S.; WIMMER, M.; HIRSCHBERGER, M.; STEUER, R. E. Tri-criterion inverse portfolio optimization with application to socially responsible mutual funds. **European Journal of Operational Research**, v. 234, n. 2, p. 491–498, 2014. 60 years following Harry Markowitz's contribution to portfolio theory and operations research. DOI: [10.1016/j.ejor.2013.07.024](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.07.024). Citado na p. 236.

VON NEUMANN, J.; MORGENSTERN, O. **Theory of Games and Economic Behavior**. New Jersey: Princeton University Press, 1944. Citado nas pp. 39, 69, 207.

WINKLER, R. L.; BARRY, C. B. A Bayesian Model For Portfolio Selection And Revision. **The Journal of Finance**, Blackwell Publishing Ltd, v. 30, n. 1, p. 179–192, 1975. DOI: [10.1111/j.1540-6261.1975.tb03169.x](https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1975.tb03169.x). Citado na p. 242.

WOLF, M. **Publications**. 2018. Disponível em: <http://www.econ.uzh.ch/en/people/faculty/wolf/publications.html>. Citado nas pp. 119, 120.

WOLFE, P. The Simplex Method for Quadratic Programming. **Econometrica**, [Wiley, Econometric Society], v. 27, n. 3, p. 382–398, 1959. DOI: [10.2307/1909468](https://doi.org/10.2307/1909468). Citado na p. 234.

WOMACK, K. L. Do Brokerage Analysts' Recommendations Have Investment Value? **The Journal of Finance**, Blackwell Publishing Ltd, v. 51, n. 1, p. 137–167, 1996. DOI: [10.1111/j.1540-6261.1996.tb05205.x](https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1996.tb05205.x). Citado na p. 53.

YI, B.; VIENS, F.; LAW, B.; LI, Z. Dynamic portfolio selection with mispricing and model ambiguity. **Annals of Finance**, Springer Berlin Heidelberg, v. 11, n. 1, p. 37–75, 2015. DOI: [10.1007/s10436-014-0252-y](https://doi.org/10.1007/s10436-014-0252-y). Citado na p. 244.

YIP, F.; XU, L. An application of independent component analysis in the arbitrage pricing theory. *In*. PROCEEDINGS of the IEEE-INNS-ENNS International Joint Conference on

Neural Networks. IJCNN 2000. Neural Computing: New Challenges and Perspectives for the New Millennium. [S. l.: s. n.], 2000. v. 5, p. 279–284. DOI: [10.1109/IJCNN.2000.861471](https://doi.org/10.1109/IJCNN.2000.861471). Citado na p. 50.

YOUNG, W. E.; TRENT, R. H. Geometric Mean Approximations of Individual Security and Portfolio Performance. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, Cambridge University Press, v. 4, n. 2, p. 179–199, 1969. DOI: [10.2307/2329839](https://doi.org/10.2307/2329839). Citado nas pp. 40, 208.

ZABARANKIN, M.; PAVLIKOV, K.; URYASEV, S. Capital Asset Pricing Model (CAPM) with drawdown measure. **European Journal of Operational Research**, v. 234, n. 2, p. 508–517, 2014. 60 years following Harry Markowitz’s contribution to portfolio theory and operations research. DOI: [10.1016/j.ejor.2013.03.024](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.03.024). Citado na p. 45.

ZAKAMULIN, V. Superiority of optimized portfolios to naive diversification: Fact or fiction? **Finance Research Letters**, v. 22, p. 122–128, 2017. DOI: [10.1016/j.frl.2016.12.007](https://doi.org/10.1016/j.frl.2016.12.007). Citado nas pp. 110, 120, 131, 132, 247.

ZIMMER, C.; NIEDERHAUSER, B. Determinando a fronteira eficiente em uma situação de momentos estocásticos. **Revista Brasileira de Finanças**, v. 2, n. 1, p. 91–116, 2004. Citado nas pp. 243, 245.

ZIVOT, E. **Introduction to Computational Finance and Financial Econometrics**. [S. l.]: Chapman e Hall/CRC, 2018. Citado nas pp. 82, 216, 230.

ZUMBACH, G. The Riskmetrics 2006 Methodology. [S. l.], 2007. Citado na p. 61.

Apêndices

APÊNDICE A – Notações Matemáticas

Os sinais e símbolos matemáticos utilizados ao longo do texto desta tese são baseados nas recomendações da norma [ISO \(2009\)](#) com tênues alterações. Tal abordagem tem como objetivo facilitar a leitura das deduções, equações e teoremas apresentados ao longo do texto.

A.1 Notação vetorial e matricial

As notações escalares, vetoriais e matriciais seguem o que fora definido na norma [ISO \(2009\)](#), excetuando-se o caso particular de matrizes que foram definidas com letras gregas. O padrão adotado, a saber, fora o seguinte:

- a) Escalares e variáveis unidimensionais são exibidas em fonte normal, itálico e com letras minúsculas;
- b) Vetores são exibidos em negrito, itálico e letras minúsculas;
- c) Matrizes são exibidas em negrito, itálico e maiúsculas, excetuando-se a fonte itálica em letras gregas.

APÊNDICE B – Teoria Moderna dos Portfólios

Este capítulo busca expor os fundamentos teóricos que serviram como base para a gestão de portfólios.

B.1 Teoria da Utilidade Esperada

O processo de tomada de decisão pelos indivíduos tem sido discutido desde 1738 (BERNOULLI, 1954). O interesse sobre o assunto é relativo às preferências dos indivíduos diante de decisões com resultados incertos. Tais “preferências subjetivas” diferem do valor esperado matemático. von Neumann e Morgenstern (1944) incluem a interpretação de que tais decisões estão vinculadas à racionalidade frente à tomada de decisão em condições de risco. von Neumann e Morgenstern (1944) criam axiomas para a teoria de utilidade tomando como pano de fundo uma analogia com a física, ou seja, tornando a visão econômica matematizada sobre o assunto. Iquiapaza, Amaral e Bressan (2009) consideram a teoria de utilidade esperada como um dos fundamentos das finanças modernas. Uma breve descrição de artigos relevantes encontrados na literatura a respeito de tal assunto pode ser encontrada na Tabela 28.

B.1.1 Evolução de pesquisas relativas à função de utilidade

Friedman e Savage (1948) esboçam a função de utilidade esperada dentro do contexto da existência de loterias e seguros, porém deixam em aberto um paradoxo: por que uma pessoa racional pagaria por ambos para simultaneamente arriscar e evitar riscos? Suposições consideram que o indivíduo age de forma a maximizar sua utilidade esperada. Markowitz (1952b) propõe um modelo alternativo, que identifica inclusive o fato dos indivíduos rejeitarem apostas simétricas, porém reconhece que ele ainda é incompleto. Coelho e McClure (1998) revisam esses trabalhos seminais e apontam os desafios ainda existentes nesse campo.

Machina (1987) faz uma revisão de literatura relacionada com a teoria de escolha sob condições de incerteza. Nesse cenário, a abordagem mais utilizada envolve a modelagem da função de utilidade esperada, entretanto são considerados também modelos de preferências não vinculados à utilidade esperada. O autor considera importante a necessidade das teorizações comportamentais abordarem questões importantes em economia em que o uso da utilidade esperada já foi aplicado com sucesso.

Tabela 28 – Artigos relevantes relacionados à pesquisa sobre a função de utilidade dos agentes financeiros

Artigo	Descrição	Periódico	SJR ¹	Citações ²
Kahneman e Tversky (1979)	Teoria da Perspectiva: crítica à teoria da utilidade esperada e definição de uma nova função de valor baseada nos pesos subjetivos que dados diferentemente a ganhos e perdas	Econometrica	14,4	14.541
Tversky e Kahneman (1974)	Análises de vieses e heurísticas do processo de tomada de decisão sob condições de incerteza	Science	13,5	9.242
Pratt (1964)	Definição de uma medida de aversão ao risco	Econometrica	14,4	2.107
Benartzi e Thaler (1995)	Relaciona o enigma do prêmio pago pelo mercado com a Teoria da Perspectiva	The Quarterly Journal of Economics	24,8	777
Allais (1953)	Crítica à teoria da utilidade esperada e à racionalidade dos agentes	Econometrica	14,4	1.189
Friedman e Savage (1948)	Análises da utilidade esperada sob uma perspectiva racional na tomada de decisão	Journal of Political Economy	13,5	925
Bernoulli (1954)	Teoria da Utilidade Esperada	Econometrica	14,4	696
Markowitz (1952b)	A hipótese é de que agentes racionais agem de forma a maximizar a utilidade esperada mas são percebidas inconsistências que são deixadas em aberto	Journal of Political Economy	13,5	442
Kerr e Tindale (2004)	Tomada de decisão em grupo	Annual Review of Psychology	12,3	422
Tversky e Kahneman (1992)	Estimação paramétrica da função de valor	Journal of Risk and Uncertainty	1,4	3.593
Kahneman e Tversky (1972)	Como o efeito representatividade afeta a probabilidade subjetiva de um evento	Cognitive Psychology	3,4	1.387
Machina (1987)	Revisão sobre o modelo da utilidade esperada e os diferentes vieses e heurísticas comportamentais encontrados na literatura	Journal of Economic Perspectives	6,8	389
Scott e Horvath (1980)	Sob a perspectiva racional, a preferência pelos terceiro e quarto momentos centrais é positiva e negativa, respectivamente	The Journal of Finance	21,0	104
Young e Trent (1969)	Utilização da média geométrica como aproximação da função de utilidade na seleção de portfólios	Journal of Financial and Quantitative Analysis	5,1	50
Markowitz (2014)	Comprovação empírica que a aproximação da função de utilidade por uma função de média-variância é adequada em diferentes cenários e com dados de diferentes países	European Journal of Operational Research	2,5	52
Levy e Markowitz (1979)	Avaliação da aproximação da função de utilidade esperada por uma função de média-variância	The American Economic Review	10,5	–

Fonte: Elaboração própria.

Nota: As publicações foram ordenadas pelo produto entre o fator de impacto do periódico (SJR) e o respectivo número de citações.

¹ Fator de impacto do periódico ([SCIMAGO, 2007](#)).

² Informações estimadas pelas respectivas editoras ([CHAMBERLAIN et al., 2017](#)).

B.1.2 Crítica à teoria da utilidade esperada

[Allais \(1953\)](#) utilizou “problemas de escolha”, ou seja, questionários de apostas hipotéticas, a fim de demonstrar inconsistências observadas relativas às previsões feitas pela teoria de utilidade esperada. Tais observações inconsistentes foram posteriormente denominadas como **paradoxo de Allais**. O paradoxo surge quando um indivíduo escolhe a alternativa (A) no Problema X e a alternativa (D) no problema Y, ou quando escolhe a alternativa (B) no problema X e a alternativa (C) no problema Y. Tal paradoxo não é

explicado pela teoria de utilidade esperada.

Problema X: Qual das seguintes alternativas você prefere?

- (A) ganhar \$100 milhões com certeza 10/100 chances de ganhar \$500 milhões;
(B) 89/100 chances de ganhar \$100 milhões;
1/100 chances de não de ganhar nada.

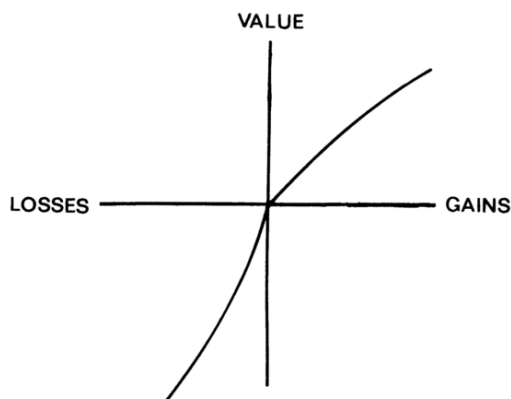
Problema Y: Qual das seguintes alternativas você prefere?

- (C) 11/100 chances de ganhar \$100 milhões;
89/100 chances de não de ganhar nada. (D) 10/100 chances de ganhar \$500 milhões;
90/100 chances de não de ganhar nada.

Allais (1953) aponta que, para toda teoria de risco ser realística, é necessário considerar: (a) a distinção entre valor monetário e psicológico; (b) a distorção das probabilidades objetivas e o surgimento de probabilidades subjetivas; (c) a esperança matemática dos valores psicológicos; (d) a dispersão (variância), bem como propriedades gerais da distribuição de probabilidade dos valores psicológicos. A consideração (d) parece de fato estar vinculada à teoria de risco. Em muitos casos, ela pode ser mais importante que as outras três considerações. A discussão feita por Allais (1953) envolve a afirmação de que o ser humano não se comporta racionalmente ou de acordo com os preceitos probabilísticos, além de considerar a importância de identificar os valores psicológicos envolvidos no processo de tomada de decisão sob condições de risco.

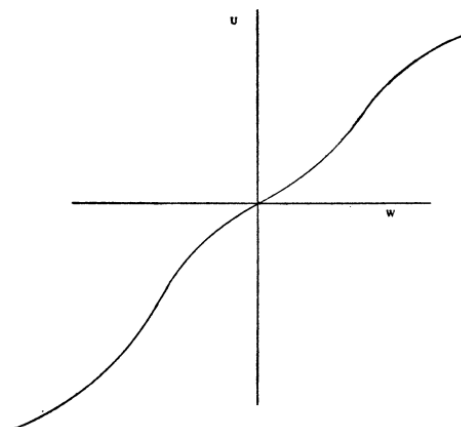
Kahneman e Tversky (1979), baseados na pesquisa de Allais (1953) e em alguns de seus trabalhos anteriores (KAHNEMAN; TVERSKY, 1972; TVERSKY; KAHNEMAN, 1974), apresentam um modelo alternativo para a teoria da utilidade esperada denominado de Teoria da Perspectiva, do inglês *Prospect Theory*. É proposto um novo formato para a função de utilidade, visualizada como função de valor conforme a Figura 52. São descritos efeitos comportamentais que contradizem a teoria da utilidade esperada, são eles: (a) o **efeito certeza** em que pessoas subavaliam recompensas que são pouco prováveis em comparação com aquelas obtidas com certeza; (b) o **efeito reflexão** em que é identificada aversão ao risco em escolhas envolvendo ganhos certos e propensão ao risco em escolhas envolvendo perdas certas; (c) o **efeito isolamento** que leva a uma inconsistência de preferências quando a mesma escolha é apresentada de formas diferentes. A característica da função de utilidade esperada possuir o lado positivo côncavo e o lado negativo convexo já fora percebido em trabalhos anteriores (MARKOWITZ, 1952b), conforme visualizado na Figura 53. Uma estimação paramétrica da função de valor, proposta por Kahneman e Tversky (1979), foi feita em trabalhos futuros (TVERSKY; KAHNEMAN, 1992). Vale ressaltar que, em Markowitz (1952a, 1959), é proposta uma aproximação quadrática puntual da função de utilidade, e não dela como um todo. O valor esperado de tal aproximação quadrática é uma função de média-variância.

Figura 52 – Função de valor hipotética



Fonte: Kahneman e Tversky (1979, p. 279).

Figura 53 – Esboço da função de utilidade da riqueza



Fonte: Markowitz (1952b, p. 154).

B.2 Seleção de Portfólios

Markowitz (1952a) fornece uma visão preliminar, conceitual e geométrica do problema de seleção de portfólios. No estudo apresentado em Markowitz (1959), é encontrada uma descrição mais detalhada, matematizada e aplicável.

A seleção de portfólios é formulada como um problema de otimização, as EQs. (B.1) a (B.5) apresentam tal formulação para o caso do número de ativos ser igual a três ($N = 3$). A EQ. (B.1) representa o cálculo da esperança dos retornos do portfólio (E) em função dos pesos (x_i) e das esperanças de retorno de cada ativo (μ_i). A EQ. (B.2) representa o cálculo da covariância do portfólio (V) em função dos pesos e das covariâncias dos retornos dos ativos (σ_{ij}). As EQs. (B.1) e (B.2) podem ser utilizadas como funções objetivo do processo de maximização ou minimização, ou serem mescladas em uma formulação multiobjetivo. A EQ. (B.3) representa a restrição de que o somatório das proporções (pesos) deve resultar em 100% do investimento feito. A EQ. (B.4) é uma manipulação feita para eliminar a variável x_3 do problema de otimização. A EQ. (B.5) representa a restrição de não-negatividade, indicando não ser possível investir frações negativas de algum ativo. A abordagem matricial do cálculo da esperança e da variância pode ser verificadas no Apêndice B.3.

$$E = \sum_{i=1}^3 x_i \mu_i \quad (\text{B.1})$$

$$V = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i x_j \sigma_{ij} \quad (\text{B.2})$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1 \quad (\text{B.3})$$

$$x_3 = 1 - x_2 - x_1 \quad (\text{B.4})$$

$$x_i \geq 0 \quad \text{para } i = 1, 2, 3. \quad (\text{B.5})$$

Em que:

E → expectativa de retorno do portfólio

V → variância dos retornos do portfólio

x_i → peso (fração) de cada ativo i presente no portfólio

μ_i → expectativa de retorno de cada ativo i

σ_{ij} → covariância entre os retornos do ativo i e do ativo j

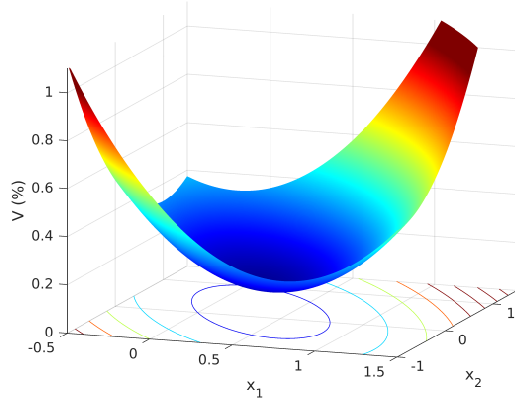
Por meio de uma abordagem gráfica e geométrica, o problema é apresentado de forma a favorecer sua visualização e compreensão. A título de exemplo, foram considerados dados arbitrários para o vetor de expectativas (μ) e a matriz de covariâncias (Σ), conforme as EQs. (B.6) e (B.7). Tais dados não foram obtidos do trabalho original de [Markowitz \(1952a\)](#), pois o autor utilizou esboços para representar as funções de restrições, variâncias e expectativas de retornos. Entretanto, os dados foram escolhidos de forma a tentar replicar os esboços geométricos, conjuntos de portfólios eficientes e algumas situações e gráficos apresentados por [Markowitz \(1952a\)](#) durante seus desenvolvimentos.

$$\mu = [0,17 \quad 0,16 \quad 0,15]^\top \quad (\text{B.6})$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,003 & 0,001 & 0 \\ 0,001 & 0,002 & 0,001 \\ 0 & 0,001 & 0,002 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

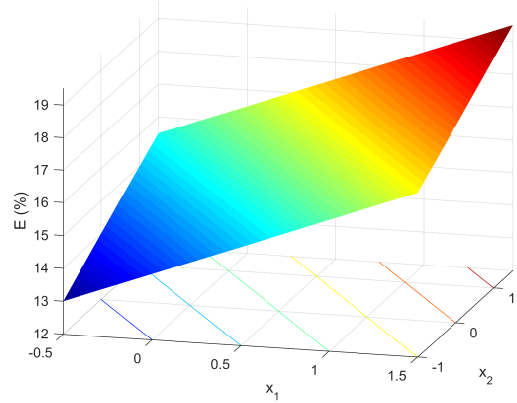
A Figura 54 representa a superfície gerada ao ser avaliada a variância do portfólio em função dos pesos x_1 e x_2 , e a superfície quadrática gerada é classificada como **parabolóide elíptico**. Na Figura 54, são exibidas algumas projeções da superfície de variância sobre o plano X_1X_2 , as quais resultam em elipses cuja variância é a mesma em qualquer de seus pontos (elipses de isovariância). A Figura 55 representa o **plano** gerado ao ser avaliada a expectativa de retorno do portfólio em função dos pesos x_1 e x_2 . A projeção da Figura 55 sobre o plano X_1X_2 gera linhas que possuem o mesmo nível de retorno (linhas de isomédia).

Figura 54 – Função representativa da variância dos retornos de um portfólio com projeções em curvas de nível no plano X_1X_2



Fonte: Elaboração própria.

Figura 55 – Função representativa da esperança dos retornos de um portfólio com projeções de linhas no plano X_1X_2



Fonte: Elaboração própria.

São apresentados, nas Figuras 54 e 55, apenas os pesos nos ativos x_1 e x_2 . O peso x_3 não é exibido como eixo dos gráficos, pois ele é função dos anteriores, conforme EQ. (B.4).

É possível configurar o problema de seleção de portfólios para um formato multi-objetivo, pois, em alguns casos, o investidor deseja simultaneamente reduzir seu risco (V) ao mesmo tempo que maximiza seus retornos esperados (E). A Figura 56 apresenta a sobreposição das superfícies geradas nas Figuras 54 e 55, projetadas sobre o plano X_1X_2 . Tal sobreposição serve para destacar o fato de que as direções de minimização da variância diferem das de aumento da esperança dos retornos. A Figura 56 representa um problema de otimização irrestrito, ou seja, sem restrições a respeito das variáveis envolvidas x_i . É possível notar, analisando-se as Figuras 54 e 56, que a superfície de variância apresenta um ponto de mínimo global (ponto ótimo). Tal ponto é denominado de Portfólio de Variância Mínima (PVM). A seleção de portfólios ótimos, ou *eficientes*, pode ser realizada, então, **partindo-se do ponto de mínima variância e deslocando-se na direção dos pontos de tangência das linhas de isomédias com as elipses de isovariâncias**, ou seja, na direção de crescimento do retorno esperado. Qualquer outra direção escolhida será ineficiente ou em termos de expectativa de retorno ou em termos de variância. Conforme apresentado no Apêndice B.3, é possível obter soluções analíticas para casos particulares na presença de restrições de igualdade, mas sem a existência de restrições de vendas a descoberto (não-negatividade).

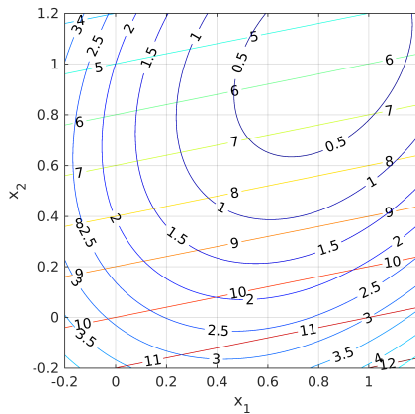
Considerando-se a EQ. (B.5), tem-se que os eixos X_1 e X_2 são barreiras da região viável. A outra barreira é obtida a partir de $x_3 \geq 0$ substituído na EQ. (B.4), conforme a

inequação da EQ. (B.8).

$$\begin{aligned} 1 - x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_2 &\leq 1 - x_1 \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

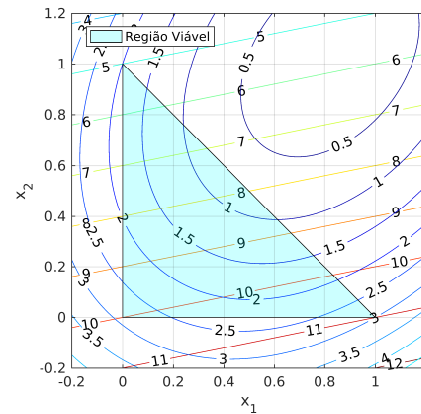
Ao analisar a Figura 57 é possível identificar regiões inviáveis em que x_1 ou x_2 apresentam valores negativos que devem ser desconsiderados em função das restrições $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$, além disso existe a restrição da EQ. (B.8). A região viável, portanto, formará um triângulo retângulo exibido na Figura 57, no primeiro quadrante cartesiano e abaixo da reta encontrada. Somente portfólios presentes nessa região viável são considerados e, dentre esses, somente os denominados eficientes serão escolhidos. A presença de inequações nas restrições torna o problema de otimização sem solução analítica possível, portanto, é necessária a utilização de métodos numéricos para se obter soluções aproximadas.

Figura 56 – Sobreposição das projeções, no plano X_1X_2 , das superfícies de esperança e variância dos retornos



Fonte: Elaboração própria.

Figura 57 – Região viável destacada na qual são obtidos portfólios restritos

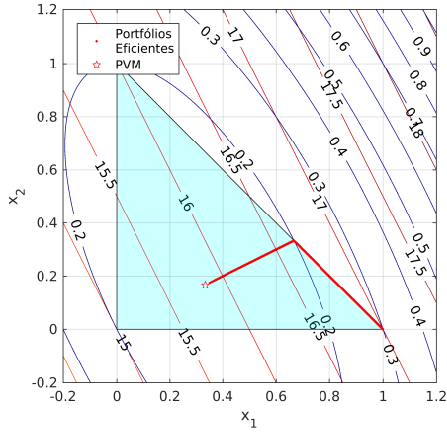


Fonte: Elaboração própria.

A Figura 58 mostra um caso particular, de otimização restrita, no qual o mínimo da superfície de variância encontra-se dentro da região viável (MARKOWITZ, 1952a, FIG. 2). A sequência de portfólios eficientes é gerada a partir do PVM e seguindo-se na direção de aumento da esperança de retornos. Entretanto, a barreira da região viável interfere nos portfólios obtidos a partir de um dado valor de variância ($\sim 0,2\%$). Ao alcançar a fronteira, os próximos portfólios eficientes ficam confinados a ela, pois não existe outra forma de promover o aumento da esperança dos retornos senão escolhendo outro portfólio na fronteira, entretanto tais portfólios serão menos eficientes que os irrestritos. O efeito dessa restrição sobre a eficiência dos portfólios é verificado na Figura 59 a partir da comparação das características de média-variância dos portfólios gerados anteriormente com as características de portfólios livres da restrição de não-negatividade. Os portfólios

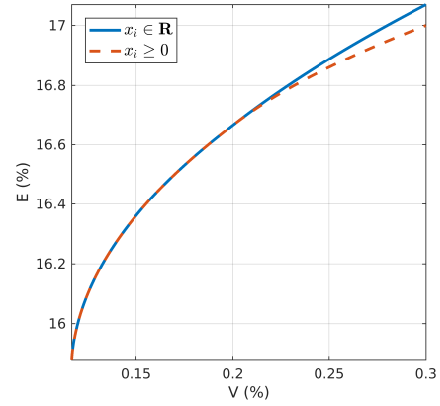
restritos têm características de média-variância inferiores às dos portfólios que não possuem restrição de vendas a descoberto.

Figura 58 – Sequência de portfólios eficientes partindo-se do PVM viável cujo término é a coordenada (1,0)



Fonte: Elaboração própria.

Figura 59 – Efeito da não-negatividade dos pesos na obtenção da fronteira eficiente da Figura 58



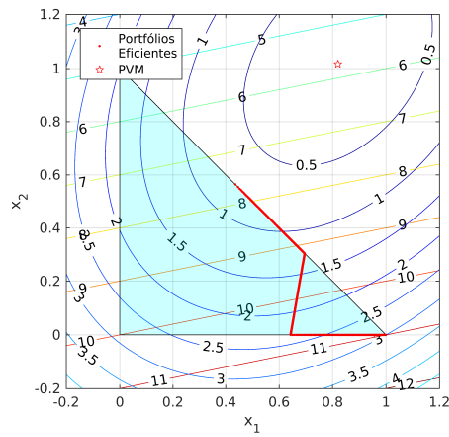
Fonte: Elaboração própria.

A Figura 60 mostra um caso particular, de otimização restrita, no qual o mínimo da superfície de variância encontra-se fora da região viável (MARKOWITZ, 1952a, FIG. 3). Para gerar tais curvas, foram considerados dados para μ e Σ , conforme as EQs. (B.9) e (B.10). A Figura 60 exibe portfólios iniciais localizados na barreira, visto que o PVM é inviável. Após isso, os portfólios adentram na região viável seguindo o caminho dos portfólios irrestritos e logo são limitados novamente pela barreira de $x_2 \geq 0$. O impacto das restrições sobre a eficiência dos portfólios pode ser verificado na Figura 61.

$$\mu = [0,11 \quad 0,05 \quad 0,10]^T \quad (\text{B.9})$$

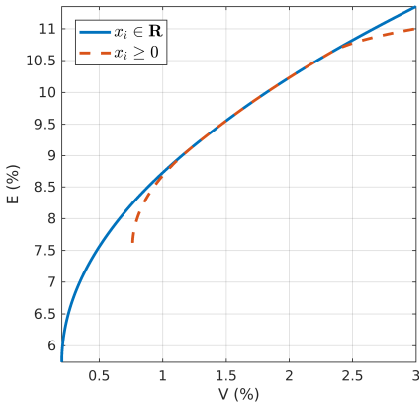
$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,030 & -0,009 & 0,016 \\ -0,009 & 0,020 & 0,013 \\ 0,016 & 0,013 & 0,029 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Figura 60 – Sequência de portfólios eficientes, cujo término é a coordenada $(1,0)$, para o caso do PVM ser inviável



Fonte: Elaboração própria.

Figura 61 – Efeito da não-negatividade dos pesos na obtenção da fronteira eficiente da Figura 60



Fonte: Elaboração própria.

B.3 Operacionalização da Seleção de Portfólios

Portfólios, ou carteiras, são representados por um vetor $\mathbf{x}$ de N pesos, com dimensão $N \times 1$, ou seja, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ conforme a EQ. (B.11). Os pesos x_i são frações da riqueza investida em cada ativo i , e, portanto, ao serem somadas, devem totalizar a unidade (100%), tal como a EQ. (B.12). Os pesos podem ou não estar sujeitos a restrições de não-negatividade, ou seja, $x_i \geq 0$. Outras restrições regidas por desigualdades podem limitar os pesos acima, abaixo ou entre determinados valores conforme a EQ. (B.13).

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1 \quad \text{ou} \quad \mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1 \quad (\text{B.12})$$

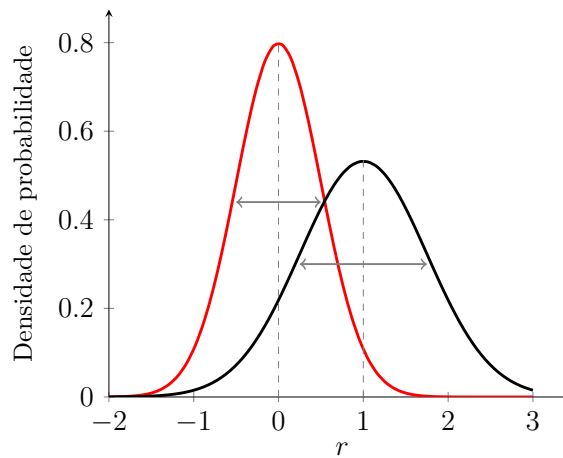
$$l_i \leq x_i \leq u_i \quad (\text{B.13})$$

em que $\mathbf{1}$ é um vetor de dimensão $N \times 1$ tal que todos seus elementos são iguais a 1.

B.3.1 Retorno e Risco

A Figura 62 exibe um exemplo de distribuições de probabilidades relativas aos retornos de dois ativos financeiros hipotéticos, nesse caso, o valor esperado é dado pela medida de tendência central dos retornos (média), e seu risco será obtido por meio de uma medida de dispersão dos retornos (variância).

Figura 62 – Funções de densidade de probabilidade dos retornos de ativos financeiros



Fonte: Elaboração própria.

Para as deduções seguintes, é considerado o modelo de REC (ZIVOT, 2018). Seja r_{it} a representação do retorno discreto do ativo i no tempo t e seu cálculo, em função da

série de preços (P_{it}), calculado conforme a EQ. (B.14).

$$r_{it} = \frac{P_{it}}{P_{i,t-1}} - 1 \quad (\text{B.14})$$

Devem ser feitos os seguintes pressupostos a respeito da distribuição de probabilidades de r_{it} para os $i = 1, \dots, N$ ativos no horizonte de tempo $t = 1, \dots, T$:

- a) *Covariância estacionária e ergodicidade*: r_{it} é um processo estocástico estacionário e ergódico com $\mathbb{E}[r_{it}] = \mu_i$, $\text{Var}(r_{it}) = \sigma_i$, $\text{cov}(r_{it}, r_{jt}) = \sigma_{ij}$, $\text{cor}(r_{it}, r_{jt}) = \rho_{ij}$;
- b) *Normalidade*: $r_{it} \sim \text{i.i.d. } \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ para todo i e t ;
- c) *Ausência de correlação serial*: $\text{cov}(r_{it}, r_{js}) = \text{cor}(r_{it}, r_{js}) = 0$ para $t \neq s$ e $i, j = 1, \dots, N$.

A matriz $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{T \times N}$ é definida como a composição de todos os retornos dos ativos individuais variantes no tempo, conforme a EQ. (B.15). O vetor de retornos esperados de cada ativo é representado conforme a EQ. (B.16). A matriz de covariâncias entre os retornos dos ativos $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ é representada conforme a EQ. (B.17). A matriz de covariâncias é simétrica ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) e definida positiva ($\mathbf{z}^\top \mathbf{\Sigma} \mathbf{z} > 0$, $\forall \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$). O vetor de médias e a matriz de covariâncias podem ser estimados a partir de observações passadas utilizando estimadores como a média aritmética, a média ponderada, a média geométrica, a média harmônica, a mediana, a moda ou ainda fazendo uso de modelos como os autorregressivos de médias móveis entre outros.

$$\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n] \quad (\text{B.15})$$

$$\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]^\top \quad (\text{B.16})$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

B.3.1.1 Retorno esperado de um portfólio

O retorno esperado de um portfólio (μ_x) é dado pela média dos retornos dos ativos (μ_i) que o compõe ponderados pela fração investida no respectivo ativo (x_i).

$$\mathbb{E}[\mathbf{r}_x] = \mu_x = \sum_{i=1}^N x_i \mu_i = \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\mu} \quad (\text{B.18})$$

Há de se observar que os valores de x_i estão restritos pela EQ. (B.12), e isso faz com que o retorno esperado do portfólio fique limitado por essa condição. A título de exemplo, tem-se um caso no qual existam três ativos possíveis com o vetor de valores esperados dado por $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \mu_3]^\top = [0,15; 0,17; 0,17]^\top$. A EQ. (B.19) identifica qual o

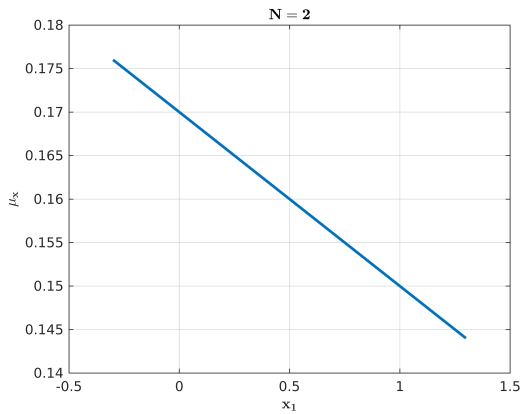
valor esperado do retorno de um portfólio de um único ativo, e a conclusão é que seu valor esperado é o mesmo do ativo que está presente no portfólio. A EQ. (B.20) inicialmente representava μ_x como uma função de duas variáveis, entretanto, devido à restrição da EQ. (B.12), a variável x_2 pôde ser substituída e a expressão tornou-se uma equação de uma reta conforme verificado na Figura 63. Utilizando deduções similares às anteriores, pode ser verificado que μ_x torna-se a equação de um plano, para $N = 3$, conforme verificado na EQ. (B.21) e visualizado na Figura 64.

$$(N = 1) \quad \mu_x = x_1\mu_1 = 1 \cdot \mu_1 \quad (\text{B.19})$$

$$(N = 2) \quad \mu_x = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 = x_1\mu_1 + \overbrace{(1 - x_1)}^{x_2} \mu_2 = \mu_2 + (\mu_1 - \mu_2)x_1 \quad (\text{B.20})$$

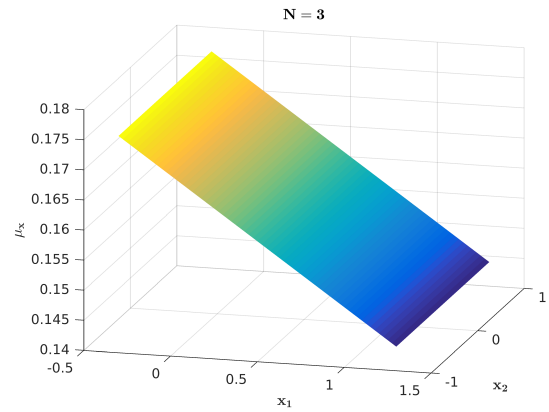
$$(N = 3) \quad \mu_x = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + x_3\mu_3 = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + \overbrace{(1 - x_1 - x_2)}^{x_3} \mu_3 \quad (\text{B.21})$$

Figura 63 – Retorno esperado de um portfólio de 2 ativos em função do peso x_1



Fonte: Elaboração própria.

Figura 64 – Retorno esperado de um portfólio de 3 ativos em função dos pesos x_1 e x_2



Fonte: Elaboração própria.

B.3.1.2 Variância dos retornos de um portfólio

A variância dos retornos de um portfólio (σ_x^2) é dada pelo somatório dos produtos das covariâncias (σ_{ij}) dos ativos i e j com seus respectivos pesos x_i e x_j .

$$\mathbb{E}[(\mathbf{r}_x - \mu_x)^2] = \text{Var}(\mathbf{r}_x) = \sigma_x^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij} = \mathbf{x}^\top \Sigma \mathbf{x} \quad (\text{B.22})$$

A título de exemplo, tem-se três ativos de risco com a matriz de covariâncias entre os retornos dada pela EQ. (B.23). A EQ. (B.24) representa o caso particular, de ativo único, na qual a variância do portfólio é dada pela própria variância do ativo. A EQ. (B.25) representa a variância do portfólio para o caso de dois ativos, entretanto, devido à

restrição da EQ. (B.12), a variável x_2 pôde ser substituída e a expressão tornou-se uma parábola, conforme visualizado na Figura 65. Utilizando deduções similares às anteriores, pode ser verificado que σ_x^2 torna-se a equação de um parabolóide quando $N = 3$, conforme verificado na EQ. (B.26) e visualizado na Figura 66.

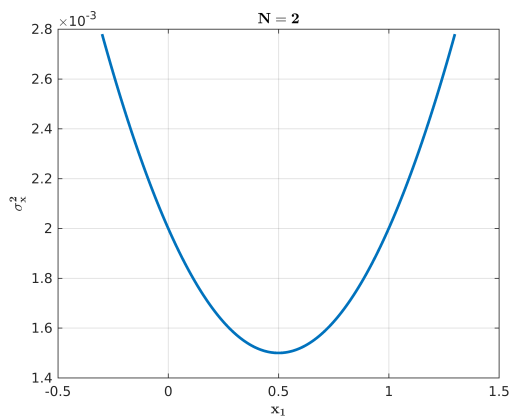
$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,002 & 0,001 & 0 \\ 0,001 & 0,002 & 0,001 \\ 0 & 0,001 & 0,002 \end{bmatrix} \quad (\text{B.23})$$

$$(N = 1) \quad \sigma_x^2 = 1 \cdot 1 \cdot \sigma_{11} = \sigma_1^2 \quad (\text{B.24})$$

$$\begin{aligned} (N = 2) \quad \sigma_x^2 &= x_1 x_1 \sigma_{11} + x_1 x_2 \sigma_{12} + x_2 x_1 \sigma_{21} + x_2 x_2 \sigma_{22} \\ &= x_1^2 \sigma_1^2 + 2x_1 x_2 \sigma_{12} + x_2^2 \sigma_2^2 \\ &= x_1^2 \sigma_1^2 + 2x_1(1 - x_1) \sigma_{12} + (1 - x_1)^2 \sigma_2^2 \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

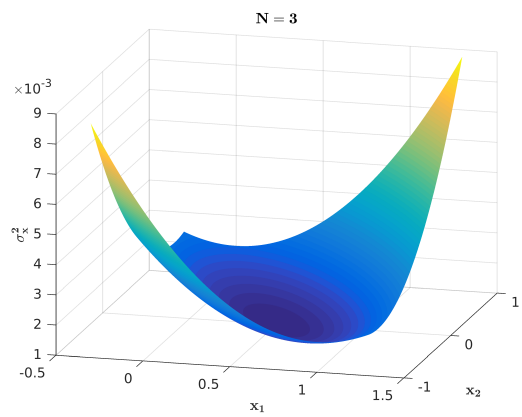
$$\begin{aligned} (N = 3) \quad \sigma_x^2 &= x_1 x_1 \sigma_{11} + x_1 x_2 \sigma_{12} + x_1 x_3 \sigma_{13} + x_2 x_1 \sigma_{21} + x_2 x_2 \sigma_{22} + x_2 x_3 \sigma_{23} + \\ &\quad x_3 x_1 \sigma_{31} + x_3 x_2 \sigma_{32} + x_3 x_3 \sigma_{33} \\ &= \underbrace{x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + x_3^2 \sigma_3^2}_{\sigma_{ii}(\text{diagonal de } \Sigma)} + \underbrace{2x_1 x_2 \sigma_{12} + 2x_1 x_3 \sigma_{13} + 2x_2 x_3 \sigma_{23}}_{\sigma_{ij}(\text{termos fora da diagonal de } \Sigma)} \\ &= x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + (1 - x_1 - x_2)^2 \sigma_3^2 + \\ &\quad 2x_1 x_2 \sigma_{12} + 2x_1(1 - x_1 - x_2) \sigma_{13} + 2x_2(1 - x_1 - x_2) \sigma_{23} \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Figura 65 – Variância dos retornos de um portfólio de 2 ativos em função do peso x_1



Fonte: Elaboração própria.

Figura 66 – Variância dos retornos de um portfólio de 3 ativos em função dos pesos x_1 e x_2



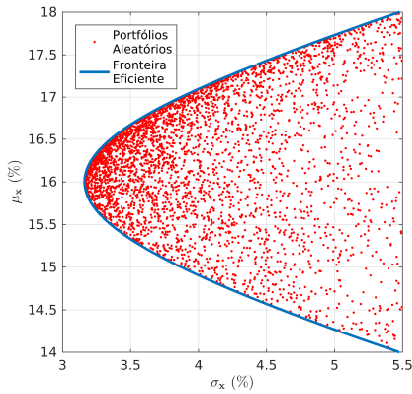
Fonte: Elaboração própria.

A variância do portfólio é ponderada pelos N^2 termos presentes na matriz de covariâncias. Pode ser destacado que os N termos da diagonal da matriz são relativos às variâncias individuais dos ativos, e os $N^2 - N$ termos restantes são referentes às covariâncias dos retornos entre os ativos. É possível concluir que a variância do portfólio será dominada pelos termos de covariância à medida que N tenda ao infinito.

B.3.2 Portfólios Eficientes

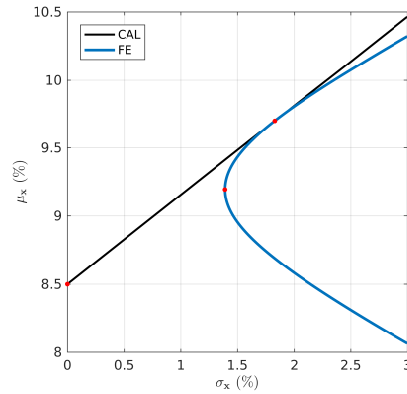
Portfólios eficientes apresentam o melhor nível de risco para um dado retorno esperado ou vice-versa. Tais portfólios estão localizados em uma barreira denominada “fronteira eficiente”. Não é considerado possível, segundo o modelo de Markowitz (1952a), a existência de portfólios que possuam características de média-variância superiores aos contidos nessa fronteira. A verificação da existência da fronteira pode ser feita empiricamente ao serem sorteados aleatoriamente portfólios e notar se eles são espacialmente limitados, conforme pode ser verificado na Figura 67. A característica de passeio aleatório dos retornos é essencial nesse caso, pois, diante da existência de previsibilidade, será aberta a possibilidade de obter relações de média-variância superiores às dos portfólios da fronteira eficiente. A Figura 68 exibe a relação entre a fronteira eficiente e a Linha de Alocação de Capitais, do inglês *Capital Allocation Line* (CAL), que tangencia a fronteira em um determinado ponto. São assinalados em vermelho, na Figura 68, o ativo livre de risco que fica no intercepto do eixo das ordenadas, o portfólio de variância mínima e o portfólio tangente. A presença do ativo livre de risco e a obtenção de tais portfólios notáveis permitem a identificação de todos os demais portfólios na fronteira eficiente e na CAL.

Figura 67 – Portfólios gerados aleatoriamente evidenciando a barreira da fronteira eficiente



Fonte: Elaboração própria.

Figura 68 – Fronteira eficiente, CAL e portfólios notáveis



Fonte: Elaboração própria.

A formulação geral da MPT para obtenção de qualquer portfólio eficiente na fronteira está contida na EQ. (B.27).

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x} - \frac{1}{\gamma} \cdot \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\mu} \\ \text{sujeito a:} \quad & \mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1 \end{aligned} \tag{B.27}$$

Em que γ é o coeficiente de aversão ao risco, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ e $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

B.3.2.1 Portfólio de variância mínima (PVM)

O portfólio de variância mínima é definido como o ponto de mínimo global da função de variância do portfólio (σ_x^2), considerando a restrição da EQ. (B.12). A EQ. (B.28) apresenta a formulação como um problema de otimização. Uma função quadrática, como é o caso da variância de um portfólio, atinge seu ponto de mínimo global se o vetor gradiente ($\nabla f(a) = \mathbf{0}$) for nulo e sua matriz hessiana ($\mathbf{H}(a)$) for definida positiva no ponto a . Caso a restrição da EQ. (B.12) não seja considerada, o ponto de mínimo é encontrado na solução trivial $\mathbf{x}_{\text{PVM}}^* = \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\text{PVM}}^* &= \min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x} \\ \text{sujeito a: } \mathbf{1}^T \mathbf{x} &= 1 \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Em que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ e $\Sigma \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

B.3.2.1.1 PVM para 2 ativos

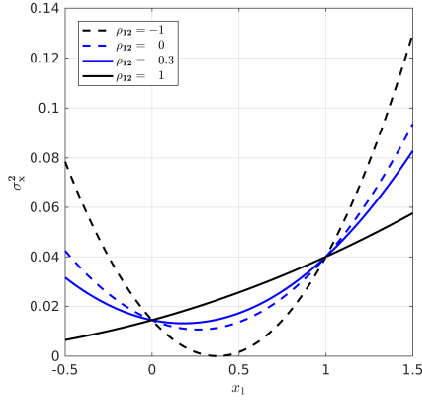
Como demonstrado na EQ. (B.25), para $N = 2$, o problema é reduzido a uma função de única variável (x_1). Rearranjando os termos da EQ. (B.25), obtêm-se a equação da parábola no formato $f(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c$ conforme EQ. (B.29).

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= x_1^2 \sigma_1^2 + 2x_1(1-x_1)\sigma_{12} + (1-x_1)^2 \sigma_2^2 \\ \sigma_x^2 &= x_1^2 \sigma_1^2 + 2x_1 \sigma_{12} - 2x_1^2 \sigma_{12} + (1-2x_1+x_1^2)\sigma_2^2 \\ \sigma_x^2 &= x_1^2 \sigma_1^2 + 2x_1 \sigma_{12} - 2x_1^2 \sigma_{12} + \sigma_2^2 - 2x_1 \sigma_2^2 + x_1^2 \sigma_2^2 \\ \sigma_x^2 &= \underbrace{(\sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2)}_a x_1^2 + \underbrace{2(\sigma_{12} - \sigma_2^2)}_b x_1 + \underbrace{\sigma_2^2}_c \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Considera-se um caso no qual os ativos 1 e 2 possuam respectivamente os desvios-padrão dos retornos $\sigma_1 = 0,2$ e $\sigma_2 = 0,12$, observando-se que $\sigma_{12} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2$. A variância dos retornos do portfólio, em função do peso x_1 e de determinados coeficientes de correlação entre os retornos dos ativos, pode ser verificada na Figura 69. O desvio padrão dos retornos do portfólio, em função do peso x_1 e de determinados coeficientes de correlação entre os retornos dos ativos, pode ser verificado na Figura 70.

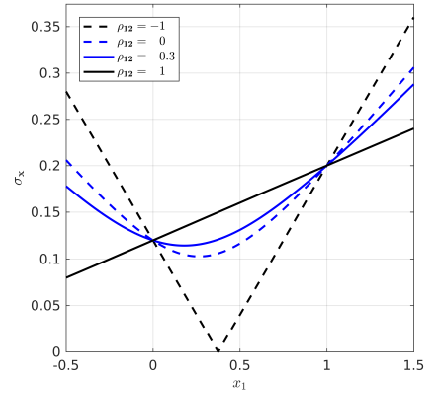
A partir da EQ. (B.29), o ponto de mínimo global pode ser encontrado quando $f'(x_1^*) = 0$ e $f''(x_1^*) > 0$. A derivada primeira, em relação à x_1 , da equação de uma parábola é $f'(x_1) = 2ax_1 + b$, e o ponto crítico ocorre quando $2ax_1^* + b = 0$, ou seja, $x_1^* = -\frac{b}{2a}$. Caso a derivada segunda seja confirmada maior que zero, ou seja, $(f''(x_1) = 2a) > 0$, então estará provado que x_1^* é um ponto de mínimo global para a presente situação. O coeficiente do termo quadrático (a) representa a variância da subtração de duas variáveis aleatórias, ou seja, $\text{Var}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \text{Var}(\mathbf{r}_i) + \text{Var}(\mathbf{r}_j) - 2\text{cov}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$. A variância, em função da sua definição como segundo momento central em torno do valor esperado, é maior do ou igual a zero, portanto temos que a condição necessária é $f''(x_1) > 0$ sabendo-se que $a \geq 0$.

Figura 69 – Variância dos retornos para diferentes níveis de correlação entre os ativos envolvidos



Fonte: Elaboração própria.

Figura 70 – Desvio padrão dos retornos para diferentes níveis de correlação entre os ativos envolvidos



Fonte: Adaptado de Bodie, Kane e Marcus (2014, p. 212).

Isso leva à conclusão, em função da interseção das condições, de que $a \neq 0$. A condição necessária para que $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \neq 2\sigma_{12}$ ou $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \neq 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$ é a de que haja diferenças entre as variâncias individuais ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$) e simultaneamente não exista correlação perfeita positiva entre os retornos $\rho_{12} \neq 1$. Fazendo-se então tal ressalva, o portfólio de variância mínima para dois ativos pode ser obtido pelas EQs. (B.30) e (B.31).

$$\begin{aligned}
 x_1^* &= -\frac{b}{2a} \\
 x_1^* &= \frac{-2(\sigma_{12} - \sigma_2^2)}{2(\sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2)} \\
 x_1^* &= \frac{(\sigma_2^2 - \sigma_{12})}{(\sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2)} \\
 x_1^* &= \frac{(\sigma_2^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2)}{(\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)} \tag{B.30}
 \end{aligned}$$

Utilizando-se a EQ. (B.12), é possível obter o peso x_2 a partir da EQ. (B.30), conforme realizado na EQ. (B.31).

$$\begin{aligned}
 x_2^* &= 1 - x_1^* \\
 x_2^* &= \frac{(\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) - (\sigma_2^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2)}{(\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)} \\
 x_2^* &= \frac{(\sigma_1^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2)}{(\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)} \tag{B.31}
 \end{aligned}$$

O portfólio de variância mínima para dois ativos, com notação vetorial, é definido então na EQ. (B.32). Conforme identificado anteriormente, a condição de $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ e $\rho_{12} = 1$

resulta em uma indeterminação.

$$\mathbf{x}_{\text{PVM}}^* = [x_1^*, x_2^*]^\top = \left[\frac{(\sigma_2^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2)}{(\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)}, \frac{(\sigma_1^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2)}{(\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)} \right]^\top \quad (\text{B.32})$$

B.3.2.1.2 PVM para N ativos

O problema da EQ. (B.28) pode ser convertido na minimização de uma função sem restrições conforme a EQ. (B.33) a partir da utilização do método dos multiplicadores de Lagrange. Um exemplo de 2 ativos é considerado, e, em seguida, é feita uma extensão para o caso genérico.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) &= \sigma_x^2 - \lambda \cdot (1 - x_1 - x_2) \\ \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) &= x_1^2\sigma_1^2 + 2x_1x_2\sigma_{12} + x_2^2\sigma_2^2 - \lambda \cdot (1 - x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

O ponto crítico ocorre quando o vetor gradiente da função de Lagrange é igual ao vetor nulo, ou seja, $\nabla \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = \mathbf{0}$ conforme a EQ. (B.34). O problema da seleção do portfólio de variância mínima é então convertido na solução de um sistema de equações lineares.

$$\nabla \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.34})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 2\sigma_1^2x_1 + 2\sigma_{12}x_2 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 2\sigma_{12}x_1 + 2\sigma_2^2x_2 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{cases} \quad (\text{B.35})$$

O fato da matriz de covariâncias (Σ) ser simétrica ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) faz com que o sistema obtido na EQ. (B.35) possa ser generalizado conforme a EQ. (B.37), ou seja, tal formulação

é válida para qualquer número de ativos (N). A solução $\mathbf{x}_{\text{PVM}}^*$, juntamente com o valor de λ , estará incluída no vetor $\mathbf{z}^*$ obtido na EQ. (B.39).

$$\begin{bmatrix} 2\sigma_1^2 & 2\sigma_{12} & 1 \\ 2\sigma_{12} & 2\sigma_2^2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.36})$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2\mathbf{\Sigma} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^\top & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \quad (\text{B.37})$$

$$\mathbf{Az} = \mathbf{b} \quad (\text{B.38})$$

$$\mathbf{z}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (\text{B.39})$$

Os resultados da EQ. (B.39) podem ser obtidos a partir de uma formulação equivalente. A EQ. (B.33) pode ser convertida para o formato matricial conforme a EQ. (B.40).

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{x}^\top \mathbf{\Sigma} \mathbf{x} - \lambda(1 - \mathbf{1}^\top \mathbf{x}) \quad (\text{B.40})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = (\mathbf{\Sigma}^\top + \mathbf{\Sigma})\mathbf{x} + \lambda \mathbf{1} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -1 + \mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.41})$$

A partir do cálculo do gradiente, possibilitou-se obter, então, duas equações matriciais conforme a EQ. (B.41). O portfólio de variância mínima pode ser encontrado em função da variável λ conforme a EQ. (B.42).

$$2\mathbf{\Sigma}\mathbf{x} + \mathbf{1}\lambda = \mathbf{0}$$

$$2\mathbf{\Sigma}\mathbf{x} = -\mathbf{1}\lambda$$

$$\mathbf{x} = -\frac{\lambda}{2}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} \quad (\text{B.42})$$

É possível encontrar o valor de λ em função apenas da matriz de covariâncias, conforme a

EQ. (B.44), substituindo-se o vetor $\mathbf{x}$ encontrado na EQ. (B.42) em (B.43).

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1 \quad (\text{B.43})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{1}^\top \left(-\frac{\lambda}{2} \Sigma^{-1} \mathbf{1} \right) &= 1 \\ -\frac{\lambda}{2} \mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1} &= 1 \\ \lambda &= -\frac{2}{\mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

O portfólio de variância mínima $\mathbf{x}_{\text{PVM}}^*$ pode ser encontrado, conforme a EQ. (B.45), substituindo-se o valor de λ da EQ. (B.44) em (B.42). Vale ressaltar que o termo no denominador da EQ. (B.45) é apenas o somatório dos pesos do portfólio obtido no numerador, ou seja, o denominador apenas faz uma correção de escala para que o somatório dos pesos seja unitário.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= -\frac{\lambda}{2} \Sigma^{-1} \mathbf{1} \\ \mathbf{x} &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{2}{\mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \right) \Sigma^{-1} \mathbf{1} \\ \mathbf{x}_{\text{PVM}}^* &= \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

Uma última verificação necessária é a de confirmar $\mathbf{x}_{\text{PVM}}^*$ como ponto de mínimo ou máximo. Isso pode ser alcançado a partir da matriz hessiana avaliada no ponto em questão. A matriz hessiana pode ser obtida conforme a EQ. (B.46). A matriz hessiana é constante e confirmará que $\mathbf{x}_{\text{PVM}}^*$ é um ponto de mínimo global se for definida positiva. É possível demonstrar que a matriz $\mathbf{H}$ será definida positiva se e somente se a matriz de covariâncias (Σ) também apresentar tal característica. A matriz de covariâncias é simétrica e definida positiva, conforme definido na seção B.3.1, o que garante que $\mathbf{x}_{\text{PVM}}^*$ seja, de fato, um ponto de mínimo global.

$$\mathbf{H}(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x} \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial \mathbf{x}} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\Sigma & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^\top & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.46})$$

B.3.2.2 Portfólio tangente (PT)

O principal pressuposto para a obtenção do portfólio tangente é a existência de um ativo livre de risco (r_f), que permitirá o surgimento de uma reta (CAL) que ligue qualquer portfólio da fronteira ao próprio ativo livre de risco. Portfólios, presentes na reta, serão gerados combinando-se o ativo livre de risco e o(s) portfólio(s) secante(s). A inclinação dessa reta será dada por $\frac{\mu_x - r_f}{\sigma_x}$ no gráfico de média-variância. A reta que possui inclinação máxima será a que tangencia a fronteira em apenas um ponto denominado de portfólio

tangente. A inclinação da CAL é denominada de prêmio pelo risco. O portfólio tangente é definido como o ponto de máximo global da função de inclinação da CAL, considerando a restrição da EQ. (B.12). A EQ. (B.47) apresenta a formulação como um problema de otimização.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\text{PT}}^* &= \max_{\mathbf{x}} \frac{\mu_x - r_f}{\sigma_x} \\ \text{sujeito a: } \mathbf{1}^\top \mathbf{x} &= 1 \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

Em que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, μ_x e $\sigma_x \in \mathbb{R}$.

B.3.2.2.1 PT para 2 ativos

Para o caso no qual $N = 2$, a média (μ_x) e a variância (σ_x^2) tornam-se funções de única variável (x_1) conforme as EQs. (B.20) e (B.29), respectivamente. Portanto a inclinação da reta também será uma função monovariada. O ponto de máximo global pode ser encontrado quando $f'(x_1^*) = 0$ e $f''(x_1^*) < 0$. A primeira condição a ser verificada é definida na EQ. (B.48) e pode ser reescrita na forma da EQ. (B.49).

$$\frac{d}{dx_1} \left(\frac{\mu_x - r_f}{\sigma_x} \right) = 0 \quad (\text{B.48})$$

$$\begin{aligned} (\mu_x - r_f)'(\sigma_x^2)^{(-1/2)} + (\mu_x - r_f)((\sigma_x^2)^{(-1/2)})' &= 0 \\ (\mu_x - r_f)'(\sigma_x^2)^{(-1/2)} - (1/2)(\mu_x - r_f)((\sigma_x^2)^{(-3/2)})(\sigma_x^2)' &= 0 \\ (\mu_x - r_f)'(\sigma_x^2)^{(-1/2)} &= (1/2)(\mu_x - r_f)((\sigma_x^2)^{(-3/2)})(\sigma_x^2)' \\ 2(\mu_x - r_f)' \frac{(\sigma_x^2)^{(-1/2)}}{(\sigma_x^2)^{(-3/2)}} &= (\mu_x - r_f)(\sigma_x^2)' \\ 2(\mu_x - r_f)'(\sigma_x^2) &= (\mu_x - r_f)(\sigma_x^2)' \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

Substituindo-se as EQs. (B.20) e (B.29) na EQ. (B.49), obtém-se a expressão para obtenção do peso x_1 que atende os requisitos de tangência à fronteira eficiente, conforme

pode ser verificado na EQ. (B.50).

$$\begin{aligned}
2(\mu_x - r_f)'(\sigma_x^2) &= (\mu_x - r_f)(\sigma_x^2)' \\
2(\mu_2 + (\mu_1 - \mu_2)x_1 - r_f)'(\sigma_x^2) &= (\mu_x - r_f)(\sigma_x^2)' \\
2(\mu_1 - \mu_2)(\sigma_x^2) &= (\mu_x - r_f)(\sigma_x^2)' \\
2(\mu_1 - \mu_2)(ax_1^2 + bx_1 + c) &= (\mu_x - r_f)(ax_1^2 + bx_1 + c)' \\
2(\mu_1 - \mu_2)(ax_1^2 + bx_1 + c) &= (\mu_x - r_f)(2ax_1 + b) \\
2(\mu_1 - \mu_2)(ax_1^2 + bx_1 + c) &= ((\mu_1 - \mu_2)x_1 + \mu_2 - r_f)(2ax_1 + b) \\
2(\mu_1 - \mu_2)(ax_1^2 + bx_1 + c) &= (\mu_1 - \mu_2)(2ax_1^2 + bx_1) + (\mu_2 - r_f)(2ax_1 + b) \\
(\mu_1 - \mu_2)(bx_1 + 2c) &= (\mu_2 - r_f)(2ax_1 + b) \\
(\mu_1 - \mu_2)bx_1 + 2(\mu_1 - \mu_2)c &= 2(\mu_2 - r_f)ax_1 + (\mu_2 - r_f)b \\
(\mu_1 - \mu_2)bx_1 - 2(\mu_2 - r_f)ax_1 &= (\mu_2 - r_f)b - 2(\mu_1 - \mu_2)c \\
x_1 &= \frac{(\mu_2 - r_f)b - 2(\mu_1 - \mu_2)c}{(\mu_1 - \mu_2)b - 2(\mu_2 - r_f)a} \\
x_1 &= \frac{(\mu_2 - r_f)2(\sigma_{12} - \sigma_2^2) - 2(\mu_1 - \mu_2)\sigma_2^2}{(\mu_1 - \mu_2)2(\sigma_{12} - \sigma_2^2) - 2(\mu_2 - r_f)(\sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2)} \\
x_1 &= \frac{(\mu_2 - r_f)(\sigma_{12} - \sigma_2^2) - (\mu_1 - \mu_2)\sigma_2^2}{(\mu_1 - \mu_2)(\sigma_{12} - \sigma_2^2) - (\mu_2 - r_f)(\sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2)} \\
x_1^* &= \frac{(\mu_1 - r_f)\sigma_2^2 - (\mu_2 - r_f)\sigma_{12}}{(\mu_1 - r_f)\sigma_2^2 + (\mu_2 - r_f)\sigma_1^2 - (\mu_1 + \mu_2 - 2r_f)\sigma_{12}} \quad (B.50)
\end{aligned}$$

Utilizando-se a EQ. (B.12), é possível obter o peso x_2 a partir da EQ. (B.50), conforme realizado na EQ. (B.51).

$$\begin{aligned}
x_2^* &= 1 - x_1^* \\
x_2^* &= \frac{((\mu_1 - r_f)\sigma_2^2 + (\mu_2 - r_f)\sigma_1^2 - (\mu_1 + \mu_2 - 2r_f)\sigma_{12}) - ((\mu_1 - r_f)\sigma_2^2 - (\mu_2 - r_f)\sigma_{12})}{(\mu_1 - r_f)\sigma_2^2 + (\mu_2 - r_f)\sigma_1^2 - (\mu_1 + \mu_2 - 2r_f)\sigma_{12}} \\
x_2^* &= \frac{(\mu_2 - r_f)\sigma_1^2 - (\mu_1 - r_f)\sigma_{12}}{(\mu_1 - r_f)\sigma_2^2 + (\mu_2 - r_f)\sigma_1^2 - (\mu_1 + \mu_2 - 2r_f)\sigma_{12}} \quad (B.51)
\end{aligned}$$

A condição para que o portfólio tangente, encontrado nas EQs. (B.50) e (B.51), maximize a função de prêmio pelo risco é indicado na EQ. (B.52). A condição expandida é obtida na EQ. (B.53).

$$\frac{d^2}{dx_1^2} \left(\frac{\mu_x - r_f}{\sigma_x} \right) < 0 \quad (B.52)$$

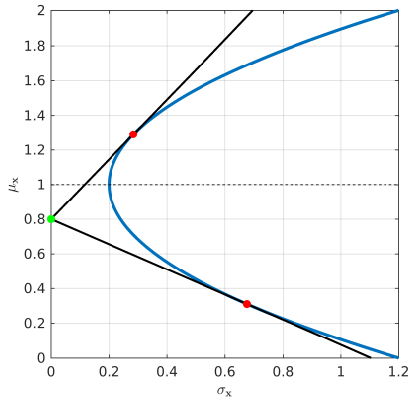
$$\begin{aligned}
(2(\mu_x - r_f)'(\sigma_x^2) - (\mu_x - r_f)(\sigma_x^2)')' &< 0 \\
(2(\mu_x - r_f)'(\sigma_x^2))' &< ((\mu_x - r_f)(\sigma_x^2))' \\
2((\mu_x - r_f)''(\sigma_x^2) + (\mu_x - r_f)'(\sigma_x^2)') &< (\mu_x - r_f)'(\sigma_x^2)' + (\mu_x - r_f)(\sigma_x^2)'' \\
2(\mu_x - r_f)''(\sigma_x^2) + 2(\mu_x - r_f)'(\sigma_x^2)' &< (\mu_x - r_f)'(\sigma_x^2)' + (\mu_x - r_f)(\sigma_x^2)'' \\
2(\mu_x - r_f)''(\sigma_x^2) + (\mu_x - r_f)'(\sigma_x^2)' &< (\mu_x - r_f)(\sigma_x^2)'' \quad (B.53)
\end{aligned}$$

Substituindo-se as EQs. (B.20) e (B.29) na EQ. (B.53), obtem-se o resultado presente na EQ. (B.54). Apesar da EQ. (B.54) ser referente a um portfólio de 2 ativos, conclusões equivalentes e genéricas podem ser obtidas para qualquer valor de N . A interpretação de tais resultados indica que os pesos do portfólio tangente, obtidos na EQ. (B.50) e (B.51), somente indicarão um ponto de máximo, da função do prêmio pelo risco, para o caso particular no qual o retorno do ativo livre de risco (r_f) seja inferior ao retorno do portfólio de variância mínima (μ_{PVM}). Para o caso no qual r_f seja superior ao μ_{PVM} , o portfólio tangente encontrado indicará um ponto de mínimo da função de prêmio pelo risco. Tal efeito ocorre pois, partindo-se de um ponto no eixo das ordenadas, sempre existirão dois pontos de tangência na fronteira eficiente e o portfólio tangente apenas identifica àquele que gera a reta com maior inclinação absoluta.

$$\begin{aligned}
2(\mu_x - r_f)''(\sigma_x^2) + (\mu_x - r_f)'(\sigma_x^2)' &< (\mu_x - r_f)(\sigma_x^2)'' \\
2(0)(\sigma_x^2) + (\mu_1 - \mu_2)(\sigma_x^2)' &< (\mu_x - r_f)(\sigma_x^2)'' \\
(\mu_1 - \mu_2)(\sigma_x^2)' &< (\mu_2 + (\mu_1 - \mu_2)x_1 - r_f)(\sigma_x^2)'' \\
(\mu_1 - \mu_2)(2ax_1 + b) &< (\mu_2 + (\mu_1 - \mu_2)x_1 - r_f)2a \\
\cancel{2a(\mu_1 - \mu_2)x_1} + b(\mu_1 - \mu_2) &< \cancel{2a(\mu_1 - \mu_2)x_1} + 2a(\mu_2 - r_f) \\
b(\mu_1 - \mu_2) &< 2a(\mu_2 - r_f) \\
b(\mu_1 - \mu_2) &< 2a\mu_2 - 2ar_f \\
b(\mu_1 - \mu_2) - 2a\mu_2 &< -2ar_f \\
-b(\mu_1 - \mu_2) + 2a\mu_2 &> 2ar_f \\
-2(\sigma_{12} - \sigma_2^2)(\mu_1 - \mu_2) + 2(\sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2)\mu_2 &> 2(\sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2)r_f \\
-2(\sigma_{12} - \sigma_2^2)\mu_1 + 2(\sigma_{12} - \sigma_2^2)\mu_2 + 2(\sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2)\mu_2 &> 2(\sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2)r_f \\
-2(\sigma_{12} - \sigma_2^2)\mu_1 + 2(\sigma_{12} - \sigma_2^2 + \sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2)\mu_2 &> 2(\sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2)r_f \\
2\mu_1(\sigma_2^2 - \sigma_{12}) + 2\mu_2(\sigma_1^2 - \sigma_{12}) &> 2(\sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2)r_f \\
r_f &< \frac{\mu_1(\sigma_2^2 - \sigma_{12}) + \mu_2(\sigma_1^2 - \sigma_{12})}{(\sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2)} \\
r_f &< \mu_{\text{PVM}}
\end{aligned} \tag{B.54}$$

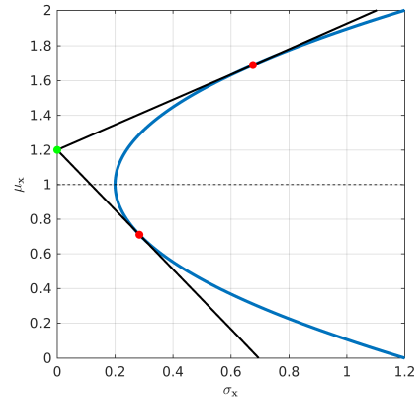
Toda parábola, como é o caso da fronteira eficiente, possuirá dois pontos de tangência desde que as retas partam do mesmo ponto inicial situado anteriormente ao seu ponto de mínimo. Tal característica pode ser verificada nas Figuras 71 e 72.

Figura 71 – Portfólios tangentes com r_f menor que o retorno esperado do PVM



Fonte: Elaboração própria.

Figura 72 – Portfólios tangentes com r_f maior que o retorno esperado do PVM



Fonte: Elaboração própria.

B.3.2.3 Teorema de separação de fundos

O teorema de separação de fundos define:

Todos os portfólios eficientes, em termos de média-variância, podem ser formados com médias ponderadas de quaisquer dois portfólios (ou fundos) existentes na mesma fronteira eficiente (GRINBLATT; TITMAN, 2004, p. 136).

Tal teorema, no qual $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ são portfólios eficientes e w é um escalar, é definido na EQ. (B.55).

$$\mathbf{x}_{ef} = w\mathbf{x}_1 + (1 - w)\mathbf{x}_2 \quad (\text{B.55})$$

A EQ. (B.55) pode ser utilizada para construir a fronteira eficiente a partir dos portfólios notáveis, o de variância mínima e o tangente, e além disso permite construir qualquer portfólio presente em uma linha que ligue o ativo livre de risco à fronteira eficiente.

Um exemplo de aplicação do teorema de separação dos fundos pode ser verificado quando da obtenção do segundo portfólio tangente à fronteira eficiente. Tal portfólio apresenta a característica de possuir a maior inclinação negativa da reta tangente para $r_f < \mu_{\text{PVM}}$ e apresenta a maior inclinação positiva da reta tangente quando $r_f > \mu_{\text{PVM}}$. É possível verificar que os portfólios tangentes possuem valor esperado (μ_x) simétricos em relação ao retorno do ativo livre de risco (r_f), ou seja, os retornos esperados serão μ_{PT} e $(2r_f - \mu_{\text{PT}})$, respectivamente. Partindo-se dessas relações, é possível obter o sistema da EQ. (B.56).

$$\begin{cases} w\mathbf{x}_{\text{PT}} + (1 - w)\mathbf{x}_{\text{PVM}} = \mathbf{x}_{\text{tan}} \\ \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{x}_{\text{tan}} = 2r_f - \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{x}_{\text{PT}} \end{cases} \quad (\text{B.56})$$

A primeira equação, do sistema EQ. (B.56), é pré-multiplicada por $\boldsymbol{\mu}^\top$ e igualada à segunda equação do mesmo sistema, como pode ser verificado na EQ. (B.57). O coeficiente w_{tan} , que permite encontrar o segundo portfólio tangente, é obtido na EQ. (B.58).

$$\boldsymbol{\mu}^\top w \mathbf{x}_{\text{PT}} + \boldsymbol{\mu}^\top (1 - w) \mathbf{x}_{\text{PVM}} = 2r_f - \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{x}_{\text{PT}} \quad (\text{B.57})$$

$$\begin{aligned} w \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{x}_{\text{PT}} + \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{x}_{\text{PVM}} - w \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{x}_{\text{PVM}} &= 2r_f - \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{x}_{\text{PT}} \\ w \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{x}_{\text{PT}} - w \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{x}_{\text{PVM}} &= 2r_f - \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{x}_{\text{PT}} - \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{x}_{\text{PVM}} \\ w_{\text{tan}} &= \frac{2r_f - \boldsymbol{\mu}^\top (\mathbf{x}_{\text{PT}} + \mathbf{x}_{\text{PVM}})}{\boldsymbol{\mu}^\top (\mathbf{x}_{\text{PT}} - \mathbf{x}_{\text{PVM}})} \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

B.3.2.4 Outros portfólios notáveis

A dedução para o portfólio tangente para o caso de N ativos, em formato matricial, pode ser encontrada em Zivot (2018). A solução geral pode ser obtida conforme a EQ. (B.59). Entretanto, tal resultado não é definido quando $(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{1}) = \mathbf{0}$. Para o cenário no qual o retorno do ativo livre de risco (r_f) seja superior ao retorno do portfólio de variância mínima (μ_{PVM}), o resultado da EQ. (B.59) indicará o portfólio eficiente com menor prêmio pelo risco.

$$\mathbf{x}_{\text{PT}}^* = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{1})}{\mathbf{1}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{1})} \quad (\text{B.59})$$

Outros portfólios eficientes podem ser obtidos de forma analítica, por exemplo, o portfólio que maximiza o retorno esperado para um dado nível de risco ou o portfólio que minimiza o risco para um dado retorno esperado. As deduções relativas a tais portfólios, em forma matricial, podem ser obtidas em Zivot (2018).

B.3.2.5 Portfólios obtidos por meio de métodos numéricos

Problemas de otimização quadrática, como é o caso da obtenção de portfólios de ativos financeiros, podem ser resolvidos de forma aproximada via métodos numéricos. É possível encontrar a solução analítica para tais problemas em situações específicas, por exemplo, quando da inexistência de restrições ou na presença de apenas restrições de igualdade, conforme exposto anteriormente. Entretanto, para casos de restrições de desigualdade, como $x_i \geq 0$, entre outras, faz-se necessária a utilização de algoritmos adaptados às características do problema em questão.

Os portfólios eficientes de variância mínima e o tangente bem como suas formulações como problemas de otimização são apresentadas nas EQs. (B.60) e (B.61), respectivamente. A medida de risco considerada é a variância dos retornos do portfólio, entretanto ela pode

ser substituída pela semi-variância conforme sugestão de [Markowitz \(1959\)](#).

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\text{PVM}}^* &= \min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^\top \Sigma \mathbf{x} \\ \text{sujeito a: } &\begin{cases} \mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1 \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.60})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\text{PT}}^* &= \max_{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{x}^\top (\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{1})}{\sqrt{\mathbf{x}^\top \Sigma \mathbf{x}}} \\ \text{sujeito a: } &\begin{cases} \mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1 \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.61})$$

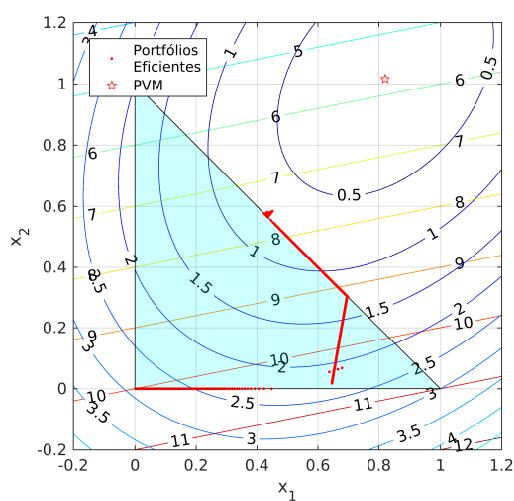
Em que $r_f \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^N$ e $\Sigma \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

Soluções obtidas via métodos numéricos possuem algumas desvantagens em relação a resultados obtidos por meio de métodos analíticos. Os métodos numéricos de otimização quadrática, utilizados no processo de seleção de portfólios, possuem sensibilidade ao ponto inicial escolhido para o processo iterativo de obtenção de soluções ótimas. Além disso, a qualidade da solução depende do algoritmo utilizado, alguns deles não se comportam bem quando a solução ótima encontra-se na barreira da região viável, como é o caso do método de Pontos Interiores ([KARMARKAR, 1984](#); [POTRA](#); [WRIGHT, 2000](#)). A precisão e qualidade da solução obtida dependem, portanto, da escolha do método mais apropriado à formulação do problema escolhido. A degeneração de soluções, consequência de alguma instabilidade numérica do processo iterativo, é característica dos métodos numéricos de otimização, pois tais métodos não são exatos e possuem regras heurísticas na sua construção. Tal degeneração não pode ser considerada desprezível, porque se trata de um fator externo que impacta o processo de seleção de portfólios.

Para demonstrar a importância da escolha adequada tanto do ponto inicial quanto do algoritmo na obtenção de soluções ótimas, foram alteradas as configurações do que foi apresentado na Figura 60. Nesse caso, foi obtido outro conjunto de portfólios conforme a Figura 73. Tal exemplo pode ser reproduzido ao utilizar o Código E.2. A Figura 73 exibe situações em que não são encontradas soluções viáveis, ou são obtidas soluções viáveis, porém não ótimas em comparação aos resultados ótimos encontrados na Figura 60. As soluções inviáveis da Figura 73 estão na região dos portfólios de mínimo risco próximas à barreira, e as soluções viáveis não ótimas estão localizadas na região da barreira próxima à região de máximo risco. O conjunto de portfólios eficientes é único, entretanto, a mudança de algoritmo, feita na Figura 73, levou os portfólios de maior risco a convergirem para a coordenada (0,0) ao invés da coordenada (1,0).

[Takahashi \(2007\)](#) apresenta conceitos, abordagens clássicas e avançadas voltadas à otimização escalar e vetorial dentro do contexto de projeto assistido por computador. Considerando as técnicas disponíveis, descritas por [Takahashi \(2007\)](#), têm-se a possibilidade

Figura 73 – Exemplos de soluções degeneradas obtidas devido a imperfeições dos algoritmos de otimização. A solução de maior risco converge à coordenada (0,0).



Fonte: Elaboração própria.

de aplicação em formulações como a obtenção de portfólios restritos a um número inteiro M de ativos. Tais formulações podem ser solucionadas utilizando-se algoritmos genéticos, por exemplo.

APÊNDICE C – Estado da Arte

Este capítulo apresenta um breve panorama relativo a técnicas modernas para gestão de portfólios, sendo dada maior atenção a pesquisas que abordem melhorias em políticas de criação e gestão de portfólios. As seções apresentam um agrupamento de abordagens e são organizadas por similaridades de problemas e/ou aplicações de ordem prática.

C.1 Metodologias Auxiliares

A seleção de portfólios, quando utilizado o modelo de média-variância, depende essencialmente da estimação do vetor de médias e da matriz de covariâncias. Destacam-se métodos para a melhoria de estimação de matrizes de covariâncias de variáveis correlacionadas, que estão intimamente ligadas ao problema de seleção de portfólios (LEDOIT; WOLF, 2004a,b, 2008; LEDOIT; PÉCHÉ, 2011; LEDOIT; WOLF, 2012, 2015; CAI; ZHANG; ZHOU, 2010). Outras pesquisas relativas a testes de hipótese, melhorias de algoritmos e indicadores que auxiliem a seleção e avaliação de portfólios podem ser verificadas na Tabela 29.

C.2 Seleção de Portfólios

Desde a formulação original da MPT, feita por Markowitz (1952a, 1959), houve desenvolvimento em vertentes diversas como na melhoria dos estimadores de média e covariâncias, adição de restrições práticas como custos de transação e evolução nos algoritmos de otimização associados. Dentre tais desenvolvimentos, o contexto histórico sobre a MPT pode ser encontrado em trabalhos como o de Rubinstein (2002), e revisões mais detalhadas sobre o assunto podem ser obtidas em Kolm, Tütüncü e Fabozzi (2014). Outros estudos fundamentais sobre a MPT estão brevemente descritos na Tabela 30; já na Tabela 31, encontra-se uma seleção de estudos recentes relativos a essa temática (Apêndice C).

Fabozzi, Gupta e Markowitz (2002) listam aplicações que direta e indiretamente resultam da MPT. Essa lista não contempla todas as repercussões possíveis, mas serve como um importante referencial: (i) Alocação de ativos por meio da otimização de média-variância; (ii) Gestão ativo-passivo; (iii) Imunização de carteiras de títulos; (iv) Seleção ótima do gestor; (v) Valor em Risco, do inglês *Value-at-Risk* (VaR); (vi) Estratégias de cobertura ou proteção (*hedge*); (vii) Fundos mútuos e indexados; (viii) Contratos de investimento de valor estável/garantido; (ix) Modelos fatoriais; (x) Estratégias “compradas” e “vendidas”;

Tabela 29 – Artigos relevantes sobre algoritmos, técnicas de estimação e critérios que auxiliam o processo de seleção de portfólios

Artigo	Descrição	Periódico	SJR ¹	Citações ²
Andrews (1991)	Matrizes de covariâncias consistentes em termos de heterocedasticidade e autocorrelação utilizadas em estimação de modelos	Econometrica	14,4	1.456
Barber e Lyon (1997)	Projeto de testes estatísticos de retornos anormais controlando os fatores tamanho e <i>book-to-market</i>	Journal of Financial Economics	13,2	949
Wolfe (1959)	Modificação do método Simplex voltado a funções quadráticas	Econometrica	14,4	294
Britten-Jones (1999)	Projeto de um teste de hipótese a respeito dos pesos de portfólios eficientes	The Journal of Finance	21,0	137
Ledoit e Wolf (2004a)	Estimador bem condicionado de matrizes de covariâncias de dimensões grandes	Journal of Multivariate Analysis	1,7	584
Sharpe (1994)	Índice de Sharpe generalizado	The Journal of Portfolio Management	0,9	555
Cai, Zhang e Zhou (2010)	Taxas de convergência ótimas para estimação de matrizes de covariâncias utilizando a teoria <i>minimax</i>	The Annals of Statistics	6,0	81
Bali, Demirtas e Levy (2009)	Evidências empíricas de relação intertemporal entre retornos e medidas de <i>downside risk</i>	Journal of Financial and Quantitative Analysis	5,1	74
Ledoit e Wolf (2012)	Redução não-linear de grandes matrizes de covariâncias	The Annals of Statistics	6,0	54
Ledoit e Wolf (2004b)	Matriz de covariância encolhida	The Journal of Portfolio Management	0,9	216
Ledoit e Wolf (2008)	Teste estatístico robusto para diferenciar índices de Sharpe considerando distribuições com caudas mais pesadas que a normal	Journal of Empirical Finance	0,8	172
Ledoit e Piché (2011)	Correções de viés na estimação de autovetores das matrizes de covariância visando à criação de melhores estimadores das mesmas	Probability Theory and Related Fields	3,0	19
Ledoit e Wolf (2015)	Estimação de autovalores com aplicação no cálculo das matrizes de covariâncias e na análise de componentes principais	Journal of Multivariate Analysis	1,7	15

Fonte: Elaboração própria.

Nota: As publicações foram ordenadas pelo produto entre o fator de impacto do periódico (SJR) e o respectivo número de citações.

¹ Fator de impacto do periódico ([SCIMAGO, 2007](#)).

² Informações estimadas pelas respectivas editoras ([CHAMBERLAIN et al., 2017](#)).

(xi) Portfólios normais/balanceados; (xii) Fundos de fundos de investimento, gestores de gestores, fundos de fundos de *hedge*.

Um exemplo de vertente na metodologia de seleção de portfólios da MPT e que merece ser mencionada é o Modelo de Black-Litterman.

Tabela 30 – Artigos relevantes sobre a construção de portfólios e suas extensões. As publicações foram selecionadas em um período anterior ao ano de 2013.

Artigo	Descrição	Periódico	SJR ¹	Citações ²
Markowitz (1952a)	Teoria Moderna dos Portfólios	The Journal of Finance	21,0	364
DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009)	Estratégias EW superam as de média-variância clássicas	The Review of Financial Studies	13,0	562
Konno e Yamazaki (1991)	Seleção de portfólios utilizando o modelo média-desvio absoluto	Management Science	3,9	498
Shefrin e Statman (2000)	Desenvolvimento da Teoria Comportamental dos Portfólios	The Journal of Financial and Quantitative Analysis	5,1	222
Rubinstein (2002)	Breve retrospectiva a respeito da MPT	The Journal of Finance	21,0	44
Statman (1987)	Evidências empíricas da magnitude do risco sistêmico e a determinação de um patamar razoável para diversificação	The Journal of Financial and Quantitative Analysis	5,1	130
Pogue (1970)	Extensão do modelo de média-variância incluindo custos de transação, vendas a descoberto, restrições de alavancagem e impostos	The Journal of Finance	21,0	27
Michaud (1989)	Crítica ao modelo de média-variância por gerar portfólios instáveis e ter a características de um “otimizador de erros de estimação”	Financial Analysts Journal	1,0	318
Grinold (1989)	Perspectivas sobre a gestão ativa de portfólios	The Journal of Portfolio Management	0,9	102
Markowitz, Todd et al. (1993)	Algoritmo e cálculo computacional de portfólios usando o modelo de média-semivariância	Annals of Operations Research	1,0	77
Engle, Ferstenberg e Russell (2012)	Modelam o retorno esperado e os componentes de risco associados às transações	The Journal of Portfolio Management	0,9	12

Fonte: Elaboração própria.

Nota: As publicações foram ordenadas pelo produto entre o fator de impacto do periódico (SJR) e o respectivo número de citações.

¹ Fator de impacto do periódico ([SCIMAGO, 2007](#)).

² Informações estimadas pelas respectivas editoras ([CHAMBERLAIN et al., 2017](#)).

C.2.1 Modelo de Black-Litterman

O modelo de Black-Litterman, proposto em [Black e Litterman \(1991, 1992\)](#), auxilia em quantificar previsões complexas, as quais são denominadas de “visões”, a fim de utilizá-las na construção de portfólios. Tal abordagem permite a utilização de dados passados, considerações de equilíbrio e visões privadas dos gestores sobre um futuro próximo.

Os dados históricos são utilizados para estimar a matriz de covariâncias dos retornos dos ativos envolvidos na decisão de investimento. Além disso, a matriz de covariância estimada é combinada com um modelo de equilíbrio dos retornos, por exemplo o CAPM, a fim de produzir a base da parte passiva da estratégia. As visões são introduzidas visando revisar o que já fora estimado previamente.

Tabela 31 – Artigos recentes sobre a construção de portfólios e suas extensões. As publicações foram selecionadas em um período a partir do ano de 2013.

Artigo	Descrição	Periódico	SJR ¹	Citações ²
Kolm, Tütüncü e Fabozzi (2014)	Revisão da literatura sobre a MPT, desafios práticos e tendências correntes	European Journal of Operational Research	2,5	56
Mansini, Ogryczak e Speranza (2014)	Revisão de literatura de seleção de portfólios associada a algoritmos de programação linear	European Journal of Operational Research	2,5	41
Aouni, Colapinto e La Torre (2014)	Estado da arte da seleção de portfólios utilizando variações de um método de otimização multi-objetivo (<i>goal programming</i>)	European Journal of Operational Research	2,5	36
Utz <i>et al.</i> (2014)	Modificação do modelo de média variância adicionando um critério de responsabilidade social na seleção de portfólios	European Journal of Operational Research	2,5	32
Adcock (2014)	Revisão da literatura voltada à aplicação da análise média-variância-assimetria no contexto de seleção de portfólios, precificação, séries temporais e seguros	European Journal of Operational Research	2,5	11
Cui, Zheng <i>et al.</i> (2013)	Seleção de portfólios com restrições número de ativos (cardinalidade)	Journal of Global Optimization	1,5	16
Bernard e Vanduffel (2014)	Uso da seleção de portfólios e da correlação com o mercado para identificar possíveis fraudes em fundos de investimento	European Journal of Operational Research	2,5	9
Clarke, de Silva e Thorley (2013)	Comparativo entre portfólios com paridade no risco, máxima diversificação e mínima variância	The Journal of Portfolio Management	0,9	20
Castellano e Cerqueti (2014)	Análise de média-variância estendida para o caso de ativos com baixa liquidez	European Journal of Operational Research	2,5	6
Palczewski e Palczewski (2014)	Estimador não-viesado para os pesos de portfólios eficientes	European Journal of Operational Research	2,5	6
Simaan (2014)	Comparativo entre a obtenção de portfólios por meio da otimização de média-variância ou da função de utilidade	European Journal of Operational Research	2,5	6
Arnott <i>et al.</i> (2013)	Estratégias de seleção de portfólios bem sucedidas, mesmo sendo aleatórias, são direcionadas pelos fatores SMB e HML do modelo FFC	The Journal of Portfolio Management	0,9	15
Smimou (2014)	Seleção internacional de portfólios considerando risco de instabilidade política	European Journal of Operational Research	2,5	5
Grechuk e Zabarankin (2014)	Algoritmo que determina a medida de desvio ótima, utilizando CVaR no modelo, para um dado portfólio eficiente	European Journal of Operational Research	2,5	4

Fonte: Elaboração própria.

Nota: As publicações foram ordenadas pelo produto entre o fator de impacto do periódico (SJR) e o respectivo número de citações.

¹ Fator de impacto do periódico (SCIMAGO, 2007).

² Informações estimadas pelas respectivas editoras (CHAMBERLAIN *et al.*, 2017).

Conforme detalhado em Idzorek (2007), é utilizado o termo K para representar o número de visões, e N é utilizado para expressar o número de ativos. A fórmula para o

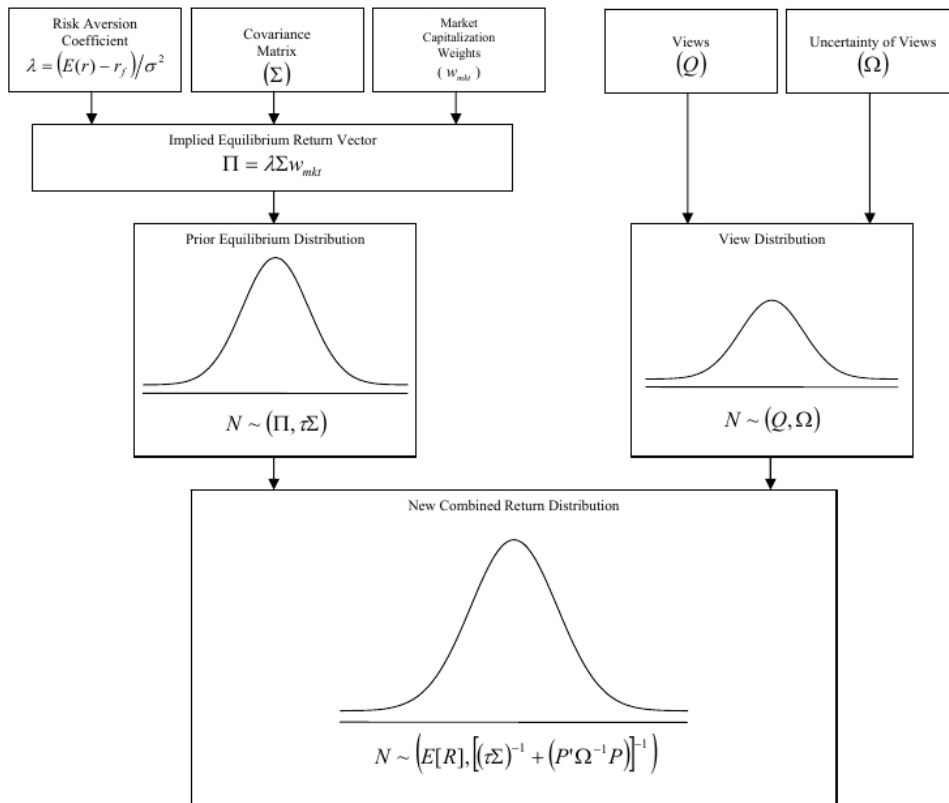
novo (*posteriori*) Vetor de Retornos Combinado ($\mathbb{E}[R]$) é dada pela EQ. (C.1).

$$\mathbb{E}[R] = [(\tau \Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P]^{-1} [(\tau \Sigma)^{-1} \Pi + P^T \Omega^{-1} Q] \quad (C.1)$$

Em que $\mathbb{E}[R]$ é o novo vetor de retornos combinados ($N \times 1$), τ é um escalar que controla o grau de confiança nos dados históricos, Σ é a matriz de covariâncias dos retornos em excesso ($N \times N$), P é a matriz que identifica os ativos envolvidos nas visões ($K \times N$), Ω é uma matriz de covariância diagonal de termos de erro das visões expressas representando a incerteza de cada uma ($K \times K$), Π é o vetor de retornos de equilíbrio implícitos ($N \times 1$) e Q é o vetor de visões ($K \times 1$).

Um fluxograma desse processo de seleção de portfólios, utilizando o modelo Black-Litterman, pode ser encontrado na Figura 74.

Figura 74 – Combinação de informações *a priori* com “visões” sugeridas por Black e Litterman (1992).



Fonte: Idzorek (2007, p. 27).

Nota: A variância da Nova Distribuição de Retornos Combinada é deduzida em Satchell e Scowcroft (2000).

C.3 Portfólios Robustos

A categorização como estratégia de seleção robusta foi feita em função do comportamento do método, e não pelas autodenominações das estratégias propostas pelos autores das mesmas. Para elucidar tal segmentação, foi escolhida uma definição feita por [Huber e Ronchetti \(2009\)](#), os quais discorrem sobre o significado e surgimento de metodologias estatísticas robustas:

Inferências estatísticas são baseadas apenas em parte nas observações. A outra parte, igualmente importante, é formada pelos pressupostos sobre a situação subjacente. Mesmo nos casos mais simples, existem suposições explícitas ou implícitas sobre a aleatoriedade e independência, sobre modelos de distribuição, talvez distribuições a priori para alguns parâmetros desconhecidos, e assim por diante. Tais premissas não devem ser plenamente verdadeiras, trata-se de racionalizações matematicamente convenientes de um conhecimento ou crença frequentemente difusos. Como em todos os outros ramos da matemática aplicada, tais racionalizações ou simplificações são vitais, e uma justificativa para seu uso apela para um vago princípio de continuidade ou estabilidade: um pequeno erro no modelo matemático deverá causar desvios insignificantes nas conclusões finais. Infelizmente, isso nem sempre é válido. Desde meados do século XX, aumentou-se cada vez mais a consciência de que alguns dos procedimentos estatísticos mais comuns (em particular, aqueles otimizados para uma distribuição normal subjacente) são excessivamente sensíveis a desvios aparentemente insignificantes dos pressupostos e uma infinidade de alternativas de procedimentos “robustos” foram propostos. A palavra “robusto” é carregada com muitas conotações, às vezes inconsistentes. Usamos isso em um sentido relativamente estrito: para nossos propósitos, a **robustez significa insensibilidade a pequenos desvios em relação aos pressupostos**. Principalmente, estamos preocupados com a robustez de distribuição: a forma da verdadeira distribuição subjacente desvia ligeiramente do modelo assumido (geralmente Gaussiano). Este é, simultaneamente, o caso mais importante e o que é melhor entendido. Muito menos se sabe sobre o que acontece quando os outros pressupostos padrão da estatística não estão adequadamente satisfeitos e sobre as salvaguardas apropriadas nesses outros casos ([HUBER; RONCHETTI, 2009](#), p. 1–2, tradução do autor, grifo do autor).

Na presente seção, foi feito um agrupamento de abordagens relativas ao estudo da robustez de portfólios. Um breve descritivo de estudos relevantes sobre metodologias robustas de obtenção de portfólios pode ser encontrado na Tabela 32. Na Tabela 33, são apresentados estudos recentes sobre tal tema. Outra revisão específica sobre a seleção de portfólios robustos pode ser obtida também em [Fabozzi, Huang e Zhou \(2010\)](#) e [Kim, Kim e Fabozzi \(2017\)](#). Direcionamentos e tendências para pesquisas futuras são apontadas por [Fabozzi, Kolm et al. \(2007a\)](#).

Formulações de problemas de otimização robustos trazem o benefício da incorporação das incertezas como parte do processo decisório da seleção de portfólios, tipicamente são escolhidos portfólios que possuem características de risco e retorno razoáveis quando são avaliados cenários de pior caso para indicadores de risco como o VaR e o Valor em Risco

Condicional, do inglês *Conditional Value-at-Risk* (CVaR) (EL GHAOUI; OKS; OUSTRY, 2003; TÜTÜNCÜ; KOENIG, 2004; HUANG *et al.*, 2010; QUARANTA; ZAFFARONI, 2008).

Tabela 32 – Artigos relevantes sobre metodologias robustas voltadas à construção de portfólios. As publicações foram selecionadas em um período anterior ao ano de 2013.

(continua)				
Artigo	Descrição	Periódico	SJR	Citações
Best e Grauer (1991)	Avaliação da sensibilidade dos pesos dos portfólios eficientes a mudanças nas médias dos ativos	The Review of Financial Studies	13,0	289
Garlappi, Uppal e Wang (2007)	Seleção de portfólios considerando o erro de estimação dos parâmetros no processo decisório	The Review of Financial Studies	13,0	186
Tu e Zhou (2011)	Estudo da combinação de portfólios ingênuos (EW) com quatro estratégias sofisticadas de seleção	Journal of Financial Economics	13,2	88
DeMiguel, Garlappi, Nogales <i>et al.</i> (2009)	Seleção de portfólios de variância mínima com restrições nas normas do vetor de pesos	Management Science	3,9	205
El Ghaoui, Oks e Oustry (2003)	Seleção de portfólios utilizando os intervalos de confiança das inferências de média e covariâncias além de uma medida de VaR no pior caso	Operations Research	2,9	219
Brodie <i>et al.</i> (2009)	Seleção de portfólios com penalidades na soma absoluta dos pesos	Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America	6,3	85
Goldfarb e Iyengar (2003)	Seleção de portfólios robustos com diversas formulações e objetivos	Mathematics of Operations Research	1,7	290
Black e Litterman (1992)	Construção de portfólios baseando-se no CAPM e em visões dos investidores	Financial Analysts Journal	1,0	394
Ledoit e Wolf (2003)	Aplicação do estimador covariâncias encolhidas na seleção de portfólios	Journal of Empirical Finance	0,8	400
Kirby e Ostdiek (2012)	Estratégias de seleção de portfólios que superam as ingênuas (EW) e não requerem otimização: <i>volatility timing</i> (VT) e <i>reward-to-risk timing</i> (RRT)	Journal of Financial and Quantitative Analysis	5,1	48
DeMiguel e Nogales (2009)	Seleção de portfólios robustos de variância mínima com foco na estabilização dos pesos diante de mudanças nas distribuições dos retornos	Operations Research	2,9	82
Tütüncü e Koenig (2004)	Seleção de portfólios robustos e avaliados em cenários de pior caso	Annals of Operations Research	1,0	122
Huang <i>et al.</i> (2010)	Seleção de portfólios robustos utilizando CVaR	European Journal of Operational Research	2,5	40
Broadie (1993)	Sugestões de como balancear erros de estimação e não estacionariedade quando dados históricos são utilizados na estimação de portfólios usando o modelo de média-variância	Annals of Operations Research	1,0	87
Quaranta e Zaffaroni (2008)	Seleção de portfólios robustos utilizando CVaR	Journal of Banking & Finance	1,8	47
Fabozzi, Huang e Zhou (2010)	Revisão da literatura sobre técnicas e formulações para a obtenção de portfólios robustos	Annals of Operations Research	1,0	73

Tabela 32 – Artigos relevantes sobre metodologias robustas voltadas à construção de portfólios. As publicações foram selecionadas em um período anterior ao ano de 2013.

(conclusão)				
Artigo	Descrição	Periódico	SJR	Citações
Pflug, Pichler e Wozabal (2012)	As estratégias ótimas de seleção de portfólios tendem à ingênua (EW) com o aumento da incerteza nos modelos	Journal of Banking & Finance	1,8	38
Costa e Paiva (2002)	Seleção de portfólios robustos utilizando desigualdades matriciais lineares	Journal of Economic Dynamics and Control	1,3	40
Fabozzi, Kolm et al. (2007a)	Tendências correntes e futuras direções na seleção de portfólios robustos	The Journal of Portfolio Management	0,9	35
Ceria e Stubbs (2006)	Seleção de portfólios robustos	Journal of Asset Management	0,2	68
Fletcher e Hillier (2001)	O uso da REF, de Michaud e Michaud (1998), gera ganhos marginais, porém não anormais quando se compara ao modelo de média-variância tradicional	Financial Analysts Journal	1,0	–
Markowitz e Usmen (2003)	Compara métodos de inferências relativos ao modelo de média-variância, a REF e métodos bayesianos difusos. Portfólios obtidos pela REF possuíam comportamento superior aos bayesianos.	Journal of Investment Management	–	–
Harvey, Liechty e Liechty (2008)	Refutam as conclusões de Markowitz e Usmen (2003)	Journal of Investment Management	–	–

Fonte: Elaboração própria.

Nota: As publicações foram ordenadas pelo produto entre o fator de impacto do periódico (SJR) e o respectivo número de citações.

¹ Fator de impacto do periódico (SCIMAGO, 2007).

² Informações estimadas pelas respectivas editoras (CHAMBERLAIN et al., 2017).

C.4 Portfólios Multi-períodos

A seleção de portfólios para o contexto multi-períodos, que maximizam a riqueza de longo prazo ou terminal foi discutida inicialmente por Merton (1969) para o caso de tempo contínuo e por Samuelson (1969) para o caso de tempo discreto. Merton (1971) estende o modelo inicialmente proposto. Um breve descritivo de estudos relevantes sobre metodologias de obtenção de portfólios multi-períodos pode ser encontrado na Tabela 34. Na Tabela 35, são apresentados estudos recentes sobre tal tema.

Dentre as formulações multi-períodos pesquisadas, percebeu-se a preocupação com problemas práticos voltados à consideração de custos de transação, de impacto permanente e/ou temporário no mercado. O impacto permanente se refere à transação que modifica o nível dos preços definitivamente, e os impactos temporários são percebidos quando negociações superam o volume típico para um dado ativo que o mercado consiga absorver instantaneamente. A diminuição de tais impactos está ligada também ao controle de risco do portfólio. Formulações que tenham tal direcionamento podem ser encontradas em Bertsimas e Lo (1998), Almgren e Chriss (2001) e Gârleanu e Pedersen (2013).

Tabela 33 – Artigos recentes sobre metodologias robustas voltadas à construção de portfólios. As publicações foram selecionadas em um período a partir do ano de 2013.

Artigo	Descrição	Periódico	SJR ¹	Citações ²
Fliege e Werner (2014)	Algoritmo de otimização robusta multi-objetivo, inspirado em Ben-Tal e Nemirovski (1998), e aplicado na seleção de portfólios	European Journal of Operational Research	2,5	33
Dupačová e Kopa (2014)	Seleção de portfólios robustos utilizando restrições de dominância estocástica de primeira ordem	European Journal of Operational Research	2,5	19
DeMiguel, Martín-Utrera e Nogales (2013)	Calibração ótima da intensidade do encolhimento para o estimador da matriz de covariâncias com aplicações na seleção de portfólios	Journal of Banking & Finance	1,8	20
Kapsos, Christofides e Rustem (2014)	Seleção de portfólios para o pior caso utilizando o índice Omega, que é uma alternativa ao índice de Sharpe	European Journal of Operational Research	2,5	13
Kakouris e Rustem (2014)	Seleção de portfólios robustos utilizando copulas com WCVaR (CVaR do pior caso), com aplicações em cenários de crises	European Journal of Operational Research	2,5	12
Levy e Levy (2014)	Seleção de portfólios robustos com restrições baseadas na variância, tais estratégias superam portfólios EW e de variância mínima	European Journal of Operational Research	2,5	11
Kim, Kim, Kim <i>et al.</i> (2014)	Seleção de portfólios robustos controlando a exposição aos fatores do modelo FF3	European Journal of Operational Research	2,5	9
Branger e Larsen (2013)	Seleção de portfólios robustos com investidor avesso à ambiguidade e com os ativos seguindo um processo de difusão com salto	Journal of Banking & Finance	1,8	12
Kim, Kim e Fabozzi (2014a)	Revisão da literatura de seleção de portfólios robustos com a abordagem de pior caso, utilizando VaR e CVaR como medidas de risco	Journal of Optimization Theory and Applications	1,1	18
Tevzadze, Toronjadze e Uzunashvili (2013)	Maximização robusta da utilidade para um modelo de mercado difuso com erros na especificação da tendência e da volatilidade	Finance and Stochastics	2,2	7
Kim, Kim, Ahn <i>et al.</i> (2013)	Robustez de portfólios está vinculada à correlação com modelos fatorial (FF3)	Annals of Operations Research	1,0	12
Kim, Kim e Fabozzi (2014b)	Prova analiticamente que o aumento de robustez gera um aumento de explicação da variância do portfólio pelo modelo FF3	Journal of Banking & Finance	1,8	6
Becker, Gürtler e Hibbeln (2015)	Testes empíricos em que a estratégia de média variância supera a REF quando são aplicados métodos de estimação idênticos. Recomenda o uso do estimador de Frost e Savarino (1988) ou o de Ledoit e Wolf (2003)	The European Journal of Finance	0,5	7
Kim, Fabozzi <i>et al.</i> (2014)	Seleção de portfólios robustos para cenários de pior caso que favorecem a assimetria e penalizam a curtose	Economics Letters	0,7	5
Kim, Kim, Mulvey <i>et al.</i> (2015)	Argumentam que a seleção de ativos focada no pior cenário do mercado leva à robustez dos portfólios	International Review of Financial Analysis	0,8	4
Fastrich, Paterlini e Winker (2015)	Construção de portfólios robustos com melhoria na regularização dos pesos em relação à LASSO (<i>Least Absolute Shrinkage and Selection Operator</i>)	Computational Management Science	0,4	8

Fonte: Elaboração própria.

Nota: As publicações foram ordenadas pelo produto entre o fator de impacto do periódico (SJR) e o respectivo número de citações.

¹ Fator de impacto do periódico (SCIMAGO, 2007).

² Informações estimadas pelas respectivas editoras (CHAMBERLAIN *et al.*, 2017).

Tabela 34 – Artigos relevantes focados na construção de portfólios multi-períodos ou dinâmicos. As publicações foram selecionadas em um período anterior ao ano de 2013.

Artigo	Descrição	Periódico	SJR ¹	Citações ²
Merton (1969)	Modelo matemático para seleção de portfólios no caso multi-períodos	The Review of Economics and Statistics	6,3	1.436
Merton (1971)	Modelo matemático para seleção de portfólios no caso multi-períodos	Journal of Economic Theory	3,3	1.996
Samuelson (1969)	Modelo matemático para seleção de portfólios no caso multi-períodos	The Review of Economics and Statistics	6,3	696
Han (2006)	Modelo para alocação dinâmica de portfólios utilizando modelos multivariados estocásticos para volatilidade	The Review of Financial Studies	13,0	63
Bertsimas e Lo (1998)	Estratégia dinâmica ótima que minimiza o custo esperado da negociação de um bloco de ações em um horizonte de tempo fixo	Journal of Financial Markets	2,9	271
Li e Ng (2000)	Seleção ótima de portfólios dinâmicos	Mathematical Finance	2,1	344
Davis e Norman (1990)	Adição de custos de transação ao modelo proposto por Merton (1971)	Mathematics of Operations Research	1,7	394
Steinbach (2001)	Revisão da MPT e extensão para o caso multi-período	Society for Industrial and Applied Mathematics Review	2,3	140
Bertsimas e Pachamano (2008)	Seleção de portfólios robustos dinâmicos na presença de custos de transação	Computers & Operations Research	2,3	87
Winkler e Barry (1975)	Modelo Bayesiano para seleção e manutenção de portfólios	The Journal of Finance	21,0	9
Dantzig e Infanger (1993)	Seleção de portfólios multi-períodos por meio de multi-períodos por meio de programação estocástica multi-estágio	Annals of Operations Research	1,0	89
Almgren e Chriss (2001)	Execução ótima de transações com o objetivo de minimizar a combinação do risco da volatilidade e os custos de transação provenientes do impacto permanente e temporário no mercado, uma extensão da estratégia de Bertsimas e Lo (1998)	Journal of Risk	0,3	281
Liu (2010)	Seleção robusta de portfólios como extensão do modelo proposto por Merton (1971)	Annals of Finance	0,9	26
Pınar e Tütüncü (2005)	Modelo matemático para seleção robusta de portfólios voltada à oportunidades de arbitragem	Operations Research Letters	0,8	21
Takeda, Taguchi e Tütüncü (2008)	Seleção ajustável de portfólios robustos para formulações multi-períodos	Journal of Optimization Theory and Applications	1,1	15
Grinold (2007)	Análise dinâmica de portfólios baseada nas mudanças nas informações que direcionam a estratégia e no controle da velocidade da transação do portfólio	The Journal of Portfolio Management	0,9	8

Fonte: Elaboração própria.

Nota: As publicações foram ordenadas pelo produto entre o fator de impacto do periódico (SJR) e o respectivo número de citações.

¹ Fator de impacto do periódico (SCIMAGO, 2007).

² Informações estimadas pelas respectivas editoras (CHAMBERLAIN *et al.*, 2017).

C.5 No Brasil

Um breve descritivo de estudos relevantes sobre seleção de portfólios e que foram publicados em periódicos nacionais ou que utilizaram dados brasileiros pode ser verificado na

Tabela 36. Dentre os estudos identificados, destacam-se os que propõem abordagens para a seleção de portfólios multi-períodos (CALDEIRA; MOURA; SANTOS, 2012; CALDEIRA; MOURA; SANTOS, 2013), estudos relacionados com a robustez ou a diminuição de sensibilidade dos portfólios gerados (COSTA; PAIVA, 2002; ZIMMER; NIEDERHAUSER, 2004). Santos (2010) destaca que os portfólios de variância mínima possuem características similares às alternativas robustas, como estabilidade da carteira (baixo índice *turnover*), por exemplo.

Tabela 35 – Artigos recentes focados na construção de portfólios multiperíodos ou dinâmicos. As publicações foram selecionadas em um período a partir do ano de 2013.

Artigo	Descrição	Periódico	SJR ¹	Citações ²
Gârleanu e Pedersen (2013)	Seleção ótima de portfólios dinâmicos quando o custo de transação é elevado e os retornos são previsíveis por sinais mas com diferentes velocidades de reversão da média	The Journal of Finance	21,0	54
DeMiguel, Nogales e Uppal (2014)	Portfólios de arbitragem e média-variância baseados em vetores autoregressivos (VAR)	The Review of Financial Studies	13,0	21
Cui, Gao <i>et al.</i> (2014)	Seleção de portfólios multi-períodos sob restrição de vendas a descoberto (não-negatividade dos pesos)	European Journal of Operational Research	2,5	31
Bae, Kim e Mulvey (2014)	Alocação dinâmica de portfólios internacionais com modelos de mudança de regime	European Journal of Operational Research	2,5	20
He <i>et al.</i> (2015)	Seleção de portfólios multi-período supondo dinâmica acoplada dos ativos	IEEE Transactions on Automatic Control	4,2	9
Glasserman e Xu (2013)	Controle robusto de portfólios com fatores dinâmicos estocásticos	Operations Research	2,9	12
Branger, Larsen e Munk (2013)	Seleção de portfólios robustos com ambiguidade e aprendizado sobre a previsibilidade dos retornos	Journal of Banking & Finance	1,8	18
Santos, Nogales e Ruiz (2013)	Comparativo de modelos uni e multivariados utilizados na previsão do VaR, com a recomendação final do uso modelo dinâmico de correlações condicionais (DCC)	Journal of Financial Econometrics	2,1	14
Fu, Wei e Yang (2014)	Seleção de portfólios, utilizando derivativos, em um mercado com mudança de regime	European Journal of Operational Research	2,5	10
Gârleanu e Pedersen (2016)	Seleção dinâmica de portfólios com custos de transação persistentes e transitórios, múltiplos ativos, múltiplos sinais de predição de retornos e outros sinais dinâmicos gerais	Journal of Economic Theory	3,3	4
Santos e Moura (2014)	Modelo dinâmico fatorial multivariado GARCH utilizado na estimação da matriz de covariâncias condicionais	Computational Statistics & Data Analysis	1,5	4
Branger, Kraft e Meinert (2014)	Análise do processo de seleção de portfólios quando as correlações são modeladas por regimes de mudanças com saltos e regimes com saltos contagiosos	Journal of Economic Dynamics and Control	1,3	3
Escobar, Ferrando e Rubtsov (2015)	Seleção dinâmica de portfólios robustos com a volatilidade seguindo um processo de salto-difusão	Journal of Banking & Finance	1,8	2
Yi <i>et al.</i> (2015)	Seleção dinâmica de portfólios com ambiguidade no modelo, erros de precificação e ativos cointegrados	Annals of Finance	0,9	3
Mei, DeMiguel e Nogales (2016)	Seleção de portfólios multi-períodos com múltiplos ativos com modelagem dos custos de transação e do impacto no mercado	Journal of Banking & Finance	1,8	1
Caldeira, Moura e Santos (2016)	Seleção dinâmica de portfólios de títulos do tesouro utilizando modelos de fatores dinâmicos	Journal of Empirical Finance	0,8	1

Fonte: Elaboração própria.

Nota: As publicações foram ordenadas pelo produto entre o fator de impacto do periódico (SJR) e o respectivo número de citações.

¹ Fator de impacto do periódico (SCIMAGO, 2007).

² Informações estimadas pelas respectivas editoras (CHAMBERLAIN *et al.*, 2017).

Tabela 36 – Artigos relevantes relacionados com a construção de portfólios que possuam dados brasileiros ou tenham sido publicados em periódicos nacionais

Artigo	Descrição	Periódico	Estrato ¹
Costa e Paiva (2002)	Seleção de portfólios robustos utilizando desigualdades matriciais lineares aplicadas na diminuição do erro de rastreamento	Journal of Economic Dynamics and Control	A1
Caldeira, Moura e Santos (2012)	Seleção de portfólios dinâmicos utilizando modelo GARCH multivariado com especificações baseadas no modelo FFC	Economics Bulletin	A2
Caldeira, Moura e Santos (2013)	Utilização do modelo FFC e da especificação GARCH proposta em Santos e Moura (2014) para a seleção de portfólios de variância mínima	Revista Brasileira de Economia	B1
Thomé Neto, Leal e Almeida (2011)	Sugestão de um índice de mínima variância de ações brasileiras	Economia Aplicada	B1
Zimmer e Niederhauser (2004)	Seleção de portfólios robustos utilizando penalidades a fim de diminuir a sensibilidade dos pesos	Revista Brasileira de Finanças	B1
de Oliveira e de Paula (2008)	Aplicação da metodologia de Statman (1987) para determinar o grau ótimo de diversificação de investidores <i>home brokers</i> brasileiros	Revista Brasileira de Finanças	B1
Caldeira e Portugal (2010)	Estratégia <i>long-short</i> , neutra ao mercado, e <i>index tracking</i> baseadas em portfólios integrados	Revista Brasileira de Finanças	B1
Santos (2010)	Desempenho fora da amostra de portfólios robustos em comparação com o modelo de média-variância e o de variância mínima	Brazilian Review of Finance	B1
Gonçalves, Iquiapaza e Bressan (2012)	Seleção de portfólios por arbitragem utilizando fundamentos latentes das empresas	Revista Brasileira de Finanças	B1
Caldeira, Moura, Santos e Tessari (2014)	Seleção de portfólios com modelos fatoriais heterocedásticos com aplicação em fundos multi-mercado brasileiros	Revista de Administração Mackenzie	B1
Demos, Pires e Moura (2015)	Rebalanceamento endógeno para portfólios de variância mínima a fim de reduzir os custos de transação em relação à balanceamentos periódicos	Revista Brasileira de Finanças	B1
Naibert e Caldeira (2015)	Seleção de carteiras ótimas sob restrições nas normas dos vetores de alocação baseado na metodologia de Fan, Zhang e Yu (2012)	Revista Brasileira de Finanças	B1
Santos (2015)	Evidências empíricas que portfólios de variância, mínima com restrições de cardinalidade, podem superar o IBOVESPA e portfólios EW	Economia	B2
Caldeira, Moura, Perlin <i>et al.</i> (2017)	Seleção de portfólios de variância mínima utilizando dados de alta frequência para estimar as matrizes de covariância condicionais	Economia	B2
Maciel, Gomide e Ballini (2014)	Seleção de portfólios de variância mínima utilizando lógica nebulosa (fuzzy)	Revista de Finanças Aplicadas	B3
Duarte Junior e Silva (2015)	Gestão de riscos de portfólios com o uso de derivativos em períodos turbulentos	Revista de Finanças Aplicadas	B3
Roma, Iquiapaza e Ferreira (2015)	Comparativo de estratégias numéricas na estimação da fronteira eficiente por meio das técnicas de <i>bootstrapping</i> e Monte Carlo	Revista de Administração, Contabilidade e Economia	B3
Iquiapaza, Vaz e Borges (2016)	Avaliação de estratégias VT e RRT, propostas por Kirby e Ost diek (2012), no contexto brasileiro	Revista de Finanças Aplicadas	B3

Fonte: Elaboração própria.

Nota: As publicações foram ordenadas pela respectivo estrato.

¹ Estratificação da qualidade da produção intelectual (QUALIS, 2017).

APÊNDICE D – Desempenho das Estratégias de *Volatility Timing*

Algumas das estratégias desenvolvidas por Kirby e Ostdiek (2012) tiveram seus indicadores de desempenho calculados e apresentados neste apêndice. O comportamento das estratégias foi verificado diante da utilização como insumo das matrizes de covariâncias encolhidas linearmente (LEDOIT; WOLF, 2003) ou não-linearmente (LEDOIT; WOLF, 2020). Não foi utilizada a matriz de covariâncias amostral, pois seus resultados são idênticos ao da encolhida linearmente pelo fato de possuírem os mesmos valores em suas respectivas diagonais. Não foram avaliados os impactos dos custos de transação sobre as técnicas mencionadas.

A Tabela 37 apresenta um comparativo, ao considerar como insumo a matriz de covariâncias encolhida linearmente, entre duas abordagens desenvolvidas por Kirby e Ostdiek (2012) (VT e RRT ($\bar{\beta}_t^+$)) que utilizam essencialmente as informações dos ativos individuais para compor seus respectivos portfólios estimados.

Conforme a Tabela 37, tem-se que a técnica VT exibe volatilidade significativamente diferente da técnica 1/N em todas as bases de dados avaliadas. Entretanto, o índice de Sharpe da técnica VT foi significativamente diferente da 1/N apenas para $\eta = 3$ (FF Industry e FF Size-B/M) ou para $\eta = 4$ (FF Industry). Ao ser comparada à técnica MIN e de acordo com as bases de dados avaliadas, tem-se que a VT apresenta, em geral, aumento da volatilidade, do índice de Sharpe, do custo de indiferença de utilidade (κ_1) e do número de ativos na carteira, além de demonstrar redução no índice de diversificação e no *turnover*.

Ainda segundo a Tabela 37, tem-se que a técnica RRT exibe volatilidade significativamente diferente da técnica 1/N para as bases de dados FF Industry e FF Size-B/M. O índice de Sharpe da técnica RRT foi significativamente diferente da 1/N apenas para a base de dados FF Size-B/M ($\eta = 3, 4$ e 5). Ao ser comparada com a técnica MV e de acordo com as bases de dados avaliadas, tem-se que a técnica RRT apresenta, em geral, uma diminuição do índice de diversificação e aumento no número de ativos da carteira.

A Tabela 38 apresenta parâmetros de desempenho (média, desvio padrão e índice de Sharpe) das técnicas de investimento quando as bases de dados são fracionadas em duas partes. Tal comparativo visa avaliar a robustez das técnicas, pois é desejado que seu desempenho seja consistente independente do período avaliado. Percebe-se que a volatilidade no segundo período é menor que no primeiro, exceto para a base de dados FF Size-B/M. Além disso, houve uma redução de todos os índices de Sharpe no segundo período. Tais fatos indicam uma diminuição do desempenho em termos do índice de Sharpe

para todas as técnicas avaliadas conforme o passar do tempo. Em termos de índice de Sharpe apresentados, as estratégias VT e RRT superaram a VW em todas as bases de dados e foram superiores à $1/N$ exceto na base Dow Jones ($N = 28$).

O desempenho ajustado ao risco referente à Tabela 37 foi avaliado na ausência de custos de transações e apresentado nas Tabelas 39, 40 e 41 referentes às bases de dados Dow Jones ($N = 28$), FF Industry ($N = 49$) e FF Size-B/M ($N = 96$), respectivamente. A estratégia RRT apresentou α significativo frente à regressão do CAPM ao se considerar seu desempenho avaliado nas bases FF Industry ($N = 49$) e FF Size-B/M ($N = 96$), entretanto, seu retorno em excesso pôde ser explicado exclusivamente pelo fator HML conforme apontado por Zakamulin (2017). Entretanto, para a técnica VT, que apresentou α significativo nas mesmas condições da RRT, tem-se que seu retorno em excesso pôde ser caracterizado somente pela combinação da exposição aos fatores HML, RMW e CMA.

Tabela 37 – Avaliação do desempenho fora da amostra das estratégias VT e RRT ($\bar{\beta}^+$) ao utilizar como insumo a matriz de covariâncias encolhida linearmente (LEDOIT; WOLF, 2003). Ausência de custos de transação.

Estratégia	Dow Jones ($N = 28$)							FF Industry ($N = 49$)							FF Size-B/M ($N = 96$)						
	μ	σ	SR	DR	$ \overline{\Delta x} $	κ_1	$N_{95\%}$	μ	σ	SR	DR	$ \overline{\Delta x} $	κ_1	$N_{95\%}$	μ	σ	SR	DR	$ \overline{\Delta x} $	κ_1	$N_{95\%}$
1/N	13,7	17,6	0,638	1,69	4,7	0	27	14	16,3	0,589	1,36	3,1	0	47	15,4	17,5	0,629	1,16	2,2	0	92
VW	8,7	16,8 (0,07)	0,373 (0,00)			-472		12,9	15,2 (0,00)	0,557 (0,53)			-94		12,9	15,2 (0,00)	0,557 (0,20)			-213	
<i>Painel A. Estratégias de seleção de portfólios presentes na literatura</i>																					
ERC	12,3	16,2 (0,00)	0,609 (0,24)	1,78	5,7	-111	26	13,8	15,2 (0,00)	0,618 (0,05)	1,43	3,9	-4	45	15,5	17 (0,00)	0,652 (0,02)	1,17	2,6	13	89
MDP	12,3	16,2 (0,17)	0,612 (0,74)	2,04	14,2	-108	12	12,5	14 (0,00)	0,582 (0,95)	1,85	12,4	-112	10	13,8	16,5 (0,03)	0,57 (0,34)	1,37	13,6	-142	9
MIN	8,8	14,3 (0,00)	0,447 (0,06)	1,75	13,1	-423	9	12,7	11,6 (0,00)	0,72 (0,19)	1,51	11,5	-62	7	13,9	14 (0,00)	0,678 (0,52)	1,22	16,4	-96	6
MV ($\gamma=5$)	16,1	19,9 (0,17)	0,685 (0,74)	1,53	24	199	6	14	16,1 (0,63)	0,597 (0,92)	1,35	27,6	4	5	14,3	15,7 (0,00)	0,625 (0,96)	1,17	32,5	-88	4
<i>Painel B. Portfólios que utilizam estratégias do tipo Volatility Timing</i>																					
VT ($\eta=3$)	9,6	14,4 (0,00)	0,498 (0,09)	1,58	8,7	-350	16	13,7	12,9 (0,00)	0,719 (0,03)	1,33	7,1	15	31	15,3	15,5 (0,00)	0,701 (0,02)	1,16	6	20	71
VT ($\eta=4$)	9,6	14,5 (0,00)	0,491 (0,14)	1,49	10,4	-355	12	13,5	12,3 (0,00)	0,744 (0,05)	1,3	8,6	11	23	15,1	15,1 (0,00)	0,708 (0,06)	1,16	7,8	8	62
VT ($\eta=5$)	9,7	14,8 (0,01)	0,491 (0,19)	1,41	11,7	-344	9	13,4	12 (0,00)	0,753 (0,08)	1,27	9,6	4	16	14,9	14,8 (0,00)	0,71 (0,09)	1,16	9,5	-6	51
<i>Painel C. Portfólios que utilizam estratégias do tipo Reward-to-Risk Timing</i>																					
RRT ($\bar{\beta}^+$, $\eta=3$)	12,5	17,6 (0,98)	0,573 (0,54)	1,46	22,1	-114	11	14,3	15,1 (0,00)	0,658 (0,15)	1,27	13,9	51	23	16,4	16,9 (0,00)	0,71 (0,01)	1,13	10,3	112	57
RRT ($\bar{\beta}^+$, $\eta=4$)	12,3	18,2 (0,60)	0,539 (0,39)	1,4	25,1	-151	8	14,2	14,8 (0,00)	0,661 (0,23)	1,25	16,5	41	18	16,6	16,9 (0,00)	0,72 (0,01)	1,13	12,7	125	48
RRT ($\bar{\beta}^+$, $\eta=5$)	12,2	18,8 (0,38)	0,517 (0,33)	1,34	27,2	-171	6	14,1	14,6 (0,00)	0,659 (0,32)	1,23	18,6	29	14	16,7	16,8 (0,00)	0,728 (0,01)	1,12	15	136	41

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: O tamanho da janela de horizonte móvel de estimação considerada foi de $\tau = 60$ (5 anos). As estratégias ENT+ utilizaram índices de incerteza individuais construídos com $\nu = 0,8$. As medidas de média (μ) e desvio padrão (σ) são percentuais e anualizados. Abaixo da estimativa de σ é apresentado o valor-p do teste de hipótese ($H_0 : \log(\sigma^2/\sigma_{1/N}^2) = 0$) entre parêntesis. O índice de Sharpe (SR) é anualizado, e o valor-p do teste de hipótese ($H_0 : (SR - SR_{1/N}) = 0$) é apresentado entre parêntesis. O índice de diversificação (DR) reportado é a média dos índices para cada janela de estimação. O *turnover* ($|\overline{\Delta x}|$) é informado em termos percentuais. κ_1 (κ_γ) é a taxa máxima anualizada que um investidor, com função de utilidade quadrática e aversão ao risco $\gamma = 1$, estaria disposto a pagar em cada período para abandonar a alocação ingênua (1/N). $N_{95\%}$ é a quantidade média de ativos que concentram pelo menos 95% do patrimônio investido. As respectivas bases de dados, período de validação e número de observações mensais por ativo são os seguintes: Dow Jones ($N = 28$), Fev/1995-Abr/2016 (255); FF Industry ($N = 49$), Jan/1975-Dez/2019 (540); FF Size-B/M ($N = 96$), Jan/1975-Dez/2019 (540).

Tabela 38 – Segmentação do desempenho fora da amostra, apresentado na Tabela 37, em dois subperíodos. Ausência de custos de transação.

Estratégia	Dow Jones (N = 28)						FF Industry (N = 49)						FF Size-B/M (N = 96)					
	Fev/1995-Set/2005			Out/2005-Abr/2016			Jan/1975-Jun/1997			Jul/1997-Dez/2019			Jan/1975-Jun/1997			Jul/1997-Dez/2019		
	μ	σ	SR	μ	σ	SR	μ	σ	SR	μ	σ	SR	μ	σ	SR	μ	σ	SR
1/N	16,6	17,3	0,742	10,7	17,9	0,536	17,8	16,5	0,662	10,2	16	0,515	19,7	17	0,755	11,2	18	0,513
VW	10,7	16,8	0,412 (0,36)	6,7	16,8	0,332 (0,00)	16,7	15	0,654 (0,00)	9,1	15,4	0,466 (0,62)	16,7	15	0,654 (0,10)	9,1	15,4	0,466 (0,62)
<i>Painel A. Estratégias de seleção de portfólios presentes na literatura</i>																		
ERC	15,3	16,4 (0,01)	0,706 (0,37)	9,3	16 (0,00)	0,508 (0,42)	17,7	15,7 (0,00)	0,688 (0,16)	9,9	14,6 (0,00)	0,545 (0,20)	19,6	16,6 (0,00)	0,771 (0,28)	11,3	17,3 (0,00)	0,54 (0,09)
MDP	17	17,8 (0,70)	0,745 (0,98)	7,7	14,4 (0,00)	0,455 (0,48)	16,9	14,3 (0,00)	0,702 (0,72)	8,1	13,5 (0,00)	0,458 (0,59)	18	15,3 (0,00)	0,733 (0,79)	9,6	17,6 (0,64)	0,433 (0,35)
MIN	12,3	15,7 (0,15)	0,547 (0,18)	5,3	12,6 (0,00)	0,328 (0,19)	16,3	11,6 (0,00)	0,815 (0,37)	9,1	11,4 (0,00)	0,627 (0,38)	17,4	14,2 (0,00)	0,741 (0,91)	10,5	13,8 (0,00)	0,616 (0,30)
MV ($\gamma=5$)	19,7	21,7 (0,01)	0,732 (0,96)	12,5	17,9 (0,99)	0,634 (0,66)	17,7	16 (0,42)	0,674 (0,92)	10,4	16,1 (0,95)	0,522 (0,96)	17,8	16 (0,07)	0,687 (0,47)	10,7	15,5 (0,00)	0,563 (0,64)
<i>Painel B. Portfólios que utilizam estratégias do tipo Volatility Timing</i>																		
VT ($\eta=3$)	12,7	15,4 (0,01)	0,578 (0,20)	6,5	13,2 (0,00)	0,406 (0,25)	17,4	13,3 (0,00)	0,795 (0,15)	9,9	12,3 (0,00)	0,642 (0,12)	19,2	15,3 (0,00)	0,801 (0,29)	11,5	15,7 (0,00)	0,605 (0,07)
VT ($\eta=4$)	12,7	15,7 (0,05)	0,569 (0,25)	6,4	13,1 (0,00)	0,4 (0,32)	17,1	12,5 (0,00)	0,814 (0,24)	10	11,9 (0,00)	0,676 (0,11)	18,9	15 (0,00)	0,802 (0,37)	11,3	15,2 (0,00)	0,617 (0,09)
VT ($\eta=5$)	13	16,3 (0,28)	0,565 (0,31)	6,5	13,2 (0,00)	0,404 (0,40)	16,7	12,2 (0,00)	0,805 (0,36)	10,2	11,8 (0,00)	0,702 (0,10)	18,7	14,8 (0,00)	0,8 (0,48)	11,2	14,8 (0,00)	0,623 (0,12)
<i>Painel C. Portfólios que utilizam estratégias do tipo Reward-to-Risk Timing</i>																		
RRT (β^+ , $\eta=3$)	15,7	18,8 (0,24)	0,632 (0,54)	9,3	16,2 (0,16)	0,507 (0,79)	18,2	15,5 (0,00)	0,735 (0,28)	10,4	14,6 (0,00)	0,58 (0,36)	21,7	16,6 (0,03)	0,893 (0,00)	11,2	17,2 (0,00)	0,538 (0,62)
RRT (β^+ , $\eta=4$)	15,4	19,9 (0,11)	0,585 (0,43)	9,1	16,3 (0,23)	0,487 (0,69)	17,9	15,2 (0,00)	0,73 (0,42)	10,4	14,3 (0,00)	0,591 (0,33)	22	16,5 (0,03)	0,918 (0,00)	11,1	17,1 (0,00)	0,535 (0,69)
RRT (β^+ , $\eta=5$)	15,3	20,8 (0,07)	0,557 (0,38)	9	16,5 (0,36)	0,473 (0,64)	17,7	15,1 (0,00)	0,717 (0,59)	10,4	14,1 (0,00)	0,6 (0,34)	22,3	16,4 (0,03)	0,937 (0,00)	11,1	17,1 (0,00)	0,533 (0,73)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: As notas desta tabela são as mesmas apresentadas para a Tabela 37.

Tabela 39 – Regressões dos retornos em excesso ($r_i - r_f$), para avaliação fora da amostra de cada estratégia da Tabela 37, em relação aos modelos fatoriais referentes aos ativos da base de dados Dow Jones (N = 28); Fev/1995-Abr/2016, 255 meses. Ausência de custos de transação.

Estratégia	CAPM			FF3					FFC						FF5						
	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	SMB	HML	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	SMB	HML	Mom	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	SMB	HML	RMW	CMA	$R^2_{Aj.}$
1/N	0.35 (0.01)	0.91 (0.00)	0.64	0.315 (0.01)	0.98 (0.00)	-0.3 (0.00)	0.16 (0.04)	0.7	0.359 (0.00)	0.95 (0.00)	-0.3 (0.00)	0.14 (0.09)	-0.06 (0.12)	0.7	0.202 (0.15)	1.03 (0.00)	-0.23 (0.00)	0.16 (0.21)	0.25 (0.01)	-0.05 (0.74)	0.71
VW	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Painel A. Estratégias de seleção de portfólios presentes na literatura																					
ERC	0.297 (0.04)	0.81 (0.00)	0.61	0.265 (0.02)	0.89 (0.00)	-0.33 (0.00)	0.16 (0.04)	0.69	0.288 (0.02)	0.87 (0.00)	-0.33 (0.00)	0.15 (0.06)	-0.03 (0.41)	0.69	0.131 (0.33)	0.95 (0.00)	-0.24 (0.00)	0.14 (0.23)	0.27 (0.00)	-0.02 (0.85)	0.7
MDP	0.351 (0.04)	0.73 (0.00)	0.5	0.352 (0.02)	0.81 (0.00)	-0.43 (0.00)	0.05 (0.51)	0.6	0.357 (0.03)	0.81 (0.00)	-0.43 (0.00)	0.05 (0.56)	-0.01 (0.88)	0.59	0.238 (0.17)	0.87 (0.00)	-0.32 (0.00)	0.11 (0.38)	0.32 (0.00)	-0.18 (0.17)	0.62
MIN	0.165 (0.41)	0.57 (0.00)	0.38	0.146 (0.37)	0.65 (0.00)	-0.39 (0.00)	0.12 (0.15)	0.5	0.132 (0.43)	0.65 (0.00)	-0.4 (0.00)	0.12 (0.12)	0.02 (0.68)	0.5	-0.039 (0.83)	0.73 (0.00)	-0.29 (0.00)	0.06 (0.56)	0.33 (0.00)	0.05 (0.66)	0.52
MV ($\gamma=5$)	0.634 (0.01)	0.78 (0.00)	0.37	0.757 (0.00)	0.81 (0.00)	-0.44 (0.00)	-0.39 (0.00)	0.44	0.583 (0.01)	0.9 (0.00)	-0.47 (0.00)	-0.3 (0.00)	0.22 (0.00)	0.47	0.689 (0.01)	0.84 (0.00)	-0.26 (0.01)	-0.19 (0.24)	0.45 (0.00)	-0.59 (0.00)	0.49
Painel B. Portfólios que utilizam estratégias do tipo Volatility Timing																					
VT ($\eta=3$)	0.2 (0.31)	0.61 (0.00)	0.44	0.168 (0.26)	0.69 (0.00)	-0.34 (0.00)	0.16 (0.05)	0.54	0.155 (0.29)	0.69 (0.00)	-0.34 (0.00)	0.16 (0.04)	0.02 (0.71)	0.54	-0.022 (0.89)	0.78 (0.00)	-0.25 (0.00)	0.07 (0.55)	0.3 (0.00)	0.14 (0.28)	0.56
VT ($\eta=4$)	0.219 (0.29)	0.58 (0.00)	0.38	0.188 (0.25)	0.65 (0.00)	-0.33 (0.00)	0.15 (0.07)	0.48	0.172 (0.29)	0.66 (0.00)	-0.33 (0.00)	0.16 (0.05)	0.02 (0.65)	0.48	0.005 (0.98)	0.74 (0.00)	-0.24 (0.00)	0.07 (0.57)	0.29 (0.00)	0.13 (0.32)	0.49
VT ($\eta=5$)	0.248 (0.27)	0.56 (0.00)	0.34	0.216 (0.23)	0.63 (0.00)	-0.31 (0.00)	0.15 (0.07)	0.42	0.198 (0.26)	0.63 (0.00)	-0.32 (0.00)	0.16 (0.05)	0.02 (0.63)	0.42	0.044 (0.82)	0.71 (0.00)	-0.23 (0.00)	0.08 (0.52)	0.27 (0.01)	0.12 (0.40)	0.43
Painel C. Portfólios que utilizam estratégias do tipo Reward-to-Risk Timing																					
RRT ($\hat{\beta}^+$, $\eta=3$)	0.391 (0.06)	0.69 (0.00)	0.38	0.303 (0.08)	0.79 (0.00)	-0.33 (0.00)	0.35 (0.00)	0.49	0.299 (0.12)	0.79 (0.00)	-0.34 (0.00)	0.36 (0.00)	0.01 (0.94)	0.49	-0.012 (0.95)	0.94 (0.00)	-0.22 (0.04)	0.13 (0.30)	0.42 (0.00)	0.36 (0.03)	0.53
RRT ($\hat{\beta}^+$, $\eta=4$)	0.383 (0.08)	0.67 (0.00)	0.33	0.294 (0.11)	0.77 (0.00)	-0.35 (0.00)	0.36 (0.00)	0.44	0.295 (0.16)	0.77 (0.00)	-0.35 (0.00)	0.36 (0.00)	0 (0.99)	0.44	-0.032 (0.88)	0.93 (0.00)	-0.23 (0.04)	0.12 (0.35)	0.43 (0.00)	0.39 (0.03)	0.48
RRT ($\hat{\beta}^+$, $\eta=5$)	0.385 (0.10)	0.66 (0.00)	0.29	0.297 (0.13)	0.76 (0.00)	-0.36 (0.01)	0.36 (0.00)	0.41	0.302 (0.17)	0.76 (0.00)	-0.36 (0.01)	0.35 (0.01)	-0.01 (0.95)	0.4	-0.036 (0.87)	0.92 (0.00)	-0.24 (0.05)	0.11 (0.41)	0.44 (0.00)	0.4 (0.04)	0.44

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: O tamanho da janela de horizonte móvel de estimação considerada foi de $\tau = 60$ (5 anos). Valores de α positivos e significativos a 5% são destacados na tabela. Erros padrão ajustados pelo procedimento HAC de Newey-West (NEWNEY; WEST, 1987, 1994).

Tabela 40 – Regressões dos retornos em excesso ($r_i - r_f$), para avaliação fora da amostra de cada estratégia da Tabela 37, em relação aos modelos fatoriais referentes aos ativos da base de dados FF Industry (N = 49); Jan/1975-Dez/2019, 540 meses. Ausência de custos de transação.

Estratégia	CAPM			FF3					FFC					FF5							
	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	<i>SMB</i>	<i>HML</i>	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	<i>SMB</i>	<i>HML</i>	<i>Mom</i>	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	<i>SMB</i>	<i>HML</i>	<i>RMW</i>	<i>CMA</i>	$R^2_{Aj.}$
1/N	0,074 (0,29)	1,03 (0,00)	0,92	-0,016 (0,78)	1,03 (0,00)	0,15 (0,01)	0,2 (0,00)	0,94	0,025 (0,66)	1,02 (0,00)	0,16 (0,00)	0,18 (0,00)	-0,05 (0,14)	0,94	-0,163 (0,00)	1,06 (0,00)	0,26 (0,00)	0,11 (0,00)	0,29 (0,00)	0,11 (0,00)	0,96
VW	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Painel A. Estratégias de seleção de portfólios presentes na literatura																					
ERC	0,107 (0,12)	0,96 (0,00)	0,92	0,025 (0,66)	0,97 (0,00)	0,1 (0,06)	0,19 (0,00)	0,93	0,046 (0,42)	0,96 (0,00)	0,1 (0,04)	0,18 (0,00)	-0,03 (0,43)	0,93	-0,136 (0,00)	1,01 (0,00)	0,2 (0,00)	0,09 (0,00)	0,3 (0,00)	0,16 (0,00)	0,96
MDP	0,149 (0,16)	0,75 (0,00)	0,67	0,068 (0,51)	0,77 (0,00)	0,07 (0,05)	0,2 (0,00)	0,69	0,041 (0,68)	0,77 (0,00)	0,07 (0,07)	0,21 (0,00)	0,03 (0,31)	0,69	-0,095 (0,34)	0,82 (0,00)	0,13 (0,00)	0,02 (0,72)	0,21 (0,00)	0,36 (0,00)	0,71
MIN	0,274 (0,00)	0,59 (0,00)	0,61	0,207 (0,02)	0,65 (0,00)	-0,14 (0,00)	0,22 (0,00)	0,67	0,179 (0,06)	0,66 (0,00)	-0,14 (0,00)	0,23 (0,00)	0,03 (0,29)	0,67	0,092 (0,33)	0,69 (0,00)	-0,1 (0,00)	0,11 (0,02)	0,13 (0,00)	0,26 (0,00)	0,68
MV ($\gamma=5$)	0,191 (0,10)	0,86 (0,00)	0,67	0,256 (0,02)	0,85 (0,00)	-0,08 (0,05)	-0,16 (0,01)	0,68	0,034 (0,76)	0,91 (0,00)	-0,1 (0,01)	-0,04 (0,38)	0,28 (0,00)	0,74	0,127 (0,29)	0,89 (0,00)	-0,02 (0,74)	-0,22 (0,00)	0,23 (0,00)	0,14 (0,28)	0,69
Painel B. Portfólios que utilizam estratégias do tipo Volatility Timing																					
VT ($\eta=3$)	0,22 (0,00)	0,78 (0,00)	0,85	0,156 (0,01)	0,82 (0,00)	-0,06 (0,09)	0,19 (0,00)	0,87	0,151 (0,02)	0,82 (0,00)	-0,06 (0,11)	0,19 (0,00)	0,01 (0,87)	0,87	0,024 (0,70)	0,85 (0,00)	0,01 (0,75)	0,11 (0,00)	0,23 (0,00)	0,16 (0,00)	0,89
VT ($\eta=4$)	0,263 (0,00)	0,7 (0,00)	0,76	0,198 (0,01)	0,75 (0,00)	-0,11 (0,00)	0,2 (0,00)	0,8	0,189 (0,01)	0,76 (0,00)	-0,11 (0,00)	0,21 (0,00)	0,01 (0,73)	0,8	0,089 (0,23)	0,79 (0,00)	-0,06 (0,05)	0,14 (0,00)	0,17 (0,00)	0,16 (0,01)	0,81
VT ($\eta=5$)	0,297 (0,00)	0,64 (0,00)	0,67	0,228 (0,01)	0,7 (0,00)	-0,15 (0,00)	0,22 (0,00)	0,72	0,215 (0,01)	0,71 (0,00)	-0,15 (0,00)	0,23 (0,00)	0,02 (0,66)	0,72	0,136 (0,11)	0,73 (0,00)	-0,11 (0,00)	0,16 (0,00)	0,12 (0,01)	0,17 (0,02)	0,73
Painel C. Portfólios que utilizam estratégias do tipo Reward-to-Risk Timing																					
RRT ($\tilde{\beta}^+$, $\eta=3$)	0,192 (0,04)	0,9 (0,00)	0,82	0,058 (0,46)	0,94 (0,00)	0,05 (0,35)	0,35 (0,00)	0,87	0,063 (0,42)	0,94 (0,00)	0,05 (0,32)	0,34 (0,00)	-0,01 (0,84)	0,87	-0,176 (0,01)	1 (0,00)	0,18 (0,00)	0,18 (0,00)	0,41 (0,00)	0,28 (0,00)	0,91
RRT ($\tilde{\beta}^+$, $\eta=4$)	0,205 (0,03)	0,86 (0,00)	0,79	0,07 (0,41)	0,91 (0,00)	0,02 (0,70)	0,36 (0,00)	0,84	0,074 (0,39)	0,91 (0,00)	0,02 (0,68)	0,35 (0,00)	0 (0,88)	0,84	-0,16 (0,03)	0,97 (0,00)	0,14 (0,00)	0,19 (0,00)	0,39 (0,00)	0,31 (0,00)	0,88
RRT ($\tilde{\beta}^+$, $\eta=5$)	0,215 (0,03)	0,83 (0,00)	0,75	0,081 (0,38)	0,89 (0,00)	-0,01 (0,90)	0,36 (0,00)	0,81	0,086 (0,36)	0,89 (0,00)	-0,01 (0,90)	0,36 (0,00)	-0,01 (0,85)	0,81	-0,143 (0,09)	0,95 (0,00)	0,11 (0,01)	0,19 (0,00)	0,36 (0,00)	0,33 (0,00)	0,84

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: O tamanho da janela de horizonte móvel de estimação considerada foi de $\tau = 60$ (5 anos). Valores de α positivos e significativos a 5% são destacados na tabela. Erros padrão ajustados pelo procedimento HAC de Newey-West (NEWKEY; WEST, 1987, 1994).

Tabela 41 – Regressões dos retornos em excesso ($r_i - r_f$), para avaliação fora da amostra de cada estratégia da Tabela 37, em relação aos modelos fatoriais referentes aos ativos da base de dados FF Size-B/M (N = 96); Jan/1975-Dez/2019, 540 meses. Ausência de custos de transação.

Estratégia	CAPM			FF3					FFC					FF5							
	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	<i>SMB</i>	<i>HML</i>	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	<i>SMB</i>	<i>HML</i>	<i>Mom</i>	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	<i>SMB</i>	<i>HML</i>	<i>RMW</i>	<i>CMA</i>	$R^2_{Aj.}$
1/N	0,156 (0,05)	1,08 (0,00)	0,88	-0,001 (0,99)	1,03 (0,00)	0,55 (0,00)	0,28 (0,00)	0,99	0,025 (0,40)	1,02 (0,00)	0,55 (0,00)	0,27 (0,00)	-0,03 (0,06)	0,99	-0,022 (0,29)	1,02 (0,00)	0,58 (0,00)	0,19 (0,00)	0,06 (0,05)	0,04 (0,20)	0,99
VW	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Painel A. Estratégias de seleção de portfólios presentes na literatura																					
ERC	0,179 (0,02)	1,05 (0,00)	0,89	0,02 (0,57)	1,01 (0,00)	0,47 (0,00)	0,31 (0,00)	0,98	0,039 (0,26)	1,01 (0,00)	0,47 (0,00)	0,3 (0,00)	-0,02 (0,27)	0,98	-0,027 (0,25)	1,02 (0,00)	0,51 (0,00)	0,21 (0,00)	0,1 (0,00)	0,05 (0,13)	0,99
MDP	0,076 (0,44)	1 (0,00)	0,85	-0,078 (0,24)	1,03 (0,00)	0,17 (0,00)	0,37 (0,00)	0,91	-0,05 (0,47)	1,02 (0,00)	0,17 (0,00)	0,36 (0,00)	-0,03 (0,22)	0,91	-0,059 (0,37)	1,02 (0,00)	0,17 (0,00)	0,37 (0,00)	-0,02 (0,69)	-0,04 (0,45)	0,91
MIN	0,193 (0,01)	0,85 (0,00)	0,85	0,109 (0,14)	0,89 (0,00)	-0,04 (0,23)	0,24 (0,00)	0,88	0,071 (0,33)	0,9 (0,00)	-0,04 (0,20)	0,26 (0,00)	0,05 (0,10)	0,88	0,015 (0,83)	0,92 (0,00)	0 (0,92)	0,16 (0,00)	0,13 (0,00)	0,17 (0,00)	0,88
MV ($\gamma=5$)	0,173 (0,09)	0,92 (0,00)	0,78	0,05 (0,57)	0,92 (0,00)	0,22 (0,00)	0,27 (0,00)	0,82	-0,063 (0,48)	0,95 (0,00)	0,21 (0,00)	0,33 (0,00)	0,14 (0,00)	0,84	-0,037 (0,68)	0,95 (0,00)	0,26 (0,00)	0,16 (0,00)	0,13 (0,00)	0,17 (0,02)	0,83
Painel B. Portfólios que utilizam estratégias do tipo Volatility Timing																					
VT ($\eta=3$)	0,224 (0,00)	0,97 (0,00)	0,9	0,078 (0,11)	0,97 (0,00)	0,26 (0,00)	0,33 (0,00)	0,96	0,08 (0,08)	0,97 (0,00)	0,26 (0,00)	0,32 (0,00)	0 (0,94)	0,96	-0,016 (0,68)	0,99 (0,00)	0,32 (0,00)	0,23 (0,00)	0,17 (0,00)	0,11 (0,02)	0,97
VT ($\eta=4$)	0,226 (0,00)	0,94 (0,00)	0,9	0,092 (0,09)	0,96 (0,00)	0,19 (0,00)	0,31 (0,00)	0,95	0,087 (0,08)	0,96 (0,00)	0,19 (0,00)	0,31 (0,00)	0,01 (0,84)	0,95	-0,009 (0,84)	0,98 (0,00)	0,25 (0,00)	0,21 (0,00)	0,18 (0,00)	0,13 (0,01)	0,96
VT ($\eta=5$)	0,226 (0,00)	0,92 (0,00)	0,89	0,104 (0,08)	0,94 (0,00)	0,13 (0,01)	0,3 (0,00)	0,93	0,092 (0,09)	0,94 (0,00)	0,13 (0,01)	0,3 (0,00)	0,01 (0,65)	0,93	-0,002 (0,96)	0,97 (0,00)	0,19 (0,00)	0,2 (0,00)	0,18 (0,00)	0,15 (0,01)	0,94
Painel C. Portfólios que utilizam estratégias do tipo Reward-to-Risk Timing																					
RRT ($\bar{\beta}^+$, $\eta=3$)	0,294 (0,00)	1 (0,00)	0,81	0,059 (0,15)	0,99 (0,00)	0,5 (0,00)	0,51 (0,00)	0,96	0,068 (0,09)	0,99 (0,00)	0,5 (0,00)	0,5 (0,00)	-0,01 (0,75)	0,96	-0,043 (0,22)	1,01 (0,00)	0,58 (0,00)	0,38 (0,00)	0,21 (0,00)	0,1 (0,06)	0,97
RRT ($\bar{\beta}^+$, $\eta=4$)	0,312 (0,00)	0,99 (0,00)	0,8	0,071 (0,10)	0,98 (0,00)	0,5 (0,00)	0,52 (0,00)	0,95	0,076 (0,08)	0,98 (0,00)	0,5 (0,00)	0,52 (0,00)	-0,01 (0,85)	0,95	-0,034 (0,38)	1 (0,00)	0,58 (0,00)	0,39 (0,00)	0,22 (0,00)	0,1 (0,06)	0,97
RRT ($\bar{\beta}^+$, $\eta=5$)	0,326 (0,00)	0,98 (0,00)	0,79	0,082 (0,08)	0,98 (0,00)	0,49 (0,00)	0,53 (0,00)	0,95	0,084 (0,07)	0,98 (0,00)	0,49 (0,00)	0,53 (0,00)	0 (0,93)	0,95	-0,026 (0,55)	1 (0,00)	0,57 (0,00)	0,4 (0,00)	0,22 (0,00)	0,1 (0,06)	0,96

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: O tamanho da janela de horizonte móvel de estimação considerada foi de $\tau = 60$ (5 anos). Valores de α positivos e significativos a 5% são destacados na tabela. Erros padrão ajustados pelo procedimento HAC de Newey-West (NEWKEY; WEST, 1987, 1994).

Os resultados, análogos ao da Tabela 37, são apresentados na Tabela 42 utilizando a matriz de covariâncias encolhida não-linearmente. Não são identificadas diferenças de desempenho consistentes em termos de média, volatilidade e índice de Sharpe quando se comparam as Tabelas 37 e 42. O mesmo se repete quando é avaliado o desempenho dos períodos segmentados das Tabelas 38 e 43. Entretanto, detectou-se que houve na Tabela 42 um impacto sobre as técnicas VT e RRT no sentido de promover o aumento do índice de diversificação, do *turnover* e do número de ativos presentes na carteira.

O desempenho ajustado ao risco referente à Tabela 42 foi avaliado na ausência de custos de transações e apresentado nas Tabelas 44, 45 e 46 referentes às bases de dados Dow Jones ($N = 28$), FF Industry ($N = 49$) e FF Size-B/M ($N = 96$), respectivamente. A consequência aparente do encolhimento não-linear foi uma ligeira redução do intercepto provavelmente causado pelo aumento do *turnover*.

Tabela 42 – Avaliação do desempenho fora da amostra das estratégias VT e RRT ($\bar{\beta}^+$) ao utilizar como insumo a matriz de covariâncias encolhida não-linearmente (LEDOIT; WOLF, 2020). Ausência de custos de transação.

Estratégia	Dow Jones ($N = 28$)							FF Industry ($N = 49$)							FF Size-B/M ($N = 96$)						
	μ	σ	SR	DR	$ \overline{\Delta x} $	κ_1	$N_{95\%}$	μ	σ	SR	DR	$ \overline{\Delta x} $	κ_1	$N_{95\%}$	μ	σ	SR	DR	$ \overline{\Delta x} $	κ_1	$N_{95\%}$
1/N	13,7	17,6	0,638	1,69	4,7	0	27	14	16,3	0,589	1,36	3,1	0	47	15,4	17,5	0,629	1,16	2,2	0	92
VW	8,7	16,8 (0,07)	0,373 (0,00)			-472		12,9	15,2 (0,00)	0,557 (0,53)			-94		12,9	15,2 (0,00)	0,557 (0,20)			-213	
<i>Painel A. Estratégias de seleção de portfólios presentes na literatura</i>																					
ERC	12,4	16,3 (0,00)	0,613 (0,30)	1,78	5,7	-101	26	13,8	15,2 (0,00)	0,617 (0,06)	1,43	3,9	-5	46	15,5	17 (0,00)	0,651 (0,01)	1,17	2,6	12	89
MDP	12,3	16 (0,14)	0,616 (0,79)	2,03	14,9	-109	13	12,5	13,8 (0,00)	0,588 (1,00)	1,85	13,9	-111	9	14	16,1 (0,00)	0,592 (0,54)	1,37	16,4	-123	9
MIN	9,5	14,4 (0,01)	0,487 (0,11)	1,87	13,3	-362	11	12,6	11,7 (0,00)	0,697 (0,26)	1,59	12,9	-77	8	13,6	14 (0,00)	0,656 (0,72)	1,23	15,7	-127	6
MV ($\gamma=5$)	16,8	20,4 (0,10)	0,706 (0,64)	1,55	23,3	266	6	13,8	16 (0,49)	0,585 (0,97)	1,39	27,7	-21	5	14	15,8 (0,00)	0,61 (0,80)	1,17	31,5	-109	4
<i>Painel B. Portfólios que utilizam estratégias do tipo Volatility Timing</i>																					
VT ($\eta=3$)	9,8	14,5 (0,00)	0,51 (0,07)	1,66	7,8	-327	19	13,6	13,1 (0,00)	0,704 (0,03)	1,35	7	10	34	15,2	15,6 (0,00)	0,691 (0,05)	1,17	5,8	6	73
VT ($\eta=4$)	9,5	14,4 (0,00)	0,493 (0,10)	1,62	9,5	-356	16	13,5	12,4 (0,00)	0,732 (0,04)	1,35	8,8	5	28	14,9	15,1 (0,00)	0,695 (0,11)	1,18	7,4	-12	64
VT ($\eta=5$)	9,5	14,5 (0,00)	0,484 (0,12)	1,55	11	-365	13	13,4	12 (0,00)	0,746 (0,06)	1,32	10,2	-4	21	14,7	14,8 (0,00)	0,694 (0,19)	1,18	9	-31	54
<i>Painel C. Portfólios que utilizam estratégias do tipo Reward-to-Risk Timing</i>																					
RRT ($\bar{\beta}^+$, $\eta=3$)	13,6	17,9 (0,75)	0,622 (0,87)	1,47	22,4	-13	11	14,2	15,3 (0,00)	0,635 (0,34)	1,29	14,2	29	24	16,4	17 (0,00)	0,704 (0,02)	1,14	10,4	104	58
RRT ($\bar{\beta}^+$, $\eta=4$)	13,4	18,6 (0,42)	0,588 (0,68)	1,41	25,8	-45	9	13,9	15,1 (0,00)	0,626 (0,55)	1,27	16,8	4	19	16,5	16,9 (0,00)	0,714 (0,01)	1,13	12,9	119	49
RRT ($\bar{\beta}^+$, $\eta=5$)	13,3	19,3 (0,28)	0,561 (0,56)	1,36	28,4	-72	7	13,6	15 (0,00)	0,612 (0,75)	1,25	19	-23	15	16,6	16,9 (0,00)	0,723 (0,01)	1,13	15,2	133	42

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: O tamanho da janela de horizonte móvel de estimação considerada foi de $\tau = 60$ (5 anos). As estratégias ENT+ utilizaram índices de incerteza individuais construídos com $\nu = 0,8$. As medidas de média (μ) e desvio padrão (σ) são percentuais e anualizados. Abaixo da estimativa de σ é apresentado o valor-p do teste de hipótese ($H_0 : \log(\sigma^2/\sigma_{1/N}^2) = 0$) entre parêntesis. O índice de Sharpe (SR) é anualizado, e o valor-p do teste de hipótese ($H_0 : (SR - SR_{1/N}) = 0$) é apresentado entre parêntesis. O índice de diversificação (DR) reportado é a média dos índices para cada janela de estimação. O *turnover* ($|\overline{\Delta x}|$) é informado em termos percentuais. κ_1 (κ_γ) é a taxa máxima anualizada que um investidor, com função de utilidade quadrática e aversão ao risco $\gamma = 1$, estaria disposto a pagar em cada período para abandonar a alocação ingênua (1/N). $N_{95\%}$ é a quantidade média de ativos que concentram pelo menos 95% do patrimônio investido. As respectivas bases de dados, período de validação e número de observações mensais por ativo são os seguintes: Dow Jones ($N = 28$), Feb/1995-Abr/2016 (255); FF Industry ($N = 49$), Jan/1975-Dez/2019 (540); FF Size-B/M ($N = 96$), Jan/1975-Dez/2019 (540).

Tabela 43 – Segmentação do desempenho fora da amostra, apresentado na Tabela 42, em dois subperíodos. Ausência de custos de transação.

Estratégia	Dow Jones (N = 28)						FF Industry (N = 49)						FF Size-B/M (N = 96)					
	Fev/1995-Set/2005			Out/2005-Abr/2016			Jan/1975-Jun/1997			Jul/1997-Dez/2019			Jan/1975-Jun/1997			Jul/1997-Dez/2019		
	μ	σ	SR	μ	σ	SR	μ	σ	SR	μ	σ	SR	μ	σ	SR	μ	σ	SR
1/N	16,6	17,3	0,742	10,7	17,9	0,536	17,8	16,5	0,662	10,2	16	0,515	19,7	17	0,755	11,2	18	0,513
VW	10,7	16,8	0,412 (0,36) (0,00)	6,7	16,8	0,332 (0,19) (0,00)	16,7	15	0,654 (0,00) (0,83)	9,1	15,4	0,466 (0,29) (0,62)	16,7	15	0,654 (0,00) (0,10)	9,1	15,4	0,466 (0,00) (0,62)
<i>Painel A. Estratégias de seleção de portfólios presentes na literatura</i>																		
ERC	15,6	16,5	0,716 (0,01) (0,47)	9,3	16,1	0,506 (0,00) (0,40)	17,7	15,7	0,688 (0,00) (0,26)	9,9	14,6	0,544 (0,00) (0,20)	19,6	16,6	0,771 (0,00) (0,26)	11,3	17,3	0,539 (0,00) (0,08)
MDP	17,4	17,6	0,774 (0,82) (0,78)	7,2	14,1	0,429 (0,00) (0,37)	16,8	14,1	0,702 (0,00) (0,73)	8,3	13,4	0,471 (0,00) (0,70)	18,3	14,9	0,764 (0,00) (0,92)	9,7	17,2	0,447 (0,27) (0,45)
MIN	13,8	15,9	0,63 (0,24) (0,40)	5,2	12,7	0,316 (0,00) (0,13)	16,5	11,8	0,814 (0,00) (0,32)	8,7	11,6	0,583 (0,00) (0,57)	17,1	14,2	0,724 (0,00) (0,80)	10,1	13,8	0,589 (0,00) (0,44)
MV ($\gamma=5$)	20,8	21,7	0,783 (0,01) (0,85)	12,9	18,9	0,62 (0,72) (0,69)	17,3	15,9	0,655 (0,33) (0,97)	10,2	16	0,516 (0,93) (0,99)	17,4	16,1	0,65 (0,15) (0,31)	10,7	15,4	0,569 (0,00) (0,59)
<i>Painel B. Portfólios que utilizam estratégias do tipo Volatility Timing</i>																		
VT ($\eta=3$)	13,1	15,4	0,603 (0,01) (0,23)	6,6	13,5	0,406 (0,00) (0,17)	17,5	13,5	0,787 (0,00) (0,12)	9,8	12,6	0,62 (0,00) (0,16)	19,1	15,3	0,797 (0,00) (0,32)	11,3	15,8	0,591 (0,00) (0,11)
VT ($\eta=4$)	12,9	15,5	0,59 (0,03) (0,28)	6,1	13,1	0,382 (0,00) (0,17)	17,2	12,7	0,815 (0,00) (0,17)	9,8	12,1	0,649 (0,00) (0,14)	18,7	14,9	0,796 (0,00) (0,47)	11,1	15,3	0,598 (0,00) (0,16)
VT ($\eta=5$)	13	15,8	0,584 (0,10) (0,32)	5,9	13	0,367 (0,00) (0,20)	16,9	12,2	0,82 (0,00) (0,28)	9,9	11,8	0,673 (0,00) (0,13)	18,5	14,7	0,792 (0,00) (0,60)	10,9	14,9	0,599 (0,00) (0,21)
<i>Painel C. Portfólios que utilizam estratégias do tipo Reward-to-Risk Timing</i>																		
RRT ($\bar{\beta}^+$, $\eta=3$)	17,2	19	0,705 (0,26) (0,85)	10	16,7	0,529 (0,34) (0,95)	17,9	15,5	0,717 (0,00) (0,43)	10,4	15,1	0,554 (0,01) (0,59)	21,6	16,6	0,89 (0,03) (0,00)	11,1	17,3	0,53 (0,00) (0,73)
RRT ($\bar{\beta}^+$, $\eta=4$)	17	20,2	0,657 (0,13) (0,67)	9,8	16,9	0,51 (0,43) (0,84)	17,4	15,2	0,696 (0,00) (0,70)	10,3	15	0,556 (0,01) (0,62)	21,9	16,5	0,914 (0,03) (0,00)	11,1	17,3	0,528 (0,00) (0,76)
RRT ($\bar{\beta}^+$, $\eta=5$)	16,9	21,3	0,618 (0,08) (0,55)	9,6	17,1	0,495 (0,58) (0,78)	16,9	15,1	0,665 (0,00) (0,98)	10,3	14,9	0,558 (0,01) (0,62)	22,2	16,5	0,933 (0,04) (0,00)	11,1	17,2	0,529 (0,00) (0,76)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: As notas desta tabela são as mesmas apresentadas para a Tabela 42.

Tabela 44 – Regressões dos retornos em excesso ($r_i - r_f$), para avaliação fora da amostra de cada estratégia da Tabela 42, em relação aos modelos fatoriais referentes aos ativos da base de dados Dow Jones (N = 28); Fev/1995-Abr/2016, 255 meses. Ausência de custos de transação.

Estratégia	CAPM			FF3					FFC						FF5						
	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	<i>SMB</i>	<i>HML</i>	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	<i>SMB</i>	<i>HML</i>	<i>Mom</i>	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	<i>SMB</i>	<i>HML</i>	<i>RMW</i>	<i>CMA</i>	$R^2_{Aj.}$
1/N	0,35 (0,01)	0,91 (0,00)	0,64	0,315 (0,01)	0,98 (0,00)	-0,3 (0,00)	0,16 (0,04)	0,7	0,359 (0,00)	0,95 (0,00)	-0,3 (0,00)	0,14 (0,09)	-0,06 (0,12)	0,7	0,202 (0,15)	1,03 (0,00)	-0,23 (0,00)	0,16 (0,21)	0,25 (0,01)	-0,05 (0,74)	0,71
VW	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>Painel A. Estratégias de seleção de portfólios presentes na literatura</i>																					
ERC	0,303 (0,03)	0,82 (0,00)	0,61	0,272 (0,02)	0,89 (0,00)	-0,33 (0,00)	0,15 (0,05)	0,69	0,297 (0,01)	0,88 (0,00)	-0,33 (0,00)	0,14 (0,08)	-0,03 (0,39)	0,69	0,144 (0,29)	0,95 (0,00)	-0,25 (0,00)	0,14 (0,23)	0,27 (0,00)	-0,03 (0,78)	0,7
MDP	0,358 (0,04)	0,72 (0,00)	0,49	0,356 (0,02)	0,8 (0,00)	-0,44 (0,00)	0,06 (0,46)	0,59	0,348 (0,04)	0,8 (0,00)	-0,44 (0,00)	0,06 (0,44)	0,01 (0,81)	0,59	0,226 (0,19)	0,86 (0,00)	-0,32 (0,00)	0,11 (0,40)	0,34 (0,00)	-0,16 (0,21)	0,62
MIN	0,196 (0,33)	0,6 (0,00)	0,42	0,183 (0,23)	0,69 (0,00)	-0,42 (0,00)	0,1 (0,22)	0,55	0,168 (0,29)	0,69 (0,00)	-0,42 (0,00)	0,11 (0,18)	0,02 (0,65)	0,55	0,004 (0,98)	0,77 (0,00)	-0,3 (0,00)	0,07 (0,54)	0,35 (0,00)	0 (0,99)	0,58
MV ($\gamma=5$)	0,68 (0,01)	0,8 (0,00)	0,37	0,799 (0,00)	0,84 (0,00)	-0,43 (0,00)	-0,37 (0,00)	0,44	0,63 (0,01)	0,92 (0,00)	-0,46 (0,00)	-0,29 (0,01)	0,22 (0,00)	0,47	0,737 (0,00)	0,86 (0,00)	-0,25 (0,01)	-0,18 (0,29)	0,44 (0,00)	-0,59 (0,00)	0,49
<i>Painel B. Portfólios que utilizam estratégias do tipo Volatility Timing</i>																					
VT ($\eta=3$)	0,201 (0,26)	0,64 (0,00)	0,47	0,166 (0,23)	0,72 (0,00)	-0,35 (0,00)	0,17 (0,03)	0,59	0,157 (0,25)	0,73 (0,00)	-0,35 (0,00)	0,17 (0,03)	0,01 (0,78)	0,58	-0,022 (0,88)	0,81 (0,00)	-0,26 (0,00)	0,09 (0,42)	0,31 (0,00)	0,11 (0,36)	0,6
VT ($\eta=4$)	0,202 (0,31)	0,6 (0,00)	0,42	0,167 (0,27)	0,68 (0,00)	-0,35 (0,00)	0,17 (0,04)	0,53	0,154 (0,30)	0,69 (0,00)	-0,35 (0,00)	0,17 (0,03)	0,02 (0,69)	0,53	-0,02 (0,90)	0,77 (0,00)	-0,25 (0,00)	0,08 (0,46)	0,3 (0,00)	0,12 (0,34)	0,55
VT ($\eta=5$)	0,214 (0,31)	0,57 (0,00)	0,38	0,179 (0,27)	0,65 (0,00)	-0,33 (0,00)	0,17 (0,04)	0,48	0,164 (0,31)	0,66 (0,00)	-0,34 (0,00)	0,17 (0,03)	0,02 (0,66)	0,48	-0,001 (0,99)	0,73 (0,00)	-0,25 (0,00)	0,09 (0,45)	0,29 (0,00)	0,12 (0,37)	0,49
<i>Painel C. Portfólios que utilizam estratégias do tipo Reward-to-Risk Timing</i>																					
RRT ($\bar{\beta}^+$, $\eta=3$)	0,465 (0,03)	0,72 (0,00)	0,39	0,368 (0,03)	0,82 (0,00)	-0,34 (0,00)	0,38 (0,00)	0,52	0,363 (0,06)	0,82 (0,00)	-0,35 (0,00)	0,39 (0,00)	0,01 (0,93)	0,51	0,064 (0,73)	0,96 (0,00)	-0,22 (0,04)	0,18 (0,11)	0,44 (0,00)	0,3 (0,06)	0,55
RRT ($\bar{\beta}^+$, $\eta=4$)	0,46 (0,04)	0,7 (0,00)	0,34	0,36 (0,05)	0,81 (0,00)	-0,37 (0,00)	0,4 (0,00)	0,47	0,36 (0,07)	0,81 (0,00)	-0,37 (0,01)	0,4 (0,00)	0 (1,00)	0,47	0,053 (0,79)	0,95 (0,00)	-0,24 (0,04)	0,2 (0,09)	0,44 (0,00)	0,29 (0,08)	0,5
RRT ($\bar{\beta}^+$, $\eta=5$)	0,457 (0,06)	0,69 (0,00)	0,31	0,356 (0,07)	0,8 (0,00)	-0,39 (0,01)	0,41 (0,00)	0,44	0,36 (0,09)	0,8 (0,00)	-0,39 (0,01)	0,41 (0,00)	-0,01 (0,95)	0,44	0,048 (0,83)	0,95 (0,00)	-0,26 (0,04)	0,22 (0,08)	0,45 (0,00)	0,29 (0,12)	0,46

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: O tamanho da janela de horizonte móvel de estimação considerada foi de $\tau = 60$ (5 anos). Valores de α positivos e significativos a 5% são destacados na tabela. Erros padrão ajustados pelo procedimento HAC de Newey-West (NEWNEY; WEST, 1987, 1994).

Tabela 45 – Regressões dos retornos em excesso ($r_i - r_f$), para avaliação fora da amostra de cada estratégia da Tabela 42, em relação aos modelos fatoriais referentes aos ativos da base de dados FF Industry (N = 49); Jan/1975-Dez/2019, 540 meses. Ausência de custos de transação.

Estratégia	CAPM			FF3					FFC						FF5						
	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	SMB	HML	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	SMB	HML	Mom	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	SMB	HML	RMW	CMA	$R^2_{Aj.}$
1/N	0,074 (0,29)	1,03 (0,00)	0,92	-0,016 (0,78)	1,03 (0,00)	0,15 (0,01)	0,2 (0,00)	0,94	0,025 (0,66)	1,02 (0,00)	0,16 (0,00)	0,18 (0,00)	-0,05 (0,14)	0,94	-0,163 (0,00)	1,06 (0,00)	0,26 (0,00)	0,11 (0,00)	0,29 (0,00)	0,11 (0,00)	0,96
VW	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Painel A. Estratégias de seleção de portfólios presentes na literatura																					
ERC	0,106 (0,12)	0,95 (0,00)	0,92	0,025 (0,67)	0,97 (0,00)	0,1 (0,05)	0,19 (0,00)	0,93	0,045 (0,42)	0,96 (0,00)	0,1 (0,03)	0,18 (0,00)	-0,03 (0,43)	0,93	-0,136 (0,00)	1,01 (0,00)	0,2 (0,00)	0,09 (0,00)	0,3 (0,00)	0,16 (0,00)	0,95
MDP	0,166 (0,12)	0,72 (0,00)	0,64	0,088 (0,40)	0,74 (0,00)	0,06 (0,13)	0,2 (0,00)	0,65	0,065 (0,53)	0,75 (0,00)	0,05 (0,16)	0,21 (0,00)	0,03 (0,41)	0,65	-0,062 (0,55)	0,79 (0,00)	0,11 (0,02)	0,02 (0,67)	0,18 (0,00)	0,35 (0,00)	0,67
MIN	0,245 (0,01)	0,62 (0,00)	0,65	0,18 (0,05)	0,67 (0,00)	-0,12 (0,00)	0,2 (0,00)	0,69	0,152 (0,11)	0,68 (0,00)	-0,12 (0,00)	0,22 (0,00)	0,03 (0,26)	0,69	0,06 (0,52)	0,71 (0,00)	-0,08 (0,02)	0,09 (0,07)	0,14 (0,00)	0,29 (0,00)	0,7
MV ($\gamma=5$)	0,172 (0,13)	0,86 (0,00)	0,67	0,228 (0,04)	0,85 (0,00)	-0,06 (0,12)	-0,14 (0,02)	0,68	0,014 (0,90)	0,9 (0,00)	-0,08 (0,02)	-0,03 (0,56)	0,27 (0,00)	0,73	0,099 (0,39)	0,88 (0,00)	0 (0,94)	-0,21 (0,00)	0,23 (0,00)	0,14 (0,27)	0,69
Painel B. Portfólios que utilizam estratégias do tipo Volatility Timing																					
VT ($\eta=3$)	0,201 (0,00)	0,8 (0,00)	0,87	0,135 (0,03)	0,84 (0,00)	-0,05 (0,24)	0,19 (0,00)	0,9	0,132 (0,03)	0,84 (0,00)	-0,05 (0,26)	0,19 (0,00)	0 (0,92)	0,9	-0,005 (0,93)	0,88 (0,00)	0,03 (0,19)	0,1 (0,00)	0,24 (0,00)	0,17 (0,00)	0,91
VT ($\eta=4$)	0,238 (0,00)	0,73 (0,00)	0,81	0,173 (0,01)	0,78 (0,00)	-0,09 (0,01)	0,2 (0,00)	0,84	0,166 (0,02)	0,78 (0,00)	-0,09 (0,01)	0,2 (0,00)	0,01 (0,75)	0,84	0,052 (0,43)	0,81 (0,00)	-0,03 (0,22)	0,12 (0,00)	0,19 (0,00)	0,18 (0,00)	0,86
VT ($\eta=5$)	0,27 (0,00)	0,67 (0,00)	0,73	0,203 (0,01)	0,73 (0,00)	-0,13 (0,00)	0,21 (0,00)	0,78	0,192 (0,01)	0,73 (0,00)	-0,13 (0,00)	0,22 (0,00)	0,01 (0,66)	0,78	0,098 (0,20)	0,76 (0,00)	-0,08 (0,01)	0,14 (0,00)	0,15 (0,00)	0,18 (0,00)	0,79
Painel C. Portfólios que utilizam estratégias do tipo Reward-to-Risk Timing																					
RRT ($\bar{\beta}^+$, $\eta=3$)	0,169 (0,09)	0,91 (0,00)	0,81	0,024 (0,77)	0,95 (0,00)	0,07 (0,20)	0,37 (0,00)	0,87	0,033 (0,69)	0,95 (0,00)	0,07 (0,17)	0,37 (0,00)	-0,01 (0,75)	0,87	-0,218 (0,00)	1,01 (0,00)	0,21 (0,00)	0,2 (0,00)	0,43 (0,00)	0,29 (0,00)	0,91
RRT ($\bar{\beta}^+$, $\eta=4$)	0,169 (0,10)	0,87 (0,00)	0,78	0,02 (0,82)	0,93 (0,00)	0,05 (0,37)	0,39 (0,00)	0,84	0,03 (0,75)	0,92 (0,00)	0,05 (0,33)	0,38 (0,00)	-0,01 (0,74)	0,84	-0,219 (0,01)	0,99 (0,00)	0,18 (0,00)	0,21 (0,00)	0,4 (0,00)	0,32 (0,00)	0,88
RRT ($\bar{\beta}^+$, $\eta=5$)	0,165 (0,13)	0,85 (0,00)	0,74	0,014 (0,89)	0,9 (0,00)	0,03 (0,58)	0,4 (0,00)	0,8	0,026 (0,80)	0,9 (0,00)	0,03 (0,54)	0,39 (0,00)	-0,01 (0,67)	0,8	-0,221 (0,01)	0,97 (0,00)	0,15 (0,00)	0,21 (0,00)	0,38 (0,00)	0,34 (0,00)	0,84

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: O tamanho da janela de horizonte móvel de estimação considerada foi de $\tau = 60$ (5 anos). Valores de α positivos e significativos a 5% são destacados na tabela. Erros padrão ajustados pelo procedimento HAC de Newey-West (NEWKEY; WEST, 1987, 1994).

Tabela 46 – Regressões dos retornos em excesso ($r_i - r_f$), para avaliação fora da amostra de cada estratégia da Tabela 42, em relação aos modelos fatoriais referentes aos ativos da base de dados FF Size-B/M (N = 96); Jan/1975-Dez/2019, 540 meses. Ausência de custos de transação.

Estratégia	CAPM			FF3					FFC						FF5						
	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	<i>SMB</i>	<i>HML</i>	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	<i>SMB</i>	<i>HML</i>	<i>Mom</i>	$R^2_{Aj.}$	$\alpha(\%)$	$R_M - r_f$	<i>SMB</i>	<i>HML</i>	<i>RMW</i>	<i>CMA</i>	$R^2_{Aj.}$
1/N	0,156 (0,05)	1,08 (0,00)	0,88	-0,001 (0,99)	1,03 (0,00)	0,55 (0,00)	0,28 (0,00)	0,99	0,025 (0,40)	1,02 (0,00)	0,55 (0,00)	0,27 (0,00)	-0,03 (0,06)	0,99	-0,022 (0,29)	1,02 (0,00)	0,58 (0,00)	0,19 (0,00)	0,06 (0,05)	0,04 (0,20)	0,99
VW	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>Painel A. Estratégias de seleção de portfólios presentes na literatura</i>																					
ERC	0,178 (0,02)	1,05 (0,00)	0,89	0,02 (0,58)	1,01 (0,00)	0,47 (0,00)	0,31 (0,00)	0,98	0,039 (0,25)	1,01 (0,00)	0,47 (0,00)	0,3 (0,00)	-0,02 (0,25)	0,98	-0,026 (0,27)	1,02 (0,00)	0,51 (0,00)	0,21 (0,00)	0,1 (0,00)	0,05 (0,13)	0,99
MDP	0,098 (0,30)	0,99 (0,00)	0,86	-0,044 (0,49)	1 (0,00)	0,2 (0,00)	0,33 (0,00)	0,91	-0,024 (0,72)	1 (0,00)	0,2 (0,00)	0,32 (0,00)	-0,03 (0,31)	0,91	-0,035 (0,58)	1 (0,00)	0,2 (0,00)	0,32 (0,00)	-0,01 (0,89)	-0,02 (0,70)	0,91
MIN	0,167 (0,03)	0,85 (0,00)	0,85	0,082 (0,26)	0,88 (0,00)	-0,02 (0,54)	0,23 (0,00)	0,87	0,044 (0,54)	0,89 (0,00)	-0,02 (0,46)	0,25 (0,00)	0,05 (0,07)	0,88	0,001 (0,99)	0,91 (0,00)	0,01 (0,82)	0,15 (0,00)	0,1 (0,02)	0,18 (0,00)	0,88
MV ($\gamma=5$)	0,156 (0,13)	0,91 (0,00)	0,78	0,039 (0,67)	0,92 (0,00)	0,2 (0,00)	0,26 (0,00)	0,81	-0,083 (0,37)	0,95 (0,00)	0,19 (0,00)	0,32 (0,00)	0,15 (0,00)	0,83	-0,046 (0,62)	0,95 (0,00)	0,23 (0,00)	0,15 (0,00)	0,12 (0,01)	0,18 (0,02)	0,82
<i>Painel B. Portfólios que utilizam estratégias do tipo Volatility Timing</i>																					
VT ($\eta=3$)	0,211 (0,00)	0,97 (0,00)	0,9	0,065 (0,18)	0,97 (0,00)	0,26 (0,00)	0,33 (0,00)	0,96	0,068 (0,13)	0,97 (0,00)	0,26 (0,00)	0,32 (0,00)	0 (0,88)	0,96	-0,024 (0,53)	0,99 (0,00)	0,32 (0,00)	0,23 (0,00)	0,17 (0,00)	0,1 (0,03)	0,97
VT ($\eta=4$)	0,208 (0,00)	0,94 (0,00)	0,9	0,075 (0,16)	0,96 (0,00)	0,18 (0,00)	0,31 (0,00)	0,95	0,072 (0,14)	0,96 (0,00)	0,18 (0,00)	0,31 (0,00)	0 (0,90)	0,95	-0,019 (0,66)	0,98 (0,00)	0,24 (0,00)	0,22 (0,00)	0,17 (0,00)	0,12 (0,02)	0,96
VT ($\eta=5$)	0,204 (0,00)	0,92 (0,00)	0,9	0,082 (0,16)	0,94 (0,00)	0,12 (0,01)	0,3 (0,00)	0,94	0,073 (0,18)	0,95 (0,00)	0,12 (0,01)	0,3 (0,00)	0,01 (0,70)	0,94	-0,015 (0,76)	0,97 (0,00)	0,18 (0,00)	0,21 (0,00)	0,16 (0,00)	0,14 (0,01)	0,95
<i>Painel C. Portfólios que utilizam estratégias do tipo Reward-to-Risk Timing</i>																					
RRT ($\tilde{\beta}^+$, $\eta=3$)	0,286 (0,00)	1,01 (0,00)	0,81	0,048 (0,23)	1 (0,00)	0,5 (0,00)	0,51 (0,00)	0,96	0,058 (0,14)	0,99 (0,00)	0,5 (0,00)	0,51 (0,00)	-0,01 (0,72)	0,96	-0,049 (0,16)	1,01 (0,00)	0,58 (0,00)	0,38 (0,00)	0,2 (0,00)	0,09 (0,08)	0,97
RRT ($\tilde{\beta}^+$, $\eta=4$)	0,305 (0,00)	1 (0,00)	0,8	0,062 (0,16)	0,99 (0,00)	0,49 (0,00)	0,53 (0,00)	0,95	0,067 (0,12)	0,99 (0,00)	0,5 (0,00)	0,52 (0,00)	-0,01 (0,85)	0,95	-0,039 (0,32)	1,01 (0,00)	0,57 (0,00)	0,4 (0,00)	0,21 (0,00)	0,09 (0,08)	0,97
RRT ($\tilde{\beta}^+$, $\eta=5$)	0,321 (0,00)	0,99 (0,00)	0,79	0,076 (0,12)	0,99 (0,00)	0,48 (0,00)	0,54 (0,00)	0,94	0,078 (0,09)	0,98 (0,00)	0,48 (0,00)	0,54 (0,00)	0 (0,94)	0,94	-0,027 (0,54)	1 (0,00)	0,56 (0,00)	0,41 (0,00)	0,21 (0,00)	0,1 (0,08)	0,96

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: O tamanho da janela de horizonte móvel de estimação considerada foi de $\tau = 60$ (5 anos). Valores de α positivos e significativos a 5% são destacados na tabela. Erros padrão ajustados pelo procedimento HAC de Newey-West (NEWKEY; WEST, 1987, 1994).

APÊNDICE E – Códigos Fonte

Neste capítulo é apresentado o núcleo dos algoritmos utilizados no desenvolvimento da presente pesquisa. É importante ressaltar que alguns desses algoritmos realizam simulações ou sorteios como forma de chegar a um resultado. Para propósitos de pesquisa tem-se que tais simulações/sorteios podem levar a tempos de execução de dias ou até mesmo semanas, pois nesse cenário devem ser avaliadas múltiplas bases de dados, diversas configurações (tamanho de janela móvel, fatores de encolhimento, etc.) e além disso deve-se compreender décadas de dados históricos. Para fins de tomada de decisão de investimento tem-se que esse tempo computacional é reduzido para horas ou minutos pois normalmente é desejada uma sugestão/estimativa para apenas um período específico à frente.

E.1 Impacto da reamostragem sobre estimativas

Código E.1 – Aplicações da reamostragem em um exemplo com regressão

```

1 rm(list = ls()) # apaga todas as variáveis
2 cat("\014") # limpa a tela (CTRL+L)
3
4 sigma = 3
5 sample_size_bootstrap = 100
6 set.seed(1) # garantir reprodução dos resultados
7
8 f1 = function(x, sigma)
9 {
10     # y_i = 0 + sigma*epsilon_i
11     y = rnorm(nrow(x), sd = sigma)
12     return(list(theta = rep(0, ncol(x)+1),
13                 fx = y))
14 }
15
16 f3 = function(x, sigma)
17 {
18     theta = rep(0, ncol(x)+1)
19     theta[2:6] = 1:5
20     y = cbind(1, x) %*% theta + sigma * rnorm(nrow(x),
21                                             sd = sigma)
22
23     return(list(theta = theta,
24                 fx = y))
25 }
26
27 regression.bag = function(x,
28                           fraction,
29                           B = 50)
30 {
31     xi = x[, -1]
32     yi = x[, 1]

```

```

33     theta = rep(0,ncol(xi)+1)
34     for (i in 1:B)
35     {
36         idx = sample(1:nrow(xi),
37                     size = round(nrow(xi)*fraction),
38                     replace = TRUE)
39         yii = yi[idx]
40         xii = xi[idx,]
41
42         theta = theta + (1/B)*coef(lm(yii~xii))
43     }
44     return(theta)
45 }
46
47 regression.sbag = function(x,
48                           fraction,
49                           B = 50)
50 {
51     xi = x[,-1]
52     yi = x[,1]
53     theta = rep(0,ncol(xi)+1)
54     for (i in 1:B)
55     {
56         idx = sample(1:ncol(xi),
57                     size = round(ncol(xi)*fraction),
58                     replace = FALSE)
59         xii = xi[,idx]
60         theta[c(1,idx+1)] = theta[c(1,idx+1)] + (1/B)*coef(lm(yi~xii))
61     }
62     return(theta)
63 }
64
65
66 regression = function(x)
67 {
68     xi = x[,-1]
69     yi = x[,1]
70     return(coef(lm(yi~xi)))
71 }
72
73 sample.mean = function(x)
74 {
75     return(apply(x,2,mean))
76 }
77
78 boot.estimator = function(data,
79                           trials = 10000,
80                           sample_size = 100,
81                           FUN,
82                           ...)
83 {
84     result = matrix(NA, ncol = ncol(data), nrow = trials)
85     for (i in 1:trials)
86     {
87         idx = sample(1:nrow(data),
88                     size = sample_size,
89                     replace = TRUE)

```

```

90 |
91 |     result[i, ] = FUN(data[idx,], ...)
92 | }
93 | return(result)
94 | }
95 |
96 | bias.estimator = function(theta_hat, theta)
97 | {
98 |     return(norm(theta_hat - theta, "2"))
99 | }
100 |
101 | variance.estimator = function(theta)
102 | {
103 |     result = NA
104 |     if (is.null(dim(theta)))
105 |     {
106 |         result = var(theta)
107 |     }
108 |     else
109 |     {
110 |         result = mean(diag(cov(theta)))
111 |     }
112 |     return(result)
113 | }
114 |
115 | total_samples = 5000
116 | N = 10
117 | x = matrix(runif(total_samples), ncol = N)
118 | data_1 = f3(x, sigma = sigma)
119 | theta = data_1$theta
120 |
121 | m = 2:N
122 | df_variance_estimator = data.frame(fraction = m/N,
123 |                                     OLS = NA, BAG = NA, SBAG = NA)
124 | df_bias_sqr_estimator = data.frame(fraction = m/N,
125 |                                     OLS = NA, BAG = NA, SBAG = NA)
126 |
127 | boot_estimator_lin = boot.estimator(cbind(data_1$fx,x),
128 |                                     sample_size = sample_size_bootstrap,
129 |                                     FUN = regression,
130 |                                     trials = 10000)
131 | df_variance_estimator[, "OLS"] = variance.estimator(boot_estimator_lin)
132 | df_bias_sqr_estimator[, "OLS"] = bias.estimator(apply(boot_estimator_lin, 2, mean),
133 |                                                  theta)
134 |
135 | pb = txtProgressBar(min = 0, max = length(m), style = 3)
136 | for(i in 1:length(m))
137 | {
138 |     boot_estimator_bag = boot.estimator(cbind(data_1$fx,x),
139 |                                         sample_size = sample_size_bootstrap,
140 |                                         FUN = regression.bag,
141 |                                         fraction = m[i]/N)
142 |     df_variance_estimator[i, "BAG"] = variance.estimator(boot_estimator_bag)
143 |     df_bias_sqr_estimator[i, "BAG"] = bias.estimator(apply(boot_estimator_bag, 2,
144 |                                                            mean), theta)
145 |
146 |     boot_estimator_sbagn = boot.estimator(cbind(data_1$fx,x),

```

```

145         sample_size = sample_size_bootstrap,
146         FUN = regression.sbag,
147         fraction = m[i]/N)
148     df_variance_estimator[i,"SBAG"] = variance.estimator(boot_estimator_sbag)
149     df_bias_sqr_estimator[i,"SBAG"] = bias.estimator(apply(boot_estimator_sbag
150         ,2,mean), theta)
151     setTxtProgressBar(pb, i)
152 }
153 close(pb)
154
155 library(ggplot2)
156
157 data_df = reshape2::melt(df_variance_estimator, id = 'fraction')
158
159 p_1 = ggplot(data_df,
160     aes(x=fraction, y=value, color = variable))+
161     geom_line(aes(linetype=variable),size=0.6) +
162     scale_x_continuous(breaks = scales::pretty_breaks(n = 10)) +
163     scale_linetype_manual(values = c('solid','dotdash','dashed'))+
164     theme_bw()+
165     ylab(bquote('Variância do estimador'~(var(hat(theta)))))+
166     xlab("Fração")+
167     theme(legend.position="bottom",
168         legend.title = element_blank())
169
170 data_df = reshape2::melt(df_bias_sqr_estimator, id = 'fraction')
171
172 p_2 = ggplot(data_df,
173     aes(x=fraction, y=value, color = variable))+
174     geom_line(aes(linetype=variable),size=0.6) +
175     scale_x_continuous(breaks = scales::pretty_breaks(n = 10)) +
176     scale_linetype_manual(values = c('solid','dotdash','dashed'))+
177     theme_bw()+
178     ylab(bquote('Viés do estimador (E['~(hat(theta)-theta)^2~'])'))+
179     xlab("Fração")+
180     theme(legend.position="bottom",
181         legend.title = element_blank())

```

E.2 Sensibilidade da solução ótima a configurações do algoritmo

Código E.2 – Exemplo de como a solução ótima de problemas de otimização pode ser influenciada pelo algoritmo ou por suas configurações

```

1 % Script para demonstrar a sensibilidade da solução ótima a dois fatores:
2 %   i) escolha do algoritmo de otimização - SQP ou active-set, por exemplo
3 %   ii) ponto inicial (x0) - o ponto inicial pode prejudicar o resultado
4 %       final gerando soluções viáveis porém não ótimas
5 % observação: testado no MATLAB R2016b - 9.1.0.441655
6 clc
7 clear all
8 close all
9 format compact
10

```

```

11 %% Configurações
12 %flag_save_3d = true; % salva as figures 1 e 2
13 flag_save_3d = false; % salva as figures 3 a 5
14
15 % utiliza algoritmos de otimização para calcular as fronteiras
16 % a) irrestrita e b) restrita (xi >= 0)
17 flag_optimization = true;
18
19 % flag_pmv_inside_feasible = true; % PVM irrestrito dentro da região viável
20 flag_pmv_inside_feasible = false; % PVM irrestrito fora da região viável
21
22 % simula erro na otimização na Figura 5 (muda algoritmo e ponto inicial)
23 flag_degenerate_result = true;
24
25 %% Exemplo
26 if (flag_pmv_inside_feasible)
27     V = [ 0.003      0.001      0;
28           0.001      0.002      0.001;
29           0          0.001      0.002];
30     R = [.17 .16 .15]';
31 else
32     V = [ 0.0300    -0.0090    0.0160;
33           -0.0090    0.0200    0.0130;
34           0.0160    0.0130    0.0290];
35     R = [.11 .05 .1]';
36 end
37
38 if (flag_save_3d)
39     [X1,X2] = meshgrid(-0.5:.005:1.5, -1:.005:1.5);
40 else
41     [X1,X2] = meshgrid(-0.2:.005:1.2, -0.2:.005:1.2);
42 end
43
44 lin = size(X1,1);
45 col = size(X1,2);
46 Y = NaN(lin,col);
47 Z = NaN(lin,col);
48 for i = 1:lin
49     for j = 1:col
50         x1_k = X1(i,j);
51         x2_k = X2(i,j);
52         x3_k = 1-x1_k-x2_k;
53         x_k = [x1_k;x2_k;x3_k]; % portfólio
54         Y(i,j) = x_k'*V*x_k; % variância
55         Z(i,j) = x_k'*R; % expectativa
56     end
57 end
58
59 figure(1)
60 surf(X1,X2,100*Y)
61 xlabel('x_1')
62 ylabel('x_2')
63 zlabel('V (%)')
64 shading flat
65 colormap(jet(256))
66 view([20,15])
67 eixo = axis;

```

```
68 eixo(6) = 1.1;
69 axis(eixo)
70 caxis([0.1 1])
71
72 figure(2)
73 surf(X1,X2,100*Z)
74 xlabel('x_1')
75 ylabel('x_2')
76 zlabel('E (%)')
77 shading interp
78 colormap jet
79 view([15,20])
80
81 % salva os gráficos 2D (curvas de nível/projeções)
82 if (~flag_save_3d)
83     figure(3)
84     contour(X1,X2,100*Z,'ShowText','on')
85     xlabel('x_1')
86     ylabel('x_2')
87     grid on
88     hold on
89     colormap jet
90     contour(X1,X2,100*Y,'ShowText','on')
91     shading interp
92     colormap jet
93     view([0,90])
94     axis equal
95
96     figure(4)
97     contour(X1,X2,100*Z,'ShowText','on')
98     xlabel('x_1')
99     ylabel('x_2')
100    grid on
101    colormap jet
102    hold on
103    contour(X1,X2,100*Y,'ShowText','on')
104    shading interp
105    colormap jet
106    view([0,90])
107    reg_viavel = fill([0 0 1],[0 1 0],'c');
108    val_alpha = 0.2;
109    alpha(reg_viavel,val_alpha);
110    [~,LGicons] = legend(reg_viavel,'Região Viável','Location','northwest');
111    PatchInLegend = findobj(LGicons, 'type', 'patch');
112    set(PatchInLegend, 'facea', val_alpha)
113    axis equal
114
115    figure(5)
116    contour(X1,X2,100*Z,'ShowText','on')
117    colormap jet
118    xlabel('x_1')
119    ylabel('x_2')
120    grid on
121    hold on
122    contour(X1,X2,100*Y,'ShowText','on')
123    shading interp
124    colormap jet
```

```

125     view([0,90])
126     reg_viavel = fill([0 0 1],[0 1 0],'c');
127     val_alpha = 0.2;
128     alpha(reg_viavel,val_alpha);
129     [lg,LGicons] = legend(reg_viavel,'Região Viável','Location','northwest');
130     PatchInLegend = findobj(LGicons, 'type', 'patch');
131     set(PatchInLegend, 'facea', val_alpha)
132     axis equal tight
133     caxis auto
134     if (flag_optimization)
135         l = ones(3,1);
136         z = zeros(3,1);
137         A1 = [2*V l; l' 0];
138         b1 = [z;l];
139         PVM = A1\b1;
140         lambda = PVM(4);
141         PVM = PVM(1:3);
142
143         if (flag_pmv_inside_feasible)
144             x0 = PVM;
145         else
146             % ponto inicial válido
147             x0 = [1;0;0];% 100 % alocado em x1
148         end
149
150         A = [];
151         b = [];
152         lb = zeros(size(V,1),1);
153         ub = [];
154         Aeq = ones(1,size(V,1));
155         beq = 1;
156
157         risk_pvm = PVM'*V*PVM;
158         if (flag_pmv_inside_feasible)
159             num_port = 500;
160             i_init = 2;
161         else
162             num_port = 300;
163             i_init = 1;
164         end
165         risk = logspace(log10(risk_pvm),log10(V(1,1)),num_port);
166         port_con = NaN(3,num_port);
167         port_unc = NaN(3,num_port);
168         options_a = optimoptions('fmincon','Algorithm','sqp',...
169             'SpecifyObjectiveGradient',true,'SpecifyConstraintGradient',true);
170         options_b = optimoptions('fmincon','Algorithm','active-set');
171
172         if (flag_degenerate_result)
173             options = options_b;
174             % exemplo de ponto inicial válido que prejudica o resultado
175             x0 = [0.8;0.6;-0.4];
176         else
177             options = options_a;
178         end
179
180         for i = i_init:num_port
181             % fronteira restrita (pesos positivos)

```

```

182         [x,~,exitflag] = fmincon(@(x) max_ret(x,R),x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,@(x)
183             con_risk(x,V,risk(i)),options);
184         if (exitflag >= 0)
185             port_con(:,i) = x;
186         end
187         % fronteira irrestrita (permissão de pesos negativos)
188         [x,~,exitflag] = fmincon(@(x) max_ret(x,R),x0,A,b,Aeq,beq,[],ub,@(x)
189             con_risk(x,V,risk(i)),options);
190         if (exitflag >= 0)
191             port_unc(:,i) = x;
192         end
193     end
194
195     hold on
196     h1 = plot(port_con(1,:),port_con(2:,:), 'r. ');
197     h2 = plot(PVM(1),PVM(2), 'rp');
198     legend([h1 h2],sprintf('Portfólios\nEficientes'),'PVM')
199
200     E1 = NaN(1,num_port);
201     V1 = NaN(1,num_port);
202     E2 = NaN(1,num_port);
203     V2 = NaN(1,num_port);
204
205     for i = 1:num_port
206         E1(i) = port_con(:,i) '*R;
207         V1(i) = port_con(:,i) '*V*port_con(:,i);
208         E2(i) = port_unc(:,i) '*R;
209         V2(i) = port_unc(:,i) '*V*port_unc(:,i);
210     end
211
212     figure(6)
213     plot(100*V2,100*E2,100*V1,100*E1, '--.', 'LineWidth', 2)
214     grid on
215     xlabel('V (%)')
216     ylabel('E (%)')
217     legend({'$$x_i \in \mathbf{R}$$', '$$x_i \geq 0$$'}, 'Interpreter', 'latex', '
218         Location', 'northwest', 'FontSize', 12);
219     axis square tight
220 end
221
222 if (flag_save_3d)
223     % salva os gráficos 3D
224     figure(1)
225     fig = gcf;
226     fig.PaperPositionMode = 'auto';
227     fig_pos = fig.PaperPosition;
228     fig.PaperSize = [fig_pos(3) fig_pos(4)];
229     print -dpdf -r600 -f1 -opengl port_select_01_variance
230     figure(2)
231     fig = gcf;
232     fig.PaperPositionMode = 'auto';
233     fig_pos = fig.PaperPosition;
234     fig.PaperSize = [fig_pos(3) fig_pos(4)];
235     print -dpdf -r600 -f2 -opengl port_select_02_expectation
236 else
237     figure(3)

```

```

236     fig = gcf;
237     fig.PaperPositionMode = 'auto';
238     fig_pos = fig.PaperPosition;
239     fig.PaperSize = [fig_pos(3) fig_pos(4)];
240
241     % salva as curvas de nível
242     print -dpdf -r600 -f3 -opengl port_select_03_levels
243
244     figure(4)
245     fig = gcf;
246     fig.PaperPositionMode = 'auto';
247     fig_pos = fig.PaperPosition;
248     fig.PaperSize = [fig_pos(3) fig_pos(4)];
249     print -dpdf -r600 -f4 -opengl port_select_04_feasible
250
251     figure(5)
252     fig = gcf;
253     fig.PaperPositionMode = 'auto';
254     fig_pos = fig.PaperPosition;
255     fig.PaperSize = [fig_pos(3) fig_pos(4)];
256     print -dpdf -r600 -f5 -opengl port_select_05_efficient
257     if (flag_optimization)
258         figure(6)
259         fig = gcf;
260         fig.PaperPositionMode = 'auto';
261         fig_pos = fig.PaperPosition;
262         fig.PaperSize = [fig_pos(3) fig_pos(4)];
263         print -dpdf -r600 -f6 -opengl port_select_06_frontier
264     end
265 end
266
267 function [f,g,H] = max_ret(x,R)
268     f = -x'*R;
269     if nargin > 1 % gradient required
270         g = -R;
271         if nargin > 2 % Hessian required
272             H = zeros(length(R));
273         end
274     end
275 end
276
277 function [c,ceq,gc,gceq] = con_risk(x,V,risk)
278     c = [];
279     ceq = -(x'*V*x - risk);
280
281     if nargin > 2
282         gc = [];
283         gceq = -2*V*x;
284     end
285 end

```

E.3 Encolhimento da matriz de covariâncias

Código E.3 – Encolhimento linear da matriz de covariâncias dos retornos (LEDOIT; WOLF, 2003)

```

1 # x (t*n): t iid observations on n random variables
2 # sigma (n*n): invertible covariance matrix estimator
3 #
4 # This estimator is a weighted average of the sample
5 # covariance matrix and a "prior" or "shrinkage target".
6 # Here, the prior is given by a one-factor model.
7 # The factor is equal to the cross-sectional average
8 # of all the random variables.
9 covMarket = function(x, shrink = -1)
10 {
11     # de-mean returns
12     t = nrow(x)
13     n = ncol(x)
14     meanx = colMeans(x)
15     x = x - matrix(rep(meanx,t),nrow = t,byrow = T)
16     xmkt = rowMeans(x)
17
18     sample_cov = cov(cbind(x, xmkt))*(t-1)/t
19     covmkt=sample_cov[1:n,n+1,drop=FALSE]
20     varmkt=sample_cov[n+1,n+1]
21     sample_cov = sample_cov[-(n+1),-(n+1)]
22
23     prior_cov = covmkt%*%t(covmkt)/varmkt
24     diag(prior_cov) = diag(sample_cov)
25
26     if (shrink == -1)
27     {
28         c = matrixcalc::frobenius.norm(sample_cov-prior_cov)^2
29         y = x^2
30         p = (1/t)*sum(sum(t(y)%*%y)) - sum(sum(sample_cov^2))
31         # r is divided into diagonal
32         # and off-diagonal terms, and the off-diagonal term
33         # is itself divided into smaller terms
34         rdiag = (1/t)*sum(sum(y^2))-sum(diag(sample_cov)^2)
35         z = x*matrix(rep(xmkt,n),ncol = n,byrow = F)
36         covmkt_nn = matrix(rep(covmkt,n),ncol = n,byrow = F)
37         v1 = (1/t)*t(y)%*%z - covmkt_nn*sample_cov
38         roff1 = sum(sum(v1*t(covmkt_nn)))/varmkt -sum(diag(v1)*covmkt)/varmkt
39         v3 = (1/t)*t(z)%*%z - varmkt*sample_cov
40         roff3 = sum(sum(v3*(covmkt%*%t(covmkt))))/varmkt^2 - sum(diag(v3)*covmkt
41             ^2)/varmkt^2
42         roff = 2*roff1 - roff3
43         r = rdiag + roff
44         # compute shrinkage constant
45         k = (p-r)/c
46         shrinkage = max(0,min(1,k/t))
47     }
48     else
49     {
50         # use specified number
51         shrinkage = shrink;

```

```

51     }
52     # compute the estimator
53     sigma = shrinkage*prior_cov + (1-shrinkage)*sample_cov
54
55     return (list(sigma = sigma,
56                 shrinkage = shrinkage))
57 }

```

Código E.4 – Encolhimento encolhimento analítico não-linear da matriz de covariâncias dos retornos (LEDOIT; WOLF, 2020)

```

1  # X is the raw data matrix of size n x p:
2  # - the rows correspond to observations
3  # - the columns correspond to variables
4
5  # If the second (optional) parameter k is absent, not-a-number, or empty,
6  # the algorithm demeanes the data by default, and then adjusts
7  # the effective sample size accordingly by subtracting one.
8
9  # If the user inputs k = 0, then no demeaning takes place and
10 # the effective sample size remains n.
11
12 # If the user inputs k >= 1, then it signifies that the data X
13 # has already been demeaned or otherwise pre-processed; for example,
14 # the data might constitute OLS residuals based on a linear regression
15 # model with k regressors. No further demeaning takes place then,
16 # but the effective sample size is adjusted accordingly by subtracting k.
17 analytical_shrinkage = function(X, k = NA)
18 {
19     n = nrow(X) # important: sample size n must be >= 12
20     p = ncol(X)
21     if (n <= 12)
22     {
23         stop('analytical_shrinkage:: sample size n must be > 12')
24     }
25     if (is.na(k)) # default setting
26     {
27         meanX = colMeans(X)
28         X = X - matrix(rep(meanX,n),nrow = n,byrow = TRUE) # demean the raw data
29         matrix
30         k = 1 # subtract one degree of freedom
31     }
32     n=n-k; # effective sample size
33     # extract sample eigenvalues sorted in ascending order and eigenvectors
34     sampleX = (t(X)%*%X)/n
35     spectral_decomp = eigen(sampleX, symmetric = TRUE)
36     u = spectral_decomp$vectors[,p:1]
37     lambda = as.matrix(spectral_decomp$values[p:1], ncol=1)
38
39     # compute analytical nonlinear shrinkage kernel formula
40     lambda = lambda[max(1,p-n+1):p]
41     #L = repmat(lambda,[1 min(p,n)]);
42     L = matrix(rep(lambda, min(p,n)), nrow = min(p,n), byrow = FALSE)
43     h = n^(-1/3)
44     H = h*t(L)
45     x = (L-t(L))/H

```

```

45     xi = 1-(x^2)/5
46     xi[xi < 0] = 0
47     ftilde = as.matrix((3/4/sqrt(5))*rowMeans(xi/H), ncol = 1)
48     Hftemp = (-3/10/pi)*x+(3/4/sqrt(5)/pi)*(1-x^2/5)*log(abs((sqrt(5)-x)/(sqrt
49         (5)+x)))
50     Hftemp[abs(x)==sqrt(5)] = (-3/10/pi)*x[abs(x)==sqrt(5)]
51     Hftilde = rowMeans(Hftemp/H,2)
52
53     if (p<=n)
54     {
55         dtilde = lambda/((pi*(p/n)*lambda*ftilde)^2 + (1-(p/n)-pi*(p/n)*lambda*
56             Hftilde)^2)
57     }
58     else
59     {
60         Hftilde0 = (1/pi)*(3/10/h^2+3/4/sqrt(5)/h*(1-1/5/h^2)*log((1+sqrt(5)*h)/
61             (1-sqrt(5)*h)))*mean(1/lambda)
62         dtilde0 = 1/(pi*(p-n)/n*Hftilde0)
63         dtilde1 = lambda/(pi^2*lambda^2*(ftilde^2+Hftilde^2))
64         dtilde = rbind(as.matrix(dtilde0*rep(1,p-n), ncol=1), dtilde1)
65     }
66
67     # compute analytical nonlinear shrinkage estimator
68     sigmatilde = u%*%diag(as.vector(dtilde))%*%t(u)
69
70     return (list(sigmatilde = sigmatilde,
71         dtilde = dtilde))
72 }

```

Código E.5 – Encolhimento da matriz de covariâncias pela agregação de subcarteiras oriundas do *bootstrap* de ativos

```

1  BAG.shrink = function(returns, nsim, expoent = 0.7, force_random_combinations =
2  TRUE, V_shrink = NULL)
3  {
4      set.seed(0) # exibe os mesmos resultados todas as vezes
5
6      if (is.null(V_shrink))
7      {
8          V = cov(returns) # covariância amostral
9      }
10     else
11     {
12         V = V_shrink # matriz de covariâncias encolhida
13     }
14
15     # numero de ativos
16     N = ncol(V)
17
18     n_subset = ceiling(max(2,N^expoent))
19     if (n_subset == N)
20     {
21         stop('BAG.shrink:: subset size is equal to N, try to reduce the exponent
22             ')
23     }
24
25     n_combinations = choose(N, n_subset)

```

```

23   if ((nsim >= n_combinations) & (!force_random_combinations))
24   {
25       mat_combinations = arrangements::combinations(N, n_subset)
26       mat_combinations = mat_combinations[base::sample(n_combinations,
27       size = n_combinations,
28       replace = FALSE),]
29       nsim = n_combinations
30   }
31   else
32   {
33       mat_combinations = matrix(NA,
34       nrow = nsim,
35       ncol = n_subset)
36       for (i in 1:nsim)
37       {
38           mat_combinations[i,] = sample(N, size = n_subset, replace = FALSE)
39       }
40   }
41
42   I = diag(N)
43
44   partial_invV = matrix(0, nrow = N, ncol = N)
45   for (i in 1:nsim)
46   {
47       idx = mat_combinations[i,]
48       Ib = I
49       Ib[idx, idx] = 0
50       Ia = I - Ib
51       partial_invV = partial_invV + qr.solve(Ia %*% V %*% Ia + Ib, Ia)
52   }
53   partial_invV = partial_invV / nsim
54
55   Sigma_BAG = matrix(NA, nrow = N, ncol = N)
56   tryCatch(
57   {
58       Sigma_BAG = qr.solve(partial_invV)
59   },
60   error=function(cond)
61   {
62       stop('BAG.shrink:: partial_invV is a singular matrix, try to increase
63       nsim')
64       return(NA)
65   })
66   return(Sigma_BAG)
67 }

```

Código E.6 – Função que retorna a matriz de covariâncias em função do estimador selecionado

```

1 estimate_covariance = function(returns, shrink = NA, param = NA)
2 {
3     if (!is.na(shrink))
4     {
5         if (shrink == 'non-linear')
6         {

```

```

7      # encolhimento analítico não-linear - Ledoit and Wolf - Annals of
      Statistics (2020?)
8      Sigma = analytical_shrinkage(returns)$sigmatilde
9  }
10 else
11 {
12     if (shrink == 'linear-market')
13     {
14         # encolhimento da matriz de covariâncias dos retornos (shrinkage
            estimator, Ledoit and Wolf (2003))
15         Sigma = covMarket(returns)$sigma
16     }
17 else
18 {
19     if (shrink == 'none')
20     {
21         # matriz de covariâncias dos retornos (estimador amostral)
22         Sigma = cov(returns)
23     }
24     else
25     {
26         if(shrink == 'bag')
27         {
28             if (all(is.na(param)))
29             {
30                 param = list(simulations = 500,
31                             nu = 0.3,
32                             force_random_combinations = TRUE)
33             }
34
35             Sigma = BAG.shrink(returns,
36                               nsim = param$simulations,
37                               expoent = param$nu,
38                               force_random_combinations = param$force_random_
                                   combinations)
39         }
40         else
41         {
42             if(shrink == 'diagonal')
43             {
44                 Sigma = diag(diag(cov(returns)))
45             }
46             else
47             {
48                 stop(sprintf('estimate_covariance:: Unknown shrink
                                   method = %s\n',
49                               shrink))
50             }
51         }
52     }
53 }
54 }
55 }
56 else
57 {
58     stop(sprintf('estimate_covariance:: select a Shrink method\n'))
59 }

```

```

60
61     return(Sigma)
62 }

```

E.4 Algoritmos de seleção de portfólios

E.4.1 MIN e MV

Código E.7 – Portfólio de variância mínima

```

1 # MIN -> portfólio de variância mínima
2 portfolio.MIN = function(V, short=TRUE, algorithm="cplex", solver_name)
3 {
4     # numero de ativos
5     N = ncol(V)
6     if(short)
7     {
8         # vetor unitário
9         UnitV = matrix(rep(1,N),nrow = N,1)
10        ZeroV = rep(0,N)
11        b = c(ZeroV,1)
12
13        #=====
14        # CALCULA PORTIFÓLIO DE VARIÂNCIA MÍNIMA
15        #=====
16        A = rbind(cbind(V, UnitV), cbind(t(UnitV), 0))
17        result = qr.solve(A,b) # result = A^-1*b
18        PVM = result[1:N]
19    }
20    else
21    {
22        # shortsale-constrained minimum-variance portfolio
23        if (algorithm == "cplex")
24        {
25            # CPLEX - depende da instalação da biblioteca Rcplex
26            Qmat = V
27            cvec = rep.int(0, N)
28            Amat = matrix(rep(1,N),1,N)
29            bvec = 1
30            result = Rcplex::Rcplex(cvec = cvec, Amat = Amat, bvec = bvec, Qmat
31                                   = Qmat,
32                                   lb = 0, ub = Inf, sense = "E", objsense = "
33                                   min",
34                                   control=list(trace=0))
35            PVM = result$xopt
36            Rcplex::Rcplex.close()
37        }
38        else
39        {
40            if (algorithm == "cvx")
41            {
42                # CVX
43                w = Variable(N)
44                risk = quad_form(w, V)

```

```

43         objective = risk
44         constraints = list(w >= 0,
45         sum(w) == 1)
46         prob = Problem(Minimize(objective), constraints)
47         result = solve(prob, solver_name)
48         if ((result$status != "optimal") & (result$status != "optimal_
49             inaccurate"))
50         {
51             error_msg = sprintf('\t\tportfolio.MIN:: optimization status
52                 %s - PID : %5d\n',
53                 result$status,
54                 Sys.getpid())
55             cat(error_msg)
56             stop(error_msg)
57         }
58         PVM = as.vector(result$getValue(w))
59     }
60     else
61     {
62         stop('portfolio.MIN:: algortimo de otimizacao desconhecido!')
63     }
64 }
65 if (!short)
66 {
67     PVM[PVM < 0] = 0
68 }
69 PVM = PVM/sum(PVM)
70 return(PVM)
71 }

```

Código E.8 – Portfólio eficiente em termos de média-variância para um dado nível de aversão ao risco (γ)

```

1 #   portfólio que maximiza a aproximação da esperança da função de utilidade
2 portfolio.MV = function(R,V,rf,gamma,short=TRUE, solver_name)
3 {
4     # numero de ativos
5     N = ncol(V)
6     w = Variable(N)
7     ret = t(as.matrix((R - rf),ncol=1)) %*% w
8     risk = quad_form(w, V)
9     objective = risk - (1/gamma) * ret
10    if (short)
11    {
12        constraints = list(sum(w) == 1)
13    }
14    else
15    {
16        constraints = list(w >= 0,
17        sum(w) == 1)
18    }
19    prob = Problem(Minimize(objective), constraints)
20    result = solve(prob, solver_name)
21    if ((result$status != "optimal") & (result$status != "optimal_inaccurate"))

```

```

22     {
23         error_msg = sprintf('\t\tportfolio.MV:: optimization status %s - PID :
24                             %5d\n',
25                                 result$status,
26                                 Sys.getpid())
27         cat(error_msg)
28         stop(error_msg)
29     }
30     MV = as.vector(result$getValue(w))
31     if (!short)
32     {
33         MV[MV < 0] = 0
34     }
35     MV = MV/sum(MV)
36     return(MV)
37 }

```

E.4.2 ERC

Código E.9 – Contribuições de risco igualmente ponderadas (MAILLARD; RONCALLI; TEÏLETCHÉ, 2010; GRIVEAU-BILLION; RICHARD; RONCALLI, 2013)

```

1 # V - matriz de covariâncias
2 portfolio.ERC = function(V)
3 {
4     result = riskParityPortfolio::riskParityPortfolio(V)
5     return(result$w)
6 }

```

E.4.3 MDP

Código E.10 – Portfólio de máxima diversificação (MDP) (CHOUEIFATY; COIGNARD, 2008)

```

1 # Toward Maximum Diversification
2 # Yves Choueifaty, Yves Coignard
3 # The Journal of Portfolio Management Oct 2008, 35 (1) 40-51
4 #
5 # V - matriz de covariâncias
6 portfolio.MDP = function(V, algorithm = "cvx", solver_name)
7 {
8     # pg 42:
9     # "(...) that maximizing the diversification ratio is
10     # equivalent to minimizing t(w)*C*w (...)"
11     # C => correlation matrix
12     # "(...) Once again, we can transform the synthetic assets
13     # back to the portfolio of original assets by dividing each
14     # synthetic portfolio weight by the volatility of that asset
15     # and rescaling the portfolio to be 100% invested (...)"
16
17     # numero de ativos
18     N = ncol(V)
19     if (algorithm == "cvx")

```

```

20 {
21     C = cov2cor(V)
22     sigma = sqrt(as.matrix(diag(V), col = 1))
23
24     PCM = portfolio.MIN(C,
25                         short=FALSE,
26                         algorithm = algorithm,
27                         solver_name = solver_name)
28
29     MDP = PCM/sigma
30     MDP = MDP/sum(MDP)
31 }
32 else
33 {
34     stop('portfolio.MDP:: algoritmo de otimizacao desconhecido!')
35 }
36 return(MDP)
37 }

```

E.4.4 REF

Código E.11 – Portfólio de mínima variância reamostrado

```

1 portfolio.MIN.REF = function(R, V,
2                             nsim = 500,
3                             horizonte_simulacao = 18, # 18 anos (sugerido por
4                             Michaud)
5                             short = TRUE,
6                             solver_name)
7 {
8     set.seed(0) # exibe os mesmos resultados todas as vezes
9
10    # numero de ativos
11    N = ncol(V)
12
13    REF_MIN_C = rep(0,N)
14    for (i in 1:nsim)
15    {
16        dados_i = MASS::mvrnorm(n = horizonte_simulacao*12, # supondo dados
17                                mensais
18                                mu = R,
19                                Sigma = V)
20
21        Sigma_i = cov(dados_i)
22
23        REF_MIN_C = REF_MIN_C + (1/nsim)*portfolio.MIN(Sigma_i,
24                                                         short = short,
25                                                         algorithm="cvx",
26                                                         solver_name = solver_name
27                                                         )
28    }
29
30    REF_MIN_C = REF_MIN_C/sum(REF_MIN_C) # garantir normalização dos pesos
31    return(REF_MIN_C)
32 }

```

Código E.12 – Portfólio de média-variância reamostrado

```

1 portfolio.MV.REF = function(R, V, rf, gamma,
2     ret_target, # return target
3     nsim = 500,
4     horizonte_simulacao = 18, # 18 anos (sugerido por
5         Michael)
6     short = TRUE,
7     solver_name)
8 {
9     set.seed(0) # exibe os mesmos resultados todas as vezes
10
11     tolerance = 1/100
12     # numero de ativos
13     N = ncol(V)
14     w = Variable(N)
15
16     REF_MV_C = rep(0,N)
17     nruns = 0
18     for (i in 1:nsim)
19     {
20         dados_i = MASS::mvrnorm(n = horizonte_simulacao*12, # supondo dados
21             mensais
22             mu = R,
23             Sigma = V)
24
25         R_i = colMeans(dados_i)
26         V_i = cov(dados_i)
27
28         if (max(R_i) >= ret_target)
29         {
30             ret = t(as.matrix((R_i - rf), ncol=1)) %*% w
31             risk = quad_form(w, V_i)
32             objective = risk - (1/gamma) * ret
33             if (short)
34             {
35                 constraints = list(sum(w) == 1,
36                     abs((ret - (ret_target - rf))/(ret_target -
37                         rf)) <= tolerance)
38             }
39             else
40             {
41                 constraints = list(w >= 0,
42                     sum(w) == 1,
43                     abs((ret - (ret_target - rf))/(ret_target -
44                         rf)) <= tolerance)
45             }
46
47             prob = Problem(Minimize(objective), constraints)
48             result = solve(prob, solver_name)
49             if ((result$status == "optimal") | (result$status == "optimal_
50                 inaccurate"))
51             {
52                 w_i = as.vector(result$getValue(w))
53
54                 REF_MV_C = REF_MV_C + w_i
55                 nruns = nruns + 1

```

```

51         }
52     }
53 }
54 REF_MV_C = REF_MV_C/nruns
55
56 if (!short)
57 {
58     REF_MV_C[REF_MV_C < 0] = 0 # garantindo restrição de não-negatividade
59 }
60 REF_MV_C = REF_MV_C/sum(REF_MV_C) # garantir normalização dos pesos
61
62 return(REF_MV_C)
63 }

```

E.4.5 ENT e ENT+

Código E.13 – Portfólio de mínima variância-entropia

```

1 portfolio.MIN.dejong = function(V,
2                               theta,
3                               uncertanty_vector = NA,
4                               short=TRUE,
5                               solver_name,
6                               zero_lower_bound = 1e-20)
7 {
8     # numero de ativos
9     N = ncol(V)
10
11     if (anyNA(uncertanty_vector))
12     {
13         l = as.matrix(rep(1,N)/N, ncol=1)
14     }
15     else
16     {
17         l = as.matrix(uncertanty_vector, ncol=1)
18         l = l/sum(l)
19     }
20
21     w = Variable(N)
22     risk = quad_form(w, V)
23     entropy = t(l)%*%log(w)
24     objective = risk - theta*entropy
25     if (short)
26     {
27         constraints = list(sum(w) == 1)
28     }
29     else
30     {
31         constraints = list(w >= zero_lower_bound,
32                             sum(w) == 1)
33     }
34     prob = Problem(Minimize(objective), constraints)
35     result = solve(prob, solver_name)
36     if ((result$status != "optimal") & (result$status != "optimal_inaccurate"))
37     {

```

```

38     error_msg = sprintf('\t\tportfolio.MIN.dejong:: optimization status %s -
        PID : %5d\n',
39                               result$status,
40                               Sys.getpid())
41     cat(error_msg)
42     stop(error_msg)
43 }
44
45 MIN_djong = as.vector(result$getValue(w))
46 if (!short)
47 {
48     MIN_djong[MIN_djong < 0] = 0
49 }
50 MIN_djong = MIN_djong/sum(MIN_djong)
51
52 return(MIN_djong)
53 }

```

Código E.14 – Portfólio de média-variância-entropia

```

1 portfolio.MV.dejong = function(R,V,rf,gamma,
2                               theta,
3                               uncertainty_vector = NA,
4                               short=TRUE,
5                               solver_name,
6                               zero_lower_bound = 1e-20)
7 {
8     # numero de ativos
9     N = ncol(V)
10
11     if (anyNA(uncertainty_vector))
12     {
13         # vetor de pesos normalizado por N
14         l = as.matrix(rep(1,N)/N, ncol=1)
15     }
16     else
17     {
18         l = as.matrix(uncertainty_vector, ncol=1)
19         l = l/sum(l)
20     }
21
22     w = Variable(N)
23     risk = quad_form(w, V)
24     entropy = t(l)%*%log(w)
25     ret = t(as.matrix((R - rf),ncol=1)) %*% w
26     risk = quad_form(w, V)
27     objective = risk - (1/gamma)*ret - theta*entropy
28     if (short)
29     {
30         constraints = list(sum(w) == 1)
31     }
32     else
33     {
34         constraints = list(w >= zero_lower_bound,
35                             sum(w) == 1)
36     }
37     prob = Problem(Minimize(objective), constraints)

```

```

38 result = solve(prob, solver_name)
39 if ((result$status != "optimal") & (result$status != "optimal_inaccurate"))
40 {
41     error_msg = sprintf('\t\tportfolio.MV.dejong:: optimization status %s -
42                         PID : %5d\n',
43                         result$status,
44                         Sys.getpid())
45     cat(error_msg)
46     stop(error_msg)
47 }
48 MV_djong = as.vector(result$getValue(w))
49 if (!short)
50 {
51     MV_djong[MV_djong < 0] = 0
52 }
53 MV_djong = MV_djong/sum(MV_djong)
54
55 return(MV_djong)
56 }

```

Código E.15 – Cria um vetor de incertezas para uma janela específica de tempo e conforme o expoente que controla o tamanho dos subgrupos (ν)

```

1 # cria um vetor de incertezas individualizadas por ativos baseadas
2 # nos pesos obtidos do portfólio de variância mínima irrestrito supondo bootstrap
  de ativos
3 entropy.index.calc = function(V, expoent, nsim)
4 {
5     set.seed(0) # exibe os mesmos resultados todas as vezes
6
7     # numero de ativos
8     N = ncol(V)
9
10    n_subset = ceiling(max(2, N^expoent))
11    n_combinations = choose(N, n_subset)
12
13    if (nsim >= n_combinations)
14    {
15        mat_combinations = arrangements::combinations(N, n_subset)
16        mat_combinations = mat_combinations[base::sample(n_combinations,
17                                                         size = n_combinations,
18                                                         replace = FALSE),]
19        nsim = n_combinations
20    }
21    else
22    {
23        mat_combinations = matrix(NA,
24                                  nrow = nsim,
25                                  ncol = n_subset)
26        for (i in 1:nsim)
27        {
28            mat_combinations[i,] = sample(N, size = n_subset, replace = FALSE)
29        }
30    }
31 }

```

```

32     w_port = matrix(NA,N,nsim)
33
34     for (i in 1:nsim)
35     {
36         idx = mat_combinations[i,]
37         w_min = portfolio.MIN(V[idx,idx],short=TRUE,algorithm = "cvx",solver_
38             name = solver_name)
39         w_port[idx,i] = w_min
40     }
41
42     # amplitude interquartil como medida de incerteza
43     entropy = apply(w_port, 1, stats::IQR, na.rm=TRUE)
44
45     return(entropy)
46 }

```

Código E.16 – Cria uma matriz contendo vetores de incerteza para cada janela móvel da base de dados, conforme o expoente que controla o tamanho dos subgrupos (ν)

```

1 entropy.index.build = function(dataset,
2     expoent_vec,
3     M,
4     simulations = 500)
5 {
6     T = nrow(dataset)
7     N = ncol(dataset) # número de ativos
8     ret = coredata(dataset) # retornos dos ativos
9
10    entropy_index = vector("list",length = length(expoent_vec))
11
12    for (i in 1:length(expoent_vec))
13    {
14        entropy_matrix = zoo(matrix(NA, nrow=T-M, ncol= N),
15            order.by = index(dataset)[-c(1:M)])
16        colnames(entropy_matrix) = colnames(dataset)
17        cat(sprintf('\t\t N = %4d | expoent = %4.2f | subset = %2d | nsim = %d\n',
18            N,
19            expoent_vec[i],
20            ceiling(max(2,N^expoent_vec[i])),
21            simulations))
22        for (t in (M+1):T)
23        {
24            Sigma = estimate_covariance(ret[(t-M):(t-1)],,
25                shrink = 'none') # covariância amostral
26            entropy_matrix[t-M,] = entropy.index.calc(Sigma,
27                expoent_vec[i],
28                nsim = simulations)
29        }
30        entropy_index[[i]] = entropy_matrix
31
32        if (sum(is.na(entropy_matrix)) > 0)
33        {
34

```

```

35         stop('entropy.index.build:: NA\'s presentes na matriz de entropia,
36             }
37     }
38
39     return(entropy_index)
40 }

```

E.4.6 BAG

Código E.17 – Portfólios de mínima variância formados pela agregação de subcarteiras oriundas do *bootstrap* de ativos

```

1 portfolio.MIN.BAG = function(V, expoent, short=TRUE, nsim = 100, algorithm = "
   cvx", solver_name)
2 {
3     set.seed(0) # exibe os mesmos resultados todas as vezes
4
5     #numero de ativos
6     N = ncol(V)
7
8     n_subset = ceiling(max(2,N^expoent))
9     n_combinations = choose(N, n_subset)
10
11     if (nsim >= n_combinations)
12     {
13         mat_combinations = arrangements::combinations(N, n_subset)
14         mat_combinations = mat_combinations[base::sample(n_combinations, size =
           n_combinations, replace = FALSE),]
15         nsim = n_combinations
16     }
17     else
18     {
19         mat_combinations = matrix(NA,
20             nrow = nsim,
21             ncol = n_subset)
22         for (i in 1:nsim)
23         {
24             mat_combinations[i,] = sample(N, size = n_subset, replace = FALSE)
25         }
26     }
27
28     w_port = matrix(NA,N,nsim)
29     for (i in 1:nsim)
30     {
31         idx = mat_combinations[i,]
32         w_min = portfolio.MIN(V = V[idx,idx], short = short, algorithm =
           algorithm, solver_name = solver_name)
33         w_port[idx,i] = w_min
34     }
35
36     w_min_tese = rowMeans(w_port,na.rm = TRUE)
37     w_min_tese[is.na(w_min_tese)] = 0
38     w_min_tese = w_min_tese/sum(w_min_tese)
39 }

```

```

40     return(w_min_tese)
41 }

```

Código E.18 – Portfólios de média-variância formados pela agregação de subcarteiras oriundas do *bootstrap* de ativos

```

1 portfolio.MV.BAG = function(R, V, rf, gamma, expoent, short=TRUE, nsim = 100,
2   solver_name)
3 {
4   set.seed(0) # exhibe os mesmos resultados todas as vezes
5
6   # numero de ativos
7   N = ncol(V)
8
9   n_subset = ceiling(max(2,N^expoent))
10  n_combinations = choose(N, n_subset)
11
12  if (nsim >= n_combinations)
13  {
14    mat_combinations = arrangements::combinations(N, n_subset)
15    mat_combinations = mat_combinations[base::sample(n_combinations,
16      size = n_combinations,
17      replace = FALSE),]
18    nsim = n_combinations
19  }
20  else
21  {
22    mat_combinations = matrix(NA,
23      nrow = nsim,
24      ncol = n_subset)
25    for (i in 1:nsim)
26    {
27      mat_combinations[i,] = sample(N, size = n_subset, replace = FALSE)
28    }
29
30    w_port = matrix(NA,N,nsim)
31    for (i in 1:nsim)
32    {
33      idx = mat_combinations[i,]
34      w_mv = portfolio.MV(R[idx],V[idx,idx],rf,gamma,short,solver_name)
35      w_port[idx,i] = w_mv
36    }
37
38    w_mv_tese = rowMeans(w_port,na.rm = TRUE)
39    w_mv_tese[is.na(w_mv_tese)] = 0
40    w_mv_tese = w_mv_tese/sum(w_mv_tese)
41
42    return(w_mv_tese)
43 }

```

E.4.7 VT e RRT

Código E.19 – Portfólio baseado em *Volatility Timing*

```

1 portfolio.VT = function(Sigma, eta)
2 {
3     VT = (1/diag(Sigma))^eta
4     w_vt = VT/sum(VT)
5     return(w_vt)
6 }

```

Código E.20 – Portfólio baseado em *Reward-to-Risk Timing*

```

1 portfolio.RRT = function(ret_t,
2                           Sigma,
3                           rf_t,
4                           factors_t,
5                           eta,
6                           rrt_cond_expec_ret_type)
7 {
8     if (rrt_cond_expec_ret_type == "\\mu^+")
9     {
10         mu = as.matrix(colMeans(ret_t)) # vetor de média dos retornos
11         mu_plus = mu
12         mu_plus[mu_plus<0] = 0
13         RRT = (mu_plus/diag(Sigma))^eta
14     }
15     else
16     {
17         if (rrt_cond_expec_ret_type == "\\bar{\\beta}^+")
18         {
19             beta = rep(NA, ncol(ret_t))
20             for (i in 1:ncol(ret_t))
21             {
22                 y_i = ret_t[,i] - rf_t
23                 beta_i = coef(lm(y_i ~ ., data = factors_t))
24                 beta[i] = mean(beta_i[-1]) # média dos betas excluindo-se o
25                                     intercepto
26             }
27             beta_plus = beta
28             beta_plus[beta_plus < 0] = 0
29             RRT = (beta_plus/diag(Sigma))^eta
30         }
31         else
32         {
33             stop(sprintf('portfolio.RRT:: Unknown rrt_cond_expec_ret_type = %s\\n',
34                             rrt_cond_expec_ret_type))
35         }
36     }
37     w_rrt = RRT/sum(RRT)
38     return(w_rrt)
39 }

```

E.5 Indicadores de desempenho

Código E.21 – Índice de Sharpe

```

1 # calcula o índice de sharpe de uma série de retornos
2 sharpe_ratio = function(portfolio_returns, risk_free_returns)
3 {
4     excess_returns = portfolio_returns - risk_free_returns
5     return(mean(excess_returns)/sd(portfolio_returns))
6 }

```

Código E.22 – Índice de diversificação

```

1 diversification_ratio = function(x,V)
2 {
3     s = sqrt(diag(V))
4     risk = sqrt(t(x)%*%V%*%x)
5     return((t(x)%*%s)/risk)
6 }

```

Código E.23 – Cálculo do indicador custo de indiferença de utilidade entre duas séries de retornos em função de um determinado nível de aversão ao risco (κ_γ)

```

1 quadratic.equation.roots = function(a,b,c)
2 {
3     result = NA
4
5     delta = (b^2-4*a*c)
6     if (is.na(delta))
7     {
8         browser()
9     }
10    if (delta >= 0)
11    {
12        x_a = (-b+sqrt(delta))/(2*a)
13        x_b = (-b-sqrt(delta))/(2*a)
14        result = c(x_a,x_b)
15    }
16
17    return(result)
18 }
19
20 # Em Kirby & Ostdiek (2012) esse indicador é definido como Delta_gamma
21 Delta.gamma = function(R_it, R_jt, gamma)
22 {
23     # "The economic value of volatility timing using "realized" volatility"
24     # Segundo Fleming, Kirby & Ostdiek (2003) pg 477:
25     # importante: A diferença entre utilidades independe de W_0 (riqueza inicial)
26
27     if (length(R_it) != length(R_jt))
28     {
29         browser()
30     }
31     if (anyNA(R_it) | anyNA(R_jt))
32     {
33         Delta = NA
34     }
35 }

```

```
33     }
34     else
35     {
36         fator_gamma = gamma/(2*(1+gamma))
37         U_i = 1 + R_it - fator_gamma*(1+R_it)^2
38         U_j = 1 + R_jt - fator_gamma*(1+R_jt)^2
39
40         result = quadratic.equation.roots(length(R_it)*fator_gamma,
41                                           length(R_it)-2*fator_gamma*(length(R_
42                                                         it)+sum(R_jt)),
43                                           sum(U_i)-sum(U_j))
44         Delta = result[abs(result)<1]
45     }
46     return(Delta)
47 }
```