Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Sobre distribuições e folheações holomorfas de codimensão maior do que um

Luis Guillermo Martinez Maza

Tese de Doutorado

Tese apresentada como requisito à obtenção do título de Doutor junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMG.

Orientador: Prof. Márcio G. Soares

Belo Horizonte
Outubro de 2010

Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Sobre distribuições e folheações holomorfas de codimensão maior do que um

Luis Guillermo Martinez Maza

Tese apresentada ao Instituto de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Dr. Márcio Gomes Soares. - UFMG-IM
(Presidente)

Prof. Dr. Rogério Santos Mol. - UFV-IM

Prof. Dr. Fabio E. Brochero Martinez. - UFMG-IM

Prof. Dr. Thiago Fassarella Amaral. - UFF-IM

Prof. Dr. Mauricio Barros Corrêa. - UFV-IM

Belo Horizonte
Outubro de 2010

Agradecimentos

A Deus, por iluminar meu caminho em todo momento.

Aos meus pais Luz Marina Maza e Leovigildo Martinez, que com tanta sabedoria me ensinaram a andar pelos espinhosos caminhos da vida para que pudese alcaçar tão sonhado objetivo.

A os meus irmãos Deilo, Edilson, Isaura, Lucilis e Wilson, que sempre acreditaram em mim e que me apoiaram com muito amor.

Ao professor Bruno Scardua, por acreditar em mim e por sua ajuda incondicional desde minha chagada ao Brasil.

Ao professor Márcio G. Soares, pela orientação e pela liberdade que me concedeu para trabalhar.

Ao professor Rogerio S. Mol, pela disposição e a contribuição na minha formação do inicio até fim do meu doutorado.

Ao todo o corpo docente e administrativo da Pós-Graduação em Matemématica da UFMG, por me acolher e se dispor para me ajudar em todo momento, em especial à Eliane Adréa.

A os meus colegas Gilberto Duarte, Maurcio Correa e Viviana Ferrer pelas inumeras discuções.

A todos os alunos que passaram pela Pós-Graduação do departamento de Matemática da UFMG de 2006 a 2010 por facilitar e fazer tão agradável minha estadia em Belo Horizonte, em especial à Heleno Cunha, Gabriel Guedes, Eduardo, Geraldo, Alexandre, Justino, Paulinha e Kenia.

Às agências de fomento CAPES, CNPq e FAPEMG, pelo soporte financiero, sem o qual não teria sido possível realizar este sonho.

Resumo

Seja ω uma $r-$forma LDS holomorfa numa variedade complexa M. No caso $M = \mathbb{C}^n$, nós provamos que se $ker(\omega)^{\perp}$ admite um subfibrado trivial de posto k então existe uma $(r-k)$-forma η LDS e holomorfa em $\mathbb{C}^n$ tal que ω se escreve como produto exterior de η vezes o produto de k seções globais linearmente independentes de $ker(\omega)^{\perp}$. No caso em que M é compacta e conexa, nós abordamos o problema clássico de Darboux-Jouanolou e mostramos que se ω possui um número suficientemente grande de hipersuperfícies analíticas invariantes, então ω admite uma integral primeira meromorfa. Em seguida, provamos que se $k \leq r$ e ω possui k familias infinitas de hipersuperfícies ω-invariantes cujos membros se interseptam transversalmente, então ω admite uma integral primeira meromorfa de posto k. Em particular, se $k = r$, então ω é integrável. Continuando nesta direção mostramos que no caso integrável, ω possui uma estrutura transversal por translações se, e somente se, ω é múltiplo de um produto de 1-formas fechadas. Terminamos este trabalho mostrando que em presência de uma singularidade tipo Kupka, existe um sistema de coordenadas em torno da singularidade em que ω depende apenas de $r+1$ variaveis. Em particular, ω é integrável e a folheação induzida por ω tem a estrutura de produto de uma folheação por curvas em $\mathbb{C}^{r+1}$ vezes uma folheação regular.

Palavras-chave

Distribuições Uniformes. Folheações Holomorfas. Forma Localmente Decomponível.

Abstract

Let ω be a holomorphic LDS $r-$form on a complex manifold M. In the case $M = \mathbb{C}^n$, we show that if $ker(\omega)^{\perp}$ admits a trivial subbundle of rank k, then there exists a holomrphic LDS $(r-k)$-form η on $\mathbb{C}^n$ such that ω is the exterior product of η with the product of k linearly independent global sections of $ker(\omega)^{\perp}$. In the case that M is compact and connected we approach the classical Darboux-Jouanolou problem and we prove that if ω has a sufficiently large number of invariant analytic hypersurfaces, then ω admits a meromorphic first integral. Next, we prove that if $k \leq r$ and ω has k infinite families of ω-invariant analytic hypersurfaces whose members intersect transversely, then ω admits a meromorphic first integral of rank k. In particular, if $k = r$, then ω is integrable. Continuing in this direction we prove that in the integrable case ω has a transversal structure by translations if and only if ω is a multiples of a product of closed $1-$forms. We conclude this work by showing that in the presence of a Kupka type singularity, there exists a coordinate system around the singularity such that ω reduces to $r+1$ variables. In particular, ω is integrable and the foliation induced by ω has the product struture of a foliation by curves in $\mathbb{C}^{r+1}$ multiplied by a regular foliation.

Keywords

Uniform Distributions. Holomorphic Folhiations. Form Locally Decomposable.

Sumário

Introdução

O estudo de folheações tem suas origens nos trabalhos pioneiros de P. Painlevé, E. Picar, G. Darboux, H. Poincaré, Ch. A. Briot e G. D. Birkhoff. A importância do conceito de folheação está ligada à geometrização de algumas questões importantes em Teoria de Singularidades, Topologia, Equações Diferenciais e Análise Complexa. Nestas aplicações é comum considerar-se objetos com singularidades. Mais gerais que as folheações são as chamadas distribuições, que no caso integrável estão ligadas ao conceito de folheação, mas que em geral podem modelar outros fenômenos, com aplicações inclusive à Física.

Nesta tese estudamos alguns aspectos da teoria das distribuições holomorfas, integráveis ou não, e com ou sem singularidades. Problemas clássicos na teoria das folheações, como existência de soluções algébricas e obtenção de cotas para o grau (Problema de Poincaré) ou o número destas (Problema de Jouanolou), problema de determinação de condições de integrabilidade (existência de integral primeira), assim como a descrição da estrutura em torno do lugar singular (fenômeno de Kupka, genericidade, etc) são abordados neste trabalho para distribuições integráveis ou não, como passamos a descrever.

Primeiro recordamos o conceito de folheação no caso sem singularidades. Uma folheação de uma variedade é uma decomposição local desta em subvariedades imersas, todas de mesma dimensão (chamada de dimensão da folheação), de forma que localmente se distribuam como fibras de uma fibração trivial. Além disso, pede-se que duas tais trivializações sejam relacionadas por uma mudança de coordenadas que preserva a fibração modelo à qual ambas são conjugadas. As uniões conexas das fibras locais são chamadas de folhas da folheação e são subvariedades imersas de mesma dimensão, da variedade ambiente. Neste trabalho, salvo menção explícita em contrário, consideraremos folheações com singularidades, cujo conceito é o seguinte: uma folheação holomorfa (com singularidades) $\mathscr{F}$ de codimensão r numa variedade complexa M é um par (ω, S), onde ω é uma r-forma holomorfa integrável em M com valores num certo fibrado em retas sobre M e S é um subconjunto analítico de M de codimensão maior do que um. Em particular, a forma ω é localmente decomponível fora do seu conjunto singular e muitas propriedades topológicas e geométricas da folheação se traduzem em propriedades algébricas e analíticas da forma. Motivados por este fato, este trabalho é dedicado ao estudo de formas localmente decomponíveis fora do seu conjunto singular, que serão abreviadas LDS ao longo de todo o texto. Nosso intuito é abordar o conceito de distribuição uniforme que é uma generalização do conceito de folheação. Fora do conjunto singular de uma r-forma LDS ω, temos definido um fibrado $\varepsilon^*(\omega)$ cuja fibra num ponto é dada pelo conjunto de 1-formas cujo produto exterior por ω é nulo. Algumas propriedades interesantes de ω podem ser descritas em termos de $\varepsilon^*(\omega)$. Por exemplo, obtemos a seguinte variante do Lema de Divisão de Saito-De Rham (cf. Lema 1.16); de fundamental importância ao longo deste trabalho:

Teorema A (Lema de Divisão LDS). *Sejam M^n uma variedade complexa e $\omega, \widetilde{\omega} \in \Omega^r(M)$. Suponhamos que:*
(i) ω é LDS e $codim(S(\omega)) \geq 2$.
(ii) $\varepsilon^*(\omega(x)) \subset \varepsilon^*(\widetilde{\omega}(x))$ para todo $x \in U := M \setminus S(\omega)$.
Então $\widetilde{\omega}$ é LDS e $\widetilde{\omega} = g\omega$ para alguma $g \in \mathcal{O}(M)$.

Em seguida, como uma consequência imediata do Teorema A, nós obtemos uma versão meromorfa do mesmo. Outra propriedade interessante de se observar nas formas LDS é a caracterização da integrabilidade. É bem sabido que uma 1-forma diferencial ω é integrável se, e somente se, $\omega \wedge d\omega = 0$. De modo geral, nós provamos (cf. proposição 1.19):

Teorema B (Frobenius LDS). *Seja $\omega \in \Omega^r(M)$ LDS tal que $U := M \setminus S(\omega)$ é denso em M. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

I. ω é integrável.

II. $d\omega$ é LDS. Além do mais, para cada $x \in U$, existem uma vizinhança W de x e $\eta \in \Omega^1(W)$ tais que $d\omega = \eta \wedge \omega$ em W.

III. A distribuição $\mathscr{P} : x \mapsto \mathscr{P}(x) := ker(\omega(x))$ para $x \in U$ é integrável.

Agora, olhando para o fibrado normal $\mathscr{N}_{\mathscr{F}}$ de uma folheação $\mathscr{F}$ surge a pergunta: Em que condições $\mathscr{N}_{\mathscr{F}}$ é trivial?. Com tal pergunta em mente, notando que $\ker(\omega)^{\perp}$ descreve o fibrado dual de $\mathscr{N}_{\mathscr{F}}$, obtemos o seguinte resultado (cf. Teorema 2.8):

Teorema C. *Sejam $r < n-1$, $2r < n+k$ e ω uma $r-$forma LDS holomorfa em $\mathbb{C}^n$. Suponhamos que $ker(\omega)^{\perp}$ admite um subfibrado trivial de posto k. Então existe uma $(r-k)$-forma η LDS e holomorfa em $\mathbb{C}^n$ tal que ω se escreve como produto exterior de η vezes o produto de k seções globais linearmente independentes de $ker(\omega)^{\perp}$.*

Como corolário, obtemos:

Corolário: Nas condições do Teorema C, se $\ker(\omega)^{\perp}$ admite um subfibrado trivial de posto $r-1$, então $\ker(\omega)^{\perp}$ é também trivial.

Ao olhar para os núcleos das imagens de uma forma diferencial localmente decomponível numa variedade diferenciável M, quase de modo natural, vem à nossa memória o conceito de distribuição. Lembrando que uma distribuição em M é uma escolha em cada ponto de M de um subespaço do espaço tangente a M naquele ponto, todos da mesma dimensão (chamada de dimensão da distribuição). Se M é uma variedade complexa e, localmente, os subespaços determinados pela distribuição provém de núcleos de uma forma holomorfa, a distribuição é dita uniforme. No caso $M = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, um invariante muito importante pode ser associado uma distribuição uniforme $\mathscr{P}$, o conceito de grau, que define-se como o grau da variedade de tangências de $\mathscr{P}$ com um plano genérico linearmente mergulhado, de dimensão complementar em relação a n (chamada de codimensão da distribuição). Interessados pelo problema da finitude de soluções algébricas para uma folheação em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, nós provamos o (cf. Teorema 3.22):

Teorema D. *Se $\mathscr{P}$ é uma distribuição uniforme em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ de codimensão r, grau d e sem integral primeira racional, então o número máximo de hipersuperfícies invariantes por $\mathscr{P}$ é*

$$\binom{d+n}{n} \cdot \binom{n+1}{r+1} + r.$$

Vale a pena observar que a questão análoga, no caso $r = 1$, foi formulada e provada por J. P. Jouanolou na década de setenta. Em seguida, motivados pelo resultado principal em [G], nos encaramos este mesmo problema no caso de uma variedade complexa compacta conexa M qualquer, obtendo o seguinte resultado (cf. Teorema 4.1):

Teorema E. *Se $\mathscr{P}$ é uma distribuição uniforme em M sem integral primeira meromorfa, então $\mathscr{P}$ admite apenas um número finito de hipersuperfícies invariantes.*

Ainda sobre integrais primeiras, temos o problema de caracterizar folheações que admitem algum tipo de estrutura transversal. Nesta direção nós provamos que (cf. Teorema 5.6):

Teorema F. *Seja $\mathscr{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão r em M. Então $\mathscr{F}$ tem uma estrutura transversal por translações se, e somente se, $\mathscr{F}$ pode ser definida por um sistema de 1-formas fechadas.*

Por fim, olhamos para singularidades de folheações. O último capítulo deste trabalho é dedicado ao estudo de um tipo muito especial de singularidades, as chamadas singularidades tipo Kupka. Um resultado devido a I. Kupka [K], estabelece que se ω é uma 1-forma integrável e p é um ponto tal que $\omega(p) = 0$ e $d\omega(p) \neq 0$, então é possível escolher coordenadas em torno de p nas quais ω depende apenas de duas variáveis. Deixaremos claro que a hipótese de integrabilidade é desnecessária e damos uma prova simples do seguinte resultado (cf. Teorema 6.2):

Teorema G. *Seja ω um germe de $r-$forma holomorfa na origem de $\mathbb{C}^n$. Suponha que $d\omega$ é LDS, $d\omega(0) \neq 0$ e que $d(i_\chi(\omega)) = 0$ para todo germe de campo χ em $(\mathbb{C}^n, 0)$ tangente a $d\omega$. Então existe um sistema de coordenadas $(x, z) \in \mathbb{C}^{r+1} \times \mathbb{C}^{n-(r+1)}$ tal que $\omega = \omega(x)$.*

Como consequência, recuperamos a condição de integrabilidade, obtendo o seguinte (cf. Corolário 6.3):

Corolário. *Se ω é como no teorema acima então ω é integrável, i.e., ω define um germe de folheação holomorfa de codimensão r.*

O Teorema G é importante no estudo da estrutura local de uma folheação em torno de uma singularidade tipo Kupka. Por exemplo, a partir deste Teorema, conclui-se que, em torno deste tipo de singularidades, a folheação tem a estrutura do produto de uma folheação por curvas em $\mathbb{C}^{r+1}$ por uma folheação trivial e o seu feixe tangente é localmente livre.

Capítulo 1

Preliminares

[preliminares] Neste capítulo introduzimos alguns conceitos importantes para o desenvolvimento do nosso trabalho e provamos algumas propriedades fundamentais relativas a estes.

1.1 Espaço e sistema associados a uma $r-$forma

Sejam E um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\Bbbk$ de caracteristica zero. Denotamos por $\bigwedge^r(E)$ o espaço de $r-$formas exteriores sobre E. Vamos ainda convencionar denotar por $\mathfrak{I}_m$ o conjunto formado por os primeiros m números naturais e por $\mathfrak{I}_m^k$ a coleção de todos os subconjuntos de $\mathfrak{I}_m$ com k elementos.

Definição 1.1. Seja $\omega \in \bigwedge^r(E)$. Os conjuntos

$$ker(\omega) := \{v \in E; \boldsymbol{i}_v(\omega) = 0\}$$

e

$$\ker(\omega)^{\perp} := \{\eta \in E^*; ker(\omega) \subseteq ker(\eta)\}$$

chamam-se, respectivamente, *espaço e sistema associados* a ω. A dimensão de $ker(\omega)^{\perp}$ é chamada de *posto* de ω. É possível verificar que $posto(\omega) = codim(ker(\omega))$.

Denotamos por $\varepsilon^*(\omega)$ o subespaço de E^* dado por

$$\varepsilon^*(\omega) = \{\eta \in E^*; \eta \wedge \omega = 0\}.$$

Observação 1.2. Se $\omega \neq 0$, $\eta \in \varepsilon^*(\omega)$ e $v \in \ker(\omega)$, então $\eta \wedge \omega = 0$ e $\boldsymbol{i}_v(\omega) = 0$, logo $0 = \boldsymbol{i}_v(\eta \wedge \omega) = \boldsymbol{i}_v(\eta)\omega$. Donde $\boldsymbol{i}_v(\eta) = 0$. Portanto, $\eta \in \ker(\omega)^{\perp}$. Conseqüentemente, $\varepsilon^*(\omega) \subseteq \ker(\omega)^{\perp}$.

Proposição 1.3. *Seja $\omega \in \bigwedge^r(E) \setminus \{0\}$. Então $dim(\varepsilon^*(\omega)) \leq r$.*

Prova: Suponha que $dim(\varepsilon^*(\omega)) = k$ e escolha uma base $(\varepsilon_j)_{1\leq j\leq n}$ de E^* de modo que $(\varepsilon_j)_{1\leq j\leq k}$ seja uma base de $\varepsilon^*(\omega)$. Escrevamos

$$\omega = \sum_{J\in\mathfrak{I}_n^r} a_J\varepsilon_J,$$

onde $a_J \in \Bbbk$, $J = \{j_1 < \cdots < j_r\}$ e $\varepsilon_J = \varepsilon_{j_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{j_r}$. Levando em consideração o fato que, para cada $i \in \mathfrak{I}_k$,

$$0 = \varepsilon_i \wedge \omega = \sum_{\substack{J\in\mathfrak{I}_n^r \\ i\notin J}} a_J\varepsilon_i \wedge \varepsilon_J,$$

concluímos que $a_J = 0$ sempre que $\mathfrak{I}_k \nsubseteq J$. Por conseguinte, $\omega = \sum_{\substack{J\in\mathfrak{I}_n^r \\ \mathfrak{I}_k\subseteq J}} a_J\varepsilon_J$. Portanto, $k \leq r$. ∎

Diretamente da demonstração da Proposição 1.3, segue o seguinte:

Corolário 1.4. *Se $\omega \in \bigwedge^r(E) \setminus \{0\}$ e $dim(\varepsilon^*(\omega)) = r$, então, dados $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \varepsilon^*(\omega)$ linearmente independentes (L.I.), existe um escalar $\lambda \neq 0$ tal que $\omega = \lambda\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r$.*

Proposição 1.5. [Go 1]. Seja $\omega \in \bigwedge^r(E)$, $r \geq 2$, e seja $h : E^{r-1} \to E^*$ a aplicação multilinear dada por $h(v_1, \ldots, v_{r-1}) = \boldsymbol{i}(v_1, \ldots, v_{r-1})(\omega) := \boldsymbol{i}_{v_{r-1}}(\cdots(\boldsymbol{i}_{v_1}(\omega))\cdots)$. Então $ker(\omega)^\perp$ é o subespaço de E^* gerado por $h(E^{r-1})$.

Definição 1.6. Seja $\omega \in \bigwedge^r(E)$, $r \geq 2$. Dizemos que ω é *decomponível* se existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \bigwedge^1(E)$ tais que $\omega = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r$.

Proposição 1.7. [Go 1]. Seja $\omega \in \bigwedge^r(E) \setminus \{0\}$. Então $posto(\omega) \geq r$, valendo a igualdade se, e somente se, ω é decomponível.

Proposição 1.8. *Seja $\omega \in \bigwedge^r(E) \setminus \{0\}$, $r \geq 2$. As seguintes afirmações são equivalentes :*

I. ω é decomponível.

II. $posto(\omega) = r$.

III. $\boldsymbol{i}(v_1, \ldots, v_{r-1})(\omega) \wedge \omega = 0$ para quaisquer $v_1, \ldots, v_{r-1} \in E$.

IV. $ker^\perp(\omega) = \varepsilon^*(\omega)$.

V. $codim(ker(\omega)) = r$.

Prova: $(I) \Rightarrow (II)$ e $(V) \Rightarrow (I)$ Seguem da Proposição 1.7.

$(II) \Rightarrow (III)$: Sejam $v_1, \ldots, v_{r-1} \in E$. Como $ker(\omega) \subseteq ker(\boldsymbol{i}(v_1, \ldots, v_{r-1})(\omega) \wedge \omega)$, então $ker(\boldsymbol{i}(v_1, \ldots, v_{r-1})(\omega) \wedge \omega)^{\perp} \subseteq ker(\omega)^{\perp}$. Logo, de (II), segue que $posto(\boldsymbol{i}(v_1, \ldots, v_{r-1})(\omega) \wedge \omega) \leq r$. Logo, pela Proposição 1.7, $\boldsymbol{i}(v_1, \ldots, v_{r-1})(\omega) \wedge \omega) = 0$.

$(III) \Rightarrow (IV)$: Pela Proposição 1.5, sabemos que

$$ker(\omega)^{\perp} = Span\{\boldsymbol{i}(v_1, \ldots, v_{r-1})(\omega); v_1, \ldots, v_{r-1} \in E\}.$$

Logo, segue de (III), que $ker(\omega)^{\perp} \subseteq \varepsilon^*(\omega)$. Então, pela Observação 1.2, $ker(\omega)^{\perp} = \varepsilon^*(\omega)$.

$(IV) \Rightarrow (V)$: Segue das proposições 1.3 e 1.7. ∎

1.2 Formas localmente decomponíveis

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n. Dado um subconjunto aberto W de M, denotamos por $\Omega^r(W)$ o $\Bbbk$-módulo das r-formas em W, com grau de difereciabilidade compatível com a estrutura de M.

Definição 1.9. Sejam $W \subseteq M$ aberto e $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \Omega^1(W)$. Dizemos que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ é um sistema *integrável* se $\alpha_1(x) \wedge \cdots \wedge \alpha_r(x) \neq 0$ para todo $x \in W$ e $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r \wedge d\alpha_j = 0$ (ou equivalentemente $\alpha_j \wedge d(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r) = 0$) para todo $j \in I_r$.

Definição 1.10. Sejam $\omega \in \Omega^r(M)$ e $S(\omega) := \{x \in M : \omega(x) = 0\}$. Dizemos que ω é *localmente decomponível* fora do seu *conjunto singular* $S(\omega)$ (LDS) se para todo $x \in M \setminus S(\omega)$ existe uma vizinhança $W(x) \subset M$ e um sistema de 1-formas $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \Omega^1(W)$ tais que $\omega \mid_W = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r$. Se os sistemas $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ podem ser obtidos integráveis, dizemos que ω é *integrável*.

Exemplo 1.11. Em $\mathbb{C}^4$, consideremos as 2-formas holomorfas

$$\omega = z_3 dz_1 \wedge dz_2 + z_2 dz_1 \wedge dz_3 + z_1 z_2 dz_2 \wedge dz_3 \quad e \quad \Omega = z_1^3 dz_1 \wedge dz_2 + z_2 z_3^2 dz_3 \wedge dz_4.$$

É possível verificar que $\omega = (dz_1 + z_1 dz_2) \wedge (z_3 dz_2 + z_2 dz_3)$. Por conseguinte, ω é LDS. Por outro lado, não é difícil ver que $S(\Omega) = \{z_1 = z_2 = 0\} \cup \{z_1 = z_3 = 0\}$. Entretanto, se $z \in \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 : z_1 z_2 z_3 \neq 0\}$ e $v \in T_z\mathbb{C}^4$, então $\boldsymbol{i}_v(\Omega(z)) = 0$ se, e somente se, $v = 0$; *i.e.*, $ker(\Omega(z)) = \{0\}$. Logo, pelo item (V) da Proposição 1.8, Ω não é LDS.

Proposição 1.12. *Seja ω uma r-forma diferencial fechada em M. Então ω é integrável se, e somente se, ω é LDS.*

Prova: $(\Rightarrow)$ Por definição.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos que ω é LDS. Então, dado $x \in M \setminus S(\omega)$ existem uma vizinhança W de x e $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \Omega^1(W)$ tais que $\omega\,|_W = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r$. Por outro lado, $d\omega = 0$, implica que $\alpha_j \wedge d\omega = 0$ para todo $j \in I_r$. Portanto, o sistema $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ é integrável. ∎

Proposição 1.13. *Seja $\omega \in \Omega^r(M)$, $r \geq 2$,. As seguintes afirmações são equivalentes:*

I. ω é LDS.

II. ω tem posto r ou zero em cada $x \in M$.

III. $\boldsymbol{i}(v_J)(\omega) \wedge \omega = 0$ para qualquer referencial local $\{v_1, \ldots, v_n\}$ em M e para todo $J \in \mathfrak{I}_n^{r-1}$, onde $J = \{j_1, \ldots, j_{r-1}\}$ e $v_J = (v_{j_1}, \ldots, v_{j_{r-1}})$.

IV. $ker(\omega(x))^\perp = \varepsilon^*(\omega(x))$ para todo $x \in U := M \setminus S(\omega)$.

V. $\mathscr{P} : x \mapsto \mathscr{P}(x) := ker(\omega(x))$ é uma distribuição de codimensão r em U.

Prova: As demonstrações de $(I) \Rightarrow (II) \Rightarrow (III) \Rightarrow (IV) \Rightarrow (V)$ são similares às da Proposição 1.8. De modo que provaremos apenas

$(V) \Rightarrow (I)$: Consideremos o mapa de fibrados $\Psi : TM^* \longrightarrow \Lambda^{r+1}(TM^*)$ definido nas fibras por

$$\begin{aligned} \Psi : T_xM^* &\longrightarrow \Lambda^{r+1}(T_xM^*) \\ \alpha &\longmapsto \alpha \wedge \omega(x). \end{aligned}$$

Então $\ker(\Psi(x)) = \varepsilon^*(\omega(x))$ para $x \in M$. Por outro lado, sendo $codim(\ker(\omega(x))) = r$ para todo $x \in U$, segue da Proposição 1.8, que Ψ tem posto constante em U. Logo $\varepsilon^*(\omega(x))$ define um subfibrado $\varepsilon^*(\omega)$ de TU^* de posto r. Assim, para cada $p \in U$, podemos escolher uma vizinhança $W \subseteq U$ de p e um referencial local $(\alpha_j)_{1\leq j\leq r}$ de $\varepsilon^*(\omega)$ em W. Então, pelo Corolário 1.4, existe uma função f diferenciável em W tal que $\omega|_W = f\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r$. Consequentemente, ω é LDS. ∎

Corolário 1.14. *Sejam U um aberto denso em M e $\omega \in \Omega^r(M)$. Então ω é LDS em M se, e somente se, ω é LDS em U.*

Prova: $(\Rightarrow)$ Segue da definição.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos que ω é LDS em U e, seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ um referencial definido num aberto $W \neq \emptyset$ de M. Sendo U denso em M, $U \cap W \neq \emptyset$ e aberto em U. Por conseguinte, a restrição de $\{v_1, \ldots, v_n\}$ a $U \cap W$ define um frame local em U. Logo, em $U \cap W$, tem-se $\boldsymbol{i}(v_J)(\omega) \wedge \omega = 0$ para todo $J \in \mathfrak{I}_n^{r-1}$. Então, por densidade e continuidade, segue que $\boldsymbol{i}(v_J)(\omega) \wedge \omega = 0$ para todo $J \in \mathfrak{I}_n^{r-1}$. Logo, pelo item (III) da Proposição 1.13, ω é LDS em M. ∎

Como consequência da demonstração de $(V) \Rightarrow (I)$ na Proposição 1.13 obtemos o seguinte:

Corolário 1.15. *Seja $\omega \in \Omega^r(M)$. Então ω é LDS se, e somente se, dim$(\varepsilon^*(\omega(x))) = r$ para todo $x \in U := M \backslash S(\omega)$. Além do mais, $\varepsilon^*(\omega(x))$ define um subfibrado $\varepsilon^*(\omega)$ de TU^* de posto r e, para cada referencial local $(\alpha_j)_{1 \le j \le r}$ de $\varepsilon^*(\omega)$ definido numa vizinhança W, existe uma função f diferenciável em W tal que $\omega|_W = f\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r$.*

1.3 Lemas de divisão

Como uma interessante aplicação dos corolários 1.14 e 1.15 nós provamos o seguinte lema de divisão:

Lema 1.16. *Sejam M uma variedade complexa e $\omega, \widetilde{\omega} \in \Omega^r(M)$. Suponhamos que:*
(i) ω é LDS e codim$(S(\omega)) \ge 2$.
(ii) $\varepsilon^*(\omega(x)) \subset \varepsilon^*(\widetilde{\omega}(x))$ para todo $x \in U := M \setminus S(\omega)$.
Então $\widetilde{\omega}$ é LDS e $\widetilde{\omega} = g\omega$ para alguma $g \in \mathcal{O}(M)$.

Prova: Como ω é LDS e $\varepsilon^*(\omega(x)) \subset \varepsilon^*(\widetilde{\omega}(x))$ para todo $x \in U$, então $r = \dim \varepsilon^*(\omega(x)) \le \dim \varepsilon^*(\widetilde{\omega}(x)) \le r$ para todo $x \in U\S(\widetilde{\omega})$. Logo, pela primeira parte do Corolário 1.15, temos que $\widetilde{\omega}$ é LDS em U. Então, pelo Corolário 1.14, $\widetilde{\omega}$ é LDS em M. Por outro lado, sendo ω LDS, podemos escolher uma cobertura $(W_\rho)_{\rho \in \Lambda}$ por abertos de U biholomorfos a $\mathbb{C}^n$ e, para cada $\rho \in \Lambda$, uma coleção de 1-formas $\{\alpha_1^\rho, \ldots, \alpha_r^\rho\} \subseteq \Omega^1(W_\rho)$ tais que $\omega|_{W_\rho} = \alpha_1^\rho \wedge \cdots \wedge \alpha_r^\rho$. Então $\alpha_1^\rho, \ldots, \alpha_r^\rho \in \varepsilon^*(\omega|_{W_\rho}) \subset \varepsilon^*(\widetilde{\omega}|_{W_\rho})$. Sem perda de generalidade, podemos supor que *codim*$(S(\widetilde{\omega}|_{W_\rho})) \ge 2$ (vide a proposição 1.24 abaixo). Então, pela segunda parte do Corolário 1.15 e pelo Teorema de Extensão de Hartogs, existe $g_\rho \in \mathcal{O}(W_\rho)$ tal que $\widetilde{\omega}|_{W_\rho} = g_\rho \alpha_1^\rho \wedge \cdots \wedge \alpha_r^\rho = g_\rho \omega|_{W_\rho}$. Agora, em $U_{\rho\sigma} := U_\rho \cap U_\sigma \neq \emptyset$, tem-se $(g_\rho - g_\sigma)\omega = 0$. Donde $g_\rho = g_\sigma$. Assim, as $g_\rho's$ definem uma função g holomorfa em U. Como *codim*$(S(\omega)) \ge 2$, pelo Teorema de Extensão de Hartogs, g se estende holomorficamente a todo M. Por fim, sendo $\widetilde{\omega}|_U = g\omega|_U$, por continuidade, segue que $\widetilde{\omega} = g\omega$. ∎

Nas situações em que estejamos trabalhando com objetos meromorfos, vamos chamar de singularidades tanto zeros quanto pólos. Com esta convenção, podemos formular a versão meromorfa do Lema 1.16 da seguinte maneira:

Lema 1.17. *Sejam M uma variedade complexa e ω, $\widetilde{\omega}$ r-formas meromorfas em M. Suponhamos que:*
(i) ω é LDS e codim$(|\omega|_0) \ge 2$.

(ii) $\varepsilon^*(\omega(x)) \subset \varepsilon^*(\widetilde{\omega}(x))$ *para todo* $x \in M \setminus (S(\omega) \cup |\widetilde{\omega}|_\infty)$.
Então $\widetilde{\omega}$ *é LDS e* $\widetilde{\omega} = g\omega$ *para alguma* $g \in \mathscr{M}(M)$.

Prova: Seja $U = M \setminus (|\omega|_\infty \cup |\widetilde{\omega}|_\infty)$. Pelo Lema 1.16, $\widetilde{\omega}$ é LDS e existe $g \in \mathcal{O}(U)$ tal que $\widetilde{\omega} \mid_U = g\omega \mid_U$. Agora, seja $p \in (|\omega|_\infty \cup |\widetilde{\omega}|_\infty) \setminus |\omega|_0$. Existem uma vizinhança W_p de p e $f_p, h_p \in \mathcal{O}(W_p)$ tais que $f_p\omega, h_p\widetilde{\omega} \in \Omega^r(W_p)$ e $codim(S(f_p\omega)) \geq 2$. Então $f_p\omega$ é LDS e $\varepsilon^*(f_p\omega(x)) \subset \varepsilon^*(h_p\widetilde{\omega}(x))$ para todo $x \in W_p \setminus S(f_p\omega)$. Logo, pelo Lema 1.16, existe $g_p \in \mathcal{O}(W_p)$ tal que $h_p\widetilde{\omega} \mid_W = g_p f_p \omega \mid_W$; ou seja, $\widetilde{\omega} \mid_W = \frac{g_p f_p}{h_p}\omega \mid_W$. Agora, em $U \cap W_p$, tem-se $(g - \frac{g_p f_p}{h_p})\omega = 0$, donde $g \mid_{W_p} = \frac{g_p f_p}{h_p}$. Assim, g se estende meromorficamente a $M \setminus |\omega|_0$ e, como $codim(|\omega|_0) \geq 2.$, pelo Teorema de Extensão de Levi, g se estende meromorficamente a todo M. Por fim, invocando o princípio de identidade para funções meromorfas, obtemos que $\widetilde{\omega} = g\omega$. ■

1.4 Caracterização de formas integraveis

Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k, $1 \leq k \leq \infty$, e dimensão n. Denotemos por $\mathfrak{X}(M)$ o espaço formado por todos os campos de vetores de classe C^k em M.

Definição 1.18. Sejam $\omega \in \Omega^r(M)$ e $\chi \in \mathfrak{X}(M)$. Dizemos que χ é *tangente* a ω se $\boldsymbol{i}_\chi(\omega) \equiv 0$, *i.e.*, $\chi(p) \in ker(\omega(p))$ para todo $p \in M$.

Proposição 1.19. *Seja* $\omega \in \Omega^r(M)$ *LDS e suponhamos que* $U := M \setminus S(\omega)$ *é denso em* M. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

I. ω *é integrável.*

II. $d\omega$ *é LDS. Além do mais, para cada* $x \in U$*, existem uma vizinhança* W *de* x *e* $\eta \in \Omega^1(W)$ *tais que* $d\omega = \eta \wedge \omega$ *em* W.

III. A distribuição $\mathscr{P} : x \mapsto \mathscr{P}(x) := ker(\omega(x))$ *para* $x \in U$ *é integrável.*

Prova: $(I) \Rightarrow (II)$ Seja $x \in U$. Sendo ω é integrável, existem uma vizinhança W de x e $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \Omega^1(W)$ tais que $\omega = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r$ e $d\alpha_m \wedge \omega = 0$ para todo $m \in \mathfrak{I}_r$. Diminuindo W, se necessário, podemos escolher $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n \in \Omega^1(W)$ de modo que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ seja um referencial de TW^*. Escrevendo $d\alpha_m = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^m \alpha_i \wedge \alpha_j$ para $m = 1, \ldots, r$, obtemos que

$$0 = d\alpha_m \wedge \omega = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}^m \alpha_i \wedge \alpha_j \wedge \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r.$$

Donde $a_{ij}^m = 0$ para todo $r+1 \leq i \leq n$. Logo $d\alpha_m = \sum_{\substack{1\leq i<j\leq n \\ i\leq r}} a_{ij}^m \alpha_i \wedge \alpha_j$. Assim,

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{m=1}^{r} (-1)^{m+1} d\alpha_m \wedge \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\alpha_m} \wedge \cdots \wedge \alpha_r \\ &= \sum_{m=1}^{r} (-1)^{m+1} \sum_{j=r+1}^{n} (-1)^m a_{mj}^m \alpha_j \wedge \omega \\ &= \eta \wedge \omega, \end{aligned}$$

onde $\eta = -\sum_{j=r+1}^{n} \sum_{m=1}^{r} a_{mj}^m \alpha_j$. Portanto, $d\omega$ é LDS em U. Sendo U denso em M, do Corolário 1.14, segue que $d\omega$ é LDS em M.

$(II) \Rightarrow (III)$ Usando propriedades do colchete de Lie junto com (II) mostraremos que a $\mathscr{P}$ define uma distribuição involutiva em U. Sejam χ_1, χ_2 dois campos de vetores em U tangentes a $\mathscr{P}$, quer dicer, $\boldsymbol{i}_{\chi_j}(\omega) = 0$, $j = 1, 2$. Lembrando que $\boldsymbol{i}_{[\chi_1,\chi_2]} = [L_{\chi_1}, \boldsymbol{i}_{\chi_2}]$, onde $L_\chi = \boldsymbol{i}_\chi d + d\boldsymbol{i}_\chi$, obtemos que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}_{[\chi_1,\chi_2]}(\omega) &= L_{\chi_1} \boldsymbol{i}_{\chi_2}(\omega) - \boldsymbol{i}_{\chi_2} L_{\chi_1}(\omega) \\ &= \boldsymbol{i}_{\chi_1} d\boldsymbol{i}_{\chi_2}(\omega) + d\boldsymbol{i}_{\chi_1}\boldsymbol{i}_{\chi_2}(\omega) - \boldsymbol{i}_{\chi_2}\boldsymbol{i}_{\chi_1} d\omega - \boldsymbol{i}_{\chi_2} d\boldsymbol{i}_{\chi_1}(\omega) \\ &= \boldsymbol{i}_{\chi_1}\boldsymbol{i}_{\chi_2} d\omega \\ &= \boldsymbol{i}_{\chi_1}\boldsymbol{i}_{\chi_2}(\eta \wedge \omega), \text{ por } \text{ (ii)} \\ &= \boldsymbol{i}_{\chi_1}(\boldsymbol{i}_{\chi_2}(\eta)\omega) \\ &= \boldsymbol{i}_{\chi_2}(\eta)\boldsymbol{i}_{\chi_1}(\omega) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo $[\chi_1, \chi_2]$ é tangente a $\mathscr{P}$. Assim, a distribuição $\mathscr{P}$ é involutiva e portanto integrável.

$(III) \Rightarrow (I)$ Como a distribuição $\mathscr{P}$ é integrável, existe uma folheação $\mathscr{F}$ de U de codimensão r tal que $\mathscr{P}(x) = T_x\mathscr{F}$ para todo $x \in U$. Agora, dado $p \in U$, existem uma vizinhança W de p e uma submersão $g := (g_1, \ldots, g_r) : W \to \Bbbk^r$ tal que $ker(dg_1(x) \wedge \cdots \wedge dg_r(x)) = T_x\mathscr{F} = ker(\omega(x))$ para todo $x \in W$. Então, pelo item (IV) da Proposição 1.13, $\{dg_1, \ldots, dg_r\} \subseteq \varepsilon^*(\omega\mid_W)$. Logo, pelo Corolário 1.15, existe $f \in C^k(W)$ tal que $\omega\mid_W = f \cdot dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_r$. Consequentemente, ω é integrável. ∎

Corolário 1.20. *Nas condições da proposição anterior, se ω é integrável e $d\omega \neq 0$, então $d\omega$ é também integrável. Ainda, em $M \setminus (S(\omega) \cup S(d\omega))$, as subvariedades integrais de ω são saturadas por subvariedades integrais de $d\omega$.*

Prova: Segue das proposições 1.12 e 1.19(II). ∎

Observação 1.21. *Vale a pena notar que se $codim(S(\omega)) > 0$, a condição de densidade sobre $U := M \setminus S(\omega)$ na proposição 1.19 é supérflua. Por exemplo, no* *caso em que M é uma variedade complexa conexa e ω é uma r-forma holomorfa não nula, U é sempre denso em M.*

Observação 1.22. A Proposição 1.19(II) implica que ω e $d\omega$ são LDS e $\varepsilon^*(\omega(x)) \subset \varepsilon^*(d\omega(x))$ para todo $x \in U$. É possível demonstrar que se M é uma variedade complexa e ω é uma r-forma holomorfa, então estas condições são de fato equivalentes, mas neste momento a prova da recíproca seria um tanto complicada e será apresentada no próximo capítulo (corolário 2.0.2.).

Exemplo 1.23. Consideremos a 2-forma $\omega = (dz_1 + z_1 dz_2) \wedge (z_2 dz_3 + z_3 dz_4)$ em $\mathbb{C}^4$. Então $S(\omega) = \{(z_1, \ldots, z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid z_2 = z_3 = 0\}$, $d\omega$ é LDS e

$$d\omega = dz_1 \wedge dz_2 \wedge (z_2 dz_3 + z_3 dz_4) - (dz_1 + z_1 dz_2) \wedge (dz_2 - dz_4) \wedge dz_3.$$

Logo $(z_2 dz_3 + z_3 dz_4) \wedge d\omega = z_3 dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 \wedge dz_4 \neq 0$ em $\mathbb{C}^4 \setminus \{z_3 = 0\}$. Então, pela Observação 1.22.2., ω não é integrável.

Finalizaremos esta seção com uma proposição que justifica por que, no caso $M = \mathbb{C}^n$, não é restritivo considerar formas LDS cujo conjunto singular tem codimensão maior que um. Por sua vez, isto implica que não é restritiva a condição sobre a codimensão do conjunto singular na definição 3.0.9. que daremos no capítulo 3.

Proposição 1.24. *Seja $\omega \in \Omega^r(\mathbb{C}^n)$ LDS (resp. integrável) tal que $S(\omega)$ possui componente de codimensão um. Então existe $\widetilde{\omega} \in \Omega^r(\mathbb{C}^n)$ LDS (resp. integrável) tal que $codim(S(\widetilde{\omega})) \geq 2$ e $ker(\widetilde{\omega}(x)) = ker(\omega(x))$ para todo $x \in \mathbb{C}^n \setminus S(\omega)$. Ou seja, a distribuição $\mathscr{P}_{\widetilde{\omega}} : x \mapsto ker(\widetilde{\omega}(x))$ estende a distribuição $\mathscr{P}_\omega : x \mapsto ker(\omega(x))$.*

Prova: Seja $V := \{g = 0\}$ a componente de codimensão um de $S(\omega)$. Sem perda de generalidade podemos supor que g é irredutível. Então, pelo Teorema dos Zeros de Hilbert, existem $k \in \mathbb{N}$ e $\widetilde{\omega} \in \Omega^r(\mathbb{C}^n)$ tais que $\omega = g^k \widetilde{\omega}$ e $codim(S(\widetilde{\omega})) \geq 2$. Além disso, pelo Corolário 1.14, $\widetilde{\omega}$ é LDS. Agora, se ω é integrável, pelo item (II) da Proposição 1.19, em $\mathbb{C}^n \setminus S(\omega)$, localmente tem-se $d\omega = \eta \wedge \omega$ para alguma 1-forma η. Logo $d\widetilde{\omega} = (\eta - k\frac{dg}{g}) \wedge \widetilde{\omega}$. Assim, pelo item (II) da Proposição 1.19 e por um argumento de continuidade, segue que $\widetilde{\omega}$ é integrável em $\mathbb{C}^n$. ∎

Capítulo 2

Decomponibilidade em $\mathbb{C}^n$

Neste capítulo, estudaremos algumas condições sob as quais uma r-forma ω LDS holomorfa em $\mathbb{C}^n$ é globalmente decomponível. Na verdade, nós provamos que se $codim(S(\omega)) \geq 2$ e se o fibrado holomorfo $\varepsilon^*(\omega)$ admite um subfibrado trivial de posto $r-1$, então $\varepsilon^*(\omega)$ é também trivial. Além disso, nosso método fornece um algoritmo para calcular o "r-ésimo fator"da decomposição de ω a partir de $r-1$ fatores dados.

2.1 Dualidade em $\mathbb{C}^n$

Por comodidade, nas próximas seções deste capítulo denotamos por $\underline{\mathfrak{I}_n}$ o conjunto $\mathfrak{I}_n \cup \{0\}$ e consideramos $\mathfrak{I}_n^m$ com a ordem Lexicográfica.

Lema 2.1. *Sejam $U \subseteq \mathbb{C}^n$, aberto, e $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \Omega^1(U)$ L.I.. Então existem $g \in \mathcal{O}(U)$ e campos de vetores $\chi_1, \ldots, \chi_r$ meromorfos em U tais que, para quaisquer $k, m \in \mathfrak{I}_r$, $\mid \chi_k \mid_\infty \subseteq V := \{g = 0\}$ e $\alpha_k(\chi_m) = \delta_{km}$ em $U \setminus V$.*

Prova: Sem perda de generalidade, podemos supor que $0 \in U$. Para cada $k \in \mathfrak{I}_r$, escrevemos

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} dz_i.$$

Existem $i_{r+1}, \ldots, i_n \in \mathfrak{I}_n$ tais que $\alpha_1(0), \ldots, \alpha_r(0), dz_{i_{r+1}}, \ldots, dz_{i_n}$ são L.I.. Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \delta_{1i_{r+1}} & \cdots & \delta_{1i_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \delta_{ni_{r+1}} & \cdots & \delta_{ni_n} \end{bmatrix}.$$

Ou seja, para cada $j = r+1, \ldots, n$, a $j-$ésima coluna de A tem 1 na componente i_j e zero nas demais. Agora, fazendo $g = \det(A(z))$ e $V := \{g = 0\}$, obtemos que $B = A^{-1} = (b_{ki})$ está bem definida em $U \backslash V$ e depende apenas das coordenadas das $\alpha_k{}'s$.

Além disso, pela Observação 7.5 no Apêndice, os campos $\chi_m = \Sigma_{i=1}^n b_{mi}\frac{\partial}{\partial z_i}$, $m = 1, \ldots, r$, têm a propriedade desejada. ■

Observação 2.2. Fica claro da demonstração que, na verdade, nas condições do Lema 2.1, podemos escolher n campos de vetores $\chi_1, \ldots, \chi_n$ meromorfos em U tais que, para cada $k \in \mathfrak{I}_r$, $\alpha_k(\chi_m) = \delta_{km}$ para todo $m \in \mathfrak{I}_n$. Em particular, $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r(\chi_1, \ldots, \chi_r) = 1$. Tanto esta observação quanto a maneira como foi enunciado o Lema 2.1 serão de grande utilidade ao longo deste trabalho.

Definição 2.3. Se $U \subseteq \mathbb{C}^n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \Omega^1(U)$ e $\chi_1, \ldots, \chi_r$ são como no Lema 2.1, dizemos que $\{\chi_1, \ldots, \chi_r\}$ é uma família de campos meromorfos *duais* de $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ ou *normalizadores* de $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r$.

2.2 Formas globalmente decomponíveis em $\mathbb{C}^n$

No que segue $n \geq 4$, $2 \leq r \leq n-2$ e ω representa uma r-forma holomorfa em $\mathbb{C}^n$ satisfazendo $L_{\frac{\partial}{\partial z_i}}(\omega) \neq 0$ para todo $i \in \mathfrak{I}_n$. A menos que seja especificado algo diferente, assumimos também que $codim(S(\omega)) \geq 2$.

Teorema 2.4. *Sejam $U \subseteq \mathbb{C}^n$ aberto, $\omega \in \Omega^r(U)$ LDS. Suponhamos que existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1} \in \Omega^1(U) \cap \varepsilon^*(\omega)$ linearmente independentes em $U \setminus S(\omega)$. Então existe uma 1-forma $\xi \in \Omega^1(U)$ tal que $\omega = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{r-1} \wedge \xi$. Em particular, ω é globalmente decomponível.*

Prova: Como $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}$ são L.I. em $U \setminus S(\omega)$, pelo Lema 2.1 existem $g \in \mathcal{O}(U)$ e campos de vetores $\chi_1, \ldots, \chi_{r-1}$ meromorfos em U tais que, para quaisquer $k, m \in \mathfrak{I}_{r-1}$, $|\chi_k|_\infty \subseteq V := \{g = 0\}$ e $\alpha_k(\chi_m) = \delta_{km}$ em $U \setminus V$. Seja $\xi = \boldsymbol{i}_{\chi_{r-1}}(\cdots(\boldsymbol{i}_{\chi_1}(\omega))\cdots)$. Então ξ é uma 1-forma meromorfa em U e $|\xi|_\infty \subseteq V$. Agora, dado $p \in U \setminus S(\omega)$, sendo ω LDS, existem uma vizinhança $U_p \subseteq U \setminus S$ de p e $\xi_p \in \Omega^1(U_p)$ tais que $\omega|_{U_p} = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{r-1} \wedge \xi_p$. Então

$$\xi|_{U_p \setminus V} = \boldsymbol{i}_{\chi_{r-1}}(\cdots(\boldsymbol{i}_{\chi_1}(\omega|_{U_p \setminus V}))\cdots) = \xi_p - \sum_{j=1}^{r-1} \boldsymbol{i}_{\chi_j}(\xi_p)\alpha_j.$$

Consequentemente, $\omega|_{U \setminus V} = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{r-1} \wedge \xi$.
Vamos provar que ξ é de fato holomorfa em U. Para tal fim, ponhamos

$$\xi = \frac{1}{g^{r-1}} \sum_{j=1}^{n} P_j dz_j.$$

Mostraremos que g^{r-1} divide P_j para todo $j \in \mathfrak{I}_n$. Fixemos $k \in \mathfrak{I}_n$. Se $V = \emptyset$, então g é uma unidade no anel $\mathcal{O}(U)$ e não há nada a facer. Suponhamos então que $V \neq \emptyset$. Como $codim(S(\omega)) \geq 2$, existe um $p \in V \setminus S(\omega)$. Sendo ω LDS, novamente podemos escolher U_p e ξ_p como acima. Por outro lado, a condição $r \leq n-2$, nos permite escolher $J^c := \{j_{r+1}, \ldots, j_n\} \subseteq \mathfrak{I}_n \setminus \{k\}$ de modo que $\alpha_1(p), \ldots, \alpha_{r-1}(p)$, $\xi_p(p), dz_{j_{r+1}}, \ldots, dz_{j_n}$ sejam L.I.. Agora, faça

$$\xi_p = \sum_{j=1}^{n} a_{jr} dz_j \quad \text{e} \quad \alpha_l = \sum_{j=1}^{n} a_{jl} dz_j, \; l = 1, \ldots, r-1.$$

Considere a matriz

$$A = \left[\begin{array}{cccccc} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \delta_{1j_{r+1}} & \cdots & \delta_{1j_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \delta_{nj_{r+1}} & \cdots & \delta_{nj_n} \end{array} \right].$$

Diminuindo U_p, se necessário, podemos supor que $\widetilde{g} := \det(A) \in \mathcal{O}^*(U_p)$. Então

$$A^{-1} = \frac{1}{\widetilde{g}} \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} \phantom{(-1)^{1+j_{r+1}}A_{1j_{r+1}}} & \cdots & j_{r+1} & \cdots & j_n & \cdots & \phantom{(-1)^{n+j_{r+1}}A_{nj_{r+1}}} \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccccc} A_{11} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & (-1)^{n+1}A_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{1+j_{r+1}}A_{1j_{r+1}} & \cdots & \widetilde{g} & \cdots & 0 & \cdots & (-1)^{n+j_{r+1}}A_{nj_{r+1}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{1+j_n}A_{1j_{r+1}} & \cdots & 0 & \cdots & \widetilde{g} & \cdots & (-1)^{n+j_n}A_{nj_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{1+n}A_{1n} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & A_{nn} \end{array} \right] & \begin{array}{c} \\ \vdots \\ j_{r+1} \\ \vdots \\ j_n \\ \vdots \\ \end{array} \end{array}$$

Em seguida, consideramos em U_p os campos de vetores determinados pelas linhas de $A^{-1} =: \frac{1}{\widetilde{g}}B = \frac{1}{\widetilde{g}}(b_{ij})$. Ou seja, para cada $l \in \mathfrak{I}_n$, definimos

$$\chi_l = \begin{cases} \frac{1}{\widetilde{g}} \sum_{j \in \mathfrak{I}_n \setminus J^c} b_{lj} \frac{\partial}{\partial z_j}, & se \quad l \notin J^c \\ \\ \frac{1}{\widetilde{g}} [\sum_{j \in \mathfrak{I}_n \setminus J^c} b_{lj} \frac{\partial}{\partial z_j} + \widetilde{g} \frac{\partial}{\partial z_l}], & se \quad l \in J^c, \end{cases}$$

Pela Observação 7.5, sabemos que, para todo $l \in \mathfrak{I}_n$, $\boldsymbol{i}_{\chi_l}(\xi_p) = \delta_{lr}$ e $\boldsymbol{i}_{\chi_l}(\alpha_j) = \delta_{lj}$ para todo $j \in \mathfrak{I}_{r-1}$. Além disso, em $U_p \setminus |\xi|_\infty$, temos que

$$\boldsymbol{i}_{\chi_l}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\widetilde{g} g^{r-1}} \sum_{j \in \mathfrak{I}_n \setminus J^c} b_{lj} P_j, & se \quad l \notin J^c \\ \\ \frac{1}{\widetilde{g} g^{r-1}} [\sum_{j \in \mathfrak{I}_n \setminus J^c} b_{lj} P_j + \widetilde{g} P_l], & se \quad l \in J^c. \end{cases} \tag{2.1}$$

Por outro lado, em $U_p \setminus |\xi|_\infty$, tem-se

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{r-1} \wedge \xi_p = \omega = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{r-1} \wedge \xi.$$

Donde $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{r-1} \wedge (\xi - \xi_p) = 0$ e, sendo $\alpha_1, \ldots \alpha_{r-1}$ L.I. em U_p, existem $f_1, \ldots, f_{r-1} \in \mathcal{O}(U_p \setminus |\xi|_\infty)$ tais que $\xi = \xi_p + \Sigma_{j=1}^{r-1} f_j \alpha_j$. Por conseguinte, para cada $l \in \mathfrak{I}_n$,

$$\boldsymbol{i}_{\chi_l}(\xi) = \begin{cases} f_l, & se \quad l < r. \\ 1, & se \quad l = r. \\ 0, & se \quad l > r. \end{cases} \tag{2.2}$$

Então, das relações (2.1) e (2.2), obtemos a relação matricial

$$\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{j_{r+1}1} & \cdots & \widetilde{g} & \cdots & 0 & \cdots & b_{j_{r+1}n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{j_n 1} & \cdots & 0 & \cdots & \widetilde{g} & \cdots & b_{j_n n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} = \widetilde{g} g \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{j_{r+1}} \\ \vdots \\ f_{r-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \widetilde{g} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ P_{j_{r+1}} \\ \vdots \\ P_{j_n} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Denotando por B_j é a matriz obtida ao substituir a j-ésima coluna da matriz B pelo vetor

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ P_{j_{r+1}} \\ \vdots \\ P_{j_n} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

obtemos que $\det(B_j) = 0$ para todo $j \in \mathfrak{I}_n \setminus J^c$. Por outro lado, temos que $\det(B) = \widetilde{g}^{n-1}$. Então, pela regra de Cramer e pelo Teorema dos Zeros de Hilbert, g divide a P_j para todo $j \in \mathfrak{I}_n \setminus J^c$. Em particular, g divide a P_k, como queríamos provar. ■

A condição sobre a codimensão do conjunto singular de ω no Teorema 2.4 pode ser substituida por uma condição sobre o conjunto de tangências das $\alpha_j's$. Explicitamente falando, se denotamos por $\widetilde{S}(\omega)$ a união de todas as componentes de $S(\omega)$ de codimensão maior que um, então vale o seguinte:

Corolário 2.5. *Sejam $U \subseteq \mathbb{C}^n$ aberto e $\omega \in \Omega^r(U)$ LDS. Suponhamos que existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1} \in \Omega^1(U) \cap \varepsilon^*(\omega)$ L.I. em $U \setminus \widetilde{S}(\omega)$. Então existe $\xi \in \Omega^1(U)$ tal que $\omega = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{r-1} \wedge \xi$. Em particular, ω é decomponível.*

Prova: Se $codim(S(\omega)) \geq 2$, o resultado segue do Teorema 2.4. Suponhamos então que $S(\omega)$ possui componente de codimensão um, $V = \{f = 0\}$. Pelo Teorema dos Zeros de Hilbert, existem $k \in \mathbb{N}$ e $\widetilde{\omega} \in \Omega^r(U)$ tais que $\omega = f^k\widetilde{\omega}$ e $codim(S(\widetilde{\omega})) \geq 2$. Então $\widetilde{\omega}$ é LDS, $S(\widetilde{\omega}) = \widetilde{S}(\omega)$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1} \in \varepsilon^*(\widetilde{\omega})$. Logo, pelo Teorema 2.4, existe $\widetilde{\xi} \in \Omega^1(U)$ tal que $\widetilde{\omega} = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{r-1} \wedge \widetilde{\xi}$. Tomando $\xi = f^k\widetilde{\xi}$, obtemos que $\omega = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{r-1} \wedge \xi$. ■

Corolário 2.6. *Sejam M uma variedade complexa e $\omega \in \Omega^r(M)$ LDS. Então ω é integrável se, e somente se, $d\omega$ é LDS e $\varepsilon^*(\omega(x)) \subset \varepsilon^*(d\omega(x))$ para todo $x \in M \setminus S(\omega)$.*

Prova: $(\Rightarrow)$ Segue da Proposição 1.19(II).
$(\Leftarrow)$ Seja $x \in M \setminus S(\omega)$. Sendo ω LDS, existem uma vizinhança $W \subseteq M \setminus S(\omega)$ de x e $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \varepsilon^*(\omega\mid_W)$ tais que $\omega\mid_W = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r$. Então $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \varepsilon^*(d\omega\mid_W)$ e, sendo $d\omega\mid_W$ LDS, pelo Corolário 2.5, existe uma $1-$forma $\eta \in \Omega^1(W)$ tal que $d\omega\mid_W = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r \wedge \eta = \omega\mid_W \wedge \eta$. Logo, pela Proposição 1.19, ω é integrável. ■

2.3 Teorema de divisão em $\mathbb{C}^n$

Nesta seção provaremos um teorema de divisão que generaliza o Teorema 2.4. Começamos com o seguinte

Lema 2.7. *Sejam $k, m, n \in \mathbb{N}$, com $k + m \leq n$, $U \subseteq \mathbb{C}^n$ aberto, $\beta \in \Omega^m(U)$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Omega^1(U)$. Sejam $\chi_1, \ldots, \chi_k \in \mathfrak{X}(U)$ tais que, para quaisquer $j, l \in \mathfrak{I}_k$, $\boldsymbol{i}_{\chi_j}(\alpha_l) = \delta_{jl}$. Então*

$$\boldsymbol{i}(\chi_1, \ldots, \chi_k)(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \wedge \beta) = \beta + \sum_{l=1}^{k}(-1)^l \sum_{J \in \mathfrak{I}_k^l} \alpha_J \wedge \boldsymbol{i}(\chi_J)(\beta),$$

onde $J = \{j_1 < \cdots < j_l\}$, $\chi_J = (\chi_{j_1}, \ldots, \chi_{j_l})$ e $\alpha_J = \alpha_{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{j_l}$.

Prova: Provaremos o resultado por indução sobre k. Para $k = 1$, temos que $\boldsymbol{i}_{\chi_1}(\alpha_1 \wedge \beta) = \beta - \alpha_1 \wedge \boldsymbol{i}_{\chi_1}(\beta)$, logo o resultado é verdadeiro. Suponhamos então o resultado valido para $1 \leq k < n - m$. Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1} \in \Omega^1(U)$ e $\chi_1, \ldots, \chi_{k+1} \in \mathfrak{X}(U)$ tais que $\boldsymbol{i}_{\chi_j}(\alpha_l) = \delta_{jl}$ para quaisquer $j, l \in \mathfrak{I}_{k+1}$. Pelo caso $k = 1$, temos que $\boldsymbol{i}(\chi_1, \ldots, \chi_{k+1})(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \wedge \alpha_{k+1} \wedge \beta) = \boldsymbol{i}(\chi_{k+1}, \chi_1, \ldots, \chi_k)(\alpha_{k+1} \wedge \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \wedge \beta) = \boldsymbol{i}(\chi_1, \ldots, \chi_k)(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \wedge (\beta - \alpha_{k+1} \wedge \boldsymbol{i}_{\chi_{k+1}}(\beta)))$. Por outro lado, a hipótese de indução implica que

$$\boldsymbol{i}(\chi_1, \ldots, \chi_k)(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \wedge (\beta - \alpha_{k+1} \wedge \boldsymbol{i}_{\chi_{k+1}}(\beta))) = \beta - \alpha_{k+1} \wedge \boldsymbol{i}_{\chi_{k+1}}(\beta) +$$

$$\sum_{l=1}^{k}(-1)^l \sum_{J \in \mathfrak{I}_k^l} \alpha_J \wedge \boldsymbol{i}(\chi_J)(\beta - \alpha_{k+1} \wedge \boldsymbol{i}_{\chi_{k+1}}(\beta)) = \beta - \alpha_{k+1} \wedge \boldsymbol{i}_{\chi_{k+1}}(\beta) +$$

$$\sum_{l=1}^{k}(-1)^l \sum_{J\in\mathfrak{I}_k^l} \alpha_J \wedge \boldsymbol{i}(\chi_J)(\beta) + \sum_{l=1}^{k}(-1)^{l+1} \sum_{J\in\mathfrak{I}_k^l} \alpha_J \wedge \alpha_{k+1} \wedge \boldsymbol{i}(\chi_J, \chi_{k+1})(\beta) = \beta -$$

$$\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j \wedge \boldsymbol{i}_{\chi_j}(\beta) + \sum_{l=2}^{k}(-1)^l \sum_{J\in\mathfrak{I}_k^l} \alpha_J \wedge \boldsymbol{i}(\chi_J)(\beta) + \sum_{l=2}^{k+1}(-1)^l \sum_{J\in\mathfrak{I}_k^{l-1}} \alpha_J \wedge \alpha_{k+1} \wedge \boldsymbol{i}(\chi_J, \chi_{k+1})(\beta)$$

$$= \beta - \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j \wedge \boldsymbol{i}_{\chi_j}(\beta) + \sum_{l=2}^{k}(-1)^l [\sum_{J\in\mathfrak{I}_k^l} \alpha_J \wedge \boldsymbol{i}(\chi_J)(\beta) + \sum_{J\in\mathfrak{I}_k^{l-1}} \alpha_J \wedge \alpha_{k+1} \wedge \boldsymbol{i}(\chi_J, \chi_{k+1})(\beta)]$$

$$-\alpha_{k+1} \wedge \alpha_{I_k} \wedge \boldsymbol{i}(\chi_{I_k}, \chi_{k+1})(\beta) = \beta - \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j \wedge \boldsymbol{i}_{\chi_{j_1}}(\beta) + \sum_{l=2}^{k}(-1)^l \sum_{J\in\mathfrak{I}_{k+1}^l} \alpha_J \wedge \boldsymbol{i}(\chi_J)(\beta)$$

$$+(-1)^{k+1} \sum_{J\in\mathfrak{I}_{k+1}^{k+1}} \alpha_J \wedge \boldsymbol{i}(\chi_J)(\beta) = \beta + \sum_{l=1}^{k+1}(-1)^l \sum_{J\in\mathfrak{I}_{k+1}^l} \alpha_J \wedge \boldsymbol{i}(\chi_J)(\beta).$$

∎

Teorema 2.8. *Sejam $U \subseteq \mathbb{C}^n$ aberto e $\omega \in \Omega^r(U)$ LDS. Suponhamos que existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Omega^1(U) \cap \varepsilon^*(\omega)$ L.I. em $U \setminus S(\omega)$. Então existem $g \in \mathcal{O}(U)$ e uma $(r-k)$-forma η holomorfa em $\widetilde{U} = U \setminus \{g = 0\}$ localmente decomponível tal que $\omega|_U = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \wedge \eta$. Ainda, se $2r < n + k$, então η é holomorfa em U.*

Prova: Como $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ são L.I. em $U \setminus S(\omega)$, pelo Lema 2.1, existem $g \in \mathcal{O}(U)$ e campos de vetores $\chi_1, \ldots, \chi_k$ meromorfos em U tais que, para quaisquer $j, l \in \mathfrak{I}_k$, $|\chi_j|_\infty \subseteq V := \{g = 0\}$ e $\boldsymbol{i}_{\chi_j}(\alpha_l) = \delta_{jl}$. Seja $\eta = \boldsymbol{i}_{\chi_k}(\cdots(\boldsymbol{i}_{\chi_1}(\omega))\ldots)$. Então η é uma $(r-k)-$forma meromorfa em U e $|\eta|_\infty \subseteq V$.
Afirmação: $\eta \neq 0$ e $\omega|_{\widetilde{U}} = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \wedge \eta$.
De fato, se $p \in \widetilde{U} \setminus S(\omega)$, existem uma vizinhança $U_p \subseteq U \setminus S(\omega)$ de p e $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_r \in \Omega^1(U_p)$ tais que $\omega|_{U_p} = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r$. Pelo Lema 2.7, em $U_p \setminus V$, tem-se

$$\begin{aligned} \eta &= \boldsymbol{i}_{\chi_k}(\cdots(\boldsymbol{i}_{\chi_1}(\omega))\ldots) \\ &= \alpha_{k+1} \wedge \cdots \wedge \alpha_r + \sum_{l=1}^{k}(-1)^l \sum_{J\in\mathfrak{I}_k^l} \alpha_J \wedge \boldsymbol{i}(\chi_J)(\alpha_{k+1} \wedge \cdots \wedge \alpha_r). \quad (\diamond) \end{aligned}$$

Logo η nunca se anula em $U_p \setminus V$ e $\omega|_{\widetilde{U}} = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \wedge \eta$. Agora, por construção, $ker(\omega(x)) \cup Span(\chi_1(x), \ldots, \chi_k(x)) \subseteq ker(\eta(x))$ para todo $x \in \widetilde{U}$. Logo, pela Proposição 1.7, $n - r + k \leq dim(ker(\eta(x))) \leq n - (r-k)$ para todo $x \in \widetilde{U} \setminus S(\eta)$. Então, pela Proposição 1.8 η é localmente decomponível. Suponhamos agora que $2r < n + k$ e provemos que η é de fato holomorfa. Para tal fim, façamos

$$\eta = \frac{1}{g} \sum_{J\in\mathfrak{I}_n^{r-k}} P_J dz_J.$$

Mostraremos que g divide P_J para todo $J \in \mathfrak{I}_n^{r-k}$. Fixemos então um $J_0 \in \mathfrak{I}_n^{r-k}$. Se $V = \emptyset$, então g é uma unidade no anel $\mathcal{O}(U)$ e, por conseguinte, g divide P_{J_0}. Suponhamos então que $V \neq \emptyset$. Como $codim(S(\omega)) \geq 2$, existe um $p \in V \setminus S(\omega)$. Sendo ω LDS, novamente podemos escolher U_p e $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_r$ como acima. Por outro lado, a condição $2r < n + k$, nos permite escolher $J^c := \{j_{r+1}, \ldots, j_n\} \subseteq \mathfrak{I}_n \setminus J_0$ de modo que $\alpha_1(p), \ldots, \alpha_r(p), dz_{j_{r+1}}, \ldots, dz_{j_n}$ sejam L.I.. Agora, para cada $l \in \mathfrak{I}_r$, faça

$$\alpha_l = \sum_{j=1}^{n} a_{jl} dz_j$$

e considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \delta_{1j_{r+1}} & \cdots & \delta_{1j_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \delta_{nj_{r+1}} & \cdots & \delta_{nj_n} \end{bmatrix}.$$

Diminuindo U_p, se necessario, podemos supor que $\widetilde{g} := \det(A) \in \mathcal{O}^*(U_p)$. Então

$$A^{-1} = \frac{1}{\widetilde{g}} \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & \cdots & j_{r+1} & \cdots & j_n & \cdots & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & (-1)^{n+1}A_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{1+j_{r+1}}A_{1j_{r+1}} & \cdots & \widetilde{g} & \cdots & 0 & \cdots & (-1)^{n+j_{r+1}}A_{nj_{r+1}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{1+j_{r+1}}A_{1j_{r+1}} & \cdots & 0 & \cdots & \widetilde{g} & \cdots & (-1)^{n+j_n}A_{nj_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{1+n}A_{1n} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \vdots \\ j_{r+1} \\ \vdots \\ j_n \\ \vdots \end{array} \end{array}$$

Em seguida, consideramos os campos de vetores determinados pelas linhas de $A^{-1} =: \frac{1}{\widetilde{g}}B = \frac{1}{\widetilde{g}}(b_{ij})$. Ou seja, para cada $l \in \mathfrak{I}_n$, definimos

$$\chi_l = \begin{cases} \frac{1}{\widetilde{g}} \sum_{j \in \mathfrak{I}_n \setminus J^c} b_{lj} \frac{\partial}{\partial z_j}, & se \quad l \notin J^c \\ \frac{1}{\widetilde{g}} [\sum_{j \in \mathfrak{I}_n \setminus J^c} b_{lj} \frac{\partial}{\partial z_j} + \widetilde{g} \frac{\partial}{\partial z_l}], & se \quad l \in J^c, \end{cases}$$

Então, para cada $L = \{l_1 < \cdots < l_{r-k}\} \in \mathfrak{I}_n^{r-k}$, tem-se

$$(\bigstar) \; \eta(\chi_{l_1}, \ldots, \chi_{l_{r-k}}) = \begin{cases} \frac{1}{\widetilde{g}^{r-k} g} \sum_{\substack{J \in \mathfrak{I}_n^{r-k} \\ J \cap J^c = \emptyset}} P_J \det(B_{LJ}), \; se \; L \cap J^c = \emptyset. \\ \frac{1}{\widetilde{g}^{r-k} g} [\sum_{\substack{J \in \mathfrak{I}_n^{r-k} \\ J \cap J^c = \emptyset}} P_J \det(B_{LJ}) + \widetilde{g} Q_L], \; se \; L \cap J^c \neq \emptyset \end{cases},$$

onde B_{LJ} é a submatriz $(r-k)\times(r-k)$ de B cujas linhas e colunas são, respectivamente, determinadas por L e J, e $Q_L = \sum_{\substack{J\in\mathfrak{I}_n^{r-k}\\ J\supseteq L\cap J^c}} P_J \det(B_{LJ})$. Além disso, pela Observação 7.5, sabemos que, para cada $l\in\mathfrak{I}_n$, $i_{\chi_l}(\alpha_j)=\delta_{lj}$ para todo $j\in\mathfrak{I}_r$. Por outro lado, em $U_p\setminus V$, tem-se

$$\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_r=\omega=\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_k\wedge\eta,$$

donde $\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_k\wedge(\eta-\alpha_{k+1}\wedge\cdots\wedge\alpha_r)=0$. Assim, pondo

$$dw_l=\begin{cases}\alpha_l, & se \quad l\le r.\\ dz_{j_l}, & se \quad l>r.\end{cases} \quad \text{e} \quad \eta=\sum_{L\in\mathfrak{I}_n^{r-k}} C_L dw_L,$$

obtemos que

$$C_L=\begin{cases}1, & se \quad L=\{k+1,\dots,r\}.\\ 0, & se \quad L\cap\mathfrak{I}_k=\emptyset \ e \ l_{r-k}>r.\end{cases}$$

Logo

$$\eta=\alpha_{k+1}\wedge\cdots\wedge\alpha_r+\sum_{\substack{L\in\mathfrak{I}_n^{r-k}\\ L\cap\mathfrak{I}_k\neq\emptyset}} C_L dw_L.$$

Por conseguinte,

$$(\bigstar\bigstar)\ \eta(\chi_{l_1},\dots,\chi_{l_{r-k}})=\begin{cases}C_L, & se \quad L\subseteq\{1,\dots,r\} \ e \ l_1<k.\\ 1, & se \quad L=\{k+1,\dots,r\}.\\ 0, & se \quad l_1>k \ e \ l_{r-k}>r.\end{cases}$$

Considerando a ordem lexicografica, denotemos, respectivamente, por J_0^c e J_F^c o primeiro e o último elemento de $\mathfrak{I}_n^{r-k}$ que interseptem a J^c. Então, notando que $\det(B_{LJ})=0$ sempre que $J\cap J^c\neq\emptyset$ e $L\cap J^c\neq J\cap J^c$, de $(\bigstar)$ e $(\bigstar\bigstar)$, obtemos a relação matricial

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & J_0^c & \cdots & J_F^c & \cdots & \cdots \end{array}\\ \begin{bmatrix} B_{\mathfrak{I}_{r-k}\mathfrak{I}_{r-k}} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & B_{\mathfrak{I}_{r-k}J_{n_{(r-k)}}}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ B_{J_0^c\mathfrak{I}_{r-k}} & \cdots & \widetilde{g}h_{J_0^c} & \cdots & 0 & \cdots & B_{J_0^cJ_{n_{(r-k)}}}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ B_{J_F^c\mathfrak{I}_{r-k}} & \cdots & 0 & \cdots & \widetilde{g}h_{J_F^c} & \cdots & B_{J_F^cJ_{n_{(r-k)}}}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ B_{J_{n_{(r-k)}}\mathfrak{I}_{r-k}} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & B_{J_{n_{(r-k)}}J_{n_{(r-k)}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{\mathfrak{I}_{r-k}}\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ P_{J_{n_{(r-k)}}} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \vdots\\ J_0^c\\ \vdots\\ J_F^c\\ \vdots\\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$= \widetilde{g}^{r-k} g \begin{bmatrix} C_{\mathfrak{I}_{r-k}} \\ \vdots \\ C_{J_0} \\ \vdots \\ C_{r_{(r-k)}-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \widetilde{g} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \sum_{\substack{J \in \mathfrak{I}_n^{r-k} \\ J \supseteq J_0^c \cap J^c}} P_J \det(B_{LJ}) \\ \vdots \\ \sum_{\substack{J \in \mathfrak{I}_n^{r-k} \\ J \supseteq J_F^c \cap J^c}} P_J \det(B_{LJ}) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde as $h_J's$ são funções holomorfas. Assim, notando que $\det(B^{(r-k)})(z) \neq 0$ para todo $z \in U_p$ e que $\det(B_J^{(r-k)}) = 0$ para todo $J \in \mathfrak{I}_n^{r-k}$ com $J \cap J^c = \emptyset$, onde $B_J^{(r-k)}$ matriz obtida ao substituir a $J-$ésima coluna da matriz $B^{(r-k)}$ pelo vetor

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \sum_{\substack{J \in \mathfrak{I}_n^{r-k} \\ J \supseteq J_0^c \cap J^c}} P_J \det(B_{LJ}) \\ \vdots \\ \sum_{\substack{J \in \mathfrak{I}_n^{r-k} \\ J \supseteq J_F^c \cap J^c}} P_J \det(B_{LJ}) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

segue da regra de Cramer que, para todo $J \in \mathfrak{I}_n^{r-k}$, com $J \cap J^c = \emptyset$, $P_J|_{U_p \cap V} = 0$. Como $p \in V \setminus S(\omega)$ foi escolhido arbitrariamente e $codim(S(\omega)) \geq 2$, por continuidade, segue que $P_J|_V = 0$. Logo, pelo Teorema dos Zeros de Hilbert, g divide P_J. Em particular, g divide P_{J_0}, como queriamos provar. ∎

Corolário 2.9. *Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Omega^1(\mathbb{C}^n)$ tais que $codim(S(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)) \geq 2$. Então, para todo $1 \leq r < \frac{n+k}{2}$, temos que para todo $\omega \in \Omega^r(\mathbb{C}^n)$ LDS satisfazendo $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subseteq \varepsilon^*(\omega)$ e $S(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k) \subseteq S(\omega)$, existe $\eta \in \Omega^{r-k}(\mathbb{C}^n)$ LDS tal que $\omega = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \wedge \eta$.*

Prova: Consequência imediata do Teorema 2.8. ∎

Os seguintes exemplos mostram que as condições impostas no teorema anterior são ótimas.

Exemplo 2.10. Considere a $3-$forma $\omega = z_1\widehat{dz_1} + z_2\widehat{dz_2} + z_3\widehat{dz_3} + z_4\widehat{dz_4}$ e a $1-$forma $\alpha = z_2dz_1 + z_1dz_2 + z_4dz_3 + z_3dz_4$ em $\mathbb{C}^4$. Observe que $\omega \wedge \alpha = 0$ e que $S(\omega) = S(\alpha)$. Por outro lado, α, dz_2, dz_3, dz_4 são L.I. no ponto $(0, 1, 0, 0)$ e tem a seguinte representação matricial

$$A = \begin{bmatrix} z_2 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & 1 & 0 & 0 \\ z_4 & 0 & 1 & 0 \\ z_3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então

$$A^{-1} = \frac{1}{z_2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -z_1 & z_2 & 0 & 0 \\ -z_4 & 0 & z_2 & 0 \\ -z_3 & 0 & 0 & z_2 \end{bmatrix}.$$

Pondo $\chi = \frac{1}{z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}$, obtemos que $\boldsymbol{i}_\chi(\alpha) = 1$ e $\eta = \boldsymbol{i}_\chi(\omega) = dz_3 \wedge dz_4 + \frac{z_3}{z_2} dz_2 \wedge dz_4 + \frac{z_4}{z_2} dz_2 \wedge dz_3$. Assim, η não é holomorfa em $\mathbb{C}^4$. Isto não contradiz o Teorema 2.8, pois neste caso a hipóteses $2r < n + k$ não é satisfeita.

O seguinte exemplo prova que no Teorema 2.8 a condição $S(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k) \subseteq S(\omega)$ é realmente necessária.

Exemplo 2.11. Em $\mathbb{C}^4$, considere a $2-$forma

$$\omega = -2z_3z_4dz_1 \wedge dz_2 + z_2z_4dz_1 \wedge dz_3 + z_2z_3dz_1 \wedge dz_4 - z_1z_4dz_2 \wedge dz_3 - z_1z_3dz_2 \wedge dz_4.$$

É possível verificar que $i_R(\omega) \equiv 0$, onde $R(z) = \Sigma_{j=1}^4 \frac{\partial}{\partial z_j}$. Logo ω é LDS. Agora, seja $\alpha = \Sigma_{i=1}^4 A_i dz_i$. Então $\omega \wedge \alpha = 0$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} 0 &= -z_1[A_3z_3 + A_4z_4]\widehat{dz_1} + z_2[A_4z_4 + A_3z_3]\widehat{dz_2} - z_3[A_1z_1 + A_2z_2 + 2A_4z_4]\widehat{dz_3} \\ &\quad -z_4[A_1z_1 + A_2z_2 + 2A_3z_3]\widehat{dz_4}. \end{aligned}$$

Daquí, segue que $A_3 = A_4 = 0$ e $A_1z_1 = -A_2z_2$ ($\clubsuit$). Assim, tomando $\alpha = z_2dz_1 - z_1dz_2$, temos que $\alpha \in \varepsilon^*(\omega)$ e $2r < 4 + 1$ para $r = 2$. No entanto, as relações ($\clubsuit$) de fato provam que ω não é globalmente decomponível. Isto não contradiz o Teorema 2.8, já que $S(\alpha) \nsubseteq S(\omega)$.

Capítulo 3

Distribuições uniformes de codimensão r em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

Neste capítulo dedicamos especial atenção ao caso $M = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Em [J1], J. P. Jouanolou prova que, dada uma equação de Pfaff algébrica em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ que não admite uma integral primeira racional, é possível exibir uma cota superior, em função de n e do grau da equação, para o número de soluções algébricas da mesma. Motivados por este fato, nós pretendemos exibir uma cota superior para o número de hipersuperfícies invariantes por uma $r-$forma polinomial homogênea em $\mathbb{C}^{n+1}$ (uma distribuição uniforme em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$), caso ela não admita integral primeira racional.

3.1 Campo de planos uniforme de codimensão r

Começamos esta seções definindo o conceito mais importante a ser estudado neste trabalho, e que foi introduzido por A. de Medeiros em [M1].

Definição 3.1. Seja M uma variedade complexa. Um campo de planos holomorfo (singular) $\mathscr{P}$ (resp. folheação $\mathscr{F}$) em M, de codimensão r, é dito *uniforme* se existe uma coleção:

$$(\,\{U_\alpha, S_\alpha\}\,;\{\omega_\alpha \in \Omega^r(U_\alpha)\}\,;\{(g_{\alpha\beta}) \in \mathcal{O}^*(U_{\alpha\beta}))\})_{\alpha,\beta\in\Lambda},$$

onde:

I. $\underline{U} := \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ é uma cobertura por abertos de M e S_α é um subconjunto analítico de U_α, com $codim(S_\alpha) \geq 2$.

II. ω_α é LDS (resp. integrável) e $S(\omega_\alpha) = S_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$.

III. Se $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então $\omega_\alpha = g_{\alpha\beta} \cdot \omega_\beta$.

IV. Para cada $\alpha \in \Lambda$ a restrição de $\mathscr{P}$ (resp. $\mathscr{F}$) a U_α coincide com o campo de $(n-r)$-planos $\mathscr{P}(\omega_\alpha)$ (resp. a folheação $\mathscr{F}(\omega_\alpha)$), induzido por ω_α.

Definimos o conjunto singular $S(\mathscr{P})$ de $\mathscr{P}$ por:

$$S(\mathscr{P}) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha.$$

Então $codim(S(\mathscr{P})) \geq 2$.

Observação 3.2. As $g_{\alpha\beta}$'s definem um fibrado em retas holomorfo $\mathscr{L}$ sobre M e a família de r-formas $(\omega_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ pode ser então interpretada como uma r-forma holomorfa global ω LDS com valores no fibrado $\mathscr{L}$, i.e., $\omega \in H^0(M, \Omega^r \otimes \mathscr{L})$. Além disso, segue diretamente das definições que $S(\mathscr{P}) = S(\omega)$.

3.2 Variedades analíticas invariantes por um campo de planos uniforme de codimensão r

Definição 3.3. Sejam $\mathscr{P}$ um campo de planos uniforme de codimensão r e V uma subvariedade analítica de M de dimensão pura $k \geq n - r$. Dizemos que V é *$\mathscr{P}$-invariante* se $\mathscr{P}(x) \subseteq T_xV$ para todo $x \in V \setminus S(\mathscr{P})$.

Definição 3.4. Sejam $1 \leq m \leq r < n$, $\mathscr{P}$ um campo de planos uniforme de codimensão r em M e $f_1, \ldots, f_m$ funções meromorfas em M tais que $df_1 \wedge \cdots \wedge df_m \neq 0$. Dizemos que a aplicação $F := (f_1, \ldots, f_m)$ é uma *integral primeira* meromorfa de $\mathscr{P}$ de posto m se, para cada $C := (c_1, \ldots, c_m) \in \mathbb{C}^m$, a subvariedade $V_C = \{F = C\}$ é $\mathscr{P}$-invariante.

Lema 3.5. *Sejam ω uma r-forma LDS holomorfa em $\mathbb{C}^n$ e $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$. Então $V := \{f = 0\}$ é ω-invariante se, e somente se, f divide $df \wedge \omega$.*

Prova: ($\Rightarrow$) Se V é ω-invariante, então $ker(\omega(x)) \subseteq T_xV = ker(df_x)$ para todo $x \in \widetilde{V} := V \setminus S(\omega)$; isto é, $df_x \in ker^\perp(\omega(x)) = \varepsilon^*(\omega(x))$, já que ω é LDS. Portanto, $\omega(x) \wedge df_x = 0$ para todo $x \in \widetilde{V}$. Por conseguinte, $df \wedge \omega = 0$ em V. Se assumimos que f é reducida, o teorema dos zeros de Hilbert, garante que f divide $df \wedge \omega$. No caso geral podemos escrever $f = f_1 \cdots f_k$, onde $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ são reducidas. Então, pela observação acima, f divide $\Sigma_{j=1}^k f_1 \cdots \widehat{f_j} \cdots f_k df_j \wedge \omega = df \wedge \omega$.
($\Leftarrow$) Reciprocamente, se f divide $\omega \wedge df$, então $\omega \wedge df = 0$ em $\widetilde{V}$. Logo, sendo ω LDS, $df_x \in \varepsilon^*(\omega(x)) = ker^\perp(\omega(x))$ para todo $x \in \widetilde{V}$. Conseqüentemente, $ker(\omega(x)) \subseteq ker(df_x) = T_xV$ para todo $x \in \widetilde{V}$. Portanto, V é ω-invariante. ∎

Corolário 3.6. *Sejam $\omega \in \Omega^r(\mathbb{C}^n)$ LDS e $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$. Então f é uma integral primeira de ω se, e somente se, $\omega \wedge df = 0$.*

Prova: Pelo Lema 3.5, $\omega \wedge df = 0$ em $f^{-1}(\lambda)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Portanto, $\omega \wedge df = 0$ em $\mathbb{C}^n$. ∎

Corolário 3.7. *Sejam ω uma $r-$forma LDS holomorfa em $\mathbb{C}^n$ e $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^n)$. Então f é uma integral primeira de ω se, e somente se, $\omega \wedge df = 0$.*

Prova: Segue do Corolário 3.6 e do princípio de identidade para funções meromorfas. ∎

Exemplo 3.8. Sejam $\omega = -zdx \wedge dy + (1-y)dx \wedge dz + xdy \wedge dz$ e $f = x(y-1)z^2$ em $\mathbb{C}^3$. Então $df = (y-1)z^2dx + xz^2dy + 2x(y-1)zdz$. Assim,

$$df \wedge \omega = x(y-1)z^2dx \wedge dy \wedge dz + x(y-1)z^2dx \wedge dy \wedge dz - 2x(y-1)z^2dx \wedge dy \wedge dz = 0.$$

Logo, pelo Corolário 3.6, f é uma integral primeira de ω.

Corolário 3.9. *Se $codim(S(df)) > r$, então f é uma integral primeira de ω em $\mathbb{C}^n$ se, e somente se, $\omega = df \wedge \eta$ para alguma $\eta \in \Omega^{r-1}(\mathbb{C}^n)$. Em particular, se $r = 2$, ω é decomponível.*

Prova: Segue imediatamente do Corolário 3.6 e do Teorema a divisão de parâmetros de de Rham. ∎

Proposição 3.10. *Sejam $\mathscr{P}$ e ω como na Observação 3.2 e f uma função holomorfa em M não constante. Então $V := \{f = 0\}$ é $\mathscr{P}$-invariante se, e somente se, f divide $\omega \wedge df$.*

Prova: Sem perda de generalidade, podemos considerar a cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de M de modo que cada U_α seja biholomorfo a $\mathbb{C}^n$. Então, pelo Lema 3.5, para cada $\alpha \in \Lambda$, existe $\Theta_\alpha \in \Omega^{r+1}(U_\alpha)$ tal que $\omega_\alpha \wedge df = f \cdot \Theta_\alpha$. Logo, em $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, tem-se $f \cdot \Theta_\alpha = \omega_\alpha \wedge df = g_{\alpha\beta} \cdot \omega_\beta \wedge df = g_{\alpha\beta} f \cdot \Theta_\beta$, donde $\Theta_\alpha = g_{\alpha\beta} \cdot \Theta_\beta$. Ou seja, existe $\Theta \in H^0(M, \Omega^{r+1} \otimes \mathscr{L})$ tal que $\omega \wedge df = f \cdot \Theta$. Reciprocamente, se f divide $\omega \wedge df$, então $\omega \wedge df = 0$ em V. Logo, pela Proposição 1.13(iv), $df_x \in ker(\omega(x))^\perp$ para todo $x \in V \setminus S(\omega)$. Ou seja, $ker(\omega(x)) \subseteq ker(df_x) = T_xV$ para todo $x \in V \setminus S(\omega)$. Portanto, V é $\mathscr{P}-$invariante. ∎

Corolário 3.11. *Sejam $\mathscr{P}$ e ω como na observação 3.2 e $f \in \mathcal{M}(M)$. Então f é uma integral primeira de $\mathscr{P}$ se, e somente se, $\omega \wedge df = 0$.*

Prova: A demonstração é similar à do Corolário 3.7. ∎

3.3 Campos de planos uniformes de codimensão r em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

Sejam $(z_0 : z_1 : \cdots : z_n)$ um sistema de coordenadas homogêneas em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ e $\mathbb{C}^n_i = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \setminus \{z_i = 0\}$, $0 \leq i \leq n$. Nós começamos com a

Proposição 3.12. *Um campo de planos uniforme* $\mathscr{P}$ *de codimensão* r *em* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ *é dado por uma seção holomorfa* $s : \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \to \bigwedge^r T^*\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \otimes \mathscr{O}(\ell)$ *para algum* $\ell \in \mathbb{Z}$*. Em particular, em cada domínio coordenado afim* $\mathbb{C}^n_i$*,* $\mathscr{P}$ *é representado por uma* $r-$*forma polinomial* ω_i *LDS.*

Prova: Como $\mathscr{P}$ é um campo de planos uniforme de codimensão r regular em $U := \mathbb{C}^n_i \setminus S(\mathscr{P})$, podemos escolher uma cobertura localmente finita $\underline{\Delta} := \{\Delta_\rho\}_{\rho\in\mathbb{N}}$ por polidiscos abertos de U e, em cada $\Delta_{\rho\sigma} := \Delta_\rho \cap \Delta_\sigma \neq \emptyset$, uma função $a_{\rho\sigma} \in \mathscr{O}^*(\Delta_{\rho\sigma})$ de modo que, em cada Δ_ρ, $\mathscr{P}$ é dado por uma r-forma holomorfa decomponível ω_ρ e $\omega_\rho = a_{\rho\sigma}\omega_\sigma$ em $\Delta_{\rho\sigma}$. Considerando o sistema de coordenadas canônico $u^i = (u^i_1, \ldots, u^i_n) = (z_0/z_i, \ldots, \widehat{z_i/z_i}, \ldots, z_n/z_i)$ de $\mathbb{C}^n_i$, podemos escrever

$$\omega_\rho = \sum_{J\in\mathfrak{I}^r_n} A^\rho_J du^i_J.$$

Então, para todo $J \in \mathfrak{I}^r_n$, $A^\rho_J = a_{\rho\sigma}A^\sigma_J$ em $\Delta_{\rho\sigma}$. Por outro lado, sendo $codim(S(\mathscr{P})) \geq 2$, U é conexo. Logo existe $J_0 \in \mathfrak{I}^r_n$ tal que, para todo $\rho \in \mathbb{N}$, $A^\rho_{J_0} \neq 0$ e as funções meromorfas A_J dadas por $A_J|_{\Delta_\rho} = \frac{A^\rho_J}{A^\rho_{J_0}}$ estão bem definidas em U. Pelo Teorema de extensão de Levi, A_J se estende a uma função meromorfa em $\mathbb{C}^n_i$, que também denotamos por A_J. Como o problema multiplicativo de Cousin tem solução em $\mathbb{C}^n_i$, existem $B_J, C_J \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^n_i)$ tais que $A_J = \frac{B_J}{C_J}$. Seja C o mínimo múltiplo comum dos $C_J{}'s$ e considere a $r-$forma holomorfa em $\mathbb{C}^n_i$

$$\omega_i = C du^i_{J_0} + \sum_{\substack{J\in\mathfrak{I}^r_n \\ J\neq J_0}} \frac{C}{C_J} B_J du^i_J.$$

Então $\omega_i|_{\Delta_\rho} = \frac{C}{A^\rho_{J_0}}\omega_\rho$. Logo, pelo Lema 1.16 ω_i é LDS e define $\mathscr{P}$ em $\mathbb{C}^n_i$. Novamente, pelo Lema 1.16, para quaisquer $i, j \in \underline{I}_n$ existe $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^n_i \cap \mathbb{C}^n_j)$ tal que $\omega_i = g_{ij}\omega_j$. Agora, o cociclo $\{g_{ij}\}$ define um fibrado em retas $\mathscr{L}$ sobre $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ e, como $Pic(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{Z}$, conclui-se que $\mathscr{L} = \mathscr{O}(\ell)$ para algum $\ell \in \mathbb{Z}$. Então as $\omega_i{}'s$ determinam uma seção global $s : \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \to \bigwedge^r T^*\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \otimes \mathscr{O}(\ell)$, que por sua vez define $\mathscr{P}$. Em particular, ω_i é polinomial para todo $i \in \underline{I}_n$. ■

3.4 Grau de um campo de planos uniforme de codimensão r em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

Nós passamos agora à definição do *grau* de um campo de planos uniforme $\mathscr{P}$ de codimensão r em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, seguindo a construção apresentada por M. Soares em [So]. Para tal fim, daqui até o final deste capítulo, assumiremos que $codim_{\mathbb{C}} S(\mathscr{P}) > r$.

Considere a grassmaniana $Gr[r, n]$ de $r-$planos em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Como $codim_{\mathbb{C}} S(\mathscr{P}) > r$, o Teorema de transversalidade de Thom, implica que o conjunto

$$\mathcal{G}_r = \{L^r \in Gr[r, n] : L^r \cap S(\mathscr{P}) = \emptyset\}$$

é aberto e denso em $Gr[r,n]$. Escolhamos $L^r \in \mathcal{G}_r$ e, suponhamos que, nas coordenadas afins $u^i = (u^i_1, \ldots, u^i_n) = (z_0/z_i, \ldots, \widehat{z_i/z_i}, \ldots, z_n/z_i)$ de $\mathbb{C}^n_i$, $L^r = ker(\theta_i)$, onde θ_i é uma $(n-r)$-forma constante e decomponível. Vale a pena observar que θ_i é única, a menos de multiplicação por constantes não nulas. A *variedade de tangência* de $\mathscr{P}$ com L^r é por definição o conjunto

$$\mathcal{T}(\mathscr{P}, L^r) = \{p \in L^r : dim(\mathscr{P}(p) \cap L^r) \geq 1\}.$$

Seja ω_i uma r-forma polinomial que define $\mathscr{P}$ em $\mathbb{C}^n_i$. Vamos escrever $\omega_i(u^i) \wedge \theta_i = f_i(u^i) du^i_1 \wedge \cdots \wedge du^i_n$. Então $f_i(u^i) = 0$ se, e somente se, $dim(ker(\omega_i(u^i)) \cap ker(\theta_i)) \geq 1$; ou seja, se, e somente se, $dim(\mathscr{P}(u^i) \cap L^r) \geq 1$. Logo, em $\mathbb{C}^n_i$, $\mathcal{T}(\mathscr{P}, L^r)$ é dado por

$$\{u^i \in \mathbb{C}^n_i \cap L^r : f_i(u^i) = 0\}.$$

Escrevendo $\omega_i = \Sigma_{J \in \mathfrak{I}^r_n} A_J(u^i) du^i_J$ e $\theta_i = \Sigma_{I \in \mathfrak{I}^{n-r}_n} D_I du^i_I$, é possível verificar que $f_i = \Sigma_{I \cap J = \emptyset} \epsilon_{IJ} D_I A_J(u^i)$, onde ϵ_{IJ} é o sinal de alguma permutação de n letras. Por outro lado, em $\mathbb{C}^n_i \cap \mathbb{C}^n_j$, $f_i = g_{ij} f_j$, onde as $g'_{ij}s$ são como na demostração da Proposição 3.12. Portanto, os $f_i's$ definem uma hipersuperfície V_{L^r} em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ e $\mathcal{T}(\mathscr{P}, L^r) = V_{L^r} \cap L^r$.

Lema 3.13. *O grau de V_{L^r} é constante para L^r num subconjunto aberto denso $\mathcal{V}$ de $\mathcal{G}_r$.*

Prova: Para ver isto, seja $d = \max_{J \in \mathfrak{I}^r_n} grau(A_J)$. Agora, ponhamos $A_J = A^d_J + \cdots + A^0_J$ e $f_i = f^d_i + \cdots + f^0_i$, onde A^m_J e f^m_i são polinômios homogêneos de grau m. Então $f^d_i = \Sigma_{I \cap J = \emptyset} \epsilon_{IJ} D_I A^d_J(u^i)$, onde ϵ_{IJ} é o sinal de alguma permutação de n letras. Logo f^d_i é um polinômio nos coeficientes de θ_i e a hipersuperfície V_{L^r} tem grau menor que d justamente quando os coeficientes de θ_i satisfazem a equação $f^d_i \equiv 0$. Portanto, o *grau* de V_{L^r} é igual a d para L^r num subconjunto aberto denso $\mathcal{V}$ de $\mathcal{G}_r$. ∎

Definição 3.14. O *grau* de $\mathscr{P}$, que denotamos por $deg(\mathscr{P})$, é por definição o *grau* de V_{L^r} para $L^r \in \mathcal{V}$.

Observação 3.15. Seja $\mathscr{P} := \{(\mathbb{C}^n_i, \omega_i)_{i \in \underline{I_n}}, (g_{ij})_{\mathbb{C}^n_i \cap \mathbb{C}^n_j}\}$ um campo de planos uniforme em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ de codimensão r e grau d. Seja $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ a projeção natural. Em $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ considere a coleção $\widetilde{\mathscr{P}} := \{(U_i, \widetilde{\omega}_i)_{i \in \underline{I_n}}, (\widetilde{g}_{ij})_{U_{ij} \neq \emptyset}\}$, onde $U_i = \pi^{-1}(\mathbb{C}^n_i)$, $\widetilde{\omega}_i = \pi^*(\omega_i)$ e $\widetilde{g}_{ij} = \pi^*(g_{ij})$. Como o Pull-back respeita produto exterior, então $\widetilde{\mathscr{P}}$ é um campo de planos uniforme um $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ e $S(\widetilde{\mathscr{P}}) = \pi^{-1}(S(\mathscr{P}))$. Agora, na carta afim $\mathbb{C}^n_0$, temos que

$$\pi(z_0, z_1, \ldots, z_n) = (z_1/z_0, \ldots, z_n/z_0) \ \text{ e } \ \omega_0 = \sum_{J \in \mathfrak{I}^r_n} A^0_J du^0_J.$$

Logo

$$\begin{aligned}\widetilde{\omega}_0 &= \sum_{J\in\mathfrak{I}_n^r} A_J^0(z_1/z_0,\ldots,z_n/z_0)d(z_{j_1}/z_0)\wedge\cdots\wedge d(z_{j_r}/z_0)\\ &= \sum_{J\in\mathfrak{I}_n^r} A_J^0(z_1/z_0,\ldots,z_n/z_0)(z_0dz_{j_1}-z_{j_1}dz_0)/z_0^2\wedge\cdots\wedge(z_0dz_{j_r}-z_{j_r}dz_0)/z_0^2,\end{aligned}$$

onde $J=\{j_1<\cdots<j_r\}$. A $r-$forma em $\mathbb{C}^{n+1}$

$$\Omega = z_0^{d+r+1}\widetilde{\omega}_0 = \sum_{J\in\underline{\mathfrak{I}_{\mathbf{n}}}^r} F_J dz_J$$

possui seguintes propriedades:

1. Ω é LDS e define $\widetilde{\mathscr{P}}$ em $\mathbb{C}^{n+1}$.
2. Os $F_J's$ são polinômios homogêneos de grau $d+1$.
3. Os $F_J's$ não tem fator em comum (de fato, se existir um tal fator comum g, então, para todo $J\in\mathfrak{I}_n^r$, $g\mid A_J^0$ e, olhando para o A_J^0 de maior grau, vemos que g não pode ser múltiplo constante de z_0, logo g depende das variáveis $z_1,\ldots,z_n$. Em particular, $g|_{z_0=1}$ não é constante e seria um fator comum dos $A_J's$, o que é uma contradição).
4. $\boldsymbol{i}_R(\Omega)=0$, já que $\boldsymbol{i}_R(\widetilde{\omega}_0)=0$, onde $R=\Sigma_{i=0}^n z_i\frac{\partial}{\partial z_i}$.

Assim, nós acavamos de provar a seguinte

Proposição 3.16. *Todo campo de planos uniforme $\mathscr{P}$ de codimensão r e grau d em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ pode ser definido em coordenadas homogêneas por uma $r-$forma polinomial homogênea Ω de grau $d+1$, LDS satisfazendo $\boldsymbol{i}_R(\Omega)=0$. Ainda, Ω é única a menos de multiplicação por constantes não nulas.*

3.5 O Teorema de Jouanolou para campos de planos uniformes de codimensão r em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

Sejam $\mathcal{P}(n,k)$ o conjunto de polinômios homogêneos de grau k em $\mathbb{C}^n$ e $\Lambda_k^r(n)$ o espaço de $r-$formas em $\mathbb{C}^n$ com coeficientes em $\mathcal{P}(n,k)$.
Dados uma função f holomorfa em $\mathbb{C}^n$ e um ponto $p\in\mathbb{C}^n$, denotamos por $J_p^k(f)$ o jato de ordem k de f em p. No caso em que $p=0$, escrevemos simplesmente $J^k(f)$. Começamos esta seção provando a versão analítica do seguinte

Lema 3.17 (J1)**.** *Sejam $A=\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n]$ e $\Bbbk=\mathbb{C}(z_1,\ldots,z_n)$. Se $\wp$ é um sistema representativo de elementos primos de A, então a aplicação $\mathbb{C}$-linear*

$$\begin{aligned}\Psi:\mathbb{C}^{\wp}&\to\Omega^1_{A/\mathbb{C}}\otimes\Bbbk\\ (\alpha_P)&\mapsto\sum_P\alpha_P\cdot\frac{dP}{P}\end{aligned}$$

é injetora.

Lema 3.18. *Se $\wp$ é um sistema representativo de funções analíticas irredutíveis em $\mathbb{C}^n$, então a aplicação $\mathbb{C}-$linear*

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & \mathbb{C}^{\wp} & \longrightarrow & \Omega^1_{\mathscr{O}(\mathbb{C}^n)/\mathbb{C}} \otimes_{\mathscr{O}(\mathbb{C}^n)} \mathscr{M}(\mathbb{C}^n) \\ & (\nu_f)_{f\in\wp} & \longmapsto & \sum_f \nu_f \frac{df}{f} \end{array}$$

é injetora.

Prova: É possível verificar que Ψ é $\mathbb{C}-$linear. Agora, sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ e $f_1, \ldots, f_s \in \wp$ tais que

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \frac{df_i}{f_i} = 0. \ (*)$$

Mostraremos que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0$. Para cada $i \in I_s$, faça $V_i = \{f_i = 0\}$. Pelo Teorema dos zeros de Hilbert, podemos escolher $p_1 \in V_1 \setminus \bigcup_{2\leq i\leq s} V_i$. Agora, seja L_1 uma reta afim passando por p não contida em V_1, e $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ uma parametrização de L_1 tal que $u(0) = p_1$. Escrevendo $g_i = f_i \circ u$, conclui-se que, para todo $i = 2, \ldots, s$, a função $\frac{g_i'}{g_i}$ é regular em 0 e $\frac{g_1'}{g_1}$ tem um polo simples em 0 com resíduo ρ dado pela multiplicidade de 0 como raiz de g_1. Por outro lado, segue da relação $(*)$ que

$$\lambda_1 \frac{g_1'}{g_1} + \cdots + \lambda_i \frac{g_s'}{g_s} = 0.$$

Integrando ao longo de um pequeno circulo em torno da origem de $\mathbb{C}$, obtemos que $\lambda_1\rho = 0$ e, como $\rho \neq 0$, $\lambda_1 = 0$. Analogamente, prova-se que $\lambda_2 = \cdots = \lambda_s = 0$. Isto mostra que $ker(\Psi) = \{(0, \ldots, 0)\}$. Portanto, Ψ é injetora. ∎

Lema 3.19. *Sejam $\Omega_1, \ldots, \Omega_m \in \Lambda^1_k(n)$. Então $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ são L.I. sobre $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ se, e somente se, elas são L.I. sobre $\mathcal{P}(n,k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Prova: $(\Rightarrow)$ Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $P_1, \ldots, P_m \in \mathcal{P}(n,k)$ tais que $\sum_{i=1}^m P_i \cdot \Omega_i = 0$. Como $\mathcal{P}(n,k) \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ e $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ são L.I. sobre $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$, então $P_1 = \cdots = P_m = 0$. Portanto, $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ são L.I. sobre $\mathcal{P}(n,k)$.
$(\Leftarrow)$ Suponhamos, por absurdo, que $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ são L.I. sobre $\mathcal{P}(n,k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e L.D. sobre $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$. Então existem $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ tais que $f_1 \neq 0$ e $\sum_{i=1}^m f_i \cdot \Omega_i = 0$. Seja d o menor natural tal que $J^d(f_1) \neq 0$. Então, comparando termos do mesmo grau, conclui-se que $\sum_{i=1}^m J^d(f_i) \cdot \Omega_i = 0$. Logo $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ são L.D. sobre $\mathcal{P}(n,d)$, o que é uma contradição. ∎

Como uma consequência imediata do Lema 3.19 (na verdade são resultados equivalentes) temos o seguinte:

Corolário 3.20. *Sejam* $N \in \mathbb{Z}$ *e* $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ $1-$*formas meromorfas em* $\mathbb{C}^n$*, cujos coeficientes são do tipo* $\frac{p}{q}$*, onde* p *e* q *são polinômios homogêneos e* $grau(p) - grau(q) = N$*. Então* $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ *são L.I. sobre* $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ *se, e somente se, elas são L.I. sobre* $\mathcal{P}(n,k)$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$*.*

Prova: Para cada $i \in I_m$, ponha $\Omega_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{p_{ij}}{q_{ij}} dz_j$, onde $grau(p_{ij}) - grau(q_{ij}) = N$. Seja Q o mínimo múltiplo comum dos q_{ij}'s. Em seguida, para cada $i \in I_m$, faça $\widetilde{\Omega}_i = Q \cdot \Omega_i$. Então $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ são L.I. se, e somente se, $\widetilde{\Omega}_1, \ldots, \widetilde{\Omega}_m$ são L.I.. Além disso, $\widetilde{\Omega}_1, \ldots, \widetilde{\Omega}_m \in \Lambda^1_{k_0}(n)$, onde $k_0 = grau(Q) + N$. Logo, pelo Lema 3.19, concluímos o resultado. ■

Corolário 3.21. *Sejam* $\Omega_1, \ldots, \Omega_r$ $1-$*formas polinomiais homogêneas em* $\mathbb{C}^n$ *e* $\eta_1, \eta_2 \in \Lambda^1_k(n)$*. Então* $\eta_i, \Omega_1, \ldots, \Omega_r$ *são L.D. para todo* $i \in I_2$ *se, e somente se, para cada* $i \in I_2$*, existem polinômios homogêneos* $P^i_1, \ldots, P^i_{r+1}$ *tais que*

$$\sum_{j=1}^{r} P^i_j \Omega_j + P^i_{r+1} \eta_i = 0$$

e $grau(P^1_j) = grau(P^2_j)$ *para todo* $j \in I_{r+1}$*.*

Prova: Suponhamos que $\eta_i, \Omega_1, \ldots, \Omega_r$ são L.D. para todo $i \in I_2$. Sejam $d_j = grau(\Omega_j)$ e $d = \max\{k, d_1, \cdots, d_r\}$. Em seguida, faça $\widetilde{\eta}_i = z_1^{d-k} \eta_i$, $i = 1, 2$, e $\widetilde{\Omega}_j = z_1^{d-d_j} \Omega_j$, $j = 1, \ldots, r$. Então, pelo Lema 3.19 e a menos de multiplicar por uma potência conveniente de z_1, existem $k_0 \in \mathbb{N}$ e $p^i_1, \cdots, p^i_{r+1} \in \mathcal{P}(n, k_0)$, com $i = 1, 2$, tais que $\sum_{j=1}^{r} p^i_j \cdot \widetilde{\Omega}_j + p^i_{r+1} \cdot \widetilde{\eta}_i = 0$. Pondo $P^i_j = z_1^{d-d_j} p^i_j$, obtemos o resultado desejado. ■

Teorema 3.22. *Seja* $\mathscr{P}$ *um campo de planos uniforme em* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ *de codimensão* r *e grau* d*. Se* $\mathscr{P}$ *não admite uma integral primeira racional, então o número máximo de hipersuperfícies invariantes por* $\mathscr{P}$ *é*

$$\binom{d+n}{n} \cdot \binom{n+1}{r+1} + r.$$

Prova: Seja $N = dim_{\mathbb{C}}(\Lambda^{r+1}_d(n+1)) = \binom{d+n}{n} \cdot \binom{n+1}{r+1}$. Suponha que $\mathscr{P}$ seja definido em coordenadas homogêneas por $\Omega \in \Lambda^r_{d+1}(n+1)$ e que $\mathscr{P}$ admita $N + r + 1$ hipersuperfícies invariantes, definidas por polinômios homogêneos irredutíveis $f_1, \ldots, f_{N+r+1}$ em $\mathbb{C}^{n+1}$. Então, pelo Lema 3.5, para cada $i \in I_{N+r+1}$, existe $\Theta_{f_i} \in \Lambda^{r+1}_d(n+1)$ tal que

$$\Omega \wedge df_i = f_i \cdot \Theta_{f_i}. \tag{3.1}$$

Sendo $dim_{\mathbb{C}}(\Lambda^{r+1}_d(n+1)) = N$, para cada $k \in I_{r+1}$, podemos escolher $\lambda^k_k, \ldots, \lambda^k_{N+k} \in \mathbb{C}$ de modo que, para cada $k \in I_r$, $\lambda^k_k \neq 0$, $\lambda^{r+1}_{N+r+1} \neq 0$ e

$$\sum_{j=k}^{N+k} \lambda^k_j \cdot \Theta_{f_j} = 0. \tag{3.2}$$

Agora, para cada $k \in I_{r+1}$, faça

$$\eta_k = \sum_{j=k}^{N+k} \lambda_j^k \cdot \frac{df_j}{f_j}.$$

Então, por (4.1) e (4.2), temos que $\Omega \wedge \eta_k = 0$. Logo existem $R_{k1}, \ldots, R_{kr} \in \mathbb{C}(z_0, \ldots, z_n)$ tais que

$$\eta_k = \sum_{l=1}^{r} R_{kl} \cdot \Omega_l.$$

Fazendo $\alpha_1 = \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_r$ e $\alpha_2 = \eta_2 \wedge \cdots \wedge \eta_{r+1}$, temos as seguintes possibilidades:
1. $\alpha_1 \neq 0$ e $\alpha_2 \neq 0$.
2. $\alpha_1 = 0$ ou $\alpha_2 = 0$.

No primeiro caso, sendo α_1 e α_2 formas meromorfas com hipersuperfícies de pólos diferentes, segue que elas são L.I. sobre $\mathbb{C}$. Seja F o polinômio homogêneo de menor grau tal que $F\alpha_1, F\alpha_2 \in \Omega^r(\mathbb{C}^{n+1})$. Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $F\alpha_1, F\alpha_2 \in \Lambda_k^r(n+1)$ e, para cada $i \in I_2$, $\varepsilon^*(\Omega(z)) \subseteq \varepsilon^*(F\alpha_i(z))$ para todo $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus S(\Omega)$. Logo, pelo Lema 1.16 existem $m \in \mathbb{N}$ e $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(n+1, m)$ tais que $F\alpha_i = P_i\Omega$. Donde $\alpha_1 = \frac{P_1}{P_2}\alpha_2$ e, sendo as α_i's fechadas, segue que $0 = d(\frac{P_1}{P_2}) \wedge \alpha_2$. Assim, temos que $d(\frac{P_1}{P_2}) \wedge \Omega = 0$. Além disso, como α_1, α_2 são L.I. sobre $\mathbb{C}$, $\frac{P_1}{P_2}$ não é constante. Portanto, Ω possuí uma integral primeira racional.

No segundo caso, suponha que $\alpha_1 = 0$. Sejam m o maior natural tal que $\eta_1, \ldots, \eta_m$ são L.I. sobre $\mathcal{O}(\mathbb{C}^{n+1})$. Então, pelo Corolário 3.20, existem $k \in \mathbb{N}$ e polinômios $P_1, \ldots, P_{m+1} \in \mathcal{P}(n, k)$ tais que $P_{m+1} \neq 0$ e $\sum_{l=1}^{m+1} P_l \cdot \eta_l = 0$. Ou seja, $\eta_{m+1} = \sum_{l=1}^{m} R_l \cdot \eta_l$, onde $R_l = \frac{P_l}{P_{m+1}}$. Logo, sendo as η_l's fechadas, temos que

$$0 = \sum_{l=1}^{m} dR_l \wedge \eta_l.$$

Então, para cada $j \in I_m$, tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{l=1}^{m} dR_l \wedge \eta_l \wedge \eta_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\eta}_j \wedge \cdots \wedge \eta_m \\ &= (-1)^{j+1} dR_j \wedge \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_m. \end{aligned}$$

Então, pela independência de $\eta_1, \cdots, \eta_m$, podemos escolher $g_1, \cdots, g_m \in \mathbb{C}(z_0, \ldots, z_n)$ tais que $dR_j = \sum_{l=1}^{m} g_l \cdot \eta_l$. Logo $dR_j \wedge \Omega = \sum_{l=1}^{m} g_l \cdot \eta_l \wedge \Omega = 0$. Além disso, pelo Lema 3.18, existe $l_0 \in I_m$ tal que R_{l_0} não é constante. Conseqüentemente, R_{l_0} é uma integral primeira de Ω. Analogamente, podemos encontrar uma integral primeira de Ω ao supor que $\alpha_2 = 0$. ∎

Capítulo 4

Campos de planos uniformes e hipersuperfícies invariantes

Nosso principal objetivo neste capitulo é dar uma generalização do teorema principal em $[G1]$. O resultado a ser demonstrado é o seguinte

Teorema 4.1 (Teorema de Integrabilidade)**.** *Sejam M uma variedade complexa compacta conexa e $\mathscr{P}$ um campo de planos uniforme de codimensão r em M. Então $\mathscr{P}$ possui apenas um número finito de hipersuperfícies invariantes, a menos que $\mathscr{P}$ admita uma integral primeira meromorfa de posto um.*

Antes de procedermos à prova, engrossamos um pouco mais nosso dicionário introduzindo a linguagem a ser usada.

4.0.1 Feixes

Definição 4.2. Seja $(M, \mathfrak{T})$ um espaço topológico. Um *feixe* $\mathfrak{F}$ sobre M é uma correspondência que a cada $U \in \mathfrak{T}$ associa um grupo $\mathfrak{F}(U)$, chamado grupo de *seções* de $\mathfrak{F}$ sobre U, e a cada par $U \subseteq V$ de subconjuntos abertos de M, uma aplicação $\mathbf{r}_{V,U} : \mathfrak{F}(V) \to \mathfrak{F}(U)$, chamada aplicação *restrição*, satisfazendo:
1. Para qualquer tripla $U \subseteq V \subseteq W$ de conjuntos abertos,

$$\mathbf{r}_{W,U} = \mathbf{r}_{V,U} \circ \mathbf{r}_{W,V}.$$

2. Para quaisquer $U, V \in \mathfrak{T}$ e seções $\sigma \in \mathfrak{F}(U)$, $\tau \in \mathfrak{F}(V)$ tais que $\mathbf{r}_{U,U\cap V}(\sigma) = \mathbf{r}_{V,U\cap V}(\tau)$, existe uma seção $\rho \in \mathfrak{F}(U \cup V)$, com $\mathbf{r}_{U\cup V,U}(\rho) = \sigma$ e $\mathbf{r}_{U\cup V,U}(\rho) = \tau$.

3. Se $\sigma \in \mathfrak{F}(U \cup V)$ e $\mathbf{r}_{U\cup V,U}(\sigma) = \mathbf{r}_{U\cup V,V}(\sigma) = 0$, então $\sigma = 0$.

Quando não há lugar para confusão, costuma-se escrever $\sigma|_U$ no lugar de $\mathbf{r}_{V,U}(\sigma)$ desde que $U \subseteq V$ e $\sigma \in \mathfrak{F}(V)$.

Exemplo 4.3. Nos seguintes exemplos todos os grupos são considerados aditivos a menos que se especifique outra coisa.
1. Sobre qualquer variedade C^∞ M, definimos os feixes $C^\infty, C^*, \mathfrak{a}^r, \mathscr{Z}^r, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ por:
$C^\infty(U)$: Funções C^∞ em U.
$C^*(U)$: Grupo multiplicativo de funções C^∞ nunca nulas em U.
$\mathfrak{a}^r(U)$: $r-$formas exatas C^∞ em U.
$\mathscr{Z}^r(U)$: $r-$formas fechadas C^∞ em U.
$\mathbb{Z}(U), \mathbb{Q}(U), \mathbb{R}(U)$ *ou* $\mathbb{C}(U)$: Funções localmente constantes em U com valores em $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, respectivamente.

2. Se M é uma variedade complexa, $V \subseteq M$ é uma subvariedade analítica de M e $E \to M$ é um fibrado vetorial holomorfo sobre M, definimos os feixes $\mathscr{O}, \mathscr{O}^*, \Omega^r, \Omega^r_F, \mathscr{O}(E), \Omega^r(E), \mathscr{M}$ *e* $\mathscr{M}^*$ por:
$\mathscr{O}(U)$: Funções holomorfas em U.
$\mathscr{O}^*(U)$: Grupo multiplicativo das funções holomorfas nunca nulas em U.
$\Omega^r(U)$: $r-$formas holomorfas em U.
$\Omega^r_F(U)$: Feixe de germes de $r-$formas holomorfas fechadas em U.
$\mathscr{O}(E)(U)$: Seções holomorfas de E sobre U.
$\Omega^r(E)(U)$: $r-$formas holomorfas em U com valores em E.
$\mathscr{M}(U)$: Funções meromorfas em U.
$\mathscr{M}^*(U)$: Grupo multiplicativo das funções meromorfas nunca nulas em U.

Definição 4.4. Sejam $(X, \mathfrak{T})$ um espaço topológico e $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ feixes sobre X. Uma *aplicação de feixes* $\Psi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ é dada por uma coleção de homomorfismos $\{\Psi_U : \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{G}(U)\}_{U \in \mathfrak{T}}$ tal que para quaisquer $U, V \in \mathfrak{T}$, $U \subseteq V$, o diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F}(V) \arrow[r, "\Psi_V"] \arrow[d, "\mathbf{r}_{V,U}"'] & \mathfrak{G}(V) \arrow[d, "\mathfrak{r}_{V,U}"] \\ \mathfrak{F}(U) \arrow[r, "\Psi_U"'] & \mathfrak{G}(U) \end{tikzcd}$$

comuta. Ou seja, $\Psi_U(\sigma|_U) = (\Psi_V(\sigma))|_U$, $\forall \sigma \in \mathfrak{F}(V)$.

Definição 4.5. Seja $\Psi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ uma aplicação de feixes. Definimos o *Kernel* ou *Núcleo* de Ψ como sendo o feixe $Ker(\Psi)$ dado por:
$Ker(\Psi)(U) := Ker(\Psi_U)$ com as aplicações de restrição óbvias.

4.0.2 Cohomologia de Feixes

Sejam $\mathfrak{F}$ um feixe sobre M e $\underline{U} := \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ uma cobertura localmente finita por abertos de M. Definimos

$$\begin{array}{rcl} C^0(\underline{U},\mathfrak{F}) & = & \Pi_\alpha \mathfrak{F}(U_\alpha) \\ C^1(\underline{U},\mathfrak{F}) & = & \Pi_{\alpha\neq\beta}\mathfrak{F}(U_\alpha\cap U_\beta) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C^r(\underline{U},\mathfrak{F}) & = & \Pi_{\substack{\alpha_0,\dots,\alpha_r \\ \alpha_i\neq\alpha_j}}\mathfrak{F}(U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_r}). \end{array}$$

Um elemento $\sigma\in C^r(\underline{U},\mathfrak{F})$ é chamado uma r-*cocadeia* de $\mathfrak{F}$.
Definimos o *operador de cobordo*

$$\delta : C^r(\underline{U},\mathfrak{F}) \to C^{r+1}(\underline{U},\mathfrak{F})$$

pela fórmula:

$$(\delta\sigma)_{\alpha_0,\dots,\alpha_{r+1}} = \sum_{j=0}^{r+1}(-1)^j\sigma_{\alpha_0,\dots,\widehat{\alpha_j},\dots,\alpha_{r+1}}|_{\bigcap_{i=0}^{r+1}U_{\alpha_i}},\ \ \sigma\in C^r(\underline{U},\mathfrak{F}).$$

Em particular, se $\sigma=\{\sigma_\alpha\}_\alpha\in C^0(\underline{U},\mathfrak{F})$, então

$$\begin{array}{rcl} (\delta\sigma)_{\alpha_0,\alpha_1} & = & (-1)^0\sigma_{\alpha_1}|_{U_{\alpha_0}\cap U_{\alpha_1}} + (-1)^1\sigma_{\alpha_0}|_{U_{\alpha_0}\cap U_{\alpha_1}} \\ & = & \sigma_{\alpha_1}|_{U_{\alpha_0}\cap U_{\alpha_1}} - \sigma_{\alpha_0}|_{U_{\alpha_0}\cap U_{\alpha_1}} \end{array}$$

e se $\sigma=\{\sigma_{\alpha,\beta}\}\in C^1(\underline{U},\mathfrak{F})$, então

$$(\delta\sigma)_{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2} = \sigma_{\alpha_1,\alpha_2}|_{\cap_{i=0}^2 U_{\alpha_i}} - \sigma_{\alpha_0,\alpha_2}|_{\cap_{i=0}^2 U_{\alpha_i}} + \sigma_{\alpha_0,\alpha_1}|_{\cap_{i=0}^2 U_{\alpha_i}}.$$

Definição 4.6. Uma r-cocadeia $\sigma\in C^r(\underline{U},\mathfrak{F})$ chama-se um *cociclo* se $\delta\sigma=0$. σ chama-se um *cobordo* se $\sigma=\delta\tau$ para algum $\tau\in C^{r-1}(\underline{U},\mathfrak{F})$.

Observação 4.7. Se $\sigma=\{\sigma_\alpha\}_\alpha\in C^0(\underline{U},\mathfrak{F})$, então

$$\begin{array}{rcl} (\delta(\delta\sigma))_{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2} & = & (\delta\sigma)_{\alpha_1,\alpha_2}|_{\cap_{i=0}^2 U_{\alpha_i}} - (\delta\sigma)_{\alpha_0,\alpha_2}|_{\cap_{i=0}^2 U_{\alpha_i}} + (\delta\sigma)_{\alpha_0,\alpha_1}|_{\cap_{i=0}^2 U_{\alpha_i}} \\ & = & \sigma_{\alpha_2}|_{\cap_{i=0}^2 U_{\alpha_i}} - \sigma_{\alpha_1}|_{\cap_{i=0}^2 U_{\alpha_i}} - \sigma_{\alpha_2}|_{\cap_{i=0}^2 U_{\alpha_i}} + \sigma_{\alpha_0}|_{\cap_{i=0}^2 U_{\alpha_i}} \\ & & +\sigma_{\alpha_1}|_{\cap_{i=0}^2 U_{\alpha_i}} - \sigma_{\alpha_0}|_{\cap_{i=0}^2 U_{\alpha_i}} \\ & = & 0. \end{array}$$

É possível provar que em geral $\delta^2=0$, i.e., todo cobordo é um cociclo. Assim, pondo

$$\mathbf{Z}^r(\underline{U},\mathfrak{F}) = Ker(\delta) \subseteq C^r(\underline{U},\mathfrak{F})$$

e observando que $C^r(\underline{U},\mathfrak{F})$ tem estrutura de grupo abeliano, temos que $\delta(C^{r-1}(\underline{U},\mathfrak{F}))$ é um subgrupo normal de $\mathbf{Z}^r(\underline{U},\mathfrak{F})$. Logo faz sentido considerar o grupo quociente

$$\mathbf{H}^r(\underline{U},\mathfrak{F}) = \frac{\mathbf{Z}^r(\underline{U},\mathfrak{F})}{\delta(C^{r-1}(\underline{U},\mathfrak{F}))}.$$

Definição 4.8. Definimos o $r-$ésimo grupo de cohomologia de $\check{C}$ech de $\mathfrak{F}$ em M como sendo

$$\check{\mathbf{H}}^r(M,\mathfrak{F}) = \lim_{\underline{U}} dir \mathbf{H}^r(\underline{U},\mathfrak{F}).$$

Observe que para qualquer cobertura $\underline{U}$ por abertos de M, tem-se

$$\check{\mathbf{H}}^0(M,\mathfrak{F}) = \mathbf{H}^0(\underline{U},\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}(M).$$

Definição 4.9. Sejam $\mathfrak{F}$ um feixe sobre M e $\underline{U} := \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ uma cobertura por abertos de M. Dizemos que $\underline{U}$ é *acíclica* para $\mathfrak{F}$ se $\mathbf{H}^q(\bigcap_{i=0}^r U_{\alpha_i},\mathfrak{F}) = 0$ para todo $q > 0$ e para quaisquer $\alpha_0,\dots,\alpha_r \in \Lambda$.

Teorema 4.10 (Leray)**.** [G4] Se a cobertura $\underline{U}$ de M é acíclica para o feixe $\mathfrak{F}$, então $\mathbf{H}^*(\underline{U},\mathfrak{F}) \cong \check{\mathbf{H}}^*(M,\mathfrak{F})$.

4.1 Notação

Div: Grupo abeliano de divisores que são tangentes a $\mathscr{P}$. Ou seja, um elemento de *Div* é da forma $\sum_\alpha \lambda_\alpha \cdot L^\alpha$, onde $\lambda_\alpha \in \mathbb{Z}$ e L^α é uma hipersuperfície $\mathscr{P}-$invariante.

$Pic(M) = H^1(M,\mathscr{O}^*)$: Grupo de Picard de M (classes, via isomorfismo, de fibrados em retas sobre M).

δ: Operador de cobordo definido nos grupos de cocadeias na cohomologia de feixes.

Dado $D = \sum_\alpha \lambda_\alpha \cdot L^\alpha \in Div$, existe uma cobertura $(U_i)_{i\in I}$ por abertos de M tal que cada U_i intersecta apenas um número finito de L^α's, que por sua vez correspondem aos zeros de uma função holomorfa $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$. Logo, em $U_{ij} \neq \emptyset$, temos que $g_{ij} := \frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$. De modo que, em $U_{ijk} \neq \emptyset$, tem-se $g_{ij}\cdot g_{jk}\cdot g_{ki} = 1$. Por conseguinte, D induz um fibrado em retas sobre M. Além disso, se $(\widetilde{f}_i)_{i\in I}$ é uma outra familia de funções holomorfas definidoras de D, então, pelo Teorema dos zeros de Hilbert, para cada $i \in I$, existe $h_i \in \mathcal{O}^*(U_i)$ tal que $\widetilde{f}_i = h_i \cdot f_i$. Logo $\frac{\widetilde{f}_i}{\widetilde{f}_j}\cdot h_j = h_i \cdot \frac{f_i}{f_j}$. Portanto, D induz um único elemento de $Pic(M)$, que denotamos por [D]. Assim, nós temos um homomorfismo bem definido:

$$\Psi : Div \to Pic(M)$$

$$D \mapsto [D]$$

Não é difícil ver que Ψ leva somas em produtos, i.e., $\Psi(D_1 + D_2) = [D_1]\otimes[D_2]$.

Por outro lado, se $g = (g_{ij}) \in \mathbf{Z}^1(M,\mathscr{O}^*)$, então $d\ln g = (d\ln g_{ij}) \in C^1(M,\Omega^1_F)$ e $(\delta(d\ln g))_{ijk} = d\ln g_{jk} - d\ln g_{ik} + d\ln g_{ij} = d\ln(g_{jk}\cdot g_{ik}^{-1}\cdot g_{ij}) = d\ln((\delta(g))_{ijk}) =$

$d\ln(1)=0$. Por conseguinte, $d\ln g \in \mathbf{Z}^1(M,\Omega^1_F)$. Além disso, se $g \in \delta(C^0(M,\mathscr{O}^*))$, existe $h=(h_i)\in(C^0(M,\mathscr{O}^*))$ tal que $g_{ij}=(\delta h)_{ij}=h_j\cdot h_i^{-1}$. Logo existe $d\ln h=(d\ln h_i)\in(C^0(M,\Omega^1_F))$ tal que $(\delta(d\ln h))_{ij}=d\ln h_j-d\ln h_i=d\ln\frac{h_j}{h_i}=d\ln(g_{ij})=(d\ln g)_{ij}$. Consequentemente, $d\ln g\in\delta(C^0(M,\Omega^1_F))$. Ou seja; $d\ln$ leva cobordo em cobordo. Notando, além do mais, que " ln " leva produto em soma, conclui-se que a aplicação

$$\Phi : H^1(M,\mathscr{O}^*)\to H^1(M,\Omega^1_F))$$

$$[(g_{ij})]\mapsto[(d\ln g_{ij})]$$

é um homomorfismo bem definido. Assim, obtemos um homomorfismo

$$\Phi\circ\Psi : Div\to H^1(M,\Omega^1_F)$$

$$(f_i)_i\mapsto[(d\ln\frac{f_i}{f_j})]$$

e, tensorisando por $\mathbb{C}$, obtemos uma aplicação $\mathbb{C}-$linear

$$\Phi\circ\Psi\otimes id_{\mathbb{C}} : Div\otimes\mathbb{C}\to H^1(M,\Omega^1_F)$$

cujo contradomínio é de dimensão finita se M for compacta. Agora, ponhamos $Div_0=ker(\Phi\circ\Psi\otimes id_{\mathbb{C}})$ e, seja $x=\sum_\alpha\lambda_\alpha\cdot L^\alpha\in Div_0$. Escolhamos uma cobertura $\underline{U}=(U_i)_{i\in I}$ por abertos de M, suficientemente fina, de modo que em cada U_i :

-$\mathscr{P}$ é definida por ω_i.

-Cada divisor L^α é definido por uma equação holomorfa $f_i^\alpha=0$.

-Em $U_{ij}\neq\emptyset$ dispomos de funções $g_{ij},g_{ij}^\alpha\in\mathcal{O}^*(U_{ij})$ tais que $\omega_i=g_{ij}\cdot\omega_j$ e $f_i^\alpha=g_{ij}^\alpha\cdot f_j^\alpha$ em U_{ij}.

Como $x\in Div_0$, então $[(\Sigma_\alpha\lambda_\alpha\cdot d\ln g_{ij}^\alpha)]=0$ em $H^1(M,\Omega^1_F)$. Logo existe $\mu=(\mu_i)_{i\in I}\in C^0(\underline{U},\Omega^1_F)$ tal que

$$\sum_\alpha\lambda_\alpha\cdot\frac{dg_{ij}^\alpha}{g_{ij}^\alpha}=\sum_\alpha\lambda_\alpha d\ln g_{ij}^\alpha=(\delta\mu)_{ij}=\mu_j-\mu_i.$$

Ou seja, para cada $i\in I$, existe $\mu_i\in\Omega^1_F(U_i)$ satisfazendo

$$\mu_j-\mu_i=\sum_\alpha\lambda_\alpha\frac{d(\frac{f_i^\alpha}{f_j^\alpha})}{\frac{f_i^\alpha}{f_j^\alpha}}=\sum_\alpha\lambda_\alpha(\frac{df_i^\alpha}{f_i^\alpha}-\frac{df_j^\alpha}{f_j^\alpha}).$$

Daí,

$$\mu_i+\sum_\alpha\lambda_\alpha\frac{df_i^\alpha}{f_i^\alpha}=\mu_j+\sum_\alpha\lambda_\alpha\frac{df_j^\alpha}{f_j^\alpha}.$$

Observe que se $(\widetilde{f}_i^\alpha)_{i\in I}$ é uma outra família de funções holomorfas tais que $L^\alpha = (\widetilde{f}_i^\alpha = 0)$ em U_i, usando mais uma vez o Teorema dos zeros de Hilbert, para cada $i \in I$, podemos escolher $h_i^\alpha \in \mathcal{O}^*(U_i)$ de modo que $\widetilde{f}_i^\alpha = h_i^\alpha \cdot f_i^\alpha$. Novamente, como $\Sigma_\alpha \lambda_\alpha \cdot L^\alpha \in Div_0$, existem $1-$formas $\widetilde{\mu}_i \in \Omega_F^1(U_i)$ para todo $i \in I$, tais que

$$\widetilde{\mu}_i + \sum_\alpha \lambda_\alpha \cdot \frac{d\widetilde{f}_i^\alpha}{\widetilde{f}_i^\alpha} = \widetilde{\mu}_j + \sum_\alpha \lambda_\alpha \cdot \frac{d\widetilde{f}_j^\alpha}{\widetilde{f}_j^\alpha}$$

i.e.,

$$\widetilde{\mu}_i + \sum_\alpha [\lambda_\alpha \cdot \frac{df_i^\alpha}{f_i^\alpha} + \lambda_\alpha \cdot \frac{dh_i^\alpha}{h_i^\alpha}] = \widetilde{\mu}_j + \sum_\alpha [\lambda_\alpha \cdot \frac{df_j^\alpha}{f_j^\alpha} + \lambda_\alpha \cdot \frac{dh_j^\alpha}{h_j^\alpha}]$$

Então, fazendo $\eta_i = \widetilde{\mu}_i - \mu_i + \Sigma_\alpha \lambda_\alpha \cdot \frac{dh_i^\alpha}{h_i^\alpha}$ e $\xi_i = \mu_i + \Sigma_\alpha \lambda_\alpha \cdot \frac{df_i^\alpha}{f_i^\alpha}$, temos que $\xi_i + \eta_i = \xi_j + \eta_j$ e $\xi_i = \xi_j$ em U_{ij}. Logo $\eta_i = \eta_j$ em U_{ij}. Obtemos assim, uma $1-$forma meromorfa fechada global ξ dada por $\xi|_{U_i} = \xi_i$, que está bém definida, a menos da soma de uma $1-$forma holomorfa fechada global η. Agora, como cada L^α é $\mathscr{P}-$invariante, então $\omega \wedge \xi$ é uma $(r+1)-$forma holomorfa com valores no fibrado $\mathscr{L}$, i.e., $\omega \wedge \xi \in H^0(M, \Omega^{r+1} \otimes \mathscr{L})$. Pela construção esta $(r+1)-$forma está bém definida módulo uma $(r+1)-$forma do tipo $\omega \wedge \eta$, onde $\eta \in \Omega_F^1(M)$. Ou seja, construimos uma aplicação linear:

$$\Xi : Div_0 \to H^0(M, \Omega^{r+1} \otimes \mathscr{L})/\omega \wedge H^0(M, \Omega_F^1)$$

$$(f_i^\alpha)_i \mapsto \overline{\omega \wedge (\mu_i + \Sigma_\alpha \lambda_\alpha \cdot \frac{df_i^\alpha}{f_i^\alpha})}.$$

4.2 Prova do Teorema de Integrabilidade

Nesta seção demonstramos o Teorema de Integrabilidade. A estratégia que será adotada na prova é uma combinação das ideias apresentadas por E. Ghys em [G1] e as ideias apresentadas na demonstração do Teorema 3.22.

Prova do Teorema 4.1: Suponhamos que o número de hipersuperfícies irredutíveis $\mathscr{P}$-invariantes é maior ou igual a

$$dim_{\mathbb{C}} H^1(M, \Omega_F^1) + dim_{\mathbb{C}}(H^0(M, \Omega^{r+1} \otimes \mathscr{L})/\omega \wedge H^0(M, \Omega_F^1)) + r + 1.$$

Então $dim_{\mathbb{C}} Div_0 \geq dim_{\mathbb{C}}(H^0(M, \Omega^{r+1} \otimes \mathscr{L})/\omega \wedge H^0(M, \Omega_F^1)) + r + 1$. Por conseguinte, $dim_{\mathbb{C}}(ker(\Xi)) \geq r + 1$. Em particular, $ker(\Xi)$ é não trivial. Agora, dado um elemento não nulo $x \in ker(\Xi)$, podemos escolher divisores $L^1, \ldots, L^k$, $(k \geq 1)$, (aderências de folhas fechadas, no caso integrável) e $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}^*$ tais que:
- $x = \Sigma_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \cdot L^\alpha \in Div_0$
-$\Xi(\Sigma_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \cdot L^\alpha) = \overline{0}$ em $H^0(M, \Omega^{r+1} \otimes \mathscr{L})/\omega \wedge H^0(M, \Omega_F^1)$.

Escolhendo uma cobertura como acima, concluímos que existe $\eta = (\eta_i)_i \in \mathscr{Z}^0(M, \Omega^1_F)$ tal que $\omega \wedge (\mu_i + \Sigma_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{df_i^\alpha}{f_i^\alpha}) = \omega \wedge \eta_i$, i.e., $0 = (\delta\eta)_{ij} = \eta_j - \eta_i$ em U_{ij} e $\omega \wedge (\mu_i - \eta_i + \Sigma_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{df_i^\alpha}{f_i^\alpha}) = 0$. Obtendo então uma $1-$forma meromorfa fechada global $\widetilde{\xi} = \xi - \eta$ tal que $\omega \wedge \widetilde{\xi} = 0$. Desta maneira podemos construir $r+1$ 1-formas meromorfas $\widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_{r+1}$ em M tais que $\omega \wedge \widetilde{\xi}_j = 0$ para todo $j \in I_{r+1}$. Fazendo $\alpha_1 = \widetilde{\xi}_1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{\xi}_r$ e $\alpha_2 = \widetilde{\xi}_2 \wedge \cdots \wedge \widetilde{\xi}_{r+1}$, temos as seguintes possibilidades:

1. $\alpha_1 \neq 0$ e $\alpha_2 \neq 0$.
2. $\alpha_1 = 0$ ou $\alpha_2 = 0$.

No primeiro caso, sendo α_1 e α_2 formas meromorfas com hipersuperfícies de polos diferentes, segue que elas são L.I. sobre $\mathbb{C}$. Por outro lado, pelo Lema 1.17, existem $G_1, G_2 \in \mathscr{M}(M)$ tais que $\alpha_1 = G_1 \cdot \omega$ e $\alpha_2 = G_2 \cdot \omega$. Ou seja; $\alpha_1 = \frac{G_1}{G_2} \cdot \alpha_2$ e, sendo as α_i's fechadas, segue que $0 = d(\frac{G_1}{G_2}) \wedge \alpha_2$. Assim, temos que $d(\frac{G_1}{G_2}) \wedge \omega = 0$. Além disso, como α_1, α_2 são L.I. sobre $\mathbb{C}$, $\frac{G_1}{G_2}$ não é constante. Portanto, ω possui uma integral primeira meromorfa.

No segundo caso, suponha que $\alpha_1 = 0$. Seja m o maior natural tal que $\widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_m$ são L.I.. Então, existem $P_1, \ldots, P_{m+1} \in \mathscr{M}(M)$ tais que $P_{m+1} \neq 0$ e $\sum_{l=1}^{m+1} P_l \cdot \widetilde{\xi}_l = 0$. Ou seja, $\widetilde{\xi}_{m+1} = \sum_{l=1}^m R_l \cdot \widetilde{\xi}_l$, onde $R_l = \frac{P_l}{P_{m+1}}$. Logo, sendo as $\widetilde{\xi}_l$'s fechadas, temos que

$$0 = \sum_{l=1}^m dR_l \wedge \widetilde{\xi}_l.$$

Então, para todo $j \in I_m$, tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{l=1}^m dR_l \wedge \widetilde{\xi}_l \wedge \widetilde{\xi}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\widetilde{\xi}_j} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\xi}_m \\ &= (-1)^{j+1} dR_j \wedge \widetilde{\xi}_1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{\xi}_m. \end{aligned}$$

Então, pela independência de $\widetilde{\xi}_1, \cdots, \widetilde{\xi}_m$, podemos escolher $g_1, \cdots, g_m \in \mathscr{M}(M)$ tais que $dR_j = \sum_{l=1}^m g_l \cdot \widetilde{\xi}_l$. Logo $dR_j \wedge \omega = \sum_{l=1}^m g_l \cdot \widetilde{\xi}_l \wedge \omega = 0$. Além disso, pelo Lema 3.18, existe $l_0 \in I_m$ tal que R_{l_0} não é constante. Conseqüentemente, R_{l_0} é uma integral primeira de Ω. Analogamente, podemos encontrar uma integral primeira de ω supondo que $\alpha_2 = 0$.

■

4.3 Integrais primeiras

Proposição 4.11. *Sejam $1 \leq m \leq r < n$, $\mathscr{P}_\omega$ um campo de planos uniforme de codimensão r em M e $f_1, \ldots, f_m$ funções meromorfas em M tais que $df_1 \wedge \cdots \wedge df_m \neq 0$. Então $F := (f_1, \ldots, f_m)$ é uma integral primeira meromorfa de $\mathscr{P}_\omega$ de posto m se, e somente se, $\omega \wedge df_j = 0$ para todo $j \in I_m$.*

Prova: $F := (f_1, \ldots, f_m)$ é uma integral primeira de $\mathscr{P}_\omega$ se, e somente se, $\mathscr{P}_\omega(x) \subseteq \bigcap_{j=1}^m ker(df_j(x))$ para todo $x \in M \setminus (S(\mathscr{P}_\omega) \cup S(F))$. Isso ocorre se, e somente se, para todo $j \in I_m$, $\mathscr{P}_\omega(x) \subseteq ker(df_j(x))$ para todo $\in M \setminus S(\mathscr{P}_\omega)$ se, e só se, cada f_j é uma integral primeira de $\mathscr{P}_\omega$. Ou seja, se, e somente se, $\omega \wedge df_j = 0$ para todo $j \in I_m$. ■

Corolário 4.12. *Sejam $1 \leq m \leq r < n$, $\mathscr{P}_\omega$ um campo de planos uniforme de codimensão r em M e $f_1, \ldots, f_m$ funções meromorfas em M. Então $F := (f_1, \ldots, f_m)$ é uma integral primeira meromorfa de $\mathscr{P}_\omega$ de posto m se, e somente se, $df_1 \wedge \cdots \wedge df_m \neq 0$ e cada f_i é uma integral primeira de $\mathscr{P}_\omega$.*

Prova: Segue do Corolário 3.7 e da Proposição 4.11. ■

Corolário 4.13. *Seja $\omega \in \Omega^r(\mathbb{C}^n)$ LDS, com $codim(S(\omega)) \geq 2$. Se $\mathscr{P}(\omega)$ admite uma integral primeira holomorfa F de posto $r-1$ e tal que $F|_{\mathbb{C}^n \setminus Sing(\omega)}$ é submersão, então ω é decomponível.*

Prova: Suponhamos que $F := (f_1, \ldots, f_{r-1})$ é uma integral primeira de $\mathscr{P}_\omega$. Então, pela proposição 4.11, $df_k \in \varepsilon^*(\omega)$ para todo $k \in I_{r-1}$ e, como $S(df_1 \wedge \cdots \wedge df_{r-1}) \subseteq S(\omega)$, pelo Teorema 2.4, ω é decomponível. ■

Teorema 4.14. *Sejam M uma variedade complexa compacta e conexa, $\mathscr{L}$ um fibrado em retas sobre M e $\omega \in \Omega^r(M) \otimes \mathscr{L}$ LDS. Suponhamos que ω admite uma integral primeira meromorfa $F := (f_1, \ldots, f_{r-1})$ de posto $r-1$. Então ω admite uma integral primeira meromorfa $G := (F, g)$ de posto r se, e somente se, existem uma $1-$forma não nula $\xi \in \varepsilon^*(\omega)$ meromorfa em M, uma infinidade de hipersuperfícies analíticas $(V_j)_{j \in J}$ $\omega-$invariantes, uma cobertura $(U_i)_{i \in I}$ por abertos de $U := M \setminus S(\omega) \cup S(F)$ e, para cada $i \in I$, uma coleção de campos locais $\{\chi_1^i, \ldots, \chi_{r-1}^i\} \subseteq \mathfrak{X}(U_i) \cap ker(\xi)$ duais de $\{df_1, \ldots, df_{r-1}\}$ e tangentes ao divisor $D = \Sigma_{j \in J} V_j$.*

Prova: ($\Rightarrow$) Consequência imediata do Lema 2.1 e da Proposição 4.11.
($\Leftarrow$) Para cada $j \in J$, ponha $V_j = \{g_j = 0\}$. Dado $p \in U_i \cap V_j \setminus S(V_j))$, sendo $\omega \wedge \xi = 0$, V_j $\omega-$invariante e $\chi_1^i, \ldots, \chi_{r-1}^i$ tangentes a ξ e ao divisor D, temos que

$$ker(dg_j(x)) = Span(\chi_1^i(x), \ldots, \chi_{r-1}^i(x)) \cup ker(\omega(x)) = ker(\xi(x)),$$

para todo $x \in U_i \cap V_j \setminus S(\xi) \cup S(V_j)$. Portanto, V_j é ξ-invariante. Assim, ξ admite infinitas hipersuperfícies invariantes. Logo, pelo Teorema 4.1, ξ possui uma integral primeira meromorfa g de posto um. Então dg e ξ são dependentes fora dos seus pólos e, sendo $df_1, \ldots, f_{r-1}, \xi$ L.I em $U \setminus \mid \xi \mid_\infty$, segue que $G := (F, g)$ define uma integral primeira meromorfa de posto r para ω. ■

Teorema 4.15. *Sejam M uma variedade complexa compacta e conexa, $\mathscr{L}$ um fibrado em retas sobre M e $\omega \in \Omega^r(M) \otimes \mathscr{L}$ LDS. Suponhamos que ω admite uma integral primeira meromorfa $F := (f_1, \ldots, f_k)$ de posto k. Então ω admite uma* *integral primeira meromorfa* $G := (F, g)$ *de posto* $k+1$ *se, e somente se, existem uma* $1-$*forma* $\xi \in \varepsilon^*(\omega)$ *meromorfa em* M*, uma infinidade de hipersuperfícies analíticas* $(V_j)_{j\in J}$ $\omega-$*invariantes, uma cobertura* $(U_i)_{i\in I}$ *por abertos de* $U := M \setminus S(\omega) \cup S(F)$ *e, para cada* $i \in I$*, uma coleção de campos locais* $\{\chi_1^i, \ldots, \chi_{r-1}^i\} \subseteq \mathfrak{X}(U_i) \cap ker(\xi)$ *tangentes ao divisor* $D = \Sigma_{j\in J} V_j$ *e tais que, para cada* $l \in I_{r-1}$*,* $\mathbf{i}_{\chi_l^i}(df_m) = \delta_{lm}$ *para todo* $m \in I_k$*.*

Prova: ($\Rightarrow$) Esta parte é conseqüência imediata do Lema 2.1 e da Proposição 4.11.
($\Leftarrow$) Para cada $j \in J$, ponha $V_j = \{g_j = 0\}$. Agora, dado $p \in U \cap V_j$ existe $i \in I$ tal que $p \in U_i$. Como $\omega \wedge \xi = 0$, V_j é $\omega-$invariante e $\chi_1^i, \ldots, \chi_{r-1}^i$ tangentes a ξ e ao divisor D, temos que

$$ker(dg_j(x)) = Span(\chi_1^i(x), \ldots, \chi_{r-1}^i(x)) \cup ker(\omega(x)) = ker(\xi(x)),$$

para todo $x \in U_i \cap V_j \setminus S(\xi) \cup S(V_j)$. Portanto, V_j é $\xi-$invariante. Assim, ξ admite infinitas hipersuperfícies invariantes. Logo, pelo Teorema 4.1, ξ possui uma integral primeira meromorfa g de posto um. Então dg e ξ são dependentes fora dos seus pólos e, sendo $df_1, \ldots, f_k, \xi$ L.I em $U \setminus \mid \xi \mid_\infty$, segue que $G := (F, g)$ define uma integral primeira meromorfa de posto $k+1$ para ω. ∎

Teorema 4.16. *Sejam* M *uma variedade complexa compacta e conexa,* $\mathscr{L}$ *um fibrado em retas sobre* M *e* $\omega \in \Omega^r(M) \otimes \mathscr{L}$ *LDS. Então* ω *admite uma integral primeira meromorfa de posto* $k \leq r$ *se, e somente se, existem* k $1-$*formas* $\xi_1, \ldots, \xi_k \in \varepsilon^*(\omega)$ *meromorfa em* M*,* k *famílias infinitas de hipersuperfícies analíticas* $\underline{V}^1 := (V_j^1)_{j\in J}, \ldots, \underline{V}^k := (V_j^k)_{j\in J}$ $\omega-$*invariantes, uma cobertura* $(U_i)_{i\in I}$ *por abertos de* $U := M \setminus (S(\omega) \cup S(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k))$ *e, para cada* $i \in I$*, uma coleção de campos locais* $\mathfrak{B}^i = \{\chi_1^i, \ldots, \chi_r^i\} \subseteq \mathfrak{X}(U_i)$ *tais que* $\omega(\chi_1^i, \ldots, \chi_r^i) = 1$ *e* $\mathfrak{B}^i \setminus \{\chi_l\}$ *são tangentes a* ξ_l *e ao divisor* $D_l = \Sigma_{j\in J} V_j^l$ *para todo* $l \in I_k$*.*

Prova: ($\Rightarrow$) Conseqüência imediata do Lema 2.1 e da Proposição 4.11.
($\Leftarrow$) Para cada $j \in J$ e $l \in I_k$, ponha $V_j^l = \{g_{jl} = 0\}$. Agora, dado $p \in U \cap V_j^l$ existe $i \in I$ tal que $p \in U_i$. Como $\omega \wedge \xi_l = 0$, V_j^l é $\omega-$invariante e os elementos de $\mathfrak{B}^i \setminus \{\chi_l\}$ são tangentes a ξ_l e ao divisor D_l, temos que

$$ker(dg_{jl}(x)) = Span(\mathfrak{B}^i \setminus \{\chi_l\}) \cup ker(\omega(x)) = ker(\xi_l(x)),$$

para todo $x \in U_i \cap V_j^l \setminus S(\xi_l) \cup S(V_j^l)$. Portanto, V_j^l é ξ_l-invariante. Assim, ξ_l admite infinitas hipersuperfícies invariantes. Logo, pelo Teorema 4.1, ξ_l possui uma integral primeira meromorfa g_l de posto um. Então dg_l e ξ_l são dependentes fora dos seus pólos e, sendo $\xi_1, \ldots, \xi_k$ L.I em U, segue que $G := (g_1, \ldots, g_k)$ define uma integral primeira meromorfa de posto k para ω. ∎

Capítulo 5

Folheações que admitem estruturas transversais

No caso de folheações de codimensão um numa variedade complexa é bem conhecido o seguinte:

Teorema 5.1. [LN]. Seja M uma variedade complexa de dimensão $n \geq 2$ e $\mathscr{F}$ uma folheação regular de codimensão um em M. Então $\mathscr{F}$ tem uma estrutura transversal por translações se, e somente se, $\mathscr{F}$ pode ser definida por uma 1-forma fechada.

Nosso objetivo neste capítulo é dar uma generalização deste resultado para folheações singulares de codimensão $1 \leq r \leq n-1$. Primeiro provamos o caso regular e por uma simples aplicação obtemos o caso singular.

Definição 5.2. Sejam M^n e S^r variedades complexas conexas, $\mathscr{F}$ uma folheação regular em M, de codimensão r, e $G \subseteq Aut(S)$ um subgrupo de Lie de $Aut(S)$. Dizemos que $\mathscr{F}$ tem uma *estrutura transversal* modelada em G se existem uma cobertura $\{U_j\}_{j\in J}$ por abertos de M e coleções $\{\psi_j\}_{j\in J}$ e $\{g_{ij}\}_{U_{ij}\neq\emptyset}$ tais que:
(a) Para cada $j \in J$, $\psi_j : U_j \to \psi_j(U_j) \subset S$ é uma submersão.
(b) Se $U_{ij} := U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então $g_{ij} : \psi_i(U_{ij}) \to \psi_j(U_{ij})$ é a restrição a $\psi_i(U_{ij})$ de uma aplicação $h_{ij} \in G$ tal que $h_{ij} \circ \psi_i = \psi_j$.
(c) Para cada $j \in J$, as folhas de $\mathscr{F}|_{U_j}$ são as variedades de nível $\psi_j^{-1}(q)$, $q \in \psi_j(U_j)$.
Se $S = \mathbb{C}^r$ e $G = Afim(\mathbb{C}^r)$, dizemos que $\mathscr{F}$ possui uma estrutura transversal afim. Ainda, se $G = \{T(z) = z + B; B : \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}^r \textit{ localmente constante}\}$, diremos que $\mathscr{F}$ possui uma estrutura transversal por translações.

Teorema 5.3. *Sejam M uma variedade complexa de dimensão $n \geq 2$, $\mathscr{F}$ uma folheação regular de codimensão $1 \leq r < n$ em M e, suponhamos que $\mathscr{F}$ não admita integral primeira de posto um. Então $\mathscr{F}$ pode ser definida por uma r-forma fechada se, e somente se, $\mathscr{F}$ pode ser definida por submersões locais $F_i := (f_1^i, \ldots, f_r^i) : U_i \to \mathbb{C}^r$, $i \in I$, tais que:*

$$f_1^i df_2^i \wedge \cdots \wedge df_r^i = f_1^j df_2^j \wedge \cdots \wedge df_r^j + d\zeta_{ij}, \text{ em } U_{ij} \neq \emptyset, \ (*)$$

onde $\zeta_{ij} \in \Omega^{r-2}(U_{ij})$.

Prova: ($\Rightarrow$) Suponhamos que $\mathscr{F}$ possa ser definida por uma r-forma fechada ω. Escolhemos uma cobertura $\{U_i\}_{i\in I}$ por abertos de M, de modo que, para quaisquer $i, j \in I$, $U_{ij} := U_i \cap U_j$ é conexo e $\mathscr{F}$ é definida por uma família de submersões $\{(f_1^i, \ldots, f_r^i) : U_i \to \mathbb{C}^r\}_{i\in I}$ e colagens $\{\varphi_{ij}\}_{U_{ij}\neq\emptyset}$. Pelo Lema 1.16, para cada $i \in I$ existe $g_i \in \mathcal{O}^*(U_i)$ tal que

$$\omega|_{U_i} = g_i df_1^i \wedge \cdots \wedge df_r^i.$$

Provaremos que as $g_i's$ são iguais a constante. Ora, o dado $(g_i)_{i\in I}$ define uma seção global nunca nula do fibrado em retas $\mathscr{L}$ determinado pelo co-ciclo $\{\det(J\varphi_{ij})\}_{U_{ij}\neq\emptyset}$. Por conseguinte, existe um isomorfismo de fibrados:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{L} \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr, "\Pi"'] & \underline{\mathbb{C}} \arrow[d, "P_1"] \\ & M \end{tikzcd}$$

que leva a seção $(g_i)_{i\in I}$ numa função global $\widetilde{g} \in \mathcal{O}^*(M)$, i.e., $\Psi \circ g_i = \Psi \circ g_j$ em $U_{ij} \neq \emptyset$. Agora, como $d\omega = 0$, segue que $dg_i \wedge \omega = 0$ para todo $i \in I$. Daí, obtemos que $d\widetilde{g} \wedge \omega = 0$ e, como $\mathscr{F}$ não possui integral primeira, segue que $\widetilde{g}$ é constante. Sendo Ψ um isomorfismo, $\widetilde{g}$ é constante se, e somente se, as $g_i's$ são iguais a constante. Logo existe $c \in \mathbb{C}^*$ tal que $g_i \equiv c$ para todo $i \in I$. Então, substituindo f_1^i por cf_1^i para todo $i \in I$, obtemos que $df_1^i \wedge \cdots \wedge df_r^i = df_1^j \wedge \cdots \wedge df_r^j$ em $U_{ij} \neq \emptyset$. Ou seja, $d(f_1^i df_2^i \wedge \cdots \wedge df_r^i - f_1^j df_2^j \wedge \cdots \wedge df_r^j) = 0$. Logo, pelo Lema de Poincaré, existe $\zeta_{ij} \in \Omega^{r-2}(U_{ij})$ tal que

$$f_1^i df_2^i \wedge \cdots \wedge df_r^i = f_1^j df_2^j \wedge \cdots \wedge df_r^j + d\zeta_{ij},\ \textit{em } U_{ij}.$$

($\Leftarrow$) Se $\mathscr{F}$ pode ser definida por submersões $F_i := (f_1^i, \ldots, f_r^i) : U_i \to \mathbb{C}^r$ que satisfazem a condição $(*)$, pondo

$$\omega|_{U_i} = df_1^i \wedge \cdots \wedge df_r^i,$$

obtemos uma $r-$forma global ω fechada, que define a $\mathscr{F}$. ■

Como consequência imediata do Teorema 5.3, nós recuperamos o Teorema 5.1.

Corolário 5.4. *Seja M uma variedade complexa e, suponhamos que M admite uma $r-$forma ω LDS, fechada, não exata e sem integrais primeiras de posto um. Então existe $(\beta_{ij}) \in \check{H}^1(M, \Omega^{r-1}) \cap \check{H}^1(M, \mathfrak{a}^{r-1})$ tal que $(\beta_{ij}) = 0$ em $\check{H}^1(M, \Omega^{r-1})$ e $(\beta_{ij}) \neq 0$ em $\check{H}^1(M, \mathfrak{a}^{r-1})$. Em particular, $\check{H}^1(M, \mathfrak{a}^{r-1}) \neq \{0\}$.*

Prova: Pelo Teorema 5.3, podemos escolher uma cobertura $\underline{U} := \{U_i\}_{i \in I}$, suficientemente fina, por abertos de M e submersões $F_i := (f_1^i, \ldots, f_r^i) : U_i \to \mathbb{C}^r$, de modo que sejam satisfeitas as hipótese do Teorema de Leray, $\omega|_{U_i} = df_1^i \wedge \cdots \wedge df_r^i$ e, sempre que $U_{ij} \neq \emptyset$, existe $\beta_{ij} \in \mathfrak{a}^{r-1}(U_{ij})$ tal que

$$f_1^j df_2^j \wedge \cdots \wedge df_r^j - f_1^i df_2^i \wedge \cdots \wedge df_r^i = \beta_{ij}, \ em \ U_{ij}.$$

Então, em $U_{ijk} \neq \emptyset$, tem-se $\beta_{jk} - \beta_{ik} + \beta_{ij} = 0$. Logo, fazendo $\beta := (\beta_{ij})$ e $\mu := (\mu_i = f_1^i df_2^i \wedge \cdots \wedge df_r^i)$, obtemos que $\delta_1(\mu) = \beta$ e $(\delta_2(\beta))_{ijk} = 0$, onde δ_1 e δ_2 são os operadores de bordo em Ω^{r-1} e $\mathfrak{a}^{r-1}$, respectivamente. Assim,

$$\beta \in \check{H}^1(M, \Omega^{r-1}) \cap \check{H}^1(M, \mathfrak{a}^{r-1}) \ \ e \ \ \beta = 0 \ em \ \check{H}^1(M, \Omega^{r-1}).$$

Agora, suponhamos por absurdo, que exista $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I} \in C^0(\underline{U}, \mathfrak{a}^{r-1})$ tal que $\beta = \delta_2(\alpha)$. Então, em $U_{ij} \neq \emptyset$, temos que

$$\alpha_j - \alpha_i = (\delta_2(\alpha))_{ij} = \beta_{ij} = (\delta_1(\mu))_{ij} = \mu_j - \mu_i.$$

Ou seja, $\alpha_i - \mu_i = \alpha_j - \mu_j$. Assim, $\xi|_{U_i} = \alpha_i - \mu_i$ define uma $(r-1)-$forma holomorfa global tal que $d\xi = \omega$, o que é uma contradição. Isto prova que $\beta \neq 0$ em $\check{H}^1(M, \mathfrak{a}^{r-1})$. ∎

Como uma conseqüencia imediata do Corolário 5.4, temos o seguinte

Corolário 5.5 (Poincaré)**.** *Seja M uma variedade complexa e, suponhamos que $\check{H}^1(M, \mathfrak{a}^{r-1}) = \{0\}$. Então todo elemento de $\Omega_F^r(M)$ LDS e sem integrais primeiras é um elemento de $\mathfrak{a}^r(M)$.*

Teorema 5.6. *Sejam M uma variedade complexa e $\mathscr{F}$ uma folheação holomorfa regular de codimensão r em M. Então $\mathscr{F}$ tem uma estrutura transversal por translações se, e somente se, $\mathscr{F}$ pode ser definida por um sistema de 1-formas fechadas.*

Prova: $(\Rightarrow)$ Suponha que $\mathscr{F}$ tem uma estrutura transversal por translações, dada por uma cobertura $\{U_i\}_{i \in I}$ por abertos de M, uma coleção de submersões $\{F_i := (f_1^i, \ldots, f_r^i) : U_i \to \mathbb{C}^r\}_{i \in I}$ e um cociclo $\{g_{ij}\}_{U_{ij} \neq \emptyset}$ de translações. Então, em $U_{ij} \neq \emptyset$, tem-se $F_i = F_j + B_{ij}$, onde $B_{ij} := (b_1^{ij}, \ldots, b_r^{ij}) : U_{ij} \to \mathbb{C}^r$ é localmente constante. Ou seja, $f_k^i = f_k^j + b_k^{ij}$. Logo $df_k^i = df_k^j$ em U_{ij}. Assim, para cada $k \in I_r$, podemos definir a $1-$forma fechada $\alpha_k \in \Omega^1(M)$ por $\alpha_k|_{U_i} = df_k^i$ para todo $i \in I$. Por construção, o sistema de $1-$formas $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ define $\mathscr{F}$.
$(\Leftarrow)$ Reciprocamente, se $\mathscr{F}$ pode ser definido por um sistema de $1-$formas holomorfas fechadas $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$, sendo $\mathscr{F}$ regular, temos $\alpha_1(p) \wedge \cdots \wedge \alpha_r(p) \neq 0$ para todo $p \in M$. Escolhamos uma cobertura $\{U_i\}_{i \in I}$ por abertos de M biholomorfos a uma bola de $\mathbb{C}^n$. Pelo Lema de Poincaré, para cada $k \in I_r$ e para todo $i \in I$, existe $f_k^i \in \mathcal{O}(U_i)$ tal que $\alpha_k|U_i = df_k^i$. Então $F_i := (f_1^i, \ldots, f_r^i) : U_i \to \mathbb{C}^r$ é

uma submersão. Além disso, em $U_{ij} \neq \emptyset$, temos que $d(f_k^j - f_k^i) = 0$. Logo existe $b_k^{ij} \in \mathcal{O}(U_{ij})$ localmente constante tal que $f_k^j = f_k^i + b_k^{ij}$. Fazendo $g_{ij}(Z) = Z + B$, onde $B := (b_1^{ij}, \ldots, b_r^{ij})$, obtemos que $F_j = g_{ij} \circ F_i$. Portanto, $\mathscr{F}$ tem uma estrutura transversal por translações. ■

Proposição 5.7. *Sejam M uma variedade complexa e $\mathscr{F}$ uma folheação holomorfa singular de codimensão r em M, com $codim(Sing(\mathscr{F})) \geq 2$. As seguintes são afirmações equivalentes:*

i) $\mathscr{F}$ tem uma estrutura transversal por translações.

ii) $\mathscr{F}$ pode ser definida por um sistema $\mathfrak{S} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ de 1-formas fechadas holomorfas em M.

iii) $\mathscr{F} = \bigcap_{i=1}^r \mathscr{F}_i$, onde cada $\mathscr{F}_i$ é uma folheação singular de codimensão um em M que tem uma estrutura transversal por translações e $Sing(\mathscr{F}) = T$, onde T é o conjunto de tangências das $\mathscr{F}_i^\prime s$.

Prova: $i) \Rightarrow ii)$ Segue do Teorema 5.6 e do Teorema de Extensão de Hartogs.
$ii) \Rightarrow iii)$ Pelo caso $r = 1$, para cada $i \in I_r$, α_i define uma folheação holomorfa $\mathscr{F}_i$ de codimensão um em M, possuindo uma estrutura transversal por translações. Além disso, $Sing(\mathscr{F}) = \{x \in M : \alpha_1(x) \wedge \cdots \wedge \alpha_r(x) = 0\} = T$. Por último, observando que $T\mathscr{F}_x = \cap_{i=1}^r ker(\alpha_i(x)) = \cap_{i=1}^r T\mathscr{F}_{i,x} = T_x(\cap_{i=1}^r \mathscr{F}_i)$ para todo $x \in M \setminus Sing(\mathscr{F})$, conclui-se que $\mathscr{F} = \cap_{i=1}^r \mathscr{F}_i$.
$iii) \Rightarrow i)$ (ver [Sc], pag. 142.). ■

Capítulo 6

O fenômeno de Kupka para sistemas não-integráveis

6.1 O Teorema de redução de variáveis

Ao longo desta seção, ω representa um germe de r-forma em $(\mathbb{C}^n, 0)$, com $n \geq 4$.

Lema 6.1. *Suponhamos que $d\omega$ é LDS e que $d\omega(0) \neq 0$. Então existe uma vizinhança B de 0 tal que*

$$\mathrm{E} := \bigcup_{p \in B} ker(d\omega(p))$$

é um subfibrado holomorfo integrável de TB de posto $n - (r+1)$.

Prova: Como $0 \notin S(d\omega)$, existe uma vizinhança B de 0 tal que $B \cap S(d\omega) = \emptyset$. Consideremos o mapa de fibrados $\varphi : TB \to \Lambda^r TB^*$ definido nas fibras por:

$$\varphi : T_p B \to \Lambda^r TB^*$$

$$v \mapsto \boldsymbol{i}_v(d\omega(p)).$$

Então φ é holomorfo e $ker(\varphi(p)) = ker(d\omega(p))$ para todo $p \in B$. Por outro lado, como $B \cap S(d\omega) = \emptyset$ e $d\omega$ é LDS, então $dim(ker(\varphi(p))) = n - (r+1)$ para todo $p \in B$. Portanto,

$$\mathrm{E} = ker(\varphi)$$

é um subfibrado holomorfo de TB de posto $n - (r+1)$. Além disso, sendo $d\omega$ LDS, pela Proposição 1.12, $d\omega$ é integrável, i.e., a distribuição $\tau : p \mapsto ker(d\omega(p))$ é integrável. Por conseguinte, E é integrável. ■

Teorema 6.2 (Estrutura de produto para sistemas não-integráveis)**.** *Suponha que $d\omega$ é LDS, $d\omega(0) \neq 0$ e que $d(\boldsymbol{i}_\chi(\omega)) = 0$ para todo germe de campo χ em $(\mathbb{C}^n, 0)$ tangente a $d\omega$. Então existe um sistema de coordenadas $(x, z) \in \mathbb{C}^{r+1} \times \mathbb{C}^{n-(r+1)}$ tal que $\omega = \omega(x)$.*

Prova: Pelo Lema 6.1, existe uma vizinhança B de 0 tal que

$$\mathrm{E} = \bigcup_{p \in B} ker(d\omega(p))$$

é um subfibrado holomorfo integrável de TB, de posto $n-(r+1)$. Logo E é tangente a uma folheação $\mathscr{G}$ de codimensão $r+1$. Consideremos então uma carta trivializadora $(x_1, \ldots, x_{r+1}, z_1, \ldots, z_{n-(r+1)}) \in \mathbb{C}^{r+1} \times \mathbb{C}^{n-(r+1)}$ de $\mathscr{G}$ numa vizinhança de 0, tal que as folhas de são da forma $(x_1 = c_1, \ldots, x_{r+1} = c_{r+1})$, $c_1, \ldots, c_{r+1} \in \mathbb{C}$. Como $ker(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{r+1}) = T\mathscr{G} = ker(d\omega)$, para cada $j \in I_{n-(r+1)}$, $\frac{\partial}{\partial z_j}$ é um campo tangente a $d\omega$. Por conseguinte,

$$0 = d(\boldsymbol{i}_{\frac{\partial}{\partial z_j}}(\omega))) = \mathrm{L}_{\frac{\partial}{\partial z_j}}(\omega).$$

Portanto, $\omega = \omega(x_1, \ldots, x_{r+1})$. ∎

Corolário 6.3. *Se ω é como no teorema acima, então ω é integrável, i.e., ω define um germe de folheação holomorfa em 0, de codimensão r.*

Prova: Segue diretamente do Teorema 6.2 e do fato que toda $r-$forma em $\mathbb{C}^{r+1}$ é integrável. ∎

Observação 6.4. 1. O germe em $0 \in \mathbb{C}^{r+1}$ de $r-$forma

$$\eta = \omega(x_1, \ldots, x_{r+1}) = \sum_{j=1}^{r+1} (-1)^i a_j \widehat{\mathbf{dx}_j},$$

onde $\widehat{\mathbf{dx}_j} = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_{r+1}$, está bem definido a menos de biholomorfismo e multiplicação por funções holomorfas nunca nulas. Além disso, é possível verificar que a distribuição induzida por ω é também descrita pelo campo $\chi_\omega = \sum_{j=1}^{r+1} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ e que a condição $d\omega(0) \neq 0$ é equivalente a $Div(\chi(0)) = \Sigma_{j=1}^{r+1} \frac{\partial a_j(0)}{\partial x_j} \neq 0$. Em particular, a parte linear $\chi_0 = D\chi(0)$ de χ_ω é não nula e está bem definida a menos de conjugação e multiplicação por escalares. Em outras palavras, o espectro de $\chi_\omega(0)$ está bem definido. Diremos então que ω tem *tipo linear* χ_0 em 0.

2. Segue da Proposição 1.19, que se ω é uma $r-$forma integrável, então $d\omega$ é LDS e $\mathrm{L}_\chi(\omega) = d(\boldsymbol{i}_\chi(\omega)) = 0$ para todo campo χ tangente a $d\omega$. E como prova de que esta última condição é realmente necessaria, damos o seguinte:

Exemplo 6.5. Seja Ω como no exemplo 1.1.. Sendo $d\Omega$ uma $3-$forma em $\mathbb{C}^4$, segue que $d\Omega$ é LDS. Além disso, $d\Omega(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}^4$ e Ω não é integrável em lugar algum. Logo, pelo Teorema 6.2, para cada $z \in \mathbb{C}^4$ existe um germe de campo χ tangente a $d\Omega$ tal que $d(\boldsymbol{i}_\chi(\omega)) \neq 0$. Em particular, não existe nenhuma mudança local de variáveis na qual Ω dependa apenas de três variáveis.

Definição 6.6. Seja ω uma $r-$forma holomorfa numa variedade complexa M tal que $d\omega$ é LDS. Dizemos que $p \in M$ é um ponto de Kupka de ω se $d\omega(p) \neq 0$ e $\mathrm{L}_\chi(\omega) = 0$ para todo germe de campo χ em p tangente a $d\omega$. Se além disso, $\omega(p) = 0$, diremos que p é uma *singularidade de tipo Kupka* de ω.

Observação 6.7. Note que se $\omega(p) = 0$ e $\eta = g\omega$, onde $g \in \mathcal{O}_p^*(M)$, então $d\eta(p) = dg(p) \wedge \omega(p) + g(p)d\omega(p) = g(p)d\omega(p) \neq 0$. Além disso, se ω é integrável, então η também o é. Logo $\boldsymbol{i}_\chi(\eta) = 0$ para qualquer germe de campo χ em p tangente a $d\eta$. Em particular, $\mathrm{L}_\chi(\eta) = \boldsymbol{i}_\chi(d\eta) + d(\boldsymbol{i}_X(\eta)) = 0 + 0 = 0$. Portanto, p é ponto de Kupka de η. Isto prova que faz sentido a seguinte

Definição 6.8. Seja M uma variedade complexa M e, seja

$$\mathscr{P} = (\,\{U_\alpha, S_\alpha\}\,; \{\omega_\alpha \in \Omega^r(U_\alpha)\}\,; \{(g_{\alpha\beta}) \in \mathcal{O}^*(U_{\alpha\beta})\})_{\alpha,\beta\in\Lambda}$$

um campo de planos uniforme de codimensão r em M. Dizemos que $p \in M$ é uma singularidade de $\mathscr{P}$ de *tipo Kupka* se existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $d\omega_\alpha$ é LDS e p é uma singularidade tipo Kupka de ω_α. O tipo linear de ω_α em p será chamado de *tipo transversal* ou *linear* de $\mathscr{P}$ em p. O conjunto formado por todas as singularidades de tipo Kupka de $\mathscr{P}$, denotado por $K_{\mathscr{P}}$, é chamado de *conjunto de Kupka* de $\mathscr{P}$. Uma componente de $S(\mathscr{P})$ contida em $K_{\mathscr{P}}$ chama-se uma *componente de Kupka* de $\mathscr{P}$.

Se K é uma componente de Kupka de $\mathscr{P}$, sendo K conexo, pela Observação 6.4.1., o tipo linear de $\mathscr{P}$ é constante ao longo de K.

Exemplo 6.9. Sejam $f_1, \ldots, f_{r+1}$, $r \geq 2$, polinômios homogêneos irredutíveis em $\mathbb{C}^{n+1}$. Para cada $i \in I_{r+1}$, seja $d_i = grau(f_i)$. Denotemos por

$$\Pi : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$$

a projeção natural. Suponhamos que as hipersuperfícies $\Pi(f_1 = 0), \ldots, \Pi(f_{r+1} = 0)$ sejam transversais. Ou seja,

$$df_1(z) \wedge \cdots \wedge df_{r+1}(z) \neq 0$$

para todo $z \in \cap_{i=1}^{r+1} f^{-1}(0)$. Seja

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{(d_{r+1}f_{r+1})^{r-1}}(d_{r+1}f_{r+1}df_1 - d_1f_1df_{r+1}) \wedge \cdots \wedge (d_{r+1}f_{r+1}df_r - d_rf_rdf_{r+1}) \\ &= \sum_{j=1}^{r+1}(-1)^j d_jf_j\widehat{\mathbf{df}}_j, \end{aligned}$$

onde $\widehat{\mathbf{df}}_j = df_1 \wedge \cdots \wedge df_{j-1} \wedge df_{j+1} \wedge \cdots \wedge df_{r+1}$. Então Ω é uma $r-$forma polinomial homogênea integrável em $\mathbb{C}^{n+1}$ tal que $\boldsymbol{i}_R(\Omega) = 0$, pois $\boldsymbol{i}_R(d_{r+1}f_{r+1}df_j -$

$d_j f_j df_{r+1}) = 0$ para todo $j \in I_r$, onde $R = \Sigma_{j=1}^{n+1} z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$. Portanto, Ω define uma folheação $\mathscr{F}$ em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Por outro lado, temos que $d\Omega = -(\Sigma_{i=1}^{r+1} d_i) df_1 \wedge \cdots \wedge df_{r+1}$. Assim, a subvariedade, de codimensão $r+1$, $\Pi(f_1 = \cdots = f_{r+1} = 0)$ é uma componente de Kupka de $\mathscr{F}$ e, para cada $i \in I_r$, a função

$$h_i = \frac{f_i^{\Pi_{j=1}^{r+1} \frac{d_j}{d_i}}}{f_{r+1}^{\Pi_{j=1}^{r} d_j}}$$

é uma integral primeira racional de $\mathscr{F}$.

Teorema 6.10. *Seja $\mathscr{P}$ um campo de planos uniforme de codimensão 2 numa variedade complexa M. Seja K uma componente de Kupka de $\mathscr{P}$ e, suponhamos que o tipo linear $\mathscr{P}$ em K tem autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ distintos. Então:*
(1)

$$\nu(K, M) = \mathscr{L}_{\lambda_1} \oplus \mathscr{L}_{\lambda_2} \oplus \mathscr{L}_{\lambda_3},$$

onde $\nu(K, M)$ é fibrado normal de K em M e $\mathscr{L}_{\lambda_j}$ é o fibrado em retas determinado pela autodireção correspodente a λ_j.
(2) Para quaisquer $i, j \in I_3$ tem-se

$$\lambda_j c(L_{\lambda_i}) = \lambda_i c(L_{\lambda_j}),$$

onde $c(L_{\lambda_j})$ denota a classe de Chern de L_{λ_j} em $H^2(K, \mathbb{C})$.

Prova: Sendo K conexo, podemos escolher uma cobertura por abertos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de uma vizinhança de K em M junto com biholomorfismos $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^{n-3}$, coordenadas $(z, x_\alpha) = (z_1, z_2, z_3, x_{\alpha,4}, \ldots, x_{\alpha,n})$ e um germe de 2$-$forma holomorfa η na origem de $\mathbb{C}^3$ tal que $\varphi_\alpha^*(\eta) = \omega|_{U_\alpha}$. Faça $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_{\alpha\beta}) \to \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta})$, onde

$$\varphi_{\alpha\beta}(z, x_\beta) = (\varphi^1_{\alpha\beta}, \varphi^2_{\alpha\beta}, \varphi^3_{\alpha\beta}, \varphi^4_{\alpha\beta}) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^{n-3},$$

e suponhamos os $U_{\alpha\beta\gamma}$ e $U_{\alpha\beta\gamma} \cap K$ contráteis. Como η e $\varphi^*_{\alpha\beta}(\eta)$ definem $\varphi_{\beta_*}(\mathscr{F})$ em $\varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$, pelo Lema 1.16, existe $f_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_{\alpha\beta})$ tal que $\varphi^*_{\alpha\beta}(\eta) = f_{\alpha\beta}\eta$. Além disso, segue da estrutura produto que $\varphi^*_{\alpha\beta}(\eta)$ é tangente as fibras de $\Pi_1 : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^{n-3} \to \mathbb{C}^3$, $\Pi_1(z, x) = z$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \varphi^*_{\alpha\beta}(\eta) &= A(\varphi^1_{\alpha\beta}, \varphi^2_{\alpha\beta}, \varphi^3_{\alpha\beta}) d\varphi^2_{\alpha\beta} \wedge \varphi^3_{\alpha\beta} - B(\varphi^1_{\alpha\beta}, \varphi^2_{\alpha\beta}, \varphi^3_{\alpha\beta}) d\varphi^1_{\alpha\beta} \wedge \varphi^3_{\alpha\beta} \\ &\quad + C(\varphi^1_{\alpha\beta}, \varphi^2_{\alpha\beta}, \varphi^3_{\alpha\beta}) d\varphi^1_{\alpha\beta} \wedge d\varphi^2_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Assim, $\varphi^*_{\alpha\beta}(\eta)$ é tangente as fibras de Π_1 se, e só se, $\varphi^*_{\alpha\beta}(\eta)$ depende apenas de dz_1, dz_2 e dz_3 (*pois* $ker(dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3) = T_y(\Pi_{1z}) \subset ker(\varphi^*_{\alpha\beta}(\eta))$ implica $\varepsilon^*(\varphi^*_{\alpha\beta}(\eta)) \subset \varepsilon^*(dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3)$). Então, para qualquer $i \in I_3$ e para todo $j \in I_n$,

$$A(\varphi^1_{\alpha\beta},\varphi^2_{\alpha\beta},\varphi^3_{\alpha\beta})[\frac{\partial\varphi^2_{\alpha\beta}}{\partial z_i}\frac{\partial\varphi^3_{\alpha\beta}}{\partial x_j}-\frac{\partial\varphi^2_{\alpha\beta}}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi^3_{\alpha\beta}}{\partial z_i}]-B(\varphi^1_{\alpha\beta},\varphi^2_{\alpha\beta},\varphi^3_{\alpha\beta})[\frac{\partial\varphi^1_{\alpha\beta}}{\partial z_i}\frac{\partial\varphi^3_{\alpha\beta}}{\partial x_j}-\frac{\partial\varphi^1_{\alpha\beta}}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi^3_{\alpha\beta}}{\partial z_i}]$$
$$+C(\varphi^1_{\alpha\beta},\varphi^2_{\alpha\beta},\varphi^3_{\alpha\beta})[\frac{\partial\varphi^1_{\alpha\beta}}{\partial z_i}\frac{\partial\varphi^2_{\alpha\beta}}{\partial x_j}-\frac{\partial\varphi^1_{\alpha\beta}}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi^2_{\alpha\beta}}{\partial z_i}]=0. \tag{6.0}$$

Suponhamos agora que $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3\neq\lambda_1$ e, seja $\mathscr{L}_i$ o fibrado em retas induzido pela autodireção correspondente a λ_i. Então temos o splitting do fibrado normal $\nu(K,M)$ de K em M

$$\nu(K,M)=\mathscr{L}_1\oplus\mathscr{L}_2\oplus\mathscr{L}_3.$$

Seja

$$\eta=(\lambda_1 z_1+\cdots)dz_2\wedge dz_3-(\lambda_2 z_2+\cdots)dz_1\wedge dz_3+(\lambda_3 z_3+\cdots)dz_1\wedge dz_2 \tag{6.1}$$

a $2-$forma em $\mathbb{C}^3$ que representa o tipo transversal de $\mathscr{F}$. Em $U_{\alpha\beta}\neq\emptyset$, consideremos a submersão

$$(\varphi^1_{\alpha\beta},\varphi^2_{\alpha\beta},\varphi^3_{\alpha\beta}):=(\Sigma_J\varphi^1_{\alpha\beta,J}(x)z^J,\Sigma_J\varphi^2_{\alpha\beta,J}(x)z^J,\Sigma_J\varphi^3_{\alpha\beta,J}(x)z^J):U_{\alpha\beta}\subset U_\beta \tag{6.2}$$

expandida como série de potências em z_1,z_2,z_3 com coeficientes sendo funções holomorfas em $K\cap U_{\alpha\beta}$, onde $J=(j_1,j_2,j_3)$ e $j_1+j_2+j_3\geq 1$ (pois $\varphi_{\alpha\beta}(K\cap U_{\alpha\beta})=\{0\}$). As coordenadas z_1,z_2,z_3 foram escolhidas de modo que o tipo transversal (6.1) tenha parte linear diagonal. Agora, a parte linear em (6.2) forma um cociclo, o qual descreve o fibrado normal $\nu(K,M)$ de K em M. Por outro lado, como $(\varphi^1_{\alpha\beta},\varphi^2_{\alpha\beta},\varphi^3_{\alpha\beta})^*(\eta)=f_{\alpha\beta}\eta$, fazendo $\varphi^i_{\alpha\beta,1}:=\varphi^i_{\alpha\beta,1,0,0}$, $\varphi^i_{\alpha\beta,2}:=\varphi^i_{\alpha\beta,0,1,0}$, $\varphi^i_{\alpha\beta,3}:=\varphi^i_{\alpha\beta,0,0,1}$ para cada $i\in I_3$ e comparando termos lineares, obtemos que, para cada $j\in I_3$,

$\lambda_1\varphi^1_{\alpha\beta,j}[\varphi^2_{\alpha\beta,2}\varphi^3_{\alpha\beta,3}-\varphi^2_{\alpha\beta,3}\varphi^3_{\alpha\beta,2}]-\lambda_2\varphi^2_{\alpha\beta,j}[\varphi^1_{\alpha\beta,2}\varphi^3_{\alpha\beta,3}-\varphi^1_{\alpha\beta,3}\varphi^3_{\alpha\beta,2}]+\lambda_3\varphi^3_{\alpha\beta,j}[\varphi^1_{\alpha\beta,2}\varphi^2_{\alpha\beta,3}$
$-\varphi^1_{\alpha\beta,3}\varphi^2_{\alpha\beta,2}]=\delta_{1j}f_{\alpha\beta}\lambda_1.$ (I)

$\lambda_1\varphi^1_{\alpha\beta,j}[\varphi^2_{\alpha\beta,1}\varphi^3_{\alpha\beta,3}-\varphi^2_{\alpha\beta,3}\varphi^3_{\alpha\beta,1}]-\lambda_2\varphi^2_{\alpha\beta,j}[\varphi^1_{\alpha\beta,1}\varphi^3_{\alpha\beta,3}-\varphi^1_{\alpha\beta,3}\varphi^3_{\alpha\beta,1}]+\lambda_3\varphi^3_{\alpha\beta,j}[\varphi^1_{\alpha\beta,1}\varphi^2_{\alpha\beta,3}$
$-\varphi^1_{\alpha\beta,3}\varphi^2_{\alpha\beta,1}]=-\delta_{2j}f_{\alpha\beta}\lambda_2.$ (II)

$\lambda_1\varphi^1_{\alpha\beta,j}[\varphi^2_{\alpha\beta,1}\varphi^3_{\alpha\beta,2}-\varphi^2_{\alpha\beta,2}\varphi^3_{\alpha\beta,1}]-\lambda_2\varphi^2_{\alpha\beta,j}[\varphi^1_{\alpha\beta,1}\varphi^3_{\alpha\beta,2}-\varphi^1_{\alpha\beta,2}\varphi^3_{\alpha\beta,1}+\lambda_3\varphi^3_{\alpha\beta,j}[\varphi^1_{\alpha\beta,1}\varphi^2_{\alpha\beta,2}$
$-\varphi^1_{\alpha\beta,2}\varphi^2_{\alpha\beta,1}]=\delta_{3j}f_{\alpha\beta}\lambda_3.$ (III),
onde $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & se\ i=j\\ 0, & se\ i\neq j\end{cases}.$
Considerando $j=1$ em (I), $j=2$ em (II) e $j=3$ em (III), obtemos

$(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)[(\lambda_3-\lambda_2)(\varphi^1_{\alpha\beta,1}\varphi^3_{\alpha\beta,2}\varphi^2_{\alpha\beta,3}-\varphi^2_{\alpha\beta,1}\varphi^3_{\alpha\beta,2}\varphi^1_{\alpha\beta,3})+(\lambda_1-\lambda_2)(\varphi^2_{\alpha\beta,1}\varphi^1_{\alpha\beta,2}\varphi^3_{\alpha\beta,3}-$

$\varphi^3_{\alpha\beta,1}\varphi^1_{\alpha\beta,2}\varphi^2_{\alpha\beta,3})]=0$

e como o tipo transversal de $\mathscr{F}$ em K tem traço não nulo, conclui-se

$$(\lambda_3-\lambda_2)(\varphi^1_{\alpha\beta,1}\varphi^3_{\alpha\beta,2}\varphi^2_{\alpha\beta,3}-\varphi^2_{\alpha\beta,1}\varphi^3_{\alpha\beta,2}\varphi^1_{\alpha\beta,3})+(\lambda_1-\lambda_2)(\varphi^2_{\alpha\beta,1}\varphi^1_{\alpha\beta,2}\varphi^3_{\alpha\beta,3}- \varphi^3_{\alpha\beta,1}\varphi^1_{\alpha\beta,2}\varphi^2_{\alpha\beta,3})=0. \tag{6.3}$$

Representando por d_1 a derivada em relação á variável z e pondo $A := [d_1\varphi_{\alpha\beta}]$, obtemos que

$$adj(A)\begin{pmatrix}\lambda_1\varphi^1_{\alpha\beta,j}\\ \lambda_2\varphi^2_{\alpha\beta,j}\\ \lambda_3\varphi^3_{\alpha\beta,j}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta_{1j}\lambda_1 f_{\alpha\beta}\\ \delta_{2j}\lambda_2 f_{\alpha\beta}\\ \delta_{3j}\lambda_3 f_{\alpha\beta}\end{pmatrix},\quad j=1,2,3.$$

Daí, usando a regra de Cramer junto com o fato que $\det(adj(A))\neq 0$, deduz-se que, para quaisquer $i,j\in I_3$,

$$\lambda_i\varphi^i_{\alpha\beta,j}=\lambda_j\varphi^i_{\alpha\beta,j}C, \tag{6.4}$$

onde $C=f_{\alpha\beta}\det(A)$.

Afirmação 1.: Se $\varphi^i_{\alpha\beta,i}=0$ para todo $i\in I_3$, então $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$.
Com efeito, se $\varphi^1_{\alpha\beta,1}=\varphi^2_{\alpha\beta,2}=\varphi^3_{\alpha\beta,3}=0$, sendo $\det(A)\neq 0$, para cada $i\in I_3$, existe $j\in I_3\setminus\{i\}$ tal que $\varphi^i_{\alpha\beta,j}\neq 0$. Então, de (6.3) e (6.4), deduz-se que $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$. Isto prova a afirmação.
Temos agora dois casos a considerar:

CASO I: $\lambda_j\neq 0$ para todo $j\in I_3$. Pela afirmação 1, existe um $i\in I_3$ tal que $\varphi^i_{\alpha\beta,i}\neq 0$. Logo, de (6.4), segue que $C=1$ e $\varphi^i_{\alpha\beta,j}=0$ para quaisquer $i\neq j$ em I_3.

CASO II: $\lambda_j=0$ para algum $j\in I_3$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\lambda_1=0$. Então $\lambda_2\neq 0\neq\lambda_3$, logo, por (6.4), temos $\varphi^1_{\alpha\beta,2}=\varphi^1_{\alpha\beta,3}=\varphi^2_{\alpha\beta,1}=\varphi^3_{\alpha\beta,1}=0$. Sendo $\det(A)\neq 0$, temos $\varphi^1_{\alpha\beta,1}\neq 0$. Logo, segue de (6.3) que $\varphi^2_{\alpha\beta,3}=0$ ou $\varphi^3_{\alpha\beta,2}=0$. por conseguinte, $\varphi^2_{\alpha\beta,2}\neq 0$ ou $\varphi^3_{\alpha\beta,3}\neq 0$. Usando novamente as equações (6.4), obtemos que $C=1$, $\varphi^2_{\alpha\beta,3}=\varphi^3_{\alpha\beta,2}=0$. Ou seja, em qualquer caso teremos

$$A=\begin{pmatrix}\varphi^1_{\alpha\beta,1}&0&0\\0&\varphi^2_{\alpha\beta,2}&0\\0&0&\varphi^3_{\alpha\beta,3}\end{pmatrix}.$$

Portanto, $\nu(K,M)$ é descrito uma matriz diagonal, 3×3, com entradas sendo os cociclos:

$$(\xi_{\alpha\beta}):=(\varphi^1_{\alpha\beta,1}),\ (\zeta_{\alpha\beta}):=(\varphi^2_{\alpha\beta,2}),\ (\gamma_{\alpha\beta}\cap K\},\mathscr{O}^*_K).$$

Esta expressão de cociclos dá a decomposição:

$$\nu(K,M)=\mathscr{L}_1\oplus\mathscr{L}_2\oplus\mathscr{L}_3.$$

Agora, considerando as equações (7.0), desde η obtemos que

$$(\lambda_1\varphi^1_{\alpha\beta}+\cdots)[\frac{\partial\varphi^2_{\alpha\beta}}{\partial z_i}\frac{\partial\varphi^3_{\alpha\beta}}{\partial x_j}-\frac{\partial\varphi^2_{\alpha\beta}}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi^3_{\alpha\beta}}{\partial z_i}]-(\lambda_2\varphi^2_{\alpha\beta}+\cdots)[\frac{\partial\varphi^1_{\alpha\beta}}{\partial z_i}\frac{\partial\varphi^3_{\alpha\beta}}{\partial x_j}-\frac{\partial\varphi^1_{\alpha\beta}}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi^3_{\alpha\beta}}{\partial z_i}]$$

$$+(\lambda_3\varphi^3_{\alpha\beta}+\cdots)[\frac{\partial\varphi^1_{\alpha\beta}}{\partial z_i}\frac{\partial\varphi^2_{\alpha\beta}}{\partial x_j}-\frac{\partial\varphi^1_{\alpha\beta}}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi^2_{\alpha\beta}}{\partial z_i}]=0 \qquad (6.5)$$

para todo $i\in I_3$ e para qualquer $j\in\{4,\ldots,n\}$. Observando que

$$\varphi^1_{\alpha\beta}=\varphi^1_{\alpha\beta,1}z_1+\sum_{|J|\geq 2}\varphi^1_{\alpha\beta,J}z^J,\ \varphi^2_{\alpha\beta}=\varphi^2_{\alpha\beta,2}z_2+\sum_{|J|\geq 2}\varphi^2_{\alpha\beta,J}z^J,$$

$$\varphi^3_{\alpha\beta}=\varphi^3_{\alpha\beta,3}z_3+\sum_{|J|\geq 2}\varphi^3_{\alpha\beta,J}z^J,$$

igualando potências não triviais de menor grau nas variáveis z_1, z_2 *e* z_3 em (6.5), obtemos para cada $j\in I_n$ as equações:

$$i=1:-\lambda_2\varphi^1_{\alpha\beta,1}\varphi^2_{\alpha\beta,2}\frac{\partial\varphi^3_{\alpha\beta,3}}{\partial x_j}z_2z_3+\lambda_3\varphi^1_{\alpha\beta,1}\varphi^3_{\alpha\beta,3}\frac{\partial\varphi^2_{\alpha\beta,2}}{\partial x_j}z_2z_3=0,$$

$$i=2:-\lambda_1\varphi^1_{\alpha\beta,1}\varphi^2_{\alpha\beta,2}\frac{\partial\varphi^3_{\alpha\beta,3}}{\partial x_j}z_1z_3+\lambda_3\varphi^3_{\alpha\beta,3}\varphi^2_{\alpha\beta,2}\frac{\partial\varphi^1_{\alpha\beta,1}}{\partial x_j}z_1z_3=0,$$

$$i=3:-\lambda_1\varphi^1_{\alpha\beta,1}\varphi^3_{\alpha\beta,3}\frac{\partial\varphi^2_{\alpha\beta,2}}{\partial x_j}z_1z_2+\lambda_2\varphi^2_{\alpha\beta,2}\varphi^3_{\alpha\beta,3}\frac{\partial\varphi^1_{\alpha\beta,1}}{\partial x_j}z_1z_2=0.$$

Que escritas de outro modo equivalem a:

$$i=1:\lambda_2\zeta_{\alpha\beta}\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_j}-\lambda_3\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\zeta_{\alpha\beta}}{\partial x_j}=0.$$

$$i=2:\lambda_1\xi_{\alpha\beta}\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_j}-\lambda_3\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi_{\alpha\beta}}{\partial x_j}=0.$$

$$i=3:\lambda_1\xi_{\alpha\beta}\frac{\partial\zeta_{\alpha\beta}}{\partial x_j}-\lambda_2\zeta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi_{\alpha\beta}}{\partial x_j}=0.$$

Ou seja,

$$\begin{array}{l}\lambda_2\log\gamma_{\alpha\beta}-\lambda_3\log\zeta_{\alpha\beta}=C^1_{\alpha\beta}\\ \lambda_1\log\gamma_{\alpha\beta}-\lambda_3\log\xi_{\alpha\beta}=C^2_{\alpha\beta}\quad(**)\\ \lambda_1\log\zeta_{\alpha\beta}-\lambda_2\log\xi_{\alpha\beta}=C^3_{\alpha\beta}.\end{array}$$

Agora, as classes de Chern de $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ *e* $\mathscr{L}_3$ podem ser, respectivamente, representadas pelos co-ciclos $(\ell_{\alpha\beta\delta}), (m_{\alpha\beta\delta})$ *e* $(n_{\alpha\beta\delta})$ definidos por:

$$2\pi i \ell_{\alpha\beta\delta} = \log \xi_{\beta\delta} - \log \xi_{\alpha\delta} + \log \xi_{\alpha\beta}$$

$$2\pi i m_{\alpha\beta\delta} = \log \zeta_{\beta\delta} - \log \zeta_{\alpha\delta} + \log \zeta_{\alpha\beta}$$

$$2\pi i n_{\alpha\beta\delta} = \log \gamma_{\beta\delta} - \log \gamma_{\alpha\beta} + \log \gamma_{\alpha\delta}.$$

Então, das relações $(**)$, obtemos que

$$2\pi i(\lambda_3 m_{\alpha\beta\delta} - \lambda_2 n_{\alpha\beta\delta}) = c^1_{\beta\delta} - c^1_{\alpha\delta} + c^1_{\alpha\beta} = (\delta(c^1))_{\alpha\beta\delta})$$

$$2\pi i(\lambda_1 n_{\alpha\beta\delta} - \lambda_3 \ell_{\alpha\beta\delta}) = c^2_{\beta\delta} - c^2_{\alpha\delta} + c^2_{\alpha\beta} = (\delta(c^2))_{\alpha\beta\delta})$$

$$2\pi i(\lambda_2 \ell_{\alpha\beta\delta} - \lambda_1 m_{\alpha\beta\delta}) = c^3_{\beta\delta} - c^3_{\alpha\delta} + c^3_{\alpha\beta} = (\delta(c^3))_{\alpha\beta\delta}).$$

Onde $c^i := (c^i_{\alpha\beta}) \in C^1(\{U_{\alpha\beta} \cap K\}, \mathbb{C})$, $i = 1, 2, 3$. Portanto, $\lambda_3 c(\mathscr{L}_2) = \lambda_2 c(\mathscr{L}_3)$, $\lambda_1 c(\mathscr{L}_3) = \lambda_3 c(\mathscr{L}_1)$ e $\lambda_2 c(\mathscr{L}_1) = \lambda_1 c(\mathscr{L}_2)$. ∎

Capítulo 7

Apêndice

7.1 Notações do texto

Ao longo deste trabalho $\Bbbk$ = denota um corpo de caracteristica zero, E é um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\Bbbk$ e M é uma variedade diferenciável de dimensão n.
$I_n := \{1, \ldots, n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
$\underline{I_n} = I_n \cup \{0\}$.
$\mathfrak{I}_n^m$: Coleção de todos os subconjuntos de I_n com m elementos, considerado com a ordem Lexicográfica.
$\mathcal{P}(n, k)$. Conjunto de polinômios homogêneos de grau k em $\mathbb{C}^n$.
$J_p^k(f)$. Jato de ordem k de f em p. No caso em que $p = 0$, escrevemos simplesmente $J^k(f)$.
$\Lambda_k^r(n)$. Espaço de $r-$formas em $\mathbb{C}^n$, cujos coeficientes são polinômios homogêneos de grau k.
$\Lambda^r(E)$. Espaço de $r-$formas exteriores sobre E.
$\Omega^r(M)$. Espaço de r-formas sobre M, com grau de diferenciabilidade compatível com a estrutura de M.
$\mathfrak{X}(M)$. Espaço de campos de vetores em M.

7.2 Dualidade

Sejam E um espaço vetorial e $\mathfrak{B} := \{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de E. Dado $v \in E$, existem escalares $\ell_1(v), \ldots, \ell_n(v)$, únicos, tais que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \ell_i(v) e_i.$$

A unicidade garante que, para cada $i = 1, \ldots, n$, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \ell_i : & E & \to & \Bbbk \\ & v & \mapsto & \ell_i(v) \end{array}$$

está bem definida e é linear. Além disso, é claro que $\ell_j(e_k) = \delta_{jk}$, onde

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & se\ j = k \\ 0 & se\ j \neq k. \end{cases}$$

Teorema 7.1. *i)* $\ell_j \in E^*$ *e* $\ell_j(e_k) = \delta_{jk}$ *para quaisquer* $j, k \in \{1, \ldots, n\}$.
ii) $\mathfrak{B}^* := \{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$ *é uma base de* E^**, chamada a base dual de* $\mathfrak{B}$.
iii) Se $v \neq 0$ *em* E*, existe* $m \in E^*$ *tal que* $m(v) \neq 0$.

Prova: *i)* Ok!.
ii) Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Bbbk$ tais que $\Sigma_{j=1}^n \lambda_j \ell_j = 0$. Então

$$\lambda_k = \lambda_k \ell_k(e_k) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \ell_j(e_k) = (\sum_{j=1}^n \lambda_j \ell_j)(e_k) = 0, \ \forall k = 1, \ldots, n.$$

Portanto, o conjunto $\{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$ é L.I.. Por outro lado, se $\ell \in E^*$, existem $\ell(e_1), \ldots, \ell(e_n) \in \Bbbk$ tais que, para cada $v \in E$, tem-se

$$\begin{aligned} \ell(v) &= \ell(\sum_{i=1}^n \ell_i(v) e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \ell(e_i) \ell_i(v) \\ &= (\sum_{i=1}^n \ell(e_i) \ell_i)(v). \end{aligned}$$

Ou seja, $\ell = \sum_{i=1}^n \ell(e_i)\ell_i$. Assim, os $\ell_i's$ geram E^*. Consequentemente, $\mathfrak{B}^*$ é uma base de E^*.
iii) Seja $v = \Sigma_{i=1}^n \rho_i e_i \neq 0$ em E. Então $\rho_k \neq 0$ para algum $k \in \{1, \ldots, n\}$. Logo $\ell_k(v) = \rho_k \neq 0$. Então, tomando $m = \ell_k$, o resultado está provado. ∎

Lema 7.2. *Seja* $v \in E$*, fixo, e definamos a aplicação*

$$\begin{aligned} L_v : \ E^* &\to \Bbbk \\ \ell &\mapsto \ell(v) \end{aligned}$$

Então $L_v \in (E^*)^*$.

Prova: Sejam $\ell, m \in E^*$ e $\lambda \in \Bbbk$. Então

$$\begin{aligned} L_v(\ell + \lambda m) &= (\ell + \lambda m)(v) \\ &= \ell(v) + \lambda m(v) \\ &= L_v(\ell) + \lambda L_v(m). \end{aligned}$$

∎

Observação 7.3. Se $v, w \in E$ e $\lambda \in \Bbbk$, então

$$\begin{array}{rcl} L_{v+\lambda w}(\ell) & = & \ell(v+\lambda w) \\ & = & \ell(v) + \lambda \ell(w) \\ & = & L_v(\ell) + \lambda L_w(\ell),\ \forall \ell \in E^*. \end{array}$$

Ou seja, $L_{v+\lambda w} = L_v + \lambda L_w$.

Teorema 7.4. *E^{**} e E são canonicamente isomorfos. Mas precisamente, todo elemento de E^{**} é da forma L_v para algum $v \in E$.*

Prova: Considere a aplicação $T : E \to E^{**}$ definida por $T(v) = L_v$, onde L_v é como no Lema 7.2. Pelo lema 7.2 e pela Observação 7.3, T está bem definida e é linear. Vamos mostrar que T é um isomorfismo ou equivalentemente que T é injetiva, pois o Teorema 7.1 garante que $\dim(E) = \dim(E^*) = \dim(E^{**})$. Ora, dados $v, w \in E$, temos que $T(v) = T(w)$ se, e somente se, $L_v = L_w$ se, e somente se, $L_v(\ell) = L_w(\ell)$, $\forall \ell \in E^*$ se, e somente se, $\ell(v) = \ell(w)$, $\forall \ell \in E^*$ se, e somente se, $\ell(v-w) = 0$, $\forall \ell \in E^*$, e pelo Teorema 1.1.(iii), isto é, se, e somente se, $v - w = 0$; ou seja, se, e somente se, $v = w$. ∎

7.2.1 O Isomorfismo Inverso

Fixemos uma base $\mathfrak{B}_0 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ de E, com base dual $\mathfrak{B}_0^* = \{dw_1, \ldots, dw_n\}$ e consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rcll} \Phi : E^{**} & \to & E & \\ L & \to & v_L & = \sum_{i=1}^n L(dw_i) w_i. \end{array}$$

Note que para cada $\ell \in E^*$, temos que $\ell = \sum_{i=1}^n \ell(w_i) dw_i$. Logo

$$\begin{array}{rcl} L_{v_L}(\ell) & = & \ell(v_L) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^n L(dw_i)\ell(w_i) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^n L(\ell(w_i) dw_i) \\ & = & L(\displaystyle\sum_{i=1}^n \ell(w_i) dw_i) \\ & = & L(\ell). \end{array}$$

Ou seja, $T \circ \Phi = id_{E^{**}}$. Portanto, $\Phi = T^{-1}$.

Observação 7.5. Seja $\mathfrak{B}^* = \{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$ uma base de E^*. Pelo Teorema 1.1., existe uma base $\mathfrak{B}^{**} = \{L_1, \ldots, L_n\}$ de E^{**} tal que $L_i(\ell_j) = \delta_{ij}$. Desejamos

encontrar uma base $\mathfrak{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de E de modo que $\ell_j(e_i) = \delta_{ij}$, i.e., $L_{e_i}(\ell_j) = \delta_{ij} = L_i(\ell_j)$. Ou seja, gostaríamos de saber quais são as imagens dos elementos de $\mathfrak{B}^{**}$ pelo isomorfismo T^{-1}. Para isso, fixemos uma base $\mathfrak{B}_0 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ de E, com base dual $\mathfrak{B}_0^* = \{dw_1, \ldots, dw_n\}$. Pelo observado acima, sabemos que $e_i = \Sigma_{j=1}^n L_i(dw_j)w_j$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Precisamos então determinar os $L_i's$ em função das coordenadas dos $\ell_i's$ com respeito à base $\mathfrak{B}_0$. Para isso, procedemos da seguinte maneira:
Para cada $i = 1, \ldots, n$, ponha

$$\ell_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} dw_j.$$

Em seguida, consideramos as matrices $A = (a_{ji})$ e $B = A^{-1} := (b_{ij})$. Então $dw_j = \Sigma_{i=1}^n b_{ij}\ell_i$, $\forall j = 1, \ldots, n$. Agora, seja $\ell \in E^*$. Pondo

$$\ell = \sum_{i=1}^n \rho_i \ell_i \quad e \quad \ell = \sum_{j=1}^n \lambda_j dw_j,$$

obtemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \rho_i \ell_i &= \sum_{j=1}^n \lambda_j dw_j \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j \sum_{i=1}^n b_{ij}\ell_i \\ &= \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n b_{ij}\lambda_j)\ell_i. \end{aligned}$$

Logo $L_i(\ell) = \rho_i(\ell) = \sum_{j=1}^n b_{ij}\lambda_j(\ell) = \sum_{j=1}^n b_{ij} L_{w_j}(\ell)$. Assim, $L_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} L_{w_j}$. Por conseguinte, $L_i(dw_k) = b_{ik}$. Consequentemente, $e_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} w_j$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Ou seja, $\mathfrak{B} = \{\sum_{j=1}^n b_{1j}w_j, \ldots, \sum_{j=1}^n b_{nj}w_j\}$.

7.2.2 Regra de Cramer e Matrizes Compostas

Regra de Cramer:
Sejam $\mathbf{A}$ uma matriz, $n \times n$ não singular, $C := (c_1, \ldots, c_n)$ um vetor constante e $X := (x_1, \ldots, x_n)$ um vetor de variáveis. Então o sistema $\mathbf{A}X = C$ possui uma única solução dada por:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\det(\mathbf{A})},$$

onde Δ_i é o determinante da matriz obtida substituindo a $i-$ésima coluna de $\mathbf{A}$ pelo vetor C.

Matrices Compostas
Sejam A uma matriz, $n \times n$, $2 \leq k \leq n-1$ e considere a matriz $A^{(k)}$ formada por todos os menores de $\det(A)$ de ordem k, dispostos na ordem "Lexicografica". Por exemplo, os menores obtidos apartir das linhas 1,2,4, de A aparecerão numa linha anterior a aqueles obtidos apartir das linhas 1,2,5 uo 1,3,4 ou 2,3,4; e similarmente no caso de colunas. A matriz cuadrada, de ordem $n_{(k)} = \binom{n}{k}$, $A^{(k)}$ é chamada a $k-$ésima Composta de A.

Matriz Adjunta Composta
Todo menor de ordem k em $\det(A)$ é acompanhado, na expansão Laplaciana de $\det(A)$, por seu cofator ou menor assinalado de ordem $n-k$. Se nós subtituimos cada elemento de $A^{(k)}$ por seu cofator em $\det(A)$, a transposta da matriz resultante chama-se a $k-$ésima Adjunta Composta de A, a qual denotamos por $adj^{(k)}A$. É possível provar que

$$A^{(k)} adj^{(k)} A = adj^{(k)} A \cdot A^{(k)} = \det(A) I_{n_{(k)}}.$$

Em particular, se A é não singular, então $A^{(k)}$ *e* $adj^{(k)}A$ também tem essa propriedade.

Referências Bibliográficas

[Al] L.V. Alfhors, L.V., *Complex Analysis,* 2nd. edition, MacGraw-Hill Book Company, 1996. International Student Edition.

[B-B] Baum, P., and Bott, R., *Singularities of Holomorphic Foliations,* J. Differential Geometry 7, 279-342, (1972).

[Ca 1] Calvo, O., *Irreducible components of the space of holomorphic foliations,* Math. Annalen, no. 299, 751-767 (1994).

[Ca 2] Calvo, O., *Persistência de Folheações Definidas por Formas Logarítmicas,* Tese Phd., IMPA, (1990).

[Cm-LN] Camacho, C., e Lins Neto, A., *Teoria Geométrica das Folheações,* Projeto Euclides, vol. 12 (1979).

[Cm-S] Camacho, C., e Sad, P., *Pontos singulares de equações diferenciais anlíticas,* 16 Colóquio Brasileiro de Matematica, IMPA, (1987).

[Cm-Sc] Camacho, C., and Scárdua, B., *Foliations on complex projective spaces with algebraic limit sets,* a aparecer em Asterisque.

[Cr] Cartan, H., *Sur le premier problème de Cousin,* C.R. Acad. Sc., 207, 558-560, (1938).

[Ce-LN 1] Cerveau, D., and Lins-Neto, A., *Codimension one foliations in* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, $n \geq 3$, *with Kupka components,* Astérisque, V. 222, 93-133, (1994).

[Ce-LN 2] Cerveau D., and Lins Neto, A., *Irreducible components of the space of holomorphic foliations of degree two in* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, $n \geq 3$; Ann. of Math., 577-612, (1996).

[Ce-Mt] D. Cerveau, J.-F. Mattei *Formes intégrables holomorphes singulières,* Astérisque, vol.97, (1982).

[Cn] Conway, J. B., *Functions of one Complex Variables,* Springer Verlag, (1973).

[Cu-P] Cukierman, F., and Pereira, J. V., *Stability of holomorphic foliations with split tangent sheaf,* Pre-print.

[G] Ghys, E., *À propos d'un théoreme de J. P. Jouanolou concernant les feuilles fermes des feuilletages holomorphes,* Rendiconti del circulo matemático di Palermo, Serie II, Tomo XLIX, 175-180, (2000).

[Go 1] Godbillon, C., *Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique,* Hermann, Paris, (1969).

[Go 2] C. Godbillon, C., *Feuilletages: Études Geométriques I,* Université Louis Pasteur; Maio (1985).

[G-L] Gomes-Mont, X., and Lins-Neto, A., *Strutural stability of singular holomorphic foliations having a meromorphic firt integral,* Topology, V. 30, N. 3, 315-334, (1991).

[Gu 1] Gunning R. C., *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables,* Vol. I, Wadsworth & Brooks/Cole.

[Gu 2] Gunning, R. C., *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables,* Vol. II, Wadsworth & Brooks/Cole.

[Gu 3] Gunning, R.C., *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables,* Vol. III, Wadsworth & Brooks/Cole.

[Gu-Ro] Gunning, R., & Rossi, H., *Analytic functions of several complex variables,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1965).

[G-H] Griffiths, F. and Harris, J., *Principles of algebraic geometry,* John Wile and Sons, New York, (1978).

[J] Jouanolou, J.P., *Equations de Pfaff algébriques,* Lecture Notes in Mathematics 708, Springer-Verlag, Berlin, (1979).

[K] Kupka I., *The singularities of integrable sturcturally stable Pfaffian forms,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., V. 52, 1431-1432, (1964).

[LN] Lins Neto, A., *Componentes Irredutíveis dos Espaços de Folheações,* 26 Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, (2007).

[M 1] de Medeiros, A., *Singular foliations and differencial $p-$forms,* Annales de la faculté des Sciences de Toulouse, V. 08, N. 3, 451-466, (2000).

[M 2] de Medeiros, A., *Structural stability of integrable differential forms,* Geometry and Topology (M. do Carmo, J. Palis eds.), LNM, 395-428, (1977).

[Mo-So] Mol, R., e Soares, M., *Índices de Campos Holomorfos e Aplicações,* Notas de Seminário.

[Sc] Scárdua, B., *Transversely affine and transversely projective foliations on complex projective spaces,* Tese Phd., IMPA, (1994).

[So] Soares, M., *Holomorphic Foliations and Caracteristic Numbers,* Comunications in Contemporary Mathematics, V. 07, N. 05, 583-596, (2005).