

Algoritmos Evolucionários e Técnicas de Tomada de Decisão em Análise Multicritério

por

Roberta Oliveira Parreiras

Tese submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção de título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Linha de Pesquisa: Otimização e Projeto Assistidos por Computador

Orientador: Prof. João Antônio de Vasconcelos

Belo Horizonte

Escola de Engenharia da UFMG

2006

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus por ter me concedido a oportunidade, o entusiasmo e todas as condições para a elaboração deste trabalho.

À Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), especialmente ao Centro de Pesquisa e Desenvolvimento em Engenharia Elétrica (CPDEE), por disponibilizar a infra-estrutura necessária para a realização do doutorado.

Ao Prof. João Antônio de Vasconcelos, pela preciosa orientação, pelo estímulo e pela prontidão em esclarecer minhas dúvidas.

A todos os professores da Pós-Graduação em Engenharia Eletrica da UFMG, pelos ensinamentos que me proporcionaram.

Aos membros da banca examinadora, Prof. João Antonio de Vasconcelos, Prof. Luiz Lebensztajn, Prof. Petr Iakovlevitch Ekel, Prof. Ricardo Hiroshi Caldeira Takahashi e Prof. Walter Pereira Carpes Júnior, pela presença, pelo interesse em meu trabalho, pelas valiosas sugestões apresentadas.

À minha família, pelo apoio e incentivo constantes.

Ao Rodrigo Giordano Leite, pela compreensão e generosidade, em todos os momentos.

Aos amigos e colegas de curso, em especial, ao João Henrique Roscoe Diniz Maciel e ao Vinícius Rosa Cota, pelas experiências compartilhadas.

À Capes, pelo financiamento.

Resumo

A análise multicritério estuda formas de auxiliar o homem, neste contexto denominado decisor, a tomar decisões na presença de incertezas e conflitos de interesses. Normalmente, um único ponto de vista é insuficiente para incluir toda a informação necessária e todas as contradições inerentes ao problema. Daí a importância de a análise de decisão considerar vários critérios.

Problemas de otimização com múltiplos objetivos conflitantes possuem um conjunto de soluções não-dominadas. Como em aplicações reais apenas uma solução é executada, surge um problema de decisão: escolher entre as várias soluções eficientes aquela que for mais satisfatória, considerando-se vários critérios. Essa escolha deve refletir as preferências de um ou mais decisores, que devem conhecer profundamente o problema em questão. Assim, para que haja a maior coerência possível entre a solução final selecionada e os interesses do(s) decisor(es), faz-se necessário o uso de técnicas de decisão multicritério.

Neste contexto, esta tese apresenta um estudo da análise multicritério e de seu emprego na escolha da solução final de problemas de otimização multiobjetivo, por meio do acoplamento entre métodos de decisão multicritério e algoritmos de otimização evolucionária. Com esse acoplamento, deseja-se combinar a eficiência da busca evolucionária com o modo sofisticado e eficaz com que a análise multicritério trata as situações de conflitos entre interesses.

O presente trabalho traz as seguintes contribuições principais:

- dois novos métodos de decisão: o Promethee Multiplicativo, que na verdade representa uma nova versão para o popular método de decisão multicritério, Promethee II, e o Método de Torneios Multicritério;
- uma nova técnica de decisão interativa, em que o Promethee II é acoplado a um algoritmo de otimização evolucionária.

Foram satisfatórios todos os resultados obtidos nos testes em que os novos métodos de decisão foram usados na escolha da solução final de problemas de otimização multiobjetivo. Nesses testes, além de problemas analíticos com características distintas, foram considerados dois problemas de eletromagnetismo, ambos modelados a partir da otimização de dois objetivos. Os resultados obtidos pela técnica de decisão interativa, por sua vez, mostram que ela convergiu, com sucesso, para a solução eficiente preferida pelo decisor.

Abstract

The multicriteria analysis studies manners of aiding man (in this context, called decision-maker) to make decisions in presence of uncertainty and conflicting interests. As a unique point-of-view is insufficient to embrace all necessary information and all contradictions inherent to the problem, generally, the decision analysis needs to handle many criteria simultaneously.

Multiobjective optimization problems have a set of efficient solutions. As in real applications only one solution from this set is executed, a decision problem is originated: choose between many optimal alternatives the one that fits the decision-maker preferences, considering simultaneously several criteria.

In this context, this thesis studies the multicriteria analysis and the use of multicriteria decision methods, associated to evolutionary optimization algorithms, in order to completely solve multiobjective optimization problems. This association takes advantage of the multicriteria analysis effectiveness in handling concurrent interests and of the evolutionary search efficiency in meeting optimal solutions.

This work contains two main contributions:

- Two new decision methods: the Multiplicative Promethee, which is, in fact, a new version of the popular decision method, Promethee II, and the Multicriteria Tournament Method.
- A new interactive decision technique, where Promethee II is coupled to a mono-objective evolutionary search algorithm.

Both decision methods produced satisfactory results when they were used in the choice of the final solution for multiobjective optimization problems. In addition to analytical problems with different characteristics, two electromagnetic problems, stated as optimization ones, were also considered in this study. The proposed interactive decision technique was also successful in meeting the efficient solution preferred by the decision-maker.

Lista de Símbolos

A	Conjunto de alternativas do problema de decisão.
AG	Algoritmo Genético.
C	Conjunto de critérios do problema de decisão.
c_i	I-ésimo critério de decisão.
\vec{F}	Vetor de funções objetivo.
$f_i(\vec{x})$	I-ésima função objetivo.
$g_i(\vec{x})$	I-ésima restrição do problema de otimização.
$I(a, b)$	Relação binária de indiferença entre a e b .
$J(a, b)$	Relação binária de incomparabilidade entre a e b .
k	Número de variáveis de decisão x_i .
m	Número de funções objetivo do problema de otimização. Número de critérios de decisão.
MFBZ	Método fuzzy de decisão, baseado na abordagem de Bellman-Zadeh.
MTMC	Método de Torneios Multicritério.
n	Número de alternativas do conjunto A .
N_{front}	Número de fronteiras não-dominadas em uma população.
N_{pop}	Tamanho da população <i>on-line</i> do algoritmo genético.
\overline{N}_{pop}	Tamanho da população <i>off-line</i> do algoritmo genético.
OE	Otimização Evolucionária.
$OG(a)$	Índice de Ordenação Global usado pelo Método de Torneios Multicritério para ordenar as alternativas.

P_1	Tipo de problema de decisão multicritério que envolve a ordenação do conjunto de alternativas.
P_2	Tipo de problema de decisão multicritério que envolve a seleção de uma alternativa.
P_3	Tipo de problema de decisão multicritério que envolve a ordenação do conjunto de alternativas.
$P(a, b)$	Relação binária de preferência estrita de a em relação a b .
$p(a, b)$	Relação nebulosa de preferência. Intensidade do julgamento de preferência de a em relação a b
$p_i(a, b)$	Função preferência referente ao i -ésimo critério.
P_{off}	Conjunto de pontos pertencentes à população <i>off-line</i> .
P_{on}	Conjunto de pontos pertencentes à população <i>on-line</i> .
POM	Problema de otimização multiobjetivo.
$Q(a, b)$	Relação binária de preferência fraca de a em relação a b .
$S(a, b)$	Relação binária característica de a em relação a b .
SSGA	Steady State Genetic Algorithm.
$T(a, b)$	Operador t-norma.
$U(\vec{x})$	Função utilidade global.
$U(a, b)$	Operador t-conorma.
$u_i(\vec{x})$	Função utilidade referente ao i -ésimo critério.
\vec{x}	Vetor de variáveis de decisão.
x_i	i -ésima variável de decisão.
$xmin_i$	Limite inferior do intervalo de valores admissíveis para a i -ésima variável de decisão x_i .
$xmax_i$	Limite superior do intervalo de valores admissíveis para a i -ésima variável de decisão x_i .
w_i	Peso ou prioridade do i -ésimo critério.
Δ	Índice usado para medir a distribuição das soluções ao final de várias execuções do método de decisão para diferentes pares de pesos.
$\phi(a)$	Fluxo de rede do nó a .
$\mu_i(x)$	i -ésima função de pertinência.
Ω	Região viável do problema de otimização restrito.
$a \prec b$	Relação de dominância, que pode ser lida como: a domina b .

Lista de Figuras

2.1	Mapeamento entre o espaço das variáveis de otimização e o espaço das funções objetivo para um problema hipotético.	20
2.2	Exemplos de fronteira Pareto.	21
3.1	Codificação genética.	24
3.2	Fluxo básico padrão do AG.	26
3.3	Cubóide vazio ao redor do ponto k	31
3.4	Fluxo básico do NSGA-II.	33
3.5	Fluxo básico do SPEA-2.	35
5.1	Grafo direcionado descrevendo relações binárias.	52
5.2	Representação matricial de relações binárias	52
7.1	Função utilidade que cresce com o aumento de $f(x)$	81
7.2	Função utilidade que cresce com o decréscimo de $f(x)$	81
7.3	Função utilidade que decresce à medida que $f(x)$ se afasta de um certo valor de referência f'	81
7.4	Função utilidade baseada em grandeza imensurável.	82
8.1	Intervalos referentes às relações de indiferença, preferência e de sobreclassificação.	89
8.2	Comportamento de $Idisc_i(a, b)$ em função de d_i	91
8.3	Exemplo de circuito.	92
8.4	Modelo de critério usual.	96
8.5	Modelo de quase-critério.	97
8.6	Modelo de critério com preferência em degraus.	97
8.7	Modelo de critério com preferência linear.	97
8.8	Modelo de critério gaussiano.	98
8.9	Arcos entre as alternativas a e b	98
8.10	Arcos existentes entre duas alternativas a e b no método Promethee Multiplicativo.	100
9.1	Exemplo de julgamentos do decisor.	104

9.2	Exemplo de hierarquia.	109
10.1	Método gráfico baseado em Promethee I e II.	122
11.1	Índice Δ	134
11.2	Resultados obtidos com Promethee II para o P_6 , usando $(w_1, w_2) = (0, 5, 0, 5)$ e $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, 3$, segundo abordagens de decisão <i>a priori</i> e <i>a posteriori</i>	139
11.3	Valor de ϕ para cada solução não-dominada obtida pelo NSGA-II para o P_6	139
11.4	Decisão interativa com Promethee II para o P_4	141
11.5	Decisão interativa com Smarts para o P_4	142
11.6	Decisão interativa com MFBZ para o P_4	143
11.7	Vista em corte da geometria básica do SMES - estrutura com simetria de revolução.	144
11.8	Decisão <i>a posteriori</i> com o MTMC para o problema do SMES.	145
11.9	Problema de espalhamento eletromagnético inverso.	146
11.10	Decisão <i>a posteriori</i> com o Promethee Multiplicativo para o problema de espalhamento inverso.	147
11.11	Seção transversal de referência e da solução final.	148

Lista de Tabelas

4.1	Tipos e exemplos práticos de problemas de decisão multicritério.	40
4.2	Métodos da Escola Americana.	42
4.3	Métodos da Escola Francesa.	44
5.1	Tipos de relações de ordenação.	54
5.2	Principais relações binárias.	55
5.3	Matriz de avaliação de alternativas que pode gerar julgamentos intransitivos.	57
6.1	Exemplos de operadores T-norma e T-conorma N-duais para $N(x) = (1 - x)$.	68
6.2	Tipos de relações nebulosas de ordenação.	70
7.1	Exemplo de tabela de avaliação de conseqüências da execução de cada alternativa \vec{x}_i .	78
9.1	Escala de importâncias relativas.	104
11.1	Problemas usados no estudo da decisão <i>a posteriori</i> .	132
11.2	Custo computacional.	134
11.3	Valor médio de NED.	135
11.4	Valor médio de Δ .	135
11.5	Solução final para a decisão <i>a priori</i> .	137
11.6	Solução final para a decisão <i>a posteriori</i> .	137
11.7	Número de avaliações das funções objetivo.	140
11.8	Restrições geométricas e parâmetros fixos do projeto.	144

Sumário

1	Introdução	13
2	Otimização Multiobjetivo	18
2.1	Introdução	18
2.2	Problemas de Otimização Multiobjetivo	19
2.3	Conceito Pareto-ótimo	19
2.3.1	Relação de dominância	20
2.3.2	Solução Pareto-ótima	20
2.3.3	Fronteira Pareto-ótima	21
2.4	Conclusões	21
3	Otimização Evolucionária	23
3.1	Introdução	23
3.2	Algoritmos Genéticos	23
3.2.1	Codificação genética	27
3.2.2	Cruzamento	27
3.2.3	Mutação	28
3.2.4	Seleção	29
3.2.5	Seleção mono-objetivo	29
3.2.6	Seleção multiobjetivo	30
3.3	Conclusões	36
4	Tomada de Decisão Multicritério	38
4.1	Introdução	38
4.2	Problema de Decisão Multicritério	39
4.3	As Escolas da Tomada de Decisão	41
4.4	Principais Linhas de Pesquisa em Tomada de Decisão	46
4.5	Conclusões	48
5	Modelagem da Preferência Humana	50
5.1	Introdução	50

5.2	Relações Binárias	51
5.3	Relações de Preferência: P, I, Q e J	54
5.4	Estruturas de Relações de Preferência	55
5.4.1	Estruturas $\{P, I\}$	58
5.4.2	Estruturas $\{P, I, J\}, \{P, Q, I\}$ e $\{P, Q, I, J\}$	62
5.5	Conclusões	64
6	Modelagem da Preferência pela Lógica Fuzzy	66
6.1	Introdução	66
6.2	Lógica Nebulosa	67
6.3	Relações Binárias Nebulosas	69
6.4	Relações Nebulosas de Preferência	70
6.5	Exemplo de Aplicação	72
6.6	Conclusões	73
7	Teoria da Utilidade Multiatributo	74
7.1	Introdução	74
7.2	Preferências em MAUT	75
7.3	Função Utilidade	75
7.4	Agregação de Critérios	75
7.5	Método do Ponto Médio	77
7.6	Smarts	78
7.7	Smarter	82
7.8	Smarts Intervalar	82
7.9	Conclusões	84
8	Métodos baseados em Relações de Sobreclassificação	85
8.1	Introdução	85
8.2	Visão Geral	86
8.3	Métodos Electre	88
8.3.1	Índices de Concordância e Discordância	90
8.3.2	Electre I	91
8.3.3	Electre III	92
8.4	Métodos Promethee	95
8.4.1	Promethee I	99
8.4.2	Promethee II	99
8.4.3	Promethee Multiplicativo	100
8.5	Conclusões	101

9	Processo de Análise Hierárquica	102
9.1	Introdução	102
9.2	Matriz de Comparações das Alternativas	103
9.3	Formulação baseada no Auto-Vetor	105
9.4	Índice de Consistência	107
9.5	Composição Hierárquica	107
9.6	Conclusões	109
10	Acoplamento entre Métodos de Decisão e de Busca Evolu- cionária	111
10.1	Introdução	111
10.2	Encadeamento entre Métodos de Busca e de Decisão	112
10.3	Definição do Problema de Decisão no Contexto da Otimização Multiobjetivo	114
10.4	A Escolha do Método de Decisão	115
10.5	Exemplos de Acoplamento entre Métodos da Escola Ameri- cana e Algoritmos de Busca Evolucionária	118
10.5.1	Decisão <i>a priori</i> baseada em ISMAUT	118
10.5.2	Decisão <i>a posteriori</i> com técnica de “cluster”	119
10.5.3	Decisão <i>a posteriori</i> com Smarts	120
10.6	Exemplos de Acoplamento entre Métodos da Escola Francesa e Algoritmos de Busca Evolucionária	120
10.6.1	Decisão <i>a priori</i> com Promethee II	120
10.6.2	Decisão <i>a posteriori</i> com gráfico baseado em Promethee	121
10.6.3	Decisão <i>a posteriori</i> com método baseado em Electre e Promethee II	123
10.6.4	Decisão <i>a posteriori</i> com Promethee II e Promethee Multiplicativo	123
10.6.5	Nova abordagem de decisão interativa com Promethee II	124
10.7	Exemplos de Acoplamento entre Métodos baseados em Lógica Fuzzy e Algoritmos de Busca Evolucionária	125
10.7.1	Decisão <i>a priori</i> com Método Pareto-Ponderado	125
10.7.2	Decisão segundo Abordagem de Bellman-Zadeh	127
10.8	Nova Abordagem de Decisão <i>a posteriori</i> com Método de Torneios Multicritério	128
10.9	Conclusões	129
11	Resultados	130
11.1	Introdução	130
11.2	Comparação das Abordagens de Decisão <i>a posteriori</i>	131
11.3	Comparação das Abordagens de Decisão <i>a priori</i> e <i>a posteriori</i>	136

11.4	Decisão Interativa.	140
11.5	Projeto de Dispositivo Supercondutor Armazenador de Energia Magnética.	142
11.6	Problema de Espalhamento Eletromagnético Inverso	145
11.7	Conclusões	148
12	Conclusões Gerais e Propostas de Continuidade	151

Capítulo 1

Introdução

Inicialmente, os problemas de otimização eram modelados de forma simplista, por meio da minimização ou maximização de uma única função objetivo. Mas, logo se percebeu que, em geral, uma única função é insuficiente para tratar todos os aspectos intrínsecos aos problemas encontrados em aplicações reais. Essa percepção conduziu a Pesquisa Operacional em direção a uma outra abordagem: a otimização de múltiplos objetivos concorrentes ou conflitantes.

Segundo o conceito de otimalidade formulado por Vilfredo Pareto, problemas com múltiplos objetivos possuem um conjunto de soluções ótimas, denominado fronteira Pareto-ótima ou não-dominada [1]. Como em aplicações reais apenas uma solução é escolhida e executada, surge um problema de decisão: escolher, entre as várias alternativas eficientes, aquela que for mais satisfatória, considerando-se vários critérios simultaneamente [2], [3]. Nessas circunstâncias ocorre uma conexão entre a Otimização Multiobjetivo e a Análise Multicritério.

A Análise Multicritério tem como principal meta auxiliar o homem, neste contexto, denominado ator ou decisor, a articular suas preferências em presença de ambigüidades, bifurcações e incertezas, tornando sua decisão mais coerente com seus interesses. São muito freqüentes em aplicações reais situações conflitantes do tipo: a alternativa a é preferida à b , considerando-se algumas de suas características, e não preferida, considerando-se outras. Na prática, normalmente um único ponto de vista é insuficiente para incluir toda a informação necessária e todas as contradições inerentes ao problema. Daí a importância de a análise de decisão considerar vários critérios [4].

Na escolha da solução final do problema de otimização multiobjetivo, geralmente, os critérios de decisão são derivados dos múltiplos objetivos e as preferências do decisor são utilizadas para dissolver os conflitos intrínsecos ao problema. A existência de um grande número de alternativas pertencentes à

fronteira Pareto torna ainda mais complexa essa escolha. Entretanto, apesar da importância e da dificuldade dessa decisão, os esforços nessa área têm se concentrado principalmente na busca pela fronteira Pareto-ótima e menos tem sido feito no sentido de se acoplar informações quanto à preferência do decisor aos algoritmos de busca.

A literatura sugere três maneiras de se implementar esse acoplamento: decisão *a priori*, interativa ou progressiva e decisão *a posteriori* [2], [3]. Em cada uma delas, o decisor define suas preferências em diferentes circunstâncias. Na decisão *a priori*, ele é consultado uma única vez, antes do início do processo de otimização e a informação obtida quanto aos seus interesses é usada para guiar a busca pela solução favorita pertencente à fronteira Pareto. Na decisão interativa, o decisor é consultado várias vezes durante o processo de otimização. Assim, ele pode definir suas preferências tendo em mãos a informação disponível na iteração corrente quanto às possíveis soluções. Sua preferência guia a busca nas próximas iterações, até que nova consulta seja realizada. O processo de decisão progressiva só é interrompido quando o decisor estiver totalmente satisfeito com sua escolha. A decisão *a posteriori* inicia-se com a execução de uma busca multiobjetivo. O decisor é consultado apenas depois que uma aproximação discreta satisfatória da fronteira Pareto for encontrada. Essa abordagem possui algumas vantagens: antes de fazer sua escolha, o decisor pode analisar todas as soluções ótimas disponíveis e, se seus interesses se alterarem, não é necessário executar o algoritmo de otimização novamente. Além disso, geralmente é mais fácil incluir novos critérios na análise realizada *a posteriori* do que *a priori* ou progressivamente. Por outro lado, essa abordagem geralmente exige maior tempo de processamento do que as outras, pois a busca por uma aproximação da fronteira Pareto tende a exigir maior esforço computacional do que a busca por um único ponto ótimo.

O objetivo geral desta tese é estudar a análise multicritério e o emprego de seus métodos de decisão na escolha da solução final de problemas de otimização multiobjetivo, acoplando-os a algoritmos de otimização evolucionária, segundo as abordagens de decisão *a priori*, interativa e, sobretudo, *a posteriori*. Entre as várias técnicas existentes para obter soluções eficientes, os algoritmos de busca evolucionária foram os escolhidos, por permitirem a solução de problemas complexos, como os não-lineares, descontínuos ou multimodais. Além disso, como trabalham com uma população de possíveis soluções simultaneamente, eles são capazes de obter soluções Pareto-ótimas bem distribuídas em uma única execução [5]. Assim, esse acoplamento combina a eficiência da busca evolucionária com o modo sofisticado e eficaz com que a análise multicritério trata as situações de conflitos entre interesses.

Nesse contexto, este trabalho contém uma revisão teórica que abrange

os seguintes assuntos: otimização multiobjetivo, otimização evolucionária, análise multicritério (incluindo a teoria referente à modelagem matemática da preferência humana por meio de relações binárias e as duas principais linhas de pensamento da tomada de decisão: a Escola Americana e a Escola Francesa). Além disso, ele apresenta um estudo aprofundado sobre o acoplamento entre algoritmos de busca evolucionária e métodos de decisão multicritério.

Esta tese tem como objetivo específico a proposta de uma metodologia para a resolução de problemas de otimização multiobjetivo, capaz de fornecer ao final de sua execução, uma solução final eficiente e coerente com os interesses do decisor. É desejável que essa metodologia seja de fácil uso; não tenha alto custo computacional e, preferencialmente, seja de fácil implementação. O trabalho aqui desenvolvido tendo em mente esta meta culminou com as seguintes contribuições:

- uma nova técnica de decisão interativa, baseada na associação do Promethee II com um algoritmo de busca evolucionária mono-objetivo;
- dois novos métodos de decisão, ambos baseados na comparação entre pares de alternativas: o Promethee Multiplicativo, que na realidade representa uma nova versão do Promethee II, e o Método de Torneios Multicritério.

Além disso, gerou as seguintes publicações:

- R. O. Parreiras, J. A. Vasconcelos, “A Multiplicative Version of Promethee II Applied to Multiobjective Optimization Problems”, *European Journal of Operational Research*, pp. 1-12, disponibilizado *on-line* em 14 Dec. 2006.
- R. O. Parreiras, J. H. R. D. Maciel, J. A. Vasconcelos, “The a posteriori decision in multiobjective optimization problems with smarts, promethee II, and a fuzzy algorithm”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 42 (4), pp. 1139 - 1142, 2006.
- R. O. Parreiras, J. A. Vasconcelos, “Decision Making in Multiobjective Optimization Problems”, *ISE Book Series on Real World Multi-Objective System Engineering*, Nova Science, New York, USA, pp. 29-52, 2005.
- J. A. Vasconcelos, J. H. R. D. Maciel, R. O. Parreiras, “Scatter Search Techniques”, *IEEE Trans. on Magnetics*, vol. 41 (5), pp. 1804-1807, 2005.

- R. O. Parreiras, J. H. R. D. Maciel, J. A. Vasconcelos, “The a Posteriori Decision in Multiobjective Optimization Problems with Smarts, Promethee II and a Fuzzy Algorithm”, *Proceedings of the XII Conference on the Computation of Electromagnetic Fields (COMPUMAG2005)*, Shenyang, vol. 1, pp. PC2-8, 2005.
- R. O. Parreiras, J. A. Vasconcelos, “A Comparative Study of Smart and Promethee Coupled to Genetic Algorithms”, *Proceedings of the 11th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC2004)*, Seoul, vol. 1, pp. 181, 2004.
- J. A. Vasconcelos, J. H. R. D. Maciel, R. O. Parreiras, “The Scatter Search Techniques Applied to Electromagnetic Problems”, *Proceedings of the 11th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC2004)*, Seoul, vol. 1, pp. 183, 2004.

É importante mencionar que os resultados obtidos em simulações da técnica proposta de decisão interativa e da abordagem de decisão *a posteriori* com os dois novos métodos foram bastante satisfatórios. A aplicabilidade desses métodos de decisão na área de Engenharia foi demonstrada a partir da resolução de dois problemas eletromagnéticos definidos como problemas de otimização.

A revisão teórica e essas contribuições estão organizadas nesta tese conforme descrito a seguir.

- **Capítulo 2: Otimização Multiobjetivo.**
Apresenta a definição de problema de otimização multiobjetivo e conceitos básicos como relação de dominância e fronteira Pareto-ótima.
- **Capítulo 3: Otimização Evolucionária.**
Apresenta a otimização evolucionária e descreve os principais métodos de busca mono-objetivo e multiobjetivo.
- **Capítulo 4: Tomada de Decisão Multicritério.**
Introduz o tema análise multicritério e dá uma visão das duas principais linhas de pensamento referentes à tomada de decisão, a Escola Americana e a Francesa.
- **Capítulo 5: Modelagem da Preferência Humana.**
Aborda o assunto modelagem matemática da preferência humana por meio de relações binárias, que consiste em uma base teórica comum para ambas escolas. São introduzidos aqui alguns conceitos básicos como: relações binárias de preferência, estrutura de relações de preferência e relação característica.

- **Capítulo 6: Modelagem da Preferência pela Lógica Fuzzy.**
Aborda o emprego da lógica Fuzzy na modelagem da preferência humana.
- **Capítulo 7: Teoria da Utilidade Multiatributo.**
Apresenta a teoria da utilidade multiatributo e os principais métodos de decisão da Escola Americana.
- **Capítulo 8: Métodos baseados em Relações de Sobreclassificação.**
Apresenta o conceito de relação de sobreclassificação e descreve os principais métodos da Escola Francesa, incluindo o método Promethee Multiplicativo, que representa uma contribuição desta tese.
- **Capítulo 9: Processo de Análise Hierárquica.**
Descreve o método AHP, que, embora não se baseie na teoria da utilidade multiatributo, segue a mesma linha da Escola Americana, exigindo que o decisor forneça um grande volume de informações relativas a sua preferência.
- **Capítulo 10: Acoplamento entre Técnicas de Decisão e de Busca Evolucionária.**
Descreve e analisa o acoplamento entre métodos de decisão e de busca evolucionária segundo as abordagens *a priori*, interativa e *a posteriori*. Apresenta duas contribuições desta tese: a decisão *a posteriori* com o Método de Torneios Multicritério e a decisão interativa com o método Promethee II.
- **Capítulo 11: Resultados.**
Exibe e analisa os resultados obtidos em simulações das abordagens *a priori*, interativa e *a posteriori* com o Smarts da Escola Americana, o Promethee II e o Promethee Multiplicativo da Escola Francesa, o Método de Torneios Multicritério e um método nebuloso baseado na abordagem de Bellman-Zadeh. Além disso, apresenta duas aplicações das abordagens *a posteriori* aqui estudadas a problemas de eletromagnetismo, a fim de se demonstrar seu uso em problemas de Engenharia.
- **Capítulo 12: Conclusões.**
Contém as conclusões e as propostas de continuidade de estudos.

Capítulo 2

Otimização Multiobjetivo

2.1 Introdução

A programação matemática constitui o braço da Pesquisa Operacional responsável pelo desenvolvimento de ferramentas para otimização. A otimização multiobjetivo representa um tópico de pesquisa de crescente importância para a ciência e a Engenharia, como indica o grande número de publicações na área. Hoje, a criação de produtos competitivos exige o desenvolvimento de projetos otimizados, segundo objetivos conflitantes. Ou seja, objetivos que, quando considerados simultaneamente, concorrem entre si, de tal modo que a melhoria de um leva à degradação dos demais. Ao otimizar um produto, deseja-se, por exemplo, minimizar os custos de produção, reduzindo os gastos com materiais e o consumo de energia e, ao mesmo tempo, maximizar a qualidade, aumentando a durabilidade e a confiabilidade do produto. Entretanto, ao reduzir os gastos com o uso de materiais ultrapassados e de qualidade inferior, a confiabilidade e a durabilidade do produto acabam sendo prejudicadas.

Inicialmente, esse tipo de problema era tratado de forma simplista como um problema mono-objetivo: agregando-se todos os objetivos em uma única função ou transformando todos os objetivos, exceto um, em restrições. Entretanto, a noção de otimalidade mono-objetivo logo mostrou-se inadequada para esse tipo de problema e uma mais sofisticada, conhecida como Pareto-ótimo, foi desenvolvida. Conforme essa noção, problemas multiobjetivo possuem várias possíveis soluções que correspondem a diferentes ponderações entre os objetivos. Mas, conhecendo esse conjunto de possíveis soluções Pareto-ótimas, resta ainda decidir qual delas será executada na prática.

Este capítulo apresenta o conceito de otimalidade desenvolvido por Vilfredo Pareto e outros, como fronteira não-dominada e relação de dominância.

Esses conceitos têm sido empregados pelos algoritmos de busca mais recentes para procurar, na região viável, o conjunto de pontos que otimizam prioritariamente cada um dos objetivos em detrimento dos demais.

2.2 Problemas de Otimização Multiobjetivo

Em problemas reais, além de otimizar objetivos, geralmente é necessário atender a restrições que podem corresponder a limitações físicas ou simplesmente ao fato de certas soluções não serem aceitáveis por motivos mais subjetivos. Essas restrições podem ser modeladas analiticamente por funções de desigualdade do tipo $g_i(\vec{x}) \geq 0$. Assim, dado que $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k)$ é o vetor de variáveis de otimização, um problema de otimização multiobjetivo (POM) restrito pode ser descrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \vec{F}(\vec{x}) &= (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})), \\ \text{sujeito a } &g_i(\vec{x}) \geq 0, i = 1, 2, \dots, l, \\ &x_i \in [x_{\min_i}, x_{\max_i}], i = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Denomina-se espaço dos objetivos (ou espaço das funções objetivo), o espaço coordenado onde são representados os vetores obtidos a partir da avaliação das funções objetivo e, espaço das variáveis de otimização, o espaço coordenado em que os eixos representam cada variável de decisão. As funções objetivo realizam, portanto, o mapeamento entre cada ponto $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k)$ no espaço das variáveis e $\vec{F}(\vec{x}) = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ no espaço dos objetivos. A Figura 2.1 representa essa situação para $k = 2$, $m = 3$. As informações contidas no espaço dos objetivos são especialmente importantes para a seleção da solução final a partir da análise de decisão multicritério pois, como será exposto adiante, as comparações entre alternativas baseiam-se nos valores das avaliações dos objetivos para cada alternativa.

2.3 Conceito Pareto-ótimo

A inexistência de um ponto ótimo global que atenda ao mesmo tempo a todos os objetivos conflitantes (solução utópica), como ocorre na otimização mono-objetivo, faz com que se espere que os problemas multiobjetivos possuam um conjunto de soluções. Esse conjunto pode ser definido aplicando-se os conceitos de relação de dominância e de Pareto-ótimo aos pontos que atendem simultaneamente às n restrições — pontos factíveis ou viáveis. Assumindo-se ainda o mesmo problema de minimização, esses conceitos são apresentados a seguir.

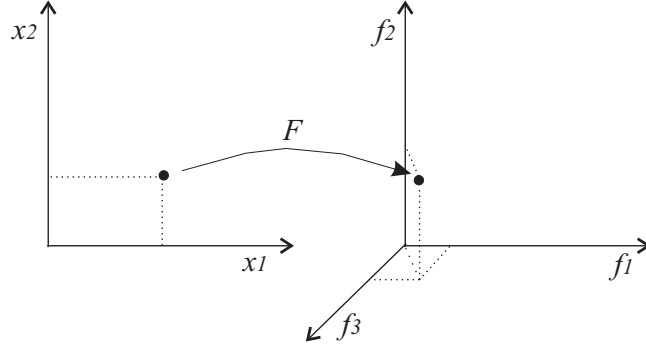


Figura 2.1: Mapeamento entre o espaço das variáveis de otimização e o espaço das funções objetivo para um problema hipotético.

2.3.1 Relação de dominância

Num problema de minimização, dados dois vetores \vec{y}_A e $\vec{y}_B \in \mathbb{R}^m$ tem-se que: $\vec{y}_A \prec \vec{y}_B$ (lê-se: y_A domina y_B) se, em pelo menos uma dimensão j , y_A for estritamente menor do que y_B e nas demais dimensões $i \neq j$, y_A for menor ou igual a y_B . Diz-se, nesse caso, que o vetor \vec{y}_B é dominado ou inferior, enquanto \vec{y}_A é dominante ou superior. Aplicando-se essa definição para o problema multiobjetivo em estudo, dados dois pontos factíveis \vec{x}_A e \vec{x}_B , sendo $\vec{y}_A = (f_1(\vec{x}_A), f_2(\vec{x}_A), \dots, f_m(\vec{x}_A))$ e $\vec{y}_B = (f_1(\vec{x}_B), f_2(\vec{x}_B), \dots, f_m(\vec{x}_B))$, tem-se que [6]:

$$\vec{y}_A \prec \vec{y}_B \leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, f_i(\vec{x}_A) \leq f_i(\vec{x}_B) \wedge \exists j \in \{1, 2, \dots, m\}, f_j(\vec{x}_A) < f_j(\vec{x}_B).$$

Por outro lado, se \vec{y}_A não for superior nem inferior a \vec{y}_B , tem-se que $\vec{y}_A \sim \vec{y}_B$ (lê-se: \vec{y}_A é indiferente a \vec{y}_B).

2.3.2 Solução Pareto-ótima

A partir do conceito de relação de dominância é possível introduzir a condição de otimalidade para problemas multiobjetivos. Definindo-se a região factível Ω para o POM em estudo, cada possível solução $\vec{x}_A \in \Omega$ é considerada Pareto-ótima se não há nenhum outro ponto $\vec{x}_B \in \Omega$ tal que, $\vec{y}_B = (f_1(\vec{x}_B), f_2(\vec{x}_B), \dots, f_m(\vec{x}_B))$ domine $\vec{y}_A = (f_1(\vec{x}_A), f_2(\vec{x}_A), \dots, f_m(\vec{x}_A))$. As soluções Pareto-ótimas são também chamadas não-inferiores, eficientes ou não-dominadas.

A definição de ponto Pareto-ótimo pode ser estendida para uma região. Uma solução $\vec{x}_A \in \Omega$ é considerada localmente Pareto-ótima numa dada



Figura 2.2: Exemplos de fronteira Pareto.

vizinhança $N(\vec{x}_A, \delta)$ se existe $\delta > 0$, tal que \vec{x}_A é Pareto-ótima em $N(\vec{x}_A, \delta) \cap \Omega$ [7].

2.3.3 Fronteira Pareto-ótima

O critério de otimalidade para o problema multiobjetivo define, não uma única solução global, mas um conjunto de soluções eficientes, descrito pela seguinte expressão [6]:

$$P^* := \{\vec{x}_A \in \Omega \mid \neg \exists \vec{x}_B \in \Omega : \vec{F}(\vec{x}_B) \prec \vec{F}(\vec{x}_A)\}.$$

A esse conjunto de pontos Pareto-ótimos corresponde um conjunto de vetores de avaliações das funções objetivo que constitui, no espaço dos objetivos, uma fronteira Pareto-ótima FP^* (ou, simplesmente, fronteira Pareto) definida como:

$$FP^* := \{\vec{F}(\vec{x}) \mid \forall \vec{x} \in P^*\}.$$

É interessante notar que a fronteira Pareto pode delimitar uma porção convexa ou não-convexa da região viável. A Figura 2.2 apresenta exemplos dessas situações, para dois problemas hipotéticos, ambos envolvendo duas funções objetivo a serem minimizadas.

2.4 Conclusões

Esse capítulo expôs os conceitos envolvidos na definição de otimalidade elaborada por Vilfredo Pareto. Esses permitiram o desenvolvimento de uma

abordagem mais sofisticada para a solução de problemas de otimização com múltiplos objetivos conflitantes. Basicamente, essa abordagem considera que a solução final para esses problemas deve atender a duas condições: a solução final deve ser um ponto viável não-dominado e deve respeitar as preferências de um decisor humano.

A maior parte da pesquisa em otimização multiobjetivo tem se concentrado na busca por soluções não-dominadas. O desenvolvimento de novos algoritmos de busca é motivado pela grande diversidade e complexidade dos problemas encontrados na prática. Esses podem ser lineares ou não-lineares; restritos ou irrestritos; mono ou multimodais; convexos ou não-convexos; envolver variáveis contínuas ou discretas. Nos últimos anos foram propostas várias maneiras de se introduzir o conceito de não-dominância em algoritmos de busca. O Capítulo 3 apresenta algumas técnicas de otimização baseadas na computação evolucionária, as quais têm sido empregadas com sucesso em problemas de Engenharia.

Capítulo 3

Otimização Evolucionária

3.1 Introdução

A Otimização Evolucionária (OE) constitui uma família de métodos estocásticos de busca mono-objetivo e multiobjetivo, baseados no processo de evolução natural. Os algoritmos determinísticos de busca foram os primeiros a receber atenção por parte da comunidade científica. Mas, logo a sua limitação em solucionar problemas de otimização com características de descontinuidade e multimodalidade motivou a pesquisa para o desenvolvimento dos métodos estocásticos.

A OE tem como vantagens sua grande capacidade de encontrar ótimos globais de funções com alto grau de complexidade e o fato de não exigir o cálculo de derivadas. Além disso, no caso específico da busca multiobjetivo, o emprego de algoritmos evolucionários tem ainda como vantagem o fato de que seus métodos geralmente trabalham com um conjunto de pontos a cada iteração, permitindo que várias amostras da fronteira Pareto sejam obtidas em uma única execução do algoritmo.

Este capítulo introduz o leitor à OE, enfocando de modo especial os Algoritmos Genéticos (AGs), que constituem uma classe de métodos amplamente conhecidos, inspirados não só pela teoria da evolução natural como também pela genética. As principais razões de sua popularidade devem-se a sua larga aplicabilidade e sua fácil utilização. Aqui são apresentadas as versões mais recentes de AGs multiobjetivo e mono-objetivo.

3.2 Algoritmos Genéticos

Os Algoritmos Genéticos encaixam-se na família de métodos computacionais evolucionários de busca. Baseiam-se não somente na teoria da evolução na-

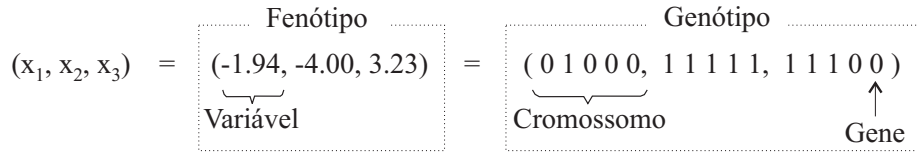


Figura 3.1: Codificação genética.

tural de espécies como também na genética. A maior parte deles manipula, a cada iteração (*geração*), um conjunto de pontos (*população*) de tamanho constante N_{pop} , gerando a partir destes uma nova população, que, na média, aproxima-se cada vez mais da região onde é provável que esteja o ponto ótimo, no caso mono-objetivo, ou a fronteira Pareto, no caso multiobjetivo. Esses algoritmos possuem dois principais tipos de operadores. O primeiro tipo é responsável por determinar quais pontos serão utilizados na geração da nova população, sendo normalmente denominado operador *Seleção*. O segundo tipo tem como finalidade gerar novos pontos a partir daqueles previamente selecionados. Os AGs possuem dois diferentes operadores com esta finalidade. Enquanto um simula o processo de reprodução genética, como ocorre na natureza, o outro simula o processo de mutação genética. Esses operadores *Cruzamento* e *Mutação* não atuam diretamente sobre as variáveis de otimização e sim, sobre a sua forma codificada. Portanto, o primeiro passo para a aplicação de AGs consiste em representar cada variável como uma seqüência de caracteres, conforme algum esquema de codificação. Em uma alusão à genética, a seqüência de caracteres correspondente a cada variável codificada equivale a um cromossomo e cada caracter do cromossomo é equivalente a um gene. O termo *genótipo* é empregado para designar a estrutura codificada resultante da concatenação de todos os cromossomos de um indivíduo e o termo *fenótipo* representa o genótipo decodificado (ver Figura 3.1).

Ao contrário dos operadores genéticos Cruzamento e Mutação, que necessitam de informações referentes ao genótipo de cada indivíduo, o operador Seleção utiliza os valores das funções objetivo para escolher os indivíduos a serem cruzados e mutados. Por isso, antes do início do processo de seleção dos indivíduos, faz-se necessária a decodificação do genótipo em fenótipo, a fim de que seja realizada a avaliação das funções objetivo.

Em analogia ao processo de evolução natural, o operador Seleção tende a selecionar os melhores indivíduos e a descartar os piores para garantir a melhoria da qualidade da população. Assim, a ordenação da população do

melhor ao pior é de fundamental importância para a convergência do processo de busca.

Na otimização mono-objetivo, essa ordenação baseia-se simplesmente no valor da única função a ser otimizada. No caso de um problema de minimização, a população é totalmente ordenada como segue:

- se $f_1(\vec{x}_a) < f_1(\vec{x}_b)$, então \vec{y}_a é melhor que \vec{y}_b ;
- se $f_1(\vec{x}_a) = f_1(\vec{x}_b)$, então \vec{y}_a é tão bom quanto \vec{y}_b .

Por outro lado, na busca por uma aproximação discreta da fronteira Pareto, o algoritmo de busca deve tratar dois aspectos distintos: a distância entre a fronteira obtida e a fronteira Pareto real deve ser a mínima possível; a diversidade das amostras obtidas da fronteira deve ser máxima. Portanto, a ordenação da população deve se basear nas idéias de não-dominância e de diversidade como segue:

- se \vec{y}_a domina \vec{y}_b , então \vec{y}_a é melhor do que \vec{y}_b ;
- se nenhuma delas é dominada, então aquela que apresentar na população uma menor quantidade de pontos em sua vizinhança é considerada de melhor qualidade.

O fluxo básico originalmente proposto para os AGs mono-objetivo e multiobjetivo inicia-se com a geração do genótipo de uma população inicial aleatória, conforme mostra o diagrama da Figura 3.2. A característica básica que diferencia as abordagens mono-objetivo e multiobjetivo está na maneira como é efetuada a Seleção. Em outras palavras, de um modo geral, os mesmos operadores Cruzamento, Mutação, e os mesmos procedimentos utilizados para gerar a população inicial e decodificar o genótipo implementados para o caso mono-objetivo podem ser inteiramente aproveitados para o caso multiobjetivo e vice-versa.

No intuito de acelerar a convergência da busca evolucionária, mais tarde foi sugerida a adição a esse fluxo básico de um mecanismo denominado *elitismo*, que consiste em garantir que os melhores indivíduos da população (a elite) não sejam eliminados durante o processo de otimização. Esse mecanismo foi sugerido inicialmente para algoritmos mono-objetivo, mas logo que sua eficácia foi comprovada, também foi incorporado com sucesso aos algoritmos multiobjetivo. A forma mais simples de elitismo em algoritmos mono-objetivo (*elitismo simples*) consiste em encontrar a cada iteração as $\epsilon\%$ melhores alternativas da população atual e copiá-las diretamente para a

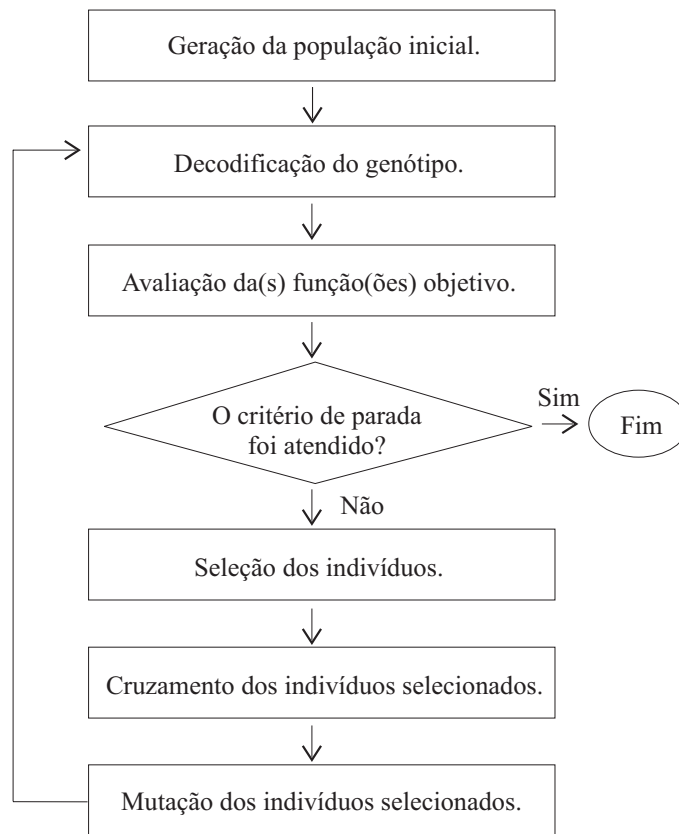


Figura 3.2: Fluxo básico padrão do AG.

próxima população, enquanto as $(100 - \epsilon)\%$ vagas restantes são preenchidas com os pontos gerados a partir da aplicação dos operadores Seleção, Cruzamento e Mutação sobre a população atual inteira (incluindo-se as $\epsilon\%$ melhores alternativas). Outra versão mais sofisticada de elitismo, o *elitismo global*, consiste em comparar os pontos gerados pelo operador Cruzamento (filhos) com os pontos que os geraram (pais) e escolher os melhores pontos em cada grupo de pais e filhos para pertencerem à nova população [8]. Em algoritmos multiobjetivo, por sua vez, em geral implementa-se o elitismo por meio de uma população adicional, chamada população externa ou *off-line*, cuja função é unicamente armazenar os melhores indivíduos obtidos até então pelo algoritmo de busca. A cada iteração, parte desta população externa é copiada para a população corrente do AG. Assim, os melhores indivíduos voltam a participar da Seleção, Cruzamento e Mutação, influenciando diretamente no processo de formação de novos pontos.

A seguir, cada passo do fluxo básico dos AGs é descrito em mais detalhes. Inicialmente, são apresentados os aspectos que os AGs mono-objetivo e os multiobjetivo possuem em comum, ou seja, a Codificação Genética e os operadores Cruzamento e Mutação. Finalmente, são descritas as principais implementações da Seleção mono-objetivo e da multiobjetivo.

3.2.1 Codificação genética

Conforme mencionado anteriormente, os principais operadores dos AGs não trabalham diretamente sobre o ponto e sim, sobre sua representação codificada. Neste trabalho foi adotada a codificação binária, que é certamente a mais difundida, embora outras como Gray e a codificação real também sejam freqüentemente utilizadas [9].

A codificação binária, como seu próprio nome diz, utiliza apenas seqüências de 0 e 1 para representar as variáveis. Sua implementação exige que sejam especificados os limites inferior ($xmin_i$) e superior ($xmax_i$) do intervalo de busca para cada variável, assim como o número de bits (L_i) necessários para sua representação. A imprecisão pode então ser calculada por: $(xmax_i - xmin_i)/(2^{L_i} - 1)$. Assim, se são utilizados 5 bits para codificar a variável x_i definida no intervalo $-4 \leq x_i \leq 4$, então a imprecisão é de 0,258 e, conseqüentemente, tem-se que: $-4 \Rightarrow 00000$, $-4,742 \Rightarrow 00001$ e assim por diante, até $4 = 11111$.

3.2.2 Cruzamento

Este operador simula o processo de reprodução sexuada como ocorre na natureza, em que os filhos são gerados a partir da combinação dos genes dos

pais. Ele é o principal responsável pela geração de novos pontos na população. As várias formas de se implementar o operador Cruzamento exigem, em geral, a especificação de pelo menos dois parâmetros de entrada: a matriz que contém o código genético de cada indivíduo da população atual e a constante P_{cruz} , definida no intervalo $[0, 1]$, que corresponde a uma probabilidade de Cruzamento. A implementação mais comum envolve a divisão da população em casais de pais aleatoriamente. Para cada casal é gerado um número aleatório entre 0 e 1. Se o número for inferior à P_{cruz} , o casal em questão é substituído por dois novos indivíduos gerados a partir da troca de material genético entre os pais. Caso contrário, os próprios pais são mantidos na população.

Essa troca genética pode ser implementada de várias maneiras: Cruzamento com Vários Pontos de Corte, Cruzamento Uniforme, Cruzamento por Variável e outras [10], [11], [9]. Neste trabalho foi adotado o Cruzamento com 1 Ponto de Corte, segundo o qual, tendo sido sorteado um ponto de corte K aleatório, é realizada a troca de material conforme o exemplo a seguir.

Supondo-se que $K = 3$ e que o casal sorteado seja:

$$\begin{array}{l} \text{Indivíduo A:} \\ \text{Indivíduo B:} \end{array} \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

a troca de material resulta em:

$$\begin{array}{l} \text{Indivíduo A:} \\ \text{Indivíduo B:} \end{array} \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

3.2.3 Mutação

O operador Mutação é responsável por introduzir novas seqüências de caracteres na população. A inserção de novo material genético ou de material perdido em iterações passadas mantém a diversidade da população, evita a convergência prematura do algoritmo para ótimos locais e permite que novas regiões do espaço sejam pesquisadas.

Assim como o Cruzamento, a taxa de Mutação é regulada por uma constante P_{mut} , definida no intervalo $[0, 1]$, que determina a probabilidade de cada indivíduo sofrer Mutação. Enquanto altos valores de P_{mut} levam o AG a se comportar como uma busca aleatória, baixos valores podem provocar a convergência prematura.

Neste trabalho foi adotada uma maneira clássica de se implementar esse operador: para cada indivíduo, é sorteado um número entre 0 e 1. Se esse número é menor do que a probabilidade P_{mut} , um de seus genes é escolhido aleatoriamente e invertido de 0 para 1 ou vice-versa. Caso contrário, seu genótipo é mantido tal como está [10].

3.2.4 Seleção

Computacionalmente, o operador Seleção gera uma população auxiliar que é preenchida com cópias dos pontos sorteados a partir da população atual e que, depois de completa, substitui inteiramente a população atual. Como cada ponto pode ser sorteado mais de uma vez, alguns acabam sendo eliminados nesse processo. Os valores das funções objetivo para cada ponto são necessários para a avaliação da capacidade de cada indivíduo sobreviver à seleção. A diferença entre os AGs mono-objetivo e multiobjetivo encontra-se basicamente na forma como esse potencial de sobrevivência é definido.

3.2.5 Seleção mono-objetivo

O operador Seleção mono-objetivo deve guiar o AG para a região em que se encontra o ponto ótimo global viável. Por outro lado, esse operador deve evitar uma rápida uniformização da população e a perda excessiva de informação genética, que leva à convergência prematura para ótimos locais. Portanto, tanto os métodos que realizam uma escolha completamente aleatória quanto aqueles que sorteiam excessivas vezes o melhor indivíduo devem ser evitados.

A literatura propõe vários esquemas de seleção: roleta, torneio, amostragem estocástica e outros. Neste trabalho foi adotada a *amostragem determinística*, segundo a qual o número de cópias de cada indivíduo é calculado da seguinte maneira [10] para um problema de minimização: considere que f_{media} seja a média aritmética de $f(\vec{x})$ e f_{max} seja o valor máximo de $f(\vec{x})$, ambos calculados levando-se em conta toda a população. O potencial de sobrevivência de cada indivíduo depende do valor da razão $(f_{max} - f(\vec{x}))/f_{media}$. Inicialmente, o número de cópias de cada indivíduo corresponde a parte inteira da razão calculada. Posteriormente, são preenchidas as vagas restantes da população com uma cópia de cada indivíduo que possui a parte fracionária mais alta dessa razão.

Normalmente, em AGs mono-objetivo, o operador Seleção deve selecionar N_{pop} indivíduos. Mas em algumas versões, como o SSGA (Steady State Genetic Algorithm), pode-se determinar como parâmetro de entrada a porcentagem da população que será preenchida com os novos indivíduos gerados

pelos processos de Cruzamento e Mutação e a parcela da população será simplesmente mantida. É interessante ressaltar que este procedimento não pode ser considerado uma técnica elitista, uma vez que os indivíduos que são mantidos em geral são aleatoriamente escolhidos, ou seja, não há a preocupação de se preservar a elite da população.

3.2.6 Seleção multiobjetivo

A seleção multiobjetivo, por sua vez, tem como meta guiar o AG para as regiões viáveis em que se encontra a fronteira Pareto. Para isso, além de preservar as soluções eficientes e descartar as dominadas, é necessário, garantir uma boa distribuição da população ao longo da fronteira. Na literatura são propostos vários AGs multiobjetivo, sendo que a diferença entre eles encontra-se basicamente na forma como o operador Seleção beneficia as soluções não-dominadas e as soluções que se encontram em regiões menos densamente povoadas [9]. A seguir são descritos os métodos de seleção de três importantes AGs multiobjetivo da atualidade: Elitist Nondominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA-II), a segunda versão do Strength Pareto Evolutionary Algorithm (SPEA-2) e o Elitist Distance-Based Pareto Algorithm (DPGA) [12], [13], [8].

NSGA-II

O operador Seleção do NSGA-II associa a cada indivíduo dois índices. O primeiro índice, aqui representado como nf , determina a que fronteira pertence o indivíduo em questão. Para definir nf é necessário classificar a população em fronteiras não-dominadas de modo que a primeira seja constituída pelos pontos não-dominados da população atual; a segunda, pelos que forem dominados apenas pelos pontos da primeira fronteira, e assim por diante. Assim, a todos os indivíduos da primeira fronteira é associado o valor $nf = 1$; aos da segunda fronteira $nf = 2$, e assim sucessivamente. O segundo índice, representado por cd (do termo original em inglês *crowding distance*), é uma medida da distância ao redor do indivíduo em questão, que não é ocupada por nenhuma outra solução. Para definir cd é utilizado o procedimento abaixo:

- **Passo 1.** Considere que a população tenha sido classificada em diferentes fronteiras não-dominadas, aqui denominadas $Front_i, i = 1, 2, \dots, Nfront$, e que $|Front_i|$ é o número de soluções pertencentes à i -ésima fronteira. Para cada ponto pertencente à fronteira $Front_i$, atribua $cd_j = 0$.

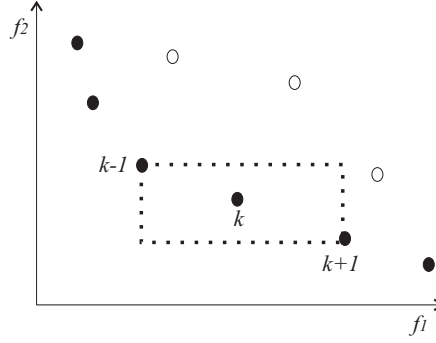


Figura 3.3: Cubóide vazio ao redor do ponto k .

- **Passo 3.** Para cada função objetivo f_j , ordene os pontos da fronteira $Front_i$ em ordem crescente de valor da avaliação da função objetivo, obtendo-se o vetor I^j com os índices dos indivíduos dessa lista ordenada.
- **Passo 3.** Para $j = 1, \dots, m$ e $k = 2, \dots, (|Front_i| - 1)$, faça:

$$cd_{I_k^j} = cd_{I_k^j} + \frac{f_j^{I_{k+1}^j} - f_j^{I_{k-1}^j}}{fmax_j - fmin_j}. \quad (3.1)$$

É interessante observar que os índices I_{k+1}^j e I_{k-1}^j determinam o cubóide ao redor do ponto de índice I_k^j indicado na Figura 3.3.

- **Passo 4.** Para $j = 1, \dots, m$, atribua uma grande distância aos pontos situados nas extremidades da fronteira em questão, ou seja, faça $cd_{I_1^j} = \infty$ e $cd_{I_{|Front_i|}^j} = \infty$.
- **Passo 5.** Repita os passos 2, 3 e 4, até que todas as fronteiras tenham sido percorridas.

Finalmente, a seleção de indivíduos ocorre por meio do seguinte torneio. Dados dois indivíduos sorteados aleatoriamente da população atual, é selecionado aquele que tiver menor valor de nf . Caso os dois pertençam a mesma fronteira, então seleciona-se o que possuir maior valor de cd . Esse procedimento deve ser repetido até que $Npop$ pontos tenham sido selecionados.

No NSGA-II o elitismo é implementado a partir de uma população externa (P_{off}), de tamanho fixo $Npop$, que na primeira iteração é inicializada com uma cópia da população gerada aleatoriamente no primeiro estágio do fluxo básico do AG. Aqui, o termo população *on-line* (P_{on}) designa a população

que é submetida às operações de Seleção, Cruzamento e Mutação. Por outro lado, a população *off-line* é aquela utilizada apenas para guardar uma cópia da população *on-line*.

Conforme mostra o diagrama da Figura 3.4, os pontos pertencentes a ambas populações são unidos em uma população auxiliar P_{aux} . Então, eles são ordenados do melhor para o pior conforme o seguinte critério: aquele que possuir menor valor de nf vem primeiro e, em caso de empate, vem aquele que possuir maior valor de cd . Então, a população *off-line* é preenchida com uma cópia de cada indivíduo da população *on-line* (a que foi obtida ao final dos processos de Seleção, Cruzamento e Mutação da iteração anterior) e os primeiros $Npop$ indivíduos de P_{aux} são colocados na população *on-line*. Dessa maneira, garante-se que a elite dos indivíduos não se perca e, além disso, ela é utilizada na geração de novos pontos, o que contribui para uma convergência mais rápida da busca multiobjetivo.

SPEA-2

No SPEA-2 são utilizadas duas populações, P_{on} e P_{off} , cujos respectivos tamanhos são $Npop$ e \overline{Npop} . P_{on} representa a população que é submetida aos processos de Cruzamento e Mutação. P_{off} , por outro lado, tem como função armazenar as cópias das soluções não-dominadas obtidas até então.

Em cada iteração, ambas populações são submetidas ao operador Seleção. Para isso, inicialmente, a cada indivíduo pertencente à $P_{off} \cup P_{on}$ é associado um valor Nd_i proporcional ao número de pontos dominados por ele. Na Equação 3.2, esse valor é usado para dar uma nota N_i a cada indivíduo:

$$N_i = \sum_{\forall j \in P_{off} \cup P_{on} | j \prec i} Nd_j. \quad (3.2)$$

O espalhamento das soluções ao longo da fronteira é promovido por meio de uma função densidade D_i , que atribui a cada indivíduo um valor escalar inversamente proporcional a uma estimativa da distância δ_i^k entre ele e seus vizinhos mais próximos:

$$D_i = 1/(2 + \delta_i^k). \quad (3.3)$$

Nesta equação, δ_i^k é obtido da seguinte forma. Primeiro são calculadas as distâncias entre o indivíduo i e os demais. Então, elas são ordenadas em ordem crescente e a k -ésima distância é atribuída a δ_i^k . Na prática, o índice k tem sido definido como o inteiro mais próximo do valor $\sqrt{Npop + \overline{Npop}}$. Um importante aspecto a ser observado nesta equação é que a adição do valor 2 garante um denominador não nulo e $D_i < 1$.

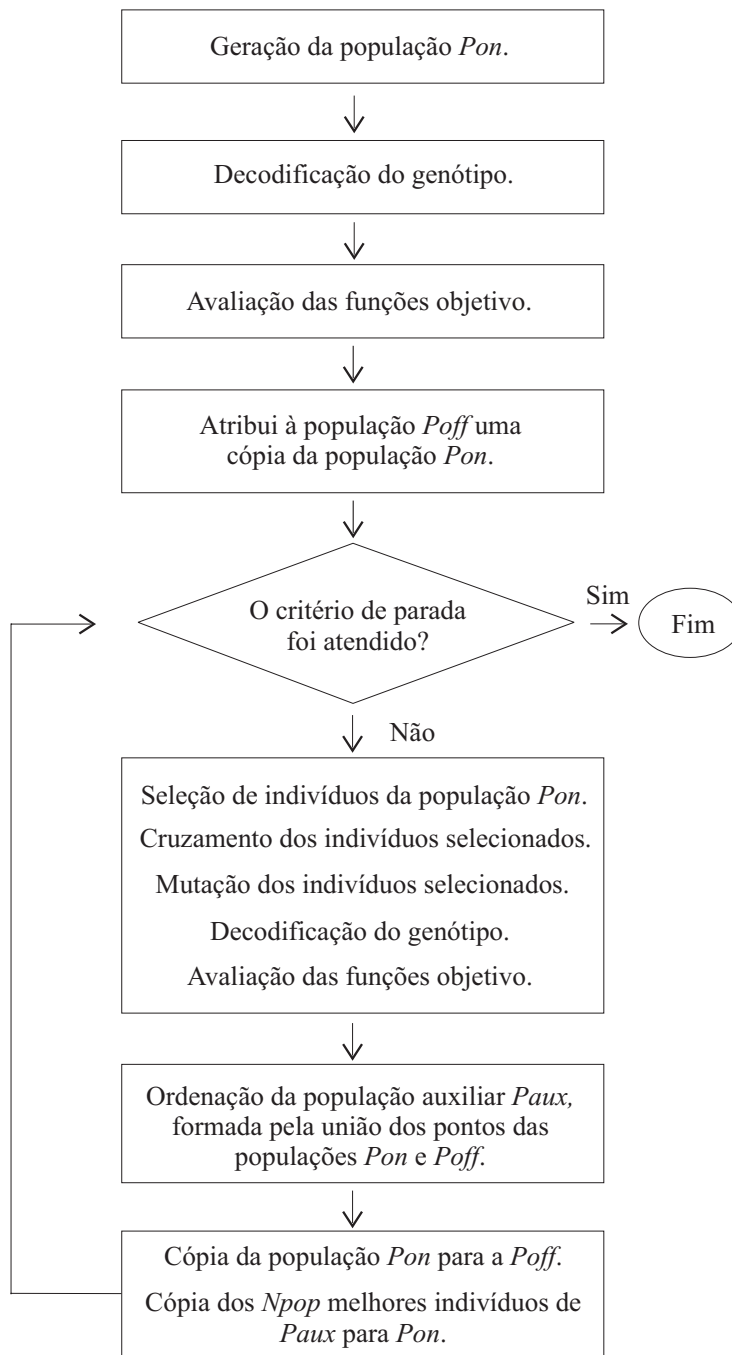


Figura 3.4: Fluxo básico do NSGA-II.

O índice de sobrevivência de cada indivíduo usado pelo operador Seleção é dado pela Equação 3.4. A seleção é realizada por meio de um torneio em que, para cada par de indivíduos sorteados aleatoriamente, vence aquele que possuir menor valor de Sb_i . Vale lembrar que $Sb_i < 1$ para as soluções não-dominadas.

$$Sb_i = N_i + D_i \quad (3.4)$$

O valor de Sb_i também é usado no procedimento descrito a seguir, adotado para determinar em cada iteração quais pontos devem ser copiados ou excluídos de P_{off} , de modo que seu tamanho permaneça fixo.

- **Passo 1.** Copia-se para P_{off} cada indivíduo de $P_{on} \cup P_{off}$ tal que $Sb_i < 1$ (veja que esses correspondem exatamente aos pontos não-dominados na iteração corrente).
- **Passo 2.** Se o passo anterior não for suficiente para preencher P_{off} completamente, basta ordenar os demais indivíduos de $P_{on} \cup P_{off}$ em função do valor de Sb_i e terminar o preenchimento de P_{off} com os melhores pontos.
- **Passo 3.** Se, ao contrário, o número de pontos Nnd que atendem à condição $Sb_i < 1$ for superior a \overline{Npop} , basta excluir de P_{off} os $(\overline{Npop} - Nnd)$ pontos que possuírem vizinhos mais próximos. Para isso, deve-se calcular δ_i^j , onde $i = 1, 2, Nnd$ e $j = 1, 2, Nnd$, considerando-se apenas P_{off} , e eliminar o indivíduo que tiver o menor valor de δ_i^1 . Em caso de empate, elimina-se aquele que tiver menor valor de δ_i^2 e assim por diante. Esse passo deve ser executado até que o tamanho de P_{off} seja novamente igual a \overline{Npop} .

DPGA

O operador Seleção do DPGA é implementado da seguinte forma. Dada a população P_{on} de tamanho fixo $Npop$, seleciona-se um primeiro indivíduo qualquer pertencente à P_{on} e associa-se a ele um índice de sobrevivência: Sb_1 . Uma cópia deste indivíduo é automaticamente enviada para uma população externa P_{off} de tamanho ilimitado, que tem como função armazenar todas as soluções não-dominadas obtidas até o momento. O índice dos demais indivíduos pertencentes à P_{on} é definido em função de sua distância em relação aos indivíduos da população P_{off} . Assim, para cada indivíduo \vec{x}_i em P_{on} , são executados os seguintes passos:

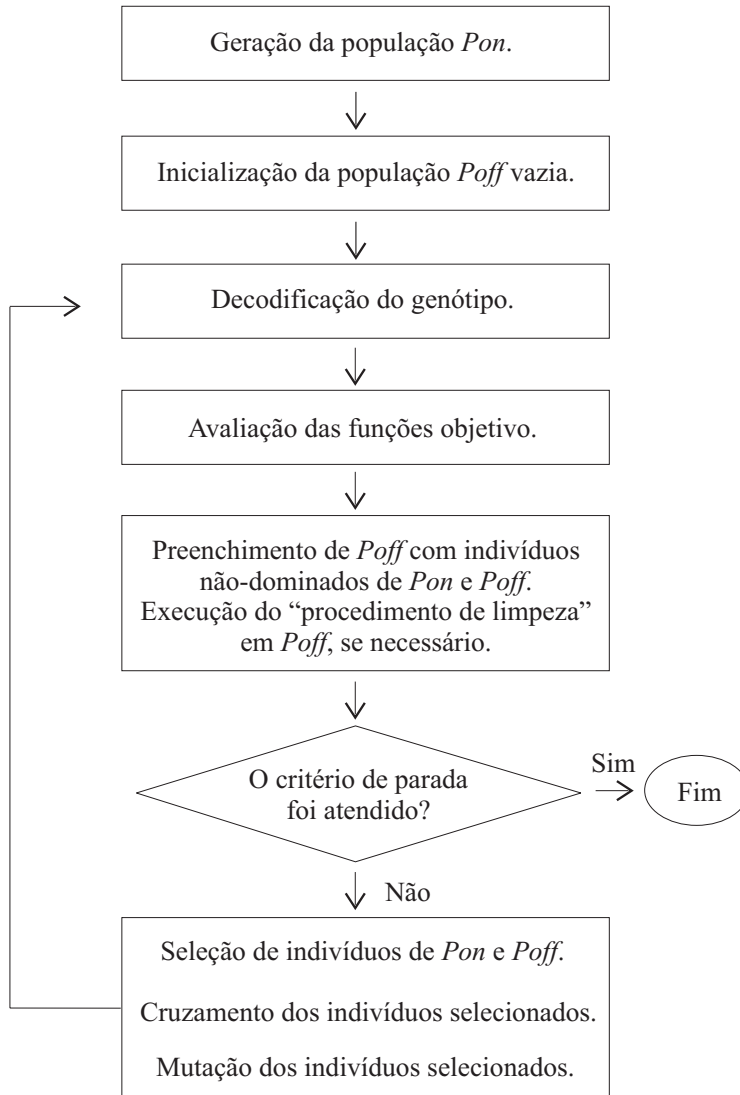


Figura 3.5: Fluxo básico do SPEA-2.

- **Passo 1.** Calculam-se as distâncias d_i^k entre ele e cada ponto \vec{x}_k da população P_{off} :

$$d_i^k = \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\frac{f_j(\vec{x}_k) - f_j(\vec{x}_i)}{f_j(\vec{x}_k)} \right)^2}. \quad (3.5)$$

- **Passo 2.** Determina-se a menor distância $dmin = \min(d_i^k, \forall k \in P_{off})$ e o índice k^* do ponto pertencente à P_{off} que se encontra mais próximo de \vec{x}_i .
- **Passo 3.** Se algum ponto da população externa domina \vec{x}_i , seu índice de sobrevivência é dado por:

$$Sb_i = \max(0, Sb_{k^*} - dmin),$$

sendo Sb_{k^*} o índice de sobrevivência do ponto pertencente à P_{off} que se encontra mais próximo de x^i . Caso contrário, faz-se $Sb_i = Sb_{k^*} + dmin$, adiciona-se \vec{x}_i em P_{off} e elimina-se de P_{off} todos os pontos dominados por \vec{x}_i .

Tendo executado os passos acima para todos os pontos, os indivíduos pertencentes à P_{off} têm ainda seu índice de sobrevivência alterado para um mesmo valor $Sbmax$, que corresponde ao maior índice de sobrevivência, obtido considerando-se toda a população. Os indivíduos da população *online* mantêm seus índices de sobrevivência como estão. Finalmente, os $Npop$ pontos que deverão se submeter ao Cruzamento e à Mutação podem ser sorteados a partir da execução de qualquer operador Seleção mono-objetivo que beneficie os indivíduos com maior índice de sobrevivência. Esse operador deve ser aplicado somente em P_{on} . Portanto, ao contrário do que ocorre no NSGA-II e no SPEA-2, os membros de P_{off} não atuam explicitamente na geração de novos indivíduos. Além disso, como se pode perceber, não há nenhum procedimento explícito para promover o espalhamento das alternativas ao longo da fronteira.

3.3 Conclusões

Esse capítulo apresentou a otimização evolucionária, dando um maior enfoque aos AGs mono-objetivo e multiobjetivo e às semelhanças existentes entre eles. Entre as possíveis implementações de AGs mono-objetivo foi aqui apresentada em mais detalhes aquela que em [14] forneceu os melhores resultados. Entre os AGs multiobjetivo, a fim de se exemplificar diferentes

implementações do operador Seleção e de técnicas elitistas em algoritmos evolucionários multiobjetivo, foram descritas as versões mais recentes de AGs bastante conhecidos: NSGA-II, SPEA-2, DPGA.

A grande vantagem dos dois primeiros em relação ao último está no fato de que ambos utilizam técnicas elitistas em que as soluções não-dominadas participam diretamente dos processos de Seleção, Cruzamento e Mutação, o que acelera o processo de convergência desses algoritmos. Além disso, uma outra desvantagem do DPGA em relação aos demais AGs refere-se ao tamanho ilimitado de sua população externa, que em geral provoca complicações à medida que se aumenta o número de iterações.

Uma desvantagem do SPEA-2 em relação aos outros deve-se à sua exigência de um parâmetro de entrada adicional: o tamanho \overline{Npop} da população *off-line*. O equilíbrio entre os parâmetros $Npop$ e \overline{Npop} interfere diretamente na convergência do algoritmo SPEA-2. Baixos valores enfraquecem o efeito do elitismo e altos valores podem provocar uma convergência prematura devido ao elitismo muito acentuado.

Finalmente, o NSGA-II tem como principal desvantagem sua necessidade de, a cada iteração, classificar em fronteiras não-dominadas um conjunto de $2Npop$ pontos, em contraste com os demais algoritmos que envolvem, na pior das hipóteses, a classificação de $Npop$ pontos [8]. Entretanto, embora essa característica do NSGA-II aumente seu custo computacional, ela também aumenta a sua eficiência, acelerando seu processo de convergência.

Capítulo 4

Tomada de Decisão Multicritério

4.1 Introdução

A análise multicritério tem como principal objetivo auxiliar o homem a fazer escolhas em conformidade com seus interesses, em circunstâncias de dúvidas, incertezas, conflitos de informações, concorrência entre vários critérios. Ao contrário da otimização, cujos problemas são estáveis e bem definidos, ela trata problemas cuja formulação está sujeita a alterações ao longo de seu processo de solução, visto que o próprio processo de decisão é considerado parte integrante do problema.

A abordagem clássica da análise multicritério, desenvolvida por pesquisadores americanos, fundamenta-se em modelos matemáticos restritivos e axiomas rígidos, que determinam como o decisor deve agir para que sua decisão seja racional. Mas, importantes contribuições nos campos da psicologia, da sociologia e da ciência cognitiva têm mostrado que essa abordagem às vezes agride o comportamento humano e o bom senso do decisor. Por isso, seus métodos devem ser aplicados com certa cautela.

A Pesquisa Operacional tem dado cada vez mais ênfase à capacidade e às limitações da racionalidade humana. Esse novo enfoque deu origem a novas abordagens, como a utilizada pelo método do processo de análise hierárquica, desenvolvido pelo americano Thomas Saaty (descrito no Capítulo 9) ou a desenvolvida por pesquisadores franceses, fundamentada no conceito de relação de sobreclassificação¹ (descrita no Capítulo 8) [15], [16].

Existe ainda uma linha de pensamento correspondente à pesquisa desen-

¹O conceito de sobreclassificação foi originalmente criado por pesquisadores franceses como *surclassement* e traduzido para o inglês como *outranking*.

volvida na Rússia. Entretanto, essa é relativamente pouco citada na literatura. O trabalho desenvolvido por seus pesquisadores é menos disseminado internacionalmente, devido ao fato de a maior parte de suas publicações estarem em russo [18]. Por essa dificuldade são estudadas neste documento apenas as contribuições das Escolas Americana e Francesa.

Neste capítulo é introduzido o tema análise multicritério. São caracterizados os tipos de problemas de decisão e as abordagens utilizadas pelos pesquisadores franceses e americanos para tratar esses problemas. Por fim, são descritas algumas linhas de pesquisa mais específicas referentes à análise multicritério e na conclusão são apontados os pontos prioritários a serem explorados pelos pesquisadores desta área em trabalhos futuros.

4.2 Problema de Decisão Multicritério

Um problema de decisão multicritério envolve os seguintes elementos básicos:

- **Conjunto A de alternativas (ações, opções ou possíveis soluções).** Nos problemas classificados como *discretos*, este conjunto corresponde a uma lista discreta, finita e geralmente pequena em que cada elemento $a \in A$ corresponde a uma opção. Em problemas de decisão originados no contexto da otimização multiobjetivo, este conjunto corresponde a um subconjunto de \mathfrak{R}^k , em que cada alternativa corresponde a um vetor de variáveis de otimização $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$. Nesse tipo de problema, classificado como *contínuo*, A tende a ser mais denso do que nos problemas discretos, sendo freqüentemente contínuo e limitado apenas por restrições matemáticas.
- **Conjunto de conseqüências ou atributos².** A decisão final exige que as alternativas sejam comparadas entre si, levando-se em conta os efeitos da implementação de cada uma delas. Assim, em problemas discretos, cada alternativa $a \in A$ pode ser descrita por suas conseqüências ou atributos (a_1, a_2, \dots, a_m) . No contexto específico da otimização multiobjetivo, cada alternativa a corresponde a um vetor de parâmetros de otimização \vec{x}_a e suas conseqüências podem ser definidas a partir da avaliação das funções objetivo $(f_1(\vec{x}_a), f_2(\vec{x}_a), \dots, f_m(\vec{x}_a))$.
- **Conjunto C de critérios.** São esses critérios que regem as comparações entre alternativas. Cada critério representa um ponto de

²Neste documento os termos efeito, conseqüência ou atributo são usados como sinônimos. Porém, é interessante ressaltar que o termo atributo também é usado na literatura por alguns autores com o sentido de critério.

Tabela 4.1: Tipos e exemplos práticos de problemas de decisão multicritério.

Tipo de problema	Exemplos
P_1 . Ordenar as alternativas da melhor para a pior. Esta ordenação não é necessariamente completa.	Ordenar candidatos a um emprego em uma empresa, conforme seu desempenho no processo de seleção.
P_2 . Fornecer a melhor alternativa ou um conjunto limitado de soluções consideradas satisfatórias	Seleção de uma entre várias versões de um mesmo projeto. As melhores soluções não são necessariamente ótimas mas, simplesmente, satisfatórias. A otimização multiobjetivo pode ser considerada um problema de decisão específico do tipo P_2 , em que a melhor alternativa também deve ser ótima.
P_3 . Classificar as alternativas em grupos homogêneos predefinidos.	Diagnóstico médico pela classificação de pacientes em grupos de doenças conforme alguns sintomas. Classificação acadêmica de alunos em aprovados ou reprovados no ano letivo.

vista segundo o qual as comparações são realizadas, sendo modelado, na prática, por uma função $c_i(.) : A \rightarrow \mathfrak{R}$, que associa um número a cada alternativa. Esse número deve refletir a nota³ dada pelo decisor à alternativa, considerando o efeito de sua implementação, segundo somente esse ponto de vista. Vale ressaltar que é admissível que uma ou mais conseqüências da implementação de uma alternativa se refiram ao mesmo critério.

Além desses elementos básicos, a questão levantada pelo problema deve ser especificada. A Tabela 4.1 define e ilustra com exemplos de aplicações reais os principais tipos de problemas de decisão multicritério [17].

4.3 As Escolas da Tomada de Decisão

Hoje, no que se refere à tomada de decisão multicritério, existem duas principais linhas de pensamento: as Escolas Americana e Francesa (ou Européia). A Escola Americana, baseada na teoria da utilidade, foi a pioneira. Alguns historiadores atribuem sua origem ao trabalho desenvolvido por Bernoulli no século XVIII. Em 1738, ele propôs a essência da teoria da utilidade, ao afirmar que o valor de um item para um indivíduo depende de sua utilidade para o indivíduo e não de seu valor monetário. Enquanto o valor monetário do item é único para todos, a utilidade do item depende das circunstâncias particulares do indivíduo que a estima. Entretanto, a contribuição de Bernoulli foi esquecida por um longo tempo. Uma fundamentação axiomática formal para a teoria da utilidade só surgiu em 1944, desenvolvida por Neumann e Morgenstern, sendo depois enriquecida pelos trabalhos de outros autores como Fishburn, Keeney e Raiffa [19], [20], [21].

Desde o início, os temas tomada de decisão e otimização sempre estiveram fortemente interligados. De fato, segundo a teoria da utilidade, os problemas de decisão podem ser modelados matematicamente pela maximização de uma função, chamada *função utilidade*, teoricamente capaz de representar a utilidade de cada alternativa para o decisor. Através dessa função, é atribuída a cada alternativa uma nota (valor escalar ordinal), que permite a ordenação de todas as alternativas, da melhor até a pior. A alternativa preferida — a de maior utilidade — é, portanto, aquela que possui a maior nota. Assim, os métodos da Escola Americana caracterizam-se por auxiliar o decisor a construir uma função utilidade conforme suas preferências, baseando-se na teoria axiomática que assegura a existência dessa função. A Tabela 4.2 lista os principais métodos da Escola Americana e os classifica, conforme a natureza de seus dados de saída, em três categorias correspondentes aos três tipos de problema de decisão: P_1 , P_2 ou P_3 . Estão associados à P_1 , os métodos que geram uma ordenação das alternativas conforme a preferência do decisor; à P_2 , aqueles cujos dados de saída indicam apenas qual é a solução final favorita para o problema; à P_3 , aqueles que classificam as alternativas em categorias predefinidas. Entretanto, é interessante lembrar que os métodos da categoria P_1 também podem ser usados para determinar uma solução final única para o problema: basta selecionar a alternativa melhor colocada na ordenação gerada por ele.

Nas décadas de 50 e 60, a tomada de decisão atraiu o interesse de universidades, das companhias aéreas e ferroviárias e de empresas, especialmente

³Como será visto adiante, em alguns métodos de decisão essa nota tem um significado ordinal e, em outros, cardinal.

Tabela 4.2: Métodos da Escola Americana.

Método	Problema
AHP — <i>Analytic Hierarchy Process</i> . Método baseado em comparações entre alternativas e na medição da preferência com uso de escalas [15].	P_1
Macbeth — <i>Measuring Attractiveness by a Categorical based Evaluation Technique</i> . Este método transforma em quantitativos os julgamentos qualitativos realizados pelo decisor ao comparar os pares de alternativas [22].	P_1
Ponto médio . Método para construção de funções utilidade [23].	P_1
Programação por Metas . Exige que o decisor declare sua preferência indicando a meta que ele deseja alcançar. Permite ordenar todas as alternativas a partir da distância de cada uma delas em relação a essa meta [24].	P_1
Smarts — <i>Simple Multi-attribute Rating Technique using Swings</i> . Auxilia a construção de funções utilidade aproximando-as por funções lineares [25].	P_1
Smarts Intervalar . Auxilia a construção de funções utilidade introduzindo nelas a imprecisão dos julgamentos do decisor [26].	P_1
Smarter — <i>Simple Multi-attribute Rating Technique Exploiting Ranks</i> . Método similar ao Smarts, que aproxima as funções utilidade por funções lineares e estima o peso de cada critério por uma técnica chamada <i>Rank Order Centroid</i> [25].	P_1
Todim — Tomada de Decisão Interativa Multicritério. Possui algumas características semelhantes ao AHP. Embora, tenha sido incluído nesta tabela de métodos da Escola Americana, o Todim pode ser considerado um método híbrido, por possuir elementos próprios de ambas escolas [27].	P_1
Utadis — <i>Utilités Additives Discriminantes</i> . Classifica alternativas em categorias pré-definidas pela simples comparação entre o valor da função utilidade global para cada alternativa e constantes usadas para delimitar cada classe [28].	P_3

das áreas de telecomunicações, de distribuição de água e de fornecimento de eletricidade. É interessante ressaltar que, nessa época, o mundo tentava viabilizar a reconstrução dos estragos provocados pela Segunda Guerra Mundial. A intensificação da pesquisa trouxe duas contribuições de grande importância para a análise multicritério.

- Em 1960, iniciou-se um tratamento mais rigoroso da decisão multicritério, com o trabalho de Debreu [29]. Debreu associou o conceito de preferência ao da utilidade multiatributo aditiva, afirmando ser possível decompor a função utilidade global U , que considera todos os critérios, em uma soma de funções utilidade u_i , que representam a preferência do decisor segundo cada critério.
- O nascimento da Escola Francesa, com o desenvolvimento do primeiro método a empregar o conceito de *sobreclassificação*, Electre I, em 1968 [30].

A origem do termo Escola Francesa vem do fato de que o conceito de sobreclassificação e os primeiros métodos a empregá-lo foram desenvolvidos por pesquisadores franceses. Hoje, entretanto, a pesquisa sobre tomada de decisão segundo essa linha de pensamento não está restrita à França. Importantes contribuições têm surgido da Europa Ocidental, especialmente da Bélgica. Por isso alguns autores preferem o termo Escola Européia.

Os métodos de decisão da Escola Francesa caracterizam-se por apresentar dois estágios. No primeiro, são realizadas comparações entre cada alternativa pertencente a A e as demais. A partir dessas comparações são definidas relações de sobreclassificação entre cada par de alternativas de tal maneira que, dadas $a, b \in A$, se a é pelo menos tão boa quanto b , então pode-se dizer que a sobreclassifica b . No segundo estágio, essas relações são exploradas por meio de um conjunto de diretrizes, tendo como objetivo ordenar as alternativas da melhor para a pior, classificar as alternativas em categorias predefinidas ou obter a melhor alternativa de A . A Tabela 4.3 lista os principais métodos da Escola Francesa⁴, classificando-os em três categorias, como foi feito na Tabela 4.2 de Métodos da Escola Americana.

Alguns autores enfatizam as diferenças entre as atitudes de cada escola, utilizando o termo tomada de decisão multicritério — *Multicriteria Decision Making* ou MCDM— para se referir à abordagem da Escola Americana e o termo auxílio à tomada de decisão multicritério — *Multicriteria Decision*

⁴O leitor pode estranhar o fato de que os métodos Promethee III e IV estão sendo omitidos nesta tabela. Voltados para a solução de problemas do tipo P_1 , esses métodos são muito pouco conhecidos. Não adquiriram a popularidade do Promethee II por possuírem um alto custo computacional.

Tabela 4.3: Métodos da Escola Francesa.

Método	Problema
Electre I — <i>Elimination and (et) Choice Translating</i> . Baseia-se no conceito de concordância e discordância para construir as relações de sobreclassificação entre as alternativas. Essas relações definem um grafo, a partir do qual é possível definir o menor conjunto de alternativas consideradas satisfatórias [30].	P_2
Electre II . Método usado para ordenar as alternativas da melhor até a pior, tendo como dados de entrada os resultados obtidos pelo método Electre I [31].	P_1
Electre III . Utiliza os conceitos de relação de sobreclassificação e índice de credibilidade para ordenar as alternativas da melhor até a pior [32].	P_1
Electre IV . Método usado para ordenar as alternativas, mas que oferece a vantagem de não exigir a especificação do peso de cada critério.	P_1
Electre Tri . Método baseado em relações de sobreclassificação usado para classificar as alternativas em categorias pré-definidas, a partir da comparação entre cada alternativa e os perfis que definem os limites das categorias [33].	P_3
Oreste . Baseado no conceito de sobreclassificação, usado para ordenar as alternativas da melhor até a pior [34].	P_1
Promethee I — <i>Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluations</i> . Usa o conceito de fluxo de rede da teoria de grafos para construir as relações de sobreclassificação e ordenar as alternativas da melhor até a pior. Esse método admite situações em que a preferência do decisor é indefinida e as alternativas são consideradas incomparáveis [35].	P_1
Promethee II . Método similar ao Promethee I, mas que não admite julgamentos em que as alternativas são incomparáveis [35].	P_1

Continua...

Tabela 4.3: Métodos da Escola Francesa - Continuação.

Método	Problema
Promethee V Esse método divide-se em dois estágios: inicialmente, é executado o método Promethee II; posteriormente é executado um método de busca a fim de se achar a alternativa que atende a uma série de restrições impostas sobre o valor do fluxo de rede (parâmetro usado para ordenar as alternativas) e que está mais bem colocada na ordenação [27].	P_1
Topsis — <i>Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution</i> . Estabelece relações de sobreclassificação entre alternativas baseado nas distâncias entre cada alternativa até a solução ideal positiva e a solução ideal negativa [36].	P_1

Aid ou MCDA⁵ — para se referir à abordagem da Escola Francesa [37], [16]. Outros preferem diferenciá-las dizendo que a atitude da Escola Americana é *normativa*, enquanto a da Escola Francesa é *construtiva*.

Segundo esses autores, a atitude da Escola Americana é normativa: ela ensina o decisor a agir conforme algumas regras pré-estabelecidas consideradas necessárias para assegurar um comportamento racional e determina como os métodos devem funcionar, tendo como base os itens a seguir:

- Uma teoria axiomática bem estruturada que confere aos métodos uma certa rigidez, exigindo do decisor uma atitude isenta de dúvidas ou hesitações, com preferência e indiferença transitivas, com capacidade de avaliar critérios independentes entre si.
- A convicção de que, antes do início do processo de decisão, o decisor já tem seus valores e seu sistema de preferências bem definidos. Por isso, em geral, seus métodos de decisão extraem do decisor um grande volume de informações para a construção de modelos racionais que respeitem sua preferência e seus valores.

A atitude da Escola Francesa, por sua vez, é construtiva. Ela auxilia o decisor a construir suas preferências, considerando que essas são inicialmente instáveis ou inexistentes. Por isso, os métodos extraem do decisor apenas as informações confiáveis e significativas. Em geral, envolvem a especificação de

⁵Na literatura, os dois termos, MCDM e MCDA, muitas vezes são tratados como sinônimos.

apenas alguns parâmetros de entrada e a execução de algoritmos complexos, que realizam as comparações entre os pares de alternativas, para construir um modelo coerente com as informações obtidas. Baseiam-se em modelos mais completos da preferência humana, os quais incluem incertezas e às vezes admitem julgamentos intransitivos. Por outro lado, em geral, a complexidade desses modelos dificulta seu uso operacional e torna os métodos de decisão menos transparentes. Mas, a Escola Francesa é criticada sobretudo por não se fundamentar em uma teoria axiomática bem estruturada e completa, o que pode gerar, na prática, interpretações ambíguas e comportamento inesperado de seus métodos.

4.4 Principais Linhas de Pesquisa em Tomada de Decisão

Dentro do tema análise multicritério, os trabalhos de pesquisa podem explorar diferentes aspectos da tomada de decisão, entre os quais vale ressaltar:

- **Decisão individual × decisão coletiva.** Embora, tradicionalmente, a Pesquisa Operacional considere problemas de decisão em que há apenas um decisor envolvido, em empresas freqüentemente existe um grupo de pessoas responsável por tomar decisões coletivamente. A participação de vários decisores nesse processo gera ordenações diferentes do mesmo conjunto de alternativas. A tomada de decisão em grupo estuda formas de se chegar a um consenso, combinando essas informações em um resultado único [38].
- **Decisão sob certeza × decisão sob incerteza.** Na prática, nem sempre as conseqüências da implementação das alternativas são bem definidas e definitivas. Nesse caso, a função matemática que representa a preferência do decisor deve incluir a incerteza à qual está sujeita a sua escolha. A teoria dos jogos e a teoria da utilidade esperada são exemplos de importantes ferramentas para tomada de decisão com incerteza [39], [20].
- **A psicologia e a ciência cognitiva na tomada de decisão.** As primeiras metodologias para tomada de decisão foram desenvolvidas a partir das premissas de que o decisor sempre conhece perfeitamente o problema em questão, que todas as informações necessárias para a sua solução estão sempre disponíveis e que a preferência do decisor existe independentemente do problema (embora às vezes esteja escondida em

sua mente), ou seja, que o decisor já sabe o que quer antes de conhecer o problema em detalhes. Entretanto, em [40], Simon mostrou uma nova maneira de se abordar a decisão multicritério, afirmando que em aplicações práticas essas premissas não são sempre verdadeiras. Essa nova noção influenciou profundamente a pesquisa, que até então considerava o decisor completamente racional, e fez com que o próprio processo de tomada de decisão se tornasse parte do problema.

Desde então, a pesquisa nas áreas da psicologia, da ciência cognitiva e até da sociologia trouxe grandes contribuições para a análise multicritério. Entre os trabalhos de maior repercussão podem ser citados:

- o famoso teorema da impossibilidade de Arrow, segundo o qual é impossível agregar a preferência de vários indivíduos, sob condições naturais (ou seja, sem atitudes ditatoriais, considerando-se a independência entre os indivíduos) e obter uma ordenação com propriedades racionais [41];
 - o famoso paradoxo de Allais, com o qual foi possível mostrar que o comportamento humano viola os axiomas introduzidos por Neumann e Morgenstern, que estabelecem as condições necessárias e suficientes para a existência da função utilidade esperada [42];
 - os trabalhos do autor Tversky que mostraram que a preferência humana não é necessariamente transitiva [43], [44].
- **Métodos de decisão.** O desenvolvimento de novos métodos de decisão é encorajado, visto que não existe ainda um método ideal. Os métodos existentes apresentam pelo menos um dos problemas listados a seguir:
- envolvem parâmetros de entrada cujo significado e influência no resultado final muitas vezes não são intuitivos;
 - são excessivamente simples e, por isso, incapazes de modelar certos aspectos complexos comuns em situações práticas como: a intransitividade da preferência e da indiferença; atitudes do decisor de hesitação ou de indecisão;
 - não possuem uma fundamentação teórica satisfatória e por isso acabam sendo mal empregados na prática;
 - não funcionam adequadamente quando aplicados a certos tipos de problemas, como mostram os resultados apresentados ao final deste documento;

– apresentam um problema conhecido como “inversão de ordem”⁶, freqüentemente explorado pela literatura. Esse problema foi detectado em importantes métodos das Escolas Americana e Francesa, baseados em comparações de pares de alternativas, como Promethee, Electre, AHP. Consiste em uma inversão na ordem das alternativas provocada pela adição ou subtração de uma alternativa insignificante, ou seja, pior do que as demais. É natural esperar que a adição ou subtração de algum critério ou de alguma alternativa significativa altere a preferência do decisor e, conseqüentemente, os resultados finais. Mas não é intuitivo que uma alternativa dominada pelas demais provoque inversões na ordenação das alternativas.

- **Aplicações práticas dos métodos de decisão.** Na literatura existe um vasto volume de estudos de aplicações em problemas reais de diversas áreas, como por exemplo na área de transporte, para o planejamento da renovação de estações de metrô [45]; em medicina, para o diagnóstico médico pela classificação de pacientes em categorias de doenças com base em seus sintomas [46]; em marketing, para a medição da satisfação de clientes [47]; na área de energia, para a escolha da localização de usinas, para a distribuição e o planejamento energético [48], [49], [50] e outros.

4.5 Conclusões

Esse capítulo introduziu a análise multicritério e deu uma idéia da enorme abrangência desse tema. Foram apresentados os diversos tipos de problema de decisão (escolha, ordenação, classificação), as duas principais linhas de pensamento (Americana, Francesa) e alguns temas de pesquisa mais específicos (decisão individual \times em grupo, decisão com certeza \times incerteza, entre outros).

Apesar do grande progresso observado nas últimas décadas da abordagem científica da análise multicritério, existem ainda vários aspectos a serem explorados pelos pesquisadores. Entre eles, os de maior prioridade talvez sejam:

- o desenvolvimento de uma fundamentação teórica e axiomática completa para a análise multicritério;
- a criação de técnicas para validação operacional e conceitual dos resultados obtidos em aplicações reais;

⁶O termo correspondente em inglês é *rank reversal*

- a exploração de novas possíveis áreas de aplicação;
- a análise pós implementação prática de soluções obtidas com os métodos de decisão.

Para os otimistas, a existência de uma grande variedade de métodos de decisão é um indicativo da importância da análise multicritério para a atualidade. Para os pessimistas, é um sinal da fragilidade dos métodos e abordagens existentes. Talvez ambos estejam certos ou, talvez, ainda seja cedo para essa avaliação, visto que ainda não existem na literatura análises significativas das conseqüências positivas ou negativas da implementação na prática de soluções obtidas pela aplicação dos métodos de decisão. Esse tipo de análise é especialmente importante, devido ao fato de que a tomada de decisão possui também um caráter subjetivo, que dificulta a avaliação da qualidade de suas soluções.

Capítulo 5

Modelagem da Preferência Humana

5.1 Introdução

A história da teoria da decisão consiste em um processo em que noções simples, como a escolha de uma alternativa, a partir de preferências bem definidas, vão se tornando cada vez mais complexas, evoluindo para fórmulas e modelos matemáticos que consideram a incerteza e as limitações da racionalidade humana. A polêmica inicial com relação a validade do emprego da matemática em problemas de decisão tem dado lugar a resultados satisfatórios obtidos em aplicações práticas. A matemática vem de fato se estabelecendo como um importante instrumento para a análise multicritério.

A Escola Americana e a Escola Francesa utilizam a teoria relativa à modelagem de preferências por relações binárias para representar as possíveis atitudes do decisor. A decisão baseada em modelos matemáticos da preferência humana parte do pressuposto que, dado um conjunto de alternativas A , é possível ordenar seus elementos, considerando-se os interesses do decisor. Essa ordenação pode ser usada para identificar a melhor alternativa ou para classificar seus elementos em categorias.

Os modelos clássicos da preferência são pouco flexíveis, não oferecem ao decisor recursos suficientes para modelar algumas de suas atitudes reais. Modelos não convencionais mais completos e flexíveis têm sido desenvolvidos. Entretanto, esses em geral não são de fácil uso operacional.

Nesse contexto, este capítulo apresenta a teoria da modelagem de preferências. São ressaltados os pontos fracos da teoria clássica e os novos caminhos para a pesquisa são apontados. Inicialmente, são introduzidos os principais conceitos referentes às relações de preferência, que são relações

binárias, do ponto de vista operacional [51].

5.2 Relações Binárias

Dados os conjuntos A e B , uma relação binária de A para B é um subconjunto do conjunto definido pelo produto cartesiano $A \times B$ ou seja, um conjunto de pares ordenados (a, b) em que o primeiro elemento pertence a A e o segundo a B . Os pares são ordenados porque (a, b) e (b, a) são considerados elementos diferentes. Para representar o fato de que (a, b) pertence ao conjunto R , são utilizadas as seguintes notações: $(a, b) \in R$, aRb , $R(a, b)$. A situação oposta é indicada por $(a, b) \notin R$ ou $a \neg Rb$.

Dada a relação R , suas relações inversa (R^{-1}), complementar (R^c) e dual (R^d) são definidas, respectivamente, por:

- $(a, b) \in R^{-1} \Leftrightarrow (b, a) \in R$;
- $(a, b) \in R^c \Leftrightarrow (a, b) \notin R$;
- $(a, b) \in R^d \Leftrightarrow (b, a) \notin R$.

Por exemplo: considere os conjuntos $A = \{1, 5\}$, $B = \{3, 4, 8\}$ e o produto cartesiano $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 8), (5, 3), (5, 4), (5, 8)\}$. Deseja-se obter o subconjunto de pares ordenados correspondente à relação binária R , aqui usada para modelar a relação matemática “maior que”. Nesse caso, estão na relação R apenas os pares: $R = \{(5, 3), (5, 4)\}$. Por outro lado, os pares de $A \times B$, que não estão em R , estão na sua relação complementar: $R^c = \{(1, 3), (1, 4), (1, 8), (5, 8)\}$.

Existem ainda três diferentes maneiras de se representar relações binárias [52]:

- como mostra a Figura 5.1, elas podem ser representadas por meio de grafos direcionados, em que cada nó representa uma alternativa e as relações entre as alternativas são arcos;
- como mostra a Figura 5.2, elas também podem ser representadas por uma matriz em que o número de linhas é igual ao número de elementos de A e o número de colunas é igual ao número de elementos de B . Assim, dadas as alternativas $a \in A$ e $b \in B$, a interseção da linha relativa a a com a coluna referente a b pode ter valores 1, se aRb , ou 0, se $a \neg Rb$;
- as relações binárias podem ainda ser codificadas utilizando-se dois números reais distintos, α e β , de forma que:

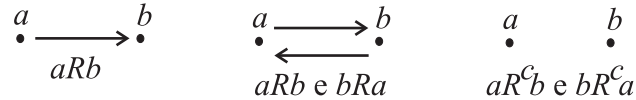


Figura 5.1: Grafo direcionado descrevendo relações binárias.

	b_1	b_2	b_3
a_1	0	1	0
a_2	0	0	1
a_3	0	1	0
a_4	1	0	0

Figura 5.2: Matriz que descreve as relações a_1Rb_2 , a_2Rb_3 , a_3Rb_2 e a_4Rb_1 , sendo $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ e $b_1, b_2, b_3 \in B$.

- $\alpha \Leftrightarrow aRb$;
- $\beta \Leftrightarrow aR^c b$.

Operacionalmente, as relações de preferência são modeladas por relações binárias definidas de A para A ou seja, elas são subconjuntos de $A \times A$. Dada uma relação binária qualquer R em A é possível representar, utilizando-se a lógica booleana, apenas as quatro situações a seguir, sendo que, dadas duas alternativas a e $b \in A$, apenas uma dessas situações é verdadeira:

1. $aRb \wedge bRa$;
2. $aRb \wedge bR^c a$;
3. $aR^c b \wedge bRa$;
4. $aR^c b \wedge bR^c a$.

Uma relação binária qualquer R definida em A , sendo a, b, c alternativas genéricas pertencentes a A , pode ser caracterizada por propriedades como [51]:

- Propriedade reflexiva: $aRa, \forall a \in A$;
- Propriedade irreflexiva: $a \neg Ra, \forall a \in A$;
- Propriedade simétrica: $aRb \Rightarrow bRa, \forall a, b \in A$;

- Propriedade assimétrica: $aRb \Rightarrow b \neg Ra, \forall a, b \in A$;
- Propriedade anti-simétrica: $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b, \forall a, b \in A$;
- Propriedade transitiva: $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc, \forall a, b, c \in A$;
- Propriedade semi-transitiva: $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRd \vee dRc, \forall a, b, c, d \in A$;
- Propriedade negativamente transitiva: $a \neg Rb \wedge b \neg Rc \Rightarrow a \neg Rc, \forall a, b, c \in A$;
- Propriedade Ferrers: $aRb \wedge cRd \Rightarrow aRd \vee cRb, \forall a, b, c, d \in A$;
- Propriedade completa: $aRb \vee bRa, \forall a, b \in A$.

Essas propriedades aqui listadas não são independentes, de modo que, por exemplo:

- uma relação irreflexiva e anti-simétrica é também assimétrica;
- uma relação assimétrica e negativamente transitiva é transitiva;
- uma relação completa e transitiva é também negativamente transitiva;
- uma relação assimétrica é irreflexiva;
- uma relação irreflexiva e transitiva é também assimétrica.

As operações habituais da teoria dos conjuntos podem ser naturalmente aplicadas sobre as relações binárias. Assim, dadas as relações binárias R_1 e R_2 em A , tem-se que:

- $R_1 \subset R_2$ se e somente se $aR_1b \Rightarrow aR_2b, \forall a, b \in A$;
- União de conjuntos: $R_1 \cup R_2 = \{(a, b) \mid aR_1b \vee aR_2b\}$;
- Interseção de conjuntos: $R_1 \cap R_2 = \{(a, b) \mid aR_1b \wedge aR_2b\}$;
- Produto relativo de conjuntos: $R_1.R_2 = \{(a, b) \mid \exists c : aR_1c \wedge cR_2b\}$;
- $R_1^2 = R_1.R_1$.

Aqui, assim como normalmente ocorre na literatura sobre modelagem de preferências, algumas propriedades das relações binárias são representadas através dessas operações sobre conjuntos:

Tabela 5.1: Tipos de relações de ordenação.

Tipos de ordenação	Propriedades
Preordem completa ou ordem fraca	Completa e transitiva
Preordem parcial ou quase-ordem	Transitiva e reflexiva
Ordem parcial	Transitiva, anti-simétrica e reflexiva
Ordem estrita parcial	Transitiva, assimétrica e irreflexiva
Equivalência	Transitiva, simétrica e reflexiva
Ordem completa ou ordem total	Transitiva, anti-simétrica e completa
Ordem estrita fraca	Transitiva, assimétrica e completa
Semi-ordem	Semi-transitiva, Ferrers e completa
Ordem intervalar	Ferrers e completa

- Simetria: $R = R^{-1}$;
- Assimetria: $R \cap R^{-1} = 0$;
- Transitividade: $R.R \subset R$;
- Semi-transitividade: $R.R.R^d \subset R$;
- Ferrers: $R.R^d.R \subset R$;
- Completude: $R \cup R^{-1} = A \times A$.

Certas relações binárias são particularmente importantes para a tomada de decisão pois, quando aplicadas a um conjunto, podem causar a ordenação de seus elementos. Essas são chamadas relações binárias de ordenação e, dependendo de suas propriedades, podem ser classificadas como mostra a Tabela 5.1 [52].

5.3 Relações de Preferência: P , I , Q e J

Grande parte dos métodos para tomada de decisão baseiam-se em modelos da preferência humana. As principais relações de preferência consideradas por

Tabela 5.2: Principais relações binárias.

Relação binária	Propriedades básicas
Preferência estrita (P)	Assimétrica (e irreflexiva)
Indiferença (I)	Simétrica, reflexiva
Preferência fraca (Q)	Assimétrica (e irreflexiva)
Incomparabilidade (J)	Simétrica, irreflexiva

esses modelos são P , I , Q e J , que modelam, respectivamente, a preferência estrita, a indiferença, a preferência fraca e a incomparabilidade entre alternativas. Essas relações possuem algumas propriedades básicas essenciais para garantir a coerência de seu significado na prática. Por exemplo, a relação binária P é utilizada no caso de haver preferência estrita de uma alternativa em relação à outra. Assim, para garantir a consistência da preferência estrita, P é sempre assimétrica, visto que não é possível preferir a a b - aRb - e b a a - bRa , simultaneamente. De maneira análoga, a relação Q , que modela a preferência fraca (atitude intermediária à preferência estrita e à indiferença), também apresenta sempre a propriedade de assimetria. A relação I , por sua vez, é sempre reflexiva e simétrica, conforme o esperado. Afinal, é intuitivo julgar que uma alternativa é indiferente a outra idêntica a ela mesma. Além disso, se a é indiferente a b - aIb , é natural concluir que b é indiferente a a - bIa . Lembrando que relações binárias assimétricas são também irreflexivas, as relações P e Q , assim como a relação J , que modela a incomparabilidade entre alternativas, são irreflexivas. É natural esperar que as relações P , Q e J sejam irreflexivas por causa da reflexividade da relação I : ao considerar que uma alternativa é indiferente a si mesma, ela não pode ser incomparável ou preferida a si mesma. A relação de incomparabilidade é usada para representar situações em que não se observa indiferença ou qualquer preferência entre as alternativas. Além de ser irreflexiva, a relação J é também simétrica. A Tabela 5.2 expõe essas características intrínsecas às relações P , I , Q e J , entretanto, deve-se deixar claro que, além dessas características, essas relações podem apresentar propriedades adicionais, especialmente, diferentes formas de transitividade, resultando em diferentes tipos de ordenação [51].

5.4 Estruturas de Relações de Preferência

Do ponto de vista prático, uma estrutura de relações de preferência é um modelo matemático constituído por um conjunto de relações de preferência representadas por relações binárias. Os modelos convencionais são basea-

dos nas relações P , Q , I e J , sendo que alguns deles são mais simples e limitados, baseando-se apenas nas relações $\{P, I\}$, e outros são mais complexos e flexíveis, como os que se baseiam nas relações $\{P, I, J\}$, $\{P, Q, I, J\}$, $\{P, Q, I\}$. A cada estrutura é associado um modelo algébrico que permite a representação numérica de suas relações de preferência.

Formalmente, uma estrutura de relações de preferência constitui um grupo de relações binárias definidas em um conjunto de alternativas A , de modo que a primeira condição a seguir é atendida. Mas, se a estrutura atende às três condições listadas logo abaixo, então diz-se que ela constitui um *sistema fundamental de relações de preferência* [52].

1. Necessariamente, para cada par $a, b \in A$, uma e somente uma relação binária pertencente à estrutura é satisfeita, de modo que a estrutura é capaz de produzir a partição do conjunto $A \times A$.
2. Cada estrutura é unicamente caracterizada por uma relação binária S , chamada *relação característica*, de modo que cada relação de preferência que compõe a estrutura possa ser representada em função apenas de S . Nas estruturas convencionais, que envolvem apenas as relações P , Q , I e J , a relação característica pode ser definida como $S = P \cup I$ ou como $S = P \cup I \cup Q$. Embora não seja uma regra, geralmente S é uma relação binária reflexiva e pode ser lida como: “é pelo menos tão bom quanto”.
3. Cada relação de preferência da estrutura deve ser unicamente caracterizada por suas propriedades (simetria, reflexividade, transitividade e outras).

O desenvolvimento de novas estruturas de relações de preferência e de modelos algébricos que as representem é incentivado, pois novos métodos para tomada de decisão podem ser criados a partir deles. Nos últimos anos, a pesquisa por novas estruturas tem crescido muito, pois a abordagem clássica tem sido fortemente criticada devido a sua rigidez e a outros pontos críticos: por modelar a indiferença e a preferência como relações binárias transitivas e por não modelar certas situações específicas de incomparabilidade.

A transitividade parece ser essencial para garantir a coerência das relações de indiferença e preferência. Afinal, se alguém prefere a a b e b a c , espera-se, intuitivamente, que a seja preferido a c . Similarmente, se alguém julga que a é indiferente a b e b a c , é natural esperar que essa pessoa julgue que a seja indiferente a c . Entretanto, a literatura apresenta vários casos em que a preferência e a indiferença podem não ser transitivas. Em [53], é utilizado o seguinte exemplo: considere que três candidatos, a , b e c , disputam uma

Tabela 5.3: Matriz de avaliação de alternativas que pode gerar julgamentos intransitivos [53].

Candidatos	Inteligência	Experiência
<i>a</i>	2 ϵ	6 ϵ
<i>b</i>	3 ϵ	4 ϵ
<i>c</i>	4 ϵ	2 ϵ

vaga em uma empresa e os dados na Tabela 5.3 são as notas referentes à inteligência e à experiência de cada um deles. Ao comparar *a* e *b*, *a* pode ser preferido pois sua experiência é muito maior e, no que se refere à inteligência, ambos possuem notas próximas. Ao comparar *b* e *c*, *b* pode ser preferido pela mesma razão. Entretanto, ao comparar *a* e *c*, *c* pode ser preferido porque, apesar de sua experiência ser muito menor, sua inteligência é muito maior e o critério inteligência pode ser mais importante para o decisor. Na realidade, esses julgamentos ilustram um comportamento humano comum em decisões em que são considerados dois critérios [43]. Nesse tipo de situação, o homem tende a adotar a seguinte estratégia para fazer sua escolha entre duas alternativas:

- **Primeiro passo.** O decisor efetua sua escolha pela alternativa não dominada.
- **Segundo passo.** Se o passo anterior não for suficiente, o decisor procura similaridades entre as alternativas comparando-as segundo cada um dos critérios. Caso haja similaridade em algum critério, então o decisor desconsidera esse critério e faz sua escolha baseada apenas no critério restante.
- **Terceiro passo.** Se os estágios anteriores não forem suficientes, a escolha baseia-se em algum outro critério de escolha qualquer.

Geralmente, situações em que a preferência descreve um ciclo — $aPbPcPa$ — são tidas como inconsistentes pela abordagem clássica, pois matematicamente fica difícil definir uma solução única para esse problema. Um exemplo simples em que a indiferença não é transitiva refere-se à medição da quantidade de açúcar em uma xícara de café. Uma pessoa pode julgar que 10g de açúcar no café é indiferente a 20g, que 20g é indiferente a 30g, que 30g é indiferente a 40g, e assim por diante. Assumindo-se que a indiferença é transitiva — $aIb \wedge bIc \Rightarrow aIc$ — chega-se à conclusão irreal de que essa pessoa julga que 10g é indiferente a 100g [20].

As situações de incomparabilidade, por sua vez, ocorrem com frequência em aplicações concretas devido à escassez de informações, ambigüidades ou avaliações conflitantes. Um exemplo é a situação em que um gerente deve escolher, para uma vaga na empresa, um entre dois candidatos, João e Maria. No entanto ele não conhece nenhum dos dois. Nesse caso, ele responderia “Não tenho a informação necessária para responder a essa questão.”. Supondo-se agora que duas pessoas igualmente confiáveis tenham passado informações contraditórias para ele: enquanto uma delas disse que João não é confiável e Maria tem um excelente currículo, a outra disse que João é ótimo candidato à vaga e Maria tem péssimas referências. Nesse caso, o decisor responderia “Eu não sei.”. De fato, a incomparabilidade não é uma perspectiva inapropriada, mas uma situação complexa dificilmente representada pela modelagem de preferências convencional [54].

A seguir são apresentadas e caracterizadas as principais estruturas de relações de preferência existentes na literatura. Não é objetivo deste documento descrever todas as que existem. Para o leitor interessado em uma lista mais abrangente recomenda-se a leitura das referências [51], [52]. As estruturas são aqui caracterizadas de duas formas: pela descrição de cada uma de suas relações, ou equivalentemente, pela descrição de sua relação característica.

5.4.1 Estruturas $\{P, I\}$

A abordagem clássica da modelagem de preferências é baseada em estruturas $\{P, I\}$. Essas permitem representar apenas três possíveis situações, ao comparar duas alternativas a e $b \in A$:

- $aPb \Leftrightarrow aSb \wedge bS^c a$;
- $bPa \Leftrightarrow bSa \wedge aS^c b$;
- $aIb \Leftrightarrow aSb \wedge bSa$.

Como a estrutura $\{P, I\}$ não admite situações de incomparabilidade (ou seja, julgamentos em que $aS^c b \wedge bS^c a$), sua relação característica $S = P \cup I$ é completa. Dependendo das características das relações P e I , a relação S em A pode ser classificada como: ordem total, ordem fraca, ordem intervalar ou semi-ordem. Estas quatro estruturas são descritas a seguir, sendo que as estruturas de ordem total e ordem fraca são apresentadas com mais detalhes, por serem empregadas pelos métodos mais populares da Escola Americana.

Estrutura $\{P, I\}$ de Ordem Total

As relações P e I dessa estrutura possuem as seguintes características:

- $I = \{(a, a), \forall a \in A\}$;
- P é assimétrica e transitiva;
- $P.I \cup I.P \subset P$.

Equivalentemente, pode-se dizer que S é: a) transitiva, b) anti-simétrica e c) completa — ou seja, uma relação de ordem total.

Demonstrações:

a) *Deseja-se provar que $aSb \wedge bSc \Leftrightarrow aSc, \forall a, b, c \in A$. Como I restringe-se ao conjunto de pares idênticos em $A \times A$, tem-se que: $aIb \wedge bIc \Leftrightarrow aIc$, pois, nesse caso, $a \equiv b \equiv c$. Por outro lado, $aSb \wedge bSc \Leftrightarrow aSc$ ou melhor, $a(P \cup I)b \wedge b(P \cup I)c \Leftrightarrow a(P \cup I)c$, pode ser desmembrada como a união de quatro possíveis situações:*

- I. $aPb \wedge bPc \Leftrightarrow aPc \vee aIc$;
- II. $aPb \wedge bIc \Leftrightarrow aPc \vee aIc$;
- III. $aIb \wedge bPc \Leftrightarrow aPc \vee aIc$;
- IV. $aIb \wedge bIc \Leftrightarrow aPc \vee aIc$.

O primeiro e o quarto casos são válidos pois as relações P e I são transitivas. O segundo e o terceiro casos são verdadeiros pois correspondem aos dois casos implícitos em $P.I \cup I.P \subset P$ ($\exists b : aPb \wedge bIc \Leftrightarrow aPc$ ou $\exists b : aIb \wedge bPc \Leftrightarrow aPc$).

b) *A prova de que $aSb \wedge bSa \Rightarrow a = b$ vem diretamente da definição da relação de indiferença $I = aSb \wedge bSa$ e de sua propriedade $I = \{(a, a), \forall a \in A\}$.*

c) *A demonstração de que S é completa vem diretamente do fato de que a estrutura $\{P, I\}$ não modela situações de incomparabilidade.*

Algebricamente, sendo S uma relação de ordem total em A , as relações P e I podem ser modeladas por uma função real $u : A \rightarrow \Re$ tal que [20]:

- $aPb \Leftrightarrow u(a) > u(b)$;
- $aIb \Leftrightarrow u(a) = u(b) \Leftrightarrow a \equiv b$.

Demonstração:

A demonstração da existência da função $u(\cdot)$, segundo a referência [52], utiliza o fato de que o grafo (A, P) da estrutura $\{P, I\}$ de ordem total possui um único caminho hamiltoniano. Um caminho hamiltoniano é um caminho simples, pois nunca passa mais de uma vez pelo mesmo nó, e completo, pois passa por todos os nós. De fato, como P é transitiva, o grafo (A, P) é um caminho simples $a_1Pa_2P \dots Pa_k$. Adicionando-se a esse grafo uma alternativa a^* tal que $a^* \neq a_i, \forall a_i \in A$ então, obviamente, uma das seguintes situações é verdadeira: a^*Pa_1 ou a_kPa^* ou $(a_iPa^* \wedge a^*Pa_{i+1})$. Assim, a partir de qualquer caminho simples em (A, P) , é possível obter um caminho simples completo adicionando-se, um a um, os demais nós do grafo. Esse caminho simples é único pois, a existência de outros caminhos levaria a formação de circuitos que contrariam a transitividade de P . Como a_iPa_j se e somente se $i < j$, então pode-se definir $u(a_i) = K - i$, sendo K uma constante qualquer.

Estrutura $\{P, I\}$ de Ordem Fraca

Nesta estrutura, as relações P e I possuem as seguintes características:

- I é reflexiva, simétrica e transitiva;
- P é assimétrica e transitiva;
- $P.I \cup I.P \subset P$.

A relação S , por sua vez, é a) transitiva e b) completa, ou seja, uma relação de ordem fraca.

Demonstrações:

a) De maneira análoga à demonstração referente à transitividade da relação S da estrutura $\{P, I\}$ de Ordem Total, a demonstração de $aSb \wedge bSc \Leftrightarrow aSc, \forall a, b, c \in A$, vem do fato de que I e P são por definição transitivas nessa estrutura e $P.I \cup I.P \subset P$.

b) A relação S é completa em consequência do fato de que a estrutura $\{P, I\}$ não considera situações de incomparabilidade.

Algebricamente, S pode ser representada por uma função real $u : A \rightarrow \Re$ de modo que [20]:

- $aPb \Leftrightarrow u(a) > u(b)$;

- $aIb \Leftrightarrow u(a) = u(b)$.

Demonstração:

A demonstração da existência da função $u(\cdot)$, nesse caso, parte do fato de que a relação de indiferença I da estrutura $\{P, I\}$ de ordem fraca é uma relação de equivalência, que permite a divisão de A em subconjuntos C_i disjuntos e não vazios, chamados classes de indiferença. Essa divisão é realizada de tal forma que todos os elementos pertencentes à mesma classe são indiferentes entre si. No caso da estrutura $\{P, I\}$ de ordem total, pode-se dizer que cada classe de indiferença C_i definida por I é um conjunto unitário. Nesse contexto, a função $u : A \rightarrow \mathfrak{R}$ para a estrutura $\{P, I\}$ de ordem total pode ser redefinida como:

- $C_i P C_j \Leftrightarrow u^*(C_i) > u^*(C_j)$;
- $u^*(C_i) \neq u^*(C_j) \Leftrightarrow C_i \neq C_j$.

Assumindo-se que $u(a) = u^*(C_i), \forall a \in C_i$ garante-se a existência da função $u(\cdot)$ para a estrutura $\{P, I\}$ de ordem fraca.

Estrutura $\{P, I\}$ de Ordem Intervalar

A estrutura de ordem intervalar foi desenvolvida no intuito de se enriquecer o modelo de ordem fraca, permitindo que a relação I não seja transitiva. Nesse caso, além das características básicas apresentadas na Tabela 5.2, as relações P e I de uma estrutura $\{P, I\}$ de ordem intervalar atendem às condições:

- P é transitiva e Ferrers;
- $P.I.P \subset P$.

A relação característica S , por sua vez, caracteriza-se por ser completa e Ferrers, sendo, portanto, uma ordem intervalar. O termo “ordem intervalar” refere-se ao fato de que esta estrutura vem da comparação de intervalos sobre a reta real. Um intervalo é preferido a outro se ele se encontra completamente à direita do outro. Os dois intervalos são indiferentes se eles se interceptam. Uma outra interpretação considera que as alternativas são indiferentes apenas quando um intervalo está contido no outro. Se os dois intervalos apenas se interceptam, então a alternativa referente ao intervalo mais à direita é fracamente preferida à outra. Entretanto, essa segunda interpretação tem sido bastante criticada por envolver a relação Q — de modo que a estrutura passa a ser $\{P, Q, I\}$ — que não pode ser diferenciada matematicamente da relação P , por serem ambas assimétricas [55].

O leitor interessado na demonstração referente à representação algébrica da estrutura $\{P, I\}$ intervalar deve consultar as referências [20] e [52], que provam a existência de duas funções reais $u : A \rightarrow \mathfrak{R}$ e $q : A \rightarrow \mathfrak{R}^+$ tais que:

- $aPb \Leftrightarrow u(a) > u(b) + q(b)$;
- $aIb \Leftrightarrow |u(a) - u(b)| \leq q(b)$.

Estrutura $\{P, I\}$ de Semi-ordem

As relações P e I de uma estrutura $\{P, I\}$ de semi-ordem possuem as seguintes características:

- P é transitiva, semi-transitiva e Ferrers;
- $P.I.P \subset P$;
- $P^2 \cap I^2 = 0$.

A relação S de semi-ordem é uma relação intervalar (completa e Ferrers) semi-transitiva, que pode ser representada algebricamente por uma função real $u : A \rightarrow \mathfrak{R}$ e uma constante δ real positiva tais que [20] e [52]:

- $aPb \Leftrightarrow u(a) > u(b) + \delta$;
- $aIb \Leftrightarrow |u(a) - u(b)| \leq \delta$.

Tanto a ordem intervalar quanto a semi-ordem são relações intermediárias à ordem total e a ordem fraca. Em ambos os casos, $aPb \Leftrightarrow$ “*Int(a) encontra-se completamente à direita de Int(b)*”, sendo $Int(\cdot)$ uma função que associa a cada alternativa um intervalo da reta real. No caso da semi-ordem, os intervalos de indiferença são do mesmo tamanho.

5.4.2 Estruturas $\{P, I, J\}$, $\{P, Q, I\}$ e $\{P, Q, I, J\}$

Para tratar situações de incomparabilidade foram desenvolvidas as estruturas parciais $\{P, I, J\}$. Essas são extensões das estruturas $\{P, I\}$ já vistas aqui, com a diferença de que suas relações características não são completas. Ao adicionar a relação J às estruturas $\{P, I\}$ de ordem total, fraca, intervalar e de semi-ordem, obtém-se, respectivamente, as estruturas de ordem parcial, preordem parcial (quase-ordem), intervalar parcial e semi-ordem parcial. Para essas estruturas parciais existem também funções capazes de

associar a cada alternativa números que representem as preferências do decisor. Os teoremas que garantem a existência dessas funções são semelhantes àqueles referentes às estruturas $\{P, I\}$. Por exemplo:

Se S é uma quase-ordem, então:

- $aPb \Rightarrow u(a) > u(b)$;
- $aIb \Rightarrow u(a) = u(b)$.

Porém, as implicações desses teoremas referentes às estruturas $\{P, I, J\}$ funcionam apenas em uma direção, conforme indicada pelo símbolo \Rightarrow . Por causa disso, essas estruturas parciais tem aplicabilidade limitada.

As estruturas $\{P, Q, I\}$ e $\{P, Q, I, J\}$, por sua vez, desenvolvidas utilizando-se a lógica booleana, também têm sido fortemente criticadas por não conseguirem diferenciar matematicamente as relações P e Q , visto que ambas possuem as mesmas propriedades — ambas são assimétricas. Pela definição de sistema fundamental de relações de preferência, a partir da relação característica S deve ser possível deduzir as diferentes atitudes de preferência. Entretanto, a linguagem binária admite no máximo 3 diferentes atitudes baseadas na relação S :

- Preferência: $aPb \Leftrightarrow aSb \wedge bS^c a$;
- Indiferença: $aIb \Leftrightarrow aSb \wedge bSa$;
- Incomparabilidade: $aJb \Leftrightarrow aS^c b \wedge bS^c a$.

De fato, conforme demonstrado em [56], dada uma linguagem com n valores, podem ser definidas até o máximo de $n(n+1)/2$ relações de preferência a partir de uma mesma relação característica S .

Demonstração:

Dada uma linguagem com n valores, $S(a, b)$ e $S(b, a)$ podem assumir cada uma n valores distintos. Por exemplo, na lógica binária, $S(a, b)$ e $S(b, a)$ podem assumir os valores: falso ou verdadeiro. Portanto, existem n^2 possíveis combinações de S e S^{-1} , formando uma matriz $n \times n$. Essa matriz é simétrica pois combinações simétricas de S e S^{-1} resultam em uma relação R e em sua própria inversa. No caso da lógica binária, $aPb \equiv aSb \wedge bS^c a$ e $bPa \equiv aS^c b \wedge bSa$. Portanto, o número máximo de relações que podem ser definidas a partir de uma mesma relação característica S corresponde ao número de

elementos do triângulo superior (ou inferior) dessa matriz: $n(n + 1)/2$.

Dessa maneira, pela lógica convencional é impossível caracterizar a relação Q ou distinguir os casos de incomparabilidade causados por ignorância ou por conflito de informações. Por conta disso, pesquisadores têm desenvolvido estruturas de relações de preferência utilizando lógicas não convencionais, como a lógica de quatro valores: verdadeiro, falso, desconhecido, contraditório [57]. Seu uso permite o desenvolvimento de estruturas com até 10 relações de preferência, como a estrutura PC (Partial Comparability Structure), proposta em [58] e [59]. Como ainda não foi desenvolvido um modelo algébrico que comporte essas 10 relações, essa estrutura não tem sido aplicada diretamente em situações práticas. Entretanto, já existem tentativas bem sucedidas de se redefinir as estruturas convencionais, com seus próprios modelos algébricos, como casos particulares e simplificados da estrutura PC [56]. Todavia, o uso de uma linguagem tão complexa na prática é ainda questionável, principalmente por ainda não ter sido desenvolvida até hoje uma nova estrutura melhor do que as convencionais.

5.5 Conclusões

Esse capítulo expôs os fundamentos da modelagem da preferência por meio de relações binárias; o conceito de estruturas de relações de preferência e de relação característica. Essa teoria constitui uma base comum para o entendimento dos métodos para tomada de decisão multicritério desenvolvidos pelas escolas Francesa e Americana. Além disso, foram apresentadas as principais estruturas desenvolvidas segundo a abordagem convencional, que se baseia na lógica binária. Entretanto, conforme foi visto, a abordagem convencional para modelagem da preferência humana tem poder limitado, pois não distingue as situações de incomparabilidade, os tipos de relação de preferência ou não são flexíveis o bastante para modelar certas atitudes do decisor.

O desenvolvimento de novas abordagens é encorajado a fim de se melhorar a operacionalidade e a fidelidade dos modelos da preferência humana. As iniciativas nesse sentido incluem a identificação de novos tipos de relação de preferência capazes de representar situações particulares e a utilização de lógicas não convencionais, que possibilitam a criação de modelos mais flexíveis e de métodos de decisão mais sofisticados. A pesquisa quanto ao emprego da lógica de quatro valores no desenvolvimento de novas estruturas constitui uma dessas iniciativas. Entretanto, essa pesquisa ainda se encontra em estado inicial, visto que ainda não foram desenvolvidos novos modelos mais satisfatórios, capazes de representar com maior fidelidade as atitudes

do decisor. O capítulo seguinte apresenta uma iniciativa concorrente a esta, que consiste em desenvolver relações e estruturas de relações de preferência baseadas na lógica nebulosa.

Capítulo 6

Modelagem da Preferência pela Lógica Fuzzy

6.1 Introdução

Sabe-se que a preferência de um decisor humano origina-se, transforma-se e justifica-se pelo seu próprio sistema de valores, sua interação com outros decisores, sua percepção das alternativas que estão sendo comparadas. Assim, incerteza, imprecisão e ambiguidade são aspectos intrínsecos à tomada de decisão. Entretanto, a abordagem clássica baseada na lógica binária tende a representar a preferência humana através de modelos simplistas, que consideram os julgamentos humanos precisos e bem definidos. Para representar julgamentos vagos, a lógica Fuzzy (ou nebulosa) pode ser mais adequada. A idéia de relações de preferência nebulosas aparece na literatura pela primeira vez em dois artigos: em 1977 com Roy [60] e em 1978 com Orlovsky [61]. O primeiro apresenta o método Electre III, que associa um índice de credibilidade, com valor entre 0 e 1, à relação de sobreclassificação. O segundo propõe a modelagem de relações de preferência e indiferença nebulosas.

Hoje, existem vários métodos que se baseiam em relações nebulosas de preferência, como os conhecidos Electre [62] e o Promethee [35]. Ambos foram desenvolvidos antes que qualquer fundamentação axiomática fosse proposta nesse sentido [57]. Vale ressaltar que a teoria exposta aqui não serve de base para esses dois métodos, embora possa ser empregada em outros que venham a existir.

O presente capítulo introduz a teoria básica relativa à lógica Fuzzy e à modelagem de relações nebulosas de preferência, dando continuidade ao estudo apresentado no Capítulo 5.

6.2 Lógica Nebulosa

Um conjunto clássico possui seus limites bem definidos de tal modo que, se for questionada a pertinência de um dado elemento a esse conjunto, a resposta será do tipo falso (0) ou verdadeiro (1). A fronteira exata de um conjunto nebuloso, por sua vez, é indefinida. A pertinência ou não-pertinência de um elemento x ao conjunto nebuloso A é definida por uma função $\mu(x)$, que assume valores no intervalo $[0, 1]$, conforme o grau de pertinência de x ao conjunto A . Essa representação permite uma transição gradual entre a pertinência ($\mu(x) = 1$) e a não-pertinência ($\mu(x) = 0$).

Assim, dado um conjunto universo X , tal que $A \subset X$, $\mu_A(x)$ determina o grau de pertinência ao conjunto A de cada elemento $x \in X$. Os conjuntos nebulosos possuem operações similares às operações de união, interseção e complemento dos conjuntos clássicos.

A função de pertinência de um conjunto C obtido a partir da interseção de conjuntos nebulosos, $C = A \cap B$, pode ser definida a partir das funções de pertinência de A e de B , por $\mu_C = T(\mu_A, \mu_B)$, onde T representa uma classe de operadores de interseção nebulosa denominada T-norma, que satisfaz às condições [63]:

- condição de fronteira: $T(0, 0) = 0, T(x, 1) = T(1, x) = x$;
- monotonicidade: $T(w, x) \leq T(y, z)$, se $w \leq y \wedge x \leq z$;
- propriedade comutativa: $T(x, y) = T(y, x)$;
- propriedade associativa: $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$.

Analogamente, a função de pertinência de um conjunto C obtido a partir da união de conjuntos nebulosos, $C = A \cup B$, pode ser definida por uma função U : $\mu_C = U(\mu_A, \mu_B)$. Essa função representa uma classe de operadores de união nebulosa denominada, T-conorma, que satisfaz às seguintes condições [63]:

- condição de fronteira: $U(1, 1) = 1, U(0, x) = U(x, 0) = x$;
- monotonicidade: $U(w, x) \leq U(y, z)$, se $w \leq y \wedge x \leq z$;
- propriedade comutativa: $U(x, y) = U(y, x)$;
- propriedade associativa: $U(x, U(y, z)) = U(U(x, y), z)$.

Finalmente, o operador nebuloso de complemento (ou negação) consiste em uma função de $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que atende às condições:

Tabela 6.1: Exemplos de operadores T-norma e T-conorma N-duais para $N(x) = (1 - x)$ [63].

T-norma	T-conorma
$T_{min}(a, b) = \min(a, b).$	$U_{max}(a, b) = \max(a, b).$
$T_{ap}(a, b) = ab.$	$U_{as}(a, b) = a + b - ab.$
$T_{bp}(a, b) = 0 \vee (a + b - 1).$	$U_{bs}(a, b) = 1 \wedge (a + b).$
$T_{dp}(a, b) = \begin{cases} a, & \text{se } b = 1, \\ b, & \text{se } a = 1, \\ 0, & \text{se } a, b < 1. \end{cases}$	$U_{ds}(a, b) = \begin{cases} a, & \text{se } b = 0, \\ b, & \text{se } a = 0, \\ 1, & \text{se } a, b > 0. \end{cases}$

- condição de fronteira: $N(0) = 1, N(1) = 0$;
- monotonicidade: $N(x) \geq N(y)$, se $x \leq y$;
- involução: $N(N(x)) = x$ — opcionalmente, o operador de negação pode ser involutivo e, nesse caso, passa a ser chamado de negação forte.

Quando os operadores T-norma, T-conorma e de negação atendem às condições a seguir, diz-se que eles constituem uma tripla (T, U, N) de De-Morgan:

$$T(x, y) = N(U(N(x), N(y))), \quad (6.1)$$

$$U(x, y) = N(T(N(x), N(y))). \quad (6.2)$$

A partir dessas condições, dado um certo operador T-norma e um operador Negação, sempre é possível obter o seu N-dual T-conorma através da Equação 6.1 ou, analogamente, através da Equação 6.2, um operador T-norma pode ser obtido para um determinado operador T-conorma. A Tabela 6.2 exibe exemplos de T-norma e T-conorma duais, obtidos utilizando-se o modelo clássico de negação $N(x) = (1 - x)$.

Nas seções a seguir, são definidas as relações binárias nebulosas correspondentes às relações convencionais P, I e J . Para a caracterização dessas, através da lógica Fuzzy, é utilizado, frequentemente, o conceito de *automorfismo*. Chama-se automorfismo do intervalo unitário uma função ϕ , estritamente crescente de $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ e que satisfaz às condições de contorno: $\phi(0) = 0$ e $\phi(1) = 1$.

6.3 Relações Binárias Nebulosas

A relação binária nebulosa R em A consiste em um conjunto nebuloso e possui, portanto, uma função de pertinência $\mu_R : A \times A \rightarrow [0, 1]$. Por uma questão de simplicidade, a função μ_R será representada aqui pelo mesmo símbolo R . As relações inversa R^{-1} , dual R^d e complementar R^c são definidas como:

- $R^{-1}(a, b) = R(b, a)$,
- $R^c(a, b) = 1 - R(a, b)$,
- $R^d(a, b) = 1 - R(b, a) = (R^{-1}(a, b))^c$.

A lista a seguir estende, para as relações nebulosas, as principais propriedades das relações binárias clássicas e a Tabela 6.2 caracteriza, através dessas propriedades, os tipos de relações binárias nebulosas de ordenação:

- Propriedade reflexiva: $R(a, a) = 1, \forall a \in A$;
- Propriedade irreflexiva: $R(a, a) = 0, \forall a \in A$;
- Propriedade simétrica: $R(a, b) = R(b, a), \forall a, b \in A$;
- Propriedade T -assimétrica: $T(R(a, b), R(b, a)) = 0, \forall a, b \in A$;
- Propriedade T -anti-simétrica: $T(R(a, b), R(b, a)) = 0 \rightarrow a \neq b, \forall a, b \in A$;
- Propriedade T -transitiva: $T(R(a, b), R(b, c)) \leq R(a, c), \forall a, b, c \in A$;
- Propriedade T - U -semi-transitiva: $T(R(a, d), R(d, b)) \leq U(R(a, c), R(c, b))$;
- Propriedade negativamente U -transitiva: $R(a, b) \leq U(R(a, c), R(c, b))$;
- Propriedade $T - U$ -Ferrers: $T(R(a, b), R(c, d)) \leq U(R(a, d), R(c, b))$;
- Propriedade completa: $U(R(a, b), R(b, a)) = 1 \rightarrow a \neq b$.

Tabela 6.2: Tipos de relações nebulosas de ordenação.

Tipos de ordenação	Propriedades da relação característica
Ordem completa fuzzy	T-anti-simétrica, T-transitiva e completa
Ordem fraca fuzzy	T-transitiva e completa
Semi-ordem fuzzy	T-U-Ferrers, T-U-semi-transitiva e completa
Ordem intervalar fuzzy	Ferrers e completa
Ordem parcial fuzzy	T-anti-simétrica, reflexiva e T-transitiva
Preordem parcial fuzzy	Reflexiva e T-transitiva

6.4 Relações Nebulosas de Preferência

A abordagem clássica de modelagem de preferências permite a representação das relações P , I e J , a partir da relação característica S . Assim, utilizando-se as operações habituais da teoria dos conjuntos, tem-se que:

$$I = S \cap S^{-1}, I = I^{-1}; \quad (6.3)$$

$$P = S \cap S^d, P \cap P^{-1} = \emptyset; \quad (6.4)$$

$$J = S^c \cap S^d, J = J^{-1}; \quad (6.5)$$

$$S = P \cup I \text{ ou, equivalentemente, } S^d = P \cup J. \quad (6.6)$$

Foi visto no Capítulo 5 que uma estrutura de relações de preferência deve, necessariamente, atender à seguinte condição: para cada par $a, b \in A$ uma e somente uma relação deve ser atendida. No caso de uma estrutura $\{P, I, J\}$, essa condição implica em:

$$P \cap I = \emptyset, P \cap J = \emptyset, J \cap I = \emptyset; \quad (6.7)$$

$$P \cup I \cup P^{-1} = S \cup S^{-1}. \quad (6.8)$$

A incerteza intrínseca aos julgamentos humanos incentivou o desenvolvimento de novas estruturas, a partir da extensão desses resultados para conjuntos nebulosos. Assim, foi desenvolvida a estrutura de relações nebulosas de preferência $\{P, I, J\}$, caracterizada pela relação binária nebulosa S . O valor $S(a, b)$, que representa o grau ou *índice de credibilidade* em que a é pelo menos tão bom quanto b , pode ser diretamente especificado pelo decisor ou calculado indiretamente a partir de diferentes conceitos. Em Electre [62] e Promethee [35], por exemplo, esse índice é definido pelo próprio método — e não pelo decisor — a partir de informações obtidas nas comparações entre as alternativas segundo cada critério.

A estrutura nebulosa $\{P, I, J\}$ deve atender aos três axiomas a seguir [65]:

1. **Independência de alternativas irrelevantes.** Dadas duas alternativas a e b , os valores de $P(a, b)$, $I(a, b)$ e $J(a, b)$ dependem apenas dos valores de $S(a, b)$ e $S(b, a)$. Portanto, existem três funções p , i e j , todas definidas de $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, tais que:

- $p(S(a, b), N(S(b, a))) = P(a, b)$,
- $i(S(a, b), S(b, a)) = I(a, b)$,
- $j(N(S(a, b)), N(S(b, a))) = J(a, b)$.

2. **Princípio de associação positiva.** As funções $p(S(a, b), N(S(b, a)))$, $i(S(a, b), S(b, a))$, $j(N(S(a, b)), N(S(b, a)))$ devem ser não decrescentes em relação aos seus dois argumentos. Esse princípio pode ser justificado pelas seguintes observações: no caso da função referente à relação P , considerando-se o primeiro argumento de p , se o grau em que a é pelo menos tão bom quanto b está crescendo, então é razoável que o grau em que a é preferido a b não decresça. Por outro lado, considerando-se o segundo argumento de p , se o grau em que b não é pelo menos tão bom quanto a está crescendo, então espera-se que o grau em que a é preferido a b não decresça. Aspectos similares justificam a associação positiva para as funções i e j .

3. **Simetria.** Como I e J são simétricas, as funções i e j devem ser simétricas em relação aos seus argumentos. Embora P seja assimétrica, não há necessidade de se exigir que p seja assimétrica [64], [65].

Entretanto, a utilização da lógica nebulosa na modelagem da preferência humana, através das relações P , I e J , envolve algumas particularidades. De fato, em [66] foi demonstrado que é impossível satisfazer às equações 6.3 - 6.7, simultaneamente, — e preservar importantes propriedades dessas relações — se, para o conector \cap , é sempre usado o mesmo operador T-norma. Por isso, partindo do pressuposto que as operações de interseção, união e complemento sejam implementadas através de uma tripla de DeMorgan (T, U, N) , em que T é uma T-norma contínua, N é uma negação forte e U , a N-dual de T , foram estabelecidas certas condições que devem ser atendidas pelas funções p , i e j e pelos operadores negação, T-norma e T-conorma. Essas condições provêm das equações 6.6, que podem ser transcritas em um sistema de equações de funcionais [66]:

$$\begin{cases} U(p(x, N(y)), i(x, y)) = x, \\ U(p(x, N(y)), j(N(x), N(y))) = N(y), \end{cases} \quad (6.9)$$

para todo $x, y \in [0, 1]$, sendo $x = S(a, b)$ e $y = S(b, a)$.

O modelo nebuloso da preferência humana envolve, portanto, o conjunto de funções (p, i, j, T, U, N) , que pode ser definido solucionando-se o sistema 6.9. Em [65] são definidas e demonstradas importantes propriedades das possíveis soluções desse sistema.

- Se as equações de 6.9 são satisfeitas, então N deve ser uma negação forte tal que:

$$N(x) = \phi^{-1}(1 - \phi(x)).$$

- Se as equações de 6.9 são satisfeitas, então T deve ser tal que:

$$T(x, y) = \phi^{-1}(\max\{\phi(x) + \phi(y) - 1, 0\}).$$

- Toda solução de 6.9 satisfaz automaticamente às igualdades:

- $T(p(x, y), p(y, x)) = 0$;
- $T(p(x, y), i(x, y)) = 0$;
- $T(p(x, y), j(x, y)) = 0$;
- $T(i(x, y), j(x, y)) = 0$;
- $U(p(x, y), p(y, x), i(x, y), j(x, y)) = 1$.

- A solução (p, i, j, T, U, N) do sistema 6.9 atende à condição 6.8 se e somente se:

- $p(x, N(y)) = \min(x, N(y))$,
- $i(x, y) = T(x, y)$,
- $j(x, y) = T(N(x), N(y))$.

6.5 Exemplo de Aplicação

Esta seção descreve uma maneira de se aplicar a teoria aqui exposta, na tomada de decisão multicritério. No entanto, é válido lembrar que a literatura contém outras formas, além desta, de explorar os modelos baseados em relações de preferência nebulosas [67].

Conforme mencionado anteriormente, os valores de $S(a, b), \forall(a, b) \in A$ podem ser obtidos de diversas formas. Uma possível maneira é a partir da avaliação direta do decisor, que define o grau de preferência de a em relação a b no intervalo $[0, 1]$. Tendo em mãos a matriz de comparações entre todos os

pares de possíveis soluções, a teoria exposta nesse capítulo permite calcular o valor de $P(a, b)$. Como $P(a, b)$ descreve o conjunto de alternativas que são estritamente preferidas à a , o complemento de $P(a, b)$ fornece o conjunto das que não são preferidas à a . Assim, para encontrar o conjunto de alternativas que não são preferidas a qualquer outra alternativa em A , basta obter o conjunto resultante da interseção de todas as relações $P^c(a, b), \forall a \in A$:

$$C(a) = \inf_{b \in A} [1 - P(b, a)]. \quad (6.10)$$

A escolha final deve ser a(s) alternativa(s) que atende(m) à condição [67]:

$$a = \{a \in A | C(a) = \sup_{b \in A} [C(b)]\}. \quad (6.11)$$

No caso da decisão com múltiplos critérios, pode-se definir uma relação $S_i(a, b), i = 1, 2, \dots, m$ para cada critério e definir a relação global como a interseção entre essas relações, conforme mostra a Equação 6.12.

$$S(a, b) = \min(S_1(a, b), \dots, S_m(a, b)), a, b \in A. \quad (6.12)$$

6.6 Conclusões

É fato que, em aplicações práticas, as informações disponíveis sobre o problema de decisão e a preferência do decisor nem sempre são perfeitamente claras e bem definidas. Uma possível maneira de se incluir essa incerteza nos modelos da preferência humana é através da relação Q de preferência fraca. Entretanto, como visto no Capítulo 5, a lógica binária impõe dificuldades para a inclusão dessa relação. Diante dessa dificuldade, a lógica fuzzy mostra-se como uma solução natural para a criação de modelos mais reais e flexíveis, capazes de representar a incerteza do julgamento humano.

Esse capítulo apresentou a teoria referente à modelagem da preferência através da lógica nebulosa e mostrou como esta pode ser usada na prática.

Capítulo 7

Teoria da Utilidade Multiatributo

7.1 Introdução

Os métodos da Escola Americana baseiam-se na teoria da utilidade multiatributo (ou MAUT - Multiattribute Utility Theory), segundo a qual em problemas de decisão é possível construir um funcional $U(.)$ que represente a preferência do decisor. Através de $U(.)$ é atribuído um valor escalar a cada alternativa de A e essas são então ordenadas a partir da simples comparação de valores.

O processo de construção de $U(.)$ envolve basicamente dois estágios. Inicialmente, são construídas funções utilidade $u : A \rightarrow \Re$ para cada critério, que atribuem notas (valor escalar de caráter ordinal) a cada alternativa. Posteriormente essas funções são agregadas originando o funcional $U(.)$. Na literatura, vários modelos de agregação foram propostos, embora o mais adotado na prática e mais simples seja o aditivo.

No presente capítulo, são expostos os principais conceitos envolvidos na teoria da utilidade multiatributo e na agregação através do modelo aditivo. A teoria da utilidade multiatributo divide-se ainda em duas sub-áreas: a determinística e a probabilística. Enquanto a primeira envolve escolhas cujas conseqüências são conhecidas e definitivas, a segunda considera a incerteza da conseqüência de uma escolha. Este capítulo começa apresentando a teoria da utilidade determinística — sendo desprezados problemas de decisão sob incerteza — e, posteriormente, descreve alguns métodos para construção de funções utilidade $u(.)$ e do funcional $U(.)$.

7.2 Preferências em MAUT

MAUT baseia-se na abordagem clássica de modelagem de preferências, que utiliza estruturas $\{P, I\}$ para modelar a preferência humana. Isso significa que, dado um conjunto A , para cada par $(a, b) \in A$ apenas um dos três casos a seguir é verdadeiro:

- aPb : a é preferida à b ;
- bPa : b é preferida à a ;
- aIb : a é indiferente à b .

A relação característica S , definida como $S = P \cup I$, deve ser entendida como “é pelo menos tão boa quanto”.

7.3 Função Utilidade

De acordo com a teoria da utilidade, é possível construir, para um dado critério, uma função $u(\cdot)$ definida em A , capaz de refletir as preferências do decisor considerando-se o ponto-de-vista em questão. A função $u : A \rightarrow \Re$ associa um número a cada alternativa, permitindo a ordenação das alternativas pela simples comparação de valores. A ordenação dos números reais através das relações $>$ e $=$ é utilizada para refletir a ordenação das alternativas através das relações P e I , respectivamente. Mas a existência dessa função $u(\cdot)$ impõe algumas restrições como: S deve ser pelo menos uma relação de ordem fraca (entenda-se: deve possuir pelo menos as propriedades da relação de ordem fraca) ou então, P deve ser pelo menos uma ordem estrita parcial.

7.4 Agregação de Critérios

Embora a teoria vista até agora neste capítulo considere apenas problemas de decisão monocritério, ela também pode ser aplicada em problemas de tomada de decisão com múltiplos critérios. Para cada critério deve ser construída uma função u_i e o conjunto resultante de funções deve ser agregado em um funcional $U(u_1, u_2, \dots, u_m)$, que deve representar as preferências do decisor. A agregação dessas funções envolve alguns novos conceitos, como *independência preferencial* e *independência preferencial mútua* [23]. Na introdução desses conceitos, será considerado que C_1, C_2, \dots, C_m são, respectivamente, os conjuntos de possíveis valores correspondentes aos m critérios e C é o produto cartesiano $C = C_1 \times C_2 \times \dots \times C_m$. Assim, a avaliação

de uma alternativa genérica pertencente a A segundo m critérios é dada por $(u_1(a_1), u_2(a_2), \dots, u_m(a_m))$, sendo (a_1, a_2, \dots, a_m) os atributos de a segundo cada critério e $u_1(a_1), u_2(a_2), \dots, u_m(a_m)$ valores pertencentes a C_1, C_2, \dots, C_m , respectivamente.

Independência preferencial. Considere que β e $\bar{\beta}$ são conjuntos tais que qualquer alternativa $a \in C$ possa ser escrita como $a = (\alpha, \bar{\alpha})$, sendo $\alpha \in \beta$ e $\bar{\alpha} \in \bar{\beta}$. Existe independência preferencial entre β e $\bar{\beta}$ se e somente se, fixando-se um elemento $\alpha \in \beta$, é verdade que: $(\alpha, b)S(\alpha, c) \Rightarrow (d, b)S(d, c), \forall d \in \beta$, sendo b e c elementos quaisquer em $\bar{\beta}$.

Independência preferencial mútua. Há independência preferencial mútua em C quando se verifica a independência preferencial para todo e qualquer par de conjuntos não nulos β e $\bar{\beta}$. Exemplo: Se $C = C_1 \times C_2 \times C_3$ apresenta independência preferencial mútua, então, os seguintes conjuntos devem apresentar independência preferencial: C_1 e $\{C_2, C_3\}$; $\{C_2, C_3\}$ e C_1 ; C_2 e $\{C_1, C_3\}$; $\{C_1, C_3\}$ e C_2 ; C_3 e $\{C_1, C_2\}$; $\{C_1, C_2\}$ e C_3 ; e, finalmente, C_1, C_2 e C_3 , entre si.

Tendo verificado a existência de funções que representem a preferência do decisor, é necessário selecionar o funcional adequado, conforme as condições de independência entre os critérios. A técnica de agregação mais simples e mais empregada na prática é a aditiva:

$$U(a) = \sum_{i=1}^m w_i u_i(a_i), \quad (7.1)$$

sendo w_i os pesos relativos a cada critério e $\sum_{i=1}^m w_i = 1$.

Entretanto, o modelo aditivo só deve ser aplicado caso haja independência preferencial entre os critérios. Em problemas com mais de dois critérios, a existência de independência preferencial mútua em C é condição suficiente para se aplicar a agregação aditiva. No caso de problemas com apenas dois critérios, é necessário que a relação S satisfaça à *condição de cancelamento* e esta garante a independência preferencial entre ambos critérios [23].

Condição de cancelamento. Em um problema com dois critérios, diz-se que a relação de preferência S atende à condição de cancelamento se, dados quaisquer $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \in C_1$ e $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in C_2$:

$$(\alpha_1, \gamma_2)S(\gamma_1, \beta_2) \wedge (\gamma_1, \alpha_2)S(\beta_1, \gamma_2) \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)S(\beta_1, \beta_2).$$

É importante lembrar que existem outros modelos de agregação além da aditiva como, por exemplo, a quase-aditiva e a multiplicativa-aditiva [23]. Assim como a condição de independência preferencial mútua deve ser observada antes de se aplicar a agregação aditiva, os outros modelos exigem que sejam atendidas outras condições específicas que, em geral, não são facilmente verificadas.

Independentemente da agregação adotada, normalmente, a ordenação final das alternativas é definida de tal modo que: se $U(a) \geq U(b) \Rightarrow aSb$. O uso da relação matemática \geq para modelar o conceito “pelo menos tão boa quanto” gera uma preordem completa das alternativas, ou seja, uma ordem transitiva e completa (não sendo admitido portanto o julgamento de incomparabilidade).

Tendo escolhido um modelo de agregação adequado para o problema em questão, pode-se então começar a construir as funções u_i para cada critério. A forma mais simples de se realizar essa tarefa, se o conjunto A é discreto, é pedindo ao decisor para atribuir uma nota $u_i(a_i)$ para cada alternativa a . Mas, se o conjunto A é contínuo, esse procedimento torna-se inviável. Nesse caso, é interessante o uso de técnicas como o método do ponto médio e os métodos de aproximação por funções lineares, como Smarts, Smarter e Smarts Intervalar. Na verdade, essas técnicas podem ser aplicadas no caso de o conjunto A ser contínuo ou discreto e para critérios baseados em grandezas mensuráveis ou em julgamentos subjetivos do decisor. Ward Edwards sugeriu em [68], com o objetivo de simplificar o processo de construção de funções utilidade, uma técnica conhecida como *Simple Multi-attribute Rating Technique* (Smart) que auxilia a construção do funcional $U(\cdot)$. Tendo descoberto falhas e limitações em Smart, Ward Edwards desenvolveu, posteriormente, as técnicas Smart Using Swings (Smarts) e Smart Exploiting Ranks (Smarter) descritas aqui. O presente capítulo apresenta ainda uma terceira metodologia baseada no Smart, chamada Smarts Intervalar. Esta última permite ao decisor definir o funcional $U(\cdot)$ a partir de julgamentos imprecisos.

7.5 Método do Ponto Médio

O método do ponto-médio consiste em um conjunto de instruções para construção de funções utilidade. As instruções a seguir pressupõem que as conseqüências da execução de cada alternativa tenham sido avaliadas segundo cada critério, gerando uma Tabela semelhante à Tabela 7.1. Veja que neste exemplo as conseqüências são avaliadas diretamente a partir de funções objetivo. Porém, essa avaliação não necessariamente deriva de funções objetivo e pode corresponder a medidas físicas ou a grandezas imensuráveis [23].

Tabela 7.1: Exemplo de tabela de avaliação de conseqüências da execução de cada alternativa \vec{x}_i .

	c_1	c_2	\dots	c_m
\vec{x}_1	$f_1(\vec{x}_1)$	$f_2(\vec{x}_1)$	\dots	$f_m(\vec{x}_1)$
\vec{x}_2	$f_1(\vec{x}_2)$	$f_2(\vec{x}_2)$	\dots	$f_m(\vec{x}_2)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vec{x}_n	$f_1(\vec{x}_n)$	$f_2(\vec{x}_n)$	\dots	$f_m(\vec{x}_n)$

- **Passo 1.** Escolher um critério c_i e, para os demais, encontrar os piores valores para suas conseqüências. Esses valores devem ser utilizados nos testes a seguir.
- **Passo 2.** Identificar os limites inferior $fmin_i = \min(f_i(\vec{x}_1), \dots, f_i(\vec{x}_n))$ e superior $fmax_i = \max(f_i(\vec{x}_1), \dots, f_i(\vec{x}_n))$ das conseqüências para o critério c_i e atribuir as notas 0 e 1 ao pior e ao melhor valor. Por exemplo, se os valores mais baixos são os melhores, então: $u_i(fmin_i) = 1$ e $u_i(fmax_i) = 0$.
- **Passo 3.** Para obter o ponto médio $f_{[0,5]i}$, basta pegar um valor qualquer f'_i no intervalo $[fmin_i, fmax_i]$ e verificar o que o decisor prefere: trocar $fmin_i$ por f'_i ou f'_i por $fmax_i$. Se o decisor for indiferente pelas duas trocas, então $f_{[0,5]i} = f'_i$. Senão, outro ponto f''_i deve ser selecionado dentro do intervalo referente à melhor troca. Ou seja, se a segunda troca for preferida, então f''_i deve estar entre f'_i e $fmax_i$. Esse passo deve ser repetido até que o ponto $f_{[0,5]i}$ seja obtido e, nesse caso:

$$u_i(f_{[0,5]i}) = 1/2(u_i(fmin_i) + u_i(fmax_i)) = 0,5. \quad (7.2)$$

- **Passo 4.** Depois, o passo 3 deve ser repetido para se obter os pontos médios $f_{[0,25]i}$, entre $fmin_i$ e $f_{[0,5]i}$, e $f_{[0,75]i}$, entre $f_{[0,5]i}$ e $fmax_i$.
- **Passo 5.** Repetir os passos acima para os demais critérios.

7.6 Smarts

Sabe-se que o processo de construção de um funcional $U(\cdot)$ que represente as preferências do decisor pode ser bastante trabalhoso. Mas, na prática, um alto nível de detalhamento das funções utilidade para cada critério pouco contribui para o resultado final devido aos freqüentes erros de julgamento. A

fim de se evitar esse processo longo e sujeito a erros, Ward Edwards propôs a aproximação de cada função utilidade por funções lineares e a agregação dessas pelo modelo aditivo.

A seguir, são apresentadas de forma resumida as principais instruções dos métodos Smarts e Smarter, pressupondo-se que já tenham sido definidos o conjunto de possíveis soluções e de critérios. Conforme [25], é aconselhável que sejam considerados no máximo 11 critérios. No caso de esse número ser ultrapassado, é interessante considerar a possibilidade de se eliminar critérios de prioridade muito baixa, ou redefinir o conjunto agrupando alguns critérios, sob uma mesma legenda.

O método Smarts pode ser descrito através dos 7 passos a seguir:

- **Passo 1.** Construir uma tabela de avaliações de conseqüências semelhante à Tabela 7.1. As conseqüências podem corresponder a medidas físicas ou a características imensuráveis, como por exemplo, a cor de cada carro; a essência predominante em cada perfume; o estilo de cada construção (moderno, rústico, clássico, antigo). No caso de problemas de otimização, as conseqüências da implementação de cada alternativa podem ser definidas por meio da avaliação das funções objetivo.
- **Passo 2.** Eliminar as alternativas dominadas e verificar se algum dos intervalos $[fmin_i, fmax_i]$ diminuiu. Caso alguma dessas faixas tenha sido muito reduzida, é interessante considerar a possibilidade de se eliminar o critério c_i correspondente. Em [25], Ward Edwards usa o exemplo da compra de um carro para ilustrar a influência da extensão dessa faixa de valores na importância do critério. Na compra de um carro, o preço normalmente é um critério importante. Mas se o preço das alternativas disponíveis varia de R\$40.000,00 a R\$40.100,00, esse critério passa a ter menor prioridade. Se a prioridade for excessivamente baixa, o critério pode ser eliminado.
- **Passo 3.** Transformar os dados da tabela em funções utilidades u_i para cada critério. Para isso, é necessário verificar se os valores de $u_i(f_i(\vec{x}_j)), \forall j = 1, \dots, n$ podem ser aproximados por funções lineares. Ward Edwards propõe quatro tipos de funções utilidade, sendo que três correspondem a aproximações por funções lineares (Figuras 7.1, 7.2, 7.3) e o quarto tipo independe de grandezas mensuráveis (Figura 7.4). É importante que o tipo de função escolhida preserve o significado ordinal da preferência do decisor, de modo que uma alternativa \vec{x}_j associada a um maior valor de $u_i(f_i(\vec{x}_j))$ seja preferida à outra associada a um menor valor.

- **Passo 4.** Para agregar os critérios em um funcional que represente a preferência global do decisor, pode-se adotar o modelo aditivo (ver Equação 7.1), que é o mais simples. Para verificar se o uso desse modelo é razoável, é recomendado o seguinte teste: verifique se para um certo valor de f_i um aumento de f_j é melhor e, para outro valor de f_i , uma redução de f_j é melhor do que aumentá-lo. Caso isso ocorra, o modelo aditivo é considerado inadequado, pois a condição de independência mútua entre os critérios não é atendida. Mas, conforme [25], caso isso ocorra, provavelmente seu conjunto de critérios não é adequado para o problema e deve ser redefinido.
- **Passo 5.** Antes de se fixar os pesos w_i , primeiramente os critérios são ordenados do de maior para o de menor prioridade. Para esse fim, são sugeridos os seguintes testes: imagine que por alguma razão você é obrigado a escolher uma alternativa hipotética d , mas essa alternativa é a pior possível, ou seja, possui nota mínima para todos os critérios: $u_i(d_i) = 0$, para $i = 1, \dots, m$. Entretanto, é oferecida a possibilidade de você escolher um critério para que a nota de d segundo esse critério seja aumentada para o maior valor da escala. Que critério você escolheria? Esse é o critério de maior prioridade. Suponha agora que d ainda é a pior alternativa e você pode escolher qualquer critério para ser melhorado, exceto aquele critério que você escolheu primeiro. Esse processo deve continuar até que todos os critérios tenham sido ordenados.
- **Passo 6.** Definir os pesos para cada critério. Considere uma nova alternativa hipotética d , que possui nota mínima — nula — para todos os critérios, exceto para o critério de menor prioridade. Para esse critério, aqui designado c_1 , a alternativa d possui nota máxima, $u_1(d_1) = 1$. Considere também a alternativa hipotética e , que possui nota nula para todos os critérios. Supondo-se que você poderá melhorar a característica de e referente ao critério c_2 , segundo critério de menor prioridade, de forma que você julgue d indiferente a e ($U(d) = U(e)$), responda à pergunta: levando-se em conta c_2 , qual valor x deve atingir $u_2(e_2)$ nesse caso? Como foi assumido que $u_i(d_i) = 0$ para todas as dimensões, exceto em $u_1(d_1) = 1$, e que $u_i(e_i) = 0$ para todas as dimensões, exceto em $u_2(e_2) = x$, d é indiferente a e , somente se $w_1 = w_2x$. Repetindo-se esse processo para todos os critérios e utilizando-se o fato de que o somatório dos pesos é igual à unidade, é possível determinar w_i para todos os critérios.
- **Passo 7.** Tomar a decisão.

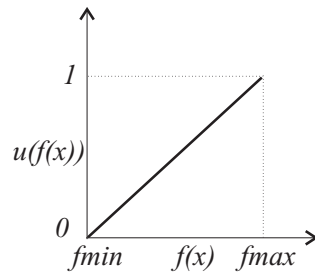


Figura 7.1: Função utilidade que cresce com o aumento de $f(x)$.

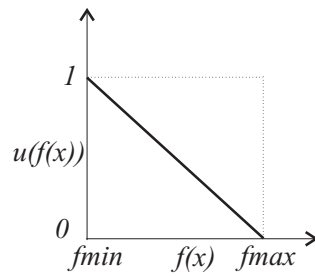


Figura 7.2: Função utilidade que cresce com o decréscimo de $f(x)$.

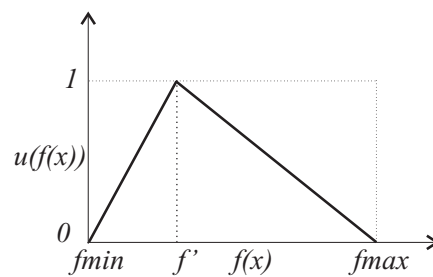


Figura 7.3: Função utilidade que decresce à medida que $f(x)$ se afasta de um certo valor de referência f' .

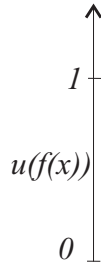


Figura 7.4: Função utilidade baseada em grandeza imensurável.

7.7 Smarter

É aconselhável usar o Smarter no lugar do Smarts, quando o decisor não tem informações suficientes para definir os valores dos parâmetros w_i . Os passos 1 a 5 e 7 descritos acima são idênticos para o Smarts e o Smarter. A grande diferença entre os dois métodos está na forma como esses pesos são determinados. De fato, Smarter procura eliminar as avaliações para definição do peso de cada critério descritas no passo 6, baseado no fato de que eles podem ser aproximados pelo “rank order centroid” (ROC). O uso desta aproximação baseia-se no fato de que, quando não se tem informações sobre a ordem de prioridade dos critérios ou sobre os valores de seus pesos, é natural usar pesos iguais para minimizar erros. O ponto correspondente a pesos iguais na hiper-superfície definida por $\sum_{i=1}^m w_i = 1$ e $w_i \geq 0$ é o seu centróide. Quando se tem informações sobre a ordem de prioridade dos critérios, pode-se reduzir esta hiper-superfície, redefinindo seus vértices de forma a eliminar para cada w_i o intervalo de valores em que certamente w_i não se encontra. Assim, tendo ordenado os critérios por ordem de preferência, se $w_1 \geq \dots \geq w_k \geq \dots \geq w_m$, então, o peso do k -ésimo critério é convenientemente definido pela equação:

$$w_k = \frac{1}{m} \sum_{i=k}^m \frac{1}{i}. \quad (7.3)$$

7.8 Smarts Intervalar

Em [26] é proposto o método Smarts Intervalar, que se difere do Smarts original na forma como a imprecisão dos julgamentos do decisor é incorporada ao funcional $U(\cdot)$. O decisor não precisa mais especificar os valores exatos de cada parâmetro, mas os intervalos em que provavelmente se encontram

esses valores. Maior ênfase é dada aqui à forma como os pesos são definidos pelo Smarts Intervalar, mas é válido ressaltar que um procedimento similar pode ser usado na definição dos valores das funções utilidade u_i para cada alternativa.

Inicialmente, o decisor deve escolher arbitrariamente um dos critérios para ser usado como referência na definição dos pesos dos demais critérios. A esse critério c_{ref} deve ser atribuído um número de pontos p_{ref} . Os pontos dos outros critérios serão dados na forma de intervalos que refletem a imprecisão dos julgamentos do decisor. A partir desses intervalos e das proporções entre os pontos dados ao critério de referência e aos demais são definidas restrições para os pesos, segundo a inequação a seguir:

$$\frac{p_{ref}}{pmax_i} \leq \frac{w_{ref}}{w_i} \leq \frac{p_{ref}}{pmin_i}. \quad (7.4)$$

Em 7.4, $pmax_i$ e $pmin_i$ são respectivamente os limites superior e inferior do intervalo estabelecido para os pontos de um critério qualquer c_i ; w_{ref} é o peso do critério de referência e p_{ref} são os pontos atribuídos a ele. Essas restrições definidas para cada critério, exceto aquele de referência, em conjunto com a normalização $\sum_{i=1}^m w_i = 1$ e $w_i > 0, i = 1, \dots, m$ definem a região viável W para os pesos.

O valor da função utilidade global $U(a)$ para a alternativa a é descrito na forma de um intervalo $[Umin(a), Umax(a)]$, obtido permitindo-se a variação de cada peso w_i dentro de seu respectivo intervalo. Os limites $Umin$ e $Umax$ são calculados a partir da resolução dos problemas de otimização restritos 7.5 e 7.6.

$$Umin(a) = \min \sum_{i=1}^m w_i u_i(a_i), \forall w_i \in W. \quad (7.5)$$

$$Umax(a) = \max \sum_{i=1}^m w_i u_i(a_i), \forall w_i \in W. \quad (7.6)$$

A relação de preferência entre o par de alternativas a e b também incorpora essa imprecisão, sendo definida como: a é preferida em relação à b se:

$$Umin(a) - Umax(b) > 0. \quad (7.7)$$

Para ilustrar o uso do Smarts Intervalar, considere o seguinte exemplo extraído de [26]. Na comparação das alternativas a e b , segundo os critérios c_1 , c_2 e c_3 , suponha que c_1 seja o critério arbitrariamente adotado como referência e que o decisor tenha atribuído $p_{ref} = 1$ e definido os intervalos

para os pontos referentes aos demais critérios da seguinte forma: os pontos do critério c_2 estão no intervalo $[1/2, 2]$ e do critério c_3 , no intervalo $[1, 3]$. Assim, tem-se que: $w_1/w_2 \in [0,5, 1/0,5]$ e $w_1/w_3 \in [1/3, 1/1]$. Por meio de algum procedimento como o usado pelo Simplex para “pular” de um vértice para outro, podem-se obter as extremidades da região viável W , que neste caso específico são: $(w_1, w_2, w_3) = \{(0,25, 0,50, 0,25), (0,17, 0,33, 0,50), (0,40, 0,20, 0,40), (0,22, 0,11, 0,67)\}$. Portanto, os intervalos para cada peso são dados por: $w_1 \in [0,17, 0,40]$, $w_2 \in [0,11, 0,50]$, $w_3 \in [0,25, 0,67]$. Considerando-se que as avaliações de a e b segundo cada critério sejam: $u_1(a) = 0, u_1(b) = 1, u_2(a) = 1, u_2(b) = 0,8, u_3(a) = 1, u_3(b) = 0$, a avaliação global de cada alternativa varia nos intervalos $U(a) \in [0,60, 0,83]$, $U(b) \in [0,31, 0,65]$. Portanto a é preferida à b .

7.9 Conclusões

Esse capítulo apresentou a teoria da utilidade multiatributo determinística e métodos para construir funções utilidade, que podem ser aplicados no caso de o conjunto A ser contínuo ou discreto e para critérios baseados em grandezas mensuráveis ou em julgamentos do decisor. A clareza e a versatilidade desses métodos os tornaram bastante conhecidos na América, enquanto, na Europa, o interesse por eles sempre foi relativamente pequeno. A causa desse desinteresse é atribuída ao fato de que os pesquisadores europeus acreditam que a teoria da utilidade multiatributo entra em conflito com o comportamento racional humano. Em [44], Tversky aponta que não se deve atribuir os possíveis erros na aplicação prática de MAUT à complexidade dessa teoria e, sim, ao fato de que nem sempre o decisor tem em sua mente a ordenação completa das alternativas. Tversky mostra que, quando o decisor começa a comparar as alternativas a fim de se definir essa ordenação, normalmente ele tem atitudes que violam os axiomas de MAUT. Por essas dificuldades encontradas na prática, os pesquisadores franceses têm investido no desenvolvimento de novos métodos mais flexíveis, capazes de representar situações não admitidas pela abordagem americana, como possíveis atitudes de hesitação ou julgamentos intransitivos do decisor.

Capítulo 8

Métodos baseados em Relações de Sobreclassificação

8.1 Introdução

O conceito de relação de sobreclassificação foi desenvolvido por pesquisadores franceses, no intuito de permitir a representação de atitudes do decisor que, até então, não eram permitidas pelos métodos clássicos. A abordagem clássica, desenvolvida por pesquisadores americanos, sempre foi criticada pela Escola Francesa por exigir um decisor completamente racional, capaz de definir sua preferência entre quaisquer duas alternativas. Além de não admitir atitudes de indecisão, a teoria multiatributo americana exige que a preferência seja sempre transitiva, o que impede a representação de certas atitudes reais do decisor. Entre os métodos da Escola Francesa, Electre (*Elimination and (et) Choice Translating Algorithm*) e Promethee (*Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluations*) são os que mais têm se destacado.

Este capítulo apresenta uma visão geral sobre os métodos baseados em relações de sobreclassificação e descreve os métodos Electre I, Electre III, Promethee I e Promethee II, que são os que mais têm sido mencionados na literatura [30], [62], [32], [35], [69]. Esses métodos, ao contrário daqueles baseados na teoria da utilidade, não foram baseados em uma teoria axiomática, embora hoje já existam várias tentativas de se formalizar seus fundamentos.

Além disso, este capítulo também apresenta um novo método de decisão, o Promethee Multiplicativo, que constitui uma contribuição desta tese. Esse método foi desenvolvido a partir de alterações feitas sobretudo na etapa de agregação dos critérios do método Promethee II e sua grande vantagem está no fato de que ele geralmente produz resultados mais coerentes com os pesos

adotados para cada critério, como mostra o Capítulo 11.

8.2 Visão Geral

Em geral, os métodos baseados em relações de sobreclassificação possuem dois estágios [70]:

1. construção da relação de sobreclassificação;
2. exploração dos resultados da etapa anterior.

O processo de construção consiste em comparar as alternativas, considerando todos os critérios. Assim, no caso de haver n alternativas e m critérios, são necessárias pelo menos $m \times n(n-1)/2$ comparações. Em geral, a relação de sobreclassificação S origina-se a partir da comparação entre cada alternativa de A e cada outra alternativa de A , utilizando-se as relações P , Q e I . Essas comparações podem ser realizadas de várias formas diferentes, sendo que no primeiro método a empregar o conceito de relação de sobreclassificação, o Electre I, as comparações baseiam-se no princípio de concordância e discordância. Conforme esse princípio, a afirmativa “a alternativa a é pelo menos tão boa quanto a alternativa b ” é aceita somente se as duas condições a seguir são satisfeitas [70]:

- para a maior parte dos critérios — critérios concordantes — essa afirmativa é válida;
- a oposição da minoria restante — critérios discordantes — não é suficientemente forte para invalidar essa afirmativa.

É interessante observar que a relação característica das estruturas utilizadas pelos métodos da Escola Americana e a relação de sobreclassificação utilizada pelos métodos da Escola Francesa possuem em comum a mesma interpretação: ambas podem ser lidas como “é pelo menos tão boa quanto”. Entretanto, ao contrário das relações características, que possuem propriedades bem definidas, as propriedades da relação de sobreclassificação da Escola Francesa podem ser indefinidas e depender dos valores dos parâmetros de entrada utilizados pelos métodos⁷. De fato, conforme a referência [71],

⁷A possibilidade de se obter diferentes estruturas de relações de preferência, conforme os valores dos parâmetros envolvidos na etapa de construção, levou os pesquisadores a analisarem os estágios de construção e de exploração dos métodos da Escola Francesa separadamente [72], [73], [74]. Os artigos que abordam o segundo estágio em geral analisam várias formas de se realizar a exploração das relações de sobreclassificação, assumindo que essas podem ser aplicadas a qualquer estrutura de relações de preferência.

nos métodos Electre I e Electre III, dependendo de como os valores de seus parâmetros são definidos, a relação de sobreclassificação pode ser qualquer relação binária reflexiva — ordinária no caso de Electre I e nebulosa no caso de Electre III. Além disso, ao implementar o conceito de discordância, os métodos Electre admitem julgamentos em que a relação de sobreclassificação não é transitiva. Portanto, a relação de sobreclassificação nem sempre é capaz de produzir a ordenação das alternativas de A . Daí vem a necessidade de um segundo estágio, em que as relações construídas entre as alternativas são exploradas segundo diretrizes conforme o tipo de problema em questão. O resultado final pode ser a seleção de um conjunto de alternativas consideradas satisfatórias; a ordenação de todas as alternativas ou a classificação de alternativas em categorias pré-definidas.

Por outro lado, os métodos da família Promethee foram desenvolvidos com a preocupação de manter a flexibilidade dos métodos Electre e, principalmente, de facilitar o seu uso operacional. Para isso são exigidos parâmetros de entrada mais intuitivos e cujo significado e influência nos resultados finais são mais previsíveis.

Os métodos Promethee I e Promethee II não utilizam o princípio de concordância e discordância para construir as relações entre as alternativas. Em vez disso, eles se baseiam no conceito de fluxo de rede da teoria dos grafos. Os fluxos de entrada e de saída de uma alternativa dão uma idéia do quanto ela é preterida e preferida em relação às demais, respectivamente. Para calcular esses fluxos, são realizadas comparações entre cada alternativa de A e cada uma das demais alternativas. Essas comparações são baseadas em uma função preferência $p_i(a, b) : A \rightarrow [0, 1]$ de tal modo que:

- $p_i(a, b)$ tende a 1 quanto mais forte for a preferência de a em relação a b ;
- $p_i(a, b)$ tende a 0 quanto mais fraca for a preferência de a em relação a b ou seja, quanto maior for a indiferença entre a e b .

A relação de sobreclassificação dos métodos Promethee I e II, construída a partir desses fluxos, caracteriza-se por apresentar propriedades bem definidas: no caso do Promethee I, S é uma relação de preordem parcial, admitindo julgamentos de incomparabilidade, e no Promethee II, é uma relação de preordem completa. Em ambos os métodos, S possui a propriedade transitiva, sendo por isso capaz de gerar a ordenação das alternativas, sem que seja necessário executar procedimentos de exploração das relações de sobreclassificação tão complexos quanto os dos métodos Electre.

8.3 Métodos Electre

Os métodos Electre admitem, dadas duas alternativas quaisquer, a e b , os três casos básicos listados a seguir e situações intermediárias que caracterizam indecisões entre eles:

- aIb : a é indiferente a b ;
- aPb : a é estritamente preferido a b ;
- bPa : b é estritamente preferido a a .

As situações intermediárias resumem-se em preferência fraca de a em relação a b (ou b em relação a a) e incomparabilidade entre alternativas:

- a relação de preferência fraca de a em relação a b (aQb): ocorre se o decisor hesita entre aIb e aPb , mas está certo de que a relação bPa é inválida;
- a relação de incomparabilidade (aJb): ocorre se nenhuma das situações aPb , bPa , aQb , bQa , aIb ou bIa predomina.

Em todo o desenvolvimento a seguir, considere que as conseqüências da implementação (ou atributos) de $a \in A$ são dadas por $(f_1(\vec{x}_a), \dots, f_m(\vec{x}_a))$ e que, para todos os critérios, quanto menor o valor da função objetivo, melhor é a alternativa. Como se pode notar, aqui como no Capítulo 7, as conseqüências são avaliadas diretamente a partir de funções objetivo. No entanto, vale lembrar que essa avaliação não necessariamente deriva de funções objetivo e pode corresponder a medidas físicas ou a grandezas imensuráveis (exemplo: cor de cada carro).

Dado um critério c_i , a comparação entre os valores $c_i(f_i(\vec{x}_a))$ e $c_i(f_i(\vec{x}_b))$ deve refletir o resultado da comparação entre a e b , conforme apenas o ponto de vista relativo a este critério. Introduzindo-se os parâmetros p_i e q_i e a diferença $d_i = f_i(\vec{x}_b) - f_i(\vec{x}_a)$ é possível modelar, através das inequações 8.1 e 8.2, as relações de preferência P_i e indiferença I_i restritas ao critério c_i .

$$d_i \leq q_i \Leftrightarrow aI_i b \quad (8.1)$$

$$d_i > p_i \Leftrightarrow aP_i b \quad (8.2)$$

É importante dizer que na representação clássica dessas relações, os parâmetros p_i e q_i são considerados nulos. Entretanto, na prática $p_i = q_i = 0$ é muitas vezes considerado irreal por não representar situações de indecisão,

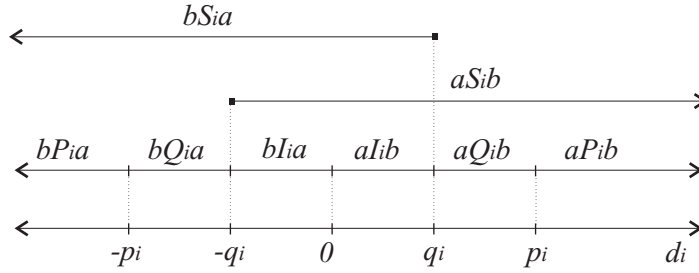


Figura 8.1: Intervalos referentes às relações de indiferença, preferência e de sobreclassificação.

como quando o valor de d_i é pouco maior do que zero e insuficiente para caracterizar uma preferência estrita. A introdução dos parâmetros p_i e q_i não nulos possibilita representar o caso de preferência fraca aQ_ib , através do intervalo não incluído pelas inequações 8.1 e 8.2, $q_i < d_i \leq p_i$.

É neste contexto que se define a relação binária de sobreclassificação restrita S_i . Por definição, a relação aS_ib é válida somente se a diferença d_i constitui um argumento que justifique a afirmativa: “considerando-se apenas o critério c_i , a alternativa a é pelo menos tão boa quanto a alternativa b ”. A relação aS_ib compreende, portanto, os casos que vão desde a indiferença aI_ib até a preferência estrita aP_ib , incluindo as hesitações entre esses dois casos (Figura 8.1). A inequação abaixo modela matematicamente o conceito de relação de sobreclassificação restrita ao critério c_i :

$$d_i \geq -q_i \Rightarrow aS_ib. \quad (8.3)$$

A relação S de sobreclassificação estendida estende o conceito de S_i para todos os m critérios. Assim, aSb é válida somente se as diferenças entre os vetores $C(a)$ e $C(b)$, que contêm respectivamente as avaliações das alternativas a e b segundo os m critérios, constituem um argumento que justifique a afirmativa: “considerando-se todos os critérios, a alternativa a é pelo menos tão boa quanto a alternativa b ”. O critério c_i que atende à condição aS_ib e, portanto, à inequação em 8.3, é designado critério concordante com aSb . O conjunto de critérios em concordância com aSb é designado *coalizão concordante*, sendo aqui representado pelo símbolo $Conc(aSb)$. Já o critério c_i que atende à condição bP_ia é dito discordante com a afirmativa aSb . O conjunto de critérios em discordância com aSb é denominado *coalizão discordante* e representado pelo símbolo $Conc(bPa)$, por concordar com a afirmativa bPa . Enfim, por definição, os critérios que não concordam ou discordam com aSb formam o conjunto aqui denominado *coalizão hesitante*, representado pelo

símbolo $Conc(bQa)$, uma vez que atendem à inequação $-q_i < d_i \leq -p_i$. Assim, cada critério encaixa-se necessariamente em um dos três conjuntos: $Conc(aSb)$, $Conc(bPa)$ ou $Conc(bQa)$.

8.3.1 Índices de Concordância e Discordância

A importância dada a cada critério pode ser implementada pelos métodos Electre de duas formas:

- através dos coeficientes de importância $w_i \geq 0$, que influenciam o valor do índice de concordância $Iconc$;
- através do parâmetro v_i ($v_i \geq p_i$), denominado *limiar de veto*, que interfere no índice de discordância $Idisc$.

O índice de concordância, $Iconc(a, b)$, reflete a intensidade dos argumentos a favor da afirmativa aSb . A maior contribuição a favor, aqui representada por $Iconc_1(a, b)$, origina-se obviamente do conjunto $Conc(aSb)$. Lembrando que os critérios de $Conc(bQa)$ refletem hesitações entre aIb (que é a favor de aSb) e bPa , este conjunto também oferece uma pequena contribuição, representada por $Iconc_2(a, b)$, para o índice de concordância. Portanto:

$$Iconc(a, b) = Iconc_1(a, b) + Iconc_2(a, b), \quad (8.4)$$

sendo que $Iconc_1(a, b)$ e $Iconc_2(a, b)$ foram definidos, respectivamente, como [62]:

$$Iconc_1(a, b) = \frac{1}{w} \sum_{i \in Conc(aSb)} w_i, \quad (8.5)$$

$$Iconc_2(a, b) = \frac{1}{w} \sum_{i \in Conc(bQa)} w_i \frac{p_i + d_i}{p_i - q_i}, \text{ com } w = \sum_{i=1}^m w_i. \quad (8.6)$$

Analogamente, o índice de discordância $Idisc(a, b)$ reflete a intensidade dos argumentos contrários a aSb . Pode-se avaliar o grau em que um critério é discordante a partir de d_i . O parâmetro v_i é utilizado para definir o valor limite dessa diferença, a partir do qual o critério discordante c_i provoca a rejeição de uma afirmativa aSb não importando os demais critérios. A formulação a seguir representa o índice de discordância por meio de equações lineares:

$$Idisc(a, b) = \max(Idisc_1(a, b), Idisc_2(a, b), \dots, Idisc_m(a, b)), \quad (8.7)$$

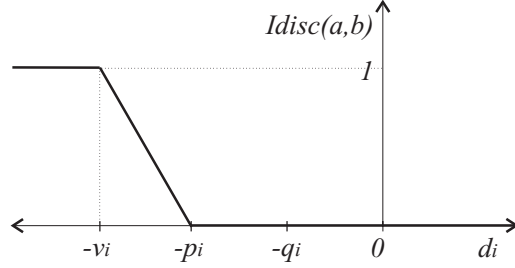


Figura 8.2: Comportamento de $Idisc_i(a, b)$ em função de d_i .

$$Idisc_i(a, b) = \begin{cases} d_i \geq -p_i \Rightarrow 0, \\ -v_i \leq d_i \leq -p_i \Rightarrow \frac{d_i - p_i}{v_i - p_i}, \\ d_i < -v_i \Rightarrow 1. \end{cases} \quad (8.8)$$

Analisando-se a Figura 8.2, percebe-se que quanto mais próximo o valor de v_i for de p_i , mais facilmente a afirmativa aSb (“ a sobreclassifica b ”) é rejeitada, o que aumenta a importância dada ao critério c_i .

8.3.2 Electre I

O primeiro método da família, Electre I, é empregado quando se deseja selecionar não uma única solução mas um conjunto de soluções consideradas satisfatórias pelo decisor e quando é razoável fixar os parâmetros $p_i = q_i = 0$ para todos os critérios. Em Electre I, define-se a relação de sobreclassificação S como [30]:

$$aSb \Leftrightarrow Iconc(a, b) \geq c \wedge Idisc_i(a, b) \leq d, i = 1, 2, \dots, m. \quad (8.9)$$

Nesta equação, as constantes c e d são denominadas, respectivamente, *limites de concordância* e *discordância*. Na prática, c e d assumem valores no intervalo $[0, 1]$ e, geralmente, $c > d$. A Referência [58] mostra que os parâmetros w_i , c e d são fortemente relacionados, citando como exemplo o caso em que, dado um problema com três critérios, os pesos são definidos como $w_1 = 0,45$, $w_2 = 0,35$ e $w_3 = 0,20$ e o limite de concordância c é fixado em $0,7$. Nesse caso, a coalizão concordante só é vencedora se c_1 e c_2 participam dela. Por outro lado, se $c = 0,6$, então c_3 é incluído e c_1 torna-se o único critério cuja participação na coalizão concordante é essencial.

A partir dessa relação S , é possível construir um grafo direcionado em que os nós correspondem às possíveis soluções e os arcos interligam os pares de alternativas (a, b) que atendem à relação aSb . Usualmente, os arcos são

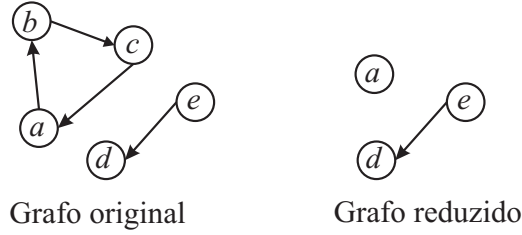


Figura 8.3: Exemplo de circuito.

representados de maneira que se aSb , então o arco parte de a e aponta para b . A solução final para o problema de tomada de decisão constitui o kernel do grafo da relação S , sendo definida pelo subconjunto N de soluções que atendem às condições:

- cada elemento do conjunto N^c é sobreclassificado por pelo menos um elemento de N ;
- nenhum elemento de N sobreclassifica qualquer elemento de N .

Caso as preferências do decisor gerem circuitos no grafo, esses devem ser eliminados antes de se definir o kernel. Para eliminá-los, seus vértices são substituídos por um único elemento, originando um grafo reduzido. Vale notar que esta modificação elimina possíveis intransitividades transformando-as em julgamentos de indiferença, como ilustra o exemplo da Figura 8.3, em que o circuito $aSbSc$ é simplesmente substituído pela alternativa a .

8.3.3 Electre III

Em Electre III, associa-se um valor ente 0 e 1 à relação de sobreclassificação $S(a, b)$. Assim, dado o conjunto $Disc$ de critérios em que $Iconc(a, b) < Idisc_i(a, b)$, tem-se que:

$$S(a, b) = \begin{cases} Iconc(a, b), & \text{se } Iconc(a, b) \geq Idisc_i(a, b), \forall i = 1, \dots, m, \\ Iconc(a, b) \cdot \prod_{i \in Disc} \frac{1 - Idisc_i(a, b)}{1 - Iconc(a, b)}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (8.10)$$

Esse valor não representa a intensidade da preferência e sim, um índice de credibilidade, sendo que quanto maior esse valor, maior a credibilidade da afirmativa “ a sobreclassifica b ”. A Equação 8.10 mostra que se o índice de discordância excede o de concordância, então, nesse caso, a afirmativa aSb deve ser questionada e o valor do índice de credibilidade deve ser modificado

de acordo. Além disso, caso o índice de discordância seja máximo para algum critério, então não se pode confiar na afirmativa aSb .

Tendo sido definidas as relações nebulosas de sobreclassificação $S(a, b)$ entre todos os pares de alternativas, são construídas duas preordens Z_1 e Z_2 , através de um processo de *destilação descendente* e *ascendente*, respectivamente. Cada uma das preordens é constituída por um conjunto de classes $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_h)$, sendo que o decisor é indiferente às alternativas pertencentes à mesma classe e prefere as alternativas pertencentes à classe γ_i àquelas pertencentes à classe γ_{i+1} .

Em Electre III, essas classes são definidas a partir da *qualificação* $D(a)$ de cada alternativa, definida pela diferença entre o número $\pi(a)$ de alternativas que são sobreclassificadas por a e o número $\phi(a)$ de alternativas que sobreclassificam a . É bastante razoável considerar que alternativas pertencentes à mesma classe possuam o mesmo valor de $D(a)$ e que as alternativas de γ_i possuam uma qualificação maior do que as de γ_{i+1} . Por outro lado, essa qualificação pode ser calculada com diferentes graus de credibilidade. Em ambos os processos de destilação, são definidas, a partir da relação nebulosa $S(a, b)$, relações ordinárias S_{λ_i} , que correspondem a cortes em vários patamares λ_i de $S(a, b)$ ou seja, vários níveis de credibilidade de $S(a, b)$. Assim, o grau de qualificação $D(a)$ é associado ao patamar λ de modo que, sendo B o conjunto de alternativas pertencentes a A , ainda não classificadas, $\forall a, b \in B$:

$$\pi_B^\lambda(a) = |\{b \in B | S(a, b) > \lambda \wedge S(a, b) > S(b, a)\}|, \quad (8.11)$$

$$\phi_B^\lambda(a) = |\{b \in B | S(b, a) > \lambda \wedge S(b, a) > S(a, b)\}|, \quad (8.12)$$

$$D_B^\lambda(a) = \pi_B^\lambda(a) - \phi_B^\lambda(a). \quad (8.13)$$

Operacionalmente, o cálculo da qualificação de cada alternativa pode ser executado a partir de uma matriz T_B^λ cujas entradas $t(a, b)$, sendo $a, b \in B$ são dadas por:

$$t(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{se } S(a, b) > \lambda \wedge S(a, b) > S(b, a) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (8.14)$$

Tendo definido T_B^λ , para calcular $D(a)$ basta somar os valores dispostos na linha referente à alternativa a e subtrair a soma dos valores dispostos na coluna referente à a [75]. O parâmetro λ , por sua vez, é definido a partir da seguinte equação:

$$\lambda_i^{\lambda_{i-1}-s(\lambda_{i-1}(B))} = \begin{cases} \max(S(a, b)), & \text{sendo } a, b \in B \wedge S(a, b) < \lambda, \\ 0, & \text{se } \forall a, b \in B, S(a, b) \geq \lambda. \end{cases} \quad (8.15)$$

Em cada um dos processos de destilação, λ é inicializado como $\lambda_0 = \text{Max}(S(a, b))$ e na primeira iteração ele já é redefinido para um valor próximo ao anterior: $\lambda_1 = \lambda_0 - s(\lambda)$.

O parâmetro $s(\lambda)$ pode ser uma constante ou uma função linear de λ . No software Electre III / IV versão 3.1b Demo, desenvolvido pelo laboratório Lamsade (*Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'Aide à la Décision*), é sugerido o seguinte valor padrão para esse parâmetro:

$$s(\lambda) = -0,15\lambda + 0,30. \quad (8.16)$$

O processo de destilação descendente consiste em, tendo inicializado λ_1 e o conjunto $B = A$, obter a alternativa ou as alternativas que possuïrem o maior valor de D . Essas constituem a primeira destilação \underline{D}_1 . Se \underline{D}_1 possui uma única alternativa, então tem-se que $\gamma_1 = \underline{D}_1$ e $B = A - \gamma_1$. Se \underline{D}_1 possui mais de uma alternativa, então devem ser calculados um novo patamar $\lambda_2 < \lambda_1$ e uma nova matriz $T_B^{\lambda_2}$ para que se obtenha a destilação \underline{D}_2 . Destilações sucessivas \underline{D}_i são definidas até que $\lambda_i = 0$ (inclusive) ou que seja obtida uma destilação \underline{D}_i formada por um único elemento. Nesses dois casos, a(s) alternativa(s) pertencente(s) a essa destilação constitui a classe seguinte da preordem Z_1 e o conjunto B deve ser redefinido subtraindo-se dele essa(s) alternativa(s). Esse processo de destilações sucessivas deve ser repetido até que as demais alternativas de \underline{D}_1 sejam classificadas. Quando $\underline{D}_1 = \emptyset$, uma outra destilação \underline{D}_1 é obtida a partir de A , desconsiderando-se as alternativas já classificadas. É interessante observar que cada destilação \underline{D}_i é associada a um patamar λ_i e, indiretamente, a um conjunto B — pois o cálculo de D_B^λ depende de B :

$$\underline{D}_{i+1} = \{a | a \in \underline{D}_i, D_{\underline{D}_i}^{\lambda_{i+1}}(a) = \underline{d}\}, \quad (8.17)$$

sendo $\underline{d} = \max D_B^{\lambda_{i+1}(a)}$.

Esse processo iterativo deve ser repetido até que a preordem Z_1 tenha sido completamente definida. O processo de destilação ascendente, que gera a preordem Z_2 , é análogo ao de destilação descendente. Entretanto, agora cada destilação \overline{D}_k de Z_2 é constituída pelas alternativas que possuïrem menor valor de $D(\cdot)$:

$$\overline{D}_{i+1} = \{a | a \in \overline{D}_i, D_{\overline{D}_i}^{\lambda_{i+1}}(a) = \overline{d}\}, \quad (8.18)$$

sendo $\overline{d} = \min D_B^{\lambda_{i+1}(a)}$.

A classificação final Z é obtida pela interseção destas duas preordens: $Z = Z_1 \cap Z_2$. Entretanto, como Z_2 foi definida de forma que as alternativas de pior qualificação pertencem às primeiras destilações, tendo definido Z_2 , a

ordem de suas alternativas deve ser invertida: a primeira destilação deve ser a última, a segunda deve ser a penúltima e assim por diante.

Então, a cada alternativa a pode ser associado um índice $r = \underline{k} + \overline{k}$, sendo \underline{k} o índice da classe da preordem Z_1 à qual a pertence e \overline{k} o índice da classe da preordem Z_2 à qual a pertence. A ordem desses índices reflete a ordem das alternativas.

8.4 Métodos Promethee

Nesta classe de métodos, o resultado da comparação entre duas alternativas quaisquer a e b é expresso em termos de uma *função preferência* que deve refletir, para cada critério, o nível de preferência de a em relação a b . Assim, levando-se em conta apenas a avaliação segundo o critério c_i , tem-se que:

- $p_i(a, b) = 0$: indica indiferença entre a e b ;
- $p_i(a, b) \sim 0$: indica preferência fraca de a em relação a b ;
- $p_i(a, b) \sim 1$: reflete uma preferência forte de a em relação a b ;
- $p_i(a, b) = 1$: reflete preferência estrita de a em relação a b .

Em geral, $p_i(\cdot)$ é uma função da diferença entre a avaliação das conseqüências de ambas alternativas. Assim, no caso da otimização multiobjetivo, dado que $d_i = f_i(\vec{x}_b) - f_i(\vec{x}_a)$, tem-se que $p_i(a, b) = p_i(d_i)$. Quando o problema é de minimização, a curva referente a $p_i(d_i)$ deve ser não-decrescente para $d_i > 0$ e nula para $d_i \leq 0$. As referências [35] e [69] sugerem os cinco principais tipos de função preferência definidos a partir das Equações 8.19-8.23 (e representados nas Figuras 8.4-8.8), os quais cobrem a maior parte das situações encontradas na prática.

Nas Equações 8.20 - 8.22, as funções preferência possuem um intervalo de indiferença, cujo limite superior é definido pelo parâmetro t_i . Esse intervalo permite ao decisor ser indiferente entre duas alternativas, não somente quando elas possuem a mesma conseqüência, ($d_i = 0$), mas também quando elas possuem conseqüências similares ($0 < d_i < t_i$). Nas Equações 8.21 - 8.23, são admitidos julgamentos com diferentes intensidades de preferência no intervalo $0 \leq p_i(d_i) \leq 1$, sendo que em 8.21 - 8.22, o limite inferior do intervalo de preferência estrita é dado por q_i . No caso da Equação 8.22, que define o critério gaussiano, σ_i é a distância entre a origem e o ponto de inflexão da curva $p_i(d_i)$, conforme mostra a Figura 8.8.

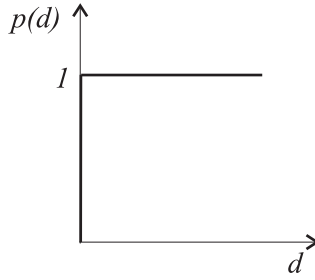


Figura 8.4: Critério usual.

Critério usual:

$$p_i(d_i) = \begin{cases} 0, & \text{se } d_i \leq 0, \\ 1, & \text{se } d_i > 0. \end{cases} \quad (8.19)$$

Quase-critério:

$$p_i(d_i) = \begin{cases} 0, & \text{se } d_i \leq t_i, \\ 1, & \text{se } d_i > t_i. \end{cases} \quad (8.20)$$

Critério degrau:

$$p_i(d_i) = \begin{cases} 0, & \text{se } d_i \leq t_i, \\ 0,5, & \text{se } t_i < d_i \leq q_i, \\ 1, & \text{se } d_i > q_i. \end{cases} \quad (8.21)$$

Critério linear:

$$p_i(d_i) = \begin{cases} 0, & \text{se } d_i \leq t_i, \\ (d_i - t_i)/(q_i - t_i), & \text{se } t_i < d_i \leq q_i, \\ 1, & \text{se } d_i > q_i. \end{cases} \quad (8.22)$$

Critério gaussiano:

$$p_i(d_i) = \begin{cases} 1 - \exp(-d_i^2/(2\sigma_i^2)), & \text{se } d_i > 0, \\ 0, & \text{se } d_i \leq 0. \end{cases} \quad (8.23)$$

Tendo especificado uma função $p_i(d_i)$ e um peso⁸ w_i para cada critério, de modo que $\sum_{i=1}^m w_i = 1$, calcula-se então o índice de preferência multicritério $\Pi(a, b)$, que reflete a intensidade da preferência global (para todos os critérios) da alternativa a em relação a b :

⁸Uma das limitações desse método está na ausência de regras formais para a definição dos pesos de cada critério.

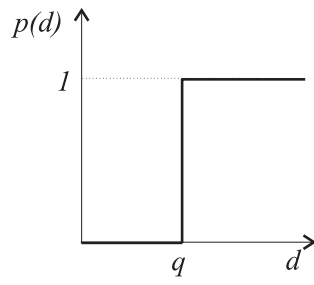


Figura 8.5: Quase-critério.

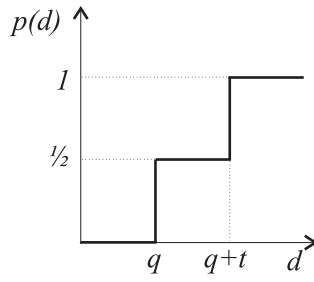


Figura 8.6: Critério degrau.

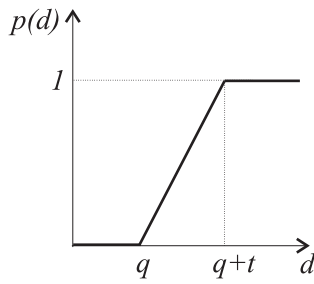


Figura 8.7: Critério linear.

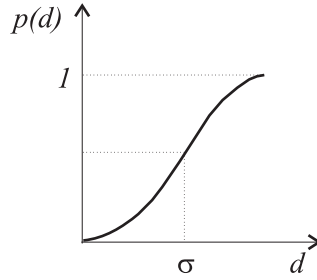


Figura 8.8: Critério gaussiano.

$$\Pi(a, b) = \sum_{i=1}^m w_i p_i(a, b). \quad (8.24)$$

Esse índice assume valores entre 0 e 1 de modo que:

- $\Pi(a, b) \sim 0$: indica preferência fraca global de a em relação a b ;
- $\Pi(a, b) \sim 1$: indica preferência forte global de a em relação a b .

As comparações entre as alternativas podem ser representadas através de grafos direcionados em que cada nó corresponde a uma alternativa e cada arco, a uma relação de preferência global. Entre dois nós a e b existem sempre dois arcos, aos quais são associados os índices $\Pi(a, b)$ e $\Pi(b, a)$, conforme mostra a Figura 8.9.

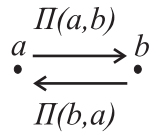


Figura 8.9: Arcos entre as alternativas a e b .

Nesse grafo, o fluxo total que entra no nó a é calculado por:

$$\phi_{in}(a) = \sum_{\forall b \in A} \Pi(b, a). \quad (8.25)$$

Analogamente, o fluxo total que sai do nó pode ser calculado por:

$$\phi_{out}(a) = \sum_{\forall b \in A} \Pi(a, b). \quad (8.26)$$

Enfim, o fluxo de rede no nó a é definido como a diferença entre o fluxo que sai e o que entra:

$$\phi(a) = \phi_{out}(a) - \phi_{in}(a). \quad (8.27)$$

Os métodos Promethee I e II constroem de formas diferentes, a partir desses fluxos $(\phi, \phi_{out}, \phi_{in})$, suas relações de sobreclassificação e, na etapa de exploração dessas relações, cada um deles promove um tipo de ordenação. Enquanto no Promethee I é gerada uma preordem parcial, admitindo a incomparabilidade entre alternativas, no Promethee II, por sua vez, é gerada uma preordem completa.

8.4.1 Promethee I

No Promethee I, a partir dos valores dos fluxos ϕ_{out} e ϕ_{in} são definidas, respectivamente, as relações de sobreclassificação positiva, $S^+ = P^+ \cup I^+$, e negativa, $S^- = P^- \cup I^-$, de modo que:

- $aP^+b \Leftrightarrow \phi_{out}(a) > \phi_{out}(b)$;
- $aI^+b \Leftrightarrow \phi_{out}(a) = \phi_{out}(b)$;
- $aP^-b \Leftrightarrow \phi_{in}(a) < \phi_{in}(b)$;
- $aI^-b \Leftrightarrow \phi_{in}(a) = \phi_{in}(b)$.

Na etapa de exploração das relações de sobreclassificação, as alternativas são ordenadas em conformidade com o esquema abaixo:

- Se e somente se $(aP^+b \wedge aP^-b)$ ou $(aP^+b \wedge aI^-b)$ ou $(aI^+b \wedge aP^-b)$, então a é preferida à b .
- Se e somente se aI^+b e aI^-b , então a é indiferente à b .
- Caso contrário, a e b são incomparáveis.

8.4.2 Promethee II

No Promethee II, as relações de sobreclassificação são definidas diretamente a partir dos fluxos de rede calculados para cada alternativa:

- se e somente se $\phi(a) > \phi(b)$, então a é preferida à b ;
- se e somente se $\phi(a) = \phi(b)$, então a é indiferente a b .

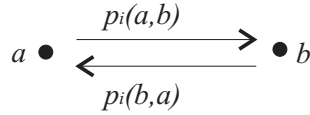


Figura 8.10: Arcos existentes entre duas alternativas a e b no método Promethee Multiplicativo.

8.4.3 Promethee Multiplicativo

Neste trabalho, o método Promethee II é aplicado na escolha da solução final para problemas de otimização multiobjetivo. Em um primeiro passo o NSGA-II é executado a fim de encontrar um conjunto discreto de soluções eficientes. Posteriormente, o Promethee II é usado para ordená-las em conformidade com a preferência do decisor. A alternativa escolhida como solução final é a que possuir um maior fluxo de rede ϕ . Alguns resultados obtidos levando-se em conta problemas de otimização analíticos (veja o Capítulo 11) mostram que o Promethee II freqüentemente não produz resultados consistentes com os pesos dos critérios, para problemas em que a fronteira Pareto delimita a parte não-convexa da região viável. Esse fato estimulou o desenvolvimento de uma nova versão, que não possua essa limitação.

A versão Multiplicativa do Promethee II aqui proposta assemelha-se à original em muitos aspectos. Ambas começam com a especificação de funções de preferência para cada critério. A grande diferença reside na forma como se computa o fluxo de rede e se define a relação de sobreclassificação em cada uma delas. Na versão multiplicativa, o fluxo de rede de cada alternativa não exige o cálculo do índice de preferência global. Por outro lado, a versão multiplicativa define um grafo direcionado para cada critério, de modo que existam dois arcos entre cada par de nós (a, b) e a cada arco seja associada uma função de preferência $p_i(a, b)$, conforme mostra a Figura 8.10. Assim, considerando-se o i -ésimo grafo, o fluxo de rede para o i -ésimo critério é definido como mostra a Equação 8.28.

$$\phi_i(a) = \sum_{\forall b \in A} (p_i(a, b) - p_i(b, a)). \quad (8.28)$$

Um novo parâmetro, denominado *Índice de Sobreclassificação*, agrega os valores do fluxo de rede em todos os grafos para cada alternativa, dando uma idéia global do quanto cada alternativa é preferida em relação às demais, levando-se em conta também o peso de cada critério, conforme se segue:

$$O(a) = \prod_{i=1}^m \Phi_i(a)^{w_i}. \quad (8.29)$$

Nesta equação, $\Phi_i(a) = \phi_i(a) + |\phi_{min_i}|$, onde ϕ_{min_i} é o valor mínimo assumido por ϕ_i . Como ϕ_i pode assumir valores negativos, o incremento de $|\phi_{min_i}|$ é essencial para impedir valores complexos em $O(a)$. Finalmente, as alternativas são ordenadas baseado no Índice de Sobreclassificação de tal modo que:

- se $O(a) = O(b)$, então a é indiferente à b ;
- se $O(a) > O(b)$, então a é preferida à b .

8.5 Conclusões

Primeiramente, esse capítulo apresentou as duas famílias de métodos para tomada de decisão mais conhecidas da Escola Francesa: Electre e Promethee. Os métodos de ambas famílias foram desenvolvidos com o objetivo de modelar situações não consideradas pelos métodos da Escola Americana, representando com maior fidelidade a preferência humana. Entretanto, o interesse por esses métodos fora da Europa sempre foi relativamente pequeno. Alguns autores atribuem esse fato às seguintes razões.

- Os métodos da Escola Francesa não foram bem fundamentados através de uma teoria formal axiomática. Uma das conseqüência disso é o mau uso desses métodos, com a especificação equivocada de seus parâmetros de entrada. Entretanto, é importante ressaltar que hoje já existem vários trabalhos em que esses métodos são analisados e alguns axiomas são demonstrados.
- Alguns métodos apresentam um comportamento indesejado ou inesperado quando aplicados a certos problemas matematicamente “mal condicionados”.

Esse capítulo também apresentou um novo método de decisão multicritério. O método Promethee Multiplicativo foi desenvolvido no intuito de vencer uma limitação do método Promethee II observada em [76]. Os resultados exibidos nessa referência mostram uma inconsistência entre os pesos adotados para cada critério e a solução final obtida pelo Promethee II, quando problemas não-convexos são considerados. Os resultados exibidos no Capítulo 11 mostram que a nova versão aqui descrita não tem essa limitação e tende a produzir sempre melhores resultados do que a versão original desse método.

Capítulo 9

Processo de Análise Hierárquica

9.1 Introdução

Os métodos de decisão associam números às alternativas, considerando-se cada critério. Esses números freqüentemente têm significado apenas ordinal. Mas, segundo Thomas Saaty, a ponderação e adição de valores ordinais não faz sentido, pois diferentes números que preservem a mesma ordem podem gerar resultados diferentes. Por outro lado, para que esses números representem grandezas cardinais, é necessário que as medições sejam realizadas com o uso de escalas.

Segundo Saaty, a análise multicritério deveria ser uma ciência de medição baseada em matemática, psicologia e filosofia. Inspirado por essas idéias, ele desenvolveu em 1977 o método de tomada de decisão Processo de Análise Hierárquica — ou Analytic Hierarchy Process (AHP), que se baseia em comparações entre cada alternativa de A e cada uma das demais, utilizando uma escala de medidas capaz de refletir o grau da preferência do decisor por uma das duas alternativas. Em um primeiro momento são realizadas as comparações segundo cada critério. Depois, esses resultados são agregados a fim de se obter uma única ordenação das alternativas.

Alguns autores consideram o método AHP como um método da Escola Americana, sob a justificativa de que ele pode ser aproximado por uma função utilidade ou, ainda, que ele auxilia a construção da função utilidade. Outros consideram-no uma abordagem independente da Escola Americana ou da Escola Francesa, devido às suas características muito particulares. O fato é que o AHP hoje é um método extremamente conhecido e tem sido amplamente estudado, como se pode observar pelo grande número de publicações, princi-

palmente nos jornais Management Science e European Journal of Operational Research.

No contexto dessa extensa literatura, o presente capítulo pode ser considerado uma introdução à abordagem desenvolvida por Saaty. Este texto descreve o AHP, em sua versão baseada na formulação do auto-vetor, enfatizando seus pontos críticos e suas idéias centrais.

9.2 Matriz de Comparações das Alternativas

Uma forma simples de se comparar as propriedades de duas alternativas, segundo um dado critério, é através da razão (quociente) entre os valores de suas respectivas propriedades. Por exemplo, dado um conjunto de pedras, os pesos das pedras podem ser comparados, adotando-se o peso da mais leve como unidade de referência e medindo-se os demais a partir de múltiplos desta unidade. Nesse caso, assumindo-se que a pedra mais leve seja a de peso k_1 , se k_2 é o dobro de k_1 então, automaticamente, k_1 é a metade de k_2 .

Analogamente, a escala utilizada pelo AHP para medir o nível de preferência do decisor, ao comparar duas alternativas, segue essas regras. Para cada critério c_i , é associado um valor $p_i(a, b)$ a cada par ordenado de alternativas, $(a, b) \in A$. Esse valor representa a intensidade da preferência do decisor pela alternativa a em relação a b de maneira que [15]:

- se a é preferida à b , então $p_i(a, b) > 1$;
- se a é indiferente à b , então $p_i(a, b) = 1$;
- $\forall a, b \in A, p_i(a, b) = 1/p_i(b, a)$.

Para definir o valor de $p_i(a, b)$, quantificando a intensidade da preferência do decisor, são utilizadas escalas que realizam um mapeamento entre os números positivos e cada par ordenado (a, b) . Ao propor uma escala, Saaty considerou certas limitações humanas. Os limites inferior e superior de sua escala (ver Tabela 9.1) são 1 e 9, pois experimentos psicológicos mostram que o ser humano não é capaz de comparar simultaneamente mais de 7 ± 2 objetos [77]. Embora vários experimentos tenham comprovado a eficácia dessa escala, a literatura propõe várias outras que podem ser usadas em diferentes problemas [78].

A comparação de cada alternativa com as demais pode ser representada por um grafo em que as alternativas correspondem a nós e as relações de preferência, a arcos. Assim, entre quaisquer duas alternativas, a e b , sempre existem dois arcos, sendo que ao arco que parte de a em direção a b é associado

Tabela 9.1: Escala de importâncias relativas [79].

Intensidade	Definição
1	As duas alternativas têm a mesma importância;
3	A experiência e o julgamento do decisor é ligeiramente favorável a uma alternativa;
5	A experiência e o julgamento do decisor é fortemente favorável a uma alternativa;
7	É demonstrado na prática que uma alternativa é muito mais importante do que a outra;
9	Uma alternativa é extremamente mais importante do que a outra;
2, 4, 6, 8	Valores usados para quantificar julgamentos intermediários a esses.

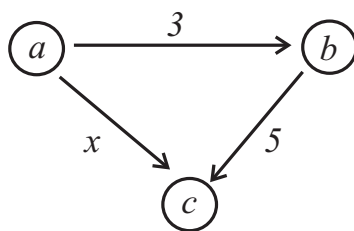


Figura 9.1: Exemplo de julgamentos do decisor.

o valor $p(a, b)$ e ao arco que parte de b em direção a a , o valor $p(b, a)$. Na teoria dos grafos, os valores $p(a, b)$ e $p(b, a)$ podem ser interpretados como a intensidade dos seus respectivos arcos.

Uma outra forma de se representar as comparações entre alternativas é por uma matriz quadrada M , cuja dimensão é igual ao número n de alternativas em A :

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix},$$

onde $m_{ij} = p(a_i, a_j)$, e a_i, a_j são duas alternativas quaisquer em A .

A matriz M é *recíproca* pois é sempre verdade que $m_{ij} = 1/m_{ji}$. Além disso, se $m_{ij} = m_{ik}m_{kj}, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, ela é considerada, também, *consistente*. Este conceito de consistência está relacionado à noção de transitividade que incorpora as informações cardinais embutidas nos julgamentos do decisor. Para que um julgamento seja considerado transitivo ele deve atender à seguinte regra: dadas as alternativas a_i, a_j e a_k , $p(a_i, a_k) = p(a_i, a_j).p(a_j, a_k)$.

Na prática, freqüentemente são geradas matrizes inconsistentes devido a julgamentos intransitivos ou por uma limitação da própria escala proposta por Saaty. Considerando-se, por exemplo, o grafo da Figura 9.1, que ilustra as comparações entre três alternativas genéricas, a variável x deveria ser igual a 15 para que os julgamentos fossem consistentes, mas o limite superior da escala de Saaty é 9.

9.3 Formulação baseada no Auto-Vetor

Voltando ao exemplo em que são comparados os pesos de várias pedras, ao preencher a matriz M a partir das relações entre o peso k_i de cada pedra e sendo n o número total de pedras, é possível obter a seguinte equação matricial:

$$\begin{pmatrix} k_1/k_1 & k_1/k_2 & \dots & k_1/k_n \\ k_2/k_1 & k_2/k_2 & \dots & k_2/k_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_n/k_1 & k_n/k_2 & \dots & k_n/k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}. \quad (9.1)$$

Nesse exemplo, não só as entradas da matriz M mas também os pesos das pedras já são conhecidos. Entretanto, normalmente, ao articular suas

preferências o decisor desconhece o peso (prioridade) k_i de cada alternativa na decisão final e as relações k_i/k_j são definidas pelo decisor conforme alguma escala. Assim, deseja-se determinar a prioridade de cada alternativa, conforme cada critério, resolvendo-se o sistema 9.1.

Dada uma matriz qualquer $B_{n \times n}$, são *auto-valores* e *auto-vetores* de B os escalares λ e os vetores não nulos $x_{n \times 1}$, respectivamente, tais que $Bx = \lambda x$. Se a matriz B é consistente, seu principal auto-valor $\lambda_{max} = n$ e seu principal auto-vetor é dado por qualquer coluna de B . Por outro lado, se B não é consistente, então $\lambda_{max} \geq n$ e seu principal auto-vetor é dado pela equação [15], [78]:

$$k_i = \lim \frac{m_{ij}^{(L)}}{\sum_{h=1}^n m_{ih}^{(L)}}, i = 1, 2, \dots, n, \quad (9.2)$$

para qualquer $j = 1, 2, \dots, n$, onde $m_{ij}^{(L)}$ corresponde à entrada m_{ij} da matriz M elevada à potência L .

Uma outra interpretação para essa equação é possível usando-se a teoria dos grafos. O termo *caminho* designa uma seqüência de arcos em que o nó inicial de cada arco corresponde ao nó terminal do arco anterior, exceto pelo último nó terminal. A intensidade de um caminho é calculada pelo produto das intensidades de seus arcos. Por exemplo: dado que o arco a_{ij} parte do nó a_i ligando-o ao nó a_j , a intensidade de todos os caminhos de comprimento L do nó a_i ao nó a_j é dada por:

$$\sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_{L-1}=1}^n a_{ii_1} a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_{L-1} j}. \quad (9.3)$$

Comparando-se a Equação 9.3 com a Equação 9.4, que define o valor de cada entrada $m_{ij}^{(L)}$ de M^L , pode-se concluir que $m_{ij}^{(L)}$ corresponde à intensidade dos caminhos de comprimento L que vão do nó i ao j :

$$m_{ij}^{(L)} = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_{L-1}=1}^n a_{ii_1} \dots a_{i_{L-1} j}. \quad (9.4)$$

Portanto, voltando à Equação 9.2, quanto maior for L , maior será o número de interações consideradas entre as alternativas, ao definir o valor de k_i . Saaty recomenda que o problema do auto-valor seja resolvido elevando-se a matriz M a uma potência suficientemente elevada e somando-se as linhas a fim de se normalizar o auto-vetor k . Esse processo é interrompido quando a diferença entre a i -ésima potência e a $(i+1)$ -ésima potência é inferior a um valor pré-definido [79]. No exemplo a seguir, suponha que a matriz inconsistente M tenha sido gerada pelo decisor a partir das comparações de

três alternativas hipotéticas. Como se pode ver, elevando-se M às potências $L = 14$ e $L = 15$, as colunas já normalizadas de \overline{M}^{14} e \overline{M}^{15} convergem para um mesmo vetor (o auto-vetor): $(0,210 \quad 0,404 \quad 0,386)^T$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/7 \\ 1/2 & 1 & 4 \\ 7 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{M}^{14} = \begin{pmatrix} 0,2110 & 0,2116 & 0,2099 \\ 0,4019 & 0,4038 & 0,4043 \\ 0,3870 & 0,3846 & 0,3857 \end{pmatrix}$$

$$\overline{M}^{15} = \begin{pmatrix} 0,2102 & 0,2111 & 0,2113 \\ 0,4038 & 0,4024 & 0,4038 \\ 0,3859 & 0,3865 & 0,3849 \end{pmatrix}$$

Outras formas de se definir as prioridades k_i foram propostas, embora apenas esta seja considerada adequada para os casos em que a matriz M é inconsistente [78].

9.4 Índice de Consistência

O método AHP admite que as matrizes de comparações não sejam perfeitamente consistentes e, portanto, não exige que o decisor realize julgamentos transitivos. Entretanto, para avaliar a consistência dos julgamentos do decisor, Saaty criou um *índice de consistência (IC)*, proporcional à diferença entre o principal auto-valor λ_{max} da matriz M e do valor que teoricamente ele teria caso a matriz fosse consistente $\lambda_{max} = n$:

$$IC = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}.$$

Segundo Saaty, se $IC > 0,1$, é aconselhável reavaliar a matriz M , pois seus julgamentos podem estar tendendo a julgamentos aleatórios [79].

9.5 Composição Hierárquica

Considere um conjunto finito C de critérios independentes entre si e um conjunto finito A de alternativas que tenham sido avaliadas segundo cada

um dos critérios pertencentes a C , a partir de m matrizes M de comparações entre as alternativas (uma matriz M para cada critério). A prioridade da j -ésima alternativa k_{ji} em relação a cada critério $c_i, i = 1, 2, \dots, m$ é dada pelo produto $w_i k_{ji}$, sendo w_i a prioridade do i -ésimo critério. Mas, quando se considera a prioridade da j -ésima alternativa levando-se em conta todo o conjunto C , esta deve ser calculada pelo somatório:

$$\sum_{i=1}^m w_i k_{ji}. \quad (9.5)$$

No AHP, esse mesmo princípio é generalizado para uma hierarquia de critérios, definida de tal modo que: o primeiro nível da hierarquia contém o objetivo geral do decisor; este vai se abrindo em critérios de decisão cada vez mais específicos, à medida que se desce para os níveis inferiores; no nível mais inferior da hierarquia estão as alternativas a serem comparadas, segundo todos os critérios do nível imediatamente superior a elas. Veja um exemplo na Figura 9.2.

Tendo sido definida a estrutura hierárquica, o AHP adota o mesmo procedimento utilizado para as alternativas a fim de se descobrir a prioridade de cada critério. Assim, para cada critério é definida uma matriz M a partir das comparações dos seus “subcritérios”, ou seja, dos critérios descendentes dele que pertencem ao nível imediatamente inferior ao dele na hierarquia. No exemplo da Figura 9.2, que se refere ao problema da compra de um carro, são necessárias ao todo dez matrizes M_i . A matriz M_1 é gerada a partir da comparação dos critérios do Nível 2 segundo o critério c_1 . Nessas comparações, procura-se a resposta para a questão “qual o peso de cada um dos critérios Custo, Espaço e Características da Engenharia para a escolha de um carro”. A matriz M_2 é gerada a partir da comparação dos critérios c_5 e c_6 do Nível 3, segundo o critério c_2 . Agora, a seguinte questão deve ser respondida: levando-se em conta o critério Custo, qual é a importância do custo de compra e do custo de manutenção? De maneira análoga, a matriz M_3 é gerada pela comparação de c_7 e c_8 , segundo o critério c_3 , e assim por diante, até as matrizes M_5 - M_{10} , que são geradas pela comparação das alternativas, conforme cada um dos seis critérios $c_5 - c_{10}$ do Nível 3. Tendo-se obtido, por meio dessas 10 matrizes, o valor dos pesos $w_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) de todos os critérios da hierarquia e os pesos k_{ji} de todas as alternativas segundo os critérios $i = 5, 6, 7, \dots, 10$, a forma mais simples de se compor a prioridade global K_j da j -ésima alternativa é multiplicando sua prioridade k_{ji} , computada para um dado critério c_i do Nível 3, pela prioridade deste critério em questão, pela prioridade do critério do Nível 2 do qual ele descende e assim por diante até chegar ao Nível 1. Tendo feito isso para todos

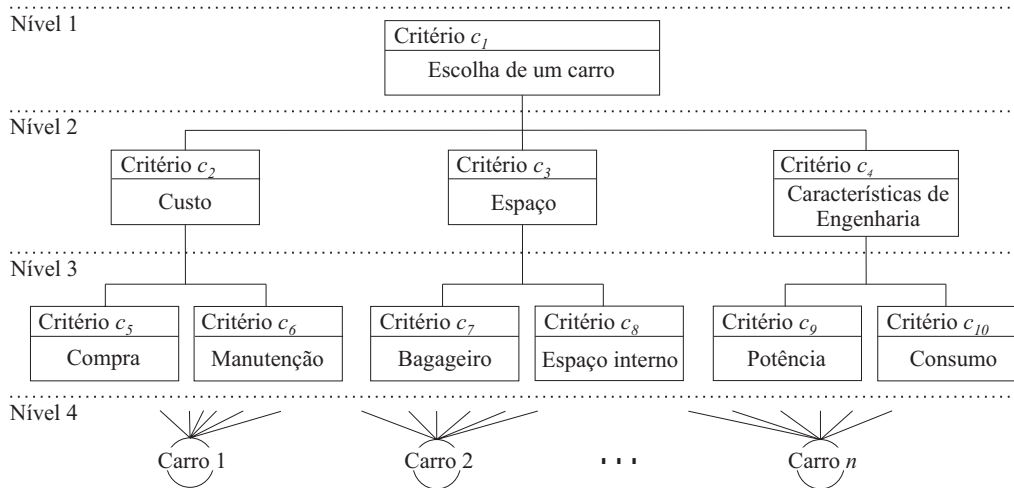


Figura 9.2: Exemplo de hierarquia.

os critérios do Nível 3, todos esses valores devem ser somados. Assim, neste exemplo, a prioridade global K_j da j -ésima alternativa pode ser calculada por:

$$K_j = (k_{j5}w_5 + k_{j6}w_6)w_2w_1 + (k_{j7}w_7 + k_{j8}w_8)w_3w_1 + (k_{j9}w_9 + k_{j10}w_{10})w_4w_1,$$

sendo $k_{j1}, k_{j2}, \dots, k_{j6}$ a prioridade da alternativa em questão segundo cada um dos seis critérios do Nível 3 e w_i o peso de cada critério c_i .

9.6 Conclusões

Assim como os métodos da Escola Americana, o AHP pressupõe que o decisor tem seus valores e preferências bem definidos antes do início do processo de decisão. Assim, ele extrai do decisor essas informações, a fim de criar um modelo matemático em conformidade com sua preferência. Por outro lado, o AHP apresenta alguns aspectos diferentes da teoria da utilidade: ele permite que os julgamentos do decisor não sejam perfeitamente transitivos, embora sugira que se evite julgamentos muito inconsistentes; além disso, ao contrário da teoria da utilidade em que os julgamentos têm caráter ordinal, no AHP eles têm caráter cardinal. Apesar de exigir que o decisor efetue avaliações mais complexas (afinal, além de indicar a sua preferência, ele deve especificar a intensidade dessa preferência), Saaty defende que isso é necessário para assegurar a validade do modelo matemático e da ordenação final das alternativas.

Por essas particularidades, o AHP mostra-se como uma abordagem ino-

vadora, que tem atraído a atenção da comunidade científica. Os trabalhos de pesquisa têm investigado os seguintes aspectos, entre outros:

- a criação de novas escalas, inclusive escalas que permitem julgamentos vagos, baseadas em lógica fuzzy [27];
- o estudo de novas maneiras de se agregar os resultados obtidos para cada critério. Além do método do auto-vetor, a literatura apresenta vários outros como: mínimos quadrados, mínimos quadrados logarítmico, média geométrica [80];
- o estudo de seu principal ponto fraco, o problema da inversão de ordem, segundo o qual a adição/subtração de alternativas insignificantes pode causar alterações na ordenação final do conjunto [81], [83];
- o estudo da consistência e da validade dos julgamentos do decisor [82].

Capítulo 10

Acoplamento entre Métodos de Decisão e de Busca Evolucionária

10.1 Introdução

A partir da noção de Pareto-ótimo, foi desenvolvida uma abordagem para a solução de problemas de otimização com múltiplos objetivos conflitantes, segundo a qual a solução final para esse tipo de problema deve atender a dois requisitos: i) ela deve ser uma solução não-dominada; ii) ela deve atender às preferências de um decisor humano. Existem, na literatura, vários trabalhos importantes que associam métodos de análise multicritério a algoritmos de otimização evolucionária. Esses trabalhos são fruto do reconhecimento do papel do decisor humano na resolução de problemas com múltiplos objetivos e herdaram da Análise Multicritério a preocupação em respeitar as limitações do decisor e sua dificuldade em fazer julgamentos confiáveis e coerentes com seus interesses.

Foram propostas na literatura três abordagens para o encadeamento de algoritmos de busca e métodos de decisão: decisão *a priori*, interativa e *a posteriori*. Cada uma delas requer que o decisor apresente suas preferências em diferentes circunstâncias. Este capítulo descreve em detalhes essas três abordagens; aponta os pontos críticos de cada uma delas; apresenta os principais trabalhos existentes sobre este tema e propõe ainda duas novas abordagens de decisão:

- decisão *a posteriori* com um novo método de decisão: Método de Torneios Multicritério;

- decisão interativa, com o método Promethee II acoplado a um algoritmo de busca evolucionária.

Também foram incluídos neste capítulo procedimentos de decisão *a priori*, interativa e *a posteriori* que fazem uso do método de decisão segundo a abordagem de Bellman-Zadeh. Apesar de não se basear na modelagem da preferência humana como os demais métodos vistos aqui, ele apresenta uma série de pontos positivos que motivaram sua inclusão nesta tese: fácil implementação computacional; possui poucos parâmetros de entrada; tem gerado resultados satisfatórios na seleção da solução final de problemas com múltiplos objetivos.

10.2 Encadeamento entre Métodos de Busca e de Decisão

A literatura apresenta três diferentes formas de se encadear mecanismos para tomada de decisão com os algoritmos de otimização [2], [3]:

- **Apresentação de preferências *a priori*.** O decisor é consultado uma única vez, antes que a busca seja realizada. Geralmente, uma técnica de decisão é utilizada para agregar os objetivos em um valor escalar que represente a preferência global do decisor. Então, esse valor é maximizado através de algum algoritmo de otimização. A principal vantagem dessa abordagem deve-se ao fato de que ela requer que se encontre um único ponto ótimo, o que normalmente exige menor esforço computacional do que a busca por uma aproximação satisfatória da fronteira Pareto. Por outro lado, sua maior desvantagem deve-se à necessidade de que o decisor articule suas preferências tendo em mãos poucas informações sobre o conjunto de alternativas. Esse aspecto é particularmente crítico segundo alguns autores que defendem a idéia de que, normalmente, o decisor não tem interesses bem definidos ou mesmo uma idéia clara do problema, antes de conhecer o conjunto de alternativas, e que sua preferência vai sendo construída enquanto ele avalia e compara as possíveis soluções [44].
- **Apresentação de preferências progressiva ou interativa.** Neste caso, as consultas ao decisor são efetuadas repetidas vezes ao longo do processo iterativo de otimização. Em cada consulta, o decisor deve articular suas preferências, baseando-se na informação disponível na iteração corrente. Então, suas preferências guiam o algoritmo de busca

pelas próximas iterações até que outra consulta seja realizada. Geralmente, interrompe-se esse processo quando o decisor se sente satisfeito com a solução que estiver em suas mãos. Essa condição de parada é denominada “convergência psicológica” por permitir que alternativas já descartadas em consultas anteriores sejam reconsideradas. A principal vantagem dessa abordagem está na possibilidade de se obter informações quanto ao conjunto de possíveis soluções antes da decisão final. Além disso, o algoritmo de busca normalmente não exige excessivo esforço computacional, à medida que não haja demanda do decisor por muitas amostras da fronteira Pareto.

- **Apresentação de preferências *a posteriori*.** O decisor é consultado após a obtenção de uma aproximação discreta da fronteira Pareto. Portanto, inicialmente é necessária a execução de um algoritmo de busca multiobjetivo e, somente depois, as técnicas de decisão são aplicadas. Essa abordagem apresenta várias vantagens: devido à independência entre os estágios de otimização e de decisão, uma mudança de interesses não exige grande esforço adicional, pois apenas a etapa de decisão precisa ser executada novamente; o decisor pode definir suas preferências conhecendo todas as suas alternativas; alguns critérios como, por exemplo, a análise de sensibilidade dos parâmetros de entrada ou critérios que dependem de uma avaliação inteiramente subjetiva do decisor são mais facilmente adicionados à decisão *a posteriori* do que à decisão *a priori* ou interativa. Por outro lado, sua desvantagem está no alto custo computacional requerido pela busca por uma aproximação discreta da fronteira Pareto.

É interessante ressaltar que, nessas três abordagens, a consulta ao decisor consiste em questioná-lo quanto às informações referentes à sua preferência necessárias para a especificação dos parâmetros de entrada do método de decisão em uso (vale lembrar que o termo decisor pode corresponder, na prática, a uma única pessoa diante de um problema de tomada de decisões ou a uma equipe com vários indivíduos). No caso específico da decisão interativa, ele também é convidado a acompanhar a evolução do processo de busca e a interferir, eventualmente, alterando a configuração dos parâmetros do método de decisão.

10.3 Definição do Problema de Decisão no Contexto da Otimização Multiobjetivo

O problema de decisão multicritério originado no contexto da otimização multiobjetivo consiste em escolher, entre as soluções Pareto-ótimas, aquela que melhor satisfaz aos interesses de um decisor humano, considerando-se múltiplos critérios de decisão. Nesse contexto específico, os conjuntos de alternativas A , de conseqüências da implementação de cada alternativa e de critérios C possuem as características especiais descritas a seguir:

- **Conjunto A de alternativas.** O conjunto A é composto por todos os vetores eficientes de parâmetros \vec{x} . Na decisão *a posteriori*, ele é previamente reduzido a um conjunto discreto de pontos eficientes, por meio da execução de um algoritmo de busca multiobjetivo. Assim, a escolha da solução final pode ser tratada como um típico problema de decisão do tipo P_2 . Nas abordagens de decisão *a priori* e interativa, quando o processo de decisão tem início, o decisor tem em mãos poucas (ou nenhuma) amostras do conjunto A . Assim, espera-se que o algoritmo de busca, acoplado ao de decisão, encontre o ponto ótimo preferido pelo decisor. Nessas duas abordagens, é comum o uso de métodos de decisão próprios para a solução de problemas do tipo P_1 , associados a algoritmos de busca. A nota atribuída a cada ponto, por meio desses métodos, permite ordenar as alternativas da melhor à pior, conforme a preferência do decisor. Ao término do processo de otimização, a busca deve ter convergido para uma solução final única, que corresponda ao ponto eficiente em que essa nota atinge seu valor máximo.
- **Conjunto de efeitos da implementação de cada alternativa.** Para se determinar qual a melhor alternativa, elas devem ser comparadas entre si, levando-se em conta as conseqüências de sua execução. No contexto da otimização multiobjetivo, as conseqüências que nos interessam em geral podem ser avaliadas através das funções objetivo.
- **Conjunto C de critérios de decisão.** Normalmente, cada critério de decisão é derivado de um objetivo de otimização, sendo modelado matematicamente por um funcional $c_i(f_i(\vec{x})) : A \rightarrow \mathfrak{R}$, que associa a cada possível solução um valor escalar. Esse valor deve refletir a preferência do decisor, definida levando-se em conta somente o efeito da execução da alternativa segundo o critério em questão, ou seja, o valor da função objetivo $f_i(\vec{x})$. No entanto, vale ressaltar que não necessariamente todos os critérios se derivam diretamente de funções

objetivo. Em alguns casos pode ser interessante acrescentar critérios que dependam de avaliações subjetivas do decisor ou, o que é mais comum, de uma análise de sensibilidade das variáveis de decisão.

10.4 A Escolha do Método de Decisão

Ao escolher um método de decisão para selecionar a solução final de problemas de otimização com múltiplos objetivos, alguns importantes aspectos devem ser considerados:

1. **Inversão de ordem.** O indesejado fenômeno de inversão de ordem, observado em vários métodos baseados em comparações entre os possíveis pares de alternativas, é particularmente crítico no contexto da otimização multiobjetivo. No caso das abordagens de decisão *a priori* e interativa, a oscilação entre duas ou mais ordenações muito diferentes pode dificultar o processo de convergência, ao apontar diferentes direções de busca em cada iteração do algoritmo de otimização. No caso da decisão *a posteriori*, pode acontecer de soluções finais muito distintas serem obtidas quando diferentes aproximações da fronteira Pareto forem consideradas. Uma maneira de se tentar estudar a influência do fenômeno de inversão de ordem sobre a escolha da solução final é investigando a estabilidade dos resultados para diferentes aproximações da fronteira Pareto. No entanto, conforme observado empiricamente, resultados muito oscilantes podem ocorrer em consequência da inversão de ordem ou, então, devido a possíveis julgamentos de indiferença entre duas ou mais soluções. Mas, esse último caso pode ser confirmado analisando-se a curva referente ao valor escalar usado para ordenar as alternativas. No caso de julgamentos de indiferença, as curvas obtidas para cada aproximação da fronteira são multimodais e as soluções finais oscilam entre seus picos.
2. **Custo computacional.** O custo computacional do método de decisão cresce, obviamente, com o aumento do número de critérios (m) e de alternativas (n). Enquanto no caso dos métodos baseados em comparações de pares de alternativas, como o Promethee, o custo geralmente tende a ser proporcional a $m \times n \times (n - 1)/2$, no caso dos métodos baseados em funções de utilidade, como o Smarts e o Smarter, ele em geral é proporcional a $m \times n$. Nas abordagens de decisão *a priori* e interativa, o custo é um aspecto particularmente relevante, uma vez que o método de decisão é executado tantas vezes quantas forem o número de iterações executadas pelo algoritmo de busca (veja as Referências

[84], [87], [92], por exemplo). No caso da decisão *a posteriori*, esse aspecto tende a ser menos crítico, pois o método de decisão normalmente é executado apenas uma vez, a não ser que o decisor mude suas preferências.

3. **Esforço de elaboração mental.** Esse termo refere-se ao esforço do decisor humano em analisar o problema, articular suas preferências e especificar os parâmetros de entrada requeridos pelo método de decisão. Obviamente, quanto maior o volume e a complexidade das informações requeridas pelo método, mais custoso é para o decisor fornecê-las. É válido lembrar que, no caso da abordagem de decisão interativa, esse aspecto é particularmente crítico, uma vez que o decisor pode ser consultado várias vezes ao longo do processo de busca.
4. **Preservação da relação de dominância.** A relação de preferência deve refletir também a relação de dominância para que se garanta que a solução preferida seja também não-dominada. Esse requisito é particularmente crítico nas decisões *a priori* e interativa, em que as preferências do decisor podem guiar o algoritmo de otimização para pontos não pertencentes à fronteira Pareto.
5. **Forma da fronteira Pareto.** A técnica de decisão pode não funcionar adequadamente dependendo da forma da fronteira Pareto do problema em questão. Já é conhecido, por exemplo, que os métodos Smarts e o Smarter, baseados na agregação aditiva de funções lineares, não são capazes de selecionar soluções pertencentes à porção não-convexa de uma fronteira Pareto não-convexa à esquerda. Uma das contribuições deste trabalho consistiu em mostrar, através de resultados empíricos, que nesses mesmos casos, o método Promethee II também tende a produzir resultados incoerentes com a preferência do decisor. Tendo em vista essas observações, antes de fazer uso de algum método de decisão, é interessante verificar se ele é adequado para o problema. Cuidado especial deve ser tomado nos casos de decisão *a priori* e interativa, pois ambas exigem que o decisor articule suas preferências sem conhecer a forma exata da fronteira Pareto.
6. **Análise de sensibilidade.** Se por um lado é desejável que os métodos de decisão respondam a mudanças em seus parâmetros de entrada, por outro, não é interessante que uma mudança muito pequena leve a resultados muito diferentes, principalmente porque o decisor em geral especifica os parâmetros apenas de forma aproximada. Desse modo, é

interessante fazer uma análise de sensibilidade, verificando, por exemplo, a variação máxima possível dos pesos de cada critério, sem que a solução final se altere.

7. **Transitividade.** Conforme mencionado anteriormente, é comum a preferência humana não atender à condição de transitividade, como nos julgamentos $aPb \wedge bPc \wedge cPa$ ou, ainda, $aIb \wedge bIc \wedge aPc$. A teoria da utilidade não permitia, inicialmente, nenhuma situação de intransitividade. Mas, logo foi estendida, passando a admiti-la no julgamento de indiferença, através do uso de uma relação característica S de semi-ordem ou ordem-intervalar. Os métodos baseados no conceito de sobreclassificação, por sua vez, admitem situações de indiferença intransitiva e alguns deles, como os da família Electre, também admitem a preferência intransitiva [73].
8. **Incomparabilidade.** Situações de incomparabilidade ocorrem frequentemente na prática devido à ausência de informações suficientes para que o decisor articule suas preferências ou, ainda, devido a avaliações ambíguas ou conflitantes (leia Seção 5.4 do Capítulo 5 para mais detalhes). Os métodos da Escola Americana não permitem esse tipo de atitude do decisor, ao contrário de alguns métodos da Escola Francesa. Em Promethee I, por exemplo, são incomparáveis as alternativas a e b tais que $\phi_{out}(a) > \phi_{out}(b)$ e $\phi_{in}(a) > \phi_{in}(b)$, ou seja, quando a comparação dos fluxos que saem de a e de b sugere que a é preferida à b , mas a comparação dos fluxos que entram em a e em b sugere que b é preferida à a . Nos métodos Electre, são incomparáveis os pares de alternativas entre as quais não se verifica a relação de sobreclassificação.

A adoção de métodos que permitem a intransitividade e/ou a incomparabilidade tem seus prós e contras. Apesar de terem uma maior flexibilidade, esses métodos deixam algumas perguntas em aberto. Qual é a melhor entre duas ou mais alternativas incomparáveis? No caso de julgamentos intransitivos, como ordenar as alternativas? A forma mais natural de se abordar essas duas situações é considerando-as como um caso de indiferença entre alternativas, sob o pretexto de que é impossível determinar matematicamente qual é a alternativa preferida e qual é a preterida. No entanto, na decisão *a priori* e na interativa, essa abordagem pode conduzir o algoritmo de busca segundo mais de uma direção simultânea, o que dificulta o processo de otimização. Na decisão *a posteriori*, por sua vez, essa abordagem pode não ser suficiente para a seleção de uma única solução final, principalmente se o número de alternativas consideradas incomparáveis ou envolvidas em julgamentos intransitivos for muito alto. Portanto, a opção por métodos que

admitem toda essa flexibilidade exige um cuidado adicional que consiste em definir como tratar adequadamente a intransitividade e a incomparabilidade durante o processo de busca e/ou na escolha da solução final.

10.5 Exemplos de Acoplamento entre Métodos da Escola Americana e Algoritmos de Busca Evolucionária

Esta seção contém diferentes exemplos encontrados na literatura, em que métodos de decisão da Escola Americana, associados a algoritmos de otimização evolucionária, são empregados na solução de problemas de otimização multiobjetivo.

10.5.1 Decisão *a priori* baseada em ISMAUT

Em [84], a decisão *a priori* é realizada usando um método de decisão para ordenar os indivíduos no processo de seleção de um AG mono-objetivo. Esse método baseia-se numa abordagem conhecida como ISMAUT (*Imprecisely Specified Multiattribute Utility Theory*), que permite a construção da função utilidade global $U(\vec{x}) = \sum_{i=1}^m w_i u_i(f_i(\vec{x}))$, a partir de informações imprecisas quanto às preferências do decisor.

Ao contrário do modelo aditivo adotado pelo Smarts, aqui cada função u_i pode ser linear ou não-linear, desde que seja monotonicamente crescente ou decrescente e varie apenas no intervalo $[0, 1]$, tendendo para 1 quanto melhor for o valor de $f_i(\vec{x})$. Além disso, os pesos w_i de cada critério são imprecisos, ou seja, em nenhum momento o decisor precisa especificar o valor dos pesos w_i , embora esses devam atender a certas restrições geradas a partir de seus julgamentos.

Na verdade, em vez de especificar os pesos w_i , o decisor deve definir sua preferência entre alguns pares de alternativas, os quais podem ser extraídos da população atual gerada pelo AG. Por exemplo, dadas as alternativas a e b , se a é preferida à b , então, por imposição do modelo adotado, tem-se que $U(a) > U(b)$ e, conseqüentemente, $\sum_{i=1}^m w_i [u_i(f_i(a)) - u_i(f_i(b))] > 0$. Assim, a partir dos julgamentos do decisor em relação a diferentes pares de alternativas, é possível estabelecer um conjunto de restrições para os valores dos pesos w_i . Essas restrições, em união com $\sum_{i=1}^m w_i = 1$ e $w_i > 0, i = 1, 2, \dots, m$, definem uma região viável W . Para determinar se uma terceira alternativa qualquer c é preferida à alternativa a , o seguinte problema linear deve ser resolvido:

$$z = \min \sum_{i=1}^m w_i [u_i(f_i(c)) - u_i(f_i(a))], \quad (10.1)$$

sujeito a $w_i \in W$.

Diz-se, então, que c é preferida à a se:

$$(z > 0) \wedge (\bar{z} = -z = \sum_{i=1}^m w_i [u_i(f_i(a)) - u_i(f_i(c))] < 0). \quad (10.2)$$

Se ambas condições não forem atendidas, então diz-se que a é indiferente à c . A grande desvantagem desse método está no fato de que se o decisor fizer julgamentos intransitivos, esse problema linear não terá solução. Por isso, para identificar e eliminar possíveis “inconsistências” nas atitudes do decisor, esse método faz uso de um algoritmo complexo, cujo alto custo computacional pode inviabilizar o uso dessa técnica de decisão *a priori* na prática.

10.5.2 Decisão *a posteriori* com técnica de “cluster”

Em [85], uma técnica de *cluster* é aplicada no contexto da otimização multiobjetivo, para dividir o conjunto A em grupos conforme as semelhanças entre seus elementos e, com isso, dividir o problema de decisão em outros mais simples e independentes entre si. Com essa divisão, a escolha da melhor alternativa em cada grupo, além de apresentar menos alternativas, tende a envolver menos critérios, visto que geralmente são descartados aqueles segundo os quais as alternativas são muito semelhantes entre si.

A divisão das alternativas em n' conjuntos exige que o decisor especifique antes o centro \vec{y}_i de cada conjunto $A_i, i = 1, 2, \dots, n'$. Afinal, cada alternativa pertence ao conjunto de cujo centro ela está mais próxima. Para o cálculo da distância entre cada alternativa \vec{x} e cada centro \vec{y}_i pode ser usada a equação:

$$d(\vec{x}, \vec{y}_i) = \sqrt{w_1(f_1(\vec{x}) - f_1(\vec{y}_i))^2 + \dots + w_m(f_m(\vec{x}) - f_m(\vec{y}_i))^2}, i = 1, \dots, n',$$

onde w_i é o peso (ou prioridade) de cada objetivo de otimização.

Embora a referência [85] enfoque apenas o uso da técnica de *cluster*, Malakooti sugere o uso de uma técnica de decisão como o Smarts, aplicada localmente em cada grupo, para a seleção das melhores alternativas. A escolha de uma solução única final pode ser feita aplicando esse mesmo método de decisão (ou outro qualquer) ao conjunto de alternativas formado pela alternativa preferida de cada grupo.

10.5.3 Decisão *a posteriori* com Smarts

Na referência [86], três abordagens de decisão *a posteriori* são comparadas entre si. Uma delas consiste em executar o Smarts levando-se em conta o conjunto de soluções eficientes obtido pelo NSGA-II. O uso do Smarts na etapa de decisão tem alguns aspectos positivos: exige que o decisor especifique apenas os pesos de cada critério; tem baixo custo computacional; é de fácil implementação. Por outro lado, um aspecto bastante crítico deve-se ao fato de que o Smarts não gera resultados consistentes quando aplicado a problemas cuja fronteira delimita uma região não-convexa.

10.6 Exemplos de Acoplamento entre Métodos da Escola Francesa e Algoritmos de Busca Evolucionária

Esta seção apresenta exemplos em que métodos de decisão da Escola Francesa, associados a algoritmos de otimização evolucionária, são empregados na solução de problemas de otimização multiobjetivo. Além disso, uma nova abordagem é aqui introduzida: a decisão interativa com o Promethee II.

10.6.1 Decisão *a priori* com Promethee II

Em [87] - [93], realiza-se a decisão *a priori* acoplando-se Promethee II a AGs. O método de decisão agrega todos os objetivos em uma quantidade escalar, o fluxo de rede ϕ , que é utilizado para determinar a chance de cada indivíduo sobreviver ao processo de seleção.

As Referências [92] e [93] propõem ainda uma nova metodologia para se tratar simultaneamente as restrições do problema de otimização e as preferências do decisor, denominada PAMUC (*Preferences Applied to Multiobjectivity and Constraints*). Esta exige que sejam considerados $m + 1$ critérios pelo método Promethee II: m critérios correspondentes às funções objetivo e um critério adicional, que leva em conta a satisfação das restrições do tipo $g_i(\vec{x}) \geq 0$:

$$c_{m+1}(\vec{x}) = \sum_{g_i > 0} \frac{|g_i(\vec{x})|}{\beta_i} \quad (10.3)$$

sendo o fator de escala $\beta_i = \sum_{j=1}^{Npop} |g_i(\vec{x})| / Npop$. Os pesos dos critérios w_i são especificados pelo decisor antes do início da busca de modo que $\sum_{i=1}^m w_i = 1$,

mas os verdadeiros valores w_i^* utilizados pelo Promethee II durante sua execução são alterados dinamicamente conforme a equação abaixo, a fim de se priorizar as restrições mais violadas:

$$w_i^* = w_i \times RG, \forall i = 1, \dots, m; \quad (10.4)$$

$$w_{m+1}^* = 1 - RG; \quad (10.5)$$

Nessas equações $RG = Nviavel/Npop$, sendo $Nviavel$ o número de indivíduos viáveis na iteração anterior. Assim, quando $Nviavel$ é pequeno, a importância do critério c_{m+1} torna-se mais alta na iteração seguinte. Além disso, vale notar que em qualquer iteração $\sum_{i=1}^{m+1} w_i^* = 1$.

Em [93], o método PAMUC de decisão a priori é incrementado com a possibilidade de se tratar restrições por meio de regras lógicas do tipo “se o indivíduo não atende à restrição $g_i(\vec{x})$ e à restrição $g_j(\vec{x})$, então corrija o indivíduo...”. Essas regras são executadas segundo uma probabilidade de substituição especificada pelo decisor.

10.6.2 Decisão *a posteriori* com gráfico baseado em Promethee

Em [94] é proposto um método gráfico para ordenar as alternativas a partir dos métodos Promethee I e II. Embora ele não envolva a execução prévia de qualquer algoritmo de otimização, ele pode ser utilizado na decisão *a posteriori* para selecionar a solução eficiente que melhor satisfaz às preferências do decisor.

Esse método consiste na análise de um gráfico, em que a grandeza D_ϕ , representada no eixo horizontal, é proporcional ao fluxo de rede e a grandeza S_ϕ , associada ao eixo vertical, é proporcional à soma dos fluxos ϕ_{in} e ϕ_{out} :

$$D_\phi(a) = 50 + 50 \frac{(\phi_{out}(a) - \phi_{in}(a))}{n}, \quad (10.6)$$

$$S_\phi(a) = 100 \frac{(\phi_{out}(a) + \phi_{in}(a))}{n}. \quad (10.7)$$

Note que em ambas as expressões os fluxos ϕ_{out} e ϕ_{in} são divididos por um denominador comum n , que representa o número de alternativas em A . Essa divisão assegura que o fluxo de rede ficará restrito ao intervalo $[-1, 1]$ e que as grandezas D_ϕ e S_ϕ variem de 0 a 100.

A principal vantagem do uso desse gráfico está no fato de que, além de fornecer informações quanto à ordenação gerada pelo Promethee II, ele

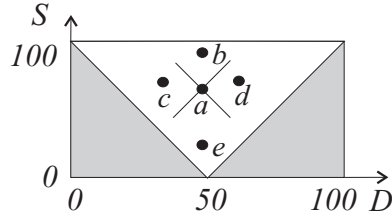


Figura 10.1: Método gráfico baseado em Promethee I e II.

permite detectar relações de incomparabilidade, definidas em conformidade com o método Promethee I. Enquanto a grandeza D_ϕ nos fornece a posição de cada alternativa segundo a ordenação do Promethee II, a grandeza S_ϕ permite detectar alternativas incomparáveis.

A Figura 10.1 exhibe o gráfico proposto por esse método (ele está rotacionado de 45 graus como na referência [94], para facilitar sua leitura). Seu eixo horizontal fornece a ordenação do Promethee II, de modo que a melhor alternativa é aquela que estiver mais à direita do gráfico. As linhas perpendiculares formando um X sobre a alternativa a podem ser movidas por todos os pontos desse gráfico. Em qualquer ponto que esse X esteja, segundo o método Promethee I, as alternativas localizadas na parte superior e na inferior são incomparáveis ao ponto em questão. As alternativas à direita são mais satisfatórias e as que estiverem à esquerda são menos satisfatórias. Portanto, nessa figura, b e e são incomparáveis à alternativa a , d é preferida à a e a é preferida à c .

Demonstração:

Dadas duas alternativas quaisquer a e b , considere a situação em que:

$$\begin{aligned} \phi_{out}(b) - \phi_{in}(b) &> \phi_{out}(a) - \phi_{in}(a), \text{ ou seja, } D(b) > D(a) \text{ e} \\ \phi_{out}(b) + \phi_{in}(b) &> \phi_{out}(a) + \phi_{in}(a), \text{ ou seja, } S(b) > S(a). \end{aligned}$$

Essas inequações podem ser reescritas como:

$$\begin{cases} \phi_{out}(b) - \phi_{in}(b) = \phi_{out}(a) - \phi_{in}(a) + d, \\ \phi_{out}(b) + \phi_{in}(b) = \phi_{out}(a) + \phi_{in}(a) + s, \end{cases}$$

sendo $d > 0, s > 0$. Manipulando-se algebricamente o sistema de equações acima, a fim de solucioná-lo para $\phi_{out}(b)$ e $\phi_{in}(b)$, tem-se que:

$$\phi_{out}(b) = \phi_{out}(a) + \frac{(s+d)}{2} \text{ e } \phi_{in}(b) = \phi_{in}(a) + \frac{(s-d)}{2}.$$

Como $d > 0$ e $s > 0$, conclui-se que: $\phi_{out}(b) > \phi_{out}(a)$. Se $s > d$, então $\phi_{in}(b) > \phi_{in}(a)$ e as alternativas a e b são incomparáveis. Se $s \leq d$, então $\phi_{in}(b) \leq \phi_{in}(a)$ e b é superior a a .

10.6.3 Decisão *a posteriori* com método baseado em Electre e Promethee II

Em [95] - [100], é realizada a decisão *a posteriori*. Inicialmente, é executado um algoritmo genético multiobjetivo a fim de se obter uma aproximação discreta da fronteira Pareto. Depois, um método de tomada de decisão, baseado em Electre III e Promethee II, é utilizado para ordenar as alternativas e selecionar a melhor. Esse método pode ser dividido em duas etapas. Inicialmente, as relações de sobreclassificação $S(a, b)$ são definidas entre os pares de alternativas conforme o conceito de concordância e discordância proposto pelo método Electre III (veja as Equações 8.4, 8.5, 8.6, 8.7, 8.8 e 8.10). Em seguida, em vez de utilizar a dispendiosa técnica de destilação do Electre III, essas informações são agregadas adotando-se o conceito de fluxo de rede como no método Promethee II. Neste caso, o fluxo de rede para uma alternativa genérica $a \in A$ é determinado pela diferença:

$$\phi(a) = \sum_{\forall b \in A} S(a, b) - S(b, a). \quad (10.8)$$

Finalmente, as alternativas podem ser ordenadas a partir de ϕ exatamente como no método Promethee II.

10.6.4 Decisão *a posteriori* com Promethee II e Promethee Multiplicativo

Em [101], são implementadas duas abordagens de decisão *a posteriori*. Ambas consistem em executar, inicialmente, o método NSGA-II para obter um conjunto de soluções eficientes bem distribuído ao longo da fronteira Pareto e, posteriormente, executar a etapa de decisão com os métodos Promethee II ou o Promethee Multiplicativo. Apesar de seu custo computacional mais alto, o Promethee Multiplicativo tem como vantagem sobre o Promethee II o fato de que ele gera resultados mais satisfatórios quando aplicado a problemas não-convexos.

10.6.5 Nova abordagem de decisão interativa com Promethee II

Conforme visto neste capítulo, existem vários trabalhos na literatura em que o método Promethee II é utilizado para a seleção da solução final de problemas de otimização. Nesta tese é proposta uma técnica de decisão interativa, que consiste em acoplar o método Promethee II a um AG mono-objetivo, cujo operador Seleção exige a execução do procedimento resumido nos passos a seguir:

- **Passo 1.** Inicialmente, executa-se um procedimento similar ao do NSGA-II, que divide a população em $Nfront$ fronteiras não-dominadas, associando a cada indivíduo um número nf , correspondente a que fronteira ele pertence. Os indivíduos pertencentes à mesma fronteira não-dominada possuem o mesmo valor de nf , sendo $nf = 1$ para os indivíduos da primeira e $nf = Nfront$ para os da última fronteira.
- **Passo 2.** Permite-se, então, que o decisor especifique novos valores para os parâmetros de entrada do Promethee II ou os mantenha como estiverem.
- **Passo 3.** Aplica-se o método de decisão a cada fronteira não-dominada, separadamente. Assim, a cada ponto é associada a nota np , que reflete a preferência do decisor. É importante ressaltar que para todas as fronteiras é adotada sempre a mesma configuração para os parâmetros do Promethee II (aquela escolhida no Passo 2).
- **Passo 4.** Finalmente, executa-se um operador Seleção mono-objetivo, usando como nota final para cada indivíduo o seguinte valor escalar:

$$Sb = 2(Nfront - nf) + \frac{np}{|Front_i|}, \quad (10.9)$$

onde $|Front_i|$ é o número de pontos na fronteira em questão. Dividindo-se np por $|Front_i|$, esse termo assume sempre valores menores ou igual a um. Conseqüentemente, todos os pontos em uma dada fronteira têm sempre nota superior aos pontos pertencentes às fronteiras cujo valor de nf é superior ao dela. Portanto, o operador Seleção deve privilegiar os indivíduos de maior nota.

Para acelerar o processo de convergência da busca e, ainda, fornecer ao decisor informações relevantes sobre o conjunto A durante o processo de busca, uma técnica de elitismo semelhante à adotada pelo DPGA pode ser adotada

na decisão interativa. Ela consiste em armazenar sempre os indivíduos não-dominados da população corrente em uma população externa. Para evitar que esta cresça excessivamente, em cada iteração, os indivíduos dominados e os que estão excessivamente próximos uns dos outros são eliminados dela. Após essa limpeza, aplica-se na população externa o Promethee II entre os indivíduos restantes e os melhores colocados retornam à população corrente para participar dos processos de Cruzamento e Mutação.

Conforme mencionado anteriormente, as referências [87] - [93] implementam a decisão *a priori*, executando, primeiramente, o Promethee II em toda a população corrente e, posteriormente, o operador Seleção a fim de se maximizar o fluxo de rede ϕ . O procedimento de Seleção aqui proposto tende a exigir um maior custo computacional do que o adotado nessas referências, por exigir a divisão da população em fronteiras não-dominadas. Porém, foi observado em diversos testes que a busca é mais bem direcionada pelo método Promethee, quando ele é aplicado a cada fronteira não-dominada separadamente. O Capítulo 11 desta tese exhibe resultados bastante atrativos obtidos utilizando-se essa nova abordagem interativa.

10.7 Exemplos de Acoplamento entre Métodos baseados em Lógica Fuzzy e Algoritmos de Busca Evolucionária

Esta seção descreve alguns exemplos em que métodos de decisão baseados em lógica fuzzy são associados a algoritmos de otimização evolucionária e empregados na solução de problemas de otimização multiobjetivo.

10.7.1 Decisão *a priori* com Método Pareto-Ponderado

As referências [102] e [103] contêm uma nova maneira de se incorporar as preferências do decisor ao operador Seleção dos AGs, denominada relação Pareto-ponderada. Esta incrementa o conceito de Pareto-ótimo com a idéia de ponderação entre critérios, permitindo a ordenação completa da população.

Dado que $0 \leq \tau \leq 1$, $w = \sum_{i=1}^m w_i$ e:

$$D_i(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{se } c_i(a) \geq c_i(b), \\ 0, & \text{se } c_i(a) < c_i(b); \end{cases}$$

diz-se que a é preferida à b se e somente se $\frac{1}{w} \sum_{i=1}^m w_i D_i(a, b) \geq \tau$. É interessante notar que essa condição se reduz à relação de dominância quando $\tau = 1$, $w_i = 1/m$ para todos os critérios e se é exigido que pelo menos uma inequação $c_i(a) \geq c_i(b)$ seja estrita.

Os pesos de cada critério podem ser determinados a partir da execução de um algoritmo baseado em relações nebulosas, em que o decisor deve comparar cada critério com os demais por meio de julgamentos qualitativos do tipo: c_i é igualmente importante, é menos importante ou é muito menos importante do que c_j . Esses julgamentos qualitativos são transformados em quantitativos por meio de um algoritmo que se fundamenta na teoria exposta no Capítulo 6 desta tese. Esse algoritmo consiste em, tendo inicializado as matrizes identidade R_c e R de dimensões $m \times m$, executar os seguintes passos:

- **Passo 1.** Para todo $i \leq m$ e todo $j \leq n$, se $R_c(i, j) + R_c(j, i) = 0$, pede-se ao decisor que determine sua preferência em relação aos elementos c_i e c_j ; define-se a matriz R_c conforme as instruções logo abaixo e executa-se um algoritmo para impedir julgamentos intransitivos:
 - se c_i é igualmente importante a c_j : $R_c(i, j) = 1$, $R_c(j, i) = 1$;
 - se c_i é menos importante do que c_j : $R_c(i, j) = 0$, $R_c(j, i) = 1$;
 - se c_i é muito menos importante a c_j : $R_c(i, j) = 0$, $R_c(j, i) = 2$.

O algoritmo adotado em [102] e [103] para impedir situações de intransitividade consiste, basicamente, em percorrer toda a matriz R_c fazendo o teste a seguir e as alterações necessárias:

$$\text{se } R_c(i, k) \neq 0 \wedge R_c(k, j) \neq 0 \Rightarrow \\ R_c(i, j) = \min(2, \max(R_c(i, j), R_c(i, k) \cdot R_c(k, j))), \quad (10.10)$$

$$\forall i, j, k \in [1, 2, \dots, n]. \quad (10.11)$$

- **Passo 2.** Determina-se a matriz R a partir da matriz R_c de modo que:
 - se $R_c(i, j) = 1$, $R_c(j, i) = 1$, então $R(i, j) = R(j, i) = 1/2$;
 - se $R_c(i, j) = 0$, $R_c(j, i) = 1$, então $R(i, j) = \gamma$, $R(j, i) = \delta$;
 - se $R_c(i, j) = 1$, $R_c(j, i) = 0$, então $R(i, j) = \delta$, $R(j, i) = \gamma$;
 - se $R_c(i, j) = 0$, $R_c(j, i) = 2$, então $R(i, j) = \alpha$, $R(j, i) = \beta$;
 - se $R_c(i, j) = 2$, $R_c(j, i) = 0$, então $R(i, j) = \beta$, $R(j, i) = \alpha$.

As constantes α, β, δ e γ podem assumir quaisquer valores desde que: $\alpha + \beta = \delta + \gamma = 1$ e $\alpha < \gamma < 1/2 < \delta < \gamma$.

- **Passo 3.** Considerando-se que a matriz R define um grafo em que cada nó representa um critério, calcula-se o fluxo normalizado que sai de cada nó a fim de se obter o peso w_i de cada critério, conforme a equação:

$$w_i = \frac{\phi_{out}(c_i)}{\sum_{j=1}^m \phi_{out}(c_j)}, \quad (10.12)$$

sendo que $\phi_{out}(c_i) = \sum_{j=1}^m R(c_i, c_j)$.

10.7.2 Decisão segundo Abordagem de Bellman-Zadeh

Apesar de originalmente proposto como uma técnica de decisão *a priori*, existem na literatura trabalhos em que o método fuzzy segundo a abordagem de Bellman-Zadeh, aqui denominado MFBZ, é empregado na decisão interativa e na *a posteriori* [86], [104]. O MFBZ exige que os objetivos⁹ sejam representados a partir de conjuntos nebulosos [105]. São aceitáveis apenas as funções de pertinência capazes de refletir fielmente o grau em que a alternativa atinge o ponto ótimo do objetivo em questão, sendo recomendado o uso de funções de pertinência do tipo [67]:

- para maximização: $\mu_{f_i}(\vec{x}) = \left[\frac{f_i(\vec{x}) - f_{min_i}}{f_{max_i} - f_{min_i}} \right]$,
- para minimização: $\mu_{f_i}(\vec{x}) = \left[\frac{f_{max_i} - f_i(\vec{x})}{f_{max_i} - f_{min_i}} \right]$.

Em ambas equações, f_{min_i} e f_{max_i} correspondem, respectivamente, aos valores mínimo e máximo da função objetivo $f_i(\vec{x})$, considerando-se apenas os pontos pertencentes à fronteira Pareto.

Tendo definido os conjuntos nebulosos para cada objetivo, esses podem ser combinados por meio do operador interseção em um único conjunto D , que permite ordenar as alternativas conforme a preferência do decisor, levando-se em conta, simultaneamente, todos os objetivos. Assim, a função de pertinência μ_D é obtida pela aplicação de um operador T-norma, conforme mostra a Equação 10.13:

$$\mu_D = T(\mu_{f_1}^{w_1}, \dots, \mu_{f_i}^{w_i}, \dots, \mu_{f_m}^{w_m}). \quad (10.13)$$

⁹Nessa descrição do algoritmo o termo “critério” foi propositalmente substituído por “objetivo”, visto que a abordagem de Bellman-Zadeh foi originalmente proposta no contexto da otimização multiobjetivo.

É interessante ressaltar que w_i é o fator de prioridade de cada função objetivo, sendo que, geralmente, $\sum_{i=1}^m w_i = 1$ (embora isso não seja obrigatório). A interseção pode ser implementada através dos operadores T-norma presentes na Tabela 6.2 (outros operadores são propostos em [106] e [107]). Mas, segundo as referências [67] e [108], a interseção através do operador *min* tem gerado os resultados mais harmoniosos¹⁰.

10.8 Nova Abordagem de Decisão *a posteriori* com Método de Torneios Multicritério

Aqui uma nova abordagem é introduzida: decisão *a posteriori* com um novo método baseado em torneios entre pares de alternativas: Método de Torneios Multicritério (MTMC). O MTMC consiste em um procedimento muito simples que permite a ordenação das alternativas e a escolha de uma solução final levando-se em conta múltiplos critérios. Ele exige como parâmetros de entrada apenas o peso de cada critério e seu algoritmo possui um custo computacional relativamente baixo, principalmente quando comparado ao de outros métodos baseados em comparações entre pares de alternativas, como os das famílias Promethee e Electre. No Capítulo 11 desta tese são exibidos vários resultados obtidos na decisão *a posteriori* em que o MTMC é aplicado a conjuntos discretos de soluções eficientes previamente obtidos pelo NSGA-II. Apesar de sua simplicidade, esse método obtém soluções muito satisfatórias quando aplicados a problemas com diferentes características: contínuo ou descontínuo, convexo ou não-convexo.

Nesse novo método, as comparações entre alternativas são implementadas através de um torneio bastante simples. Para cada critério c_i são implementadas comparações entre as alternativas através da função Torneio $T_i(a, A)$, que contabiliza o percentual de vezes em que a alternativa a é preferida quando comparada às demais alternativas do conjunto A . No caso de problemas de minimização, vence em cada torneio a alternativa que possuir o menor valor da função objetivo e há empate se ambas alternativas possuem o mesmo valor da função objetivo. Assim, supondo-se que n seja o número de alternativas em A e \vec{x}_a seja o vetor de parâmetros correspondente a alternativa $a \in A$, tem-se:

¹⁰Conforme [67], são soluções harmoniosas aquelas que satisfazem os objetivos igualmente ou de forma aproximadamente igual, quando é atribuída a mesma importância a todos os objetivos.

$$T_i(a, A) = \sum_{\forall b \in A \wedge a \neq b} \frac{t_i(a, b)}{n-1}, \quad (10.14)$$

sendo que, no caso de minimização, $t_i(a, b)$ é definida como:

$$t_i(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{se } f_i(\vec{x}_b) - f_i(\vec{x}_a) \leq 0, \\ 1, & \text{se } f_i(\vec{x}_b) - f_i(\vec{x}_a) > 0. \end{cases} \quad (10.15)$$

A função Torneio atribui uma nota a cada possível solução, que pode ser utilizada para ordenar os elementos de A do melhor ao pior, considerando cada critério separadamente. Obviamente, as melhores alternativas são aquelas que mais vezes foram preferidas nos torneios. Para gerar uma ordenação que leve em conta simultaneamente todos os critérios e suas respectivas prioridades, as funções $T_i(a, b)$ são agregadas no Índice de Ordenação Global dado pela Equação 10.16, onde w_i corresponde ao peso do critério c_i e $\sum_{i=1}^m w_i = 1$.

$$OG(a, b) = \prod_{i=1}^m T_i(a, A)^{w_i}. \quad (10.16)$$

Finalmente, as alternativas são ordenadas de modo que:

- se $OG(a) = OG(b)$, então a é indiferente à b ;
- se $OG(a) > OG(b)$, então a é preferida à b .

10.9 Conclusões

Esse capítulo apresentou vários trabalhos relevantes em que métodos de tomada de decisão foram associados a algoritmos de otimização, a fim de solucionar problemas multiobjetivo. Além disso, foram descritos alguns aspectos críticos a serem considerados no ato da escolha de qual abordagem (decisão *a priori*, interativa ou *a posteriori*) e de qual método de análise multicritério adotar. A importância dessa escolha pode ser verificada no capítulo seguinte, que apresenta vários resultados obtidos em simulações da decisão *a priori* e *a posteriori* utilizando-se métodos das Escolas Americana e Francesa, além de um método de decisão nebuloso, acoplados a algoritmos evolucionários mono-objetivo e multiobjetivo.

Capítulo 11

Resultados

11.1 Introdução

O presente capítulo apresenta um estudo comparativo de várias abordagens de decisão *a priori*, interativa e *a posteriori*. Em todas elas, a otimização é realizada por algoritmos de busca evolucionária e, a decisão, por meio dos novos métodos aqui propostos, Promethee Multiplicativo e MTMC, e por métodos que têm gerado bons resultados na escolha da solução final de problemas de otimização com múltiplos objetivos. São eles: MFBZ, Smarts e Promethee II.

Aqui, maior ênfase é dada às abordagens de decisão *a posteriori*. Inicialmente, elas são comparadas entre si levando-se em conta o custo computacional e a capacidade de obter soluções distintas, quando pesos muito diferentes são adotados para cada critério de decisão. Nesse estudo, são adotados problemas analíticos com dois e três objetivos e diferentes características quanto a convexidade da região viável e a continuidade da fronteira Pareto. A fim de se demonstrar o uso da abordagem de decisão *a posteriori* em problemas de Engenharia, os métodos MTMC e Promethee Multiplicativo são utilizados para selecionar a solução final de dois problemas de eletromagnetismo, modelados na forma de problemas de otimização multiobjetivo.

Três abordagens de decisão *a priori* são comparadas com as abordagens de decisão *a posteriori*. Basicamente, elas consistem em acoplar cada método de decisão, Smarts, MFBZ e Promethee II, ao operador Seleção do algoritmo genético mono-objetivo SSGA. No intuito de acelerar a convergência do processo de otimização, a técnica de elitismo proposta na Seção 10.6.5 dessa tese é adotada nas três abordagens de decisão *a priori*. Além disso, a possibilidade de convertê-las em abordagens de decisão interativa é verificada a partir de testes em que os pesos dos critérios são alterados durante o

processo de otimização. Os resultados obtidos são bastante satisfatórios.

11.2 Comparação das Abordagens de Decisão *a posteriori*

As cinco abordagens de decisão *a posteriori* aqui estudadas consistem em executar o processo de busca multiobjetivo por meio do NSGA-II e, posteriormente, utilizar os seguintes métodos de decisão, a fim de se escolher uma única solução final:

- Smarts;
- Promethee II;
- Promethee Multiplicativo;
- MTMC;
- MFBZ.

Foram escolhidos para esse estudo os 8 problemas de otimização descritos na Tabela 11.1, modelados matematicamente da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \vec{F}(\vec{x}) &= (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})), \\ x_i &\in [x_{\min_i}, x_{\max_i}], i = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (11.1)$$

Esses problemas apresentam características diversas: P_4 , P_5 , P_6 e P_8 são convexos; P_1 , P_2 , P_3 e P_7 são não-convexos; P_1 e P_2 apresentam descontinuidades na fronteira; P_3 , P_4 , P_7 e P_8 possuem a fronteira contínua; P_5 possui uma fronteira discreta.

O estudo comparativo dessas abordagens leva em conta os seguintes critérios:

- **Custo computacional.** O custo computacional de cada método de decisão é medido aqui por meio do tempo médio de processamento requerido nas simulações realizadas sempre em um mesmo computador. A Tabela 11.2 exhibe os valores normalizados desses tempos, sendo todos eles divididos pelo tempo médio requerido pelo método Promethee Multiplicativo.

Tabela 11.1: Problemas usados no estudo da decisão *a posteriori*.

POM	m	Funções	k	$[x_{min_i}, x_{max_i}]$
P_1	2	$f_1 = x_1$ $f_2 = h_1(1 - \sqrt{(x_1/h_1)} - x_1 \sin(10\pi x_i)/h_1);$ $h_1 = 1 + 9 \sum_{i=2}^5 (x_i/4)$	5	$x_i \in [0, 1]$
P_2	2	$f_1 = \begin{cases} -x, & \text{se } x \leq 1 \\ -2 + x, & \text{se } 1 < x \leq 3 \\ 4 - x, & \text{se } 3 < x \leq 4 \\ x - 4, & \text{se } x > 4 \end{cases}$ $f_2 = (x - 5)^2$	1	$x_i \in [-2, 10]$
P_3	2	$f_1 = x_1$ $f_2 = 1 - (x_1/h_2)^2$ $h_2 = 1 + 9 \sum_{i=2}^{30} x_i/29$	30	$x_i \in [0, 1]$
P_4	2	$f_1 = x_1$ $f_2 = h_2(1 - \sqrt{x_1/h_2})$	30	$x_i \in [0, 1]$
P_5	2	$f_1 = 1 + u(x_1)$ $f_2 = \sum_{i=2}^4 \frac{h_3(u(x_i))}{f_1}$ $h_3(u(x_i)) = \begin{cases} 2 + u(x_i), & \text{if } u(x_i) < 5 \\ 1, & \text{if } u(x_i) = 5 \end{cases}$	4	$x_1 = \{0, 1\}^{10}$ $x_i = \{0, 1\}^5$
A função $u(x_i)$ conta a ocorrência do número de 1 na string binária x_i .				
P_6	2	$f_1 = \sum_{i=1}^4 x_i^2/4$ $f_2 = \sum_{i=1}^4 (x_i - 2)^2/4$	4	$x_i \in [-5, 5]$
P_7	3	$f_1 = (1 + h_4) \cos(x_1\pi/2) \cos(x_2\pi/2)$ $f_2 = (1 + h_4) \cos(x_1\pi/2) \sin(x_2\pi/2)$ $f_3 = (1 + h_4) \sin(x_1\pi/2)$ $h_4 = \sum_{i=3}^5 (x_i - 0,5)^2$	5	$x_i \in [0, 1]$
P_8	3	$f_1 = -(1 + h_4) \cos(x_1\pi/2) \cos(x_2\pi/2)$ $f_2 = -(1 + h_4) \cos(x_1\pi/2) \sin(x_2\pi/2)$ $f_3 = -(1 + h_4) \sin(x_1\pi/2)$	5	$x_i \in [0, 1]$

- **O espalhamento das soluções quando diferentes pesos w_i são utilizados.** Uma das contribuições desse doutorado consistiu em mostrar por meio de dados empíricos que, para problemas de otimização em que a fronteira Pareto delimita a porção não-convexa da região viável, o Promethee II tende a retornar o mesmo resultado, ainda que o decisor faça alterações drásticas nos pesos de cada critério e nas funções preferência [76]. Essa é uma limitação do método, uma vez que não faz sentido ajustar parâmetros que não interferem nos resultados. O presente estudo verifica o espalhamento das soluções finais ao longo da fronteira, quando diferentes pesos são adotados. Para isso, são usados os índices NED (número de escolhas distintas) e Δ descritos a seguir e os métodos de decisão são simulados para os problemas com dois objetivos com 9 diferentes pares de pesos (w_1, w_2) : $(0,1, 0,9)$, $(0,2, 0,8)$, $(0,3, 0,7)$, $(0,4, 0,6)$, $(0,5, 0,5)$, $(0,6, 0,4)$, $(0,7, 0,3)$, $(0,9, 0,1)$.

O índice NED foi proposto em [109] para medir a qualidade da fronteira não-dominada encontrada por algoritmos de otimização multiobjetivo, refletindo o espalhamento dos pontos não-dominados encontrados. No entanto, aqui ele é usado apenas para detectar se os métodos de decisão tendem a selecionar sempre a mesma solução ou soluções muito próximas, quando o decisor muda o peso de cada critério. O índice NED computa o número de soluções diferentes ao final da execução do método de decisão para problemas com dois objetivos, quando diferentes pares de pesos são adotados. Aqui, são consideradas como uma única escolha as soluções consecutivas cuja distância euclidiana é inferior a 5% da distância entre os pontos extremos da fronteira Pareto real. Então, $NED = 1$, quando os nove pontos selecionados estão muito próximos uns dos outros, e $NED = 9$, quando eles estão suficientemente distantes entre si.

O índice Δ determina o quanto as soluções finais estão bem distribuídas ao longo da fronteira:

$$\Delta = \frac{df + di + \sum_{j=1}^8 |d_j - \bar{d}|}{df + di + 8\bar{d}}. \quad (11.2)$$

Nessa equação, os parâmetros d_j , para $(j = 1, 2, \dots, 8)$ correspondem às distâncias Euclidianas entre duas soluções consecutivas, como na Figura 11.1; \bar{d} é o valor médio das distâncias d_j ; df e di são as distâncias entre os pontos extremos da fronteira Pareto e as soluções escolhidas usando-se os pesos $(0,9, 0,1)$ e $(0,1, 0,9)$, respectivamente. Baixos valores de Δ correspondem a soluções bem distribuídas, pois, para pontos uniformemente distribuídos $\sum_{j=1}^8 |d_j - \bar{d}| = 0$ e o numerador de Δ atinge seu menor valor possível.

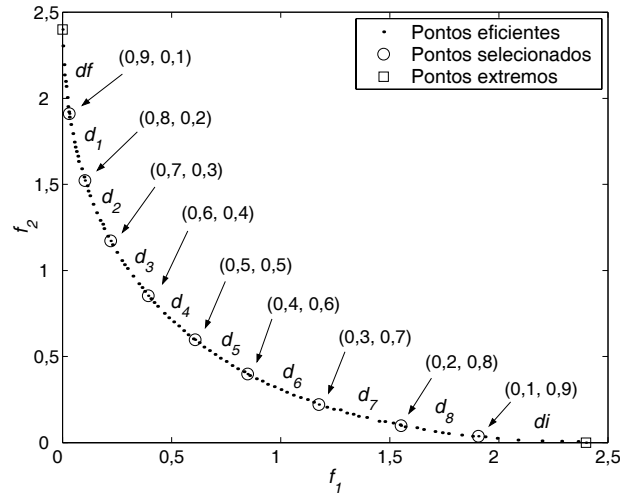


Figura 11.1: Índice Δ .

Tabela 11.2: Custo computacional.

P	Smarts	Promethee II	Prom. Mult.	MTMC	MFBZ
P_1	0,04	0,92	1,00	0,53	0,06
P_2	0,04	0,93	1,00	0,51	0,05
P_3	0,06	0,91	1,00	0,51	0,08
P_4	0,06	0,91	1,00	0,53	0,07
P_5	0,25	1,00	1,00	1,00	0,25
P_6	0,13	0,89	1,00	0,49	0,13
P_7	0,04	0,96	1,00	0,54	0,13
P_8	0,04	0,89	1,00	0,49	0,09

As Tabelas 11.3 e 11.4 apresentam, respectivamente, os valores de NED e de Δ para cada problema. Os dados nessas tabelas estão em termos de valores médios calculados levando-se em conta os resultados obtidos em 10 simulações de cada método de decisão. Nessas 10 simulações são mantidos fixos os parâmetros de entrada dos métodos de decisão, mas em cada simulação uma diferente aproximação da fronteira Pareto é considerada. No caso específico dos métodos Promethee II e Promethee Multiplicativo, como eles requerem outros parâmetros de entrada além dos pesos dos critérios, foi necessário adotar o seguinte artifício: esses dois métodos foram simulados para 121 diferentes configurações de suas funções preferência. Embora apenas o critério gaussiano tenha sido adotado, o parâmetro σ_i assumiu 11 diferentes

Tabela 11.3: Valor médio de NED.

	Smarts	Promethee II	Prom. Mult.	MTMC	MFBZ
P_1	4,1	5,2	7,8	9,0	7,0
P_2	3,0	3,8	5,0	6,4	5,0
P_3	2,0	2,0	9,0	9,0	9,0
P_4	6,4	7,0	9,0	9,0	8,9
P_5	7,0	7,0	9,0	9,0	5,0
P_6	9,0	9,0	9,0	9,0	5,5

Tabela 11.4: Valor médio de Δ .

	Smarts	Promethee II	Prom. Mult.	MTMC	MFBZ
P_1	1,23	0,98	0,49	0,34	0,65
P_2	1,61	1,36	0,93	0,91	1,10
P_3	1,75	1,53	0,34	0,28	0,42
P_4	0,84	0,67	0,30	0,28	0,54
P_5	0,65	0,63	0,28	0,27	1,00
P_6	0,32	0,29	0,33	0,32	0,69

valores no intervalo $\sigma_i \in [0, (fmax_i - fmin_i)/3, 03]$ para $i = 1, 2$. Além disso, os valores de NED e de Δ , exibidos nas Tabelas 11.3 e 11.4, são na realidade o valor máximo de NED e o valor mínimo de Δ observados nessas simulações, os quais correspondem aos melhores resultados obtidos por ambos métodos. Espera-se, com esse procedimento, tornar claro o fato de que, em alguns casos, os melhores resultados obtidos por cada método de decisão em estudo são insatisfatórios.

A análise das Tabelas 11.2 - 11.4 permite fazer as afirmativas a seguir:

- A ordenação dos métodos, segundo o critério custo computacional, do menor para o maior custo, é a seguinte: Smarts, MFBZ, MTMC, Promethee II e Promethee Multiplicativo.
- Quando aplicados a problemas cuja fronteira Pareto delimita uma porção não-convexa da região viável, os métodos Smarts e Promethee II tendem a gerar resultados inconsistentes com os pesos adotados. Os altos valores de Δ e baixos valores de NED para os problemas P_1 , P_2 e P_3 mostram que esses métodos obtiveram soluções muito próximas, mesmo quando os pesos de cada critério foram drasticamente alterados. Esta mesma limitação não foi detectada para os outros métodos aqui considerados.

- Observando-se ainda os índices NED e Δ , MTMC e Promethee Multiplicativo são os métodos que tenderam a explorar melhor a fronteira eficiente, gerando resultados mais bem distribuídos, quando diferentes pesos foram associados a cada critério.
- Além de ter obtido resultados muito atrativos para a maior parte dos problemas, o MFBZ apresentou sempre um baixo custo computacional.

11.3 Comparação das Abordagens de Decisão *a priori* e *a posteriori*.

Nesta tese, as três abordagens de decisão *a priori* listadas abaixo são estudadas:

- SSGA + Smarts;
- SSGA + Promethee II;
- SSGA + MFBZ.

Na decisão *a priori* e na interativa, a forma mais simples de se acoplar o método de decisão ao operador Seleção é executando-se, primeiramente, o método de decisão levando-se em conta toda população corrente. Assim, é associada a cada indivíduo uma nota, usada para ordená-los do melhor (valor máximo) ao pior (valor mínimo), conforme a preferência do decisor. Depois, executa-se o operador Seleção, de forma a privilegiar os indivíduos mais bem colocados nessa ordenação. Nesta tese, esse é o procedimento usado no caso dos métodos Smarts e MFBZ. Mas, para o Promethee II é adotado o procedimento descrito na Seção 10.6.5.

Conforme mencionado anteriormente, os métodos Smarts e MFBZ necessitam dos valores $fmax_i$ e $fmin_i$ das funções objetivo $f_i(\vec{x})$. Normalmente, esses valores são previamente obtidos executando-se m vezes a busca pelos extremos da fronteira Pareto. No entanto, aqui, melhores resultados foram obtidos executando-se uma única vez o NSGA-II, estrategicamente configurado para esse fim. Como não se deseja encontrar uma aproximação discreta da fronteira eficiente, não é necessário o uso de uma população grande. Por exemplo, em todos os problemas analíticos aqui estudados foi suficiente o uso de uma população com 10 ou menos indivíduos. Por outro lado, faz-se necessária a execução de muitas gerações. O uso do NSGA-II com esse fim produz resultados satisfatórios pois seu operador Seleção tende a privilegiar os extremos de cada fronteira não-dominada em detrimento dos demais

pontos pertencentes à mesma fronteira. Assim, mesmo com o uso de uma população bastante reduzida, ele tende a encontrar os extremos da fronteira Pareto. É importante mencionar que os pontos encontrados ao final da busca do NSGA-II não foram aproveitados pelo SSGA. Embora tenha sido observado empiricamente que esse aproveitamento permite uma redução expressiva do custo da decisão *a priori*, também foi observado que ele leva a um aumento significativo dos casos de convergência prematura. Mas, sem dúvida, o desenvolvimento de uma maneira eficiente de se aproveitar a informação obtida pelo NSGA-II constitui um assunto relevante para futuros estudos.

Tabela 11.5: Solução final para a decisão *a priori*.

	(w_1, w_2, w_3)	Smarts	Promethee II	MFBZ
P_3	(0,3, 0,7)	-	-	(0,75, 0,45)
	(0,7, 0,3)	-	-	(0,48, 0,77)
P_4	(0,3, 0,7)	(0,98, 0,01)	(0,98, 0,01)	(0,54, 0,28)
	(0,7, 0,3)	(0,05, 0,79)	(0,08, 0,72)	(0,25, 0,50)
P_6	(0,3, 0,7)	(2,16, 0,30)	(2,06, 0,35)	(1,37, 0,68)
	(0,7, 0,3)	(0,29, 2,40)	(0,25, 2,50)	(0,70, 1,40)
P_7	(0,1, 0,3, 0,6)	-	-	(0,85, 0,45, 0,21)
	(0,6, 0,3, 0,1)	-	-	(0,21, 0,47, 0,85)
P_8	(0,1, 0,3, 0,6)	(-0,25, -0,74, -1,56)	(-0,36, -0,93, -1,43)	(-0,40, -1,01, -1,35)
	(0,6, 0,3, 0,1)	(-1,55, -0,74, -0,21)	(-1,42, -0,96, -0,31)	(-1,36, -0,97, -0,52)

Tabela 11.6: Solução final para a decisão *a posteriori*.

	(w_1, w_2, w_3)	Smarts	Promethee II	MFBZ
P_3	(0,3, 0,7)	-	-	(0,74, 0,45)
	(0,7, 0,3)	-	-	(0,47, 0,78)
P_4	(0,3, 0,7)	(0,98, 0,01)	(0,98, 0,01)	(0,52, 0,28)
	(0,7, 0,3)	(0,05, 0,79)	(0,08, 0,72)	(0,25, 0,50)
P_6	(0,3, 0,7)	(2,00, 0,35)	(2,49, 0,18)	(1,39, 0,68)
	(0,7, 0,3)	(0,36, 1,97)	(0,16, 2,56)	(0,67, 1,39)
P_7	(0,1, 0,3, 0,6)	-	-	(0,85, 0,47, 0,25)
	(0,6, 0,3, 0,1)	-	-	(0,20, 0,47, 0,86)
P_8	(0,1, 0,3, 0,6)	(-0,21, -0,74, -1,57)	(-0,29, -0,94, -1,42)	(-0,49, -1,00, -1,34)
	(0,6, 0,3, 0,1)	(-1,56, -0,71, -0,31)	(-1,42, -0,98, -0,17)	(-1,30, -0,97, -0,55)

Aqui, cada abordagem é simulada 10 vezes para cada uma das seguintes ponderações: para os problemas com dois objetivos $(w_1, w_2) = \{(0,3, 0,7),$

$(0,7, 0,3)$ }; para os problemas com três objetivos $(w_1, w_2, w_3) = \{(0,1, 0,3, 0,6), (0,6, 0,3, 0,1)\}$. São considerados nesta análise os problemas P_3, P_4, P_6, P_7 e P_8 , descritos na Tabela 11.1. Em todas as simulações cujos resultados são aqui expostos, o SSGA foi executado submetendo apenas 10% da população aos processos de Cruzamento e Mutação em cada iteração. Essa porcentagem foi a que produziu melhores resultados, especialmente, nos casos de decisão *a priori* e interativa com o método Promethee II.

As Tabelas 11.5 e 11.6 contêm as soluções finais obtidas por cada método nas decisões *a priori* e *a posteriori*, respectivamente. Estão sendo omitidos os resultados obtidos para os problemas não-convexos, P_3 e P_7 , pelas abordagens que envolvem o uso do Smarts e do Promethee II, pois nesses casos ambos os métodos geraram resultados completamente incoerentes com os pesos atribuídos a cada critério.

Como se pode ver, as soluções finais obtidas para todos os problemas analíticos na decisão *a priori* foram próximas às obtidas *a posteriori*. Entretanto, a Figura 11.2 apresenta um exemplo de situação em que a decisão *a priori* com o método Promethee II não convergiu para a mesma solução obtida na decisão *a posteriori*. Esses resultados foram obtidos em 10 execuções da decisão *a priori* e 10 da decisão *a posteriori* para $(w_1, w_2) = (0,5, 0,5)$ e $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,3$, levando-se em conta o problema P_6 . Observando-se o gráfico na Figura 11.3, que apresenta o fluxo de rede (parâmetro usado pelo Promethee II para ordenar o conjunto A) em função de $f_1(\vec{x})$ e $f_2(\vec{x})$, para cada ponto eficiente obtido pelo NSGA-II, percebe-se a existência de dois picos em diferentes regiões da fronteira. Esses picos sugerem possíveis julgamentos de indiferença do decisor, que não foram adequadamente tratados na decisão *a priori*.

A Tabela 11.7 contém o número de avaliações das funções objetivo requerido pelo NSGA-II e pelo SSGA, nas abordagens de decisão *a posteriori* e *a priori*. No caso do Smarts e do MFBZ, são fornecidos três valores: primeiro, o requerido pelo NSGA-II na busca pelos extremos da fronteira; depois pelo SSGA na busca pelo ponto eficiente preferido pelo decisor; finalmente, o custo total, ou seja, a soma de ambos valores. É importante lembrar que a tomada de decisão representa o principal enfoque do presente trabalho. Assim, em todas as simulações da decisão *a posteriori*, houve um grande investimento na obtenção de excelentes aproximações da fronteira Pareto e, no caso da decisão *a priori*, na obtenção de pontos o mais próximo possível da solução final obtida, na decisão *a posteriori*, com o mesmo método de decisão e mesmos parâmetros de entrada. Por isso, em geral foram adotados altos valores para o tamanho da população e para o número máximo de iterações, nas execuções dos algoritmos de busca.

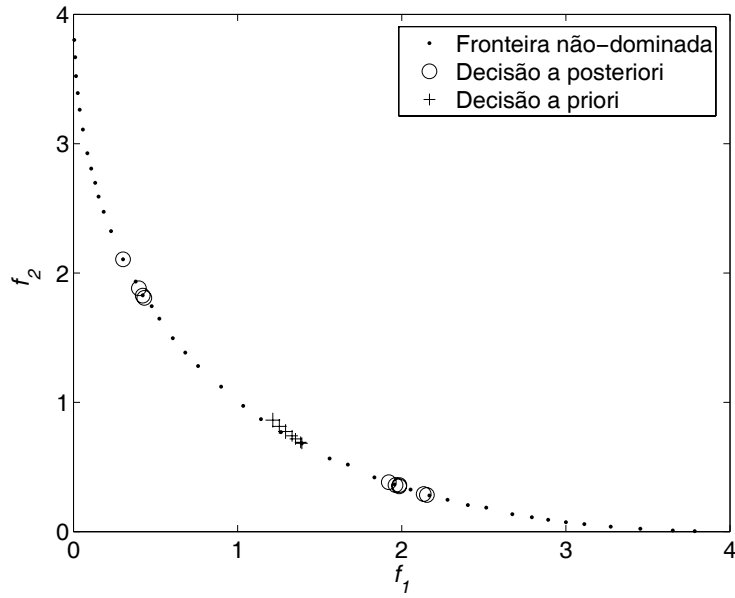


Figura 11.2: Resultados obtidos com Promethee II para o P_6 , usando $(w_1, w_2) = (0, 5, 0, 5)$ e $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,3$, segundo abordagens de decisão *a priori* e *a posteriori*.

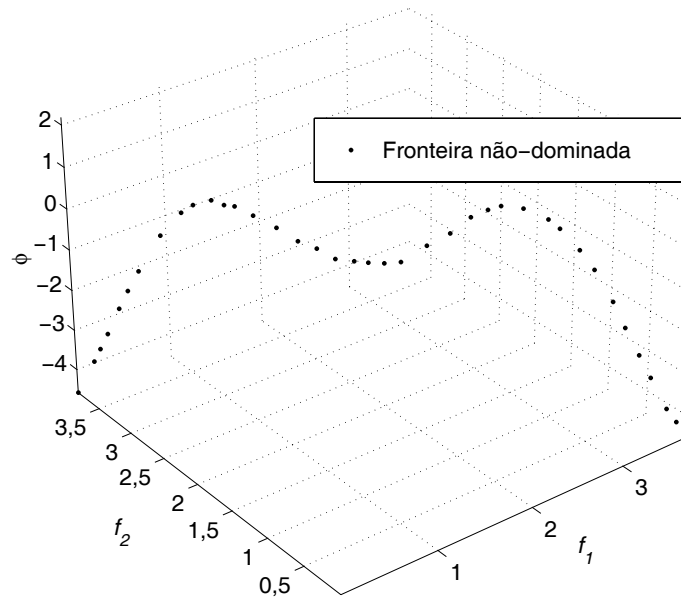


Figura 11.3: Valor de ϕ para cada solução não-dominada obtida pelo NSGA-II para o P_6 .

Tabela 11.7: Número de avaliações das funções objetivo.

	NSGA-II	Smarts	Promethee II	MFBZ
P_3	25000	-	-	(9000, 9500, 18500)
P_4	25000	(11000, 8000, 19000)	9500	(11000, 11500, 22500)
P_6	18000	(11000, 5600, 15600)	7200	(11000, 6000, 17000)
P_7	32000	-	-	(6000, 3200, 9200)
P_8	32000	(6000, 3200, 9200)	3200	(6000, 3200, 9200)

Pode-se observar pelos dados desta tabela que, para todos os problemas, a decisão *a priori* envolveu menor custo computacional do que a decisão *a posteriori*, embora em alguns casos sua vantagem não tenha sido tão significativa. Veja, que no caso do uso do MFBZ na solução do problema P_4 , houve uma diferença de 2500 avaliações, o que representa apenas 10% do custo da decisão *a posteriori*. Além disso, entre as abordagens de decisão *a priori*, aquela que faz uso do método Promethee II exigiu um menor número de avaliações das funções objetivo do que as demais. Esse baixo custo deve-se ao fato de que o Promethee II não requer como parâmetros de modelagem os extremos da fronteira Pareto. Isso motiva o desenvolvimento de novas técnicas de decisão interativa que tirem proveito do fato de que alguns métodos de decisão (geralmente aqueles baseados em comparações entre os pares de alternativas) não exigem qualquer informação prévia sobre a fronteira Pareto. Entretanto, é importante lembrar que, conforme mencionado no Capítulo 7, o conhecimento dos valores máximo e mínimo de cada função objetivo é importante para o decisor, pois influencia seus interesses e o peso que ele atribui a cada critério. Portanto, mesmo que os extremos da fronteira não sejam necessários antes do início da execução do Promethee II, é interessante que antes da decisão final eles estejam disponíveis para o decisor.

11.4 Decisão Interativa.

Para verificar a possibilidade de se transformar as três abordagens de decisão *a priori* analisadas na seção anterior em abordagens de decisão interativa, foram realizadas simulações em que os pesos dos critérios são alterados pelo decisor ao longo do processo de otimização.

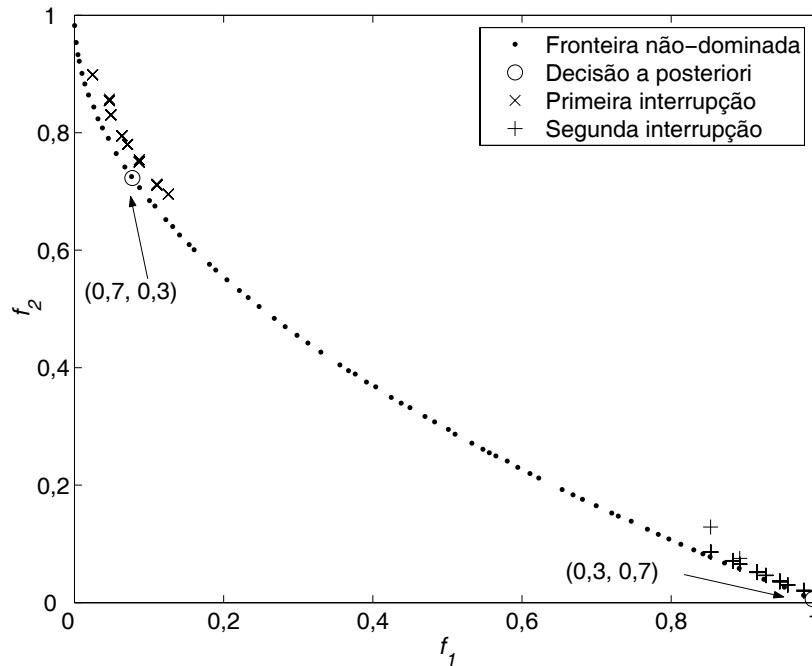


Figura 11.4: Decisão interativa com Promethee II para o P_4 .

As Figuras 11.4 - 11.6 apresentam a população corrente em dois momentos do processo de decisão interativa com os métodos Promethee II, Smarts e MFBZ, respectivamente. Nos três casos, é adotado o seguinte procedimento: da primeira iteração do SSGA até a de número 700, os pesos são mantidos em $(w_1, w_2) = (0,7, 0,3)$. Na iteração 700, o processo sofre uma primeira interrupção e os pesos são ajustados para $(w_1, w_2) = (0,3, 0,7)$, mantendo-se assim até a iteração 1000, quando ocorre a segunda e última interrupção.

Para uma melhor análise dos resultados, essas figuras também apresentam uma aproximação discreta da fronteira Pareto obtida pelo NSGA-II e as soluções finais obtidas em duas execuções da decisão *a posteriori* com os pesos $(w_1, w_2) = (0,7, 0,3)$ e $(w_1, w_2) = (0,3, 0,7)$. Analisando-se cada figura, percebe-se sempre uma proximidade entre as soluções finais escolhidas *a posteriori* com $(w_1, w_2) = (0,7, 0,3)$ e $(w_1, w_2) = (0,3, 0,7)$ e os indivíduos da população corrente na primeira e na segunda interrupção, respectivamente. Essa proximidade, observada nas três figuras, constitui um bom resultado, pois indica que, nos três casos, o SSGA reagiu à mudança de preferência do decisor, adotando uma nova direção de busca, em conformidade com o par de pesos adotados.

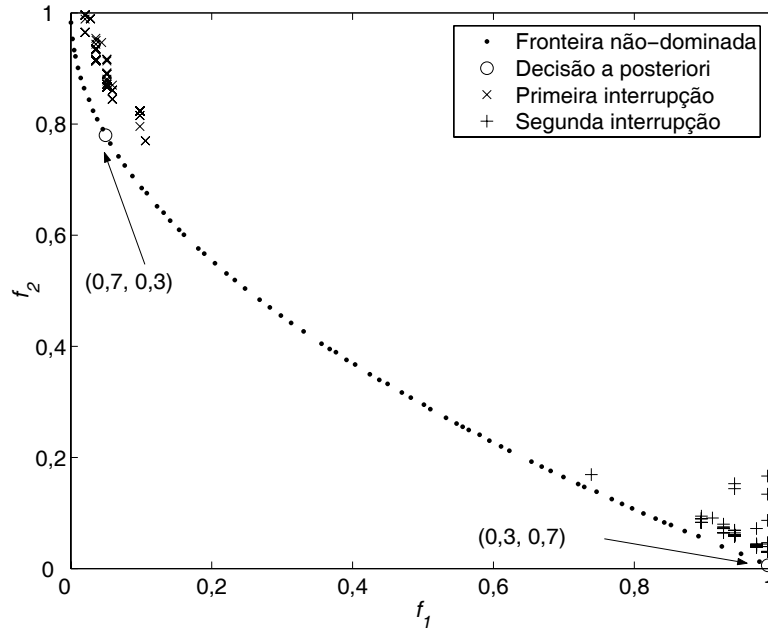


Figura 11.5: Decisão interativa com Smarts para o P_4 .

11.5 Projeto de Dispositivo Supercondutor Armazenador de Energia Magnética.

Nesta seção, o MTMC é usado em uma abordagem de decisão *a posteriori* para determinar a solução final de um problema eletromagnético, modelado como um problema de otimização multiobjetivo [111]. Esse problema consiste em determinar a configuração ótima dos parâmetros de projeto de um dispositivo supercondutor armazenador de energia magnética (“*superconducting magnetic energy storage*”- SMES), composto por duas espiras concêntricas alimentadas por densidades de corrente J_1 e J_2 em direções opostas, conforme mostra a Figura 11.7. Dois objetivos e uma restrição são considerados. A função objetivo f_1 envolve a minimização do campo de dispersão, B_{stray} . Com a função objetivo f_2 , procura-se manter a energia E , armazenada no SMES, próxima a um valor predeterminado E_{ref} . A restrição g deve garantir que o campo magnético satisfaça à condição de supercondutividade. Assim, o problema pode ser matematicamente definido como:

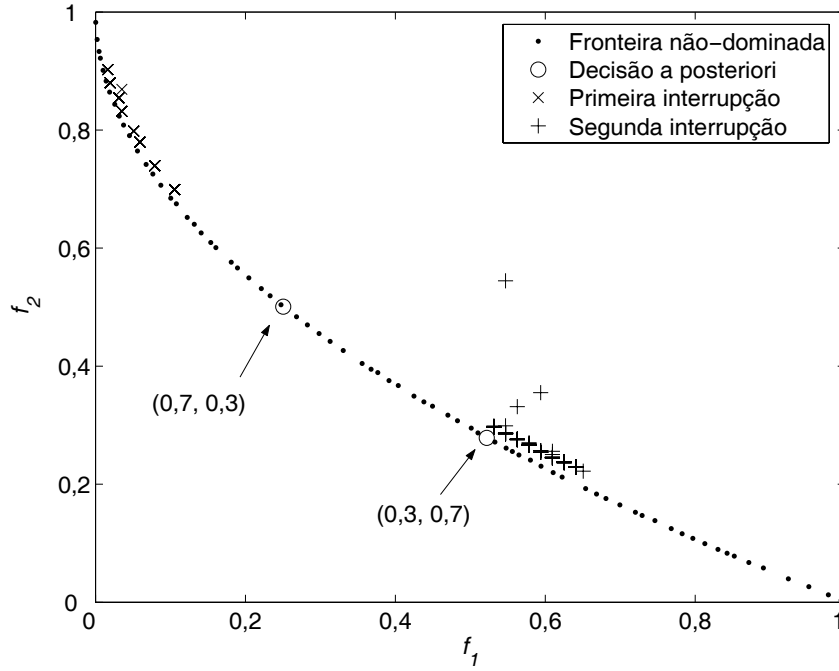


Figura 11.6: Decisão interativa com MFBZ para o P_4 .

$$\begin{aligned} \min \vec{F} &= (f_1 = B_{stray}^2/B_{normal}^2, f_2 = |E - E_{ref}|/E_{ref}), \\ \text{sujeito a } g &= |J| + 6.4|B_{max}| - 54.0 = 0, \end{aligned} \quad (11.3)$$

onde $B_{normal} = 3.0 \times 10^{-3}(T)$; $E_{ref} = 180 \times 10^6(J)$; os intervalos para as variáveis de decisão, R_2 , $h_2/2$, d_2 , assim como os parâmetros fixos do projeto (R_1 , $h_1/2$, d_1 , J_1 e J_2) estão na Tabela 11.8. Vale mencionar que a análise numérica do dispositivo SMES foi realizada empregando um programa de cálculo de campos eletromagnéticos em 2D, baseado no método de elementos finitos, com uma malha de elementos triangulares de primeira ordem.

Inicialmente a busca multiobjetivo é realizada pelo NSGA-II e, posteriormente, duas diferentes análises de decisão multicritério são realizadas usando o método MTMC. Na primeira, a decisão é tomada considerando-se apenas dois critérios, um correspondente a cada objetivo de otimização, ambos com a mesma prioridade: $(w_1, w_2) = (0, 5, 0, 5)$. A segunda inclui dois novos critérios correspondentes à análise de sensibilidade das variáveis de decisão: $S_i = (f_i(\vec{x} - s) - f_i(\vec{x}))/s$, sendo s uma pequena perturbação no vetor \vec{x} . Nesse caso, os pesos são redefinidos como $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (0,35, 0,35, 0,15, 0,15)$.

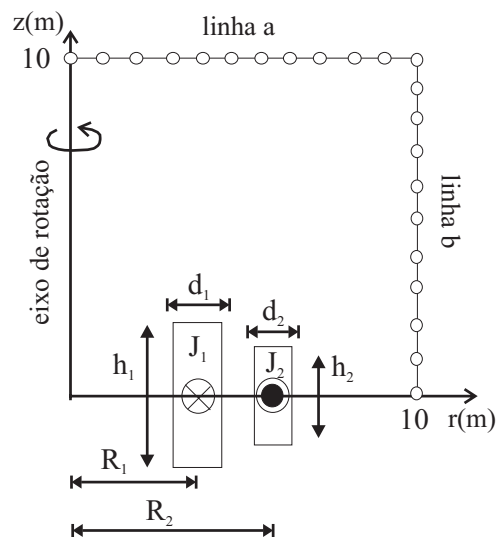


Figura 11.7: Vista em corte da geometria básica do SMES - estrutura com simetria de revolução.

Tabela 11.8: Restrições geométricas e parâmetros fixos do projeto.

	R_1	R_2	$h_1/2$	$h_2/2$	d_1	d_2	J_1	J_2
Unidade	m	m	m	m	m	m	MA/m^2	A/mm^2
min	-	2,6	-	0,204	-	0,1	-	-
max	-	3,4	-	1,1	-	0,4	-	-
fixo	2,0	-	0,8	-	0,27	-	22,5	-22,5

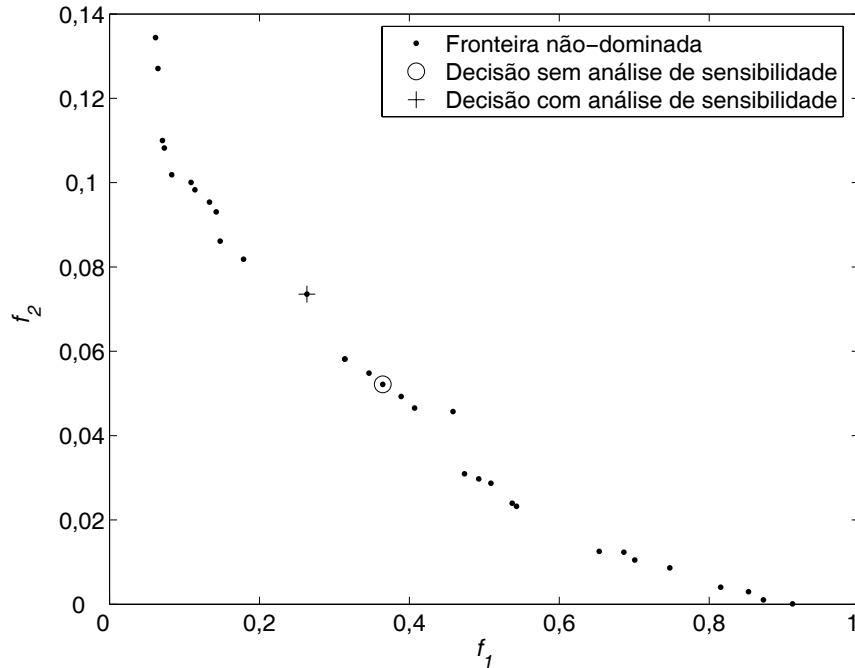


Figura 11.8: Decisão *a posteriori* com o MTMC para o problema do SMES.

A Figura 11.8 apresenta a aproximação da fronteira Pareto obtida pelo NSGA-II e as alternativas escolhidas em cada decisão. Enquanto a solução sem a análise de sensibilidade corresponde à $(f_1, f_2, S_1, S_2) = (0,364, 0,052, 27,960, 2,400)$, a solução com a análise corresponde à $(f_1, f_2, S_1, S_2) = (0,263, 0,074, 22,090, 2,300)$. Como se pode perceber, esta última mostrou-se menos sensível às variáveis de decisão. Ajustando-se os pesos w_3 e w_4 de modo a priorizar a análise de sensibilidade, é possível selecionar outra solução final que seja ainda menos sensível às variáveis de decisão.

11.6 Problema de Espalhamento Eletromagnético Inverso

Para demonstrar o uso do Promethee Multiplicativo, ele é usado na escolha da solução final de um problema de espalhamento eletromagnético inverso, definido a partir da minimização de dois objetivos [112]. O primeiro consiste em aproximar o formato da seção transversal de um espalhador dielétrico cilíndrico, levando-se em conta seu padrão de campo distante. Esse objeto encontra-se imerso no espaço livre e é iluminado por uma onda plana TM^z ,

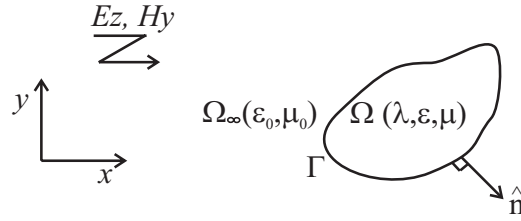


Figura 11.9: Problema de espalhamento eletromagnético inverso.

conforme mostra a Figura 11.9.

A função objetivo f_1 é definida aqui, como o erro entre a largura de espalhamento de cada possível solução e a largura de espalhamento de referência. O cálculo da largura de espalhamento é feito por meio do método de elementos finitos acoplado com o método de equações integrais de fronteira (método híbrido FEMBEM). O FEMBEM exige, como parâmetro de entrada, a especificação do número de nós na fronteira (nnb). Altos valores de nnb aumentam não somente a precisão da solução, como também o esforço computacional requerido por esse método numérico. Assim, a segunda função objetivo a ser minimizada corresponde ao parâmetro nnb :

$$\min \vec{F} = (f_1(\vec{x}) = (SW(\vec{x}) - SW^0)^2, f_2 = nnb), \quad (11.4)$$

sujeito a $nnb \in [15, 35]$,

sendo $SW(\vec{x})$ a largura de espalhamento calculada para cada possível solução e SW^0 , a largura de espalhamento adotada como referência.

Após a obtenção de um conjunto de soluções eficientes por meio do NSGA-II, o Promethee Multiplicativo é usado para determinar qual é o valor de nnb mais satisfatório para ser usado em futuras simulações do FEMBEM. Como o decisor precisa de boas aproximações do formato da seção transversal do dielétrico, ele especificou o peso de cada critério como $(w_1, w_2) = (0, 8, 0, 2)$. As duas funções preferência foram definidas usando-se o critério gaussiano, com $\sigma_1 = 1\% \times SW^0 = 5,6$ e $\sigma_2 = 1,5$. Os resultados obtidos são exibidos na Figura. 11.10. A alternativa favorita corresponde à $(f_1, f_2) = (1,86, 21)$. Veja na Figura 11.11 que as seções transversais de referência e aproximada estão satisfatoriamente próximas.

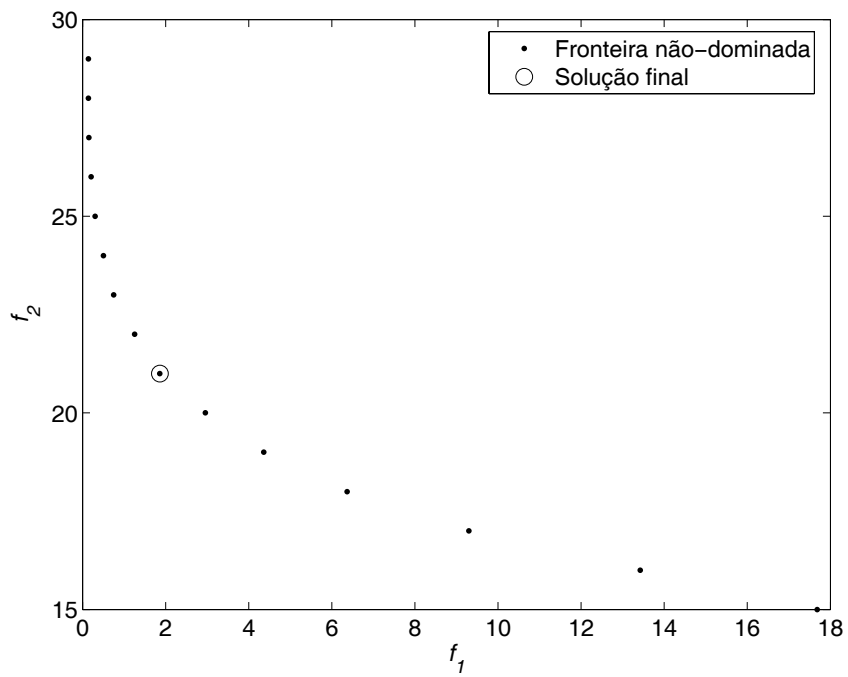


Figura 11.10: Decisão *a posteriori* com o Promethee Multiplicativo para o problema de espalhamento inverso.

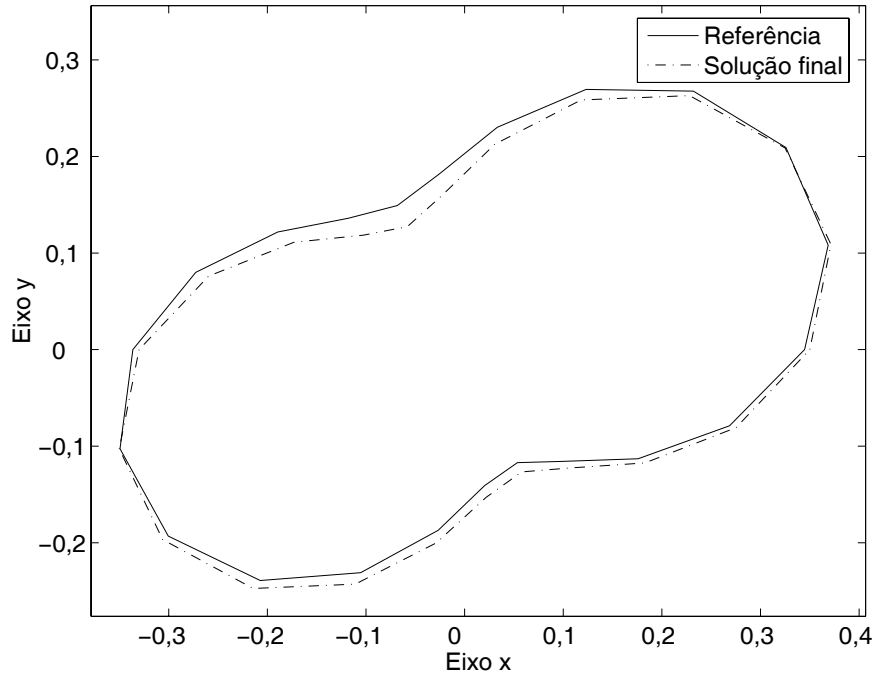


Figura 11.11: Seção transversal de referência e da solução final.

11.7 Conclusões

O presente capítulo apresentou vários resultados obtidos a partir do uso de métodos de decisão multicritério e de algoritmos de busca evolucionária na solução de problemas de otimização multiobjetivo. Foram consideradas diferentes abordagens de decisão *a posteriori*, *a priori* e interativa. A análise dos resultados permite fazer as seguintes afirmativas:

- A decisão *a priori* e a decisão *a posteriori* na maioria das vezes forneceram a mesma solução final, quando ambas fizeram uso dos mesmos métodos de decisão com as mesmas especificações dos parâmetros de entrada. Porém, foi observada uma exceção para esta regra: houve uma discrepância entre a decisão *a priori* e a decisão *a posteriori*, quando a função usada para ordenar as alternativas era multimodal. Nesse caso específico, apenas a decisão *a posteriori* forneceu informações suficientes para o decisor escolher uma solução final coerente com seus interesses.
- O custo da decisão *a posteriori* foi sempre maior do que o da decisão *a priori*, mas em alguns casos essa diferença foi bastante pequena. Para

os problemas com maior número de objetivos, a diferença foi mais significativa, devido à necessidade do NSGA-II de trabalhar com uma maior população, a fim de se obter uma melhor representação discreta da fronteira Pareto. Para os problemas com maior número de variáveis de decisão (e poucos objetivos), a diferença entre os custos da decisão *a posteriori* e *a priori* foi menor, pois nesse caso, o SSGA teve mais dificuldade em encontrar a solução final.

- As três abordagens de decisão *a priori* aqui estudadas também forneceram resultados satisfatórios quando transformadas em decisão interativa.
- A inclusão da análise de sensibilidade dos parâmetros de otimização como um objetivo a ser minimizado durante o processo de busca tem um custo muito elevado. Assim, sua inclusão apenas na etapa de decisão representa uma saída alternativa interessante. O uso da abordagem de decisão *a posteriori* com o método MTMC para a solução de um problema de eletromagnetismo mostra como o uso da análise de sensibilidade como critério de decisão beneficia a escolha da solução final.

A escolha do melhor método de decisão constitui um paradoxo, uma vez que a própria escolha corresponde a um complexo problema de decisão. Ela depende de vários aspectos, entre eles: a urgência do decisor em obter a solução, a sua experiência e seu conhecimento acerca dos métodos de decisão, as características particulares do problema que se deseja resolver. Por tudo o que foi mencionado, não é pertinente dizer que existe um método ideal para todas as situações. Nesse contexto, com base na descrição de cada método e nas observações feitas logo acima, são descritas as principais vantagens e desvantagens de cada método aqui estudado.

- Smarts. São vantagens desse método: o baixo custo computacional; a grande simplicidade do algoritmo; o pequeno conjunto de parâmetros de entrada; as instruções que auxiliam o decisor a especificar os valores desses parâmetros. Por outro lado, ele tem as seguintes desvantagens: tende a produzir resultados inconsistentes no caso de problemas em que a fronteira Pareto delimita a porção não-convexa da região viável; exige como parâmetros de modelagem o valor máximo e mínimo de cada função objetivo.
- Promethee II. Esse método tem alguns aspectos positivos: não exige o valor máximo e o mínimo de cada função objetivo; seu algoritmo é

razoavelmente simples; baseia-se em um modelo matemático bastante flexível, que permite ao decisor expressar, por meio das funções preferência, certas particularidades relativas à sua preferência. Porém, o Promethee II também apresenta alguns aspectos negativos: não inclui regras formais para a definição do peso de cada critério; seu conjunto de parâmetros de entrada pode ser considerado relativamente grande, quando comparado com o dos demais métodos; seu custo computacional pode ser considerado alto, se comparado com o custo dos demais métodos testados aqui; assim como o Smarts, tende a produzir resultados inconsistentes no caso de problemas cuja fronteira Pareto encontra-se na parte não-convexa da região viável.

- Promethee Multiplicativo. Esse novo método possui todos os aspectos positivos do Promethee II, incluindo, o fato de que ele produz resultados satisfatórios para problemas convexos ou não-convexos. Porém, assim como o Promethee II, ele não inclui regras formais para a definição do peso de cada critério; seu conjunto de parâmetros de entrada pode ser considerado relativamente grande, quando comparado com o dos demais métodos; além disso, possui o mais alto custo computacional entre os métodos aqui considerados.
- MFBZ. São vantagens desse método: o baixo custo computacional; a grande simplicidade do algoritmo; o pequeno conjunto de parâmetros de entrada; a capacidade de obter resultados consistentes para problemas convexos e não-convexos. Por outro lado, ele tem as seguintes desvantagens: exige como parâmetros de modelagem o valor máximo e mínimo de cada função objetivo; não inclui regras formais para a definição dos pesos de cada critério.
- MTMC. Esse método tem os seguintes aspectos positivos: o fato de que ele não exige o valor máximo e o mínimo de cada função objetivo; a simplicidade do algoritmo; o pequeno conjunto de parâmetros de entrada; a capacidade de obter resultados consistentes para problemas convexos e não-convexos. Porém, o MTMC não inclui regras formais para a definição dos pesos de cada critério e seu custo computacional pode ser considerado um pouco alto quando comparado ao custo dos demais métodos.

Capítulo 12

Conclusões Gerais e Propostas de Continuidade

Essa tese apresentou um estudo aprofundado da análise multicritério e de seu emprego na escolha da solução final de problemas de otimização multiobjetivo, por meio do acoplamento entre métodos de decisão multicritério com algoritmos de otimização evolucionária.

Os Capítulos 2, 3 e 4 apresentaram, respectivamente, uma visão geral da teoria referente à otimização multiobjetivo; uma descrição dos principais métodos de otimização evolucionária mono-objetivo e multiobjetivo; uma introdução à análise multicritério. Os Capítulos 5 e 6 apresentaram a teoria referente à modelagem matemática da preferência humana por meio de relações binárias. Enquanto o Capítulo 5 tratou a modelagem segundo a abordagem clássica, o Capítulo 6 tratou a modelagem por meio da lógica nebulosa. O estudo da modelagem matemática da preferência foi importante, pois essa teoria serve de base para importantes métodos de decisão propostos na literatura e descritos nessa tese.

Duas linhas de pensamento referentes à tomada de decisão foram consideradas de maneira especial: a decisão baseada na teoria da utilidade multiatributo (Capítulo 7) e a decisão baseada na relação binária de sobreclassificação (Capítulo 8). O uso de métodos baseados na teoria da utilidade é mais adequado quando o decisor pode ser considerado perfeitamente racional, conhecedor de todas as informações necessárias quanto ao problema e completamente ciente de sua preferência. Eles geralmente envolvem algoritmos simples, com baixo custo computacional, mas exigem que o decisor forneça um grande volume de informações quanto às suas preferências. O uso de métodos baseados na relação de sobreclassificação é particularmente interessante quando o decisor não tem total conhecimento de suas preferências (ao contrário do que se pode imaginar, essa segunda situação ocorre com grande

frequência na prática). Eles tendem a envolver algoritmos mais complexos, mas exigem menos informações referentes à preferência do decisor. Na literatura existem vários artigos em que métodos baseados na teoria da utilidade multiatributo e na relação de sobreclassificação são aplicados na escolha da solução final de problemas de otimização com múltiplos objetivos (o Capítulo 10 descreveu muitos desses trabalhos).

Uma outra abordagem interessante, aqui descrita no Capítulo 9, foi a proposta por Saaty: Processo de Análise Hierárquica (AHP). Seu uso na escolha da solução final de problemas de otimização multiobjetivo é viável se o conjunto de alternativas a serem avaliadas pelo decisor não for grande. Afinal, o AHP exige que o decisor realize comparações entre todas as alternativas. Embora essa tese não tenha explorado esse assunto, fica aqui uma sugestão para futuros estudos: verificar a eficácia do uso do AHP para a seleção da solução final de problemas multiobjetivo, associando a ele, sempre que necessário, alguma técnica capaz de reduzir o conjunto de soluções eficientes, como por exemplo a técnica de *cluster* descrita na Seção 10.5.2.

O Capítulo 10 descreveu o problema de decisão originado no contexto da otimização multiobjetivo, detalhando suas particularidades e seus aspectos críticos. Apresentou as três principais abordagens para o encadeamento entre métodos de decisão e algoritmos de busca, decisão *a priori*, interativa e *a posteriori*, enfatizando as vantagens e desvantagens de cada uma delas. Apontou também vários trabalhos em que métodos de decisão foram associados a algoritmos de busca evolucionária, com a finalidade de obter a solução final para problemas de otimização multiobjetivo.

Todo o estudo desenvolvido ao longo desse trabalho culminou com a proposta de dois métodos de decisão, Promethee Multiplicativo e Método de Torneios Multicritério, cujas descrições encontram-se respectivamente nos Capítulos 8 e 10 dessa tese. Uma outra contribuição foi o desenvolvimento de uma técnica de decisão interativa, em que o método Promethee II é acoplado a um Algoritmo Genético. Essa abordagem interativa apresenta algumas características atrativas:

- ela não requer nenhuma informação quanto à fronteira Pareto antes do início de sua execução;
- na técnica de elitismo adotada, as soluções não-dominadas obtidas ao longo do processo de busca vão sendo armazenadas. Com isso, o decisor tem em mãos um conjunto cada vez mais rico em informações que podem auxiliá-lo na definição de suas preferências.

No Capítulo 11 foram apresentados vários resultados de simulações em que cinco métodos de decisão foram utilizados na escolha da solução final de

problemas com múltiplos objetivos: Smarts, baseado na teoria da utilidade; Promethee II e Promethee Multiplicativo, baseados no conceito de relação de sobreclassificação; Método de Torneios Multicritério, introduzido nessa tese; método de decisão baseado em lógica fuzzy, segundo a abordagem de Bellman-Zadeh. Embora maior ênfase tenha sido dada à decisão *a posteriori*, também foram feitos alguns testes segundo as abordagens de decisão *a priori* e interativa. A análise dos resultados mostrou que:

- Os métodos Promethee II e Smarts podem ser aplicados no caso do problema ser convexo, mas quando a fronteira Pareto delimita a porção não-convexa da região viável, eles tendem a gerar resultados que, embora sejam eficientes, são incoerentes com o peso adotado para cada critério.
- O Promethee Multiplicativo, ao contrário do Promethee II, tende a produzir resultados coerentes e consistentes quando aplicado a problemas cuja fronteira Pareto delimita a porção não-convexa da região viável. Por outro lado, possui um maior custo computacional do que o Promethee II.
- Assim como o Promethee Multiplicativo, o Método de Torneios Multicritério também apresentou resultados bastante satisfatórios para todos os problemas considerados. Além disso, seu custo computacional mostrou-se razoavelmente inferior ao do Promethee II e do Promethee Multiplicativo.
- O método fuzzy baseado na abordagem de Bellman-Zadeh apresentou resultados satisfatórios para todos os problemas. Além disso, por não envolver comparações entre as alternativas, seu custo computacional foi muito inferior ao do Promethee II, do Promethee Multiplicativo e do método de Torneios Multicritério.
- O Método de Torneios Multicritério e o Promethee Multiplicativo geraram na maioria das vezes os resultados mais bem distribuídos ao longo da fronteira Pareto, quando diferentes pesos foram atribuídos aos critérios.
- As três abordagens de decisão *a priori* aqui consideradas obtiveram com sucesso soluções eficientes, em conformidade com a preferência do decisor. Além disso, os testes em que os pesos dos critérios variaram ao longo do processo de otimização, simulando uma decisão interativa, também produziram resultados muito satisfatórios.

- Conforme o esperado, as abordagens de decisão *a priori* exigiram em todos os testes um menor número de avaliações de cada função objetivo do que as abordagens de decisão *a posteriori*. Porém, nos casos em que foram considerados problemas com grandes vetores de variáveis de decisão, a vantagem da decisão *a priori* não foi grande em relação à decisão *a posteriori*.

Algumas perspectivas podem ser enumeradas como propostas de continuidade deste trabalho:

- Na decisão *a priori*, alguns métodos de decisão usam informações quanto aos extremos da fronteira Pareto como parâmetros de modelagem (Ex.: Smarts e MFBZ). Nesses casos, é necessário executar um algoritmo de busca para se obter esses extremos. Conforme mencionado no capítulo anterior, as informações obtidas nesse pré-processamento não foram aproveitadas aqui na abordagem de decisão *a priori*, pois esse aproveitamento levou a um aumento dos casos de convergência prematura. Assim, seria relevante o desenvolvimento de uma técnica que permitisse um uso mais eficiente das informações previamente obtidas.
- Alguns métodos de decisão não necessitam dos valores máximo e mínimo de cada objetivo para serem executados (Ex.: Promethee II, Promethee Multiplicativo e MTMC). Esse aspecto pode ser mais bem explorado pela abordagem de decisão interativa. Afinal, nesse caso, o processo de busca pode ter início sem que se tenha qualquer informação quanto à fronteira Pareto e, no decorrer desse processo, estimativas dos valores máximo e mínimo para cada função objetivo podem ser obtidas. Vale lembrar que é importante para o decisor conhecer esses valores, antes de sua decisão final, pois conforme mencionado anteriormente, eles exercem influência sobre a preferência do decisor.
- Levando-se em conta que na prática geralmente a tomada de decisão é realizada por uma equipe de decisores, seria conveniente o desenvolvimento de um procedimento capaz de levar em conta a opinião pessoal de cada decisor para a escolha da solução final do problema multiobjetivo.
- Conforme mencionado anteriormente, seria interessante verificar a eficácia do uso do AHP para a seleção da solução final de problemas multiobjetivo, associando a ele, sempre que necessário, alguma técnica capaz de reduzir o conjunto de soluções eficientes, como por exemplo a técnica de *cluster* descrita na Seção 10.5.2.

- Conforme mencionado anteriormente, os novos métodos *MTMC* e *Promethee Multiplicativo* não incluem ainda regras formais para a definição do peso de cada critério. Assim, seria relevante o desenvolvimento de uma metodologia que auxiliasse o decisor a definir esses pesos.

Referências Bibliográficas

- [1] V. Pareto, *Cours D'Economie Politique*, vol. I e II, F. Rouge, Lausanne, 1896.
- [2] C. A. C. Coello, "Handling preferences in evolutionary multiobjective optimization: a survey", *Proc. of the 2000 Congress on Evolutionary Computation*, Piscataway, New Jersey, 2000, pp. 30-37.
- [3] J. Horn, "Multicriterion Decision Making", *Handbook of Evolutionary Computation*, vol. 1, Thomas Back, David Fogel, Zbigniew Michalewicz (eds.), IOP Publishing Ltd. and Oxford University Press, 1997, pp. F1.9:1 - F1.9:15.
- [4] B. Roy, D. Bouyssou, "Decision-aid: an elementary introduction with emphasis on multiple criteria", *Investigación Operativa*, vol. 2, pp. 95-110, 1991.
- [5] C. M. Fonseca, P. J. Fleming, "An Overview of Evolutionary Algorithms in Multiobjective Optimization", *Evolutionary Computation*, vol. 3 (1), pp. 1-16, 1995.
- [6] D. A. V. Veldhuizen, G. B. Lamont, "Multi-objective Evolutionary Algorithms: Analysing the State-of-the-Art", *Evolutionary Computation*, vol. 8 (2), pp. 125-147, 2000.
- [7] E. Zitzler, "Evolutionary Algorithms for Multiobjective Optimization: Methods and Applications", Ph.D thesis, Swiss Federal Institute of Technology (ETH), Zurich, Switzerland. TIK-Schriftenreihe Nr. 30, Diss ETH No. 13398, Shaker Verlag, Germany, ISBN 3-8265-6831-1.
- [8] K. Deb, *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms*, John Wiley & Sons, New York, 2002.
- [9] S. L. Ávila, "Algoritmos Genéticos Aplicados na Otimização de Antenas Refletoras", Dissertação de Mestrado, UFSC, Santa Catarina, Brasil, 2002.

- [10] G. L. Soares, “Algoritmos Genéticos: Estudos, Novas Técnicas e Aplicações”, Dissertação de mestrado, UFMG, Minas Gerais, Brasil, 1997.
- [11] A. H. F. Dias, “Algoritmos Genéticos Aplicados a Problemas com Múltiplos Objetivos”, Dissertação de Mestrado, UFMG, Minas Gerais, Brasil, 2000.
- [12] K. Deb, A. Pratap, S. Agarwal, T. Meyarivan, “A fast and elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA-II”, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 6, pp. 182-197, 2002.
- [13] E. Zitzler, M. Laumanns, L. Thiele, “Spea2: Improving the performance of the strength pareto evolutionary algorithm”, Technical Report 103, Computer Engineering and Communication Networks Lab (TIK), Swiss Federal Institute of Technology (ETH), Zurich, 2001.
- [14] J. A. Vasconcelos, J. A. Ramírez, R. H. C. Takahashi, R. R. Saldanha, “Improvements in Genetic Algorithms”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 37 (5), pp. 3414-3417, 2001.
- [15] T. L. Saaty, “Axiomatic Foundation of the Analytic Hierarchy Process”, *Management Science*, vol. 32, pp. 841 - 855, 1986.
- [16] B. Roy, “Decision-aid and decision-making”, *European Journal of Operational Research*, vol. 45, pp. 324-331, 1990.
- [17] B. Roy, P. Vincke, “Multicriteria analysis: Survey and new directions”, *European Journal of Operational Research*, vol. 8 (3), pp. 207-218, 1981.
- [18] E. R. Lieberman, “Soviet Multi-objective Mathematical Programming Methods: An Overview”, *Management Science*, vol. 37, pp. 1147-1165, 1991.
- [19] J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1944.
- [20] P. C. Fishburn, *Utility Theory for Decision Making*, Wiley, New York, 1970.
- [21] R. Keeney, H. Raiffa, *Decision with Multiple Objectives: Preferences and Value Trade Offs*, John Wiley & Sons, New York, 1976.

- [22] C.A. Bana e Costa, J.C. Vansnick, “Applications of the MACBETH approach in the framework of an additive aggregation model”, *Journal of Multi-criteria Decision Analysis*, vol. 6, pp. 107-114, 1997.
- [23] V. Chankong, Y. Y. Haimes, *Multi-objective Decision Making: Theory and Methodology*, North-Holland, New York, 1983.
- [24] S. M. Lee, *Goal programming for decision analysis*, Auerback, Philadelphia, 1972.
- [25] W. Edwards, and F. H. Barron, “Smarts and Smarter: Improved Simple Methods for Multiattribute Utility Measurement”, *Organizational Behaviour and Human Decision Processes*, vol. 60, pp. 306-325, 1994.
- [26] J. Mustajoki, R. P. Hämäläinen, A. Salo, “Decision Support by Interval Smart/Swing - Incorporating Imprecision in the Smart and Swing Methods”, *Decision Sciences*, vol. 36 (2), pp. 317-339, 2005.
- [27] L. F. A. M. Gomes, M. C. G. Araya, C. Carignano, *Tomada de Decisões em Cenários Complexos*, Thomson Learning, Brasil, 2003.
- [28] C. Zopounidis, M. Doumpos, “A multicriteria decision aid methodology for sorting decision problems: The case of financial distress”, *Computational Economics*, vol. 14 (3), pp. 197-218, 1999.
- [29] G. Debreu, “Topological methods in Cardinal Utility Theory”, K. J. Arrow, S. Karlin, P. Suppes (eds.), *Mathematical Methods in the Social Sciences*, Stanford University Press, pp. 16-26, 1960.
- [30] B. Roy, “Classement et choix en présence de points de vue multiples (la méthode ELECTRE)”, *RIRO*, vol. 8, pp. 57-75, 1968.
- [31] B. Roy, P. Bertier, “La méthode Electre II - Une application au média-planing”, M. Ross (ed.), *OR '72*, North-Holland Publishing Company, pp. 291-302, 1973.
- [32] B. Roy, “Electre III: un algorithme de classements fondé sur représentation floue des préférences en présence de critères multiples”, *Cahiers du CERO*, vol. 20 (1), pp. 2-24, 1978.
- [33] W. Yu, “Electre Tri: Aspects méthodologiques et manuel d’utilisation”, Document du LAMSADE n° 74, Université Paris-Dauphine, 1992.

- [34] M. Roubens, "Preference relations on actions and criteria in multicriteria decision making", *European Journal of Operational Research*, vol. 10, pp. 51-55, 1982.
- [35] J. P. Brans, Ph. Vincke, B. Mareschal, "How to select and how to rank projects: The Promethee method", *European Journal of Operational Research*, vol. 24, pp. 228-238, 1986.
- [36] C. L. Hwang, K. Yoon, *Multiple Attribute Decision Making - Methods and Applications: A State of the Art Survey*, Springer-Verlag, New York, USA, 1981.
- [37] Ph. Vincke, "Analysis of multicriteria decision aid in Europe", *European Journal of Operational Research*, vol. 25, pp. 160-168, 1986.
- [38] R. F. Easley, J. S. Valacich, M. A. Venkataramanan, "Capturing group preferences in a multicriteria decision", *European Journal of Operational Research*, vol. 125 (1), pp. 73-83, 2000.
- [39] R.D. Luce, H. Raiffa, *Games and Decisions*, John Wiley & Sons, New York, 1957.
- [40] H. A. Simon, *Administrative behaviour: a study of Decision Making Processes in Administrative Organizations*, Mac Millan, New York, 1947.
- [41] K. J. Arrow, *Social choice and individual values*, J. Wiley, New York, 1951. 2nd edition, 1963.
- [42] M. Allais, "Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: Critique des postulats et axiomes de l'école américaine", *Econometrica*, vol. 21, pp. 503-46, 1953.
- [43] A. Tversky, "Intransitivity of preferences", *Psychological Review*, vol. 76, pp. 31-48, 1969.
- [44] A. Tversky, I. Simonson, "Context-dependent Preferences", *Management Science*, vol. 39, pp. 1179-1189, 1993.
- [45] B. Roy, M. Present, D. Silhoe, "A programming method for determining which Paris metro station should be renovated", *European Journal of Operational Research*, vol. 24, pp. 318-334, 1986.
- [46] N. Belacel, "Multicriteria assignment method PROAFTN: Methodology and medical applications", vol. 125, pp. 175-183, 2000.

- [47] Y. Siskos, E. Gregoroudis, C. Zopounedes, O. Saurais, “Measuring customer satisfaction using a survey based preference disaggregation model”, *Journal of Global Optimization*, vol. 12 (2), pp. 175-195, 1998.
- [48] H. Barda, J. Dupuy, P. Lencione, “Multicriteria location of thermal power plants”, *European Journal of Operational Research*, vol. 45, pp. 332-346, 1990.
- [49] P. Y. Ekel, E. A. Galperin, “Box-Triangular Multiobjective Linear Programs for Resource Allocation with Application to Load Management and Energy Market Problems”, *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 37, pp. 1-17, 2003.
- [50] M. B. Carvalho, P. Y. Ekel, C. A. P. S. Martins, J. G. Pereira Jr, “Fuzzy set-based multiobjective allocation of resources: Solution algorithms and applications”, *Nonlinear Analysis*, vol. 63, pp. e715 - e724, 2005.
- [51] M. Öztürk, A. Tsoukiàs, Ph. Vincke, “Preference Modelling”, em M. Ehrgott, S. Greco, J. Figueira (eds.), *State of the Art in Multiple Criteria Decision Analysis*, Kluwer Academic, Dordrecht, 2004.
- [52] M. Roubens, Ph. Vincke, “Preference Modelling”, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [53] K. Binmore, A. Voorhoeve, “Transitivity, the Sorites Paradox and Similarity-based Decision Making”, *Erkenntnis*, vol. 64 (1), pp. 101-114, 2006.
- [54] P. Perny, A. Tsoukiàs, “On the continuous extension of a four valued logic for preference modelling”, *Proceedings of the IPMU 1998 conference*, pp. 302 - 309, 1998.
- [55] A. Tsoukiàs, Ph. Vincke, “A characterization of PQI interval orders”, *Discrete Applied Mathematics*, vol. 127, pp. 387 - 397, 2003.
- [56] A. Tsoukiàs, Ph. Vincke, “A new axiomatic foundation of partial comparability”, *Theory and Decision*, vol. 39, pp. 79-114, 1995.
- [57] A. Tsoukiàs, Ph. Vincke, “A survey on non conventional preference modelling”, *Ricerca Operativa*, vol. 61, pp. 5 - 49, 1992.
- [58] A. Tsoukiàs, P. Perny, Ph. Vincke, “From concordance / discordance to the modelling of positive and negative reasons in decision aiding”, D. Bouyssou, E. Jacquet-Lagrèze, P. Perny, R. Slowinski, D. Vanderpooten,

- Ph. Vincke (eds.), *Aiding Decisions with Multiple Criteria: Essays in Honour of Bernard Roy*, Kluwer Academic, Dordrecht, pp. 147-174, 2002.
- [59] A. Tsoukiàs, Ph. Vincke, “Double threshold orders: a new axiomatization”, *Journal of Multi-criteria Decision Analysis*, vol. 7, pp. 285-301, 1998.
- [60] B. Roy, “Partial Preference Analysis and Decision Aid: The fuzzy outranking relation concept”, D.E. Bell, R.L. Keeney, H. Raiffa, (eds.), *Conflicting objectives in Decisions*, J. Wiley, New York, pp. 40 - 75, 1977.
- [61] S. A. Orlovsky, “Decision Making with a Fuzzy Preference Relation”, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 1, pp. 155-167, 1978.
- [62] B. Roy, “The Outranking Approach and the Foundations of Electre Methods”, *Theory and Decision*, vol. 31, pp. 49-73, 1991.
- [63] J. S. R. Jang, C. T. Sun, E. Mizutani, *Neuro-Fuzzy and Soft Computing: A Computational Approach to Learning and Machine Intelligence*, Prentice Hall, 1997.
- [64] S. N Ovchinnikov, M. Roubens, “On strict preference relations”, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 43, pp. 319-326, 1991.
- [65] J. C. Fodor, M. Roubens, “Valued preference structures”, *European Journal of Operational Research*, vol. 79, pp. 277-286, 1994.
- [66] S. Ovchinnikov, “On fuzzy strict preference, indifference and incomparability relations”, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 49, pp. 15-20, 1992.
- [67] P. Ya. Ekel, “Fuzzy Sets and Models of Decision making”, *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 44, pp. 863-875, 2002.
- [68] W. Edwards, “How to Use Multiattribute Measurement for Social Decisionmaking”, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 7 (5), pp. 326-340, 1977.
- [69] J. P. Brans, Ph. Vincke, “A preference ranking organisation method (The PROMETHEE Method for Multiple Criteria Decision-Making)”, *Management Science*, vol. 31, pp. 647-656, 1985.
- [70] D. Bouyssou, “Outranking Methods”, em C.A. Floudas, P.M. Pardalos (eds.), *Encyclopedia of Optimization*, Kluwer, 2001.

- [71] D. Bouyssou, “Outranking relations: Do they have special properties?”, *Journal of Multiple Criteria Decision Analysis*, vol. 5, pp 99-111, 1996.
- [72] D. Bouyssou e P. Perny, “Ranking methods for valued preference relations: A characterization of a method based on leaving and entering flows”, *European Journal of Operational Research*, vol. 61, pp. 186-194, 1992.
- [73] D. Bouyssou, “On some properties of outranking relations based on a concordance-discordance principle”, em A. Goicoechea, L. Duckstein e S. Zionts (eds.), *Multiple Criteria Decision Making*, Springer Verlag, pp. 93-106, 1992.
- [74] D. Bouyssou, e Ph. Vincke, “Ranking alternatives on the basis of preference relations: a progress report with special emphasis on outranking relations”, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, vol. 6, pp. 77-85, 1997.
- [75] J. Buchanan, P. Sheppard, “Ranking Projects Using the ELECTRE Method”, *Proc. of the 33rd Annual Operational Research Society of New Zealand Conference*, New Zealand, 1998.
- [76] R. O. Parreiras, J. A. Vasconcelos, “Decision Making in Multiobjective Optimization Problems”, *ISE Book Series on Real Word Multi-Objective System Engineering*, Nova Science, New York, USA, pp. 1-20, 2005.
- [77] G. A. Miller, “The magical number seven, plus or minus two: some limits on our capacity for processing information”, *The Psychological Review*, vol. 63, pp. 81-97, 1956.
- [78] P. T. Harker, L. G. Vargas, “The theory of ratio scale estimation: Saaty’s analytic hierarchy process”, *Management Science*, vol. 33 (11), pp. 1383-1403, 1987.
- [79] T. L. Saaty, “How to make a decision: The Analytic Hierarchy Process”, *European Journal of Operational Research*, vol. 48, pp. 9-26, 1990.
- [80] T. L. Saaty, “Ranking by Eigenvector Versus Other Methods in the Analytic Hierarchy Process”, *Appl. Math. Lett.*, vol. 11 (4), pp. 121-125, 1998.
- [81] E. Triantaphyllou, “Two new cases of rank reversals when the AHP and some of its additive variants are used that do not occur with the multiplicative AHP”, *Journal of Multi-criteria Decision Analysis*, vol. 10, pp. 11-25, 2001.

- [82] M. Kwiesiekewicz, E. van Uden, "Inconsistent and contradictory judgments in pairwise comparison method in the AHP", *Computers & Operations Research*, vol. 31, pp. 713-719, 2004.
- [83] W. Keyser, P. Peters, "A note on the use of PROMETHEE multicriteria methods", *European Journal of Operational Research*, vol. 89, pp. 457-461, 1996.
- [84] G. W. Greenwood, Xiabo Sharon Hu, J. G. D'Ambrosio, "Fitness Functions for Multiple Objective Optimization Problems: Combining Preferences with Pareto Rankings", Richard K. Belew, Michael D. Vose (eds.), *Foundations of Genetic Algorithms*, vol. 4, Morgan Kaufmann, pp. 437-455, 1997.
- [85] B. Malakooti, "Clustering and Group Selection of Multiple Criteria Alternatives With Application to Space-Based Networks", *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics - Part B*, vol. 34 (1), pp. 40-51, 2004.
- [86] R. O. Parreiras, J. H. R. D. Maciel, J. A. Vasconcelos, "The a posteriori decision in multiobjective optimization problems with smarts, promethee II, and a fuzzy algorithm", *IEEE Transactions on Magnetism*, vol. 42 (4), pp. 1139 - 1142, 2006.
- [87] P. Haastrup, Â. Guimarães Pereira, "Exploring the Use of Multi-Objective Genetic Algorithms for Reducing Traffic Generated Urban Air and Noise Pollution", *Proc. of the 5th European Congress on Intelligent and Soft Computing*, Aachen, Germany, pp. 819-825, 1997.
- [88] B. Rekiek, F. Pellichero, P. De Lit, E. Falkenauer, A. Delchambre, "A resource planner for hybrid assembly lines", *Proc. of the 15th International Conference on CAD/CAM Robotics & Factories of the Future CAR & FOF'99*, Aguas de Lindóia, Brasil, pp. MW6-18–MW6-23, 1999.
- [89] B. Rekiek, "Assembly line design (multiple objective grouping genetic algorithm and the balancing of mixed-model hybrid assembly line)", PhD thesis, CAD/CAM Department, Free University of Brussels, 2000.
- [90] B. Rekiek, P. De Lit, F. Pellichero, T. L'Eglise, E. Falkenauer, A. Delchambre, "Dealing With User's Preferences In Hybrid Assembly Lines Design", *Proc. of the MCPL' 2000 Conference*, Grenoble, France, 2000.
- [91] B. Rekiek, P. De Lit, F. Pellichero, T. L'Eglise, P. Fouda, E. Falkenauer, A. Delchambre, "A multiple objective grouping genetic algorithm for assembly line design", *Journal of Intelligent Manufacturing*, vol. 12, pp. 467-485, 2001.

- [92] R. F. Coelho, H. Bersini, Ph. Bouillard, “Parametrical mechanical design with constraints and preferences: application to a purge valve”, *Computational Methods in Applied Mechanical Engineering*, vol. 192, pp. 4355-4378, 2003.
- [93] R. F. Coelho, P. Bouillard, “PAMUC II for multicriteria optimization of mechanical designs with expert rules”, *IEEE*, 2004.
- [94] P. J. Lewi, J. V. Hoof, “Multicriteria decision making using Pareto optimality and Promethee preference ranking”, *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, vol. 16, pp. 139-144, 1992.
- [95] S. Massebeuf, C. Fonteix, L. N. Kiss, I. Marc, F. Pla, K. Zaras, “Multi-criteria Optimization and Decision Engineering of an Extrusion Process Aided by a Diploid Genetic Algorithm”, 1999 Congress on Evolutionary Computation, *IEEE Service Center*, pp. 14-21, 1999.
- [96] S. Massebeuf, C. Fonteix, S. Hoppe, F. Pla, “Development of new concepts for the control of polymerization processes: multiobjective optimisation and decision engineering: I Application to emulsion homopolymerization of styrene”, *Journal of Applied Polymer Science*, vol. 87, pp. 2383-2396, 2003.
- [97] C. Fonteix, S. Massebeuf, F. Pla, L. N. Kiss, “Multicriteria optimization of an emulsion polymerization process”, *European Journal of Operational Research*, vol. 153, pp. 350-359, 2004.
- [98] L. Muniglia, L. Kiss, C. Fonteix, I. Marc, “Multicriteria optimization of a single-cell oil production”, *European Journal of Operational Research*, vol. 153, pp. 360-369, 2004.
- [99] J. Renaud, J. Thibault, R. Lanouette, L.N. Kiss, K. Zaras, C. Fonteix, “Comparison of two multicriteria decision aid methods: Net Flow and Rough Set Methods in a high yield pulping process”, *European Journal of Operational Research*, vol. 177, pp. 1418-1432, 2007.
- [100] Hayley Halsall-Whitney, Jules Thibault, “Multi-objective optimization for chemical processes and controller design: Approximating and classifying the Pareto domain”, *Computers and Chemical Engineering*, vol. 30, pp. 1155-1168, 2006.
- [101] R. O. Parreiras, J. A. Vasconcelos, “A Multiplicative Version of Promethee II Applied to Multiobjective Optimization Problems”, *European Journal of Operational Research*, disponibilizado *on-line* em 14 Dec. 2006.

- [102] D. Cvetkovic, I. C. Parmee, "Use of preferences for GA-based Multi-objective Optimisation", *Proceedings of Genetic and Evolutionary Computation Conference*, pp. 1504-1509, 1999.
- [103] D. Cvetkovic, I. A. Parmee, "Preferences and their Application in Evolutionary Multiobjective Optimisation", *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 6 (1), pp. 47-52, 2002.
- [104] M. B. Carvalho, P. Ya. Ekel, C. A. P. S. Martins, J. G. Pereira Jr., "Fuzzy set-based multiobjective allocation of resources: Solution algorithms and applications", *Nonlinear Analysis*, vol. 63, pp 715-724, 2005.
- [105] R. E. Bellman, L. A. Zadeh, "Decision-making in a Fuzzy Environment", *Management Science*, vol. 17, pp. 141-164, 1970.
- [106] R. R. Yager, "A procedure for ordering fuzzy subsets on the unit interval", *Information Science*, vol. 24 (2), pp. 143-161, 1981.
- [107] S. Jain, "Procedure for multi-aspect decision making using fuzzy sets", *Int. Journal of System Science*, vol. 8 (1), pp 1-7, 1977.
- [108] P. Ya. Ekel, "Approach to Decision Making in Fuzzy Environment", *Computers and Mathematics with Application*, vol. 37, pp. 59-71, 1999.
- [109] J. Wu, S. Azarm, "Metrics for Quality Assessment of a Multiobjective Design Optimization Solution Set", *Transactions of ASME*, vol. 123, pp. 18-25, 2001.
- [110] Y. Jin, M. Olhofer, B. Sendhoff, "Dynamic Weighted Aggregation for Evolutionary Multi-Objective Optimization: Why Does it Work and How?", *Proceedings of Genetic Evolutionary Computation Conference*, 2001.
- [111] Ch. Magele et al, "TEAM Optimization Benchmark Problem 22", <http://www.igte.tu-graz.ac.at/team>.
- [112] M. M. Afonso, J. A. Vasconcelos, "Hybrid finite element-boundary element method applied to solve 2D scattering problems", CBMAG2000, Brasil, pp. 353-356, 2000.