UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Forma Normal de uma estrutura de Poisson

Marcela de Fátima Ribeiro Nascimento

Belo Horizonte - MG
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Marcela de Fátima Ribeiro Nascimento
Orientador: Prof. Dr. Arturo Ulises Fernández Pérez

Forma Normal da Estrutura de Poisson

Dissertação submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas-ICEX da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Belo Horizonte - MG
2021

© 2021, Marcela de Fátima Ribeiro Nascimento.
Todos os direitos reservados

Nascimento, Marcela de Fátima Ribeiro

N244f Forma normal de uma Estrutura de Poisson [manuscrito] / Marcela de Fátima Ribeiro Nascimento. – 2021.
53 f. il.

Orientador Arturo Ulises Fernández Pérez.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f. 52–53.

1. Matemática – Teses. 2. Variedades de Poisson – Teses. 3. Variedades simpléticas – Teses. I. Fernández Pérez, Arturo Ulises II Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. IV.Título.
CDU 51 (043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa
CRB 6ª Região nº 1510

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Forma normal de uma Estrutura de Poisson

MARCELA DE FÁTIMA RIBEIRO NASCIMENTO

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Prof. Arturo Ulises Fernández Pérez
UFMG

Prof. Maurício Barros Corrêa Júnior
UFMG

Prof. Rudy Rosas Bazán
PUCP-Peru

Belo Horizonte, 10 de setembro de 2021.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por sempre me dar forças para seguir minha caminhada e conseguir alcançar meus objetivos.

A minha mãe, Luciene Ribeiro, por todo apoio e amor incondicional que sempre me deu. Obrigada por acreditar em mim e por nunca medir esforços para me proporcionar sempre o melhor. Ao meu padrasto, José Márcio, por todo apoio e incentivo. Ao meu pai, Márcio, pelo apoio.

Aos meus familiares, por todas as orações, palavras de incentivo e apoio de sempre. Em especial, a minha querida avó Maria Ivone.

Ao meu namorado, Alysson por sempre me apoiar em todos os momentos e me trazer paz nos momentos difíceis.

Agradeço aos meus amigos, Rogéria, Taciane, Ana Camila, Guilherme que mesmo longe nunca estiveram ausentes, sempre me ouviram e me aconselharam quando precisei.

Aos amigos que fiz aqui em Belo Horizonte, Genilson, Juliana, Luciana, Marta, Henrique, Geraldo, pelos bons momentos que vivemos juntos em meio à correria dos estudos.

Agradeço a Mariana e Ana Carolina, que foram fundamentais no começo do mestrado, me ajudando nos momentos difíceis que passei no ínicio do mestrado. E são fundamentais até hoje, obrigada por me acolherem.

Agradeço especialmente ao meu orientador, Professor Arturo Fernández, por toda a disponibilidade, paciência e imprescindível apoio que sempre demonstrou em todas as reuniões. Obrigada por toda dedicação, correções, incentivo e todo o aprendizado que me proporcionou.

À todos os professores que tive durante toda a minha caminhada acadêmica, pelos ensinamentos e por todo o conhecimento que me propiciaram. Obrigada por colaborarem com a minha formação!

Aos funcionários do ICEX, pela disponibilidade, cordialidade e gentiliza.

Por fim, muito obrigada a todos que direta ou indiretamente contribuíram com a realização deste trabalho.

“Não crie limites para si mesmo. Você deve ir tão longe quanto sua mente permitir. O que você mais quer pode ser conquistado”

Mary Kay Ash

Resumo

O presente trabalho consiste numa introdução ao conceito de variedade de Poisson e a apresentação de alguns dos principais resultados a respeito de forma normal para esta estrutura, baseado nas obras de Jean-Paull Dufour e Nguyen Tien Zung [1] e Rui Loja [2]. Inicialmente, foram estudadas as estruturas de Poisson em uma variedade e sua relação com variedade simplética. Posteriormente, abordarmos folheações simpléticas e como uma estrutura de Poisson pode ser obtida por esta folheação. Por fim, foi estudada a decomposição de Levi para variedade de Poisson, que é um tipo de forma normal para variedade de Poisson.

Palavras-chave: Estrutura de Poisson. Colchete de Schouten. Folheação Simplética. Forma Normal de Poisson.

Abstract

The present work consists of an introduction to the Poisson manifold concept and the presentation of some of the main results regarding the normal form for this structure, based on the works of Jean-Paull Dufour and Nguyen Tien Zung [1] and Rui Loja [2]. Initially, Poisson structures in a manifold and the relationship we have with a symplectic manifold were studied. Later, we discussed symplectic foliations and how a Poisson structure can be obtained by this foliation. Finally, the Levi decomposition for Poisson manifold, which is a type of normal form for Poisson manifold, was studied.

Keywords: Poisson Structure. Schouten Bracket. Symplectic Foliation.Poisson Normal Form.

Sumário

Introdução

O matemático e físico francês Siméon Denis Poisson publicou em 1809 [10] que havia encontrado uma melhoria na teoria mecânica Lagrangiana desenvolvida por Joseph-Louis Lagrange e Pierre-Simon Laplace. Poisson introduziu o conceito de *colchete de Poisson* denotado por $\{,\}$ como uma ferramenta para a dinâmica clássica, o matemático Jacobi percebeu a importância deste colchete e estudou suas propriedades algébricas e, posteriormente, Lie iniciou o estudo da sua geometria.

O colchete de Poisson permite definir uma *estrutura de Poisson* em uma variedade M. Tal estrutura é definida como uma operação $\mathbb{R}$-bilinear antissimétrica $(f,g) \longmapsto \{f,g\}$ que satisfaz a identidade de Jacobi

$$\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = 0$$

e a identidade de Leibniz

$$\{f,gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}, \forall \quad f,g,h \in C^\infty(M).$$

onde $f,g,h \in C^\infty(M)$, ou seja, f,g,h são funções suaves de classe C^∞ em M.

Ou ainda, em uma linguagem mais recente, um campo bivetorial Π é uma estrutura de Poisson em uma variedade M se o colchete correspondente a essa estrutura no espaço de funções em M, dado por

$$\{f,g\} := \langle df \wedge dg, \Pi\rangle$$

satisfaz a identidade de Jacobi. Neste caso, Π é denominado de *tensor de Poisson.* O par (M,Π) recebe o nome de *variedade de Poisson.*

Embora tenha ficado um tempo sem muitos avanços, nos anos de 1890 a geometria de Poisson, que é a geometria das estruturas de Poisson, voltou a ser um campo de pesquisa ativo, combinando técnicas de geometria simplética, teoria de folheações e teoria de Lie [11]. Além disso, a geometria de Poisson é utilizada no estudo da mecânica clássica e celeste, e se tornou uma teoria ampla, interagindo com outras áreas da matemática, como a dinâmica hamiltoniana, sistemas integráveis, a teoria da singularidade etc.

Além disso, variedades de Poisson generalizam o conceito de variedades simpléticas, que são variedades que possuem uma 2-forma não degenerada, e desempenham um papel fundamental na dinâmica hamiltoniana, onde servem como espaços de fase. Em 1970 [15], o conceito de variedade de Poisson foi formalizado como uma variedade suave M que possui um campo bivetorial Π que satisfaz

$$[\Pi,\Pi] = 0$$

onde $[,]$ é chamado de *colchete de Schouten* de campos multivetoriais.

A dissertação está organizada em 4 capítulos.

No primeiro capítulo, iremos apresentar os principais conceitos necessários para que se possa ter uma melhor compreensão dos próximos assuntos. Tais como: variedade diferenciável, campos vetoriais e álgebra de Lie.

No capítulo 2, daremos as noções básicas de geometria de Poisson como a definição de uma estrutura de Poisson, morfismos e tensor de Poisson. Estudaremos também a relação de variedades de Poisson com variedades simpléticas: toda variedade simplética admite uma estrutura de Poisson. Além disso, discutiremos o conceito de folheação simplética e, como consequência, apresentamos o resultado que nos permite determinar uma estrutura de Poisson em uma variedade pela estrutura simplética das folhas de uma folheação simplética.

No capítulo 3, apresentaremos o conceito de colchete de Schouten de campos multivetoriais, que foi descoberto pela primeira vez por Schouten em 1940 [14]. O colchete de Schouten também será usado como uma ferramenta para verificar quando um campo bivetorial é um tensor de Poisson, ou seja, quando define uma estrutura de Poisson em uma variedade. Posteriormente, estudaremos cohomologia de Poisson, que foi introduzida por André Lichenerowicz em 1977 [15] e faremos um breve comentário sobre a relação da cohomologia de Poisson e cohomologia de De Rham. Apresentamos também uma maneira de calcular o colchete de Schouten via operador Curl e, por fim, o conceito de complexo de Chevalley-Eilenberg.

Por fim, no capítulo 4, estudamos a forma normal de Poisson. Formas normais, em uma linguagem informal, é uma maneira de se obter uma estrutura de Poisson mais "simples"em uma variedade. Em particular, nosso objetivo é o estudo de um tipo de forma de normal de Poisson, chamadas de decomposições de Levi. Decomposição de Levi é uma forma normal de Poisson que se anula em um ponto da variedade. Apresentaremos um resultado de quando uma estrutura de Poisson formal admite uma decomposição de Levi e comentaremos sobre a decomposição de Levi no caso em que a estrutura é analítica e suave.

Capítulo 1

Preliminares

Pretendemos neste capítulo, apresentar os principais conceitos necessários para que se possa ter uma melhor compreensão dos demais assuntos abordados nos próximos capítulos. Usamos as referências [3], [7], [9] e [16].

1.1 Variedades suaves

Uma variedade pode ser vista como uma generalização de curvas e superfícies para dimensões superiores. Existem muitos tipos de variedades, como variedades topológicas, variedades suaves, variedades analíticas e variedades complexas. Com o intuito de apresentar uma breve noção de variedades, aqui daremos apenas a definição de variedade topológica e variedade suave.

Definição 1.1. Um espaço topológico é segundo contável se tiver uma base contável. Uma vizinhança de um ponto p em um espaço topológico N é qualquer conjunto aberto contendo p. Uma cobertura aberta de N é uma coleção $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de conjuntos abertos em N cuja união $\cup_{\alpha\in A}U_\alpha = N$.

Definição 1.2. Um espaço topológico N é localmente euclidiano de dimensão n se todo o ponto p em N tem uma vizinhança U tal que existe um homeomorfismo ϕ de U em um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Chamamos o par $(U, \phi : U \to \mathbb{R}^n)$ de carta, U de vizinhança coordenada ou um conjunto aberto de coordenadas e ϕ de mapa de coordenadas ou um sistema de coordenadas local em U. Dizemos que a carta (U, ϕ) está centrada em $p \in U$ se $\phi(p) = 0$.

Definição 1.3. Uma variedade topológica é localmente um espaço euclidiano de Hausdorff, segundo contável. Dizemos que tem dimensão n se for localmente euclidiana de dimensão n.

Exemplo 1.1. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é coberto por uma única carta $(\mathbb{R}^n, Id)$, em que $Id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é o mapa de identidade. $\mathbb{R}^n$ é o principal exemplo de uma variedade topológica. Em particular, todo subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ também é uma variedade topológica.

Definição 1.4. Suponha que $(U, \phi : U \to \mathbb{R}^n)$ e $(V, \psi : V \to \mathbb{R}^n)$ sejam duas cartas de uma variedade topológica. Uma vez que $U \cap V$ é um aberto em U e $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo em um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, a imagem $\phi(U \cap V)$ também será um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Similarmente, $\psi(U \cap V)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.5. Duas cartas $(U, \phi : U \to \mathbb{R}^n), (V, \psi : V \to \mathbb{R}^n)$ de uma variedade topológica são C^∞-compatível se os dois mapas $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$ e $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ são C^∞. Esses dois mapas são chamados de funções de transição entre as cartas. Se $U \cap V$ for vazio, então as duas cartas são automaticamente C^∞-compatíveis.

Definição 1.6. Um atlas C^∞ ou simplesmente um atlas em um espaço localmente euclidiano N é uma coleção $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ de cartas C^∞-compatíveis aos pares que cobrem N, ou seja, $N = \cup_\alpha U_\alpha$.

Definição 1.7. Um atlas $\mathcal{Z}$ em um espaço localmente euclidiano é considerado máximal se não estiver contido em um atlas maior, em outras palavras, se $\mathcal{U}$ for qualquer outro atlas contendo $\mathcal{Z}$, então $\mathcal{Z} = \mathcal{U}$.

Definição 1.8. Uma variedade suave ou C^∞ é uma variedade topológica N junto com um atlas maximal. O atlas maximal também é chamado de estrutura diferenciável em N. Diz-se que uma variedade tem dimensão n se todos os seus componentes conectados tem dimensão N.

Em particular, uma variedade unidimensional também é chamada de curva.

No contexto de variedades, usualmente podemos denotar as coordenadas canônicas em $\mathbb{R}^n$ por $r_1, ..., r_n$. Se $(U, \phi : U \to \mathbb{R}^n)$ é uma carta de uma variedade, considere $x_i = r_i \circ \phi$ o i-ésimo componente de ϕ e escrevemos $\phi = (x_1, ..., x_n)$ e $(U, \phi) = (U, x_1, ..., x_n)$. Assim, para $p \in U$, $(x_1(p), ..., x_n(p))$ é um ponto em $\mathbb{R}^n$. As funções $x_1, ..., x_n$ são chamadas de coordenadas ou coordenadas locais em U.

Exemplo 1.2. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é uma variedade suave com uma única carta $(\mathbb{R}^n, r_1, ..., r_n)$, onde $r_1, ..., r_n$ são as coordenadas canônica em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.3. Seja N uma variedade C^k, então qualquer subcunjunto aberto $W \subset N$ tem uma estrutura natural de variedade de classe C^k. A estrutura diferenciável é dada pelo atlas maximal em W, formado por todos os sistemas de coordenadas admissíveis $x : U \to \mathbb{R}^n$ em N, cujos domínios U estão contidos em W.

Exemplo 1.4. Se M e N são variedades suaves, então o produto $M \times N$ também é uma variedade suave. Suponha que $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ é um atlas de M e $\{(V_\beta, \varphi_\beta)\}$ é um atlas de N. Então a família $\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \varphi_\beta)\}$, onde $\varphi_\alpha \times \varphi_\beta(p, q) = (\varphi_\alpha(p), \varphi_\beta(q))$, define um atlas em $M \times N$. A dimensão do produto cartersiano das duas variedades é a soma da dimensão de cada uma, ou seja, dim $M \times N =$ dim M + dim N.

1.2 Campos vetoriais

Definição 1.9. Um campo vetorial X em um subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^n$ é uma função que atribui a cada ponto p em U um vetor tangente X_p em $T_p(\mathbb{R}^n)$.

Como o conjunto $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_p$ define uma base em $T_p(\mathbb{R}^n)$, veja na Seção 2.3 de [16], o vetor X_p pode ser escrito como uma combinação linear do seguinte modo

$$X_p = \sum a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad p \in U \quad \text{e} \quad a_i \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Definição 1.10. Se $X \in C^k$ dizemos que o campo de vetorial é de classe C^k.

Considere X um campo vetorial C^∞ em um subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^n$ e f uma função C^∞ em U. Podemos definir uma nova função X_f em U dada por $(X_f)(p) = X_p f$ para qualquer $p \in U$. Usando a fórmula (1.1) podemos escreverX_f como

$$X_f = \sum a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

e desse modo, X_f é uma função de classe C^∞. Logo, um campo vetorial X de classe C^∞ é um mapa $\mathbb{R}$-linear

$$C^\infty(U) \to C^\infty(U)$$

$$f \mapsto X_f.$$

Proposição 1.1. *Se X é um campo vetorial C^∞ e f e g são funções C^∞ em um subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^n$, então $X(fg)$ satisfaz o produto regra (regra de Leibniz)*

$$X(fg) = (Xf)g + fXg.$$

Demonstração: *Note que em cada ponto $p \in U$, o vetor Xp satisfaz a regra de Leibniz:*

$$X_p(fg) = (X_p f)g(p) + f(p)X_p g.$$

Como p varia em U, isso se torna uma igualdade de funções

$$X(fg) = (Xf)g + fXg.$$

$\blacksquare$

Com a proposição acima, segue que um campo vetorial C^∞ em um conjunto aberto U é uma derivação da álgebra $C^\infty(U)$, isto é, é um mapa do tipo K-linear $D : A \to A$, onde A é uma álgebra sobre o corpo K que satisfaz $D(ab) = (Da)b + a(Db) \ \forall \quad a, b \in A$.

Definição 1.11. Sejam $p \in U$ e $X : U \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^k. Chama-se curva integral do campo X, com condição inicial p, um caminho diferenciável $\lambda : I \to U$, definido num intervalo aberto contendo $0 \in \mathbb{R}^n$, tal que $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(t) = X(\lambda(t))$ para todo $t \in I$.

Teorema 1.1. *Sejam U um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e $X : U \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1. Dado qualquer $p \in U$, existe uma curva integral $\lambda : (-c, c) \to U$ do campo X com condição inicial $\lambda(0) = p$. Se $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ for outra curva integral de X com $\gamma(0) = p$, então $\lambda = \gamma$ num intervalo $(-\delta, \delta) \subset (-c, c) \cap (-\epsilon, \epsilon)$.*

1.2.1 Campos vetoriais em variedades

Assim como temos o conceito de derivação em $\mathbb{R}^n$, podemos definir uma derivação em um ponto p pertencente a uma variedade M. Também chamada de derivação pontual de $C_p^\infty(M)$, a derivação em p é um mapa linear $D : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ tal que $D(fg) = (Df)g(p) + f(p)Dg$.

Definição 1.12. Um vetor tangente em um ponto p em uma variedade M é uma derivação em p. Os vetores tangentes em p formam um espaço vetorial T_pM chamado de espaço tangente de M em p.

O vetor tangente em $p \in M$ é um exemplo de derivação pontual em M.

Definição 1.13. Seja M uma variedade diferenciável, o fibrado tangente TM de M é a união disjunta do espaço tangente em cada ponto da variedade, isto é, $TM = \cup_{q \in M} T_qM$, com a topologia induzida pela projeção $\Pi : TM \to M$, dada por $\Pi(w) = q$ se $w \in T_qM$.

Definição 1.14. Seja M uma variedade diferenciável. Um campo vetorial de classe C^k em M é uma aplicação $X : M \to TM$ de classe C^k tal que $X_q = X(q) \in T_qM$, $\forall\, q \in M$.

Denotaremos por $\mathfrak{X}^\infty(M)$ o conjunto dos campos vetoriais suaves em M. Um campo vetorial X de classe C^k em um subconjunto aberto U de uma variedade M é uma aplicação C^k tal que $X_q = X(q) \in T_qM$, $\forall q \in U$. Em termos de coordenadas locais, temos o seguinte resultado

Teorema 1.2. *Se (U, x) é uma carta local em M e $X : U \to TM$ é um campo vetorial, as afirmações a seguir são equivalentes:*
i) X é suave.
ii) $X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, com $\lambda_i \in C^\infty(U)$, $i = 1, ..., n$.
iii) $X(f) \in C^\infty(U)$ para toda função $f \in C^\infty(U)$.

Definição 1.15. Uma curva integral de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ passando por um ponto $p \in M$ é uma aplicação de classe $\mathcal{C}^{k+1}$, $\alpha : I \to M$, onde I é um intervalo contendo 0, tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ para todo $t \in I$. A imagem de uma curva integral é chamada de órbita ou trajetória.

Em particular, os teoremas locais sobre existência, unicidade e diferenciabilidade de curvas integrais estende-se a campos em variedades.

Definição 1.16. Uma aplicação $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ de classe C^r é dita ser um fluxo se:
(i) $\varphi(0, x) = x$,
(ii) $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$. O fluxo é linear se para cada t fixo, $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ é uma aplicação linear em $\mathbb{R}^n$.

1.3 Formas diferenciáveis em uma variedade

Seja M uma variedade suave e p um ponto em M. O espaço cotangente em $p \in M$, denotado por T_p^*M é o dual do espaço tangente T_pM e definido como

$$T_p^*M = Hom(T_pM, \mathbb{R})$$

onde $Hom(T_pM, \mathbb{R})$ é o espaço vetorial de todos os funcionais lineares em T_pM.

Definição 1.17. Um elemento do espaço cotangente T_p^*M é chamado covetor e é um funcional linear no espaço tangente T_pM . Um campo covetorial ou uma 1-forma em M é uma função η que atribui a cada ponto $p \in U$ um covetor $\eta_p : T_pM \to \mathbb{R}$.

Tomando qualquer função $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, podemos construir uma 1-forma df chamada de diferencial de f do seguinte modo: para cada $p \in U$ e $X_p \in T_pU$,

$$(df)_p(X_p) = X_p f.$$

Considerando agora uma carta local $(U, \varphi) = (U, x_1, ..., x_m)$ na variedade M, note que os diferenciais $dx_1, ..., dx_n$ são 1-formas em M e em particular, em cada ponto $p \in M$ eles formam uma base de covetores para o espaço cotangente T_p^*M, veja Seção 17.2 de [16]. E assim, temos

Proposição 1.2. *Se $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função C^∞ em um conjunto aberto U em $\mathbb{R}^n$ e $x_1, ..., x_n$ são coordenadas canônicas de $\mathbb{R}^n$, então*

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Em particular, se η é uma 1-forma C^∞, então em coordenadas locais,

$$\eta = \sum a_i dx_i$$

onde a_i é uma função $C^\infty(U)$. Dizemos que η é C^∞ se a_i é de classe C^∞ para todo i.

Se X é um campo vetorial C^∞ em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e η é uma 1-forma, podemos definir uma função $\eta(X)$ em U pela seguinte fórmula

$$\eta(X)p = \eta_p(X_p), p \in U.$$

E em coordenadas locais,

$$\eta(X) = \left(\sum a_i dx_i\right)\left(\sum b_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum a_i b_i$$

onde $b_j \in C^\infty(U)$ e $\sum b_j \frac{\partial}{\partial x_j} = X$. Logo, $\eta(X)$ é C^∞ em U.

Mais geralmente, podemos definir uma k-forma diferenciável em M. Antes disso, precisaremos dos seguintes conceitos.

Definição 1.18. Um tensor de ordem k ou um k-tensor é uma função multilinear $f : V^k \to \mathbb{R}$, onde $V^k = V \times ... \times V$, k vezes e V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. O conjunto de todos os tensores de ordem k em V será denotado por $\mathcal{L}^k(V)$. Um k-tensor $f \in \mathcal{L}^k(V)$ é chamado alternado se tivermos que $f(v_1, ..., v_k) = 0$ sempre que $v_i = v_{i+1}$ para pelo menos um índice $i, 1 \leq i < k$. Por convenção, quando $k = 1$, todo 1-tensor $f \in \mathcal{L}^1(V)$ é alternado. Denotamos o conjunto dos k-tensores alternados em V por $\mathcal{A}^k(V)$.

Assim, temos que uma k-forma é definida como

Definição 1.19. Uma forma diferencial de grau k, ou uma k-forma diferencial em M é uma aplicação $\omega : M \to \mathcal{A}^k(M)$ tal que $\pi \circ \omega = Id$, onde π é a projeção de $\mathcal{A}^k$ em M. Denotamos por $\Omega^k(M)$ o conjunto das k-formas diferenciais em M.

Definição 1.20. Uma k-forma ω em $U \subset \mathbb{R}^n$ é fechada se $d\omega = 0$; é exata se existe uma $(k-1)$-forma τ tal que $\omega = d\tau$ em U.

Em particular, temos que toda forma exata é uma forma fechada, para uma demonstração deste resultado veja Seção 24.1 em [16].

1.4 Álgebra de Lie e propriedades

Como veremos posteriormente, uma variedade de Poisson pode ser vista como uma álgebra de Lie que satisfaz a identidade de Leibniz. Nesta seção apresentamos algumas definições e os resultados mais usados, em especial no último capítulo desse trabalho.

Definição 1.21. Uma álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido de um ponto (colchete) $[.,.] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que satisfaz as seguintes propriedades:
a) é bilinear, isto é, linear en cada uma das variáveis.
b) anti-simétrica, isto é, $[X, Y] = -[Y, X]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.
c) identidade de Jacobi, isto é, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, $[[X, Y], Z] = [[X, Z], Y] + [X, [Y, Z]]$.

Exemplo 1.5. Um exemplo de álgebra de Lie é dado pelo espaço vetorial dos campos de vetores sobre uma variedade diferenciável M de classe C^∞ munido do colchete de Lie de campos de vetores. Dada uma carta local (U, x) temos que

$$X = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

e

$$Y = \sum_{i=1}^{m} y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

e assim o colchete é dado localmente por

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^{m} \left(\lambda_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j} - y_j \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Em particular, a derivada de Lie de um campo vetorial Y é igual ao seu colchete de Lie, ou seja, $\mathcal{L}_X(Y) = [X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$.

Exemplo 1.6. A álgebra $\mathbf{gl}(n, \mathbb{R})$ formada pelas matrizes $n \times n$ com o colchete dado pelo comutador de matrizes $[A, B] = AB - BA$.

Exemplo 1.7. Os campos invariantes em $(\mathbb{R}^n, +)$ são os campos constantes. Como o colchete de Lie de campos constantes se anula, a álgebra de Lie $\mathbb{R}^n$ do grupo de Lie abeliano $\mathbb{R}^n$ é abeliano, isto é, satisfaz $[.,.] \equiv 0$.

Definição 1.22. Um subespaço $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é um ideal se para todo $Y \in \mathfrak{h}$, $X \in \mathfrak{g}$ tem-se: $[X, Y] \in \mathfrak{h}$.

Definição 1.23. Uma álgebra de Lie é chamada abeliana se $[X, Y] = 0$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$. $\mathfrak{g}$ é chamada simples se $\mathfrak{g}$ não é abeliana e os únicos ideais de $\mathfrak{g}$ são 0 e a própria $\mathfrak{g}$ ($\mathfrak{g}$ não tem ideal não trivial).

Definição 1.24. Se $\mathfrak{g}$ é uma álegbra de Lie, uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ é um subespaço vetorial $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{g}$ que é, por sua vez, uma álgebra de Lie com o colchete de g. Equivalentemente: $\mathfrak{s}$ é um subespaço de $\mathfrak{g}$ e $[X,Y] \in \mathfrak{s}$, $\forall \quad X, Y \in \mathfrak{s}$.

Definição 1.25. Se $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ são álgebras de Lie, um homomorfismo de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{h}$ é uma transformação linear $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ que satisfaz

$$\varphi([X,Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Se φ admite inversa, então φ é chamada isomorfismo. Duas álgebras de Lie são isomorfas se existe um isomorfismo entre elas.

Lema 1.1. *Se a e b são ideais de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ então $a+b$, $a \cap b$, $[a,b]$ são também ideais.*

Demonstração: Sejam a e b ideais da álgebra de Lie g. Se $Z \in a+b$, então $Z = A+B$, com $A \in a$ e $B \in b$. Assim, para qualquer $X \in g$, tem-se $[A,X] \in a$ e $[B,X] \in b$, pois a e b são ideais. Logo,

$$[Z,X] = [A+B,X] = [A,X] + [B,X] \in a+b.$$

Se $X \in a \cap b$, então, para qualquer $Y \in \mathfrak{g}$, tem-se $[X,Y] \in a$ e $[X,Y] \in b$ pois $X \in a$ e $X \in b$. Assim, $[X,Y] \in a \cap b$.

Por fim, se $X = \lambda_1[A_1,B_1] + ... + \lambda_n[A_n,B_n] \in [a,b]$ e $Y \in \mathfrak{g}$ é qualquer, temos

$$[X,Y] = [\lambda_1[A_1,B_1] + ... + \lambda_n[A_n,B_n], Y] = \lambda_1[[A_1,B_1,Y] + ... + \lambda_n[[A_n,B_n],Y].$$

Mas $\lambda_s[[A_s,B_s],Y] = -\lambda_s[[B_s,Y],A_s] - \lambda_s[[Y,A_s],B_s] = \lambda_s[A_s,[B_s,Y]] + \lambda_s[[A_s,Y],B_s] \in [a,b], s = 1,...,n$. E, logo, $[X,Y] \in [a,b]$. ■

Considere agora g^1 o ideal $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Definição 1.26. O ideal g^1 é chamado de ideal dos comutadores. A série dos comutadores para a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ (também conhecida como a série derivada) é a cadeia de ideais

$$g^0 \supseteq g^1 \supseteq g^2 \supseteq ... \supseteq g^k \supseteq ... \tag{1.2}$$

onde $g^0 = \mathfrak{g}$, $g^1 = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, $g^2 = [g^1,g^1]$ e, para cada inteiro positivo k, $g^{k+1} = [g^k,g^k]$.

Definição 1.27. Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é solúvel se existe k tal que $g^k = 0$.

Note que toda a álgebra de Lie abeliana é solúvel.

Proposição 1.3. *Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie solúvel e $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ é um subálgebra, então $\mathfrak{h}$ também é solúvel.*

Exemplo 1.8. A álgebra de Lie das matrizes 3×3 triangulares superiores com entradas reais (que é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R}\ )$) é uma álgebra de Lie solúvel, pois $g^3 = 0$.

Definição 1.28. Se $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie e $a \subseteq \mathfrak{g}$ é ideal, o espaço vetorial quociente $\mathfrak{g}/a$ adquire estrutura de álgebra de Lie com o colchete definido por

$$[X+a, Y+a] = [X,Y] + a. \tag{1.3}$$

$\mathfrak{g}/a$ é chamada a álgebra de Lie quociente de $\mathfrak{g}$ por a.

A estrutura de álgebra de Lie está bem definida em $\mathfrak{g}/a$. De fato, se $Y + a = X + a$, então $Y - X \in a$ e como a é um ideal, $[Y - X, Z] \in a$, $\forall Z \in \mathfrak{g}$. Equivalentemente: $[Y, Z] + a = [X, Z] + a$, $\forall Z \in \mathfrak{g}$ e logo, $[Y + a, Z + a] = [Y, Z] + a = [X, Z] + a = [X + a, Z + a]$.

Proposição 1.4. *A projeção $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/a$ definida por $\pi(X) = X + a$ é um homomorfismo de álgebra de Lie e o núcleo dessa aplicação $Nuc(\pi) = a$. Segue que todo ideal é o núcleo de algum homomorfismo de álgebra de Lie.*

Lema 1.2. *Se $\mathfrak{g}$ é álgebra de Lie solúvel e $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um homomorfismo de álgebra de Lie, então a álgebra de Lie $\varphi(\mathfrak{g})$, imagem da álgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ por φ, é solúvel.*

Demonstração: Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $g^k = 0$. Então, $\varphi(\mathfrak{g})^k = \varphi(\mathfrak{g}^K) = \varphi(0) = 0$ (observa-se que $\varphi(g^1) = \varphi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = [\varphi(\mathfrak{g}), \varphi(\mathfrak{g})] = \varphi(g)^1$ e prova-se o caso geral usando indução. ∎

Corolário 1.1. *Se $\mathfrak{g}/a$ é álgebra quociente de uma álgebra de Lie solúvel $\mathfrak{g}$ por um ideal $a \subseteq \mathfrak{g}$, então $\mathfrak{g}/a$ é solúvel.*

Demonstração: Seja $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ a projeção de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, dada por $\pi(X) = X + \mathfrak{a}$, para $X \in \mathfrak{g}$. Então π é um homomorfismo e logo a imagem $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} = \pi(\mathfrak{g})$ é solúvel, pelo resultado do lema anterior. ∎

Proposição 1.5. *Se $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ é um ideal solúvel e a álgebra quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ é solúvel, então a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é solúvel.*

Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie de dimensão finita, então a soma de todos os ideais solúveis em $\mathfrak{g}$ é uma soma finita e, portanto, um ideal solúvel. De fato,

Proposição 1.6. *Se $\mathfrak{g}$ é álgebra de Lie de dimensão finita, existe em $\mathfrak{g}$ um único ideal solúvel que contem todos os ideais solúvel de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração: Sejam $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ ideais solúveis em $\mathfrak{g}$ e seja $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. Então $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{a}$ é um ideal solúvel em $\mathfrak{h}$. Além disso, a interseção $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ é um ideal em $\mathfrak{b}$ e, como $\mathfrak{b}$ é solúvel, sabemos que o quociente $\mathfrak{b}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ é solúvel. Pelo teorema do isomorfismo, segue que

$$\mathfrak{h}/\mathfrak{a} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{b}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$$

é solúvel. E pela proposição (1.5) segue que $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{h}$ é solúvel. Logo, por indução, concluímos que a soma de um número finito de ideais solúveis é um ideal solúvel.

Seja então o ideal $\mathfrak{r}$ definido por $\mathfrak{r} = \sum_{\mathfrak{a}} \mathfrak{a}$. Como a dimensão de $\mathfrak{g}$ é finita, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{r} = \sum_{s=1}^{N} \mathfrak{a}_s$ onde $\mathfrak{a}_1, ..., \mathfrak{a}_N$ são todos os ideais solúveis em $\mathfrak{g}$. E logo, se $\mathfrak{a}$ é um ideal solúvel qualquer e $X \in \mathfrak{a}$, tem-se $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_s$ para algum $s \in \{1, ..., N\}$ e $X \sim 0 + ... + 0 + X + 0 + ... + 0 \in \mathfrak{r}$. Logo $\mathfrak{r}$ é o ideal que contem todos os ideais solúveis de $\mathfrak{g}$. A unicidade segue da própria construção de $\mathfrak{r}$ pois, se dois ideais em $\mathfrak{g}$ são ambos solúveis e contem cada um todos os ideais solúveis de $\mathfrak{g}$, então um está contido no outro. ∎

Definição 1.29. O ideal $\mathfrak{r}$ da proposição acima é chamado de ideal radical de $\mathfrak{g}$ ou radical solúvel de $\mathfrak{g}$ e é denotado por $\text{rad}_{\mathfrak{g}}$.

Definição 1.30. Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é semissimples se $\mathrm{rad}_{\mathfrak{g}} = 0$. Em palavras, $\mathfrak{g}$ é semissimples se não tem ideal solúvel não nulo.

Proposição 1.7. *Toda álgebra de Lie simples é semissimples.*

1.5 Ação adjunta e produto semidireto

Definição 1.31. Seja V um espaço vetorial e $\mathfrak{gl}(V)$ a álgebra de Lie das transformações lineares de V. Seja também $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie (sobre o mesmo corpo de escalares que V). Uma representação de $\mathfrak{g}$ em V é um homomorfismo $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

Definição 1.32. Para um elemento X na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, considere a transformação linear $\mathrm{ad}(X) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ definida por $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]$. A aplicação $\mathrm{ad} : X \in \mathfrak{g} \mapsto \mathrm{ad}(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ define uma representação de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$, denominada representação adjunta.

O fato do operador ad ser linear provém da bilinearidade do colchete. Já a propriedade de homomorfismo de ad é equivalente a identidade de Jacobi. De fato, a igualdade $\mathrm{ad}([X, Y]) = \mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y) - \mathrm{ad}(Y)\mathrm{ad}(X)$ é a mesma que $[[X, Y], Z] = [[X, Z], Y] + [X, [Y, Z]]$ para todo $Z \in \mathfrak{g}$.

Definição 1.33. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo arbitrário F. A ação de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre V é uma aplicação linear $\phi : \mathfrak{g} \otimes V \to V$ satisfazendo a condição

$$\phi([xy] \otimes v) = \phi(x \times \phi(y \otimes v)) - \phi(y \otimes \phi(x \otimes v)) = \phi(\mathrm{id} \otimes \phi)((x \otimes y - y \otimes x) \otimes v)$$

para todo x, $y \in \mathfrak{g}$ e $v \in V$.

Definição 1.34. Seja W um espaço vetorial. Dizemos que W é um $\mathfrak{g}-$módulo se é um espaço vetorial junto com um homomorfismo de álgebra de Lie $\rho : \mathfrak{g} \to End(W)$ de $\mathfrak{g}$ para os endomorfismo de álgebra de Lie de W.

Em outras palavras, ρ é um mapa linear tal que $\rho([x, y]) = \rho(x) \cdot \rho(y) - \rho(y) \cdot \rho(x)\ \forall x, y \in \mathfrak{g}$.

Definição 1.35. A ação de um elemento $x \in \mathfrak{g}$ em um vetor $v \in W$ é definida por

$$x \cdot v = \rho(x)(v). \tag{1.4}$$

Definição 1.36. Uma aplicação linear $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é uma derivação da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se satisfaz

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY] \quad X, Y \quad \forall \quad \mathfrak{g}.$$

Mais geral, uma derivação de uma álgebra é uma transformação linear que satisfaz a regra de Leibniz de derivada de um produto $D(xy) = D(x)y + xD(y)$.

Podemos representar uma álgebra de Lie em outra via derivações e assim obter uma álgebra de Lie no produto cartesiano das duas álgebras, como vemos no seguinte resultado

Proposição 1.8. *Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie e ρ uma representação de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{h}$. Suponha que para todo $X \in \mathfrak{g}$, $\rho(X)$ é uma derivação de $\mathfrak{h}$ e defina em $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ o colchete*

$$[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] = ([X_1, X_2], \rho(X_1)Y_2 - \rho(X_2)Y_1 + [Y_1, Y_2]).$$

Com esse colchete, $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ *é uma álgebra de Lie que se decompõe em soma direta*

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{h} = (\mathfrak{g} \times 0) \oplus (0 \times \mathfrak{h})$$

de uma subálgebra isomorfa a $\mathfrak{g}$ *por um ideal isomorfo a* $\mathfrak{h}$.

Definição 1.37. O produto cartesiano de duas álgebras de Lie dado pela proposição anterior é chamado de produto semidireto.

Capítulo 2

Variedades de Poisson

Neste cápitulo, daremos uma introdução a geometria de Poisson. Começamos definindo e dando exemplos de variedades de Poisson. Em seguida, estudamos variedades simplética e a relação com variedades de Poisson, morfismos e, por fim, folheação simplética. As referências utilizadas foram [1], [2], [12] e [13].

2.1 Estruturas de Poisson

Seja M uma variedade e $C^\infty(M)$ o espaço das funções de classe C^∞ de valor real em M.

Definição 2.1. Uma estrutura de Poisson de classe C^∞ em uma variedade M é uma operação

$$C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

$$(f, g) \longmapsto \{f, g\}$$

que satisfaz:
i) Antissimetria: $\{f, g\} = -\{g, f\}$.
ii) $\mathbb{R}$-bilinearidade: $\{f, ag + bh\} = a\{f, g\} + b\{f, h\}$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$.
iii) Identidade de Jacobi: $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$.
iv) Identidade de Leibniz: $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$, $\forall f, g, h \in C^\infty(M)$.

Definição 2.2. O colchete $\{,\}$ é chamado de colchete de Poisson e o par $(M, \{,\})$ é denominado variedade de Poisson.

Em outras palavras, o espaço $C^\infty(M)$ junto com a operação dada pelo colchete de Poisson $\{,\}$ é uma álgebra de Lie que satisfaz a regra de Leibniz.

De forma análoga, podemos definir uma estrutura de Poisson analítica real, holomorfa e formal em uma variedade M, substituindo o conjunto $C^\infty(M)$ pelo feixe de funções analítica e respectivamente, holomorfa e formal.

Exemplo 2.1. O colchete de Poisson dado por $\{f, g\} = 0$ para quaisquer funções f e g define uma estrutura de Poisson em uma variedade M que é denominada de estrutura trivial.

Exemplo 2.2. Uma estrutura de Poisson na variedade $M = \mathbb{R}^2$ com coordenadas (x, y), pode ser definida por

$$\{f, g\} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right) p \tag{2.1}$$

onde $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função suave arbitrária. Verificaremos que são satisfeitas as condições da definição de colchete de Poisson. Sejam f, g, h funções de classe C^∞ em $\mathbb{R}^2$ e $a, b \in \mathbb{R}$,

$i)$ Antissimetria:

$$\{g, f\} = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right) p = -\{f, g\}.$$

$ii)$ $\mathbb{R}$-bilinearidade:

$$\begin{aligned}
\{f, ag + bh\} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}(ag + bh)\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}(ag + bh)\right)\right) p \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial ag}{\partial y} + \frac{\partial bh}{\partial y}\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial ag}{\partial x} + \frac{\partial bh}{\partial x}\right)\right) p \\
&= \left(a\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} + b\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} - a\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} - b\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right) p \\
&= a\{f, g\} + b\{f, h\}.
\end{aligned}$$

$iii)$ Identidade de Jacobi:

$$\begin{aligned}
(1) \quad \{\{f, g\}, h\} &= \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right) p, h\right\} \\
&= \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)_x (p)\frac{\partial h}{\partial y} - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y (p)\frac{\partial h}{\partial x}\right) p \\
&= \left(\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)_x (p)\frac{\partial h}{\partial y} - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y (p)\frac{\partial h}{\partial x}\right)\right) p.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad \{\{g, h\}, f\} &= \left\{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right) p, f\right\} \\
&= \left(\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right)_x (p)\frac{\partial f}{\partial y} - \left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right)_y (p)\frac{\partial f}{\partial x}\right) p \\
&= \left(\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right)_x (p)\frac{\partial f}{\partial y} - \left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right)_y (p)\frac{\partial f}{\partial x}\right) p.
\end{aligned}$$

$$(3) \quad \{\{h, f\}, g\} = \left(\left(\left(\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right)_x (p)\frac{\partial g}{\partial y} - \left(\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right)_y (p)\frac{\partial g}{\partial x}\right)\right) p$$

e somando (1), (2) e (3) temos: $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$. Usamos a notação $()_x$ para significar a derivada parcial em relação a x e analogamente a derivada em relação a y.

iv) Identidade de Leibniz:

$$\{f, gh\} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial (gh)}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial (gh)}{\partial x}\right)p = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}h + \frac{\partial h}{\partial y}g\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}h + g\frac{\partial h}{\partial x}\right)\right)p$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}\cdot h + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}\cdot g - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}\cdot h - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\cdot g\right)p$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)h + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right)g = \{f, g\}h + \{f, h\}g.$$

Logo, o colchete dado pela fórmula (2.1) define uma estrutura de Poisson em $\mathbb{R}^2$.

Definição 2.3. Uma variedade M que possui uma 2-forma fechada não-degenerada ω é chamada de variedade simplética e é denotada por (M, ω). Dizemos que ω é não-degenerada se, para todo $p \in M$, vale o seguinte: se $\omega_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ e $\omega_p(u, v) = 0$ para todo $u \in T_pM$, então $v = 0$, $v \in T_pM$.

Ou ainda, dizemos que uma 2-forma diferencial ω é não degenerada se o homomorfismo correspondente $\omega^\flat : TM \to T^*M$ do espaço tangente de M ao seu espaço cotangente, que associa a cada vetor X o covetor $i_X\omega$, é um isomorfismo. O covetor $i_X\omega$ é a contração de ω por X definido por $i_X\omega(Y) = \omega(X, Y)$.

Exemplo 2.3. Seja $M = \mathbb{R}^{2n}$ com coordenadas $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$. Considere a 2-forma

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j.$$

Então o par $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ é uma variedade simplética. Note que ω_0 é fechada pois é uma 2-forma exata, de fato

$$\omega_0 = d\left(\sum_{j=1}^{n} x_j dy_j\right). \tag{2.2}$$

Verificaremos agora que ω_0 é não-degenerada. Considere $v \in T_pM$, tal que $\omega_0(u, v) = 0$, para todo $u \in T_pM$. Tome $u = \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}$, $j = 1, ..., n$, então

$$dx_j(v) = \omega_0\left(\frac{\partial}{\partial y_j}, v\right) = 0 = \omega_0\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, v\right) = dy_j(v), \qquad j = 1, ..., n.$$

Ou seja, $dx_j(v) = dy_j(v) = 0$, para todo $j = 1, , n$, o que mostra que $v = 0$. Portanto, ω é uma forma simplética em $\mathbb{R}^{2n}$.

Exemplo 2.4. Sejam (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) duas variedades simpléticas. Considere $M = M_1 \times M_2$ a variedade produto com as projeções canônicas

$$pr_1 : M \to M_1 \qquad \text{e} \qquad pr_2 : M \to M_2.$$

Considere a 2-forma dada por $\omega := pr_1^*\omega_1 + pr_2^*\omega_2$. Verificaremos que ω define uma forma simplética em M. Observe que ω é fechada, pois

$$d\omega = pr_1^* d\omega_1 + pr_2^* d\omega_2 = 0$$

pois ω_1 e ω_2 são fechadas. Para vermos que ω é não-degenerada, considere (u_1, u_2) e (v_1, v_2) $\in T_pM$, em que $p = (p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$. Então

$$\omega_p((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = (pr_1^*\omega_1)_{p_1}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) + (pr_2^*\omega_2)_{p_2}(((u_1, u_2), (v_1, v_2))$$

$$= (\omega_1)_{p_1}((u_1, v_1) + (\omega_2)_{p_2}((u_2, v_2).$$

Suponhamos que (v_1, v_2) é tal que, para todo $(u_1, u_2) \in T_pM$, temos

$$\omega_p((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = (\omega_1)_{p_1}(u_1, v_1) + (\omega_2)_{p_2}(u_2, v_2) = 0.$$

Assim, tomando $u_1 = 0$ e $u_2 \neq 0$ e pelo fato de ω_2 ser não-degenerada, implica que $v_2 = 0$. De modo análogo, ou seja, tomando $u_2 = 0$ e $u_1 \neq 0$ e pelo fato de ω_1 ser não-degenerada, segue que $v_1 = 0$. Logo, ω define uma forma simplética em $M = M_1 \times M_2$.

Definição 2.4. Seja $(M, \{,\})$ uma variedade de Poisson. O campo vetorial Hamiltoniano de $f \in C^\infty(M)$ é um campo vetorial em M definido por:

$$X_f(g) = \{f, g\}. \tag{2.3}$$

No caso em que (M, ω) é uma variedade simplética então definimos um campo vetorial Hamiltoniano X_f como o campo que satisfaz $i_{X_f}\omega = -df$.

O seguinte resultado nos mostra que podemos definir um colchete de Poisson em uma variedade simplética M. Antes, observe que $\omega(X_f, X_g) = i_{X_f}(\omega)(X_g) = -df(X_g) = -\langle df, X_g\rangle$.

Proposição 2.1. *Se (M, ω) é uma variedade simplética, então o colchete definido por*

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = -\langle df, X_g\rangle = -X_g(f) = X_f(g) \tag{2.4}$$

define uma estrutura de Poisson em M.

Demonstração: Pela definição do colchete, segue que é antissimétrico, $\{f, g\} = -\{g, f\}$. Sejam f, g, h funções suaves em M de valor real e a, b constantes reais, então

$$\{f, ag + bh\} = -\{ag + bh, f\} = \omega(X_{(ag+bh)}, X_f) = -\langle d(ag + bh), X_f\rangle$$

$$= -\langle a \cdot dg, X_f\rangle - \langle b \cdot dh, X_f\rangle = -a\{g, f\} - b\{h, f\} = a\{f, g\} + b\{f, h\}$$

o que mostra que o colchete é $\mathbb{R}$-bilinear.

Agora, note que

$$-\{gh, f\} = \langle d(gh), X_f\rangle = \langle dg \cdot h + g \cdot dh, X_f\rangle = \langle dg \cdot h, X_f\rangle + \langle g \cdot dh, X_f\rangle$$

$$= -X_g(f) \cdot h - gX_h(f) = -\{g, f\}h - g\{h, f\}$$

e assim, segue que $\{f, gh\} = \{f, g\} \cdot h + g\{f, h\}$ e obtemos a identidade de Leibniz.

Resta verificar se satisfaz a identidade de Jacobi. Para isso, usaremos a seguinte fórmula de

Cartan para uma k-forma η

$$d\eta(X_1,...,X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i-1}X_i(\eta(X_1,...,\widehat{X_i},...,X_{k+1}))$$

$$+ \sum_{1\leq i<j\leq k+1}(-1)^{i+j}\eta([X_i,X_j],X_1,...,\widehat{X}_i,...,\widehat{X}_j,...,X_{k+1}),$$

em que $X_1,...,X_{k+1}$ são campos vetoriais e a notação $\hat{X}_i$ significa que o campo correspondente foi omitido. Assim, aplicando a fórmula de Cartan para ω e X_f, X_g e X_h e como ω é fechada, temos:

$$\begin{aligned}
0 = d\omega(X_f,X_g,X_h) &= X_f(\omega(X_g,X_h)) + X_g(\omega(X_h,X_f)) + X_h(\omega((X_f,X_g)) \\
&\quad - \omega([X_f,X_g],X_h) - \omega([X_g,X_h],X_f) - \omega([X_h,X_f],X_g) \\
&= X_f\{g,h\} + X_g\{h,f\} + X_h\{f,g\} + [X_f,X_g](h) + [X_g,X_h](f) + [X_h,X_f](g) \\
&= \{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} + X_f(X_g(h)) - X_g(X_f(h)) + X_g(X_h(f)) \\
&\quad -X_h(X_g(f)) + X_h(X_f(g)) - X_f(X_h(g)) \\
&= 3(\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\})
\end{aligned}$$

logo, $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$ e segue que o colchete satisfaz a identidade de Jacobi. ∎

Como consequência do resultado anterior, concluímos que qualquer variedade simplética é uma variedade de Poisson.

Definição 2.5. Uma função g é chamada integral principal de um campo vetorial X se g é constante com respeito a X, isto é, $X(g) = 0$.

Proposição 2.2. *Sejam $(M,\{,\})$ uma variedade de Poisson e X_f um campo vetorial Hamiltoniano. Então*
i) g é integral principal de X_f se, e somente se, $\{f,g\} = 0$.
ii) f é integral principal de X_f.

Demonstração: (i) segue da definição (2.4). A parte (ii) segue de (i) e do fato de que o colchete de Poisson $\{,\}$ é antissimétrico, ou seja,

$$X_f(f) = \{f,f\} = -\{f,f\} \Rightarrow \{f,f\} = 0.$$

∎

O teorema seguinte nos permite obter novas integrais principais de um campo vetorial Hamiltoniano a partir de integrais principais conhecidas deste campo.

Teorema 2.1 (Poisson)**.** *Se f, g são integrais principiais de um campo vetorial Hamiltoniano X_f em uma variedade de Poisson M, então $\{f,g\}$ também o é.*

Demonstração: Como, por hipótese, g e h são integrais principais de X_f, temos:

$$\{g, f\} = \{h, f\} = 0$$

o que implica que $\{\{f, g\}, h\} = 0$ e $\{\{f, h\}, g\} = 0$ e pela identidade de Jacobi, segue que $\{\{g, h\}, f\} = 0$. ■

Teorema 2.2 (Darboux-Weinstein)**.** *Sejam (M, ω) uma variedade simplética de dim $= 2n$ e $x \in M$. Então existe uma carta (U, φ) centrada em x tal que*

$$\omega_{|U} = \varphi^*(\omega_{2n} \,|_{\varphi(U)})$$

onde ω_{2n} é a estrutura simplética canônica em $\mathbb{R}^{2n}$.

Em outras palavras, em torno de cada ponto existem um sistema de coordenada local $(p_1, q_1, .., p_n, q_n)$ para o qual a forma simplética ω se expressa como

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i.$$

Definição 2.6. O sistema de coordenadas locais dado pelo Teorema de Darboux-Weinstein é chamado de coordenadas de Darboux ou coordenadas canônicas.

Assim, em tal sistema de coordenadas de Darboux temos a seguinte expressão para o colchete de Poisson e para o campo vetorial Hamiltoniano

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right),$$

$$X_h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

2.2 Tensor de Poisson

Nesta seção, veremos como uma estrutura de Poisson em uma variedade M pode ser expressa em termos de um campo bivetorial com algumas condições adicionais.

Para tanto, considere M uma variedade suave e k um inteiro positivo. Denotaremos por $\wedge^k TM$ o espaço dos $k-$vetores tangentes a M, isto é, fibrados vetoriais sobre M, cuja fibra em cada ponto $x \in M$ é o espaço $\wedge^k T_x M = \wedge^k(T_x M)$, que é produto exterior de k cópias de espaço tangente $T_x M$. Seja $(x_1, x_2, ..., x_k)$ um sistema de coordenada local em $x \in M$, então $\wedge^k T_x M$ admite uma base linear que consiste de elementos $\dfrac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge ... \wedge \dfrac{\partial}{\partial x_{i_k}}(x)$ com $i_1 < i_2 < ... < i_k$.

Definição 2.7. Um campo k-vetorial suave Π em M é uma seção suave de $\wedge^k TM$, isto é, um mapa Π de M para $\wedge^k TM$, que associa a cada ponto $x \in M$ um k-vetor $\Pi(x) \in \wedge^k T_x M$.

O campo k-vetorial Π pode ser escrito em termos de coordenadas local como

$$\Pi(x) = \sum_{i_1 < ... < i_k} \Pi_{i_1 ... i_k} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge ... \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} = \frac{1}{k!} \sum_{i_1 ... i_k} \Pi_{i_1 ... i_k} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge ... \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}$$

onde $\Pi_{i_1...i_k}$ são funções suaves. Se permutarmos dois índices dos coeficientes $\Pi_{i_1...i_k}$ então devemos multiplicar por (-1), pois são antissimétricos com respeito ao índice.

Definição 2.8. As funções suaves $\Pi_{i_1...i_k}$ são chamadas de coeficientes de Π. Se os coeficientes $\Pi_{i_1...i_k}$ são funções suaves de classe C^k então dizemos que Π é de classe C^k.

Um campo k-vetorial suave Π de classe C^k define um mapa $\mathbb{R}$-multilinear antissimétrico $\Pi : \underbrace{C^\infty(M) \times ... \times C^\infty(M)}_{k-vezes} \to C^\infty(M)$ dado por

$$\Pi(f_1, ...f_k) := \langle \Pi, df_1 \wedge ... \wedge df_k \rangle.$$

Por outro lado, temos o seguinte resultado.

Lema 2.1. *Um mapa $\mathbb{R}$-multilinear $\Pi : \underbrace{C^\infty(M) \times ... \times C^\infty(M)}_{k-vezes} \to C^k(M)$ provém de um campo k-vetorial de classe C^k pela fórmula $\Pi(f_1, ...f_k) := \langle \Pi, df_1 \wedge ... \wedge df_k \rangle$ se, e somente se, é antissimétrico e satisfaz a regra de Leibniz:*

$$\Pi(fg, f_2, ..., f_k) = f\Pi(g, f_2, ..., f_k) + g\Pi(fg, f_2, ..., f_k).$$

Demonstração: Suponhamos que o campo Π define um mapa $\mathbb{R}-$multilinear. Então, $\Pi(fg, ...f_k) := \langle \Pi, d(fg) \wedge ... \wedge df_k \rangle = \langle \Pi, (df \cdot g + f \cdot dg) \wedge ... \wedge df_k \rangle = f\langle \Pi, dg \wedge ... \wedge df_k \rangle + g\langle \Pi, df \wedge ... \wedge df_k \rangle = f\Pi(g, ...f_k) + g\Pi(f, ...f_k)$.

Agora, suponhamos que o mapa Π é antissimétrico e satisfaz a regra de Leibniz. Então, devemos verificar que o valor de $d_{f_1}, ..., d_{f_n}$ em x, ou seja, se $df_1(x) = 0 \Rightarrow \Pi(f_1, ..., f_q)(x) = 0$.

Se $df_1(x) = 0$, podemos escrever $f_1 = c + \sum_i x_i g_i$ onde x_i e g_i são funções suaves que se anula em x e c é uma constante. De acordo com a regra de Leibniz, temos

$$\Pi(1 \cdot 1, ..., f_k) = 1 \times \Pi(1, ..., f_k) + 1 \times \Pi(1, ..., f_k) = 2\Pi(1, ..., f_k)$$

então, $\Pi(1, ..., f_k) = 0$.

Agora, usando a linearidade da regra de Leibniz, segue que

$$\begin{aligned}\Pi(f_1, ..., f_k)(x) &= \Pi(c + \sum_i x_i g_i, ..., f_k)(x) \\ &= c \cdot \Pi(1, f_2, ..., f_k)(x) + \sum_i x_i(x)\Pi(g_i, f_2, ..., f_k)(x) + \sum_i g_i(x)\Pi(x_i, f_2, ..., f_k)(x) \\ &= 0.\end{aligned}$$

■

Definição 2.9. Um mapa Π que satisfaz as condições do Lema anterior é chamado de multiderivação.

Portanto, multiderivações podem ser identificadas com campos multivetoriais. Em particular, se Π define uma estrutura de Poisson, pelo resultado do lema anterior (2.1), podemos identificá-los com um campo bivetorial Π (usaremos aqui a mesma notação afim de simplificar a escrita)

$$\{f, g\} = \Pi(f, g) = \langle \Pi, df \wedge dg \rangle. \tag{2.5}$$

Definição 2.10. Um campo 2-vetorial Π tal que o colchete $\{f, g\} := \langle \Pi, df \wedge dg \rangle$ que satisfaz a identidade de Jacobi é um colchete de Poisson chamado de tensor de Poisson ou estrutura de Poisson. O colchete de Poisson que corresponde a essa estrutura é denotado por $\{,\}_\Pi$. Se o tensor de Poisson é um campo 2-vetorial suave de classe C^k, dizemos que a estrutura de Poisson é suave de classe C^k.

Em um sistema de coordenada locais $(x_1, ..., x_n)$ temos

$$\Pi = \sum_{i<j} \Pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \Pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j},$$

onde $\Pi_{ij} = \langle \Pi, dx_i \wedge dx_j \rangle = \{x_i, x_j\}$ e

$$\{f, g\} = \langle \sum_{i<j} \{x_i, x_j\} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}, \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} dx_i \wedge dx_j \rangle = \sum_{i,j} \Pi_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}. \tag{2.6}$$

De fato,

Proposição 2.3. *Seja $(M, \{,\})$ uma variedade de Poisson. Se $(U, x_1, ..., x_n)$ é uma coordenada local, então para qualquer $f, g \in C^\infty(M)$:*

$$\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^{n} \{x_i, x_j\} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} = \sum_{i,j} \Pi_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}.$$

Demonstração: Note que $\{1, f\} = 0$ para qualquer $f \in C^\infty(M)$. Isso segue pela regra de Leibniz: $\{1, f\} = \{1 \times 1, f\} = \{1, f\} + \{1, f\} = 2\{1, f\}$. Como o colchete é $\mathbb{R}$ -bilinear, temos $\{c, f\} = c\{1, f\} = 0$ para qualquer constante $c \in \mathbb{R}$.

Para uma função suave $f \in C^\infty(U)$, a aproximação de Taylor até a ordem 2 em torno de $x_0 \in U$ nos dá:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_{i_0}) + \sum_{i,j=1}^{n} F_{ij}(x)(x_i - x_{i_0})(x_j - x_{j_0}),$$

para alguma função suave $F_{ij} \in C^\infty(M)$. Logo, se $f, g \in C^\infty$ temos

$$\{f, g\} = \{f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_{i_0}) + O(2) F_{ij}(x)(x_i - x_{i_0})(x_j - x_{j_0}), g(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_{i_0}) + O(2)\}$$

$$= \sum_{i,j}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0) \{x_i, x_j(x) + \sum_{i=1}^{n} H_i(x)(x_i - x_{i_0})$$

para alguma função $H_i \in C^\infty$. Assim, quando $x = x_0$ temos

$$\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^{n} \{x_i, x_j\}(x_0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x_0).$$

Portanto, como x_0 é um ponto arbitrário em U, segue o resultado. ∎

Com o conceito de um tensor de Poisson, podemos definir uma subvariedade de Poisson do seguinte modo:

Definição 2.11. Sejam M uma variedade de Poisson com a estrutura de Poisson dada por Π_M. Dizemos que $N \subset M$ é uma subvariedade de Poisson se (N, Π_N) é uma variedade de Poisson e a imersão injetiva $i : N \hookrightarrow M$ que satisfaz $i_*\Pi_N = \Pi_M$.

Em outras palavras, N é uma subvariedade de Poisson se a imersão injetiva $i : N \hookrightarrow M$ é um morfismo de Poisson. Podemos identificar uma subvariedade imersa N com a imagem da imersão i e assumimos que este mapa é a inclusão.

Lema 2.2. *Para qualquer campo 2-vetorial* Π *de classe* C^1*, podemos associar a ele um campo 3-vetorial* Λ *definido por*

$$\Lambda(f,g,h) = \{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} \tag{2.7}$$

onde $\{k,l\}$ *denota* $\langle \Pi, dk \wedge dl\rangle$ *(isto é, o colchete de* Π*).*

Demonstração: Note que, pela definição, o campo Λ é $\mathbb{R}$-multilinear e antissimétrico. Considere f_1, f_2, g, h funções suaves de classe C^1, então

$$\begin{aligned}
\Lambda(f_1f_2,g,h) = {} & \{\{f_1f_2,g\},h\}+\{\{g,h\},f_1f_2\}+\{\{h,f_1f_2\},g\} \\
&= \{(f_1,\{f_2,g\}+f_2\{f_1,g\}),h\} - \{f_1f_2,\{g,h\}\} - \{\{f_1f_2,h\},g\} \\
&= \{f_1\{f_2,g\},h\} + \{f_2\{f_1,g\},h\} - f_1\{f_2,\{g,h\}\} - f_2\{f_1,\{g,h\}\} \\
&\quad - \{(f_1,\{f_2,h\}+f_2\{f_1,h\}),g\} \\
&= f_1(\{\{f_2,g\},h\} + \{\{g,h\},f_2\} + \{\{h,f_2\},g\}) + f_2(\{f_1,g\},h\} \\
&\quad + \{\{g,h\},f_1\} + \{\{h,f_1\},g\}) \\
&= f_1\Lambda(f_2,g,h) + f_2\Lambda(f_1,g,h).
\end{aligned}$$

Logo, pelo Lema (2.1) segue que Λ é um campo associado a Π. ■

Dado um sistema de coordenadas local $(x_1, x_2, ..., x_n)$ e usando a fórmula (2.6), temos que

$$\Lambda(f,g,h) = \sum_{ijk}\left(\oint_{ijk}\sum_s \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_s}\Pi_{sk}\right)\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial h}{\partial x_k}$$

ou ainda,

$$\Lambda = \sum_{i<j<k}\left(\oint_{ijk}\sum_s \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_s}\Pi_{sk}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial}{\partial x_j}\wedge\frac{\partial}{\partial x_k}$$

em que $\oint_{ijk} a_{ijk}$ representa a soma cíclica $a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij}$.

Desse modo, note que o campo bivetorial Π satisfaz a identidade de Jacobi se o campo 3-vetorial Λ se anula. Além disso, a condição para que um campo bivetorial seja uma estrutura de Poisson de uma variedade M é uma condição local e a restrição de uma estrutura de Poisson a um subconjunto aberto de M é ainda uma estrutura de Poisson, como consequência do seguinte resultado:

Proposição 2.4. *Dado sistema de coordenadas locais* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *o campo bivetorial* $\Pi = \sum_{i<j} \Pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$ *escrito em termos deste sistema de coordenadas locais é um tensor se e, somente se, satisfaz a seguinte sistema de equação:*

$$\oint_{ijk} \sum_s \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_s} \Pi_{sk} = 0 \quad (\forall \quad i, j, k). \tag{2.8}$$

Exemplo 2.5. Qualquer campo bivetorial em uma variedade bidimensional é um tensor de Poisson. De fato, o campo 3-vetorial do lema (2.1) é identicamente zero pois, não há campos 3-vetorial não triviais em uma variedade bidimensional. Assim, a identidade Jacobi é não trivial apenas a partir de variedades tridimensional.

2.3 Morfismo de Poisson e morfismo simplético

Definição 2.12. Se $(M_1, \{,\}_1)$ e $(M_2, \{,\}_2)$ são duas variedades de Poisson, então o mapa $\phi : M_1 \to M_2$ é chamado de morfismo de Poisson ou mapa de Poisson se o mapa pull-back $\phi^* : C^\infty(M_2) \to C^\infty(M_1)$ associado é um homomorfismo de álgebra de Lie com respeito ao colchete de Lie correspondente. Em outras palavras, $\phi : (M_1, \{,\}_1) \to (M_2, \{,\}_2)$ é um morfismo de Poisson se $\{\phi^* f, \phi^* g\}_1 = \phi^*\{f, g\}_2$, isto é, se $\{f \circ \phi, g \circ \phi\}_1 = \{f, g\}_2 \circ \phi$, $\forall f, g \in C^\infty(M_2)$.

Exemplo 2.6. Considere $M = \mathbb{R}^{2n}$ e $(q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n)$ um sistema linear de coordenadas locais. Então

$$\{f, g\} := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right)$$

define uma estrutura de Poisson em M e esse colchete é chamado de colchete de Poisson canônico em M. Este colchete de Poisson é completamente caracterizado por seus valores nas funções de coordenadas:

$$\{q^i, q^j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \qquad \{p_i, q^j\} = \delta_i^j.$$

Quando $n \geq m$, o mapa $\phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2m}$, $(q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n) \mapsto (q^1, ..., q^m, p_1, ..., p_m)$ é um morfismo de Poisson. De fato,

$$\{f, g\}_2 \circ \phi(x) = \{f, g\}(y)$$

em que $x \in \mathbb{R}^{2n}$ e $y \in \mathbb{R}^{2m}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\{f, g\}_2(y) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f(y)}{\partial p_i} \frac{\partial g(y)}{\partial q^i} - \frac{\partial f(y)}{\partial q^i} \frac{\partial g(y)}{\partial p_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f(\phi(x))}{\partial p_i} \frac{\partial g(\phi(x))}{\partial q^i} - \frac{\partial f(\phi(x))}{\partial q^i} \frac{\partial g(\phi(x))}{\partial p_i} \right) \\
&= \{f \circ \phi, g \circ \phi\}_1(x).
\end{aligned}$$

Observe que a composição de dois morfismos de Poisson ainda é um morfismo de Poisson. De fato, sejam $\phi_1 : M_3 \to M_2$ e $\phi_2 : M_1 \to M_2$ morfismos de Poisson, então

$$\{f \circ (\phi_1 \circ \phi_2), g \circ (\phi_1 \circ \phi_2)\}_1 = \{f \circ \phi_1, g \circ \phi_1\} \circ \phi_2 = \{f, g\}_2 \circ (\phi_1 \circ \phi_2).$$

E um morfismo de Poisson que é um difeomorfismo é um isormofismo de Poisson.

Exemplo 2.7. Seja $(M_1, \{,\}_1)$ e $(M_2, \{,\}_2)$ duas variedades de Poisson. Então o produto direto $M_1 \times M_2$ é dado por

$$\{f(x_1, x_2), g(x_1, x_2)\} = \{f_{x_2}, g_{x_2}\}_1(x_1) + \{f_{x_1}, g_{x_1}\}_2(x_2)$$

onde a notação $h_{x_1}(x_2) = h_{x_2}(x_1) = h(x_1, x_2)$ para qualquer função h em $M_1 \times M_2$, $x_1 \in M_1$ e $x_2 \in M_2$. Pela equação (2.8) podemos verificar que o colchete definido acima é um colchete de Poisson em $M_1 \times M_2$ e é chamado de estrutura de Poisson do produto. Com respeito ao essa estrutura de Poisson do produto, o mapa projeção $M_1 \times M_2 \to M_1$ e $M_1 \times M_2 \to M_2$ são mapas de Poisson.

Definição 2.13. Sejam (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) variedades simpléticas, então o mapa $\phi : M_1 \to M_2$ é chamado de morfismo simplético se $\phi^*\omega_2 = \omega_1$.

Se $\phi : (M_1, \omega_1) \to (M_2, \omega_2)$ é um isomorfismo simplético, então é também um isomorfismo de Poisson. De fato, note que se X um campo vetorial em M_2 temos que, $\phi^*(X) = \widetilde{X}$ é um campo vetorial em M_1. Assim, seja $f : M_2 \to \mathbb{R}$ e $p \in M_2$ $X_f(p) = d_{f(p)}(X(p)) = d_{f(p)}(d\phi_{\phi^{-1}}[\widetilde{X}_{\phi^{-1}(p)}])$ $= d(f \circ \phi)\phi^{-1}(p)[\widetilde{X}(\phi^{-1}(p)] = d(\phi^*(f))_{\phi^{-1}(p)}[\widetilde{X}(\phi^{-1}(p)] = \widetilde{X}_{\phi^*(f)}(\phi^{-1}(p)$, ou seja, $X_f(p) = \widetilde{X}_{\phi^*(f)}(\phi^{-1}(p)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\phi^*\{f, g\}_2(p) &= \{f, g\}_2 \circ \phi(p) \\
&= \omega_2(\phi(p))[X_f(\phi(p), X_g(\phi(p)] \qquad (2.9) \\
&= \omega_2(\phi(p))[\widetilde{X}_{\phi^*(f)}(\phi^{-1}(p), \widetilde{X}_{\phi^*(g)}(\phi^{-1}(p)] \\
&= \omega_1(p)[\widetilde{X}_{\phi^*(f)}(\phi^{-1}(p), \widetilde{X}_{\phi^*(g)}(\phi^{-1}(p)] \qquad (2.10) \\
&= \{\phi^*(f), \phi^*(g)\}_1(p)
\end{aligned}$$

a equação (2.9) é devido a (2.4) e a equação (2.10) é da hipótese de que ϕ é um isomorfismo simplético. Portanto, todo isomorfismo simplético é de isomorfismo de Poisson. Contudo, um morfismo simplético não é um morfismo de Poisson em geral.

Exemplo 2.8. Seja $i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ um mapa definido por $(q_1, p_1) \mapsto (q_1, p_1, 0, 0)$. Considere $\omega_1 = d_{q_1} \wedge d_{p_1}$, $\omega_2 = d_{q_1} \wedge d_{p_1} + d_{q_2} \wedge d_{p_2}$. Então, i é um morfismo simplético mas, não é um morfismo de Poisson

$$\{q_2, p_2\} \circ i = 1 \quad \text{e} \quad \{q_2 \circ i, p_2 \circ i\} = 0. \qquad (2.11)$$

Definição 2.14. Um campo vetorial X em uma variedade de Poisson (M, Π) é chamado de campo vetorial de Poisson se é um automorfismo infinitessimal da estrutura de Poisson, isto é, a derivada de Lie de Π com respeito a X se anula: $\mathcal{L}_X\Pi = 0$.

Pela regra de Leibniz para derivada, temos que

$$\mathcal{L}_X(\{f, g\}) = \mathcal{L}_X(\langle \Pi, df \wedge dg\rangle) = \langle \mathcal{L}_X\Pi, df \wedge dg\rangle + \langle \Pi, d\mathcal{L}_X f \wedge dg\rangle + \langle \Pi, df \wedge dX_g\rangle$$

$$= \langle \mathcal{L}_X\Pi, df \wedge dg\rangle + \{\mathcal{L}_X f, g\} + \{f, \mathcal{L}_X g\} = \langle \mathcal{L}_X\Pi, df \wedge dg\rangle + \{X(f), g\} + \{f, X(g)\}.$$

Assim, outra condição equivalente para X ser um campo vetorial de Poisson é de que

$$\{Xf, g\} + \{f, Xg\} = X\{f, g\}. \tag{2.12}$$

Note que, se $X = X_h$ é um campo vetorial Hamiltoniano, a equação acima é exatemente a identidade de Jacobi:

$$\{X_h(f), g\} + \{f, X_h(g)\} = X_h\{f, g\}$$

$$\{\{h, f\}, g\} + \{f, \{h, g\}\} = \{h, \{f, g\}\}$$

o que implica

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0.$$

Logo, todo campo vetorial Hamiltoniano é um campo vetorial de Poisson, mas o contrário nem sempre é válido.

Definição 2.15. Seja V um subespaço do espaço tangente T_xM de uma variedade simplética (M, ω). O ortogonal simplético de V é definido por $V^{\perp} = \{X \in T_xM; \omega(X, Y) = 0 \quad \forall \quad Y \in V\}$ e o ortogonal simplético de $V^{\perp}$ é V, isto é, $(V^{\perp})^{\perp} = V$. O subespaço V é chamado
i) Langragiano: se $V = V^{\perp}$;
ii) Isotrópico se $V \subset V^{\perp}$;
iii) Coisotrópico se $V \supset V^{\perp}$;
iv) Simplético se $V \cup V^{\perp} = 0$.

Definição 2.16. Uma subvariedade de uma variedade simplética é chamada Lagrangiana (respectivamente, isotrópica, coisotrópica e simplética) se os espaços tangentes o são.

A seguinte proposição é um caracterização de um isomorfismo simplético em termos de uma subvariedade Lagrangiana.

Proposição 2.5. *Um difeomorfismo $\phi : (M_1, \omega_1) \to (M_2, \omega_2)$ é um isomorfismo simplético se, e somente se, seu gráfico Graf $(\phi) = \{(x, \phi(x))\} \subset M_1 \times \overline{M}_2$ é uma variedade Lagrangiana de $M_1 \times \overline{M}_2$, onde $\overline{M}_2$ significa M_2 com a forma simplética dada por $-\omega_2$.*

Definição 2.17. Um subespaço $V \subset T_xM$ de uma variedade de Poisson (M, Π) é chamada de coisotrópica se para qualquer $\alpha, \beta \in T_x^*M$ tal que $\langle \alpha, X \rangle = \langle \beta, X \rangle = 0 \ \forall \quad X \in V$ temos que $\langle \Pi, \alpha \wedge \beta \rangle = 0$. Ou ainda, dizemos que V é coisotrópica se $V^0 \subset (V^0)^{\perp}$, onde

$$V^0 = \{\alpha \in T_x^*M; \langle \alpha, X \rangle = 0 \ \forall \ X \in V\}$$

é o anulador de V e

$$(V^0)^{\perp} = \{\beta \in T_x^*M; \langle \Pi, \alpha \wedge \beta \rangle = 0 \ \forall \ \alpha \in V^0\}$$

é o ortogonal de Poisson. Uma subvariedade N é dita coisotrópica se todos seus espaços tangentes o são.

Analogamente ao caso anterior, podemos caracterizar um mapa de Poisson usando a seguinte proposição

Proposição 2.6. *Um mapa* $\phi : (M_1, \Pi_1) \to (M_2, \Pi_2)$ *entre variedades de Poisson é um mapa de Poisson se, e somente se, seu gráfico Graf* $(\phi) := \{(x, y) \in M_1 \times M_2; \quad y = \phi(x)\}$ *é uma subvariedade coisotrópica de* $(M_1, \Pi_1) \times (M_2, -\Pi_2)$.

Para uma demonstração deste resultado, veja [2].

2.4 Teorema da Decomposição

O objetivo desta seção é o estudo do Teorema da Decomposição. Com este resultado, temos que localmente uma variedade de Poisson pode dividida como o produto direto de uma variedade simplética com uma variedade de Poisson, cujo tensor de Poisson se anula em um ponto. Precisaremos dos seguintes conceitos e notações.

Dada uma estrutura de Poisson Π em uma variedade de Poisson em uma variedade M, podemos associar a ela um homomorfismo natural

$$\sharp = \sharp_\Pi : T^*M \to TM$$

que mapeia cada covetor $\alpha \in T^*_x M$ sobre um ponto x para um único vetor $\sharp(\alpha) \in T_x M$ tal que

$$\langle \alpha \wedge \beta, \Pi \rangle = \langle \beta, \sharp(\alpha) \rangle \tag{2.13}$$

para qualquer covetor $\beta \in T^*_x M$.

Definição 2.18. O mapa $\sharp = \sharp_\Pi$ é chamado de mapa anchor de Π.

Faremos o uso da mesma notação $\sharp$ para denotar o operador que associa a cada 1-forma diferencial α, o campo vetorial $\sharp(\alpha)$ definido por $\sharp(\alpha) = \sharp_\Pi(\alpha(x))$.

Exemplo 2.9. Se f é uma função , então $\sharp(df) = X_f$ é um campo vetorial de f.

Denotemos por $\sharp_x$ ou $\sharp_\Pi(x)$ a restrição de $\sharp_\Pi$ para o espaço cotangente $T^*_x M$. Em um sistema de coordenadas $(x_1, ..., x_n)$ temos que:

$$\sharp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i dx_i\right) = \sum_{ij} \{x_i, x_j\} a_i \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{ij} \Pi_{ij} a_i \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Definição 2.19. Seja (M, Π) uma variedade de Poisson e x um ponto de M. Então a imagem

$$C_x := Im\sharp_x$$

de $\sharp_x$ é chamado de espaço característico de x de uma estrutura de Poisson Π. A dimensão dim C_x de C_x é chamado de rank de Π em x, e a dimensão máxima de C_x no ponto x, ou seja, $max_{x \in M}$ dim C_x, é chamado de rank de Π. Quando o rank $\Pi_x =$ dim M dizemos que Π é não degenerada em x. Se rank Π_x é constante em M, isto é, não depende de x, então Π é chamado de estrutura regular de Poisson.

Definição 2.20. O espaço característico C_x admite um único produto escalar natural não degenerado antissimétrico e bilinear, chamado de forma simplética induzida: se X e Y são dois vetores de C_x, então

$$(X,Y) := \langle \beta, X\rangle = \langle \Pi, \alpha\wedge\beta\rangle = -\langle \Pi, \beta\wedge\alpha\rangle = -\langle \alpha, Y\rangle = -(Y,X)$$

onde $\alpha, \beta \in T_x^*M$ são dois covetores tais que $X = \sharp\alpha$ e $Y = \sharp\beta$.

Teorema 2.3 (Teorema da Decomposição)**.** *Seja x um ponto de rank $2s$ de uma variedade de Poisson (M,Π) de dimensão m e considere dim $C_x = 2s$ onde C_x é o espaço característico em x. Seja N uma subvariedade de M arbitrária de dimensão $(m-2s)$ que contém o ponto x e é traversal a C_x em x. Então, existe um sistema de coordenadas $(p_1,...,p_s,q_1,...,q_s,z_1,...,z_{m-2s})$ em uma vizinhança de x, que satisfaz as seguintes condições:*
a) $p_i(N_x) = q_i(N_x) = 0$ quando N_x é uma vizinhança pequena de x em N.
b) $\{q_i,q_j\} = \{p_i,p_j\} = 0\ \forall\ i,j$; $\{p_i,q_j\} = 0$ se $i \neq j$ e $\{p_i,q_i\} = 1\ \forall\ i$.
c) $\{z_i,p_j\} = \{z_i,q_j\} = 0\ \forall\ i,j$.
d) $\{z_i,z_j\}(x) = 0\ \forall\ i,j$.

Demonstração: Se $\Pi(x) = 0$ e $s = 0$ não temos o que demonstrar. Suponhamos então que $\Pi(x) \neq 0$. Seja p_1 uma função local, definida em uma vizinhança pequena de x em M, que se anula em N e tal que d$p_1 \neq 0$. Como, por hipótese, $\mathcal{C}_x$ é transversal a N, existe um vetor $X_g(x) \in \mathcal{C}_x$ tal que $\langle X_g(x), dp_1\rangle \neq 0$, ou equivalentemente, $X_{p_1}(g)(x) \neq 0$, onde X_{p_1} denota o campo vetorial de p_1. Portanto, $X_{p_1}(x) \neq 0$. Como $\sharp(dp_1)(x) = X_{p_1}(x) \neq 0$, $X_{p_1}(x) \in \mathcal{C}_x$ e não é um campo tangente a N, então existe uma função local q_1 tal que $q_1(N) = 0$ e $X_{p_1}(q_1) = 1$ em uma vizinhança de x, ou seja, $X_{p_1}q_1 = \{p_1,q_1\} = 1$. De fato, pelo Teorema do fluxo tubular (veja em [17]), existem coordenadas locais $(y_1,y_2,...,y_m)$ em x tal que $X_{p_1} = \frac{\partial}{\partial y_1}$ e tomando $q_1 = y_1$ como a função local em uma vizinhança de x temos: $X_{p_1}(q_1) = \frac{\partial}{\partial q_1}(q_1) = 1$. E como X_{p_1} é transversal a N em x, temos que $q_1(N) = 0$.

Note que X_{p_1} e X_{q_1} são linearmente independente, pois, se $X_{q_1} = \lambda X_{q_1}$ implicaria que $\{p_1,q_1\} = -\lambda X_{p_1}(p_1) = 0$. Assim

$$[X_{p_1}, X_{q_1}] = X_{\{p_1,q_1\}} = 0$$

o que mostra que X_{p_1} e X_{q_1} são campos vetoriais que comuntam. Logo, eles geram uma $\mathbb{R}^2$-ação infinitessimal localmente livre em uma vizinhança de x que dá origem a uma folheação bidimensional regular local. A ação é dada por $\psi : \mathbb{R}^2 \times U \to U$, $\psi((s,t),y) = \phi_s(\varphi_t(y))$,em que ϕ_s é o fluxo de X_p e φ_t é o fluxo de X_q. Como consequencia, podemos encontrar um sistema de coordenadas local $(y_1,...,y_m)$ tal que

$$X_{q_1} = \frac{\partial}{\partial y_1}, \qquad X_{p_1} = \frac{\partial}{\partial y_2}.$$

Com estas coordenadas, temos que $\{q_1,y_i\} = X_{q_1}(y_i) = 0$ e $\{p_1,y_i\} = X_{p_1}(y_i) = 0$, para $i = 3,...,m$. Pelo Teorema de Poisson (2.1), segue que $\{p_1,\{y_i,y_j\}\} = \{q_1,\{y_i,y_j\}\} = 0$ para

$i, j \geq 3$, portanto

$$\begin{aligned} &\{y_i, y_j\} = \varphi_{ij}(y_3, ..., y_n) \quad \forall i, j \geq 3, \\ &\{p_1, q_1\} = 1, \\ &\{p_1, y_j\} = \{q_1, y_j\} = 0 \qquad \forall \quad j \geq 3. \end{aligned}$$

Podemos tomar $(p_1, q_1, y_3, ..., y_m)$ como um novo sistema de coordenadas locais. De fato, a matriz Jacobiana do mapa $\varphi : (y_1, y_2, y_3, ..., y_m) \to (p_1, q_1, y_3, ..., y_m)$ é dada da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ -1 & 0 & \\ 0 & & Id \end{pmatrix}$$

pois, $\frac{\partial q_1}{\partial y_1} = X_{q_1} q_1 = 0$, $\frac{\partial q_1}{\partial y_2} = X_{p_1} q_1 = \{q_1, p_1\} = -1$. o determinante desta matriz é não nulo. Na coordenada $(q_1, p_1, y_3, ..., y_m)$ temos

$$\Pi = \frac{\partial}{\partial p_1} \wedge \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{1}{2} \sum_{i,j \geq 3} \Pi'_{ij}(y_3, ..., y_m) \frac{\partial}{\partial y_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

A equação acima implica que a estrutura de Poisson é localmente o produto de uma estrutura simplética padrão em um plano $\{(p_1, q_1)\}$ com uma estrutura de Poisson em uma variedade de Poisson em uma variedade de dimensão igual a $m - 2$ $\{(y_3, ..., y_n)\}$. Neste produto N também o produto direto de um ponto do plano (= a origem) do plano $\{(p_1, q_1)\}$ com uma subvariedade na variedade de Poisson $\{(y_3, ..., y_n)\}$. O teorema da decomposição segue por indução no posto de Π em x. ■

Note que quando $m = 2s$, recuperamos o teorema de Darboux, que fornece coordenadas canônicas locais para variedades simpléticas.

Definição 2.21. Um sistema de coordenadas local que satisfaz as condições do teorema acima é chamada de coordenada canônica local. Em tal coordenada canônica temos:

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} \{z_i, z_j\} \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial g}{\partial z_j} + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial(f, g)}{\partial(p_i, q_i)} = \{f, g\}_N + \{f, g\}_S, \tag{2.14}$$

onde,

$$\{f, g\}_S = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial(f, g)}{\partial(p_i, q_i)}$$

define a estrutura de Poisson não degenerada $\sum \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial q_i}$ em uma subvariedade local S dada por $S = \{z_1 = ... = z_{m-2s} = 0\}$ e

$$\{f, g\}_N = \sum_{u,v} \{z_i, z_j\} \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial g}{\partial z_j}$$

define uma estrutura de Poisson em uma vizinhança de x em N.

Pelo Teorema (2.3) como $\{z_i, p_j\} = \{z_i, q_j\} = 0 \ \forall \ i, j$, note que as funções $\{z_i, z_j\}$ não depende das variáveis $(p_1, ..., p_s, q_1, ..., q_s)$. Temos também que, como $\{z_i, z_j\}(x) = 0 \ \forall \ i, j$, o tensor de Poisson de $\{,\}_N$ se anula em x.

A fórmula dada por (2.14) implica que uma variedade de Poisson (M, Π) é localmente isomorfa, em uma vizinhança do ponto x, ao produto direto de uma variedade simplética $(S, \sum_1^s dp_i \wedge dq_i)$ com uma variedade de Poisson $(N_x, \{,\}_N)$ cujo tensor de Poisson se anula em x. Assim, localmente, podemos decompor uma estrutura de Poisson em duas partes: uma regular e uma singular que se anula em um ponto.

2.5 Folheação singular simplética

Definição 2.22. Uma folheação singular em uma variedade suave M é uma partição $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_\alpha\}$ de M em uma união disjunta de subvariedades conexas suaves $\mathcal{F}_\alpha$, chamadas folhas que satisfazem a seguinte propriedade local de folheação em cada ponto $x \in M$: denote a folha que contém x por $\mathcal{F}_x$, a dimensão de $\mathcal{F}_x$ por d e a dimensão de M por m. Então existe uma carta local suave de M com coordenadas $y_1, ..., y_m$ em uma vizinhança U de x, $U = \{-\epsilon < y_1 < \epsilon, ..., -\epsilon < y_n < \epsilon\}$ tal que o disco $\{y_{d+1} = ... = y_m = 0\}$ de dimensão igual a d coincide com a componente conexa da interseção de $\mathcal{F}_x$ com U que contém x, e que cada disco $\{y_{d+1} = c_{d+1}, ..., y_m = c_m\}$ de dimensão d onde $c_{d+1}, ..., c_m$ são constantes, esteja contido (inteiramente) em alguma folha $\mathcal{F}_\alpha$ de $\mathcal{F}$.

Definição 2.23. Uma distribuição singular em uma variedade M é a atribuição a cada ponto $x \in M$ um espaço vetorial D_x do espaço tangente T_xM.

A dimensão da distruição singular pode depender do ponto x, como podemos observar no exemplo a seguir.

Exemplo 2.10. Quando $\mathcal{F}$ é uma folheação singular, então temos uma distribuição natural $D^{\mathcal{F}}$: cada ponto $x \in V$, $D_x^{\mathcal{F}}$ é o espaço tangente das folhas de $\mathcal{F}$ que contém x.

Definição 2.24. A distruição $D^{\mathcal{F}}$ é chamada de distribuição tangente.

Definição 2.25. Uma distribuição singular D em uma variedade suave é chamada suave se para qualquer ponto $x \in M$ e qualquer vetor $X_0 \in D_x$, existe um campo vetorial suave X definido em uma vizinhança de U_x de x que é tangente a distribuição, isto é, $X(y) \in D_x$ $\forall y \in U_x$ e tal que $X(x) = X_0$. Se, além disso, a dim D_x não depender do ponto x, então dizemos que a distribuição é regular.

Pela propriedade local de folheação, segue que a distribuição tangente $D^{\mathcal{F}}$ de uma folheação singular suave é uma distribuição singular suave.

Definição 2.26. Uma subvariedade integral de uma distribuição singular D em uma variedade suave M é uma subvariedade imersa conexa W de M tal que para cada $y \in W$ o espaço tangente T_yW é um subespaço vetorial de D_y. Uma subvariedade integral W é chamada maximal se não está contida em nenhuma outra subvariedade; dizemos que tem dimensão máxima se seu espaço tangente em cada ponto $y \in W$ é exatamente D_y.

Definição 2.27. Dizemos que uma distribuição singular suave D em uma variedade M é uma distribuição integrável se cada ponto de M está contido em uma variedade integral maximal de dimensão máxima de D.

Antes de enunciarmos o Teorema de Stefan-Sussmann que nos dará condições para dizer quando uma distribuição singular suave ser uma distribuição tangente de uma folheação singular, precisaremos ainda do seguinte conceito.

Definição 2.28. Uma distribuição D é chamada de invariante com respeito a uma família de campos vetoriais suaves C se é invariante com respeito a cada elemento de C, isto é, se $X \in C$ e (φ_X^t) denota o fluxo local de X, então temos $(\varphi_X^t)_* D_x = D_{\varphi_X^t(x)}$, onde $\varphi_X^t(x)$ é bem definido.

Definição 2.29. Dizemos que uma fámilia C de campos vetoriais suaves em uma variedade M gera uma distribuição singular suave D se em cada ponto $x \in M$, D_x é o espaço vetorial dos valores dos campos vetoriais de C no ponto x. A distribuição D neste caso também pode ser denotada por D_x^C.

Teorema 2.4 (Stefan-Sussmann). *Seja D uma distribuição suave singular em uma variedade suave M. Então as seguintes condições são equivalentes:*
a) D é integrável.
b) D é gerado pela família de campos vetoriais suaves C e é invariante com respeito a C.
c) D é uma distribuição tangente $D^{\mathcal{F}}$ de uma folheação singular $\mathcal{F}$.

Demonstração: $a) \Rightarrow b)$ Suponha que D é integrável. Seja C uma família de todos os campos suaves que são tangentes a D. Pela condição de suavidade de D por hipótese implica que D é gerado por C. Então resta mostrar que se X é um campo vetorial suave tangente a D, então D é invariante com respeito a X. Seja x um ponto arbitrário em M, e denote por $\mathcal{F}(x)$ uma subvariedade maximal invariante de dimensão maximal que contém x. Então, pela definição de dimensão máxima, para cada ponto $y \in \mathcal{F}(x)$, temos $T_y\mathcal{F}(x) = D_y$, o que implica que o campo vetorial X, quando restrito a $\mathcal{F}(x)$ é tangente a $\mathcal{F}(x)$. Em particular, o fluxo local φ_X^t pode ser restrito a $\mathcal{F}(x)$, isto é, $\mathcal{F}(x)$ é uma variedade invariante com respeito a esse fluxo local. Portanto, se $\varphi_X^\tau(x)$ é bem definido pra algum $\tau > 0$ então o ponto $\varphi_X^\tau(x)$ pertence a $\mathcal{F}(x)$. Esse fato segue da condição de maximilidade de $\mathcal{F}(x)$. (Note que, a união de subvariedade invariante de dimensão máxima é ainda uma subvariedade invariante de dimensão máxima se é conexa.) Como X é tangente de $\mathcal{F}(x)$, temos $(\varphi_X^\tau(x)_*(T_x\mathcal{F}(x)) = T_{\varphi_X^\tau(x)}\mathcal{F}(x)$. Mas, $T_x\mathcal{F}(x) = D_x$ e $T_{\varphi_X^\tau}\mathcal{F}(x) = D_{\varphi_X^\tau}$, portanto, $(\varphi_X^\tau)_* D_x = D_{\varphi_X^\tau}(x)$.
$b) \Rightarrow c)$ Suponha que D é gerado por uma família C de campos vetoriais suaves e é invariante com respeito a C. Seja x um ponto arbitrário de M, denote a dimensão de D_x por d e escolhe d campos vetoriais $X_1, ..., X_d$ de C tal que $X_1(x), ..., X_d(x)$ gera D_x. Denote por $\phi_1^t, ..., \phi_d^t$ o fluxo de $X_1, ..., X_d$ respectivamente. O mapa

$$(s_1, ..., s_d) \mapsto \phi_1^{s_1}, ..., \phi_d^{s_d}$$

é um difeomorfismo local de um disco de dimensão d para uma subvariedade de dimensão d contida em M. A invariância de D com respeito a C implica que essa subvariedade é uma subvariedade integral de dimensão máxima Colando essas subvariedades integrais locais juntas (onde se interceptam) obtemos uma partição de M em uma união disjunta de subvariedades imersas conexas integral de dimensão máxima, chamadas folhas. Para vermos que essa partição satisfaz a propriedade local de folheação singular, podemos proceder por indução na dimensão de D_x: se $dim D_x = 0$, então a propriedade de folheação local em x é vazia. Se $dim D_x > 0$ então

existe um campo vetorial $X \in C$ tal que $X(x) \neq 0$. Então a trajetória de X fica nas folhas e podemos tomar o quociente de uma pequena vizinhança de x e reduzir a dimensão de M e das folhas por 1. A invariância com respeito a C e a propriedade local de folheação não se altera com essa redução.
c) $\Rightarrow$ *a)* Se $D = D^{\mathcal{F}}$ é uma distribuição tangente de uma folheação singular $\mathcal{F}$, então as folhas de $\mathcal{F}$ são subvariedades maximal invariante de dimensão máxima em D. ■

Definição 2.30. Uma distribuição involutiva é uma distribuição D tal que se X, Y são dois campos de vetores suaves arbitrários são tangentes a D, então o colchete de Lie $[X, Y]$ também é tangente a D.

Pelo teorema anterior, segue que se uma distribuição é integrável, então é involutiva. Por outro lado, quando a distribuição é regular temos o seguinte resultado.

Teorema 2.5 (Frobenius)**.** *Se uma distribuição regular é involutiva, então é integrável, isto é, é a distribuição tangente de uma folheação singular.*

O teorema de Frobenius pode ser visto como um caso particular do teorema de Stefan-Sussmann se mostrarmos que a distribuição regular involutiva é invariante com respeito a família de todos os campos vetoriais suaves que são tangentes a distribuição.

Consideremos agora (M, Π) uma variedade de Poisson e denote por $\mathcal{C}$ sua distribuição característica. Por definição temos que $\mathcal{C}_x = Im\sharp_x = \{X_f(x); f \in C^\infty(M)\}\ \forall x \in M$. Como campos vetoriais hamiltonianos preservam a estrutura de Poisson, então preserva também a distribuição característica. Assim, pelo Teorema Stefan-Sussmann, a folheação característica $\mathcal{C}$ é completamente integrável e correspondente a uma folheação singular que denotaremos por $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\Pi$.

Definição 2.31. A folheação singular $\mathcal{F}_\Pi$ dada como acima recebe o nome de folheação simplética de uma variedade de Poisson (M, Π).

Para cada ponto $x \in M$, denote por $\mathcal{F}(x)$ a folha de $\mathcal{F}$ que contém x. As cartas locais de $\mathcal{F}(x)$ são dadas pelo teorema (2.3): se $(p_1, ..., p_s, q_1, ..., q_s, z_1, ..., z_{m-2s})$ é um sistema de coordenada local canônica de um ponto $x \in M$, então a subvariedade $\{z_1 = ... = z_{m-2s} = 0\}$ é um subconjunto aberto de $\mathcal{F}(x)$ e tem uma natural estrutura simplética (p_i, q_i). Note que essa estrutura simplética não depende da escolha da coordenada: em cada ponto de $\{z_1 = ... = z_{m-2s} = 0\}$ coincide com a forma simplética no espaço característico. Assim, em cada folha $\mathcal{F}(x)$ temos uma única estrutura simplética natural, que em cada ponto coincide com a forma simplética no espaço característico correspondente. Também segue da afirmação b), d) de teorema (2.3) que a injetividade $i : \mathcal{F} \to M$ é um morfismo de Poisson: se f, g são duas funções em M e $y \in \mathcal{F}(x)$, então $\{f, g\}(y) = \{f \mid_{\mathcal{F}(x)}, g \mid_{\mathcal{F}(x)}\}_x(y)$, onde $\{,\}_x$ é o colchete de Poisson da forma simplética em $\mathcal{F}(x)$.

Teorema 2.6. *Cada folha $\mathcal{F}(x)$ de uma folheação simplética $\mathcal{F}_\Pi$ de uma variedade de Poisson (M, Π) é uma subvariedade simplética imersa, a imersão é dada por um morfismo de Poisson. A estrutura de Poisson Π é completamente determinada pela estrutura simplética das folhas de $\mathcal{F}_\Pi$.*

Para finalizar esta seção, definimos o conceito de estrutura de Poisson transversal.

Teorema 2.7. *Seja N um disco local suave (suficientemente pequeno) de dimensão $m-2s$ de uma variedade de Poisson (M,Π) de dimensão m que intercepta transversalmente uma folha de dimensão $2s$ $\mathcal{F}(x)$ d uma folheação simplética $\mathcal{F}$ de (M,Π) em um ponto x. Ou seja, N é uma subvariedade que contém o ponto x e é transversal ao espaço característico $\mathcal{C}_x$. Pelo Teorema (2.3), existe coordenadas locais canônicas em uma vizinhança de x, que irá definir em N uma estrutura de Poisson. Com as notações acima, temos:*
a) A estrutura de Poisson local em N dada pelo Teorema (2.3) *não depende da escolha da coordenada local canônica.*
b) Se x_0 e x_1 são dois pontos em uma folha simplética $\mathcal{F}(x)$, e N_0 e N_1 são dois discos locais de dimensão $m-2s$ que intercepta transversalmente $\mathcal{F}(x)$ em x_0 e x_1 respectivamente, então existe um difeomorfismo de Poisson local suave de (N_0,x_0) para (N_1,x_1).

Definição 2.32. A estrutura de Poisson de N assim definida recebe o nome de estrutura de Poisson transversal em x da variedade de Poisson (M,Π).

A estrutura de Poisson transversal pode ser calculada pela seguinte fórmula

Proposição 2.7 (Fórmula de Dirac)**.** *Seja (M,Π) uma variedade de Poisson e N uma subvariedade local de M que intercepta uma folha simplética transversalmente em um ponto z. Considere $\psi_1,...,\psi_{2s}$, onde $2s =$ posto de $\Pi(x)$, uma função em uma vizinhança U de z tal que $N=\{x\in U;\psi_i(x)=c\}$, onde c é uma constante. Denote por $P_{ij}=\{\psi_i,\psi_j\}$ e por (P^{ij}) a matriz inversa de $(P_{ij})_{i,j=1}^{2s}$. Então a fórmula para o colchete de para a estrutura de Poisson em N é dada por:*

$$\{f,g\}_N(x)=\{\tilde{f},\tilde{g}\}(x)-\sum_{i,j=1}^{2s}\{\tilde{f},\psi_i\}(x)P^{ij}(x)\{\psi_j,\tilde{g}\}(x)\quad \forall x\in N$$

onde f, g são funções em N e $\tilde{f},\tilde{g}$ são extensões de f e g em U. A fórmula acima independe da escolha da extensão $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$.

Capítulo 3

O colchete de Schouten e cohomologia de Poisson

3.1 Colchete de Schouten

O colchete de Schouten desempenha um papel fundamental no estudo da geometria de Poisson. Esta seção apresenta um resultado que nos permite dar condição para dizer quando um campo bivetorial é um tensor de Poisson usando o colchete de Schouten.

Primeiramente, vamos relembrar a definição de colchete de Lie de dois campos vetoriais.

Definição 3.1. Sejam $A = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $B = \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ dois campos vetoriais escrito em um sistema de coordenadas locais $(x_1, ..., x_n)$, então o colchete de Lie de A e B é dado por

$$[A, B] = \sum_i a_i \left(\sum_j \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \sum_i b_i \left(\sum_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right). \tag{3.1}$$

Faremos a seguinte mudança de notação: denote $\frac{\partial}{\partial x_i}$ por ζ_i e vamos considerá-los como variáveis formal ou ímpar (formal no sentido de que eles não assumem valores em um campo, mas ainda formam uma álgebra e ímpar no sentido de que $\zeta_i \zeta_j = -\zeta_j \zeta_i$, isto é, $\frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \wedge \frac{\partial}{\partial x_i}$). Assim, podemos escrever $A = \sum_i a_i \zeta_i$ e $B = \sum_i b_i \zeta_i$ e considerá-los formalmente como funções de variáveis (x_i, ζ_i) que são lineares nas variáveis ímpar (ζ_i). Então $[A, B]$ pode ser escrito formalmente como

$$[A, B] = \sum_i \frac{\partial A}{\partial \zeta_i} \frac{\partial B}{\partial x_i} - \sum_i \frac{\partial B}{\partial \zeta_i} \frac{\partial A}{\partial x_i}. \tag{3.2}$$

A fórmula acima faz com que o colchete de Lie de dois campos de vetor se assemelhe com o colchete de Poisson de duas funções em um sistema de coordenadas de Darboux.

Se $\Pi = \sum_{i_1 < ... < i_p} \Pi_{i_1, ..., i_p} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge ... \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_p}}$ é um campo p-vetorial então, vamos considerá-lo como um polinômio homogêneo de grau p nas variáveis ímpares (ζ_i):

$$\Pi = \sum_{i_1 < ... < i_p} \Pi_{i_1 ... i_p} \zeta_{i_1} ... \zeta_{i_p}.$$

Note que as variáveis ζ_i não comuntam. De fato, elas são anti-comutativa entre eles e comutativo com respeito a variável x_i:

$$\zeta_i\zeta_j = -\zeta_j\zeta_i; \quad x_i\zeta_j = -\zeta_j x_i; \quad x_ix_j = x_jx_i.$$

Faremos uso da seguinte notação para a regra de diferenciação:

$$\frac{\partial(\zeta_{i_1}...\zeta_{i_p})}{\partial\zeta_{i_p}} := \zeta_{i_1}...\zeta_{i_{p-1}}.$$

assim, $\frac{\partial(\zeta_{i_1}...\zeta_{i_p})}{\partial\zeta_{i_k}} = (-1)^{p-k}\zeta_{i_1}...\widehat{\zeta_{i_k}}...\zeta_{i_{p-1}}$, onde $1 \leq k \leq p$ e a notação $\widehat{\zeta_{i_k}}$ significa que ζ_{i_k} foi retirado do produto.

Suponhamos agora que A é um campo a-vetorial e B é um campo b-vetorial dado do seguinte modo,

$$A = \sum_{i_1<...<i_a} A_{i_1...i_a}\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge ... \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_a}} = \sum_{i_1...i_a} A_{i_1,...,i_a}\zeta_{i_1}...\zeta_{i_a}$$

e

$$B = \sum_{i_1<...<i_b} B_{i_1...i_b}\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge ... \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_b}} = \sum_{i_1...i_b} B_{i_1,...,i_b}\zeta_{i_1}...\zeta_{i_b}.$$

Pela fórmula (3.2) temos

$$[A, B] = \sum_i \frac{\partial A}{\partial\zeta_i}\frac{\partial B}{\partial x_i} - (-1)^{(a-1)(b-1)}\sum_i \frac{\partial B}{\partial\zeta_i}\frac{\partial A}{\partial x_i} \tag{3.3}$$

que é um campo $(a + b - 1)-$vetorial.

Definição 3.2. Se A é um campo $a-$vetorial e B é um campo $b-$vetorial então, o campo $(a + b - 1)-$vetorial $[A, B]$ dado pela fórmula (3.3) em cada sistema local de coordenadas, é chamado de colchete de Schouten de A e B.

Teorema 3.1. *O colchete definido pela fórmula* (3.3) *satisfaz as seguintes propriedades:*
a) Anti-comutatividade graduada: se A é um campo a-vetorial e B é um campo b-vetorial, então

$$[A, B] = -(-1)^{(a-1)(b-1)}[B, A]$$

b) Regra de Leibniz graduada: se A é um campo a-vetorial, B é um campo b-vetorial e C é um campo $c-$vetorial, então

$$[A, B \wedge C] = [A, B] \wedge C + (-1)^{(a-1)b}B \wedge [A, C]$$

$$[A \wedge B, C] = A \wedge [B, C] + (-1)^{(c-1)b}[A, C] \wedge B$$

c) Identidade de Jacobi graduada:

$$(-1)^{(a-1)(c-1)}[A, [B, C]] + (-1)^{(b-1)(a-1)}[B, [C, A]] + (-1)^{(c-1)(b-1)}[C, [A, B]] = 0$$

d) Se $A = X$ é um campo vetorial então $[X, B] = \mathcal{L}_X B$, onde $\mathcal{L}_X$ denota a derivada de Lie de X. Em particular, se A e B são dois campos vetoriais, então o colchete de Schouten de A e B coincidem com o colchete de Lie. Se $A = X$ é um campo vetorial e $B = f$ é uma função (isto é, *um campo 0-vetorial), então temos* $[X, f] = X(f) = \langle df, X\rangle$.

Demonstração: O item (a) segue diretamente da definição. (b) a regra diferencial implica que $\dfrac{\partial(B\wedge C)}{\partial\zeta_i} = B\dfrac{\partial C}{\partial\zeta_i} + (-1)^c\dfrac{\partial B}{\partial\zeta_i}$. Portanto, temos:

$$
\begin{aligned}
[A, B\wedge C] &= \sum \frac{\partial A}{\partial\zeta_i}\frac{\partial(B\wedge C)}{\partial x_i} - (-1)^{(a-1)(b+c-1)}\sum \frac{\partial(B\wedge C)}{\partial\zeta_i}\frac{\partial A}{\partial x_i} \\
&= \sum \frac{\partial A}{\partial\zeta_i}\frac{\partial B}{\partial x_i}C + \sum \frac{\partial A}{\partial\zeta_i}B\frac{\partial C}{\partial x_i} - (-1)^{(a-1)(b+c-1)}\sum B\frac{\partial C}{\partial\zeta_i}\frac{\partial A}{\partial x_i} \\
&- (-1)^{(a-1)(b+c-1)+c}\sum \frac{\partial B}{\partial\zeta_i}C\frac{\partial A}{\partial x_i} \\
&= \sum \frac{\partial A}{\partial\zeta_i}\frac{\partial B}{\partial x_i}C - (-1)^{(a-1)(b+c-1)+c+ac}\sum \frac{\partial B}{\partial\zeta_i}\frac{\partial A}{\partial x_i}C \\
&+(-1)^{(a-1)b}\left(-(-1)^{(a-1)(c-1)}\sum B\frac{\partial C}{\partial\zeta_i}\frac{\partial A}{\partial x_i} + \sum B\frac{\partial A}{\partial\zeta_i}\frac{\partial C}{\partial x_i}\right) \\
&= [A,B]\wedge C + (-1)^{(a-1)b}B\wedge[A,C] \qquad .
\end{aligned}
$$

c) Por cálculo direto

$$(-1)^{(a-1)(c-1)}[A,[B,C]] = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

onde

$$
\begin{aligned}
S_1 &= (-1)^{(a-1)(c-1)}\sum_{i,j}\frac{\partial A}{\partial\zeta_j}\frac{\partial^2 B}{\partial x_j\partial\zeta_i}\frac{\partial C}{\partial x_i} - (-1)^{(a-1)(b-1)}\sum_{i,j}\frac{\partial B}{\partial\zeta_i}\frac{\partial^2 C}{\partial x_i\partial\zeta_j}\frac{\partial A}{\partial x_j}, \\
S_2 &= (-1)^{(a-1)(c-1)}\sum_{i,j}\frac{\partial A}{\partial\zeta_j}\frac{\partial B}{\partial\zeta_i}\frac{\partial^2 C}{\partial x_i\partial x_j} - (-1)^{(c-1)(b-1)}\sum_{i,j}\frac{\partial C}{\partial\zeta_i}\frac{\partial A}{\partial\zeta_i}\frac{\partial^2 B}{\partial x_i\partial x_j}, \\
S_3 &= (-1)^{(b-1)(a-1)}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 B}{\partial\zeta_j\partial x_i}\frac{\partial C}{\partial\zeta_i}\frac{\partial A}{\partial x_j} - (-1)^{(c-1)(b-1)}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 C}{\partial\zeta_i\partial x_j}\frac{\partial A}{\partial\zeta_j}\frac{\partial B}{\partial x_i}, \\
S_4 &= (-1)^{(b-1)(a+c)+b}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 C}{\partial\zeta_j\partial\zeta_i}\frac{\partial B}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial x_j} - (-1)^{(a-1)(b-1)+c}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 B}{\partial\zeta_j\partial\zeta_i}\frac{\partial C}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial x_j} \\
&= (-1)^{(b-1)(c-1)+a}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 C}{\partial\zeta_j\partial\zeta_i}\frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{\partial B}{\partial x_j} - (-1)^{(a-1)(b-1)+c}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 B}{\partial\zeta_j\partial\zeta_i}\frac{\partial C}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial x_j}
\end{aligned}
$$

pois, $\frac{\partial^2 C}{\partial\zeta_i\partial\zeta_j} = -\frac{\partial^2 C}{\partial\zeta_j\partial\zeta_i}$.

Note que cada uma das somas S_1, S_2, S_3, S_4 se anulam se adicionarmos os termos $(-1)^{(b-1)(a-1)}[B,[C,A]]$ e $(-1)^{(c-1)(b-1)}[C,[A,B]]$.

Por fim, se f é uma função e $X = \sum_i \xi_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ é um campo vetorial, então $\frac{\partial f}{\partial\zeta_i} = 0$, e $[X,f] = \sum\frac{\partial X}{\partial\zeta_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} = X(f)$. Quando A e B são campos vetoriais, a fórmula (3.3) coincide com a fórmula (3.2). Quando B é um campo multivetorial, o item (d) pode ser provado fazendo indução no grau de B e usando as regras de Leibniz dadas pelo item (b). ∎

Note que o colchete de um campo a-vetorial A com um campo $b-$vetorial B dado (3.3) pode depender da escolha da coordenada local $(x_1, ..., x_n)$. Mas, usando a regra de Leibniz dada pelo item (b) do Teorema anterior temos que o cálculo de $[A,B]$ pode ser reduzido ao cálculo do colchete de Lie de campos vetoriais. Portanto, como o colchete de Lie não depende da escolha de coordenadas locais, segue que o colchete $[A,B]$ é de fato um campo $(a+b-1)$-vetorial bem definido e não depende da escolha de coordenadas locais.

Teorema 3.2. *Um campo bivetorial Π é um tensor de Poisson se, e somente se,*

$$[\Pi,\Pi]=0 \tag{3.4}$$

onde $[,]$ é o colchete de Schouten.
Se Π é um tensor de Poisson e f é uma função então, o campo vetorial Hamiltoniano correspondente X_f satisfaz a equação

$$X_f=-[\Pi,f]. \tag{3.5}$$

Demonstração: Considere $(x_1,...,x_n)$ um sistema de coordenadas locais. Então, $\Pi=\sum_{i<j}\Pi_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial}{\partial x_j}=\sum_{i,j}\Pi_{ij}\zeta_i\zeta_j$ e

$$[\Pi,\Pi]=2\sum_k\left(\sum_{i,j}\Pi_{ij}\zeta_j\right)\frac{\partial\Pi}{\partial x_k}=2\sum_k\left(\sum_{i,j}\Pi_{ij}\zeta_j\right)\sum_{i,j}\frac{\partial\Pi_{ij}}{\partial x_k}\zeta_i\zeta_j$$

$$=2\sum_{i<j<k}\left(\oint\sum_s\frac{\partial\Pi_{ij}}{\partial x_s}\Pi_{sk}\right)\zeta_i\zeta_j\zeta_k.$$

Assim, pela equação (2.8) dada pela Proposição (2.4), segue que $[\Pi,\Pi]=0$. Portanto, pela Proposição (2.4) segue a primeira parte do teorema.

Agora observe que

$$-[\Pi,f]=-[\sum_{i,j}\Pi_{ij}\zeta_i\zeta_j,f]=-\sum_{i,j}\Pi_{ij}\zeta_j\frac{\partial f}{\partial x_j}=\sum_{i,j}\Pi_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\zeta_j=\sum_{i,j}\Pi_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}=X_f.$$

portanto, temos a segunda parte do teorema o que conclui a demonstração. ■

Definição 3.3. Dois tensores de Poisson Π_1 e Π_2 são chamados de compatíveis se o colchete de Schouten deles se anula, $[\Pi_1,\Pi_2]=0$.

Dados quaisquer dois bivetores de Poisson, Π_0 e Π_1 que satisfazem $[\Pi_0,\Pi_1]=0$, o campo bivetorial $\Pi=\Pi_0+\Pi_1$ também é uma estrutura de Poisson. Pois, $[\Pi_0+\Pi_1,\Pi_0+\Pi_1]=[\Pi_0,\Pi_0]+2[\Pi_0,\Pi_1]+[\Pi_1,\Pi_1]=0$.

3.2 Cohomologia de Poisson

O seguinte resultado é muito importante para a existência da cohomologia de Poisson.

Lema 3.1. *Se Π é um tensor de Poisson, então para qualquer campo multi-vetorial A temos*

$$[\Pi,[\Pi,A]]=0.$$

Demonstração: Usando a identidade de Jacobi graduada dada pelo Teorema (3.1) se Π é um campo 2-vetorial e A é um campo a-vetorial, então

$$(-1)^{a-1}[\Pi,[\Pi,A]]-[\Pi,[A,\Pi]]+(-1)^{a-1}[A,[\Pi,\Pi]]=0.$$

Pela propriedade anti-comutatividade graduada, temos que $-(-1)^{(a-1)}[\Pi,A]=[A,\Pi]$ e assim, $2(-1)^{(a-1)}[\Pi,[\Pi,A]]=-(-1)^{(a-1)}[A,[\Pi,\Pi]]$. Logo, $[\Pi,[\Pi,A]]=0$, pois como Π é um tensor de Poisson, $[\Pi,\Pi]=0$. ■

Considere agora uma variedade suave de Poisson (M,Π). Denote por $\mathcal{V}^\star(M)=\oplus_{p\geq 0}\mathcal{V}^p(M)$ o espaço dos campos multi-vetoriais de M, onde $\mathcal{V}^p(M)$ é o espaço dos campos $p-$vetoriais de M.

Definição 3.4. O operador $\mathbb{R}$-linear $\delta=\delta_\Pi:\mathcal{V}^\star(M)\to\mathcal{V}^\star(M)$ dado por

$$\delta_\Pi(A)=[\Pi,A]$$

é chamado de operador diferencial.

Pelo Lema (3.1), temos que $\delta\circ\delta=0$. Podemos definir o complexo diferencial $(\mathcal{V}^\star(M),\delta)$ correspondente,

$$...\to\mathcal{V}^{p-1}(M)\xrightarrow{\delta}\mathcal{V}^p(M)\xrightarrow{\delta}\mathcal{V}^{p+1}(M)\to... \tag{3.6}$$

Definição 3.5. O complexo diferencial definido como acima (3.6), é chamado de complexo de Lichnerowicz. A cohomologia associada ao complexo de Lichnerowicz é chamada de cohomologia de Poisson. Os grupos de cohomologia de Poisson de (M,Π) são os grupos quociente

$$H^p_\Pi(M)=\frac{Nuc(\delta:\mathcal{V}^p(M)\to\mathcal{V}^{p+1}(M))}{Im(\delta:\mathcal{V}^{p-1}(M)\to\mathcal{V}^p(M))}.$$

Os grupos de cohomologia de Poisson são também denotados por $H^p(M,\Pi)$ e por $H^p_{LP}(M,\Pi)$.

A dimensão dos grupos de cohomologia de Poisson podem ser finita ou infinita. Um exemplo de quando a dimensão é infinita é quando $\Pi=0$ e então $H^\star_\Pi(M):=\bigoplus_k H^k_\Pi(M)=\mathcal{V}^\star(M)$.

Faremos agora um breve comentário sobre a interpretação dos grupos de cohomologia $H^0_\Pi(M)$, $H^1_\Pi(M)$ e $H^2_\Pi(M)$.

O grupo $H^0_\Pi(M)$ é o grupo das funções $f\in C^\infty(M)$ tal que $X_f=-[\Pi,f]=0$. Assim,

$$H^0_\Pi(M)=\{f;X_f=0\}=\{f;\{f,h\}=0\quad\forall\quad h\in C^\infty(M)\}$$

que é o espaço das funções Casimir de Π, isto é, o espaço das integrais principais da folheação simplética associada.

$H^1_\Pi(M)$ é o grupo de cohomologia de Poisson do espaço dos campos vetoriais de Poisson X tais que $[\Pi,X]=0$, quocientado pelo espaço dos campos vetorias Hamiltoniano, isto é, campos vetoriais do tipo $[\Pi,X]=X_{-f}$.

O segundo grupo de cohomologia de Poisson $H^2_\Pi(M)$ é o quociente do espaço dos campos bivetorial Λ que satisfaz a equação $[\Pi,\lambda]=0$ pelo espaço de campos bivetorial do tipo $\Lambda=[\Pi,Y]$. Note que se $[\Pi,\Lambda]=0$ e ϵ é um parâmetro formal (infinitessimal), então $\Pi+\epsilon\Lambda$ satisfaz a identidade de Jacobi até os termos de ordem ϵ^2:

$$[\Pi + \epsilon\Lambda, \Pi + \epsilon\Lambda] = \epsilon^2[\Lambda, \Lambda] = 0 \mod \epsilon^2.$$

Então, podemos ver $\Pi + \epsilon\Lambda$ como uma deformação infinitessimal de Π no espaço dos tensores de Poisson. O grupo de cohomologia $H^2_\Pi(M)$ é o quociente do espaço das deformações infinitessimais de Π sobre o espaço das deformações triviais.

Definição 3.6. Uma estrutura de Poisson é chamada exata se sua classe de cohomologia se anula em $H^2_\Pi(M)$, isto é, se existe um campo vetorial Y tal que $\Pi = [\Pi, Y]$.

3.2.1 Cohomologia de Poisson e cohomologia de De Rham

Como vimos no capítulo anterior, uma estrutura de Poisson Π pode ser associada a um homomorfismo $\sharp = \sharp_\Pi : T^*M \to TM$ dado pela fórmula (2.13).

Tomando as potências do produto exterior do mapa $\sharp$, podemos estendê-lo a um homomorfismo

$$\sharp : \Lambda^p T^*M \to \Lambda^p TM$$

e, consequentemente, a um homomorfismo linear $C^\infty(M)$

$$\sharp : \Omega^p(M) \to \mathcal{V}^p(M)$$

onde $\Omega^p(M)$ denota o espaço de formas diferenciais suaves de grau p em M dado pelo seguinte resultado

Lema 3.2. *Para qualquer forma diferencial η em uma dada variedade de Poisson suave (M, Π) temos*

$$\sharp(d\eta) = -[\Pi, \sharp(\eta)] = -\delta_\Pi(\sharp(\eta)). \tag{3.7}$$

Demonstração: A prova é feita por indução no grau de η e usaremos a regra de Leibniz. Se η é uma função então $\sharp(\eta) = \eta$ e $\sharp(d\eta) = -[\Pi, \eta]$ e portanto a Equação (3.7) é satisfeita. Suponhamos que a Equação (3.7) é satisfeita para uma $p-$forma diferencial η e uma q-forma diferencial μ então, também é satisfeita para o produto exterior $\eta \wedge \mu$. De fato, temos que $\sharp(d(\eta \wedge \mu)) = \sharp(d\eta \wedge \mu + (-1)^p \eta \wedge d\mu) = \sharp(d\eta) \wedge \sharp(\mu) + (-1)^p \sharp(\eta) \wedge \sharp(d\mu) = -[\Pi, \sharp(\eta)] \wedge \sharp(\mu) - (-1)^p \sharp(\eta) \wedge [\Pi, \sharp(\eta) \wedge \sharp(\mu)] = -[\Pi, \sharp(\eta \wedge \mu)]$. ■

Com o restultado do Lema anterior, a menos de sinal, podemos relacionar o operador $\sharp$ com o operador diferencial usual d do complexo de De Rham dado por

$$\ldots \longrightarrow \Omega^{p-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^p(M) \xrightarrow{d} \Omega^{p+1}(M) \longrightarrow \ldots \tag{3.8}$$

com o operador diferencial δ_Π do complexo de Lichnerowicz. Assim, temos um homomorfismo linear entre a cohomologia de De Rham

$$H^\star_{dR}(M) = \bigoplus_p H^p_{dR}(M) = \bigoplus_p \frac{Nuc(d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M))}{Im(d : \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M))}$$

e a cohomologia de Poisson:

Teorema 3.3. *Para qualquer variedade de Poisson* (M, Π) *existe um homomorfismo natural*

$$\sharp^* : H^{\star}_{dR}(M) = \bigoplus_p H^p_{dR}(M) \to H^{\star}_{\Pi}(M) = \bigoplus_p H^p_{\Pi}(M) \tag{3.9}$$

induzida pelo mapa $\sharp = \sharp_\Pi$. *Se* M *é uma variedade simplética, então o homomorfismo é um isomorfismo.*

Em geral, calcular a cohomologia de Poisson é trabalhoso. Quando M é uma variedade simplética, ou seja, quando a estrutura de Poisson Π é não degenerada, a cohomologia de Poisson é igual a cohomologia de De Rham de M. No caso em que M é uma variedade de Poisson não simplética, a cohomologia de Poisson ainda é pouco conhecida para algumas variedades desse tipo.

Daremos um exemplo de cohomologia de Poisson em $(M = \mathbb{R}^2, \Pi = \delta(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y})$. Assumimos que $\delta = 1$. Assim, $H^{(0)}_{\Pi}(M) \cong \mathbb{R}$, pois as funções de Casimir neste caso, são apenas constantes. Para calcular $H^{(1)}_{\Pi}(M)$ iremos usar o seguinte resultado

Proposição 3.1. *Se* (M_1, Π_1) *e* (M_2, Π_2) *são variedades de Poisson e* $\phi : M_1 \to M_2$ *é um mapeamento de Poisson que é um difeomorfismo local, então obtém-se o seguinte homomorfismo induzido:* $\phi^* : H^k_{\Pi_2}(M_2) \to H^k_{\Pi_1}(M_1)$.

Observe que $(\mathbb{R}^2 - \{0\}, \Pi = \delta(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y})$ é uma variedade simplética e o mapa de inclusão canônica $i : \mathbb{R}^2 - \{0\} \to M$ é um morfismo de Poisson. Assim, pelo resultado da proposição anterior, $i^* : H^1_{\Pi}(M) \to H^1_{\Pi}(\mathbb{R}^2 - \{0\})$ é um homomorfismo. Logo, $H^1_{\Pi}(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \cong H^1_{dR}(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \cong \mathbb{R}$. Considere um campo vetorial $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$. Então, $[X, \Pi] = 0$ e $[X] \neq 0$ em $H^1_{\Pi}(M)$.

Definimos o espaço $\mathcal{G} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 - \{0\}); (x^2+y^2)\frac{\partial f}{\partial x}, \quad (x^2+y^2)\frac{\partial f}{\partial y} \in C^\infty(M)\}$. Denote por $\mathcal{F}$ o espaço gerado por $C^\infty(M)$ e pelas funções constantes em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Então, com o seguinte resultado

Lema 3.3. *a)* $H^1_{\Pi}(M)/Nuc\, i^* \cong H^1_{\Pi}(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \cong \mathbb{R}$*;*
b) $\mathcal{G}/\mathcal{F} \cong Nuc \quad i^*$.
c) $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ *é isomorfo a* $\mathbb{R}$.

temos que

Teorema 3.4. $H^1_{\Pi}(M) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

Para mais detalhe, veja em [18].

3.3 O operador Curl

Seja Ω uma forma de volume suave em uma variedade M de dimensão m, isto é, por definição Ω é uma m-forma que não se anula em M. Então, para cada $p = 0, 1, ..., m$ o mapa

$$\Omega^\flat : \mathcal{V}^p(M) \to \Omega^{m-p}(M)$$

definido por $\Omega^\flat(A) = i_A\Omega$. Note que $\Omega^\flat$ é um isomorfismo de classe $\mathcal{C}^\infty(M)$ do espaço $\mathcal{V}^p(M)$ dos campos p-vetoriais para o espaço $\Omega^{m-p}(M)$ das $(m-p)$- formas suaves em M. O mapa inverso de $\Omega^\flat$ é denotado por $\Omega^\sharp : \Omega^{n-p}(M) \to \mathcal{V}^p(M)$, que podem ser definido por $\Omega^\sharp(\eta) = i_\eta \widehat{\Omega}$ onde $\widehat{\Omega}$ é o campo m-vetorial dual do campo Ω, isto é, $\langle \Omega, \widehat{\Omega} \rangle = 1$.

Denote por $D_\Omega = \Omega^\sharp \circ d \circ \Omega^\flat$. Então o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V}^p(M) \arrow[r, "\Omega^\flat"] \arrow[d, "D_\omega"'] & \Omega^{m-p}(M) \arrow[d, "d"] \\
\mathcal{V}^{p-1}(M) \arrow[r, "\Omega^\flat"] & \Omega^{m-p+1}(M)
\end{tikzcd}$$

E como $d \circ d = 0$, temos que $D_\Omega \circ D_\Omega = 0$.

Definição 3.7. O operador $D_\Omega = \Omega^\sharp \circ d \circ \Omega^\flat$ é chamado o operador Curl (com respeito a forma de volume Ω). Se A é um campo a-vetorial então $D_\Omega A$ é chamado o Curl de A (com respeito a Ω).

Exemplo 3.1. O operador Curl $D_\Omega X$ de um campo vetorial X é o divergente de X com respeito a forma de volume $\Omega : (D_\Omega X)\Omega = \Omega^\flat(D_\Omega X) = di_X \Omega = \mathcal{L}_X \Omega = (Div_\Omega X)\Omega$, o que implica que $D_\Omega X = Div_\Omega X$.

Considere um sistema de coordenadas local $(x_1, ..., x_n)$ com $\Omega = dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$ e denote $\frac{\partial}{\partial x_i}$ por ζ_i. Assim, temos a fórmula convencial formal ´para o operador Curl:

$$D_\Omega A = \sum_i \frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial \zeta_i}. \tag{3.10}$$

Proposição 3.2. *Se f é uma função não nula, então temos*

$$D_{f\Omega} A = D_\Omega A + [A, ln|f|].$$

Demonstração: Temos que

$$D_{f\Omega} A - D_\Omega A = \Omega^\# \Omega^\flat (D_{f\Omega} A - D_\Omega A) = \Omega^\# (\tfrac{1}{f} di_A(f\Omega) - di_A \Omega)$$

$$= \Omega^\# (d \ln \mid f \mid \wedge i_A \Omega) = i_{d \ln |f|} A = [A, \ln \mid f \mid]. \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.5 (Koszul)**.** *Se A é um campo a- vetorial , B é um campo b-vetorial e Ω é uma forma de volume então,*

$$[A, B] = (-1)^b D_\Omega (A \wedge B) - (D_\Omega A) \wedge B - (-1)^b A \wedge (D_\Omega B). \tag{3.11}$$

Demonstração: Pela fórmula (3.10) e (3.3)

$$(-1)^b D_\Omega (A \wedge B) = (-1)^b \sum \frac{\partial^2 (A \wedge B)}{\partial x_i \partial \zeta_i} = \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial A}{\partial \zeta_i} B + (-1)^b A \frac{\partial B}{\partial \zeta_i} \right)$$

$$= \sum \frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial \zeta_i} B + (-1)^b A \sum \frac{\partial^2 B}{\partial x_i \partial \zeta_i} + \frac{\partial A}{\partial \zeta_i} \frac{\partial B}{\partial x_i} + (-1)^b \sum \frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial B}{\partial \zeta_i}$$

$$= (D_\Omega A)B + (-1)^b A(D_\Omega B) + \left(\frac{\partial A}{\partial \zeta_i}\frac{\partial A}{\partial \zeta_i}\frac{\partial B}{\partial x_i} - (-1)^{(b-1)(a-1)}\sum \frac{\partial B}{\partial \zeta_i}\frac{\partial B}{\partial \zeta_i}\frac{\partial A}{\partial x_i}\right)$$
$$= (D_\Omega A)B + (-1)^b A(D_\Omega B) + [A, B].$$

■

Asssim, o colchete de Schouten pode ser calculado via operador Curl. Além disso, a menos de sinal, o operador Curl é uma derivação do colchete de Schouten e temos a seguinte fórmula:

$$D_\Omega[A, B] = [A, D_\Omega B] + (-1)^{b-1}[D_\Omega A, B].$$

3.4 Complexo de Chevalley-Eilenberg

Seja $\Pi^{(1)}$ uma estrutura de Poisson linear em um espaço vetorial $\mathbb{K}^n$. Denote por $\mathfrak{g} = ((\mathbb{K}^n)^*, \{,\}_{\Pi^{(1)}})$ a álgebra de Lie correspondente a $\Pi^{(1)}$.

Considere W um $\mathfrak{g}-$módulo. Então, W é um espaço vetorial com um homomorfismo de álgebra de Lie, $\rho : \mathfrak{g} \to End(W)$, onde $End(W)$ é os endomorfismo de W. O mapa ρ é linear e $\rho([x, y]) = \rho(x) \cdot \rho(y) - \rho(y) \cdot \rho(x)$, $\forall x, y \in \mathfrak{g}$. A ação de um elemento de $x \in \mathfrak{g}$ em um vetor $v \in W$ é definida por $x \cdot v = \rho(x)(v)$. Podemos associar a W o seguinte complexo

$$... \xrightarrow{\delta} C^{k-1}(\mathfrak{g}, \rho) \xrightarrow{\delta} C^k(\mathfrak{g}, \rho) \xrightarrow{\delta} C^{k+1}(\mathfrak{g}, \rho) \xrightarrow{\delta} ... \tag{3.12}$$

onde

$$C^k(\mathfrak{g}, \rho) = (\wedge^k \mathfrak{g}^*) \otimes W.$$

$(k \geq 0)$ é o espaço de mapas antissimétricos k-multilinear de $\mathfrak{g}$ para W: um elemento $\theta \in C^k(\mathfrak{g}, \rho)$ pode ser apresentado como um mapa antissimétrico k-multilinear de $\mathfrak{g}$ para W, ou um mapa linear de $\wedge^k \mathfrak{g}$ para W:

$$\theta(x_1, ..., x_k) = \theta(x_1 \wedge ... \wedge x_k) \in W, x_i \in \mathfrak{g}.$$

Definição 3.8. O complexo definido acima é chamado de complexo de Chevalley-Eilenberg de $\mathfrak{g}$ com coeficientes em W.

O operador $\delta = \delta_{CE} : C^k(\mathfrak{g}, \rho) \to C^{(k+1)}(\mathfrak{g}, \rho)$ no complexo de Chevalley-Eilenberg é definido por:

$$\begin{aligned}(\delta\theta)(x_1, .., x_{k+1}) &= \sum_i (-1)^{i+1} \rho(x_i)(\theta(x_1, ..., \widehat{x}_i, ..., x_{k+1})) \\ &= +\sum_{i<j} (-1)^{i+j} \theta([x_i, x_j], x_1, ..., \widehat{x}_i, ..., \widehat{x}_j, ..., x_{k+1}),\end{aligned}$$

no qual a escrita $\widehat{x}_i$ significa que a variável foi retirada.

Note que operador $\delta_{CE} \circ \delta_{CE} = 0$, usando diretamente a identidade de Jacobi (note que a fórmula (3.13) é anóloga a fórmula de Cartan). Assim, o complexo de Chevalley-Eilenberg é um complexo diferenciável com o operador $\delta = \delta_{CE}$.

Definição 3.9. Os grupos de cohomologia correspondente ao complexo de Chevalley-Eilenberg dado por

$$H^K(\mathfrak{g},\rho) = H^k(\mathfrak{g},W) = \frac{\ker(\delta : C^K(\mathfrak{g},\rho) \to C^{K+1}(\mathfrak{g},\rho))}{\mathrm{Im}(\delta : C^{K-1}(\mathfrak{g},\rho) \to C^K(\mathfrak{g},\rho))}$$

são chamados de grupos de cohomologia de $\mathfrak{g}$ com respeito aos coeficientes de W (ou com respeito a representação ρ).

O problema de computação da cohomologia no caso em que $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie semissimples podem ser simplificadas pelos seguintes resultados que são conhecidos como Lemas de Whitehead's.

Teorema 3.6 (Whitehead)**.** *Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie semissimples e W é um $\mathfrak{g}-$módulo de dimensão finita, então $H^1(\mathfrak{g},W) = 0$ e $H^2(\mathfrak{g},W) = 0$.*

Teorema 3.7 (Whitehead)**.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples e W um $\mathfrak{g}-$módulo de dimensão finita tal que $W^{\mathfrak{g}} = 0$, onde $W^{\mathfrak{g}} = \{w \in W \mid x \cdot w = 0 \ \forall \ x \in \mathfrak{g}\}$ denota o conjunto de elementos em W que são invariantes com respeito a ação de $\mathfrak{g}$. Então $H^k(\mathfrak{g},W) = 0$ para todo $k \geq 0$.*

Não mencionaremos os demais casos de computação dos grupos de cohomologia de $\mathfrak{g}$ com respeito aos coeficientes de W. Ao leitor interessado, sugerimos a referência [1].

Capítulo 4

Forma Normal da estrutura de Poisson

Neste último capítulo do trabalho, iremos tratar de formas normais de Poisson, em particular, o objetivo é estudar certo tipo de formas normais, denominadas de decomposição de Levi. Como vimos no capítulo 2, em um dado sistema de coordenadas locais $(x_1, ..., x_m)$, uma estrutura de Poisson Π em uma variedade M tem a expressão

$$\Pi = \sum_{i<j} \Pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \Pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Em alguns casos, o cálculo dos coeficientes Π_{ij} de Π podem ser complicados. Assim, as formas normais é uma maneira de "simplificar"esses coeficientes de Π.

Definição 4.1. Uma forma normal (local) de Π é uma estrutura de Poisson

$$\Pi' = \sum_{i<j} \Pi'_{ij} \frac{\partial}{\partial x'_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x'_j} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \Pi'_{ij} \frac{\partial}{\partial x'_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x'_j}$$

que é localmente isomorfo a Π, isto é, existe um difeomorfismo local $\varphi : (x_i) \mapsto (x'_i)$ chamado de normalização, tal que $\varphi_* \Pi = \Pi'$ e as funções Π'_{ij} são funções mais "simples"que as funções Π_{ij}.

O caso ideal seria quando Π'_{ij} fossem funções constantes. Note que, no Teorema (2.3) se a dimensão da variedade de Poisson M é igual a $m = 2s$ então, temos o Teorema de Darboux's que nos dá as coordenadas canônicas para uma variedade simplética. Assim, se (M, Π) é uma estrutura de Poisson regular, então a estrutura de Poisson de uma vizinhança N_x na subvariedade N no ponto $x \in M$ é trivial e obtemos a seguinte generalização do teorema de Darboux's

Teorema 4.1. *Qualquer estrutura de Poisson regular é localmente isomorfa a uma estrutura de Poisson standard.*

Desse modo, o caso ideal é obtido quando Π é uma estrutura de Poisson regular local.

No caso em Π possui um ponto singular, perto deste ponto, podemos usar o Teorema (2.3) e escrever Π como a soma direta de uma estrutura simplética constante com uma estrutura de Poisson que se anula em um ponto. E assim, obter uma forma normal de Π se reduz a encontrar uma forma normal local para uma estrutura de Poisson que se anula em um ponto. Com isso, consideremos que a estrutura de Poisson Π se anula na origem 0 de um dado sistema de coordenada local $(x_1, ..., x_m)$. Denote por

$$\Pi = \Pi^{(k)} + \Pi^{(k+1)} + ... + \Pi^{(k+n)} + ... \qquad (k \geq 1)$$

a expansão de Taylor de Π no sistema de coordenadas $(x_1, ...x_m)$, onde para cada $h \in \mathbb{N}$, $\Pi^{(h)}$ é um campo bivetorial cujo coeficientes $\Pi_{ij}^{(h)}$ são funções polinomiais homogênea de grau h.

Definição 4.2. O termo $\Pi^{(k)}$ de menor grau em Π, assumido como não trivial, é chamado de parte homogênea ou parte principal de Π. Se $k = 1$, então $\Pi^{(1)}$ é chamado de parte linear de Π.

A nível formal, a identidade de Jacobi para a estrutura de Poisson Π pode ser escrita como

$$0 = [\Pi, \Pi] = [\Pi^{(k)} + \Pi^{(k+1)} + ..., \Pi^{(k)} + \Pi^{(k+1)} + ...]$$

$$= [\Pi^{(k)}, \Pi^{(k)}] + 2[\Pi^{(k)}, \Pi^{(k+1)}] + 2[\Pi^{(k)}, \Pi^{(k+2)}] + [\Pi^{(k+1)}, \Pi^{(k+1)}] + ...$$

e considerando os termos de mesmo grau, temos

$$[\Pi^{(k)}, \Pi^{(k)}] = 0$$

$$2[\Pi^{(k)}, \Pi^{(k+1)}] = 0$$

$$2[\Pi^{(k)}, \Pi^{(k+2)}] + [\Pi^{(k+1)}, \Pi^{(k+1)}] = 0$$

$$...$$

Note que, a parte homogênea $\Pi^{(k)}$ de Π define uma estrutura de Poisson, pelo teorema (3.2). Além disso, Π pode ser visto como uma deformação de $\Pi^{(k)}$. Em particular, podemos questionar quando essa deformação é trivial, ou seja, quando Π é localmente (ou formalmente) isomorfo à sua parte homogênea $\Pi^{(k)}$. Essa questão é resolvida pela cohomologia de Poisson, conforme estudamos no Capítulo 3, a cohomologia de Poisson nos dá as deformações (formal) de estruturas de Poisson.

Quando $k = 1$, fala-se sobre o problema de linearização, quando $k = 2$ fala sobre o problema de quadratização e assim por diante. A nível formal, temos um problema de quase-homogeneização.

Consideremos o campo vetorial linear

$$Z = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad w_i \in \mathbb{N}.$$

Definição 4.3. O campo vetorial linear Z é chamado de campo vetorial quasi-radial. Quando $w_i = 1\ \forall i$, chamamos de campo vetorial radial.

Definição 4.4. Um campo multi-vetorial Λ é chamado de campo vetorial quasi homogêneo de grau d $(d \in \mathbb{Z})$ com respeito a Z se

$$\mathcal{L}_Z \Lambda = d\Lambda.$$

Seja Π uma estrutura de Poisson, tal que $\Pi(0) = 0$. Podemos denotar por

$$\Pi = \Pi^{(d_1)} + \Pi^{(d_2)} + ..., \quad d_1 < d_2 < ...$$

a expansão de Taylor quase homogênia de Π com respeito a Z, onde cada termo $\Pi^{(d_i)}$ é quase homogêneo de grau d_i.

Definição 4.5. O termo $\Pi^{(d_1)}$, assumido como não trivial, é chamado de parte quase homogênea de Π.

Como no caso anterior para expansão de Taylor homegênea, usando a identidade de Jacobi para Π, obtemos que $\Pi^{(d_1)}$ também define uma estrutura de Poisson quase homogênea e, além disso, Π pode ser visto como uma deformação de $\Pi^{(d_1)}$.

Assim, temos a seguinte questão: como encontrar uma transformação de coordenadas que envia Π a $\Pi^{(d_1)}$, em outras palavras, existe uma transformação que elimina todos os termos quase homogêneo de grau $> d_1$ na expressão de Π. Para encontrar tal transformação com estas condições, precisaremos de uma versão graduada quase homogênea da cohomologia de Poisson.

Considere $\Pi^{(d)}$ uma estrutura de Poisson em um espaço $V = \mathbb{K}^n$ de dimensão n, que é quase homogêneo de grau d em relação a um dado campo vetorial quase radial $Z = \sum_{i=1}^n w_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Para cada $r \in \mathbb{Z}$, denotemos por $\mathcal{V}^k_{(r)} = \mathcal{V}^k_{(r)}(\mathbb{K}^n)$ o espaço dos campos k-vetoriais quase homogêneo em $\mathbb{K}^{(n)}$ de grau r com respeito ao campo Z. Note que, $\mathcal{V}^k = \oplus_r \mathcal{V}^k_{(r)}$, onde $\mathcal{V}^k = \mathcal{V}^k(\mathbb{K}^n)$ é o espaço de todos os campos vetoriais polinomiais em $\mathbb{K}^n$.

Seja $\Lambda \in \mathcal{V}^k_{(r)}$, então

$$\mathcal{L}_Z[\Pi^{(d)}, \Lambda] = [\mathcal{L}_Z \Pi^{(d)}, \Lambda] + [\Pi^{(d)}, \mathcal{L}_Z \Lambda] = (d + r)[\Pi^{(d)}, \Lambda],$$

e assim, temos que $\delta_{\Pi^{(d)}} \Lambda = [\Pi^{(d)}, \Lambda] \in \mathcal{V}^{k+1}_{(r+d)}$.

Definição 4.6. O grupo

$$H^k_{(r)}(\Pi^{(d)}) = \frac{Nuc(\delta_{\Pi^{(d)}} : \mathcal{V}^k_{(r)} \to \mathcal{V}^{k+1}_{(r+d)})}{Im(\delta_{\Pi^{(d)}} : \mathcal{V}^{k-1}_{(r-d)} \to \mathcal{V}^k_{(r)})}$$

é chamado de k-ésimo grupo de cohomologia de Poisson quase homogêneo de grau r de $\Pi_{(d)}$.

Agora, tomando a série quase homogênea de Taylor $\Pi = \Pi^{(d_1)} + \Pi^{(d_2)} + ...$, a identidade de Jacobi para Π implica que $[\Pi^{(d_1)}, \Pi^{(d_2)}] = 0$, ou seja, $\Pi^{(d_2)}$ é um cociclo quase homogêneo no complexo de Lichnerowicz de $\Pi^{(d_1)}$. Assim, se $\Pi^{(d_2)}$ é um cobordo, isto é, se $\Pi^{(d_2)} = [\Pi^{(d_1)}, X^{(d_2-d_1)}]$ para algum campo vetorial quase homegêneo $X^{(d_2-d_1)} = X_i^{(d_2-d_1)} \frac{\partial}{\partial x_i}$, então a transformação de coordenadas $x_i' = x_i - X_i^{(d_2-d_1)}$ elimina o termo $\Pi_{(d_2)}$ na expressaõ de Π.

Mais geralmente, temos o seguinte resultado.

Proposição 4.1. *Com as notações acima, suponha que* $\Pi^{(d_k)} = [\Pi^{(d_1)}, X] + \Lambda^{(d_k)}$ *para algum* $k > 1$, *onde* $X = X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ *é um campo vetorial quase homegêneo de grau* $d_k - d_1$. *Então, o difeomorfismo (transformação coordenada)* $\phi : (x_i) \mapsto (x_i') = (x_i - X_i)$ *transforma* Π *em*

$$\phi_* \Pi = \Pi^{(d_1)} + ... + \Pi^{(d_{k+1})} + \Lambda^{(d_k)} + \widetilde{\Pi}^{(d_{k+1})} ...$$

Em outras palavras, essa transformação suprime o termo $[\Pi^{(d_1)}, X]$ *sem alterar os termos de grau estritamente menor que* d_k.

4.1 Decomposição de Levi

A decomposição de Levi para uma estruturas de Poisson é um tipo de forma normal que se anulam em um ponto da variedade de Poisson M. O nome decomposição de Levi é devido a analogia com a decomposição de Levi-Malcev para álgebras de Lie de dimensão finita.

Primeiramente faremos o estudo da teoria da decomposição de Levi para uma álgebra de Lie de dimensão finita. Posteriormente, discutiremos o análogo do teorema de Levi-Malcev para o caso em que a álgebra de Lie tem dimensão infinita e consequentemente encontrar a decomposição de Levi para estruturas de Poisson. Nosso objetivo é o caso em que a estrutura de Poisson é formal. Os demais casos, quando a estrutura é suave ou analítica, apresentaremos apenas os resultados com as respectivas referências.

Começaremos com o estudo de decomposição de Levi em uma álgebra de Lie de dimensão finita.

Considere L uma álgebra de Lie de dimensão finita. Seja τ o radical de L. Então o quociente $\mathfrak{g} = \frac{L}{\tau}$ é semissimples. Assim, temos que a sequência abaixo é exata

$$0 \to \tau \to L \to \mathfrak{g} \to 0.$$

Pelo Teorema Levi-Malcev, temos que a sequência acima é splits, isto é, existe um homomorfismo injetivo de álgebra de Lie $i : \mathfrak{g} \to L$ tal que a composição com o mapa projeção $L \to \mathfrak{g}$ é a identidade.

Definição 4.7. A imagem $i(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ em L é chamada de fator de Levi de L e, a menos de conjugação em L, é único.

Além disso, ainda pelo resultado do Teorema de Levi-Malcev, podemos identificar $\mathfrak{g}$ com $i(\mathfrak{g})$ e temos que $\mathfrak{g}$ age em τ pela ação adjunta em L, e desta forma L admite uma decomposição em produto semi-direto de $\mathfrak{g}$ com τ:

$$L = \mathfrak{g} \ltimes \tau.$$

Definição 4.8. A decomposição da álgebra de Lie L dada pelo produto semi-direto $L = \mathfrak{g} \ltimes \tau$ é chamada decomposição de Levi de L.

Agora, iremos discutir o caso em que a álgebra de Lie possui dimensão infinita, usando analógos do teorema de Levi-Malcev para o caso de dimensaõ finita.

Definição 4.9. Seja $\mathcal{L}$ uma álgebra de Lie de dimensão infinita. Suponha que $\mathcal{L}$ admite uma filtração

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \supset \mathcal{L}_1 \supset \mathcal{L}_2 \supset ...$$

tal que $\forall\ i, j \geq 0$, $[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] \subset \mathcal{L}_{i+j}$ e $dim\left(\dfrac{\mathcal{L}_i}{\mathcal{L}_{i+1}}\right) < \infty$. Dizemos então que $\mathcal{L}$ é uma álgebra de Lie pro-finita e que o limite inverso

$$\hat{\mathcal{L}} = \lim_{\infty \leftarrow i} \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_i}$$

é a conclusão formal de $\mathcal{L}$ com respeito a uma dada filtração pro-finita.

Exemplo 4.1. Seja $\mathcal{L}$ a álgebra de Lie de campo vetoriais suaves em $\mathbb{R}^n$ que se anula na origem 0, e seja $\mathcal{L}_k$ o ideal de $\mathcal{L}$ consistindo dos campos vetoriais com zero $k-$jet em 0. Se considerarmos coordenadas locais em $\mathbb{R}^n$, então um $k-$jet de um campo vetorial X nada mais é do que o conjunto das derivadas parciais até a ordem k das funções componentes de X em 0. Assim, $\mathcal{L}$ é pro-finita e a conclusão formal é a álgebra dos campo vetoriais formal em 0.

Considere uma álgebra de Lie pro-finita $\mathcal{L}$ e denote por τ o radical de $\mathfrak{l} = \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_1}$ e por $\mathfrak{g}$ o quociente semissimples $\frac{\mathfrak{l}}{\tau}$. Considerando a projeção $\psi : \mathcal{L} \to \mathfrak{l} = \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_1}$, denote $\mathcal{R} = \psi^{-1}(\tau)$ a pré-imagem de τ. Temos que $\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{R}} \cong \frac{\mathfrak{l}}{\tau} = \mathfrak{g}$. De fato, seja $\varphi : \mathfrak{l} \to \frac{\mathfrak{l}}{\tau}$ o mapa quociente natural. Considere

$$\mathcal{L} \to \mathfrak{l} \to \frac{\mathfrak{l}}{\tau}$$

e seja $\phi : \mathcal{L} \to \frac{\mathfrak{l}}{\tau}$ o mapa $\phi = \varphi \circ \psi$. Note que ϕ é um mapa sobrejtivo, pois ψ e φ são mapas sobrejetivos. Mais ainda, note que $\mathrm{Nuc}(\phi) = \mathcal{R}$. De fato, seja $\theta \in Nuc(\phi)$ então

$$\theta \in Nuc(\phi) \Longleftrightarrow \theta \in Nuc(\varphi \circ \psi) \Longleftrightarrow \overline{\psi(\theta)} \in \tau \Longleftrightarrow \psi(\theta) \in \tau \Longrightarrow \theta \in \psi(\tau) \Longrightarrow \theta \in \mathcal{L}$$

onde $\overline{\psi(\theta)}$ significa a classe correspondente em $\dfrac{\mathfrak{l}}{\tau}$.

Denote por $\hat{\mathcal{R}} = \lim\limits_{\infty \leftarrow i} \dfrac{\mathcal{R}}{\mathcal{L}_i}$ a conclusão formal de $\mathcal{R}$. Então temos a seguinte sequências exata:

$$0 \to \mathcal{R} \to \mathcal{L} \to \mathfrak{g} \to 0, \tag{4.1}$$

$$0 \to \hat{\mathcal{R}} \to \hat{\mathcal{L}} \to \mathfrak{g} \to 0. \tag{4.2}$$

Definição 4.10. O ideal $\mathcal{R}$ é um ideal de $\mathcal{L}$ chamado de radical pro-solúvel.

A sequência exata (4.1) nem sempre é split, enquanto a sequência exata (4.2) sempre é, devido ao seguinte resultado.

Teorema 4.2. *Dada uma álgebra de Lie pro-finita como acima e usando as mesmas notações acima, existe um mapa injetivo $i : \mathfrak{g} \to \hat{\mathcal{L}}$ cuja composição com o mapa projeção $\hat{\mathcal{L}} \to \mathfrak{g}$ é o mapa identidade. A menos de conjugação em $\hat{\mathcal{L}}$, o mapa injetivo i é único.*

Demonstração: Faremos a prova por indução, para cada $k \in \mathbb{N}$ iremos construir uma injetividade $i_k : \mathfrak{g} \to \mathcal{L}/\mathcal{L}_k$ cuja composição com o mapa projeção $\mathcal{L}/\mathcal{L}_k \to \mathfrak{g}$ é a indentidade e tal que a seguinte condição de compatibilidade é satisfeita: o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "i_{k+1}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & \mathcal{L}/\mathcal{L}_{k+1} \arrow[d, "\mathrm{proj.}"] \\ \mathfrak{g} \arrow[r, "i_k"] & \mathcal{L}/\mathcal{L}_k \end{tikzcd}$$

é comutativo. Então, $i = \lim_{\leftarrow} i_k$ será a injetividade desejada. Quando $k = 1$, i_1 é dada pelo Teorema de Levi-Malcev.

Assumimos agora que i_k foi construído. Denote por $\rho : \mathfrak{g} \to \mathcal{L}/\mathcal{L}_{k+1}$ um mapa linear arbitrário que levanta o homomorfismo injetivo de álgebra de Lie $i_k : \mathfrak{g} \to \mathcal{L}/\mathcal{L}_k$. Podemos fazer com que ρ seja uma injetividade de álegbra de Lie.

Note que $\mathcal{L}_k/\mathcal{L}_{k+1}$ é um $\mathfrak{g}$-módulo. A ação de $\mathfrak{g}$ em $\mathcal{L}_k/\mathcal{L}_{k+1}$ é definida por: para $x \in \mathfrak{g}$, $v \in \mathcal{L}_k/\mathcal{L}_{k+1}$, tome $x.v = [\rho(x), v] \in \mathcal{L}_k/\mathcal{L}_{k+1}$. Se $x, y \in \mathfrak{g}$ então $[\rho(x), \rho(y)] - \rho([x,y]) \in \mathcal{L}_k/\mathcal{L}_{k+1} \subset \mathcal{L}_1/\mathcal{L}_{k+1}$ e, portanto, $[[\rho(x), \rho(y)] - \rho([x,y]), v] = 0$ pois, $[\mathcal{L}_1/\mathcal{L}_{k+1}, \mathcal{L}_k/\mathcal{L}_{k+1}] = 0$. A identidade de Jacobi em $\mathcal{L}/\mathcal{L}_{k+1}$ então implica que $x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v) = [x,y] \cdot v$, assim, $\mathcal{L}_k/\mathcal{L}_{k+1}$ é um $\mathfrak{g}$-módulo.

Defina a seguinte $2-$cocadeia $f : \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \to \mathcal{L}_k/\mathcal{L}_{k+1}$:

$$x \wedge y \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \mapsto f(x,y) = [\rho(x), \rho(y)] - \rho([x,y]) \in \mathcal{L}_k/\mathcal{L}_{k+1}.$$

Vamos verificar que f é um $2-$cociclo do complexo de Chevalley-Eilenberg correspondente: denote por $\oint_{xyz}$ a soma cíclica em (x,y,z), temos

$$\begin{aligned}
\delta f(x,y,z) &= \oint_{xyz} (x \cdot f(y,z) - f([y,z],x)) \\
&= \oint_{xyz} ([\rho(x), [\rho(y), \rho(z)] - \rho([y,z])] - [\rho[y,z], \rho(x)] + \rho([[y,z],x])) \\
&= \oint_{xyz} [\rho(x), [\rho(y), \rho(z)]] + \oint_{xyz} \rho([[y,z],x]) = 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Como $\mathfrak{g}$ é semissimples, pelo lema de Whitehead, cada $2-$cociclo de $\mathfrak{g}$ é um 2-cobordo. Em particular, existe uma 1-cocadeia $\phi : \mathfrak{g} \to \mathcal{L}_k/\mathcal{L}_{k+1}$ tal que $\delta\phi = f$, isto é,

$$[\rho(x), \phi(y)] - [\rho(y), \phi(x)] - \phi([x,y]) = [\rho(x), \rho(y)] - \rho([x,y]).$$

Isso implica que o mapa linear $i_{k+1} = \rho - \phi$ é um homomorfismo de álgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ para $\mathcal{L}/\mathcal{L}_{k+1}$. Como a imagem de ϕ pertence a $\mathcal{L}_k/\mathcal{L}_{k+1}$ então i_{k+1} é o levantamento de i_k. Assim, i_{k+1} satisfaz as condições requeridas. Por indução, a existência de i é provada.

Quando a unidade de i a menos de conjugação em $\widehat{\mathcal{L}}$ é provada de forma similar. Suponhamos que i_{k+1}, $i'_{k+1} : \mathfrak{g} \to \mathcal{L}/\mathcal{L}_{k+1}$ são duas injetividade diferentes que levantam i_k. Então $i'_{k+1} - i_{k+1}$ é um 1- cociclo e, logo, é um 1-cobordo pelo lema de Whitehead. Denote por α o elemento de $\mathcal{L}_k/\mathcal{L}_{k+1}$ tal que $\delta\alpha$ é um 1-cobordo. Então o automorfismo interno de $\mathcal{L}/\mathcal{L}_{k+1}$ é dado por

$$v \in \mathcal{L}/\mathcal{L}_{k+1} \mapsto Ad_{\exp \alpha} v = v + [\alpha, v]$$

pois, os demais termos se anulam e é uma conjugação em $\mathcal{L}/\mathcal{L}_{k+1}$ que relaciona i_{k+1} e i'_{k+1} e que se projeta para o mapa identidade em $\mathcal{L}/\mathcal{L}_{k+1}$. ■

Definição 4.11. A imagem de $i(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ em $\widehat{\mathcal{L}}$, onde i é dado pelo Teorema (4.2) é chamado de fator de Levi formal de $\mathcal{L}$.

Uma consequência do estudo de decomposição de Levi envolve a relação com problemas de linearização, aqui daremos apenas um exemplo desta relação envolvendo folheação singular. Para mais detalhes sugerimos a referência [1].

Exemplo 4.2. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa singular em uma vizinha de 0 em $\mathbb{C}^n$. O termo holomorfo significa, neste caso, que a folheação $\mathcal{F}$ é gerada por campos vetoriais holomorfos. Consideremos que o posto de $\mathcal{F}$ em 0 é zero, isto é, que $X(0) = 0$ para qualquer campo vetorial

X tangente a $\mathcal{F}$. Denote por $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ álgebra de Lie de germe 0 de campos vetoriais tangentes a $\mathcal{F}$ e por $\mathcal{X}^{(1)}(\mathcal{F})$ a álgebra de Lie consistindo da parte linear dos elementos de $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ em 0. Então, $\mathcal{X}^{(1)}(\mathcal{F})$ é a álgebra de Lie de campos vetorial linear. Denotemos por $\mathcal{F}^{(1)}$ é a folheação singular gerada por $\mathcal{X}^{(1)}(\mathcal{F})$ e chamamos de parte linear de $\mathcal{F}$.

Teorema 4.3 (Cerveau). *Com as notações do exemplo* (4.2), *se* $\mathcal{X}^{(1)}(\mathcal{F})$ *é semissimples e* $dim\ \mathcal{F} = dim\ \mathcal{F}^{(1)}$ *, então* $\mathcal{F}$ *é formalmente linearizado em 0, isto é, é formalmente isomorfo a* $\mathcal{F}^{(1)}$.

Demonstração: Note que $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ é uma álgebra de Lie pro-finita com uma filtração dada pela ordem de anulamento do campo vetorial em 0. Então, $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ admite um fator de Levi $\mathfrak{g}$. Como $\mathcal{X}^{(1)}(\mathcal{F})$ é semissimples, por hipótese, então $\mathfrak{g}$ é isomorfo a $\mathcal{X}^{(1)}(\mathcal{F})$. Desde que $\mathfrak{g}$ é semissimples, essa ação formal em $\mathbb{C}^n$ é formalizada linearmente pelo Teorema de Hermann. Suponha que a ação de $\mathfrak{g}$ foi linearizada. Então, temos que $\mathfrak{g}$ consiste de campos vetoriais lineares e portanto coincide com $\mathcal{X}^{(1)}(\mathcal{F})$. Em outras palavras, após a linearização formal, temos uma inclusão $\mathcal{X}^{(1)}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{X}(\mathcal{F})$, portanto $\mathcal{F}^{(1)} \subset \mathcal{F}$. Portanto, como por hipótese, $dim\ \mathcal{F} = dim\ \mathcal{F}^{(1)}$, eles coincidem. ∎

Teorema 4.4 (Hermann). *Se* $\mathfrak{g} \subset \mathcal{V}^1_{formal,0}(\mathbb{K}^n)$ *é uma subálgebra semissimples de dimensão finita da álgebra de Lie* $\mathcal{V}^1_{formal,0}(\mathbb{K}^n)$ *dos campos vetoriais formais em* $\mathbb{K}^n$ *que se anulam em 0, onde* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Então, existe um sistema de coordenadas formal* $(z_1, z_2, ..., z_n)$ *de* $\mathbb{K}^n$ *em 0, com respeito ao qual os elementos de* $\mathfrak{g}$ *têm coficientes lineares.*

Daremos uma ideia da demonstração.

Demonstração: A prova segue o procedimento de normalização formal usual, e é baseado no lema de Whitehead (3.6). Seja $X_1, ..., X_d$ uma base de $\mathfrak{g}$. Suponhamos que, em um sistema de coordenadas $(z_1, ..., z_n)$, temos

$$X_i = X_i^{(1)} + X_i^{(s)} + X_i^{(s+1)} + ...$$

com $s \geq 2$, onde $X_i^{(s)}$ é um campo vetorial cujos coeficientes são homogêneos de grau s. Então, devemos eliminar o termo $X_i^{(s)}$ na expressão de X_i por uma transformação de coordenadas do tipo $z_i' = z_i +$ termos de grau $\geq s$. Devido a identidade de Jacobi, o mapa $X_i \mapsto X_i^s$ é um 1-cociclo de $\mathfrak{g}$ com coeficientes no $\mathfrak{g}$-módulo de campos vetoriais homogêneos de grau s. Pelo lema de Whitehead, esse 1-cociclo é um cobordo, isto é, podemos escrever

$$X_i^{(s)} = [X_i^{(1)}, Y],$$

onde $Y = \sum_j f_j \frac{\partial}{\partial z_j}$ é homogêneo de grau s. Considere $z_i' = z_i - f_i$. Esta transformação de coordenadas vai eliminar o termo de grau s na expansão de Taylor de X_i. ∎

4.2 Decomposição de Levi de estruturas de Poisson

Considere uma estrutura de Poisson Π em uma vizinhança de 0 em $\mathbb{K}^n$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, que se anula em 0: $\Pi(0) = 0$. Denote por $\Pi^{(1)}$ a parte linear de Π em 0, e por L a álgebra de Lie das funções lineares em $\mathbb{K}^n$ com o colchete de Poisson linear $\Pi^{(1)}$. Seja $\mathfrak{g} \subset L$ uma subálgebra semissimples de L. Se Π é formal ou analítica, assumimos que $\mathfrak{g}$ é um fator de Levi de L. Se Π é suave e não analítica, podemos assumir que $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra semissimples maximal compacta de L. Neste caso, dizemos que tal subálgebra de fator de Levi compacto.

Denote por $(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_{n-m})$ uma base linear de L, tal que $x_1, ..., x_m$ gera $\mathfrak{g}$ ($dim\ \mathfrak{g} = m$), e $y_1, ..., y_{n-m}$ gera o complemento τ de $\mathfrak{g}$ com respeito a ação adjunta de $\mathfrak{g}$ em L, isto é, $[\mathfrak{g}, \tau] \subset \tau$. Nos casos analítico e formal, τ é o radical de L, já no caso em que Π é suave τ não é o radical em geral. Seja c_{ij}^k e a_{ij}^k as constantes estruturais de $\mathfrak{g}$ então, a ação de $\mathfrak{g}$ em τ é dada respectivamente por: $[x_i, x_j] = \sum_k c_{ij}^k x_k$ e $[x_i, y_j] = \sum_k a_{ij}^k y_k$.

Definição 4.12. Com as notações acima, dizemos que Π admite uma decomposição de Levi formal ou forma de Levi normal em 0 (respectivamente analítica, respectivamente suave) com respeito ao fator de Levi (compacto) $\mathfrak{g}$, se existe um sistema de coordenadas formal (respectivamente analítica, respectivamente suave) $(x_1^\infty, ..., x_m^\infty, y_1^\infty, ..., y_{n-m}^\infty)$, onde $x_i^\infty = x_i +$ termos de ordem superiores e $y_i^\infty = y_i +$ termos de ordem superiores, tal que neste sistema de coordenadas temos

$$\Pi = \sum_{i<j} c_{ij}^k x_k^\infty \frac{\partial}{\partial x_i^\infty} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j^\infty} + \sum a_{ij}^k y_k^\infty \frac{\partial}{\partial x_i^\infty} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j^\infty} + \sum_{i<j} P_{ij} \frac{\partial}{\partial y_i^\infty} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j^\infty}, \tag{4.3}$$

onde P_{ij} são funções formal (respectivamente analítica, respectivamente suave).

Ou ainda, podemos expressar a equação (4.3) como

$$\{x_i^\infty, x_j^\infty\} = \sum c_{ij}^k x_k^\infty \qquad \text{e} \qquad \{x_i^\infty, y_j^\infty\} = \sum a_{ij}^k y_k^\infty.$$

Assim, temos que o colchete de Poisson $\{x_i^\infty, x_j^\infty\}$ e $\{x_i^\infty, y_j^\infty\}$ são lineares. E, em particular, o campo vetorial Hamiltoniano de x_i^∞ também é linear

$$X_{x_i^\infty} = \sum c_{ij}^k x_k^\infty \frac{\partial}{\partial x_j^\infty} + \sum a_{ij}^k y_k^\infty \frac{\partial}{\partial y_j^\infty}. \tag{4.4}$$

Teorema 4.5 (Wade)**.** *Qualquer estrutura de Poisson formal Π em $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) que se anula em 0 admite uma formal decomposição de Levi.*

Demonstração: Denote por $\mathcal{L}$ a álgebra de Lie de funções formais de $\mathbb{K}^n$ tal que o colchete de Lie de Π se anulam em 0. Então, $\mathcal{L}$ é uma álgebra pro-finita, cuja conclusão é dada por ela mesma. A álgebra de Lie $\mathcal{L}/\mathcal{L}_1$, onde $\mathcal{L}_1$ é o ideal de $\mathcal{L}$ consistindo das funções que se anulam em 0 junto com suas primeiras derivadas, é isomorfo a álgebra de Lie $\mathfrak{l}$ das funções lineares em $\mathbb{K}^n$ cujo colchete de Lie é dado pela estrutura de Poisson linear $\Pi^{(1)}$. Pelo Teorema (4.2), $\mathcal{L}$ admite um fator de Levi que é isomorfo ao fator de Levi $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{l}$. Denote por $x_1^\infty, ..., x_m^\infty$ a base linear do fator de Levi de $\mathcal{L}$, $\{x_i^\infty, x_j^\infty\} = \sum_k c_{ij}^k x_k^\infty$ onde c_{ij}^k são constantes estruturais de $\mathfrak{g}$. Então, o campo vetorial Hamiltoniano $X_{x_1^\infty}, ..., X_{x_m^\infty}$ dá uma ação formal de $\mathfrak{g}$ em $\mathbb{K}^n$. Assim, pelo teorema (4.4), essa ação formal pode ser formalmente linearizada, isto é, existe um sistema de coordenada formal $(x_1^0, ..., y_{n-m}^0)$ tal que

$$X_{x_i^\infty} = \sum c_{ij}^k x_k^0 \frac{\partial}{\partial x_j^0} + \sum a_{ij}^k y_k^0 \frac{\partial}{\partial y_j^0}.$$

Pode acontecer de que $x_i^0 \neq x_i^\infty$ mas em qualquer caso, $x_i^0 = x^\infty +$ termos de ordem superior e $X_{x_i^\infty}(x_j^\infty) = \sum_k c_{ij}^k x_k^\infty$, $X_{x_i^\infty}(y_j^0) = \sum_k a_{ij}^k y_k^0$. Rescrevendo y_i^0 por y_i^∞, temos um sistema de coordenadas $(x_1^\infty, ..., y_{n-m}^\infty)$ de modo que Π seja uma forma normal de Levi formal. ∎

Um caso particular do teorema anterior (4.5) é a seguinte linearização formal do teorema da decomposição (2.3): se a parte linear de Π em 0 é semissimples, então Π é formalmente linearizável em 0 [1].

Como mencionamos, apresentaremos também os resultados de como obtermos uma decomposição de Levi em estruturas de Poisson analíticas e suaves. A demonstração dos seguintes resultados, exigem técnicas matemáticas mais avançadas e podem ser encontrados na Seção 3.5 e 3.6 de [1].

Quando a estrutura de Poisson Π é analítica, temos o seguinte resultado

Teorema 4.6. *Qualquer estrutura de Poisson analítica Π em uma vizinhança de 0 em $\mathbb{K}^n$ onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ que se anula em 0, admite uma decomposição de Levi analítica.*

No caso particular em que $L = ((\mathbb{K}^n)^*, \{.,.\}_{\Pi^{(1)}})$ é uma álgebra de Lie semissimples (ou seja, quando $L = \mathfrak{g}$), podemos considerar o resultado do teorema de Conn: qualquer estrutura de Poisson com parte linear semissimples é localmente analiticamente linearizável.

Por fim, para o caso em que a estrutura de Poisson Π é suave temos

Teorema 4.7 (Monnier-Zung)**.** *Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, existe $p' \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $p' < \infty$ se $p < \infty$ de modo que seja válido a seguinte afirmação: Seja Π uma estrutura de Poisson suave de classe C^p em uma vizinhança de 0 em $\mathbb{R}^n$. Denote por $\mathfrak{l}$ a álgebra de Lie das funções lineares em $\mathbb{R}^n$ com o colchete de Lie-Poisson dado por Π_1, que é a parte linear de Π, e por $\mathfrak{g}$ o fator de Levi compacto de $\mathfrak{l}$. Então existe uma decomposição de Levi suave de classe $C^{p'}$ de Π com respeito a $\mathfrak{g}$ em uma vizinhança de 0.*

Referências Bibliográficas

[1] Dufour, Jean-Paul; Zung, Nguyen Tien. *Poisson Strutures and Their Normal Forms.* Springer Science e Business Media, 2006.

[2] Fernandes, Rui Loja; Mârcut, Ioan. *Lectures on Poisson Geoemetry.* Preprint, 2015.

[3] Matheus, Carlos José. *Grupos e álgebras de Lie.* Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2014.

[4] Moerdijk, leke.; Mrcun,Janez. *Introduction to Foliations and Lie Groupoids.* Cambridge University Press, 2003.

[5] Camacho, César; Neto, Alcides Lins *Geometric Theory of Foliation.* Birkhäuser Basel, 1985.

[6] Lima, E. L. *Variedades Diferenciáveis.* IMPA, Rio de Janeiro, 1973.

[7] San Martin, Luiz AB. *Álgebra de Lie.* Unicamp, 2010.

[8] da Silva, Ana Cannas, *Lectures on Symplectic Geometry.*Berlin: Springer, 2008.

[9] Do Amaral Ramos, Ana Carolina Dias. *Sistema de controle lineares em grupo de Lie*, Dissertação de Mestrado (Mestrado em Matemática)- Instituto de Ciências Matemáticas e Computação, Universidade de São Paulo. São Paulo, p.104. 2013.

[10] S. D. Poisson, *Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de m ´ecanique*, J. Ecole Polytechnique, 8 (1809), pp. 265–344.

[11] Weinstein, Alan. *Poisson geometry.* Differential Geometry and its applications, v. 9, n. 1-2, p. 213-238, 1998.

[12] Bursztyn, H. e Macarini, L. *Introdução à Geometria Simplética*, XIV Escola de Geometria Diferencial, IMPA, Rio de Janeiro.

[13] Da Silva, A.C. *Lectures on symplectic geometry*, Lectures Note in Mathematics, vol. 1764, Springer Verlag, 2011.

[14] J. A. Schouten, *Ũber Differentialkonkomitanten zweier kontravarianter Größen*,Indag. Math. 2 (1940), 449–452.

[15] A. Lichnerowicz, *Les varietes de Poisson et leurs alg'ebres de Lie associ ´ees*, J. Differential Geometry, 12 (1977), pp. 253–300.

[16] Tu, L. W., *An introduction to Manifolds*, 2ª ed, Springer, New York, NY, 2011.

[17] Palis, J. e De Melo W., *Introdução aos sistemas dinâmicos*, Rio de Janeiro, Brazil (1975)

[18] Nakanishi, Nobutada. *Poisson cohomology of plane quadratic Poisson structures.* Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, v. 33, n. 1, p. 73-89, 1997.