

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas – ICEX
Programa de Pós-Graduação em Matemática (PGMAT)

Lucas Almeida Portela

O Método do Gradiente Conjugado Estocástico

Belo Horizonte

2025

Lucas Almeida Portela

O Método do Gradiente Conjugado Estocástico

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr Ricardo Hiroshi Caldeira Takahashi (ICEX-UFMG)

Coorientador: Prof. Dr Bernardo Nunes Borges de Lima (ICEX-UFMG)

Coorientador: Prof. Dr Luis Carlos de Castro Santos (IME-USP)

Belo Horizonte

2025

2025, Lucas Almeida Portela.
Todos os direitos reservados

Portela, Lucas Almeida.

P843m

O Método do gradiente conjugado estocástico [recurso eletrônico] / Lucas Almeida Portela – 2025.
132 f. il.

Orientador: Ricardo Hiroshi Caldeira Takahashi.

Coorientador: Luís Carlos de Castro Santos.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f.123-126.

1. Matemática – Teses. 2. Otimização matemática – Teses.
3. Métodos do gradiente conjugado – Teses. I. Takahashi, Ricardo Hiroshi Caldeira. II. Lima, Bernardo Nunes Borges de. III. Santos, Luís Carlos de Castro. IV. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. V. Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irenquer Vismeg Lucas Cruz
CRB 6/819 - Universidade Federal de Minas Gerais – ICEX



FOLHA DE APROVAÇÃO

O Método do Gradiente Conjugado Estocástico

LUCAS ALMEIDA PORTELA

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Prof. Ricardo Hiroshi Caldeira Takahashi
Orientador - UFMG

Documento assinado digitalmente
gov.br RICARDO HIROSHI CALDEIRA TAKAHASHI
Data: 10/02/2026 11:51:04-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Documento assinado digitalmente
gov.br BERNARDO NUNES BORGES DE LIMA
Data: 11/02/2026 15:41:10-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Prof. Bernardo Nunes Borges de Lima
Coorientador - UFMG

Documento assinado digitalmente
gov.br LUIS CARLOS DE CASTRO SANTOS
Data: 10/02/2026 21:00:59-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Prof. Luís Carlos de Castro Santos
Coorientador - USP

Documento assinado digitalmente
gov.br ANATOLI IAMBARTSEV
Data: 25/12/2025 12:35:27-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Prof. Anatoli Iambartsev
USP

Prof. Carlos M. Fonseca
UFMG

Documento assinado digitalmente
gov.br MARCELO RICHARD FELARDO
Data: 05/01/2026 10:29:40-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Prof. Marcelo Richard Felardo
UFMG

Prof. Renato Soares dos Santos
UFMG

Documento assinado digitalmente
gov.br ROBERTO IMBUZEIRO MORAES FELINTO DE OLIVEIRA
Data: 07/02/2026 13:31:59-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Prof. Roberto Imbuzeiro Moraes Felinto de Oliveira
IMPA

Belo Horizonte, 10 de dezembro de 2025.

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus, por essa nova conquista. Pois, é Ele a minha fonte e sempre será. Posteriormente, os agradecimentos são direcionados ao orientador, professor Ricardo Hiroshi Caldeira Takahashi e ao (co)orientador, professor Bernardo Nunes Borges de Lima. Tenho muita sorte e privilégio de tê-los como mestres e referências. Não sei se será recíproco, mas sentirei MUITA falta dos nossos seminários e conversas. Em seguida, gostaria de agradecer ao meu terceiro (co)orientador, professor Luís Carlos de Castro Santos, tenho certeza de que só cheguei a esse estágio pelo apoio do senhor. Obrigado, obrigado e muito obrigado aos professores.

Seguidamente, à minha mãe, Sandra, à irmã, Sarah e esposa, Jordana, pelo tempo cedido a mim. À Jordana, meus sinceros agradecimentos pelo tempo dispendido à correção ortográfica desta tese, longas conversas, companheirismo e, principalmente, paciência nesses "sei lá" quantos anos de estudo (mestrado 1, mestrado 2 e doutorado). Que venha a pós!

"Não sei. Só sei que foi assim..."

— Chicó, personagem de "O Auto da Compadecida" - Ariano Suassuna

Resumo

Neste trabalho, desenvolvemos o método do gradiente conjugado linear e não linear estocásticos, demonstrando, utilizando a teoria da probabilidade, a convergência quase certa e a análise da taxa de convergência para a solução de problemas de otimização estocásticos. Para essas demonstrações, usamos o conceito de quase supermartingales não negativos, introduzido por Robbins e Siegmund (1971), que generaliza o conceito de supermartingales não negativos. No que se refere à análise da taxa de convergência do método linear estocástico proposto, obtemos uma taxa da ordem $O\left(\frac{1}{k \log k}\right)$, superior à do método de Robbins e Monro, cuja taxa de convergência é $O\left(\frac{1}{k}\right)$ para a mesma classe de problemas considerada. Em seguida, desenvolvemos uma versão estocástica do método do gradiente conjugado não linear, cujas principais características, no contexto das demonstrações de convergência quase certa e da análise da taxa de convergência, incluem o uso de estimativas do gradiente e dos valores da função custo e, sobretudo, a adoção de uma busca em linha que satisfaz a condição de Armijo, a qual é menos restritiva do que a condição de Wolfe.

Palavras-chave: otimização estocástica; gradiente conjugado; gradiente conjugado estocástico.

Abstract

In this work, we develop stochastic linear and nonlinear conjugate gradient methods, establishing, based on probability theory, almost sure convergence and convergence rate analysis for the solution of stochastic optimization problems. For these results, we employ the concept of nonnegative quasi-supermartingales, introduced by Robbins and Siegmund (1971), which generalizes the concept of nonnegative supermartingales. Regarding the convergence rate analysis of the proposed stochastic linear method, we obtain a rate of order $O\left(\frac{1}{k \log k}\right)$, which is superior to that of the Robbins-Monro method, whose convergence rate is $O\left(\frac{1}{k}\right)$, for the same class of problems analysed. Subsequently, we develop a stochastic version of the nonlinear conjugate gradient method, whose main features, in the proofs of almost sure convergence and convergence rate analysis, include the use of estimates of the gradient and the objective function values and, in particular, the adoption of a line search satisfying the Armijo condition, which is less restrictive than the Wolfe condition.

Keywords: stochastic optimization; conjugate gradient; stochastic conjugate gradient.

Lista de ilustrações

Figura 1	– Gráfico da função $Y(x) = \hat{f}(x, \xi)$, definida no intervalo $x \in [-2, 2]$, para uma realização de ξ	16
Figura 2	– Gráfico da função $f(x) = E[Y(x)]$, em vermelho, e gráfico da função $Y(x) = \hat{f}(x, \xi)$, em azul, definidas no intervalo $[-2, 2]$, para uma realização de ξ	16
Figura 3	– Gráficos da função $\hat{f}(x, \xi)$, com 5 realizações (observações) de ξ , definidas no intervalo $[-2, 2]$	17
Figura 4	– Gráficos das funções $\bar{f}(x) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q y(x)^k$, em azul, com $q = 100$, e $f(x) = E[Y(x)]$, em vermelho, definidas no intervalo $[-2, 2]$	17
Figura 5	– Gráficos das funções $\bar{f}(x) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q y(x)^k$, em azul, com $q = 1000$, e $f(x) = E[Y(x)]$, em vermelho, definidas no intervalo $[-2, 2]$	18
Figura 6	– Gráfico da função $Y(x) = \hat{f}(x, \xi)$, definida no intervalo $x \in [-4, 4]$, para uma realização de ξ	18
Figura 7	– Gráfico da função $f(x) = E[Y(x)]$, em vermelho, e gráfico da função $Y(x) = \hat{f}(x, \xi)$, em azul, definidas no intervalo $[-4, 4]$, para uma realização de ξ	19
Figura 8	– Gráfico da função $\hat{f}(x, \xi)$ com 2 realizações de ξ no intervalo $[-4, 4]$, em vermelho e azul.	19
Figura 9	– Gráficos das funções $\bar{f}(x) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q y(x)^k$, em azul, com $q = 100$, e $f(x) = E[Y(x)]$, em vermelho, no intervalo $[-4, 4]$	20
Figura 10	– Gráficos das funções $\bar{f}(x) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q y(x)^k$, em azul, com $q = 1000$, e $f(x) = E[Y(x)]$, em vermelho, no intervalo $[-4, 4]$	20
Figura 11	– Gráfico da função $f(x)$, destacando uma iteração do Método de Brent em vermelho.	21
Figura 12	– Gráfico da função $f(x)$, com destaque para três iterações do Método de Brent: primeira em vermelho, segunda em verde e última em laranja. Notemos que há uma aproximação da raiz de f em apenas três iterações.	22
Figura 13	– Gráfico da função $f(x)$, em vermelho, e gráfico da função $\hat{f}(x, \xi)$, em azul, para uma realização de ξ , destacando a primeira iteração do método de Brent, em amarelo, para a função $\hat{f}(x, \xi)$	23
Figura 14	– Gráfico da função $f(x)$, em vermelho, e gráfico da função $\hat{f}(x, \xi)$, em azul, para uma realização de ξ , destacando a segunda iteração do método de Brent, em amarelo, para a função $\hat{f}(x, \xi)$	23

Figura 15 – Gráfico da função $f(x)$, em vermelho, e da função $\hat{f}(x, \xi)$, em azul, para uma realização de ξ , com destaque para a terceira iteração do método de Brent, em amarelo, aplicada à função $\hat{f}(x, \xi)$. Note que a raiz de f está fora do intervalo considerado nas iterações seguintes, o que inviabiliza a utilização desse método para o objetivo estabelecido.	24
Figura 16 – Método de Robbins e Monro ($x_{k+1} = x_k - a_k y(x_k)$), considerando a sequência $a_k = 1$ para todo $k \geq 1$. Foram executadas 100 iterações, sendo as últimas 10, apresentadas neste gráfico. A função f está representada em vermelho; os valores $f(x_k)$, em azul; e $y(x_k)$, em verde. O ponto inicial adotado é $x_1 = 1,5$.	24
Figura 17 – Método de Robbins e Monro ($x_{k+1} = x_k - a_k y(x_k)$), considerando a sequência $a_k = \frac{1}{k^2}$ para todo $k \geq 1$. Foram executadas 100 iterações, sendo as últimas 10, apresentadas neste gráfico. A função f está representada em vermelho; os valores $f(x_k)$, em azul; e $y(x_k)$, em verde. Notamos a convergência prematura do método Robbins e Monro ao escolhermos essa sequência $\{a_k\}_{k \geq 1}$. O ponto inicial adotado é $x_1 = 1,5$	25
Figura 18 – Método de Robbins e Monro ($x_{k+1} = x_k - a_k y(x_k)$), considerando a sequência $a_k = \frac{1}{k}$ para todo $k \geq 1$. Foram executadas 100 iterações, sendo as primeiras 10, apresentadas neste gráfico. A função f está representada em vermelho; os valores $f(x_k)$, em azul; e $y(x_k)$, em verde. O ponto inicial adotado é $x_1 = 1,5$	26
Figura 19 – Método de Robbins e Monro ($x_{k+1} = x_k - a_k y(x_k)$), considerando a sequência $a_k = \frac{1}{k}$ para todo $k \geq 1$. Foram executadas 100 iterações, sendo as últimas 10, apresentadas neste gráfico. A função f está representada em vermelho; os valores $f(x_k)$, em azul; e $y(x_k)$, em verde. Notamos movimento contrário a localização da raiz de f , indicando divergência ao adotar a_k negativo para todo $k \geq 1$. O ponto inicial adotado é $x_1 = 1,5$	27
Figura 20 – Gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2 + 5 \sin^2(x) \sin^2(y)$	109
Figura 21 – Curvas de Nível da função $f(x, y) = x^2 + y^2 + 5 \sin^2(x) \sin^2(y)$ e campo vetorial do gradiente de f . O ponto em vermelho representa o ponto $(0, 0)$, mínimo global da função f	110
Figura 22 – Campo Vetorial do gradiente da função $f(x, y) = x^2 + y^2 + 5 \sin^2(x) \sin^2(y)$ com perturbação ($\nabla \hat{f}(x, y, \xi)$), em vermelho, e sem perturbação ($\nabla f(x, y)$), em azul.	111
Figura 23 – Norma l_∞ da diferença entre x_k e x^* , com $f(x^*) = 0$, para cada iterando $k \in \{1, \dots, 13\}$	115
Figura 24 – Módulo da diferença entre $f(x_k)$ e $f(x^*)$, com $f(x^*) = 0$, para cada iterando $k \in \{1, \dots, 13\}$	116

Figura 25 – Norma l_∞ da diferença entre $\nabla f(x_k)$ e $\nabla f(x^*)$, com $\nabla f(x^*) = 0$, para cada iterando $k \in \{1, \dots, 13\}$	116
Figura 26 – Norma l_∞ da diferença entre g_k , estimativa do gradiente no iterando x_k , e $\nabla f(x_k)$, para cada iterando $k \in \{1, \dots, 13\}$	117
Figura 27 – Módulo da diferença entre $f(x_k)$ e $f(x^*)$, com $f(x^*) = 0$, para cada iterando $k \in \{1, \dots, 13\}$. A aproximação de $\nabla f(x_k)$ é realizada pelo método das diferenças finitas para frente, equação (4.99).	118
Figura 28 – Norma l_∞ da diferença entre $\nabla f(x_k)$ e $\nabla f(x^*)$, com $\nabla f(x^*) = 0$, para cada iterando $k \in \{1, \dots, 13\}$. A aproximação de $\nabla f(x_k)$ é realizada pelo método das diferenças finitas para frente, equação (4.99).	119
Figura 29 – Norma l_∞ da diferença entre g_k , aproximação do gradiente no iterando x_k , realizada pelo método das diferenças finitas para frente (equação (4.99)), e $\nabla f(x_k)$, para cada iterando $k \in \{1, \dots, 13\}$	120

Lista de tabelas

Tabela 1 – Resultados dos experimentos numéricos para os 8 primeiros casos de teste definidos no início desta Seção 3.3, comparando os métodos de Robbins e Monro e o gradiente conjugado linear estocástico. Nesta tabela, GCLE é o acrônimo para o método do gradiente conjugado linear estocástico, proposto nesta tese na Seção 3.1. Além disso, os acrônimos M e DP representam a média e o desvio padrão, respectivamente. Já NA significa que o resultado numérico tendeu para $+\infty$	73
Tabela 2 – Resultados dos experimentos numéricos para os últimos 2 casos de teste definidos no início desta Seção 3.3, comparando os métodos de Robbins e Monro e o gradiente conjugado linear estocástico. Nesta tabela, GCLE é o acrônimo para o método do gradiente conjugado linear estocástico, proposto nesta tese na Seção 3.1. Além disso, os acrônimos M e DP representam a média e o desvio padrão, respectivamente. Já NA significa que o resultado numérico tendeu para $+\infty$	74
Tabela 3 – Significados dos parâmetros do algoritmo 2.	81
Tabela 4 – Valores dos parâmetros do algoritmo 2.	112

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS	35
2.1	Quase Supermartingales Não Negativos	35
2.2	Aplicação	46
2.2.1	Convergência Quase Certa do Método de Robbins e Monro	47
2.2.2	Convergência Quase Certa do Método de Kiefer e Wolfowitz	50
3	O GRADIENTE CONJUGADO LINEAR ESTOCÁSTICO	56
3.1	Convergência Quase Certa do Método do Gradiente Conjugado Linear Estocástico	56
3.2	Análise da Taxa de Convergência do Método do Gradiente Conjugado Linear Estocástico	64
3.3	Experimentos Numéricos	68
4	O GRADIENTE CONJUGADO NÃO-LINEAR ESTOCÁSTICO	75
4.1	Fundamentos Matemáticos	76
4.2	Convergência Quase Certa do Método do Gradiente Conjugado Não Linear Estocástico	79
4.3	Análise da Taxa de Convergência do Método do Gradiente Conjugado Não Linear Estocástico	103
4.4	Aplicação Teórica	104
4.5	Experimento Numérico	108
5	CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS	121
	REFERÊNCIAS	123
	APÊNDICES	127
	APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÕES	128

1 Introdução

Motivação

Iniciamos esse trabalho com três exemplos ilustrativos, que visam introduzir o leitor à mudança de paradigma imposta pela transição dos métodos determinísticos para os métodos estocásticos. Desse modo, desejamos encontrar a raiz, ou zero, da função

$$f(x) = \mathbb{E}[\hat{f}(x, \xi)], \quad (1.1)$$

em que $x \in \mathbb{R}$, $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma variável aleatória definida no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $\mathbb{E}[\cdot]$ a esperança de uma variável aleatória.

Neste primeiro exemplo, definimos $\hat{f}(x, \xi) = x + \xi$, $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, a distribuição normal com média $\mu = 0$ e variância $\sigma^2 = 4$. E, desejamos encontrar a raiz de $f(x) = \mathbb{E}[\hat{f}(x, \xi)]$, tendo "acesso" apenas ao conjunto de variáveis aleatórias $\hat{f}(x, \xi)$, ou melhor dizendo, ao valor da função $f(x)$ imersa em um ruído gaussiano, dada uma instância conhecida de x . Portanto, a única alternativa que possuímos é utilizar um método numérico iterativo para alcançarmos esse objetivo. Isto é, dado um valor inicial $x_0 \in \mathbb{R}$, faremos uso de uma observação da variável aleatória $\hat{f}(x_0, \xi)$, ou de um conjunto finito de observações, para definir o próximo valor x_1 e, assim, sucessivamente, com o objetivo de nos aproximarmos suficientemente da raiz de f . Se considerarmos que o método empregado irá gerar uma sequência infinita de valores $\{x_k\}_{k \geq 0}$, esperamos que $x_k \rightarrow 0$ (nesse exemplo), quando $k \rightarrow \infty$.

Definamos o processo estocástico $Y = \{Y(x)\}_{x \in \mathbb{R}}$, no qual $Y(x) = \hat{f}(x, \xi)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e ilustramos na Figura 1 um conjunto possível de informações (realizações) do processo Y disponíveis ao método iterativo, no domínio $x \in [-2, 2]$. Esse conjunto pode ser utilizado com a finalidade de encontrar a raiz de f . Isto é, com o respaldo da Figura 2, podemos utilizar, em uma rodada de iterações, os valores de Y — representados em azul — para gerar uma sequência $\{x_k\}_{k \geq 0}$ que se aproxima da raiz da função f , cujos valores estão representados em vermelho.

Para percebermos a diferença de abordagem matemática, tendo acesso aos valores da função f , não teríamos nenhuma dificuldade em encontrar o valor de sua raiz, podendo ser empregados métodos determinísticos clássicos da literatura para essa finalidade, i.e. método da bisseção, método de Newton-Raphson, método da secante. Porém, esses métodos clássicos requerem o valor de $f(x_k)$ a cada iteração e não "apenas" uma realização da variável aleatória $Y(x_k)$.

Por isso, utilizamos a Figura 3 para ressaltar que, fixando $x \in \mathbb{R}$, os valores de $Y(x)$ irão mudar a cada rodada de iterações, visto que $Y(x)$ é uma variável aleatória. Então, podemos pensar, nesse exemplo, utilizar a segunda lei forte dos grandes números de Kolmogorov para

tentar estimar os valores da função f , por meio da média. Assim, escolhamos $q \in \mathbb{N}$ e definimos

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q y(x)^k, \quad (1.2)$$

em que $y(x)^k$ é uma realização, ou observação, da variável aleatória $Y(x) = \hat{f}(x, \xi)$. O que estamos dizendo é que, para um $x \in \mathbb{R}$ fixo, amostramos q valores de $\hat{f}(x, \xi)$, definindo-os como $y(x)^1, \dots, y(x)^q$, e obtemos a média dessa sequência finita. Notemos que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $\bar{f}(x) \rightarrow f(x)$, quando $q \rightarrow \infty$, como já mencionado, pela segunda lei forte dos grandes números de Kolmogorov (nesse exemplo, poderíamos utilizar também a lei dos grandes números de Cantelli ou a primeira lei forte dos grandes números de Kolmogorov).

Porém, estamos lidando com métodos iterativos que serão implementados em software para serem executados em um computador, necessitando que q seja finito a cada iteração e, ainda mais, que q seja o menor número de iterações necessário para que se tenha uma "boa" representatividade de f . A título de curiosidade, alocamos nos gráficos 4 e 5, \bar{f} , f pontualmente estimado utilizando a igualdade (1.2), no intervalo $x \in [-2, 2]$, com $q = 100$ e $q = 1000$, respectivamente, juntamente com o gráfico da função f . Ponderamos que ao aumentarmos q , o número de amostras, estamos reduzindo a variância de $\bar{f}(x) - f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, mas não a tornando nula.

Diante desse cenário, o método numérico que precisamos empregar com o objetivo de realizar tal tarefa, encontrar a raiz da função (1.1), realizando observações do processo Y , poderá até ter a estrutura de métodos determinísticos. Contudo, haverá de se ter uma estratégia para aproximar o valor estimado de f , \bar{f} , e, conseqüentemente, definir o número de amostras q , a fim de se assegurar a convergência para a solução do problema abordado. Para esse caso, utilizar análises de convergência clássicas de métodos determinísticos não faz sentido, visto que tais análises requerem a informação exata de f , e não um valor estimado.

Em continuidade, no segundo exemplo, tratamos o problema de otimização formulado matematicamente por

$$x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} f(x), \quad (1.3)$$

em que $f(x) = E[\hat{f}(x, \xi)]$, $\hat{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ξ é uma variável aleatória ($\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$) definida no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ e $E[\cdot]$ é a esperança. Nesse exemplo, adotamos $\hat{f}(x, \xi) = x^2 + 2\xi$, na qual $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ é a distribuição normal padrão. Assim sendo, utilizamos a propriedade da linearidade da esperança para afirmar que o objetivo é encontrar o mínimo da função $f(x) = x^2$, realizando observações (amostras) na variável aleatória $\hat{f}(x, \xi)$, dada uma instância de x .

À primeira vista, quando os valores da função real f estão acessíveis, solucionar numericamente o problema (1.3), por meio de um método iterativo, parece ser uma tarefa simples. Nesse cenário, é possível empregar métodos de otimização determinísticos consagrados na literatura.

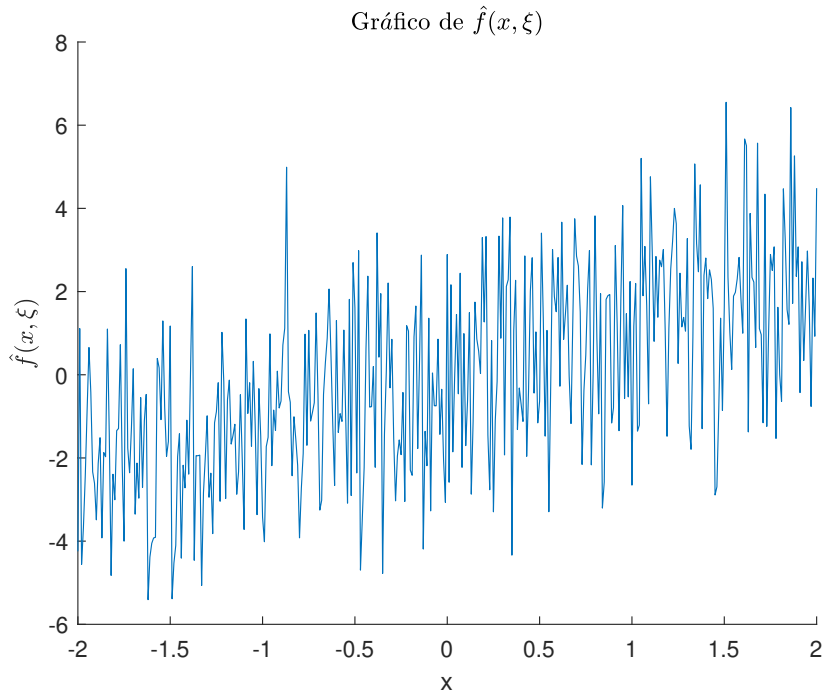
Considerando as características da função custo f , associada ao problema (1.3), destacamos os seguintes métodos: bisseção e secante, para a obtenção das raízes da derivada de f ; método de Newton; método de Brent; e o método da seção áurea. No entanto, o objetivo é determinar o ponto de mínimo da função custo f , correspondente ao problema de otimização (1.3), dispondo o método numérico iterativo acesso apenas à variável aleatória $\hat{f}(x, \xi)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Tal como no exemplo anterior, definimos o processo estocástico $Y = \{Y(x)\}_{x \in \mathbb{R}}$, onde $Y(x) = \hat{f}(x, \xi)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A título de ilustração, a Figura 6 apresenta um conjunto possível de informações ao qual o método iterativo pode ter acesso, no domínio $x \in [-4, 4]$, com o objetivo de encontrar o ponto de mínimo da função f . Notemos que, diferentemente da função $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, uma realização do processo estocástico Y , no mesmo intervalo, não é diferenciável em quase todos os pontos. A Figura 7 evidencia essa diferença entre f , representada pela curva vermelha, e uma realização do processo Y , em azul, mostrando que a informação disponível ao método numérico iterativo corresponde a valores de f contaminados por ruído gaussiano. Por fim, a Figura 8 ilustra o comportamento do processo estocástico Y , no mesmo intervalo, ressaltando que os valores de $Y(x)$ variam, mesmo com o valor de x mantido fixo.

Assim sendo, de forma análoga ao procedimento adotado para encontrar a raiz da função no primeiro exemplo, podemos utilizar $\bar{f}(x)$, definido na igualdade (1.2), para estimar $f(x)$, variando o número de amostras q . As Figuras 9 e 10 ilustram a aproximação de f (curva vermelha) à medida que aumentamos o número de amostras para computar \bar{f} (curva azul). Empregamos $q = 100$, na Figura 9, e $q = 1000$, na Figura 10. Como já mencionado, o aumento de q reduz a variância de $\bar{f}(x) - f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

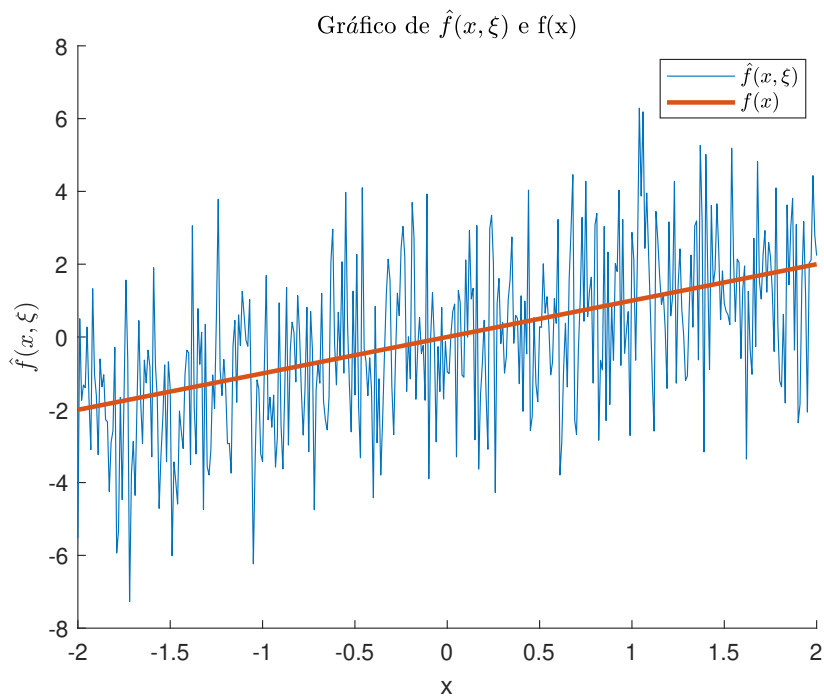
Portanto, assim como no primeiro exemplo, concluímos que as estruturas de métodos determinísticos podem, de fato, ser aplicadas ao presente caso. Contudo, será necessária uma nova abordagem matemática nas demonstrações das análises teóricas — como a análise de convergência e a análise da taxa de convergência — ao se utilizar \bar{f} , uma vez que as análises teóricas clássicas assumem o acesso ao valor exato da função f , e não a uma estimativa. Dessa forma, torna-se necessário recorrermos à natureza estocástica do problema e empregar a teoria da probabilidade para provarmos que os objetivos propostos nos dois exemplos, apresentados nesta seção, serão alcançados. Com isso, adentramos ao campo dos métodos estocásticos, destacando os métodos de Aproximações Estocásticas na próxima seção deste capítulo introdutório.

Figura 1 – Gráfico da função $Y(x) = \hat{f}(x, \xi)$, definida no intervalo $x \in [-2, 2]$, para uma realização de ξ .



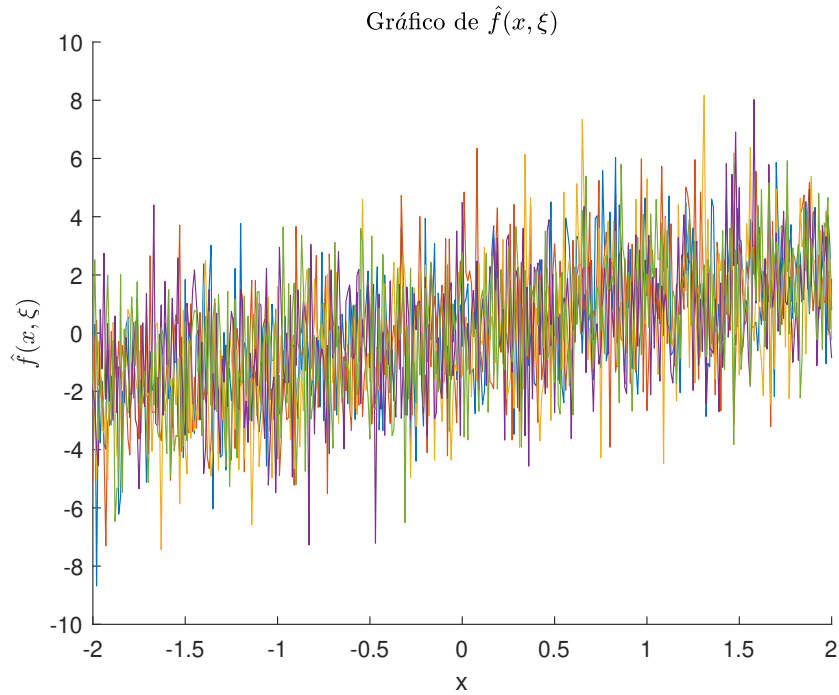
Fonte: figura do autor.

Figura 2 – Gráfico da função $f(x) = E[Y(x)]$, em vermelho, e gráfico da função $Y(x) = \hat{f}(x, \xi)$, em azul, definidas no intervalo $[-2, 2]$, para uma realização de ξ .



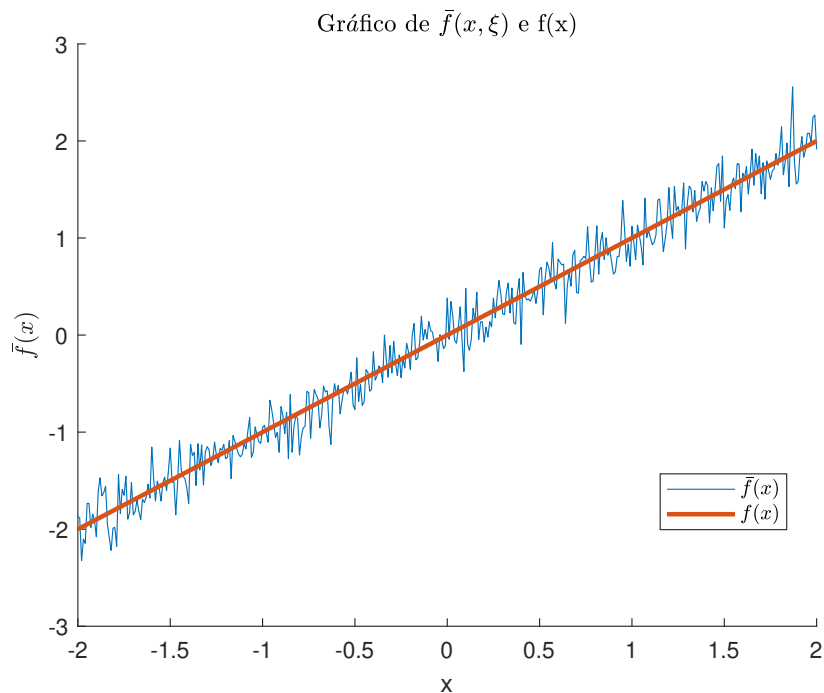
Fonte: figura do autor.

Figura 3 – Gráficos da função $\hat{f}(x, \xi)$, com 5 realizações (observações) de ξ , definidas no intervalo $[-2, 2]$.



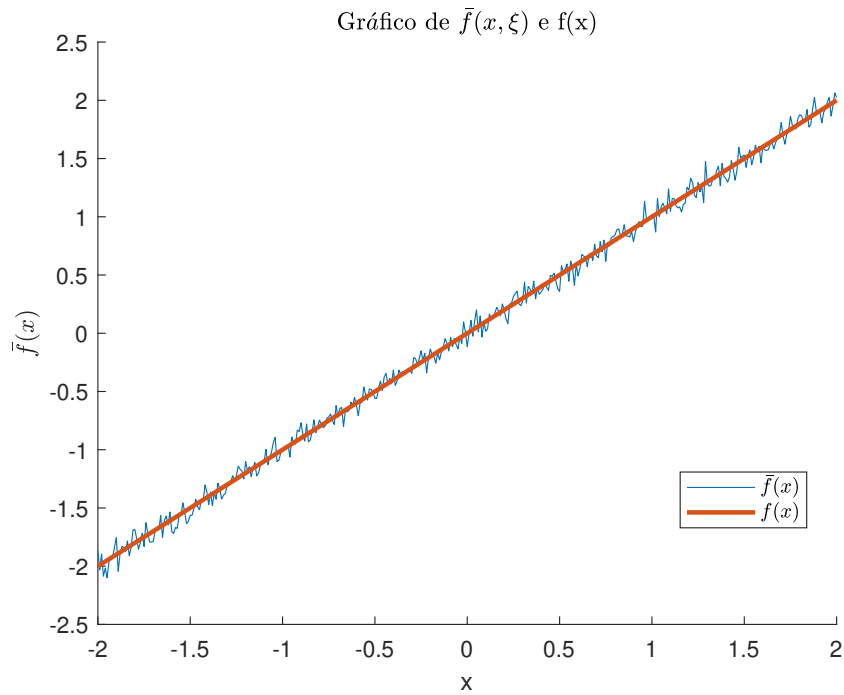
Fonte: figura do autor.

Figura 4 – Gráficos das funções $\bar{f}(x) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q y(x)^k$, em azul, com $q = 100$, e $f(x) = E[Y(x)]$, em vermelho, definidas no intervalo $[-2, 2]$.



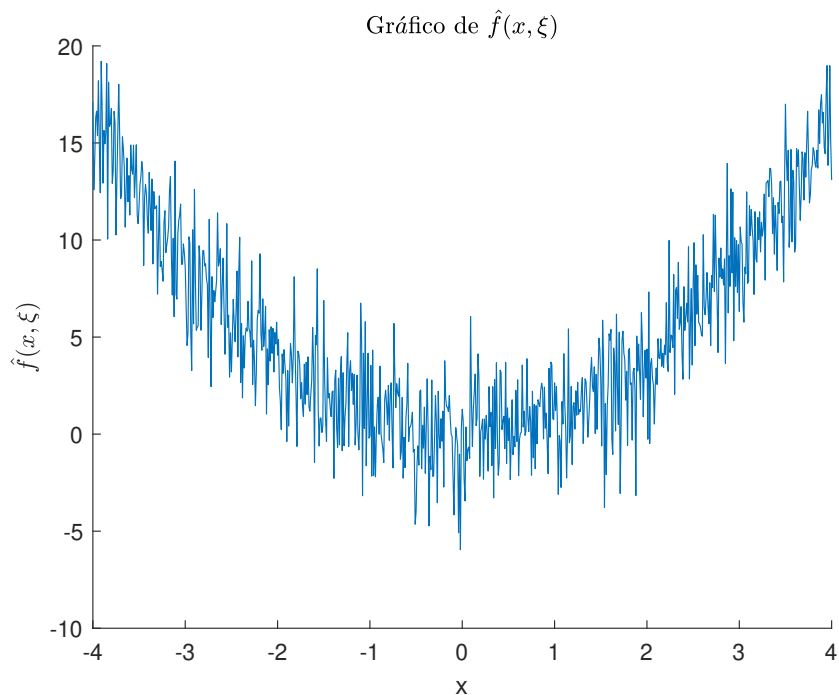
Fonte: figura do autor.

Figura 5 – Gráficos das funções $\bar{f}(x) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q y(x)^k$, em azul, com $q = 1000$, e $f(x) = E[Y(x)]$, em vermelho, definidas no intervalo $[-2, 2]$.



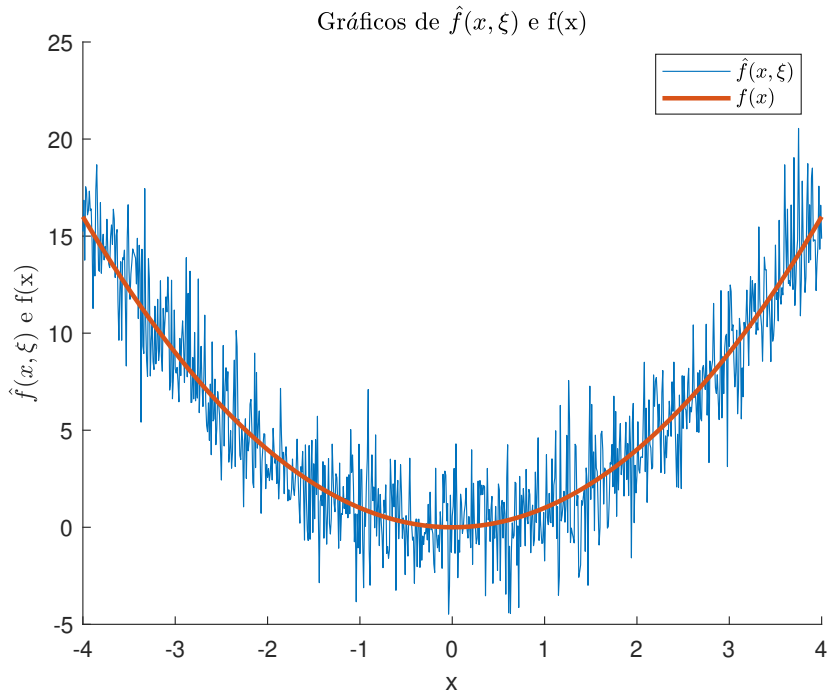
Fonte: figura do autor.

Figura 6 – Gráfico da função $Y(x) = \hat{f}(x, \xi)$, definida no intervalo $x \in [-4, 4]$, para uma realização de ξ .



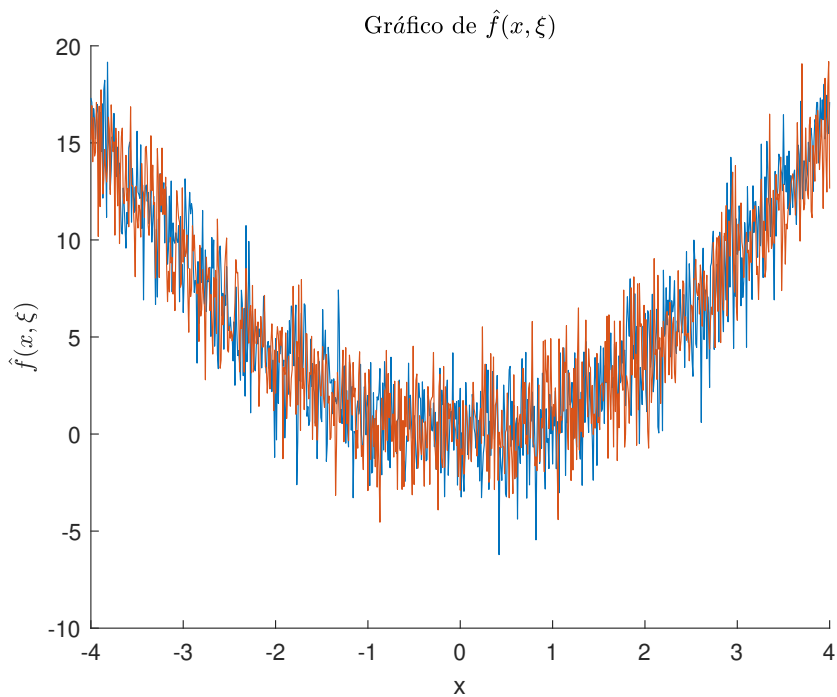
Fonte: figura do autor.

Figura 7 – Gráfico da função $f(x) = E[Y(x)]$, em vermelho, e gráfico da função $Y(x) = \hat{f}(x, \xi)$, em azul, definidas no intervalo $[-4, 4]$, para uma realização de ξ .



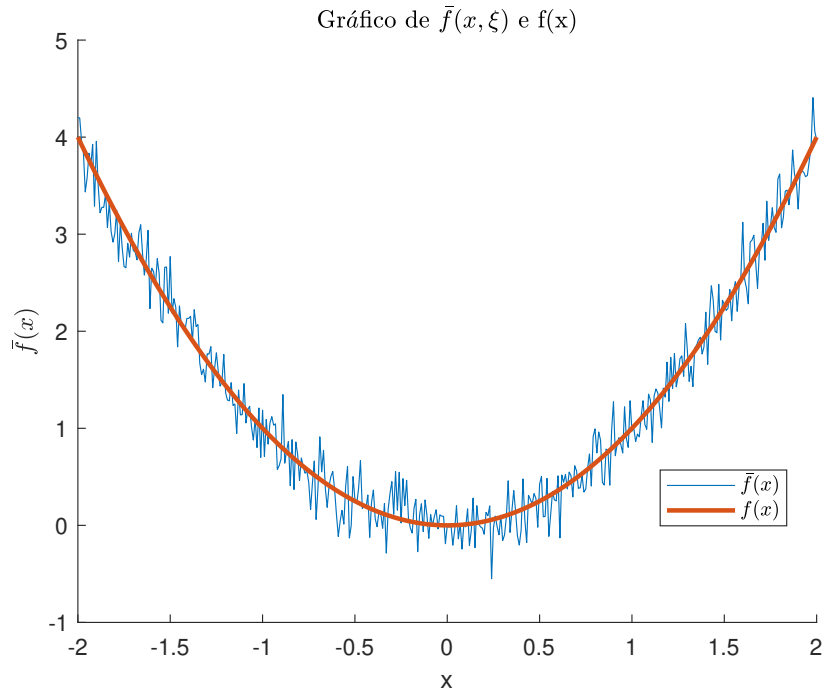
Fonte: figura do autor.

Figura 8 – Gráfico da função $\hat{f}(x, \xi)$ com 2 realizações de ξ no intervalo $[-4, 4]$, em vermelho e azul.



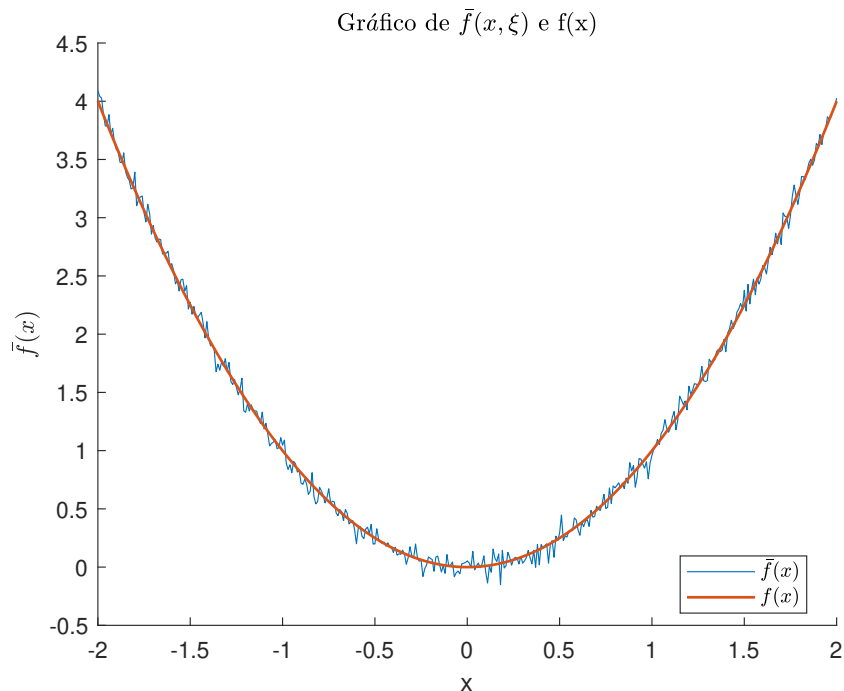
Fonte: figura do autor.

Figura 9 – Gráficos das funções $\bar{f}(x) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q y(x)^k$, em azul, com $q = 100$, e $f(x) = E[Y(x)]$, em vermelho, no intervalo $[-4, 4]$.



Fonte: figura do autor.

Figura 10 – Gráficos das funções $\bar{f}(x) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q y(x)^k$, em azul, com $q = 1000$, e $f(x) = E[Y(x)]$, em vermelho, no intervalo $[-4, 4]$.



Fonte: figura do autor.

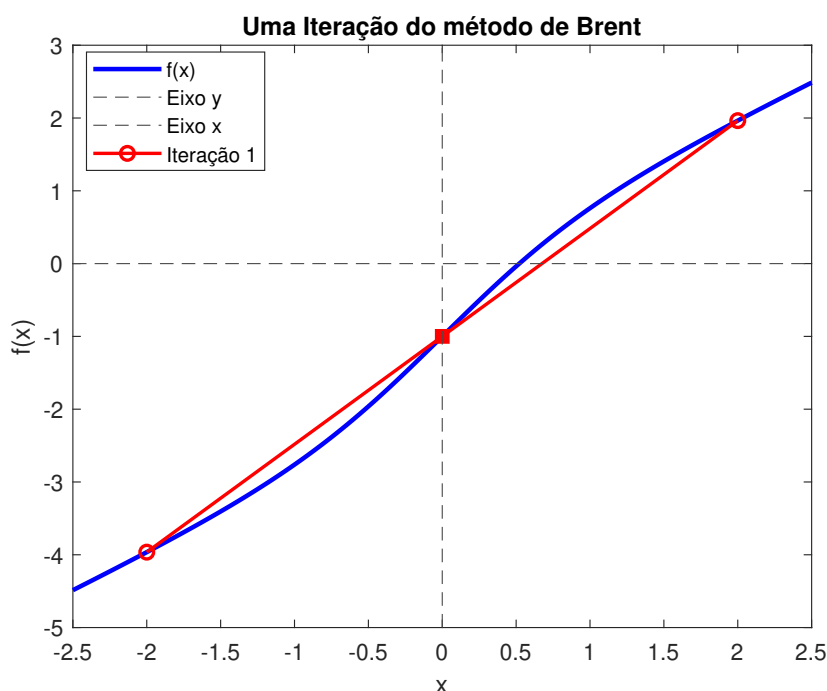
Aspectos Intuitivos do Método de Robbins e Monro

No último exemplo, trataremos da intuição por trás do primeiro método de aproximação estocástica: o método de Robbins e Monro. Assim como no primeiro exemplo, desejamos encontrar a raiz da função

$$f(x) = E[\hat{f}(x, \xi)], \tag{1.4}$$

com $\hat{f}(x, \xi) = x - 1 + \tanh(x) + 2\xi$ e $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$, a distribuição normal padrão. A Figura 11 ilustra, em azul, a função f . Caso seus valores estivessem disponíveis, poderíamos utilizar o método de Brent (BRENT, 1971) para encontrar sua raiz, destacando nessa mesma figura a primeira iteração desse método. Notemos, na Figura 12, que, visualmente, apenas três iterações do método de Brent são suficientes para se ter uma "boa" aproximação da raiz de f .

Figura 11 – Gráfico da função $f(x)$, destacando uma iteração do Método de Brent em vermelho.

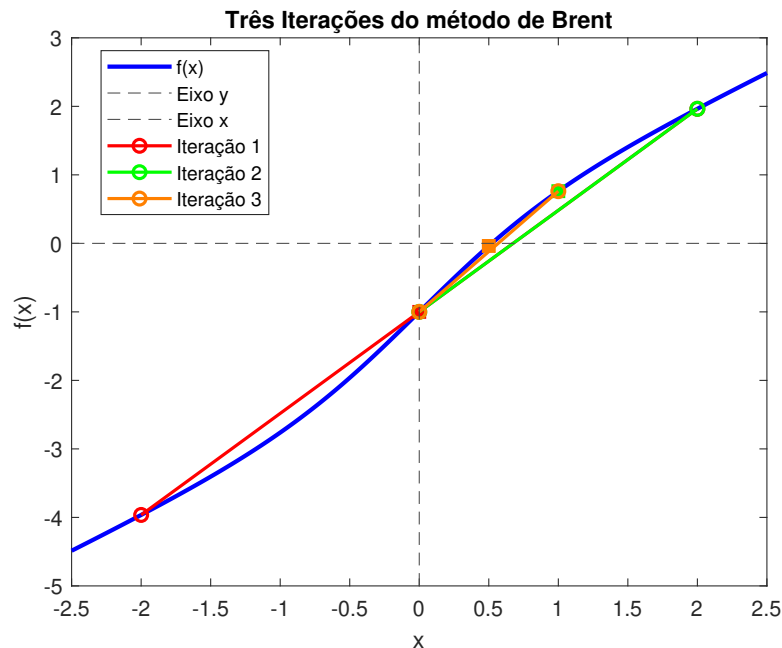


Fonte: figura do autor.

Contudo, como no primeiro exemplo, definimos o processo estocástico $Y = \{Y(x)\}_{x \in \mathbb{R}}$, em que cada variável aleatória é dada por $Y(x) = \hat{f}(x, \xi)$. A Figura 13 ilustra esse processo, em azul, restrito ao intervalo $x \in [-2, 2]$, evidenciando que o método utilizado para encontrar a raiz da função f — representada em vermelho nessa mesma figura — tem acesso apenas a uma realização da variável aleatória $Y(x)$, para cada valor fixado de x . Ao aplicarmos o método de Brent para computar a raiz de f , utilizando a informação proveniente do processo Y , observamos que suas duas iterações iniciais — representadas nas Figuras 13 e 14, respectivamente — geram intervalos que contêm o zero da função f . Entretanto, ao analisarmos a terceira iteração do

método, ilustrada na Figura 15, verificamos que a raiz se encontra fora do intervalo gerado, o que inviabiliza a convergência para o valor correto de θ , tal que $f(\theta) = 0$. Assim, Robbins e Monro (ROBBINS; MONRO, 1951) definiram um método iterativo, de natureza estocástica, construído para lidar com essa situação.

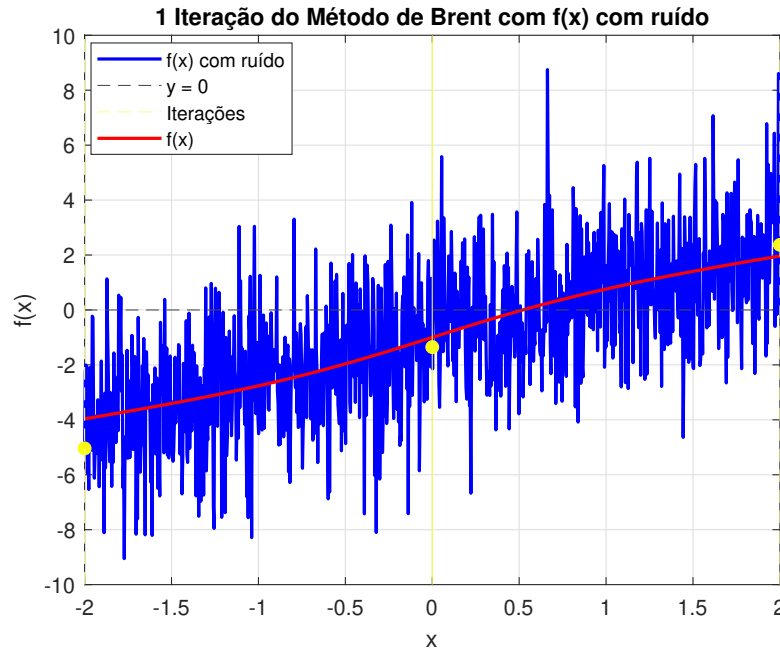
Figura 12 – Gráfico da função $f(x)$, com destaque para três iterações do Método de Brent: primeira em vermelho, segunda em verde e última em laranja. Notemos que há uma aproximação da raiz de f em apenas três iterações.



Fonte: figura do autor.

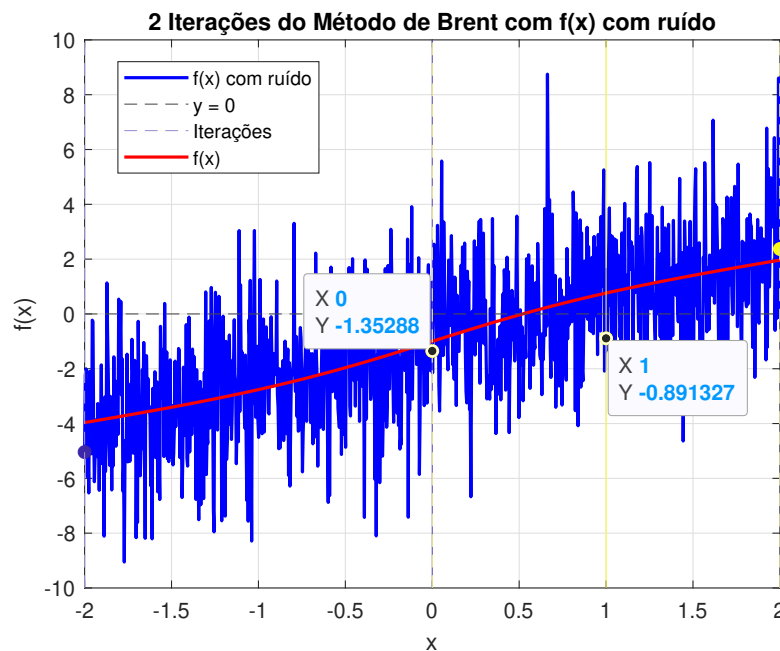
Visto que dispomos da informação do processo Y , então, dado um ponto $x_1 \in \mathbb{R}$, podemos obter uma observação da variável aleatória $Y(x_1)$, que denotaremos por $y(x_1)$. Assim, seria razoável supor que o próximo iterando x_2 fosse calculado como $x_2 = x_1 - y(x_1)$. De fato, se x_1 estiver à direita da raiz de f , θ , teríamos $f(x_1) > f(\theta)$, e, portanto, ao assumir que $y(x_1) \approx f(x_1)$ implicaria em $x_2 < x_1$. Uma análise análoga vale para o caso em que $x_1 < \theta$. Contudo, temos acesso à $Y(x_1) = f(x_1) + \xi$, que pode resultar em $y(x_1) < f(\theta)$ e, ao aplicarmos $x_2 = x_1 - y(x_1)$, causar um distanciamento de x_2 em relação a θ . Incidente análogo poderia ocorrer quando $y(x_1) \gg f(x_1)$, ocasionando um distanciamento de x_2 em relação ao ponto θ , pela sua esquerda. A título de curiosidade, definimos o processo iterativo $x_{k+1} = x_k - y(x_k)$ para todo $k \geq 1$, com $x_1 = 1,5$ para 100 iterações, apresentando as últimas 10 iterações na Figura 16, acentuando que: a função f está representada em vermelho; os valores $f(x_k)$, em azul; e $y(x_k)$, em verde. Notemos que estes valores ficam alternando entre o primeiro e terceiro quadrante devido à distribuição de ξ .

Figura 13 – Gráfico da função $f(x)$, em vermelho, e gráfico da função $\hat{f}(x, \xi)$, em azul, para uma realização de ξ , destacando a primeira iteração do método de Brent, em amarelo, para a função $\hat{f}(x, \xi)$.



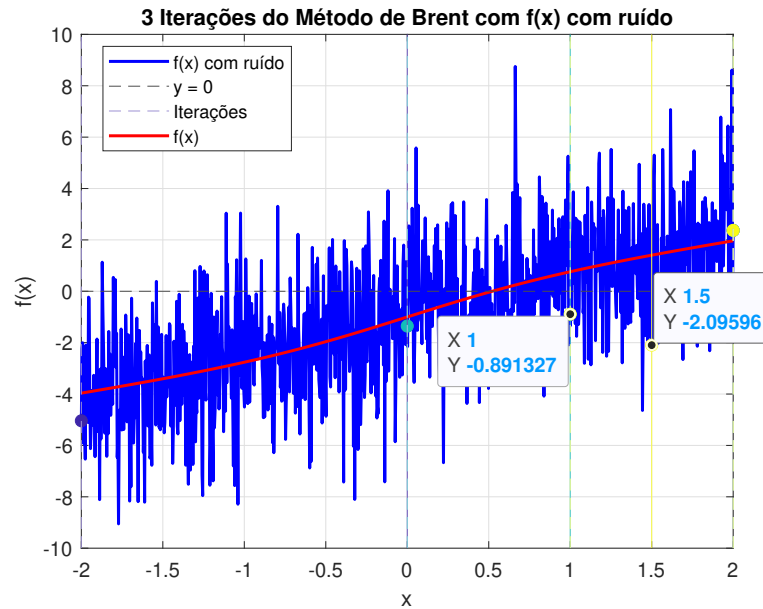
Fonte: figura do autor.

Figura 14 – Gráfico da função $f(x)$, em vermelho, e gráfico da função $\hat{f}(x, \xi)$, em azul, para uma realização de ξ , destacando a segunda iteração do método de Brent, em amarelo, para a função $\hat{f}(x, \xi)$.



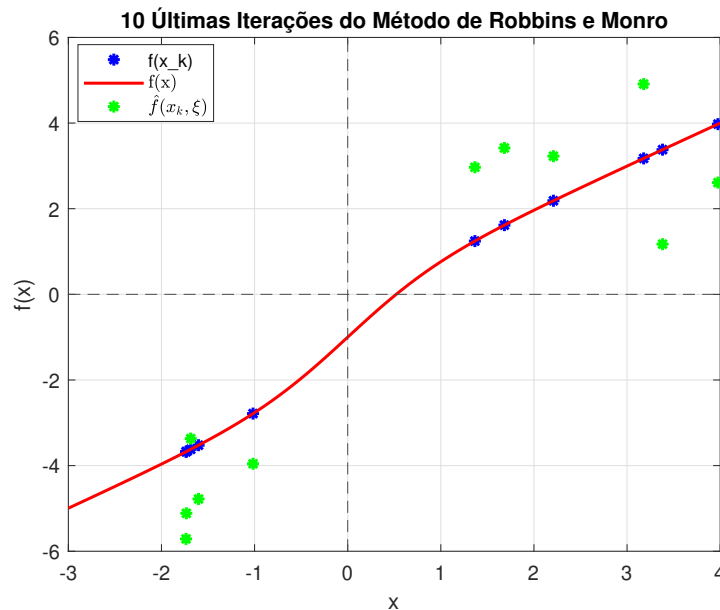
Fonte: figura do autor.

Figura 15 – Gráfico da função $f(x)$, em vermelho, e da função $\hat{f}(x, \xi)$, em azul, para uma realização de ξ , com destaque para a terceira iteração do método de Brent, em amarelo, aplicada à função $\hat{f}(x, \xi)$. Note que a raiz de f está fora do intervalo considerado nas iterações seguintes, o que inviabiliza a utilização desse método para o objetivo estabelecido.



Fonte: figura do autor.

Figura 16 – Método de Robbins e Monro ($x_{k+1} = x_k - a_k y(x_k)$), considerando a sequência $a_k = 1$ para todo $k \geq 1$. Foram executadas 100 iterações, sendo as últimas 10, apresentadas neste gráfico. A função f está representada em vermelho; os valores $f(x_k)$, em azul; e $y(x_k)$, em verde. O ponto inicial adotado é $x_1 = 1,5$.



Fonte: figura do autor.

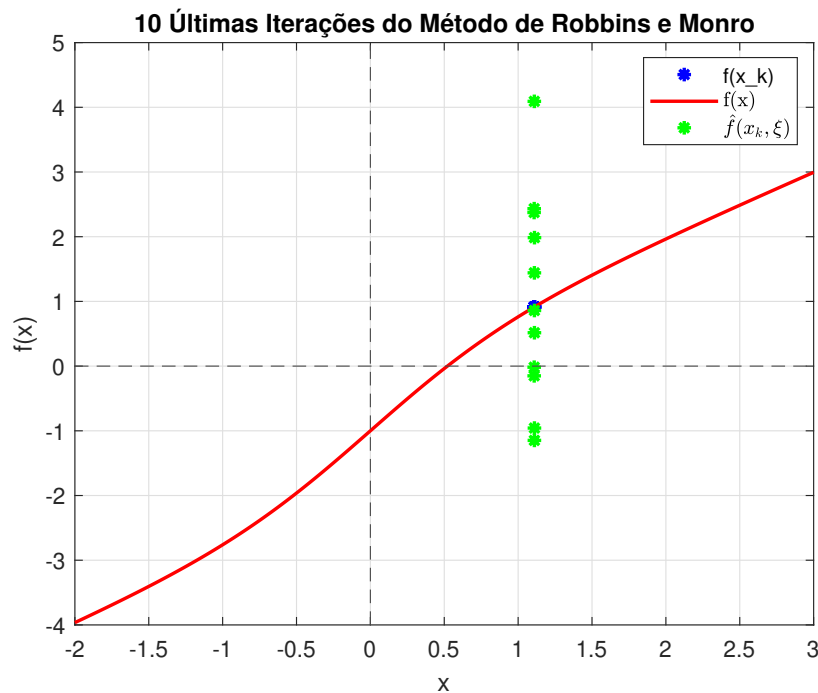
Portanto, buscamos atenuar esses casos por meio de um fator de correção a_k , definindo $x_{k+1} = x_k - a_k y(x_k)$, ainda que essa constante possa atrapalhar em algumas situações — especialmente quando $y(x_k)$ está próximo de $f(x_k)$, valor que não está acessível. Dessa forma, é definido o método iterativo de Robbins e Monro. Dado $x_1 \in \mathbb{R}$, o método gera uma sequência $\{x_k\}_{k \geq 1}$ tal que:

$$x_{k+1} = x_k - a_k y(x_k), \quad (1.5)$$

em que $\{a_k\}_{k \geq 1}$ é uma sequência de números reais positivos, que visa assegurar a convergência para o valor correto de θ , sem necessitar da informação a priori da função f .

Assim, ilustramos na Figura 17 os valores das 10 últimas iterações do método de Robbins e Monro, definido em (1.5), utilizando a sequência $\{a_k\}_{k \geq 1}$ dada por $a_k = \frac{1}{k^2}$, para todo $k \geq 1$. O ponto inicial adotado é $x_1 = 1,5$. Na figura, a função f está representada em vermelho; os valores $f(x_k)$, em azul; e $y(x_k)$, em verde, sendo possível concluir a convergência prematura do método para um valor diferente de θ , raiz da função f .

Figura 17 – Método de Robbins e Monro ($x_{k+1} = x_k - a_k y(x_k)$), considerando a sequência $a_k = \frac{1}{k^2}$ para todo $k \geq 1$. Foram executadas 100 iterações, sendo as últimas 10, apresentadas neste gráfico. A função f está representada em vermelho; os valores $f(x_k)$, em azul; e $y(x_k)$, em verde. Notamos a convergência prematura do método Robbins e Monro ao escolhermos essa sequência $\{a_k\}_{k \geq 1}$. O ponto inicial adotado é $x_1 = 1,5$.



Fonte: figura do autor.

Dessa forma, notamos que a sequência $\{a_k\}_{k \geq 1}$ deve ser escolhida de modo a evitar termos demasiadamente pequenos, a fim de que sua convergência a zero não ocorra de forma

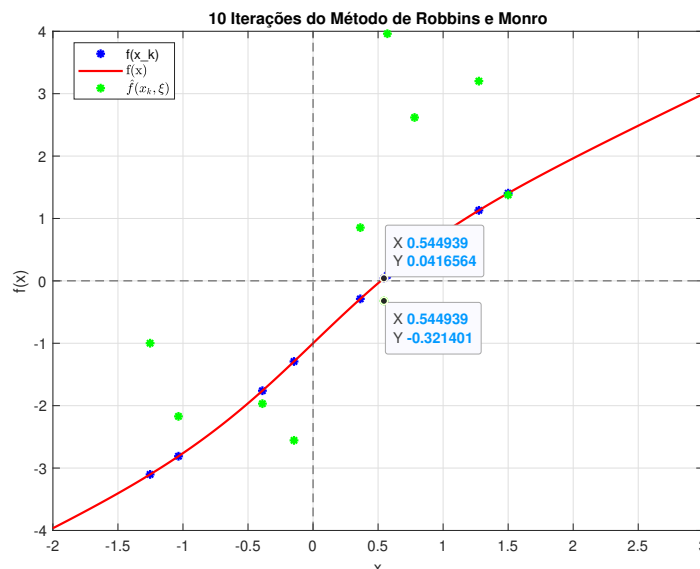
muito acelerada, o que ocasionaria uma convergência prematura do método iterativo definido em (1.5). Então, a fim de contornar esse problema, Robbins e Monro estabeleceram que a sequência $\{a_k\}_{k \geq 1}$ deveria ser escolhida de modo que

$$\sum_{k \geq 1} a_k = \infty \quad \text{e} \quad \sum_{k \geq 1} a_k^2 < \infty, \quad (1.6)$$

com o objetivo de controlar a velocidade de convergência a zero e impedindo que a convergência para valores distintos da raiz da função f ocorra. Em particular, ao impor a condição $\sum_{k \geq 1} a_k^2 < \infty$, estamos controlando a variação da trajetória do processo iterativo em direção ao ponto desejado.

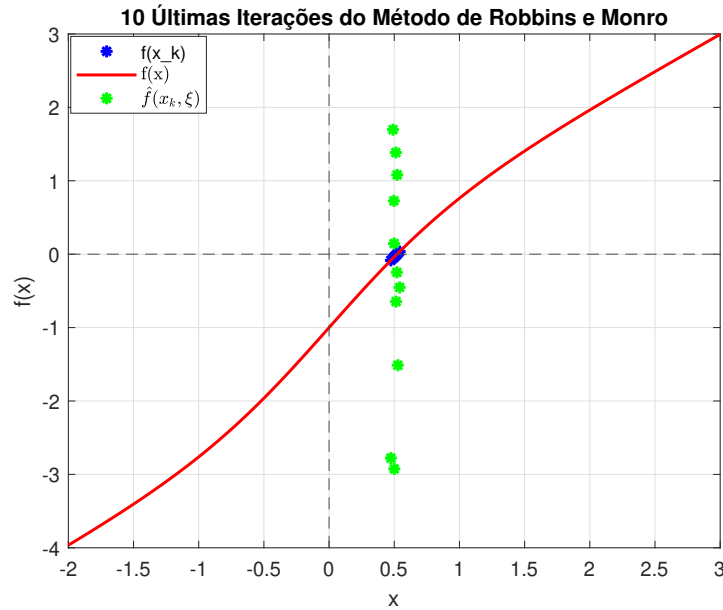
As Figuras 18 e 19 ilustram, respectivamente, as 10 iterações iniciais e as 10 finais do método de Robbins e Monro, considerando a sequência $\{a_k\}_{k \geq 1}$ definida por $a_k = \frac{1}{k}$, para todo $k \geq 1$, satisfazendo as condições apresentadas em (1.6). Para essas figuras, foram executadas 100 iterações, sendo a função f representada em vermelho, os valores $f(x_k)$ em azul e $y(x_k)$ em verde. Percebamos, por meio da Figura 18, que com apenas 10 iterações temos $f(x_{10}) \approx 0$, apesar de $y(x_{10})$ ainda estar afastado de zero, como destacado na figura. No entanto, nada se pode afirmar sobre a convergência do método ao valor de θ com base apenas nessas primeiras iterações. Já na Figura 19, observamos a convergência a esse valor, visto que todos os 10 últimos valores de $f(x_k)$ estão próximos da raiz de f . Mais uma vez, nota-se que os valores de $y(x_k)$, nas iterações finais, permanecem significativamente afastados de $f(\theta)$, embora sejam justamente esses os utilizados no cálculo de x_{k+1} , cujo objetivo é aproximar o valor de θ .

Figura 18 – Método de Robbins e Monro ($x_{k+1} = x_k - a_k y(x_k)$), considerando a sequência $a_k = \frac{1}{k}$ para todo $k \geq 1$. Foram executadas 100 iterações, sendo as primeiras 10, apresentadas neste gráfico. A função f está representada em vermelho; os valores $f(x_k)$, em azul; e $y(x_k)$, em verde. O ponto inicial adotado é $x_1 = 1,5$.



Fonte: figura do autor.

Figura 19 – Método de Robbins e Monro ($x_{k+1} = x_k - a_k y(x_k)$), considerando a sequência $a_k = \frac{1}{k}$ para todo $k \geq 1$. Foram executadas 100 iterações, sendo as últimas 10, apresentadas neste gráfico. A função f está representada em vermelho; os valores $f(x_k)$, em azul; e $y(x_k)$, em verde. Notamos movimento contrário a localização da raiz de f , indicando divergência ao adotar a_k negativo para todo $k \geq 1$. O ponto inicial adotado é $x_1 = 1,5$.



Fonte: figura do autor.

Por fim, salientamos que, na próxima seção, são apresentados os principais estudos acerca dos métodos de Aproximações Estocásticas.

Os Métodos de Aproximações Estocásticas

O primeiro método de aproximação estocástica foi introduzido por Robbins e seu aluno de doutorado, Monro, em 1951 (ROBBINS; MONRO, 1951), sendo um método iterativo para encontrar a raiz da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, utilizando medidas (observações) ruidosas de f . Ou seja, para cada $x \in \mathbb{R}$, realizamos a medida (observação) de uma variável aleatória $Y(x) = f(x) + \xi_x$, em que $\{\xi_x\}_{x \in \mathbb{R}}$ é um processo estocástico tal que $f(x) = E[Y(x)]$. Assumimos que há um espaço de probabilidade definido por (Ω, \mathcal{F}, P) e $E[Y(x)]$ é a esperança da variável aleatória $Y(x)$.

Dado $x_1 \in \mathbb{R}$, buscamos encontrar $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $f(\theta) = 0$, realizando iterativamente medições (observações) de $Y(X_k)$, em que X_k é uma variável aleatória definida por: $X_1 = x_1$ q.c. e para todo $k \geq 1$ é definida uma sequência de variáveis aleatórias $\{X_k\}_{k \geq 1}$ tal que

$$X_{k+1} = X_k - a_k Y(X_k), \tag{1.7}$$

em que $\{a_k\}_{k \geq 1}$ é uma sequência real positiva, que deve satisfazer

$$\sum_{k \geq 1} a_k = \infty \quad \text{e} \quad \sum_{k \geq 1} a_k^2 < \infty, \quad (1.8)$$

a fim de que tenhamos convergência do processo estocástico $\{X_k\}_{k \geq 1}$. Esse método é autocorrelativo, o que significa que o ruído tende a ser atenuado ao longo das iterações, com a convergência para o valor desejado garantida sob as condições da sequência $\{a_k\}_{k \geq 1}$. Em média, o movimento será na direção correta, não havendo ponto fixo diferente da solução almejada. Um exemplo de sequência $\{a_k\}_{k \geq 1}$, que satisfaz a Condição (1.8), é $a_k = \frac{b}{k}$ para todo $k \geq 1$ e $b \in \mathbb{R}_+$. Um outro ponto de atenção é que a distribuição de ξ_x , para todo $x \in \mathbb{R}$, não é conhecida; entretanto, para as provas de convergência, realizadas em (ROBBINS; MONRO, 1951), (BLUM, 1954a), (DVORETSKY, 1955) e (GLADYSHEV, 1965), deve satisfazer certas hipóteses.

Analisando a Condição (1.8) para a sequência real positiva $\{a_k\}_{k \geq 1}$, temos, como consequência direta, que $a_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Todavia, ao exigirmos que $\sum_{k \geq 1} a_k = \infty$, impomos que essa convergência a zero não ocorra de forma muito rápida, o que ocasiona uma convergência prematura do processo iterativo e faz com que não seja possível alcançar o ponto desejado θ . Portanto, será a condição da série ser divergente que atestará a convergência do método numérico iterativo ao ponto θ . Por outro lado, ao requisitarmos que $\sum_{k \geq 1} a_k^2 < \infty$, estamos controlando a variação da trajetória do processo iterativo ao ponto desejado, mesmo que as variáveis do processo estocástico $\{\xi_x\}_{x \in \mathbb{R}}$ sejam autocorrelacionadas (LAI; YUAN, 2021).

Dessa forma, ao solucionarmos o primeiro exemplo da seção anterior, utilizando o método de aproximação estocástica de Robbins e Monro, definindo $x_1 = 20$, $a_1 = 1$ e $a_k = \frac{5}{k \log k}$ para todo $k > 1$, o número de iterações igual a 500 e o número de rodadas de execução desse método igual a 1000, temos a média e o desvio padrão do último iterando das rodadas de execução igual a $1,61\text{E}-3$ e a $88,1\text{E}-3$, respectivamente.

Enfim, devemos apontar que o método de Robbins e Monro, que é estocástico, possui como análogos determinísticos, os métodos de ponto fixo, no qual podemos citar os métodos de Newton-Raphson ou Gradiente (BERTSEKAS, 1997).

Kiefer e Wolfowitz (KIEFER; WOLFOWITZ, 1952), baseando-se no método de Robbins e Monro (ROBBINS; MONRO, 1951), propuseram um método iterativo estocástico para estimar o máximo de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, utilizando apenas medidas pontuais ruidosas de $f(x)$, dadas por $Y(x) = f(x) + \xi_x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Eles trataram problemas de otimização unidimensionais, unimodais e sem restrições (FLETCHER, 1987) e (NOCEDAL; WRIGHT, 2006b), formulados como:

$$\begin{aligned} & \max f(x) \\ & \text{s.t. } x \in \mathbb{R} \end{aligned}; \quad (1.9)$$

em que a função objetivo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = \text{E}[Y(x)]$. Então, Kiefer e Wolfowitz propuseram um método iterativo que, dado $x_1 \in \mathbb{R}$, gera recursivamente uma sequência de

variáveis aleatórias $\{X_k\}_{k \geq 1}$, tal que $X_1 = x_1$ e, para todo $k \geq 1$,

$$X_{k+1} = X_k + a_k \left(\frac{Y(X_k + c_n) - Y(X_k - c_n)}{c_n} \right), \quad (1.10)$$

em que $\{a_k\}$ e $\{c_k\}$ são seqüências reais positivas satisfazendo:

$$c_k \rightarrow 0, \quad \sum_{k \geq 1} a_k = +\infty, \quad \sum_{k \geq 1} a_k c_k < +\infty, \quad \sum_{k \geq 1} a_k^2 c_k^{-2} < +\infty; \quad (1.11)$$

a fim de solucionar o problema de otimização (1.9). Na equação (1.10), o termo

$$\frac{Y(X_k + c_n) - Y(X_k - c_n)}{c_n} \quad (1.12)$$

equivale a uma aproximação por diferenças finitas centrais da derivada da função f , com o incremento da diferença finita na variável x igual a c_n . Diferentemente dos algoritmos análogos de otimização determinística, c_n não deve iniciar com valor pequeno; deve começar com uma magnitude relativamente grande, quando comparado ao análogo determinístico, o que assegura uma probabilidade razoável de os passos iniciais em (1.10) serem direcionados para o ponto de máximo. Assim, como no método de aproximação estocástica de Robbins e Monro, torna-se necessário adotar certas hipóteses sobre as distribuições da família $\{Y(x)\}_{x \in \mathbb{R}}$, para que seja possível estabelecer as demonstrações de convergência do procedimento de otimização, como se verifica na demonstração de convergência em L^2 apresentada por (KIEFER; WOLFOWITZ, 1952) e, quase certamente, por (BLUM, 1954a).

Desse modo, empregando o método de aproximações estocásticas de Kiefer e Wolfowitz a fim de solucionar o segundo exemplo da seção anterior, definindo $a_k = \frac{1}{k}$ e $c_k = \frac{5}{k^{\frac{1}{3}}}$ para todo $k \geq 1$, o número de iterações igual a 200 e o número de rodadas de execução desse método igual a 1000. Então, encontramos a média e o desvio padrão do último iterando das rodadas de execução igual a 246E-6 e 13,56E-3, respectivamente.

Em 1954, Julius Blum (BLUM, 1954b) abordou os problemas mencionados acima para os casos multidimensionais, ou seja, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = E[Y(x)]$, em que $\{Y(x)\}_{x \in \mathbb{R}^n}$ é um conjunto de variáveis aleatórias, indexado pelo espaço \mathbb{R}^n . Para tratar o problema de maximização da função f , Blum propôs utilizar a versão multivariada da iteração (1.10), em que cada componente do gradiente é aproximado por uma versão em diferenças progressivas, ao invés de diferenças centrais (1.12).

Ruppert (RUPPERT, 1985), em 1985, desenvolveu uma versão estocástica do método determinístico de Newton-Raphson, a fim de encontrar as raízes da função $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, realizando iterativamente observações dessa função F na presença de incertezas (ruído). Seguindo a cronologia do desenvolvimento dos métodos de aproximações estocásticas, em 1992, James Spall (SPALL, 1992) apresenta o método das perturbações simultâneas (SPSA - *Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation*), projetado para solucionar numericamente o problema de otimização em alta dimensão e na presença de ruído. A principal diferença do método SPSA e

da versão multidimensional do método de Kiefer e Wolfowitz, desenvolvida por Julius Blum (BLUM, 1954b), reside na estimativa (aproximação) do gradiente da função f : este último método requer mais observações sobre o processo estocástico $\{Y(x)\}_{x \in \mathbb{R}^n}$ do que o primeiro, para estimar o gradiente da função f .

Em seguida, como uma alternativa estocástica aos métodos de regiões de confiança determinísticos (CONN; GOULD; TOINT, 2000), que têm como funcionalidade principal a capacidade de utilizar a curvatura negativa em aproximações Hessianas, potencialmente desviando das vizinhanças dos pontos de sela, os quais podem causar a convergência prematura ou desacelerar significativamente a convergência de outros métodos determinísticos que utilizam busca em linha (DAUPHIN et al., 2014), Chang et al, em 2013, no artigo (CHANG; HONG; WAN, 2013) desenvolveram o método de região de confiança estocástico. Posteriormente, Chen et al. (CHEN; MENICKELLY; SCHEINBERG, 2018) provaram a convergência quase certa para um ponto estacionário de primeira ordem.

Overview das Análises de Convergência dos Métodos de Aproximações Estocásticas

Uma minuciosa abordagem sobre os métodos de aproximações estocásticas é fornecida no livro (RUSTAGI, 2014), sendo nosso principal objetivo, nessa seção, apontar os principais desenvolvimentos na área, relacionados às análises de convergência dos métodos de aproximações estocásticas. Além disso, destacaremos qual a metodologia iremos adotar para as demonstrações de convergência e análises de taxa de convergência realizadas nos Capítulos 3 e 4.

Robbins e Monro demonstraram, no artigo (ROBBINS; MONRO, 1951), que a sequência $\{X_k\}_{k \geq 1}$ definida na equação (1.7) converge em L^2 e, conseqüentemente, em probabilidade, para o ponto desejado θ , tal que $f(\theta) = 0$. Seguindo a mesma linha de demonstração, Kiefer e Wolfowitz solucionaram o problema de otimização (1.9), provando que $E(X_k - \theta)^2$ converge para zero quando $k \rightarrow \infty$, utilizando as hipóteses sobre as séries $\{a_k\}$ e $\{c_k\}$ definidas em (1.11).

Em 1954, Julius R. Blum (BLUM, 1954b) expande os problemas de aproximações estocásticas unidimensionais, realizadas pelos autores anteriores, para os casos multidimensionais, provando a convergência quase certa para a solução do problema de otimização (4.91) e para o problema de encontrar as raízes de uma função $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sob a presença de observações com ruído. É importante ressaltar que Blum, no artigo (BLUM, 1954a), restrito aos casos unidimensionais, utilizou hipóteses menos restritivas do que os primeiros autores utilizaram em 1951 e 1952, para demonstrar as convergências quase certas desses métodos.

Contudo, um marco para os métodos de aproximações estocásticas, que engloba os métodos de Robbins/Monro e Kiefer/Wolfowitz, foi realizado por Aryeh Dvoretzky (DVORETSKY, 1955). Este autor provou a convergência quase certa e em L^2 de uma classe de métodos de

aproximações estocásticas, em que os métodos citados até então, pertencem a essa classe. Esse resultado é conhecido como o "teorema de aproximação de Dvoretzky", que foi expandido em 1986, no artigo (DVORETZKY, 1986). O principal objetivo desse artigo foi provar a convergência em L^2 e quase certamente dos métodos de aproximações estocásticas definidos em espaços de Hilbert em geral, permitindo tratar o caso em que o ponto procurado se desvia à medida que as observações são realizadas. Diferentes provas e interpretações foram apresentadas para o "teorema de aproximação de Dvoretzky", podendo citar (DERMAN; SACKS, 1959) e (VENTER, 1966).

Em 1971, Robbins e Siegmund, no artigo "*A convergence theorem for non negative almost supermartingales and some applications*" (ROBBINS; SIEGMUND, 1971), introduziram uma propriedade para sequência de variáveis aleatórias, denominada "quase supermartingale não negativo", e apresentaram um teorema de convergência em conjuntos, que tornou o teorema de aproximação de Dvoretzky um corolário desse teorema. As contribuições de Robbins e Siegmund são descritas no Capítulo 2 e são amplamente utilizadas para as demonstrações de convergência quase certa e análises da taxa de convergência dos métodos de gradiente conjugado linear e não linear estocásticos, propostos nos Capítulos 3 e 4, respectivamente.

Por sua vez, em 1989, Tze Lai (LAI, 2006), utilizando o seu conhecimento de função de Lyapunov estocástica, que herda a propriedade de ser um supermartingale da dinâmica do sistema estocástico original, propôs o conceito de funções de Lyapunov estocásticas estendidas. A ideia por trás desse novo conceito é obter maior flexibilidade ao não insistir na propriedade de ser um quase supermartingale não negativo a fim de garantir a convergência quase certa da sequência estocástica obtida.

Aplicação dos Métodos de Aproximação Estocástica

Com a finalidade de justificar a importância atual dos estudos nos métodos de aproximações estocásticas no ramo da engenharia e computação, no artigo (LAI; YUAN, 2021), Tze Lai e Hongsong Yuan citam a aplicação desses métodos estocásticos a: análise de séries temporais (YIN; ZHU, 1992); inteligência artificial (WOUWER; RENOTTE; REMY, 1999); aprendizado de máquina profundo; aprendizado por reforço (*reinforcement learning*); processamento de imagens; otimização estocástica (BRENNAN; ROGERS, 1995), (WARDI, 1988), (STYBLINSKI; TANG, 1990); controle adaptativo (MAEDA; FIGUEIREDO, 1997); otimização online; identificação de parâmetros de sistemas dinâmicos lineares e não lineares (MACCHI; EWEDA, 1983).

Propostas de Métodos de Aproximações Estocásticas - Os Métodos de Gradiente Conjugado Estocásticos

Em vista dessa breve cronologia e descrição dos métodos de aproximações estocásticas, apresentamos, primeiramente, um método de gradiente conjugado linear estocástico a fim de solucionar numericamente a equação linear estocástica $Ax = E[b_x]$ para $x \in \mathbb{R}^n$, na qual $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica definida positiva e $E[b_x]$ é a esperança de um vetor aleatório b_x . Resolver essa equação é equivalente a solucionar o problema de minimização da função quadrática estocástica $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T E[b_x]$. Então, o método proposto fundamenta-se em etapas iterativas de aplicação do método de gradiente conjugado linear clássico (NOCEDAL; WRIGHT, 2006a), utilizando como resíduo $Ax - E[b_x]$, com o tamanho de passo controlado por uma sequência real positiva decrescente $\{\alpha_k\}_{k \geq 0}$ escolhida de forma apropriada.

Assim, devemos observar que não precisamos aproximar o resíduo (gradiente) pelo método das diferenças finitas, como o realizado em (BLUM, 1954b), o que reduz consideravelmente o número de avaliações da função f , à medida que aumentamos a dimensão (n) do problema de otimização. Por exemplo, se o método utilizasse o esquema de diferenças centrais, haveria a necessidade de $2n$ avaliações da função f . Se empregasse o esquema de diferenças para frente, $n + 1$ avaliações da função f . Mostramos que o método proposto converge quase certamente para a solução do problema e, além disso, demonstramos que, ao escolhermos uma sequência $\{\alpha_k\}_{k \geq 0}$ específica, conseguimos que a taxa de convergência seja de $O\left(\frac{1}{k \log k}\right)$. Superando a taxa de convergência máxima do método de Robbins e Monro multidimensional, que é $O\left(\frac{1}{k}\right)$ para essa classe de problemas (NEMIROVSKI et al., 2009).

A seguir, propomos o método do gradiente conjugado não linear estocástico, fundamentado no método do gradiente conjugado não linear determinístico proposto em (HAGER; ZHANG, 2005), a fim de solucionar o problema de otimização estocástico, formulado por:

$$x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x); \quad (1.13)$$

em que $f(x) = E[g(x, \xi)]$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ξ é uma variável aleatória. Para as análises de convergência quase certa e taxa de convergência desse método proposto, utilizamos como referências (BLANCHET et al., 2019) e (PAQUETTE; SCHEINBERG, 2020) a fim de construirmos uma sequência de variáveis aleatórias que seja um quase supermartingale não negativo e, assim, podermos utilizar suas propriedades para realizarmos as análises citadas. Encontramos que a taxa de convergência assintótica é $O\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$, no qual ϵ é a precisão da norma do gradiente ($\|\nabla f(x)\| < \epsilon$) que se deseja alcançar.

Diferentemente do método do gradiente conjugado linear estocástico, o método não linear estocástico proposto exige, para as análises de convergência e taxa de convergência, que as estimativas do gradiente e da função f sejam próximas dos valores reais nos pontos gerados pelo

método desenvolvido, sendo essa noção de “proximidade” definida na Seção 4.2. Dessa forma, temos uma contrapartida (“*trade-off*”) ao perdermos a linearidade do problema de otimização estocástico, que é ter que assegurar boa representatividade do gradiente e da função f .

Para finalizar, mostramos uma aplicação interessante de como o método do gradiente conjugado não linear estocástico apresentado pode ser aplicado para demonstrar a convergência de problemas de otimização determinísticos, empregando a busca em linha atendendo à condição de Armijo (ARMIJO, 1966). Esse resultado é mais forte que a demonstração de convergência realizada em (HAGER; ZHANG, 2005), a qual exige que a busca em linha satisfaça a condição de Wolfe (NOCEDAL; WRIGHT, 2006b).

Estrutura do Trabalho

O presente trabalho encontra-se dividido em cinco capítulos, a saber:

- Introdução - abrangemos os principais métodos de aproximações estocásticas e desenvolvimentos teóricos dessa área, além de apresentarmos os métodos de gradiente conjugado linear e não-linear estocásticos desenvolvidos neste trabalho.
- Fundamentos Matemáticos - apresentamos os fundamentos matemáticos da teoria de quase supermartingales não negativos e fornecemos duas aplicações, não presentes na literatura, para a demonstração da convergência quase certa do método de Robbins e Monro e Kiefer e Wolfowitz utilizando esses fundamentos.
- O Gradiente Conjugado Linear Estocástico - propomos um método de gradiente conjugado linear estocástico, demonstrando a convergência quase certa à solução do problema quadrático estocástico e realizando a análise da taxa de convergência desse novo método. Além disso, realizamos experimentos numéricos com a finalidade de mostrar que o método desenvolvido é promissor quando comparado ao método de Robbins e Monro.
- O Gradiente Conjugado Não-Linear Estocástico - desenvolvemos o método do gradiente conjugado não linear estocástico e, similarmente ao capítulo anterior, demonstramos a convergência quase certa e a análise da taxa de convergência desse método. Adicionalmente, apresentamos uma aplicação do método desenvolvido e experimentos numéricos.
- Conclusões e Considerações Finais - realizamos as observações e reflexões finais para encerrarmos este trabalho.

Contribuições da Tese de Doutorado

Destacamos, a seguir, as principais contribuições desta tese de doutorado, organizadas por capítulo.

- Fundamentos Matemáticos - Realizamos uma demonstração completa do Teorema 1 e do Teorema 2 de (ROBBINS; SIEGMUND, 1971) e apresentamos uma aplicação do primeiro teorema na demonstração da convergência quase certa de (sub)martingales. Com relação ao Teorema 2 de (ROBBINS; SIEGMUND, 1971), apresentamos um contraexemplo que mostra que não se pode assegurar que o limite de uma sequência aleatória $\{Z_n\}_{n \geq 1}$ seja finito quase certamente ao considerarmos as hipóteses desse teorema. Em seguida, tendo em vista que os autores de (ROBBINS; SIEGMUND, 1971) utilizam a propriedade de martingale local para demonstrar o Teorema 1 e também a utilizam para demonstrar a Proposição 1 de (ROBBINS; SIEGMUND, 1971), neste trabalho, construímos o Teorema 2.1.4, baseado na definição de processo parado, o que torna a prova da Proposição 1 do artigo (ROBBINS; SIEGMUND, 1971) uma aplicação desse teorema. Dessa forma, desenvolvemos uma prova mais simples, visando sanar a não intuitividade presente na demonstração da Proposição 1 de (ROBBINS; SIEGMUND, 1971). A partir desta proposição, construímos uma demonstração simples e completa da Proposição 2 do mesmo trabalho, cuja prova foi fornecida pelos autores apenas em forma de esboço. Por fim, com base nas propriedades de quase-supermartingales não negativos, apresentamos duas aplicações não reportadas na literatura que estabelecem a convergência quase certa dos métodos de Robbins–Monro e Kiefer–Wolfowitz.
- O Gradiente Conjugado Linear Estocástico - Desenvolvemos o Algoritmo 1, presente neste capítulo, que denominamos de o método do Gradiente Conjugado Linear Estocástico, o qual é baseado no método determinístico de Fletcher-Reeves (NOCEDAL; WRIGHT, 2006a). Além disso, os Teoremas 3.1.2 e 3.1.3, elaborados por nós, estabelecem a análise de convergência quase certa para o método proposto no Algoritmo 1, juntamente com suas respectivas demonstrações. Por fim, desenvolvemos a análise da taxa de convergência, realizada no Teorema 3.2.1, que afirma que essa taxa é da ordem $O\left(\frac{1}{k \log k}\right)$ para o método construído neste capítulo. Ressaltamos que os desenvolvimentos citados, e.g. Algoritmo 1 e Teoremas 3.1.2, 3.1.3 e 3.2.1 são contribuições inéditas na literatura.
- O Gradiente Conjugado Não-Linear Estocástico - Construímos o Algoritmo 2, que chamamos de o método do Gradiente Conjugado Não Linear Estocástico, tendo como referência determinística o método de Hager e Zhang (HAGER; ZHANG, 2005). Os lemas, proposições, teorema e corolários das Seções 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5, assim como as respectivas demonstrações, são contribuições legítimas desta tese de doutorado. Esse arcabouço matemático tem por finalidade apresentar: as análises de convergência quase certa e taxa de convergência; aplicação teórica; experimento numérico; para o método desenvolvido no Algoritmo 2.

2 Fundamentos Matemáticos

Iniciamos o presente capítulo, na Seção 2.1, apresentando os fundamentos matemáticos da teoria de quase supermartingales não negativos, utilizada extensivamente para a demonstração da convergência quase certa e para a análise da taxa de convergência dos métodos de gradiente conjugado estocásticos, desenvolvidos nos Capítulos 3 e 4. Na seção seguinte, fornecemos duas aplicações do Teorema 2.1.1, na demonstração de convergência quase certa dos métodos de Robbins e Monro e de Kiefer e Wolfowitz. Enfatizamos que a demonstração apresentada para este método contempla o caso multidimensional, visto que na literatura não se tem tal demonstração utilizando os conceitos abordados na Seção 2.1.

2.1 Quase Supermartingales Não Negativos

Robbins e Siegmund (ROBBINS; SIEGMUND, 1971) apresentaram a propriedade de quase supermartingale não negativo, tornando-a uma poderosa ferramenta para a prova de convergência de sequências e séries aleatórias em um conjunto específico, como pode ser aferido no Teorema 2.1.1. Assim, este capítulo inicia com a definição de uma sequência de variáveis aleatórias para que esta seja um quase supermartingale não negativo.

Definição 1 ((ROBBINS; SIEGMUND, 1971)). *Sejam (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade e $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$ uma filtração deste espaço de probabilidade, i.e. $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_3 \subseteq \dots$, sendo que a σ -álgebra $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$ para todo $n \geq 1$. Se para cada $n \geq 1$, existem variáveis aleatórias não-negativas Z_n, β_n, ξ_n e δ_n , \mathcal{F}_n -mensuráveis, tais que*

$$E(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq Z_n(1 + \beta_n) + \xi_n - \delta_n. \quad (2.1)$$

Então, dizemos que $\{Z_n\}_{n \geq 1}$ é um quase supermartingale não negativo.

Observamos que $E(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n)$ está bem definida, pois Z_n é uma variável aleatória não negativa para todo $n \geq 1$, utilizando a definição da esperança condicional dada uma σ -álgebra.

Em seguida, apresentamos o principal teorema da seção de (ROBBINS; SIEGMUND, 1971), Teorema 2.1.1, que é utilizado para as análises de convergência quase certas e análises da taxa de convergência de métodos de aproximações estocásticas, entre os quais podemos citar o método do gradiente conjugado linear estocástico, apresentado no próximo capítulo, e o método do gradiente conjugado não linear estocástico, no Capítulo 4. Além disso, os autores do artigo citado fornecem uma série de aplicações desse teorema, podendo ser destacadas as demonstrações de convergência quase certa do método de aproximação estocástica de Robbins e Monro (ROBBINS; MONRO, 1951), nas aplicações 2 e 3 de (ROBBINS; SIEGMUND, 1971), e a demonstração simplificada do Teorema de Aproximação de Dvoretzky (DVORETSKY, 1955)

restrita à análise de convergência quase certa, na aplicação 4 de (ROBBINS; SIEGMUND, 1971). Como já mencionado no Capítulo 1, o teorema de Dvoretzky prova a convergência quase certa e em L^2 de uma classe de métodos de aproximações estocásticas, que englobam os métodos de aproximações estocásticas.

A demonstração do Teorema 2.1.1 está presente nas páginas 234 e 235 de (ROBBINS; SIEGMUND, 1971), entretanto, iremos detalhar essa demonstração, apresentando etapas da demonstração omitidas e afirmações não certificadas.

Teorema 2.1.1 (Teorema 1 do artigo (ROBBINS; SIEGMUND, 1971)). *Sejam $\{Z_n\}_{n \geq 1}$, $\{\beta_n\}_{n \geq 1}$, $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ e $\{\delta_n\}_{n \geq 1}$ sequências de variáveis aleatórias satisfazendo a Definição 1. Então, no conjunto*

$$A = \left\{ \sum_{n \geq 1} \beta_n < \infty, \sum_{n \geq 1} \xi_n < \infty \right\},$$

temos que

C1) $\lim_n Z_n$ existe e é finito quase certamente;

C2) $\sum_n \delta_n < \infty$ q.c.

Demonstração. Temos que o conjunto $A \in \mathcal{F}$ está definido como

$$A = \left\{ \sum_{n \geq 1} \beta_n < \infty, \sum_{n \geq 1} \xi_n < \infty \right\}.$$

Definamos as sequências de variáveis aleatórias $\{Z'_n\}_{n \geq 1}$, $\{\xi'_n\}_{n \geq 1}$ e $\{\delta'_n\}_{n \geq 1}$, tais que:

$$Z'_n = Z_n \prod_{j=1}^{n-1} (1 + \beta_j)^{-1},$$

$$\xi'_n = \xi_n \prod_{j=1}^n (1 + \beta_j)^{-1},$$

e

$$\delta'_n = \delta_n \prod_{j=1}^n (1 + \beta_j)^{-1}.$$

Então, para todo $n \geq 1$, Z'_n , ξ'_n e δ'_n são variáveis aleatórias não negativas, \mathcal{F}_n -mensuráveis, que satisfazem a relação

$$E(Z'_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq Z'_n + \xi'_n - \delta'_n.$$

Em seguida, notemos que no evento A , temos

$$\sum_{n \geq 1} \xi'_n \leq \sum_{n \geq 1} \xi_n < \infty,$$

pois, pela definição de ξ'_n , fazemos o uso de que $\xi'_n \leq \xi_n$ para todo $n \geq 1$. Além disso, definindo, para todo $n \geq 1$,

$$\mu_n = Z'_n - \sum_{k=1}^{n-1} (\xi'_k - \delta'_k), \quad (2.2)$$

e, para algum $a \in \mathbb{N}$,

$$\tau_a = \inf\{n : \sum_{k=1}^n \xi'_k > a\},$$

é tempo de parada com relação à filtração $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$.

Ademais, afirmamos que o processo parado $\{\mu_{\tau_a \wedge n}\}_{n \geq 1}$ é um supermartingale, pois

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mu_{\tau_a \wedge n+1} | \mathcal{F}_n) &= \mu_{\tau_a} I_{\{\tau_a \leq n\}} + \mathbb{E}(\mu_{n+1} I_{\{\tau_a > n\}} | \mathcal{F}_n) \\ &= \mu_{\tau_a} I_{\{\tau_a \leq n\}} + \mathbb{E}(\mu_{n+1} | \mathcal{F}_n) I_{\{\tau_a > n\}} \\ &\leq \mu_{\tau_a \wedge n}, \end{aligned}$$

visto, pela definição de μ_n , ser válida a desigualdade:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mu_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(Z'_{n+1} - \sum_{k=1}^n (\xi'_k - \delta'_k) | \mathcal{F}_n) \\ &= - \sum_{k=1}^n (\xi'_k - \delta'_k) + \mathbb{E}(Z'_{n+1} | \mathcal{F}_n) \\ &\leq Z'_n - \sum_{k=1}^{n-1} (\xi'_k - \delta'_k) \\ &= \mu_n. \end{aligned}$$

Por fim, para concluirmos que $\{\mu_{\tau_a \wedge n}\}_{n \geq 1}$ é um supermartingale, precisamos mostrar que $\mathbb{E}(\mu_{\tau_a \wedge n}^-) < \infty$ para todo $n \geq 1$ (página 11 de (CHOW; ROBBINS; SIEGMUND, 1991)), que é satisfeito, uma vez que

$$\mathbb{E}(\mu_{\tau_a \wedge n}^-) \leq a \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Portanto, o processo parado $\{\mu_{\tau_a \wedge n}\}_{n \geq 1}$ é um supermartingale.

Imediatamente, notemos que para todo $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n \wedge \tau_a - 1} \xi'_k \leq a \implies - \sum_{k=1}^{n \wedge \tau_a - 1} \xi'_k \geq -a,$$

resultando em $\sup_n \mathbb{E}(\mu_{\tau_a \wedge n}^-) \leq a$. Portanto, utilizando o Teorema de Convergência de Martingales, Teorema 2.1 de (CHOW; ROBBINS; SIEGMUND, 1991), obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{\tau_a \wedge n} \quad \text{existe e é finito q.c.}$$

Inclusive, $\lim_n \mu_n$ existe e é finito q.c. no conjunto

$$\{\tau_a = \infty\} = \left\{ \sum_1^{\infty} \xi'_n \leq a \right\}, \quad (2.3)$$

sendo a igualdade de eventos (2.3) válida para todo $a \in \mathbb{N}$ e, conseqüentemente

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \xi'_n \leq a \right\} \uparrow \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \xi'_n < \infty \right\}, \text{ quando } a \rightarrow \infty.$$

Então, $\lim \mu_n$ existe e é finito quase certamente em $\{\sum_{n=1}^{\infty} \xi'_n < \infty\}$. Contudo, reescrevendo a definição de μ_n , equação (2.2), temos

$$\mu_n = Z'_n - \sum_{k=1}^{n-1} \xi'_k + \sum_{k=1}^{n-1} \delta'_k,$$

implicando que, no evento $\{\sum_{n \geq 1} \xi'_n < \infty\}$, que contém $\{\sum_{n \geq 1} \xi_n < \infty\}$,

$$\begin{cases} \lim Z'_n \text{ existe e é finito q.c.} \\ \sum_{n \geq 1} \delta'_n < \infty \text{ q.c.} \end{cases},$$

pois, $\{Z'_n\}_{n \geq 1}$ e $\{\delta'_n\}_{n \geq 1}$ são seqüências de variáveis aleatórias não negativas.

Reescrevendo a definição de Z'_n como

$$Z_n = Z'_n \prod_{k=1}^{n-1} (1 + \beta_k),$$

e, sabendo que $\sum_{n \geq 1} \beta_n < \infty$ q.c. (o que implica em $\prod_{n \geq 1} (1 + \beta_k) < \infty$ q.c.), resulta que $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n$ existe e é finito quase certamente. Por outro lado, reescrevendo a definição de δ'_n como

$$\delta_n = \delta'_n \prod_{k=1}^{n-1} (1 + \beta_k) \leq \delta'_n \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \beta_k),$$

e, tomando o somatório em n , podemos afirmar que

$$\sum_{n \geq 1} \delta_n \leq \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \beta_k) \sum_{n \geq 1} \delta'_n < \infty \text{ q.c.},$$

pois, $\sum_{n \geq 1} \delta'_n < \infty$ e, como observado anteriormente, $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + \beta_k) < \infty$ (no evento A , temos $\sum_{n \geq 1} \beta_n < \infty$).

Sendo assim, concluímos a prova desse teorema que, no evento A :

- $\lim_n Z_n$ existe e é finito q.c.;
- $\sum_n \delta_n < \infty$ q.c.

□

Observamos que na demonstração acima, provamos que o processo parado $\{\mu_{\tau_a \wedge n}\}_{n \geq 1}$ é um supermartingale, utilizando o tempo de parada τ_a , com $a \in \mathbb{N}$. Ademais, $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$ é um (super)martingale local (GALL, 2016), tendo a seqüência de tempos de parada $\{\tau_a \wedge a\}_{a \geq 1}$ como seu redutor.

A fim de exemplificar uma aplicação do Teorema 2.1.1, demonstrado acima, provamos o Teorema da convergência quase certa de martingales.

Exemplo 2.1.2 (Teorema da convergência quase certa de (sub)martingales). *Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ um submartingale com*

$$\sup_n EX_n^+ < \infty.$$

então $\lim X_n$ existe quase certamente.

Demonstração. A fim de provar que $\{X_n\}_{n \geq 1}$ converge quase certamente é suficiente mostrar que $\lim_n \max\{X_n, a\}$ converge quase certamente para todo $a \in \mathbb{R}$. Nessa demonstração, estamos considerando a filtração natural de $\{X_n\}_{n \geq 1}$.

Dado $a \in \mathbb{R}$, definamos uma seqüência de variáveis aleatórias $\{Y_n\}_{n \geq 1}$, tal que $Y_n = \max\{X_n, a\} - a$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ é um submartingale, pela desigualdade de Jensen, não negativo, \mathcal{F}_n -mensurável, com $\sup_n EY_n < \infty$. Pois, reescrevendo Y_n como

$$Y_n = \begin{cases} X_n, & \text{se } X_n \geq a \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases},$$

temos dois casos válidos para todo $n \geq 1$.

- Se $a < 0$, então:

$$\begin{aligned} EY_n &= E(X_n I_{\{X_n \geq a\}}) \\ &= E(X_n I_{\{a < X_n \leq 0\}}) + E(X_n I_{\{X_n \geq 0\}}) \\ &\leq EX_n^+. \end{aligned}$$

- Se $a \geq 0$, então:

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= E(X_n I_{\{X_n \geq a\}}) \\ &\leq EX_n^+. \end{aligned}$$

Portanto,

$$0 \leq EY_n \leq EX_n^+,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, e, conseqüentemente,

$$\sup EY_n \leq \sup EX_n^+ < \infty.$$

Pela definição de submartingale ([CHOW; ROBBINS; SIEGMUND, 1991](#)), temos que existe $\xi_n \geq 0$ q.c., \mathcal{F}_n -mensurável, para todo $n \geq 1$, tal que

$$E(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) = Y_n + \xi_n.$$

Ao tomarmos a esperança da equação acima e utilizando a propriedade da esperança iterada, resulta que

$$E(\xi_n) = E(Y_{n+1}) - E(Y_n),$$

em que podemos tomar o somatório em n , para afirmar que

$$\sum_n E(\xi_n) \leq \sup_n E(Y_n) < \infty.$$

Em seguida, utilizando o Teorema da Convergência Monótona, concluímos que

$$\sum_n \xi_n < \infty \quad \text{q.c.}$$

Por fim, utilizando o Teorema 2.1.1, temos que $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ converge a um valor finito quase certamente para todo $a \in \mathbb{R}$, implicando que $\{X_n\}_{n \geq 1}$ converge quase certamente. \square

Seguidamente, apresentamos o Teorema 2 de (ROBBINS; SIEGMUND, 1971), destacando na demonstração alguns pontos de atenção.

Teorema 2.1.3 (Teorema 2 de (ROBBINS; SIEGMUND, 1971)). *Sejam $\{Z_n\}_{n \geq 1}$, $\{\beta_n\}_{n \geq 1}$, $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ e $\{\delta_n\}_{n \geq 1}$ seqüências de variáveis aleatórias satisfazendo a Definição 1, $b > 0$ e:*

$$\beta_n(b) = \beta_n I_{\{Z_n \leq b\}},$$

$$\xi_n(b) = \xi_n I_{\{Z_n \leq b\}},$$

$$\delta_n(b) = \delta_n I_{\{Z_n \leq b\}}.$$

Então, $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n$ existe q.c. no conjunto:

$$B = \bigcap_b \left\{ \sum_n \beta_n(b) < \infty, \sum_n \xi_n(b) < \infty \right\},$$

e:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty \quad \text{q.c. no conjunto } B \cap \{\lim_n Z_n < \infty\}.$$

Demonstração. Dado $b > 0$, temos, da desigualdade (2.1), que:

$$E(Z_{n+1} \wedge b | \mathcal{F}_n) \leq [(1 + \beta_n)Z_n + \xi_n - \delta_n] \wedge b,$$

pois, $x \wedge b = \min\{x, b\}$ é uma função côncava não decrescente, bastando-nos utilizar a desigualdade de Jensen aplicada às funções côncavas em esperanças condicionais para demonstrar a afirmação acima.

Notemos que, no evento $\{Z_n \leq b\}$,

$$\begin{aligned} E(Z_{n+1} \wedge b | \mathcal{F}_n) &\leq (1 + \beta_n)Z_n + \xi_n - \delta_n \\ &= (1 + \beta_n(b))(Z_n \wedge b) + \xi_n(b) - \delta_n(b). \end{aligned}$$

E, no evento $\{Z_n > b\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_{n+1} \wedge b | \mathcal{F}_n) &\leq b \\ &= (1 + \beta_n(b))(Z_n \wedge b) + \xi_n(b) - \delta_n(b). \end{aligned}$$

Assim sendo, ao definirmos $X_n = Z_n \wedge b$, encontramos:

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq (1 + \beta_n(b))X_n + \xi_n(b) - \delta_n(b),$$

possibilitando-nos afirmar, pelo Teorema 2.1.1, que

$$\lim_n X_n \text{ existe e é finito q.c. e } \sum_{n \geq 1} \delta_n(b) < \infty \text{ q.c.,}$$

no evento $\{\sum \beta_n(b) < \infty, \sum \xi_n(b) < \infty\}$. Como $\lim_n Z_n \wedge b$ existe e é finito quase certamente para qualquer $b > 0$, então $\lim_n Z_n$ existe no evento $B = \bigcap_b \{\sum_n \beta_n(b) < \infty, \sum_n \xi_n(b) < \infty\}$.

Entretanto, vale destacar que no conjunto $B = \bigcap_b \{\sum_{n \geq 1} \beta_n(b) < \infty, \sum_{n \geq 1} \xi_n(b) < \infty\}$ não podemos afirmar que $\lim Z_n < \infty$ q.c. Como contra-exemplo, defina para todo $n \geq 1$, $\delta_n = \xi_n = 0$ e $\beta_n = Z_n = n$. Então, para todo $b > 0$, obtemos que

$$\sum \beta_n(b) = \frac{(\lfloor b \rfloor + 1)\lfloor b \rfloor}{2} < \infty,$$

e,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n \wedge b &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \wedge b \\ &= b < \infty. \end{aligned}$$

Porém,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty.$$

Agora, mostramos a segunda parte do teorema, em que:

$$\sum_{n \geq 1} \delta_n < \infty \text{ q.c. no conjunto } B \cap \{\lim_n Z_n < \infty\}.$$

Para tal, tome $\omega \in B \cap \{\lim_n Z_n < \infty\}$, então para algum $b > 0$, temos, para todo $n \geq 1$:

$$Z_n(\omega) < b,$$

e, conseqüentemente, $\delta_n(b)(\omega) = \delta_n(\omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, novamente pelo Teorema 2.1.1, concluímos que

$$\sum_{n \geq 1} \delta_n(\omega) < \infty \text{ q.c.}$$

Sendo a relação acima válida para todo $\omega \in B \cap \{\lim_n Z_n < \infty\}$, concluímos a demonstração desse teorema. \square

Tendo em vista que os autores de (ROBBINS; SIEGMUND, 1971) utilizam a propriedade de martingale local (GALL, 2016) para demonstrar o Teorema 2.1.1 e também a utilizam para demonstrar a Proposição 1 de (ROBBINS; SIEGMUND, 1971), neste trabalho nós construímos o Teorema 2.1.4, baseado na definição de processo parado, o que torna a prova da Proposição 1 do artigo (ROBBINS; SIEGMUND, 1971) uma aplicação desse teorema. Para sua demonstração, utilizamos conceitos e teoremas fundamentais da teoria de probabilidade, sem a necessidade de recorrermos à propriedade de martingales locais, como realizado em (ROBBINS; SIEGMUND, 1971). Deve-se notar que empregar essa propriedade envolve definir uma sequência de tempos de parada crescente e ilimitada específica, criar um processo parado que seja um (super)martingale e verificar que é integravelmente uniforme (ROLLA; DELIMA, 2024) para cada tempo de parada. As referidas tarefas, à primeira vista, são não intuitivas, exigindo uma criatividade por parte dos autores, que dificilmente têm os *insights* iniciais compreendidos pelos leitores.

Logo, visando sanar a não intuitividade presente na demonstração da Proposição 1 de (ROBBINS; SIEGMUND, 1971), utilizamos a definição de processo parado e propomos, semelhante ao Teorema do martingale parado (WILLIAMS, 1991), o Teorema do quase supermartingale não-negativo parado.

Teorema 2.1.4 (Teorema do Quase Supermartingale Não-Negativo Parado). *Sejam $\{Z_n\}_{n \geq 1}$, $\{\beta_n\}_{n \geq 1}$, $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ e $\{\delta_n\}_{n \geq 1}$ sequências de variáveis aleatórias satisfazendo a Definição 1 e τ é um tempo de parada, com respeito à mesma filtração. Então, ao definirmos, para todo $n \geq 1$, $\tilde{\beta}_n = \mathbb{1}_{\{\tau > n\}}\beta_n$, $\tilde{\xi}_n = \mathbb{1}_{\{\tau > n\}}\xi_n$, $\tilde{Z}_n = Z_{n \wedge \tau}$, $\tilde{\delta}_n = \mathbb{1}_{\{\tau > n\}}\delta_n$, temos que $\{\tilde{Z}_n\}_{n \geq 1}$, $\{\tilde{\beta}_n\}_{n \geq 1}$, $\{\tilde{\xi}_n\}_{n \geq 1}$ e $\{\tilde{\delta}_n\}_{n \geq 1}$ satisfazem a definição de quase supermartingale não-negativo.*

Demonstração. Visto que, para todo $n \geq 1$, temos, da definição de processo parado,

$$Z_{(n+1) \wedge \tau} = Z_{n+1} \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} + \sum_{k=1}^n Z_k \mathbb{1}_{\{\tau = k\}},$$

então, se τ é tempo de parada com respeito à mesma filtração,

$$\mathbb{E}(Z_{(n+1) \wedge \tau} | \mathcal{F}_n) \leq Z_{n \wedge \tau} + \mathbb{1}_{\{\tau > n\}}(\beta_n Z_n + \xi_n - \delta_n) \quad \text{q.c.} \quad (2.4)$$

Pois, das definições de processo parado e quase supermartingale não-negativo, Definição 1, resulta, para todo $n \geq 1$, que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_{(n+1) \wedge \tau} | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n Z_k \mathbb{1}_{\{\tau = k\}} | \mathcal{F}_n\right) + \mathbb{E}(Z_{n+1} \mathbb{1}_{\{\tau \leq n\}^c} | \mathcal{F}_n) \\ &= \sum_{k=1}^n Z_k \mathbb{1}_{\{\tau = k\}} + \mathbb{E}(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n) \mathbb{1}_{\{\tau \leq n\}^c} \\ &\leq Z_\tau \mathbb{1}_{\{\tau \leq n\}} + [(1 + \beta_n)Z_n + \xi_n - \delta_n] \mathbb{1}_{\{\tau \leq n\}^c} \\ &= Z_\tau \mathbb{1}_{\{\tau \leq n\}} + Z_n \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} + (\beta_n Z_n + \xi_n - \delta_n) \mathbb{1}_{\{\tau > n\}} \\ &= Z_{\tau \wedge n} + \mathbb{1}_{\{\tau > n\}}(\beta_n Z_n + \xi_n - \delta_n) \quad \text{q.c.} \end{aligned}$$

Defina

$$\tilde{\beta}_n = \mathbb{1}_{\{\tau > n\}}\beta_n, \quad \tilde{\xi}_n = \mathbb{1}_{\{\tau > n\}}\xi_n, \quad \tilde{Z}_n = Z_{n \wedge \tau} \text{ e } \tilde{\delta}_n = \mathbb{1}_{\{\tau > n\}}\delta_n,$$

implicando que $\{\tilde{Z}_n\}_{n \geq 1}$, $\{\tilde{\beta}_n\}_{n \geq 1}$, $\{\tilde{\xi}_n\}_{n \geq 1}$ e $\{\tilde{\delta}_n\}_{n \geq 1}$ são variáveis aleatórias não-negativas, \mathcal{F}_n -mensuráveis.

Então, da desigualdade (2.4), temos

$$\begin{aligned} E(\tilde{Z}_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= E(Z_{n+1 \wedge \tau} | \mathcal{F}_n) \\ &\leq Z_{\tau \wedge n} + \mathbb{1}_{\{\tau > n\}}\beta_n Z_n + \mathbb{1}_{\{\tau > n\}}\tilde{\xi}_n - \mathbb{1}_{\{\tau > n\}}\tilde{\delta}_n \\ &= \tilde{Z}_n + \tilde{\beta}_n Z_n + \tilde{\xi}_n - \tilde{\delta}_n \\ &= \tilde{Z}_n + \tilde{\beta}_n \tilde{Z}_n + \tilde{\xi}_n - \tilde{\delta}_n \\ &= (1 + \tilde{\beta}_n)\tilde{Z}_n + \tilde{\xi}_n - \tilde{\delta}_n \text{ q.c.}, \end{aligned}$$

satisfazendo a relação (2.1). □

A seguir, apresentamos o Lema 2.1.5, utilizado na demonstração da Proposição 2.1.6.

Lema 2.1.5. *Sejam $\{Z_n\}_{n \geq 1}$, $\{\beta_n\}_{n \geq 1}$, $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ e $\{\delta_n\}_{n \geq 1}$ seqüências de variáveis aleatórias satisfazendo a Definição 1. Se $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq m$, então*

$$\begin{aligned} E[Z_n | \mathcal{F}_m] &\leq Z_m + E \left[\sum_{k=m}^{n-1} \beta_k Z_k + \xi_k | \mathcal{F}_m \right] \\ &= Z_m + \sum_{k=m}^{n-1} E[\beta_k Z_k + \xi_k | \mathcal{F}_m] \text{ q.c.} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Demonstração. Por indução em n , demonstraremos que a desigualdade (2.5) é satisfeita. Assim:

- i) Se $n = m$ é imediato que a desigualdade (2.5) é satisfeita, visto que Z_m é \mathcal{F}_m -mensurável pela definição 1;
- ii) Se $n = m + 1$ também é imediato que a desigualdade (2.5) é satisfeita, pois, $\{Z_n\}_{n \geq 1}$, $\{\beta_n\}_{n \geq 1}$, $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ e $\{\delta_n\}_{n \geq 1}$ satisfazem a definição 1, e, conseqüentemente, a relação (2.1). Além disso, temos que $\delta_n \geq 0$ para todo $n \geq 1$;
- iii) Se $n > m + 1$, sabemos pela definição 1, para todo $n > 1$, que

$$\begin{aligned} E[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n] &\leq Z_n + \beta_n Z_n + \xi_n - \delta_n \\ &\leq Z_n + \beta_n Z_n + \xi_n \text{ q.c.} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Em seguida, da desigualdade (2.6) e pela hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_m] &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n)|\mathcal{F}_m) \\
 &\leq \mathbf{E}(Z_n + \beta_n Z_n + \xi_n|\mathcal{F}_m) \\
 &= \mathbf{E}(Z_n|\mathcal{F}_m) + \mathbf{E}(\beta_n Z_n + \xi_n|\mathcal{F}_m) \\
 &\leq Z_m + \sum_{k=m}^{n-1} \mathbf{E}(\beta_k Z_k + \xi_k|\mathcal{F}_m) + \mathbf{E}(\beta_n Z_n + \xi_n|\mathcal{F}_m) \\
 &= Z_m + \sum_{k=m}^n \mathbf{E}(\beta_k Z_k + \xi_k|\mathcal{F}_m) \text{ q.c.}
 \end{aligned}$$

□

Uma observação importante é que o lema anterior pode ser enunciado como a Proposição 2.1.6 a seguir, considerando τ um tempo de parada degenerado em um dado $n \geq m$, i.e. $\mathbf{P}(\tau = n) = 1$.

Então, utilizando o Teorema 2.1.4 e Lema 2.1.5 desenvolvidos, demonstramos a Proposição 1 de (ROBBINS; SIEGMUND, 1971), reescrita na Proposição 2.1.6. Ressaltamos mais uma vez, que nessa demonstração, não precisamos recorrer às propriedades de martingales locais (GALL, 2016). Acreditamos que a demonstração apresentada seja mais simples que a original, além de apresentarmos uma aplicação de uma versão de teorema de parada para quase supermartingale não-negativo.

Proposição 2.1.6 (Proposição 1 de (ROBBINS; SIEGMUND, 1971)). *Sejam $\{Z_n\}_{n \geq 1}$, $\{\beta_n\}_{n \geq 1}$, $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ e $\{\delta_n\}_{n \geq 1}$ sequências de variáveis aleatórias satisfazendo a definição 1. Se dado $m \in \{1, 2, \dots\}$ e um tempo de parada finito quase certamente $\tau \geq m$, então*

$$\mathbf{E}(Z_\tau|\mathcal{F}_m) \leq Z_m + \mathbf{E}\left(\sum_{k=m}^{\tau-1} (\beta_k Z_k + \xi_k|\mathcal{F}_m)\right) \text{ q.c.}$$

Demonstração. Do Teorema 2.1.4 e Lema 2.1.5, temos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(Z_{n \wedge \tau}|\mathcal{F}_m) &= \mathbf{E}(\tilde{Z}_n|\mathcal{F}_m) \\
 &\leq \tilde{Z}_m + \mathbf{E}\left(\sum_{k=m}^{n-1} (\tilde{\beta}_k \tilde{Z}_k + \tilde{\xi}_k)|\mathcal{F}_m\right) \\
 &= \tilde{Z}_m + \mathbf{E}\left(\sum_{k=m}^{n-1} \mathbb{1}_{\{\tau > k\}} (\beta_k Z_k + \xi_k)|\mathcal{F}_m\right) \\
 &= Z_m + \mathbf{E}\left(\sum_{k=m}^{n-1} \mathbb{1}_{\{\tau > k\}} (\beta_k Z_k + \xi_k)|\mathcal{F}_m\right) \text{ q.c.}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ademais, tendo que τ é um tempo de parada finito quase certamente, resulta que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_{n \wedge \tau} = Z_\tau \text{ q.c.,} \tag{2.8}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^{n-1} \mathbb{1}_{\{\tau > k\}} (\beta_k Z_k + \xi_k) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\tau > k\}} (\beta_k Z_k + \xi_k) \\ &= \sum_{k=0}^{\tau-1} (\beta_k Z_k + \xi_k) \text{ q.c.} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Por fim, do lema de Fatou, das relações (2.7), (2.8), (2.9) e do Teorema da convergência Monótona, concluímos que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Z_\tau | \mathcal{F}_m) &= \mathbf{E}(\liminf Z_{n \wedge \tau} | \mathcal{F}_m) \\ &\leq \liminf \mathbf{E}(\tilde{Z}_n | \mathcal{F}_m) \\ &= Z_m + \liminf \mathbf{E} \left(\sum_{k=m}^{n-1} \mathbb{1}_{\{\tau > k\}} (\beta_k Z_k + \xi_k) | \mathcal{F}_m \right) \\ &= Z_m + \mathbf{E} \left(\sum_{k=m}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\tau > k\}} (\beta_k Z_k + \xi_k) | \mathcal{F}_m \right) \\ &= Z_m + \mathbf{E} \left(\sum_{k=m}^{\tau-1} (\beta_k Z_k + \xi_k) \right) \text{ q.c.} \end{aligned}$$

□

A proposição a seguir é uma aplicação direta da Proposição 2.1.6 (e, conseqüentemente, do Teorema 2.1.4), uma desigualdade maximal condicionada, que permite provisionar um limite superior para a probabilidade do comportamento de uma subsequência linear (sequencial) de $\{Z_n\}_{n \geq 1}$ exceder um certo valor, dada uma sub σ -álgebra do espaço de probabilidade. Essa proposição é uma extensão da desigualdade maximal de (super)martingales, também conhecida como desigualdade maximal de Doob (WILLIAMS, 1991).

Os autores em (ROBBINS; SIEGMUND, 1971) forneceram apenas um esboço para sua demonstração. Abaixo, apresentamos uma demonstração simples e completa.

Proposição 2.1.7 (Proposição 2 de (ROBBINS; SIEGMUND, 1971)). *Sejam $\{Z_n\}_{n \geq 1}$, $\{\beta_n\}_{n \geq 1}$, $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ e $\{\delta_n\}_{n \geq 1}$ seqüências de variáveis aleatórias satisfazendo a definição 1, então para todo $a > 0$, $m \in \mathbb{N}$ e $n \geq m$, temos que*

$$P \left(\max_{m \leq k \leq n} Z_k \geq a | \mathcal{F}_m \right) \leq a^{-1} \left[Z_m + \mathbf{E} \left(\sum_{k=m}^{n-1} \xi_k | \mathcal{F}_m \right) \right] + \mathbf{E} \left(\sum_{k=m}^{n-1} \beta_k | \mathcal{F}_m \right) \text{ q.c.} \quad (2.10)$$

Demonstração. Definamos o tempo de parada τ como

$$\tau = \inf \{k \geq m : Z_k \geq a\},$$

e $n \wedge \tau$ é um tempo de parada finito quase certamente. Além disso

$$P(Z_{n \wedge \tau} \geq a | \mathcal{F}_m) = P \left(\max_{m \leq k \leq n} Z_k \geq a | \mathcal{F}_m \right),$$

e, pela Proposição 2.1.6, temos

$$\begin{aligned} aP(Z_{n \wedge \tau} \geq a | \mathcal{F}_m) &\leq E(Z_{n \wedge \tau} | \mathcal{F}_m) \\ &\leq Z_m + E\left(\sum_{k=m}^{n \wedge \tau - 1} \beta_k Z_k + \xi_k | \mathcal{F}_m\right) \\ &\leq Z_m + E\left(\sum_{k=m}^{n \wedge \tau - 1} \xi_k | \mathcal{F}_m\right) + aE\left(\sum_{k=m}^{n \wedge \tau - 1} \beta_k | \mathcal{F}_m\right) \text{ q.c.}, \end{aligned}$$

em que na última desigualdade, utilizamos a definição do tempo de parada τ .

Então, por $\{\beta_n\}_{n \geq 1}$ e $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ serem seqüências de variáveis aleatórias não negativas, temos o resultado desejado

$$\begin{aligned} P\left(\max_{m \leq k \leq n} Z_k \geq a | \mathcal{F}_m\right) &\leq a^{-1} \left[Z_m + E\left(\sum_{k=m}^{n \wedge \tau - 1} \xi_k | \mathcal{F}_m\right) \right] + E\left(\sum_{k=m}^{n \wedge \tau - 1} \beta_k | \mathcal{F}_m\right) \\ &\leq a^{-1} \left[Z_m + E\left(\sum_{k=m}^{n-1} \xi_k | \mathcal{F}_m\right) \right] + E\left(\sum_{k=m}^{n-1} \beta_k | \mathcal{F}_m\right) \text{ q.c.} \end{aligned}$$

□

O corolário a seguir é uma versão da desigualdade maximal de (super)martingales (desigualdade maximal de Doob) para processos estocásticos que são quase supermartingales não-negativos, Definição 1.

Corolário 2.1.7.1. *Sejam $\{Z_n\}_{n \geq 1}$, $\{\beta_n\}_{n \geq 1}$, $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ e $\{\delta_n\}_{n \geq 1}$ seqüências de variáveis aleatórias satisfazendo a definição 1, então para todo $a > 0$, $m \in \mathbb{N}$ e $n \geq m$, temos que*

$$P\left(\max_{m \leq k \leq n} Z_k \geq a\right) \leq a^{-1} \left[E(Z_m) + E\left(\sum_{k=m}^{n-1} \xi_k\right) \right] + E\left(\sum_{k=m}^{n-1} \beta_k\right).$$

Demonstração. Basta tomar a esperança na desigualdade (2.10). □

2.2 Aplicação

Iremos aplicar o conhecimento adquirido na seção anterior em duas análises de convergência, para o método de aproximações estocásticas de Robbins e Monro e para o método de Kiefer e Wolfowitz. Ressaltamos que as demonstrações apresentadas nas próximas duas subseções são de nossa autoria e buscam exemplificar a utilidade da teoria de supermartingales não negativos. Antes, enunciaremos um lema importante, que é usado na prova de convergência dos métodos citados e dos propostos nos Capítulos 3 e 4, os métodos do gradiente conjugado linear e não linear estocásticos.

Lema 2.2.1. *Sejam $\{a_n\}_{n \geq 1}$, $\{b_n\}_{n \geq 1}$ seqüências não negativas tais que:*

i) $\sum_{n \geq 1} a_n = \infty$;

ii) $\sum_{n \geq 1} a_n b_n < \infty$.

Então, existe pelo menos uma subsequência de $\{b_n\}_{n \geq 1}$, denominada $\{b_{n_k}\}_{k \geq 1}$, tal que $b_{n_k} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

Demonstração. Suponhamos que não exista uma subsequência de $\{b_n\}_{n \geq 1}$ tal que esta subsequência convirja a zero. Então, existe $L > 0$ tal que

$$\liminf b_n = L > 0.$$

Portanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\inf_{n \geq N} b_n \geq \frac{L}{2} \iff b_n \geq \frac{L}{2} \quad \forall n \geq N. \quad (2.11)$$

Assim sendo, como $\sum_{n \geq 1} a_n b_n < \infty$, temos que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n \geq M} a_n b_n < \frac{L}{2}.$$

Definindo $P = \max\{N, M\}$, da equivalência (2.11) e $\sum_{n \geq 1} a_n = \infty$, temos

$$\frac{L}{2} > \sum_{n \geq P} a_n b_n \geq \frac{L}{2} \sum_{n \geq P} a_n = \infty,$$

que é um absurdo.

Portanto, existe uma subsequência de $\{b_n\}_{n \geq 1}$ que converge a zero. \square

2.2.1 Convergência Quase Certa do Método de Robbins e Monro

O teorema apresentado a seguir é atribuído a Julius Blum (BLUM, 1954a), que foi o primeiro pesquisador a provar a convergência quase certa do método de Robbins e Monro em 1954, utilizando hipóteses menos restritivas que as utilizadas no artigo (ROBBINS; MONRO, 1951) (relembremos que estes pesquisadores provaram a convergência do método em L^2 e, consequentemente, em probabilidade). Entretanto, a demonstração desse teorema apresentada nesta subseção, é proposta por nós, utilizando o conceito de quase supermartingales não negativos, Definição 1 presente na Seção 2.1.

Seja $\{Y(x)\}_{x \in \mathbb{R}}$ um conjunto de variáveis aleatórias indexadas pelo conjunto \mathbb{R} , com $M(x) = E(Y(x))$ e $VAR(Y(x)) = \sigma^2(x) < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$, em que $VAR(\xi)$ é a variância da variável aleatória ξ . O nosso objetivo é encontrar $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $M(\theta) = 0$.

Definamos $X_1 = x_1$ q.c., para um dado $x_1 \in \mathbb{R}$, e façamos iterativamente:

$$X_{n+1} = X_n - a_n Y_n, \quad \forall n \geq 1, \quad (2.12)$$

com $\{a_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência real positiva.

Teorema 2.2.2 (Teorema de convergência quase certa de Robbins e Monro de (BLUM, 1954a)).
Seja $M(x)$ uma função Lebesgue-mensurável satisfazendo:

- A. Para algum $c, d \geq 0$, temos que $|M(x)| \leq c + d|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
- B. $\text{VAR } Y(x) = \sigma^2(x) \leq \sigma^2 < \infty$ ($\sigma^2(x)$ é uniformemente limitado);
- C. $M(x) < \alpha$ para todo $x < \theta$, $M(x) > \alpha$ para todo $x > \theta$, com $\alpha = 0$;
- D. $\inf_{\delta_1 \leq |x - \theta| \leq \delta_2} |M(x)| > 0$ para $0 < \delta_1 < \delta_2 < \infty$.

E, uma sequência real positiva $\{a_k\}_{k \geq 1}$ tal que:

- E. a) $\sum_{n \geq 1} a_n = \infty$ e b) $\sum_{n \geq 1} a_n^2 < \infty$.

Então, definindo $X_1 = x_1$ q.c., para algum $x_1 \in \mathbb{R}$, e, recursivamente, X_n igual à equação (2.12) para $n \geq 1$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \theta \text{ q.c.}$$

Demonstração. Definamos $\mathcal{F}_n = \sigma(\{X_1, Y_1, \dots, Y_{n-1}\})$, $Z_n = (X_n - \theta)^2$. Então, utilizando a definição de X_{n+1} , equação (2.12), as Hipóteses (A), (B), (C) e a desigualdade $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Z_{n+1} | \mathcal{F}] &= \mathbf{E}[(X_{n+1} - \theta)^2 | \mathcal{F}] \\ &= \mathbf{E}[(X_n - a_n Y_n - \theta)^2 | \mathcal{F}] \\ &= \mathbf{E}[(X_n - \theta) - a_n Y_n]^2 | \mathcal{F} \\ &= Z_n - 2a_n(X_n - \theta)\mathbf{E}(Y_n | \mathcal{F}) + a_n^2 \mathbf{E}(Y_n^2 | \mathcal{F}) \\ &= Z_n - 2a_n(X_n - \theta)M(X_n) + a_n^2 \mathbf{E}[(Y_n - M(X_n)) + M(X_n)]^2 | \mathcal{F} \\ &\leq Z_n + 2a_n^2 \mathbf{E}[(Y_n - M(x))^2 + M(X_n)^2 | \mathcal{F}] - 2a_n |X_n - \theta| |M(X_n)| \\ &\leq Z_n + 2a_n^2(\sigma^2 + M(X_n)^2) - 2a_n |X_n - \theta| |M(X_n)| \\ &\leq Z_n + 2a_n^2(\sigma^2 + 2(c^2 + 2d(Z_n + \theta^2))) - 2a_n |X_n - \theta| |M(X_n)| \\ &= (1 + 8a_n^2 d)Z_n + 2a_n^2(\sigma^2 + 2c^2 + 4d\theta^2) - 2a_n |X_n - \theta| |M(X_n)|. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Definindo:

$$\begin{aligned} \beta_n &= 8da_n^2; \\ \xi_n &= 2(\sigma^2 + 2c^2 + 4d\theta^2)a_n^2; \\ \delta_n &= 2a_n |X_n - \theta| |M(X_n); \end{aligned}$$

temos, ao utilizar a Hipótese (E.b), que:

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 1} \beta_n &< \infty; \\ \sum_{n \geq 1} \xi_n &< \infty.\end{aligned}$$

Portanto, é visto que a relação (2.13) e a sua esperança satisfazem a Definição 1, de serem quase supermartingales não negativos, em que podemos utilizar o Teorema 2.1.1 para afirmar que

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n &\text{ existe e é finito q.c.}, \\ \sum_{n \geq 1} \mathbf{E}(\delta_n) &< \infty.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Assim sendo, pela definição de δ_n , encontramos que

$$\sum_{n \geq 1} a_n \mathbf{E}(|X_n - \theta| |M(X_n)|) < \infty.$$

Sabendo que:

- i) $\sum_{n \geq 1} a_n = \infty$ (Hipótese (E.a));
- ii) $|X_n - \theta| |M(X_n)| \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R};$

podemos afirmar que existe uma subsequência de $\{X_n\}_{n \geq 1}$, tal que:

$$|X_{n_k} - \theta| |M(X_{n_k})| \xrightarrow{q.c.} 0, \quad \text{quando } k \rightarrow \infty.\tag{2.15}$$

Pois, como consequência do Lema 2.2.1, apresentado no início dessa seção, e da condição de $\sum_n a_n = \infty$, podemos afirmar que existe $\{|X_{n_k} - \theta| |M(X_{n_k})|\}_{k \geq 1}$, subsequência de $\{|X_n - \theta| |M(X_n)|\}_{n \geq 1}$, que converge em L^1 para zero quando $k \rightarrow \infty$ ($|X_{n_k} - \theta| |M(X_{n_k})| \xrightarrow{L^1} 0$ quando $k \rightarrow \infty$). Portanto,

$$|X_{n_k} - \theta| |M(X_{n_k})| \xrightarrow{P} 0, \quad \text{quando } k \rightarrow \infty,$$

existindo uma subsequência de $|X_{n_k} - \theta| |M(X_{n_k})|$, que denotaremos por $|X_{n'_k} - \theta| |M(X_{n'_k})|$, que converge quase certamente para zero. Isto é,

$$|X_{n'_k} - \theta| |M(X_{n'_k})| \xrightarrow{q.c.} 0, \quad \text{quando } k' \rightarrow \infty.$$

Desta forma, basta escolhermos a subsequência imediatamente acima para concluirmos a afirmação.

Em seguida, dos resultados obtidos em (2.14) e (2.15), juntamente com a Hipótese (D), concluimos que $X_n \rightarrow \theta$ quase certamente quando $n \rightarrow \infty$. \square

2.2.2 Convergência Quase Certa do Método de Kiefer e Wolfowitz

O objetivo nesta seção é demonstrar o Teorema 3, da Seção 6, do artigo (BLUM, 1954b), que enuncia, mas não demonstra, a convergência quase certa do método de Kiefer e Wolfowitz para o caso multidimensional, utilizando o Teorema 2.1.1, da Seção 2.1.

Seja $\{Y_x\}_{x \in \mathbb{R}^k}$ um processo estocástico, i.e. um conjunto de variáveis aleatórias indexadas pelo conjunto \mathbb{R}^k , com $k \in \mathbb{N}$, em que $M(x) = E(Y_x)$, sendo $M(x)$ Borel-mensurável. Gostaríamos de encontrar $x^* \in \mathbb{R}^k$ tal que

$$x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^k} M(x). \quad (2.16)$$

Consideremos, para fins de prova de convergência quase-certa do método de Kiefer e Wolfowitz, as seguintes hipóteses.

H.1 Sejam $\{a_n\}_{n \geq 1}$ e $\{c_n\}_{n \geq 1}$ seqüências positivas satisfazendo:

H.1-1 $\lim_n c_n = 0$;

H.1-2 $\sum_{n \geq 1} a_n = \infty$;

H.1-3 $\sum_{n \geq 1} a_n c_n < \infty$;

H.1-4 $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{a_n}{c_n}\right)^2 < \infty$.

Exemplo: $a_n = \frac{b}{n}$, $c_n = \frac{d}{n^{\frac{1}{3}}}$ para todo $n \geq 1$ para algum valor de $b, d > 0$.

H.2 $M(x) \in C^2(\mathbb{R}^k)$ e $M(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^k$;

H.3 $\sigma_x^2 = E(Y_x - M(x))^2 < \sigma^2 < \infty$ (a variância é uniformemente limitada);

H.4 $\forall \varepsilon > 0, \exists p(\varepsilon) > 0$, tal que:

$$\|x\| \geq \varepsilon \implies M(x) \geq p(\varepsilon) \quad \text{e} \quad \|D(x)\| \geq p(\varepsilon),$$

em que $D(x) = \nabla_x M(x)$ (gradiente de M no ponto $x \in \mathbb{R}^k$);

H.5 $V(x) = \frac{\partial^2 M}{\partial x_i \partial x_j}(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^k$ com $\|V(x)\| \leq k_3$.

Definimos o vetor diferença $Y_{x,c}$, como

$$Y_{x,c} = \{Y_{x+c\mu_1} - Y_x, \dots, Y_{x+c\mu_k} - Y_x\},$$

em que $\{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^k . Assim, para algum $x_1 \in \mathbb{R}^k$, escolhido arbitrariamente, definamos $X_1 = x_1$ e, recursivamente, $\forall n \geq 1$,

$$X_{n+1} = X_n - \frac{a_n}{c_n} Y_{x_n, c_n}. \quad (2.17)$$

Notemos que não há perda de generalidade em considerarmos $M(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^k$ e $x^* = 0$, solução do problema (2.16). Dadas as hipóteses e considerações, enunciamos o teorema que prova a convergência quase certa da sequência $\{X_n\}_{n \geq 1}$ a solução do problema (2.16).

Teorema 2.2.3. *Definamos $\{a_n\}_{n \geq 1}$, $\{c_n\}_{n \geq 1}$ satisfazendo a Hipótese (H.1) e $M(x)$ Borel-mensurável satisfazendo as Hipóteses (H.2) a (H.5). Então, ao definirmos iterativamente o vetor aleatório $\{X_n\}_{n \geq 1}$, de acordo com a equação (2.17), para todo $n \geq 1$, teremos $X_n \xrightarrow{q.c.} 0$, quando $n \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Observemos primeiramente que uma função fortemente convexa satisfaz a Hipótese (H.4). Uma função quadrática positiva satisfaz as Hipóteses (H.2), (H.4) e (H.5). Claramente, para estes casos determinísticos poderíamos utilizar os métodos quasi-Newton (BROYDEN, 1967), gradiente conjugado (NOCEDAL; WRIGHT, 2006a), etc. Mas, como temos a presença de ruídos envolvidos, esses métodos, com alta probabilidade, falharão, não convergindo para a solução do problema de otimização estocástico (2.16).

Visto que $M \in C^2(\mathbb{R}^k)$, por Taylor, temos para algum $\theta \in [0, 1]$,

$$M(x+c) = M(x) + \langle D(x), c \rangle + \frac{1}{2} \langle c, V(x+\theta c)c \rangle. \quad (2.18)$$

Portanto, de (2.17) e (2.18), para algum $\theta \in [0, 1]$, temos, para todo $n \geq 1$, que

$$M(X_{n+1}) = M(X_n) - \frac{a_n}{c_n} \langle D_n, Y_{n,c_n} \rangle + \frac{a_n^2}{2c_n^2} \left\langle Y_{n,c_n}, V\left(X_n + \theta \frac{a_n}{c_n} Y_{n,c_n}\right) Y_{n,c_n} \right\rangle. \quad (2.19)$$

Definindo $\mathcal{F}_n = \sigma(\{X_k\}_{k=1}^n)$, $\Delta_n = E(Y_x|F_n)$ e tomando a esperança condicional de (2.19), obtemos, para todo $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} E(M(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) &= M(X_n) - \frac{a_n}{c_n} \langle D_n, \Delta_n \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{a_n}{c_n}\right)^2 E \left[\left\langle Y_{n,c_n}, V\left(X_n + \theta \frac{a_n}{c_n} Y_{n,c_n}\right) Y_{n,c_n} \right\rangle | \mathcal{F}_n \right] \text{ q.c.} \end{aligned} \quad (2.20)$$

E, das Hipóteses (H.3) e (H.5), temos que

$$E \left[\left\langle Y_{n,c_n}, V\left(X_n + \theta \frac{a_n}{c_n} Y_{n,c_n}\right) Y_{n,c_n} \right\rangle | \mathcal{F}_n \right] \leq k_1 \|\Delta_n\|^2 + k_2 \text{ q.c.}, \quad (2.21)$$

para $k_1 \geq k_3$ e $k_2 \geq 4k_3k\sigma^2$, em que k é a dimensão do espaço \mathbb{R}^k .

Novamente, por (2.17) e (2.18), temos, lembrando que $\{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^k , que

$$\Delta_n^{(i)} = c_n \langle D_n, \mu_i \rangle + \frac{1}{2} c_n^2 \left\langle \mu_i, V\left(X_n + \theta^{(i)} c_n \mu_i\right) \mu_i \right\rangle, \quad (2.22)$$

para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, com $\Delta_n = (\Delta_n^{(1)}, \Delta_n^{(2)}, \dots, \Delta_n^{(k)})$, $\theta^{(i)} \in [0, 1]$. Então, para todo $n \geq 1$, temos

$$\begin{aligned}\langle D_n, \Delta_n \rangle &= c_n \|D_n\|^2 + \frac{1}{2} c_n^2 \langle D_n, \bar{V}_n \rangle, \\ \|\Delta_n\|^2 &= c_n^2 \|D_n\|^2 + c_n^3 \langle D_n, \bar{V}_n \rangle + \frac{1}{4} c_n^4 \|\bar{V}_n\|^2,\end{aligned}\tag{2.23}$$

em que $\bar{V}(x) = \text{diag}(V(x))$.

Definamos:

$$\begin{aligned}\delta_n &= \|D_n\|, \\ p_n &= \langle D_n, \bar{V}_n \rangle,\end{aligned}\tag{2.24}$$

a fim de facilitar as manipulações algébricas. Assim, das equações (2.20) a (2.24), encontramos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) &= M(X_n) - \frac{a_n}{c_n} \left(c_n \delta_n^2 + \frac{1}{2} c_n^2 p_n \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{a_n}{c_n} \right)^2 \left(k_1 \left(c_n^2 \delta_n^2 + c_n^3 p_n + \frac{1}{4} c_n^4 \|\bar{V}_n\|^2 \right) + k_2 \right) \\ &\leq M(X_n) - \frac{a_n}{c_n} \left(c_n \delta_n^2 + \frac{1}{2} c_n^2 p_n \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{a_n}{c_n} \right)^2 \left(k_1 \left(c_n^2 \delta_n^2 + c_n^3 p_n + \frac{1}{4} c_n^4 k_3 \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{a_n}{c_n} \right)^2 k_2.\end{aligned}\tag{2.25}$$

Notemos, da Hipótese **(H.5)**, que existe $k_3 > 0$ tal que para todo $n \geq 1$,

$$\|\langle D_n, \bar{V}_n \rangle\|^2 \leq k_3 \|D_n\|^2.\tag{2.26}$$

Logo, retomando as manipulações algébricas na desigualdade (2.25),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) &\leq M(X_n) - a_n \left(\delta_n^2 + \frac{1}{2} c_n p_n \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} a_n^2 \left(k_1 \delta_n^2 + k_1 c_n p_n + \frac{1}{4} k_1 c_n^2 k_3 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{a_n}{c_n} \right)^2 k_2 \\ &= M(X_n) - a_n \left(\delta_n^2 + \frac{1}{2} c_n p_n \right) + \frac{k_1}{2} a_n^2 \delta_n^2 + \frac{1}{2} k_1 a_n^2 c_n p_n \\ &\quad + \frac{1}{8} a_n^2 c_n^2 k_1 k_3 + \frac{1}{2} \left(\frac{a_n}{c_n} \right)^2 k_2 \\ &= M(X_n) - a_n \delta_n^2 - \frac{1}{2} a_n c_n p_n + \frac{k_1}{2} a_n^2 \delta_n^2 + \frac{1}{2} k_1 a_n^2 c_n p_n \\ &\quad + \frac{1}{8} a_n^2 c_n^2 k_1 k_3 + \frac{1}{2} \left(\frac{a_n}{c_n} \right)^2 k_2 \\ &= M(X_n) - a_n \delta_n^2 \left(1 - \frac{k_1}{2} a_n \right) + \frac{1}{2} a_n c_n p_n (k_1 a_n - 1) \\ &\quad + \frac{1}{8} a_n^2 c_n^2 k_1 k_3 + \frac{1}{2} \left(\frac{a_n}{c_n} \right)^2 k_2.\end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade (2.26) e continuando os cálculos acima, encontramos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) &\leq M(X_n) - a_n\delta_n^2 \left(1 - \frac{k_1}{2}a_n\right) + \frac{1}{2}a_n c_n k_3^{\frac{1}{2}} \delta_n \left(1 - \frac{k_1}{2}a_n\right) \\
&\quad + \frac{1}{8}a_n^2 c_n^2 k_1 k_3 + \frac{1}{2} \left(\frac{a_n}{c_n}\right)^2 k_2 \\
&\leq M(X_n) - a_n\delta_n \left(1 - \frac{k_1}{2}a_n\right) + \frac{1}{2}a_n c_n k_3^{\frac{1}{2}} \delta_n \left(1 - \frac{k_1}{2}a_n\right) \\
&\quad + \frac{1}{8}a_n^2 c_n^2 k_1 k_3 + \frac{1}{2} \left(\frac{a_n}{c_n}\right)^2 k_2 \\
&= M(X_n) - a_n\delta_n \left(1 - \frac{k_1}{2}a_n\right) \left(\delta_n - \frac{k_3^{\frac{1}{2}}}{2} c_n\right) \\
&\quad + \frac{1}{8}a_n^2 c_n^2 k_1 k_3 + \frac{1}{2} \left(\frac{a_n}{c_n}\right)^2 k_2.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) &\leq M(X_n) - a_n\delta_n \left(1 - \frac{k_1}{2}a_n\right) \left(\delta_n - \frac{k_3^{\frac{1}{2}}}{2} c_n\right) \\
&\quad + \frac{1}{8}a_n^2 c_n^2 k_1 k_3 + \frac{1}{2} \left(\frac{a_n}{c_n}\right)^2 k_2.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Definindo a variável aleatória λ_n , \mathcal{F}_n -mensurável, como

$$\lambda_n = \begin{cases} 1, & \text{se } \delta_n \geq \frac{k_3^{\frac{1}{2}}}{2} c_n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

encontramos que a igualdade (2.27) é equivalente a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) &\leq M(X_n) - \lambda_n a_n \delta_n \left(1 - \frac{k_1}{2}a_n\right) \left(\delta_n - \frac{k_3^{\frac{1}{2}}}{2} c_n\right) \\
&\quad - (1 - \lambda_n) a_n \delta_n \left(1 - \frac{k_1}{2}a_n\right) \left(\delta_n - \frac{k_3^{\frac{1}{2}}}{2} c_n\right) \\
&\quad + \frac{1}{8}a_n^2 c_n^2 k_1 k_3 + \frac{1}{2} \left(\frac{a_n}{c_n}\right)^2 k_2.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

À vista disso, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que as duas próximas equações serão sempre válidas para $n \geq N_0$,

$$\lambda_n a_n \delta_n \left(1 - \frac{k_1}{2}a_n\right) \left(\delta_n - \frac{k_3^{\frac{1}{2}}}{2} c_n\right) \geq 0 \tag{2.29}$$

e

$$\begin{aligned}
-(1 - \lambda_n) a_n \delta_n \left(1 - \frac{k_1}{2}a_n\right) \left(\delta_n - \frac{k_3^{\frac{1}{2}}}{2} c_n\right) &\leq \frac{k_3^{\frac{1}{2}}}{2} (1 - \lambda_n) a_n c_n \delta_n \\
&\leq \frac{k_3}{4} (1 - \lambda_n) a_n c_n^2,
\end{aligned} \tag{2.30}$$

pois em (2.30), $\delta_n < \frac{k_3}{2} c_n$.

Então, de (2.28), (2.29) e (2.30), afirmamos que para n suficientemente grande ($n \geq N_0$), temos:

$$\begin{aligned} E(M(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)) &\leq M(X_n) - \lambda_n a_n \delta_n \left(1 - \frac{k_1}{2} a_n\right) \left(\delta_n - \frac{k_3}{2} c_n\right) + \frac{k_3}{4} a_n c_n^2 \\ &\quad + \frac{1}{8} a_n^2 c_n^2 k_1 k_3 + \frac{1}{2} \left(\frac{a_n}{c_n}\right)^2 k_2. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Visto estarmos considerando, sem perda de generalidade, que $M(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^k$, definimos Z_n, β_n, ξ_n e δ_n , para todo $n \in \mathbb{N}$, como:

$$\begin{aligned} Z_n &= M(X_{n+N_0}); \\ \beta_n &= 0; \\ \xi_n &= \frac{k_3}{4} a_{n+N_0} c_{n+N_0}^2 + \frac{1}{8} a_{n+N_0}^2 c_{n+N_0}^2 k_1 k_3 + \frac{1}{2} \left(\frac{a_{n+N_0}}{c_{n+N_0}}\right)^2 k_2; \\ \delta_n &= \lambda_{n+N_0} a_{n+N_0} \delta_{n+N_0} \left(1 - \frac{k_1}{2} c_{n+N_0}\right) \left(\delta_{n+N_0} - \frac{k_3}{2} c_{n+N_0}\right). \end{aligned}$$

Observemos que $\{Z_n\}_{n \geq 1}, \{\beta_n\}_{n \geq 1}, \{\xi_n\}_{n \geq 1}$ e $\{\delta_n\}_{n \geq 1}$ são \mathcal{F}_n -mensuráveis e não negativas. Portanto, podemos reescrever a desigualdade (2.31), $\forall n \in \mathbb{N}$, como

$$E(Z_{n+1}|F_n) \leq (1 + \beta_n)Z_n + \xi_n - \delta_n.$$

Recapitulemos que o nosso objetivo é podermos utilizar o Teorema 2.1.1, de Robbins e Siegmund, a fim de concluir que $M(X_n) \rightarrow 0$ quase certamente quando $n \rightarrow \infty$. Para tal finalidade, temos $\sum \beta_n < \infty$ e, utilizando a Hipótese (H1),

$$\sum_{n \geq 1} \xi_n < +\infty,$$

portanto, utilizando esse teorema, podemos concluir que:

Ci) $\lim Z_n$ existe e é finito quase certamente;

Cii) $\sum_{n \geq 1} \delta_n < +\infty$ quase certamente.

Diante da Conclusão (Cii) e da Hipótese (H1-2) ($\sum_n a_n = \infty$), podemos afirmar, utilizando o Lema 2.2.1, que sempre existirá uma subsequência de $\{\lambda_{n+N_0} \delta_{n+N_0} (1 - \frac{k_1}{2} c_{n+N_0}) (\delta_{n+N_0} - \frac{k_3}{2} c_{n+N_0})\}$ que converge a zero no evento $A = \{\sum_{n \geq 1} \delta_n < +\infty, \lim Z_n \text{ existe e é finito}\}$ (observemos, das Conclusões (Ci) e (Cii), que $P(A) = 1$). Ou seja:

$$\lambda_{n'+N_0} \delta_{n'+N_0} \left(1 - \frac{k_1}{2} c_{n'+N_0}\right) \left(\delta_{n'+N_0} - \frac{k_3}{2} c_{n'+N_0}\right) \rightarrow 0, \text{ quando } n' \rightarrow \infty. \quad (2.32)$$

Visto que $\lambda_{n'} = 0$ ou $\lambda_{n'} = 1$, temos dois casos.

1º Caso: $\lambda_{n'} = 1$ finitas vezes, implicando que $\delta_{n'} \leq \frac{k_3^{\frac{1}{2}}}{2} c_{n'}$ para todo n' suficientemente grande. Mas, pela Hipótese **(H1-1)**, $c_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, então, temos que $\delta_{n'} \rightarrow 0$ quando $n' \rightarrow \infty$.

2º Caso: $\lambda_{n'} = 1$ infinitas vezes. Da convergência (2.32), concluímos que $\delta_{n'} \rightarrow 0$ quando $n' \rightarrow \infty$.

Logo, concluímos que $\delta_{n'} = \|D_{n'}\| \rightarrow 0$ quando $n' \rightarrow \infty$.

Por fim, utilizando-se que:

- as Hipóteses **(H2)** e **(H4)** deste teorema são satisfeitas;
- $\lim_n M(X_n)$ existe e é finito quase certamente, Conclusão **(Ci)** ao aplicarmos o Teorema 2.1.1, de Robbins e Siegmund;
- sempre existirá uma subsequência de $\{X_n\}_{n \geq 1}$, cuja $\|D(X_{n'})\| \rightarrow 0$ q.c. quando $n' \rightarrow \infty$ no evento A ;
- $P(A) = 1$, consequência do Teorema 2.1.1.

concluímos que $\lim_n M(X_n) = 0$ e $X_n \rightarrow 0$ quase certamente quando $n \rightarrow \infty$. □

3 O Gradiente Conjugado Linear Estocástico

Neste capítulo é proposta uma versão do método do gradiente conjugado linear para casos estocásticos, intitulado de método do gradiente conjugado linear estocástico, em que se utiliza do Teorema 2.1.1, de Robbins e Siegmund, apresentado no Capítulo 2, para provar a convergência quase certa para a solução do problema linear quadrático estocástico, formulado matematicamente em (3.2). A análise da taxa de convergência do método proposto é apresentada na Seção 3.2.

Na seção seguinte, são apresentados os resultados dos experimentos numéricos, a fim de evidenciar que o desempenho computacional do método proposto, o método do gradiente conjugado linear estocástico, em relação ao método de Robbins e Monro, gradiente estocástico, é promissor.

3.1 Convergência Quase Certa do Método do Gradiente Conjugado Linear Estocástico

É apresentado nesta seção um método estocástico, baseado no método do gradiente conjugado linear determinístico, que busca solucionar numericamente o problema 3.1.1. Para mais informações sobre o método determinístico, consultar o livro ((NOCEDAL; WRIGHT, 2006a), páginas 101 a 112).

Problema 3.1.1. *Assume-se que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ seja uma matriz simétrica definida positiva ($A > 0$), $b \in \mathbb{R}^n$, um vetor fixo no espaço \mathbb{R}^n e ξ um vetor aleatório em \mathbb{R}^n , cujas coordenadas aleatórias são $\xi = (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(i)}, \dots, \xi^{(n)})$, com $E(\xi^{(i)}) = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Além disso, definamos $\tilde{b} = b + \xi$. Neste capítulo, iremos desenvolver um método iterativo, gerando uma sequência de vetores $\{X_k\}_{k \geq 1}$, que convirja para a solução x^* do problema*

$$Ax^* = b, \quad (3.1)$$

destacando que o valor exato do vetor $b = E(\tilde{b})$ não é conhecido pelo método numérico. Assume-se que esteja disponível apenas uma única medida (observação) do vetor aleatório \tilde{b} , no ponto X_k , a cada iteração k .

Deve-se notar que o problema (3.1) é equivalente ao problema de otimização

$$x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{2} x^T A x - x^T E(\tilde{b}) \right\}. \quad (3.2)$$

Então, desenvolvemos uma versão estocástica do método do gradiente conjugado linear, denominado o método do gradiente conjugado linear estocástico, descrito no Algoritmo 1, que aborda o problema na forma (3.2) e busca a "aproximação" de x^* .

No algoritmo a seguir: $X_0 \in \mathbb{R}^n$ é o vetor inicial, escolhido arbitrariamente; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica definida positiva; $\{b_{X_k}\}_{k \geq 0}$ é uma sequência de vetores aleatórios, tal que $b_{X_k} \sim \tilde{b}$ para todo $k \geq 0$; δ é uma constante real positiva; $\{a_k\}_{k \geq 1}$ é uma sequência real positiva; $max_iter \in \mathbb{N}$ é o número máximo de iterações executadas; $\{X_k\}_{k \geq 1}$, $\{\gamma_k\}_{k \geq 1}$ e $\{P_k\}_{k \geq 1}$ são sequências de vetores aleatórios definidas no espaço \mathbb{R}^n , e $\{\alpha_k\}_{k \geq 1}$ e $\{\beta_k\}_{k \geq 1}$ são sequências de variáveis aleatórias, geradas iterativamente pelo algoritmo a seguir. Além disso, devemos destacar que para cada $k \geq 0$, a realização do vetor aleatório $b_{X_k}(\omega) \in \mathbb{R}^n$ é fornecida por um oráculo, estando somente esse valor disponível para o algoritmo 1.

Algoritmo 1 Método do Gradiente Conjugado Linear Estocástico

Entrada: $X_0 \in \mathbb{R}^n$, $k = 0$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (A simétrica definida positiva), $\delta > 0$, $\{a_k\}_{k \geq 1}$ uma sequência real positiva, que atende a Condição (H1) do Teorema 3.1.2, $max_iter \in \mathbb{N}$

Saída: \bar{X} (solução aproximada de (3.2)).

Faça para $k = 0$:

$$\gamma_0 = AX_0 - b_{X_0} \quad (3.3)$$

$$P_0 = -\gamma_0 \quad (3.4)$$

$$\alpha_0 = \frac{-\gamma_0^T P_0}{P_0^T A P_0} \quad (3.5)$$

$$X_1 = X_0 + \alpha_0 P_0 \quad (3.6)$$

$$k = k + 1 \quad (3.7)$$

enquanto $k \leq max_iter$ **faça**

▷ *xrepetição*

$$\gamma_k = AX_k - b_{X_k} \quad (3.8)$$

$$\beta_k = \frac{\gamma_k^T A P_{k-1}}{P_{k-1}^T A P_{k-1}} \quad (3.9)$$

$$P_k = -\gamma_k + \beta_k P_{k-1} \quad (3.10)$$

$$\alpha_k = \max\left(\frac{-\gamma_k^T P_k}{P_k^T A P_k}, \delta\right) \quad (3.11)$$

$$X_{k+1} = X_k + a_k \alpha_k P_k. \quad (3.12)$$

$$k = k + 1. \quad (3.13)$$

fim enquanto

Faça $\bar{X} = X_k$

▷ *final*

Observemos que para fins de análise de convergência e taxa de convergência do método iterativo proposto no Algoritmo 1, tornamos $max_iter = +\infty$. Então, sob certas hipóteses, teremos $AX_k \rightarrow b$ quase certamente quando $k \rightarrow \infty$.

Inicialmente, apresentamos algumas definições que são essenciais para as provas dos teoremas que são enunciados no decorrer desta seção.

Definição 2. Dado $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ um vetor aleatório, $\xi^{(i)}$ as variáveis (coordenadas) aleatórias que compõem o vetor aleatório ξ , ou seja $\xi = (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(i)}, \dots, \xi^{(n)})$, \mathcal{F} uma σ -álgebra, $\{\mathcal{F}_k\}_{k \geq 1}$ uma filtração do espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) e P uma medida de probabilidade, definamos:

$$\begin{aligned} E_k(\xi) &= (E(\xi^{(1)}|\mathcal{F}_k), \dots, E(\xi^{(n)}|\mathcal{F}_k)); \\ E(\xi) &= (E\xi^{(1)}, \dots, E\xi^{(n)}); \\ \text{VAR}(\xi) &= \sum_{i=1}^n E(\xi^{(i)} - E(\xi^{(i)}))^2; \\ \text{VAR}_k(\xi^{(i)}) &= E((\xi^{(i)} - E(\xi^{(i)}))^2|\mathcal{F}_k) = \text{VAR}(\xi^{(i)}|\mathcal{F}_k) \text{ e} \\ \text{VAR}_k(\xi) &= \sum_{i=1}^n E_k(\xi^{(i)} - E(\xi^{(i)}))^2. \end{aligned}$$

Após algumas definições, é enunciado o principal teorema deste capítulo, com a finalidade de demonstrarmos a convergência quase certa do método proposto à solução do problema 3.1.1.

Teorema 3.1.2. *Seja o processo estocástico (sequência de vetores aleatórios) $\{\xi_k\}_{k \geq 0}$, tal que $\xi_k \sim \xi$ para todo $k \geq 0$. Além disso, considere-se o método iterativo definido no Algoritmo 1, com $max_iter = +\infty$ e gerando uma sequência de vetores aleatórios $\{X_k\}_{k \geq 1}$. Se as seguintes hipóteses são satisfeitas, então $AX_k \rightarrow b$ quase certamente quando $k \rightarrow \infty$.*

H1) $\{a_k\}_{k \geq 1}$ é uma sequência real positiva, tal que

$$\sum_{k \geq 1} a_k = \infty$$

e

$$\sum_{k \geq 1} a_k^2 < \infty;$$

H2) Existe δ , uma constante real positiva;

H3) $\{\xi_k\}_{k \geq 0}$ é um processo estocástico, independente da filtração $\{\mathcal{F}_k\}_{k \geq 0}$, tal que:

H3.1) ξ_i e ξ_j são independentes se $i \neq j$, com $i, j \in \{1, 2, \dots\}$;

H3.2) $\xi_k^{(i)}$ e $\xi_k^{(j)}$ são independentes se $i \neq j$, com $i, j \in \{1, \dots, n\}$;

H3.3) $E_k[\xi_k^{(i)}] = E[\xi_k^{(i)}] = 0$ q.c. para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $i \in \{1, \dots, n\}$;

H3.3) $E_k[(\xi_k^{(i)})^2] = E[(\xi_k^{(i)})^2] \leq \sigma^2 < \infty$ q.c. para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demonstração. Para todo $k \geq 0$, defina $\mathcal{F}_k = \sigma(\{X_i\}_{i=0}^k, \{P_i\}_{i=0}^{k-1})$ e $Y_k = AX_k - b$. Então, das definições de Y_k e de X_{k+1} , equação (3.12), juntamente com a Hipótese **(H3)**, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k(\|Y_{k+1}\|^2) &= \mathbf{E}_k(\|AX_{k+1} - b\|^2) \\ &= \mathbf{E}_k(\|Y_k + a_k \alpha_k AP_k\|^2) \\ &= \|Y_k\|^2 + 2a_k \mathbf{E}_k(\alpha_k \gamma_k^T AP_k) + a_k^2 \mathbf{E}_k(\alpha_k^2 \|AP_k\|^2), \end{aligned} \quad (3.14)$$

uma vez que A é uma matriz simétrica definida positiva, sendo $\bar{\lambda}$ e $\underline{\lambda}$ seus autovalores máximos e mínimos, respectivamente. Das definições de α_k , equação (3.11) e Y_k , considerando que $b_k = b + \xi_k$, além das Hipóteses **(H3)**, temos que se $\frac{-\gamma_k^T P_k}{P_k^T AP_k} \geq \delta$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k(\alpha_k^2 \|AP_k\|^2) &\leq \bar{\lambda}^2 \mathbf{E}_k(\alpha_k^2 \|P_k\|^2) \\ &\leq \frac{\bar{\lambda}^2}{\underline{\lambda}^2} \mathbf{E}_k(\|\gamma_k\|^2) \\ &= \frac{\bar{\lambda}^2}{\underline{\lambda}^2} \mathbf{E}_k(\|Y_k - \xi_k\|^2) \\ &= \left(\frac{\bar{\lambda}}{\underline{\lambda}}\right)^2 [\mathbf{E}_k(\|Y_k\|^2) - 2\mathbf{E}_k(\langle Y_k, \xi_k \rangle) + \mathbf{E}_k(\|\xi_k\|^2)] \\ &\leq \left(\frac{\bar{\lambda}}{\underline{\lambda}}\right)^2 [\|Y_k\|^2 + n\sigma^2]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Na última desigualdade, utilizamos as Hipóteses **(H3.3)** e **(H3.4)**. Chamamos de ρ a relação $\frac{\bar{\lambda}}{\underline{\lambda}}$, que é conhecida como o número de condicionamento da matriz A , observando que, pelo fato de A ser positiva, $\underline{\lambda} > 0$. Logo, a desigualdade (3.15) é reescrita como

$$\mathbf{E}_k(\alpha_k^2 \|AP_k\|^2) \leq \rho^2 (\|Y_k\|^2 + n\sigma^2) \quad q.c.$$

Por sua vez, se $\frac{-\gamma_k^T P_k}{P_k^T AP_k} < \delta$, então, das definições de β_k , equação (3.9) e P_k , equação (3.10), além das Hipóteses **(H3)**, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k(\alpha_k^2 \|AP_k\|^2) &\leq \delta^2 \mathbf{E}_k(\|AP_k\|^2) \\ &\leq \delta^2 \bar{\lambda}^2 \mathbf{E}_k(\|P_k\|^2) \\ &= \delta^2 \bar{\lambda}^2 \mathbf{E}_k(\|-\gamma_k + \beta_k P_{k-1}\|^2) \\ &\leq \delta^2 \bar{\lambda}^2 [\mathbf{E}_k(\|\gamma_k\|^2) + \frac{2\bar{\lambda}}{\underline{\lambda}} \|\gamma_k\|^2 + \frac{\bar{\lambda}^2}{\underline{\lambda}^2} \|\gamma_k\|^2] \\ &= \delta^2 \bar{\lambda}^2 (1 + \rho)^2 \mathbf{E}_k(\|\gamma_k\|^2) \\ &\leq \delta^2 \bar{\lambda}^2 (1 + \rho)^2 (\|Y_k\|^2 + n\sigma^2). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Definindo a sequência de variáveis aleatórias $\{m_k\}_{k \geq 0}$ como

$$m_k = \begin{cases} 1, & \text{se } \frac{-\gamma_k^T P_k}{P_k^T AP_k} \geq \delta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (3.17)$$

temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k(\alpha_k^2 \|AP_k\|^2) &\leq (m_k \rho^2 + (1 - m_k) \delta^2 \bar{\lambda}^2 (1 + \rho)^2) \|Y_k\|^2 \\ &\quad + (m_k \rho^2 + (1 - m_k) \delta^2 \bar{\lambda}^2 (1 + \rho)^2) n \sigma^2 \text{ q.c.} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Prosseguindo com a demonstração, devemos analisar o termo $\mathbf{E}_k(\alpha_k \gamma_k^T AP_k)$, em que se obtém, da relação de conjugação ($P_k^T AP_{k-1} = 0$ para todo $k \geq 1$), que $\mathbf{E}_k(\alpha_k Y_k^T AP_k) \leq 0$ q.c. para todo $k \geq 0$. Visto que, das definições de P_k , equação (3.10), da matriz A ser definida positiva ($A > 0$) e tomando o produto escalar com $P_k^T A$, temos, para todo $k \geq 0$, que

$$0 \leq P_k^T AP_k = -P_k^T A \gamma_k + \beta_k P_k^T AP_{k-1} = -P_k^T A \gamma_k \text{ q.c.}, \quad (3.19)$$

como, por definição de α_k , equação (3.11), $\alpha_k \geq \delta > 0$, resulta, da relação (3.19), que:

$$0 \leq -\delta P_k^T A \gamma_k \leq -\alpha_k P_k^T A \gamma_k \text{ q.c.} \quad (3.20)$$

Então, tomando a esperança condicional da desigualdade (3.20) com relação a \mathcal{F}_k , temos, da desigualdade (3.20), que

$$\mathbf{E}_k(\alpha_k P_k^T A \gamma_k) \leq \delta \mathbf{E}_k(P_k^T A \gamma_k) \leq 0 \text{ q.c.} \quad (3.21)$$

Assim, da igualdade (3.14) e desigualdades (3.18) e (3.21), temos, para todo $k \geq 1$, que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k(\|Y_{k+1}\|^2) &\leq (1 + a_k^2(n\rho^2 + (1 - m_k)\delta^2\bar{\lambda}^2(1 + \rho)^2))\|Y_k\|^2 \\ &\quad + a_k^2(m_k\rho^2 + (1 - m_k)\delta^2\bar{\lambda}^2(1 + \rho)^2)n\sigma^2 - 2a_k\delta\mathbf{E}_k(-\alpha_k\gamma_k^T AP_k) \\ &\leq (1 + a_k^2(\rho^2 + \delta^2\bar{\lambda}^2(1 + \rho)^2))\|Y_k\|^2 + a_k^2(\rho^2 + \delta^2\bar{\lambda}^2(1 + \rho)^2)n\sigma^2 \\ &\quad - 2\delta a_k \mathbf{E}_k(-\gamma_k^T AP_k), \end{aligned}$$

resultando em

$$\mathbf{E}_k(\|Y_{k+1}\|^2) \leq (1 + a_k^2(\rho^2 + \delta^2\bar{\lambda}^2(1 + \rho)^2))\|Y_k\|^2 + a_k^2(\rho^2 + \delta^2\bar{\lambda}^2(1 + \rho)^2)n\sigma^2 - 2\delta a_k \mathbf{E}_k(-\gamma_k^T AP_k) \text{ q.c.} \quad (3.22)$$

Definindo, como no Teorema 2.1.1, de Robbins e Siegmund, apresentado no Capítulo 2, para todo $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} Z_k &= \|Y_k\|^2; \\ \beta_k &= a_k^2(\rho^2 + \delta^2\bar{\lambda}^2(1 + \rho)^2); \\ \xi_k &= a_k^2(\rho^2 + \delta^2\bar{\lambda}^2(1 + \rho)^2)n\sigma^2 \text{ e} \\ \delta_k &= 2\delta a_k \mathbf{E}_k(-\gamma_k^T AP_k); \end{aligned}$$

temos que: $\{Z_k\}_{k \geq 1}$, $\{\beta_k\}_{k \geq 1}$, $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ e $\{\delta_k\}_{k \geq 1}$ são variáveis aleatórias \mathcal{F}_k -mensuráveis, não-negativas, satisfazendo

$$\mathbf{E}(Z_{k+1} | \mathcal{F}_k) \leq (1 + \beta_k)Z_k - \delta_k + \xi_k.$$

Portanto, a sequência $\{Z_k\}_{k \geq 1}$ é um quase supermartingale não negativo, definido no Capítulo 2. Além disso, da Hipótese **(H1)**, resulta que

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} \beta_k &< \infty, \\ \sum_{k \geq 1} \xi_k &< \infty, \end{aligned}$$

sendo possível utilizar o Teorema 2.1.1 para afirmar que:

C1) $\lim Z_k$ existe e é finito quase certamente quando $k \rightarrow \infty$.

Além disso, aplicando a esperança na desigualdade (3.22) e utilizando novamente o Teorema 2.1.1, obtemos que:

C2) $\sum_{k \geq 1} \mathbb{E}(\delta_k) = 2\delta \sum_{k \geq 1} a_k \mathbb{E}(\mathbb{E}_k(-\gamma_k^T A P_k)) = 2\delta \sum_{k \geq 1} a_k \mathbb{E}(-\gamma_k^T A P_k) < \infty$.

Logo, de **(C2)** e como consequência do Lema 2.2.1, temos que existe uma subsequência tal que $\gamma_{k'}^T A P_{k'} \rightarrow 0$ quase certamente e, equivalentemente, da equação (3.19), enunciar que $P_{k'}^T A P_{k'} \rightarrow 0$ quase certamente, quando $k' \rightarrow \infty$. Da definição da matriz A ser definida positiva, resulta que

$$P_{k'} \rightarrow 0 \text{ q.c., quando } k' \rightarrow \infty. \quad (3.23)$$

Em seguida, da Conclusão **(C1)**, temos que $Y_{k'}^T A P_{k'} \rightarrow 0$ q.c., quando $k' \rightarrow \infty$. E, da definição de P_k , equação (3.10), da definição de β_k , equação (3.9), encontramos que

$$Y_{k'}^T A \gamma_{k'} - \frac{\gamma_{k'}^T A P_{k'-1}}{P_{k'-1}^T A P_{k'-1}} Y_{k'}^T A P_{k'-1} \rightarrow 0 \text{ q.c., quando } k' \rightarrow \infty. \quad (3.24)$$

Posteriormente, da definição de γ_k , equação (3.8), concluímos que

$$Y_{k'} - \left(\frac{Y_{k'}^T A P_{k'-1}}{P_{k'-1}^T A P_{k'-1}} \right) P_{k'} \rightarrow 0 \text{ q.c., quando } k' \rightarrow \infty. \quad (3.25)$$

Por fim, da equação (3.25), resulta que existe $q \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{k' \rightarrow +\infty} Y_{k'} = q \lim_{k' \rightarrow +\infty} P_{k'} \text{ q.c.} \quad (3.26)$$

Contudo, da Conclusão **(C1)** e de (3.23), podemos afirmar que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} Y_k = 0 \text{ q.c.}$$

E, portanto

$$A X_k \rightarrow b \text{ q.c., quando } k \rightarrow \infty.$$

□

No teorema anterior, uma observação importante é poder substituir a Hipótese **(H2)** por: **H2')** Defina $\{\delta_k\}_{k \geq 1}$, uma sequência real positiva, tal que

$$\sum_{k \geq 1} \delta_k a_k = \infty \quad e \quad \sum_{k \geq 1} \delta_k^2 a_k^2 < \infty. \quad (3.27)$$

E, posteriormente, substituir α_k , equação (3.11), no Algoritmo 1, por

$$\alpha'_k = \max \left(\frac{-\gamma_k^T P_k}{P_k^T A P_k}, \delta_k \right), \quad (3.28)$$

sem alterar a convergência quase certa para a solução do problema (3.2) e, principalmente, possibilitando controlar o comprimento dos passos iniciais, permitindo uma convergência mais rápida à solução.

Assim, é necessário reformular o Teorema 3.1.2 a fim de utilizar **(H2')** e a definição de α'_k para solucionar o problema 3.1.1.

Teorema 3.1.3. *Seja o processo estocástico (sequência de vetores aleatórios) $\{\xi_k\}_{k \geq 0}$, tal que $\xi_k \sim \xi$ para todo $k \geq 0$. Considere-se o método iterativo definido no Algoritmo 1, substituindo α_k por α'_k , definida na equação (3.28), com $\max_iter = +\infty$ e gerando uma sequência de vetores aleatórios $\{X_k\}_{k \geq 1}$. Além disso, tem-se que $\{\alpha'_k\}_k$ e $\{\delta_k\}_k$ são sequências reais positivas satisfazendo **(H1)** e **(H2')**. Se $\{\xi_x\}_{x \in \mathbb{R}^n}$ satisfaz **(H3)**, então $AX_k \rightarrow b$ quase certamente, quando $k \rightarrow \infty$.*

Demonstração. A prova deste teorema é semelhante ao, anterior, sendo alterados apenas os passos que são diferentes da demonstração daquele teorema. Mantemos as definições de $\mathcal{F}_k = \sigma(\{X_i\}_{i=0}^k, \{P_i\}_{i=0}^{k-1})$ e $Y_k = AX_k - b$, tendo em vista que $b_k = b + \xi_k$. De forma equivalente à obtenção da equação (3.14), temos

$$\mathbf{E}_k(\|Y_{k+1}\|^2) = \|Y_k\|^2 - 2a_k \mathbf{E}_k(\alpha'_k \gamma_k^T A P_k) + a_k^2 \mathbf{E}_k(\alpha_k'^2 \|A P_k\|^2). \quad (3.29)$$

E, utilizando a mesma estratégia do Teorema 3.1.2, analisaremos os termos $2a_k \mathbf{E}_k(\alpha'_k \gamma_k^T A P_k)$ e $a_k^2 \mathbf{E}_k(\alpha_k'^2 \|A P_k\|^2)$ separadamente.

Iniciando a análise por $a_k^2 \mathbf{E}_k(\alpha_k'^2 \|A P_k\|^2)$ e distinguindo em dois casos, temos que:

i) Se $\frac{-\gamma_k^T P_k}{P_k^T A P_k} \geq \delta_k$, de forma análoga ao teorema anterior, desigualdade (3.15), encontramos que

$$a_k^2 \mathbf{E}_k(\alpha_k'^2 \|A P_k\|^2) \leq \rho^2 a_k^2 (\|Y_k\|^2 + n\sigma^2). \quad (3.30)$$

ii) Se $\frac{-\gamma_k^T P_k}{P_k^T A P_k} < \delta_k$, então, das definições de β_k , equação (3.9), de P_k , equação (3.10), α'_k , equação (3.28), além das Hipóteses **(H3)**, temos, similarmente à equação (3.16), que

$$a_k^2 \mathbf{E}_k(\alpha_k'^2 \|A P_k\|^2) \leq a_k^2 \delta_k^2 \bar{\lambda}^2 (1 + \rho)^2 (\|Y_k\|^2 + n\sigma^2), \quad (3.31)$$

em que n é a dimensão do problema (3.1) e (3.2). Assim, analogamente à definição da sequência $\{m_k\}_{k \geq 0}$, equação (3.17), definimos a sequência $\{m'_k\}_{k \geq 0}$ como

$$m'_k = \begin{cases} 1, & \text{se } \frac{-\gamma_k^T P_k}{P_k^T A P_k} \geq \delta_k; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}; \quad (3.32)$$

e encontramos, dadas as desigualdades (3.30) e (3.31), que

$$\begin{aligned} a_k^2 \mathbf{E}_k(\alpha_k'^2 \|AP_k\|^2) &\leq (m'_k \rho^2 a_k^2 + (1 - m'_k) a_k^2 \delta_k^2 \bar{\lambda}^2 (1 + \rho)^2) \|Y_k\|^2 \\ &\quad + (m'_k \rho^2 a_k^2 + (1 - m'_k) a_k^2 \delta_k^2 \bar{\lambda}^2 (1 + \rho)^2) n \sigma^2. \end{aligned} \quad (3.33)$$

O próximo passo é analisar $2a_k \mathbf{E}_k(\alpha_k' \gamma_k^T AP_k)$, mantendo a afirmação que $\mathbf{E}_k(\alpha_k' \gamma_k^T AP_k) \leq 0$ de forma semelhante ao realizado no Teorema 3.1.2, utilizando as equações (3.19) e (3.20). Logo, podemos concluir, para todo $k \geq 1$, que

$$2a_k \mathbf{E}_k(\alpha_k' \gamma_k^T AP_k) \leq 2a_k \delta_k \mathbf{E}_k(\gamma_k^T AP_k) \leq 0. \quad (3.34)$$

Então, das equações (3.29), (3.33) e (3.34), resulta que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k(\|Y_{k+1}\|^2) &\leq (1 + [m'_k \rho^2 a_k^2 + (1 - m'_k) a_k^2 \delta_k^2 \bar{\lambda}^2 (1 + \rho)^2]) \|Y_k\|^2 \\ &\quad + (m'_k \rho^2 a_k^2 + (1 - m'_k) a_k^2 \delta_k^2 \bar{\lambda}^2 (1 + \rho)^2) n \sigma^2 - 2a_k \delta_k \mathbf{E}_k(-\gamma_k^T AP_k) \\ &\leq (1 + \rho^2 a_k^2 + a_k^2 \delta_k^2 \bar{\lambda}^2 (1 + \rho)^2) \|Y_k\|^2 - 2a_k \delta_k \mathbf{E}_k(-\gamma_k^T AP_k) \\ &\quad + (\rho^2 a_k^2 + a_k^2 \delta_k^2 \bar{\lambda}^2 (1 + \rho)^2) n \sigma^2. \end{aligned}$$

Definindo

$$\begin{aligned} Z'_k &= \|Y_k\|^2; \\ \xi'_k &= (p^2 a_k^2 + a_k^2 \delta_k^2 \bar{\lambda}^2 (1 + p)^2) n \sigma^2; \\ \beta'_k &= (p^2 a_k^2 + a_k^2 \delta_k^2 \bar{\lambda}^2 (1 + p)^2) \text{ e} \\ \delta'_k &= 2\delta_k a_k \mathbf{E}_k(-\gamma_k^T AP_k); \end{aligned}$$

temos que $\{Z'_k\}_k$, $\{\xi'_k\}_k$, $\{\beta'_k\}_k$ e $\{\delta'_k\}_k$ são variáveis aleatórias \mathcal{F}_k -mensuráveis, não-negativas, satisfazendo

$$\mathbf{E}_k(Z'_{k+1}) \leq (1 + \beta'_k) Z'_k - \delta'_k + \xi'_k.$$

Portanto, $\{Z'_k\}_k$ é um quase supermartingale não negativo.

Por fim, basta mostrar que: $\sum_{k \geq 1} \beta'_k < \infty$ e $\sum_{k \geq 1} \xi'_k < \infty$; para aplicarmos o Teorema 2.1.1, e, assim, manter a mesma sequência da demonstração do Teorema 3.1.2, apresentado para δ constante, para afirmar que $AX_k \rightarrow b$ quase certamente, quando $k \rightarrow \infty$. Porém, das Hipóteses (H1) e (H2') fica claro que $\sum_k \beta'_k < \infty$ e $\sum_k \xi'_k < \infty$.

□

Na próxima seção é realizada a análise da taxa de convergência do método do gradiente conjugado linear estocástico, sendo provado que esta é $O(\frac{1}{k \log k})$.

3.2 Análise da Taxa de Convergência do Método do Gradiente Conjugado Linear Estocástico

Nesta seção, apresentamos a análise da taxa de convergência do método proposto na Seção 3.1, Algoritmo 1, o método do gradiente conjugado linear estocástico. Por sua vez, para as análises da taxa de convergência dos métodos de Robbins e Monro e Kiefer e Wolfowitz, podemos citar os artigos: (CHUNG, 1954); (KOMLÓS; RÉVÉSZ, 1972); (GOODSELL; HANSON, 1976); (FABIAN, 1968); (NEMIROVSKI et al., 2009). Nesse último artigo, os autores demonstraram que a melhor taxa de convergência encontrada para problemas de otimização estocásticos fortemente convexos e suaves (C^∞), utilizando o método de Robbins e Monro, é $O\left(\frac{1}{k}\right)$. Contudo, para problemas de otimização estocásticos convexos, Nemirovski e Yudin, no artigo (NEMIROVSKI; YUDIN, 1983), demonstraram que a taxa de convergência ótima do método de Robbins e Monro para essa classe de problemas é $O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

Teorema 3.2.1. *Assuma-se que as hipóteses do Teorema 3.1.2 sejam satisfeitas, e que existe $M \in \mathbb{R}_+$ tal que $\|X_k\| < M$ quase certamente para todo $k \geq 0$. Então, a taxa de convergência do método do gradiente conjugado linear estocástico, Algoritmo 1, é $O\left(\frac{1}{k \log k}\right)$.*

Demonstração. Sabendo que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x^T Ax - x^T \mathbf{E}(b_x) \\ &= \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b, \end{aligned}$$

temos, ao expandirmos a função f em série de Taylor em torno do ponto ótimo $x^* = A^{-1}b$, que

$$f(x) = f(x^*) + (x - x^*)^T \nabla f(x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^T A(x - x^*), \quad (3.35)$$

em que $\nabla f(x^*) = Ax^* - b = AA^{-1}b - b = b - b = 0$. Logo, segue que a igualdade (3.35) é equivalente a

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^T A(x - x^*) \\ &\leq f(x^*) + \frac{\bar{\lambda}}{2}\|x - x^*\|^2, \end{aligned}$$

resultando que

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{\bar{\lambda}}{2}\|x - x^*\|^2.$$

Então, devemos computar a taxa de convergência da sequência $\{X_k\}_{k \geq 0}$, definida pelo Algoritmo 1, como

$$\mathbf{E}(f(X_k) - f(x^*)) \leq \frac{\bar{\lambda}}{2}\mathbf{E}(\|x - x^*\|^2). \quad (3.36)$$

Por sua vez,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\|X_k - x^*\|^2) &= \mathbf{E}(\|A^{-1}AX_k - A^{-1}b\|^2) \\ &\leq \mathbf{E}(\|A^{-1}\|^2\|AX_k - b\|^2). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Como definido na prova do Teorema 3.1.2, temos que $Y_k = AX_k - b$, sendo a desigualdade (3.37) equivalente a

$$\mathbf{E}(\|X_k - x^*\|^2) \leq \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{E}(\|Y_k\|^2). \quad (3.38)$$

Das desigualdades (3.36) e (3.38), resulta que

$$\mathbf{E}(f(X_k) - f(x^*)) \leq \frac{1}{2} \bar{\lambda}^{-1} \rho \mathbf{E}(\|Y_k\|^2), \quad (3.39)$$

em que $\rho = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda}$ é o número de condicionamento da matriz A , com $\bar{\lambda}$ e λ positivos, maior e menor autovalor da matriz A , respectivamente.

Sabemos, como resultado do Teorema 3.1.2, que $\|Y_k\|^2 \rightarrow 0$ quase certamente, quando $k \rightarrow \infty$, sendo necessário agora provar a convergência em L^2 da sequência $\{\|Y_k\|\}_{k \geq 0}$, ou seja, $\mathbf{E}(\|Y_k\|^2) \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$. Para esta finalidade, temos, por hipótese, que $\|X_k\| \leq M$ q.c. para todo $k \geq 0$, implicando que existe $U > 0$ tal que $\|Y_k\|^2 \leq U$ q.c. para todo $k \geq 0$ e, conseqüentemente, $\{\|Y_k\|^2\}_{k \geq 0}$ é uma sequência uniformemente integrável. Utilizando o Teorema de convergência de Vitali e o fato de que $\|Y_k\|^2 \rightarrow 0$ q.c., quando $k \rightarrow \infty$, concluímos que

$$\mathbf{E}(\|Y_k\|^2) \rightarrow 0, \text{ quando } k \rightarrow \infty,$$

ou seja, $\|Y_k\| \xrightarrow{L^2} 0$, quando $k \rightarrow \infty$. Portanto, ao calcularmos a taxa de convergência da $\mathbf{E}(\|Y_k\|^2)$, estamos definindo a taxa de convergência de $\mathbf{E}(|f(X_k) - f(x^*)|)$, por meio da desigualdade (3.39).

Assim, definindo $V_k = \mathbf{E}(\|Y_k\|^2)$ e utilizando a desigualdade (3.22), concluímos que

$$\begin{aligned} V_{k+1} &= \mathbf{E}(\|Y_{k+1}\|^2) \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{E}_k(\|Y_{k+1}\|^2)) \\ &\leq \mathbf{E}([(1 + a_k^2(\rho^2 + \delta^2 \bar{\lambda}^2(1 + \rho)^2))\|Y_k\|^2 + a_k^2(\rho^2 + \delta^2 \bar{\lambda}^2(1 + \rho)^2)n\sigma^2 \\ &\quad - 2\delta a_k \mathbf{E}_k(-\gamma_k^T A P_k)]) \\ &= (1 + a_k^2(\rho^2 + \delta^2 \bar{\lambda}^2(1 + \rho)^2))V_k + a_k^2(\rho^2 + \delta^2 \bar{\lambda}^2(1 + \rho)^2)n\sigma^2 \\ &\quad + 2\delta a_k \mathbf{E}(\mathbf{E}_k(\gamma_k^T A P_k)). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Contudo, partindo da definição de β_k , equação (3.9), P_k , equação (3.10), γ_k e tomando o produto

escalar de P_k com $Y_k^T A$, temos que

$$\begin{aligned}
 Y_k^T A P_k &= -Y_k^T A \gamma_k + \beta_k Y_k^T A P_{k-1} \\
 &= -Y_k^T A \gamma_k + \frac{\gamma_k^T A P_{k-1}}{P_{k-1}^T A P_{k-1}} Y_k^T A P_{k-1} \\
 &= -Y_k^T A Y_k + \xi_k^T A Y_k + \frac{(Y_k^T A P_{k-1})^2}{P_{k-1}^T A P_{k-1}} - \frac{\xi_k^T A P_{k-1}}{P_{k-1}^T A P_{k-1}}. \tag{3.41}
 \end{aligned}$$

Tomando a esperança condicional da igualdade (3.41) com relação a \mathcal{F}_k e sabendo que $E_k(\gamma_k^T A P_k) = E_k(Y_k^T A P_k)$, pois $E_k(\xi_k^T A P_k) = 0$ q.c., resulta que

$$E_k(\gamma_k^T A P_k) \leq -Y_k^T A Y_k + \frac{(Y_k^T A P_{k-1})^2}{P_{k-1}^T A P_{k-1}} + \frac{E_k(\xi_k^T A P_{k-1})^2}{P_{k-1}^T A P_{k-1}} \text{ q.c.}, \tag{3.42}$$

visto que o último termo adicionado é uma variável aleatória não negativa.

Logo, da convergência em L^2 da sequência $\{\|Y_k\|\}_{k \geq 1}$, temos que $V_k \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$, resultando que existe $\bar{M} > 0$ tal que $\sup_{k \geq 1} V_k < \bar{M}$ (este resultado também é uma consequência do Teorema de convergência de Vitali). Em seguida, definimos $\hat{k} = (\rho^2 + \delta^2 \bar{\lambda}^2 (1 + \rho)^2)$ e das desigualdades (3.40) e (3.42), obtemos

$$\begin{aligned}
 V_{k+1} &\leq (1 + \hat{k} a_k^2) V_k + n \sigma^2 \hat{k} a_k^2 - 2\delta a_k E(Y_k^T A Y_k) + 2\delta a_k E\left(\frac{(Y_k^T A P_{k-1})^2}{P_{k-1}^T A P_{k-1}}\right) \\
 &\quad + 2\delta a_k E\left(\frac{(\xi_k^T A P_{k-1})^2}{P_{k-1}^T A P_{k-1}}\right) \\
 &\leq (1 + \hat{k} a_k^2) V_k + n \sigma^2 \hat{k} a_k^2 - 2\delta a_k E(Y_k^T A Y_k) + 2\delta a_k E\left(\frac{\bar{\lambda}^2 \|Y_k\|^2 \|P_{k-1}\|^2}{\lambda \|P_{k-1}\|^2}\right) \\
 &\quad + 2\delta a_k E\left(\frac{\bar{\lambda}^2 \|\xi_k\|^2 \|P_{k-1}\|^2}{\lambda \|P_{k-1}\|^2}\right) \\
 &\leq (1 + \hat{k} a_k^2) V_k + n \sigma^2 \hat{k} a_k^2 - 2\delta \lambda a_k V_k + 2\delta \bar{\lambda} \rho a_k V_k + 2\delta \bar{\lambda} \rho a_k n \sigma^2 \\
 &= (1 - 2\delta \lambda a_k) V_k + \hat{k} a_k^2 (V_k + n \sigma^2) + 2\delta \bar{\lambda} \rho a_k V_k + 2\delta \bar{\lambda} \rho a_k n \sigma^2 \\
 &\leq (1 - 2\delta \lambda a_k) V_k + \hat{k} (\bar{M} + n \sigma^2) a_k^2 + 2\delta \bar{\lambda} \rho (\bar{M} + n \sigma^2) a_k. \tag{3.43}
 \end{aligned}$$

Definindo $R = \max\{\hat{k}(\bar{M} + n \sigma^2), 2\delta \bar{\lambda} \rho (\bar{M} + n \sigma^2)\}$ e $\bar{a} = \sup_{k \geq 1} a_k < \infty$, temos, da desigualdade (3.43), que

$$\begin{aligned}
 V_{k+1} &\leq (1 - 2\delta \lambda a_k) V_k + R a_k (1 + a_k) \\
 &\leq (1 - 2\delta \lambda a_k) V_k + R(1 + \bar{a}) a_k. \tag{3.44}
 \end{aligned}$$

Então, para provarmos que $V_k = O\left(\frac{1}{k \log k}\right)$ para a sequência $\{a_k\}_{k \geq 1}$, definida por: $a_1 = \theta$; $a_2 = \frac{4\theta}{3 \log 3}$; $a_k = \frac{\theta}{k \log k}$ para $k \geq 3$; façamos $C = \delta \lambda$ e $2C\theta > 1$. Obtendo, como uma consequência da definição apresentada, que $\bar{a} = a_2 < 2\theta$. Assim, para $k \geq 3$, encontramos, da desigualdade (3.44), que

$$V_{k+1} \leq \left(1 - \frac{2C\theta}{k \log k}\right) V_k + R(1 + \theta) \frac{\theta}{k \log k},$$

e, por indução, provaremos que para todo $k \geq 3$, temos

$$V_k = O\left(\frac{1}{k \log k}\right).$$

Desta forma, definindo

$$Q = \max\left\{4R\theta(1 + \theta), \frac{R(1 + \theta)\theta}{2C\theta - 1}\right\},$$

temos, para $k = 2$ e utilizando a desigualdade (3.44), que

$$\begin{aligned} V_3 &\leq (1 - 2Ca_2)V_2 + R(1 + \theta)a_2, \quad \left(a_2 = \frac{4\theta}{3 \log 3}\right) \\ &\leq R(1 + \theta)\left(\frac{4\theta}{3 \log 3}\right) \\ &= 4R\theta(1 + \theta)\frac{1}{3 \log 3} \\ &\leq Q\frac{1}{3 \log 3}. \end{aligned}$$

Em seguida, utilizando a hipótese de indução ($V_k \leq \frac{Q}{k \log k}$ para $k > 3$), encontramos que

$$\begin{aligned} V_{k+1} &\leq \left(1 - \frac{2C\theta}{k \log k}\right)\frac{Q}{k \log k} + R(1 + \theta)\frac{\theta}{k \log k} \\ &= (k \log k - 2C\theta)\frac{Q}{(k \log k)^2} + \frac{R(1 + \theta)\theta k \log k}{(k \log k)^2} \\ &\leq \frac{Q}{(k \log k)^2}(k \log k - 2C\theta + k \log k(2C\theta - 1)), \quad \left(\frac{R(1 + \theta)\theta}{2C\theta - 1} \leq Q\right) \\ &= \frac{2C\theta Q}{(k \log k)^2}(k \log k - 1) \\ &= \frac{2C\theta Q}{(k \log k)^2} \log\left(\frac{k^k}{e}\right). \end{aligned}$$

Como $\log\left(\frac{k^k}{e}\right) \leq 2(k - 1) \log(k - 1)$ para todo $k > 3$, temos, da desigualdade anterior, que

$$\begin{aligned} V_{k+1} &\leq \frac{2C\theta Q}{k^2(\log k)^2}(2(k - 1) \log(k - 1)) \\ &\leq \frac{4C\theta Q}{(k + 1)} \frac{\log(k - 1)}{(\log(k))^2} \\ &\leq 4C\theta Q \frac{1}{(k + 1) \log(k + 1)}. \end{aligned}$$

Visto que $\frac{\log(k-1)}{(\log k)^2} \leq \frac{1}{\log(k+1)}$, que pode ser demonstrado utilizando o fato de que a média geométrica é menor ou igual à média aritmética e, posteriormente, que a função \log é uma função côncava.

Portanto,

$$V_k = O\left(\frac{1}{k \log k}\right).$$

□

Assim, concluímos que o método do gradiente conjugado linear estocástico, para a sequência $\{a_k\}_{k \geq 1}$ definida acima, possui uma taxa de convergência superior ao método de Robbins e Monro para problemas de otimização quadráticos estocásticos, representados pela formulação matemática (3.2). Pontuamos que essa sequência escolhida $\{a_k\}_{k \geq 1}$ não é a única sequência que assegura a taxa de convergência encontrada, mas representa uma opção dentre uma classe de sequências, que faz o algoritmo proposto possuir a taxa de convergência $O\left(\frac{1}{k \log k}\right)$.

Por fim, na próxima seção, são apresentados os experimentos numéricos, que dão indícios do método proposto ser promissor.

3.3 Experimentos Numéricos

Nesta seção, é comparado o método do gradiente conjugado linear estocástico, apresentado na Seção 3.1, e o método de Robbins e Monro multidimensional.

São considerados 10 casos de teste para a resolução do problema

$$x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{2} x^T A x - x^T \mathbb{E}(b_x) \right\}. \quad (3.45)$$

A métrica de comparação escolhida para todos os casos de teste é a norma l_∞ do erro do resíduo, $\gamma(X_k) = AX_k - b$, para o último valor de X_k computado pelo Algoritmo 1, lembrando que $b = \mathbb{E}(b(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Para os cinco primeiros casos de teste, altera-se o número de condicionamento (ρ) da matriz A do problema quadrático (3.45). Para esses experimentos numéricos, são definidos:

- o ponto inicial $x_0 = (10, 10, 10)$;
- o valor de $\delta = 1,00\text{e-}4$;
- a sequência real positiva $\{a_k\}_{k \geq 1}$, definida por $a_1 = 1$ e $a_k = \frac{B}{k \cdot \ln(k)}$ para todo $k \geq 2$, com $B = 1$ (notemos que $\sum_{k \geq 1} a_k = +\infty$ e $\sum_{k \geq 1} a_k^2 < +\infty$).

As especificidades de cada caso de teste são descritas a seguir, destacando que adotaremos a nomenclatura *Ber* para nos referir à distribuição de Bernoulli.

- Caso de Teste 1

$$A = \begin{pmatrix} 2,1000 & 0,0197 & 0,3714 \\ 0,0197 & 1,6747 & 0,3376 \\ 0,3714 & 0,3376 & 2,3146 \end{pmatrix}, \quad b_x = \begin{pmatrix} 65,7920 + \xi_1 \\ 4,0738 + \xi_2 \\ -69,5091 + \xi_3 \end{pmatrix}, \quad \rho = 1,79 \quad (3.46)$$

em que $\xi_1 \sim N(0, 1)$, $\xi_2 \sim N(0, 4)$ e $\xi_3 \sim 2\text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$.

- Caso de Teste 2

$$A = \begin{pmatrix} 0,4226 & 0,3754 & 0,2116 \\ 0,3754 & 3,8560 & -1,0421 \\ 0,2116 & -1,0421 & 0,8572 \end{pmatrix}, \quad b_x = \begin{pmatrix} -4,4745 + \xi_1 \\ -49,8479 + \xi_2 \\ 91,2709 + \xi_3 \end{pmatrix}, \quad \rho = 29 \quad (3.47)$$

em que $\xi_1 \sim N(0, 1)$, $\xi_2 \sim N(0, 4)$ e $\xi_3 \sim 2\text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$.

- Caso de Teste 3

$$A = \begin{pmatrix} 1,7375 & 0,6427 & -0,2052 \\ 0,6427 & 6,1854 & 2,3179 \\ -0,2052 & 2,3179 & 1,0003 \end{pmatrix}, \quad b_x = \begin{pmatrix} -3,7948 + \xi_1 \\ -23,3500 + \xi_2 \\ -94,8042 + \xi_3 \end{pmatrix}, \quad \rho = 699 \quad (3.48)$$

em que $\xi_1 \sim N(0, 1)$, $\xi_2 \sim N(0, 4)$ e $\xi_3 \sim 2\text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$.

- Caso de Teste 4

$$A = \begin{pmatrix} 1,1148 & -0,1018 & -2,8185 \\ -0,1018 & 0,2906 & 0,5560 \\ -2,8185 & 0,5560 & 7,4447 \end{pmatrix}, \quad b_x = \begin{pmatrix} -66,9390 + \xi_1 \\ -4,7619 + \xi_2 \\ 57,3784 + \xi_3 \end{pmatrix}, \quad \rho = 4,935\text{e}+4 \quad (3.49)$$

em que $\xi_1 \sim N(0, 1)$, $\xi_2 \sim N(0, 4)$ e $\xi_3 \sim 2\text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$.

- Caso de Teste 5

$$A = \begin{pmatrix} 11,5170 & 2,3895 & 2,6700 \\ 2,3895 & 3,4241 & 0,8501 \\ 2,6700 & 0,8501 & 0,6489 \end{pmatrix}, \quad b_x = \begin{pmatrix} -46,8584 + \xi_1 \\ -35,8530 + \xi_2 \\ 13,3855 + \xi_3 \end{pmatrix}, \quad \rho = 7,769\text{e}+7 \quad (3.50)$$

em que $\xi_1 \sim N(0, 1)$, $\xi_2 \sim N(0, 4)$ e $\xi_3 \sim 2\text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Por sua vez, os cinco últimos casos de teste têm como objetivo investigar o comportamento do método proposto — o gradiente conjugado linear estocástico — à medida que se aumenta a dimensão (n) do problema quadrático (3.45). As particularidades de cada caso de teste são apresentadas a seguir, destacando-se que definimos a sequência $\{a_k\}_{k \geq 1}$ como $a_1 = 1$ e $a_k = \frac{B}{k \cdot \ln(k)}$ para todo $k \geq 2$, sendo o valor de B especificado em cada caso.

- Caso de Teste 6

– dimensão (n) do problema (3.45) igual a 50;

- número de condicionamento da matriz A ρ igual a 984;
 - condição inicial $X_0 = (X_0^1, \dots, X_0^n)$, sendo $X_0^i = 10$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$;
 - $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$, sendo $\xi^i \sim N(0, 1)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$;
 - $b = (b^1, \dots, b^n)$, sendo $b^i \sim N(0, 50)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$;
 - $b_x = b + \xi$;
 - $B = 25$;
- Caso de Teste 7
 - dimensão (n) do problema (3.45) igual a 100;
 - número de condicionamento da matriz A ρ igual a 784;
 - condição inicial $X_0 = (X_0^1, \dots, X_0^n)$, sendo $X_0^i = 10$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$;
 - $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$, sendo $\xi^i \sim N(0, 1)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$;
 - $b = (b^1, \dots, b^n)$, sendo $b^i \sim N(0, 50)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$;
 - $b_x = b + \xi$;
 - $B = 25$;
- Caso de Teste 8
 - dimensão (n) do problema (3.45) igual a 200;
 - número de condicionamento da matriz A ρ igual a $1,84e+3$;
 - condição inicial $X_0 = (X_0^1, \dots, X_0^n)$, sendo $X_0^i = 10$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$;
 - $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$, sendo $\xi^i \sim N(0, 1)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$;
 - $b = (b^1, \dots, b^n)$, sendo $b^i \sim N(0, 50)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$;
 - $b_x = b + \xi$;
 - $B = 25$;
- Caso de Teste 9
 - dimensão (n) do problema (3.45) igual a 1000;
 - número de condicionamento da matriz A ρ igual a 976;
 - condição inicial $X_0 = (X_0^1, \dots, X_0^n)$, sendo $X_0^i = 10$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$;
 - $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$, sendo $\xi^i \sim N(0, 1)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$;
 - $b = (b^1, \dots, b^n)$, sendo $b^i \sim N(0, 50)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$;
 - $b_x = b + \xi$;

- $B = 25$;
- Caso de Teste 10
 - dimensão (n) do problema (3.45) igual a 2000;
 - número de condicionamento da matriz A ρ igual a $8,41e+3$;
 - condição inicial $X_0 = (X_0^1, \dots, X_0^n)$, sendo $X_0^i = 10$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$;
 - $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$, sendo $\xi^i \sim N(0, 1)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$;
 - $b = (b^1, \dots, b^n)$, sendo $b^i \sim N(0, 50)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$;
 - $b_x = b + \xi$;
 - $B = 25$;

Apresentam-se os resultados dos experimentos numéricos para os casos de teste definidos acima nas tabelas 1 e 2, comparando os métodos de Robbins e Monro (gradiente estocástico, caso multidimensional abordado em (BLUM, 1954b)) e o gradiente conjugado linear estocástico, Seção 3.1. Pontua-se que **GCLE** é o acrônimo para o método do gradiente conjugado linear estocástico, proposto na Seção 3.1. Além disso, os acrônimos **M** e **DP** representam a média e o desvio padrão, respectivamente, do número de vezes que cada caso de teste foi executado.

Os resultados dos 8 primeiros casos de teste são abordados na tabela 1, em que realizamos um total de 100 execuções para cada caso, alterando o número máximo permitido de iterações (*max_iter*, Algoritmo 1): 500 iterações; 5.000 iterações; 50.000 iterações; a fim de verificar a sua influência na convergência para o ponto ótimo.

Para os dois primeiros casos de teste, nota-se uma pequena diferença de convergência entre os métodos do gradiente conjugado linear estocástico proposto e o método de Robbins e Monro, que é fortemente acentuada a medida que, mantendo a dimensão do problema quadrático (3.45) ($n = 3$), aumenta-se o número do condicionamento ρ da matriz A , tornando-a uma matriz mal condicionada. Como pode ser averiguado para os casos de teste de 3 a 5, apesar do mal condicionamento da matriz A , o método proposto mantém a convergência para o ponto ótimo desejado, solução do problema (3.45). Uma observação importante a ser realizada é que para o caso de teste 5, que apresenta número de condicionamento da matriz A igual a $7,769e+7$, o método de Robbins e Monro converge prematuramente, enquanto o método proposto tende a convergir para o ponto ótimo desejado.

Outro ponto de atenção é o método iterativo de Robbins e Monro divergir para os casos de teste 6 a 8, nos quais se aumentou a dimensão (n) do problema quadrático (3.45), enquanto o método proposto apresenta sinais de convergência já para o número máximo de iterações igual a 5.000.

Por sua vez, os resultados dos dois últimos testes são abordados na tabela 2, visto que, por se tratar de um problema quadrático (3.45) em dimensão elevada (acima de 500 variáveis),

é necessário aumentar o número máximo de iterações (max_iter , Algoritmo 1) para 5.000 iterações, 50.000 iterações e 500.000 iterações. Além disso, optou-se por reduzir o número máximo de execuções para 20, visto que realizar operações algébricas e, principalmente, gerar números aleatórios em dimensão elevada são processos de alto custo computacional, gastando-se mais tempo por iteração para suas realizações.

Novamente, como nos casos 6 a 8, o método de Robbins e Monro divergiu para os casos 9 e 10, fato que pode estar atrelado à sequência $\{a_k\}_{k \geq 1}$ escolhida. Entretanto, mesmo para esta sequência ($\{a_k\}_{k \geq 1}$) e com a dimensão elevada, o método proposto, gradiente conjugado linear estocástico, converge para o ponto ótimo desejado.

Um teste em maior dimensão é realizado no caso 10, considerando a dimensão do problema quadrático (3.45) igual a 2.000 e o número de condicionamento da matriz A igual a $8,41e+3$, ou seja, a relação entre o maior autovalor e menor autovalor da matriz A é $8,41e+3$. Então, ao se analisar a última linha da tabela 2 é constatado que o número máximo de iterações igual a 5.000 é insuficiente para essa dimensão e condicionamento, sendo necessário, a depender da precisão exigida das respostas, aumentar o número máximo de iterações permitido, como pode ser conferido nas colunas para os valores de 50.000 e 500.000 iterações.

Tabela 1 – Resultados dos experimentos numéricos para os 8 primeiros casos de teste definidos no início desta Seção 3.3, comparando os métodos de Robbins e Monro e o gradiente conjugado linear estocástico. Nesta tabela, **GCLE** é o acrônimo para o método do gradiente conjugado linear estocástico, proposto nesta tese na Seção 3.1. Além disso, os acrônimos **M** e **DP** representam a média e o desvio padrão, respectivamente. Já **NA** significa que o resultado numérico tendeu para $+\infty$.

Comparação entre os métodos Estocásticos (100 Execuções)							
		Número de Iterações					
		500		5000		50000	
Casos de Testes	Método Numérico	M	DP	M	DP	M	DP
1	GCLE	0,05	0,02	0,02	0,01	0,005	0,001
	Robbins e Monro	0,07	0,04	0,03	0,01	0,009	0,004
2	GCLE	0,07	0,04	0,02	0,01	0,007	0,003
	Robbins e Monro	0,16	0,03	0,03	0,02	0,01	0,006
3	GCLE	0,31	0,06	0,05	0,02	0,014	0,007
	Robbins e Monro	47,7	0,5	38,06	0,02	28,74	0,01
4	GCLE	0,58	0,15	0,11	0,04	0,04	0,01
	Robbins e Monro	36,1	1,1	30,05	0,02	29,88	0,01
5	GCLE	2,45	1,6	0,74	0,27	0,2	0,1
	Robbins e Monro	25,49	0,2	25,49	0,01	25,49	0,004
6	GCLE	0,41	0,07	0,13	0,02	0,044	0,008
	Robbins e Monro	NA	NA	NA	NA	NA	NA
7	GCLE	0,45	0,07	0,16	0,02	0,05	0,01
	Robbins e Monro	NA	NA	NA	NA	NA	NA
8	GCLE	0,54	0,07	0,19	0,02	0,061	0,007
	Robbins e Monro	NA	NA	NA	NA	NA	NA

Tabela 2 – Resultados dos experimentos numéricos para os últimos 2 casos de teste definidos no início desta Seção 3.3, comparando os métodos de Robbins e Monro e o gradiente conjugado linear estocástico. Nesta tabela, **GCLE** é o acrônimo para o método do gradiente conjugado linear estocástico, proposto nesta tese na Seção 3.1. Além disso, os acrônimos **M** e **DP** representam a média e o desvio padrão, respectivamente. Já **NA** significa que o resultado numérico tendeu para $+\infty$.

Comparação entre os métodos Estocásticos (20 Execuções)							
		Número de Iterações					
		5000		50000		500000	
Casos de Testes	Método Numérico	M	DP	M	DP	M	DP
9	GCLE	0,57	0,04	0,2	0,02	0,064	0,003
	Robbins e Monro	NA	NA	NA	NA	NA	NA
10	GCLE	1,37	0,12	0,75	0,02	0,413	0,007
	Robbins e Monro	NA	NA	NA	NA	NA	NA

4 O Gradiente Conjugado Não-Linear Estocástico

Nesse capítulo desenvolvemos o método do gradiente conjugado não linear estocástico, Algoritmo 2, a fim de solucionar problemas estocásticos, formulados matematicamente por:

$$x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x); \quad (4.1)$$

em que $f(x) = E(g(x, \xi))$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ξ é uma variável aleatória ($\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$), com (Ω, \mathcal{F}, P) , o espaço de probabilidade. Para as análises de convergência quase certa e taxa de convergência do método proposto à solução do problema estocástico (4.1), iremos adotar que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ possui gradientes que são L -Lipschitz, entre outras conjecturas que são tratadas na Hipótese E. Essas análises têm como referência os artigos (BLANCHET et al., 2019) e (PAQUETTE; SCHEINBERG, 2020), que abordam os casos de região de confiança e gradiente estocástico utilizando busca em linha, respectivamente, e as propriedades de supermartingales não negativos, tratadas no Capítulo 2.

O método do gradiente conjugado não linear estocástico exige, para as análises de convergência e taxa de convergência, que o valor estimado do gradiente de $f(x_k)$, g_k , seja "próximo" do valor real do gradiente $\nabla f(x_k)$, em que x_k é o ponto no espaço \mathbb{R}^n gerado pelo Algoritmo 2 no iterando k . Exigência semelhante é realizada para as estimativas de f nos pontos da sequência $\{x_k\}_{k \geq 0}$, gerados pelo algoritmo proposto. As terminologias que quantificam o termo "próximo" são definidas ao longo da Seção 4.2.

Uma forma de obtermos boa precisão na estimativa de $f(x)$ é amostrando $g(x, \xi)$ uma quantidade finita de vezes, mantendo x fixo, e calculando a média aritmética dos valores amostrados. Procedimento semelhante pode ser adotado quando temos disponível a informação do gradiente de $f(x)$, $\nabla f(x_k)$, imerso em ruído, e.g. $\nabla f(x_k; \xi_v) = \nabla f(x_k) + \xi_v$, com $\xi_v = (\xi_v^1, \dots, \xi_v^n)$ e $E[\xi_v^i] = 0$ para $i = 1, \dots, n$. Caso contrário, quando não temos acesso a $\nabla f(x_k; \xi_v)$, podemos estimar $\nabla f(x_k)$ por meio das técnicas de aproximação por diferenças finitas generalizada (LIU, 2009). Técnicas com o objetivo de estimar o tamanho das amostras, a fim de atender à Hipótese G, tratada na Seção 4.2, são apresentadas e analisadas em (TRIPURANENI et al., 2018), (BOLLAPRAGADA; BYRD; NOCEDAL, 2018), (FRIEDLANDER; SCHMIDT, 2012) e (TROPPE et al., 2015).

Por fim, dividimos o presente capítulo em cinco seções, a primeira seção é destinada a abordar os conceitos e propriedades da teoria da probabilidade, que serão utilizados para as demonstrações da análise de convergência quase certa, desenvolvida na Seção 4.2, e para a análise da taxa de convergência do algoritmo proposto, abordada na Seção 4.3, as quais não foram mencionadas no Capítulo 2. Em seguida, na Seção 4.4, apresentamos uma aplicação

direta do Algoritmo 2, demonstrando a convergência à solução de um problema de otimização não linear determinístico e, na Seção 4.5, mostramos uma aplicação numérica desse algoritmo desenvolvido.

4.1 Fundamentos Matemáticos

Apresentamos nesta seção as principais definições, hipóteses, lemas, proposições e teoremas que são utilizados no decorrer desse capítulo, para as análises de convergência quase certa e taxa de convergência do Algoritmo 2, o método do gradiente conjugado não linear estocástico. São apresentadas no Apêndice A as demonstrações desses lemas, proposições e teoremas tratados nessa parte do texto, uma vez que são resultados gerais da teoria da probabilidade.

Sejam $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ um espaço de probabilidade e $\{\Phi_k, \mathcal{A}_k\}_{k \geq 0}$ um processo estocástico definido nesse espaço, tal que Φ_k e \mathcal{A}_k são variáveis aleatórias não negativas para todo $k \geq 0$. Além disso, seja $\{W_k\}_{k \geq 0}$ uma sequência de variáveis aleatórias definidas nesse mesmo espaço de probabilidade, tal que $W_0 = 1$ e, para todo $k \geq 0$, temos

$$P(W_{k+1} = 1 \mid \mathcal{F}_k) = p \text{ e } P(W_{k+1} = -1 \mid \mathcal{F}_k) = 1 - p, \quad (4.2)$$

em que $\mathcal{F}_k = \sigma(\{\Phi_i, \mathcal{A}_i, W_i\}_{i=0}^k)$ e $p \in [0, 1]$. Como conseqüências da definição da $\{W_k\}_{k \geq 0}$ e da expressão (4.2), obtemos que essa sequência de variáveis aleatórias é mutuamente independente e que W_k é independente de $\{\Phi_i, \mathcal{A}_i\}_{i=0}^{k-1}$. Notemos que podemos interpretar o processo $\{W_k\}_{k \geq 0}$ como sendo um passeio aleatório, classificado como: simétrico, se $p = \frac{1}{2}$; não simétrico, caso contrário.

Por fim, definamos $\{\tau_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$, uma família de tempos de parada com relação à filtração $\{\mathcal{F}_k\}_{k \geq 0}$, indexada pelo conjunto \mathbb{R}_+ , e a Hipótese I.

Hipótese I. Temos que:

I.i) Existe uma constante $\lambda > 0$ e $\mathcal{A}_{max} = \mathcal{A}_0 e^{\lambda j_{max}}$, com $j_{max} \in \mathbb{Z}$ e $\mathcal{A}_k \leq \mathcal{A}_{max}$ para todo $k \geq 0$;

I.ii) Existe uma constante $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_0 e^{\lambda j_\epsilon}$, com $j_\epsilon \in \mathbb{Z}_- \cup \{0\}$, tal que para todo $k \geq 0$, temos

$$\mathbb{1}_{\{\tau_\epsilon > k\}} \mathcal{A}_{k+1} \geq \mathbb{1}_{\{\tau_\epsilon > k\}} \min(\mathcal{A}_k e^{\lambda W_{k+1}}, \bar{\mathcal{A}}), \quad (4.3)$$

em que W_{k+1} satisfaz (4.2) com $p > \frac{1}{2}$;

I.iii) Existe uma função não decrescente $h : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ e uma constante positiva Θ tal que, para todo $k \geq 0$, temos

$$\mathbb{1}_{\{\tau_\epsilon > k\}} E[\Phi_{k+1} \mid \mathcal{F}_k] \leq \mathbb{1}_{\{\tau_\epsilon > k\}} \Phi_k - \mathbb{1}_{\{\tau_\epsilon > k\}} \Theta h(\mathcal{A}_k). \quad (4.4)$$

□

A Hipótese [I.ii](#) significa que \mathcal{A}_k sempre tende a crescer quando estiver abaixo de $\bar{\mathcal{A}}$. Já a Hipótese [I.iii](#) menciona que, enquanto não pararmos ($\mathbb{1}_{\{\tau_\epsilon > k\}} = 1$), Φ_{k+1} tende a decrescer na média $\Theta h(\mathcal{A}_k)$ em relação ao iterando corrente Φ_k , tendo toda a informação gerada até o iterando corrente, \mathcal{F}_k , conhecida.

Portanto, enfatizamos que nosso objetivo nessa seção é limitar $E(\tau_\epsilon)$ em termos de $h(\bar{\mathcal{A}})$, supondo que $p > \frac{1}{2}$ ($\{W_k\}_{k \geq 0}$ é um passeio aleatório assimétrico).

Assim sendo, definiremos um processo de renovação $\{A_k\}_{k \geq 0}$, em que as renovações ocorrerão sempre que $\mathcal{A}_k \geq \bar{\mathcal{A}}$. Com essa finalidade, definamos, primeiramente, a sequência de variáveis aleatórias $\{Z_k\}_{k \geq 0}$ como:

$$\begin{aligned} Z_0 &= j_\epsilon; \\ Z_{k+1} &= \min(Z_k + W_{k+1}, j_\epsilon). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Percebamos que o processo $\{Z_k\}_{k \geq 0}$ é o processo de nascimento-morte no conjunto $\{k : k \leq j_\epsilon\}$. Podemos também interpretar $\{Z_k\}_{k \geq 0}$ como uma cadeia de Markov com barreira reflexiva (Capítulo 8 de ([SHIRYAEV, 2016](#))) em j_ϵ . Como $p > \frac{1}{2}$, temos que o estado j_ϵ é um estado recorrente positivo, o que torna toda a cadeia de Markov uma cadeia recorrente positiva. Além disso, dada a característica recorrente do estado j_ϵ , temos que $P(Z_k = j_\epsilon \text{ i.v. (infinitas vezes)}) = 1$. Ademais, da desigualdade [\(4.3\)](#), podemos afirmar, utilizando indução em k , que, para todo $k \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\{\tau_\epsilon > k\}} \mathcal{A}_{k+1} &\geq \mathbb{1}_{\{\tau_\epsilon > k\}} \min(\mathcal{A}_k e^{\lambda W_{k+1}}, \bar{\mathcal{A}}) \\ &\geq \mathbb{1}_{\{\tau_\epsilon > k\}} \mathcal{A}_0 e^{\lambda Z_{k+1}}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

A seguir, definamos o processo de renovação $\{A_k\}_{k \geq 0}$ como

$$\begin{aligned} A_0 &= 1; \\ A_k &= \inf\{m > A_{k-1} : Z_m = j_\epsilon\}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

que apresenta, de forma indireta, em quais iterações ocorre que $\mathcal{A}_k \geq \bar{\mathcal{A}}$ no evento $\{\tau_\epsilon > k\}$. Definamos o processo $\{\tau_k\}_{k \geq 1}$, que representa o tempo entre chegadas, ou seja, o tempo entre renovações do processo $\{A_k\}_{k \geq 0}$, como

$$\tau_k = A_n - A_{n-1}, \quad (4.8)$$

e, por fim, o processo de contagem,

$$N(k) = \max\{n : A_n \leq k\}, \quad (4.9)$$

que quantifica o número de renovações que ocorrem até o instante k .

Portanto, dadas as definições de todos os processos estocásticos com que iremos trabalhar ao longo desta seção, enunciaremos e demonstramos, no Apêndice [A](#), algumas propriedades que

são importantes para alcançarmos o objetivo desta parte do texto, que é limitar $E(\tau_\epsilon)$ em termos de $h(\mathcal{A})$, supondo que $p > \frac{1}{2}$ na relação (4.2).

O Lema 4.1.1 é uma consequência direta de $\{Z_k\}_{k \geq 1}$ ser um passeio aleatório assimétrico ($p > \frac{1}{2}$ na relação (4.2)) e das definições dos processos $\{W_k\}_{k \geq 1}$, $\{A_k\}_{k \geq 1}$ e $\{\tau_k\}_{k \geq 1}$, que limita a esperança do tempo entre renovações, τ_k , equação (4.8), do processo $\{A_k\}_{k \geq 1}$.

Lema 4.1.1. *Seja $\{\tau_k\}_{k \geq 1}$ o processo que representa o tempo entre chegadas do processo de renovação $\{A_k\}_{k \geq 0}$, definido em (4.8). Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos:*

$$E[\tau_n] = p + \left(1 + \frac{1}{2p-1}\right)(1-p) = \frac{p}{2p-1}. \quad (4.10)$$

Demonstração. Ver Apêndice A, Lema A.0.1. □

Adiante, o Lema 4.1.2 limita superiormente a esperança do número de renovações N imediatamente antes do tempo de parada τ_ϵ , $E[N(\tau_\epsilon - 1)]$.

Lema 4.1.2. *Considerando os processos estocásticos $\{\mathcal{A}_k\}_{k \geq 0}$, $\{A_k\}_{k \geq 0}$, $\{\Phi_k\}_{k \geq 0}$, $\{\tau_k\}_{k \geq 1}$, $\{W_k\}_{k \geq 0}$, $\{Z_k\}_{k \geq 0}$, $\{N(k)\}_{k \geq 1}$ e $\{\tau_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$ definidos acima e as definições de Θ e h , fornecidas na Hipótese I, então*

$$E[N(\tau_\epsilon - 1) + 1] \leq \frac{E[\Phi_0]}{\Theta h(\mathcal{A})}.$$

Demonstração. Ver Apêndice A, Lema A.0.2. □

A proposição a seguir é uma variação do Teorema da Identidade de Wald. Este teorema, que é uma aplicação do teorema da parada opcional, diz "que sob certas condições a média da soma de uma quantidade aleatória de parcelas aleatórias é a média das parcelas vezes o número médio de parcelas- Seção 12.3 do Capítulo 12 de (ROLLA; DELIMA, 2024). Entretanto, como consequência do mencionado anteriormente, é comum na literatura exigir que uma dessas condições (hipóteses) seja que o tempo de parada, com relação à filtração natural, seja integrável, implicando que o tempo de parada seja finito quase certamente. Portanto, visando suprimir essa condição, temos a proposição 4.1.3.

Proposição 4.1.3. *Identidade de Wald*

Seja $\{Y_k\}_{k \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que: $P(Y_k \in [0, +\infty]) = 1$ para todo $k \geq 1$; $E[Y_k] = \mu_k$, com $\mu_k \in [0, +\infty]$ para todo $k \geq 1$; e τ um tempo de parada em relação à filtração natural. Definamos $S_k = Y_1 + \dots + Y_k$, $S_0 = 0$, $s_k = \mu_1 + \dots + \mu_k$. Então

$$E[S_\tau] = E[s_\tau] \quad (4.11)$$

Demonstração. Ver Apêndice A, Proposição A.0.3. □

Como observações importantes da Proposição 4.1.3, temos que:

- se $\mu_k = \mu$ para todo $k \geq 1$, então $E[S_\tau] = \mu E[\tau]$;
- se $\mu_k = \mu = 0$ para todo $k \geq 1$, então $Y_k = 0$ q.c. para todo $k \geq 1$ e $S_\tau = 0$ q.c., resultando que $\mu E[\tau] = 0$, mesmo que $E[\tau] = \infty$;
- se $P(\tau = 0) = 1$, então $\mu E[\tau] = 0$, mesmo que $\mu = \infty$.

Uma pergunta interessante a ser feita é o motivo de não ser conveniente considerar que a esperança do tempo de parada seja finita, ou, até mesmo, considerarmos algo menos restritivo, que o tempo de parada seja finito quase certamente. Ora, como iremos propor na seção seguinte um método de otimização estocástico que irá gerar processos estocásticos, se adotarmos a hipótese retirada, não precisaríamos demonstrar a convergência quase certa, pois herdaríamos a conclusão do fato de todo tempo de parada ser finito quase certamente.

Por fim, no Teorema 4.1.4, sintetizamos, utilizando os lemas e proposições anteriores, o objetivo desta seção.

Teorema 4.1.4. *Considerando os processos estocásticos $\{\mathcal{A}_k\}_{k \geq 0}$, $\{A_k\}_{k \geq 0}$, $\{\Phi_k\}_{k \geq 0}$, $\{\tau_k\}_{k \geq 1}$, $\{W_k\}_{k \geq 0}$, $\{Z_k\}_{k \geq 0}$, $\{N(k)\}_{k \geq 1}$ e $\{\tau_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$ definidos acima, se a Hipótese I é satisfeita, então*

$$E[\tau_\epsilon - 1] \leq \frac{p}{2p - 1} \frac{E[\Phi_0]}{\Theta h(\mathcal{A})}.$$

Demonstração. Ver Apêndice A, Teorema A.0.4. □

4.2 Convergência Quase Certa do Método do Gradiente Conjugado Não Linear Estocástico

Para análise de convergência do Algoritmo 2, iremos supor a seguinte hipótese na função não linear f , problema (4.1), que é comum ser utilizada para a prova de convergência dos métodos de gradiente conjugado não lineares determinísticos.

Hipótese E. O gradiente de f , ∇f , é L-Lipschitz contínuo, ou seja, existe $L > 0$ tal que

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Além disso, existe um único $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que:

- $f_{\min} = f(x^*) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$;
- $\nabla f(x) = 0$ se, e somente se, $x = x^*$. □

Algoritmo 2 Método do Gradiente Conjugado Não Linear Estocástico

Entrada: $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\gamma > 1$, $\theta \in (0, 1)$, $\alpha_{max} > 0$, $\bar{K}_2 \geq 1$, $\alpha_0 = \gamma^{j_0} \alpha_{max}$ (com $j_0 \in \mathbb{Z}_-$), δ_0^2 , $\epsilon > 0$, $max_iter \in \mathbb{N}$ e $k = 0$.

Saída: \bar{X} (solução aproximada do problema não linear estocástico).

enquanto $k \leq max_iter$ **faça**

▷ *xrepetição*

Passo 1: Computar a estimativa do gradiente de $f(x_k)$, g_k , satisfazendo a Hipótese **G**;

Passo 2: Computar o coeficiente de conjugação β_k^N ;

$$\beta_k^N = \begin{cases} 0, & \text{se } k = 0 \\ \frac{1}{b_k} \left(y_{k-1} - 2p_{k-1} \frac{\|y_{k-1}\|^2}{b_k} \right)^T g_k, & \text{se } k \in \mathbb{N} \end{cases};$$

em que:

$$b_k = \begin{cases} \epsilon, & \text{se } p_{k-1}^T y_{k-1} = 0 \\ p_{k-1}^T y_{k-1}, & \text{c.c.} \end{cases};$$

$$y_{k-1} = g_k - g_{k-1}.$$

Passo 3:

Computar a direção de busca p_k ;

$$\bar{p}_k = -g_k + \beta_k^N p_{k-1},$$

e

$$p_k = \begin{cases} \bar{K}_1 \frac{\|g_k\|}{\|p_k\|} \bar{p}_k, & \text{se } \|\bar{p}_k\| < \bar{K}_1 \|g_k\| \\ \bar{p}_k, & \text{se } \bar{K}_1 \|g_k\| \leq \bar{p}_k \leq \bar{K}_2 \|g_k\| \\ \bar{K}_2 \frac{\|g_k\|}{\|p_k\|} \bar{p}_k, & \text{se } \|\bar{p}_k\| > \bar{K}_2 \|g_k\| \end{cases},$$

$$\text{com } \bar{K}_1 = \frac{7}{8}.$$

Passo 4: Definamos $s_k = \alpha_k p_k$;

Passo 5: Computar a estimativa da funções de $f(x_k)$ e $f(x_k + s_k)$, f_k e f_k^s , respectivamente, com base em δ_k , g_k e x_k , satisfazendo a Hipótese **G**;

Passo 6: Atualizar ponto corrente e parâmetros do próximo passo;

se $f_k^s \leq f_k + \theta \alpha_k g_k^T p_k$ **então**

$$x_{k+1} = x_k + s_k, \alpha_{k+1} = \min\{\alpha_{max}, \gamma \alpha_k\}, g_{k-1} = g_k, p_{k-1} = p_k; \quad \triangleright \text{Sucesso}$$

se $-\alpha_k g_k^T p_k \geq \delta_k^2$ **então**

$$\delta_{k+1}^2 = \gamma \delta_k^2;$$

▷ *Passo Confiável*

fim se

se $-\alpha_k g_k^T p_k < \delta_k^2$ **então**

$$\delta_{k+1}^2 = \gamma^{-1} \delta_k^2;$$

▷ *Passo Não Confiável*

fim se

senão

$$x_{k+1} = x_k, \alpha_{k+1} = \gamma^{-1} \alpha_k, \delta_{k+1}^2 = \gamma^{-1} \delta_k^2;$$

▷ *Insucesso*

fim se

$$k = k + 1$$

fim enquanto

Faça $\bar{X} = x_k$

▷

final

O Algoritmo 2 gera uma sequência de elementos aleatórios $\{G_k, X_k, B_k^N, S_k, \mathcal{A}_k, P_k, \Delta_k, F_k^0, F_k^s\}_{k \geq 0}$ cujas respectivas realizações são $G_k(\omega) = g_k, X_k(\omega) = x_k, B_k^N(\omega) = \beta_k^N, S_k(\omega) = s_k, \mathcal{A}_k(\omega) = \alpha_k, P_k(\omega) = p_k, \Delta_k(\omega) = \delta_k, F_k^0(\omega) = f_k^0$ e $F_k^s(\omega) = f_k^s$, em que $\omega \in \Omega$, sendo (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade, em que os elementos aleatórios definidos acima estão bem definidos. Na Tabela 3 estão descritos os parâmetros do algoritmo proposto e seus significados. O principal objetivo nesta seção é mostrar que, sob certas hipóteses a respeito de $\{G_k\}_{k \geq 0}$ e $\{F_k^0, F_k^s\}_{k \geq 0}$, teremos que $\nabla f(X_k) \rightarrow 0$ quase certamente quando $k \rightarrow \infty$. Definamos $\mathcal{F}_{k-1}^{G,F} = \sigma(\{G_i, F_i^0, F_i^s\}_{i=0}^{i=k-1})$ e $\mathcal{F}_{k-1,2}^{G,F} = \sigma(\{G_i\}_{i=0}^{i=k} \cup \{F_i^0, F_i^s\}_{i=0}^{i=k-1})$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e, para fins de completude, definimos $\mathcal{F}_{-1}^{G,F} = \sigma(x_0)$. Então $\{\mathcal{F}_{k-1}^{G,F}\}_{k \geq 0}$ é uma filtração do espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) .

Tabela 3 – Significados dos parâmetros do algoritmo 2.

Parâmetros	Significado
x_0	Condição inicial
γ	Coefficiente de atualização dos parâmetros α_k e δ_k^2
θ	Constante da Condição de Armijo ($f_k^s \leq f_k + \theta \alpha_k g_k^T p_k$)
α_{max}	Máximo comprimento de passo permitido na direção p_k , na iteração k
α_0	Passo inicial na direção $p_0 = -g_0$
δ_0^2	Raio inicial de confiança utilizado na Condição G.iii, da Hipótese G
K_2	Constante que limita a norma de p_k em relação a norma de g_k
ϵ	Constante que não permite divisão por zero
max_iter	Número máximo de iterações

A seguir, iremos mensurar, na Definição 3, a precisão da estimativa de G_k em relação ao gradiente da função $f(X_k)$, $\nabla f(X_k)$, no ponto corrente X_k .

Definição 3. Dizemos que a sequência de vetores aleatórios $\{G_k\}_{k \geq 0}$ é p_g -probabilisticamente k_g -suficientemente precisa em relação às sequências $\{\mathcal{A}_k, X_k\}_{k \geq 0}$, geradas pelo Algoritmo 2, se existir uma constante $k_g > 0$, tal que:

$$P(\mathbb{I}_k \mid \mathcal{F}_{k-1}^{G,F}) = E(\mathbb{1}_{\mathbb{I}_k} \mid \mathcal{F}_{k-1}^{G,F}) \geq p_g,$$

em que:

$$\mathbb{I}_k = \{\|G_k - \nabla f(X_k)\| \leq k_g \mathcal{A}_k \|G_k\|\}$$

e $p_g \in [0, 1]$. □

De forma análoga, precisamos mensurar a precisão das estimativas das variáveis aleatórias F_k^0 e F_k^s , em relação aos valores reais $f(X_k)$ e $f(X_k + S_k)$.

Definição 4. Dizemos que a sequência de variáveis aleatórias $\{F_k^0, F_k^s\}_{k \geq 0}$ é p_f -probabilisticamente ϵ_f -suficientemente precisa em relação às sequências $\{\mathcal{A}_k, X_k, S_k\}_{k \geq 0}$, geradas pelo Algoritmo 2, se existir uma constante $\epsilon_f > 0$, tal que:

$$P(\mathbb{J}_k \mid \mathcal{F}_{k-1,2}^{G,F}) = E(\mathbb{1}_{\mathbb{J}_k} \mid \mathcal{F}_{k-1,2}^{G,F}) \geq p_f,$$

em que:

$$\mathbb{J}_k = \{|F_k^0 - f(X_k)| \leq \epsilon_f \mathcal{A}_k^2 \|G_k\|^2 \text{ e } |F_k^s - f(X_k + S_k)| \leq \epsilon_f \mathcal{A}_k^2 \|G_k\|^2\}$$

e $p_f \in [0, 1]$. □

Além disso, para as provas de convergência, adotaremos que as sequências $\{G_k\}_{k \geq 0}$ e $\{F_k^0, F_k^s\}_{k \geq 0}$, geradas pelo Algoritmo 2, satisfazem a Hipótese **G**.

Hipótese G. Temos que:

G.i) A sequência estocástica $\{G_k\}_{k \geq 0}$, gerada pelo Algoritmo 2, é p_g -probabilisticamente k_g -suficientemente precisa em relação à sequência $\{\mathcal{A}_k, X_k\}_{k \geq 0}$ para algum p_g suficientemente grande pertencente a $(0, 1]$;

G.ii) A sequência estocástica $\{F_k^0, F_k^s\}_{k \geq 0}$, gerada pelo Algoritmo 2, é p_f -probabilisticamente ϵ_f -suficientemente precisa em relação a $\{\mathcal{A}_k, X_k, S_k\}_{k \geq 0}$, para algum $\epsilon_f \leq \frac{3\theta \bar{K}_1}{16\alpha_{max} \bar{K}_2}$, em que $\bar{K}_1 = \frac{7}{8}$, e p_f é suficientemente grande tal que $p_f \in (0, 1]$;

G.iii) A sequência estocástica $\{F_k^0, F_k^s\}_{k \geq 0}$, gerada pelo Algoritmo 2, satisfaz a condição de k_f -variância para todo $k \geq 0$, ou seja,

$$\mathbb{E}[|F_k^s - f(X_k + S_k)|^2 \mid \mathcal{F}_{k-1,2}^{G,F}] \leq \max\{k_f^2 \mathcal{A}_k^2 \|\nabla f(X_k)\|^4, \bar{\theta}^2 \Delta_k^4\}$$

e

$$\mathbb{E}[|F_k^0 - f(X_k)|^2 \mid \mathcal{F}_{k-1,2}^{G,F}] \leq \max\{k_f^2 \mathcal{A}_k^2 \|\nabla f(X_k)\|^4, \bar{\theta}^2 \Delta_k^4\}$$

em que $\bar{\theta} = \frac{\theta \bar{K}_1}{\bar{K}_2}$. □

Logo, como consequências das definições apresentadas e da Hipótese **G**, temos:

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\mathbb{I}_k \cap \mathbb{J}_k} \mid \mathcal{F}_{k-1}^{G,F}) \geq p_f p_g; \quad (4.12)$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\mathbb{I}_k^c \cap \mathbb{J}_k} \mid \mathcal{F}_{k-1}^{G,F}) \leq 1 - p_g; \quad (4.13)$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\mathbb{J}_k^c} \mid \mathcal{F}_{k-1}^{G,F}) \leq 1 - p_f. \quad (4.14)$$

Da Condição **G.iii** da Hipótese **G** vem o seguinte lema.

Lema 4.2.1. *Seja satisfeita a Condição **G.iii**, da Hipótese **G**, sejam $\{G_k, B_k^N, P_k, S_k, \mathcal{A}_k, F_k^0, F_k^s, X_k\}_{k \geq 0}$ os processos estocásticos gerados pelo Algoritmo 2 e sejam $\{F_k^0, F_k^c\}_{k \geq 0}$ estimativas p_f -probabilisticamente precisas de f avaliadas nos pontos X_k e $X_k + S_k$, respectivamente. Então, para todo $k \geq 0$, teremos:*

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\mathbb{J}_k^c} |F_k^s + f(X_k + S_k)| \mid \mathcal{F}_{k-1,2}^{G,F}] \leq (1 - p_f)^{\frac{1}{2}} \max\{k_f \mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2, \bar{\theta} \Delta_k^2\}, \quad (4.15)$$

e

$$E \left[\mathbb{1}_{J_k^c} |F_k^0 - f(X_k)| \mid \mathcal{F}_{k-1,2}^{G,F} \right] \leq (1 - p_f)^{\frac{1}{2}} \max\{k_f \mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2, \bar{\theta} \Delta_k^2\}, \quad (4.16)$$

em que $\bar{\theta} = \theta \frac{\bar{K}_1}{\bar{K}_2}$.

Demonstração. A demonstração será apresentada para a última desigualdade do lema, devendo ser apenas replicada para a primeira desigualdade.

Notemos que: pela desigualdade de Holder, temos:

$$\begin{aligned} E \left[\mathbb{1}_{J_k^c} |F_k^0 - f(X_k)| \mid \mathcal{F}_{k-1,2}^{G,F} \right] &\leq \left(E[\mathbb{1}_{J_k^c} \mid \mathcal{F}_{k-1,2}^{G,F}] \right)^{\frac{1}{2}} \left(E(|F_k^0 - f(X_k)|^2 \mid \mathcal{F}_{k-1,2}^{G,F}) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (1 - p_f)^{\frac{1}{2}} \left(\max\{k_f^2 \mathcal{A}_k^2 \|\nabla f(X_k)\|^4, \bar{\theta}^2 \Delta_k^4\} \right)^{\frac{1}{2}}. \\ &= (1 - p_f)^{\frac{1}{2}} \max\{k_f \mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2, \bar{\theta} \Delta_k^2\}. \end{aligned}$$

Na segunda desigualdade acima, utilizamos a relação da Condição **G.iii**, da Hipótese **G**, e que $E(\mathbb{1}_{J_k^c} \mid \mathcal{F}_{k-1}^{G,F}) \leq 1 - p_f$ para obtermos a conclusão desse lema. \square

Assim, enunciaremos nosso primeiro teorema.

Teorema 4.2.2. *Sejam $\{G_k\}_{k \geq 0}$, $\{P_k\}_{k \geq 0}$ gerados pelo Algoritmo 2. Se $\{B_k^N\}_{k \geq 0}$ for definido conforme o Passo 2 do algoritmo 2, então, para todo $k \geq 0$, temos*

$$G_k^T P_k \leq -\frac{7}{8} \|G_k\|^2. \quad (4.17)$$

Demonstração. Dado qualquer $w \in \Omega$, temos que $g_k = G_k(w)$, $p_k = P_k(w)$ e $\beta_k^N = B_k^N(w)$ as realizações, então separemos a demonstração em dois casos.

- Se $k = 0$, temos:

$$g_0^T p_0 = g_0^T (-g_0) = -\|g_0\|^2.$$

- Se $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} g_k^T p_k &= g_k^T (-g_k + \beta_k^N p_{k-1}) \\ &= -\|g_k\|^2 + \frac{g_k^T p_{k-1}}{b_k} \left(\frac{b_k y_{k-1} - 2p_{k-1} \|y_{k-1}\|^2}{b_k} \right)^T g_k \\ &= \frac{-b_k^2 \|g_k\|^2 + (g_k^T p_{k-1}) (g_k^T y_{k-1}) b_k - 2(g_k^T p_{k-1})^2 \|y_{k-1}\|^2}{b_k^2}. \end{aligned}$$

Definamos

$$\mu = \frac{b_k}{2} g_k \quad e \quad \nu = 2(g_k^T p_{k-1}) y_{k-1}$$

e substituindo na igualdade anterior, temos:

$$\begin{aligned}
 g_k^T p_k &= \frac{-4\|\mu\|^2 - \frac{\|\nu\|^2}{2} + \mu^T \nu}{b_k^2} \\
 &\leq \frac{-4\|\mu\|^2 - \frac{\|\nu\|^2}{2} + \frac{1}{2}(\|\mu\|^2 + \|\nu\|^2)}{b_k^2} \\
 &= -\frac{7}{2b_k^2} \|\mu\|^2 \\
 &= -\frac{7}{8} \|g_k\|^2.
 \end{aligned}$$

Notemos que na desigualdade acima, utilizamos que $\mu^T \nu \leq \frac{1}{2}(\|\mu\|^2 + \|\nu\|^2)$ para finalizarmos a demonstração desse teorema. \square

Temos, como consequências diretas do Teorema 4.2.2, que, para todo $k \geq 0$:

- $p_k \neq 0$ sempre que $g_k \neq 0$, consequência direta da desigualdade (4.17);
- $\frac{7}{8} \|g_k\| \leq \|p_k\|$, bastando utilizar a desigualdade de Cauchy-Schwarz na desigualdade (4.17);
- $\frac{g_k^T p_k}{\|g_k\| \|p_k\|} \leq -\frac{7}{8\bar{K}_2}$, lembrando que, no Passo 3 do Algoritmo 2, temos que $\|p_k\| \leq \bar{K}_2 \|g_k\|$ para todo $k \geq 0$.

A última consequência implica que o ângulo formado entre p_k e $-g_k$ é agudo em todas as iterações.

Dessa forma, temos que a Hipótese **H** apresentada a seguir é satisfeita para todo iterando $k \geq 0$.

Hipótese H. Temos que:

H.i) Existe uma constante $\beta > 0$, tal que a direção de busca, p_k , e o gradiente estimado, g_k , satisfazem, para todo $k \geq 0$:

$$\frac{g_k^T p_k}{\|g_k\| \|p_k\|} \leq -\beta, \quad (4.18)$$

em que $\beta = \frac{7}{8\bar{K}_2}$.

H.ii) Para todo $k \geq 0$,

$$\bar{K}_1 \|g_k\| \leq \|p_k\| \leq \bar{K}_2 \|g_k\|, \quad (4.19)$$

sendo $\bar{K}_1 = \frac{7}{8}$. \square

A seguir iremos enunciar e provar cinco lemas que são fundamentais para a demonstração de convergência quase certa e análise da taxa de convergência do Algoritmo 2, o método do gradiente conjugado não linear estocástico. Iniciamos no Lema 4.2.3, que diz que se a estimativa do gradiente de $f(x_k)$, g_k , for k_g -suficientemente precisa, então $\|g_k\|$ é limitada inferiormente.

Lema 4.2.3. *Se g_k é k_g -suficientemente preciso, então*

$$\frac{\|\nabla f(x_k)\|}{k_g \alpha_{max} + 1} \leq \|g_k\| \quad (4.20)$$

Demonstração. Da desigualdade triangular e da definição de g_k ser k_g -suficientemente preciso, temos:

$$\|\nabla f(x_k)\| - \|g_k\| \leq \left| \|\nabla f(x_k)\| - \|g_k\| \right| \leq \|\nabla f(x_k) - g_k\| \leq k_g \alpha_k \|g_k\|,$$

implicando em

$$\|\nabla f(x_k)\| \leq (1 + k_g \alpha_k) \|g_k\| \leq (1 + k_g \alpha_{max}) \|g_k\|.$$

Assim, concluímos que a relação (4.20) é satisfeita. \square

O Lema 4.2.4, apresentado a seguir, nos diz que, se temos uma boa estimativa do gradiente de $f(x_k)$, g_k , e boas estimativas da função f nos pontos x_k e $x_k + s_k$, então teremos que $f_k^s \leq f_k + \theta \alpha_k g_k^T p_k$, ou seja, o Passo 6 do Algoritmo 2 terá sucesso sempre que tivermos pequenos comprimentos de passo.

Lema 4.2.4. *Sejam g_k estimativa k_g -suficientemente precisa do gradiente de f no ponto x_k , p_k satisfazendo a Hipótese H, f_k^0 e $f_k^s \in \epsilon_f$ -estimativas precisas de f nos pontos x_k e $x_k + s_k$, respectivamente. Se*

$$\alpha_k \leq \frac{\beta(1 - \theta)}{k_g + \frac{L\bar{K}_2}{2} + \frac{2\epsilon_f}{\bar{K}_1}} \quad (4.21)$$

em que $\beta = \frac{7}{8\bar{K}_2}$, então teremos na k -ésima iteração um passo de sucesso ou, equivalentemente, $f_k^s \leq f_k^0 + \theta \alpha_k g_k^T p_k$.

Demonstração. Tendo em vista que o gradiente de f é lipschitziano, utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o fato de g_k ser uma estimativa k_g -suficientemente precisa do gradiente de f no ponto x_k , temos

$$\begin{aligned} f(x_k + s_k) &\leq f(x_k) + \nabla f(x_k)^T s_k + \frac{L}{2} \alpha_k^2 \|p_k\|^2 \\ &= f(x_k) + \alpha_k (\nabla f(x_k) - g_k)^T p_k + \alpha_k g_k^T p_k + \frac{L}{2} \alpha_k^2 \|p_k\|^2 \\ &\leq f(x_k) + \alpha_k \|(\nabla f(x_k) - g_k)\| \|p_k\| + \alpha_k g_k^T p_k + \frac{L}{2} \alpha_k^2 \|p_k\|^2 \\ &\leq f(x_k) + k_g \alpha_k^2 \|g_k\| \|p_k\| + \alpha_k g_k^T p_k + \frac{L}{2} \alpha_k^2 \|p_k\|^2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Em seguida, como temos que f_k^0 e f_k^s são estimativas ϵ_f -precisas de f nos pontos x_k e $x_k + s_k$, respectivamente, obtemos da desigualdade triangular e da relação (4.22),

$$\begin{aligned} f_k^s - \epsilon_f \alpha_k^2 \|g_k\|^2 &\leq f(x_k + s_k) - f_k^0 + f_k^0 \\ &\leq f(x_k) - f_k^0 + f_k^0 + k_g \alpha_k^2 \|g_k\| \|p_k\| + \alpha_k g_k^T p_k + \frac{L}{2} \alpha_k^2 \|p_k\|^2 \\ &\leq \epsilon_f \alpha_k^2 \|g_k\|^2 + f_k^0 + k_g \alpha_k^2 \|g_k\| \|p_k\| + \alpha_k g_k^T p_k + \frac{L}{2} \alpha_k^2 \|p_k\|^2, \end{aligned}$$

resultando que

$$\begin{aligned} f_k^s - f_k^0 &\leq 2\epsilon_f \alpha_k^2 \|g_k\|^2 + k_g \alpha_k^2 \|g_k\| \|p_k\| + \alpha_k g_k^T p_k + \frac{L}{2} \alpha_k^2 \|p_k\|^2 \\ &\leq \frac{2\epsilon_f}{\bar{K}_1} \|g_k\| \|p_k\| + k_g \alpha_k^2 \|g_k\| \|p_k\| + \alpha_k g_k^T p_k + \frac{L}{2} \bar{K}_2 \alpha_k^2 \|p_k\| \|g_k\| \\ &= \alpha_k^2 \left(\frac{2\epsilon_f}{\bar{K}_1} + k_g + \frac{L}{2} \bar{K}_2 \right) \|p_k\| \|g_k\| + \alpha_k g_k^T p_k. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Como o Teorema 4.2.2 é válido, para todo iterando k , então $\|p_k\| \|g_k\| \leq -\frac{1}{\beta} g_k^T p_k$, e da desigualdade (4.23) resulta que

$$\begin{aligned} f_k^s - f_k^0 &\leq -\frac{\alpha_k^2}{\beta} \left(\frac{2\epsilon_f}{\bar{K}_1} + k_g + \frac{L}{2} \bar{K}_2 \right) g_k^T p_k + \alpha_k g_k^T p_k \\ &= \alpha_k \left(1 - \frac{\alpha_k}{\beta} \left(\frac{2\epsilon_f}{\bar{K}_1} + k_g + \frac{L}{2} \bar{K}_2 \right) \right) g_k^T p_k. \end{aligned}$$

E, se

$$\alpha_k \leq \frac{\beta(1 - \theta)}{\left(\frac{2\epsilon_f}{\bar{K}_1} + k_g + \frac{L}{2} \bar{K}_2 \right)}$$

então $f_k^s \leq f_k^0 + \theta \alpha_k g_k^T p_k$. □

O Lema 4.2.5 a seguir menciona que, havendo boas estimativas da função f nos pontos x_k e $x_k + s_k$ e passo aceito com sucesso ($f_k^s \leq f_k^0 + \theta \alpha_k g_k^T p_k$) então a função f decrescerá. Note que, nesse lema, não é exigido que a estimativa do gradiente de $f(x_k)$ seja k_g -suficientemente precisa.

Lema 4.2.5. *Sejam $\epsilon_f < \frac{3\theta \bar{K}_1}{16\alpha_{max} \bar{K}_2}$, p_k satisfazendo a Hipótese **H**, f_k^0 e f_k^s estimativas ϵ_f -precisas de f nos pontos x_k e $x_k + s_k$, respectivamente. Se o iterando for aceito com sucesso ($f_k^s \leq f_k^0 + \theta \alpha_k g_k^T p_k$), então ocorrerá um decréscimo no valor de f , ou seja,*

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \frac{\theta \bar{K}_1}{2\bar{K}_2} \alpha_k \|g_k\|^2. \quad (4.24)$$

E, se o comprimento de passo for confiável ($-\alpha_k g_k^T p_k \geq \delta^2 \Rightarrow \delta_{k+1}^2 = \gamma \delta_k^2$), então

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \frac{\bar{\theta}}{4} \alpha_k \|g_k\|^2 - \frac{\bar{\theta}}{4\bar{K}_2} \delta_k^2, \quad (4.25)$$

sendo que $\bar{\theta} = \theta \frac{\bar{K}_1}{\bar{K}_2}$.

Demonstração. No iterando k , o passo é aceito com sucesso ($0 \leq -f_k^s + f_k^0 + \theta \alpha_k g_k^T p_k$) e temos que f_k^0 e f_k^s são estimativas ϵ_f -precisas de f nos pontos x_k e $x_k + s_k$, respectivamente. Além disso, a Hipótese **H.2** é satisfeita. Então

$$\begin{aligned} f(x_k + s_k) &\leq f(x_k + s_k) - f_k^s + f_k^0 + \theta \alpha_k g_k^T p_k - f(x_k) + f(x_k) \\ &\leq f(x_k) + 2\epsilon_f \alpha_k^2 \|g_k\|^2 + \theta \alpha_k g_k^T p_k \\ &\leq f(x_k) + 2\epsilon_f \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - \theta \alpha_k \beta \bar{K}_1 \|g_k\|^2 \\ &\leq f(x_k) - \alpha_k (\theta \beta \bar{K}_1 - 2\epsilon_f \alpha_{max}) \|g_k\|^2. \end{aligned}$$

Logo, visto que $\beta = \frac{7}{8\bar{K}_2}$, temos

$$\begin{aligned} -(\theta \beta \bar{K}_1 - 2\epsilon_f \alpha_{max}) &= -\frac{7\theta \bar{K}_1}{8\bar{K}_2} + 2\epsilon_f \alpha_{max} \\ &\leq -\frac{7\theta \bar{K}_1}{8\bar{K}_2} + 2\frac{3\theta \alpha_{max} \bar{K}_1}{16\alpha_{max} \bar{K}_2} \\ &= -\frac{\theta \bar{K}_1}{2\bar{K}_2}. \end{aligned}$$

Portanto, definindo $\bar{\theta} = \theta \frac{\bar{K}_1}{\bar{K}_2}$, temos

$$f(x_k + s_k) \leq f(x_k) - \frac{\bar{\theta} \alpha_k}{2} \|g_k\|^2.$$

Para a demonstração da desigualdade (4.25), basta notar que:

$$\begin{aligned} -\frac{\bar{\theta} \alpha_k}{2} \|g_k\|^2 &= -\frac{\bar{\theta} \alpha_k}{4} \|g_k\|^2 - \frac{\bar{\theta} \alpha_k}{4} \|g_k\|^2 \\ &\leq -\frac{\bar{\theta} \alpha_k}{4} \|g_k\|^2 - \frac{\bar{\theta}}{4\bar{K}_2} \delta_k^2. \end{aligned}$$

Pois, da desigualdade de Cauchy ($-g_k^T p_k \leq \|g_k\| \|p_k\|$),

$$\begin{aligned} -\frac{\bar{\theta} \alpha_k}{4} \|g_k\|^2 &= \frac{\bar{\theta} \alpha_k}{4\bar{K}_2} \|g_k\| (-\bar{K}_2 \|g_k\|) \\ &\leq \frac{\bar{\theta} \alpha_k}{4\bar{K}_2} \|g_k\| (-\|p_k\|) \\ &\leq \frac{\bar{\theta} \alpha_k}{4\bar{K}_2} g_k^T p_k \\ &\leq -\frac{\bar{\theta} \delta_k^2}{4\bar{K}_2}. \end{aligned}$$

Na última desigualdade, utilizamos o fato de que o comprimento de passo é confiável, equivalente a afirmar que $-\alpha_k g_k^T p_k \geq \delta_k^2$. \square

O lema a seguir nos diz que em iterações aceitas com sucesso, teremos uma variação do gradiente de f limitada.

Lema 4.2.6. *Seja o Passo 6, da k -ésima iteração do Algoritmo 2, bem-sucedido ($f_k^s \leq f_k^0 + \theta \alpha_k g_k^T p_k$). Sabendo que a direção de busca, p_k , satisfaz a Hipótese **H**, então*

$$\|\nabla f(x_{k+1})\|^2 \leq 2(L^2 \alpha_k^2 \bar{K}_2^2 \|g_k\|^2 + \|\nabla f(x_k)\|^2). \quad (4.26)$$

Em particular, a seguinte desigualdade é satisfeita

$$\frac{1}{L^2} (\alpha_{k+1} \|\nabla f(x_{k+1})\|^2 - \alpha_k \|\nabla f(x_k)\|^2) \leq 2\gamma \alpha_k \left(\alpha_{max}^2 \bar{K}_2^2 \|g_k\|^2 + \frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 \right). \quad (4.27)$$

Demonstração. Pela hipótese do gradiente ser Lipschitz, obtemos que

$$\|\nabla f(x_{k+1})\| - \|\nabla f(x_k)\| \leq L \alpha_k \|p_k\|,$$

resultando que

$$\|\nabla f(x_{k+1})\| \leq L \alpha_k \|p_k\| + \|\nabla f(x_k)\|.$$

Visto que a Hipótese **H.ii** é satisfeita, então

$$\|\nabla f(x_{k+1})\| \leq L \bar{K}_2 \alpha_k \|g_k\| + \|\nabla f(x_k)\|$$

e, utilizando a desigualdade $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ na desigualdade anterior, concluímos a demonstração da desigualdade (4.26).

Para a demonstração da relação (4.27), observamos que, pelo fato de a k -ésima iteração ser aceita com sucesso, temos $\alpha_k = \gamma \alpha$. Logo

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} \|\nabla f(x_{k+1})\| &\leq 2\gamma \alpha_k (L^2 \alpha_k^2 \bar{K}_2^2 \|g_k\|^2 + \|\nabla f(x_k)\|^2) \\ &\leq 2\gamma \alpha_k (L^2 \alpha_{max}^2 \bar{K}_2^2 \|g_k\|^2 + \|\nabla f(x_k)\|^2) \\ &= 2\gamma L^2 \alpha_k \left(\alpha_{max}^2 \bar{K}_2^2 \|g_k\|^2 + \frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 \right) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{L^2} \left(\alpha_{k+1} \|\nabla f(x_{k+1})\| - \alpha_k \|\nabla f(x_k)\| \right) &\leq 2\gamma \alpha_k \left(\alpha_{max}^2 \bar{K}_2^2 \|g_k\|^2 + \frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{L^2} \alpha_k \|\nabla f(x_k)\| \\ &\leq 2\gamma \alpha_k \left(\alpha_{max}^2 \bar{K}_2^2 \|g_k\|^2 + \frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 \right). \end{aligned}$$

□

O último lema prova que, no iterando k , se tivermos estimativas precisas do gradiente de f no ponto x_k , estimativas precisas da função f nos pontos x_k e $x_k + s_k$, denominadas f_k^0 e f_k^s , respectivamente, e se, no Passo 6 do Algoritmo 2, for sucesso ($f_k^s \leq f_k + \theta \alpha_k g_k^T p_k$), então teremos um decréscimo da função f .

Lema 4.2.7. *Sejam g_k estimativa k_g -suficientemente precisa do gradiente de f no ponto x_k , p_k satisfazendo a Hipótese H, f_k^0 e f_k^s estimativas ϵ_f -precisas de f nos pontos x_k e $x_k + s_k$, respectivamente, em que $\epsilon_f < \frac{3\bar{\theta}}{16\alpha_{max}}$ e $\bar{\theta} = \frac{\theta \bar{K}_1}{\bar{K}_2}$. Se no Passo 6, do Algoritmo 2, houver sucesso ($f_k^s \leq f_k + \theta \alpha_k g_k^T p_k$), então*

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) \leq -\frac{\bar{\theta}\alpha_k}{4}\|g_k\|^2 - \frac{\bar{\theta}\alpha_k}{4(k_g\alpha_{max} + 1)^2}\|\nabla f(x_k)\|^2. \quad (4.28)$$

Além disso, se o passo é confiável ($-\alpha_k g_k^T p_k \geq \delta_k^2 \Rightarrow \delta_{k+1}^2 = \gamma \delta_k^2$), então:

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) \leq -\frac{\bar{\theta}\alpha_k}{8}\|g_k\|^2 - \frac{\bar{\theta}\delta_k^2}{8\bar{K}_2} - \frac{\bar{\theta}\alpha_k}{4(k_g\alpha_{max} + 1)^2}\|\nabla f(x_k)\|^2. \quad (4.29)$$

Demonstração. Aplicando o Lema 4.2.3, temos que

$$\begin{aligned} -\frac{\bar{\theta}}{2}\alpha_k\|g_k\|^2 &= -\frac{\bar{\theta}}{4}\alpha_k\|g_k\|^2 - \frac{\bar{\theta}}{4}\alpha_k\|g_k\|^2 \\ &\leq -\frac{\bar{\theta}}{4}\alpha_k\|g_k\|^2 - \frac{\bar{\theta}\alpha_k}{4(k_g\alpha_{max} + 1)^2}\|\nabla f(x_k)\|^2. \end{aligned}$$

Em seguida, utilizando o Lema 4.2.5 e a desigualdade anterior, concluímos que

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}) - f(x_k) &\leq -\frac{\bar{\theta}}{2}\alpha_k\|g_k\|^2 \\ &\leq -\frac{\bar{\theta}}{4}\alpha_k\|g_k\|^2 - \frac{\bar{\theta}\alpha_k}{4(k_g\alpha_{max} + 1)^2}\|\nabla f(x_k)\|^2, \end{aligned}$$

em que, como já mencionado, $\bar{\theta} = \frac{\theta \bar{K}_1}{\bar{K}_2}$.

Posteriormente, se o passo no iterando k é confiável ($-\alpha_k g_k^T p_k \geq \delta_k^2$), da relação anterior encontramos

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}) - f(x_k) &\leq -\frac{\bar{\theta}}{8}\alpha_k\|g_k\|^2 - \frac{\bar{\theta}}{8}\alpha_k\|g_k\|^2 - \frac{\bar{\theta}\alpha_k}{4(k_g\alpha_{max} + 1)^2}\|\nabla f(x_k)\|^2 \\ &\leq -\frac{\bar{\theta}}{8}\alpha_k\|g_k\|^2 - \frac{\bar{\theta}\delta_k^2}{8\bar{K}_2} - \frac{\bar{\theta}\alpha_k}{4(k_g\alpha_{max} + 1)^2}\|\nabla f(x_k)\|^2, \end{aligned}$$

visto que

$$\begin{aligned}
 -\frac{\bar{\theta}}{8}\alpha_k\|g_k\|^2 &= \frac{\bar{\theta}}{8\bar{K}_2}\alpha_k\|g_k\|(-\bar{K}_2\|g_k\|) \\
 &\leq \frac{\bar{\theta}}{8\bar{K}_2}\alpha_k\|g_k\|(-\|p_k\|) \\
 &= \frac{\bar{\theta}}{8\bar{K}_2}\alpha_k(-\|g_k\|\|p_k\|) \\
 &\leq \frac{\bar{\theta}}{8\bar{K}_2}\alpha_k(g_k^T p_k) \\
 &\leq -\frac{\bar{\theta}}{8\bar{K}_2}\delta_k^2.
 \end{aligned}$$

Na penúltima desigualdade acima, utilizamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz ($\alpha_k\|g_k\|\|p_k\| \geq -\alpha_k g_k^T p_k \geq \delta_k^2$). \square

Definição dos Processos $\{\Phi_k, W_k, \mathcal{A}_k\}_{k \geq 0}$ para o Algoritmo 2

Definamos, para todo $k \geq 0$, que

$$\Phi_k = v(f(X_k) - f_{\min}) + (1 - v)\frac{1}{L^2}\mathcal{A}_k\|\nabla f(X_k)\|^2 + (1 - v)\bar{\theta}\Delta_k^2, \quad (4.30)$$

com $v \in (0, 1)$ e $\bar{\theta} = \frac{\bar{K}_1\theta}{\bar{K}_2}$.

Nossos principais objetivos são mostrar que $\{\Phi_k\}_{k \geq 0}$ é um supermartingale não negativo (Definição 1), que $\{\Phi_k, \mathcal{A}_k\}_{k \geq 0}$ satisfaz a Hipótese I e, em particular, que a esperança de Φ_k decresce a cada iteração k . Isso equivale a mostrar que o algoritmo converge para a solução f_{\min} . Um ponto de atenção, contudo, é que as imprecisões nas estimativas do gradiente de $f(x_k)$, denotado por g_k , e nas estimativas dos valores da função objetivo, avaliados em x_k e $x_k + s_k$ — representados por f_k^0 e f_k^s , respectivamente —, podem levar, em uma determinada iteração k , a um aumento no valor de f e, conseqüentemente, ao crescimento de Φ_{k+1} . O que será demonstrado é que esse crescimento é limitado por um valor proporcional a $\|\nabla f(x_k)\|^2$. Por outro lado, em uma iteração k em que o passo é bem-sucedido e as estimativas g_k , f_k^0 e f_k^s são precisas, a função objetivo decresce proporcionalmente a $\|\nabla f(x_k)\|^2$, conforme tratado no Lema 4.2.7, o que implicará também no decréscimo de Φ_{k+1} . Por fim, se na iteração k o passo não for bem-sucedido, Φ_{k+1} ainda assim decrescerá, pois \mathcal{A}_{k+1} e Δ_{k+1} diminuem. Logo, a função Φ_k , equação (4.30), é escolhida com o propósito de balancear o potencial de crescimento e decréscimo da função objetivo f , frente às variações causadas por passos mal-sucedidos.

Assim, enunciamos o Teorema 4.2.8, que demonstra que $\{\Phi_k\}_{k \geq 0}$ é supermartingale não negativo quando v , p_g e p_f satisfazem as relações apresentadas nesse teorema.

Teorema 4.2.8. *Sejam satisfeitas as Hipóteses E, H e G. Se os processos estocásticos gerados pelo Algoritmo 2 são $\{G_k, X_k, B_k^N, S_k, \mathcal{A}_k, P_k, \Delta_k, F_k^0, F_k^s\}_{k \geq 0}$, então existem $p_g p_f > \frac{1}{2}$ e uma*

constante $v \in (0, 1)$ tais que:

$$E[\Phi_{k+1} - \Phi_k | \mathcal{F}_{k-1}^{G,F}] \leq -\frac{p_g p_f (1-v)(1-\gamma^{-1})}{4} \left(\frac{\mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2}{L^2} + \bar{\theta} \Delta_k^2 \right). \quad (4.31)$$

Ademais, a constante v e as probabilidades p_f e p_g devem satisfazer:

$$\begin{aligned} \frac{v}{1-v} &\geq \max \left\{ \frac{32\gamma\alpha_{max}^2 \bar{K}_2^2}{\bar{\theta}}, \frac{16\gamma(k_g\alpha_{max} + 1)^2}{\bar{\theta}}, 16\bar{K}_2(\gamma - 1) \right\}, \\ \frac{p_g}{1-p_g} &\geq \frac{4\gamma}{(1-\gamma^{-1})}, \\ \frac{p_g p_f}{\sqrt{1-p_f}} &\geq \max \left\{ \frac{8L^2 v k_f + 16\gamma(1-v)}{(1-v)(1-\gamma^{-1})}, \frac{4v}{(1-v)(1-\gamma^{-1})} \right\}. \end{aligned}$$

Demonstração. Essa demonstração será dividida em três casos (eventos) por iterando k :

- 1º caso: boas estimativas de gradiente e da função f - evento $\{I_k \cap J_k\}$;
- 2º caso: estimativas ruins de gradiente e boas estimativas da função f - evento $\{I_k^c \cap J_k\}$;
- 3º caso: estimativas ruins da função f - evento $\{J_k^c\}$.

Quando o passo 6 do Algoritmo 2 for de sucesso, temos o evento

$$Succ_k := \{\omega : \text{na iteração } k \text{ o passo é sucesso, ou seja, } F_k^s(\omega) \leq F_k^0(\omega) + \theta \mathcal{A}_k(\omega) P_k(\omega)^T G_k(\omega)\},$$

que se divide em:

$$R_k := \{\omega : \text{na iteração } k \text{ o passo é confiável, ou seja } -A_k(\omega) P_k^T(\omega) G \geq \Delta_k^2(\omega)\};$$

$$U_k := \{\omega : \text{na iteração } k \text{ o passo é não confiável, ou seja } -A_k(\omega) P_k(\omega)^T G(\omega) < \Delta_k^2(\omega)\}.$$

E, caso contrário, teremos o conjunto $Succ_k^c$, representando que se trata de um passo de insucesso.

Portanto, cada caso será dividido em 3 subcasos, descritos nos eventos:

- Subcaso 1, que representa o evento $Succ_k \cap R_k$;
- Subcaso 2, que representa o evento $Succ_k \cap U_k$;
- Subcaso 3, que representa o evento $Succ_k^c$.

Antes de iniciarmos as análises dos casos e dos subcasos nos eventos definidos, observemos que a estratégia será realizar as análises nesses casos, que geram uma partição do espaço de probabilidade, visto que,

$$E(\Phi_{k+1} - \Phi_k | \mathcal{F}_{k-1}^{G,F}) = E[(\mathbb{1}_{I_k \cap J_k} + \mathbb{1}_{I_k^c \cap J_k} + \mathbb{1}_{J_k^c})(\Phi_{k+1} - \Phi_k) | \mathcal{F}_{k-1}^{G,F}].$$

E, dada a definição de $\{\Phi_k\}_{k \geq 0}$, na igualdade (4.30), temos:

$$\begin{aligned} \Phi_{k+1} - \Phi_k &= v \left(f(X_{k+1}) - f(X_k) \right) + (1-v) \frac{1}{L^2} \left(\mathcal{A}_{k+1} \|\nabla f(X_{k+1})\|^2 \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2 \right) + (1-v) \bar{\theta} (\Delta_{k+1}^2 - \Delta_k^2). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Sem perda de generalidade, vamos considerar $k_g \geq 2$ e $L \geq 1$. Assim, estamos prontos para iniciarmos as análises.

1º Caso: ($\mathbb{1}_{I_k \cap J_k} = 1$).

Mostraremos que, em média, $\Phi_{k+1} - \Phi_k$ será negativa, não importando qual subcaso ocorra, e que o menor decréscimo ocorrerá quando o passo não for aceito, ou seja, quando $\mathbb{1}_{Succ_k^c} = 1$.

1º Subcaso ($\mathbb{1}_{R_k} = 1$)

Da igualdade (4.32), para o termo, $\mathbb{1}_{I_k \cap J_k} \mathbb{1}_{R_k} v (f(X_{k+1}) - f(X_k))$, podemos aplicar o Lema 4.2.7, para obtermos que

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{I_k \cap J_k} \mathbb{1}_{R_k} v (f(X_{k+1}) - f(X_k)) &\leq \mathbb{1}_{I_k \cap J_k} \mathbb{1}_{R_k} v \left[-\frac{\bar{\theta} \mathcal{A}_k \|G_k\|^2}{8} - \frac{\bar{\theta} \Delta_k^2}{8\bar{K}_2} - \frac{\bar{\theta} \mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2}{4(k_g \alpha_{\max} + 1)^2} \right] \\ &= -\mathbb{1}_{I_k \cap J_k} \mathbb{1}_{R_k} v \left[\frac{\bar{\theta} \mathcal{A}_k \|G_k\|^2}{8} + \frac{\bar{\theta} \Delta_k^2}{8\bar{K}_2} + \frac{\bar{\theta} \mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2}{4(k_g \alpha_{\max} + 1)^2} \right] \end{aligned} \quad (4.33)$$

Por sua vez, para a segunda parcela do lado direito da igualdade (4.32), utilizamos o Lema (4.2.6) para encontrar que

$$\begin{aligned} &\mathbb{1}_{I_k \cap J_k} \mathbb{1}_{R_k} (1-v) \frac{1}{L^2} (\mathcal{A}_{k+1} \|\nabla f(X_{k+1})\|^2 - \mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2) \leq \\ &\quad \mathbb{1}_{I_k \cap J_k} \mathbb{1}_{R_k} 2\gamma (1-v) \mathcal{A}_k \left(\alpha_{\max}^2 \bar{K}_2^2 \|G_k\|^2 + \frac{1}{L^2} \|\nabla f(X_k)\|^2 \right). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Como $\mathbb{1}_{R_k} = 1$, então $\Delta_{k+1}^2 = \gamma \Delta_k^2$, implicando, para a última parcela do lado direito da igualdade (4.32), que

$$\mathbb{1}_{I_k \cap J_k} \mathbb{1}_{R_k} (1-v) \bar{\theta} (\Delta_{k+1}^2 - \Delta_k^2) = \mathbb{1}_{I_k \cap J_k} \mathbb{1}_{R_k} (1-v) \bar{\theta} (\gamma - 1) \Delta_k^2. \quad (4.35)$$

Definamos $v \in (0, 1)$ de tal forma que o lado direito da desigualdade (4.33) domine o lado direito das desigualdades (4.34) e (4.35). Então, devemos ter que

$$-\frac{v\bar{\theta}\mathcal{A}_k\|G_k\|^2}{8} + 2(1-v)\gamma\mathcal{A}_k\alpha_{\max}^2\bar{K}_2^2\|G_k\|^2 \leq -\frac{v\bar{\theta}}{16}\mathcal{A}_k\|G_k\|^2, \quad (4.36)$$

e, visto que, por hipótese, $L \geq 1$,

$$-\frac{v\bar{\theta}\mathcal{A}_k\|\nabla f(X_k)\|^2}{4k^2(k_g\alpha_{\max}+1)^2L^2} + \frac{2\gamma(1-v)\mathcal{A}_k\|\nabla f(X_k)\|^2}{L^2} \leq -\frac{v\bar{\theta}\mathcal{A}_k\|\nabla f(X_k)\|^2}{8L^2(k_g\alpha_{\max}+1)^2},$$

temos

$$-\frac{v\bar{\theta}\Delta_k^2}{8\bar{K}_2} + (1-v)(\gamma-1)\bar{\theta}\Delta_k^2 \leq -\frac{v\bar{\theta}\Delta_k^2}{16\bar{K}_2}.$$

Dessa forma, devemos definir v , tal que

$$\begin{aligned} \frac{v\bar{\theta}\mathcal{A}_k\|G_k\|^2}{16(1-v)} &\geq 2\gamma\mathcal{A}_k\alpha_{max}^2\bar{K}_2^2\|G_k\|^2 \implies \frac{v}{(1-v)} \geq \frac{32\gamma\alpha_{max}^2\bar{K}_2^2}{\bar{\theta}}, \\ \frac{v\bar{\theta}\mathcal{A}_k\|\nabla f(X_k)\|^2}{8L^2(k_g\alpha_{max}+1)^2} &\geq \frac{2\gamma(1-v)\mathcal{A}_k\|\nabla f(X_k)\|^2}{L^2} \implies \frac{v}{(1-v)} \geq \frac{16\gamma(k_g\alpha_{max}+1)^2}{\bar{\theta}}, \\ \frac{v\bar{\theta}\Delta_k^2}{16\bar{K}_2} &\geq (1-v)(\gamma-1)\bar{\theta}\Delta_k^2 \implies \frac{v}{1-v} \geq 16\bar{K}_2(\gamma-1). \end{aligned}$$

E, portanto, satisfazendo a

$$\frac{v}{1-v} \geq \max\left(\frac{32\gamma\alpha_{max}^2\bar{K}_2^2}{\bar{\theta}}, \frac{16\gamma(k_g\alpha_{max}+1)^2}{\bar{\theta}}, 16\bar{K}_2(\gamma-1)\right). \quad (4.37)$$

Assim, ao utilizarmos as desigualdades (4.33), (4.34) e (4.35), resulta que:

$$\mathbb{1}_{I_k \cap J_k} \mathbb{1}_{Succ_k} \mathbb{1}_{R_k} (\Phi_{k+1} - \Phi_k) \leq -\mathbb{1}_{I_k \cap J_k} \mathbb{1}_{Succ_k} \mathbb{1}_{R_k} \left(\frac{v\bar{\theta}\mathcal{A}_k\|\nabla f(X_k)\|^2}{8L^2(k_g\alpha_{max}+1)^2} + \frac{v\bar{\theta}\Delta_k^2}{16\bar{K}_2} \right) \quad (4.38)$$

2º Subcaso ($\mathbb{1}_{U_k=1}$)

Novamente, da igualdade (4.32), para o termo $\mathbb{1}_{I_k \cap J_k} \mathbb{1}_{U_k} v (f(X_{k+1}) - f(X_k))$, utilizamos o Lema 4.2.7, para concluir que

$$\mathbb{1}_{I_k \cap J_k} \mathbb{1}_{U_k} v (f(X_{k+1}) - f(X_k)) \leq \mathbb{1}_{I_k \cap J_k} \mathbb{1}_{U_k} v \left(-\frac{\bar{\theta}\mathcal{A}_k\|G_k\|^2}{4} - \frac{\bar{\theta}\mathcal{A}_k\|\nabla f(X_k)\|^2}{4(k_g\alpha_{max}+1)^2} \right) \quad (4.39)$$

e, do Lema 4.2.6, obtermos que

$$\begin{aligned} &\mathbb{1}_{I_k \cap J_k} \mathbb{1}_{U_k} (1-v) \frac{1}{L^2} (\mathcal{A}_{k+1}\|\nabla f(X_{k+1})\|^2 - \mathcal{A}_k\|\nabla f(X_k)\|^2) \\ &\leq \mathbb{1}_{I_k \cap J_k} \mathbb{1}_{U_k} 2\gamma(1-v)\mathcal{A}_k(\alpha_{max}^2\bar{K}_2^2\|G_k\|^2 + \frac{1}{L^2}\|\nabla f(X_k)\|^2). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Por fim, como $\mathbb{1}_{U_k} = 1$, então $\Delta_{k+1}^2 = \gamma^{-1}\Delta_k^2$, implicando que

$$\mathbb{1}_{I_k \cap J_k} \mathbb{1}_{U_k} (1-v)\bar{\theta}(\Delta_{k+1}^2 - \Delta_k^2) = -\mathbb{1}_{I_k \cap J_k} \mathbb{1}_{U_k} (1-v)\bar{\theta}\frac{(\gamma-1)}{\gamma}\Delta_k^2. \quad (4.41)$$

Portanto, se v atender à relação (4.37), da hipótese de $L \geq 1$ e das desigualdades (4.39), (4.40) e (4.41), obteremos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{I_k \cap J_k} \mathbb{1}_{Succ_k} \mathbb{1}_{U_k} (\Phi_{k+1} - \Phi_k) &\leq -\mathbb{1}_{I_k \cap J_k} \mathbb{1}_{Succ_k} \mathbb{1}_{U_k} \left(\frac{v\bar{\theta}\mathcal{A}_k\|\nabla f(X_k)\|^2}{8(k_g\alpha_{max}+1)^2L^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{\theta}(1-v)(\gamma-1)\Delta_k^2}{\gamma} \right). \end{aligned} \quad (4.42)$$

3º Subcaso ($\mathbb{1}_{Succ^c} = 1$)

Nesse caso, ocorre que $X_{k+1} = X_k$ e $\mathcal{A}_{k+1} = \gamma^{-1}\mathcal{A}_k$, o que nos possibilita afirmar que

$$\begin{aligned} & \mathbb{1}_{I_k \cap J_k} \mathbb{1}_{Succ_k^c} v (f(X_{k+1}) - f(X_k)) = 0 \\ & \mathbb{1}_{I_k \cap J_k} \mathbb{1}_{Succ_k^c} (1-v) \frac{1}{L^2} (\mathcal{A}_{k+1} \|f(X_{k+1})\|^2 - \mathcal{A}_k \|f(X_k)\|^2) = \\ & \mathbb{1}_{I_k \cap J_k} \mathbb{1}_{Succ_k^c} (1-v) \frac{1}{L^2} (\gamma^{-1} - 1) \mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2. \end{aligned}$$

Já para a última parcela do lado direito da igualdade (4.32), teremos válida a relação (4.41), sendo necessário apenas substituir $\mathbb{1}_{U_k}$ por $\mathbb{1}_{Succ^c}$, resultando em

$$\mathbb{1}_{I_k \cap J_k} \mathbb{1}_{Succ_k^c} (\Phi_{k+1} - \Phi_k) \leq -\mathbb{1}_{I_k \cap J_k} \mathbb{1}_{Succ_k^c} (1-v)(1-\gamma^{-1}) \left(\frac{\mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2}{L^2} + \bar{\theta} \Delta_k^2 \right). \quad (4.43)$$

Ao escolhermos $v \in (0, 1)$ atendendo à relação (4.37), temos estabelecido que o 3º subcaso dominará os demais, ou seja,

$$-\frac{v\bar{\theta}\mathcal{A}_k\|\nabla f(X_k)\|^2}{8L^2(k_g\alpha_{max}+1)^2} \leq -(1-v)(1-\gamma^{-1})\frac{\mathcal{A}_k\|\nabla f(X_k)\|^2}{L^2}$$

e

$$-\frac{v\bar{\theta}\mathcal{A}_k\Delta_k^2}{16\bar{K}_2} \leq -(1-v)(1-\gamma^{-1})\bar{\theta}\Delta_k^2.$$

Por fim, obtemos, das desigualdades (4.38), (4.42) e (4.43), que:

$$\mathbb{1}_{I_k \cap J_k} (\Phi_{k+1} - \Phi_k) \leq \mathbb{1}_{I_k \cap J_k} \left(-(1-v)(1-\gamma^{-1}) \left(\frac{\mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2}{L^2} + \bar{\theta} \Delta_k^2 \right) \right), \quad (4.44)$$

e, tomando a esperança condicional com relação a $F_{k-1}^{F,G}$, encontramos:

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{I_k \cap J_k} (\Phi_{k+1} - \Phi_k) \mid \mathcal{F}_{k-1}^{G,F}] \leq -p_g p_f (1-v)(1-\gamma^{-1}) \left(\frac{\mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2}{L^2} + \bar{\theta} \Delta_k^2 \right) \quad (4.45)$$

2º Caso: ($\mathbb{1}_{I_k^c \cap J_k} = 1$).

De forma análoga ao caso 1, realizaremos a análise da diferença de $\Phi_{k+1} - \Phi_k$ restrita ao conjunto $\{I_k^c \cap J_k\}$. Ou seja, o gradiente não é preciso, entretanto, a função f está bem estimada nos pontos x_k e $x_k + s_k$. Mostraremos que $\Phi_{k+1} - \Phi_k$ terá limite superior positivo em função de $\|\nabla f(X_k)\|^2$, nesse conjunto, devido à imprecisão do gradiente.

1º Subcaso ($\mathbb{1}_{R_k} = 1$)

Para esse caso, utilizamos o Lema 4.2.5, para afirmarmos que a primeira parcela do lado direito da igualdade (4.32) é limitada superiormente a

$$\mathbb{1}_{I_k^c \cap J_k} \mathbb{1}_{R_k} v (f(X_{k+1}) - f(X_k)) \leq \mathbb{1}_{I_k^c \cap J_k} \mathbb{1}_{R_k} \left(\frac{-\bar{\theta}\mathcal{A}_k\|G_k\|^2}{4} - \frac{\bar{\theta}\Delta_k^2}{4\bar{K}_2} \right), \quad (4.46)$$

e, para as demais parcelas da igualdade (4.32), são válidas as relações (4.34) e (4.35), substituindo $\mathbb{1}_{I_k \cap J_k}$ por $\mathbb{1}_{I_k^c \cap J_k}$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} & \mathbb{1}_{I_k^c \cap J_k} \mathbb{1}_{R_k} (1-v) \frac{1}{L^2} (\mathcal{A}_{k+1} \|\nabla f(X_{k+1})\|^2 - \mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2) \leq \\ & \mathbb{1}_{I_k^c \cap J_k} \mathbb{1}_{R_k} (1-v) 2\gamma\mathcal{A}_k (\alpha_{max}^2 \bar{K}_2^2 \|G_k\|^2 + \frac{1}{L^2} \|\nabla f(X_k)\|^2) \end{aligned} \quad (4.47)$$

e

$$(\mathbb{1}_{I_k^c \cap J_k}) \mathbb{1}_{R_k} (1-v) \bar{\theta} (\Delta_{k+1}^2 - \Delta_k^2) = \mathbb{1}_{I_k^c \cap J_k} \mathbb{1}_{R_k} (1-v) \bar{\theta} (\gamma - 1) \Delta_k^2.$$

Notemos que, se escolhermos v satisfazendo a relação (4.37), encontramos

$$\begin{aligned} -\frac{v\bar{\theta}\mathcal{A}_k\|G_k\|^2}{4} + 2\gamma(1-v)\mathcal{A}_k\alpha_{max}^2\bar{K}_2^2\|G_k\|^2 &\leq -\frac{v\bar{\theta}\mathcal{A}_k\|G_k\|^2}{8} + 2\gamma(1-v)\mathcal{A}_k\alpha_{max}^2\bar{K}_2^2\|G_k\|^2 \\ &\leq -\frac{v\bar{\theta}\mathcal{A}_k\|G_k\|^2}{16}. \end{aligned}$$

em que, na última desigualdade, utilizamos o subcaso 1 do caso 1, e

$$\begin{aligned} -\frac{v\bar{\theta}\Delta_k^2}{4\bar{K}_2} + (1-v)\bar{\theta}(\gamma-1)\Delta_k^2 &\leq -\frac{v\bar{\theta}\Delta_k^2}{8\bar{K}_2} + (1-v)\bar{\theta}(\gamma-1)\Delta_k^2 \\ &\leq -\frac{v\bar{\theta}\Delta_k^2}{16\bar{K}_2}, \end{aligned}$$

em que, novamente, na última desigualdade utilizamos o subcaso 1 do caso 1.

Portanto, para esse subcaso, concluímos que

$$\begin{aligned} &\mathbb{1}_{I_k^c \cap J_k} \mathbb{1}_{Succ_k} \mathbb{1}_{R_k} (\Phi_{k+1} - \Phi_k) \leq \\ &\mathbb{1}_{I_k^c \cap J_k} \mathbb{1}_{Succ_k} \mathbb{1}_{R_k} \left(-\frac{v\bar{\theta}\mathcal{A}_k\|G_k\|^2}{16} - \frac{v\bar{\theta}\Delta_k^2}{16\bar{K}_2} + \frac{2\gamma(1-v)\mathcal{A}_k\|\nabla f(X_k)\|^2}{L^2} \right). \end{aligned} \quad (4.48)$$

2º Subcaso ($\mathbb{1}_{U_k=1}$)

Na primeira parcela, do lado direito da igualdade (4.32), utilizaremos o Lema 4.2.5, que é satisfeito, resultando em

$$\mathbb{1}_{I_k^c \cap J_k} \mathbb{1}_{U_k} v (f(X_{k+1}) - f(X_k)) \leq -\mathbb{1}_{I_k^c \cap J_k} \mathbb{1}_{U_k} v \left(\frac{\bar{\theta}\mathcal{A}_k\|G_k\|^2}{2} \right).$$

E, para as demais parcelas da igualdade (4.32), temos, análogo ao respectivo subcaso do caso 1, que

$$\begin{aligned} &\mathbb{1}_{I_k^c \cap J_k} \mathbb{1}_{U_k} (1-v) \frac{1}{L^2} (\mathcal{A}_{k+1} \|\nabla f(X_{k+1})\|^2 - \mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2) \leq \\ &\mathbb{1}_{I_k^c \cap J_k} \mathbb{1}_{U_k} 2\gamma(1-v)\mathcal{A}_k(\alpha_{max}^2\bar{K}_2^2\|G_k\|^2 + \frac{1}{L^2}\|\nabla f(X_k)\|^2) \end{aligned}$$

e

$$\mathbb{1}_{I_k^c \cap J_k} \mathbb{1}_{U_k} (1-v) \bar{\theta} (\Delta_{k+1}^2 - \Delta_k^2) = -\mathbb{1}_{I_k^c \cap J_k} \mathbb{1}_{U_k} (1-v) \bar{\theta} (1-\gamma^{-1}) \Delta_k^2. \quad (4.49)$$

Logo, obtemos que, escolhendo v satisfazendo (4.37), resulta que

$$\begin{aligned} &\mathbb{1}_{I_k^c \cap J_k} \mathbb{1}_{Succ_k} \mathbb{1}_{U_k} (\Phi_{k+1} - \Phi_k) \leq \\ &\mathbb{1}_{I_k^c \cap J_k} \mathbb{1}_{Succ_k} \mathbb{1}_{U_k} \left(-\frac{v\bar{\theta}\mathcal{A}_k\|G_k\|^2}{16} - (1-v)(1-\gamma^{-1})\bar{\theta}\Delta_k^2 + \frac{2\gamma(1-v)\mathcal{A}_k\|\nabla f(X_k)\|^2}{L^2} \right). \end{aligned} \quad (4.50)$$

3º Subcaso ($\mathbb{1}_{Succ^c} = 1$)

De maneira idêntica ao subcaso III do caso 1, desigualdade (4.43), permutamos $\mathbb{1}_{I_k \cap J_k}$ por $\mathbb{1}_{I_k^c \cap J_k}$, para obtermos

$$\mathbb{1}_{I_k^c \cap J_k} \mathbb{1}_{Succ_k^c} (\Phi_{k+1} - \Phi_k) \leq -\mathbb{1}_{I_k^c \cap J_k} \mathbb{1}_{Succ_k^c} (1-v)(1-\gamma^{-1}) \left(\frac{\mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2}{L^2} + \bar{\theta} \Delta_k^2 \right). \quad (4.51)$$

Então, temos das relações (4.48), (4.50) e (4.51) que

$$\mathbb{1}_{I_k^c \cap J_k} (\Phi_{k+1} - \Phi_k) \leq \mathbb{1}_{I_k^c \cap J_k} \frac{2\gamma(1-v)}{L^2} \mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2. \quad (4.52)$$

Tomando a esperança condicional com relação a $\mathcal{F}_{k-1}^{G,F}$, encontramos que:

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{I_k^c \cap J_k} (\Phi_{k+1} - \Phi_k) \mid \mathcal{F}_{k-1}^{G,F}] \leq (1-p_g)(1-v) \frac{2\gamma \mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2}{L^2}. \quad (4.53)$$

3º Caso: ($\mathbb{1}_{J_k^c} = 1$).

Nesse caso, estamos tratando sobre os casos em que temos imprecisão na estimativa da função f nos pontos x_k ou $x_k + s_k$, na iteração k , ou imprecisões na estimativa do gradiente, g_k , de $f(x_k)$. Notemos que essas imprecisões podem ocasionar que $\mathbb{1}_{J_k^c} (\Phi_{k+1} - \Phi_k) > 0$. Logo, a fim de limitar esse crescimento de Φ_{k+1} , utilizaremos a condição **G.iii**, da Hipótese **G**, que limita a variância das estimativas da função f nos pontos x_k e $x_k + s_k$, e escolheremos $P(J_k^c)$ suficientemente pequeno, a fim de alcançarmos o nosso objetivo.

Antes de subdividirmos a análise em subcasos, notemos que no evento $\{J_k^c \cap Succ_k\}$, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{J_k^c} \mathbb{1}_{Succ_k} v (f(X_{k+1}) - f(X_k)) &= \mathbb{1}_{J_k^c} \mathbb{1}_{Succ_k} v (f(X_{k+1}) - f(X_k) + F_k^0 - F_k^0 + F_k^s - F_k^s) \\ &\leq \mathbb{1}_{J_k^c} \mathbb{1}_{Succ_k} v ((F_k^s - F_k^0) + |F_k^0 - f(X_k)| + |F_k^s - f(X_k + S_k)|). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Visto que estamos no conjunto $\{Succ_k\}$, temos que

$$F_k^s - F_k^0 \leq \theta \mathcal{A}_k G_k^T P_k \leq -\frac{7\theta \bar{K}_1 \mathcal{A}_k \|G_k\|^2}{8 \bar{K}_2} = -\frac{7\bar{\theta} \mathcal{A}_k \|G_k\|^2}{8}, \quad (4.55)$$

uma vez que a Hipótese **H** é satisfeita para todo iterando k . Então, das desigualdades (4.54) e (4.55), concluímos que:

$$\mathbb{1}_{J_k^c} \mathbb{1}_{Succ_k} v (f(X_{k+s}) - f(X_k)) \leq \mathbb{1}_{J_k^c} \mathbb{1}_{Succ_k} v \left(\theta \mathcal{A}_k G_k^T P_k + |F_k^s - f(X_k + S_k)| + |F_k^0 - f(X_k)| \right). \quad (4.56)$$

Em seguida, dividiremos o caso 3 nos respectivos subcasos.

1º Subcaso ($\mathbb{1}_{R_k} = 1$)

Visto que $-\Delta_k^2 \geq \mathcal{A}_k G_k^T P_k$, da desigualdade (4.56), temos

$$\begin{aligned} &\mathbb{1}_{J_k^c} \mathbb{1}_{R_k} v (f(X_{k+1}) - f(X_k)) \\ &\leq \mathbb{1}_{J_k^c} \mathbb{1}_{R_k} v \left(\frac{\theta \mathcal{A}_k G_k^T P_k}{2} - \frac{\theta \Delta_k^2}{2} + |F_k^s - f(X_k + S_k)| + |F_k^0 - f(X_k)| \right) \\ &\leq \mathbb{1}_{J_k^c} \mathbb{1}_{R_k} v \left(\frac{-7\theta \bar{K}_1 \mathcal{A}_k \|G_k\|^2}{16 \bar{K}_2} - \frac{\bar{\theta} \Delta_k^2}{2} + |F_k^s - f(X_k + S_k)| + |F_k^0 - f(X_k)| \right) \end{aligned} \quad (4.57)$$

Para a segunda parcela do lado direito da igualdade (4.32), obtemos, ao utilizarmos o Lema 4.2.6,

$$\begin{aligned} & \mathbb{1}_{J_k^c} \mathbb{1}_{R_k} \frac{(1-v)}{L^2} (\mathcal{A}_{k+1} \|\nabla f(X_{k+1})\|^2 - \mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2) \leq \\ & \mathbb{1}_{J_k^c} \mathbb{1}_{R_k} 2\gamma(1-v) \mathcal{A}_k (\alpha_{max}^2 \bar{K}_2^2 \|G_k\|^2 + \frac{1}{L^2} \|\nabla f(X_k)\|^2), \end{aligned} \quad (4.58)$$

e, para a última parcela da igualdade (4.32), de forma análoga aos subcasos análogos dos casos anteriores, encontramos

$$\mathbb{1}_{J_k^c} \mathbb{1}_{R_k} (1-v) \bar{\theta} (\Delta_{k+1}^2 - \Delta_k^2) = \mathbb{1}_{J_k^c} \mathbb{1}_{R_k} (1-v) \bar{\theta} (\gamma - 1) \Delta_k^2. \quad (4.59)$$

Assim sendo, escolhemos v tal que

$$-\frac{v7\bar{\theta}\bar{K}_1\mathcal{A}_k\|G_k\|^2}{16\bar{K}_2} + 2\gamma(1-v)\alpha_{max}^2\mathcal{A}_k\bar{K}_2^2\|G_k\|^2 \leq 0, \quad (4.60)$$

que é satisfeita quando a relação (4.37) é atendida, pois

$$\frac{v}{1-v} \geq \frac{32\gamma\alpha_{max}^2\bar{K}_2^2}{\bar{\theta}} \geq \frac{32\gamma\alpha_{max}^2\bar{K}_2^3}{7\bar{\theta}\bar{K}_1} = \frac{32\gamma\alpha_{max}^2\bar{K}_2^2}{7\bar{\theta}}. \quad (4.61)$$

Posteriormente, observemos dos termos que contêm Δ_k^2 nas relações (4.57) e (4.59), que

$$-\frac{v\bar{\theta}\Delta_k^2}{2} + (1-v)\bar{\theta}(\gamma-1)\Delta_k^2 \leq -\frac{v\bar{\theta}\Delta_k^2}{8} + (1-v)(\gamma-1)\bar{\theta}\Delta_k^2 \leq -\frac{v\bar{\theta}\Delta_k^2}{16\bar{K}_2} \leq 0, \quad (4.62)$$

em que a 2ª desigualdade advém do subcaso 1, caso 1, quando v satisfaz a relação (4.37). Então, ao combinarmos as desigualdades acima, temos que:

$$\begin{aligned} & \mathbb{1}_{J_k^c} \mathbb{1}_{Succ_k} \mathbb{1}_{R_k} (\Phi_{k+1} - \Phi_k) \leq \\ & \mathbb{1}_{J_k^c} \mathbb{1}_{Succ_k} \mathbb{1}_{R_k} \left(v|F_k^s - f(X_k + S_k)| + v|F_k^0 - f(X_k)| + \frac{2\gamma(1-v)\mathcal{A}_k\|\nabla f(X_k)\|^2}{L^2} \right) \end{aligned} \quad (4.63)$$

2º Subcaso ($\mathbb{1}_{U_k=1}$) e 3º Subcaso ($\mathbb{1}_{Succ^c} = 1$)

Para o 2º subcaso, utilizando as desigualdades (4.55) e (4.56), concluímos que:

$$\begin{aligned} & \mathbb{1}_{J_k^c} \mathbb{1}_{U_k} v (f(X_{k+1}) - f(X_k)) \leq \\ & \mathbb{1}_{J_k^c} \mathbb{1}_{U_k} v \left(-\frac{7}{8}\bar{\theta}\mathcal{A}_k\|G_k\|^2 + |F_k^s - f(X_k + S_k)| + |F_k^0 - f(X_k)| \right). \end{aligned} \quad (4.64)$$

E depois, para as demais parcelas do lado direito da igualdade (4.32), as desigualdades (4.41) e (4.58) continuam válidas, sendo necessário apenas substituir $\mathbb{1}_{I_k \cap J_k}$ por $\mathbb{1}_{J_k^c}$ e $\mathbb{1}_{R_k}$ por $\mathbb{1}_{U_k}$, respectivamente. Já para o 3º subcaso ($\mathbb{1}_{Succ^c} = 1$), é válida a desigualdade (4.43), sendo necessário substituir $\mathbb{1}_{I_k \cap J_k}$ por $\mathbb{1}_{J_k^c}$.

Assim, ao escolhermos v satisfazendo a relação (4.37), temos

$$\mathbb{1}_{J_k^c} (\Phi_{k+1} - \Phi_k) \leq \mathbb{1}_{J_k^c} \left(v|F_k^s - f(X_k + S_k)| + v|F_k^0 - f(X_k)| + \frac{2\gamma(1-v)\mathcal{A}_k\|\nabla f(X_k)\|^2}{L^2} \right), \quad (4.65)$$

em que, tomando a esperança condicional em relação a $\mathcal{F}_{k-1}^{G,F}$ e aplicando o Lema 4.2.1 para as primeiras duas parcelas do lado direito na desigualdade (4.65), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{J_k^c}(\Phi_{k+1} - \Phi_k) \mid \mathcal{F}_{k-1}^{G,F}] &\leq 2v(1 - p_f)^{\frac{1}{2}} \max\{k_f \mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2, \bar{\theta} \Delta_k^2\} \\ &\quad + (1 - p_f)(1 - v) \frac{2\gamma \mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2}{L^2}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Portanto, das relações (4.45), (4.53) e (4.66), resulta que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Phi_{k+1} - \Phi_k \mid \mathcal{F}_{k-1}^{G,F}] &= \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{1}_{I_k \cap J_k} + \mathbb{1}_{I_k^c \cap J_k} + \mathbb{1}_{J_k^c}\right) (\Phi_{k+1} - \Phi_k) \mid \mathcal{F}_{k-1}^{G,F}\right] \\ &\leq -p_g p_f (1 - v)(1 - \gamma^{-1}) \left(\frac{\mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2}{L^2} + \bar{\theta} \Delta_k^2\right) \\ &\quad + p_f (1 - p_g)(1 - v) \frac{2\gamma \mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2}{L^2} \\ &\quad + 2v(1 - p_f)^{\frac{1}{2}} (k_f \mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2 + \bar{\theta} \Delta_k^2) \\ &\quad + (1 - p_f)^{\frac{1}{2}} \frac{4\gamma \mathcal{A}_k (1 - v) \|\nabla f(X_k)\|^2}{L^2}, \end{aligned} \quad (4.67)$$

em que, utilizamos as desigualdades $(1 - p_f) \leq (1 - p_f)^{\frac{1}{2}}$ e $(1 - p_g) = p_f(1 - p_g) + (1 - p_f)(1 - p_g) \leq p_f(1 - p_g) + (1 - p_f)^{\frac{1}{2}}$. Assim, devemos escolher $p_g \in [0, 1]$ tal que

$$\begin{aligned} -p_g p_f (1 - v)(1 - \gamma^{-1}) \frac{\mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2}{L^2} + p_f (1 - p_g)(1 - v) \frac{2\gamma \mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2}{L^2} \\ \leq -\frac{p_g p_f (1 - v) \mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2}{2L^2}, \end{aligned}$$

ou seja, que

$$\frac{p_g}{1 - p_g} \geq \frac{4\gamma}{(1 - \gamma^{-1})}. \quad (4.68)$$

À vista disso, ao escolhermos p_g satisfazendo (4.68), temos uma simplificação na desigualdade (4.67), que passa a ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Phi_{k+1} - \Phi_k \mid \mathcal{F}_{k-1}^{G,F}] &\leq -\frac{p_g p_f}{2} (1 - v)(1 - \gamma^{-1}) \left(\frac{\mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2}{L^2} + 2\bar{\theta} \Delta_k^2\right) \\ &\quad + 2v(1 - p_f)^{\frac{1}{2}} (k_f \mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2 + \bar{\theta} \Delta_k^2) + (1 - p_f)^{\frac{1}{2}} \frac{4\gamma(1 - v) \mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2}{L^2}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

De forma semelhante ao utilizado para definir p_g , iremos definir $p_f \in [0, 1]$ tal que $\frac{p_g p_f}{\sqrt{1 - p_f}}$ atenda

$$\begin{aligned} -\frac{p_g p_f}{2} (1 - v)(1 - \gamma^{-1}) \left(\frac{\mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2}{L^2}\right) + (1 - p_f)^{\frac{1}{2}} \left(2vk_f + \frac{4\gamma(1 - v)}{L^2}\right) \mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2 \\ \leq \frac{-p_g p_f (1 - v)(1 - \gamma^{-1}) \mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2}{4L^2}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

e

$$-\frac{p_g p_f}{2} (1 - v)(1 - \gamma^{-1}) 2\bar{\theta} \Delta_k^2 + 2v(1 - p_f)^{\frac{1}{2}} \bar{\theta} \Delta_k^2 \leq -\frac{p_g p_f}{2} (1 - v)(1 - \gamma^{-1}) \bar{\theta} \Delta_k^2, \quad (4.71)$$

que são satisfeitas ao escolhermos p_f tal que

$$\frac{p_g p_f}{\sqrt{1-p_f}} \geq \max \left\{ \frac{8L^2 v k_f + 16\gamma(1-v)}{(1-v)(1-\gamma^{-1})}, \frac{4v}{(1-v)(1-\gamma^{-1})} \right\}. \quad (4.72)$$

Assim, ao atendermos as restrições sobre v , p_g e p_f , satisfazendo as relações (4.37), (4.68) e (4.72), respectivamente, teremos que

$$\mathbb{E}(\Phi_{k+1} - \Phi_k \mid \mathcal{F}_{k-1}^{G,F}) \leq -\frac{p_g p_f (1-v)(1-\gamma^{-1})}{4} \left(\frac{\mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2}{L^2} + \bar{\theta} \Delta_k^2 \right). \quad (4.73)$$

□

O Lema 4.2.9 mostra como construir uma sequência de variáveis aleatórias $\{W_k\}_{k \geq 0}$, tal que a Condição I.ii da Hipótese I seja satisfeita.

Lema 4.2.9. *Sejam p_g e p_f tais que $p_g p_f > \frac{1}{2}$, então a Condição I.ii da Hipótese I é satisfeita para $W_k = 2\left(\mathbb{1}_{I_{k-1} \cap J_{k-1}} - \frac{1}{2}\right)$ com $k \in \mathbb{N}$ e $W_0 = 1$, $\lambda = \log(\gamma)$, $p = p_g p_f$ e*

$$\bar{\mathcal{A}} = \frac{\beta(1-\theta)}{k_g + \frac{L\bar{K}_2}{2} + \frac{2\epsilon_f}{K_1}}. \quad (4.74)$$

Demonstração. Relembremos a Condição I.ii da Hipótese I a seguir, reescrita de tal forma a ter todas as informações necessárias para essa demonstração, não tendo o leitor a necessidade de retornar à Seção 4.1. Ao reescrever a Condição I.ii da Hipótese I adotamos \bar{j} em vez de j_ϵ .

Existe uma constante $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_0 e^{\lambda \bar{j}}$, para algum $\bar{j} \in \mathbb{Z}_- \cup \{0\}$ tal que, no evento $\{T_\epsilon > k\}$, temos

$$\mathcal{A}_{k+1} \geq \min\{\mathcal{A}_k e^{\lambda W_{k+1}}, \bar{\mathcal{A}}\}, \quad (4.75)$$

em que a sequência $\{W_k\}_{k \geq 0}$ satisfaz, para todo $k \geq 0$,

$$\mathbb{P}(W_{k+1} = 1 \mid \mathcal{F}_k) = p \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(W_{k+1} = -1 \mid \mathcal{F}_k) = 1 - p, \quad (4.76)$$

com $\mathcal{F}_k = \sigma(\{\Phi_i, \mathcal{A}_i, W_i\}_{i=0}^k)$ e $p > \frac{1}{2}$.

Logo, podemos, sem perda de generalidade, reduzir $\bar{\mathcal{A}}$ de tal forma que $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_0 e^{\lambda \bar{j}}$, para algum $\bar{j} \in \mathbb{Z}_- \cup \{0\}$, ou alterando o comprimento de passo inicial, \mathcal{A}_0 , que é definido inicialmente no Algoritmo 2.

Posteriormente, utilizando a definição da $\{W_k\}_{k \geq 0}$, temos, para todo $k \geq 0$, que

$$\mathcal{A}_k e^{\lambda W_{k+1}} \mathbb{1}_{\{T_\epsilon > k\}} = (\min\{\alpha_{max}, \gamma \mathcal{A}_k\} \mathbb{1}_{I_k \cap J_k} + \gamma^{-1} \mathcal{A}_k (1 - \mathbb{1}_{I_k \cap J_k})) \mathbb{1}_{\{T_\epsilon > k\}},$$

implicando que a desigualdade (4.75) é equivalente, em $\{T_\epsilon > k\}$, a:

$$\mathcal{A}_{k+1} \geq \min\{\bar{\mathcal{A}}, \min\{\alpha_{max}, \gamma \mathcal{A}_k\} \mathbb{1}_{I_k \cap J_k} + \gamma^{-1} \mathcal{A}_k (1 - \mathbb{1}_{I_k \cap J_k})\}. \quad (4.77)$$

Dessa forma, vamos mostrar que a desigualdade (4.77) é válida nos dois eventos complementares a seguir.

- $\{\mathcal{A}_k > \bar{\mathcal{A}}\}$

Temos que $\alpha_k \geq \gamma \bar{\mathcal{A}}$, implicando que $\alpha_{k+1} \geq \bar{\mathcal{A}}$, pois notemos que o algoritmo inicia em $\alpha_0 = \mathcal{A}_0$ e $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_0 e^{\lambda \bar{j}} = \mathcal{A}_0 \gamma^{\bar{j}}$, com $\bar{j} \in \mathbb{Z}_- \cup \{0\}$, ou seja, α_k sempre será $\alpha_0 \lambda^j$ para algum $j \in \mathbb{Z}$.

- $\{\mathcal{A}_k \leq \bar{\mathcal{A}}\}$

Se $\mathbb{1}_{I_k \cap J_k} = 1$, então, pelo Lema 4.2.4, temos que o passo é aceito, implicando que $\alpha_{k+1} = \min(\alpha_{max}, \gamma \alpha_k) \geq \min(\bar{\mathcal{A}}, \min(\alpha_{max}, \gamma \alpha_k))$.

Por outro lado, se $\mathbb{1}_{I_k \cap J_k} = 0$, temos que $\alpha_{k+1} = \frac{\alpha_k}{\gamma}$.

Assim, teremos:

$$\mathcal{A}_{k+1} \geq \min\{\bar{\mathcal{A}}, \min(\alpha_{max}, \gamma \mathcal{A}_k)\} \mathbb{1}_{I_k \cap J_k} + \gamma^{-1} \mathcal{A}_k (1 - \mathbb{1}_{I_k \cap J_k}).$$

Por fim, notemos, como já mencionado, que $P(I_k \cap J_k \mid \mathcal{F}_{k-1}^{G,F}) \geq p_g p_f > \frac{1}{2}$. \square

Uma observação importante é que a relação (4.75) é satisfeita independentemente de estar restrita ao evento $\{T_\epsilon > k\}$, sendo essa observação importante para a demonstração da análise de convergência quase certa, realizada no Teorema 4.2.11. Contudo, antes de enunciarmos e provarmos esse teorema, apresentamos o Lema 4.2.10, que diz que a probabilidade de $\mathcal{A}_k \geq \bar{\mathcal{A}}$ infinitas vezes (i.v.) é quase certa, ou seja, $P(\{\mathcal{A}_k \geq \bar{\mathcal{A}} \text{ i.v.}\}) = 1$.

Lema 4.2.10. *Sejam satisfeitas as hipóteses e condições do Teorema 4.2.8 e Lema 4.2.9. Então, teremos que $P(\{\mathcal{A}_k \geq \bar{\mathcal{A}} \text{ i.v.}\}) = 1$.*

Demonstração. Defina, como na Seção 4.1, $\{Z_k\}_{k \geq 0}$ como:

$$Z_k = \begin{cases} \bar{j}, & \text{se } k = 0 \\ \min(Z_{k-1} + W_k, \bar{j}), & \text{se } k \in \mathbb{N} \end{cases},$$

sendo \bar{j} , $\{W_k\}_{k \geq 0}$, $\bar{\mathcal{A}}$ e λ definidos no Lema 4.2.9. Assim, temos da desigualdade (4.77) que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{k+1} &\geq \min\{\bar{\mathcal{A}}, \min(\alpha_{max}, \gamma \mathcal{A}_k)\} \mathbb{1}_{I_k \cap J_k} + \gamma^{-1} \mathcal{A}_k (1 - \mathbb{1}_{I_k \cap J_k}) \\ &\geq \mathcal{A}_0 \gamma^{Z_{k+1}}. \end{aligned} \tag{4.78}$$

Como $P(W_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) > \frac{1}{2}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então, como visto na Seção 4.1, \bar{j} é um estado recorrente (positivo), implicando que

$$P(Z_k = \bar{j} \text{ i.v.}) = 1.$$

Tendo que $\mathcal{A}_0 \gamma^{\bar{j}} = \mathcal{A}_0 e^{\lambda \bar{j}} = \bar{\mathcal{A}}$ e sendo satisfeita a relação (4.78), então concluímos que

$$P(\mathcal{A}_{k+1} \geq \bar{\mathcal{A}} \text{ i.v.}) = 1.$$

Por fim, vamos demonstrar que a relação (4.78) é válida, utilizando a prova por indução em k .

Se $k = 0$, temos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_1 &\geq \min\{\bar{\mathcal{A}}, \min(\alpha_{max}, \gamma \mathcal{A}_0) \mathbb{1}_{I_0 \cap J_0} + \gamma^{-1} \mathcal{A}_0 (1 - \mathbb{1}_{I_0 \cap J_0})\} \\
 &= \min\{\mathcal{A}_0 \gamma^{\bar{j}}, \gamma \mathcal{A}_0 \mathbb{1}_{I_0 \cap J_0} + \gamma^{-1} \mathcal{A}_0 (1 - \mathbb{1}_{I_0 \cap J_0})\} \\
 &= \min\{\mathcal{A}_0 \gamma^{\bar{j}}, \mathcal{A}_0 \gamma^{W_1}\} \\
 &= \mathcal{A}_0 \gamma^{\min(\bar{j}, W_1)} \\
 &\geq \mathcal{A}_0 \gamma^{\min(\bar{j}, \bar{j} + W_1)} \\
 &= \mathcal{A}_0 \gamma^{Z_1}.
 \end{aligned}$$

A última desigualdade é válida, para $\bar{j} \in \mathbb{Z}_- \cup \{0\}$ e $W_1 \in \{-1, 1\}$.

Para $k > 0$ e $\mathcal{A}_k = \alpha_{max}$, então:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{k+1} &\geq \min\{\mathcal{A}_0 \gamma^{\bar{j}}, \alpha_{max} \mathbb{1}_{I_k \cap J_k} + \gamma^{-1} \alpha_{max} (1 - \mathbb{1}_{I_k \cap J_k})\} \\
 &\geq \min\{\mathcal{A}_0 \gamma^{\bar{j}}, \alpha_{max} \gamma^{-1}\} \\
 &\geq \mathcal{A}_0 \gamma^{\bar{j}} \\
 &\geq \mathcal{A}_0 \gamma^{Z_{k+1}}.
 \end{aligned}$$

Visto que $\alpha_{max} = \mathcal{A}_0 \gamma^{j_{max}}$, em que $j_{max} > \bar{j}$.

Se $k > 0$ e $\mathcal{A}_k < \alpha_{max}$, então:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{k+1} &\geq \min\{\bar{\mathcal{A}}, \gamma \mathcal{A}_k \mathbb{1}_{I_k \cap J_k} + \gamma^{-1} \mathcal{A}_k (1 - \mathbb{1}_{I_k \cap J_k})\} \\
 &\geq \min\{\bar{\mathcal{A}}, \gamma \mathcal{A}_0 \gamma^{Z_k} \mathbb{1}_{I_k \cap J_k} + \gamma^{-1} \mathcal{A}_0 \gamma^{Z_k} (1 - \mathbb{1}_{I_k \cap J_k})\} \\
 &\geq \min\{\mathcal{A}_0 \gamma^{\bar{j}}, \mathcal{A}_0 \gamma^{Z_k + W_{k+1}}\} \\
 &= \mathcal{A}_0 \gamma^{\min(\bar{j}, Z_k + W_{k+1})} \\
 &= \mathcal{A}_0 \gamma^{Z_{k+1}}.
 \end{aligned}$$

Na segunda desigualdade, utilizamos a hipótese de indução. □

Por fim, no Teorema 4.2.11, enunciamos e demonstramos a convergência quase certa do Algoritmo 2, o método do gradiente conjugado não linear estocástico.

Teorema 4.2.11. *Sejam satisfeitas as hipóteses e condições do Teorema 4.2.8 e Lema 4.2.9. Então, teremos que:*

$$\nabla f(X_k) \longrightarrow 0 \quad q.c. \quad \text{quando } k \rightarrow \infty$$

e

$$X_k \longrightarrow x^* \quad q.c. \quad \text{quando } k \rightarrow \infty.$$

Demonstração. Da relação (4.31), temos:

$$\mathbb{E}(\Phi_{k+1} - \Phi_k | F_{k-1}^{G,F}) \leq -\frac{\bar{K} \mathcal{A}_k}{L^2} \|\nabla f(X_k)\|^2 - \bar{K} \bar{\theta} \Delta_k^2, \quad (4.79)$$

em que definimos

$$\bar{K} = \frac{p_g p_f (1-v)(1-\gamma^{-1})}{4}. \quad (4.80)$$

Logo, podemos aplicar o Teorema de Robbins e Siegmund, Teorema 2.1.1, para concluir que $\lim \Phi_k$ existe e é finito q.c., $\sum_{k \geq 0} \Delta_k^2 < \infty$ q.c. e $\sum_{k \geq 0} \mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2 < \infty$ q.c. Em seguida, da observação realizada ao final do Lema 4.2.9, podemos considerar que, para todo $k \geq 0$, é válida a desigualdade (4.77), reescrita a seguir:

$$\mathcal{A}_{k+1} \geq \min\{\bar{\mathcal{A}}, \min\{\alpha_{max}, \gamma \mathcal{A}_k\} \mathbf{1}_{I_k \cap J_k} + \gamma^{-1} \mathcal{A}_k (1 - \mathbf{1}_{I_k \cap J_k})\}, \quad (4.81)$$

com $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_0 e^{\lambda \bar{j}}$, $\bar{j} \in \mathbb{Z}_- \cup \{0\}$, $P(\mathbf{1}_{I_k \cap J_k} = 1) \geq p_g p_f > \frac{1}{2}$ e tendo que $\alpha_{max} > \bar{\mathcal{A}}$. Então, do Lema 4.2.10, teremos que $P(\{\mathcal{A}_k \geq \bar{\mathcal{A}} \text{ i.v.}\}) = 1$.

Portanto, definamos o conjunto

$$B = \left\{ \lim \Phi_k \text{ existe e é finito, } \sum_{k \geq 0} \Delta_k^2 < \infty, \sum_{k \geq 0} \mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2 < \infty, \{\mathcal{A}_k \geq \bar{\mathcal{A}} \text{ i.o.}\} \right\},$$

e, teremos que:

$$C1) P(B) = 1;$$

$$C2) \lim_k \|\nabla f(X_k)\|^2 = 0 \text{ q.c.}$$

Para qualquer $\omega \in B$, temos que $\alpha_k = \mathcal{A}_k(\omega) \geq \bar{\mathcal{A}} > 0$ infinitas vezes. Defina $\hat{K} = \{k : \alpha_k \geq \bar{\mathcal{A}}\}$ e, podemos afirmar que $\sum_{k \geq 0} \alpha_k = \infty$, pois $\sum_{k \geq 0} \alpha_k \geq \sum_{k \in \hat{K}} \alpha_k = \infty$. Dessa forma, como $\omega \in \{\sum_{k \geq 0} \mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k \omega)\|^2 < \infty\}$, existe pelo menos uma subsequência de $\{\|\nabla f(X_k(\omega))\|\}_{k \geq 0}$ que converge a zero quando $k \rightarrow \infty$, ou seja, $\|\nabla f(X_{k'}(\omega))\| \rightarrow 0$ quando $k' \rightarrow \infty$. Também podemos afirmar que $\delta_k^2 \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, pois $\omega \in \{\sum \Delta_k^2 < \infty\}$.

Conseqüentemente, da definição de Φ_k ,

$$0 \leq \phi_k = \Phi_k(\omega) = v(f(x_k) - f_{min}) + \frac{(1-v)}{L^2} \alpha_k \|\nabla f(x_k)\|^2 + (1-v) \bar{\theta} \delta_k^2,$$

para algum $v \in (0, 1)$. Passando a subsequência k' , encontramos

$$0 \leq \phi_{k'} = \Phi_{k'}(\omega) = v(f(x_{k'}) - f_{min}) + \frac{(1-v)}{L^2} \alpha_{k'} \|\nabla f(x_{k'})\|^2 + (1-v) \bar{\theta} \delta_{k'}^2$$

de onde, ao tomarmos o limite superior quando $k' \rightarrow \infty$, obtemos

$$\limsup_{k'} \phi_{k'} = v(\limsup_{k'} f(x_{k'}) - f_{min}),$$

pois $\lim_{k' \rightarrow \infty} \|\nabla f(x_{k'})\|^2 = 0$, $\alpha_k \leq \alpha_{max}$ para todo $k \geq 0$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$.

Como, pela Hipótese E, existe um único $x^* \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$f_{min} = f(x^*) \quad \text{e} \quad \|\nabla f(x^*)\|^2 = 0 \quad (\|\nabla f(x_k)\|^2 > 0 \quad \forall x \neq x^*),$$

então, por $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, temos $x_{k'} \rightarrow x^*$, quando $k' \rightarrow \infty$, e

$$\limsup_{k'} f(x_{k'}) = \lim_{k' \rightarrow \infty} f(x_{k'}) = f_{min} \implies \limsup_{k'} \phi_{k'} = 0 \implies \lim_{k'} \phi_{k'} = 0.$$

Contudo, como $\phi_{k'} \rightarrow 0$ quando $k' \rightarrow \infty$, podemos afirmar que $\phi_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, pois $\omega \in \{\lim \Phi_k \text{ existe e é finito.}\}$ e, conseqüentemente,

$$f(x_k) \rightarrow f_{min} \quad \text{e} \quad \nabla f(x_k) \rightarrow 0 \quad \text{quando } k \rightarrow \infty.$$

Pela continuidade de f e ∇f , da unicidade de x^* , resulta que $x_k \rightarrow x^*$, quando $k \rightarrow \infty$. Sendo o resultado válido para qualquer $\omega \in B$, concluímos que:

$$X_k \rightarrow x^* \quad \text{q.c., quando } k \rightarrow \infty.$$

□

4.3 Análise da Taxa de Convergência do Método do Gradiente Conjugado Não Linear Estocástico

Nessa seção, iremos analisar a taxa de convergência do Algoritmo 2 para a solução do problema de otimização estocástico. Os resultados obtidos nessa parte do texto utilizam os conceitos, lemas e teoremas desenvolvidos nas duas seções anteriores. Assim, definiremos o tempo de parada τ_ϵ , para qualquer $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, como

$$\tau_\epsilon = \inf\{k \geq 0 : \|\nabla f(X_k)\| < \epsilon\}. \quad (4.82)$$

E, para o Teorema 4.3.1, adotaremos as seguintes definições:

$$\hat{\theta} = \bar{K}\epsilon^2; \quad (4.83)$$

$$\bar{K} = \frac{p_g p_f (1 - \nu)(1 - \gamma^{-1})}{4L^2}; \quad (4.84)$$

$$h(\bar{\mathcal{A}}) = \bar{\mathcal{A}}; \quad (4.85)$$

$$\bar{\mathcal{A}} = \frac{\beta(1 - \theta)}{k_g + \frac{L\bar{K}_2}{2} + \frac{2\epsilon_f}{\bar{K}_1}}; \quad (4.86)$$

$$\beta = \frac{7}{8}; \quad (4.87)$$

em que a função não decrescente h é definida como $h(\bar{\mathcal{A}}) = \bar{\mathcal{A}}$.

Teorema 4.3.1. *Assumindo as hipóteses do Teorema 4.2.11, a expressão (4.88) a seguir será válida:*

$$E[\tau_\epsilon] \leq \frac{p}{2p - 1} \frac{E[\Phi_0]}{\hat{\theta} h(\bar{\mathcal{A}})} + 1, \quad (4.88)$$

sendo

$$\begin{aligned} E[\Phi_0] &= \Phi_0 \\ &= \nu(f(x_0) - f_{\min}) + \frac{(1-\nu)}{L^2} \alpha_0 \|\nabla f(x_0)\|^2 + (1-\nu)\bar{\theta}\delta_0. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Demonstração. Do Teorema 4.2.8, sabemos que:

$$\begin{aligned} E[\Phi_{k+1} - \Phi_k \mid \mathcal{F}_{k-1}^{G,F}] &\leq -\bar{K}\mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2 - \bar{K}\bar{\theta}\Delta_k; \\ &\leq -\bar{K}\mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2, \end{aligned} \quad (4.90)$$

em que \bar{K} está definido em (4.84). Portanto, multiplicando ambos os lados da desigualdade (4.90) por $\mathbb{1}_{\{\tau_\epsilon > k\}}$, encontramos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\{\tau_\epsilon > k\}} E[\Phi_{k+1} \mid \mathcal{F}_{k-1}^{G,F}] &\leq \mathbb{1}_{\{\tau_\epsilon > k\}} \Phi_k - \mathbb{1}_{\{\tau_\epsilon > k\}} \bar{K}\mathcal{A}_k \|\nabla f(X_k)\|^2 \\ &\leq \mathbb{1}_{\{\tau_\epsilon > k\}} \Phi_k - \mathbb{1}_{\{\tau_\epsilon > k\}} \bar{K}\mathcal{A}_k \epsilon^2, \end{aligned}$$

pois, no evento $\{\tau_\epsilon > k\}$, temos que $-\|\nabla f(x_k)\| \leq -\epsilon$, definição do tempo de parada τ_ϵ em (4.82). Da definição de $\hat{\theta}$, equação (4.83), e da definição da função h , resultando em $h(\mathcal{A}_k) = \mathcal{A}_k$, obtemos, para todo $k \geq 0$, que

$$\mathbb{1}_{\{\tau_\epsilon > k\}} E[\Phi_{k+1} \mid \mathcal{F}_{k-1}^{G,F}] = \mathbb{1}_{\{\tau_\epsilon > k\}} \Phi_k - \mathbb{1}_{\{\tau_\epsilon > k\}} \hat{\theta} h(\mathcal{A}_k).$$

Logo, aplicando o Teorema 4.1.4, da Seção 4.1, encontramos a desigualdade (4.88). \square

Como consequência direta do Teorema 4.3.1, temos o seguinte resultado.

Corolário 4.3.1.1. *Sob as hipóteses do Teorema 4.3.1, segue que*

$$\mathbb{E}[\tau_\epsilon] = O\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right).$$

Assim, finalizamos a análise da taxa de convergência do Algoritmo 2, o método do gradiente conjugado não linear estocástico. Na próxima seção, fornecemos uma aplicação desse método na demonstração de convergência de um problema de otimização não linear determinístico.

4.4 Aplicação Teórica

Iremos escrever uma aplicação do Teorema 4.2.11, que assegura a convergência do Algoritmo 2, em casos determinísticos, ou seja, em que $g_k = \nabla f(x_k)$, $f_k^0 = f(x_k)$ e $f_k^s = f(x_k + s_k)$, para todo $k \geq 0$. Notemos que, ao abordarmos o caso determinístico, estamos utilizando um método de gradiente conjugado não linear, definido no Algoritmo 2, atendendo às

condições de busca em linha de Armijo, a fim de solucionar problemas de otimização irrestritos, formulados matematicamente por:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.t. } x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} ; \quad (4.91)$$

em que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a Hipótese **E**.

Outro ponto de atenção, é que estamos permitindo que β_k^N , o coeficiente de conjugação, assumam valores negativos. Pelo que temos conhecimento, este é o primeiro método de gradiente conjugado não linear na literatura, em que:

- utilizando a busca em linha satisfazendo a condição de Armijo;
- permitindo que β_k^N , o coeficiente de conjugação, assumam valores negativos;

provamos a convergência para a solução ótima do problema (4.91).

Corolário 4.4.1. *Sejam satisfeitas as hipóteses do Teorema 4.2.11, considerando que o problema de otimização (4.91) satisfaça a Hipótese **E**, que $g_k = \nabla f(x_k)$, $f_k^0 = f(x_k)$ e $f_k^s = f(x_k + s_k)$, para todo $k \geq 0$. Então, teremos que:*

$$\|\nabla f(x_k)\| \rightarrow 0, \text{ quando } k \rightarrow \infty,$$

e, conseqüentemente,

$$x_k \rightarrow 0, \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Demonstração. Basta escolhermos ν , tal que:

$$\frac{\nu}{1-\nu} \geq \frac{32\gamma\alpha_{max}^2\bar{K}_2}{\theta}. \quad (4.92)$$

□

Por exemplo, se definirmos:

$$\begin{aligned} \gamma &= 1,2; \\ \alpha_{max} &= 0,25; \\ \bar{K}_2 &= 1; \\ \theta &= 0,25; \end{aligned}$$

temos, ao substituírmos os valores acima na relação (4.92), definindo $\nu \geq 0,74$, a convergência da sequência $\{x_k\}_{k \geq 0}$, gerada pelo Algoritmo 2, à solução do problema de otimização determinístico (4.91).

Estimando G_k , F_k^0 e F_k^s Satisfazendo a Hipótese G

Essa pequena seção tem como base a Seção 2.3 do Artigo (PAQUETTE; SCHEINBERG, 2020), que apresenta uma breve discussão sobre como obter as estimativas do gradiente de f , do problema estocástico (4.1), assim como as estimativas dessa função avaliadas nos pontos x_k e $x_k + s_k$, satisfazendo a Hipótese G. Essas estimativas devem ser obtidas a cada iteração k , a fim de que tenhamos a convergência quase certa e a análise da taxa de convergência do Algoritmo 2 válidas, como tratadas nas Seções 4.2 e 4.3, respectivamente.

Iremos supor nesta parte do texto que a variância das estimativas do gradiente e das funções são limitadas, ou seja, que existem um σ_g^2 e σ_f^2 finitos, tais que

$$\mathbb{E}[\|\nabla \hat{f}(x, \xi) - \nabla f(x)\|^2] \leq \sigma_g^2 \quad \text{e} \quad \mathbb{E}[|\hat{f}(x, \xi) - f(x)|^2] \leq \sigma_f^2,$$

em que $\nabla \hat{f}(x, \xi)$ e $\hat{f}(x, \xi)$ são as amostras do gradiente e da função de f , avaliados no ponto x , respectivamente. Assim, definimos:

- $|S_k^g|$, o número de amostras necessárias para estimar o gradiente da função f , problema (4.1), definido por g_k , no ponto x_k do iterando k , atendendo a Condição G.i da Hipótese G;
- $|S_k^f|$, o número de amostras necessárias para estimar a função f , representadas por f_k^0 e f_k^s , do problema (4.1), nos pontos x_k e $x_k + s_k$ do iterando k , satisfazendo as Condições G.ii e G.iii da Hipótese G.

Computamos g_k , f_k^0 e f_k^s , a cada iteração k , como:

$$g_k = \frac{1}{|S_k^g|} \sum_{j \in S_k^g} \nabla \hat{f}(x_k, \xi_j), \quad f_k^0 = \frac{1}{|S_k^f|} \sum_{j \in S_k^f} \hat{f}(x_k, \xi_j) \quad \text{e} \quad f_k^s = \frac{1}{|S_k^f|} \sum_{j \in S_k^f} \hat{f}(x_k + s_k, \xi_j).$$

Escolheremos o número de amostras $|S_k^g|$, tendo como referência os trabalhos de (TRIPURANENI et al., 2018) e (TROPP et al., 2015), que satisfaça:

$$|S_k^g| \geq \tilde{O} \left(\frac{\sigma_g^2}{k_g^2 \alpha_k^2 \|g_k\|^2} \right) = C \frac{\sigma_g^2}{k_g^2 \alpha_k^2 \|g_k\|^2} \log \left(\frac{1}{1 - p_g} \right), \quad (4.93)$$

na qual \tilde{O} oculta o fator $\log \left(\frac{1}{1 - p_g} \right)$ e $C > 0$ é uma constante que depende da desigualdade de concentração utilizada (e.g. Hoeffding, Bernstein), que assegura que a condição G.i da Hipótese G seja satisfeita. Ou seja, essa escolha assegura que a estimativa do gradiente presente, com probabilidade no mínimo $p_g \in (0, 1)$, um erro suficientemente reduzido em relação ao gradiente verdadeiro.

Notemos, no entanto, que o valor de g_k não é conhecido no momento em que o número de amostras $|S_k^g|$ é escolhido. Para contornar esse problema, adotamos um processo iterativo: dado um número inicial de amostras $|S_k^g|$, computamos g_k e verificamos se a condição (4.93) é satisfeita.

Caso contrário, aumentamos $|S_k^g|$, computamos novamente g_k e repetimos o procedimento até que a condição seja atendida. Para mais detalhes sobre esse processo, ver (CARTIS; SCHEINBERG, 2018). Na próxima seção, abordamos, por meio de um exemplo numérico, esse processo.

Posteriormente, uma vez definido o valor de g_k , podemos, conforme apresentado em (PAQUETTE; SCHEINBERG, 2020), adotar um procedimento análogo para determinar os valores de f_k^0 e f_k^s , de modo a satisfazer a Condição G.ii da Hipótese G, assumindo:

$$|S_k^f| \geq \tilde{O} \left(\frac{\sigma_f^2}{k_f^2 \alpha_k^2 \|g_k\|^4} \right),$$

em que \tilde{O} oculta o fator $\log \left(\frac{1}{1-p_f} \right)$. Já com o objetivo de satisfazer a Condição G.iii da Hipótese G, devemos também garantir que $|S_k^f|$ satisfaça:

$$|S_k^f| \geq \frac{\sigma_f^2}{\theta^2 \delta_k^4}.$$

Logo, ao escolhermos os números de amostras $|S_k^g|$ e $|S_k^f|$ tal que

$$|S_k^g| \geq \tilde{O} \left(\frac{\sigma_g^2}{k_g^2 \alpha_k^2 \|g_k\|^2} \right) \quad \text{e} \quad |S_k^f| \geq \max \left(\tilde{O} \left(\frac{\sigma_f^2}{k_f^2 \alpha_k^2 \|g_k\|^4} \right), \frac{\sigma_f^2}{\theta^2 \delta_k^4} \right) \quad (4.94)$$

teremos que a Hipótese G é atendida.

Assim como no artigo de (PAQUETTE; SCHEINBERG, 2020), destacamos que:

- se $\alpha_k \|g_k\|$ e δ_k crescerem de uma iteração para a outra, então os números de amostras $|S_k^g|$ e $|S_k^f|$ podem decrescer de uma iteração para outra, ou seja, se adaptam a cada iteração, não necessitando serem fixos e grandes o suficiente a fim de atender a Hipótese G;
- os números de amostras $|S_k^g|$ e $|S_k^f|$ estão em função de variáveis disponíveis (conhecidas) a cada iterando k . Por exemplo, em (BOLLAPRAGADA; BYRD; NOCEDAL, 2018), os números de amostras $|S_k^g|$ e $|S_k^f|$ estão em função de $\|\nabla f(x_k)\|$, que não é conhecida a cada iteração k ;
- se $\gamma > 1$ não estiver suficientemente próximo de 1, resultando, pelo Teorema 4.2.8, que p_g não esteja próximo desse valor, e considerando $k_g \gg 1$, então teremos, pela relação (4.94), um número moderado de amostras $|S_k^g|$.

Notemos, a partir da última relação do Teorema 4.2.8 e da equação (4.94), que sempre existirá um *trade-off* entre a quantidade de amostras $|S_k^g|$ e $|S_k^f|$, dependendo dos parâmetros escolhidos para a solução do problema de otimização estocástico (4.1). Em outras palavras, caso o valor de p_g não seja adequadamente selecionado, o parâmetro p_f tenderá a ser suficientemente próximo de um, o que implica um número elevado de amostras $|S_k^f|$.

Por fim, destacamos que à medida que o iterando x_k se aproxima da solução do problema de otimização (4.1), a norma de g_k se aproxima de zero, pois $\nabla f(x_k) \rightarrow 0$ (consequência do Teorema 4.2.11). Assim, sabendo que $\alpha_k \leq \alpha_{max}$, para todo $k \geq 0$, e pela relação (4.93), necessariamente, o número de amostras $|S_k^g|$ cresce à medida que x_k se aproxima da solução. O mesmo ocorre com o número de amostras $|S_k^f|$, relação (4.94), de modo que ambos devem assegurar a validade da Hipótese G.

4.5 Experimento Numérico

Nesta seção, iremos apresentar resultados de um experimento numérico que foi formatado para exemplificar a aplicação do método do gradiente conjugado não linear estocástico, ilustrando o processo de verificação das condições para a aplicabilidade do método, com a correspondente escolha dos parâmetros do algoritmo que garantem a satisfação dessas condições.

Antes de passarmos à apresentação do experimento, é importante pontuar algumas questões. Primeiro, devemos reportar que, no processo de tentarmos elaborar experimentos numéricos diversos, pudemos observar que a escolha dos parâmetros do algoritmo que garantem a satisfação das condições teóricas para a validade do método é relativamente difícil, sendo que tal dificuldade provavelmente decorre das diversas majorações que foram efetuadas visando à obtenção de relações facilmente verificáveis, principalmente quando da formulação e demonstração do Teorema 4.2.8. Assim, no curso de tais tentativas, ficou estabelecida a necessidade da reformulação das condições que são apresentadas como requisitos para a validade do método, com a redução no conservadorismo que se encontra implícito na escolha das variáveis de projeto. O estudo de maneiras de realizar tal redução de conservadorismo já se encontra em curso, devendo ser concluído no âmbito de pesquisas realizadas como continuidade da presente tese.

Tendo em vista tal dificuldade, bem como a conveniência da apresentação de um exemplo relativamente simples, que favoreça a compreensão da etapa da escolha de parâmetros e a análise dos resultados, o experimento numérico a ser apresentado nesta seção foi construído considerando uma situação hipotética: supõe-se a presença de ruído na medição do gradiente da função objetivo, mas assume-se a ausência de ruído na medição do valor dessa função.

Passamos então à descrição do problema a ser abordado neste experimento numérico.

Exemplo 4.5.1. *Desejamos encontrar*

$$x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x), \quad (4.95)$$

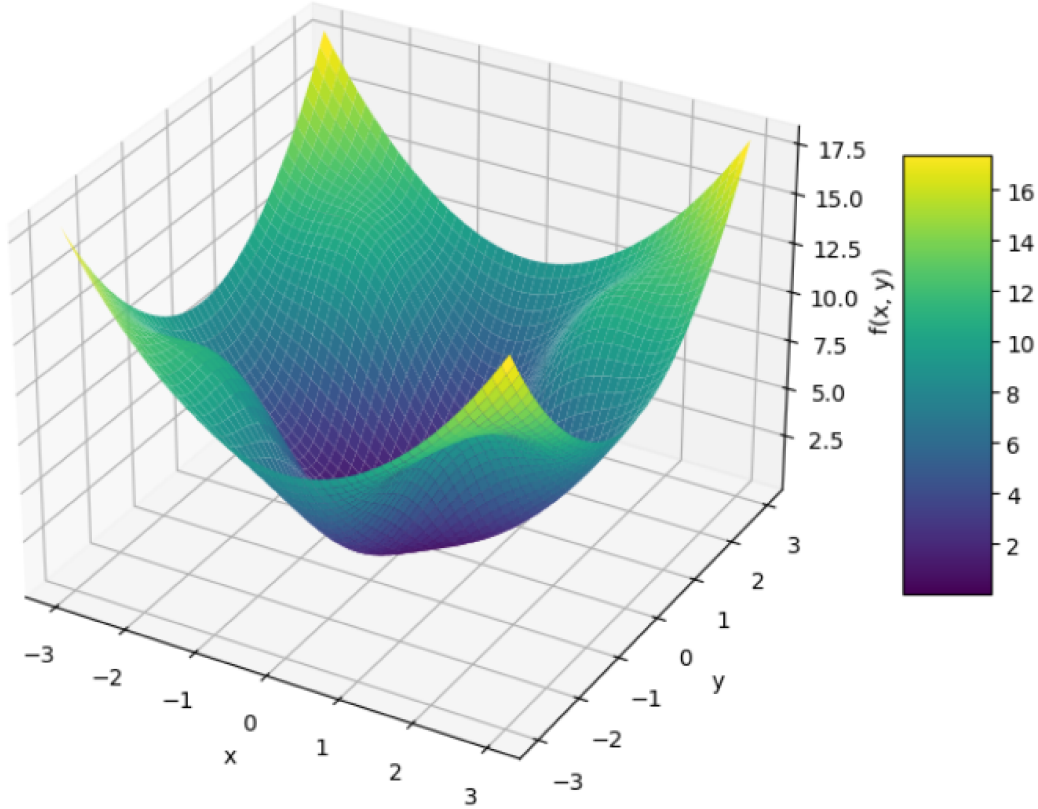
em que a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é definida como:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 5 \sin^2(x) \sin^2(y). \quad (4.96)$$

A Figura 20 apresenta o gráfico tridimensional da função f , definida na equação (4.96), que aparenta ser unimodal. Essa conclusão é corroborada pela análise da Figura 21, a qual exibe as curvas de nível da função f , em que também se constata que essa função não é convexa.

Figura 20 – Gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2 + 5 \sin^2(x) \sin^2(y)$.

Gráfico 3D da função $f(x, y) = x^2 + y^2 + 5 \cdot \sin^2(x) \cdot \sin^2(y)$



Fonte: figura do autor.

Para definirmos o número de pontos críticos de f , é necessário determinar o seu gradiente e verificar os pontos no plano xy em que estes se anulam. Assim, temos:

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x + 5 \sin(2x) \sin^2(y) \\ 2y + 5 \sin(2y) \sin^2(x) \end{bmatrix},$$

o qual se anula apenas no ponto de mínimo global $x^* = (0, 0)$, conforme o campo vetorial ilustrado na Figura 21. Em seguida, para atender à Hipótese **E**, verificamos que o gradiente de f , ∇f , é L -Lipschitz, cujo valor da constante de Lipschitz L é igual a 12, sendo o maior autovalor em módulo da Hessiana da função f , que é

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 2 + 10 \cos(2x) \sin^2(y) & 5 \sin(2x) \sin(2y) \\ 5 \sin(2x) \sin(2y) & 2 + 10 \cos(2y) \sin^2(x) \end{bmatrix}.$$

Assim, ao verificarmos que $H(0, 0) = 2I_d$, onde I_d denota a matriz identidade de ordem 2, concluímos (provamos) — sem a necessidade de recorrermos à análise gráfica — que o ponto $(0, 0)$ é o mínimo global de f .

Portanto, temos que os autovalores da matriz $H(x, y)$ são:

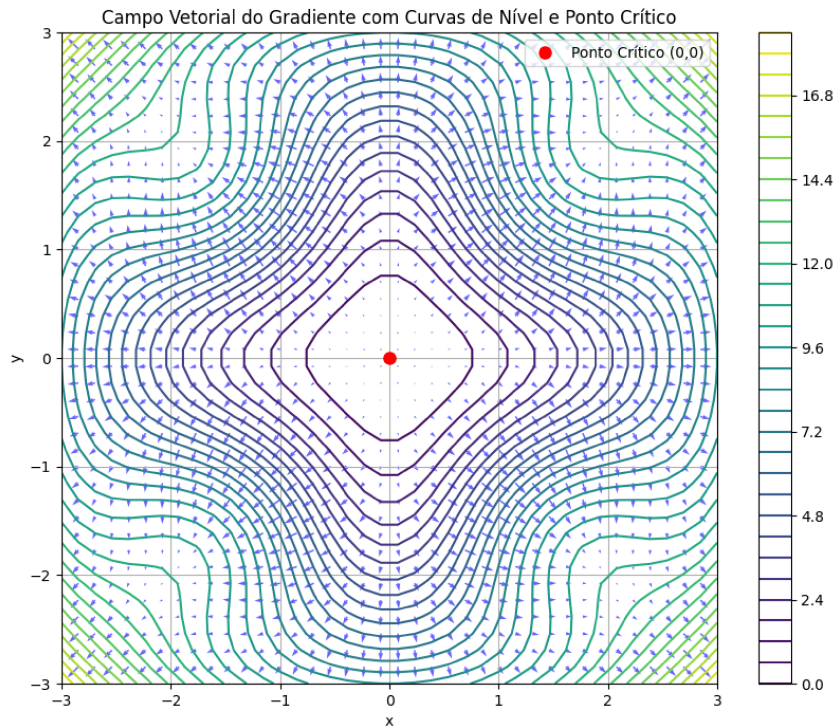
$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -5\sqrt{A} - 20 \sin^2(x) \sin^2(y) + 5 \sin^2(x) + 5 \sin^2(y) + 2 \\ \lambda_2 &= +5\sqrt{A} - 20 \sin^2(x) \sin^2(y) + 5 \sin^2(x) + 5 \sin^2(y) + 2\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}A &= 16 \sin^4(x) \sin^4(y) - 16 \sin^4(x) \sin^2(y) - 16 \sin^2(x) \sin^4(y) + 14 \sin^2(x) \sin^4(y) \\ &\quad + \sin^4(x) + \sin^4(y),\end{aligned}$$

encontrando numericamente que $L = 12$. Assim, concluímos que a Hipótese **E** é satisfeita.

Figura 21 – Curvas de Nível da função $f(x, y) = x^2 + y^2 + 5 \sin^2(x) \sin^2(y)$ e campo vetorial do gradiente de f . O ponto em vermelho representa o ponto $(0, 0)$, mínimo global da função f .



Fonte: figura do autor.

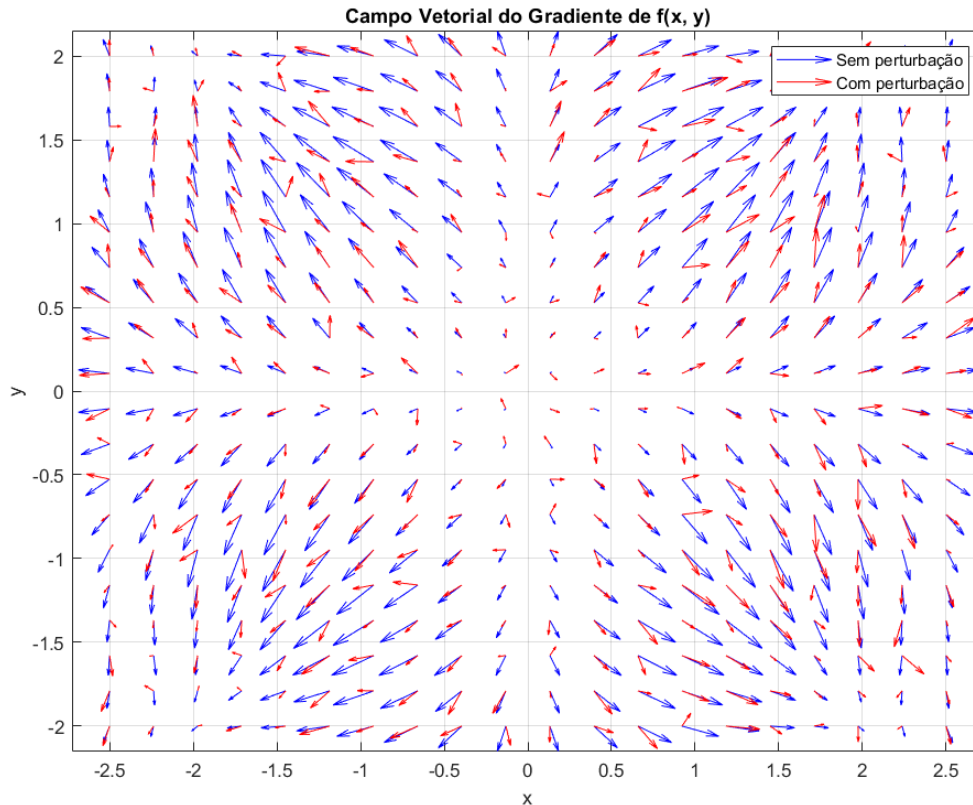
Conforme exposto, nosso objetivo é solucionar o Problema (4.95), considerando a função f definida na equação (4.96), ressaltando que os valores de f estão disponíveis para todos os pontos do plano xy . Porém, os valores do gradiente ∇f estão contaminados por ruído gaussiano, ou seja,

$$\nabla \hat{f}(x, y, \xi) = \begin{bmatrix} 2x + 5 \sin(2x) \sin^2(y) + \xi_1 \\ 2y + 5 \sin(2y) \sin^2(x) + \xi_2 \end{bmatrix}, \quad (4.97)$$

em que $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, ξ_1 e ξ_2 são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição comum $\mathcal{N}(\mu, \sigma_g^2)$, sendo $\mu = 0$ e $\sigma_g^2 = 1$. Portanto, as informações disponíveis

ao método numérico são os valores de f e $\nabla \hat{f}(x, y, \xi)$. De forma ilustrativa, exibimos na Figura 22 o campo vetorial do gradiente da função f , em azul, e, em vermelho, o mesmo campo vetorial contaminado por ruído Gaussiano, onde percebemos alterações na direção do gradiente ∇f causadas pelo vetor ξ .

Figura 22 – Campo Vetorial do gradiente da função $f(x, y) = x^2 + y^2 + 5 \sin^2(x) \sin^2(y)$ com perturbação ($\nabla \hat{f}(x, y, \xi)$), em vermelho, e sem perturbação ($\nabla f(x, y)$), em azul.



Fonte: figura do autor.

Assim, dadas as características do problema de otimização estocástico, vamos empregar o Algoritmo 2, o método do gradiente conjugado não linear estocástico, com o objetivo de encontrar iterativamente um ponto que se aproxime do mínimo da função f . Para tal, configuramos os parâmetros iniciais desse algoritmo conforme a Tabela 4 e, com base no valor de $\gamma = 2$ (fator de atualização dos parâmetros δ_k^2 e α_k a cada iteração), escolhido previamente e necessitando ser maior do que um, definimos o valor de $p_g = 0,95$ satisfazendo a relação do Teorema 4.2.8

$$\frac{p_g}{1 - p_g} \geq \frac{4\gamma}{(1 - \gamma^{-1})}.$$

Destacamos que $p_f = 1$, pois temos disponível a informação real de $f(x, y)$ avaliada em qualquer ponto do plano xy .

Tabela 4 – Valores dos parâmetros do algoritmo 2.

Parâmetros	Valor
x_0	$(-2, -2)$
σ_g^2	$1,00E^{+00}$
γ	$2,00E^{+00}$
θ	$1,00E^{-01}$
α_{max}	$5,00E^{-01}$
α_0	$6,25E^{-02}$
ϵ	$1,00E^{-08}$
\tilde{K}_2	$1,00E^{+00}$
p_g	$0,95E^{+00}$
max_iter	13

Na Tabela 4, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ foi escolhido arbitrariamente, assim como os parâmetros: $\gamma > 1$; $\theta \in (0, 1)$; $\epsilon > 0$; $\tilde{K}_2 \geq 1$; $max_iter \in \mathbb{N}$; $\alpha_{max} > 0$. Por sua vez, $\alpha_0 = \gamma^{j_0} \alpha_{max}$, com $j_0 \in \mathbb{Z}_-$ ($j_0 = -3$). Já os parâmetros σ_g^2 e p_g foram determinados nos dois parágrafos anteriores.

Para assegurarmos a convergência quase certa para o mínimo global da função f , com base no Teorema 4.2.11, é necessário determinar o número de amostras $|S_k^g|$ utilizadas na estimativa

$$g_k = \frac{1}{|S_k^g|} \sum_{j \in S_k^g} \nabla \hat{f}(x_k, y_k, \xi_j),$$

que deve satisfazer a Hipótese **G**, onde $\xi_j = (\xi_j^1, \xi_j^2)$, com $\xi_j^1 \sim \xi_1$ e $\xi_j^2 \sim \xi_2$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Ressaltamos que é suficiente atender à condição **G.i** dessa hipótese para garantir a convergência à solução de mínimo global de f , uma vez que $p_f = 1$. Assim, empregaremos o Princípio dos Grandes Desvios de Crámer (Teorema A.0.5) para definir o valor de $|S_k^g|$ a cada iteração k .

Proposição 4.5.2. *Sejam $\{\xi_j^1\}_{j \geq 1}$ e $\{\xi_j^2\}_{j \geq 1}$ sequências de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com $\xi_j^1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ e $\xi_j^2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ independentes entre si, para todo $j \in \mathbb{N}$. Se*

$$|S_k^g| \geq 2 \frac{1}{k_g^2 \alpha_k^2 \|g_k\|^2} \log \left(\frac{2}{1 - p_g} \right), \quad (4.98)$$

então a condição **G.i** da Hipótese **G** é satisfeita.

Demonstração. Dada uma iteração $k \geq 0$, definimos $n_k = |S_k^g|$ e $\chi_k > 0$. Devemos encontrar o valor de n_k tal que tenhamos

$$P(\|G_k - \nabla f(x_k, y_k)\| \leq \chi_k) \geq p_g.$$

Assim sendo, temos

$$\begin{aligned}
p_g &\leq 1 - \mathbf{P}(\|G_k - \nabla f(x_k, y_k)\| > \chi_k) \\
&= 1 - \mathbf{P}\left(\left\|\frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} \nabla \hat{f}(x_k, y_k, \xi_i) - \nabla f(x_k, y_k)\right\| > \chi_k\right) \\
&= 1 - \mathbf{P}\left(\left\|\frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} \xi_i\right\| > \chi_k\right) \\
&= 1 - \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} \xi_i^1\right|^2 + \left|\frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} \xi_i^2\right|^2 > \chi_k^2\right) \\
&\leq 1 - \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} \xi_i^1\right|^2 > \chi_k^2\right).
\end{aligned}$$

Definindo $S_{n_k} = \sum_{i=1}^{n_k} \xi_i^1$ e retornando à desigualdade anterior, obtemos, pela simetria da distribuição,

$$\begin{aligned}
p_g &\leq 1 - \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_{n_k}}{n_k}\right|^2 > \chi_k^2\right) \\
&= 1 - \mathbf{P}\left(\left\{\frac{S_{n_k}}{n_k} > \chi_k\right\} \cup \left\{\frac{S_{n_k}}{n_k} < -\chi_k\right\}\right) \\
&= 1 - 2\mathbf{P}\left(\frac{S_{n_k}}{n_k} \in (\chi_k, \infty)\right).
\end{aligned}$$

Utilizando o Princípio dos Grandes Desvios de Crámer (Teorema A.0.5) em $\mathbf{P}\left(\frac{S_{n_k}}{n_k} \in (\chi_k, \infty)\right)$, resulta que

$$p_g \leq 1 - 2e^{-I(\chi_k)n_k + o(n_k)}$$

em que $I(\chi_k)$ é a função taxa, que dada a distribuição normal padrão das variáveis aleatórias, é igual a

$$I(\chi_k) = \frac{\chi_k^2}{2}.$$

Logo,

$$2e^{-\left(\frac{\chi_k^2}{2}\right)n_k + o(n_k)} \leq 1 - p_g$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{2}{1 - p_g} \leq e^{\left(\frac{\chi_k^2}{2}\right)n_k - o(n_k)} \leq e^{\left(\frac{\chi_k^2}{2}\right)n_k}.$$

Aplicando o logaritmo na desigualdade acima, encontramos que:

$$n_k \geq 2 \frac{1}{\chi_k^2} \log \left(\frac{2}{1 - p_g} \right).$$

Logo, definindo $\chi_k = k_g \alpha_k \|g_k\|$, concluímos que se

$$|S_k^g| \geq 2 \frac{1}{k_g^2 \alpha_k^2 \|g_k\|^2} \log \left(\frac{2}{1 - p_g} \right),$$

então a condição **G.i** da Hipótese **G** é satisfeita. \square

Nos experimentos numéricos, adotamos $k_g = 2$ e estimamos g_k conforme descrito no Algoritmo 3, assegurando, de acordo com a Proposição 4.5.2, que a Condição **G.i** da Hipótese **G** seja satisfeita.

Algoritmo 3 Algoritmo para calcular g_k satisfazendo a condição **G.i** da Hipótese **G**.

Entrada: $|S_{k_0}^g|$ (número de amostras iniciais), k_g , α_k e p_g .

Saída: g_k (estimativa de g_k atendendo a condição **G.i** da Hipótese **G**)

Passo 1: Faça $n_k = |S_{k_0}^g|$;

Passo 2: Computa $g_k = \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \nabla \hat{f}(x_k, y_k, \xi_j)$;

enquanto $n_k < 2 \frac{1}{k_g^2 \alpha_k^2 \|g_k\|^2} \log \left(\frac{2}{1 - p_g} \right)$ **faça**

▷ *x*repetição

Passo 3: Faça $n_k = 5n_k$;

▷ *A*tualiza n_k

Passo 4: Computa $g_k = \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \nabla \hat{f}(x_k, y_k, \xi_j)$;

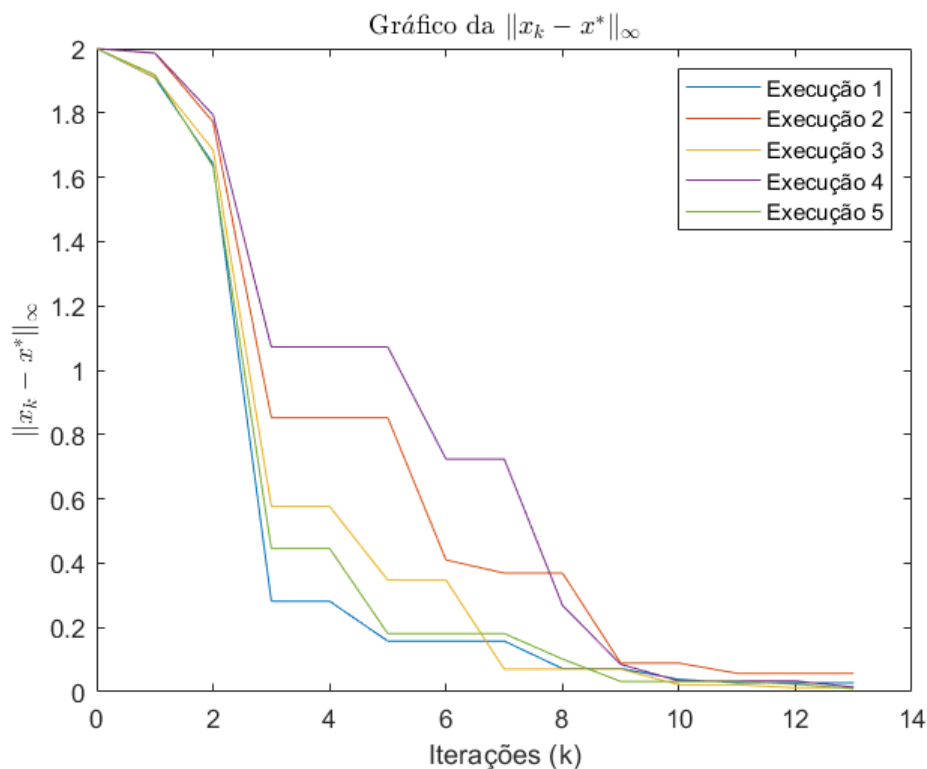
▷ *R*efina g_k

fim enquanto

Dessa forma, apresentamos os primeiros resultados numéricos, mostrados nas Figuras 23 a 26. Foram realizadas cinco execuções do Algoritmo 2, com parâmetros configurados conforme a Tabela 4. A cada iteração k , calculou-se a estimativa do gradiente $\nabla f(x_k)$, denotada por g_k , de acordo com o Algoritmo 3.

Na Figura 23, apresentamos a evolução dos iterandos x_k , gerados pelo Algoritmo 2, com $k \in \{0, 1, \dots, \text{max_iter}\}$, convergindo ao ponto de mínimo da função f , definida na equação (4.96), dado por $x^* = 0$. A convergência é representada pela distância $\|x_k - x^*\|_\infty$. Observemos que, diferentemente dos métodos determinísticos tradicionais, nos quais os iterandos x_k são sempre modificados de uma interação para outra, no método proposto surgem situações em que os iterandos x_k mantêm o mesmo valor. Por exemplo, na Execução 4 (linha roxa da Figura 23), os pontos x_3 , x_4 e x_5 coincidem, indicando que o Passo 6 do Algoritmo 2 foi malsucedido, isto é, $f(x_{k+1}) > f(x_k) + \theta \alpha_k g_k^\top p_k$, sendo necessário o método numérico restringir (reduzir) os valores dos parâmetros α_k e δ_k^2 para o próximo iterando $k + 1$. Isso poderá implicar em um aumento do número de amostras a fim de termos uma melhor aproximação do gradiente de f e, assim, termos sucesso na próxima iteração do Passo 6 do Algoritmo 2 ($f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \theta \alpha_k g_k^\top p_k$).

Figura 23 – Norma l_∞ da diferença entre x_k e x^* , com $f(x^*) = 0$, para cada iterando $k \in \{1, \dots, 13\}$.

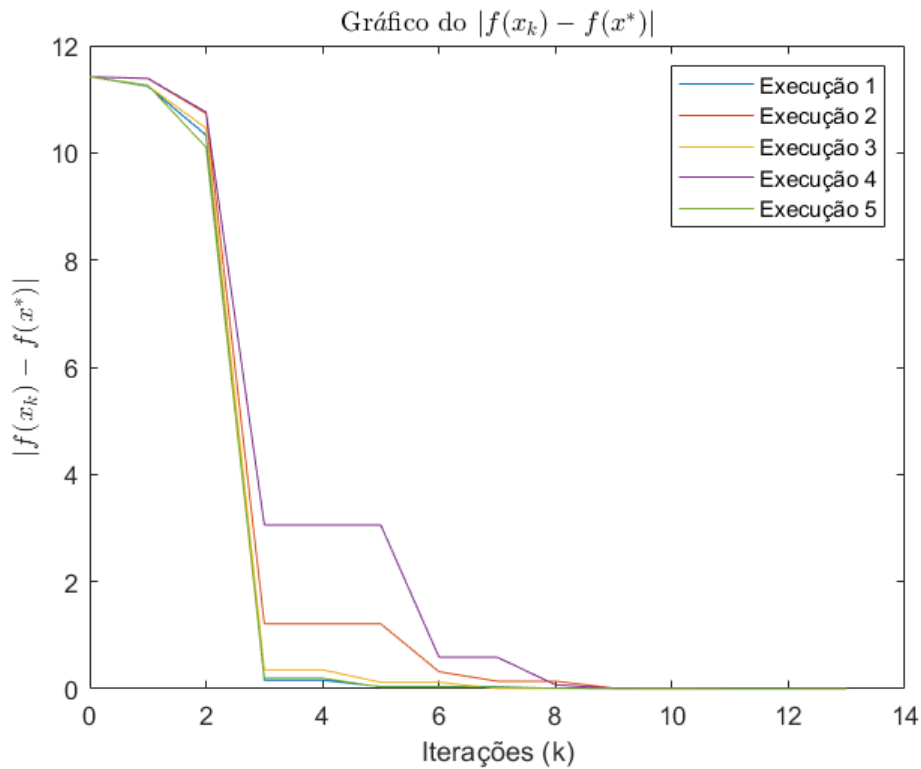


Fonte: figura do autor.

Essa informação é confirmada pela Figura 24, na qual se observa que, para a mesma Execução 4 (linha roxa), o valor de $f(x_k)$ permanece constante nos pontos correspondentes (x_3 , x_4 e x_5). Nessa figura, representamos os valores de $f(x_k)$, para $k \in \{0, 1, \dots, \max_iter\}$, em relação ao valor ótimo $f(x^*) = 0$. Em todas as cinco execuções, observamos a convergência dos pontos gerados pelo método proposto no Algoritmo 2.

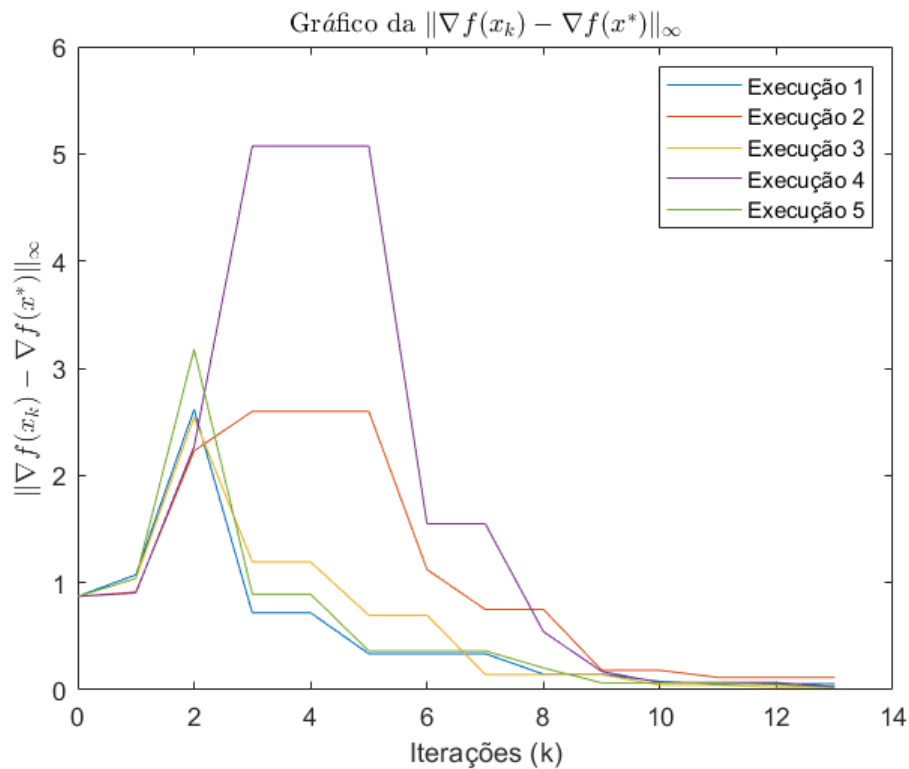
Posteriormente, como informação complementar aos gráficos anteriores, apresentamos na Figura 25 o gráfico da norma l_∞ da diferença entre $\nabla f(x_k)$ e $\nabla f(x^*)$, com $\nabla f(x^*) = 0$, para cada iterando $k \in \{1, \dots, 13\}$. Apesar de utilizarmos a informação de ∇f nessa figura, destacamos que esses valores não são empregados no Algoritmo 2 para a solução do problema de otimização (4.95).

Figura 24 – Módulo da diferença entre $f(x_k)$ e $f(x^*)$, com $f(x^*) = 0$, para cada iterando $k \in \{1, \dots, 13\}$.



Fonte: figura do autor.

Figura 25 – Norma l_∞ da diferença entre $\nabla f(x_k)$ e $\nabla f(x^*)$, com $\nabla f(x^*) = 0$, para cada iterando $k \in \{1, \dots, 13\}$.



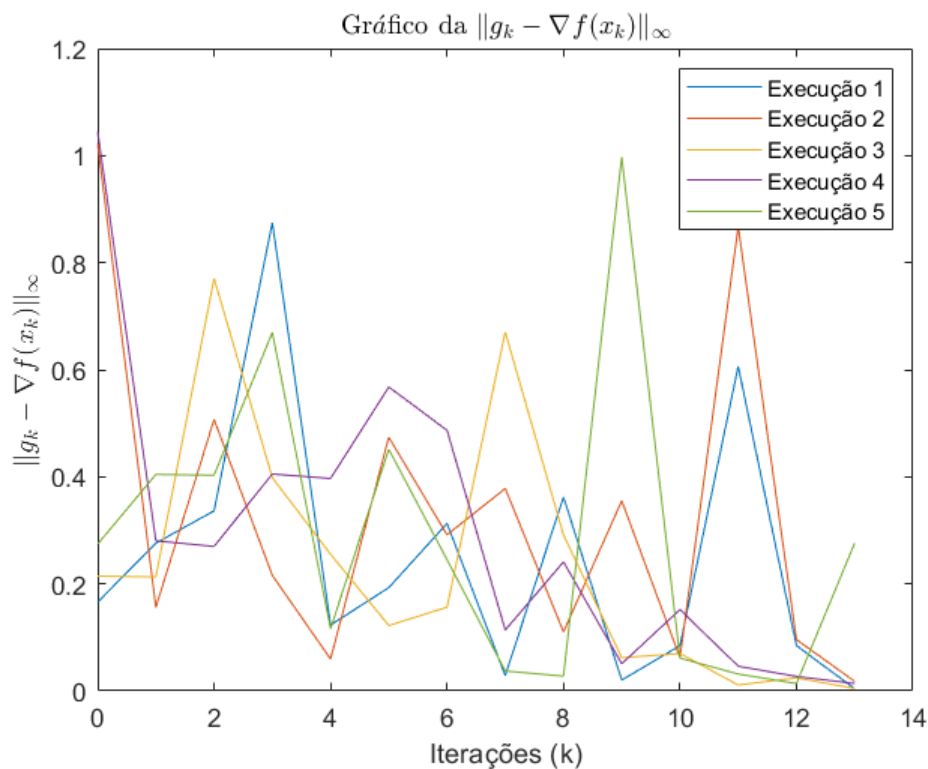
Fonte: figura do autor.

A Figura 26 tem como objetivo apresentar a diferença entre $\nabla f(x_k)$ e g_k , obtida a partir do Algoritmo 3, o qual assegura, segundo a Proposição 4.5.2, que a condição G.i da Hipótese G seja satisfeita. Nessa figura, a diferença vetorial é quantificada por meio da norma $\|g_k - \nabla f(x_k)\|_\infty$, evidenciando a discrepância entre a informação utilizada pelo Algoritmo 2, representada por g_k , e o valor real do gradiente $\nabla f(x_k)$. Realçamos, de acordo com a condição G.i da Hipótese G, que g_k e $\nabla f(x_k)$ tendem a satisfazer a relação $\|g_k - \nabla f(x_k)\| \leq k_g \alpha_k \|g_k\|$.

Dessa forma, concluímos as análises numéricas para esse exemplo, em que os valores do gradiente de f (∇f) não são conhecidos exatamente, mostrando uma aplicação do método do gradiente conjugado não linear estocástico, Algoritmo 2, desenvolvido na seção anterior.

Problemas de otimização, formulados matematicamente em (4.95), nos quais temos acesso exato aos valores de $f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, mas apenas a valores inexatos de seu gradiente $\nabla f(x)$, estão presentes em simulações numéricas complexas, e.g. a função f é um modelo matemático determinístico bem definido; entretanto, o cálculo exato de seu gradiente é inviável. Então, podemos utilizar aproximações via diferenças finitas ou técnicas de Monte Carlo (MOHAMED et al., 2020; BUESING; WEBER; MOHAMED, 2016), que irão introduzir incertezas (ruídos) no gradiente.

Figura 26 – Norma l_∞ da diferença entre g_k , estimativa do gradiente no iterando x_k , e $\nabla f(x_k)$, para cada iterando $k \in \{1, \dots, 13\}$.



Fonte: figura do autor.

Assim, o exemplo numérico a seguir mostra uma aplicação do Algoritmo 2 ao se incorpo-

rar a incerteza causada pelos métodos das diferenças finitas na estimativa do gradiente da função f .

Exemplo 4.5.3. O problema de otimização (4.95), cuja função objetivo f foi definida em (4.96), é solucionado empregando o Algoritmo 2, com g_k sendo computado por meio do método das diferenças finitas progressivos, i.e.

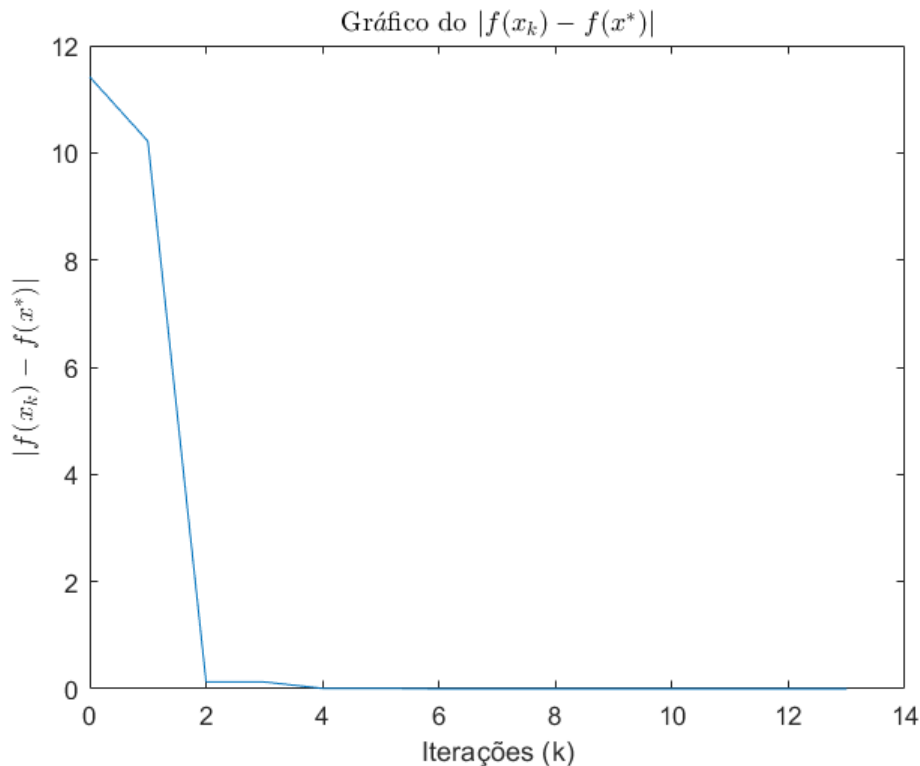
$$g_k = \begin{bmatrix} \frac{f(x_k + ce_1) - f(x_k)}{c} \\ \frac{f(x_k + ce_2) - f(x_k)}{c} \end{bmatrix}, \quad (4.99)$$

em que $\{e_1, e_2\}$ é a base canônica do plano \mathbb{R}^2 e $c = 1,00E^{-08}$ é a constante de perturbação do método das diferenças finitas. Uma alternativa à estimativa de g_k , utilizando a equação (4.99), seria utilizar o método das diferenças finitas centrais, i.e.

$$g_k = \begin{bmatrix} \frac{f(x_k + ce_1) - f(x_k - ce_1)}{2c} \\ \frac{f(x_k + ce_2) - f(x_k - ce_2)}{2c} \end{bmatrix},$$

a qual ocorre uma perturbação no ponto $x_k \in \mathbb{R}^2$ na direção dos vetores da base canônica tanto para frente quanto para trás para a estimativa do gradiente de $f(x_k)$, $\nabla f(x_k)$.

Figura 27 – Módulo da diferença entre $f(x_k)$ e $f(x^*)$, com $f(x^*) = 0$, para cada iterando $k \in \{1, \dots, 13\}$. A aproximação de $\nabla f(x_k)$ é realizada pelo método das diferenças finitas para frente, equação (4.99).

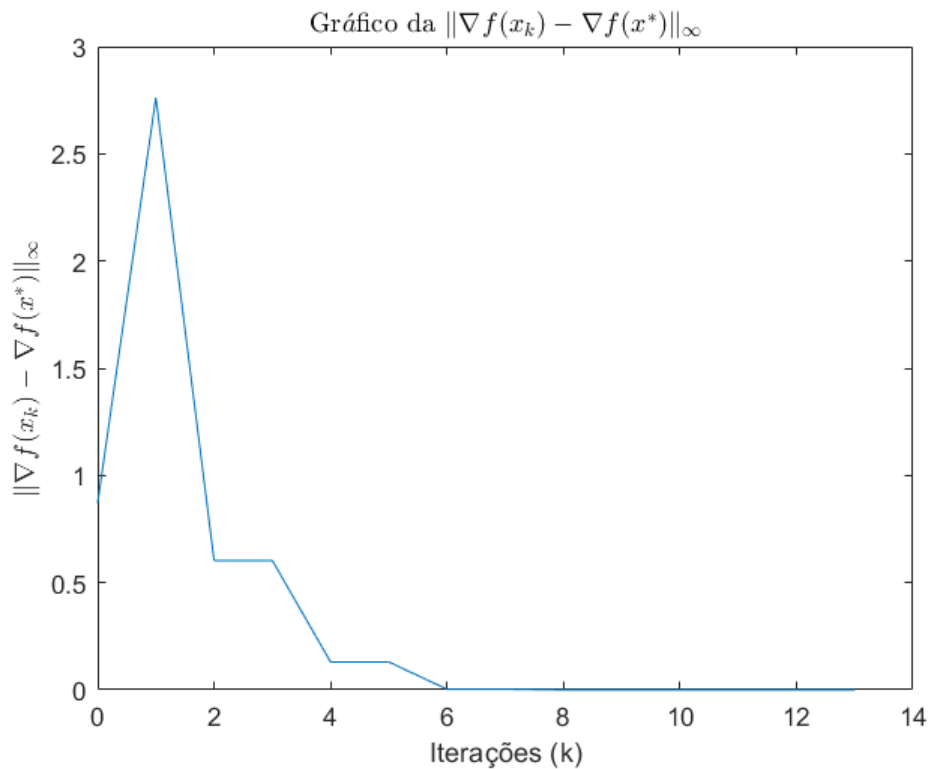


Fonte: figura do autor.

Por conseguinte, apresentamos nas Figuras 27 a 29, os resultados numéricos desse teste, sendo a aproximação de $\nabla f(x_k)$ realizada conforme a equação (4.99). O Algoritmo 2 é parametrizado de acordo com a Tabela 4, não sendo alterado em relação ao exemplo numérico anterior.

As Figuras 27 e 28 ilustram a convergência dos iterandos x_k , gerados pelo Algoritmo 2, para $k \in \{1, \dots, \max_iter\}$, ao ponto de mínimo global da função f , representado por x^* . Observamos que o número máximo de iterações \max_iter poderia ter sido reduzido, devido a uma melhor aproximação de g_k em relação ao gradiente $\nabla f(x_k)$, conforme evidenciado na Figura 29, a qual apresenta o gráfico do erro das estimativas do gradiente, medido por meio da $\|g_k - \nabla f(x_k)\|_\infty$, para cada iterando $k \in \{1, \dots, \max_iter\}$.

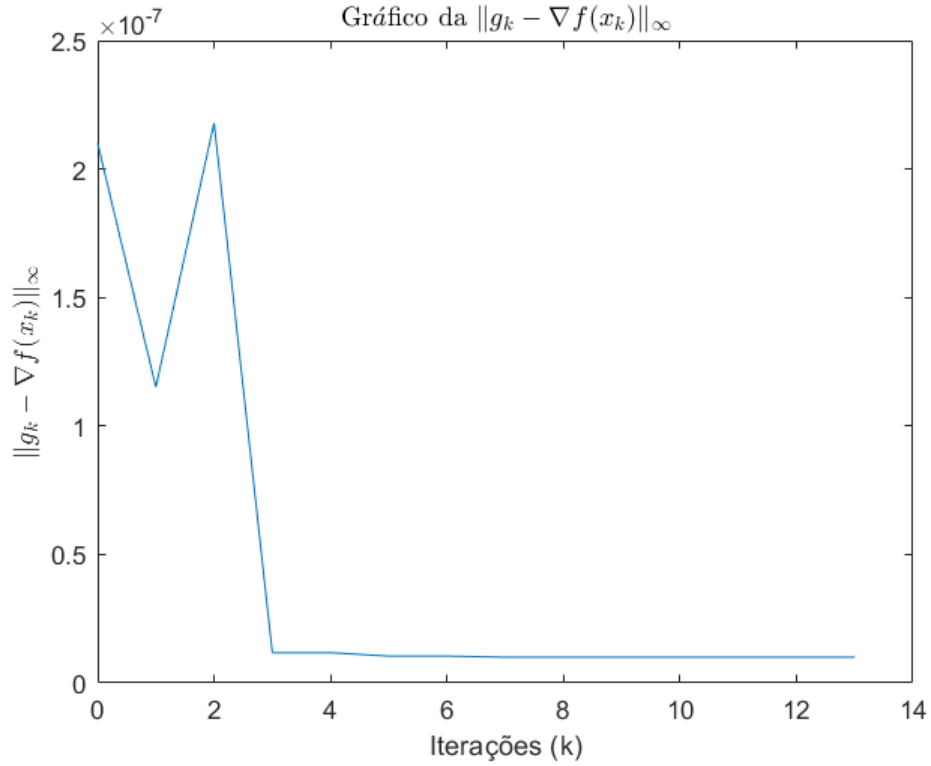
Figura 28 – Norma l_∞ da diferença entre $\nabla f(x_k)$ e $\nabla f(x^*)$, com $\nabla f(x^*) = 0$, para cada iterando $k \in \{1, \dots, 13\}$. A aproximação de $\nabla f(x_k)$ é realizada pelo método das diferenças finitas para frente, equação (4.99).



Fonte: figura do autor.

Concluimos esta seção com resultados de experimentos numéricos que exemplificam a aplicação do método do gradiente conjugado não linear estocástico. No primeiro exemplo, destacou-se a verificação das condições de aplicabilidade do Algoritmo 2, as quais asseguram a convergência à solução do problema de otimização. O segundo exemplo, por sua vez, ilustrou a aplicação do algoritmo proposto incluindo a incerteza introduzida pelo método das diferenças finitas na estimação do gradiente da função f .

Figura 29 – Norma l_∞ da diferença entre g_k , aproximação do gradiente no iterando x_k , realizada pelo método das diferenças finitas para frente (equação (4.99)), e $\nabla f(x_k)$, para cada iterando $k \in \{1, \dots, 13\}$.



Fonte: figura do autor.

5 Conclusões e Considerações Finais

Nesse trabalho propusemos, no Capítulo 3, um método estocástico baseado no método do gradiente conjugado linear determinístico (NOCEDAL; WRIGHT, 2006a), denominado o método do gradiente conjugado linear estocástico, a fim de solucionar os problemas equivalentes (3.1) e (3.2), realizando a prova de convergência quase certa para a solução desses problemas e a análise da taxa de convergência. Para essas demonstrações, usamos o conceito de quase supermartingales não negativos, introduzido por Robbins e Siegmund (ROBBINS; SIEGMUND, 1971), e que teve os seus fundamentos teóricos abordados no Capítulo 2. Quanto à análise da taxa de convergência, encontramos, para uma sequência $\{a_k\}_{k \geq 1}$ específica, uma taxa de convergência $O\left(\frac{1}{k \log k}\right)$, superior ao método de Robbins e Monro (gradiente estocástico), que possui uma taxa de convergência $O\left(\frac{1}{k}\right)$ (NEMIROVSKI et al., 2009) para tal classe de problemas (3.2).

Em seguida, utilizando os resultados numéricos obtidos nas tabelas 1 e 2, temos que o método proposto, o método do gradiente conjugado linear estocástico, é promissor, mostrando-nos ser robusto à variação (aumento) do número de condicionamento da matriz A e dimensão do problema quadrático (3.2), o que o torna uma alternativa viável e simples para a referida classe de problemas de otimização estocásticos.

Posteriormente, no Capítulo 4, desenvolvemos uma versão estocástica do método do gradiente conjugado não linear determinístico, baseada no método desenvolvido em (HAGER; ZHANG, 2005), que assegura a direção de descida da função custo f , definida no problema (4.1), e demonstra a convergência à solução do problema de otimização determinístico utilizando:

- o gradiente exato da função custo f ;
- os valores reais da função custo f ;
- a busca em linha satisfazendo a condição de Wolfe (WOLFE, 1969).

Destacamos, como é prática em demonstrações de convergência de métodos de gradiente conjugado não lineares determinísticos, que os autores em (HAGER; ZHANG, 2005) utilizam a condição de Zoutendijk (ZOUTENDIJK, 1970) para essa finalidade.

Todavia, o método apresentado por nós, no Algoritmo 2, utiliza:

- estimativas do gradiente da função custo f ;
- estimativas dos valores da função custo f nos pontos x_k e $x_k + s_k$, em que k é o iterando corrente, $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o ponto corrente e $s_k = \alpha_k p_k$, com α_k sendo o comprimento de passo e p_k , a direção de busca;

- a busca em linha satisfazendo a condição de Armijo (ARMIJÓ, 1966), uma hipótese menos restritiva que a condição de Wolfe utilizada em (HAGER; ZHANG, 2005).

Demonstramos a convergência quase certa e fizemos a análise da taxa de convergência desse método utilizando a teoria da probabilidade desenvolvida no Capítulo 2 e na Seção 4.1.

Em seguida, na última seção do Capítulo 4, onde construímos um experimento numérico a fim de exemplificar a aplicação do método do gradiente conjugado não linear estocástico, percebemos a consequência prática das diversas majorações que foram concebidas, principalmente quando da formulação e demonstração do Teorema 4.2.8. Essas majorações impõem que o valor de $p_f \in [0, 1]$, definido a fim de atender à última relação do Teorema 4.2.8, seja próximo a um, tornando o número de amostras necessário para estimar o valor de f demasiadamente grande e, conseqüentemente, tornando os experimentos numéricos custosos computacionalmente. Por esse motivo, o primeiro exemplo desenvolvido tratou das incertezas em relação ao gradiente da função custo f , tendo o método acesso aos valores reais dessa função. Esse tipo de problema de otimização pode estar presente em simulações numéricas complexas, em que a função f é um modelo matemático determinístico bem definido; contudo, o cálculo exato do seu gradiente é inviável, restando-nos utilizar procedimentos numéricos, e.g. aproximações via diferenças finitas ou técnicas de Monte Carlo, a fim de estimá-lo. Porém, esses procedimentos introduzem incertezas no gradiente.

Pontuamos como continuidade desse trabalho a redução no conservadorismo que se encontra implícito na escolha das variáveis de projeto, principalmente, dos parâmetros do Teorema 4.2.8. O estudo de maneiras de realizar tal redução de conservadorismo já se encontra em curso, devendo ser concluído no âmbito de pesquisas realizadas como continuidade da presente tese.

Referências

- ARMIJO, L. Minimization of functions having lipschitz continuous first partial derivatives. *Pacific Journal of mathematics*, Mathematical Sciences Publishers, v. 16, n. 1, p. 1–3, 1966. Citado 2 vezes nas páginas [33](#) e [122](#).
- BERTSEKAS, D. P. Nonlinear programming. *Journal of the Operational Research Society*, Taylor & Francis, v. 48, n. 3, p. 334–334, 1997. Citado na página [28](#).
- BLANCHET, J. et al. Convergence rate analysis of a stochastic trust-region method via supermartingales. *INFORMS journal on optimization*, INFORMS, v. 1, n. 2, p. 92–119, 2019. Citado 2 vezes nas páginas [32](#) e [75](#).
- BLUM, J. R. Approximation methods which converge with probability one. *The Annals of Mathematical Statistics*, JSTOR, p. 382–386, 1954. Citado 5 vezes nas páginas [28](#), [29](#), [30](#), [47](#) e [48](#).
- BLUM, J. R. Multidimensional stochastic approximation methods. *The annals of mathematical statistics*, JSTOR, p. 737–744, 1954. Citado 5 vezes nas páginas [29](#), [30](#), [32](#), [50](#) e [71](#).
- BOLLAPRAGADA, R.; BYRD, R.; NOCEDAL, J. Adaptive sampling strategies for stochastic optimization. *SIAM Journal on Optimization*, SIAM, v. 28, n. 4, p. 3312–3343, 2018. Citado 2 vezes nas páginas [75](#) e [107](#).
- BRENNAN, R. W.; ROGERS, P. Stochastic optimization applied to a manufacturing system operation problem. In: *Proceedings of the 27th conference on Winter simulation*. [S.l.: s.n.], 1995. p. 857–864. Citado na página [31](#).
- BRENT, R. P. A reliable method for finding the zeros of a function. *The Computer Journal*, v. 14, n. 4, p. 422–425, 1971. Citado na página [21](#).
- BROYDEN, C. G. Quasi-Newton methods and their application to function minimisation. *Mathematics of Computation*, v. 21, n. 99, p. 368–381, 1967. Citado na página [51](#).
- BUESING, L.; WEBER, T.; MOHAMED, S. Stochastic gradient estimation with finite differences. In: *NeurIPS Workshop on Advances in Approximate Inference*. [S.l.: s.n.], 2016. Citado na página [117](#).
- CARTIS, C.; SCHEINBERG, K. Global convergence rate analysis of unconstrained optimization methods based on probabilistic models. *Mathematical Programming*, Springer, v. 169, p. 337–375, 2018. Citado na página [107](#).
- CHANG, K.-H.; HONG, L. J.; WAN, H. Stochastic trust-region response-surface method (strong)—a new response-surface framework for simulation optimization. *INFORMS Journal on Computing*, INFORMS, v. 25, n. 2, p. 230–243, 2013. Citado na página [30](#).
- CHEN, R.; MENICKELLY, M.; SCHEINBERG, K. Stochastic optimization using a trust-region method and random models. *Mathematical Programming*, Springer, v. 169, p. 447–487, 2018. Citado na página [30](#).

- CHOW, Y. S.; ROBBINS, H.; SIEGMUND, D. *The theory of optimal stopping*. [S.l.]: Dover, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 39.
- CHUNG, K. L. On a stochastic approximation method. *The Annals of Mathematical Statistics*, JSTOR, p. 463–483, 1954. Citado na página 64.
- CONN, A. R.; GOULD, N. I.; TOINT, P. L. *Trust region methods*. [S.l.]: SIAM, 2000. Citado na página 30.
- DAUPHIN, Y. N. et al. Identifying and attacking the saddle point problem in high-dimensional non-convex optimization. *Advances in neural information processing systems*, v. 27, 2014. Citado na página 30.
- DERMAN, C.; SACKS, J. On dvoretzky's stochastic approximation theorem. *The Annals of Mathematical Statistics*, JSTOR, v. 30, n. 2, p. 601–606, 1959. Citado na página 31.
- DVORETSKY, A. *On stochastic approximation*. [S.l.]: Mathematics Division, Office of Scientific Research, US Air Force, 1955. Citado 3 vezes nas páginas 28, 30 e 35.
- DVORETZKY, A. Stochastic approximation revisited. *Advances in Applied Mathematics*, Academic Press, v. 7, n. 2, p. 220–227, 1986. Citado na página 31.
- FABIAN, V. On asymptotic normality in stochastic approximation. *The Annals of Mathematical Statistics*, JSTOR, p. 1327–1332, 1968. Citado na página 64.
- FLETCHER, R. *Practical methods of optimization. Volume 1: Unconstrained Optimization*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1987. Citado na página 28.
- FRIEDLANDER, M. P.; SCHMIDT, M. Hybrid deterministic-stochastic methods for data fitting. *SIAM Journal on Scientific Computing*, SIAM, v. 34, n. 3, p. A1380–A1405, 2012. Citado na página 75.
- GALL, J.-F. L. *Brownian motion, martingales, and stochastic calculus*. [S.l.]: Springer, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 38, 42 e 44.
- GLADYSHEV, E. On stochastic approximation. *Theory of Probability & Its Applications*, SIAM, v. 10, n. 2, p. 275–278, 1965. Citado na página 28.
- GOODSELL, C.; HANSON, D. Almost sure convergence for the robbins-monro process. *The Annals of Probability*, JSTOR, p. 890–901, 1976. Citado na página 64.
- HAGER, W. W.; ZHANG, H. A new conjugate gradient method with guaranteed descent and an efficient line search. *SIAM Journal on optimization*, SIAM, v. 16, n. 1, p. 170–192, 2005. Citado 5 vezes nas páginas 32, 33, 34, 121 e 122.
- KIEFER, J.; WOLFOWITZ, J. Stochastic estimation of the maximum of a regression function. *The Annals of Mathematical Statistics*, JSTOR, p. 462–466, 1952. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.
- KOMLÓS, J.; RÉVÉSZ, P. On the rate of convergence of the robbins-monro method. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, Springer, v. 25, p. 39–47, 1972. Citado na página 64.

- LAI, T. L. Extended stochastic lyapunov functions and recursive algorithms in linear stochastic systems. In: SPRINGER. *Stochastic Differential Systems: Proceedings of the 4th Bad Honnef Conference, June, 20–24, 1988*. [S.l.], 2006. p. 206–220. Citado na página 31.
- LAI, T. L.; YUAN, H. Stochastic approximation: from statistical origin to big-data, multidisciplinary applications. *The Annals of Mathematical Statistics*, p. 291–302, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 31.
- LIU, G.-R. *Meshfree methods: moving beyond the finite element method*. [S.l.]: CRC press, 2009. Citado na página 75.
- MACCHI, O.; EWEDA, E. Second-order convergence analysis of stochastic adaptive linear filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 28, n. 1, p. 76–85, 1983. Citado na página 31.
- MAEDA, Y.; FIGUEIREDO, R. J. D. Learning rules for neuro-controller via simultaneous perturbation. *IEEE Transactions on Neural Networks*, IEEE, v. 8, n. 5, p. 1119–1130, 1997. Citado na página 31.
- MOHAMED, S. et al. Monte carlo gradient estimation in machine learning. *Journal of Machine Learning Research*, v. 21, n. 132, p. 1–62, 2020. Citado na página 117.
- NEMIROVSKI, A. et al. Robust stochastic approximation approach to stochastic programming. *SIAM Journal on optimization*, SIAM, v. 19, n. 4, p. 1574–1609, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 32, 64 e 121.
- NEMIROVSKIJ, A. S.; YUDIN, D. B. Problem complexity and method efficiency in optimization. Wiley-Interscience, 1983. Citado na página 64.
- NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. Conjugate gradient methods. *Numerical Optimization*, Springer, p. 101–134, 2006. Citado 5 vezes nas páginas 32, 34, 51, 56 e 121.
- NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. Line search methods. *Numerical Optimization*, Springer, p. 30–65, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 33.
- PAQUETTE, C.; SCHEINBERG, K. A stochastic line search method with expected complexity analysis. *SIAM Journal on Optimization*, SIAM, v. 30, n. 1, p. 349–376, 2020. Citado 4 vezes nas páginas 32, 75, 106 e 107.
- ROBBINS, H.; MONRO, S. A stochastic approximation method. *The annals of mathematical statistics*, JSTOR, p. 400–407, 1951. Citado 6 vezes nas páginas 22, 27, 28, 30, 35 e 47.
- ROBBINS, H.; SIEGMUND, D. A convergence theorem for non negative almost supermartingales and some applications. In: *Optimizing methods in statistics*. [S.l.]: Elsevier, 1971. p. 233–257. Citado 9 vezes nas páginas 31, 34, 35, 36, 40, 42, 44, 45 e 121.
- ROLLA, L.; DELIMA, B. *Probabilidade*. 2024. <https://www.ime.usp.br/leorolla/probabilidade/>. Accessed: 2024-12-30. Citado 4 vezes nas páginas 42, 78, 128 e 132.
- RUPPERT, D. A newton-raphson version of the multivariate robbins-monro procedure. *The Annals of Statistics*, Institute of Mathematical Statistics, v. 13, n. 1, p. 236–245, 1985. Citado na página 29.

- RUSTAGI, J. S. *Optimizing Methods in Statistics: Proceedings of a Symposium Held at the Center for Tomorrow, the Ohio State University, June 14-16, 1971*. [S.l.]: Academic Press, 2014. Citado na página 30.
- SHIRYAEV, A. N. *Probability-I*. [S.l.]: Springer, 2016. v. 95. Citado na página 77.
- SPALL, J. C. Multivariate stochastic approximation using a simultaneous perturbation gradient approximation. *IEEE transactions on automatic control*, IEEE, v. 37, n. 3, p. 332–341, 1992. Citado na página 29.
- STYBLINSKI, M.; TANG, T.-S. Experiments in nonconvex optimization: stochastic approximation with function smoothing and simulated annealing. *Neural Networks*, Elsevier, v. 3, n. 4, p. 467–483, 1990. Citado na página 31.
- TRIPURANENI, N. et al. Stochastic cubic regularization for fast nonconvex optimization. *Advances in neural information processing systems*, v. 31, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 75 e 106.
- TROPP, J. A. et al. An introduction to matrix concentration inequalities. *Foundations and Trends® in Machine Learning*, Now Publishers, Inc., v. 8, n. 1-2, p. 1–230, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 75 e 106.
- VENTER, J. On dvoretzky stochastic approximation theorems. *The Annals of Mathematical Statistics*, JSTOR, p. 1534–1544, 1966. Citado na página 31.
- WARDI, Y. A stochastic steepest-descent algorithm. *Journal of optimization theory and applications*, Springer, v. 59, p. 307–323, 1988. Citado na página 31.
- WILLIAMS, D. *Probability with martingales*. [S.l.]: Cambridge university press, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 45.
- WOLFE, P. Convergence conditions for ascent methods. *SIAM review*, SIAM, v. 11, n. 2, p. 226–235, 1969. Citado na página 121.
- WOUWER, A. V.; RENOTTE, C.; REMY, M. On the use of simultaneous perturbation stochastic approximation for neural network training. In: *IEEE. Proceedings of the 1999 American Control Conference (Cat. No. 99CH36251)*. [S.l.], 1999. v. 1, p. 388–392. Citado na página 31.
- YIN, G. G.; ZHU, Y. Averaging procedures in adaptive filtering: An efficient approach. *IEEE transactions on automatic control*, IEEE, v. 37, n. 4, p. 466–475, 1992. Citado na página 31.
- ZOUTENDIJK, G. Nonlinear programming, computational methods. *Integer and nonlinear programming*, North-Holland, p. 37–86, 1970. Citado na página 121.

Apêndices

APÊNDICE A – Demonstrações

Lema A.0.1. *Seja $\{\tau_k\}_{k \geq 1}$ o processo que representa o tempo entre chegadas do processo de renovação $\{A_k\}_{k \geq 0}$, definido em (4.8). Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos:*

$$E[\tau_n] = p + \left(1 + \frac{1}{2p-1}\right)(1-p) = \frac{p}{2p-1}. \quad (\text{A.1})$$

Demonstração. Primeiramente, vamos definir o processo estocástico $\{\bar{Z}_k\}_{k \geq 0}$ como: $\bar{Z}_0 = -1$ e $\bar{Z}_{k+1} = \bar{Z}_k + W_{k+1}$, para todo $k \geq 0$. Notemos que o processo $\{\bar{Z}_k\}_{k \geq 0}$ é o passeio aleatório não simétrico, pois $P(W_k = 1) > \frac{1}{2}$, para todo $k \geq 0$, e $\{W_k\}_{k \geq 0}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.

Assim sendo, definimos o tempo de parada $\bar{\tau}$, como

$$\bar{\tau} = \inf\{n : \bar{Z}_n = 0\},$$

e o processo parado $\{\bar{Z}_{\bar{\tau} \wedge n}\}_{n \geq 0}$, para todo $n \geq 0$, como

$$\bar{Z}_{\bar{\tau} \wedge n} = \bar{Z}_0 + \sum_{k=1}^{\bar{\tau} \wedge n} W_k.$$

Logo, podemos utilizar o teorema da amostragem opcional para concluir que:

$$E\left(\sum_{k=1}^{\bar{\tau}} W_k\right) = 1.$$

Em seguida, pelo Teorema da identidade de Waldi (Capítulo 12 de [\(ROLLA; DELIMA, 2024\)](#)), obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= E\left(\sum_{k=1}^{\bar{\tau}} W_k\right) \\ &= E(\bar{\tau})E(W_1) \\ &= E(\bar{\tau})(p + (-1)(1-p)) \\ &= E(\bar{\tau})(2p-1), \end{aligned}$$

resultando em

$$E(\bar{\tau}) = \frac{1}{2p-1}.$$

Adiante, vamos particionar o espaço nos eventos $\{W_1 = 1\}$ e $\{W_1 = -1\}$ para concluir a demonstração desse lema. Então,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\tau_1) &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(\tau_1 \mid W_1)) \\
 &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(\tau_1 \mathbf{1}_{\{W_1=1\}} \mid W_1)) + \mathbf{E}(\mathbf{E}(\tau_1 \mathbf{1}_{\{W_1=-1\}} \mid W_1)) \\
 &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(\mathbf{1} \mathbf{1}_{\{W_1=1\}} \mid W_1)) + \mathbf{E}(\mathbf{E}((1 + \bar{\tau}) \mathbf{1}_{\{W_1=-1\}} \mid W_1)) \\
 &= \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{W_1=1\}}) + \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{W_1=-1\}} \mathbf{E}(1 + \bar{\tau} \mid W_1)) \\
 &= p + \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{W_1=-1\}} \mathbf{E}(1 + \bar{\tau})) \\
 &= p + \left(1 + \frac{1}{2p-1}\right)(1-p).
 \end{aligned}$$

□

Lema A.0.2. Considerando os processos estocásticos $\{\mathcal{A}_k\}_{k \geq 0}$, $\{A_k\}_{k \geq 0}$, $\{\Phi_k\}_{k \geq 0}$, $\{\tau_k\}_{k \geq 1}$, $\{W_k\}_{k \geq 0}$, $\{Z_k\}_{k \geq 0}$, $\{N(k)\}_{k \geq 1}$ e $\{\tau_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$ definidos na Seção 4.1 e as definições de Θ e h , fornecidas na Hipótese I, então

$$\mathbf{E}[N(\tau_\epsilon - 1) + 1] \leq \frac{\mathbf{E}[\Phi_0]}{\Theta h(\mathcal{A})}.$$

Demonstração. Definamos o processo estocástico $\{R_k\}_{k \geq 0}$, com $R_0 = \Phi_0$ e, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$R_k = \Phi_{k \wedge \tau_\epsilon} + \theta \sum_{j=0}^{(k \wedge \tau_\epsilon) - 1} h(\mathcal{A}_j). \quad (\text{A.2})$$

Observemos que R_k é uma variável aleatória não-negativa, \mathcal{F}_k -mensurável. Além disso, temos que $\{R_k\}_{k \geq 0}$ é um supermartingale, pois

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(R_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) &= \mathbf{E}(R_{k+1} \mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > k\}} + R_{k+1} \mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon \leq k\}} \mid \mathcal{F}_k) \\
 &= \mathbf{E}(R_{k+1} \mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > k\}} \mid \mathcal{F}_k) + R_{\tau_\epsilon}.
 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Já, da equação (A.2), temos que:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(R_{k+1} \mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > k\}} \mid \mathcal{F}_k) &= \mathbf{E}(R_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) \mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > k\}} \\
 &= \mathbf{E}\left(\Phi_{k+1} + \theta \sum_{j=0}^k h(\mathcal{A}_j) \mid \mathcal{F}_k\right) \mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > k\}} \\
 &\leq \left(\Phi_k - \theta h(\mathcal{A}_k) + \theta \sum_{j=0}^k h(\mathcal{A}_j)\right) \mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > k\}} \\
 &= \left(\Phi_k - \theta \sum_{j=0}^{k-1} h(\mathcal{A}_j)\right) \mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > k\}} \\
 &= R_k \mathbf{1}_{\{\tau_\epsilon > k\}}.
 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

E, das relações (A.3) e (A.4), obtemos que

$$\mathbf{E}(R_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) \leq R_k,$$

portanto, $\{R_k\}_{k \geq 0}$ é um supermartingale. Como consequência disso e da propriedade da esperança iterada, temos que

$$\mathbb{E} \left(\Phi_{k \wedge \tau_\epsilon} + \theta \sum_{j=0}^{(k \wedge \tau_\epsilon) - 1} h(\mathcal{A}_j) \right) = \mathbb{E}(R_k) \leq \mathbb{E}(R_0) = \mathbb{E}(\Phi_0)$$

e, da observação de $\Phi_k \geq 0$, para todo $k \geq 0$, resulta que

$$\theta \mathbb{E} \left(\sum_{j=0}^{(k \wedge \tau_\epsilon) - 1} h(\mathcal{A}_j) \right) \leq \mathbb{E}(\Phi_0).$$

Dispondo, por definição, que h é uma função não negativa, encontramos que

$$\sum_{j=0}^{(k \wedge \tau_\epsilon) - 1} h(\mathcal{A}_j) \nearrow \sum_{j=0}^{\tau_\epsilon - 1} h(\mathcal{A}_j),$$

quando $k \rightarrow \infty$, que é válida inclusive no conjunto $\{\tau_\epsilon = +\infty\}$. Assim sendo, utilizando o Teorema da Convergência Monótona, concluímos que

$$\theta \mathbb{E} \left(\sum_{j=0}^{\tau_\epsilon - 1} h(\mathcal{A}_j) \right) \leq \mathbb{E}(R_0) = \mathbb{E}(\Phi_0). \quad (\text{A.5})$$

Então, da definição do processo de contagem N e da definição de processo de renovação $\{A_k\}_{k \geq 0}$, temos que: $\mathcal{A}_{A_k} \geq \mathcal{A}_\epsilon$; $\{A_1, \dots, A_{\tau_\epsilon}\} \subseteq \{1, 2, \dots, \tau_\epsilon\}$. Para mais, do fato de h ser uma função não decrescente, procede que:

$$\begin{aligned} \theta \sum_{j=0}^{\tau_\epsilon - 1} h(\mathcal{A}_j) &\geq \theta \sum_{j=0}^{\tau_\epsilon - 1} h(\mathcal{A}_j) \mathbb{1}_{\{j \in \{A_i\}_{i=0}^\infty\}} \\ &\geq \theta h(\mathcal{A}_\epsilon) \sum_{j=0}^{\tau_\epsilon - 1} \mathbb{1}_{\{j \in \{A_i\}_{i=0}^\infty\}} \\ &= \theta h(\mathcal{A}_\epsilon) \left(1 + \sum_{j=1}^{\tau_\epsilon - 1} \mathbb{1}_{\{j \in \{A_i\}_{i=0}^\infty\}} \right) \\ &= \theta h(\mathcal{A}_\epsilon) [1 + N(\tau_\epsilon - 1)]. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Enfim, das desigualdades (A.5) e (A.6), encontramos o resultado desejado, que

$$\mathbb{E}(N(\tau_\epsilon - 1) + 1) \leq \frac{\mathbb{E}(\Phi_0)}{\theta h(\mathcal{A}_\epsilon)}.$$

□

Proposição A.0.3. Identidade de Wald

Seja $\{Y_k\}_{k \geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias independentes tais que: $P(Y_k \in [0, +\infty]) = 1$ para todo $k \geq 1$; $E[Y_k] = \mu_k$, com $\mu_k \in [0, +\infty]$ para todo $k \geq 1$; e τ um tempo de parada em relação à filtração natural. Definamos $S_k = Y_1 + \dots + Y_k$, $S_0 = 0$, $s_k = \mu_1 + \dots + \mu_k$. Então

$$E[S_\tau] = E[s_\tau] \quad (\text{A.7})$$

Demonstração. Seja $m \in \mathbb{N}$, definimos, para todo $i \in \mathbb{N}$, as variáveis aleatórias truncadas $Y_i^m = m \wedge Y_i$, $\tau^m = m \wedge \tau$, $\mu_i^m = E(Y_i^m)$, $S_n^m = Y_1^m + \dots + Y_n^m$ e $s_n^m = \mu_1 + \dots + \mu_n^m$. Então, temos que $\{Y_n^m\}_{n \geq 1}$, $\{\mu_n^m\}_{n \geq 1}$, $\{S_n^m\}_{n \geq 1}$, $\{s_n^m\}_{n \geq 1}$ e τ^m são variáveis aleatórias não negativas e, além disso, não decrescentes em relação a m . Assim sendo, definimos a sequência de variáveis aleatórias $\{M_n\}_{n \geq 1}$ tal que $M_n = S_n^m - s_n^m$, para todo $n \geq 1$, resultando que essa sequência definida é um martingale. E, pelo teorema da amostragem opcional, obtemos que

$$E(S_{\tau^m}^m) = E(s_{\tau^m}^m).$$

Visto que $S_{\tau^m}^m$ é não decrescente em m , temos

$$S_{\tau^m}^m \nearrow S_\tau, \quad \text{quando } m \rightarrow \infty.$$

Se $\tau = \infty$, interpretamos $S_\tau = \sup_{n \geq 0} \sum_m S_n^m$. Por outro lado, de forma análoga, obtemos que

$$s_{\tau^m}^m \nearrow s_\tau, \quad \text{quando } m \rightarrow \infty.$$

Por fim, utilizando o Teorema da Convergência Monótona, concluímos que

$$E(S_\tau) = E(s_\tau).$$

□

Teorema A.0.4. *Considerando os processos estocásticos $\{\mathcal{A}_k\}_{k \geq 0}$, $\{A_k\}_{k \geq 0}$, $\{\Phi_k\}_{k \geq 0}$, $\{\tau_k\}_{k \geq 1}$, $\{W_k\}_{k \geq 0}$, $\{Z_k\}_{k \geq 0}$, $\{N(k)\}_{k \geq 1}$ e $\{\tau_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$ definidos no decorrer da Seção 4.1, se a Hipótese I é satisfeita, então*

$$E[\tau_\epsilon - 1] \leq \frac{p}{2p - 1} \frac{E[\Phi_0]}{\theta h(\overline{\mathcal{A}})}.$$

Demonstração. Definamos, para todo $n \geq 0$,

$$\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{A_n} = \{A \in \sigma(\cup_{n=0}^\infty \mathcal{F}_n) : A \cap \{A_n \leq k\} \in \mathcal{F}_k \quad \forall k \geq 0\};$$

e, como consequências, teremos:

- 1) \mathcal{G}_n é uma σ -álgebra;
- 2) A_n é um tempo de parada com relação a filtração $\{\mathcal{F}_k\}_{k \geq 0}$ e é \mathcal{G}_n -mensurável. Como $\tau_n = A_n - A_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então, τ_n é também \mathcal{G}_n -mensurável;
- 3) $N(\tau_\epsilon - 1) + 1$ é um tempo de parada com relação à $\{\mathcal{G}_n\}_{n \geq 0}$.

Para a última consequência, encontramos que

$$\begin{aligned} \{N(\tau_\epsilon - 1) + 1 \leq n\} &= \cup_{k=0}^{n-1} \{N(k) \leq n - 1, \tau_\epsilon - 1 = k\} \\ &= \cup_{k=0}^{n-1} \{N(k) + 1 \leq n, \tau_\epsilon = k + 1\} \subseteq \mathcal{G}_n. \end{aligned}$$

Pois, observemos que $N(k) + 1$ é um tempo de parada com relação à filtração $\{\mathcal{G}_n\}_{n \geq 0}$, visto que, para todo $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} \{N(k) + 1 \leq n\} &= \{N(k) \leq n - 1\} \\ &= \{N(k) < n\} \\ &= \{A_n > k\} \\ &= \{A_n \leq k\}^c \in \mathcal{F}_k. \end{aligned}$$

Logo, $\{N(k) + 1 \leq n\} \cap \{A_n \leq m\} = \{A_n \leq k\}^c \cap \{A_n \leq m\}$ e $\{A_n \leq k\}^c \cap \{A_n \leq m\} \in \mathcal{F}_m$ para todo $m \geq 0$, uma vez que, $\{A_n \leq k\}^c = \Omega$ para $0 \leq k \leq n - 1$. Portanto, temos que $\{N(k) + 1 \leq n\} \in \mathcal{G}_n$.

Por sua vez, τ_ϵ também é um tempo de parada com relação à filtração $\{\mathcal{G}_n\}_{n \geq 0}$, pois, para todo $m \geq 0$ e $1 \leq k \leq n$, $\{\tau_\epsilon \leq k\} \cap \{A_n \leq m\} \in \mathcal{F}_m$, visto que $\{A_n \leq m\} = \emptyset$ para $m \leq n - 1$. Já para todo $m \geq n$, teremos que $\{\tau_\epsilon \leq k\} \in \mathcal{F}_m$ e $\{A_n \leq m\} \in \mathcal{F}_m$. Logo, $\{\tau_\epsilon \leq k\} \in \mathcal{G}_n$ para todo $1 \leq k \leq n$.

Notemos também, pelo fato de $\{W_k\}_{k \geq 0}$ ser uma sequência de variáveis aleatórias independentes, teremos que

$$\mathbb{E}(\tau_{n+1} \mid \mathcal{G}_n) = \mathbb{E}(\tau_{n+1}) = \frac{p}{2p - 1}.$$

Então, visto que, por definição, τ_n é \mathcal{G}_n -mensurável, podemos utilizar a Proposição (A.0.3) para concluir que

$$\mathbb{E}(A_{N(\tau_\epsilon - 1) + 1}) = \mathbb{E}(\tau_n) \mathbb{E}(N(\tau_\epsilon - 1) + 1).$$

Por fim, da definição do processo N , temos que $A_{N(\tau_\epsilon - 1) + 1} \geq \tau_\epsilon - 1$, da igualdade anterior e dos Lemas A.0.1 e A.0.2, obtemos o resultado desejado, que

$$\mathbb{E}(\tau_\epsilon - 1) \leq \mathbb{E}(\tau_n) \mathbb{E}(N(\tau_\epsilon - 1) + 1) \leq \frac{p}{2p - 1} \frac{\mathbb{E}(\Phi_0)}{\theta h(\mathcal{A}_\epsilon)}.$$

□

Teorema A.0.5 (Princípio dos Grandes Desvios de Crámer). *Sejam $\{X_n\}_{n \geq 1}$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição comum X , e J um intervalo de \mathbb{R} . Se $I(J) < \infty$, onde I é a função taxa, então:*

$$e^{-I(J^\circ)n + o(n)} \leq P\left(\frac{S_n}{n} \in J\right) \leq e^{-I(\bar{J})n + o(n)},$$

em que $S_n = X_1 + \dots + X_n$, J° e \bar{J} são o interior e o fecho do conjunto J , respectivamente. Em particular, se $I(J^\circ) = I(\bar{J})$, temos a seguinte igualdade:

$$P\left(\frac{S_n}{n} \in J\right) = e^{-I(J)n + o(n)}. \tag{A.8}$$

Demonstração. Ver (ROLLA; DELIMA, 2024), páginas 424 a 427.

□