TESE DE DOUTORADO Nº 221

RESTRIÇÕES DE ESTABILIDADE NO CONTROLADOR PREDITIVO ROBUSTO BASEADO EM MODELO

Amanda Gonçalves Saraiva Ottoni

DATA DA DEFESA: 17/12/2015

Universidade Federal de Minas Gerais

Escola de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

RESTRIÇÕES DE ESTABILIDADE NO CONTROLADOR PREDITIVO ROBUSTO BASEADO EM MODELO

Amanda Gonçalves Saraiva Ottoni

Tese de Doutorado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Ricardo Hiroshi Caldeira Takahashi

Belo Horizonte - MG

Dezembro de 2015

Ottoni, Amanda Gonçalves Saraiva.
O91r Restrições de estabilidade no controlador preditivo robusto baseado em modelo [manuscrito] / Amanda Gonçalves Saraiva Ottoni. - 2015.
xvi, 112 f., enc.: il.

Orientador: Ricardo Hiroshi Caldeira Takahashi.

Tese (doutorado) Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Bibliografia: f. 104-112.

1. Engenharia elétrica – Teses. 2. Controle preditivo - Teses. 3. Controle robusto - Teses. 4. Transferência de funções - Teses. 5. Incerteza - Teses. I. Takahashi, Ricardo Hiroshi Caldeira. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 621.3(043)

"Restrições de Estabilidade No Controlador Preditivo Robusto Baseado Em Modelo"

Amanda Gonçalves Saraiva Ottoni

Tese de Doutorado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 17 de dezembro de 2015.

Por:

Prof. Dr. Ricardo Hiroshi Caldeira Takahashi
DMAT (UFMG) - Orientador

Prof. Dr. Luis Antonio Aguirre
DELT (UFMG)

Prof. Dr. Guilherme Vianna Raffo
DELT (UFMG)

Prof. Dr. Roberto Kawakami Harrop Galvão
Divisão de Engenharia Eletrônica (ITA)

Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite
Departamento de Engenharia Mecatrônica (CEFET/MG)

Dedico este trabalho a Deus, que tantas graças, além desta, já derramou sobre minha vida.

Ao Eloy e ao nosso filho, César.

Agradecimentos

Agradeço,

primeiramente a Deus, cuja presença em minha vida me deu forças para concluir este trabalho.

ao meu esposo, José Eloy Ottoni, por seu amor incondicional, pelo seu carinho, zelo e compreensão, pelo seu apoio e incentivo, que foram essenciais para mim, ao longo desta jornada.

ao meu orientador, Prof. Ricardo Takahashi, pelos quase seis anos (contando o período em que fiz matérias isoladas) de valiosa orientação acadêmica e por sua gentileza e compreensão em diversos momentos difíceis.

aos meus pais, cuja torcida e incentivo ao meu sucesso, sempre estiveram presentes em minha vida.

ao meu sogro, Octávio, pelo carinho e pelo precioso apoio.

aos meus irmãos, Adriana e Alex, pela amizade e carinho, sempre.

ao professor Guilherme Vianna Raffo, pelas contribuições a este trabalho e pelas parcerias desenvolvidas.

ao professor Luis Antonio Aguirre, pelo ótimo curso oferecido e pelos comentários e sugestões que me foram passados em diversos momentos.

ao meu colega de doutorado, Alípio, por toda ajuda que me ofereceu, pelas trocas de experiências, pelas parcerias desenvolvidas e pelas diversas contribuições ao meu trabalho.

aos colegas do Departamento de Física e Matemática - DEFIM - pelo grande apoio que recebi durante meu doutorado.

aos meus colegas de trabalho, Pedro Shiroma, Alexandre Pereira e Ubiratã Almeida por sempre se mostrarem tão prestativos e eficientes ao me ajudarem quando meu computador resolvia não funcionar.

à Cátia, pela importantíssima orientação psicológica, que tão bem fez a mim e aos que me rodeiam.

"Procure ser uma pessoa de valor, em vez de procurar ser uma pessoa de sucesso. O sucesso é consequência."

Albert Einstein

Resumo

Controle preditivo baseado em modelos (conhecido pela sigla de sua expressão em inglês MPC - *Model Predictive Control*) é uma técnica de controle moderno que possui diversas variações e aplicações na indústria. Uma nova estratégia de MPC robusto, a qual chamaremos de RMPC-SC - *Robust MPC with Stability Constraints*, é proposta neste trabalho.

Um conjunto de restrições para o incremento da variável de controle, para o qual se garante a estabilidade de um sistema monovariável, descrito por um modelo linear, de tempo discreto, por meio de uma função de transferência conhecida, porém com incertezas politópicas em seus parâmetros, é calculado explicitamente. A condição desenvolvida é suficiente para a estabilização do sistema, qualquer que seja a instância da função de transferência dentro da faixa de incertezas admitidas. Além disso, este conjunto de restrições pode ser utilizado junto com qualquer técnica de MPC robusto, que admita a inclusão de restrições na variável de controle.

Ademais, um novo método de otimização Branch and Bound é proposto com o objetivo de se aprimorar o procedimento de otimização inerente ao algoritmo RMPC desenvolvido neste trabalho. O mesmo pode ser utilizado na otimização global de funções que podem ser descritas como a diferença entre funções crescentes, em um politopo do tipo caixa.

Palavras-chave: Controle Preditivo; Controle Robusto; Incerteza de Modelo; Estabilidade; Modelo Linear; Incerteza Politópica; Função de Transferência, Branch and Bound.

Abstract

Model Predictive Control (MPC) is a modern control technique that has several variations and many applications in industry. A new robust MPC strategy - RMPC-SC (Robust MPC with Stability Constraints) - is proposed in this work.

A set of constraints on the increment of the control variable that guarantees the stability of a monovariable discrete time linear dynamical system, described by a known transfer function, but with polytopic uncertainty in the parameters, is explicitly calculated. The condition developed is sufficient to stabilize the system at every instance of the transfer function within the admitted uncertainty range and can be used in conjunction with any robust MPC technique that admits inclusion of restrictions on the control variable.

Furthemore, a new optimization method Branch and Bound is proposed in order to improve the optimization procedure inherent to the RMPC algorithm, developed in this work. This method can be used in the global optimization of functions that can be described as the difference between increasing functions, constrained to a box.

Keywords: Predictive Control; Robust Control; Model Uncertanty; Stability; Linear Model; Polytopic Uncertanty; Transfer Function, Branch and Bound.

Lista de Figuras

2.1 Estrutura do controle preditivo baseado em modelo. 12
2.2 Entradas futuras e saídas preditas para o caso $H_c < H_p$ 13
2.3 Estratégia de recuo. 14
2.4 Sistema de Posicionamento Angular. 20
2.5 Modelo da planta igual ao modelo nominal: (a) Resposta do sistema controlado pelo GPC. (b) Ação de controle. 21
2.6 Modelo nominal com $\alpha(k) = 0.1$: (a) Resposta do sistema controlado pelo GPC. (b) Ação de controle. 22
2.7 Modelo nominal com $\alpha(k) = 2$: (a) Resposta do sistema controlado pelo GPC. (b) Ação de controle. 22
2.8 Modelo nominal com $\alpha(k) = 5$: (a) Resposta do sistema controlado pelo GPC. (b) Ação de controle. 23
2.9 Modelo nominal com $\alpha(k) = 10$: (a) Resposta do sistema controlado pelo GPC. (b) Ação de controle. 23
2.10 Modelo da planta igual ao modelo nominal: (a) Resposta do sistema controlado pelo GPC. (b) Ação de controle. 24
2.11 Modelo nominal (2.24), com $i = 2\%$ de incerteza: (a) Resposta do sistema controlado pelo GPC. (b) Ação de controle. 25
2.12 Modelo nominal (2.25), com $i = 5\%$ de incerteza: (a) Resposta do sistema controlado pelo GPC. (b) Ação de controle. 25
2.13 Modelo nominal (2.26), com $i = 10\%$ de incerteza: (a) Resposta do sistema controlado pelo GPC. (b) Ação de controle. . 26
2.14 Modelo nominal (2.27), com $i = 15\%$ de incerteza: (a) Resposta do sistema controlado pelo GPC. (b) Ação de controle. . 26

3.1 Esquema de um modelo com incertezas estruturadas. 33
3.2 Estrutura do SPGPC 41
3.3 Estrutura do FSPGPC 42
3.4 Modelo da planta com $\alpha(k) = 0{,}1$: (a) Resposta do sistema controlado. (b) Ação de controle - MMMPC (linha contínua) e MMEMPC (linha tracejada). 45

3.5 Modelo da planta com $\alpha(k) = 0{,}1$: (a) Resposta do sistema controlado pelo FSPGPC. (b) Ação de controle - Modelo nominal com: $\alpha_n(k) = 1$ (linha contínua), $\alpha_n(k) = 3$ (linha tracejada) e $\alpha_n(k) = 5$ (linha pontilhada). 46
3.6 Modelo da planta com $\alpha(k) = 0{,}1$ e modelo nominal com $\alpha_n(k) = 7$: (a) Resposta do sistema controlado pelo FSPGPC. (b) Ação de controle. . . 46
3.7 Modelo da planta com $\alpha(k) = 1$: (a) Resposta do sistema controlado. (b) Ação de controle - MMMPC (linha contínua) e MMEMPC (linha tracejada). 46
3.8 Modelo da planta com $\alpha(k) = 1$: (a) Resposta do sistema controlado pelo FSPGPC. (b) Ação de controle - Modelo nominal com: $\alpha_n(k) = 0{,}1$ (linha contínua), $\alpha_n(k) = 3$ (linha tracejada) e $\alpha_n(k) = 5$ (linha pontilhada). . . 47
3.9 Modelo da planta com $\alpha(k) = 1$: (a) Resposta do sistema controlado pelo FSPGPC. (b) Ação de controle - Modelo nominal com: $\alpha_n(k) = 7$ (linha contínua) e $\alpha_n(k) = 8$ (linha tracejada). 47
3.10 Modelo da planta com $\alpha(k) = 5$: (a) Resposta do sistema controlado. (b) Ação de controle - MMMPC (linha contínua) e MMEMPC (linha tracejada). 48
3.11 Modelo da planta com $\alpha(k) = 5$: (a) Resposta do sistema controlado pelo FSPGPC. (b) Ação de controle - Modelo nominal com: $\alpha_n(k) = 0{,}1$ (linha contínua), $\alpha_n(k) = 3$ (linha tracejada), $\alpha_n(k) = 8$ (linha pontilhada) e $\alpha_n(k) = 10$ (linha traço-pontilhada). 48
3.12 Modelo da planta com $\alpha(k) = 10$: (a) Resposta do sistema controlado. (b) Ação de controle - MMMPC (linha contínua) e MMEMPC (linha tracejada). 49
3.13 Modelo da planta com $\alpha(k) = 10$: (a) Resposta do sistema controlado pelo FSPGPC. (b) Ação de controle - Modelo nominal com: $\alpha_n(k) = 0{,}1$ (linha contínua), $\alpha_n(k) = 3$ (linha tracejada) e $\alpha_n(k) = 8$ (linha pontilhada). 49
3.14 Planta (3.32): (a) Resposta do sistema controlado. (b) Ação de controle - MMMPC (linha contínua) e MMEMPC (linha tracejada). 51
3.15 Planta (3.32): (a) Resposta do sistema controlado pelo FSPGPC. (b) Ação de controle - Modelo nominal: 1 (linha contínua) e 2 (linha tracejada). 51
3.16 Planta (3.32) e modelo nominal 3 : (a) Resposta do sistema controlado pelo FSPGPC. (b) Ação de controle. 51
3.17 Planta (3.33): (a) Resposta do sistema controlado. (b) Ação de controle - MMMPC (linha contínua) e MMEMPC (linha tracejada). 52
3.18 Planta (3.33): (a) Resposta do sistema controlado pelo FSPGPC. (b) Ação de controle - Modelo nominal: 1 (linha contínua), 2 (linha tracejada) e 3 (linha pontilhada). 52

3.19 Planta (3.34): (a) Resposta do sistema controlado pelo MMMPC. (b) Ação de controle. 53
3.20 Planta (3.34): (a) Resposta do sistema controlado pelo MMEMPC. (b) Ação de controle. 53
3.21 Planta (3.34) e modelo nominal 1: (a) Resposta do sistema controlado pelo FSPGPC. (b) Ação de controle. 53

4.1 Esquema para partições de $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^2$. 58
4.2 Mapa de contorno de $f(x_1,x_2) = -x_1^2-x_2^2+x_1x_2+3x_1-4x_2+5$, $0 \leq x_1 \leq 2,\ -3 \leq x_2 \leq -1$. 64
4.3 Partições válidas e descartadas no passo 2. 65
4.4 Partições válidas e descartadas no passo 3. 65
4.5 Partições válidas e descartadas no passo 4. 65
4.6 Partições válidas e descartadas no passo 5. 65
4.7 Evolução dos limites inferior e superior do valor máximo, no Exemplo 5.2.1.1. 66
4.8 Mapa de contorno de $f(x_1,x_2) = -x_1^2-x_2^2+x_1x_2+3x_1-4x_2+5$, $-5 \leq x_1 \leq -2,\ -4 \leq x_2 \leq 0$. 66
4.9 Partições válidas e descartadas no passo 2. 67
4.10 Partições válidas e descartadas no passo 3. 67
4.11 Partições válidas e descartadas no passo 4. 67
4.12 Partições válidas e descartadas no passo 5. 67
4.13 Partições válidas e descartadas no passo 6. 68
4.14 Partições válidas e descartadas no passo 7. 68
4.15 Evolução dos limites inferior e superior do valor máximo, no Exemplo 5.2.1.2. 68
4.16 Evolução dos limites inferior e superior do valor máximo de g - Exemplo 5.2.2. 70

5.1 Modelo da planta com $\alpha(k) = 0{,}1$ e modelo nominal com $\alpha_n(k) = 1$: (a) Resposta do sistema controlado. (b) Ação de controle - RMPC-SC (linha contínua), FSPGPC (linha tracejada) e GPC (linha traço-pontilhada). 82
5.2 Modelo da planta com $\alpha(k) = 0{,}1$: (a) Resposta do sistema controlado pelo MMEMPC. (b) Ação de controle. 82
5.3 Modelo da planta com $\alpha(k) = 0{,}1$ e modelo nominal com $\alpha_n(k) = 10$: (a) Resposta do sistema controlado pelo FSPGPC. (b) Ação de controle. 84
5.4 Modelo da planta com $\alpha(k) = 0{,}1$ e modelo nominal com $\alpha_n(k) = 10$: (a) Resposta do sistema controlado pelo GPC. (b) Ação de controle. 84

5.5 Modelo da planta com $\alpha(k) = 10$ e modelo nominal com $\alpha_n(k) = 5{,}05$: (a) Resposta do sistema controlado. (b) Ação de controle - RMPC-SC (linha contínua), MMEMPC (linha tracejada), FSPGPC (linha traço-pontilhada) e GPC (linha pontilhada). 85
5.6 Modelo da planta com $\alpha(k) = 10$: (a) Resposta do sistema controlado pelo RMPC-SC. (b) Ação de controle - Valores de ϵ: 0,4 (linha contínua), 0,6 (linha tracejada), 0,8 (linha traço-pontilhada) e 0,9 (linha pontilhada). 86
5.7 Modelo LTV: (a) Resposta do sistema controlado pelo RMPC-SC. (b) Ação de controle. 87
5.8 Resposta do sistema controlado pelo RMPC-SC em função do tempo, para valores de $\alpha(k)$ variando no intervalo $[0{,}1; 10]$. . . 88
5.9 Planta (5.32): (a) Resposta do sistema controlado. (b) Ação de controle - RMPC-SC (linha contínua), MMEMPC (linha tracejada), FSPGPC (linha traço-pontilhada) e GPC (linha pontilhada). 89
5.10 Planta (5.33): (a) Resposta do sistema controlado. (b) Ação de controle - RMPC-SC (linha tracejada) e MMEMPC (linha pontilhada). 90
5.11 Planta (5.33): (a) Resposta do sistema controlado pelo FSPGPC. (b) Ação de controle. 90
5.12 Planta (5.33): (a) Resposta do sistema controlado pelo GPC. (b) Ação de controle. 90
5.13 Planta (5.36): (a) Resposta do sistema controlado. (b) Ação de controle - RMPC-SC (linha contínua), MMEMPC (linha tracejada) e FSPGPC (linha pontilhada). 92
5.14 Planta (5.37): (a) Resposta do sistema controlado. (b) Ação de controle - RMPC-SC (linha contínua) e FSPGPC (linha pontilhada). 93
5.15 Planta (5.37): (a) Resposta do sistema controlado pelo MMEMPC. (b) Ação de controle. 93
5.16 Planta (5.34) associada a diversos pares (a,b). $\circ$: RMPC-SC com $D < 0{,}01$, $\times$: MMEMPC com $D < 0{,}01$. 94
5.17 Planta (5.34) associada a diversos pares (a,b). $\circ$: RMPC-SC com $D < 0{,}01$, $\times$: FSPGPC (modelo nominal $(a,b) = (0{,}7,0{,}5)$) com $D < 0{,}01$. 95
5.18 Planta (5.34) associada a diversos pares (a,b). $\circ$: RMPC-SC com $D < 0{,}01$, $\times$: FSPGPC (modelo nominal $(a,b) = (0{,}85,1{,}0)$) com $D < 0{,}01$. 95

5.19 Planta (5.34) associada ao par $(a,b) = (0{,}7; 0{,}5)$: (a) Resposta do sistema controlado pelo RMPC-SC. (b) Ação de controle. . 95
5.20 Planta (5.28) com $\alpha = 0.1$: (a) Resposta do sistema controlado. (b) Ação de controle - RMPC-SC (linha contínua), RMPC-SC(a) (linha tracejada) e RMPC-SC(b) (linha traço-pontilhada). 99
5.21 Planta (5.28) com $\alpha = 1$: (a) Resposta do sistema controlado. (b) Ação de controle - RMPC-SC (linha contínua), RMPC-SC(a) (linha tracejada) e RMPC-SC(b) (linha traço-pontilhada). 99

Lista de Tabelas

3.1 Tempo de CPU - Exemplo 3.5.1 47
3.2 Tempo de CPU - Exemplo 3.5.2 54

4.1 Ponto de ótimo, valor máximo, tempo de CPU e número de iterações - Exemplo 5.2.1.1. 64
4.2 Iterações × número de partições válidas e descartadas - Exemplo 5.2.1.1. 64
4.3 Ponto de ótimo, valor máximo, tempo de CPU e número de iterações - Exemplo 5.2.1.2. 66
4.4 Iterações × número de partições válidas e descartadas - Exemplo 5.2.1.2. 67
4.5 Branch and Bound: Ponto de ótimo, valor máximo, tempo de CPU e número de iterações - Exemplo 5.2.2. 69
4.6 Iterações × número de partições válidas e descartadas - Exemplo 5.2.2. 69
4.7 *fmincon*: Ponto de ótimo, valor máximo, tempo de CPU e número de iterações - Exemplo 5.2.2. 70

5.1 Parâmetros de controle do RMPC-SC, MMEMPC, FSPGPC e GPC para planta (5.28), simulada com $\alpha(k) = 0{,}1$. 83
5.2 Parâmetros de controle do RMPC-SC, MMEMPC, FSPGPC e GPC para planta (5.28), simulada com $\alpha(k) = 10$. 84
5.3 Parâmetros utilizados pelo RMPC-SC, MMEMPC, FSPGPC e GPC no controle da planta (5.32). 89
5.4 Parâmetros utilizados pelo RMPC-SC, MMEMPC, FSPGPC GPC e MPC no controle da planta (5.33). 91
5.5 Tempo de CPU por amostra. 99

Lista de Siglas e Abreviaturas

MPC	do inglês *Model Predictive Control*
MBPC	do inglês *Model-Based Predictive Control*
RMPC	do inglês *Robust Model Predictive Control*
RMPC-SC	do inglês *Robust Model Predictive Control with Stability Constraints*
GPC	do inglês *Generalized Predictive Controller*
SPGPC	do inglês *Smith Predictor-Based Generalized Predictive Controller*
FSPGPC	do inglês *Filtered Smith Predictor-Based Generalized Predictive Controller*
PID	do inglês *Proportional-Integral-Derivative*
DMC	do inglês *Dynamic Matrix Control*
SISO	do inglês *Single Input, Single Output*
MIMO	do inglês *Multiple Input, Multiple Output*
CRHPC	do inglês *Constrained Receding Horizon Predictive Control*
SIORHC	do inglês *Stabilizing I/O Receding Horizon Control*
LMI	do inglês *Linear Matrix Inequalities*
MMMPC	do inglês *Min-Max Model Predictive Control*
LTV	do inglês *Linear Time-Varying*
CARIMA	do inglês *Controlled Auto Regressive Integrated Moving Average*
GGP	do inglês *Generalized Geometric Programming*
LIT	Linear e Invariante pelo Tempo
MMEMPC	Min-Max Eficiente - MPC
CPU	do inglês *Central Processing Unit*
DFC	Diferença de Funções Crescentes

Lista de Símbolos e Notações

$\widehat{y}(k+m\|k)$	indica o valor predito da variável y no instante $k+m$, calculado no instante k
H_c	horizonte de controle
H_p	horizonte de predição
d	indica o valor do atraso de tempo de um sistema
$\mathbf{x}$	notação para vetor de dimesão apropriada (letras em negrito)
$\mathbf{a}$	vetor de coeficientes para as saídas, na equação de diferença
$\mathbf{b}$	vetor de coeficientes para as entradas, na equação de diferença
$h(i)$	i-ésimo valor da resposta do sistema ao impulso
z	denota a variável complexa
Δ	operador de incremento em um dado sinal ($\Delta x(k) = x(k) - x(k-1)$)
$T(z)$	função de transferência
i	valor da incerteza a ser considerada em um modelo nominal
Θ	matriz de incertezas
$\overline{x}$	valor máximo assumido pela variável x
$\underline{x}$	valor mínimo assumido pela variável x
x^*	valor ótimo da variável x
w	trajetória de referência
$\|\cdot\|_2$	norma quadrática
$\|\cdot\|_\infty$	norma infinito
$J(\cdot)$	função custo
O	ordem do filtro passa-baixas
ω_c	frequência de corte do filtro passa-baixas
$\mathcal{C}$	politopo de incertezas
A	notação para matrizes (letras maiúsculas)
A^T	$(^T)$, pós-posto a um vetor ou matriz, indica a operação de transposição
I	matriz identidade de dimensão apropriada
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^n$	conjunto das n-úplas $(x_1, \ldots, x_n)$ de números reais
$\mathbb{R}^n_+$	conjunto das n-úplas $(x_1, \ldots, x_n)$ de números reais, em que $x_i > 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{N}^n$	conjunto das n-úplas $(x_1, \ldots, x_n)$ de números naturais

Sumário

1 Introdução **1**
1.1 Estrutura do Texto 2
1.2 Publicações 4
1.2.1 Artigos Publicados em Revistas 4
1.2.2 Artigos Publicados em Congressos 4
1.3 Levantamento Bibliográfico 4
1.3.1 MPC 4
1.3.2 RMPC 6
1.3.3 *Branch and Bound* 9

2 Controle Preditivo Baseado em Modelos **11**
2.1 MPC 11
2.1.1 Estrutura Geral 12
2.1.2 Modelo do Sistema 13
2.1.3 Função Objetivo 16
2.2 Controlador Preditivo Generalizado 17
2.2.1 Modelo de Predição 17
2.2.2 Lei de Controle 19
2.3 Resultados de Simulação 20
2.3.1 Exemplo 1 20
2.3.2 Exemplo 2 22
2.4 Conclusões 25

3 Controle Preditivo Robusto Baseado em Modelos **27**
3.1 Modelos com Incertezas 28
3.1.1 Resposta ao Impulso 28
3.1.2 Matriz Função de Transferência 29
3.1.3 Espaço de Estados 30
3.1.4 Incertezas Globais 30
3.1.5 Modelos Politópicos 31
3.1.6 Modelos com Incertezas Estruturadas 32

3.2 Função Objetivo 34
3.2.1 Norma Quadrática 34
3.2.2 Norma ∞ 35
3.2.3 Norma 1 35
3.3 Método Min-Max Eficiente 36
3.4 Controlador Preditivo Generalizado Robusto 37
3.4.1 Controlador Preditivo Generalizado com Preditor de Smith 38
3.4.2 Robustez no SPGPC 41
3.5 Resultados de Simulação 43
3.5.1 Exemplo 1 44
3.5.2 Exemplo 2 48
3.6 Conclusões 54

4 Método de Otimização *Branch and Bound* para funções DFC 56
4.1 Descrição do Problema 57
4.1.1 Polinômios em Variáveis com Sinais Definidos 61
4.2 Resultados de Simulação 62
4.2.1 Problema 1 63
4.2.2 Problema 2 68
4.3 Conclusões 70

5 Restrições de Estabilidade no Controlador Preditivo Robusto Baseado em Modelos 71
5.1 Formulação do Problema 72
5.2 Restrições de Estabilidade 73
5.3 RMPC-SC 79
5.4 Resultados de simulação 80
5.4.1 Exemplo 1 81
5.4.2 Exemplo 2 87
5.4.3 Exemplo 3 91
5.5 Outras Formulações do RMPC-SC 96
5.5.1 RMPC-SC(a) 96
5.5.2 RMPC-SC(b) 98
5.5.3 RMPC-SC $\times$ RMPC-SC(a) $\times$ RMPC-SC(b) 98
5.6 Conclusões 100

6 Conclusões 101

Bibliografia 104

Capítulo 1

Introdução

Controle Preditivo Baseado em Modelo, ou MPC - *Model Predictive Control*, é o nome dado a um conjunto de métodos de controle que foram desenvolvidos considerando-se o conceito de predição e a obtenção do sinal de controle através da minimização de uma função objetivo [Camacho & Bordons (2007)]. De forma geral, as diferenças entre os diversos algoritmos existentes devem-se basicamente à forma de escolha dos modelos, ao tipo de função objetivo, ao procedimento para manipular as restrições e ao cálculo do controle [Rossiter (2003)].

O modelo do sistema é um elemento de grande importância em um controlador MPC. O mesmo deve ser capaz de representar, de forma adequada, as características do processo. Dessa forma, ao falarmos em controle preditivo baseado em modelo, não podemos deixar de mencionar a importância de uma etapa preliminar bastante significativa, que é a identificação de modelos. O modelo a ser utilizado em um controlador MPC deve ser capaz de calcular, com eficiência, as predições da saída, além de ser intuitivo e de permitir uma análise teórica do comportamento do processo.

Naturalmente, ao descrevermos o comportamento de uma planta com o uso de modelos, temos que levar em consideração as incertezas advindas dessa descrição. Isso motiva a necessidade de se desenvolverem técnicas de controle preditivo robusto, que tenham como objetivo o projeto de controladores que preservem a estabilidade e o desempenho do sistema em malha fechada, apesar das imprecisões ou incertezas dos modelos. Dessa forma, a robustez começou a ser considerada no projeto de controladores MPC, surgindo, assim, o Controlador Preditivo Robusto Baseado em Modelos, também conhecido pela sigla RMPC -*Robust Model Predictive Control*.

Este trabalho visa apresentar um projeto de controlador preditivo robusto baseado em modelo, o qual será chamado de *Controle Preditivo Robusto Baseado em Modelo com Restrições de Estabilidade* e será denotado pela sigla

RMPC-SC - *Robust MPC with Stability Constraints*. A técnica proposta apresenta um conjunto de restrições para a variável de controle. Se tais restrições forem satisfeitas, garante-se a estabilidade de um sistema descrito por um modelo linear, de tempo discreto, monovariável, por meio de uma função de transferência conhecida, porém com incertezas politópicas em seus parâmetros. A condição apresentada garante a estabilidade do sistema, quaisquer que sejam os valores assumidos pelos parâmetros, dentro do politopo de incertezas. Além disso, o conjunto de restrições a ser encontrado pode ser utilizado junto com qualquer técnica de RMPC que admita a inclusão de restrições na variável de controle.

As incertezas do modelo de predição, a ser utilizado pelo controlador RMPC proposto, consistem em incertezas politópicas do tipo caixa: $\underline{a_i} \leq a_i \leq \overline{a_i}$. Em cada passo do algoritmo RMPC-SC é necessária a aplicação de um método de otimização para encontrar os valores mínimo e máximo de um polinômio multivariável, nas variáveis a_i, com uma precisão pré-estabelecida. Surgiu, então, a motivação para o desenvolvimento de um método de otimização *branch and bound*, com base na decomposição de qualquer função polinomial, em domínios de sinais definidos, como uma diferença de funções crescentes. O algoritmo resultante, tornou-se adequado para a otimização de qualquer função descrita como uma diferença de funções crescentes, com restrições do tipo caixa.

1.1 Estrutura do Texto

Este trabalho está organizado em 5 capítulos. Parte da revisão bibliográfica está descrita na seção 1.3 e a restante é feita ao longo dos capítulos de acordo com cada tema.

O capítulo 1 traz uma breve introdução aos temas abordados nesta tese. Uma revisão bibliográfica sobre os controladores MPC e RMPC, e sobre o método de otimização *branch and bound*, é apresentada. Serão discutidos os principais trabalhos publicados sobre estes temas e as ideias básicas contidas em alguns deles, bem como algumas de suas vantagens e desvantagens.

O capítulo 2 expõe a metodologia geral de um controlador MPC e seus componentes fundamentais. Uma descrição sucinta sobre os tipos de modelo de predição e de função objetivo mais utilizados, é apresentada. Na sequência, o algoritmo de um controlador MPC bastante reconhecido, chamado de Controlador Preditivo Generalizado (GPC - *Generalized Predictive Controller*), é descrito em detalhes. Posteriormente, o desempenho do controlador GPC é ilustrado para dois exemplos de plantas simuladas. Nesses exemplos também será analisada a robustez do controlador GPC, tendo em vista

que o mesmo será utilizado como método comparativo junto às simulações realizadas no capítulo 5.

O capítulo 3 estuda o tratamento de incertezas em um controlador MPC. Nesse capítulo estão descritos os modelos com incertezas que aparecem com mais frequência na literatura, como fazer o tratamento destas incertezas, como considerar a função objetivo e de que forma deve-se resolver o problema de otimização na presença dessas incertezas. Um controlador preditivo robusto, que resolve problemas semelhantes àquele proposto nesta tese, é apresentado. O mesmo consiste em uma forma de se tratar incertezas com o uso do controlador GPC e será denotado por FSPGPC (*Filtered Smith Predictor-based Generalized Predictive Controller*). Além disso, um simples controlador RMPC, baseado em uma pequena mudança na estratégia Min-Max, será proposto e seu desempenho será comparado ao do controlador Min-Max básico e ao do controlador FSPGPC, no controle robusto de duas plantas simuladas. Essas simulações servirão de justificativa para a metodologia do novo controlador RMPC, descrito no capítulo 5, bem como para escolha do RMPC proposto neste capítulo e do FSPGPC, para atuarem junto às comparações de desempenho no mesmo capítulo.

Interrompendo brevemente a continuidade do tema central deste trabalho (o controlador MPC), será proposto, no capítulo 4, um método *branch and bound* para a otimização global de funções que podem ser descritas como a diferença entre funções crescentes (ou, equivalentemente, como a soma de funções crescentes com funções decrescentes), em um politopo do tipo caixa. O conteúdo exposto neste capítulo servirá como pré-requisito ao capítulo seguinte, uma vez que o algoritmo de otimização desenvolvido será utilizado em conjunto com o controlador RMPC apresentado no capítulo posterior.

Uma nova proposta de controlador RMPC, chamada de *Controle Preditivo Robusto Baseado em Modelo com Restrições de Estabilidade*, o *RMPC-SC*, é descrita, no capítulo 5, para o controle robusto de sistemas lineares discretos, monovariáveis, causais e invariantes no tempo. Será apresentada uma comparação do desempenho do RMPC-SC com outras técnicas de controle preditivos, descritas ao longo desta tese, para três exemplos de sistemas, visando a confirmação da eficiência e robustez do novo método.

Finalmente, o capítulo 6 apresenta as conclusões desta tese, detalhando suas as principais contribuições. Além disso, são descritas algumas perspectivas de atividades futuras, relacionadas ao trabalho proposto neste texto.

Todas as simulações realizadas nesta tese foram realizadas com o uso do software MatLab® (R2014a), em um computador CORE i7 CPU 1.8 GHz. Para medições do tempo de CPU, analisado em algumas simulações, utilizou-se os comandos *tic toc*, do MatLab.

Vale ressaltar que o grande interesse deste trabalho reside na estabilização

da saída do sistema, em estado estacionário. Ou seja, em todos os resultados de simulações, serão considerados eficientes aqueles controladores que fazem com que a saída da planta se estabilize a partir de um determinado tempo. Não serão feitas análises do estado transiente da saída do sistema.

Além disso, as discussões sobre os resultados de simulações serão feitas a partir de análises qualitativas. Ou seja, as conclusões e comparações de desempenho dos controladores estudados nesta tese, serão feitas a partir da observação e análise dos gráficos da entrada e saída do sistemas controlados, dada uma condição inicial. Este tipo de análise é usual no campo de controle preditivo baseado em modelo, como pode ser observado em diversas referências, das quais pode-se citar [Kouvaritakis et al. (2000), Clarke & Scattoline (1991), Wan & Kothare (2003), Kothare et al. (1996)].

1.2 Publicações

1.2.1 Artigos Publicados em Revistas

- Ottoni, A. G. S., Takahashi R. H. C e Raffo G. V. (2015). 'Stability Constraints for Robust Model Predictive Control'. *Mathematical Problems in Engineering*, **2015**, 1-11.

1.2.2 Artigos Publicados em Congressos

- Ottoni, A. G. S., Barbosa, A. M., Takahashi R. H. C e Aguirre, L. A. (2013). 'Controle Preditivo Baseado em Modelo com Incerteza Intervalar: Formulação e Análise de Estabilidade'. *XI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI)*, 13 a 17 de Outubro de 2013, Fortaleza - CE - Brasil.

1.3 Levantamento Bibliográfico

1.3.1 MPC

O método de controle apresentado neste trabalho pertence a uma grande classe de métodos de controle, conhecida principalmente por Controle Preditivo Baseado em Modelo ou pelas siglas MPC - *Model Predictive Control* ou MBPC - *Model-Based Predictive Control*. As ideias básicas contidas nos algoritmos MPC podem ser descritas brevemente como [Camacho & Bordons (2007)]:

- uso explícito de um modelo para predizer as saídas futuras da planta dentro do horizonte de predição;
- cálculo de uma sequência de controle que minimiza uma função objetivo;
- estratégia de recuo, isto é, aplicação à planta somente do primeiro elemento da sequência de controle, calculada no passo anterior.

De forma geral, pode-se dizer que as diferenças entre os diversos algoritmos MPC existentes devem-se basicamente à forma de escolha dos modelos (espaço de estados, função de transferência, resposta ao impulso ou degrau, equação de diferença), ao tipo de função objetivo a ser utilizada no processo de otimização e à forma de se manipularem restrições [Rossiter (2003)].

Como descrito em [Maciejowski (2002)], é difícil analisar a origem exata do MPC e suas principais ideias. Datas de publicações fornecem alguma ideia de sua precedência, entretanto os pioneiros deste método estão entre diversos pesquisadores e cientistas industriais que aplicavam estes métodos em situações práticas antes das primeiras publicações.

Richalet et al. (1978) propuseram o chamado Model Predictive Heuristic Control, um método direto de controle preditivo como alternativa ao tradicional controlador PID. Pouco tempo depois, Cutler & Ramaker (1980) apresentaram o DMC (Dynamic Matrix Control), tradicional método de controle preditivo que resolve problemas com restrições, fazendo uso de programação linear.

Rapidamente, o MPC tornou-se bastante popular, principalmente dentre os processos industriais químicos, área na qual surgiu. A grande maioria dessas aplicações é relativa a problemas multivariáveis e com restrições, e foram exatamente problemas desse tipo que provocaram o desenvolvimento das técnicas de controle MPC. Um relatório completo sobre diversas aplicações na indústria petroquímica durante os anos 1980, pode ser encontrado em [García et al. (1989)].

Um segundo ramo do MPC, baseado no controle adaptativo, começou então a emergir. Podemos citar como principais referências os métodos de controle preditivos de Peterka (1984), de Ydstie (1984), de DeKeyser et al. (1985) e o GPC [Clarke et al. (1987*a*) e Clarke et al. (1987*b*)]. Em [Normey-Rico & Camacho (1996), Normey-Rico et al. (1998)], o uso do preditor de Smith no GPC foi apresentado, dando origem ao SPGPC. Os métodos expostos nesses artigos são essencialmente limitados a sistemas SISO (single input, single output) com algumas extensões a sistemas MIMO (multiple input, multiple output). O caso com restrição não é considerado em detalhes em nenhum deles. Outros métodos contendo abordagens semelhantes podem

ser vistos em [Greco et al. (1984), Lemos & Mosca (1985), Richalet et al. (1987), Söeterboek (1982)].

Existem ainda diversas formulações do MPC em espaço de estados, o que facilitou a generalização do método para sistemas com perturbações estocásticas e erro nas variáveis [Morari (1994), Lee et al. (1984)]. A abordagem utilizando espaço estados é especialmente útil para o controle de sistemas multivariáveis.

Na década de 1990, surgiram os métodos de controle preditivo com garantia de estabilidade mediante a imposição de restrições. Dentre esses destacam-se o CRHPC de Clarke & Scattoline (1991), o SIORHC de Mosca et al. (1990) e o GPC estável sem restrições de Kouvaritakis et al. (1992) e com restrições de Rossiter & Kouvaritakis (1993). Algumas formulações em espaços de estados, com restrições e garantia de estabilidade podem ser encontradas em [Rawlings & Muske (1993), Mayne et al. (2000), Rao & Rawlings (1999)].

1.3.2 RMPC

O desempenho do MPC pode ser comprometido quando discrepâncias entre a planta e o modelo usado para realizar a predição aumentam. Por este motivo, o procedimento de modelagem da planta e a manipulação de incertezas no MPC começaram a receber bastante atenção de diversos pesquisadores, surgindo, assim, o controlador robusto baseado em modelos, que será denotado pela sigla de sua expressão em inglês, RMPC - *Robust Model Predictive Control*. Recentemente, o RMPC tem sido amplamente investigado [Bumroongsri & Kheawhom (2012)].

Em situações práticas, uma atenção especial deve ser dada ao procedimento de modelagem. Segundo uma nota técnica da Honeywell, "ferramentas de modelagem disponíveis atualmente envolvem quantidades significativas de tentativas para produzir modelos que estão em conformidade com a realidade dos dados industriais. No final do exercício de modelagem, o engenheiro de controle fica com, no máximo, uma sensação intuitiva para o valor das incertezas nos modelos. Uma vez que os modelos formam o coração de qualquer aplicação do MPC, é fundamental que o engenheiro de controle avançado tenha confiança nos modelos antes de implementá-los" [*Closed Loop Identification for Model Predictive Control: Application to Air Separation Process* (2011)].

Uma proposta de RMPC, que leva em conta incertezas inerentes ao modelo, foi proposta inicialmente por Kothare et al. (1996). Foi apresentada uma técnica de RMPC com garantia de estabilidade robusta, usando LMI's (Linear Matrix Inequalities). O método consiste em minimizar, em cada

passo, uma função objetivo para o pior caso das incertezas, com horizonte de controle infinito, sujeito a restrições na entrada e na saída da planta. Casavola et al. (2000) ampliaram o método de Kothare et al. (1996) usando um horizonte de controle finito, o que reduziu bastante o custo computacional. Desde então, o uso de LMI's em algoritmos de RMPC tornou-se bastante popular, sendo adotado até os dias de hoje. Exemplos de trabalhos de RMPC que usam LMI's podem ser encontrados nas referências [Casavola et al. (2004), Ding et al. (2008), Guzman et al. (2009)] e em diversos outros trabalhos publicados recentemente.

Uma técnica bastante utilizada no procedimento de otimização em diversos métodos de RMPC é o chamado método Min-Max, em que o sinal de controle ótimo é calculado de forma a minimizar uma função custo para o pior caso possível de incertezas, considerando as incertezas. Técnicas baseadas neste procedimento podem ser classificadas como Min-Max Model Predictive Control (MMMPC). Lee & Yu (1997) desenvolveram uma formulação inicial do MMMPC. Posteriormente, Lee & Cooley (2000) utilizaram a otimização Min-Max no MPC com modelos baseados em espaço de estados com incertezas paramétricas que variam com o tempo. Casavola et al. (2004) apresentaram uma técnica MMMPC para sistemas discretos LTV (Linear Time-Varying) descrito por modelos politópicos incertos. Ottoni et al. (2015) propõe um conjunto de restrições a serem utilizadas em conjunto com um controlador MMMPC, agregando garantia de estabilidade junto à técnica MMMPC. A estratégia Min-Max é utilizada em diversos trabalhos, alguns deles podem ser encontrados em [Bouzouita et al. (2007)], em que um RMPC é desenvolvido para modelos ARX (Auto Regressive with eXogenous input) com incertezas paramétricas, além das referências [Bemporad et al. (2003), Wang & Rawlings (2004), Gruber et al. (2011), Kheriji et al. (2011)].

Muitas da atuais pesquisas sobre RMPC objetivam a redução do custo computacional envolvido na técnica MMMPC, sem entretanto comprometer o desempenho de controle. Buscando esse objetivo, Wan & Kothare (2003) propuseram uma formulação off-line do RMPC usando LMI's. A ideia de um elipsoide que delimita uma região onde se garanta a convergência assintótica da saída, foi usada no algoritmo RMPC com restrições. Ding et al. (2007) propuseram um método RMPC semelhante, porém uma função de custo nominal é usada para substituir a função custo do pior caso, utilizada por Wan & Kothare (2003). Angeli et al. (2008) apresentaram um método de controle RMPC baseado, também, no cálculo off-line de elipsoides invariantes, buscando a questão da viabilidade recursiva, para tratar problemas com restrições nos estados e nas entradas de plantas politópicas, lineares, sujeitas a perturbações constantes. Mais recentemente, uma abordagem do RMPC usando poliedros invariantes, calculados de maneira off-line, foi apresentada

por Bumroongsri & Kheawhom (2012). O controlador RMPC, proposto nesta tese, faz uso da técnica Min-Max em sua lei de controle. A partir de uma pequena mudança no algoritmo de definição da estratégia Min-Max, obtêm-se uma lei de controle satisfatória, com custo computacional reduzido. Detalhes podem ser vistos no capítulo 3 deste texto.

Baseada nas ideias apresentadas pelos controladores RMPC, descritos no parágrafo anterior, uma nova classe de métodos de controle, que pode ser chamada de MPC robusto baseado em tubos (Tubes-RMPC) emergiu. A ideia básica consiste em calcular uma região ("tubo") e uma lei de controle que mantém as trajetórias controladas no interior deste tubo, apesar das incertezas do problema. Um controlador Tubes-RMPC foi proposto inicialmente por Chisci et al. (2001), para sistemas lineares, e por Limon et al. (2005), para sistemas não lineares, em que, desde que o estado inicial pertença à região factível, a estabilidade recursiva é garantida. Além disso, um RMPC baseado em tubos no qual a lei de controle é variante com o tempo foi apresentado por Langson et al. (2004). Mayne et al. (2009) propuseram um método Tubes-RMPC que controla plantas com a presença de perturbações nos estados e na saída. Limon et al. (2010) desenvolveram uma estratégia Tubes-RMPC que resolve problemas em que há incertezas não só no modelo da planta, mas também na referência. Outros métodos baseados no Tubes-RMPC, podem ser encontrados nas referências [Gonzalez et al. (2011), Cannon et al. (2011, 2009), Raković et al. (2012)].

Todos os trabalhos de RMPC citados acima usam uma representação em espaços de estados para o modelo da planta, com exceção de [Bouzouita et al. (2007)], [Lew & Juang (2012)], [Huang & Wang (2009)] e [Ottoni et al. (2015)], que abordam o RMPC usando modelos em função de transferência. No trabalho de Bouzouita et al. (2007), a lei de controle é obtida pela resolução de um problema de otimização Min-Max, não-convexo, no qual um método de otimização determinístico, o GGP (*Generalized Geometric Programming*) é proposto. Lew & Juang (2012) tratam da quantificação de incertezas em modelos lineares descritos por função de transferência e, posteriormente, definem uma função objetivo para o RMPC para minimizar a expectativa de erro, dada a incerteza. Huang & Wang (2009) estudam a aplicação do RMPC em um processo descrito por função de transferência que possui incertezas e atraso de tempo. Um RMPC usando LMI's é então modificado e aplicado para resolver o problema proposto. No trabalho de Ottoni et al. (2015), um conjunto de restrições para a variável de entrada é produzido. Se tais restrições forem satisfeitas, garante-se a estabilidade de um sistema descrito por um modelo do tipo ARX, com incertezas politópicas nos coeficientes do modelo.

A técnica RMPC, proposta neste trabalho, insere-se nesse contexto. O

controlador RMPC-SC proposto, busca a estabilização de sistemas que podem ser descritos por funções de transferência. Incertezas politópicas com relação aos parâmetros do modelo são consideradas. Além disso, o problema é abordado sob a ótica de garantia de estabilidade da planta em malha fechada.

Outros métodos de controle RMPC que utilizam modelos descritos por função de transferência, são aqueles que inserem o tratamento de incertezas no controlador GPC. O efeito que a inserção de um filtro causa na robustez de um sistema em malha fechada, controlado pelo GPC, tem sido analisado em diversos artigos [Clarke & Mohtadi (1989), Robinson & Clarke (1991), Yoon & Clarke (1993, 1995)]. Em [Ansay & Wertz (1997)], uma formulação robusta do GPC leva em conta o desempenho de controle e a robustez. Outras metodologias que tratam incertezas, com o uso do GPC, podem ser vistas em [Mcintosh et al. (1991), Kouvaritakis et al. (1992)]. Em [Normey-Rico & Camacho (1999)], um filtro é utilizado para aprimorar a robustez do SPGPC e em [Normey-Rico & Camacho (2000)], uma ideia semelhante é aplicada a sistemas multivariáveis.

1.3.3 *Branch and Bound*

Os algoritmos denominados *branch and bound*, consistem de métodos de otimização global para solução de problemas não convexos. Eles podem ser considerados não heurísticos, pois terminam com um certificado de que a solução retornada pelo algoritmo é ϵ-próxima do ponto ótimo [Boyd & Mattingley (2007)]. Este tipo de algoritmo realiza buscas inteligentemente estruturadas no espaço de todas as soluções viáveis.

Considerando-se problemas de maximização, por exemplo, a região de todas as soluções viáveis é repetidamente dividida em partes cada vez menores e um limite superior é calculado para o valor da função objetivo dentro de cada subconjunto. Após cada particionamento, aqueles subconjuntos, dentro dos quais os limites superiores da função objetivo são menores do que o valor da função objetivo de uma solução viável conhecida, são excluídos de qualquer outra partição. O particionamento continua até que uma solução viável seja encontrada, de tal forma que o valor da função objetivo nessa solução não seja diferente do limite superior da função objetivo, em qualquer subconjunto, em mais que um dado valor ϵ de tolerância [Lawler & Wood (1966)].

Segundo Kohler & Steiglitz (1974), os algoritmos *branch and bound* emergiram como o principal método para encontrar as soluções de problemas de otimização discreta.

A aplicação da técnica *branch and bound* tem crescido rapidamente e

algumas dessas aplicações podem ser vistas nos seguintes problemas: inteligência artificial [Korf (1999), Kumar & Kanal (1983), Lawler & Wood (1966), Mitschele-Thiel (1994), Nilsson (1971, 1978), Webb (1995)], seleção de recursos [Narendra & Fukunaga (1977), Fukunaga (1990), Hamamoto et al. (1990), Kudo & Sklansky (2000), Yu & Yuan (1993), Somol et al. (2004)], clustering [Koontz et al. (1975)], problemas de sequenciamento flow-shop e job-shop [Ignall & Schrage (1965), Schrage (1970*a*,*b*)], problema do caixeiro viajante [Held & Karp (1971)] e os problemas de programação inteira [Geoffrion & Marsten (1972)].

Os algoritmos *branch and bound* são comumente lentos, uma vez que, no pior dos casos, eles exigem um esforço computacional que cresce exponencialmente com o número de variáveis do problema. Por este motivo, a sua utilidade é limitada a problemas de dimensões menores, sendo essencial a identificação e implementação de algoritmos computacionalmente eficientes [Kohler & Steiglitz (1974)].

Diversas revisões e generalizações do método *branch and bound* foram feitas e algumas delas podem ser vistas na seguintes bibliografias: [Aginn (1966), Balas (1978), Lawler & Wood (1966), Mitten (1970), Nollemeier (1971), Roy (1969), Kohler & Steiglitz (1974)].

Será proposto nesta tese, um método *branch and bound* para a otimização global de funções que podem ser descritas como a diferença entre funções crescentes, em um politopo do tipo caixa. O mesmo será utilizado em certa etapa de otimização, no algoritmo do controlador RMPC proposto nesta tese.

Capítulo 2

Controle Preditivo Baseado em Modelos

Este capítulo contém uma introdução aos conceitos básicos do método de controle denominado *Controle Preditivo Baseado em Modelos*, conhecido pela sigla de seu nome na língua inglesa, MPC - *Model Predictive Control*.

A seção 2.1 apresenta a metodologia geral do controlador MPC. Sua estrutura geral será apresentada e uma breve descrição será feita sobre os tipos de modelos de predição mais utilizados e sobre o aspecto da função objetivo. Posteriormente, a seção 2.2 será dedicada à descrição de um método de controle MPC, denominado GPC - *Generalized Predictive Controller*. Nessa seção será descrito o algoritmo básico e a lei de controle do controlador GPC. Na seção 2.3 o desempenho do controlador GPC é ilustrado dois exemplos simulados. Finalmente a seção 2.4 fecha este capítulo com suas conclusões.

2.1 MPC

Controle preditivo baseado em modelos é uma técnica de controle moderno com vasta aplicabilidade e, provavelmente, a que teve mais êxito em aplicações na indústria [Takatsu et al. (1998)]. As principais causas deste êxito devem-se ao fato de que as estratégias MPC podem ser aplicadas tanto a sistemas monovariáveis como a sistemas multivariáveis, lineares ou não lineares. Além disso, as restrições podem ser usadas no projeto da lei de controle em tempo de execução [Normey-Rico (2007)].

Na verdade, o nome controle preditivo baseado em modelos (ou MPC), não se refere a uma estratégia de controle específica, mas sim a um conjunto de métodos de controle que foram desenvolvidos, considerando-se as seguintes características fundamentais: Uso de um modelo explícito para o sistema com

o objetivo de predizer a saída do processo em um determinado horizonte de predição; cálculo de uma sequência de controle a partir da otimização de uma função objetivo; uso apenas do primeiro elemento da sequência de controle no passo atual [Camacho & Bordons (2007)].

Abaixo serão apresentados os elementos básicos contidos em qualquer controlador MPC e algumas das característica que podem existir em cada um desses elementos.

2.1.1 Estrutura Geral

A estrutura geral de um controlador pertencente à família dos controladores preditivos baseados em modelo é apresentada na Figura 2.1.

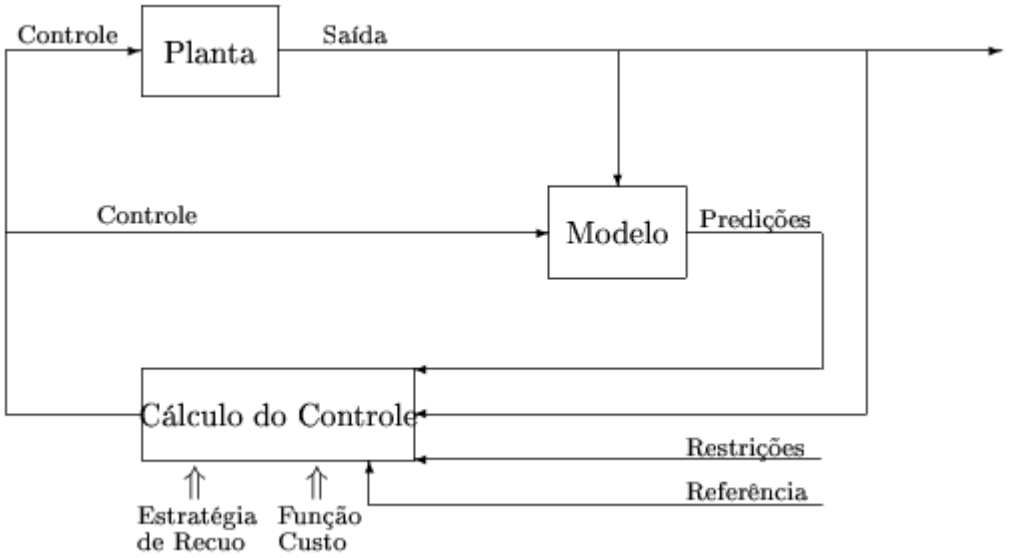

Figura 2.1: Estrutura do controle preditivo baseado em modelo.

A cada instante k, usa-se o modelo do processo para prever as futuras saídas em um determinado **horizonte de predição** H_p. Estas saídas preditas, $\widehat{y}(k+m|k)$ (a notação indica o valor predito de y no instante $k+m$, calculado no instante k), para $m = 1 \cdots H_p$, dependem dos valores conhecidos até o instante k (entradas e saídas passadas), bem como dos sinais de controle futuros $\widehat{u}(k+n|k)$, $n = 0 \cdots H_c - 1$, em que H_c é chamado de **horizonte de controle** ($H_c \leq H_p$).

Se $H_c < H_p$, $\widehat{u}(k+i|k) = \widehat{u}(k+H_c|k)$, $\forall\ i = H_c + 1, \cdots, H_p$. A Figura 2.2 ilustra a sequência das saídas preditas, bem como a sequência dos futuros sinais de controle para o caso $H_c < H_p$.

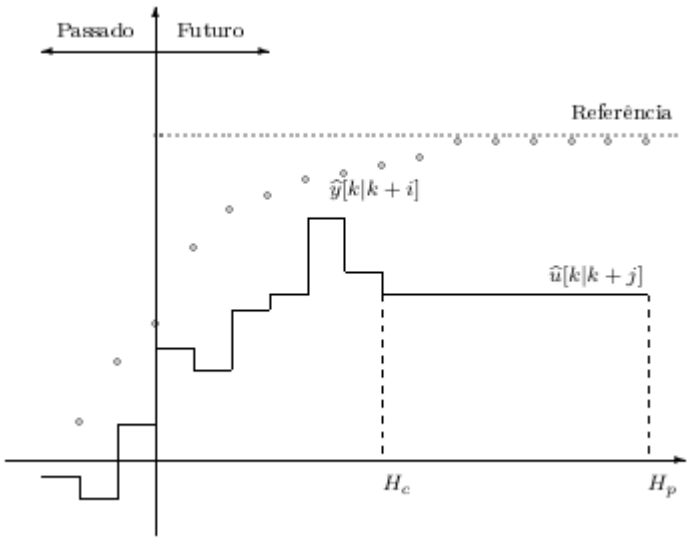

Figura 2.2: Entradas futuras e saídas preditas para o caso $H_c < H_p$

Com o uso das predições $\widehat{y}(k+m|k)$ e das entradas e saídas passadas, calcula-se a sequência de sinais de controle futuros, $\widehat{u}(k+n|k)$, que faz com que a saída predita $\widehat{y}$ se torne o mais próximo possível de uma referência, por meio da otimização de uma dada função objetivo. Este procedimento também está ilustrado na Figura 2.2.

Finalmente, aplica-se a chamada estratégia de recuo, isto é, o sinal de controle $\widehat{u}(k|k)$ é enviado ao processo enquanto os seguintes sinais de controle calculados são desprezados, como ilustra a Figura 2.3. Todo o procedimento é, então, repetido com os valores de todas as sequências atualizados.

2.1.2 Modelo do Sistema

O modelo do sistema é provavelmente o elemento mais importante em um controlador MPC. O mesmo deve ser capaz de representar adequadamente a dinâmica do processo, de forma a permitir o cálculo das predições da saída, além de ser intuitivo e de permitir uma análise teórica do comportamento do sistema [Normey-Rico (2007)].

Na prática, os modelos lineares são os mais utilizados devido ao fato de serem mais simples e de mais fácil aplicação. Além disso, a maioria dos processos, principalmente industriais, funcionam em torno do ponto de operação. Um modelo linear discreto pode aparecer no formato entrada-saída

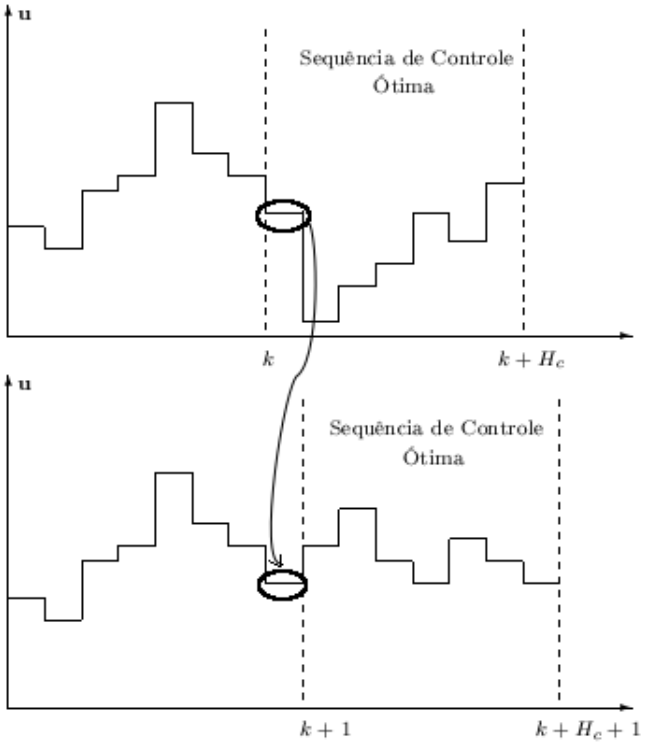

Figura 2.3: Estratégia de recuo.

(equação de diferença, resposta ao impulso, função de transferência) ou em sua representação em espaço de estados.

O método MPC a ser apresentado nesta tese faz uso de modelos lineares no cálculo das predições da saída, como pode ver visto no capítulo 5. Por este motivo, este texto restringe-se a apenas modelos lineares. [Michalska & Mayne (1993), Doyle et al. (1995), Chen & Allgower (1998), Henson (1998), Magni et al. (2001), Mhaskar et al. (2005)] são exemplos de algumas referências que utilizam modelos não lineares no controlador MPC.

Mais especificamente, serão utilizados pelo controlador MPC robusto proposto neste trabalho, modelos lineares, monovariáveis, causais e invariantes no tempo. Seguem abaixo as definições de sistemas causais e de sistemas invariantes no tempo.

Definição 2.1.2.1 *Um sistema é dito causal se suas saídas em um determinado instante de tempo não dependem das entradas aplicadas após este instante de tempo. Caso contrário, o sistema é dito não-causal.*

Definição 2.1.2.2 *Considere o estado e uma entrada de um sistema no instante k_0, gerando uma certa saída. Um sistema é dito invariante no tempo se, dado o mesmo estado e aplicando-se a mesma entrada em um instante de tempo $k_0 + \Delta k$, a mesma resposta é obtida em $k_0 + \Delta k$. Caso contrário, o sistema é dito variante no tempo.*

Serão apresentadas a seguir, as principais formas de se calcular a predição da saída de um processo, em um controlador MPC, utilizando-se modelos monovariáveis, causais e LIT (sigla para lineares e invariantes no tempo).

Equação de diferença

Os sistemas representados por equação de diferença, possuem o seguinte modelo:

$$\begin{gathered} y(k) = -a_1 y(k-1) + \ldots - a_n y(k-n) + \\ +b_0 u(k-(d+1)) + b_1 u(k-(d+2)) + \ldots + b_m u(k-n), \end{gathered} \tag{2.1}$$

em que $a_i,\ i = 1 \ldots n$ e $b_j,\ j = 0 \ldots m$ são escalares, $n > m$ e $d = n - m - 1$ é o atraso de tempo.

Caso o controlador MPC utilize o modelo descrito na equação (2.1), a predição da saída é calculada da seguinte maneira:

$$\begin{gathered} \widehat{y}(k+l|k) = -a_1 \widehat{y}(k-1+l|k) + \ldots - a_n \widehat{y}(k-n+l|k) + \\ +b_0 \widehat{u}(k-(d+1)+l|k) + b_1 \widehat{u}(k-(d+2)+l|k) + \ldots + b_m \widehat{u}(k-n+l|k), \end{gathered} \tag{2.2}$$

em que, se $k-n+l < k$, então $\widehat{y}(k-n+l|k) = y(k-n+l)$ e $\widehat{u}(k-n+l|k) = u(k-n+l)$.

Resposta ao Impulso

Nos modelos de resposta ao impulso, a predição da saída $\widehat{y}(k+m|k)$ é normalmente calculada a partir de uma soma truncada para os N primeiros termos do somatório de convolução [Camacho & Bordons (2007)]:

$$\widehat{y}(k+m|k) = \sum_{i=1}^{N} h(i)\widehat{u}(k+m-i|k), \tag{2.3}$$

em que $h(i)$ é o i-ésimo valor da resposta ao impulso, do sistema.

Este tipo de modelo é bastante utilizado em situações práticas, uma vez que são bastante intuitivos, não precisam de um conhecimento *a priori* do processo e podem ser usados em plantas multivariáveis sem acrescentar grandes dificuldades. Além disso, descrevem de maneira simples, efeitos complexos de um sistema, como atrasos e comportamentos de fase não mínima.

Por outro lado, a representação de sistemas, usando a equação (2.3), apresenta alguns inconvenientes, pois a mesma não pode ser usada para descrever plantas instáveis, além disso, necessita de um grande número de valores em sua representação [Camacho & Bordons (2007)].

Função de Transferência

Para modelos descritos por funções de transferência, a predição é calculada como:

$$\widehat{y}(k+m|k) = \frac{B(q)}{A(q)}\widehat{u}(k+m|k), \tag{2.4}$$

em que $G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ é a transformada Z da resposta do sistema ao impulso e $B(z)$ e $A(z)$ são polinômios na variável complexa Z.

As principais vantagens dessa representação consistem na possibilidade da mesma ser usada para descrever sistemas instáveis e no fato de que não são necessários muitos parâmetros. O MPC proposto neste trabalho (veja o capítulo 5), bem como o clássico controlador GPC [Clarke et al. (1987*a*,*b*)], descrito na seção 2.2, utilizam este tipo de modelo para realizar as predições da saída.

Equações de Estado

Outra forma de se representar um sistema LIT causal, é por meio das chamadas equações de estado:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x}(k+1) & = & \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) & = & \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k), \end{array} \tag{2.5}$$

em que $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ são matrizes constantes e $\mathbf{y}(k)$, $\mathbf{x}(k)$ e $\mathbf{u}(k)$ são vetores de variáveis da saída, estado e entrada, respectivamente, no instante k. Essa representação é especialmente utilizada para sistemas multivariáveis.

Nesse caso, a predição da saída é calculada da seguinte maneira:

$$\begin{array}{c} \widehat{\mathbf{y}}(k+m|k) = \mathbf{C}\widehat{\mathbf{x}}(k+m|k) + \mathbf{D}\widehat{\mathbf{u}}(k+m|k) = \\ \mathbf{C}(\mathbf{A}^m\mathbf{x}(k) + \sum_{i=1}^{m}\mathbf{A}^{m-i}\mathbf{B}\widehat{\mathbf{u}}(k+i-1|k)) + \mathbf{D}\widehat{\mathbf{u}}(k+m|k). \end{array} \tag{2.6}$$

2.1.3 Função Objetivo

Os diversos métodos MPC existentes utilizam diferentes tipos de funções objetivo no cálculo da lei de controle. Na maioria dos casos, utiliza-se uma função quadrática J que considera o erro entre as predições $\widehat{y}(k+j|k)$ e uma

referência conhecida $w(k+j)$, e a variação no controle $\Delta u(k)$ [Camacho & Bordons (2007)]:

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j)(\widehat{y}(k+j|k) - w(k+j))^2 + \sum_{i=1}^{H_c} \lambda(i)(\Delta\widehat{u}(k+i-1|k))^2, \quad (2.7)$$

em que N_1 e N_2 são os horizontes de predição mínimo e máximo, H_c é o horizonte de controle e $\delta(j)$ e $\lambda(i)$ são as sequências de ponderação do erro e do esforço de controle, respectivamente.

A função objetivo descrita pela equação (2.7) utiliza em sua forma a norma quadrática. Outros tipos de norma podem ser consideradas na função objetivo em um controlador MPC, como por exemplo a norma infinito ou a norma um (veja seção 3.2).

2.2 Controlador Preditivo Generalizado

Um algoritmo MPC bastante reconhecido no meio acadêmico e industrial é o chamado Controle Preditivo Generalizado, conhecido pela sigla de sua nomenclatura em inglês, GPC -*Generalized Predictive Control* [Clarke et al. (1987*a*,*b*)]. Será apresentada nesta seção, uma versão original do método GPC, que calcula de forma analítica o valor do controle ótimo. Por simplicidade, nos restringiremos ao caso monovariável.

2.2.1 Modelo de Predição

O modelo usado pelo método GPC para representar um sistema é um tipo de modelo conhecido como ARX (Auto Regressive with eXogenous input) e pode ser descrito da seguinte maneira:

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k-1) + \frac{e(k)}{\Delta}, \quad (2.8)$$

em que $\Delta = 1 - q^{-1}$, $e(k)$ é um ruído branco de média nula, d é o atraso do sistema, e A e B são os seguintes polinômios na variável q^{-1}.

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \cdots + a_{na} q^{-na}, \quad (2.9)$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \cdots + b_{nb} q^{-nb}, \quad b_0 \neq 0. \quad (2.10)$$

Para o cálculo do controle, o GPC utiliza a função custo (2.7) com $N_1 = d+1$, $N_2 = H_p$, $\delta(j) = 1\ \forall j$ e $\lambda(i) = \lambda\ \forall i$ [Camacho & Bordons (2007)].

Podemos reescrever a equação (2.8) como

$$\widetilde{A}(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})\Delta u(k-1) + e(k), \tag{2.11}$$

com $\widetilde{A} = A(1-q^{-1}) = 1-\widetilde{a}_1 q^{-1} - \cdots - \widetilde{a}_{na+1}q^{-(na+1)}$. Dessa forma, obtemos uma equação de diferença para o sistema a partir de (2.8), dada por

$$y(k+1) = \sum_{i=1}^{na+1} \widetilde{a}_i y(k+1-i) + \sum_{i=1}^{nb+1} b_{i-1}\Delta u(k-d-i+1) + e(k+1). \tag{2.12}$$

O melhor valor possível para a predição $y(k+1|k)$ é a esperança matemática da saída, dessa forma

$$\widehat{y}(k+1|k) = \sum_{i=1}^{na+1} \widetilde{a}_i y(k+1-i) + \sum_{i=1}^{nb+1} b_{i-1}\Delta u(k-d-i+1). \tag{2.13}$$

Esta equação pode ser utilizada recursivamente de forma tal que $\widehat{y}(k+1|k)$ seja usada para o cálculo de $\widehat{y}(k+2|k)$ e assim sucessivamente. Dessa forma, todas a predições podem ser escritas como funções das saídas e entradas passadas e da sequência de futuros controles. Na verdade, a dependência da sequência de controle em $\widehat{y}(k+m|k)$, só ocorre para $m > d$, quando podemos escrever:

$$\widehat{y}(k+d+1|k) = \sum_{i=1}^{na+1} \alpha_i y(k+1-i) + \sum_{i=1}^{nb+1} \beta_{i-1}\Delta u(k-i+1) + b_0\Delta u(k|k), \tag{2.14}$$

em que α_i e β_j são funções dos coeficientes $\widetilde{a}_i$ e b_j.

Portanto, a predição ótima em $k+d+1$ é composta da resposta livre (calculada em termos das saídas e entradas passadas) e da resposta forçada (que depende da entrada futura $\Delta u(k|k)$) [Clarke et al. (1987*a*), Camacho & Bordons (2007)]. Repetindo esse procedimento até $\widehat{y}(k+d+H_p|k)$, obtém-se o vetor com as predições desejadas:

$$\widehat{\mathbf{y}} = (\widehat{y}(k+d+1|k), \widehat{y}(k+d+2|k), \cdots, \widehat{y}(k+d+H_p|k))^T, \tag{2.15}$$

que pode ser expresso como uma função do vetor resposta livre $\mathbf{f}_r$ e do vetor de controles futuros $\mathbf{u} = (\Delta u(k|k), \cdots, \Delta u(k+H_c-1|k))^T$, da seguinte forma:

$$\widehat{\mathbf{y}} = \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{f}_r. \tag{2.16}$$

Os elementos do vetor $\mathbf{f}_r$ consistem das saídas do sistema calculadas recursivamente, usando a equação (2.13), com o controle futuro valendo zero.

A matriz $\mathbf{G}$ é constituída da seguinte forma:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1 & g_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{H_p-1} & g_{H_p-2} & \cdots & g_{H_p-H_c} \end{bmatrix}, \tag{2.17}$$

$$g_j = \sum_{i=1}^{j} a_i g_{j-i} + \sum_{i=0}^{j-1} b_i \qquad j = 0, \cdots, H_c - 1, g_j = 0 \ \forall j < 0.$$

Os elementos g_j também podem ser calculados usando a equação (2.13) recursivamente, com condições iniciais nulas e aplicando o degrau unitário em $\mathbf{u}$. Nesse caso, a sequência de saída $(\widehat{y}(k+d+1|k), \widehat{y}(k+d+2|k), \cdots, \widehat{y}(k+d+H_p|k))^T$ obtida é igual à primeira coluna de $\mathbf{G}$ [Camacho & Bordons (2007)].

2.2.2 Lei de Controle

Considerando o vetor de referências

$$\mathbf{w} = (w(k+d+1), w(k+d+2), \cdots, w(k+d+H_p))^T,$$

a equação de custo pode ser escrita como (veja (2.7) e (2.16)):

$$J = (\widehat{\mathbf{y}} - \mathbf{w})^T(\widehat{\mathbf{y}} - \mathbf{w}) + \lambda \mathbf{u}^T\mathbf{u} = (\mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{f}_r - \mathbf{w})^T(\mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{f}_r - \mathbf{w}) + \lambda \mathbf{u}^T\mathbf{u}. \tag{2.18}$$

A equação quadrática acima pode ser reescrita como:

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{H}\mathbf{u} + \mathbf{b}^T\mathbf{u} + \mathbf{f}_0, \tag{2.19}$$

com

$$\mathbf{H} = 2(\mathbf{G}^T\mathbf{G} + \lambda\mathbf{I})$$
$$\mathbf{b}^T = 2(\mathbf{f}_r - \mathbf{w})^T\mathbf{G}$$
$$\mathbf{f}_0 = (\mathbf{f}_r - \mathbf{w})^T(\mathbf{f}_r - \mathbf{w}).$$

Quando não há restrições, o mínimo de J pode ser calculado igualando seu gradiente a zero. Dessa forma, obtém-se

$$\mathbf{u} = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{b} = (\mathbf{G}^T\mathbf{G} + \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{G}^T(\mathbf{w} - \mathbf{f}_r). \tag{2.20}$$

De acordo com a estratégia de recuo, apenas o primeiro elemento da sequência de controle $\mathbf{u}$ é aplicado ao sistema. Esse elemento pode ser, finalmente, expresso como:

$$\Delta u(k) = \mathbf{K}(\mathbf{w} - \mathbf{f}_r), \tag{2.21}$$

em que $\mathbf{K}$ é a primeira linha da matriz $(\mathbf{G}^T\mathbf{G} + \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{G}^T$.

Atualmente, o controlador preditivo GPC é bastante utilizado nas indústrias, devido à sua simples e eficiente implementação. Diversas variações e adaptações do GPC foram feitas desde o seu surgimento, provocando uma grande evolução e aplicabilidade desta técnica em diversos campos.

2.3 Resultados de Simulação

Com o objetivo de ilustrar o desempenho do controlador GPC, o mesmo foi aplicado para o controle robusto de dois exemplos de plantas simuladas. O primeiro trata-se do clássico sistema de posicionamento angular proposto por Kwakernaak & Sivan (1972) e o segundo de um exemplo de planta simulada apresentado por Rossiter et al. (1996).

A função custo utilizada foi aquela descrita na equação (2.7) com $\delta(j) = \lambda(i) = 1$, $\forall i,j$. Considerou-se a condição inicial $u(0) = 0.05$ e uma trajetória de referência w constante e igual a um. Em ambos os exemplos, 100 iterações foram utilizadas.

2.3.1 Exemplo 1

O sistema, representado na Figura 2.4, consiste na rotação de uma antena em torno da origem do plano, direcionada por um motor elétrico. O problema de controle é fornecer uma tensão de entrada (uV) para o motor, de forma a direcionar a antena para um objeto que se move pelo plano (Kothare et al. (1996)).

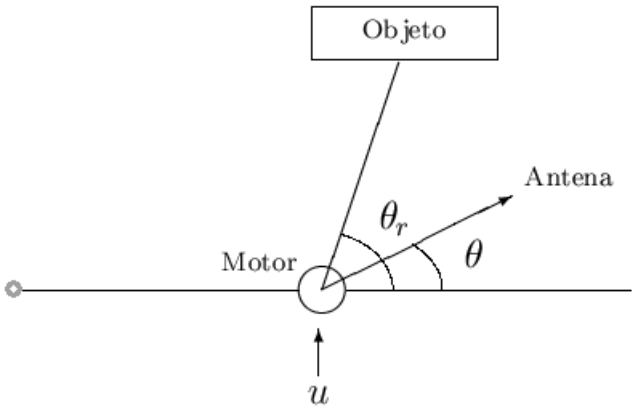

Figura 2.4: Sistema de Posicionamento Angular.

A rotação da antena pode ser descrita pelo seguinte modelo, adaptado de Kothare et al. (1996):

$$\theta(k) = \frac{0{,}0078}{q^2 + (0{,}1\alpha(k) - 2)q + (1 - 0{,}1\alpha(k))} u(k), \tag{2.22}$$

em que o período de amostragem é de $0{,}1s$, $\theta(k)$ é a posição angular (rad) e $0{,}1s^{-1} \leq \alpha(k) \leq 10s^{-1}$.

O parâmetro $\alpha(k)$ é proporcional ao coeficiente de viscosidade do ponto de rotação da antena e pode variar com o tempo, assumindo qualquer valor no intervalo $[0{,}1; 10]$. Neste exemplo, o parâmetro $\alpha(k)$ será considerado fixo no tempo, porém com seu valor incerto, isto é, $\alpha(k) = \alpha \in [0{,}1; 10]$.

Para as simulações realizadas neste exemplo, considerou-se como modelo da planta, o modelo (2.22) com $\alpha(k) = 1$. O GPC foi aplicado utilizando-se horizontes de predição e controle, $H_p = 12$ e $H_c = 6$, respectivamente.

Primeiramente, considerou-se o modelo de predição correspondente a $\alpha(k) = 1$ (o modelo da planta é o mesmo do modelo nominal). A Figura 2.5 apresenta a resposta do sistema em malha-fechada. Pode-se notar um bom desempenho do GPC, em que houve uma rápida convergência do sinal de saída.

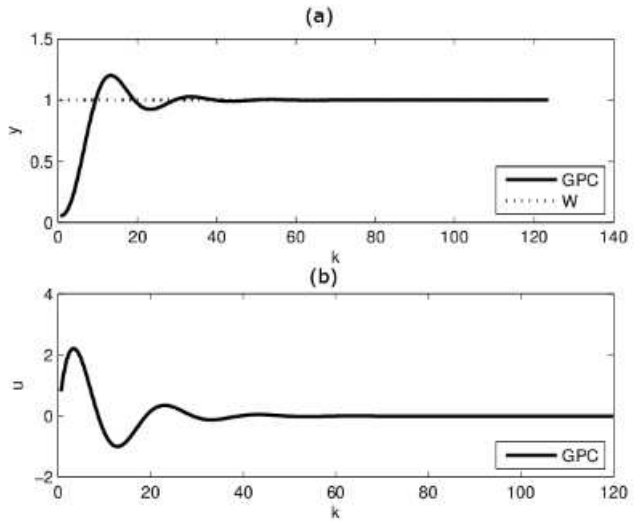

Figura 2.5: Modelo da planta igual ao modelo nominal: (a) Resposta do sistema controlado pelo GPC. (b) Ação de controle.

A fim de se analisar a robustez do método GPC, considerou-se diferentes valores para $\alpha(k)$ junto ao modelo nominal. Os resultados das simulações podem ser vistos nas Figuras 2.6 e 2.7, para os casos em que $\alpha(k) = 0.1$ e

$\alpha(k) = 2$, respectivamente. Apesar dos resultados mostrarem convergência em ambos os casos, pode-se notar um desempenho mais satisfatório do GPC no caso $\alpha(k) = 0.1$, com rápida convergência da saída do sistema. No caso $\alpha(k) = 2$, o sinal de saída, controlado pelo GPC apresentou grande oscilação no estado transiente do sistema.

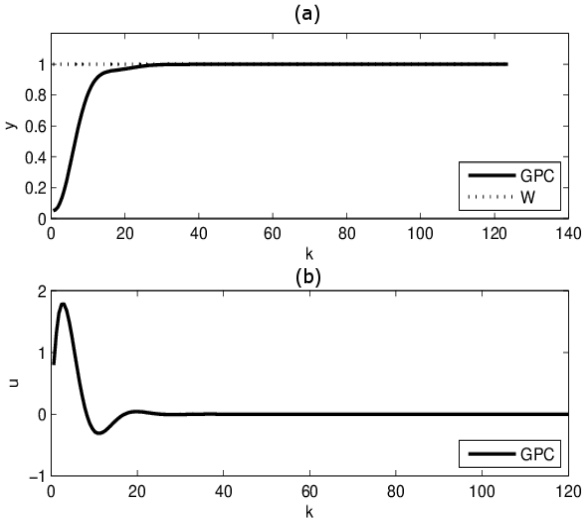

Figura 2.6: Modelo nominal com $\alpha(k) = 0.1$: (a) Resposta do sistema controlado pelo GPC. (b) Ação de controle.

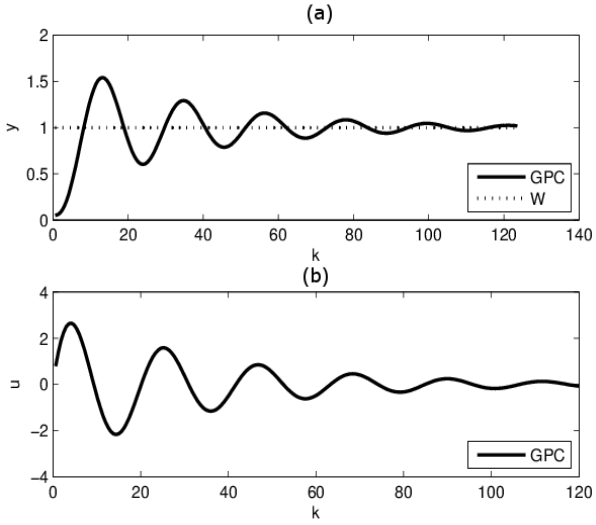

Figura 2.7: Modelo nominal com $\alpha(k) = 2$: (a) Resposta do sistema controlado pelo GPC. (b) Ação de controle.

Para os casos $\alpha(k) = 5$ e $\alpha(k) = 10$, em que as discrepâncias entre o modelo da planta e o modelo nominal são maiores, o controlador GPC apresentou resultados de divergência, como mostram as Figuras 2.8 e 2.9. Este era um fato esperado, pois o método foi implementado sem considerar qualquer tipo de incertezas no modelo nominal.

2.3.2 Exemplo 2

O modelo da planta, utilizado para simular o processo, é dado por [Rossiter et al. (1996)]:

$$T(q) = \frac{2q^2 + 0{,}45q + 1}{q^3 - 2{,}2q^2 + 0{,}09q + 0{,}252}. \tag{2.23}$$

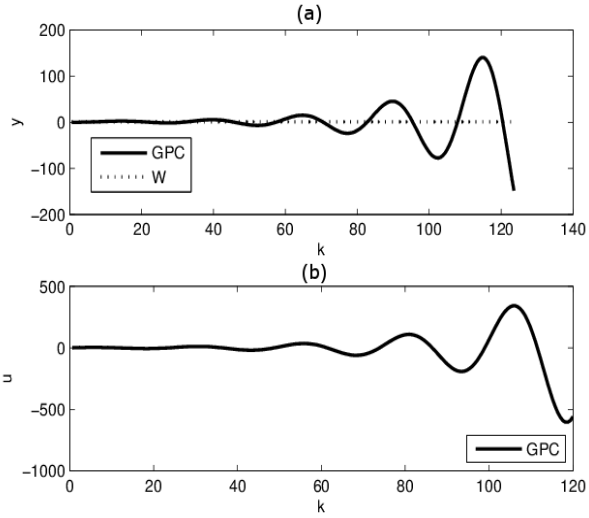

Figura 2.8: Modelo nominal com $\alpha(k) = 5$: (a) Resposta do sistema controlado pelo GPC. (b) Ação de controle.

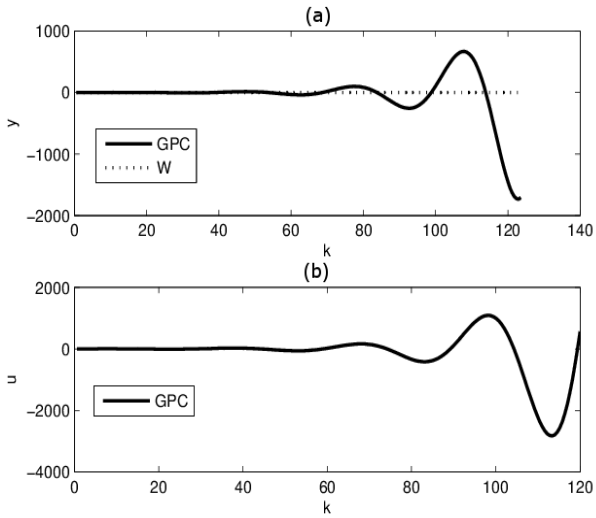

Figura 2.9: Modelo nominal com $\alpha(k) = 10$: (a) Resposta do sistema controlado pelo GPC. (b) Ação de controle.

Trata-se de uma planta instável, uma vez que possui $\{2{,}1; 0{,}4; -0{,}3\}$ como polos. Neste exemplo, o GPC foi aplicado utilizando-se horizontes de predição $H_p = 3$ e controle $H_c = 3$.

A Figura 2.10 apresenta o resultado do controlador GPC para o caso em que o modelo nominal é igual ao modelo da planta, em que um excelente desempenho pode ser observado.

Com o objetivo de se analisar a robustez do GPC, também neste exemplo, considerou-se incertezas nos coeficientes da função de transferência do modelo nominal. Uma vez estabelecido o valor de incerteza desejado, o qual vamos denotar por i, novos coeficientes são gerados aleatoriamente da seguinte forma: Considerando a, um coeficiente qualquer do modelo (2.23), o coeficiente equivalente do modelo nominal será escolhido dentro do intervalo $[a - i\%a, a + i\%a]$.

As Figuras 2.11 e 2.12 apresentam os resultados para valores de incerteza $i = 2$ e $i = 5$, respectivamente. Em ambas as Figuras pode-se notar um bom desempenho do método para estes valores de incerteza, onde uma rápida convergência é obtida pela saída da planta. Os modelos nominais utilizados para gerarem os resultados expostos nas Figuras 2.11 e 2.12 são

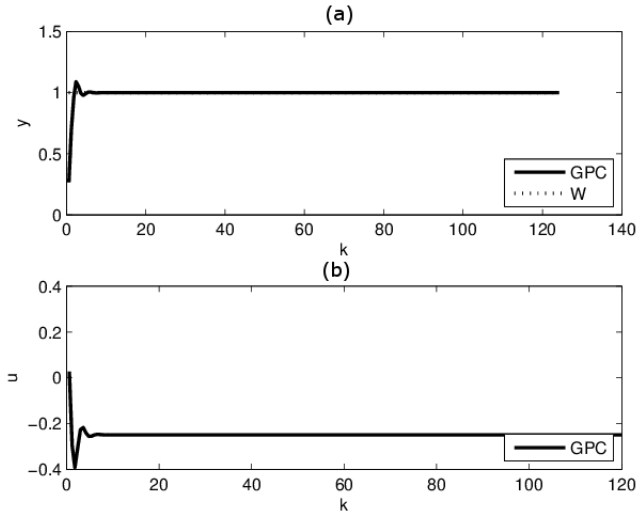

Figura 2.10: Modelo da planta igual ao modelo nominal: (a) Resposta do sistema controlado pelo GPC. (b) Ação de controle.

$$T_2(q) = \frac{1{,}984q^2 + 0{,}4435q + 1{,}005}{0{,}9915q^3 - 2{,}198q^2 + 0{,}09049q + 0{,}2527} \tag{2.24}$$

e

$$T_5(q) = \frac{2{,}045q^2 + 0{,}4389q + 1{,}001}{0{,}9708q^3 - 2{,}195q^2 + 0{,}08912q + 0{,}2591} \tag{2.25}$$

respectivamente.

Para analisar a convergência do GPC para valores maiores de incertezas, considerou-se incertezas nos valores $i = 10$ e $i = 15$ e os seguintes modelos nominais foram utilizados:

$$T_{10}(q) = \frac{1{,}918q^2 + 0{,}4431q + 0{,}9012}{1{,}008q^3 - 2{,}203q^2 + 0{,}09407q + 0{,}2442} \tag{2.26}$$

e

$$T_{15}(q) = \frac{2{,}281q^2 + 0{,}3952q + 1{,}039}{0{,}9512q^3 - 1{,}901q^2 + 0{,}101q + 0{,}238}. \tag{2.27}$$

As Figuras 2.13 e 2.14 mostram os resultados obtidos pelo controlador GPC, fazendo-se uso do modelo nominal (2.26) e (2.27), respectivamente. Em ambos os casos, pode-se observar a convergência da saída sistema, porém com a presença de oscilação nos sinais de entrada e saída. A Figura 2.14 apresenta um resultado de controle inferior, se comparado aos demais

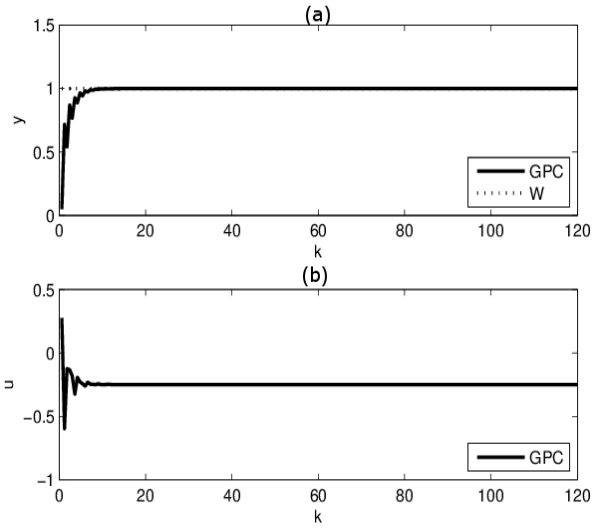

Figura 2.11: Modelo nominal (2.24), com $i = 2\%$ de incerteza: (a) Resposta do sistema controlado pelo GPC. (b) Ação de controle.

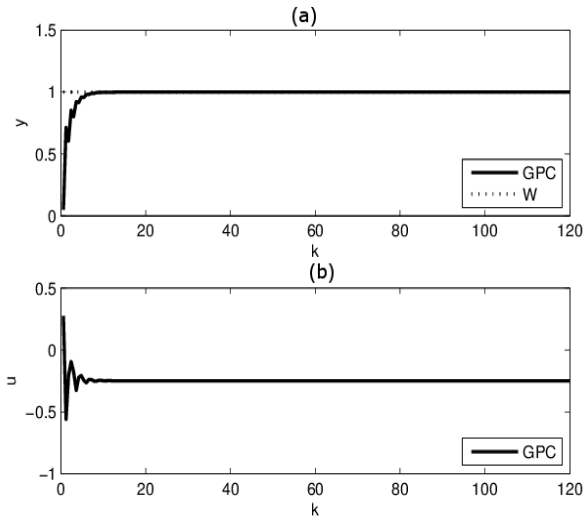

Figura 2.12: Modelo nominal (2.25), com $i = 5\%$ de incerteza: (a) Resposta do sistema controlado pelo GPC. (b) Ação de controle.

resultados expostos neste exemplo, dado que ocorre grande oscilação no estado transiente do sistema. Este fato era esperado e justifica-se pela grande discrepância entre o modelo da planta e o modelo de predição.

2.4 Conclusões

Este capítulo apresentou uma introdução ao controlador preditivo baseado em modelos. Foi descrita sua estrutura geral e uma breve explanação sobre os tipos de modelos mais utilizados e o aspecto da função objetivo, foi feita. Posteriormente apresentou-se o algoritmo do controlador GPC e o desempenho do mesmo foi ilustrado a partir do controle robusto de duas plantas simuladas.

Ao analisar os resultados apresentados pelo GPC em tais simulações, pode-se concluir que o controlador mostrou um bom desempenho ao utilizar um modelo nominal bem próximo ao modelo da planta. Quando as discrepâncias entre o modelo nominal e o modelo da planta aumentaram o GPC passou a apresentar resultados em que ocorreram oscilações ou divergência. Este comportamento era esperado, pois o algoritmo do GPC deduz, de forma analítica, a lei de controle, supondo não haver incertezas no modelo de pre-

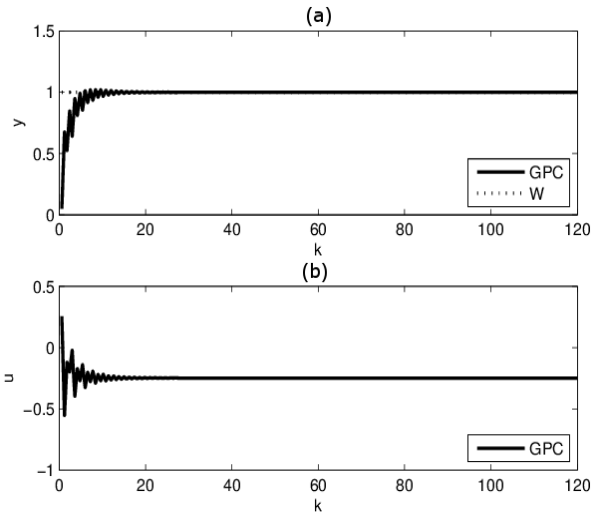

Figura 2.13: Modelo nominal (2.26), com $i = 10\%$ de incerteza: (a) Resposta do sistema controlado pelo GPC. (b) Ação de controle.

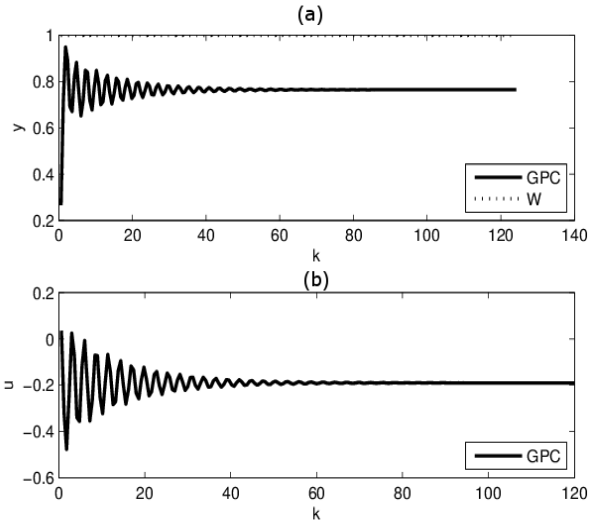

Figura 2.14: Modelo nominal (2.27), com $i = 15\%$ de incerteza: (a) Resposta do sistema controlado pelo GPC. (b) Ação de controle.

dição da saída da planta.

O controlador GPC será utilizado no capítulo 5, para fins de comparação de desempenho do mesmo com outros métodos MPC a serem descritos no decorrer desta tese.

Capítulo 3

Controle Preditivo Robusto Baseado em Modelos

Um modelo matemático de um processo real, por mais preciso que seja, não é capaz de contemplar todos os aspectos da realidade. Simplificações devem ser consideradas, principalmente quando o modelo for ser utilizado no projeto de controlador. Dessa forma, um modelo matemático descreve a dinâmica de uma planta, apenas de forma aproximada.

Em situações práticas, pode-se observar que o desempenho do método MPC pode ser comprometido quando discrepâncias entre a planta real e o modelo utilizado no procedimento de predição aumentam. Com o objetivo de sanar este tipo de problema, a robustez começou a ser considerada no projeto de controladores MPC, surgindo, assim, o *Controle Preditivo Robusto Baseado em Modelos*, também conhecido pela sigla RMPC -*Robust Model Predictive Control*.

Este capítulo traz uma introdução à metodologia geral de um controlador RMPC, priorizando as ideias mais utilizadas. Serão apresentados alguns de seus principais componentes, bem como algumas vantagens e desvantagens dos mesmos. Além disso, serão descritos os algoritmos de algumas técnicas de controle RMPC.

A seção 3.1 apresenta diferentes formas de se considerar incertezas em um modelo linear a ser utilizado em controladores RMPC. A seção 3.2 mostra de que forma as incertezas podem ser consideradas na função objetivo e como se dá o procedimento de otimização na presença de incertezas. Na seção 3.3 um controlador RMPC, de simples algoritmo, será proposto e sua técnica será utilizada pelo controlador preditivo robusto, apresentado no capítulo 5. A seção 3.4 apresenta uma maneira de se considerar robustez no controlador GPC. Na seção 3.5, os desempenhos de três controladores RMPC serão comparados. Finalmente, a seção 3.6 apresenta as conclusões deste capítulo.

A discussão introduzida neste capítulo vai nortear o objetivo principal deste trabalho, cuja proposta é uma nova estratégia de controlador RMPC, descrita de forma explícita no capítulo 5.

3.1 Modelos com Incertezas

Existem diferentes maneiras de se considerar incertezas no modelo de um processo. Na maioria delas, assume-se uma família de modelos, em que a planta pode ser descrita por um modelo dessa família. Serão apresentadas, nesta seção, de forma sucinta, algumas das principais formas de modelos com incertezas, utilizados em controladores RMPC, segundo a literatura. Este texto restringe-se ao caso de modelos lineares incertos.

3.1.1 Resposta ao Impulso

Generalizando a descrição na seção 2.1.2, para sistemas MIMO, pode-se considerar que a predição da saída $\widehat{\mathbf{y}}(k+r|k) \in \mathbb{R}^n$, nos modelos de resposta ao impulso, é normalmente calculada a partir de uma soma truncada para os N primeiros termos do somatório de convolução:

$$\widehat{\mathbf{y}}(k+r|k) = \sum_{l=1}^{N} \mathbf{H}(l)\widehat{\mathbf{u}}(k+r-l|k), \tag{3.1}$$

em que o elemento (i,j) da matriz $\mathbf{H}(l) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, corresponde à i-ésima saída da planta quando um impulso é aplicado na variável de entrada u_j ($\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$).

Suponha que os coeficientes dessa soma truncada, $\mathbf{H}(l)$ (que podem ser calculados experimentalmente), apresentem incertezas. Uma maneira simples de descrever tais incertezas é considerar que

$$(\underline{\mathbf{H}(l)})_{ij} \leq (\mathbf{H}(l))_{ij} \leq (\overline{\mathbf{H}(l)})_{ij},$$

em que,

$$(\mathbf{H}(l))_{ij}(\Theta) = (\mathbf{H}_m(l))_{ij} - \Theta_{l_{ij}},$$

com Θ, a matriz de incertezas, definida por

$$(\mathbf{H}_m(l))_{ij} - (\overline{\mathbf{H}(l)})_{ij} \leq \Theta_{l_{ij}} \leq (\mathbf{H}_m(l))_{ij} - (\underline{\mathbf{H}(l)})_{ij}$$

e $\mathbf{H}_m(l)$ é a resposta nominal do sistema.

Apesar dessa ser uma maneira simples de se considerar incertezas no modelo da planta, a dimensão da matriz de incertezas Θ é $N \times (m \times n)$, em que (m,n) são as dimensões dos vetores de entrada e saída, respectivamente.

Por exemplo, se $N = 40$ e $m = n = 5$, o número de parâmetros de incertezas será de 1000, o que torna o problema inviável para ser aplicado em situações práticas, dado seu alto custo computacional [Camacho & Bordons (2007)].

3.1.2 Matriz Função de Transferência

Suponha que um sistema MIMO com m entradas e n saídas, seja representado pelo seguinte modelo dado em termos da matriz de transferência:

$$\mathbf{A}(q^{-1})\mathbf{y}(k) = \mathbf{B}(q^{-1})\mathbf{u}(k-1), \tag{3.2}$$

em que $\mathbf{A}(q^{-1})$ e $\mathbf{B}(q^{-1})$ são matrizes com entradas polinomiais em função do operador q^{-1}, com dimensões apropriadas.

Considerando que o modelo descrito pela equação (3.2) é o modelo nominal, incertezas paramétricas podem ser consideradas nesse sistema da seguinte maneira:

$$(\underline{\mathbf{A}})_{ij} \leq (\mathbf{A})_{ij} \leq (\overline{\mathbf{A}})_{ij} \quad \text{e} \quad (\underline{\mathbf{B}})_{ij} \leq (\mathbf{B})_{ij} \leq (\overline{\mathbf{B}})_{ij},$$

com

$$(\mathbf{A})_{ij} = (\mathbf{A})_n + \Theta_{a_{ij}} \quad \text{e} \quad (\mathbf{B})_{ij} = (\mathbf{B})_n + \Theta_{b_{ij}}.$$

Uma das grandes vantagens dessa representação é o pequeno número de parâmetros de incertezas, usados para a sua descrição, que é de $n_a \times n \times m + (n_b+1) \times n \times m$, em n_a e n_b são as somas dos graus dos polinômios contidos nas entradas das matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, respectivamente [Camacho & Bordons (2007)].

Por outro lado, as equações de predição são expressas em termos dos parâmetros de incertezas, o que, para o caso geral, resultam em expressões complicadas e pouco utilizadas, dado que o problema de otimização torna-se difícil de se resolver em tempo de execução [Camacho & Bordons (2007)]. Entretanto, grande parte dessas dificuldades pode ser eliminada com o uso da nova proposta de MPC robusto, descrita mais adiante neste trabalho.

O modelo utilizado pelo controlador MPC robusto proposto nesta tese, tem a estrutura de uma função de transferência com incertezas, no formato de intervalos de confiança, associadas a cada um de seus parâmetros. Por meio de uma certa condição de estabilidade imposta à saída da planta, pode-se obter uma lei de controle a partir de cálculos mais simplificados. Detalhes sobre este método estão descritos no capítulo 5 deste texto.

3.1.3 Espaço de Estados

Outra forma de se representar um sistema MIMO incerto é pelo uso de equações de estado, da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x}(k+1) & = & \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) & = & \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k). \end{array} \tag{3.3}$$

Se considerarmos que (3.3) descreve o modelo nominal do sistema, da mesma forma como nos casos anteriores, incertezas paramétricas podem ser introduzidas no modelo:

$$(\underline{\mathbf{A}})_{ij} \leq (\mathbf{A})_{ij} \leq (\overline{\mathbf{A}})_{ij}, \qquad (\underline{\mathbf{B}})_{ij} \leq (\mathbf{B})_{ij} \leq (\overline{\mathbf{B}})_{ij},$$

$$(\underline{\mathbf{C}})_{ij} \leq (\mathbf{C})_{ij} \leq (\overline{\mathbf{C}})_{ij} \quad \text{e} \quad (\underline{\mathbf{D}})_{ij} \leq (\mathbf{D})_{ij} \leq (\overline{\mathbf{D}})_{ij}$$

com

$$(\mathbf{A})_{ij} = (\mathbf{A})_n + \Theta_{a_{ij}}, \qquad (\mathbf{B})_{ij} = (\mathbf{B})_n + \Theta_{b_{ij}},$$

$$(\mathbf{C})_{ij} = (\mathbf{C})_n + \Theta_{c_{ij}} \quad \text{e} \quad (\mathbf{D})_{ij} = (\mathbf{D})_n + \Theta_{d_{ij}}$$

Como descrito na seção 2.1.2, o modelo de predição é dado por:

$$\widehat{\mathbf{y}}(k+m|k) = \mathbf{C}(\mathbf{A}^m\mathbf{x}(k) + \sum_{i=1}^{m} \mathbf{A}^{m-i}\mathbf{B}\widehat{\mathbf{u}}(k+i-1|k)) + \mathbf{D}\widehat{\mathbf{u}}(k+m|k)). \tag{3.4}$$

3.1.4 Incertezas Globais

A ideia central nesse tipo de modelagem de incertezas, é considerar que todos os erros de modelagem são reunidos em um vetor de parâmetros, de tal forma que a planta possa ser descrita pela seguinte família de modelos [Camacho & Bordons (2007)]:

$$\widehat{\mathbf{y}}(k+1) = \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{y}(k), \cdots, \mathbf{y}(k-n_a), \mathbf{u}(k), \cdots, \mathbf{u}(k-n_b)) + \Theta(k).$$

Esse tipo de abordagem pode se relacionar com outros tipos de modelagem de incertezas. Por exemplo, no caso da resposta ao impulso, descrito na subseção 3.1.1, a saída predita em $k+j$, calculada no instante k, com incertezas paramétricas, é dada por:

$$\widehat{\mathbf{y}}(k+j|k) = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{H}(i) + \Theta_i)\mathbf{u}(k+j-i).$$

O que implica que $\Theta(k+j) = \sum_{i=1}^{N} \Theta_i \mathbf{u}(k+j-i)$. Logo, os limites inferior e superior para a componente i do vetor $\Theta(k+j)$ (quando $\mathbf{u}$ é limitado) são dados por:

$$\underline{\Theta_i} = \min_{\mathbf{u}\in\mathbf{U},\Theta_i\in\Theta} \sum_{i=1}^{N} \Theta_i \mathbf{u}(k+j-i),$$

$$\overline{\Theta_i} = \max_{\mathbf{u}\in\mathbf{U},\Theta_i\in\Theta} \sum_{i=1}^{N} \Theta_i \mathbf{u}(k+j-i).$$

Dessa forma, o número de parâmetros de incertezas foi reduzido de $N \times (m \times n)$ para n.

Pode-se considerar, ainda, a descrição por incertezas globais, de uma planta representada por uma matriz de transferência. Neste caso, o modelo com incertezas será dado por:

$$\mathbf{A}(q^{-1})\mathbf{y}(k) = \mathbf{B}(q^{-1})\mathbf{u}(k-1) + \Theta(k), \tag{3.5}$$

em que $\Theta(k) \in \Theta$ é definido por $\underline{\Theta}(k) \leq \Theta(k) \leq \overline{\Theta}(k)$.

Observe que este tipo de modelagem não exige que o modelo seja linear. Na verdade, assume-se que o processo pode ser aproximado por um modelo linear de forma que todas as trajetórias estejam incluídas entre as bandas superior e inferior, que dependem de $\underline{\Theta}(k)$ e $\overline{\Theta}(k)$.

No modelo descrito em (3.5), as bandas de incertezas podem se tornar maiores com o passar do tempo [Camacho & Bordons (2007)], o que torna complicado o projeto do controlador.

Qualquer outra forma de se representar um sistema incerto, pode também ser escrita usando-se incertezas globais. Para isso, basta generalizar as ideias apresentadas nesta subseção.

3.1.5 Modelos Politópicos

Considere um sistema LTV (*Linear and Time-Varying*) descrito pelas seguintes equações em espaço de estados:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x}(k+1) & = & \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) & = & \mathbf{C}\mathbf{x}(k), \end{array} \tag{3.6}$$

$$[\mathbf{A}(k)\ \mathbf{B}(k)] \in \Omega.$$

Um sistema discreto LIT com incertezas, pode ser representado pelas equações (3.6), se as incertezas do modelo são definidas da seguinte maneira. Considere o cojunto Ω:

$$\Omega = C_0\{[A_1\ B_1], [A_2\ B_2], \cdots, [A_L\ B_L]\}, \tag{3.7}$$

em que C_0 denota o fecho convexo do conjunto definido pelos vértices $[A_i\ B_i]$, ou seja, dado qualquer par $[A\ B] \in \Omega$, podemos escrevê-lo como

$$[A\ B] = \sum_{i=1}^{L} \lambda_i [A_i\ B_i],$$

com $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{L} \lambda_i = 1$. Se $L = 1$ as equações (3.6) correspondem ao modelo nominal do sistema LIT [Kothare et al. (1996)].

A ideia é descrever a planta como uma combinação linear de L sistemas lineares LIT cujos modelos são determinados pelas matrizes $[A_i\ B_i]$.

Esse tipo de representação das incertezas do modelo é particularmente útil quando os dados de entrada e saída do sistema (possivelmente não linear) foram obtidos por diferentes métodos ou em diferentes períodos de tempo. Se para cada conjunto de dados, um modelo linear foi identificado, (por simplicidade, vamos supor que os vários modelos lineares contém o mesmo vetor de estado), então é razoável que esse tipo de descrição por modelos politópicos, com vértices definidos pelos modelos lineares, descreva de forma satisfatória o sistema real [Kothare et al. (1996)].

Pode-se mostrar que, no caso de plantas SISO, um modelo incerto, descrito pela resposta ao impulso, pode ser transcrito para modelos politópicos incertos. Para maiores detalhes, veja o trabalho de Kothare et al. (1996).

3.1.6 Modelos com Incertezas Estruturadas

Outra forma de se considerar incertezas em um sistema LIT pode ser esquematizada como na Figura 3.1 e representada pelas equações (3.8):

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x}(k+1) &=& \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{B}_p\mathbf{p}(k) \\ \mathbf{y}(k) &=& \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \\ \mathbf{q}(k) &=& \mathbf{C}_p\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_{qu}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{p}(k) &=& \Delta(\mathbf{q})(k). \end{array} \tag{3.8}$$

O operador Δ é diagonal em blocos:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & & & \\ & \Delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Delta_r \end{bmatrix}, \tag{3.9}$$

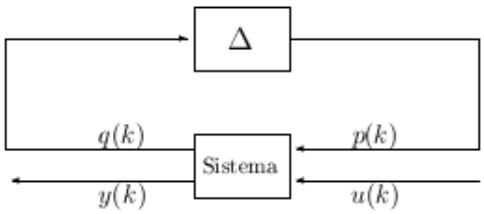

Figura 3.1: Esquema de um modelo com incertezas estruturadas.

com $\Delta_i : \mathbb{R}^i \to \mathbb{R}^i$. A entrada auxiliar $\mathbf{p}(k)$ do sistema é a resposta do operador Δ à saída auxiliar $\mathbf{q}(k)$.

O operador Δ pode representar uma matriz sem memória variante com o tempo, tal que $\|\Delta_i\|_2 \leq 1$, $i = 1, \ldots, r$, $k \geq 0$; ou um operador convolução (se o sistema LIT for estável), com operador norma induzido pelo truncamento da norma ℓ_2 menor que um, ou seja:

$$\sum_{j=0}^{k} \mathbf{p}_i(j)^T \mathbf{p}_i(j) \leq \sum_{j=0}^{k} \mathbf{q}_i(j)^T \mathbf{q}_i(j), \quad i = 1, \ldots, r, \quad \forall k \geq 0.$$

Cada bloco Δ_i pode ser um escalar ou uma matriz e são usados para modelar vários tipos de fatores, como por exemplo: não linearidades, dinâmicas ou parâmetros que são desconhecidos, não modelados ou negligenciados. Outros tipos de modelos com incertezas, podem ser colocadas em termos desse sistema de referência [Kothare et al. (1996)].

Pode-se mostrar [Kothare et al. (1996)], que o sistema representado pelas equações (3.8), corresponde ao sistema (3.6) com

$$\Omega = \{[\mathbf{A} + \mathbf{B}_p \Delta \mathbf{C}_q \quad \mathbf{B} + \mathbf{B}_p \Delta \mathbf{D}_{qu}] : \Delta \text{ satisfaz (3.9) com } \|\Delta_i\|_2 \leq 1\}.$$

Foram descritas nesta subseção as principais formas de se modelar um sistema com incertezas. Outras maneiras, bem como variações das formas aqui desenvolvidas, são também utilizadas nos diversos métodos RMPC.

Como citado anteriormente, a forma de se modelar uma planta levando em conta as incertezas do modelo, utilizada pelo MPC robusto proposto nesta tese, tem a estrutura de uma função de transferência com incertezas associadas a cada um de seus parâmetros. Entretanto, para maior clareza e simplicidade de notação, a exposição do método, descrita no capítulo 5 desta tese, faz uso de uma descrição em espaço de estado do sistema.

Optou-se por resolver problemas com modelos dados por funções de transferência, pelo fato desta descrição apresentar poucos parâmetros (facilitando assim o processo de identificação), além de ser uma maneira bastante intuitiva de se descrever uma planta causal por modelos lineares, com incertezas. Além disso, devido ao elevado grau complexidade em resolver problemas desta natureza, não existem muitos trabalhos publicados dentro da área de Controle Preditivo Robusto Baseado em Modelos, que utilizam esse tipo de modelagem, sendo essa, portanto, uma contribuição a mais para esse ramo.

3.2 Função Objetivo

Após a escolha de um modelo que descreva a dinâmica da planta e que leve em conta as incertezas oriundas dessa descrição, uma sequência de controles futuros $\widehat{u}(k+n|k)$, $n = 0 \cdots H_c - 1$, deve ser calculada de forma que as predições da saída $\widehat{y}(k+m|k)$, fiquem o mais próximas possível, de uma trajetória de referência $w(k+m)$, $m = 1 \cdots H_p$, dadas as incertezas Θ do modelo. Para isso, geralmente escreve-se $\widehat{y}(k+m|k)$ em termos de $\widehat{u}(k+n|k)$, $\forall$ n,m e de Θ, para então aplicar um processo de otimização em uma dada função objetivo.

Uma maneira usual de se proceder, na presença de incertezas, é minimizar a função objetivo para o pior caso possível de incertezas. Isto é, considera-se a função objetivo em que as incertezas atuam da pior maneira possível, para então aplicar um procedimento de minimização. Esta técnica é bastante utilizada nos algoritmos RMPC e é chamada de **Min-Max**, em que busca-se resolver o seguinte problema:

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \max_{\theta \in \Theta} J(\mathbf{u},\theta).$$

A função a ser minimizada é o máximo de uma norma que tenta medir o quanto a saída do processo aproxima-se da trajetória de referência [Camacho & Bordons (2007)]. Diferentes tipos de normas, podem ser usadas nesse contexto. Algumas delas serão apresentadas nas subseções subsequentes.

3.2.1 Norma Quadrática

Uma das formas mais utilizadas de função objetivo, pelos algoritmos RMPC, é construída levando-se em conta a norma euclidiana e está descrita na equação (3.10), abaixo.

$$J(\mathbf{u},\theta) = \sum_{j=1}^{H_p} \delta(j)[\widehat{y}(k+j|k) - w(k+j)]^2 + \sum_{i=1}^{H_c} \lambda(i)[\Delta u(k+i-1|k)]^2. \quad (3.10)$$

Considere o conjunto das predições $\hat{y}$, j passos a frente, para $j = 1, \ldots, H_p$, utilizando-se algum dos modelos incertos descritos na seção 3.1. Essas predições podem ser reescritas na seguinte forma condensada:

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}_u\mathbf{u} + \mathbf{G}_\theta\theta + \mathbf{f}, \tag{3.11}$$

em que $\mathbf{y} = [\hat{y}(k+1|k), \hat{y}(k+2|k), \ldots, \hat{y}(k+H_p|k)]^t$, $\mathbf{u} = [\hat{u}(k|k), \hat{u}(k+1|k), \ldots, \hat{u}(k+H_c-1|k)]^t$, $\theta = [\hat{\theta}(k+1|k), \hat{\theta}(k+2|k), \ldots, \hat{\theta}(k+H_p|k)]^t$ e $\mathbf{f}$ é a resposta livre do processo, isto é, é a resposta do sistema ao se aplicar as entradas e saídas passadas, com o controle futuro valendo zero, nas equações de predição [Camacho & Bordons (2007)].

3.2.2 Norma ∞

A função custo (3.10) foi construída levando-se em conta a norma quadrática. Existem algumas abordagens que levam em conta outros tipos de normas, como por exemplo a norma ∞. Considerando-se a norma ∞, a função objetivo pode ser dada por:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u},\theta) &= \max_{j=1,\cdots,H_p} \|\widehat{y}(k+j|k) - w(k+j)\|_\infty + \max_{i=1,\cdots,H_c} \|\Delta u(k+i-1|k)\|_\infty \\ &= \max_{j=1,\cdots,H_p}[\max_{l=1,\cdots,n} |\widehat{y}_l(k+j|k) - w_l(k+j)|] + \\ &\quad + \max_{i=1,\cdots,H_c}[\max_{r=1,\cdots,m} |\Delta u_r(k+i-1|k)|], \end{aligned} \tag{3.12}$$

em que n é o número de saídas e m o número de entradas do sistema.

Com o uso da norma ∞, o problema Min-Max pode ser reduzido a um problema de otimização linear, reduzindo de forma significativa o custo computacional empregado neste procedimento.

Apesar das vantagens já mencionadas da norma ∞, ela leva em consideração apenas o máximo desvio entre a predição e a referência, não levando em conta o restante do comportamento das demais predições. Existem outros tipos de normas, capazes de medir o desempenho completo das predições da saída, entre elas estão a norma quadrática, descrita na subseção 3.2.1 e a norma 1, descrita a seguir.

3.2.3 Norma 1

Em um processo descrito por sua resposta ao impulso truncada, é conveniente utilizar uma função objetivo definida a partir da norma 1 [Allwright (1994)]:

$$J(\mathbf{u},\theta) = \sum_{j=1}^{H_p}\sum_{i=1}^{n} |\widehat{y}_i(k+j|k,\theta) - w_i(k+j)| + \lambda \sum_{j=1}^{H_c}\sum_{i=0}^{m} |\Delta u_i(k+j-1|k)|. \tag{3.13}$$

Se as sequências $\mu_i \geq 0$ e $\beta_i \geq 0$ são definidas de tal forma que, para todo $\theta \in \Theta$,

$$-\mu_i \leq \widehat{y}_i(k+j|k) - w_i(k+j) \leq \mu_i,$$
$$-\beta_i \leq \Delta u_i(k+j-1|k) \leq \beta_i,$$
$$0 \leq \sum_{i=1}^{n \times H_p} \mu_i + \lambda \sum_{i=1}^{m \times H_c} \beta_i \leq \gamma,$$

então γ é uma cota superior para

$$\mu^*(u) = \max_{\theta} \left[\sum_{j=1}^{H_p} \sum_{i=1}^{n} |\widehat{y}_i(k+j|k,\theta) - w_i(k+j)| + \lambda \sum_{j=1}^{H_c} \sum_{i=1}^{m} |\Delta u_i(k+j-1|k)| \right].$$

O problema fica, então, reduzido a minimizar a cota superior γ.

Certamente, existem outros tipos de função objetivo, bem como vários métodos de otimização que podem ser aplicados nessa etapa do controlador RMPC. Quanto ao método RMPC proposto no capítulo 5, o procedimento de otimização utilizado foi a técnica Min-Max eficiente, apresentada na seção 3.3, abaixo, aplicada com o uso da função *fmincon* (utilizando o algoritmo dos pontos interiores) do MATLAB. A função objetivo utilizada foi uma análoga à descrita pela equação (3.10).

3.3 Método Min-Max Eficiente

Na técnica Min-Max MPC (MMMPC) [Campo & Morari (1987)], o valor do sinal de controle a ser aplicado é encontrado pela minimização do pior caso de um índice de desempenho (geralmente quadrático) que é, por sua vez, calculado pela maximização sobre os possíveis valores de distúrbios e incertezas [Ramírez & Camacho (2006)].

A técnica Min-Max, se aplicada em sua forma original ao controlador, acarreta em uma grande carga computacional no algoritmo de controle, o que limita a sua aplicabilidade na indústria [Ramírez & Camacho (2006)].

Buscando contornar este problema, diversas formulações distintas e aproximações da técnica Min-Max, foram propostas para serem aplicadas em controladores MPC robustos. Alguns desses trabalhos, que apresentam o MMMPC com um esforço computacional reduzido, podem ser vistos nas seguintes referências [Lee & Yu (1997), Scokaert & Mayne (1998), Lee & Cooley (2000), Ramírez et al. (2003), Bemporad et al. (2003), Ramírez & Camacho (2006), Bouzouita et al. (2007)].

A técnica Min-Max a ser utilizada pelo controlador RMPC, proposto nesta tese, baseia-se em uma pequena (mas importante) alteração do método Min-Max original. A mesma será chamada de **Método Min-Max Eficiente** e consiste em separar o problema min-max em duas etapas: primeiro resolve-se o problema de maximização com o sinal de controle fixo como o controle calculado no passo anterior, obtendo o valor máximo do vetor de incertezas; depois, com o valor da incerteza fixo com a incerteza máxima, resolve-se o problema de minimização, obtendo o sinal de controle mínimo. O algoritmo Min-Max Eficiente pode ser descrito como:

---

1. $k \leftarrow 1$.
2. Se $k \leq k_{max}$, faça:
3. $\theta^* \leftarrow \arg_\theta \max_{\theta \in \Theta} J(\mathbf{u}^*(k-1), \Theta)$.
4. $\mathbf{u}^*(k) \leftarrow \arg_{\mathbf{u}} \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} J(\mathbf{u}, \theta^*)$.
5. $k \leftarrow k + 1$.
6. Volte ao passo 2.

A grande vantagem do método Min-Max eficiente, em relação ao método Min-Max original, é a acentuada diminuição do esforço computacional requerido, possibilitando, dessa forma, sua aplicação em problemas com maior complexidade ou em processos industriais.

A seção 3.5 apresenta uma comparação dos desempenhos de três controladores RMPC. O primeiro utiliza o Min-Max em sua formulação original, o segundo faz uso da técnica Min-Max eficiente, descrita nesta seção e o terceiro trata-se do controlador GPC robusto a ser descrito na próxima seção.

3.4 Controlador Preditivo Generalizado Robusto

Esta seção dedica-se a uma maneira de se considerar robustez no controlador preditivo generalizado. Inicialmente, será feita uma introdução ao Controlador Preditivo Generalizado com Preditor de Smith, método conhecido pela sigla de seu nome em inglês, SPGPC - *Smith predictor-based generalised predictive controller*, apresentado em [Normey-Rico & Camacho (1996),

Normey-Rico et al. (1998)]. Posteriormente, será analisada a robustez do SPGPC após a introdução de um filtro no sistema em malha fechada. Este método de controle RMPC, bastante respeitado na literatura, foi apresentado por Normey-Rico & Camacho (1999) e será denotado pela sigla FSPGPC - *Filtered SPGPC*, nesta tese.

3.4.1 Controlador Preditivo Generalizado com Preditor de Smith

O método SPGPC é bastante semelhante ao GPC. Seu algoritmo consiste em aplicar uma sequência de controles que minimiza uma função custo da seguinte forma:

$$J(N_1,N_2) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j)(\widehat{y}(k+j|k) - w(k+j))^2 + \sum_{i=1}^{N_2-d} \lambda(i)(\Delta u(k+i-1|k))^2, \tag{3.14}$$

em que N_1 e N_2 são os horizontes de predição mínimo e máximo, d é o atraso do modelo do processo, e $\delta(j)$ e $\lambda(i)$ são as sequências de ponderação do erro e do esforço de controle, respectivamente.

Ao descrever a planta por um modelo da forma

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k-1), \tag{3.15}$$

em que

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \cdots + a_{na}q^{-na}, \tag{3.16}$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \cdots + b_{nb}q^{-nb}, \tag{3.17}$$

e considerar $N_1 = d+1$ e $N_2 = H_p + d$, obtêm-se a seguinte lei de controle:

$$\begin{aligned}\Delta u(k) = {} & l_{y_1}\widehat{y}(k+d|k)+l_{y_2}\widehat{y}(k+d-1|k)+\cdots+l_{y_{na+1}}\widehat{y}(k+d-1-na|k)+\cdots+ \\ & +l_{u_1}\Delta u(k-1) + l_{u_2}\Delta u(k-2) + \cdots + l_{u_{nb}}\Delta u(k-nb)+ \\ & + \sum_{i=1}^{H_p} f_i w(k+d+i) \qquad ,\end{aligned} \tag{3.18}$$

em que l_{y_i}, l_{u_i} e f_i são constantes.

A diferença entre o GPC e o SPGPC se dá neste ponto: a predição da saída da planta é calculada utilizando-se o modelo (3.15) em malha aberta, adicionando-se à saída predita para os instantes $k+1$ até $k+d$, o erro entre a saída e a predição, da seguinte forma:

$$\widehat{y}(k+d-i|k) \leftarrow \widehat{y}(k+d-i|k) + y(k-i) - \widehat{y}(k-i|k). \tag{3.19}$$

Para calcular os coeficientes da lei de controle (3.18), usa-se o mesmo procedimento do GPC. Ao aplicar o modelo de predição (3.15) recursivamente para $j = 1, \cdots, H_p$, obtem-se:

$$\begin{bmatrix} \widehat{y}(k+d+1|k) \\ \widehat{y}(k+d+2|k) \\ \vdots \\ \widehat{y}(k+d+H_p|k) \end{bmatrix} = \tag{3.20}$$

$$\mathbf{G}\begin{bmatrix} \Delta\widehat{u}(k) \\ \Delta\widehat{u}(k+1) \\ \vdots \\ \Delta\widehat{u}(k+H_p-1) \end{bmatrix} + \mathbf{H}\begin{bmatrix} \Delta u(k-1) \\ \Delta u(k-2) \\ \vdots \\ \Delta u(k-nb) \end{bmatrix} + \mathbf{S}\begin{bmatrix} \widehat{y}(k+d|k) \\ \widehat{y}(k+d-1|k) \\ \vdots \\ \widehat{y}(k+d-na|k) \end{bmatrix},$$

em que $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{S}$ são matrizes de dimensões $H_p \times H_p$, $H_p \times nb$ e $H_p \times na+1$, respectivamente.

A equação (3.20) pode ser escrita no seguinte formato vetorial:

$$\widehat{\mathbf{y}} = \mathbf{Gu} + \mathbf{Hu_1} + \mathbf{Sy_1}, \tag{3.21}$$

em que $\mathbf{Hu_1} + \mathbf{Sy_1}$ depende de entradas e saídas passadas e corresponde à resposta livre do sistema, isto é, a saída do sistema obtida ao manter o sinal de controle constante.

Ao utilizar a equação (3.21) para a predição da saída, a função custo (3.14) fica em termos de $\mathbf{y_1}, \mathbf{u}, \mathbf{u_1}$ e do sinal de referência. Minimizando $J(H_p)$ com relação a $\mathbf{u} = [\Delta u(k), \Delta u(k+1), \cdots, \Delta u(k+H_p-1)]^t$, obtem-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{M}\begin{bmatrix} \Delta\widehat{u}(k) \\ \Delta\widehat{u}(k+1) \\ \vdots \\ \Delta\widehat{u}(k+H_p-1) \end{bmatrix} = \tag{3.22}$$

$$\mathbf{P_0}\begin{bmatrix} \widehat{y}(k+d|k) \\ \widehat{y}(k+d-1|k) \\ \vdots \\ \widehat{y}(k+d-na|k) \end{bmatrix} + \mathbf{P_1}\begin{bmatrix} \Delta u(k-1) \\ \Delta u(k-2) \\ \vdots \\ \Delta u(k-nb) \end{bmatrix} + \mathbf{R}\begin{bmatrix} w(k+d+1) \\ w(k+d+2) \\ \vdots \\ w(k+d+H_p) \end{bmatrix},$$

em que as matrizes $\mathbf{M} = \mathbf{G^t Q_\delta G} + \mathbf{Q_\lambda}$ e $\mathbf{R} = \mathbf{G^t G_\delta}$, possuem dimensão $H_p \times H_p$, $\mathbf{P_0} = -\mathbf{G^t Q_\delta S}$ possui dimensão $H_p \times na + 1$ e $\mathbf{P_1} = -\mathbf{G^t Q_\delta H}$

tem dimensão $H_p \times nb$. As matrizes $\mathbf{Q}_\lambda$ e $\mathbf{Q}_\delta$ são as seguintes matrizes de ponderação:

$$\mathbf{Q}_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda(1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda(2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda(H_p) \end{bmatrix} \quad \text{e} \tag{3.23}$$

$$\mathbf{Q}_\delta = \begin{bmatrix} \delta(d+1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta(d+2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta(d+H_p) \end{bmatrix}.$$

Ao chamar de $\mathbf{q}$, a primeira linha da matriz $\mathbf{M^{-1}}$, $\Delta u(k)$ é dado por:

$$\Delta u(k) = \mathbf{qP_0} \begin{bmatrix} \widehat{y}(k+d|k) \\ \widehat{y}(k+d-1|k) \\ \vdots \\ \widehat{y}(k+d-na|k) \end{bmatrix} + \mathbf{qP_1} \begin{bmatrix} \Delta u(k-1) \\ \Delta u(k-2) \\ \vdots \\ \Delta u(k-nb) \end{bmatrix} + \tag{3.24}$$

$$\mathbf{qR} \begin{bmatrix} w(k+d+1) \\ w(k+d+2) \\ \vdots \\ w(k+d+H_p) \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, o incremento do sinal de controle $\Delta u(k)$, pode ser escrito como

$$\Delta u(k) = \mathbf{qP_0 y_1} + \mathbf{qP_1 u1} + \sum_{i=1}^{H_p} f_i w(k+d+i), \tag{3.25}$$

com $\mathbf{qP_0} = [ly_1, ly_2, \cdots, ly_{na+1}]$, $\mathbf{qP_1} = [lu_1, lu_2, \cdots, ly_{nb}]$ e $f_i = \sum_{i=1}^{H_p} q_j r_{ji}$. Os índices r_{ji} são os elementos da matriz $\mathbf{R}$ e q_j são os elementos de $\mathbf{q}$. Os coeficientes l_{y_i}, l_{u_i} e f_i são funções de a_i, b_i, H_p,$\delta(i)$ e $\lambda(i)$.

Note que a lei de controle pode ser calculada usando-se a resposta livre do sistema, $\mathbf{f_r}$, assim como no caso do GPC (veja seção 2.2). Neste caso, a predição é dada por

$$\widehat{\mathbf{y}} = \mathbf{Gu} + \mathbf{f_r}, \tag{3.26}$$

em que, de k+1 até k+d, $\mathbf{f_r}$ é calculada com o uso o modelo de predição (3.15) em malha aberta, com o sinal de futuros controles igual a zero, adicionando-se

a correção

$$\begin{bmatrix} y(k) - \widehat{y}(k) \\ y(k-1) - \widehat{y}(k-1) \\ \vdots \\ y(k+1-na) - \widehat{y}(k+1-na) \end{bmatrix}, \tag{3.27}$$

e, de $k + d + 1$ até $k + H_p$, utilizando-se o procedimento normal do GPC, descrito na seção 2.2. O esquema do SPGPC pode ser visualizado na Figura 3.2.

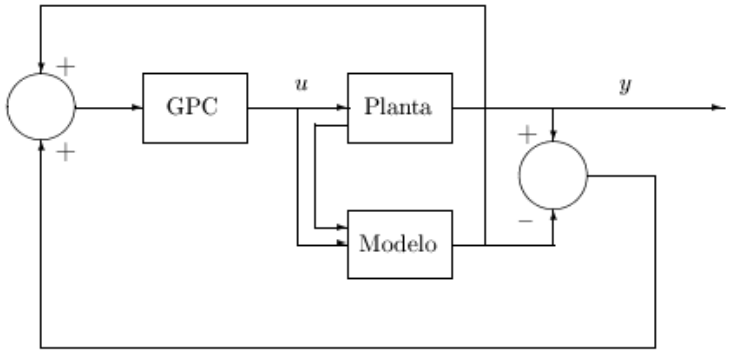

Figura 3.2: Estrutura do SPGPC

Neste caso, a lei de controle é dada por:

$$\Delta u(k) = (\mathbf{G^t Q_\delta G} + \mathbf{Q_\lambda})^{-\mathbf{1}} \mathbf{G^t Q_\delta} (\mathbf{f_r} - \mathbf{w}), \tag{3.28}$$

em que $\mathbf{w} = [w(k + d + 1), \cdots, w(k + d + H_p)]$.

3.4.2 Robustez no SPGPC

Suponha que uma planta possa ser descrita por um modelo dado pela função de transferência (3.15), com a presença de incertezas não estruturadas (assuma que o comportamento do processo possa ser descrito por uma família de modelos lineares). Com o objetivo de controlar essa planta, apesar das incertezas, utilizando o método de controle SPGPC, um filtro F pode ser usado junto a este controlador, da forma em que está apresentado na Figura 3.3. Ou seja, o erro entre a saída da planta e o modelo de predição, $y(k) - \widehat{y}(k)$, deve passar pelo filtro F, antes de ser considerado na lei de controle do SPGPC.

Mais especificamente, ao considerar a predição da saída, descrita pela equação (3.26), a resposta livre do sistema $\mathbf{f_r}$, de $k+1$ até $k+d$, é calculada

com o uso o modelo de predição (3.15) em malha aberta, mais a correção (3.27), filtrada pelo filtro F. De $k+d+1$ até $k+H_p$, utiliza-se o procedimento normal do GPC.

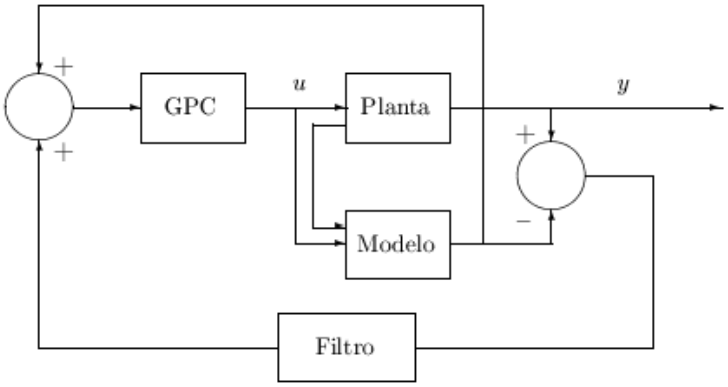

Figura 3.3: Estrutura do FSPGPC

Observe que o desempenho nominal do sistema em malha fechada não é alterado pela inclusão do filtro F. Isto é, quando o processo e o modelo da planta são iguais, o sinal de erro $y(k) - \widehat{y}(k)$ vale zero e, portanto, o filtro não atua no sistema. Entretanto, nesse caso, a rejeição de pertubação do sistema é afetada pela inclusão do filtro.

Como descrito em [Normey-Rico & Camacho (1999)], a sintonia do filtro F provoca um equilíbrio entre robustez e rejeição de pertubação, de forma direta, ou seja, quanto maior for a rejeição de pertubação, menor será robustez do método e vice-versa.

O filtro F deve ser escolhido de forma a reduzir o efeito das incertezas no sistema, mantendo-se o ganho unitário do mesmo. Dessa forma, F deve ser um filtro passa-baixas com a condição de estabilidade $F(1) = 1$. Para maiores detalhes, veja [Normey-Rico & Camacho (1999)].

O controlador robusto FSPGPC deve projetado segundo dois passos:

a) Escolha os parâmetros de controle H_p, δ e λ de forma a obter um bom desempenho para saída do modelo nominal da planta, utilizando o controlador SPGPC.

b) Escolha a ordem e a frequência de corte do filtro passa-baixas F, de forma a reduzir os efeitos provocados pelas incertezas do modelo.

O procedimento de projeto do controlador FSPGPC, descrito acima, refere-se ao SPGPC com modelo de controle interno [Morari & Zafiriou

(1989)], em que um controlador é projetado inicialmente e, em seguida, um filtro é incluído para aperfeiçoar a robustez do mesmo.

O desempenho do FSPGPC será comparado ao desempenho de outros dois controladores preditivos robustos, na seção seguinte, para dois exemplos simulados.

3.5 Resultados de Simulação

No presente capítulo foram apresentadas as metodologias de três controladores RMPC: (1) o controlador MPC robusto, associado ao método Min-Max eficiente, apresentado na seção 3.3, que será denotado pela sigla MMEMPC (Min-Max Eficiente - MPC); (2) o MPC robusto, associado ao método Min-Max original, que será denotado pela sigla MMMPC (Min-Max MPC) - neste caso a lei de controle é calculada a partir de um procedimento de otimização dentro do outro, ou seja, busca-se o mínimo, com relação a u, do valor máximo da função custo no conjunto de todas as incertezas; (3) o FSPGPC (descrito na subseção 3.4.2).

Dado que o tema central desta tese é o controlador MPC robusto, esta seção apresenta uma comparação entre os desempenhos dos três métodos de controle RMPC, descritos no parágrafo anterior, para dois exemplos. Além disso, essa comparação de desempenho justifica o algoritmo do RMPC proposto no capitulo 5.

O primeiro exemplo trata do sistema de posicionamento angular, descrito na subseção 2.3.1 e o segundo refere-se a uma planta com função de transferência instável (polos com módulo maior que um) e de fase não mínima (zeros com módulo maior que um).

Os valores escolhidos para os parâmetros da função objetivo 3.10, foram: $\delta(j) = 1$, $j = 1, \cdots, H_p$, para os três controladores, $\lambda(i) = 1$, $i = 1, \cdots, H_c$, para o MMEMPC e MMMPC e $\lambda(i) = 0{,}005$, $i = 1, \cdots, H_c$ para o FSPGPC. Além disso, considerou-se a condição inicial $u(k) = 0{,}05$, $\forall k \leq k_0$ e uma trajetória de referência constante e igual a um. Usaram-se 100 iterações em ambos os exemplos.

Para obtenção dos resultados exibidos nesta seção, uma cuidadosa sintonia dos parâmetros de controle H_p, H_c, λ, ω_c e O (os dois últimos utilizados apenas pelo FSPGPC) foi realizada. O resultados apresentados correspondem àqueles em que cada controlador obteve o melhor desempenho quanto à convergência da saída da planta, em estado estacionário.

3.5.1 Exemplo 1

Considere o sistema de posicionamento angular, descrito na subseção 2.3.1, cujo modelo é dado por:

$$\theta(k) = \frac{0{,}0078}{q^2 + (0.1\alpha(k) - 2)q + (1 - 0{,}1\alpha(k))}u(k), \tag{3.29}$$

em que $\theta(k)$ é a posição angular (rad) e $0{,}1s^{-1} \leq \alpha(k) \leq 10s^{-1}$.

Novamente neste exemplo, o parâmetro $\alpha(k)$ será considerado fixo no tempo, porém com seu valor incerto, podendo assumir qualquer valor no intervalo $[0{,}1; 10]$.

Para as simulações realizadas neste exemplo, considerou-se como modelo da planta, o modelo (3.29), e observou-se os resultados dos controladores MMEMPC, MMMPC e FSPGPC, para diversos valores de $\alpha(k)$ no intervalo $[0.1; 10]$. No controlador FSPGPC, utilizou-se como modelo nominal, o modelo (3.29), com $\alpha_n(k)$ no lugar de $\alpha(k)$, e a convergência da saída de cada planta simulada foi analisada para diversos valores $\alpha_n(k)$.

Para o controle de todas as plantas simuladas, propostas neste exemplo, o FSPGPC foi projetado utilizando horizonte de predição $H_p = 12$ e horizonte de controle $H_c = 6$. Além disso, utilizou-se um filtro passa-baixas de ordem dois, com frequência de corte ω_c rad/s assumindo diferentes valores para cada caso.

Ao considerar $\alpha(k) = 0{,}1$ e $\alpha(k) = 1$, os controladores MMEMPC e MMMPC tiveram o mesmo comportamento, mostrando-se ineficientes no controle do sistema, como pode ser observado nas Figuras 3.4 e 3.7, respectivamente. Em ambos os casos, utilizou-se um horizonte de predição $H_p = 5$ e um horizonte de controle $H_c = 3$, para ambos os métodos.

Para a planta simulada com $\alpha(k) = 0{,}1$, o FSPGPC apresentou um bom desempenho para os modelos da planta correspondentes a $\alpha_n(k) = 1$ e $\alpha_n(k) = 3$, de acordo com a Figura 3.5. A Figura 3.5 também mostra uma convergência lenta e oscilatória se o modelo da planta é associado a $\alpha_n(k) = 5$. Para valores de $\alpha_n(k)$ maiores do que cinco, o método passa a apresentar divergência. A Figura 3.6 mostra esse comportamento para $\alpha_n(k) = 7$. Neste caso, utilizou-se $\omega_c = 0{,}85$.

Supondo a planta com modelo associado a $\alpha(k) = 1$, o controlador FSPGPC apresentou um desempenho satisfatório, utilizando modelos nominais correspondentes a $\alpha_n(k) = 0{,}1$, $\alpha_n(k) = 3$ e $\alpha_n(k) = 5$. Estes resultados estão expostos na Figura 3.8. Por outro lado, segundo a Figura 3.9, ao considerar um modelo com $\alpha_n(k) = 7$, a saída da planta apresenta comportamento oscilatório e, para $\alpha_n(k) = 8$, ocorre divergência. Obviamente, se $\alpha_n(k) \geq 8$,

a saída da planta diverge. Novamente o valor da frequência de corte foi $\omega_c = 0{,}85$.

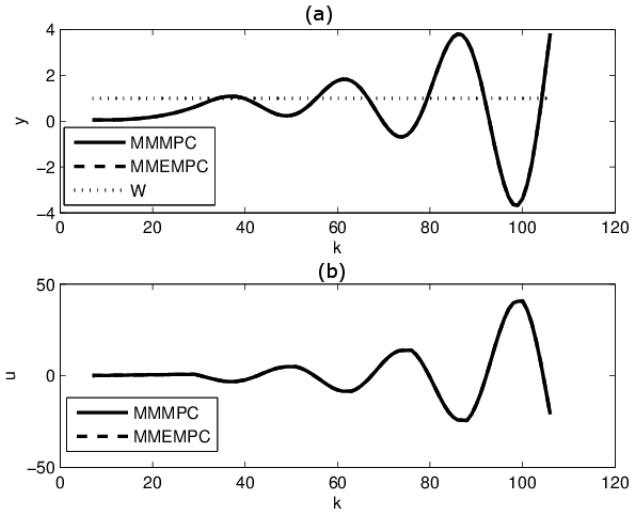

Figura 3.4: Modelo da planta com $\alpha(k) = 0{,}1$: (a) Resposta do sistema controlado. (b) Ação de controle - MMMPC (linha contínua) e MMEMPC (linha tracejada).

Os resultados apresentados pelos métodos MMEMPC e MMMPC, para plantas associadas aos valores $\alpha(k) = 5$ e $\alpha(k) = 10$, são apresentados pelas Figuras 3.10 e 3.12, respectivamente. Para estes valores de $\alpha(k)$, observa-se uma melhora quanto à convergência da saída do sistema, entretanto, a convergência se dá de forma bastante lenta nos dois casos, para ambos os métodos. Para estes resultados, os controladores MMEMPC e MMMPC foram projetados utilizando horizontes de predição $H_p = 6$ e de controle $H_c = 4$.

Por outro lado, o controlador FSPGPC apresentou um bom resultado no controle das plantas com modelos correspondentes a $\alpha(k) = 5$ e $\alpha(k) = 10$, utilizando diversos valores diferentes para $\alpha_n(k)$, como mostra as Figuras 3.11 e 3.13. Para estes resultados, utilizou-se $\omega_c = 9$ e $\omega_c = 0{,}99$, respectivamente

A Tabela 3.1 mostra o tempo de CPU demandado pelos três controladores robustos, no controle da saída de cada planta simulada associada aos valores de $\alpha(k)$. No caso do FSPGPC, tomou-se a média aritmética do tempo de CPU das simulações feitas com diferentes valores de $\alpha_n(k)$, para cada valor de $\alpha(k)$.

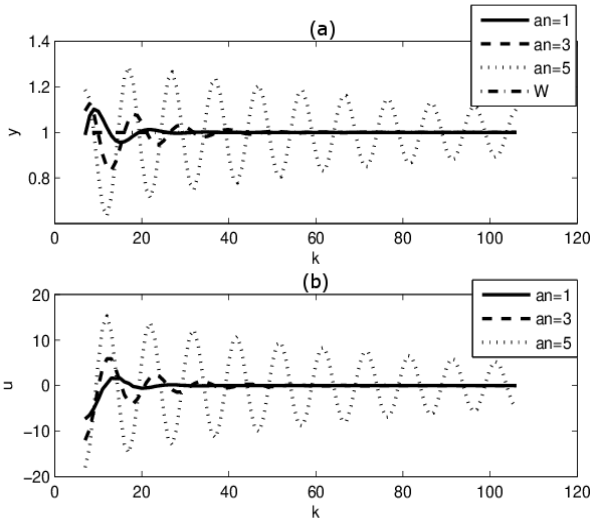

Figura 3.5: Modelo da planta com $\alpha(k) = 0{,}1$: (a) Resposta do sistema controlado pelo FSPGPC. (b) Ação de controle - Modelo nominal com: $\alpha_n(k) = 1$ (linha contínua), $\alpha_n(k) = 3$ (linha tracejada) e $\alpha_n(k) = 5$ (linha pontilhada).

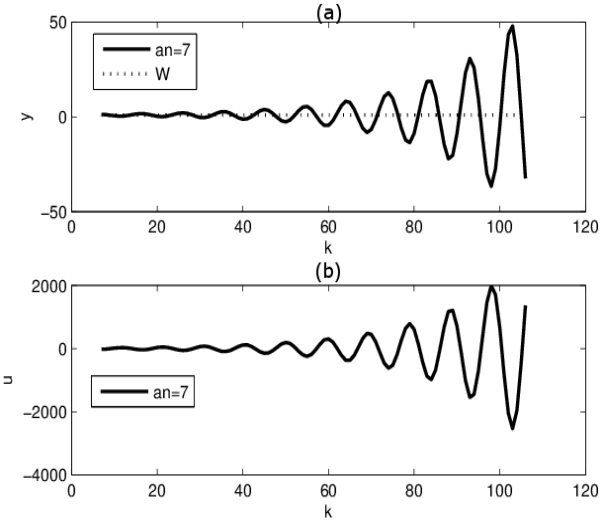

Figura 3.6: Modelo da planta com $\alpha(k) = 0{,}1$ e modelo nominal com $\alpha_n(k) = 7$: (a) Resposta do sistema controlado pelo FSPGPC. (b) Ação de controle.

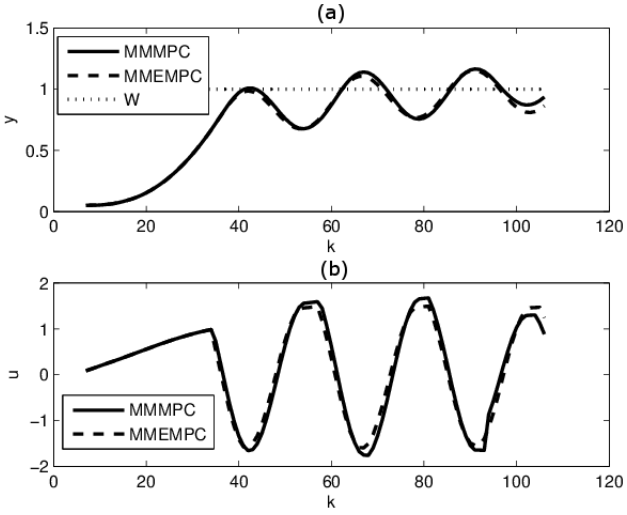

Figura 3.7: Modelo da planta com $\alpha(k) = 1$: (a) Resposta do sistema controlado. (b) Ação de controle - MMMPC (linha contínua) e MMEMPC (linha tracejada).

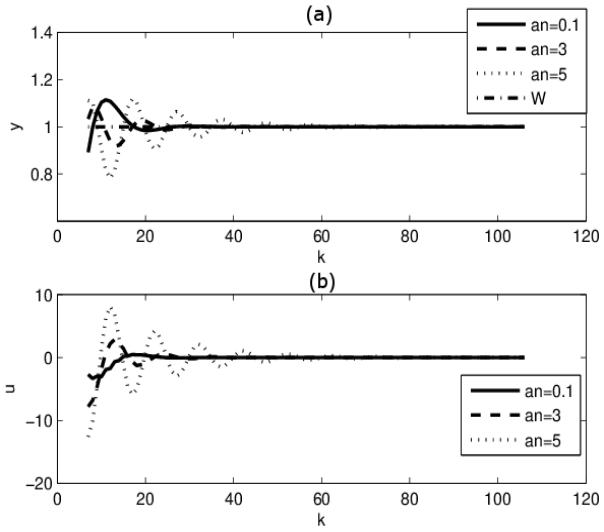

Figura 3.8: Modelo da planta com $\alpha(k) = 1$: (a) Resposta do sistema controlado pelo FSPGPC. (b) Ação de controle - Modelo nominal com: $\alpha_n(k) = 0{,}1$ (linha contínua), $\alpha_n(k) = 3$ (linha tracejada) e $\alpha_n(k) = 5$ (linha pontilhada).

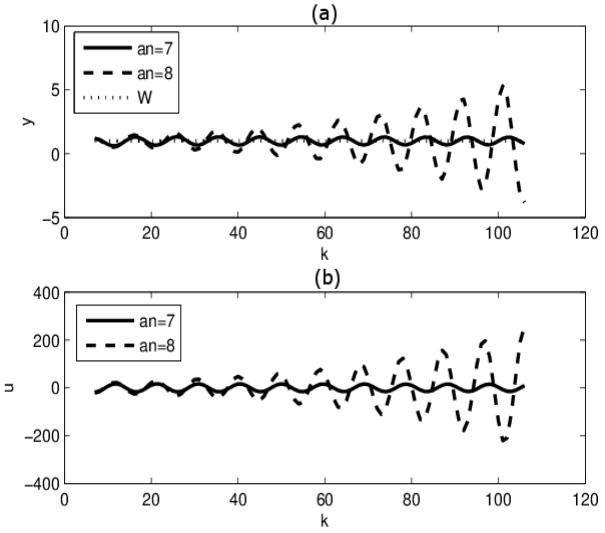

Figura 3.9: Modelo da planta com $\alpha(k) = 1$: (a) Resposta do sistema controlado pelo FSPGPC. (b) Ação de controle - Modelo nominal com: $\alpha_n(k) = 7$ (linha contínua) e $\alpha_n(k) = 8$ (linha tracejada).

Embora os métodos MMEMPC e MMMPC tenham mostrado um desempenho semelhante quanto à convergência da saída do sistema, pode-se observar, pela Tabela 3.1, uma grande superioridade do MMEMPC, em relação ao MMMPC, quanto ao tempo de CPU. Por outro lado, as Figuras deste exemplo, bem como a Tabela 3.1, mostram que o método de controle FSPGPC apresentou-se superior aos controladores MMEMPC e MMMPC, no controle das plantas simuladas propostas neste exemplo, tanto quanto à convergência da saída da planta, quanto ao tempo de CPU requerido.

Tabela 3.1: Tempo de CPU - Exemplo 3.5.1

$\alpha(k)$	Tempo de CPU		
	MMMPC	MMEMPC	FSPGPC
0,1	41,261741 s	1,621168 s	0,008031 s
1	53,692365 s	1,597147 s	0,013745 s
5	238,657795 s	1,842209 s	0,008108 s
10	210,415769 s	1,906373 s	0,008078 s

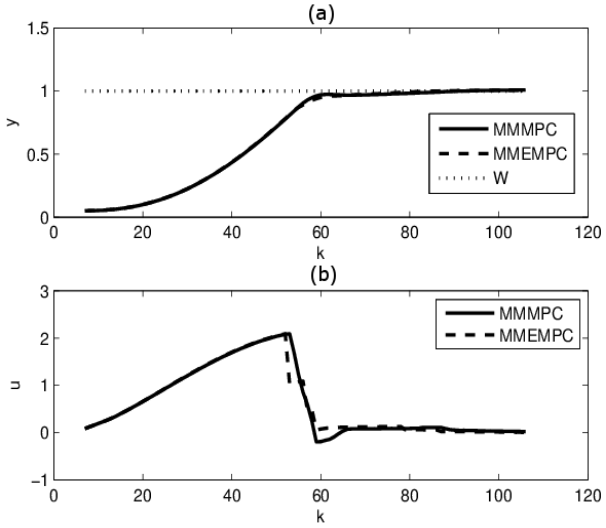

Figura 3.10: Modelo da planta com $\alpha(k) = 5$: (a) Resposta do sistema controlado. (b) Ação de controle - MMMPC (linha contínua) e MMEMPC (linha tracejada).

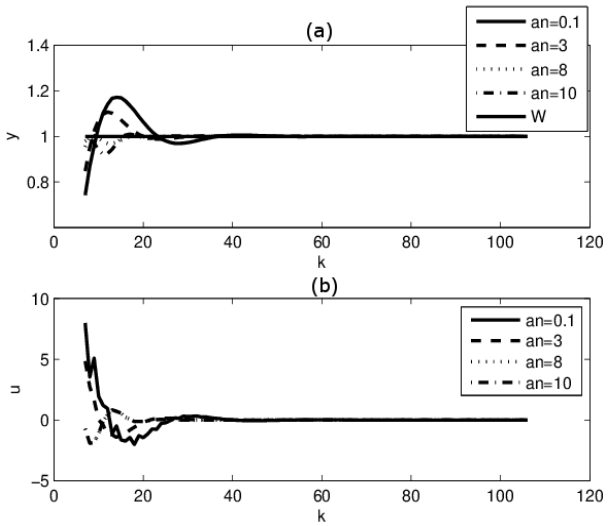

Figura 3.11: Modelo da planta com $\alpha(k) = 5$: (a) Resposta do sistema controlado pelo FSPGPC. (b) Ação de controle - Modelo nominal com: $\alpha_n(k) = 0{,}1$ (linha contínua), $\alpha_n(k) = 3$ (linha tracejada), $\alpha_n(k) = 8$ (linha pontilhada) e $\alpha_n(k) = 10$ (linha traço-pontilhada).

3.5.2 Exemplo 2

Existem situações em que o modelo do sistema apresenta um número elevado de parâmetros incertos. Nestes tipos de situações, por razões óbvias, espera-se um desempenho inferior dos métodos de controle preditivo robustos. Este exemplo apresenta uma análise da robustez dos métodos MMMPC, MMEMPC e FSPGPC no controle de uma planta simulada que apresenta quatro parâmetros incertos.

Suponha que o modelo da planta seja conhecido, porém com incertezas politópicas em seus parâmetros, ou seja, suponha que o modelo nominal seja dado por:

$$y(k) = \frac{b_0 q + b_1}{q^2 + a_1 q + a_2} u(k), \tag{3.30}$$

em que os coeficientes da função de transferência, a_i e b_j, podem assumir

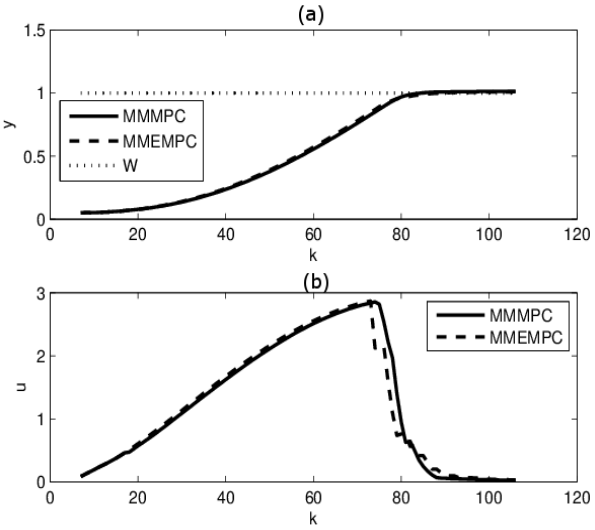

Figura 3.12: Modelo da planta com $\alpha(k) = 10$: (a) Resposta do sistema controlado. (b) Ação de controle - MMMPC (linha contínua) e MMEMPC (linha tracejada).

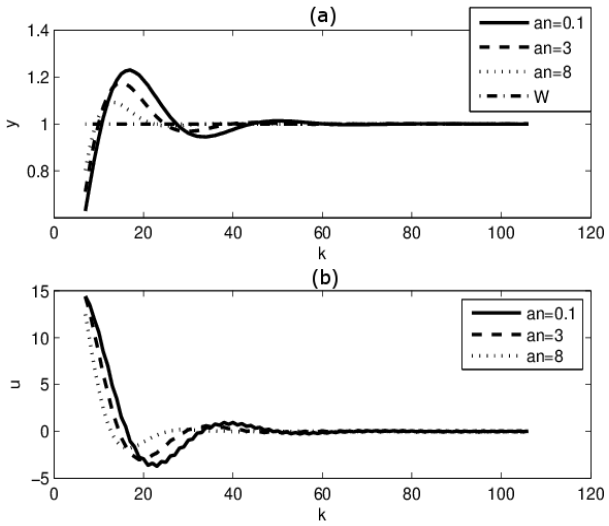

Figura 3.13: Modelo da planta com $\alpha(k) = 10$: (a) Resposta do sistema controlado pelo FSPGPC. (b) Ação de controle - Modelo nominal com: $\alpha_n(k) = 0{,}1$ (linha contínua), $\alpha_n(k) = 3$ (linha tracejada) e $\alpha_n(k) = 8$ (linha pontilhada).

quaisquer valores no seguinte politopo:

$$\mathcal{C} = \begin{cases} 0{,}7 \leq b_0 \leq 1{,}3 \\ 3{,}5 \leq b_1 \leq 6{,}5 \\ 0{,}7 \leq a_1 \leq 1{,}3 \\ 1{,}05 \leq a_2 \leq 1{,}95 \end{cases} . \tag{3.31}$$

Observe que a função de transferência (3.30) é instável e de fase não mínima, quaisquer que sejam os valores dos parâmetros a_i e b_j em $\mathcal{C}$.

Analisou-se os desempenhos dos métodos MMMPC, MMEMPC e FSPGPC, no controle da planta (3.30), para três diferentes conjuntos de valores assumidos pelos coeficientes, a_i e b_j, no politopo (3.31). Nos três casos utilizou-se $H_p = 4$ e $H_c = 2$, no MMMPC e no MMEMPC, e $H_p = 8$ e $H_c = 4$, no FSPGPC. Além disso, utilizou-se um filtro passa-baixas de ordem dois, com frequência de corte ω_c assumindo diferentes valores para cada caso.

Caso 1

Suponha que o modelo da planta seja dado pela função de transferência (3.30), com os parâmetros assumindo os valores médios de cada intervalo em $\mathcal{C}$. Dessa forma, a planta é dada pelo seguinte modelo:

$$y(k) = \frac{q+5}{q^2+q+1{,}5}u(k), \tag{3.32}$$

Os controladores MMMPC e MMEMPC foram aplicados no controle da planta (3.32), supondo que os parâmetros do modelo são incertos e estão contidos no politopo (3.31). Os resultados obtidos estão expostos na Figura 3.14, onde pode-se observar a eficiência de ambos os métodos, com uma superioridade do MMMPC, quanto à convergência da saída.

Analisou-se o desempenho do FSPGPC para o controle da planta (3.32), considerando três possibilidades de modelos de predição. Os modelos de predição utilizados correspondem aos modelos descritos pela função de transferência (3.30), com parâmetros assumindo os seguintes valores: Modelo 1: $\{b_0,b_1,a_1,a_2\} = \{0{,}7; 3{,}5; 0{,}7; 1{,}05\}$, Modelo 2: $\{b_0,b_1,a_1,a_2\} = \{1{,}3; 6{,}5; 1{,}3; 1{,}95\}$ e Modelo 3: $\{b_0,b_1,a_1,a_2\} = \{1{,}3; 6{,}5; 0{,}7; 1{,}05\}$. As Figuras 3.15 e 3.16 mostram os resultados destas simulações, onde pode-se constatar o bom desempenho do método ao utilizar os modelos 1 e 2, na predição da saída. Ao utilizar o modelo 3, o FSPGPC mostrou pouca eficiência e uma lenta convergência da saída da planta. Para estas simulações, o FSPGPC foi projetado com uma frequência de corte $\omega_c = 0{,}9$.

Caso 2

Suponha que o modelo da planta seja dado pela função de transferência (3.30), com os parâmetros assumindo os valores extremos mínimos de cada intervalo em $\mathcal{C}$, ou seja, a planta é dada pelo modelo:

$$y(k) = \frac{0{,}7q+3{,}5}{q^2+0{,}7q+1{,}05}u(k), \tag{3.33}$$

Os resultados obtidos pelos controladores MMMPC e MMEMPC, quando aplicados ao controle da planta (3.33), supondo que parâmetros do modelo estão contidos em $\mathcal{C}$, são apresentados pela Figura 3.17, que mostra grande eficiência dos métodos na convergência da saída da planta.

Novamente, o desempenho do FSPGPC foi analisado, para três possibilidades de modelos de predição, no controle da planta (3.33). Os modelos de predição utilizados, neste caso, correspondem aos modelos associados aos seguintes conjuntos de parâmetros: Modelo 1: $\{b_0,b_1,a_1,a_2\} = \{1; 5; 1; 1{,}5\}$,

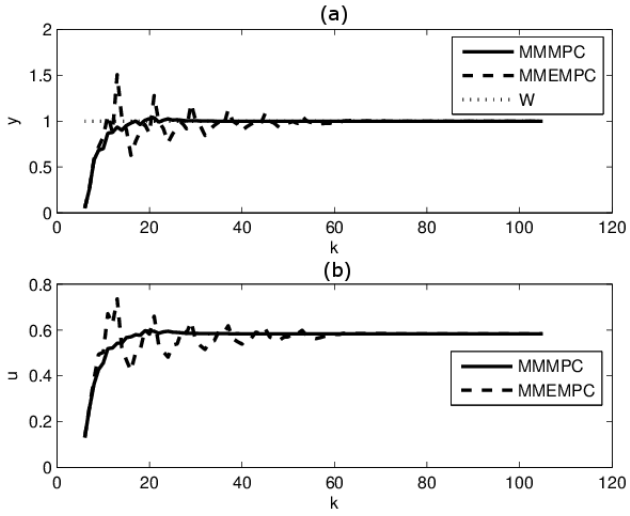

Figura 3.14: Planta (3.32): (a) Resposta do sistema controlado. (b) Ação de controle - MMMPC (linha contínua) e MMEMPC (linha tracejada).

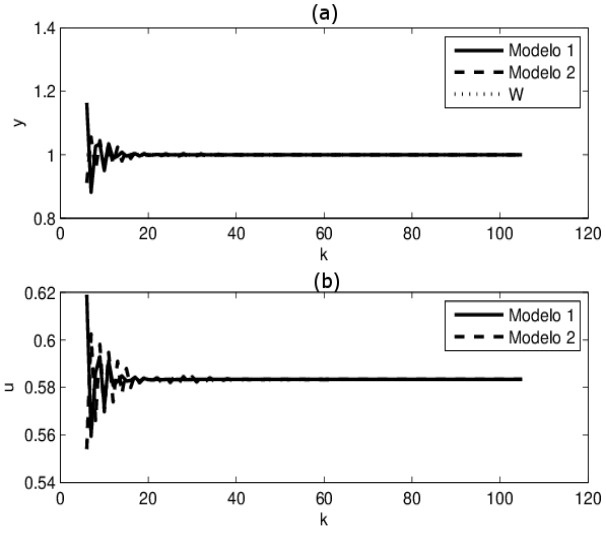

Figura 3.15: Planta (3.32): (a) Resposta do sistema controlado pelo FSPGPC. (b) Ação de controle - Modelo nominal: 1 (linha contínua) e 2 (linha tracejada).

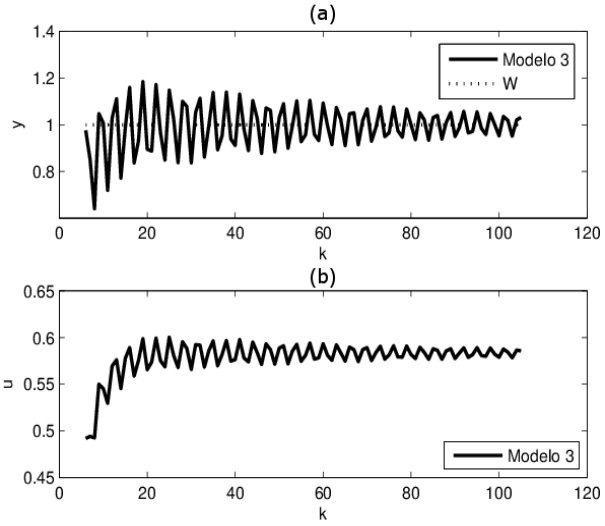

Figura 3.16: Planta (3.32) e modelo nominal 3 : (a) Resposta do sistema controlado pelo FSPGPC. (b) Ação de controle.

Modelo 2: $\{b_0,b_1,a_1,a_2\} = \{1{,}3; 6{,}5; 1{,}3; 1{,}95\}$ e Modelo 3: $\{b_0,b_1,a_1,a_2\} = \{1{,}3; 6{,}5; 0{,}7; 1{,}05\}$. Pode-se observar pela Figura 3.18, que o FSPGPC mostrou um controle satisfatório para todas as possibilidades de modelo. Utilizou-

se uma frequência de corte $\omega_c = 0{,}8$.

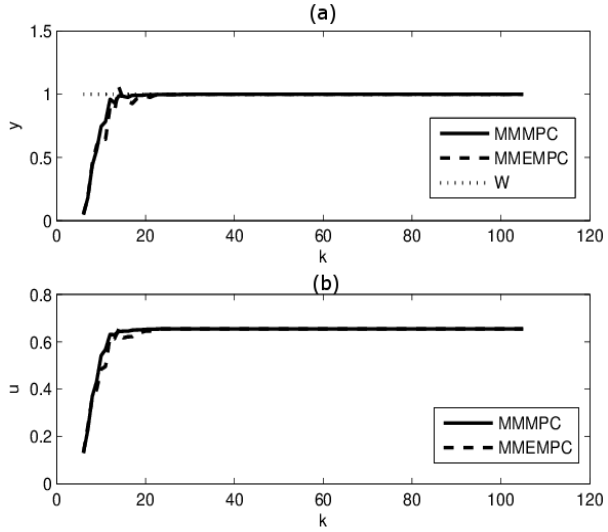

Figura 3.17: Planta (3.33): (a) Resposta do sistema controlado. (b) Ação de controle - MMMPC (linha contínua) e MMEMPC (linha tracejada).

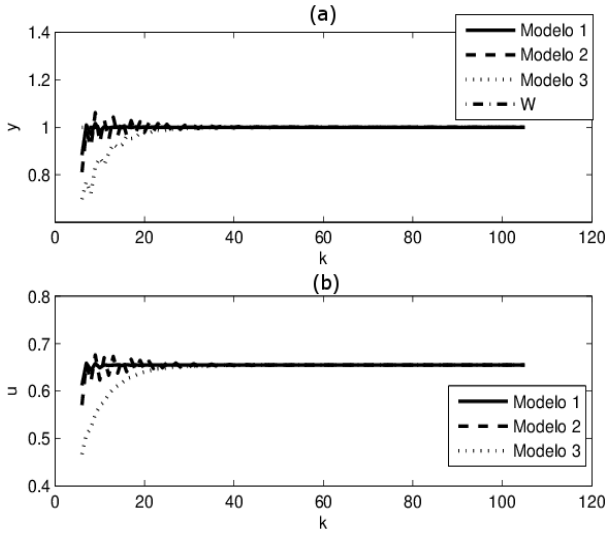

Figura 3.18: Planta (3.33): (a) Resposta do sistema controlado pelo FSPGPC. (b) Ação de controle - Modelo nominal: 1 (linha contínua), 2 (linha tracejada) e 3 (linha pontilhada).

Caso 3

Finalmente, suponha que o modelo da planta seja dado por:

$$y(k) = \frac{0{,}7q + 3{,}5}{q^2 + 1{,}3q + 1{,}95}u(k). \tag{3.34}$$

Os algoritmos MMMPC e MMEMPC foram aplicados no controle da planta (3.34), supondo os parâmetros do modelo contidos em (3.31), e os resultados estão apresentados pelas Figuras 3.19 e 3.20, respectivamente. Pode-se notar que a saída da planta controlada pelo MMMPC, diverge da referência. Por outro lado, o MMEMPC apresenta um bom desempenho nesse caso.

O FSPGPC foi aplicado para o controle da planta (3.34), utilizando os seguintes modelos de predição: Modelo 1: $\{b_0,b_1,a_1,a_2\} = \{1;5;1;1{,}5\}$, Modelo 2: $\{b_0,b_1,a_1,a_2\} = \{1{,}3;6{,}5;1{,}3;1{,}95\}$ e Modelo 3: $\{b_0,b_1,a_1,a_2\} = \{0{,}7;3{,}5;0{,}7;1{,}05\}$, e em todos os casos, a saída da planta apresentou divergência. Para estes resultados, a frequência de corte foi $\omega_c = 0{,}99$. A Figura

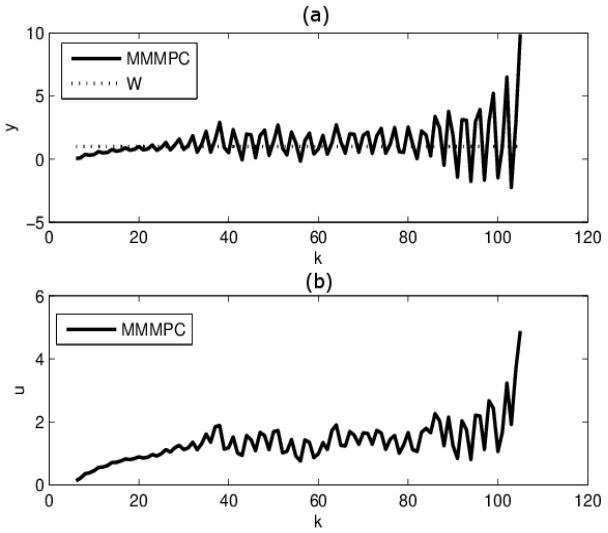

Figura 3.19: Planta (3.34): (a) Resposta do sistema controlado pelo MMMPC. (b) Ação de controle.

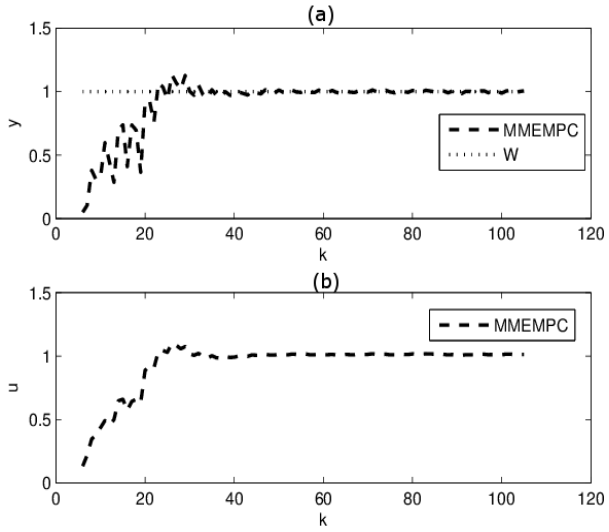

Figura 3.20: Planta (3.34): (a) Resposta do sistema controlado pelo MMEMPC. (b) Ação de controle.

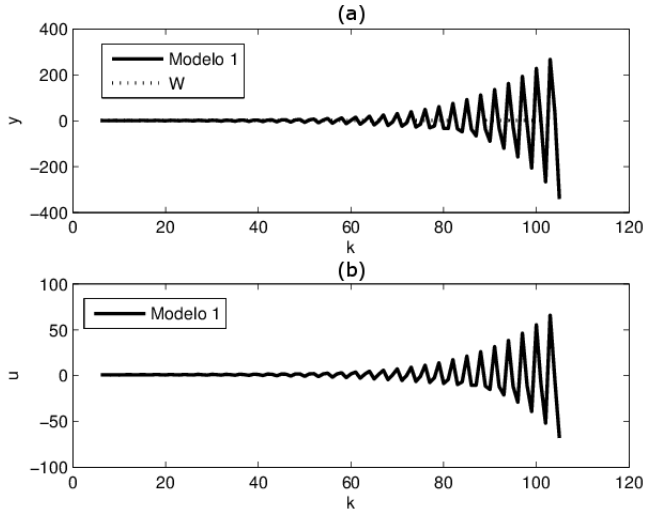

Figura 3.21: Planta (3.34) e modelo nominal 1: (a) Resposta do sistema controlado pelo FSPGPC. (b) Ação de controle.

3.21 mostra o resultado do FSPGPC, utilizando o modelo 1 para a predição da planta.

A tabela 3.2 mostra o tempo de CPU requerido pelos controladores MMMPC, MMEMPC e FSPGPC, ao controlar cada uma das plantas descritas nos ca-

sos 1, 2 e 3. No caso do FSPGPC, tomou-se a média aritmética do tempo de CPU das simulações feitas, utilizando-se os diferentes modelos, descritos em cada caso.

Assim como no Exemplo 3.5.1, pode-se notar um tempo muito maior utilizado pelo MMMPC em relação aos demais métodos, como era de se esperar, dada a natureza do algoritmo MMMPC. Além disso, a Tabela 3.2 mostra uma grande superioridade do FSPGPC, em relação aos outros controladores, quanto ao tempo de CPU.

Tabela 3.2: Tempo de CPU - Exemplo 3.5.2

Caso	Tempo de CPU		
	MMMPC	MMEMPC	FSPGPC
1	80,891126 s	2,185101 s	0,011627 s
2	51,762926 s	1,435533 s	0,011346 s
3	213,974402 s	2,119017 s	0,011337 s

As Figuras deste exemplo mostram o bom desempenho de controle em estado estacionário, do controlador MMEMPC, em todos os casos analisados. Além disso, pode-se observar que a eficiência do FSPGPC, no controle das plantas propostas pelos casos 1 e 2, depende da escolha do modelo a ser utilizado na predição da saída da planta.

3.6 Conclusões

Este capítulo abordou a metodologia geral de controladores preditivos robustos baseados em modelos. Primeiramente, uma descrição sobre as principais formas de se considerar incertezas em modelos lineares, foi apresentada. Em seguida, foram descritas algumas possibilidades de funções objetivos a serem consideradas em controladores RMPC. Posteriormente, uma introdução à metodologia Min-Max foi introduzida e um novo método Min-Max, o MMEMPC, foi proposto, a partir de pequenas alterações do método original. Na sequência, foi apresentado o FSPGPC, um algoritmo que acrescenta robustez ao controlador GPC. Finalmente, os desempenhos dos controladores MMMPC, MMEMPC e FSPGPC, foram comparados para dois exemplos simulados.

Em ambos os exemplos, os controladores MMMPC e MMEMPC apresentaram desempenho semelhante quanto à convergência da saída do sistema (exceto no caso 3 do exemplo 2). Os resultados apresentados no exemplo 1,

mostram divergência, oscilações e lenta convergência dos métodos MMMPC e MMEMPC. No exemplo 2, ambos os métodos mostraram-se eficientes no controle da planta, apenas no caso 2. Entretanto o MMEMPC mostrou-se muito superior em relação ao MMMPC, quanto ao tempo de CPU demandado, em todos os casos dos dois exemplos. Da forma como foi definido, o algoritmo do controlador MMEMPC mostrou um desempenho pouco satisfatório no controle das plantas propostas. Entretanto, no capítulo 5 serão deduzidas diversas restrições a serem incorporadas à entrada da planta e, como será mostrado mais adiante no mesmo capítulo, a imposição dessas restrições junto ao controlador MMEMPC é capaz de adicionar robustez e estabilização ao controlador.

Por outro lado, o FSPGPC mostrou eficiência no controle de algumas plantas propostas na seção anterior, principalmente nos casos em que a planta não difere muito do modelo nominal. Para os demais casos, o FSPGPC apresentou resultados de oscilação e divergência. Entretanto, os resultados apresentados pelo FSPGPC mostraram-se superiores quando comparados aos resultados obtidos pelos controladores MMEMPC e MMMPC, na estabilização da saída da planta em estado estacionário.

Como o FSPGPC trata incertezas do tipo não estruturadas, sua metodologia não pode ser utilizada junto ao controlador RMPC proposto neste trabalho (que trata de incertezas politópicas). Porém, o FSPGPC (aplicado ao caso de incertezas politópicas) será utilizado como método comparativo nas simulações apresentadas no capítulo 5.

Capítulo 4

Método de Otimização *Branch and Bound* para funções DFC

Interrompendo um pouco a sequência metodológica que vinha sendo apresentada nesta tese, este capítulo propõe um novo método de otimização, pertencente à classe dos algoritmos denominados *branch and bound*. Toda a teoria desenvolvida ao longo deste capítulo, servirá como pré-requisito ao material apresentado no capítulo 5.

Ao implementar o algoritmo Min-Max, presente no algoritmo de um controlador preditivo robusto baseado em modelo, necessita-se de um método de otimização que seja capaz de resolver problemas não lineares com restrições. Ao buscar por um procedimento de otimização que resolva os problemas específicos surgidos na implementação do algoritmo RMPC, proposto no capítulo 5, nasceu a proposta de um novo método de otimização *branch and bound*. Este capítulo dedica-se a descrição deste novo método.

No próximo capítulo, a abordagem sobre o controlador MPC será retomada e um controlador RMPC, que utiliza a metodologia exposta no presente capítulo, em certa parte de seu algoritmo, será apresentado.

Os algoritmos denominados *branch and bound* consistem de métodos de otimização global para solução de problemas não convexos com restrição. A solução encontrada pelo algoritmo apresenta uma precisão ϵ, dada, o verdadeiro ponto ótimo.

Será proposto neste capítulo, um método *branch and bound* para a otimização global de funções que podem ser descritas como a diferença entre funções crescentes em um politopo do tipo caixa. Por simplicidade, o termo *diferença de funções crescentes* será denominado, neste texto, como *funções DFC*.

A seção 4.1 apresenta a definição de várias terminologias que serão utilizadas ao longo do capítulo e, na sequência, descreve o problema central a

ser tratado, bem como o algoritmo do método *branch and bound* proposto. A subseção 4.1.1 trata da aplicação do método proposto para o caso de particular de posimômios. Na seção 4.2 estão apresentados os resultados de simulação para dois exemplos e a seção 4.3 encerra o capítulo com as conclusões.

4.1 Descrição do Problema

Algumas definições preliminares serão apresentadas inicialmente. O tipo de domínio de função a ser considerado, o conjunto *caixa*, será definido em primeiro lugar.

Definição 4.1.0.1 (Caixa) *Uma caixa* $\mathcal{C} \in R^n$ *é um conjunto definido como:*

$$\mathcal{C} \triangleq \{x \in R^n \mid \underline{x}_i \leq x_i \leq \overline{x}_i,\, i = 1, \ldots, n\} \tag{4.1}$$

para dados valores de $\underline{x}_i$ *e* $\overline{x}_i$*. O ponto* minimal *e o ponto* maximal *de* $\mathcal{C}$ *são dados por*

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x_1} \\ \vdots \\ \underline{x_n} \end{bmatrix} \qquad \overline{x} = \begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

respectivamente.

Definição 4.1.0.2 (Partição) *Uma partição da caixa* $\mathcal{C}$ *é definida como o conjunto* $\Omega = \{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_q\}$ *que satisfaz:*

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_q = \mathcal{C} \\ &vol(\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j) = 0 \ \forall i \neq j \end{aligned} \tag{4.3}$$

em que $\mathcal{C}_i$ *representa uma caixa. O ponto minimal e o ponto maximal de cada conjunto* $\mathcal{C}_i$ *são denotados, respectivamente, por* $\underline{x}^i$ *e* $\overline{x}^i$*.*

Considere $\mathcal{C} = \Omega_1$ uma caixa, como descrito na definição (4.1.0.1). Em cada passo k do algoritmo branch-and-bound a ser proposto, uma partição de cada $\mathcal{C}_j \in \Omega_k$ consiste em subdividi-la em 2^n caixas congruentes. A Figura (4.1) mostra o esquema para sucessivas partições de $\mathcal{C}$ para o caso $n = 2$.

O tipo de função de interesse neste trabalho, as chamadas *diferenças de funções crescentes* – funções DFC – será definido a seguir.

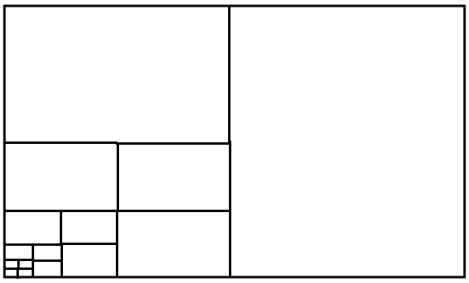

Figura 4.1: Esquema para partições de $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^2$.

Definição 4.1.0.3 (Funções crescentes e decrescentes) *A função* $\psi(x) : \mathcal{C} \mapsto \mathbb{R}$*, com domínio* $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$*, é dita uma* função crescente *se*

$$\psi(x+\delta) > \psi(x), \tag{4.4}$$

para qualquer $\delta \in \mathbb{R}^n_+$ *tal que* $x \in \mathcal{C}$ *e* $(x+\delta) \in \mathcal{C}$*. Se* $-\psi(x)$ *é uma função crescente, então* $\psi(x)$ *é dita uma* função decrescente.

Definição 4.1.0.4 (Funções lipschitz-contínuas) *A função* $\psi(x) : \mathcal{C} \mapsto \mathbb{R}$*, com domínio* $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$*, é dita uma* lipschitz-contínua*, se existe uma constante positiva* A*, tal que*

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq A \|x - y\|, \quad \forall x,y \in \mathcal{C}. \tag{4.5}$$

Definição 4.1.0.5 (Função DFC) *A função* $f(x)$ *é uma* função DFC *(Diferença de funções crescentes) no domínio* $\mathcal{C}$*, se existem funções crescentes* $\psi^+(x)$ *e* $\psi^-(x)$*, definidas em* $\mathcal{C}$*, tais que*

$$f(x) = \psi^+(x) - \psi^-(x) \tag{4.6}$$

O próximo lema pode ser usado como base para o algoritmo *branch and bound*, apresentado neste trabalho, cuja meta é encontrar os valores extremos de uma função DFC, $f(x)$, em uma caixa $\mathcal{C}$.

Lema 4.1.0.6 *Seja* $f(x) = \psi^+(x) - \psi^-(x)$*, em que* $\psi^+(x)$ *e* $\psi^-(x)$ *são funções crescentes em uma caixa* $\mathcal{C}$*. Considere a partição de* $\mathcal{C}$ *dada por* $\Omega = \{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_q\}$*, em que* $\underline{x}^i$ *e* $\overline{x}^i$ *denotam, respectivamente, o ponto minimal e o ponto maximal de* $\mathcal{C}_i$*. Então:*

$$\begin{aligned} \max_{x\in\mathcal{C}} f(x) &= \max_i \max_{x\in\mathcal{C}_i} f(x) \leq \max_i \left(\psi^+(\overline{x}^i) - \psi^-(\underline{x}^i)\right), \\ \min_{x\in\mathcal{C}} f(x) &= \min_i \min_{x\in\mathcal{C}_i} f(x) \geq \min_i \left(\psi^+(\underline{x}^i) - \psi^-(\overline{x}^i)\right). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Para cada partição $\mathcal{C}_i$, considere a seguinte notação:

$$m(i) = \max\left\{f(\overline{x}^i), f(\underline{x}^i)\right\} \quad \text{e} \quad M(i) = \psi^+(\overline{x}^i) - \psi^-(\underline{x}^i). \tag{4.8}$$

De acordo com o lema (4.1.0.6), o valor máximo da função DFC, $f(x)$, em cada partição $\mathcal{C}_i$, satisfaz a seguinte desigualdade:

$$m(i) \leq \max_{x \in \mathcal{C}_i} f(x) \leq M(i). \tag{4.9}$$

O lema (4.1.0.7), a seguir, descreve o procedimento usado pelo algoritmo *branch and bound*, proposto neste trabalho, para detecção e exclusão daquelas partições que não possuem o ponto de máximo global de uma função DFC. Um procedimento análogo pode ser aplicado, caso busque-se pelo mínimo global de uma função DFC.

Lema 4.1.0.7 *Seja $f(x)$ uma função DFC, restrita a uma caixa $\mathcal{C}$. Considere a partição de $\mathcal{C}$ dada por $\Omega = \{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_q\}$, em que $\underline{x}^i$ e $\overline{x}^i$ denotam, respectivamente, o ponto minimal e o ponto maximal de $\mathcal{C}_i$. Se existem $i,j \in \{1, \ldots, q\}$, $i \neq j$, tais que:*

$$M(j) < m(i), \tag{4.10}$$

então, o ponto x^{max}, tal que $f(x^{max}) = \max_{x \in \mathcal{C}} f(x)$, não pode estar contido em $\mathcal{C}_j$.

O algoritmo proposto, em sua versão de maximização, está descrito no Algoritmo 1, abaixo. O algoritmo para encontrar o valor mínimo é análogo àquele proposto para encontrar o valor máximo. O método proposto permite, ainda, o uso concomitante de um algoritmo de busca local, sempre que possível, como, por exemplo, o método Quasi-Newton para funções diferenciáveis (por partes).

No Algoritmo 1, a sentença $x^* \leftarrow$ Busca Local(f,$\mathcal{C}$,$\tilde{x}$) realiza uma busca local para o máximo da função f restrita à caixa $\mathcal{C}$, iniciando do ponto $\tilde{x}$. Isso significa que $f(x^*) \geq f(\tilde{x})$. Se nenhum algoritmo de busca local estiver disponível, então a mesma sentença pode ser substituída por $x^* \leftarrow \tilde{x}$, nas linhas 5 e 25.

Algorithm 1 *Branch and Bound* com Busca Local: Maximização

$\Omega \leftarrow \{\mathcal{C}\}$
$M(1) \leftarrow \psi^+(\overline{x}^1) - \psi^-(\underline{x}^1)$
$\tilde{x}(1) \leftarrow \arg_x \max_{x=\left\{\overline{x}^1, \underline{x}^1\right\}} f(x)$
$m(1) \leftarrow f(\tilde{x}(1))$
$x^* \leftarrow$ Busca Local(f,$\mathcal{C}$,$\tilde{x}(1)$)
$k \leftarrow 1$ % número de sub-regiões ativas em Ω
$j \leftarrow 1$ % sub-região que contém o máximo atual $m(i)$
while $M(j) - f(x^*) \geq \epsilon$ **do**
    $\bar{\Omega} \leftarrow \emptyset$
    for $i \leftarrow 1 : k$ **do**
        if $M(i) > f(x^*)$ **then**
            Partição de $\Omega(i)$ em 2^n sub-conjuntos congruentes
            $\bar{\Omega} \leftarrow \bar{\Omega} \cup$ conjunto de 2^n sub-conjuntos da partição de $\Omega(i)$
        end if
    end for
    $\Omega \leftarrow \bar{\Omega}$
    $k \leftarrow |\Omega|$
    for $i \leftarrow 1 : k$ **do**
        $M(i) \leftarrow \psi^+(\overline{x}^i) - \psi^-(\underline{x}^i)$
        $\tilde{x}(i) \leftarrow \arg_x \max_{x=\left\{\overline{x}^i, \underline{x}^i\right\}} f(x)$
        $m(i) \leftarrow f(\tilde{x}(i))$
    end for
    $j \leftarrow \arg_i \max_{i=1,\ldots,k} \{m(i)\}$
    if $m(j) > f(x^*)$ **then**
        $x^* \leftarrow$ Busca Local(f,$\mathcal{C}$,$\tilde{x}(j)$)
    end if
end while
$\hat{x} \leftarrow x^*$

O resultado principal a respeito do método *branch and bound* proposto, está descrito no teorema a seguir.

Teorema 4.1.0.8 *Sejam $\psi^+(x)$ e $\psi^-(x)$ funções crescentes, lipschitz-contínuas $\forall\, x \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$, e seja $f(x) = \psi^+(x) - \psi^-(x)$. Então, dado $\epsilon > 0$, o Algoritmo 1 converge, após um número finito de passos, para um ponto $\hat{x}$ tal que*

$$\left(\max_{x \in \mathcal{C}} f(x)\right) - f(\hat{x}) < \epsilon \tag{4.11}$$

Prova. Sejam $\Omega_k = \left\{\mathcal{C}_1^k, \ldots, \mathcal{C}_{q_k}^k\right\}$ o conjunto das partições válidas, no passo k, e $\underline{x}_k^i$ e $\overline{x}_k^i$, os pontos minimal e maximal, respectivamente, de cada $\mathcal{C}_i^k$. Se $L = \|\underline{x} - \overline{x}\|$, então $\left\|\underline{x}_k^i - \overline{x}_k^i\right\| = L/2^{kn}$, $\forall i = 1, \ldots, q_k$.

As funções Ψ^- e f são lipschitz-contínuas, logo existem constantes positivas A_1 e A_2, tais que

$$\begin{array}{l} |\Psi^-(x) - \Psi^-(y)| \leq A_1 \|x - y\| \quad \text{e} \\ |f(x) - f(y)| \leq A_2 \|x - y\|, \quad \forall x,y \in \mathcal{C}_i^k, \ i = 1, \ldots, q_k. \end{array} \tag{4.12}$$

Seja $k_0 = \frac{1}{n}\max\{log_2(A_1 L/\epsilon), log_2(A_2 L/\epsilon)\}$. Se $k \geq k_0$, então, $\forall i = 1, \ldots, q_k$, vale que

$$|f(\underline{x}_k^i) - f(\overline{x}_k^i)| \leq A_1 \left\|\underline{x}_k^i - \overline{x}_k^i\right\| = \frac{A_1 L}{2^{kn}} \leq \frac{A_1 L}{2^{k_0 n}} \leq \epsilon \quad \text{e}$$

$$|\Psi^+(\overline{x}_k^i) - \Psi^-(\underline{x}_k^i) - f(\overline{x}_k^i)| = |\Psi^+(\overline{x}_k^i) - \Psi^-(\underline{x}_k^i) - \Psi^+(\overline{x}_k^i) + \Psi^-(\overline{x}_k^i)| =$$

$$= |\Psi^-(\overline{x}_k^i) - \Psi^-(\underline{x}_k^i)| \leq A_2 \left\|\underline{x}_k^i - \overline{x}_k^i\right\| = \frac{A_2 L}{2^{kn}} \leq \frac{A_2 L}{2^{k_0 n}} \leq \epsilon.$$

Como $m_k(i) \leq \max_{x \in \mathcal{C}_i^k} f(x) \leq M_k(i)$, $\forall i = 1, \ldots, q_k$, pelo teorema do confronto, para cada $i \in \{1, \ldots, q_k\}$, existe um inteiro positivo k_1^i, tal que

$$|m_k(i) - \max_{x \in \mathcal{C}_i^k} f(x)| < \epsilon, \quad \forall k \geq k_1^i.$$

Se $k_1 = \max_i k_1^i$, então $|m_k(i) - \max_{x \in \mathcal{C}_i^k} f(x)| < \epsilon, \quad \forall k \geq k_1$. Além disso, existe um índice $j \in \{1, \ldots, q_{k_1}\}$ tal que

$$\max_{x \in \mathcal{C}_j^k} f(x) = \max_{x \in \mathcal{C}} f(x).$$

De acordo com o Algoritmo 1, $m_k(j) = f(\hat{x})$. Sendo assim, se $k \geq k_1$, então

$$\left(\max_{x \in \mathcal{C}} f(x)\right) - f(\hat{x}) < \epsilon.$$

□

4.1.1 Polinômios em Variáveis com Sinais Definidos

Na sequência, será mostrado que funções polinomiais cujas variáveis possuem sinais definidos, podem ser tratadas como funções DFC.

Definição 4.1.1.1 (Monômio) *$m(x,a)$ denota um* monômio *multivariável:*

$$\mu(x,a) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} \tag{4.13}$$

com $x \in \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{N}^n$.

Definição 4.1.1.2 (posinômio) *$\phi(x,A,c)$ denota o* posinômio*:*

$$\phi(x,A,c) = \sum_{j=1}^{m} c_j \, \mu(x,A_j) \tag{4.14}$$

em que $A \in \mathbb{N}^{m \times n}$, A_j denota a j-ésima linha de A, e $c_j \in \mathbb{R}$, com $c_j > 0$.

O lema a seguir afirma a monotonicidade de uma função posinomial definida em variáveis não-negativas:

Lema 4.1.1.3 *A função posinomial $\phi(x,A,c)$, restrita a valores fixos de A e c, definida para valores de x tais que $x_i \geq 0 \; \forall \, i = 1,\ldots,n$, é uma função crescente de x.*

O resultado do próximo lema, permite escrever qualquer polinômio com variáveis não-negativas, como a diferença entre dois posinômios.

Lema 4.1.1.4 *Seja $p(x)$ uma função polinomial qualquer, definida para variáveis não-negativas. Então, existem A^+, $A^- \in \mathbb{N}^{m \times n}$ e c^+, $c^- \in {\mathbb{R}_+}^m$, tais que:*

$$p(x) = \phi(x,A^+,c^+) - \phi(x,A^-,c^-) \tag{4.15}$$

Finalmente, deve-se notar que qualquer polinômio cujas variáveis possuem sinais definidos, pode ser reescrito como um polinômio com variáveis não-negativas, realizando-se uma mudança de variável de tal forma que $\bar{x}_i = x_i$ no caso $x_i \geq 0$ e $\bar{x}_i = -x_i$ no caso $x_i \leq 0$. Na nova variável $\bar{x}$, segue que $\bar{x}_i \geq 0$. Portanto, nas variáveis transformadas, o polinômio torna-se uma função DFC, o que permite a sua otimização pelo método branch-and-bound proposto.

4.2 Resultados de Simulação

Dois exemplos serão apresentados nesta seção, com o objetivo de ilustrar o método proposto. Em ambos os exemplos, uma função polinomial, restrita

a uma caixa com $\underline{x}_i \cdot \overline{x}_i > 0$ é considerada. O Algoritmo 1 é aplicado sem a presença da sub-rotina de busca local, no primeiro exemplo.

O primeiro exemplo refere-se a um polinômio de grau dois, em duas variáveis. Dois casos serão analisados: no primeiro deles, o ponto de máximo global do problema irrestrito está contido no interior da caixa; no segundo caso, considera-se uma caixa que não contém este ponto. O segundo exemplo utiliza um polinômio de grau três, com sete variáveis, em que uma sub-rotina de busca local é empregada.

4.2.1 Problema 1

Este exemplo resolve o problema de maximização da função $f(x)$, descrita abaixo, restrita a duas diferentes caixas. Primeiramente, considere o seguinte problema de otimização:

$$\begin{array}{lll} \textit{5.2.1.1.} \text{ Maximizar} & f(x_1,x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 + 3x_1 - 4x_2 + 5, \\ \text{Sujeito a} & 0 \leq x_1 \leq 2,\ -3 \leq x_2 \leq -1. \end{array} \tag{4.16}$$

Como o polinômio não está definido apenas em variáveis não-negativas, uma mudança de variáveis deve ser realizada. Defina $\bar{x}_1 = x_1$ e $\bar{x}_2 = -x_2$, o que implica em:

$$f(\bar{x}_1,\bar{x}_2) = -\bar{x}_1^2 - \bar{x}_2^2 - \bar{x}_1\bar{x}_2 + 3\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2 + 5.$$

Então:

$$f(\bar{x}_1,\bar{x}_2) = (3\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2 + 5) - (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_1\bar{x}_2),$$

$$0 \leq \bar{x}_1 \leq 2,\ 1 \leq \bar{x}_2 \leq 3,$$

que está no formato requerido, ou seja, está escrita como a diferença entre dois posinômios com variáveis positivas. Embora o cálculo seja realizado nas variáveis transformadas, os resultados são apresentados, a seguir, nas variáveis originais.

A Figura 4.2 mostra o mapa de contorno de $f(x)$ restrita à caixa $\mathcal{C} = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 2,\ -3 \leq x_2 \leq -1\}$. Pode-se observar que o ponto de máximo global está no interior da caixa $\mathcal{C}$.

O algoritmo foi rodado com $\epsilon = 0.5$. O ponto de ótimo e o valor máximo, assim como o tempo de CPU e o número de iterações até se alcançar a convergência, estão apresentados na tabela 4.1.

A tabela 4.2 mostra, para cada iteração k, o número de partições $\Omega(j)$ de $\mathcal{C}$ usadas e descartadas, e as Figuras 4.3-4.6 mostram a evolução das partições com o tempo (as partições descartadas estão representadas com um 'x').

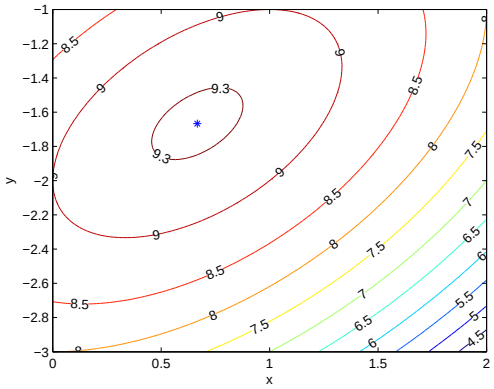

Figura 4.2: Mapa de contorno de $f(x_1,x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 + 3x_1 - 4x_2 + 5$, $0 \leq x_1 \leq 2,\ -3 \leq x_2 \leq -1$.

Tabela 4.1: Ponto de ótimo, valor máximo, tempo de CPU e número de iterações - Exemplo 5.2.1.1.

Ponto de ótimo	$(x_1,x_2)^* = (0.6875, -1.6875)$
Valor máximo	$f((x_1,x_2)^*) = 9.332$
Tempo de CPU	0.032432 s
Iterações	5

Tabela 4.2: Iterações $\times$ número de partições válidas e descartadas - Exemplo 5.2.1.1.

Iteração	Partições Válidas	Partições Descartadas
1	1	0
2	4	0
3	16	0
4	51	13
5	84	120

Finalmente, a Figura 4.7 mostra a evolução do limite inferior e do limite superior do valor máximo, no decorrer das iterações do algoritmo.

Na sequência, a mesma função será maximizada, porém restrita a uma caixa $\mathcal{C}_1$ que não contém o ponto de máximo global irrestrito $(x_1,x_2) =$

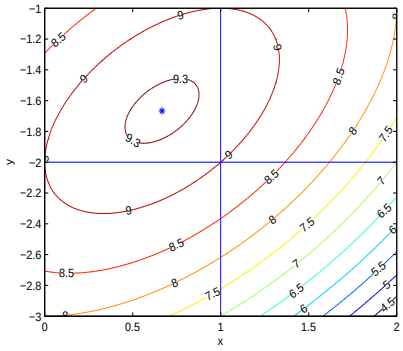

Figura 4.3: Partições válidas e descartadas no passo 2.

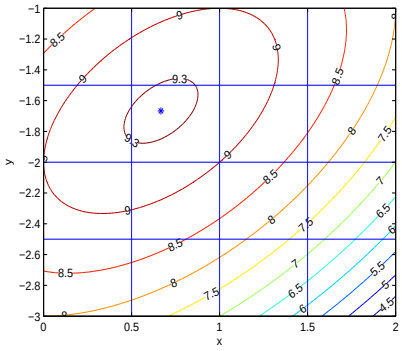

Figura 4.4: Partições válidas e descartadas no passo 3.

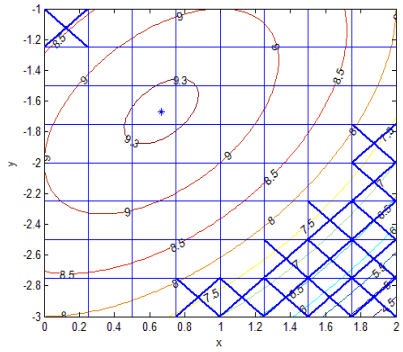

Figura 4.5: Partições válidas e descartadas no passo 4.

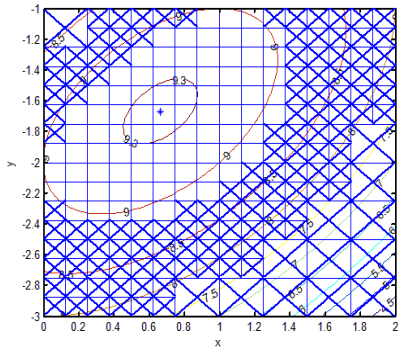

Figura 4.6: Partições válidas e descartadas no passo 5.

$(0.6875, -1.6875)$. O problema é descrito como:

$$\begin{array}{ll} \textit{5.2.1.2.} \text{ Maximizar} & f(x_1,x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 + 3x_1 - 4x_2 + 5, \\ \text{Sujeito a} & -5 \leq x_1 \leq -2,\ -4 \leq x_2 \leq 0 \end{array} \tag{4.17}$$

Apesar da transformação de variáveis ser necessária, também neste caso, a omitiremos do texto. A Figura 4.8 mostra o mapa de contorno da função f, restrita à caixa $\mathcal{C}_1 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : -5 \leq x_1 \leq -2,\ -4 \leq x_2 \leq 0\}$.

O ponto de ótimo, o valor máximo, o tempo de CPU e o número de iterações aparecem na tabela 4.3.

A tabela 4.4 contém o registro das partições válidas e descartadas em cada iteração. A evolução das partições com o tempo está apresentada nas Figuras 4.9-4.14.

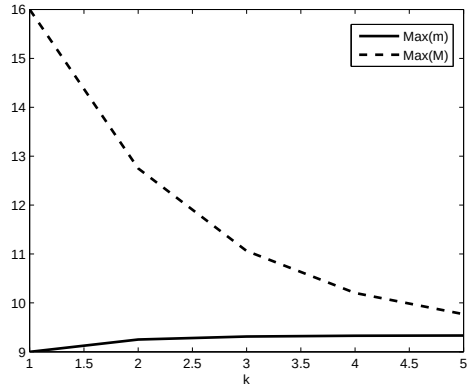

Figura 4.7: Evolução dos limites inferior e superior do valor máximo, no Exemplo 5.2.1.1.

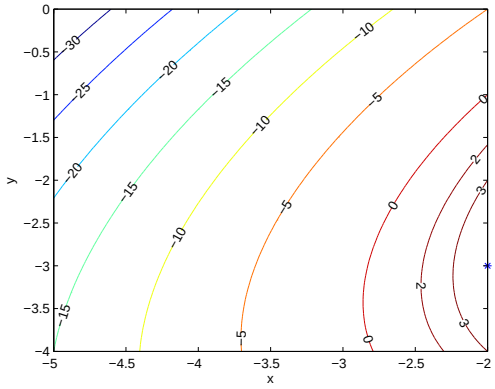

Figura 4.8: Mapa de contorno de $f(x_1,x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 + 3x_1 - 4x_2 + 5$, $-5 \leq x_1 \leq -2,\ -4 \leq x_2 \leq 0$.

Tabela 4.3: Ponto de ótimo, valor máximo, tempo de CPU e número de iterações - Exemplo 5.2.1.2.

Ponto de ótimo	$(x_1,x_2)^* = (-2,-3)$
Valor máximo	$f((x_1,x_2)^*) = 4$
Tempo de CPU	0.03226 s
Iterações	7

A Figura 4.15, abaixo, apresenta a evolução dos limites inferior e superior, do valor máximo de f, em função das iterações.

Tabela 4.4: Iterações × número de partições válidas e descartadas - Exemplo 5.2.1.2.

Iterações	Partições Válidas	Partições Descartadas
1	1	0
2	3	1
3	6	6
4	11	13
5	18	26
6	19	53
7	4	72

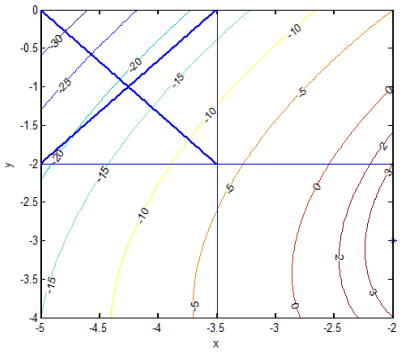

Figura 4.9: Partições válidas e descartadas no passo 2.

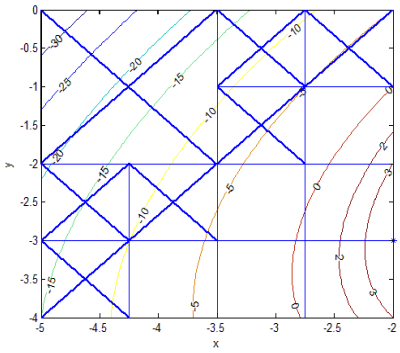

Figura 4.10: Partições válidas e descartadas no passo 3.

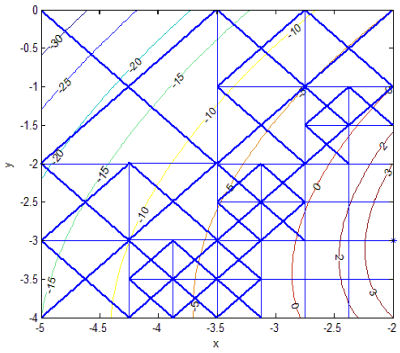

Figura 4.11: Partições válidas e descartadas no passo 4.

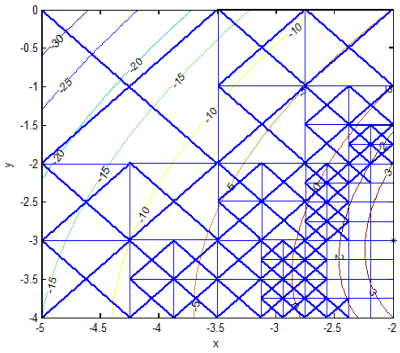

Figura 4.12: Partições válidas e descartadas no passo 5.

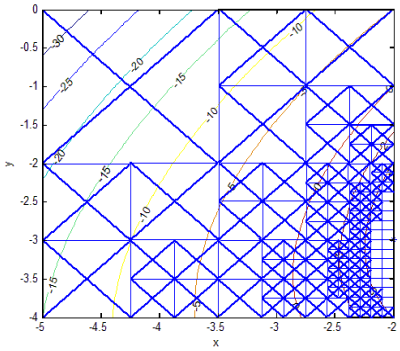

Figura 4.13: Partições válidas e descartadas no passo 6.

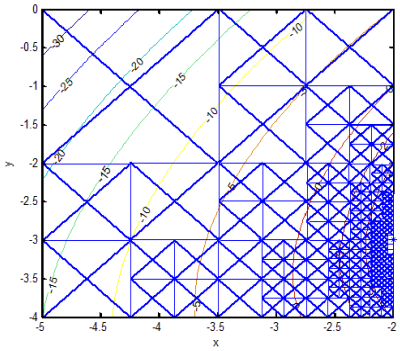

Figura 4.14: Partições válidas e descartadas no passo 7.

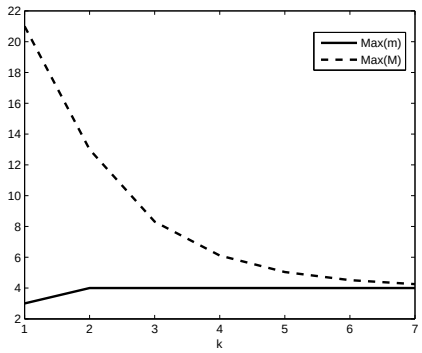

Figura 4.15: Evolução dos limites inferior e superior do valor máximo, no Exemplo 5.2.1.2.

4.2.2 Problema 2

Esse exemplo trata de uma função de sete variáveis. Considere o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & g(\mathbf{x}) = -1.3412x_1^3 - 2.7876x_1^2x_2 - 1.4188x_1^2x_4 - 2.2284x_1x_2^2 \\ & -1.8904x_1x_2x_4 - 0.7112x_1x_4^2 + 2.1258x_1 - 0.6282x_2^3 - 0.6297x_2^2x_4 \\ & \text{-0.4738 } \mathrm{x}_2x_4^2 - 0.0039x_3^3 - 0.0417x_3^2x_7 - 0.1475x_3x_7^2 + 0.1577x_3 - 0.1188x_4^3 \\ & +0.4916 \text{ } \mathrm{x}_4 - 0.6642x_5^3 + 1.3576x_2 - 1.0463x_5^2x_6 - 0.7594x_5x_6^2 + 1.3517x_5 \\ & \text{-0.1837 } \mathrm{x}_6^3 + 0.5685x_6 - 0.1780x_7^3 + 0.7161x_7. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Sujeito a $0.5 \leq x_1,x_5 \leq 1, \quad 0 \leq x_2,x_3,x_4,x_6 \leq 0.5, \quad 0 \leq x_7 \leq 1.$ (4.19)

O valor utilizado por ϵ, neste exemplo, foi $\epsilon = 0.7$, e uma sub-rotina de busca local, foi considerada.A tabela 4.5 mostra o ponto de ótimo, o valor máximo, o tempo de CPU e o número de iterações usadas pelo Algoritmo 1. A tabela 4.6 apresenta o número de partições de $\mathcal{C}$ utilizadas e descartadas a cada iteração.

Tabela 4.5: Branch and Bound: Ponto de ótimo, valor máximo, tempo de CPU e número de iterações - Exemplo 5.2.2.

Ponto de ótimo	$x^* = (0.7269; 0; 0.1196; 0; 0.8236; 0; 1)$
Valor máximo	$g(x^*) = 2.3110$
Tempo de CPU	42.233961 s
Iterações	3

Tabela 4.6: Iterações $\times$ número de partições válidas e descartadas - Exemplo 5.2.2.

Iterações	Partições Válidas	Partições Descartadas
1	128	0
2	1112	15272
3	1	142335

Vale ressaltar que, apesar de lento, o método *branch and bound* proposto possui eficiência garantida na busca do ótimo global de uma função restrita a uma caixa, o que não acontece com alguns respeitados algoritmos de otimização. Ao utilizar, por exemplo, a função *fmincon* (utilizando o algoritmo dos pontos interiores) do Matlab para encontrar o ponto de máximo de g, definida em (4.18), restrita a (4.19), o resultado obtido foi um ponto de máximo local, como pode ser visto na tabela 4.7.

A Figura 4.16 mostra a evolução do limite inferior e do limite superior do valor máximo da função g, no decorrer das iterações do algoritmo.

Tabela 4.7: *fmincon*: Ponto de ótimo, valor máximo, tempo de CPU e número de iterações - Exemplo 5.2.2.

Ponto de ótimo	$x^* = (1; 0.5; 0; 0.5; 1; 0.5; 0)$
Valor máximo	$g(x^*) = 1.5970$
Tempo de CPU	0.011770 s

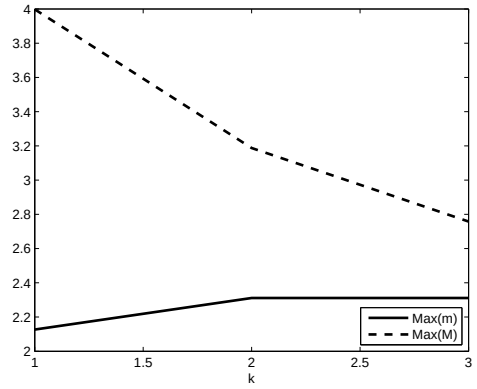

Figura 4.16: Evolução dos limites inferior e superior do valor máximo de g - Exemplo 5.2.2.

4.3 Conclusões

Este capítulo apresentou um novo algoritmo Branch-and-Bound, utilizado para encontrar os valores extremos de funções, que podem ser descritas como diferença de funções crescentes (funções DFC), em domínios do tipo caixa. Um caso particular importante são as funções polinomiais cujas variáveis possuem sinal definido. A eficácia da metodologia proposta foi ilustrada em dois exemplos.

O método proposto será utilizado para resolver problemas de otimização não linear, com restrições, em uma certa etapa do algoritmo do controlador preditivo robusto, apresentado no capítulo seguinte.

Capítulo 5

Restrições de Estabilidade no Controlador Preditivo Robusto Baseado em Modelos

Uma nova proposta de controlador preditivo robusto baseado em modelos, chamada de **Controle Preditivo Baseado em Modelo com Restrições de Estabilidade**, e denotada pela sigla **RMPC-SC** - *RMPC with Stability Constraints*, será apresentada neste capítulo, para o controle robusto de sistemas discretos, monovariáveis, causais, descritos por modelos LTI por meio de um modelo do tipo ARX (Auto Regressive with eXogenous input). O método estabelece certas restrições para o incremento do sinal de controle, de tal forma que se garanta a estabilidade do sistema em malha fechada, admitindo-se incertezas politópicas nos coeficientes do modelo nominal da planta.

O modelo utilizado pelo controlador tem a estrutura de uma função de transferência com incertezas, no formato de intervalos de confiança, associadas a cada um de seus coeficientes. Dessa forma, ao iniciarmos o projeto do controlador, admite-se conhecido o modelo nominal da planta, bem como as incertezas associadas a cada um de seus coeficientes.

O método de otimização Branch and Bound, proposto no capítulo 4, será utilizado no algoritmo do RMPC-SC. A utilização do mesmo visa acrescentar ao método a certeza quanto à otimalidade da solução encontrada.

A seção 5.1 apresenta a formulação do problema a ser tratado e introduz a notação a ser utilizada. A seção 5.2 descreve e justifica a formulação proposta. Na seção 5.3 são apresentados todos os elementos que compõe o algoritmo do controlador RMPC-SC, proposto. A Seção 5.4 apresenta os resultados de simulação em que uma comparação dos desempenhos do RMPC-SC, do MMEMPC (seção 3.3), do FSPGPC (seção 3.4) e do GPC (seção 2.2) é

feita para três exemplos de sistemas. Na seção 5.5, diferentes formulações do RMPC-SC são propostas, buscando um melhor desempenho computacional do método. Finalmente, a Seção 5.6 descreve as conclusões deste capítulo.

5.1 Formulação do Problema

Considere um sistema descrito por um modelo ARX da seguinte forma:

$$\Delta y(k) = T_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(q)\Delta u(k), \tag{5.1}$$

em que $\Delta = 1 - q^{-1}$ (q^{-1} é o operador de atraso de tempo) e

$$T_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(q) = \frac{b_0 q^m + b_1 q^{m-1} + \cdots + b_m}{q^n + a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + \cdots + a_n} \tag{5.2}$$

é a função de transferência do modelo junto ao vetor de parâmetros ($\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$) = ($a_1, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m$), com $n > m$.

Suponha que o atraso de tempo do sistema seja dado por $d = n - m - 1$, dessa forma a equação (5.1) é equivalente a:

$$\begin{array}{c} \Delta y(k) = b_0 \Delta u(k-(d+1)) + b_1 \Delta u(k-(d+2)) + \ldots + \\ + b_m \Delta u(k-n) - a_1 \Delta y(k-1) - \ldots - a_n \Delta y(k-n). \end{array} \tag{5.3}$$

Para o problema proposto nesta tese, supõe-se que o processo é descrito pelo modelo (5.1) e sujeito a incertezas politópicas nos coeficientes da função de transferência. Cada parâmetro a_j e b_i pertence aos respectivos intervalos de incerteza $\underline{a}_j \leq a_j \leq \bar{a}_j$ e $\underline{b}_i \leq b_i \leq \bar{b}_i$. O politopo de incertezas $\mathcal{C}$, dado por:

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{array}{l} \underline{a}_j \leq a_j \leq \bar{a}_j \\ \\ \underline{b}_i \leq b_i \leq \bar{b}_i \end{array} \right. , \tag{5.4}$$

descreve todas as possíveis instâncias do vetor de parâmetros do sistema.

O sistema (5.1), com incertezas politópicas descritas por (5.4), será controlado por um método RMPC, em que a seguinte notação será empregada:

- $w(k)$: sinal de referência que a saída $y(k)$ deve acompanhar;
- $\Delta y(k+i|k)$: valor predito para o incremento da saída Δy, no instante $k+i$, calculado no instante k, para $i = \{1, \ldots, H_p\}$, em que H_p é o horizonte de predição;
- $\Delta u(k+i|k)$: futuro incremento do sinal de controle no instante $k+i$, calculado no instante k, usado na predição do incremento da saída, para $i = \{0, \ldots, H_c - 1\}$, em que H_c é o horizonte de controle ($H_c \leq H_p$).

O problema proposto neste trabalho pode ser definido da seguinte maneira:

Definição 5.1.0.1 - ***Problema de Convergência Assintótica:*** *Considere o sistema (5.3) com incertezas politópicas descritas por (5.4), com condições iniciais dadas por* $\{\Delta u(-m),\ldots,\Delta u(0),\Delta y(-n),\ldots,\Delta y(0)\}$, *e um dado sinal de referência constante* $w(k)=\rho$, $\rho\in\mathbb{R}$. *Encontrar uma sequência de controles futuros* $u(k|0)$, $k>0$, *tal que:*

$$\lim_{k\to\infty} y(k|0)-w(k)=0, \tag{5.5}$$

para todo $(\mathbf{a},\mathbf{b})\in\mathcal{C}$.

5.2 Restrições de Estabilidade

Deste ponto em diante, considere que todas as variáveis foram avaliadas no instante k. A notação $\Delta y(k+i|k)$ será substituída pela forma compacta $\Delta y(k+i)$ e $\Delta u(k+i|k)$ por $\Delta u(k+i)$, por conveniência.

Os resultados a serem estabelecidos mais adiante dependem do seguinte Lema.

Lema 5.2.0.2 *Suponha que a sequência de saída* $y(k)$ *de um sistema discreto estável satisfaça a seguinte condição:*

$$|y(k+r)|<\varepsilon|y(k)|,\quad com\ 0<\varepsilon<1\quad \forall k, \tag{5.6}$$

em que r *é um inteiro positivo. Então* $|y(k)|\to 0$ *quando* $k\to\infty$.

Prova. A expressão (5.6) implica que qualquer subsequência de $|y(k)|$, da forma $\widetilde{y}_l(k)=|y(k\cdot\aleph)|$, em que $\aleph=r+l$ com $l=1,\ldots,r$, satisfaz:

$$\begin{array}{c}|\widetilde{y}_l(k)|<|\widetilde{y}_l(0)|\ \text{ e}\\ |\widetilde{y}_l(k)|<\varepsilon|\widetilde{y}_l(k-1)|<|\widetilde{y}_l(k-1)|\ \forall k.\end{array} \tag{5.7}$$

Logo $\widetilde{y}_l(k)$ é monótona e limitada e, portanto, convergente. Além disso, a subsequência $\widetilde{y}_l(k)$ satisfaz:

$$|\widetilde{y}_l(k)|<\varepsilon^k|\widetilde{y}_l(0)|\quad \forall k>0. \tag{5.8}$$

Como $0<\varepsilon<1$, segue que $\varepsilon^k\to 0$ quando $k\to\infty$ e a equação (5.8) permite concluir que $|\widetilde{y}_l(k)|\to 0$ quando $k\to\infty$, $\forall l=1,\ldots,r$. Logo, a sequência dos valores absolutos $|y(k)|$ converge e $|y(k)|\to 0$ quando $k\to\infty$. □

A ideia básica é impor a condição de convergência (5.6) à saída da planta, transformando-a em restrições para futuras entradas $u(k)$ de tal forma que a saída satisfaça (5.6).

Deseja-se que a saída da planta fique o mais próximo possível de um sinal de referência $w(k)$. Para isso, será imposta a seguinte condição de estabilidade à saída da planta:

$$|y(k+r) - w(k+r)| < \epsilon |y(k) - w(k)|, \tag{5.9}$$

em que $0 < \epsilon < 1$ e r é um inteiro positivo.

A expressão (5.9) é equivalente ao critério (5.6) para o sinal $y(k) - w(k)$. Dessa forma, se (5.9) for satisfeita $\forall k > 0$, o sistema deve necessariamente satisfazer $|y(k) - w(k)| \to 0$.

Considerando k como o instante de tempo atual, busca-se por uma sequência de futuros incrementos de entrada $\Delta\mathbf{u} = \{\Delta u(k), \Delta u(k+1), \ldots, \Delta u(k+r-1)\}$, de tal forma que a condição de estabilidade (5.9) seja satisfeita. Para uma formulação mais concisa, o cálculo dessa sequência será feito com o uso de uma descrição em espaço de estados do sistema. Para estabelecer essa representação em espaço de estados é necessário definir as seguintes matrizes:

$\mathbf{0}_{(i,j)}$: matriz com i linhas e j colunas e todas as entradas iguais a 0;

$\mathbf{I}_j$: matriz identidade com j linhas e j colunas;

$$\mathbf{S}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_j & \mathbf{0}_{(j,1)} \end{bmatrix} \quad \text{e}$$
$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix}.$$

Defina também os vetores:

$$\mathbf{z}(k) = \begin{bmatrix} \Delta y(k) \\ \Delta y(k-1) \\ \vdots \\ \Delta y(k-(n-1)) \\ \Delta u(k-1) \\ \Delta u(k-2) \\ \vdots \\ \Delta u(k-(n-1)) \end{bmatrix}_{(m+n+d)\times 1}$$

e

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{(1,m+n+d-1)} \end{bmatrix}.$$

Além disso, as matrizes $\Phi \in \mathbb{R}^{(m+n+d)\times(m+n+d)}$ e $\Omega \in \mathbb{R}^{(m+n+d)\times 1}$ são definidas de formas diferentes, dependendo do valor do atraso de tempo d, isto é:

1. $d > 0$:

$$\mathbf{b} = \left[\begin{array}{cccccc} b_0 & b_1 & \dots & b_{m-1} & b_m \end{array} \right] \quad \text{e} \quad \mathbf{b}' = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0}_{(1,d-1)} & \mathbf{b} \end{array} \right],$$

$$\Phi = \left[\begin{array}{cc} -\mathbf{a} & \mathbf{b}' \\ \mathbf{S}_{n-1} & \mathbf{0}_{(n-1,m+d)} \\ \mathbf{0}_{(1,n-1)} & \mathbf{0}_{(1,m+d)} \\ \mathbf{0}_{(m+d-1,n)} & \mathbf{S}_{m+d-1} \end{array} \right]$$

e

$$\Omega = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0}_{(n,1)} \\ 1 \\ \mathbf{0}_{(m+d-1,1)} \end{array} \right].$$

2. $d = 0$:

$$\mathbf{b} = \left[\begin{array}{cccc} b_1 & \dots & b_{m-1} & b_m \end{array} \right],$$

$$\Phi = \left[\begin{array}{cc} -\mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{S}_{n-1} & \mathbf{0}_{(n-1,m)} \\ \mathbf{0}_{(1,n)} & \mathbf{0}_{(1,m)} \\ \mathbf{0}_{(m-1,n)} & \mathbf{S}_{m-1} \end{array} \right]$$

e

$$\Omega = \left[\begin{array}{c} b_0 \\ \mathbf{0}_{(n-1,1)} \\ 1 \\ \mathbf{0}_{(m-1,1)} \end{array} \right].$$

Pode ser verificado por inspeção que o sistema representado pela função de transferência (5.2) é equivalente ao sistema cuja representação em espaço de estados é dada por:

$$\begin{array}{l} \mathbf{z}(k+1) = \Phi\, \mathbf{z}(k) + \Omega\, \Delta u(k) \\ \Delta y(k+1) = \Psi\, \mathbf{z}(k+1). \end{array} \tag{5.10}$$

Ao definir a matriz:

$$\Theta_r = \left[\begin{array}{cccc} \Phi^{r-1}\Omega & \Phi^{r-2}\Omega & \dots & \Phi\Omega \quad \Omega \end{array} \right]$$

e o vetor de variáveis de decisão:

$$\Delta \mathbf{u}_r(k) = \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+r-1) \end{bmatrix}.$$

O seguinte lema pode ser estabelecido como um resultado da aplicação recursiva de (5.10).

Lema 5.2.0.3 *O modelo de predição do sistema (5.2), r passos à frente, é dado por:*

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(k+r) &= \Phi^r \, \mathbf{z}(k) + \Theta_r \, \Delta \mathbf{u}_r(k) \\ \Delta y(k+r) &= \Psi \, \mathbf{z}(k+r). \end{aligned} \tag{5.11}$$

As matrizes Φ^r e Θ_r dependem apenas dos parâmetros incertos a_j, $j = 1, \cdots, n$ e b_i, $i = 0, \cdots, m$. Além disso, no instante de tempo k, o vetor $\mathbf{z}(k)$ é composto por escalares conhecidos (valores passados de $u(\cdot)$ e $y(\cdot)$, até o instante k). Dessa forma, a variável $y(k+r)$ depende de Φ^r, Θ_r e do vetor de variáveis de decisão $\Delta \mathbf{u}_r(k)$, que deve ser obtido de modo que a condição (5.9) ocorra - este é o objetivo principal deste trabalho.

O seguinte lema, enunciado sob a hipótese de que não há nenhuma incerteza no modelo do sistema, constitui um resultado bem conhecido relacionado ao controladores *deadbeats* [Cadzow & Martens (1970), Kuo (1980)]. Ele é apresentado aqui como um limite para o desempenho realizável do sistema.

Lema 5.2.0.4 *Suponha que o sistema (5.10) seja controlável. Neste caso, para qualquer condição inicial* $\mathbf{z}(k)$*, existe um vetor de variáveis de decisão* $\Delta \mathbf{u}_r(k)$ *com* $r \leq n+m$*, tal que* $\mathbf{z}(k+r) = 0$*.*

Prova. Nota-se que Θ_r torna-se equivalente à matriz de controlabilidade do sistema quando $r = n+m$. No caso de um sistema monovariável e controlável, a matriz de controlabilidade é uma matriz quadrada de posto completo e tamanho $(n+m) \times (n+m)$. Logo, quando $r = n+m$, será possível obter $\{\Delta u(k), \ldots, \Delta u(k+r-1)\}$ tal que:

$$\Delta \mathbf{u}_{(n+m)}(k) = -\Theta_{(n+m)}^{-1} \, \Phi^{(n+m)} \, \mathbf{z}(k)$$

Em alguns casos especiais é possível que um número de passos inferior a $n+m$ seja suficiente. □

Considerando o caso com parâmetros incertos, o análogo ao controlador *deadbeat* é:

$$\Delta \mathbf{u}_r^* \;=\; \min_{\Delta \mathbf{u}_r} \; \max_{\mathcal{C}} \; |y(k+r)|, \tag{5.12}$$

em que $\mathcal{C}$ é o politopo de incertezas e a referência $w(k)$ é constante e nula.

O Lema 5.2.0.4 sugere que a escolha $r = m + n$ é razoável, mesmo no caso de sistemas com incertezas, pois com um menor valor para r, a ação de controle pode ser incapaz de produzir uma contração arbitrária da variável controlada.

Uma formulação mais flexível pode ser obtida requerendo apenas a condição de estabilidade (5.9):

$$\Delta \mathbf{u}_r(k)^* \;=\; \max_{\mathcal{C}} \; [|y(k+r)| \;:\; |y(k+r)| < \epsilon\,|y(k)|]. \tag{5.13}$$

Para resolver (5.13), vale notar que

$$y(k+r|k) = \Delta y(k+r|k) + \Delta y(k+r-1|k) + \cdots + \Delta y(k+1|k) + y(k). \tag{5.14}$$

Usando a expressão (5.11), a equação (5.14) pode ser reescrita como:

$$y(k+r|k) = \Psi(\Phi^r + \Phi^{r-1} + \cdots + \Phi)\mathbf{z}(k) + \Psi\bar{\Theta}\Delta \mathbf{u}_r(k) + y(k), \tag{5.15}$$

em que $\bar{\Theta}$ é a matriz:

$$\begin{array}{c} \bar{\Theta} = [(\Phi^{r-1} + \Phi^{r-2} + \cdots + \Phi + \mathbf{I}_{m+n+d})\Omega \quad (\Phi^{r-2} + \\ +\Phi^{r-3} + \cdots + \Phi + \mathbf{I}_{m+n+d})\Omega \;\; \cdots \;\; (\Phi + \mathbf{I}_{m+n+d})\Omega \;\; \Omega]. \end{array} \tag{5.16}$$

Considere

$$\begin{array}{rcl} \Lambda & = & \Psi\left(\Phi^r + \Phi^{r-1} + \cdots + \Phi\right)\mathbf{z}(k) + y(k) \;\; \text{e} \\ \Gamma_r = \Psi\bar{\Theta} & = & \left[\begin{array}{cccccc} \gamma_r & \gamma_{r-1} & \cdots & \gamma_2 & \gamma_1 \end{array}\right]. \end{array} \tag{5.17}$$

Com o uso de métodos de otimização, é possível obter

$$\begin{array}{rcl} \underline{\Lambda} & = & \min\limits_{\mathcal{C}} \;\; \Psi\left(\Phi^r + \Phi^{r-1} + \cdots + \Phi\right)\mathbf{z}(k) + y(k) \quad \text{e} \\ \overline{\Lambda} & = & \max\limits_{\mathcal{C}} \;\; \Psi\left(\Phi^r + \Phi^{r-1} + \cdots + \Phi\right)\mathbf{z}(k) + y(k). \end{array} \tag{5.18}$$

Suponha, sem perda de generalidade, que o sinal de referência $w(k)$ seja nulo. Utilizando o modelo de predição r-passos à frente, (5.11), a condição de estabilidade (5.9) pode ser reescrita como:

$$|\Gamma_r\,\Delta \mathbf{u}_r(k) + \Lambda| \;<\; \epsilon\,|y(k)|. \tag{5.19}$$

Equivalentemente:

$$-\epsilon\,|y(k)| \;<\; \Gamma_r\,\Delta\mathbf{u}_r(k) + \Lambda \;<\; \epsilon\,|y(k)|, \tag{5.20}$$

o que leva a:

$$-\epsilon\,|y(k)| - \underline{\Lambda} \;\leq\; \Gamma_r\,\Delta\mathbf{u}_r(k) \;\leq\; \epsilon\,|y(k)| - \overline{\Lambda}. \tag{5.21}$$

Os coeficientes γ_i do vetor Γ_r são limitados por:

$$\begin{cases} \overline{\gamma_i} = \max\limits_{\mathcal{C}} \gamma_i \\ \\ \underline{\gamma_i} = \min\limits_{\mathcal{C}} \gamma_i \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, r. \tag{5.22}$$

Considere a matriz $\mathbf{M}$ cujas linhas correspondem a todas as possíveis combinações dos valores mínimos e máximos das componentes do vetor Γ_r:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \overline{\gamma_r} & \overline{\gamma_{r-1}} & \cdots & \overline{\gamma_2} & \overline{\gamma_1} \\ \overline{\gamma_r} & \overline{\gamma_{r-1}} & \cdots & \overline{\gamma_2} & \underline{\gamma_1} \\ \overline{\gamma_r} & \overline{\gamma_{r-1}} & \cdots & \underline{\gamma_2} & \overline{\gamma_1} \\ \overline{\gamma_r} & \overline{\gamma_{r-1}} & \cdots & \underline{\gamma_2} & \underline{\gamma_1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \underline{\gamma_r} & \underline{\gamma_{r-1}} & \cdots & \overline{\gamma_2} & \underline{\gamma_1} \\ \underline{\gamma_r} & \underline{\gamma_{r-1}} & \cdots & \underline{\gamma_2} & \overline{\gamma_1} \\ \underline{\gamma_r} & \underline{\gamma_{r-1}} & \cdots & \underline{\gamma_2} & \underline{\gamma_1} \end{bmatrix}. \tag{5.23}$$

Note que:

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}\,\Delta\mathbf{u}_r(k) \;\leq\; \mathbf{1}_{(2^r,1)}(\epsilon\,|y(k)| - \overline{\Lambda}) \\ &\Rightarrow\; \Gamma_r\,\Delta\mathbf{u}_r(k) \;\leq\; \epsilon\,|y(k)| - \overline{\Lambda},\; \forall (a,b) \in \mathcal{C} \end{aligned} \tag{5.24}$$

e:

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}\,\Delta\mathbf{u}_r(k) \;\geq\; \mathbf{1}_{(2^r,1)}(-\epsilon\,|y(k)| - \underline{\Lambda}) \\ &\Rightarrow\; \Gamma_r\,\Delta\mathbf{u}_r(k) \;\geq\; -\epsilon\,|y(k)| - \underline{\Lambda},\; \forall (a,b) \in \mathcal{C}. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Neste ponto é possível estabelecer a Teorema 5.2.0.5, que constitui o principal resultado desta tese.

Teorema 5.2.0.5 *Seja $\Delta\mathbf{u}_r(k)$ o vetor composto dos r próximos incrementos de controle a serem aplicados ao sistema (5.2) após o instante k. Se*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ -\mathbf{M} \end{bmatrix} \Delta\mathbf{u}_r(k) \leq \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{(2^r,1)}(\epsilon\,|y(k)| - \overline{\Lambda}) \\ \mathbf{1}_{(2^r,1)}(\epsilon\,|y(k)| + \underline{\Lambda}) \end{bmatrix} \tag{5.26}$$

ocorre, então a condição

$$|y(k+r)| < \epsilon |y(k)|$$

é satisfeita $\forall (a,b) \in \mathcal{C}$.

As restrições definidas em (5.26) serão chamadas de **restrições de estabilidade**. Pela forma em que foram deduzidas, pode-se dizer que são restrições conservadoras, isto é, são suficientes para a estabilização da saída do sistema, mas exigem mais do que o necessário. A respeito disso, é importante mencionar que, a partir de uma análise geral dos métodos de controle preditivo robustos, nota-se que robustez funciona a base de conservadorismo.

O algoritmo de controle proposto, pode ser descrito como:

---

1. Iniciação: Defina o modelo e o politopo de incertezas $\mathcal{C}$, assim como os parâmetros de controle H_p, H_c, ϵ e r, o sinal de referência w e as condições iniciais $\mathbf{z}$. Faça $k \leftarrow 0$;
2. Determine a matriz $\mathbf{M}$ de acordo com (5.22) e (5.23).
3. Calcule $\overline{\Lambda}$ e $\underline{\Lambda}$, de acordo (5.18).
4. Calcule $\Delta \mathbf{u}_r(k)$ de acordo com algum critério de preferência, sujeito às restrições (5.26).
5. Aplique $u(k) = \Delta u(k) + u(k-1)$ na entrada da planta.
6. Faça $k \leftarrow k+1$ e vá ao passo 3.

Vale ressaltar que o algoritmo acima, pode ser usado em conjunto com qualquer outro controlador RMPC que resolva o mesmo tipo de problema descrito na seção 5.1.

5.3 RMPC-SC

O controlador preditivo robusto, denominado RMPC-SC, proposto nesta tese, consiste de um controlador RMPC em que a predição é feita por um modelo do tipo ARX (5.1), com incertezas politópicas (5.4) nos parâmetros do modelo nominal da planta. As restrições de estabilidade (5.26) devem ser

consideradas junto aos futuros incrementos de entrada no cálculo da lei de controle.

O cálculo dos extremos, definidos pela expressão (5.22), é realizado por meio do algoritmo branch and bound, proposto no capítulo 4, buscando-se a garantia de otimalidade da solução. Observe que este procedimento de otimização é realizado uma única vez, de forma *off-line*, na parte inicial do algoritmo.

Por outro lado, o cálculo dos valores ótimos, definidos pelas expressões em (5.18), são realizados de forma *on-line* e o uso do método branch and bound, proposto no capítulo 4, para resolver estes cálculos, iria requerer um grande tempo de processamento, deixando o algoritmo RMPC-SC inviável para diversas aplicações. Neste caso, a função *fmincon* (utilizando o algoritmo dos pontos interiores) do MatLab foi utilizada para resolver os problemas definidos em (5.18).

Além disso, a função objetivo J, a ser considerada, é uma função quadrática (veja seção 3.2) que considera o erro entre as predições $\widehat{y}(k+j|k)$ e uma referência conhecida $w(k+j)$, e a variação no controle $\Delta u(k)$:

$$J = \sum_{j=1}^{H_p} \delta(j)(\widehat{y}(k+j|k) - w(k+j))^2 + \sum_{i=0}^{H_c-1} \lambda(i)(\Delta u(k+i|k))^2. \qquad (5.27)$$

Finalmente, a técnica de otimização a ser utilizada junto à função objetivo é a estratégia Min-Max Eficiente, descrita na seção 3.3 deste texto. O método de otimização branch and bound, proposto no capítulo 4, pode ser utilizado também nesta etapa do algoritmo do controlador RMPC-SC, junto à estratégia Min-Max eficiente. Entretanto, optou-se por não utilizá-lo nesta etapa, pelo mesmo motivo citado anteriormente, isto é, tratam-se de otimizações feitas *on-line*, cujo uso do branch and bound acarretaria em um grande esforço computacional. Novamente, a função *fmincon* (utilizando o algoritmo dos pontos interiores) do MatLab foi utilizada para resolver os procedimentos de otimização junto ao método Min-Max eficiente.

5.4 Resultados de simulação

Nesta seção serão comparados os desempenhos de quatro técnicas de controle preditivo: O GPC - não-robusto, apresentado no capítulo 2 desta tese; o MMEMPC - RMPC com abordagem min-max eficiente, descrito na seção 3.3; O FSPGPC - método GPC robusto, apresentado na seção 3.4 e o RMPC-SC proposto neste capítulo.

Serão analisados três exemplos simulados. O primeiro exemplo trata-se do sistema de posicionamento angular, descrito na subseção 2.3.1. O segundo

exemplo refere-se a uma planta simulada cujo modelo apresenta um elevado número de parâmetros incertos, com grandes valores de incertezas, associados a alguns desses parâmetros. O terceiro exemplo considera uma planta simulada cujo modelo foi baseado no problema proposto por Ramírez & Camacho (2003), apresentando restrições no incremento do sinal de entrada.

Apenas uma análise qualitativa dos resultados de simulação será feita nesta seção. Este tipo de análise é usual na área de controle MPC, como descrito anteriormente no capítulo 1 desta tese.

Em cada simulação, a função objetivo será a mesma para todos os métodos. Além disso, a única diferença entre o MMEMPC e o RMPC-SC são as restrições (5.26) na sequência dos sinais de incremento de controle, utilizadas no método RMPC-SC. A comparação entre o MMEMPC e o RMPC-SC objetiva mostrar a vantagem de se considerar as restrições de estabilidade junto a um controlador RMPC.

Em todos os métodos e todos os exemplos, considerou-se $\delta(j) = 1$, $j = 1, \cdots, H_p$ na função objetivo (5.27), uma condição inicial $u(0) = 0{,}05$ e uma trajetória de referência w constante e nula. Além disso, 100 iterações foram utilizadas.

É importante salientar que para a obtenção dos resultados apresentados abaixo, uma cuidadosa sintonia dos parâmetros de controle H_p, H_c, λ, ω_c, O (estes dois últimos utilizados apenas pelo FSPGPC), ϵ e r (estes dois últimos utilizados apenas pelo RMPC-SC) foi realizada. O resultados exibidos nos próximos exemplos correspondem àqueles em que cada controlador obteve o melhor desempenho quanto à convergência da saída da planta, em estado estacionário.

5.4.1 Exemplo 1

Considere o sistema de posicionamento angular, descrito na subseção 2.3.1, cujo modelo é dado por:

$$\theta(k) = \frac{0{,}0078}{q^2 + (0{,}1\alpha(k) - 2)q + (1 - 0{,}1\alpha(k))}u(k), \tag{5.28}$$

em que $\theta(k)$ é a posição angular (rad) e $0{,}1s^{-1} \leq \alpha(k) \leq 10s^{-1}$.

Inicialmente o parâmetro $\alpha(k)$ será considerado fixo no tempo, porém com valor incerto. Posteriormente, $\alpha(k)$ poderá variar com o tempo, assumindo qualquer valor no intervalo $[0{,}1; 10]$.

Suponha que o parâmetro $\alpha(k)$ seja fixo no tempo. Para as simulações realizadas neste exemplo, considerou-se como modelo da planta, o modelo (5.28), e observou-se os resultados dos controladores RMPC-SC, FSPGPC, MMEMPC e GPC, para alguns valores de $\alpha(k)$ no intervalo $[0{,}1; 10]$. No

controlador não-robusto, GPC, bem como no FSPGPC, utilizou-se como modelo nominal, o modelo (5.28), com $\alpha_n(k)$ no lugar de $\alpha(k)$.

A Figura 5.1 apresenta os resultados obtidos pelos controladores RMPC-SC, FSPGPC e GPC no controle da planta com modelo correspondente a $\alpha(k) = 0{,}1$. Para estes resultados utilizou-se $\alpha_n(k) = 1$ na expressão do modelo nominal, nas simulações do FSPGPC e do GPC. Como pode ser observado na Figura 5.1, todos os três métodos (RMPC-SC, FSPGPC e GPC) apresentaram um bom desempenho de controle em estado estacionário. A Figura 5.2 mostra o desempenho inferior do MMEMPC nesse caso.

Os valores dos parâmetros de controle H_p, H_c e λ, utilizados por cada um dos métodos, bem como os valores referentes ao filtro passa-baixas, ordem O e frequência de corte ω_c, utilizados no projeto do controlador FSPGPC, além dos valores de ϵ e r, utilizados no algoritmo do RMPC-SC, para obtenção dos resultados descritos nas Figuras 5.1 e 5.2, estão descritos na Tabela 5.1.

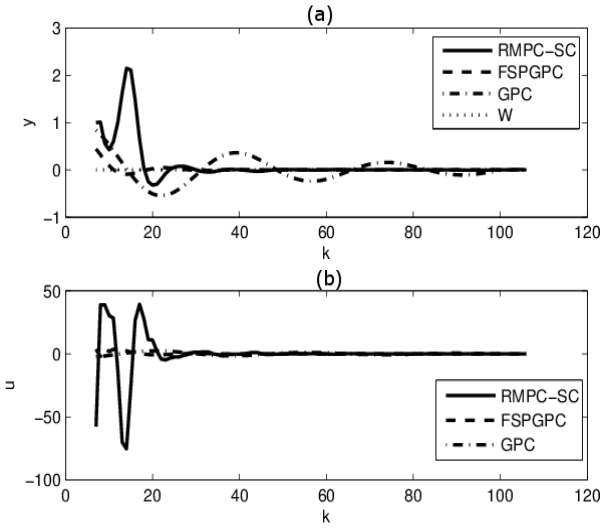

Figura 5.1: Modelo da planta com $\alpha(k) = 0{,}1$ e modelo nominal com $\alpha_n(k) = 1$: (a) Resposta do sistema controlado. (b) Ação de controle - RMPC-SC (linha contínua), FSPGPC (linha tracejada) e GPC (linha traço-pontilhada).

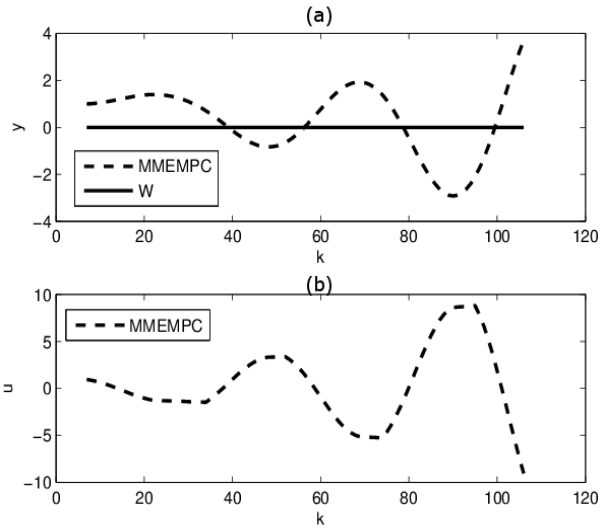

Figura 5.2: Modelo da planta com $\alpha(k) = 0{,}1$: (a) Resposta do sistema controlado pelo MMEMPC. (b) Ação de controle.

A Figura 5.1 mostra divergência e oscilação do RMPC-SC no estado transiente do sistema. Tal comportamento pode ser justificado pela escolha dos

Tabela 5.1: Parâmetros de controle do RMPC-SC, MMEMPC, FSPGPC e GPC para planta (5.28), simulada com $\alpha(k) = 0{,}1$.

	H_p	H_c	λ	ϵ	r	O	ω_c
RMPC-SC	12	6	1	0,6	3	-	-
MMEMPC	5	3	3	-	-	-	-
FSPGPC	14	10	0,05	-	-	2	0,8
GPC	14	10	0,05	-	-	-	-

parâmetros de controle $\epsilon = 0{,}6$ e $r = 3$. Esta escolha acarreta em um grande esforço de controle do método, pois a saída deve obedecer a seguinte condição: $|y(k+3)| < 0{,}6|y(k)|$. Vale ressaltar que a escolha dos parâmetros de controle do RMPC-SC (assim como dos outros controladores) foi feita a partir de uma cuidadosa sintonia e que os resultados apresentados correspondem àqueles que apresentaram melhor convergência da saída em estado estacionário.

O bom resultado apresentado pelos métodos FSPGPC e GPC, mostrados na Figura 5.1, justifica-se pela proximidade do modelo da planta e do modelo nominal, utilizado pelos métodos. Ao tomar outros valores de $\alpha_n(k)$, o FSPGPC e o GPC apresentaram resultados diferentes, como era de se esperar. Se $\alpha_n(k) = 10$, por exemplo, espera-se um desempenho inferior desses controladores. Tal fato ocorre e pode ser observado pelas Figuras 5.3 e 5.4, que mostram divergência na saída da planta controlada pelo FSPGPC e pelo GPC.

Ao considerar $\alpha(k)$ como o outro extremo do intervalo de incerteza, isto é, $\alpha(k) = 10$, pode-se observar, pela Figura 5.5, um desempenho razoável de todos os métodos, em estado estacionário, com uma superioridade do RMPC-SC em relação aos demais. Para estes resultados, utilizou-se $\alpha_n(k) = 5{,}05$ (ponto médio do intervalo $0{,}1 \leq \alpha_n(k) \leq 10$) no projeto do FSPGPC e do GPC. Os valores dos parâmetros de controle, utilizados neste caso, estão descritos na Tabela 5.2.

Ao observar a Figura 5.5, pode-se notar, novamente, grande oscilação na entrada do sistema, controlado pelo RMPC-SC, em estado transiente. Tal fato pode ser atribuído ao próprio algoritmo do controlador RMPC-SC que impõe, na forma de restrições, que a saída do sistema satisfaça $|y(k+r)| < \epsilon|y(k)|$ (neste caso utilizou-se $r = 3$ e $\epsilon = 0{,}9$). Os resultados expostos nas Figuras 5.1 e 5.5 indicam que o conjunto de restrições (5.26) garantem a estabilidade do sistema apenas em estado estacionário, permitindo oscilações na entrada e saída da planta, em estado transiente. Esta

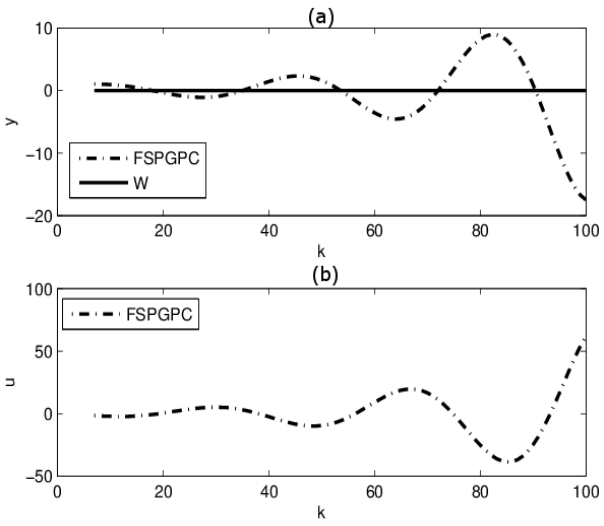

Figura 5.3: Modelo da planta com $\alpha(k) = 0{,}1$ e modelo nominal com $\alpha_n(k) = 10$: (a) Resposta do sistema controlado pelo FSPGPC. (b) Ação de controle.

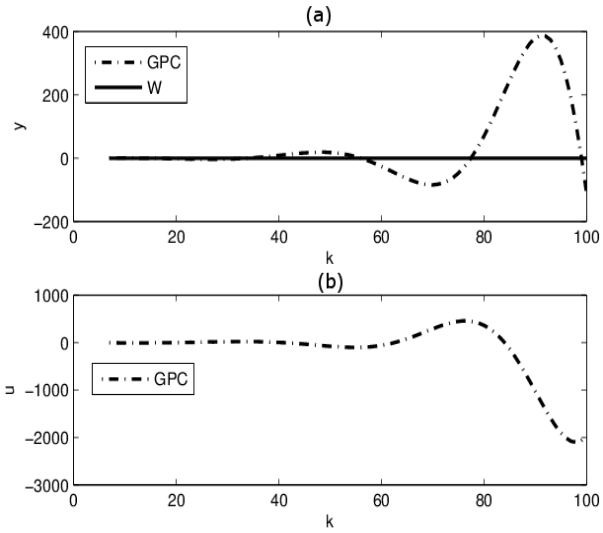

Figura 5.4: Modelo da planta com $\alpha(k) = 0{,}1$ e modelo nominal com $\alpha_n(k) = 10$: (a) Resposta do sistema controlado pelo GPC. (b) Ação de controle.

Tabela 5.2: Parâmetros de controle do RMPC-SC, MMEMPC, FSPGPC e GPC para planta (5.28), simulada com $\alpha(k) = 10$.

	H_p	H_c	λ	ϵ	r	O	ω_c
RMPC-SC	12	6	3	0,9	3	-	-
MMEMPC	6	4	1	-	-	-	-
FSPGPC	12	6	0,05	-	-	2	0,9
GPC	12	6	0,05	-	-	-	-

conclusão parece razoável ao se analisar a condição $|y(k+r)| < \epsilon|y(k)|$, que impõe a estabilidade da saída da planta, r passos a frente, deixando o sistema livre nos passos anteriores. Para obter essa estabilidade r passos a frente, pode-se perder o controle do sistema nos passos $k+1$ até $k+r-1$, como ilustram as Figuras 5.1 e 5.5. Este fenômeno pode ser observado, não apenas nas Figuras 5.1 e 5.5, como nas demais figuras que mostram o desempenho do controlador RMPC-SC, no decorrer desta seção.

A fim de se analisar de que forma a variação no parâmetro ϵ interfere na

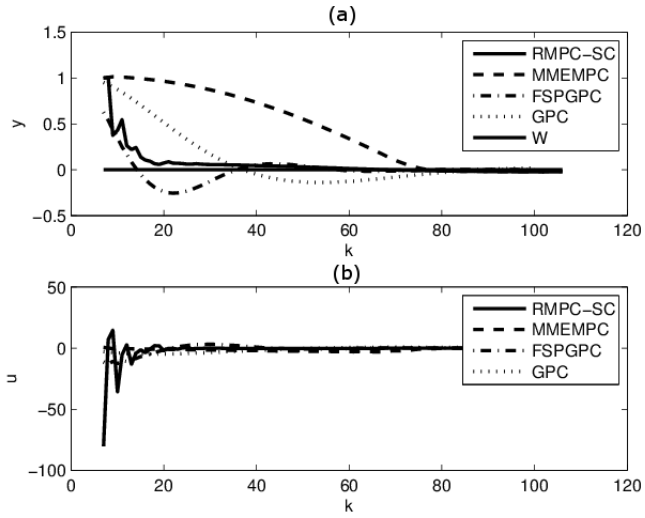

Figura 5.5: Modelo da planta com $\alpha(k) = 10$ e modelo nominal com $\alpha_n(k) = 5{,}05$: (a) Resposta do sistema controlado. (b) Ação de controle - RMPC-SC (linha contínua), MMEMPC (linha tracejada), FSPGPC (linha traço-pontilhada) e GPC (linha pontilhada).

resposta do sistema, o RMPC-SC foi aplicado ao controle da planta (5.28), com $\alpha(k) = 10$, utilizando-se diferentes valores para ϵ. Para cada valor de ϵ no conjunto $\{0{,}4; 0{,}6; 0{,}8; 0{,}9\}$, o RMPC-SC foi aplicado com $H_p = 12$, $H_c = 6$, $\lambda = 3$ e $r = 3$ e os resultados de simulação aparecem na Figura 5.6.

Pode-se observar na Figura 5.6, um melhor desempenho de controle quando o parâmetro ϵ assume maiores valores ($0 < \epsilon < 1$). Este fato ocorre neste exemplo, em particular, e não se repete para exemplos gerais. Por outro lado, os resultados mostrados pela Figura 5.6, motivam a seguinte discussão sobre a relação entre o valor de ϵ e factibilidade das restrições (5.26): para valores pequenos de ϵ, a condição $|y(k+r)| < \epsilon|y(k)|$ provoca, teoricamente, uma rápida convergência da saída para zero, mas, por outo lado, as restrições (5.26) podem se tornar infactíveis para estes valores; para valores maiores do parâmetro ϵ, espera-se uma convergência menos rápida da saída da planta, porém, a condição de estabilidade $|y(k+r)| < \epsilon|y(k)|$ torna-se mais relaxada, havendo mais possibilidade de factibilidade das restrições (5.26), nestes casos. Baseado nesta discussão, uma sintonia criteriosa deve ser feita no valor do parâmetro ϵ antes de se aplicar o RMPC-SC em cada exemplo particular.

Na sequência, usou-se o controlador RMPC-SC junto ao sistema representado pelo modelo (5.28) com $\alpha(k)$ variando com o tempo, randomicamente.

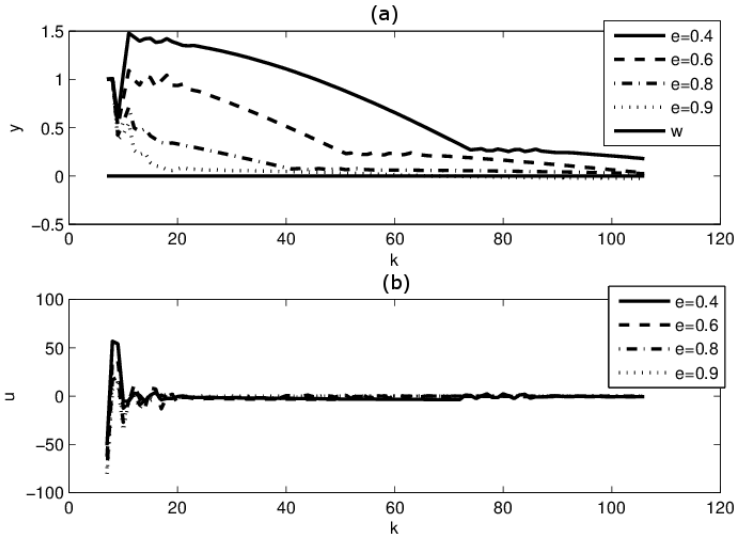

Figura 5.6: Modelo da planta com $\alpha(k) = 10$: (a) Resposta do sistema controlado pelo RMPC-SC. (b) Ação de controle - Valores de ϵ: 0,4 (linha contínua), 0,6 (linha tracejada), 0,8 (linha traço-pontilhada) e 0,9 (linha pontilhada).

A Figura 5.7 mostra a resposta do sistema LTV ao RMPC-SC, com parâmetros de controle $H_p = 12$, $H_c = 6$, $r = 3$, $\epsilon = 0{,}8$ e $\lambda = 3$. Ao realizar outras simulações, resultados diferentes daquele apresentado pela Figura 5.7, foram encontrados. Alguns desses resultados convergiram mais rápido para a referência, outros mais lentamente, porém nenhum deles apresentou divergência, o que demonstra a eficácia do método RMPC-SC no controle do sistema LTV, proposto neste exemplo.

Com o objetivo de se analisar o desempenho do controlador RMPC-SC, qualquer que seja o valor do parâmetro $\alpha(k)$, simulações foram feitas para diversos valores de $\alpha(k)$, igualmente espaçados dentro do intervalo $[0{,}1; 10]$. O RMPC-SC foi aplicado utilizando-se horizontes de predição e controle, $H_p = 12$ e $H_c = 6$, respectivamente, e $r = 3$. Os valores dos parâmetros de controle ϵ e λ foram tomados dentro dos intervalos $[0{,}7; 0{,}9]$ e $[1; 3]$, respectivamente, de acordo com cada valor assumido por $\alpha(k)$. A Figura 5.8 exibe os resultados obtidos, onde a robustez e a eficiência do método RMPC-SC podem ser confirmadas para este exemplo.

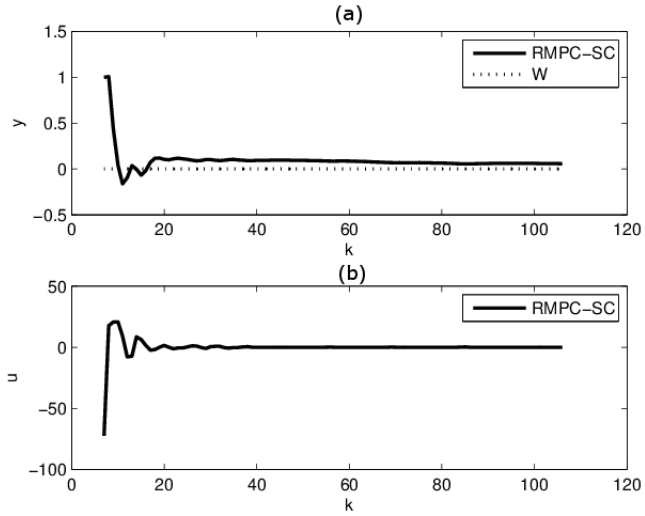

Figura 5.7: Modelo LTV: (a) Resposta do sistema controlado pelo RMPC-SC. (b) Ação de controle.

5.4.2 Exemplo 2

Este exemplo explora a aplicação do controlador robusto RMPC-SC a uma planta cujo modelo apresenta um número maior de parâmetros incertos, com elevados valores de incertezas em alguns desses parâmetros.

Considere a planta simulada, apresentada na subseção 2.3.2, porém com incertezas politópicas nos coeficientes da função de transferência. Isto é, suponha que o modelo da planta seja dado por:

$$T(q) = \frac{b_0 q^2 + b_1 q + b_2}{q^3 + a_1 q^2 + a_2 q + a_2}, \tag{5.29}$$

com os coeficientes a_i e b_j contidos no seguinte politopo:

$$\mathcal{C}_1 = \begin{cases} 1{,}5 \leq b_0 \leq 2{,}2 \\ 0{,}1 \leq b_1 \leq 0{,}6 \\ 1 \leq b_2 \leq 1{,}2 \\ -2{,}35 \leq a_0 \leq -2{,}12 \\ 0 \leq a_1 \leq 0{,}15 \\ 0{,}1 \leq a_2 \leq 0{,}35 \end{cases} . \tag{5.30}$$

Pode-se observar que os coeficientes do modelo apresentado por Rossiter et al. (1996), e descrito na subseção 2.3.2, estão contidos no politopo (5.30).

O objetivo deste exemplo é analisar os resultados obtidos pelos controladores RMPC-SC, MMEMPC, FSPGPC e GPC, ao controlar a planta simulada, dada pelo modelo (5.29), utilizando-se dois diferentes conjuntos de

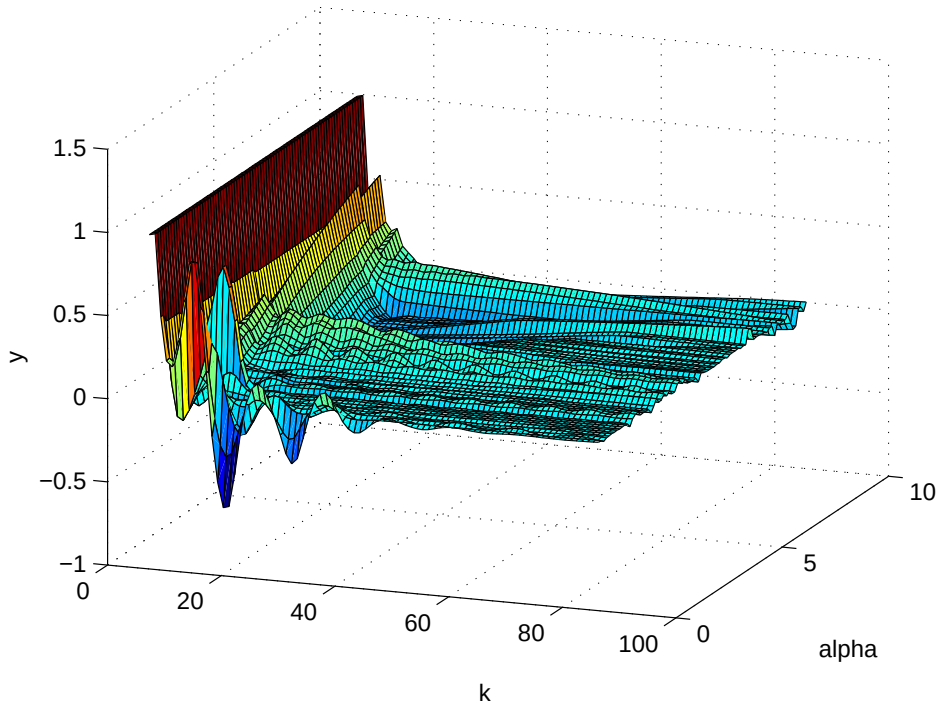

Figura 5.8: Resposta do sistema controlado pelo RMPC-SC em função do tempo, para valores de $\alpha(k)$ variando no intervalo $[0{,}1; 10]$.

valores para os parâmetros a_i e b_j, no politopo $\mathcal{C}_1$. Em ambos os casos, o controlador não robusto, GPC, bem como o FSPGPC, fizeram uso do seguinte modelo nominal:

$$T_m(q) = \frac{2{,}2q^2 + 0{,}1q + 1{,}2}{q^3 - 2{,}12q^2 + 0{,}15q + 0{,}1}. \tag{5.31}$$

Considerou-se, inicialmente, que o modelo da planta simulada é igual ao modelo descrito em [Rossiter et al. (1996)] e na subseção 2.3.2, isto é:

$$T_{p1}(q) = \frac{2q^2 + 0{,}45q + 1}{q^3 - 2{,}2q^2 + 0{,}09q + 0{,}252}. \tag{5.32}$$

A Figura 5.9 apresenta os resultados obtidos pelos métodos RMPC-SC, MMEMPC, FSPGPC e GPC, no controle da planta com modelo (5.32). Ao analisar a Figura 5.9, pode-se observar um bom desempenho obtido por todos os controladores, com uma convergência mais rápida do FSPGPC e uma convergência mais lenta do MMEMPC. Os valores dos parâmetros de controle, utilizados para obtenção dos resultados apresentados na Figura 5.9, estão descritos na Tabela 5.3.

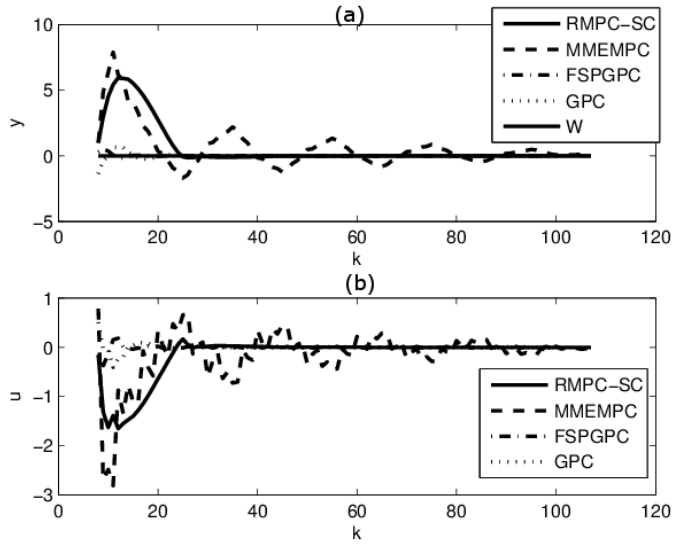

Figura 5.9: Planta (5.32): (a) Resposta do sistema controlado. (b) Ação de controle - RMPC-SC (linha contínua), MMEMPC (linha tracejada), FSPGPC (linha traço-pontilhada) e GPC (linha pontilhada).

Tabela 5.3: Parâmetros utilizados pelo RMPC-SC, MMEMPC, FSPGPC e GPC no controle da planta (5.32).

	H_p	H_c	λ	ϵ	r	O	ω_c
RMPC-SC	12	5	1	0,6	5	-	-
MMEMPC	10	5	1	-	-	-	-
FSPGPC	12	7	3	-	-	2	0,99
GPC	12	7	3	-	-	-	-

Ao considerar o modelo da planta como:

$$T_{p2}(q) = \frac{1{,}5q^2 + 0{,}6q + 1}{q^3 - 2{,}35q^2 + 0{,}35}, \tag{5.33}$$

os controladores RMPC-SC, MMEMPC, FSPGPC e GPC foram aplicados. Os resultados obtidos pelo RMPC-SC e pelo MMEMPC estão expostos na Figura 5.10, onde pode-se observar um desempenho satisfatório desses métodos, com convergência mais rápida alcançada pelo RMPC-SC. As Figuras 5.11 e 5.12 exibem os desempenhos ruins dos métodos FSPGPC e GPC, respectivamente, no controle da planta (5.33).

A Tabela 5.4 mostra os valores dos parâmetros de controle, utilizados

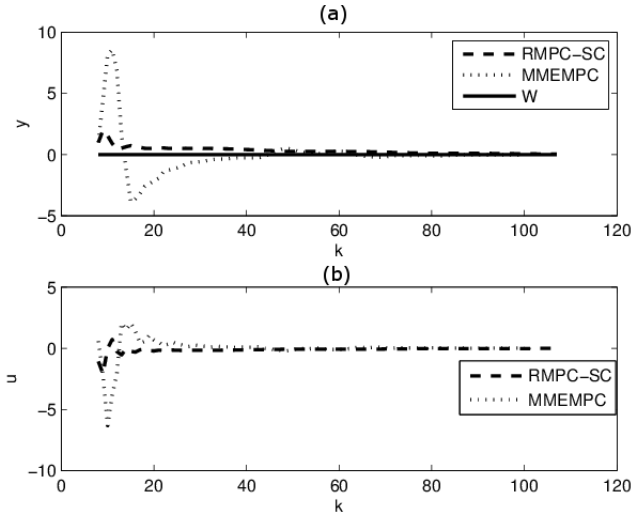

Figura 5.10: Planta (5.33): (a) Resposta do sistema controlado. (b) Ação de controle - RMPC-SC (linha tracejada) e MMEMPC (linha pontilhada).

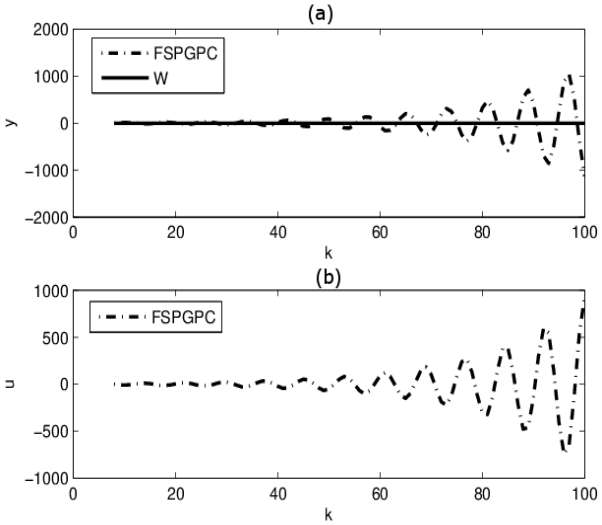

Figura 5.11: Planta (5.33): (a) Resposta do sistema controlado pelo FSPGPC. (b) Ação de controle.

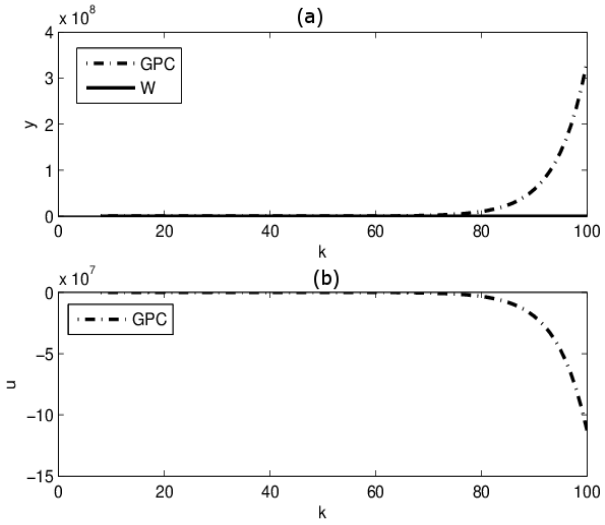

Figura 5.12: Planta (5.33): (a) Resposta do sistema controlado pelo GPC. (b) Ação de controle.

pelo métodos RMPC-SC, MMEMPC, FSPGPC GPC e MPC, na obtenção dos resultados expostos pelas Figuras 5.10 a 5.12.

Tabela 5.4: Parâmetros utilizados pelo RMPC-SC, MMEMPC, FSPGPC GPC e MPC no controle da planta (5.33).

	H_p	H_c	λ	ϵ	r	O	ω_c
RMPC-SC	10	8	1	0,7	8	-	-
MMEMPC	10	8	1	-	-	-	-
FSPGPC	10	5	0,05	-	-	2	0,99
GPC	10	5	0,05	-	-	-	-

5.4.3 Exemplo 3

Neste exemplo, considerou-se uma planta simulada com restrições no incremento do sinal de entrada. O modelo da planta possui apenas dois coeficientes incertos e foi baseado no problema proposto por Ramírez & Camacho (2003).

Com o objetivo de mostrar a vantagem de se considerar as restrições de estabilidade (5.26) junto a um controlador RMPC, uma comparação entre os métodos RMPC-SC e MMEMPC será realizada neste exemplo. Observe que a única diferença entre o MMEMPC e o RMPC-SC é que o RMPC-SC considera as restrições de estabilidade, junto ao método min-max eficiente, no momento da minimização. Além disso, os desempenhos dos métodos RMPC-SC e MMEMPC serão comparados ao desempenho do controlador robusto FSPGPC, descrito no capitulo 3 desta tese.

Devido ao mal condicionamento obtido pelo controlador GPC nas simulações propostas neste exemplo, o desempenho deste método não será estudado neste exemplo.

Considere uma planta representada pela seguinte função de transferência:

$$T(q) = \frac{bq + 1}{q^2 - 1{,}9q + a}, \tag{5.34}$$

com os coeficientes a e b contidos no seguinte politopo:

$$\mathcal{C}_2 = \begin{cases} 0{,}7 \leq a \leq 1 \\ 0{,}5 \leq b \leq 1{,}5 \end{cases} . \tag{5.35}$$

Deseja-se uma lei de controle que seja capaz de controlar a planta (5.34), quaisquer que sejam os valores dos coeficientes a e b em $\mathcal{C}_2$, sujeita à restrição $-2 \leq \Delta u \leq 2$.

Para as simulações realizadas neste exemplo, os seguintes parâmetros de controle foram utilizados pelo MMEMPC e pelo RMPC-SC: $H_p = 8$, $H_c = 4$ e $\lambda = 1$. Além disso, os valores dos demais parâmetros de controle, utilizados pelo controlador RMPC-SC, foram: $\epsilon = 0{,}9$ e $r = 3$. O FSPGPC foi projetado com o uso dos seguintes parâmetros: $H_p = 15$, $H_c = 10$ e $\lambda = 3$, $O = 2$ e $\omega_c = 0{,}9$, e utilizou o modelo nominal (5.34) com $a = 1$ e $b = 1$.

Considere, inicialmente, o seguinte modelo para a planta (fase não mínima):

$$T_{p1}(q) = \frac{0{,}5q + 1}{q^2 - 1{,}9q + 1}. \tag{5.36}$$

Os métodos RMPC-SC, MMEMPC e FSPGPC foram aplicados no controle da planta (5.36) e apresentaram resultados bastante satisfatórios, como pode ser visto na Figura 5.13.

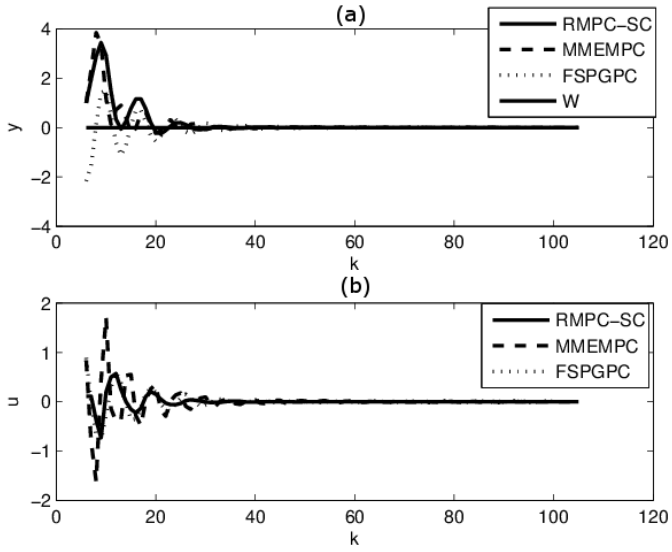

Figura 5.13: Planta (5.36): (a) Resposta do sistema controlado. (b) Ação de controle - RMPC-SC (linha contínua), MMEMPC (linha tracejada) e FSPGPC (linha pontilhada).

Por outro lado, ao considerar que a planta seja simulada pelo modelo (planta instável)

$$T_{p2}(q) = \frac{1{,}5q + 1}{q^2 - 1{,}9q + 0{,}7}, \tag{5.37}$$

apenas os métodos RMPC-SC e FSPGPC apresentaram resultados satisfatórios, como pode ser observado nas Figuras 5.14 e 5.15.

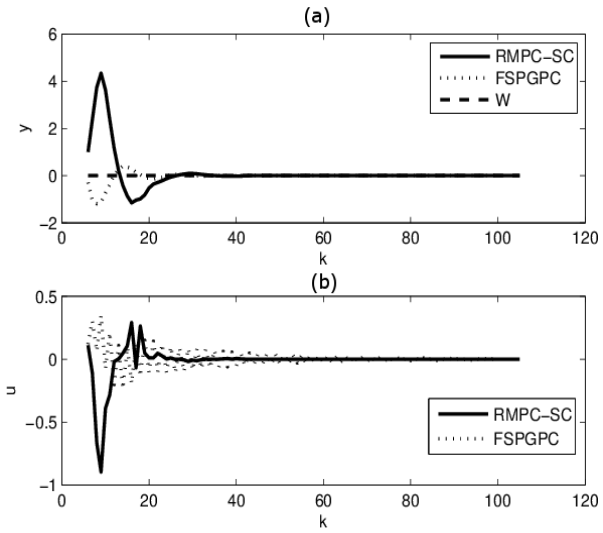

Figura 5.14: Planta (5.37): (a) Resposta do sistema controlado. (b) Ação de controle - RMPC-SC (linha contínua) e FSPGPC (linha pontilhada).

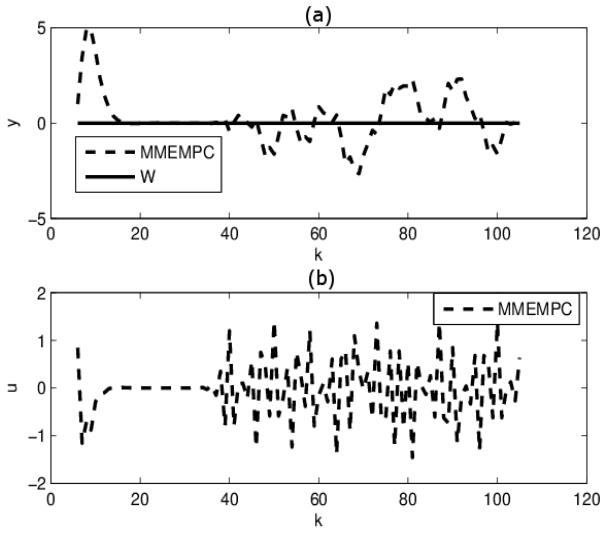

Figura 5.15: Planta (5.37): (a) Resposta do sistema controlado pelo MMEMPC. (b) Ação de controle.

Com o objetivo de analisar a robustez dos controladores RMPC-SC e MMEMPC, ambos foram aplicados no controle da planta (5.34), para diversos conjuntos de valores assumidos pelos coeficientes a e b em $\mathcal{C}_2$. Mais especificamente, foram gerados 36 pares de coeficientes (a,b), tais que $a \in \{0{,}5; 0{,}7; 0{,}9; 1{,}1; 1{,}3; 1{,}5\}$ e $b \in \{0{,}7; 0{,}76; 0{,}82; 0{,}88; 0{,}94; 1\}$ e a eficiência dos métodos RMPC-SC e MMEMPC foi testada no controle da planta associada a cada um desse pares.

Como o objetivo é medir a capacidade de estabilização do controlador em estado estacionário, dado um par de coeficientes (a,b), definiu-se o índice **desempenho de estabilização**, que será denotado por D, como: D é a média da diferença $(y(k) - w(k))$, para $N/2 \leq k \leq N$, em que N é o número de passos do algoritmo (neste exemplo, utilizou-se N=100).

A Figura 5.16 mostra para quais pares de coeficientes (a,b), os métodos RMPC-SC e MMEMPC obtiveram um desempenho de estabilização $D <$ 0,01. Pode-se observar na Figura 5.16, a robustez do controlador RMPC-SC no controle da planta proposta neste exemplo. Além disso, o controlador RMPC-SC apresentou desempenho de estabilização $D < 0{,}01$, em mais casos, quando comparado ao controlador MMEMPC, o que demonstra a vantagem de se considerar as restrições de estabilidade junto ao controlador RMPC.

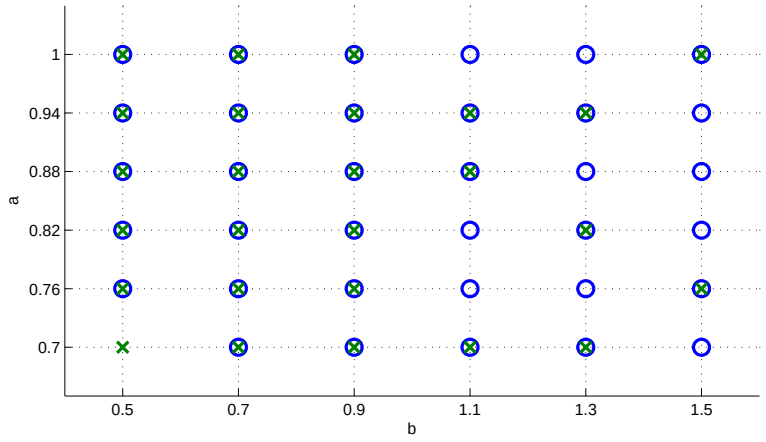

Figura 5.16: Planta (5.34) associada a diversos pares (a,b). $\circ$: RMPC-SC com $D < 0{,}01$, $\times$: MMEMPC com $D < 0{,}01$.

O mesmo tipo de análise foi realizada para comparar a estabilização fornecida pelos controladores RMPC-SC e FSPGPC, no controle da planta (5.34). Considerou-se o mesmo conjunto de valores dos parâmetros a e b, isto é $a \in \{0{,}5; 0{,}7; 0{,}9; 1{,}1; 1{,}3; 1{,}5\}$ e $b \in \{0{,}7; 0{,}76; 0{,}82; 0{,}88; 0{,}94; 1\}$. Nesta análise, os parâmetros de controle do FSPGPC foram sintonizados de forma diferente para cada um dos pares (a,b).

As Figuras 5.17 e 5.18 mostram os desempenhos dos métodos RMPC-SC e FSPGPC, no controle da planta (5.34) associada a cada par (a, b), com o modelos nominais (usados pelo FSPGPC) correspondentes a $(a, b) = (0{,}7, 0{,}5)$ e $(a, b) = (0{,}85, 1{,}0)$, respectivamente. Os resultados apresentados nas Figuras 5.17 e 5.18 revelam maior robustez do RMPC-SC, em relação ao FSPGPC, para o controle da planta com modelo incerto, proposta neste exemplo.

Quanto ao par em que o RMPC-SC não obteve desempenho de estabilização $D < 0{,}01$, o par (a,b) $= (0{,}7; 0{,}5)$, basta um ajuste nos parâmetros de controle para que o problema seja resolvido. De fato, ao considerar $H_p = 12$, $H_c = 6$, $r = 3$, $\lambda = 1$ e $\epsilon = 0{,}1$, a saída da planta, controlada pelo RMPC-SC, converge para a referência, como pode ser visto na Figura 5.19. Neste caso, $D < 0{,}001598$.

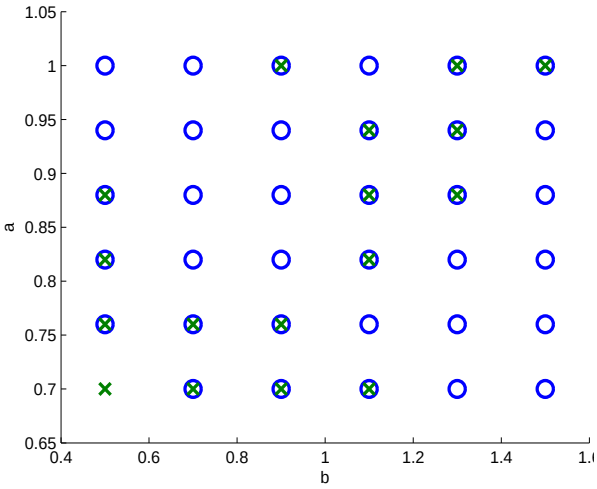

Figura 5.17: Planta (5.34) associada a diversos pares (a,b). $\circ$: RMPC-SC com $D < 0{,}01$, $\times$: FSPGPC (modelo nominal $(a,b) = (0{,}7,0{,}5)$) com $D < 0{,}01$.

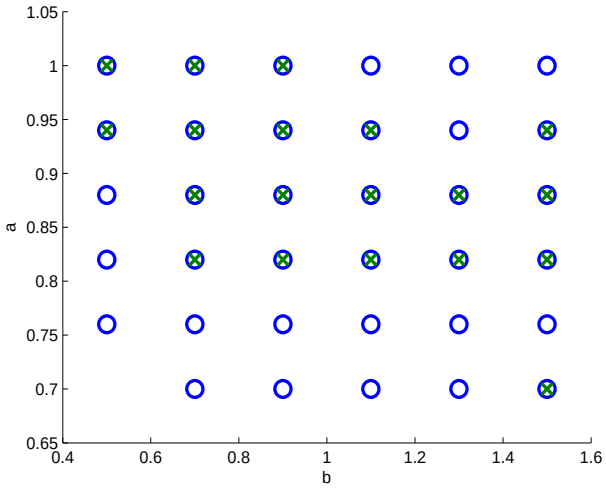

Figura 5.18: Planta (5.34) associada a diversos pares (a,b). $\circ$: RMPC-SC com $D < 0{,}01$, $\times$: FSPGPC (modelo nominal $(a,b) = (0{,}85,1{,}0)$) com $D < 0{,}01$.

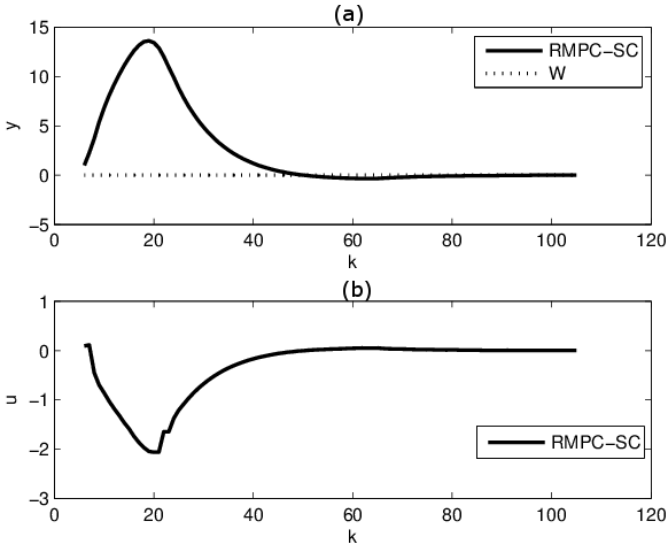

Figura 5.19: Planta (5.34) associada ao par $(a,b) = (0{,}7; 0{,}5)$: (a) Resposta do sistema controlado pelo RMPC-SC. (b) Ação de controle.

5.5 Outras Formulações do RMPC-SC

A lei de controle do RMPC-SC, descrita na seção 5.2, faz uso de um procedimento de otimização não-linear, restrito, *on-line* (veja equações (5.18)). Isso acarreta um alto custo computacional e limita a aplicação do RMPC-SC a sistemas com tempos de amostragem pequenos.

Ao buscar por alternativas que visam melhorar o desempenho computacional do método RMPC-SC, sem, entretanto, comprometer o seguimento de referência alcançado pelo mesmo, surgiram duas diferentes propostas, baseadas em pequenas alterações no algoritmo do controlador RMPC-SC. Estes novos dois método de controles serão denotados pela sigla RMPC-SC(a) e RMPC-SC(b), e os algoritmos de ambos estão descritos nas subseções 5.5.1 e 5.5.2, a seguir.

A subseção 5.5.3 apresenta uma comparação do desempenho dos três métodos: RMPC-SC, RMPC-SC(a) e RMPC-SC(b), para um exemplo simulado, em que serão analisados a convergência da saída da planta, bem como o tempo de CPU por amostra, demandado por cada um dos controladores.

5.5.1 RMPC-SC(a)

Denotou-se por RMPC-SC(a) o método de controle robusto cujo algoritmo difere do algoritmo do RMPC-SC em apenas um ponto: A condição de estabilidade (5.9) é imposta a um conjunto finito de pontos, denotado por K, dentro do politopo de incertezas (5.4), ao invés de ser imposta a todos os pontos do politopo (5.4), como é o caso do RMPC-SC.

A escolha do conjunto K depende do problema em que o RMPC-SC(a) está sendo aplicado. Para uma maior eficiência do método RMPC-SC(a), K deve ser escolhido como um dos seguintes conjunto de pontos:

1. (i) Os vértices do politopo (5.4).
2. (ii) Os vértices do politopo (5.4), mais s pontos igualmente espaçados, nas arestas do politopo (5.4).
3. (iii) Os vértices do politopo (5.4), mais s pontos igualmente espaçados, nas arestas do politopo (5.4), mais t pontos igualmente espaçados, no interior do politopo (5.4).

Esta mudança evita o procedimento de otimização *off-line* (5.22). De fato, se $K = \{(\mathbf{a},\mathbf{b})_1, (\mathbf{a},\mathbf{b})_2, \cdots, (\mathbf{a},\mathbf{b})_t\}$, em que cada $(\mathbf{a},\mathbf{b})_i \in C$ é uma

sequência de parâmetros no politopo C, uma nova matriz de dimensão $t \times r$,

$$\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} \gamma_r((\mathbf{a},\mathbf{b})_1) & \gamma_{r-1}((\mathbf{a},\mathbf{b})_1) & \cdots & \gamma_1((\mathbf{a},\mathbf{b})_1) \\ \gamma_r((\mathbf{a},\mathbf{b})_2) & \gamma_{r-1}((\mathbf{a},\mathbf{b})_2) & \cdots & \gamma_1((\mathbf{a},\mathbf{b})_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \gamma_r((\mathbf{a},\mathbf{b})_t) & \gamma_{r-1}((\mathbf{a},\mathbf{b})_t) & \cdots & \gamma_1((\mathbf{a},\mathbf{b})_t) \end{bmatrix}, \tag{5.38}$$

deve ser usada no lugar da matriz M, dada em (5.23), na lei de controle descrita na seção 5.2.

Além disso, o procedimento de otimização *on-line*, dado em (5.18), também é evitado e, ao invés dos valores ótimos, definidos em (5.18), o seguinte vetor de dimensão $t \times 1$, deve ser calculado:

$$\mathbf{\Lambda_K} = \begin{bmatrix} \Lambda((\mathbf{a},\mathbf{b})_1) \\ \Lambda((\mathbf{a},\mathbf{b})_2) \\ \vdots \\ \Lambda((\mathbf{a},\mathbf{b})_t) \end{bmatrix}. \tag{5.39}$$

Dessa forma, as restrições de estabilidade, definidas pela inequação matricial (5.26), são substituídas pelas restrições:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}' \\ -\mathbf{M}' \end{bmatrix} \Delta\mathbf{u}_r(k) \leq \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{(t,1)}(\epsilon\,|y(k)|) - \mathbf{\Lambda_K} \\ \mathbf{1}_{(t,1)}(\epsilon\,|y(k)|) + \mathbf{\Lambda_K} \end{bmatrix}. \tag{5.40}$$

O algoritmo de controle do RMPC-SC(a), pode então ser descrito como:

---

1. Iniciação: Defina o modelo, o politopo de incertezas $\mathcal{C}$ e o conjunto K, assim como os parâmetros de controle H_p, H_c, ϵ e r, o sinal de referência w e as condições iniciais $\mathbf{z}$. Faça $k \leftarrow 0$;
2. Determine a matriz $\mathbf{M}'$ de acordo com (5.38).
3. Calcule o vetor $\mathbf{\Lambda_K}$, definido em (5.39).
4. Calcule $\Delta\mathbf{u}_r(k)$ utilizando o método min-max eficiente, descrito na seção 3.3, sujeito às restrições (5.40).
5. Aplique $u(k) = \Delta u(k) + u(k-1)$ na entrada da planta.
6. Faça $k \leftarrow k+1$ e vá ao passo [3].

5.5.2 RMPC-SC(b)

O algoritmo do método de controle denotado por RMPC-SC(b) é muito semelhante ao algoritmo do RMPC-SC(a). A única diferença se dá no momento de aplicação do procedimento de otimização min-max eficiente.

O RMPC-SC(a), utiliza o método min-max eficiente, descrito na seção 3.3, para obter o incremento do sinal de controle, $\Delta u(k)$. Por outro lado, o RMPC-SC(b) considera o procedimento de maximização, do min-max eficiente, apenas nos conjuntos de parâmetros contidos no conjunto K. Dessa forma, o algoritmo do controlador RMPC-SC(b) pode ser descrito da seguinte maneira:

---

1. Iniciação: Defina o modelo, o politopo de incertezas $\mathcal{C}$ e o conjunto K, assim como os parâmetros de controle H_p, H_c, ϵ e r, o sinal de referência w e as condições iniciais $\mathbf{z}$. Faça $k \leftarrow 0$;

2. Determine a matriz $\mathbf{M}'$ de acordo com (5.38).

3. Calcule o vetor $\mathbf{\Lambda_K}$, definido em (5.39).

4. $(\mathbf{a},\mathbf{b})^* \leftarrow \arg_{(\mathbf{a},\mathbf{b})} \max_{(\mathbf{a},\mathbf{b})\in K} J(\mathbf{\Delta u}(k-1),(\mathbf{a},\mathbf{b}))$.

5. $\mathbf{\Delta u}(k) \leftarrow \arg_{\mathbf{\Delta u}} \min_{\mathbf{\Delta u}\in\mathbf{U}} J(\mathbf{\Delta u},(\mathbf{a},\mathbf{b})^*)$, sujeito às restrições (5.40).

6. Aplique $u(k) = \Delta u(k) + u(k-1)$ na entrada da planta.

7. Faça $k \leftarrow k+1$ e vá ao passo [3].

5.5.3 RMPC-SC $\times$ RMPC-SC(a) $\times$ RMPC-SC(b)

Os métodos de controle RMPC-SC(a) e RMPC-SC(b) originaram-se a partir de pequenas alterações no algoritmo do controlador preditivo robusto, RMPC-SC, proposto na seção 5.3. Ambos os métodos, RMPC-SC(a) e RMPC-SC(b), foram propostos com o objetivo de se reduzir o custo computacional do método original.

A seção 5.4 mostrou o desempenho superior do RMPC-SC, no controle de várias plantas simuladas, quando comparado a quatro outros controladores MPC. Para testar o desempenho dos controladores RMPC-SC(a) e RMPC-SC(b), em relação ao RMPC-SC, os três métodos foram aplicados ao exemplo 5.4.1. Os parâmetros de controle utilizados pelo RMPC-SC, RMPC-SC(a) e

RMPC-SC(b) foram: $H_p = 12$, $H_c = 6$, $r = 3$, $\epsilon = 0.6$ e $\lambda = 1$. As Figuras 5.20 e 5.21 apresentam os resultados obtidos pelos três métodos, no controle da planta (5.28) com $\alpha = 0{,}1$ e $\alpha = 1$, respectivamente, e a tabela 5.5 mostra o tempo de CPU por amostra, gasto pelos mesmos.

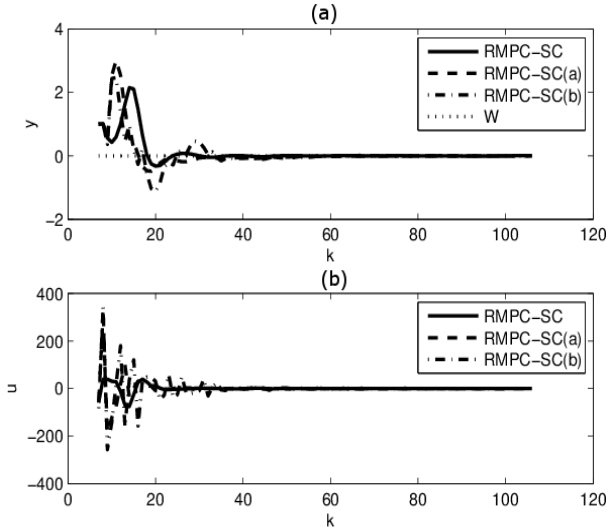

Figura 5.20: Planta (5.28) com $\alpha = 0.1$: (a) Resposta do sistema controlado. (b) Ação de controle - RMPC-SC (linha contínua), RMPC-SC(a) (linha tracejada) e RMPC-SC(b) (linha traço-pontilhada).

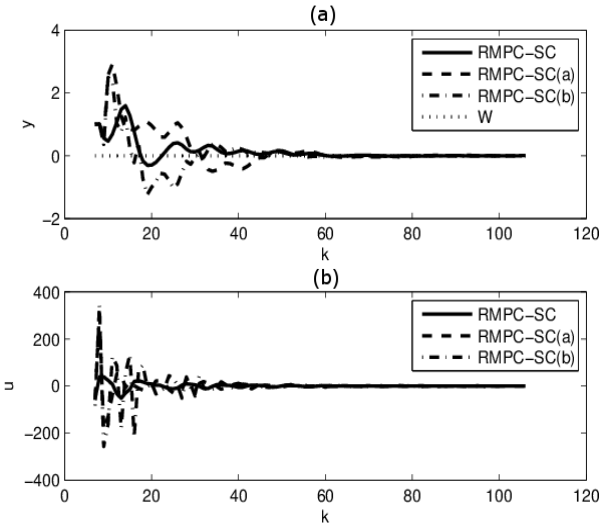

Figura 5.21: Planta (5.28) com $\alpha = 1$: (a) Resposta do sistema controlado. (b) Ação de controle - RMPC-SC (linha contínua), RMPC-SC(a) (linha tracejada) e RMPC-SC(b) (linha traço-pontilhada).

Tabela 5.5: Tempo de CPU por amostra.

	Tempo de CPU		
α	RMPC-SC	RMPC-SC(a)	RMPC-SC(b)
0,1	0,03814871 s	0,02377186 s	0,01891044 s
1	0,03703982 s	0,02742665 s	0,01987434 s

Ao tomar valores de $\alpha \geq 2$, os métodos RMPC-SC(a) e RMPC-SC(b) mostraram-se ineficientes no controle da planta (5.28), permitindo a divergência da saída da planta. Por outro lado, o controlador RMPC-SC apresentou bom desempenho ao controlar a planta (5.28), qualquer que seja o valor de α, como mostram os resultados expostos pelo exemplo 5.4.1.

Os controladores RMPC-SC(a) e RMPC-SC(b) foram aplicados também no controle das plantas simuladas, propostas nos exemplos 5.4.2 e 5.4.3. Novamente, observou-se a divergência da saída da planta em todos os casos propostos nestes exemplos, após a aplicação de ambos controladores.

Os resultados apresentados nesta subseção mostram que, apesar dos controladores RMPC-SC(a) e RMPC-SC(b) apresentarem um tempo de CPU inferior ao do controlador RMPC-SC, eles mostraram resultados muito inferiores ao RMPC-SC, quanto à convergência da saída da planta. De fato, os métodos RMPC-SC(a) e RMPC-SC(b) foram eficientes apenas no controle da planta (5.28), para $\alpha = 0{,}1$ e $\alpha = 1$, apresentando resultados de divergência para todas as demais plantas propostas na seção 5.4.

O controlador RMPC-SC proposto nesta tese, apresentou resultados satisfatórios no controle de todas as plantas simuladas, expostas na seção 5.4. Entretanto, seu alto custo computacional, limita sua aplicação a sistemas com tempos de amostragem pequenos. Em relação a esta questão, os seguintes pontos devem ser mencionados: (i) Várias plantas importantes têm tempos de amostragem valendo de vários minutos a várias horas. Nesses casos, é preferível aplicar um algoritmo mais preciso, que é executado em alguns segundos, do que um algoritmo menos preciso, executado em alguns milissegundos. (ii) Qualquer proposta de MPC robusto que utiliza aproximações para alcançar um desempenho computacional mais veloz, deve ser comparada a uma versão menos conservadora da mesma estratégia. A abordagem proposta neste trabalho pode ser usada como um ponto de referência para o desempenho de outros procedimentos de projeto de MCP.

5.6 Conclusões

Este capítulo contém o principal resultado proposto por esta tese. A partir de um critério para a garantia de estabilidade da saída de uma planta, um conjunto de restrições (para a sequência dos futuros incrementos de controles) foi obtido. Estas restrições, as quais foram chamadas de restrições de estabilidade, podem ser utilizadas em um controlador preditivo robusto baseado em um modelo linear do tipo ARX, com incertezas politópicas em seus parâmetros. Se tais restrições forem satisfeitas, garante-se a estabilidade da saída do sistema, quaisquer que sejam os valores dos parâmetros do modelo.

Os resultados de simulação fazem uma comparação entre o método proposto e outros controladores preditivos, em que o RMPC-SC mostrou resultados satisfatórios no controle dos sistemas propostos nos três exemplos.

Capítulo 6

Conclusões

Esta tese apresenta e desenvolve uma discussão sobre o controlador preditivo baseado em modelo, o controlador MPC, sendo seu tema central focado no tratamento de incertezas em tais controladores. Uma introdução à metodologia geral dos controladores MPC, bem como ao tratamento de incertezas nesses controladores, foi apresentada nos capítulos iniciais desta tese.

Com o objetivo de se obter garantia de otimalidade da solução, na etapa de otimização de um algoritmo RMPC, um método de otimização branch and bound foi proposto com base na decomposição de qualquer função polinomial, em domínios de sinais definidos, como uma diferença de funções crescentes. Tal método se mostrou eficiente na otimização de quaisquer funções DFC, restritas a um politopo do tipo caixa.

O resultado principal desta tese consiste em uma nova proposta de controlador preditivo robusto baseado em modelo, o RMPC-SC, que faz uso da técnica de otimização branch and bound proposta, em seu algoritmo. O método proposto pode ser aplicado para o controle robusto de sistemas discretos, monovariáveis, causais, descritos por modelos LIT por meio de um modelo do tipo ARX. A ideia geral da técnica consiste em estabelecer um conjunto de restrições para o incremento do sinal de controle, de tal forma que se garanta a estabilidade do sistema em malha fechada, admitindo-se incertezas politópicas nos coeficientes do modelo nominal da planta.

O controlador RMPC-SC se mostrou bastante eficiente no controle robusto de três plantas simuladas.

Principais Contribuições

As principais contribuições desta tese estão descritas nos tópicos a seguir:

- Um estudo a respeito do tratamento de incertezas em controladores

MPC foi feito e um simples método RMPC, baseado na técnica Min-Max, o MMEMPC, foi proposto. Além disso, foi descrito um método que considera robustez no controlador GPC, o FSPGPC. Uma comparação entre os desempenhos dos métodos MMMPC (método min-max original), MMEMPC e FSPGPC, no controle robusto de duas plantas simuladas, foi apresentada.

- Proposição de um método de otimização branch and bound para a otimização global de funções que podem ser descritas como a diferença entre funções crescentes, em um politopo do tipo caixa.

- Proposição de um controlador preditivo robusto, o RMPC-SC, para o controle de sistemas SISO, causais, descritos por modelos LTI. O algoritmo do controlador RMPC-SC faz uso da técnica MMEMPC, proposta nesta tese, bem como do método de otimização branch and bound, também proposto neste trabalho.

- Propostas de diferentes formulações do controlador RMPC-SC, o RMPC-SC(a) e RMPC-SC(b), visando uma redução do custo computacional. Comparação do desempenho de controle e computacional dos métodos RMPC-SC, RMPC-SC(a) e RMPC-SC(b) para alguns exemplos já propostos anteriormente.

- Possibilidade de desenvolvimento da hibridização da técnica proposta, que fornece um conjunto de restrições para o incremento do sinal de controle, com outras técnicas de controle RMPC que admitam a introdução de restrições.

- Simples formulação matemática do RMPC-SC, possibilitando sua aplicação à solução de problemas práticos em processos industriais e tecnológicos.

Perspectivas de Atividades Futuras

Como perspectivas de atividades futuras, a serem desenvolvidas após o doutorado, destacam-se os seguintes pontos:

- Hibridização do controlador RMPC-SC(b) com o controlador FSPGPC, descrito em [Normey-Rico & Camacho (1999)]. Expectativa de bom desempenho robusto do novo método, a partir da correta sintonia do filtro. Além disso, espera-se que o algoritmo do controlador resultante possa ser generalizado para o controle de plantas multivariáveis.

- Aplicação do RMPC-SC no controle de um helicóptero quadrotor, em conjunto com o controlador descrito em [Raffo et al. (2010)].
- Hibridização do RMPC-SC com outro método de controle preditivo robusto que aceite restrições na variável de controle, de forma a se obter controladores RMPC eficientes.
- Demonstrar sob que condições as restrições estabilidade formam um conjunto viável, não-vazio.
- Generalização do método RMPC-SC para modelos de predição não-lineares do tipo NARX (Nonlinear Autoregressive Exogenous Model).
- Generalização do algoritmo do controlador RMPC-SC para sistemas multivariáveis.

Bibliografia

Aginn, N. (1966), 'Optimum seeking with branch and bound', *Management Science* **13**(4), 176–185.

Allwright, J. C. (1994), *Advances in Model-Based Predictive Control*, 2 edn, Oxford University Press.

Angeli, D., Casavola, A., Franze, G. & Mosca, E. (2008), 'An ellipsoidal off-line mpc scheme for uncertain polytopic discrete-time systems', *Automatica* **44**, 3113 – 3119.

Ansay, P. & Wertz, V. (1997), 'Model uncertainties in gpc: a systematic two-step design', *European Control Conference, ECC* .

Balas, E. (1978), 'A note on the branch-and-bound principle', *Operations Research* **16**(4), 442–444.

Bemporad, A., Borrelli, F. & Morari, M. (2003), 'Min-max control of constrained uncertain discrete-time linear systems', *IEEE Transactions on Automatic Control* **48**(9), 1600–1606.

Bouzouita, B., Bouani, F. & Ksouri, M. (2007), 'Solving non convex min-max predictive controller', *Proceedings of information, decision and control* pp. 360–365.

Boyd, S. & Mattingley, J. (2007), Branch and bound methods, *in* 'Notes for EE364b - Stanford University'.

Bumroongsri, P. & Kheawhom, S. (2012), 'An off-line robust mpc algorithm for uncertain polytopic discrete-time systems using polyhedral invariant sets', *Journal of Process Control* **22**, 975–983.

Cadzow, I. A. & Martens, H. R. (1970), *Discrete-Time and Computer Control Systems*, Prentice-Hall.

Camacho, E. & Bordons, C. (2007), *Model Predictive Control*, 2 edn, Springer.

Campo, P. & Morari, M. (1987), Robust model predictive control, *in* 'in: Proc. American Control Conference', p. 1021–1026.

Cannon, M., Buerger, J., Kouvaritakis, B. & Rakovic, S. (2011), 'Robust tubes in nonlinear model predictive control', *IEEE Transactions on Automatic Control* **56**(8), 1942–1947.

Cannon, M., Kouvaritakis, B. & Desmond, N. (2009), 'Probabilistic tubes in linear stochastic model predictive control', *Systems and Control Letters* **58**, 747–753.

Casavola, A., Famularo, D. & Franze, G. (2004), 'Robust constrained predictive control of uncertain norm-bounded linear systems', *Automatica* **40**, 1865–1876.

Casavola, A., Giannelli, M. & Mosca, E. (2000), 'Min-max predictive control strategies for input-saturated polytopic uncertain systems', *Automatica* **36**, 125–133.

Chen, H. & Allgower, F. (1998), 'A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability', *Automatica* **34**, 1205–1217.

Chisci, L., Rossiter, J. & Zappa, G. (2001), 'Systems with persistent disturbances: predictive control with restricted constraints', *Automatica* **37**, 1019–1028.

Clarke, D. & Scattoline, R. (1991), 'Constrained receding-horizon predictive control', *Proceedings IEE* **138**(4), 347–354.

Clarke, D. W. & Mohtadi, C. (1989), 'Properties of generalized predictive control', *Automatica* **25**(6), 859–875.

Clarke, D. W., Mohtadi, C. & Tuffs, P. S. (1987*a*), 'Generalized predictive control - part i. the basic algorithm', *Automatica* **23**(2), 137–148.

Clarke, D. W., Mohtadi, C. & Tuffs, P. S. (1987*b*), 'Generalized predictive control - part ii. extensions and interpretations', *Automatica* **23**(2), 149–160.

Closed Loop Identification for Model Predictive Control: Application to Air Separation Process (2011), Technical report, Honeywell Process Solutions.

Cutler, C. & Ramaker, B. (1980), Dynamic matrix control: A computer control algorithm, *in* 'Proceedings Joint American Control Conference', San Francisco.

DeKeyser, R., VandeVelde, G. & Dumoriter, F. (1985), A comparative study of self-adaptive long-range predictive control methods, *in* 'IFAC Symp. on Identification and System Parameter Estimation', York, U.K, pp. 1317–1322.

Ding, B., Xi, Y., Cychowski, M. & O-Mahony, T. (2007), 'Improving off-line approach to robust mpc based-on nominal performance cost', *Automatica* **43**, 158–163.

Ding, B., Xi, Y., Cychowski, M. & O-Mahony, T. (2008), 'A synthesis approach for output robust constrained model predictive control', *Automatica* **44**, 258–264.

Doyle, F. J., Ogunnaike, B. A. & Pearson, R. K. (1995), 'Nonliner model-based control using 2nd-order voltera models', *Automatica* **31**, 697–714.

Fukunaga, K. (1990), *Introduction to Statistical Pattern Recognition*, 2 edn, Academic Press, Inc.

García, C., Prett, D. & Morari, M. (1989), 'Model predective control: Theory an practice - a survey', *Automatica* **25**(3), 335–348.

Geoffrion, A. M. & Marsten, R. E. (1972), 'Integer programming algorithms: A framework and state of the art survey', *Management Science* **18**(9), 465–491.

Gonzalez, R., Flacchini, M., Alamo, T., Guzman, J. & Rodriguez, F. (2011), 'Online robust tube-based mpc for time-varying systems: a practical approach', *International Journal of Control* **84**, 1157–1170.

Greco, C., Menga, G., Mosca, E. & Zappa, G. (1984), 'Performance improvement of self tuning controllers by multistep horizons: The musmar approach', *Automatica* **20**, 681–700.

Gruber, J., Ramirez, D., Alamo, T. & Camacho, E. (2011), 'Min-max mpc based on an upper bound of the worst case cost with guaranteed stability. application to a pilot plant', *Journal of Process Control* **21**, 194–204.

Guzman, J., Alamo, T., Berenguel, M., Dormido, S. & Camacho, E. (2009), 'A robust constrained reference governor approach using linear matrix inequalities', *Journal of Process Control* **19**, 773–784.

Hamamoto, Y., Uchimura, S., Matsuuray, Y., Kanoaka, T. & Tomita, S. (1990), 'Evaluation of the branch and bound algorithm for feature selection', *Pattern Recognition Letters* **11**, 453–456.

Held, M. & Karp, R. (1971), 'The traveling-salesman problem and minimum spanning trees: Part ii', *Mathematical Programming 1* **1**, 6–25.

Henson, M. A. (1998), 'Nonlinear model predictive control: Current status and future directions', *Computers Chemical Engineering* **23**, 187–202.

Huang, G. & Wang, S. (2009), 'Use of uncertainty polytope to describe constraint processes with uncertain time-delay for robust model predictive control applications', *ISA Transactions* **48**, 503–511.

Ignall, E. & Schrage, L. (1965), 'Application of branch and bound technique to some flow-shop scheduling problems', *Operations Research* **13**(3), 400–412.

Kheriji, A., Bouani, F. & Ksouri, M. (2011), 'A gpc approach to solve non convex min-max predictive controller for a class of constrained mimo systems described by state-space model', *International Journal of Control Automations and Systems* **9**(10), 452–460.

Kohler, W. H. & Steiglitz, K. (1974), 'Characterization and theoretical comparison of branch-and-bound algorithms for permutation problems', *Journal of the Association for Computing Machinery* **21**(1), 140–156.

Koontz, W. L. G., Narendra, P. M. & Fukunaga., K. (1975), 'A branch and bound clustering algorithm', *IEEE Transaction Computation* **C-24**, 750–753.

Korf, R. (1999), *Handbook of Algorithms and Theory of Computation*, CRC press, chapter 36 - Artificial Intelligence Search Algorithms.

Kothare, M., Balakrishnan, V. & Morari, M. (1996), 'Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities', *Automatica* **32**(10), 1361–1379.

Kouvaritakis, B., Rossiter, J. A. & Chang, A. (1992), 'Stable generalized predictive control: An algorithm with garanteed stability', *Proceedings IEE, Part D* **139**(4), 349–362.

Kouvaritakis, B., Rossiter, J. A. & Schuurmans, J. (2000), 'Efficient robust predictive control', *IEEE Transactions on Automatic Control* **45**(2), 1545–1549.

Kudo, M. & Sklansky, J. (2000), 'Comparison of algorithms that select features for pattern classifiers', *Pattern Recognition* **33**(1), 25–41.

Kumar, V. & Kanal, L. (1983), 'A general branch and bound formulation for understanding and synthesizing and/or tree search procedures', *Artificial Intelligence* **21**, 179–198.

Kuo, B. C. (1980), *Digital Control Systems*, Holt, Rinehart, and Winston.

Kwakernaak, H. & Sivan, R. (1972), *Linear Optimal Control Systems*, Wiley-Interscience.

Langson, W., Chryssochoos, I., Rakovic, S. & Mayne, D. Q. (2004), 'Robust model predictive control using tubes', *Automatica* **40**, 125–133.

Lawler, E. L. & Wood, D. E. (1966), 'Branch-and-bound methods: A survey', *Operations Research* **14**, 699 – 719.

Lee, J. & Cooley, B. (2000), 'Min-max predictive control techniques for a linear state-space system with a bounded set of input matrices', *Automatica* **36**, 463–473.

Lee, J., Morari, M. & García, C. (1984), 'State-space interpretation of model predictive control', *Automatica* **30**(4), 707 – 717.

Lee, J. & Yu, Z. (1997), 'Worst-case formulations of model predictive control for systems with bounded parameters', *Automatica* **33**(5), 763–781.

Lemos, J. & Mosca, E. (1985), A multipredictor-based lq self tuning controller, *in* 'In IFAC symp. on Identification and system Parameter Estimation', York, Reino Unido, pp. pages 137–141.

Lew, J. & Juang, J. (2012), 'Robust generalized predictive control with uncertainty quantification', *Journal of Guidance, Control and Dynamics* **35**(3).

Limon, D., Alvarado, I., Alamo, T. & Camacho, E. (2010), 'Robust tube-based mpc for tracking of constrained linear systems with additive disturbances', *Journal of Process Control* **20**, 248–260.

Limon, D., Bravo, J., Alamo, T. & Camacho, E. (2005), 'Robust mpc of constrained nonlinear systems based on interval arithmetic', *IET Control Theory and Applications* **152**(3), 325–332.

Maciejowski, J. M. (2002), *Predictive Control with Constraints*, Prentice Hall, Harlow, England.

Magni, L., Nicolao, G. D., Magnani, L. & Scattolini, R. (2001), 'A stabilizing model-based predictive control algorithm for nonlinear systems', *Automatica* **37**(6), 1351–1362.

Mayne, D. Q., Rawlings, J. B., Rao, C. V. & Scokaert, P. O. M. (2000), 'Constrained model predictive control: Stability and optimality', *Automatica* **36**(6), 789–814.

Mayne, D., Raković, S., Findeisen, R. & Allgöwer, F. (2009), 'Robust output feedback model predictive control of constrained linear systems: Time varying case', *Automatica* **45**, 2082–2087.

Mcintosh, A., Shah, S. & Fisher, O. (1991), 'Analysis and tuning of adaptative gpc', *Canadian Journal of Chemical Engineering* **69**(2), 97–110.

Mhaskar, P., El-Farra, N. H. & Christofides, P. D. (2005), 'Predictive control of switched nonlinear systems with scheduled mode transitions', *IEEE Transactions on Automatic Control* **50**, 1670–1680.

Michalska, H. & Mayne, D. Q. (1993), 'Robust receding horizon control of constrained nonlinear-systems', *Automatica* **38**, 1623–1633.

Mitschele-Thiel, A. (1994), 'Optimal compile-time scheduling and network configuration', *Transputers 94: Advanced Research and Industrial Applications* pp. 153–164.

Mitten, L. G. (1970), 'Branch-and-bound methods: General formulation and properties', *Operations Research* **18**(1), 24–34.

Morari, M. (1994), *Advances in Model-Based Predictive Control*, Oxford University Press.

Morari, M. & Zafiriou, E. (1989), *Robust Process Control*, Prentice Hall.

Mosca, E., Lemos, J. & Zhang, J. (1990), Stabilizing i/o receding horizon control, *in* 'IEEE Conference on Decision and Control'.

Narendra, P. M. & Fukunaga, K. (1977), 'A branch and bound algorithm for feature subset selection', *IEEE Transactions on Computers* **26**, 917–922.

Nilsson, N. J. (1971), *Problem-Solving Methods in Artificial Intelligence*, McGraw-Hill.

Nilsson, N. J. (1978), *Artificial Intelligence: A New Synthesis*, Morgan Kaufmann.

Nollemeier, H. (1971), 'Ein branch-and-bound-verfahren-generator', *Computing* **8**, 99–106.

Normey-Rico, J. E. (2007), *Enciclopédia de Automática: Controle e Automação*, Vol. 2, 1 edn, Blucher, chapter Controle Preditivo Baseado em Modelo.

Normey-Rico, J. E. & Camacho, E. F. (1996), 'A smith predictor based generalized predictive controller', *Technical Report GAR 02* .

Normey-Rico, J. E. & Camacho, E. F. (1999), 'Robustness effects of a prefilter in a smith predictor-based generalized predictive controller', *IEE Proceedings - Control Theory and Applications* **146**(2), 179–185.

Normey-Rico, J. E. & Camacho, E. F. (2000), 'Multivariable generalized predictive controller based on the smith predictor', *IEE Proceedings - Control Theory and Applications* **147**(5), 538–546.

Normey-Rico, J. E., Camacho, E. F. & Gomez-Ortega, J. (1998), 'Robustness and prediction in generalized predictive controller (in portuguese)', *XII Brazilian Control Conference* pp. 157–162.

Ottoni, A. G. S., C, T. R. H. & V., R. G. (2015), 'Stability constraints for robust model predictive control', *Mathematical Problems in Engineering* **2015**, 1 – 11.

Peterka, V. (1984), 'Predictor-based self-tuning control', *Automatica* **7**, 39 – 50.

Raffo, G. V., Ortega, M. G. & Rubio, F. R. (2010), 'An integral predictive/nonlinear h_∞ control structure for a quadrotor helicopter', *Automatica* **46**, 29–39.

Raković, S., Kouvaritakis, B., Findeisen, R. & Cannon, M. (2012), 'Homothetic tube model predictive control', *Automatica* **48**, 1631–1638.

Ramírez, D., Alamo, T., Camacho, E. & noz de la Peña, D. M. (2003), Predictive functional control. application to fast and accurate robots, *in* 'Proceedings of the American Control Conference', Denver, Colorado.

Ramírez, D. & Camacho, E. (2003), On the piecewise linear nature of constrained min-max model predictive control with bounded uncertainties, *in* 'Proceedings of the American Control Conference', Denver, Colorado.

Ramírez, D. & Camacho, E. (2006), 'Min-max mpc based on a computationally efficient upper bound of the worst case cost', *Journal of Process Control* **16**, 511–519.

Rao, C. V. & Rawlings, J. B. (1999), 'Steady states and constraints in model predictive control', *Aiche Journal* **45**(6), 1266–1278.

Rawlings, J. & Muske, K. (1993), 'The stability of constrained recending horizon control', *IEEE Transactions on Automatic Control* **38**, 1512–1516.

Richalet, J., el Ata-Doss, S. A., Arber, C., Kuntze, H. B., Jacubash, A. & Schill, W. (1987), Predictive functional control. application to fast and accurate robots, *in* 'Proc. 10Th IFAC Congress', Munich.

Richalet, J., Rault, A., Testud, J. & Papon, J. (1978), 'Model predictive heuristic control: Applications to industrial processes', *Automatica* **14**, 413–428.

Robinson, T. & Clarke, D. W. (1991), 'Robustness effects of a prefilter in generalized predictive control', *IEE Proceedings D, Control Theory and Applications* **138**(1), 2–8.

Rossiter, J. A. (2003), *Model-Based Predictive Control: A Practical Approach (Control Series)*, 1 edn, CRC Press.

Rossiter, J. A. & Kouvaritakis, B. (1993), 'Constrained stable generalized predictive control', *Proceedings IEE, Part D* **140**(4), 243–254.

Rossiter, J. A., Kouvaritakis, B. & Gossner, J. R. (1996), 'Guaranteeing feasibillity in constrained stable generalised predictive control', *IEE Proceedings - Control Theory Applied* **143**(5), 463–469.

Roy, B. (1969), 'Procedure d'exploration par séparation et évaluation', *Rev. Francaise d'Informalique et de Recherche Opérationelle,* **6**, 61–90.

Schrage, L. (1970*a*), 'Solving resource-constrained network problems by implicit enumeration - non-preemptive case', *Operations Research* **18**(2), 263–278.

Schrage, L. (1970*b*), 'Solving resource-constrained network problems by implicit enumeration - preemptive case', *Operations Research* **18**(2), 263–278.

Scokaert, P. O. M. & Mayne, D. Q. (1998), 'Min–max feedback model predictive control for constrained linear systems', **43**(8), 1136–1142.

Söeterboek, R. (1982), *Predictive Control. A Unified Approach*, Prentice Hall.

Somol, P., Pudil, P. & Kittler, J. (2004), 'Fast branch bound algorithms for optimal feature selection', **26**(7), 900–912.

Takatsu, H., Itoh, T. & Araki, M. (1998), 'Future needs for the control theory in industries-report and topics of the control technology survey in the japonese industry', *Journal of Process Control* **8**(5-6), 369 – 374.

Wan, Z. & Kothare, M. (2003), 'An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities', *Automatica* **39**, 837–846.

Wang, Y. & Rawlings, J. (2004), 'A new robust model predictive control method i: theory and computation', *Journal of Process Control* **14**, 231–247.

Webb, G. I. (1995), 'Opus: An efficient admissible algorithm for unordered search', *Artificial Intelligence Research* **3**, 431–465.

Ydstie, B. (1984), Extended horizon adaptive control, *in* '9th World Congress of the IFAC', Budapest, Hungary.

Yoon, T. & Clarke, D. W. (1993), 'Prefiltering in receding-horizon predictive control. technical report.', *International Journal of Control* .

Yoon, T. & Clarke, D. W. (1995), 'Observer design in receding-horizon predictive control.', *International Journal of Control* **2**, 171–191.

Yu, B. & Yuan, B. (1993), 'A more efficient bra nch and bound algorithm for feature selection', *Pattern Recognition* **26**, 883–889.