

Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG  
Instituto de Ciências Exatas - ICEx  
Programa de Pós-graduação em Física

**Polarização, energia e momento de ondas  
eletromagnéticas e fótons em diferentes  
referenciais inerciais**

Ricardo Simão Pereira Lopes

Orientador: Prof. Pablo Lima Saldanha

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação  
em Física da Universidade Federal de Minas Gerais,  
para obtenção do título de mestre em Física.

Belo Horizonte  
2017

*Ck kckmpgy bc sky kckmpgy,  
Amkm bmgq pgmq  
Fgqrmgyq bgqrglryq  
C cvncpgclagyq bgqrglryq  
Rpyayk lmqqmq aykglfmq  
Kyq sk bcqrglm lmq c pcqcptybm  
Qcpckmq lntykclrc sk lm epylbc macylm  
Mlbc qcpqkmq nyprgjfybm, kgqrsybm  
C lntykclrc qcnpyybm  
Pcyjgkclrylrm m crclm agajm by tgby c by kmprc  
A → C*

*Dedicado à menina do cabelo colorido,  
Ingrid Maytally de Andrade Oliveira*

# Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus, por me permitir errar e aprender com meus erros

Agradeço aos melhores pais do mundo: Elizabete e Aristides pelo constante apoio

Agradeço ao meu orientador, Prof. Pablo Lima Saldanha cuja orientação, liberdade, apoio e sobretudo paciência, que frequentemente faltava a mim, foram fundamentais à construção deste trabalho

Agradeço também ao grupo *Enlight* pela acolhida e pelas iluminadoras, frequentemente calorosas discussões. Especialmente meus coorientados David, Raul, Marina, Ana Paula e André como também aos Professores Carlos Henrique Monken, Sebastião José Nascimento de Pádua e Rafael Campos Drummond cujos questionamentos e sugestões iluminaram grandemente este trabalho

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Agradecimentos especiais às bibliotecas de pós-graduação em matemática e física por proporcionar um ambiente agradável, acolhedor e propício à busca pelo conhecimento. Em especial Agradeço à bibliotecária chefe da biblioteca da pós-graduação em física Shirley Maciel da Silva cujo tratamento aos frequentadores, funcionários e professores assim como conduta profissional e sobretudo a busca de projetos para incentivo ao aprendizado e esforços para tornar o ambiente da biblioteca como um ambiente muito maior que simplesmente um local de estudos, mas um ambiente de exploração, aprendizado e sobretudo diversão sempre será para mim um modelo pessoal e de profissionalismo.

Agradecimentos mais que especiais ao meu grande amigo Nathan Giovanni Andrade Teixeira, aos frequentadores e estagiários do Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) assim como o Programa de Educação e Tutorial

(PET) que me acolheram como um membro da família durante grande parte da graduação e do mestrado. Em especial, grandes responsáveis pelo desenvolvimento deste trabalho, agradeço a Hyrra Teofista Neves Iglésias, Rafaela Damasio Castilho e Wersinane Dayane Alves da Silva que acreditaram em mim e no meu trabalho quando eu mesmo não acreditava e me apoiaram nas minhas horas mais sombrias. Agradeço muito a Deus por nos permitir cruzar caminhos.

Agradeço também a todos que acreditaram no meu trabalho e que contribuíram em prol de sua conclusão cujos nomes não são mencionados

# Resumo

Neste trabalho analisamos a transformação da energia e frequência angular de ondas eletromagnéticas clássicas e fótons sob transformações de Lorentz e mostraremos que uma relação de proporcionalidade entre essas grandezas é compatível para ambos. Analogamente, trataremos a transformação do momento linear e vetor de onda da radiação eletromagnética e mostraremos que, a exemplo da energia e frequência angular, essas grandezas permitem uma regra de proporcionalidade similar. Analisaremos também a transformação do estado de polarização sob essas transformações e verificaremos que ele é invariante sob estas transformações, tanto do ponto de vista clássico quanto quântico.

Para o tratamento do fóton usaremos o formalismo de função de onda de fótons introduzidos por Bialinicki-Birula e Sipe. Abordaremos, contudo, o assunto de maneira diferente: abriremos mão da linguagem explicitamente covariante adotada pelas referências em prol de uma abordagem mais intuitiva. Esperamos que este trabalho possa ajudar na compreensão física das relações analisadas e acreditamos que possa também ser útil em teoria da informação quântica relativística.

# Abstract

In this work, we analyze the the classical electromagnetic waves and photon behavior under Lorentz transformations. We show that a proportionality ratio between energy and angular frequency is compatible with not only the quantum case (photons) but also with the classical phenomena. Likewise we treat the transformation of the momentum and wave vector showing an equal proportionality ratio. We analyze also the polarization state under this transformations and we verify that this state is invariant under the change of reference frame in classical and quantum cases.

For the photon treatment we use the photon wave function introduced by Bialinicki-Birula and Sipe, but unlike the references, we will give up the explicitly covariant approach taken by them for more intuitive approach. We hope this work help the physical comprehension of the phenomena analyzed, and we also hope that this work can be useful in relativistic quantum information theory.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Conceitos Básicos</b>	<b>4</b>
2.1	Ondas eletromagnéticas . . . . .	4
2.2	Função de onda de fótons . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Polarização, energia e momento linear de ondas eletromagnéticas e fótons em diferentes referenciais inerciais</b>	<b>22</b>
3.1	Polarização . . . . .	23
3.2	Energia e frequência angular . . . . .	29
3.3	Momento linear e vetor de onda . . . . .	37
3.4	Fótons em diferentes referenciais inerciais . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Conclusões</b>	<b>43</b>
	<b>Referências</b>	<b>44</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A proporcionalidade entre energia do fóton e sua frequência angular de acordo com a equação de Einstein  $\mathcal{U} = \hbar\omega$  é normalmente creditada à natureza quântica da luz, assim como a proporcionalidade entre o momento linear e vetor de onda dados pela relação de De Broglie  $\mathcal{P} = \hbar\mathbf{k}$ . Isto é, essas regras de proporcionalidade são geralmente atribuídas como propriedades quânticas da radiação eletromagnética.

O objetivo deste trabalho é estudar o comportamento de ondas eletromagnéticas clássicas e fótons em diferentes referenciais inerciais e mostramos que, com respeito às transformações de Lorentz, as regras de proporcionalidade entre energia e frequência angular, momento linear e vetor de onda não são meramente impressões quânticas da radiação eletromagnética, mas consequências naturais dessas transformações. Será mostrado que para pulsos eletromagnéticos clássicos com a direção de propagação bem definida, os pares de grandezas citados são transformados quando observados em diferentes referenciais inerciais de forma que as razões  $\mathcal{U}/\omega$  e  $|\mathcal{P}|/|\mathbf{k}|$  permanecem independentes do referencial mesmo no caso clássico. Mostraremos também



que essa razão é a mesma para ambas as frações. Isto é  $\mathcal{U}/\omega = |\mathcal{P}|/|\mathbf{k}|$  em qualquer referencial inercial. Observe que tal razão tem o valor da constante de Plank normalizada  $\hbar$  para fótons. Mostraremos também que o estado de polarização da onda eletromagnética clássica, assim como o do fóton, é invariante sob transformações de Lorentz.

Para estudar o comportamento de fótons em diferentes referenciais inerciais não usaremos a descrição usual de fótons, que decorre da quantização do campo eletromagnético usando um formalismo em termos dos operadores aniquilação e criação que criam ou destroem excitações em modos do campo eletromagnético (para uma introdução veja, por exemplo, a referência [1, 2]). Quando o estado quântico da radiação possui apenas um fóton, caso estudado neste trabalho, é mais simples usar o formalismo de função de onda de fótons proposto pelas referências [3, 4]. Uma vantagem deste formalismo é que a semelhança entre os valores esperados de grandezas de interesse segundo o formalismo e as grandezas clássicas fornecem um terreno fértil para *insights* físicos a respeito do comportamento quântico da radiação eletromagnética.

O capítulo 2 é dividido em duas seções. A primeira introduz conceitos básicos a respeito da teoria eletromagnética e discutimos os pulsos estudados neste trabalho. Na segunda seção discutimos a abordagem quântica do assunto apresentando uma dedução eurística do formalismo de função de onda de fótons. Também discutimos nesta seção algumas questões interessantes a respeito do próprio formalismo.

No capítulo 3, são apresentados os resultados deste trabalho. Na primeira seção analisamos a polarização do pulso clássico e mostramos que ele é invariante sob transformações de Lorentz. Na segunda seção analisamos

o comportamento da energia observada por diferentes referenciais inerciais e comparamos com o comportamento da frequência angular. Na terceira seção analisamos o comportamento do momento linear e comparamos com o vetor de onda. Na quarta seção apresentamos os resultados do ponto de vista do formalismo de função de onda para fótons.

Finalmente o capítulo 4 é reservado às discussões e conclusões deste trabalho.

## Capítulo 2

# Conceitos Básicos

### 2.1 Ondas eletromagnéticas

Começamos essa introdução partindo das famosas equações de Maxwell no vácuo:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \text{(ii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B}, & \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

A constante  $c$  é a velocidade da luz,  $\mathbf{E}$  o campo elétrico e  $\mathbf{B}$  o campo magnético. Seguiremos de perto a referência [5] capítulo 9 nesta seção. Aplicando o operador rotacional às equações (1.1 (iii)) e (1.1 (iv)) e usando a identidade  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{U} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) - \nabla^2 \mathbf{U}$  e também as equações (1.1 (ii)) e (1.1 (i)) chegamos as relações:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} &= \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{E}, \\ \nabla^2 \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{B}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Essas expressões representam um movimento ondulatório dos campos elétrico e magnético, isto é, as equações de Maxwell prevêm a existência de ondas

eletromagnéticas que são o objeto de estudo deste trabalho.

Em coordenadas cartesianas, uma possível solução das equações (2.2) para uma componente dos campos, é do tipo  $g(z - ct)$ . A demonstração segue substituindo-se diretamente essa forma funcional nas equações (2.2).

A função  $g(z - ct)$  é diferenciável e representa uma perturbação que se propaga ao longo do eixo  $\hat{z}$  na direção positiva com velocidade  $c$  sem alterar a própria forma. É conveniente reescrevermos esta solução:

$$f(z, t) = g(k(z - ct) + \delta) = g(kz - \omega t + \delta),$$

onde  $\omega c = k$ .  $f(z, t)$  também satisfaz a equação de onda. Uma forma bastante utilizada para  $f(z, t)$  é :

$$f(z, t) = A \cos(kz - \omega t + \delta), \quad (2.3)$$

em que a onda se propaga senoidalmente com amplitude  $A$ .  $\delta$  é chamado de constante de fase, é definida entre  $0 \leq \delta < 2\pi$  e depende das condições iniciais. Podemos usar a identidade de Euler,  $\exp\{i\phi\} = \cos(\phi) + i\text{sen}(\phi)$  para propor uma solução com a forma complexa:

$$F(z, t) = A \exp[i(kz - \omega t + \delta)]. \quad (2.4)$$

Trataremos neste texto algebricamente com a função  $F(z, t)$  por conveniência, já que cálculos envolvendo exponenciais são frequentemente mais simples. Observamos que tanto  $f(z, t) = \text{Re}\{F(z, t)\}$  quanto a parte imaginária de  $F(z, t)$  satisfazem a equação de onda.

As expressões (2.1) preveem o movimento ondulatório e também impõem restrições especiais às soluções das equações (2.2). Consideremos uma onda eletromagnética plana que se propaga numa direção escolhida como

eixo  $\hat{\mathbf{z}}$  e que o caráter vetorial dos campos eletromagnéticos seja considerado simplesmente com a adoção de amplitudes vetoriais constantes de forma que elas possam ser representadas pelas expressões:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(z, t) &= \mathbf{E}_0 \exp[i(kz - \omega t + \delta)] = \mathbf{E}_0 F(z, t), \\ c\mathbf{B}(z, t) &= c\mathbf{B}_0 \exp[i(kz - \omega t + \delta)] = c\mathbf{B}_0 F(z, t).\end{aligned}\quad (2.5)$$

Para satisfazer (1.1(i)):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = 0,$$

e (1.1(ii))

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z = 0,$$

observando que segundo as expressões (2.5):  $\partial_x B_x = \partial_y B_y = \partial_x E_x = \partial_y E_y = 0$ . Então é necessário que :

$$\begin{aligned}E_z &= C = 0, \\ B_z &= C' = 0.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Escolheremos as constantes  $C$  e  $C'$  como nulas já que estamos trabalhando ondas propagantes .

Agora trabalhamos as equações (2.5) usando a lei de Faraday (equação (1.1(iii)))

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B},$$

Componente a componente:

$$\begin{aligned}- (\nabla \times \mathbf{E})_x &= (\partial_y E_z - \partial_z E_y) \hat{\mathbf{x}} = ikE_{0y} F(z, t) \hat{\mathbf{x}} = \partial_t B_x \hat{\mathbf{x}} = i\omega B_{0x} F(z, t) \hat{\mathbf{x}}, \\ - (\nabla \times \mathbf{E})_y &= (-\partial_x E_z + \partial_z E_x) \hat{\mathbf{y}} = -ikE_{0x} F(z, t) \hat{\mathbf{y}} = \partial_t B_y \hat{\mathbf{y}} = i\omega B_{0y} F(z, t) \hat{\mathbf{y}}, \\ - (\nabla \times \mathbf{E})_z &= (\partial_x E_y - \partial_y E_x) \hat{\mathbf{z}} = \partial_t B_z \hat{\mathbf{z}} = 0.\end{aligned}$$

Em forma mais compacta:

$$c\mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}.\quad (2.7)$$

Onde  $c$ , a velocidade da luz, é dada por  $c = \omega/k$ .

Essa equação implica que ondas eletromagnéticas são ondas transversais cujos constituintes, os campos elétrico e magnético, oscilam em fase com módulos relacionados e manifestam-se em direções mutuamente perpendiculares. Esses resultados são válidos para qualquer solução das equações (2.1) e (2.2).

Para prosseguir vamos escolher formas simples para as amplitudes vetoriais que respeitem as condições impostas. Seja uma amplitude para campo elétrico constante orientada ao longo do eixo  $\hat{\mathbf{x}}$ , se a onda eletromagnética propaga-se ao longo do eixo  $\hat{\mathbf{z}}$  positivo, segue que a amplitude do campo magnético está orientada ao longo do eixo  $\hat{\mathbf{y}}$ . As equações (2.5) assumem a forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= E_0 F(z, t) \hat{\mathbf{x}} \\ c\mathbf{B} &= E_0 F(z, t) \hat{\mathbf{y}}\end{aligned}\quad (2.8)$$

Nessas Equações  $E_0$  é uma constante que tem unidades de campo elétrico, uma representação dessa onda é apresentada na figura 2.1.

A polarização é definida como um vetor associado à onda eletromagnética que tem a direção do vetor campo elétrico. Os campos com a forma (2.8) possuem a chamada polarização linear que é assim denominada porque o campo elétrico sempre permanece orientado ao longo da mesma linha.

Devido à linearidade das equações (2.2) qualquer superposição de soluções é também uma solução. Se superpusermos dois campos do tipo (2.8) orientados ao longo de eixos ortogonais com a constante de fase com o valor  $\pm\pi/2$ , o vetor campo elétrico resultante assumirá a forma:

$$\begin{aligned}\text{Re}\{\mathbf{E}\} &= \text{Re}\{\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2\} \\ &= E_0 \text{Re}\{\exp\{i(kz - \omega t)\} \hat{\mathbf{x}} + \exp\{i(kz - \omega t \pm \pi/2)\} \hat{\mathbf{y}}\} \\ &= E_0 \text{Re}\{\exp\{i(kz - \omega t)\} (\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}})\} \\ &= E_0 [\cos(kz - \omega t) \hat{\mathbf{x}} \pm \sin(kz - \omega t) \hat{\mathbf{y}}],\end{aligned}\quad (2.9)$$

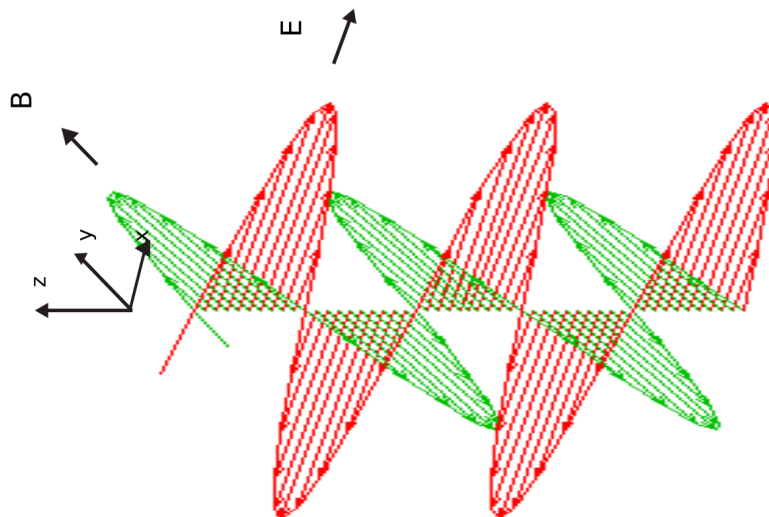


Figura 2.1: Representação esquemática de uma onda eletromagnética plana: duas funções senoidais acopladas (em vermelho o campo elétrico, em verde o campo magnético) propagando-se na direção  $\hat{z}$ , os campos se manifestam em eixos perpendiculares em relação à direção de propagação e entre si.

nesta equação absorvemos a fase no segundo componente e usamos a identidade  $\cos(\theta \pm \pi/2) = \pm \sin(\theta)$ . Observe que essa superposição especial apresenta o módulo do vetor campo elétrico constante, porém, as componentes do vetor formam equações paramétricas de um círculo (veja a figura 2.2). A essa superposição especial dá-se o nome de polarização circular, direita caso o sentido seja horário (sinal negativo) ou circular esquerda caso o sentido seja anti-horário (sinal positivo), uma vez que o vetor campo elétrico des-

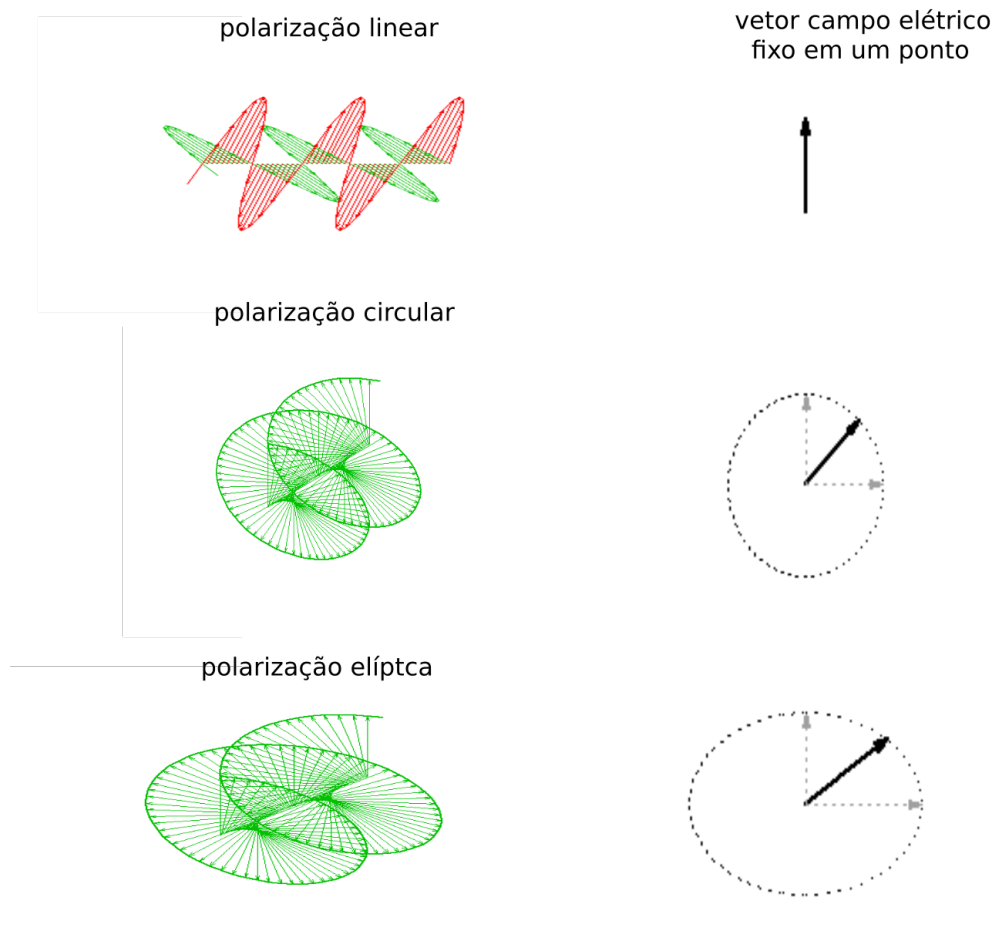


Figura 2.2: Representação esquemática do vetor polarização associado à ondas planas. À esquerda representações do vetor polarização. À direita representação do vetor campo elétrico em um ponto do espaço, conforme a onda se desenvolve.



creve um movimento circular conforme a onda se propaga (reveja as equações (2.9) e figura 2.2 ). Caso as amplitudes dos campos superpostos não sejam as mesmas, equações análogas a (2.9) são obtidas e representam as equações paramétricas de uma elipse e, portanto, tal superposição é chamada de polarização elíptica ( figura 2.2).

É possível representar qualquer estado de polarização da radiação eletromagnética como uma superposição de polarizações lineares. Neste trabalho trataremos ondas da forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 \phi(\mathbf{r}, t) \exp\{i(kz - \omega t)\} (\cos \theta \hat{\mathbf{x}} - e^{i\varphi} \sin \theta \hat{\mathbf{y}}) \\ c\mathbf{B} &= E_0 \phi(\mathbf{r}, t) \exp\{i(kz - \omega t)\} (e^{-i\varphi} \sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \hat{\mathbf{y}}), \end{aligned} \quad (2.10)$$

$\phi(\mathbf{r}, t)$  corresponde à amplitude dos campos do pulso e  $E_0$  é uma constante que carrega dimensão de campo elétrico. Essas superposições podem representar qualquer polarização, por exemplo, a polarização linear pode ser facilmente construída tomando  $\varphi = 0$ .

Argumentos teóricos sólidos a favor da existência de energia e momento linear associado ao campo eletromagnético são abundantes na literatura. Argumentos especialmente simples são encontrados na excelente referência [6] Vol.II capítulo 17.

Nos limitaremos a citar fórmulas matemáticas simples que descrevem a energia e o momento linear presentes na radiação eletromagnética.

Para um campo eletromagnético geral onde observamos campos elétricos e magnéticos não-estáticos a energia e momento linear associados a

estes campos, segundo [5], são descritas pelas equações <sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \frac{\epsilon_0}{2} \int dV (|\mathbf{E}|^2 + |c\mathbf{B}|^2), \\ \mathbf{P} &= \frac{\epsilon_0}{c^2} \int dV (\mathbf{E}^* \times c\mathbf{B}).\end{aligned}\tag{2.11}$$

Estas expressões simples, que envolvem apenas os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  serão muito úteis ao decorrer deste trabalho.

As equações de Maxwell no vácuo (equações (2.1)) implicam as grandezas representadas pelas equações (2.11) são conservadas, conforme mostraremos abaixo:

$$\begin{aligned}\partial_t \mathcal{U} &= \frac{\epsilon_0}{2} \int dV [\partial_t (|\mathbf{E}|^2 + |c\mathbf{B}|^2)] \\ &= \epsilon_0 \int dV [\mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{E} + c\mathbf{B} \cdot \partial_t c\mathbf{B}] \\ &= c^2 \epsilon_0 \int dV [\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})] \\ &= c^2 \epsilon_0 \int dV [-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E})] \\ &= \int dV [\nabla \cdot \mathbf{S}].\end{aligned}\tag{2.12}$$

Onde  $\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$  e usamos a propriedade do produto misto :  $\mathbf{U} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{W}) = -\mathbf{V} \cdot (\mathbf{U} \times \mathbf{W})$ . Podemos usar o teorema da divergência para transformar essa integral de volume em uma integral de superfície:

$$\int dV [\nabla \cdot \mathbf{S}] = \oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}.$$

Logo

$$\partial_t \mathcal{U} = \oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}.\tag{2.13}$$

---

<sup>1</sup>Nessas equações é adotada a forma complexa dos campos eletromagnéticos de forma que apenas a parte real dessas equações tem significado físico

$\mathbf{S}$  recebe o nome de vetor de Poynting e tem dimensões de energia por unidade de área por unidade de tempo. Essa é uma forma integral de uma equação de continuidade para a energia análoga à equação de continuidade para cargas. Em um determinado volume os termos que aparecem como integrais de superfície complementam as leis de conservação pois a quantidade de energia contida neste volume em um tempo  $t$  é proporcional à energia contida no espaço (integral no volume, sem fontes ou sorvedouros) somada(subtraída) da quantidade de energia que flui para dentro(para fora) deste volume(veja as referências [7] capítulo 6 e [5] capítulo 8) conforme já argumentamos nos parágrafos anteriores.

Como por hipótese não há entrada ou saída de energia pelas extremidades do volume concluímos que:

$$\partial_t \mathcal{U} = 0.$$

O método é o mesmo para mostrar a invariância temporal do momento linear da radiação eletromagnética, entretanto, abordaremos um objeto um pouco mais complicado: o Tensor de Maxwell ([5] capítulo 8)

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{P} &= \partial_t \left[ \frac{\epsilon_0}{c} \int dV (\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}) \right] \\ &= \frac{\epsilon_0}{c} \int dV [(\partial_t \mathbf{E}^*) \times \mathbf{B} + \mathbf{E}^* \times (\partial_t \mathbf{B})] \\ &= \frac{\epsilon_0}{c} \int dV [(\nabla \times c\mathbf{B}^*) \times c\mathbf{B} - \mathbf{E}^* \times (\nabla \times \mathbf{E})] \\ &= \frac{\epsilon_0}{c} \int dV - [c\mathbf{B} \times (\nabla \times c\mathbf{B}^*) + \mathbf{E}^* \times (\nabla \times \mathbf{E})]. \end{aligned}$$

Usamos as equações (1.1 - iii) e (1.1 -iv) e a identidade  $\mathbf{U} \times \mathbf{V} = -\mathbf{V} \times \mathbf{U}$ . Podemos reescrever esta expressão com a identidade  $\mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{W}) = -(\mathbf{W} \cdot \nabla)\mathbf{U} + \nabla(\mathbf{U} \cdot \mathbf{W})/2$ :

$$\partial_t \mathbf{P} = \frac{\epsilon_0}{c} \int dV \left[ \frac{1}{2} (\nabla |c\mathbf{B}|^2 + \nabla |\mathbf{E}|^2) - (c\mathbf{B} \cdot \nabla)c\mathbf{B}^* - (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E}^* \right]$$

Finalmente subtraímos, por conveniência, os termos  $(\nabla \cdot c\mathbf{B})c\mathbf{B}^*$  e  $(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E}^*$  aproveitando o fato que as equações (1.1 - i) e (1.1 - ii) implicam em  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot c\mathbf{B} = 0$ :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{P} = \frac{\epsilon_0}{c} \int dV \left[ \frac{1}{2} (\nabla |c\mathbf{B}|^2 + \nabla |\mathbf{E}|^2) - (c\mathbf{B} \cdot \nabla)c\mathbf{B}^* - (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E}^* \right. \\ \left. - (\nabla \cdot c\mathbf{B})c\mathbf{B}^* - (\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E}^* \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Vamos agora definir o Tensor de Maxwell  $\vec{T}$  cujos componentes são dados por:

$$T_{ij} = \epsilon_0 \left[ E_i^* E_j - \frac{\delta_{ij} |\mathbf{E}|^2}{2} + cB_i^* cB_j - \frac{\delta_{ij} c^2 |\mathbf{B}|^2}{2} \right],$$

e também definir o produto interno deste tensor com um vetor, em termos de componentes :

$$(\mathbf{U} \cdot \vec{T})_j = \sum_{i=x,y,z} U_i \vec{T}_{ij},$$

observe que o produto interno do Tensor de Maxwell com um vetor é um vetor cujo componente  $j$  é o produto interno entre o vetor e a coluna  $j$  do Tensor. Tratando o operador  $\nabla = \partial_x \hat{x} + \partial_y \hat{y} + \partial_z \hat{z}$  como um vetor teremos :

$$(\nabla \cdot \vec{T})_j = -(\nabla_j |\mathbf{E}|^2 + \nabla_j |c^2 \mathbf{B}|^2)/2 + [(\nabla \cdot c\mathbf{B} + c\mathbf{B} \cdot \nabla)cB_j^* + (\nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla)E_j^*]$$

Finalmente todo esse malabarismo matemático se justifica comparando a equação (2.14) com a expressão anterior e com o uso do teorema da divergência para tensores :

$$\partial_t \mathbf{P} = \frac{\epsilon_0}{c} \int dV (\nabla \cdot \vec{T}) = \frac{\epsilon_0}{c} \oint_S \vec{T} \cdot d\mathbf{A}, \quad (2.15)$$

a expressão  $(\vec{T} \cdot \hat{n})\epsilon_0/c$  é um vetor que tem dimensões de momento linear por unidade de área. O significado desta expressão é similar ao significado da expressão (2.13). Uma mudança no momento linear da radiação eletromagnética contida num volume surge devido à entrada (ou saída) de momento

linear pelos contornos da superfície. Como não estamos considerando tal situação, as integrais de superfície são nulas e portanto:

$$\partial_t \mathbf{P} = 0.$$

Estes resultados são úteis porque eles nos dizem que não precisamos nos preocupar com o instantes  $t$  em que os cálculos serão feitos, o resultado é o mesmo. Portanto, os cálculos serão feitos no instante  $t = 0$

## 2.2 Função de onda de fótons

Essa seção é baseada nas referências [3, 8, 9, 10, 11] e especialmente [4]. Usaremos uma argumentação eurística, cujos resultados, entretanto, são rigorosamente provados de várias maneiras nas referências já citadas.

Baseado na definição moderna de fóton segundo a referência [4], fótons estão relacionados às excitações quânticas do campo eletromagnético. Se nos restringimos a excitações monocromáticas, o estado excitado com menor energia corresponde à existência de um único fóton na região. Estados excitados de maior energia envolvem vários fótons com a mesma frequência. Com base nessa definição podemos argumentar que para estados com um único fóton, cujo estudo é o objetivo deste trabalho, há estados quânticos do campo eletromagnético que estão relacionados com sua presença de tal maneira que descrever o estado do campo eletromagnético corresponde a descrever o estado do fóton presente naquela região do espaço. Isso não é possível em todos os casos. Em estados coerentes, por exemplo, não é clara esta associação. Contudo, para estados de um único fóton é possível atribuir uma descrição campo eletromagnético que pode ser interpretada como

função de onda de fótons.

A argumentação parte das equações de Maxwell (2.1). Primeiro definimos duas superposições especiais dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}_+(\mathbf{r}, t) &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2}}(\mathbf{E}_+(\mathbf{r}, t) + ic\mathbf{B}_+(\mathbf{r}, t)) \\ \boldsymbol{\psi}_-(\mathbf{r}, t) &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2}}(\mathbf{E}_-(\mathbf{r}, t) - ic\mathbf{B}_-(\mathbf{r}, t)).\end{aligned}\tag{2.16}$$

Argumentaremos a frente que os subscritos estão relacionados à helicidade do fóton. Em seguida escrevemos as equações (2.1) em termos destes vetores:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_\pm(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ i\partial_t \boldsymbol{\psi}_+(\mathbf{r}, t) &= c\nabla \times \boldsymbol{\psi}_+(\mathbf{r}, t) \\ i\partial_t \boldsymbol{\psi}_-(\mathbf{r}, t) &= -c\nabla \times \boldsymbol{\psi}_-(\mathbf{r}, t).\end{aligned}\tag{2.17}$$

Para chegar a essas equações, multiplicamos a equação (1.1 - ii) por  $i(-i)c$ ; somamos(subtraímos) à equação (1.1 - i) e comparando com as definições de  $\boldsymbol{\psi}_+(\mathbf{r}, t)$  e  $\boldsymbol{\psi}_-(\mathbf{r}, t)$  e obtemos a primeira equação:

$$\begin{aligned}0 &= \nabla \cdot \mathbf{E}_{+(-)} + i(-i)\nabla \cdot (c\mathbf{B}_{+(-)}) \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2}}\nabla \cdot (\mathbf{E}_{+(-)} + i(-i)c\mathbf{B}_{+(-)}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_{+(-)}(\mathbf{r}, t).\end{aligned}$$

Em seguida multiplicamos a equação (1.1 - iv) por  $-ic$  e subtraímos da equação (1.1 - iii), novamente comparamos as definições e chegamos à segunda equação:

$$\begin{aligned}\frac{-i}{c}\partial_t \mathbf{E}_+ + \partial_t c\mathbf{B}_+ &= -ic\nabla \times c\mathbf{B}_+ - \nabla \times \mathbf{E}_+, \\ -i[\partial_t \mathbf{E}_+ + i\partial_t c\mathbf{B}_+]\sqrt{\frac{\epsilon_0}{2}} &= -c[\nabla \times ic\mathbf{B}_+ + \nabla \times \mathbf{E}_+]\sqrt{\frac{\epsilon_0}{2}}, \\ i\partial_t \boldsymbol{\psi}_+(\mathbf{r}, t) &= c\nabla \times \boldsymbol{\psi}_+(\mathbf{r}, t).\end{aligned}$$

Finalmente a terceira equação é obtida multiplicando-se a equação (1.1 - iii) por  $ic$  e somando-se à equação (1.1 - iv).

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{E}_- - i\partial_t c\mathbf{B}_- &= c\nabla \times c\mathbf{B}_- + ic\nabla \times \mathbf{E}_-, \\ [\partial_t \mathbf{E}_- - i\partial_t c\mathbf{B}_-] \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2}} &= c\frac{1}{i} [\nabla \times ic\mathbf{B}_- - \nabla \times \mathbf{E}_-] \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2}}, \\ i\partial_t \boldsymbol{\psi}_-(\mathbf{r}, t) &= -c\nabla \times \boldsymbol{\psi}_-(\mathbf{r}, t).\end{aligned}$$

Podemos reescrever essas equações usando uma das formas de se escrever o rotacional de um campo vetorial em coordenadas cartesianas:

$$\nabla \times \mathbf{F} = (\partial_y F_z - \partial_z F_y)\hat{\mathbf{x}} - (\partial_x F_z - \partial_z F_x)\hat{\mathbf{y}} + (\partial_x F_y - \partial_y F_x)\hat{\mathbf{z}}$$

Considere as matrizes :

$$s_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, s_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } s_z = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

E também os produtos :

$$s_x \cdot \nabla = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -i\partial_z \\ i\partial_y \end{bmatrix},$$

$$s_y \cdot \nabla = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\partial_z \\ 0 \\ -i\partial_x \end{bmatrix},$$

e também

$$s_z \cdot \nabla = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\partial_y \\ i\partial_x \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Se denotarmos a matriz cujas colunas são formadas pelos produtos acima por (observe a semelhança com as manipulações do Tensor de Maxwell feitas na seção anterior):

$$(\mathbf{s} \cdot \nabla) = \begin{bmatrix} 0 & i\partial_z & -i\partial_y \\ -i\partial_z & 0 & i\partial_x \\ i\partial_y & -i\partial_x & 0 \end{bmatrix},$$

então verificamos que :

$$(\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & i\partial_z & -i\partial_y \\ -i\partial_z & 0 & i\partial_x \\ i\partial_y & -i\partial_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ -\partial_x F_z + \partial_z F_x \\ \partial_y F_x - \partial_x F_y \end{bmatrix} = i \nabla \times \mathbf{F}. \quad (2.18)$$

E portanto podemos reescrever as equações (2.16) como :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_{\pm}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ i\hbar\partial_t \boldsymbol{\psi}_+(\mathbf{r}, t) &= c(\mathbf{s} \cdot \frac{\hbar}{i} \nabla) \boldsymbol{\psi}_+(\mathbf{r}, t) \\ i\hbar\partial_t \boldsymbol{\psi}_-(\mathbf{r}, t) &= -c(\mathbf{s} \cdot \frac{\hbar}{i} \nabla) \boldsymbol{\psi}_-(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (2.19)$$

A matriz  $\mathbf{s}$  está relacionada com o spin do fóton de forma que o produto  $\mathbf{s} \cdot (\hbar/i)\nabla$  está relacionado com a projeção do spin sobre o momento linear do fóton que é definido como helicidade. Observe que o vetor  $\boldsymbol{\psi}_+$  está relacionado com o autovalor de helicidade  $+1$  e o vetor  $\boldsymbol{\psi}_-$  está relacionado com o autovalor de helicidade  $-1$ .

Este conjunto de quatro equações descrevem os mesmos fenômenos físicos que as equações de Maxwell no vácuo (equações (2.1)). Podemos simplificá-las ainda mais com o advento da notação spinorial. Uma vez que os vetores  $\boldsymbol{\psi}_+$  e  $\boldsymbol{\psi}_-$  estão em subespaços diferentes (já que representam diferentes helicidades), isto é:

$$\boldsymbol{\psi}_- \cdot \boldsymbol{\psi}_+ = 0,$$

então podemos representar a função de onda de fóton de maneira muito simples através de um objeto, chamado de espinor de dois componentes, que representa um vetor de estado composto por elementos que se comportam de forma independente, que denotaremos por :

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_+(\mathbf{r}, t) \\ \boldsymbol{\psi}_-(\mathbf{r}, t) \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$



O correspondente bra é dado pelo adjunto da equação (2.20)

$$\mathbf{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) = [\boldsymbol{\psi}_+^*(\mathbf{r}, t) \quad \boldsymbol{\psi}_-^*(\mathbf{r}, t)]. \quad (2.21)$$

A notação espinorial tem vantagem sobre a notação usual quando queremos lidar com operadores que agem em graus de liberdade independentes como o spin e graus de liberdade de momento ou posição. Para o caso de operadores de spin, por exemplo  $S_z$ , podemos fazer :

$$[S_z]\mathbf{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \begin{bmatrix} \hbar & 0 \\ 0 & -\hbar \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_+(\mathbf{r}, t) \\ \boldsymbol{\psi}_-(\mathbf{r}, t) \end{bmatrix} = \hbar \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_+(\mathbf{r}, t) \\ -\boldsymbol{\psi}_-(\mathbf{r}, t) \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Para o caso de operadores em representação de posição, por exemplo o operador  $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\hbar}{i}\nabla)$  que neste trabalho desempenha o papel de operador Hamiltoniano, podemos fazer:

$$[c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\hbar}{i}\nabla)]\mathbf{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \begin{bmatrix} c\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\hbar}{i}\nabla & 0 \\ 0 & c\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\hbar}{i}\nabla \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_+(\mathbf{r}, t) \\ \boldsymbol{\psi}_-(\mathbf{r}, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\hbar\partial_t\boldsymbol{\psi}_+(\mathbf{r}, t) \\ -i\hbar\partial_t\boldsymbol{\psi}_-(\mathbf{r}, t) \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Com essa representação podemos condensar a segunda e terceira das equações (2.18) na forma:

$$i\hbar\partial_t\mathbf{\Psi}(\mathbf{r}, t) = c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\hbar}{i}\nabla)\mathbf{\Psi}(\mathbf{r}, t). \quad (2.24)$$

Observe que esta equação se apresenta como uma equação do tipo Dirac, a qual tomamos emprestado da referência [12](equação (5.3.1)):

$$i\hbar\partial_t\psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \frac{\hbar}{i}\nabla)\psi + \beta mc^2\psi. \quad (2.25)$$

Essa equação relativística descreve o comportamento de uma partícula livre de massa  $m$  e *spin* 1/2, a matriz  $\alpha$  está relacionada com o *spin* da partícula.

Observe que as equações (2.19) são similares às equações (2.25) com  $m = 0$  exceto pelas matrizes  $\alpha$  e  $s$  (elas têm, entretanto, um significado similar) e a condição adicional dada pela primeira das equações (2.19).

Agora que concluímos a aproximação eurística retornaremos nossa atenção ao vetor  $\boldsymbol{\psi}$ . A referência [13] demonstra que partículas de massa nula e spin maior que  $1/2$ , como o fóton, não apresentam operador posição de forma que a expressão  $|\boldsymbol{\psi}|^2 dV$  não é interpretada como probabilidade de encontrarmos o fóton no volume  $dV$ . Observe que das definições (2.16) observamos que a expressão

$$\int_V dV |\boldsymbol{\psi}|^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V dV (|\mathbf{E}|^2 + |c\mathbf{B}|^2),$$

tem dimensão de energia e é compatível com medidas da energia média do fóton.

Assumimos uma postura semelhante a da referência [4] e cunharemos por função de onda o objeto que é útil nos nossos cálculos e para a compreensão do problema de maneira consistente mesmo que rigorosamente expressões envolvendo o operador posição explicitamente não existam.

O vetor de Riemann-Silberstein não é o único objeto que pode ser considerado como função de onda de fótons dentro das limitações expostas no parágrafo acima. Por exemplo, há uma função de onda disponível na literatura na representação de posição, a função de onda de Landau-Peierls ([4] e artigo original [14]) que, contudo, tem propriedades não-locais e logo não tem significado físico direto ([15]) em acordo com a discussão já feita nesta seção. Entretanto o vetor de Riemann-Silberstein tem uma vantagem considerável para este trabalho. Os valores esperados da energia e momento

linear segundo a referência [4] são dados por:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \int dV |\boldsymbol{\psi}_+|^2 + |\boldsymbol{\psi}_-|^2 & (\text{i}), \\ \mathbf{P} &= \frac{1}{2ic} \int dV \boldsymbol{\psi}_+ \times \boldsymbol{\psi}_+^* + \boldsymbol{\psi}_- \times \boldsymbol{\psi}_-^* & (\text{ii}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Com a notação spinorial, e observando as relações

$$\frac{2}{\epsilon_0} |\boldsymbol{\Psi}_+|^2 = (\mathbf{E}_+ + ic\mathbf{B}_+) \cdot (\mathbf{E}_+^* - ic\mathbf{B}_+^*) = |\mathbf{E}_+|^2 + |c\mathbf{B}_+|^2,$$

e

$$\frac{2}{\epsilon_0} \boldsymbol{\Psi}_+ \times \boldsymbol{\Psi}_+^* = (\mathbf{E}_+ + ic\mathbf{B}_+) \times (\mathbf{E}_+^* - ic\mathbf{B}_+^*) = 2i(\mathbf{E}_+ \times c\mathbf{B}_+^*),$$

analogamente para o caso em que lidamos com  $\boldsymbol{\Psi}_-$

$$\frac{2}{\epsilon_0} |\boldsymbol{\Psi}_-|^2 = (\mathbf{E}_- + ic\mathbf{B}_-) \cdot (\mathbf{E}_-^* - ic\mathbf{B}_-^*) = |\mathbf{E}_-|^2 + |c\mathbf{B}_-|^2,$$

e

$$\frac{2}{\epsilon_0} \boldsymbol{\Psi}_- \times \boldsymbol{\Psi}_-^* = (\mathbf{E}_- - ic\mathbf{B}_-) \times (\mathbf{E}_-^* - ic\mathbf{B}_-^*) = 2i(\mathbf{E}_- \times c\mathbf{B}_-^*),$$

as expressões (2.26) assumem as formas simples :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \int dV [\boldsymbol{\Psi}^\dagger \boldsymbol{\Psi}] &= \frac{\epsilon_0}{2} \int dV (|\mathbf{E}|^2 + |c\mathbf{B}|^2), & (\text{i}) \\ \mathbf{P} &= \frac{1}{2ic} \int dV [\boldsymbol{\Psi}^\dagger \times \boldsymbol{\Psi}] &= \frac{\epsilon_0}{c} \int dV (\mathbf{E}^* \times c\mathbf{B}). & (\text{ii}) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Usamos a equação (2.16) para explicitar os campos do fóton em termos das funções de onda  $\boldsymbol{\Psi}_+$  e  $\boldsymbol{\Psi}_-$  como

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \sqrt{2\epsilon_0} [(\boldsymbol{\Psi}_+ + \boldsymbol{\Psi}_+^\dagger) + (\boldsymbol{\Psi}_- + \boldsymbol{\Psi}_-^\dagger)], \\ c\mathbf{B} &= c\mathbf{B}_+ + c\mathbf{B}_- = -i\sqrt{2\epsilon_0} [(\boldsymbol{\Psi}_+ - \boldsymbol{\Psi}_+^\dagger) + (\boldsymbol{\Psi}_-^\dagger - \boldsymbol{\Psi}_-)]. \end{aligned}$$

Observe a semelhança com as equações (2.11) <sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>Observe, entretanto, que ao passo que álgebra complexa foi utilizada nas equações (2.11) para facilitar os cálculos, nas equações (2.27) ela adquire um caráter fundamental intrínseco à teoria quântica

Uma observação importante é a compatibilidade entre a descrição adotada aqui com a linguagem usual da segunda quantização. As referências [3, 8, 9] abordam este problema de diferentes pontos de vista, em especial, a primeira demonstra a compatibilidade entre os valores esperados das duas abordagens. As outras (e uma seção da primeira) partem da representação do fóton no espaço de momento, que é bem definida, e obtém em representação de posição vetores compatíveis com o vetor de Riemann-Silberstein que usamos neste texto. Em resumo a abordagem do fóton usando o vetor de Riemann-Silberstein adotada aqui é compatível com a abordagem usual quanto à obtenção de valores esperados, contudo, tem a vantagem de ser simples e fisicamente intuitiva.

## Capítulo 3

# Polarização, energia e momento linear de ondas eletromagnéticas e fótons em diferentes referenciais inerciais

O objetivo deste trabalho é estudar o comportamento de ondas eletromagnéticas clássicas e fótons observados segundo diferentes referenciais inerciais. Para tanto, analisaremos a polarização, energia e momento linear da onda eletromagnética, no regime clássico, em diferentes referenciais inerciais e mostraremos que as relações entre quantidades como energia e frequência angular, vetor de onda e momento linear, especificamente as razões

$$\frac{\mathcal{U}}{\omega} \text{ e } \frac{|\mathcal{P}|}{|\mathbf{k}|}$$

são preservadas sob transformações de Lorentz. Posteriormente encontraremos uma relação entre o feixe clássico e o fóton usando as equações (2.27) e interpretação pertinente.

A abordagem feita aqui é menos elegante do que a abordagem feita

pelas referências [3, 4, 8], porém, tem a vantagem de ser mais simples e intuitiva no sentido de que as operações matemáticas utilizadas não são mais avançadas que as lecionadas em um curso básico de cálculo de várias variáveis e um curso de álgebra linear.

### 3.1 Polarização

Nesta seção adotaremos as simples ondas planas.

Para analisar a polarização observada pelo referencial  $\bar{\mathcal{R}}$ , que se movimenta com velocidade  $\mathbf{v} = c\boldsymbol{\beta} = c(\beta_x\hat{\mathbf{x}} + \beta_y\hat{\mathbf{y}} + \beta_z\hat{\mathbf{z}})$  em relação ao referencial  $\mathcal{R}$ , precisamos analisar o comportamento dos campos observados por este referencial. Pegamos emprestado, das referências [7, 16], as expressões:

$$\bar{\mathbf{E}} = \gamma(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times c\mathbf{B}) - \alpha\boldsymbol{\beta}(\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}) \quad (3.1)$$

e

$$c\bar{\mathbf{B}} = \gamma(c\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) - \alpha\boldsymbol{\beta}(c\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\beta}). \quad (3.2)$$

Nessas expressões  $\gamma = (1 - |\boldsymbol{\beta}|^2)^{-\frac{1}{2}}$  e  $\alpha = (\gamma^2)(\gamma + 1)^{-1} = (\gamma - 1)|\boldsymbol{\beta}|^{-2}$ .  $\bar{\mathbf{E}}$  e  $c\bar{\mathbf{B}}$  representam os campos elétrico e magnético no referencial  $\bar{\mathcal{R}}$ , com as coordenadas do referencial  $\mathcal{R}$ .

Suponha os campos da forma (2.10) :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 e^{i(kz - \omega t)} (\cos\theta\hat{\mathbf{x}} - e^{i\varphi}\text{sen}\theta\hat{\mathbf{y}}) \\ c\mathbf{B} &= E_0 e^{i(kz - \omega t)} (e^{-i\varphi}\text{sen}\theta\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\hat{\mathbf{y}}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

Vamos substituir essa expressão diretamente nas equações (3.1) e (3.2) :

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{E}} &= E_0 e^{i(kz-\omega t)} \left( \gamma \left[ (\cos \theta \hat{\mathbf{x}} - e^{i\varphi} \text{sen} \theta \hat{\mathbf{y}}) + \boldsymbol{\beta} \times (\cos \theta \hat{\mathbf{y}} + e^{i\varphi} \text{sen} \theta \hat{\mathbf{x}}) \right] \right. \\
&\quad \left. - \alpha \boldsymbol{\beta} \left[ \boldsymbol{\beta} \cdot (\cos \theta \hat{\mathbf{x}} - e^{i\varphi} \text{sen} \theta \hat{\mathbf{y}}) \right] \right) \\
&= E_0 e^{i(kz-\omega t)} \left( \gamma \left[ \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\beta} \times \cos \theta \hat{\mathbf{y}} \right] - \alpha \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \cos \theta \hat{\mathbf{x}}) \right) + \\
&\quad e^{i\varphi} E_0 e^{i(kz-\omega t)} \left( \gamma \left[ -\text{sen} \theta \hat{\mathbf{y}} + \boldsymbol{\beta} \times \text{sen} \theta \hat{\mathbf{x}} \right] - \alpha \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \text{sen} \theta (-\hat{\mathbf{y}})) \right).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Analogamente o campo magnético é percebido como:

$$\begin{aligned}
c\bar{\mathbf{B}} &= E_0 e^{i(kz-\omega t)} \left( \gamma \left[ (\cos \theta \hat{\mathbf{y}} + e^{-i\varphi} \text{sen} \theta \hat{\mathbf{x}}) - \boldsymbol{\beta} \times (\cos \theta \hat{\mathbf{x}} - e^{-i\varphi} \text{sen} \theta \hat{\mathbf{y}}) \right] \right. \\
&\quad \left. - \alpha \boldsymbol{\beta} \left[ \boldsymbol{\beta} \cdot (\cos \theta \hat{\mathbf{y}} + e^{-i\varphi} \text{sen} \theta \hat{\mathbf{x}}) \right] \right) \\
&= E_0 e^{i(kz-\omega t)} \left( \gamma \left[ \cos \theta \hat{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\beta} \times \cos \theta \hat{\mathbf{x}} \right] - \alpha \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \cos \theta \hat{\mathbf{y}}) \right) + \\
&\quad e^{-i\varphi} E_0 e^{i(kz-\omega t)} \left( \gamma \left[ \text{sen} \theta \hat{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\beta} \times \text{sen} \theta (-\hat{\mathbf{y}}) \right] - \alpha \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \text{sen} \theta \hat{\mathbf{x}}) \right).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

De acordo com as equações (3.3), podemos dividir os campos elétrico e magnético em componentes ortogonais:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1 &= E_0 e^{i(kz-\omega t)} \cos \theta \hat{\mathbf{x}}, & c\mathbf{B}_1 &= E_0 e^{i(kz-\omega t)} \cos \theta \hat{\mathbf{y}}, \\
\mathbf{E}_2 &= E_0 e^{i(kz-\omega t)} \text{sen} \theta \hat{\mathbf{y}}, & c\mathbf{B}_2 &= E_0 e^{i(kz-\omega t)} \text{sen} \theta \hat{\mathbf{x}};
\end{aligned}$$

comparando essas expressões com as equações (3.4) e (3.5) observamos que podemos escrever as últimas de maneira muito simples:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{E}} &= \bar{\mathbf{E}}_1 - e^{i\varphi} \bar{\mathbf{E}}_2, \\
c\bar{\mathbf{B}} &= c\bar{\mathbf{B}}_1 + e^{-i\varphi} c\bar{\mathbf{B}}_2.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Onde os campos  $\bar{\mathbf{E}}_1, \bar{\mathbf{E}}_2, c\bar{\mathbf{B}}_1$  e  $c\bar{\mathbf{B}}_2$  são definidos por :

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{E}}_i &= \gamma (\mathbf{E}_i + \boldsymbol{\beta} \times c\mathbf{B}_i) - \alpha \boldsymbol{\beta} (\mathbf{E}_i \cdot \boldsymbol{\beta}) \\
c\bar{\mathbf{B}}_i &= \gamma (c\mathbf{B}_i - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}_i) - \alpha \boldsymbol{\beta} (c\mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\beta}).
\end{aligned}$$

O significado físico dessas equações é bastante intuitivo. Devido à linearidade das transformações de Lorentz, cada componente da polarização transforma-se de maneira independente.

É interessante tomarmos o produto escalar das equações (3.1):

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{E}}^* &= \left[ \gamma(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times c\mathbf{B}) - \alpha\boldsymbol{\beta}(\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}) \right] \cdot \left[ \gamma(\mathbf{E}^* + \boldsymbol{\beta} \times c\mathbf{B}^*) - \alpha\boldsymbol{\beta}(\mathbf{E}^* \cdot \boldsymbol{\beta}) \right] \\
&= \gamma^2 \left[ |\mathbf{E}|^2 + |(\boldsymbol{\beta} \times c\mathbf{B})|^2 + \mathbf{E} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times c\mathbf{B}^*) + \mathbf{E}^* \cdot (\boldsymbol{\beta} \times c\mathbf{B}) \right] \\
&\quad - 2\gamma\alpha|\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}|^2 + \alpha^2|\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}|^2|\boldsymbol{\beta}|^2,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

onde usamos o fato de que o vetor  $\boldsymbol{\beta}$  é real. Podemos usar agora as identidades :

$$(\mathbf{U} \times \mathbf{V}) \cdot (\mathbf{U} \times \mathbf{W}) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}) - (\mathbf{U} \cdot \mathbf{V})(\mathbf{U} \cdot \mathbf{W})$$

e

$$\mathbf{U} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{W}) = -\mathbf{V} \cdot (\mathbf{U} \times \mathbf{W})$$

para reescrever a expressão na forma :

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{E}}^* &= \gamma^2 \left[ |\mathbf{E}|^2 - \boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{E}^* \times c\mathbf{B}) - \boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{E} \times c\mathbf{B}^*) + |\boldsymbol{\beta}|^2|\mathbf{E}|^2 - |c\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\beta}|^2 \right] \\
&\quad - 2\gamma\alpha|\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}|^2 + (\gamma - 1)\alpha|\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}|^2
\end{aligned}$$

Podemos agora utilizar o fato de que para ondas eletromagnéticas no vácuo  $|\mathbf{E}| = |c\mathbf{B}|$  (relação (2.7)) e podemos também usar a definição do vetor de onda unitário  $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{E}} \times c\hat{\mathbf{B}}^*$  e o fato que tal vetor é real, o que implica :  $\hat{\mathbf{E}} \times c\hat{\mathbf{B}}^* = \hat{\mathbf{E}}^* \times c\hat{\mathbf{B}}$ , para reescrever novamente a equação (usamos também a definição do parâmetro  $\alpha$ :  $\alpha = \gamma^2(1 + \gamma)^{-1}$ ) :

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{E}}^* &= \gamma^2 \left[ |\mathbf{E}|^2 - 2|\mathbf{E}|^2\boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}} + |\boldsymbol{\beta}|^2|\mathbf{E}|^2 - |c\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\beta}|^2 - |\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}|^2 \right] \\
&= \gamma^2|\mathbf{E}|^2 \left[ 1 - 2\boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}} + |\boldsymbol{\beta}|^2 - |c\hat{\mathbf{B}} \cdot \boldsymbol{\beta}|^2 - |\hat{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\beta}|^2 \right].
\end{aligned} \tag{3.8}$$



Podemos interpretar os três últimos termos de maneira bem simples: seja  $\boldsymbol{\beta}$  um vetor tridimensional e  $\widehat{\mathbf{E}}$ ,  $\widehat{\mathbf{B}}$  e  $\widehat{\mathbf{k}}$  são vetores ortogonais então eles formam uma base neste espaço. Nesta base :

$$|\boldsymbol{\beta}|^2 = |\widehat{\mathbf{B}} \cdot \boldsymbol{\beta}|^2 + |\widehat{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\beta}|^2 + |\widehat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\beta}|^2,$$

isto é :

$$|\widehat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\beta}|^2 = |\boldsymbol{\beta}|^2 - |\widehat{\mathbf{B}} \cdot \boldsymbol{\beta}|^2 - |\widehat{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\beta}|^2.$$

Temos então uma expressão final simpática para a transformação do módulo do vetor campo elétrico:

$$|\bar{\mathbf{E}}|^2 = |\mathbf{E}|^2 \gamma^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \widehat{\mathbf{k}})^2 . \quad (3.9)$$

Analogamente, o módulo do vetor campo magnético transforma-se como:

$$c^2 |\bar{\mathbf{B}}|^2 = c^2 |\mathbf{B}|^2 \gamma^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \widehat{\mathbf{k}})^2 . \quad (3.10)$$

Aplicando estes resultados às equações (3.6), notamos que além dos módulos dos campos elétrico e magnético sofrerem a mesma transformação, os módulos de cada componente  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, c\mathbf{B}_1$  e  $c\mathbf{B}_2$  também sofrem a mesma transformação. Fisicamente esse resultado, associado ao resultado (3.6), significa que além da fase relativa entre as ondas componentes de uma polarização geral, seus módulos relativos também são preservados. Isto é, uma polarização circular no referencial  $\mathcal{R}$  é também circular no referencial  $\bar{\mathcal{R}}$ .

É também interessante tomar o produto interno e o produto vetorial

entre as equações (3.1) e (3.2) :

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{E}} \cdot c\bar{\mathbf{B}}^* &= \left[ \gamma(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times c\mathbf{B}) - \alpha\boldsymbol{\beta}(\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}) \right] \cdot \left[ \gamma(c\mathbf{B}^* - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}^*) - \alpha\boldsymbol{\beta}(c\mathbf{B}^* \cdot \boldsymbol{\beta}) \right] \\
&= \gamma^2 \left[ \mathbf{E} \cdot c\mathbf{B}^* - (\boldsymbol{\beta} \times c\mathbf{B}) \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}^*) \right] - 2\alpha\gamma(\boldsymbol{\beta} \cdot c\mathbf{B}^*)(\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}) \\
&\quad + (\gamma - 1)\alpha(\boldsymbol{\beta} \cdot c\mathbf{B}^*)(\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\beta}) \\
&= \gamma^2 \left[ \mathbf{E} \cdot c\mathbf{B}^* - |\boldsymbol{\beta}|^2(\mathbf{E} \cdot c\mathbf{B}^*) + (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})(\boldsymbol{\beta} \cdot c\mathbf{B}^*) - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})(\boldsymbol{\beta} \cdot c\mathbf{B}^*) \right] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Isto é, a perpendicularidade entre os campos é preservada pela transformação de Lorentz. Isso permite definir o vetor de onda percebido pelo referencial  $\bar{\mathcal{R}}$  com as coordenadas do referencial  $\mathcal{R}$ :

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{k}} &= \hat{\bar{\mathbf{E}}} \times \hat{c\bar{\mathbf{B}}} = \\
&= \frac{\gamma^2 [(\mathbf{E} \times c\mathbf{B}) + (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) \times (\boldsymbol{\beta} \times c\mathbf{B})] - \gamma\alpha [(\boldsymbol{\beta} \cdot c\mathbf{B})(\mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E})(\boldsymbol{\beta} \times c\mathbf{B})]}{\gamma^2(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 E_0^2 \phi(x, y, z - ct)^2}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Observamos que , em geral, a direção de propagação do pulso (direção do vetor de onda  $\mathbf{k}$ ) não é preservada exceto quando o referencial  $\bar{\mathcal{R}}$  se move em uma direção colinear à direção  $\hat{\mathbf{k}}$  . Como os campos permanecem perpendiculares entre si e à direção de propagação concluímos suas direções também não são preservadas. Fisicamente, podemos discutir o exemplo de uma polarização elíptica no referencial  $\mathcal{R}$  que é percebida como uma polarização elíptica com a mesma excentricidade pelo referencial  $\bar{\mathcal{R}}$  pois já observamos que os campos que formam essa polarização tem os módulos transformados pelo mesmo fator, entretanto, seus eixos podem sofrer uma rotação que depende da direção do vetor de onda  $\mathbf{k}$  e da velocidade relativa entre os referenciais  $\bar{\mathcal{R}}$  e  $\mathcal{R}$  ( $c\boldsymbol{\beta}$ ).

Para ilustrar essas ideias e trabalharmos um pouco nossa intuição no problema podemos aplicar os resultados (3.9) aos campos (3.3). As equações

(3.6) mostram que as componentes de polarização deste pulso se transformam de maneira independente:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}} &= \bar{\mathbf{E}}_1 + i\bar{\mathbf{E}}_2 \\ c\bar{\mathbf{B}} &= c\bar{\mathbf{B}}_1 + ic\bar{\mathbf{B}}_2.\end{aligned}$$

Podemos então definir o módulo relativo entre as componentes da polarização como uma razão entre os módulos destes componentes. Segue então trivialmente dos resultados (3.9) que no referencial  $\bar{\mathcal{R}}$  o módulo relativo entre os novos componentes de polarização é:

$$\frac{|\bar{\mathbf{E}}_1|}{|\bar{\mathbf{E}}_2|} = \frac{\gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}})|\mathbf{E}_1|}{\gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}})|\mathbf{E}_2|} = \frac{|\mathbf{E}_1|}{|\mathbf{E}_2|}. \quad (3.13)$$

Observe que este resultado é válido para qualquer soma de componentes perpendiculares bastando substituir os índices que aparecem nas equações acima por índices mudos.

Observe que se a fase relativa entre os componentes da onda eletromagnética( resultado (3.6) ) e o módulo relativo entre esses componentes são preservados ( resultado (3.13), todos os componentes tem os respectivos módulos transformados pelo mesmo fator ) então concluímos que a polarização é preservada por transformações de Lorentz. Entretanto é necessário alguma atenção porque a direção de propagação, em relação a qual definimos a polarização, não é preservada por essas transformações. Por exemplo, se tomarmos um feixe se propagando na direção  $\hat{\mathbf{z}}$  com polarização elíptica em um referencial com eixo maior ao longo do eixo  $\hat{\mathbf{y}}$ , e o observarmos de um referencial inercial  $\bar{\mathcal{R}}$  que se move na direção  $\hat{\mathbf{x}}$  simplesmente com sua projeção perpendicular à direção  $\hat{\mathbf{z}}$  então podemos observar uma maior excentricidade na elipse ou mesmo uma polarização circular, um resultado incoerente.

### 3.2 Energia e frequência angular

Nesta seção lidaremos com a energia do pulso eletromagnético dada pela primeira equação (2.11) e sua relação com a frequência angular do pulso clássico e para tanto precisaremos lidar com a função  $\phi(\mathbf{r}, t)$  percebida pelo referencial  $\mathcal{R}$  e a maneira como essa expressão é percebida pelo referencial  $\bar{\mathcal{R}}$ . Trabalharemos funções do tipo (3.3), dotadas de uma amplitude quadrado integrável que obedece às equações de onda (2.2) :

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= E_0\phi(x, y, z - ct)(\cos\theta\hat{\mathbf{x}} - e^{i\varphi}\text{sen}\theta\hat{\mathbf{y}}) \\ c\mathbf{B} &= E_0\phi(x, y, z - ct)(e^{-i\varphi}\text{sen}\theta\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\hat{\mathbf{y}}),\end{aligned}$$

Precisaremos das coordenadas normais do referencial  $\mathcal{R}$ ,  $[t, x, y, z]$ , em função das coordenadas normais do referencial  $\bar{\mathcal{R}}$ ,  $[\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}]$ , que podem ser obtidas das referências [7] capítulo 11 e [17] capítulo 1.

$$\begin{aligned}ct &= \gamma(ct + \beta_x\bar{x} + \beta_y\bar{y} + \beta_z\bar{z}) \\ x &= \gamma\beta_x c\bar{t} + (1 + \alpha\beta_x^2)\bar{x} + \alpha\beta_x\beta_y\bar{y} + \alpha\beta_x\beta_z\bar{z} \\ y &= \gamma\beta_y c\bar{t} + \alpha\beta_y\beta_x\bar{x} + (1 + \alpha\beta_y^2)\bar{y} + \alpha\beta_y\beta_z\bar{z} \\ z &= \gamma\beta_z c\bar{t} + \alpha\beta_z\beta_x\bar{x} + \alpha\beta_z\beta_y\bar{y} + (1 + \alpha\beta_z^2)\bar{z}\end{aligned}\quad (3.14)$$

Vamos derivar agora uma relação importante a partir dessas equações. No referencial  $\mathcal{R}$ , seja o vetor de onda da forma

$$\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{z}},$$

então, segundo um observador no referencial  $\bar{\mathcal{R}}$ , a fase da onda eletromagnética apresenta-se como:

$$\begin{aligned}kz - \omega t &= k(\gamma\beta_z c\bar{t} + \alpha\beta_z\beta_x\bar{x} + \alpha\beta_z\beta_y\bar{y} + (1 + \alpha\beta_z^2)\bar{z}) \\ &\quad - (\omega/c)\gamma(ct + \beta_x\bar{x} + \beta_y\bar{y} + \beta_z\bar{z}).\end{aligned}$$

Podemos coletar os termos proporcionais a  $\bar{t}$  e usar o fato de que  $\omega = c|\mathbf{k}|$  para chegar a :

$$\begin{aligned}kz - \omega t &= k[(\alpha\beta_z\beta_x - \gamma\beta_x)\bar{x} + (\alpha\beta_z\beta_y - \gamma\beta_y)\bar{y} + (-\gamma\beta_z + (1 + \alpha\beta_z^2))\bar{z}] \\ &\quad - \gamma(1 - \beta_z)\omega\bar{t}.\end{aligned}$$

Podemos finalmente definir as componentes do vetor de onda  $\bar{\mathbf{k}}$  percebido pelo referencial  $\bar{\mathcal{R}}$ :

$$\begin{aligned}\bar{k}_x &= k(\alpha\beta_z\beta_x - \gamma\beta_x) \\ \bar{k}_y &= k(\alpha\beta_z\beta_y - \gamma\beta_y) \\ \bar{k}_z &= k(-\gamma\beta_z + 1 + \alpha\beta_z^2).\end{aligned}\tag{3.15}$$

Obtemos a expressão final

$$kz - \omega t = \bar{k}_x\bar{x} + \bar{k}_y\bar{y} + \bar{k}_z\bar{z} - \gamma(1 - \beta_z)\omega\bar{t} = \bar{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{r}} - \bar{\omega}\bar{t}.\tag{3.16}$$

Observe que a expressão tem a mesma forma da expressão para a fase do referencial  $\mathcal{R}$ .

Diretamente dessas expressões:

$$\begin{aligned}|\bar{\mathbf{k}}|^2 &= k^2[(\alpha^2\beta_z^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\beta_z)(\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2) - 2\gamma\beta_z + 2\alpha\beta_z^2 + 1] \\ &= k^2[\alpha(\gamma - 1)\beta_z^2 + \gamma^2|\boldsymbol{\beta}|^2 - 2\gamma(\gamma - 1)\beta_z - 2\gamma\beta_z + 2\alpha\beta_z^2 + 1] \\ &= k^2[\alpha(\gamma + 1)\beta_z^2 + (\gamma^2|\boldsymbol{\beta}|^2 + 1) - 2\gamma^2\beta_z] \\ &= k^2\gamma^2(1 - \beta_z)^2\end{aligned},\tag{3.17}$$

e também :

$$\bar{\omega} = \omega\gamma(1 - \beta_z).\tag{3.18}$$

Observamos dessa expressão e da expressão (3.16) que o módulo do vetor de onda,  $|\bar{\mathbf{k}}|$ , e a frequência angular,  $\bar{\omega}$ , são multiplicadas pelo mesmo fator:  $\gamma(1 - \beta_z)$  ( para uma direção de propagação em uma direção arbitrária este fator pode ser escrito na forma  $\gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}})$  ).

Observe que poderíamos encontrar essa expressão mais diretamente (para ondas eletromagnéticas) usando a invariância da velocidade da luz e a forma da nova frequência angular  $\bar{\omega}$ :

$$\frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = c = \frac{\bar{\omega}}{|\bar{\mathbf{k}}|} = \frac{\omega\gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}})}{|\bar{\mathbf{k}}|},$$

e portanto:

$$|\bar{\mathbf{k}}| = |\mathbf{k}|\gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \quad (3.19)$$

As equações (3.18) representam o efeito Doppler relativístico que lida com mudança da frequência angular da luz percebida por diferentes referenciais inerciais e os cálculos feitos ilustram um pouco do que faremos a seguir. Detalharemos um pouco as contas nesta seção pois a análise do momento linear feita na próxima seção é essencialmente a mesma em termos matemáticos.

Consideremos a energia da onda eletromagnética no referencial  $\mathcal{R}$ , isto é, tomemos a primeira das equações (2.11):

$$\mathcal{U} = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV (|\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 + |c\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)|^2),$$

como os cálculos envolverão as transformações (3.14) que misturam as quatro coordenadas e esta expressão envolve apenas três é conveniente estender esta integral a quatro dimensões, isso pode ser feito de maneira muito simples inserindo uma função delta de Dirac com parâmetro temporal:

$$\mathcal{U} = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV \int dt \delta(t) (|\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 + |c\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)|^2). \quad (3.20)$$

Com a expressão (3.3), essa equação pode ser simplificada para :

$$\mathcal{U} = \epsilon_0 E_0^2 \int dV \int dt \delta(t) |\phi(x, y, z - ct)|^2, \quad (3.21)$$

Essa é a expressão matemática da energia da onda eletromagnética clássica no referencial  $\mathcal{R}$ . Analogamente, do ponto de vista de um observador no referencial  $\bar{\mathcal{R}}$ , a energia deste mesmo pulso é dada pela expressão:

$$\bar{\mathcal{U}} = \frac{\epsilon_0}{2} \int d\bar{V} \int d\bar{t} \delta(\bar{t}) (|\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)|^2 + |c\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)|^2). \quad (3.22)$$

As equações (3.9) e (3.10) nos permitem simplificar um pouco essa expressão

$$\bar{\mathcal{U}} = \epsilon_0 E_0^2 \gamma^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 \int d\bar{V} \int d\bar{t} \delta(\bar{t}) |\phi(x, y, z - ct)|^2, \quad (3.23)$$

Para avaliar essa integral precisaremos explicitar os perfis dos campos  $\phi(x, y, z - ct)$  em função das variáveis do referencial  $\bar{\mathcal{R}}$ , isto é,  $\phi(\bar{\mathbf{r}}, \bar{t}) \rightarrow \phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} - c\bar{t})$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \int d\bar{V} \int d\bar{t} \delta(\bar{t}) |\phi(x, y, z - ct)|^2 = \\ & \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \int d\bar{V} \int d\bar{t} \delta(\bar{t}) |\phi \left( \begin{aligned} & \gamma\beta_x c\bar{t} + (1 + \alpha\beta_x^2)\bar{x} + \alpha\beta_x\beta_y\bar{y} + \alpha\beta_x\beta_z\bar{z} \quad , \\ & \gamma\beta_y c\bar{t} + \alpha\beta_y\beta_x\bar{x} + (1 + \alpha\beta_y^2)\bar{y} + \alpha\beta_y\beta_z\bar{z} \quad , \\ & \gamma\beta_z c\bar{t} + (\alpha\beta_z\beta_x - \gamma\beta_x)\bar{x} + (\alpha\beta_z\beta_y - \gamma\beta_y)\bar{y} + (1 + \alpha\beta_z^2 - \gamma\beta_z)\bar{z} - c\gamma\bar{t} \end{aligned} \right)|^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Essa expressão é aparentemente formidável para qualquer função não constante  $\phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} - c\bar{t})$ , porém uma grande simplificação no cáculo surge quando definimos as novas variáveis:

$$\begin{aligned} X &= x = \gamma\beta_x c\bar{t} + (1 + \alpha\beta_x^2)\bar{x} + \alpha\beta_x\beta_y\bar{y} + \alpha\beta_x\beta_z\bar{z}; \\ Y &= y = \gamma\beta_y c\bar{t} + \alpha\beta_y\beta_x\bar{x} + (1 + \alpha\beta_y^2)\bar{y} + \alpha\beta_y\beta_z\bar{z}; \\ Z &= (\alpha\beta_z - \gamma)\beta_x\bar{x} + (\alpha\beta_z - \gamma)\beta_y\bar{y} + (1 + \alpha\beta_z^2 - \gamma\beta_z)\bar{z}; \\ T &= \bar{t}; \end{aligned} \quad (3.25)$$

Observe que o parâmetro  $Z$  é semelhante ao parâmetro  $\bar{k}$  definido na expressão (3.16) de maneira que se o pulso tem a dependência em  $z, t$  da forma  $z - ct = 1/k(kz - \omega t)$  no referencial  $\mathcal{R}$ , no referencial  $\bar{\mathcal{R}}$  essa dependência se apresentará como  $Z - c\gamma(1 - \beta_z)T = 1/k(kZ - \bar{\omega}T)$ . Portanto a dependência da função  $\phi(\bar{\mathbf{r}}, \bar{t})$  nas novas variáveis é simplificada para

$$\phi(\bar{\mathbf{r}}, \bar{t}) = \phi(X, Y, 1/k(kZ - \bar{\omega}T)).$$

Isto é: o comportamento ondulatório do movimento é preservado por essa mudança de coordenadas.

A seguir, para calcular a integral nas novas variáveis precisamos calcular o determinante Jacobiano da transformação ( referência [18], capítulo 15).

O determinante Jacobiano dessa mudança de variáveis é dada por :

$$\frac{\partial \mathcal{J}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})}{\partial (X, Y, Z, T)} = \left| \begin{array}{cccc} \partial_X \bar{x} & \partial_Y \bar{x} & \partial_Z \bar{x} & \partial_T \bar{x} \\ \partial_X \bar{y} & \partial_Y \bar{y} & \partial_Z \bar{y} & \partial_T \bar{y} \\ \partial_X \bar{z} & \partial_Y \bar{z} & \partial_Z \bar{z} & \partial_T \bar{z} \\ \partial_X \bar{t} & \partial_Y \bar{t} & \partial_Z \bar{t} & \partial_T \bar{t} \end{array} \right|. \quad (3.26)$$

Observe que precisamos de explicitar as variáveis  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$  como  $\bar{x} = \bar{x}(X, Y, Z, T)$ ,  $\bar{y} = \bar{y}(X, Y, Z, T)$ ,  $\bar{z} = \bar{z}(X, Y, Z, T)$  e  $\bar{t} = \bar{t}(X, Y, Z, T)$  invertendo as equações de transformação (3.25). O procedimento é factível porque temos três icógnitas e três equações, porém é desnecessário.

Vamos dizer que há uma função  $F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$  escrita nas coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$  que desejamos integrar no espaço inteiro :

$$I = \int d\mathcal{V}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}), \quad (3.27)$$

transformamos para as variáveis  $(X, Y, Z, T)$ , que supomos serem compostas por combinações lineares das variáveis  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ . Obtemos:

$$\begin{aligned} I &= \int d\mathcal{V}(X, Y, Z, T) F(X, Y, Z, T) \left| \frac{\partial \mathcal{J}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})}{\partial (X, Y, Z, T)} \right| \\ &= \left| \frac{\partial \mathcal{J}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})}{\partial (X, Y, Z, T)} \right| \int d\mathcal{V}(X, Y, Z, T) F(X, Y, Z, T). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Retiramos o determinante de dentro da integral por que as transformações são lineares por hipótese. Vamos agora inverter a transformação, isto é, temos uma função  $F(X, Y, Z, T)$  escrita nas coordenadas  $(X, Y, Z, T)$  e queremos reescrevê-la nas coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ , neste caso :

$$I = \left| \frac{\partial \mathcal{J}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})}{\partial (X, Y, Z, T)} \right| \left| \frac{\partial \mathcal{J}(X, Y, Z, T)}{\partial (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})} \right| \int d\mathcal{V}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}). \quad (3.29)$$

Novamente o determinante Jacobiano é constante porque a transformação inversa de uma transformação linear também é linear. Fazendo isso, para que a equação (3.27) seja consistente com a equação (3.28) precisamos que :

$$\left| \frac{\partial \mathcal{J}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})}{\partial (X, Y, Z, T)} \right| = \left| \frac{\partial \mathcal{J}(X, Y, Z, T)}{\partial (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})} \right|^{-1}, \quad (3.30)$$



de forma que não é necessário inverter as equações de transformação lineares para calcular o determinante Jacobiano. Observe que chegaríamos ao mesmo resultado pela relação

$$\det(\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1}) = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{A}^{-1} = 1,$$

mas precisaremos de um pouco de prática em diferentes espaços metricos.

Retomando e aplicando o resultado à equação (3.26), observando que as transformações (3.25) são transformações lineares, teremos:

$$\frac{\partial \mathcal{J}(X, Y, Z, T)}{\partial(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})} = \left| \begin{array}{cccc} 1 + \alpha\beta_x^2 & \alpha\beta_x\beta_y & \alpha\beta_x\beta_z & 0 \\ \alpha\beta_y\beta_x & (1 + \alpha\beta_y^2) & \alpha\beta_y\beta_z & 0 \\ (\alpha\beta_z - \gamma)\beta_x & (\alpha\beta_z - \gamma)\beta_y & (1 + \alpha\beta_z^2 - \gamma\beta_z) & 0 \\ \gamma\beta_x & \gamma\beta_y & 0 & 1 \end{array} \right|,$$

calculamos o determinante dessa matriz partindo da coluna com três zeros, verificamos que :

$$\frac{\partial \mathcal{J}(X, Y, Z, T)}{\partial(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})} = \left| \begin{array}{ccc} 1 + \alpha\beta_x^2 & \alpha\beta_x\beta_y & \alpha\beta_x\beta_z \\ \alpha\beta_y\beta_x & (1 + \alpha\beta_y^2) & \alpha\beta_y\beta_z \\ (\alpha\beta_z - \gamma)\beta_x & (\alpha\beta_z - \gamma)\beta_y & 1 + \alpha\beta_z^2 - \gamma\beta_z \end{array} \right|$$

Logo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{J}(X, Z, Y, T)}{\partial(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})} &= \\
& (1 + \alpha\beta_x^2) \left[ (1 + \alpha\beta_y^2)(1 + \alpha\beta_z^2 - \gamma\beta_z) - \alpha\beta_y^2\beta_z(\alpha\beta_z - \gamma) \right] \\
& - \alpha\beta_x\beta_y \left[ \alpha\beta_y\beta_x(1 + \alpha\beta_z^2 - \gamma\beta_z) - \alpha\beta_y\beta_z\beta_x(\alpha\beta_z - \gamma) \right] \\
& + \alpha\beta_x\beta_z \left[ \alpha\beta_y^2\beta_x(\alpha\beta_z - \gamma) - (1 + \alpha\beta_y^2)(\alpha\beta_z - \gamma)\beta_x \right] \\
& = (1 + \alpha\beta_z^2)(1 + \alpha(\beta_x^2 + \beta_y^2) + \alpha^2\beta_x^2\beta_z^2 - \alpha^2\beta_x^2\beta_y^2) \\
& - (\alpha\beta_z - \gamma)(1 + \alpha\beta_x^2)\alpha\beta_y^2\beta_z + 2\alpha^2\beta_x^2\beta_y^2\beta_z - \alpha\beta_x^2\beta_z(1 + \alpha\beta_y^2) \\
& + \gamma\alpha^2\beta_x^2\beta_y^2\beta_z - \gamma\beta_z(1 + \alpha(\beta_x^2 + \beta_y^2) + \alpha^2\beta_x^2\beta_y^2) \\
& = (1 + \alpha\beta_z^2)(1 + \alpha(\beta_x^2 + \beta_y^2)) - (\alpha\beta_z - \gamma)\alpha\beta_z(\beta_x^2 + \beta_y^2) \\
& - \gamma\beta_z(1 + \alpha(\beta_x^2 + \beta_y^2)) \\
& = 1 + \alpha(\beta_x^2 + \beta_y^2) + \alpha^2\beta_x^2\beta_z^2 + \alpha^2\beta_y^2\beta_z^2 + \alpha\beta_z^2 \\
& - \alpha^2\beta_x^2\beta_z^2 - \alpha^2\beta_y^2\beta_z^2 - \gamma\beta_z \\
& = 1 + \alpha(\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2) - \gamma\beta_z \\
& = 1 + (\gamma - 1) - \gamma\beta_z = \gamma(1 - \beta_z)
\end{aligned} \tag{3.31}$$

E portanto, segundo o resultado (3.30) e de maneira mais geral para uma direção arbitrária de  $\hat{\mathbf{k}}$ :

$$\left| \frac{\partial \mathcal{J}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})}{\partial(X, Y, Z, T)} \right| = \left[ \gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \right]^{-1}. \tag{3.32}$$

Retomando a expressão (3.23):

$$\bar{\mathcal{U}} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \int dX dY dZ dT \delta(T) |\phi(X, Y, Z - \gamma(1 - \beta_z)cT)|^2, \tag{3.33}$$

Podemos comparar essa expressão com a expressão (3.21), observamos que o volume de integração em ambas é infinito e a forma funcional do pulso é preservada (a coordenada  $T$  a exemplo da coordenada  $t$  é nula em ambas as expressões) e, portanto, as variáveis  $(X, Y, Z, T)$  são variáveis mudas:

$$\bar{\mathcal{U}} = \gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}})\mathcal{U}. \tag{3.34}$$

Observe que a energia total do feixe sofre a mesma mudança que sua frequência angular conforme explicitado pela expressão (3.18). Das expressões (3.18) e (3.34) podemos escrever<sup>1</sup>:

$$\frac{\bar{U}}{\bar{\omega}} = \frac{\gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}})\mathcal{U}}{\gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}})\omega} = \frac{\mathcal{U}}{\omega} \quad (3.35)$$

Este é um resultado importantíssimo e, embora familiar, não é trivial já que a expressão (3.22) é uma expressão clássica para a energia do feixe e não depende da frequência. Em seu trabalho sobre o efeito fotoelétrico ([19]) Einstein postula uma relação linear entre energia de fótons e sua frequência na forma  $E = \hbar\omega$  usando um argumento diferente do que foi utilizado neste trabalho, sem recorrer a transformações de Lorentz. É reconfortante o fato de chegarmos a um resultado similar. Observamos que classicamente não há evidência de uma relação em que a energia e a frequência angular da onda eletromagnética se relacionem de forma tão simples, entretanto, segundo estes resultados podemos dizer que há também um efeito Doppler no espectro de energias da radiação eletromagnética equivalente ao efeito Doppler das frequências.

---

<sup>1</sup>A forma quadrado integrável foi necessária para que as integrais (3.20) e (3.22) sejam convergentes e, portanto, que os respectivos intervalos de integração possam ser estendidos ao infinito. Não é este o caso quando lidamos, por exemplo, com ondas planas. Diretamente das equações (3.14), pode-se mostrar que se assumimos que em uma unidade de volume contém a mesma "porção" da onda (um comprimento de onda digamos) em qualquer referencial inercial (conforme assumido quando usamos as equações (3.20) e (3.22)), então um elemento de comprimento ao longo da direção da velocidade do referencial  $\bar{\mathcal{R}}$  se compara com o elemento de comprimento do referencial  $\mathcal{R}$  por  $d\bar{l} = \gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}})dl$ . A relatividade da simultaneidade desempenha um papel fundamental. Como as dimensões perpendiculares à  $\boldsymbol{\beta}$  não sofrem tais efeitos relativísticos e que rotações não alteram a métrica do espaço (volume da unidade de volume não é alterado por rotações), verifica-se que estes fatos são suficientes para estender estes resultados à ondas não quadrado-integráveis.

### 3.3 Momento linear e vetor de onda

Trataremos aqui com momento linear do pulso dado pela segunda das equações (2.11) já inserindo a função delta de Dirac :

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \frac{\epsilon_0}{c} \int dV \int dt \delta(t) (\mathbf{E}^* \times c\mathbf{B}) = \frac{\epsilon_0}{c} \int dV |\mathbf{E}^*| |c\mathbf{B}| (\widehat{\mathbf{E}}^* \times \widehat{\mathbf{B}}) \\ &= \frac{\epsilon_0 E_0^2}{c} \int dV \int dt \delta(t) |\phi(x, y, z - ct)|^2 \widehat{\mathbf{k}}.\end{aligned}\quad (3.36)$$

Simplificamos a expressão usando a equação (3.3). Novamente, propomos analisar o momento linear do pulso do ponto de vista do referencial  $\bar{\mathcal{R}}$  expressando essa função em termos das coordenadas normais deste referencial  $(c\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  que se relacionam com as coordenadas normais do referencial  $\mathcal{R}$   $(ct, x, y, z)$  pelas equações (3.14).

Retomando os cálculos, no referencial  $\bar{\mathcal{R}}$  o momento linear do pulso é representado pela equação:

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{P}} &= \frac{\epsilon_0}{c} \int d\bar{V} \int d\bar{t} \delta(\bar{t}) (\bar{\mathbf{E}}^* \times c\bar{\mathbf{B}}) \\ &= \gamma^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \widehat{\mathbf{k}})^2 \frac{\epsilon_0 E_0^2}{c} \int \frac{dX dY dZ dT}{\gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \widehat{\mathbf{k}})} \delta(T) |\phi(X, Y, Z - \gamma(1 - \beta_z)cT)|^2 (\widehat{\mathbf{E}} \times c\widehat{\mathbf{B}}^*) \\ &= \gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \widehat{\mathbf{k}}) \frac{\epsilon_0 E_0^2}{c} \int d\bar{V} \delta(T) |\phi(X, Y, Z - \gamma(1 - \beta_z)cT)|^2 \widehat{\mathbf{k}}.\end{aligned}\quad (3.37)$$

Observe a semelhança entre essa expressão e a expressão para a energia da onda eletromagnética clássica calculada na seção anterior.

O momento linear é um vetor que tem a mesma direção que a propagação do pulso, já que esta direção é uma constante podemos retirar as direções,  $\widehat{\mathbf{k}}$  e  $\widehat{\mathbf{k}}$ , das integrais em (3.36) e (3.37). Com isso, por inspeção

dessas equações observamos que

$$|\bar{\mathcal{P}}| = \gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}})|\mathcal{P}|, \quad (3.38)$$

mesmo fator multiplicativo que a energia do pulso analisada na seção anterior. A direção do vetor momento linear, entretanto, geralmente não é preservada ( $\hat{\bar{\mathcal{P}}} \neq \hat{\mathcal{P}}$ ). Este efeito é atribuído ao movimento relativo ao referencial  $\bar{\mathcal{R}}$  que provoca a aparição de novos componentes nos vetores campo elétrico e campo magnético <sup>2</sup>, como  $\hat{\mathbf{k}}$  é definido como o produto vetorial dos unitários destes campos para ondas eletromagnéticas, concluímos que em ambos os referenciais o vetor  $\mathcal{P}$  tem a mesma direção que o vetor  $\mathbf{k}$ . Segundo as equações (3.19) e (3.38) podemos escrever :

$$\frac{|\bar{\mathcal{P}}|}{|\bar{\mathbf{k}}|} = \frac{\gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}})|\mathcal{P}|}{\gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}})|\mathbf{k}|} = \frac{|\mathcal{P}|}{|\mathbf{k}|}. \quad (3.39)$$

O módulo destes vetores obedecem a uma regra de transformação similar à regra (3.35), ou seja, a razão entre o módulo do momento linear para o módulo do vetor de onda do feixe é invariante sob transformações de Lorentz.

Novamente observamos que do ponto de vista da teoria eletromagnética não evidente de uma relação simples entre o momento linear e vetor de onda de uma onda eletromagnética. Entretanto análogamente à relação entre energia e frequência angular, podemos dizer que há também um efeito Doppler no espectro de momento linear da radiação eletromagnética equivalente ao efeito Doppler do vetor de onda <sup>3</sup>.

Como ultimo comentário, podemos observar que segundo as equações

---

<sup>2</sup>contudo a perpendicularidade entre esses vetores é preservada, logo a definição do vetor unitário  $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{E}}^* \times c\hat{\mathbf{B}}$  também é preservada

<sup>3</sup>usamos o termo efeito Doppler porque a frequência angular e o módulo do vetor de onda estão relacionados, assim como a energia e momento linear da radiação eletromagnética clássica

(2.11), (3.3) e a relação entre vetor de onda e frequência angular:

$$\frac{|\mathcal{P}|}{|\mathbf{k}|} = \frac{c\mathcal{U}}{c\omega} = \frac{\mathcal{U}}{\omega}. \quad (3.40)$$

Isto é, a proporcionalidade entre os módulos do momento linear e vetor de onda, assim como energia e frequência angular, é dada pela mesma constante, analogamente ao caso quântico onde o momento linear de um fóton é dado pela relação de De Broglie  $\mathcal{P} = \hbar\mathbf{k}$ .

### 3.4 Fótons em diferentes referenciais inerciais

Na introdução observamos a possibilidade, apontada pioneiramente pelas referências [3] e [8], de descrever adequadamente os estados quânticos de um fóton em estado puro usando os vetores de Riemann-Silberstein :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}_+(\mathbf{r}, t) &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2}}(\mathbf{E}_+(\mathbf{r}, t) + ic\mathbf{B}_+(\mathbf{r}, t)), \\ \boldsymbol{\psi}_-(\mathbf{r}, t) &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2}}(\mathbf{E}_-(\mathbf{r}, t) - ic\mathbf{B}_-(\mathbf{r}, t)). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Cada vetor descreve um diferente estado de polarização. Neste formalismo verificamos na introdução que os valores esperados da energia, momento linear e momento angular são dadas pelas equações (2.27) que são análogas às expressões clássicas (2.11) em notação spinorial.

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \int dV[\boldsymbol{\Psi}^\dagger \boldsymbol{\Psi}] = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV(|\mathbf{E}|^2 + |c\mathbf{B}|^2), \quad (\text{i}) \\ \mathcal{P} &= \frac{1}{2ic} \int dV[\boldsymbol{\Psi}^\dagger \times \boldsymbol{\Psi}] = \frac{\epsilon_0}{c} \int dV(\mathbf{E}^* \times c\mathbf{B}). \quad (\text{ii}) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Nessas equações

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_+(\mathbf{r}, t) \\ \boldsymbol{\psi}_-(\mathbf{r}, t) \end{bmatrix}.$$

Discutimos que essa semelhança pode ser ilusiva já que as expressões (2.11) e (3.42) tem significados diferentes. As primeiras representam a energia e momento linear clássico do feixe. As últimas representam os valores esperados da energia e momento linear de um fóton.

Essa divergência de interpretações pode ser melhor explicitada se considerarmos um experimento imaginário: suponha um feixe composto de fótons todos preparados em um mesmo estado, propagante na direção  $z$ . Suponha que não integremos a energia no espaço inteiro, mas em uma caixa retangular com profundidade infinita (direção  $z$ ), porém, largura e altura com tamanhos  $\Delta x$  (direção  $x$ ) e  $\Delta y$  (direção  $y$ ).

Nestas condições ambas as equações (2.11) e (3.42), agora com os intervalos de integração definidos nos limites acima, fornecem o mesmo resultado para os valores esperados de energia e momento linear para o fóton e para o pulso clássico. Contudo, reduzindo-se os intervalos  $\Delta x$  e  $\Delta y$  as equações (2.11) sugerem que a energia e momento linear do feixe eletromagnético clássico convergem a zero continuamente quando o volume integrado converge a zero. Já as equações (3.42) sugerem que a *probabilidade* de que a energia e momento linear do fóton detectado seja bem sucedida converge a zero com o volume. Isto é, em um número grande de eventos detectaremos ou não o fóton com frequência relativa proporcional à porção do módulo quadrado da função de onda  $\Psi(x, y, z - ct)$  contida neste volume, porém, quando essas grandezas são detectadas seus valores são os mesmos que os medidos no volume infinito. Esse experimento imaginário ajuda a entender neste contexto os limites entre as descrições clássica e quântica da radiação eletromagnética. Observe que se o experimento é composto por um número arbitrariamente grande de eventos como os descritos acima, se no fim do experimento comparamos os resultados clássicos com os valores esperados

quânticos da energia e momento linear observamos que eles convergem aos mesmos valores. De forma que as equações (2.11) e (3.42) realmente implicam os mesmos resultados porém com interpretações diferentes.

Com essas ideias em mente vamos discutir os resultados alcançados nas seções anteriores e suas relações com uma interpretação quântica das expressões (3.42). Nas seções 3.1, 3.2 e 3.3 respectivamente, demonstramos que:

$$\begin{aligned}\bar{\varphi} &= \varphi; \\ \bar{\mathcal{U}} &= \gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}})\mathcal{U} \quad , \quad \bar{\omega} = \gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}})\omega; \\ |\bar{\mathcal{P}}| &= \gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}})|\mathcal{P}| \quad , \quad |\bar{\mathbf{k}}| = \gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}})|\mathbf{k}|;\end{aligned}\tag{3.43}$$

os pares de vetores  $(\mathcal{P}, \mathbf{k})$  e  $(\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathbf{k}})$ , tem a mesma direção.  $\bar{\varphi}$  e  $\varphi$  representam os estados de polarização do pulso percebido pelos referenciais  $\bar{\mathcal{R}}$  e  $\mathcal{R}$  respectivamente. Se observarmos de passagem que em mecânica quântica, no referencial  $\mathcal{R}$  os valores esperados da energia e momento linear se relacionam com a frequência angular e vetor de onda pelas equações:

$$\mathcal{U} = \hbar\omega \quad \text{e} \quad \mathcal{P} = \hbar\mathbf{k},\tag{3.44}$$

então concluímos que no referencial  $\bar{\mathcal{R}}$  essas relações são preservadas;

$$\bar{\mathcal{U}} = \hbar\bar{\omega} \quad \text{e} \quad \bar{\mathcal{P}} = \hbar\bar{\mathbf{k}}.\tag{3.45}$$

Observe que essas relações são todas compatíveis com a interpretação quântica das equações (3.42), de valores esperados da energia e momento linear. Observe que a polarização do fóton é invariante sob transformações de Lorentz pois a helicidade do fóton não muda de sentido em nenhum referencial inercial [4].

A relação entre os resultados clássicos analogamente aos valores esperados quânticos são preservadas por uma transformação de Lorentz. Observamos novamente que a conservação dessa proporcionalidade entre energia e



frequência angular, momento linear e vetor de onda do feixe não são intuitivos do ponto de vista da teoria eletromagnética.

## Capítulo 4

# Conclusões

Neste trabalho analisamos a polarização, energia e momento linear da radiação eletromagnética em diversos referenciais inerciais. Abrimos mão de assumir uma forma funcional fixa para o pulso eletromagnético para trabalharmos com um conjunto de requisitos físicos em prol de uma maior generalidade.

Verificamos na seção 3.1 que a polarização apresenta uma mudança na direção do seu eixo quando observado em outro referencial inercial que aparece devido à mudança na direção de propagação do feixe entre referenciais inerciais, mas não é possível uma alteração em sua natureza, em especial a polarização circular se apresentará circular em qualquer referencial inercial e a polarização elíptica conserva sua excentricidade em qualquer referencial, porém, os eixos podem sofrer uma rotação que depende do novo referencial.

Na seção 3.2 analisamos comportamento da energia do pulso em diferentes referenciais inerciais e comparamos com o comportamento da frequência angular. Verificamos que uma relação do tipo  $\mathcal{U}/\omega$  é invariante sob

transformações de Lorentz e, portanto, uma relação linear entre energia e frequência angular para o pulso clássico também é compatível com a teoria da relatividade.

Na seção 3.3 analisamos o momento linear sob transformações de Lorentz e comparamos com o vetor de onda. Verificamos que analogamente às relações entre energia e momento linear, há uma relação entre essas grandezas que permanece invariante sob mudanças de referenciais inerciais:  $|\mathcal{P}|/|\mathbf{k}|$ . Portanto, uma relação linear entre o momento linear e o vetor de onda de pulsos clássicos é compatível com a teoria da relatividade. Verificamos ainda que, analogamente a fótons, a constante de proporcionalidade é igual para as duas razões.

Na seção 3.4 procuramos uma conciliação entre os resultados obtidos nas subseções anteriores e a mecânica quântica baseada na correspondência e interpretação das expressões pertinentes. Concluimos que os resultados sintetizados nos parágrafos acima, embora não triviais, decorreram de maneira simples e intuitiva da utilização do formalismo de função de onda de fótons.

Esperamos que este trabalho possa auxiliar na compreensão das propriedades quânticas e relativísticas da radiação eletromagnética e também que estes resultados possam tornar-se úteis em uma teoria da informação quântica.

# Bibliografia

- [1] Leslie E Ballentine. *Quantum mechanics: A modern development*. World Scientific, 1998.
- [2] Leonard Mandel and Emil Wolf. *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge University Press, 1995.
- [3] JE Sipe. Photon wave functions. *Physical Review A*, 52(3):1875, 1995.
- [4] Iwo Bialynicki-Birula. The photon wave function. In *Coherence and Quantum Optics VII*, pages 313–322. Springer, 1996.
- [5] David Jeffrey Griffiths and Reed College. *Introduction to electrodynamics*, volume 3. Prentice Hall Upper Saddle River, 1999.
- [6] Richard P Feynman. Feynman lectures on physics. volume 2: Mainly electromagnetism and matter. *Reading, Ma.: Addison-Wesley, 1964*, edited by Feynman, Richard P.; Leighton, Robert B.; Sands, Matthew, 1964.
- [7] John David Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, 1999.
- [8] Iwo Bialynicki-Birula. On the wave function of the photon. *Acta Physica Polonica-Series A General Physics*, 86(1):97–116, 1994.
- [9] Brian J Smith and MG Raymer. Photon wave functions, wave-packet

- quantization of light, and coherence theory. *New Journal of Physics*, 9(11):414, 2007.
- [10] MG Raymer and Brian J Smith. The maxwell wave function of the photon. In *Optics & Photonics 2005*, pages 293–297. International Society for Optics and Photonics, 2005.
- [11] Iwo Bialynicki-Birula. Photon as a quantum particle. *Acta Physica Polonica-Series B*, 37(3):935, 2006.
- [12] Franz Schwabl. *Advanced quantum mechanics*. Springer Science & Business Media, 2005.
- [13] Theodore Duddell Newton and Eugene P Wigner. Localized states for elementary systems. *Reviews of Modern Physics*, 21(3):400, 1949.
- [14] Lew Landau and Rudolf Peierls. Quantenelektrodynamik im konfigurationsraum. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 62(3):188–200, 1930.
- [15] Wolfgang Pauli. *General principles of quantum mechanics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [16] Andrew M Steane. *Relativity made relatively easy*. Oxford University Press, 2012.
- [17] Michael Paul Hobson, George P Efstathiou, and Anthony N Lasenby. *General relativity: an introduction for physicists*. Cambridge University Press, 2006.
- [18] James Stewart. *Cálculo*. v. 2, 4ª edição. *São Paulo: Thompson*, 2004.
- [19] AB Arons and MB Peppard. Einstein’s proposal of the photon concept—a translation of the annalen der physik paper of 1905. *American Journal of Physics*, 33(5):367–374, 1965.