

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE POS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

RAMON DORNELAS SOARES

**ESTUDO E ANÁLISES DO MLPG APLICADO A
PROBLEMAS ELETROMAGNÉTICOS DE CORPOS
DE REVOLUÇÃO**

TESE DE DOUTORADO

ORIENTADOR: PROF. DR. FERNANDO J. S. MOREIRA
COORIENTADOR: PROF. DR. RENATO C. MESQUITA
COORIENTADOR: PROF. DR. DAVID A. LOWTHER

Belo Horizonte
Fevereiro 2014

RAMON DORNELAS SOARES

**ESTUDO E ANÁLISES DO MLPG APLICADO A
PROBLEMAS ELETROMAGNÉTICOS DE CORPOS
DE REVOLUÇÃO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

ORIENTADOR: PROF. DR. FERNANDO J. S. MOREIRA

COORIENTADOR: PROF. DR. RENATO C. MESQUITA

COORIENTADOR: PROF. DR. DAVID A. LOWTHER

Belo Horizonte

Fevereiro 2014

Dedicatória

Ao meu bom Deus que sempre faz o melhor por mim e por minha família.

Aos meus pais Antônio e Marlei por todos os ensinamentos que recebi ao longo de minha vida, por estarem presentes nos momentos importantes da minha vida com carinho, dedicação e amor.

Ao meu irmão Romero e às minhas sobrinhas Letícia e Lavínia pelos momentos de divertimento e de alegria.

Aos meus padrinhos Mozart e Vitória por sempre ter torcido muito pelo meu sucesso.

Às memórias de minha tia Maria do Carmo e de minha avó Tereza que não mediram esforços para ajudar meus pais em minha educação.

Agradecimentos

Agradeço a meus pais pela compreensão com os diversos momentos que me ausentei durante o transcorrer deste trabalho.

Aos Professores Fernando, Renato e David por toda dedicação e valiosas orientações, que foram de suma importância na elaboração deste trabalho.

Ao programa de pós-graduação em engenharia elétrica (PPGEE) por toda sua estrutura de trabalho.

Ao convênio CAPES/DFAIT, entre os governos brasileiro e canadense, pelo suporte financeiro.

*“You may never know what results come of your action,
but if you do nothing there will be no results.”
“Be the change you want to see in the world.”*

Mahatma Gandhi

Resumo

Este trabalho combina, pela primeira vez, análises eletromagnéticas de problemas axialmente simétricos com métodos sem malha, os quais são, relativamente, novos e, apenas recentemente, vêm sendo utilizados como uma ferramenta para a obtenção de soluções numéricas em engenharia. Os problemas eletromagnéticos com simetria axial foram estudados no passado usando outros métodos numéricos, tais como métodos dos momentos, dos elementos finitos e das diferenças finitas. Entretanto, o objetivo neste trabalho é construir implementações de métodos sem malha, consolidando-os como uma alternativa para prover soluções numéricas para estes problemas. O método escolhido é o MLPG (*meshless Local Petrov-Galerkin*) que, em sua versão original, não requer nenhum tipo de grade ou malha para a construção da solução aproximada. Todavia neste trabalho é acrescida uma malha de fundo que traz mais estabilidade ao método, principalmente em distribuições de nós não uniformes que possuem uma grande variação de densidade. O MLPG também é conhecido por produzir matrizes esparsas como resultado de sua análise local.

O MLPG é aplicado em problemas eletromagnéticos axialmente simétricos, sendo, primeiramente, analisados problemas em que os campos também possuem simetria axial, como a análise de um monopolo sobre um plano condutor elétrico perfeito excitado por um guia coaxial operando em modo TEM e a análise de uma cavidade ressonante. Estas análises propiciaram avaliar a precisão, a convergência e a estabilidade do método. Uma técnica para a abordagem de problemas eletromagnéticos axialmente simétricos em que os campos não apresentam simetria axial também é apresentada e dois resultados preliminares desta são mostrados.

Palavras-chave: Corpos de Revolução, Eletromagnetismo,
Métodos sem Malha, MLPG.

Abstract

This work combines, for the first time, axisymmetric electromagnetic analyses with meshless methods, which are relatively new and have only recently been applied as a tool for the obtention of numerical solutions in engineering. Electromagnetic problems with axial symmetries have successfully been studied in the past using other numerical methods such as the Method of Moments and the Finite Element Method. However, the objective here is to develop simple and efficient meshless implementations, consolidating meshless methods as an excellent way to provide numeric solutions to these problems. These tasks are performed considering the Meshless Local Petrov Galerkin method. It does not require any type of grid or mesh for the construction of the approximate solution. However, this work is added a background mesh that gives more stability to the method, especially in non-uniform nodes distribution that have a large variation in density. The MLPG is also known to produce sparse matrices as a result of a local analysis.

MLPG is applied in electromagnetic problems with axial symmetry, being, first analyzed, problems in which fields also have axial symmetry, such as the analysis of a monopole over a perfect electric conductor plane excited by a coaxial guide operating in TEM mode and the analysis of a resonant cavity, a coaxial one. These analyses are propitiated to evaluate the accuracy, the convergence and stability of the method. One technique for addressing electromagnetic problems with axial symmetry in which the fields do not have axial symmetry is also presented and two preliminary results are shown.

Keywords: Body of revolution, electromagnetism, meshless methods, MLPG, LPIM.

Índice

Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	x
Lista de Abreviações	xi
Lista de Símbolos	xiii
1 Introdução	1
1.1 Apresentação	1
1.2 Objetivo e Contribuições	5
1.3 Organização do Texto	6
2 MLPG proposto	8
2.1 Definições Básicas dos Métodos sem Malha e a Escolha da Função de Forma RPIMp	8
2.2 Determinação do Domínio de Suporte, Planos Propostos: T6 Modificado e T8	11
2.3 Aproximação e Função de Forma do RPIMp	15
2.4 Função Teste, Formato do Domínio de Teste e a Construção da Forma Fraca Local	19
2.5 Considerações Finais Deste Capítulo	22
3 Análise de Problemas Eletromagnéticos Axialmente Simétricos com Campos Invariantes em ϕ	23
3.1 Equações: Forma Forte e Forma Fraca Globais	24
3.2 Forma Fraca Local e o Sistemas de Equações	28
3.3 Desempenho do MLPG Proposto no Estudo de uma Cavidade Axialmente Simétrica	30
3.3.1 Resultados	31
3.4 Análise de um Monopolo Verticalmente Posicionado sobre um Plano PEC	38

3.4.1	Resultados	42
3.5	Análise de um Monopolo Verticalmente Posicionado sobre um Plano PEC e Parcialmente Coberto por um Dielétrico	43
3.5.1	Método de Visibilidade	46
3.5.2	Resultados	48
3.6	Considerações Finais deste Capítulo	51
4	Análise de Problemas Eletromagnéticos Axialmente Simétricos com Variação do Campo em ϕ	54
4.1	Representação das Componentes de \vec{E} e \vec{H} com as Variações em ϕ Descritas por uma Série de Fourier	55
4.2	Forma Fraca Local	57
4.3	Análise de uma Onda Plana Incidindo sobre uma Esfera Metálica	62
4.3.1	Condições de Contorno do Problema Proposto	62
4.3.2	Construção do Sistema de Equações Lineares	65
4.4	Resultados	70
4.4.1	Resultados para a Esfera de Raio $0,5\lambda$	71
4.4.2	Resultados para a Esfera de Raio $0,02\lambda$	72
4.5	Considerações Finais deste Capítulo	79
5	Considerações Finais e Trabalhos Futuros	80
5.1	Considerações Finais	80
5.2	Trabalhos Futuros	81
	Referências Bibliográficas	83
A	Estratégias Adotadas para Minimizar o Tempo de Processamento do MLPG Proposto	87
B	Construção das malhas usadas na análise da cavidade coaxial	90
C	Desenvolvimento da Forma Forte Vetorial	94
D	Desenvolvimento da RBC Bayliss-Turkel para 3 Dimensões	97

Lista de Figuras

1.1	Representação de domínios segundo o FDM e o FEM	2
1.2	Representação do domínio segundo os métodos sem malha.	3
2.1	Representação do domínio Ω segundo os métodos sem malha e de seu contorno Γ em um dos semiplanos $\rho - z$ de ϕ	9
2.2	Formatos diferentes para domínios de suporte de pontos \mathbf{x} , segundo os métodos sem malha.	11
2.3	Domínios de influência dos nós segundo os métodos sem malha	12
2.4	Esquema T6	13
2.5	Plano T4	14
2.6	Plano T2L	14
2.7	Plano T8 proposto	15
2.8	Domínios de teste dos nós i, j e k , segundo MLPG proposto.	22
3.1	Cavidade coaxial	26
3.2	Malhas de boa qualidade e de qualidade inferior	31
3.3	Distribuições de campos (ρH_ϕ) dos modos analisados da cavidade Coaxial.	32
3.4	Erros relativos do MLPG e FEM em função do número de nós para o autovalor k_2 usando malhas dos tipos A e B.	33
3.5	Erro relativo do MLPG e FEM usando malhas A e B para o segundo modo da cavidade coaxial em relação ao tempo.	36
3.6	Monopolo sobre um plano PEC	40
3.7	Malha para domínio Ω do monopolo, gerada pelo programa FEMM	41
3.8	Distribuição de corrente para um monopolo sobre um plano PEC com comprimento de 0.375λ	43
3.9	Segunda malha utilizada para o monopolo, gerada pelo programa FEMM	44
3.10	Impedância versus comprimento da antena, monopolo sobre um plano CEP	45
3.11	Monopólo sobre um plano PEC e com camada dielétrica	46

3.12	Método da visibilidade	47
3.13	Impedância de entrada versus comprimento da antena, monopolo sobre um plano CEP e com camada dielétrica $\epsilon_r = 2,2$	50
3.14	Impedância de entrada versus comprimento da antena, monopolo sobre um plano CEP e com camada dielétrica $\epsilon_r = 5,6$	51
3.15	Distribuição de corrente normalizada para um monopolo sobre um plano PEC com comprimento de 0.375λ e com uma camada dielétrica de permissividades	52
4.1	Espalhamento de uma onda plana sobre uma esfera PEC	63
4.2	Malha usada no problema do espalhamento	65
4.3	Espalhamento de uma onda plana, por uma esfera PEC. Distribuição de campo $ E\phi $ para o plano $\phi = \pi/4$	72
4.4	Espalhamento de uma onda plana, por uma esfera PEC. Distribuição de campo $ H\phi $ para o plano $\phi = \pi/4$	73
4.5	Espalhamento de uma onda plana, por uma esfera PEC. Distribuição de campo para o plano $\phi = \pi/4$ e para o percurso de ρ no intervalo (1,5) com $z = 0$	74
4.6	Espalhamento de uma onda plana, por uma esfera PEC. Distribuição de campo $ E\phi $ para o plano $\phi = \pi/4$	75
4.7	Espalhamento de uma onda plana, por uma esfera PEC. Distribuição de campo $ H\phi $ para o plano $\phi = \pi/4$	76
4.8	Espalhamento de uma onda plana, por uma esfera PEC. Distribuição de campo para o plano $\phi = \pi/4$ e para o percurso de ρ no intervalo (1,5) com $z = 0$	77
4.9	Segunda malha usada para a análise do espalhamento de uma onda plana por uma esfera PEC, a qual possui 476 nós.	78
4.10	Espalhamento de uma onda plana, por uma esfera PEC. Distribuição de campo para o plano $\phi = \pi/4$ e para o percurso de ρ no intervalo (1,5) com $z = 0$	78
A.1	Domínio de suporte para pontos x de um mesma (a) célula ou (b) aresta.	88
A.2	Célula ou área de integração comum à três domínios de teste.	88
A.3	Aresta ou contorno de integração comum à dois domínios de teste.	89
B.1	Malha de boa qualidade com maior espaçamento vertical e horizontal entre nós, igual a 0.25m ($spc = 1/4$ [m]).	90
B.2	Malhas de boa qualidade com espaçamentos de: (a) $spc = 1/8$ [m] e (b) $spc = 1/16$ [m].	91

B.3	Malha de má qualidade com maior espaçamento horizontal entre nós 0.25m ($spc_h = 1/4$ [m]).	92
B.4	Malhas de má qualidade com maior espaçamento horizontal entre nós: (a) $spc_h = 1/8$ [m] e (b) $spc_h = 1/16$ [m].	93

Lista de Tabelas

3.1	Número de onda ressonante $k(\text{rad/m})$ de uma cavidade coaxial e sua correspondente notação TM_{npq} segundo [Harrington, 1961]. Soluções numéricas do MLPG e do FEM usando a Malha-A. . . .	33
3.2	Diferença média de níveis em escala logarítmica.	34
3.3	Taxas de Convergência do MLPG e do FEM.	35
3.4	Tempo total para resolver o problema (segundos) \times número de nós.	36
3.5	Diferença média de níveis em escala logarítmica em relação ao tempo.	37

Lista de Abreviações

EFG: *Element Free Galerkin*

FEM: *Finite Element Method*

FDM: *Finite Difference Method*

FPM: *Finite Point Method*

MLPG: *Meshless Local Petrov-Galerkin*

MLS: *Moving Least Squares*

MoM: *Methods of Moments*

PDE: *Partial Diferencial Equation*

PEC: *Perfect Eletric Conductor*

PIM: *Point Interpolation Method*

RBF: *Radial Base Function*

RBC: *radiation boundary condition*

RPIM: *Radial Point Interpolation Method*

RPIMp: *Radial Point Interpolation Method with Polinomial Reproduction*

RKPM: *Reproducing Kernel Particule Method*

TM: *Transversal Magnética*

TE: *Transversal Elétrica*

SPH: *Smooth Particle Hydrodynamic*

Lista de Símbolos

- ϕ : Coordenada do sistema cilíndrico.
 z : Coordenada do sistema cilíndrico.
 Ω : Domínio computacional do Problema.
 Γ : Contorno do Domínio Computacional.
 x_i : Posição de um nó i no semiplano $\rho - z$.
 \vec{E} : Fasor do campo elétrico [Volts/m].
 \vec{H} : Fasor do campo magnético [Amperes/m].
 m : Representa os harmônicos que o campo eletromagnético é decomposto.
 x : Posição no semiplano $\rho - z$ onde é construída uma aproximação local u^h .
 u : Função ou incógnita da equação diferencial parcial.
 u^h : Aproximação local de uma função u em um ponto x .
 n : Número de nós de um domínio de suporte do ponto x , tamanho do subconjunto $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$.
 n_t : Número total de nós do domínio computacional do problema.
 S : Subconjunto de nós do domínio de suporte do ponto x .
 u_{s_i} : Parâmetro nodal correspondente ao nó s_i contido no domínio de suporte do ponto x .
 Ω_s : Domínio de suporte do ponto x .
 nu : Vetor que contém todos os n parâmetros nodais pertencentes ao domínio de suporte do ponto x .
 $\varphi_{s_i}(x)$: Função de forma do nó s_i , a qual é determinada usando-se todos os n nós do domínio de suporte Ω_s do ponto x .
 $n\Phi^T(x)$: Vetor que contém todas as funções de forma dos n nós de Ω_s .
 R_{s_i} : Função de base radial referente ao nó s_i .
 a_{s_i} : Coeficiente das funções de base radial R_{s_i} .
 \mathbf{R} : Vetor que contém todas as RBFs R_{s_i} relativas aos nós de suporte de \mathbf{x} .
 p_j : Monômio da base polinomial.
 b_j : Coeficiente do monômio p_j da base polinomial.
 \mathbf{p} : Vetor que contém, normalmente, monômios p_j de baixa ordem para garantir completeza da aproximação.
 p_c : Parâmetro da função de base radial *Multiquadrics*

- p_q : Parâmetro da função de base radial *Multiquadrics*
- g_p : Grau do polinômio \mathbf{p}
- \mathbf{a} : Vetor que contém os coeficientes a_{s_i} .
- \mathbf{b} : Vetor que contém os coeficientes b_j .
- u_k : Valor da função u no nó k
- \mathbf{R}_Q : Matriz de momentos de RBFs.
- \mathbf{P}_m : Matriz de momentos de polinômios.
- \mathbf{G} : Matriz composta por matrizes \mathbf{R}_Q e \mathbf{P}_m .
- \mathbf{S}_a : Matriz construída usando a matriz \mathbf{P}_m e a inversa da matriz \mathbf{R}_Q .
- \mathbf{S}_b : Matriz construída usando a matriz \mathbf{P}_m e a inversa da matriz \mathbf{R}_Q .
- g : Potencial prescrito de u no contorno Γ_g .
- h : Derivada normal do potencial prescritos de de u no contorno Γ_h .
- Γ_g : Parte do contorno global Γ em que é estabelecida a condição de Dirichlet ao potencial u .
- Γ_h : Parte do contorno global Γ em que é estabelecida a condição de Neumann ao potencial u .
- ψ_j : Função de teste centrada no nó j .
- Γ^j : Contornos do nó j
- Ω^j : Domínio do nó j
- r_j^i : Raio de influência do nó i

Capítulo 1

Introdução

1.1 Apresentação

Nas últimas décadas, as técnicas computacionais têm sido empregadas como importantes ferramentas no projeto e desenvolvimento de sistemas na engenharia. Estas técnicas são utilizadas na simulação de diferentes problemas físicos. Neste trabalho, os problemas analisados são eletromagnéticos, os quais são governados por equações diferenciais parciais (*Partial Differential Equation-PDE*) baseadas nas equações de Maxwell e pelas condições de contorno, definidas em uma geometria específica. Estes problemas, dependendo da complexidade da geometria ou propriedades específicas do meio sob análise, podem possuir uma solução analítica ou esta ser inviável, fazendo com que uma solução computacional obtida por métodos numéricos torne-se imprescindível.

Dentre os diversos métodos numéricos utilizados em problemas eletromagnéticos se destacam os Métodos dos Momentos (*Methods of Moments-MoM*) [Harrington, 1993] e [Gibson, 2008], das Diferenças Finitas (*Finite Difference Method-FDM*) [Taflove and Hagness, 2000] e dos Elementos Finitos (*Finite Element Method-FEM*) [Jin, 2002]. Já os Métodos sem Malha (*Meshless Methods*), empregados neste trabalho, têm sido utilizados, recentemente, em alguns problemas eletromagnéticos, tais como: distribuições de campo elétrico e magnético em máquinas elétricas [Coppoli et al., 2012], análise de propagação de ondas eletromagnéticas [Correa et al., 2011], espalhamento de ondas eletromagnéticas [Nicomedes et al., 2010] e [Manzin and Bottauscio, 2008], ressonância eletromagnética [Soares et al., 2011a], [Soares Jr, 2013] e [Kaufmann et al., 2010], técnica para o tratamento de descontinuidades em meios dielétricos [Lima et al., 2012] e análise de cristais fotônicos [Nicomedes et al., 2012].

Nos métodos FDM e FEM, a representação do domínio do problema é construída usando uma malha, a qual é composta por um conjunto de nós conectados

seguindo um padrão específico. Cabe enfatizar que esta malha é imprescindível nestes métodos, estabelecendo a relação de conectividade entre os nós.

O FDM usa uma malha estruturada, conhecida como grade, a qual pode ser observada na Figura 1.1a. Neste tipo de malha, torna-se simples determinar os nós vizinhos a um determinado nó i , pois os nós do domínio são organizados de forma sistemática. Entretanto, a malha não se adapta facilmente às geometrias que possuem contornos curvos ou mesmo contornos retos que contenham inclinações. No FEM, a malha é constituída de elementos, os quais podem assumir diferentes geometrias. Todavia as geometrias mais utilizadas são triângulos para problemas em duas dimensões (2D) (ver Figura 1.1b) e tetraedros para problemas em três dimensões (3D). A malha do FEM não é estruturada e consegue se adequar bem a geometrias com contornos curvos ou retos com inclinações. Todavia, o FEM exige malhas de boa qualidade. Caso a malha contenha elementos mal formados¹, o FEM pode ter a precisão de seus resultados numéricos afetada. Atualmente, malhas em duas dimensões de boa qualidade podem ser obtidas por diversos geradores. Entretanto, a geração automática de malhas de boa qualidade em 3D exige muito tempo de processamento e, normalmente, requer algum tipo de intervenção humana [Idelsohn and Onate, 2006].

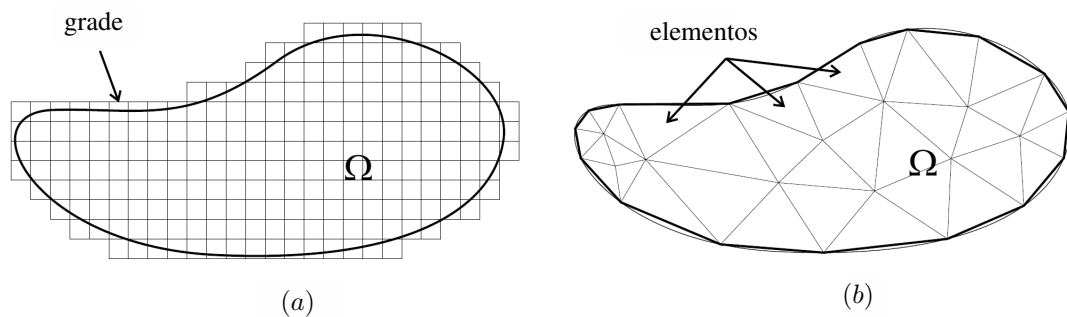


Figura 1.1: Representação de domínios: (a) malha estruturada, FDM; (b) malha não estruturada, FEM. Figura retirada de [Fonseca., 2011].

Já a representação do domínio segundo o MoM apresenta uma grande diferença ao ser comparado com o domínio dos métodos FDM e FEM. Esta principal diferença reside no fato que o MoM não requer a implementação da região do domínio composta por espaço livre ou dielétricos. Este fato se deve ao método satisfazer à condição de radiação através utilização da função de Green. Isto propicia que problemas específicos, em geral problemas contendo o espaço livre e materiais impenetráveis ou homogêneos, possam ser analisados com uma dimensão a menos que os problemas implementados com FEM [Jin, 2002] ou com

¹elementos triangulares mal formados apresentam um ângulo interno próximo a 180 graus.

FDM. Entretanto, devido à utilização da função de Green, torna-se necessário, ao se empregar o método, lidar com singularidades durante o procedimento de integração.

Em alguns trabalhos com método dos momentos, como o apresentado na Seção 2.5 de [Peterson et al., 1997], o qual analisa o problema de uma onda transversal magnética (TM) espalhada por um cilindro não homogêneo, faz-se necessária a construção de uma malha para representar a geometria do problema. As malhas usadas no método dos momentos são formadas por células, as quais podem assumir diferentes geometrias. No estudo apresentado em [Peterson et al., 1997], foi utilizado o formato quadrado para as células, resultando em uma malha semelhante a usada em FDM, a qual também não se adapta a geometrias com contornos curvos ou retos com inclinações. Em [Gibson, 2008], são empregados formatos triangulares para as células, propiciando uma maior adequação da malha à geometria do problema. Na referência [Gibson, 2008] também são relatadas exigências de qualidade para as malhas empregadas no MoM constituídas de células triangulares.

Os métodos sem malha propiciam a solução do problema sem o estabelecimento de uma grade ou malha. Nestes métodos, o domínio é representado por nós, os quais são espalhados arbitrariamente em seu interior e em seu contorno. Este conjunto de nós não constituem uma grade, não existindo qualquer tipo de conexão entre eles [Liu, 2009] (ver Figura 1.2). Entretanto, em análises de problemas de irradiação de ondas eletromagnéticas, tanto para os métodos sem malha quanto aos métodos FEM e FDM adota-se uma condição de contorno absorvente. Esta condição, construída computacionalmente, simula um domínio ilimitado, sendo comumente utilizada tanto para os métodos sem malha quanto o FEM a *Radiation Boundary Condition* (RBC).

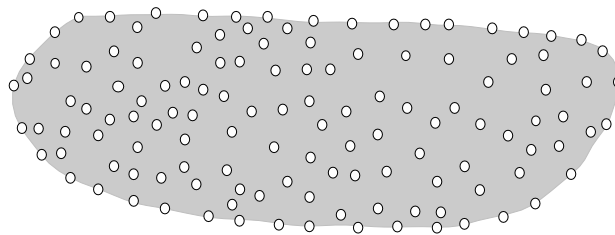


Figura 1.2: Representação do domínio segundo os métodos sem malha.

Os métodos sem malhas podem ser classificados em duas categorias: métodos baseados em forma forte e métodos baseados em forma fraca. Os primeiros usam técnicas de colocação para obter as equações algébricas diretamente das PDE que governam o problema sob análise. Desta maneira, estes métodos pos-

suem uma implementação simples e são eficientes na perspectiva computacional. Entretanto eles geralmente são instáveis, não robustos e imprecisos [Liu, 2009]. Pode ser citado como métodos de forma forte o *Finite Point Method* (FPM), o *Smoothed Particle Interpolation* (SPI) e o *Radial Point Interpolation Method* (RPIM). Algumas análises recentes com métodos de forma forte usando técnicas de colocação são apresentadas em [Shaterian et al., 2012],[Kaufmann et al., 2010] e [Ala et al., 2006].

Já para os métodos de forma fraca faz-se necessário a construção de uma equação integro-diferencial. Esta equação, referida como forma fraca, é obtida usando o métodos dos resíduos ponderados [Liu, 2009]. Logo em seguida, são obtidas as equações algébricas usando o método de Galerkin ou de Petrov-Galerkin. O *Element Free Galerkin* (EFG) [Lu and Belytschko, 1994] usa uma formulação fraca global, a qual deve ser satisfeita em todo o domínio. Este método, usado por [Manzin and Bottauscio, 2008], em análises de problemas de espalhamento, requer uma grade para execução da integração numérica. Ao contrário, o *Meshless Local Petrov-Galerkin* (MLPG) [Atluri and Zhu, 1998], usado neste trabalho, não requer qualquer tipo de grade ou malha. Todavia uma malha de fundo também pode ser utilizada, o que torna o método mais eficiente computacionalmente, exigindo menor tempo para construção do sistema de equações algébricas, o qual conduz, depois de resolvido, à solução numérica do problema.

A escolha do método MLPG dentre os métodos sem malha presentes na literatura, para ser utilizado neste trabalho, se deve, principalmente, as características particulares do método. Primeiramente, o MLPG é um método de forma fraca, possui mais estabilidade, precisão e robustez quando comparado aos métodos de colocação [Liu, 2009]. Faz-se também necessário afirmar que o MLPG é um método de análise local, diferentemente do EFG que é global. Isto significa que a forma fraca do MLPG é satisfeita localmente, nas proximidades dos nós do domínio do problema, o que simplifica o procedimento de integração o que simplifica o procedimento de integração, não sendo necessária a utilização de uma malha de fundo.

Neste trabalho, as análises apresentadas são construídas com uma malha de fundo. Esta estratégia visa, principalmente, a obtenção de soluções mais estáveis para distribuições não regulares dos nós, tal como as utilizadas nas análises apresentadas nas Seções 3.4 e 3.5, onde as distribuições de nós possuem elevadas variações de densidade. Além disso, esta estratégia torna a implementação mais simples e ágil na perspectiva computacional. Isto possibilitou a equiparação do método ao FEM, o qual é conhecido por suas elevadas taxas de convergência e por sua agilidade (pequeno tempo de processamento). Esta análise, apresentada na Seção 3.3, equipara os desempenhos computacionais entre MLPG e FEM na perspectiva da convergência e do tempo de processamento.

1.2 Objetivo e Contribuições

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver o formalismo necessário para a análise de problemas eletromagnéticos com simetria axial usando métodos sem malha, mais especificadamente, o método MLPG. Um segundo objetivo, que também tornou-se relevante, foi adotar medidas que pudessem ser acrescentadas ao método para que o mesmo apresente-se maior estabilidade para distribuições de nós não regulares. Neste sentido, optou-se por adicionar uma malha de fundo que, diferentemente da utilizada pelo FEM, não apresenta exigências de qualidade, podendo existir elementos mal formados sem que isto implique na perda de precisão do método.

Durante o desenvolvimento deste trabalho foram propostas novas estratégias que tornaram o método ainda mais estável e ágil, tais como a determinação, a partir da malha de fundo, dos domínios de teste² e de suporte³ de um ponto qualquer no domínio. Outra importante contribuição foi a utilização de uma combinação de formulações axissimétricas, apresentadas no Capítulo 4, que possibilitaram a utilização do MLPG de forma eficiente em análises de problemas em três dimensões (3D) sem o desenvolvimento de um formalismo vetorial. O formalismo proposto reduziu o número de incógnitas (componentes de campo) de 3 para 2, diminuindo o tamanho do sistema de equações e simplificando a imposição das condições de contorno.

As análises axialmente simétricas são possíveis desde que as características do meio em questão (permissividade e permeabilidade) sejam invariantes na direção ϕ , ou seja, que o meio analisado possa ser obtido simplesmente pela rotação de uma curva geratriz em torno de um eixo de simetria (análises de cavidades e guias de onda) ou pelas rotações da curva geratriz e da curva da condição absorvente (problemas de irradiação de ondas eletromagnéticas). Estas estruturas são conhecidas como corpos de revolução ou estruturas de simetria axial. Nestes desenvolvimentos, assume-se que o eixo de simetria coincide com o eixo z do sistema de coordenadas cilíndricas. Em sequência, uma série de Fourier em ϕ é utilizada para desmembrar a análise de um problema 3D em análises de duas dimensões com equações independentes para cada harmônico.

Na primeira metade deste trabalho, foi desenvolvido um formalismo para análise de casos específicos de problemas eletromagnéticos com simetria axial, nos quais o campo eletromagnético não varia com a coordenada cilíndrica ou esférica ϕ . Nestes casos, o estudo se reduz à análise do campo eletromagnético de um único semiplano ρ - z dentre os diversos possíveis para valores de ϕ pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$, haja visto que para os demais semiplanos ρ - z o

²Região próxima ao nó, onde a integração da forma fraca local é realizada.

³Região utilizada na construção da aproximação necessária à obtenção do sistemas de equações, o qual, depois de resolvido, fornece a solução numérica do problema analisado.

campo eletromagnético apresenta comportamento idêntico. Deve-se destacar que estas análises geraram 3 artigos publicados em congressos: [Soares et al., 2012], [Soares et al., 2011c] e [Soares et al., 2011b]. Neste período, também foi publicado em um artigo em periódico [Soares et al., 2011a]. Estas análises foram construídas sem a utilização de uma malha de fundo.

Durante a obtenção dos resultados numéricos [Soares et al., 2011c] e [Soares et al., 2012], verificou-se uma certa dependência destes com a distribuição de nós usada, a qual possuía uma alta variação na densidade de nós. Este fato levou, em uma segunda fase do trabalho, ao estudo de possibilidades que tornassem o método mais estável para distribuições de nós com elevada variação de densidade e trouxessem mais estabilidade aos problemas analisados. Esta pesquisa conduziu à utilização de uma malha de fundo. Esta nova estratégia culminou na publicação do artigo em congresso [Soares et al., 2013], onde o método proposto, mais ágil e estável, teve sua convergência e tempo de processamento comparados ao FEM. Estes resultados também geraram um artigo aceito para publicação em periódico [Soares et al., 2014].

As técnicas propostas em [Soares et al., 2013] foram aplicadas ao estudo de um monopolo sobre um plano Condutor Elétrico Perfeito (*Perfect Electric Conductor-PEC*), problema que também possui campo eletromagnético com simetria axial. Em sequência, usando as mesmas proposições anteriores no que se refere ao formalismo adotado para o métodos sem malha, foi analisado um problema que não possui campos com simetria axial, ou seja, em que os campos variam também com a coordenada ϕ . O problema analisado foi o espalhamento de uma onda plana por uma esfera PEC.

1.3 Organização do Texto

No Capítulo 2, são apresentados os procedimentos gerais aos métodos sem malha e outros específicos para as análises usando o MLPG, como a determinação do domínio de suporte e do domínio de teste utilizando informações da malha de fundo. Nesta oportunidade, também são detalhados o procedimento de construção das funções de forma *Radial Point Interpolation Method with Polynomial Reproduction* (RPIMp) e suas derivadas, as quais são usadas pelo MLPG para a obtenção do sistema de equações. O capítulo é finalizado com a escolha da função de teste adotada nas análises. Esta função é necessária para a construção da forma fraca usando o método dos resíduos ponderados.

O Capítulo 3 apresenta a equação diferencial parcial (*partial differential equation-PDE*) que governa os problemas eletromagnéticos sob análise, problemas com simetria axial e nos quais o campo eletromagnético não varia com a

coordenada ϕ . A PDE é obtida à partir da equação de Helmholtz assumindo que campo eletromagnético é invariante com a coordenada ϕ . A partir desta equação, são obtidas as formas fraca global e local, sendo esta última utilizada na implementação do MLPG. Ainda neste capítulo são apresentados dois estudos usando o método MLPG com o formalismo desenvolvido: as análises de uma cavidade axissimétrica e o estudo de um monopolo posicionado sobre um plano PEC. Na primeira análise, são obtidas numericamente as frequências de ressonância da cavidade, o que possibilitou, em sequência, analisar as taxas de convergência e o tempo de processamento do método, sendo estes resultados comparados aos obtidos com o FEM usando duas diferentes malhas: uma apenas com elementos de boa qualidade e outra composta parcialmente por elementos mal formados. Para o monopolo, foram determinadas sua corrente superficial e sua admitância de entrada, cujos resultados foram comparados aos presentes em [King, 1971], em [Shen and MacPhie, 1996] e aos obtidos com o FEM, evidenciando a precisão do procedimento proposto. Em sequência, uma versão diferente desta antena é analisada, a qual está parcialmente imersa em um dielétrico. Para esta análise, adiciona-se ao método proposto um critério de visibilidade, que possibilita o tratamento da interface. Este critério de visibilidade segue sugestões de [Lima et al., 2012].

No Capítulo 4 são realizadas análises de problemas axissimétricos onde os campos são invariantes com a coordenada ϕ . Para isto, são apresentados a forma fraca e o formalismo vetorial necessário para as análises destes problemas. Finaliza-se o capítulo referido analisando o espalhamento de uma onda plana por uma esfera PEC. Os resultados numéricos são apresentados para duas esferas com dimensões elétricas diferentes: uma com raio de $0,5\lambda$ e a outra com raio de $0,02\lambda$. A avaliação do método numérico usando duas dimensões diferentes deve-se ao não tratamento de uma singularidade presente na formulação. Esta singularidade não está presente em problemas com dimensões pequenas em relação ao comprimento de onda, localizando-se fora do domínio computacional destes. Esta estratégia possibilitou primeiramente mostrar a instabilidade numérica devido ao não tratamento da singularidade (problema com a esfera de raio de $0,5\lambda$) e depois avaliar com precisão o formalismo proposto (problema com a esfera de raio de $0,02\lambda$). O estudo e tratamento desta singularidade são propostos nos trabalhos futuros apresentados no Capítulo 5, no qual também estão presentes as considerações finais.

Capítulo 2

MLPG proposto

Neste capítulo são apresentados alguns procedimentos comuns aos métodos sem malha em geral e alguns sugeridos, tal como a escolha dos domínios de teste e de suporte. Os formalismos dos métodos sem malha apresentados neste capítulo são destinados a análises de problemas com simetria axial estudados nos Capítulos 3 e 4, onde as construções deste método são limitadas ao semiplano $\rho - z$.

2.1 Definições Básicas dos Métodos sem Malha e a Escolha da Função de Forma RPIMp

Nos métodos sem malha, os nós podem ser espalhados arbitrariamente sobre o domínio do problema Ω (nós internos) e sobre seu contorno Γ (nós de contorno), como ilustrado na Figura 2.1. A posição de um dado nó i é indicada por $\mathbf{x}_i = (\rho_i, z_i)$, representado em duas dimensões e no sistema de coordenadas cilíndricas. A cada um dos nós internos e de contorno é associada uma função de forma [Liu, 2009], a qual apresenta valores diferentes de zero em uma pequena região próxima ao nó. Estas funções possibilitam a construção de aproximações locais utilizadas na obtenção do sistema de equações e, em seguida, da solução numérica do problema.

A aproximação local u^h de uma função u em um ponto $\mathbf{x} = (\rho, z)$ qualquer pertencente ao domínio Ω é obtida segundo a expressão abaixo:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \varphi_{s_i}(\mathbf{x}) u_{s_i} = [\varphi_{s_1}(\mathbf{x}), \varphi_{s_2}(\mathbf{x}), \dots, \varphi_{s_n}(\mathbf{x})] \cdot \begin{bmatrix} u_{s_1} \\ u_{s_2} \\ \vdots \\ u_{s_n} \end{bmatrix} = \Phi^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} \quad (2.1)$$

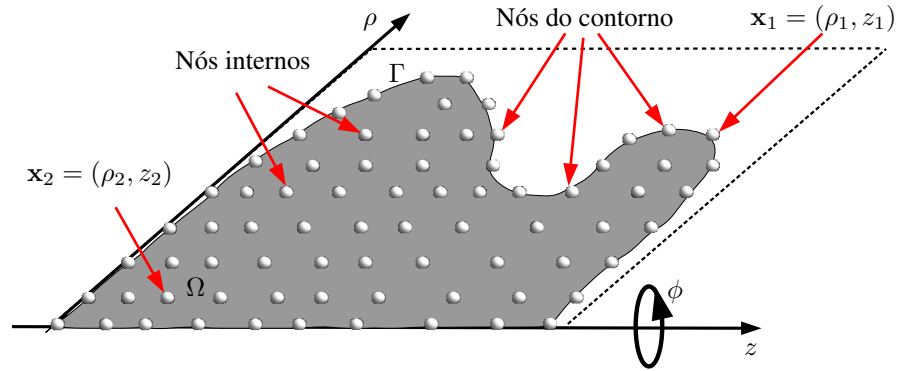


Figura 2.1: Representação do domínio Ω segundo os métodos sem malha e de seu contorno Γ em um dos semiplanos $\rho - z$ de ϕ .

na qual n é o número de nós do subconjunto $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, o qual está contido no conjunto de nós $\{1, 2, \dots, n_t\}$ do domínio Ω e de seu contorno Γ , sendo n_t o número total de nós deste conjunto. Os n nós de S são conhecidos como domínio de suporte \mathbf{x} , Ω_s . u_{s_i} representa o parâmetro nodal correspondente ao nó s_i contido no domínio de suporte Ω_s e o vetor \mathbf{u} contém todos os n parâmetros nodais pertencentes ao domínio de suporte do ponto \mathbf{x} . $\varphi_{s_i}(\mathbf{x})$ é a função de forma do nó s_i , a qual é determinada usando-se todos os n nós do domínio de suporte Ω_s ; o vetor $\Phi^T(\mathbf{x})$ contém todas as funções de forma dos n nós de Ω_s .

As funções de forma, utilizadas nos métodos sem malha para gerar as aproximações locais, podem ser construídas usando-se diferentes métodos, como o *Moving Least Squares* (MLS), o *Point Interpolation Method* (PIM), o *Smooth Particle Hydrodynamic* (SPH) e o *Reproducing Kernel Particule Method* (RKPM). Especificamente usando o método MLPG, são comumente encontradas análises usando o MLS [Atluri and Zhu, 1998] ou usando o PIM [Viana et al., 2004] e [Lima et al., 2012].

Estas funções de forma devem ser capazes de garantir a convergência¹ aos métodos sem malha, para isto, estas funções devem satisfazer um determinado grau de consistência. O grau de consistência de uma função de forma é descrito por [Liu, 2009] como capacidade que estas funções possuem de gerar aproximações para uma função polinomial de ordem conhecida. Caso uma aproximação seja capaz de reproduzir de modo exato apenas uma função constante, então é dito que a aproximação possui consistência de ordem zero, ou consistência C^0 . De forma geral, em [Liu, 2009] é definido que se uma aproximação pode reproduzir de modo exato um polinômio de ordem k , então ela possui uma consistência de ordem k , ou consistência C^k .

O MLS produz funções de aproximação que são contínuas e suaves em todo

¹significa que a solução numérica construída deve-se aproximar da solução exata quando o espaço entre os nós aproxima de zero.

o domínio, quando um número mínimo de nós é utilizado. O MLS também se destaca dentre os demais por ser capaz de gerar aproximações com a ordem de consistência que se desejar [Liu, 2009], ou seja, ele é capaz de reproduzir de forma exata polinômios com o grau que se desejar. Diferentemente do MLS, o PIM usa interpolações para construção de sua função de forma, as quais satisfazem a propriedade do delta de Kronecker, ou seja:

$$\varphi_i(\mathbf{x}_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (2.2)$$

Esta propriedade garante que $u^h(\mathbf{x}_i) = u_i$. Como o MLS não satisfaz a propriedade do delta de Kronecker, tem-se que $u^h(\mathbf{x}_i) \neq u_i$. Portanto, suas funções de forma não são interpolantes e algum método adicional deve ser utilizado para impor as condições de contorno, sendo comum o uso do método da penalidade ou da colocação [Liu, 2009].

As funções de forma construídas usando o PIM possuem desvantagens, sendo a principal delas a singularidade que pode ocorrer em seu processo de obtenção para certas disposições dos nós no domínio de suporte, inviabilizando a sua construção. Objetivando garantir a existência da função de forma para distribuições arbitrárias de nós em Ω_s , são introduzidas funções de base radiais (*Radial Base Functions-RBF*) na formulação do PIM. Este procedimento dá origem ao RPIM (*Radial Point Interpolation Method*). Este método, com a adição de funções de base radiais puras, é um método não consistente². Adicionando, também, polinômios às funções de base, garante-se consistência ao método, o qual é conhecido como RPIMP (*Radial Point Interpolation Method with Polynomial Reproduction*). A consistência garantida possuirá a mesma ordem do polinômio adicionado à base.

Neste trabalho, tem-se como um dos objetivos principais a construção de soluções simples e eficientes para problemas eletromagnéticos com simetria axial. Em face disso, optou-se por uma das variações do PIM devido à propriedade do delta de Kronecker, possibilitando a imposição das condições de Dirichlet de modo fácil e direta. Esta mesma propriedade possibilita também a imposição das condições de contorno em interfaces de modo simples e eficiente, seguindo sugestões apresentadas em [Lima et al., 2012], sem a necessidade da duplicidades dos nós neste contorno como sugerido por [Nicomedes et al., 2011]. A escolha da opção radial do PIM garante a existência da aproximação u^h nas análises, que utilizam distribuições de nós não regulares, com elevada variação de densidade de nós em Ω . A opção pela versão polinomial do RPIM, que possui também a

²o qual gera aproximações que não são capazes de reproduzir de forma exata polinômios de quaisquer ordem.

propriedade de consistência, foi feita tendo por base a experiência relatada em [Fonseca, 2011], onde mostra-se que as funções de base radiais puras não geram boas aproximações para problemas simples.

As próximas seções apresentam os procedimentos para determinação do domínio de suporte (Seção 2.2), os procedimentos para construção das funções de forma e da aproximação do RPIMp (Seção 2.3) e a introdução ao MLPG com suas variações, a função de teste escolhida e o formato dos domínios de teste (Seção 2.4).

2.2 Determinação do Domínio de Suporte, Planos Propostos: T6 Modificado e T8

O domínio de suporte de um ponto \mathbf{x} determina o número de nós usados para aproximar o valor da função em \mathbf{x} . O domínio de suporte pode ter diferentes formas e dimensões, as quais podem variar entre diferentes pontos de interesse \mathbf{x} , como mostrado na Figura 2.2. Os formatos mais usados são circular ou retangular [Liu, 2009].

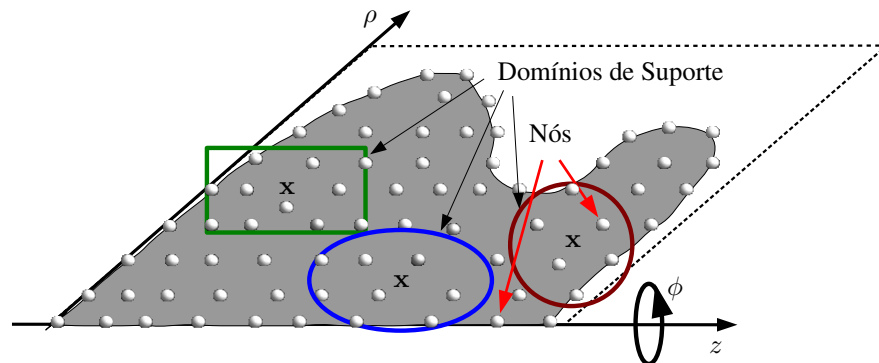


Figura 2.2: Formatos diferentes para domínios de suporte de pontos \mathbf{x} , segundo os métodos sem malha.

O conceito de domínio de suporte funciona bem quando a densidade nodal não varia muito ao longo do domínio. Todavia, em problemas reais, a densidade nodal pode variar drasticamente. Em tais casos, podem ocorrer erros de aproximação devido à escolha ruim dos nós de suporte, por exemplo, quando estes se localizam apenas em um lado do domínio de suporte. A fim de se evitar problemas desse tipo, uma abordagem diferente é sugerida por [Liu, 2009], a qual emprega o conceito de domínio de influência. O domínio de influência é definido como o domínio sobre o qual um nó exerce influência. Observe que domínio de influência refere-se a um nó e está ligado à região local, enquanto domínio de su-

porte refere-se a um ponto e está ligado a nós locais. O domínio de suporte pode ser determinado através dos domínios de influência e é uma forma alternativa de selecionar nós de suporte (vide Figura 2.3). Essa estratégia funciona relativamente bem para problemas nos quais a densidade nodal varia muito no domínio, mas apresentou uma certa instabilidade nos problemas estudados neste trabalho. Além de ser uma estratégia que requer um maior tempo de processamento, pois envolve estruturas de busca (geralmente uma kd-tree) as quais são usadas para a determinação dos raios r_I^i de influência de cada nó i do domínio e, depois, para determinar os nós que influenciam o ponto \mathbf{x} (estabelecendo o domínio de suporte deste ponto). Outra proposta, que apresentou resultados mais estáveis nos problemas estudados neste trabalho, emprega o uso dos esquemas T [Liu, 2009].

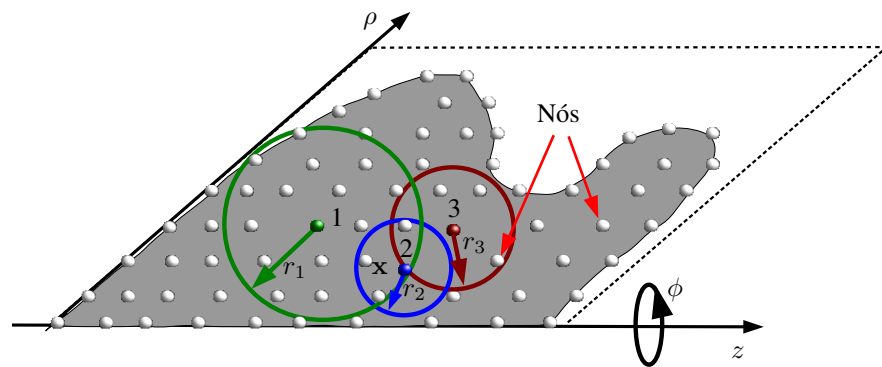


Figura 2.3: Domínios de influência dos nós, especificamente nós 1, 2 e 3. O domínio de suporte do ponto \mathbf{x} é composto pelos nós cujos domínios de influência cobrem \mathbf{x} - os nós 1 e 2 cobrem e o nó 3 não.

Neste trabalho, as funções de forma RPIMp são construídas usando esquemas T modificados para a seleção dos nós do domínio de suporte. Os esquemas T em geral baseiam-se em uma malha triangular de fundo e garantem mais eficiência computacional na construção da função de forma [Liu and Zhang, 2009]. Existem dois tipos de esquemas T : um baseado na célula e outro no contorno da célula, os quais são selecionados dependendo da posição (\mathbf{x}) onde se deseja construir a função de forma $\Phi(\mathbf{x})$. O primeiro é usado quando \mathbf{x} está no interior da célula e o outro é usado quando \mathbf{x} está na contorno da célula.

Para o esquema T6 original [Liu and Zhang, 2009] baseado na célula, vide Figuras 2.4 (a) e (b), tem-se para uma célula interior³ a seleção de 6 nós, sendo 3 destes nós os vértices da célula e os outros 3 nós os três vértices opostos das 3 células vizinhas (vide Figura 2.4 (a)). Caso a célula seja de contorno⁴, tem-se a seleção do mesmo número de nós, sendo 3 destes nós os vértices da célula. Os demais nós são 2 vértices opostos de duas células vizinhas e um nó adicionado

³Célula que possui todos os seus contornos interiores ao domínio Ω

⁴Célula que possui pelo menos um de seus contornos em Γ

usando estruturas de busca, a qual seleciona o nó mais próximo ao ponto \mathbf{x} (vide Figura 2.4 (b)). O esquema T6 proposto, vide Figuras 2.4 (a) e (c), distingue-se do original para as células de contorno, no qual não se adiciona nós por estruturas de busca. Logo, para estas células, são selecionados apenas 5 nós (vide Figura 2.4 (c)). Este esquema proposto é mais simples e mais eficiente se comparado com o original, pois não utiliza estruturas de busca, além de apresentar altas taxas de convergência, as quais são mostradas na análise realizada na Seção 3.3.

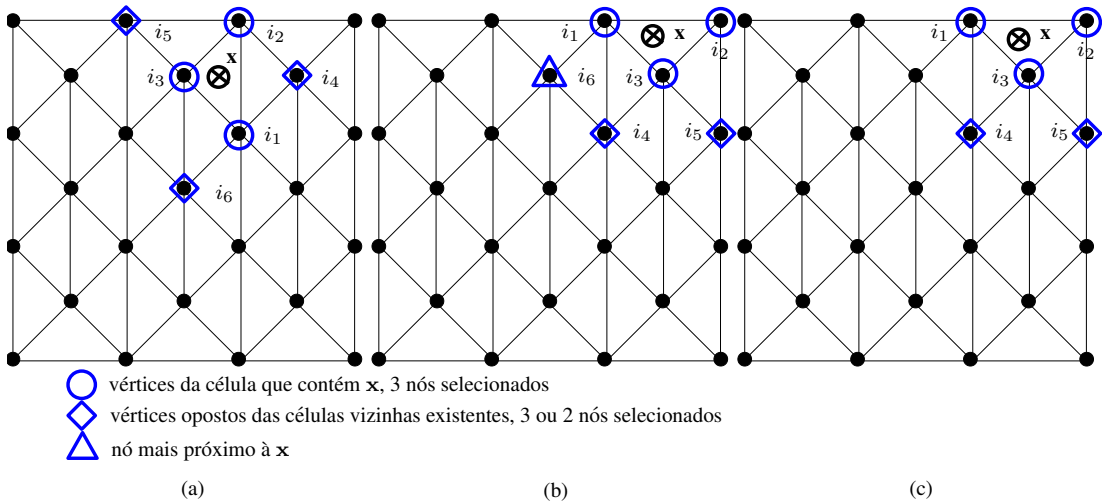


Figura 2.4: Esquema T6: (a) 6 nós selecionados para uma célula interior a Ω , esquemas T6 original e T6 proposto, (b) 6 nós selecionados para uma célula de contorno, esquema T6 original e (c) 5 nós selecionados para uma célula de contorno, esquema T6 proposto.

Em [Liu and Zhang, 2009] são propostas três sugestões para esquemas T de contorno de células: T2, T4 e T2L. Dentre os quais, os esquemas T4 e T2L são sugeridos para a construção de funções de forma usando o RPIM, sendo o T2L indicado para ser usado em distribuições de nós extremamente irregulares. O primeiro esquema (T4), vide Figuras 2.5 (a)-(c), seleciona 4 nós para os contornos de células que estão dentro de Ω , sendo estes os vértices das células que contém este contorno (vide Fig. 2.5 (a) e (b)). Para contorno de células que estão em Γ , apenas os dois nós deste contorno são selecionados (vide Figuras 2.5 (c)). O outro esquema sugerido (T2L), vide Figuras 2.6 (a)-(c), seleciona para contorno de células que estão dentro de Ω os vértices das células que contém este contorno e os nós diretamente ligados a estes vértices (vide Figuras 2.6 (a) e (b)). Observa-se que este esquema seleciona quantidades de nós diferentes para contornos de células interiores a Ω (vide Figuras 2.6 (a) e (b)). Para os contorno de células que estão em Γ , o esquema T2L seleciona, tal como no esquema T4, os dois nós do contorno examinado, vide Figura 2.6 (c).

Neste trabalho, sugere-se um esquema T8 que seleciona uma quantidade de

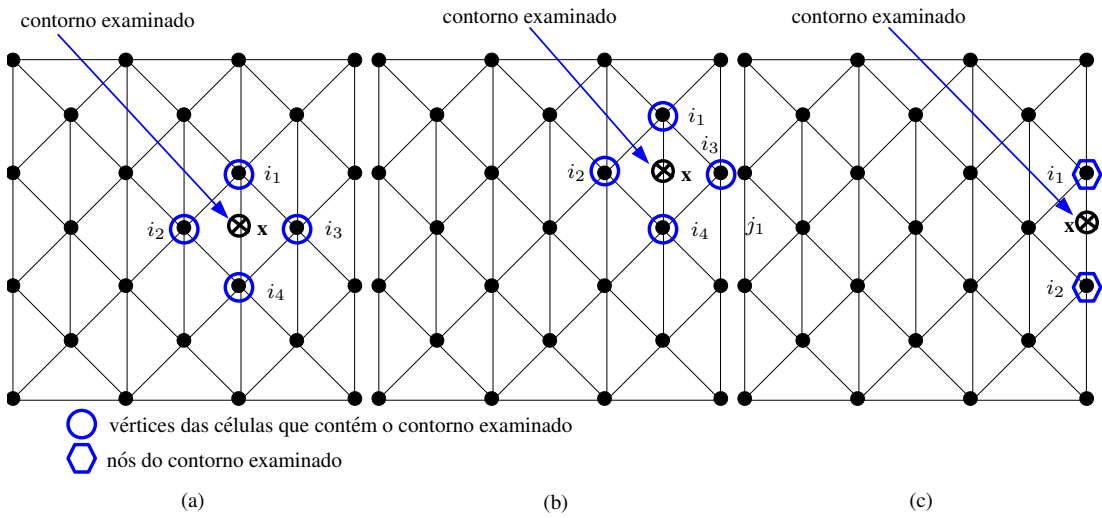


Figura 2.5: Plano T4: (a) 4 nós selecionados para um contorno de célula interior a Ω (b) 4 nós selecionados para um contorno de célula interior a Ω (c) 2 nós selecionados para um contorno em Γ .

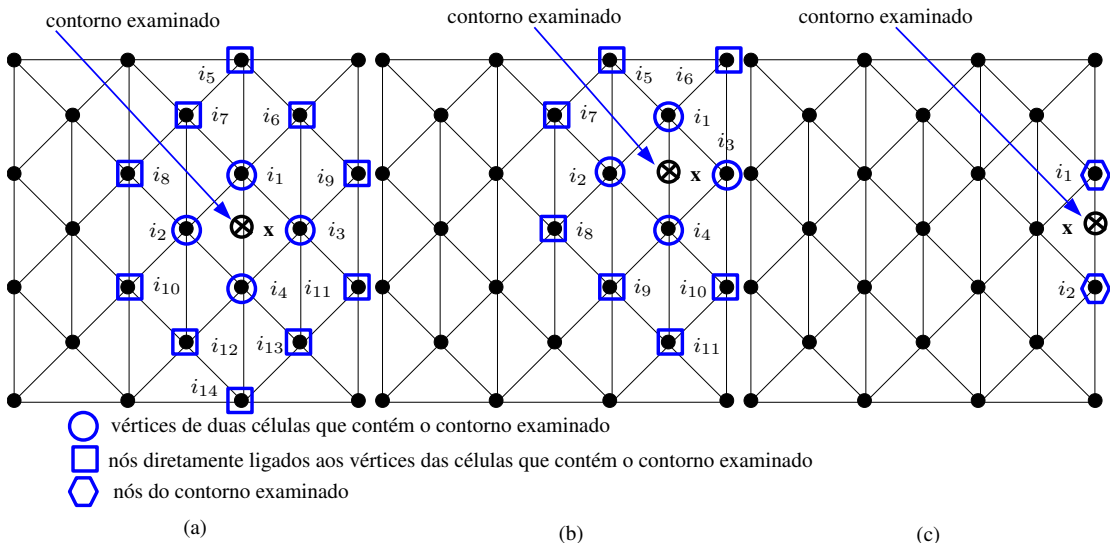


Figura 2.6: Plano T2L: (a) 14 nós selecionados para um contorno de célula interior a Ω (b) 11 nós selecionados para um contorno de célula interior a Ω (c) 2 nós selecionados para um contorno em Γ .

nós intermediária entre os esquemas T4 e o T2L para contorno de células interiores ao domínio Ω . Esta proposição apresenta uma eficiência computacional melhor que o T2L, pois seleciona um menor numero de nós, e também mostrou-se eficiente quando tem-se distribuições de nós irregulares, com uma grande variação de densidade de nós em Ω , problema analisado na Seção 3.3. O esquema proposto (T8), Figuras 2.7 (a) e (b), seleciona até 8 nós para contorno de células internas a Ω , sendo 4 nós dos vértices das duas células que contem este contorno e até 4

nós, que são vértices opostos de até 4 células vizinhas às estas duas células. Para contorno de células em Γ , Figura 2.7 (c), são selecionado os 3 vértices da célula que contém este contorno e até 2 nós que são vértices opostos de até duas células vizinhas existentes. Este esquema proposto seleciona para contorno de células em Γ uma maior quantidade de nós quando comparada à seleção feita pelos esquemas $T4$ e $T2L$.

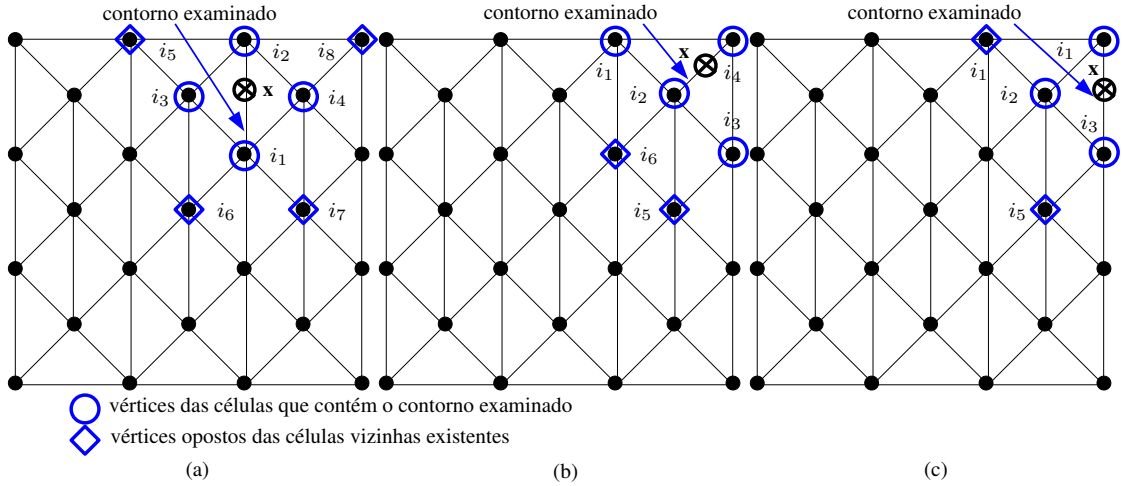


Figura 2.7: Plano $T8$ proposto: (a) 8 nós selecionados para um contorno de célula interior a Ω (b) 6 nós selecionados para um contorno de célula interior a Ω (c) 5 nós selecionados para um contorno em Γ .

2.3 Aproximação e Função de Forma do RPIMP

A função de aproximação RPIMP de u no ponto \mathbf{x} usando n nós do domínio de suporte é obtida pela expressão [Liu, 2009]

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n R_{s_i}(\mathbf{x})a_{s_i} + \sum_{j=1}^{n_m} p_j(\mathbf{x})b_j = \mathbf{R}^t(\mathbf{x})\mathbf{a} + \mathbf{p}^t(\mathbf{x})\mathbf{b}, \quad (2.3)$$

onde a_{s_i} é o coeficiente das RBF R_{s_i} , b_j é o coeficiente do monômio p_j da base polinomial, n é o número de nós do domínio de suporte de \mathbf{x} e n_m é o número de monômios da base polinomial. O vetor \mathbf{R} contém todas as R_{s_i} relativas aos nós de suporte de \mathbf{x} e o vetor \mathbf{p} contém, normalmente, monômios de baixa ordem para garantir completude da aproximação. O vetor \mathbf{R} é dado por:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x})^t = [R_{s_1}(\mathbf{x}), R_{s_2}(\mathbf{x}), \dots, R_{s_n}(\mathbf{x})], \quad (2.4)$$

sendo a função de base radial adotada a *Multiquadrics* [Liu, 2009], que em duas dimensões e em coordenadas cilíndricas (semiplano $\rho - z$) é descrita por:

$$R_{s_i}(\mathbf{x}) = R_{s_i}(\rho, z) = [(\rho - \rho_{s_i})^2 + (z - z_{s_i})^2 + p_c^2]^{p_q}, \quad (2.5)$$

onde p_c e p_q são parâmetros com valores sugeridos em [Liu, 2009]. p_c é obtido pela multiplicação de uma constante ao espaçamento médio entre nós, sendo a constante adotada igual a 8. p_q segue sugestões de [Liu, 2009] sendo o adotado igual a 1,03. O vetor \mathbf{p} é definido em duas dimensões e em coordenadas cilíndricas (semiplano $\rho - z$) por:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x})^t = \mathbf{p}(\rho, z) = [1, \rho, z, \rho z, \rho^2, z^2, \dots, \rho^{g_p}, z^{g_p}]. \quad (2.6)$$

onde g_p é o grau do polinômio, sendo neste trabalho utilizado $g_p = 1$, no qual tem-se $\mathbf{p}(\mathbf{x})^t = [1, \rho, z]$ e, portanto, $n_m = 3$.

Os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} são definidos por:

$$\mathbf{a} = [a_{s_1}, a_{s_2}, \dots, a_{s_n}]^T, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_{n_m}]^T, \quad (2.8)$$

onde os coeficientes a_{s_i} e b_j são calculados forçando que a interpolação passe pelos n nós do domínio de suporte, ou que a Equação (2.3) seja satisfeita nestes n nós. Para cada nó de suporte k tem-se:

$$u_k = \sum_{i=1}^n R_{s_i}(\mathbf{x}_k) a_{s_i} + \sum_{j=1}^{n_m} p_j(\mathbf{x}_k) b_j = \mathbf{R}^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{a} + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{b}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.9)$$

onde u_k é o valor da função no nó k . A Equação (2.9) escrita na forma matricial torna-se:

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}_Q \mathbf{a} + \mathbf{P}_m \mathbf{b}, \quad (2.10)$$

onde \mathbf{u} é definido da mesma forma apresentada na Equação (2.1) e \mathbf{R}_Q é a matriz de momentos de RBFs. Esta matriz possui dimensão $n \times n$ e é definida por:

$$\mathbf{R}_Q = \begin{bmatrix} R_{s_1}(\mathbf{x}_{s_1}) & R_{s_2}(\mathbf{x}_{s_1}) & \cdots & R_{s_n}(\mathbf{x}_{s_1}) \\ R_{s_1}(\mathbf{x}_{s_2}) & R_{s_2}(\mathbf{x}_{s_2}) & \cdots & R_{s_n}(\mathbf{x}_{s_2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{s_1}(\mathbf{x}_{s_n}) & R_{s_2}(\mathbf{x}_{s_n}) & \cdots & R_{s_n}(\mathbf{x}_{s_n}) \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Já \mathbf{P}_m é a matriz de momentos de polinômios, possui dimensão $n \times n_m$ e é descrita por:

$$\mathbf{P}_m = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_{s_1}) & p_2(\mathbf{x}_{s_1}) & \cdots & p_{n_m}(\mathbf{x}_{s_1}) \\ p_1(\mathbf{x}_{s_2}) & p_2(\mathbf{x}_{s_2}) & \cdots & p_{n_m}(\mathbf{x}_{s_2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_{s_n}) & p_2(\mathbf{x}_{s_n}) & \cdots & p_{n_m}(\mathbf{x}_{s_n}) \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Os termos da base polinomial devem satisfazer, para garantir uma aproximação única para a função, a seguinte condição extra [Liu, 2009]:

$$\sum_{i=1}^{n_m} p_j(\mathbf{x}_{s_i}) a_{s_i} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_m, \quad (2.13)$$

ou na forma matricial:

$$\mathbf{P}_m^T \mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (2.14)$$

Combinando as Equações 2.10 e 2.14, obtem-se o sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_Q & \mathbf{P}_m \\ \mathbf{P}_m^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

ou

$$\mathbf{G} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Como \mathbf{R}_Q é simétrica, a matriz \mathbf{G} também é simétrica. Se \mathbf{G} for inversível, então uma solução única para os vetores de coeficientes \mathbf{a} e \mathbf{b} é obtida como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Em vez de tentar resolver o sistema desta maneira, [Liu, 2009] sugere um procedimento mais eficiente, o qual é possível devido à inversibilidade da matriz \mathbf{R}_Q . Este procedimento parte da Equação (2.10) para escrever o vetor \mathbf{a} como:

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{u} - \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{P}_m \mathbf{b}, \quad (2.18)$$

e substituindo a Equação (2.18) na Equação (2.14), tem-se que

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}_b \mathbf{u}, \quad (2.19)$$

onde

$$\mathbf{S}_b = [\mathbf{P}_m^T \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{P}_m]^{-1} \mathbf{P}_m^T \mathbf{R}_Q^{-1}. \quad (2.20)$$

Substituindo a Equação (2.19) em (2.18), obtém-se:

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}_a \mathbf{u}, \quad (2.21)$$

onde

$$\mathbf{S}_a = \mathbf{R}_Q^{-1} [1 - \mathbf{P}_m \mathbf{S}_b] = \mathbf{R}_Q^{-1} - \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{P}_m \mathbf{S}_b. \quad (2.22)$$

Finalmente, a Equação (2.3) é escrita como:

$$u^h(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{u} = [\mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \mathbf{S}_a + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{S}_b] \mathbf{u}. \quad (2.23)$$

Logo, as funções de forma são dadas por:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \mathbf{S}_a + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{S}_b = [\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_n(\mathbf{x})]. \quad (2.24)$$

As derivadas das funções de forma em relação a ρ e a z são obtidas da Equação (2.24) derivando \mathbf{R}^T e \mathbf{p}^T em relação a estas variáveis, o que resulta, respectivamente, em:

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} [\mathbf{R}^T(\mathbf{x})] \mathbf{S}_a + \frac{\partial}{\partial \rho} [\mathbf{p}^T(\mathbf{x})] \mathbf{S}_b \quad (2.25)$$

e

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} [\mathbf{R}^T(\mathbf{x})] \mathbf{S}_a + \frac{\partial}{\partial z} [\mathbf{p}^T(\mathbf{x})] \mathbf{S}_b. \quad (2.26)$$

A derivada de primeira ordem da função de forma em uma direção n , definida por um vetor unitário \hat{n} com componentes n_ρ e n_z , pode ser obtida com a seguinte expressão:

$$\frac{\partial}{\partial n} [\Phi^T(\mathbf{x})] = n_\rho \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} [\Phi^T(\mathbf{x})] + n_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} [\Phi^T(\mathbf{x})]. \quad (2.27)$$

2.4 Função Teste, Formato do Domínio de Teste e a Construção da Forma Fraca Local

O MLPG usa formulação Petrov-Galerkin e sua integração é realizada em domínios locais pequenos em torno dos nós de Ω e de Γ , os quais são denominados de quadratura ou de teste. A utilização desta formulação não impõem ao método restrições para escolha da função de forma, sendo usado neste trabalho a função de forma RPIMP.

A formulação Petrov-Galerkin é obtida da PDE, forma forte, que governa o problema sob análise. Esta equação é convertida em uma forma fraca, usando o método dos resíduos ponderados. Este procedimento é aqui demonstrado utilizando a equação de Helmholtz em seu formato genérico, para os problemas eletrodinâmicos e com simetria axial investigados nos Capítulos 3 e 4, as formas fortes e a obtenção das formas fracas são apresentadas nas Seções 3.1 e 4.2, respectivamente. A equação de Helmholtz é definida por:

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) - k^2 u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.28)$$

onde u é o potencial a ser determinado, $f(\mathbf{x})$ é a função fonte e o domínio Ω é cercado pelos contornos com condição de Dirichlet, Γ_g , ou de Neumann, Γ_h , sendo expressos por:

$$u = g, \quad \text{em} \quad \Gamma_g, \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \hat{n} \cdot \nabla(u) = h, \quad \text{em} \quad \Gamma_h \quad (2.30)$$

onde g e h são o potencial e a derivada normal do potencial prescritos, respectivamente, nos contornos Γ_g e Γ_h , e \hat{n} é vetor que aponta na direção normal externa ao contorno Γ .

A forma fraca é obtida multiplicando a Equação (2.28) por uma função de teste ψ e integrando em Ω (método dos resíduos ponderados), resultando em

$$\int_{\Omega} [\nabla^2 u(\mathbf{x}) - k^2 u(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})] \psi(\mathbf{x}) d\Omega = 0. \quad (2.31)$$

Nesta equação o potencial u , tal como na Equação (2.28), é derivado duas vezes. Esta formulação impõe que u possua continuidade C^1 , o que pode ser alterado

bastando utilizar a identidade vetorial

$$(\nabla^2 u)\psi = [\nabla \cdot (\nabla u)]\psi = \nabla \cdot (\psi \nabla u) - \nabla u \cdot \nabla \psi, \quad (2.32)$$

e, em seguida, o teorema da divergência, resultando na formulação,

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \psi d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \psi d\Omega - \int_{\Omega} k^2 u \psi d\Omega - \int_{\Omega} f \psi d\Omega = 0. \quad (2.33)$$

Esta formulação impõe a mesma condição de continuidade (C^0) para u e ψ , e por isso é definida em [Atluri and Zhu, 1998] como forma fraca simétrica. A Equação (2.33) difere da apresentada em [Atluri and Zhu, 1998], que possui mais um termo (termo de penalidade) que é adicionado para imposição da condição de contorno de Dirichlet. Isto se deve à adoção da função de forma MLS que não atende ao Delta de Kronecker. Logo, fez-se necessário a utilização de um método adicional para a imposição desta condição de contorno, sendo sugerido em [Atluri and Zhu, 1998] o método da penalidade. No MLPG proposto, a imposição desta condição de contorno é feita de modo direto, pois é utilizada a função de forma RPIMP que atende ao Delta de Kronecker, o que simplifica o procedimento e a formulação, não sendo necessário o termo de penalidade.

Em [Atluri and Zhu, 1998], sugere-se algumas funções de teste ψ_j para o MLPG, as quais possuem formato compacto, sendo diferentes de zero apenas nas proximidades dos nós j e estabelecendo o domínio de teste do nó j (Ω^j). Ao substituir ψ da Equação (2.33) por ψ_j em (2.33) obtém-se

$$\int_{\Gamma^j} \frac{\partial u}{\partial n} \psi_j d\Gamma - \int_{\Omega^j} \nabla u \cdot \nabla \psi_j d\Omega - \int_{\Omega^j} k^2 u \psi_j d\Omega - \int_{\Omega^j} f \psi_j d\Omega = 0. \quad (2.34)$$

Esta equação é válida apenas em Ω^j e em seu contorno Γ^j . Portanto, a integração desta a forma fraca é realizada em um domínio local, sendo independente de um nó para o outro. Além disso, esses domínios podem assumir qualquer forma, mas, normalmente em 2D, utilizam-se círculos e quadrados por serem mais simples. A única exigência imposta aos domínios de teste é que a união de todos eles deve cobrir inteiramente o domínio Ω .

As funções de teste apresentadas em [Atluri and Zhu, 1998] definem as variações do MLPG, as quais são apresentadas abaixo:

- MLPG1, a função de teste é a função peso usada para construir as funções de forma MLS;
- MLPG2, a função de teste é a função Delta de Dirac, resultando em um método de colocação;

- MLPG3, a função de teste é o resíduo da equação diferencial da forma forte, resultando em um problema de mínimos quadrados;
- MLPG4, a função de teste é a solução fundamental modificada da equação diferencial;
- MLPG5, a função de teste é a função de Heaviside;
- MLPG6, A função de teste é idêntica à função de forma;

O MLPG2, por utilizar a função de teste delta de Dirac, torna-se apenas mais uma variação de métodos de colocação, não envolvendo integrações para a construção do sistema linear. Já o MLPG4 possui uma forma fraca local que não possui integrações de domínio (em Ω^j), mas apenas em Γ^j . Todavia, devido ao uso de soluções fundamentais modificadas, envolvem integrais com singularidades. Os Métodos MLPG1, MLPG3 e MLPG6 possuem integrações de domínio, o que é difícil em métodos sem malha devido à elevada complexidade dos integrandos⁵. Isto ocorre principalmente para os métodos MLPG3 e MLPG6. O MLPG5 é o método escolhido para este trabalho, pois dependendo da forma forte, apresenta forma fraca sem integrações de domínio ou possuem estas com baixa complexidade. Este método também não possui integrais com singularidades e apresenta elevadas taxas de convergência, como apresentadas em [Atluri and Zhu, 1998] ou verificadas na análises apresentas na Seção 3.3. A função de teste utilizada no MLPG5, a função de Heaviside, é definida por

$$\psi_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega^j, \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin \Omega^j, \end{cases} \quad (2.35)$$

que, substituída na equação (2.34), resulta em

$$\int_{\Gamma^j} \psi_j \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega^j} k^2 \psi_j u d\Omega - \int_{\Omega^j} \psi_j f d\Omega = 0, \quad (2.36)$$

a qual possui um termo a menos que a Equação 2.34, pois tem-se $\nabla \psi_j = 0$, anulando uma integral de domínio. A Equação (2.36) é válida para a região próxima ao nó j onde $\psi_j = 1$.

Os domínios de teste, neste trabalho, não apresentam formato fixo, sendo utilizadas informações da malha para estabelecê-lo, o que garante que todas as regiões de Ω serão cobertas, o que não ocorre, por exemplo, em [Nicomedes et al., 2011], onde pequenas regiões do domínio Ω próximas a Γ não são cobertas. Os domínios

⁵integrandos que possuem derivadas do potencial a ser determinado u .

de teste Ω^j propostos são formados pela união de células que possuem o nó j como um de seus vértices. A Fig. 2.8 mostra três domínios de teste (Ω^i , Ω^j e Ω^k) e seus contornos (Γ^i , Γ^j e Γ^k) para nós localizados em diferentes posições do domínio (i , j e k).

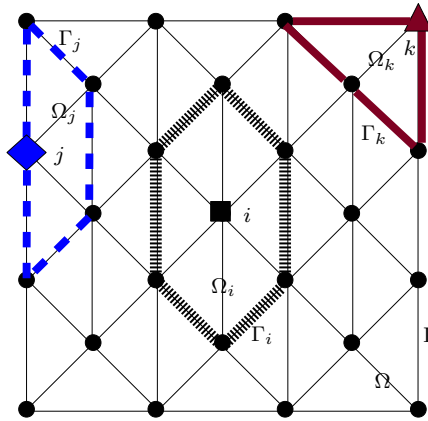


Figura 2.8: Domínios de teste dos nós i , j e k , segundo MLPG proposto.

2.5 Considerações Finais Deste Capítulo

Neste capítulo foi apresentado todo o formalismo dos métodos sem malha necessário às análises efetuadas nos Capítulos 3 e 4. Especificamente, foi realizada uma pequena introdução aos métodos sem malha onde foram apresentadas algumas propriedades de suas funções de forma e justificada a escolha da RPIMp. Na sequência, foram apresentadas todas as formulações necessárias à construção de uma aproximação RPIMp. Finalizando o capítulo, foram apresentadas as variações do MLPG e justificada a escolha da opção 5, MLPG5. No próximo capítulo são apresentadas análises com o MLPG proposto em problemas com simetria axial que não possuem variação do campo eletromagnético com a coordenada ϕ .

Capítulo 3

Análise de Problemas

Eletromagnéticos Axialmente

Simétricos com Campos

Invariantes em ϕ

Os estudos propostos neste capítulo visam à utilização da técnica MLPG em problemas eletromagnéticos com simetria axial e com campos eletromagnéticos invariantes na direção ϕ . As análises propostas permitem que problemas originalmente definidos em três dimensões possam ser estudados em duas dimensões, especificamente no semiplano $\rho - z$.

Assim, neste capítulo, são apresentadas duas análises. A primeira delas refere-se à análise de uma cavidade com simetria axial, onde se determina as frequências de ressonância da mesma. Este estudo possibilitou avaliar a convergência do método proposto usando duas malhas diferentes, uma regular e outra preenchida parcialmente por elementos distorcidos. Este resultado de convergência é comparado ao resultado de convergência obtido com o FEM.

A comparação entre o MLPG proposto e o FEM usando uma malha de qualidade inferior de 2D, com elementos distorcidos, objetiva demonstrar a menor sensibilidade do método proposto à qualidade da malha. Todavia é importante ressaltar malhas de qualidade inferior são comuns em 3D, onde as construções destas malhas de forma automática, sem supervisão, ainda são objeto de estudo. Logo os resultados das análises em 2D apresentadas neste trabalho objetivam evidenciar que os resultados menos sensíveis as malhas de qualidade inferior também são esperados para as análises em 3D.

Na outra análise, um monopolo vertical sobre um plano PEC é estudado, sendo determinadas sua distribuição superficial de corrente e sua impedância de entrada em função de seu tamanho elétrico¹. Em seguida, uma nova geometria deste monopolo com a presença de uma camada dielétrica sobre o plano PEC é analisada. Para esta nova geometria também são determinadas a impedância de entrada e a corrente superficial da antena. Esta nova versão da antena possui uma camada dielétrica sobre o plano PEC e que encobre metade da antena. Para esta análise, adiciona-se ao método proposto um critério de visibilidade, que possibilita o tratamento da interface. Este critério da visibilidade foi apresentado em [Lima et al., 2012].

Este capítulo é iniciado com uma seção referente às equações que ditam o comportamento dos campos eletromagnéticos, as quais são obtidas manipulando-se as equações de Maxwell. Estas equações são apresentadas na forma forte e na forma fraca. Na sequência é apresentada a forma fraca local, que é empregada nas análises usando MLPG. O capítulo é finalizado com a exposição e solução dos problemas eletromagnéticos propostos.

3.1 Equações: Forma Forte e Forma Fraca Globais

Uma região no espaço pode ser caracterizada pela permeabilidade relativa e permissividade relativa², respectivamente μ_r e ϵ_r . Esta região, quando iluminada por uma onda eletromagnética, tem o comportamento dos campos elétrico e magnético descrito pelas equações de Maxwell, as quais podem ser expressas no domínio da frequência³ por:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0\mu_r\vec{H}, \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega\epsilon_0\epsilon_r\vec{E}, \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0\epsilon_r\vec{E}) = \rho_e, \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot (\mu_0\mu_r\vec{H}) = 0, \quad (3.4)$$

¹dimensão relativa ao comprimento de onda.

²as permissividades relativas presentes nos problemas analisados neste trabalho são reais, todavia problemas com permissividade complexas (utilizadas para representar meios com perdas) podem ser analisados com formalismo proposto.

³no qual os campos são harmônicos no tempo com variação $e^{j\omega t}$.

sendo ω a frequência angular em rad/s; \vec{E} e \vec{H} representam os fasores dos campos elétrico [Volts/m] e magnético [Ampères/m], respectivamente; ϵ_0 e μ_0 são, respectivamente, a permissividade e a permeabilidade do vácuo; \vec{J} é a densidade volumétrica de corrente elétrica [Ampères/m²] e ρ_e é a densidade volumétrica de carga elétrica [C/m³].

Neste estudo, os problemas analisados possuem densidade de cargas nulas ($\rho_e = 0$) e a densidade de corrente \vec{J} está presente para propiciar a análise de problemas que contenham fontes, tal como nos estudos dos monopolos sobre um plano PEC, Seções 3.4 e 3.5. As equações (3.1) e (3.2) são combinadas e resultam na forma vetorial da equação de Helmholtz,

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \vec{H} \right) - k^2 \mu_r \vec{H} = \nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon_r} \vec{J} \right), \quad (3.5)$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) - k^2 \epsilon_r \vec{E} = -j\omega \mu_0 \vec{J}, \quad (3.6)$$

em que $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$.

Faz-se necessário ressaltar que alguns problemas axialmente simétricos, como a análise de um monopolo alimentado por uma fonte axissimétrica⁴ e o estudo de cavidades axissimétricas, podem ser realizados em duas dimensões. Isto permite proceder à análise na forma escalar, a qual é feita em função das componentes ϕ dos campos [Peterson et al., 1997]. As expressões escalares correspondentes às equações vetoriais de Helmholtz podem ser obtidas admitindo que as componentes ϕ dos campos possuem apenas variações nas direções ρ e z (i.e. $\vec{H} = H_\phi(\rho, z) \hat{\phi}$ com $E_\phi(\rho, z) = 0$ e $\partial H_\phi / \partial \phi = 0$ para soluções TM e $\vec{E} = E_\phi(\rho, z) \hat{\phi}$ com $H_\phi(\rho, z) = 0$ e $\partial E_\phi / \partial \phi = 0$ para soluções transversal elétrica (TE) [Peterson et al., 1997]). Aplicando estas considerações nas Equações (3.6) e (3.5), obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho \epsilon_r} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho \epsilon_r} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial z} \right] + k^2 \mu_r H_\phi = f, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho \mu_r} \frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho \mu_r} \frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial z} \right] + k^2 \epsilon_r E_\phi = f, \quad (3.8)$$

as quais são definidas como as formas fortes para as soluções TE e TM, respectivamente. f é o termo fonte, o escalar originado pelos lados direitos das Equações

⁴fonte que gera campos eletromagnéticos invariantes em ϕ .

(3.6) e (3.5), definido por:

$$f = \begin{cases} - \left[\nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon_r} \vec{J} \right) \right] \cdot \hat{\phi}, & \text{modo TM,} \\ j\omega\mu_0 J_\phi(\rho, z), & \text{modo TE,} \end{cases}$$

em que o produto escalar, presente no caso TM, retém a componente ϕ da densidade de corrente \vec{J} .

Já a forma fraca pode ser construída usando método dos resíduos ponderados, multiplicando-se uma função de teste⁵ $\psi(\rho, z)$ pela equação diferencial em sua forma forte e, em sequência, procede-se à integração do resultado desta multiplicação no domínio Ω . De maneira mais detalhada, nos problemas analisados neste capítulo, o domínio Ω é definido pela área limitada pela curva geratriz do corpo de revolução em um semiplano $\rho - z$ (problema da cavidade coaxial, ilustradas nas Figuras 3.1 (a) e (b), que apresentam, respectivamente, a perspectiva 3D e o domínio 2D usado nas análises numéricas) ou pela área externa a curva geratriz limitada pelo contorno absorvente em um semiplano $\rho - z$ (problema do monopolo), sendo o infinitésimo desta área definido por $d\Omega = d\rho dz$. A Figura 3.1 também apresenta as dimensões da cavidade coaxial: o comprimento l , o raio interno r_a e o raio externo r_b .

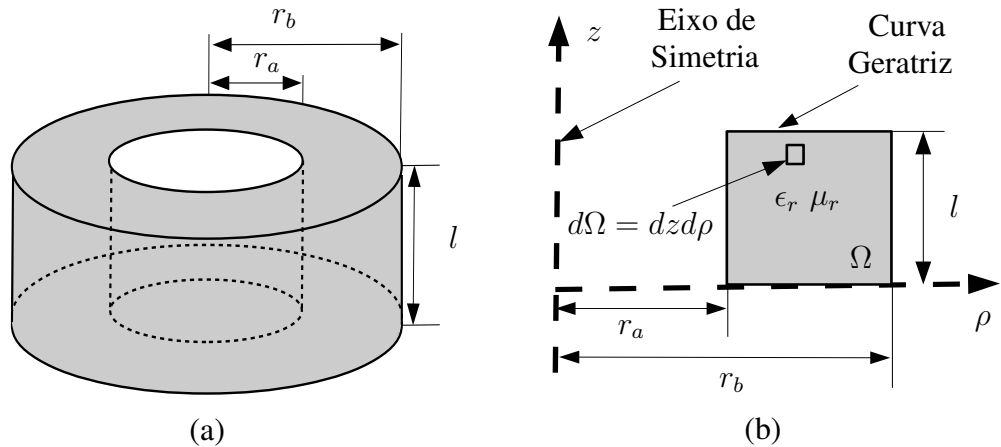


Figura 3.1: Cavidade coaxial: (a) perspectiva 3D; (b) geometria de revolução e domínio 2D usado nas análises numéricas.

⁵nos problemas analisados neste capítulo esta função apresenta apenas variações em ρ e z .

Aplicando o método dos resíduos ponderados na Eq. (3.7), obtém-se:

$$\iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho \epsilon_r} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} \right] \psi + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho \epsilon_r} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial z} \right] \psi + \frac{k^2 \mu_r}{\rho} (\rho H_\phi) \psi \right\} d\Omega = \iint_{\Omega} \psi f d\Omega, \quad (3.9)$$

a qual, admitindo $f = 0$ (meio sem fontes), pode ser encontrada em [Peterson et al., 1997]. O primeiro termo desta equação pode ser expandido em:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho \epsilon_r} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} \right] \psi = \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\psi}{\rho \epsilon_r} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} \right] - \frac{1}{\rho \epsilon_r} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}. \quad (3.10)$$

Procedendo-se de modo semelhante com o segundo termo, pode-se reescrever a Eq. (3.9) como:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\psi}{\rho \epsilon_r} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\psi}{\rho \epsilon_r} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial z} \right] \right\} d\Omega \\ & - \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{\rho \epsilon_r} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho \epsilon_r} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} d\Omega \\ & + k^2 \iint_{\Omega} \frac{\mu_r}{\rho} (\rho H_\phi) \psi d\Omega = \iint_{\Omega} \psi f d\Omega. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Esta equação pode ser reescrita em um formato mais compacto usando-se o teorema de Green e identidades vetoriais, o que resulta na forma fraca para a solução TM:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \frac{\psi}{\rho \epsilon_r} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial n} d\Gamma - \iint_{\Omega} \frac{1}{\rho \epsilon_r} \nabla(\rho H_\phi) \cdot \nabla \psi d\Omega \\ & + k^2 \iint_{\Omega} \frac{\mu_r \psi}{\rho} (\rho H_\phi) d\Omega = \iint_{\Omega} \psi f d\Omega, \end{aligned} \quad (3.12)$$

em que Γ é o contorno global, formado pela união da curva geratriz com o contorno do eixo de simetria e, no problema do monopolo, com o contorno absorvente.

A forma fraca para a solução TE pode ser obtida aplicando o mesmo procedimento usado na construção da forma fraca da solução TM, ou de modo alternativo, aplicando o teorema da dualidade [Harrington, 1961] na Eq. (3.12). Ambos

os procedimentos conduzem à formulação abaixo:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{\psi}{\rho\mu_r} \frac{\partial(\rho E_{\phi})}{\partial n} d\Gamma - \iint_{\Omega} \frac{1}{\rho\mu_r} \nabla(\rho E_{\phi}) \cdot \nabla\psi d\Omega \\ + k^2 \iint_{\Omega} \frac{\epsilon_r\psi}{\rho} (\rho E_{\phi}) d\Omega = \iint_{\Omega} \psi f d\Omega. \end{aligned} \quad (3.13)$$

As equações (3.12) e (3.13) podem ser escritas em uma única expressão, dada por:

$$\int_{\Gamma} \frac{\psi}{\rho p} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma - \iint_{\Omega} \frac{\nabla u \cdot \nabla \psi}{\rho p} d\Omega + k^2 \iint_{\Omega} \frac{qu\psi}{\rho} d\Omega = \iint_{\Omega} \psi f d\Omega, \quad (3.14)$$

onde:

$$p = \begin{cases} \epsilon_r, & \text{modo TM} \\ \mu_r, & \text{modo TE} \end{cases}, \quad q = \begin{cases} \mu_r, & \text{modo TM} \\ \epsilon_r, & \text{modo TE} \end{cases} \quad \text{e} \quad u = \begin{cases} \rho H_{\phi}, & \text{modo TM} \\ \rho E_{\phi}, & \text{modo TE} \end{cases}.$$

3.2 Forma Fraca Local e o Sistemas de Equações

A forma fraca local é obtida substituindo ψ na Equação (3.14) por ψ_i , definido na Equação (2.35), que possui valor unitário no interior de Ω^i (domínio de teste do nó i) e no seu contorno Γ^i . Esta substituição resulta na seguinte formulação local:

$$\int_{\Gamma^i} \frac{\psi_i}{\rho p} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma + k^2 \iint_{\Omega^i} \frac{q\psi_i u}{\rho} d\Omega = \iint_{\Omega^i} \psi_i f d\Omega, \quad \forall \Omega^i \quad (3.15)$$

a qual é válida para a região próxima ao nó i onde $\psi_i \neq 0$. Γ^i contém o contorno interno Γ_i^i ao domínio Ω e também pode conter contornos globais com condição de Dirichlet (Γ_g^i) ou Neumann (Γ_h^i). Esta forma local possui apenas dois termos, diferentemente da Equação (3.14) que apresenta 3 termos. Isto ocorre devido à nulidade do segundo termo de (3.14), pois tem-se para este termo $\nabla\psi_i = 0$.

A solução numérica para a análise de problemas eletromagnéticos axisimétricos invariantes na direção ϕ é obtida transformando-se a Equação (3.15) em um sistema de equações lineares com n_t equações, o qual é construído com a aproximação da variável de campo u por u^h que é definida pela Equação (2.3). Esta aproximação, que usa funções RPIMP, resulta no sistema de equações

$$[\mathbf{T} - k^2\mathbf{V}] \mathbf{U} = \mathbf{W}, \quad (3.16)$$

onde

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n_t} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n_t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{n_t n_t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n_t} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n_t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & v_{n_t n_t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n_t} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n_t} \end{bmatrix},$$

em que \mathbf{U} é o vetor que agrupa todos parâmetros nodais do domínio Ω . Já os elementos de \mathbf{T} , \mathbf{V} e \mathbf{W} são descritos, respectivamente por:

$$t_{ij} = \int_{\Gamma^i} \frac{\psi_i}{\rho p} \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} d\Gamma, \quad (3.17)$$

$$v_{ij} = \iint_{\Omega^i} \frac{q \psi_i \varphi_j}{\rho} d\Omega \quad (3.18)$$

e

$$w_i = \iint_{\Omega^i} \psi_i f d\Omega \quad (3.19)$$

em que $\psi_i = 1$ internamente ao domínio Ω^i e no contorno Γ^i do mesmo, sendo $\psi_i = 0$ para as demais regiões de Ω .

A condição de contorno de Neumann em Γ_h^i é imposta assumindo $\partial u / \partial n = h$ e, conseqüentemente, possibilitando a determinação de um valor para a integral de contorno, ou seja, para o elemento t_{ij} . Por exemplo, no caso da condição de Neumann homogênea, o valor do elemento t_{ij} é nulo. A condição de contorno de Dirichlet é imposta de modo simples e direto, devido à propriedade do delta de Kronecker da função RPIMp. Esta condição, em que $u = g$, é imposta estabelecendo o valor g diretamente para os nós i do contorno Γ_g^i . No sistema de equações (3.16), os elementos t_{ij} assumem os valores unitários quando $i = j$ e os valores nulos para os demais casos, $i \neq j$. Os elementos v_{ij} assumem valor nulo para todos os valores de i e j . Já o elemento w_i assume o valor g .

Esta formulação local mostra-se versátil, pois pode ser empregada em análises

de meios com diferentes camadas de permissividades ou permeabilidades. Neste caso é necessário lidar com descontinuidades presentes no meio, o que é realizado usando procedimentos apresentados em [Lima et al., 2012]. Além disso faz-se necessário a adição de um novo contorno Γ_I^i ao conjunto Γ^i da forma fraca (3.15), o qual representa uma interface. Esta abordagem é aplicada na análise de um monopolo sobre um plano PEC e parcialmente coberto com uma camada dielétrica, apresentada na Seção 3.5.

Nas próximas seções, serão apresentadas as análises da cavidade axissimétrica e do monopolo sobre um plano PEC, as quais se realizam utilizando o sistema de equações (3.16).

3.3 Desempenho do MLPG Proposto no Estudo de uma Cavidade Axialmente Simétrica

Nesta seção, os procedimentos propostos para o MLPG (Capítulo 2) são aplicados na análise de uma cavidade com simetria axial, em que seus autovalores (frequências de ressonância) são determinados. No sistema de equações (3.16), busca-se o valor de k admitindo $f = 0$ ($w_i = 0$ para todos os valores de i), por se tratar de um problema sem fontes. Os resultados numéricos obtidos possibilitam avaliar a convergência e o tempo de processamento do método proposto.

O MLPG proposto utiliza informações da malha em seu procedimento, logo o método tornou-se dependente de uma malha. Todavia este método apresenta algumas vantagens. Em relação ao FEM, ele mostrou-se menos sensível às malhas de má qualidade, as quais são compostas por elementos com ângulos internos próximos a 180° . Quando comparado com o MLPG original, o método proposto requer menor tempo de processamento, pois não usa estruturas de busca e também possibilita a utilização de algumas estratégias adicionais que minimizam ainda mais este tempo, as quais são detalhadas no Capítulo A. Em [Soares Jr, 2013] é descrito que o uso de esquemas T, presente no MLPG proposto, conduzem a resultados mais estáveis. Objetivando demonstrar a maior robustez do método proposto às malhas de qualidade inferior, avaliou-se o seu desempenho usando duas diferentes malhas: a primeira (malha-A) composta apenas por elementos de boa qualidade (vide Figura 3.2 (a)) e a segunda (malha-B) composta parcialmente por elementos de má qualidade, obtidos a partir de compressões horizontais de elementos de boa qualidade (vide Figura 3.2 (b)). Estas malhas têm seus procedimentos de construção apresentados no Capítulo B. Os resultados são comparados com os do FEM. Esta análise foi publicada em [Soares et al., 2013].

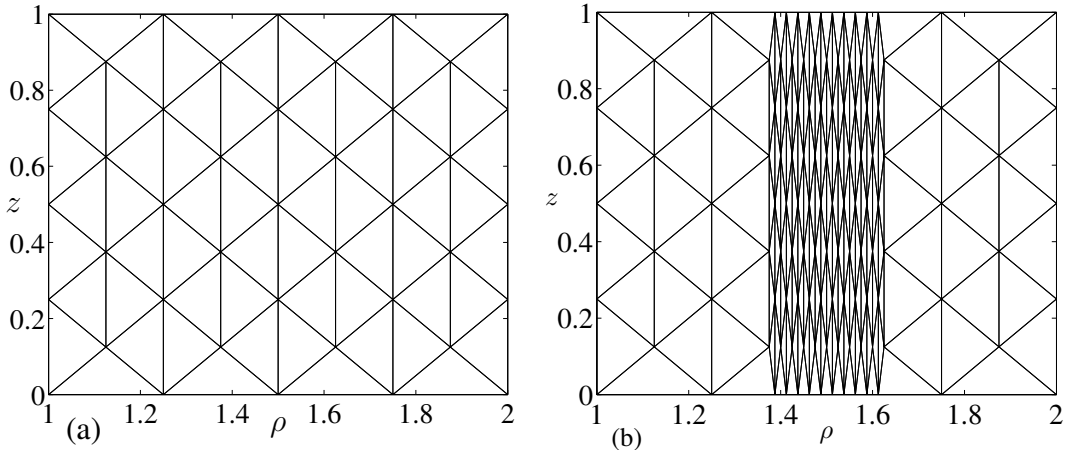


Figura 3.2: Malhas de boa qualidade e de qualidade inferior: (a) malha-A somete com elementos de boa qualidade, 41 nós (b) malha-B construída parcialmente com elementos de qualidade inferior, 122 nós.

3.3.1 Resultados

Uma cavidade coaxial com raio interno $r_a = 1m$, raio externo $r_b = 2m$, altura $l = 1m$, com vácuo em seu interior ($\epsilon_r = 1$ e $\mu_r = 1$) é analisada. Esta cavidade é admitida ser constituída por PEC. Logo, tem-se, para os contornos de sua curva geratriz no modo TM, a condição de Neumann homogênea ($\partial u / \partial n = 0$), sendo os elementos t_{ij} do sistema de equações (3.16) nulos neste contorno. Estes contornos são denominados Γ_h .

O procedimento para o MLPG proposto inicia-se preenchendo todas as linhas das matrizes matrizes \mathbf{T} e \mathbf{V} do sistema de equações (3.16). Os valores da constante de onda k são determinados calculando os autovalores deste sistema. É preciso enfatizar que a formulação fraca desenvolvida neste capítulo (Eq. (3.14)) não possibilita a obtenção de todos os autovalores presentes na solução analítica [Harrington, 1961], pois foi assumido que os campos não apresentam variações com a coordenada ϕ . Os autovalores avaliados são os cinco menores valores de k com campos não variantes em ϕ , sendo estes apresentados na Tabela 3.1 e com o módulo da distribuição de campo $\rho H \phi$ apresentados na Figura 3.3. Os resultados numéricos (soluções do MLPG proposto e do FEM) para os valores de k são apresentados na Tabela 3.1, onde estas soluções são comparadas às soluções analíticas, sendo o erro relativo calculado por:

$$\text{E.R.} = \frac{|k_y^{\text{Num}} - k_y^{\text{Exata}}|}{k_y^{\text{Exact}}} \cdot 100\% \quad (3.20)$$

em que k_y^{Num} e k_y^{Exata} são as soluções numérica e exata do autovalor y , sendo $k_y = \omega_y \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ e ω_y é a frequência de ressonância do modo y da cavidade.

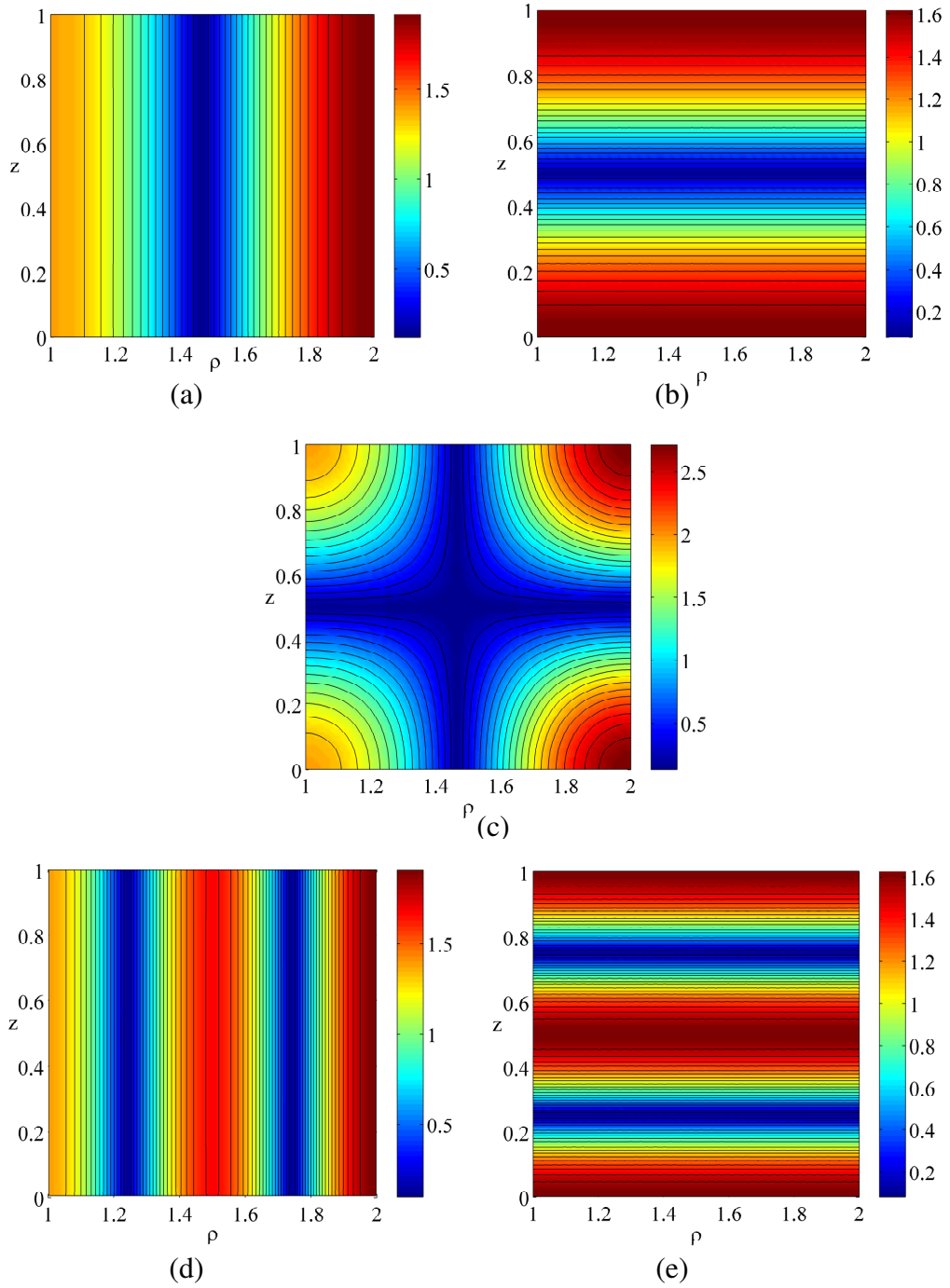


Figura 3.3: Distribuições de campos (ρH_ϕ - em Amperès) dos modos analisados da cavidade Coaxial. Os cinco primeiros modos são: (a) k_1 ou TM_{020} (b) k_2 ou TM_{011} (c) k_3 ou TM_{021} (d) k_4 ou TM_{030} e (e) k_5 ou TM_{012} .

Na Tabela 3.1, os resultados numéricos foram obtidos usando a malha-A apresentada na Figura 3.2 (a), a qual possui 41 nós. Pode ser observado nesta tabela que o MLPG possui um menor erro relativo para 3 dos 5 primeiros autovalores da cavidade, sendo o erro relativo menor para os autovalores k_2 , k_3 e k_5 . O

desempenho do MLPG também mostra-se superior ao do FEM na Figura 3.4, que apresenta o erro relativo para o segundo autovalor da cavidade coaxial k_2 considerando os dois tipos de malhas e variações da quantidade de nós em cada uma.

Tabela 3.1: Número de onda ressonante $k(\text{rad/m})$ de uma cavidade coaxial e sua correspondente notação TM_{npq} segundo [Harrington, 1961]. Soluções numéricas do MLPG e do FEM usando a Malha-A.

Soluções		Analítica	MLPG		FEM	
y	Módulo	k_y	k_y	E.R. (%)	k_y	E.R. (%)
1	TM_{020}	3,1230309	3,0925699	0,9754	3,1526466	0,9483
2	TM_{011}	3,1415927	3,1104935	0,9899	3,2191548	2,4689
3	TM_{021}	4,4297773	4,3433649	1,9507	4,5362372	2,4033
4	TM_{030}	6,2734357	5,8894389	6,1210	6,5047965	3,6879
5	TM_{012}	6,2831853	6,0412301	3,8508	6,9074120	9,9349

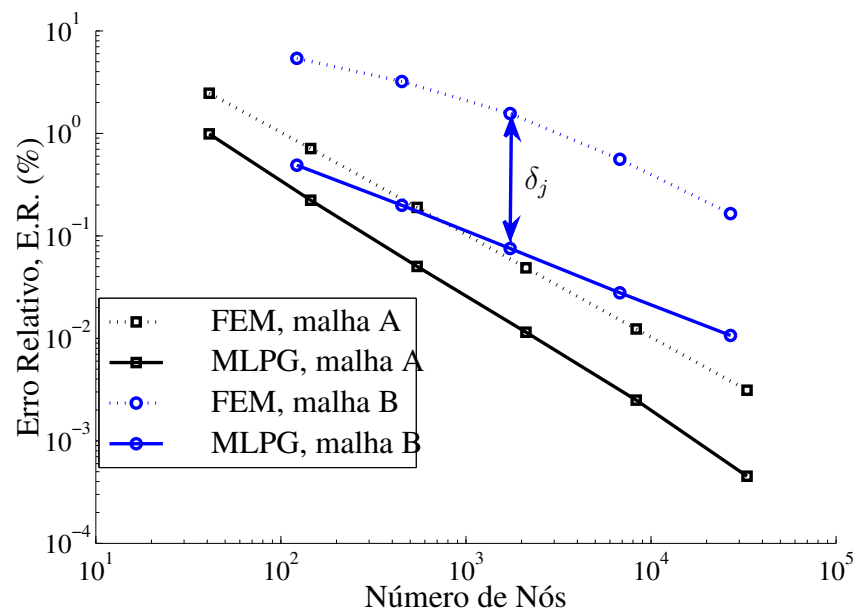


Figura 3.4: Erros relativos do MLPG e FEM em função do número de nós para o autovalor k_2 usando malhas dos tipos A e B.

A Figura 3.4 também apresenta o parâmetro δ_j que define a diferença logarítmica de nível entre os erros do FEM e do MLPG para cada ponto j da curva. A média desta diferença δ_{av} é determinada usando todos os δ_j de um

mesmo tipo de malha, de modo mais específico, pode ser determinada por:

$$\delta_{av} = \frac{1}{n_{pontos}} \sum_{j=1}^{n_{pontos}} \log(ER_{MLPG}^j) - \log(ER_{FEM}^j) \quad (3.21)$$

onde ER_{MLPG}^j e ER_{FEM}^j são os erros relativos do MLPG e do FEM para cada ponto j das curvas com a malha de boa qualidade ou com a malha com elementos de qualidade inferior. n_{pontos} é o número total de pontos de cada tipo de curva. Este parâmetro assume um valor positivo quando a curva do MLPG estiver abaixo da curva do FEM, indicando uma maior precisão do MLPG quando comparado ao FEM. O valor negativo deste parâmetro indicará a maior precisão do FEM quando comparada ao MLPG. Na Figura 3.4, os valores de δ_{av} são 0,6062 e 1,2118 para malhas A e B, respectivamente. Estes resultados mostram que o δ_{av} aumenta da malha A para a B, evidenciando a menor sensibilidade do MLPG à distorção da malha.

A Tabela 3.2 mostra os valores de δ_{av} obtidos com o MLPG e o FEM para as malhas A e B, δ_{av} -A e δ_{av} -B, respectivamente. Nesta tabela são apresentados resultados para os cinco primeiros modos da cavidade. O parâmetro δ_{av} -A, indica que as curvas de erro do MLPG são mais precisas que as curvas do FEM para os modos k_2 , k_4 , e k_5 (estas curvas do MLPG estão abaixo das curvas do FEM os valores médios de 0,6062, 0,0789 e 0,5741, respectivamente). O FEM obteve os resultados mais precisos para os modos k_1 e k_4 , que possuem curvas abaixo das curvas obtidas com o MLPG os valores médios de 0,1571 e 0,1937, respectivamente. Pode ser observado que o MLPG foi expressivamente superior ao FEM para os modos k_2 e k_5 , os quais possuem variações de distribuição de campo apenas com a coordenada z (Vide Figuras 3.3 (b) e (e)). Para a malha B, o MLPG apresentou apenas um resultado menos preciso, o qual foi encontrado para o modo k_4 que possui um pequeno δ_{av} -B, aproximadamente -0,2827. Já para os demais para demais modos (k_1 , k_2 , k_3 , e k_5), o MLPG mostrou-se mais preciso, sendo encontrados grandes valores de δ_{av} -B (0,4663, 1,2118, 0,4389, e 1,3432, respectivamente) o que evidencia a maior precisão deste método quando comparado ao FEM para estes modos. Pode ser observado também que os maiores valores de δ_{av} -B ocorrem para os modos k_2 e k_5 , os mesmos modos que o MLPG apresentou desempenho superior ao FEM para a malha A.

Tabela 3.2: Diferença média de níveis em escala logarítmica.

Modos	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
δ_{av} -A	-0,1571	0,6062	0,0789	-0,1937	0,5741
δ_{av} -B	0,4663	1,2118	0,4389	-0,2827	1,3432

A taxa de convergência para ambos os métodos, para cada modo da cavidade, é calculada pela razão, em escala logarítmica, entre o erro relativo e o máximo espaçamento entre nós de cada malha. A Tabela 3.3 apresentam as taxas de convergência para os cinco primeiros autovalores da cavidade, determinados usando o FEM para a malha A e B (FEM-A e FEM-B) e para o MLPG usando as mesmas malhas (MLPG-A e MLPG-B). Usando a malha A, o MLPG obteve melhores taxas de convergência para os modos k_2 , k_3 e k_5 , e o FEM teve melhores resultados para k_1 e k_4 . As taxas de convergências foram similares, evidenciando que o FEM e o MLPG possuem desempenhos similares para a malha regular A. Entretanto, considerando a malha de qualidade inferior B, o MLPG obteve melhor taxas de convergência que o FEM para os modos k_1 , k_2 , k_3 e k_5 , enquanto o FEM teve um desempenho ligeiramente superior para o modo k_4 , o que mostra o melhor desempenho do MLPG nesta malha.

Tabela 3.3: *Taxas de Convergência do MLPG e do FEM.*

Modos	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
FEM-A	2,0928	1,9327	1,9809	2,0924	1,9347
MLPG-A	1,9477	2,2015	1,9848	2,054	2,0869
FEM-B	2,1059	1,2595	1,7622	2,0835	1,1982
MLPG-B	2,4599	1,3876	1,8058	2,0339	1,5765

O tempo computacional do MLPG para resolver o problema é sempre maior que o FEM para a mesma malha, como é mostrado na Tabela 3.4. Entretanto uma comparação justa entre os dois métodos pode ser feita analisando o erro relativo em função do tempo computacional, a qual é apresentada na Figura 3.5 para o segundo modo (k_2) usando malhas A e B. Estes resultados foram obtidos utilizando um computador pessoal (Intel Core i7, com quatro núcleos e processador de 2GHz). Esta figura evidencia o desempenho semelhante de ambos os métodos para a malha A e o desempenho superior do MLPG para a malha B, que possui curva de erro relativo abaixo da curva do FEM com valor médio de 0,8329.

Na Figura 3.5, um novo parâmetro é definido (Δ_j) para apresentar os resultados dos outros quatro modos (k_1 , k_3 , k_4 e k_5) na perspectiva do tempo computacional e também para propiciar uma avaliação geral para os 5 modos avaliados nesta mesma perspectiva. Este parâmetro mostra a diferença de níveis em escala logarítmica entre MLPG-B_j e um ponto na curva FEM-B, o qual foi obtido por uma interpolação linear. Os parâmetros Δ_j são usados para determinar as diferenças de nível média em escala logarítmica Δ_{av} -A e Δ_{av} -B, as quais são apresentadas na Tabela 3.5 para os modos $k_1 - k_5$. Para a malha A, o FEM apresentou melhores resultados para os modos k_1 , k_3 e k_4 , os quais estão abaixo

Tabela 3.4: Tempo total para resolver o problema (segundos) \times número de nós.

Malhas A	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆
Nós	41	145	545	2113	8221	33025
Tempo FEM	0,07	0,24	0,85	3,42	15,05	77,39
Tempo MLPG	0,30	1,1	4,35	17,8	75,42	345,26

Malhas B	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅
Nós	122	451	1733	6793	26897
Tempo FEM	0,18	0,68	2,57	11,31	56,12
Tempo MLPG	0,90	3,57	14,60	60,57	269,88

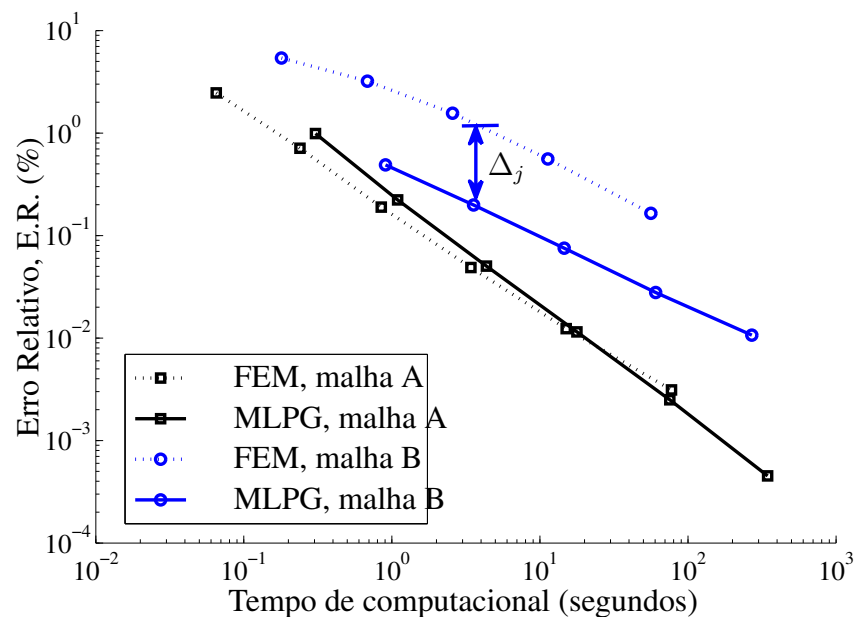


Figura 3.5: Erro relativo do MLPG e FEM usando malhas A e B para o segundo modo da cavidade coaxial em relação ao tempo.

das curvas de erros do MLPG os valores médios são de 0,7858, 0,5341, e 0,8321, respectivamente. O MLPG e o FEM apresentaram resultados similares para os modos k_2 e k_5 , sendo que as curvas do FEM continuaram abaixo das curvas do MLPG os valores médios de 0,0341 e 0,039, respectivamente. Para a malha B, o MLPG não apresentou resultados melhores para os modos k_1 e k_4 . Para o terceiro modo, k_3 , os resultados foram próximos e o MLPG apresentou melhores resultados para os modos k_2 e k_5 . Os resultados de Δ_{av} evidenciaram que o desempenho de ambos os métodos foram similares na perspectiva do tempo para malha B.

As análises acima mostram que o FEM não apresentou resultados ruins de convergência na malha B quando comparada a malha A para os modos k_1 e k_4 . Isto pode ser observado na Tabela 3.3 que mostra resultados de convergência

Tabela 3.5: *Diferença média de níveis em escala logarítmica em relação ao tempo.*

Modos	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
Δ_{av} -A	-0,7858	-0,0341	-0,5341	-0,8321	-0,039
Δ_{av} -B	-0,3518	0,8329	-0,1235	-0,9407	0,9106

muito próximos, o modo k_1 apresentou a taxa de 2,0928 para a malha A e de 2,1059 para a malha B. Nesta tabela, também pode ser visto que o modo k_4 apresentou taxas semelhantes: para a malha A foi de 2,0924 e para a malha B foi de 2,0835. Isto ocorre devido à distorção regular dos elementos, que no intervalo $[1,4, 1,6]$ da coordenada ρ foram todos comprimidos apenas horizontalmente (vide Figura 3.2). Esta compressão regular não impactou os resultados de convergência dos modos k_1 e k_4 , que apresentam variações nas distribuições de seus campos apenas com a coordenada ρ (vide Figuras 3.3 (b) e 3.3 (b)). Já os modos k_2 e k_5 que apresentam variações nas distribuições de campos apenas com a coordenada z tiveram seus resultados de convergência fortemente impactados na malha B quando comparados aos resultados obtidos com a malha A. Na Tabela 3.3 pode-se observar que para o modo k_2 houve uma queda brusca da taxa de convergência de 1,9327 (malha A) para 1,2595 (malha B). Para o modo k_5 a queda na taxa apresentada nesta tabela foi de 2,0924 (malha A) para 1,1982 (malha B). O modo k_3 apresenta variações na sua distribuição de campo com as coordenadas ρ e z , por isto não mostrou uma queda expressiva em sua taxa de convergência da malha A para B (na Tabela 3.3, a taxa foi de 1,9809 para 1,7622).

Os resultados apresentados nesta seção objetivaram fazer comparações entre os métodos FEM e MLPG proposto em malhas compostas por somente elementos de qualidade (Malha A) e composta parcialmente por elementos distorcidos que prejudicassem os desempenhos dos métodos numéricos (malha B). Todavia, o formato regular da distorção dos elementos apenas gerou resultados expressivamente ruins usando o FEM para os modos que possuem variações de distribuições de campo com a coordenada z (k_2 e k_5). Logo, as comparações entre os dois métodos são realizadas apenas para estes dois modos. Para estes modos e usando a malha B, o desempenho do MLPG proposto foi superior em todos os resultados. A taxa de convergência obtida para a malha B e o modo k_2 foi de 1,2595 para o FEM e de 1,3876 para o MLPG proposto. Para o modo k_5 , este resultado foi de 1,1982 para o FEM e de 1,5765 o MLPG proposto. A Tabela 3.2 mostra que, para a malha B, as curvas de convergência em função dos nós usando MLPG estão abaixo das curvas usando o FEM a média logarítmica de 1,2118 para o modo k_2 e de 1,3432 para o modo k_5 . Já a Tabela 3.5 mostra que a média logarítmica quando ponderada em relação ao tempo também apresentou bons valores para o MLPG proposto, sendo que este apresentou menor tempo de processamento. As curvas

do MLPG na Tabela 3.5 ficaram abaixo das curvas do FEM os valores de 0,8329 para o modo k_2 e de 0,9106 para o modo k_5 .

Uma análise adicional é proposta trabalhos futuros no Capítulo 5, na qual a malha possuiria elementos de má qualidade obtidos de compressões verticais dos elementos de boa qualidade. Espera-se, com esta análise, obter desempenhos ruins, usando o FEM, para os modos que apresentem variações com a coordenada ρ (k_1 e k_4).

3.4 Análise de um Monopolo Verticalmente Posicionado sobre um Plano PEC

O monopolo vem sendo vastamente utilizado em aeronaves e em diversos sistemas de comunicação [Shen and MacPhie, 2003] devido à sua estrutura simples e características atrativas. Algumas aplicações específicas desta antena podem ser listadas: as antenas parcialmente cobertas por ambientes não homogêneos, contendo água ou óleo [Shen and MacPhie, 1996]; e antenas envolvidas por diferentes meios, como ocorre em monopulos encapados [Sumbar et al., 1991] [Lockard and Butler, 2006].

Tendo isso em vista, são citados aqui alguns trabalhos analisando monopulos, como por exemplo o apresentado em [Lockard and Butler, 2006], que avalia o efeito das cavidades em monopulos usando equações integrais e método dos momentos. O método dos elementos finitos foi usado em [Sumbar et al., 1991] e [Ali and Costache, 1994], fornecendo resultados precisos. Todavia, como já mencionado, o método exige a construção de uma malha com várias exigências de qualidade. Em [Shen and MacPhie, 2003], [Shen and MacPhie, 1996] e [Lockard and Butler, 2006], foram obtidos bons resultados utilizando técnicas de expansão modal. Estas análises foram implementadas adotando um plano condutor elétrico perfeito (PEC) sobre a antena. Este plano PEC, que é utilizado para limitar o espaço modelado, pode não ter influenciado negativamente os resultados numéricos dado características específicas da antena analisada, a qual possui sua maior radiação na direção horizontal.

O estudo realizado nesta seção analisa dois monopulos com dimensões diferentes usando MLPG. Um destes monopulos foi avaliado por [Sumbar et al., 1991] usando FEM. A outra configuração da antena foi analisada por [Shen and MacPhie, 1996] usando expansão modal. Ambas antenas possuem modelo teórico apresentado em [King, 1971], todavia somente para as versões sem dielétricos destas antenas. Nessa direção, o estudo proposto avalia monopulos verticais sobre um plano PEC, determinando sua corrente superficial,

além de avaliar o comportamento de sua impedância em função do seu comprimento elétrico. Algumas análises preliminares desta antena usando o MLPG original (não dependente de malhas) foram publicadas em [Soares et al., 2012] e [Soares et al., 2011c]. Todavia os resultados apresentados a seguir utilizam o MLPG proposto (dependente de malhas), o que possibilitou resultados mais precisos, estáveis e com menor custo computacional em relação ao MLPG original.

O monopolo analisado tem simetria axial e a excitação é realizada pelo modo TEM de um guia coaxial. Consequentemente, a solução não depende da coordenada ϕ e pode ser obtida através do sistema de equações (3.16). Todavia nesta análise a frequência de operação do monopolo é conhecida, logo o valor de k também. Esta análise, diferentemente do problema da cavidade que é um problema de autovalor (no qual foram determinadas as frequências de ressonância da cavidade), visa determinar o campo u (sendo $u = \rho H_\phi$, caso TM) e a partir dele a impedância de entrada e a corrente na superfície da antena.

Nas Figuras 3.6 (a) e 3.6 (b), apresentam-se, respectivamente, a perspectiva 3D e o domínio computacional do mencionado monopolo. A Figura 3.6 apresenta medidas que caracterizam o monopolo: a altura l e o raio r_a . A variável r_b representa o raio externo do cabo coaxial que o alimenta. Esta figura apresenta também o domínio computacional e os seus contornos: Γ_h , Γ_g , Γ_f e Γ_r que representam, respectivamente, a superfície dos condutores, o eixo simetria, a alimentação e o arco que delimita o espaço do modelo, onde se impõe uma condição de contorno de radiação (RBC). Vale ressaltar que a RBC implementada é uma Bayliss-Turkel de primeira ordem, a qual é imposta em uma circunferência com raio 2 ou 3 vezes o valor da altura do monopolo. Esta condição de radiação é descrita por [Peterson et al., 1997]:

$$\frac{jk}{\rho}(\rho H_\phi) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial n} = 0. \quad (3.22)$$

O sistema de equações 3.16 é novamente usado. Todavia neste problema existe uma fonte, diferentemente do problemas de autovalores da Seção 3.3. Esta fonte, a alimentação do monopolo, é implementada no guia coaxial em Γ_f , impondo a condição de Dirichlet não homogênea dada por:

$$\rho H_\phi = \frac{E_0}{\eta} e^{-jkz}, \quad (3.23)$$

na qual E_0 é a amplitude do campo elétrico imposto em Γ_f (a amplitude aqui adotada é $E_0 = 1$ V/m) e η é a impedância intrínseca do guia coaxial com vácuo no seu interior ($\eta = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$). Esta condição é implementa no sistema de equações (3.16) fazendo $t_{ij} = 1$ quando $i = j$ e nulo para demais condições ($i \neq j$); $v_{ij} = 0$

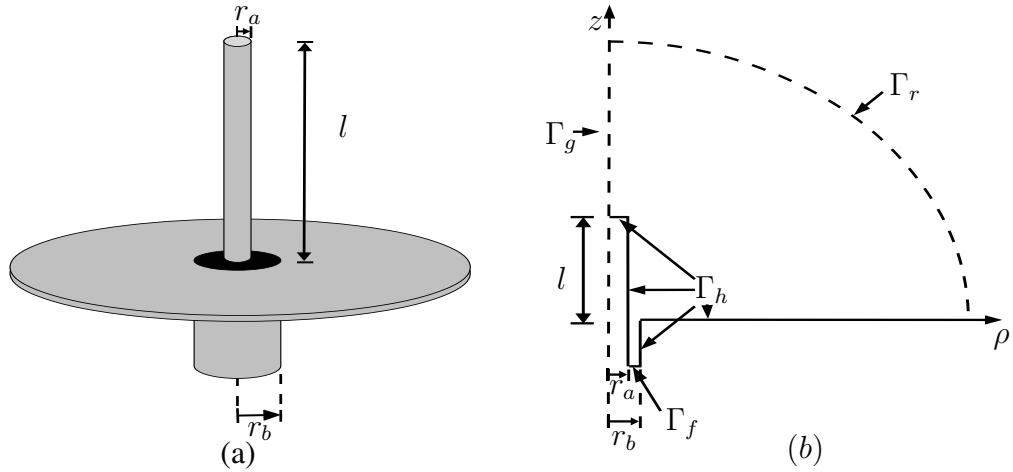


Figura 3.6: Monopolo sobre um plano PEC: (a) perspectiva 3D; (b) geometria de revolução e domínio 2D usado nas análises numéricas.

para qualquer valor de i e j ; e adotando os elementos $w_i = (E_0/\eta)e^{-jkz}$ para os nós i do respectivo contorno. As demais condições presentes no monopolo são: Dirichlet homogênea para o eixo de simetria Γ_g (imposta adotando procedimento similar ao imposto na condição não homogênea, mas fazendo $w_i = 0$), Neumann homogênea para os condutores Γ_h ($\partial u/\partial n = 0$, imposta fazendo $t_{ij} = 0$ para qualquer valor de i e j) e Neumann não homogênea para o contorno que delimita o modelo Γ_r (imposta fazendo $\partial u/\partial n = -jku$, vide Eq. 3.22). Logo, em Γ_r , o elemento t_{ij} do sistemas de equações (3.16) é definido por:

$$t_{ij} = -jk \int_{\Gamma_r^i} \frac{\psi_i}{\rho f} \varphi_j d\Gamma. \quad (3.24)$$

Nesta análise, diferentemente da análise da cavidade, busca-se determinar o campo magnético. Logo, é estabelecido, primeiramente, o valor de k e, depois, resolve-se o sistema (3.16), o qual fornece os valores nodais u_i que são utilizados para aproximar o valor de ρH_ϕ em qualquer ponto \mathbf{x} do domínio usando a seguinte expressão:

$$\rho H_\phi(\mathbf{x}) \approx u^h(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\mathbf{x}) u_i. \quad (3.25)$$

A geometria do problema (Figura 3.6) impõe uma dimensão de r_b próxima à de r_a , definindo um guia coaxial muito estreito, o qual necessita de uma elevada densidade de nós (ou elevada quantidade de elementos) para cobrir totalmente o guia sem a presença de elementos distorcidos. A densidade de nós usada no guia não pode ser a mesma para todo o domínio, pois implicaria em uma grande

quantidade de nós para o modelo, tornando inviável o procedimento computacional. Por isso, tem-se uma distribuição não homogênea dos nós no domínio, com maior densidade no guia e uma variação gradual para obter-se menores densidades em regiões distantes do monopolo. Esta distribuição apresentada na Figura 3.7, foi gerada pelo software FEMM [FEMM, 2013]. Quanto aos domínios de teste e de influência, são obtidos seguindo a mesma estratégia adotada na análise da cavidade e detalhados nas Seções 2.2 e 2.4.

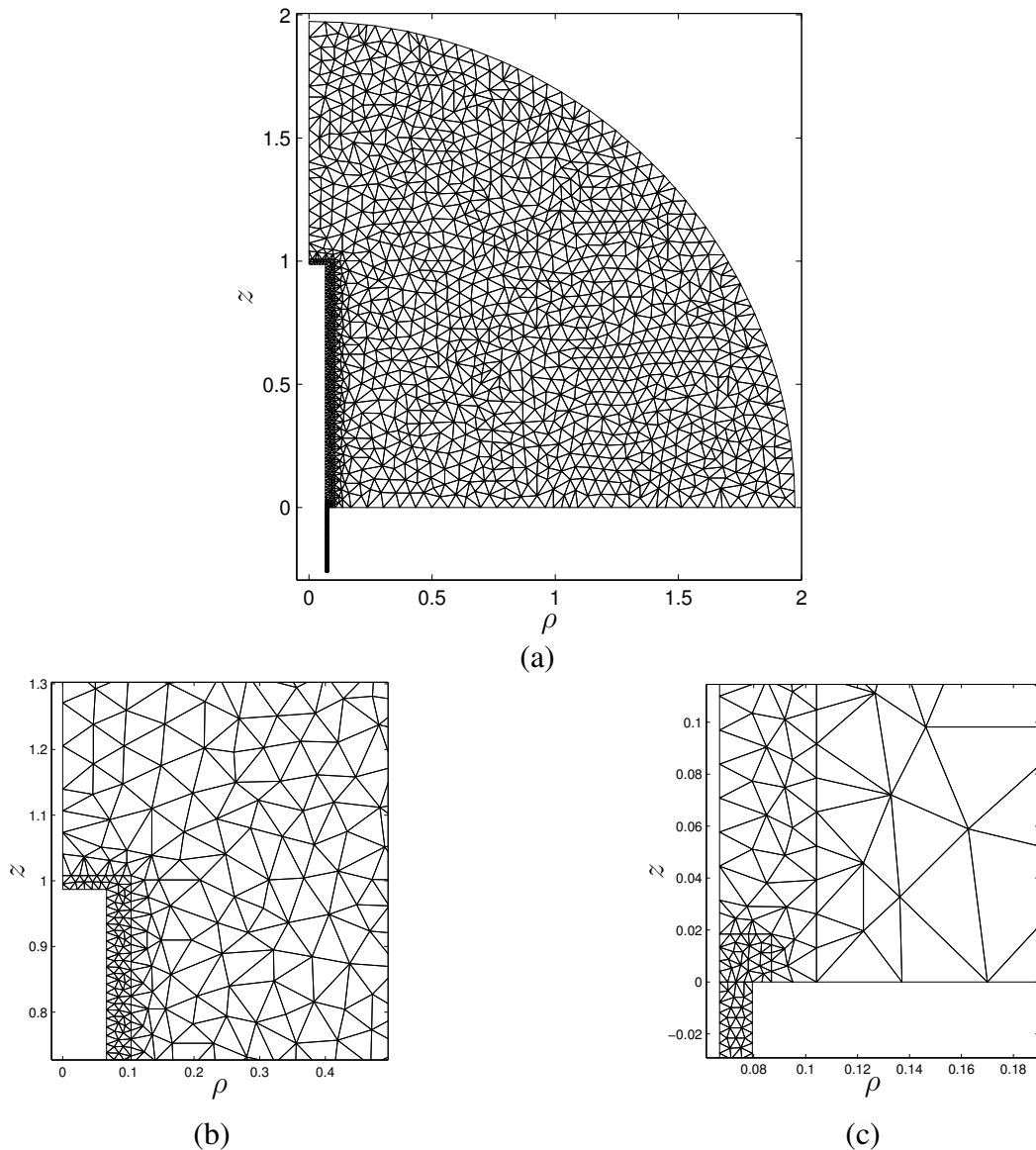


Figura 3.7: Malha para domínio Ω do monopolo, gerada pelo programa FEMM: (a) Domínio completo, (b) Ampliação do topo da antena e (c) Ampliação da abertura do guia coaxial na base do monopolo.

3.4.1 Resultados

Nesta subseção, os resultados encontrados através da técnica MLPG são comparados aos resultados numéricos obtido com o FEM e aos resultados de [King, 1971].

A corrente superficial é derivada a partir do valor encontrado para a incógnita ρH_ϕ ao longo da superfície do monopolo ($\hat{n} \times \vec{H} = \vec{J}_s$), onde \vec{J}_s é a distribuição superficial de corrente elétrica. A Figura 3.8 apresenta a distribuição de corrente elétrica normalizada pela tensão através da abertura do guia coaxial na base do monopolo (em $z = 0$). Esta tensão, por sua vez, é obtida integrando o campo elétrico desta abertura na direção $\hat{\rho}$:

$$V_{r_b-r_a} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r_a}^{r_b} \vec{E} \cdot \hat{\rho} d\rho = j \frac{1}{\omega \epsilon_r \epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} d\rho. \quad (3.26)$$

Esta figura apresenta os resultados obtidos com o MLPG proposto e o FEM para a malha apresentada na Figura 3.7, a qual possui 1870 nós, com Γ_f posicionado em $z = -0,1\lambda$ (sendo λ o comprimento de onda no vácuo) e para uma frequência de 114MHz (sendo λ aproximadamente 2,63 metros). Deve-se destacar, também, que a antena analisada possui dimensão dada por $r_a = 0,0254\lambda$, $r_b/r_a = 1,189$ e $l = 0,375\lambda$. A RBC foi imposta usando um arco de circunferência com raio 2 vezes o valor da altura do monopolo. A Figura 3.8 apresenta também os resultados para a mesma antena retirados de [King, 1971] (Tabela 2.2, página 17 do mesmo), os quais são utilizados para avaliar os resultados numéricos. Observa-se que ambas técnicas apresentaram resultados semelhantes para a mesma malha e próximos aos resultados teóricos de [King, 1971].

A impedância de entrada do monopolo (Z_{in}) é obtida dividindo a tensão através da abertura do guia coaxial na base do monopolo pela corrente total em $z = 0$. A antena que teve a impedância de entrada determinada possui dimensões $r_a = 0,009525\lambda$ e $r_b/r_a = 2,301$. As medidas r_a e r_b são menores do que a antena que teve a corrente determinada (a nova configuração possui um guia de ondas mais estreito). Esta nova configuração, para a altura de $0,37\lambda$, possui 5117 nós e pode ser vista na Figura 3.9. Nesta configuração foi mantida a posição da fonte em $-0,1\lambda$, todavia a posição da RBC foi alterada, sendo posicionada em $2,5\lambda$. Os resultados da admitância de entrada ($Y_{in} = 1/Z_{in}$) desta antena em função do seu tamanho elétrico podem ser encontrados em [King, 1971] (Tabela 2.4, página 34 do mesmo). Este resultado é usado para validar os resultados numéricos, sendo os mesmos apresentados na Figura 3.10, a qual mostra impedância de entrada do monopolo em função do seu tamanho elétrico. Observa-se, que para a malha utilizada, os resultados usando o FEM e o MLPG foram próximos aos encontrados em [King, 1971].

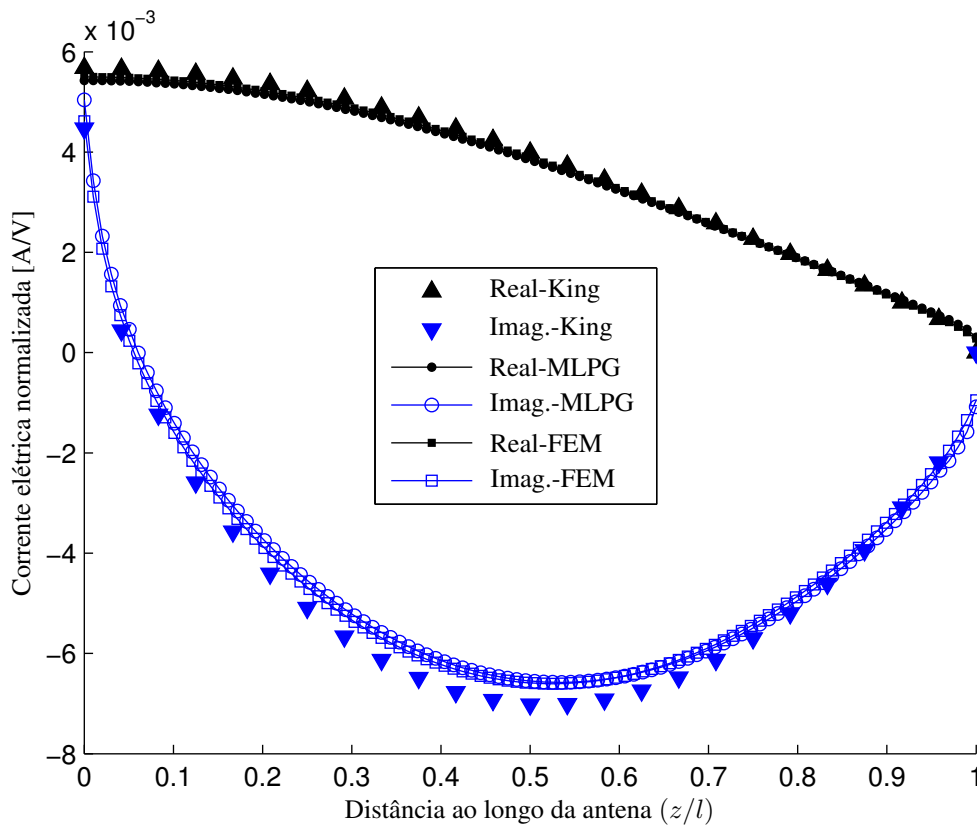


Figura 3.8: Distribuição de corrente para um monopolo sobre um plano PEC com comprimento de 0.375λ . Resultados apresentados como King foram retirados da Tabela 2.2, página 17 de [King, 1971].

Esta análise demonstrou a robustez do MLPG proposto quando uma grande variação da densidade de nós é empregada. A corrente superficial e a impedância de entrada da antena foram obtidas usando usando o MLPG proposto e o FEM.

3.5 Análise de um Monopolo Verticalmente Posicionado sobre um Plano PEC e Parcialmente Coberto por um Dielétrico

Esta seção apresenta os resultados de admitância e de corrente de um monopolo sobre um PEC e parcialmente coberto por um dielétrico. Esta antena, mostrada na Figura 3.11 (a) com sua perspectiva 3D e na (b) com sua geometria de revolução, foi analisada em [Shen and MacPhie, 1996] com expansão modal, sendo estes resultados de admitância usados para validar os resultados encontra-

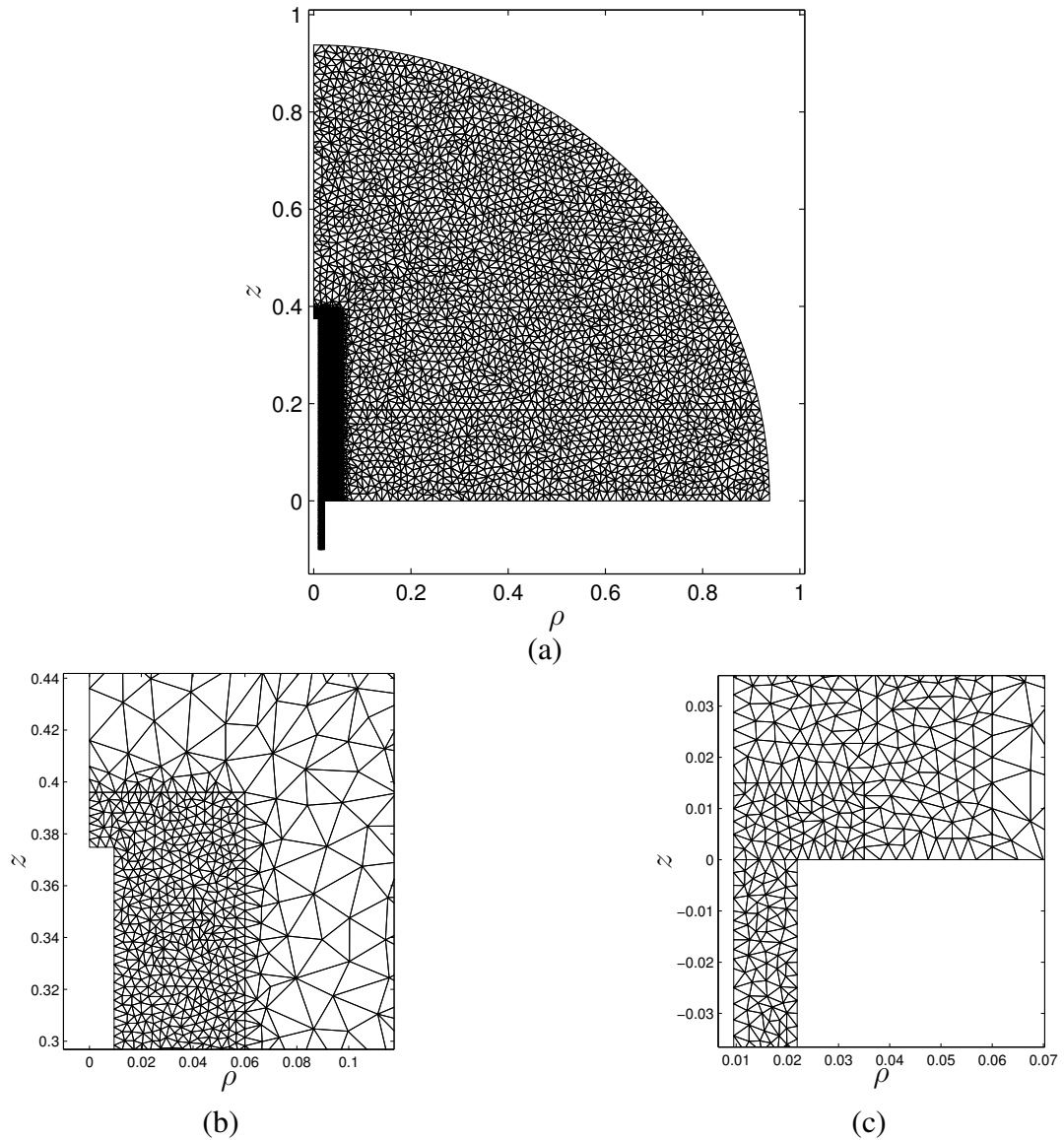
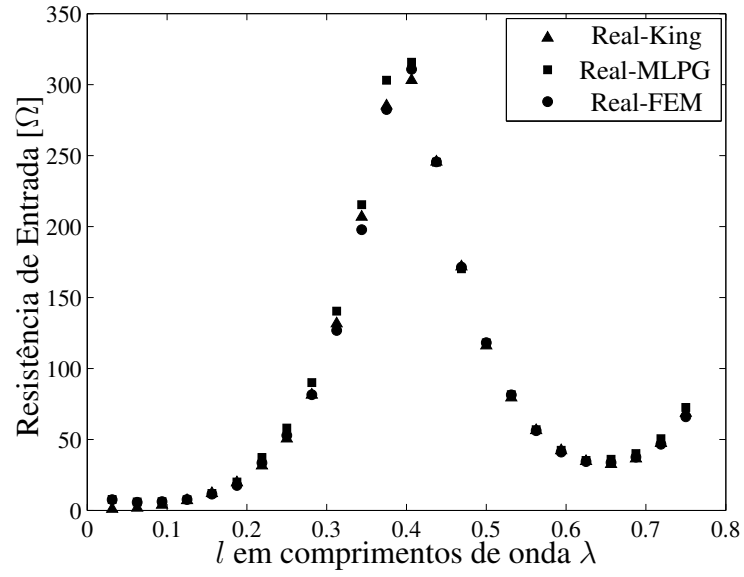


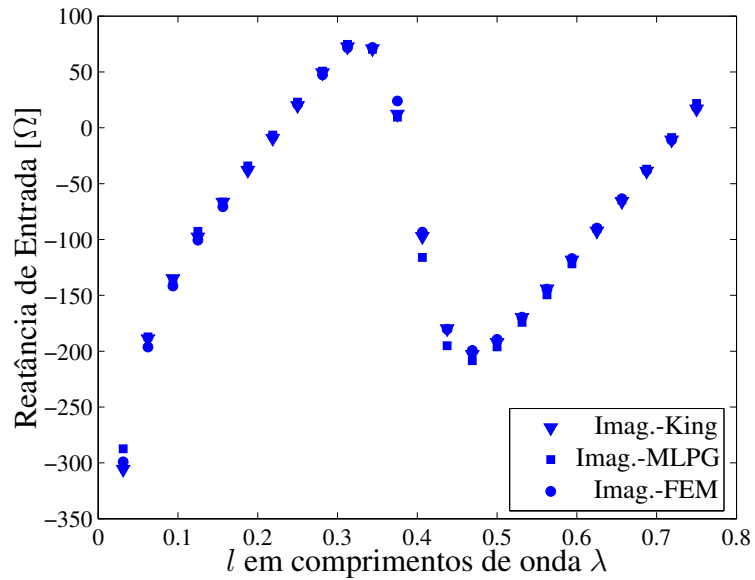
Figura 3.9: Segunda malha utilizada para o monopolo, gerada pelo programa FEMM: (a) domínio completo, (b) ampliação do topo da antena e (c) ampliação da abertura da guia coaxial na base do monopolo.

dos com o FEM e com o MLPG proposto. A Figura 3.11 mostra as medidas deste monopolo: a altura da antena l , a altura da camada dielétrica $l/2$, o raio interno do guia r_b e o raio do monopolo r_a . A figura também apresenta o domínio 2D usado nas análises numéricas e os contornos: Γ_h , Γ_g , Γ_f , Γ_r e Γ_I , sendo este último o contorno da interface entre os dielétricos, o qual está presente na terminação do guia e início da antena e na metade da altura do monopolo ($l/2$).

A análise desta antena usando o MLPG proposto é semelhante à realizada para o monopolo sem dielétrico. Todavia um tratamento para o contorno da interface é adicionado. Logo, assim como no caso anterior, tem-se uma análise TM, sendo



(a)



(b)

Figura 3.10: Impedância versus comprimento da antena, monopolo sobre um plano CEP: (a) resistência de entrada e (b) reatância de entrada. Os resultados apresentados como King foram retirados da Tabela 2.2, página 17 de [King, 1971].

$u = \rho H_\phi$. Este campo u , nesta nova análise, deve satisfazer as seguintes condições de contorno nas duas interfaces:

$$u_1 = u_2 \tag{3.27}$$

$$\frac{1}{\rho p_1} \frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{1}{\rho p_2} \frac{\partial u_2}{\partial n} \tag{3.28}$$

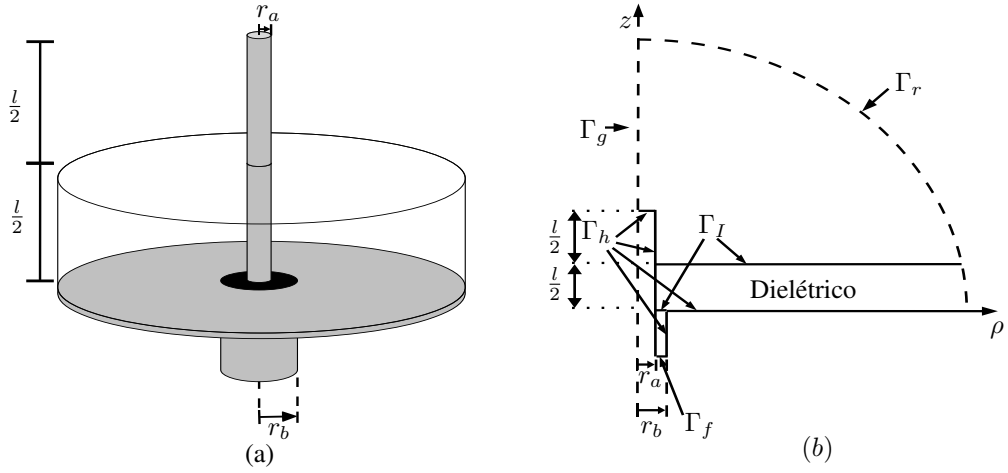


Figura 3.11: *Monopólo sobre um plano PEC e com camada dielétrica: (a) perspectiva 3D; (b) geometria de revolução e domínio 2D usado nas análises numéricas.*

sendo u_1 e u_2 os campo nos dielétricos 1 e 2, respectivamente, e p_1 e p_2 as permissividades relativas dos dielétricos 1 e 2, respectivamente.

A análise proposta nesta seção segue sugestões publicadas em [Lima et al., 2012], as quais possibilitam que o MLPG proposto lide com a interface entre dois materiais. Este método utiliza um procedimento de integração nas proximidades das interfaces, o qual é mais robusto, quando comparado ao método de colocação, e também simples, não exigindo a duplicação dos nós da fronteira. Este método também não exige a utilização de funções de forma especiais.

3.5.1 Método de Visibilidade

O método proposto em [Lima et al., 2012] sugere uma nova abordagem para análise de um domínio composto por dois diferentes materiais separados por uma interface Γ_I . Este método, ilustrado na Figura 3.12 (a), agrupa os nós presente em todo o domínio computacional em 3 subgrupos: S_1 , S_2 e S_I , dentre os quais, o subconjunto S_1 contém apenas os nós pertencentes ao meio 1 (i.e. nó j), o subconjunto S_2 contém os nós pertencentes ao meio 2 (i.e. nó m) e S_I contém os nós da interface (i.e. nó k).

Em [Lima et al., 2012], a construção das funções de forma segue o critério original de visibilidade proposto em [Liu, 2009], no qual o domínio de suporte de um ponto na região 1 pode conter apenas nós dos subconjuntos S_1 e S_I . Similarmente, o domínio de suporte para um ponto na região 2 pode conter apenas nós dos subconjuntos S_2 e S_I . Por último, o domínio de suporte de um ponto na interface pode conter nós dos três subconjuntos: S_1 , S_2 e S_I .

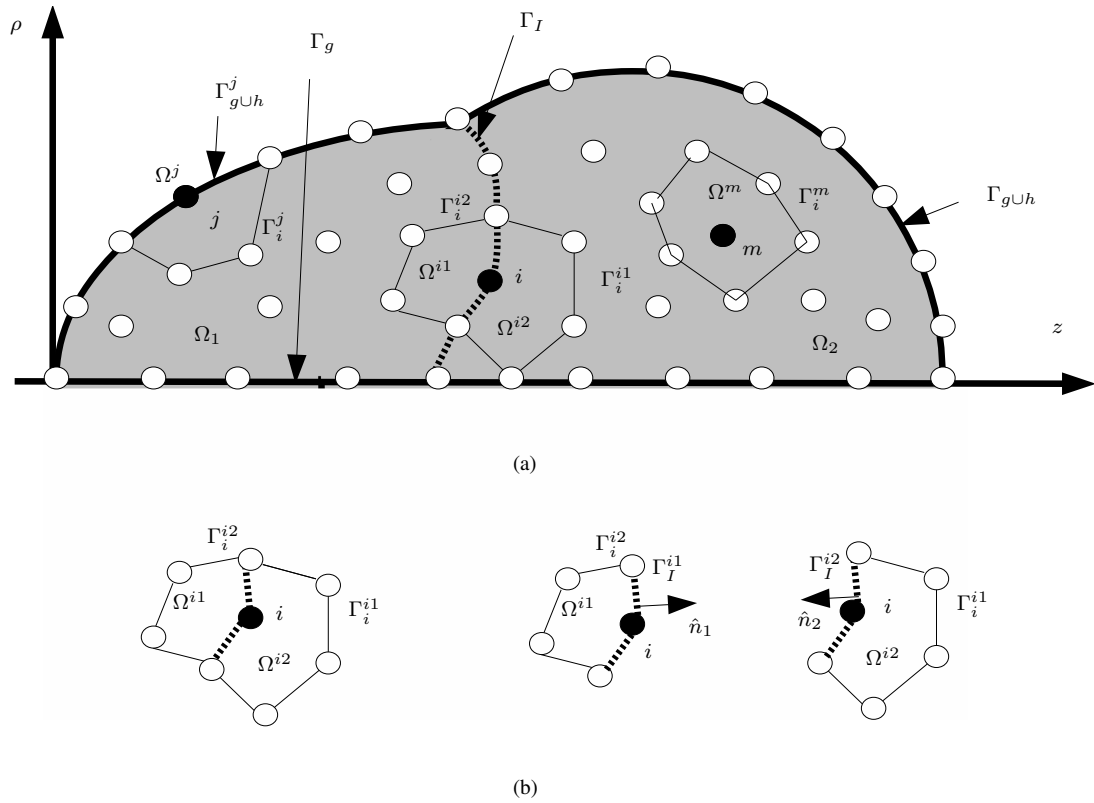


Figura 3.12: Método da visibilidade: (a) Representação do domínio Ω e seu contorno Γ . $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Γ é formado pela união dos contornos de Dirichlet (Γ_g), de Neumann (Γ_h) e a interface (Γ_I). Para um domínio de teste Ω^w qualquer, definido para o nó w , tem-se $\Gamma^w = \Gamma_g^w \cup \Gamma_h^w \cup \Gamma_I^w$. (b) Integração para o domínio de teste de um nó i localizado na interface de dois meios. O critério da visibilidade é aplicado dividindo Ω^i em dois: um para a região 1 (Ω^{i1}) e outro para a região 2 (Ω^{i2}).

O critério de visibilidade proposto em [Lima et al., 2012] distingue-se do original por apresentar um processo de integração. No procedimento apresentado, a forma fraca local, Equação (3.15), somente levará em consideração a região 1 se o domínio de teste a ser integrado pertencer a um nó i do subconjunto S_1 . Caso este domínio de teste contenha em seu contorno a interface Γ_I^i , o mesmo é considerado interno ao domínio, sendo admitido como Γ_i^i . O procedimento é similar para a região 2.

Um nó i pertencente ao subconjunto S_I possui um domínio de teste a ser integrado nas regiões 1 e 2, o que pode ser expresso pela divisão do domínio de teste Ω^i em dois subdomínios: Ω^{i1} e Ω^{i2} . O contorno da interface é considerado separado em cada um dos subdomínios e a forma fraca local, Equação (3.15),

deve ser satisfeita para o nó i e conseqüentemente para Ω^{i1} e Ω^{i2} , resultando em

$$\int_{\Gamma_{i \cup g \cup h}^{i1}} \frac{\psi_i}{\rho p_1} \frac{\partial u_1}{\partial n_1} d\Gamma + \int_{\Gamma_I^{i1}} \frac{\psi_i}{\rho p_1} \frac{\partial u_1}{\partial n_1} d\Gamma + k^2 \iint_{\Omega^{i1}} \frac{q_1 \psi_i u_1}{\rho} d\Omega = \iint_{\Omega^{i1}} \psi_i f_1 d\Omega, \quad (3.29)$$

$$\int_{\Gamma_{i \cup g \cup h}^{i2}} \frac{\psi_i}{\rho p_2} \frac{\partial u_2}{\partial n_2} d\Gamma + \int_{\Gamma_I^{i2}} \frac{\psi_i}{\rho p_2} \frac{\partial u_2}{\partial n_2} d\Gamma + k^2 \iint_{\Omega^{i2}} \frac{q_2 \psi_i u_2}{\rho} d\Omega = \iint_{\Omega^{i2}} \psi_i f_2 d\Omega, \quad (3.30)$$

onde o contorno Γ^i , diferentemente da Equação (3.15), foi expresso pela união dos contornos Γ_i^i , Γ_h^i , Γ_g^i e Γ_I^i .

As Equações (3.29) e (3.30) podem ser agrupadas em uma única equação. Isto é possível devido a estas equações satisfazerem a condição (3.28), a qual garante a mesma interface para ambos subdomínios ($\Gamma_I^{i1} = \Gamma_I^{i2}$), e ao uso das funções de forma RPIMp que atendem a propriedade do delta de Kronecker. Dado que as normais à interface são como apresentadas na Figura 3.12 ($\hat{n}_1 = -\hat{n}_2$) pode-se reescrever a Equação (3.28) como

$$\int_{\Gamma_I^{i1}} \frac{\psi_i}{\rho p_1} \frac{\partial u_1}{\partial n_1} d\Gamma + \int_{\Gamma_I^{i2}} \frac{\psi_i}{\rho p_2} \frac{\partial u_2}{\partial n_2} d\Gamma = 0 \quad (3.31)$$

Esta igualdade garante que a integração ao longo da interface entre os meios 1 e 2 é cancelada na equação local do nó k e que a expressão final para este nó é:

$$\int_{\Gamma_{i \cup g \cup h}^{i1}} \frac{\psi_i}{\rho p_1} \frac{\partial u_1}{\partial n_1} d\Gamma + \int_{\Gamma_{i \cup g \cup h}^{i2}} \frac{\psi_i}{\rho p_2} \frac{\partial u_2}{\partial n_2} d\Gamma + k^2 \iint_{\Omega^{i1}} \frac{q_1 \psi_i u_1}{\rho} d\Omega + k^2 \iint_{\Omega^{i2}} \frac{q_2 \psi_i u_2}{\rho} d\Omega = \iint_{\Omega^{i1}} \psi_i f_1 d\Omega + \iint_{\Omega^{i2}} \psi_i f_2 d\Omega, \quad (3.32)$$

O procedimento apresentado garante a imposição da condição de contorno de Neumann (3.28). A condição de continuidade do campo u é automaticamente garantida pela propriedade do delta de Kronecker da função de forma do RPIMp.

3.5.2 Resultados

Nesta seção é determinada a impedância de entrada e a corrente superficial de um monopolo sobre um PEC e parcialmente coberto por uma camada dielétrica. Os meios dentro do guia e sobre a camada dielétrica são admitidos vácuos. Para a camada dielétrica sobre o PEC são apresentados resultados para duas diferentes configurações do monopolo: a primeira com $\epsilon_r = 2, 2$ e a segunda com $\epsilon_r = 5, 6$.

As dimensões dos raios da antena são as mesmas adotadas anteriormente, antena que teve a admitância determinada (Seção 3.4), $r_a = 0,009525\lambda$ e $r_b/r_a = 2,301$, sendo a frequência adotada 300MHz e $\lambda = 1m$. Os contornos Γ_r e Γ_f também foram posicionados nas mesmas alturas: $2,5\lambda$ e $-0,1\lambda$, respectivamente. Estas medidas são as mesmas do monopolo sem dielétrico que teve a impedância de entrada determinada (vide Seção 3.4.1). Logo a malha utilizada nesta análise segue o mesmo formato da malha apresentada na Figura 3.9, a qual já foi construída admitindo a separação necessária às interfaces.

Na Figura 3.13 é apresentada a impedância de entrada em função do comprimento da antena, obtida usando o MLPG proposto e o FEM para o monopolo com uma camada dielétrica com $\epsilon_r = 2,2$. Especificamente, na Figura 3.13 (a) é apresentado o resultado da resistência de entrada e na Figura 3.13 (b) é apresentada a reatância de entrada. Já na Figura 3.14 é apresentado o resultado da impedância de entrada, usando as mesmas técnicas numéricas, para um monopolo com camada dielétrica com $\epsilon_r = 5,6$, sendo a resistência e a reatância de entrada apresentadas nas Figuras 3.14 (a) e 3.14 (b), respectivamente.

Os resultados de impedância de entrada foram obtidos construindo uma malha para cada comprimento da antena. Estes resultados obtidos com FEM e com o MLPG foram comparados aos resultados capturados de [Shen and MacPhie, 1996] que analisa estes monopolos usando expansão modal e um PEC sobre a antena para limitar o domínio computacional. Nas Figuras 3.13 (a) e 3.13 (b), os resultados mostraram-se precisos, sendo a maior diferença entre os três resultados apresentada na resistência de entrada para o monopolo de comprimento de $0,6875\lambda$. De mesmo modo, nas Figuras 3.14 (a) e 3.14 (b), os resultados também mostram-se próximos, sendo a maior diferença encontrada para resistência de entrada da antena de comprimento $0,2813\lambda$, em que os resultados do MLPG proposto e do FEM se mostraram próximos entre si e diferentes de [Shen and MacPhie, 1996].

Os resultados para as correntes superficiais destas duas configurações de antenas são apresentados na Figura 3.15, ambos resultados para antenas de $l = 0,375\lambda$. Especificamente, a Figura 3.15 (a) apresenta a corrente da antena com dielétrico com $\epsilon_r = 2,2$ e a Figura 3.15 (b) apresenta o resultado para a antena com dielétrico com $\epsilon_r = 5,6$. As correntes estão normalizadas pela tensão na entrada (A/V) e estão apresentadas no formato retangular, onde tem-se a parte real e a parte imaginária de cada configuração. Os resultados de cada configuração são apresentados apenas usando as técnicas MLPG e FEM, pois em [Shen and MacPhie, 1996] não foi apresentado a corrente superficial das antenas. Os resultados numéricos obtidos com as duas técnicas foram próximos para as duas configurações de antenas.

As análises do monopolo com camada dielétrica mostram que a técnica de

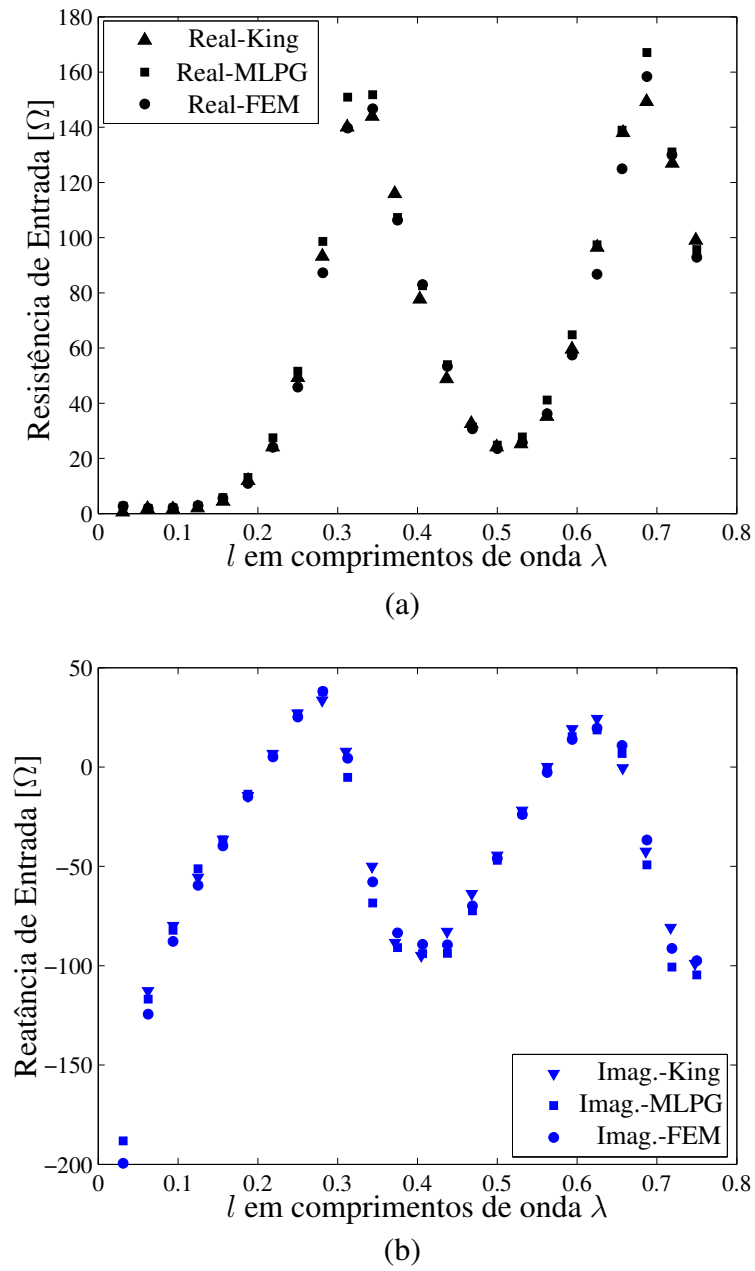
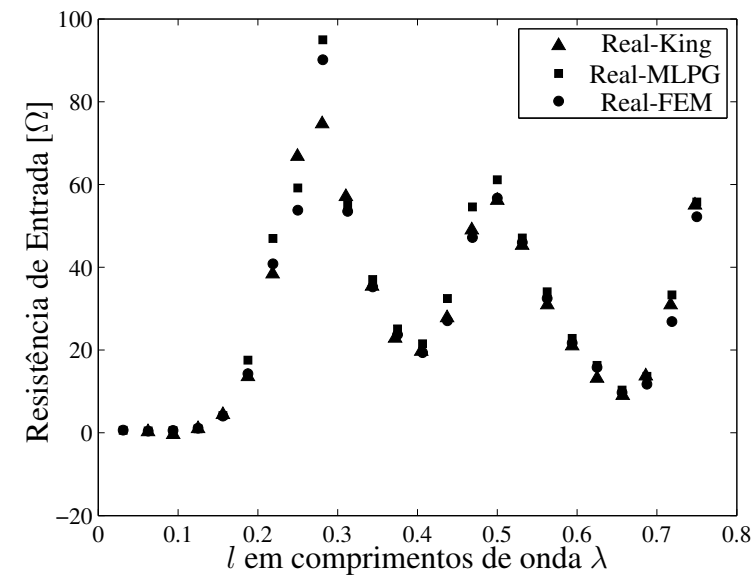
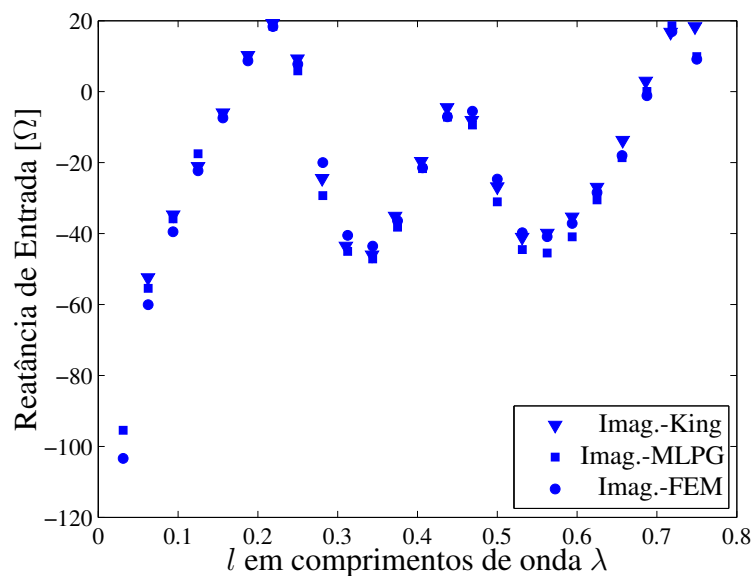


Figura 3.13: Impedância de entrada versus comprimento da antena, monopolo sobre um plano CEP e com camada dielétrica $\epsilon_r = 2,2$: (a) Resistência de Entrada e (b) Reatância de Entrada. Os resultados apresentados como Shen foram retirados de [Shen and MacPhie, 1996].

visibilidade empregada para lidar com a interface entre dois dielétricos é simples e eficiente.



(a)

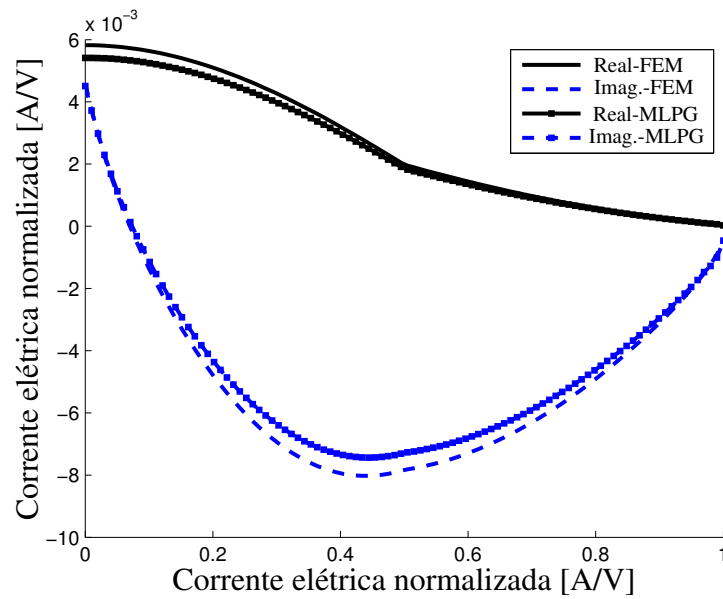


(b)

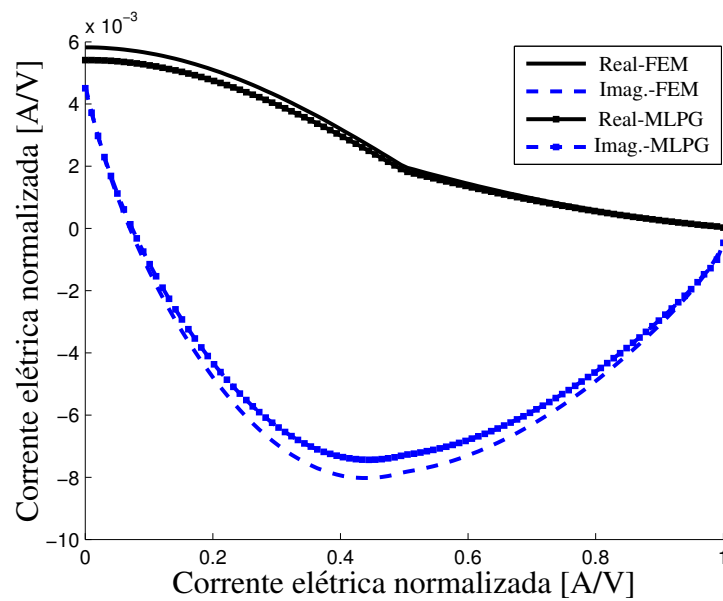
Figura 3.14: Impedância de entrada versus comprimento da antena, monopolo sobre um plano CEP e com camada dielétrica $\epsilon_r = 5, 6$: (a) Resistência de Entrada e (b) Reatância de Entrada. Os resultados apresentados como Shen foram retirados de [Shen and MacPhie, 1996].

3.6 Considerações Finais deste Capítulo

Neste capítulo foram analisados problemas eletromagnéticos com campos invariantes com a coordenada ϕ usando o método FEM e o método MLPG, sendo estudados uma cavidade e dois monopolos diferentes (o primeiro sem camada dielétrica e outro com uma camada dielétrica cobrindo pela metade a antena).



(a)



(b)

Figura 3.15: Distribuição de corrente normalizada para um monopolo sobre um plano PEC com comprimento de $0,375\lambda$ e com uma camada dielétrica de permissividades: (a) permissividade $\epsilon_r = 2,2$ e (b) $\epsilon_r = 5,4$.

O primeiro problema possibilitou avaliar o desempenho do MLPG proposto na perspectiva da taxa de convergência e do tempo de processamento usando duas malhas diferentes, uma construída com elementos de qualidade e outra parcialmente construída com elementos distorcidos. Esta análise mostrou que o MLPG proposto possui um desempenho superior ao FEM na perspectiva do tempo de processamento quanto da taxa de convergência para os modos k_2 e k_5 usando a

malha com elementos parcialmente distorcidos. Estes dois modos foram escolhidos para a comparação, pois foram os modos que apresentaram maior perda de desempenho quando comparados os resultados das malhas A e B usando o FEM.

Na análise dos monopolos, foi demonstrado a robustez do MLPG proposto quando uma grande variação da densidade de nós é empregada. Nestas análises, a corrente superficial e as impedâncias de entrada das antenas foram obtidas usando usando o MLPG proposto e o FEM. Os resultados apresentados pelas duas técnicas foram próximos e também foram comparados a outros resultados encontrados na literatura. Especificamente usando o monopolo com camada dielétrica, uma técnica de visibilidade foi empregada para lidar com a interface entre dois dielétricos, a qual se mostrou simples e eficiente. Esta técnica utiliza integrações e apresenta a vantagem de não necessitar de duplicar os nós no contorno.

No próximo capítulo é apresentada uma formulação para a análise de problemas com simetria axial em que os campos também variam com a coordenada ϕ .

Capítulo 4

Análise de Problemas

Eletromagnéticos Axialmente

Simétricos com Variação do

Campo em ϕ

O formalismo desenvolvido neste capítulo objetiva ampliar os estudos dos métodos sem malha, propiciando analisar problemas em eletromagnetismo com simetria axial, onde os campos eletromagnéticos apresentem variações nas 3 dimensões (3D). Neste formalismo, os meios possuem suas características (ϵ_r e μ_r) invariantes em relação à coordenada ϕ (i.e. $\partial\epsilon_r/\partial\phi = 0$ e $\partial\mu_r/\partial\phi = 0$), enquanto que os campos eletromagnéticos podem variar. Este formalismo visa análises de espalhamentos em regiões sem fontes ($\vec{J} = 0$), nas quais o campo eletromagnético incidente é fornecido. O formalismo, apresentado em sequência, combina desenvolvimentos presentes em [Peterson et al., 1997], [Lee et al., 1993] e [Gordon and Mittra, 1991].

Neste capítulo, apresentam-se as equações de Maxwell (3.1) e (3.2) com suas variações em ϕ expressas por uma série de Fourier, sendo o resultado destas manipulações aplicado na equação vetorial de Helmholtz. Em seguida, é sugerida uma possível opção para a forma fraca e apresentados resultados para uma análise preliminar, o estudo de um espalhamento de uma onda eletromagnética plana sobre uma esfera PEC.

4.1 Representação das Componentes de \vec{E} e \vec{H} com as Variações em ϕ Descritas por uma Série de Fourier

O desenvolvimento das formulações vetoriais com simetria axial é realizado de forma eficiente descrevendo as variações em ϕ dos campos com uma série de Fourier:

$$\vec{E}(\rho, \phi, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[E_{\rho}^m(\rho, z)\hat{\rho} + E_{\phi}^m(\rho, z)\hat{\phi} + E_z^m(\rho, z)\hat{z} \right] e^{jm\phi} \quad (4.1)$$

e

$$\vec{H}(\rho, \phi, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[H_{\rho}^m(\rho, z)\hat{\rho} + H_{\phi}^m(\rho, z)\hat{\phi} + H_z^m(\rho, z)\hat{z} \right] e^{jm\phi}. \quad (4.2)$$

Substituindo (4.1) e (4.2) na equação de Ampère (Eq. 3.1), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\frac{jmE_z^m}{\rho} - \frac{\partial E_{\phi}^m}{\partial z} \right] \hat{\rho} + \left[\frac{\partial E_{\rho}^m}{\partial z} - \frac{\partial E_z^m}{\partial \rho} \right] \hat{\phi} + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_{\phi}^m)}{\partial \rho} - \frac{jmE_{\rho}^m}{\rho} \right] \hat{z} \right\} e^{jm\phi} \\ & = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} jk\eta\mu_r \left[H_{\rho}^m \hat{\rho} + H_{\phi}^m \hat{\phi} + H_z^m \hat{z} \right] e^{jm\phi} \end{aligned} \quad (4.3)$$

fazendo de modo semelhante, substituindo (4.1) e (4.2) na equação de Faraday (Eq. 3.2), assumindo para esta equação $\vec{J} = 0$, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\frac{jmH_z^m}{\rho} - \frac{\partial H_{\phi}^m}{\partial z} \right] \hat{\rho} + \left[\frac{\partial H_{\rho}^m}{\partial z} - \frac{\partial H_z^m}{\partial \rho} \right] \hat{\phi} + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_{\phi}^m)}{\partial \rho} - \frac{jmH_{\rho}^m}{\rho} \right] \hat{z} \right\} e^{jm\phi} \\ & = \sum_{m=-\infty}^{\infty} j \frac{k}{\eta} \epsilon_r \left[E_{\rho}^m \hat{\rho} + E_{\phi}^m \hat{\phi} + E_z^m \hat{z} \right] e^{jm\phi}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde $k = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ e $\eta = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$. Os elementos m de cada uma das séries (4.3) e (4.4) são ortogonais. Logo, cada termo do somatório pode ser analisado independentemente dos demais, possibilitando expressar estas equações em uma forma compacta, a qual evidencia apenas o harmônico $e^{jm\phi}$ de cada uma delas. Deste

modo, obtêm-se de (4.3) e (4.4) as seguintes igualdades:

$$-jk\eta\mu_r H_\rho^m = \frac{jm}{\rho} E_z^m - \frac{\partial E_\phi^m}{\partial z}, \quad (4.5)$$

$$-jk\eta\mu_r H_\phi^m = \frac{\partial E_\rho^m}{\partial z} - \frac{\partial E_z^m}{\partial \rho}, \quad (4.6)$$

$$-jk\eta\mu_r H_z^m = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\phi^m)}{\partial \rho} - \frac{jm}{\rho} E_\rho^m, \quad (4.7)$$

e

$$j\frac{k}{\eta}\epsilon_r E_\rho^m = \frac{jm}{\rho} H_z^m - \frac{\partial H_\phi^m}{\partial z}, \quad (4.8)$$

$$j\frac{k}{\eta}\epsilon_r E_\phi^m = \frac{\partial H_\rho^m}{\partial z} - \frac{\partial H_z^m}{\partial \rho}, \quad (4.9)$$

$$j\frac{k}{\eta}\epsilon_r E_z^m = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\phi^m)}{\partial \rho} - \frac{jm}{\rho} H_\rho^m. \quad (4.10)$$

Substituindo (4.10) em (4.5), tem-se a seguinte seqüência de manipulações

$$\begin{aligned} -jk\eta\mu_r H_\rho^m &= \frac{jm}{\rho} \cdot \frac{\eta}{jk\epsilon_r} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\phi^m)}{\partial \rho} - \frac{jm}{\rho} H_\rho^m \right] - \frac{\partial E_\phi^m}{\partial z}, \\ H_\rho^m &= \frac{j}{k\eta\mu_r} \cdot \frac{\eta m}{k\epsilon_r \rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\phi^m)}{\partial \rho} - \frac{jm}{\rho} H_\rho^m \right] - \frac{j\rho^2}{k\eta\mu_r \rho^2} \frac{\partial E_\phi^m}{\partial z}, \\ H_\rho^m \left[1 - \frac{m^2}{k^2 \mu_r \epsilon_r \rho^2} \right] &= \frac{jm}{k^2 \epsilon_r \mu_r \rho^2} \frac{\partial(\rho H_\phi^m)}{\partial \rho} - \frac{j\rho^2}{k\eta\mu_r \rho^2} \frac{\partial E_\phi^m}{\partial z}, \\ H_\rho^m f_m &= jm \frac{\partial(\rho H_\phi^m)}{\partial \rho} - \frac{jk\epsilon_r \rho^2}{\eta} \frac{\partial E_\phi^m}{\partial z}, \end{aligned}$$

resultando em

$$H_\rho^m = jf_m \left[m \frac{\partial(\rho H_\phi^m)}{\partial \rho} - \frac{k}{\eta} \epsilon_r \rho \frac{\partial(\rho E_\phi^m)}{\partial z} \right] \quad (4.11)$$

onde

$$f_m = (k^2 \epsilon_r \mu_r \rho^2 - m^2)^{-1}. \quad (4.12)$$

Procedendo de modo semelhante, substituindo (4.5) em (4.10), obtem-se:

$$E_z^m = jf_m \left[m \frac{\partial(\rho E_\phi^m)}{\partial z} - k\eta\mu_r \rho \frac{\partial(\rho H_\phi^m)}{\partial \rho} \right]. \quad (4.13)$$

As equações (4.7) e (4.8) ao serem combinadas, também de modo semelhante, originam as seguintes equações:

$$E_\rho^m = jf_m \left[m \frac{\partial(\rho E_\phi^m)}{\partial \rho} + k\eta\mu_r\rho \frac{\partial(\rho H_\phi^m)}{\partial z} \right] \quad (4.14)$$

e

$$H_z^m = jf_m \left[m \frac{\partial(\rho H_\phi^m)}{\partial z} + \frac{k}{\eta}\epsilon_r\rho \frac{\partial(\rho E_\phi^m)}{\partial \rho} \right]. \quad (4.15)$$

Como percebido, as equações (4.11)-(4.15), encontradas em [Lee et al., 1993], demonstram que as componentes H_ρ^m , E_z^m , E_ρ^m , e H_z^m podem ser expressas em função das componentes E_ϕ^m e H_ϕ^m , possibilitando que problemas com simetria axial possam ser resolvidos em função destas duas componentes e da imposição das condições de contorno pertinentes. Na próxima seção, estas equações são substituídas nas equações vetoriais de Helmholtz e alternativas para a forma fraca são propostas.

4.2 Forma Fraca Local

Nesta seção, o campo elétrico é expresso considerando a simetria rotacional do problema analisado. Desta forma, a Eq. (4.1) pode ser reescrita por:

$$\vec{E}(\rho, \phi, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\vec{E}_t^m(\rho, z) + \hat{\phi} E_\phi^m(\rho, z) \right] e^{jm\phi}, \quad (4.16)$$

onde \vec{E}_t^m é o harmônico m da componente transversal de campo elétrico, sendo definido por:

$$\vec{E}_t^m(\rho, z) = E_\rho^m(\rho, z)\hat{\rho} + E_z^m(\rho, z)\hat{z}. \quad (4.17)$$

A forma forte é obtida substituindo a Eq. (4.16) na equação vetorial de Helmholtz (3.6) e resulta, depois de algumas manipulações (detalhadas no Anexo C), em uma equação para a componente ϕ e outra para um vetor transversal à direção $\hat{\phi}$. Sendo assim, a componente ϕ é descrita pela seguinte equação:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ -\nabla \cdot \left[\frac{1}{\rho\mu_r} \nabla(\rho E_\phi^m) \right] e^{jm\phi} + jm\nabla \cdot \left[\frac{1}{\rho\mu_r} \vec{E}_t^m \right] e^{jm\phi} - k^2\epsilon_r E_\phi^m e^{jm\phi} \right\} = 0. \quad (4.18)$$

Já a componente transversal à direção $\hat{\phi}$ da equação de onda \vec{E} pode ser descrita por:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \nabla \times \left[\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E}_t^m \right] e^{jm\phi} + \frac{jm}{\mu_r \rho^2} \nabla(\rho E_\phi^m) e^{jm\phi} - \left[k^2 \epsilon_r - \frac{m^2}{\mu_r \rho^2} \right] \vec{E}_t^m e^{jm\phi} \right\} = 0. \quad (4.19)$$

Multiplicando (4.18) por uma função de teste escalar $\psi_t = \psi(\rho, z)e^{-jm_2\phi}$ e integrando sobre o volume da região tridimensional, produz-se a seguinte equação:

$$\iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{\rho \mu_r} \nabla \psi \cdot \nabla(\rho E_\phi^m) - \frac{jm}{\rho \mu_r} \nabla \psi \cdot \vec{E}_t^m - \frac{k^2 \epsilon_r}{\rho} \psi(\rho E_\phi^m) \right\} d\Omega - \oint_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{\rho \mu_r} \psi \frac{\partial(\rho E_\phi^m)}{\partial n} - \frac{jm}{\rho \mu_r} \psi \hat{n} \cdot \vec{E}_t^m \right\} d\Gamma = 0, \quad (4.20)$$

na qual a integração em ϕ foi realizada com o cálculo produto interno

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{jm\phi} e^{-jm_2\phi} d\phi = \begin{cases} 2\pi & \text{se } m = m_2, \\ 0 & \text{se } m \neq m_2. \end{cases} \quad (4.21)$$

Na Equação (4.20), tem-se $d\Omega = \rho d\rho dz$ e $d\Gamma = \rho dl$, onde dl é o infinitésimo do contorno da geometria de revolução. A Equação (4.20) pode ser encontrada na Seção 11.10 de [Peterson et al., 1997]. Similarmente, multiplicando (4.19) por uma função de teste vetorial $\vec{\psi}_t = \vec{\psi}(\rho, z)e^{-jm_2\phi}$, orientada no plano $\rho - z$, e integrando sobre o volume, resulta em:

$$\iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{\mu_r} \left[\nabla \times \vec{\psi} \right] \cdot \left[\nabla \times \vec{E}_t^m \right] + \frac{jm}{\rho^2 \mu_r} \vec{\psi} \cdot \nabla(\rho E_\phi^m) - \left[k^2 \epsilon_r - \frac{m^2}{\rho^2 \mu_r} \right] \vec{\psi} \cdot \vec{E}_t^m \right\} d\Omega + \oint_{\Gamma} \frac{1}{\mu_r} \vec{\psi} \cdot \left[\hat{n} \times \nabla \times \vec{E}_t^m \right] d\Gamma = 0, \quad (4.22)$$

esta equação foi obtida depois de resolvido o produto interno de modo idêntico ao apresentado na Equação (4.21). A Equação (4.22) também é apresentada na Seção 11.10 de [Peterson et al., 1997].

As expressões (4.20) e (4.22) foram inicialmente utilizadas no estudo de problemas eletromagnéticos usando uma técnica numérica que possui funções de forma vetoriais (FEM com elementos de aresta), a qual é capaz de construir aproximações para uma incógnita vetorial, tal como a \vec{E}_t^m . Logo, usando este método, torna-se necessário apenas a determinação das incógnitas E_ϕ^m e \vec{E}_t^m (sendo esta

última obtida da circulação de \vec{E}_t^m ao longo de cada aresta, que se reduz a um escalar). Isto é possível empregando as expressões (4.20) e (4.22) simultaneamente para a construção do sistema de equações e resolvendo-o na sequência.

Já usando os métodos sem malha ou FEM sem elementos de aresta, que possuem apenas funções de forma escalares, torna-se necessário descrever o vetor \vec{E}_t^m em coordenadas cilíndricas ou esféricas (originando duas componentes, E_ρ e E_z) e, também, expressar a Eq.(4.22) em duas novas equações (uma para a componente ρ do campo e outra para a z). Este procedimento, conduz a três incógnitas (componentes ϕ , ρ e z do campo) e três equações linearmente independentes. Entretanto, uma combinação alternativa de formulações mostra-se mais simples e atrativa, pois apresenta somente duas incógnitas escalares, E_ϕ^m e H_ϕ^m . Para isto, algumas exigências devem ser atendidas. A primeira delas requer a utilização da Equação (4.20) e a sua equação dual. Esta segunda equação pode ser obtida usando o teorema da dualidade [Harrington, 1961] ou partindo da equação de Helmholtz Eq. (3.5) e seguindo passos semelhantes aos usados na obtenção da Eq. (4.20). Estes procedimentos conduzem a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{\rho\epsilon_r} \nabla\psi \cdot \nabla(\rho H_\phi^m) - \frac{jm}{\rho\epsilon_r} \nabla\psi \cdot \vec{H}_t^m - \frac{k^2\mu_r}{\rho} \psi(\rho H_\phi^m) \right\} d\Omega \\ & - \oint_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{\rho\epsilon_r} \psi \frac{\partial(\rho H_\phi^m)}{\partial n} - \frac{jm}{\rho\epsilon_r} \psi \hat{n} \cdot \vec{H}_t^m \right\} d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

O sistema de equações construído com as expressões (4.20) e (4.23), ao invés das expressões (4.20) e (4.22), simplifica a implementação numérica, pois usa duas expressões mais compactas e que apresentam apenas a função de teste ψ . Isto isenta o desenvolvimento da função de teste vetorial $\vec{\psi}$, necessária quando a Equação (4.22) é utilizada. Além disso, as expressões (4.20) e (4.23) correspondem somente às componentes ϕ dos campos elétrico e magnético, o que torna a imposição das condições de contorno mais simples.

A última condição necessária para a implementação deste formalismo em métodos sem malha requer que as incógnitas \vec{E}_t^m e \vec{H}_t^m presentes, respectivamente, nas expressões (4.20) e (4.23) sejam definidas usando expressões contidas na Seção (4.1), possibilitando descrevê-las em função de E_ϕ^m e H_ϕ^m . Isto viabiliza o emprego deste formalismo sem o desenvolvimento das funções de forma vetoriais para métodos sem malha. Para descrever o vetor \vec{E}_t^m , Eq. (4.17), em função

de E_ϕ^m e H_ϕ^m usam-se as expressões (4.14) e (4.13), o que resulta em:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_t^m &= j f_m \left[m \frac{\partial(\rho E_\phi^m)}{\partial \rho} + \omega \mu_0 \mu_r \rho \frac{\partial(\rho H_\phi^m)}{\partial z} \right] \hat{\rho} \\
&\quad + j f_m \left[m \frac{\partial(\rho E_\phi^m)}{\partial z} - \omega \mu_0 \mu_r \rho \frac{\partial(\rho H_\phi^m)}{\partial \rho} \right] \hat{z} \\
&= j f_m \left\{ m \nabla(\rho E_\phi^m) + \omega \mu_0 \mu_r \rho \left[\hat{\phi} \times \nabla(\rho H_\phi^m) \right] \right\} \\
&= j f_m \left\{ m \nabla(\rho E_\phi^m) + k \eta \mu_r \rho \left[\hat{\phi} \times \nabla(\rho H_\phi^m) \right] \right\}. \tag{4.24}
\end{aligned}$$

Substituindo-se esta equação em (4.20) obtém-se:

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega} \left\{ \epsilon_r \rho f_m \nabla \psi \cdot \nabla(\rho E_\phi^m) + m \frac{\eta}{k} f_m \nabla \psi \cdot \left[\hat{\phi} \times \nabla(\rho H_\phi^m) \right] - \frac{\epsilon_r}{\rho} \psi(\rho E_\phi^m) \right\} d\Omega \\
&- \oint_{\Gamma} \left\{ \epsilon_r \rho f_m \psi \frac{\partial(\rho E_\phi^m)}{\partial n} + m \frac{\eta}{k} f_m \psi \hat{n} \cdot \left[\hat{\phi} \times \nabla(\rho H_\phi^m) \right] \right\} d\Gamma = 0. \tag{4.25}
\end{aligned}$$

A segunda equação a ser utilizada, Eq. (4.23), deve ser descrita de modo similar, em função de E_ϕ^m e H_ϕ^m , para isto reescreve-se o vetor \vec{H}_t^m , definido por:

$$\vec{H}_t^m = H_\rho^m \hat{\rho} + H_z^m \hat{z}, \tag{4.26}$$

a qual deve ser expressa usando (4.11) e (4.15), o que resulta em:

$$\vec{H}_t^m = j f_m \left\{ m \nabla(\rho H_\phi^m) - \frac{k \epsilon_r \rho}{\eta} \left[\hat{\phi} \times \nabla(\rho E_\phi^m) \right] \right\}. \tag{4.27}$$

Substituindo esta equação em (4.20) obtém-se:

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega} \left\{ \mu_r \rho f_m \nabla \psi \cdot \nabla(\rho H_\phi^m) - \frac{m}{\eta k} f_m \nabla \psi \cdot \left[\hat{\phi} \times \nabla(\rho E_\phi^m) \right] - \frac{\mu_r}{\rho} \psi(\rho H_\phi^m) \right\} d\Omega \\
&- \oint_{\Gamma} \left\{ \mu_r \rho f_m \psi \frac{\partial(\rho H_\phi^m)}{\partial n} - \frac{m}{\eta k} f_m \psi \hat{n} \cdot \left[\hat{\phi} \times \nabla(\rho E_\phi^m) \right] \right\} d\Gamma = 0. \tag{4.28}
\end{aligned}$$

Constata-se que as expressões (4.25) e (4.28) possuem duas incógnitas (E_ϕ^m e H_ϕ^m) e apenas derivadas de primeira ordem das mesmas. Assim, torna-se possível a construção de aproximações utilizando funções de forma e de teste iguais às presentes no Capítulo 3. Adotando-se a função (2.35) para função de teste e

substituindo ψ por ψ_i nas expressões (4.25) e (4.28) resultam em:

$$\iint_{\Omega^i} \epsilon_r \psi_i E_\phi^m d\Omega + \oint_{\Gamma^i} \epsilon_r \rho f_m \psi_i \frac{\partial(\rho E_\phi^m)}{\partial n} d\Gamma + \oint_{\Gamma^i} \frac{m\eta}{k} f_m \psi_i \hat{n} \cdot \left[\hat{\phi} \times \nabla(\rho H_\phi^m) \right] d\Gamma = 0, \quad (4.29)$$

e

$$\iint_{\Omega^i} \mu_r \psi_i H_\phi^m d\Omega + \oint_{\Gamma^i} \mu_r \rho f_m \psi_i \frac{\partial(\rho H_\phi^m)}{\partial n} d\Gamma - \oint_{\Gamma^i} \frac{m}{\eta k} f_m \psi_i \hat{n} \cdot \left[\hat{\phi} \times \nabla(\rho E_\phi^m) \right] d\Gamma = 0, \quad (4.30)$$

as quais são mais simples que (4.25) e (4.28), pois possuem apenas três termos, devido à condição $\nabla\psi_i = 0$ que anula dois termos destas equações. As expressões (4.29) e (4.30) juntas constituem a forma fraca local para o formalismo proposto, nas quais o contorno do domínio de teste Γ^i contém o contorno interno ao domínio Γ_c^i e também pode conter parte do contorno global Γ . Esta parcela do contorno global, neste formalismo, pode conter um segmento de um condutor Γ_c^i , do eixo de simetria Γ_0^i ou do contorno que delimita o espaço do modelo Γ_r^i . Logo, o contorno Γ^i é formado pela união destes (i.e. $\Gamma^i = \Gamma_c^i \cup \Gamma_0^i \cup \Gamma_r^i \cup \Gamma_i^i$). Estas duas expressões sugerem os termos ρE_ϕ^m e ρH_ϕ^m como incógnitas primárias a serem determinadas ao invés de E_ϕ^m e H_ϕ^m . Sendo assim, como realizado no Capítulo 3, define-se $u_e = \rho E_\phi^m$ e $u_h = \rho H_\phi^m$ e reescrevem-se as expressões (4.29) e (4.30) por:

$$\iint_{\Omega^i} \epsilon_r \psi_i \frac{u_e}{\rho} d\Omega + \oint_{\Gamma^i} \epsilon_r \rho f_m \psi_i \frac{\partial(u_e)}{\partial n} d\Gamma + \oint_{\Gamma^i} \frac{m\eta}{k} f_m \psi_i \hat{n} \cdot \left[\hat{\phi} \times \nabla(u_h) \right] d\Gamma = 0, \quad (4.31)$$

e

$$\iint_{\Omega^i} \mu_r \psi_i \frac{u_h}{\rho} d\Omega + \oint_{\Gamma^i} \mu_r \rho f_m \psi_i \frac{\partial(u_h)}{\partial n} d\Gamma - \oint_{\Gamma^i} \frac{m}{\eta k} f_m \psi_i \hat{n} \cdot \left[\hat{\phi} \times \nabla(u_e) \right] d\Gamma = 0, \quad (4.32)$$

As expressões (4.31) e (4.32) possibilitam proceder análises de diversos espalhamentos. Neste trabalho analisa-se o espalhamento de uma onda plana por uma esfera PEC. Este problema possui solução analítica apresentada em [Harrington, 1961]. Uma segunda análise é proposta como um dos trabalhos futuros e encontra-se listada no Capítulo 4, a qual deseja-se analisar o espalhamento de uma onda plana também por uma esfera dielétrica.

Nestas expressões não é possível isolar a variável k , pois a mesma está contida

no parâmetro f_m . Este fato inviabiliza a análise de problemas de autovalores. Então, sugere-se, com o intuito de validar o modelamento, o estudo de um problema de espalhamento. Neste sentido, propõe-se a análise do espalhamento de uma onda plana incidindo sobre uma esfera metálica.

As Equações (4.31) e (4.32) possuem uma singularidade em $\rho = 0$ e outra que pode ser identificada ao se averiguar o parâmetro f_m , expressão (4.12). Esta outra singularidade ocorre ao longo de uma linha paralela ao eixo z no domínio Ω , especificamente, em

$$\rho = \frac{m}{k\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}, \quad (4.33)$$

A análise da próxima seção, o espalhamento de uma onda plana por uma esfera PEC, utiliza as formulações (4.31) e (4.32) sem tratar esta singularidade. Uma sugestão para avaliação desta singularidade usando FEM é apresentada em [Morgan and Mei, 1979]. Esta avaliação também é uma das propostas para trabalhos futuros, sendo apresentada no Capítulo 5.

4.3 Análise de uma Onda Plana Incidindo sobre uma Esfera Metálica

Nesta seção, apresenta-se o formalismo necessário para analisar o espalhamento de uma onda plana por uma esférica metálica, usando a técnica MLPG. Admite-se que esta esfera está centrada na origem do sistema de coordenadas e que uma onda propagando na direção \hat{z} incide sobre a mesma. A Figura 4.1 (a) ilustra a perspectiva 3D do problema, na qual também são apresentadas as frentes de onda propagando no sentido indicado pelo vetor \hat{k} . Na Figura 4.1 (b) é apresentado a geometria de revolução e o domínio computacional do problema. Nesta figura são ressaltados os contornos Γ_c , Γ_0 e Γ_r . O raio da esfera r_a e o raio do contorno de limitação do domínio computacional r_b também são apresentados na Figura 4.1 (b).

4.3.1 Condições de Contorno do Problema Proposto

As formas fracas locais que governam o problema (4.31) e (4.32) possuem duas incógnitas u_e e u_h . Logo, em cada contorno devem ser estabelecidas condições para cada uma delas. Na superfície do condutor Γ_c^i (admitido ser um PEC), tem-se contornos com condições homogêneas de Dirichlet $u_e = 0$ em Γ_g e $\partial(u_h)/\partial n = 0$ em Neumann Γ_h^i homogêneas, respectivamente, para u_e e u_h . No eixo de simetria

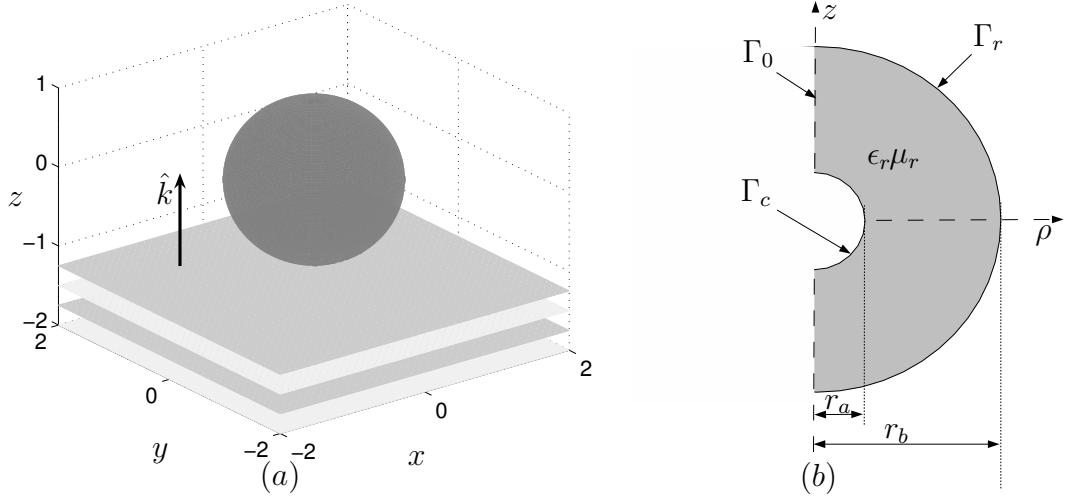


Figura 4.1: Espalhamento de uma onda plana sobre uma esfera PEC: (a) perspectiva 3D; (b) geometria de revolução e domínio 2D usado nas análises numéricas

Γ_0^i tem-se um contorno com as condições homogêneas de Dirichlet $u_e = 0$ e $u_h = 0$ em Γ_g^i para ambas as incógnitas.

A condição de contorno de Neumann é imposta ao contorno do condutor usando o segundo termo da Equação (4.32), a qual pode ser reescrita como

$$\iint_{\Omega^i} \mu_r \psi_i \frac{u_h}{\rho} d\Omega + \oint_{\Gamma_{i \cup g \cup r}^i} \mu_r \rho f_m \psi_i \frac{\partial(u_h)}{\partial n} d\Gamma - \oint_{\Gamma^i} \frac{m}{\eta k} f_m \psi_i \hat{n} \cdot [\hat{\phi} \times \nabla(u_e)] d\Gamma = 0, \quad (4.34)$$

que foi obtida fazendo

$$\oint_{\Gamma_h^i} \mu_r \rho f_m \psi_i \frac{\partial(u_h)}{\partial n} d\Gamma = 0. \quad (4.35)$$

As condições de contorno de Dirichlet $u_e = 0$ e $u_h = 0$ em Γ_g^i é imposta de modo simples e direto, devido a propriedade do delta de Kronecker da função RPIMp. Esta condição é imposta sobre o contorno Γ_0^i estabelecendo o valores nulos para $u_e = 0$ e $u_h = 0$ diretamente nos nós i do mesmo. Já para o contorno Γ_c^i , a condição de Dirichlet é imposta apenas fazendo $u_e = 0$ aos nós deste contorno.

O contorno Γ_r^i limita o domínio computacional. Neste contorno é imposta uma RBC Bayliss-Turkel de primeira ordem para as componentes elétrica e magnética usando as identidades (D.10) e (D.12), as quais estão descritas no Anexo D. Estas duas identidades são acopladas nos segundos termos das formas fracas locais (4.31) e (4.34), mais especificamente na parcela que refere-se ao contorno

Γ_r^i , resultando em

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Omega^i} \epsilon_r \psi_i \frac{u_e}{\rho} d\Omega + \oint_{\Gamma_{i \cup g \cup h}^i} f_m \epsilon_r \rho \psi_i \frac{\partial(u_e)}{\partial n} d\Gamma + \oint_{\Gamma_r^i} f_m \epsilon_r \rho \psi_i \frac{\partial(\rho E_\phi^{I,m})}{\partial n} d\Gamma \\
 & + \oint_{\Gamma_r^i} \frac{m f_m \eta}{k} \psi_i \hat{n} \cdot [\hat{\phi} \times \nabla(\rho H_\phi^{I,m})] d\Gamma + \oint_{\Gamma_r^i} j \psi_i \frac{E_\phi^{I,m}}{k \mu} d\Gamma - \oint_{\Gamma_r^i} j \psi_i \frac{u_e}{k \mu \rho} d\Gamma \\
 & + \oint_{\Gamma_{i \cup g \cup h}^i} \frac{m \eta}{k} f_m \psi_i \hat{n} \cdot [\hat{\phi} \times \nabla(u_h)] d\Gamma = 0, \tag{4.36}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Omega^i} \mu_r \psi_i \frac{u_h}{\rho} d\Omega + \oint_{\Gamma_{i \cup g}^i} f_m \mu_r \rho \psi_i \frac{\partial(u_h)}{\partial n} d\Gamma + \oint_{\Gamma_r^i} f_m \mu_r \rho \psi_i \frac{\partial(\rho H_\phi^{I,m})}{\partial n} d\Gamma \\
 & - \oint_{\Gamma_r^i} \frac{m f_m}{\eta k} \psi_i \hat{n} \cdot [\hat{\phi} \times \nabla(\rho E_\phi^{I,m})] d\Gamma + \oint_{\Gamma_r^i} j \psi_i \frac{H_\phi^{I,m}}{k \epsilon} d\Gamma - \oint_{\Gamma_r^i} j \psi_i \frac{u_h}{k \epsilon \rho} d\Gamma \\
 & - \oint_{\Gamma_{i \cup g \cup h}^i} \frac{m}{\eta k} f_m \psi_i \hat{n} \cdot [\hat{\phi} \times \nabla(u_e)] d\Gamma = 0, \tag{4.37}
 \end{aligned}$$

onde os campos $E_\phi^{I,m}$ e $H_\phi^{I,m}$ referem-se à onda plana incidente. Admitindo-se uma polarização na direção \hat{x} e módulo unitário para o campo elétrico (i.e. $\vec{E}^I = e^{jkz} \hat{x}$), têm-se as componentes ϕ de campos elétrico e magnético descritas, respectivamente, por:

$$E_\phi^I = -\text{sen}(\phi) e^{-jkz} \quad \text{e} \quad H_\phi^I = \frac{\cos(\phi)}{\eta} e^{-jkz}. \tag{4.38}$$

Expressando as variações em ϕ destas componentes como um somatório de termos $e^{jm\phi}$, tem-se:

$$E_\phi^I = -\frac{e^{-jkz}}{2j} e^{j\phi} + \frac{e^{-jkz}}{2j} e^{-j\phi} \quad \text{e} \quad H_\phi^I = \frac{e^{-jkz}}{2\eta} e^{j\phi} + \frac{e^{-jkz}}{2\eta} e^{-j\phi}, \tag{4.39}$$

com os quais pode-se concluir que somente dois valores de m são necessários para representar as variações em ϕ dos campos incidentes, $m = \{-1, 1\}$, e que as componentes $E_\phi^{I,m}$ e $H_\phi^{I,m}$ são expressas por:

$$E_\phi^{I,m} = -m \frac{e^{-jkz}}{2j} \quad \text{e} \quad H_\phi^{I,m} = \frac{e^{-jkz}}{2\eta}. \tag{4.40}$$

4.3.2 Construção do Sistema de Equações Lineares

A implementação numérica inicia-se construindo o domínio computacional, o qual será realizado de modo semelhante ao executado no Capítulo 3, usando o programa FEMM para construir a malha [FEMM, 2013]. Na Figura 4.2 apresenta-se a malha que é utilizada para a análise do espalhamento. Os domínios de teste Ω^i , referente a nós que não estão nos contornos que possuem a condição de Dirichlet, também seguem a mesma construção proposta na Seção 2.4, a qual utiliza todos os elementos conectados ao nó i para construí-lo (vide Figura 2.8). Estes domínios de teste atendem as equações (4.36) e (4.37). Já os nós i que estão em contornos de Dirichlet são usados para impor esta condição de modo direto.

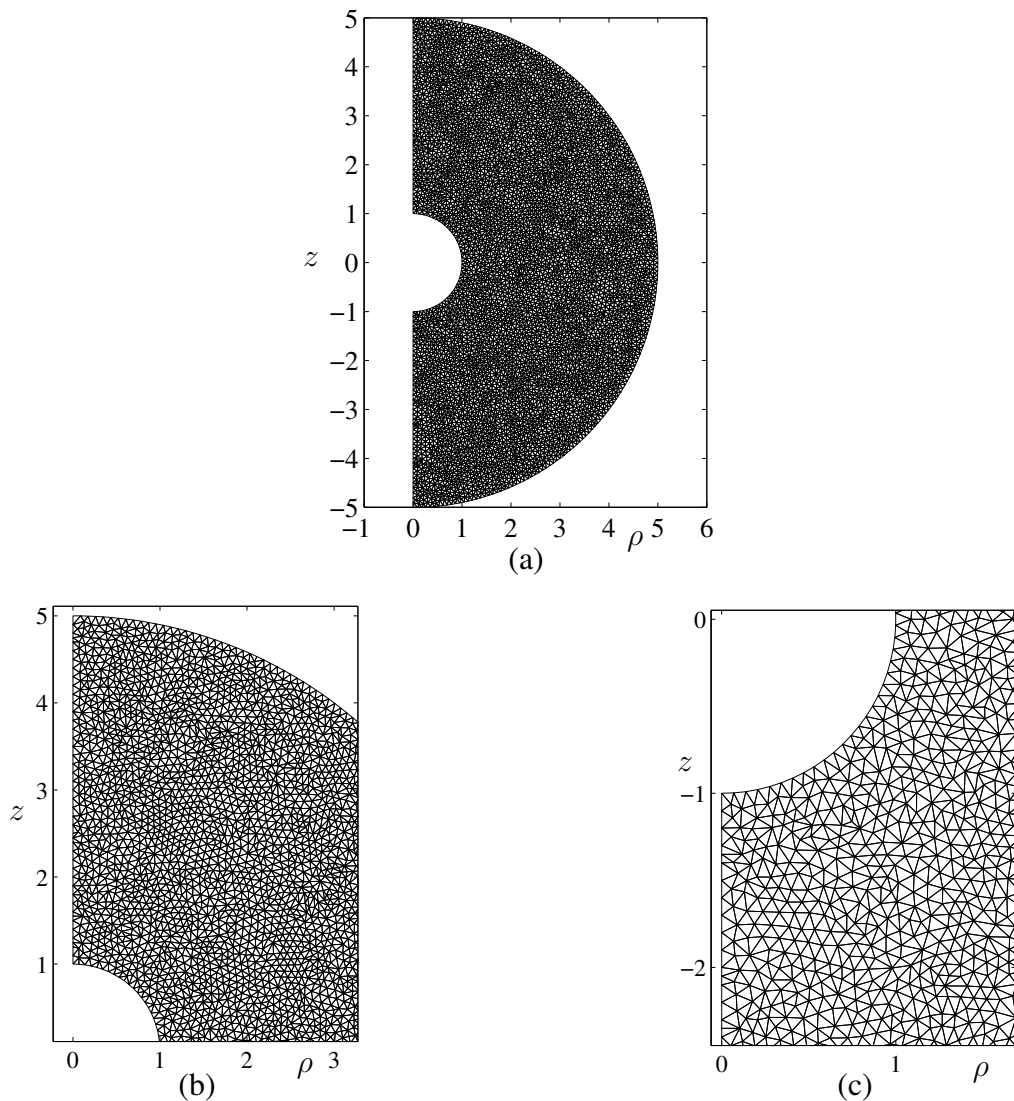


Figura 4.2: [Malha usada no problema do espalhamento (gerada pelo programa FEMM): (a) domínio completo, (b) ampliação do topo da malha e (c) ampliação próxima ao centro da malha.

Em sequência, para a construção do sistema de equações lineares, faz-se necessário aproximar as variáveis u_e e u_h usando funções de forma PIM e seguindo as expressões:

$$u_e \approx \Phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_e = [\varphi_{s_1}(\mathbf{x}), \dots, \varphi_{s_n}(\mathbf{x})] \begin{bmatrix} u_{e_{s_1}} \\ \vdots \\ u_{e_{s_n}} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

e

$$u_h \approx \Phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_h = [\varphi_{s_1}(\mathbf{x}), \dots, \varphi_{s_n}(\mathbf{x})] \begin{bmatrix} u_{h_{s_1}} \\ \vdots \\ u_{h_{s_n}} \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

onde $\Phi(x)$ contém as n funções de forma PIM do domínio de suporte de \mathbf{x} , que correspondem a um subconjunto S de n nós contidos no conjunto de nós do domínio Ω , $\{1, 2, \dots, n_t\}$ e n_t é o número total de nós de Ω . Nestas equações, os vetores \mathbf{u}_e e \mathbf{u}_h contêm os n parâmetros nodais do domínio de suporte de \mathbf{x} que correspondem, respectivamente, às incógnitas u_e e u_h . A metodologia adotada neste modelo considera que cada nó do sistema possui dois parâmetros nodais, diferente das análises apresentadas no Capítulo 3, em que cada nó apresentava um único parâmetro nodal. Logo, o sistema de equações possui uma matriz de dimensão $2n_t \times 2n_t$. Nesta matriz, cada nó tem correspondência com duas linhas e duas colunas do sistema. Admite-se, em caráter organizacional, que o nó 1 terá correspondência com as linhas 1 e $(n_t + 1)$, e com as colunas 1 e $(n_t + 1)$, sendo aplicada a mesma lógica aos demais nós. Seguindo este critério, pode-se agrupar os vetores \mathbf{u}_e e \mathbf{u}_h em um único vetor coluna definido por $\mathbf{U}^t = [\mathbf{u}_e, \mathbf{u}_h]^t$. Finalmente, substituindo-se (4.41) e (4.42) em (4.36) e (4.37) resulta, para os nós internos ou nós de contorno (somente os nós que não estão no contorno de Dirichlet), nas equações:

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega^i} \epsilon_r \psi_i \frac{1}{\rho} [\varphi_{s_1}, \dots, \varphi_{s_n}] d\Omega \begin{bmatrix} u_{s_1} \\ \vdots \\ u_{s_n} \end{bmatrix} - \oint_{\Gamma_r^i} \frac{j\psi_i}{k\mu\rho} [\varphi_{s_1}, \dots, \varphi_{s_n}] d\Gamma \begin{bmatrix} u_{s_1} \\ \vdots \\ u_{s_n} \end{bmatrix} \\
& + \oint_{\Gamma_{i \cup g \cup h}^i} f_m \epsilon_r \rho \psi_i \hat{n} \cdot [\nabla(\varphi_{s_1}), \dots, \nabla(\varphi_{s_n})] d\Gamma \begin{bmatrix} u_{s_1} \\ \vdots \\ u_{s_n} \end{bmatrix} \\
& + \oint_{\Gamma_{i \cup g \cup h}^i} \frac{m\eta}{k} f_m \psi_i \hat{n} \cdot \left\{ \hat{\phi} \times [\nabla(\varphi_{n_t+s_1}), \dots, \nabla(\varphi_{n_t+s_n})] \right\} d\Gamma \begin{bmatrix} u_{n_t+s_1} \\ \vdots \\ u_{n_t+s_n} \end{bmatrix} = \\
& - \oint_{\Gamma_r^i} f_m \epsilon_r \rho \psi_i \frac{\partial(\rho E_\phi^{I,m})}{\partial n} d\Gamma - \oint_{\Gamma_r^i} \frac{m f_m \eta}{k} \psi_i \hat{n} \cdot [\hat{\phi} \times \nabla(\rho H_\phi^{I,m})] d\Gamma - \oint_{\Gamma_r^i} j\psi_i \frac{E_\phi^{I,m}}{k\mu} d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.43}$$

e

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega^i} \mu_r \psi_i \frac{1}{\rho} [\varphi_{n_t+s_1}, \dots, \varphi_{n_t+s_n}] d\Omega \begin{bmatrix} u_{n_t+s_1} \\ \vdots \\ u_{n_t+s_n} \end{bmatrix} \\
& - \oint_{\Gamma_r^i} \frac{j\psi_i}{k\epsilon\rho} [\varphi_{n_t+s_1}, \dots, \varphi_{n_t+s_n}] d\Gamma \begin{bmatrix} u_{n_t+s_1} \\ \vdots \\ u_{n_t+s_n} \end{bmatrix} \\
& + \oint_{\Gamma_{i \cup g}^i} f_m \mu_r \rho \psi_i \hat{n} \cdot [\nabla(\varphi_{n_t+s_1}), \dots, \nabla(\varphi_{n_t+s_n})] d\Gamma \begin{bmatrix} u_{n_t+s_1} \\ \vdots \\ u_{n_t+s_n} \end{bmatrix} \\
& - \oint_{\Gamma_{i \cup g \cup h}^i} \frac{m}{\eta k} f_m \psi_i \hat{n} \cdot \left\{ \hat{\phi} \times [\nabla(\varphi_{s_1}), \dots, \nabla(\varphi_{s_n})] \right\} d\Gamma \begin{bmatrix} u_{s_1} \\ \vdots \\ u_{s_n} \end{bmatrix} = \\
& - \oint_{\Gamma_r^i} f_m \mu_r \rho \psi_i \frac{\partial(\rho H_\phi^{I,m})}{\partial n} d\Gamma + \oint_{\Gamma_r^i} \frac{m f_m}{\eta k} \psi_i \hat{n} \cdot [\hat{\phi} \times \nabla(\rho E_\phi^{I,m})] d\Gamma - \oint_{\Gamma_r^i} j\psi_i \frac{H_\phi^{I,m}}{k\epsilon} d\Gamma.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Para os nós do contorno que possuem a condição de Dirichlet, tem-se para a incógnita u_{e_i} , referente ao nó i , a seguinte equação:

$$[0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0] \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{n_t-1} \\ u_{n_t} \end{bmatrix} + [0, 0, \dots, 0, \dots, 0, 0] \cdot \begin{bmatrix} u_{n_t+1} \\ u_{n_t+2} \\ \vdots \\ u_{n_t+i} \\ \vdots \\ u_{2n_t-1} \\ u_{2n_t} \end{bmatrix} = g_i, \quad (4.45)$$

na qual g_i é o valor prescrito para o nó i referente à incógnita u_{e_i} (caso a condição de Dirichlet seja homogênea, $g_i = 0$). Para a incógnita u_{h_i} , tem-se a seguinte equação:

$$[0, 0, \dots, 0, \dots, 0, 0] \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{n_t-1} \\ u_{n_t} \end{bmatrix} + [0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0] \cdot \begin{bmatrix} u_{n_t+1} \\ u_{n_t+2} \\ \vdots \\ u_{n_t+i} \\ \vdots \\ u_{2n_t-1} \\ u_{2n_t} \end{bmatrix} = g_{m+i}, \quad (4.46)$$

na qual g_{m+i} é o valor prescrito para o nó i referente à incógnita u_{h_i} (caso a condição de Dirichlet seja homogênea, $g_{m+i} = 0$).

As equações (4.44)-(4.46) originam um sistema linear definido por:

$$\mathbf{V}\mathbf{U} = \mathbf{W}, \quad (4.47)$$

onde

$$\mathbf{V} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} v_{1,1} & v_{1,2} & \dots & v_{1,n_t} & v_{1,n_t+1} & v_{1,n_t+2} & \dots & v_{1,2n_t} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \dots & v_{2,n_t} & v_{2,n_t+1} & v_{2,n_t+2} & \dots & v_{2,2n_t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ v_{n_t,1} & v_{n_t,2} & \dots & v_{n_t,n_t} & v_{n_t,n_t+1} & v_{n_t,n_t+2} & \dots & v_{n_t,2n_t} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ v_{n_t+1,1} & v_{n_t+1,2} & \dots & v_{n_t+1,n_t} & v_{n_t+1,n_t+1} & v_{n_t+1,n_t+2} & \dots & v_{n_t+1,2n_t} \\ v_{n_t+2,1} & v_{n_t+2,2} & \dots & v_{n_t+2,n_t} & v_{n_t+2,n_t+1} & v_{n_t+2,n_t+2} & \dots & v_{n_t+2,2n_t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ v_{2n_t,1} & v_{2n_t,2} & \dots & v_{2n_t,n_t} & v_{2n_t,n_t+1} & v_{2n_t,n_t+2} & \dots & v_{2n_t,2n_t} \end{array} \right],$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n_t} \\ u_{n_t+1} \\ \vdots \\ u_{2n_t} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{n_t} \\ w_{n_t+1} \\ \vdots \\ w_{2n_t} \end{bmatrix},$$

nos quais, para os nós interiores e de contorno que não possuem a condição de Dirichlet, os elementos das matrizes são:

$$v_{i,j} = \iint_{\Omega^i} \epsilon_r \psi_i \frac{\varphi_j}{\rho} d\Omega + \oint_{\Gamma_{i \cup g \cup h}^i} f_m \epsilon_r \rho \psi_i \hat{n} \cdot \nabla(\varphi_j) d\Gamma - \oint_{\Gamma_r^i} \frac{j \psi_i}{k \mu \rho} \varphi_j d\Gamma, \quad (4.48)$$

$$v_{i,n_t+j} = \oint_{\Gamma_{i \cup g \cup h}^i} \frac{m \eta}{k} f_m \psi_i \hat{n} \cdot \left\{ \hat{\phi} \times [\nabla(\varphi_{n_t+j})] \right\} d\Gamma, \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} w_i = & - \oint_{\Gamma_r^i} f_m \epsilon_r \rho \psi_i \frac{\partial(\rho E_\phi^{I,m})}{\partial n} d\Gamma - \oint_{\Gamma_r^i} \frac{m f_m \eta}{k} \psi_i \hat{n} \cdot \hat{\phi} \times \nabla(\rho H_\phi^{I,m}) d\Gamma \\ & - \oint_{\Gamma_r^i} j \psi_i \frac{E_\phi^{I,m}}{k \mu} d\Gamma, \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$v_{n_t+i,j} = - \oint_{\Gamma_{i \cup g \cup h}^i} \frac{m}{\eta k} f_m \psi_{n_t+i} \hat{n} \cdot \left\{ \hat{\phi} \times [\nabla(\varphi_j)] \right\} d\Gamma, \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned}
v_{n_t+i, n_t+j} &= \iint_{\Omega^i} \mu_r \psi_{n_t+i} \frac{\varphi_{n_t+j}}{\rho} d\Omega + \oint_{\Gamma_{i \cup j}^i} f_m \mu_r \rho \psi_{n_t+i} \hat{n} \cdot [\nabla(\varphi_{n_t+j})] d\Gamma \\
&\quad - \oint_{\Gamma_r^i} \frac{j \psi_{n_t+i}}{k \epsilon \rho} \varphi_{n_t+j} d\Gamma,
\end{aligned} \tag{4.52}$$

e

$$\begin{aligned}
w_{n_t+i} &= - \oint_{\Gamma_r^i} f_m \mu_r \rho \psi_{n_t+i} \frac{\partial(\rho H_\phi^{I,m})}{\partial n} d\Gamma + \oint_{\Gamma_r^i} \frac{m f_m}{\eta k} \psi_{n_t+i} \hat{n} \cdot [\hat{\phi} \times \nabla(\rho E_\phi^{I,m})] d\Gamma \\
&\quad - \oint_{\Gamma_r^i} j \psi_{n_t+i} \frac{H_\phi^{I,m}}{k \epsilon} d\Gamma.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Torna-se importante ressaltar que os subíndices i e j contém valores pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \dots, n_t\}$. Para os nós do contorno que possuem a condição de contorno de Dirichlet e correspondem às linhas do intervalo $[1, n_t]$ têm-se:

$$v_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases} \tag{4.54}$$

$$w_i = g_i, \tag{4.55}$$

que representam a condição de contorno relativa à incógnita u_e . Logo, para os nós posicionados sobre o eixo de simetria e sobre o contorno do condutor, tem-se $g_i = 0$. Para os nós do contorno que possuem a condição de Dirichlet e correspondem as linhas do intervalo $[n_t + 1, 2n_t]$ têm-se:

$$v_{n_t+i, n_t+j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases} \tag{4.56}$$

$$w_{n_t+i} = g_{n_t+i}, \tag{4.57}$$

que compõem a condição de contorno relativa a incógnita u_h . Logo, para os nós posicionados sobre o eixo de simetria, tem-se $g_{m+i} = 0$.

4.4 Resultados

No problema proposto para análise, a onda plana possui $E_0 = 1$ V/m, é polarizada na direção \hat{x} e propaga-se na direção $+\hat{z}$. A esfera metálica analisada é assumida PEC e possui raio $a = 1$ metro. Os resultados numéricos para o FEM

e para o MLPG proposto são obtidos assumindo o raio da RBC igual a 5 metros e o meio vácuo (ϵ_0 e μ_0).

No formalismo apresentado neste capítulo, o tratamento da singularidade presente no parâmetro f_m não foi proposto. Logo, alternativamente, optou-se por apresentar os resultados para duas análises com diferentes dimensões elétricas. Na primeira, a singularidade está presente dentro do domínio computacional e na outra, a singularidade está fora deste domínio. Estas duas análises são procedidas usando a mesma malha (Vide Figura 4.2), mas usando duas frequências diferentes. A primeira frequência adotada é igual a 150 MHz, que coloca a singularidade dentro do domínio computacional (segundo a Equação (4.33) na posição aproximada de $\rho = 0,3183$ metros), e a outra é igual a 6 MHz, que coloca singularidade fora do domínio computacional (na posição aproximada de $\rho = 7,95$ metros). Os resultados destas análises são apresentados para o semiplano $\phi = \pi/4$ e são organizados em duas subseções, sendo a primeira intitulada análise para a esfera de $a = 0,5\lambda$ e a segunda análise para a esfera de $a = 0,02\lambda$.

4.4.1 Resultados para a Esfera de Raio $0,5\lambda$

A Figura 4.3 apresenta a distribuição do módulo do campo E_ϕ de um espalhamento por uma esfera PEC com raio de tamanho elétrico $0,5\lambda$. Nesta figura são apresentados três resultados: o primeiro (Figura 4.3 (a)) mostra a solução analítica [Harrington, 1961]; o segundo (Figura 4.3 (b)) mostra a solução numérica obtida usando FEM e a malha de 5944 nós apresentada na Figura 4.2; o último (Figura 4.3 (c)) apresenta a solução numérica usando MLPG para a mesma malha. De modo semelhante são apresentados, na Figura 4.4, os resultados para a distribuição do módulo do campo H_ϕ . Pode ser observado que os três resultados apresentados na Figura 4.3 estão próximos e que a singularidade (localizada em $\rho = 0,3183$ metros) causa uma imprecisão numérica, distorcendo as linhas dos campos próximos a mesma. Este fato também pode ser observado nos três resultados apresentados na Figura 4.4.

Uma comparação mais precisa na perspectiva das amplitudes destes resultados pode ser observadas nas Figuras 4.5(a) e 4.5(b), que exibem, respectivamente, os valores do $|E_\phi|$ e do $|H_\phi|$ para ρ no intervalo $[1, 5]$ metros com $z = 0$. A Figura 4.5(a) apresenta o valor de $|E_\phi|$ obtido com a solução analítica [Harrington, 1961], com a solução numérica do FEM e com a solução numérica do MLPG. De modo semelhante o módulo de H_ϕ é apresentado na Figura 4.5(b). Pode ser observado nestes resultados que as soluções numéricas para os módulos dos campos não foram precisos, mesmo o percurso avaliado estando afastado da singularidade, a qual encontra-se em $\rho = 0,3183$ metros. Logo, objetivando apenas evidenciar a precisão do método na ausência da singularidade interna ao domínio, efetua-se a

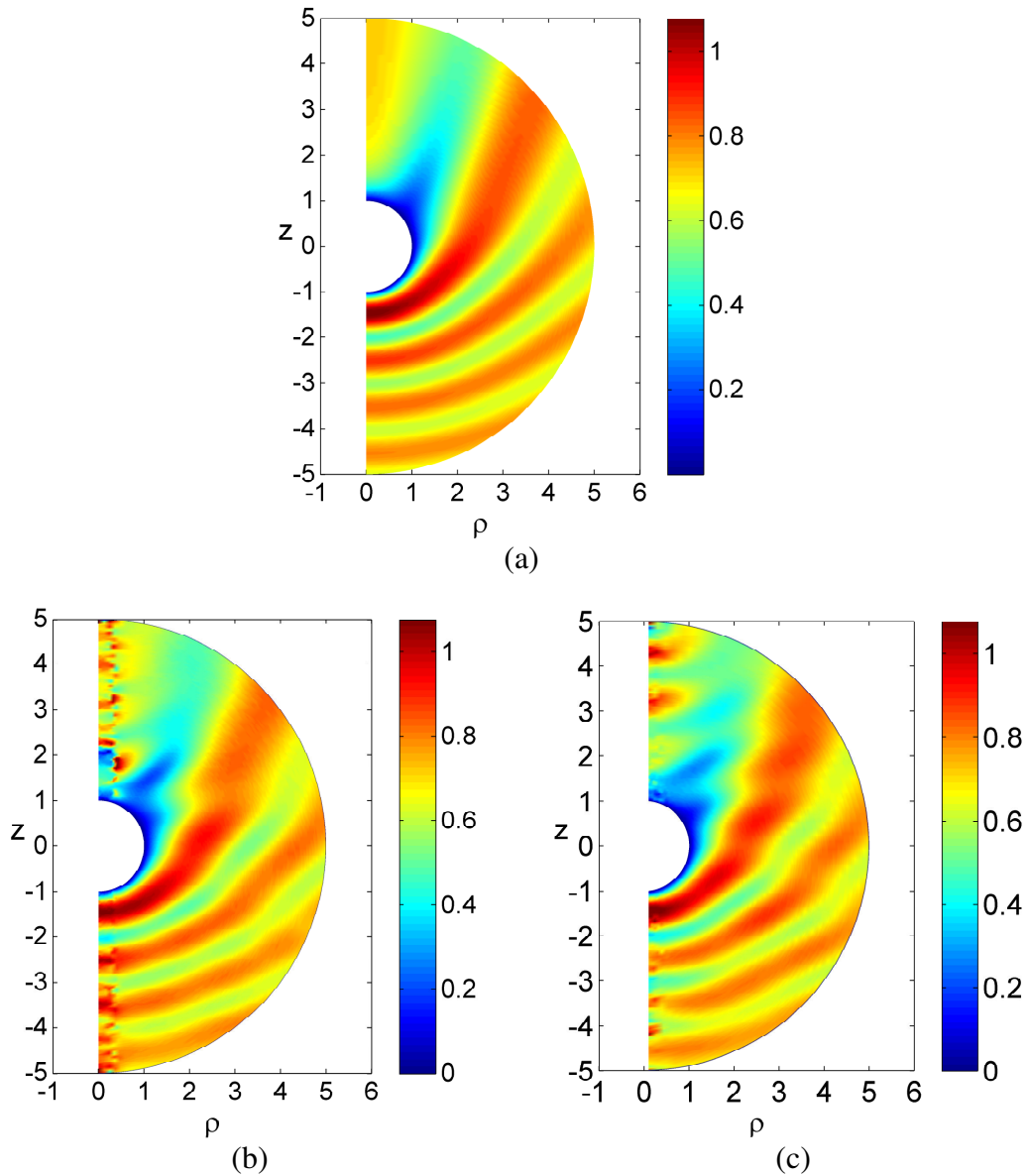


Figura 4.3: Espalhamento de uma onda plana ($E_0 = 1(V/m)$, polarizada em x e propagando na direção $+z$), por uma esfera PEC. Distribuição de campo $|E_\phi|$ (apresentados em V/m) para o plano $\phi = \pi/4$: (a) solução analítica [Harrington, 1961], (b) solução numérica do FEM e (c) solução numérica do MLPG.

análise de um espalhamento por uma esfera com menor tamanho elétrico, a qual é apresentada na próxima subseção.

4.4.2 Resultados para a Esfera de Raio $0,02\lambda$

A Figura 4.6 apresenta a distribuição do módulo do campo E_ϕ de um espalhamento por uma esfera PEC com raio de tamanho elétrico $0,02\lambda$. Nesta

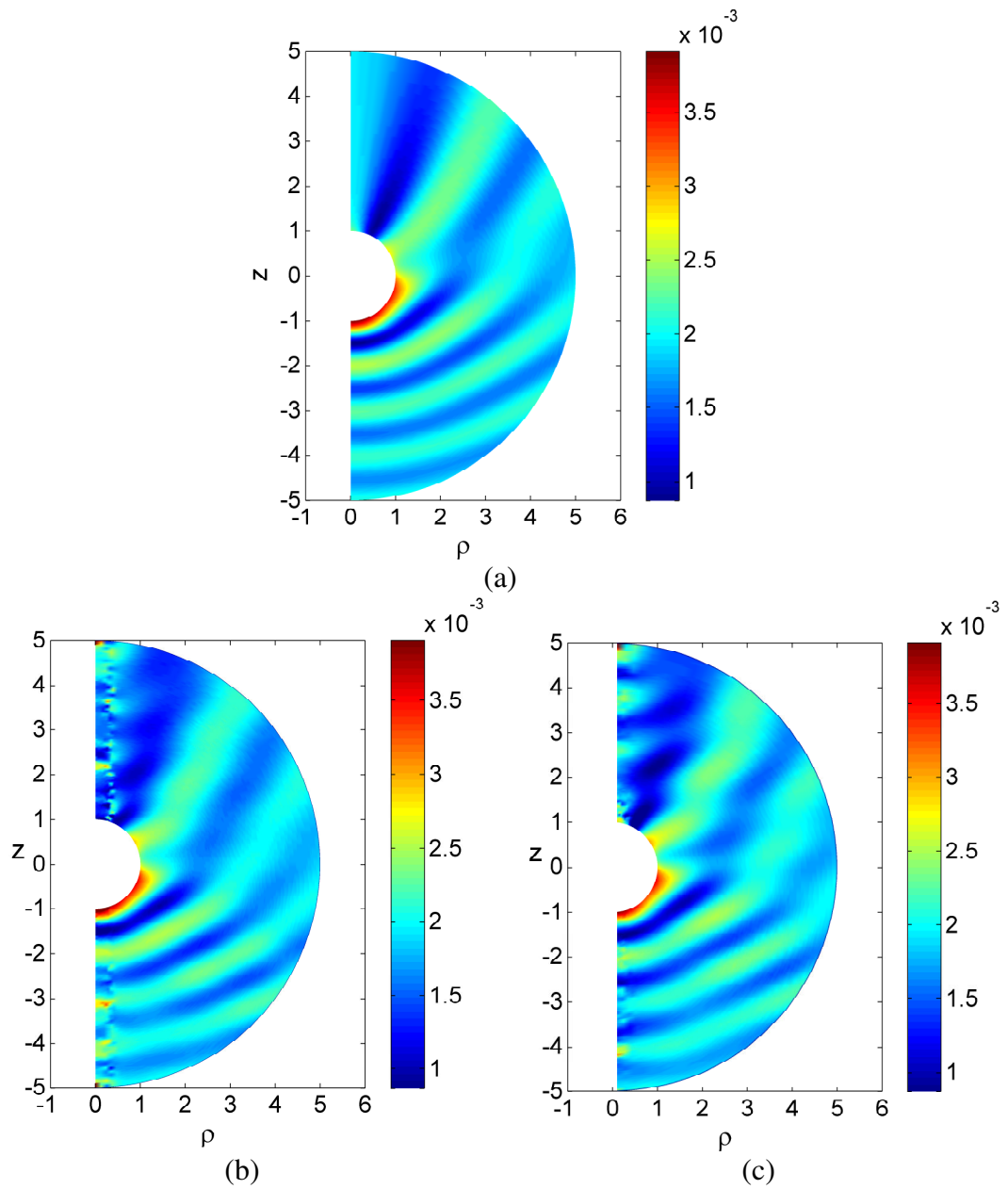


Figura 4.4: Espalhamento de uma onda plana ($E_0 = 1(V/m)$, polarizada em x e propagando na direção $+z$), por uma esfera PEC. Distribuição de campo $|H_\phi|$ (apresentados em A/m) para o plano $\phi = \pi/4$: (a) solução analítica [Harrington, 1961], (b) solução numérica do FEM e (c) solução numérica do MLPG.

figura são apresentados três resultados: o primeiro (Figura 4.6 (a)) mostra a solução analítica [Harrington, 1961]; o segundo (Figura 4.6 (b)) mostra a solução numérica obtida usando FEM e a malha de 5944 nós apresentada na Figura 4.2; o último (Figura 4.6 (c)) apresenta a solução numérica usando MLPG para a mesma malha. De modo semelhante são apresentados, na Figura 4.7, os resultados para a distribuição do módulo do campo H_ϕ . Pode ser observado nas Figuras 4.6 e 4.7

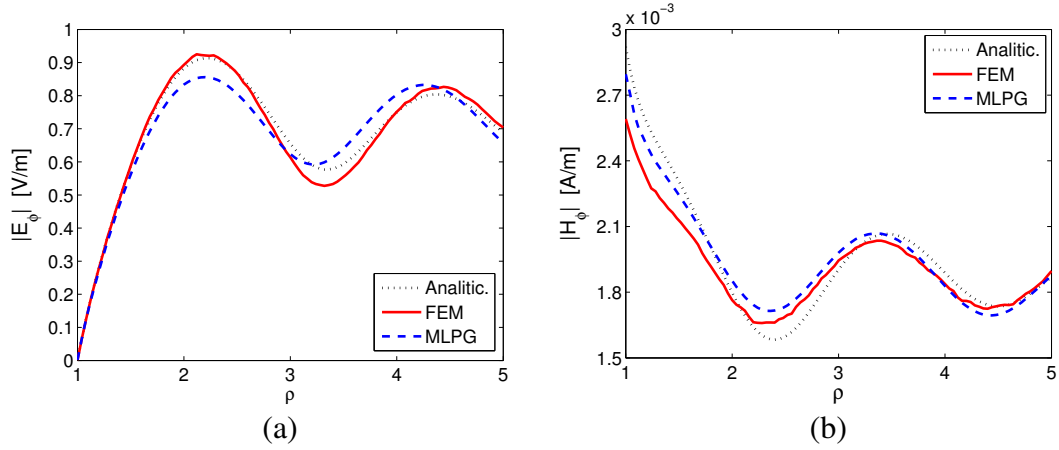


Figura 4.5: Espalhamento de uma onda plana ($E_0 = 1(V/m)$, polarizada em x e propagando na direção $+z$), por uma esfera PEC. Distribuição de campo para o plano $\phi = \pi/4$ e para o percurso de ρ no intervalo $(1,5)$ com $z = 0$: (a) $|E_\phi|$ e (b) $|H_\phi|$. Nestas figuras são apresentadas as soluções analíticas [Harrington, 1961], numérica do FEM e numérica do MLPG.

que as soluções numéricas do MLPG e do FEM para os módulos E_ϕ e H_ϕ estão próximas à soluções analíticas encontradas em [Harrington, 1961]. Constata-se também que a singularidade (localizada fora do domínio computacional aproximadamente em $\rho = 7,95$ metros) não afeta as linhas da distribuição de campo das soluções numéricas.

Objetivando comparar o erro entre as soluções apresentadas nas Figuras 4.6 e 4.7 utiliza-se uma forma simples [Liu, 2009], usando a norma L2 para o calcular a diferença entre os valores numérico e analítico sobre o nó. Este erro é calculado por:

$$|e| = \frac{\sqrt{\sum_i^{n_t} (|E_{\phi_i}^{num.}| - |E_{\phi_i}^{analit.}|)^2}}{\sqrt{\sum_i^{n_t} (|E_{\phi_i}^{analit.}|)^2}} \quad (4.58)$$

onde $E_{\phi_i}^{num.}$ é o resultado numérico para componente E_ϕ (usando FEM ou o MLPG proposto) no nó i e $E_{\phi_i}^{analit.}$ é o resultado analítico [Harrington, 1961] para componente E_ϕ nó i . As soluções numéricas e analítica apresentam uma singularidade em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ (i.e. $\rho = 0$). No caso das soluções numéricas, a singularidade está presente nos módulos dos campos, pois as incógnitas primárias contêm a coordenada ρ (i.e. $|E_\phi| = |u_e/\rho|$ e $|H_\phi| = |u_h/\rho|$). Já a solução analítica apresenta a singularidade devida à presença do termo $1/\sin(\theta)$ na formulação [Harrington, 1961]. Logo, no cálculo de $|e|$ não são avaliados os erros causados pelos nós com $\rho = 0$. O erro na norma L2 para o módulo do campo E_ϕ usando o FEM foi de 0,0026 e usando o MLPG foi de 0,0074. Já para o módulo do

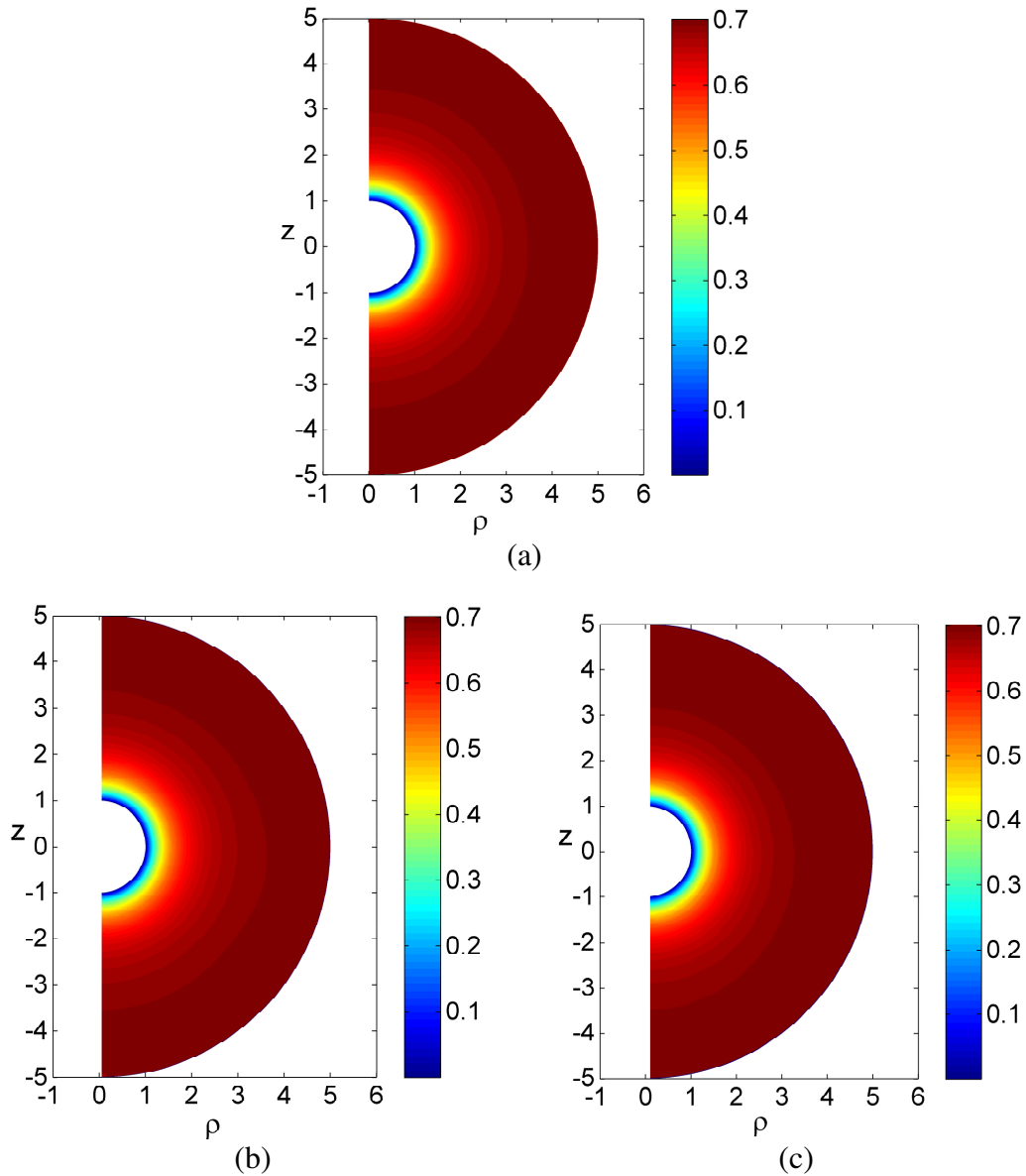


Figura 4.6: Espalhamento de uma onda plana ($E_0 = 1(V/m)$, polarizada em x e propagando na direção $+z$), por uma esfera PEC. Distribuição de campo $|E_\phi|$ (apresentados em V/m) para o plano $\phi = \pi/4$: (a) solução analítica [Harrington, 1961], (b) solução numérica do FEM e (c) solução numérica do MLPG.

campo H_ϕ o erro na norma L2 usando FEM de 0,0053 e usando MLPG 0,0029. Como pode ser observado o erro encontrado para o MLPG foi próximo ao do FEM, sendo maior para a variável $|E_\phi|$ e menor para $|H_\phi|$. Este comportamento era previsto dado a excelente qualidade da malha utilizada (4.2), que não possui elementos de má qualidade ou distorcidos. Este resultados estão em concordância com os apresentados no Capítulo 3, nos quais o MLPG apresentou um desempenho superior ao FEM apenas em malhas de má qualidade que influenciaram

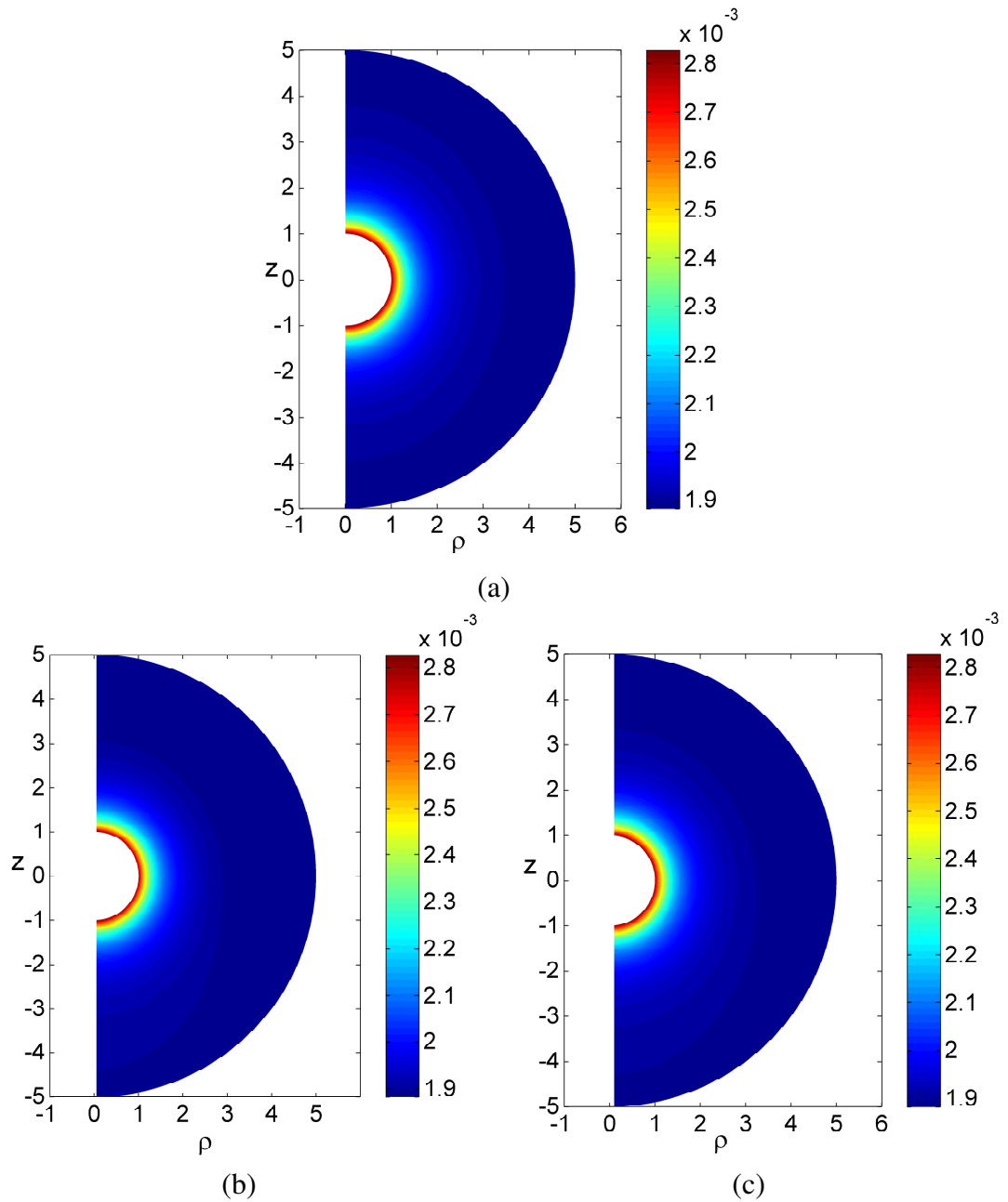


Figura 4.7: Espalhamento de uma onda plana ($E_0 = 1(V/m)$, polarizada em x e propagando na direção $+z$), por uma esfera PEC. Distribuição de campo $|H_\phi|$ (apresentados em A/m) para o plano $\phi = \pi/4$: (a) solução analítica [Harrington, 1961], (b) solução numérica do FEM e (c) solução numérica do MLPG.

negativamente mais os resultados do FEM que do MLPG.

A Figura 4.8 apresenta os módulos dos campos para ρ no intervalo $[1, 5]$ metros com $z = 0$, sendo (a) o valor do $|E_\phi|$ e (b) o valor do $|H_\phi|$. A Figura 4.8(a) apresenta os valores de $|E_\phi|$ obtidos com a solução analítica [Harrington, 1961], com a solução numérica do FEM e com a solução numérica do MLPG. De modo

semelhante, o módulo de H_ϕ é apresentado na Figura 4.8(b). Estes resultados numéricos foram obtidos usando a malha de 5944 nós apresentada na Figura 4.2. Pode ser observado nestes resultados que as soluções numéricas obtidas com o FEM e com o MLPG para os módulos dos campos apresentaram uma elevada precisão quando comparadas às soluções analíticas.

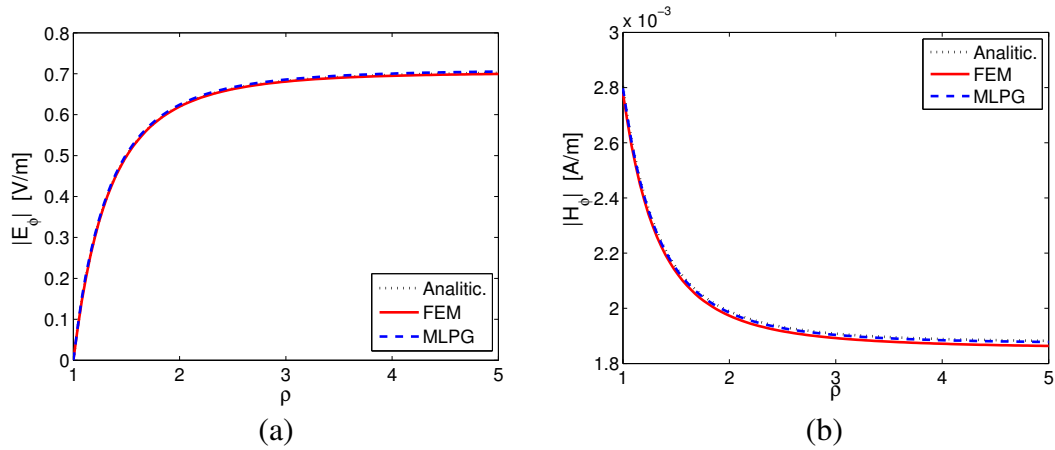


Figura 4.8: Espalhamento de uma onda plana ($E_0 = 1(V/m)$, polarizada em x e propagando na direção $+z$), por uma esfera PEC. Distribuição de campo para o plano $\phi = \pi/4$ e para o percurso de ρ no intervalo $(1,5)$ com $z = 0$: (a) $|E_\phi|$ e (b) $|H_\phi|$. Nestas figuras são apresentadas as soluções analíticas [Harrington, 1961], numérica do FEM e numérica do MLPG.

A malha de 5944 nós foi utilizada tanto para a análise com a esfera de raio $0,5\lambda$ quanto para a análise com a esfera de raio $0,02\lambda$. Esta escolha pode ter beneficiado os resultados numéricos encontrados para a esfera que é menor eletricamente ($0,02\lambda$). Estes resultados foram obtidos usando uma maior quantidade de nós por área do domínio, sendo esta área medida eletricamente, ou seja, em função de λ^2 . Objetivando avaliar a resposta para uma malha com menor densidade de nós por área, propõem-se determinar numericamente os valores dos modos dos campos elétricos e magnéticos usando uma segunda malha, a qual possui apenas 476 nós e é apresentada na Figura 4.9. Os resultados numéricos para esta malha são mostrados na Figura 4.10. Especificamente, a Figura 4.10 (a) apresenta os valores de $|E_\phi|$ obtidos com a solução analítica [Harrington, 1961], com a solução numérica do FEM e com a solução numérica do MLPG. Os valores de $|E_\phi|$ apresentados nesta figura correspondem ao percurso de ρ pertencente ao intervalo $(1,5)$ metros com $z = 0$. De modo semelhante, o módulo de H_ϕ é apresentado na Figura 4.10(b). Os resultados mostram que as soluções numéricas obtidas com o MLPG para os módulos dos campos usando esta segunda malha também apresentaram uma boa precisão quando comparadas à solução analítica. Já os resultados obtidos com o FEM apresentaram uma precisão inferior que o MLPG.

Logo para esta análise o MLPG apresenta resultados mais precisos quando um menor número de nós é usado.

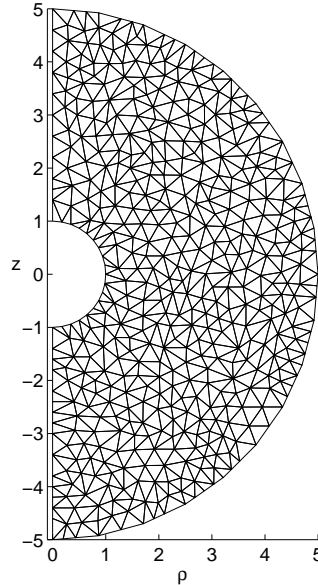


Figura 4.9: Segunda malha usada para a análise do espalhamento de uma onda plana por uma esfera PEC, a qual possui 476 nós.

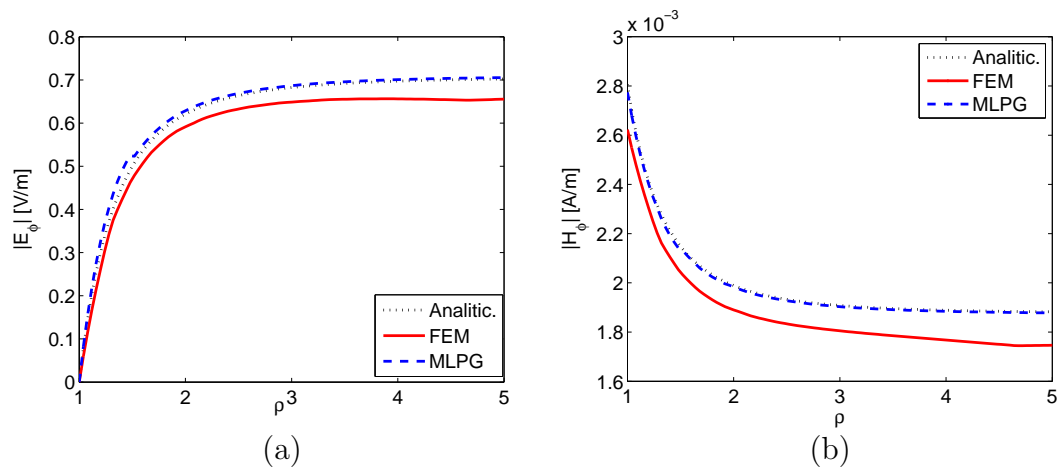


Figura 4.10: Espalhamento de uma onda plana ($E_0 = 1(V/m)$, polarizada em x e propagando na direção $+z$), por uma esfera PEC. Distribuição de campo para o plano $\phi = \pi/4$ e para o percurso de ρ no intervalo $(1,5)$ com $z = 0$: (a) $|E_\phi|$ e (b) $|H_\phi|$. Nestas figuras são apresentadas a solução analítica [Harrington, 1961] e as soluções numéricas do FEM e do MLPG, sendo estas últimas soluções obtidas usando uma malha com 476 nós.

4.5 Considerações Finais deste Capítulo

O formalismo apresentado neste capítulo propicia a análises de problemas eletromagnéticos com simetria axial e que apresentem variações nas três dimensões usando o MLPG. A formulação desenvolvida mostra-se atrativa, pois não requer um formalismo vetorial, no qual seriam necessários funções de teste e de forma vetoriais, ainda não desenvolvidas para métodos sem malha. O formalismo apresentado foi validado com a análise do espalhamento de uma onda plana por uma esfera PEC de $0,02\lambda$. Já para análises rigorosas de espalhamento por grandes corpos ou de antenas com simetria axial, torna-se imprescindível o tratamento da singularidade presente na formulação. Alguns possíveis caminhos para tratamento destas singularidades usando o FEM são apresentados em [Gordon and Mittra, 1991] e [Morgan and Mei, 1979]. Já para a formulação do MLPG, uma nova proposta deverá ser apresentada. Esta análise está listada nos trabalhos futuros, apresentados no Capítulo 5.

Este formalismo apresenta o ponto positivo de necessitar apenas de duas incógnitas de campo (E_ϕ e H_ϕ) ao invés de utilizar três incógnitas de campo, que são requeridas em análises de problemas em 3 dimensões sem a utilização de um formalismo vetorial. A desvantagem desta formulação é a presença de uma singularidade que pode estar presente dentro do domínio dependendo da dimensão elétrica do mesmo. Outra desvantagem é a adoção das fontes nulas ($\vec{J} = 0$), impossibilitando que este formalismo possa ser utilizado em problemas que possuam estas fontes no domínio computacional. A extrapolação deste formalismo para possibilitar análises de problemas com fontes também está listada nas propostas para trabalhos futuros apresentadas no Capítulo 5.

As soluções numéricas para o espalhamento de uma onda eletromagnética por uma esfera PEC de raio de $0,5\lambda$ evidenciaram imprecisão dos resultados tanto para o FEM quanto para o MLPG. Esta imprecisão, esta relacionada à presença da singularidade dentro do domínio computacional e também a baixa quantidade de nós utilizada. Objetivando determinar qual é o verdadeiro causa desta imprecisão propõem-se, como trabalho futuro, uma avaliação deste problema com uma malha de maior quantidade de nós. Já para a esfera de raio menor $0,02\lambda$ os resultados numéricos obtidos com o FEM e o MLPG apresentaram um pequeno erro quando comparadas com a solução analítica. Os erros obtidos com as duas soluções numéricas foram próximos devido à utilização de uma malha de boa qualidade, que propicia bons resultados a ambos os métodos.

No próximo capítulo são apresentadas as considerações finais desta tese e a proposta para trabalhos futuros.

Capítulo 5

Considerações Finais e Trabalhos Futuros

5.1 Considerações Finais

Este trabalho combinou análises axialmente simétricas com os métodos sem malha. Nessa direção, o método sem malha escolhido foi o MLPG, por apresentar um procedimento de análise local, gerando matrizes esparsas e também por ser um método de forma fraca, que apresenta melhor estabilidade se comparado aos métodos de forma forte. Durante o desenvolvimento deste trabalho foram propostas novas estratégias que tornaram o método ainda mais estável e ágil, tais como a determinação, a partir da malha de fundo, dos domínios de teste e de suporte.

Para a determinação do domínio de suporte foram propostas novas estratégias (novos esquemas T) que trouxeram maior agilidade computacional sem perder a estabilidade ou a convergência do método. Isto foi verificado na análise da cavidade apresentada no Capítulo 3, que propiciou comparar a eficiência do método com o FEM na perspectiva da convergência e do tempo de processamento, usando duas diferentes malhas, uma construída com elementos de qualidade e outra parcialmente construída com elementos distorcidos. Esta análise mostrou que o MLPG proposto apresentou melhores resultados de tempo de processamento e de taxa de convergência quando comparado ao FEM para alguns modos da cavidade, os quais tiveram seus resultados afetados pela malha de má qualidade quando analisados pelo FEM. Para os demais modos, nos quais os resultados numéricos do FEM não foram afetados pela má qualidade da malha, o MLPG apresentou em desempenho inferior o que é devido ao maior tempo de processamento exigido pelo método.

Na análise dos monopolos, foi mostrada a robustez do MLPG proposto quando uma grande variação da densidade de nós é empregada. Nestas análises, a corrente superficial e as impedâncias de entrada das antenas foram obtidas usando usando o MLPG proposto e o FEM. Os resultados apresentados pelas duas técnicas foram próximos e também foram comparados a outros resultados encontrados na literatura. Especificamente para a análise do monopolo com camada dielétrica, uma técnica de visibilidade foi empregada para lidar com a interface entre dois dielétricos, a qual se mostrou simples, eficiente e precisa. Esta técnica utiliza integrações e apresenta a vantagem de não necessitar de duplicar os nós no contorno.

Outra importante contribuição foi a utilização de uma combinação de formulações axissiméticas, apresentadas no Capítulo 4, que possibilitaram a utilização do MLPG de forma eficiente em análises de problemas em três dimensões sem o desenvolvimento de um formalismo vetorial. O formalismo proposto reduziu o número de incógnitas (componentes de campo) de 3 para 2, diminuindo o tamanho do sistema de equações e simplificando a imposição das condições de contorno. A desvantagem desta formulação é a presença de uma singularidade que pode estar presente dentro do domínio dependendo da dimensão elétrica do mesmo. Outra desvantagem é a adoção das fontes nulas ($\vec{J} = 0$), impossibilitando que este formalismo possa ser utilizado em outras problemas que possuam fontes, tal como a análise de antenas de abertura. O estudo de um caminho para lidar com a singularidade e a extrapolação deste formalismo para possibilitar análises de problemas com fontes estão listadas nas propostas para trabalhos futuros apresentadas na próxima seção. Este formalismo propiciou a análise do espalhamento de uma onda eletromagnética sobre uma esfera constituída de um condutor elétrico perfeito. As soluções numéricas para uma esfera com raio de 0.02λ usando o FEM e o MLPG foram comparadas com a solução analítica, sendo o erro segundo a norma 2 determinado. Ambas as soluções apresentaram um pequeno valor para o erro, sendo os erros para o MLPG e para o FEM muito próximos. Isto deve-se à utilização de uma malha de boa qualidade, que propicia bons resultados a ambos os métodos.

Na próxima seção são apresentados as propostas para trabalhos futuros.

5.2 Trabalhos Futuros

Pretende-se dar continuidade as pesquisas realizadas durante o doutorado, sendo propostos os seguintes itens para serem executados:

- I.1 Obter resultados para a análise da cavidade coaxial usando uma malha com elementos de má qualidade obtidos de compressões verticais dos elementos

de boa qualidade. Espera-se, com esta análise, obter desempenhos ruins, usando o FEM, para os modos que apresentem variações com a coordenada ρ (k_1 e k_4).

- I.2 Acrescentar ao formalismo proposto uma estratégia para cálculo do campo distante, que possibilitará avaliar para o monopolo estudado no Capítulo 3, características tais como a diretividade e o diagrama de radiação dentre outras;
- I.3 Avaliar no problema do espalhamento de uma onda eletromagnética por uma esfera PEC de raio de $0,5\lambda$ (Capítulo 4) se a imprecisão dos resultados de campo obtidos em posições afastadas da singularidade deve-se a presença da mesma ou a baixa quantidade de nós usada na malha.
- I.4 Avaliar e propor um tratamento para a singularidade presente na formulação apresentada no Capítulo 4, a qual possibilita avaliar problemas com simetria axial em que os campos eletromagnéticos possuem variações nas três dimensões. Em [Gordon and Mittra, 1991] um possível tratamento desta singularidade é apresentado para a equação utilizada pelo FEM. Pretende-se estender o tratamento desta singularidade para a formulação do MLPG.
- I.5 Usando os desenvolvimentos apresentados no Capítulo 4, analisar o espalhamento de uma onda plana por uma esfera dielétrica.
- I.6 Propor uma extrapolação para o formalismo apresentado também no Capítulo 4, possibilitando que o mesmo possa também analisar problemas que possuam fontes no Domínio Computacional ($\vec{J} \neq 0$).
- I.7 Analisar outros problemas eletromagnéticos com simetria axial em que os campos variam nas três dimensões como o projeto de antenas de aberturas.

Referências Bibliográficas

- [Ala et al., 2006] Ala, G., Francomano, E., Tortorici, A., Toscano, E., and Viola, F. (2006). A Smoothed Particle Interpolation Scheme for Transient Electromagnetic Simulation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 42(4):647–650.
- [Ali and Costache, 1994] Ali, H. and Costache, G. (1994). Finite-Element Time-Domain Analysis of Axisymmetrical Radiators. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 42(2):272–275.
- [Atluri and Zhu, 1998] Atluri, S. N. and Zhu, T. (1998). A New Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approach in Computational Mechanics. *Computational Mechanics*, 22:117–127. 10.1007/s004660050346.
- [Coppoli et al., 2012] Coppoli, E. H. R., Mesquita, R. C., and Silva, R. S. (2012). Induction Machines Modeling With Meshless Methods. *IEEE Transactions on Magnetics*, 48(2):847–850.
- [Correa et al., 2011] Correa, B. C., Silva, E. J., Fonseca, A. R., Oliveira, D. B., and Mesquita, R. C. (2011). Meshless Local Petrov-Galerkin Approach in Solving Microwave Guide Problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 47:1526–1529.
- [FEMM, 2013] FEMM (Acesso em dezembro de 2013). Finite Element Method Magnetics: HomePage. <http://www.femm.info>.
- [Fonseca., 2011] Fonseca., A. R. (2011). Algoritmos Eficientes em Métodos sem Malha. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Minas Gerais.
- [Gibson, 2008] Gibson, W. C. (2008). *The Method of Moments in Electromagnetics*. Chapman & Hall/CRC.
- [Gordon and Mittra, 1991] Gordon, R. and Mittra, R. (1991). PDE Techniques for Solving the Problem of Radar Scattering by a Body of Revolution. *Proceedings of the IEEE*, 79(10):1449–1458.
- [Harrington, 1961] Harrington, R. F. (1961). *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*. McGraw-Hill.

- [Harrington, 1993] Harrington, R. F. (1993). *Field Computation by Moment Methods*. Wiley-IEEE Press.
- [Idelsohn and Onate, 2006] Idelsohn, S. and Onate, E. (2006). To Mesh or not to Mesh. That is the Question. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:4681–4696.
- [Jin, 2002] Jin, J.-M. (2002). *The Finite Element Method in Electromagnetics*. Wiley, 2nd edition.
- [Kaufmann et al., 2010] Kaufmann, T., Engstrom, C., Fumeaux, C., and Vahldieck, R. (2010). Eigenvalue Analysis and Longtime Stability of Resonant Structures for the Meshless Radial Point Interpolation Method in Time Domain. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 58(12):3399–3408.
- [King, 1971] King, R. W. P. (1971). *Tables of Antenna Characteristics*. IFI/Plenum, New York.
- [Lee et al., 1993] Lee, J.-F., Wilkins, G., and Mitra, R. (1993). Finite-Element Analysis of Axisymmetric Cavity Resonator Using a Hybrid Edge Element Technique. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 41(11):1981–1987.
- [Lima et al., 2012] Lima, N. Z., Fonseca, A. R., and Mesquita, R. C. (2012). Application of Local Point Interpolation Method to Electromagnetic Problems With Material Discontinuities Using a New Visibility Criterion. *IEEE Transactions on Magnetics*, 48(2):615–618.
- [Liu, 2009] Liu, G. R. (2009). *Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*. CRC Press, 2nd edition.
- [Liu and Zhang, 2009] Liu, G. R. and Zhang, G. Y. (2009). A Normed G Space and Weakened Weak (W2) Formulation of a Cell-Based Smoothed Point Interpolation Method. *Int. J. Comput. Methods*, 6(11):147–179.
- [Lockard and Butler, 2006] Lockard, M. D. and Butler, C. M. (2006). Effects of Cavities on Monopole Antenna Current Distribution and Decoupling From Mounting Structure. 54(8):2234–2243.
- [Lu and Belytschko, 1994] Lu, Y. Y. and Belytschko, T. (1994). A New Implementation of the Element Free Galerkin Method. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 113:397–414.
- [Manzin and Bottauscio, 2008] Manzin, A. and Bottauscio, O. (2008). Element-Free Galerkin Method for the Analysis of Electromagnetic-Wave Scattering. *IEEE Transactions on Magnetics*, 44(6):1366–1369.

- [Morgan and Mei, 1979] Morgan, M. and Mei, K. (1979). Finite-Element Computation of Scattering by Inhomogeneous Penetrable Bodies of Revolution. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 27(2):202–214.
- [Nicomedes et al., 2010] Nicomedes, W. L., Mesquita, R. C., and Moreira, F. J. S. (2010). 2-D Scattering Integral Field Equation Solution Through an IMLS Meshless-Based Approach. *IEEE Transactions on Magnetics*, 46(8):2783–2786.
- [Nicomedes et al., 2011] Nicomedes, W. L., Mesquita, R. C., and Moreira, F. J. S. (2011). A Meshless Local Petrov Galerkin Method for Three-Dimensional Scalar Problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 47:1212–1217.
- [Nicomedes et al., 2012] Nicomedes, W. L., Mesquita, R. C., and Moreira, F. J. S. (2012). Calculating the Band Structure of Photonic Crystals Through the Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method and Periodic Shape Functions. *IEEE Transactions on Magnetics*, 48(2):551–554.
- [Peterson et al., 1997] Peterson, A. F., Ray, S. L., and Mittra, R. (1997). *Computational Methods for Electromagnetics*. Oxford University Press, USA.
- [Shaterian et al., 2012] Shaterian, Z., Kaufmann, T., and Fumeaux, C. (2012). Impact of Different Node Distributions on the Meshless Radial Point Interpolation Method in Time-Domain Electromagnetic Simulations. In *Microwave Conference Proceedings (APMC), 2012 Asia-Pacific*, pages 1322–1324.
- [Shen and MacPhie, 1996] Shen, Z. and MacPhie, R. H. (1996). Modeling of a Monopole Partially Buried in a Grounded Dielectric Substrate by the Modal Expansion Method. 44(11):1535–1536.
- [Shen and MacPhie, 2003] Shen, Z. and MacPhie, R. H. (2003). Sleeve Monopole on a Circular Ground-Plane. *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, 16(5):427–441.
- [Soares et al., 2011b] Soares, R. D., Mesquita, R. C., and Moreira, F. J. S. (2011b). Axisymmetric Electromagnetic Resonant Cavities Solution by a Meshless Local Petrov-Galerkin Method. In *Eighth International Conference on Computation in Electromagnetics CEM2011*, Wroclaw, Polonia.
- [Soares et al., 2012] Soares, R. D., Mesquita, R. C., and Moreira, F. J. S. (March 2012). Analysis of Monopole Antenna Over a Ground Plane by a Meshless Local Petrov-Galerkin Method. In *6th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP 2012)*, Prague, Czech Republic. 2012.

- [Soares et al., 2011a] Soares, R. D., Mesquita, R. C., and Moreira, F. J. S. (October 2011a). Axisymmetric Electromagnetic Resonant Cavity Solution by a Meshless Local Petrov-Galerkin Method. *ACES Journal*, 47:1042–1046.
- [Soares et al., 2011c] Soares, R. D., Mesquita, R. C., and Moreira, F. J. S. (October 2011c). Electromagnetic Axisymmetric Analysis of Monopole Antenna Over a Perfectly Electric Ground Plane by a Meshless Local Petrov-Galerkin Method. In *International Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC 2011)*, Natal, RN, Brazil, pages 395–399.
- [Soares et al., 2014] Soares, R. D., Mesquita, R. C., Moreira, F. J. S., Lowther, D., and Lima, N. Z. (2014). A Modified Meshless Local Petrov-Galerkin Applied to Electromagnetic Axisymmetric Problems. *IEEE Transaction on Magnetics*. (aceito para publicação em Fevereiro de 2014).
- [Soares et al., 2013] Soares, R. D., Mesquita, R. C., Moreira, F. J. S., Lowther, D. A., and Lima, N. Z. (2013). A Modified Meshless Local Petrov-Galerkin Applied to Electromagnetic Axisymmetric Problems. In *19th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields (COMPUMAG2013)*, Budapest, Hungary. 2013.
- [Soares Jr, 2013] Soares Jr, D. (2013). Time-Domain Electromagnetic Wave Propagation Analysis by Edge-Based Smoothed Point Interpolation Methods. *J. Comput. Phys.*, 234:472–486.
- [Sumbar et al., 1991] Sumbar, E., Vermeulen, F. E., and Churte, F. S. (1991). Implementation of Radiation Boundary Conditions in the Finite Element Analysis of Electromagnetic Wave Propagation. 39(2):267–273.
- [Taflove and Hagness, 2000] Taflove, A. and Hagness, S. (2000). *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*.
- [Viana et al., 2004] Viana, S. A., Rodger, D., and Lai, H. (2004). Meshless local Petrov-Galerkin method with radial basis functions applied to electromagnetics. *Science, Measurement and Technology, IEE Proceedings -*, 151(6):449–451.

Anexo A

Estratégias Adotadas para Minimizar o Tempo de Processamento do MLPG Proposto

Neste apêndice, apresentam-se um conjunto de estratégias de programação que são possíveis de ser implementadas no MLPG proposto visando minimizar o tempo de processamento. Como visto na Seção 2.2, os esquemas T6 e T8 propostos foram usados para determinação dos domínios de suporte do MLPG proposto. Estes planos, além de não utilizar estruturas de busca estabelecem que os domínios suporte sejam vinculados às células e as arestas da mesma. Isto significa que todas as funções de aproximação de pontos \mathbf{x} ($u^h(x)$) internos a uma célula são construídas utilizando mesmo domínio de suporte. O mesmo fato ocorre para aproximações de pontos \mathbf{x} ($u^h(x)$) sobre uma mesma aresta, os quais também possuem o mesmo domínio de suporte. A Figura A.1 apresenta o domínio de suporte para múltiplos pontos \mathbf{x} de uma mesma célula (Figura A.1 (a)) ou de uma mesma aresta de célula (Figura A.1 (b)).

Este fato garante que simplificações no procedimento de construção das aproximações $u^h(\mathbf{x})$ possam ser realizados, sendo possível que a matriz \mathbf{R}_Q seja calculada uma única vez para todos os pontos \mathbf{x} de uma mesma célula ou de uma mesma aresta de célula. Esta simplificação é possível devido a matriz \mathbf{R}_Q não depender da coordenada do ponto \mathbf{x} e sim apenas do domínio de suporte, veja expressão 2.11. Esta estratégia resulta em uma diminuição do tempo total de processamento, pois o cálculo da matriz \mathbf{R}_Q representa uma parcela significativa

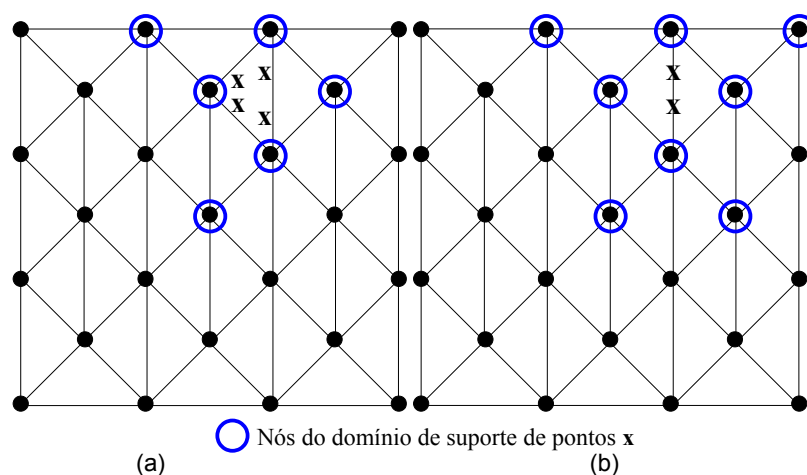


Figura A.1: Domínio de suporte para pontos x de um mesma (a) célula ou (b) aresta.

do tempo gasto para a construção de uma aproximação $u^h(x)$.

Outra simplificação realizada deve-se a estratégia adotada para a construção dos domínios de teste (vide Seção 2.4). Esta estratégia, ilustrada na Figura A.2, apresenta áreas comuns para domínios de teste de nós próximos. Na Figura A.2, os domínios de teste dos nós vizinhos i , j e k possuem a área da célula L em comum. Este procedimento poderia significar uma perda de eficiência computacional se esta área do domínio fosse integrada múltiplas vezes. Todavia no MLPG proposto, esta área é integrada uma única vez e sua contribuição adicionada aos três domínios de teste. Isto resulta em uma mudança de concepção, em que o procedimento do MLPG proposto se assemelha ao FEM, no qual o algoritmo percorre todas as células e não todos os domínios de teste como proposto pelo MLPG original.

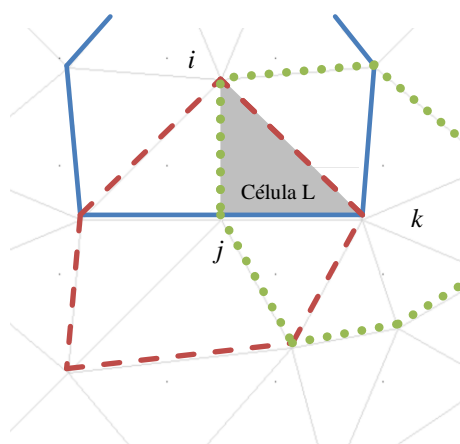


Figura A.2: Célula ou área de integração comum à três domínios de teste.

As integrações de contorno dos domínios de teste que estão internos a ω também são realizadas uma única vez e contabilizadas a dois domínios de teste. A malha apresentada na Figura A.3 ressalta os domínios de teste i e j que possuem um contorno em comum, uma aresta L, o qual é integrado apenas uma vez e contabilizado para estes dois domínios de teste. Logo, o algoritmo do MLPG proposto percorre todas as células e todas as arestas, integrando as áreas e os contornos dos domínios de teste, respectivamente.

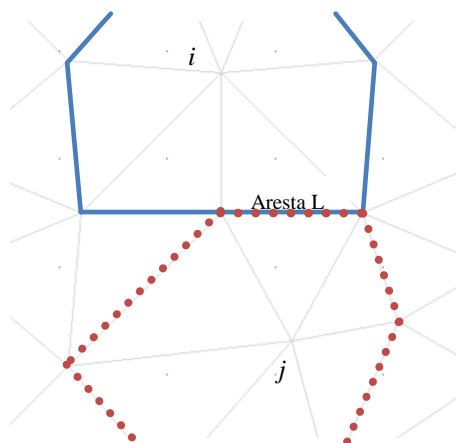


Figura A.3: *Aresta ou contorno de integração comum à dois domínios de teste.*

Anexo B

Construção das malhas usadas na análise da cavidade coaxial

Neste apêndice, detalha-se o procedimento de construção das malhas utilizadas na análise da cavidade coaxial. Este detalhamento, incia-se pela apresentação da construção das malhas de boa qualidade (malha A). A primeira malha A apresentada pode ser observada na Figura B.1, a qual possui menor quantidade de nós, apenas 41 nós. Esta malha é referida neste descritivo como a malha que possui o maior espaçamento horizontal e vertical entre nós, exatamente 0.25 metros (ou $spc = 1/4$ [m]).

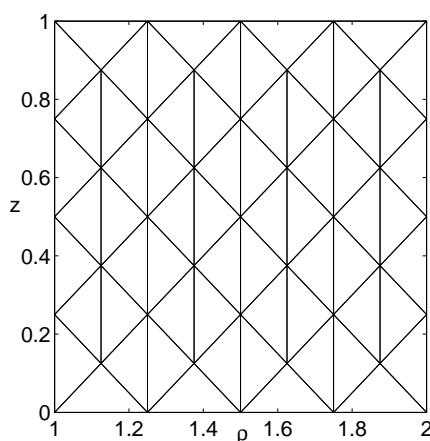
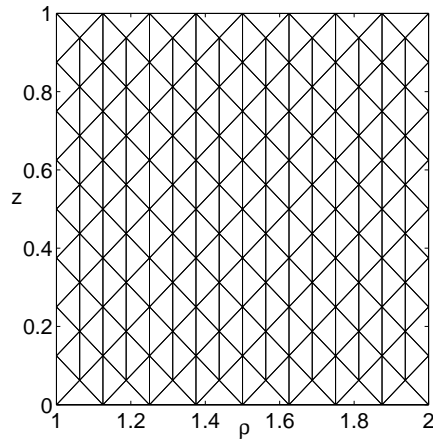


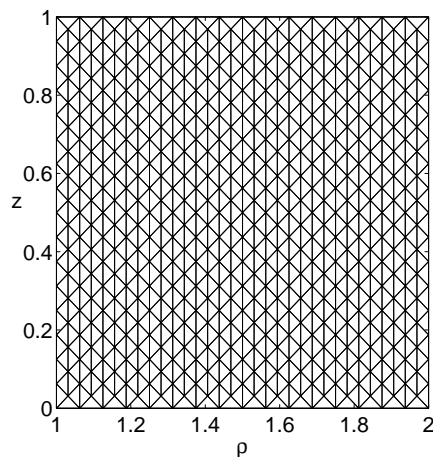
Figura B.1: Malha de boa qualidade com maior espaçamento vertical e horizontal entre nós, igual a 0.25m ($spc = 1/4$ [m]).

A segunda malha usada, com 145 nós (vide Figura B.2 (a)), possui um espaçamento horizontal e vertical entre nós duas vezes menor que a malha A com 41 nós, exatamente 0.125 metros ($spc = 1/8$ [m]). Já a terceira malha

usada, com 545 nós (vide Figura B.2 (b)), apresenta o espaçamento horizontal e vertical entre os nós também duas vezes menor que a malha A com 145 nós, exatamente 0.0625 metros ($spc = 1/16$ [m]).



(a)



(b)

Figura B.2: Malhas de boa qualidade com espaçamentos de: (a) $spc = 1/8$ [m] e (b) $spc = 1/16$ [m].

A malhas subsequentes, com mais nós ou um menor espaçamento vertical e horizontal entre estes não são ilustradas neste documento devido a elevada densidade nós utilizada, o que poderia dificultar a visualização da mesma quando impressa. Todavia estas malhas subsequentes seguem a mesma construção das malhas com spc igual a $1/4$, $1/8$ e $1/16$, apenas com espaçamentos menores, sendo seus valores de spc igual a $1/32$ e $1/64$ e $1/128$, os quais correspondem à malhas com 2113, 8321 e 33025, respectivamente.

A construção das malhas de má qualidade (Malha B) é feita de modo semelhante, mas apresenta uma distorção que é causada aos elementos da faixa vertical da malha com ρ maior que 1,375 e menor que 1,625 ($3/8 \leq \rho \leq 5/8$), definida como faixa de compressão. Nesta região, os elementos distorcidos possuem uma compressão horizontal 10 vezes maior que região fora faixa de compressão. A primeira malha B utilizada, com 122 nós (vide Figura B.3), possui um espaçamento horizontal entre nós igual a 0.25 metros ($spc_h = 1/4$ [m]) para região fora da faixa de compressão. Já para a região da malha dentro da faixa de compressão, o espaçamento horizontal é 0.025 metros ($spc_h = 1/40$ [m]). O espaçamento vertical entre os nós dentro e fora da faixa de compressão é o mesmo, sendo para esta primeira malha B igual à 0.25 metros ($spc_v = 1/4$ [m]).

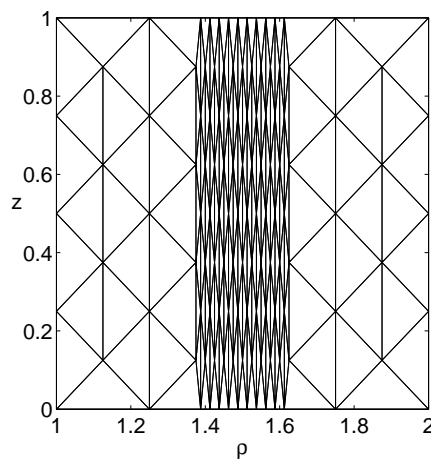
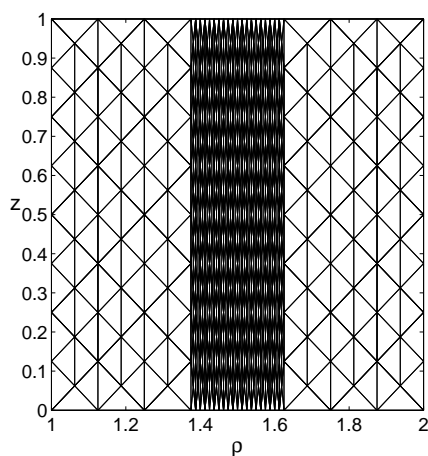


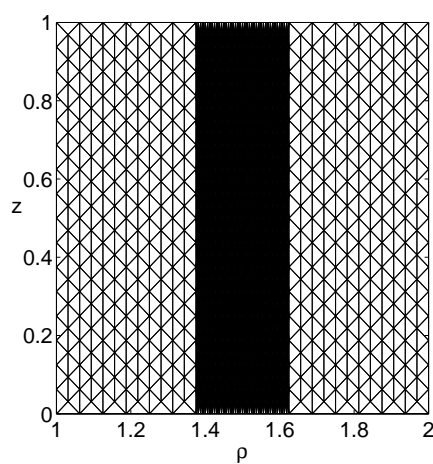
Figura B.3: Malha de má qualidade com maior espaçamento horizontal entre nós 0.25m ($spc_h = 1/4$ [m]).

As demais malhas B utilizadas, com maior número de nós, seguem o mesmo procedimento de construção da malha B com 122 nós, onde os elementos na faixa de compressão possuem um espaçamento horizontal 10 vezes menor que os elementos fora desta faixa. As Figuras apresentam duas malhas B com mais nós e que são utilizadas em sequência, respectivamente, 451 e 1733 nós. A malha B.4 (a), com 451 nós, apresenta fora da faixa de compressão um espalhamento horizontal de 0.125 metros ($spc_h = 1/8$ [m]) e dentro desta faixa o espaçamento horizontal de 0.0125 metros ($spc_h = 1/80$ [m]). Já a malha B.4 (b), com 1733 nós, apresenta spc_h de 1/16 e 1/160, respectivamente, para regiões fora e dentro da faixa de compressão.

As demais malhas B, com maior números de nós, também não são ilustradas, mas seguem construção semelhante as malhas B já apresentadas. Estas demais malhas possuem 6793 e 26897 nós, sendo os seus valores de spc fora da faixa de compressão iguais à 1/32 e 1/64. Na faixa de compressão, os valores de



(a)



(b)

Figura B.4: Malhas de má qualidade com maior espaçamento horizontal entre nós: (a) $spc_h = 1/8$ [m] e (b) $spc_h = 1/16$ [m].

spc para estas malhas são também dez vezes menores, sendo iguais à $1/320$ para a malha com 6793 nós e $1/640$ para a malha com 26897 nós.

Anexo C

Desenvolvimento da Forma Forte Vetorial

Neste anexo, detalha-se o desenvolvimento da forma forte presente na seção 4.2. Este desenvolvimento inicia-se substituindo a equação (4.16), na equação vetorial de Helmholtz:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} = 0, \quad (\text{C.1})$$

resultando em:

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[E_{\rho}^m \hat{\rho} + E_{\phi}^m \hat{\phi} + E_z^m \hat{z} \right] e^{jm\phi} \right\} \\ - k_0^2 \epsilon_r \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[E_{\rho}^m \hat{\rho} + E_{\phi}^m \hat{\phi} + E_z^m \hat{z} \right] e^{jm\phi} = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

A operação com primeiro rotacional é dada por:

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{1}{\mu_r} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & jm & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_{\rho}^m & \rho E_{\phi}^m & E_z^m \hat{z} \end{vmatrix} e^{jm\phi} \\ - k_0^2 \epsilon_r \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[E_{\rho}^m \hat{\rho} + E_{\phi}^m \hat{\phi} + E_z^m \hat{z} \right] e^{jm\phi} = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

resultando em:

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{1}{\mu_r} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\frac{jmE_z^m}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\phi^m)}{\partial z} \right] \hat{\rho} + \left[\frac{\partial E_\rho^m}{\partial z} - \frac{\partial E_z^m}{\partial \rho} \right] \hat{\phi} \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\phi^m)}{\partial \rho} - \frac{jmE_\rho^m}{\rho} \right] \hat{z} \right\} e^{jm\phi} \\ - k_0^2 \epsilon_r \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[E_\rho^m \hat{\rho} + E_\phi^m \hat{\phi} + E_z^m \hat{z} \right] e^{jm\phi} = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

A operação com segundo rotacional é dada por:

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\rho} \left| \begin{array}{ccc} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & jm & \frac{\partial}{\partial z} \\ \left[\frac{jmE_z^m}{\mu_r \rho} - \frac{1}{\mu_r \rho} \frac{\partial(\rho E_\phi^m)}{\partial z} \right] & \frac{\rho}{\mu_r} \left[\frac{\partial E_\rho^m}{\partial z} - \frac{\partial E_z^m}{\partial \rho} \right] & \left[\frac{1}{\mu_r \rho} \frac{\partial(\rho E_\phi^m)}{\partial \rho} - \frac{jmE_\rho^m}{\mu_r \rho} \right] \end{array} \right| e^{jm\phi} \\ - k_0^2 \epsilon_r \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[E_\rho^m \hat{\rho} + E_\phi^m \hat{\phi} + E_z^m \hat{z} \right] e^{jm\phi} = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Esta operação resulta, para a componente ϕ , na seguinte equação:

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ - \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\mu_r \rho} \frac{\partial(\rho E_\phi^m)}{\partial \rho} - \frac{jmE_\rho^m}{\mu_r \rho} \right] e^{jm\phi} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{jmE_z^m}{\mu_r \rho} - \frac{1}{\mu_r \rho} \frac{\partial(\rho E_\phi^m)}{\partial z} \right] e^{jm\phi} \right. \\ \left. - k_0^2 \epsilon_r E_\phi^m e^{jm\phi} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

rescrevendo, em formato mais compacto, vem:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ - \nabla \cdot \left[\frac{1}{\rho \mu_r} \nabla(\rho E_\phi^m) \right] e^{jm\phi} + jm \nabla \cdot \left[\frac{1}{\rho \mu_r} \vec{E}_t^m \right] e^{jm\phi} - k_0^2 \epsilon_r E_\phi^m e^{jm\phi} \right\} = 0. \quad (\text{C.7})$$

onde E_t^m é dado por:

$$\vec{E}_t^m = E_\rho^m \hat{\rho} + E_z^m \hat{z}. \quad (\text{C.8})$$

A operação rotacional (C.5) também resulta em um vetor transversal a direção

ϕ descrito por:

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \hat{\rho} \left[\frac{jm}{\mu_r \rho^2} \frac{\partial(\rho E_\phi^m)}{\partial \rho} + \frac{m^2 E_\rho^m}{\mu_r \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho}{\mu_r} \frac{\partial E_\rho^m}{\partial z} - \frac{\rho}{\mu_r} \frac{\partial E_z^m}{\partial \rho} \right) \right] e^{jm\phi} \right. \\ \left. + \hat{z} \left[\frac{jm}{\mu_r \rho^2} \frac{\partial(\rho E_\phi^m)}{\partial z} + \frac{m^2 E_z^m}{\mu_r \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho}{\mu_r} \frac{\partial E_\rho^m}{\partial z} - \frac{\rho}{\mu_r} \frac{\partial E_z^m}{\partial \rho} \right) \right] e^{jm\phi} \right. \\ \left. - k_0^2 \epsilon_r [E_\rho^m \hat{\rho} + E_z^m \hat{z}] e^{jm\phi} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

rescrevendo, em formato mais compacto, vem:

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E}_t^m \right) e^{jm\phi} + \frac{jm}{\mu_r \rho^2} \nabla(\rho E_\phi^m) e^{jm\phi} \right. \\ \left. - \left(k_0^2 \epsilon_r - \frac{m^2}{\mu_r \rho^2} \right) \vec{E}_t^m e^{jm\phi} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

onde o termo $\nabla \times (1/\mu_r \nabla \times \vec{E}_t^m)$ é apresentado, minunciosamente, a seguir:

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E}_t^m \right) &= \nabla \times \frac{1}{\mu_r \rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_\rho^m & 0 & E_z^m \hat{z} \end{vmatrix} = \nabla \times \hat{\phi} \frac{1}{\mu_r} \left(\frac{\partial E_\rho^m}{\partial z} - \frac{\partial E_z^m}{\partial \rho} \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\rho}{\mu_r} \left(\frac{\partial E_\rho^m}{\partial z} - \frac{\partial E_z^m}{\partial \rho} \right) & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\hat{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\rho}{\mu_r} \frac{\partial E_\rho^m}{\partial z} - \frac{\rho}{\mu_r} \frac{\partial E_z^m}{\partial \rho} \right] + \hat{z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\rho}{\mu_r} \frac{\partial E_\rho^m}{\partial z} - \frac{\rho}{\mu_r} \frac{\partial E_z^m}{\partial \rho} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Anexo D

Desenvolvimento da RBC

Bayliss-Turkel para 3 Dimensões

Neste anexo, detalha-se o desenvolvimento da RBC para o problema de 3 dimensões apresentado no capítulo 4. Este desenvolvimento segue sugestões apresentadas em [Peterson et al., 1997] na seção 11.7, na qual a condição de primeira ordem Bayliss-Turkel para problemas de espalhamento em três dimensões ou para análise de antenas é expressa por:

$$\hat{r} \times \nabla \times \vec{E}^s - jk\vec{E}_{tan}^s = 0, \quad (\text{D.1})$$

onde \vec{E}^s é o campo vetorial elétrico espalhado, o qual é definido pela subtração do campo total pelo campo incidente (i.e. $\vec{E}^s = \vec{E} - \vec{E}^I$). \vec{E}_{tan}^s é a parcela vetorial do campo tangente a RBC, que é definida, em coordenadas cilíndricas, por:

$$\vec{E}_{tan}^s = \frac{E_\phi^s}{\text{sen}(\beta)} \hat{\phi} + E_\phi^s \hat{\phi} + \frac{E_z^s}{\text{cos}(\beta)} \hat{z}, \quad (\text{D.2})$$

na qual β é o ângulo entre vetor normal \hat{n} ao contorno RBC e o eixo z. Este vetor normal, em coordenadas cilíndricas, é descrito por:

$$\hat{n} = \hat{r} = \text{sen}(\beta)\hat{\rho} + \text{cos}(\beta)\hat{z}. \quad (\text{D.3})$$

Neste anexo, a Equação (D.1) é manipulada, da mesma forma adotada no capítulo 4, descrevendo as variações ϕ das componentes dos campos usando uma série de Fourier, o que resulta em:

$$\begin{aligned} & \hat{r} \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[E_{\rho}^{s,m} \hat{\rho} + E_{\phi}^{s,m} \hat{\phi} + E_z^{s,m} \hat{z} \right] e^{jm\phi} \right\} \\ & - k^2 \epsilon_r \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{E_{\phi}^{s,m}}{\text{sen}(\beta)} \hat{\phi} + E_{\phi}^{s,m} \hat{\phi} + \frac{E_z^{s,m}}{\text{cos}(\beta)} \hat{z} \right] e^{jm\phi} = 0. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

A operação rotacional é dada por:

$$\begin{aligned} & \hat{r} \times \frac{1}{\mu_r} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & jm & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_{\rho}^{s,m} & \rho E_{\phi}^{s,m} & E_z^{s,m} \hat{z} \end{vmatrix} e^{jm\phi} \\ & - k^2 \epsilon_r \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{E_{\phi}^{s,m}}{\text{sen}(\beta)} \hat{\phi} + E_{\phi}^{s,m} \hat{\phi} + \frac{E_z^{s,m}}{\text{cos}(\beta)} \hat{z} \right] e^{jm\phi} = 0, \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

resultando em:

$$\begin{aligned} & \hat{r} \times \frac{1}{\mu_r} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\frac{jmE_z^{s,m}}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_{\phi}^{s,m})}{\partial z} \right] \hat{\rho} + \left[\frac{\partial E_{\rho}^{s,m}}{\partial z} - \frac{\partial E_z^{s,m}}{\partial \rho} \right] \hat{\phi} \right. \\ & \quad \left. + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_{\phi}^{s,m})}{\partial \rho} - \frac{jmE_{\rho}^{s,m}}{\rho} \right] \hat{z} \right\} e^{jm\phi} \\ & - k^2 \epsilon_r \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{E_{\phi}^{s,m}}{\text{sen}(\beta)} \hat{\phi} + E_{\phi}^{s,m} \hat{\phi} + \frac{E_z^{s,m}}{\text{cos}(\beta)} \hat{z} \right] e^{jm\phi} = 0. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

No modelamento presente no capítulo 4, faz-se necessário saber a condição de contorno de radiação apenas das componentes ϕ dos campos. Logo, apenas a equação referente a componente E_{ϕ} , obtida da Equação (D.6), é apresentada neste anexo, sendo descrita por:

$$-\frac{\text{sen}(\theta)}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho E_{\phi}^{s,m})}{\partial \rho} - jmE_{\rho}^{s,m} \right] - \frac{\text{cos}(\theta)}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho E_{\phi}^{s,m})}{\partial z} - jmE_z^{s,m} \right] - jkE_{\phi}^{s,m} = 0, \quad (\text{D.7})$$

a qual pode ser reescrita em formato mais compacto, usando identidades geométricas, por:

$$-\hat{n} \cdot \nabla(\rho E_{\phi}^{s,m}) + jm[\text{sen}(\beta)E_{\rho}^{s,m} + \text{cos}(\beta)E_z^{s,m}] - jk\rho E_{\phi}^{s,m} = 0. \quad (\text{D.8})$$

A Equação (D.8) pode ser reescrita somente em função das componentes $E\phi$ e $H\phi$ usando as relações (4.14) e (4.13), o que resulta em

$$f_m \epsilon_r \rho \frac{\partial(\rho E_\phi^{s,m})}{\partial n} + \frac{m f_m \eta}{k} \hat{n} \cdot [\hat{\phi} \times \nabla(\rho H_\phi^{s,m})] + j \frac{E_\phi^{s,m}}{k \mu} = 0, \quad (\text{D.9})$$

a qual pode ser definida em relação ao campo incidente e campo total, bastando para isso somar e subtrair termos incidentes iguais aos termos espalhados presente na mesma. Este procedimento resulta na formulação utilizada no capítulo 4, que define a derivada dada componente E_ϕ^m em relação a normal ao contorno RBC, sendo expressa por:

$$\begin{aligned} f_m \epsilon_r \rho \frac{\partial(\rho E_\phi^m)}{\partial n} = & f_m \epsilon_r \rho \frac{\partial(\rho E_\phi^{I,m})}{\partial n} + \frac{m f_m \eta}{k} \hat{n} \cdot [\hat{\phi} \times \nabla(\rho H_\phi^{I,m})] + j \frac{E_\phi^{I,m}}{k \mu_r} \\ & - \frac{m f_m \eta}{k} \hat{n} \cdot [\hat{\phi} \times \nabla(\rho H_\phi^m)] - j \frac{E_\phi^m}{k \mu_r}. \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

em que $E\phi^m = E\phi^{s,m} + E\phi^{I,m}$, sendo $E\phi^{I,m}$ o harmônico m da componente E_ϕ do campo incidente no contorno RBC.

Objetivando determinar a derivada da componente H_ϕ^m em relação a normal ao contorno RBC, utiliza-se a equação dual à (D.1), que é definida por:

$$\hat{r} \times \nabla \times \vec{H}^s - j k \vec{H}_{tan}^s = 0, \quad (\text{D.11})$$

seguindo passos semelhantes ao utilizados para determinar (D.10) ou usando o teorema da dualidade [Harrington, 1961], obtém-se

$$\begin{aligned} f_m \mu_r \rho \frac{\partial(\rho H_\phi^m)}{\partial n} = & f_m \mu_r \rho \frac{\partial(\rho H_\phi^{I,m})}{\partial n} - \frac{m f_m}{\eta k} \hat{n} \cdot [\hat{\phi} \times \nabla(\rho E_\phi^{I,m})] + j \frac{H_\phi^{I,m}}{k \epsilon_r} \\ & + \frac{m f_m}{\eta k} \hat{n} \cdot [\hat{\phi} \times \nabla(\rho E_\phi^m)] - j \frac{H_\phi^m}{k \epsilon_r}. \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

em que $H\phi^{I,m}$ é o harmônico m da componente H_ϕ do campo incidente no contorno RBC.