

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
Instituto de Ciências Exatas – ICEX  
Departamento de Física

Ricardo Simão Pereira Lopes

**A EMERGÊNCIA DE DILEMAS SOCIAIS E  
EVOLUÇÃO DE COMPORTAMENTOS POR  
CONTÁGIO SOCIAL EM MODELOS DE  
TRÁFEGO VEICULAR**

Belo Horizonte

2022

Ricardo Simão Pereira Lopes

**A EMERGÊNCIA DE DILEMAS SOCIAIS E  
EVOLUÇÃO DE COMPORTAMENTOS POR  
CONTÁGIO SOCIAL EM MODELOS DE TRÁFEGO  
VEICULAR**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Lucas Lages Wardil

Belo Horizonte

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

L864e Lopes, Ricardo Simão Pereira.

A emergência de dilemas sociais e evolução de comportamentos por contágio social em modelos de tráfego veicular / Ricardo Simão Pereira Lopes. – 2022.  
150 f. : il.

Orientador: Lucas Lages Wardil.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Minas Gerais,  
Departamento de Física.

Bibliografia: f. 129-145.

1. Tráfego. 2. Mecânica estatística. 3. Teoria dos jogos. 4. Sistemas complexos. I. Título. II. Wardil, Lucas Lages. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

CDU – 531.19 (043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

## ATA DE DEFESA DE TESE

**ATA DA SESSÃO DE ARGUIÇÃO DA 395ª TESE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA, DEFENDIDA POR RICARDO SIMÃO PEREIRA LOPES** orientado pelo professor Lucas Lages Wardil, para obtenção do grau de **DOUTOR EM CIÊNCIAS, área de concentração física**. Às 09:30 horas de vinte e cinco de março de dois mil e vinte e dois reuniu-se, por videoconferência, a Comissão Examinadora, composta pelos professores **Lucas Lages Wardil** (Orientador - Departamento de Física/UFMG), **Ronald Dickman** (Departamento de Física/UFMG), **Lucas Álvares da Silva Mól** (Departamento de Física/UFMG), **Marco Antonio Amaral** (Instituto de Humanidades, Artes e Ciências/UFSB) e **Júlio Cesar Siqueira Rocha** (Departamento de Física/UFOP) para dar cumprimento ao Artigo 37 do Regimento Geral da UFMG, submetendo o Mestre **RICARDO SIMÃO PEREIRA LOPES** à arguição de seu trabalho de Tese de Doutorado, que recebeu o título de "**A emergência de dilemas sociais e evolução de comportamentos por contágio social em modelos de tráfego veicular**". O candidato fez uma exposição oral de seu trabalho durante aproximadamente 50 minutos. Após esta, os membros da comissão prosseguiram com a sua arguição, e apresentaram seus pareceres individuais sobre o trabalho, concluindo pela aprovação do candidato.

Belo Horizonte, 25 de março de 2022.

Prof. Lucas Lages Wardil

Orientador do estudante

Departamento de Física/UFMG

Prof. Marco Antonio Amaral

Instituto de Humanidades, Artes e Ciências/UFSB

Prof. Ronald Dickman

Departamento de Física/UFMG

Prof. Júlio Cesar Siqueira Rocha

Departamento de Física/UFOP

Prof. Lucas Álvares da Silva Mól

Departamento de Física/UFMG

**Candidato:** Ricardo Simão Pereira Lopes



Documento assinado eletronicamente por **Marco Antonio Amaral, Usuário Externo**, em 29/03/2022, às 12:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Lucas Lages Wardil, Professor do Magistério Superior**, em 29/03/2022, às 16:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Lucas Alvares da Silva Mol, Professor do Magistério Superior**, em 30/03/2022, às 08:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Julio Cesar Siqueira Rocha, Usuário Externo**, em 30/03/2022, às 10:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ronald Dickman, Professor do Magistério Superior**, em 05/04/2022, às 17:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ricardo Simão Pereira Lopes, Usuário Externo**, em 09/05/2022, às 17:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufmg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **1342517** e o código CRC **6E452E73**.

# Agradecimentos

Agradeço aos melhores pais do mundo: Elizabete e Aristides pelo constante apoio. Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Lucas Lages Wardil cujo apoio e orientações foram fundamentais ao meu desenvolvimento profissional e pessoal assim como ao CNPq, CAPES e FAPEMIG pelo apoio financeiro.

Agradeço também a todos que acreditaram no meu trabalho mas não foram mencionados.

*O segredo para realizar a maior fecundidade e o maior gozo da  
existência é: viver perigosamente!  
Construam vossas moradias nos veios do Vesúvio!  
Naveguem rumo às águas desconhecidas!  
Vivam em guerra contra os seus e contra si!  
Sejam ladrões e conquistadores, contanto que não sejam tiranos e  
possuidores,  
vocês, perseguidores de conhecimento!  
(F. Nietzsche)*

# Resumo

Neste trabalho analisamos modelos heterogêneos unidimensionais de tráfego veicular em duas etapas. Na primeira etapa, formulamos um modelo simples que permite considerar ultrapassagens usando como base o modelo proposto por Nagel e Schreckenberg (NaSch). Partindo dos resultados de cálculos analíticos em casos limites e simulações dos casos gerais, analisamos e quantificamos dilemas sociais. Em certas condições, a ultrapassagem fornece vantagens para o indivíduo que realiza a manobra enquanto prejudica o desempenho médio da população. Identificamos a origem do dilema para o modelo formulado e identificamos os mecanismos pelos quais outros modelos podem apresentar dilemas similares. Na segunda etapa, consideramos modelos unidimensionais gerais caracterizados por quatro propriedades: as partículas são duras; as interações são direcionadas contra o sentido do movimento; as partículas buscam sempre maximizar as suas velocidades ou reduzir distâncias até determinado valor, e; o sistema é fechado, sem troca de partículas. Mostramos que em populações heterogêneas cujos indivíduos apresentam essas propriedades, a dinâmica do sistema é controlada pelas partículas mais lentas e a rede de interações deste sistema pode ser representada por um grafo aleatório direcionado. Este resultado tem diversas consequências interessantes. Sob o processo evolucionário de imitação por contato social, a composição da população tende a homogeneidade com o domínio da estratégia mais lenta inicialmente presente, independentemente da composição inicial da população, dos algoritmos utilizados, ou dos detalhes do processo evolucionário. Introduzindo-se o processo evolucionário de mutação como um processo estocástico independente, temos dois regimes assintóticos distintos. Caso a mutação seja muito mais frequente que a imitação, a probabilidade de se encontrar uma partícula com determinados parâmetros no limite termodinâmico é similar à distribuição de probabilidade de um passeio aleatório  $m$ -dimensional onde  $m$  é a dimensão do espaço de parâmetros. Por outro lado, se a imitação é muito mais frequente que a mutação, em tempos longos, a composição do sistema consistirá de partículas com parâmetros característicos das estratégias mais lentas permitidas no espaço de parâmetros. Portanto, processos evolucionários atuam como *annealed disorders* dos parâmetros definidos neste espaço dirigindo as não-uniformidades para locais específicos. Também discutimos as similaridades entre estes sistemas e o

modelo de m-vetores, e observamos que os limites mencionados estão relacionados a estados de desordem e ordem, respectivamente. Adicionalmente, incluímos um anexo ao texto principal que trata de investigações em modelos econométricos que rendeu uma publicação e gerou o projeto que estamos trabalhando atualmente. Neste anexo introduzimos o modelo *Talent versus Luck* (TvL) que se trata de um modelo que busca incluir o papel da sorte no sucesso de agentes econômicos e o colocamos em um campo teórico mais firme, de forma que conseguimos clarificar as suas predições (em especial o sucesso de partículas de talento mediano) e incluir novas predições, como, a inclusão do efeito Matthew.

**Palavras-chave:** Surgimento da cooperação, dinâmica evolucionária, modelos de tráfego, teoria de jogos, sistemas complexos

# Abstract

This work focuses on uni-dimensional, heterogeneous traffic models. In the first part, we adapted the Nagel and Schreckenberg model (NaSch) to allow overtaking. From the results of analytical calculations and simulations, we show that under certain circumstances overtaking can improve the performance of an individual at a social cost that may hinder the entire population. We analyze and quantify the social dilemma, exploring its causes, and generalize the discussions to other models simulating a more detailed model as an example. In the second part, we analyze general one-dimensional cellular-automata models of vehicular traffic and show that, if the models satisfy the following four simple properties: the interactions are unidirectional; the particles are hard-particles; the dynamics of the particles act as to maximize the velocity or reduce the distances between particles to an optimal distance, and; the system is closed in the sense that there is no exchange of particles with the exterior, then the average velocity in the steady-state of all particles is limited by the average velocity of the slowest particle in the population. Additionally, the net of interactions of the system can be represented by a random, directed graph. Under the evolutionary process of imitation by social contagion, the heterogeneous population is replaced by a homogeneous population composed by the slower strategy in the system, regardless of the initial conditions, initial composition, or the details of the process. Introducing the mutation process as an independent stochastic process, we observe two distinct asymptotic behaviors. If the mutation is the dominant process, the probability distribution of the parameters of any individual is similar to the probability distribution of an  $m$ -dimensional random walk where  $m$  is the number of parameters. On the other hand, if imitation is the dominant process, the dominating strategies will be particles whose parameters are characteristics of the slower strategy allowed in the space of parameters. Therefore, the inclusion of evolutionary dynamics in these systems transforms the quenched disorders in the space of parameters (as heterogeneous models are generally introduced) in annealed disorders driven to specific regions in that space. We also discuss the similarities of the evolutionary dynamics of these systems with the  $m$ -vectors model and observe the similarities among the mentioned limits and unorganized and organized states, respectively. Additional material is added in an appendix regarding investigations on

econometric models that awarded us with a publication and the scientific problem we are currently working on. We introduce the Talent *versus* Luck (TvL) model that attempts to include the roleplay of luck in the success of economic agents in a simple way, putting it in more firm theoretical grounds clarifying its predictions (with special attention to the success of average talent particles) and include the analysis of new predictions like the Matthew effect.

**Keywords:** emergence of cooperation, evolutionary dynamic, traffic models, game theory, complex systems.

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>1.1</b>	<b>Tráfego veicular: um comportamento coletivo</b>	<b>13</b>
<b>1.2</b>	<b>Interesse físico</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>CONCEITOS FUNDAMENTAIS</b>	<b>19</b>
<b>2.1</b>	<b>Introdução a modelos CA de tráfego veicular</b>	<b>19</b>
2.1.1	O modelo NaSch	21
2.1.1.1	O modelo NaSch determinístico	25
2.1.1.2	O modelo NaSch estocástico	27
<b>2.2</b>	<b>Introdução à Teoria de Jogos Estratégicos</b>	<b>29</b>
<b>2.3</b>	<b>Teoria dos Jogos Evolucionários</b>	<b>33</b>
<b>3</b>	<b>RESULTADOS I: DILEMAS SOCIAIS EM MODELOS UNIDIMENSIONAIS DE TRÁFEGO COM ULTRAPASSAGEM</b>	<b>42</b>
<b>3.1</b>	<b>Introdução</b>	<b>42</b>
<b>3.2</b>	<b>O modelo <i>Overtaking</i>-NaSch (ONaSch)</b>	<b>43</b>
3.2.1	O modelo ONaSch determinístico	46
3.2.2	O modelo ONaSch estocástico	53
<b>3.3</b>	<b>Populações heterogêneas e a dinâmica de dois jogadores</b>	<b>61</b>
<b>3.4</b>	<b>Ultrapassagem e o dilema do prisioneiro</b>	<b>64</b>
<b>3.5</b>	<b>Dominância sobre os comportamentos e descontinuidades</b>	<b>67</b>
<b>3.6</b>	<b>Generalizações?</b>	<b>69</b>
<b>3.7</b>	<b>Discussões e conclusões do capítulo</b>	<b>71</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS II: EVOLUÇÃO DE COMPORTAMENTOS EM MODELOS DE TRÁFEGO VEICULAR</b>	<b>73</b>
<b>4.1</b>	<b>Introdução</b>	<b>73</b>
<b>4.2</b>	<b>Resultados gerais</b>	<b>75</b>
<b>4.3</b>	<b>Aplicações</b>	<b>91</b>

---

4.3.1	O modelo NaSch heterogêneo . . . . .	91
4.3.2	Populações multi-comportamentais . . . . .	97
<b>4.4</b>	<b>Resumo e Conclusões do capítulo . . . . .</b>	<b>103</b>
<b>5</b>	<b>MATERIAL ADICIONAL: INVESTIGAÇÕES EM MODE- LOS ECONÔMICOS . . . . .</b>	<b>111</b>
<b>5.1</b>	<b>Introdução . . . . .</b>	<b>111</b>
<b>5.2</b>	<b>O modelo TvL como um <i>ensemble</i> de passeios aleatórios unidimensionais independentes . . . . .</b>	<b>113</b>
5.2.1	Análise preliminar . . . . .	113
5.2.2	O talento crítico . . . . .	119
5.2.3	Talento usado para escapar de situações ruins . . . . .	121
5.2.4	O efeito Mathew . . . . .	123
<b>5.3</b>	<b>Conclusões do capítulo . . . . .</b>	<b>124</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>127</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>129</b>
	<b>ANEXOS</b>	<b>146</b>
	<b>ANEXO A – A PRIMEIRA PÁGINA DE DOS ARTIGOS PRODUZIDOS . . . . .</b>	<b>147</b>

# 1 Introdução

O tráfego veicular é um fenômeno recente na história humana que decorre da preferência por se viver em cidades, comunidades ou centros urbanos com maior densidade populacional. Para que suas necessidades sejam atendidas, os indivíduos destas comunidades precisam se deslocar, muitas vezes, durante períodos longos de tempo. Uma possível divisão do tempo de um adulto desenvolvendo alguma atividade remunerada em um dia típico pode ser dividido grosseiramente em período de trabalho, um período de lazer e o período de comuta, que liga os dois primeiros. Como o tempo de trabalho é geralmente fixo, é razoável assumir que a maximização do lazer corresponde a minimização da comuta. Em outras palavras, assumimos que os motoristas em comuta buscam sempre os trajetos e estratégias de menor tempo possível.

Com essa idealização em mente, é possível propor modelos qualitativos para entender o fenômeno do tráfego veicular como um fenômeno coletivo complexo nascido de interações não-triviais entre diretrizes simples de otimização de comutas individuais e coletivas.

## 1.1 Tráfego veicular: um comportamento coletivo

Um fenômeno de especial interesse são estados não-livres do trânsito de veículos como, por exemplo, os congestionamentos. Estes fenômenos são caracterizados pela variação “atípica” do fluxo de veículos em função da concentração e correlações não triviais de posição e velocidade entre veículos. Entender tais fenômenos produz o conhecimento técnico necessário para maximizar a eficiência do transporte de pessoas ou mercadorias de uma região para a outra, que corresponde ao objetivo das ciências de tráfego.

As ações propostas para promover a eficiência no transporte, que geralmente atuam a eliminar ou amenizar congestionamentos, podem ser grosseiramente classificadas em dois grupos: medidas de planejamento e modificação de infraestruturas,

ou; medidas normativo-informativas. As primeiras, são o objeto do trabalho dos engenheiros de tráfego e aborda questões como o número adequado de faixas de uma determinada via, localização de trevos, cruzamentos, etc., bem como obras corretivas como duplicações, construções de desvios, destruição de pontes, etc. As medidas normativo-informativas são o objeto de estudo de ciências sociais e políticas e diferem das de planejamento no ponto em que o objetivo não é a transformação da infraestrutura física, mas a transformação de reações à tais estruturas. São exemplos a promulgação de novas leis (assim como reedição de leis antigas) regendo o comportamento dos motoristas no tráfego e ações educativas buscando conscientizar motoristas sobre os riscos de certos comportamentos. Estas medidas zelam pelo bem-estar do máximo de indivíduos e podem indicar a necessidade de realocação de recursos para medidas de planejamento, caso a aplicação das normativo-informativas sejam insuficientes ou inadequadas.

O entendimento do fenômeno de tráfego é fundamental para o planejamento das cidades e de obras corretivas que otimizam a resposta ao problema, assim como para entender as relações entre as medidas normativo-informativas e suas consequências. É de fundamental importância o entendimento destas medidas, haja vista que são as que carregam o maior potencial de resolução de problemas no tráfego, as mais baratas, e, não apresentam os mesmos problemas que medidas estruturais, cuja necessidade se multiplica conforme a população cresce. Medidas normativo-informativas mudam o comportamento de uma parcela significativa da população que é transmitida às futuras gerações na forma de pressões sociais, e podem até mesmo se manifestar como movimentos culturais. A análise de algumas destas medidas é o principal objeto de estudo da primeira parte deste trabalho.

## 1.2 Interesse físico

O tráfego veicular é um antigo campo de interesse teórico e experimental na área de fenômenos de transporte e ganhou um interesse especial da comunidade acadêmica após o trabalho de Lighthill e Whitham, que apresentaram um modelo macroscópico construído a partir de analogias entre tráfego veicular e hidrodinâmica [1–4]. Há ainda similaridades entre as estruturas de modelos de tráfego e fenômenos

analisados em outros campos da Física. Podemos citar a similaridade entre o modelo baseado em Automatas Celulares (AC) proposto por Nagel e Schreckenberg (NaSch) em 1992 [5], que será detalhado em seções à frente, e o modelo totalmente assimétrico de exclusão simples entre primeiros vizinhos [6] (*totally asymmetric simple exclusion process*, TASEP) muito utilizado como o mais básico modelo de transporte de partículas que interagem entre si como caroço-duro e se movem em uma direção privilegiada [7, 8]. Modelos AC serão abordados em mais detalhes na seção **Conceitos fundamentais** (veja uma abordagem mais completa em [9–12]). Também citamos as equações de Burgers usadas no estudo de tráfego veicular modelados por equações diferenciais provenientes de leis de conservação do número de partículas (veja o excelente e acessível texto [13] e suas referências) e nos estudos de propagação de ondas não-lineares de rarefação e compressão em meios dispersivos [14] assim como a teoria de tráfego baseado em considerações retiradas da teoria cinética de gases proposta por Prigogine et al. [15].

Embora os exemplos citados fornecem motivações teóricas suficientes para o estudo de modelos de tráfego, é ainda interessante observar que o tráfego veicular tem a característica peculiar que o comportamento de alguns indivíduos pode afetar toda a população, não importa o quão grande seja. Podemos citar como exemplo a ocorrência de acidentes, presença de caminhões pesados na estrada ou mesmo as diferentes respostas dadas por diferentes motoristas aos mesmos estímulos ambientais. Neste contexto, o tráfego veicular real é um fenômeno inerentemente heterogêneo e o motorista é modelado por um comportamento único que se reflete na dinâmica dos veículos que o seguem. Usando a hipótese simplificadora de tráfego composto por uma única categoria de veículo, observamos que esta peculiaridade se manifesta nas possíveis estratégias escolhidas por estes. Logo, modelos heterogêneos parecem ter um papel de destaque na análise destes sistemas, embora ainda não sejam bem explorados devido aos desafios analíticos e computacionais que surgem com a invalidade da simetria de indistinguibilidade. A descrição da dinâmica dos indivíduos por um único conjunto de regras ou equações se torna impraticável, contudo, ainda é possível extrair informações com o uso de algumas ferramentas e análise de problemas similares com bastante simplicidade. Dentre estas ferramentas, destaca-se a Teoria de Jogos.

Uma introdução mais compreensiva será dada nas próximas seções, mas adiantamos que a Teoria de Jogos Estratégicos aborda problemas em que dois ou mais indivíduos (jogadores) disputam (ou negociam) uma variável quantificável (utilidade) empregando uma, dentre várias possíveis, ação (estratégia) de tal maneira que o resultado da disputa depende da estratégia usada por cada jogador. Em outras palavras, a Teoria de Jogos Estratégicos fornece ferramentas para compreender situações onde indivíduos procuram maximizar uma determinada grandeza nas interações de uns para com os outros.

Neste campo de pesquisa, duas estratégias arquetípicas são bastante estudadas: uma incorre em uma alta utilidade para si, mas pouca utilidade para os demais jogadores; a outra incorre em uma utilidade menor para si, mas que beneficia os demais jogadores. A possibilidade de escolha dentre estas duas estratégias fundamenta a estrutura básica dos dilemas sociais. A primeira, geralmente denominada deserção, implica em uma vantagem pessoal a um custo social. A segunda, denominada geralmente como cooperação, implica em uma vantagem coletiva, a custo pessoal. Poder-se-ia pensar que a utilidade de todos é sempre maximizada se todos adotassem a primeira estratégia. Entretanto, isto não é o que acontece. A utilidade média de uma população composta em alguma medida por desertores pode ser muito menor que a utilidade média de uma população de cooperadores. Em outras palavras, o dilema emerge na escolha entre obter um ganho pessoal elevado às custas do restante da população ou, na escolha de um ganho menor para si em prol do ganho social (veja exemplos em outros campos da ciência em [16–21]).

Usaremos a equivalência da hipótese de que os motoristas procuram minimizar o tempo gasto no tráfego com a hipótese de maximização da velocidade média de motoristas trafegando entre dois pontos fixos em um trajeto único, para justificar o valor da velocidade média como medida de utilidade<sup>1</sup>. Adicionalmente, supondo que os veículos desenvolvam a mesma velocidade média no estado livre, então as variações na velocidade média de cada veículo se dá devido às interações (que sempre a reduzem). Finalmente, se os veículos podem adotar diferentes estra-

---

<sup>1</sup> A hipótese de um caminho único é fundamental. Caso mais de um caminho seja possível, novos fenômenos interessantes podem surgir como, por exemplo, o paradoxo de Braess [22]

tégias, então sua utilidade (velocidade média) depende da estratégia utilizada e da estratégia utilizada pelos veículos com os quais ele interage. Temos então uma justificação heurística para o uso das ferramentas fornecidas pela Teoria de Jogos para a análise do tráfego veicular.

A concordância entre os resultados das simulações de vários modelos e o dados experimentais é surpreendentemente boa (para confirmações experimentais de diversos modelos veja as excelentes revisões [23–26], artigos experimentais [27–29] e o trabalho de Kerner et al. [30]). Contudo, uma comparação um pouco mais aprofundada entre modelos de tráfego veicular e o tráfego real levanta um certo ceticismo a respeito da validade de certas aproximações e modelos implicando em incompreensão dos resultados. Pode-se encontrar uma discussão mais crítica a respeito deste acordo entre os dados experimentais e os dados das simulações, assim como sobre a impossibilidade de um acordo experimental arbitrariamente bom, no trabalho de Papageorgiou et al. [31]. Embora se refira apenas a modelos contínuos, o autor argumenta que o acordo arbitrário entre o modelo teórico/computacional e dados experimentais é improvável, dentre outras razões, porque os modelos disponíveis não consideram a grande variedade de desempenhos veiculares e comportamentos individuais de motoristas. Outro fator complicador é a capacidade humana de aprendizado e invenção de comportamentos [32, 33]. Essas capacidades, associadas a fatores culturais, são as responsáveis pela imensa variabilidade de características do tráfego veicular em diferentes partes do mundo, mesmo quando os veículos utilizados são os mesmos. Observamos que, em uma dada população amostral, pode ocorrer que um motorista mude espontaneamente a sua forma de dirigir, ou estratégia, como consequência de explorações de novas possibilidades e/ou mudanças no veículo que permitam uma melhora de desempenho, eventos traumáticos como acidentes, mais pessoas no veículo (ou menos pessoas), etc., além disso, é possível que outros motoristas adotem essa nova estratégia, que se espalha pela população. Em outras palavras, as características de indivíduos no tráfego veicular real não são necessariamente constantes no tempo.

Considere modelos unidimensionais que respeitam quatro premissas: (i) as interações entre as partículas são unidimensionais; (ii) as partículas são intransponíveis (interações do tipo caroço-duro a distâncias pequenas); (iii) as partículas

buscam maximizar a própria velocidade ou reduzir o espaço entre veículos a um valor ótimo, e; (iv) o sistema é fechado de forma que não há troca de partículas com o meio externo. Nesses modelos é possível mostrar que existe um estado estável de populações heterogêneas e também entender por que modelos homogêneos fornecem bom acordo com dados experimentais de um fenômeno intrinsecamente heterogêneo. Na segunda parte deste trabalho nos dedicaremos a estes estudos. Inspirados na capacidade humana de adaptação e aprendizagem, formulamos alguns processos pelos quais as partículas, representando motoristas, podem mudar seu comportamento e avaliamos a dinâmica dessas mudanças. A segunda parte é um pouco menos complicada no sentido que formulamos propriedades gerais e, partindo destas, encontramos resultados heurísticos que propiciam uma grande simplificação do entendimento do comportamento de modelos heterogêneos.

## 2 Conceitos fundamentais

Na seção anterior argumentamos o paradigma o qual usaremos para analisar o fenômeno do tráfego veicular. Neste capítulo apresentaremos as ferramentas e os modelos para efetuar esta análise.

### 2.1 Introdução a modelos CA de tráfego veicular

Modelos de tráfego veicular podem ser divididos em três grandes grupos dependendo da natureza das grandezas analisadas e do grau de aproximação desejado: macroscópicos, mesoscópicos e microscópicos. Os modelos macroscópicos compõem a classe mais antiga de modelos. Um dos primeiros exemplares estudados foi construído por Lighthill e Whitham na década de 50 [1, 2]. Estes modelos são baseados nas analogias entre aspectos do tráfego veicular *in bulk* com conceitos hidrodinâmicos, mas negligenciam o comportamento intrínseco do indivíduo e se concentram nos comportamentos médios de um número muito grande de partículas. O tráfego é abordado como um fluxo de partículas em que a distinção de suas partes constituintes não são feitas (veja uma discussão completa em [26, 34]). Nos modelos mesoscópicos há um pouco mais de detalhamento que nos modelos macroscópicos, embora os comportamentos são especificados em baixo nível de detalhe, pois os indivíduos são indistinguíveis e suas trajetórias não são traçáveis em detalhes. Um famoso exemplo desta abordagem é o modelo proposto por Prigogine e Herman, que usa ferramentas da teoria cinética de gases para tratar partículas indistinguíveis duras a distâncias pequenas se movendo na via seguindo uma distribuição de velocidades desejadas [15, 35]. Os modelos microscópicos são modelos com a maior riqueza de detalhes dentre os três tipos citados. O comportamento dos indivíduos é considerado em regras computacionalmente simples, porém, o grande número de partículas torna o problema formidável sem a ajuda de um computador. Por essa razão, o estudo destes modelos são geralmente acompanhados por simulações computacionais ou cálculos numéricos, ao passo que cálculos analíticos raramente são possíveis. Um membro de destaque desta classe são os modelos do tipo *cellular*

*automaton* (CA), onde o tempo, espaço e alguns parâmetros são discretizados para uma *interface* computacional eficiente.

O conceito de automatas celulares foi proposto na década de 40 por J. von Neumann e S. Ulam [11] e foram bastante popularizados e aplicados em diversas áreas da ciência após o trabalho de J. Conway nos anos 70 onde foi mostrado que um CA bidimensional muito simples chamado *Game of life* (O jogo da vida) pode manifestar uma grande variedade de comportamentos: da ordem ao caos; de padrões simples a formas complexas autorreplicantes, e; até capazes de emular uma máquina e Turing universal [36,37] (efetuar computações). Citamos também o trabalho de 20 anos de S. Wolfram a respeito da aplicabilidade de modelos CA em diferentes campos da ciência que culminou em seu livro nos anos 2000 [9,10]. Existem muitos exemplos de modelos CA aplicados ao tráfego veicular e recomendam-se as revisões [23–25,30,34,38] e uma abordagem atual e acessível pode ser encontrada em [12,39].

Conforme mencionamos, Papageorgiou critica a possibilidade da evolução da teoria de tráfego veicular para o *status* de uma teoria quantitativamente acurada como a mecânica clássica porque: no tráfego real não há veículos em número suficiente ou tempo suficiente de observação para uma abordagem *in bulk* precisa [31], e; os modelos (até então) não apresentavam uma proposta de abordagem da variabilidade de comportamentos observados no trânsito real. Embora esta crítica seja direcionada a modelos macroscópicos, ela é destacada em modelos microscópicos modernos, visto que mesmo com a sofisticação dos computadores atuais, ainda não há um consenso sobre quais modelos devem ser utilizados em determinadas situações, ou mesmo a natureza de uma variada gama de fenômenos presentes no tráfego real em função de comportamentos individuais. Modelos CA heterogêneos parecem endereçar a segunda crítica de Papageorgiou e permitem uma análise mais aprofundada do tráfego veicular, vamos nos concentrar nestes modelos, que permitem a implementação dos comportamentos dos indivíduos diretamente. Destacamos o modelo proposto por Nagel e Schreckenberg (NaSch) [5] que, além de reproduzir importantes características do tráfego veicular com regras relativamente simples, permite cálculos analíticos em limites especiais.

### 2.1.1 O modelo NaSch

O modelo NaSch é um dos mais bem conhecidos modelos CA aplicados ao estudo do tráfego veicular e é capaz de simular várias características complexas do tráfego: o aspecto geral do diagrama fundamental (a curva do fluxo de veículos em função da concentração) em cidades; a estabilidade de congestionamentos a altas concentrações, e; a formação espontânea de pequenos congestionamentos em densidades locais baixas (*phantom-jams*). O algoritmo se baseia em quatro passos muito simples (veja [5]):

- Primeiro passo: Aceleração

O veículo acelera uma unidade, respeitando o limite de velocidade  $v_{max}$ :

$$v_i(t+1) = \text{MIN}(v_i(t) + 1, v_{max})$$

- Segundo passo: Avaliação do espaço disponível

Se o veículo não tem espaço suficiente para desenvolver a velocidade avaliada no primeiro passo, ele desacelerará para desenvolver a máxima velocidade possível sem causar um acidente (ocupar a mesma posição do veículo da frente):

$$v_i(t+1) = \text{MIN}(v_i(t+1), d_i),$$

onde  $d_i$  é a distância entre veículos (veículos ocupam um único sítio):  $d_i = x_{i+1}(t) - x_i(t) - 1$ .

- Terceiro passo: Randomização

Um fator aleatório é incluído no processo de atualização da velocidade dos veículos:

$$v_i(t+1) = \text{MAX}(0, v_i(t+1) - 1),$$

com probabilidade  $p$ .

- Quarto passo: Atualização das posições

Após a atualização da velocidade de todas as partículas, atualiza-se a configuração do sistema:

$$\vec{x}(t+1) = \vec{x}(t) + \vec{v}(t+1).$$

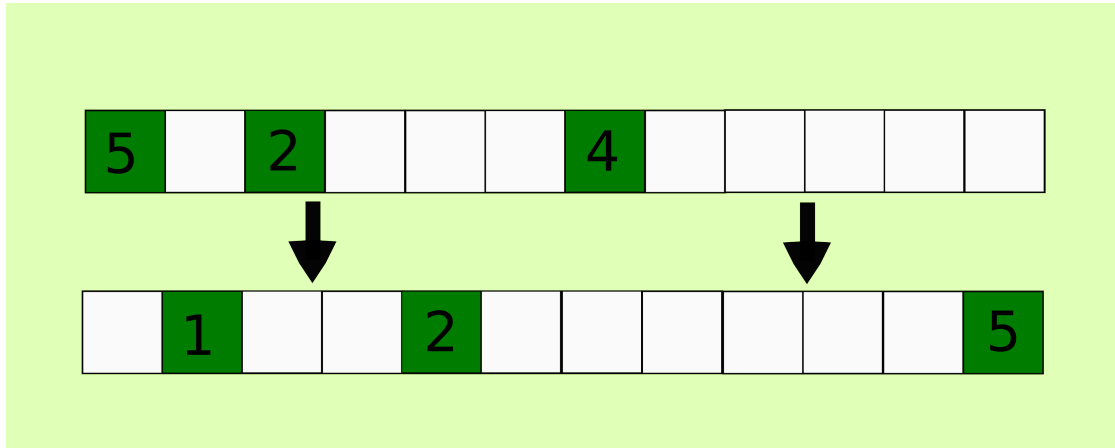


Figura 1 – Exemplo de uma configuração inicial no instante  $t$  (acima) evoluindo, segundo o algoritmo NaSch, para uma configuração no instante  $(t + 1)$  (abaixo). O sentido do movimento é da esquerda para a direita. Os quadrados brancos representam sítios vazios, os quadrados coloridos sítios ocupados por partículas cujas velocidades são representadas pelos números. A velocidade do primeiro veículo é dado pelo segundo passo que analisa o espaço disponível e retorna  $v_1(t + 1) = d_1(t) = 1$ . Este veículo não sofre influência do terceiro passo. O segundo veículo tem espaço para acelerar livremente, entretanto, é sujeito ao terceiro passo que anula a aceleração de uma unidade. Portanto, ela mantém a velocidade de  $v_2(t + 1) = v_2(t) = 2$ . A terceira partícula não sofre influência do segundo ou terceiro passos e acelera livremente,  $v_3(t + 1) = v_3(t) + 1$ .

A notação vetorial é usada para enfatizar que a atualização das posições de todas as partículas ocorrem simultaneamente.

O primeiro e segundo passos são arquetípicos com relação a fluxos unidimensionais de partículas duras. O primeiro passo indica que cada partícula é *dirigida para fora o equilíbrio* em uma direção privilegiada ao passo que o segundo indica uma forte repulsão entre as partículas. No limite onde  $v_{max} = 1$  e  $p = 0$  este modelo é idêntico ao processo totalmente assimétrico de exclusão de primeiros vizinhos, TASEP, exceto por este último se apresentar com regra de atualização de posições de forma aleatória. Um exemplo da dinâmica típica do modelo NaSch é mostrado na figura 1.

É interessante comentar que em  $p = 0$ , flutuações na densidade ou são

extintas a densidades baixas, ou são propagadas como ondas e choque de estrutura fixa pelo sistema em concentrações mais elevadas. Por outro lado, em  $p \neq 0$  o modelo NaSch apresenta algumas características do trânsito real que sua contrapartida determinística ( $p = 0$ ) falha em apresentar como congestionamentos-fantasma que surgem devido a flutuações locais na densidade do sistema que são amplificadas devido a essa desaceleração aleatória ocorrendo após a avaliação do espaço disponível (*over-reaction*) [40, 41] e sua análise é importante para a estabilidade do regime congestionado [42, 43]. Há trabalhos que relacionam a probabilidade de desaceleração com a resposta intrínseca de um *ensemble* de motoristas com respeito a imperfeições do ambiente [44], o que sugere uma possível interpretação do parâmetro  $p$  como uma tentativa de se considerar a pluralidade de comportamentos humanos possíveis na forma de um ruído de amplitude  $p$  ao passo que o parâmetro  $v_{max}$  tem a interpretação experimental de estar relacionado a um limite de velocidade imposto externamente.

A atualização das posições precisa ser feita após a atualização da velocidade de todos os veículos e todos os veículos são atualizados simultaneamente, ou *parallel-updating* (atualização em paralelo). Os resultados não são os mesmos que uma atualização veículo a veículo, *sequential updating* (atualização sequencial) ou atualização aleatória [45] (*random updating*). Esta ordenação dos passos é necessário devido a sua não-comutatividade e induz a uma nomenclatura onde os passos são nomeados em seqüências por frações do intervalo de tempo das transições entre as configurações. Não adotamos esta nomenclatura porque ela sugere que cada sub-passo é relacionado com a passagem do tempo, o que é falso mesmo em computação ou matemática pura visto que modelos CA são determinados pela configuração do ambiente e uma regra para uma *transição* para outra(s) configuração(ões), a passagem do tempo só tem significado entre duas realizações de atualizações das posições (mudanças de configuração) e não no algoritmo de escolha da nova configuração em si.

Uma grandeza de grande interesse prático e teórico é o fluxo de partículas definido, em sistemas de tráfego, como o número de veículos que cruzam uma seção do sistema (onde há um contador) por unidade de tempo:  $J \equiv N(\Delta t)/\Delta t$ . Podemos escrever este fluxo de uma forma mais conveniente assumindo que a área de seção

reta da pista é unitária em alguma unidade de medida e que o intervalo de medida,  $\Delta t$ , seja grande o suficiente para que a medida do fluxo seja independente do instante  $t$  que se inicia a medida ou da localização do sensor na pista. Neste caso, podemos considerar que os veículos medidos pelo sensor desenvolvem uma velocidade média  $\bar{v}$  e que a concentração de veículos,  $c$ , é aproximadamente constante. Logo em um intervalo  $\Delta t$  o número de veículos que cruzará o sensor,  $N(\Delta t)$ , será igual ao número de veículos contido em um volume cilíndrico cuja área da base é unitária (seção reta da pista) e cuja altura é  $h = \bar{v}\Delta t$ . Portanto,  $N(\Delta t) = c\bar{v}\Delta t$  e o fluxo de veículos por unidade de tempo assume a forma  $J(c) = c\bar{v}$  (veja [23, 24] para mais detalhes). Apresentamos na figura 2 medidas do fluxo de partículas,  $J$ , em função da concentração de partículas  $c$  em simulações do modelo NaSch.

As características apresentadas na figura 2 são gerais. O modelo apresenta dois comportamentos diferentes conforme os valores de  $c$ , com  $p$  fixo: o fluxo  $J(c)$  cresce linearmente a valores pequenos da concentração, e; decresce monotonicamente para valores grandes de  $c$ . O crescimento linear do fluxo com a concentração de veículos é associada ao regime livre observado no tráfego real. Por outro lado, a queda monotônica a partir de uma certa faixa de concentração indica um comportamento similar a um conjunto de comportamentos presentes em fases congestionadas (não-livres) no tráfego real onde o aumento do número de veículos reduz o fluxo do sistema. A natureza dessa mudança de regime é bastante complicada mesmo em modelos simples como o modelo NaSch, onde uma transição de segunda ordem é identificada para  $p = 0$  [41] que, entretanto, é perdida quando  $p \neq 0$  dando lugar a um fenômeno de *crossover* entre estas duas fases [30, 46]. As transições observadas empiricamente [28, 30, 47] são ainda mais complicadas. A discussão destas transições está fora do escopo deste texto e recomendamos a consulta aos trabalhos mencionados.

Aqui vale uma pequena pausa para esclarecimento sobre as unidades usadas no modelo. O processo se dá em um ambiente computacional unidimensional composto por um anel de sítios em posições fixas sequenciais. As regras mencionadas são regras de transição das partículas, que ocupam no máximo um sítio. O espaço mencionado nas regras se trata da diferença em número de sítios entre a posição final e a inicial. O tempo, neste contexto, é mensurado em intervalos caracterizados

pela efetiva mudança de configuração (quarto passo). Portanto, a velocidade citada se trata do número de sítios a frente em relação ao sítio inicial após uma atualização das posições. A comparação com dados experimentais se dá na conversão destes valores para grandezas físicas reais.

### 2.1.1.1 O modelo NaSch determinístico

O modelo NaSch requer dois parâmetros: a velocidade máxima das partículas,  $v_{max}$ , e a probabilidade de desaceleração,  $p$ . Os cálculos a seguir são feitos no limite determinístico,  $p = 0$ , e pressupõem o uso de condições periódicas de contorno.

A velocidade do  $i$ -ésimo indivíduo no instante  $t + 1$ , no modelo NaSch determinístico, é função apenas da velocidade e da distância entre esta partícula e a partícula a frente no instante  $t$ :

$$\begin{cases} v_i(t+1) = \text{MIN}(v_{max}, v_i(t) + 1) & \text{se } d_i > \text{MIN}(v_{max}, v_i(t) + 1); \\ v_i(t+1) = d_i & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Observando que o modelo tende a diluir compressões (mas não rarefações) a baixas densidades, esta expressão indica que se a concentração,  $c$ , for tal que  $c < 1/(v_{max} + 1) = c_2$ , então há múltiplos estados estáveis (diferentes configurações espaciais possíveis) onde  $d_i \geq v_{max}$  e  $v_i = v_{max}$  para todo  $i$ . Por outro lado, caso  $c \geq c_2$  não existe um estado com configuração estável, mas há uma oscilação nas velocidades e posições relativas das partículas com período  $N$ , onde  $N$  é o número de partículas no sistema (observe que todo o sistema se move, então é mais preciso se apontar que o período é o mínimo múltiplo comum entre o número de partículas e o tamanho do sistema:  $\text{MMC}(N, L)$ ). Para mostrar isto note que, neste caso, teremos  $v_j = d_j$  para todo  $j$  tal que  $1 \leq j \leq N$  após um transiente. Seja este o caso que isto é verdade no instante  $t$ , então  $v_j = d_j$  e  $v_{j+1} = d_{j+1}$  no instante  $t$  e no instante  $t + 1$  a partícula  $j + 1$  se deslocará para a posição  $x_{j+1}(t+1) = x_{j+1}(t) + v_{j+1}(t+1) = x_{j+1}(t) + d_{j+1}$  e a partícula  $j$  se deslocará para a posição  $x_j(t+1) = x_j(t) + v_j(t+1) = x_j(t) + d_j$ . No instante  $t + 1$ , a velocidade

da partícula  $j$  será:

$$\begin{aligned}
 v_j(t+1) &= \\
 &= d_j(t+1) = x_{j+1}(t+1) - x_j(t+1) - 1 = x_{j+1}(t) - x_j(t) - 1 - d_j + d_{j+1} \\
 &= d_{j+1} \\
 &= v_{j+1}(t).
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

A velocidade da  $j+1$ -ésima partícula é transmitida à  $j$ -ésima partícula para qualquer  $j$ . As perturbações (em velocidade e posições relativas) se propagam contra a direção da velocidade das partículas, sem mudar a sua forma ou características. Como a velocidade dos veículos é sempre exata para alcançar o sítio atrás do seu sucessor, estas perturbações se propagam com velocidade de um sítio por unidade de tempo (com um referencial fixo na rede) independentemente do formato ou características destas perturbações. Observe também que a velocidade do  $j$ -ésimo veículo, a partir do tempo  $t$ , adquire os valores  $(d_j(t), d_{j+1}(t), \dots, d_N(t), d_1(t), \dots, d_{j-1}(t))$  em sequência. Portanto,  $v$  torna-se uma função periódica de período  $N$  independentemente da concentração dado que  $c \geq c_2$ , assim como as distâncias relativas  $(d_j, d_{j+1}, \dots, d_N, d_1, \dots, d_{j-1})$ . Apresentamos um diagrama espaço-temporal do algoritmo NaSch na figura 3 com uma parte dos dados brutos, onde observamos ondas de densidade-velocidade que se propagam contra a direção das partículas e que mantém forma e propriedades.

Seguindo uma diretriz um pouco mais quantitativa, seja  $\mathcal{V}$  a velocidade acumulada de todas as partículas do sistema, então em acordo com a análise qualitativa dos parágrafos anteriores teremos:

$$\mathcal{V} = \sum_{i=1}^N v_i = \begin{cases} v_{max}N & \text{se } c < c_2 \\ L - N & \text{se } c \geq c_2 \end{cases}$$

O resultado segue porque se  $c < c_2 = 1/(v_{max} + 1)$  todos os veículos se locomovem com a velocidade máxima  $v_{max}$  e, por outro lado, se  $c \geq c_2$  a velocidade de todos os veículos é controlada pelo espaço disponível na pista e segundo a definição de  $d_i$  temos:  $\mathcal{V} = \sum_{i=1}^N v_i = \sum_{i=1}^N d_i = \sum_{i=1}^N x_{i+1} - x_i - 1 = x_{N+1} - x_1 - N = L - N$ , onde usamos  $x_{N+1} = x_1 + L$  devido às condições periódicas de contorno.

O fluxo de partículas é então:

$$J(c) = \bar{v}c = \frac{\mathcal{V} N}{\bar{N} L} = \begin{cases} v_{max}c & \text{se } c < c_2, \\ 1 - c & \text{se } c \geq c_2. \end{cases} \quad (2.3)$$

Note que o fluxo de partículas no regime congestionado é independente da velocidade máxima das partículas, que aparece apenas na inclinação do fluxo no regime livre e no ponto de interseção entre os dois regimes. Observando que o fluxo no ponto  $c_2$  é  $J(c_2) = v_{max}/(1 + v_{max})$  e que o intervalo de concentrações onde se manifesta o fluxo congestionado mede  $\Delta c_c = 1 - c_2 = 1 - 1/(1 + v_{max}) = v_{max}/(1 + v_{max})$ , observamos que o regime congestionado forma um triângulo isósceles com vértices  $(J(c_2), c_2)$ ,  $(0, c_2)$ ,  $(0, 1)$ , a qualquer valor de  $v_{max}$ . Este interessante resultado será importante na discussão sobre o modelo heterogêneo.

Encerramos a discussão do modelo NaSch determinístico observando que o fluxo como função da concentração de veículos apenas deduzido para o modelo NaSch determinístico é introduzido como uma **hipótese** bastante utilizada na modelagem de tráfego veicular que é, entretanto, contra-argumentada de uma maneira bastante concisa por Kerner [30]. Estas correções são desconsideradas aqui por estar fora do escopo, mas de qualquer maneira, correspondência entre as equações 2.3 e os resultados das simulações é boa, conforme mostra a figura 4.

#### 2.1.1.2 O modelo NaSch estocástico

O caso determinístico do modelo NaSch é fácil de se tratar analiticamente e tem bom acordo experimental, mas isto não se sustenta para  $p \neq 0$ . Sabendo que as interações entre as partículas sempre reduzem suas velocidades podemos usar a independência entre o segundo e terceiro passos para deduzir uma curva  $J(c)$  que funciona bem nos limites  $c \rightarrow 0$  e  $c \rightarrow 1$ , e atua como um limite superior para os valores do fluxo médio em função da densidade, já que negligência a cadeia de interações no sistema. O ponto principal é que uma velocidade de um indivíduo compatível com um estado estável deve satisfazer uma expressão do tipo:

$$\bar{v} = (1 - p)v + p(v - 1). \quad (2.4)$$

Nesta expressão  $v$  é uma função da concentração.

No regime livre, é provável que uma partícula qualquer seja encontrada desenvolvendo a maior velocidade possível dado que  $p \neq 1$ . Segundo terceiro passo NaSch, esta velocidade será mantida para atualização com probabilidade  $P(v(t+1) = v_{max}) = 1 - p$ . Por outro lado, a probabilidade da sua velocidade ser reduzida uma unidade é  $P(v(t+1) = v_{max} - 1) = p$ . Estes dois casos esgotam as possibilidades de microestados das partículas enquanto as interações não são consideradas. Portanto, a velocidade média da partícula no regime livre, no instante  $t$  é, aproximadamente:

$$\bar{v} = (1 - p)v_{max} + p(v_{max} - 1) = v_{max} - p. \quad (2.5)$$

Por outro lado, vimos que  $\mathcal{V} = \sum_{i=1}^N v_i = L - N$  no regime congestionado determinístico. Observando também que o terceiro passo é independente do segundo que no limite de concentrações altas, quase todas as partículas estão a velocidade  $v(t) = 0$  ou  $v(t) = 1$ , o segundo termo da equação 2.4 não se aplica ou se anula, logo consideramos apenas o primeiro termo.

$$\bar{v} = (1 - p)v + p(v - 1) \approx (1 - p)(1/c - 1). \quad (2.6)$$

Podemos agora sintetizar essas considerações escrevendo o limite superior para o fluxo médio de partículas do modelo NaSch estocástico como:

$$J(c) = \bar{v}c = \begin{cases} c(v_{max} - p) & \text{se } c < c_2^* \\ (1 - p)(1 - c) & \text{se } c \geq c_2^*. \end{cases} \quad (2.7)$$

$c_2^*$  marca uma travessia para o regime congestionado que pode ser estimado pelo cruzamento destas curvas, que acontece em  $c_2^* = (1 - p)/(v_{max} + 1 - 2p)$ . Não se trata de um ponto crítico dado que o modelo NaSch estocástico não apresenta transição de fases, mas apenas uma estimativa de mudança de comportamento. Note que o limite  $p \rightarrow 0$  corresponde ao limite  $c_2^* \rightarrow c_2$ , e da sua definição,  $c_2^*$  se aproxima de  $c_2$  pela direita. Portanto, o fluxo de partículas dado pela equação 2.7 é sempre maior que o fluxo medido no regime congestionado<sup>1</sup>. Veja a figura 5 para uma ilustração deste resultado.

<sup>1</sup> Assumimos que a curva no regime congestionado é monotonicamente decrescente e com derivada aproximadamente constante o que é verdade para o modelo NaSch estocástico. Visto que todas as curvas se encontram no ponto ( $c = 1, J = 0$ ), o resultado segue trivialmente.

Ferramentas muito mais sofisticadas para aproximar o fluxo do modelo NaSch estão disponíveis na literatura [23, 24, 38], contudo o método simplificado apresentado aqui é mais útil aos nossos propósitos. Após esta rápida introdução ao modelo mais usado no texto vamos discutir um assunto de suma importância, porém distinto do que tratamos até aqui.

## 2.2 Introdução à Teoria de Jogos Estratégicos

A teoria de jogos estratégicos (TJ) foi formulada e popularizada no trabalho de J. von Neumann e O. Morgenstern em 1944, intitulado: “Teoria de Jogos e Comportamentos Econométricos” [48] (*Theory of Games and Economic Behavior*). Nesta obra, as bases da teoria moderna de jogos e muitas aplicações a problemas econômicos foram extensivamente exploradas (veja as apresentações mais modernas [49–52]).

A TJ estuda interações estratégicas entre entidades capazes de tomar decisões “inteligentes” no sentido restrito à escolha entre ações que maximizam a utilidade. O objeto da TJ é o estudo do comportamento de agentes num ambiente onde a utilidade ganha por este agente depende de suas próprias ações e também das ações dos outros agentes. A escolha de tais ações depende de critérios pré-estabelecidos, tais como a maximização da utilidade, e é considerado que na mesma rodada todos os agentes tomam suas decisões ao mesmo tempo. Vejamos um exemplo prático. Suponha uma empresa a cargo de dois investidores, P1 e P2, esteja a beira da falência e ambos os investidores dispõem de capital suficiente para salvar essa empresa deste destino sombrio. As possíveis ações a serem tomadas são: P1 arca integralmente com os custos e salva a empresa; o sócio P2 arca integralmente com os custos e salva a empresa; ambos os investidores arcam com as despesas e salvam a empresa a um menor custo para ambos; nenhum jogador se mobiliza e a empresa é perdida. A estrutura deste jogo o caracteriza como parte de uma família bem estudada de jogos estratégicos cujo arquétipo (que empresta seu nome à família de jogos) é um jogo conhecido como *Snow-drift game* [53] que é assim denominado pela situação análoga que surge quando o caminho de dois motoristas é bloqueado em uma nevasca. O bloqueio pode ser retirado por um motorista a um

grande custo pessoal, por ambos a um médio custo pessoal ou não ser retirado e ambos ficarem presos na nevasca. Neste exemplo apenas duas ações (ou estratégias) são permitidas e são iguais para ambos investidores (ou jogadores). Usando o jargão popular, dizemos que o investidor que arca com os custos da recuperação da empresa adota uma ação cooperativa,  $\mathcal{C}$ , ao passo que o investidor que não se mobiliza e usufrui dos esforços alheios deserta,  $\mathcal{D}$ . Aproveitando o caráter discreto do problema, podemos resumir os resultados de todas as configurações possíveis de uma jogada em uma tabela. Seja o ganho em salvar a empresa  $2b$ , e o custo total para salvá-la  $c$ , quatro situações são possíveis e podemos escrever os resultados para o investidor P1 com se segue: caso P1 coopere e P2 deserte, ambos recebem igualmente os louros,  $b$ , mas P1 arca com todas as despesas, logo seu resultado é  $b - c$ ; caso ambos cooperem, ambos recebem os louros e dividem igualmente os custos, logo seu resultado é  $b - c/2$ ; caso P1 deserte e P2 coopere, P1 ganha os louros, mas não arca com os custos, logo seu resultado é  $b$ , e; caso ambos desertem, nenhum recebe louros ou custos, logo o resultado de P1 é 0. Estas considerações são apresentadas na tabela 1.

P1	C	D
C	$b - c/2$	$b - c$
D	$b$	0

Tabela 1 – Tabela do jogo apresentado no texto. A primeira coluna indica as estratégias adotadas pelo jogador P1 e a primeira linha as possíveis estratégias adotadas pelo jogador P2. As utilidades possíveis ao jogador P1 são indicadas pelas entradas da matriz  $2 \times 2$  que resulta do cruzamento das linhas correspondentes às estratégias do jogador P1 com as colunas correspondentes às estratégias do jogador P2. Esta matriz de ganhos está na forma padrão para o *Snow-drift game*.

Esta matriz dos ganhos do jogador P1 com relação a todas as possíveis estratégias do jogador P2 relaciona unicamente todas as combinações estratégicas entre os jogadores P1 e P2 às utilidades em adotá-las para o jogador P1. Se ambos podem tomar exatamente as mesmas ações recebendo as mesmas utilidades, a matriz de ganhos do jogador P2 é idêntica. Neste caso, o jogo é dito simétrico, uma simplificação em relação ao caso geral onde jogadores possuem um conjunto

próprio de estratégias e/ou um número ilimitado delas e o mesmo jogador apresenta tantas matrizes de ganhos quanto adversários. Estes casos estão fora do escopo deste texto, mas são discutidas em [49–52]. O exemplo apresentado mostra que para a aplicação da TJ é fundamental definir três entidades:

- i **Um conjunto de jogadores.** São necessários agentes capazes de tomar decisões estratégicas, ou inteligentes.
- ii **Um conjunto de ações.** É preciso que cada jogador tenha ao menos duas ações definidas cujos resultados dependem das ações dos outros jogadores.
- iii **Uma de função de ganho.** A função de ganho (*payoff*) relaciona univocamente as combinações estratégicas usadas pelos jogadores, em uma jogada, a um número real. O objetivo do jogador em realizar determinada ação é maximizar este número.

A verificação destas propriedades define um **jogo**. No exemplo: os investidores P1 e P2 são os jogadores ou agentes; duas estratégias são definidas para ambos,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ , e; a função de ganho (ou utilidade),  $\mathcal{U}$ , é dada pelas entradas da matriz composta da parte numérica da tabela 1:  $\mathcal{U}(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = b - c/2$ ;  $\mathcal{U}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = b - c$ ;  $\mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{C}) = b$ , e;  $\mathcal{U}(\mathcal{D}, \mathcal{D}) = 0$ . Vale enfatizar que esta função utilidade se refere ao jogador P1, portanto, é correto aplicar um subscrito a esta função, mas como se trata de um jogo simétrico, retiramos o subscrito por simplicidade.

Definido o jogo, é interessante analisarmos as possíveis ações dos agentes. O que torna a TJ fundamentalmente diferente de um simples problema de otimização é precisamente a racionalidade dos jogadores e que as estratégias são apresentadas em tempo real. Não são admitidas ações em sequências temporais como jogador P1 joga  $\mathcal{C}$  e **então** o jogador P2 joga  $\mathcal{D}$ , embora partidas repetidas, onde o mesmo jogo ocorra consecutivamente, tem grande importância teórica e prática [54–56]. A “racionalidade” dos jogadores é interpretada como o conhecimento universal de todas as ações possíveis de todos os outros jogadores, assim como a distribuição de probabilidades de escolha das estratégias usadas pelos adversários. A partir deste conhecimento, a decisão da estratégia mais apropriada é tomada [52]. Contudo, sem nenhuma aproximação a esta racionalidade não é possível de se resolver

questões relativamente simples e é costumário assumir apenas que os jogadores não interpretem como os outros jogadores usaram as informações básicas para mudar a própria distribuição de probabilidades de escolhas estratégicas. Dito isto, a escolha estratégica do jogador P1 depende de uma análise da matriz de ganhos (e da distribuição de probabilidades dos outros jogadores quando pertinente). Dado que  $b > c$ , caso P2 coopere, é melhor a P1 que deserte, pois  $b > b - c/2$ . Por outro lado, caso P2 deserte, é melhor a P1 que coopere porque  $b - c > 0$ . Observe que dado que P2 coopere(deserte), não é possível que P1 aumente sua utilidade com uma estratégia diferente que a deserção(cooperação). Estratégias com essa propriedade de que a utilidade individual se torna máxima, são denominadas equilíbrios de Nash do sistema [57]. O equilíbrio de Nash é a estratégia, ou ação, que garante a maior utilidade independentemente da estratégia adotada pelo adversário [49–52, 57]. No *snow-drift game*, as soluções  $(C, D)$  e  $(D, C)$  são ambas, equilíbrios de Nash.

Um último exemplo de interesse especial para este trabalho consiste no jogo simétrico cuja função utilidade é apresentada na tabela 2, porém, as entradas obedecem às desigualdades  $c > a > d > b$ , o que caracteriza outra família de jogos chamada dilema dos prisioneiros (*prisoners' dilemma*). Como ilustração, suponha a situação onde dois criminosos são capturados e interrogados em simultâneo, mas em salas diferentes. Os procuradores não têm provas suficientes para condená-los com a sentença completa e então fazem a seguinte proposta: caso nenhum aponte a ligação do outro com o crime (ambos escolhem a estratégia  $\mathcal{C}$ ) ambos são condenados a 1 ano de prisão pela parte do crime em que a promotoria reuniu provas concretas; caso um jogador escolha delatar e o outro não, o delatado será condenado a 10 anos de prisão, ao passo que o delator estará livre (um coopera e o outro deserta); caso ambos delatem, então ambos serão condenados a 8 anos de prisão (ambos escolhem a estratégia  $\mathcal{D}$ ). A função utilidade deste jogo é também apresentada na tabela 2. Concretamente, se  $c = 0 > a = -1 > d = -8 > b = -10$  então uma rápida consulta à matriz de ganhos sugere que o equilíbrio de Nash é a deserção de ambos. Logo, seguir a estratégia com melhor retorno pessoal independentemente da ação do adversário implica em uma condenação mútua de 8 anos e este é o cerne do dilema. O fato que se escolhessem a cooperação reduziriam o tempo de pena de ambos a um ano apenas uma otimização social do jogo, mas a cooperação mútua não é

o equilíbrio de Nash que trata de otimização individual dos ganhos. Cooperação mútua não é um comportamento “racional” do ponto de vista individual, mas pode ser interpretado como um comportamento “racional” do ponto de vista social.

P1	C	D
C	$a$	$b$
D	$c$	$d$

P1	C	D
C	-1	-10
D	0	-8

Tabela 2 – A direita, tabela de ganhos de um jogo simétrico geral. A tabela de todos os jogadores são iguais. Uma tabela de ganhos de um jogo do tipo dilema do prisioneiro geral apresenta  $c > a > d > b$ . A esquerda, a matriz de ganhos do dilema do prisioneiro proposto no texto principal.

Este exemplo mostra que nem sempre os interesses do grupo estão alinhados com os interesses do indivíduo e este fato caracteriza o **dilema social**: situações onde existe conflito entre adotar uma estratégia benéfica ao grupo (cooperação) ou adotar uma estratégia que seria melhor para o indivíduo com consequências sociais (deserção). Uma área bastante ativa de pesquisas se concentra em identificar dilemas sociais e seus mecanismos promotores [16–21, 58].

## 2.3 Teoria dos Jogos Evolucionários

Considere o seguinte jogo ([52] página 35). Em um grupo de  $N$  jogadores, cada jogador escolhe um número inteiro,  $x$ , entre 1 e 999; o vencedor é o jogador cuja escolha é a mais próxima do valor  $2\bar{x}/3$ , onde  $\bar{x}$  é a média dos valores escolhidos,  $\bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i/N$ . Usando um argumento de racionalidade, podemos argumentar que, como  $\bar{x} \leq 666$ , os jogadores escolherão números no conjunto  $[1, 666]$ . Mas isto implica que  $\bar{x} \leq 444$ , e pelas mesmas razões, os jogadores escolherão números no conjunto  $[1, 444]$ . Repetindo este argumento, os valores finais são  $x_i = 1$  para  $1 \leq i \leq N$  (note que a hipótese de racionalidade feita aqui é de natureza diferente da adotada no sub-item anterior). Concluimos então, por racionalidade, que a escolha  $x_i = 1$  é a melhor escolha, em outras palavras, a escolha que retorna a maior utilidade ao jogador.

Vamos substituir a hipótese de racionalidade pela hipótese de seleção em

múltiplas partidas. Suponha que este jogo retorne uma certa utilidade para o vencedor e nenhuma utilidade para os outros jogadores. Suponha também que os jogadores joguem várias partidas e identifiquem as escolhas que retornaram a maior utilidade, e, após uma determinada escala de tempo os jogadores abandonam as estratégias que retornaram os piores resultados. Neste caso, como  $\bar{x} \leq 666$  qualquer escolha dos jogadores superior a 666 tem utilidade 0 em todas as rodadas e são gradualmente eliminadas do jogo que passa agora a ser definido no intervalo  $[1, 666]$ , mas neste caso  $\bar{x} \leq 444$ . Conforme o jogo continua, as estratégias menos eficientes são gradualmente eliminadas até que  $x_i = 1$  para  $1 \leq i \leq N$ .

Este é um exemplo de uma aplicação da Teoria dos Jogos Evolucionários (TJE) que é apresentada como a aplicação das ideias da teoria de jogos a populações sob o processos evolucionários [59–64]. Nesta teoria, jogadores capazes de escolher racionalmente estratégias são substituídos por populações de indivíduos desempenhando uma mesma estratégia (ou espécie), e a utilidade de uma combinação estratégica é substituída por uma vantagem (ou desvantagem) reprodutiva na interação entre duas espécies. A TJE estuda, então, o comportamento de populações compostas por espécies diferentes, interagindo entre si de maneira simplificada, usando ferramentas da Teoria de Jogos estratégicos e pressupõe que o “jogo” entre diferentes espécies acontece consecutivamente, ou continuamente, o que implica no uso de uma linguagem estatística. Por exemplo, suponha que interações entre as espécies A e B que retornam as utilidades apresentadas na matriz de ganhos geral da tabela 3 a seguir.

■	A	B
A	$a$	$b$
B	$c$	$d$

Tabela 3 – Tabela de ganhos em interações entre duas espécies. Esta tabela tem uma interpretação diferente da tabela de ganhos empregada na TJ. Os valores são interpretados como: se a espécie A interage com outra espécie A, ambas ganham  $a$ ; se uma espécie B interage com uma espécie B, ambos ganham  $d$ , e; se uma espécie A interage com uma espécie B então A ganha  $b$  e B ganha  $c$ .

A utilidade média,  $\bar{U}$ , de cada espécie é dada pela probabilidade dos encon-

tros multiplicada pela utilidade deste encontro.

$$\bar{U}_A = a\mathcal{P}_{A,A} + b\mathcal{P}_{A,B} \quad (2.8)$$

$$\bar{U}_B = c\mathcal{P}_{B,A} + d\mathcal{P}_{B,B}, \quad (2.9)$$

O caso mais simples é a suposição de populações bem-misturadas (*well-mixed*) onde não se leva em consideração fatores geométricos e topológicos relacionados à disposição dos indivíduos. As estratégias são supostas móveis e livres em um sistema grande em que as interações ocorrem durante um intervalo de tempo longo. Isto implica que as probabilidades podem ser aproximadas pela frequência das espécies,  $\mathcal{P}_{A,A} = x_A^2$ ,  $\mathcal{P}_{B,A} = x_B x_A = \mathcal{P}_{A,B}$  e  $\mathcal{P}_{B,B} = x_B^2$ . Vale mencionar que muitos fenômenos interessantes também acontecem em populações onde esta aproximação não vale. Por exemplo pressões evolucionárias de natureza geométrica em populações dispostas em grafos [65] (veja outros exemplos em [53, 66–68]).

A utilidade calculada nas interações é usada para estimar a aptidão (*fitness*) da espécie, que se trata de uma função crescente deste parâmetro. Os modelos mais simples adotam:

$$f_A = 1 + w\bar{U}_A, \text{ e} \quad (2.10)$$

$$f_B = 1 + w\bar{U}_B. \quad (2.11)$$

O parâmetro  $w$  é a intensidade da seleção. A aptidão está relacionada com a taxa de reprodução. Em um ambiente com recursos ilimitados, a espécie mais apta é aquela que se reproduz com maior velocidade. Isto é precisamente o conteúdo da equação do replicador, uma das equações fundamentais da TJE, apresentadas a seguir:

$$\dot{x}_i = x_i(f_i - \phi). \quad (2.12)$$

Os índices variam de entre A e B e  $\phi$  é a aptidão média,  $\phi = \sum_{i=A,B} x_i f_i$  ( $f_i$  calculado com ajuda da equação 2.10). Esta equação apresenta o ponto que, conforme  $f_A$  e  $f_B$  dependem apenas do produto da fração das espécies com os ganhos

dos encontros entre as espécies, as diferenças observadas se devem às diferenças de ganhos em suas interações, como na TJ, mas também dependem das frequências. A TJE é um campo fundamentalmente diferente da TJ, embora tenha surgido da última em grande parte devido ao trabalho de Joh M. Smith e George R. Price [59] e seus problemas típicos são aproximações de sistemas reais complexos, mas as suas diferenças são frequentemente ignorados dado que os resultados obtidos com estas aproximações são boas.

Em populações que não são bem misturadas ou que se use dinâmicas reprodutivas diferentes da sugerida pela equação do replicador, é frequentemente útil usar aproximações numéricas e/ou uso de simulações de processos de nascimento e morte como mecanismos de mudança das frequências das espécies. Um dos processos mais simples e populares é o processo de Moran [69] onde duas partículas são escolhidas: a primeira para gerar uma cópia (prole), e; a segunda para ser retirada do sistema (morrer) e dar lugar à cópia da primeira. Este processo simples pode ser facilmente adaptado para gerar versões simplificadas de dinâmicas evolutivas tais como as dinâmicas de imitação e mutação. A primeira, consiste em selecionar um indivíduo para dar lugar à prole de outro indivíduo dentro de um grupo que contém o primeiro, cuja seleção se dá geralmente por uma regra estatística. Esta regra atribui probabilidades maiores de reprodução para os indivíduos com os melhores resultados. Note que este processo é bem adaptado para a análise local de sistemas cujos componentes estão dispostos em posições fixas, mas este não precisa ser o caso. A mutação consiste na escolha de um único indivíduo a ser retirado, porém, quem ocupará seu lugar é sua própria prole, apresentando um comportamento ligeiramente diferente que a matriarca.

A compatibilidade entre esta teoria e a seleção natural Darwiniana é evidente. Também é possível aplicá-la a problemas de sociologia com algumas poucas modificações [63, 70, 71]. Em muitos casos, se dá pela substituição de espécies por comportamentos e da equação do replicador por processos de nascimento e morte numéricos, e análises de estabilidade. A morte do comportamento não é interpretada como a morte do indivíduo, mas como a substituição daquela forma de agir por outra. Note que seres humanos mudam seu comportamento por aprendizado (comparação dos seus resultados com os de outras pessoas e imitando o compor-

tamento de melhor resultado) e por exploração criativa (espontânea substituição de determinado comportamento por outro), que podem ser modelados da mesma forma que os processos equivalentes em sistemas biológicos.

Na segunda parte deste trabalho, aplicaremos a TJE a modelos heterogêneos de tráfego veicular onde é permitido às partículas mudarem de estratégias por processos de contágio social (imitação), ou exploração livre (mutação). O nosso interesse é identificar a estratégia “vencedora” desta disputa evolucionária e para tanto, as ideias apresentadas até aqui são suficientes, embora não exaustivas. O leitor interessado em uma discussão mais profunda destes temas é recomendado consultar os trabalhos citados e suas referências.

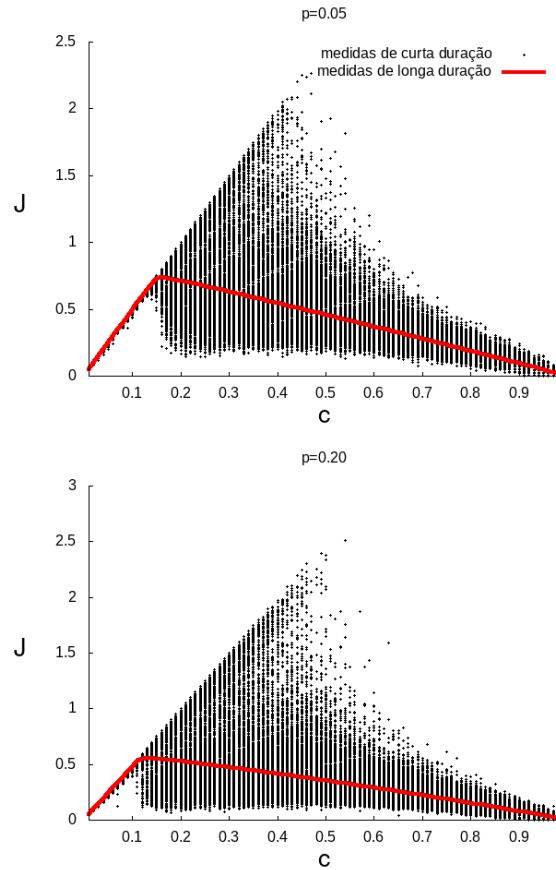
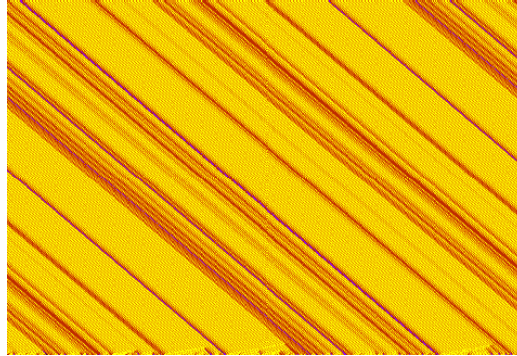


Figura 2 – Diagrama fundamental do modelo NaSch, com  $p = 0.05$  à esquerda e  $p = 0.20$  à direita. O experimento é separado em uma medida global em um tempo grande (linhas vermelhas) e medidas feitas em um pedaço de um décimo do tamanho da via por tempos mais curtos. Este diagrama pode ser comparado com medidas experimentais em [27, 28]. Neste experimento, a velocidade máxima do modelo foi fixa em  $v_{max} = 5$ . O experimento foi feito em um ambiente de 10.000 sítios e a concentração de veículos variou de  $c = 0.01$  até  $c = 0.99$  em passos de amplitude  $\Delta c = 0.01$ . Inicializamos as configurações de maneira aleatória e usamos condições periódicas de contorno. Antes de entrar na fase de medida, que durou  $10^6$  passos, evoluímos o sistema durante  $10^6$  passos para eliminar transientes. Duas escalas de tempo foram destacadas nesta medida, a escala de  $10^6$  passos para a medida dos valores médios sobre todo ambiente e intervalos menores de  $10^3$  passos onde foram medidos as médias sobre um comprimento de 1000 sítios. Os demais experimentos apresentados neste texto são montados de maneira semelhante, exceto quando dito em contrário. As unidades apresentadas na figura são simulacionais:  $c$  medido em partículas por sítio e  $J$  em número de partículas por passo.



```

:3# 1## 2### 3#### 4##### 5##### 4 0# 1 0# 1## 2### 3#### 4#
:# 3# 1## 2### 3#### 4##### 5##### 4 0# 1 0# 1## 2### 3#### 4
:## 3# 1## 2### 3#### 4##### 5##### 4 0# 1 0# 1## 2### 3####
:### 3# 1## 2### 3#### 4##### 5##### 4 0# 1 0# 1## 2### 3###:
:3### 3# 1## 2### 3#### 4##### 5##### 4 0# 1 0# 1## 2### 3##
:# 3### 3# 1## 2### 3#### 4##### 5##### 4 0# 1 0# 1## 2### 3#
:## 3### 3# 1## 2### 3#### 4##### 5##### 4 0# 1 0# 1## 2### 3
:### 3### 3# 1## 2### 3#### 4##### 5##### 4 0# 1 0# 1## 2###
:2### 3### 3# 1## 2### 3#### 4##### 5##### 4 0# 1 0# 1## 2##
:~ 2### 3### 3# 1## 2### 3#### 4##### 5##### 4 0# 1 0# 1## 2#
:# 2### 3### 3# 1## 2### 3#### 4##### 5##### 4 0# 1 0# 1## 2
:4## 2### 3### 3# 1## 2### 3#### 4##### 5##### 4 0# 1 0# 1##
:~ 4## 2### 3### 3# 1## 2### 3#### 4##### 5##### 4 0# 1 0# 1#
:## 4## 2### 3### 3# 1## 2### 3#### 4##### 5##### 4 0# 1 0# 1
:### 4## 2### 3### 3# 1## 2### 3#### 4##### 5##### 4 0# 1 0#
:### 4## 2### 3### 3# 1## 2### 3#### 4##### 5##### 4 0# 1 0#
:3##### 4## 2### 3### 3# 1## 2### 3#### 4##### 5##### 4 0# 1
:~ 3##### 4## 2### 3### 3# 1## 2### 3#### 4##### 5##### 4 0#
:## 3##### 4## 2### 3### 3# 1## 2### 3#### 4##### 5##### 4 0#

```

Figura 3 – Padrão espaço-temporal da via ocupada pelas partículas a uma concentração de  $c = 0.22$ , pouco acima da concentração  $c_2 = 0.1667$ . O eixo horizontal corresponde ao comprimento da via e o sentido do movimento das partículas é da esquerda para a direita. O eixo vertical representa a passagem do tempo que cresce de baixo para cima. Os espaços vazios são representados por pontos amarelos e código de cores das partículas varia do vermelho para partículas a  $v = v_{max} = 5$  ao violeta para partículas paradas,  $v = 0$ . A direita, temos uma parte dos dados usados para a construção da figura. Observe a riqueza dos padrões, que mantém a sua forma conforme se movem da direita para a esquerda com velocidade  $-1$ .

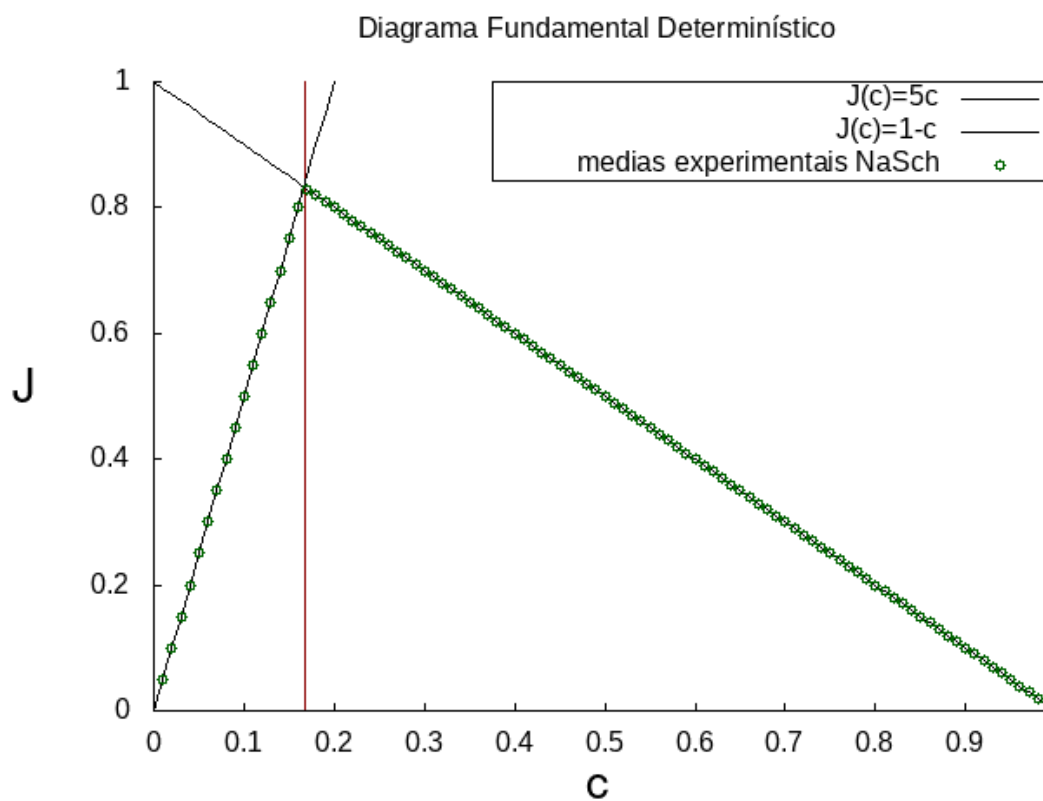


Figura 4 – Diagrama fundamental do modelo NaSch determinístico (linhas contínuas) com  $v_{max} = 5$  associado aos valores simulacionais das médias globais (pontos). Os erros experimentais são menores que os símbolos. O acordo para com as curvas teóricas é satisfatório. A reta vertical vermelha indica a posição da densidade crítica de  $c_2 = 0.16667$ .

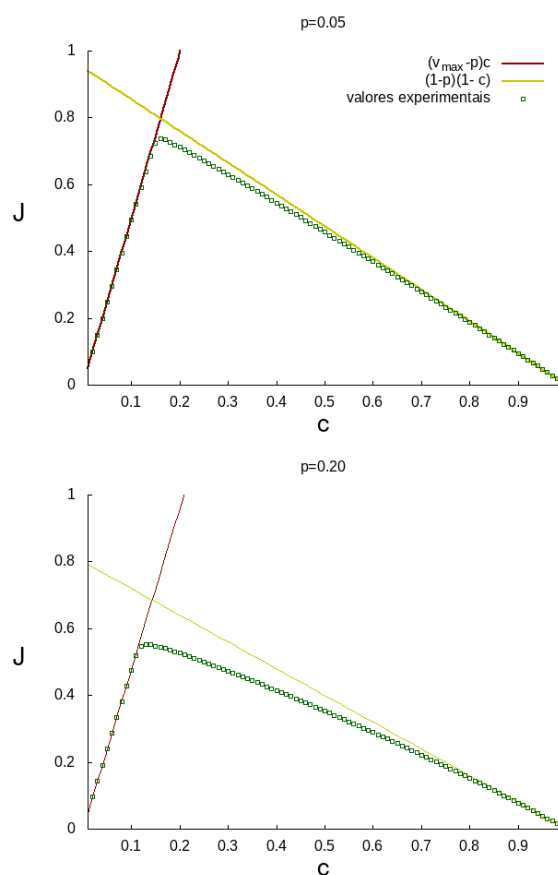


Figura 5 – Curvas teóricas dos modelos NaSch (linhas contínuas) associadas aos valores simulacionais das médias globais (pontos) para dois valores do parâmetro  $p$ . Os erros experimentais são menores que os símbolos. O acordo para com as curvas teóricas é bom no regime livre e no regime congestionado a altas densidades. A densidades intermediárias o acordo é melhor para baixos valores de  $p$ . O resultado é apenas uma estimativa de um limite superior para a curva  $J(c)$  para o modelo NaSch.

## 3 Resultados I: Dilemas sociais em modelos unidimensionais de tráfego com ultrapassagem

Neste capítulo usaremos os conceitos vistos no capítulo anterior para estudar, de maneira simplificada, um modelo heterogêneo de tráfego veicular e usaremos ferramentas da TJ para identificar e quantificar um dilema social que aparece quando ultrapassagens são permitidas. Os resultados apresentados a seguir culminaram na publicação do trabalho *Social dilemma in traffic with heterogeneous drivers* [72] publicado na revista *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*.

### 3.1 Introdução

Embora a identificação de dilemas sociais seja um campo de pesquisa bastante ativo em ciências sociais e matemática aplicada, a análise de dilemas sociais no tráfego veicular é relativamente recente. Encontrar as condições necessárias para que estes dilemas apareçam no tráfego veicular é importante porque a atitude mais simples e economicamente viável para melhorar o desempenho das redes de tráfego e experiências individuais dos motoristas é uma mudança de comportamento. Note que, como consideramos a velocidade média como medida de utilidade, há uma relação entre dilemas sociais e “congestionamentos evitáveis” ou outras fontes de redução de velocidade dos veículos. Exemplos de situações onde foram observados dilemas sociais em modelos de tráfego são: quando mudanças de pista são possíveis [73–77], seleção do caminho a ser seguido [78] próximo de estruturas do tipo junção [79, 80], entre outras. Veja [58] para mais exemplos.

Analisamos estes trabalhos com cuidado porque, conforme vimos no capítulo anterior, para caracterizar um sistema cuja dinâmica possa ser analisada pela TJ é necessário que existam ao menos dois comportamentos diferentes e, as diferenças

em utilidade observadas devem ser produzidas em interações. Este último ponto não é observado nestes trabalhos já que as diferentes estratégias apresentam diferentes comportamentos no estado livre, onde a princípio não há interações.

O que buscamos é identificar dilemas sociais em modelos heterogêneos que permitem ultrapassagem e para tanto formularemos um modelo inspirado no modelo NaSch, longe de cruzamentos, bifurcações, rampas, etc. A simplicidade do modelo proposto permite cálculos analíticos simples e apresenta a característica adicional de que difere do modelo NaSch apenas quando interações estão presentes.

### 3.2 O modelo *Overtaking*-NaSch (ONaSch)

Muitos modelos CA de tráfego veicular são apresentados como adaptações do modelo NaSch para estudar fenômenos específicos. Podemos citar a inclusão de acidentes [81–83], aleatorização dependente da velocidade [42, 43, 84–87] ou como função da posição [44], aplicado a duas pistas [88], dinâmica dependendo da luz de freios [89], aceleração dependente da distância entre veículos [90], ultrapassagens permitidas [91], populações heterogêneas [92–99], entre outras. Contudo, deve ser claro que o modelo NaSch não gera todos os modelos de tráfego veicular possíveis, a literatura pertinente a modelagem de tais sistemas é bastante extensa e ampla quanto aos seus objetivos e métodos. De um ponto de vista pragmático, as adaptações ao modelo NaSch são bem sucedidas ao considerar características complicadas com algoritmos simples. Com tal simplicidade como fator, fizemos uma modificação mínima no modelo NaSch que permite ultrapassagens de forma perturbativa baseado nos dados experimentais apresentados em [100–103] e experiências cotidianas. Pontos importantes são:

- em ambientes de pista única, motoristas usam espaços proibidos, como acostamentos ou faixa contramão, para realizar uma ultrapassagem;
- o motorista não acelera de forma exorbitante para ultrapassar, exceto quando o ultrapassante é preso atrás de outro veículo mais lento durante um intervalo de tempo relativamente longo em um espaço relativamente curto ou quando o veículo a ser ultrapassado é muito longo;

- o período de duração da manobra é pequeno em relação ao período total de viagem.

Quando o tráfego na faixa contra-mão é desprezível, os pontos acima nos permitiram formular o seguinte modelo simplificado para estradas rurais de faixa única.

- Primeiro passo: Aceleração

Todos os veículos aceleram uma unidade se permitido pelo limite de velocidade  $v_{max}$ :  $v_i(t+1) = \text{MIN}(v_i(t) + 1, v_{max})$

- Segundo passo: Ultrapassagem ou desaceleração

Aleatorizamos a velocidade conforme o terceiro passo NaSch:  $v_i(t+1) = \text{MAX}(0, v(t+1) - 1)$  com probabilidade  $p$ . Em seguida verificamos se o veículo é rápido o suficiente para ultrapassar veículos a frente sem interferir em sua dinâmica no instante  $t+1$ , ou seja, se existe um número positivo,  $j$ , para o qual a desigualdade

$$x_{i+j}(t) + v_{i+j}(t+1) < x_i(t) + v_i(t+1) < x_{i+j+1}(t)$$

é satisfeita, então a velocidade do veículo é mantida e a ultrapassagem (sobre  $j$  veículos) ocorre. Caso contrário atualizamos a velocidade do veículo para

$$v_i(t+1) = x_{i+j}(t) - x_i(t) - 1,$$

e atualizamos o veículo por sobre o qual possibilidade da manobra será verificada  $j = j - 1$ , e aleatorizamos a velocidade novamente

$$v_i(t+1) = \text{MAX}(0, v_i(t+1) - 1)$$

com probabilidade  $p$ . reavaliamos então a desigualdade acima com os valores atualizados até que a manobra seja bem sucedida, ou  $j$  seja atualizado para  $j = 0$ , caso em que a partícula manifesta um comportamento igual ao comportamento imposto pelo modelo NaSch.

- Quarto passo: Atualização das posições

Após a atualização da velocidade de todas as partículas, atualizamos a configuração do sistema:  $\vec{x}(t+1) = \vec{x}(t) + \vec{v}(t+1)$ .

A aleatorização da velocidade ocorrer antes da avaliação do espaço disponível neste modelo parece incompatível com o modelo NaSch que se comporta de maneira diferente se a ordem dos passos muda [104]. Contudo, esta impressão é enganosa conforme é visto analisando os três casos possíveis: se a velocidade do veículo não é suficiente para chegar ao próximo veículo,  $v_i(t+1) \leq d_i(t)$  então o segundo passo no modelo NaSch não surte efeito e comuta com o terceiro passo; caso a velocidade seja suficiente para uma ultrapassagem bem sucedida, a desigualdade das ultrapassagens indica que o veículo apresenta uma interação do tipo NaSch com o  $(i+j+1)$ -ésimo veículo, o ultrapassante se comporta como uma partícula livre quanto aos outros veículos e recaímos sobre o caso anterior, mas com a vantagem que conforme aleatorização é anterior à ultrapassagem, não nos preocupamos com eventuais colisões com o  $(i+j)$ -ésima partícula que poderia surgir caso o terceiro passo fosse **posterior** à ultrapassagem; finalmente, se a partícula tem velocidade para ser afetada pelo segundo passo NaSch mas não para ultrapassar, a possível desaceleração antes da avaliação do espaço é varrida por esta etapa uma vez que  $v_i(t+1) = d_i(t)$ , contudo a velocidade será randomizada logo em seguida porque recomeçamos o *loop* antes do próximo teste lógico e conseqüente saída do segundo passo. Portanto, os algoritmos são efetivamente idênticos exceto quanto a partícula a qual a partícula focal interage. Em  $j = 0$  os algoritmos são indistinguíveis.

Note que embora as atualizações nas velocidades são direcionadas das partículas encabeçando o sistema para as ultimas, as condições periódicas de contorno implicam na irrelevância das “primeiras partículas”. Pode-se começar a atualização da  $N$ -ésima partícula até a primeira, ou começar da  $N/2$ -ésima partícula e terminar na  $-N/2 + 1$ -ésima partícula. Se a ordem das atualizações é obedecida, o resultado é o mesmo qualquer que seja essa partícula inicial desde que a partícula inicial não apresente possibilidade de ultrapassagem. Nas simulações apresentadas, aleatorizamos a primeira partícula a ser atualizada no conjunto  $[1, N]$  escolhendo sempre partículas que não apresentam chances de ultrapassagem qualquer que

seja a futura dinâmica da partícula a frente para perturbar o sistema o mínimo possível. O código fonte em FORTRAN 95 está disponível em <https://github.com/RicardoSimao/TrafficProject/tree/master/OvertakingNaSch>.

Alguns esclarecimentos são importantes. É bem conhecido que ambientes unidimensionais são incompatíveis com ultrapassagens [23] já que é necessário espaço lateral para que a manobra seja possível. Por isso, modelos unidimensionais capazes de ultrapassagens são considerados como modelos tunelantes. Contudo, o modelo formulado apresenta uma interpretação física interessante devido à sua resolução temporal. Seja uma cidade pequena A ligada à cidade grande B por uma estrada de faixa única  $\mathcal{S}$ . Sabemos por observação cotidiana que o fluxo de veículos trafegando no sentido de A para B em  $\mathcal{S}$  é muito maior que o fluxo contrário durante a manhã, no horário pré-comercial. O oposto é verdade durante o início da noite, no horário pós-comercial. O modelo simula uma situação onde a faixa com menor fluxo de veículos tem fluxo nulo, e, para realizar ultrapassagem, o autor da manobra toma parte da faixa contramão por um intervalo de tempo curto. Um exemplo, que deve ser comparado ao exemplo apresentado na figura 1, é apresentado na figura 6. A faixa extra é usada para enfatizar o espaço “proibido” utilizado.

O algoritmo é construído de forma que o veículo ultrapassado não é prejudicado no instante da manobra e a ultrapassagem é uma perturbação do modelo NaSch. Entretanto, mensurações do diagrama espaço-temporal, apresentados na figura 7, mostram que os modelos têm comportamentos completamente diferentes no limite determinístico ( $p = 0$ ).

Vamos entrar em um pouco mais de detalhes a respeito do modelo proposto com cálculos analíticos referentes ao limite determinístico.

### 3.2.1 O modelo ONaSch determinístico

Em  $p = 0$ , o modelo proposto tem comportamento idêntico ao comportamento do modelo NaSch em baixas e altas densidades, pois nestes casos a ultrapassagem é impossível devido a grande velocidade dos veículos e falta de espaço, respectivamente. Em densidades intermediárias uma nova característica emerge: configurações altamente organizadas e ondas de densidade movendo-se

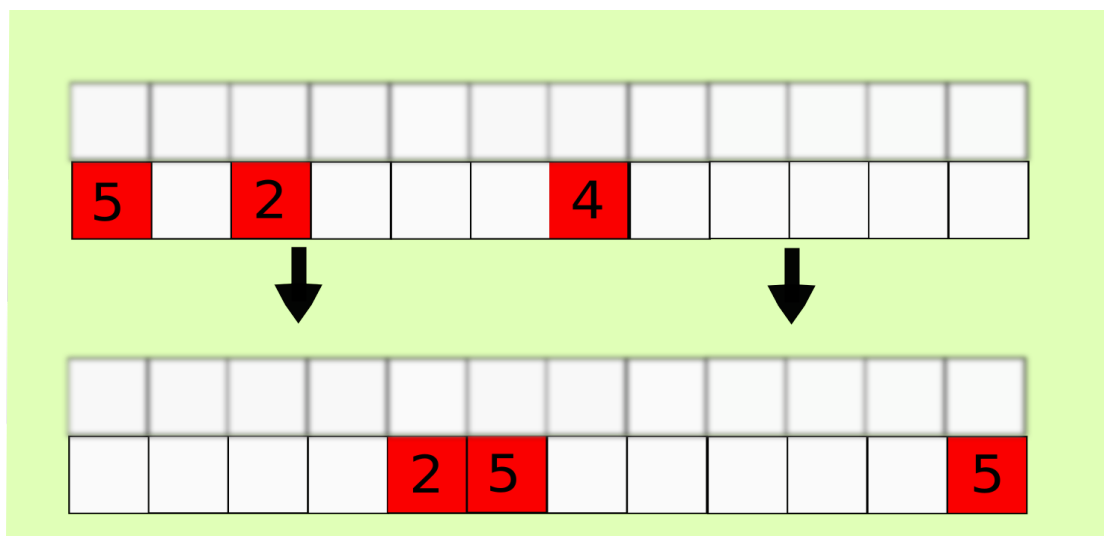


Figura 6 – Partindo de uma configuração análoga à apresentada na figura 1 temos um resultado diferente quando usamos o algoritmo proposto. Como naquele exemplo, os quadrados brancos representam sítios vazios, os quadrados coloridos sítios ocupados por partículas cuja velocidade é representada pelos números. As mesmas partículas sofreram randomizações em suas velocidades. A velocidade do primeiro veículo é suficiente para ultrapassar o segundo veículo. A outra fileira de quadrados brancos acima das configurações é uma ajuda visual a respeito da interpretação de uso de um espaço proibido para realizar a manobra.

para a direita.

Na figura 7, mostramos o diagrama espaço-temporal para esta população em  $p = 0$ , assim como parte dos dados brutos. Denotando  $\#$  para espaços vazios e números para representar a posição e velocidade dos veículos, vemos que um estado no instante  $t$ , de três veículos (comum no modelo NaSch),  $2\#\#20\#\#\#$  evolui (com a dinâmica imposta pelo algoritmo proposto) no instante  $t + 1$  para o estado  $\#\#2\#\#13\#$ . Este estado é um estado proibido para o algoritmo NaSch [105] (*Garden of Eden state*) e surge porque o veículo mais à direita com velocidade 2 pode ultrapassar o veículo com velocidade 0 mesmo após a sua velocidade ser atualizada para 1. O estado  $\#\#2\#\#13\#$  no tempo  $t + 1$  evolui para o estado  $\#\#\#20\#\#\#$  no tempo  $t + 2$  seguindo o algoritmo proposto. Este estado é idêntico ao estado original, exceto que o motivo  $20\#\#\#$  está deslocado um sítio para a direita.

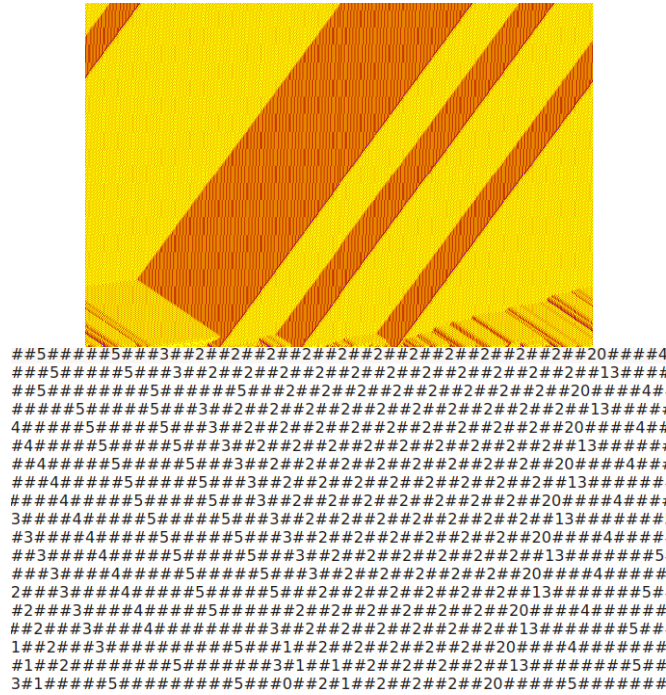


Figura 7 – Padrão espaço-temporal da via ocupada pelas partículas a uma concentração de  $c = 0.22$  com partículas seguindo o modelo proposto em  $p = 0$ . Compare com a figura 3. O eixo horizontal corresponde ao comprimento da via, e o sentido do movimento é da esquerda para a direita. O eixo vertical representa a passagem do tempo que cresce de baixo para cima. Os espaços vazios são representados por pontos amarelos e o código de cores das partículas varia do vermelho para partículas a  $v = v_{max} = 5$  ao violeta para partículas paradas  $v = 0$ . À direita, temos uma parte dos dados usados para a construção da figura à esquerda. Observe que o padrão anômalo é encabeçado por uma configuração local  $2\#\#20\#\#\#$  que evolui no instante seguinte para um estado proibido pela dinâmica NaSch (*Garden of Eden state* [105])  $\#\#\#2\#\#13\#\#$ , mas retorna ao padrão  $2\#\#20\#\#\#$  movendo o padrão rigidamente um sítio à frente ao longo de dois passos. Observe também que este padrão absorve todas as flutuações no meio.

A dinâmica da situação implica que esta estrutura só pode ser alimentada pelo lado esquerdo e crescerá a um tamanho que depende da concentração global, uma vez que a saída de partículas se dá no lado direito a uma taxa constante. Surge então uma fase não-livre extremamente organizada que coexiste com uma fase livre também altamente organizada devido à independência da taxa de evaporação

quanto ao tamanho da estrutura e do fato da direção de propagação da última ser oposta às ondas de choque típicas do modelo NaSch, o que a permite absorver todas as outras inhomogeneidades presentes no sistema.

Como o padrão perde veículos somente na ultrapassagem do líder, que acontece uma vez a cada dois passos, podemos igualar a taxa de alimentação à taxa de evaporação como critério de estabilidade. Observando ainda que a alimentação está no estado livre oposta à “zona de evaporação” do padrão, a distância entre partículas será  $d = 2v_{max} - 1$  porque em dois passos uma partícula no estado livre se deslocará  $2v_{max}$ , mas o padrão se deslocará uma unidade a frente perdendo uma partícula, então a segunda partícula terá uma vantagem de 1 sítio. Portanto, em densidades acima de  $c_1 = 1/(2v_{max} - 1)$  é possível a sua formação estável. Note o padrão lento absorve todo o excesso de partículas no meio e, quando a densidade média se aproxima da densidade do padrão lento,  $c_3 = 1/3$ , este perde a estabilidade porque a ocupação da via não permite a circulação livre das partículas líderes que, se impossibilitadas de ultrapassar, apresentam um comportamento idêntico ao comportamento do modelo NaSch. Uma vez interrompida, a ultrapassagem não ressurge devido à grande organização produzida pela dinâmica mencionada.

Resumindo, sejam  $c_1 = 1/(2v_{max} - 1)$  e  $c_3 = 1/3$ , as duas densidades “críticas”, então se  $c \leq c_1$  o modelo se comporta exatamente como o modelo NaSch no estado livre,  $J(c) = v_{max}c$ , assim como para densidades  $c \geq c_3$ , onde o modelo se comporta como o modelo NaSch no estado congestionado,  $J(c) = 1 - c$ . Em densidades intermediárias,  $c_3 > c > c_1$ , podemos aproximar o fluxo de partículas por uma média do fluxo da fase livre adicionada ao fluxo da fase não-livre ponderada por suas respectivas concentrações. Aproximando as velocidades e as densidades médias da fase livre e da fase não-livre por  $v_l = v_{max}$ ,  $c_l = c_1$ ,  $v_{nl} = 2$ , e  $c_{nl} = c_3$ , respectivamente, podemos escrever:

$$J(c) = m_l J_l + m_{nl} J_{nl} = m_l v_l c_l + m_{nl} v_{nl} c_{nl} = \frac{c_3 - c}{c_3 - c_1} c_1 v_{max} + \frac{c - c_1}{c_3 - c_1} c_3 v_{nl}.$$

$m_l = (c_3 - c)/(c_3 - c_1)$  e  $m_{nl} = (c - c_1)/(c_3 - c_1)$  são as frações de partículas presentes em cada fase no meio. Para  $v_{max} = 5$ , temos  $J(c) \approx 0.504c + 0.499$ . As curvas teóricas associadas aos experimentos computacionais deste modelo, em

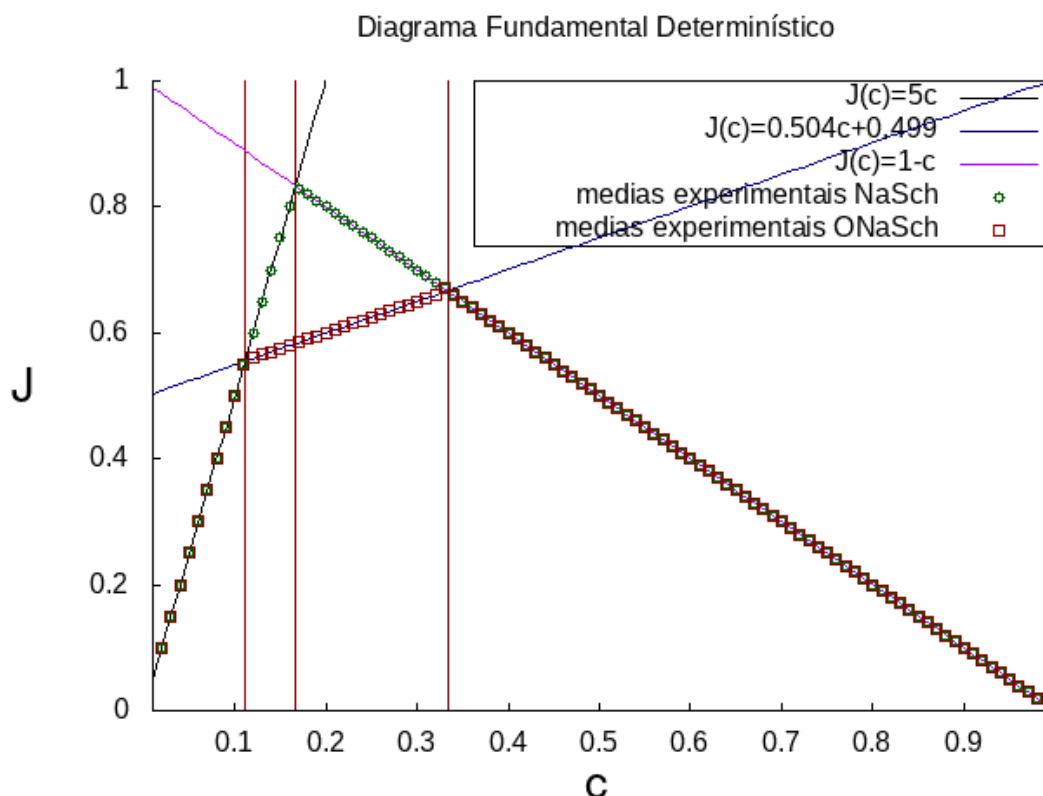


Figura 8 – Curvas teóricas dos modelos ONaSch e NaSch (linhas contínuas) para fins de comparação. Apresentamos também os resultados experimentais das médias globais (pontos). Os erros experimentais são menores que os símbolos. O acordo com as curvas teóricas é bom. As retas verticais correspondem às concentrações “críticas”  $c_1 = 0.1111$ ,  $c_2 = 0.16667$  e  $c_3 = 0.3333$ .

comparação com o modelo NaSch. São apresentadas na figura 8. Observe que o modelo com ultrapassagem tem resultado significativamente pior que o modelo sem ultrapassagem, o que sugere (mas não prova) a existência de um dilema social.

A desigualdade  $c_1 < c_2$  (válida para todo  $v_{max} > 2$ ) implica na possibilidade de que as partículas se comportem estavelmente em regime livre, mesmo quando  $c > c_1$ . Isto ocorre porque muitas configurações têm a propriedade de  $d_i \geq v_{max}$  para todo  $N \geq i \geq 1$  (ou estão na bacia de atração de tais configurações), isto é, há configurações onde a ultrapassagem de qualquer partícula é impossível. Portanto,

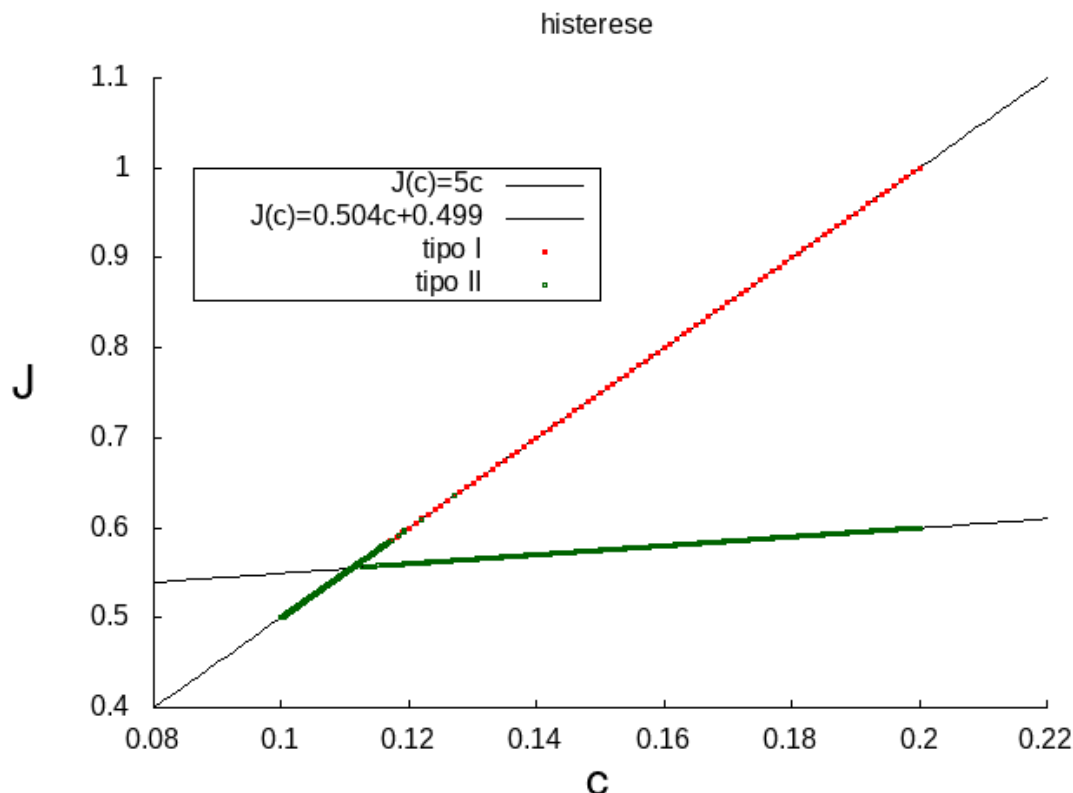


Figura 9 – Ilustração do fenômeno de histerese apresentado pelo modelo ONaSch próximo à concentração “crítica”  $c_1 = 0.1111$ . Os pontos vermelhos indicam que partículas foram adicionadas ao sistema sem perturbação significativa nas estruturas formadas nos passos anteriores. Os pontos verdes representam um processo de adição onde cada adição implica em um reembaralhamento das condições iniciais. Em todos os experimentos, um transiente de  $10^6$  passos foi observado antes de se realizarem as medidas. Observe que adições não perturbativas tendem a conservar o comportamento NaSch, ao passo que adições perturbativas tendem a apresentar o comportamento ONaSch.

o modelo proposto apresenta *histerese*, isto é, aumentando a concentração com pequenos incrementos a partir de  $c = c_1$ , o sistema pode apresentar diferentes comportamentos dependendo de como as novas partículas são adicionadas. Isto é exemplificado na figura 9 onde, por um lado, partículas foram adicionadas uma a uma, próximo de  $c_1$ , conservando as configurações anteriores e, por outro lado, usamos configurações iniciais aleatórias com uma partícula a mais. Os resultados

sugerem que se o sistema apresenta a configuração  $##20###$  ou alguma configuração inicial que evolui a esta configuração, seguido de uma zona local densa o suficiente, então o padrão emergirá, e isto por sua vez implica que o ramo de comportamento livre observado se trata de um efeito de tamanho finito, visto que o sorteio de uma configuração onde não aparece o motivo  $##20###$ , ou configurações na sua bacia de atração, tem probabilidade que se anula com o tamanho do sistema<sup>1</sup>. Observando que o sistema de determinado tamanho evolui ou para um comportamento típico do modelo ONaSch, onde há ultrapassagens, ou um comportamento típico do modelo NaSch, então simulando o sistema em várias condições iniciais distintas em tamanhos diferentes podemos quantificar a sua variância quanto às condições iniciais em função do tamanho do sistema pela fórmula:  $\delta(c) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (J_i(c) - \langle J(c) \rangle)^2$ . Nesta definição,  $s$  é o número de configurações e  $J_i(c)$ , o fluxo final da configuração inicial  $i$ , pode assumir um valor típico da existência da ultrapassagem  $J_D(c)$  ou um valor típico da sua ausência  $J_C(c)$ . Os resultados são apresentados na figura 10 e são compatíveis com a previsão de que a histerese prevista no modelo se trata de um efeito de tamanho finito quando as configurações iniciais são aleatórias.

Como último comentário para encerrar esta seção, observamos o papel destacado dos motivos  $##2##20###$  e  $2##2##13#$ . Vale a pena notar que estas não são as únicas configurações compatíveis com ultrapassagens e existem mais 25 configurações proibidas pelo algoritmo NaSch, porém, compatíveis com o modelo proposto (por exemplo:  $#1#4$ ;  $#05#$ ; etc.). Contudo, tais configurações não “sobrevivem” ao transiente. Isto quer dizer que o motivo  $2##2##13#$ , alimentado pelo padrão  $...2##2##2##...$  é o único que produz um padrão “estável” ou é “mais estável” que padrões mais complexos causados pelos outros motivos.

<sup>1</sup> Isto pode ser visto pelo seguinte argumento heurístico. Suponha um sistema grande dividido em  $M$  partições com ao menos 1 motivo  $##20###$  em cada partição. Como há flutuações na densidade que são típicas das condições iniciais aleatórias, escolha  $M$  grande o suficiente para que ao menos uma partição apresente uma flutuação na densidade local grande o suficiente para que o padrão cresça nesta partição. Observe que, como  $c > c_1$  e que a taxa de evaporação da estrutura é fixa em uma partícula a cada dois sítios, então uma flutuação moderada é suficiente para a sobrevivência deste padrão, nesta partição. Como as partições estão conectadas, por hipótese, o padrão será alimentado pelas inhomogeneidades das outras partições, como o período de absorção de todas as partículas da próxima partição é menor que o tempo necessário que o padrão desapareça no pior dos casos (maior rarefação possível), o resultado segue tratando essas  $M$  partições como um único sistema de tamanho  $L$ .

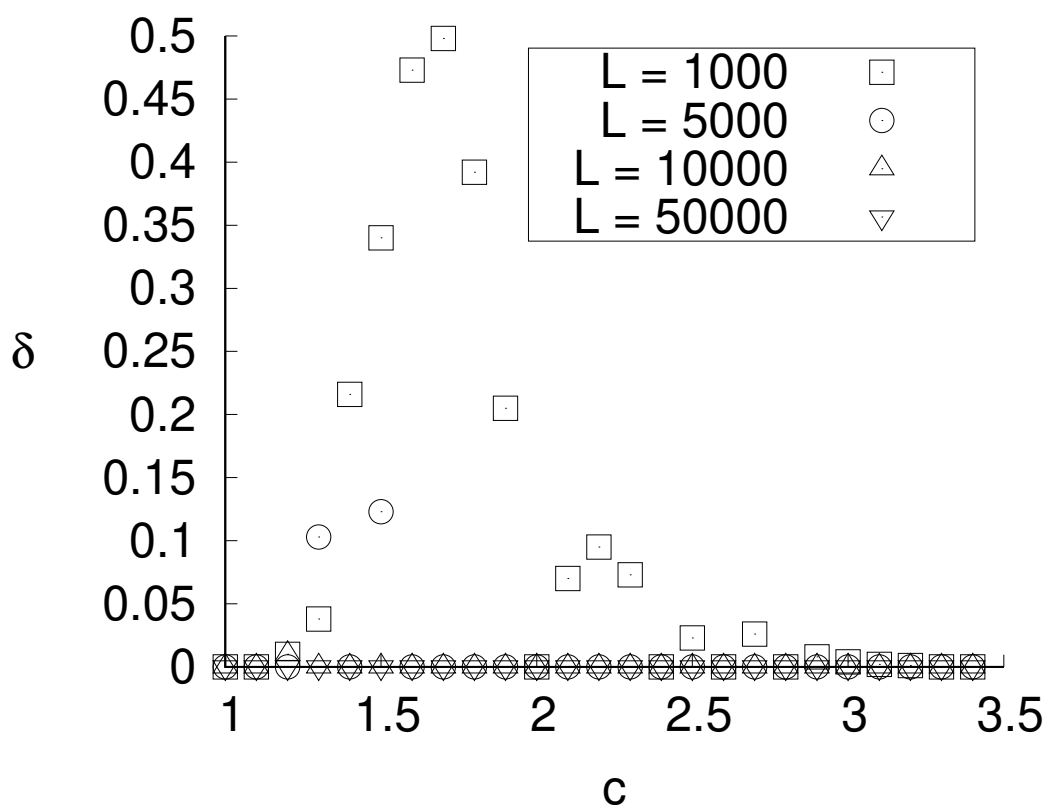


Figura 10 – A variância do fluxo quanto às condições iniciais,  $\delta$ , em função da concentração,  $c$ , para sistemas de diferentes tamanhos. Para sistemas grandes, a maior parte das configurações iniciais converge para um comportamento coletivo que indica a existência de ultrapassagens ( $J_i(c) = J_D(c)$  para todo  $i$ ). A partir de  $L = 10.000$ , as flutuações são desprezíveis.

### 3.2.2 O modelo ONaSch estocástico

Estimativas similares às feitas para o modelo NaSch também podem ser feitas para o algoritmo proposto quando  $p \neq 0$ . Inferimos que  $J(c) = c(v_{max} - p)$  para  $c < c_1$  e  $J(c) = (1 - p)(1 - c)$  para  $c > c_3$ . Quanto a densidades intermediárias, sabemos que em  $p = 0$  o sistema se comporta de maneiras diferentes quando ultrapassagens ocorrem ou não e que ambos os regimes são estáveis no sentido que, após o transiente, a probabilidade de transição entre estados de comportamento coletivo é nula. Isto sugere outra aproximação para o fluxo de partículas em

densidades intermediárias para valores pequenos de  $p$ .

Suponha que o sistema se estabeleça em um comportamento coletivo com ultrapassagens e a formação de uma única estrutura lenta. A probabilidade de que este comportamento seja destruído é igual à probabilidade de escolher o líder da estrutura e impedi-lo de ultrapassar na próxima rodada, feito com uma simples randomização da velocidade<sup>2</sup>, portanto a probabilidade de migração para o comportamento NaSch é  $P_{J_D \rightarrow J_C}(c) = p$  (todas as partículas estão sujeitas à desaceleração aleatória de forma independente). O comportamento anômalo da estrutura é destruído, mas não sua configuração espacial porque, conforme visto, a dinâmica NaSch preserva as estruturas para  $c > c_2$ . Este fato sugere que o retorno provável ao comportamento coletivo ONaSch se dá na escolha de uma partícula na parte mais densa com a velocidade  $v_i(t-1) = 2$  no instante  $t-1$  para ser submetido à aleatorização da velocidade e ser atualizada para  $v_i(t) = 1$  no instante  $t$ , e em seguida escolher qualquer uma destas  $[(c - c_1)/(c_3 - c_1)]Np$  partículas com velocidade  $v_i(t) = 1$  para desacelerar novamente e produzir o motivo 20###, reiniciando o comportamento coletivo com ultrapassagens. Já que o comportamento do tipo ONaSch reemergirá se ao menos uma das  $[(c - c_1)/(c_3 - c_1)]Np$  partículas da estrutura forem sujeitas à randomização, então é mais simples calcular a probabilidade do sistema permanecer no comportamento coletivo NaSch que corresponde a nenhuma das  $[(c - c_1)/(c_3 - c_1)]Np$  partículas desacelerarem (o que acontece com as demais não importa):  $P_{J_C \rightarrow J_C}(c) = (1 - p)^{[(c - c_1)/(c_3 - c_1)]Np}$ . Logo  $P_{J_C \rightarrow J_D}(c) = 1 - (1 - p)^{[(c - c_1)/(c_3 - c_1)]Np}$ . O sistema então pode ser visto como uma cadeia de Markov onde dois estados,  $J_C$  e  $J_D$ , com probabilidades de transição dadas aproximadamente por:

$$P_{J_D \rightarrow J_C}(c) = p;$$

$$P_{J_D \rightarrow J_D}(c) = 1 - p;$$

$$P_{J_C \rightarrow J_D}(c) = 1 - (1 - p)^{[(c - c_1)N/(c_3 - c_1)]p};$$

<sup>2</sup> Se a desaceleração é aplicada a qualquer partícula na estrutura que não seja a que irá ultrapassar a líder, o defeito criado (flutuação na densidade local e velocidade) é transmitido de partícula a partícula até ser eliminado do padrão pela extremidade esquerda. Mas se a partícula que irá ultrapassar a líder é atrapalhada, será forçada a seguir o comportamento NaSch destruindo comportamento coletivo com ultrapassagens.

$$P_{J_C \rightarrow J_C}(c) = (1 - p)^{[(c-c_1)N/(c_3-c_1)]p}.$$

Tomando  $1/P_{J_D \rightarrow J_C}(c) \equiv t_D$  e  $1/P_{J_C \rightarrow J_D}(c) \equiv t_C$  como os períodos médios em que o sistema permanece em cada estado, para um  $[(c - c_1)/(c_3 - c_1)]N$  finito  $1 - (1 - p)^{[(c-c_1)/(c_3-c_1)]Np}$  converge exponencialmente<sup>3</sup> a 0 quando  $p \rightarrow 0$ , portanto,  $\tau_C/\tau_D \rightarrow \infty$ . Aproximando o fluxo médio do sistema por uma média em longos períodos que o sistema visita ambos os estados, teremos:

$$J(c) \approx \frac{\tau_C J_C + \tau_D J_D}{\tau_C + \tau_D} \approx J_C.$$

Esta aproximação não é boa para valores grandes de  $p$  porque as frações de partículas nas duas fases,  $m_l$  e  $m_{nl}$ , não são próximas dos valores do limite determinístico e várias estruturas independentes podem coexistir. Além disso, observa-se que estas probabilidades são tomadas imediatamente à mudança de regimes. Se  $c_1 < c < c_2$ , então o comportamento NaSch tende a destruir o padrão mais lento e homogeneizar o sistema. Portanto, quando  $p \neq 0$  e  $c < c_2$ , o sistema pode oscilar entre o comportamento ONaSch e o comportamento NaSch durante muito tempo, mas assintoticamente se relaxará no comportamento predominante NaSch, sendo que para  $c_2 < c < c_3$ , o comportamento ONaSch é recorrente. O acordo com os valores experimentais, conforme mostra a figura 11, é razoável. A altos valores de  $p$ , curiosamente, a curva teórica do modelo ONaSch se aproxima mais das médias experimentais que a curva teórica associada ao modelo NaSch, o que sugere maior organização desta população. Comparando a figura 5 com a figura 11, o comportamento dos sistemas parecem bastante similares, mas existem diferenças cruciais para os nossos interesses explicitados na figura 12, onde a diferença entre os fluxos de populações NaSch para com os fluxos de populações ONaSch,  $\Delta J = \bar{J}_D - \bar{J}_C$ , em função da concentração a diferentes valores de  $p$  (o fluxo é medido por  $J(c, v) = \bar{v}c$ , que tem unidades de partícula por passo).

Medimos também o número de ultrapassagens por partícula por unidade de tempo,  $O$ , em função da concentração  $c$ , relativa às simulações mostradas na figura 12, para enfatizar a relação entre as diferenças de fluxos nos dois modelos e o número

<sup>3</sup>  $\ln((1 - p)^{[(c-c_1)/(c_3-c_1)]Np}) = [(c - c_1)/(c_3 - c_1)]Np \ln(1 - p) = [(c - c_1)/(c_3 - c_1)]Np \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-p^i}{i}$ , logo  $(1 - p)^{[(c-c_1)/(c_3-c_1)]Np} \approx e^{-[(c-c_1)/(c_3-c_1)]Np^2}$  tomando apenas o expoente de menor ordem.

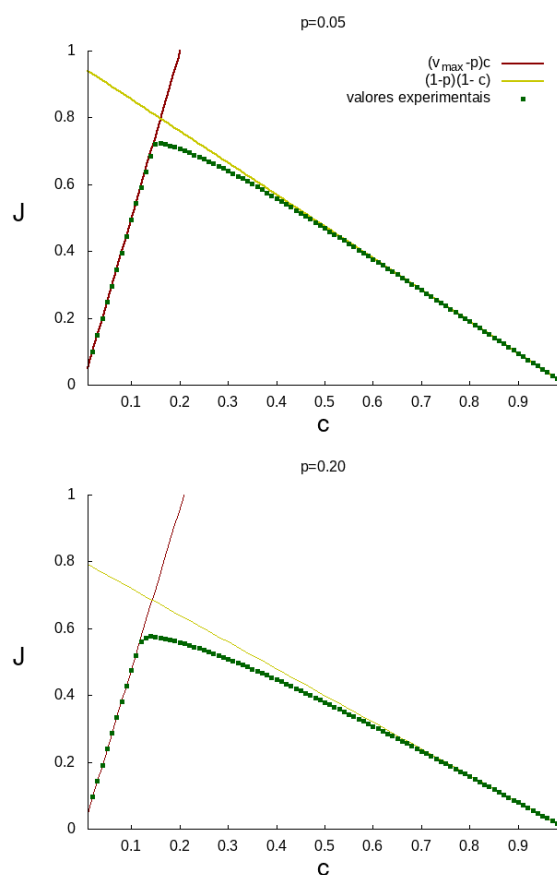


Figura 11 – Curvas teóricas dos modelos ONaSch (linhas contínuas) e resultados experimentais (pontos) para dois valores do parâmetro  $p$ . Os erros experimentais são menores que os símbolos. Compare esta figura com a figura 5. Os resultados são bastante similares mesmo quando os valores de  $p$  não são pequenos.

de ultrapassagens. Os resultados são apresentados na figura 13. Curiosamente, a ocorrência de ultrapassagens é mais rara no limite  $p \rightarrow 0$ , onde o comportamento observado dos dois modelos é o mais distinto.

Visto que as interações entre as partículas em ambos os modelos sempre reduzem a velocidade média do sistema, usamos o coeficiente de correlação de Pearson [106, 107], entre a  $i$ -ésima e a  $j$ -ésima partículas, definido como  $\xi(j) = (\langle v_i \cdot v_{i-j} \rangle - \langle v_i \rangle \cdot \langle v_{i-j} \rangle) / (\sigma_i \cdot \sigma_{i-j})$  ( $\sigma_n$  é o desvio padrão da velocidade da  $n$ -ésima partícula), como uma medida de como as ações da partícula focal  $i$  afetam a

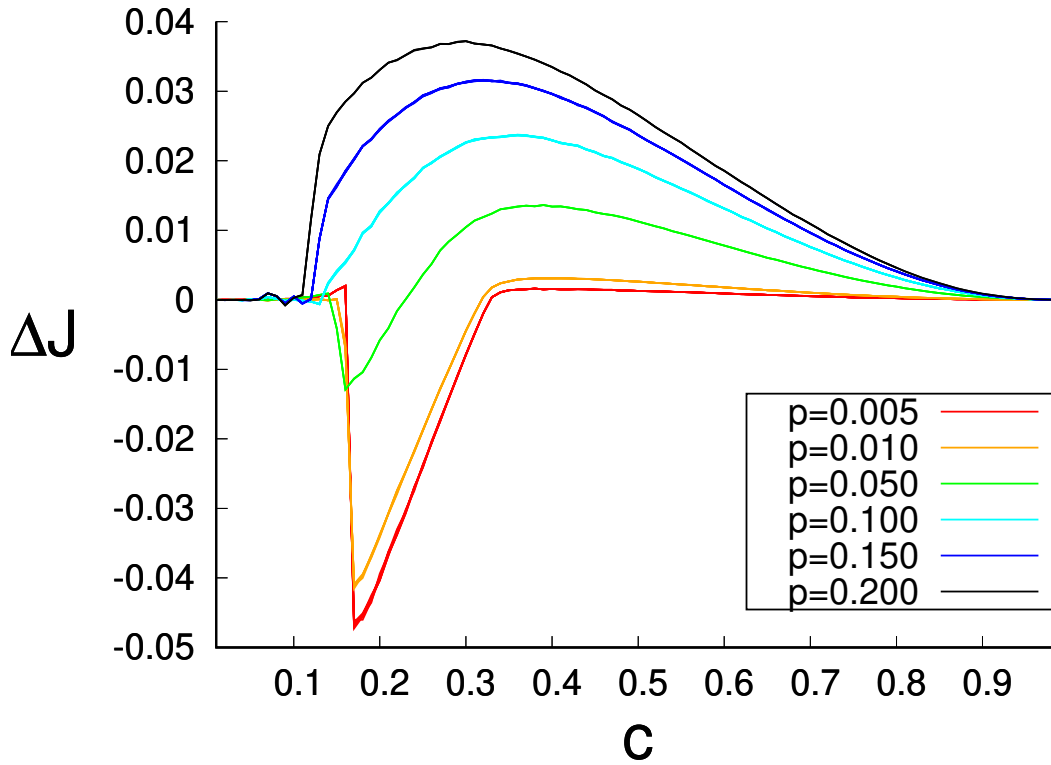


Figura 12 – Diferença de fluxos entre populações NaSch e populações ONaSch,  $\Delta J = \bar{J}_D - \bar{J}_C$ , em função da concentração  $c$ , para diferentes valores do parâmetro  $p$ . Note a escala das diferenças. Sob valores pequenos do parâmetro  $p$ , a população NaSch tem vantagem sobre a população ONaSch. Porém, a vantagem se inverte para valores grandes de  $p$ .

velocidade das demais partículas que a seguem. Montamos uma simulação para medir este coeficiente ponderado por todas as partículas em casos típicos e os resultados são mostrados na figura 14.

Os resultados sugerem que partículas seguindo o modelo ONaSch estão mais fortemente correlacionadas quando o parâmetro  $p$  é pequeno e menos correlacionadas quando o parâmetro  $p$  é grande em comparação com as partículas no modelo NaSch. Portanto, é natural que o primeiro modelo tenha melhores resultados que o segundo em valores grandes de  $p$  e o contrário a valores pequenos, pois uma correlação mais forte sugere um sistema com partículas que interagem de forma mais efetiva e as interações nestes modelos sempre reduz a velocidade das partículas. Esta

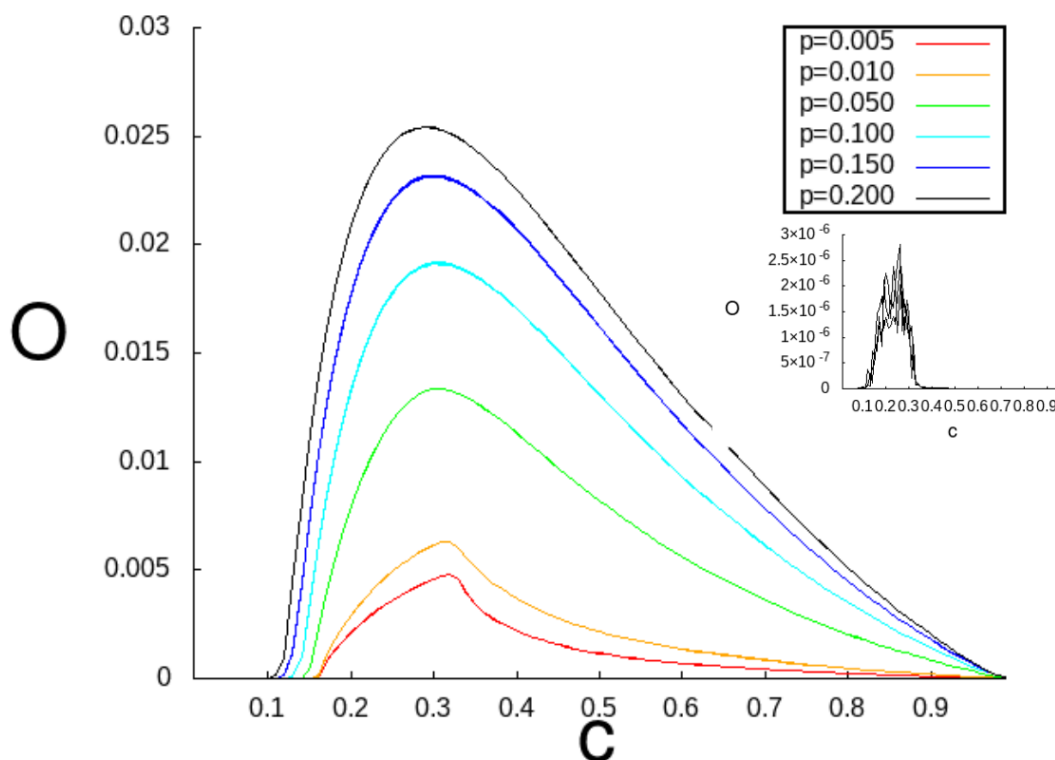


Figura 13 – Número de ultrapassagens por unidade de tempo por partícula em função da concentração relativa aos experimentos exibidos na figura 12 (exceto  $p = 0$ , apresentado no detalhe). Observe que o início da distinção entre os comportamentos corresponde ao início da ocorrência de ultrapassagens, entretanto a não coincidência entre os máximos destas duas medidas sugere que o fenômeno é mais complexo que uma correlação direta.

sugestão é favorecida por um argumento um pouco mais físico. Intuímos que, em um ambiente onde motoristas fazem manobras perigosas (como ultrapassagem em vias de pista única), os próprios estão sujeitos a freadas bruscas causadas por tais manobras. Como freadas bruscas são também uma característica do modelo NaSch (veja [81–83]), um viés no número destas ocorrências pode ser o responsável pelas diferenças nos fluxos médios. Como medir as mudanças de velocidade é computacionalmente caro e não muito útil para análises aprofundadas, optamos por

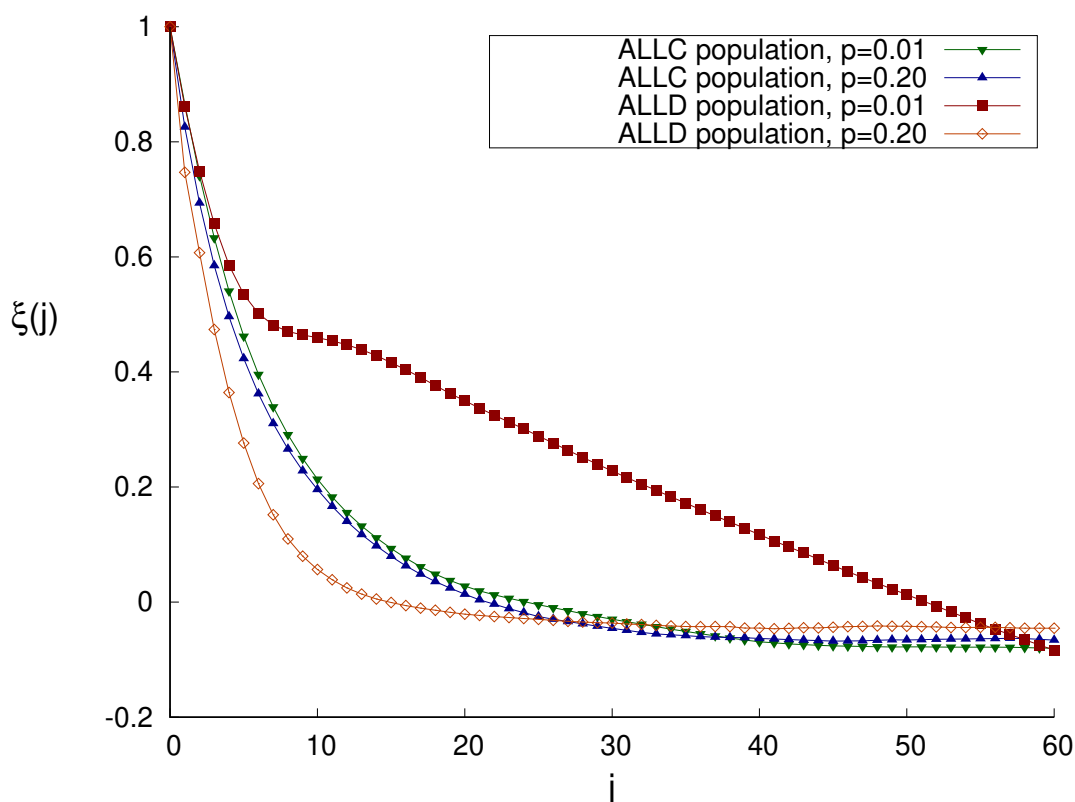


Figura 14 – Coeficiente de correlação  $\xi(j)$  entre as partículas  $i$  e  $j$  em função da enumeração do vizinho  $j$ . Observe que no modelo NaSch, a correlação entre as velocidades é praticamente independente do parâmetro  $p$  ao passo que no modelo ONaSch, a baixos valores de  $p$ , a influência das ações da  $i$ -ésima partícula se estende até a quinquagésima partindo desta e, por outro lado, a influência da  $i$ -ésima partícula cai para a décima-quinta partícula partindo desta a valores mais altos de  $p$ . O modelo ONaSch é bastante sensível às perturbações em valores pequenos de  $p$ , mas se torna insensível quando  $p$  assume valores relativamente grandes.

medir o número médio de aglomerados formados em uma população ONaSch em comparação com uma população NaSch por intervalo de tempo por partícula<sup>4</sup>, em função da concentração  $c$  para diferentes valores de  $p$ , e mostramos os resultados na figura 15.

<sup>4</sup> Consideramos que duas partículas distantes entre si por uma distância menor que a própria velocidade no instante de tempo anterior à medida formam um aglomerado.

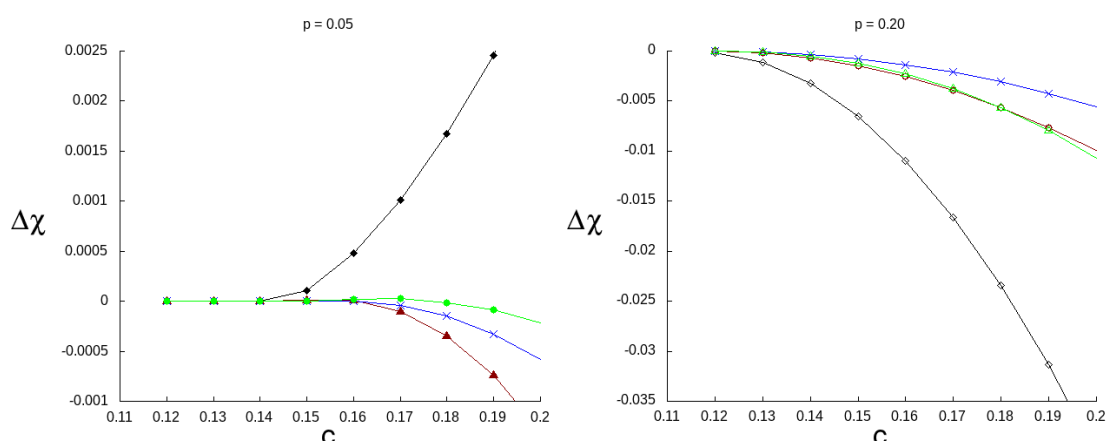


Figura 15 – Seja  $\chi_D$  e  $\chi_C$  o número de aglomerados por unidade de tempo por partícula medidos no modelo ONaSch e no modelo NaSch respectivamente, a diferença média entre estes valores é definida como  $\Delta\chi = \chi_D - \chi_C$ . Medimos este parâmetro a dois valores de  $p$ . Os aglomerados com mais de 2 veículos tiveram comportamentos similares, logo as diferenças exibidas na figura 12 parecem estar relacionados com aglomerados de dois veículos que, por sua vez, estão relacionados com frenagens bruscas decorrentes encontros próximos. Observe que o número destes eventos no modelo ONaSch é maior que o correspondente no modelo NaSch para valores pequenos de  $p$  e o contrário é verdade para valores grandes de  $p$ . As linhas pretas, verdes, azuis e vermelhas são relativas a 2-clusters, 3-clusters, 4-clusters e aglomerados com mais de 5 partículas, respectivamente.

Estes resultados indicam que a ruídos pequenos as partículas tendem a se apresentar em estruturas organizadas e se locomover com velocidade próximo à velocidade máxima, portanto, as perturbações provocadas pela ultrapassagem se espalham rapidamente e dominam as perturbações causadas pelo parâmetro  $p$ . Por outro lado, quando o ruído  $p$  é grande a perturbação causada pela ultrapassagem tem menor importância, pois os veículos estão menos correlacionados e apresentam menos freadas bruscas. A perturbação causada pela ultrapassagem é menor que a perturbação causada pelo ruído. Pode-se dizer que a ultrapassagem ajuda a reduzir o contato entre partículas e facilita o tráfego de maneira geral.

### 3.3 Populações heterogêneas e a dinâmica de dois jogadores

Vamos discutir um pouco mais as consequências da hipótese de que, dado um trajeto fixo, a minimização da comuta é equivalente à maximização da velocidade média. Segundo esta hipótese a velocidade média do indivíduo,  $\bar{v}_i$ , pode ser usada como medida de utilidade deste indivíduo em adotar determinada estratégia (correspondente ao algoritmo que controla o comportamento da partícula) e que a utilidade social pode ser mensurada, correspondentemente, pela velocidade média da população,  $\bar{v}_s$ , que reúne as utilidades de todos os jogadores. Observe que essa medida é fundamentalmente diferente da grandeza que um engenheiro de tráfego procura maximizar, o fluxo de veículos,  $J$ . A velocidade média do indivíduo varia univocamente com a quantidade de interações que este indivíduo sofreu no período de medida<sup>5</sup> ao passo que há dois valores distintos de concentrações que se relacionam a um mesmo valor do fluxo de partículas.

Vamos agora mostrar que as medidas de utilidade em um ambiente virtual composto de  $N_C$  partículas que seguem o algoritmo NaSch, ou cooperadores,  $\mathcal{C}$ , e  $N_D = N - N_C$  partículas que seguem o algoritmo ONaSch, ou desertores,  $\mathcal{D}$ , é equivalente a um jogo entre dois jogadores idênticos, cooperando com uma probabilidade  $p_C = N_C/N$  e desertando com probabilidade  $p_D = N_D/N = 1 - p_C$ . Para tanto, observamos que as interações entre as partículas são direcionadas e entre primeiros vizinhos, isto é, a partícula  $j$  é influenciada pela partícula  $j + 1$ , mas não influencia seu comportamento e isto é verdade para qualquer  $1 \leq j \leq N$ . Observamos também que as partículas seguindo uma mesma estratégia são indistinguíveis. Isto nos permite escrever a utilidade social da população como  $\bar{v}_s = (\bar{v}_s + \bar{v}_s)/2 = \sum_{j=1}^N (v_j + v_{j+1})/2N$  (usamos as condições periódicas de contorno que afirmam que  $v_{N+1} = v_1$ ). Da simetria entre as partículas segue que os pares ordenados de veículos  $(j, j + 1)$  podem se apresentar de quatro maneiras diferentes  $(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ ,  $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ,  $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$  e  $(\mathcal{D}, \mathcal{D})$ . Atribuímos então para cada par uma utilidade dada pela média das velocidades observadas de cada par:  $\bar{v}_{CC}$ ;  $\bar{v}_{CD}$ ;  $\bar{v}_{DC}$ , e;  $\bar{v}_{DD}$  respectivamente, multiplicadas pelas frequências de cada par:  $f_{CC}$ ;  $f_{CD}$ ;  $f_{DC}$ ,

<sup>5</sup> A velocidade média é constante para qualquer densidade no regime livre, onde não há interações, e é estritamente decrescente como função da densidade no regime congestionado, onde a quantidade de interações é estritamente crescente como função da densidade.

e;  $f_{DD}$ . Logo, escrevemos a utilidade social  $\bar{v}_s$  como:

$$\bar{v}_s = \sum_{j=1}^N (v_j + v_{j+1})/2N = f_{CC}\bar{v}_{CC} + f_{CD}\bar{v}_{CD} + f_{DC}\bar{v}_{DC} + f_{DD}\bar{v}_{DD}, \quad (3.1)$$

Esta forma é idêntica à utilidade esperada em um jogo onde as probabilidades do surgimento dos pares de estratégias são iguais às suas frequências relativas e com matriz de ganhos como a ilustrada na tabela 4.

■	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$
$\mathcal{C}$	$\bar{v}_{CC}$	$\bar{v}_{CD}$
$\mathcal{D}$	$\bar{v}_{DC}$	$\bar{v}_{DD}$

Tabela 4 – Tabela de ganhos do jogo equivalente ao apresentado no texto principal. Compare com a tabela apresentada na tabela 3.

Vamos agora mostrar que estas probabilidades são dadas por:  $f_{CC} = (N_C/N)^2$ ,  $f_{CD} = f_{DC} = N_C N_D / N^2$  e  $f_{DD} = (N_D/N)^2$  em uma concentração tal que haja interações persistentes (as flutuações para densidades locais mais elevadas não são assintoticamente diluídas). Seja  $\tau$  uma estimativa do tempo médio requerido por um desertor para ultrapassar um veículo, qualquer que seja sua estratégia, suponha que o veículo  $j$  seja um cooperador, e o veículo  $j + 1$  seja um desertor. Em média, após um intervalo  $\tau$ , o veículo  $j + 1$  ultrapassará o veículo  $j + 2$  e o par inicial muda da configuração  $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  para a configuração  $(\mathcal{C}, \mathcal{C})$  ou  $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  dependendo da estratégia do veículo  $j + 2$ . Por simetria, todo o sistema se comporta da mesma forma e podemos dizer que o período  $\tau$  é um intervalo de tempo característico de mudança de suas configurações. Em um intervalo médio  $T = N\tau$ , o par inicial  $(j, j + 1)$  volta a se formar porque a partícula  $(j + 1)$  ultrapassará  $N$  partículas neste intervalo. Contudo, a partícula  $j$  interagiu com desertores num intervalo  $N_D\tau$  porque  $N_D$  desertores a ultrapassaram no período  $T$ , cada qual interagindo com esta durante um intervalo médio  $\tau$ , por construção. Concluímos que, por simetria, cooperadores em um intervalo  $N\tau$  passam um período  $N_D\tau$  interagindo com os desertores que as ultrapassaram e um período  $N\tau - N_D\tau = N_C\tau$  interagindo com o cooperador mais próximo. Por outro lado, tomando como referencial a partícula  $j + 1$ , observamos que esta partícula gastou um tempo  $N_C\tau$  ultrapassando  $N_C$

cooperadores no intervalo  $N\tau^6$ . Isto significa que ambos, cooperadores e desertores, no intervalo  $N\tau$  apresentam um intervalo de contato  $N_C\tau$  com cooperadores e  $N_D\tau$  com desertores o que é equivalente a uma fila de veículos com pares fixados, porém, podem mudar de estratégia de tal forma que em um intervalo unitário a probabilidade de cooperação é  $N_C/N$  e a probabilidade de deserção de  $N_D/N$ . A frequência dos pares ordenados é dada pelo produto das probabilidades dos indivíduos adotarem uma estratégia:

$$f_{CC} = (N_C/N)^2; \quad (3.2)$$

$$f_{CD} = f_{DC} = N_CN_D/N^2; \quad (3.3)$$

$$f_{DD} = (N_D/N)^2. \quad (3.4)$$

Portanto, a análise das simulações de populações mistas onde os veículos apresentam uma dentre duas estratégias é equivalente a um jogo bem definido entre dois jogadores P1 e P2 cujas utilidades são dadas pela matriz de ganhos apresentada na tabela 4. No regime livre, ou quando  $c = N/L \rightarrow 1$ ,  $\tau \rightarrow \infty$ , porque a ultrapassagem é impossível nestes casos e não há um jogo bem definido.

Note que os períodos onde não há interação alguma são absorvidos nos valores médios das utilidades apresentadas na tabela 4. Quanto maior este período, mais próximas às entradas desta matriz de ganhos são, uma vez que os comportamentos são distinguíveis apenas em interações. Contudo, os valores absolutos não são fundamentais para a identificação de fenômenos interessantes porque as variâncias também são reduzidas de forma que  $v_{DD}, v_{CC}, v_{CD}$  e  $v_{DC}$  são grandezas estatisticamente bem determinadas no sentido que existe uma “boa ordenação” não-ambígua dos seus valores médios, dado que o sistema (grande) é medido por tempo suficiente. Note também que os valores destas grandezas podem depender das concentrações e da randomização, uma vez que quando a ultrapassagem é dificultada, o comportamento dos desertores deve ser similar ao dos cooperadores e  $v_{CC} \approx v_{DD}$ . Estas observações rudimentares são suficientes para uma aplicação mais rigorosa, embora heurística, das ferramentas da TJ aos modelos abordados

<sup>6</sup> As posições relativas entre cooperadores são conservadas de forma que, se o  $j$  foi ultrapassado no período médio  $\tau$ , então  $N_C$  cooperados foram ultrapassados em média no mesmo período.

neste trabalho. Não foram observadas discussões similares nos trabalhos analisados que aplicam a TJ a modelos de tráfego veicular.

### 3.4 Ultrapassagem e o dilema do prisioneiro

Nas simulações desta seção, todas as partículas, quaisquer que sejam suas estratégias tem a mesma velocidade máxima de 5 sítios por passo e todos tem a mesma probabilidade de desaceleração  $p$ . Estas grandezas foram escolhidas baseadas em [5] onde os autores mostram que considerando que um passo corresponde a 1, 1s e o tamanho de um sítio como 7, 5m (o espaço médio ocupado por um veículo no tráfego congestionado), então a velocidade máxima de 5 sítios/ passo é equivalente a 120km/h e a aceleração de 1 sitio/passo·passo corresponde a uma aceleração de 24km/h·h, considerada confortável pelos autores. Quanto à adoção do mesmo valor de  $p$  para todas as partículas, seguimos a argumentação em [44] onde este parâmetro é interpretado como uma tentativa de simular a resposta de um motorista frente às imperfeições na via. Como todos compartilham o mesmo ambiente, adotamos o mesmo valor para todos.

Simulamos então a população a uma concentração intermediária constante,  $c = 0.22$ , variando a fração de desertores compondo o sistema,  $\rho$ , de 0% a 100% em passos de tamanho 1% da concentração global e medimos a utilidade média de cada estratégia assim como a utilidade social do grupo. Fizemos estas medidas para valores baixos da probabilidade de desaceleração,  $p = 0.05$ , e valores altos,  $p = 0.2$ . Os resultados são exibidos na figura 16.

Esta figura mostra que, para qualquer fração de desertores na população mista, estes sempre levam vantagem sobre os cooperadores. Desertar então parece ser a melhor escolha para o indivíduo, independentemente da estratégia escolhida pelos seus vizinhos, portanto, é um equilíbrio de Nash [57]. Contudo, o sistema apresenta comportamentos diferentes em diferentes valores de  $p$ . Para valores relativamente altos, a utilidade social é uma função estritamente crescente da fração de desertores,  $\rho$ , portanto, trata-se de um jogo dominado pela deserção. Por outro lado, para valores relativamente pequenos, a utilidade social é uma função estritamente decrescente de  $\rho$ . Neste caso, ultrapassagem atrapalha o desempenho

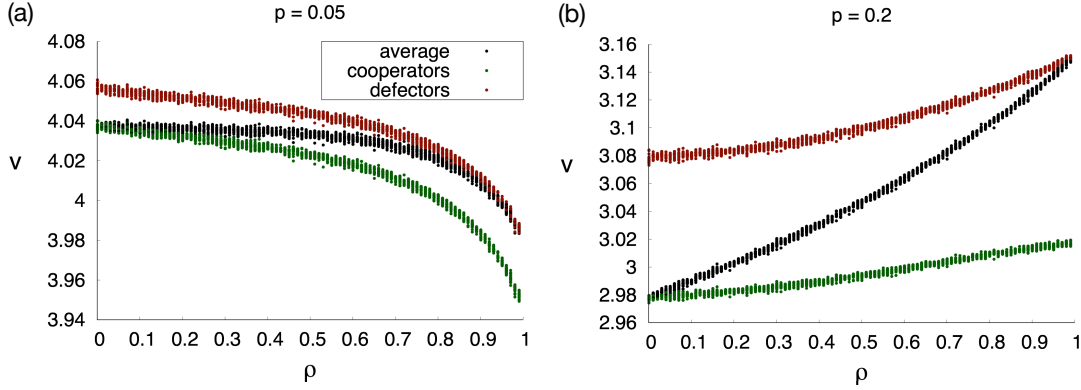


Figura 16 – Velocidade em função da fração de desertores na população para uma concentração global  $c = 0.22$ . A dinâmica da população depende fortemente do parâmetro de desaceleração  $p$ . A valores pequenos deste parâmetro (esquerda) o maior número de desertores, cuja utilidade está representada pelos pontos vermelhos, prejudica o desempenho médio da população, representado pelos pontos pretos. O contrário é verdade para valores grandes de  $p$ . Observe que a cooperação, representada pelos pontos verdes, tem uma utilidade sempre inferior à deserção o que é uma evidência de que desertar é um equilíbrio de NaSch.

da população e isto evidência a existência de um dilema social do tipo dilema do prisioneiro.

A figura ainda permite estimar os valores de  $\bar{v}_{CC}$ ,  $\bar{v}_{CD}$ ,  $\bar{v}_{DC}$  e  $\bar{v}_{DD}$  para  $p$  e  $c$  fixos usando a expressão da utilidade social. Para  $p = 0.05$  temos:

$$\mathcal{U}(C, \rho = 0) = f_{CC}v_{CC} = v_{CC} = 4.04; \quad (3.5)$$

$$\mathcal{U}(D, \rho = 1) = f_{DD}v_{DD} = v_{DD} = 3.99. \quad (3.6)$$

Os valores da utilidade social dos cooperadores e desertores nos limites  $\rho \rightarrow 1^-$  e  $\rho \rightarrow 0^+$ , respectivamente, se aproximam dos valores de um cooperador interagindo somente com desertores e um desertor interagindo somente com cooperadores.

$$\mathcal{U}(C, \rho \rightarrow 1^-) \approx f_{CD}v_{CD} = v_{CD} = 3.95, \quad (3.7)$$

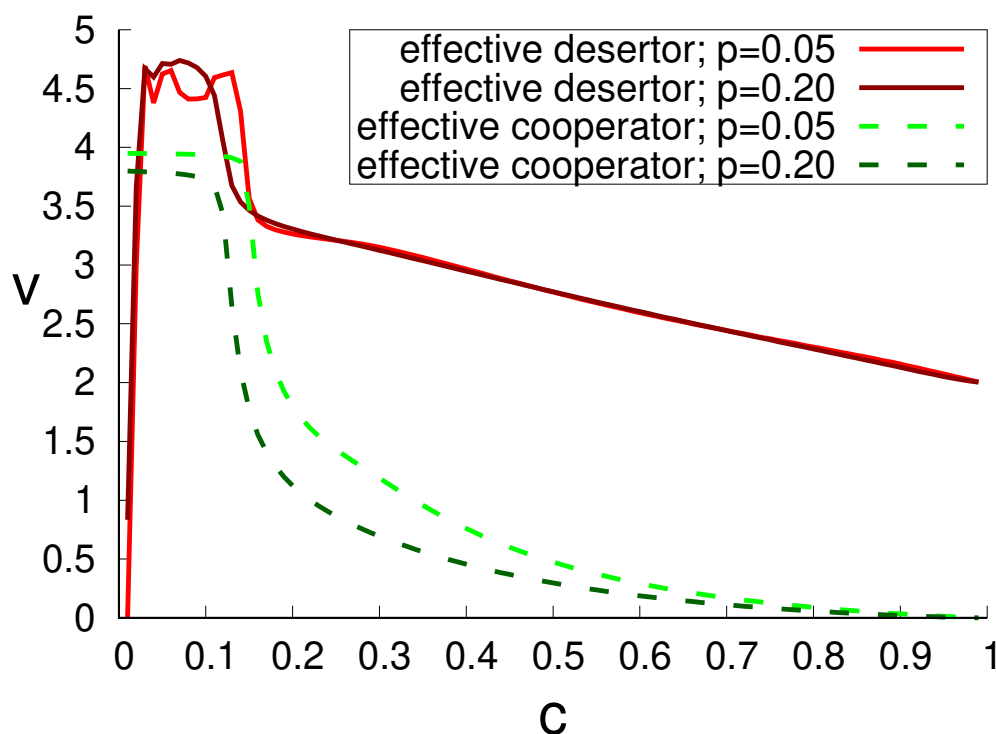


Figura 17 – A velocidade média de partículas em uma população ONaSch (ALLD) para dois valores da randomização. Dividimos a população em dois grupos: os que ultrapassaram no instante da medida, ou desertores efetivos (representados por linhas sólidas), e; os que não ultrapassaram no instante da medida, ou cooperadores efetivos (representados por linhas tracejadas). Observe que a vantagem em ultrapassar é muito grande para o indivíduo. Os resultados apresentados na figura 16 são compatíveis com os dados desta figura quando associamos os resultados apresentados aqui com os dados da figura 13.

e,

$$U(D, \rho \rightarrow 0^+) \approx f_{DC} v_{DC} = v_{DC} = 4.06. \quad (3.8)$$

Verificamos a relação  $v_{DC} > v_{CC} > v_{DD} > v_{CD}$  e o dilema do prisioneiro aparece no jogo equivalente, conforme esperado.

A baixa amplitude do dilema decorre do caráter perturbativo da ultrapassagem. Em uma população ALLD medimos a velocidade média das partículas que ultrapassaram no instante da medida (desertores efetivos) e dos veículos que não

ultrapassaram neste instante (cooperadores efetivos) em dois valores diferentes de  $p$  e apresentamos os dados na figura 17. Os dados apontam que, do ponto de vista do indivíduo, a manobra de ultrapassagem é bastante vantajosa, embora difícil de ser realizada. No limite de altas concentrações,  $c \rightarrow 1$ , a curva relativa a desertores efetivos tende ao valor  $v_{def} = 2$  porque a ultrapassagem mais provável é a sobre um veículo com velocidade  $v = 0$ , que impõe à ultrapassante o avanço mínimo de dois sítios para realizar a manobra.

Variamos a seguir o par  $c$  e  $p$ , e para cada tupla, variamos a fração de desertores  $\rho$ . Plotamos os valores de  $\rho$  para os quais a população obteve os melhores resultados na figura 18 painel a). Esta figura mostra que existe uma zona bem determinada de domínio da cooperação. O mesmo não pode ser dito para a deserção, onde flutuações parecem emergir com facilidade. Isto se deve à variação pequena da utilidade em função de  $\rho$  quando  $\rho \rightarrow 1$ .

Definimos a desvantagem percentual em desertar,  $\eta$ , por [108, 109] :

$$\eta = \frac{v_{SO} - v_{ALLD}}{v_{SO}},$$

onde  $v_{SO}$  é a utilidade da população cuja fração de desertores corresponde ao ótimo social (veja a figura 18 painel a) e  $v_{ALLD}$  é a utilidade de uma população composta unicamente por desertores nas mesmas condições. O resultado desta medida é exibido na figura 18, painel b). O dano em desertar se concentra em valores baixos do parâmetro  $p$  e pode chegar a 30% do ótimo social. Para se ter uma contextualização prática, considere que um indivíduo comuta de segunda a sexta durante duas horas usando a deserção como estratégia. Dos 21 dias e 18h que ele passa no trânsito anualmente, 6 dias e 13h seriam poupados caso adotasse a estratégia que seria melhor para todos.

### 3.5 Dominância sobre os comportamentos e descontinuidades

Suponha que, num ambiente virtual com velocidade fixa, o fluxo de partículas,  $J$ , seja uma função apenas da concentração,  $c$ , da probabilidade de desaceleração,  $p$ ,

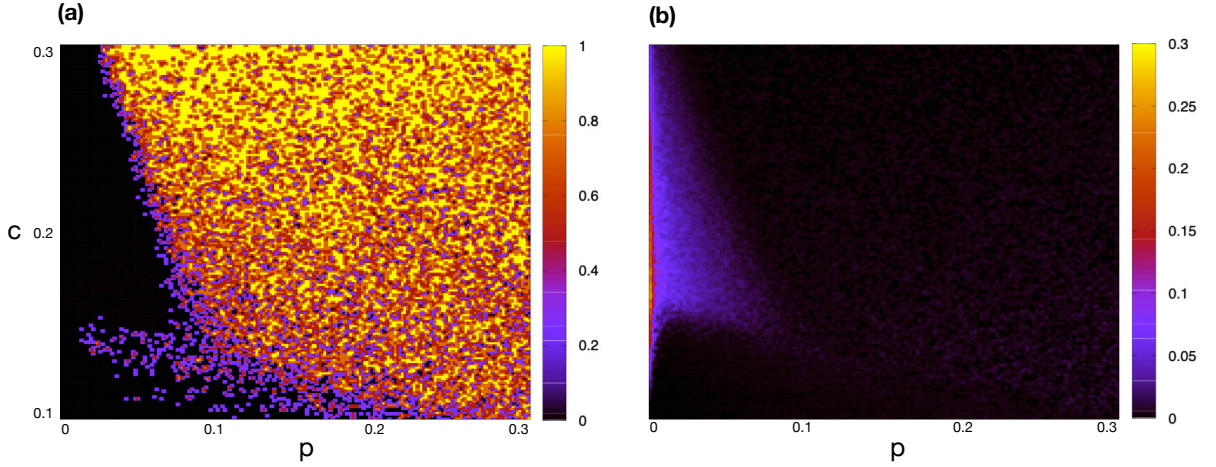


Figura 18 – No painel a), representamos a fração de desertores,  $\rho$ , da população com melhores resultados em uma amostra de 10 configurações iniciais (aleatórias) diferentes em função da concentração,  $c$ , e do parâmetro  $p$ . Observe que a cooperação domina absolutamente em valores de  $p$  pequenos. No painel b), representamos  $\eta$  calculado com base nos pontos da figura a). Compare os contornos da figura a) com os contornos da figura b). Note que o dano social ao desertar pode chegar a 30% quando  $p \rightarrow 0$ .

e da fração de desertores,  $\rho$ :  $J = J(c, p, \rho)$ . Nas seções anteriores, definimos  $\tau_D$  e  $\tau_C$  como os tempos característicos que o sistema permanece em cada comportamento em uma população ALLD ( $\rho = 1$ ) no limite  $p \rightarrow 0$ , de forma que a média temporal do fluxo de partículas pode ser aproximada por:

$$J(\rho = 1, p \rightarrow 0, c_1 < c < c_3) \approx \frac{\tau_D J_D + \tau_C J_C}{\tau_D + \tau_C},$$

nesta equação,  $J_D$  e  $J_C$  são os fluxos característicos da população ALLD e ALLC, respectivamente, em  $p = 0$ . Estimamos também os valores destes períodos como  $\tau_D \approx 1/p$  e  $\tau_C \approx 1/[1 - e^{-[(c-c_1)/(c_3-c_1)]Np^2}]$ . No limite  $p \rightarrow 0$ ,  $\tau_C/\tau_D \rightarrow \infty$  porque  $\tau_D$  cresce linearmente, ao passo que  $\tau_C$  cresce exponencialmente. O sistema tende a se comportar como uma população ALLC embora o tempo transiente possa ser muito grande. Como  $J(\rho = 1, p \rightarrow 0, c_1 < c < c_3) \rightarrow J_C$ , mas que  $J(\rho = 1, p = 0, c_1 < c < c_3) = J_D$ , existe uma descontinuidade no fluxo de partículas no limite  $p \rightarrow 0$ . Observando que em  $p = 0$  ambas as escalas de tempo divergem e a falha em ultrapassar apenas uma vez pode destruir o comportamento

do tipo ONaSch no sistema que daí permanece preso em um comportamento do tipo NaSch, e que o algoritmo impõe que a mesma partícula é ultrapassada por todas as outras na estrutura lenta, então a presença de apenas 1 cooperador no sistema pode destruir o comportamento do tipo ONaSch e promover o comportamento coletivo NaSch independentemente do seu tamanho. Ou seja, a descontinuidade analisada é uma linha no espaço  $(\nu, p, c)$ :  $J(\nu \rightarrow 1, p \rightarrow 0, c_1 < c < c_3) = J_C \neq J(\nu = 1, p = 0, c_1 < c < c_3) = J_D$ . Visto que não é possível à população ALLC formar estruturas semelhantes às estruturas da população ALLD um desertor nesta população pode iniciar várias vezes o 2-ciclo responsável pela formação dos padrões responsáveis pelo fluxo característico da população ALLD, que são destruídos logo em seguida. O desertor tem vantagem em relação às demais partículas quando é inserido em uma população ALLC, mas é incapaz de mudar o comportamento da população, contrariamente a um cooperador inserido numa população de desertores.

### 3.6 Generalizações?

Encontramos um dilema social numa população mista de partículas seguindo o algoritmo NaSch ou o algoritmo ONaSch. Tratamos agora da generalidade deste resultado com respeito a modelos mais sofisticados. Começamos a discussão observando haver diversos exemplos na TJ onde a existência de uma ação de um jogador ser prejudicial a outro jogador não é suficiente para que um dilema social se manifeste. É necessário que as consequências da ação sejam suficientemente profundas e/ou extensas para atingirem um número suficiente de indivíduos. Logo, o dilema apresentado nas seções anteriores é entendido em parte da análise da figura 14, onde é apontado que a baixos valores de  $p$  as partículas apresentam uma forte correlação de velocidades, mesmo que muito distantes entre si, e em parte nos dados apresentados na figura 15, onde é sugerido que a ultrapassagem aumenta o número de “freadas bruscas” quantificadas em termos da formação de aglomerados.

Embora as medidas citadas sejam relativas a populações homogêneas, eles apontam que ambos estes aspectos devem estar presentes em modelos heterogêneos para que o dilema seja observável. Com estas ideias em mente, variamos o modelo proposto por W. Knospe et al. [110], onde a velocidade da partícula focal é

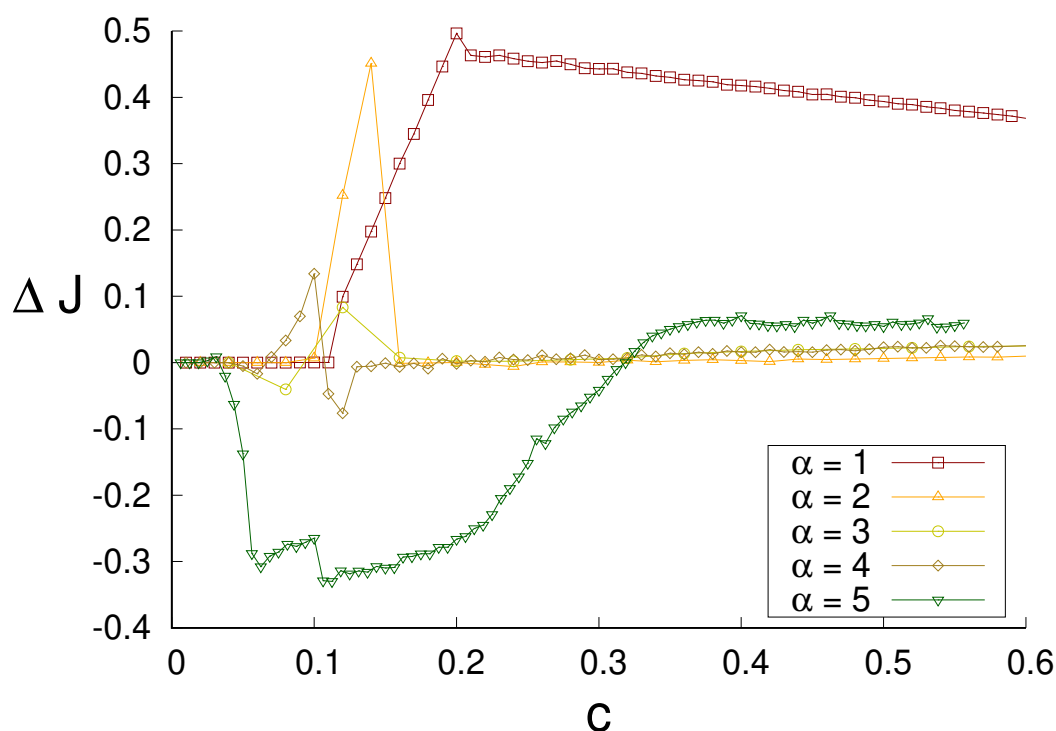


Figura 19 – Simulação do modelo proposto em [110] onde  $\Delta J$  indica a diferença entre o fluxo de veículos medido em função da concentração para o modelo adaptado a apresentar ultrapassagens e o modelo original. Diferentes valores de  $\alpha$  foram usados. A simulação parte de 10.000 sítios em  $\alpha = 1$  e encerra com 50.000 sítios em  $\alpha = 5$  onde uma brusca queda de rendimento é observada.

antecipada permitindo uma desaceleração suavizada quando o espaço é reduzido: a grandes distâncias, as partículas se movem com a velocidade máxima possível; em distâncias intermediárias, a dinâmica da partícula depende do estado da luz de freio da partícula a frente. Este parâmetro afeta a dinâmica da partícula focal da seguinte maneira: se as luzes de freio estiverem acesas e a partícula a frente estiver a uma distância inferior a uma distância de segurança predeterminada, a partícula focal não acelera e tem sua probabilidade de desaceleração alterada para  $p = p_b$ , que geralmente é um valor alto ( $p_b = 0.94$  no artigo original). O valor desta probabilidade pode ainda assumir o valor  $p = p_f$  caso a partícula esteja livre de interações (a uma certa distância de outras partículas) ou  $p = p_0$  caso esta partícula esteja parada. Veja [110] para uma descrição mais detalhada.

O modelo é complexo, mas compatível com uma adaptação similar à feita no modelo NaSch, para permitir a ultrapassagem sem perturbar a partícula ultrapassada, no instante da manobra, com modificações mínimas. A ultrapassagem é realizada se há espaço disponível e se a partícula é rápida o bastante para realizar a manobra sem perturbar a dinâmica da última partícula ultrapassada. É possível calibrar o efeito prejudicial da ultrapassagem com uma transformação simples. Sejam a velocidade máxima das partículas  $v_{max}$ , o tamanho do veículo  $s$ , a distância de segurança  $b$  (um parâmetro externo relacionado com a dinâmica a curtas distâncias) e o tamanho do sistema  $L$ , então uma mudança de escala destas grandezas por um fator universal  $\alpha$  implica em numa mudança da aceleração das partículas por um fator multiplicativo. Por exemplo, W. Knospe et al. argumentam que, com 20 células correspondendo a 30m e uma velocidade máxima de 30m/s que corresponde a 20 sítios por passo, temos que cada passo corresponde a 1 segundo e a aceleração de um sítio por passo corresponde à aceleração de 1, 5m/s<sup>2</sup> [110]. Tomando uma transformação com  $\alpha = 2$ , o número de sítios na simulação dobra, assim como a velocidade máxima, a distância de segurança e o espaço efetivo ocupado pela partícula em termos do número de sítios. O sistema físico original apresenta efetivamente o mesmo *set-up*, mas a aceleração de um sítio por passo corresponde agora a 0.75 m/s<sup>2</sup> uma vez que o passo ainda corresponde a 1 segundo. Esta transformação é interessante porque, ao passo que a aceleração é gradual, a desaceleração causada por encontros próximos não é, e podemos analisar o custo da deserção variando o parâmetro  $\alpha$ . Os resultados são apresentados na figura 19.

Conforme esperado, uma queda na produtividade da população é observada, entretanto, para este modelo, o valor da aceleração para que o dilema social emergja é de 0.3 m/s<sup>2</sup>.

### 3.7 Discussões e conclusões do capítulo

Introduzimos ultrapassagens no modelo NaSch da forma simples e isso permitiu uma abordagem analítica igualmente simples no limite determinístico o que permitiu observar o cerne do dilema social causado por ultrapassagens que se reproduzem em modelos mais sofisticados: a assimetria entre aceleração

e desaceleração e o número de partículas influenciadas por estas manobras. A aceleração é suave e estável, a desaceleração é abrupta e arbitrária. Os desertores ignoram essa desaceleração quando possível e a transmitem aos vizinhos, produzindo pequenos aglomerados locais. Dependendo da randomização, estas interações podem causar dois efeitos distintos. Quando a randomização é alta, a produção de pequenos aglomerados produz mais espaço no sistema e não propaga desacelerações severas para as partículas seguintes porque muitas partículas estão espaçadas o suficiente para não sofrerem influência do segundo passo NaSch, portanto são fracamente correlacionadas. Por outro lado, quando o ruído é pequeno, as correlações são mais fortes e extensas, propagando os efeitos adversos da ultrapassagem pela população.

Vale a pena reiterar que a randomização é interpretada como reações intrínsecas do motorista a imperfeições na via [44]. Logo, estes resultados sugerem que quanto melhor as condições da via ou quanto mais precisas forem as reações dos motoristas (automatização), melhores serão os resultados quanto à promoção da cooperação com respeito a seguir o fluxo ordenado de veículos, evitando ultrapassagens.

Em exemplos típicos de cooperação [111], o cooperador é um agente ativo que oferece benefícios ao grupo. O desertor é o recipiente passivo que apenas explora o comportamento cooperativo. No modelo apresentado, os agentes ativos são os desertores e suas ações os beneficiam, atrapalhando a população. Os cooperadores são os agentes passivos que sofrem os custos das ações dos desertores. Como as influências das ações abarcam um número arbitrário de partículas, escrever uma matriz de retorno como a matriz de ganhos precisa não é uma tarefa factível. Contudo, os resultados apresentados sugerem a existência do dilema e as aproximações apresentadas nas equações 3.1 até 3.8 corroboram este resultado.

Os algoritmos usados nesta etapa do trabalho estão disponíveis na linguagem FORTRAN95 em <https://github.com/RicardoSimao/TrafficProject/tree/master/OvertakingNaSch>. Também estão disponíveis as rotinas usadas para a geração da maioria das figuras apresentadas.

## 4 Resultados II: Evolução de comportamentos em modelos de tráfego veicular

Os resultados apresentados neste capítulo foram publicados com o título *Evolution of behaviors in heterogeneous traffic models as driven annealed disorders and its relation to the  $n$ -vector model* [112] publicado na revista *Chaos, Solitons and Fractals*.

### 4.1 Introdução

Vimos no capítulo anterior que modelos heterogêneos de tráfego veicular podem exibir dilemas sociais e considerando que o tráfego real é composto por seres humanos com capacidades adaptativas e imaginativas únicas, ou mesmo no caso da automatização do tráfego veicular com o uso de inteligências artificiais (IA), nos perguntamos o que acontece quando as partículas nestes modelos podem mudar suas estratégias enquanto realizam a comuta.

A evolução de comportamentos no trânsito é um campo complexo que se dá por processos de diferentes naturezas e a influência destes mecanismos no resultado não são muito claros. Em vias de faixa única na Índia, existe uma pressão social para se usar todo espaço disponível para ultrapassar o vizinho e reduzir ao máximo possível a comuta, mesmo usando espaços proibidos como a faixa contramão. Por outro lado, na Alemanha, a pressão social se manifesta como o respeito aos espaços individuais e existem mecanismos de identificação e punição de infratores bastante eficientes. No primeiro caso, a evolução do comportamento dos motoristas é promovida por um mecanismo de **recompensação**, ao passo que no segundo caso é promovida por um mecanismo de **punição**. Não há razão *a priori* para se supor que ambos os mecanismos sejam equivalentes, mesmo quando a estratégia “alvo” destas pressões sejam as mesmas. Note que os próprios exemplos parecem contradizer esta hipótese. Contudo, é possível obter-se grandes simplificações quanto à dinâmica evolucionária em tais sistemas em modelos heterogêneos unidimensionais

que obedecem a quatro propriedades simples: as interações entre partículas são unidirecionais; as partículas são duras; as dinâmicas são tais que a velocidade média é maximizada no regime livre e a distância entre partículas é atraída para algum valor médio no regime congestionado, e; o sistema é fechado. Neste caso, podemos considerar processos bastante gerais similares aos processos de imitação e mutação, de interesse da TJE, independentes dos mecanismos subjacentes (se são dirigidos por punição ou recompensação, por exemplo) para verificar que a evolução dos comportamentos no sistema é muito similar à evolução de espécies em populações espacialmente dispostas em grafos. Daí é possível mostrar a independência dos processos evolucionários subjacentes em fluxos estritamente unidimensionais.

Introduzimos o processo de **imitação** como uma estratégia evolutiva onde uma partícula focal assume um comportamento similar a uma partícula alvo que esteja interagindo, copiando seus parâmetros com uma probabilidade que depende do desempenho desta partícula. Esta dinâmica evolucionária ocorre em um intervalo  $\tau_i$  e busca simular a capacidade humana de análise crítica do próprio comportamento em comparação ao comportamento de terceiros. Isto é equivalente a se supor que a partícula focal seja escolhida, em um intervalo  $\tau_i$ , para morrer e dar lugar à prole da partícula alvo com a probabilidade mencionada ou dar lugar à própria prole, numa linguagem compatível com TJE. Por outro lado, o processo da **mutação** é considerado como um passeio aleatório independente no espaço de parâmetros e de amplitude pequena. Esta dinâmica busca trazer à discussão eventos aleatórios fora do controle do motorista e não necessariamente relacionados com a minimização do tempo de percurso. Por exemplo, problemas no motor que podem gerar uma resposta inferior do veículo, reduzindo sua velocidade, ou o motorista pode ter usado medicamentos (relacionados a superação de traumas, por exemplo) que podem induzi-lo a uma direção mais rápida e arriscada. Admitindo-se que este processo ocorre em uma escala de tempo  $\tau_m$ , pode-se dizer que em uma escala de tempo  $\tau_m$  a partícula dá lugar a uma prole que manifesta um comportamento diferente da matriarca e tal comportamento é passado para a próxima geração. As similaridades dos processos expostos com processos vistos em sistemas biológicos é clara.

Antes de nos debruçarmos sobre o assunto, comentamos que populações

heterogêneas são introduzidas na literatura de uma maneira pouco diferente do que utilizamos até agora. Modelos heterogêneos são modelos provenientes de modelos conhecidos, ou inspirados neles, em que uma variação nos parâmetros promove comportamentos distintos para cada partícula. Usa-se o conceito de *quenched disorder* no espaço de parâmetros para descrever tais modelos [113–119] e as populações heterogêneas apresentadas nesta segunda etapa serão assim introduzidas. As populações heterogêneas introduzidas no capítulo anterior não são heterogêneas no usual, visto que os algoritmos usados são diferentes. Essa *mistura* nos inspira a conceitualização de populações multi-comportamentais que englobam ambos, a heterogeneidade quanto à variabilidade de parâmetros e heterogeneidade relacionada a variabilidade de algoritmos. Note que, quando há dinâmica evolutiva, a heterogeneidade introduzida como *quenched disorder* no espaço de parâmetros passa a se comportar como uma *annealed disorder* dado que as heterogeneidades destes parâmetros adquirem um aspecto dinâmico. Esta dinâmica é dirigida e, interpretando-se os parâmetros das partículas como entradas de um vetor definido no espaço de parâmetros, é possível verificar dois comportamentos distintos. Quando o processo de imitação domina a dinâmica evolutiva, temos uma organização em termos de orientação no espaço de parâmetros em direções privilegiadas. Por outro lado, observamos desorganização em termos de orientação quando o processo de mutação domina a dinâmica evolutiva. Como a passagem da ordem à desordem se dá, variando-se  $\tau_i/\tau_m$ , parece ser a mesma para todos os modelos que apresentam as propriedades mencionadas.

## 4.2 Resultados gerais

Uma **partícula** é um objeto que representa, num ambiente computacional, a combinação do veículo com o motorista. Ocupa  $d$  sítios e possui  $m$  parâmetros intrínsecos que controlam seu comportamento. O estado do sistema no tempo  $t$  é definido pela posição e velocidade de cada partícula. Uma **interação** acontece quando partículas mudam seu comportamento em resposta ao comportamento de outra partícula e isto define o raio de interação,  $R$ , como maior distância entre partículas em que interações são possíveis. Este raio varia de modelo a modelo, mas é conveniente definir o raio de interação da  $j$ -ésima partícula como sua velocidade

máxima,  $R_j = v_{max,j}$ . A distância entre a  $i$ -ésima e a  $j$ -ésima partículas no instante  $t$  é dada por  $(x_j(t) > x_i(t))$ :  $\chi_{j,i}(t) = x_j(t) - x_i(t) - d_i \geq 0$ . Diremos que, se  $\chi_{j,i}(t) > R_i$ , então a  $i$ -ésima partícula é dinamicamente independente da  $j$ -ésima no instante  $t$ .

Consideraremos modelos unidimensionais de tráfego, sob condições periódicas de contorno, que satisfaçam às quatro propriedades listadas a seguir:

**P1** (Interações direcionadas) Uma partícula poderá apenas afetar a dinâmica das partículas que a seguem.

**P2** (Partícula dura) Duas partículas não podem ocupar o mesmo sítio ou passar uma pela outra.

**P3** (Maximização da velocidade) A dinâmica própria de cada partícula impõe que esta aumente sua velocidade até um certo limite,  $v_{max}$ , ou reduza a distância à partícula a frente a um certo valor médio, observando as propriedades já citadas.

**P4** (Sistema fechado) não há troca de partículas do sistema com o exterior.

A propriedade **P1** é uma proposta de formulação da observação cotidiana do tráfego real em que o comportamento do veículo à frente tem maior importância na dinâmica do veículo central que o comportamento daqueles que o seguem, quando manobras específicas como ultrapassagens não são consideradas. A propriedade **P2** afirma que acidentes e ultrapassagens são negligenciadas (eventos proibidos) ao passo que **P3** simula o anseio dos motoristas em maximizar a sua velocidade até o limite estipulado quando não estão interagindo (no regime livre) ou relaxação a uma distância entre veículos a um valor pré-estipulado quando interações se tornam importantes (no regime congestionado). Na realidade, no tráfego veicular congestionado os motoristas tendem a relaxar em tempo de alcance característico e não em distância, contudo assumindo que exista uma velocidade preferencial que é função da concentração então a relaxação da distância relativa implica nos mesmos resultados e esta última propriedade é uma formulação da hipótese que motoristas procuram minimizar o tempo de comuta de maneira segura. Finalmente, **P4** apenas

indica que consideramos vias muito longas sem entradas ou saídas de veículos e não é realmente uma propriedade do modelo, mas do *set up* experimental. Observe que estas propriedades não fixam nenhum algoritmo para a dinâmica intrínseca de cada partícula, mas veremos serem suficientes para fixar o comportamento médio de populações heterogêneas quanto a sua dinâmica evolucionária e são compatíveis com todos os modelos CA unidimensionais que temos conhecimento. Antes de enunciar resultados importantes, é conveniente apresentar algumas definições por salvaguarda de clareza.

**Definição 1.** *A estratégia mais lenta é aquela que desenvolve a menor velocidade média em dado ambiente.*

**Definição 2.** *Se  $x_j(t)$  é a posição da  $j$ -ésima partícula no instante  $t$ , a velocidade medida desta partícula num intervalo de tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$  é dada por:*

$$v_j = \frac{\Delta x_j}{\Delta t} = \frac{x_j(t_2) - x_j(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

**Definição 3.**  *$\bar{a}$  representa a média temporal da variável  $a$ . Definimos  $\chi_j^*$  e  $v^*$  como os limites  $\bar{\chi}_j \rightarrow \chi_j^*$  e  $\bar{v}_j \rightarrow v^*$ , para todo  $1 \leq j \leq N$ . Essas variáveis, quando os limites existem, caracterizam o **estado estável** do sistema.*

Apresentamos a seguir uma série de resultados interessantes, contudo chama-se a atenção ao caráter fortemente **heurístico** de suas justificativas.

**Resultado auxiliar 1.** *Em sistemas heterogêneos unidimensionais satisfazendo as propriedades **P1–P4**, existe um estado estável caracterizado por  $\chi_j^*$  e  $v^*$ , para todo  $1 \leq j \leq N$ , em densidades baixas onde um **líder** possa ser identificado quando há apenas uma partícula mais lenta no sistema. Caso haja  $n$  partículas mais lentas, então  $n$  aglomerados serão formados que apresentam propriedades semelhantes ao aglomerado formado por um sistema com uma única partícula lenta. Este resultado é válido em densidades onde os líderes destes aglomerados podem ser identificados.*

*Argumento.* Suponha uma única partícula mais lenta num sistema heterogêneo e que esta seja a  $(j + 1)$ -ésima partícula. Segue então que  $\chi_{j+1,j}$  decresce devido à **P3** se  $\chi_{j+1,j}(t) > R_j$  uma vez que a  $j$ -ésima partícula tem maior velocidade

por hipótese e **P1** implica que a dinâmica da  $(j + 1)$ -ésima partícula não pode ser afetada pela  $j$ -ésima partícula. Por outro lado, **P2** implica que  $\chi_{j+1,j}(t) \geq 0$  para todo  $t$ . Escrevendo a média temporal da distância relativa entre essas duas partículas,  $\bar{\chi}_{j+1,j}$ , ao longo de  $M$  medidas de duração  $\Delta t = 1$ , teremos:

$$\bar{\chi}_{j+1,j} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \chi_{j+1,j}(t_i) \rightarrow \chi_j^*, \text{ quando } M \rightarrow \infty. \quad (4.1)$$

A convergência vale (em valores médios, não em medidas individuais) porque, por um lado,  $\chi_{j+1,j}$  é “atraído” para o intervalo  $[0, R_j]$  para todo  $1 \leq j \leq N$ , já que as partículas são dinamicamente independentes quando  $\chi_{j+1,j} > R_j$ . Agora, **P1**, **P2** e **P3** não fixam os detalhes do algoritmo da  $j$ -ésima partícula quando ela interage com outra partícula ( $\chi_{j+1,j}(t) \leq R_j$ ). Vamos mostrar que estas regras intrínsecas não são tão relevantes para a validade do resultado 4.1 exceto em casos patológicos.

Suponha que, para avaliar o resultado 4.1, montamos um histograma das frequências dos valores de  $\chi_{j+1,j}(t)$ . A natureza determinística ou estocástica dos algoritmos é irrelevante para a construção deste histograma e o resultado 4.1 deve ser o mesmo que a média sobre as suas frequências quando são medidas ao longo de um intervalo suficientemente grande. Suponha então que  $\chi_{j+1,j}(t)$  siga uma distribuição  $p(\chi_{j+1,j})$  para as frequências no intervalo  $[0, R_j]$ , e  $q(\chi_{j+1,j})$  para valores fora deste intervalo ( $\chi_{j+1,j} > R_j$ ). A média sobre o histograma de frequências é então:

$$\bar{\chi}_{j+1,j} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \chi_{j+1,j}(t_i) = \sum_{i=d_j}^{R_j} ip(i) + \sum_{i=R_j+1}^L iq(i). \quad (4.2)$$

Entretanto, a propriedade **P3** e a independência dinâmica quando  $\chi_{j+1,j}(t) > R_j$ , implicam que  $q(\chi_{j+1,j})$  deve se anular rapidamente quando  $\chi_{j+1,j}$  cresce a valores maiores que  $R_j$ . Exceto quando  $q(\chi_{j+1,j})$  decresce mais devagar que  $i^{-2}$ , podemos ignorar este termo. Podemos então concluir que 4.2 se aproxima de uma soma limitada no intervalo  $[0, R_j]$ , ou manter os primeiros  $\eta$  termos, caso em que a equação 4.2 ainda é uma soma limitada no intervalo  $[0, R_j + \eta]$ . De qualquer forma, teremos uma distribuição com variação finita medida em um intervalo de

$M$  (arbitrariamente grande) eventos independentes. Logo, a média existe, é única para cada partícula, e é definida como igual a  $\chi_j^*$ .

Para argumentar que o índice de decrescimento da distribuição de distâncias relativas ser mais lento que  $i^{-2}$  é patológico, observamos que tal comportamento pode ser observado quando um possível efeito das interações faz  $\chi_{j+1,j}$  crescer a valores arbitrariamente grandes. A única forma de manifestar este comportamento ainda obedecendo à **P2** é parar ou reduzir a velocidade da partícula por um período longo de tempo. Contudo, se este intervalo é grande o suficiente para que  $\chi_{j+1,j}$  se torne maior que  $R_j$ , conforme requerido, então isto violaria **P3** que afirma que neste caso as partículas são dinamicamente independentes e as velocidades precisam ser maximizadas. Chegamos a uma contradição. Logo  $q(\chi_{j+1,j})$  pode ser truncado em algum valor finito, geralmente pequeno,  $\eta$ . Este mecanismo pode surgir em modelos que consideram a possibilidade da ocorrência de acidentes (veja [81–83, 88, 120–122]), contudo não será analisado aqui.

Com respeito às velocidades das  $j$ -ésima e  $(j + 1)$ -ésima partículas, a média desta grandeza sobre  $M$  intervalos consecutivos de duração  $\Delta t = 1$  pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 \bar{v}_{j+1} &= \sum_{i=1}^M \frac{\Delta x_{j+1}}{M} = \sum_{i=1}^M \frac{x_{j+1}(t_{i+1}) - x_{j+1}(t_i)}{M} \\
 &= \sum_{i=1}^M \frac{(x_j(t_{i+1}) - x_j(t_i))}{M} + \sum_{i=1}^M \frac{(\chi_{j+1,j}(t_{i+1}) - \chi_{j+1,j}(t_i))}{M} \\
 &= \sum_{i=1}^M \frac{\Delta x_j}{M} - \sum_{i=1}^M \frac{\Delta \chi_{j+1,j}}{M} \\
 &= \bar{v}_j - \sum_{i=1}^M \frac{\Delta \chi_{j+1,j}}{M}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Usamos a definição de velocidade média e a identidade  $x_{k+1}(t) = x_k(t) + \chi_{k+1,k}(t) + d_k$ . Já que  $\sum_{i=1}^M \Delta \chi_{j+1,j}/M \rightarrow 0$  conforme  $M \rightarrow \infty$  ( $\sum_{i=1}^M \Delta \chi_{j+1,j} = \chi_{j+1,j}(t_{M+1}) - \chi_{j+1,j}(t_1)$  é uma soma telescópica que resulta em um número finito se a  $j + 1$ -ésima partícula é mais lenta que a  $j$ -ésima, como é assumido), concluímos que a velocidade das partículas, em média, são iguais:  $\bar{v}_j = \bar{v}_{j+1}$ .

Repetimos o argumento para todas as partículas atrás destas duas até exaurir as partículas do sistema. Para completar o argumento, suponha que a partícula rápida seja inicializada na frente da partícula lenta. Já que estamos pressupondo condições periódicas de contorno, todas as partículas rápidas inicializadas à frente da mais lenta completarão o percurso circular e se encontrarão, efetivamente, atrás da mais lenta, nos levando de volta à situação anterior. Para o caso de múltiplas partículas lentas, então o argumento é aplicado a todas elas separadamente. A indistinguibilidade entre partículas controladas pelo mesmo algoritmo e parâmetros implica nos mesmos resultados e o estado estável agora é composto por  $n$  aglomerados liderados por estas partículas. Note que as velocidades médias destes aglomerados são as mesmas e as distâncias entre partículas dentro do aglomerado são estáveis, porém a distância média entre os aglomerados flutua (se a velocidade dos líderes é randomizada então no limite  $c \rightarrow 0$  as distâncias entre aglomerados escalam com o tamanho do sistema como  $\sqrt{L}$ ). Diferentemente do caso  $n = 1$ , este estado não se trata de um estado estável nas linhas da **definição 3** devido a estas fortes flutuações, contudo para nossos propósitos a similaridade entre os  $n$  aglomerados será suficiente.

Requeremos densidades baixas o suficiente para a distinção de um líder porque assumimos que  $E(\chi_{j+1,j})(t) = E(\chi_{j+1,j})(t + T) = \chi_j^*$  ( $E(x)$  é o valor esperado de  $x$ ) no estado estável para todo  $T$  positivo. Em outras palavras, não consideramos a possibilidade da existência de ciclos ou comportamentos mais complicados de  $\chi$  que podem ocorrer a densidades onde **todas** as partículas estão ligadas umas às outras por uma teia de interações.

□

Usamos implicitamente **P4** nos argumentos apresentados na forma da hipótese da conservação das partículas e de suas propriedades. Este resultado é compatível com medidas feitas no tráfego real e experimentos com modelos heterogêneos, sendo derivado rigorosamente para o modelo TASEP heterogêneo em [123].

Resumindo, em sistemas heterogêneos satisfazendo as premissas, existe um estado estável em que a  $i$ -ésima partícula está, em média, a uma distância  $\chi_{j,i}^*$  da

$j$ -ésima partícula, e elas compartilham a mesma velocidade média  $v^*$  ou o sistema é formado por aglomerados com propriedades semelhantes. Este estado é determinado pelas condições iniciais (quem “segue” quem) que atraem dinamicamente as órbitas no espaço de configurações e sua existência facilita bastante a compreensão da dinâmica evolucionária nestes sistemas, como pode ser visto pelos “corolários” que seguem.

**Resultado auxiliar 2.** *(Conexão à teoria de grafos) Em sistemas satisfazendo as condições do **Resultado auxiliar 1**, existe um grafo,  $\Omega$ , capaz de representar a teia de interações do sistema.  $\Omega$  é um grafo direcionado, aleatório, com um único nodo líder ou um conjunto de  $n$  grafos desconexos com as mesmas propriedades, onde  $n$  é o número de partículas mais lentas, a densidades suficientemente baixas.*

*Argumento.* Do **resultado auxiliar 1** sabemos que existe um estado estável onde a partícula mais lenta lidera a população. Se esta partícula é a  $j$ -ésima, então a enumeração de partículas  $\sigma = (j + 1, j + 2, \dots, N - 1, N, 1, \dots, j - 1, j)$  é invariante sob qualquer dinâmica de sistemas unidimensionais satisfazendo **P2** e representa o ordenamento das partículas com respeito às posições efetivas, já que sempre se medirá  $x_1 > \dots > x_j > x_{j-1} > x_{j+1} > \dots > x_N$ . Definimos a frequência de interação entre a  $i$ -ésima e a  $k$ -ésima partículas ( $x_i > x_k$ ), medidas em um intervalo longo  $T$ , como  $\omega_{i,k} = T_{\chi_{i,k} \leq R_k} / T$ , onde  $T_{\chi_{i,k} \leq R_k}$  é o tempo acumulado em que a distância relativa entre partículas é tal que  $\chi_{i,k} \leq R_k$ , e construímos o grafo  $\Omega$  tomando a enumeração  $\sigma$  como uma sequência de nodos e  $\omega_{i,k}$  como a conectividade entre os nodos  $i$  e  $k$ . Se  $j$ -ésima partícula é a única partícula lenta no sistema, segue que  $\Omega$ : tem um único líder porque  $\omega_{k,j} = 0$  para todo  $1 \leq k \leq N, k \neq j$ , uma vez que o líder não interage com nenhuma outra partícula (lembrando que o índice  $k$  em  $\omega_{k,j}$  se refere a uma partícula a frente de  $j$ ); é aleatório já que  $0 \leq \omega_{k,j} \leq 1$  para todo  $1 \leq i, k \leq N, k \neq i$  e é proveniente da definição de um processo estocástico; e, é direcionado em virtude de **P1**. Caso haja várias partículas lentas no sistema, o **resultado auxiliar 1** implica que o aglomerado formado no estado estável pode ser dividido em vários aglomerados com propriedades similares liderados pelas estratégias lentas. Neste caso construímos  $\Omega$  da mesma maneira, observando apenas que para os líderes destes aglomerados  $\omega_{j_n, j_n - k} \gg \omega_{j_n + k, j_n} \rightarrow 0$ , para todo  $k$  inteiro tal que  $(\sum_{i=j-k}^j d_i) < R_i$  (todos os  $\omega_{j, j-k}$  em que o índice  $k$  não satisfaz a

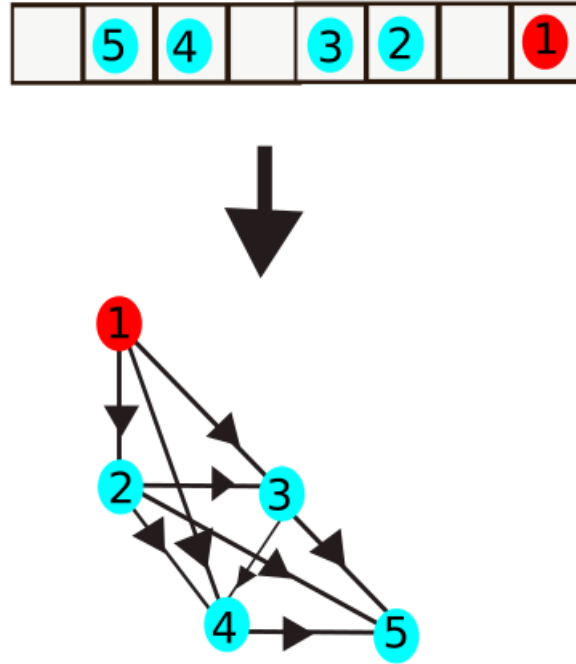


Figura 20 – Representação do grafo  $\Omega$  (abaixo) relacionado à teia de interações de uma simulação simples de algum modelo heterogêneo obedecendo às premissas (acima). Os discos azuis representam estratégias rápidas e o disco vermelho representa a estratégia lenta. As partículas são numeradas com respeito à líder e o raio de interação de todas é fixo em 3 sítios e as interações não são de primeiros vizinhos. Os valores das conectividades não são representados para facilitar a visualização e adotamos a convenção que setas não visíveis indicam conectividades nulas. Note que a quinta partícula não apresenta um *link* para a líder dado que há 3 partículas que as separam, portanto, a líder está fora do seu raio de interação em qualquer instante ( $\omega_{1,5} = 0$ ). Entretanto, há um caminho fechado da líder para esta partícula, de forma que aquela ainda poder influenciar o comportamento desta de maneira indireta.

desigualdade apresentada são identicamente nulos) e para todas as  $n$  partículas lentas (identificadas pelo subscrito  $j_n$ ). Isto é, o contato dos líderes com as partículas a frente proveniente e outros aglomerados é pequena em relação ao contato das partículas que seguem os líderes com eles, particionando  $\Omega$  em  $n$  grafos menores, desconexos, com propriedades semelhantes concluindo o argumento.

□

A figura 20 mostra a aplicação deste resultado a um exemplo simples. A conectividade entre os nodos do grafo  $\Omega$  apresenta propriedades interessantes.  $\omega_{i,j} = 0$  para todo  $t$  e todo  $i$ , onde  $i$  é o primeiro índice que satisfaça a desigualdade  $(\sum_{k=j}^i d_k) > R_j$  em uma enumeração onde a  $N$ -ésima partícula é a líder. Em outras palavras, essas partículas não podem ser ligadas diretamente porque a distância mínima entre elas é maior que o raio de interação da partícula focal, contudo são ligadas por uma cadeia de interações indiretas, os nodos de  $\Omega$  não apresentam um número arbitrário de conexões e isto facilita bastante o problema. Contudo, a razão por que não há conexões apontando para a partícula líder é um pouco diferente. Como se assume que esta partícula esteja em estado livre, todas as partículas estão, efetivamente, à frente desta e a uma grande distância em virtude da formação de aglomerados prevista pelo **resultado auxiliar 1**. Isto é uma propriedade de sistemas grandes e consequência do isolamento do líder, e não um aspecto geométrico. Isto sugere a existência de  $\Omega$  mesmo a densidades altas, dado que nessa situação não há partículas isoladas e existe um caminho fechado conectando **todas** as partículas, contudo  $\Omega$  se torna um grafo direcionado, aleatório e cíclico. Somente sob as condições do **resultado auxiliar 1** a propriedade de único líder deste grafo se manifesta, o que é importante no que se segue.

Como a medida de *utilidade* nos trabalhos que abordam o problema do dilema social no tráfego é a velocidade média, é conveniente mostrar um resultado com respeito a esta variável.

**Resultado auxiliar 3.** (*Limite de velocidade*) *Em sistemas satisfazendo as condições do **resultado auxiliar 1**, a velocidade média no estado estável de qualquer partícula é igual à velocidade média da partícula mais lenta presente nesta população.*

*Argumento.* Do **resultado auxiliar 1**, todas as partículas no estado estável têm a mesma velocidade média. Portanto, para mostrar o resultado basta calculá-la para uma partícula. Ainda do **resultado auxiliar 1** sabemos que o líder é a partícula mais lenta na população, logo:  $v^* = \bar{v}_s$ . □

Assumindo que a velocidade média no estado livre é uma função somente dos parâmetros de entrada do modelo e que a dinâmica evolucionária busca o *crescimento* desta variável, podemos entender mudanças no comportamento da partícula como uma movimentação *direcionada* das heterogeneidades no sistema de maneira a fazer crescer a velocidade média. Este processo apagaria as heterogeneidades incompatíveis com este resultado e estabilizaria a população no conjunto de parâmetros, caracterizando o máximo da velocidade média. Contudo, os resultados auxiliares implicam que este desenvolvimento não é tão trivial quanto parece. Para explicitar isto, vamos definir um processo local de imitação.

**Definição 4.** *Um processo local de imitação é um processo estocástico onde o comportamento de uma partícula escolhida aleatoriamente é transmitido a uma partícula vizinha, com a qual esteja interagindo. Tal processo ocorre em um tempo característico  $\tau_i$  e a probabilidade de sucesso é uma função crescente da utilidade da partícula alvo e não é nula quando as utilidades são iguais.*

Este processo é uma tentativa de simular as escolhas conscientes dos motoristas para melhorar seu desempenho no tráfego, como imitar reações de outros motoristas, troca de veículos, etc. Os detalhes deste processo podem depender de vários sub-processos complicados e é importante enfatizar que esta definição também não fixa o processo local de imitação, contudo, limita suas diretrizes como processos que ocorrem apenas entre partículas interagentes ( $\omega_{i,k} \neq 0$ ), cuja probabilidade de sucesso cresce com utilidade adquirida pela partícula alvo sendo não nula quando as utilidades são iguais (*random drift*). Esta definição nos possibilita enunciar o primeiro resultado principal deste capítulo e seu argumento heurístico.

**Resultado principal 1.** *(Dominância do mais lento) Em sistemas sob as condições do resultado auxiliar 1, sob um processo local de imitação, o resultado de longos períodos submetidos ao processo evolucionário citado é uma população homogênea que segue a estratégia mais lenta inicialmente presente na população, independentemente da sua composição inicial.*

*Argumento.* Este resultado pode ser pensado como uma consequência direta do resultado auxiliar 2 em combinação com o conhecido resultado que populações

cujos indivíduos estão distribuídos nos nodos de um grafo direcionado com um único líder e submetidos a um processo local de imitação são dominadas pela estratégia que ocupa a posição de liderança (veja [124–126]). Como a probabilidade da estratégia mais lenta ocupar a posição de liderança é a unidade, então esta estratégia domina a população.

Embora bastante simples, este argumento é insatisfatório porque a parte da população que lidera o grafo se torna homogênea, o que invalida localmente o **resultado auxiliar 1**. Uma aproximação um pouco mais interessante é observar “pontos fixos” quanto ao processo de imitação. O líder não pode imitar nenhuma estratégia, já que não interage com nenhuma outra partícula. A próxima partícula pode apenas imitar o líder, e, segundo o **resultado auxiliar 3** e a definição de um processo de imitação local, eventualmente o imitará, se tornando fixo quanto a este processo (não há outro comportamento diferente para se imitar). Note que agora a próxima partícula poderá apenas imitar a estratégia do líder compartilhada pelo vice-líder. Desta forma, a estratégia do líder se propaga pelo aglomerado, apagando a heterogeneidade da população. Conforme as estratégias são transformadas no topo da estrutura, uma bolha formada por uma população homogênea é formada. Se a concentração for tal que esta fase não homogênea consiga alcançar a parte de baixo do aglomerado então o argumento está completo, caso contrário, a probabilidade de se escolher uma estratégia rápida para se transformar em uma estratégia lenta (no topo) é a mesma probabilidade de se escolher uma estratégia lenta para mudar para uma estratégia rápida (na base). Isto tem a consequência de que a dinâmica evolucionária se torna um passeio aleatório unidimensional onde, por exemplo, um passo à esquerda corresponde à mudança de uma partícula para a estratégia lenta e um passo à direita corresponde à mudança de uma partícula para alguma estratégia rápida. As probabilidades de transição dependem dos detalhes do processo de imitação, entretanto, dentre os vários possíveis pontos fixos da dinâmica evolucionária (cada ponto correspondente uma população homogênea composta por uma estratégia presente inicialmente no sistema), estados dominados por partículas rápidas não são estáveis conforme o **resultado auxiliar 1**, que afirma que estratégias mais rápidas não lideram estruturas estáveis. O único ponto fixo estável é, portanto, composto pela estratégia mais lenta inicialmente presente.

□

Este resultado implica que caso uma população primordial de partículas seguindo estratégias semelhantes fossem inicializados em um ambiente unidimensional, o resultado (ponto fixo) da dinâmica evolucionária seria o mesmo, ainda que pressões sociais de diferentes naturezas ou mecanismos subjacentes sejam diferentes. O carácter unidimensional do problema e a possibilidade de *random drift* levam o sistema para um ponto fixo evolucionário, correspondendo a uma população homogênea composta pela estratégia mais lenta do grupo.

Observe que, hipoteticamente, se as partículas são controladas por modelos que requerem  $m$  parâmetros externos e que os parâmetros da estratégia mais lenta observada inicialmente na população são  $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ , então a dinâmica evolutiva apresentada trata a heterogeneidade do sistema como uma *annealed disorder* dirigindo os parâmetros das partículas para o conjunto  $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ . Outra interessante interpretação é tomar os parâmetros das partículas  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ , como componentes de um vetor  $m$ -dimensional definido no espaço de parâmetros. O **resultado principal 1** descreve um mecanismo que *dirige* a orientação destes vetores para uma direção favorecida  $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ . Com base nesta interpretação, podemos substituir as enumerações dos nodos de  $\Omega$  pelos vetores correspondentes às estratégias das partículas, conforme ilustrado na figura 21.

É possível traçar múltiplas trajetórias em  $\Omega$  passando por nodos com conectividades não nulas, partindo do líder até a última partícula no aglomerado, seguindo o sentido das interações (a trajetória é única considerando-se interações de primeiros vizinhos apenas). Em especial, é possível ligar todos os vizinhos em um mesmo aglomerado. Portanto, a evolução do sistema é bastante similar à evolução do modelo  $m$ -vetores dispostos espacialmente em arranjo unidimensional com condições de contorno livres e primeiro vetor (líder) fixo em uma determinada direção, apresentando interações de carácter ferromagnético. As diferenças são: o número de partículas interagentes depende do raio de interação; as interações são direcionadas; a probabilidade de um vetor ser modificado depende da conectividade com os vizinhos, e; o número de partículas interagentes não é fixo porque conforme o topo se torna homogêneo, as partículas se separam do aglomerado. A primeira consideração

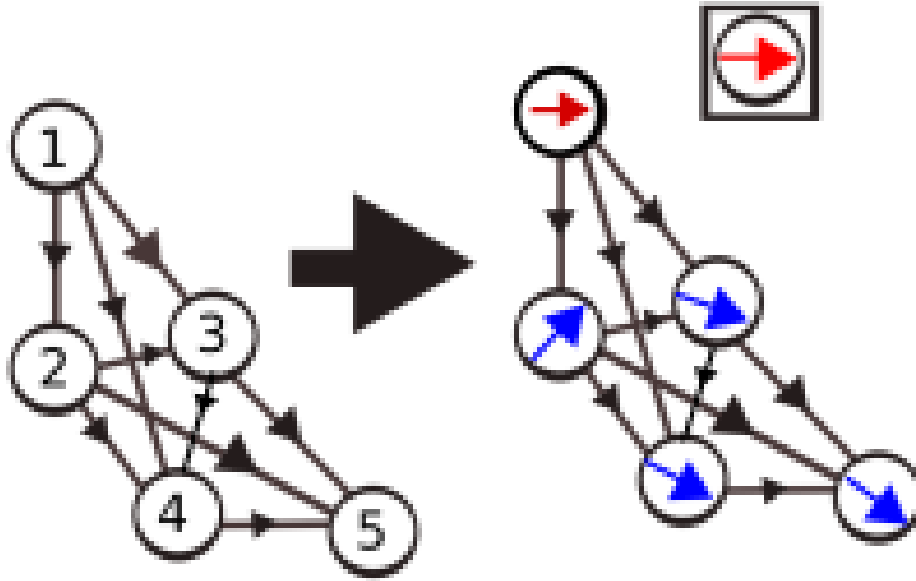


Figura 21 – O mesmo exemplo apresentado na figura 20, porém para cada nodo de  $\Omega$  associamos um vetor bidimensional definido no espaço de parâmetros. O caso geral seria  $m$ -dimensional. Não apresentamos a conectividade dos nodos por clareza. O líder (seta vermelha) tem a orientação idêntica à orientação da estratégia mais lenta inicialmente presente (representada pela seta vermelha na caixa). A dinâmica de imitação alinha a orientação da segunda partícula com a da líder em um único evento e, como a líder se destaca do aglomerado, aparece um novo grafo idêntico ao anterior, mas com uma partícula a menos, cujo líder (segundo nodo no grafo inicial) tem orientação idêntica ao antigo.

não é fundamental. Para mudar o comportamento crítico do modelo de  $m$ -vetores, o número de vizinhos interagentes deveria ir para infinito polinomialmente no limite termodinâmico, o que claramente não acontece aqui. A última consideração implica que, sempre que um vetor paralelo ao primeiro surge, devemos trocar a cadeia de vetores por uma cadeia menor, mas com mesmas propriedades. Portanto, não se trata de uma diferença fundamental. Por fim, o caráter unidimensional das interações e a conectividade não apresentam uma grande fonte de divergências porque o primeiro vetor no modelo de  $m$ -vetores equivalente tem sua direção fixada. Esta assimetria implica que o único estado estável desta evolução é todos os vetores alinhados com o primeiro e o crescimento desta bolha de vetores orientados na

mesma direção se dá partindo do primeiro para o último. O caráter direcional parece influir apenas na escala de tempo até chegar a este estado estacionário, assim como a influência das conectividades. Lembramos mais uma vez que estes argumentos são heurísticos e não dispomos de uma prova formal.

Definimos o segundo processo evolucionário de interesse como se segue.

**Definição 5.** *Um processo de mutação é um processo estocástico onde um parâmetro que controla o comportamento de uma partícula escolhida aleatoriamente é mudado para um valor vizinho de maneira independente. Supõe-se que tanto o parâmetro quanto a sua mudança são também escolhidos aleatoriamente e que este processo ocorre em um intervalo  $\tau_m$ .*

Esta definição procura simular mudanças que não estão relacionadas diretamente com melhoria de desempenho. São exemplos, a troca de veículos por gosto pessoal, *upgrades* no equipamento do veículo, surgimento de problemas mecânicos, etc. Podemos então enunciar o segundo principal resultado deste capítulo como se segue.

**Resultado principal 2.** *(Dominância do mais lento de todos) Sistemas sob as condições do **Resultado auxiliar 1**, sujeitos a imitações locais associados a mutações, apresentam dois comportamentos diferentes em tempos longos nos limites  $\tau_i/\tau_m \rightarrow \infty$  e  $\tau_i/\tau_m \rightarrow 0$ . No primeiro limite, as características dos parâmetros das partículas se aproximarão das características de um passeio aleatório no espaço de parâmetros. No segundo, as estratégias mais lentas alcançáveis no espaço de parâmetros dominam a população.*

*Argumento.* Se  $\tau_i/\tau_m \rightarrow \infty$ , então o processo de mutação domina a dinâmica evolucionária e podemos desprezar o processo de imitação. Por definição, o processo de mutação é um passeio aleatório no espaço de parâmetros sem meios de selecionar estratégias mais adequadas. Caso o parâmetro escolhido seja limitado, todos os seus valores serão visitados e, no limite termodinâmico e em tempos longos, a probabilidade de que a medida de tal parâmetro em qualquer partícula será igual para todos os valores. Caso o parâmetro, digamos  $X_t$ , seja limitado somente em uma extremidade, digamos  $X_0$ , definimos a variável  $Y_t = X_t - X_0$  se  $X_0$  é um limite

inferior, ou  $Y_t = X_0 - X_t$  se  $X_0$  é um limite superior. Com essa transformação, o efeito da dinâmica de mutação em  $Y_t$  é a promoção de um passeio aleatório em valores positivos. Se o parâmetro é ilimitado, o resultado segue trivialmente da definição do processo.

No caso em que  $\tau_i/\tau_m \rightarrow 0$ , o **resultado principal 1** afirma que o processo de imitação, que domina o processo evolucionário em tempos “curtos”, levará eventualmente o sistema a uma homogeneidade dominada pela estratégia lenta. A dinâmica de mutação causa a aparição de novas estratégias percebidas como mais rápidas, mais lentas, ou equivalentes à estratégia dominante. Mas o **resultado principal 1** afirma que as estratégias mais rápidas serão eliminadas pelo próprio processo de imitação. Por outro lado, o mesmo resultado afirma que as mutações para estratégias mais lentas que a dominante crescem e dominam a população. Portanto, temos um processo estocástico nos valores médios dos parâmetros que dirigem o sistema, no espaço de parâmetros, para os locais ocupados pelos parâmetros que caracterizam as estratégias mais lentas permitidas, que não precisam ser únicas.

□

A dinâmica local de imitação seleciona a estratégia mais adequada, ao passo que a dinâmica de mutação promove passeios aleatórios sem qualquer mecanismo de seleção. A associação destes processos piora o desempenho global do sistema, pois mutações relativamente raras adicionadas a um sistema dominado pela imitação resulta num direcionamento para a estratégia mais lenta possível. Até onde sabemos, esta é a única instância em que tal fenômeno acontece.

Com respeito à comparação com o modelo de m-vetores, a mutação tende a randomizar as orientações, o que parece similar ao efeito de ruídos térmicos, contudo, a estrutura do grafo  $\Omega$  não é mais estacionária. Se  $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$  são os parâmetros relacionados com a estratégia mais lenta permitida no espaço de parâmetros e uma flutuação acontece de tal forma que os parâmetros de uma partícula se tornem mais próximos deste conjunto que os parâmetros da partícula líder, então as conectividades de  $\Omega$  são quebradas e reaparecem com esta partícula como novo líder. Se as escalas de tempo em que ocorrem as dinâmicas evolucionárias são superiores à escala de relaxação para a nova configuração, permite-se uma

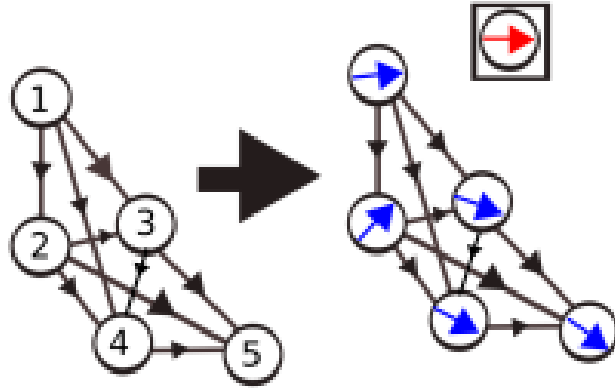


Figura 22 – O mesmo que o apresentado na figura 21, mas com a adição da mutação. Aqui,  $\tau_m \gg \tau_i$ , e o líder tem a orientação mais próxima da estratégia mais lenta definida no espaço de parâmetros (seta vermelha na caixa) dentre todas as partículas no sistema, representadas pelas setas azuis. Neste exemplo, a direção correspondente à mínima velocidade máxima é única, o que não é necessariamente verdade no caso geral. A dinâmica de imitação alinha a orientação da segunda partícula para a orientação da líder em um único evento e a mutação causa flutuações aleatórias em torno desta direção. No caso em que uma flutuação ocorre de tal maneira que a orientação de um vetor se torna mais próxima ao vetor destacado na caixa que o líder, as conectividades do grafo  $\Omega$  se quebram e se reconstróem de maneira que esta partícula é a nova líder, o que corresponde à relaxação do sistema em um aglomerado com novo líder. Observe que a vizinhança de cada nodo é inalterável, porém as conectividades não são mais estacionárias.

analogia aos modelos de  $m$ -vetores apresentados nos parágrafos anteriores com uma pequena modificação. O primeiro vetor não é mais fixo numa orientação, como o caso anterior, mas é sujeito a um ruído direcionado para  $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ . Cada oscilação deste vetor corresponde a uma variação na liderança do aglomerado, seja pela mutação do próprio líder para uma estratégia mais lenta, seja pela substituição do líder devido a uma mutação em outro. Um exemplo é ilustrado na figura 22. Por outro lado, quando  $\tau_m \gg \tau_i$  não é observado, a variação das conectividades se torna bastante complicada e  $\Omega$  se fragmenta constantemente.

Comentamos que, em altas concentrações,  $\Omega$  é um grafo cíclico e não pode ser fragmentado. É notável que a similaridade da dinâmica de mutação com ruído

térmico se torna mais precisa neste caso, onde o sistema se comporta como um modelo de  $m$ -vetores sujeito a condições periódicas de contorno, pois neste caso não temos mais a assimetria promovida pela presença de um líder e não há mais fragmentações por períodos longos. Contudo, por similaridade com o modelo de  $m$ -vetores unidimensional, esperamos ordenamento das orientações em  $\tau_i/\tau_m \rightarrow 0$  e desordem em  $\tau_i/\tau_m \rightarrow \infty$ . A natureza desta transição a baixas densidades, assim como possíveis mudanças de comportamento a densidades mais altas, será deixada para outros estudos.

Pode-se perguntar porque a similaridade com o modelo de  $m$ -vetores em detrimento de modelos de matéria ativa [127–130] que parecem ser a escolha mais natural, haja vista a explícita mobilidade das partículas. A razão é que muito pouco da discussão toca o aspecto dinâmico das posições e velocidades das partículas. Para a veracidade do **resultado auxiliar 2**, o que importa é se as partículas estão dentro do raio de interação umas das outras ou não, e não as posições reais.

### 4.3 Aplicações

Após a discussão abstrata apresentada no capítulo anterior, entraremos em aplicações concretas nesta seção. Abordaremos dois exemplos: O modelo NaSch heterogêneo e populações multi-comportamentais. O primeiro tem a vantagem de fornecer cálculos aproximados simples com respeito aos resultados auxiliares e interessantes confirmações em experimentos computacionais dos resultados apresentados. O segundo é apresentado aqui como uma extensão das populações heterogêneas apresentadas na literatura inspirada nos modelos heterogêneos abordados na primeira parte deste trabalho.

#### 4.3.1 O modelo NaSch heterogêneo

Conforme já apresentado, no modelo NaSch [5] as partículas aceleram uma unidade por intervalo de tempo até a velocidade máxima:  $v(t) = \text{MIN}(v(t-1) + 1, v_{max})$ . Em seguida, há a avaliação do espaço disponível no segundo passo,  $v(t) = \text{MIN}(v(t), \chi(t))$ . A velocidade é randomizada no terceiro passo:  $v(t) = \text{MAX}(0, v(t) - 1)$  com probabilidade  $p$ . Após todas as partículas serem submetidas

aos três passos, as posições são atualizadas no quarto passo:  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t-1) + \mathbf{v}(t)$  (notação vetorial). Observamos a propriedade **P3** no primeiro e segundo passos, a propriedade **P1** e **P2** no segundo passo. **P4** aparece na hipótese implícita do fechamento do sistema (não há perdas ou produções de partículas em nenhum dos passos).

Introduzimos o modelo NaSch heterogêneo como a manifestação de uma *quenched disorder* no espaço de parâmetros que se manifesta como a variação de  $v_{max}$  e  $p$  em cada partícula. Este modelo heterogêneo é um caso distinto por permitir aproximações analíticas. Suponha que  $p_k = 0 \forall k$ , estejamos no regime livre e que a  $j$ -ésima partícula (rápida) seja inicializada atrás da  $(j+1)$ -ésima partícula (lenta), porém afastada. Por hipótese,  $\chi_{j+1,j}$  vai diminuir com o tempo até que no instante  $t$  a  $j$ -ésima partícula alcance a posição  $x_j(t) = x_{j+1}(t-1) - 1$ , e a  $(j+1)$ -ésima partícula manterá sua velocidade de  $v_{max,s}$ . Neste caso, o segundo passo do algoritmo NaSch implica em:

$$\begin{aligned} v_j(t+1) &= x_{j+1}(t) - x_j(t) - 1 \\ &= (x_{j+1}(t-1) + v_{max,j}) - (x_{j+1}(t-1) - 1) - 1 \\ &= v_{max,j+1} = v_{max,s}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

A velocidade da partícula lenta,  $v_{max,s}$ , é transmitida para as partículas que a seguem. Dado que as velocidades das duas partículas são iguais, as distâncias entre as partículas também serão iguais. Repetindo o argumento para todas as partículas, obtemos um curioso comportamento coletivo no estado livre, caracterizado por todas as partículas desenvolverem a mesma velocidade média e se encontrarem a mesma distância relativa entre si. Surpreendentemente, esta coerência não é perdida no regime congestionado. Visto que o segundo passo NaSch domina a dinâmica da população, a velocidade da  $(j+1)$ -ésima partícula num instante  $t$  é  $v_{j+1}(t) = \chi_{j+2,j+1}(t-1)$ , portanto, este veículo será atualizado para a posição  $x_{j+1}(t+1) = x_{j+1}(t) + \chi_{j+2,j+1}(t-1)$  no instante  $t+1$ . Aplicando o segundo passo

para a partícula seguinte, a  $j$ -ésima partícula, no instante  $t + 2$  teremos:

$$\begin{aligned}
 v_j(t + 2) &= x_{j+1}(t + 1) - x_j(t + 1) - 1 \\
 &= (x_{j+1}(t) + \chi_{j+2,j+1}(t - 1)) - (x_j(t) + \chi_{j+1,j}(t)) - 1 \\
 &= (x_{j+1}(t) - x_j(t) - 1) - \chi_{j+1,j}(t) + \chi_{j+2,j+1}(t - 1) \\
 &= \chi_{j+2,j+1}(t - 1),
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

porque,  $\chi_{j+1,j}(t) = x_{j+1}(t) - x_j(t) - 1$ . Precisamente a uma densidade de  $c^* = 1/(1 + v_{max,s})$ , as configurações do sistema mudam de uma configuração monótona onde  $\chi_{j+1,j} = v_j = v_{max,s}$  para todo  $j$  entre 1 e  $N$ , e transita para um regime onde ambos, a distância relativa e velocidades, apresentam periodicidade  $N$ . Ainda, segundo a dominância do segundo passo NaSch a altas concentrações, a velocidade média pode ser aproximada por:

$$\bar{v} = \frac{\mathcal{V}}{N} = \begin{cases} (Nv_{max,s})/N = v_{max,s} & \text{if } c < c^* \\ (\sum_{i=1}^N x_{i+1} - x_i - 1)/N = 1/c - 1 & \text{if } c \geq c^*. \end{cases} \tag{4.6}$$

Usamos as condições periódicas de contorno na forma  $x_{N+i} - x_i = L$ , e observamos que a soma no segundo termo é uma soma telescópica acrescida de uma constante  $N$ . Estes resultados indicam que, assim como no modelo NaSch, as velocidades e os espaços são transmitidos às próximas partículas integralmente. Note que, no limite analítico, a diferença dinâmica entre o modelo NaSch homogêneo e o modelo NaSch heterogêneo a baixas densidades é apenas que o modelo NaSch heterogêneo apresenta um **único** estado estável que atrai todas as órbitas ao passo que o modelo NaSch homogêneo possui uma infinidade de estados estáveis sem hierarquia de dominância entre eles. Quando discutimos a fase congestionada do modelo NaSch no capítulo anterior, observamos a formação de um triângulo isósceles no diagrama fundamental, cujos lados são a faixa de concentração onde esta fase aparece e a perpendicular que encontra a densidade crítica. Comentamos que, como consequência da existência deste triângulo, é impossível saber a velocidade máxima do modelo a densidades muito altas. A análise do modelo NaSch heterogêneo mostra que não é possível saber, também, se o modelo é de fato heterogêneo ou não a altas densidades.

Para considerar valores não nulos da randomização, usamos a mesma aproximação apresentada na primeira parte deste trabalho. No regime livre, a velocidade média da partícula livre é dada por:

$$\bar{v} = (1 - p_s)v_{max,s} + p_s(v_{max,s} - 1) = v_{max,s} - p_s. \quad (4.7)$$

Para a partícula que a segue, caso a distância ao líder seja menor que  $v_{max,s}$ , seu desenvolvimento será barrado pelo segundo passo. Por outro lado, se a distância for maior que  $v_{max,s}$ , então o primeiro passo diminuirá esta distância. Portanto, a velocidade da segunda partícula deve seguir uma distribuição centrada em  $v_{max,s} - p_s$ . Observe que este resultado não depende da velocidade máxima desta partícula ou da sua probabilidade de desaceleração, embora os detalhes da distribuição possam variar com estes parâmetros. Repetimos o argumento para as demais partículas.

A altas densidades, retemos apenas o primeiro termo na expressão  $\bar{v} = v(1 - p) + p(v - 1)$  porque boa parte dos veículos está parado ou com velocidade  $v = 1$ , ambos anulando o segundo termo. Portanto escrevemos

$$\bar{v} = (1 - \bar{p})(1/c - 1), \quad (4.8)$$

onde  $\bar{p}$  é o valor médio do parâmetro  $p$  na população.

Estes resultados possibilitam uma aproximação para a distância entre partículas neste sistema. Dado que tanto no regime congestionado quanto no regime livre as partículas estão sempre em “contato”, existe um valor médio da distância entre partículas e as peculiaridades do sistema são varridas pela randomização das velocidades, as flutuações aparecem devido a uma partícula sofrer efeitos do terceiro passo NaSch e a outra não, logo:

$$\chi_{j+1,j} = p_j q_{j+1}(\bar{v} - 1) + (p_j p_{j+1} + q_j q_{j+1})\bar{v} + q_j p_{j+1}(\bar{v} + 1), \quad (4.9)$$

onde  $q_k = 1 - p_k$ . Note que a distância entre partículas depende do parâmetro  $p$  de ambas as estratégias, variando consideravelmente de partícula a partícula. Contudo, um valor médio bem definido existe para todas.

As expressões 4.7 e 4.9 resumem os resultados auxiliares. Como exemplo, considere o seguinte conjunto de estratégias:

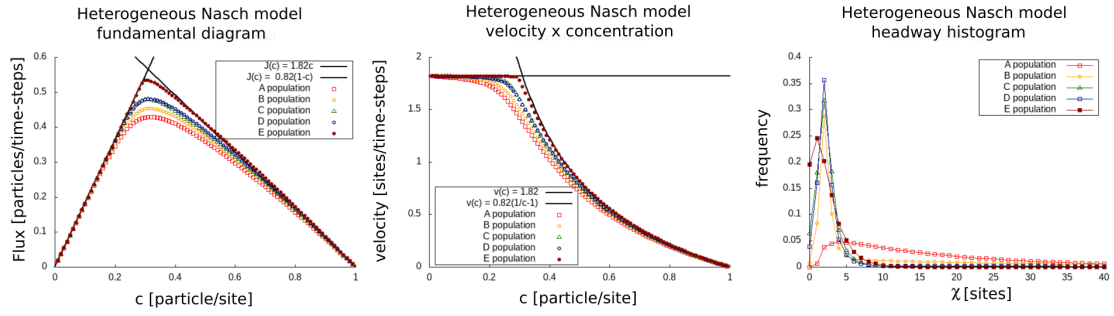


Figura 23 – O diagrama fundamental (à esquerda), a velocidade média da população em função da concentração (ao centro) e a distância média entre partículas (à direita) para populações heterogêneas apresentadas. Os erros são menores que os símbolos. As curvas das velocidades médias são limitadas por baixo pela população homogênea mais lenta (População  $A$ ) e por cima pelas curvas teóricas  $f(c) = (v_{max,s} - p_s)$  e  $g(c) = (1 - p_s) \cdot (1/c - 1)$  representadas por linhas sólidas (as curvas se encontram em  $c = (1 - p_s)/(v_{max,s} + 1 - 2p_s)$ ). Note que o acordo se torna melhor à medida que a fração de veículos rápidos aumenta. Note os picos próximos a  $d = v_{max,s} = 2$  no histograma de distâncias relativas e compare as formas das populações heterogêneas com a população homogênea. A presença de estruturas organizadas é evidente.

$$S = \{(1 + n, 0.19 - 0.01n) : n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}\}.$$

Neste conjunto,  $n = 1$  é a estratégia mais lenta e  $n = 8$  é a estratégia mais rápida. A distribuição inicial de espécies é descrita pelo vetor  $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8)$ , onde  $c_i$  é a fração parcial da espécie  $i$  ( $\sum_i c_i = 1$ ). Tomamos cinco populações iniciais representativas:

$$\begin{aligned} A &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ B &= (0.50, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.20) \\ C &= (0.125, 0.125, 0.125, 0.125, 0.125, 0.125, 0.125, 0.125) \\ D &= (0.20, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.50), \text{ e} \\ E &= (.01, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.99). \end{aligned}$$

A população é  $A$  homogênea, lenta e a usaremos como referência. Em  $C$ , as espécies são igualmente representadas e a população  $E$  é quase completamente formada

por estratégias rápidas. Nas simulações, consideraremos sistemas de 10.000 sítios e condições periódicas de contorno. As medidas foram feitas sobre 10 condições iniciais aleatórias distintas e sobre  $10^6$  passos. As medidas começaram após um transiente  $10^6$  em cada experimento para assegurar o alcance ao estado estável.

A figura 23 mostra os resultados obtidos para a curva fluxo por concentração, a curva da velocidade média em função da concentração e o histograma de distância entre duas partículas, e os resultados analíticos aproximados são confirmados a baixas e altas concentrações. Surpreendentemente, quanto maior a concentração de estratégias rápidas, melhor é o acordo experimental com a curva teórica. Note que a população homogênea tem sempre um desempenho pior que as outras populações. Isso é esperado, visto que em densidades onde o regime é congestionado em populações homogêneas, as partículas lentas nas populações heterogêneas (líderes) se encontram em estado “livre” devido à compactação promovida pela aglomeração das partículas rápidas nestas populações. Argumentamos no capítulo anterior que as curvas teóricas 4.7 se comportam como um limite superior para a população homogênea e os resultados sugerem o mesmo para populações heterogêneas, como também sugerem que a curva da população homogênea se comporta como um limite inferior. A curva específica depende da composição da população, mas sempre se localizará na região entre estas curvas.

Para ilustrar o **resultado principal 1**, formulamos o seguinte processo de imitação: a cada  $10^2$  passos escolhemos aleatoriamente 5% da população; durante  $10^2$  passos, medimos a velocidade média da partícula focal  $\bar{v}_f$ , e da partícula a frente, que desenvolve a estratégia alvo,  $\bar{v}_t$ ; se a conectividade para a partícula alvo medida neste intervalo é superior a 0.8, então ela imitará os parâmetros do alvo com probabilidade  $\mathcal{P} = \bar{v}_t / (\bar{v}_f + \bar{v}_t)$ . Note que  $\tau_i$  pode ser aproximado como  $\tau_i \approx 2 * 10^2 * (1/0.05) = 4 * 10^3$  passos. Os resultados são apresentados na figura 24, onde é mostrada a trajetória da população em termos dos valores médios dos parâmetros  $v_{max}$  e  $p$ , isto é, apresentamos a trajetória dos valores médios da população no espaço de parâmetros. Observe a clara atração ao ponto (2, 0.18), a mais lenta estratégia presente no sistema. As trajetórias retilíneas não são as trajetórias mais gerais possíveis, mas ocorrem aqui porque o conjunto  $\mathcal{S}$  é construído de forma que mudanças no parâmetro  $v_{max}$  de uma partícula são

diretamente proporcionais à mudança do parâmetro  $p$ .

Para adicionar a dinâmica de mutação ao processo evolutivo, escolhemos aleatoriamente 5% da população e mudamos um parâmetro desta partícula por um fator  $\delta$ . Com igual probabilidade, escolhemos  $v_{max}$  ou  $p$  para adicionar ou subtrair uma quantidade,  $\delta = 1$ , se  $v_{max}$  for escolhido, ou  $\delta = 0.01$ , se  $p$  for escolhido. Os parâmetros variam nos conjuntos  $v_{max} \in [1, \infty)$  e  $p \in [0, .99]$ . Como a imitação acontece a cada  $4 * 10^3$  passos, dividimos as simulações em três escalas de tempo: uma vez a cada  $10^3$  eventos de imitação, ou  $\tau_i/\tau_m = 0.001$ ; uma vez a cada evento de imitação,  $\tau_i/\tau_m = 1$ , e;  $10^3$  cada evento de imitação, ou  $\tau_i/\tau_m = 1000$ . Os resultados, medidos sequencialmente em intervalos de  $10^3$  passos, ao longo de  $10^7$  passos são apresentados na figura 25. Observe que as trajetórias a  $\tau_i \gg \tau_m$  são muito similares a passeios aleatórios e existe uma atração forte ao ponto  $(1, 0.99)$  em  $\tau_m \gg \tau_i$ . Contudo, o comportamento é complexo em  $\tau_i \approx \tau_m$ , onde se observa uma atração fraca ou um passeio aleatório em uma região preferencial. A trajetória da população E é similar ao caso  $\tau_m \gg \tau_i$ , contudo próximo ao ponto  $(1, 0.99)$ , o trajeto parece “evitar” o ponto da estratégia mais lenta, traçando uma trajetória aleatória em sua vizinhança. Isto acontece porque, a randomizações altas, as velocidades são indistinguíveis em intervalos curtos. Por exemplo, a  $n$ -ésima partícula da configuração ...000.... partindo da partícula mais a frente, demora em média  $\tau = 1/(1 - p)^n$  passos para se mover, independentemente da sua velocidade e  $\tau$  se torna muito grande quando  $p \rightarrow 0.99$ . Como o raio de interação é igual à velocidade máxima e as partículas estão na posição de velocidade mínima,  $v_{max} = 1$ , elas se tornam invariantes ao processo de imitação, visto que  $R = 1$  não é suficiente para cobrir um vizinho, logo a dinâmica evolutiva é momentaneamente dominada pela mutação. Como a velocidade pode apenas crescer (por estar próximo ao seu limite esquerdo), a população E passeia para valores à direita quando se aproxima do ponto  $(1, 0.99)$ . Note, contudo, que os valores de  $p$  ainda crescem nesta situação.

### 4.3.2 Populações multi-comportamentais

É conveniente estender um pouco o conceito de modelos de tráfego visto que incorporar mais parâmetros nos algoritmos conhecidos não exaure as características intrínsecas das diversas formas de se dirigir um veículo. Por exemplo, veículos

pesados apresentam menores acelerações do que veículos leves e iniciam a sua desaceleração a intervalos maiores. Como o modelo NaSch apresenta uma aceleração fixa e nenhuma diferenciação quanto ao horizonte de interações, é necessário um novo modelo para simular tal situação. Com essas considerações em mente, definimos populações multi-comportamentais (*multi-behavioral*) como um conjunto de modelos emergindo de diferentes algoritmos, compartilhando o mesmo ambiente cujo comportamento depende de um conjunto heterogêneo de parâmetros. O modelo será apresentado em detalhes a seguir e é idealizado como um exemplo de um modelo muito complicado que pode, em princípio, apresentar um acordo experimental arbitrário (é possível que cada partícula siga um comportamento específico), onde os resultados principais ainda são válidos.

Considere sete modelos CA retirados da referência [131]. O já discutido modelo NaSch [5] que requer os parâmetros  $v_{max}$  e  $p$ . Uma variação do modelo NaSch que leva em consideração dois valores da randomização, a randomização quando a partícula está com velocidade máxima,  $p_f$ , ou  $p$  (no modelo original  $p_f = 0$ ) caso contrário, chamado de Cruise-Control NaSch (NaSch-CC) [85, 132]. O modelo estocástico proposto por Fukui e Ishibashi (SFI) [84], que trabalha uma modificação semelhante ao NaSch-CC, mas  $p_f > p$  (no trabalho original,  $p = 0$ ). Takayasu et al. (TT) propuseram um modelo similar ao modelo TASEP, mas com aceleração retardada em caso de uma distância entre veículos,  $\chi_s$ , curta [133]. Este modelo requer os parâmetros  $v_{max}$  e  $\chi_s$ . No trabalho original  $v_{max} = 1$ , e  $\chi_s = 1$ . Consideramos também o modelo proposto por Benjamim et al. (BJH) [134] que implementa uma regra de aceleração retardada quando a partícula está parada (*slow-to-start rule*), de natureza temporal. Um veículo parado acelerará com probabilidade  $1 - p_s$  e, caso o movimento não ocorra, tentará outra vez com probabilidade  $p_s$  no próximo ciclo. Este modelo requer três parâmetros:  $v_{max}$ ,  $p$ , e  $p_s$ . O modelo proposto por Barlović et al. (VDR) [42, 135] aplica uma *slow-to-start rule* mais intuitiva ao modelo NaSch usando uma randomização para a partícula parada,  $p_0$ . Finalmente, o modelo proposto por Brilon e Wu (TO) [136] usa intervalos de alcance entre partículas (*temporal headways*) para obter interações mais realistas que as apresentadas pelo modelo NaSch. O modelo requer um intervalo temporal de segurança (*security time-gap*)  $G_t$ , a velocidade máxima,  $v_{max}$ , a randomização,

$p$ , uma probabilidade de aceleração,  $p_{acc}$ , e uma probabilidade de desaceleração,  $p_{dcc}$ . Consulte os trabalhos originais para mais detalhes de implementação e uma apresentação mais compreensiva destes modelos.

Boa parte dos modelos mencionados são derivados do modelo NaSch, ou apresentam um limite que corresponde à sua manifestação. Por exemplo, podemos reunir os modelos NaSch, NaSch-CC, SFI, e VDR em um único modelo, requerendo os parâmetros  $(v_{max}, p, p_0, p_f)$ , onde os modelos NaSch, SFI e VDR corresponderiam aos sub-espacos  $(v_{max}, p, 0, p)$ ,  $(v_{max}, p, 0, p_f)$ , e  $(v_{max}, p, p_0, p)$ , respectivamente (os modelos NaSch-CC e SFI estão contidos no mesmo sub-espaco). Contudo, a incorporação dos outros modelos não é possível porque eles usam os parâmetros de entrada de maneiras diferentes. Logo, é conveniente a introdução de um parâmetro de controle,  $\beta$ , que verse sobre o que fazer com determinados parâmetros, o que permite a inclusão de todos como partes de um modelo único, cuja manifestação comportamental dependa do valor de  $\beta$ . Expandimos o espaco de parâmetros,  $\Pi$ , para conter todos os parâmetros mais  $\beta$ :  $\Pi_e = (v_{max}, p, p_s, p_0, p_f, p_{acc}, p_{dec}, \chi_s, G_t, \beta)$ . Podemos dizer então que  $\beta$  está relacionado com projeções neste espaco, que associa os parâmetros adequados aos algoritmos apropriados<sup>1</sup>. Por exemplo, para  $\beta = 1$ , dizemos que uma partícula inicializada com  $(v_{max}, p, p_s, p_0, p_f, p_{acc}, p_{dec}, \chi_s, G_t, 1)$  manifestará comportamento idêntico ao modelo NaSch a parâmetros  $(v_{max}, p, 0, p, p, 0, 0, 0, 0, 1)$ .

A concepção do parâmetro de controle  $\beta$  não só nos permite aglutinar um número arbitrário de modelos com grau arbitrário de realismo (número de parâmetros) em um único modelo<sup>2</sup>, mas também nos permite introduzir populações

<sup>1</sup> Note que o parâmetro  $\beta$  pode ser usado como probabilidade de manifestação de comportamentos, definindo assim classes contínuas de modelos. Por exemplo, se  $\beta$  é um número real positivo, podemos definir  $\gamma = \beta - INT(\beta)$  ( $INT(a)$  significa a parte inteira de  $a$ ) como a probabilidade que a partícula, no instante  $t$ , manifeste o comportamento típico de uma partícula com parâmetro especial  $INT(\beta)$  e probabilidade  $1 - \gamma$  de manifestar um comportamento de uma partícula com parâmetro especial  $INT(\beta) + 1$ . Não fazemos isso aqui porque não é fundamental para nossos objetivos e, porque essa interpretação implica que os modelos obedecem a uma certa métrica, por exemplo, baseada nas similaridades entre eles (parece mais direto que uma partícula NaSch manifeste, devido a processos do tipo mutação, um comportamento NaSch-CC na próxima rodada que um comportamento tipo TO) e não dispomos de dados suficientes ou de uma maneira não-ambígua de inferir tal métrica.

<sup>2</sup> Esta forma de aglutinação de modelos nas populações multi-comportamentais não é computacionalmente eficiente e o seu realismo deve ser comparado com dados experimentais (não feito aqui). Observando que, por exemplo,  $v_{max}$  é um parâmetro recorrente em todos os modelos e

multi-comportamentais da mesma maneira que populações heterogêneas são introduzidas na literatura: populações multi-comportamentais são *quenched disorders* no espaço de parâmetros  $\Pi_e$ , isto é, se trata de uma população com parâmetros variados incluindo o parâmetro de controle  $\beta$ , que neste exemplo assume os valores  $\beta \in [1, 7]$  com cada inteiro associado a um dos algoritmos apresentados nos parágrafos anteriores na respectiva ordem.

Observando a similaridade com o modelo de m-vetores, o **resultado principal 2** prevê uma tendência para orientação a  $\tau_i/\tau_m \rightarrow 0$  e uma tendência a desorientação em  $\tau_i/\tau_m \rightarrow \infty$ , o que sugere o seguinte “parâmetro de ordem”:

$$\theta = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\mathbf{m}_j \cdot \bar{\mathbf{m}}}{|\mathbf{m}_j| |\bar{\mathbf{m}}|}. \quad (4.10)$$

Nesta equação,  $\mathbf{m}_j$  é um vetor caracterizado pelos parâmetros da  $j$ -ésima partícula,  $(v_{max}, p, p_s, p_0, p_f, p_{acc}, p_{dec}, \chi_s, G_t, \beta)$ , mas que depende do parâmetro  $\beta$  de forma peculiar. Se  $\beta = 1$ , por exemplo, então  $\mathbf{m}_j = (v_{max}, p, 0, p, p, 0, 0, 0, 0, 1)$ , *i.g.* uma projeção na porção do espaço onde algoritmos NaSch estão definidos. Isto é necessário porque uma partícula que apresenta o comportamento idêntico ao modelo NaSch ainda estará sujeita à dinâmica de mutação em parâmetros irrelevantes (que não sofrem pressões evolucionárias) o que pode poluir as medidas. Note que os  $\mathbf{m}_j$ 's não são vetores unitários e que  $\theta$  assume seu maior valor (unitário) **apenas** em populações homogêneas.

---

é empregado com o mesmo significado físico em todos, mas é tratada de maneira diferente pelos núcleos dos algoritmos temos que as estratégias em populações multi-comportamentais possam ser calibradas não apenas por parâmetros externos, mas também por “classes” de operações, tornando o seu uso bastante versátil para a simulação em diferentes situações. Por exemplo, 6 dos 7 modelos mencionados são programáveis em três passos (atualização da velocidade) e 5 destes 6 modelos apresentam a mesma ordenação dos passos. Uma rápida inspeção destes 5 modelos mostra: duas variedades de aceleração (NaSch,TT); três variedades de se levar a distância entre partículas em consideração (NaSch, TT, TO), e; quatro formas de se implementar a randomização das velocidades (NaSch, NaSchCC+VDR,BJH,TO). Logo é possível não só simular estes algoritmos com um código de duas classes de aceleração, três classes de avaliação do espaço e quatro classes de randomização, mas também todos os 24 modelos que surgem da permutação destas classes. Note também que esta separação já sugere uma métrica menos arbitrária para a “distância” entre os modelos. Por exemplo, consideramos cada classe de operação uma direção espacial num espaço euclidiano discreto e cada forma de implementação desta operação um ponto, de forma que  $\beta$  se torna um vetor quadridimensional e na definição acima especificamos cada um de seus componentes.

A generalidade implícita no **resultado principal 2** sugere que  $\theta = \theta(\tau_i/\tau_m)$  em simulações de períodos longos quando a razão dos períodos é pequena ou grande. Portanto, os comportamentos esperados em sistemas grandes são:  $\theta(\tau_i/\tau_m \rightarrow 0) \rightarrow 1$  e  $\theta(\tau_i/\tau_m \rightarrow \infty) \rightarrow \alpha(\beta) < 1$ . O primeiro caso mostra uma continuidade de  $\theta$  em relação ao **resultado principal 1**, que afirma que a dinâmica de imitação tende a promover um sistema homogêneo. No segundo limite, a dinâmica de mutação domina a evolução do sistema e o seu valor depende do número e escopo dos parâmetros pertinentes que variam de modelo a modelo ( $\beta$ ). Implementamos então experimentos medindo  $\theta(\tau_i/\tau_m)$  para diferentes tamanhos do sistema cujos resultados são apresentados na figura 26 onde as condições iniciais são definidas na região:  $v_{max} \in [4, 9]$ ;  $p \in [0.1, 0.5]$ ;  $p_f \in [0, 0.5]$ ;  $p_s \in [0.9, 0.95]$ ;  $p_0 \in [0.4, 0.7]$ ;  $p_{acc} \in [0.9, 0.95]$ ;  $p_{dcc} \in [0.8, 0.95]$ ;  $\chi_s \in [0, 2]$ , e;  $G_t \in [1, 1.3]$ , e;  $\beta \in [1, 7]$ . Já as trajetórias evolucionárias foram permitidas variar pela região:  $v_{max} \in [1, 99]$ ;  $p, p_f, p_s, p_0, p_{acc}, p_{dcc} \in [0.01, 0.99]$ ;  $\chi_s \in [0, 5]$ , e;  $G_t \in [1, 3]$ .

O comportamento não estritamente decrescente de  $\theta$  conforme  $\tau_i/\tau_m$  cresce é surpreendente, mas pode ser entendido da definição de  $\theta$ . Como nenhum parâmetro dos modelos assume valores negativos, da equação 4.10 vemos que o valor mínimo de  $\theta$  não ocorre quando os parâmetros são aleatórios, mas quando metade da população está orientada em uma direção angular e a outra metade é orientada ao longo de outra direção perpendicular. Em outras palavras, a queda brusca observada corresponde à passagem de um domínio por uma única estratégia para o domínio de algumas poucas estratégias representando algoritmos diferentes (devido ao aspecto projetivo de  $\beta$  e à definição de  $\theta$ , dois tais algoritmos são perpendiculares entre si). Daí, o aumento monotônico corresponde ao aumento da contagem de espécies compartilhando o meio no momento da contagem. Embora a tendência geral de acentuação da queda com o tamanho do sistema indique a presença de um fenômeno interessante, parece não se tratar de uma transição de fases por similaridade ao modelo de *n-vetores* 1D, limitado pelo teorema de Mermin-Wigner-Coleman (não há evidências que indiquem que o caráter discreto dos parâmetros provoque mudanças significativas neste caso).

Para encerrar esta seção, vamos discutir a forma geral da curva  $\theta(\tau_i/\tau_m)$  e as distinções quanto aos modelos apresentados em itens.

### i A forma geral

O **resultado principal 2** aplica-se apenas a comportamentos assintóticos. Todos os modelos heterogêneos satisfazendo as premissas terão  $\theta(\tau_i/\tau_m \rightarrow 0) \rightarrow 1$ , e  $\theta(\tau_i/\tau_m \rightarrow \infty) \rightarrow \alpha(\beta)$ , onde  $\alpha$  é uma constante que depende do número de parâmetros e do escopo destes parâmetros ( $\beta$ ). As diferenças nas curvas de diferentes estratégias surgem porque  $\tau_i$  e  $\tau_m$  são escalas de tempo relacionadas com a escolha de uma partícula em participar de um dos processos evolucionários, e não escalas de tempo de reais mudanças dos indivíduos. Embora a mutação seja efetivada a cada ciclo (mutações em parâmetros “redundantes” são ignoradas), a imitação não é, pois, depende de outros fatores. Dois modelos podem apresentar duas distâncias estacionárias diferentes, afetando a conectividade entre as partículas e o processo de imitação. Mesmo no simples modelo NaSch heterogêneo, as distribuições das distâncias médias dependem dos parâmetros de desaceleração de ambas as partículas.

### ii profundidade do mínimo

O mínimo valor de  $\theta$  não aparece por uma randomização das orientações dos vetores, mas por uma organização das orientações em torno de duas ou mais direções. Seu valor também depende da dimensão do modelo e do escopo de seus parâmetros e se torna zero apenas em casos onde há populações homogêneas nos algoritmos presentes no sistema (perpendiculares na definição da medida de  $\theta$ , o que não atrai órbitas devido à presença da mutação). A inclinação em torno deste mínimo se torna mais pronunciada com o aumento do tamanho do sistema porque o tamanho dos aglomerados que produzem as homogeneidades também escala com ao tamanho do sistema e com menos partículas livres disponíveis, a densidade efetiva do ambiente diminui (no sentido de zona de influência sobre os líderes diminui) e nos aproximamos do limite termodinâmico  $\omega_{l+n,l} = 0$  ( $l$  denota o líder e  $n$  é um inteiro qualquer). Isto implica que há menos variabilidade do sistema conforme os líderes são menos perturbados pelas partículas dos outros aglomerados. Caso haja duas estratégias com mesma velocidade média liderando dois aglomerados

diferentes, ambas dominarão seus respectivos aglomerados, “polarizando” a população e reduzindo o valor de  $\theta$ .

- iii **posição horizontal do mínimo** Uma inspeção na figura 26 mostra que modelos com mecanismos de aceleração atrasada (*delayed accelerations*) em movimento, como os modelos TT e BJH tem a posição horizontal do mínimo deslocado para a esquerda ao passo que modelos que fomentam aceleração a altas velocidades, como o NaSch-CC, tem esta posição deslocada para a direita. Não sabemos por que isso acontece, mas oferecemos uma “opinião educada”. Modelos que apresentam mecanismos de acelerações atrasadas tendem a aglutinar partículas, e este fato implica que a dinâmica de imitação é mais ou menos eficiente quando a densidade é moderada ou baixa, respectivamente. Isto se dá porque, a baixas densidades, as partículas podem passar mais tempo “livres” que interagindo nos aglomerados eventuais. Como nestes casos é necessária uma distância mínima para iniciar a aceleração, o contato com os líderes fica prejudicado e a conectividade entre as partículas decresce (o aglomerado estável promovido pelo líder se quebra com facilidade em função do surgimento dos aglomerados transientes típicos do modelo). Logo, mais seleções para imitação são necessárias em comparação com os outros modelos, ou seja, para o mesmo  $\tau_m$ , necessita-se de um  $\tau_i$  inferior para se obter o mesmo resultado que os modelos que não apresentam tais mecanismos. Este fato translada a curva de  $\theta$  em direção ao eixo  $\tau_i/\tau_m = 0$ .

Alguns mistérios ainda permeiam estas curvas, como o formato atípico da curva BJH ou o comportamento anômalo da curva TT com o aumento do sistema. Contudo, o aspecto geral da curva  $\theta(\tau_i/\tau_m)$  mesmo em populações tão complicadas como as populações multi-comportamentais ilustra bem os resultados principais.

## 4.4 Resumo e Conclusões do capítulo

Partindo de quatro premissas simples, conseguimos mostrar a existência de um estado estável a baixas densidades em populações heterogêneas. Surpreendentemente, as características gerais deste estado estável permitem descrever a

teia de interações entre partículas no sistema como um grafo aleatório direcionado, com um único líder (ou um conjunto de grafos desconexos com um único líder), ou cíclico a altas densidades.

A introdução de processos evolucionários foi inspirada em processos de nascimento-morte em sistemas biológicos e o processo de imitação local foi justificado como simulação do comportamento de autoavaliação do desempenho feito por motoristas no tráfego real. Este processo é trabalhado como um mecanismo de evolução do comportamento das partículas por contato social, podendo ser ainda interpretado como uma *annealed disorder* no espaço de parâmetros, cuja dinâmica é direcionada para o conjunto de parâmetros com maior sucesso. Surpreendentemente, o conjunto de estratégias mais bem sucedidas não corresponde às estratégias que retornam a maior utilidade, mas o contrário. Observando a similaridade entre a teia de interações nestes sistemas com sistemas conhecidos da teoria evolucionária em grafos, concluímos que o resultado de tal processo é uma população homogênea composta pela estratégia mais lenta inicialmente presente na população. Este resultado não depende das estratégias mais rápidas e também não depende dos detalhes do processo, desde que o mesmo seja local e permita mudanças para estratégias com resultados similares (*random-drift*). Estes resultados são válidos a densidades moderadas e altas (embora em uma escala de tempo muito grande) porque o processo se torna um passeio aleatório  $M$ -dimensional, onde  $M$  é o número de comportamentos presentes, que apresenta estados estacionários caracterizados por populações homogêneas. Mas somente estratégias lentas apresentam estruturas estáveis, portanto, são favorecidas.

A dinâmica de mutação consiste em mudanças pequenas e independentes de natureza aleatória nos parâmetros das partículas e simula mudanças que ocorrem sem o objetivo de impacto direto no desempenho do motorista. Podemos citar como exemplo a troca por um veículo com características diferentes, o surgimento de um defeito mecânico, mais passageiros nos automóveis, etc. Associando a cada partícula um vetor no espaço de parâmetros cujas entradas são os seus valores, a dinâmica de imitação alinha estes vetores e a dinâmica de mutação os desalinha. Observando novamente que a teia de interações pode ser analisada como um grafo, há similaridades entre a dinâmica evolutiva destes sistemas e o modelo de

m-vetores, onde  $m$  é o número de parâmetros do modelo. Dado que os processos de imitação e mutação ocorrem há tempos característicos,  $\tau_i$  e  $\tau_m$ , respectivamente, teremos ordenamento a  $\tau_i/\tau_m \rightarrow 0$  e desordem nas orientações a  $\tau_i/\tau_m \rightarrow \infty$ . Este resultado é independente das estratégias (desde que as premissas sejam obedecidas) e dos processos subjacentes de evolução (desde que a imitação seja local e permita *random drift*). Tal similaridade não é rigorosa, visto que as interações não são necessariamente de primeiros vizinhos, são direcionadas, o tamanho do aglomerado de partículas interagentes não é fixo e nós não escrevemos explicitamente um operador Hamiltoniano para a dinâmica das orientações destes “vetores”. Outro ponto de divergência é que a dinâmica de mutação tem ação idêntica a flutuações térmicas somente a altas densidades. Contudo, estas divergências são tratáveis conceitualmente e discutidas no texto.

O caráter unidimensional do sistema simplifica consideravelmente o problema. Em “dimensões superiores” (modelos com múltiplas faixas), a associação à teoria de grafos com as ferramentas que apresentamos é difícil, visto que a ordenação das partículas não é mais invariante quanto à sua dinâmica, e as ferramentas que desenvolvemos aqui não são mais válidas. Cálculos e simulações preliminares sugerem que a inserção de ultrapassagens não-perturbativas, como as introduzidas no capítulo anterior, podem não ser suficientes para se escapar desta *tiranía do mais lento*. Isto acontece porque o veículo que realiza a manobra precisa de espaço suficiente para fazê-lo. Como a ordenação dos veículos que não ultrapassam é preservada, eventualmente se formarão aglomerados impossíveis de serem ultrapassados em uma única manobra. Logo, ultrapassagem será severamente limitada nestes casos.

Em modelos de múltiplas faixas, a inclusão de uma dinâmica evolucionária é promissora. Não apenas a *tiranía do mais lento* pode ser superada com mais facilidade, mas também diversos fenômenos interessantes podem ser observados. Por exemplo, são conhecidas ao menos duas formas de se modelar computacionalmente a escolha de uma faixa por um motorista para a mudança: pode-se escolher a mais rápida, em média, ou a menos densa localmente. Estas escolhas, que estão em certa medida relacionadas com a escolha do *caminho mais rápido*, podem estar relacionadas ao paradoxo de Braes’s [22] ou fenômenos relacionados, e como

o sistema evolui neste meio pode fornecer *insights* fundamentais para evitar tal paradoxo e entender a instabilidade de tráfego livre a densidades grandes (mas abaixo da capacidade da via) observadas no tráfego real.

Pode-se argumentar que a inserção de veículos automatizados melhoraria o tráfego veicular, dado que seriam capazes de adaptar uma estratégia eficiente e segura, reduzindo o período de comuta, acidentes e congestionamentos. Em especial inteligências artificiais parecem desempenhar um papel importante não apenas porque as vias sofrem modificações constantemente, sejam por obras de infraestrutura ou mesmo fatores ambientais como chuvas, nevascas, surgimento de buracos, etc. mas também porque nem todos os indivíduos terão recursos para adquirir um veículo automatizado. Isto implica que existirá um fator que não será previsto por qualquer algoritmo fixo. Os resultados apresentados aqui nos causam um certo ceticismo a este respeito, visto que os resultados afirmam que o tráfego seria controlado por veículos não-automatizados (lentos), mesmo quando veículos lentos são raros. Note que a discussão feita nos parágrafos anteriores apresentam a peculiaridade interessante que em veículos automatizados a implementação de rotinas de ultrapassagem e mudanças de faixa são fundamentais, o que sugere que a adoção de veículos automatizados deve ser feita simultaneamente a uma reforma estrutural profunda em boa parte das cidades para evitar a *tiranía do mais lento*. Nos casos onde não haja recursos ou vontade de realizar tais reformas, nota-se que caso a minimização da comuta seja um objetivo da automatização, nossos estudos indicam que o estado final da evolução dos comportamentos seja uma fuga da unidimensionalidade do sistema por ultrapassagens agressivas, como as vistas em algumas partes da Índia, por exemplo, visto que ultrapassagens não-perturbativas, ou passivas, não são suficientes para a superação da *tiranía do mais lento* nestes ambientes. Note que isto não é um problema quanto à segurança dos motoristas porque estes sistemas são programados com a segurança dos passageiros e demais motoristas como primeira diretiva, mas pode causar certo desconforto.

Quanto aos resultados principais, pode-se argumentar que parâmetros tais como  $v_{max}$  têm a interpretação física de um parâmetro que não pode ser modificado pelo motorista, então faz pouco sentido usá-lo como parâmetro de uma dinâmica evolutiva. Este questionamento é acertado e usamos a mutação deste

parâmetro neste trabalho por salvaguarda de clareza, mas observamos que todos os modelos matemáticos ou computacionais usam parâmetros experimentais de diferentes naturezas para calibrar os resultados. Alguns destes parâmetros são diretamente relacionados às preferências dos motoristas, portanto, são sujeitos a uma dinâmica evolucionária. Este fato é importante no estudo das populações multi-comportamentais, onde o número de tais “parâmetros preferenciais” aumenta bastante em escopo e importância.

Com respeito a modelos contínuos unidimensionais, observamos que os argumentos para a concepção dos resultados principais e para os resultados auxiliares não dependem da natureza dos modelos, desde que as propriedades sejam observadas. As propriedades **P1**, **P2**, e **P3** são traduzidas para a linguagem contínua, como apresentado a seguir. Suponha uma granulação fina o suficiente para que a densidade do sistema ao longo da via seja aproximadamente contínua e suponha que o pedaço entre  $x$  e  $x + dx$  no instante  $t = 0$ ,  $\rho(x(0), 0)$ , sofre uma evolução temporal ditada por um operador  $\mathcal{H}_t$  de tal maneira que:  $\rho(x(t), t) \approx \mathcal{H}_t \rho(x(0), 0)$ . A versão contínua de **P1** consiste em limitar a dependência explícita de  $\mathcal{H}_t$  como:  $\mathcal{H}_t = \mathcal{H}_t(y_1, y_2 \dots y_m, \alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots)$  onde  $y_i$  é o valor do  $i$ -ésimo parâmetro do modelo ( $1 \leq i \leq m$ ) e  $\alpha$ 's são parâmetros relacionados ao estado do sistema na frente de  $x(t)$  (tais como densidade e velocidade locais). Se  $x_i(0)$  e  $x_j(0)$  são as localizações de diferentes pedaços do sistema em  $t = 0$  de tal forma que  $x_i(0) > x_j(0)$ , então a versão contínua de **P2** é simplesmente a restrição não-holonômica  $x_i(t) > x_j(t)$  para todo  $t > 0$ . A propriedade **P3** não precisa de tradução para a linguagem contínua.

Os modelos, assim como todos os experimentos feitos aqui, são acessíveis ao público geral em <https://github.com/TrafficProject02/Evolution-of-behaviors>. O trabalho apresentado neste capítulo está disponível em <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.111535>.

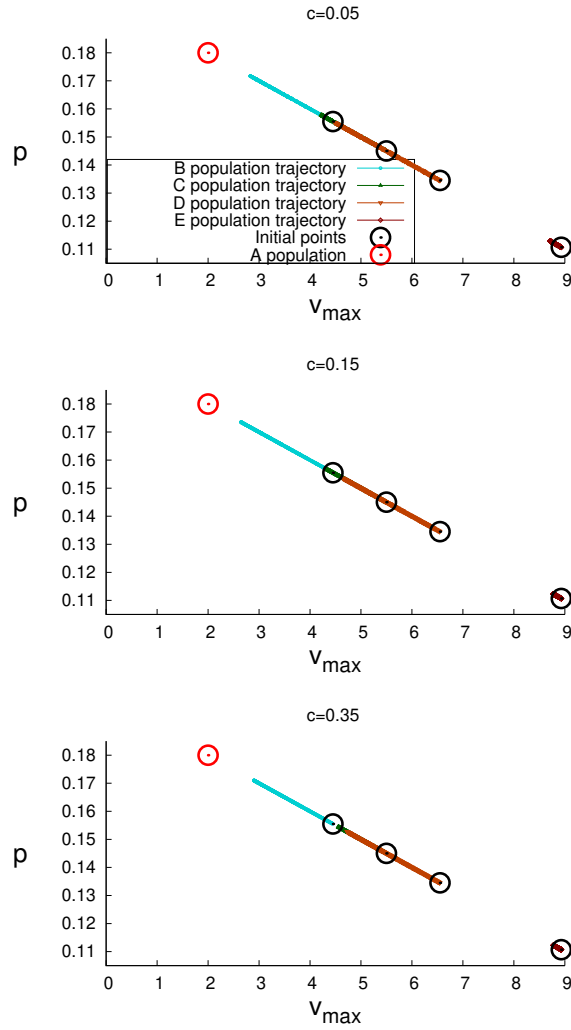


Figura 24 – Representação no espaço de parâmetros da evolução da população implicada pela dinâmica de imitação apresentada no texto principal. Cada ponto representa os valores médios medidos em intervalos de  $10^3$  passos de maneira consecutiva, ao longo de  $10^7$  passos. Contudo,  $10^3$  passos são poucos para uma evolução apreciável do sistema, então os pontos se aglutinaram em linhas. Os painéis a), b) e c) mostram medidas em diferentes concentrações. Os pontos pretos circulados representam os valores iniciais das populações estudadas e o ponto vermelho circulado representa o ponto referente à estratégia mais lenta  $(2, 0.18)$ . A atração para este ponto se dá em uma linha reta porque no conjunto  $\mathcal{S}$ , as estratégias foram construídas de forma que  $v_{max}$  e  $p$  são proporcionais. A convergência lenta da população  $E$  se dá porque há poucos representantes de populações lentas. Se  $n_s$  é o número de estratégias lentas dentre os  $N$  indivíduos, supondo que não estejam aglomerados em algum ponto, a chance de escolha de uma partícula que terá uma destas como alvo é da ordem de  $n_s/N$ .

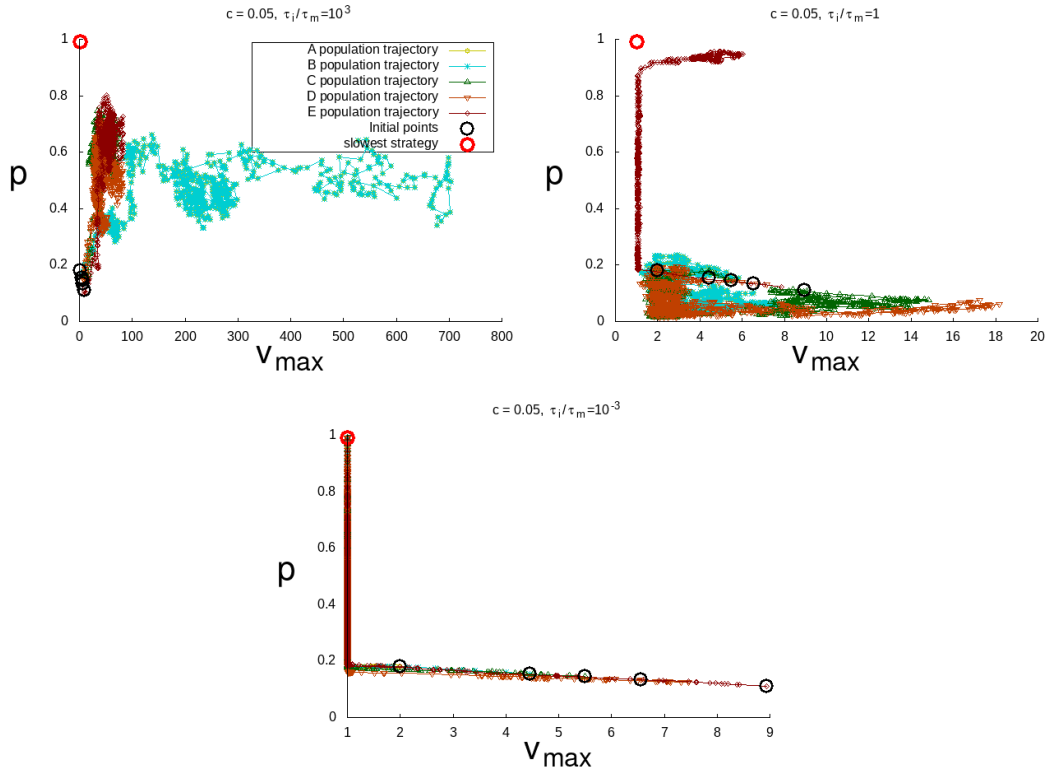


Figura 25 – Representação no espaço de parâmetros da evolução do sistema submetido ao processo de mutação associado ao processo de imitação para diferentes valores de  $\tau_i/\tau_m$ . As condições iniciais e populações são as mesmas que as apresentadas na figura 24, mas todas as simulações foram feitas em baixa densidade,  $c = 0.05$ . Os pontos são os valores médios dos parâmetros  $p$  e  $v_{max}$  medidos em intervalos consecutivos de  $10^3$  passos. Os círculos pretos correspondem aos valores médios das populações iniciais e o círculo vermelho marca o ponto  $(1, 0.99)$  que corresponde à (única) estratégia mais lenta. O painel a) mostra dados relativos à situação onde a mutação é muito mais frequente que a imitação  $\tau_i/\tau_m = 10^3$ . A dinâmica é similar a um passeio aleatório limitado no eixo vertical ( $p \in [0.0, .99]$ ) e ilimitado no eixo horizontal ( $v_{max} \in [1, \infty[$ ). O painel b) mostra dados relativos à mutação tão frequente quanto imitação,  $\tau_i/\tau_m = 1$ . A dinâmica é bastante complexa. A similaridade com um passeio aleatório simples é perdida, mas uma atração a algum ponto parece não existir, embora as trajetórias se acumulem em algumas regiões do plano. No painel c) mostramos os resultados relativos à imitação muito mais frequente que a mutação,  $\tau_i/\tau_m = 10^{-3}$ . Neste caso, uma forte atração ao ponto  $(1, 0.99)$  existe. As diferentes escalas de tempo quanto à atração para o ponto  $(1, 0.99)$  são evidenciadas pelas linhas retas e ângulo quase reto observado. Isto acontece porque, segundo as equações 4.7, mudanças na velocidade máxima são mais efetivas que mudanças na randomização. Uma vez que a velocidade mínima é alcançada, a relachação do sistema acontece em escalas de tempo maiores.

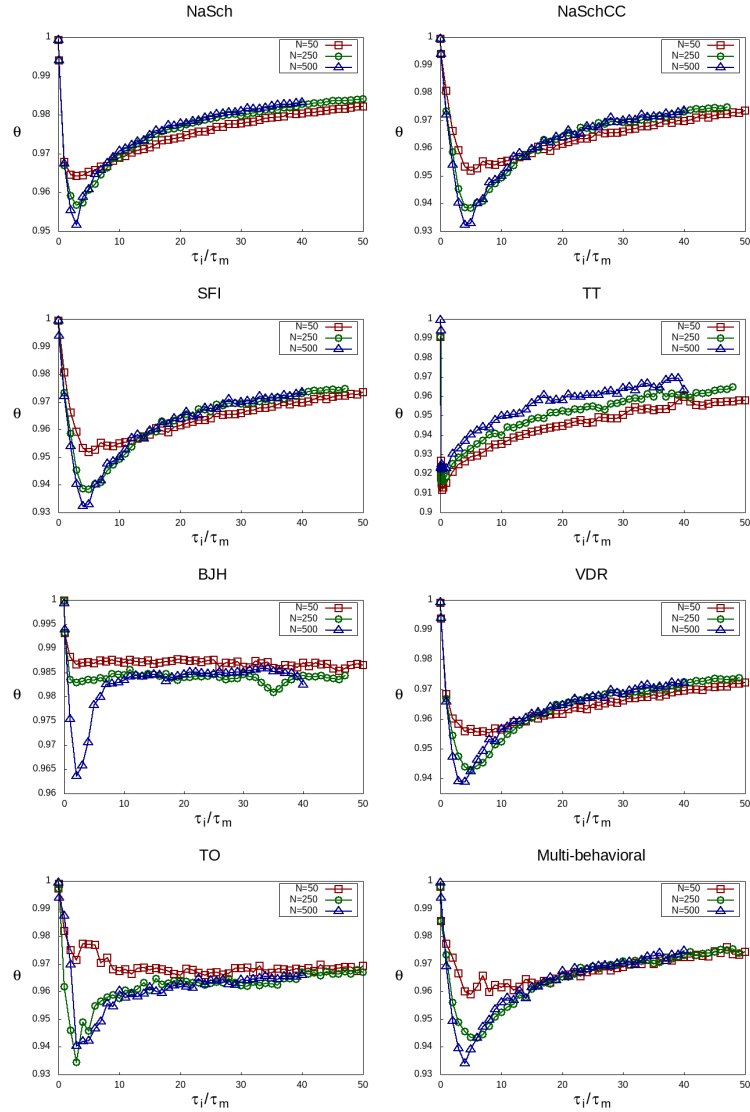


Figura 26 – O parâmetro  $\theta$  em função de  $\tau_i/\tau_m$ . Por economia de tempo, a fração da população sujeita aos processos de mutação foi atualizada para 10%, a exemplo da população sujeita à imitação que ocorre a cada 100 passos. Um transiente de  $10^6$  foi observado antes de se inicializar a dinâmica evolucionária. Após  $10^7$  passos, medimos  $\theta$  consecutivamente por  $10^5$  passos. 100 configurações diferentes foram testadas por ponto medido. O formato similar entre as curvas reflete a generalidade dos resultados principais. Note a tendência geral a uma queda brusca quando aumentamos o tamanho do sistema

## 5 Material adicional: Investigações em modelos econômicos

Nesta etapa, vamos abordar um problema diferente do que foi apresentado no texto principal. Desta feita, vamos mostrar alguns cálculos interessantes relativos a modelos econométricos que levam em consideração o fator sorte no sucesso dos agentes. Este estudo é incluído aqui porque além de culminar em uma publicação científica intitulada *THE TALENT VERSUS LUCK MODEL AS AN ENSEMBLE OF ONE-DIMENSIONAL RANDOM WALKS* na revista *Advances in Complex Systems*, este trabalho também gerou o assunto atualmente em estudo, a análise das propriedades de processos estocásticos acoplados.

### 5.1 Introdução

A história do uso de modelos probabilísticos para a investigação do papel da sorte no sucesso de agentes em sistemas econômicos é pauta de discussão científica desde o século XVII com a formulação do problema da “ruína do apostador” [137]. Desde então, o estudo da sorte como um fator a ser considerado para a análise de sucesso é fonte de debates intensos especialmente em função da dificuldade de se medir o papel da sorte empiricamente, haja vista a recorrente negação da importância deste fator pela maioria dos indivíduos que apresentam sucesso financeiro [138–140]. Como a coleta direta de dados pode ser ambígua, modelos matemáticos simples se tornam mais importantes porque esses modelos podem iluminar medidas que contêm conceitos probabilísticos com significado frequentemente turvo devido a vieses cognitivos, tais como o efeito *hindsight* [141] e estabelecer critérios e medidas mais apropriadas a um entendimento mais profundo a respeito deste fenômeno. Há bastante interesse prático no entendimento do papel da sorte no sucesso porque não só novos critérios de seleção de pessoal são analisados, mas o entendimento do papel da sorte pode transformar todo um mercado financeiro [142, 143].

Decidimos então analisar o modelo Talento contra sorte (*Talent versus Luck* ou TvL) [144] que recebe bastante atenção [145] por ser capaz de considerar qualitativamente a sorte de um agente em uma dinâmica simplificada representando seu sucesso como um processo estocástico parametrizado pelo seu talento. Neste modelo, a população é composta de agentes fixos fixados em um toro bidimensional e estes agentes são influenciados por eventos de “boa sorte” e de “má sorte”, representados como partículas dos dois diferentes tipos que se movem aleatoriamente nesta rede. Cada agente é inicializado com um capital  $C_0$  e um talento  $T_i$  que é um número real seguindo uma distribuição normal com média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$ , truncada no intervalo  $[0, 1]$ . O sucesso do  $i$ -ésimo agente no instante  $t$  é representado pelo seu capital  $C_i(t)$  cuja dinâmica é dada pela seguinte regra: se uma partícula de má sorte vagar para a vizinhança do  $i$ -ésimo agente,  $C_i(t+1) = C_i(t)/2$ ; se uma partícula de boa sorte vagar para a vizinhança do  $i$ -ésimo agente,  $C_i(t+1) = 2C_i(t)$ , e;  $C_i(t+1) = C_i(t)$  caso nenhuma partícula de sorte visite a vizinhança da  $i$ -ésima partícula (vizinhanças do tipo Von Neumann [146] são consideradas no estudo original [144]) nenhuma mudança no capital é feita. O caso em que múltiplas partículas de sorte visitem a vizinhança do agente não é especificado pelo modelo TvL, contudo, no limite de densidade baixa de tais partículas, tal como no estudo original [144], efeitos de superposição podem ser ignorados.

Os principais resultados do modelo TvL são bastante interessantes. Este modelo é capaz de simular grandes sucessos individuais de agentes de talento mediano quando o tempo de medida é curto, a lei de Pareto da distribuição dos capitais neste período [147–150] e uma distribuição gaussiana do talento dos mais ricos com média próxima ao talento médio da população. Em outras palavras, o modelo TvL mostra que, a períodos curtos, os indivíduos de econométricos reais maior sucesso frequentemente apresentam talento mediano, isto é, o entendimento do papel da sorte é fundamental.

O modelo TvL é computacionalmente simples e a implementação é intuitiva, mas não há qualquer evidência empírica do isolamento dos agentes e de “eventos de sorte” como ligados a passeios em um plano infinito. Na realidade, existem evidências de que a rede de interações entre agentes é complexa e que agentes associados a nós de maior número de arestas são submetidos a mais oportunidades [151–153].

Uma inspeção no modelo TvL mostra que a geometria imposta no modelo é apenas um mecanismo para gerar uma distribuição de eventos de boa sorte e má sorte sem uma justificativa mais aprofundada. Embora em uma variante onde apenas partículas de boa sorte estão presentes, autores encontraram resultados similares e encontraram *insights* analíticos nos mecanismos subjacentes à distribuição não-exponencial (*heavy-tailed*) do capital [154], julgamos a análise do modelo original insatisfatória e fizemos uma análise crítica do modelo propondo modificações no campo teórico onde o modelo foi fundamentado para obter análises mais claras dos mecanismos subjacentes aos resultados do modelo TvL. Não só conseguimos elucidar melhor os resultados, mas também foi possível a inclusão de outras características de sistemas econométricos reais, como a influência do talento na recuperação de infortúnios e a consideração da melhora do talento efetivo com o aumento do capital (efeito Matthew).

## 5.2 O modelo TvL como um *ensemble* de passeios aleatórios unidimensionais independentes

É conveniente se expressar o modelo TvL em uma formulação que seja compatível com uma análise estatística mais robusta e em uma linguagem que permita o desdobramento de novos caminhos. Tal formulação parte de primeiros princípios.

### 5.2.1 Análise preliminar

O modelo TvL busca analisar a evolução temporal do capital do  $i$ -ésimo agente,  $C_i(t)$ , que por sua vez apresenta regras de transição determinadas pela probabilidade de que partículas de sorte se encontrem na vizinhança deste agente. Vamos definir a densidade de partículas de boa sorte e de má sorte como  $p_g$  e  $p_b$ , respectivamente, com  $p_g + p_b \leq 1$ . No limite em que  $p_g + p_b \ll 1$  podemos ignorar a superposição de eventos e aproximar a probabilidade de que a vizinhança de um agente em um sistema grande seja ocupada por uma partícula de boa sorte ou má sorte por  $p_g$  e  $p_b$ , respectivamente. Nesta aproximação de campo médio, a probabilidade de que o capital do  $i$ -ésimo agente cresça é igual a  $T_i p_g$ , a

probabilidade que decresça é  $p_b$ , e a probabilidade de que permaneça inalterado é  $1 - T_i p_g - p_b$ , onde  $T_i$  é o talento do  $i$ -ésimo agente. Observe que este desenvolvimento sugere uma relação entre o capital do indivíduo e um passeio aleatório assimétrico, com uma probabilidade não nula de uma transição para o próprio estado, que depende do talento  $T_i$ . Na realidade, a definição de passeios aleatórios não inclui a opção de uma transição para o mesmo estado [155, 156] e deveríamos nos referir a este processo como um processo de nascimento-morte [157], mas vamos nos referir a estes processos como passeios aleatórios por simplicidade.

Sejam  $(X_1^T, X_2^T, \dots)$  uma sequência de variáveis aleatórias identicamente distribuídas assumindo os valores  $-1$ ,  $+1$ , e  $0$  com probabilidades  $p_b$ ,  $T p_g$ , e  $1 - p_b - T p_g$ . Seja  $S_n^T$  a soma finita:

$$S_n^T = \sum_{k=1}^n X_k^T, \quad (5.1)$$

a variável aleatória  $S_n^T$  representa o resultado de um passeio aleatório nos inteiros conforme foi definido nas linhas anteriores após  $n$  passos. Esta definição é importante porque o capital de um indivíduo de talento  $T$ , no instante  $n$ , é uma variável aleatória dada por:

$$C_n^T = C_0 r^{S_n^T}, \quad (5.2)$$

onde  $r$  é o índice de mudança do capital ( $r = 2$  no modelo TvL). Esta fórmula é a mesma para a evolução do capital de todos os agentes na rede, visto que estes são completamente desacoplados. Contudo, diferem nas distribuições de probabilidades com respeito aos talentos. Esta relação entre passeios aleatórios e a evolução temporal do capital é crucial para determinar as escalas de tempo do problema. No modelo TvL, somente os 80 primeiros passos da simulação são considerados porque o modelo assume um período de vida de 40 anos e uma janela para variação de capital (passo) de seis meses [144]. Devido à arbitrariedade dessa definição, é conveniente considerar um agente que perfaz um número arbitrário de passos. Note que isso não quer dizer que consideramos processos onde o capital explode porque dado um valor limite para o crescimento do capital, a medida que

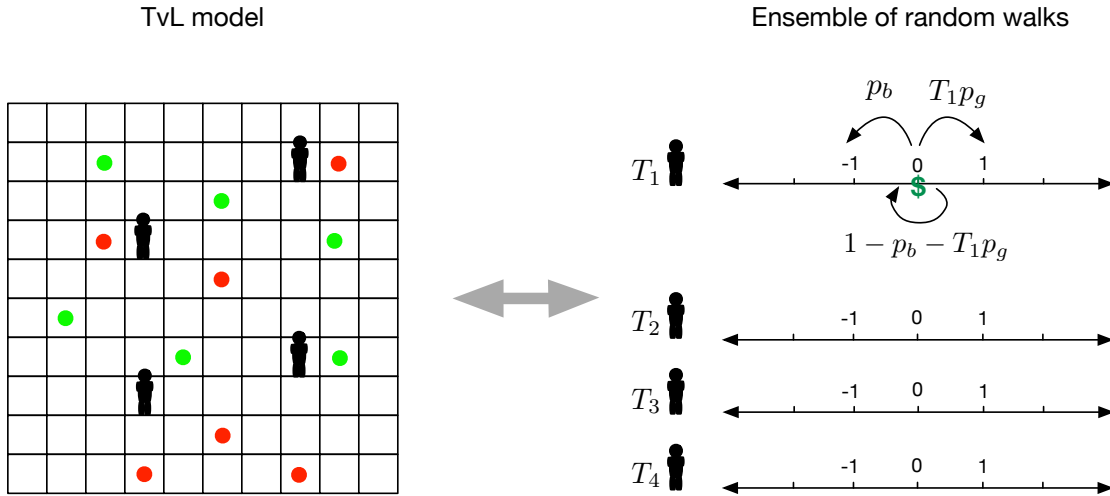


Figura 27 – A relação entre o modelo TvL (à esquerda) e um *ensemble* de passeios aleatórios (à direita) é ilustrado na figura. No modelo TvL, os agentes são fixos e dispostos aleatoriamente na rede, sem interagir entre si. As partículas de boa sorte (verde) e má sorte (vermelho) vagam pela rede cuja dinâmica é de passeios aleatórios bidimensionais discretos. Se uma partícula de sorte entra na vizinhança do agente (no sentido de uma vizinhança de Von Neumann, incluindo o sítio central), o capital pode variar segundo regras de transição simples, conforme descrito no texto. No painel direito, ilustramos o *ensemble* de passeios aleatórios unidimensionais relacionados à evolução temporal do capital (símbolo de dólar). Estes passeios são mapeados ao capital pela equação 5.2. As densidades de partículas de boa sorte e má sorte são  $p_g$  e  $p_b$ , respectivamente. O talento,  $T_i$ , de cada agente, é retirado de uma distribuição normal no intervalo  $[0, 1]$ .

$r \rightarrow 1$  (pela direita) é necessário mais e mais passos para se alcançar este limite, o que consiste em formular uma suavização do crescimento do capital.

Em suma, a equação 5.2 determina uma correspondência um para um com o passeio aleatório  $S_n^T$  com o capital do  $C_n^T$  o que sugere que podemos descrever a dinâmica do modelo TvL como um ensemble de  $M$  passeios aleatórios ( $M$  é o número de agentes) com parâmetro  $T$  retirado de uma distribuição normal no intervalo  $[0, 1]$ . A comparação entre os modelos TvL e um *ensemble* de passeios aleatórios representando o capital dos agentes é ilustrado na figura 27.

Para fins de consistência, reproduzimos usando *ensembles* de passeios ale-

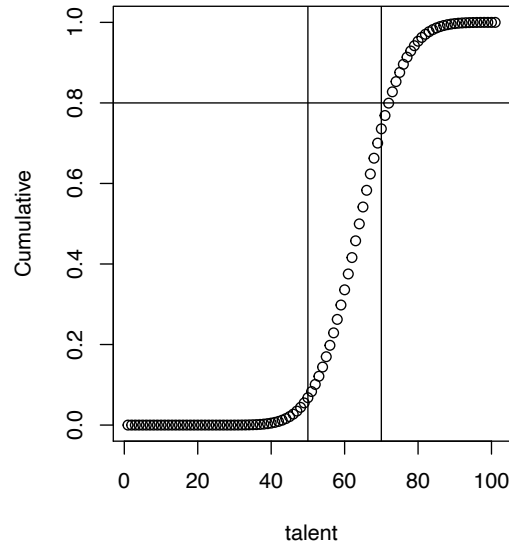


Figura 28 – A distribuição cumulativa de talentos entre os indivíduos de maior sucesso em um ambiente com os mesmos parâmetros que os analisados em [144]. Note que há 80% de chance de um indivíduo com talento, no máximo um desvio padrão acima do talento médio, ser observado entre os mais bem sucedidos.

atórios o principal resultado alcançado pelos idealizadores do modelo TvL: a distribuição dos talentos dos indivíduos mais bem sucedidos após 80 passos em 10000 simulações. A distribuição dos mais ricos é aproximadamente Gaussiana, deslocada levemente para a direita do talento médio da população, conforme ilustra a figura 28. Contudo, como estes resultados harmonizam com o fato de que indivíduos mais talentosos têm maior probabilidade de aproveitar oportunidades de boa sorte?

Antes de atacar essa pergunta, começamos observando uma propriedade do *ensemble* de passeios aleatórios. Dado que a probabilidade de adicionarmos uma unidade a  $S_n^T$  é  $Tp_g$ , observamos que como o talento é uma distribuição não singular (não é uma função delta) no intervalo  $0 \leq T \leq 1$ , em um ambiente neutro ( $p_g = p_b$ ) a probabilidade de  $S_n^T$  ser reduzido é maior que a probabilidade de ser acrescido, pois  $p_b < Tp_g$ , e,  $S_n^T$  diverge para menos infinito quase com certeza (*almost surely*).

Em outras palavras, em um ambiente neutro (conforme o ambiente adotado pelos idealizadores do modelo TvL) todos os agentes são arruinados em um tempo suficientemente longo. A observação de indivíduos com bom resultado aparece como uma flutuação natural em sistemas com poucos passos, que, lembrando, são 80 no trabalho original. Para um agente com talento máximo, a probabilidade de que nenhuma mudança ocorra no valor de  $S_n^T$  é  $1 - p_g - p_b$ , e observamos desta expressão (substituindo os valores dados no trabalho original adotando vizinhanças de Von Neumann) que dos 80 passos apenas 10 passos em média efetivamente propuseram mudanças no capital da partícula. Quando  $T < 1$ , este valor cresce porque não só precisamos contar o número de passos em que nenhuma partícula de sorte entra na vizinhança do agente, mas também a probabilidade de uma partícula de boa sorte entrar na vizinhança, mas ser “ignorada”. O número de passos efetivos é um número pequeno o suficiente para grandes flutuações serem observadas. Conforme consideramos um número maior de passos, a distribuição dos talentos dos indivíduos mais bem-sucedidos se move para a direita do talento médio, conforme é exibido na figura 27 painel (a). Vale a pena enfatizar que em aplicações práticas não estamos interessados em observações de processos infinitos, contudo, conforme já discutido as escalas de tempos de interesse não devem ser arbitrariamente pequenas devido à vulnerabilidade dos resultados quanto a flutuações, como o modelo TvL.

Retomando, para melhor acessar o problema do alto número de agentes medianos alcançando considerável sucesso em medidas de curta duração, vamos calcular a probabilidade de um indivíduo com talento  $T$  e capital  $C_n^T = C_0 r^k$  após  $n$  passos ser escolhido para análise. Usando a correspondência um para um com o passeio aleatório  $S_n^T$  para afirmar que este valor é alcançado com a probabilidade de que  $S_n^T$  assuma exatamente o valor  $k$  no instante  $n$ , dado por:

$$\begin{aligned} P(k, n, T) &= p(k, n) f(T) \\ &= \left[ \sum_{n_g + n_b \leq n} A_{n, n_g, n_b} (p_b)^{n_b} (T p_g)^{n_g} (1 - p_b - T p_g)^{n - (n_g + n_b)} \right] f(T). \end{aligned} \quad (5.3)$$

$p(k, n)$  é a probabilidade de um passeio aleatório estar na posição  $k$  após  $n$  passos,  $f(T)$  é a distribuição normal de talentos,  $n_g$  e  $n_b$  são os números de eventos de boa sorte (passo a direita) e má sorte (passo a esquerda) efetivos respectivamente

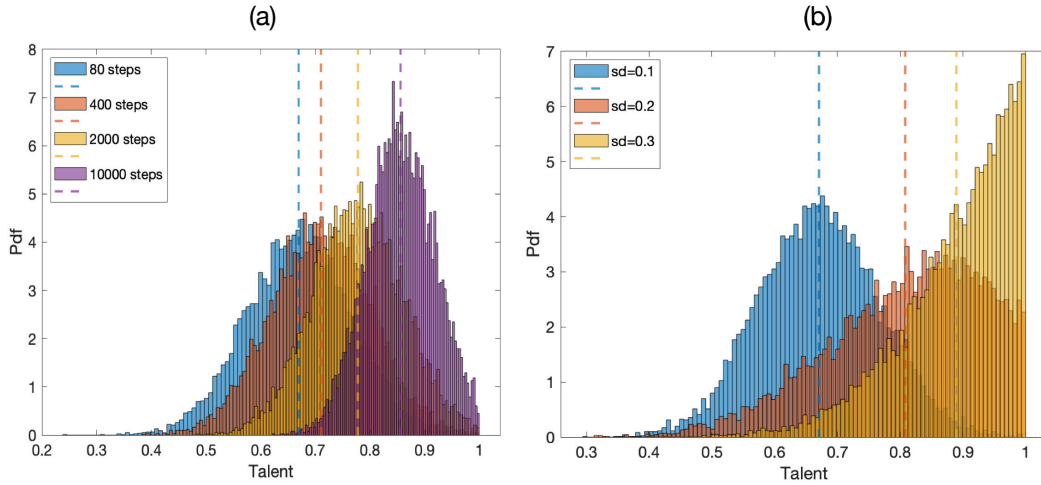


Figura 29 – Histograma do talento dos agentes mais bem sucedidos após 80 passos. A média de cada histograma é indicada pelas linhas verticais. Em (a), a distribuição se move para maiores talentos conforme o número de passos considerados aumenta. O desvio padrão dos talentos é 0.1. Em (b), o mesmo histograma após 80 passos mas, para diferentes valores do desvio padrão (sd). Note que conforme a distribuição de talentos se torna mais ampla, cresce a importância dos agentes de alto talento. Os histogramas são produzidos em 10000 realizações do *ensemble* de passeios aleatórios (o talento do agente mais bem-sucedido é guardado em cada realização). Os outros parâmetros da simulação são  $M = 1000$  e  $p_g = p_b = 0.03$ .

$(n_g - n_b = k)$ , e  $A_{n,n_g,n_b}$  é um fator combinatório. A função

$$M(n, T) = \frac{\sum_{s < T} \sum_{k > \bar{k}} P(k, n, s)}{\sum_s \sum_{k > \bar{k}} P(k, n, s)},$$

onde  $\bar{k}$  é o valor médio de  $S_n^T$  na população em  $n$  passos, mede a massa de agentes de até um certo nível de talento que alcançam altos capitais. Esta distribuição cumulativa é mostrada na figura 28 e enfatiza o ponto de que é bastante provável que um agente com talento intermediário obtenha um alto capital simplesmente porque a parcela de agentes com talento mediano é numerosa. Mesmo na análise apresentada em [144], foi observado que a distribuição dos talentos com altos valores do desvio padrão ( $\sigma = 2$  naquele trabalho) recoloca indivíduos talentosos em um papel proeminente entre os indivíduos com maior capital (veja a figura 27 painel (b)).

Enquanto a distribuição de talentos for estreita e observamos o sistema em períodos curtos, haverá grandes chances de se observar o sucesso de indivíduos de talento mediano.

A figura 29 mostra que o sucesso a longo prazo não depende apenas do talento individual  $T_i$ , mas também da razão das densidades de partículas de má sorte e boa sorte. Embora flutuações locais na densidade de partículas de boa sorte podem causar o sucesso inicial de alguns indivíduos, como na análise do modelo TvL feita em [144]  $\rho_g/\rho_b = 1$  e  $T_i < 1$  para todo  $i$ , todo indivíduo enfrentará eventualmente a ruína. Este é o tópico principal da próxima subseção.

### 5.2.2 O talento crítico

Das discussões anteriores, vimos que os resultados dos agentes dependem fortemente das densidades  $p_g$  e  $p_b$ : se  $Tp_g > p_b$ , então o passeio aleatório pende para a direita e o agente se torna muito bem-sucedido; se,  $Tp_g < p_b$  então o passeio aleatório pende para a esquerda e o agente se torna muito mal-sucedido. Portanto, existe um talento crítico definido como  $T^* = p_b/p_g$ , que determina totalmente a dinâmica do capital do agente. Na aproximação de campo médio do modelo TvL,  $p_g = p_b$  implica em  $T^* = 1$  e como  $0 < T < 1$ , todos os agentes do sistema são arruinados.

Podemos calcular facilmente o talento crítico para o modelo TvL e comparar com o valor de campo médio  $T^* = p_b/p_g$  considerando uma pequena modificação no modelo que simplifica os cálculos, mas não é de forma alguma fundamental. Ao contrário de se considerar que um evento de sorte influencia um agente quando presente em sua vizinhança, consideramos que a influência acontece precisamente quando esta partícula de sorte passa **sobre** o sítio em que o agente é fixado. Suponha um ambiente  $d$ -dimensional, regular e periódico, onde o número de vizinhos de qualquer sítio é  $2d$ . Se há  $i$  partículas de boa sorte na vizinhança do agente focal, então a probabilidade desta configuração é dada por:

$$\sum_{i=1}^{2d} \binom{2d}{i} \rho_g^i (1 - \rho_g)^{2d-i}, \quad (5.4)$$

onde  $\rho_g$  é a densidade de eventos de boa sorte que corresponde à probabilidade de

um sítio ser ocupado por tal partícula em um sistema muito grande,  $1 - \rho_g$  é a probabilidade de que o sítio seja ocupado por uma partícula de má sorte ou vazio. Agora, entre os  $2d$  vizinhos do agente focal, escolhemos uma entre as  $i$  partículas de boa sorte para interceptar o agente em seu sítio, o que acontece com probabilidade  $q$  ( $q = 1/2d$ ). Logo, podemos escrever esta probabilidade como

$$q \frac{i}{2d}; \quad (5.5)$$

e escrever a probabilidade de transição do passeio aleatório, de um agente com talento  $T$ , como:

$$P(S_{n+1}^T = k + 1 | S_n^T = k) = TP^+ = T \sum_{i=1}^{2d} \binom{2d}{i} \rho_g^i (1 - \rho_g)^{2d-i} \frac{iq}{2d}. \quad (5.6)$$

a simetria entre partículas de boa sorte e partículas de má sorte nos permite escrever:

$$P(S_{n+1}^T = k - 1 | S_n^T = k) = P^- = \sum_{i=1}^{2d} \binom{2d}{i} \rho_b^i (1 - \rho_b)^{2d-i} \frac{iq}{2d}. \quad (5.7)$$

$$(5.8)$$

O talento crítico é dado pela igualdade dessas taxas,  $T^*P^+ = P^-$ , o que implica em  $T^* = P^-/P^+$ . Notando que  $P^-$  e  $P^+$  dependem apenas das densidades, podemos escrever  $T^* = T^*(\rho_g, \rho_b)$ , isto é, o talento crítico depende apenas destas densidades. Fixamos então  $\rho_g = 0.5$  e variamos o índice  $\rho_b/\rho_g$  para plotar  $T^*$ , conforme é apresentado na figura 30. Note que o talento crítico é uma função linear do índice  $\rho_b/\rho_g$ , o que tem a mesma forma que a obtida por argumentos de campo médio. Entretanto, note que assumimos tacitamente um algoritmo para lidarmos com a superposição. Assumimos que, caso a vizinhança do agente seja ocupada por várias partículas de diferentes naturezas, tomamos aleatoriamente uma destas partículas para influenciar o agente e ignoramos as outras. Existem também regras que levam em conta superposição, contudo todas colapsam nesta curva no limite de densidade rarefeitas onde a superposições e conflitos na vizinhança dos agentes podem ser ignorados e a simetria do talento crítico,  $T^* = T^*(\rho_g, \rho_b)$ , ainda implicaria que se  $\rho_g = \rho_b = \rho$  então  $T^*(\rho_g, \rho_b) = T^*(\rho, \rho) = 1$ , isto é, em um ambiente homogêneo, todos os agentes do modelo TvL enfrentariam a ruína independentemente do procedimento usado para lidar com superposições.

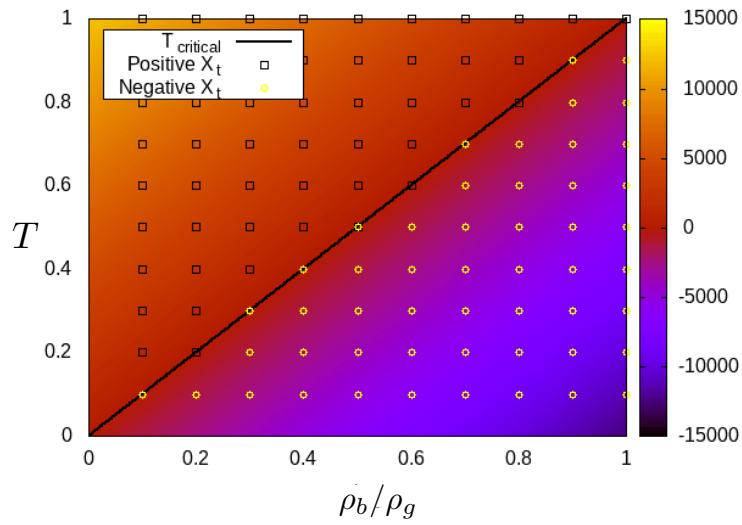


Figura 30 – Mapa de calor do processo  $S_n^T$  com  $n = 10^6$  passos. O eixo vertical mostra os valores de  $T$  em que o agente foi inicializado e o eixo horizontal mostra os valores de  $\rho_b/\rho_g$  do sistema. A linha sólida apresenta o valor numérico de  $T^*(\rho_b, \rho_g)$  obtida numericamente das equações 5.6 e 5.7. Os quadrados negros representam valores positivos de  $S_n^T$  e os círculos amarelos valores negativos. O código de cores representa os valores reais de  $S_n$  no último passo. Para dado  $\rho_b/\rho_g$ , se o talento do agente,  $T_i$ , está acima da curva  $T^*$ , seu capital crescerá. Caso contrário, enfrentará eventualmente a ruína. O parâmetro  $\rho_g$  é fixado em 0.5 e  $\rho_b$  varia de 0 a 0.5.

Calculamos numericamente  $T^*$  e simulamos a evolução temporal do logaritmo do capital, dado pela equação 5.2, e apresentamos os resultados na figura 30. Note o forte contraste entre os dois lados da linha  $T = T^*$ .

### 5.2.3 Talento usado para escapar de situações ruins

No modelo TvL o talento tem impacto apenas na chance de transformar um evento de boa sorte em capital. Contudo, é razoável supor que o talento também é importante na probabilidade de se escapar de eventos fortuitos. Uma maneira simples de se incorporar um mecanismo de controle de perdas parametrizado pelo talento é impor que a probabilidade de se escapar de eventos de má sorte seja diretamente proporcional ao talento individual. Logo, a probabilidade de se escapar

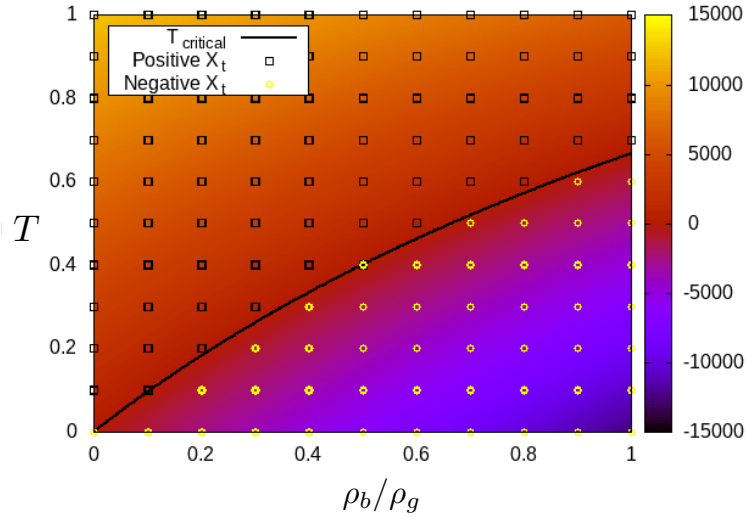


Figura 31 – Um mapa de calor similar ao apresentado na figura 30, mas com probabilidades  $T_i P^+$  para um movimento para a direita e  $(1 - \alpha T_i) P^-$  para uma movimento a esquerda.  $\alpha = 0.5$ . A linha sólida representa a curva crítica,  $T_\alpha^*$ , obtida numericamente das equações 5.6 e 5.7.

do decréscimo do capital quando o agente se defronta com uma partícula de má sorte é dada por  $\alpha T$ . Para manter a simplicidade do modelo,  $\alpha$  é um número fixo para todos os agentes e definido no intervalo  $[0, 1]$ .  $\alpha = 0$  corresponde ao modelo TvL e  $\alpha = 1$  corresponde à completa importância do talento na probabilidade de escape de infortúnios. Como a probabilidade de ter o capital acrescido é o mesmo que o modelo TvL,  $T P^+$ , e a probabilidade de se ter um capital reduzido é  $(1 - \alpha T) P^-$ , o talento crítico neste novo modelo é dado pela equação  $T_\alpha^* P^+ = (1 - \alpha T_\alpha^*) P^-$ . Portanto:

$$T_\alpha^* = \frac{P^-/P^+}{1 + \alpha P^-/P^+}. \quad (5.9)$$

Lembrando que o talento crítico do modelo TvL é dado por  $T^* = P^-/P^+$  podemos escrever:

$$T_\alpha^* = \frac{T^*}{1 + \alpha T^*} \leq T^*. \quad (5.10)$$

Esta desigualdade indica que, se o talento tem impacto na chance de escapar infortúnios, a chance de sucesso de indivíduos talentosos é mais pronunciada, além disso, o sucesso torna-se possível mesmo em ambientes neutros.

A figura 31 mostra o talento crítico de uma população com probabilidades  $P^+$  e  $P^-$  dados por 5.6 e 5.7, respectivamente. Contudo, as probabilidades de transição são  $P(S_{n+1}^T = k + 1 | S_n^T = k) = TP^+$  e  $P(S_{n+1}^T = k - 1 | S_n^T = k) = (1 - \alpha T)P^-$ .

#### 5.2.4 O efeito Mathew

A segunda variação do modelo que abordamos considera a variação da chance de aproveitar boas oportunidades dependendo do capital, o famoso efeito Mathew [158, 159]. O efeito Mathew consiste no aumento do talento efetivo que resulta da acumulação de vantagens decorrentes do aumento de capital, que pode ser resumido no dito popular “o rico fica mais rico e o pobre mais pobre”. Este efeito é observado em campos tão diversos como crescimento de redes complexas com anexações em nodos preferenciais [160] e distribuição de créditos na literatura científica, onde autores eminentes tendem a adquirir créditos em citações e descobertas colaborativas de maneira desproporcional [158].

Seja  $\Gamma_n$  a probabilidade que um evento de boa sorte seja transformado em um crescimento de capital, requeremos que  $\Gamma_n \rightarrow 0$  se  $S_n \rightarrow -\infty$  e  $\Gamma_n \rightarrow 1$  se  $S_n \rightarrow \infty$ ;  $\Gamma_n$  deve ser uma função monotonicamente crescente de  $S_n$ ; e que  $\Gamma_0 = T_i$ , o talento inicial. Uma maneira de se definir  $\Gamma_n$  com estas propriedades é:

$$\Gamma_n = \begin{cases} 0 & \text{if } T + AS_n^T < 0 \\ T + AS_n & \text{if } 0 \leq T + AS_n \leq 1. \\ 1 & \text{if } 1 < T_i + AS_n \end{cases} \quad (5.11)$$

O parâmetro  $A$  é definido no intervalo  $[0, 1]$ , com 0 correspondendo ao modelo TvL. Este parâmetro controla o impacto do capital na probabilidade de se aproveitar uma oportunidade de boa sorte. De maneira similar ao talento no modelo TvL, se  $\Gamma_n > T^*$ , então haverá uma tendência para a direita. Isto significa que um indivíduo inicialmente com baixo talento, submetido a uma sequência de eventos bem afortunados,  $\Gamma$  pode alcançar valores suficientemente altos tais que  $\Gamma > T^*$  e o agente se torna um agente de sucesso estável. O oposto pode ocorrer com um agente de talento alto.

Na figura 32, mostramos os resultados das simulações destes sistemas para diferentes valores de  $A$ . Para  $A$  muito pequeno, o resultado é bastante semelhante

ao modelo TvL como esperado, uma vez que são necessárias grandes flutuações para que uma mudança de comportamento significativo seja observada. Para valores baixos de  $A$ , o crescimento do capital afeta  $\Gamma$  em pequenos incrementos e grandes flutuações são necessárias para o crescimento (decréscimo) significativo de  $\Gamma$ , porém flutuações entorno da curva crítica já são observadas a  $A = 0.001$ . Em contraste, se  $A$  adquire valores maiores, a influência das flutuações sobre o talento efetivo se torna grande: indivíduos pouco talentosos podem pular para altos talentos efetivos ( $\Gamma_n > T^*$ ) após flutuações não muito grandes e o contrário é verdade para agentes talentosos *a priori*. Note que a curva crítica tem a mesma forma que a curva do modelo TvL.

Estes resultados são bastante interessantes, pois mostram que a probabilidade do sucesso de um indivíduo em tempos longos não depende apenas de sorte e talento, mas também de como o capital afeta a capacidade de coletar mais capital em ocasiões favoráveis.

### 5.3 Conclusões do capítulo

O modelo TvL sugere provocativamente que o sucesso de um indivíduo pode não ser consequência apenas de seu talento, mas também de uma sequência bastante afortunada de eventos. Nós reformulamos este modelo em bases teóricas mais firmes baseadas em passeios aleatórios unidimensionais. Enfatizamos que o modelo TvL foi apenas reformulado e que essa nova reformulação apresenta todas as características do modelo TvL, mas permite maior simplicidade de análise, clareza dos resultados e facilita a inclusão de características observadas experimentalmente.

Como esta reformulação é baseada numa correspondência um para um com um ensemble de passeios aleatórios, é fácil verificar a importância das condições ambientais ( $p_g$  e  $p_b$ ) para a dinâmica do capital do agente, em especial, em ambientes neutros ( $p_g = p_b$ ) todos os agentes enfrentam a ruína. Por outro lado, verificamos a previsão do sucesso de indivíduos de talento mediano, mas tal previsão vale para períodos de observação curtos e distribuição de talentos concentradas nos talentos medianos: quanto mais indivíduos de talento mediano, maior a probabilidade que um deles seja sujeito a uma flutuação local onde são influenciados por muitas

partículas de boa sorte, e, que a posterior normalização estatística não seja capaz de suavizar este sucesso inicial causado pelas flutuações devido ao curto período de observação.

Mostramos a existência de um talento crítico que depende das condições ambientais e que determina o sucesso individual a longo prazo se  $T > T^*$  ou o fracasso a longo prazo se  $T < T^*$ . A identificação do talento crítico facilitou a análise da inclusão de outras características identificadas experimentalmente, como a possibilidade de que o agente escape de infortúnios baseado em seu talento e da inclusão da variação do talento efetivo com o capital do indivíduo (efeito Matthew). Observamos uma mudança da “linha crítica” dada por  $T^*(\rho_g, \rho_b)$ , no primeiro caso, mas todas as outras conclusões continuaram válidas no caso de se considerar o talento para escapar infortúnios e no caso de se considerar o efeito Matthew, temos uma maior concisão do papel da sorte e talento no sucesso individual: quando a sociedade é mais igualitária no sentido que é preciso um aumento significativo de capital para uma mudança apreciável do talento o sucesso depende mais fortemente do talento sendo determinada por ele; quando é possível uma mudança brusca de talento com o capital, as flutuações na vizinhança do agente (sorte) são muito mais importantes que o talento, agente com baixo(alto) talento podem se tornar agentes de alto(baixo) talento estavelmente obtendo sucesso(ruína) que não estão relacionados ao tempo de medida.

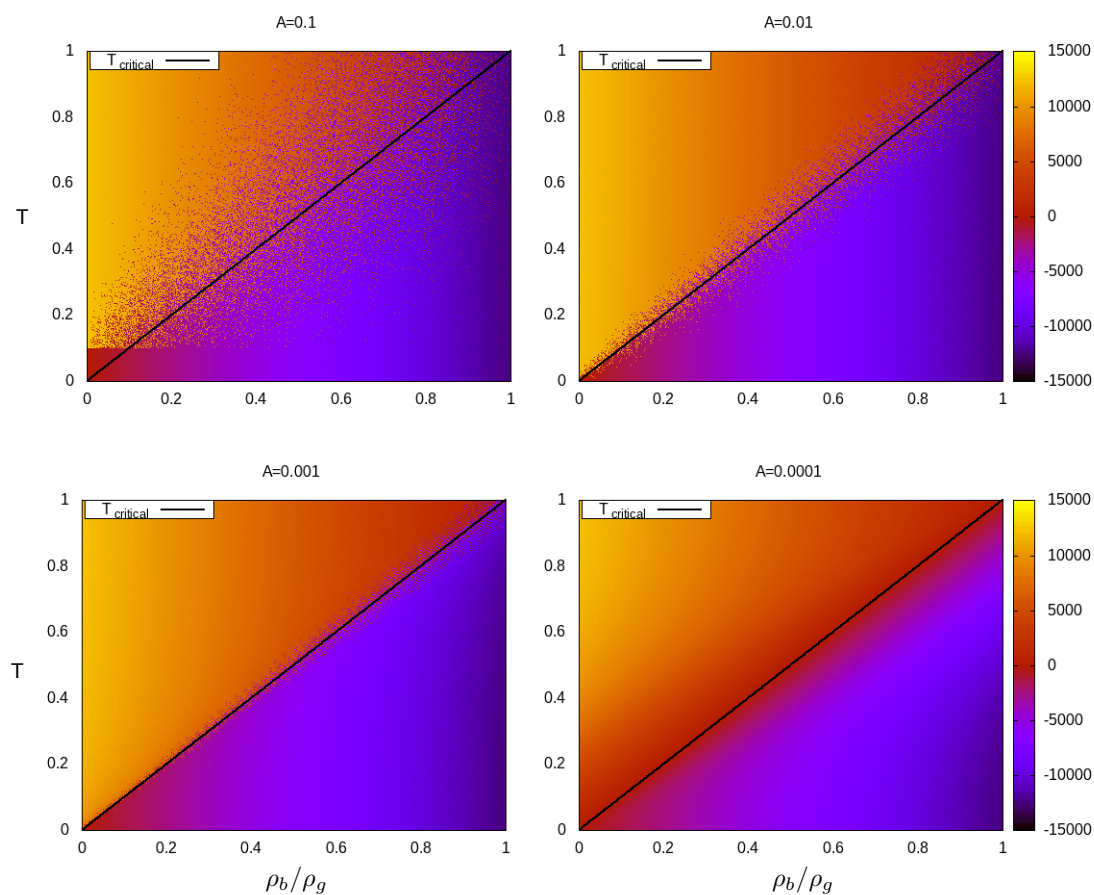


Figura 32 – O mesmo diagrama de fases apresentado nas figuras 30 e 31. O resultado do capital após  $10^6$  passos. Os valores do parâmetro  $A$  estão especificados nos títulos. A linha do talento crítico é plotada como a linha sólida, o eixo vertical apresenta o talento em que o agente é inicializado ( $\Gamma_0 = T$ ). Note a grande variabilidade em torno da linha crítica quando  $A$  é relativamente grande. Estas flutuações representam a ocorrências de eventos em que uma sequência de eventos de boa sorte elevam o talento de um agente pouco talentoso até acima do talento crítico e se tornam bem-sucedidos e agentes com alto talento que tiveram uma sequência inicial de má sorte e acabaram com o talento abaixo do talento crítico, enfrentando a ruína.

## 6 Conclusões e considerações finais

Identificamos um dilema social em modelos de tráfego simplificados, permitindo ultrapassagens na primeira parte deste trabalho. Verificamos suas causas e as reproduzimos em modelos mais complexos. A existência deste dilema nos levou a ponderar a possibilidade de uma dinâmica evolucionária interessante onde as mudanças para estratégias de cooperação ou deserção poderiam levar a configurações lentas em detrimento de configurações rápidas.

Na segunda parte deste trabalho, buscamos uma abordagem desta dinâmica no caso mais simples de modelos estritamente unidimensionais, o que rendeu muitos resultados interessantes mesmo sem se considerar ultrapassagens. Considerando propriedades bastante gerais, conseguimos mostrar heurísticamente resultados conhecidos como a formação espontânea de aglomerados a baixas densidades, e, este resultado nos levou a uma importante relação entre a teia de interações no sistema e a teoria de grafos. Daí, mostramos que processos evolucionários inspirados no processo de nascimento-e-morte levam, assintoticamente, a resultados simples, embora contraintuitivos. Quando é permitido às partículas mudarem sua estratégia para uma estratégia bem sucedida em que estejam em contato (similar a um processo onde a partícula morre e dá lugar a uma partícula mais bem-adaptada), a estratégia mais lenta de todas dominará a população eventualmente. É claro que isso não indica que, no tráfego real, todos os motoristas de uma cidade desenvolverão velocidades médias típicas de caminhões de lixo eventualmente. Mas pode ajudar a explicar por que modelos homogêneos conseguem resultados razoáveis em simulações de fenômenos estritamente heterogêneos. Um comportamento domina a dinâmica de todo o sistema. Note que este resultado também implica que variabilidade em modelos unidimensionais é irrelevante, logo, dinâmicas evolucionárias em ambientes unidimensionais (promovidas por AI's, por exemplo) são triviais. Mutações são definidas como um ruído de pequena amplitude no espaço de parâmetros. Tais modificações representam mudanças sistêmicas ou ambientais fora do controle dos motoristas, por exemplo, problemas mecânicos, traumas anteriores, uso de aditivos, etc. Se estamos considerando a evolução de algoritmos que usam IA's

nestes sistemas, esta dinâmica é fundamental porque o ambiente também está sujeito a mudanças aleatórias e uma estratégia bem sucedida em um ambiente não será necessariamente a mais bem-sucedida em um ambiente um pouco modificado. Contudo, o que se observa é que, dependendo da razão entre as escalas de tempo em que estes processos ocorrem, a população pode ser dominada pela estratégia mais lenta de todas. Isto indica que uma “evolução livre” em um ambiente unidimensional é incompatível com a maximização da velocidade média das partículas.

Mostramos também algumas similaridades entre a dinâmica evolucionária de modelos unidimensionais e o modelo de m-vetores e discutimos as limitações de tais similaridades. Introduzimos também a população multi-comportamental como um exemplo de um algoritmo de grande complexidade que ainda se comporta como o previsto. Estas populações foram introduzidas como um exemplo de um modelo mais “próximo da realidade” no sentido conceitual, em que várias possibilidades de comportamentos individuais são possíveis, mas não fizemos comparações com dados reais para afirmar este *status*. Contudo, apresentamos tais populações como possíveis modelos no apêndice e verificamos algumas características promissoras como diferenças no diagrama fundamental, e seu aspecto em medidas curtas, variando-se a composição destas populações, o aspecto geral dos histogramas de distâncias relativas, e, a formação estável de aglomerados.

A análise apresentada na primeira parte deste trabalho culminou com uma publicação na revista científica *Physica A: Statistical Mechanics and its applications* (fator de impacto 3,60) intitulado “Social dilemma in traffic with heterogeneous drivers”(DOI:10.1016/j.physa.2020.125235). Já a análise apresentada na segunda parte deste trabalho culminou com a publicação de um trabalho intitulado “Evolution of behaviors in heterogeneous traffic models as driven annealed disorders and its relation to the n-vector model” na revista *Chaos, Solitons & Fractals* (fator de impacto 5,944) (DOI:https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.111535). O trabalho apresentado no capítulo extra, "The talent versus luck model as an ensemble of one-dimensional random walks" foi publicado na revista *Advances in Complex Systems* (fator de impacto 0.7)(DOI:https://doi.org/10.1142/S0219525921500107)

Estas três publicações são suficientes para a qualificação como doutor pela Universidade federal de Minas Gerais.

## Referências

- [1] Lighthill, Michael James e G Be Whitham: *On kinematic waves i. flood movement in long rivers*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, 229(1178):281–316, 1955. Citado 2 vezes nas páginas 14 and 19.
- [2] Lighthill, Michael James e Gerald Beresford Whitham: *On kinematic waves ii. a theory of traffic flow on long crowded roads*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, 229(1178):317–345, 1955. Citado 2 vezes nas páginas 14 and 19.
- [3] Batchelor, Cx K e GK Batchelor: *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge university press, 2000. Citado na página 14.
- [4] Faber, Tom E: *Fluid dynamics for physicists*. Cambridge university press, 1995. Citado na página 14.
- [5] Nagel, Kai e Michael Schreckenberg: *A cellular automaton model for freeway traffic*. J. Phys. I, 2(12):2221–2229, 1992. Citado 6 vezes nas páginas 15, 20, 21, 64, 91, and 98.
- [6] Tokihiro, Tetsuji, Daisuke Takahashi, Junta Matsukidaira e Junkichi Satsuma: *From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure*. Phys. Rev. Lett., 76(18):3247, 1996. Citado na página 15.
- [7] Parmeggiani, Andrea, Thomas Franosch e Erwin Frey: *Totally asymmetric simple exclusion process with langmuir kinetics*. Physical Review E, 70(4):046101, 2004. Citado na página 15.
- [8] Lebowitz, Joel L, Errico Presutti e Herbert Spohn: *Microscopic models of hydrodynamic behavior*. Journal of Statistical Physics, 51(5):841–862, 1988. Citado na página 15.

- 
- [9] Wolfram, Stephen: *Statistical mechanics of cellular automata*. Rev. Mod. Phys., 55(3):601, 1983. Citado 2 vezes nas páginas 15 and 20.
- [10] Wolfram, Stephen: *A new kind of science*, volume 5. Wolfram media Champaign, IL, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 15 and 20.
- [11] Neumann, János, Arthur W Burks *et al.*: *Theory of self-reproducing automata*, volume 1102024. University of Illinois press Urbana, 1966. Citado 2 vezes nas páginas 15 and 20.
- [12] Delorme, Marianne: *An introduction to cellular automata*. Em *Cellular Automata*, páginas 5–49. Springer, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 15 and 20.
- [13] Eschenazi, Cesar S: *Leis de conservação e aplicações ao tráfego nas cidades*. Notas de Aula, UFMG, 2011. Citado na página 15.
- [14] Karpman, Vladimir Iosifovich: *Non-linear waves in dispersive media: International series of monographs in natural philosophy*, volume 71. Elsevier, 2016. Citado na página 15.
- [15] Prigogine, Ilya e Robert Herman: *Kinetic theory of vehicular traffic*. Transportation research board, 1971. Citado 2 vezes nas páginas 15 and 19.
- [16] Gutiérrez, Nicolás L, Ray Hilborn e Omar Defeo: *Leadership, social capital and incentives promote successful fisheries*. Nature, 470(7334):386, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 16 and 33.
- [17] Stocking, Michael A: *Tropical soils and food security: the next 50 years*. Science, 302(5649):1356–1359, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 16 and 33.
- [18] Birkenbach, Anna M, David J Kaczan e Martin D Smith: *Catch shares slow the race to fish*. Nature, 544(7649):223, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 16 and 33.
- [19] Hardin, Garrett: *Extensions of "the tragedy of the commons"*. Science, 280(5364):682–683, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 16 and 33.

- [20] Dawes, Robyn M: *Social dilemmas*. *Annu. Rev. Psychol.*, 31(1):169–193, 1980. Citado 2 vezes nas páginas 16 and 33.
- [21] Ostrom, Elinor Ed, Thomas Ed Dietz, Nives Ed Dolšak, Paul C Stern, Susan Ed Stonich e Elke U Weber: *The drama of the commons*. National Academy Press, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 16 and 33.
- [22] Hagstrom, Jane N e Robert A Abrams: *Characterizing braess’s paradox for traffic networks*. Em *ITSC 2001. 2001 IEEE Intelligent Transportation Systems. Proceedings (Cat. No. 01TH8585)*, páginas 836–841. IEEE, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 16 and 105.
- [23] Nagatani, Takashi: *The physics of traffic jams*. *Rep. Prog. Phys.*, 65(9):1331, 2002. Citado 5 vezes nas páginas 17, 20, 24, 29, and 46.
- [24] Chowdhury, Debashish, Ludger Santen e Andreas Schadschneider: *Statistical physics of vehicular traffic and some related systems*. *Phys. Rep.*, 329(4-6):199–329, 2000. Citado 4 vezes nas páginas 17, 20, 24, and 29.
- [25] Maerivoet, Sven e Bart De Moor: *Cellular automata models of road traffic*. *Physics reports*, 419(1):1–64, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 17 and 20.
- [26] Piccoli, Benedetto e Andrea Tosin: *Vehicular traffic: A review of continuum mathematical models*. *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*, 22:9727–9749, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 17 and 19.
- [27] Neubert, Lutz, Ludger Santen, Andreas Schadschneider e Michael Schreckenberg: *Single-vehicle data of highway traffic: A statistical analysis*. *Phys. Rev. E*, 60(6):6480, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 17 and 38.
- [28] Kerner, Boris S e Hubert Rehborn: *Experimental features and characteristics of traffic jams*. *Phys. Rev. E*, 53(2):R1297, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 17, 24, and 38.
- [29] Knospe, Wolfgang, Ludger Santen, Andreas Schadschneider e Michael Schreckenberg: *Empirical test for cellular automaton models of traffic flow*. *Phys. Rev. E*, 70(1):016115, 2004. Citado na página 17.

- [30] Kerner, Boris S: *The physics of traffic: empirical freeway pattern features, engineering applications, and theory*. Springer, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 17, 20, 24, and 27.
- [31] Papageorgiou, Markos: *Some remarks on macroscopic traffic flow modelling*. Transportation Research Part A: Policy and Practice, 32(5):323–329, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 17 and 20.
- [32] Schwartz, Barry: *Psychology of learning and behavior*. WW Norton & Co, 1989. Citado na página 17.
- [33] Barron, Frank: *The psychology of imagination*. Scientific American, 199(3):150–169, 1958. Citado na página 17.
- [34] Hoogendoorn, Serge P e Piet HL Bovy: *State-of-the-art of vehicular traffic flow modelling*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering, 215(4):283–303, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 19 and 20.
- [35] Iannini, Mauro Lúcio Lobão e Ronald Dickman: *Kinetic theory of vehicular traffic*. American Journal of Physics, 84(2):135–145, 2016. Citado na página 19.
- [36] Conway, John: *The game of life*. Scientific American, 223(4):4, 1970. Citado na página 20.
- [37] Rendell, Paul: *Turing universality of the game of life*. Em *Collision-based computing*, páginas 513–539. Springer, 2002. Citado na página 20.
- [38] Nagel, Kai: *Particle hopping models and traffic flow theory*. Physical review E, 53(5):4655, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 20 and 29.
- [39] Chopard, B e M Droz: *Cellular automata*, volume 1. Springer, 1998. Citado na página 20.
- [40] Bette, Henrik M, Lars Habel, Thorsten Emig e Michael Schreckenberg: *Mechanisms of jamming in the nagel-schreckenberg el for traffic flow*. Phys. Rev. E, 95(1):012311, 2017. Citado na página 23.

- [41] Lübeck, S, M Schreckenberg e KD Usadel: *Density fluctuations and phase transition in the nagel-schreckenberg traffic flow model*. Phys. Rev. E, 57(1):1171, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 23 and 24.
- [42] Barlovic, Robert, Ludger Santen, Andreas Schadschneider e Michael Schreckenberg: *Metastable states in cellular automata for traffic flow*. Eur. Phys. J. B, 5(3):793–800, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 23, 43, and 98.
- [43] Nishinari, Katsuhiko e Daisuke Takahashi: *Multi-value cellular automaton models and metastable states in a congested phase*. J. Phys. A-Math Gen., 33(43):7709, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 23 and 43.
- [44] Bouadi, M, K Jetto, A Benyoussef e A Kenz: *The effect of lateral interaction on traffic flow*. Physica A, 460:76–87, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 23, 43, 64, and 72.
- [45] Schreckenberg, Michael, Andreas Schadschneider, Kai Nagel e Nobuyasu Ito: *Discrete stochastic models for traffic flow*. Physical Review E, 51(4):2939, 1995. Citado na página 23.
- [46] Nagel, Kai, Peter Wagner e Richard Woesler: *Still flowing: Approaches to traffic flow and traffic jam modeling*. Operations research, 51(5):681–710, 2003. Citado na página 24.
- [47] Kerner, BS: *Theory of congested traffic flow: self-organization without bottlenecks*. Em *14th International Symposium on Transportation and Traffic Theory* Transportation Research Institute, 1999. Citado na página 24.
- [48] Von Neumann, John, Oskar Morgenstern e Harold William Kuhn: *Theory of games and economic behavior (commemorative edition)*. Princeton university press, 2007. Citado na página 29.
- [49] Osborne, Martin J e Ariel Rubinstein: *A course in game theory*. MIT press, 1994. Citado 3 vezes nas páginas 29, 31, and 32.
- [50] Zhang, He, Yuelong Su, Lihui Peng e Danya Yao: *A review of game theory applications in transportation analysis*. Em *2010 International Conference*

- on Computer and Information Application*, páginas 152–157. IEEE, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 29, 31, and 32.
- [51] Karlin, Anna R e Yuval Peres: *Game Theory, Alive*, volume 101. American Mathematical Soc., 2017. Citado 3 vezes nas páginas 29, 31, and 32.
- [52] Kockesen, Levent e Efe A Ok: *An introduction to game theory*. University Efe A. Ok New York University July, 8, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 29, 31, 32, and 33.
- [53] Szabó, György e Gabor Fath: *Evolutionary games on graphs*. Physics reports, 446(4-6):97–216, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 29 and 35.
- [54] Bó, Pedro Dal: *Cooperation under the shadow of the future: experimental evidence from infinitely repeated games*. American economic review, 95(5):1591–1604, 2005. Citado na página 31.
- [55] Dal Bó, Pedro e Guillaume R Fréchette: *The evolution of cooperation in infinitely repeated games: Experimental evidence*. American Economic Review, 101(1):411–29, 2011. Citado na página 31.
- [56] Kandori, Michihiro: *Repeated games played by overlapping generations of players*. The Review of Economic Studies, 59(1):81–92, 1992. Citado na página 31.
- [57] Nash, John F *et al.*: *Equilibrium points in  $n$ -person games*. P. Natl. Acad. Sci. USA, 36(1):48–49, 1950. Citado 2 vezes nas páginas 32 and 64.
- [58] Tanimoto, Jun: *Evolutionary Games with Sociophysics*. Springer, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 33 and 42.
- [59] Smith, John Maynard: *Game theory and the evolution of behaviour*. Proceedings of the Royal Society of London. Series B. Biological Sciences, 205(1161):475–488, 1979. Citado 2 vezes nas páginas 34 and 36.
- [60] Sigmund, Karl e Martin A Nowak: *Evolutionary game theory*. Current Biology, 9(14):R503–R505, 1999. Citado na página 34.

- [61] Weibull, Jörgen W: *Evolutionary game theory*. MIT press, 1997. Citado na página 34.
- [62] Hofbauer, Josef, Karl Sigmund *et al.*: *Evolutionary games and population dynamics*. Cambridge university press, 1998. Citado na página 34.
- [63] Vincent, Thomas L e Joel S Brown: *Evolutionary game theory, natural selection, and Darwinian dynamics*. Cambridge University Press, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 34 and 36.
- [64] Nowak, Martin A: *Evolutionary dynamics: exploring the equations of life*. Harvard university press, 2006. Citado na página 34.
- [65] Ohtsuki, Hisashi, Christoph Hauert, Erez Lieberman e Martin A Nowak: *A simple rule for the evolution of cooperation on graphs and social networks*. Nature, 441(7092):502–505, 2006. Citado na página 35.
- [66] Ohtsuki, Hisashi e Martin A Nowak: *Evolutionary games on cycles*. Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences, 273(1598):2249–2256, 2006. Citado na página 35.
- [67] Morozov, Andrew: *Modelling biological evolution: Introduction to the special issue*. Mathematical Modelling of Natural Phenomena, 9(3):1–4, 2014. Citado na página 35.
- [68] Brunetti, Ilaria, Rachid El-Azouzi e Eitan Altman: *Altruism in groups*. Em *Multilevel Strategic Interaction Game Models for Complex Networks*, páginas 5–23. Springer, 2019. Citado na página 35.
- [69] Moran, P. A. P.: *Random processes in genetics*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 54(1):60–71, 1958. Citado na página 36.
- [70] Swedberg, Richard: *Sociology and game theory: Contemporary and historical perspectives*. Theory and Society, 30(3):301–335, 2001. Citado na página 36.
- [71] Alexander, J McKenzie: *Evolutionary game theory*. Cambridge, 2002. Citado na página 36.

- [72] Simão, Ricardo e Lucas Wardil: *Social dilemma in traffic with heterogeneous drivers*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 561:125235, 2021. Citado na página 42.
- [73] Tanimoto, Jun e Kousuke Nakamura: *Social dilemma structure hidden behind traffic flow with route selection*. Physica A, 459:92–99, 2016. Citado na página 42.
- [74] JRAI-SZAB, FERENC e ZOLTN NDA: *Winning strategies in congested traffic*. Int. J. Mod. Phys. C, 23(9):1250063, 2012. Citado na página 42.
- [75] Tanimoto, Jun, Takuya Fujiki, Zhen Wang, Aya Hagishima e Naoki Ikegaya: *Dangerous drivers foster social dilemma structures hidden behind a traffic flow with lane changes*. Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, 2014(11):P11027, 2014. Citado na página 42.
- [76] Tanimoto, Jun, Shinji Kukida e Aya Hagishima: *Social dilemma structures hidden behind traffic flow with lane changes*. Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, 2014(7):P07019, 2014. Citado na página 42.
- [77] Iwamura, Yoshiro e Jun Tanimoto: *Complex traffic flow that allows as well as hampers lane-changing intrinsically contains social-dilemma structures*. Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, 2018(2):023408, 2018. Citado na página 42.
- [78] Tanimoto, Jun e Xie An: *Improvement of traffic flux with introduction of a new lane-change protocol supported by intelligent traffic system*. Chaos, Solitons & Fractals, 122:1–5, 2019. Citado na página 42.
- [79] Nakata, Makoto, Atsuo Yamauchi, Jun Tanimoto e Aya Hagishima: *Dilemma game structure hidden in traffic flow at a bottleneck due to a 2 into 1 lane junction*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 389(23):5353–5361, 2010. Citado na página 42.
- [80] Yamauchi, Atsuo, Jun Tanimoto, Aya Hagishima e Hiroki Sagara: *Dilemma game structure observed in traffic flow at a 2-to-1 lane junction*. Physical Review E, 79(3):036104, 2009. Citado na página 42.

- [81] Boccara, Nino, Henryk Fuks e Q Zeng: *Car accidents and number of stopped cars due to road blockage on a one-lane highway*. Journal of Physics A: Mathematical and General, 30(10):3329, 1997. Citado 3 vezes nas páginas 43, 58, and 79.
- [82] Moussa, Najem: *Car accidents in cellular automata models for one-lane traffic flow*. Physical Review E, 68(3):036127, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 43, 58, and 79.
- [83] Bentaleb, Khalid, Nouredine Lakouari, Rachid Marzoug, Hamid Ez-Zahraouy e Abdelilah Benyoussef: *Simulation study of traffic car accidents in single-lane highway*. Physica A, 413:473–480, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 43, 58, and 79.
- [84] Fukui, Minoru e Yoshihiro Ishibashi: *Traffic flow in 1d cellular automaton model including cars moving with high speed*. Journal of the Physical Society of Japan, 65(6):1868–1870, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 43 and 98.
- [85] Iannini, M L L e Ronald Dickman: *Traffic model with an absorbing-state phase transition*. Phys. Rev. E, 95(2):022106, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 43 and 98.
- [86] Kokubo, Satoshi, Jun Tanimoto e Aya Hagishima: *A new cellular automata model including a decelerating damping effect to reproduce kerner's three-phase theory*. Physica A, 390(4):561–568, 2011. Citado na página 43.
- [87] Sakai, Satoshi, Katsuhiko Nishinari e Shinji Iida: *A new stochastic cellular automaton model on traffic flow and its jamming phase transition*. J. Phys. A-Math Gen., 39(50):15327, 2006. Citado na página 43.
- [88] Moussa, Najem: *Simulation study of traffic accidents in bidirectional traffic models*. Int. J. Mod. Phys. C, 21(12):1501–1515, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 43 and 79.
- [89] Knospe, Wolfgang, Ludger Santen, Andreas Schadschneider e Michael Schreckenberg: *Towards a realistic microscopic description of highway traffic*. J. Phys. A-Math Gen., 33(48):L477, 2000. Citado na página 43.

- [90] Eisenblätter, B, L Santen, A Schadschneider e M Schreckenberg: *Jamming transition in a cellular automaton model for traffic flow*. Physical Review E, 57(2):1309, 1998. Citado na página 43.
- [91] Su, Zhu, Weibing Deng, Longfeng Zhao, Jihui Han, Wei Li e Xu Cai: *The effects of overtaking strategy in the nagel-schreckenberg model*. Eur. Phys. J. B, 89(9):203, 2016. Citado na página 43.
- [92] Arasan, V Thamizh e Reebu Zachariah Koshy: *Methodology for modeling highly heterogeneous traffic flow*. Journal of Transportation Engineering, 131(7):544–551, 2005. Citado na página 43.
- [93] Ye, Lanhang e Toshiyuki Yamamoto: *Modeling connected and autonomous vehicles in heterogeneous traffic flow*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 490:269–277, 2018. Citado na página 43.
- [94] Yang, Da, Peter Jing Jin, Yun Pu e Bin Ran: *Stability analysis of the mixed traffic flow of cars and trucks using heterogeneous optimal velocity car-following model*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 395:371–383, 2014. Citado na página 43.
- [95] Khan, Sarosh I e Pawan Maini: *Modeling heterogeneous traffic flow*. Transportation research record, 1678(1):234–241, 1999. Citado na página 43.
- [96] Mallikarjuna, Ch e K Ramachandra Rao: *Cellular automata model for heterogeneous traffic*. Journal of Advanced Transportation, 43(3):321–345, 2009. Citado na página 43.
- [97] Chiabaut, Nicolas, Ludovic Leclercq e Christine Buisson: *From heterogeneous drivers to macroscopic patterns in congestion*. Transportation Research Part B: Methodological, 44(2):299–308, 2010. Citado na página 43.
- [98] Yang, Da, Liling Zhu e Yun Pu: *Model and stability of the traffic flow consisting of heterogeneous drivers*. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 10(3), 2015. Citado na página 43.

- [99] Wong, GCK e SC Wong: *A multi-class traffic flow model—an extension of lwr model with heterogeneous drivers*. Transportation Research Part A: Policy and Practice, 36(9):827–841, 2002. Citado na página 43.
- [100] Mocsári, T: *Analysis of the overtaking behaviour of motor vehicle drivers*. Acta Technica Jaurinensis, 2(1):pp. 97–106, janeiro 2009. <https://acta.sze.hu/index.php/acta/article/view/209>. Citado na página 43.
- [101] Farah, Haneen: *When do drivers abort an overtaking maneuver on two-lane rural roads?* Transp. Res. Record., 2602(1):16–25, 2016. <https://doi.org/10.3141/2602-03>. Citado na página 43.
- [102] Llorca, Carlos e Alfredo García: *Evaluation of passing process on two-lane rural highways in spain with new methodology based on video data*. Transp. Res. Record., 2262(1):42–51, 2011. <https://doi.org/10.3141/2262-05>. Citado na página 43.
- [103] Asaithambi, Gowri e Gugulothu Shravani: *Overtaking behaviour of vehicles on undivided roads in non-lane based mixed traffic conditions*. J. Transp. Eng., 4(3):252 – 261, 2017, ISSN 2095-7564. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2095756417301940>. Citado na página 43.
- [104] Xue, Yu, Li yun Dong, Lei Li e Shi qiang Dai: *Effects of changing orders in the update rules on traffic flow*. Physical Review E, 71(2):026123, 2005. Citado na página 45.
- [105] Schadschneider, Andreas: *The nagel-schreckenberg model revisited*. Eur. Phys. J. B, 10(3):573–582, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 47 and 48.
- [106] Ross, Sheldon M: *Introduction to probability and statistics for engineers and scientists*. Academic Press, 2020. Citado na página 56.
- [107] Mukaka, Mavuto M: *A guide to appropriate use of correlation coefficient in medical research*. Malawi medical journal, 24(3):69–71, 2012. Citado na página 56.

- [108] Arefin, Md Rajib, Tanaka Masaki, KM Ariful Kabir e Jun Tanimoto: *Interplay between cost and effectiveness in influenza vaccine uptake: a vaccination game approach*. Proceedings of the Royal Society A, 475(2232):20190608, 2019. Citado na página 67.
- [109] Kabir, KM Ariful e Jun Tanimoto: *Modelling and analysing the coexistence of dual dilemmas in the proactive vaccination game and retroactive treatment game in epidemic viral dynamics*. Proceedings of the Royal Society A, 475(2232):20190484, 2019. Citado na página 67.
- [110] Knospe, Wolfgang, Ludger Santen, Andreas Schadschneider e Michael Schreckenberg: *Towards a realistic microscopic description of highway traffic*. Journal of Physics A: Mathematical and general, 33(48):L477, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 69, 70, and 71.
- [111] Fletcher, J. A e M. Doebeli: *A simple and general explanation for the evolution of altruism*. P. R. Soc. B, 276(1654):13–19, 2009, ISSN 0962-8452. <http://rspb.royalsocietypublishing.org/cgi/doi/10.1098/rspb.2008.0829>. Citado na página 72.
- [112] Simão, Ricardo: *Evolution of behaviors in heterogeneous traffic models as driven annealed disorders and its relation to the n-vector model*. Chaos, Solitons & Fractals, 153:111535, 2021. Citado na página 73.
- [113] Ben-Naim, Eli, Pavel L Krapivsky e Sidney Redner: *Kinetics of clustering in traffic flows*. Physical Review E, 50(2):822, 1994. Citado na página 75.
- [114] Krug, Joachim e Pablo A Ferrari: *Phase transitions in driven diffusive systems with random rates*. Journal of Physics A: Mathematical and General, 29(18):L465, 1996. Citado na página 75.
- [115] Helbing, Dirk e Benno Tilch: *A power law for the duration of high-flow states in heterogeneous traffic flows*. arXiv preprint arXiv:0807.3710, 2008. Citado na página 75.
- [116] Krug, Joachim: *Phase separation in disordered exclusion models*. Brazilian Journal of Physics, 30(1):97–104, 2000. Citado na página 75.

- [117] Barma, Mustansir: *Driven diffusive systems with disorder*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 372(1):22–33, 2006. Citado na página 75.
- [118] Ramana, A Sai Venkata e Saif Eddin Jabari: *Traffic flow with multiple quenched disorders*. Physical Review E, 101(5):052127, 2020. Citado na página 75.
- [119] Ramana, A Sai Venkata e Saif Eddin Jabari: *Power laws and phase transitions in heterogenous car following with reaction times*. Physical Review E, 103(3):032202, 2021. Citado na página 75.
- [120] Huang, Ding wei e Yu ping Wu: *Car accidents on a single-lane highway*. Physical Review E, 63(2):022301, 2001. Citado na página 79.
- [121] Huang, Ding wei e Wei chung Tseng: *Mean-field theory for car accidents*. Physical Review E, 64(5):057106, 2001. Citado na página 79.
- [122] Huang, Ding wei: *Exact results for car accidents in a traffic model*. Journal of Physics A: Mathematical and General, 31(29):6167, 1998. Citado na página 79.
- [123] Evans, MR: *Exact steady states of disordered hopping particle models with parallel and ordered sequential dynamics*. Journal of Physics A: Mathematical and General, 30(16):5669, 1997. Citado na página 80.
- [124] Fu, Feng, Long Wang, Martin A Nowak e Christoph Hauert: *Evolutionary dynamics on graphs: Efficient method for weak selection*. Physical Review E, 79(4):046707, 2009. Citado na página 85.
- [125] Lieberman, Erez, Christoph Hauert e Martin A Nowak: *Evolutionary dynamics on graphs*. Nature, 433(7023):312–316, 2005. Citado na página 85.
- [126] Nowak, Martin A e Karl Sigmund: *Evolutionary dynamics of biological games*. science, 303(5659):793–799, 2004. Citado na página 85.
- [127] Vicsek, Tamás e Anna Zafeiris: *Collective motion*. Physics reports, 517(3-4):71–140, 2012. Citado na página 91.

- [128] Grégoire, Guillaume, Hugues Chaté e Yuhai Tu: *Moving and staying together without a leader*. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 181(3-4):157–170, 2003. Citado na página 91.
- [129] Doostmohammadi, Amin, Jordi Ignés-Mullol, Julia M Yeomans e Francesc Sagués: *Active nematics*. *Nature communications*, 9(1):1–13, 2018. Citado na página 91.
- [130] Grégoire, Guillaume e Hugues Chaté: *Onset of collective and cohesive motion*. *Physical review letters*, 92(2):025702, 2004. Citado na página 91.
- [131] Maerivoet, Sven e Bart De Moor: *Non-concave fundamental diagrams and phase transitions in a stochastic traffic cellular automaton*. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 42(1):131–140, 2004. Citado na página 98.
- [132] Nagel, Kai e Maya Paczuski: *Emergent traffic jams*. *Physical Review E*, 51(4):2909, 1995. Citado na página 98.
- [133] Takayasu, M e H Takayasu: *Phase transition and  $1/f$  type noise in one dimensional asymmetric particle dynamics*. *Fractals*, 1(4):860–866, 1993. Citado na página 98.
- [134] Benjamin, Simon C, Neil F Johnson e PM Hui: *Cellular automata models of traffic flow along a highway containing a junction*. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 29(12):3119, 1996. Citado na página 98.
- [135] Barlovic, Robert: *Traffic Jams: Cluster Formation in Low-Dimensional Cellular Automata Models for Highway and City Traffic*. Tese de Doutorado, Der Fakultät für Naturwissenschaften der Universität Duisburg-Essen, 2003. Citado na página 98.
- [136] Brilon, W e N Wu: *Evaluation of cellular automata for traffic flow simulation on freeway and urban streets*. Em *Traffic and Mobility*, páginas 163–180. Springer, 1999. Citado na página 98.
- [137] Roese, Neal J. e Kathleen D. Vohs: *Hindsight bias*. *Perspectives on Psychological Science*, 7(5):411–426, 2012. Citado na página 111.

- [138] Barras, Laurent, Olivier Scaillet e Russ Wermers: *False discoveries in mutual fund performance: Measuring luck in estimated alphas*. *The journal of finance*, 65(1):179–216, 2010. Citado na página 111.
- [139] Frank, Robert H: *Success and Luck*. Princeton University Press, 2016. Citado na página 111.
- [140] Rescher, Nicholas: *Luck*. Em *Philosophical Clarifications*, páginas 173–189. Springer, 2019. Citado na página 111.
- [141] Roese, Neal J. e Kathleen D. Vohs: *Hindsight bias*. *Perspectives on Psychological Science*, 7(5):411–426, 2012. Citado na página 111.
- [142] Brookman, Jeffrey T e Paul D Thistle: *Managerial compensation: Luck, skill or labor markets?* *Journal of corporate Finance*, 21:252–268, 2013. Citado na página 111.
- [143] Campbell, T Colin e Mary Elizabeth Thompson: *Why are ceos paid for good luck? an empirical comparison of explanations for pay-for-luck asymmetry*. *Journal of Corporate Finance*, 35:247–264, 2015. Citado na página 111.
- [144] Pluchino, A, A E Biondo e A Rapisard: *Talent versus luck: The role of randomness in success and failure*. *Advances in Complex Systems*, 21(03n04):1850014, 2018. Citado 5 vezes nas páginas 112, 114, 116, 118, and 119.
- [145] *Authors' personal home page*. <http://www.pluchino.it/talent-vs-luck.html>. Accessed: 2021-06-07. Citado na página 112.
- [146] Toffoli, Tommaso e Norman Margolus: *Cellular Automata Machines: A New Environment for Modeling*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1987, ISBN 0262200600. Citado na página 112.
- [147] Persky, Joseph: *Retrospectives: Pareto's law*. *Journal of Economic Perspectives*, 6(2):181–192, 1992. Citado na página 112.
- [148] Cirillo, Renato: *The Economics of Vilfredo Pareto*. Routledge, 2012. Citado na página 112.

- [149] Klass, Oren S, Ofer Biham, Moshe Levy, Ofer Malcai e Sorin Solomon: *The forbes 400 and the pareto wealth distribution*. Economics Letters, 90(2):290–295, 2006. Citado na página 112.
- [150] Aban, Inmaculada B, Mark M Meerschaert e Anna K Panorska: *Parameter estimation for the truncated pareto distribution*. Journal of the American Statistical Association, 101(473):270–277, 2006. Citado na página 112.
- [151] Caldarelli, Guido: *Large scale structure and dynamics of complex networks: from information technology to finance and natural science*, volume 2. World Scientific, 2007. Citado na página 112.
- [152] D’Arcangelis, Anna Maria e Giulia Rotundo: *Complex networks in finance*. Em *Complex networks and dynamics*, páginas 209–235. Springer, 2016. Citado na página 112.
- [153] Allen, Franklin e Ana Babus: *Networks in finance*. The network challenge: strategy, profit, and risk in an interlinked world, 367, 2009. Citado na página 112.
- [154] Challet, Damien, Alessandro Pluchino, Alessio Emanuele Biondo e Andrea Rapisarda: *The origins of extreme wealth inequality in the talent versus luck model*. Advances in Complex Systems, 23(02):2050004, 2020. Citado na página 113.
- [155] Feller, William: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, volume 1. Wiley, January 1968, ISBN 0471257087. <http://www.amazon.ca/exec/obidos/redirect?tag=citeulike04-20{&}path=ASIN/0471257087>. Citado na página 114.
- [156] Alexander, Kenneth: *Controlled random walk with a target site*. Electronic Communications in Probability, 18(none):1–6, 2013. Citado na página 114.
- [157] Grimmett, G.R. e D.R. Stirzaker: *Probability and random processes*, volume 80. Oxford university press, 2001. [http://scholar.google.com/scholar.bib?q=info:xzStZXX20NkJ:scholar.google.com/&output=citation&hl=en&as\\_sdt=0,5&ct=citation&cd=0](http://scholar.google.com/scholar.bib?q=info:xzStZXX20NkJ:scholar.google.com/&output=citation&hl=en&as_sdt=0,5&ct=citation&cd=0). Citado na página 114.

- 
- [158] Merton, Robert K.: *The matthew effect in science*. Science, 159(3810):56–63, 1968. Citado na página 123.
- [159] Petersen, Alexander M., Woo Sung Jung, Jae Suk Yang e H. Eugene Stanley: *Quantitative and empirical demonstration of the matthew effect in a study of career longevity*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 108(1):18–23, 2011. Citado na página 123.
- [160] Barabási, A.L. e R. Albert: *Emergence of scaling in random networks*. Science, 286:509–512, 1999. Citado na página 123.

# Anexos

# ANEXO A – A primeira página de dos artigos produzidos

Physica A 561 (2021) 125235



Contents lists available at ScienceDirect

Physica A

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/physa](http://www.elsevier.com/locate/physa)

## Social dilemma in traffic with heterogeneous drivers

Ricardo Simão\*, Lucas Wardil

Departamento de Física, Universidade Federal de Minas Gerais, Caixa Postal 702, CEP 30161-970, Belo Horizonte - MG, Brazil



### ARTICLE INFO

**Article history:**  
Received 15 April 2020  
Received in revised form 27 August 2020  
Available online 8 September 2020

**Keywords:**  
Complex systems  
Traffic  
Cooperation  
Social dilemma

### ABSTRACT

There is a "tragedy of the traffic" analogous to the "tragedy of the commons" that can be caused by overtaking. We analyze the effect of overtaking in a minimal model of vehicular traffic, the Nagel-Schreckenberg model, with two types of strategies: vehicles that overtake and vehicles that do not. We show that, under certain circumstances, overtaking is good because it maximizes the flux of vehicles and minimizes the vehicle's mean time spent on the road. However, when these conditions are not met, overtaking is harmful to all. More specifically, we found that a social dilemma emerges in the vicinity of the transition to the congested traffic if the probability of random deceleration is low, which can also happen in more realistic single-lane models. The essential mechanism creating the social dilemma is the abrupt deceleration when the overtaking vehicle returns to its lane. We analyze how the payoffs depend on the frequency of strategies in the population to conclude that the vehicles that overtake are defectors and the ones that do not are cooperators, analogous to the strategies in "tragedy of the commons" class of games.

© 2020 Elsevier B.V. All rights reserved.

### 1. Introduction

Overtaking on single-lane roads can be daunting even for experienced drivers. Whenever possible, drivers in a hurry would like to overtake the slow vehicles and everyone would be satisfied, as the slow drivers would keep their pace and the fast ones would save time. However, transportation systems exhibit many unexpected social phenomena related to the tragedy of the commons [1–7]. The individuals want to reach their destinations safely and as fast as possible. However, the limited availability of space may create social dilemmas. A trivial example that clearly shows the struggle for a common resource is the choice between using public transportation or private vehicle at moderate or high traffic densities. Because public transportation is generally slow, the drivers may arrive at their destination faster if they use their vehicles. However, jammed traffic sets in because of the large number of vehicles and, as a result, all individuals may spend more time in the traffic. Another example is the increase of traffic when an additional fast highway is built to connect two previously unconnected locations, known as the Braess' paradox [8]. The temptation to take the fast lane to reduce the time travel may attract all drivers to the fast highway, creating congestion that otherwise would never happen [9]. There are several other examples where social dilemma phenomena appear in traffic, for instance, lane changing [2,5], driving lane selection protocols [10], route selection [3] and nearby junction-like traffic structures [6,7].

The long commutes are becoming an increasing problem in the big metropolis. People experiencing them are more stressed, with serious implications for their well-being [11]. It is a natural assumption that drivers would like to overtake slow vehicles if it reduces their commute times. The most basic environment which allows overtaking is the conventional

\* Corresponding author.

E-mail address: [summernightdream@fis.grad.ufmg.br](mailto:summernightdream@fis.grad.ufmg.br) (R. Simão).

Chaos, Solitons and Fractals 153 (2021) 111535



Contents lists available at ScienceDirect  
**Chaos, Solitons and Fractals**  
 Nonlinear Science, and Nonequilibrium and Complex Phenomena  
 journal homepage: [www.elsevier.com/locate/chaos](http://www.elsevier.com/locate/chaos)



Frontiers

## Evolution of behaviors in heterogeneous traffic models as driven annealed disorders and its relation to the n-vector model



Ricardo Simão\*

Departamento de Física, Universidade Federal de Minas Gerais, Caixa Postal 702, CEP Belo Horizonte, 30161-970 MG, Brazil

## ARTICLE INFO

Article history:  
 Received 11 July 2021  
 Revised 5 October 2021  
 Accepted 10 October 2021

Keywords:  
 Traffic models  
 Cellular-automaton  
 Heterogeneous populations  
 Evolution of ideas  
 Mutation bias  
 Selection bias  
 Mutability

## ABSTRACT

In one-dimensional heterogeneous models of hard-particle flux (like vehicular traffic), the system dynamics depend strongly on the behavior of the leading particle. In models satisfying the following properties: the interactions are unidirectional; the dynamics of the particles maximize the velocity or reduces the gap between particles; the particles are hard, and; there is no exchanging of particles with the exterior, simple heuristic arguments suggests a link between traffic theory and graph theory that considerably simplifies the analysis of the spreading of driving styles through social contagion or random fluctuations. The evolutionary dynamics transforms the *quenched* disorders characterizing the inhomogeneities of heterogeneous systems in dynamical (*annealed*) disorders which are *driven* toward specific regions in the space of parameters. Defining vectors on the space of parameters which entries are the parameters controlling the behavior of the individuals (parameters of the model), the arguments show a connection between the evolutionary dynamics of these systems and asymptotic behaviors of the n-vector model. When the time-scale ratio of selection to the local imitation to the mutation processes,  $\tau_i/\tau_m$ , is small an organized state where "orientation" corresponding to the set of parameters of the slowest strategies is favored, and if this ratio is big an unorganized state without a preferential orientation is favored.

© 2021 Elsevier Ltd. All rights reserved.

## 1. Introduction

Vehicular traffic severely impacts our daily lives. Long commute times have implications for the driver's well-being [1,2] and have noticeable economic impacts [3]. Practical solutions to traffic-related problems often come from the understanding of the underlying mechanisms emerging from simplified theories.

Since the seminal work of Lighthill and Whitham on traffic flow modeling [4,5], the scientific community has spent much effort to formulate a comprehensive and concise vehicular traffic theory [6–13]. One can organize vehicular traffic models in three categories according to their level of detail [13]: in macroscopic models, as the flow model proposed by Lighthill and Whitham, one applies concepts from hydrodynamics to traffic, considered as a continuous flow, and the typical quantities of interest are average velocities, density, and current; mesoscopic models, such as car-following models [14] and kinetic models [15], there is a more detailed description of the individual behavior, and some variables are treated as continuous; microscopic models presents the most detailed information on individual behaviors, such as cellular automaton (CA) models [6,11,12,16]. In CA models, one uses cells, ei-

ther occupied or empty, to represent the environment. The vehicles plus drivers are particles that hop cells following a given set of rules for each individual that depends on the cell state, the neighborhood of that cell, external parameters, and may depend on random factors [6,17].

Papageorgiou was the first to question whether continuous models could reach the quantitative and qualitative accuracy verified in other fields of physics [18]. Based on his criticism, a step toward realism and accuracy in microscopic models is the introduction of heterogeneous populations as a homogeneous algorithm submitted to a quenched disorder on its parameters [19–25]. This variation of parameters brings into discussion the differences in the drivers' behaviors and vehicles' performances of real traffic. A specially important instance where the study of heterogeneous populations helps understanding traffic-related phenomena is the emergence of social dilemmas analysis. Many interesting attempts to take social preferences into discussion are made when an additional fast highway is built to connect two previously unconnected locations [26], taking the fast lane to reduce the commute time, [27], lane changing [28,29], lane-selection protocols [30], route-selection [31], nearby junction-like traffic structures [32,33] and overtaking [34]. Lately, there are technological advancements toward vehicular traffic improvements from using analysis based on

\* Corresponding author.

E-mail address: [summernightdream@fis.grad.ufmg.br](mailto:summernightdream@fis.grad.ufmg.br)

Advances in Complex Systems  
Vol. 24, No. 5 (2021) 2150010 (14 pages)  
© World Scientific Publishing Company  
DOI: 10.1142/S0219525921500107



## THE TALENT VERSUS LUCK MODEL AS AN ENSEMBLE OF ONE-DIMENSIONAL RANDOM WALKS

RICARDO SIMÃO\*, FRANCISCO ROSENDO† and LUCAS WARDIL‡

*Universidade Federal de Minas Gerais,  
Belo Horizonte, MG CEP 31270-901, Brazil*

*\*summernightdream@fis.grad.ufmg.br*

*†frma059@gmail.com*

*‡wardil@fisica.ufmg.br*

Received 9 June 2021

Revised 14 October 2021

Accepted 15 October 2021

Published 29 December 2021

The role of luck on individual success is hard to be investigated empirically. Simplified mathematical models are often used to shed light on the subtle relations between success and luck. Recently, a simple model called “Talent versus Luck” showed that the most successful individual in a population can be just an average talented individual that is subjected to a very fortunate sequence of events. Here, we modify the framework of the TvL model such that in our model the individuals’ success is modelled as an ensemble of one-dimensional random walks. Our model reproduces the original TvL results and, due to the mathematical simplicity, it shows clearly that the original conclusions of the TvL model are the consequence of two factors: first, the normal distribution of talents with low standard deviation, which creates a large number of average talented individuals; second, the low number of steps considered, which allows the observation of large fluctuations. We also show that the results strongly depend on the relative frequency of good and bad luck events, which defines a critical value for the talent: in the long run, the individuals with high talent end up very successful and those with low talent end up ruined. Last, we considered two variations to illustrate applications of the ensemble of random walks model.

*Keywords:* Success; talent; luck; random walk.

### 1. Introduction

How important is luck in achieving success? This question is at the core of the meritocratic system. In one extreme, there is a belief that it is an amount of effort that determines success. Although there are some evidence that expert performances can be achieved through a regimen of effortful activities designed to optimize improvement [7], luck seems to have a significant impact on success. For example, random trading strategies yield a lower risk of losses in the stock market [4]. Another example is the discussion of whether Poker is a skill game or just gambling: the

‡Corresponding author.