

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Os k -ésimos números de Milnor e Tjurina de uma
folheação em $(\mathbb{C}^2, 0)$**

Marcela de Fátima Ribeiro Nascimento

Belo Horizonte - MG

2025

Marcela de Fátima Ribeiro Nascimento

**Os k -ésimos números de Milnor e Tjurina de uma
folheação em $(\mathbb{C}^2, 0)$**

Tese submetida à banca examinadora,
designada pelo Programa
de Pós-Graduação em Matemática do
Instituto de Ciências Exatas-ICEX da
Universidade Federal de Minas Gerais,
como requisito parcial para obtenção do
título de Doutora em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Arturo Ulises
Fernández Pérez

Belo Horizonte - MG

2025

2025, Marcela de Fátima Ribeiro Nascimento.
Todos os direitos reservados

Nascimento, Marcela de Fátima Ribeiro.

N244k

Os k -ésimos números de Milnor e Tjurina de uma folheação em $(\mathbb{C}^2, 0)$ [recurso eletrônico] / Marcela de Fátima Ribeiro Nascimento – 2025.
65 f. il.

Orientador: Arturo Ulises Fernández Pérez.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f.61-65.

1. Matemática – Teses. 2. Folheações (Matemática) – Teses. 3. Funções holomórficas – Teses. I. Fernández Pérez, Arturo Ulises. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irenquer Vismeg Lucas Cruz
CRB 6/819 - Universidade Federal de Minas Gerais – ICEX


ATA DA DUCENTÉSIMA QUADRAGÉSIMA PRIMEIRA DEFESA DE TESE DE DOUTORADO DA ALUNA MARCELA DE FÁTIMA RIBEIRO NASCIMENTO, REGULARMENTE MATRICULADA NO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, REALIZADA DIA 05 DE DEZEMBRO DE 2025.

Aos cinco dias do mês de dezembro de 2025, às 10h30, na sala 3060, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para julgar a defesa de tese da aluna **Marcela de Fátima Ribeiro Nascimento**, intitulada: “*Os Sk -ésimos números de Milnor e Tjurina de uma folheação em $\mathcal{S}(C^{\wedge}2, 0)$* ”, requisito final para obtenção do Grau de Doutora em Matemática. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Arturo Ulises Fernández Pérez, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares do trabalho final, passou a palavra à aluna para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa da aluna. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se reservadamente, sem a presença da aluna, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: a aluna foi considerada aprovada sem ressalvas e por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente à aluna pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 05 de dezembro de 2025.

PROF. DR. ARTURO ULISES FERNÁNDEZ PÉREZ
Orientador (UFMG)

PROFA. DRA. ALINE VILELA ANDRADE
Examinadora (UFMG)

Documento assinado digitalmente

 **AYANE ADELINA DA SILVA**
Data: 11/12/2025 11:58:49-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

PROFA. DRA. AYANE ADELINA DA SILVA
Examinadora (UFC)

PROF. DR. ROGÉRIO SANTOS MOL
Examinador (UFMG)

PROFA. DRA. THAÍS MARIA DALBELO
Examinadora (UFSCar)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por sempre me dar forças para seguir minha caminhada e conseguir alcançar meus objetivos.

Ao meu noivo, Alysson por todo carinho, amor e paciência, por estar sempre ao meu lado e me trazer paz nos momentos difíceis.

A minha família, por todo apoio e amor incondicional que sempre me deu. Obrigada mãe por acreditar em mim e por nunca medir esforços para me proporcionar sempre o melhor.

Aos meus familiares, por todas as orações, palavras de incentivo e apoio de sempre. Em especial, a minha querida avó Maria Ivone.

A todos os meus amigos, cujas palavras e apoio foram essenciais para o meu crescimento. Em especial, ao Genilson e o Luiz Henrique.

Agradeço especialmente ao meu orientador, Professor Arturo Fernández, por toda a disponibilidade, paciência e imprescindível apoio que sempre demonstrou em todas as reuniões. Obrigada por toda dedicação, correções, incentivo e todo o aprendizado que me proporcionou.

À todos os professores que tive durante toda a minha caminhada acadêmica, pelos ensinamentos e por todo o conhecimento que me propiciaram. Obrigada por colaborarem com a minha formação! Em especial, agradeço as valiosas contribuições do Prof. Marcelo Escudeiro para este trabalho. Aos funcionários do ICEX, pela disponibilidade, cordialidade e gentileza. Obrigada, principalmente as secretárias Eliane Andrea e Eliane Kelly por todo o apoio e carinho.

A CAPES pelo auxílio financeiro.

Por fim, muito obrigada a todos que direta ou indiretamente contribuíram com a realização deste trabalho.

“Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar. Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota.”
Madre Teresa de Calcutá

Resumo

Neste trabalho, introduzimos as noções do k -ésimo número de Milnor e do k -ésimo número de Tjurina para um germe de folheação holomorfa no plano complexo com uma singularidade isolada na origem. Desenvolvemos um estudo detalhado desses invariantes, estabelecendo fórmulas explícitas e relacionando-os a outros índices associados a folheações holomorfas. Em particular, obtemos uma expressão explícita para o k -ésimo número de Milnor de uma folheação e, como consequência, uma fórmula para o k -ésimo número de Milnor de uma função holomorfa. Analisamos o seu comportamento topológico, demonstrando que o k -ésimo número de Milnor de uma função holomorfa é um invariante topológico, enquanto o k -ésimo número de Tjurina não o é.

Na dimensão dois, fornecemos uma resposta positiva a uma conjectura proposta por Hussain, Liu, Yau e Zuo, referente a um limite inferior ótimo para o k -ésimo número de Tjurina de um polinômio quase-homogêneo. Apresentamos também um contraexemplo a outra conjectura de Hussain, Yau e Zuo relacionada à razão entre esses invariantes. Além disso, estabelecemos uma relação fundamental que liga os k -ésimos números de Tjurina de uma folheação e de uma curva invariante por meio do índice de Gómez-Mont–Seade–Verjovsky, e estendemos o Lema de Teissier ao contexto dos k -ésimos números de interseção polar. Ademais, obtemos um limite superior para o k -ésimo número de Milnor de uma folheação em termos do seu k -ésimo número de Tjurina ao longo de divisores balanceados de separatrizes. Por fim, para folheações quase-homogêneas não dicríticas, obtemos uma fórmula fechada para seus k -ésimos números de Milnor e de Tjurina.

Palavras-chave: folheação holomorfa; k -ésimo número de Milnor; k -ésimo número de Tjurina; índice de folheações holomorfas; conjectura de Dimca-Greuel.

Abstract

In this work, we introduce the notions of the k -th Milnor number and the k -th Tjurina number for a germ of holomorphic foliation on the complex plane with an isolated singularity at the origin. We develop a detailed study of these invariants, establishing explicit formulas and relating them to other indices associated with holomorphic foliations. In particular, we obtain an explicit expression for the k -th Milnor number of a foliation and, as a consequence, a formula for the k -th Milnor number of a holomorphic function. We analyze their topological behavior, proving that the k -th Milnor number of a holomorphic function is a topological invariant, whereas the k -th Tjurina number is not. In dimension two, we provide a positive answer to a conjecture posed by Hussain, Liu, Yau, and Zuo concerning a sharp lower bound for the k -th Tjurina number of a weighted homogeneous polynomial. We also present a counterexample to another conjecture of Hussain, Yau, and Zuo regarding the ratio between these invariants. Moreover, we establish a fundamental relation linking the k -th Tjurina numbers of a foliation and of an invariant curve via the Gómez-Mont–Seade–Verjovsky index, and we extend Teissier’s Lemma to the setting of k -th polar intersection numbers. In addition, we derive an upper bound for the k -th Milnor number of a foliation in terms of its k -th Tjurina number along balanced divisors of separatrices. Finally, for non-dicritical quasi-homogeneous foliations, we obtain a closed formula for their k -th Milnor and Tjurina numbers.

Keywords: holomorphic foliation; k -th Milnor number; k -th Tjurina number; Index of holomorphic foliations; Dimca–Greuel conjecture.

Sumário

1	Introdução	8
2	Preliminares	12
2.1	Folheações Holomorfas	12
2.2	Redução de Singularidades	15
2.3	Índices de folheações holomorfas	17
2.3.1	Número de Milnor	18
2.3.2	Número de Tjurina	20
2.3.3	Índices do tipo resíduo de germe de folheações holomorfas	21
2.4	k -ésimos números de Tjurina e Milnor de singularidades homogêneas quase-homogêneas	24
3	Os k-ésimos números de Milnor e Tjurina de uma folheação holomorfa singular	27
3.1	k -ésimo número de Milnor de uma folheação	27
3.2	k -ésimo número de Tjurina de uma folheação	29
3.3	Relação entre os k -ésimos números de Milnor e Tjurina de uma folheação	31
3.4	Álgebras de Milnor e Tjurina	33
4	Índice GSV e o k-ésimo número de interseção polar	38
4.1	Índice GSV	38
4.2	k -ésimo índice polar	43
4.3	Lema de Teissier para o k -ésimo número de Milnor	45
5	Fórmula para o k-ésimo número de Milnor e sobre a invariância topológica dos k-ésimos números de Milnor e Tjurina	50
5.1	Fórmula para o k -ésimo número de Milnor de uma folheação	50
5.2	Sobre a invariância topológica dos k -ésimos números de Milnor e Tjurina	52
6	Sobre algumas conjecturas	55
6.1	Conjectura de Dimca-Greuel	55
6.2	Sobre a conjectura para o limite inferior do k -ésimo número de Tjurina de um polinômio homogêneo quase-homogêneo	58
	Referências	60

1. Introdução

Nos últimos anos, novos invariantes associados a germes de hipersuperfícies complexas em $0 \in \mathbb{C}^n$ têm sido introduzidos com o objetivo de desenvolver uma teoria de classificação de singularidades. Entre eles, destacam-se os chamados *k-ésimos números de Milnor e de Tjurina de uma hipersuperfície*.

Em 2017, Gert-Martin Greuel e Thuy Huong Pham [24] definiram as chamadas *k-ésimas álgebras de Milnor e Tjurina* para K um corpo algebricamente fechado de característica arbitrária, respectivamente do seguinte modo:

$$T_k(f) = \frac{K[[x]]}{(f, \mathfrak{m}^k j(f))}, \quad M_k(f) = \frac{K[[x]]}{\mathfrak{m}^k j(f)},$$

onde

$$K[[x]] = K[[x_1, x_2, \dots, x_n]]$$

é o anel de séries formais sobre K com ideal maximal \mathfrak{m} , $f \in K[[x]]$ e $j(f) = (f_{x_1}, \dots, f_{x_n})$ o ideal jacobiano de f .

Consideremos agora $\mathcal{O}_n = \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ o anel local das séries de potências convergentes, e \mathfrak{m} o seu ideal maximal. Para uma hipersuperfície com singularidade isolada $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$, onde $V = V(f) = \{f = 0\}$ e $f \in \mathcal{O}_n$, em 2023, Hussain, Liu, Yau e Zuo [27] estudaram o *k-ésimo número de Milnor* e o *k-ésimo número de Tjurina* de V , dados respectivamente por

$$\mu^k(V) = \dim \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{m}^k j(f)}, \quad \tau^k(V) = \dim \frac{\mathcal{O}_n}{(\mathfrak{m}^k j(f), f)}, \quad \text{para todo inteiro } k \geq 0.$$

Pelo Teorema de Mather–Yau (ver, por exemplo, [23, Teoremas 2.26 e 2.28]), segue que $\mu^k(V)$ e $\tau^k(V)$ são *invariantes analíticos*. Quando V é uma singularidade de curva binomial no plano, os autores demonstraram que $\mu^k(V)$ e $\tau^k(V)$ são também invariantes topológicos. Além disso, eles calcularam explicitamente $\mu^k(V)$ e $\tau^k(V)$ para singularidades binomiais; ver os Teoremas A, B e C em [27]. O artigo conclui com uma caracterização analítica das singularidades simples de hipersuperfícies por meio das chamadas *álgebras k-ésimas de Yau*; ver o Teorema D em [27].

Motivados por essas definições e resultados, o objetivo deste trabalho é definir os *k-ésimos números de Milnor e Tjurina* de um germe de folheação holomorfa singular na origem do plano complexo \mathbb{C}^2 . O germe de folheação holomorfa singular, denotado por \mathcal{F} , é definido por uma 1-forma holomorfa ω . Em uma vizinhança perfurada da origem, que

supomos ser uma singularidade isolada de ω , a 1-forma ω induz uma decomposição do espaço em folhas, isto é, curvas analíticas imersas que correspondem às soluções integrais da 1-forma. Uma referência importante para o estudo topológico e geométrico da folheação \mathcal{F} são suas curvas separatrizes, ou seja, as curvas analíticas invariantes por \mathcal{F} que contém a origem do plano complexo \mathbb{C}^2 . A propriedade de que uma folheação singular sempre admite uma separatriz foi conjecturada por C. Briot (1817-1882) e J.C. Bouquet (1819-1885) e a conjectura foi solucionada positivamente em 1982 por C. Camacho e P. Sad em [6].

Seja $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ um germe de 1-forma holomorfa na origem de \mathbb{C}^2 tal que a folheação definida por ω possua singularidade isolada em $0 \in \mathbb{C}^2$. Seja $C = \{f = 0\}$ um germe de uma curva complexa singular, onde $f \in \mathcal{O}_2$ é reduzida. Dizemos que C é *invariante* por \mathcal{F} se $(\omega \wedge df)/f \in \Omega^2(\mathbb{C}^2, 0)$. Definimos então o k -ésimo número de Milnor de \mathcal{F} na origem como

$$\mu^k(\mathcal{F}, 0) := \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(P, Q)\mathfrak{m}^k},$$

e o k -ésimo número de Tjurina de \mathcal{F} ao longo de C como

$$\tau^k(\mathcal{F}, C, 0) := \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(P, Q)\mathfrak{m}^k + (f)}.$$

Note que, quando $k = 0$, temos $\mu^0(\mathcal{F}) := \mu(\mathcal{F})$ e $\tau^0(\mathcal{F}, C) := \tau(\mathcal{F}, C)$, que coincidem, respectivamente, com o número clássico de Milnor de \mathcal{F} , definido por Camacho–Lins Neto–Sad [5], e com o número de Tjurina de \mathcal{F} ao longo de C , introduzido por Cano–Corral–Mol [9]. Observe também que, quando \mathcal{F} é dada por uma integral primeira holomorfa $\omega = df$, temos $\mu^k(\mathcal{F}, 0) = \mu^k(C)$ e $\tau^k(\mathcal{F}, C) = \tau^k(C)$.

Naturalmente, essa definição estende-se aos germes de 1-formas holomorfas com singularidade isolada na origem de \mathbb{C}^n , como descrito a seguir. Seja $\omega = \sum_{i=1}^n P_i dx_i$ e $V = \{f = 0\}$ uma hipersuperfície invariante por ω . Então, para todo inteiro $k \geq 0$, definimos o k -ésimo número de Milnor de ω por

$$\mu^k(\omega, 0) = \dim \frac{\mathcal{O}_n}{(P_1, \dots, P_n)\mathfrak{m}^k},$$

e o k -ésimo número de Tjurina de ω com respeito a V como

$$\tau^k(\omega, V, 0) = \dim \frac{\mathcal{O}_n}{(P_1, \dots, P_n)\mathfrak{m}^k + (f)}.$$

O desenvolvimento deste trabalho está organizado da seguinte forma:

O Capítulo 1 é dedicado à revisão dos conceitos fundamentais da teoria das folheações. Além disso, revisamos os principais invariantes associados às singularidades, com ênfase

nos números de Milnor e de Tjurina, e abordamos os k -ésimos números de Milnor e de Tjurina no contexto das hipersuperfícies consideradas em Hussain, Liu, Yau e Zuo [27], cuja abordagem serviu de motivação para este estudo. Por fim, discutimos alguns resultados relativos às singularidades homogêneas quase-homogêneas.

O Capítulo 2 é dedicado à introdução e ao estudo dos k -ésimos números de Milnor e Tjurina de uma folheação holomorfa singular em $(\mathbb{C}^2, 0)$. Nesse capítulo, definimos o k -ésimo número de Tjurina, estabelecemos relações entre os k -ésimos números de Milnor e de Tjurina e introduzimos as respectivas álgebras associadas. Encerramos o capítulo apresentando a seguinte fórmula, válida para o caso de folheações quase-homogêneas:

$$\mu^k(\mathcal{F}, 0) = \tau^k(\mathcal{F}, C, 0) + \frac{k(k-1)}{2}, \quad \forall k \geq 1.$$

a partir de uma caracterização de folheações quase-homogêneas devida a Mattei [32].

No Capítulo 3, demonstramos alguns resultados sobre dimensão de ideais em \mathcal{O}_2 que serão importantes para a demonstração dos principais teoremas deste trabalho. Além disso, estudamos a relação entre o índice de Gómez-Mont–Seade–Verjovsky (GSV) de \mathcal{F} ao longo de C na origem (ver [21]) e o k -ésimo número de Tjurina da curva separatriz C e da folheação \mathcal{F} dado por

$$\tau^k(\mathcal{F}, C, 0) - \tau^k(C) = GSV(\mathcal{F}, C, 0).$$

Em seguida, introduzimos o *k -ésimo número de interseção polar* de uma folheação \mathcal{F} com respeito a uma curva invariante $C = \{f = 0\}$. Como aplicação, provamos uma extensão do Lema de Teissier [43], que fornece uma fórmula relacionando o k -ésimo número de interseção polar com $\mu^k(f)$.

No Capítulo 4, apresentamos uma fórmula explícita para o k -ésimo número de Milnor de uma folheação holomorfa \mathcal{F}

$$\mu^k(\mathcal{F}, 0) = \mu(\mathcal{F}, 0) + \dim \frac{\mathcal{O}_2}{\mathfrak{m}^k} + \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(P) + \mathfrak{m}^k},$$

onde \mathcal{F} é definida por $\omega = Pdx + Qdy$ e a multiplicidade algébrica de \mathcal{F} satisfaz $\nu_0(\mathcal{F}) = \nu_0(P)$. Como consequência, obtemos uma fórmula explícita para $\mu^k(f)$ e combinando este resultado com [27, Proposição 2.6], recuperamos os Teoremas A e B da mesma referência. Mostramos ainda que o k -ésimo número de Milnor de um germe $f \in \mathcal{O}_2$ é um invariante topológico, enquanto o k -ésimo número de Tjurina não é.

No Capítulo 5, discutimos uma conjectura sobre a razão entre μ^k e τ^k , proposta em

[28, Conjectura 1.3], que afirma que

$$\frac{\mu^k(f)}{\tau^k(f)} < \frac{4}{3} \quad \forall k \geq 0.$$

Utilizando o software SINGULAR, fornecemos um contraexemplo que demonstra a falsidade dessa conjectura no caso geral. Mostramos, no entanto, que a conjectura permanece válida sob determinadas restrições sobre k . E finalizamos, apresentando uma resposta positiva a conjectura proposta por Chuangqiang Hu, Stephen S.-T. Yau, Huaiqing Zuo em [27, Conjecture 1.1], sobre o limite inferior para o k -ésimo número de Tjurina de uma hipersuperfície complexa no caso em que C é um germe de curva singular reduzida em $0 \in \mathbb{C}^2$ definido por um polinômio quase-homogêneo f com peso do tipo $(w_1, w_2; 1)$, com $\nu_0(f) \geq 1/w_1$.

2. Preliminares

2.1 Folheações Holomorfas

Nesta seção, apresentamos os conceitos fundamentais, exemplos e resultados relevantes relacionados às folheações holomorfas. Embora a teoria seja bastante ampla, neste trabalho concentraremos a atenção nas folheações definidas por 1-formas holomorfas em \mathbb{C}^2 , que desempenharão papel recorrente nos capítulos subsequentes. A seguir, introduzimos a definição geral de folheação; uma exposição mais abrangente da teoria pode ser consultada em [30].

Definição 2.1. Seja M uma variedade complexa de dimensão complexa n . Uma folheação holomorfa de dimensão k , ou codimensão $n - k$, $1 \leq k \leq n - 1$, é uma decomposição \mathcal{F} de M em subvariedades complexas disjuntas (chamadas folhas da folheação \mathcal{F}) de dimensão complexa k , imersas de forma bijetiva, satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) Para todo $p \in M$, existe uma única subvariedade L_p da decomposição que contém o ponto p (chamada folha por p);
- (ii) Para todo $p \in M$, existe uma carta holomorfa de M (chamada carta distinta de \mathcal{F}), (ϕ, U) , $p \in U$, $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{C}^n$, tal que $\phi(U) = P \times Q$, onde P e Q são subconjuntos abertos tipo polidisco em \mathbb{C}^k e \mathbb{C}^{n-k} , respectivamente;
- (iii) Se L é uma folha de \mathcal{F} tal que $L \cap U \neq \emptyset$, então

$$L \cap U = \bigcup_{q \in D_{L,U}} \phi^{-1}(P \times \{q\}),$$

onde $D_{L,U}$ é um subconjunto enumerável de Q . Os subconjuntos de U da forma $\phi^{-1}(P \times \{q\})$ são chamados de *placas* da carta distinguida (ϕ, U) .

Uma folheação de dimensão um é chamada *folheação por curvas*. Nesse caso, as folhas são superfícies de Riemann imersas de forma bijetiva na variedade ambiente. Além desse exemplo, dois exemplos clássicos de folheações são apresentados a seguir e podem ser encontrados em [30].

Exemplo 2.1. Se considerarmos qualquer decomposição de \mathbb{C}^n na forma $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$, tal decomposição define uma folheação \mathcal{F} de dimensão k em \mathbb{C}^n . As folhas de \mathcal{F} são os subespaços afins $\mathbb{C}^k \times \{q\}$, com $q \in \mathbb{C}^{n-k}$.

Exemplo 2.2. (Folheações geradas por 1-formas diferenciais) Seja M uma variedade complexa de dimensão n e ω uma 1-forma holomorfa não identicamente nula em M . Seja $S = \{p \in M; \omega_p \equiv 0\}$ o conjunto singular de ω . Nesse caso, ω induz uma distribuição de hiperplanos Ω no aberto $N = M \setminus S$ definida por

$$\Omega_p = \text{Nuc}(\omega_p) = \{v \in T_p M; \omega_p(v) = 0\}.$$

Agora, dizemos que ω (ou Ω) é integrável se existe uma folheação holomorfa \mathcal{F} em N tal que $T\mathcal{F} = \Omega$ (isto é, $T_p\mathcal{F} = \Omega_p$). Um resultado clássico, conhecido como Teorema de Frobenius, afirma que ω é integrável se, e somente se, $\omega \wedge d\omega = 0$. Costuma-se dizer que a folheação \mathcal{F} é definida pela equação diferencial $\omega = 0$ e que as folhas de \mathcal{F} são subvariedades integrais dessa equação.

Definição 2.2. [30] Seja M uma variedade complexa de dimensão $n \geq 2$. Uma folheação holomorfa singular de codimensão um em M é um objeto \mathcal{F} determinado por coleções $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\{\omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\{g_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset}$, tais que:

- (i) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é um recobrimento aberto de M .
- (ii) Para cada índice α , ω_α é uma 1-forma holomorfa, integrável e não identicamente nula em U_α .
- (iii) $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$.
- (iv) Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então

$$\omega_\alpha = g_{\alpha\beta} \cdot \omega_\beta \quad \text{em } U_\alpha \cap U_\beta.$$

Além disso, para cada ω_α definimos o conjunto singular por

$$\text{sing}(\omega_\alpha) = \{p \in U_\alpha \mid \omega_\alpha(p) = 0\} =: S_\alpha.$$

Observamos que S_α é um subconjunto analítico de U_α e das condições (iii) e (iv), segue que

$$S_\alpha \cap U_\alpha \cap U_\beta = S_\beta \cap U_\alpha \cap U_\beta.$$

Assim, a união desses conjuntos S_α define um subconjunto analítico S de M . Esse conjunto, denotado por $\text{sing}(\mathcal{F})$, é chamado de *conjunto singular de \mathcal{F}* .

Dizemos que duas folheações \mathcal{F} e \mathcal{F}_1 coincidem se

$$\text{sing}(\mathcal{F}) = \text{sing}(\mathcal{F}_1) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}|_{M \setminus \text{sing}(\mathcal{F})} = \mathcal{F}_1|_{M \setminus \text{sing}(\mathcal{F}_1)}.$$

No caso em que $\text{sing}(\mathcal{F}) = \emptyset$, vemos que \mathcal{F} é uma folheação de codimensão um, à qual chamamos de *folheação regular*.

Proposição 2.1. [8, Proposição 2.21] *Uma folheação \mathcal{F} em \mathbb{C}^n pode ser definida por uma 1-forma holomorfa integrável global.*

Em particular, se \mathcal{F} é uma folheação em $(\mathbb{C}^2, 0)$, segue da Proposição X que existe um polidisco $U \subset \mathbb{C}^2$ centrado na origem e uma 1-forma holomorfa integrável ω definida em U tal que $\mathcal{F}|_U$ é definida por ω . Assim, em U , temos

$$\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad (2.1)$$

ou por seu campo de vetores dual

$$v = -Q(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + P(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.2)$$

onde $P(x, y), Q(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ são relativamente primos, sendo $\mathbb{C}\{x, y\}$ o anel das séries de potências convergentes em duas variáveis com coeficientes complexos. Define-se a ordem da folheação \mathcal{F} no ponto m por

$$\nu_m(\mathcal{F}) = \min\{\nu_m(A), \nu_m(B)\},$$

onde, para $X \in \mathbb{C}\{x, y\}$, $\nu_m(X)$ representa a ordem do primeiro termo do jato não nulo da série de Taylor de X . Se $\nu_m(\mathcal{F}) = 0$, o ponto é não singular, pois pelo menos uma das componentes tem termo de ordem zero. Se $\nu_m(\mathcal{F}) > 0$, a origem é ponto é singular.

Um germe de folheação holomorfa singular \mathcal{F} em $(\mathbb{C}^2, 0)$ é definido por um germe de 1-forma holomorfa integrável em $0 \in \mathbb{C}^2$ do tipo $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ onde P, Q não possuem fator comum. A forma ω determina \mathcal{F} a menos de uma multiplicação por uma unidade em $\mathbb{C}\{x, y\}$.

Seja $f(x, y) \in \mathbb{C}[[x, y]]$ reduzida, onde $\mathbb{C}[[x, y]]$ é o anel de series de potências formais nas variáveis x, y . Uma curva $C = \{f(x, y) = 0\}$ é dita invariante pela folheação \mathcal{F} ou \mathcal{F} -invariante se $\omega \wedge df = (f.h)dx \wedge dy$, onde $h(x, y) \in \mathbb{C}[[x, y]]$. Uma separatriz de \mathcal{F} é uma curva irredutível e \mathcal{F} -invariante. Dizemos que tal separatriz é uma *separatriz analítica ou convergente* se $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Em [6], Camacho e Sad mostram que toda folheação holomorfa em (\mathbb{C}^2, p) com uma singularidade isolada p possui ao menos uma separatriz convergente passando por p . O conjunto de todas as separatrizes da folheação \mathcal{F} é denotado por $\text{Sep}_p(\mathcal{F})$. Se $\text{Sep}_p(\mathcal{F})$ é um conjunto finito, dizemos que \mathcal{F} é uma *folheação não-dicrítica*, caso contrário, \mathcal{F} é dita *dicrítica*.

Na sequência, introduzimos a noção de singularidades reduzidas de uma folheação, conceito fundamental para alguns resultados que discutiremos na próxima seção.

Ressaltamos que essa definição já se encontra consolidada na literatura, podendo ser consultada, por exemplo, em [30, Definição 1.17].

Definição 2.3. Um ponto $p \in \mathbb{C}^2$ é uma singularidade *reduzida* ou *simples* de \mathcal{F} se a parte linear $Dv(p)$ do campo de vetores dual a \mathcal{F} dado como na equação (2.2) é não-nula e seus autovalores $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ satisfazem um dos seguintes casos:

- (1) $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ e $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}^+$ (singularidade não-degenerada ou singularidade hiperbólica complexa);
- (2) $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$ (singularidade sela-nó)

No primeiro caso (1), existe um sistema de coordenadas analíticas (x, y) em que \mathcal{F} é dada pela equação

$$\omega = x(\lambda_1 + a(x, y))dy + y(\lambda_2 + b(x, y))dx, \quad (2.3)$$

onde $a(x, y), b(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ são não-unidades. O conjunto $\text{Sep}_p(\mathcal{F})$, neste caso, é formado por duas curvas analíticas dadas por $\{x = 0\}$ e $\{y = 0\}$.

Com relação ao segundo caso, quando a singularidade é do tipo sela-nó, a menos de uma mudança formal de coordenadas, a folheação \mathcal{F} é dada por uma 1-forma do tipo

$$\omega = x^{\ell+1}dy - y(1 + \lambda x^\ell)dx, \quad (2.4)$$

onde $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\ell \in \mathbb{Z}_+^*$. Essa é chamada a *forma normal da sela-nó* (veja em, [35, Proposição 4.3]). As curvas $\{x = 0\}$ e $\{y = 0\}$ são denominadas, respectivamente, separatriz forte e separatriz fraca. A separatriz forte é sempre convergente, enquanto a fraca pode ser convergente ou não.

2.2 Redução de Singularidades

Para introduzir o estudo da redução de singularidades, é necessário apresentar o processo de *blow-up* (ou *explosão*), o qual será descrito nesta seção. Neste trabalho, concentramos nossa atenção na construção do *blow-up* de \mathbb{C}^2 na origem.

Consideremos duas cópias de \mathbb{C}^2 , denotadas por U e V , com coordenadas (t, x) e (s, y) , respectivamente. Definimos a variedade complexa $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ identificando cada ponto $(t, x) \in U \setminus \{t = 0\}$ com o ponto $(s, y) = \alpha(t, x) = (1/t, tx) \in V \setminus \{s = 0\}$.

O divisor excepcional de $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ é, por definição, a subvariedade D de $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ tal que $U \cap D = \{x = 0\}$ e $V \cap D = \{y = 0\}$. Observando que $y = tx$, concluímos que D está bem definido e é biholomorfo a $C = \mathbb{C}\mathbb{P}(1)$.

Por fim, consideremos a aplicação holomorfa $\pi : \widetilde{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por

$$\pi|_U(t, x) = (x, tx) \quad \text{e} \quad \pi|_V(s, y) = (sy, y).$$

Note que π está bem definida, pois em $U \cap V$ temos $y = tx$ e $x = sy$. Além disso, π possui as seguintes propriedades:

- $\pi^{-1}(0) = D$;
- a restrição $\pi|_{\widetilde{\mathbb{C}^2} \setminus D} : \widetilde{\mathbb{C}^2} \setminus D \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ é um biholomorfismo;
- π é própria.

Dizemos que $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ é o *blow-up* de \mathbb{C}^2 na origem e que π é a aplicação de *blow-up*. Agora, se $\pi : \widetilde{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathbb{C}^2$ é *blow-up* de \mathbb{C}^2 na origem, podemos considerar a expressão de π na coordenada (t, x) e obter:

$$f \circ \pi(t, x) = f(x, tx) = \sum_{j=k}^{\infty} f_j(x, tx) = x^k \sum_{j=k}^{\infty} x^{j-k} f_j(1, t) = x^k f_U(t, x),$$

onde $k = \nu_0(t)$, de modo que

$$\pi^{-1}(C) \cap U = \{x = 0\} \cup \{f_U(t, x) = 0\}.$$

De maneira análoga, na coordenada (s, y) obtemos

$$\pi^{-1}(C) \cap V = \{y = 0\} \cup \{f_V(s, y) = 0\},$$

onde

$$f_V(s, y) = \sum_{j=k}^{\infty} y^{j-k} f_j(s, 1).$$

Portanto,

$$\pi^{-1}(C) = D \cup \widetilde{C},$$

onde

$$\widetilde{C} = \{f_U = 0\} \cup \{f_V = 0\}.$$

A curva \widetilde{C} definida acima é chamada de *transformada estrita* de C . Embora o processo de redução de singularidades não seja único, existe uma redução minimal, única a menos de isomorfismo, denominada *redução minimal de singularidades* de \mathcal{F} . Para prosseguir, mencionamos dois resultados fundamentais que motivam o uso do *blow-up* na análise de folheações holomorfas.

O primeiro é o clássico Teorema da Separatriz de Camacho–Sad [6].

Teorema 2.1. *Toda folheação holomorfa de dimensão um em uma variedade complexa de dimensão dois, com uma singularidade isolada, admite ao menos uma separatriz convergente passando por essa singularidade.*

Consideremos então uma folheação holomorfa \mathcal{F} em uma vizinhança da origem de \mathbb{C}^2 , com singularidade isolada na origem, definida por $\omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy$. O *blow-up* de ω induz uma nova folheação \mathcal{F}^* em $\widetilde{\mathbb{C}^2}$, a qual pode ser estudada nas cartas locais de π . Para detalhes técnicos dessa construção, remetemos o leitor a [30, Seção 1.6, p. 41].

Outro conceito importante é o de *blow-up* dicrítico: dizemos que um *blow-up* π é dicrítico em relação a uma folheação \mathcal{F} em $(\mathbb{C}^2, 0)$ quando o divisor excepcional $\pi^{-1}(0)$ não é invariante pela folheação transformada \mathcal{F}^* ; caso contrário, π é chamado não-dicrítico.

Por fim, destacamos um resultado central no estudo da redução de singularidades que determina a existência de uma redução de singularidades.

Teorema 2.2 (Redução de Singularidades). *Seja \mathcal{F} o germe de uma folheação em $(\mathbb{C}^2, 0)$. Então, existe um morfismo $\pi : D \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, onde D é o divisor excepcional de \mathcal{F} obtido por um número finito de *blow-ups* de pontos, tal que toda singularidade de $\pi^*\mathcal{F}$ é uma singularidade reduzida.*

Esse resultado permite obtermos uma descrição local mais simples do comportamento da folheação.

Dizemos que uma folheação \mathcal{F} é do tipo *curva generalizada* se, no seu processo de redução de singularidades, não aparecem singularidades do tipo sela-nó [8]. Uma singularidade do tipo sela-nó é uma *sela-nó tangente* se sua separatriz fraca está contida no divisor excepcional $D = \pi^{-1}(0)$. Podemos, então, considerar uma classe mais ampla de folheações, denominada *folheações do segundo tipo*, que são definidas pela ausência de singularidades do tipo sela-nó tangente no seu processo de redução de singularidades, veja [8]. Tais folheações possuem a seguinte propriedade:

Teorema 2.1 ([38, p. 80]). *Seja \mathcal{F} uma folheação do segundo tipo com singularidade isolada em $0 \in \mathbb{C}^2$. Se C é o conjunto de separatrizes de \mathcal{F} , então C e \mathcal{F} possuem o mesmo processo de redução de singularidades.*

2.3 Índices de folheações holomorfas

Nesta seção reunimos alguns invariantes clássicos que servirão de base para os resultados desenvolvidos posteriormente. Recordamos os números de Milnor e Tjurina de uma folheação \mathcal{F} , que são, respectivamente, invariantes topológico e analítico. Em seguida, apresentamos os principais índices do tipo resíduo: o índice de Camacho–Sad, o índice GSV e o índice variacional.

2.3.1 Número de Milnor

O número de Milnor é um dos invariantes mais clássicos e fundamentais no estudo local de singularidades de funções holomorfas. Para uma função $f \in \mathcal{O}_n$ com ponto crítico isolado na origem, o número de Milnor $\mu_0(f)$ [37] é definido como a dimensão do espaço de funções holomorfas modulo o ideal jacobiano gerado pelas derivadas parciais de f :

$$\mu_0(f) := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)}.$$

Com isso, podemos apresentar a definição do número de Milnor de uma hipersuperfície.

Definição 2.4. Seja $(X, 0)$ uma hipersuperfície com singularidade isolada em $(\mathbb{C}^n, 0)$, $n \geq 1$. O número de Milnor de $(X, 0)$ é definido como

$$\mu_0(X) = \mu_0(f),$$

onde $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é qualquer função holomorfa reduzida tal que $f^{-1}(0) = X$.

Analogamente, no contexto de folheações holomorfas singulares definidas por 1-formas, o número de Milnor também pode ser definido como a dimensão do quociente do anel local de funções pelo ideal gerado pelos coeficientes da 1-forma que define \mathcal{F} . Mais precisamente:

Definição 2.5. Se $\omega = \sum_{j=1}^n A_j(z) dz_j$ é uma 1-forma holomorfa com singularidade isolada em $0 \in \mathbb{C}^n$, então o número de Milnor de ω é dado por

$$\mu_0(\omega) := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{(A_1, \dots, A_n)}.$$

No caso de uma folheação por curva em \mathbb{C}^2 , definidas pela 1-formas diferencial ω , o número de Milnor da folheação \mathcal{F} é simplesmente $\mu_0(\mathcal{F}) := \mu_0(\omega)$. O número de Milnor de uma 1-forma como definido acima possui algumas propriedades. Usaremos nessa parte as referências [6], [8] e [19], considerando o caso em que \mathcal{F} é uma folheação holomorfa em $(\mathbb{C}^2, 0)$.

1. $\mu_0(\mathcal{F}) = 0$ se, e somente se, $v(0) \neq 0$, onde v é o campo vetorial definido em (2.2) ;
2. $0 < \mu_0(\mathcal{F}) < \infty$ se, e somente se, 0 é uma singularidade isolada de v .

Para facilitar a escrita, sempre que nos referimos à dimensão estaremos falando sobre a dimensão complexa do quociente e, por isso, omitiremos a notação $\dim_{\mathbb{C}}$ e escrevemos apenas \dim .

Definição 2.6. O número de Milnor $\mu_0(\mathcal{F})$ de uma folheação \mathcal{F} em $0 \in \mathbb{C}^2$, dada por uma 1-forma $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$, é definido por

$$\mu_0(\mathcal{F}) = i_0(P, Q)$$

onde $i_0(P, Q)$ é o número de interseção dado por

$$i_0(P, Q) = \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(P, Q)},$$

onde (P, Q) denota o ideal de \mathcal{O}^2 gerado por P e Q .

Como P e Q são primos entre si, segue que $\mu_0(\mathcal{F})$ é um inteiro não-negativo. O número de Milnor de uma folheação é um invariante topológico, como mostrado em [5, Teorema A], o que significa que, se \mathcal{F} e \mathcal{F}' são folheações holomorfas unidimensionais localmente topologicamente equivalentes nos pontos p e p' , respectivamente — ou seja, existe um homeomorfismo φ entre vizinhanças de p e p' que leva folhas de \mathcal{F} em folhas de \mathcal{F}' , com $\varphi(p) = p'$ — então

$$\mu_p(\mathcal{F}) = \mu_{p'}(\mathcal{F}').$$

Além disso, a multiplicidade de interseção possui as seguintes propriedades fundamentais:

1. $i_0(a, b) = i_0(b, a)$;
2. $i_0(aa', b) = i_0(a, b) + i_0(a', b)$;
3. $i_0(a, b) < \infty$ se, e somente se, a e b não possuem fatores comuns;
4. $i_0(a, b) = 0$ se, e somente se, $a(0) \neq 0$ ou $b(0) \neq 0$;
5. $i_0(a, b) = i_0(a, b + k_1 a)$ e $i_0(a, b) = i_0(a + k_2 b, b)$, para qualquer $k_1, k_2 \in \mathbb{C}\{x, y\}$;
6. Se $a = c_m x^m$ e $b = c_n y^n$, com $m, n \geq 1$ e $c_m, c_n \in \mathbb{C}^*$, então $i_0(a, b) = mn$.

Exemplo 2.1. Considere o polinômio

$$f(x, y) = x^3 y + x^4 + y^5.$$

Vamos calcular o número de Milnor de f :

$$\begin{aligned}
\mu_0(f) &= i_0(f_x, f_y) \\
&= \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(3x^2y + 4x^3, x^3 + 5y^4)} \\
&= \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(x^2(3y + 4x), x^3 + 5y^4)} \\
&= \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(x^2, x^3 + 5y^4)} + \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(3y + 4x, x^3 + 5y^4)} \quad (\text{pela propriedade (2)}) \\
&= \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(x^2, y^4)} + \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(y, x^3 + 5y^4)} \quad (\text{pela propriedade (5)}) \\
&= 8 + 3 = 11.
\end{aligned}$$

Ou ainda podemos calcular o número de Milnor usando o software SINGULAR [11] pelo seguinte código

```

> LIB "sing.lib"; // package com comandos "milnor" e "tjurina"
> ring r = 0, (x,y), ds; // anel local
> poly f = x3*y + x4 + y5;
> milnor(f);
11

```

2.3.2 Número de Tjurina

O número de Tjurina, nome dado devido a G. Tjurina, é um invariante que apareceu pela primeira vez em [40], onde foi caracterizado como a dimensão do espaço base de uma deformação semi-universal de uma hipersuperfície. No contexto de hipersuperfícies, esse índice é definido da seguinte forma:

Definição 2.7. [23, Definição 2.1] Seja $X : \{f = 0\}$ o germe de uma hipersuperfície reduzida, com $f \in \mathcal{O}_n$. O número de Tjurina de $(X, 0)$ é dado por

$$\tau_0(C) = \dim \frac{\mathcal{O}_n}{(f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})}.$$

No contexto de folheações em $(\mathbb{C}^2, 0)$, o número de Tjurina foi definido por Cano F., Corral N. e [9, pg.24].

Definição 2.8. Seja \mathcal{F} uma folheação singular em $(\mathbb{C}^2, 0)$ definida pela 1-forma $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ e $C : \{f(x, y) = 0\}$ uma curva analítica reduzida \mathcal{F} -invariante. O

número de Tjurina de \mathcal{F} com respeito a C é

$$\tau(\mathcal{F}, C, 0) = \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(f, P, Q)}.$$

Exemplo 2.2. Considere a função

$$f(x, y) = x^3y + x^4 + y^5.$$

Calculamos inicialmente as derivadas parciais $f_x = 3x^2y + 4x^3$ e $f_y = x^3 + 5y^4$. O número de Tjurina de f na origem é definido por

$$\tau_0(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(f, f_x, f_y)} = \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(x^3y + x^4 + y^5, 3x^2y + 4x^3, x^3 + 5y^4)}.$$

Usaremos para calcular o número de Tjurina o software SINGULAR, cujo o código utilizado é o que segue

```
> LIB "sing.lib"; // package com comandos "milnor" and "tjurina"
> ring r = 0, (x,y), ds; // anel local
> poly f = x3*y + x4 + y5;
> tjurina(f);
10
```

2.3.3 Índices do tipo resíduo de germe de folheações holomorfas

Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa singular definida em uma vizinhança de $p \in \mathbb{C}^2$, representada por uma 1-forma holomorfa ω , com singularidade isolada em p . Suponha que C é uma curva analítica \mathcal{F} -invariante, dada por $f(x, y) = 0$, onde $f(x, y) \in \mathbb{C}[[x, y]]$ é uma série de potências formal reduzida.

Diversos índices locais podem ser associados ao par (\mathcal{F}, C) , cada um refletindo aspectos distintos da interação entre a folheação e a curva invariante. A seguir, apresentamos três desses invariantes: o índice de Gómez-Mont–Seade–Verjovsky (GSV), o índice de Camacho–Sad e o índice variacional.

Como no caso convergente, existem elementos $g, h \in \mathbb{C}[[x, y]]$, dependentes de f e ω , tais que f e g e f e h são relativamente primos, e uma 1-forma η satisfazendo

$$g\omega = h df + f\eta, \tag{2.5}$$

conforme estabelecido em [41, Lema 1.1].

Definição 2.9. O índice GSV de \mathcal{F} com respeito à curva C no ponto p é então definido

por

$$\text{GSV}(\mathcal{F}, C, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C} \frac{h}{g} d\left(\frac{g}{h}\right), \quad (2.6)$$

onde g e h são escolhidos conforme a equação (2.5).

Esse índice foi originalmente introduzido em [21]. No caso em que a curva C é irredutível, a expressão acima admite uma forma equivalente baseada numa parametrização de Puiseux:

$$\text{GSV}(\mathcal{F}, C, p) = \text{ord}_t \left(\frac{h}{g} \circ \gamma(t) \right) = i_p(f, h) - i_p(f, g), \quad (2.7)$$

onde $\gamma(t)$ é uma parametrização de Puiseux de C , e $i_p(f, h)$ representa a multiplicidade de interseção dos germes f e h no ponto p .

Outro índice associado ao par (\mathcal{F}, C) é o *índice de Camacho–Sad*, definido por

$$\text{CS}_p(\mathcal{F}, C) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C} \frac{1}{h} \eta,$$

onde $\omega = h \cdot \eta$, sendo h e η conforme a equação (2.5). Esse índice no caso em que C é irredutível, mede a obstrução para que a curva C seja uma folha da folheação \mathcal{F} no ponto singular.

Para todo ponto $q \in C \setminus \{p\}$, temos que q é um ponto regular da folheação. Assim, existe uma 1-forma holomorfa ζ , definida em uma vizinhança de p , tal que

$$d\omega = \zeta \wedge \omega.$$

Embora ζ não seja unicamente determinada, quaisquer duas escolhas possíveis diferem por uma 1-forma que se anula ao longo das folhas da folheação. Em particular, a restrição de ζ a cada folha é univaluada, permitindo definir uma forma multivaluada ζ em uma vizinhança de p , cuja restrição a cada folha de \mathcal{F} é bem definida, veja em [29].

O *índice Variacional* de \mathcal{F} com respeito à curva C no ponto p , definido por B. Khanedani e T. Suwa em 1997 [29] é dado por:

$$\text{Var}_p(\mathcal{F}, C) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C} \zeta,$$

em que ∂C é um pequeno laço orientado positivamente ao redor da origem, contido em $C \setminus \{p\}$.

Os índices associados a uma separatriz de uma folheação satisfazem uma relação precisa, descrita no resultado a seguir, devido a Brunella.

Proposição 2.2. [4, Proposição 5] *Se S é separatriz de \mathcal{F} no ponto p , então*

$$\text{Var}_p(\mathcal{F}, S) = \text{GSV}(\mathcal{F}, S, p) + \text{CS}_p(\mathcal{F}, S).$$

Enquanto o resultado anterior relaciona os índices Variacional, GSV e Camacho–Sad ao longo de uma separatriz, o próximo resultado estabelece uma relação do índice GSV com o número de Tjurina de uma curva e de uma folheação.

Proposição 2.3. [16, Proposição 6.2] *Seja \mathcal{F} uma folheação singular em (\mathbb{C}^2, p) e C uma curva reduzida invariante de \mathcal{F} . Então*

$$\tau_p(\mathcal{F}, C) - \tau_p(C) = \text{GSV}(\mathcal{F}, C, p).$$

Seja \mathcal{F} uma folheação singular em uma superfície complexa X e denote por $\text{Sing}(\mathcal{F})$ o conjunto de pontos singulares de \mathcal{F} . Se $S \subset X$ é uma curva invariante por \mathcal{F} , então $\text{GSV}(\mathcal{F}, S, p)$ representa o índice GSV de \mathcal{F} em relação à curva S no ponto $p \in S$. Além disso, $c_1(N_{\mathcal{F}})$ denota a primeira classe de Chern do fibrado normal da folheação denotado por $N_{\mathcal{F}}$, enquanto $S \cdot S$ representa a auto-interseção da curva S na superfície X , veja em [4]. A igualdade a seguir expressa que a soma local dos índices GSV em todos os pontos de $\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap S$ pode ser descrita em termos de invariantes globais da folheação e da curva.

Proposição 2.4. [4, Proposição 4.4] *Seja $S \subset X$ uma curva compacta invariante por \mathcal{F} . Então tem-se a seguinte fórmula*

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap S} \text{GSV}(\mathcal{F}, S, p) = c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot S - S \cdot S$$

No caso do espaço projetivo \mathbb{P}^2 , considere uma curva invariante S de grau d . A classe homológica de S é dada por dH , onde H representa a classe da reta em \mathbb{P}^2 . Como $H^2 = 1$, obtemos que a auto-interseção da curva é $S \cdot S = d^2$.

Por outro lado, se \mathcal{F} é uma folheação de grau m em \mathbb{P}^2 , então o fibrado normal satisfaz $N_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m+2)$, de modo que $c_1(N_{\mathcal{F}}) = (m+2)H$. Assim, o produto $c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot S$ resulta em $(m+2)d$.

Substituindo esses valores na fórmula da Proposição, obtemos

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap S} \text{GSV}(\mathcal{F}, S, p) = (m+2)d - d^2.$$

2.4 k -ésimos números de Tjurina e Milnor de singularidades homogêneas quase-homogêneas

Em 2023, Hussain, Liu, Stephen e Yau [27] publicaram o artigo intitulado “ k -th Milnor numbers and k -th Tjurina numbers of weighted homogeneous singularities”, no qual são introduzidos e estudados os k -ésimos números de Milnor e de Tjurina de singularidades homogêneas quase-homogêneas. Alguns dos principais resultados estabelecidos pelos autores são apresentados a seguir.

Consideremos $(H, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ uma hipersuperfície reduzida com singularidade isolada, onde

$$H = H(f) = \{f = 0\}, f \in \mathbb{C}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ reduzida.}$$

Definição 2.10. A ordem do menor termo não nulo da expansão em série de potências de f em $0 \in \mathbb{C}^n$ é chamada de *multiplicidade de $(H, 0)$* denotada por $\nu_0(f)$. Um polinômio $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ é quase-homogêneo se existem n números racionais positivo w_1, w_2, \dots, w_n chamados de pesos das variáveis x_1, x_2, \dots, x_n tal que $\sum a_i w_i = d$ é o mesmo para todos os monômios $x_1^{a_1}, \dots, x_n^{a_n}$ de f .

O d é chamado de *grau de homogeneidade de f* em relação aos pesos w_1, \dots, w_n e é denotado por w -grau de f . O tipo de peso de f é referido como $(w_1, w_2, \dots, w_n; d)$.

Definição 2.11. Seja $k \geq 0$. O k -ésimo número de Tjurina de H é definido como

$$\tau^k(H) = \dim \frac{\mathcal{O}_n}{(f, m^k J(f))}$$

onde m é o ideal maximal de \mathcal{O}_n e $J(f) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$. Definimos também

$$\mu^k(V) = \dim \frac{\mathcal{O}_n}{m^k J(f)},$$

chamado de k -ésimo número de Milnor de H .

Os resultados a seguir correspondem a uma generalização das fórmulas apresentadas anteriormente dos k -ésimos número de Tjurina e número de Milnor para o caso em que as singularidade são binomiais isoladas, mostrando que podem ser calculados apenas pelo tipo de peso, como segue.

Teorema 2.3. [27, Teorema A] Seja $(H, 0)$ uma singularidade binomial isolada definida por f . Então $\tau^k(H)$ depende somente do tipo de peso de $(H, 0)$ e temos

- 1) se $f = x_1^{a_1} + x_2^{a_2}$ ($2 \leq a_1 \leq a_2$) com peso do tipo $(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}; 1)$, então

$$\tau^k(H) = \begin{cases} a_1 a_2 - (a_1 + a_2) + 1 + \frac{k^2 + 3k}{2} & ; 0 \leq k < a_1, \\ a_1 k + \frac{(2a_2 - a_1)(a_1 - 1)}{2} & ; k \geq a_1; \end{cases}$$

2) se $f = x_1^{a_1} x_2 + x_2^{a_2}$ ($2 \leq a_1 + 1 \leq a_2$) com peso do tipo $(\frac{a_2 - 1}{a_1 a_2}, \frac{1}{a_2}; 1)$, então

$$\tau^k(H) = \begin{cases} a_1 a_2 - a_2 + 1 + \frac{k^2 + 3k}{2} & ; k < a_1 + 1, \\ (a_1 - 1)k + \frac{(2a_2 - a_1)(a_1 - 1)}{2} + 1 & ; k \geq a_1 + 1; \end{cases}$$

3) se $f = x_1^{a_1} x_2 + x_2^{a_2}$ ($a_1 + 1 \geq a_2 \geq 2$) com peso do tipo $(\frac{a_2 - 1}{a_1 a_2}, \frac{1}{a_2}; 1)$, então

$$\tau^k(H) = \begin{cases} a_1 a_2 - a_2 + 1 + \frac{k^2 + 3k}{2} & ; 0 \leq k < a_2, \\ a_2 k + a_1 a_2 + \frac{a_2}{2} - \frac{a_2^2}{2} & ; a_2 \leq k; \end{cases}$$

4) se $f = x_1^{a_1} x_2 + x_2^{a_2} x_1$ ($1 \leq a_1 \leq a_2$) com peso do tipo $(\frac{a_2 - 1}{a_1 a_2 - 1}, \frac{a_1 - 1}{a_1 a_2 - 1}; 1)$, então

$$\tau^k(H) = \begin{cases} a_1 a_2 + \frac{k^2 + 3k}{2} & ; 0 \leq k < a_1, a_1 \geq 2, \\ (a_1 + 1)k + a_1 a_2 + \frac{a_1}{2} - \frac{a_1^2}{2} & ; k \geq a_1 \geq 2, \\ 2k + 1 & ; k \geq 0, a_1 = 1. \end{cases}$$

Teorema 2.4. [27, Teorema B] Seja $(H, 0)$ uma singularidade binomial isolada definida por f . Então $\mu^k(H)$ depende somente do tipo de peso de $(H, 0)$ e temos

1) se $f = x_1^{a_1} + x_2^{a_2}$ ($2 \leq a_1 \leq a_2$) com peso do tipo $(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}; 1)$, então

$$\mu^k(H) = \begin{cases} a_1 a_2 - (a_1 + a_2) + 1 + k^2 + k & ; 0 \leq k < a_1, \\ (a_1 - \frac{1}{2})k + \frac{(2a_2 - a_1)(a_1 - 1)}{2} + \frac{k^2}{2} & ; k \geq a_1; \end{cases}$$

2) se $f = x_1^{a_1} x_2 + x_2^{a_2}$ ($2 \leq a_1 + 1 \leq a_2$) com peso do tipo $(\frac{a_2 - 1}{a_1 a_2}, \frac{1}{a_2}; 1)$, então

$$\mu^k(H) = \begin{cases} a_1 a_2 - a_2 + 1 + k^2 + k & ; 0 \leq k < a_1 + 1, \\ (a_1 + \frac{1}{2})k + \frac{k^2}{2} + \frac{(2a_2 - a_1)(a_1 - 1)}{2} + 1 & ; k \geq a_1 + 1; \end{cases}$$

3) se $f = x_1^{a_1} x_2 + x_2^{a_2}$ ($a_1 + 1 \geq a_2 \geq 2$) com peso do tipo $(\frac{a_2 - 1}{a_1 a_2}, \frac{1}{a_2}; 1)$, então

$$\mu^k(H) = \begin{cases} a_1 a_2 - a_2 + 1 + k^2 + k & ; 0 \leq k < a_2, \\ (a_1 - \frac{1}{2})k + \frac{k^2}{2} + a_1 a_2 + \frac{a_2}{2} - \frac{a_2^2}{2} & ; a_2 \leq k; \end{cases}$$

4) se $f = x_1^{a_1} x_2 + x_2^{a_2} x_1$ ($1 \leq a_1 \leq a_2$) com peso do tipo $(\frac{a_2-1}{a_1 a_2 - 1}, \frac{a_1-1}{a_1 a_2 - 1}; 1)$, então

$$\mu^k(H) = \begin{cases} a_1 a_2 + k^2 + k & ; 0 \leq k < a_1, a_1 \geq 2, \\ (a_1 + \frac{1}{2})k + \frac{k^2}{2} + a_1 a_2 + \frac{a_1}{2} - \frac{a_1^2}{2} & ; k \geq a_1 \geq 2, \\ \frac{k^2}{2} + \frac{3k}{2} + 1; & ; k \geq 0, a_1 = 1. \end{cases}$$

Os k -ésimos números de Tjurina e Milnor são invariantes topológicos para uma singularidade de curva plana binomial, uma vez que o peso é um invariante topológico [27]. Para finalizarmos essa sessão, enunciamos o seguinte resultado que será fundamental para o próximo capítulo.

Lema 2.1. [27, Lema 2.5] Sejam A um anel e M um A -módulo. Se M_1, M_2 são submódulos de M , então

$$\frac{(M_1 + M_2)}{M_1} \cong \frac{M_2}{M_1 \cap M_2}$$

e, além disso, existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow \frac{(M_1 + M_2)}{M_2} \longrightarrow \frac{M}{M_2} \longrightarrow \frac{M}{(M_1 + M_2)} \longrightarrow 0.$$

3. Os k -ésimos números de Milnor e Tjurina de uma folheação holomorfa singular

Neste capítulo, estudamos os k -ésimos números de Milnor e de Tjurina associados a uma folheação holomorfa singular em \mathbb{C}^2 , bem como algumas de suas propriedades fundamentais. A motivação surge do fato de que, no caso de hipersuperfícies (Capítulo 1), já estão bem estabelecidas as definições dos k -ésimos números de Milnor e de Tjurina. O objetivo agora é estender esse ponto de vista para o contexto das folheações holomorfas singulares.

3.1 k -ésimo número de Milnor de uma folheação

Definição 3.1. Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa em $(\mathbb{C}^2, 0)$ dada por $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. O k -ésimo número de Milnor de \mathcal{F} é dado por

$$\mu^k(\mathcal{F}, 0) = \dim \frac{\mathcal{O}_2}{\mathfrak{m}^k(P, Q)}$$

onde (P, Q) denota o ideal gerado por P e Q e \mathfrak{m} é o ideal maximal de \mathcal{O}_2 e \dim denota a dimensão complexa.

Calculamos o k -ésimo número de Milnor nos casos em que a origem é uma singularidade não-degenerada ou uma singularidade do tipo sela-nó, conforme descrito a seguir. Adotaremos a notação \bar{u} para indicar a classe do monômio u no quociente correspondente.

Proposição 3.1. *Seja \mathcal{F} um germe de folheação em $(\mathbb{C}^2, 0)$ com singularidade simples do tipo não-degenerada na origem. Então,*

$$\mu^k(\mathcal{F}, 0) = \frac{(k+2)(k+1)}{2}.$$

Demonstração. Por (2.3) temos que a folheação \mathcal{F} em 0 pode ser dada pela 1-forma $\omega = \lambda x dy + y dx$, onde $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$. Então, considerando $\mathfrak{m} = (x, y)$ o ideal maximal de \mathcal{O}_2 , temos

$$\mu^k(\mathcal{F}, 0) = \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(x, y)^k(\lambda x, y)} = \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(x^{k+1}, x^{k-1}y, \dots, xy^{k-1}, y^{k+1})}$$

O quociente

$$\frac{\mathcal{O}_2}{(x^{k+1}, x^{k-1}y, \dots, xy^{k-1}, y^k)}$$

admite como base o conjunto de classes dos monômios

$$\{\overline{1}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{x^2}, \overline{xy}, \overline{y^2}, \dots, \overline{x^k}, \overline{x^{k-1}y}, \dots, \overline{y^k}\}.$$

Portanto, o número de elementos da base corresponde ao número de monômios de grau k , é

$$\mu^k(\mathcal{F}, 0) = \binom{k+2}{k}.$$

□

Exemplo 3.1. Considere a 1-forma holomorfa

$$\omega = x dy + 2y dx$$

definida em uma vizinhança da origem em \mathbb{C}^2 . Essa 1-forma induz uma folheação \mathcal{F} com singularidade no ponto $p = (0, 0)$.

O campo de vetores dual é dado por

$$v = 2y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y},$$

isto é,

$$P(x, y) = 2y, \quad Q(x, y) = -x.$$

A matriz jacobiana em $p = (0, 0)$ é

$$Dv(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

cujos autovalores são

$$\lambda_1 = i\sqrt{2}, \quad \lambda_2 = -i\sqrt{2}.$$

Como $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_1 / \lambda_2 = -1 \notin \mathbb{Q}^+$, segue que a origem é uma singularidade não-degenerada da folheação.

No nosso caso,

$$(P, Q) = (2y, -x) = (x, y).$$

portanto

$$\mu^k(\mathcal{F}, 0) = \frac{(k+2)(k+1)}{2}.$$

No caso em que a folheação em $(\mathbb{C}^2, 0)$ admite uma singularidade do tipo sela-nó,

obtemos a seguinte fórmula para o k -ésimo número de Milnor.

Proposição 3.2. *Sejam \mathcal{F} um germe de folheação em $(\mathbb{C}^2, 0)$ com singularidade do tipo sela nó na origem. e Então,*

$$\mu^k(\mathcal{F}, C, 0) = \frac{(k+2)(k+1)}{2} + \ell.$$

Demonstração: Pela 1-forma (2.4), temos que

$$\mu^k(\mathcal{F}, 0) = \dim \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{m^k(-y(1 + \lambda x^\ell), x^{\ell+1})}$$

e como $1 + \lambda x^\ell$ é unidade do anel \mathcal{O}_2 , segue que

$$\mu^k(\mathcal{F}, 0) = \dim \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(x, y)^k(-y, x^{\ell+1})} = \dim \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(x^{\ell+1+k}, x^k y, x^{k-1} y^2, \dots, x y^k, y^{k+1})}$$

Assim, $\{\bar{1}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{y}^2, \dots, \bar{y}^k, \bar{x}^{k+1}, \bar{x}^{k+2}, \dots, \bar{x}^{\ell+k}\}$ é uma base do quociente

$$\frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(x^{\ell+1+k}, x^k y, x^{k-1} y^2, \dots, x y^k, y^{k+1})}. \text{ Portanto,}$$

$$\mu^k(\mathcal{F}, 0) = \binom{k+2}{k} + \ell.$$

□

3.2 k -ésimo número de Tjurina de uma folheação

De modo análogo ao k -ésimo número de Milnor, podemos definir, para uma folheação holomorfa \mathcal{F} em $(\mathbb{C}^2, 0)$, o k -ésimo número de Tjurina em relação a uma curva \mathcal{F} -invariante C , considerando o ideal maximal $m = (x, y)$ de \mathcal{O}_2 .

Definição 3.2. Sejam \mathcal{F} uma folheação holomorfa em $(\mathbb{C}^2, 0)$ dada por $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ e $C : \{f = 0\}$ uma curva reduzida \mathcal{F} -invariante. O k -ésimo número de Tjurina de \mathcal{F} é definido por

$$\tau^k(\mathcal{F}, C, 0) = \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(f) + m^k(P, Q)}$$

onde (P, Q) denota o ideal gerado por P e Q , (f) é o ideal gerado por f e m é o ideal maximal de \mathcal{O}_2 .

E, desse modo, deduzimos também fórmulas explícitas para o k -ésimo número de Tjurina de uma folheação holomorfa \mathcal{F} com singularidades simples dos tipos não-degenerado e sela-nó.

Proposição 3.3. *Seja \mathcal{F} um germe de folheação com singularidade em $(\mathbb{C}^2, 0)$ com simples não degenerada na origem e C uma separatriz convergente de \mathcal{F} . Então,*

$$\tau^k(\mathcal{F}, C, 0) = 2k + 1.$$

Demonstração. Consideremos a curva $C : \{xy = 0\}$. Note que, como $0 \in \mathbb{C}^2$ é uma singularidade simples do tipo não degenerada, a folheação \mathcal{F} pode ser dada pela 1-forma $\omega = \lambda x dy + y dx$ (2.3) e desse modo,

$$\begin{aligned} \tau^k(\mathcal{F}, C, 0) &= \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(xy) + (x, y)^k(\lambda x, y)} \\ &= \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(xy) + (\lambda x^{k+1}, x^{k-1}y, \dots, xy^{k-1})} \\ &= \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(xy) + (\lambda x^{k+1}, x^{k-1}y, \dots, y^{k+1})} \\ &= \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(x, y) + (x^{k+1}, y^k)} \end{aligned}$$

portanto, uma base para esse quociente é dada por $\{\bar{1}, \bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}^k, \bar{y}, \dots, \bar{y}^k\}$ e assim, $\tau^k(\mathcal{F}, C, 0) = 2k + 1$. \square

Proposição 3.4. *Seja \mathcal{F} um germe de folheação com singularidade do tipo sela nó na origem e C uma separatriz convergente de \mathcal{F} . Então,*

$$\tau^k(\mathcal{F}, C, 0) = 2k + 1 + \ell,$$

onde $\ell \in \mathbb{Z}^*$.

Demonstração. Consideremos a folheação \mathcal{F} dada pela 1-forma formal $\omega = x^{\ell+1}dy - y(1 + \lambda x^\ell)dx$, $\lambda \neq 0$ como em (2.4) e a curva $C : \{xy = 0\}$. Então

$$\begin{aligned} \tau^k(\mathcal{F}, C, 0) &= \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(xy) + (x, y)^k(-y(1 + \lambda x^\ell), x^{\ell+1})} \\ &= \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(xy) + (x, y)^k(-y, x^{\ell+1})} \\ &= \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(xy) + (x^{k+\ell+1}, y^{k+1})}. \end{aligned}$$

Note que uma base para esse quociente é dada por $\{\bar{1}, \bar{x}, \dots, \bar{x}^{k+\ell}, \bar{y}, \dots, \bar{y}^k, \}$ e, portanto,

$$\tau^k(\mathcal{F}, C, 0) = 2k + 1 + \ell$$

\square

3.3 Relação entre os k -ésimos números de Milnor e Tjurina de uma folheação

Nesta seção, investigamos a relação entre os k -ésimos números de Milnor e de Tjurina associados a uma folheação holomorfa \mathcal{F} na origem. Inicialmente, estabelecemos uma identidade que conecta essas duas quantidades por meio da dimensão de um quociente envolvendo o ideal gerado pelas componentes da 1-forma definidora de \mathcal{F} e o ideal da curva separatriz. Em seguida, analisamos o caso particular das folheações quase-homogêneas, nas quais essa relação assume uma forma explícita e depende apenas de k .

Proposição 3.5. *Sejam \mathcal{F} um germe de folheação holomorfa com singularidade simples na origem e $C : f(x, y) = 0$ curva separatriz de \mathcal{F} . Então*

$$\mu^k(\mathcal{F}, 0) = \tau^k(\mathcal{F}, C, 0) + \dim \frac{(f)}{m^k(P, Q) \cap (f)}.$$

Demonstração. Denotemos por $I = (P, Q)$ o ideal gerado por P e Q e $C : \{f(x, y) = 0\}$ curva separatriz de \mathcal{F} . Segue do Lema 2.1, considerando $M_1 = (f)$, $M_2 = m^k I$ e $M = \mathcal{O}_2$,

$$0 \longrightarrow \frac{(f) + m^k I}{m^k I} \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_2}{m^k I} \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_2}{(f) + m^k I} \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata. Desse modo,

$$\mu^k(\mathcal{F}, 0) = \tau^k(\mathcal{F}, C, 0) + \dim \frac{(f)}{m^k(P, Q) \cap (f)}.$$

□

Para enunciarmos o próximo resultado, necessitamos da seguinte definição e do teorema a seguir, ambos encontrados em [34, p. 181].

Definição 3.3. Seja $\omega = a(x, y) dx + b(x, y) dy$ um germe de 1-forma holomorfa não dicrítica na origem de \mathbb{C}^2 . Seja $I(\omega) = (a, b) \subset \mathcal{O}$ o ideal gerado pelos germes de funções holomorfas a, b e f uma equação reduzida de $\text{Sep}(\omega)$. Dizemos que ω é *quase-homogênea* se, e somente se, $f \in I(\omega)$. Dizemos que uma função holomorfa reduzida f é *quase-homogênea* quando $\omega = df$ é uma 1-forma quase-homogênea, isto é, se f pertence ao seu ideal jacobiano $J(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$.

Teorema 3.1. [34] Seja ω o germe de 1-forma que define uma folheação e f uma equação reduzida de $\text{Sep}(\omega)$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) ω é quase-homogênea (isto é, $f \in I(\omega) := (P, Q)$);

- (2) ω é d -quase-homogênea;
- (3) df é quasi-homogênea, isto é, $f \in J(f) := (d_x f, d_y f)$;
- (4) df é d -quase-homogênea;
- (5) Existe um sistema de coordenadas (u, v) , funções $g, h \in \mathcal{O}$ com $g(0, 0) \neq 0$, e inteiros não-negativos α, β e d tais que

$$f = \sum_{\alpha i + \beta j = d} a_{ij} u^i v^j, \quad g\omega = df + h(u, v)(\beta v du - \alpha u dv).$$

Com esse resultado, conseguimos calcular a dimensão que aparece na Proposição 3.5 no contexto de folheações do tipo curva generalizada.

Teorema 3.2. Seja \mathcal{F} uma folheação do tipo curva generalizada não dicrítica definida por $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ em $0 \in \mathbb{C}^2$. Suponha que \mathcal{F} seja uma folheação quase-homogênea. Seja $C : \{f(x, y) = 0\}$ a união total das separatrizes de \mathcal{F} em $0 \in \mathbb{C}^2$. Então,

$$\mu^k(\mathcal{F}, 0) = \tau^k(\mathcal{F}, C, 0) + \frac{k(k-1)}{2}, \quad \forall k \geq 1$$

Demonstração. Primeiro, mostramos que $m^{k-1}(f) \subset m^k(P, Q)$. De fato, pelo Teorema 3.1, existe um sistema de coordenadas (x, y) no qual f é um polinômio quase-homogêneo de grau d com pesos (α, β) , e existem $g \in \mathcal{O}_2$ e $h \in \mathcal{O}_2$ não nulos tais que

$$g\omega = df + h(\beta y dx - \alpha x dy),$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Portanto, temos

$$\begin{aligned} \omega = P dx + Q dy &= \frac{df + h(\beta y dx - \alpha x dy)}{g} \\ &= \frac{f_x dx + f_y dy + h(\beta y dx - \alpha x dy)}{g} \\ &= \frac{(f_x + \beta h y) dx}{g} + \frac{(f_y - \alpha h x) dy}{g}. \end{aligned}$$

Assim, $P = \frac{f_x + \beta h y}{g}$ e $Q = \frac{f_y - \alpha h x}{g}$ e sem perda de generalidade, podemos supor que $g \equiv 1$. Então,

$$P = f_x + \beta h y, \quad Q = f_y - \alpha h x.$$

e

$$\alpha x P = \alpha x f_x + \alpha \beta x(h y), \quad \beta y Q = \beta y f_y - \beta \alpha y(h x).$$

Portanto,

$$\alpha x P + \beta y Q = \alpha x f_x + \beta y f_y,$$

e, pela identidade de Euler, obtemos

$$\alpha xP + \beta yQ = d \cdot f \implies (f) \subset \mathfrak{m}(P, Q) \implies \mathfrak{m}^{k-1}(f) \subset \mathfrak{m}^k(P, Q), \quad \text{para todo } k \geq 1.$$

Em seguida, usando a sequência exata curta do Lema 2.1, temos:

$$0 \longrightarrow \frac{\mathfrak{m}^k(P, Q) + (f)}{\mathfrak{m}^k(P, Q)} \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_2}{\mathfrak{m}^k(P, Q)} \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_2}{\mathfrak{m}^k(P, Q) + (f)} \longrightarrow 0,$$

temos

$$\dim \frac{\mathcal{O}_2}{\mathfrak{m}^k(P, Q)} = \dim \frac{\mathfrak{m}^k(P, Q) + (f)}{\mathfrak{m}^k(P, Q)} + \dim \frac{\mathcal{O}_2}{\mathfrak{m}^k(P, Q) + (f)}.$$

Logo, obtemos

$$\mu^k(\mathcal{F}) = \tau^k(\mathcal{F}, C) + \dim \frac{\mathfrak{m}^k(P, Q) + (f)}{\mathfrak{m}^k(P, Q)}.$$

Aplicando novamente o Lema 2.1 e usando que $\mathfrak{m}^{k-1}(f) \subset \mathfrak{m}^k(P, Q)$, temos

$$\frac{\mathfrak{m}^k(P, Q) + (f)}{\mathfrak{m}^k(P, Q)} \cong \frac{(f)}{\mathfrak{m}^k(P, Q) \cap (f)} \cong \frac{(f)}{\mathfrak{m}^{k-1}(f)} \cong \frac{\mathcal{O}_2}{\mathfrak{m}^{k-1}}.$$

Portanto, concluímos que

$$\mu^k(\mathcal{F}) = \tau^k(\mathcal{F}, C) + \frac{k(k-1)}{2}.$$

□

3.4 Álgebras de Milnor e Tjurina

Nesta seção, estudamos as chamadas álgebras de Milnor e de Tjurina associadas a uma 1-forma holomorfa com singularidade isolada na origem. Nosso objetivo é compreender de que maneira essas álgebras capturam informações sobre a estrutura local da singularidade e, em particular, como se relacionam os números de Milnor e de Tjurina em diferentes ordens k .

Consideremos, portanto, a 1-forma holomorfa

$$\omega = \sum_{i=1}^n A_i(z_1, \dots, z_n) dz_i,$$

com singularidade isolada em $0 \in \mathbb{C}^n$, onde cada $A_i \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$, e suponhamos que os germes A_i e A_j sejam primos entre si para todo $i \neq j$. Observe que, no caso $n = 2$, a forma ω define uma folheação holomorfa em $(\mathbb{C}^2, 0)$.

Denotemos por \mathcal{O}_n o anel local dos germes de funções holomorfas em $(\mathbb{C}^n, 0)$ e por m

o seu ideal maximal.

Definição 3.4. O k -ésimo número de Milnor de ω em 0 é dado

$$\mu^k(\omega, 0) = \dim \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{m}^k I}$$

onde I denota o ideal de \mathcal{O}_n gerado pelos A_i , isto é,

$$I := (A_1, A_2, \dots, A_n).$$

Proposição 3.6. Seja $\omega = \sum_{i=1}^n A_i dz_i$ uma 1-forma holomorfa com singularidade isolada em $0 \in \mathbb{C}^n$. Então

$$\mu^{k+1}(\omega, 0) = \mu(\omega, 0) + \sum_{j=0}^k H_{m,I}(j), \quad \forall k \geq 0 \quad (3.1)$$

onde $H_{m,I}(j) = \dim \frac{m^j I}{m^{j+1} I}$ é a função de Hilbert-Samuel de I com respeito a m .

Demonstração. Da sequência exata no Lema 2.1

$$0 \longrightarrow \frac{m^k I}{m^{k+1} I} \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_n}{m^{k+1} I} \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_n}{m^k I} \longrightarrow 0$$

obtemos $\forall k \geq 0$

$$\dim \frac{\mathcal{O}_n}{m^{k+1} I} = \dim \frac{\mathcal{O}_n}{m^k I} + \dim \frac{m^k I}{m^{k+1} I},$$

o que implica em

$$\mu^{k+1}(\omega, 0) = \mu^k(\omega, 0) + \dim \frac{m^k I}{m^{k+1} I}.$$

Agora, aplicando recursivamente a sequência exata para $k, k-1, \dots, 0$, obtemos $\forall k \geq 0$

$$\mu^{k+1}(\omega, 0) = \mu(\omega, 0) + \sum_{j=0}^k \dim \frac{m^j I}{m^{j+1} I}.$$

□

Segue de [14, Capítulo 12] que $H_{m,I}(j)$ coincide com $P_{m,I}(j)$ onde $P_{m,I}$ é um polinômio de grau $n-1$, para valores grandes de j . De acordo com [14, p. 277], a *multiplicidade de Samuel* de m com respeito a I , denotada por $e(m, I)$, satisfaz:

$$\frac{e(m, I)}{(n-1)!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{H_{m,I}(k)}{k^{n-1}}. \quad (3.2)$$

Corolário 3.1. *Considere $\omega = \sum_{i=1}^n A_i dz_i$ uma 1-forma holomorfa com singularidade isolada em $0 \in \mathbb{C}^n$. Seja $I = (A_1, \dots, A_n)$ o ideal de \mathcal{O}_n gerado pelos A_i 's. Então*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu^{k+1}(\omega, 0) - \mu^k(\omega, 0)}{k^{n-1}} = \frac{e(m, I)}{(n-1)!}.$$

Seja $V = \{f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0\}$ um germe de hipersuperfície complexa com singularidade isolada em $(\mathbb{C}^n, 0)$. Definimos o k -ésimo número de Tjurina de ω com respeito a V invariante por ω , como

$$\tau^k(\omega, V, 0) = \dim \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{m}^k I + (f)}.$$

Seja R um anel e I um ideal de R . Seja $f \in R$. Seguindo [2, p. 464], denotamos por $r_f(I)$ o mínimo dos $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tais que $f^r \in I$. Se não existir tal r , definimos $r_f(I) = \infty$. Seja $\varphi_{f,I}$ o morfismo $R/I \rightarrow R/I$ definido por $g + I \mapsto fg + I$ para todo $g \in R$. Se M é um R -módulo, denotamos por $\ell(M)$ o comprimento de M . Como de costume, chamamos $\ell(R/I)$ de comprimento de I . Agora, enunciamos um resultado devido a Bivià-Ruas [2, Teorema 3.2]:

Teorema 3.3. *Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local Noetheriano. Seja I um ideal de R de comprimento finita e seja $f \in R$ tal que $r_f(I) < \infty$. Então*

$$\frac{\ell\left(\frac{R}{I}\right)}{\ell\left(\frac{R}{(f)+I}\right)} \leq r_f(I)$$

e a igualdade vale se, e somente se, $\text{Nuc}(\varphi_{f,I}) = ((f^{r-1}) + I)/I$, onde $r = r_f(I)$.

Como aplicação imediata do teorema anterior, temos o seguinte resultado:

Corolário 3.2. *Sejam $\omega = \sum_{j=1}^n A_j(z) dz_j$ um germe de 1-forma holomorfa com singularidade isolada em $0 \in \mathbb{C}^n$ e $V = \{f(z) = 0\}$ um germe de hipersuperfície complexa com singularidade isolada em $0 \in \mathbb{C}^n$ invariante por ω . Suponhamos que $r_f(\mathfrak{m}^k \cdot I) < \infty$, então*

$$\frac{\mu^k(\omega, 0)}{\tau^k(\omega, V, 0)} \leq r_f(\mathfrak{m}^k \cdot I)$$

onde $I = (A_1, \dots, A_n)$, e a igualdade vale se, e somente se, $\text{Nuc}(\varphi_{f,I}) = ((f^{r-1}) + I)/I$, onde $r = r_f(I)$.

O próximo resultado estabelece uma relação entre o $(k+1)$ -ésimo número de Tjurina associado a um germe de hipersuperfície invariante por uma 1-forma holomorfa ω e o número de Tjurina clássico (caso $k = 1$).

Proposição 3.7. *Seja $\omega = \sum_{j=1}^n A_j(z) dz_j$ um germe de 1-forma holomorfa com singularidade isolada em $0 \in \mathbb{C}^n$ e $V = \{f(x, y) = 0\}$ um germe de hipersuperfície invariante por ω . Então*

$$\tau^{k+1}(\omega, V, 0) = \tau(\omega, V, 0) + \sum_{j=0}^k H_n(I, V, j), \quad \forall k \geq 0 \quad (3.3)$$

onde $H_n(I, V, j) := \dim \frac{\mathfrak{m}^k I + (f)}{\mathfrak{m}^{k+1} I + (f)}$.

Demonstração. Novamente, pela sequência exata do Lema 2.1,

$$0 \longrightarrow \frac{\mathfrak{m}^k I + (f)}{\mathfrak{m}^{k+1} I + (f)} \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{m}^{k+1} I + (f)} \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{m}^k I + (f)} \longrightarrow 0$$

onde (f) denota o ideal gerado por f . Obtemos

$$\dim \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{m}^{k+1} I + (f)} = \dim \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{m}^k I + (f)} + \dim \frac{\mathfrak{m}^k I + (f)}{\mathfrak{m}^{k+1} I + (f)}.$$

Portanto,

$$\tau^{k+1}(\omega, V, 0) = \tau^k(\omega, V, 0) + \dim \frac{\mathfrak{m}^k I + (f)}{\mathfrak{m}^{k+1} I + (f)}.$$

Definindo $H_n(I, V, j) = \dim \frac{\mathfrak{m}^k I + (f)}{\mathfrak{m}^{k+1} I + (f)}$, e aplicando recursivamente a sequência exata, obtemos

$$\tau^{k+1}(\omega, V, 0) = \tau(\omega, V, 0) + \sum_{j=0}^k H_n(I, V, j).$$

□

Subtraindo os resultados (3.1) e (3.3) obtidos nas proposições acima, obtemos

$$\mu^{k+1}(\omega, 0) - \tau^{k+1}(\omega, V, 0) = \mu(\omega, 0) - \tau(\omega, V, 0) + \sum_{j=0}^k [H_n(I, j) - H_n(I, V, j)]. \quad (3.4)$$

Assim, para dimensão $n = 2$, temos o seguinte resultado:

Corolário 3.3. *Seja $\mathcal{F} : \omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ uma folheação holomorfa em $(\mathbb{C}^2, 0)$ e $V = \{f(x, y) = 0\}$ uma curva singular reduzida invariante por \mathcal{F} . Então*

$$\mu^{k+1}(\mathcal{F}, 0) - \tau^{k+1}(\mathcal{F}, V, 0) = \mu(\mathcal{F}, 0) - \tau(\mathcal{F}, V, 0) + \sum_{j=0}^k [H_2(I, j) - H_2(I, V, j)]$$

Além disso, se \mathcal{F} é uma folheação do segundo tipo, então

$$\mu^{k+1}(\mathcal{F}, 0) - \tau^{k+1}(\mathcal{F}, V, 0) = \mu(V, 0) - \tau(V, 0) + \sum_{j=0}^k [H_2(I, j) - H_2(I, V, j)]$$

onde $\mu(V, 0) = \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(\partial_x f, \partial_y f)}$ e $\tau(V, 0) = \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(f, \partial_x f, \partial_y f)}$ são, respectivamente, os

números de Milnor e de Tjurina da curva V .

Demonstração. Segue diretamente da equação (3.4) acima e do Corolário B [16, p.28]. \square

4. Índice GSV e o k -ésimo número de interseção polar

Este capítulo é dedicado ao estudo de dois invariantes locais associados a pares formados por uma folheação holomorfa singular e uma curva invariante: o índice GSV e o k -ésimo número de interseção polar.

Inicialmente, consideramos o índice GSV para o contexto de folheações singulares no plano complexo e relacionamos com o k -ésimo número de Tjurina de uma curva reduzida de separatrizes e do k -ésimo Tjurina da folheação com respeito a essa curva.

Em seguida, estudamos o k -ésimo número de interseção polar, que generaliza o conceito de número de interseção polar introduzido por Teissier [43] no contexto de folheações holomorfas. Com base nessa construção, apresentamos uma formulação do Lema de Teissier para os k -ésimos números de Milnor e o k -ésimo número de interseção polar, estabelecendo uma relação entre esses índices associados à folheação.

4.1 Índice GSV

Seja \mathcal{F} uma folheação em \mathbb{C}^2 definida pela 1-forma $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Como vimos no primeiro capítulo, o índice GSV de uma folheação \mathcal{F} com respeito à curva C no ponto p é definido por

$$\text{GSV}(\mathcal{F}, C, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C} \frac{h}{g} d\left(\frac{g}{h}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C} \frac{dg}{g} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C} \frac{dh}{h}, \quad (4.1)$$

onde g e h são escolhidos conforme a equação (2.5). Ou ainda,

$$\text{GSV}(\mathcal{F}, C, p) = i_p(f, h) - i_p(f, g),$$

onde $g, h \in \mathbb{C}\{x, y\}$ são os elementos mencionados em (2.5) e $f(x, y) = 0$ uma equação reduzida para C .

Nessa seção, iremos relacionar o índice GSV com o k -ésimo Tjurina da folheação \mathcal{F} com respeito a curva C , obtendo uma generalização do seguinte resultado

Proposição 4.1. [16, Proposição 6.2] *Seja \mathcal{F} uma folheação singular em (\mathbb{C}^2, p) e C uma curva reduzida de separatrizes de \mathcal{F} . Então*

$$\tau(\mathcal{F}, C, p) - \tau_p(C) = \text{GSV}(\mathcal{F}, C, p).$$

Para isso, precisaremos dos seguintes Lemas:

Lema 4.1. Seja J um ideal de \mathcal{O}_2 e sejam $P, Q, f, g \in \mathcal{O}_2$ com f e g primos entre si. Então

$$\dim \frac{\mathcal{O}_2}{(gP, gQ) \cdot J + (f)} = \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(P, Q) \cdot J + (f)} + \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(g) \cdot J + (f)}.$$

Demonstração. A demonstração segue da seguinte sequência exata:

$$0 \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_2}{(P, Q) \cdot J + (f)} \xrightarrow{\sigma} \frac{\mathcal{O}_2}{(gP, gQ) \cdot J + (f)} \xrightarrow{\delta} \frac{\mathcal{O}_2}{(g) \cdot J + (f)} \longrightarrow 0,$$

onde σ é o homomorfismo de multiplicação por g e δ é o homomorfismo de projeção natural induzido pela inclusão $(gP, gQ) \cdot J + (f) \subset (g) \cdot J + (f)$. \square

Lema 4.2. Seja J um ideal em \mathcal{O}_2 , e sejam $f, g, \varphi \in \mathcal{O}_2$ tais que $(f, g) = 1$, ou seja, f e g são primos entre si. Então

$$\dim \frac{\mathcal{O}_2}{(f) \cdot J + (g)} = \dim \frac{\mathcal{O}_2}{J + (g)} + i_0(f, g).$$

Demonstração. A demonstração é consequência da sequência exata abaixo:

$$0 \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_2}{J + (g)} \xrightarrow{\sigma} \frac{\mathcal{O}_2}{(f) \cdot J + (g)} \xrightarrow{\pi} \frac{\mathcal{O}_2}{(f, g)} \longrightarrow 0,$$

onde σ é o homomorfismo de multiplicação por f e π é o homomorfismo de projeção natural induzido pela inclusão $(f) \cdot J + (g) \subset (f, g)$. \square

Lema 4.3. Sejam m o ideal maximal de \mathcal{O}_2 e $g, h \in \mathcal{O}_2$, com $(f, g) = 1$ e $(f, h) = 1$, e uma 1-forma η tal que $g\omega = hdf + f\eta$. Então

$$\dim \frac{\mathcal{O}_2}{(h) \cdot m^k + (f)} = \dim \frac{\mathcal{O}_2}{m^k + (f)} + i_0(h, f)$$

e

$$\dim \frac{\mathcal{O}_2}{(g) \cdot m^k + (f)} = \dim \frac{\mathcal{O}_2}{m^k + (f)} + i_0(g, f).$$

Demonstração. Como m^k é um ideal de \mathcal{O}_2 , o resultado segue diretamente pelo Lema 4.2. \square

Nesse contexto, apresentamos o seguinte resultado, que descreve a relação entre o índice GSV e os k -números de Tjurina de uma folheação holomorfa e de uma curva reduzida.

Teorema 4.1. *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa singular em $(\mathbb{C}^2, 0)$, e seja C uma curva reduzida de separatrizes de \mathcal{F} . Então, para todo $k \geq 0$*

$$\tau^k(\mathcal{F}, C, 0) = \tau^k(C) + GSV(\mathcal{F}, C, 0).$$

Demonstração. Seja $\omega = Pdx + Qdy$ uma 1-forma que induz \mathcal{F} e seja $f(x, y) = 0$ a equação reduzida de C . Pela igualdade (2.5) temos $g\omega = hdf + f\eta$, onde η é uma 1-forma, e $g, h \in \mathcal{O}_2$, com $(f, g) = 1$ e $(f, h) = 1$.

Assim, $gPdx + gQdy = (h\partial_x f + f\eta_x)dx + (h\partial_y f + f\eta_y)dy$, onde $\eta = \eta_x dx + \eta_y dy$. Obtemos

$$gP = h\partial_x f + f\eta_x, \quad \text{e} \quad gQ = h\partial_y f + f\eta_y. \quad (4.2)$$

Como m^k é um ideal de \mathcal{O}_2 , pelas igualdades (4.2), pelas propriedades de ideais e pelo Lema 4.1, temos

$$\begin{aligned} \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(gP, gQ) \cdot m^k + (f)} &= \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(h\partial_x f + f\eta_x, h\partial_y f + f\eta_y) \cdot m^k + (f)} \\ &= \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(h\partial_x f, h\partial_y f) \cdot m^k + (f)} \\ &= \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(\partial_x f, \partial_y f) \cdot m^k + (f)} + \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(h) \cdot m^k + (f)} \\ &= \tau^k(C) + \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(h) \cdot m^k + (f)}. \end{aligned}$$

Por outro lado, novamente, pelo Lema 4.1 obtemos

$$\begin{aligned} \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(gP, gQ) \cdot m^k + (f)} &= \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(P, Q) \cdot m^k + (f)} + \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(g) \cdot m^k + (f)} \\ &= \tau^k(\mathcal{F}, C, 0) + \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(g) \cdot m^k + (f)}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 4.3

$$\begin{aligned} \tau^k(\mathcal{F}, C, 0) - \tau^k(C) &= \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(h) \cdot m^k + (f)} - \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(g) \cdot m^k + (f)} \\ &= i_0(h, f) - i_0(g, f) \\ &= GSV(\mathcal{F}, C, 0). \end{aligned}$$

□

Corolário 4.1. *Sejam \mathcal{F} uma folheação holomorfa singular em $(\mathbb{C}^2, 0)$ e C uma curva reduzida de separatrizes de \mathcal{F} . Então*

$$\tau^k(\mathcal{F}, C, 0) - \tau^k(C, 0) = \tau(\mathcal{F}, C, 0) - \tau(C, 0) \quad \text{para todo } k \geq 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\tau^k(\mathcal{F}, C, 0) - \tau(\mathcal{F}, C, 0) = \tau^k(C) - \tau(C) \quad \text{para todo } k \geq 0.$$

Em particular, $\tau^k(\mathcal{F}, C, 0) - \tau(\mathcal{F}, C, 0)$ não depende da folheação \mathcal{F} .

Demonstração. Como consequência da Proposição 4.1, temos

$$GSV(\mathcal{F}, C, 0) = \tau(\mathcal{F}, C, 0) - \tau(C, 0),$$

portanto, o resultado segue do Teorema 4.1. \square

Corolário 4.2. *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa singular em $(\mathbb{C}^2, 0)$ e C uma curva separatriz de \mathcal{F} . Então, para todo $k \geq 0$.*

$$\tau^k(\mathcal{F}, C, 0) = \tau^k(C) - \text{Var}_0(\mathcal{F}, C) - \text{CS}_0(\mathcal{F}, C).$$

Demonstração. O resultado segue da Proposição 2.2 e do Teorema 4.1. \square

Consideremos agora \mathcal{F} uma folheação holomorfa definida no plano projetivo complexo \mathbb{P}^2 . O grau d de \mathcal{F} é definido como o número de pontos, contados com multiplicidade, onde \mathcal{F} é tangente a uma reta genérica. Considere uma curva algébrica $C \subset \mathbb{P}^2$ que seja invariante por \mathcal{F} , para mais detalhes veja em [30]. Dizemos que C é não dicrítica se todo ponto singular de \mathcal{F} pertencente a C também for não dicrítico.

Corolário 4.3. *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa em \mathbb{P}^2 de grau d , deixando invariante uma curva algébrica não dicrítica C de grau d_0 tal que, para cada $p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap C$, todos os ramos locais de $\text{Sep}_p(\mathcal{F})$ estão contidos em C . Então, para todo k ,*

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap C} \tau^k(\mathcal{F}, C, p) - \tau^k(C, p) = (d + 2)d_0 - d_0^2.$$

Em particular, se $\tau^k(\mathcal{F}, C, p) \geq \tau^k(C, p)$ para todo $p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap C$, então $d_0 \leq d + 2$.

Demonstração. Este resultado segue de [4, Proposição 4],

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap C} GSV(\mathcal{F}, C, 0) = (d + 2)d_0 - d_0^2,$$

e do Teorema 4.1. \square

No resultado que segue, utilizaremos a notação $\mu(\mathcal{F}, C)$ para indicar a multiplicidade da folheação \mathcal{F} ao longo da curva C . Mais detalhes sobre $\mu(\mathcal{F}, C)$, veja [16].

Corolário 4.4. *Seja \mathcal{F} uma folheação de segundo tipo em $(\mathbb{C}^2, 0)$. Suponha que \mathcal{F} seja não dicrítica e que C seja a curva total de separatrizes de \mathcal{F} . Então*

$$\tau^k(\mathcal{F}, C, 0) = \tau^k(C) + \mu(\mathcal{F}, C) - \mu(C).$$

Demonstração. Pelo [16, Corolário 5.6], temos a seguinte igualdade

$$GSV(\mathcal{F}, C, 0) = \mu(\mathcal{F}, 0) - \mu(C) - \chi_0(\mathcal{F}).$$

Como \mathcal{F} é de segundo tipo, então $\chi_0(\mathcal{F}) = 0$ por [16, Proposição 3.1]. Portanto, $\mu(\mathcal{F}, 0) - \mu(C) = \tau^k(\mathcal{F}, C, 0) - \tau^k(C)$ pelo Teorema 4.1. \square

Corolário 4.5. *Seja C uma separatriz de \mathcal{F} e suponha que $\tau^k(\mathcal{F}, C, 0) < \tau^k(C)$ para algum $k \geq 0$. Então \mathcal{F} é dicrítica em $0 \in \mathbb{C}^2$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que \mathcal{F} seja não dicrítica em $0 \in \mathbb{C}^2$. Então, C é uma separatriz não dicrítica no sentido de Brunella (ver [4, p. 533]) e, por [4, Proposição 6], temos que

$$GSV(\mathcal{F}, C, 0) \geq 0.$$

Assim, pelo Teorema 4.1, obtemos

$$\tau^k(\mathcal{F}, C, 0) \geq \tau^k(C), \quad \text{para todo } k \geq 0.$$

Isso contradiz a hipótese. \square

Exemplo 4.1. Seja \mathcal{F} a folheação em $(\mathbb{C}^2, 0)$ definida por $\omega = 4xy dx + (y - 2x^2) dy$. Note que $C : \{y = 0\}$ é a única curva separatriz de \mathcal{F} e que, em uma equação (2.5) para C , temos $g = 1$, $h = y - x^2$ e $\eta = 4x dx$. Assim, $GSV(\mathcal{F}, C, 0) = 2$, $\tau^k(\mathcal{F}, C, 0) = k + 2$ e $\tau^k(C) = k$. Logo,

$$GSV(\mathcal{F}, C, 0) = \tau^k(\mathcal{F}, C, 0) - \tau^k(C) = 2$$

Exemplo 4.2. Para a folheação de Poincaré-Dulac \mathcal{F} definida por

$$\omega = (ny + x^n) dx - x dy, \quad n \geq 2,$$

temos que \mathcal{F} admite uma única separatriz $C : \{x = 0\}$. Como $\nu_0(\mathcal{F}) = 1 \neq 0 = \nu_0(C) - 1$, \mathcal{F} não é do segundo tipo. Além disso, para todo inteiro $k \geq 0$,

$$\mu^k(\mathcal{F}, 0) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}, \quad \tau^k(\mathcal{F}, C, 0) = k+1, \quad \tau^k(C) = k, \quad GSV(\mathcal{F}, C, 0) = 1.$$

Exemplo 4.3. Seja $\mathcal{F}_{n,m} : \omega_{n,m} = mx dy - ny dx$ e seja $C : \{y^m - x^n = 0\}$ uma separatriz de $\mathcal{F}_{n,m}$, com $2 \leq m \leq n$. Pelo [26, Teorema A, item 1], temos

$$\tau^k(C) = \begin{cases} \frac{k^2+3k}{2} + mn - m - n + 1, & 0 \leq k < m, \\ mk + \frac{(2n-m)(m-1)}{2}, & k \geq m, \end{cases}$$

$$\mu^k(C) = \begin{cases} mn - m - n + 1 + k^2 + k, & 0 \leq k < m, \\ \left(m - \frac{1}{2}\right)k + \frac{(2n-m)(m-1)}{2} + \frac{k^2}{2}, & k \geq m, \end{cases}$$

$$\tau^k(\mathcal{F}_{n,m}, C, 0) = \begin{cases} \frac{(k+2)(k+1)}{2}, & 0 \leq k < m, \\ \frac{(k+2)(k+1)}{2} - \frac{(k+2-m)(k+1-m)}{2}, & k \geq m. \end{cases}$$

Além disso, como

$$my^{m-1} \cdot \omega = mx d(y^m - x^n) - mn(y^m - x^n)dx,$$

obtemos para todo $k \geq 0$ que

$$GSV(\mathcal{F}_{n,m}, C, 0) = m + n - mn.$$

Note que $GSV(\mathcal{F}_{n,m}, C, 0) = \tau^k(\mathcal{F}_{n,m}, C, 0) - \tau^k(C)$ para todo $k \geq 0$, verificando o Teorema 4.1.

Pelo exemplo anterior, deduzimos fórmulas para o cálculo do k -ésimo número de Milnor e do k -ésimo número de Tjurina da folheação $\mathcal{F}_{n,m}$. Em particular, ao considerarmos a curva

$$C : \{f(x, y) = 0\}$$

com $\nu_0(C) = n$, segue que, para todo $k \geq 0$,

$$\dim \frac{\mathcal{O}_2}{\mathfrak{m}^k + (f)} = \begin{cases} \frac{(k+1)k}{2}, & 0 \leq k < n, \\ \frac{(k+1)k}{2} - \frac{(k+1-n)(k-n)}{2}, & k \geq n. \end{cases} \quad (4.3)$$

4.2 k -ésimo índice polar

Nesta seção, seguimos as referências [9], [18] para o estudo das curvas polares associadas a folheações singulares em $(\mathbb{C}^2, 0)$ e dos invariantes de interseção polar considerados neste trabalho. Em seguida, apresentamos a versão dos k -ésimos números de interseção polar de uma folheação holomorfa.

Seja \mathcal{F} um germe de folheação singular em $(\mathbb{C}^2, 0)$, definido por uma 1-forma holomorfa $\omega = P dx + Q dy$, onde P e Q são germes holomorfos sem fatores comuns. Para cada $(a : b)$ no plano projetivo complexo denotado por $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, define-se a *curva polar* de \mathcal{F} relativamente a $(a : b)$, denotada por $P_{\mathcal{F}}^{(a:b)}$, como o conjunto de zeros da equação $aP + bQ = 0$. Equivalentemente, em termos de formas diferenciais, a curva polar é caracterizada pela condição $\omega \wedge (b dx - a dy) = 0$.

Observa-se que a curva polar $P_{\mathcal{F}}^{(a:b)}$ não possui ramos invariantes, exceto no caso em que a reta $ax + by = 0$ seja uma reta invariante da folheação. Ressalta-se ainda que a noção de curva polar estende-se naturalmente ao contexto das folheações formais, bem como os invariantes associados a essa construção.

Fixemos agora uma curva formal $C \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ invariante por \mathcal{F} . Existe um subconjunto aberto de Zariski não vazio $U_C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, tal que, para todo $(a : b) \in U_C$, a curva polar $P_{\mathcal{F}}^{(a:b)}$ não possui ramos em comum com C , e o tipo de equisingularidade da união $P_{\mathcal{F}}^{(a:b)} \cup C$ é independente da escolha de $(a : b) \in U_C$.

Diz-se que uma curva formal $\Gamma \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ é *de tipo polar C -genérico* se a união $\Gamma \cup C$ é equisingular a $P_{\mathcal{F}}^{(a:b)} \cup C$, para algum (equivalentemente, para todo) $(a : b) \in U_C$ (ver [10]). Observe que, se $C \subset C'$ são curvas formais invariantes, então toda curva formal Γ de tipo polar C' -genérico é também de tipo polar C -genérico.

No caso em que a folheação \mathcal{F} é não dicrítica, toda curva formal invariante C está contida na curva $S_{\mathcal{F}}$ das separatrizes de \mathcal{F} . Nessa situação, dizemos que uma curva formal Γ é *curva polar genérica* se ela é de tipo polar $S_{\mathcal{F}}$ -genérico. Denotaremos curvas polares genéricas da folheação holomorfa singular \mathcal{F} em $(\mathbb{C}^2, 0)$ por $\mathcal{P}^{\mathcal{F}}$.

Define-se então o número de interseção polar da folheação singular \mathcal{F} em $(\mathbb{C}^2, 0)$ com respeito a uma separatriz de \mathcal{F} dada por $B = \{h(x, y) = 0\}$ é definido como

$$i(\mathcal{P}^{\mathcal{F}}, B, 0) = \dim \frac{\mathcal{O}_{\epsilon}}{(\alpha P + \beta Q, h)}. \quad (4.4)$$

Com base nas construções anteriores, introduzimos os k -ésimos números de interseção polar de \mathcal{F} ao longo de uma curva reduzida invariante C , cuja definição é dada a seguir.

Definição 4.1. Seja $C = \{f(x, y) = 0\}$ uma curva reduzida invariante de uma folheação singular \mathcal{F} em $(\mathbb{C}^2, 0)$. O k -ésimo número de interseção polar de \mathcal{F} em relação a C na origem é o número

$$i^k(\mathcal{P}^{\mathcal{F}}, C, 0) = \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(\alpha P + \beta Q, f) \cdot m^k}.$$

Se \mathcal{F} é a folheação Hamiltoniana associada a uma função f definida por $df = f_x dx + f_y dy$, o k -ésimo número de interseção polar de \mathcal{F} em relação a C é o número

$$i^k(\mathcal{P}^{df}, C, 0) = \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(\alpha \partial_x f + \beta \partial_y f, f) \cdot m^k}.$$

Note que, quando $k = 0$, recuperamos o número de interseção polar clássico de uma folheação \mathcal{F} em relação a C definido anteriormente. Esses conceitos serão fundamentais para a próxima seção onde relacionamos esses índices com o número de Milnor e o índice *GSV*.

4.3 Lema de Teissier para o k -ésimo número de Milnor

No início da década de 1970, Bernard Teissier introduziu o resultado conhecido como Lema de Teissier. Esse resultado relaciona o número de Milnor de uma hipersuperfície singular ao número de interseção entre a hipersuperfície e sua curva polar genérica, revelando uma conexão geométrica profunda entre o aspecto topológico da singularidade e as propriedades de suas polares, veja em [43]. Nosso objetivo é apresentar uma versão relacionando com o k -ésimo número de Milnor de uma curva reduzida em $0 \in \mathbb{C}^2$ e do k -ésimo número de interseção polar da curva polar \mathcal{P}^{df} com a curva C .

Para isso, comecemos com o seguinte lema.

Lema 4.4. Seja J um ideal de \mathcal{O}_2 tal que $\dim \frac{\mathcal{O}_2}{J} < \infty$, e sejam $\psi, \varphi \in \mathcal{O}_2$ tais que $(\psi, \varphi) = 1$, isto é, eles são primos entre si. Suponha que $\nu_0(\psi) \leq \nu_0(\varphi)$, então

$$\dim \frac{\mathcal{O}_2}{(\psi, \varphi)J} = i(\psi, \varphi) + \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(\psi) + J} + \dim \frac{\mathcal{O}_2}{J}.$$

Demonstração. Tome $J = (h_1, \dots, h_s)$, então

$$(\psi, \varphi)J = (\psi h_1, \dots, \psi h_s, \varphi h_1, \dots, \varphi h_s).$$

Como $\nu_0(\psi) \leq \nu_0(\varphi)$, podemos realizar uma troca elementar de geradores: existem elementos $\psi' \in \mathcal{O}_2$ e $h'_i \in \mathcal{O}_2$ tais que

$$\psi' \equiv \psi \pmod{(\varphi h_1, \dots, \varphi h_s)}, \quad h'_i \equiv h_i \pmod{(\varphi h_1, \dots, \varphi h_s)},$$

e além disso

$$(\psi h_1, \dots, \psi h_s, \varphi h_1, \dots, \varphi h_s) = (\psi' h'_1, \dots, \psi' h'_s).$$

Assim, podemos identificar

$$\frac{\mathcal{O}_2}{(\psi, \varphi)J} \cong \frac{\mathcal{O}}{(\psi' h'_1, \dots, \psi' h'_s)},$$

onde $\mathcal{O} = \frac{\mathcal{O}_2}{(\varphi h_1, \dots, \varphi h_s)}$. Considere a sequência exata curta induzida pela multiplicação por ψ' no quociente pelos h'_i :

$$0 \longrightarrow \frac{\mathcal{O}}{(h'_1, \dots, h'_s)} \xrightarrow{\cdot \psi'} \frac{\mathcal{O}}{(\psi' h'_1, \dots, \psi' h'_s)} \xrightarrow{\pi} \frac{\mathcal{O}}{(\psi')} \longrightarrow 0, \quad (4.5)$$

onde π é a projeção natural. A exatidão de (4.5) segue da construção (a multiplicação por ψ' é injetiva no primeiro quociente e seu conúcleo é o quociente por (ψ')). Tomando

dimensões complexas (que são finitas sob nossas hipóteses) e usando a aditividade do comprimento em seqüências exatas curtas, obtemos

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}}{(\psi' h'_1, \dots, \psi' h'_s)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}}{(h'_1, \dots, h'_s)} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}}{(\psi')}. \quad (4.6)$$

Substituindo ψ', h'_i por seus representantes congruentes módulo $(\varphi h_1, \dots, \varphi h_s)$ e usando as propriedades elementares de ideais e quocientes, obtemos

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(\psi, \varphi)J} &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}}{(\psi' h'_1, \dots, \psi' h'_s)} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(h_1, \dots, h_s, \varphi h_1, \dots, \varphi h_s)} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(\psi, \varphi h_1, \dots, \varphi h_s)} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(h_1, \dots, h_s)} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(\psi, \varphi h_1, \dots, \varphi h_s)}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Agora, pelo Lema 4.2, podemos deduzir que

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(\psi, \varphi h_1, \dots, \varphi h_s)} = i(\psi, \varphi) + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{(\psi) + J}. \quad (4.8)$$

Substituindo (4.8) em (4.7), concluimos a demonstração. \square

O exemplo a seguir foi elaborado com o auxílio do SINGULAR, por meio do qual verificamos, para alguns valores de k , que o Lema 4.4 é satisfeito.

Exemplo 4.4. Sejam $f, g \in \mathcal{O}_2$ tal que $f = x^4 - y^3$ e $g = y^5 - x^7 + x^4 y^4$. Note que $(f, g) = 1$ e que $\nu_0(f) = 3 < \nu_0(g) = 5$. Usando o SINGULAR verificamos o Lema 4.4 para $0 \leq k \leq 10$

k	$\dim \mathcal{O}_2/(f, g)m^k$	$\dim \mathcal{O}_2/m^k$	$\dim \mathcal{O}_2/(f) + m^k$	$\dim \mathcal{O}_2/(f, g)$
0	20	0	0	20
1	22	1	1	20
2	26	3	3	20
3	32	6	6	20
4	39	10	9	20
5	47	15	12	20
6	56	21	15	20
7	66	28	18	20
8	77	36	21	20
9	89	45	24	20
10	102	55	27	20

Em [43], Teissier demonstrou (no contexto de hipersuperfícies complexas) uma fórmula que relaciona $i(\mathcal{P}^{df}, C)$ e $\mu(C)$, conhecida como *Lema de Teissier*:

Lema 4.5. [43, Prop. 1.2] Seja $f \in \mathcal{O}_2$ tal que $C = \{f = 0\}$ seja uma curva reduzida em $0 \in \mathbb{C}^2$. Então

$$i(\mathcal{P}^{df}, C) = \mu(C) + \nu(f) - 1.$$

Apresentamos a seguir uma versão do Lema de Teissier para os k -ésimos números de interseção polar e de Milnor de uma função holomorfa.

Teorema 4.1. Seja $f \in \mathcal{O}_2$ tal que $C : \{f = 0\}$ é uma curva reduzida em $0 \in \mathbb{C}^2$. Então, para todo inteiro $k \geq 0$, tem-se

$$i^k(\mathcal{P}^f, C) = \mu^k(f) + \nu_0(f) - 1.$$

Demonstração. Aplicando o Lema 4.4 para $J = m^k$, $\psi = f$ e $\varphi = \mathcal{P}^f = \alpha \partial_x f + \beta \partial_y f$, onde α e β são genéricos, obtemos

$$i^k(\mathcal{P}^{df}, C) = i(\mathcal{P}^{df}, C) + \dim \frac{\mathcal{O}_2}{m^k} + \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(\alpha f_x + \beta f_y) + m^k}. \quad (4.9)$$

Assumindo novamente que $\nu_0(f_x) \leq \nu_0(f_y)$, e aplicando o Lema 4.4 a $J = m^k$, $\psi = \partial_x f$ e $\varphi = \partial_y f$, obtemos

$$\mu^k(C) = \mu(C) + \dim \frac{\mathcal{O}_2}{m^k} + \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(f_y) + m^k}. \quad (4.10)$$

Das expressões (4.9) e (4.10), segue que

$$i^k(\mathcal{P}^{df}, C) - \mu^k(C) = i(\mathcal{P}^{df}, C) - \mu(C),$$

pela equação (4.3). Logo, concluímos a demonstração pela aplicação do Lema 4.5. \square

Exemplo 4.5. Seja $(V, 0)$ uma singularidade isolada binomial definida por $f = x^2 + y^2$. Então, por [27, Proposição 2.7],

$$\mu^k(V, 0) = \dim \frac{\mathcal{O}_2}{m^k(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})} = \begin{cases} 1 + k^2 + k, & \text{se } 0 \leq k < 2 \\ \frac{3}{2}k + 1 + \frac{k^2}{2}, & \text{se } k \geq 2 \end{cases}$$

e o número de interseção polar de ordem k de df com respeito a $C : \{f = x^2 + y^2\}$ (1:1)

$$i^k(\mathcal{P}^{df}, C) = \dim \frac{\mathcal{O}_2}{m^k(\partial_x f + \partial_y f, f)} = \begin{cases} 2 + k^2 + k, & \text{se } 0 \leq k < 2 \\ \frac{3}{2}k + 2 + \frac{k^2}{2}, & \text{se } k \geq 2 \end{cases}$$

então, $i^k(\mathcal{P}^{df}, C) - \mu^k(V) = \nu(C) - 1$.

Com respeito a folheações, em 2022, Arturo Fernández-Pérez, Evelia R. García Barroso e Nancy Saravia-Molina [16] estudaram uma relação entre os números de interseção polar $i_p(\mathcal{P}^{\mathcal{F}}, C)$ e $i_p(\mathcal{P}^{df}, C)$ do seguinte modo

Proposição 4.2. [16, Prop. 5.4] *Seja $C : \{f(x, y) = 0\}$ uma curva reduzida e invariante de uma folheação singular \mathcal{F} em (\mathbb{C}^2, p) . Então,*

$$GSV(\mathcal{F}, C, p) = i(\mathcal{P}^{\mathcal{F}}, C, p) - i(\mathcal{P}^{df}, C, p).$$

Então, obtemos o seguinte resultado O seguinte resultado relaciona o k -ésimo índice de interseção polar de \mathcal{F} com o índice GSV .

Teorema 4.2. *Considere \mathcal{F} uma folheação não-dicrítica em $(\mathbb{C}^2, 0)$, e seja $C : \{f = 0\}$ a união total de separatrizes de \mathcal{F} . Se \mathcal{F} é do segundo tipo, então*

$$i^k(\mathcal{P}^{\mathcal{F}}, C, 0) - i^k(\mathcal{P}^{df}, C, 0) = i(\mathcal{P}^{\mathcal{F}}, C, 0) - i(\mathcal{P}^{df}, C, 0) = GSV(\mathcal{F}, C, 0).$$

Demonstração. Suponha que $\omega = P dx + Q dy$. Aplicando o Lema 4.4 com $J = m^k$, $\psi = \mathcal{P}^{\mathcal{F}} = \alpha P + \beta Q$ e $\varphi = f$, obtemos

$$i^k(\mathcal{P}^{\mathcal{F}}, C) = i(\mathcal{P}^{\mathcal{F}}, C) + \dim \frac{\mathcal{O}_2}{m^k} + \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(\alpha P + \beta Q) + m^k},$$

onde α e β são genéricos. De modo análogo, pelo Lema 4.4, temos

$$i^k(\mathcal{P}^{df}, C) = i(\mathcal{P}^{df}, C) + \dim \frac{\mathcal{O}_2}{m^k} + \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(\alpha f_x + \beta f_y) + m^k}.$$

Como \mathcal{F} é de segundo tipo, segue que $\nu(\mathcal{F}) = \nu(\alpha P + \beta Q) = \nu(C) - 1 = \nu(\alpha f_x + \beta f_y)$, por [20, Prop. 2.4]. Consequentemente,

$$\dim \frac{\mathcal{O}_2}{(\alpha P + \beta Q) + m^k} = \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(\alpha f_x + \beta f_y) + m^k},$$

pela equação (4.3). A prova termina tomando a diferença $i^k(\mathcal{P}^{\mathcal{F}}, C) - i^k(\mathcal{P}^{df}, C)$ e observando que $i(\mathcal{P}^{\mathcal{F}}, C) - i(\mathcal{P}^{df}, C) = GSV(\mathcal{F}, C)$ pela Proposição anterior 4.2. \square

5. Fórmula para o k -ésimo número de Milnor e sobre a invariância topológica dos k -ésimos números de Milnor e Tjurina

5.1 Fórmula para o k -ésimo número de Milnor de uma folheação

Nesse capítulo, apresentamos uma relação do k -ésimo número de Milnor de uma curva C e o k -ésimo número de Milnor de uma folheação \mathcal{F} com os respectivos número de Milnor usuais. Para isso, consideremos $\mathcal{F} : \omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ um germe de folheação em $0 \in \mathbb{C}^2$ e que $\nu_0(\mathcal{F}) = \nu_0(P) \leq \nu_0(Q)$. Seja $\mathcal{F} : \omega = P dx + Q dy$ uma folheação singular em $0 \in \mathbb{C}^2$. Admita que a multiplicidade algébrica de \mathcal{F} satisfaz $\nu_0(\mathcal{F}) = \nu_0(P) \leq \nu_0(Q)$. Aplicando o Lema 4.4 com $J = \mathfrak{m}^k$, $\psi = P$ e $\varphi = Q$, obtemos:

$$\mu^k(\mathcal{F}, 0) = \mu(\mathcal{F}) + \dim \frac{\mathcal{O}_2}{\mathfrak{m}^k} + \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(P) + \mathfrak{m}^k}. \quad (5.1)$$

Seja $C : \{f = 0\}$ a curva reduzida em $0 \in \mathbb{C}^2$ definida por $f \in \mathcal{O}_2$. Supondo $\nu_0(f_x) \leq \nu_0(f_y)$, obtemos novamente pelo Lema 4.4:

$$\mu^k(C) = \mu(C) + \dim \frac{\mathcal{O}_2}{\mathfrak{m}^k} + \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(f_x) + \mathfrak{m}^k}. \quad (5.2)$$

Observe que $\dim \frac{\mathcal{O}_2}{\mathfrak{m}^k} = \frac{k(k+1)}{2}$, e tendo em conta a equação (4.3), para $f \in \mathcal{O}_2$ com $\nu_0(f) = n$:

$$\dim \frac{\mathcal{O}_2}{\mathfrak{m}^k + (f)} = \begin{cases} \frac{k(k+1)}{2}, & \text{se } 0 \leq k < n; \\ \frac{(k+1)k}{2} - \frac{(k+1-n)(k-n)}{2}, & \text{se } k \geq n. \end{cases} \quad (5.3)$$

Assim como consequência direta da equações (5.2) e (5.3), obtemos o seguinte corolário:

Corolário 5.1. *Seja $f \in \mathcal{O}_2$ e suponha que $\nu_0(f) = n$. Então*

$$\mu^k(f) = \begin{cases} \mu(f) + k(k+1), & \text{se } 0 \leq k < n; \\ \mu(f) + k(k+1) - \frac{(k-n+2)(k-n+1)}{2}, & \text{se } k \geq n. \end{cases}$$

Note que podemos recuperar o Teorema 2.4 usando esse Corolário. Como mostramos a seguir para o caso em que f satisfaz

$$f = x^{a_1} + y^{a_2} \quad (2 \leq a_1 \leq a_2)$$

com tipo de peso $(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}; 1)$. Note que $f_x = a_1 x^{a_1-1}$ e $f_y = a_2 y^{a_2-1}$ e como $a_1 \leq a_2$, $\nu(f_x) \leq \nu(f_y)$. O número de Milnor de f é dado por $(a_1 - 1)(a_2 - 1)$ e pelo Corolário 5.1,

$$\mu^k(f) = \begin{cases} (a_1 - 1)(a_2 - 1) + k(k+1), & \text{se } 0 \leq k < a_1; \\ (a_1 - 1)(a_2 - 1) + k(k+1) - \frac{(k-a_1+2)(k-a_1+1)}{2}, & \text{se } k \geq a_1. \end{cases}$$

e abrindo as contas de

$$\begin{aligned} (a_1 - 1)(a_2 - 1) + k(k+1) - \frac{(k-a_1+2)(k-a_1+1)}{2} &= \\ &= a_1 k - \frac{k}{2} + a_1 a_2 - a_2 - \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_1}{2} - \frac{k^2}{2}. \end{aligned}$$

Essa expressão coincide exatamente com a fórmula obtida para o cálculo do k -ésimo número de Milnor apresentada no Teorema 2.4. Os demais casos são feitos de forma análoga.

Quando f é um polinômio homogêneo quase-homogêneo, temos o seguinte resultado de [27, Proposição 2.6]:

Proposição 5.1. *Para uma singularidade isolada definida por um polinômio homogêneo quase-homogêneo $f \in \mathbb{C}[x, y]$, temos:*

$$\mu^k(f) = \tau^k(f) + \frac{k(k-1)}{2}.$$

Como aplicação da Proposição 5.1, recuperamos o Teorema 2.3 e apresentamos uma aplicação para folheações singulares.

Teorema 5.1. *Seja \mathcal{F} uma folheação singular em $0 \in \mathbb{C}^2$. Suponha que \mathcal{F} seja não dicrítica e do segundo tipo. Seja $C : \{f = 0\}$ a união total das separatrizes em $0 \in \mathbb{C}^2$.*

Então, assumindo que $\nu_0(f_x) \leq \nu_0(f_y)$, temos:

$$\mu^k(\mathcal{F}, 0) - \mu^k(C) = \mu(\mathcal{F}, 0) - \mu(C).$$

Em particular, \mathcal{F} é uma folheação de curva generalizada se, e somente se, $\mu^k(\mathcal{F}, 0) = \mu^k(C)$ para todo $k \geq 0$.

Demonstração. Admita que \mathcal{F} seja uma folheação não dicrítica definida por $\omega = Pdx + Qdy$ tal que $\nu_0(\mathcal{F}) = \nu_0(P)$, e seja $C = \{f = 0\}$ a união total de todas as separatrizes em $0 \in \mathbb{C}^2$. Como $\nu_0(f_x) \leq \nu_0(f_y)$, obtemos do Lema 4.4 que:

$$\mu^k(C) = \mu(C) + \dim \frac{\mathcal{O}_2}{\mathfrak{m}^k} + \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(f_x) + \mathfrak{m}^k}. \quad (5.4)$$

Como \mathcal{F} é do segundo tipo, usando a Proposição ?? temos $\nu_0(\mathcal{F}) = \nu_0(C) - 1 = \nu_0(f_x)$. Assim, segue da equação (4.3) que:

$$\dim \frac{\mathcal{O}_2}{(P) + \mathfrak{m}^k} = \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(f_x) + \mathfrak{m}^k}.$$

Portanto, a partir de (5.1) e (5.2) obtemos:

$$\mu^k(\mathcal{F}, 0) - \mu^k(C) = \mu(\mathcal{F}, 0) - \mu(C).$$

Consequentemente, \mathcal{F} é uma folheação de curva generalizada se, e somente se, $\mu^k(\mathcal{F}, 0) = \mu^k(C)$ para todo $k \geq 0$, conforme o Teorema 7 de [5]. \square

5.2 Sobre a invariância topológica dos k -ésimos números de Milnor e Tjurina

Dado $f \in \mathcal{O}_2$, segue dos Teoremas 2.28 e 2.26 de [23] que $\mu^k(f)$ e $\tau^k(f)$ são *invariantes analíticos*. A seguir, veremos que, em geral, o k -ésimo número de Tjurina não é um invariante topológico. Especificamente, consideramos o caso de $\tau^1(f)$.

Exemplo 5.1. Consideremos $f(x, y) = y^3 - x^7$ e $g(x, y) = f + x^5y$. De acordo com [23, p. 218], as curvas $C = \{f = 0\}$ e $C' = \{g = 0\}$ são topologicamente equivalentes, isto é, existe um homeomorfismo $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ tal que $\phi(C) = C'$. No entanto, utilizando o software SINGULAR, obtemos:

```
> ring r=0, (x,y), ds;
> LIB "sing.lib";
```

```

> poly f=y3-x7;
> poly g=f+x5y;
> ideal m=x,y;
> ideal J=jacob(f)+f;
> ideal N=jacob(g)+g;
> vdim(std(J));
12
> vdim(std(N));
11
> ideal J1=jacob(f)*m+f;
> ideal J2=jacob(g)*m+g;
> vdim(std(J1)); // 1-th Tjurina number of f
14
> vdim(std(J2)); // 1-th Tjurina number of g
13

```

Isso mostra que $\tau^1(f) = 14 \neq 13 = \tau^1(g)$ e, portanto, $\tau^1(f)$ não é um invariante topológico.

Com relação ao k -ésimo número de Milnor de um germe $f \in \mathcal{O}_2$ com $\nu_0(f) = m \geq 1$, o Corolário 5.1 afirma que

$$\mu^k(f) = \begin{cases} \mu(f) + k(k+1), & \text{se } 0 \leq k < m \\ \mu(f) + k(k+1) - \frac{(k-m+2)(k-m+1)}{2}, & \text{se } k \geq m. \end{cases}$$

Isso mostra que, em dimensão dois, $\mu^k(f)$ depende apenas de $\mu(f)$, k e $\nu_0(f)$. Como $\mu(f)$ é um invariante topológico (ver [13]) e $\nu_0(f)$ também é um invariante topológico (ver [46]), segue que $\mu^k(f)$ também é um invariante topológico. Em dimensões maiores, o problema da invariância topológica de $\mu^k(f)$ permanece em aberto.

Com respeito à invariância topológica do k -ésimo número de Milnor de uma folheação, podemos afirmar o seguinte: Seja $\mathcal{F} : \omega = Pdx + Qdy$ um germe de folheação em $0 \in \mathbb{C}^2$. Suponhamos que $\nu_0(\mathcal{F}) = \nu_0(P) \leq \nu_0(Q)$. Aplicando o Lema 4.4, obtemos

$$\mu^k(\mathcal{F}, 0) = \mu(\mathcal{F}) + \dim \frac{\mathcal{O}_2}{\mathfrak{m}^k} + \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(P) + \mathfrak{m}^k}.$$

Como consequência, $\mu^k(\mathcal{F}, 0)$ depende de $\mu(\mathcal{F})$, de k e da multiplicidade algébrica $\nu_0(\mathcal{F}) = \nu_0(P)$ (por hipótese). Sabe-se que a multiplicidade algébrica $\nu_0(\mathcal{F})$ é um invariante biLipschitz (ver [39]) e que $\mu(\mathcal{F})$ é um invariante topológico (ver [5]). Portanto,

podemos concluir que $\mu^k(\mathcal{F}, 0)$ é um invariante biLipschitz, isto é, é preservado sob equivalência Lipschitz.

O problema da invariância topológica tanto da multiplicidade algébrica $\nu_0(\mathcal{F})$ quanto de $\mu^k(\mathcal{F}, 0)$ permanece em aberto.

6. Sobre algumas conjecturas

Neste capítulo, apresentamos respostas a duas conjecturas relacionadas aos k -ésimos números de Milnor e de Tjurina de uma função holomorfa em dimensão dois.

6.1 Conjectura de Dimca-Greuel

Em [12], Dimca e Greuel questionaram sobre a relação entre os números de Milnor e de Tjurina de uma singularidade isolada de curva plana. Mais precisamente, questionaram se para toda hipersuperfície com singularidade isolada $(X, 0)$ de curva plana vale a desigualdade

$$\frac{\mu(X, 0)}{\tau(X, 0)} < \frac{4}{3}.$$

Inicialmente, a desigualdade foi verificada apenas em classes especiais, como para singularidade semi-quasi-homogêneas quase-homogêneas [12]. Posteriormente, o caso geral foi resolvido por Almirón e Blanco [1], que demonstraram a desigualdade acima para qualquer singularidade semi-quasi-homogênea $(X, 0)$. Mais recentemente, em 2020 Genzmer e Hernandes [25] mostraram a desigualdade para curvas planas singulares irredutíveis.

Em [28, Conjectura 1.3], os autores conjecturam que, para qualquer curva plana isolada C , vale para todo $k \geq 0$,

$$\frac{\mu^k(C)}{\tau^k(C)} < \frac{4}{3}.$$

Eles consideraram a curva $C = \{f = 0\}$, onde

$$f(x, y) = x^{2m+1} + y^{2m+1} + x^{m+1}y^{m+1}, \quad m \geq 1,$$

e mostraram que $\frac{\mu^1(C)}{\tau^1(C)}$ e $\frac{\mu^2(C)}{\tau^2(C)}$ são suficientemente próximos de $\frac{4}{3}$ quando m é grande o bastante.

No entanto, afirmamos que tal conjectura possui uma resposta negativa em geral.

Exemplo 6.1. Considere $m = 2$ e nesse caso, temos $f = x^5 + y^5 + x^3y^3$. Utilizando o código SINGULAR

```
> ring r=0, (x,y), ds;
> poly f=x5+y5+x3y3;
> ideal m=x,y;
```

```

> ideal J=jacob(f)*m*m*m*m*m*m*m*m*m;
> ideal I=J+f;
> vdim(std(J)); // 8-ésimo número de Milnor
78
> vdim(std(I)); // 8-ésimo número de Tjurina
50

```

Portanto,

$$\frac{\mu^8(f)}{\tau^8(f)} = \frac{78}{50} > \frac{4}{3}.$$

A seguir, apresentamos uma confirmação à Conjectura 1.3 [28] para polinômios quasi-homogêneos com uma restrição em k .

Teorema 6.1. Seja $(V, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f(x, y) = 0\}$ uma singularidade isolada definida por um polinômio quasi-homogêneo f de multiplicidade algébrica $\nu_0(f)$. Então, para todo $0 \leq k < \nu_0(f)$, temos

$$\frac{\mu^k(f)}{\tau^k(f)} < \frac{4}{3}.$$

Demonstração. Como $0 \leq k < \nu_0(f)$, pelo Corolário 5.1 temos $\mu^k(f) = \mu(f) + k(k+1)$. Além disso, para o caso quasi-homogêneo, por [27, Prop. 2.6], segue que

$$\mu^k(f) = \tau^k(f) + \frac{k(k-1)}{2}.$$

Usando as fórmulas válidas no caso quasi-homogêneo, para $0 \leq k < \nu_0(f)$ temos

$$\mu^k(f) = \mu(f) + k(k+1), \quad \mu^k(f) = \tau^k(f) + \frac{k(k-1)}{2}.$$

Dessa segunda igualdade obtemos imediatamente

$$\tau^k(f) = \mu^k(f) - \frac{k(k-1)}{2} = \mu(f) + \frac{k^2 + 3k}{2}.$$

Assim, para $0 \leq k < \nu_0(f)$ o quociente procurado é

$$\frac{\mu^k(f)}{\tau^k(f)} = \frac{\mu(f) + k(k+1)}{\mu(f) + \frac{k^2 + 3k}{2}}.$$

Para verificar que este quociente é estritamente menor que $4/3$ basta verificar a inequação equivalente

$$3(\mu(f) + k(k+1)) < 4\left(\mu(f) + \frac{k^2 + 3k}{2}\right).$$

Simplificando, obtemos a condição

$$\mu(f) > k^2 - 3k. \quad (6.1)$$

Pelo comentário 7.4 de [17] temos que $(\nu_0(f) - 1)^2 \leq \mu(f)$. Mostramos agora que, para todo inteiro k com $0 \leq k < \nu_0(f)$,

$$(\nu_0(f) - 1)^2 > k^2 - 3k,$$

o que implica na equação(6.1) e, portanto, a desigualdade desejada.

De fato,

$$(\nu_0(f) - 1)^2 - (k^2 - 3k) = (\nu_0(f) - 1 - k)(\nu_0(f) - 1 + k) + 3k.$$

Como $0 \leq k < \nu_0(f)$ temos $\nu_0(f) - 1 - k \geq 0$ e $3k \geq 0$. Além disso, se $k > 0$ então $3k > 0$, logo a diferença é estritamente positiva; se $k = 0$ então $(\nu_0(f) - 1)^2 > 0$ para $\nu_0(f) \geq 2$ e também obtemos a desigualdade. Assim

$$(\nu_0(f) - 1)^2 > k^2 - 3k \quad \text{para todo } 0 \leq k < \nu_0(f),$$

e portanto $\mu(f) \geq (\nu_0(f) - 1)^2 > k^2 - 3k$, que é exatamente a condição (*). Portanto, para todo $0 \leq k < \nu_0(f)$

$$\frac{\mu^k(f)}{\tau^k(f)} < \frac{4}{3}.$$

□

Este resultado generaliza [28, Teorema E], pois demonstra que a desigualdade

$$\frac{\mu^k(f)}{\tau^k(f)} < \frac{4}{3}$$

permanece válida não apenas para o caso clássico ($k = 0$), mas também para todos os valores $0 \leq k < \nu_0(f)$, quando f é um polinômio quasi-homogêneo.

6.2 Sobre a conjectura para o limite inferior do k -ésimo número de Tjurina de um polinômio homogêneo quase-homogêneo

Em [27, Conjectura 1.1], os autores conjecturaram o seguinte limite inferior para o k -ésimo número de Tjurina de uma hipersuperfície complexa:

Conjectura 1. Para cada $k \geq 0$, assumamos que

$$\tau^k(\{x_1^{a_1} + \dots + x_n^{a_n} = 0\}) := \ell^k(a_1, \dots, a_n).$$

Seja $(V, 0) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n : f(x_1, \dots, x_n) = 0\}$, com $n \geq 2$, uma singularidade isolada definida por um polinômio quase-homogêneo homogêneo $f(x_1, \dots, x_n)$ de tipo de peso $(w_1, \dots, w_n; 1)$. Então

$$\tau^k(V) \geq \ell^k(1/w_1, \dots, 1/w_n).$$

Nesta seção, fornecemos uma resposta positiva à Conjectura 1 no caso $n = 2$. E, em particular, este resultado generaliza o Teorema C de [27].

Teorema 6.2. Seja C um germe de curva singular reduzida em $0 \in \mathbb{C}^2$ definido por um polinômio quase-homogêneo homogêneo f com peso do tipo $(w_1, w_2; 1)$, com $\nu_0(f) \geq 1/w_1$. Então

$$\tau^k(C) \geq \ell^k\left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}\right).$$

Demonstração. De fato, seja f seja um polinômio homogêneo quase-homogêneo de tipo de pesos $(1/w_1, 1/w_2; 1)$ e seja $m = \nu_0(f) \geq \frac{1}{w_1} \geq 2$. Então, segue do Corolário 5.1, da Proposição 5.1 e da fórmula de Milnor–Orlik [36] que

$$\tau^k(f) = \begin{cases} \left(\frac{1}{w_1} - 1\right) \left(\frac{1}{w_2} - 1\right) + \frac{k(k+3)}{2}, & 0 \leq k < m, \\ \left(\frac{1}{w_1} - 1\right) \left(\frac{1}{w_2} - 1\right) + \frac{k(k+3)}{2} - \frac{(k-m+2)(k-m+1)}{2}, & k \geq m. \end{cases}$$

De forma similar, para $\ell^k(1/w_1, 1/w_2)$:

$$\ell^k(1/w_1, 1/w_2) = \begin{cases} \left(\frac{1}{w_1} - 1\right) \left(\frac{1}{w_2} - 1\right) + \frac{k(k+3)}{2}, & \text{se } 0 \leq k < 1/w_1, \\ \left(\frac{1}{w_1} - 1\right) \left(\frac{1}{w_2} - 1\right) + \frac{k(k+3)}{2} - \frac{(k-1/w_1+2)(k-1/w_1+1)}{2}, & \text{se } k \geq 1/w_1. \end{cases}$$

Essas fórmulas implicam que, para provar $\tau^k(f) \geq \ell^k(1/w_1, 1/w_2)$, basta mostrar que, para $m \geq 1/w_1$, vale a seguinte desigualdade:

$$\frac{(k - 1/w_1 + 2)(k - 1/w_1 + 1)}{2} \geq \frac{(k - m + 2)(k - m + 1)}{2}. \quad (6.2)$$

Note que, se $m = \frac{1}{w_1}$, a desigualdade torna-se uma igualdade, e nada há a provar. Portanto, suponhamos que $m > 1/w_1$ e provemos a desigualdade (6.2). Multiplicando e eliminando fatores comuns em (6.2), vemos que ela é equivalente a

$$2k \left(m - \frac{1}{w_1} \right) \geq \left(m - \frac{1}{w_1} \right) \left(m + \frac{1}{w_1} - 3 \right),$$

Como $m > 1/w_1$, podemos simplificar o fator $\left(m - \frac{1}{w_1} \right)$ e obter

$$2k \geq \left(m + \frac{1}{w_1} - 3 \right).$$

A desigualdade acima é imediatamente satisfeita, uma vez que consideramos $k \geq m > 1/w_1$. □

Referências

- [1] P. Almirón, On the quotient of Milnor and Tjurina numbers for two-dimensional isolated hypersurface singularities, *Math. Nachr.* **295** (2022), no. 7, 1254–1263.
- [2] C. Bivià-Ausina and M. A. S. Ruas. Mixed Bruce-Roberts numbers. *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2) **63** (2020), no. 2, 456–474.
- [3] M. Brunella. *Birational geometry of foliations. Vol. 1.* IMPA Monographs. Springer, Cham, 2015, pp. xiv+130. isbn: 978-3-319-14309-5; 978-3-319-14310-1. doi: 10.1007/978-3-319-14310-1. url: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-14310-1>.
- [4] M. Brunella, Some remarks on indices of holomorphic vector fields, *Publ. Mat.* **41** (1997), no. 2, 527–544.
- [5] C. Camacho, A. Lins Neto and P. Sad, Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields, *J. Differential Geom.* **20** (1984), no. 1, 143–174.
- [6] C. Camacho and P. Sad. Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields. *Ann. of Math.* (2), v. 115, n. 3, p. 579–595, 1982. ISSN 0003-486X. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/2007013>>.
- [7] L. Câmara, F. Reis, and J. Sampaio, On the topological invariance of the algebraic multiplicity of holomorphic foliations, Preprint arXiv:2407.09306, (2024), <https://doi.org/10.48550/arXiv.2407.09306>.
- [8] F. Cano, D. Cerveau, and J. Déserti. Théorie élémentaire des feuilletages holomorphes singuliers. *Echelles*. Belin, 2013, 208 p. url: <https://hal.science/hal-00805694>.
- [9] F. Cano, N. Corral and R. S. Mol, Local polar invariants for plane singular foliations, *Expo. Math.* **37** (2019), no. 2, 145–164.
- [10] N. Corral: Sur la topologie des courbes polaires de certains feuilletages singuliers. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 53, 3 (2003), 787–814.
- [11] W. Decker, G. Greuel, G. Pfister; Schönemann, H.: SINGULAR 4-4-0 — A computer algebra system for polynomial computations. <https://www.singular.uni-kl.de> (2024).
- [12] A. Dimca and G.-M. Greuel, *On 1-forms on isolated complete intersection curve singularities*, *Journal of Singularities*, vol. 18, pp. 114–118, 2018. Special volume in honor of the life and mathematics of Egbert Brieskorn. DOI: [10.5427/jsing.2018.18h](https://doi.org/10.5427/jsing.2018.18h).

- [13] Lê Dũng Tráng and C. P. Ramanujam, The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type, *Amer. J. Math.* **98** (1976), no. 1, 67–78.
- [14] D. Eisenbud. *The geometry of syzygies*. Vol. 229. New York: Springer, 2005.
- [15] A. Fernández-Pérez, E. R. García Barroso and N. Saravia-Molina, On Brianchon-Skoda theorem for foliations, *Expo. Math.* **41** (2023), no. 4, Paper No. 125512, 13 pp.
- [16] A. Fernández-Pérez, E. R. García Barroso and N. Saravia-Molina, On Milnor and Tjurina numbers of foliations, *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* **56** (2025), no. 2, Paper No. 23, 34 pp.
- [17] A. Fernández-Pérez, E. R. García Barroso and N. Saravia-Molina, On some indices of foliations and applications, Preprint arXiv:2506.01090 (2025), <https://doi.org/10.48550/arXiv.2506.01090>.
- [18] A. Fernández-Pérez and R. Mol. Residue-type indices and holomorphic foliations. *Ann. Sc.Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)* **19** (3) (2019), 1111-1134.
- [19] W. Fulton, *Algebraic Curves*, W. A. Benjamin, New York, (2008).
- [20] Y. Genzmer, Rigidity for dicritical germ of foliation in \mathbb{C}^2 , *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2007**, no. 19, Art. ID rnm072, 14 pp.
- [21] X. Gómez-Mont, J. A. Seade and A. Verjovsky, The index of a holomorphic flow with an isolated singularity, *Math. Ann.* **291** (1991), no. 4, 737–751.
- [22] X. Gómez-Mont, An algebraic formula for the index of a vector field on a hypersurface with an isolated singularity, *J. Algebraic Geom.* **7** (1998), no. 4, 731–752.
- [23] G.-M. Greuel, C. Lossen and E. I. Shustin, *Introduction to Singularities and Deformations*, 2nd edition, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Cham, 2025.
- [24] G.-M. Greuel and T. H. Pham, Mather-Yau theorem in positive characteristic, *J. Algebraic Geom.* **26** (2017), no. 2, 347–355.
- [25] M. E. Hernandez and Y. Genzmer, *On the Saito's basis and the Tjurina number for plane branches*, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 373, no. 5, pp. 3693–3707, 2020. DOI: [10.1090/tran/7863](https://doi.org/10.1090/tran/7863).
- [26] C. Hu, S. S.-T. Yau, and H. Zuo, On the k -th Tjurina number of weighted homogeneous singularities. Preprint arXiv:2409.09384, (2024).

- [27] Hussain, N., Liu, Z., Yau, S.ST. et al. k -th Milnor numbers and k -th Tjurina numbers of weighted homogeneous singularities. *Geom Dedicata* 217, 34 (2023). <https://doi.org/10.1007/s10711-023-00768-0>
- [28] N. Hussain, S. S. T. Yau and H. Zuo. Three types of derivation Lie algebras of isolated hypersurface singularities. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)* **74** (2025), no. 1, Paper No. 25, 20 pp.
- [29] B. Khanedani and T. Suwa. First variation of holomorphic forms and some applications. *Hokkaido Math. J.*, 26(2):323–335, 1997.
- [30] Lins Neto, A. and Scárdua, B. Complex algebraic foliations. Vol. 67. De Gruyter Expositions in Mathematics. De Gruyter, Berlin, [2020] ©2020, pp. viii+241. isbn: 978-3-11-060205-0; 978-3-11-060107-7; 978-3-11-059451-5. url: <https://doi.org/10.1515/9783110602050-201>.
- [31] Y. Liu, Milnor and Tjurina numbers for a hypersurface germ with isolated singularity, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **356** (2018), no. 9, 963–966.
- [32] J.-F. Mattei, Quasi-homogénéité et équiréductibilité de feuilletages holomorphes en dimension deux, *Astérisque* No. 261 (2000), p. 253-276, *Géométrie complexe et systèmes dynamiques* (Orsay, 1995).
- [33] Mattei, J-F., and Robert Moussu. "Holonomie et intégrales premières." *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*. Vol. 13. No. 4. 1980.
- [34] D. Marín Pérez, Sur les notions de quasi-homogénéité de feuilletages holomorphes en dimension deux, *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* **36** (2005), no. 2, 177–185.
- [35] Martinet, J., Ramis, J. P. (1982). Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 55, 63-164.
- [36] J. W. Milnor and P. Orlik, Isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials, *Topology* **9** (1970), 385–393.
- [37] Milnor, John. Singular points of complex hypersurfaces. Vol. No. 61. *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1968, pp. iii+122.
- [38] MOL, R.; ROSAS, R. Differential equisingularity of holomorphic foliations. *Journal of Singularities*, v. 19, p. 76–96, 2019.

- [39] R. J. Rosas Bazán, Bilipschitz invariants for germs of holomorphic foliations, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2016**, no. 11, 3425–3472.
- [40] Tjurina, G. N. “Locally semi-universal flat deformations of isolated singularities of complex spaces”. In: *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 33 (1969), pp. 1026–1058. issn: 0373-2436.
- [41] T. Suwa, Indices of holomorphic vector fields relative to invariant curves on surfaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995), no. 10, 2989–2997.
- [42] B. Teissier. Variétés polaires. I. Invariants polaires des singularités d’hypersurfaces. *Invent. Math.* 40 (1977), no. 3, 267–292
- [43] B. Teissier: Cycles évanescents, section planes et condition de Whitney. Singularités à Cargèse (Rencontre Singularités Géom. Anal., Inst. Études Sci., Cargèse, 1972). *Astérisque*, 7-8 (1973), 285-362.
- [44] B. Teissier. Introduction to equisingularity problems, Algebraic geometry (ed. R. Hartshorne), *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* 29 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1975) 593-632.
- [45] O. Zariski. Questions in algebraic varieties, *Contribution to the problems of equisingularity* (CIME, Edizioni Cremonese, Roma, 1970) 261–343.
- [46] O. Zariski. On the Topology of Algebroid Singularities, *Amer. J. Math.* **54** (1932), no. 3, 453–465.