

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-graduação em Física

Matheus Aleluia Rodrigues

**OS EFEITOS DA ANISOTROPIA E FOCALIZAÇÃO NOS ESTADOS
GERADOS PELA CONVERSÃO PARAMÉTRICA DESCENDENTE
E SEU GRAU DE EMARANHAMENTO**

Belo Horizonte
2024

Matheus Aleluia Rodrigues

**OS EFEITOS DA ANISOTROPIA E FOCALIZAÇÃO NOS ESTADOS GERADOS
PELA CONVERSÃO PARAMÉTRICA DESCENDENTE E SEU GRAU DE
EMARANHAMENTO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Carlos Henrique Monken
Coorientador: Alexandre Gutenberg da Costa Moura

Belo Horizonte

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

R696e Rodrigues, Matheus Aleluia.

Os efeitos da anisotropia e focalização nos estados gerados pela conversão paramétrica descendente e seu grau de emaranhamento / Matheus Aleluia Rodrigues. – 2024.

74 f. : il.

Orientador: Carlos Henrique Monken.

Coorientador: Alexandre Gutenberg da Costa Moura.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais,
Departamento de Física.

Bibliografia: f. 71-74.

1. Conversão paramétrica descendente. 2. Emaranhamento. 3. Dispersão.
I. Título. II. Monken, Carlos Henrique. III. Moura, Alexandre Gutenberg da
Costa. IV. Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

CDU – 535 (043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
FOLHA DE APROVAÇÃO

A presente dissertação, intitulada "**Os efeitos da anisotropia e focalização nos estados gerados pela conversão paramétrica descendente e seu grau de emaranhamento**" de autoria de **MATHEUS ALELUIA RODRIGUES** submetida à Comissão Examinadora, abaixo-assinada, foi aprovada para obtenção do grau de **Mestre em Física**, em 19 de dezembro de 2024.

Belo Horizonte, 19 de dezembro de 2024.

Prof. Carlos Henrique Monken
Orientador do estudante
Departamento de Física/UFMG

Prof. Alexandre Gutenberg da Costa Moura
Coorientador do estudante
Instituto de Ciência e Tecnologia/UFVJM)

Prof. Leonardo Teixeira Neves
Departamento de Física/UFMG

Prof. Olavo Cosme da Silva
Instituto de ciência e tecnologia/UFVJM

Dr. Raul Côrrea Silva
Departamento de Física/UFMG



Documento assinado eletronicamente por **Olavo Cosme da Silva, Usuário Externo**, em 19/12/2024, às 18:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Leonardo Teixeira Neves, Professor do Magistério Superior**, em 19/12/2024, às 19:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Raul Corrêa Silva, Usuário Externo**, em 20/12/2024, às 09:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Carlos Henrique Monken, Professor do Magistério Superior**, em 20/12/2024, às 11:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alexandre Gutenberg da Costa Moura, Usuário Externo**, em 21/12/2024, às 12:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3837776** e o código CRC **B46957B0**.

*Dedicado ao meu falecido avô Francisco,
e ao meu futuro sobrinho Francisco.*

AGRADECIMENTOS

- Ao meu orientador, Carlos Monken, pela paciência com minhas perguntas óbvias, e por ser um exemplo de profissional, pai e ser humano.
- À minha mãe, Ana, e ao meu irmão, Guilherme, pelo amor incondicional e ombro amigo sempre que necessário.
- Ao meu coorientador, Alexandre Gutenberg, por acompanhar meus passos desde o segundo período da graduação até este momento, sempre me alertando sobre as coisas da vida e, principalmente, sobre a carreira científica.
- À professora Dulce Martins e ao professor Douglas, docentes da UFVJM pelo suporte no início desse ciclo; sempre serei grato.
- Ao meu amigo Yves e à sua mãe, Arlinda, pelos almoços de domingo regados a boas conversas.
- Aos professores do PPG-Física pelo excelente trabalho prestado, em especial ao professor Mario Sérgio.
- Aos professores Ado Jorio, Leandro Mallard e Luiz Gustavo, pela excelente gestão do LabNS.
- Aos brilhantes companheiros do LabNS, em especial: André, Augusto, Danilo, Diego (foco), Gustavo, Douglinhas, Fred, Jane, Luquinhas, Márcia, Miki (Jagger), Rafa Nadas, Rafa Rojas, Tiagão, Vitor Monken e Will.
- Ao meu companheiro de grupo e amigo Joás, sempre me salvando nas contas e explicações teóricas, sem mencionar as inúmeras conversas sobre a vida e reflexões feitas nos corredores do ICEx.
- À Marina, pelo conforto e sensação de segurança necessários na reta final deste ciclo.
- Aos meus companheiros de morada, Breno e Dudu, pelas boas conversas sentados ao chão da sala.
- Aos meus amigos da pós-graduação, sem vocês esse tortuoso caminho não teria sido tão leve: Alan, André, Isaac, Jú, Joãozinho, Fabiano (Indiano), Guilherme, Luana (Veneno), Maria, Nayara, Mateus, Rafa Reis, Sassá, Tay, Titu, Vitãozin, Vitão e Paulinho.
- Às meninas da secretaria, Ana e Marília, pela paciência e suporte durante as burocracias da pós-graduação.
- Às agências de fomento FINEP, FAPEMIG, CNPq por financiar a infraestrutura utilizada na execução do experimento, e à CAPES pelo suporte financeiro.
- E ao povo brasileiro, por financiar as agências de fomento.

*“Eu ainda estou aprendendo”
- Michelangelo*

RESUMO

A Mecânica Quântica, uma das maiores revoluções científicas, desafiou o determinismo clássico com sua descrição probabilística dos fenômenos naturais. Embora sua interpretação e alcance tenham gerado intensos debates, como o célebre embate entre Einstein e Bohr, ela se consolidou como uma ferramenta essencial para a compreensão de fenômenos aparentes em Óptica Quântica, como as correlações quânticas. Neste contexto, a interação entre luz e matéria oferece uma plataforma rica para estudar sistemas quânticos, especialmente com os avanços proporcionados pela invenção dos lasers nos anos 1960. Este trabalho foca exclusivamente na Conversão Paramétrica Descendente (CPD), um processo onde feixes eletromagnéticos propagam-se em cristais anisotrópicos, gerando pares de fótons emaranhados em variáveis discretas e contínuas. Em conjunto com a descrição matemática fornecida pela Óptica de Fourier é possível descrever os campos eletromagnéticos geradores e os resultantes como superposições de ondas planas, considerando as polarizações presentes, ordinária e extraordinária. A CPD, amplamente utilizada para gerar estados emaranhados, permite investigar e descrever como respectivos fenômenos surgem proporcionados pela interação luz-matéria. Tal técnica promove a formação de dois feixes, e é possível vislumbrar como tais feixes são afetados pela anisotropia do meio, ao final, avaliar o grau de emaranhamento presente nestes sistemas perante três métodos diferentes.

Palavras-chave: Conversão Paramétrica Descendente, Emaranhamento, Dispersão.

ABSTRACT

Quantum Mechanics, one of the greatest scientific revolutions, challenged classical determinism with its probabilistic description of natural phenomena. Although its interpretation and scope have sparked intense debates, such as the famous clash between Einstein and Bohr, it has become an essential tool for understanding phenomena observed in Quantum Optics, such as quantum correlations. In this context, the interaction between light and matter offers a rich platform for studying quantum systems, especially with the advances made possible by the invention of lasers in the 1960s. This work focuses exclusively on Spontaneous Parametric Down-Conversion (SPDC), a process in which electromagnetic beams propagate through anisotropic crystals, generating pairs of entangled photons in both discrete and continuous variables. Together with the mathematical framework provided by Fourier Optics, it is possible to describe the generating and resulting electromagnetic fields as superpositions of plane waves, taking into account the existing polarizations, namely ordinary and extraordinary. SPDC, widely used to generate entangled states, enables the investigation and description of how such phenomena arise from the interaction between light and matter. This technique leads to the formation of two beams, and it is possible to observe how these beams are affected by the medium's anisotropy and, ultimately, to evaluate the degree of entanglement present in these systems using three different methods.

Keywords: Parametric Down-Conversion, Entanglement, Dispersion.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Modelo anisotrópico ilustrado por um elétron	17
Figura 2 – Ilustração das superfícies k	20
Figura 3 – Representação bidimensional de um cristal uniaxial negativo	21
Figura 4 – Geometria de um cristal birrefringente	22
Figura 5 – Representação do processo de formação de <i>signal</i> e <i>idler</i>	25
Figura 6 – Representação esquemática do espectro de cores no casamento de fases tipo I	28
Figura 7 – Fotografia explicitando a formação dos cones de luz	29
Figura 8 – Walk-off	29
Figura 9 – Funções bi-gaussianas para diferentes larguras	39
Figura 10 – Densidade de probabilidade para aproximações Gaussianas	44
Figura 11 – Taxa de detecção comparando modelos bi-gaussianos e além da aproximação Gaussiana	52
Figura 12 – Laser Coherent Genesis CX355-100 STM Compact	54
Figura 13 – Ilustração de formação de imagem através de uma lente	54
Figura 14 – Montagem experimental	56
Figura 15 – Perfis de detecção e ajustes Gaussianos para $z_{L_4} 15, 49\text{mm}$	58
Figura 16 – Detecção incondicional para o plano imagem em $w_0 = 0.083\text{mm}$	59
Figura 17 – Detecção condicional para o plano imagem em $w_0 = 0.083\text{mm}$	59
Figura 18 – Detecção incondicional para o plano de Fourier para $w_0 = 0.423\text{mm}$	60
Figura 19 – Detecção condicional para o plano de Fourier para $w_0 = 0.423\text{mm}$	61
Figura 20 – Detecção incondicional para o plano de Fourier para $w_0 = 0.083\text{mm}$	61
Figura 21 – Detecção condicional para o plano de Fourier para $w_0 = 0.083\text{mm}$	62
Figura 22 – Resultados simulados computacionalmente e obtidos experimentalmente	63
Figura 23 – Dispersões ajustadas em suas marginais para comparações entre dados teóricos e experimentais	64
Figura 24 – Resultados par K na direção paralela (k_x) ao plano principal em termos de w_0	65
Figura 25 – Resultados par K na direção perpendicular (k_y) ao plano principal em termos de w_0	65
Figura 26 – K como produto dos planos paralelo e perpendicular	66
Figura 27 – K avaliado sob a perspectiva de Law e Eberly $\beta\sigma_{\perp}$	67
Figura 28 – K avaliado sob a perspectiva de Law e Eberly em termos de w_0	67
Figura 29 – K avaliado sob a perspectiva de Di Lorenzo <i>el al.</i>	68
Figura 30 – Valores de K para os três métodos	69

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	MEIOS ANISOTRÓPICOS UNIAXIAIS E A CONVERSÃO PARAMÉTRICA DESCENDENTE	15
2.1	Campos Macroscópicos e Equações de Maxwell	15
2.2	Propagação da Luz em Cristais	16
2.3	O estado de dois fótons gerados pela Conversão Paramétrica Descendente (CPD)	23
2.4	O Casamento de Fases do Tipo I	27
3	EMARANHAMENTO E UM DE SEUS PARÂMETROS	33
3.1	O emaranhamento	33
3.1.1	Emaranhamento de estados puros	33
3.2	Parâmetros de Emaranhamento	34
3.2.1	Número de Schmidt	34
3.2.2	Razão R_F	37
3.2.2.1	Introdução	37
3.2.3	A razão R_F e η	38
4	A CONVERSÃO PARAMÉTRICA DESCENTE: ALÉM DA APROXIMAÇÃO GAUSSIANA	43
4.1	Aproximação Gaussiana	43
4.2	Conversão Paramétrica Descendente - Além da aproximação Gaussiana	46
4.2.1	A função de onda - $\psi(\mathbf{R}, \mathbf{S}, z)$	46
5	O EXPERIMENTO	53
5.1	Descrição dos dispositivos ópticos	53
5.1.1	Laser	53
5.1.2	Lentes	54
5.2	Discussões e resultados	56
5.2.1	Proposta e execução	56
5.2.2	Medições	57
5.2.2.1	Plano Imagem	57
5.2.2.2	Plano de Fourier	60
5.2.3	O grau de emaranhamento - K	63
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	70
	REFERÊNCIAS	71

1 Introdução

Sem dúvida, a Mecânica Quântica representa uma das maiores revoluções científicas da história, fruto de décadas de pesquisas e colaborações entre diversos cientistas. Ao contrário da física clássica, a Mecânica Quântica introduz um caráter probabilístico contraintuitivo na descrição dos fenômenos naturais, desafiando a noção de determinismo. O consenso sobre o que é fundamental, até onde ela é aceita e se, de fato, descreve a realidade já foi palco de diversos debates que, ao longo dos anos, deixaram cicatrizes e reflexões sobre práticas que continuam a ser revisadas até hoje. Um dos momentos mais fervorosos foi a publicação do famoso artigo de Einstein *et al.*: "*Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*" [1], seguido, um mês depois, pela resposta de Niels Bohr, com o mesmo título [2]. Esse debate perdurou por anos e, embora hoje a calma impere sobre as questões de realidade, ainda há perguntas em aberto, como as que serão exploradas neste trabalho. Com toda a erudição e beleza que se espera, essa teoria fascinante não é apenas rica, mas também distante de ser facilmente compreendida. Diante desse cenário, podemos afirmar que os resultados providos pela Mecânica Quântica são apenas as *estatísticas* para possíveis repostas, e como diz o saudoso professor Carlos Monken em suas aulas: "a Mecânica Quântica, embora brilhante, não descreve a realidade".

A interação entre luz e matéria revela uma vasta gama de fenômenos descritos através de teorias fundamentadas na Mecânica Quântica, sendo que o tratamento clássico de certos sistemas já não é adequado, e em tantas vezes insuficiente dentro de diversos escopos científicos. A necessidade de tais descrições aprofunda e motiva a busca por maneiras de apresentar uma teoria condizente com os resultados e perspectivas em que ocorrem os fenômenos naturais. Um dos pontos altos nas discussões sobre a Mecânica Quântica está nas *correlações* que sistemas quânticos apresentam, como demonstrado por Bell [3].

Com as possibilidades abertas pela criação dos lasers, a Óptica tornou-se um campo formidável para o estudo de sistemas quânticos. A variedade de fenômenos que surgem pela excitação de moléculas e átomos fornece uma vasta gama de sistemas a serem estudados, como será discutido adiante. Neste trabalho, utilizaremos a propagação de feixes eletromagnéticos em cristais uniaxiais, ou seja, meios que possuem apenas um eixo óptico e nos quais ocorre a Conversão Paramétrica Descendente (CPD). Um dos métodos matemáticos para o estudo e entendimento da CPD é a Óptica de Fourier [4], que permite descrever campos eletromagnéticos presentes como uma superposição de ondas planas e decompor essas ondas formadas como - ondas planas compostas por duas polarizações ortogonais, definidas pela orientação em relação ao eixo óptico do cristal: ordinária e extraordinária. A Conversão Paramétrica Descendente é uma das fontes frequentemente usadas para a geração de pares emaranhados em variáveis contínuas e discretas [5–11], e, devido a isso, será possível avaliar o grau de emaranhamento presente nas variáveis espaciais e como ele pode ser afetado.

Diante do exposto, este trabalho foi organizado da seguinte forma: no segundo capítulo, estudaremos as interações entre luz e matéria e o tratamento matemático dessas interações por meio das equações de Maxwell. Abordaremos os fenômenos resultantes das interações, destacando a birrefringência. Ainda no segundo capítulo, discutiremos a propagação da luz em cristais e como a polarização elétrica é relacionada ao campo elétrico. Para finalizar, trataremos da teoria quântica por trás da Conversão Paramétrica Descendente, aplicaremos as aproximações necessárias e abordaremos o casamento de fases do tipo I. No terceiro capítulo, estudaremos o conceito de emaranhamento, sua descrição matemática, suas consequências e parâmetros. Ainda no terceiro capítulo, são mostradas formas de se medir a "quantidade" de emaranhamento de um estado quântico, através de sua decomposição de Schmidt e de como o número

de Schmidt pode ser associado a dispersões sob certos regimes. No quarto capítulo, abordamos as possibilidades de estudar o estado gerado pela CPD sob duas perspectivas: aproximação Gaussiana e além dela. Neste capítulo, trazemos análises e pontos importantes sobre ambas as vertentes, deixando evidentes suas distinções e semelhanças dentro dos casos que pretendemos trabalhar. No quinto capítulo, apresentaremos o experimento, corroborando as projeções aplicadas nos capítulos anteriores. Ainda nesse capítulo, será mostrada a descrição dos dispositivos ópticos usados, os dados simulados computacionalmente, o processo de obtenção dos dados e, por fim, a avaliação do grau de emaranhamento dos estados gerados pela CPD sob três métodos diferentes. Finalmente, no último capítulo, traremos as considerações finais e possíveis projeções associadas às correlações espaciais promovidas pela Conversão Paramétrica Descendente.

2 Meios anisotrópicos uniaxiais e a Conversão Paramétrica Descendente

Quando tratamos da propagação da luz através da matéria, a atenção é frequentemente voltada para os sólidos, pois eles são os principais responsáveis pelas interações ópticas. A variedade e a magnitude dos fenômenos ópticos exibidos por sólidos incluem vários exemplos, como: dispersão, absorção, birrefringência, efeitos de polarização¹, entre outros. Uma ampla gama desses fenômenos pode ser descrita e compreendida por meio da teoria eletromagnética clássica. Neste breve capítulo, trataremos da interação da luz com cristais uniaxiais, aplicando a teoria proposta por Maxwell para a propagação da luz em meios materiais.

2.1 Campos Macroscópicos e Equações de Maxwell

A interação entre luz e matéria, em um ponto específico do espaço, pode ser descrita por quatro grandezas fundamentais²:

- Densidade volumétrica de carga elétrica — ρ .
- Densidade volumétrica de dipolos elétricos, chamada de *polarização elétrica* — \mathbf{P} .
- Densidade volumétrica de dipolos magnéticos, chamada de *magnetização* — \mathbf{M} .
- Corrente elétrica por unidade de área, chamada de *densidade de corrente* — \mathbf{J} .

Todas essas grandezas são consideradas médias macroscópicas, a fim de evitar as flutuações causadas pela estrutura atômica da matéria. Assim, podemos expressar as médias dos campos vetoriais presentes, como o *campo elétrico* \mathbf{E} e o *campo magnético* \mathbf{H} . Portanto, as equações de Maxwell em um meio material podem ser escritas como:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{J}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P} + \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}. \quad (2.4)$$

Para uma abordagem mais conveniente, introduzimos uma nova grandeza, denominada *deslocamento elétrico* \mathbf{D} , que é definida como a soma de $\epsilon_0 \mathbf{E}$ e \mathbf{P} . Outra modificação pode ser feita somando-se $\mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ a fim de obter \mathbf{B} , denominada *indução magnética*. Assim, as equações acima se tornam:

¹ Para um maior entendimento desses fenômenos, veja [12, 13].

² As grandezas em negrito representam vetores.

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}, \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.8)$$

A densidade de corrente dos elétrons, gerada pelo campo elétrico, é dada pela seguinte relação:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E},$$

onde σ é a *condutividade*. Já a quantidade que descreve a resposta do campo às cargas ligadas é

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}.$$

Assim, de maneira correspondente, a relação para a grandeza atribuída ao campo magnético é analogamente definida como,

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}.$$

Para fins práticos, a resposta das cargas ligadas é escrita,

$$\mathbf{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (2.9)$$

dando proporcionalidade entre as duas grandezas físicas presentes (\mathbf{P} e \mathbf{E}). Tal proporcionalidade vem a ser:

$$\chi = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1. \quad (2.10)$$

Essa expressão é conhecida como *suscetibilidade elétrica*. No estudo de fenômenos ópticos relacionados à matéria, χ é o parâmetro mais importante. Em casos onde o meio é isotrópico, como o vidro, χ é um escalar e seu valor não se altera ao longo das diferentes direções de aplicação do campo \mathbf{E} . Já para casos de meios anisotrópicos, como cristais, a polarização varia de acordo com a direção do campo aplicado; conseqüentemente, χ geralmente é expresso como um tensor.

2.2 Propagação da Luz em Cristais

Uma grande gama de materiais é conhecida, especialmente, pelas características ópticas apresentadas após interação luz-matéria. A aparição de alguns desses fenômenos provenientes desta interação permite a distinção entre estruturas cristalinas, e a descrição de tais fenômenos é fundamentada em termos de suas propriedades ópticas. A grande razão por trás disso é que cristais, geralmente, são anisotrópicos. Como citado acima, a direção e intensidade do campo aplicado na rede cristalina afetam diretamente a *polarização elétrica*. Isso significa que sua descrição já não é apenas a multiplicação de um escalar pelo

campo elétrico \mathbf{E} , trazendo efeitos evidentes e que serão avaliados. Como consequência da anisotropia, a velocidade de propagação da onda luminosa na rede pode variar drasticamente com sua direção de propagação e também com sua polarização [12]. Para melhor entendimento, vejamos: definida uma direção de propagação, geralmente há dois possíveis valores de *velocidade de fase*. Tais valores estão diretamente ligados às duas polarizações ortogonais, em que qualquer onda luminosa pode ser descrita.

Uma situação análoga à anisotropia em cristais pode ser ilustrada por uma série de osciladores, como mostrado na Fig.1. Suponha que a rede cristalina de um material seja composta por elétrons ligados, cujas ligações são representadas por molas com constantes elásticas distintas. Essas molas representam, de forma figurativa, as ligações químicas que conectam o elétron a seus vizinhos na rede. Os elétrons quando perturbados, vibram em torno de suas posições de equilíbrio, confinados à região onde a função de onda eletrônica apresenta maior densidade. É como se o elétron estivesse preso em uma rede elástica, onde cada direção oferece uma resistência diferente. Assim, o deslocamento do elétron em resposta a um campo elétrico aplicado varia conforme a direção, refletindo a anisotropia do material. Em cristais anisotrópicos, essa relação é descrita pelo tensor susceptibilidade elétrica χ , que vincula a polarização elétrica \mathbf{P} à direção do campo elétrico \mathbf{E} aplicado.

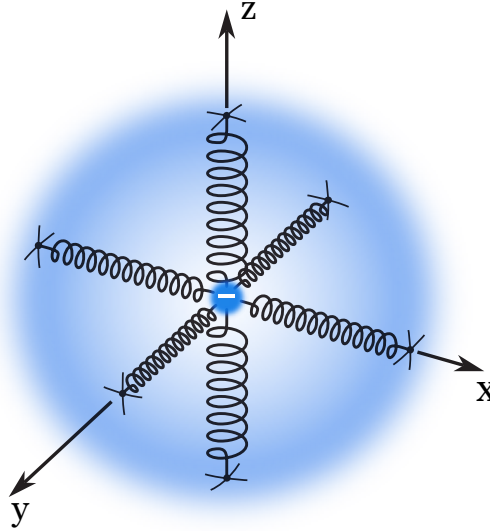


Figura 1 – Modelo anisotrópico ilustrado por elétron ligado a diferentes molas.

A dependência de \mathbf{P} em respeito a \mathbf{E} , pode ser expressada da seguinte forma:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}, \quad (2.11)$$

onde χ , como mencionado, assume a forma de um tensor, definido:

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Em cristais ordinários não-absorventes, é possível escrever χ em sua forma diagonal, existindo apenas um conjunto de eixos, denominados *eixos principais* [12]. Portanto, a forma assumida é

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

onde as componentes presentes (χ_s) são chamadas *susceptibilidades principais*. A partir disso, convém expressar também o tensor *dielétrico* - ϵ cuja descrição é feita a partir do vetor deslocamento elétrico (\mathbf{D}), dado por $\mathbf{D} = \epsilon_0(\mathbf{1} + \boldsymbol{\chi})\mathbf{E} = \boldsymbol{\epsilon}\mathbf{E}$, sendo $\mathbf{1}$ a matriz identidade. Assim, as quantidades $\mathbf{K}_{ij} = 1 + \chi_{ij\dots}$, são chamadas *constantes dielétricas*.

Ao trabalhar com óptica dos sólidos, consideramos que o meio seja eletricamente neutro e não-magnético. Dessa forma as quantidades \mathbf{M} e ρ são nulas, e as equações de Maxwell na matéria são

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} & , & \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P}. \\ \nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{J} & , & \nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \end{cases}$$

Considerando o campo como uma onda plana monocromática que se propaga em um meio anisotrópico e dielétrico, cujo vetor de propagação é \mathbf{k} , ao aplicarmos o rotacional em (2.1) e utilizarmos (2.2), na ausência de fontes, como descrito pelas equações acima, teremos:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{J}}{\partial t^2}. \quad (2.14)$$

Como o meio é dielétrico, $\mathbf{J} = 0$, e \mathbf{P} descrito por (2.11), obtemos

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} \boldsymbol{\chi} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (2.15)$$

Sendo o campo uma onda plana, do tipo $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$, a equação (2.15) apresenta a seguinte forma:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \boldsymbol{\chi} \mathbf{E}, \quad (2.16)$$

e as componentes da equação podem ser encontradas utilizando,

$$[\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E})]_i = \epsilon_{ijk} k_j (\mathbf{k} \times \mathbf{E})_k = \epsilon_{ijk} k_j \epsilon_{klm} k_l E_m = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} k_j k_l E_m,$$

onde

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}.$$

Deste modo, é obtido

$$[\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E})]_i = k_j k_i E_j - k_j k_j E_i = k_j (k_i E_j - k_j E_i). \quad (2.17)$$

Assim, através da (2.16), estamos aptos a obter o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{cases} \left(\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{11} - k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_x + k_y k_x E_y + k_x k_z E_z = 0, \\ k_y k_x E_x + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{22} - k_x^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_y + k_y k_z E_z = 0, \\ k_z k_x E_x + k_z k_y E_y + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{33} - k_x^2 - k_y^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_z = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

A equação (2.18) permite solução não-trivial para as componentes de campo ($E_i, i = x, y, z$) somente se seu determinante for nulo. Assim, escrevendo em sua forma matricial, obtemos:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{11} - k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} & k_y k_x & k_x k_z \\ k_y k_x & \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{22} - k_x^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & \frac{\omega^2}{c^2} \chi_{33} - k_x^2 - k_y^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.19)$$

Ao escrever

$$\begin{cases} n_1 = \sqrt{1 + \chi_{11}} \\ n_2 = \sqrt{1 + \chi_{22}} \\ n_3 = \sqrt{1 + \chi_{33}} \end{cases}, \quad (2.20)$$

definidos como os *índices de refração* do meio.

Portanto, com auxílio de (2.20) e (2.21) podemos então escrever

$$D = \begin{vmatrix} \left(\frac{n_1\omega}{c}\right)^2 - k_y^2 - k_z^2 & k_y k_x & k_x k_z \\ k_y k_x & \left(\frac{n_2\omega}{c}\right)^2 - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & \left(\frac{n_3\omega}{c}\right)^2 - k_x^2 - k_y^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.21)$$

É de grande importância, neste ponto, assumir as propriedades do meio com o qual estamos trabalhando. A primeira propriedade é que o meio é uniaxial, ou seja, possui apenas um eixo óptico. O eixo óptico representa uma *direção* e não apenas uma *simples linha* como é previamente pensado. Nessa direção as superfícies k se encontram, como mostrado na Fig.2, e seus vetores de onda são iguais em módulo, garantindo que as velocidades de fase das ondas ortogonais possuem o mesmo valor. Isso assegura que, ao longo dessa direção, o campo se propaga como em um meio isotrópico. O plano formado entre o eixo óptico e o vetor de propagação \mathbf{k} é denominado *plano principal*, e ele define a polarização predominante do feixe. Podemos, então, definir que o estado de polarização contido no plano principal é chamado de *extraordinário*, enquanto a componente perpendicular a este plano é denominada *ordinária*.

Consequentemente, com essas parametrizações, os índices de refração são expressos da seguinte forma:

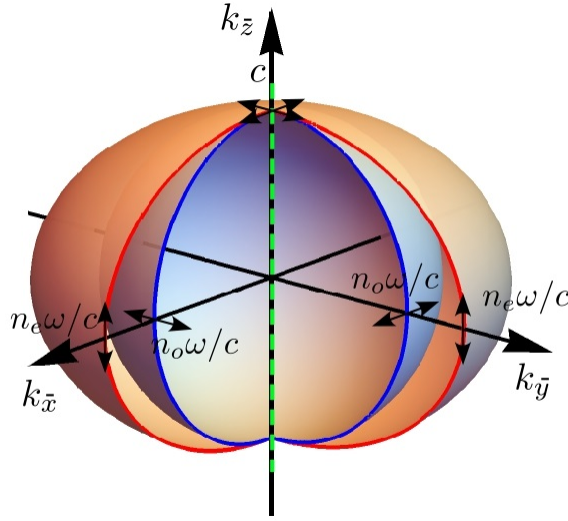
$$n_1 = n_2 = n_o \neq n_3 = n_e, \quad (2.22)$$

onde n_o é o índice de refração ordinário e n_e é o índice de refração extraordinário. Aqui, consideraremos três cenários: feixes incidentes com polarização ordinária, feixes com ambas as polarizações, e feixes com apenas polarização extraordinária. Ao incidir feixes presentes somente de ondas ordinárias, suas propriedades são preservadas, adquirindo apenas uma fase global. Por outro lado, se o feixe incidente tiver também uma componente extraordinária, além da ordinária, ele adquirirá, juntamente com a fase global, uma fase de atraso em uma de suas componentes, transformando a polarização linear em elíptica. Já em casos onde o feixe incidente possui apenas a componente extraordinária, ocorrem mudanças decorrentes da anisotropia do meio. Considerando esse último caso, um feixe contendo apenas polarização extraordinária, em um meio uniaxial birrefringente, ao resolver o determinante da equação (2.21), obtemos

$$D = \left[k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n_e}{n_o}\right)^2 k_z^2 - \left(\frac{\omega n_e^2}{c}\right)^2 \right] \left[k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \left(\frac{\omega n_o^2}{c}\right)^2 \right] = 0. \quad (2.23)$$

Claramente podemos ver duas soluções:

$$\begin{cases} k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n_e}{n_o}\right)^2 k_z^2 - \left(\frac{\omega n_e^2}{c}\right)^2 = 0 \rightarrow \text{elipsóide.} \\ k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \left(\frac{\omega n_o^2}{c}\right)^2 = 0 \rightarrow \text{esfera.} \end{cases} \quad (2.24)$$


 Figura 2 – Superfícies de k para um cristal uniaxial positivo e $\theta = 0$.

Uma análise mais profunda e sistemática pode ser vista nas referências [12] e [13]. Como mostrado, a solução das equações (2.24) nos retorna duas superfícies no espaço k : um elipsóide e uma esfera. A Fig. 2 ilustra as superfícies formadas. A partir disso, podemos extrair algumas informações sobre a simetria dessas superfícies. A superfície associada ao índice n_o representa a esfera, contendo apenas o índice ordinário. Devido à simetria esférica, o feixe propagante permanece inalterado por qualquer rotação feita no plano do eixo óptico. Por outro lado, a superfície que contém n_e é afetada pela assimetria do elipsóide formado. Como consequência, ao rotacionarmos por um ângulo θ , à medida que variamos θ , surgem implicações diretas para a luz incidente, evidenciando a anisotropia presente nesse estado de polarização. Na Fig. 2, a direção pontilhada em verde, C , representa o eixo óptico; a luz que se propaga ao longo dessa direção comporta-se como se estivesse em um meio isotrópico.

As informações mencionadas podem ser observadas ao analisar a Fig. 3, que representa as superfícies k no plano xz . O ângulo entre o eixo óptico e o eixo z é θ . Realizando uma transformação linear no plano por um ângulo θ em torno do eixo y , isto é, uma rotação simples das variáveis no plano (xz) , são formadas novas coordenadas, x' e z' , mantendo y inalterado. Portanto, o novo sistema de coordenadas em que as equações (2.24) serão escritas é:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}' \cos \theta - \hat{\mathbf{z}}' \sin \theta, \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}}' \sin \theta + \hat{\mathbf{z}}' \cos \theta. \end{cases} \quad (2.25)$$

Consequentemente para o conjunto de equações (2.24) teremos as seguintes mudanças,

$$\mathbf{k} = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}} + k_z \hat{\mathbf{z}},$$

$$\mathbf{k} = (k_x \cos \theta + k_z \sin \theta) \hat{\mathbf{x}}' + k_y \hat{\mathbf{y}} + (k_z \cos \theta - k_x \sin \theta) \hat{\mathbf{z}}'. \quad (2.26)$$

Definindo:

$$\begin{cases} k'_x = k_x \cos \theta + k_z \sin \theta, \\ k'_y = k_y, \\ k'_z = k_z \cos \theta - k_x \sin \theta. \end{cases} \quad (2.27)$$

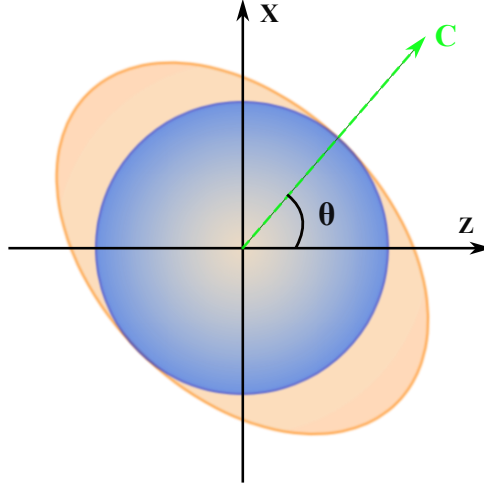


Figura 3 – k superfície de um cristal uniaxial positivo projetada no plano xz .

Assim, podemos substituir essas alterações nas equações que definem as superfícies k (2.24), observando que, para a esfera, devido à sua simetria, não há mudanças em relação à rotação, ou seja: $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'$. No entanto, no caso do elipsóide, sua forma se altera, tornando-se

$$k_x^2 \left(\frac{\cos^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_o^2} \right) + \frac{k_y^2}{n_e^2} + k_z^2 \left(\frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} \right) + 2k_x k_z \cos \theta \sin \theta \left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_o^2} \right) - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 = 0. \quad (2.28)$$

É possível ver a formação de uma equação de segundo grau para k_z , sendo,

$$\alpha k_z^2 + \beta k_z + \gamma = 0, \quad (2.29)$$

onde

$$\alpha = \left(\frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} \right), \quad (2.30)$$

$$\beta = 2k_x \cos \theta \sin \theta \left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_o^2} \right), \quad (2.31)$$

$$\gamma = k_x^2 \left(\frac{\cos^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_o^2} \right) + \frac{k_y^2}{n_e^2} - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2. \quad (2.32)$$

Após resolução e sucessivas manipulações algébricas, obtemos,

$$k_z = -ak_x \pm \sqrt{\kappa^2 - bk_x^2 - dk_y^2}, \quad (2.33)$$

sendo:

$$a = \frac{(n_o^2 - n_e^2)}{n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta} \sin \theta \cos \theta, \quad (2.34)$$

$$b = \frac{n_o^2 n_e^2}{(n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta)^2}, \quad (2.35)$$

$$d = \frac{n_o^2}{n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta}, \quad (2.36)$$

$$\kappa = \frac{\omega}{c} \frac{n_o^2 n_e^2}{\sqrt{n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta}}. \quad (2.37)$$

As quantidades descritas pelas equações (2.34) - (2.37) trazem informações sobre a anisotropia do meio. À medida que a luz se propaga ao longo da direção do eixo óptico, é plausível reafirmar que sua propagação é semelhante a um meio isotrópico, e tal situação pode ser vislumbrada quando os valores do ângulo θ são múltiplos inteiros de π ($\theta = m\pi$; $m = 0, 1, 2, \dots$). Diante desses resultados, nota-se que a equação (2.33) representa uma calota elíptica distorcida pelo termo $-ak_x$.

Ao expandirmos o segundo termo de (2.33) em primeira ordem:

$$\sqrt{\kappa^2 - bk_x^2 - dk_y^2} \approx \kappa - \frac{1}{2k}(bk_x^2 + dk_y^2), \quad (2.38)$$

a equação (2.33) vem a se tornar

$$k_z \approx -ak_x + \kappa - \frac{1}{2k}(bk_x^2 + dk_y^2), \quad (2.39)$$

que é a aproximação paraxial para cristais birrefringentes cujos eixos são rotacionados por um ângulo θ qualquer. Um estudo mais aprofundado da propagação desses feixes e como a perturbação luminosa é descrita, pode ser visto em [14]. A situação abordada acima, em termos laboratoriais pode ser ilustrada pela Fig.4.

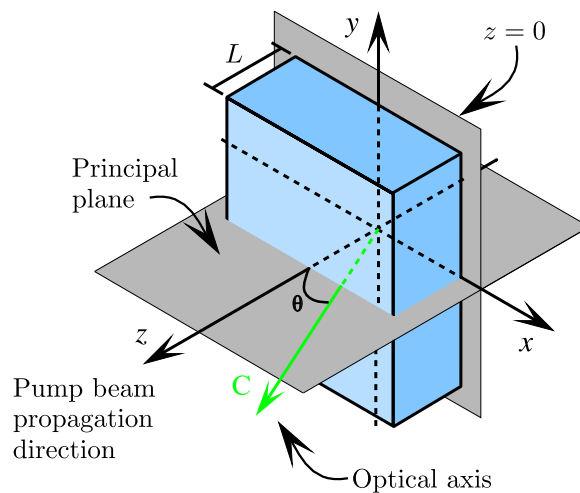


Figura 4 – Geometria apresentada para um cristal birrefringente BBO, cujo plano principal está contido no plano xz , e o eixo óptico faz um ângulo θ com a direção de propagação

2.3 O estado de dois fótons gerados pela Conversão Paramétrica Descendente (CPD)

Como visto na seção anterior, ao interagir com um meio anisotrópico, uma onda eletromagnética excita os elétrons dos átomos e moléculas, induzindo dipolos elétricos que se comportam como osciladores harmônicos. Em outras palavras, o campo elétrico da onda eletromagnética perturba a distribuição de carga nos átomos e moléculas, criando ou alinhando dipolos elétricos e, conseqüentemente, polarizando o meio.

Quando a amplitude do campo elétrico da onda incidente é muito menor que o campo elétrico interno do átomo, a resposta do material é linear. Nesse regime, a polarização elétrica \mathbf{P} é diretamente proporcional ao campo elétrico aplicado e pode ser descrita por uma relação tensorial linear, como visto na equação (2.11). No entanto, quando a intensidade da onda incidente é suficientemente alta, a relação entre a polarização e o campo elétrico torna-se não linear. Nesse regime, há o surgimento de diversos fenômenos não lineares, dentre eles os que serão brevemente listados. A polarização elétrica deve então ser expressa como uma expansão em potências do campo elétrico do tipo

$$P_i = \epsilon_0 \chi_{ij} E_j + \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots, \quad (2.40)$$

cujos coeficientes $\chi^{(2)}$ e $\chi^{(3)}$ são tensores de ordem superior. Esses coeficientes estão relacionados a diversos fenômenos ópticos não lineares, como Geração de Segundo Harmônico (SHG), Conversão Paramétrica Descendente (CPD), espalhamento Stokes e anti-Stokes (SaS), entre outros processos. Neste trabalho, focaremos apenas na CPD, fenômeno descrito pelo tensor de segunda ordem $\chi^{(2)}$.

Com o decaimento espontâneo dos elétrons excitados durante o processo, dois fótons são emitidos, formam-se dois feixes na saída, que por razões fora do nosso escopo, são chamados de *signal* e *idler*. Portanto, podemos explicitar a CPD como: “*um processo óptico não-linear, onde fótons com frequência ω_3 e vetor de onda \mathbf{k}_3 , incidem em um cristal não-linear birrefringente, gerando dois fótons com frequências ω_2 e ω_1 , e vetores de onda \mathbf{k}_2 , \mathbf{k}_1 , respectivamente.*”³ Para que a CPD ocorra de forma eficiente, é necessário que as seguintes condições de conservação sejam satisfeitas:

$$\omega_3 = \omega_2 + \omega_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1. \quad (2.41)$$

As equações acima representam a conservação de energia e momento, respectivamente:

$$\begin{cases} \hbar\omega_3 = \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 \rightarrow \omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \\ \hbar\mathbf{k}_3 = \hbar\mathbf{k}_1 + \hbar\mathbf{k}_2. \end{cases} \quad (2.42)$$

Usaremos o tratamento Hong e Mandel aplicado à CPD introduzindo ao processo a teoria quântica, seguido de algumas aproximações relevantes. Suponhamos que o meio seja um paralelepípedo retangular de volume V , centrado na origem r_0 , suas arestas possuem comprimentos L_1 , L_2 , L_3 , e são paralelas aos eixos x , y e z , respectivamente. O meio trata-se de um cristal anisotrópico uniaxial, cujo eixo óptico está localizado no plano xz , como ilustrado na Fig.4. O feixe incidente será tratado como uma onda clássica, sendo o eixo z sua direção de propagação, e suficientemente fraco para um tratamento perturbativo de primeira ordem. Deste modo, a polarização elétrica torna-se:

³ Citação feita pelo Professor Carlos Monken em suas aulas.

$$\begin{aligned}
 P_i(\mathbf{r}, t) &= P_i^{(L)} + P_i^{(NL)} \\
 &= \int_0^\infty \epsilon_0 \chi_{ij}^{(1)}(t') E_j(\mathbf{r}, t - t') dt' + \\
 &+ \int_0^\infty \int_0^\infty \chi_{ijk}^{(2)}(t', t'') E_j(\mathbf{r}, t - t') E_k(\mathbf{r}, t - t'') dt' dt''.
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

O processo óptico não linear da CPD em meios anisotrópicos é descrito pela simplificação do hamiltoniano que representa a interação luz/matéria. Essa abordagem pode ser vista em [16, 17] com detalhes minuciosos. Esses cristais, por não possuírem simetria de inversão, têm os modos do campo, como elucidado, descritos pelo tensor de suscetibilidade de segunda ordem. Ao avaliar o casamento de fases, é possível observar que o acoplamento ocorre somente em polarizações específicas: tipo I e tipo II. Neste trabalho, foi utilizado o BBO (β -BaB₂O₄), um cristal uniaxial negativo ($n_e < n_o$), embora existam outros com características semelhantes, entre eles: iodato de lítio (LiIO₃) e BiBO. O cristal utilizado, fornece o casamento de fase tipo I, isto é, $e \rightarrow oo$, para cada fóton de polarização extraordinária, dois fótons de polarizações ordinárias são gerados, ilustrados figuradamente na Fig.5. O casamento de fases do tipo II não será abordado aqui, mas pode ser encontrado elegantemente em [18].

A CPD em uma aproximação perturbativa de primeira ordem, tem seu estado definido [17],

$$|\Psi\rangle = \sum_{\sigma_1 \sigma_2} \sum_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} \Phi_{\mathbf{k}_p \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \sigma_p \sigma_1 \sigma_2} |\mathbf{k}_1, \sigma_1\rangle |\mathbf{k}_2, \sigma_2\rangle, \tag{2.44}$$

onde \mathbf{k}_1 e \mathbf{k}_2 são os vetores de onda dos feixes de convertidos, \mathbf{k}_p é o vetor de onda do feixe incidente, cuja frequência é ω_p . A polarização de cada feixe é indicada por σ_j , podendo ser ordinária (o) ou extraordinária (e). Os estados gerados são apresentados como $|\mathbf{k}_j, \sigma_j\rangle$, onde seus modos são projetados em modos de onda plana \mathbf{k}_j e σ_j . O módulo quadrado do coeficiente $\Phi_{\mathbf{k}_p \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \sigma_p \sigma_1 \sigma_2}$ retorna a probabilidade de detecção dos fótons convertidos nos modos \mathbf{k}_1, σ_1 e \mathbf{k}_2, σ_2 . A amplitude é então descrita por Belinsky e Klyshko [19], como:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\mathbf{k}_p \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \sigma_p \sigma_1 \sigma_2} &= g_{\mathbf{k}_p \sigma_p} g_{\mathbf{k}_1 \sigma_1}^* g_{\mathbf{k}_2 \sigma_2}^* \tau e^{i\Omega(t - \frac{\tau}{2})} \text{sinc}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \times \\
 &\times \sum_{i,j,l} \tilde{\chi}_{ijl}^{(2)}(\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}_p, \sigma_p})_i (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}_1, \sigma_1})_j^* (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}_2, \sigma_2})_l^* \varepsilon_{\mathbf{k}_p, \sigma_p} \int_{\mathcal{I}} e^{-i\mathcal{K} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r},
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

onde

$$\mathcal{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_p, \tag{2.46}$$

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2 - \omega_p, \tag{2.47}$$

$$g_{\mathbf{k}_j, \sigma_j} = i \left[\frac{\hbar \omega_j}{2\epsilon_0 V n^2(\mathbf{k}_j, \sigma_j)} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.48}$$

Descrevendo as quantidades listadas: τ é o tempo de interação, $\tilde{\chi}^{(2)}$ é o tensor suscetibilidade, V é o volume de quantização, \mathcal{I} é o volume de interação (L_x, L_y, L_z), $n(\mathbf{k}_j, \sigma_j)$ é o índice de refração correspondente ao

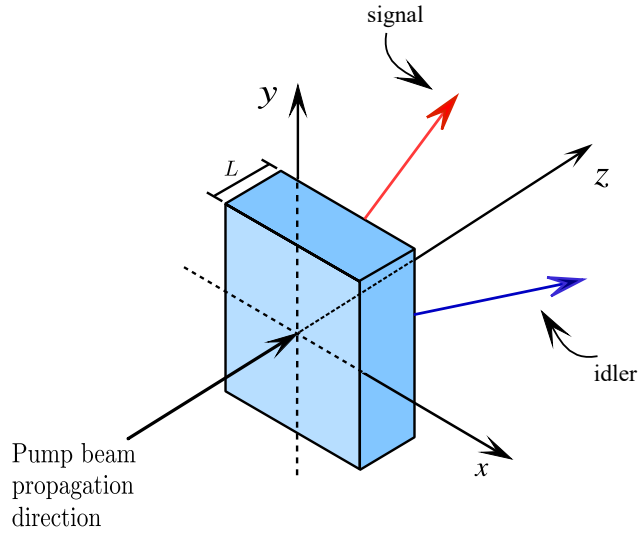


Figura 5 – Desenho esquemático ilustrando o processo óptico não linear para geração dos fótons gêmeos. Um meio anisotrópico uniaxial da forma de paralelepípedo, cujo comprimento na direção z é L , possuindo faces paralelas ao plano xy .

modo \mathbf{k}_j , σ_j , $(\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}_i, \sigma_i})_j$, onde $(j = x, y, z)$ são componentes cartesianas do vetor unitário de polarização, e $\varepsilon_{\mathbf{k}_p, \sigma_p}$ é a amplitude do campo incidente no modo \mathbf{k}_p , σ_p .

Diante dessas circunstâncias podemos realizar algumas aproximações a fim de simplificar a equação (2.45). Sejam elas:

1) A frequência do feixe incidente ω_p é determinada e o tempo de interação é suficientemente grande, de maneira que o termo $\text{sinc}(\Omega\tau/2)$ é relevante somente quando $\omega_1 + \omega_2 = \omega_p$. A partir disso, as frequências poderão ser moduladas a fim de serem escritas como:

$$\omega_1 = \frac{1 + \nu}{2} \omega_p, \quad (2.49)$$

$$\omega_2 = \frac{1 - \nu}{2} \omega_p. \quad (2.50)$$

Tal conjectura pode ser justificada ao utilizar lasers contínuos, onde os intervalos entre as conversões, são suficientemente grandes em comparação ao tempo de detecção.

2) A largura de banda de frequência dos campos convertidos em comparação à frequência central é razoavelmente pequena ($\nu \ll 1$), caracterizando uma variação irrisória do índice de refração em torno da frequência central $\omega_p/2$, sendo possível o uso de uma aproximação linear para a dispersão. Os filtros utilizados em frente aos detectores possuem uma largura de banda estreita ($\approx 12\text{nm}$), o que justifica esta aproximação.

3) Os termos $g_{\mathbf{k}_j, \sigma_j}$ e $\tilde{\chi}_{ijl}^{(2)}$ são funções de \mathbf{k}_j que variam lentamente, e assim podem ser consideradas constantes dentro da aproximação paraxial.

4) O feixe incidente propaga-se na direção z , e temos sua projeção no plano transversal (xy) contida no cristal, denominado perfil transversal. As dimensões deste plano (L_x, L_y) podem ser expandidas

até o infinito. Diante disso, podemos considerar a face de entrada do cristal situada no plano xy . Portanto, a integral $\int_{\mathcal{I}} e^{-i\mathcal{K}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}$ será proporcional a

$$\delta(k_{1x} + k_{2x} - k_{px})\delta(k_{1y} + k_{2y} - k_{py}) \int_0^L e^{-i\mathcal{K}_z z} dz, \quad (2.51)$$

sendo $L = L_z$ o comprimento do cristal na direção de propagação, e δ a função delta de Dirac.

5) O volume de quantização pode ser expandido ao quão grande queiramos, de maneira que as somatórias em \mathbf{k} tornam-se integrais.

6) O feixe bombeador é composto apenas de polarização extraordinária e o cristal utilizado é negativo ($n_e < n_o$).

Após a sequência de aproximações feitas, a equação (2.44) é escrita

$$|\Psi\rangle = \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \int d\nu \int d\mathbf{q}_1 \int d\mathbf{q}_2 \Phi_{\sigma_1 \sigma_2}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \nu) |\mathbf{q}_1, \nu, \sigma_1\rangle |\mathbf{q}_2, -\nu, \sigma_2\rangle, \quad (2.52)$$

onde $|\mathbf{q}_j, \nu, \sigma_j\rangle$ representa um estado de um fóton convertido no modo definido pela componente transversal ao vetor de onda incidente, \mathbf{q}_j , cuja frequência $\omega_p(1 + \nu)/2$ e polarização σ_j . A amplitude do estado gerado pode ser então escrita

$$\begin{aligned} \Phi_{\sigma_1 \sigma_2} &\approx C_{\sigma_1 \sigma_2} G(\nu) \mathcal{E}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \int_0^L e^{-i\mathcal{K}_z z} dz \\ &= C_{\sigma_1 \sigma_2} G(\nu) \mathcal{E}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) L e^{-i\mathcal{K}_z L} \text{sinc} \frac{\mathcal{K}_z L}{2}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

sendo $C_{\sigma_1 \sigma_2}$ uma constante de acoplamento dependente do tensor suscetibilidade, $G(\nu)$ definida pelo perfil espectral dos filtros utilizados em frente aos detectores e $\mathcal{E}(\mathbf{q}_p)$, o espectro angular, com \mathbf{q}_p sendo a soma de $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2$. Em casos em que a anisotropia do meio é desprezada, o campo convertido possuindo caráter monocromático, e dentro do regime colinear, a quantidade \mathcal{K}_z terá uma forma simples em termos de \mathbf{q}_1 , \mathbf{q}_2 e suas componentes $k_{jz} = \sqrt{|\mathbf{k}_j|^2 - |\mathbf{q}_j|^2}$. Portanto, na aproximação paraxial, teremos $k_{jz} \approx |\mathbf{k}_j| - \frac{|\mathbf{q}_j|^2}{2|\mathbf{k}_j|}$. Nessas condições:

$$\text{sinc} \frac{\mathcal{K}_z L}{2} = \text{sinc} \left(\frac{L}{4|\mathbf{k}_p|} |\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^2 \right), \quad (2.54)$$

como mostrado em [5]. Em casos gerais onde há anisotropia, observam-se mudanças consideráveis, que podem ser consultadas em [6]. O processo tratado, como dito anteriormente, é ilustrado nas Figs. 4 e 5. O fóton incidente é recebido na interface $z = 0$; ao atravessar o cristal, inicia-se o processo não linear, convertendo-se em dois fótons gêmeos.

Na próxima seção discutiremos o termo que representa o casamento de fases, Δ , determinante para os campos convertidos.

$$\Delta = \frac{\mathcal{K}_z L}{2}. \quad (2.55)$$

2.4 O Casamento de Fases do Tipo I

Para o entendimento do processo não linear descrito pela Conversão Paramétrica Descendente, é necessário compreender o casamento de fases que ocorre no processo, como mencionado anteriormente. Nesta breve seção, adentraremos no casamento de fase do tipo I, no qual o feixe incidente possui polarização linear ($\hat{\epsilon}_e$ em cristais negativos ou $\hat{\epsilon}_o$ em cristais positivos), e seus feixes convertidos possuem polarizações iguais entre si, mas perpendiculares em relação ao feixe bombeador. Em casos de cristais negativos, teremos

$$|\Psi\rangle = \int d\nu \int d\mathbf{q}_1 \int d\mathbf{q}_2 \Phi_{oo}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \nu) |\mathbf{q}_1, \nu, \hat{\epsilon}_o\rangle |\mathbf{q}_2, -\nu, \hat{\epsilon}_o\rangle. \quad (2.56)$$

A figura 6 ilustra os cones luminosos presentes na geração dos fótons gêmeos e seus respectivos espectros de cores, já na Fig7, vemos o processo real no laboratório. No processo de detecção, podemos aferir que os fótons possuem um certo grau de correlação entre si, e, quando os analisamos na detecção de quarta ordem, é possível a leitura e descrição de alguns fenômenos físicos. Mostra-se que o movimento dos detectores durante o processo de detecção possibilita a reprodução das propriedades do feixe bombeador e que as características de anisotropia do meio também são remetidas aos fótons convertidos.

Como descrito por da Costa Moura [18], devido à anisotropia, os campos ordinário e extraordinário possuirão vetores de onda diferentes. Consequentemente, é necessária uma descrição que explicita esse argumento através das seguintes equações:

$$\mathbf{k}^o = \mathbf{q} \pm \sqrt{k^2 - q^2} \hat{z}, \quad (2.57)$$

$$\mathbf{k}^e = \mathbf{q} \pm \left(\alpha q_x + \sqrt{\kappa^2 - \beta q_x^2 - \gamma q_y^2} \right) \hat{z}. \quad (2.58)$$

Como estamos utilizando de uma situação particular, onde os campos transmitidos nos permitem trabalhar em situações específicas, podemos adotar a aproximação paraxial, com auxílio de (2.37) e (2.38), a fim de obter

$$\mathbf{k}^o \approx \mathbf{q} \pm \left(k - \frac{q^2}{2k} \right) \hat{z}, \quad (2.59)$$

$$\mathbf{k}^e \approx \mathbf{q} \pm \left(\alpha q_x + \kappa - \frac{\beta q_x^2 + \gamma q_y^2}{2\kappa} \right) \hat{z}. \quad (2.60)$$

Assim, podemos fazer o uso das equações acima considerando que o fóton incidente tem polarização extraordinária ($\hat{\epsilon}_e$) e os pares convertidos ordinária ($\hat{\epsilon}_o$), obtendo

$$k_{pz} \approx \kappa_p + \alpha_p q_{px} - \frac{1}{2\kappa_p} (\beta_p q_{px}^2 + \gamma_p q_{py}^2), \quad (2.61)$$

$$k_{1z} \approx k_1 - \frac{q_{1x}^2 + q_{1y}^2}{2k_1}, \quad (2.62)$$

$$k_{2z} \approx k_2 - \frac{q_{2x}^2 + q_{2y}^2}{2k_2}, \quad (2.63)$$

onde

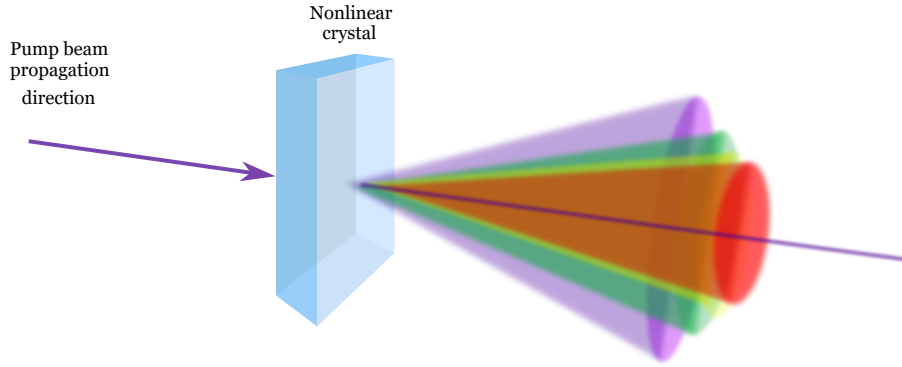


Figura 6 – Ilustração esquemática do espectro de cores gerados pelo casamento de fase tipo I.

$$k = n_o \frac{\omega}{c}, \quad (2.64)$$

$$\kappa_p = \eta_p \frac{\omega}{c}, \quad (2.65)$$

$$\eta_p = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta}}, \quad (2.66)$$

$$\alpha_p = \frac{(n_e^2 - n_o^2)}{\sqrt{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta}} \sin \theta \cos \theta, \quad (2.67)$$

$$\beta_p = \left(\frac{n_o n_e}{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta} \right)^2, \quad (2.68)$$

$$\gamma_p = \frac{n_o^2}{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta}. \quad (2.69)$$

Aqui, é importante fazer algumas considerações a respeito das equações apresentadas. O feixe é constituído pelo espectro de \mathbf{k} , e, para cada \mathbf{k} individualmente, existe um plano principal associado. As quantidades β e γ , presentes na equação (2.60), são magnitudes correspondentes ao momento transversal nas variáveis x e y . Já κ é o módulo do vetor de onda acoplado aos efeitos anisotrópicos do meio, η_p é o índice de refração na direção de propagação do campo extraordinário, e α é o termo de *walk-off* — termo crucial para entender a transferência do espectro angular do feixe bombeador para o estado dos dois fótons gerados no processo paramétrico. O *walk-off* trata-se de um fenômeno óptico presente em meios birrefringentes, caracterizado pela separação angular entre o vetor de onda (\mathbf{k}_p) e o vetor de Poynting dentro do material (\mathbf{S}) [20], essa separação pode ser ilustrada através da Fig.8, onde θ é o ângulo entre o eixo óptico e o feixe bombeador. Presentes nas expressões (2.64) - (2.69), os índices de refração n_o e n_e são calculados em termos da frequência ω_p .

Passamos agora a concentrar nossos esforços no cálculo de Δ , apresentado em (2.55). Para o caso de casamento de fases do tipo I, chamaremos esse parâmetro de Δ_{oo} , em referência às polarizações resultantes. Utilizando novamente a aproximação paraxial, escrevemos

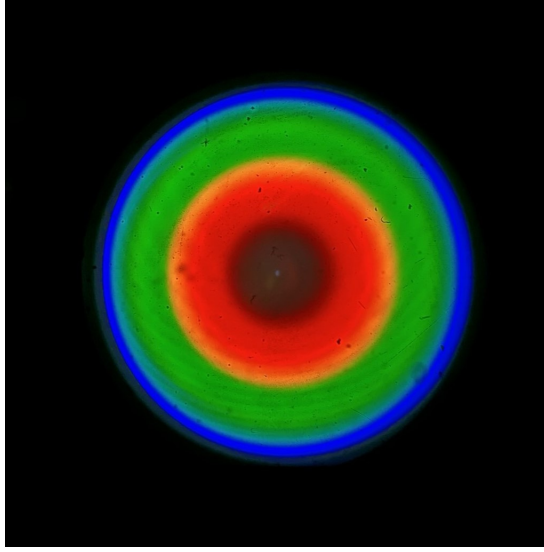


Figura 7 – Fotografia feita no LabNS pelo grupo de Óptica Quântica registrando o espectro de cores gerados pela CPD, representando a passagem entre os regimes: colinear e não-colinear.

$$\Delta_{oo} \approx \left[k_1 - \frac{q_1^2}{2k_1} + k_2 - \frac{q_2^2}{2k_2} - \varkappa_p + \alpha_p q_{px} + \frac{1}{2\varkappa_p} (\beta_p q_{px}^2 + \gamma_p q_{py}^2) \right] \frac{L}{2}, \quad (2.70)$$

com

$$k_1 = n_{o1} \frac{\omega_1}{c} \rightarrow k_1 = \frac{\bar{n}_o(1 + a\nu)(1 + \nu)\omega_p}{2c}, \quad (2.71)$$

$$k_2 = n_{o2} \frac{\omega_2}{c} \rightarrow k_2 = \frac{\bar{n}_o(1 - a\nu)(1 - \nu)\omega_p}{2c}, \quad (2.72)$$

onde o índice \bar{n}_o corresponde à frequência $\omega_p/2$. A obtenção das equações acima foram realizadas a partir de (2.49) e (2.50). A quantidade a corresponde a uma variação linear da dispersão e será

$$a = \frac{\omega_p}{2\bar{n}_o} \left. \frac{d\bar{n}_o}{d\omega} \right|_{\omega=\frac{\omega_p}{2}}. \quad (2.73)$$

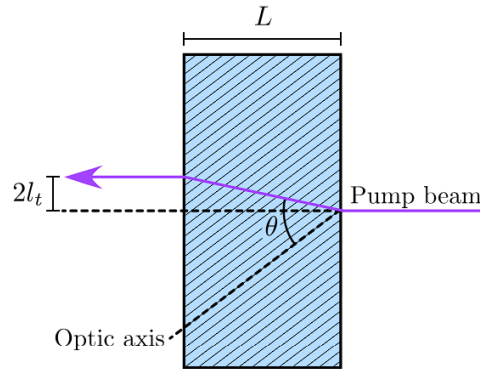


Figura 8 – Ilustração do fenômeno *walk-off* em cristal birrefringente.

Assumindo que $\nu \ll 1$, os índices n_{o1} e n_{o2} podem ser escritos em sua forma linear, dada por

$$n_{o1} = \bar{n}_o(1 + a\nu), \quad (2.74)$$

$$n_{o2} = \bar{n}_o(1 - a\nu). \quad (2.75)$$

Como

$$q_{px} = q_{1x} + q_{2x}, \quad (2.76)$$

$$q_{py} = q_{1y} + q_{2y}. \quad (2.77)$$

E utilizando de (2.65), (2.76) e (2.77), a equação (2.70) se torna:

$$\begin{aligned} \Delta_{oo} \approx & \left\{ k_1 + k_2 - \varkappa_p - \frac{q_1^2}{2k_1} - \frac{q_2^2}{2k_2} + \alpha_p(q_{1x} + q_{2x}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\varkappa_p} [\beta_p(q_{1x} + q_{2x})^2 + \gamma_p(q_{1y} + q_{2y})^2] \right\} \frac{L}{2}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Os três primeiros termos podem ser simplificados a fim de se obter

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 - \varkappa_p &= \frac{\bar{n}_o \omega_p}{c} (1 + a\nu^2) - \eta_p \frac{\omega_p}{c} \\ &= K \mu_{oo}, \end{aligned}$$

sendo

$$K = \frac{\omega_p}{c},$$

$$\mu_{oo} = \bar{n}_o(1 + a\nu^2) - \eta_p.$$

O termo μ_{oo} é referente ao casamento de fases. Para regimes colineares, definimos $\mu_{oo} = 0$. Utilizando de manipulações algébricas em (2.78), juntamente com as relações para K , k_1 , k_2 e \varkappa_p , obtemos

$$\begin{aligned} \Delta_{oo} \approx & [K \mu_{oo} + \alpha_p(q_{1x} + q_{2x})] \frac{L}{2} - \\ & - \frac{L}{2\bar{n}_o K} \left[\frac{q_1^2}{(1 + a\nu)(1 + \nu)} + \frac{q_2^2}{(1 - a\nu)(1 - \nu)} + \frac{b}{2}(q_{1x} + q_{2x})^2 - \frac{g}{2}(q_{1y} + q_{2y})^2 \right], \end{aligned} \quad (2.79)$$

onde

$$b = \beta_p \frac{\bar{n}_o}{\eta_p},$$

$$g = \gamma_p \frac{\bar{n}_o}{\eta_p}.$$

A equação (2.79) ainda pode ser escrita em termos dos ângulos de saída dos fótons quando detectados, como é mostrado em [18]. Ao definir novos vetores, ξ_1, ξ_2 - como: $\xi_1 = (\xi_{1x}, \xi_{1y})$ e $\xi_2 = (\xi_{2x}, \xi_{2y})$, permite a escrita de

$$\xi_{1j} \approx \frac{c}{\omega_1} q_{1j}, \quad (2.80)$$

$$\xi_{2j} \approx \frac{c}{\omega_2} q_{2j}. \quad (2.81)$$

Após sequenciais manipulações e rearranjos algébricos, Δ_{oo} , vem a se tornar

$$\Delta_{oo} \approx KLf_{oo}, \quad (2.82)$$

sendo

$$\begin{aligned} f_{oo} = & \frac{\mu_{oo}}{2} + \frac{\alpha_p}{4} [\xi_{1x}(1+\nu) + \xi_{2x}(1-\nu)] \\ & - \frac{1}{8\bar{n}_o} \left\{ \xi_1^2(1+\nu) + \xi_2^2(1-\nu) - \frac{b}{2} [\xi_{1x}(1+\nu) + \xi_{2x}(1-\nu)]^2 \right. \\ & \left. - \frac{g}{2} [\xi_{1y}(1+\nu) + \xi_{2y}(1-\nu)]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Dessa forma, pode-se calcular a amplitude do estado quântico para o casamento de fases presente em termos dos ângulos de detecção, dada por

$$\begin{aligned} \Phi_{oo} & \approx C_{\sigma_1\sigma_2} G(\nu) \mathcal{E}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) L e^{-i\Delta_{oo}} \text{sinc} \Delta_{oo} \\ & = NG(\nu) \mathcal{A}(\xi_1, \xi_2, \nu) e^{-iKLf_{oo}} \text{sinc} \Delta_{oo}, \end{aligned} \quad (2.84)$$

onde N é uma constante de normalização, e \mathcal{A} com a seguinte forma:

$$\mathcal{A}(\xi_1, \xi_2, \nu) = \mathcal{E} \left(\frac{1+\nu}{2} K\xi_1 + \frac{1-\nu}{2} K\xi_2 \right). \quad (2.85)$$

Ainda em da Costa Moura [18] é discutida a apresentação de dados experimentais que corroboram com essa abordagem. Também é mostrada outra maneira de descrição, manipulando novamente os vetores ξ_{ij} .

$$\begin{cases} \xi_s = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2), \\ \xi_d = \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2). \end{cases} \quad (2.86)$$

E assim a amplitude de detecção (2.84) em termos de (2.86) é escrita

$$\Phi_{oo} = N \mathcal{E}(K\xi_s + K\nu\xi_d) \text{sinc}(KLF_{oo}) e^{-iKLF_{oo}}, \quad (2.87)$$

onde

$$F_{oo} = \frac{\mu_{oo}}{2} + \alpha_p(\xi_{sx} + \nu\xi_{dx}) - \frac{1}{4\bar{n}_o}(\xi_d^2 + \nu\xi_s \cdot \xi_d). \quad (2.88)$$

No regime degenerado ($\nu = 0$), teremos:

$$F_{oo} \approx \frac{\mu_{oo}}{2} + \frac{\alpha_p}{2} \xi_{sx} - \frac{\xi_d^2}{4\bar{n}_o}. \quad (2.89)$$

Através dessa descrição, é possível aferir informações a respeito do movimento dos detectores. Quando eles se movem em sentidos opostos, ou seja, $\xi_s = 0$, a probabilidade de detecção em coincidência, em regime degenerado, é proporcional a

$$|\Phi_{oo}|_d^2 \approx \left| N \mathcal{E}(0) \text{sinc} \left[\frac{KL}{4\bar{n}_o} (2\bar{n}_o \mu_{oo} - \xi_d^2) \right] \right|^2. \quad (2.90)$$

Observamos que a detecção em coincidências será máxima quando o vetor ξ_d^2 descrever uma circunferência de raio $-2\bar{n}_o \mu_{oo}$. Já quando os detectores descrevem movimentos no mesmo sentido e direção, de maneira que $2\bar{n}_o \mu_{oo} = \xi_d^2$, a amplitude de detecção em coincidências será proporcional a

$$|\Phi_{oo}|_s^2 \approx \left| N \mathcal{E}(K\xi_s) \text{sinc} \left(\frac{1}{2} KL \alpha_p \xi_{sx} \right) \right|^2. \quad (2.91)$$

Aqui, podemos vislumbrar a interpretação das consequências do processo não linear. A equação (2.91) elucida uma possível transferência do espectro angular para o estado dos dois fótons $\mathcal{E}(K\xi_s) = \mathcal{E}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)$, como descrito por Monken, *et al.* 5, e sua dependência com o comprimento do cristal L , acrescida ao caráter anisotrópico do meio. Como mencionado, o termo α_p — quantificador do walk-off — limita a transferência do espectro angular. A função $\text{sinc}(\dots)$ tem um papel crucial. Se seu argumento for muito pequeno, a dispersão será grande. Compensatoriamente, para valores onde esse argumento é substancialmente acentuado, há uma pequena dispersão e estreitamento dessa função. Diante dessas condições, para que a transferência do espectro angular seja satisfatória, ou para que não haja limitação, é necessário que a função $\text{sinc}(\dots)$ seja superior ao espectro angular em largura. Isso acontece quando seu argumento for o menor possível, obtendo grande dispersão. Todos os parâmetros mencionados — dentre eles: número de onda, walk-off e o comprimento do cristal — são determinantes. Em análises feitas por da Costa Moura [18], quando o campo for gaussiano, a transferência só será satisfatória quando sua cintura $w_0 \gg L\alpha_p/2\pi$, para um cristal especificado. É observada uma limitação na transferência do espectro angular, ocasionada por α_p , impactando no emaranhamento espacial do estado gerado [11].

3 Emaranhamento e um de seus parâmetros

3.1 O emaranhamento

Desde o princípio, a Mecânica Quântica tem sido motivo de calorosos debates, se de fato condiz com uma teoria completa e se fornece uma descrição da realidade. Um dos momentos mais fervorosos foi a publicação do famoso artigo publicado por Einstein *et al.* [1], no qual os autores trouxeram à tona ideias que hoje chamamos de emaranhamento e não-localidade. As correlações quânticas, ou propriamente dito, o emaranhamento, são uma das consequências mais surpreendentes da Mecânica Quântica. “Dizemos que dois (ou mais) sistemas estão emaranhados quando o sistema como um todo é caracterizado por uma função de onda global ou um operador densidade que não pode ser representado por um produto de funções de onda independentes em cada sistema¹” [22]. Embora esse tratamento considere a preparação do estado quântico em si e não seu comportamento, podemos adotar a seguinte definição: “estados emaranhados são aqueles que não podem ser simulados por correlações clássicas” [23]. Diante disso, o emaranhamento fundamenta discussões elementares e rotineiras no contexto da Óptica Quântica, além de possuir uma importância própria, qual seja, possibilitar o uso de protocolos de informação quântica, como codificação densa, distribuição de chaves criptográficas e teletransporte [24].

Há uma série de sistemas considerados emaranhados. Entre as décadas de 1980 e 2010, houve grande interesse no estudo desses sistemas em variáveis contínuas, e um dos processos frequentemente usados como fonte de emaranhamento é a Conversão Paramétrica Descendente (CPD). Amplamente estudada devido à sua capacidade de gerar pares de fótons emaranhados e ocasionando em estudos tanto em variáveis discretas quanto em contínuas. Não obstante, existem muitos outros sistemas físicos e fontes para produzir e estudar o emaranhamento além da CPD, situações que outrora, já foram estudadas, como, por exemplo: a fotoionização de átomos, a fotodissociação de moléculas e a emissão espontânea de fótons por um átomo [25, 26].

Para esclarecimento, veremos nas duas seções seguintes a representação matemática de um sistema emaranhado.

3.1.1 Emaranhamento de estados puros

Para uma melhor abordagem, trataremos uma classe especial de estados, denominados *estados puros*, que são facilmente distinguíveis por suas propriedades. Por definição um operador de estado puro, tem sua forma [21]

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|, \quad (3.1)$$

sendo Ψ o vetor de estado normalizado. O valor médio de um observável \mathbf{O} , representado pelo operador O em termos do operador de estado puro, é dado por

$$\langle\mathbf{O}\rangle = \text{Tr}(|\Psi\rangle\langle\Psi|O) = \langle\Psi|O|\Psi\rangle. \quad (3.2)$$

Uma segunda evidência de um estado puro é dada pela condição abaixo

¹ Esse contexto é aplicado a estados puros, em casos de estados mistos o operador de estado é escrito através de uma combinação convexa, veja [21].

$$\rho^2 = \rho, \quad (3.3)$$

e isso é suficiente para evidenciar que seus autovalores são dados da mesma maneira, $\rho_n^2 = \rho_n$, cujo valores são restritos a 0 ou 1. Uma terceira característica de estados puros é definida por:

$$\text{Tr}(\rho^2) = 1. \quad (3.4)$$

Para interpretação da condição acima, analisemos a representação espectral de ρ sendo um operador auto-adjunto, escrito:

$$\rho = \sum_n \rho_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n|; \quad (3.5)$$

tal representação junto às propriedades do operador de estado (Hermitiano e positivo semi-definido), implica que seus autovalores sejam $\rho_n^2 \leq \rho_n$ e por consequência: $\text{Tr}(\rho_n^2) = \sum_n \rho_n^2 \leq \sum_n \rho_n = 1$.

O estado puro ainda pode ser diferenciado de um estado geral através do seguinte teorema: “Um estado puro não pode ser expresso como a soma convexa de outros estados, mas um estado não-puro pode ser expresso” [21]. Assim, seja um sistema composto de dois sistemas quânticos, o primeiro sendo A e o segundo B . A representação do sistema físico A é feita através do operador \mathcal{A} no espaço de Hilbert, \mathcal{H}_A , cuja dimensão é d_A . De maneira análoga, B possui um operador \mathcal{B} , no espaço de Hilbert, \mathcal{H}_B , de dimensão d_B . Se o estado do sistema composto propriamente é *puro*, representando A e B , é descrito por um vetor $|\psi\rangle$ no espaço $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ como

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j}^{d_A d_B} c_{ij} |a_i\rangle \otimes |b_j\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B, \quad (3.6)$$

com matriz complexa $C = c_{ij}$ de dimensão $d_A \times d_B$.

Para que um estado $|\psi\rangle$ seja considerado separável, isto é, possa ser expressado em termos de um estado produto, onde $|\psi^A\rangle \in \mathcal{H}_A$ e $|\psi^B\rangle \in \mathcal{H}_B$, tais que

$$|\psi\rangle = |\psi^A\rangle \otimes |\psi^B\rangle, \quad (3.7)$$

caso contrário, este estado é dito emaranhado. O estado composto pode ser completamente independente, ou seja, $|\psi^A\rangle$ é preparado localmente de maneira que é inteiramente isento de B , de maneira análoga para $|\psi^B\rangle$. Uma maneira elegante para descrever o emaranhamento de estados puros é a chamada *decomposição de Schmidt*, comumente utilizada para sistemas bipartidos [27] [28].

3.2 Parâmetros de Emaranhamento

3.2.1 Número de Schmidt

Como previamente abordado, o emaranhamento, ou melhor, as *correlações*, são termos rotineiros no cotidiano dos físicos – principalmente quando estamos lidando com sistemas bipartidos, ou até mesmo além, aqueles que são caracterizados por muitos graus de liberdade. Entretanto, algumas questões indicam interesse: quão disponível está a informação referente a um sistema, considerando apenas funções de partículas únicas? Além disso, quantas funções canônicas serão necessárias para o entendimento e construção da função de onda que descreve esse sistema de N -corpos envolvidos? Diante de tais questionamentos, surge a necessidade de explorar alguns dos sistemas fundamentados através de suas correlações.

Algumas dessas questões foram exploradas por Grobe *et al.* [29], em interações do tipo elétron-elétron e átomo-elétron. Como a elaboração experimental de estados fortemente correlacionados é uma tarefa extremamente árdua, e também por suas análises envolverem questões que ainda estão em aberto, é necessária cautela para o entendimento completo desses casos. Em contrapartida, vertentes teóricas trazem boas perspectivas quando confrontadas. Vejamos algumas delas: (i) como decidir qual sistema físico composto por N -corpos é mais correlacionado e, o mais importante, quanto? (ii) Qual quantidade é adequada para medir esse grau de correlação? (iii) Como essa correlação pode variar no tempo? E a mais plausível diante do escopo deste trabalho... (iv) Como parâmetros externos podem ser usados no intuito de manipular ou controlar a correlação? Tais perguntas mobilizam físicos a fim de obter suas respostas, de maneira a encontrar parâmetros condizentes com diversos sistemas listados, e, em especial, a possibilidade de controlar essas correlações em um parâmetro geral. Em virtude disso, existem duas questões que necessitam de uma atenção extrema: Como mensurar propriedades globais de multi-partículas, como sua função de onda, corretamente? E como obter o grau de correlação dado, em termos dessa função de onda?

Frequentemente, o termo correlação é amplamente usado no universo da física. Portanto, é importante deixar evidente que não limitaremos a definição deste termo para o que será apresentado. Em seu trabalho, Grobe *et al.* [29] propuseram uma medida global de correlação fundamentada completamente no sentido que a função de onda tem por si só, independente de sua representação e não requer nenhuma comparação com teorias aproximadas, ou até mesmo com as variáveis presentes. E, como consequência disso, pode ser generalizada para situações de dependência temporal.

Em sua proposta, as condições geradas são aplicadas a todas as partículas caracterizadas por férmions e bósons, e discutidas, por simplicidade, para um sistema composto por um átomo com dois elétrons. Este último é o contexto mais próximo de controle de correlação promovida pela interação luminosa, ocasionada por excitações geradas por lasers, onde a repulsão e - e compete com a radiação dos campos presentes, sendo de grande interesse para a comunidade científica [30].

Se a função de onda de um estado bipartido for apresentada como $\Psi(x_1, x_2)$, sua representação canônica pode ser definida por uma soma em apenas um índice da partícula única, dada por

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} b_{\alpha}(x_1, x_2), \quad (3.8)$$

onde $b(x_1, x_2)$ é o determinante de Slater de orbitais específicos de partículas únicas quando são férmions e um produto de orbitais para bósons [31]. A apresentação de Ψ pode ser feita em um grande conjunto de bases, embora sua representação canônica traga a característica de *unicidade*, vista como a ideia chave proposta pelos autores. A quantidade de correlação pode ser atribuída com o “número” de funções b_{α} independentes necessárias para construir a função de onda de duas partículas. As condições de normalização são sempre presente em sistemas físicos, neste caso não seria diferente, e, portanto, a normalização de Ψ leva aos coeficientes $\sum_{\alpha} |\lambda_{\alpha}|^2 = 1$, sendo este resultado, interpretado como os possíveis autovalores da matriz densidade reduzida. Assim o valor médio do termo $|\lambda_{\alpha}|^2$, é então, diretamente encontrado, dado por $\sum_{\alpha} |\lambda_{\alpha}|^4$. O inverso deste termo é o “número” de probabilidades efetivamente não nulas, definido como *grau de correlação*, ou número de Schmidt - K , representado como:

$$K = \left[\sum_{\alpha} |\lambda_{\alpha}|^4 \right]^{-1}. \quad (3.9)$$

Para variáveis contínuas, o número de Schmidt é definido como o inverso da pureza, i.e., o inverso do traço quadrado do operador densidade reduzido de um estado bipartido

$$K = [\text{Tr}(\rho_r^2)]^{-1}, \quad (3.10)$$

onde ρ_r é o operador densidade reduzido com respeito à partícula 2, definido como $\rho_r = \text{Tr}_2(\rho)$ [28].

Deste modo, podemos evidenciar algumas características consideráveis apresentadas por K :

- $$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \text{ é independente da representação utilizada para a função de onda; por exemplo,} \\ \quad \quad \quad K \text{ tem o mesmo arranjo para o espaço de momento.} \\ (b) : \quad K \text{ é invariante, característica importante ao tratar sistemas na presença de campos} \\ \quad \quad \quad \text{eletromagnéticos (lasers).} \\ (c) : \quad K \text{ atinge seu mínimo em 1, onde apresenta estados descorrelacionados segundo} \\ \quad \quad \quad \text{o determinante de Slater.} \end{array} \right.$$

Apesar dessas propriedades sedutoras, ainda existe uma questão em aberto – como computar K ? Mesmo que tenhamos conhecimento da função exata do estado de dois elétrons, geralmente Ψ não está representada em sua forma canônica. A resposta para tal, surge no operador densidade para uma única partícula, $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, obtido através da matriz densidade total, e definido:

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \int d\mathbf{x}_2 \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2) \Psi^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2), \quad (3.11)$$

o operador densidade (ρ) é Hermitiano e seus autovalores, dentro da representação canônica, são os coeficientes $|\lambda_\alpha|^2$.

A representação de $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ para partículas únicas oferece um caminho interessante para o cálculo de K e sua interpretação via Mecânica Estatística. Se o sistema apresentado for definido por bósons², seu operador densidade reduzido, ρ_r , corresponderá a um estado puro, como mostrado na seção anterior, se, através da regra de Born [21]: $[\text{Tr}(\rho_r^2) = 1]$, e, por consequência, $K = 1$. A interpretação desse resultado é bastante interessante: $K = 1$ indica que Ψ é descorrelacionada, isto é, as partículas presentes são separáveis, e encontrar as coordenadas e outras informações³ de uma partícula não fornece ou diminui informações a respeito da outra. Em outras palavras, encontrar o segundo elétron do sistema composto não diminui a informação sobre o primeiro elétron na função de onda total do sistema.

Por outro lado, se o estado não for puro: $[\text{Tr}(\rho_r^2) < 1]$, conseqüentemente $K > 1$, indicando que Ψ é um estado correlacionado. A correlação apresentada entre as duas partículas são *superposições coerentes de suas amplitudes*. Assim, K reflete a perda de correlação durante o traço de qualquer uma das partículas. Em certas ocasiões, o logaritmo de K é denominado *entropia de Stückelberg* – referente à quantidade de informação ou perda de informação de um sistema físico.

Qualitativamente, o significado de K pode ser avaliado considerando o sistema bipartido descrito por uma função de onda em que o movimento relativo do pacote de onda seja ligeiramente localizado, mas o movimento relativo do pacote de onda do centro de massa é suficientemente amplo. Em tal circunstância, K tem seu valor acentuado e o sistema é fortemente correlacionado. A presente situação induz o seguinte pensamento: por menor que seja a informação a respeito da localização da primeira partícula, se ela for localizada, a segunda também será. Por outro lado, se traçarmos a posição da primeira partícula, a segunda só poderá ser encontrada na região limitada pelo pacote de onda do centro de massa das duas partículas, por mais amplo que ele seja. Portanto, o processo de traçar a posição de uma das partículas induz uma *perda de informação*, que é refletida no valor de K . É importante frisar que o parâmetro K por si só, contém apenas informações parciais sobre a correlação, e embora todas essas vantagens apresentadas,

² A função de onda, $\Psi(x_1, x_2)$, apresenta caráter simétrico.

³ O traço é independente da base.

não se pode obtê-lo experimentalmente ⁴, e descrições gerais devem ser avaliadas através das distribuições dos autovalores de ρ . Para detalhes sobre sistemas físicos e abordagens realizadas pelos autores para autenticidade e caracterização de K , veja [29, 32–34].

Na próxima seção, introduziremos o parâmetro η , que, juntamente com R_F , permite quantificar o emaranhamento através das larguras dos pacotes de onda em detecção simples e coincidência. O grau de emaranhamento de sistemas bipartidos em variáveis contínuas também pode ser definido como o inverso do produto das densidades de probabilidades condicionais das coordenadas momento e posição, conhecido como critério de EPR [26],

$$C_{EPR} = \frac{1}{\Delta x_1^{(c)} \Delta k_1^{(c)}}, \quad (3.12)$$

sendo as distribuições de coincidências dos fótons gerados expressas pelas funções de probabilidades condicionais: $P(x_2|x_1)$ e $P(k_2|k_1)$. A partir dessas densidades de probabilidade, é possível calcular a incerteza da posição (momento) do fóton 2, dada a posição (momento) do fóton 1, sendo elas

$$\Delta x_2^2 = \int x_2^2 P(x_2|x_1) dx_2 - \left(\int x_2 P(x_2|x_1) dx_2 \right)^2, \quad (3.13)$$

$$\Delta k_2^2 = \int k_2^2 P(k_2|k_1) dk_2 - \left(\int k_2 P(k_2|k_1) dk_2 \right)^2. \quad (3.14)$$

Para o estado EPR original [1], descrito como singular, a incerteza condicional tem seu valor nulo, e a quantidade C_{EPR} tende ao infinito ($C_{EPR} = \infty$). Já se considerarmos uma função de onda cuja descrição seja bi-gaussiana, da forma

$$\Psi(x_1, x_2) \propto \exp\left(-\frac{(\alpha x_1 + \beta x_2)^2}{2a^2}\right) \exp\left(-\frac{(\gamma x_1 + \delta x_2)^2}{2b^2}\right), \quad (3.15)$$

cujas larguras são bem definidas, o parâmetro EPR utilizado para sistemas bipartidos que se comportam desta maneira, e de forma semelhante [25, 26] coincide com o número de Schmidt, isto é, $C_{EPR} = K$.

3.2.2 Razão R_F

3.2.2.1 Introdução

Como mostrado, o emaranhamento é uma das questões fundamentais da Mecânica Quântica e está intimamente ligado a uma série de sistemas que podem ser estruturados por meio da fragmentação que ocorre entre duas partículas, como, por exemplo, na fotoionização e fotodissociação. O entendimento das condições geradas por esses sistemas permite a interpretação e a compreensão das possíveis consequências físicas no mundo contemporâneo, onde a interação laser-molécula/laser-átomo ocorre no domínio dos femtossegundos. O principal aspecto levantado é: o emaranhamento existe ou não e como podemos mensurá-lo? O estudo de estados quânticos é estruturado em torno de como a não-localidade da natureza pode ser aplicada em futuros protocolos de informação quântica, e como os processos necessários podem ser modelados.

O emaranhamento tem sido amplamente estudado e descrito em sistemas quânticos com um número limitado de variáveis discretas. No entanto, nos últimos anos, tem havido grande interesse no estudo

⁴ Ainda em dias presentes essa descrição apresenta inúmeras dificuldades experimentais

desses estados em variáveis contínuas. Exemplos incluem estados gerados pela Conversão Paramétrica Descendente (CPD) [7–9,26], fotoionização e fotodissociação [25], e emissão espontânea via átomo-fóton [35]. Esses e outros processos envolvendo emaranhamento de variáveis contínuas podem ser explorados em [36].

Diante disso, introduziremos a base teórica, inicialmente apresentada em [25] e expandida para outros processos físicos como os mencionados anteriormente. A possibilidade de mensurar o grau de emaranhamento por meio das dispersões em posição e momento, seja por coincidência ou detecção simples, é extremamente viável, considerando as perspectivas trazidas e as condições experimentais envolvidas. Os dados observados e as informações já disponíveis na literatura garantem a fidelidade e coerência dessa abordagem. Nesta seção, introduziremos o parâmetro η e, posteriormente, R_F , que, em conjunto, demonstram o grau de emaranhamento presente em sistemas quânticos apenas relacionando suas larguras de detecção. Tal execução, nos permitiu analisar os dados coletados, que posteriormente, serão apresentados no próximo capítulo.

3.2.3 A razão R_F e η

Em certos casos, o estado gerado pela CPD é aproximado pela função gaussiana, ou seja, a função de onda predominante assume a forma descrita pela equação (3.15). Tal aproximação é comumente utilizada quando o cristal birrefringente é relativamente fino e o feixe bombeador está colimado. Em termos gerais, essa aproximação pode ser utilizada, entretanto não fornece bons resultados quando se analisa a propagação do estado quântico dos dois fótons e os efeitos da anisotropia característicos do meio birrefringente. Embora os modelos apresentados pela aproximação gaussiana ofereçam resultados satisfatórios quando analisados longe do cristal gerador, eles divergem ao se aproximar da face de saída.

Dessa forma, consideremos a seguinte representação de uma função de onda bi-gaussiana dada por

$$\Psi(x_1, x_2) = A \exp\left(-\frac{(\alpha x_1 + \beta x_2 + c_1)^2}{2a^2}\right) \times \exp\left(-\frac{(\gamma x_1 + \delta x_2 + c_2)^2}{2b^2}\right), \quad (3.16)$$

onde x_1 e x_2 são as coordenadas das partículas envolvidas, e α, β, γ , e δ são constantes que podem ser definidas de acordo com o processo físico envolvido. Como estamos interessados apenas nas larguras de detecção, a equação (3.16) representa razoavelmente o estado, exceto por uma constante de normalização A . Considerando os fatores exponenciais à direita de (3.16), a e b correspondem aos parâmetros da função de onda e suas respectivas larguras, determinadas pelo processo específico de cada sistema, as constantes c_1 e c_2 podem representar possíveis desvios das funções de onda primárias. A partir disso, podemos definir que a razão entre as larguras é o parâmetro de controle η , sendo

$$\eta = \frac{b}{a}. \quad (3.17)$$

Este é o fator responsável por determinar o grau de emaranhamento [25, 26].

A razão entre a e b modula a dispersão e a forma como a função oscila nas diferentes direções no espaço definido por x_1 e x_2 . O parâmetro a está relacionado às variáveis $\alpha x_1 + \beta x_2$ e é responsável pela largura da primeira gaussiana presente na equação (3.16). De maneira semelhante, b está relacionado a $\gamma x_1 + \delta x_2$. Um valor pequeno de a resulta em uma função fortemente centralizada, tornando a gaussiana mais estreita e pontiaguda, o mesmo ocorrendo para b , como pode ser visto na Fig.9. Podemos então, concluir as seguintes situações:

- $$\left\{ \begin{array}{l} a \gg b : \text{ A função será mais espalhada ao longo da direção } \alpha x_1 + \beta x_2, \text{ sendo comprimida} \\ \text{ em uma direção e alongada em outra, apresentando um caráter assimétrico.} \\ a \ll b : \text{ A função será mais espalhada ao longo da direção } \gamma x_1 + \delta x_2, \text{ também apresentando} \\ \text{ um caráter assimétrico, mas com a dispersão invertida.} \\ a = b : \text{ A função será simétrica, com dispersão uniforme em ambas as direções } \alpha x_1 + \beta x_2 \text{ e} \\ \gamma x_1 + \delta x_2. \end{array} \right.$$

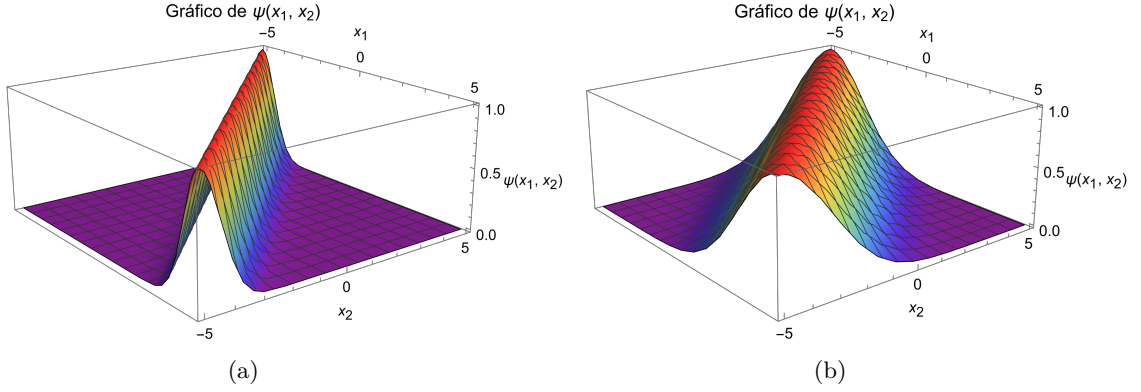


Figura 9 – Aqui mostramos como a razão entre a e b afeta a largura da função (3.16). Em (a), os valores são $a = b = 1$, e todos os outros parâmetros são mantidos fixos com o mesmo valor. Já em (b), ocorre o alargamento da função devido aos valores $b = 6$ e $a = 2$, cuja dimensão é comprimento. Os parâmetros α, β, γ e δ são escolhidos a fim de manter η dimensional.

Após definirmos a função bi-gaussiana (3.16), é possível reescrevê-la de maneira a possibilitar sua fatoração. Vejamos uma mudança de variáveis em termos de ξ_1 e ξ_2 , onde

$$\xi_1 = \alpha x_1 + \beta x_2 \quad ; \quad \xi_2 = \gamma x_1 + \delta x_2. \quad (3.18)$$

Fica claro que a função $\Psi(\xi_1, \xi_2)$ é separável nas novas variáveis, pois

$$\Psi(\xi_1, \xi_2) = \exp\left(-\frac{(\xi_1^2 + c_1)^2}{2a^2}\right) \times \exp\left(-\frac{(\xi_2^2 + c_2)^2}{2b^2}\right), \quad (3.19)$$

portanto, o estado quântico representado por (3.19) é considerado não-entrelaçado, devido a sua separabilidade nas variáveis apresentadas. Entretanto, nas variáveis originais, a fatoração não é alcançada, evidenciando o caráter entrelaçado.

Precisamos neste ponto determinar a transformação Jacobiana entre as variáveis ξ_i e x_i . Essa transformação é extremamente útil em alguns processos onde é aplicável o parâmetro η [36]. A transformação Jacobiana entre as funções $\Psi(x_1, x_2)$ e $\Psi(\xi_1, \xi_2)$ é

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

cujos determinante, é

$$D \equiv \det(J) = \alpha\delta - \beta\gamma. \quad (3.21)$$

Para esclarecimento, lidaremos com a detecção de larguras condicionais. Larguras condicionais são caracterizadas pela detecção de uma partícula diante de outra mantida fixa, como exemplo: encontraremos a largura condicional de $|\Psi(x_1, x_2)|^2$, definida em (3.16) com respeito à coordenada x_1 , sendo a partícula cuja coordenada x_2 está mantida fixa. Para melhor entendimento, o aparato experimental é montado de

maneira que o detector registrando as partículas “1” seja movimentado sistematicamente no plano de detecção, e as partículas “2” são mensuradas em um ponto fixo. Avaliemos $|\Psi(x_1, x_2)|^2$:

$$|\Psi(x_1, x_2)|^2 = \Psi^*(x_1, x_2)\Psi(x_1, x_2), \quad (3.22)$$

é então, obtido o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} |\Psi(x_1, x_2)|^2 &= \exp\left(-\frac{(\alpha x_1 + \beta x_2 + c_1)^2}{a^2}\right) \times \exp\left(-\frac{(\gamma x_1 + \delta x_2 + c_2)^2}{b^2}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\alpha^2 x_1^2 + \beta^2 x_2^2 + c_1^2 + 2\alpha\beta x_1 x_2 + 2\alpha c_1 x_1 + 2\beta c_1 x_2}{a^2}\right) \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{\gamma^2 x_1^2 + \delta^2 x_2^2 + c_2^2 + 2\gamma\delta x_1 x_2 + 2\gamma c_2 x_1 + 2\delta c_2 x_2}{b^2}\right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Após algumas manipulações e organização dos termos da equação (3.23), chegamos ao seguinte resultado

$$|\Psi(x_1, x_2)|^2 = \exp\left\{-\frac{\alpha^2 b^2 + \gamma^2 a^2}{a^2 b^2} x_1^2 + A x_1 + B\right\}, \quad (3.24)$$

os parâmetros A e B são independentes de x_1 e em um certo ponto fixo e definido, onde x_2 não é avaliado, tais valores são constantes. Com a equação (3.24), nos é permitido calcular as larguras condicionais do pacote de onda da primeira partícula. Como visto em (3.13), teremos para a incerteza condicional,

$$\Delta x_1^{(c)} = \frac{ab}{\sqrt{\alpha^2 b^2 + \gamma^2 a^2}}. \quad (3.25)$$

A largura do pacote de onda incondicional, ou seja, a largura correspondente a uma única partícula do sistema bipartido, é encontrada através da integração de $|\Psi(x_1, x_2)|^2$ em relação a x_2 , portanto:

$$\int |\Psi(x_1, x_2)|^2 dx_2 \propto \exp\left\{-\frac{D^2 x_1^2}{\beta^2 b^2 + \delta^2 a^2}\right\}, \quad (3.26)$$

sendo D a transformação feita entre $\xi - x$ mostrada em (3.21). Portanto, a definição da largura do pacote de onda, em regime incondicional é definida por

$$\Delta x_1^{(s)} = \frac{\sqrt{\beta^2 b^2 + \delta^2 a^2}}{|D|}. \quad (3.27)$$

Com as equações (3.25) e (3.27), estamos aptos a adentrar no parâmetro fundamental e no escopo deste trabalho. Neste momento, é plausível apresentar R_F , primeiramente visto em [25], ao lidar com o emaranhamento resultante da fotoionização entre elétron e íon. Em sistemas bipartidos onde não há propagação do pacote de onda⁵, é possível avaliar o grau de emaranhamento por meio da razão entre a incerteza estabelecida pela partícula simples e a incerteza do regime condicional, definida como:

$$R_F = \frac{\Delta x_1^{(s)}}{\Delta x_1^{(c)}}. \quad (3.28)$$

Para um sistema físico descrito por funções bi-gaussianas como (3.16), podemos explicitar R_F apenas realizando a divisão de (3.27) por (3.25), obtendo

⁵ Casos onde há propagação, o parâmetro η sofre mudanças, sendo necessária uma nova descrição, veja [25].

$$R_F = \frac{\sqrt{\beta^2 b^2 + \delta^2 a^2} \cdot \sqrt{\alpha^2 b^2 + \gamma^2 a^2}}{|D| \cdot ab},$$

que após algumas manipulações algébricas vem a se tornar,

$$R_F = \frac{\sqrt{\beta^2 \eta^2 + \delta^2} \sqrt{\alpha^2 \eta^2 + \gamma^2}}{|D| \eta}, \quad (3.29)$$

e considera-se uma medida de emaranhamento para sistemas descritos por funções bi-gaussianas. O parâmetro R_F , dentro das perspectivas apresentadas e sem avaliar a propagação do estado quântico, isto é - sem avaliar a variação temporal, retorna um valor análogo ao número de Schmidt K , como discutido em seções anteriores. Uma abordagem sobre os sistemas em que o parâmetro R_F difere de K devido à propagação pode ser encontrada em [25, 26].

O número de Schmidt desempenha um papel importante na determinação do grau de emaranhamento, especialmente para sistemas descritos por funções que utilizam a aproximação gaussiana. Portanto, para os casos que seguem essas perspectivas, afirmamos que o número de Schmidt para variáveis contínuas satisfaz a seguinte condição:

$$K = R_F = \frac{\sqrt{\beta^2 \eta^2 + \delta^2} \sqrt{\alpha^2 \eta^2 + \gamma^2}}{|D| \eta}. \quad (3.30)$$

A equivalência e a importância de R_F e K são vislumbradas ao medir a largura dos pacotes de onda, pois essa medida, acessível à primeira vista, permite inferir a presença de emaranhamento em variáveis espaciais.

Como abordado previamente, o parâmetro K é independente da representação, de modo que podemos explorar seus valores também na sua representação no espaço de momento. A transformada dupla de Fourier de (3.16) é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(k_1, k_2) &= \int dx_1 dx_2 e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} \Psi(x_1, x_2) \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{a^2 (\delta k_1 - \gamma k_2)^2}{2|D|^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{b^2 (\beta k_1 - \alpha k_2)^2}{2|D|^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Neste ponto, é possível determinar as larguras dos pacotes de onda na representação de momento (k). Seguindo o mesmo procedimento descrito anteriormente, a dispersão associada à primeira partícula, na representação de momentos, condicionada a um valor fixo do momento da segunda partícula (k_2), será

$$\Delta k_1^{(c)} = \frac{|D|}{\sqrt{\delta^2 a^2 + \beta^2 b^2}}. \quad (3.32)$$

Semelhante à equação (3.27), que descreve a dispersão para a partícula única (incondicional) na representação de coordenadas, a largura Δk_1 é definida apenas pela integração de $|\tilde{\Psi}(k_1, k_2)|^2$ em relação a k_2 ,

$$\int |\tilde{\Psi}(k_1, k_2)|^2 dk_2 \propto \exp \left\{ -\frac{a^2 b^2 k_1^2}{\gamma^2 a^2 + \alpha^2 b^2} \right\}, \quad (3.33)$$

a fim de obter:

$$\Delta k_1^{(s)} = \frac{\sqrt{\gamma^2 a^2 + \alpha^2 b^2}}{ab}. \quad (3.34)$$

Uma análise simples das equações (3.25), (3.27), (3.32), (3.34) revela que elas possuem as seguintes relações entre as larguras das curvas condicionais e incondicionais,

$$\Delta x_1^{(c)} = \frac{1}{\Delta k_1^{(s)}} \quad , \quad \Delta x_1^{(s)} = \frac{1}{\Delta k_1^{(c)}}. \quad (3.35)$$

É importante frisar que essas relações são diferentes daquelas associadas às relações de incerteza de Heisenberg. Como se pode ver claramente, a primeira igualdade em (3.35) relaciona a incerteza condicional na representação de coordenadas com a incerteza incondicional na representação de momento, i.e., incertezas de coordenadas e momento encontradas em diferentes situações. Ao comparar as mesmas equações (3.25), (3.27), (3.32) e (3.34) com (3.30), encontramos as seguintes relações de incerteza:

$$\Delta x_1^{(s)} \times \Delta k_1^{(s)} = K \geq 1 \quad \text{e} \quad \Delta x_1^{(c)} \times \Delta k_1^{(c)} = \frac{1}{K} \leq 1. \quad (3.36)$$

A primeira dessas equações está inteiramente ligada às relações de incerteza de Heisenberg. Já a segunda, como mencionado anteriormente, pode ser chamada de Relação de Incerteza de Einstein, devido à sua conexão com as relações do tipo EPR [1]. A obtenção experimental dessas circunstâncias foi alcançada por Howell *et al.* [8] e posteriormente verificada por D'Angelo *et al.* [9].

Em todas as detecções propostas aqui, utilizamos os índices mencionados para a partícula 1, embora essa escolha seja arbitrária e possa ser aplicada à partícula 2. Toda a abordagem se repete e continua válida, bastando trocar as variáveis $\alpha \rightleftharpoons \beta$ e $\gamma \rightleftharpoons \delta$. Essas mudanças não afetam $|D|$ e K , e as únicas diferenças surgem ao se analisar as larguras de detecção referentes à partícula 2, definidas pelas equações (3.25), (3.27), (3.32) e (3.34). É importante destacar que todas as definições apresentadas foram baseadas em sistemas físicos descritos por funções bi-gaussianas. Em casos onde essa aproximação não é relevante, uma abordagem diferente é necessária.

4 A Conversão Paramétrica Descendente: além da aproximação Gaussiana

Como mencionado em capítulos anteriores, para funções bi-gaussianas, o parâmetro R_F coincide identicamente com o número de Schmidt K e mostrou-se [10, 36] ser um bom quantificador de emaranhamento de estados puros em diversos sistemas bipartidos. No entanto, a definição dos modos de Schmidt é uma tarefa mais árdua e importante do que apenas encontrar o valor de K . É sabido que os modos de Schmidt são conhecidos apenas para funções bi-gaussianas. Deste modo, convém estudar a aproximação gaussiana fornecida para descrição do estado gerado pela CPD e além desta aproximação, visto que, nesta primeira representação, não é fidedigna ao processo em situações de interesse. Assim, trataremos cenários onde a aproximação é feita e onde uma nova perspectiva é encontrada.

Neste capítulo, discutiremos como é estruturada a aproximação Gaussiana, suas vantagens, estrutura matemática e justificativas. Também abordaremos a descrição de uma nova função de onda apresentada recentemente [37], que descreve o estado quântico gerado pela CPD além dessa descrição.

4.1 Aproximação Gaussiana

A necessidade de métodos que simplifiquem a descrição do sistema em estudo nos motiva a explorar diversas abordagens. Perante o exposto, Schneeloch e Howell [38] avaliaram as perspectivas nas quais o estado quântico gerado pela CPD possa ser descrito pelo produto de funções gaussianas. Esta descrição também é vislumbrada por Law e Eberly [39] e Fedorov *et al.* [40], onde a função de onda no espaço de momento, escrita como um produto sinc-gaussiana, é substituída por duas funções gaussianas de somas e diferenças em seu momento transversal. Ao lidar com essa vertente, são apresentadas as situações e descrições na representação de posição que permitem vislumbrar a estimativa de suas correlações espaciais, as quais podem ser comparadas experimentalmente *a posteriori*. A função de onda do estado gerado é escrita como [38]

$$\Phi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \mathcal{N} \operatorname{sinc} \left(\frac{L_z \lambda_p}{8\pi} |\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^2 \right) e^{-\sigma_p^2 |\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|^2}. \quad (4.1)$$

Toda a abordagem é feita considerando apenas as componentes horizontais do momento transversal, desde que as estatísticas corroborem para ambas as dimensões dentro das aproximações listadas pelos autores. Sob tal circunstância, o perfil transversal do feixe bombeador é assumido como Gaussiano, e, para a separação do produto das funções sinc-gaussiana, é utilizada uma mudança de variáveis do tipo:

$$k_+ = \frac{k_{1x} + k_{2x}}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad k_- = \frac{k_{1x} - k_{2x}}{\sqrt{2}}. \quad (4.2)$$

Através dessas mudanças, a forma horizontal da função do bi-fóton é

$$\phi(k_+, k_-) = \mathcal{N} \operatorname{sinc} \left(\frac{L_z \lambda_p}{4\pi} k_-^2 \right) e^{-\sigma_p^2 k_+^2}. \quad (4.3)$$

Ao realizar a integração do módulo quadrado de (4.3) em respeito a k_+ , obtemos a densidade de probabilidade para k_- , sendo

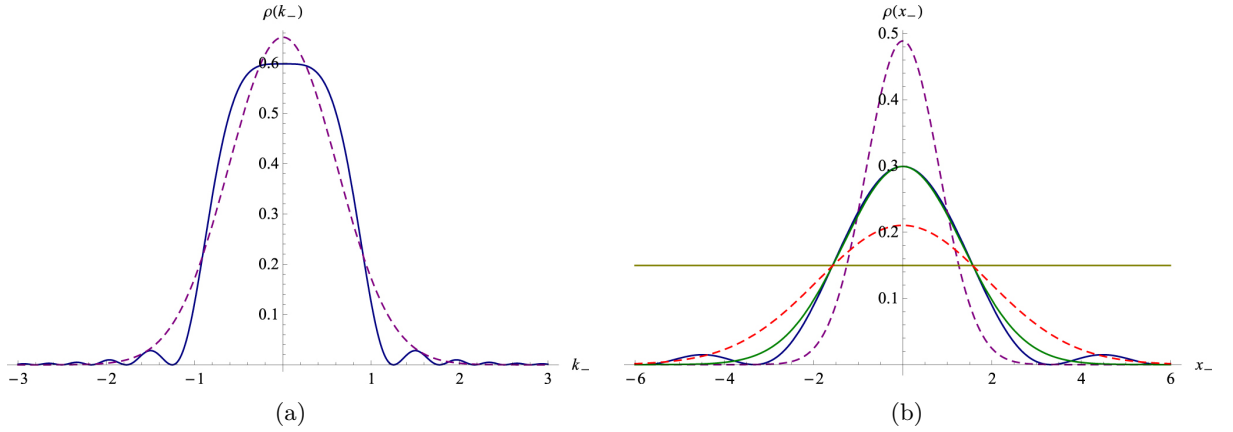


Figura 10 – O modelo apresentado por Schneeloch e Howell justificando a eficiência da aproximação Gaussiana [38]. A Fig.10a (a) mostra os valores estimados para a densidade de probabilidade da diferença entre os momentos horizontais. A linha contínua azul representa a curva baseada na função sinc (4.4). Já a linha magenta representa a curva para o modelo Gaussiano, com base em suas médias e variâncias. Em (b), observamos curvas para diferentes aproximações baseada na densidade das diferenças, caracterizada por $\rho(x_-)$. A curva azul refere-se à melhor aproximação da função sinc. Na cor magenta pontilhada, corresponde a $\rho(x_-)$ em sua distribuição Gaussiana, considerando suas médias e variâncias na representação de momento, enquanto a curva pontilhada vermelha representa $\rho(x_-)$ na representação de posição. Em verde apresenta uma aproximação refinada, ajustando os máximos centrais para serem iguais com o da função original. A linha dourada fixa os valores a meia altura, para fins de comparação entre os dois modelos. As curvas são praticamente idênticas a meia altura, tanto para a função sinc quanto para o modelo aproximado. Em ambos os gráficos, o parâmetro a tem seu valor fixado em 2.

$$\rho(k_-) = \frac{3}{4} \frac{a}{\pi} \text{sinc}^2(ak_-^2), \quad (4.4)$$

onde $a \equiv \frac{L_z \lambda_p}{4\pi}$. Por $\rho(k_-)$ apresentar caráter simétrico, em primeira ordem, o valor médio de k_- é nulo ($\langle k_- \rangle = 0$). Por outro lado, em segunda ordem, $\langle k_-^2 \rangle$ fornece um termo diferente de zero, cujo valor é $\langle k_-^2 \rangle = \frac{3}{4a}$. A partir desses resultados, os autores mencionam um ajuste em $\rho(k_-)$, tal que ele se aproxima de uma função gaussiana de largura $\sigma_{k_-} \equiv \sqrt{\frac{3}{4a}}$, apresentada na Fig.10a.

Para demonstrar a significância da aproximação, podemos avaliar a Fig.10a, onde ρ se assemelha a uma função gaussiana em seus respectivos momentos. Embora as curvas apresentem formas diferentes, seus picos estão substancialmente próximos. Já para a representação em coordenadas, a densidade de probabilidade $\rho(x_-)$ é obtida através da transformada de Fourier de (4.4). A fim de demonstrar sua efetividade, a função assume sua forma mais refinada da seguinte maneira, embora haja algumas ressalvas¹:

$$\rho(x_-) = \frac{3}{16\sqrt{\pi a^3}} \left| x_- \sqrt{2\pi} \left(\mathcal{S} \left(\frac{x_-}{\sqrt{2\pi a}} \right) - \mathcal{C} \left(\frac{x_-}{\sqrt{2\pi a}} \right) \right) + 2\sqrt{a} \left(\cos \left(\frac{x_-^2}{4a} \right) + \sin \left(\frac{x_-^2}{4a} \right) \right) \right|^2, \quad (4.5)$$

onde $\mathcal{S}(x)$ e $\mathcal{C}(x)$ são as integrais de Fresnel. Os autores traçam diferentes valores para sua densidade de probabilidade aproximada por uma função gaussiana. Na Fig. 10b, é possível notar que a aproximação feita possui valores muito próximos à meia altura da largura, evidenciando resultados condizentes.

¹ Os autores afirmam a eficácia de tal equação, mas sua descrição para a CPD demonstra algumas inconsistências consideráveis e na próxima seção será mostrada a descrição mais abrangente [37].

Ao substituir (4.3) por um produto de funções gaussianas, sua transformada de Fourier inversa é obtida diretamente, ou seja, sua representação no espaço de coordenadas é encontrada facilmente. É observado que k_- e k_+ formam um conjunto de coordenadas ortogonais, assim como k_{1x} e k_{2x} , denotando que a transformada de Fourier é separável nessas variáveis. Portanto, encontramos:

$$\psi(x_+, x_-) \approx \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{x_+}\sigma_{x_-}}} \right) e^{-x_-^2/4\sigma_{x_-}^2} e^{-x_+^2/4\sigma_{x_+}^2}, \quad (4.6)$$

onde $\sigma_{x_-}^2 = 1/4\sigma_{k_-}^2$, $\sigma_{x_+}^2 = 1/4\sigma_{k_+}^2 = 2\sigma_p^2$, com x_+ e x_- , sendo

$$x_+ = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad x_- = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}. \quad (4.7)$$

Neste momento é conveniente avaliar a utilidade da aplicação deste método. Com obtenção de (4.6), e definição das quantidades (4.7), podemos obter a densidade de probabilidade tirando o módulo quadrado de $\psi(x_1, x_2)$ a fim de obter ρ^{DG} :

$$\rho^{DG}(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_{x_+}\sigma_{x_-}} \right) e^{-(x_1-x_2)^2/4\sigma_{x_-}^2} e^{-(x_1+x_2)^2/4\sigma_{x_+}^2}. \quad (4.8)$$

Aqui, podemos definir a largura de correlação transversa como o desvio padrão da diferença das distâncias x_1 e x_2 , isto é, $\sigma_{(x_1-x_2)}$, usada para fins comparativos e eficácia do modelo. Para casos que se assemelham a (4.8), a largura de correlação transversa $\sigma_{(x_1-x_2)}$ tem seu valor: $\sigma_{(x_1-x_2)} = \sqrt{2}\sigma_{x_-}$. Detalhes sobre a largura de correlação transversa podem ser acessados em [38].

A equação (4.8) pode ser reescrita em termos de suas variáveis de maneira mais sucinta, em sua forma bi-variável, assim escrita,

$$\rho^{DG}(x_1, x_2) = \left(\frac{\sqrt{ac-b^2}}{\pi} \right) e^{-(ax_1^2+2x_1x_2+cx_2^2)}, \quad (4.9)$$

sendo:

$$\begin{cases} a = c = \frac{\sigma_{x_+}^2 + \sigma_{x_-}^2}{4\sigma_{x_+}^2\sigma_{x_-}^2}; \\ b = \frac{\sigma_{x_-}^2 - \sigma_{x_+}^2}{4\sigma_{x_+}^2\sigma_{x_-}^2}. \end{cases} \quad (4.10)$$

Tal definição possui algumas utilidades. Primeiramente, é separável em variáveis, nas quais apresenta apenas rotação em suas variáveis originais, permitindo a resolução de integrais de maneira analítica. Outra vantagem não menos importante é que a distribuição marginal e probabilística de funções gaussianas também são funções gaussianas, acarretando formas simples de obter seus respectivos dados estatísticos. Ademais, funções bi-gaussianas são definidas unicamente por suas médias e desvios padrões.

Além disso, funções gaussianas possuem incerteza mínima, devido à limitação imposta pela transformada de Fourier; e portanto, satisfazem à incerteza de Heisenberg, definida

$$\sigma_k\sigma_x \geq \frac{1}{2}, \quad (4.11)$$

e satisfeita com igualdade. Também é perceptível a separação em um produto de funções em termos de x_- e x_+ , e esses desvios padrão fornecidos através dessas mudanças de coordenadas ainda saturam as relações de Heisenberg,

$$\sigma_{x_+} \sigma_{k_+} = \frac{1}{2} \quad , \quad \sigma_{x_-} \sigma_{k_-} = \frac{1}{2}. \quad (4.12)$$

Devido ao exposto, resultam algumas vantagens ao se trabalhar com a aproximação gaussiana. As respostas obtidas e as facilidades dos cálculos proporcionadas por essa abordagem são palpáveis e condizentes em certos regimes. Na próxima seção, introduziremos uma nova função de onda, indo além do modelo gaussiano utilizado, também faremos a comparação com alguns cenários onde a aproximação gaussiana não fornece bons resultados.

4.2 Conversão Paramétrica Descendente - Além da aproximação Gaussiana

Nesta seção, abordaremos uma nova perspectiva dentro do campo da CPD, apresentando novas expressões analíticas para as amplitudes de detecção em coincidência no processo de geração dos fótons gêmeos. Tais equações levam em consideração os efeitos de anisotropia, focalização do feixe bombeador e fogem da aproximação gaussiana, frequentemente utilizada para a CPD.

A maioria dos trabalhos no campo da CPD desconsidera os efeitos anisotrópicos do meio birrefringente. Embora os resultados aproximados descrevam bem o fenômeno físico, buscam-se continuamente representações que reflitam com maior precisão a natureza do processo. Na seção 2.4, discute-se como o tratamento é feito ao considerar esses efeitos. Em relação a isso, confrontaremos as características apresentadas na seção anterior com aquelas que de fato são fidedignas para cristais longos e para quando o feixe bombeador é focalizado. À vista disso, da Costa Moura *et al.* [6], e da Costa Moura e Monken [37], avaliaram evidências experimentais de como os efeitos mencionados podem afetar o estado quântico e suas amplitudes de detecção. Nesta seção, apresentaremos a função de onda desenvolvida para uma melhor descrição e possíveis projeções ao lidar com essa abordagem.

4.2.1 A função de onda - $\psi(\mathbf{R}, \mathbf{S}, z)$

A da amplitude de detecção do estado do bi-fóton gerado pela CPD, em sua representação no espaço de momento (k), dentro das aproximações listadas e dentro do regime paraxial, como descrito em 2.3, é definida por (2.53). A menos de uma constante de normalização, a expressão é dada por [41]

$$\Phi(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \mathcal{E}_0(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) e^{-i\Delta_{oo}} \text{sinc}(\Delta_{oo}), \quad (4.13)$$

onde \mathbf{q}_j são as componentes xy do momento transversal \mathbf{k}_j ($j = 1, 2$), e $\mathcal{E}_0(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)$ o espectro angular do feixe bombeador localizado em $z = 0$. O termo Δ_{oo} , previamente apresentado em (2.79) representa o termo de casamento de fases, e tem sua forma:

$$\Delta_{oo} = \mu_{oo} + l_t(q_{1x} + q_{2x}) - \frac{L}{4k_p} \left| \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} \mathbf{q}_1 - \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} \mathbf{q}_2 \right|^2, \quad (4.14)$$

$k_p = \eta_p \omega_p / c$ é o módulo do vetor de onda do feixe bombeador. O termo l_t corresponde à metade do *walk-off* transversal. A quantidade μ_{oo} refere-se ao casamento de fases, e define o regime — colinear ou não colinear —, definido como $\mu_{oo} = (\bar{n}_o - \eta_p) k_p L / 2\eta_p$, onde \bar{n}_o é o índice de refração do cristal não linear centrado na frequência $\omega_p/2$. Já η_p é definido em termos da polarização extraordinária do feixe bombeador e depende do ângulo θ entre o eixo óptico e o vetor de propagação \mathbf{k}_p , conforme visto em (2.66), sendo então definido por

$$\eta_p = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta}}.$$

O termo l_t^2 é escrito como [6]:

$$2l_t = \frac{(n_e^2 - n_o^2) \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta}} L. \quad (4.15)$$

Como apresentado anteriormente nas seções 2.3 e 2.4, ao tratar um cristal birrefringente negativo ($n_o > n_e$), os raios extraordinários se desviam do eixo óptico, caracterizando o *walk-off*. Dentro do regime de casamento de fase colinear ($\mu_{oo} = 0$) e no regime quasi-degenerado, é apropriado o uso da aproximação paraxial e das aproximações feitas pela óptica de Fourier [4]. Ainda é possível realizar o tratamento no regime não colinear, como afirmam da Costa Moura e Monken [37], embora as dificuldades nos cálculos se tornem evidentes. A escolha de trabalhar no regime quasi-degenerado ($\nu \neq 0$) permite uma maior generalização do modelo, possibilitando uma expressão mais abrangente, embora o regime degenerado seja alcançado apenas ao tomar $\nu = 0$. O *walk-off* está presente independentemente do regime estabelecido, e para um ângulo θ entre 0 e $\pi/2$, os valores resultantes dentro de nossas perspectivas experimentais são $\theta \approx 33^\circ$ e $2l_t = 0.37$ mm [37].

Apenas por simplificação, é feita uma mudança de variáveis, sendo:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2. \quad (4.16)$$

Dentro das aproximações apresentadas em 2.3:

$$\omega_1 = \frac{1 + \nu}{2} \omega_p \quad , \quad \omega_2 = \frac{1 - \nu}{2} \omega_p.$$

$$\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} = \sqrt{\frac{1 - \nu}{1 + \nu}} \approx 1 - \nu \quad , \quad \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} = \sqrt{\frac{1 + \nu}{1 - \nu}} \approx 1 + \nu. \quad (4.17)$$

$$\mathbf{P} = (1 - \nu)\mathbf{q}_1 - (1 + \nu)\mathbf{q}_2, \quad (4.18)$$

$$\beta^2 = \frac{L}{4k_p}. \quad (4.19)$$

Então (4.13) vem a se tornar,

$$\Phi(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \mathcal{E}_0(\mathbf{Q}) \operatorname{sinc}(l_t Q_x - \beta^2 P^2) e^{-i(l_t Q_x - \beta^2 P^2)}. \quad (4.20)$$

Como $\Phi(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ é um espectro de onda plana de dois feixes propagando-se independentes, isso acarretará apenas em uma fator de fase dependente de z em cada componente do vetor de onda \mathbf{k} [4]. Desta maneira, convém escrever:

$$\Phi(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, z) = \Phi(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) e^{-i(k_{1z} + k_{2z})z}. \quad (4.21)$$

Para entendimento e aplicação do novo modelo, são apresentadas três situações:

² O termo utilizado para quantificar o *walk-off*, α , apresentado em 2.3 tem o mesmo significado físico que l_t , visto que $l_t = \alpha L$.

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 < z < L : & \text{Dentro do cristal não linear.} \\ z = L : & \text{Na face de saída do cristal, onde meio é isotrópico.} \\ z > L : & \text{Distâncias maiores que o comprimento do cristal e meio isotrópico.} \end{array} \right.$$

Dentro do cristal ($0 < z < L$), onde o meio é anisotrópico, o casamento de fases colinear é descrito sendo [41],

$$\begin{aligned} (k_{1z} + k_{2z})z &= \frac{\bar{n}_o z}{c}(\omega_1 + \omega_2) - \frac{zc}{\bar{n}_o \omega_p} [(1 - \nu)q_1^2 + (1 + \nu)q_2^2] \\ &= k_p z - \frac{z}{2k_p}(Q^2 + P^2). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Já em regiões onde o meio é isotrópico, de $z = L$ até $z > L$, $\Phi(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ propaga-se:

$$\Phi(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, z) = \Phi(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, L) e^{-i(k_{1z}^v + k_{2z}^v)(z-L)}. \quad (4.23)$$

No vácuo, a propagação pode ser explicitada,

$$\begin{aligned} (k_{1z}^v + k_{2z}^v)(z - L) &= \left(k_1^v + k_2^v - \frac{q_1^2}{2k_1^v} - \frac{q_2^2}{2k_2^v} \right) (z - L) \\ &= k_p^v (z - L) - \frac{z - L}{2k_p^v} (Q^2 + P^2), \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde $k_1^v = \omega_1/c$, $k^v = \omega_2/c$ e $k_p^v = \omega_p/c$. Os índices v são usados para evidenciar a propagação no vácuo.

Ao lidar com um feixe Gaussiano, seu espectro angular pode ser escrito em notação complexa [42],

$$\mathcal{E}(\mathbf{Q}, z) = A e^{ik_p^v z} e^{-ia(z)Q^2/2k_p^v}, \quad (4.25)$$

onde A é uma constante. O termo $a(z)$ é

$$a(z) = z - z_c - \frac{ik_p^v w_0^2}{2}, \quad (4.26)$$

as quantidades presentes em (4.26) são w_0 a cintura do feixe e z_c a posição da cintura ao longo do eixo z . Quando posicionados na origem, isto é $a_0 = a(0)$, $\mathcal{E}(\mathbf{Q}, 0)$, assume:

$$\mathcal{E}_0(\mathbf{Q}) = A e^{-ia_0 Q^2/2k_p^v}. \quad (4.27)$$

Ao negligenciar a constante A e um fator de fase em z ,

$$\Phi(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, z) = \text{sinc}(l_t Q_x - \beta^2 P^2) e^{-il_t Q_x} e^{-ib_1(z)Q^2} e^{-ib_2(z)P^2}, \quad (4.28)$$

onde as quantidades $b_1(z)$ e $b_2(z)$ assumem os seguintes valores para diferentes regiões:

$$b_1(z) = \begin{cases} (z/\bar{n}_o - z_c)/2k_p^v - iw_0^2/4, & (0 < z < L), \\ (z - L' - z_c)/2k_p^v - iw_0^2/4, & (z > L), \end{cases} \quad (4.29)$$

$$L' = \left(1 - \frac{1}{\bar{n}_o}\right) L,$$

$$b_2(z) = \begin{cases} (z - L/2)/2\bar{n}_o k_p^v, & (0 < z < L), \\ (z - L'')/2k_p^v, & (z > L), \end{cases}$$

$$L'' = \left(1 - \frac{1}{2\bar{n}_o}\right) L. \quad (4.30)$$

O grande avanço aqui apresentado é a introdução de uma função analítica na representação de coordenadas. A obtenção dessa equação nos permite conhecer a amplitude de detecção associada à posição de formação dos fótons. Essa descrição foi recentemente disponibilizada na literatura [37], e demonstra diferenças evidentes ao lidar com os casos previamente discutidos em 4.1. Conforme mencionado, essa abordagem consiste na substituição do termo $\text{sinc}(l_t Q_x - \beta^2 P^2)$ por uma função Gaussiana, desprezando os efeitos de anisotropia. Tais casos são aplicáveis apenas quando o feixe bombeador está extremamente colimado ou ao lidar com cristais birrefringentes de comprimento limitado ($L \approx 1$ mm). Em outras palavras, essa aproximação é útil quando $L/k_p w_0^2 \ll 1$. Ainda assim, para que bons resultados sejam obtidos nos casos mencionados, o plano de detecção deve estar distante da face de saída do cristal, como será discutido posteriormente.

Em termos das variáveis \mathbf{q}_1 e \mathbf{q}_2 , a equação (4.28), desconsiderando uma constante e tratando $z = L$, torna-se:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, L) &= e^{-ib_1(z)|\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2|^2} e^{-il_t(q_{1x}+q_{2x})} e^{-ib_2(z)|(1-\nu)\mathbf{q}_1-(1+\nu)\mathbf{q}_2|^2} \\ &\times \text{sinc} \left[l_t(q_{1x} + q_{2x}) - \beta^2 |(1-\nu)\mathbf{q}_1 - (1+\nu)\mathbf{q}_2|^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

A obtenção de sua transformada de Fourier, é então:

$$\psi(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, z) e^{i(\mathbf{q}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_1 + \mathbf{q}_2 \cdot \boldsymbol{\rho}_2)} d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2. \quad (4.32)$$

É notável que (4.31) não é separável em \mathbf{q}_1 , \mathbf{q}_2 . Por consequência, a obtenção de uma solução analítica para a transformada proposta pode não ser viável. Assim, com o intuito de simplificar, definimos

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{[(1+\nu)\boldsymbol{\rho}_1 + (1-\nu)\boldsymbol{\rho}_2]}{2}, \\ \mathbf{S} &= \frac{\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2}{2}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

tal que,

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{q}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_1 + \mathbf{q}_2 \cdot \boldsymbol{\rho}_2. \quad (4.34)$$

Sob tais circunstâncias, a menos de uma constante,

$$\psi(\mathbf{R}, \mathbf{S}, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, z) e^{i(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{S})} d\mathbf{Q} d\mathbf{P}. \quad (4.35)$$

Para obtenção de ψ , ou seja, a transformada de Fourier de Φ são necessárias adaptações de algumas quantidades. Em feixes cujo espectro angular é estreito ($w_0 \geq 50\mu\text{m}$) e L está aproximadamente, entre 1 e 5 mm, cobrindo grande gama de caso habituais, escrevemos,

$$\Phi(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, z) = \text{sinc}(l_t Q_x) e^{-il_t Q_x} e^{-ib_1(z)Q^2} \text{sinc}(\beta^2 P^2) e^{-ib_2(z)P^2}, \quad (4.36)$$

explicitando Φ separável nas variáveis \mathbf{Q} e \mathbf{P} .

Substituindo (4.36) em (4.35), obtemos,

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{R}, \mathbf{S}, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(l_t Q_x) e^{-il_t Q_x} e^{-ib_1(z)Q^2} e^{i(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R})} d\mathbf{Q} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\beta^2 P^2) e^{-ib_2(z)P^2} e^{i(\mathbf{P} \cdot \mathbf{S})} d\mathbf{P}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Para a resolução das integrais apresentadas em (4.37), são necessárias algumas manipulações algébricas. Reescrevendo a função sinc, como a transformada de Fourier da função retangular, os termos descritos em ambas as integrais são:

$$\begin{aligned} \text{sinc}(\beta^2 P^2) &= \frac{1}{2\beta^2} \int_{-\beta^2}^{\beta^2} e^{-iP^2 \xi} d\xi, \\ \text{sinc}(l_t Q_x) &= \frac{1}{2l_t} \int_{-l_t}^{l_t} e^{-iQ_x \zeta} d\zeta. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Dessa forma, separando as integrais e resolvendo-as separadamente, obtemos,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\beta^2 P^2) e^{-ib_2(z)P^2} e^{i(\mathbf{P} \cdot \mathbf{S})} d\mathbf{P} &= \frac{1}{2\beta^2} \int_{-\beta^2}^{\beta^2} \left[\iint_{-\infty}^{\infty} e^{-ib_2 P^2} e^{i(S_x P_x + S_y P_y)} e^{-iP^2 \xi} dP_x dP_y \right] d\xi \\ &= \frac{1}{2\beta^2} \int_{-\beta^2}^{\beta^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi+b_2)P_x^2} e^{iS_x P_x} dP_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi+b_2)P_y^2} e^{iS_y P_y} dP_y \right] d\xi \\ &= \frac{i\pi}{2\beta^2} \int_{-\beta^2}^{\beta^2} \frac{e^{(S_x^2 + S_y^2)/4(\xi+b_2)}}{\xi + b_2} d\xi \\ &= \frac{i\pi}{2\beta^2} \left\{ \text{Ei} \left[\frac{i(S_x^2 + S_y^2)}{4(b_2 - \beta^2)} \right] - \text{Ei} \left[\frac{i(S_x^2 + S_y^2)}{4(b_2 + \beta^2)} \right] \right\} \\ &= \frac{i\pi}{2\beta^2} \left\{ \text{Ei} \left[\frac{ik_p^v(S_x^2 + S_y^2)}{2(z-L)} \right] - \text{Ei} \left[\frac{ik_p^v(S_x^2 + S_y^2)}{2(z-L')} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

para $z > L$, onde $L' = (1 - 1/\bar{n}_o)L$ e Ei é a função exponencial integral [43]. De maneira análoga a integração em \mathbf{Q} é feita, assim

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(l_t Q_x) e^{-il_t Q_x} e^{-ib_1(z)Q^2} e^{i(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R})} d\mathbf{Q} &= \frac{1}{2l_t} \int_{-l_t}^{l_t} \left[\iint_{-\infty}^{\infty} e^{-ib_1 Q^2} e^{i(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R})} e^{-i(l_t + \zeta)Q_x} dQ_x dQ_y \right] d\zeta \\ &= \frac{1\pi}{2l_t} \frac{e^{iR_y^2/4ib_1}}{b_1} \int_{-l_t}^{l_t} e^{i(R_x^2 - l_t - \zeta)^2/4b_1} d\zeta \\ &= \frac{-\pi^{3/2}}{2l_t} \frac{e^{iR_y^2/4b_1(z)}}{\sqrt{ib_1(z)}} \left[\text{Erf} \left(\frac{R_x - 2l_t}{2\sqrt{ib_1(z)}} \right) - \text{Erf} \left(\frac{R_x}{2\sqrt{ib_1(z)}} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.40)$$

onde Erf é a função erro [43].

Após inúmeros passos, substituindo os resultados acima, estamos finalmente a par de escrever a amplitude $\psi(\mathbf{R}, \mathbf{S}, z)$, a menos de uma constante,

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{R}, \mathbf{S}, z) = & \frac{e^{iR_y^2/4b_1(z)}}{l_t \sqrt{ib_1(z)}} \left\{ \operatorname{Erf} \left[\frac{R_x - 2l_t}{2\sqrt{ib_1(z)}} \right] - \operatorname{Erf} \left[\frac{R_x}{2\sqrt{ib_1(z)}} \right] \right\} \\ & \times \left\{ \operatorname{Ei} \left[\frac{ik_p^v(S_x^2 + S_y^2)}{2(z-L)} \right] - \operatorname{Ei} \left[\frac{ik_p^v(S_x^2 + S_y^2)}{2(z-L')} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

No espaço $\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2$,

$$\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z) = & \frac{e^{i[(1+\nu)y_1 + (1-\nu)y_2/i16b_1(z)]}}{\sqrt{ib_1(z)}} \\ & \times \frac{1}{l_t} \left\{ \operatorname{Erf} \left[\frac{(1+\nu)x_1 + (1-\nu)x_2 - 4l_t}{4\sqrt{ib_1(z)}} \right] - \operatorname{Erf} \left[\frac{(1+\nu)x_1 + (1-\nu)x_2}{4\sqrt{ib_1(z)}} \right] \right\} \\ & \times \left\{ \operatorname{Ei} \left[\frac{ik_p^v|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2|^2}{8(z-L)} \right] - \operatorname{Ei} \left[\frac{ik_p^v|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2|^2}{8(z-L')} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Para fins computacionais, vale salientar que as exponenciais integrais apresentadas em 4.41 são definidas para $x > 0$ como,

$$\begin{aligned} \operatorname{Ei}(ix) &= \operatorname{Ci}(x) - i \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(x) \right], \\ \operatorname{Ei}(-ix) &= \operatorname{Ci}(x) + i \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(x) \right]. \end{aligned}$$

onde $\operatorname{Si}(x)$ e $\operatorname{Ci}(x)$ são as funções seno integral e cosseno integral, respectivamente [43],

A utilidade de (4.41) na descrição e apresentação de dados experimentais fornecidos pelas correlações espaciais dos fótons produzidos, bem como sua formidável acurácia, eleva os limites experimentais quando testada em certos modelos teóricos. Para demonstrar sua eficiência, consideremos o seguinte exemplo: um feixe bombeador com comprimento de onda $\lambda = 355$ nm incide sobre o cristal não linear, com $L = 5$ mm, cortado para o casamento de fase tipo I no regime colinear. A taxa de detecção em coincidência ($\rho \propto |\psi|^2$)³, fornecida pela equação (4.42), é estabelecida apenas como função de x_1 , condicionando $x_2 = y_1 = y_2 = 0$. Dessa forma, a comparação entre os modelos, o primeiro mencionado em 4.1, e o proposto nesta seção, é avaliada em conjunto, como mostrado na Fig. 11.

Como apresentado na Fig. 11, os modelos que utilizam a aproximação Gaussiana funcionam muito bem em regiões onde $z = L/2$, ou seja, dentro do cristal, e em regiões onde o plano de detecção está distante ($z > L$). Em regiões onde o plano de detecção não está próximo à face de saída do cristal, essa aproximação mostra-se aceitável, apresentando resultados adequados a 5 mm da face de saída, como mostra a Fig. 11c. Entretanto, seus resultados falham grosseiramente quando o plano de detecção é analisado em regiões muito próximas à face de saída (1 μ m da face). A discrepância entre os dois modelos pode ser relevante quando se busca avaliar o campo gerado pela CPD filtrado por fendas ou quando fibras ópticas e guias de onda são acoplados à face de saída do cristal.

Como discutido, a aproximação Gaussiana funciona muito bem dentro das perspectivas mencionadas, embora a necessidade de descrever um sistema físico de maneira geral, abrangendo todos os cenários, seja o desejo de nós, físicos, como o apresentado acima. Portanto, perante o exposto, acreditamos que o modelo proposto garante essa generalização e perspectivas futuras dentro do campo da CPD.

³ A letra grega ρ aqui refere-se à probabilidade de detecção, e não às coordenadas espaciais.

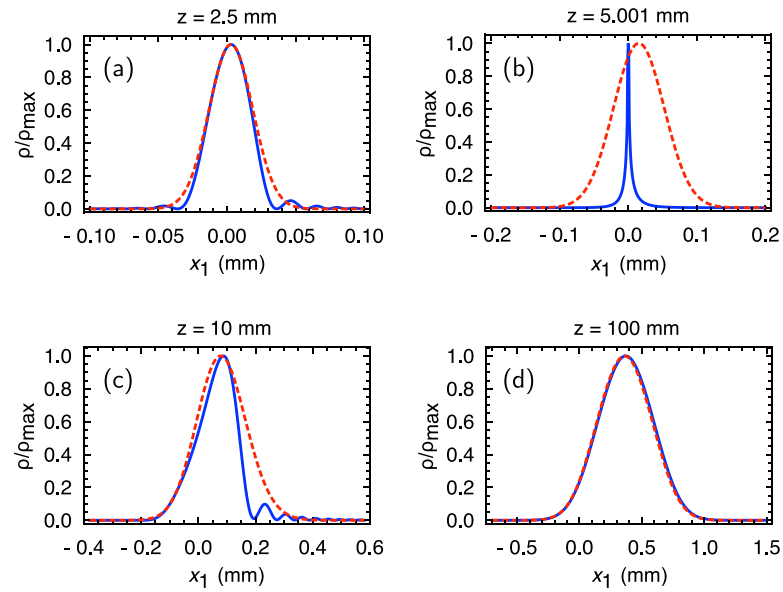


Figura 11 – Taxa de detecção de coincidências normalizadas ρ/ρ_{\max} apresentadas em [37]. As curvas em azul são obtidas através da equação (4.41), já as curvas pontilhadas em vermelho, são as descritas por modelos bi-gaussianos [38], excluindo os efeitos anisotrópicos. Na Fig.(a), $z = 2.5\text{mm}$ vemos resultados significativos, onde ambos os modelos assemelham-se. Em (b) notamos uma evidente discrepância, onde a taxa de detecção em coincidências se assemelha a uma função δ . A medida que z cresce, como mostrado nas figuras (c) e (d), é novamente vislumbrado uma harmonia entre os modelos.

5 O experimento

Como previamente abordado, o emaranhamento é uma das célebres características da Mecânica Quântica. Por consequência, uma série de sistemas físicos são usados como fontes de estados que apresentem essas correlações com possíveis aplicações em tecnologias quânticas. A Conversão Paramétrica Descendente se mostrou, ao longo dos anos, uma das principais fontes de pares de fótons emaranhados devido às suas facilidades e o emaranhamento apresentado em variáveis contínuas [5–11]. As correlações presentes nesses sistemas nos permitem avaliar consequências em propriedades importantes como momento e posição transversal. Em geral, a grande gama dos trabalhos que aprofundam nessas correlações, optam por modelos teóricos que desprezam a anisotropia. Dentro dessa perspectiva, é analisada apenas a direção onde a birrefringência não afeta as correlações, isto é, a direção normal ao plano principal. A proposta e execução de uma nova descrição, abordando os efeitos anisotrópicos e abrindo mão da aproximação Gaussiana [37], possibilitou o estudo dessas correlações, juntamente com a possibilidade de avaliar o grau de emaranhamento fornecido por esses sistemas, e como ele pode ser afetado pelos efeitos da birrefringência.

O objetivo primordial desse capítulo é avaliar o grau de correlação fornecido através do parâmetro K , utilizando resultados fornecidos pelas equações (4.41) e (4.36) em detecção simples e coincidência. Realizamos medições em ambas as direções, normal e paralela ao plano principal e também modificamos as propriedades do feixe bombeador em cinco configurações diferentes, a fim de trazer dados gerais do sistema físico em análise. Perante o exposto, abordaremos a descrição dos dispositivos usados, em conjunto com suas respectivas funções dentro do experimento, a montagem experimental, e ao final, as medições realizadas. Também iremos comparar os dados obtidos, avaliando K por três métodos diferentes [10, 39] e vislumbrar possíveis semelhanças e divergências entre eles.

5.1 Descrição dos dispositivos ópticos

5.1.1 Laser

O laser utilizado é um Coherent Genesis CX355-100 STM Compact (OEM), sendo um modelo Optically Pumped Semiconductor Laser, cuja sigla OPSL, em tradução literal: Laser Semicondutor bombeado opticamente, mostrado na Fig.12. Trata-se de um laser contínuo, de pureza espectral maior que 99%, sendo seu comprimento de onda (λ) centrado em 355 ± 2 nm e possuindo polarização horizontal com desvio de $\pm 5^\circ$. Estima-se que o diâmetro de sua cintura seja: 0.975 ± 0.2 e 0.915 ± 0.2 mm - horizontal e vertical, respectivamente. Por ser um laser de diodo, nota-se que possui um perfil levemente astigmático, característica comum em lasers desta classe. O fator M^2 , definido como fator de qualidade do modelo utilizado, é apresentado pelo fabricante como superior a 1.2. Devido à nossa montagem, possíveis reflexões causadas pelo telescópio podem afetar o valor de M^2 , portanto, esses valores foram ajustados para um telescópio ideal.

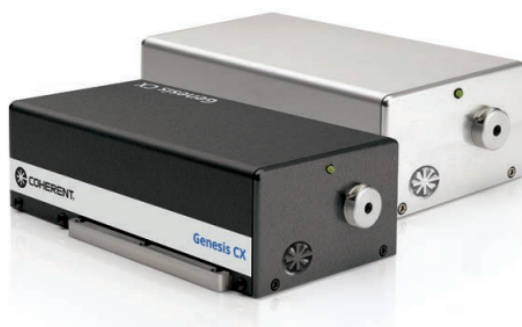


Figura 12 – Laser Coherent Genesis CX355-100 STM Compact (OEM) utilizado em nosso experimento.

5.1.2 Lentes

A utilização de lentes forma dois padrões distintos de interesse. O primeiro deles é a obtenção da transformada de Fourier no plano focal, conjugado ao plano da fonte; o segundo, não menos importante, é a formação da imagem do objeto no plano conjugado ao plano do objeto. Em nosso experimento, utilizamos lentes plano-convexas e objetivas para as funções mencionadas: tanto para a formação da imagem, cujo objeto é o conhecimento $(|\psi(\mathbf{R}, \mathbf{S}, z)|^2)$, quanto para o uso das lentes como transformada de Fourier $(|\psi(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, z)|^2)$.

Para o cálculo da formação de imagem, utilizamos a clássica equação das lentes gaussianas, definida por:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i}, \quad (5.1)$$

onde f é a distância focal, s_o é a distância do objeto e s_i é a distância de formação da imagem, como na Fig.13 abaixo.

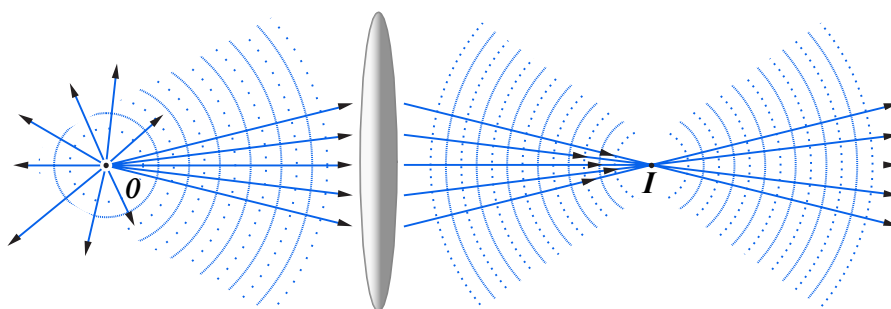


Figura 13 – Ilustração da formação de imagem através de lentes. O representa o objeto/fonte, e o ponto I está a uma distância f , definida pela posição do foco da lente. A imagem invertida forma-se a uma distância $2f$.

Em nosso experimento, utilizamos a formação de imagem em escala 1:1, de modo que não haja magnificação (ampliação). Os valores correspondentes para as distâncias são $s_o = s_i$, garantindo que a magnificação (M) seja igual a 1.

Além das funções já discriminadas para lentes, utilizamos um telescópio para alterar as configurações do feixe bombeador, deslocando sua cintura e o tamanho ao longo da direção de propagação, o deixando focalizado em algumas situações e mais colimado em outras.

Montagem experimental

Para a realização do experimento proposto, utilizamos a montagem experimental mostrada na Fig. 14. Com essa montagem, foi possível mensurar as correlações e verificar o grau de emaranhamento K que tais correlações apresentam, avaliando as larguras dos perfis transversais em detecção simples e em coincidência.

O sistema é composto por um laser contínuo com comprimento de onda $\lambda = 355\text{nm}$ e polarização horizontal. Dois espelhos foram utilizados para refletir o feixe do laser, de modo a otimizar o uso do espaço na mesa óptica. Após os espelhos, inseriu-se um prisma com a finalidade de separar certos comprimentos de onda, especialmente a luminescência do ultravioleta. As lentes L_3 e L_4 foram usadas para compor o telescópio; por meio do qual, modelamos as propriedades do feixe bombeador. As distâncias focais das lentes L_3 e L_4 utilizadas são 50 mm e 40 mm, respectivamente. Ao variar as distâncias entre essas lentes com auxílio de um deslocador métrico de alta precisão, modificamos o tamanho de sua cintura w_0 e sua posição ao longo de z . Essa distância totalmente arbitrária a fim apenas da modulação do feixe e definida como z_{L_4} . Durante o experimento, alteramos as propriedades do feixe por cinco vezes. Após passar pelo telescópio, o feixe remodelado entra no meio não linear. Neste caso, foi utilizado um cristal de BBO ($\beta\text{-BaB}_2\text{O}_4$), cortado para casamento de fase tipo-I. O comprimento L do cristal é de 5 mm, e a orientação de seu eixo óptico está no plano xz . Logo na saída do cristal, há um espelho dicróico, responsável por transmitir apenas os raios infravermelhos gerados pela CPD e refletir os raios provenientes do laser (UV). A luz convertida, em regime colinear, forma os feixes signal e idler com $\lambda_1 = \lambda_2 = 710\text{ nm}$. Em seguida, esses feixes encontram o divisor de feixe, onde ocorre a separação dos dois feixes gerados no BBO, que são novamente direcionados a um novo conjunto de lentes. Essas lentes foram mantidas a uma distância fixa de 200 mm do cristal não linear e possuem distâncias focais iguais, de $f = 100\text{ mm}$. Após percorrer esse caminho, o feixe luminoso chega aos detectores D_1 e D_2 , que foram acoplados, em sua face de entrada, com filtros de interferência de $710 \pm 10\text{ nm}$. Os detectores são montados em motores de passo, permitindo o controle computacional dos movimentos nas direções x e y . Ainda no sistema de detecção, há a presença de fibras multimodo de $25\ \mu\text{m}$ conectadas a D_1 e D_2 , responsáveis por guiar os fótons até dois APDs (avalanche photodiodes), onde é feito o registro das contagens e suas respectivas coincidências. Como mostrado na Fig. 14, as posições de D_1 e D_2 ao longo de z são variáveis, dependendo do que está sendo avaliado.

Toda a montagem é mantida fixa, com exceção de L_4 , D_1 e D_2 . Para obtenção de $|\psi(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, z)|^2$ e $|\psi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, z)|^2$, movemos os detectores para duas posições ao longo do eixo z , paralelo ao plano da mesa. São realizados dois tipos de medidas para ambas as representações: detecção simples e em coincidência.

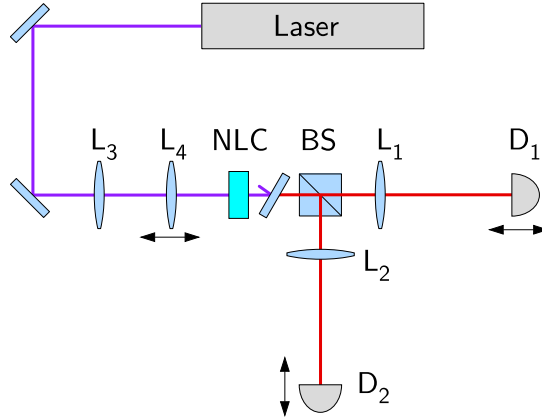


Figura 14 – Montagem experimental para medição das correlações EPR e avaliação do grau de emaranhamento promovido por K .

Ao avaliar o plano de Fourier ($\psi(\mathbf{q})$), centramos o plano de detecção ($D_{1,2}$) no plano focal das lentes $L_{1,2}$, de modo que os detectores são posicionados a 100 mm das lentes e a 300 mm do cristal gerador. Nessa configuração, ao varrer todo o plano de detecção (xy), podemos obter $|\psi(\mathbf{q}_1, 0, z)|^2$. Em ambos os cenários apresentados, trabalhamos no regime condicional, ou seja, um detector é mantido fixo enquanto o outro é colocado em movimento. Para o regime incondicional ou detecção simples, as medidas são realizadas em termos de D_1 ou D_2 , e, através desses resultados, somos capazes de obter $\Delta k_{1,2}^{(s)}$. Já para detecção em coincidência, é necessário um ajuste refinado nas posições dos detectores no plano xy , a fim de encontrar os fótons que foram formados simultaneamente. Na detecção condicional, utilizamos ambos os detectores D_1 e D_2 , embora apenas um permaneça em movimento. Esse resultado nos permite calcular as incertezas $\Delta k_{1,2}^{(c)}$ para ambas as dimensões (x, y), que, juntamente com as incertezas definidas para detecção simples, são fundamentais para o cálculo de K .

Para medições realizadas no plano imagem, seguimos procedimentos semelhantes aos do plano de Fourier. No entanto, nesse cenário, os detectores foram posicionados a uma distância de 200 mm das lentes $L_{1,2}$ e aproximadamente 400 mm do cristal. Nessa posição, obtemos a densidade de probabilidade, que é proporcional a $|\psi(\boldsymbol{\rho}_1, 0, z)|^2$, sendo novamente feitas sob regime condicional ($\boldsymbol{\rho}_2 = 0$). A obtenção desses resultados nos permite avaliar experimentalmente a posição onde os fótons são gerados. Com acesso à densidade de probabilidade, foi possível, de modo semelhante ao realizado no plano de Fourier, encontrar as larguras condicionais e incondicionais fornecidas por $\Delta x_{1,2}^{(c,s)}$ e $\Delta y_{1,2}^{(c,s)}$.

5.2 Discussões e resultados

Neste seção apresentaremos como foi o planejamento e os resultados obtidos seguindo os passos da seção anterior.

5.2.1 Proposta e execução

Para a conclusão e obtenção de respostas consistentes desse experimento, o grupo o executou oito vezes até alcançar o êxito. Essa vivência nos possibilitou realizar análises e identificar métodos úteis que

contribuíram para o sucesso. Em determinados cenários, os detalhes eram mais minuciosos e exigiam maior atenção. Assim, traçamos um roteiro e simulamos os possíveis caminhos antes de realizar as medições.

Os dados apresentados na tabela a seguir são parâmetros experimentais para medidas no plano de Fourier que, com certo cuidado, permitem simulações prévias para sua obtenção. Como abordado na seção anterior, a modelagem dos parâmetros do feixe bombeador é realizada por meio do telescópio composto pelas lentes L_3 e L_4 , sendo que uma distância arbitrária ajusta todos os parâmetros remanescentes, aqui definida como z_{L_4} . Essa remodelagem configura a cintura do feixe, w_0 , e, conseqüentemente, a transferência do espectro angular do feixe bombeador para os fótons gerados [6]. Os efeitos da birrefringência nas correlações são evidenciados ao analisarmos o plano de Fourier, ou seja, os efeitos anisotrópicos do meio refletem-se na representação no espaço de momentos ($\psi(\mathbf{q})$) [37]. Os dados referentes a σ_x e σ_y correspondem às dispersões r_x e r_y são as distâncias percorridas pelo detector D_1 nas direções x e y , respectivamente. A coluna descrita como Δ_{xy} indica a distância que cada passo do motor de passo percorre de cada vez, dentro do intervalo descrito por $r_{x,y}$. O valor de τ refere-se ao tempo de amostragem em cada passo percorrido, isto é, a cada passo, o detector permanece pelo tempo estabelecido por τ . Por último, T indica o tempo total aproximado para a finalização de cada medida. Como mostrado na Tabela 1, as dispersões σ_x e σ_y possuem valores distintos quando o feixe está focalizado ($w_0 = 0.083$) e quando está colimado apresenta valores semelhantes ($w_0 = 0.423$).

Med.	$w_0(\text{mm})$	$\sigma_x(\text{mm}^{-1})$	$\sigma_y(\text{mm}^{-1})$	$r_x(\text{mm})$	$r_y(\text{mm})$	$\Delta_{xy}(\text{mm})$	$\tau(\text{s})$	$T(\text{min})$
1	0.423	0.033	0.03	[-0.12, 0.12]	[-0.12, 0.12]	0.01	1	10
2	0.333	0.033	0.036	[-0.13, 0.13]	[-0.15, 0.15]	0.01	2	28
3	0.248	0.041	0.048	[-0.16, 0.16]	[-0.20, 0.20]	0.01	3	68
4	0.163	0.051	0.071	[-0.20, 0.20]	[-0.28, 0.28]	0.02	5	51
5	0.083	0.064	0.142	[-0.26, 0.26]	[-0.56, 0.56]	0.02	12	308

Tabela 1 – Dados simulados computacionalmente para realização das medições no plano de Fourier.

A seguir serão apresentadas as medições e seus resultados. A utilização dos dados semelhantes aos mostrados acima permitiu promover um melhor comportamento dentro das adversidades ocorridas em laboratório. Como poderá ser visto alguns parâmetros podem divergir; como exemplo: tempo de medição, pois as contagens são diretamente atreladas à potência do laser e também da amostragem em cada ponto. Ao final avaliaremos os resultados obtidos no plano de Fourier e os compararemos com o que foi proposto na Tabela 1.

5.2.2 Medições

Todas as medições apresentadas foram realizadas sob as mesmas condições; ou seja, ao iniciar a primeira medida, mantivemos os equipamentos ligados até o término da quinta. Em cada uma das posições mencionadas para z_{L_4} , realizamos um conjunto de quatro medidas: detecção simples e coincidência no plano imagem, e detecção simples e coincidência no plano de Fourier. Com o intuito de evidenciar o efeito da anisotropia, apresentaremos apenas os casos extremos das medições realizadas: feixe focalizado e colimado. Começaremos pelo plano imagem e, em seguida, o plano de Fourier.

5.2.2.1 Plano Imagem

As contagens em detecção simples e coincidência no plano imagem ($\psi(\boldsymbol{\rho})$) resultam em uma alta contagem de fótons. Como pode ser observado nos gráficos da Fig.15, em ambos os cenários (condicional e incondicional) os resultados são satisfatórios. Nota-se que, mesmo considerando os efeitos anisotrópicos, as

correlações não são afetadas nas duas direções de detecção (x e y), pois a imagem é registrada no plano de formação dos fótons, e não ocorre propagação do estado quântico.

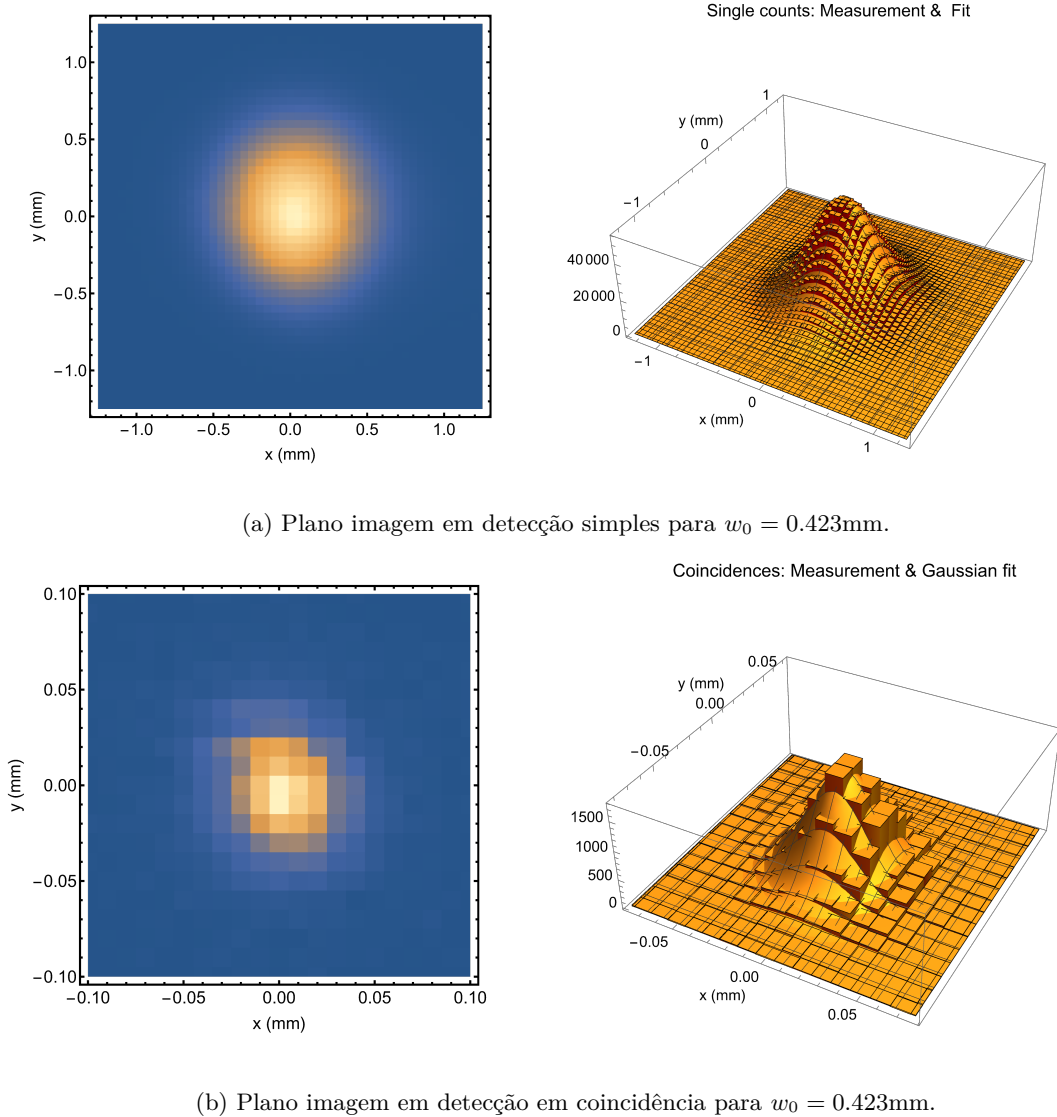


Figura 15 – Perfis de detecção e seus ajustes para as medições realizadas no plano imagem. A Fig. 15a denota as contagens em detecção simples e a Fig. 15b as detecções em coincidência.

Na detecção simples da primeira medição, definimos a distância arbitrária, z_{L_4} , como 15,49 mm, tal distância fornece a cintura do feixe w_0 cuja largura é 0,423 mm. Utilizamos o laser com uma potência de 70 mW e um alcance $r_{x,y}$ de 1,25 mm em ambas as direções. Cada passo Δ_{xy} foi definido como 0,05 mm, e a divisão do alcance total de D_1 pela distância de cada passo resultou em uma matriz quadrada de 676 pontos. O tempo de amostragem em cada ponto, τ , foi definido como 1 segundo, totalizando um tempo de medição T de 59 minutos e 23 segundos. O resultado das medições pode ser visto na Fig. 15a; à esquerda, é mostrado o perfil de detecção, e à direita, suas respectivas contagens e o ajuste gaussiano.

Na detecção em coincidência para a primeira medição, mantivemos o feixe com cintura $w_0 = 0,423$ mm. A potência do laser foi mantida em 70 mW, com um alcance $r_{x,y}$ de 100 μm em ambas as direções. Cada passo Δ_{xy} foi definido como 5 μm , e a divisão do alcance total de D_1 pela distância de cada passo resultou em uma matriz quadrada de 441 pontos. O tempo de amostragem em cada ponto, τ , foi definido como 1 segundo, totalizando um tempo de medição T de 36 minutos e 23 segundos. Na Fig. 15b, podemos

visualizar o resultado: à esquerda, é mostrado o perfil de detecção, e à direita, suas respectivas contagens e o ajuste gaussiano.

Para a detecção simples realizada na quinta medição, definimos z_{L_4} como 17,93 mm. Tal distância arbitrária modela a cintura do feixe, w_0 cuja largura é 0,083 mm. Utilizamos o laser com uma potência de 30 mW e um alcance $r_{x,y}$ de 1 mm em ambas as direções. Cada passo Δ_{xy} foi definido como $50 \mu\text{m}$, e a divisão do alcance total de D_1 pela distância de cada passo resultou em uma matriz quadrada de 441 pontos. O tempo de amostragem em cada ponto, τ , foi definido como 1 segundo, totalizando um tempo de medição T de 38 minutos e 26 segundos. Na Fig. 16, o resultado é apresentado: à esquerda, é mostrado o perfil de detecção, e à direita, suas respectivas contagens e ajuste.

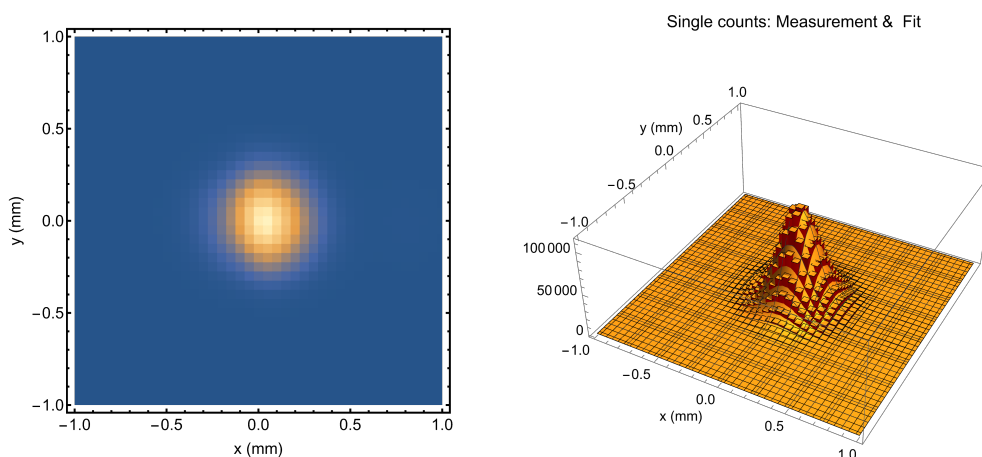


Figura 16 – Detecção incondicional para o plano imagem em $w_0 = 0.083\text{mm}$.

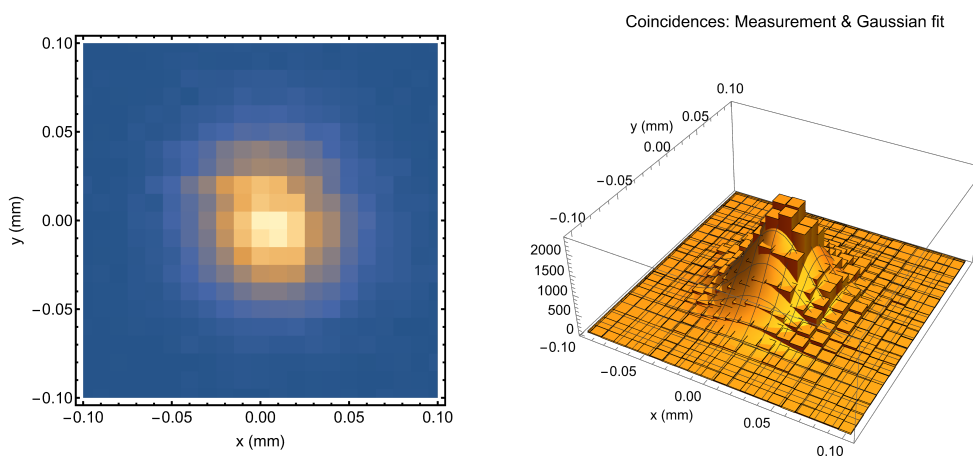


Figura 17 – Detecção condicional para o plano imagem em $w_0 = 0.083\text{mm}$.

Seguindo os mesmos procedimentos para a detecção em coincidência na quinta medição, mantivemos z_{L_4} em 17,93 mm, mantendo w_0 em 0.083mm. A potência do laser foi mantida em 30 mW, com

um alcance $r_{x,y}$ de $100 \mu\text{m}$ em ambas as direções. Cada passo, $\Delta_{x,y}$, foi definido como $5 \mu\text{m}$, e a divisão do alcance total de D_1 pela distância de cada passo resultou em uma matriz quadrada de 441 pontos. O tempo de amostragem em cada ponto, τ , foi definido como 1 segundo, totalizando um tempo de medição T de 36 minutos e 21 segundos. Na Fig. 17, o resultado pode ser visualizado: à esquerda, é mostrado o perfil de detecção, e à direita, as respectivas contagens e o ajuste gaussiano.

5.2.2.2 Plano de Fourier

As contagens em detecção simples e em coincidência no plano de Fourier ($\psi(\mathbf{q})$) resultam em uma menor contagem de fótons. Como pode ser visto nos gráficos, mostrados nas Fig.18 19 20 21, em ambos os cenários (condicional e incondicional), as curvas apresentam uma largura maior. Diferentemente do observado anteriormente, os efeitos anisotrópicos tornam-se evidentes nas correlações em ambas as direções x e y , merecendo nossa atenção. Os dados apresentados aqui serão utilizados para calcular o grau de emaranhamento que essas correlações apresentam, bem como suas respectivas variações ao alterar w_0 .

Para as medições realizadas em detecção simples, a primeira medida da Tabela 1 foi obtida mantendo a distância, z_{L_4} , em $15,49 \text{ mm}$, fornecendo w_0 igual a $0,423 \text{ mm}$, como nas medições anteriores. A potência do laser foi fixada em 70 mW , com um alcance $r_{x,y}$ de $2,5 \text{ mm}$ nas direções x e y . Os passos estipulados pelo motor de passo foram de $100 \mu\text{m}$, e a divisão do alcance total dado por D_1 pelo passo resultou em uma matriz quadrada composta por 676 pontos. O tempo de amostragem, τ , foi definido como 1 segundo, totalizando um tempo de medição T de 1 hora, 3 minutos e 4 segundos.

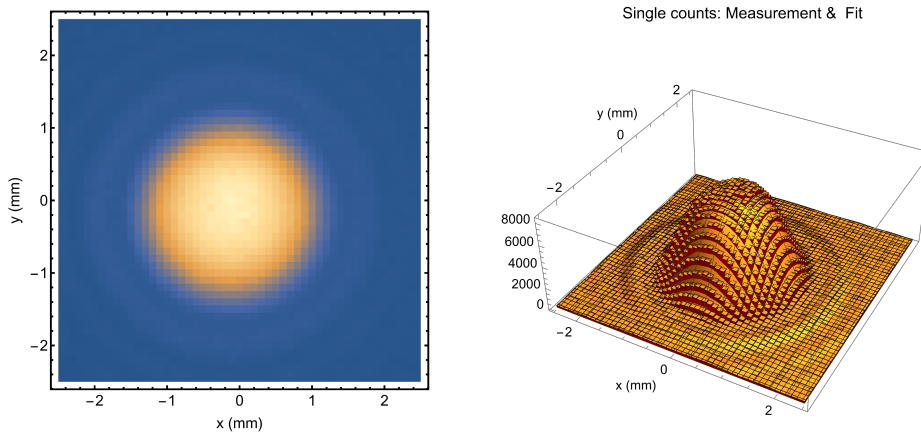


Figura 18 – Detecção incondicional para o plano de Fourier para $w_0 = 0.423\text{mm}$.

As medições para esse conjunto de parâmetros são apresentadas na Fig. 18; à esquerda, vê-se o perfil de detecção, e à direita, suas respectivas contagens e ajuste.

No regime condicional (coincidência), a distância z_{L_4} foi mantida em $15,49 \text{ mm}$, fornecendo novamente w_0 igual a $0,423 \text{ mm}$. A potência do laser precisou ser aumentada devido à queda no número de contagens, sendo ajustada para 70 mW . O alcance nas direções x e y , definido por $r_{x,y}$, foi fixado em $120 \mu\text{m}$, e os passos cobriram uma distância $\Delta_{x,y}$ de $10 \mu\text{m}$. O tempo de amostragem, τ , para esta medição foi de 2 segundos, totalizando um tempo final T de 24 minutos e 3 segundos. Na Fig. 19, observa-se o perfil, juntamente com os respectivos valores e o ajuste gaussiano ao final da medida.

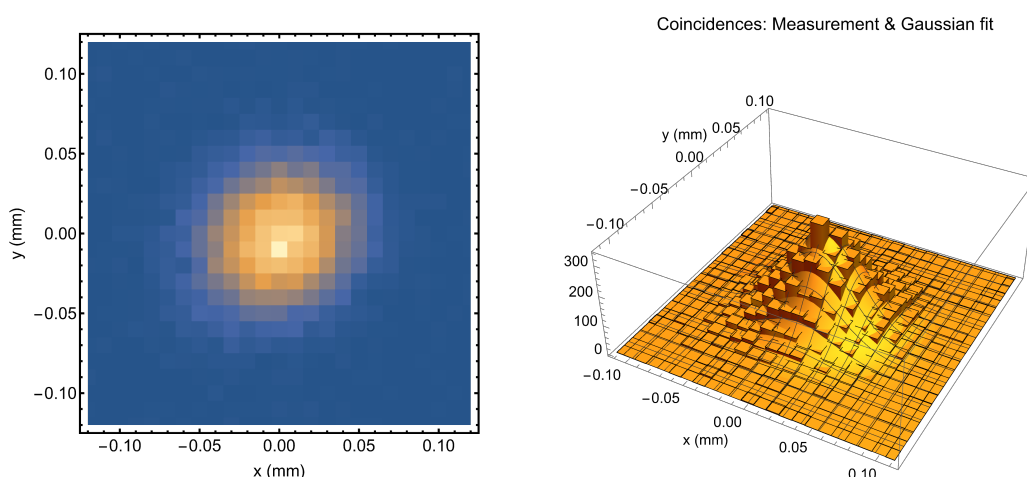


Figura 19 – Detecção condicional para o plano de Fourier para $w_0 = 0.423\text{mm}$.

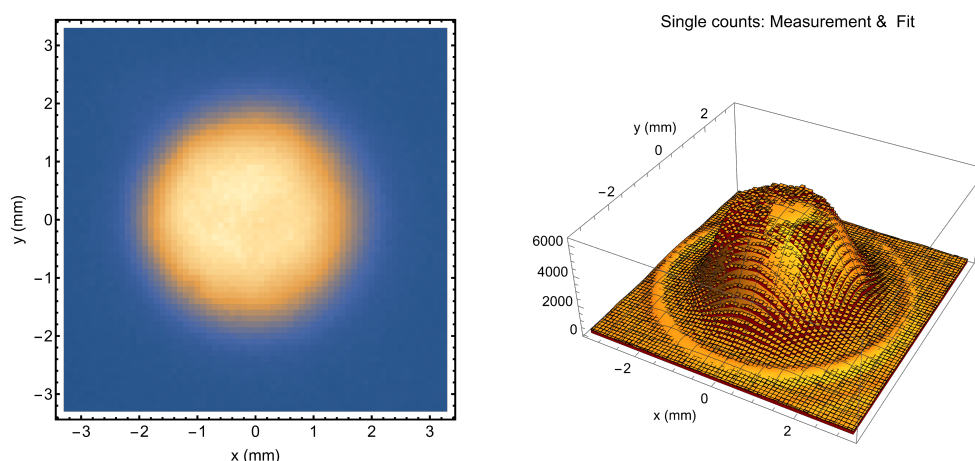


Figura 20 – Detecção incondicional para o plano de Fourier para $w_0 = 0.083\text{mm}$.

Para a quinta medição em regime incondicional, a distância z_{L_4} , como mencionado, é 17,93 mm, e o respectivo valor de w_0 para essa configuração é 0,083mm. Devido à queda no número de contagens de fótons, a potência do laser foi reajustada para 90 mW, e o alcance de D_1 , definido como $r_{x,y}$, foi de 3,3 mm. Os passos, $\Delta_{x,y}$, escolhidos para cobrir esse alcance foram de $100\ \mu\text{m}$, resultando em uma matriz quadrada composta de 1156 pontos. O tempo de amostragem, τ , foi definido como 1 segundo, totalizando um tempo de medição de 1 hora, 48 minutos e 57 segundos. Ao final da medida, obteve-se o perfil de detecção mostrado na Fig. 20, com suas contagens e respectivo ajuste.

Para o regime condicional, cuja posição escolhida para z_{L_4} foi de 17,93 mm, ocasionando novamente, em $w_0 = 0.083\text{mm}$, utilizamos o laser com uma potência de 90 mW. O alcance $r_{x,y}$ necessitou de valores diferentes para as direções x e y . Em x , o alcance de D_1 foi estipulado em $560\ \mu\text{m}$, e em y , em $260\ \mu\text{m}$. Dado que as contagens de fótons apresentaram valores muito baixos, o tempo de amostragem, τ , em cada

ponto precisou ser substancialmente aumentado, sendo fixado em 10 segundos, totalizando um tempo de medição T de 4 horas, 24 minutos e 3 segundos. Na Fig. 21, é mostrado o perfil de detecção com os respectivos número de contagens e seu ajuste gaussiano.

As correlações são fortemente afetadas quando o feixe está focalizado, evidenciando a limitação imposta na transferência do espectro angular para os fótons gerados. Essa limitação ocorre porque o valor de w_0 (0,083 mm) não é maior que l_t (0,185 mm), como foi ilustrado na Fig.8; dessa forma, as correlações são visivelmente limitadas no plano paralelo ao plano principal (x), conforme demonstrado em [6]. Essa restrição é uma consequência direta dos fenômenos anisotrópicos do meio, influenciando o grau de emaranhamento K , que será abordado na seção posterior.

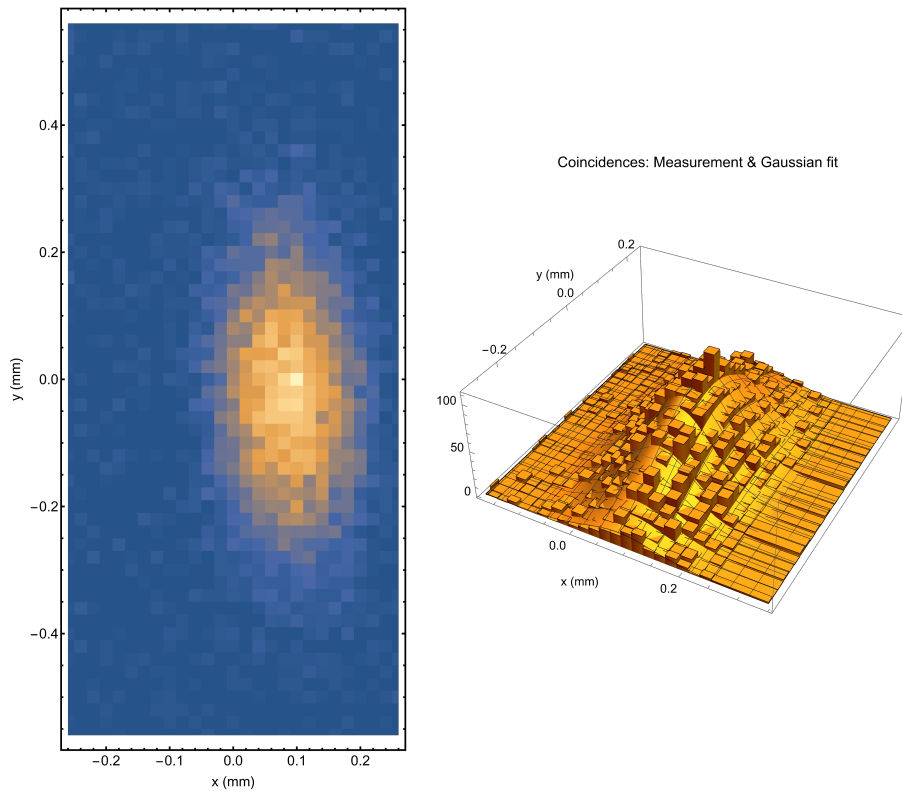


Figura 21 – Detecção condicional para o plano de Fourier para $w_0 = 0.083\text{mm}$.

Para comparação, mostraremos os dados obtidos experimentalmente para todas as cinco medições no plano de Fourier, seguindo os parâmetros da Tabela 1. Assim, poderemos avaliar a fidelidade entre os resultados experimentais, mostrados na Tabela 2, e os simulados, previamente apresentados na Tabela 1.

Med.	$w_0(\text{mm})$	$\sigma_x(\text{mm}^{-1})$	$\sigma_y(\text{mm}^{-1})$	$r_x(\text{mm})$	$r_y(\text{mm})$	$\Delta_{xy}(\text{mm})$	$\tau(\text{s})$	$T(\text{min})$
1	0.423	0.0302	0.0295	[-0.12, 0.12]	[-0.12, 0.12]	0.01	2	24
2	0.333	0.0358	0.0371	[-0.13, 0.13]	[-0.15, 0.15]	0.01	2	37
3	0.248	0.0426	0.0516	[-0.16, 0.16]	[-0.20, 0.20]	0.01	3	75
4	0.163	0.0543	0.0762	[-0.20, 0.20]	[-0.28, 0.28]	0.02	6	64
5	0.083	0.0763	0.163	[-0.26, 0.26]	[-0.56, 0.56]	0.02	10	240

Tabela 2 – Dados obtidos experimentalmente através das medições realizadas no plano de Fourier.

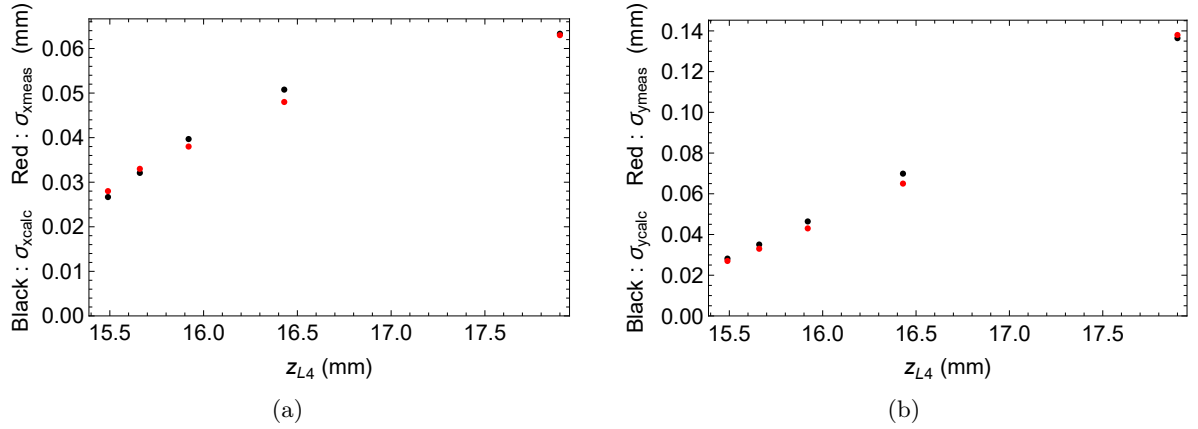


Figura 22 – Comparação entre resultados simulados computacionalmente e os resultados obtidos nas medições em termos das larguras em x e y e da distância z_{L4} .

Diante do exposto, observa-se na Fig.22 que os dados obtidos experimentalmente estão em forte concordância com os valores previamente calculados, evidenciando o sucesso das medições realizadas. Esses resultados corroboram as hipóteses iniciais do grupo e conferem segurança aos dados apresentados.

5.2.3 O grau de emaranhamento - K

Como evidenciado na seção 3.2.2, embora o número de Schmidt não possa ser mensurado experimentalmente, seu significado físico pode ser relacionado às dispersões definidas na representação do momento transversal ($\Delta k_{1,2}^{(c,s)}$) [11], bem como ao inverso do grau de coerência geral da fonte [10]. Conforme o desenvolvimento das equações (4.41) e (4.36) demonstra, uma representação mais fiel do processo físico permite futuras projeções e comparações com outros métodos de medição de emaranhamento [39]. Para validar experimentalmente o impacto do grau de emaranhamento nas correlações, apresentaremos os dados obtidos para K nas medições mencionadas, analisando as respostas resultantes em diferentes direções em relação ao plano principal e à focalização. Posteriormente, apresentaremos o produto entre esses dois resultados, que revela o emaranhamento total do sistema, definido como:

$$R_F = R_{\perp} R_{\parallel}. \quad (5.2)$$

Aqui avaliaremos o parâmetro R_F em sua representação de momentos, e por motivos já esclarecidos na seção 3.2.3, escrevemos

$$R_F = K. \quad (5.3)$$

Consequentemente, com as medições realizadas na seção anterior, somos capazes de estabelecer os valores obtidos para w_0 e construir o gráfico de K em função desses valores. A visualização dos valores de w_0 é apresentada na Tabela 3 a seguir:

Medida	w_0 (mm)
1	0.423
2	0.333
3	0.248
4	0.163
5	0.083

Tabela 3 – Valores de w_0 para as medições realizadas para diferentes distâncias entre as lentes L_3 e L_4 .

Ainda a fim de uma melhor compreensão dos dados obtidos, podemos explicitar as dispersões, para ambas as direções e posteriormente a construção dos gráficos. Para as dimensões k_x e k_y , apresentamos as dispersões em termos da detecção simples e coincidência na tabela a seguir:

Medida	$\sigma_{k_x}^{(s)}$ (mm ⁻¹)	$\sigma_{k_y}^{(s)}$ (mm ⁻¹)	$\sigma_{k_x}^{(c)}$ (mm ⁻¹)	$\sigma_{k_y}^{(c)}$ (mm ⁻¹)
1	0.825	0.820	0.0302	0.0295
2	0.848	0.843	0.0358	0.0371
3	0.866	0.860	0.0426	0.0516
4	1.030	1.020	0.0543	0.0762
5	1.20	1.190	0.0763	0.1630

Tabela 4 – Dispersões obtidas nas medições realizadas para as ambas dimensões e regimes analisados.

As diferenças entre essas dispersões, mostradas na Tabela 4, podem ser facilmente observadas na Fig. 23, em termos do ajuste Gaussiano em suas respectivas marginais. Essa diferença está diretamente ligada a dois fatores cruciais: birrefringência e focalização, conforme discutido anteriormente. Observa-se que, à medida que o feixe se torna mais focalizado — isto é, com a diminuição do valor de w_0 — as dispersões se afastam; de forma oposta, à medida que w_0 aumenta, esses valores se aproximam.

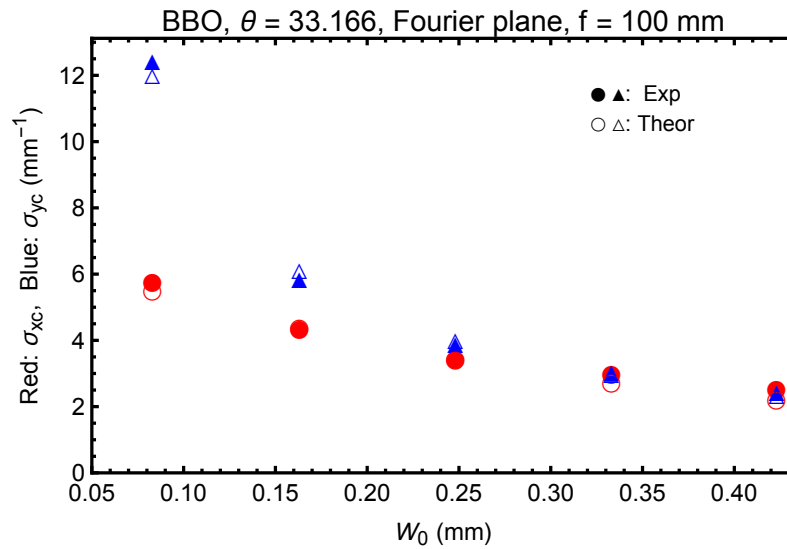


Figura 23 – Dispersões de $k_{x,y}$ teoricamente calculadas e obtidas experimentalmente ajustadas por suas marginais e em termos de w_0 . Os triângulos preenchidos em azul representam as dispersões na direção y experimentalmente, os vazios correspondem aos valores teóricos. Os círculos preenchidos em vermelho representam as dispersões em x , já os vazios são pertencentes aos dados obtidos teoricamente

Para a interpretação dos dados acima, é necessário separá-los em dois cenários. Primeiramente, avaliaremos a presença da anisotropia do meio (*walk-off*) em conjunto com a focalização na direção x . À medida que focalizamos o feixe bombeador, sua cintura apresenta um menor valor e, por consequência, seu espectro angular se torna cada vez mais largo, embora a transferência seja limitada pela dispersão causada pela função sinc(...). Conforme exposto, observa-se na Fig. 24 que a focalização tem pouca importância na direção paralela ao plano principal.

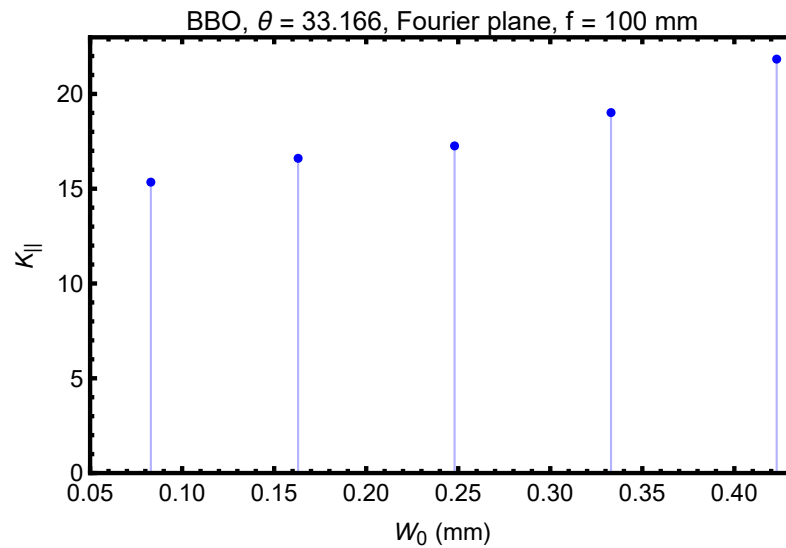


Figura 24 – Valores obtidos para K em direção paralela ao plano principal em termos de w_0 .

Na direção perpendicular ao plano principal, o efeito é oposto ao descrito acima em relação à focalização. À medida que variamos a cintura do feixe bombeador, a dispersão é visivelmente afetada, o que também impacta o valor de K , como mostrado na Fig. 25. Ao focalizar o feixe bombeador, o espectro angular apresenta uma dispersão cada vez maior; entretanto, diferentemente da direção k_x , não há limitação decorrente do *walk-off*. À medida que o feixe é colimado, o espectro angular transmitido para os fótons gerados apresenta menor dispersão e, conseqüentemente, a correlação entre eles aumenta, resultando em um acréscimo no valor de K . Portanto, é plausível afirmar que a focalização é um fator crucial nas correlações quando a dimensão analisada é perpendicular ao plano principal.

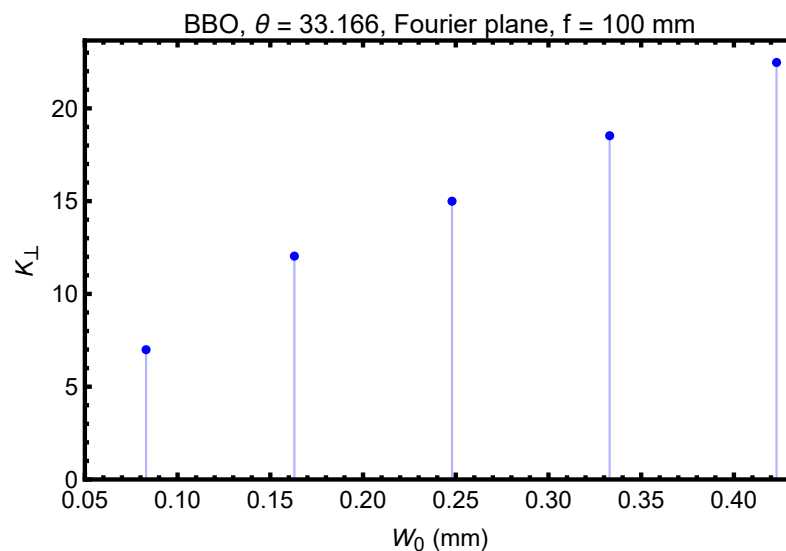


Figura 25 – Resultados par K na direção perpendicular ao plano principal em termos de w_0

Diante do exposto, considera-se o produto entre as dimensões para obter o grau de correlação do sistema em ambas as direções. Conforme mostrado em [44], deve-se levar em conta a bidimensionalidade do

processo e as dificuldades de calcular o número de Schmidt para casos além da aproximação Gaussiana, nos quais não há fatoração da função de onda. A proposta apresentada na equação 5.2 permite a construção do gráfico do produto dos valores medidos, como mostrado nas Fig. 25 e 24, resultando na Fig. 26 abaixo.

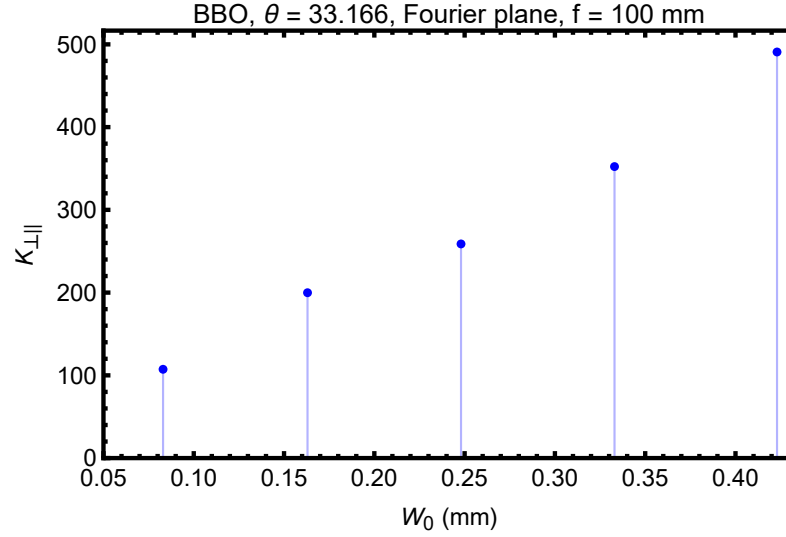


Figura 26 – K total, definido como o produto de ambas as direções em termos de w_0 .

A partir deste ponto, compararemos os dados obtidos com métodos já demonstrados e presentes na literatura. Iniciamos pela abordagem de Law e Eberly [39], que propuseram a decomposição de Schmidt para o estado gerado pela CPD, calculada computacionalmente. Em termos do modelo gaussiano apresentado em 4.1, Law e Eberly avaliaram o grau de emaranhamento em função do produto entre o perfil do feixe bombeador e os parâmetros do cristal, definido como:

$$K = \frac{1}{4} \left(\beta\sigma_{\perp} + \frac{1}{\beta\sigma_{\perp}} \right)^2, \quad (5.4)$$

onde $\beta = L/4k_p$. Note que a análise é realizada em termos de K_{\perp} , ou seja, não há consideração dos efeitos birrefringentes discutidos anteriormente. A partir de (5.4), é possível afirmar que K aumenta à medida que o termo de referência $\beta\sigma_{\perp}$ aumenta ou diminui, dependendo dos casos $\beta\sigma_{\perp} \gg 1$ e $\beta\sigma_{\perp} \ll 1$. Quando $K = 1$, o estado quântico é considerado não emaranhado.

Para as medições realizadas, o grau de emaranhamento em função de $\beta\sigma_{\perp}$ é apresentado na Fig. 27, e em função de w_0 na Fig. 28. Nota-se que o comportamento de K em Fig. 27 é semelhante ao proposto por Law e Eberly, embora haja algumas divergências possíveis de investigação, como exemplo: os diferentes valores encontrados para os três métodos.

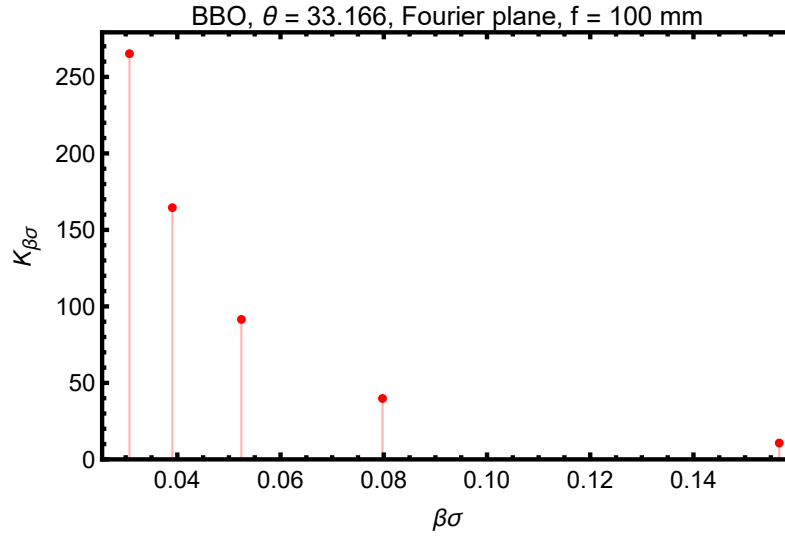


Figura 27 – K avaliado sobre o método proposto por Law e Eberly em termos de $\beta\sigma_{\perp}$ [39].

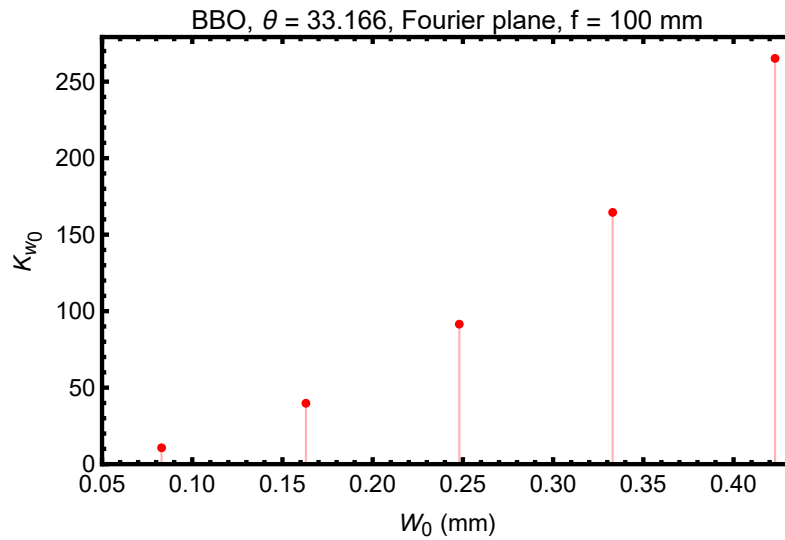


Figura 28 – K avaliado sobre o método proposto por Law e Eberly [39] em termos de w_0 .

Já para o modelo sugerido por Di Lorenzo *et al.* [10], a proposta é formulada em termos do grau geral de coerência para fontes quasi-homogêneas. Para certos estados fotônicos, a noção de “mistura” é interpretada como coerência e, nessas circunstâncias, o operador densidade reduzido em sua representação de coordenadas é proporcional à densidade espectral cruzada ($W_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$) [45].

O grau de coerência pode ser encontrado através da normalização de W_s em termos da intensidade, isto é:

$$\mu_s = \frac{W_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\sqrt{I_s(\mathbf{x})I_s(\mathbf{x}')}}. \quad (5.5)$$

Portanto, o grau geral de coerência é escrito

$$\bar{\mu}^2 = \frac{\int \int |W_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}')|^2 d\mathbf{x} d\mathbf{x}'}{[\int |W_s(\mathbf{x}, \mathbf{x})| d\mathbf{x}]^2}. \quad (5.6)$$

Embora a mensuração de μ exija um alto esforço experimental, seu valor pode ser determinado para uma classe de fontes mencionadas anteriormente. Tais fontes dependem localmente apenas da diferença $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ e tendem a zero quando $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ é maior que o comprimento de coerência da fonte. Sob essa perspectiva, o perfil de intensidade varia suavemente, de modo que podemos escrever $I_s(\mathbf{x})I_s(\mathbf{x}') \approx I^2 [\frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{x}')]$. A densidade espectral cruzada pode então ser relacionada à intensidade por $W_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \approx I^2 [\frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{x}')] g_s(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, sendo $\tilde{g}_s(\mathbf{q})$ a transformada de Fourier de $g_s(\mathbf{x})$, proporcional à intensidade associada ao campo distante $I_{FF}(\boldsymbol{\theta})$, onde $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{q}/k$. Diante do exposto, o número de Schmidt associado ao grau geral de coerência é dado por:

$$K = \frac{1}{\bar{\mu}^2}, \quad (5.7)$$

e então:

$$K \approx \frac{1}{\lambda^2} \frac{[\int I_s(\mathbf{x}) d\mathbf{x}]^2}{\int I_s^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \times \frac{[\int I_{FF}(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}]^2}{\int I_{FF}^2(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}}, \quad (5.8)$$

onde k é o número de onda, λ o comprimento de onda da fonte, e I_s são os perfis de intensidade. Ao avaliar as medições realizadas e os cálculos necessários para obtenção do valor K em termos de $\bar{\mu}$ e posteriormente as intensidades encontramos os valores não tão condizentes com os obtidos em termos das dispersões. A Fig. 29 mostra os resultados encontrados para os valores propostos de w_0 .

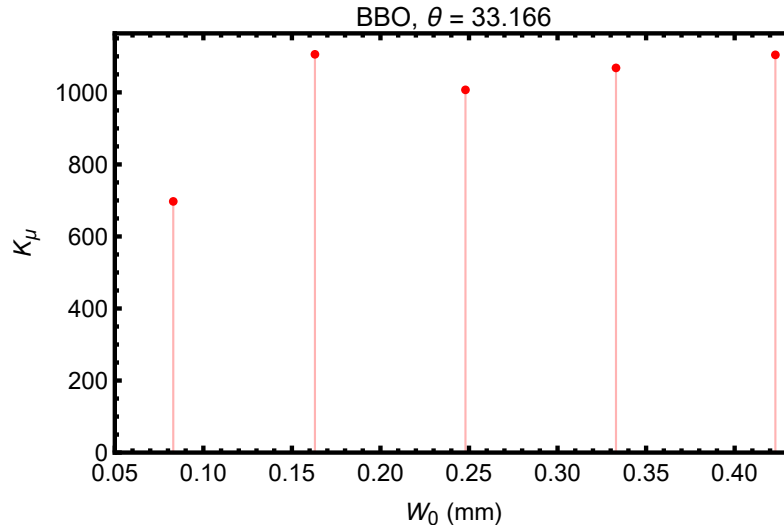


Figura 29 – K avaliado sob a perspectiva de Di Lorenzo *et al.* [10].

Com a constatação de que os resultados apresentam valores diferentes para as três propostas avaliadas, a perspectiva de analisar o grau de emaranhamento descrito pela CPD ainda é extremamente útil. Os valores apresentados para cada método desviam entre si por razões ainda desconhecidas, e estamos em intensos debates para esclarecer essas questões e validar os fatos, assim como possíveis erros. Para o método desenvolvido por Law e Eberly, os valores são abaixo daqueles obtidos pela razão das dispersões em detecção simples e coincidência (R_F), mas o comportamento de K descreve uma curva semelhante

ao proposto pelos autores em seu modelo computacional. De maneira antagônica, observamos que os resultados obtidos pelo método proposto neste estudo divergem significativamente ao comparar com a proposta de Di Lorenzo *et al.*. Os valores obtidos pela razão R_F , são, em média, três vezes menores aos valores fornecidos pelo método executado por Di Lorenzo *et al.*. Os efeitos de focalização, antes não discutidos, podem ser um dos motivos, embora a divergência encontrada não possa ser atribuída somente a esse fator. Ainda que os resultados não sejam tão favoráveis ao comparar os métodos, eles abrem novos caminhos para o entendimento da CPD além dos modelos gaussianos, principalmente após a apresentação das equações (4.41) e (4.36) com o propósito de medir, de forma geral, o quanto o sistema está correlacionado globalmente. Abaixo, na Fig. 30 podemos ver os valores de K para os três métodos e suas respectivas diferenças.

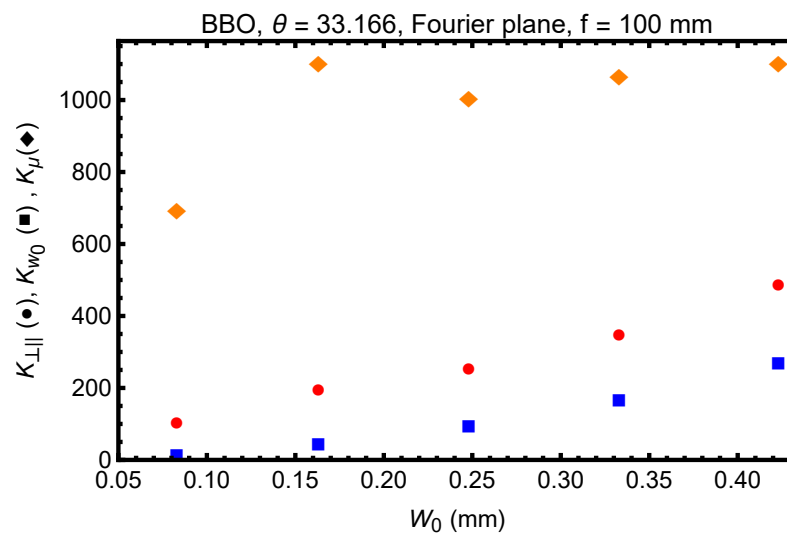


Figura 30 – Valores de K para os três métodos. Nos quadrados em azul, vemos os valores de K apresentados na Fig.28, e encontrados pelo método proposto por Law e Eberly. Os círculos em vermelho, são os dados obtidos através do produto entre as duas direções (x e y) fornecidos por Fedorov *et al.*, e também mostrados na Fig.26. Já os valores obtidos através do método proposto por Di Lorenzo *et al.* são mostrados pelos losangos em laranja, previamente vistos na Fig.29.

6 Considerações finais

O estudo da interação luz-matéria possibilitou diversos avanços científicos até o presente momento, com exemplos facilmente observáveis, como na espectroscopia, nos painéis solares e em outras aplicações cotidianas. Além disso, a Mecânica Quântica, juntamente com a Eletrodinâmica, fornece os fundamentos necessários para a compreensão de vários fenômenos físicos resultantes dessa interação ao avaliar sólidos; temos, por exemplo: absorção, dispersão, efeitos de polarização e o aqui evidenciado fenômeno da birrefringência. A descrição da propagação da luz nesses meios foi amplamente discutida, assim como a interação que resulta na Conversão Paramétrica Descendente (CPD) ao lidar com meios anisotrópicos uniaxiais.

Por consequência do processo óptico não linear, observamos a formação de pares de fótons emaranhados, assim como a definição e as condições que caracterizam o emaranhamento. Foram também analisados quantificadores dessas correlações, que apontam para possíveis aplicações em protocolos de informação quântica em um futuro próximo. Conforme apresentado, o estudo da CPD como fonte de estados emaranhados tem se mostrado abrangente para diversos graus de liberdade, e os aqui explorados abrem novas possibilidades para avaliar o grau de emaranhamento total proporcionado pelas correlações promovidas. Perante o exposto, as correlações apresentadas são fortemente influenciadas pela direção em análise e pela modelagem do feixe bombeador. Este trabalho evidencia como os efeitos de anisotropia dificultam a obtenção dos resultados e como a negligência desses efeitos pode simplificar as projeções.

Ao avaliar a direção k_x , isto é, a direção paralela ao plano principal, observamos a presença dos efeitos ocasionados pela anisotropia e como ela atua como um fator limitante na transferência do espectro angular do feixe bombeador. Por outro lado, ao avaliar k_y , direção perpendicular ao plano principal, as correlações não são afetadas pela anisotropia, contudo, quando a focalização ganha destaque, observa-se uma variação em sua dispersão. A obtenção das dispersões nos cenários de detecção simples e coincidência, avaliados nas duas dimensões citadas, permite projeções futuras, como um quantificador global para estados gerados pela Conversão Paramétrica Descendente em variáveis espaciais, definido por K . Também foi analisado o plano de formação de imagem e, como esperado, as correlações são mantidas inalteradas devido à não propagação do estado quântico. Embora os resultados obtidos com os três métodos disponíveis para a obtenção de K tenham mostrado valores significativamente diferentes, vislumbram-se possíveis correções, ou novas tentativas para um melhor esclarecimento das diferenças obtidas entre os métodos usados e quais suas causas, e posteriormente, futuras perspectivas fornecidas por essas análises.

REFERÊNCIAS

- [1] Einstein, A., Podolsky B. e Rosen N.: *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?* Phys. Rev., 47:777–780, May 1935. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.47.777>. Citado 4 vezes nas páginas 13, 33, 37 e 42.
- [2] Bohr, N.: *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?* Phys. Rev., 48:696–702, Oct 1935. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.48.696>. Citado na página 13.
- [3] Bell, J. S.: *On the Einstein Podolsky Rosen paradox.* Physics Physique Fizika, 1:195–200, Nov 1964. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195>. Citado na página 13.
- [4] Goodman, Joseph W.: *Introduction to Fourier optics.* Roberts and Company publishers, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 47.
- [5] Monken, C. H., Souto Ribeiro P. H. e Pádua S.: *Transfer of angular spectrum and image formation in spontaneous parametric down-conversion.* Phys. Rev. A, 57:3123–3126, Apr 1998. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.57.3123>. Citado 4 vezes nas páginas 13, 26, 32 e 53.
- [6] Costa Moura, A.G., Nogueira W. A. T. e Monken C.H.: *Fourth-order image formation by spontaneous parametric down-conversion: The effect of anisotropy.* Optics Communications, 283(14):2866–2871, 2010, ISSN 0030-4018. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401810002464>. Citado 7 vezes nas páginas 13, 26, 46, 47, 53, 57 e 62.
- [7] Walborn, S. P., de Oliveira A. N. Pádua S. e Monken C. H.: *Multimode Hong-Ou-Mandel Interference.* Phys. Rev. Lett., 90:143601, Apr 2003. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.90.143601>. Citado 3 vezes nas páginas 13, 38 e 53.
- [8] Howell, John C., Bennink Ryan S. Bentley Sean J. Boyd R. W.: *Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox Using Momentum- and Position-Entangled Photons from Spontaneous Parametric Down Conversion.* Phys. Rev. Lett., 92:210403, May 2004. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.92.210403>. Citado 4 vezes nas páginas 13, 38, 42 e 53.
- [9] D’Angelo, Milena, Kim Yoon Ho Kulik Sergei P. e Shih Yanhua: *Identifying Entanglement Using Quantum Ghost Interference and Imaging.* Phys. Rev. Lett., 92:233601, Jun 2004. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.92.233601>. Citado 4 vezes nas páginas 13, 38, 42 e 53.
- [10] Di Lorenzo Pires, H., Monken C. H. e van Exter M. P.: *Direct measurement of transverse-mode entanglement in two-photon states.* Phys. Rev. A, 80:022307, Aug 2009. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.80.022307>. Citado 6 vezes nas páginas 13, 43, 53, 63, 67 e 68.
- [11] Fedorov, M. V., Efremov M. A. Volkov P. A. Moreva E. V. Straupe S. S. e Kulik S. P.: *Anisotropically and High Entanglement of Biphoton States Generated in Spontaneous Parametric Down-Conversion.* Phys. Rev. Lett., 99:063901, Aug 2007. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.99.063901>. Citado 4 vezes nas páginas 13, 32, 53 e 63.
- [12] Fowles, Grant R.: *Introduction to modern optics.* Courier Corporation, 1989. Citado 3 vezes nas páginas 15, 17 e 20.

- [13] Saleh, Bahaa E. A. e Teich, Malvin Carl: *Fundamentals of photonics*. John Wiley & sons, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 20.
- [14] Costa Moura, Alexandre Gutenberg da: *Propagação de Feixes Eletromagnéticos em Meios Birrefringentes Uniaxiais*. Tese de Doutorado, Dissertação de Mestrado, Belo Horizonte, 2003. Citado na página 22.
- [15] Hong, C. K., Ou Z. Y. Mandel L.: *Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference*. Phys. Rev. Lett., 59:2044–2046, Nov 1987. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.59.2044>. Nenhuma citação no texto.
- [16] Mandel, L. e Wolf, E.: *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge university press, 1995. Citado na página 24.
- [17] Wang, Lijun: *Investigation of induced coherence with and without induced emission*. University of Rochester, 1992. Citado na página 24.
- [18] Costa Moura, Alexandre Gutenberg da: *Propriedades espaciais e de frequência e um estudo da pureza e fidelidade do estado quântico gerado na conversão paramétrica descendente em cristais uniaxiais*. 2010. Citado 4 vezes nas páginas 24, 27, 31 e 32.
- [19] Belinsky, A.V. e Klyshko, D.N.: *TWO-PHOTON WAVE-PACKETS*. Laser Physics, 4(4):663–689, 1994. Citado na página 24.
- [20] Citado na página 28.
- [21] Ballentine, Leslie E.: *Quantum mechanics: a modern development*. World Scientific Publishing Company, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 33, 34 e 36.
- [22] Schrödinger, Erwin: *The present status of quantum mechanics*. Die Naturwissenschaften, 23(48):1–26, 1935. Citado na página 33.
- [23] Masanes, Lluís, Liang Yeong Cherng e Doherty Andrew C.: *All Bipartite Entangled States Display Some Hidden Nonlocality*. Phys. Rev. Lett., 100:090403, Mar 2008. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.090403>. Citado na página 33.
- [24] Horodecki, Ryszard, Horodecki Paweł Horodecki Michał e Horodecki Karol: *Quantum entanglement*. Rev. Mod. Phys., 81:865–942, Jun 2009. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.81.865>. Citado na página 33.
- [25] Fedorov, M. V., Efremov M. A. Kazakov A. E. Chan K. W. Law C. K. e Eberly J. H.: *Packet narrowing and quantum entanglement in photoionization and photodissociation*. Phys. Rev. A, 69:052117, May 2004. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.69.052117>. Citado 5 vezes nas páginas 33, 37, 38, 40 e 41.
- [26] Fedorov, M. V., Efremov M. A. Kazakov A. E. Chan K. W. Law C. K. e Eberly J. H.: *Spontaneous emission of a photon: Wave-packet structures and atom-photon entanglement*. Phys. Rev. A, 72:032110, Sep 2005. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.72.032110>. Citado 4 vezes nas páginas 33, 37, 38 e 41.
- [27] Peres, Asher: *Quantum theory: concepts and methods*, volume 72. Springer, 1997. Citado na página 34.
- [28] Nielsen, Michael A. e Chuang, Isaac L.: *Quantum computation and quantum information*. Cambridge university press, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 36.

- [29] Grobe, R. Rzazewski, K. e Eberly J. H.: *Measure of electron-electron correlation in atomic physics*. Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics, 27(16):L503, aug 1994. <https://dx.doi.org/10.1088/0953-4075/27/16/001>. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 37.
- [30] Bates, David R e Benjamin Bederson: *Advances in atomic and molecular physics*. Academic Press, 1985. Citado na página 35.
- [31] Slater, J. C.: *The Theory of Complex Spectra*. Phys. Rev., 34:1293–1322, Nov 1929. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.34.1293>. Citado na página 35.
- [32] Grobe, R. e Eberly, J. H.: *Photoelectron spectra for a two-electron system in a strong laser field*. Phys. Rev. Lett., 68:2905–2908, May 1992. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.68.2905>. Citado na página 37.
- [33] Grobe, R. e Eberly, J. H.: *Observation of coherence transfer by electron-electron correlation*. Phys. Rev. A, 48:623–627, Jul 1993. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.48.623>. Citado na página 37.
- [34] Grobe, R. e Eberly, J. H.: *One-dimensional model of a negative ion and its interaction with laser fields*. Phys. Rev. A, 48:4664–4681, Dec 1993. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.48.4664>. Citado na página 37.
- [35] Chan, K. W., Law C. K. e Eberly J. H.: *Localized Single-Photon Wave Functions in Free Space*. Phys. Rev. Lett., 88:100402, Feb 2002. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.88.100402>. Citado na página 38.
- [36] Fedorov, M. V., Efremov M. A. Volkov P. A. e Eberly J. H.: *Short-pulse or strong-field breakup processes: a route to study entangled wave packets*. Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics, 39(13):S467, jun 2006. <https://dx.doi.org/10.1088/0953-4075/39/13/S20>. Citado 3 vezes nas páginas 38, 39 e 43.
- [37] Costa Moura, A. G. da e Monken, C. H.: *Einstein-Podolsky-Rosen correlations in spontaneous parametric down-conversion: Beyond the Gaussian approximation*. Phys. Rev. A, 110:033713, Sep 2024. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.110.033713>. Citado 8 vezes nas páginas 43, 44, 46, 47, 49, 52, 53 e 57.
- [38] Schneeloch, James e Howell, John C.: *Introduction to the transverse spatial correlations in spontaneous parametric down-conversion through the biphoton birth zone*. Journal of Optics, 18(5):053501, apr 2016. <https://dx.doi.org/10.1088/2040-8978/18/5/053501>. Citado 4 vezes nas páginas 43, 44, 45 e 52.
- [39] Law, C. K. e Eberly, J. H.: *Analysis and Interpretation of High Transverse Entanglement in Optical Parametric Down Conversion*. Phys. Rev. Lett., 92:127903, Mar 2004. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.92.127903>. Citado 5 vezes nas páginas 43, 53, 63, 66 e 67.
- [40] Fedorov, M. V., Mikhailova Yu M. e Volkov P. A.: *Gaussian modelling and Schmidt modes of SPDC biphoton states*. Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics, 42(17):175503, aug 2009. <https://dx.doi.org/10.1088/0953-4075/42/17/175503>. Citado na página 43.
- [41] Walborn, S.P., Monken C.H. Pádua S. e Souto Ribeiro P.H.: *Spatial correlations in parametric down-conversion*. Physics Reports, 495(4):87–139, 2010, ISSN 0370-1573. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157310001602>. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 48.
- [42] Siegman, Anthony E.: *Lasers*. University science books, 1986. Citado na página 48.

-
- [43] Silverman, Richard A. e others: *Special functions and their applications*. Courier Corporation, 1972. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 51.
- [44] Fedorov, M. V., Efremov M. A. Volkov P. A. Moreva E. V. Straupe S. S. e Kulik S. P.: *Spontaneous parametric down-conversion: Anisotropical and anomalously strong narrowing of biphoton momentum correlation distributions*. Phys. Rev. A, 77:032336, Mar 2008. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.77.032336>. Citado na página 65.
- [45] Wolf, Emil.: *Introduction to the Theory of Coherence and Polarization of Light*. Cambridge university press, 2007. Citado na página 67.