

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-graduação em Física

Filipe Henrique de Castro Menezes

**CORRELAÇÕES NOS ESTADOS SEMICLÁSSICOS DA GRAVITAÇÃO
QUÂNTICA DE LAÇOS**

Belo Horizonte

2025

Filipe Henrique de Castro Menezes

**CORRELAÇÕES NOS ESTADOS SEMICLÁSSICOS DA GRAVITAÇÃO
QUÂNTICA DE LAÇOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Nelson de Oliveira Yokomizo

Belo Horizonte

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

M543c Menezes, Filipe Henrique de Castro.
Correlações nos estados semiclássicos da gravitação quântica de laços /
Filipe Henrique de Castro Menezes. – 2025.
112 f. : il.

Orientador: Nelson de Oliveira Yokomizo.
Tese (doutorado) – Universidade Federal de Minas Gerais,
Departamento de Física.
Bibliografia: f. 77-81.

1. Gravitação. 2. Relatividade geral. I. Título. II. Yokomizo, Nelson de
Oliveira. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

CDU – 530.12 (043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
COLEGIADO DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

A presente tese, intitulada "**Correlações nos estados semiclássicos da Gravitação Quântica de Laços**", de autoria de **FILIPE HENRIQUE DE CASTRO MENEZES** submetida à Comissão Examinadora, abaixo-assinada, foi aprovada para obtenção do grau de **DOUTOR EM CIÊNCIAS, área de concentração Física**, em três de dezembro de 2025.

Belo Horizonte, 03 de dezembro de 2025.

Prof. Nelson de Oliveira Yokomizo
Orientador do estudante
Departamento de Física/UFMG

Prof. Gláuber Carvalho Dorsch
Departamento de Física/UFMG

Prof. Thiago Lucena de Macedo Guedes
Instituto Internacional de Física /UFRN

Prof. Saulo Carneiro de Souza Silva
Instituto de Física/UFBA



Documento assinado digitalmente
SAULO CARNEIRO DE SOUZA SILVA
Data: 16/12/2025 11:33:21-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Iarley Pereira Lobo
Departamento de Física/UFPB



Documento assinado eletronicamente por **Gláuber Carvalho Dorsch, Professor do Magistério Superior**, em 11/12/2025, às 17:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Thiago Lucena de Macedo Guedes, Usuário Externo**, em 11/12/2025, às 19:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Iarley Pereira Lobo, Usuário Externo**, em 12/12/2025, às 07:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Nelson de Oliveira Yokomizo, Professor do Magistério Superior**, em 12/12/2025, às 17:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site

https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0,

informando o código verificador **4789345** e o código CRC **70E24621**.

AGRADECIMENTOS

À minha namorada, Laís, pela paciência em ouvir minhas divagações e sempre me apoiar nos estudos.

Aos meus pais e irmã, Marco, Rosana e Thaís, por todo suporte e apoio oferecidos ao longo da minha trajetória na física.

Ao meu avô, Flávio, que apesar de não estar mais aqui, sempre foi uma grande inspiração para mim na vida acadêmica.

Ao meu orientador, Nelson, por ser sempre solícito nos meus momentos de dúvida, assim como por sua profunda influência e fundamental contribuição em minha formação acadêmica nesses quase 9 anos.

Aos meus gatos, Faiman, Luna, Rubino, e Gauss pelo apoio emocional, e em especial ao Faiman pela sua onipresença nos meus estudos.

Ao GFT pelas sempre ricas discussões que colaboraram para minha formação, e em especial ao Gabriel, Patrick e Cyro pelas ótimas discussões de LQG.

À agência CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é investigar as correlações nos estados semiclássicos da Gravitação Quântica de Laços (LQG) e propor uma nova classe de estados compatível com a gravidade semiclássica. Para isso, são primeiramente expostos os elementos da Relatividade Geral no Formalismo de Cartan e, em seguida, é apresentado o formalismo da LQG. Posteriormente, apresentamos famílias de estados coerentes estabelecidas na literatura e mostramos que elas exibem correlações de curto alcance em relação a flutuações de área. Introduzimos então uma nova classe de estados coerentes perturbados, construída a partir da excitação não local de estados coerentes intrínsecos. Finalmente, demonstramos que esta nova classe de estados gera correlações de área decaindo como $1/d^2$ no limite semiclássico, em acordo com o comportamento esperado para o gráviton livre sem massa.

Palavras-chaves: Gravitação Quântica de Laços, Gravitação semiclássica, Relatividade Geral, Correlações quânticas.

ABSTRACT

The objective of this work is to investigate the correlations in the semiclassical states of Loop Quantum Gravity (LQG) and propose a new class of states compatible with semiclassical gravity. To this end, the necessary elements of General Relativity in the Cartan Formalism are first presented, followed by the presentation of the LQG formalism. Subsequently, we present established families of coherent states from the literature and show that they exhibit short-range correlations concerning area fluctuations. We then introduce a new class of perturbed coherent states, constructed from the non-local excitation of intrinsic coherent states. Finally, we demonstrate that this new class of states generates area correlations decaying as $1/d^2$ in the semiclassical limit, which is in agreement with the expected behavior for the free massless graviton.

Keywords: Loop Quantum Gravity, Semiclassical gravity, General Relativity, Quantum correlations.

SUMÁRIO

1	RELATIVIDADE GERAL	13
1.1	Formulação de Cartan da Relatividade Geral	13
1.1.1	Tetradas e conexão de spin	13
1.1.2	Ação de Einstein-Hilbert e ação de Palatini	15
1.2	Ação de Holst	16
1.2.1	Vínculo de simplicidade	17
2	GRAVITAÇÃO QUÂNTICA DE LAÇOS	20
2.1	Formalismo canônico	20
2.2	Formalismo covariante: Spinfoam	25
2.2.1	Discretização clássica	26
2.2.1.1	Discretização da fronteira e espaço de fase	28
2.2.2	Quantização	30
2.2.2.1	Cinemática	30
2.2.2.2	Dinâmica	33
2.3	Vínculos do espaço de fase	37
2.3.1	Espaço de <i>seeds</i> vínculo de área	37
2.3.2	Vínculo de Gauss	38
2.3.2.1	Intertwiners e símbolos $3j$	39
2.3.3	Espaço cinemático	40
2.3.3.1	Estado de vácuo	41
2.3.3.2	Composição de spin	41
2.4	Representação da holonomia	42
2.4.1	Estado de holonomia	43
2.4.2	Espaço cinemático	43
2.4.3	Produto de estados	44
2.5	Operadores geométricos	45
2.5.1	Operador holonomia	45
2.5.1.1	Estados de laços	46
2.5.2	Operador Fluxo	47
2.5.3	Operador área	47
2.5.3.1	Quantização das áreas	48
2.5.3.2	Colagem quântica de poliedros	48
2.5.3.3	Relação de fechamento e quantas de espaço	48
3	GRAVITAÇÃO QUÂNTICA DE LAÇOS E ESPINORES	49

3.1	Estados $SU(2)$ em termos de espinores	49
3.1.1	LQG em termos de espinores	50
3.2	Osciladores de Schwinger e estados $SU(2)$	51
3.2.1	Representação bosônica da LQG	53
3.2.1.1	Estados de laços	54
4	LIMITE SEMICLÁSSICO	55
4.1	Estados coerentes intrínsecos	55
4.1.1	Estados coerentes $SU(2)$	55
4.2	Estados coerentes extrínsecos	57
4.3	Estados coerentes de variáveis bosônicas	60
4.3.1	Estados coerentes de osciladores harmônicos	60
4.3.2	Estados coerentes de variáveis bosônicas	61
5	CORRELAÇÕES NOS ESTADOS DA GEOMETRIA	63
5.1	Limite semiclássico e flutuações de área	64
5.2	Geometria clássica homogênea	64
5.2.1	Estados coerentes bosônicos	67
5.2.2	Estados coerentes heat-kernel	68
5.3	Nova classe de estados coerentes	68
5.3.1	Estados perturbados: correlações não locais	69
5.3.2	Estados coerentes perturbados	70
5.3.2.1	Distribuições de spin	71
5.3.2.2	Correlações de área	72
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	74
	REFERÊNCIAS	77
	APÊNDICE A – ATUAÇÃO DOS VÍNCULOS CLÁSSICOS	82
A.1	Holonomia e conexão de Ashtekar	82
A.2	Fluxo e densidade de triada	83
A.3	Vínculo de Gauss	84
A.3.1	Conexão de Ashtekar	84
A.3.2	Densidade de triada	84
A.3.3	Holonomia	85
A.3.4	Fluxo	85
A.4	Vínculo de difeomorfismo	86
A.4.1	Conexão de Ashtekar	86
A.4.2	Densidade de triada	87
A.4.3	Holonomia	87

A.4.4	Fluxo	88
A.5	Vínculo Hamiltoniano	89
A.5.1	Conexão de Ashtekar	89
A.5.2	Densidade de triada	89
A.5.3	Holonomia	90
A.5.4	Fluxo	90
	APÊNDICE B – ÁLGEBRA DE HOLONOMIA-FLUXO	91
B.1	Colchete entre holonomias	91
B.2	Colchete entre holonomia e fluxo	92
B.2.0.1	Caso $S \cap \ell = \emptyset$	93
B.2.0.2	Caso $S \cap \ell = \ell$	93
B.2.0.3	Caso $S \cap \ell = \ell(t_0)$	93
B.2.1	Colchete entre fluxos	94
	APÊNDICE C – ESTADOS COERENTES SU(2)	96
	APÊNDICE D – TRUQUE DO THIEMANN	102
	APÊNDICE E – APROXIMAÇÃO LS PARA GRANDES SPINS	107
E.1	Valores médios	107
E.2	Distribuição de probabilidades	109
	APÊNDICE F – DETERMINAÇÃO DO ESTADO PERTURBADO DE UM LINK NO LIMITE SEMICLÁSSICO	110

INTRODUÇÃO

A busca por uma descrição quântica da gravidade representa um dos maiores desafios da física teórica. Apesar das diferentes tentativas, toda descrição quântica razoável tem como princípio tender à descrição clássica no regime correspondente, chamado de regime semiclássico. Dentre as abordagens propostas, a Gravitação Quântica de Laços (LQG) surge como uma candidata promissora, a partir de uma quantização não-perturbativa da Relatividade Geral formulada em termos das variáveis de Ashtekar [6, 55, 61, 72]. Entre os principais resultados da LQG estão as correções quânticas na dinâmica de espaços-tempos cosmológicos e buracos negros [3, 7, 22, 39], um limite semiclássico bem estabelecido para modelos cosmológicos simples [15, 20], e a correta reprodução do propagador do gráviton no regime de grandes distâncias a partir da dinâmica via amplitudes de transição [18].

A construção da LQG pode ser realizada a partir de dois formalismos: o canônico e o covariante. No formalismo canônico, parte-se da descrição hamiltoniana da Relatividade Geral, de modo que o espaço de Hilbert da teoria é obtido por um procedimento de quantização canônica, e a evolução temporal é definida em termos da atuação do operador hamiltoniano [6, 52, 55]. Entretanto, devido a ambiguidades em sua definição [55], ainda não há uma versão quântica bem estabelecida para este operador na literatura, sendo sua determinação um dos principais problemas em aberto da LQG canônica. Já a formulação covariante origina-se da descrição lagrangiana da Relatividade Geral, de forma que a evolução temporal é ditada pela determinação de amplitudes de transição, em um processo análogo às integrais de caminho [57, 61]. Em contraste com o operador hamiltoniano, as amplitudes de probabilidade possuem uma formulação bem estabelecida na literatura [27, 61]. Em ambos os formalismos, o espaço de Hilbert cinemático é idêntico, e seu principal resultado é a quantização da geometria na escala de Planck.

A análise semiclássica da LQG é construída em termos dos estados coerentes: estados cujas distribuições de probabilidade se concentram em torno de seus valores médios, apresentando desvios relativos pequenos e cujos valores médios representam a geometria clássica do espaço-tempo. Diferentes famílias desses estados já foram propostas [13, 24, 25, 71]. Contudo, tais estados são definidos no espaço cinemático da teoria, não incorporando informações dinâmicas. A não existência de um operador hamiltoniano bem estabelecido motiva a imposição de restrições adicionais aos estados coerentes a fim de se reproduzir comportamentos esperados vindos da dinâmica.

O limite clássico dos estados coerentes segue um padrão geral: a medida que elevamos os números quânticos desses estados, suas distribuições de probabilidade vão se tornando cada vez mais concentradas em torno da média (regime semiclássico), de forma que o limite clássico é atingido quando o desvio relativo se torna desprezível. A descrição

que emerge desse limite corresponde à geometria de Regge [73], um truncamento dos graus de liberdade da Relatividade Geral [61]. Embora diferentes padrões de flutuações de estados coerentes em torno da média não modifiquem o aspecto coerente desses estados, eles podem influenciar, por exemplo, as correlações de tais flutuações.

Sabe-se do regime semiclássico da teoria quântica de campos em espaços curvos que as flutuações de vácuo do campo gravitacional apresentam correlações de longo alcance com um perfil de inverso do quadrado da distância. Não somente isso, mas esse padrão é consequência direta da validade da equação de Einstein da Relatividade Geral [36]. Este comportamento é responsável pela lei das áreas para a entropia de emaranhamento [23, 65, 67], proposto como uma possível fonte para a entropia de buracos negros [23], sendo pontuado como critério necessário para selecionar estados semiclássicos de qualquer teoria quântica da gravidade [19].

O objetivo desta tese é investigar o decaimento de correlações dos estados semiclássicos da LQG e, a partir dessa análise, propor uma nova classe de estados que satisfaça o critério do decaimento de longo alcance. Primeiramente, demonstramos que as famílias de estados coerentes mais utilizadas na literatura, embora bem-sucedidas em descrever uma geometria média clássica, exibem apenas correlações de curto alcance, com um decaimento exponencial. Em seguida, introduzimos uma nova família de estados construída a partir da perturbação de estados coerentes intrínsecos. Mostramos que, ao introduzir excitações quânticas não locais de forma controlada, é possível gerar um emaranhamento que resulta em correlações de área decaindo como $1/d^2$ no limite semiclássico, em total acordo com o comportamento esperado. Os resultados apresentados fazem parte da publicação [49]. Esses resultados fornecem um novo conjunto de estados semiclássicos que não apenas descrevem uma geometria clássica, mas também carregam uma estrutura de flutuações quânticas compatível com a dinâmica gravitacional conhecida.

Para desenvolver esses pontos, a tese está organizada da seguinte forma: o capítulo 1 estabelece as bases da Relatividade Geral no formalismo de Cartan, ponto de partida para a quantização que nos leva à LQG; o capítulo 2 apresenta a construção da LQG, abordando seus formalismos canônico e covariante; o capítulo 3 explora a descrição da LQG em termos de espinores, objetos importantes para a descrição de estados coerentes; o capítulo 4 detalha a construção de estados coerentes e seu comportamento semiclássico; o capítulo 5 contém a contribuição deste trabalho, apresentando o cálculo das correlações para os estados coerentes existentes e a construção e análise da nova classe de estados com correlações de longo alcance; e, por fim, no capítulo 6 são discutidas conclusões e perspectivas.

1 RELATIVIDADE GERAL

A Gravitação Quântica de Laços (LQG) tem como ponto de partida a Relatividade Geral. Apesar da Relatividade Geral ser tradicionalmente apresentada na formulação métrica, a LQG se baseia no formalismo de tetradas tanto para a sua formulação canônica quanto para a sua formulação covariante, que expressam a gravitação na linguagem de uma teoria de gauge. Dessa forma, este primeiro capítulo é dedicado a uma breve apresentação do formalismo de tetradas, também conhecido como formalismo de Cartan. As referências que fundamentam esta apresentação são [37, 61].

1.1 Formulação de Cartan da Relatividade Geral

1.1.1 Tetradas e conexão de spin

Para a formulação de Cartan, introduzimos no espaço-tempo (M, g_{ab}) um fibrado vetorial E isomorfo ao fibrado tangente TM , cujas fibras $V = \mathbb{R}^{1,3}$ possuem uma métrica de Minkowski η_{IJ} . O que chamamos de tetradas e^I , $I = 0, 1, 2, 3$, é um conjunto de 1-formas que produzem esse isomorfismo entre E e TM :

$$e^I : TM \rightarrow E, \quad (1.1a)$$

$$e^I(v) := v^I = e^I_\mu v^\mu. \quad (1.1b)$$

Em termos da base coordenada:

$$e^I = e^I_\mu dx^\mu. \quad (1.2)$$

Definimos também as tetradas inversas que, em termos da base coordenada, são expressas como:

$$e_I = e^I_\mu \partial_\mu. \quad (1.3)$$

de forma que:

$$e^I_\mu e^\nu_I = \delta^\nu_\mu, \quad (1.4a)$$

$$e^I_\mu e^J_\nu = \delta^I_J. \quad (1.4b)$$

Pela notação, os índices gregos correspondem aos índices espaço-temporais, enquanto os índices latinos correspondem aos índices internos.

A partir de uma tetrada, a métrica do espaço-tempo é definida como o *pullback* da métrica em E :

$$g(v, u) := \eta(e(v), e(u)) \quad \Rightarrow \quad g_{\mu\nu} = e^I_\mu e^J_\nu \eta_{IJ}. \quad (1.5)$$

As relações (1.4) e (1.5) nos levam naturalmente a definir a operação de descer e subir os índices internos pela ação de η^{IJ} e η_{IJ} , respectivamente.

A partir de (1.5), é visível que a métrica define transformações de *gauge* sobre as tetradas. Mais precisamente, a métrica é invariante sob transformações de Lorentz sobre as tetradas:

$$e^I \rightarrow \Lambda^I_J e^J, \quad \Lambda^I_J \in SO(1,3). \quad (1.6)$$

Essa invariância pode ser interpretada como consequência do aspecto localmente plano do espaço-tempo.

A definição das tetradas induz uma derivada covariante em E da forma:

$$e^I_\nu(\nabla_\mu v^\nu) := D^\omega_\mu v^I = \partial_\mu v^I + \omega^I_{\mu J} v^J, \quad (1.7)$$

sendo $\omega^I_J = \omega^I_{\mu J} dx^\mu$ a chamada *conexão de spin*. Sua relação com os símbolos de Christoffel é dada por:

$$e^I_\sigma \Gamma^\sigma_{\nu\mu} = \partial_\mu e^I_\nu + \omega^I_{\mu J} e^J_\nu, \quad (1.8)$$

podendo se verificar que, sob transformações de Lorentz:

$$\omega^{IJ} \rightarrow \Lambda^I_K \Lambda^J_L \omega^{KL} + \eta^{KL} \Lambda^I_K \partial_\mu \Lambda^J_L, \quad \Lambda^I_K, \Lambda^J_L \in SO(1,3). \quad (1.9)$$

A relação (1.7) faz com que a conexão de spin, assim como a de Levi-Civita, seja compatível com a métrica e livre de torção. A condição de compatibilidade com a métrica pode ser escrita por:

$$0 = D^\omega \eta^{IJ} = \omega^{IJ} + \omega^{JI}, \quad (1.10)$$

enquanto a condição de torção nula pode ser representada pela 2-forma:

$$0 = T^I := d^\omega e^I = de^I + \omega^I_J \wedge e^J, \quad (1.11)$$

sendo d^ω a derivada exterior covariante construída com a conexão de spin. A expressão de T^I é conhecida como primeira equação de Cartan. A condição de compatibilidade com a métrica evidencia que a conexão de spin pode ser vista como uma 1-forma com valores na álgebra do grupo de Lorentz.

Teorema: *Dado uma tetrada, existe uma única conexão livre de torção compatível com a métrica. Explicitamente:*

$$\omega^I_{\mu J} = e^{\rho I} e^{\sigma J} \left(-e_{\mu K} \partial_{[\rho} e_{\sigma]}^K + e_{\rho K} \partial_{[\sigma} e_{\mu]}^K + e_{\sigma K} \partial_{[\mu} e_{\rho]}^K \right). \quad (1.12)$$

A relação (1.8) pode ser reescrita em termos de uma derivada covariante ∇_μ^ω que atua nos índices espaço-temporais e internos:

$$\nabla_\nu^\omega e^I_\mu := \partial_\nu e^I_\mu + \omega^I_{\mu J} e^J_\nu - \Gamma^\sigma_{\nu\mu} e^I_\sigma = 0. \quad (1.13)$$

1.1.2 Ação de Einstein-Hilbert e ação de Palatini

Para descrever a relatividade geral no formalismo de tetradas, é necessário reescrever a ação de Einstein-Hilbert

$$S[g] = \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (1.14)$$

em termos desses novos objetos. Para isso, começamos com a definição da curvatura da conexão de spin:

$$F^I{}_J := d^\omega \omega^I{}_J = d\omega^I{}_J + \omega^I{}_K \wedge \omega^K{}_J, \quad (1.15)$$

sendo a equação acima conhecida como segunda equação de Cartan. Em termos da derivada covariante:

$$2D^\omega_{[\mu} D^\omega_{\nu]} v^I := F^I{}_{J\mu\nu} v^J. \quad (1.16)$$

Por conta da relação entre a conexão de spin e a de Levi-Civita, a curvatura da conexão de spin é relacionada com a curvatura de Riemann. Partindo de (1.13):

$$0 = 2\nabla^\omega_{[\mu} \nabla^\omega_{\nu]} e^I{}_\rho = F^I{}_{J\mu\nu} e^J{}_\rho - R^\sigma{}_{\rho\mu\nu} e^I{}_\sigma, \quad (1.17)$$

resultando em:

$$R^\sigma{}_{\rho\mu\nu} = e^\sigma{}_I e^J{}_\rho F^I{}_{J\mu\nu}. \quad (1.18)$$

Assim:

$$R = F_{IJ}{}^{\mu\nu} e^I{}_\mu e^J{}_\nu. \quad (1.19)$$

Já o elemento de volume $d^4x \sqrt{-g}$ pode ser escrito diretamente em termos das tetradas. Pela relação (1.5):

$$-g = (\det e)^2, \quad (1.20)$$

sendo $\det e$ o determinante da matriz $e^I{}_\mu$. Assim:

$$\begin{aligned} e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 &= e^0{}_\mu e^1{}_\nu e^2{}_\rho e^3{}_\sigma dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma, \\ &= e^0{}_\mu e^1{}_\nu e^2{}_\rho e^3{}_\sigma \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \\ &= \sqrt{-g} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned} \quad (1.21)$$

e, portanto:

$$\begin{aligned} d^4x \sqrt{-g} R &= F_{IJ}{}^{\mu\nu} e^I{}_\mu e^J{}_\nu e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \\ &= -\frac{1}{4} F_{KL}{}^{\mu\nu} \varepsilon^{ABKL} \varepsilon_{ABIJ} e^I{}_\mu e^J{}_\nu e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \\ &= -\frac{1}{4} F_{KL}{}^{\mu\nu} \varepsilon_{ABIJ} e^I{}_\mu e^J{}_\nu e^A \wedge e^B \wedge e^K \wedge e^L \\ &= -\frac{1}{4} F_{KL}{}^{\mu\nu} \varepsilon_{ABIJ} e^I{}_\mu e^J{}_\nu e^A{}_\alpha e^B{}_\beta e^K{}_\gamma e^L{}_\delta dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \wedge dx^\delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4} F^{IJ} \gamma \delta \varepsilon_{ABIJ} e^A_\alpha e^B_\beta dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \wedge dx^\delta \\
&= -\frac{1}{2} e^A \wedge e^B \wedge F^{IJ} \varepsilon_{ABIJ}
\end{aligned} \tag{1.22}$$

sendo da primeira para a segunda linha utilizada a antissimetria nos índices IJ ; e da quarta para a quinta linha utilizada a simetria $R_{\sigma\rho\mu\nu} = R_{\mu\nu\sigma\rho}$ do tensor de Riemann. Assim, tem-se

$$S[e] = \frac{1}{2} \int e^I \wedge e^J \wedge F^{KL} \varepsilon_{IJKL}. \tag{1.23}$$

A equação de Einstein pode ser obtida a partir da ação acima pela condição da ação estacionária:

$$\delta S = \int \delta e^I \wedge e^J \wedge F^{KL} \varepsilon_{IJKL}, \tag{1.24a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta e} = 0 &\implies e^J \wedge F^{KL} \varepsilon_{IJKL} = 0, \\
&\implies R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0.
\end{aligned}$$

A partir da ação (1.23), é possível construir uma ação modificada em que a conexão de spin é vista como uma variável independente das tetradas:

$$S[e, \omega] = \frac{1}{2} \int e^I \wedge e^J \wedge F^{KL} \varepsilon_{IJKL}. \tag{1.25}$$

A ação acima é chamada de ação de Palatini. Para variações das tetradas e da conexão:

$$\delta S = \int \delta e^I \wedge e^J \wedge F^{KL} \varepsilon_{IJKL} + \int d^\omega e^I \wedge e^J \wedge \delta \omega^{KL} \varepsilon_{IJKL} + \text{termos de fronteira}, \tag{1.26}$$

evidenciando que, assim como a ação de Einstein-Hilbert, a ação de Palatini também retorna a equação de Einstein na condição da ação estacionária para variações das tetradas. Além disso, a condição da ação estacionária para variações da conexão retorna a condição de torção nula. Assim, a ação de Palatini traz a vantagem de ser mais econômica para descrever a relatividade Geral via formalismo de tetradas.

1.2 Ação de Holst

A ação da Relatividade Geral utilizada para construir o formalismo da gravitação quântica de laços é uma ação classicamente equivalente à ação de Palatini, chamada de ação de Holst:

$$S[e, \omega] = \frac{1}{2} \int e^I \wedge e^J \wedge F^{KL} \varepsilon_{IJKL} + \frac{1}{\gamma} \int e^I \wedge e^J \wedge F_{IJ}, \tag{1.27}$$

sendo $\gamma \in \mathbb{R}$ o chamado parâmetro de Barbero-Immirzi. É fácil verificar que o termo adicional, chamado de termo de Holst, não altera as equações de movimento:

$$\begin{aligned} \delta S[e, \omega] = & \int \delta e^I \wedge e^J \wedge F^{KL} \varepsilon_{IJKL} + \int d^\omega e^I \wedge e^J \wedge \delta \omega^{KL} \varepsilon_{IJKL} + \\ & + \frac{1}{\gamma} \int d^\omega e^I \wedge e^J \wedge \delta \omega^{KL} \eta_{IK} \eta_{JL} + \text{termos de fronteira,} \end{aligned} \quad (1.28a)$$

$$\frac{\delta S}{\delta e^I} = 0 \implies e^J \wedge F^{KL} \varepsilon_{IJKL} = 0, \quad (1.28b)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \omega_{KL}} = 0 \implies d^\omega e^I = 0. \quad (1.28c)$$

Apesar do termo de Holst não modificar as equações de movimento, sua adição tem um papel fundamental na descrição rumo à LQG^a. Classicamente, o termo de Holst altera o par canônico de variáveis que surge na passagem da descrição lagrangiana para a hamiltoniana, fazendo surgir naturalmente a conexão de Ashtekar-Barbero e a densidade de triada.

1.2.1 Vínculo de simplicidade

A quantização de um sistema físico envolve a descrição de uma cinemática, construída a partir de uma álgebra de operadores sobre um espaço de Hilbert, seguida de uma descrição dinâmica, ditando a relação entre estados iniciais e finais. Independentemente do processo de quantização, que pode ser construído em termos de um operador hamiltoniano ou por um procedimento análogo às integrais de caminho, o ponto de partida para uma descrição quântica é pela cinemática.

Visto que na Relatividade Geral o tempo é uma coordenada geométrica, a fronteira de uma região compacta do espaço-tempo generaliza a noção de uma superfície de tempo fixo. Consequentemente, a quantização dessa região nos leva a uma estrutura cinemática definida sobre essa fronteira. Dessa forma, vislumbrando a quantização da Relatividade Geral, é conveniente descrever a ação de Holst em termos de variáveis que facilitam análises em regiões de fronteira.

Seguindo essa perspectiva, percebe-se que a ação de Holst pode ser escrita como

$$S[e, \omega] = \int B^{IJ} \wedge F_{IJ}. \quad (1.29a)$$

$$B^{IJ} := \frac{1}{2} \varepsilon^{IJ}{}_{KL} e^K \wedge e^L + \frac{1}{\gamma} e^I \wedge e^J \quad (1.29b)$$

A definição de B^{IJ} é particularmente vantajosa não somente por simplificar a escrita da ação, mas também porque como $B^{IJ} \wedge F_{IJ} \sim B^{IJ} \wedge d\omega_{IJ} + \dots$, tem-se que, a partir de uma foliação do espaço-tempo, a densidade vetorial $\varepsilon^{abc} B_{bc}^{IJ}$ corresponde ao momento canônico

^a Apesar de livre classicamente, o parâmetro γ é fixado pela descrição quântica. Tradicionalmente, seu valor é fixado pela termodinâmica de buracos negros, resultando em $\gamma \approx 0, 2375$. Para mais informações, recomenda-se [1, 26, 48].

da conexão de spin ω_{aIJ} . Pela antissimetria nos índices internos, B^{IJ} corresponde a uma 2-forma com valores em $sl^*(2, \mathbb{C})$.

Teorias de campo que possuem a ação da forma (1.29a) são chamadas de teorias BF [52]. Tais teorias correspondem a teorias de campo topológicas e são construídas em relação a algum grupo de gauge. Diferentemente de teorias BF gerais, a Relatividade Geral é uma teoria BF com vínculos, dado que B^{IJ} não é uma variável independente, mas sim escrita em termos das tetradas. A restrição imposta por (1.29b) é chamada de vínculo de simplicidade, pois relaciona a 2-forma B^{IJ} com a 2-forma simples $e^I \wedge e^J$. Sua implementação não é única, o que gera diferentes descrições quânticas. Para mais informações, recomenda-se a consulta a [52]. A abordagem adotada nesta tese é a do modelo EPRL-FK [27, 29, 30], amplamente usado na descrição da LQG. Dessa forma, a descrição do vínculo de simplicidade e sua implementação quântica seguem o caminho que resulta nas amplitudes de transição do modelo EPRL-FK. Para uma construção simplificada, não trataremos B^{IJ} como uma variável independente, acrescentando o vínculo à ação. Em vez disso, trataremos B^{IJ} apenas como uma abreviação.

A definição de B^{IJ} evidencia uma relação envolvendo seus índices internos, chamada de vínculo de simplicidade linear. A partir de um campo vetorial temporal t^I , é possível decompor as componentes espaço-temporal e espacial de B^{IJ} :

$$K^I = t_J B^{IJ}, \quad (1.30a)$$

$$E^I = t_J \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{IJ}{}_{KL} B^{KL} \right). \quad (1.30b)$$

Tem-se, em Σ :

$$K^I = \gamma E^I. \quad (1.31)$$

Sem perda de generalidade, é conveniente escolher um conjunto de tetradas em que Σ corresponda à superfície ortogonal a e^0 , ou seja: $t_J = (1, 0, 0, 0)$. Tal escolha é chamada de gauge do tempo, simbolizada por

$$e^0 = dt \quad (1.32a)$$

$$e^i = e_a^i dx^a \quad (1.32b)$$

em que $a, b, c, \dots = 1, 2, 3$ são índices espaciais do espaço-tempo e $i, j, k, \dots = 1, 2, 3$ são índices espaciais internos. A partir dessa escolha, tem-se

$$B^{i0} = K^i, \quad (1.33a)$$

$$B^{jk} = \varepsilon^{ijk} E_i \quad (1.33b)$$

$$K^i = \gamma E^i. \quad (1.33c)$$

A forma acima do vínculo de simplicidade terá papel central no procedimento de quantização que será apresentado no próximo capítulo.

Por ser um campo vetorial tipo tempo, t_I pode ser visto como a escolha de um referencial de Lorentz. Dessa forma, a decomposição (1.30) separa $sl(2, \mathbb{C})$ em geradores de *boosts* K^i e geradores de rotação E^i .

2 GRAVITAÇÃO QUÂNTICA DE LAÇOS

Com base nas discussões anteriores, podemos proceder para a prescrição de quantização que leva à Gravitação Quântica de Laços (LQG). É importante enfatizar que existem duas abordagens tradicionais para tal: a prescrição canônica e a prescrição covariante. Por razões práticas relacionadas à construção do espaço de Hilbert da LQG, como será esclarecido a seguir, a construção da LQG trabalhada nesta tese será no formalismo covariante.

Entretanto, é importante não ignorar a prescrição canônica por duas razões. Primeiro, a abordagem canônica foi a primeira formulação da LQG. Consequentemente, a descrição covariante é fortemente inspirada na imagem quântica que emerge dela: uma geometria discreta em termos de poliedros quânticos interpretados a partir de estados em grafos [12, 61]. Segundo, o contexto de correlações discutido nesta tese é motivado por dificuldades que surgem da busca por uma representação quântica do vínculo hamiltoniano da prescrição canônica.

Portanto, antes de explorar a formulação covariante da LQG, apresentaremos um resumo da descrição canônica para motivar discussões subsequentes e justificar certas escolhas feitas na abordagem covariante.

2.1 Formalismo canônico

A prescrição canônica é, historicamente, a primeira forma de se chegar à LQG. Essa prescrição parte da formulação Hamiltoniana da relatividade geral, foliando o espaço-tempo em superfícies espaciais Σ e resultando em uma teoria com vínculos, como será evidenciado ao longo dessa seção.

A imposição do vínculo de simplicidade diretamente na ação de Holst resulta em

$$\begin{aligned}
 S &= \int_M \left(B^{i0} \wedge F_{i0} + B^{jk} \wedge F_{jk} \right) \\
 &= \int_M \left(K^i \wedge F_{i0} + \varepsilon^{ijk} E_i \wedge F_{jk} \right) \\
 &= \int_M \left(\gamma E_i \wedge F^{0i} + \varepsilon^{ijk} E_i \wedge F_{jk} \right) \\
 &= \int_M E_i \wedge d^\omega \left(\gamma \omega^{0i} + \varepsilon^i_{jk} \omega^{jk} \right)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

O campo vetorial t^I do vínculo de simplicidade induz uma foliação em M em termos do vetor $t^\mu = t^I e_I^\mu$. Esse campo vetorial define uma função de tempo suave t a partir da relação $t^\mu \nabla_\mu t = 1$, de forma que cada valor constante de t define uma superfície espacial

Σ_t . É conveniente decompor t^μ em componentes ortogonal e paralela a Σ_t :

$$t^\mu = Nn^\mu + N^\mu, \quad (2.2)$$

em que n^μ é o vetor ortonormal às superfícies Σ_t , N é a função de lapso e N^μ o vetor de *shift*. Atribuindo t^μ como vetor coordenado, ou seja, $t^\mu = (1, 0, 0, 0)$, tem-se

$$S = \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma_t} d^3x \left(E_a^i \dot{A}_a^i + \dots \right), \quad (2.3)$$

em que

$$A_a^i = \varepsilon^i{}_{jk} \omega_a^{jk} + \gamma \omega_a^{0i} \quad (2.4)$$

é a conexão de Ashtekar-Barbero, uma 1-forma com valores no grupo $SU(2)$; e

$$E_i^a = \frac{1}{2\gamma} \varepsilon^{abc} \varepsilon_{ijk} e_b^j \wedge e_c^k \quad (2.5)$$

é a densidade de triada, uma densidade vetorial que assume valores em $su^*(2)$. A forma da ação (2.3) indica que a descrição hamiltoniana da ação de Holst nos leva naturalmente à descrição do espaço de fase da Relatividade Geral em termos do par canônico (A_a^i, E_i^a) , obedecendo a álgebra:

$$\{A_a^i(x), E_j^b(y)\} = \delta_j^i \delta_a^b \delta^3(x-y), \quad (2.6a)$$

$$\{A_a^i(x), A_b^j(y)\} = 0, \quad \{E_i^a(x), E_j^b(y)\} = 0. \quad (2.6b)$$

O desenvolvimento de (2.3), seguido de uma transformada de Legendre, nos leva a uma descrição do espaço de fase em que o hamiltoniano total H_T é composto somente por vínculos:

$$H_T = G(\Lambda) + H_{\text{Diff}}(\vec{N}) + H(N) \approx 0, \quad (2.7)$$

$$G(\Lambda) = \int_{\Sigma} d^3x \Lambda^j \mathcal{D}_a E_j^a \approx 0, \quad (2.8a)$$

$$H_{\text{Diff}}(\vec{N}) = \int_{\Sigma} d^3x \left[N^a F_{ab}^i E_i^b + E_i^a \mathcal{D}_a (N^b A_b^i) \right] \approx 0, \quad (2.8b)$$

$$H(N) = \int_{\Sigma} d^3x N \frac{E_i^a E_j^b}{\sqrt{\det E}} \left[\varepsilon^{ijk} F_{ab}^k - 2(1 + \gamma^2) K_{[a}^i K_{b]}^j \right] \approx 0, \quad (2.8c)$$

em que

$$\Lambda^i := -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \omega_{jkt} \in su(2), \quad (2.9)$$

\mathcal{D}_a é derivada covariante induzida pela conexão de Ashtekar-Barbero

$$\mathcal{D}_a v^i := \partial_a v^i + \varepsilon^i{}_{jk} A_a^j v^k, \quad (2.10)$$

\vec{N} é a projeção em Σ_t do vetor de *shift*, F_{ab}^i o tensor de curvatura associado a A_a^i , e $K_a^i = e^{ib} K_{ab}$, sendo K_{ab} a curvatura extrínseca. Os três vínculos em (2.8) estão relacionados às duas simetrias da formulação de Cartan da Relatividade Geral: a simetria local $SU(2)$,

induzida pela definição das tetradas (1.6); e a invariância por difeomorfismos gerais, principal característica da Relatividade Geral. A simetria local $SU(2)$ produz o vínculo de Gauss $G(\Lambda)$, gerador de transformações $SU(2)$:

$$\{A_a^i(x), G(\Lambda)\} = -\mathcal{D}_a \Lambda^i(x), \quad (2.11a)$$

$$\{E_i^a(x), G(\Lambda)\} = \varepsilon_{ij}{}^k \Lambda^j(x) E_k^a(x), \quad (2.11b)$$

enquanto a invariância por difeomorfismos gerais produz os vínculos de difeomorfismo $H_{\text{Diff}}(\vec{N})$ e hamiltoniano $H(N)$, sendo $H_{\text{Diff}}(\vec{N})$ gerador de difeomorfismos espaciais:

$$\{A_a^i(x), H_{\text{Diff}}(\vec{N})\} = \mathcal{L}_{\vec{N}} A_a^i(x), \quad (2.12a)$$

$$\{E_a^i(x), H_{\text{Diff}}(\vec{N})\} = \mathcal{L}_{\vec{N}} E_a^i(x), \quad (2.12b)$$

e $H(N)$ gerador, a menos de difeomorfismos espaciais e rotações internas, de difeomorfismos temporais

$$\{A_a^i(x), H(N)\} = \dot{A}_a^i(x) - \mathcal{L}_{\vec{N}} A_a^i(x) + \frac{1}{2} \mathcal{D}_a (\varepsilon^{ijk} \omega_{jk}(x) t), \quad (2.13a)$$

$$\{E_i^a(x), H(N)\} = \dot{E}_i^a(x) - \mathcal{L}_{\vec{N}} E_i^a(x) + \omega^j{}_i E_j^a(x) t. \quad (2.13b)$$

A determinação dos colchetes acima pode ser verificada no apêndice A.

Apesar da possibilidade de descrever o espaço de fase clássico em termos do par canônico (A_a^i, E_j^b) , o comportamento distribucional da álgebra de Poisson (2.6) nos leva a um obstáculo na quantização da teoria [6, 72]. Variáveis distribucionais não produzem operadores bem definidos que atuam em um espaço de Hilbert, levando-nos a procurar por variáveis integradas^a em termos de (A_a^i, E_j^b) . Motivada pela implementação dos vínculos de Gauss e de difeomorfismo, a variável integrada escolhida para a conexão de Ashtekar-Barbero é a holonomia ao longo de uma curva $\ell : [0, 1] \rightarrow \Sigma_t$, tradicionalmente referida como *link*:

$$U_\ell = \mathcal{P} \left[\exp \left(\int_\ell A_a^i \tau_i dx^a \right) \right] \quad (2.14)$$

que, pela ação de transformações $\phi \in \text{Diff}(M)$ e $g \in SU(2)$, são transformadas, respectivamente, por^b:

$$\phi[U_\ell] = U_{\phi^{-1}(\ell)}, \quad (2.15a)$$

$$g[U_\ell] = g(\ell(1)) U_\ell g^{-1}(\ell(0)). \quad (2.15b)$$

A escolha da holonomia em um conjunto de curvas como variável canônica pode ser vista como um truncamento dos graus de liberdade da Relatividade Geral. Em vez de visualizar o espaço-tempo como um contínuo, onde o transporte paralelo entre quaisquer dois pontos pode ser realizado continuamente através de transformações infinitesimais geradas pela conexão de Ashtekar, passamos para uma perspectiva discreta: para um dado conjunto

^a “Variáveis integradas” foi o termo utilizado para designar, do inglês, as *smearred variables*.

^b Para mais detalhes, recomenda-se o apêndice A.

de links $\{\ell\}$, as regiões do espaço-tempo discretizado consistem nos pontos inicial e final dessas links, de modo que o transporte paralelo entre tais pontos ocorre ao longo do link que os une. Assim, regiões vizinhas desse espaço-tempo discretizado são aquelas conectadas por algum link ℓ . Conseqüentemente, em termos de holonomias, o espaço de fase da relatividade geral é descrito sobre um grafo Γ , composto por nós (n) e links (ℓ). Seus nós são os pontos inicial e final dos links, e qualquer interseção entre dois links deve coincidir com esses pontos extremos. A imagem contínua da relatividade geral é recuperada a partir da análise de todos os grafos possíveis definidos nas fatias espaciais Σ_t .

Para a variável integrada de momento, o comportamento das densidades de triadas motiva sua integração em superfícies na forma de fluxos. Devido à perspectiva discreta associada à escolha das holonomias como variável integrada, é natural definir o momento integrado associado à holonomia U_ℓ em uma das extremidades do link. Nesta tese, a escolha foi por defini-lo no ponto final do link. Portanto, se S é uma superfície com $\ell \cap S = \ell(t_0)$, as componentes do momento integrado associadas à densidade de triada são o fluxo de triada através de S no início de ℓ :

$$E_i(S) = 2\text{Tr} \left[\tau_i U_\ell(t_0, 1) \left(\frac{1}{2} \int_S \varepsilon_{abc} E_j^a \tau^j dx^b \wedge dx^c \right) U_\ell(t_0, 1)^{-1} \right], \quad (2.16)$$

em que $U_\ell(t_1, t_2)$ é a holonomia ao longo de ℓ de $\ell(t_1)$ a $\ell(t_2)$, τ_i são os geradores de $su(2)$ e o traço é calculado na representação fundamental. Por simplicidade de notação, é conveniente retirar o transporte paralelo realizado pela holonomia em (2.16), adotando S como superfícies que intersectam ℓ em $t_0 \rightarrow 1$:

$$E_i(S) = \frac{1}{2} \int_S \varepsilon_{abc} E_j^a \tau^j dx^b \wedge dx^c. \quad (2.17)$$

É fácil mostrar^c que sob a ação de $\phi \in \text{Diff}(M)$ e $g \in SU(2)$, fluxos E_i se transformam por

$$\phi [E_i(S)] = E_i(\phi^{-1}(S)), \quad (2.18a)$$

$$g [E_i] = g^{-1} E_i g. \quad (2.18b)$$

Assim, o par canônico (U_ℓ, E_i) é definido em grafos: holonomias nos links e fluxo nos nós. Essas variáveis dão origem à álgebra de holonomia-fluxo^d:

$$\{U_\ell, U_{\ell'}\} = 0, \quad (2.19a)$$

$$\{U_\ell, E_i\} = \tau_i U_\ell, \quad (2.19b)$$

$$\{E_i, E_j\} = \varepsilon_{ij}{}^k E_k. \quad (2.19c)$$

A LQG é obtida a partir da quantização canônica do espaço de fase da Relatividade Geral descrito em termos de holonomias e fluxos pela álgebra de holonomia-fluxo.

^c Para mais detalhes, recomenda-se o apêndice A.

^d Para mais detalhes, recomenda-se o apêndice B.

A quantização canônica consiste em, para um dado grafo Γ , promover holonomias e fluxos a operadores que atuam em um espaço de Hilbert \mathcal{H}_Γ , e os colchetes de Poisson a comutadores. O espaço de Hilbert cinemático $\mathcal{K}_\Gamma \in \mathcal{H}_\Gamma$ consiste no subespaço que obedece à versão quântica dos vínculos de Gauss e de difeomorfismo:

$$\hat{G}(\Lambda) |\psi\rangle = 0, \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{K}_\Gamma \quad (2.20a)$$

$$\hat{H}_{\text{Diff}}(\vec{N}) |\psi\rangle = 0, \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{K}_\Gamma \quad (2.20b)$$

e a evolução temporal ao longo da coordenada de tempo, a menos de difeomorfismos espaciais e transformações locais $SU(2)$, é dada pelo vínculo Hamiltoniano:

$$\hat{H}(N) |\psi\rangle = 0, \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{K}_\Gamma \quad (2.21)$$

A implementação dos vínculos de Gauss e de difeomorfismo é feita sem grandes problemas, uma vez que seus operadores em \mathcal{H}_Γ são bem definidos. A implementação do vínculo de Gauss força os estados nos nós serem a combinação linear de *intertwiners*, vetores invariantes sob a ação de transformações $SU(2)$, e que serão discutidos nas próximas seções. Já a implementação do vínculo de difeomorfismo^e resulta em estados da geometria que se enquadram em classes de equivalência de nós, chamadas de *s-nós*^f [6]. Entretanto, motivado pela interpretação geométrica associada aos grafos e sua relação com a geometria de Regge, é tradicional descartar essa liberdade associada à escolha de classes de equivalências de nós e trabalhar somente com os grafos abstratos [56, 57, 61]. A geometria em nível quântico passa a ter, portanto, um caráter puramente combinatório, de forma que o espaço de Hilbert cinemático \mathcal{K} da LQG é a soma direta de \mathcal{K}_Γ para grafos abstratos:

$$\mathcal{K} = \bigoplus_{\Gamma} \mathcal{K}_\Gamma. \quad (2.22)$$

Enquanto a imposição dos vínculos de Gauss e de difeomorfismo em nível quântico é feita sem grandes obstáculos, a imposição do vínculo hamiltoniano apresenta dificuldades significativas. O primeiro obstáculo à quantização do vínculo hamiltoniano diz respeito ao

^e A exposição da solução do vínculo de difeomorfismo escolhida neste parágrafo não segue a construção por primeiros princípios tradicionalmente feita no formalismo canônico [6, 55, 72]. A construção usual implementa o vínculo de difeomorfismo a partir de um procedimento de média no grupo de difeomorfismos espaciais, resultando em estados que não fazem parte do espaço de Hilbert cinemático, mas sim de seu dual algébrico. Dessa forma, estados invariantes por difeomorfismos seriam, na verdade, funcionais lineares sobre o espaço cinemático. A escolha pela implementação do vínculo de difeomorfismo em termos de grafos abstratos deve-se tanto à sua menor complexidade matemática quanto ao fato de ser mais natural para embasar a construção cinemática do formalismo covariante da LQG, apresentada na próxima seção. No entanto, vale ressaltar que a implementação do vínculo de difeomorfismo em termos de grafos abstratos só é concluída quando levamos em conta estados invariantes pela ação do grupo de automorfismos do grafo.

^f Vale aqui a distinção: os nós dessas classes de equivalência vem do inglês *knot*, tendo significado análogo a nós de cordas. Já os nós, elementos de um grafo, vem do inglês *node*.

seu caráter não polinomial. Para contorná-lo, utiliza-se o chamado truque de Thiemann [69, 70, 72], que elimina a dependência não polinomial do vínculo^g, resultando em:

$$H(N) = H^E(N) - 2(1 + \gamma^2)T(N), \quad (2.23a)$$

$$H^E(N) = 2 \int_M d^3x N \varepsilon^{abc} \delta_{ij} F_{ab}^i \{A_c^j, V\}, \quad (2.23b)$$

$$T(N) = \frac{1}{4\gamma^2} \int_M d^3x N \varepsilon^{abc} \varepsilon_{ijk} \{A_a^i, V\} \{A_b^j, \{H^E(1), V\}\} \{A_c^k, \{H^E(1), V\}\}. \quad (2.23c)$$

Pela presença do tensor de curvatura e da conexão de Ashtekar-Barbero no vínculo hamiltoniano, sua quantização carece de um procedimento de regularização, escrevendo F_{ab}^i e A_a^i em termos de holonomias. Dessa forma, a versão quântica do vínculo envolve produtos de operadores holonomias e do operador volume. Nesse estágio, surgem ambiguidades na definição da versão quântica do vínculo hamiltoniano envolvendo, por exemplo, (i) o ordenamento dos operadores holonomia e volume que, pelos colchetes (2.19), não comutam; (ii) a escolha de curvas fechadas para o operador holonomia que reproduz na regularização o tensor de curvatura; (iii) a escolha da representação j de $SU(2)$ para a quantização, assim como a possível escolha de uma combinação linear em diferentes representações; e (iv) a possibilidade de definir o operador de forma simétrica ou não. Além disso, a ausência de teoremas de unicidade não nos permite determinar com precisão as reais diferenças de muitas dessas ambiguidades [55], tornando a quantização do vínculo hamiltoniano um dos principais problemas em aberto da LQG canônica.

As dificuldades associadas à quantização do vínculo hamiltoniano motivaram a busca por alternativas para a descrição dinâmica da LQG. Nessa busca, surge a abordagem covariante, baseada em amplitudes de transição associadas a estruturas chamadas *spinfoam*.

2.2 Formalismo covariante: Spinfoam

Por se tratar de um formalismo mais recente, a descrição covariante da LQG foi desenvolvida a partir do arcabouço teórico já consolidado pela descrição canônica. A demonstração da unicidade de representação invariante por difeomorfismo da álgebra de holonomia fluxo [38] em conjunto com a interpretação geométrica do espaço tempo em termos de poliedros quânticos [12, 61] motivaram a busca por uma nova descrição da LQG que, mantendo seu espaço cinemático, pudesse contornar as dificuldades associadas ao operador hamiltoniano.

Assim como na descrição canônica, o formalismo covariante da LQG tem início no truncamento dos graus de liberdade da Relatividade Geral. Esse truncamento é realizado em termos de uma discretização do espaço-tempo clássico em poliedros, motivado pelos trabalhos de Regge e Ponzano [53, 54], produzindo uma teoria discreta conhecida como

^g Aos mais interessados, é apresentado o truque de Thiemann no apêndice D.

geometria de Regge. Tal procedimento é conhecido como discretização clássica, se reduzindo à Relatividade Geral no limite de refinamento infinito da discretização do espaço-tempo.

A discretização clássica induz uma discretização das variáveis da teoria e da ação clássica. Nesse contexto, surgem naturalmente as variáveis de holonomia e fluxo presentes na descrição canônica, porém, ambas definidas em regiões 4-dimensionais, e não somente em folhas espaciais. A quantização de regiões compactas desse espaço-tempo discretizado produz grafos na fronteira e resulta no mesmo espaço cinemático da LQG canônica. Já para o interior, a quantização produz a estrutura conhecida como spinfoam, peça fundamental para a descrição da dinâmica da LQG a partir do cálculo de amplitudes de probabilidade por um processo análogo às integrais de caminho [27, 52, 61]. Diferentemente da LQG canônica, as amplitudes de probabilidade calculadas pela descrição covariante são bem definidas e com limite clássico que se reduz à Relatividade Geral [9, 10, 61], tornando-a uma boa alternativa ao formalismo canônico no estudo da dinâmica da LQG. Entretanto, a compreensão completa da relação entre o vínculo hamiltoniano da descrição canônica e das amplitudes de transição da descrição covariante permanece como um problema em aberto na LQG.

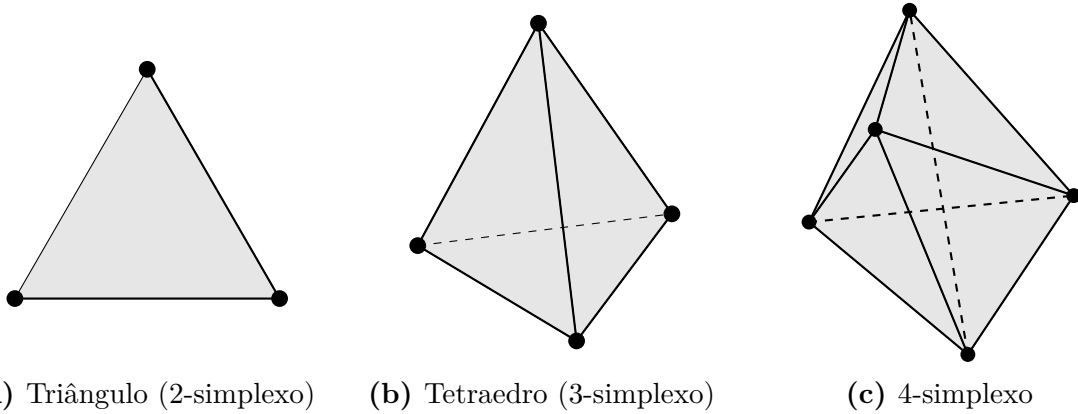
Nas próximas seções, será apresentado o formalismo covariante da LQG, começando pela discretização clássica, e seguindo para a quantização.

2.2.1 Discretização clássica

A discretização clássica da Relatividade Geral consiste no truncamento de seus graus de liberdade, descrevendo o espaço-tempo como um conjunto de poliedros planos. Apesar da discretização poder ser feita a partir de qualquer tipo de sólido quadridimensional, é conveniente discretizar o espaço-tempo a partir de uma triangulação Δ por 4-simplexos. Isso porque d -simplexos são a generalização de tetraedros: um d -simplexo é um sólido de dimensão d formado por $d + 1$ vértices ligados por $d(d + 1)/2$ segmentos. Dessa forma: 0-simplexos são pontos, 1-simplexos são segmentos, 2-simplexos são triângulos, 3-simplexos são tetraedros, etc.

A partir de uma triangulação Δ , podemos definir o seu dual Δ^* . O dual à triangulação é definido associando um vértice (v) para cada 4-simplexo, e ligando com arestas orientadas (a) os vértices correspondentes a 4-simplexos vizinhos. Essa construção gera faces (f) delimitadas pelas arestas. O que chamamos do dual a uma triangulação Δ é $\Delta^* = \{v, a, f\}$, que possui uma estrutura de 2-complexo.

Como dois 4-simplexos vizinhos compartilham um mesmo tetraedro de fronteira, cada aresta de Δ^* cruza somente um tetraedro e está, portanto, unicamente associada a ele. Além disso, cada face de Δ^* intersecta somente um triângulo da fronteira dos tetraedros de fronteira dos 4-simplexos, sendo cada face, portanto, unicamente associada a um triângulo.



(a) Triângulo (2-simplexo) (b) Tetraedro (3-simplexo) (c) 4-simplexo

Figura 1 – Um d -simplexo pode ser construído a partir da colagem de uma quantidade $d + 1$ de $(d - 1)$ -simplexos pelas fronteiras, que são $(d - 2)$ -simplexos. Assim, triângulos (2-simplexos) correspondem à colagem de 3 segmentos (1-simplexos) pelas suas fronteiras, que são pontos (0-simplexos); tetraedros (3-simplexos) correspondem à colagem de 4 triângulos (2-simplexos) pelas suas fronteiras, que são segmentos (1-simplexos); e 4-simplexos correspondem à colagem de 5 tetraedros (3-simplexos) pelas suas fronteiras, que são triângulos (2-simplexos).

Assim, Δ^* também pode ser construído, a partir de Δ , associando um vértice para cada 4-simplexo, uma aresta para cada tetraedro, e uma face para cada triângulo.

Δ	Δ^*
4-simplexo	→ Vértice (v)
Tetraedro	→ Aresta (a)
Triângulo	→ Face (f)

Perceba que a descrição do espaço-tempo a partir de Δ^* é completamente combinatória. Dessa forma, as regiões do espaço-tempo não são localizadas de forma dependente de coordenadas, mas sim umas em relação às outras. Assim, por natureza, essa descrição já incorpora a invariância por difeomorfismo da Relatividade Geral, não sendo necessário impô-la *a posteriori*.

A partir da construção de Δ^* , podemos discretizar a ação de Holst. Tal discretização é realizada substituindo a conexão ω por sua holonomia ao longo das arestas, e o momento B por sua integral ao longo do triângulo t_f dual à face f :

$$\omega \rightarrow U_a := P\left(e^{\int_a \omega}\right) \in SL(2, \mathbb{C}), \quad (2.24a)$$

$$B \rightarrow B_f := \int_{t_f} B \in sl^*(2, \mathbb{C}). \quad (2.24b)$$

Alguns comentários quanto às novas variáveis definidas acima:

1. A holonomia é um elemento de $SL(2, \mathbb{C})$ por tal grupo ser o recobrimento universal de $SO(1, 3)$. Portanto, a exponenciação de $so(1, 3)$ nos leva naturalmente a $SL(2, \mathbb{C})$;

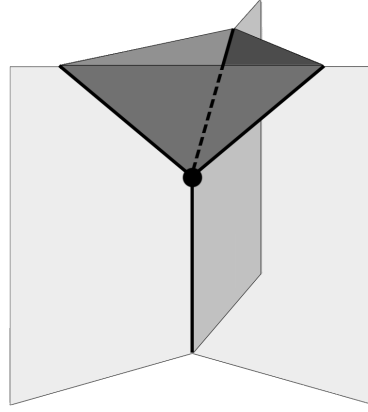


Figura 2 – Para melhor visualização, a imagem acima representa o 2-complexo associado a um tetraedro: (i) ao tetraedro, associa-se um vértice; (ii) como tetraedros vizinhos são conectados por arestas, cada triângulo de fronteira do tetraedro é associado a uma aresta, de forma que há quatro arestas emanando do vértice; (iii) cada par de arestas define uma face, completando a construção do 2-complexo.

2. Em Δ^* , transformações de gauge $SL(2, \mathbb{C})$ atuam nos vértices. Por (1.9), sob essas transformações, a holonomia U_a correspondente à aresta orientada do vértice $s(a)$ para $t(a)$ se transforma por:

$$U_a \rightarrow \Lambda_{t(a)}^{-1} U_a \Lambda_{s(a)}, \quad \Lambda_{s(a)}, \Lambda_{t(a)} \in SL(2, \mathbb{C}); \quad (2.25)$$

3. Para mudanças de orientação das arestas, $U_a \rightarrow U_a^{-1}$.

Em termos das variáveis discretas, a ação de Holst discreta toma a forma

$$S = \sum_f \text{Tr} [B_f U_f], \quad (2.26)$$

em que $U_f = U_{a_n}, \dots, U_{a_1}$ é a composição das holonomias das arestas da face f .

2.2.1.1 Discretização da fronteira e espaço de fase

A discretização de uma região R do espaço-tempo induz uma discretização de sua fronteira ∂R . De forma natural, a discretização de ∂R é feita a partir dos tetraedros da fronteira $\partial\Delta$ de Δ . As extremidades das arestas duais a esses tetraedros são chamados de nós (n) e a fronteira das faces duais aos triângulos compartilhados por dois tetraedros vizinhos é chamada de link (ℓ). A partir disso, o dual à triangulação $\partial\Delta$ corresponde a um grafo $\Gamma = \{n, \ell\}$.

Como os links de Γ são as arestas da fronteira, que estão unicamente associados a uma face, as variáveis de fronteira são ambas associadas aos links, e, portanto, rotuladas

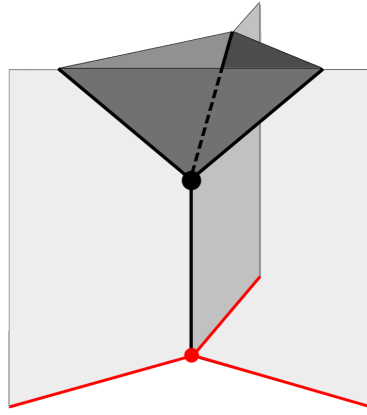


Figura 3 – A partir da ilustração do 2-complexo associado a um tetraedro, nota-se que sua fronteira corresponde a um grafo (em vermelho) cujos nós possuem um segmento a menos emanando de si, quando comparados ao vértice do 2-complexo. Geometricamente, isso decorre do fato de que a triangulação de um espaço por d -simplexos induz uma triangulação por $(d - 1)$ -simplexos na fronteira.

por U_ℓ e B_ℓ . Entretanto, como a holonomia é uma operação que mapeia fibras de $s(\ell)$ em fibras de $t(\ell)$, o momento B_ℓ , que é um elemento da álgebra $sl(2, \mathbb{C})$, é definido não em ℓ , mas sim em suas extremidades $s(\ell)$ e $t(\ell)$. Como cada link é associado a dois nós, convencionamos que B_ℓ é definido em $s(\ell)$. Dessa forma, o par (U_ℓ, B_ℓ) define o espaço de fase discreto da teoria para um link ℓ :

$$\{(U_\ell, B_\ell)\} = SL(2, \mathbb{C}) \times sl^*(2, \mathbb{C}) \simeq T^*SL(2, \mathbb{C}). \quad (2.27)$$

O espaço de fase da Relatividade Geral discretizada passa a ser, portanto, um $T^*SL(2, \mathbb{C})$ para cada $\ell \in \Gamma$, ou seja, $T^*SL(2, \mathbb{C})^L$ para um grafo Γ com L links.

Em $T^*SL(2, \mathbb{C})$, toda função suave f em $SL(2, \mathbb{C})$ define uma variável de configuração, e todo campo vetorial suave X^i define uma variável de momento $P_X = X^i p_i$, em que p_i são as coordenadas de momento. É fácil mostrar que o colchete de Poisson entre eles é dado por:

$$\{f, X\} = \mathcal{L}_X f, \quad \{P_X, P_Y\} = -P_{[X, Y]}. \quad (2.28)$$

A partir da escolha de uma base para $sl^*(2, \mathbb{C})$, denotada por V_{IJ}

$$V_{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \\ -\kappa_1 & 0 & \tau_3 & -\tau_2 \\ -\kappa_2 & -\tau_3 & 0 & \tau_1 \\ -\kappa_3 & \tau_2 & \tau_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

em que κ_i e τ_i são, respectivamente, os geradores de *boosts* e rotações na direção i ; define-se naturalmente a variável de momento

$$B = B^{IJ} V_{IJ}. \quad (2.30)$$

A partir de (2.30), B^{IJ} é visto como a variável de momento associada ao campo vetorial definido pelo elemento da álgebra V_{IJ} , ou seja, $B^{IJ} = P_{V_{IJ}}$. Assim, a partir de 2.28, a álgebra de $T^*SL(2, \mathbb{C})$:

$$\{U_\ell, U_\ell\} = 0, \quad (2.31a)$$

$$\{U_\ell, B_\ell^{IJ}\} = V^{IJ}U_\ell, \quad (2.31b)$$

$$\{B_\ell^{IJ}, B_\ell^{KL}\} = \eta^{IK} B_\ell^{JL} - \eta^{IL} B_\ell^{JK} - \eta^{JK} B_\ell^{IL} + \eta^{JL} B_\ell^{IK}. \quad (2.31c)$$

A álgebra acima corresponde à álgebra de holonomia-fluxo para $SL(2, \mathbb{C})$.

Evidentemente, a descrição do espaço-tempo em termos de triangulações nos faz perder informação quanto à sua geometria. A Relatividade Geral é reconstruída a partir da descrição do espaço-tempo discretizado para todas as triangulações possíveis, ou no limite de infinito refinamento da triangulação.

2.2.2 Quantização

A quantização de um sistema clássico pode ser separada em duas partes: a quantização do espaço de fase clássico, construindo a cinemática da teoria; e a quantização de sua dinâmica, determinando como se dá a evolução temporal dos estados cinemáticos.

2.2.2.1 Cinemática

A quantização do espaço de fase consiste em promover os colchetes de Poisson a comutadores e buscar uma representação unitária da álgebra clássica em termos de operadores que atuam em um espaço de Hilbert:

$$[\hat{U}_\ell, \hat{U}_\ell] = 0, \quad (2.32a)$$

$$[\hat{U}_\ell, \hat{B}_\ell^{IJ}] = i\hat{V}^{IJ}\hat{U}_\ell, \quad (2.32b)$$

$$[\hat{B}_\ell^{IJ}, \hat{B}_\ell^{KL}] = i\eta^{IK}\hat{B}_\ell^{JL} - i\eta^{IL}\hat{B}_\ell^{JK} - i\eta^{JK}\hat{B}_\ell^{IL} + i\eta^{JL}\hat{B}_\ell^{IK}. \quad (2.32c)$$

As representações unitárias irredutíveis de $SL(2, \mathbb{C})$ são classificadas por dois parâmetros: um número real p e um semi-inteiro k , tal que para todo $g \in SL(2, \mathbb{C})$ [50, 61]:

$$D^{(p,k)}(g) : V^{(p,k)} \rightarrow V^{(p,k)}, \quad (2.33a)$$

$$V^{(p,k)} = \bigoplus_{j=k}^{\infty} \mathcal{H}_j, \quad (2.33b)$$

em que \mathcal{H}_j são os espaços das representações irredutíveis j de $SU(2)$. Portanto, o espaço $V^{(p,k)}$ pode ser expandido pela base $\{|p, k; j, m\rangle\}$ com $j = k, k+1, \dots$ e $m = -j, \dots, j$.

A partir de (2.33), a quantização de $T^*SL(2, \mathbb{C})$ nos leva a um espaço de Hilbert associado ao link ℓ

$$\mathcal{H}_\ell = \bigoplus_{p \in \mathbb{R}} \bigoplus_{k \in \frac{\mathbb{N}}{2}} V^{(p,k)} \otimes V^{(p,k)*}.$$

Entretanto, o vínculo de simplicidade linear deve ser obedecido no limite clássico da teoria, ou seja, no limite de grandes números quânticos. Como ficará claro, sua imposição restringirá o subespaço físico de \mathcal{H}_ℓ .

Para as representações unitárias, os dois Casimires de $SL(2, \mathbb{C})$ são dados em termos de (p, k) :

$$B^{IJ} B_{IJ} = 2(p^2 - k^2 + 1), \quad (2.34a)$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon^{IJKL} B_{IJ} B_{KL} = 4pk. \quad (2.34b)$$

Em termos do gauge do tempo, definido em (1.32):

$$K^2 - E^2 = p^2 - k^2 + 1, \quad (2.35a)$$

$$\vec{K} \cdot \vec{E} = pk. \quad (2.35b)$$

Como foi discutido na seção 1.2.1, as parcelas espaço-temporal e espacial de B^{IJ} não são independentes, mas sim relacionadas pelo vínculo de simplicidade (1.33c). Dessa forma, aplicando-o a (2.35):

$$(\gamma^2 - 1)E^2 = p^2 - k^2 + 1, \quad (2.36a)$$

$$\gamma E^2 = pk, \quad (2.36b)$$

Levando em conta que o vínculo de simplicidade corresponde a um vínculo clássico, sua imposição em (2.36) deve valer no limite de grandes números quânticos. Como E_i faz parte da álgebra de $SU(2)$ tem-se que $E^2 = j(j+1)$ com $j \in \mathbb{N}/2$. Assim, no limite de grandes números quânticos:

$$(\gamma^2 - 1)j^2 = p^2 - k^2, \quad (2.37a)$$

$$\gamma j^2 = pk, \quad (2.37b)$$

levando a

$$p = \gamma j, \quad (2.38a)$$

$$k = j. \quad (2.38b)$$

Portanto, os estados físicos da geometria devem satisfazer:

$$|p, k; j, m\rangle = |\gamma j, j; j, m\rangle, \quad (2.39)$$

estabelecendo um isomorfismo entre os estados $SL(2, \mathbb{C})$ que respeitam o vínculo de simplicidade e estados $SU(2)$. Esse isomorfismo pode ser introduzido pelo mapa unitário Y_γ :

$$Y_\gamma : \begin{aligned} \mathcal{H}_j &\rightarrow V^{(\gamma j, j)}, \\ |j, m\rangle &\mapsto |\gamma j, j; j, m\rangle, \end{aligned} \quad (2.40)$$

que nos permite descrever a cinemática da teoria em termos das representações unitárias de $SU(2)$, mapeando a descrição para as representações unitárias de $SL(2, \mathbb{C})$ a partir do mapa Y_γ . Dessa forma, o espaço de Hilbert associado a um link passa a ser

$$\mathcal{H}_\ell = \bigoplus_{j \in \frac{\mathbb{N}}{2}} \mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_j^*, \quad (2.41)$$

em que \mathcal{H}_{j_ℓ} é definido em $t(\ell)$ e $\mathcal{H}_{j_\ell}^*$ em $s(\ell)$. Por consistência, retira-se a representação $j = 0$ de \mathcal{H}_ℓ de forma que se $j_\ell = 0$ para algum ℓ , então o grafo analisado corresponde a $(\Gamma - \ell)$.

Perceba que a restrição imposta pelo mapa Y_γ não se restringe somente ao espaço de Hilbert da teoria. Para que os operadores do espaço de fase sejam bem definidos, eles devem ser definidos no subespaço físico isomorfo a $SU(2)$. Dessa forma, a busca por operadores que respeitam a álgebra (2.32) deve ser restrita a holonomias e momentos contidos em $SU(2)$ e $su(2)$, respectivamente. Assim:

$$U_\ell \in SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow U_\ell \in SU(2), \quad (2.42a)$$

$$B_\ell^{IJ} \in sl^*(2, \mathbb{C}) \rightarrow E_{\ell i} \in su^*(2), \quad (2.42b)$$

em que E_i , como discutido no primeiro capítulo, corresponde à parcela $su(2)$ do momento B no gauge do tempo. Perceba que E_i equivale à variável fluxo da formulação canônica

$$\begin{aligned} E_{\ell i} &= \int_{t_\ell} \varepsilon_{ijk} B^{jk} \\ &= \frac{1}{2\gamma} \varepsilon_{ijk} \int_{t_\ell} e^j \wedge e^k \end{aligned} \quad (2.43a)$$

$$= \frac{1}{2\gamma} \int_{t_\ell} \varepsilon_{abc} E_i^a dx^b \wedge dx^c, \quad (2.43b)$$

em que $E_i^a = (\det e) e_i^a$. Portanto, a versão quântica da álgebra do espaço de fase passa a ser a álgebra de holonomia-fluxo de $SU(2)$

$$[\hat{U}_\ell, \hat{U}_\ell] = 0, \quad (2.44a)$$

$$[\hat{U}_\ell, \hat{E}_{\ell i}] = i\tau_i \hat{U}_\ell, \quad (2.44b)$$

$$[\hat{E}_{\ell i}, \hat{E}_{\ell j}] = i\varepsilon_{ij}{}^k E_{\ell k}. \quad (2.44c)$$

A partir de (2.41) tem-se que elementos de \mathcal{H}_ℓ correspondem a transformações que mapeiam representações j de $SU(2)$ em $s(\ell)$ em representações j de $SU(2)$ em $t(\ell)$, podendo ser genericamente escritas como

$$|\psi_\ell\rangle = \sum_{j_\ell \in \frac{\mathbb{N}}{2}} \mathcal{C}_{j_\ell mn} |j_\ell, m_{t(\ell)}\rangle \langle j_\ell, n_{s(\ell)}|.$$

A partir do isomorfismo natural entre \mathcal{H}_j^* e \mathcal{H}_j :

$$\begin{aligned}\Phi_j : \mathcal{H}_j^* &\rightarrow \mathcal{H}_j, \\ \langle j, m | &\mapsto |j, m\rangle,\end{aligned}$$

é possível, por conveniência, representar \mathcal{H}_ℓ não como (2.41), mas como

$$\mathcal{H}_\ell = \bigoplus_{j \in \frac{\mathbb{N}}{2}} \mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_j, \quad (2.45)$$

de modo que elementos genéricos de \mathcal{H}_ℓ são agora escritos como

$$|\psi_\ell\rangle = \sum_{j_\ell \in \frac{\mathbb{N}}{2}} \mathcal{C}_{j_\ell m n} |j_\ell, m_{t(\ell)}, n_{s(\ell)}\rangle, \quad (2.46)$$

sendo $|j, m, n\rangle := |j, m\rangle \otimes |j, n\rangle$. Note que a mudança de \mathcal{H}_j^* para \mathcal{H}_j em (2.45) é equivalente a tratar localmente todos os links de um mesmo nó como orientados para fora dele.

Assim, o espaço de Hilbert \mathcal{H}_Γ para um grafo $\Gamma = \{n, \ell\}$ com N nós e L arestas pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\Gamma &= \bigotimes_{\ell \in \Gamma} \mathcal{H}_\ell \\ &= \bigotimes_{\ell \in \Gamma} \bigoplus_{j_\ell \in \frac{\mathbb{N}}{2}} \mathcal{H}_{j_\ell} \otimes \mathcal{H}_{j_\ell},\end{aligned} \quad (2.47)$$

sendo os estados de \mathcal{H}_Γ escritos como

$$|\psi_\Gamma\rangle = \sum_{\{j_\ell, m_\ell, n_\ell\}} \mathcal{C}_{\{j_\ell, m_\ell, n_\ell\}} |\{j_\ell, m_\ell, n_\ell\}\rangle, \quad (2.48a)$$

$$|\{j_\ell, m_\ell, n_\ell\}\rangle = \bigotimes_{\ell \in \Gamma} |j_\ell, m_\ell, n_\ell\rangle. \quad (2.48b)$$

O espaço de Hilbert total é obtido a partir da soma direta em relação a todos os grafos abstratos

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\Gamma} \mathcal{H}_\Gamma. \quad (2.49)$$

Como essa escolha de quantização produz estados da geometria descritos em termos das representações j de $SU(2)$, tal escolha resulta na chamada representação de spin da LQG.

2.2.2.2 Dinâmica

A dinâmica da LQG via formulação covariante se dá através da construção de amplitudes de transição associadas aos estados de fronteira. É importante enfatizar que não existe uma demonstração rigorosa da construção dessas amplitudes a partir da ação

discreta (2.26), mas sim uma construção heurística. Essa falta de rigor não deve ser vista com um viés temerário, mas sim com um viés pragmático. A construção de teorias quânticas a partir de descrições clássicas não é, de maneira geral, única. Por se tratar de um limite, a física clássica perde informação da descrição quântica nesse processo. Dessa forma, todo processo de quantização deve seguir uma prescrição prévia, fazendo escolhas que levem a uma descrição quântica possível a partir da descrição clássica. Assim, no ponto de vista teórico, uma quantização é bem-sucedida quando a descrição obtida respeita os princípios físicos necessários e apresenta o limite clássico correto. Seguindo essa premissa, será apresentada a seguir a construção heurística que dá origem à amplitude da LQG, também conhecida como amplitude EPRL-FK.

A amplitude de transição da LQG começa com um procedimento análogo às integrais de caminho, porém em termos da ação discreta (2.26). Dado um 2-complexo \mathcal{C} :

$$W_{\mathcal{C}} = \mathcal{N} \int_{SL(2, \mathbb{C})} \left(\prod_a dU_a \right) \int_{sl^*(2, \mathbb{C})} \left(\prod_f dB_f \right) \exp \left[i \sum_f \text{Tr} [B_f U_f] \right], \quad (2.50)$$

em que \mathcal{N} é uma constante de normalização. Perceba que a integração em B_f corresponde à forma integral da delta de Dirac, resultando em:

$$W_{\mathcal{C}} = \mathcal{N} \int_{SL(2, \mathbb{C})} \left(\prod_a dU_a \right) \prod_f \delta(U_f) \quad (2.51)$$

que, por construção, é invariante por transformações $SL(2, \mathbb{C})$.

É conveniente reescrever (2.51) em termos de novas variáveis a partir do particionamento da holonomia em duas partes. Se a aresta a liga o vértice v' ao vértice v , e a aresta a' liga o vértice v ao vértice v'' , então:

$$U_a =: U_{av} U_{v'a}, \quad (2.52)$$

$$H_{vf} := U_{va'} U_{av}. \quad (2.53)$$

As variáveis U_{va} podem ser vistas como a holonomia de meia aresta que começa no vértice a e termina na metade da aresta a . Assim, $U_{av} = U_{va}^{-1}$. Já H_{vf} pode ser visto como uma holonomia deslocada em meia aresta: ao invés de ser a holonomia ao longo do caminho que liga dois vértices, é a holonomia ao longo do caminho que une duas metades de arestas unidas por um mesmo vértice. A figura 4 abaixo ilustra geometricamente as novas holonomias. Em termos das novas variáveis:

$$W_{\mathcal{C}} = \mathcal{N} \int_{SL(2, \mathbb{C})} \left(\prod_v \prod_{a^*} dU_{va} \right) \prod_f \delta(U_f), \quad (2.54)$$

em que a^* denota todas as arestas de v , com exceção de uma: é sempre possível, por meio de uma transformação de gauge, eliminar a dependência em uma das holonomias do tipo

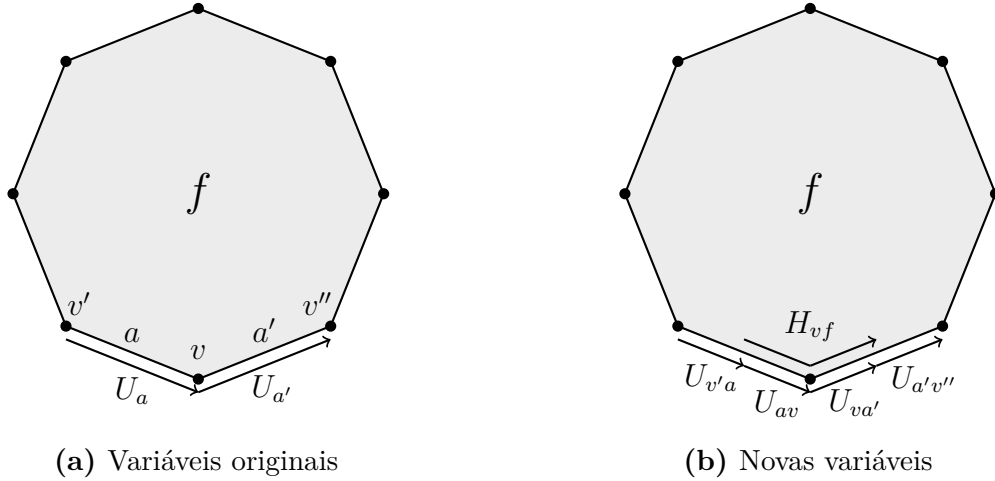


Figura 4 – Visualização geométrica das novas variáveis de holonomia em termos das originais.

U_{av} para um vértice v no integrando acima, se integrado em relação a todos os elementos. Como consequência, a integração em relação a todas as holonomias do tipo U_{av} para um vértice v resulta em um termo proporcional ao volume do grupo, que, no caso de $SL(2, \mathbb{C})$, diverge por se tratar de um grupo não compacto^h. Retirando a integração em um dos elementos do tipo U_{av} para cada v , resolve-se o problema.

Perceba que por ser uma holonomia entre duas metades de aresta pertencentes à mesma face f e unidas pelo vértice v , H_{vf} corresponde geometricamente a uma holonomia entre dois tetraedros de fronteira associados ao mesmo vértice. Como a quantização da ação de Holst resultou em uma teoria $SL(2, \mathbb{C})$ no espaço-tempo e $SU(2)$ na fronteira, H_{vf} pode ser vista como uma holonomia $SL(2, \mathbb{C})$ no subespaço físico isomorfo a $SU(2)$. Dessa forma, é conveniente definir a holonomia $h_{vf} \in SU(2)$ que, pelo mapa Y_γ , é mapeada em $H_{vf} \in SL(2, \mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} h_{vf} &:= Y_\gamma^\dagger H_{vf} Y_\gamma \\ &= Y_\gamma^\dagger U_{va'} U_{av} Y_\gamma. \end{aligned} \quad (2.55)$$

A partir de (2.55), é evidente que U_f pode ser visto como como uma transformação

^h Para uma função $f(U_{v_1}, \dots, U_{v_n})$ invariante por $SL(2, \mathbb{C})$, é possível escolher uma transformação de gauge $\Lambda_v = U_{v_k}^{-1}$ que elimina a dependência de f na k -ésima holonomia:

$$f(U_{v_1}, \dots, U_{v_k}, \dots, U_{v_n}) \mapsto f(U'_{v_1}, \dots, \mathbb{I}, \dots, U'_{v_n}).$$

Assim, se integrado em relação a todos os elementos $SL(2, \mathbb{C})$, a integração diverge:

$$\int_{SL(2, \mathbb{C})} \left(\prod_{i=1}^n dU_{v_i} \right) f(U_{v_1}, \dots, U_{v_k}, \dots, U_{v_n}) \propto \int_{SL(2, \mathbb{C})} dU_{v_k} = \infty.$$

$SL(2, \mathbb{C})$ no subespaço físico isomorfo a $SU(2)$:

$$\begin{aligned}
 U_f &= U_{a_n} \cdots U_{a_2} U_{a_1} \\
 &= U_{v'a} \cdots U_{va'} U_{av} \\
 &= H_{v'f} \cdots H_{vf} \\
 &= Y_\gamma h_{v'f} \cdots h_{vf} Y_\gamma^\dagger \\
 &=: Y_\gamma h_f Y_\gamma^\dagger.
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Para o caso de uma face que engloba um link $\ell \in \Gamma$ da fronteira, tem-se

$$h_f = \left(\prod_{v \in f} h_{vf} \right) h_\ell. \tag{2.57}$$

Por se tratar essencialmente de transformações $SU(2)$, é conveniente trocar U_f por h_f nas deltas de (2.54) introduzindo uma delta de Dirac que relacione as variáveis $SU(2)$ e $SL(2, \mathbb{C})$:

$$\prod_f \delta(U_f) \mapsto \int_{SU(2)} \left(\prod_{vf} dh_{vf} \right) \prod_f \delta(h_f) \prod_v \delta(Y_\gamma^\dagger U_{va} U_{a'v} Y_\gamma h_{vf}).$$

Definindo

$$A_v(h_{vf}) := \int_{SL(2, \mathbb{C})} \left(\prod_{a^*} dU_{va} \right) \delta(Y_\gamma^\dagger U_{va} U_{a'v} Y_\gamma h_{vf}), \tag{2.58}$$

a amplitude $W_{\mathcal{C}}$ toma a forma

$$W_{\mathcal{C}} = \mathcal{N} \int_{SU(2)} \left(\prod_{vf} dh_{vf} \right) \prod_f \delta(h_f) \prod_v A_v(h_{vf}), \tag{2.59}$$

sendo $A_v(h_{vf})$ a chamada amplitude do vértice.

Como (2.58) envolve uma delta em $SU(2)$, podemos expandi-la em termos do traço das representações irredutíveis do grupo:

$$A_v(h_{vf}) = \sum_{\{j_f\}} \int_{SL(2, \mathbb{C})} \left(\prod_{a^*} dU_{va} \right) \prod_f (2j_f + 1) \text{Tr}_{j_f} \left[Y_\gamma U_{va} U_{a'v} Y_\gamma^\dagger h_{vf} \right].$$

Na expressão acima, subintende-se que transformações $SU(2)$ no interior do traço correspondem às suas representações j , ou seja:

$$\text{Tr}_{j_f} \left[Y_\gamma U_{va} U_{a'v} Y_\gamma^\dagger h_{vf} \right] \equiv \text{Tr}_{j_f} \left[Y_\gamma D^{(\gamma j_f, j_f)}(U_{va}) D^{(\gamma j_f, j_f)}(U_{a'v}) Y_\gamma^\dagger D^{j_f}(h_{vf}) \right],$$

sendo $D^{(\gamma j, j)}(H)$ as matrizes de Wigner de $H \in SL(2, \mathbb{C})$ no subespaço físico isomorfo a $SU(2)$. Assim, a amplitude de probabilidade $W_{\mathcal{C}}$ da LQG associada ao 2-complexo \mathcal{C} corresponde a

$$W_{\mathcal{C}} = \mathcal{N} \int_{SU(2)} \left(\prod_{vf} dh_{vf} \right) \prod_f \delta(h_f) \prod_v A_v(h_{vf}), \tag{2.60a}$$

$$A_v(h_{vf}) = \sum_{\{j_f\}} \int_{SL(2, \mathbb{C})} \left(\prod_{a^*} dU_{va} \right) \prod_f (2j_f + 1) \text{Tr}_{j_f} [Y_\gamma U_{va} U_{a'v} Y_\gamma^\dagger h_{vf}]. \quad (2.60b)$$

Algumas conclusões imediatas podem ser obtidas da amplitude $W_{\mathcal{C}}$:

1. As integrações em $SU(2)$ são realizadas na fronteira dos vértices $v \in \mathcal{C}$, de forma que sobram os estados $SU(2)$ do grafo $\Gamma = \partial\mathcal{C}$. Assim, a amplitude $W_{\mathcal{C}}$ é uma função dos estados de fronteira. Para fronteiras espaciais disjuntas em diferentes slices temporais, $W_{\mathcal{C}}$ pode ser encarado como a amplitude de probabilidade da geometria de fronteira transicionar da configuração inicial para a configuração final;
2. Por se tratar do produto de termos definidos em cada vértice $v \in \mathcal{C}$, $W_{\mathcal{C}}$ obedece o princípio de localidade;
3. $W_{\mathcal{C}}$ é explicitamente invariante por transformações $SL(2, \mathbb{C})$, obedecendo, portanto, a invariância local de Lorentz.

Como o 2-complexo \mathcal{C} diz respeito a um truncamento dos graus de liberdade da Relatividade Geral, a amplitude de probabilidade física é obtida no refinamento infinito de \mathcal{C} :

$$W = \lim_{\mathcal{C} \rightarrow \infty} W_{\mathcal{C}}. \quad (2.61)$$

Além, disso, é possível mostrar [10, 28, 34, 45, 61] que a amplitude W é finita e possui como limite clássico a ação da Relatividade Geral.

2.3 Vínculos do espaço de fase

2.3.1 Espaço de *seeds* vínculo de área

Por conveniência, é possível definir o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \supset \mathcal{H}_{\Gamma}$ a partir da decomposição dos links em duas metades. A cada uma dessas metades damos o nome de *seeds*, e os rotulamos por \mathcal{S}_i , com $i = 1, \dots, 2L$ para um grafo com L links.

Como elementos de \mathcal{H}_{ℓ} mapeiam estados $SU(2)$ de $s(\ell)$ para $t(\ell)$, associamos à metade dos links o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{S}_i}$ definido por

$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}_i} := \bigoplus_{j \in \frac{\mathbb{N}}{2}} \mathcal{H}_j, \quad (2.62)$$

de forma que o espaço de *seeds* natural associado a um link ℓ é dado por:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}_{\ell}} := \mathcal{H}_{\mathcal{S}_{t(\ell)}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{S}_{s(\ell)}}.$$

Perceba que \mathcal{H}_ℓ corresponde ao subespaço de \mathcal{H}_{S_ℓ} que obedece a restrição $j_{s(\ell)} = j_{t(\ell)} = j_\ell$. Tal restrição, por motivos que ficarão claros ao longo dessa tese, é chamada de vínculo de área. Dessa forma, podemos estender o espaço de Hilbert da LQG para

$$\mathcal{H}_S = \bigotimes_{i \in \Gamma} \mathcal{H}_{S_i}, \quad (2.63)$$

acrescentando o vínculo de área.

Assim, se estados genéricos de \mathcal{H}_S podem ser escritos em termos da base de número magnético como

$$|\psi_S\rangle = \sum_{\{j_i, m_i\}} \mathcal{C}_{\{j_i, m_i\}} |\{j_i, m_i\}\rangle, \quad (2.64a)$$

$$|\{j_i, m_i\}\rangle = \bigotimes_{i \in \Gamma} |j_i, m_i\rangle, \quad (2.64b)$$

o projetor de área $P_A : \mathcal{H}_S \rightarrow \mathcal{H}_S$ pode ser escrito como:

$$P_A = \sum_{\{j_\ell, m_\ell, n_\ell\}} \bigotimes_{\ell \in \Gamma} |\{j_\ell, m_\ell, n_\ell\}\rangle \langle \{j_\ell, m_\ell, n_\ell\}|, \quad (2.65)$$

projetando estados de \mathcal{H}_S no subespaço que respeita o vínculo de área.

2.3.2 Vínculo de Gauss

A invariância pelas transformações de gauge (1.6) da Relatividade Geral também deve ser satisfeita pelos estados quânticos da geometria. A partir do mapa Y_γ , a invariância por transformações $SL(2, \mathbb{C})$ nos nós é traduzida para uma invariância por transformações $SU(2)$ nos nós. Essa restrição é chamada de vínculo de Gauss.

Para a implementação do vínculo de Gauss, é conveniente reordenar os produtos tensoriais do espaço de Hilbert \mathcal{H}_S para reescrevê-lo em termos de espaços de Hilbert dos nós. Se $n\mu$ indexa o μ -ésimo *seed* associado ao nó n , temos que

$$\mathcal{H}_S = \bigotimes_{n \in \Gamma} \mathcal{H}_n, \quad (2.66a)$$

$$\mathcal{H}_n = \bigoplus_{j_{n\mu} \in \frac{\mathbb{N}}{2}} \bigotimes_{\mu \in n} \mathcal{H}_{j_{n\mu}}, \quad (2.66b)$$

em que \mathcal{H}_n é definido como o espaço de Hilbert associado ao nó n . Estados genéricos $|\psi_n\rangle \in \mathcal{H}_n$ podem ser escritos como

$$|\psi_n\rangle = \sum_{\{j_{n\mu}, m_{n\mu}\}} \mathcal{C}_{\{j_{n\mu}, m_{n\mu}\}} |\{j_{n\mu}, m_{n\mu}\}\rangle, \quad (2.67a)$$

$$|\{j_{n\mu}, m_{n\mu}\}\rangle = \bigotimes_{\mu \in n} |j_{n\mu}, m_{n\mu}\rangle. \quad (2.67b)$$

Se $|\psi_n\rangle$ é invariante sob transformações $SU(2)$, então:

$$h|n\rangle = |n\rangle, \quad \forall h \in SU(2). \quad (2.68)$$

Em termos da álgebra $su(2)$, o vínculo de Gauss pode ser escrito como

$$\vec{C}_n |n\rangle = 0, \quad (2.69a)$$

$$\vec{C}_n = \sum_{\mu \in n} \vec{J}_{n\mu}, \quad (2.69b)$$

em que $\vec{J} \in su(2)$ corresponde ao elemento da álgebra que gera a transformação $h \in SU(2)$.

2.3.2.1 Intertwiners e símbolos $3j$

Estados invariantes por transformações $SU(2)$ correspondem à representação de spin 0. Para $j_{n\mu}$ fixados, estados invariantes de \mathcal{H}_n são chamados de *intertwiners*, e podem ser construídos a partir dos símbolos $3j$ [46, 47].

O símbolo $3j$ corresponde aos coeficientes do único estado independente e normalizado de momento angular nulo construído a partir da soma de três momentos angulares:

$$|i\rangle = \sum_{\{m_1, m_2, m_3\}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle |j_3, m_3\rangle, \quad (2.70a)$$

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1 - j_2 - m_3}}{\sqrt{2j_3 + 1}} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j_3(-m_3)}, \quad (2.70b)$$

em que $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{JM} = \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle$ são os coeficientes de Clebsch-Gordan. Diferente do caso acima, dois ou mais intertwiners independentes podem resultar da soma de quatro ou mais momentos angulares. Tais intertwiners podem ser construídos em termos de símbolos $3j$, a partir de contrações com o tensor invariante $SU(2)$

$$\varepsilon_{mn}^{(j)} = (-1)^{j-m} \delta_{m,-n}. \quad (2.71)$$

Os intertwiners associados a um nó de valência V , ou seja, um nó com V *seeds* conectados a ele, são rotulados por $V - 3$ semi-inteiros k_1, \dots, k_{V-2} , sendo escritos como

$$|\{j_{n\mu}, k_n\}\rangle = \sum_{\{m_{n\mu}\}} i_{k_{n1}, \dots, k_{nV-3}}^{m_{n1}, \dots, m_{nV}} \bigotimes_{\mu=1}^V |\{j_{n\mu}, m_{n\mu}\}\rangle, \quad (2.72a)$$

$$i_{k_{n1}, \dots, k_{nV-3}}^{m_{n1}, \dots, m_{nV}} = \sum_{\{n_i, n'_i\}} \begin{pmatrix} j_{n1} & j_{n2} & k_{n1} \\ m_{n1} & m_{n2} & s_{n1} \end{pmatrix} \varepsilon_{s_{n1} s'_{n1}}^{(k_1)} \begin{pmatrix} k_{n1} & j_{n2} & k_{n2} \\ s'_{n1} & m_{n2} & s_{n2} \end{pmatrix} \varepsilon_{s_{n2} s'_{n2}}^{(k_2)} \dots \\ \dots \varepsilon_{s_{nV-3} s'_{nV-3}}^{(k_{V-3})} \begin{pmatrix} k_{nV-3} & j_{nV-1} & j_{nV} \\ s'_{nV-3} & m_{nV-1} & m_{nV} \end{pmatrix}, \quad (2.72b)$$

sendo a quantidade de intertwiners independentes determinada pela quantidade de conjuntos $\{k_{n1}, \dots, k_{nV-3}\}$ que resultam em coeficientes $i_{k_{n1}, \dots, k_{nV-3}}^{m_{n1} \dots m_{nV}}$ não nulos. Dessa forma, o projetor de Gauss $P_G : \mathcal{H}_S \rightarrow \mathcal{H}_S$ pode ser escrito como

$$P_G = \sum_{\{j_{n\mu}, k_n\}} \bigotimes |\{j_{n\mu}, k_n\}\rangle \langle \{j_{n\mu}, k_n\}|, \quad (2.73)$$

projetando estados de \mathcal{H}_S para o subespaço invariante sob transformações $SU(2)$ nos nós.

Para grafos relativos a uma triangulação, cada nó é quadrivalente. Assim, intertwiners de \mathcal{H}_n são escritos, explicitamente, como

$$|j_{n1}, j_{n2}, j_{n3}, j_{n4}, k_n\rangle = \sum_{\{m_i\}} i_{k_n}^{m_{n1} m_{n2} m_{n3} m_{n4}} |j_{n1}, m_{n1}\rangle |j_{n2}, m_{n2}\rangle |j_{n3}, m_{n3}\rangle |j_{n4}, m_{n4}\rangle, \quad (2.74a)$$

$$i_{k_n}^{m_{n1} m_{n2} m_{n3} m_{n4}} = \sum_{m_n = -k_n}^{k_n} (-1)^{k_n - m_n} \begin{pmatrix} j_{n1} & j_{n2} & k_n \\ m_{n1} & m_{n2} & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_n & j_{n3} & j_{n4} \\ -m_n & m_{n3} & j_{n4} \end{pmatrix}, \quad (2.74b)$$

em que k_n é um semi-inteiro determinado pela relação

$$\max[|j_{n1} - j_{n2}|, |j_{n3} - j_{n4}|] \leq k \leq \min[j_{n1} + j_{n2}, j_{n3} + j_{n4}]. \quad (2.75)$$

Para o caso quadrivalente, o projetor do Gauss é escrito explicitamente como

$$P_G = \sum_{k_n} \sum_{\{j_{n\mu}\}} \bigotimes |j_{n1}, j_{n2}, j_{n3}, j_{n4}, k_n\rangle \langle j_{n1}, j_{n2}, j_{n3}, j_{n4}, k_n|. \quad (2.76)$$

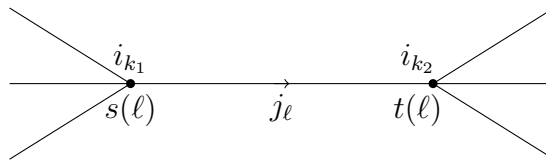
2.3.3 Espaço cinemático

A partir da descrição dos vínculos de área e de Gauss, é fácil perceber que seus projetores comutam

$$[P_A, P_G] = 0. \quad (2.77)$$

Dessa forma, é possível definir consistentemente um espaço de Hilbert cinemático \mathcal{K}_Γ a partir de \mathcal{H}_S em termos do conjunto de estados que obedecem simultaneamente os vínculos de área e de Gauss.

A construção de \mathcal{K}_Γ pode ser feita a partir de seus elementos de base. A escolha mais natural e simples é feita a partir da escolha de um spin j_ℓ para cada $\ell \in \Gamma$, e de um intertwiner $i_{\{k_n\}}$ para cada $n \in \Gamma$.



O estado $|\psi_\Gamma\rangle$ é então definido como a contração dos coeficientes do intertwiner $i_{\{k_n\}}$ com os estados de momento angular de seus links correspondentes, ou seja, se ℓ liga os nós n_1

e n_2 , então um dos índices dos intertwiners $i_{\{k_{n_1}\}}$ e $i_{\{k_{n_2}\}}$ são somados com os números magnéticos de $|j_\ell, m_\ell, n_\ell\rangle$. De forma esquemática:

$$|\Gamma, \{j_\ell, i_{\{k_n\}}\}\rangle = \bigotimes_{n \in \Gamma} i_{\{k_n\}} \cdot \bigotimes_{\ell \in \Gamma} |j_\ell, m_\ell, n_\ell\rangle. \quad (2.78)$$

A escolha de um spin por link garante que o vínculo de área seja obedecido, enquanto a escolha de um intertwiner por nó garante que o vínculo de Gauss seja satisfeito. Assim, um elemento genérico do espaço cinemático da LQG associado ao grafo Γ pode ser escrito como

$$|\psi_\Gamma\rangle = \sum_{\{j_\ell, \{k_n\}\}} \mathcal{C}_{\{j_\ell, \{k_n\}\}} |\Gamma, \{j_\ell, i_{\{k_n\}}\}\rangle. \quad (2.79)$$

O espaço cinemático total da LQG, \mathcal{K} , é obtido pela soma direta em todos os grafos

$$\mathcal{K} = \bigoplus_{\Gamma} \mathcal{K}_\Gamma. \quad (2.80)$$

2.3.3.1 Estado de vácuo

O estado de vácuo da LQG, chamado de vácuo de Ashtekar-Lewandowski, corresponde ao estado definido no espaço de Hilbert associado ao grafo $\Gamma = \emptyset$. Como o grafo vazio é um tipo de grafo, é imediato que $|0\rangle \in \mathcal{K}$.

2.3.3.2 Composição de spin

A representação de spin da LQG fornece uma escolha natural de composição de estados. Primeiro, começamos definindo o operador soma de momento angular para o *seed* i :

$$T_i : \mathcal{H}_{S_i} \otimes \mathcal{H}_{S_i} \rightarrow \mathcal{H}_{S_i}, \quad (2.81a)$$

$$T_i(|j, m\rangle \otimes |j', m'\rangle) = \sum_{J=|j-j'|}^{j+j'} \sum_{M=-J}^J C_{jmj'm'}^{JM} |J, M\rangle. \quad (2.81b)$$

O mapa T_i pode ser estendido para toda rede a partir do produto tensorial:

$$T : \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_S \rightarrow \mathcal{H}_S, \quad (2.82a)$$

$$T = \bigotimes_{i=1}^{2L} T_i, \quad (2.82b)$$

A partir do mapa T , define-se a composição de spin. Sejam $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_S$. A composição de spin $|\psi_1 \cdot \psi_2\rangle$ é definida por

$$|\psi_1 \cdot \psi_2\rangle = P_A T(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle). \quad (2.83)$$

Perceba que a composição de spin é uma operação bem definida tanto em \mathcal{H}_S quanto em \mathcal{K}_Γ , uma vez que a soma de momento angular de intertwiners também é um intertwiner.

É fácil verificar que a atuação da composição de spin na base de número magnético é dada por

$$|j, m, n\rangle \cdot |j' m' n'\rangle = \sum_{j, m, j', m'} C_{jmj'm'}^{JM} C_{jn j'n'}^{JN} |J, M, N\rangle, \quad (2.84)$$

de forma que se

$$|\psi_1\rangle = \sum_{j_\ell, m_\ell, n_\ell} f_{\{j_\ell, m_\ell, n_\ell\}} |\{j_\ell, m_\ell, n_\ell\}\rangle, \quad (2.85a)$$

$$|\psi_2\rangle = \sum_{j_\ell, k_n} g_{\{j_\ell, m_\ell, n_\ell\}} |\{j_\ell, m_\ell, n_\ell\}\rangle, \quad (2.85b)$$

então

$$|\psi_1 \cdot \psi_2\rangle = \sum_{\{j_\ell, m_\ell, n_\ell\}} \sum_{\{j'_\ell, m'_\ell, n'_\ell\}} f_{\{j_\ell, m_\ell, n_\ell\}} g_{\{j'_\ell, m'_\ell, n'_\ell\}} C_{\{j_\ell m_\ell j'_\ell m'_\ell\}}^{\{J_\ell M_\ell\}} C_{\{j_\ell n_\ell j'_\ell n'_\ell\}}^{\{J_\ell N_\ell\}} |\{J_\ell, M_\ell, N_\ell\}\rangle, \quad (2.86)$$

em que

$$C_{\{j_\ell m_\ell j'_\ell m'_\ell\}}^{\{J_\ell M_\ell\}} = \prod_{\ell \in \Gamma} C_{j_\ell m_\ell j'_\ell m'_\ell}^{J_\ell M_\ell}. \quad (2.87)$$

2.4 Representação da holonomia

A representação da holonomia consiste em descrever os estados da geometria em termos de funções de onda de quadrado integrável em $SU(2)$. Pelo teorema de Peter-Weyl [68], o espaço $L^2[SU(2)]$ com o produto interno definido pela medida de Haar

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_{SU(2)} dU \overline{\psi(U)} \phi(U), \quad (2.88a)$$

$$dU = d(g_1 U g_2^{-1}), \quad \forall g_1, g_2 \in SU(2), \quad (2.88b)$$

admite uma base ortonormal em termos dos elementos das matrizes de Wigner:

$$D_{mn}^j(U) = \langle j, m | D^j(U) | j, n \rangle, \quad U \in SU(2), \quad (2.89a)$$

$$\int_{SU(2)} dU (2j+1) \overline{D_{mn}^j(U)} D_{m'n'}^{j'}(U) = \delta^{jj'} \delta_{mm'} \delta_{nn'}, \quad (2.89b)$$

$$\sum_{j \in \frac{\mathbb{N}}{2}} \sum_{m, n = -j}^j (2j+1) \overline{D_{mn}^j(U')} D_{mn}^j(U) = \delta_{U'}(U). \quad (2.89c)$$

em que $\delta_{U'}(U)$ é a delta de Dirac em $SU(2)$. Portanto, tem-se a decomposição:

$$L^2[SU(2)] \simeq \bigoplus_{j \in \frac{\mathbb{N}}{2}} \mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_j, \quad (2.90)$$

com o isomorfismo natural dado pelo mapa unitário

$$|j, m, n\rangle \mapsto \sqrt{2j+1} D_{mn}^j(U). \quad (2.91)$$

A partir de (2.90), tem-se que o espaço de Hilbert \mathcal{H}_Γ pode ser escrito como

$$\mathcal{H}_\Gamma \simeq L^2[SU(2)^L], \quad (2.92)$$

de forma que funções de onda definidas no grafo Γ podem ser expandidas na base formada pelo produto de matrizes de Wigner de diferentes links

$$\psi_\Gamma(\{U_\ell\}) = \sum_{\{j_\ell, m_\ell, n_\ell\}} \mathcal{C}_{\{m_\ell, n_\ell\}}^{\{j_\ell\}} \psi_{\{m_\ell, n_\ell\}}^{\{j_\ell\}}, \quad (2.93a)$$

$$\psi_{\{m_\ell, n_\ell\}}^{\{j_\ell\}}(\{U_\ell\}) = \prod_{\ell \in \Gamma} \sqrt{2j_\ell + 1} D_{m_\ell n_\ell}^{j_\ell}(U_\ell). \quad (2.93b)$$

2.4.1 Estado de holonomia

A relação de completeza (2.89c) pode ser vista, da direita para a esquerda, como a definição da função de onda correspondente ao estado com holonomia U' bem definida $|U'\rangle$, podendo ser estrategicamente reescrita como

$$\delta_{U'}(U) = \sum_{j, m, n} (2j + 1) \text{Tr} [D^j(UU'^{-1})]. \quad (2.94)$$

A partir do isomorfismo (2.91), o estado $|U'\rangle$ na representação de spin toma a forma

$$|U'\rangle = \sum_{j, m, n} \sqrt{2j + 1} \overline{D_{mn}^j(U')} |j, m, n\rangle. \quad (2.95)$$

Associando uma delta de Dirac concentrada em U'_ℓ para cada link $\ell \in \Gamma$, tem-se que o estado $|\{U'_\ell\}\rangle$ associado a um conjunto bem definido de holonomias para cada link $\{U'_\ell\}$ é dado, na representação da holonomia, por

$$\delta_{\{U'_\ell\}}(\{U_\ell\}) = \sum_{\{j_\ell, m_\ell, n_\ell\}} \prod_{\ell \in \Gamma} (2j_\ell + 1) \text{Tr} [D^{j_\ell}(U_\ell U'_\ell^{-1})], \quad (2.96)$$

e, na representação de spin, por:

$$|\{U'_\ell\}\rangle = \sum_{\{j_\ell, m_\ell, n_\ell\}} \bigotimes_{\ell \in \Gamma} \sqrt{2j_\ell + 1} \overline{D_{m_\ell n_\ell}^{j_\ell}(U'_\ell)} |j_\ell, m_\ell, n_\ell\rangle. \quad (2.97)$$

A partir do estado (2.97), tem-se o mapeamento entre estados da geometria na representação de spin e na representação da holonomia:

$$\psi_\Gamma(\{U_\ell\}) = \langle \{U_\ell\} | \psi_\Gamma \rangle. \quad (2.98)$$

2.4.2 Espaço cinemático

Em termos de \mathcal{H}_Γ , o espaço cinemático da LQG é formado pelos estados que respeitam o vínculo de Gauss. Em funções de onda, transformações $SU(2)$ atuam como

$$\psi(\{U_\ell\}) \mapsto \psi(\{\Lambda_{t(\ell)}^{-1} U_\ell \Lambda_{s(\ell)}\}), \quad \Lambda_{s(\ell)}, \Lambda_{t(\ell)} \in SU(2), \quad (2.99)$$

de forma que o espaço de Hilbert cinemático \mathcal{K}_Γ é formado por funções de onda que respeitam $\psi(\{\Lambda_{t(\ell)}^{-1} U_\ell \Lambda_{s(\ell)}\}) = \psi(\{U_\ell\})$, sendo representado por

$$\mathcal{K}_\Gamma \simeq L^2[SU(2)^L/SU(2)^N]. \quad (2.100)$$

A base de spin-network para funções de onda segue a mesma construção da base de spin, correspondendo à função de onda associada a (2.78):

$$\langle \{U_\ell\} | \Gamma, \{j_\ell, i_{\{k_n\}}\} \rangle =: \psi_{\{j_\ell, \{k_n\}\}}(\{U_\ell\}) = \bigotimes_{n \in \Gamma} i_{\{k_n\}} \cdot \bigotimes_{\ell \in \Gamma} \sqrt{2j_\ell + 1} D^{j_\ell}(U_\ell), \quad (2.101)$$

em que o produto representado pelo ponto indica a contração dos intertwiners com as matrizes de Wigner: se ℓ liga os nós n_1 e n_2 , então um dos índices dos intertwiners $i_{\{k_{n_1}\}}$ e $i_{\{k_{n_2}\}}$ são somados com os números magnéticos de $D_{m_\ell, n_\ell}^{j_\ell}(U_\ell)$. Assim, funções de onda $\psi_\Gamma(\{U_\ell\}) \in \mathcal{K}_\Gamma$ são escritas como

$$\psi_\Gamma(\{U_\ell\}) = \sum_{\{j_\ell, \{k_n\}\}} \mathcal{C}_{\{j_\ell, \{k_n\}\}} \psi_{\{j_\ell, \{k_n\}\}}(\{U_\ell\}). \quad (2.102)$$

2.4.3 Produto de estados

Assim como no caso da representação de spin, a representação da holonomia fornece uma escolha natural de composição de estados. Tal composição surge do fato de que o produto de funções de quadrado integrável é uma função de quadrado integrável:

$$\psi_1(\{U_\ell\}), \psi_2(\{U_\ell\}) \in L^2[SU(2)] \Rightarrow \psi_2(\{U_\ell\})\psi_1(\{U_\ell\}) \in L^2[SU(2)]. \quad (2.103)$$

Assim, se

$$\begin{aligned} \psi_1(\{U_\ell\}) &= \langle \{U_\ell\} | \psi_1 \rangle, \\ \psi_2(\{U_\ell\}) &= \langle \{U_\ell\} | \psi_2 \rangle, \end{aligned}$$

o produto de estados $|\psi_1 \times \psi_2\rangle$ é definido como aquele que, na representação da holonomia, se reduz ao produto de funções de onda:

$$\langle \{U_\ell\} | \psi_1 \times \psi_2 \rangle = \psi_1(\{U_\ell\})\psi_2(\{U_\ell\}). \quad (2.104)$$

Expandindo $\psi_1(\{U_\ell\})$ e $\psi_2(\{U_\ell\})$ em termos de matrizes de Wigner:

$$\begin{aligned} \psi_1(\{U_\ell\}) &= \sum_{\{j_\ell, m_\ell, n_\ell\}} f_{\{j_\ell, m_\ell, n_\ell\}} \prod_{\ell \in \Gamma} \sqrt{2j_\ell + 1} D_{m_\ell n_\ell}^{j_\ell}(U_\ell), \\ \psi_2(\{U_\ell\}) &= \sum_{\{j_\ell, m_\ell, n_\ell\}} g_{\{j_\ell, m_\ell, n_\ell\}} \prod_{\ell \in \Gamma} \sqrt{2j_\ell + 1} D_{m_\ell n_\ell}^{j_\ell}(U_\ell), \end{aligned}$$

e usando sua relação de composição [46]:

$$D_{mn}^j(U) D_{m'n'}^{j'}(U) = \sum_{JMN} C_{jmj'm'}^{JM} C_{jnj'n'}^{JN} D_{MN}^J(U), \quad (2.105)$$

é fácil verificar que o produto de estados é expandido pelas matrizes de Wigner como:

$$\langle \{U_\ell\} | \psi_1 \times \psi_2 \rangle = \sum_{\{j_\ell, m_\ell, n_\ell\}} \sum_{\{j'_\ell, m'_\ell, n'_\ell\}} \left(\prod_{\ell \in \Gamma} \sqrt{\frac{(2j_\ell + 1)(2j'_\ell + 1)}{2J_\ell + 1}} \right) f_{\{j_\ell, m_\ell, n_\ell\}} g_{\{j'_\ell, m'_\ell, n'_\ell\}} \\ C_{\{j_\ell m_\ell j'_\ell m'_\ell\}}^{\{J_\ell M_\ell\}} C_{\{j_\ell n_\ell j'_\ell n'_\ell\}}^{\{J_\ell N_\ell\}} \prod_{\ell \in \Gamma} \sqrt{2J_\ell + 1} D_{M_\ell N_\ell}^{J_\ell}(U_\ell). \quad (2.106)$$

A partir do mapeamento entre representação de spin e representação de holonomia gerado por (2.97), tem-se que o produto de estados na representação de spin é dada por

$$|j, m, n\rangle \times |j' m' n'\rangle = \sum_{j, m} \sum_{j', m'} \sqrt{\frac{(2j_\ell + 1)(2j'_\ell + 1)}{2J_\ell + 1}} C_{jmj'm'}^{JM} C_{jn j' n'}^{JN} |J, M, N\rangle, \quad (2.107)$$

sendo, portanto, diferente da operação de composição de spin (2.84).

2.5 Operadores geométricos

Além da determinação do espaço de Hilbert da teoria, a quantização do espaço de fase da Relatividade Geral também envolve a busca por uma representação unitária da álgebra de holonomia-fluxo em termos de operadores que atuam no espaço de Hilbert da teoria.

2.5.1 Operador holonomia

Como a holonomia é um operador que mapeia elementos de um mesmo espaço vetorial definidos em pontos diferentes, a seu operador deve ser definido em \mathcal{H}_Γ .

A escolha do operador holonomia naturalmente carrega uma ambiguidade relacionada à escolha da representação j de $SU(2)$ associado a um link ℓ_0 . Seja $\hat{U}_{\ell_0}^{(j)}$ o operador holonomia na representação j de $SU(2)$. Definindo-o em termos de sua atuação nos elementos de base, na representação da holonomia o operador holonomia corresponde ao operador multiplicativo:

$$\left(\hat{U}_{\ell_0}^{(j)}\right)_{mn} \prod_{\ell \in \Gamma} \sqrt{2j_\ell + 1} D_{m_\ell n_\ell}^{j_\ell}(U_\ell) = D_{mn}^j(U_{\ell_0}) \prod_{\ell \in \Gamma} \sqrt{2j_\ell + 1} D_{m_\ell n_\ell}^{j_\ell}(U_\ell). \quad (2.108)$$

Perceba que, pela ação da holonomia, se $\ell_0 \notin \Gamma$, o operador mapeia Γ em $\Gamma \cup \ell_0$. Em contrapartida, se $\ell_0 \in \Gamma$, o operador modifica o spin do link ℓ_0 por teoria de reacoplamento:

$$\left(\hat{U}_{\ell_0}^{(j)}\right)_{mn} \prod_{\ell \in \Gamma} \sqrt{2j_\ell + 1} D_{m_\ell n_\ell}^{j_\ell}(U_\ell) = \sqrt{2j_{\ell_0} + 1} D_{mn}^j D_{m_{\ell_0} n_{\ell_0}}^{j_{\ell_0}}(U_{\ell_0}) \prod_{\ell \in (\Gamma - \ell_0)} \sqrt{2j_\ell + 1} D_{m_\ell n_\ell}^{j_\ell}(U_\ell) \\ = \sqrt{2j_{\ell_0} + 1} \sum_{JMN} C_{jm j_{\ell_0} m_{\ell_0}}^{JM} C_{jn j_{\ell_0} n_{\ell_0}}^{JN} D_{MN}^J(U_{\ell_0}) \\ \prod_{\ell \in (\Gamma - \ell_0)} \sqrt{2j_\ell + 1} D_{m_\ell n_\ell}^{j_\ell}(U_\ell).$$

Em termos da base de número magnético, a atuação (2.108) é traduzida em termos do produto de estados:

$$\left(\hat{U}_{\ell_0}^{(j)}\right)_{mn} \left(\bigotimes_{\ell \in \Gamma} |j_\ell, m_\ell, n_\ell\rangle\right) = \left(\frac{|j_{\ell_0}, m_{\ell_0}, n_{\ell_0}\rangle}{\sqrt{2j_{\ell_0} + 1}}\right) \times \left(\bigotimes_{\ell \in \Gamma} |j_\ell, m_\ell, n_\ell\rangle\right). \quad (2.109)$$

Se $\ell_0 \notin \Gamma$:

$$\left(\hat{U}_{\ell_0}^{(j)}\right)_{mn} \left(\bigotimes_{\ell \in \Gamma} |j_\ell, m_\ell, n_\ell\rangle\right) = \left(\frac{|j_{\ell_0}, m_{\ell_0}, n_{\ell_0}\rangle}{\sqrt{2j_{\ell_0} + 1}}\right) \otimes \left(\bigotimes_{\ell \in \Gamma} |j_\ell, m_\ell, n_\ell\rangle\right). \quad (2.110)$$

Se $\ell_0 \in \Gamma$,

$$\left(\hat{U}_{\ell_0}^{(j)}\right)_{mn} \left(\bigotimes_{\ell \in \Gamma} |j_\ell, m_\ell, n_\ell\rangle\right) = \left(\frac{|j_{\ell_0}, m_{\ell_0}, n_{\ell_0}\rangle}{\sqrt{2j_0 + 1}} \times |j, m, n\rangle\right) \otimes \left(\bigotimes_{\ell \in \{\Gamma - \ell_0\}} |j_\ell, m_\ell, n_\ell\rangle\right). \quad (2.111)$$

Por convenção, sempre que a representação j do operador holonomia for omitida, se trata do operador na representação fundamental:

$$\hat{U}_\ell := \hat{U}_\ell^{(1/2)}. \quad (2.112)$$

2.5.1.1 Estados de laços

A partir do operador holonomia, é possível definir o operador de laços, responsável por construir os chamados estados de laços. Tais estados compuseram a primeira base para a descrição da LQG, chamada de base de laços [33, 58, 59], motivando o nome da área.

Tal base surge naturalmente na descrição do espaço-tempo não em termos da holonomia, mas sim em termos do traço dos laços de Wilson, variáveis invariantes por $SU(2)$. Entretanto, a base de laços traz algumas dificuldades operacionais associadas ao seu caráter sobrecompleto e à diagonalização dos operadores geométricos. Essas dificuldades motivaram a busca por outra base para a descrição da LQG, resultando na base de *spin-network* [6, 8, 55, 60]. Apesar de não utilizarmos a base de laços nessa tese, estados de laços serão utilizados mais adiante, compondo uma técnica para perturbar estados coerentes.

Seja α um laço, ou seja, uma curva fechada formada pela união de links:

$$\alpha = \bigcup_{i=1}^L \ell_i. \quad (2.113)$$

em que $|\alpha|$ a quantidade de links que formam α . O operador de laço $T_\alpha^{(j)}$ é definido como o traço do operador holonomia na representação j associado a α :

$$T_\alpha^{(j)} = \text{Tr} \left[\hat{U}_\alpha^{(j)} \right]$$

$$= \text{Tr} \left[\hat{U}_{\ell_L}^{(j)} \cdots \hat{U}_{\ell_1}^{(j)} \right], \quad (2.114)$$

de forma que os estados de laços são os estados normalizados construídos a partir da atuação do operador de laço no estado de vácuo:

$$|\alpha^j\rangle = \frac{1}{(2j+1)^{\frac{|\alpha|}{2}}} T_\alpha^{(j)} |0\rangle. \quad (2.115)$$

Para a representação fundamental, omite-se o j :

$$|\alpha\rangle := \frac{1}{(2j+1)^{\frac{|\alpha|}{2}}} T_\alpha |0\rangle. \quad (2.116)$$

2.5.2 Operador Fluxo

Como os fluxos são variáveis definidas nos pontos iniciais, sua quantização leva a operadores que atuam nos nós. Dessa forma, tal operador pode ser definido tanto em \mathcal{H}_S quanto em \mathcal{H}_Γ .

A partir da álgebra clássica, a representação unitária do operador fluxo é dada pelos operadores de spin, ou seja, pelos geradores hermitianos de $su(2)$. Em \mathcal{H}_S , para o k -ésimo *seed*:

$$\hat{E}_{ki} |j_k, m_k\rangle = J_i |j_k, m_k\rangle. \quad (2.117)$$

Quando o vínculo de área é satisfeito, define-se

$$\hat{E}_{\ell i} = \hat{E}_{s(\ell)i} = \hat{E}_{t(\ell)i}. \quad (2.118)$$

Na representação da holonomia, a atuação do operador fluxo é dada pelo operador derivada:

$$\hat{E}_{\ell i} D_{m_\ell n_\ell}^{j_\ell}(U_\ell) = i \frac{d}{dt} D_{m_\ell n_\ell}^{j_\ell}(e^{t\tau_i} U_\ell) \Big|_{t=0}. \quad (2.119)$$

2.5.3 Operador área

Como foi explicitado em (2.43a), classicamente, o fluxo $E_{\ell i}$ é interpretado como o vetor área orientado do triângulo t associado ao link ℓ na triangulação da fronteira:

$$E_i = \frac{1}{\gamma} (A_\ell)_i. \quad (2.120)$$

Como a triangulação do espaço tempo leva em conta tetraedros planos, as áreas de seus triângulos de fronteira são obtidas por $A_\ell = \gamma \sqrt{E_{\ell i} E_\ell^i} := \gamma E_\ell$. Após a quantização, isso dá origem ao operador área:

$$\mathcal{A}_\ell = \gamma \hat{E}_\ell. \quad (2.121)$$

2.5.3.1 Quantização das áreas

Perceba que a quantização do fluxo leva o operador \hat{E} ao operador Casimir de $SU(2)$. Esse fato nos leva a um dos principais resultados da LQG, que é a quantização do espectro de áreas:

$$\mathcal{A}_\ell |j_\ell, m_{t(\ell)}, n_{s(\ell)}\rangle = \gamma \sqrt{j_\ell(j_\ell + 1)} |j_\ell, m_{t(\ell)}, n_{s(\ell)}\rangle. \quad (2.122)$$

É importante enfatizar que essa quantização em nada tem a ver com a discretização clássica que precedeu a quantização. No contexto clássico, a discretização consiste apenas no truncamento dos graus de liberdade da teoria. A quantização que surge em (2.122) é um resultado da descrição quântica.

2.5.3.2 Colagem quântica de poliedros

A identificação do spin j com áreas da geometria leva a uma interpretação física do vínculo de área: dois poliedros da geometria só podem ser vizinhos se as superfícies coladas de ambos possuírem a mesma área.

2.5.3.3 Relação de fechamento e quantas de espaço

A relação entre o operador fluxo e o vetor área nos fornece outra interpretação geométrica da LQG. Classicamente, poliedros de F faces obedecem a relação de fechamento

$$\sum_{i=1}^F \vec{A}_i = 0. \quad (2.123)$$

Perceba que o vínculo de Gauss escrito da forma (2.69) corresponde à quantização da relação de fechamento de poliedros. Assim, se $|i_n\rangle$ é um intertwiner associado ao nó n , a expressão

$$\sum_{\ell \in n} \hat{E}_\ell |i_n\rangle = 0 \quad (2.124)$$

indica que os intertwiners podem ser vistos geometricamente como poliedros quânticos de V faces de áreas iguais a $\gamma \sqrt{j_\ell(j_\ell + 1)}$, em que V é a valência do nóⁱ. Para grafos vindos de triangulações, intertwiners simbolizam tetraedros quânticos, produzindo um caráter discreto para a geometria após a quantização.

ⁱ A valência de um nó corresponde ao número de links atados a ele.

3 GRAVITAÇÃO QUÂNTICA DE LAÇOS E ESPINORES

Uma estratégia recorrente na descrição de sistemas físicos, tanto no regime clássico quanto no quântico, é a busca por representações da álgebra do espaço de fase e do espaço de Hilbert da teoria. Como foi evidenciado nas seções anteriores, o espaço de fase da Relatividade Geral e o espaço de Hilbert da LQG podem ser representados em termos do grupo $SU(2)$. Esse fato torna natural a busca em descrevê-los tanto em termos de espinores quanto em termos de osciladores harmônicos, de forma análoga à proposta por Schwinger no contexto de momento angular [62, 64]. Ambas as descrições serão apresentadas a seguir.

3.1 Estados $SU(2)$ em termos de espinores

Como é bem conhecido, o espaço de Hilbert da representação fundamental de $SU(2)$, corresponde ao espaço de espinores. Assim, para $j = 1/2$, todo espinor corresponde a um estado de momento angular. Seja $\xi^A \in \mathbb{C}^2$ com $A = 0, 1$. Tal objeto define naturalmente o estado de $\mathcal{H}_{1/2}$

$$|1/2, \xi\rangle := \xi^0 |+\rangle + \xi^1 |-\rangle, \quad (3.1)$$

em que $|\pm\rangle$ são os autoestados de σ_z . É fácil mostrar que o estado acima corresponde ao estado de momento angular com $j = 1/2$ e projeção ao longo da direção $\vec{\xi}$ definida pelo espinor ξ^A :

$$J^2 |1/2, \xi\rangle = \frac{3}{4} |1/2, \xi\rangle, \quad (3.2a)$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\xi}) |1/2, \xi\rangle = \frac{1}{2} |1/2, \xi\rangle, \quad (3.2b)$$

$$\vec{\xi} = \frac{\bar{\xi}_A \vec{\sigma}_B^A \xi^B}{\|\xi\|^2}, \quad (3.2c)$$

, em que $\vec{\sigma}$ são as matrizes de Pauli e a operação de subir e descer índice é realizada pelo delta de Kronecker.

Pela teoria de reacoplamento de $SU(2)$ [46] estados saturados de momento angular, ou seja, estados do tipo $|j, j\rangle$, podem ser construídos em termos de um único estado de momento angular na representação fundamental. A partir de (3.1), definimos

$$|j, \xi\rangle := |1/2, \xi\rangle^{\otimes 2j}. \quad (3.3)$$

Por construção, $|j, \xi\rangle$ corresponde ao estado saturado de momento angular na direção $\vec{\xi}$:

$$J^2 |j, \xi\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j, \xi\rangle, \quad (3.4a)$$

$$(\vec{J} \cdot \vec{\xi}) |j, \xi\rangle = j |j, \xi\rangle, \quad (3.4b)$$

A partir de (3.1) e (3.3), é possível obter a forma de $|j, \boldsymbol{\xi}\rangle$ na base de número magnético:

$$|j, \boldsymbol{\xi}\rangle := \sum_{m=-j}^j \frac{\sqrt{(2j)!} (\boldsymbol{\xi}^0)^{j+m} (\boldsymbol{\xi}^1)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} |j, m\rangle, \quad (3.5)$$

de forma que, se $\lambda := \|\boldsymbol{\xi}\|^2$:

$$\langle j, \boldsymbol{\xi} | j, \boldsymbol{\xi} \rangle = \lambda^{2j}. \quad (3.6)$$

Para detalhes, indica-se o apêndice C.

Apesar dos estados $|j, \boldsymbol{\xi}\rangle$ corresponderem a estados saturados de momento angular, é possível estender sua utilização para estados quaisquer de \mathcal{H}_j . É possível mostrar (apêndice C) que o conjunto $\{|j, \boldsymbol{\xi}\rangle \in \mathcal{H}_j \mid \boldsymbol{\xi}^A \in \mathbb{C}^2\}$ expande \mathcal{H}_j , obedecendo a relação de completudeza

$$\mathbb{I} = \frac{1}{(2j)!} \int_{\mathbb{C}^2} d\mu(\boldsymbol{\xi}) |j, \boldsymbol{\xi}\rangle \langle j, \boldsymbol{\xi}|, \quad (3.7)$$

em que $d\mu(\boldsymbol{\xi}) := d\boldsymbol{\xi}^0 d\boldsymbol{\xi}^1 e^{-\|\boldsymbol{\xi}\|^2}$ é a medida de Bargmann.

A utilização de espinores na descrição de estados $SU(2)$ é particularmente vantajosa devido a algumas simplificações operacionais. Dentre elas, tem-se o cálculo do produto interno:

$$\langle j', \boldsymbol{\xi}' | j, \boldsymbol{\xi} \rangle = \delta_{jj'} (\bar{\boldsymbol{\xi}'^A} \boldsymbol{\xi}^A)^{2j}, \quad (3.8)$$

e a atuação de transformações $SU(2)$:

$$D^j(g) |j, \boldsymbol{\xi}\rangle = |j, g\boldsymbol{\xi}\rangle, \quad (3.9)$$

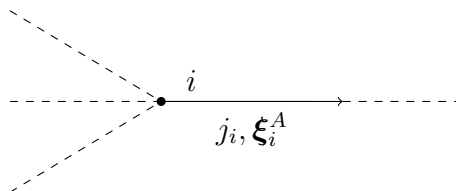
em que $D^j(g)$ é a representação unitária em \mathcal{H}_j de $g \in SU(2)$. A partir de (3.9), se $g_{\vec{\xi}} \in SU(2)$ é a transformação que leva a direção \vec{z} em $\vec{\xi}$, tem-se

$$|j, \boldsymbol{\xi}\rangle = \|\boldsymbol{\xi}\|^{2j} D^j(g_{\vec{\xi}}) |j, j\rangle. \quad (3.10)$$

3.1.1 LQG em termos de espinores

A descrição de estados $SU(2)$ em termos de espinores motiva seu próprio uso na LQG. A partir da conclusão de que estados da forma (3.3) geram \mathcal{H}_j , é imediato que estados da geometria podem ser descritos a partir da associação de um espinor para cada *seed* de um grafo Γ .

Sejam $j_i \in \mathbb{N}/2$ e $\boldsymbol{\xi}_i^A \in \mathbb{C}^2$ uma representação unitária de $SU(2)$ e um espinor associados ao *seed* i de um grafo Γ , respectivamente:



O conjunto de spins e espinores $\{(j_i, \boldsymbol{\xi}_i^A), i = 1, \dots, 2L\}$ define o elemento de \mathcal{H}_S :

$$|\{j_i, \boldsymbol{\xi}_i\}\rangle = \bigotimes_{i=1}^{2L} |j_i, \boldsymbol{\xi}_i\rangle, \quad (3.11)$$

de forma que todo elemento de \mathcal{H}_S pode ser escrito como uma combinação linear dos estados acima:

$$|\psi\rangle = \int \prod_{\mathbb{C}^2} \prod_{i=1}^{2L} \frac{d\mu(\boldsymbol{\xi}_i)}{(2j_i)!} \sum_{\{j_i\}} \psi_{\{j_i\}}(\{\boldsymbol{\xi}_i^A\}) |\{j_i, \boldsymbol{\xi}_i\}\rangle. \quad (3.12)$$

O mapeamento dos elementos de \mathcal{H}_S escritos em termos de espinores para o espaço cinemático \mathcal{K}_Γ segue a mesma metodologia: a aplicação dos projetores de área e de Gauss. Entretanto, a aplicação do vínculo de área traz uma condição adicional à imposição da mesma representação j para estados de *seeds* que pertencem ao mesmo link. O fato das holonomias representarem transformações $SU(2)$ implica que estados levados de $s(\ell)$ para $t(\ell)$ pela holonomia devem ter o mesmo módulo. Como foi explicitado em (3.6), o módulo de estados da forma $|j, \boldsymbol{\xi}\rangle$ envolve o módulo do espinor $\boldsymbol{\xi}^A$. Assim, a aplicação do projetor de área em (3.11) impõem

$$j_{s(\ell)} = j_{t(\ell)} =: j_\ell, \quad (3.13a)$$

$$\lambda_{s(\ell)} = \lambda_{t(\ell)} =: \lambda_\ell. \quad (3.13b)$$

Já para o projetor de Gauss, sua aplicação força os estados dos nós a serem combinações de intertwiners. Intertwiners construídos com estados de espinores recebem o nome de intertwiners coerentes Livine-Speziale (intertwiners LS), e são amplamente conhecidos na literatura devido à sua aplicação no contexto de estados coerentes [41, 61]. Se $n\mu$ indexa o μ -ésimo *seed* associado ao nó n , então o intertwiner LS associado é definido por:

$$|LS, \{j_{n\mu}, \boldsymbol{\xi}_{n\mu}\}\rangle := P_G \bigotimes_{\mu \in n} |j_{n\mu}, \boldsymbol{\xi}_{n\mu}\rangle. \quad (3.14)$$

3.2 Osciladores de Schwinger e estados $SU(2)$

Como já é conhecido na literatura, a descrição quântica de $SU(2)$ pode ser feita em termos de variáveis bosônicas, a partir dos chamados osciladores de Schwinger [62]. Como os estados da LQG são descritos em termos de estados $SU(2)$, é possível formular a LQG em termos de osciladores, resultando na chamada representação bosônica da LQG [13, 44].

Na teoria de momento angular é possível construir uma representação unitária de $SU(2)$ em termos de dois osciladores harmônicos desacoplados:

$$[\hat{a}_A, \hat{a}_B^\dagger] = \delta_{AB}, \quad (3.15a)$$

$$[\hat{a}_A, \hat{a}_B] = [\hat{a}_A^\dagger, \hat{a}_B^\dagger] = 0, \quad (3.15b)$$

em que $A = 0, 1$ indexa cada um desses osciladores. Associados a esses osciladores, definimos o operador número:

$$\hat{N}_A = \hat{a}_A^\dagger \hat{a}_A, \quad (3.16)$$

que obedece as relações de comutação

$$[\hat{N}_A, \hat{N}_B] = 0, \quad (3.17a)$$

$$[\hat{N}_A, \hat{a}_B] = -\hat{a}_B \delta_{AB}, \quad (3.17b)$$

$$[\hat{N}_A, \hat{a}_B^\dagger] = \hat{a}_B^\dagger \delta_{AB} \quad (3.17c)$$

A comutação entre os operadores número nos permite descrever o sistema de dois osciladores em termos de seus autoestados:

$$\hat{N}_A |n_0, n_1\rangle = n_A |n_0, n_1\rangle, \quad (3.18)$$

de forma que

$$\hat{a}_0^\dagger |n_0, n_1\rangle = \sqrt{n_0 + 1} |n_0 + 1, n_1\rangle, \quad \hat{a}_1^\dagger |n_0, n_1\rangle = \sqrt{n_1 + 1} |n_0, n_1 + 1\rangle, \quad (3.19a)$$

$$\hat{a}_0 |n_0, n_1\rangle = \sqrt{n_0} |n_0 - 1, n_1\rangle, \quad \hat{a}_1 |n_0, n_1\rangle = \sqrt{n_1} |n_0, n_1 - 1\rangle, \quad (3.19b)$$

com o estado de vácuo $|0\rangle$ definido da forma usual:

$$\hat{a}_A |0\rangle = 0. \quad (3.20)$$

A partir dos operadores criação e aniquilação dos dois osciladores, podemos definir os operadores de spin \vec{J} e o operador de representação \mathcal{J} por

$$\vec{J} := \frac{1}{2} \vec{\sigma}_{AB} \hat{a}^{A\dagger} \hat{a}^B, \quad (3.21a)$$

$$\mathcal{J} := \frac{1}{2} \delta_{AB} \hat{a}^{A\dagger} \hat{a}^B. \quad (3.21b)$$

Como pode ser facilmente verificado, os operadores \vec{J}_i satisfazem a álgebra de $SU(2)$:

$$[J_a, J_b] = i \varepsilon_{ab}{}^c J_c, \quad (3.22)$$

explicitando a representação unitária de $SU(2)$ em termos dos operadores de criação e aniquilação. O operador Casimir

$$J^2 = \vec{J} \cdot \vec{J}, \quad (3.23)$$

pode ser escrito em termos do operador representação como:

$$J = \mathcal{J}(\mathcal{J} + 1). \quad (3.24)$$

Pela ação dos operadores J^2 e J_z nos estados de osciladores:

$$J^2 |n_0, n_1\rangle = \frac{n_0 + n_1}{2} \left(\frac{n_0 + n_1}{2} + 1 \right) |n_0, n_1\rangle, \quad (3.25a)$$

$$J_z |n_0, n_1\rangle = \frac{n_0 - n_1}{2} |n_0, n_1\rangle, \quad (3.25b)$$

é imediato que a relação entre $|n_0, n_1\rangle$ e a base de número magnético $|j, m\rangle$ de $SU(2)$ é dada por

$$n_0 = j + m, \quad (3.26a)$$

$$n_1 = j - m. \quad (3.26b)$$

Assim, os estados $|j, m\rangle$ podem ser escritos a partir de aplicações sucessivas dos operadores de criação (3.19a) no estado de vácuo:

$$|j, m\rangle = \frac{(\hat{a}_0^\dagger)^{j+m} (\hat{a}_1^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} |0\rangle. \quad (3.27)$$

Perceba que a partir de (3.5) e (3.27), estados saturados de $SU(2)$ possuem uma escrita simplificada em termos de espinores e das variáveis bosônicas:

$$|j, \xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{(2j)!}} (\xi^A \hat{a}_A^\dagger)^{2j} |0\rangle. \quad (3.28)$$

3.2.1 Representação bosônica da LQG

A constatação de que operadores de criação e aniquilação constroem uma representação unitária de $SU(2)$ nos leva naturalmente a buscar a construção de uma representação unitária da álgebra de holonomia-fluxo também em termos de tais operadores. Tal construção começa de forma análoga à representação unitária de $SU(2)$: para cada *seed* i , associamos um par de operadores de criação e aniquilação indexados por $A = 0, 1$, que satisfazem as relações de comutação:

$$[\hat{a}_{iA}, \hat{a}_{jB}^\dagger] = \delta_{ij} \delta_{AB}, \quad (3.29a)$$

$$[\hat{a}_{iA}, \hat{a}_{jB}] = [\hat{a}_{iA}^\dagger, \hat{a}_{jB}^\dagger] = 0. \quad (3.29b)$$

Seguimos com todos os passos realizados na última seção até a equação (3.22), acrescentando o rótulo i para indicar que tais procedimentos são válidos por *seed*. Em conjunto com os operadores de momento angular, construímos o operador holonomia [13, 14]: se $s(\ell)$ e $t(\ell)$ são *seeds* de um mesmo link ℓ orientado de $s(\ell)$ para $t(\ell)$, então

$$(\hat{U}_\ell)^A_B = (2\mathcal{J}_{i(\ell)} + 1)^{-1/2} (\varepsilon^{AC} \hat{a}_{t(\ell)C}^\dagger \hat{a}_{s(\ell)B}^\dagger - \varepsilon_{BC} \hat{a}_{t(\ell)}^A \hat{a}_{s(\ell)}^C) (2\mathcal{J}_{s(\ell)} + 1)^{-1/2}. \quad (3.30)$$

Impondo o vínculo de área, que nesse contexto corresponde a $\mathcal{J}_{s(\ell)} = \mathcal{J}_{t(\ell)} =: \mathcal{J}_\ell$, é possível mostrar que o operador holonomia e os geradores \vec{J}_i satisfazem as relações de comutação [31, 32, 44]:

$$[(\hat{U}_\ell)^A_B, (\hat{U}_{\ell'}^C_D)] = 0, \quad (3.31a)$$

$$[\hat{U}_\ell, \vec{J}_s] = \frac{1}{2} \vec{\sigma} \hat{U}_\ell, \quad (3.31b)$$

$$[J_{ia}, J_{ib}] = i\varepsilon_{ab}^c J_{ic}, \quad (3.31c)$$

correspondendo, portanto, a uma representação unitária da álgebra de holonomia-fluxo.

3.2.1.1 Estados de laços

A representação bosônica também nos permite definir operadores de criação e aniquilação associados a dois links de um mesmo nó, chamados de *wedges*:

$$F_{ij} = \varepsilon_{AB} \hat{a}_i^A \hat{a}_j^B, \quad (3.32a)$$

$$F_{ij}^\dagger = \varepsilon_{AB} \hat{a}_i^{A\dagger} \hat{a}_j^{B\dagger}, \quad (3.32b)$$

em que i, j são *seeds* de uma mesmo nó. Caso contrário, $F_{ij} = 0$.

Se α é um laço construído a partir de um caminho fechado simples como a união de L links:

$$\alpha = \bigcup_{i=1}^L \ell_i, \quad (3.33)$$

é possível, a partir da visualização de cada link como a união de dois *seeds*, escrever α como a união de L *wedges* w_i :

$$\alpha = \bigcup_{i=1}^L w_i. \quad (3.34)$$

Naturalmente, a definição de operadores de criação e aniquilação de *wedges* induzem a definição de operadores de criação e aniquilação de laços:

$$F_\alpha = \prod_{i=1}^L F_{w_i}, \quad (3.35a)$$

$$F_\alpha^\dagger = \prod_{i=1}^L F_{w_i}^\dagger. \quad (3.35b)$$

Pela definição (3.32), tem-se que a atuação de $(F_{ij}^\dagger)^{2j}$ no vácuo cria um estado no nó $n \ni i, j$ invariante por transformações $SU(2)$. Além disso, pela composição (3.35b), a atuação de $(F_\alpha^\dagger)^{2j}$ no vácuo cria um estado com a mesma quantidade de excitações em *seeds* de um mesmo laço. Portanto, $(F_\alpha^\dagger)^{2j} |0\rangle$ respeita os vínculos de área e de Gauss, correspondendo a um estado cinemático da LQG. É fácil mostrar que a atuação de F_{ij}^\dagger produz o estado de laço descrito em (2.116):

$$|\alpha\rangle \propto F_\alpha^\dagger |0\rangle. \quad (3.36)$$

4 LIMITE SEMICLÁSSICO

Apesar da construção da LQG ter início na Relatividade Geral, a descrição da geometria a partir de estados quânticos é completamente diferente da descrição clássica. Nesse sentido, é conveniente estudar o limite semiclássico da LQG para se entender como a geometria clássica emerge da descrição quântica. Para se entender melhor esse limite, é estratégico trabalhar com os estados coerentes, também conhecidos como estados semiclássicos.

Estados coerentes são estados que minimizam incertezas relativas, possuindo suas distribuições de probabilidade concentradas em torno dos valores médios. No contexto da LQG, os valores médios de tais estados descrevem a geometria clássica, enquanto os desvios da média correspondem às flutuações quânticas da geometria. Por essa característica, esses estados são aqueles que mais se aproximam de um comportamento semiclássico, incorporando correções de origem quântica para a descrição clássica subjacente.

A construção de estados da LQG concentrados em propriedades clássicas não é única. É possível construir diferentes famílias de estados coerentes, cada uma concentrada em diferentes propriedades clássicas. A seguir, serão construídas algumas classes de estados coerentes da LQG presentes na literatura. Seus comportamentos semiclássicos serão relativos à geometria intrínseca, a estrutura geométrica medida inteiramente dentro do espaço considerado; e à geometria extrínseca, a forma geométrica determinada a partir do seu mergulho em um espaço maior. Para mais informações, indica-se [13, 24, 25, 71].

4.1 Estados coerentes intrínsecos

Estados coerentes intrínsecos são aqueles com distribuições de probabilidades concentradas na geometria intrínseca do espaço-tempo. Como o número quântico de spin na LQG tem correspondência com áreas, e por consequência com a geometria intrínseca, é natural construir estados coerentes da LQG em termos de estados coerentes de momento angular.

4.1.1 Estados coerentes $SU(2)$

Pela teoria de momento angular da mecânica quântica, é possível mostrar que os estados representados por espinores $|j, \xi\rangle$ descritos anteriormente correspondem a estados coerentes de momento angular. Mais precisamente, tais estados minimizam as incertezas relativas do vetor momento angular:

$$\langle \vec{J} \rangle = j \vec{\xi}, \quad (4.1a)$$

$$\frac{\Delta(\vec{J} \cdot \vec{v})}{j} = \sqrt{\frac{1 - (\vec{\xi} \cdot \vec{v})^2}{2j}}, \quad (4.1b)$$

em que $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ é um vetor unitário; correspondendo, portanto, a estados coerentes de momento angular^a. Por gerarem \mathcal{H}_j , o conjunto de estados $\{|j, \xi\rangle \mid \xi \in \mathbb{C}^2\}$ corresponde à base de estados coerentes.

No contexto da LQG, o operador de momento angular, representado pelo operador fluxo, carrega informação das áreas orientadas associadas aos links do grafo. Como os intertwiners são estados de momento angular interpretados geometricamente em termos de poliedros quânticos, a utilização de estados do tipo $|j, \xi\rangle$ para a construção de estados representando poliedros semiclássicos é imediata.

Seja $n \in \Gamma$ um nó. Os chamados intertwiners Livine-Speziale (LS) são definidos como

$$|LS, \{j_{n\mu}, \xi_{n\mu}\}\rangle_n := P_n \bigotimes_{\mu \in n} |j_{n\mu}, \xi_{n\mu}\rangle, \quad (4.2)$$

em que P_n é o projetor de Gauss restrito ao nó n . A atuação do projetor de Gauss modifica a norma do intertwiner, tornando-a dependente dos spins $j_{n\mu}$ e dos espinores $\xi_{n\mu}$. Como é mostrado no trabalho de Livine e Speziale [41], no limite de grandes spins, o quadrado da norma dos intertwiners LS pode ser bem aproximada por

$$f(j_{n\mu}) := || |LS, \{j_{n\mu}, \xi_{n\mu}\}\rangle_n ||^2 \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi \det H}} \exp(-H_{ab}^{-1} N^a N^b), \quad (4.3)$$

em que $\vec{N} = \sum_{\mu} j_{n\mu} \vec{\xi}_{n\mu}$, e H_{ab} definida por:

$$H_{ab} = \sum_{\mu \in n} j_{n\mu} P_{ab\mu}, \quad (4.4a)$$

$$P_{ab\mu} = \delta_{ab} - \vec{\xi}_{n\mu}^a \vec{\xi}_{n\mu}^b. \quad (4.4b)$$

Consequentemente, intertwiners LS que não obedecem a relação $\vec{N} = 0$ possuem sua norma exponencialmente suprimida no limite de grandes spins. Perceba que tal relação, dado (2.122) e (4.1), corresponde à condição clássica de fechamento de poliedros. Assim, intertwiners $|LS, \{j_{n\mu}, \xi_{n\mu}\}\rangle$ que respeitam a condição adicional

$$\sum_{\mu \in n} j_{n\mu} \vec{\xi}_{n\mu} = 0 \quad (4.5)$$

correspondem a intertwiners coerentes, possuindo suas distribuições concentradas em poliedros clássicos.

A partir dos intertwiners LS, é possível construir estados para todo o grafo Γ . Associando um intertwiner coerente LS para cada nó, seguido da aplicação do projetor de área, o estado

$$|LS, \{j_\ell, \xi_i\}\rangle = P_A \bigotimes_{n \in \Gamma} |LS, \{j_{n\mu}, \xi_{n\mu}\}\rangle_n \quad (4.6)$$

^a Para mais detalhes das relações acima, recomenda-se o apêndice C.

faz parte do espaço cinemático \mathcal{K}_Γ da LQG, apresentando um comportamento coerente no que diz respeito às áreas dos poliedros. Porém, como os spins dos intertwiners LS são fixados, suas distribuições envolvendo observáveis da geometria extrínseca são completamente difusas. Por consequência, tais estados não apresentam comportamento coerente para geometrias clássicas, mas sim somente para a geometria intrínseca. Por essa razão, estados da forma (4.6) são chamados estados coerentes intrínsecos.

4.2 Estados coerentes extrínsecos

Outra classe de estados coerentes bem presente na literatura são os chamados estados coerentes extrínsecos, ou estados *heat-kernel* [17, 61]. Tais estados possuem distribuições de probabilidade concentradas tanto na geometria intrínseca quanto na extrínseca.

Começamos construindo um estado de um link da forma delta de Dirac concentrado na holonomia $h_\ell \in SU(2)$ a partir de (2.95):

$$|h_\ell\rangle = \sum_{j_\ell, m_\ell, n_\ell} \sqrt{2j_\ell + 1} D_{n_\ell m_\ell}^{j_\ell}(h_\ell^{-1}) |j_\ell, m_\ell, n_\ell\rangle. \quad (4.7)$$

Por ser uma delta na geometria extrínseca, o estado acima possui uma distribuição de spins totalmente não concentrada. Para concentrá-lo na geometria intrínseca, começamos aplicando o operador *heat-kernel* $\exp[-t\nabla^2]$ de $SU(2)$ com o objetivo de alargar a distribuição de probabilidades na geometria extrínseca^b. Como em $SU(2)$ o operador derivada é representado pela álgebra do grupo, o laplaciano dá lugar ao operador Casimir:

$$|h_\ell, t_\ell\rangle := e^{-t_\ell \nabla^2} |h_\ell\rangle = \sum_{j_\ell, m_\ell, n_\ell} \sqrt{2j_\ell + 1} e^{-t_\ell(j_\ell+1)} D_{n_\ell m_\ell}^{j_\ell}(h_\ell^{-1}) |j_\ell, m_\ell, n_\ell\rangle. \quad (4.8)$$

O alargamento da distribuição de holonomias retira o aspecto difuso da distribuição de spins, mas a concentra em $j = 0$. A fim de se deslocar a distribuição de spins para j_0 , realiza-se a complexificação de $SU(2)$.

No contexto da mecânica quântica unidimensional, um pacote de onda gaussiano concentrado em torno de uma posição média x_0 e um momento médio p_0 pode ser obtido a partir do produto de duas funções: uma com momento p_0 bem definido e uma gaussiana centrada em x_0 :

$$\psi(x) \sim \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right] e^{ip_0 x}.$$

A parcela de onda plana garante um momento bem definido p_0 às custas de uma completa indeterminação nas posições. Ao multiplicá-la pela gaussiana, concentramos o sistema em torno de x_0 , alargando a distribuição de momentos em torno de p_0 .

^b A equação do calor $\dot{T} = K\nabla^2 T$ gera uma evolução temporal que reduz máximos e mínimos locais por um decaimento gaussiano com o tempo. Dessa forma, o operador *heat-kernel* pode ser usado como um “alargador” de distribuições.

A mesma função de onda poderia ser obtida a partir de uma complexificação do argumento da gaussiana:

$$x_0 \mapsto z_0 = x_0 - i\sigma^2 p_0,$$

de forma que

$$\psi(x) = N \exp\left[-\frac{(x - z_0)^2}{2\sigma^2}\right] \propto \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right] e^{ip_0 x}$$

produz distribuições gaussianas concentradas na posição x_0 e no momento p_0 .

De forma análoga, (4.8) corresponde a uma gaussiana em $SU(2)$ concentrada em h_ℓ . Como os momentos em $SU(2)$ correspondem aos elementos da álgebra, a complexificação de $SU(2)$ nos leva a

$$h_\ell \mapsto H_\ell = e^{it_\ell \vec{E}_\ell} h_\ell, \quad (4.9)$$

em que $\vec{E}_\ell := E_{\ell i} \tau^i \in su(2)$. Como $isu(2)$ são geradores de boosts, $H_\ell \in SL(2, \mathbb{C})$. O estado resultante passa a ser, portanto

$$|H_\ell, t_\ell\rangle = \sum_{j_\ell, m_\ell, n_\ell} \sqrt{2j_\ell + 1} e^{-t_\ell j_\ell(j_\ell + 1)} D_{n_\ell m_\ell}^{j_\ell}(H_\ell^{-1}) |j_\ell, m_\ell, n_\ell\rangle, \quad (4.10)$$

sendo possível mostrar [61] que $\langle U_\ell \rangle = h_\ell$, $\langle \vec{E}_\ell \rangle = \vec{E}_\ell$ com $\Delta U_\ell \sim \sqrt{t_\ell}$ e $\Delta \vec{E}_\ell \sim 1/\sqrt{t_\ell}$.

Como os observáveis da LQG devem ser grandezas invariantes por transformações $SU(2)$, é conveniente reescrever H_ℓ em termos de parâmetros como comprimentos dos vetores normais, áreas das faces e ângulos entre vetores normais. Uma parametrização de $H_\ell \in SL(2, \mathbb{C})$ consiste em usar o fato que rotações/boosts podem ser escritos como a composição de uma rotação para a direção z , uma rotação/boost na direção z , e outra rotação para outra direção [17]. Assim, sendo $R_{\vec{v}}$ a rotação que leva o vetor \vec{v} para a direção z , H_ℓ pode ser escrito como:

$$H_\ell = R_{\vec{\xi}_{t(\ell)}} e^{z_0 \tau_3} R_{\vec{\xi}_{s(\ell)}}^{-1}, \quad (4.11a)$$

$$z_0 = k_0 + it_\ell(2j_0 + 1). \quad (4.11b)$$

Tal decomposição admite a seguinte interpretação [17, 61]: geometricamente, $\vec{\xi}_{s(\ell)}$ e $\vec{\xi}_{t(\ell)}$ correspondem aos vetores de face associados ao link ℓ dos poliedros de $s(\ell)$ e $t(\ell)$, respectivamente. Existe uma rotação R que transporta paralelamente o vetor $\vec{\xi}_{s(\ell)}$ para $\vec{\xi}_{t(\ell)}$:

$$\vec{\xi}_{t(\ell)} = R \vec{\xi}_{s(\ell)}. \quad (4.12)$$

Entretanto, R não é única. Uma forma de explicitar sua não unicidade é primeiro escrever R em termos do produto de duas rotações: uma que leve a direção de $\vec{\xi}_{s(\ell)}$ para uma direção \vec{n} e outra que leve a direção \vec{n} para a direção de $\vec{\xi}_{t(\ell)}$. Escolhendo \vec{n} como \vec{z} :

$$\vec{\xi}_{t(\ell)} = R_{\vec{\xi}_{t(\ell)}} R_{\vec{\xi}_{s(\ell)}}^{-1} \vec{\xi}_{s(\ell)}.$$

Perceba que se qualquer rotação em z for realizada após a atuação de $R_{\vec{\xi}_{s(\ell)}}^{-1}$, a equação acima se mantém válida. Sendo assim, existe uma liberdade adicional na determinação da transformação de transporte paralelo em (4.12) que pode ser escrita em termos do parâmetro k_ℓ

$$\vec{\xi}_{t(\ell)} = R_{\vec{\xi}_{t(\ell)}} e^{k_\ell \tau_3} R_{\vec{\xi}_{s(\ell)}}^{-1} \vec{\xi}_{s(\ell)}, \quad k_\ell \in [-\pi, \pi], \quad (4.13)$$

de forma uma solução única para R está associada à escolha dos três parâmetros $(\vec{\xi}_{s(\ell)}, \vec{\xi}_{t(\ell)}, k_\ell)$. Portanto, o parâmetro k_ℓ da decomposição (4.11a) é interpretado como um ângulo da geometria extrínseca, sendo determinado em termos da conexão de Ashtekar-Barbero. O parâmetro j_0 da complexificação pode ser melhor entendido quando escrevemos o estado (4.10) para grandes spins, surgindo seu comportamento semiclássico. É possível mostrar [17, 61] que para limite de $\text{Im}z \gg 1$:

$$D_{nm}^j(e^{-z\tau_3}) \simeq e^{izj} \delta_n^j \delta_m^j, \quad (4.14)$$

de forma que

$$\begin{aligned} D_{m_\ell n_\ell}^{j_\ell}(H_\ell^{-1}) |j_\ell, m_\ell, n_\ell\rangle &\simeq \sum_{m_\ell, n_\ell} \sum_{a_\ell b_\ell} D_{n_\ell a_\ell}^{j_\ell}(R_{\vec{\xi}_{s(\ell)}}) e^{iz_0 j_\ell} \delta_{a_\ell}^{j_\ell} \delta_{b_\ell}^{j_\ell} D_{b_\ell m_\ell}^{j_\ell}(R_{\vec{\xi}_{t(\ell)}}^{-1}) |j_\ell, m_\ell, n_\ell\rangle \\ &= e^{iz_0 j_\ell} \left| j_\ell, \frac{\vec{\xi}_{t(\ell)}}{\|\vec{\xi}_{t(\ell)}\|^2}, \frac{\vec{\xi}_{s(\ell)}}{\|\vec{\xi}_{s(\ell)}\|^2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Substituindo (4.15) em (4.10), tem-se

$$\begin{aligned} |H_\ell, t_\ell\rangle &\simeq \sum_{j_\ell} \sqrt{2j_\ell + 1} e^{-t_\ell j_\ell(j_\ell + 1)} e^{ik_0 j_\ell} e^{-t_\ell j(2j_0 + 1)} \left| j_\ell, \frac{\vec{\xi}_{t(\ell)}}{\|\vec{\xi}_{t(\ell)}\|^2}, \frac{\vec{\xi}_{s(\ell)}}{\|\vec{\xi}_{s(\ell)}\|^2} \right\rangle \\ &\sim \sum_{j_\ell} \exp[-t_\ell(j_\ell - j_0)^2] e^{ik_0 j_\ell} \left| j_\ell, \frac{\vec{\xi}_{t(\ell)}}{\|\vec{\xi}_{t(\ell)}\|^2}, \frac{\vec{\xi}_{s(\ell)}}{\|\vec{\xi}_{s(\ell)}\|^2} \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.16)$$

de forma que o estado acima é uma gaussiana concentrada no ângulo da geometria extrínseca k_0 e no spin j_0 , completando a interpretação geométrica de $|H_\ell, t_\ell\rangle$ e evidenciando seu caráter coerente na geometria intrínseca e extrínseca.

A partir de (4.15), podemos determinar sua distribuição de probabilidades de spin

$$P(j_\ell) \sim \exp[-2t_\ell(j_\ell - j_0)^2]. \quad (4.17)$$

e, após uma transformada de Fourier^c, sua distribuição de probabilidades de ângulo k_ℓ :

$$P(k_\ell) \sim \exp\left[-\frac{(k_\ell - k_0)^2}{8t_\ell}\right], \quad (4.18)$$

concluindo que $|H_\ell, t_\ell\rangle$ é um estado concentrado nos valores médios $k_\ell = k_0$ e $j_\ell = j_0$ com desvios $\Delta k_\ell = 2\sqrt{t_\ell}$ e $\Delta j_\ell = 1/(2\sqrt{t_\ell})$.

^c Tal relação se deve ao fato de que (j_ℓ, k_ℓ) forma um par canônico [31].

Tendo em mãos o estado coerente de um link, é imediata a construção de um estado coerente para toda a rede. Estados coerentes extrínsecos $|\Gamma, \{H_\ell, t_\ell\}\rangle$ em Γ são construídos a partir da associação de um estado coerente extrínseco por link, seguido da aplicação do projetor de Gauss:

$$|\Gamma, \{H_\ell, t_\ell\}\rangle = P_G \bigotimes_{\ell \in \Gamma} |H_\ell, t_\ell\rangle. \quad (4.19)$$

4.3 Estados coerentes de variáveis bosônicas

Como foi discutido no capítulo anterior, os estados da LQG podem ser descritos em termos de variáveis bosônicas. Tendo em vista que osciladores harmônicos possuem seus próprios estados coerentes, é possível, a partir deles, definir estados coerentes na LQG.

4.3.1 Estados coerentes de osciladores harmônicos

Os estados coerentes de osciladores harmônicos correspondem aos autoestados do operador de aniquilação

$$\hat{a} |z\rangle = z |z\rangle, \quad (4.20)$$

o que pode ser facilmente verificado analisando as probabilidades em torno dos valores médios de posição e momento: a partir da relação entre os operadores posição e momento e os operadores de criação e aniquilação

$$\hat{x} = \hat{a} + \hat{a}^\dagger, \quad (4.21a)$$

$$\hat{p} = \hat{a} - \hat{a}^\dagger, \quad (4.21b)$$

é fácil mostrar que $|z\rangle$ possui incerteza mínima em torno dos valores médios de posição e momento:

$$z = \langle \hat{x} \rangle + i \langle \hat{p} \rangle, \quad (4.22a)$$

$$\Delta x \Delta p = \frac{1}{2}, \quad (4.22b)$$

de forma que $|z\rangle$ é um estado coerente concentrado no ponto $(\langle \hat{x} \rangle, \langle \hat{p} \rangle)$ do espaço de fase.

A forma explícita de $|z\rangle$ pode ser facilmente obtida a partir da escrita de $|n\rangle$ em termos de aplicações sucessivas do operador de criação:

$$\begin{aligned} |z\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|z\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} |n\rangle \langle 0| \hat{a}^n |z\rangle \\ &= \langle 0|z\rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle 0|z \rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z\hat{a}^\dagger)^n}{n!} |0\rangle \\
 &= \langle 0|z \rangle \exp [z\hat{a}^\dagger] |0\rangle.
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

4.3.2 Estados coerentes de variáveis bosônicas

Estados coerentes bosônicos são definidos a partir da associação de quatro estados coerentes de osciladores por link, sendo dois por seed. Seja $\boldsymbol{\xi}_{s(\ell)}^A, \boldsymbol{\xi}_{t(\ell)}^A \in \mathbb{C}^2$ espinores associado aos *seeds* $s(\ell), t(\ell) \in \ell$. O estado $|\{\boldsymbol{\xi}_i\}_\ell\rangle$ é definido por

$$|\{\boldsymbol{\xi}_i\}_\ell\rangle := P_A \left(\exp [\boldsymbol{\xi}_{t(\ell)}^A \hat{a}_{t(\ell)A}^\dagger] \exp [\boldsymbol{\xi}_{s(\ell)}^A \hat{a}_{s(\ell)A}^\dagger] |0\rangle \right). \tag{4.24}$$

Expandindo na base de espinores, o estado acima toma a forma

$$\begin{aligned}
 |\{\boldsymbol{\xi}_i\}_\ell\rangle &= P_A \left[\left(\sum_{j_{t(\ell)} \in \frac{\mathbb{N}}{2}} \frac{1}{(2j_{t(\ell)})!} (\boldsymbol{\xi}_{t(\ell)}^A \hat{a}_{t(\ell)A}^\dagger)^{2j_{t(\ell)}} |0\rangle \right) \otimes \left(\sum_{j_{s(\ell)} \in \frac{\mathbb{N}}{2}} \frac{1}{(2j_{s(\ell)})!} (\boldsymbol{\xi}_{s(\ell)}^A \hat{a}_{s(\ell)A}^\dagger)^{2j_{s(\ell)}} |0\rangle \right) \right] \\
 &= P_A \left[\left(\sum_{j_{t(\ell)} \in \frac{\mathbb{N}}{2}} \frac{1}{\sqrt{(2j_{t(\ell)})!}} |j_{t(\ell)}, \boldsymbol{\xi}_{t(\ell)}\rangle \right) \otimes \left(\sum_{j_{s(\ell)} \in \frac{\mathbb{N}}{2}} \frac{1}{\sqrt{(2j_{s(\ell)})!}} |j_{s(\ell)}, \boldsymbol{\xi}_{s(\ell)}\rangle \right) \right] \\
 &= \sum_{j_\ell \in \frac{\mathbb{N}}{2}} \frac{\lambda_\ell^{4j_\ell}}{(2j_\ell)!} \left| j_\ell, \frac{\boldsymbol{\xi}_{t(\ell)}}{\|\boldsymbol{\xi}_{t(\ell)}\|^2}, \frac{\boldsymbol{\xi}_{s(\ell)}}{\|\boldsymbol{\xi}_{s(\ell)}\|^2} \right\rangle.
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Perceba que os coeficientes de $|\{\boldsymbol{\xi}_i\}_\ell\rangle$ são proporcionais a uma distribuição de Poisson

$$P(k, \mu) = \frac{e^{-\mu} \mu^k}{k!}, \tag{4.26}$$

$$\frac{(\lambda_\ell^2)^{2j_\ell}}{(2j_\ell)!} = e^{\lambda_\ell^2} P(2j_\ell, \lambda_\ell^2). \tag{4.27}$$

No limite de $\mu \gg 1$, a distribuição de Poisson se reduz a uma gaussiana:

$$P(k, \mu) \xrightarrow{\mu \gg 1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sqrt{\mu}} \right)^2 \right], \tag{4.28}$$

de forma que, para $\lambda_\ell \gg 1$:

$$|\{\boldsymbol{\xi}_i\}_\ell\rangle \simeq \sum_{j_\ell \in \frac{\mathbb{N}}{2}} \frac{e^{\lambda_\ell^2}}{\sqrt{2\pi\lambda_\ell}} \exp \left[-\frac{2}{\lambda_\ell^2} \left(j_\ell - \frac{\lambda_\ell^2}{2} \right)^2 \right] \left| j_\ell, \frac{\boldsymbol{\xi}_{t(\ell)}}{\|\boldsymbol{\xi}_{t(\ell)}\|^2}, \frac{\boldsymbol{\xi}_{s(\ell)}}{\|\boldsymbol{\xi}_{s(\ell)}\|^2} \right\rangle. \tag{4.29}$$

Pela mesma análise realizada nos estados coerentes extrínsecos, perceba que os estados coerentes bosônicos apresentam comportamento coerente para $\lambda_\ell \gg 1$, possuindo valores médios concentrados no ângulo $k_0 = 0$ relativo à geometria extrínseca e spin $j_0 := \lambda_\ell^2/2$ relativo à geometria intrínseca.

A partir de (4.29), podemos determinar sua distribuição de probabilidades de spin:

$$P(j_\ell) \sim \exp \left[-\frac{2}{j_0} (j_\ell - j_0)^2 \right], \quad (4.30)$$

e, após uma transformada de Fourier, sua distribuição de probabilidades de ângulo k_ℓ :

$$P(k_\ell) \sim \exp \left[-\frac{j_0}{4} k_\ell^2 \right], \quad (4.31)$$

concluindo que $|\{\xi_i\}_\ell\rangle$ é um estados concentrado nos valores médios $k_\ell = 0$ e $j_\ell = j_0$ com desvios $\Delta k_\ell = 2/\sqrt{j_0}$ e $\Delta j_\ell = \sqrt{j_0}/2$.

Tendo em mãos o estado coerente de um link, é imediata a construção de um estado coerente para toda a rede. Estados coerentes bosônicos $|\Gamma, \{\xi_i\}\rangle$ em Γ são construídos a partir da associação de um estado coerente bosônico por link, seguido da aplicação do projetor de Gauss:

$$|\Gamma, \{\xi_i\}\rangle = P_G \bigotimes_{\ell \in \Gamma} |\{\xi_i\}_\ell\rangle. \quad (4.32)$$

5 CORRELAÇÕES NOS ESTADOS DA GEOMETRIA

Quando analisamos a construção de estados coerentes da LQG a partir da atuação dos projetores de área e de Gauss em estados coerentes separáveis no grafo, tais projeções produzem estados emaranhados, refletindo em correlações entre as medidas de observáveis nos estados da geometria.

No limite semiclássico da LQG, os estados coerentes apresentam distribuições de probabilidades concentradas na geometria clássica com pequenas perturbações quânticas. É esperada uma compatibilidade entre essa descrição e o regime semiclássico da teoria quântica de campos (QFT) em espaços curvos. Em tal regime, as perturbações do campo gravitacional são descritas por um campo não massivo de spin 2, conhecido como gráviton [36]. O caráter não massivo do campo resulta em flutuações do vácuo com correlações decaindo com o quadrado da distância [21, 36]. Tal comportamento é responsável pelo surgimento da lei das áreas para a entropia de emaranhamento [23, 65, 67], proposta como uma possível fonte para a entropia de buracos negros [23]. Por isso, esse tipo de decaimento das correlações é pontuado como critério necessário para selecionar estados semiclássicos de qualquer teoria quântica da gravidade [19].

A busca por estados da LQG que apresentam esse tipo de decaimento de correlações não se restringe à imposição de comportamentos esperados no limite semiclássico da teoria, sendo também motivada por aspectos mais fundamentais. Os estados semiclássicos já conhecidos da LQG são construídos no espaço de Hilbert cinemático, satisfazendo os vínculos de Gauss e de difeomorfismo. No entanto, para serem considerados estados físicos, eles devem também respeitar o vínculo hamiltoniano. Como é amplamente reconhecido na literatura (e mencionado na Seção 2.1), o vínculo hamiltoniano ainda não possui uma versão quântica bem estabelecida, o que configura um dos principais problemas em aberto da LQG. Diante da ausência de um vínculo hamiltoniano bem definido, torna-se necessária a imposição de características aos estados semiclássicos da LQG que reflitam o comportamento esperado das soluções que respeitam essa condição.

Nesta perspectiva, a imposição de um decaimento de correlações nos estados semiclássicos pode ser vista como uma exigência de origem dinâmica. Isso se baseia no fato de que, no regime semiclássico da gravitação quântica, o decaimento das correlações do gráviton está diretamente relacionado à forma da equação de Einstein da Relatividade Geral. Assim, a exigência de tal comportamento garante que os estados cinemáticos da LQG carreguem características esperadas de soluções que satisfariam o vínculo hamiltoniano.

Nesse contexto, este capítulo se dedicará, inicialmente, ao cálculo das correlações

das flutuações de área para duas classes de estados coerentes já trabalhados no limite semiclássico da LQG: os estados coerentes bosônicos e os estados coerentes *heat-kernel*. Como será evidenciado, tais estados apresentam correlações de curto alcance, não obedecendo a um decaimento do tipo inverso do quadrado da distância. Em seguida, será apresentada uma proposta de estados semiclássicos construídos a partir da perturbação de estados coerentes LS, e o comportamento das correlações para flutuações de área será calculado. Como será mostrado, é possível introduzir essas perturbações de forma a se obter um decaimento de correlações polinomial com a distância no limite semiclássico. Os resultados apresentados nesta seção fazem parte da publicação [49].

5.1 Limite semiclássico e flutuações de área

Correlações nas flutuações da geometria podem ser quantificadas diretamente em termos da função de correlação. Funções de correlação podem ser determinadas em termos de operadores ou de variáveis clássicas. Seja $|\psi_\Gamma\rangle$ um estado cinemático definido na rede Γ . Se \mathcal{A}_ℓ é o operador de área relacionado ao link $\ell \in \Gamma$, a função de correlação de área associada a $|\psi_\Gamma\rangle$ é dada por

$$\mathcal{G}(\mathcal{A}_\ell, \mathcal{A}_{\ell'}) = \langle \mathcal{A}_\ell \mathcal{A}_{\ell'} \rangle - \langle \mathcal{A}_\ell \rangle \langle \mathcal{A}_{\ell'} \rangle, \quad (5.1)$$

quantificando, portanto, correlações entre flutuações de áreas nos links ℓ e ℓ'

Áreas na LQG estão relacionadas ao operador de fluxo, como exposto em (2.122). No limite semiclássico, caracterizado por grandes valores médios de spin, o operador área se reduz ao produto da constante de Barbero-Immirzi com o operador de representação. Assim, a função de correlação do operador área é determinada pela função de correlação de spins:

$$\mathcal{G}(\mathcal{A}_\ell, \mathcal{A}_{\ell'}) \simeq \gamma^2 \mathcal{G}(\mathcal{J}_\ell, \mathcal{J}_{\ell'}). \quad (5.2)$$

5.2 Geometria clássica homogênea

No regime semiclássico da QFT em espaços curvos, o espaço-tempo clássico é tratado como pano de fundo para as perturbações quantizadas. Para uma geometria de fundo homogênea, o contexto análogo na LQG corresponde a estados coerentes no limite semiclássico, concentrados em redes homogêneas. A fim de se calcular correlações das flutuações de spin em função da distância para grandes redes, é conveniente trabalhar em uma rede cúbica Γ . Para desconsiderar efeitos de borda, adotaremos condições de fronteira periódicas. Assim, começamos associando aos *seeds* de um mesmo nó espinores que geram vetores paralelos aos eixos euclidianos:

$$\vec{\xi}_{n1} = -\vec{\xi}_{n4} = \hat{x}, \quad (5.3a)$$

$$\vec{\xi}_{n2} = -\vec{\xi}_{n5} = \hat{y}, \quad (5.3b)$$

$$\vec{\xi}_{n3} = -\vec{\xi}_{n6} = \hat{z}, \quad (5.3c)$$

de forma que a condição de estados concentrados em redes homogêneas impõe a escolha de espinores independente do nó, assim como o mesmo módulo para todos os espinores e valores médios de spin para todos os links:

$$\vec{\xi}_{n\mu} = \vec{\xi}_{\mu}, \quad \forall n, \quad (5.4a)$$

$$\lambda_{n\mu} = \lambda, \quad \forall n, \mu, \quad (5.4b)$$

$$\langle j_\ell \rangle = j_0, \quad \forall \ell. \quad (5.4c)$$

Para uma rede cúbica e homogênea com nós $n = (n_1, n_2, n_3)$, em que $n_1, n_2, n_3 = 1, \dots, L$, se $n\mu$ corresponde ao link ℓ e $n'\mu'$ a ℓ' , então a distância entre ℓ e ℓ' é dada por:

$$d_{\ell\ell'} = \sqrt{\langle \mathcal{A} \rangle} \sqrt{(n_1 - n'_1)^2 + (n_2 - n'_2)^2 + (n_3 - n'_3)^2}, \quad (5.5)$$

em que $\langle \mathcal{A} \rangle$ é independente do link.

Estados coerentes concentrados em Γ são descritos nos nós como combinações lineares de intertwiners coerentes LS. Fixando na rede uma escolha de spins $\{j_\ell\}$, tem-se nos nós

$$|LS, \{j_{n\mu}, \xi_\mu\}\rangle = P_n \bigotimes_{\mu=1}^6 |j_{n\mu}, \xi_\mu\rangle. \quad (5.6)$$

Como a atuação do projetor de Gauss não modifica os spins $\{j_\ell\}$, sua atuação modifica as probabilidades de spin somente pela introdução do módulo ao quadrado dos intertwiners coerentes LS:

$$P(\{j_\ell\}) = \prod_{\ell \in \Gamma} P(j_\ell) \prod_{n \in \Gamma} f(j_{n\mu}). \quad (5.7)$$

Perceba que a adição de $f(j_{n\mu})$ na probabilidade de configurações de spins produz correlações entre flutuações de spins em diferentes links. Aplicando as condições (5.3) e (5.4) em (4.4):

$$H_{ab} = \text{diag}(J_n - J_{n1}, J_n - J_{n2}, J_n - J_{n3}), \quad (5.8a)$$

$$J_n = \sum_{\mu \in n} j_{n\mu}, \quad (5.8b)$$

$$J_{na} = j_{na} + j_{n,a+3}, \quad (5.8c)$$

resultando em:

$$f(j_{n\mu}) \propto \exp \left[-\frac{(j_{n1} - j_{n4})^2}{J_n - J_{n1}} - \frac{(j_{n2} - j_{n5})^2}{J_n - J_{n2}} - \frac{(j_{n3} - j_{n6})^2}{J_n - J_{n3}} \right]. \quad (5.9)$$

Como estados coerentes no regime semiclássico da LQG apresentam valores médios concentrados em torno da geometria clássica, tal regime implica que as configurações de spin relevantes para o contexto são aquelas que:

$$j_{n\mu} = j_0 + d_{n\mu}, \quad (5.10a)$$

$$d_{n\mu} \sim \Delta j_{n\mu} \ll j_0, \quad (5.10b)$$

de forma que

$$f(j_{n\mu}) \propto \prod_a e^{-\Delta_{na}^2/4j_0}, \quad (5.11a)$$

$$\Delta_{na} := j_{na} - j_{n,a+3}. \quad (5.11b)$$

A partir dos resultados obtidos e considerando estados que no limite semiclássico apresentam uma distribuição $P(j_\ell)$ do tipo gaussiana, a distribuição de probabilidade para um conjunto de spins $\{j_\ell\}$ toma a forma

$$P(\{j_\ell\}) \propto \prod_{\ell \in \Gamma} \exp \left[-\frac{(j_\ell - j_0)^2}{2(\Delta j_\ell)^2} \right] \prod_{n \in \Gamma} \left(\prod_{a=1}^3 e^{-\Delta_{na}^2/4j_0} \right), \quad (5.12)$$

nos permitindo calcular diretamente a função de correlação dos spins.

Perceba que a fatoração de $f(j_{n\mu})$ nos três eixos euclidianos evidencia que as correlações das flutuações de spin são presentes somente em flutuações no mesmo eixo. Dessa forma, a função de correlação será calculada não em Γ , mas em uma sub-rede unidimensional $\Gamma_{x00} = \{(n_1, 0, 0) \mid n_1 = 1, \dots, L\}$. Denotando o spin do link à direita do vértice $(p, 0, 0)$ por $j_p = j_0 + d_p$, a distribuição de probabilidades da configuração de spins $\{j_p\}$ é dada pela restrição de $P(\{j_\ell\})$ a Γ_{x00} , sendo escrita como

$$P(\{j_p\}) \propto \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{p,p'} A_{pp'} d_p d_{p'} \right], \quad (5.13)$$

em que

$$A = \frac{1}{j_0} \left[\left(1 + \frac{j_0}{(\Delta j_p)^2} \right) \mathbb{I} - \frac{1}{2} B \right], \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Os valores médios $\langle \mathcal{J}_p \rangle$ e $\langle \mathcal{J}_p \mathcal{J}_{p'} \rangle$ podem ser calculados diretamente das variáveis clássicas j_p e $j_{p'}$, de forma que, para distribuições gaussianas de spin, $\langle d_p \rangle = 0$, resultando em

$$\langle \mathcal{J}_p \rangle = \langle j_p \rangle = j_0, \quad (5.15a)$$

$$\langle \mathcal{J}_p \mathcal{J}_{p'} \rangle = \langle j_p j_{p'} \rangle = j_0^2 + \langle d_p d_{p'} \rangle, \quad (5.15b)$$

e, por consequência

$$\mathcal{G}(\mathcal{J}_p, \mathcal{J}_{p'}) = \langle d_p d_{p'} \rangle. \quad (5.16)$$

Para distribuições gaussianas da forma (5.13), tem-se

$$\langle d_p d_{p'} \rangle = [A^{-1}]_{pp'}. \quad (5.17)$$

Como redes homogêneas são invariantes por translação, a função de correlação acima só depende da distância entre p e p' . Se $d_{pp'} = R$, então

$$\mathcal{G}(R) = \langle d_1 d_{1+R} \rangle. \quad (5.18)$$

Para R muito menor que o tamanho total da rede, é possível ignorar as condições de fronteira, representadas pelos termos nas quinas da matriz B em (5.14). A matriz A pode ser invertida pela série de Neumann:

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{j_0} + \frac{1}{(\Delta j_p)^2} \right)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{j_0}{(\Delta j_p)^2} \right)^{-1} B \right]^n. \quad (5.19)$$

Pela forma de B em (5.14), tem-se

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{B}{a} \right)^n \right]_{1,1+R} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{B}{a} \right)^{R+2n} \right]_{1,1+R} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{R+2n}} \frac{(R+2n)!}{(R+n)!n!}, \quad (5.20)$$

sendo a série convergente para $a > 2$, condição sempre respeitada em (5.19). Aproximando a série acima por seu termo dominante:

$$\mathcal{G}(R) \simeq \frac{j_0}{2^R} \left(1 + \frac{j_0}{(\Delta j_p)^2} \right)^{-(1+R)}, \quad (5.21)$$

evidenciando um caráter de decaimento exponencial com a distância:

$$\mathcal{G}(R) \simeq \left(\frac{1}{j_0} + \frac{1}{(\Delta j_p)^2} \right)^{-1} \exp \left[-\ln \left(2 + \frac{2j_0}{(\Delta j_p)^2} \right) R \right]. \quad (5.22)$$

5.2.1 Estados coerentes bosônicos

A partir da distribuição de probabilidades de spin para um link ℓ exposta em (4.30), a distribuição associada a um conjunto de spins $\{j_p\}$ do estado coerente bosônico $|\Gamma, \{\xi_i\}\rangle$ definido na rede cúbica homogênea descrita na seção anterior é dada por uma gaussiana centrada em j_0 com $\Delta j_p = \sqrt{j_0}/2$, de forma que o decaimento das correlações de spins toma a forma

$$\mathcal{G}(R) \simeq \frac{j_0}{5} e^{-2,3R}. \quad (5.23)$$

Assim, estados coerentes bosônicos apresentam um comprimento de correlação $\xi \simeq 0,43$ links da rede; mostrando que as correlações das flutuações de spin são de curto alcance, permanecendo apenas por poucos links na rede.

5.2.2 Estados coerentes heat-kernel

A partir da distribuição de probabilidades de spin para um link ℓ exposta em (4.30), a distribuição associada a um conjunto de spins $\{j_p\}$ do estado coerente *heat-kernel* $|\Gamma, \{H_p, t_p\}\rangle$ definido na rede cúbica homogênea descrita na seção anterior é dada por uma gaussiana centrada em j_0 com $\Delta j_p = 1/(2\sqrt{t_p})$, de forma que o decaimento das correlações de spins toma a forma

$$\mathcal{G}(R) \simeq \frac{j_0}{1 + 4t_p j_0} e^{-\ln[2(1+4t_p j_0)]R}. \quad (5.24)$$

Assim, estados coerentes *heat-kernel* apresentam um comprimento de correlação

$$\xi \simeq \frac{1}{\ln[2(1 + 4t_p j_0)]} < \frac{1}{\ln 2} \simeq 1,44 \text{ links da rede};$$

mostrando que, assim como para estados coerentes *heat-kernel*, as correlações das flutuações de spin são de curto alcance, permanecendo apenas por poucos links na rede.

5.3 Nova classe de estados coerentes

O rápido decaimento das correlações de spin com a distância presente nos estados coerentes da LQG evidencia um comportamento que diverge do esperado no limite semi-clássico. Essa divergência motiva a busca por novas classes de estados coerentes da LQG. O objetivo é encontrar estados que, além de possuírem distribuições de probabilidade concentradas na geometria clássica com pequenos desvios relativos, também apresentem correlações de longo alcance. A busca por essa nova classe de estados segue duas estratégias naturais: (i) desenvolver uma nova construção de estados coerentes que já incorporem tais características, ou (ii) modificar os estados atuais para introduzir as correlações de longo alcance. Como os estados coerentes existentes já apresentam o comportamento semi-clássico esperado no que diz respeito à geometria média, é natural utilizá-los como base para essa construção.

A seguir, será apresentada uma nova classe de estados coerentes, obtida a partir de perturbações aplicadas aos estados coerentes intrínsecos da LQG. As perturbações introduzidas possuem um caráter não local, o que permite obter correlações de longo alcance no limite semi-clássico. Esta apresentação será dividida em duas partes: inicialmente, será discutida a construção de estados cinemáticos da LQG a partir de perturbações não locais de estados de fundo. Em seguida, essas perturbações serão introduzidas em estados coerentes da LQG em redes homogêneas, explicitando seus impactos nas distribuições de probabilidade. Por fim, no contexto de redes homogêneas, será calculada a função de correlação para flutuações de área no limite semi-clássico, demonstrando que, para certas escolhas de perturbação, emergem correlações de longo alcance compatíveis com o limite semi-clássico esperado.

5.3.1 Estados perturbados: correlações não locais

Considere um estado genérico $|\psi_0\rangle \in \mathcal{K}_\Gamma$. Perturbar o estado $|\psi_0\rangle$ consiste em desviá-lo em primeira ordem, de forma que:

$$|\psi_0\rangle \mapsto |\psi\rangle = |\psi_0\rangle + |\delta\psi_0\rangle, \quad (5.25a)$$

$$\langle \delta\psi_0 | \delta\psi_0 \rangle \ll 1, \quad (5.25b)$$

alterando suas distribuições de probabilidade. Por se tratar de uma perturbação, $|\delta\psi_0\rangle$ deve ser visto como uma deformação de $|\psi_0\rangle$ que introduz flutuações na geometria associada a $|\psi_0\rangle$.

Deformações da geometria podem ser implementadas a partir de excitações de partes de $|\psi_0\rangle$. Partindo da visão da representação de laços, todo estado cinemático da LQG pode ser visto como uma combinação linear de estados de laços. Dessa forma, a fim de se produzir estados deformados que fazem parte do espaço cinemático da LQG, tais excitações devem diferir $|\delta\psi_0\rangle$ de $|\psi_0\rangle$ por estados de laços. Levando em conta que flutuações genéricas podem ser implementadas por laços de diferentes extensões e formatos, é natural que flutuações localizadas sejam mais prováveis e frequentes do que flutuações extensas. Dessa forma, pensando em um estado físico como (valores médios) + (flutuações), é natural que as flutuações mais significativas consistam naquelas produzidas por excitações geradas pelos menores laços da rede.

A fim de se construir estados semiclássicos da LQG com correlações de longo alcance, as flutuações relevantes para o cálculo da função de correlação são aquelas geradas por deformações conjuntas em regiões disjuntas da rede. Dessa forma, a primeira ordem significativa para a função de correlação seria a produzida por excitações conjuntas não locais geradas por dois laços disjuntos de menor extensão.

A implementação desse tipo de deformação para os estados da LQG pode ser realizada de forma natural pela composição de spin ou pelo produto de estados, ambas as operações realizadas entre $|\psi_0\rangle$ e $|\alpha_1\alpha_2\rangle := |\alpha_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle$, sendo α_1 e α_2 laços disjuntos formados por quatro links na rede $|\psi_0\rangle$. Fisicamente, o produto $|\psi_0 \times \alpha_1\alpha_2\rangle$ pode ser visto como a excitação de $|\psi_0\rangle$ gerada diretamente pelos laços α_1 e α_2 na rede de $|\psi_0\rangle$, enquanto a composição $|\psi_0 \cdot \alpha_1\alpha_2\rangle$ pode ser vista como a introdução em $|\psi_0\rangle$ de excitações dos laços α_1 e α_2 geradas no vácuo, respeitando os vínculos cinemáticos. Em termos operacionais:

$$|\psi_0 \times \alpha_1\alpha_2\rangle \propto T_{\alpha_1} T_{\alpha_2} |\psi_0\rangle, \quad (5.26a)$$

$$|\psi_0 \cdot \alpha_1\alpha_2\rangle \propto P_A(T_{\alpha_1} T_{\alpha_2} |0\rangle \otimes |\psi_0\rangle). \quad (5.26b)$$

Perceba que, matematicamente, a diferença entre esses dois tipos de deformação reside nos fatores do tipo $(2j+1)$ presentes no produto de estados de spins (2.107), mas não em sua composição de spin (2.84). Essa diferença torna as deformações geradas pela

composição de spin mais simples do que as geradas pelo produto de estados. Visando introduzir correlações de longo alcance em estados semiclássicos, a escolha deste trabalho consistiu em utilizar a composição de spin como deformação de estados, por se tratar da escolha mais simples e natural para a LQG em termos de estados de momento angular.

5.3.2 Estados coerentes perturbados

Trabalhando com estados coerentes concentrados em redes homogêneas definidas nas últimas seções, o limite semiclássico produz estados concentrados no spin $j_\ell = j_0, \forall \ell \in \Gamma$, com flutuações da geometria que produzem correlações de spin de curto alcance. Assim, a fim de se introduzir correlações de spin de longo alcance, calculamos a função de correlação de spin para o estado perturbado construído a partir do estado coerente intrínseco

$$|\psi_0\rangle = |LS, \{j_\ell = j_0, \xi_i\}\rangle, \quad (5.27)$$

em que $\{\xi_i\}$ são espinores normalizados que obedecem (5.3) e \mathcal{N} é uma constante de normalização. Dessa forma, a deformação gerada será do tipo

$$|\delta\psi_0\rangle \propto |LS, \{j_\ell = j_0, \xi_i\}\rangle \cdot |\alpha_1\alpha_2\rangle. \quad (5.28)$$

A escolha pelo estado coerente intrínseco com $j_\ell = j_0$ consiste em, a partir do valor médio, introduzir flutuações adequadas para produzir o decaimento de correlações desejado. Além disso, a escolha (5.27) pode ser vista como um limite da deformação dos estados coerentes com distribuições gaussianas de spin. No limite semiclássico, os estados coerentes em redes homogêneas convergem para (5.27). Dado que as distribuições gaussianas geram correlações de curto alcance, a perturbação de (5.27) introduz flutuações de spin cujas correlações, se de longo alcance, prevalecem sobre as de origem gaussiana no limite semiclássico.

Se tratando de redes homogêneas e buscando correlações que só dependam da distância, a perturbação de (5.27) deve ser gerada por deformações homogêneas e isotrópicas. A forma natural de implementá-las é a partir de deformações do tipo (5.28) para todos os pares de laços disjuntos α_1, α_2 :

$$|\psi\rangle = |\psi_0\rangle + \epsilon \sum_{\alpha_1, \alpha_2} c_{\alpha_1\alpha_2} |\square\square\rangle, \quad (5.29a)$$

$$|\square\square\rangle = \mathcal{N} |\psi_0\rangle \cdot |\alpha_1\alpha_2\rangle, \quad (5.29b)$$

em que $\epsilon \ll 1$, \mathcal{N} é uma constante de normalização, e $c_{\alpha_1\alpha_2} \in \mathbb{R}$ é um coeficiente que depende da distância entre α_1 e α_2 . Assim, $c_{\alpha_1\alpha_2}$ corresponde ao peso da perturbação gerada pela deformação produzida pelos laços α_1 e α_2 no estado total.

5.3.2.1 Distribuições de spin

Por se tratar de uma perturbação de estados coerentes intrínsecos, o estado (5.29) possui novas características em relação aos estados não perturbados. A fim de se determinar suas novas propriedades no que diz respeito a medidas de spin, é necessário, a partir de (5.29), obter o estado de um único link da rede. Como o estado é homogêneo, todos os links apresentam o mesmo estado, bastando escolher um link arbitrário $\ell \in \Gamma$ para o estudo.

A perturbação escolhida introduz emaranhamento entre os estados dos links, de forma que a determinação dos estados dos links deve ser feita a partir do traço parcial da matriz densidade da rede nos graus de liberdade externos a um link. A determinação da matriz densidade de um link no limite semiclássico admite uma simplificação significativa herdada dos intertwiners coerentes LS [41]: como pode ser visto com mais detalhe no apêndice E, no limite semiclássico, valores médios de funções do operador de representação \mathcal{J}_ℓ em relação aos estados coerentes intrínsecos que obedecem a condição de fechamento clássica (4.5) podem ser computados antes da aplicação do projetor de Gauss. Ou seja, se

$$|\psi_0\rangle = P_G |\tilde{\psi}_0\rangle, \quad (5.30a)$$

$$|\tilde{\psi}_0\rangle = \bigotimes_{n \in \Gamma} \bigotimes_{\mu \in n} |j_{n\mu} = j_0, \xi_{n\mu}\rangle, \quad (5.30b)$$

então, no limite semiclássico:

$$\frac{\langle \psi_0 | f(\mathcal{J}_\ell) | \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} \simeq \langle \tilde{\psi}_0 | f(\mathcal{J}_\ell) | \tilde{\psi}_0 \rangle, \quad (5.31)$$

sendo $f(\mathcal{J}_\ell)$ uma função arbitrária do operador \mathcal{J}_ℓ . Além disso, o mesmo resultado também é válido para valores médios em relação a $|\square\square\rangle$:

$$\frac{\langle \square\square | f(\mathcal{J}_\ell) | \square\square \rangle}{\langle \square\square | \square\square \rangle} \simeq (\langle \alpha_1 \alpha_2 | \cdot \langle \tilde{\psi}_0 |) f(\mathcal{J}_\ell) (| \alpha_1 \alpha_2 \rangle \cdot | \tilde{\psi}_0 \rangle), \quad (5.32)$$

sendo válido, portanto, para os estados intrínsecos perturbados:

$$\frac{\langle \psi | f(\mathcal{J}_\ell) | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \simeq \langle \tilde{\psi} | f(\mathcal{J}_\ell) | \tilde{\psi} \rangle, \quad (5.33a)$$

$$|\tilde{\psi}\rangle = |\tilde{\psi}_0\rangle + \epsilon \sum_{\alpha_1 \alpha_2} c_{\alpha_1 \alpha_2} |\tilde{\psi}_0\rangle \cdot |\alpha_1 \alpha_2\rangle. \quad (5.33b)$$

A partir disso, foi calculada a matriz densidade ρ_ℓ no limite de grandes spins $j_0 \gg 1$, sendo os procedimentos e resultado contidos no apêndice F. A partir da matriz densidade obtida, algumas propriedades do estado perturbado (5.29) podem ser determinadas:

1. **Normalização:** As correlações não locais introduzem uma correção na norma do estado:

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1 + \epsilon^2 \sum_{\alpha_1 \alpha_2} (c_{\alpha_1 \alpha_2})^2. \quad (5.34)$$

2. **Probabilidades de spin:** A distribuição de probabilidade para os spins em cada link ℓ adquire flutuações em torno do valor médio j_0 , gerando a distribuição de spins:

$$P(j_\ell) = \delta_{j_\ell, j_0} + \epsilon^2 \sum_{\alpha_1 \cup \alpha_2 \ni \ell} (c_{\alpha_1 \alpha_2})^2 \left[\frac{\delta_{j_\ell, j_0 + 1/2}}{2} \left(1 + \frac{1}{j_0}\right) + \frac{\delta_{j_\ell, j_0 - 1/2}}{2} \left(1 - \frac{1}{j_0}\right) - \delta_{j_\ell, j_0} \right], \quad (5.35)$$

sendo a soma em relação a todos os pares de laços disjuntos que incluem o link ℓ .

3. **Valor médio e dispersão do spin por link:** A partir da distribuição de probabilidade (5.35), obtemos:

$$\langle \mathcal{J}_\ell \rangle = j_0 + \frac{\epsilon^2}{2j_0} \sum_{\alpha_1 \cup \alpha_2 \ni \ell} (c_{\alpha_1 \alpha_2})^2, \quad (5.36a)$$

$$\langle \mathcal{J}_\ell^2 \rangle = j_0^2 + \frac{5\epsilon^2}{4} \sum_{\alpha_1 \cup \alpha_2 \ni \ell} (c_{\alpha_1 \alpha_2})^2, \quad (5.36b)$$

levando a uma flutuação relativa que se anula no limite de grandes spins

$$\frac{\sigma_{j_\ell}}{\langle \mathcal{J}_\ell \rangle} = \frac{\epsilon}{2j_0} \sqrt{\sum_{\alpha_1 \cup \alpha_2 \ni \ell} (c_{\alpha_1 \alpha_2})^2}. \quad (5.37)$$

Os resultados acima evidenciam que o valor médio dos spins não é significativamente afetado pelas perturbações: as flutuações de spin introduzidas pelas perturbações são aproximadamente simétricas em torno do valor médio $\langle \mathcal{J}_\ell \rangle \simeq j_0$. A dispersão σ_{j_ℓ} permanece pequena em relação ao valor médio e se anula no limite de $j_0 \rightarrow \infty$. O estado perturbado, portanto, permanece semiclássico em relação aos spins. Além disso, correlações de longo alcance são introduzidas pelas perturbações, como será discutido a seguir.

5.3.2.2 Correlações de área

Tendo em mãos as propriedades citadas na última seção, podemos calcular diretamente a função de correlação de spins associada aos estados coerentes intrínsecos perturbados:

$$\mathcal{G}(\mathcal{J}_\ell, \mathcal{J}_{\ell'}) = \langle \mathcal{J}_\ell \mathcal{J}_{\ell'} \rangle - \langle \mathcal{J}_\ell \rangle \langle \mathcal{J}_{\ell'} \rangle.$$

A partir da distribuição (5.35), o valor médio $\langle \mathcal{J}_\ell \mathcal{J}_{\ell'} \rangle$ assume a forma:

$$\langle \mathcal{J}_\ell \mathcal{J}_{\ell'} \rangle = j_0^2 + \frac{\epsilon^2}{2} \left[\sum_{\alpha_1 \cup \alpha_2 \ni \ell} (c_{\alpha_1 \alpha_2})^2 + \sum_{\alpha_1 \cup \alpha_2 \ni \ell'} (c_{\alpha_1 \alpha_2})^2 + \frac{1}{2j_0^2} \sum_{\alpha_1 \cup \alpha_2 \ni \ell, \ell'} (c_{\alpha_1 \alpha_2})^2 \right]. \quad (5.38)$$

As duas primeiras somas são termos de volume, pois escalam com o tamanho do grafo. Já a terceira soma é independente do tamanho do grafo e permanece finita no limite de um grafo infinito. A partir do valor médio (5.36a), é imediato que, para uma rede finita, os termos de volume se cancelam no cálculo da função de correlação de spin, restando apenas a terceira soma de (5.38). Assim, a função de correlação permanece finita

e independente do tamanho do grafo. A partir da relação no limite de grandes spins entre correlações de área e correlações de spin dada por (5.2), as correlações de área assumem a forma:

$$\mathcal{G}(\mathcal{A}_\ell, \mathcal{A}_{\ell'}) = \gamma^2 \frac{\epsilon^2}{4J_0^2} \sum_{\alpha_1 \cup \alpha_2 \ni \ell, \ell'} (c_{\alpha_1 \alpha_2})^2. \quad (5.39)$$

Como o resultado acima contém um somatório finito, sua convergência independe da escolha da função $c_{\alpha_1 \alpha_2}$ e do tamanho do grafo. Para um background homogêneo, é natural que $c_{\alpha_1 \alpha_2}$ seja uma função da distância entre os laços. Ao considerá-la decaindo com o inverso da distância entre os links ℓ, ℓ' , vemos que a função de correlação reproduz o decaimento típico de correlações com $1/d^2$ para campos sem massa no contínuo.

Partindo de um estado coerente intrínseco com spins fixos, o estado perturbado introduzido em (5.29) é uma modificação simples que pode ser vista como uma primeira contribuição em uma abordagem mais geral para a construção de estados correlacionados da geometria. Contribuições de ordem superior podem ser previstas com perturbações envolvendo, por exemplo, excitações simultâneas de um número maior de laços distribuídos em mais de dois locais do grafo, ou laços mais longos do que os considerados para o cálculo da função de correlação, bem como múltiplas excitações em um único laço. Como mostrado em (5.39), a escolha mais simples de perturbações que descrevem excitações emaranhadas de pares de laços de menor extensão já é suficiente para a construção de estados que exibem correlações decaindo na rede com o comportamento típico esperado para grávitons livres sem massa na gravitação semiclássica.

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

A construção de uma teoria quântica da gravidade exige não apenas uma descrição consistente da geometria em escalas de Planck, mas também o surgimento de um regime semiclássico compatível com a Relatividade Geral. A Gravitação Quântica de Laços (LQG), oferece uma abordagem não perturbativa e independente de background que atende a esses requisitos, prevendo tanto um caráter discreto para o espaço-tempo quanto amplitudes de transição que reproduzem a ação clássica no limite apropriado. Esta tese dedicou-se a investigar o decaimento das correlações em estados semiclássicos da LQG, com o objetivo de se entender melhor o caráter semiclássico dos estados da geometria.

Um requisito básico para estados semiclássicos é que eles sejam concentrados em uma configuração clássica, o que impõe condições sobre os valores médios dos observáveis e exige uma pequena dispersão em torno dessa média. Contudo, essas condições não definem esses estados de forma única, uma vez que diferentes configurações quânticas podem possuir as mesmas médias e dispersões, mas apresentar diferentes correlações nas flutuações da geometria. Assim, evidencia-se a necessidade de impor critérios adicionais para restringir a seleção de estados semiclássicos. Nessa tese, o critério explorado foi o decaimento das correlações nas flutuações da geometria com o inverso do quadrado da distância.

Iniciamos o trabalho com uma revisão dos fundamentos da LQG, partindo da formulação da Relatividade Geral em termos de tetradas, como exposto no capítulo 1, e explorando as prescrições de quantização canônica e covariante, que culminam na descrição do espaço de Hilbert cinemático em termos de *spin-networks*, como exposto no capítulo 2. Construimos no capítulo 3 estados da LQG em termos de espinores e de osciladores harmônicos para, em seguida, no capítulo 4 introduzirmos os limite semiclássico da LQG através da construção de estados coerentes. A contribuição desta tese, apresentada no capítulo 5, partiu da premissa de que um estado semiclássico consistente não deve apenas reproduzir uma geometria média clássica, mas também deve exibir uma estrutura de flutuações quânticas compatível com o regime semiclássico da teoria quântica de campos em espaços curvos. Nesse regime, espera-se que as correlações das flutuações do campo gravitacional decaiam com o inverso do quadrado da distância. Começamos analisando famílias de estados coerentes já estabelecidas na literatura. O cálculo da função de correlação de dois pontos para o operador de área revelou que, para esses estados, as correlações são de curto alcance, decaindo exponencialmente.

Para superar essa limitação, propusemos e desenvolvemos uma nova classe de estados semiclássicos, construídos a partir da perturbação de estados coerentes intrínsecos. A metodologia consistiu em introduzir excitações quânticas não-locais, representadas por pares de laços disjuntos, através da operação de composição de spin. Demonstramos

analiticamente que essa abordagem permite modular a estrutura de correlações do estado final. Em particular, identificamos uma família de estados perturbados cuja função de correlação de área exibe um decaimento do tipo $1/d^2$ no limite de grandes números quânticos, em total acordo com o critério semiclássico. É importante ressaltar que essa construção preserva os valores médios do estado original.

Estados da geometria com correlações de longo alcance na LQG foram discutidos anteriormente em [14] a partir dos estados de vácuo comprimido (*squeezed vacuum*). Os estados introduzidos nesse trabalho diferem dos estados de vácuo comprimido em dois aspectos principais. Primeiro, em vez de introduzir excitações correlacionadas sobre o estado de vácuo, como é feito para os estados de vácuos comprimidos, consideramos excitações sobre os estados coerentes intrínsecos. A geometria semiclássica descrita pelos estados coerentes pode então ser interpretada como uma geometria de fundo sobre a qual perturbações correlacionadas são introduzidas, em um cenário que se assemelha a gravidade quântica perturbativa. Além disso, consideramos diretamente excitações de laços correlacionados e invariantes por transformações de gauge $SU(2)$. Isso simplifica o cálculo das correlações, além de produzir estados automaticamente invariantes de gauge.

Uma extensão natural do método introduzido para a construção de estados coerentes perturbados consiste em explorar perturbações criadas por estados de laços em diferentes representações, assim como por uma quantidade maior de laços e por laços mais extensos. Isso permitiria a construção de estados perturbados com uma rede mais rica de correlações. Analisamos aqui o caso de excitações elementares de dois laços sobre estados coerentes intrínsecos, e perturbações mais gerais podem ser consideradas. Notamos também que, assim como para as famílias usuais de estados coerentes intrínsecos e extrínsecos, nossos estados perturbados são definidos no espaço de Hilbert cinemático \mathcal{K} da LQG, formado por estados que são invariantes sob transformações de gauge $SU(2)$ e difeomorfismos espaciais. Entretanto, estados físicos da geometria também devem satisfazer o vínculo Hamiltoniano.

A motivação subjacente para a construção de estados com correlações de longo alcance foi a de reproduzir características básicas do campo gravitacional no regime semiclássico, que sugerem propriedades que soluções semiclássicas do vínculo hamiltoniano deveriam exibir em uma descrição completa de gravitação quântica. Considerando a família de estados coerentes perturbados como um *ansatz* para uma dada representação do vínculo hamiltoniano, pode-se questionar como as normas dos estados $\hat{H}^n |\psi\rangle$ são afetadas pela presença de correlações, e se elas podem ser minimizadas por uma escolha específica de perturbação. Uma análise da interação entre a presença de correlações e a ação do vínculo hamiltoniano para estados semiclássicos fornece uma estratégia para investigar se a presença de correlações leva a melhores aproximações para soluções semiclássicas do vínculo ou não, o que pode ser buscado em trabalhos futuros.

Além disso, tendo em mãos as amplitudes de transição do contexto da LQG

covariante, é possível investigar como tais amplitudes são afetadas quando introduzimos os estados perturbados introduzidos nesse trabalho como estados de fronteira. Juntamente a isso, o cálculo de amplitudes baseado em estados de fronteira iniciais não perturbados e finais perturbados poderia sugerir o quanto a evolução temporal na LQG induz correlações nos estados, nos permitindo compreender melhor que tipo de correlações são preservadas e suprimidas pela LQG.

REFERÊNCIAS

- [1] AGULLO, I., BARBERO G, J. F., BORJA, E. F., DIAZ-POLO, J., AND VILLASENOR, E. J. S. Detailed black hole state counting in loop quantum gravity. *Physical Review D* 82, 8 (2010), 084029.
- [2] ASHTEKAR, A. New variables for classical and quantum gravity. *Physical Review Letters* 57, 18 (1986), 2244.
- [3] ASHTEKAR, A., AND BIANCHI, E. A short review of loop quantum gravity. *Reports on Progress in Physics* 84, 4 (2021), 042001.
- [4] ASHTEKAR, A., AND LEWANDOWSKI, J. Representation theory of analytic holonomy C^* algebras. *arXiv preprint gr-qc/9311010* (1993).
- [5] ASHTEKAR, A., AND LEWANDOWSKI, J. Projective techniques and functional integration for gauge theories. *Journal of Mathematical Physics* 36, 5 (1995), 2170–2191.
- [6] ASHTEKAR, A., AND LEWANDOWSKI, J. Background independent quantum gravity: a status report. *Classical and Quantum Gravity* 21, 15 (2004), R53.
- [7] ASHTEKAR, A., OLMEDO, J., AND SINGH, P. Regular black holes from loop quantum gravity. In *Regular Black Holes: Towards a New Paradigm of Gravitational Collapse*. Springer, 2023, pp. 235–282.
- [8] BAEZ, J. C. Spin networks in gauge theory. *Advances in Mathematics* 117, 2 (1996), 253–272.
- [9] BARRETT, J. W., DOWDALL, R. J., FAIRBAIRN, W. J., GOMES, H., HELLMANN, F., AND PEREIRA, R. Asymptotics of 4d spin foam models. *General Relativity and Gravitation* 43, 9 (2011), 2421–2436.
- [10] BARRETT, J. W., DOWDALL, R. J., FAIRBAIRN, W. J., HELLMANN, F., AND PEREIRA, R. Lorentzian spin foam amplitudes: graphical calculus and asymptotics. *Classical and Quantum Gravity* 27, 16 (2010), 165009.
- [11] BAYTAŞ, B., BIANCHI, E., AND YOKOMIZO, N. Gluing polyhedra with entanglement in loop quantum gravity. *Physical Review D* 98, 2 (2018), 026001.
- [12] BIANCHI, E., DONA, P., AND SPEZIALE, S. Polyhedra in loop quantum gravity. *Physical Review D* 83, 4 (2011), 044035.

-
- [13] BIANCHI, E., GUGLIELMON, J., HACKL, L., AND YOKOMIZO, N. Loop expansion and the bosonic representation of loop quantum gravity. *Physical Review D* 94, 8 (2016), 086009.
- [14] BIANCHI, E., GUGLIELMON, J., HACKL, L., AND YOKOMIZO, N. Squeezed vacua in loop quantum gravity. *arXiv preprint arXiv:1605.05356* (2016).
- [15] BIANCHI, E., KRAJEWSKI, T., ROVELLI, C., AND VIDOTTO, F. Cosmological constant in spinfoam cosmology. *Physical Review D* 83, 10 (2011), 104015.
- [16] BIANCHI, E., AND LIVINE, E. R. Loop Quantum Gravity and Quantum Information. *arXiv preprint arXiv:2302.05922* (2023).
- [17] BIANCHI, E., MAGLIARO, E., AND PERINI, C. Coherent spin-networks. *Physical Review D* 82, 2 (2010), 024012.
- [18] BIANCHI, E., MODESTO, L., ROVELLI, C., AND SPEZIALE, S. Graviton propagator in loop quantum gravity. *Classical and Quantum Gravity* 23, 23 (2006), 6989.
- [19] BIANCHI, E., AND MYERS, R. C. On the architecture of spacetime geometry. *Classical and Quantum Gravity* 31, 21 (2014), 214002.
- [20] BIANCHI, E., ROVELLI, C., AND VIDOTTO, F. Towards spinfoam cosmology. *Physical Review D* 82, 8 (2010), 084035.
- [21] BOGOLIUBOV, N. N., AND SHIRKOV, D. V. *Introduction to the theory of quantized fields*, vol. 59. Interscience New York, 1959.
- [22] BOJOWALD, M. Loop quantum cosmology. *Living Reviews in Relativity* 11, 1 (2008), 4.
- [23] BOMBELLI, L., KOUL, R. K., LEE, J., AND SORKIN, R. D. Quantum source of entropy for black holes. *Physical Review D* 34, 2 (1986), 373.
- [24] BONZOM, V., AND LIVINE, E. R. Generating functions for coherent intertwiners. *Classical and Quantum Gravity* 30, 5 (2013), 055018.
- [25] BORJA, E. F., FREIDEL, L., GARAY, I., AND LIVINE, E. R. $U(N)$ tools for loop quantum gravity: the return of the spinor. *Classical and Quantum Gravity* 28, 5 (2011), 055005.
- [26] DOMAGALA, M., AND LEWANDOWSKI, J. Black-hole entropy from quantum geometry. *Classical and Quantum Gravity* 21, 22 (2004), 5233.
- [27] ENGLE, J., LIVINE, E., PEREIRA, R., AND ROVELLI, C. LQG vertex with finite Immirzi parameter. *Nuclear Physics B* 799, 1–2 (2008), 136–149.

-
- [28] ENGLE, J., AND PEREIRA, R. Regularization and finiteness of the Lorentzian loop quantum gravity vertices. *Physical Review D* 79, 8 (2009), 084034.
- [29] ENGLE, J., PEREIRA, R., AND ROVELLI, C. Loop-quantum-gravity vertex amplitude. *Physical Review Letters* 99, 16 (2007), 161301.
- [30] FREIDEL, L., AND KRASNOV, K. A new spin foam model for 4d gravity. *Classical and Quantum Gravity* 25, 12 (2008), 125018.
- [31] FREIDEL, L., AND SPEZIALE, S. Twisted geometries: A geometric parametrisation of $SU(2)$ phase space. *Physical Review D* 82 (2010), 084041.
- [32] FREIDEL, L., AND SPEZIALE, S. Twistors to twisted geometries. *Physical Review D* 82, 8 (2010), 084041.
- [33] GAMBINI, R. Loop space representation of quantum general relativity and the group of loops. *Physics Letters B* 255, 2 (1991), 180–188.
- [34] HAN, M., AND ZHANG, M. Asymptotics of spinfoam amplitude on simplicial manifold: Lorentzian theory. *Classical and Quantum Gravity* 30, 16 (2013), 165012.
- [35] KAMIŃSKI, W., KISIEŁOWSKI, M., AND LEWANDOWSKI, J. Spin-foams for all loop quantum gravity. *Classical and Quantum Gravity* 27, 9 (2010), 095006.
- [36] KIEFER, C. Quantum gravity. In *Springer Handbook of Spacetime*. Springer, 2014, pp. 709–722.
- [37] KRASNOV, K. *Formulations of general relativity: Gravity, spinors and differential forms*. Cambridge University Press, 2020.
- [38] LEWANDOWSKI, J., OKOŁÓW, A., SAHLMANN, H., AND THIEMANN, T. Uniqueness of diffeomorphism invariant states on holonomy–flux algebras. *Communications in Mathematical Physics* 267, 3 (2006), 703–733.
- [39] LI, B.-F., AND SINGH, P. Loop quantum cosmology: Physics of singularity resolution and its implications. In *Handbook of Quantum Gravity*. Springer, 2023, pp. 1–55.
- [40] LIVINE, E. R. Spinfoam models for quantum gravity: Overview. *arXiv preprint arXiv:2403.09364* (2024).
- [41] LIVINE, E. R., AND SPEZIALE, S. New spinfoam vertex for quantum gravity. *Physical Review D* 76, 8 (2007), 084028.
- [42] LIVINE, E. R., SPEZIALE, S., AND TAMBORNINO, J. Twistor networks and covariant twisted geometries. *Physical Review D* 85, 6 (2012), 064002.

-
- [43] LIVINE, E. R., AND TAMBORNINO, J. Spinor representation for loop quantum gravity. *Journal of Mathematical Physics* 53, 1 (2012).
- [44] LIVINE, E. R., AND TAMBORNINO, J. Holonomy operator and quantization ambiguities on spinor space. *Physical Review D* 87, 10 (2013), 104014.
- [45] MAGLIARO, E., AND PERINI, C. Regge gravity from spinfoams. *International Journal of Modern Physics D* 22, 02 (2013), 1350001.
- [46] MÄKINEN, I. Introduction to SU(2) recoupling theory and graphical methods for loop quantum gravity. *arXiv preprint arXiv:1910.06821* (2019).
- [47] MARTIN-DUSSAUD, P. A primer of group theory for loop quantum gravity and spin-foams. *General Relativity and Gravitation* 51 (2019), 1–70.
- [48] MEISSNER, K. A. Black-hole entropy in loop quantum gravity. *Classical and Quantum Gravity* 21, 22 (2004), 5245.
- [49] MENEZES, F. H. C., AND YOKOMIZO, N. Nonlocal correlations for semiclassical states in loop quantum gravity. *Physical Review D* 112, 8 (Oct 2025), 086017.
- [50] PEREIRA, R. Lorentzian loop quantum gravity vertex amplitude. *Classical and Quantum Gravity* 25, 8 (2008), 085013.
- [51] PEREZ, A. Introduction to loop quantum gravity and spin foams. *arXiv preprint gr-qc/0409061* (2004).
- [52] PEREZ, A. The spin-foam approach to quantum gravity. *Living Reviews in Relativity* 16 (2013), 1–128.
- [53] PONZANO, G., AND REGGE, T. E. Semiclassical limit of Racah coefficients. *Spectroscopic and group theoretical methods in physics* (1968), 1–58.
- [54] REGGE, T. General relativity without coordinates. *Il Nuovo Cimento* 19, 3 (1961), 558–571.
- [55] ROVELLI, C. *Quantum gravity*. Cambridge University Press, 2004.
- [56] ROVELLI, C. A new look at loop quantum gravity. *Classical and Quantum Gravity* 28, 11 (2011), 114005.
- [57] ROVELLI, C. Zakopane lectures on loop gravity. *arXiv preprint arXiv:1102.3660* (2011).
- [58] ROVELLI, C., AND SMOLIN, L. Knot theory and quantum gravity. *Physical Review Letters* 61, 10 (1988), 1155.

-
- [59] ROVELLI, C., AND SMOLIN, L. Loop space representation of quantum general relativity. *Nuclear Physics B* 331, 1 (1990), 80–152.
- [60] ROVELLI, C., AND SMOLIN, L. Spin networks and quantum gravity. *Physical Review D* 52, 10 (1995), 5743.
- [61] ROVELLI, C., AND VIDOTTO, F. *Covariant loop quantum gravity: an elementary introduction to quantum gravity and spinfoam theory*. Cambridge University Press, 2015.
- [62] SAKURAI, J. J., AND NAPOLITANO, J. *Modern quantum mechanics*, 3 ed. Cambridge University Press, 2020.
- [63] SCHWARTZ, M. D. *Quantum field theory and the standard model*. Cambridge University Press, 2014.
- [64] SCHWINGER, J. Angular momentum. In *Quantum Mechanics: Symbolism of Atomic Measurements*. Springer, 1952, pp. 149–181.
- [65] SORKIN, R. D. On the entropy of the vacuum outside a horizon. *General Relativity and Gravitation* 1 (1983), 734.
- [66] SPEZIALE, S. Loop quantum gravity, twistors, and some perspectives on the problem of time. In *EPJ Web of Conferences* (2014), vol. 71, EDP Sciences, p. 00123.
- [67] SREDNICKI, M. Entropy and area. *Physical Review Letters* 71, 5 (1993), 666.
- [68] STERNBERG, S. *Group theory and physics*. Cambridge University Press, 1995.
- [69] THIEMANN, T. Quantum spin dynamics (QSD). *Classical and Quantum Gravity* 15, 4 (1998), 839.
- [70] THIEMANN, T. Quantum spin dynamics (QSD): II. The kernel of the Wheeler-DeWitt constraint operator. *Classical and Quantum Gravity* 15, 4 (1998), 875.
- [71] THIEMANN, T. Gauge field theory coherent states (GCS): I. General properties. *Classical and Quantum Gravity* 18, 11 (2001), 2025.
- [72] THIEMANN, T. *Modern canonical quantum general relativity*. Cambridge University Press, 2008.
- [73] THORNE, K. S., MISNER, C. W., AND WHEELER, J. A. *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, 2000.

APÊNDICE A – ATUAÇÃO DOS VÍNCULOS CLÁSSICOS

Neste apêndice, será exposto o cálculo dos colchetes de Poisson entre as variáveis clássicas (conexão de Ashtekar, densidade de triada, holonomia e fluxo) e os vínculos da LQG. Para a conexão de Ashtekar-Barbero e densidade de triada, os colchetes com X correspondem à transformação gerada por X em termos do parâmetro ϵ :

$$\{A_a^i(x), X\}\epsilon =: \delta_X A_a^i(x), \quad (\text{A.1a})$$

$$\{E_i^a(x), X\}\epsilon =: \delta_X E_i^a(x). \quad (\text{A.1b})$$

Transformações em $A_a^i(x)$ e $E_i^a(x)$ induzem naturalmente transformações em funções de $f(A_a^i)$ e $g(E_i^a)$ por

$$(Tf)(A_a^i) := f(T^{-1}A_a^i), \quad (\text{A.2a})$$

$$(Tg)(E_i^a) := g(T^{-1}E_i^a). \quad (\text{A.2b})$$

Dessa forma, como a holonomia e o fluxo são construídos a partir da conexão de Ashtekar-Barbero e da densidade de triada, seus colchetes com X correspondem a

$$\{U_\ell(A), X\}\epsilon =: -\delta_X U_\ell(A), \quad (\text{A.3a})$$

$$\{E_i(S), X\}\epsilon =: -\delta_X E_i(S). \quad (\text{A.3b})$$

Como ponto de partida para a determinação dos colchetes, começaremos relacionando os colchetes de U_ℓ com A_a^i e $E_i(S)$ com E_i^a .

A.1 Holonomia e conexão de Ashtekar

Partindo da definição da holonomia

$$U_\ell = \mathcal{P} \left[\exp \left(\int_\ell A_a^i \tau_i dx^a \right) \right], \quad (\text{A.4})$$

o colchete de Poisson entre $U_\ell(A)$ e qualquer grandeza X do espaço de fase pode ser escrito em termos de uma fragmentação da curva $\ell(t) : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ em N curvas $\ell_n : [t_{n-1}, t_n] \rightarrow \Sigma$:

$$U_\ell(A) = \prod_{n=1}^N U_{\ell_n}(A), \quad (\text{A.5})$$

sendo subentendido no produto acima o ordenamento de caminho. Assim, tem-se que:

$$\{U_\ell(A), X\} = \left\{ \prod_{n=1}^N U_{\ell_n}(A), X \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^N \prod_{m=1}^{n-1} \prod_{p=n+1}^N U_{\ell_p}(A) \{U_{\ell_n}(A), X\} U_{\ell_m}(A). \quad (\text{A.6})$$

No limite de $N \rightarrow \infty$, cada trecho ℓ_n se torna muito pequeno, de forma que $U_{\ell_n}(A)$ passa a diferir da identidade por um fator proporcional a $t_{n-1} - t_n =: \Delta t_n$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} U_{\ell_n}(A) = \mathbb{I} + A_a^i(\ell(t)) \tau_i \dot{\ell}^a \Delta t_n,$$

os produtórios em (A.6) podem ser identificados como holonomias ao longo de $\ell(t)$, fragmentadas no parâmetro t :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{m=1}^{n-1} U_{\ell_m}(A) = U_{\ell}(0, t), \quad (\text{A.7a})$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{p=n+1}^N U_{\ell_p}(A) = U_{\ell}(1, t), \quad (\text{A.7b})$$

e a soma em n se transforma em uma integral longo de ℓ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta t_n = \int_0^1 dt.$$

Assim:

$$\begin{aligned} \{U_{\ell}(A), X\} &= \int_0^1 dt \dot{\ell}^a(t) U_{\ell}(t, 1) \{A_a^i(\ell(t)) \tau_i, X\} U_{\ell}(0, t) \\ &= \int_0^1 dt \dot{\ell}^a(t) U_{\ell}(t, 1) \tau_i U_{\ell}(0, t) \{A_a^i(\ell(t)), X\}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

A.2 Fluxo e densidade de triada

Escrevendo o fluxo $E_i(S)$ como

$$E_i(S) = \int_S dS_a E_i^a, \quad (\text{A.9})$$

em que

$$dS_a = \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} dx^b \wedge dx^c, \quad (\text{A.10})$$

o colchete de Poisson entre o fluxo $E_i(S)$ e qualquer grandeza X no espaço de fase pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \{E_i(S), X\} &= \left\{ \int_S dS_a E_i^a(x), X \right\} \\ &= \int_S dS_a \{E_i^a(x), X\}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

A.3 Vínculo de Gauss

A.3.1 Conexão de Ashtekar

A atuação do vínculo de Gauss na conexão de Ashtekar-Barbero é dada pelo colchete

$$\begin{aligned}
 \{A_a^i(x), G(\Lambda)\} &= - \int d^3x \{A_a^i(x), \mathcal{D}_b \Lambda^j(x') E_j^b(x')\} \\
 &= - \int d^3x \mathcal{D}_b \Lambda^j(x') \{A_a^i(x), E_j^b(x')\} \\
 &= - \mathcal{D}_a \Lambda^i(x) \\
 &= - \left(\partial_a \Lambda^i(x) + \varepsilon^i_{jk} A_a^j(x) \Lambda^k(x) \right). \tag{A.12}
 \end{aligned}$$

que é a versão infinitesimal de uma transformação $SU(2)$ gerada por $\Lambda^k \tau_k$ atuando em uma 1-forma de conexão

$$\begin{aligned}
 A_a^i \tau_i &\mapsto g A_a^j \tau_j g^{-1} - (\partial_a g) g^{-1} \\
 &= A_a^j (\mathbb{I} + \Lambda^k \tau_k) \tau_j (\mathbb{I} - \Lambda^k \tau_k) - \partial_a \Lambda^i \tau_i (\mathbb{I} - \Lambda^k \tau_k) \\
 &= A_a^i \tau_i + A_a^j \Lambda^k (\tau_k \tau_j - \tau_j \tau_k) - \partial_a \Lambda^i \tau_i \\
 &= A_a^i \tau_i - (\varepsilon^i_{jk} A_a^j \Lambda^k + \partial_a \Lambda^i) \tau_i. \tag{A.13}
 \end{aligned}$$

A.3.2 Densidade de triada

A atuação do vínculo de Gauss na densidade de triada é dada pelo colchete

$$\begin{aligned}
 \{E_i^a(x), G(\Lambda)\} &= - \int d^3x \{E_i^a(x), \mathcal{D}_b \Lambda^j(x') E_j^b(x')\} \\
 &= - \int d^3x E_j^b(x') \{E_i^a(x), \partial_b \Lambda^j(x') + \varepsilon^j_{km} A_b^k(x') \Lambda^m(x')\} \\
 &= - \int d^3x \varepsilon^j_{km} \Lambda^m(x') E_j^b(x') \{E_i^a(x), A_b^k(x')\} \\
 &= \varepsilon^j_{im} \Lambda^m(x) E_j^a(x), \tag{A.14}
 \end{aligned}$$

que é a versão infinitesimal de uma transformação $SU(2)$ gerada por $\Lambda^k \tau_k$ atuando na representação adjunta:

$$\begin{aligned}
 E_i^a \tau^i &\mapsto g^{-1} E_i^a \tau^i g \\
 &= (\mathbb{I} - \Lambda^j \tau_j) E_i^a \tau^i (\mathbb{I} + \Lambda^j \tau_j) \\
 &= E_i^a \tau^i - \Lambda^j \tau_j E_i^a \tau^k + E_i^a \tau^k \Lambda^j \tau_j \\
 &= E_i^a \tau^i - \varepsilon^k_{ij} \Lambda^j E_i^a \tau^k \\
 &= \left(E_i^a - \varepsilon^k_{ij} \Lambda^j E_k^a \right) \tau^i. \tag{A.15}
 \end{aligned}$$

A.3.3 Holonomia

A partir da relação (A.8), a atuação do vínculo de Gauss na holonomia é dada pelo colchete

$$\begin{aligned} \{U_\ell(A), G(\Lambda)\} &= \int_0^1 dt \dot{\ell}^a(t) U_\ell(t, 1) \tau_i U_\ell(0, t) \{A_a^i(\ell(t)), G(\Lambda)\} \\ &= - \int_0^1 dt \dot{\ell}^a(t) U_\ell(t, 1) \tau_i U_\ell(0, t) \mathcal{D}_a \Lambda^i(\ell(t)), \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

O resultado acima pode ser simplificado a partir da reescrita de $\dot{\ell}^a(t) \mathcal{D}_a \Lambda^i \tau_i$:

$$\begin{aligned} \dot{\ell}^a(t) \mathcal{D}_a \Lambda^i \tau_i &= \dot{\ell}^a(t) \left(\partial_a \Lambda^i + \epsilon^i_{jk} A_a^j \Lambda^k \right) \tau_i \\ &= \frac{d\Lambda^i}{dt} \tau_i + \dot{\ell}^a(t) A_a^j \Lambda^k [\tau_j, \tau_k] \\ &= \frac{d\Lambda}{dt} + [A_\ell, \Lambda], \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

em que $\Lambda := \Lambda^i \tau_i$ e $A_\ell := \dot{\ell}^a A_a^k \tau_k$, resultando em:

$$\begin{aligned} \{U_\ell(A), G(\Lambda)\} &= - \int_0^1 dt U_\ell(1, t) \left(\frac{d\Lambda}{dt} + A_\ell \Lambda - \Lambda A_\ell \right) U_\ell(0, t) \\ &= - \int_0^1 dt \left[U_\ell(t, 1) \frac{d\Lambda}{dt} U_\ell(0, t) + \frac{dU_\ell(t, 1)}{dt} \Lambda U_\ell(0, t) + U_\ell(t, 1) \Lambda \frac{dU_\ell(0, t)}{dt} \right] \\ &= \int_1^0 dt \frac{d}{dt} (U_\ell(t, 1) \Lambda(\ell(t)) U_\ell(0, t)) \\ &= U_\ell \Lambda(\ell(0)) - \Lambda(\ell(1)) U_\ell, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

que é a versão infinitesimal de uma transformação $SU(2)$ gerada por $\Lambda^k \tau_k$ nas extremidades de ℓ :

$$\begin{aligned} U_\ell &\mapsto g(\ell(1)) U_\ell g^{-1}(\ell(0)) \\ &= (\mathbb{I} + \Lambda(\ell(1))) U_\ell (\mathbb{I} - \Lambda(\ell(0))) \\ &= U_\ell + \Lambda(\ell(1)) U_\ell - U_\ell \Lambda(\ell(0)). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

A.3.4 Fluxo

A partir da relação (A.11), a atuação do vínculo de Gauss no fluxo é dada pelo colchete

$$\{E_i(S), G(\Lambda)\} = \int_S dS_a \{E_i^a(x), G(\Lambda)\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_S dS_a \varepsilon^j{}_{in} \Lambda^n(x) E_j^a(x) \\
 &= \varepsilon^j{}_{in} \Lambda^n E_j(S).
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

que, assim como mostrado em (A.15), é a versão infinitesimal de uma transformação $SU(2)$ gerada por $\Lambda^k \tau_k$ atuando na representação adjunta:

$$\begin{aligned}
 E_i \tau^i &\mapsto g^{-1} E_i \tau^i g \\
 &= (\mathbb{I} - \Lambda^j \tau_j) E_i \tau^i (\mathbb{I} + \Lambda^j \tau_j) \\
 &= \left(E_i - \varepsilon^k{}_{ij} \Lambda^j E_k \right) \tau^i.
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

A.4 Vínculo de difeomorfismo

A.4.1 Conexão de Ashtekar

A atuação do vínculo de difeomorfismo na conexão de Ashtekar-Barbero é dada pelo colchete

$$\begin{aligned}
 \{A_a^i(x), H_{\text{Diff}}(\vec{N})\} &= \int d^3x \left[\{A_a^i(x), N^c(x') E_j^b(x') \partial_c A_b^j(x')\} \right. \\
 &\quad \left. + \{A_a^i(x), E_j^c(x') A_b^j(x') \partial_c N^b(x')\} \right] \\
 &= \int d^3x N^c(x') \partial_c A_b^j(x') \left[\{A_a^i(x), E_j^b(x')\} \right. \\
 &\quad \left. + A_b^j(x') \partial_c N^b(x') \{A_a^i(x), E_j^c(x')\} \right] \\
 &= N^b(x) \partial_b A_a^i(x) + A_b^i(x) \partial_a N^b(x) \\
 &= \mathcal{L}_{\vec{N}} A_a^i(x),
 \end{aligned} \tag{A.22}$$

que é a versão infinitesimal de um difeomorfismo gerado pelo campo vetorial N^a atuando em uma 1-forma:

$$\begin{aligned}
 A_a^i(x) &\mapsto \phi(A_a^i(x)) \\
 &= A_a^i(\phi(x)) \\
 &= A_a^i \left(x + \frac{dx}{d\lambda(x)} d\lambda(x) \right) \\
 &= A_a^i(x) + \frac{dA_a^i(x)}{d\lambda(x)} d\lambda(x) \\
 &= A_a^i(x) + \mathcal{L}_{\vec{N}} A_a^i(x) d\lambda(x),
 \end{aligned} \tag{A.23}$$

em que $\lambda(x)$ corresponde ao parâmetro ao longo da curva integral de N^a que passa pelo ponto x .

A.4.2 Densidade de triada

A atuação do vínculo de difeomorfismo na densidade de triada é dada pelo colchete

$$\begin{aligned}
 \{E_i^a(x), H_{\text{Diff}}(\vec{N})\} &= \int d^3x \left[\{E_i^a(x), N^c(x')E_j^b(x')\partial_c A_b^j(x')\} \right. \\
 &\quad \left. + \{E_i^a(x), E_j^c(x')A_b^j(x')\partial_c N^b(x')\} \right] \\
 &= \int d^3x N^c(x')E_j^b(x') \left[\{E_i^a(x), \partial_c A_b^j(x')\} \right. \\
 &\quad \left. + E_j^c(x')\partial_c N^b(x')\{E_i^a(x), A_b^j(x')\} \right] \\
 &= \partial_c (N^c(x)E_i^a(x)) - E_i^c(x)\partial_c N^a(x) \\
 &= N_c(x)\partial_c E_i^a(x) + E_i^a(x)\partial_c N^c(x) - E_i^c(x)\partial_c N^a(x) \\
 &= \mathcal{L}_{\vec{N}}E_i^a(x), \tag{A.24}
 \end{aligned}$$

que é a versão infinitesimal de um difeomorfismo gerado pelo campo vetorial N^a atuando em uma densidade vetorial:

$$\begin{aligned}
 E_i^a(x) &\mapsto \phi(E_i^a(x)) \\
 &= E_i^a(\phi(x)) \\
 &= E_i^a\left(x + \frac{dx}{d\lambda(x)}d\lambda(x)\right) \\
 &= E_i^a(x) + \frac{dE_i^a(x)}{d\lambda(x)}d\lambda(x) \\
 &= E_i^a(x) + \mathcal{L}_{\vec{N}}E_i^a(x)d\lambda(x), \tag{A.25}
 \end{aligned}$$

em que $\lambda(x)$ corresponde ao parâmetro ao longo da curva integral de N^a que passa pelo ponto x .

A.4.3 Holonomia

A partir da relação (A.8), a atuação do vínculo de difeomorfismo na holonomia é dado pelo colchete

$$\begin{aligned}
 \{U_\ell(A), H_{\text{Diff}}(\vec{N})\} &= \int_0^1 dt \dot{\ell}^a(t)U_\ell(t, 1)\tau_i U_\ell(0, t) \left\{ A_a^i(\ell(t)), H_{\text{Diff}}(\vec{N}) \right\} \\
 &= \int_0^1 dt \dot{\ell}^a(t)U_\ell(t, 1)\tau_i U_\ell(0, t)\mathcal{L}_{\vec{N}}A_a^i(\ell(t)), \tag{A.26}
 \end{aligned}$$

que é a versão infinitesimal do difeomorfismo gerado pelo campo vetorial N^a em U_ℓ definido por:

$$U_\ell \mapsto \phi(U_\ell)$$

$$\begin{aligned}
 &= U_{\phi(\ell)} \\
 &= \mathcal{P} \exp \left(\int_{\phi(\ell)} A \right) \\
 &= \mathcal{P} \exp \left(\int_{\ell} (\phi_*^{-1} A) \right). \tag{A.27}
 \end{aligned}$$

A partir da fragmentação da holonomia em N partes:

$$U_{\phi^{-1}(\ell)} = \prod_{n=1}^N U_{\phi^{-1}(\ell_n)}, \tag{A.28}$$

no limite de $N \rightarrow \infty$, o n -ésimo trecho de holonomia $U_{\phi^{-1}(\ell_n)}$ toma a forma:

$$U_{\phi^{-1}(\ell_n)} = \mathbb{I} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\phi_*^{-1} A)_a^i(\ell(t)) \tau_i \dot{\ell}_n^a(t) \Delta t. \tag{A.29}$$

Para difeomorfismos infinitesimais gerados pelo campo vetorial N^a (A.23):

$$\begin{aligned}
 U_{\phi^{-1}(\ell_n)} &= \mathbb{I} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(A_a^i(\ell(t)) - \mathcal{L}_{\vec{N}} A_a^i(\ell(t)) d\lambda \right) \tau_i \dot{\ell}_n^a(t) \Delta t, \\
 &= U_{\ell_n} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{L}_{\vec{N}} A_a^i(\ell(t)) \tau_i \dot{\ell}_n^a \Delta t d\lambda, \tag{A.30}
 \end{aligned}$$

resultando em

$$\begin{aligned}
 U_{\phi^{-1}(\ell)} &= \sum_{p=1}^{\infty} \prod_{m=1}^{p-1} \prod_{n=p+1}^{\infty} U_{\ell_n} U_{\phi^{-1}(\ell_p)} U_{\ell_m} \\
 &= \sum_{p=1}^{\infty} \prod_{m=1}^{p-1} \prod_{n=p+1}^{\infty} U_{\ell_n} \left(U_{\ell_p} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{L}_{\vec{N}} A_a^i(\ell(t)) \tau_i \dot{\ell}_p^a \Delta t d\lambda \right) U_{\ell_m} \\
 &= U_{\ell} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{p=1}^{\infty} \prod_{m=1}^{p-1} \prod_{n=p+1}^{\infty} U_{\ell_n} \Delta t \dot{\ell}_p^a U_{\ell_n} \tau_i U_{\ell_m} \mathcal{L}_{\vec{N}} A_a^i(\ell(t)) d\lambda \\
 &= U_{\ell} - d\lambda \int_0^1 dt \dot{\ell}^a U_{\ell}(t, 1) \tau_i U_{\ell}(0, t) \mathcal{L}_{\vec{N}} A_a^i(\ell(t)). \tag{A.31}
 \end{aligned}$$

A.4.4 Fluxo

A atuação do vínculo de difeomorfismo no fluxo é dado pelo colchete

$$\begin{aligned}
 \{E_i(S), H_{\text{Diff}}(\vec{N})\} &= \int_S dS_a(x) \{E_i^a(x), H_{\text{Diff}}(\vec{N})\} \\
 &= \int_S dS_a(x) \mathcal{L}_{\vec{N}} E_j^a(x), \tag{A.32}
 \end{aligned}$$

que é a versão infinitesimal do difeomorfismo gerado pelo campo vetorial N^a em $E_i(S)$ definido por:

$$E_i(S) \mapsto \phi(E_i(S))$$

$$= E_i(\phi(S)). \quad (\text{A.33})$$

A partir de (A.25):

$$\begin{aligned} E_i(S) &\mapsto \int_{\phi(S)} \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} E_i^a(x) dx^b \wedge dx^c \\ &= \int_S ((\phi_*^{-1}) \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{abc} E_i^a(x) dx^b \wedge dx^c \right)) \\ &= \int_S \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} (E_i^a(x) - \mathcal{L}_{\vec{N}} E_i^a(x) d\lambda) dx^b \wedge dx^c \\ &= E_i(S) - d\lambda \int_S dS^a \mathcal{L}_{\vec{N}} E_i^a(x). \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

A.5 Vínculo Hamiltoniano

A atuação do vínculo Hamiltoniano nas variáveis clássicas é obtido a partir da evolução temporal do sistema. Pelo formalismo hamiltoniano, se H_T é a hamiltoniana total, então

$$\{X, H_T\} = \dot{X}, \quad (\text{A.35})$$

Dessa forma, em termos do hamiltoniano total

$$H_T = G(\Lambda) + H_{\text{Diff}}(\vec{N}) + H(N), \quad (\text{A.36})$$

tem-se que a atuação do vínculo hamiltoniano é dada por

$$\{X, H(N)\} = \dot{X} - \{X, H_{\text{Diff}}(\vec{N})\} + \left\{ X, G \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \omega_{jk} t \right) \right\}, \quad (\text{A.37})$$

em que a derivada de X é realizada em termos do parâmetro t definido através do campo vetorial $t^\mu = Nn^\mu + N^\mu$ pela condição $t^\mu \nabla_\mu t = 1$. A partir dos colchetes calculado anteriormente, determina-se a atuação do vínculo hamiltoniano em cada uma das variáveis clássicas.

A.5.1 Conexão de Ashtekar

$$\{A_a^i(x), H(N)\} = \dot{A}_a^i(x) - \mathcal{L}_{\vec{N}} A_a^i(x) + \frac{1}{2} \mathcal{D}_a \left(\varepsilon^{ijk} \omega_{jk}(x) t \right). \quad (\text{A.38})$$

A.5.2 Densidade de triada

$$\{E_i^a(x), H(N)\} = \dot{E}_i^a(x) - \mathcal{L}_{\vec{N}} E_i^a(x) + \omega^j{}_i E_j^a(x) t. \quad (\text{A.39})$$

A.5.3 Holonomia

$$\{U_\ell, H(N)\} = \int_0^1 du \frac{d\ell^a(u)}{du} U_\ell(0, u) \tau_i U_\ell(u, 1) \left[\dot{A}_a^i(\ell(u)) - \mathcal{L}_{\vec{N}} A_a^i(\ell(u)) + \frac{1}{2} \mathcal{D}_a \left(\varepsilon^{ijk} \omega_{jk}(\ell(u)) t \right) \right]. \quad (\text{A.40})$$

A.5.4 Fluxo

$$\{E_i(S), H(N)\} = \int_S dS_a \left[\dot{E}_i^a(x) - \mathcal{L}_{\vec{N}} E_i^a(x) + \omega^j{}_i E_j^a(x) t \right]. \quad (\text{A.41})$$

APÊNDICE B – ÁLGEBRA DE HOLONOMIA-FLUXO

A partir da escolha das variáveis U_ℓ e E_j para a descrição do espaço de fase clássico da Relatividade Geral, é necessário determinar seus colchetes de Poisson, conhecidos como a álgebra de holonomia-fluxo. Entretanto, deve-se ter cautela nessa determinação.

Por se tratarem de variáveis integradas em regiões de dimensão menor que a do espaço, a holonomia e o fluxo podem ser vistos como variáveis integradas em todo o espaço, com funções regularizadoras suaves que, em um determinado limite, apresentam comportamento singular do tipo delta de Dirac:

$$U_\ell = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} U_\ell^\epsilon, \quad (\text{B.1a})$$

$$E_j(S) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} {}^3E_j(\epsilon f). \quad (\text{B.1b})$$

O tratamento da holonomia e do fluxo em termos de limites com funções regularizadoras suaves é conhecido como *processo de regularização*. Para que a determinação dos colchetes seja bem definida, é necessário calculá-los em termos das variáveis em (B.1), aplicando em seguida o limite que as transformam em holonomia e fluxo. Apesar disso, optando por procedimentos mais intuitivos e menos pedantes, determinaremos a álgebra de holonomia-fluxo de forma mais simples e menos rigorosa.

B.1 Colchete entre holonomias

O colchete de Poisson entre duas holonomias pode ser obtido a partir do colchete entre conexões de Ashtekar

$$\{A_a^i(x), A_b^j(y)\} = 0. \quad (\text{B.2})$$

e da expansão da holonomia em termos da conexão de Ashtekar-Barbero :

$$U_\ell(A) = \mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 dt_1 \dot{\ell}^{a_1}(t_1) \cdots \int_{t_{n-1}}^1 dt_n \dot{\ell}^{a_n}(t_n) A_{a_1}^{i_1}(\ell(t_1)) \tau_{i_1} \cdots A_{a_n}^{i_n}(\ell(t_n)) \tau_{i_n}. \quad (\text{B.3})$$

Como a holonomia só depende das conexões, é imediato o primeiro colchete da álgebra de holonomia-fluxo:

$$\{U_\ell, U_{\ell'}\} = 0. \quad (\text{B.4})$$

B.2 Colchete entre holonomia e fluxo

O colchete de Poisson entre holonomia e fluxo pode ser obtido a partir do colchete entre conexão de Ashtekar-Barbero e densidade de triada:

$$\{A_a^i(x), E_j^b(y)\} = \delta_j^i \delta_a^b \delta(x - y), \quad (\text{B.5})$$

da definição da holonomia com sua propriedade de composição

$$U_\ell = \mathcal{P} \exp \left[\int_\ell A_a^i(\ell) \tau_i d\ell^a \right], \quad (\text{B.6a})$$

$$U_{\ell_1 \cdot \ell_2} = U_{\ell_1} U_{\ell_2}, \quad (\text{B.6b})$$

e da definição do fluxo em termos da densidade de triada

$$E_i(S) = \int_S dS_a E_i^a. \quad (\text{B.7})$$

Perceba que, como o colchete entre holonomias é nulo, é possível ignorar as holonomias da definição completa do fluxo em (2.16).

A partir de (B.6a) e (B.7), o colchete $\{U_\ell, E_j\}$ passa a ser descrito em termos de integrações envolvendo o colchete $\{A_a^i(x \in \ell), E_j^b(y \in S)\}$. Começamos separando o cálculo em dois casos gerais:

1. $S \cap \ell = \emptyset$,
2. $S \cap \ell \neq \emptyset$.

Evidentemente, o caso $S \cap \ell \neq \emptyset$ pode ser dividido em alguns subcasos^a: a intersecção ser um único ponto, ser um conjunto finito de pontos, ser um trecho finito do link, ou o link inteiro. Dado a possibilidade de fragmentar qualquer link em trechos que, se intersectam S , o fazem somente em um ponto ou em todo o link, o cálculo do colchete entre holonomia e fluxo pode ser separado em apenas três casos:

1. $S \cap \ell = \emptyset$,
2. $S \cap \ell = \ell$,
3. $S \cap \ell = \ell(t_0)$.

^a Para a descrição da LQG, impõem-se que a variedade em questão seja semi-analítica. Essa imposição restringe, por exemplo, que a intersecção se dê em um conjunto infinito de pontos isolados.

B.2.0.1 Caso $S \cap \ell = \emptyset$

Para o caso de intersecção nula, o colchete $\{U_\ell, E_j\}$ será descrito em termos de colchetes de A_a^i e E_j^b definidos em pontos distintos. Como uma condição necessária para que o colchete entre A_a^i e E_j^b não seja trivial é de que conexão de Ashtekar-Barbero e a densidade de triada sejam definidos no mesmo ponto do espaço, o colchete resultante é nulo:

$$\{U_\ell, E_j\} = 0. \quad (\text{B.8})$$

 B.2.0.2 Caso $S \cap \ell = \ell$

Para o caso do link estar completamente imerso na superfície, o colchete $\{U_\ell, E_j(S)\}$ será descrito em termos de colchetes de A_a^i e E_j^b em direções espaciais ortogonais. Isso se deve ao fato de a conexão de Ashtekar-Barbero presente em uma holonomia ser a conexão na direção tangente ao link, enquanto a densidade de triada presente no fluxo é a densidade de triada na direção ortogonal à superfície. Como uma condição necessária para que o colchete entre A_a^i e E_j^b seja não trivial é de que ambos possuam projeção em uma direção comum, o colchete resultante é nulo:

$$\{U_\ell, E_j\} = 0. \quad (\text{B.9})$$

 B.2.0.3 Caso $S \cap \ell = \ell(t_0)$

Para o caso da intersecção ser apenas um ponto, o colchete $\{U_\ell, E_j\}$ será descrito em termos de colchetes de A_a^i e E_j^b nas condições em que eles não se anulam. Dado (B.8), é conveniente fragmentar a holonomia em três trechos: um anterior à intersecção, um em torno da intersecção, e um após a intersecção:

$$U_\ell = U_\ell(t_0 + \epsilon, 1)U_\ell(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)U_\ell(0, t_0 - \epsilon). \quad (\text{B.10})$$

Como o colchete tem contribuição não nula somente em $\ell(t_0)$, a ideia é calcular o colchete utilizando a fragmentação da holonomia acima, e aplicar o limite de $\epsilon \rightarrow 0$. A fim de se manter a notação mais limpa, os trechos $U_\ell(0, t_0 - \epsilon)$ e $U_\ell(t_0 + \epsilon, 1)$, que não contribuem para o colchete, serão introduzidos no cálculo do colchete já com o limite aplicado:

$$U_\ell = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} U_\ell(0, t_0)U_\ell(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)U_\ell(t_0, 1).$$

Portanto, a partir da fragmentação da holonomia e da definição do fluxo, temos:

$$\begin{aligned} \{U_\ell, E_j\} &= \{U_\ell(t_0, 1) \left[\mathbb{I} + \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} dt A_a^i(\ell(t)) \dot{\ell}^a(t) \tau_i \right] U_\ell(0, t_0), \int_S dS_b E_j^b(x)\} \\ &= \int_S dS_b \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} dt U_\ell(t_0, 1) \tau_i U_\ell(0, t_0) \dot{\ell}^a(t) \{A_a^i(\ell(t)), E_j^b(x)\} \\ &= \int_S dS_b \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} dt U_\ell(t_0, 1) \tau_i U_\ell(0, t_0) \dot{\ell}^a(t) \{A_a^i(\ell(t)), E_j^b(x)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_S dS_a \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} dt U_\ell(t_0, 1) \tau_j U_\ell(0, t_0) \dot{\ell}^a(t) \{A_a^j(\ell(t)), E_j^a(x)\} \\
 &= \int_S dS_a \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} dt \dot{\ell}^a(t) U_\ell(t_0, 1) \tau_j U_\ell(0, t_0) \delta^3(x - \ell(t)). \tag{B.11}
 \end{aligned}$$

Perceba que o elemento $\dot{\ell}^a dt dS_a$ corresponde a um elemento de volume que engloba a superfície S em torno de $\ell(t_0)$, ponto em que a delta tem comportamento singular. Assim, convencionando $n_a \dot{\ell}^a > 0$, a integração em (B.11) resulta em:

$$\{U_\ell, E_j\} = U_\ell(t_0, 1) \tau_j U_\ell(0, t_0). \tag{B.12}$$

Ao definirmos o momento associado à holonomia como o fluxo no ponto final do link, obtemos $t_0 = 1$, o que resulta em:

$$\{U_\ell, E_j\} = \tau_j U_\ell. \tag{B.13}$$

B.2.1 Colchete entre fluxos

Diferentemente dos colchetes de Poisson calculados anteriormente, o colchete entre dois fluxos deve ser analisado com mais cuidado. Uma análise ingênua do problema nos leva a um colchete trivial a partir da definição do fluxo em (B.7):

$$\begin{aligned}
 \{E_i(S), E_j(S)\} &= \left\{ \int_S E_i^a(x) dS_a, \int_{S'} E_j^b(x') dS'_b \right\} \\
 &= \int_S dS'_b \int_{S'} dS_a(x) \{E_i^a(x), E_j^b(x')\} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Para o cálculo do colchete entre fluxos, é necessário tanto a utilização da definição completa do fluxo em (2.16), que envolve holonomias, quanto do processo de regularização citado no início dessa seção. Visando a determinação do colchete entre fluxos de uma forma menos pedante, é possível obtê-los pela consistência dos colchetes de Poisson, que obedecem a identidade de Jacobi:

$$\{\{A, B\}, C\} + \{\{B, C\}, A\} + \{\{C, A\}, B\} = 0, \tag{B.14}$$

sendo A , B , e C definidos no espaço de fase. Se aplicarmos a identidade de Jacobi para dois fluxos em S e uma holonomia em ℓ para o caso $S \cap \ell = \ell(1)$

$$\begin{aligned}
 \{\{E_i(S), E_j(S)\}, U_\ell\} &= \{\{U_\ell, E_j(S)\}, E_i(S)\} - \{\{U_\ell, E_i(S)\}, E_j(S)\} \\
 &= \{\tau_j U_\ell, E_i(S)\} - \{\tau_i U_\ell, E_j(S)\} \\
 &= \tau_j \tau_i U_\ell - \tau_i \tau_j U_\ell \\
 &= [\tau_j, \tau_i] U_\ell
 \end{aligned}$$

$$= -\varepsilon_{ij}{}^k \tau_k U_\ell,$$

implicando em

$$\{E_i, E_j\} = \varepsilon_{ij}{}^k E_k. \tag{B.15}$$

APÊNDICE C – ESTADOS COERENTES SU(2)

Seja $\xi^A \in \mathbb{C}^2$ um espinor com $A = 0, 1$. Tal espinor define um estado de momento de spin $1/2$:

$$|1/2, \xi\rangle = \xi^0 |+\rangle + \xi^1 |-\rangle, \quad (\text{C.1})$$

em que $|\pm\rangle \equiv |1/2, \pm 1/2\rangle$, e um vetor tridimensional normalizado:

$$\vec{\xi} = \frac{\bar{\xi}_A \vec{\sigma}_B^A \xi^B}{\|\xi\|^2} \quad (\text{C.2})$$

$$= \frac{1}{\|\xi\|^2} \left[2\text{Re}(\bar{\xi}^0 \xi^1) \hat{x} + 2\text{Im}(\bar{\xi}^0 \xi^1) \hat{y} + (|\xi^0|^2 - |\xi^1|^2) \hat{z} \right]. \quad (\text{C.3})$$

O estado acima obedece as seguintes propriedades

Propriedade 1. $|1/2, \xi\rangle$ é autoestado de $J_\xi := \vec{J} \cdot \vec{\xi}$ com autovalor $1/2$:

Demonstração.

$$\begin{aligned} J_\xi |1/2, \xi\rangle &= \frac{1}{2\|\xi\|^2} \left[2\text{Re}(\bar{\xi}^0 \xi^1) \sigma_x + 2\text{Im}(\bar{\xi}^0 \xi^1) \sigma_y + (|\xi^0|^2 - |\xi^1|^2) \sigma_z \right] |1/2, \xi\rangle \\ &= \frac{1}{2\|\xi\|^2} \left\{ \left[(2\text{Re}(\bar{\xi}^0 \xi^1) - 2i\text{Im}(\bar{\xi}^0 \xi^1)) \xi^1 + (|\xi^0|^2 - |\xi^1|^2) \xi^0 \right] |+\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left[(2\text{Re}(\bar{\xi}^0 \xi^1) + 2i\text{Im}(\bar{\xi}^0 \xi^1)) \xi^0 - (|\xi^0|^2 - |\xi^1|^2) \xi^1 \right] |-\rangle \right\} \\ &= \frac{1}{2\|\xi\|^2} \left\{ \left[(2\xi^0 \bar{\xi}^1) \xi^1 + (|\xi^0|^2 - |\xi^1|^2) \xi^0 \right] |+\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left[(2\bar{\xi}^0 \xi^1) \xi^0 - (|\xi^0|^2 - |\xi^1|^2) \xi^1 \right] |-\rangle \right\} \\ &= \frac{1}{2\|\xi\|^2} (|\xi^0|^2 + |\xi^1|^2) (\xi^0 |+\rangle + \xi^1 |-\rangle) \\ &= \frac{1}{2} |1/2, \xi\rangle. \end{aligned}$$

□

A partir do resultado acima, tem-se que o elemento $g_\xi \in SU(2)$ dado por

$$g_\xi = \begin{pmatrix} \xi^0 & -\bar{\xi}^1 \\ \xi^1 & \xi^0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.4})$$

corresponde à rotação que leva a direção em $\vec{\xi}$, de forma que $|1/2, \xi\rangle = \|\xi\| g_\xi |+\rangle$.

Propriedade 2. $|1/2, \boldsymbol{\xi}\rangle$ é autoestado de J^2 com autovalor $3/4$:

Demonstração.

$$\begin{aligned} J^2 |1/2, \boldsymbol{\xi}\rangle &= \frac{1}{2} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) |1/2, \boldsymbol{\xi}\rangle \\ &= \frac{3}{4} \mathbb{I} |1/2, \boldsymbol{\xi}\rangle \\ &= \frac{3}{4} |1/2, \boldsymbol{\xi}\rangle. \end{aligned}$$

□

Propriedade 3. $\frac{\langle 1/2, \boldsymbol{\xi} | \vec{J} | 1/2, \boldsymbol{\xi} \rangle}{\langle 1/2, \boldsymbol{\xi} | 1/2, \boldsymbol{\xi} \rangle} = \frac{1}{2} \vec{\boldsymbol{\xi}}$.

Demonstração. Se $\vec{\zeta}_1$, $\vec{\zeta}_2$ e $\vec{\boldsymbol{\xi}}$ formam uma base ortonormal destrógena de \mathbb{R}^3 , tem-se:

$$\langle 1/2, \boldsymbol{\xi} | \vec{J} | 1/2, \boldsymbol{\xi} \rangle = \langle 1/2, \boldsymbol{\xi} | J_{\zeta_1} | 1/2, \boldsymbol{\xi} \rangle \vec{\zeta}_1 + \langle 1/2, \boldsymbol{\xi} | J_{\zeta_2} | 1/2, \boldsymbol{\xi} \rangle \vec{\zeta}_2 + \langle 1/2, \boldsymbol{\xi} | J_{\boldsymbol{\xi}} | 1/2, \boldsymbol{\xi} \rangle \vec{\boldsymbol{\xi}}. \quad (\text{C.5})$$

Por ser uma base destrógena, os vetores $\vec{\zeta}_1$, $\vec{\zeta}_2$ e $\vec{\boldsymbol{\xi}}$ podem ser obtidos a partir da mesma matriz de rotação atuando, respectivamente, em \vec{x} , \vec{y} e \vec{z} . A partir da definição da matriz $g_{\boldsymbol{\xi}}$ em (C.4), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\langle 1/2, \boldsymbol{\xi} | \vec{J} | 1/2, \boldsymbol{\xi} \rangle}{\langle 1/2, \boldsymbol{\xi} | 1/2, \boldsymbol{\xi} \rangle} &= \langle + | g_{\boldsymbol{\xi}}^\dagger J_{\zeta_1} g_{\boldsymbol{\xi}} | + \rangle \vec{\zeta}_1 + \langle + | g_{\boldsymbol{\xi}}^\dagger J_{\zeta_2} g_{\boldsymbol{\xi}} | + \rangle \vec{\zeta}_2 + \langle + | g_{\boldsymbol{\xi}}^\dagger J_{\boldsymbol{\xi}} g_{\boldsymbol{\xi}} | + \rangle \vec{\boldsymbol{\xi}} \\ &= \langle + | J_x | + \rangle \vec{\zeta}_1 + \langle + | J_y | + \rangle \vec{\zeta}_2 + \langle + | J_z | + \rangle \vec{\boldsymbol{\xi}} \\ &= \frac{1}{2} \vec{\boldsymbol{\xi}}. \end{aligned}$$

□

Propriedade 4. $\Delta(\vec{J} \cdot \vec{v}) = \sqrt{\frac{1 - (\vec{\boldsymbol{\xi}} \cdot \vec{v})^2}{4}}$ em relação ao estado $|1/2, \boldsymbol{\xi}\rangle$ para $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ normalizado.

Demonstração. O desvio de um operador pode ser calculado como:

$$\Delta(\vec{J} \cdot \vec{v}) = \sqrt{\langle (\vec{J} \cdot \vec{v})^2 \rangle - \langle \vec{J} \cdot \vec{v} \rangle^2}. \quad (\text{C.6})$$

A propriedade 3 nos passa o quadrado do valor médio de $\vec{J} \cdot \vec{v}$:

$$\langle (\vec{J} \cdot \vec{v}) \rangle^2 = \left(\frac{1}{2} \vec{\boldsymbol{\xi}} \cdot \vec{v} \right)^2, \quad (\text{C.7})$$

faltando apenas a determinação de $\langle (\vec{J} \cdot \vec{v})^2 \rangle$. A partir da identidade respeitada pelas matrizes de Pauli [62]:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{v})(\vec{\sigma} \cdot \vec{w}) = (\vec{v} \cdot \vec{w}) \mathbb{I} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}), \quad (\text{C.8})$$

tem-se

$$(\vec{J} \cdot \vec{v})^2 = \frac{\mathbb{I}}{4}, \quad (\text{C.9})$$

resultando em

$$\langle (\vec{J} \cdot \vec{v})^2 \rangle = \frac{1}{4}. \quad (\text{C.10})$$

Juntando (C.7) e (C.10):

$$\Delta(\vec{J} \cdot \vec{v}) = \sqrt{\frac{1 - (\vec{\xi} \cdot \vec{v})^2}{4}}. \quad (\text{C.11})$$

□

A partir do espinor ξ^A , também é possível construir estados na representação j de $SU(2)$ em termos do estado na representação fundamental:

$$|j, \xi\rangle := |1/2, \xi\rangle^{\otimes 2j}. \quad (\text{C.12})$$

Os estados acima obedecem as seguintes propriedades:

Propriedade 5. $D^j(g) |j, \xi\rangle = |j, g\xi\rangle$ para $g \in SU(2)$.

Demonstração. A partir da construção de elementos $g \in SU(2)$ na representação j em termos da fundamental:

$$D^j(g) = g^{\otimes 2j}, \quad (\text{C.13})$$

tem-se

$$\begin{aligned} D^j(g) |j, \xi\rangle &= (g^{\otimes 2j}) (|1/2, \xi\rangle^{\otimes 2j}) \\ &= (g |1/2, \xi\rangle)^{\otimes 2j} \\ &= |1/2, g\xi\rangle^{\otimes 2j} \\ &= |j, g\xi\rangle. \end{aligned}$$

□

Propriedade 6. $|j, \xi\rangle$ pode ser escrito em termos da base de número magnético como

$$|j, \xi\rangle := \sum_{m=-j}^j \frac{\sqrt{(2j)!} (\xi^0)^{j+m} (\xi^1)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} |j, m\rangle. \quad (\text{C.14})$$

Demonstração. A partir da teoria de reacoplamento de $SU(2)$, tem-se que $|j, j\rangle = |+\rangle^{\otimes 2j}$. Construindo o operador J_- em termos da representação fundamental:

$$J_-^{(j)} = \sum_{k=1}^{2j} \mathbb{I}^{\otimes(k-1)} \otimes J_- \otimes \mathbb{I}^{\otimes(2j-k)}, \quad (\text{C.15a})$$

$$J_- |+\rangle = \sqrt{2} |-\rangle, \quad (\text{C.15b})$$

$$J_- |-\rangle = 0, \quad (\text{C.15c})$$

tem-se

$$|j, m\rangle = \sqrt{\frac{(j+m)!(j-m)!}{(2j)!}} \left(\underbrace{|+\rangle \otimes \cdots \otimes |+\rangle}_{j+m \text{ vezes}} \otimes \underbrace{|-\rangle \otimes \cdots \otimes |-\rangle}_{j-m \text{ vezes}} + \text{permutações} \right). \quad (\text{C.16})$$

Em termos da relação acima, obtêm-se:

$$\begin{aligned} |j, \boldsymbol{\xi}\rangle &= (\boldsymbol{\xi}^0 |+\rangle + \boldsymbol{\xi}^1 |-\rangle)^{\otimes 2j} \\ &= \sum_{m=-j}^j (\boldsymbol{\xi}^0)^{j+m} (\boldsymbol{\xi}^1)^{j-m} \left(\underbrace{|+\rangle \otimes \cdots \otimes |+\rangle}_{j+m \text{ vezes}} \otimes \underbrace{|-\rangle \otimes \cdots \otimes |-\rangle}_{j-m \text{ vezes}} + \text{permutações} \right) \\ &= \sum_{m=-j}^j \frac{\sqrt{(2j)!} (\boldsymbol{\xi}^0)^{j+m} (\boldsymbol{\xi}^1)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} |j, m\rangle. \end{aligned}$$

□

Propriedade 7. $|j, \boldsymbol{\xi}\rangle$ é autoestado de J^2 com autovalor $j(j+1)$:

Demonstração.

$$\begin{aligned} J^2 |j, \boldsymbol{\xi}\rangle &= \sum_{m=-j}^j \mathcal{C}_{jm} J^2 |j, m\rangle \\ &= j(j+1) \sum_{m=-j}^j \mathcal{C}_{jm} |j, m\rangle \\ &= j(j+1) |j, \boldsymbol{\xi}\rangle. \end{aligned}$$

□

Propriedade 8. $|j, \boldsymbol{\xi}\rangle$ é autoestado de $J_{\boldsymbol{\xi}}$ com autovalor j :

Demonstração. A partir da construção dos geradores \vec{J} de $su(2)$ na representação j em termos da fundamental:

$$\vec{J}^{(j)} = \sum_{k=1}^{2j} \mathbb{I}^{\otimes(k-1)} \otimes \vec{J} \otimes \mathbb{I}^{\otimes(2j-k)}, \quad (\text{C.17})$$

tem-se

$$\begin{aligned} J_{\boldsymbol{\xi}} |j, \boldsymbol{\xi}\rangle &= \left(\sum_{k=1}^{2j} \mathbb{I}^{\otimes(k-1)} \otimes J_{\boldsymbol{\xi}} \otimes \mathbb{I}^{\otimes(2j-k)} \right) (|1/2, \boldsymbol{\xi}\rangle^{\otimes 2j}) \\ &= \sum_{k=1}^{2j} |1/2, \boldsymbol{\xi}\rangle^{\otimes(k-1)} \otimes J_{\boldsymbol{\xi}} |1/2, \boldsymbol{\xi}\rangle \otimes |1/2, \boldsymbol{\xi}\rangle^{\otimes(2j-k)} \end{aligned}$$

$$= j |1/2, \boldsymbol{\xi}\rangle.$$

□

Propriedade 9. $|j, \boldsymbol{\xi}\rangle = \|\boldsymbol{\xi}\|^{2j} D^j(g_{\boldsymbol{\xi}}) |j, j\rangle$, em que $g_{\boldsymbol{\xi}} \in SU(2)$ é dado por (C.4).

Demonstração. Decorre diretamente da definição (C.12) da propriedade 5. □

Propriedade 10. $\frac{\langle j, \boldsymbol{\xi} | \vec{J} | j, \boldsymbol{\xi} \rangle}{\langle j, \boldsymbol{\xi} | j, \boldsymbol{\xi} \rangle} = j \vec{\boldsymbol{\xi}}$.

Demonstração. A partir da construção dos geradores \vec{J} de $su(2)$ na representação j em termos da fundamental em (C.17):

$$\begin{aligned} \frac{\langle j, \boldsymbol{\xi} | \vec{J} | j, \boldsymbol{\xi} \rangle}{\langle j, \boldsymbol{\xi} | j, \boldsymbol{\xi} \rangle} &= \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{4j}} \left(\langle 1/2, \boldsymbol{\xi} |^{\otimes 2j} \right) \left(\sum_{k=1}^{2j} \mathbb{I}^{\otimes(k-1)} \otimes \vec{J} \otimes \mathbb{I}^{\otimes(2j-k)} \right) \left(|1/2, \boldsymbol{\xi}\rangle^{\otimes 2j} \right) \\ &= \frac{2j}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{4j}} \left(\|\boldsymbol{\xi}\|^{2(2j-1)} \langle 1/2, \boldsymbol{\xi} | \vec{J} | 1/2, \boldsymbol{\xi} \rangle \right) \\ &= j \vec{\boldsymbol{\xi}}. \end{aligned}$$

sendo usado a propriedade 3 da segunda para a terceira linha.

□

Propriedade 11. $\Delta(\vec{J} \cdot \vec{v}) = \sqrt{\frac{j \left[1 - (\vec{\boldsymbol{\xi}} \cdot \vec{v})^2 \right]}{2}}$ em relação ao estado $|j, \boldsymbol{\xi}\rangle$ para $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ normalizado.

Demonstração. A partir da propriedade 3, tem-se

$$\langle (\vec{J} \cdot \vec{v}) \rangle^2 = (j \vec{\boldsymbol{\xi}} \cdot \vec{v})^2, \quad (\text{C.18})$$

faltando apenas a determinação de $\langle (\vec{J} \cdot \vec{v})^2 \rangle$. Renomeando a construção dos geradores \vec{J} de $su(2)$ na representação j em termos da fundamental em (C.17) por

$$\vec{J}^{(j)} = \sum_{k=1}^{2j} \vec{J}_k, \quad (\text{C.19a})$$

$$\vec{J}_k = \mathbb{I}^{\otimes(k-1)} \otimes \vec{J} \otimes \mathbb{I}^{\otimes(2j-k)}, \quad (\text{C.19b})$$

tem-se, nomeando $J_v := (\vec{J} \cdot \vec{v})$:

$$\begin{aligned} \frac{\langle j, \boldsymbol{\xi} | (\vec{J} \cdot \vec{v})^2 | j, \boldsymbol{\xi} \rangle}{\langle j, \boldsymbol{\xi} | j, \boldsymbol{\xi} \rangle} &= \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{4j}} \left(\langle 1/2, \boldsymbol{\xi} |^{\otimes 2j} \right) \left(\sum_{k=1}^{2j} J_{vk}^2 + \sum_{k \neq l}^{2j} J_{vk} J_{vl} \right) \left(|1/2, \boldsymbol{\xi}\rangle^{\otimes 2j} \right) \\ &= \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{4j}} \left(2j \|\boldsymbol{\xi}\|^{2(2j-1)} \langle 1/2, \boldsymbol{\xi} | J_v^2 | 1/2, \boldsymbol{\xi} \rangle + \right) \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

$$\begin{aligned}
 & +2j(2j-1)\|\boldsymbol{\xi}\|^{2(2j-2)} \langle 1/2, \boldsymbol{\xi} | J_v | 1/2, \boldsymbol{\xi} \rangle \langle 1/2, \boldsymbol{\xi} | J_v | 1/2, \boldsymbol{\xi} \rangle \\
 & = \frac{j}{2} + 2j(2j-1) \left(\frac{1}{2} \vec{\boldsymbol{\xi}} \cdot \vec{v} \right)^2,
 \end{aligned} \tag{C.21}$$

sendo usado a propriedade 4 da segunda para a terceira linha. A partir de (C.6), (C.18) e (C.20), tem-se

$$\Delta(\vec{J} \cdot \vec{v}) = \sqrt{\frac{j \left[1 - (\vec{\boldsymbol{\xi}} \cdot \vec{v})^2 \right]}{2}}. \tag{C.22}$$

□

Propriedade 12. *No limite de grandes spins, $\langle j, \boldsymbol{\xi} | D^j(U) | j, \boldsymbol{\xi} \rangle$ é desprezível para U distante da identidade*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 \frac{\langle j, \boldsymbol{\xi} | D^j(U) | j, \boldsymbol{\xi} \rangle}{\langle j, \boldsymbol{\xi} | j, \boldsymbol{\xi} \rangle} & = \frac{\langle j, \boldsymbol{\xi} | j, U\boldsymbol{\xi} \rangle}{\langle j, \boldsymbol{\xi} | j, \boldsymbol{\xi} \rangle} \\
 & = \left(\frac{\bar{\boldsymbol{\xi}}^A U_{AB} \boldsymbol{\xi}^B}{\|\boldsymbol{\xi}\|^2} \right)^{2j} \\
 & = \alpha^{2j}.
 \end{aligned} \tag{C.23}$$

em que $\alpha \leq 1$. Se $U \simeq \mathbb{I}$, então $\alpha \simeq 1$. Assim, no limite de grandes spins, $D^j(U) | j, \boldsymbol{\xi} \rangle$ é aproximadamente ortogonal a $| j, \boldsymbol{\xi} \rangle$ para U distante da identidade. □

APÊNDICE D – TRUQUE DO THIEMANN

Como foi exposto anteriormente, o vínculo hamiltoniano é dado por:

$$H(N) = H^E(N) - 2(1 + \gamma^2)T(N), \quad (\text{D.1a})$$

$$H^E(N) = \int_M d^3x N \frac{E_i^a E_j^b}{\sqrt{\det E}} \epsilon^{ijk} F_{ab}^k, \quad (\text{D.1b})$$

$$T(N) = \int_M d^3x N \frac{E_i^a E_j^b}{\sqrt{\det E}} K_{[a}^i K_{b]}^j. \quad (\text{D.1c})$$

Por seu caráter não polinomial, a quantização do vínculo hamiltoniano na forma exposta acima traz dificuldades. Apesar disso, é possível simplificá-lo a partir do chamado truque de Thiemann [72]. Tal truque consiste em definir a grandeza:

$$\bar{K} := \int d^3x K_a^i E_i^a, \quad (\text{D.2})$$

e utilizá-la, em conjunto com o volume:

$$V = \int d^3x \sqrt{\det E}, \quad (\text{D.3})$$

como intermediários para a reescrita do vínculo hamiltoniano. A simplificação do vínculo hamiltoniano passa pela verificação de três resultados:

Proposição 1. *Se V é definido por (D.3), então:*

$$\epsilon^{ijk} \epsilon_{abc} \frac{E_j^b E_k^c}{4\sqrt{\det E}} = \{A_a^i, V\}. \quad (\text{D.4})$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \{A_a^i(x), V\} &= \int d^3x' \left\{ A_a^i(x), \sqrt{\det E(x')} \right\} \\ &= \int d^3x' \frac{1}{2\sqrt{\det E}} \left\{ A_a^i(x), \det E(x') \right\} \\ &= \int d^3x' \frac{1}{2\sqrt{\det E}} \frac{1}{3!} \epsilon^{jkl} \epsilon_{bcd} \left\{ A_a^i(x), E_j^b(x') E_k^c(x') E_l^d(x') \right\} \\ &= \int d^3x' \epsilon^{jkl} \epsilon_{bcd} \frac{E_j^b(x') E_k^c(x')}{4\sqrt{\det E}} \left\{ A_a^i(x), E_l^d(x') \right\} \\ &= \epsilon^{ijk} \epsilon_{abc} \frac{E_j^b E_k^c}{4\sqrt{\det E}}. \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

□

Proposição 2. *Se \bar{K} é definido por (D.2), então*

$$K_a^i = \{A_a^i, \bar{K}\}. \quad (\text{D.6})$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 \{A_a^i(x), \bar{K}\} &= \int d^3x' \{A_a^i(x), K_b^j(x') E_j^b(x')\} \\
 &= \int d^3x' [\{A_a^i(x), E_j^b(x')\} K_b^j(x') + \{A_a^i(x), K_b^j(x')\} E_j^b(x')] \\
 &= K_a^i(x) + \int d^3x' \{A_a^i(x), K_b^j(x')\} E_j^b(x').
 \end{aligned} \tag{D.7}$$

Pela definição da conexão de Ashtekar:

$$\begin{aligned}
 \{A_a^i(x), K_b^j(x')\} &= \{\omega_a^i(x), K_b^j(x')\} + \gamma \{K_a^i(x), K_b^j(x')\} \\
 &= \{\omega_a^i(x), K_b^j(x')\},
 \end{aligned} \tag{D.8a}$$

$$\begin{aligned}
 \{A_a^i(x), K_b^j(x')\} &= \frac{1}{\gamma} \{A_a^i(x), \omega_b^j(x')\} - \frac{1}{\gamma} \{A_a^i(x), A_b^j(x')\} \\
 &= \frac{1}{\gamma} \{A_a^i(x), \omega_b^j(x')\},
 \end{aligned} \tag{D.8b}$$

sendo utilizado o fato de que a conexão de spin ω_a^i é uma função exclusiva da densidade de triada. A partir de (D.8), tem-se:

$$\{\omega_a^i(x), K_b^j(x')\} = \frac{1}{\gamma} \{A_a^i(x), \omega_b^j(x')\}.$$

Como a igualdade acima é válida para qualquer valor de γ :

$$\{A_a^i(x), K_b^j(x')\} = \{\omega_a^i(x), K_b^j(x')\} = \{A_a^i(x), \omega_b^j(x')\} = 0, \tag{D.9}$$

resultando na expressão que buscávamos verificar:

$$\{A_a^i(x), \bar{K}\} = K_a^i(x).$$

□

Proposição 3. *Se \bar{K} e V são definidos por (D.2) e (D.3), então:, então*

$$\bar{K} = \frac{1}{2\gamma} \{H^E(1), V\}. \tag{D.10}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 \{H^E(1), V\} &= \int d^3x \frac{E_w^a(x) E_j^b(x)}{\sqrt{\det E(x)}} \varepsilon^{wj}_i \{F_{ab}^i(x), \sqrt{\det E(x')}\} \\
 &= \int d^3x \int d^3x' \frac{E_w^a(x) E_j^b(x)}{\sqrt{\det E(x)}} \varepsilon^{wj}_i \frac{1}{2\sqrt{\det E(x')}} \{F_{ab}^i(x), \det E(x')\}.
 \end{aligned} \tag{D.11}$$

Expandindo o tensor de curvatura:

$$\begin{aligned} \{F_{ab}^i(x), \det E(x')\} &= \frac{1}{3!} \varepsilon_{cde} \varepsilon^{lmn} \underbrace{\{\partial_a A_b^i(x), E_l^c(x') E_m^d(x') E_n^e(x')\}}_{(i)} \\ &\quad - \underbrace{\{\partial_b A_a^i(x), E_l^c(x') E_m^d(x') E_n^e(x')\} + \varepsilon^i{}_{pq} \{A_a^p(x) A_b^q(x), E_l^c(x') E_m^d(x') E_n^e(x')\}}_{(ii)}. \end{aligned}$$

Desenvolveremos os termos (i) com os símbolos $\varepsilon_{cde} \varepsilon^{lmn}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cde} \varepsilon^{lmn} \{\partial_a A_b^i(x), E_l^c(x') E_m^d(x') E_n^e(x')\} &= 3 \varepsilon_{cde} \varepsilon^{lmn} E_n^e(x') \partial_a \{A_b^i(x), E_l^c(x')\} \\ &= 3 \varepsilon_{bde} \varepsilon^{imn} E_m^d(x') E_n^e(x') \partial_a \delta^3(x - x'). \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Desenvolveremos os termos (ii) com os símbolos $\varepsilon_{cde} \varepsilon^{lmn}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cde} \varepsilon^{lmn} \{A_a^p(x) A_b^q(x), E_l^c(x') E_m^d(x') E_n^e(x')\} &= \varepsilon_{cde} \varepsilon^{lmn} A_b^q(x) \{A_a^p(x), E_l^c(x') E_m^d(x') E_n^e(x')\} \\ &\quad + \varepsilon_{cde} \varepsilon^{lmn} A_a^p(x) \{A_b^q(x), E_l^c(x') E_m^d(x') E_n^e(x')\} \\ &= 3 \varepsilon_{cde} \varepsilon^{lmn} A_b^q(x) E_m^d(x') E_n^e(x') \{A_a^p(x), E_l^c(x')\} \\ &\quad + 3 \varepsilon_{cde} \varepsilon^{lmn} A_a^p(x) E_m^d(x') E_n^e(x') \{A_b^q(x), E_l^c(x')\} \\ &= 3 \varepsilon_{ade} \varepsilon^{pmn} A_b^q(x) E_m^d(x') E_n^e(x') \delta^3(x - x') \\ &\quad + 3 \varepsilon_{bde} \varepsilon^{qmn} A_a^p(x) E_m^d(x') E_n^e(x') \delta^3(x - x'). \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Substituindo em (D.11), integrando em $d^3 x'$, contraindo em i e omitindo a dependência em x :

$$\begin{aligned} \{H^E(1), V\} &= \int d^3 x \frac{1}{2\sqrt{\det E}} \left[\underbrace{-2 \varepsilon_{bde} E^{am} E^{bn} \partial_a \left(\frac{E_m^d E_n^e}{\sqrt{\det E}} \right)}_{(iii)} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\delta_{[p}^w \delta_{q]}^j \frac{E_w^a E_j^b E_m^d E_n^e}{\sqrt{\det E}} (\varepsilon_{ade} \varepsilon^{pmn} A_b^q + \varepsilon_{bde} \varepsilon^{qmn} A_a^p)}_{(iv)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Desenvolvendo (iii):

$$\begin{aligned} 2 \varepsilon_{bde} E^{am} E^{bn} \partial_a \left(\frac{E_m^d E_n^e}{\sqrt{\det E}} \right) &= 2 \varepsilon_{bde} E^{am} E^{bn} \left[\left(\frac{E_m^d}{\sqrt{\det E}} \right) \partial_a E_n^e \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{E_n^e}{\sqrt{\det E}} \right) \partial_a E_m^d + E_m^d E_n^e \partial_a \left(\frac{1}{\sqrt{\det E}} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\varepsilon_{bde}E^{am}E^{bn}\left(\frac{E_m^d}{\sqrt{\det E}}\right)\partial_a E_n^e \\
 &= 2\sqrt{\det E}q^{ad}\varepsilon_{bde}E^{bn}\partial_a E_n^e.
 \end{aligned} \tag{D.15}$$

O termo $\partial_a E_n^e$ pode ser reescrito utilizando a relação entre a conexão de spin o símbolo de Christoffel:

$$\nabla_a^\omega E_n^e = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_a E_n^e = \varepsilon_{ni}{}^j \omega_a^i E_j^e + \Gamma_{ac}^e E_n^c + E_n^e \Gamma_{ac}^c, \tag{D.16}$$

resultando em

$$\begin{aligned}
 q^{ad}\varepsilon_{bde}E^{bn}\partial_a E_n^e &= q^{ad}\varepsilon_{bde}E^{bn}\varepsilon_{ni}{}^j \omega_a^i E_j^e + q^{ad}q^{bc}\varepsilon_{bde}\Gamma_{ac}^e + q^{ad}q^{be}\varepsilon_{bde}\Gamma_{ac}^c \\
 &= q^{ad}\varepsilon_{bde}E^{bn}\varepsilon_{ni}{}^j \omega_a^i E_j^e \\
 &= 2q^{ad}(\det E)\omega_a^i E_{di} \\
 &= 2\omega_a^i E_i^a,
 \end{aligned} \tag{D.17}$$

sendo utilizada da penúltima para a última linha igualdade a relação

$$\varepsilon_{abc}E_j^b E_k^c = (\det E)E_a^i \varepsilon_{ijk}. \tag{D.18}$$

Assim, o termo (iii) toma a forma:

$$-2\varepsilon_{bde}E^{am}E^{bn}\partial_a\left(\frac{E_m^d E_n^e}{\sqrt{\det E}}\right) = -4\sqrt{\det E}\omega_a^i E_i^a. \tag{D.19}$$

Desenvolvendo (iv):

$$\begin{aligned}
 \delta_{[p}^w \delta_{q]}^j \frac{E_w^a E_j^b E_m^d E_n^e}{\sqrt{\det E}} (\varepsilon_{ade}\varepsilon^{pmn}A_b^q + \varepsilon_{bde}\varepsilon^{qmn}A_a^p) &= \frac{E_w^a E_j^b E_m^d E_n^e}{2\sqrt{\det E}} (\varepsilon_{ade}\varepsilon^{wmn}A_b^j - \varepsilon_{ade}\varepsilon^{jmn}A_b^w \\
 &\quad + \varepsilon_{bde}\varepsilon^{jmn}A_a^w - \varepsilon_{bde}\varepsilon^{wmn}A_a^j) \\
 &= \frac{E_w^a E_j^b E_m^d E_n^e}{\sqrt{\det E}} (\varepsilon_{ade}\varepsilon^{wmn}A_b^j - \varepsilon_{ade}\varepsilon^{jmn}A_b^w) \\
 &= \sqrt{\det E} (3!E_j^b A_b^j - 2E_w^a E_j^b E_a^j A_b^w) \\
 &= 4\sqrt{\det E} A_a^i E_i^a,
 \end{aligned} \tag{D.20}$$

sendo utilizada (D.18) da penúltima para a última linha.

Inserindo (D.19) e (D.20) em (D.14):

$$\begin{aligned}
 \{H^E(1), V\} &= \int d^3x \frac{1}{2\sqrt{\det E}} 4\sqrt{\det E} (-\omega_a^i + A_a^i) E_i^a \\
 &= \int d^3x \frac{1}{2\sqrt{\det E}} 4\sqrt{\det E} \gamma K_a^i E_i^a,
 \end{aligned} \tag{D.21}$$

resultando em

$$\bar{K} = \frac{1}{2\gamma} \{H^E(1), V\}.$$

□

A partir dos dois colchetes demonstrados, o vínculo hamiltoniano toma a forma:

$$H(N) = H^E(N) - 2(1 + \gamma^2)T(N), \quad (\text{D.22a})$$

$$H^E(N) = 2 \int_M d^3x N \varepsilon^{abc} \delta_{ij} F_{ab}^i \{A_c^j, V\}, \quad (\text{D.22b})$$

$$T(N) = \frac{1}{4\gamma^2} \int_M d^3x N \varepsilon^{abc} \varepsilon_{ijk} \{A_a^i, V\} \{A_b^j, \{H^E(1), V\}\} \{A_c^k, \{H^E(1), V\}\}. \quad (\text{D.22c})$$

APÊNDICE E – APROXIMAÇÃO LS PARA GRANDES SPINS

E.1 Valores médios

Como será mostrado a seguir, estados coerentes intrínsecos apresentam, no limite de grandes spins, simplificações relacionadas à imposição do vínculo de Gauss. Mais precisamente, se

$$|\psi\rangle = P_G |\tilde{\psi}\rangle, \quad (\text{E.1a})$$

$$|\tilde{\psi}\rangle = \bigotimes_{n \in \Gamma} \bigotimes_{\mu \in n} |j_{n\mu}, \boldsymbol{\xi}_{n\mu}\rangle, \quad (\text{E.1b})$$

$$\sum_{\mu \in n} j_{n\mu} \vec{\boldsymbol{\xi}}_{n\mu} = 0, \quad (\text{E.1c})$$

então, no limite semiclássico:

$$\frac{\langle \psi | f(\mathcal{J}_\ell) | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \simeq \langle \tilde{\psi} | f(\mathcal{J}_\ell) | \tilde{\psi} \rangle,$$

sendo $f(\mathcal{J}_\ell)$ uma função arbitrária do operador \mathcal{J}_ℓ .

Como decorre da atuação das transformações de gauge $SU(2)$ em estados da LQG, o projetor de Gauss P_G comuta com o operador de representação \mathcal{J}_ℓ , de forma que:

$$[f(\mathcal{J}_\ell), P_G] = 0. \quad (\text{E.2})$$

A partir da implementação do projetor de Gauss pelo procedimento de média de grupo:

$$P_G |\psi\rangle = \frac{1}{|SU(2)|^N} \int_{SU(2)^N} \left(\prod_{n=1}^N dU_n \right) U_n |\psi\rangle, \quad (\text{E.3})$$

tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\langle \psi | f(\mathcal{J}_\ell) | \psi \rangle}{\mathcal{N}^2} &= \frac{1}{\mathcal{N}^2} \langle \tilde{\psi} | P_G f(\mathcal{J}_\ell) P_G | \tilde{\psi} \rangle \\ &= \frac{1}{\mathcal{N}^2} \langle \tilde{\psi} | f(\mathcal{J}_\ell) P_G | \tilde{\psi} \rangle \\ &= \frac{1}{\mathcal{N}^2} \frac{1}{|SU(2)|^N} \int_{SU(2)^N} \left(\prod_{n=1}^N dU_n \right) \langle \tilde{\psi} | f(\mathcal{J}_\ell) U_n | \tilde{\psi} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

sendo usado que $P_G^2 = P_G$ e

$$\mathcal{N} := \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle} = \left[\frac{1}{|SU(2)|^N} \int_{SU(2)^N} \prod_{n=1}^N dU_n \langle \tilde{\psi} | U_n | \tilde{\psi} \rangle \right]^{1/2}. \quad (\text{E.5})$$

Como mostrado em (C.23), para grandes spins o produto entre um estados coerentes de $SU(2)$ e sua imagem rotacionada por $U \in SU(2)$ decresce rapidamente para U longe da identidade. Dessa forma, a integral em (E.4) é dominada por contribuições de U_n próximas à identidade, de forma que

$$\frac{\langle \psi | f(\mathcal{J}_\ell) | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \simeq \langle \tilde{\psi} | f(\mathcal{J}_\ell) | \tilde{\psi} \rangle. \quad (\text{E.6})$$

O resultado (E.6) também pode ser estendido para estados coerentes intrínsecos perturbados pela composição de spin com estados cinemáticos com j_ℓ fixo. Seja

$$|\delta\psi\rangle = P_G |\delta\tilde{\psi}\rangle, \quad (\text{E.7a})$$

$$|\delta\tilde{\psi}\rangle = |\tilde{\psi}\rangle \cdot |\phi\rangle, \quad (\text{E.7b})$$

$$|\phi\rangle = P_G |\phi\rangle, \quad (\text{E.7c})$$

$$\mathcal{J}_\ell |\phi\rangle = j_\phi |\phi\rangle. \quad (\text{E.7d})$$

Como a operação de soma de momento angular T e o projetor de área comutam com transformações $SU(2)$

$$[P_A, U_n] = 0, \quad (\text{E.8a})$$

$$[T, U_n] = 0, \quad (\text{E.8b})$$

tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\langle \delta\psi | f(\mathcal{J}_\ell) | \delta\psi \rangle}{\mathcal{N}_\square^2} &= (\langle \tilde{\psi} | P_G \otimes \langle \phi |) T P_A f(\mathcal{J}_\ell) P_A T (P_G |\tilde{\psi}\rangle \otimes |\phi\rangle) \\ &= (\langle \tilde{\psi} | \otimes \langle \phi |) P_G T P_A f(\mathcal{J}_\ell) P_A T (P_G |\tilde{\psi}\rangle \otimes |\phi\rangle) \\ &= \langle \delta\tilde{\psi} | f(\mathcal{J}_\ell) P_A T P_G (|\tilde{\psi}\rangle \otimes |\phi\rangle) \\ &= \frac{1}{|SU(2)|^N} \int_{SU(2)^N} \left(\prod_{n=1}^N dU_n \right) \langle \delta\tilde{\psi} | f(\mathcal{J}_\ell) (U_n |\tilde{\psi}\rangle \cdot |\phi\rangle) \\ &= \frac{1}{|SU(2)|^N} \int_{SU(2)^N} \left(\prod_{n=1}^N dU_n \right) (\langle \alpha_1 \alpha_2 | \otimes \langle \tilde{\psi}_0 |) P_A f(\mathcal{J}_\ell) P_A (|\alpha_1 \alpha_2\rangle \otimes U_g |\tilde{\psi}_0\rangle), \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

em que

$$\mathcal{N}_\square = \left[\frac{1}{|SU(2)|^N} \int_{SU(2)^N} \left(\prod_{n=1}^N dU_n \right) (\langle \alpha_1 \alpha_2 | \otimes \langle \tilde{\psi}_0 |) P_A (|\alpha_1 \alpha_2\rangle \otimes U_g |\tilde{\psi}_0\rangle) \right]^{1/2}. \quad (\text{E.10})$$

Assim como para os estados não perturbados, o produto entre os estados $|\tilde{\psi}\rangle \otimes |\phi\rangle$ e sua imagem rotacionada $U_n |\tilde{\psi}\rangle \otimes |\phi\rangle$ decresce rapidamente para U_g longe da identidade no limite de grandes spins. Assim, a integração em (E.9) é dominada pelas contribuições proximas à identidade, resultando em

$$\frac{\langle \delta\psi | f(\mathcal{J}_\ell) | \delta\psi \rangle}{\langle \delta\psi | \delta\psi \rangle} \simeq \langle \delta\tilde{\psi} | f(\mathcal{J}_\ell) | \delta\tilde{\psi} \rangle. \quad (\text{E.11})$$

E.2 Distribuição de probabilidades

O resultado (E.6) também leva a uma aproximação nas distribuições de probabilidade de spin associadas aos estados $|\psi\rangle$ e $|\tilde{\psi}\rangle$. Se $P(j_\ell)$ e $\tilde{P}(j_\ell)$ são, respectivamente as distribuições de probabilidades de spin do link ℓ associado ao estado $|\psi\rangle$ e $|\tilde{\psi}\rangle$, então a aproximação (E.6) pode ser reescrita em termos da variável clássica j_ℓ como

$$\sum_{j_\ell} f(j_\ell) P(j_\ell) \simeq \sum_{j_\ell} f(j_\ell) \tilde{P}(j_\ell), \quad (\text{E.12})$$

em que $f(j_\ell)$ é uma função arbitrária de j_ℓ . Assim, no limite de grandes spins, tem-se

$$\sum_{j_\ell} [P(j_\ell) - \tilde{P}(j_\ell)] f(j_\ell) \simeq 0. \quad (\text{E.13})$$

Como $f(j_\ell)$ é uma função arbitrária, (E.13) deve valer, em particular, para a escolha $f(j_\ell) = \delta_{j_\ell j_k}$, para $j_k \in \mathbb{N}/2$. Dessa forma, a relação (E.13) se reduz a

$$\sum_{j_\ell} [P(j_\ell) - \tilde{P}(j_\ell)] \delta_{j_\ell j_k} = 0$$

nos levando, no limite de grandes spins, a

$$P(j_\ell) \simeq \tilde{P}(j_\ell). \quad (\text{E.14})$$

Sendo $|\psi\rangle$ um estado definido em uma rede Γ , a distribuição $P(j_\ell)$ corresponde aos elementos da diagonal principal da matriz densidade reduzida do link ℓ associada ao estado $|\psi\rangle$ normalizado. Assim, definindo

$$\rho_\ell := \frac{1}{\langle \psi | \psi \rangle} \text{Tr}_{(\Gamma-\ell)} [|\psi\rangle\langle\psi|], \quad (\text{E.15a})$$

$$\tilde{\rho}_\ell := \text{Tr}_{(\Gamma-\ell)} [|\tilde{\psi}\rangle\langle\tilde{\psi}|], \quad (\text{E.15b})$$

tem-se que

$$P(j_\ell) = [\rho_\ell]_{j_\ell j_\ell}, \quad (\text{E.16})$$

de forma que (E.14) corresponde a uma aproximação no limite de grandes spins para os elementos da diagonal principal de ρ_ℓ :

$$[\rho_\ell]_{j_\ell j_\ell} \simeq [\tilde{\rho}_\ell]_{j_\ell j_\ell}. \quad (\text{E.17})$$

APÊNDICE F – DETERMINAÇÃO DO ESTADO PERTURBADO DE UM LINK NO LIMITE SEMICLÁSSICO

A partir do estado perturbado (5.29) em toda a rede, podemos seguir para o cálculo do estado de um único link $\ell \in \Gamma$. A partir da aproximação discutida no apêndice E, a distribuição de probabilidades associada ao estado perturbado (5.29) pode ser determinada, no limite de grandes spins, a partir do estado perturbado anterior à aplicação do projetor de Gauss:

$$|\tilde{\psi}\rangle = |\tilde{\psi}_0\rangle + \epsilon \sum_{\alpha_1\alpha_2} c_{\alpha_1\alpha_2} |\tilde{\square}\tilde{\square}\rangle, \quad (\text{F.1a})$$

$$|\tilde{\psi}_0\rangle = \bigotimes_{n \in \Gamma} \bigotimes_{\mu \in n} |j_\mu = j_0, \xi_\mu\rangle, \quad (\text{F.1b})$$

$$|\tilde{\square}\tilde{\square}\rangle = |\tilde{\psi}_0\rangle \cdot |\alpha_1\alpha_2\rangle, \quad (\text{F.1c})$$

$$|\alpha_1\alpha_2\rangle = T_{\alpha_1} T_{\alpha_2} |0\rangle. \quad (\text{F.1d})$$

Como o estado (F.1) corresponde ao estado perturbado em toda a rede Γ , a determinação do estado aproximado de um link é obtido a partir do traço da matriz densidade da rede sobre os graus de liberdade externos ao link:

$$\rho_\ell \simeq \text{Tr}_{(\Gamma-\ell)} [|\tilde{\psi}\rangle\langle\tilde{\psi}|]. \quad (\text{F.2})$$

Na a base de número magnético, o estado $|\tilde{\psi}_0\rangle$ é escrito como o produto tensorial de estados coerentes $SU(2)$ da forma

$$|j_0, \pm j_0\rangle_a, \quad (\text{F.3})$$

em que $a = x, y, z$ indicam as direções desses estados. Já as deformações $|\tilde{\square}\tilde{\square}\rangle$ são obtidas pela composição de spin de $|\tilde{\psi}_0\rangle$ com estados de dois laços $|\alpha_1\alpha_2\rangle$, de forma que apenas os links contidos em $\alpha_1 \cup \alpha_2$ são afetados pela composição. Devido à simetria da rede, considere, sem perda de generalidade, um link ℓ na direção z contido em um laço vindo da direção x . A restrição de $|\psi_0\rangle$ e $|\alpha_1\alpha_2\rangle$ à região das duas quinas do laço que intersecta ℓ é, a menos de um fator numérico,

$$T[(|j_0, j_0\rangle_x |j_0, j_0\rangle_z |j_0, -j_0\rangle_z |j_0, -j_0\rangle_x \otimes ((|-\rangle_z - |+\rangle_z) \otimes (|-\rangle_z - |+\rangle_z))], \quad (\text{F.4})$$

em que $|-\rangle_z = |1/2, -1/2\rangle_z \otimes |1/2, +1/2\rangle_z$. O estado no link ℓ é descrito pelo segundo e terceiro fatores do produto tensorial de quatro fatores em (F.4).

Omitindo o rótulo $a = z$ a partir de agora, as contribuições de cada um dos quatro termos resultantes de

$$\begin{aligned} (|-+\rangle - |+-\rangle) \otimes (|-+\rangle - |+-\rangle) \\ = |-+\rangle |-+\rangle - |-+\rangle |+-\rangle - |+-\rangle |-+\rangle + |+-\rangle |+-\rangle \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

são ortogonais. Após o produto (F.4), a contribuição de cada um dos quatro estados acima é modificar os estados da forma (F.3) para:

$$\begin{aligned} |j_0, \pm j_0, \pm\rangle &:= T_i(|j_0, \pm j_0\rangle \otimes |\pm\rangle) \\ &= \left| j_0 + \frac{1}{2}, \pm j_0 \pm \frac{1}{2} \right\rangle, \end{aligned} \quad (\text{F.6a})$$

$$\begin{aligned} |j_0, \pm j_0, \mp\rangle &:= T_i(|j_0, \pm j_0\rangle \otimes |\mp\rangle) \\ &= \sqrt{\frac{1}{2j_0 + 1}} \left| j_0 + \frac{1}{2}, \pm j_0 \mp \frac{1}{2} \right\rangle \pm \sqrt{\frac{2j_0}{2j_0 + 1}} \left| j_0 - \frac{1}{2}, \pm j_0 \mp \frac{1}{2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{F.6b})$$

de forma que, após o projetor de área, o estado no link ℓ é uma superposição de quatro estados ortogonais, dados por:

$$\begin{aligned} P_{AT}(|j_0, j_0\rangle |j_0, -j_0\rangle \otimes |+-\rangle) &= \left| j_0 + \frac{1}{2}, j_0 + \frac{1}{2} \right\rangle \left| j_0 + \frac{1}{2}, -j_0 - \frac{1}{2} \right\rangle, \\ P_{AT}(|j_0, j_0\rangle |j_0, -j_0\rangle \otimes |++\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2j_0 + 1}} \left| j_0 + \frac{1}{2}, j_0 + \frac{1}{2} \right\rangle \left| j_0 + \frac{1}{2}, -j_0 + \frac{1}{2} \right\rangle \\ P_{AT}(|j_0, j_0\rangle |j_0, -j_0\rangle \otimes |--\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2j_0 + 1}} \left| j_0 + \frac{1}{2}, j_0 - \frac{1}{2} \right\rangle \left| j_0 + \frac{1}{2}, -j_0 - \frac{1}{2} \right\rangle \\ P_{AT}(|j_0, j_0\rangle |j_0, -j_0\rangle \otimes |-+\rangle) &= \frac{1}{2j_0 + 1} \left| j_0 + \frac{1}{2}, j_0 - \frac{1}{2} \right\rangle \left| j_0 + \frac{1}{2}, -j_0 + \frac{1}{2} \right\rangle \\ &\quad - \frac{2j_0}{2j_0 + 1} \left| j_0 - \frac{1}{2}, j_0 - \frac{1}{2} \right\rangle \left| j_0 - \frac{1}{2}, -j_0 + \frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

No estado completo de toda a rede, cada um dos estados de link acima é multiplicado por um estado relativo no complemento do link (*seeds* na direção x), todos os quais têm a mesma norma. Assim, a matriz densidade $\text{Tr}_{(\Gamma-\ell)} [|\tilde{\square}\tilde{\square}\rangle \langle \tilde{\square}\tilde{\square}|]$ no link é a mistura das matrizes densidade de cada um dos quatro estados em (F.7).

Como as deformações $|\tilde{\square}\tilde{\square}\rangle$ são ortogonais entre si para pares de laços distintos e aos estados não perturbados $|\tilde{\psi}_0\rangle$, tem-se que a matriz densidade (F.2) associada ao link ℓ é dada por

$$\rho_\ell \simeq |j_0, j_0, -j_0\rangle \langle j_0, j_0, -j_0| + \epsilon^2 \sum_{\alpha_1, \alpha_2} (c_{\alpha_1 \alpha_2})^2 \text{Tr}_{(\Gamma-\ell)} [|\tilde{\square}\tilde{\square}\rangle \langle \tilde{\square}\tilde{\square}|]. \quad (\text{F.8})$$

Calculando-a no limite de spins grandes, $j_0 \gg 1$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \rho_\ell \simeq & \left[1 + \epsilon^2 \sum_{\ell \notin \alpha_1 \cup \alpha_2} (c_{\alpha_1 \alpha_2})^2 \right] |j_0, j_0, -j_0\rangle \langle | + \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{\ell \in \alpha_1 \cup \alpha_2} (c_{\alpha_1 \alpha_2})^2 \left[\left| j_0 + \frac{1}{2}, j_0 + \frac{1}{2}, -j_0 - \frac{1}{2} \right\rangle \langle | \right. \\
 & + \frac{1}{2j_0} \left| j_0 + \frac{1}{2}, j_0 + \frac{1}{2}, -j_0 + \frac{1}{2} \right\rangle \langle | + \frac{1}{2j_0} \left| j_0 + \frac{1}{2}, j_0 - \frac{1}{2}, -j_0 - \frac{1}{2} \right\rangle \langle | \\
 & - \frac{1}{2j_0} \left| j_0 + \frac{1}{2}, j_0 - \frac{1}{2}, -j_0 + \frac{1}{2} \right\rangle \langle j_0 - \frac{1}{2}, j_0 - \frac{1}{2}, -j_0 + \frac{1}{2} | \\
 & - \frac{1}{2j_0} \left| j_0 - \frac{1}{2}, j_0 - \frac{1}{2}, -j_0 + \frac{1}{2} \right\rangle \langle j_0 + \frac{1}{2}, j_0 - \frac{1}{2}, -j_0 + \frac{1}{2} | \\
 & \left. + \left(1 - \frac{1}{j_0} \right) \left| j_0 - \frac{1}{2}, j_0 - \frac{1}{2}, -j_0 + \frac{1}{2} \right\rangle \langle | \right], \quad (\text{F.9})
 \end{aligned}$$

em que $|X\rangle\langle | := |X\rangle\langle X|$ e $|j, m, n\rangle := |j, m\rangle \otimes |j, n\rangle$. A partir do estado acima, as propriedades mostradas de (5.34) a (5.37) seguem imediatamente.