

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Programa de Pós-Graduação em Estatística

Estimação da Intensidade do Tráfego em filas M/M/1/K Utilizando o Método do Mínimo Qui-Quadrado

Monografia apresentada ao
Curso de Especialização em Estatística com ênfase em Indústria e Mercado
Programa de Pós-Graduação em Estatística da
Universidade Federal de Minas Gerais

Autor: João Vitor Madeira Mendes
Orientador: Prof. Roberto Quinino

Belo Horizonte
Dezembro / 2017

João Vitor Madeira Mendes

Estimação da Intensidade do Tráfego em filas M/M/1/K Utilizando o Método do Mínimo Qui-Quadrado

Orientador: Prof. Roberto Quinino

Monografia apresentada ao curso de
Especialização em Estatística do
Instituto de Ciências Exatas da
Universidade Federal de Minas Gerais,
como requisito parcial para obtenção
do título de Especialista em Estatística.

Belo Horizonte
Instituto de Ciências Exatas da UFMG

Dezembro / 2017

A Deus por nos amparar em todos os momentos de nossas vidas e à minha família, que sempre esteve ao meu lado e me deu força, coragem e suporte para seguir até o fim desta jornada.

"O sucesso nasce do querer, da determinação e persistência em se chegar a um objetivo.
Mesmo não atingindo o alvo, quem busca e vence obstáculos, no mínimo fará coisas
admiráveis."
José de Alencar

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, professor Roberto Quinino, pela paciência, estímulo, incentivos e ensinamentos durante todo o curso e especialmente neste trabalho.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para o desenvolvimento deste.

Resumo

Em teoria de filas, um dos principais interesses dos pesquisadores é estudar o seu comportamento, seu processo de formação e analisar algumas características de desempenho, tais como, por exemplo, a intensidade do tráfego, definida como sendo a razão entre a taxa de chegada e a taxa de atendimento. No entanto, sabe-se que na maioria das vezes os parâmetros envolvidos no processo não são conhecidos e precisam ser estimados. Este artigo visa obter estimativas para a intensidade de tráfego em filas markovianas finitas com um único servidor, denominadas $M/M/1/K$, na notação de Kendall (1953). Para tanto utilizaremos o método de estimação do mínimo qui-quadrado. Um exemplo numérico ilustra o procedimento.

Palavras-chave: Filas markoviana, servidor único, intensidade de tráfego, estimação por mínimo qui-quadrado.

Abstract

In queuing theory, one of the researchers' main interests is to study their behavior, their training process and analyze some performance characteristics, such as, for example, the intensity of the traffic, defined as the ratio between arrival rate and the rate of care. However, it is known that most of the time the parameters involved in the process are not known and need to be estimated. This article aims to obtain estimates of traffic intensity in finite Markovian queues with a single server, named $M / M / 1 / K$, in Kendall's notation. For this we will use the estimation method of the chi-square minimum. A numerical example illustrates the procedure.

Key Words: Markovian rows, single server, traffic intensity, chi-square minimum estimation.

SUMÁRIO

No table of contents entries found.

1. Introdução

O uso de filas faz parte do nosso dia-a-dia. No supermercado, no banco, nos centros lotéricos, nos postos de gasolina, enfim, em qualquer lugar podemos nos deparar com esse sistema. Sabe-se que as filas sempre ocorrem quando a procura por um determinado serviço é maior que a capacidade do sistema de prover este serviço. De acordo com Almeida & Cruz (2015) um dado sistema de

filas pode ser descrito por seis componentes, quais sejam: (i) o processo de chegada, (ii) a distribuição do tempo de serviço, (iii) o número de servidores, (iv) a capacidade do sistema, (v) a população de usuários e (vi) a disciplina de atendimento. Em geral os sistemas de filas têm diferentes características, mas suas formas de funcionamento são similares. O grande interesse é otimizar os sistemas de filas, de forma a reduzir seus custos operacionais e melhorar seu desempenho. Sendo assim, o conhecimento de algumas das suas características é importante, tais como a taxa de chegada λ , o tempo médio $1/\mu$ que um servidor leva para executar um serviço, a intensidade do tráfego ρ , definida como sendo a razão entre λ e μ , a esperança do número de clientes no sistema L e o tamanho da fila L_q . Neste artigo trataremos da estimação da intensidade de tráfego ρ em filas finitas com chegada Poisson e taxa de atendimento exponencial. O termo finito indica que estamos supondo que o número de clientes no sistema não pode ultrapassar uma quantidade especificada (neste artigo representaremos por K). Em geral isto é encontrado na maioria das situações reais como supermercados, bancos, etc. Sua representação usual, segundo Kendall (1953), é $M/M/1/K$. O primeiro M indica chegadas Poisson, o segundo M taxa de atendimento exponencial, o número 1 indica um servidor e o último que o sistema possui capacidade máxima de K clientes no sistema.

A literatura apresenta uma grande quantidade de artigos que estudam diversas características de estimação, tanto por métodos inferenciais clássicos, quanto por métodos bayesianos. Entre os métodos clássicos, pode-se citar por exemplo o trabalho de Clarke (1957) que apresenta estimadores de máxima verossimilhança para taxa de chegadas e taxa de atendimento em filas $M/M/1$.

Bhat et al. (1997) mostra que os estimadores de momentos podem ser usados para estimar a taxa de chegada e atendimento em filas M/M/1. Para intensidade de tráfego Choudhury and Borthakur (2008) apresentam estimadores bayesianos e de máxima verossimilhança também para filas M/M/1.

O objetivo deste trabalho é apresentar estimativa para intensidade de tráfego ρ em filas M/M/1/K pelo método do mínimo qui-quadrado avaliando o seu desempenho. Considerando que o método do mínimo qui-quadrado é mais intuitivo que o de máxima verossimilhança segundo Berkson (1980), pretendemos avaliar se este método pode ser considerado uma alternativa de estimação viável. Não encontramos na literatura a utilização do método proposto em sistema de filas.

O trabalho está organizado como se segue. Na seção 2, detalhamos o modelo probabilístico para filas M/M/1/K e o método de estimação do mínimo qui-quadrado. Na seção 3 realizamos um estudo de simulação de Monte Carlo para avaliar o método de estimação do mínimo qui-quadrado para intensidade de tráfego em filas M/M/1/K. Na seção 4 apresentamos um exemplo numérico e conclusões e sugestões de trabalhos futuros são descritas na seção 5.

2. Modelo Probabilístico e o Método do Mínimo Qui-Quadrado

De acordo com Gross et al. (2009), a distribuição estacionária do número de clientes (M) no sistema em uma fila M/M/1/K, considerando $\rho < 1$, é dado por (2.1).

$$P_m \equiv P(M = m) = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \rho^m, & m = 0, 1, \dots, K \end{cases} \quad (2.1)$$

Seja uma amostra aleatória do sistema em que se observa $x_i, i=1, 2, \dots, n$ a quantidade de clientes no sistema. Considere que $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ representa a amostra aleatória de tamanho n . A frequência observada para os valores de $m, m=0, 1, \dots, K$, é indicada por $O_j, j=1, 2, \dots, K+1$. Ou seja, na amostra $\mathbf{X}$ observamos O_1 resultados com $m=0$; O_2 resultados com $m=1$ até O_{K+1} resultados com $m=K$. Já o valor esperado de cada uma das $K+1$ categorias será dada por $E_j = n\pi_j$ em que π_j é dado por:

$$\pi_j = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \rho^{j-1}, & j = 1, \dots, K+1 \end{cases} \quad (2.2)$$

Considere a estatística definida pela expressão (2.3). Dado a amostra $\mathbf{X}$, o valor de ρ que minimiza (2.3), $\hat{\rho}$, será o estimador denominado mínimo qui-quadrado.

$$\chi^2(\rho) = \sum_{j=1}^{K+1} \frac{(O_j - E_j)^2}{E_j} \quad (2.3)$$

De acordo com Harris and Kanji (1983) e Berkson (1980) estimadores baseado no método do mínimo qui-quadrado são consistentes e assintoticamente eficientes. Já o seu desempenho em pequenas amostras precisa ser avaliado e é o objetivo principal desse trabalho.

3. Estudo de Monte Carlo

Todos os algoritmos foram implementados no MATLAB (versão MATLAB® R2008a) e o código está disponível mediante solicitação para fins de ensino e pesquisa diretamente com os autores. Para avaliar a metodologia descrita neste

trabalho, realizamos um estudo de simulação em que o desempenho do estimador mínimo qui-quadrado foi baseada na média das estimativas obtidas. Nós simulamos amostras aleatórias do número de clientes a partir da distribuição dada pela Eq. (2.1), para tamanhos $n = \{50, 100, 500\}$, intensidades de tráfego $\rho = \{0.75, 0.85, 0.95\}$, e capacidade do sistema $K = \{5, 10, 50\}$. Tais valores foram escolhidos para permitir ao leitor avaliar diferentes situações que provavelmente serão encontradas em casos reais. A Tabela 1 mostra os valores médios (Média) e o desvio padrão (SD), para as estimativas obtidas a partir de um procedimento de simulação Monte Carlo replicado 5.000 vezes. Outros valores foram avaliados, mas os resultados (não mostrados) não mudam significativamente. Os resultados foram estratificados por tamanhos de amostra (n), intensidades de tráfego (ρ) e tamanho do sistema (K).

ρ	K	$n=50$		$n=100$		$n=500$	
		Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
0,75	5	0,76061	0,06495	0,75552	0,04747	0,75110	0,02128
	10	0,76955	0,04019	0,76102	0,02853	0,75250	0,01306
	50	0,78782	0,03470	0,78069	0,02580	0,76548	0,01403
0,85	5	0,85704	0,07271	0,85509	0,05483	0,85187	0,02460
	10	0,86191	0,03982	0,85676	0,02895	0,85157	0,01288
	50	0,88128	0,02073	0,87588	0,01542	0,86215	0,00709
0,95	5	0,93284	0,06271	0,94122	0,04889	0,94942	0,02712
	10	0,94909	0,03621	0,95107	0,02825	0,95071	0,01437
	50	0,96240	0,00860	0,95866	0,00659	0,95262	0,00331

Tabela 1: Média e erro padrão dos dados estimados para a intensidade de tráfego (ρ)

Observa-se na Tabela 1 e Figuras 1 e 2 que com o aumento do tamanho amostral as estimativas se aproximam dos valores exatos, além da diminuição do desvio padrão. Destaca-se também que a média do vício e desvio padrão, considerando todos os valores de K , diminuem com aumento de p . Já nas Figuras 3 e 4 é possível avaliar o impacto de K . Observamos que o aumento de K tende a aumentar o vício (absoluto) das estimativas conforme ilustrado na Figura 3. Por outro lado, o desvio padrão médio tende a diminuir com o aumento de K como ilustrado na Figura 4. De maneira geral os resultados indicam que o método de estimativa por mínimo qui-quadrado para filas $M/M/1/K$ apresenta um bom desempenho se o objetivo é obter estimativas razoáveis para o parâmetro p .

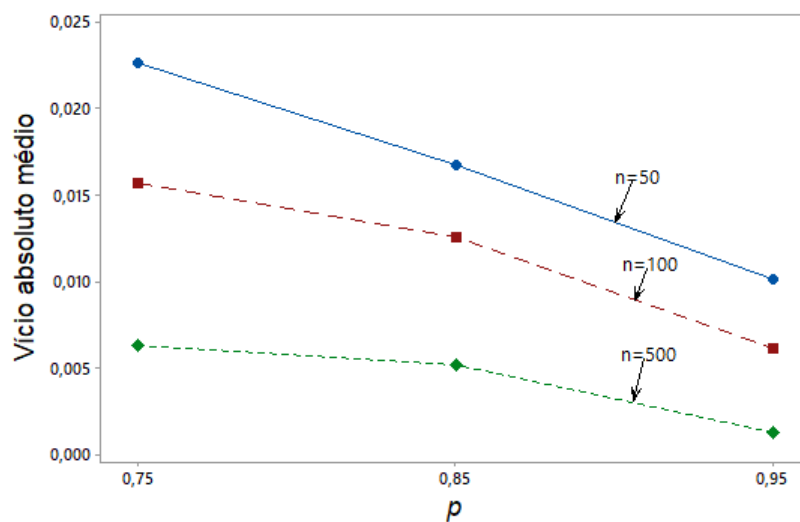


Figura 1: Vício Absoluto versus p

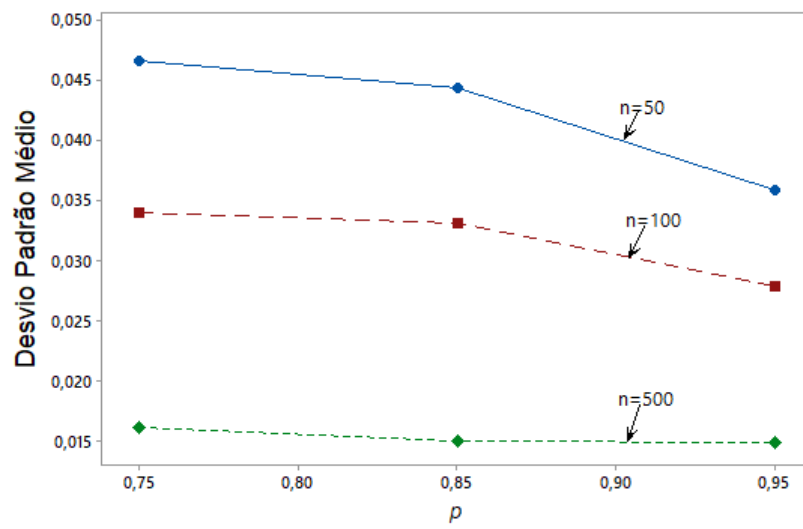


Figura 2: Desvio padrão médio versus ρ

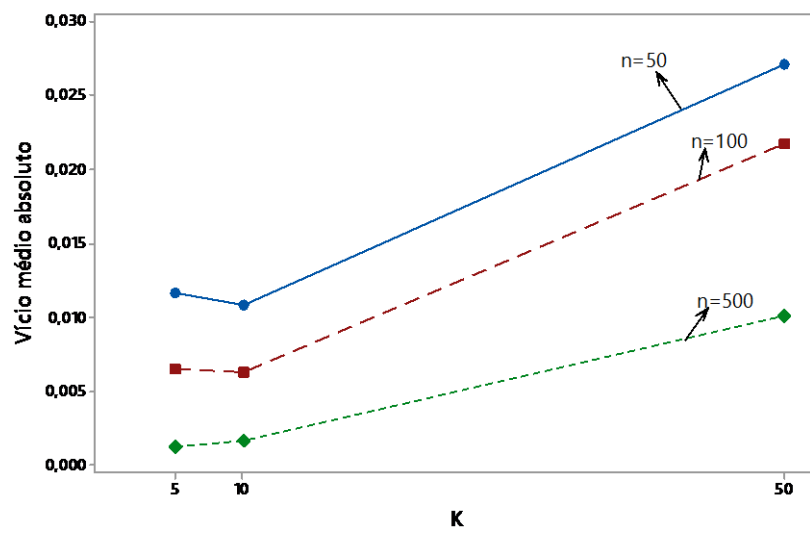


Figura 3: Vício médio absoluto versus K

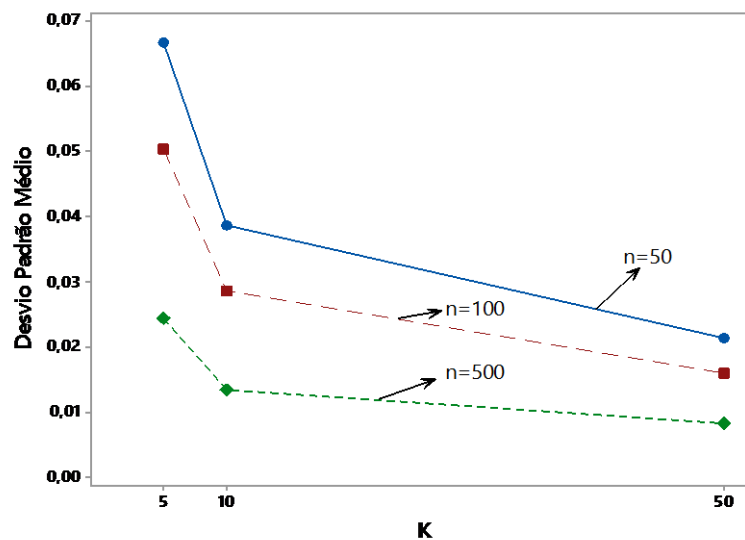


Figura 4: Desvio Padrão médio versus K

4. Exemplo Numérico

Considere um sistema telefônico com uma única linha de atendimento muito requisitada. As ligações chegam de acordo com um processo de Poisson a uma taxa λ por hora. A duração de cada ligação apresenta distribuição exponencial com parâmetro μ minutos. Se a linha estiver ocupada, as ligações são colocadas em espera até um máximo de dez ligações sendo que as demais ligações serão simplesmente perdidas ($K=11$). Uma amostra aleatória de 100 observações do sistema é realizada com objetivo de estimar a intensidade de tráfego (ρ). Cada observação quantifica o número de ligações no Sistema (sendo atendidas por ordem de chegada). Baseado em experiências passadas, as observações foram coletadas com um espaçamento de tempo de 10 minutos o que torna razoável a independência das observações. As categorias possíveis (CAT) e suas frequências observadas (O) são apresentadas na Tabela 2. O objetivo é estimar a intensidade de tráfego ρ .

CAT	O	CAT	O
0	13	6	9
1	13	7	9
2	9	8	8
3	8	9	2
4	10	10	7
5	5	11	7

Tabela 2: Categorias versus frequências observadas

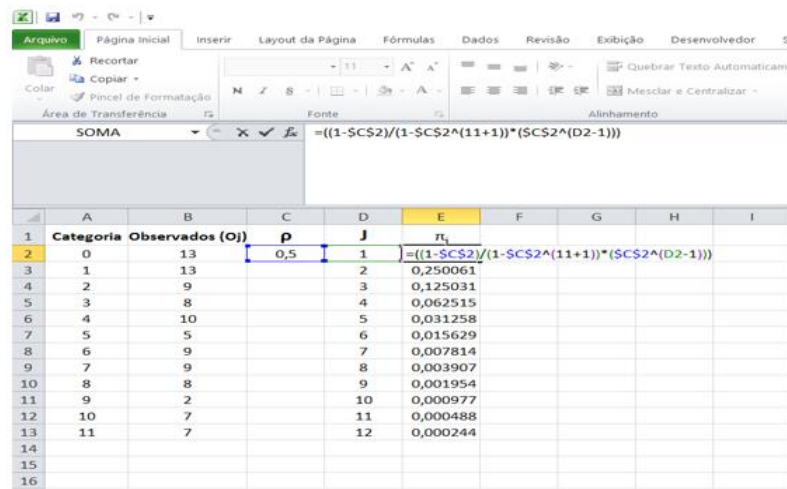
Neste sentido a estimativa da intensidade de tráfego será o valor de p que minimiza (2.3). Para um melhor entendimento usaremos planilhas do Excel em conjunto com o suplemento Solver para calcular a estimativa de p . Usamos o módulo de programação não linear do Solver. Os seguintes passos são necessários:

Passo A: Entre os valores observados associando um valor inicial para p (neste exemplo o valor inicial de p foi 0,5) conforme Figura 5.

	A	B	C	D	E	F
1	Categoria	Observados (O)	p			
2	0	13	0,5			
3	1	13				
4	2	9				
5	3	8				
6	4	10				
7	5	5				
8	6	9				
9	7	9				
10	8	8				
11	9	2				
12	10	7				
13	11	7				
14						
15						
16						
17						

Figura 5: Modelo Excel para o Passo A

Passo B: Calcule o valor de π_j por meio da expressão (2.2) conforme Figura 6.

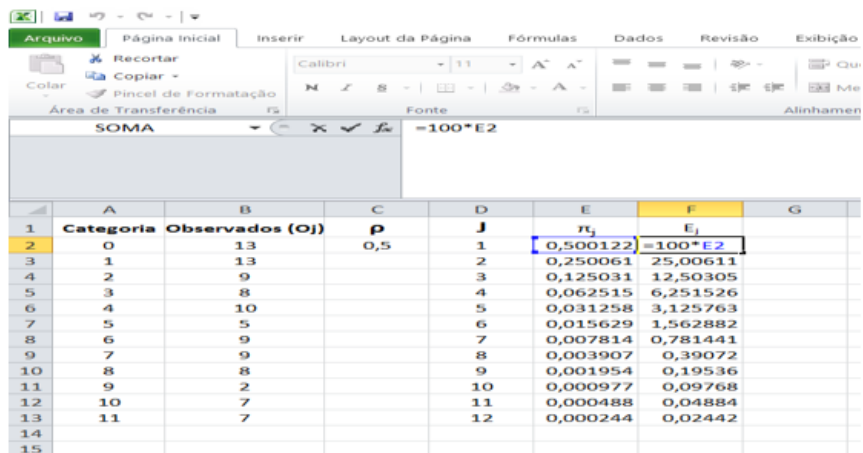


Excel interface showing the formula bar with the expression: $=((1-SC\$2)/(1-SC\$2^{(11+1)})*(SC\$2^{(D2-1)}))$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	Categoria	Observados (Oj)	p	J	π_j				
2	0	13	0,5	1	$=((1-SC\$2)/(1-SC\$2^{(11+1)})*(SC\$2^{(D2-1)}))$				
3	1	13		2	0,250061				
4	2	9		3	0,125031				
5	3	8		4	0,062515				
6	4	10		5	0,031258				
7	5	5		6	0,015629				
8	6	9		7	0,007814				
9	7	9		8	0,003907				
10	8	8		9	0,001954				
11	9	2		10	0,000977				
12	10	7		11	0,000488				
13	11	7		12	0,000244				
14									
15									
16									

Figura 6: Modelo Excel para o Passo B

Passo C: Calcule o valor de $E_j = n\pi_j$ conforme Figura 7.



Excel interface showing the formula bar with the expression: $=100*E2$

	A	B	C	D	E	F	G
	Categoria	Observados (Oj)	p	J	π_j	E_j	
2	0	13	0,5	1	0,500122	$=100*E2$	
3	1	13		2	0,250061	25,00611	
4	2	9		3	0,125031	12,50305	
5	3	8		4	0,062515	6,251526	
6	4	10		5	0,031258	3,125763	
7	5	5		6	0,015629	1,562882	
8	6	9		7	0,007814	0,781441	
9	7	9		8	0,003907	0,39072	
10	8	8		9	0,001954	0,19536	
11	9	2		10	0,000977	0,09768	
12	10	7		11	0,000488	0,04884	
13	11	7		12	0,000244	0,02442	
14							
15							

Figura 7: Modelo Excel para o Passo C

Passo D: Calcule o valor de $\chi^2(\rho)$ por meio da expressão (2.3) conforme Figuras 8 e 9.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Categoria	Observados (O_j)	ρ	J	π_j	E_j	χ_j^2	
2	0	13	0,5	1	0,500122	50,01221	=((B2-F2)^2)/F2	
3	1	13		2	0,250061	25,00611	5,764455	
4	2	9		3	0,125031	12,50305	0,98147	
5	3	8		4	0,062515	6,251526	0,489026	
6	4	10		5	0,031258	3,125763	15,11795	
7	5	5		6	0,015629	1,562882	7,558975	
8	6	9		7	0,007814	0,781441	86,43613	
9	7	9		8	0,003907	0,39072	189,7001	
10	8	8		9	0,001954	0,19536	311,7954	
11	9	2		10	0,000977	0,09768	37,04768	
12	10	7		11	0,000488	0,04884	989,3238	
13	11	7		12	0,000244	0,02442	1992,574	

Figura 8: Modelo Excel para o Passo D

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Categoria	Observados (O_j)	ρ	J	π_j	E_j	χ_j^2	Soma χ_j^2	
2	0	13	0,5	1	0,500122	50,01221	27,39138	=soma(G2:G13)	
3	1	13		2	0,250061	25,00611	5,764455		
4	2	9		3	0,125031	12,50305	0,98147		
5	3	8		4	0,062515	6,251526	0,489026		
6	4	10		5	0,031258	3,125763	15,11795		
7	5	5		6	0,015629	1,562882	7,558975		
8	6	9		7	0,007814	0,781441	86,43613		
9	7	9		8	0,003907	0,39072	189,7001		
10	8	8		9	0,001954	0,19536	311,7954		
11	9	2		10	0,000977	0,09768	37,04768		
12	10	7		11	0,000488	0,04884	989,3238		
13	11	7		12	0,000244	0,02442	1992,574		

Figura 9: Modelo Excel para o Passo D

Passo E: Use o Solver do Excel para encontrar o ρ que minimiza $\chi^2(\rho)$ conforme figuras 10, 11 e 12.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Categoria	Observados (Oj)	ρ	J	π_j	E_j	x_j^2	Soma x_j^2
2	0	13	0,5	1	0,500122	50,01221	27,39138	3664,181
3	1	13		2	0,250061	25,00611	5,764455	
4	2	9		3	0,125031	12,50305	0,86147	
5	3	8		4	0,062515	6,251526	0,489206	
6	4	10		5	0,031258	3,125763	0,111795	
7	5	5		6	0,015629	1,562882	7,558975	
8	6	9		7	0,007814	0,781441	86,43613	
9	7	9		8	0,003907	0,39072	185,7001	
10	8	8		9	0,001954	0,19538	111,7954	
11	9	2		10	0,000977	0,09768	37,04768	
12	10	7		11	0,000488	0,04884	989,3238	
13	11	7		12	0,000244	0,02442	1992,574	

Figura 10: Modelo Excel para o Passo E

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Categoria	Observados (Oj)	ρ	J	π_j	E_j	x_j^2	Soma x_j^2
2	0	13	0,5	1	0,500122	50,01221	27,39138	3664,181
3	1	13		2	0,250061	25,00611	5,764455	
4	2	9		3	0,125031	12,50305	0,86147	
5	3	8		4	0,062515	6,251526	0,489206	
6	4	10		5	0,031258	3,125763	0,111795	
7	5	5		6	0,015629	1,562882	7,558975	
8	6	9		7	0,007814	0,781441	86,43613	
9	7	9		8	0,003907	0,39072	185,7001	
10	8	8		9	0,001954	0,19538	111,7954	
11	9	2		10	0,000977	0,09768	37,04768	
12	10	7		11	0,000488	0,04884	989,3238	
13	11	7		12	0,000244	0,02442	1992,574	

Figura 11: Modelo Excel para o Passo E

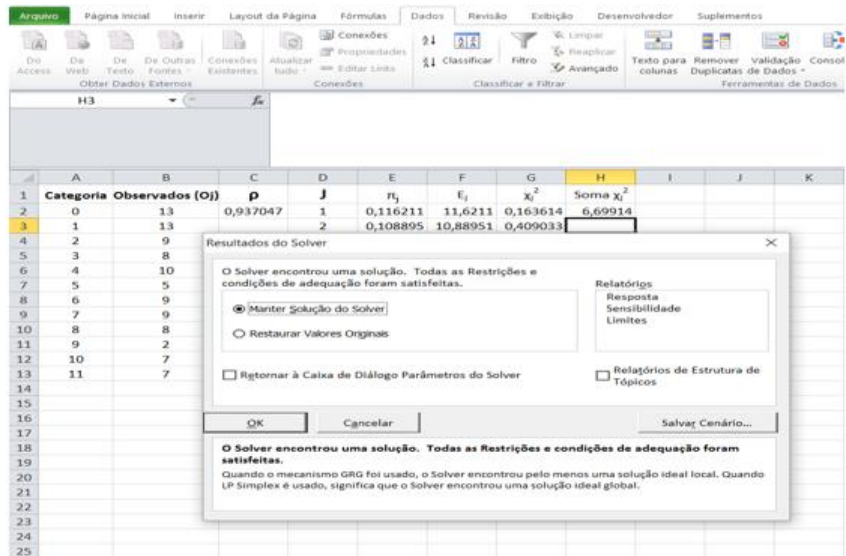


Figura 12: Modelo Excel para o Passo E

O valor encontrado para estimativa da intensidade de tráfego foi $\hat{\rho} = 0.94$.

5. Conclusões e Sugestão de Estudos Futuros

Para estimarmos a intensidade de tráfego para filas $M/M/1/K$ utilizamos o procedimento de mínimo qui-quadrado. O procedimento apresentado mostrou-se eficiente gerando resultados satisfatórios com o uso de tamanho amostrais usuais na prática. O leitor interessado pode reproduzir facilmente os resultados alcançados no exemplo por meio da planilha Excel que é um software presente na maioria das organizações empresariais.

Considerando que o procedimento de estimação por mínimo-quadrado é consistente e assintoticamente eficiente, propriedade também do estimador de máxima verossimilhança, uma continuidade da pesquisa seria compará-los em amostras pequenas por meio do erro quadrático médio. Já para construção de intervalos de confiança uma alternativa seria utilizar o procedimento Bootstrap.

Referências Bibliográficas

- Almeida, M. A. C., Cruz, F. R. B. (2015) “Análise de Desempenho em Filas M/M/1 Usando uma Abordagem Bayesiana”, Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, 3 (2), 1-7.
- Berkson, J. 1980. ‘Minimum Chi-Square, Not Maximum Likelihood’. The Annals of Statistics, 8: 457–487.
- Bhat, U. N., Miller, G. K., Rao, S. S. (1997) “Statistical Analysis of Queueing Systems”, Frontiers in Queueing: Models and Applications in Science and Engineering. CRC Press, Probability and Stochastics Series. Edited by Jewgeni H. Dshalalow.
- Choudhury, A. & Borthakur, A. C. (2008) “Bayesian inference and prediction in the single server Markovian queue”, *Metrika*, vol. 67, 371-383.
- Clarke, A. B. (1957) “Maximum likelihood estimates in a simple queue”, *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 28, 1036-1040.
- Gross, D.; Shortle, J. F.; Thompson, J. M. & Harris, C. M. (2009). *Fundamentals of queueing theory*, 4th ed., Wiley-Interscience, New York, NY.
- Harris, R. R. and G. K. Kanji (1983). On the use of minimum chi-square estimation, *The Statistician* 23, 379–394.
- Kendall, D. G. (1953). “Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of imbedded Markov chains”, *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 24, pp. 338-354.
- MATLAB® Release R2008a, The MathWorks™, Inc., Natick, Massachusetts, USA.