

Universidade Federal de Minas Gerais
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Investigação de Novas Abordagens para Otimização Multiobjetivo em Algoritmos Evolutivos

Lucas de Souza Batista

Texto submetido à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Sistemas de Computação e Telecomunicações
Linha de pesquisa: Otimização

Orientador:
Jaime A. Ramírez

Co-orientador:
Frederico G. Guimarães

Belo Horizonte, setembro de 2011.

B333i

Batista, Lucas de Souza.

Investigação de novas abordagens para otimização multiobjetivo em algoritmos evolutivos [recurso eletrônico] /Lucas de Souza Batista. - 2011.

1 recurso online (xviii,164 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Jaime Arturo Ramírez.

Coorientador: Frederico Gadelha Guimarães.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndices: f.147-155.

Bibliografia: f. 157-164.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia Elétrica - Teses. 2. Otimização multiobjetivo - Teses. 3. Algoritmos - Teses. 4. Dominância de Pareto – Teses. I. Ramírez, Jaime Arturo. II. Guimarães, Frederico Gadelha. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.

CDU: 621.3(043)

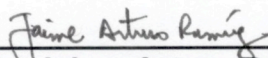
**"Investigação de Novas Abordagens para Otimização
Multiobjetivo em Algoritmos Evolutivos"**

Lucas de Souza Batista

Tese de Doutorado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 22 de setembro de 2011.

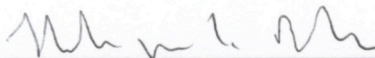
Por:




Prof. Dr. Jaime Arturo Ramirez
DEE (UFMG) - Orientador



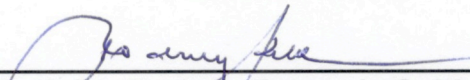
Prof. Dr. Frederico Gadelha Guimarães
DEE (UFMG) - Co-Orientador



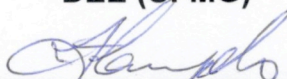
Prof. Dr. Helio José Correa Barbosa
LNCC (LNCC)



Prof. Dr. Marcone Jamilson Freitas Souza
DCC (UFOP)



Prof. Dr. Rodney Resende Saldanha
DEE (UFMG)



Prof. Dr. Felipe Campelo França Pinto
DEE (UFMG)

Bom, para não fugir à regra, dedico este trabalho ao meu amor, Érica,
que nada sabe sobre algoritmos evolutivos, mas ...
ouviu muito falar deles.

“O assunto mais importante do mundo pode ser simplificado até ao ponto em que todos possam apreciá-lo e compreendê-lo. Isso é – ou deveria ser – a mais elevada forma de arte.”

— Charles Darwin, 1809–1882

Investigação de Novas Abordagens para Otimização Multiobjetivo em Algoritmos Evolutivos

Resumo

Formas relaxadas de dominância Pareto têm se mostrado o caminho mais eficiente por meio do qual algoritmos evolucionários multiobjetivo progridem em direção ao conjunto Pareto-ótimo, com soluções bem distribuídas ao longo da fronteira estimada. A técnica mais popular é a relação ϵ -dominância, utilizada como estratégia de atualização da população de arquivo em vários destes algoritmos. Apesar da grande utilidade do conceito de ϵ -dominância, existem ainda dificuldades quanto à especificação de um valor apropriado para ϵ que possibilite estimar o número desejado de pontos não-dominados. Além disso, várias soluções viáveis podem ser perdidas em função da discretização adotada por este mecanismo, impactando a diversidade do conjunto aproximado. Com o objetivo de contornar estas limitações, propõe-se uma variante da estratégia ϵ -dominância, chamada cone ϵ -dominância, a qual mantém as propriedades de convergência observadas na técnica ϵ -dominância, provê um melhor controle sobre a resolução (qualidade) da fronteira Pareto estimada, e possibilita também uma melhor distribuição das soluções ao longo da fronteira. Este trabalho apresenta um estudo crítico sobre a relação cone ϵ -dominância, onde o seu desempenho é comparado com as técnicas ϵ - e Pareto-dominância em dezesseis problemas conhecidos da literatura. Para avaliar as possíveis diferenças entre estes mecanismos, realiza-se uma análise estatística dos resultados considerando-se quatro indicadores de qualidade, visando mensurar a convergência e a diversidade das soluções estimadas. Os resultados obtidos mostram que o algoritmo evolucionário multiobjetivo baseado na relação cone ϵ -dominância, nomeado cone ϵ -MOEA, foi significativamente superior às outras técnicas testadas, principalmente, em termos da diversidade entre as soluções Pareto-ótimas encontradas, com ganhos de aproximadamente 16% sobre o ϵ -MOEA e 22% sobre o NSGA-II. Ainda com relação à métrica de diversidade, o método cone ϵ -MOEA obteve ganhos superiores a 70% em problemas individuais. Diferenças significativas são apresentadas também para os outros indicadores testados, porém com pequenos tamanhos de efeito, sustentando a ideia de que a relação cone ϵ -dominância mantém as propriedades de convergência da técnica ϵ -dominância enquanto melhora as características de diversidade dos conjuntos não-dominados aproximados.

Investigation of New Approaches for Multiobjective Optimization in Evolutionary Algorithms

Abstract

Relaxed forms of Pareto dominance have been shown to be the most effective way in which evolutionary algorithms can progress towards the Pareto-optimal set with a widely spread distribution of solutions. A popular concept is the ϵ -dominance technique, which has been employed as an archive update strategy in some multiobjective evolutionary algorithms (MOEA). In spite of the great usefulness of the ϵ -dominance concept, there are still difficulties in computing an appropriate value of ϵ that provides the desirable number of nondominated points. Additionally, several viable solutions may be lost depending on the hypergrid adopted, impacting the diversity of the estimate set. In order to remedy these limitations, we propose a variant of the ϵ -dominance criterion, named cone ϵ -dominance, which maintains the good convergence properties of ϵ -dominance while providing a better control over the resolution of the estimated Pareto front and improving the spread of solutions along the front. This work presents a comprehensive study of the cone ϵ -approach, comparing its performance with the ϵ -dominance and the standard Pareto relation on sixteen well-known benchmark problems. To evaluate the possible differences between these approaches, a designed statistical experiment is performed for four performance metrics, measuring both diversity and convergence to the Pareto front. The results obtained show that a steady-state cone ϵ -MOEA is able to significantly outperform the other techniques tested in terms of finding well spread Pareto-optimal solutions, with an improvement for the diversity metric of about 16% over the ϵ -MOEA and 22% over the NSGA-II, and gains of up to 71% on individual problems. Statistically significant differences are also present for the other metrics tested, but with much smaller effect sizes, strongly suggesting the cone ϵ -criterion as a dominance relation capable of maintaining the good convergence properties of the ϵ -dominance while enhancing the diversity characteristics of the solution sets found.

Sumário

Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xvii
Lista de Algoritmos	1
Nomenclatura	3
1. Introdução	7
1.1. Apresentação	7
1.2. Contexto Histórico	10
1.3. Conceitos Básicos	12
1.4. Condições de Otimalidade	15
1.5. Estrutura Geral de um AE Multiobjetivo	17
1.6. Algumas Aplicações	20
1.7. Objetivos da Tese	20
1.8. Contribuições da Tese	21
1.9. Estrutura do Trabalho	22
2. Dominância Pareto Relaxada	25
2.1. Introdução	25
2.2. Formas Relaxadas de Dominância Pareto: Trabalhos Relacionados	26
2.3. Estratégia α -Dominância	30
2.4. Estratégia ϵ -Dominância	34
2.4.1. Conceitos Básicos	35
2.4.2. Preservação de um Conjunto Pareto ϵ -Aproximado	39
2.4.3. Preservação de um Conjunto ϵ -Pareto-Ótimo	40
2.4.4. Principais Limitações da Estratégia ϵ -Dominância	43
2.5. Estratégia $\text{pa}\epsilon$ -Dominância	46
2.5.1. Determinação do Parâmetro ϵ	48

2.5.2.	Determinação do Vetor de Índices dos Hipercubos	48
2.5.3.	Principais Limitações da Estratégia $\rho\epsilon$ -Dominância	51
2.6.	Conclusão	52
3.	Pareto Cone ϵ-Dominância	53
3.1.	Introdução	53
3.2.	Cone ϵ -Dominância: Uma Nova Forma Relaxada de Dominância Pareto .	54
3.2.1.	Definições Gerais	56
3.2.2.	Preservação de um Conjunto Cone ϵ -Pareto-Ótimo	64
3.2.3.	Vantagens e Limitações da Técnica Cone ϵ -Dominância	71
3.2.4.	Generalização da Estratégia Cone ϵ -Dominância	78
3.3.	Conclusão	84
4.	Resultados	85
4.1.	Introdução	85
4.2.	Experimentos e Validação da Técnica Proposta	86
4.2.1.	Preservação de Diversidade no Domínio de Objetivos	87
4.2.2.	Problemas Analíticos	88
4.2.3.	Métricas de Avaliação de Desempenho	91
4.2.4.	Ajuste de Parâmetros	93
4.2.5.	Planejamento Estatístico dos Experimentos	99
4.3.	Discussão dos Resultados	102
4.3.1.	Análise Geral	102
4.3.2.	Análise Baseada nas Propriedades dos Problemas	109
4.4.	Outras Considerações sobre a Técnica Proposta	121
4.4.1.	Convergência e Diversidade em Função da Variação de ϵ	121
4.4.2.	Uma Alternativa para Testes Bi- e Tri-Objetivo	125
4.4.3.	Uma Alternativa para Testes com Múltiplos Objetivos	127
4.5.	Conclusão	133
5.	Conclusões	135
5.1.	Conclusões	136
5.2.	Contribuições da Tese	140
5.3.	Sugestões para Trabalhos Futuros	141
A.	Suporte Matemático	147
B.	Dados Estatísticos	151

Lista de Figuras

1.1.	Ilustração das condições de KKT em um problema bi-objetivo	16
1.2.	Representação de fronteiras em um problema bi-objetivo	18
2.1.	Ilustração do conceito de α -dominância	31
2.2.	Ilustração do efeito da relação α -dominância em função do valor de α . . .	33
2.3.	Ilustração dos conceitos de dominância e ϵ -dominância	36
2.4.	Ilustração dos conceitos de Pareto ϵ -aproximado e ϵ -Pareto-ótimo	37
2.5.	Ilustra a relação entre o valor de ϵ e o tamanho limite do arquivo \mathcal{A}	42
2.6.	Ilustra a perda de soluções Pareto devido o uso da relação ϵ -dominância .	44
2.7.	Discretização do espaço de objetivos usando ϵ -dominância multiplicativa	45
2.8.	Discretização do espaço de objetivos usando ϵ - e $\text{pa}\epsilon$ -dominância	50
3.1.	Ilustra os conceitos de ϵ -dominância e cone ϵ -dominância	55
3.2.	Ilustra o hipervolume dominado por ϵ -dominância e cone ϵ -dominância .	58
3.3.	Ilustra o conceito de não-implicabilidade dominância e cone-dominância .	61
3.4.	Ilustração dos conceitos de Pareto cone ϵ -aprox. e cone ϵ -Pareto-ótimo .	63
3.5.	Ilustra as etapas de atualização do conjunto cone ϵ -Pareto	66
3.6.	Ilustra a influência da matriz Ψ considerando-se fronteiras conexas	70
3.7.	Ilustra a influência da matriz Ψ considerando-se fronteiras desconexas . .	71
3.8.	Desempenho da técnica cone ϵ -dominância frente a uma front. conexa - A	72

3.9. Influência de κ no desempenho da estratégia cone ϵ -dominância	72
3.10. Desempenho da técnica cone ϵ -dominância frente a uma front. conexa - B	75
3.11. Desempenho da técnica cone ϵ -dominância frente a uma front. desconexa	75
3.12. Discretização do espaço de objetivos usando cone ϵ - e $\text{pa}\epsilon$ -dominância . .	77
3.13. Generalização entre cone ϵ -dominância e ϵ -dominância	78
3.14. Generalização entre cone ϵ -dominância e Pareto dominância	79
3.15. Generalização entre cone ϵ -dominância e α -dominância	80
3.16. Generalização da estratégia cone ϵ -dominância – A	80
3.17. Generalização da estratégia cone ϵ -dominância – B	81
3.18. Mecanismo alternativo para o controle da região cone-dominada	83
4.1. Ilustração do mecanismo “crowding-distance” usado pelo NSGA-II	88
4.2. Soluções eficientes contidas nos hipercubos – problema Deb52	96
4.3. Soluções eficientes contidas nos hipercubos – problema Pol	97
4.4. Distribuição das médias por bootstrap nas métricas Δ , γ , e HV	105
4.5. Distribuição das médias por bootstrap na métrica CS	106
4.6. Soluções eficientes geradas para o problema DTLZ1	111
4.7. Soluções eficientes geradas para o problema DTLZ2	112
4.8. Soluções eficientes geradas para o problema DTLZ3	114
4.9. Soluções eficientes geradas para o problema DTLZ4	115
4.10. Soluções eficientes geradas para o problema DTLZ7	117
4.11. Soluções eficientes geradas para o problema DTLZ8	118
4.12. Soluções eficientes geradas para o problema DTLZ9	120
4.13. Convergência estimada em função da variação do parâmetro ϵ	122
4.14. Diversidade estimada em função da variação do parâmetro ϵ	124

4.15. Critério alternativo para problemas bi- e tri-objetivo	126
4.16. Critério alternativo para problemas com múltiplos objetivos	129
4.17. Soluções eficientes geradas para o problema DTLZ9 ($m = 4$)	132

Lista de Tabelas

4.1. Problemas analíticos adotados no estudo experimental – A	89
4.2. Problemas analíticos adotados no estudo experimental – B	90
4.3. Índices de distribuição de cruzamento e mutação usados pelos algoritmos	93
4.4. Valores calculados e estimados para $\epsilon = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m\}$	95
4.5. Influência do parâmetro κ no desempenho do método cone ϵ -MOEA . . .	98
4.6. Comparação entre cone ϵ -MOEA, ϵ -MOEA e NSGA-II – prob. bi-objetivo	107
4.7. Comparação entre cone ϵ -MOEA, ϵ -MOEA e NSGA-II – prob. tri-objetivo	108
4.8. Comparação entre p ϵ -MOEA, cone ϵ -MOEA e NSGA-II	127
4.9. Parâmetros para a otimização de problemas com múltiplos objetivos . . .	130
4.10. Comparação entre θ -MOEA, ϵ -MOEA e NSGA-II	131
B.1. Comparação entre cone ϵ -MOEA, ϵ -MOEA e NSGA-II (valor-p) – A . . .	152
B.2. Comparação entre cone ϵ -MOEA, ϵ -MOEA e NSGA-II (valor-p) – B . . .	153
B.3. Comparação entre p ϵ -MOEA, cone ϵ -MOEA e NSGA-II (valor-p)	154
B.4. Comparação entre θ -MOEA, ϵ -MOEA e NSGA-II (valor-p)	154

Lista de Algoritmos

1.1. Ciclo básico de funcionamento de um AE multiobjetivo	18
2.1. Função de atualização do conjunto Pareto ϵ -aproximado	39
2.2. Função de atualização do conjunto ϵ -Pareto	41
2.3. Define os índices do hipercubo em função da relação ϵ -dominância	41
2.4. Define os índices do hipercubo em função da relação $pa\epsilon$ -dominância	49
3.1. Define os índices do hipercubo em função da relação cone ϵ -dominância	57
3.2. Função de atualização do conjunto cone ϵ -Pareto	65

Nomenclatura

A menos que seja definido de forma diferente no texto, a notação empregada neste trabalho assume o significado listado a seguir.

\mathbf{x}	Vetor de variáveis de otimização
$\mathbf{f}(\cdot)$	Vetor de funções objetivo
$\mathbf{g}(\cdot)$	Vetor de funções restritivas de desigualdade
$\mathbf{h}(\cdot)$	Vetor de funções restritivas de igualdade
m	Número de funções objetivo
n	Número de variáveis de otimização
p	Número de restrições de desigualdade
q	Número de restrições de igualdade
x_k	Variável de otimização
Ω	Conjunto de pontos factíveis no espaço de busca
\mathbb{X}	Espaço de parâmetros definido pelo domínio das variáveis de otimização
\mathbb{Y}	Espaço de objetivos definido pelo mapeamento do espaço de parâmetros através do vetor de funções objetivo
N	Tamanho da população evolutiva de um algoritmo evolucionário
$\mathcal{A}(t)$	População de arquivo da geração t de um algoritmo evolucionário
$\mathcal{I}(t)$	População evolutiva da geração t de um algoritmo evolucionário
$\Phi(t)$	Valores de aptidão dos vetores contidos em $\mathcal{A}(t)$
$\mathcal{S}(t)$	População evolutiva selecionada para ser submetida ao processo de variação
t	Contador de iterações (gerações)

\mathcal{P}	Conjunto de soluções Pareto-ótimas definido no espaço de busca (conjunto Pareto-ótimo)
\mathcal{F}	Conjunto de soluções Pareto-ótimas definido no espaço de objetivos (fronteira Pareto-ótima)
\mathcal{X}	Conjunto arbitrário de soluções factíveis definido no espaço de busca
\mathcal{Y}	Conjunto arbitrário de soluções factíveis definido no espaço de objetivos
\mathcal{X}^*	Conjunto de soluções localmente ótimas definido no espaço de busca (conjunto localmente ótimo)
\mathcal{Y}^*	Conjunto de soluções localmente ótimas definido no espaço de objetivos (fronteira localmente ótima)
$\mathcal{X}_{(\mathcal{P})}$	Conjunto arbitrário factível que contém o conjunto Pareto-ótimo
$\mathcal{Y}_{(\mathcal{F})}$	Conjunto arbitrário factível que contém a fronteira Pareto-ótima
$\mathcal{X}_{(\mathcal{P})}^*$	Conjunto localmente ótimo de $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})}$
$\mathcal{Y}_{(\mathcal{F})}^*$	Fronteira localmente ótima de $\mathcal{Y}_{(\mathcal{F})}$
$P(\cdot)$	Denota o conjunto não-dominado do seu argumento
$F(\cdot)$	Denota a fronteira não-dominada do seu argumento
$\mathcal{X}_{\bar{\epsilon}}$	Conjunto não ϵ -dominado de \mathcal{X}
$P_{\bar{\epsilon}}(\cdot)$	Denota o conjunto não ϵ -dominado do seu argumento
$\mathcal{F}_{\bar{\epsilon}}$	Fronteira não ϵ -dominada
\mathcal{X}_{ϵ}	Conjunto Pareto ϵ -aproximado de $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})}$
$P_{\epsilon}(\cdot)$	Denota o conjunto Pareto ϵ -aproximado do seu argumento
\mathcal{F}_{ϵ}	Fronteira Pareto ϵ -aproximada
\mathcal{X}_{ϵ}^*	Conjunto ϵ -Pareto-ótimo de $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})}$
$P_{\epsilon}^*(\cdot)$	Denota o conjunto ϵ -Pareto-ótimo do seu argumento
\mathcal{F}_{ϵ}^*	Fronteira ϵ -Pareto-ótima
$\mathcal{X}^{(t)}$	Conjunto contendo todos os vetores gerados ao longo do processo evolutivo até a iteração t
$\mathcal{Y}^{(t)}$	Imagem do conjunto $\mathcal{X}^{(t)}$ mapeada no espaço de objetivos por meio da função vetorial $\mathbf{f}(\cdot)$

$\mathcal{X}_{\widetilde{cone}}$	Conjunto não cone ϵ -dominado de \mathcal{X}
$P_{\widetilde{cone}}(\cdot)$	Denota o conjunto não cone ϵ -dominado do seu argumento
$\mathcal{F}_{\widetilde{cone}}$	Fronteira não cone ϵ -dominada
\mathcal{X}_{cone}	Conjunto Pareto cone ϵ -aproximado de $\mathcal{X}_{(P)}$
$P_{cone}(\cdot)$	Denota o conjunto Pareto cone ϵ -aproximado do seu argumento
\mathcal{F}_{cone}	Fronteira Pareto cone ϵ -aproximada
\mathcal{X}_{cone}^*	Conjunto cone ϵ -Pareto-ótimo de $\mathcal{X}_{(P)}$
$P_{cone}^*(\cdot)$	Denota o conjunto cone ϵ -Pareto-ótimo do seu argumento
\mathcal{F}_{cone}^*	Fronteira cone ϵ -Pareto-ótima
γ	Indicador de convergência das soluções estimadas
Δ	Indicador de diversidade das soluções estimadas
HV	Indicador do hipervolume dominado pelas soluções estimadas
CS	Indicador da relação de cobertura entre dois conjuntos de soluções não-dominadas
α	Parâmetro multiplicativo adotado pela estratégia α -dominância
κ	Parâmetro que controla a região cone-dominada
ϵ	Parâmetro de controle empregado pelas técnicas ϵ -, $pa\epsilon$ -, e cone ϵ -dominância
s	Parâmetro que controla a característica da aproximação analítica utilizada pela relação $pa\epsilon$ -dominância
$\mathbf{b}(\cdot)$	Vetor que define a origem do hipercubo que contém a solução em seu argumento
\mathcal{X}_α	Conjunto de soluções α -Pareto-ótimas definido no espaço de busca
\mathcal{Y}_0	Estimação inicial da fronteira Pareto-ótima obtida pela estratégia $pa\epsilon$ -dominância
\mathcal{C}	Cone gerado no espaço de objetivos
Ψ	Matriz cone-dominância
\mathcal{A}^*	Amostra detalhada da fronteira Pareto-ótima global definida no espaço de objetivos
T	Número desejado de soluções não-dominadas na população final de arquivo

- $\lfloor \cdot \rfloor$ Retorna o menor inteiro mais próximo do valor em seu argumento
- $\lceil \cdot \rceil$ Retorna o maior inteiro mais próximo do valor em seu argumento
- $|\cdot|$ Cardinalidade de um conjunto, se o argumento é um conjunto; ou valor absoluto se o argumento é uma quantidade escalar
- $\mathcal{O}(\cdot)$ Ordem do número de operações computacionais

Capítulo 1.

Introdução

“Talento é 1% inspiração e 99% transpiração.”

— Thomas A. Edison, 1847–1931

1.1. Apresentação

Algoritmos Evolucionários (AEs) representam metaheurísticas que são baseadas no princípio da evolução natural de populações e na proliferação dos indivíduos mais aptos. Estes métodos são comumente caracterizados pela presença de mecanismos artificiais inspirados da biologia, tais como, reprodução, mutação, recombinação, e seleção. De forma geral, os AEs vêm ganhando uma crescente popularidade no campo científico e das engenharias, principalmente, para a realização de complexas tarefas de otimização e de classificação de dados (Goldberg 1989, Corne et al. 1999, Fogel 1999, Eiben & Smith 2003), as quais comumente não são resolvidas adequadamente por métodos tradicionais. Essa popularidade tem motivado também a criação de inúmeras subdisciplinas na área da computação evolucionária no meio acadêmico. Dentre elas se destaca a otimização evolucionária multiobjetivo, a qual se refere à aplicação de algoritmos evolutivos para a solução de problemas com múltiplos critérios a serem considerados simultaneamente. Em linhas gerais, este trabalho discorre sobre novas abordagens relacionadas a este tema.

A solução de problemas de engenharia implica, na maioria das vezes, na otimização envolvendo múltiplos objetivos, frequentemente conflitantes. Estes problemas de otimização não possuem uma única solução ótima¹, mas um conjunto de soluções ditas não-comparáveis, conhecidas como soluções não-dominadas ou soluções Pareto-ótimas, em que cada ponto representa diferentes graus de importância para cada um dos objetivos.

Para tratar essa classe de problemas, várias técnicas de programação matemática foram desenvolvidas desde 1950 (Miettinen 1998, Ehrgott 2005). Entretanto, as mesmas apresentam limitações que podem comprometer o desempenho do método e também a qualidade dos resultados (Coello Coello 2006):

- A maioria delas não é capaz de encontrar múltiplas soluções em uma única execução do algoritmo;
- Geralmente são susceptíveis à forma da fronteira Pareto-ótima², e podem falhar quando esta é côncava ou desconexa;
- Algumas exigem que as funções objetivo e restrições sejam diferenciáveis;
- Aplicações múltiplas destes métodos não garantem a estimação de soluções bem distribuídas ao longo da fronteira Pareto.

Por outro lado, os algoritmos evolucionários são geralmente muito eficientes e robustos, pois conduzem o processo de busca considerando simultaneamente uma população de soluções candidatas, o que permite a determinação de vários membros do conjunto Pareto-ótimo após uma única execução do método. Além disso, devido a sua natureza heurística, os algoritmos evolucionários são menos susceptíveis às características específicas dos problemas de otimização, e.g., forma ou continuidade da fronteira Pareto-ótima. De maneira geral, estes métodos tentam estimar um conjunto de soluções que melhor descreva o conjunto Pareto-ótimo real, permitindo assim ao usuário considerar soluções alternativas para o problema.

¹Um problema de otimização multiobjetivo apresentará uma única solução somente se os objetivos não forem conflitantes. Neste caso, a otimização de cada um dos objetivos, considerados isoladamente, irá conduzir à determinação da mesma solução ótima.

²A *fronteira Pareto-ótima* referente a um dado problema de otimização corresponde à imagem do conjunto Pareto-ótimo mapeada no espaço de objetivos. Esta definição é melhor conceituada na seção 1.3.

Dizer que as soluções estimadas descrevem o conjunto Pareto-ótimo global, ou que são representativas deste conjunto, significa que as mesmas atendem aos critérios de convergência e diversidade descritos em (Zitzler et al. 2001):

- A fronteira Pareto estimada deve estar o mais próximo possível da fronteira Pareto-ótima global; e
- As soluções estimadas deverão estar bem distribuídas ao longo da fronteira Pareto encontrada.

Entretanto, satisfazer simultaneamente a esses dois critérios representa uma tarefa difícil para muitos algoritmos de otimização.

Nas últimas décadas, vários algoritmos evolucionários foram sugeridos na literatura e utilizados para a solução de problemas de otimização multiobjetivo. Alguns exemplos destes métodos são “Vector Evaluated Genetic Algorithm” (VEGA) (Schaffer 1984), “Niche Pareto Genetic Algorithm” (NPGA) (Horn et al. 1994), “Pareto Archived Evolution Strategy” (PAES) (Knowles & Corne 1999), “Strength Pareto Evolutionary Algorithm” (SPEA) (Zitzler & Thiele 1999), “Strength Pareto Evolutionary Algorithm II” (SPEA-II) (Zitzler et al. 2001), “Nondominated Sorting Genetic Algorithm II” (NSGA-II) (Deb et al. 2002), etc³. Dentre estes, os mais populares são o NSGA-II (Deb et al. 2002) e o SPEA-II (Zitzler et al. 2001). A menos das características peculiares de cada um destes algoritmos, os mesmos compartilham um propósito em comum, que consiste na tentativa de atender simultaneamente aos dois critérios enumerados anteriormente.

Em geral, uma vez que a fronteira Pareto-ótima pode ser convexa, não-convexa, desconexa, etc, existem algumas dificuldades relacionadas a definição de medidas eficientes que denotem a diversidade real presente no conjunto de soluções da fronteira Pareto estimada. Embora essa tarefa seja mais simples quando se considera problemas de otimização com dois objetivos, as dificuldades são evidentemente maiores no caso de problemas com vários objetivos. Devido a isso, existem atualmente na literatura diferentes técnicas empregadas tanto para medir quanto para manter a diversidade entre as soluções encontradas pelos algoritmos. Entretanto, estes operadores utilizados para preservarem a diversidade das soluções durante o processo de otimização apresentam uma relação de compromisso entre a qualidade da distribuição das soluções e o tempo computacional consumido.

³Optou-se por empregar os nomes dos métodos em inglês, o que evitaria a tradução incoerente destes para o português.

Por exemplo, o NSGA-II (Deb et al. 2002) utiliza uma técnica de preservação de diversidade baseada no “crowding distance”, cuja complexidade computacional associada é $\mathcal{O}(N \log N)$, em que N é o tamanho da população. Por outro lado, o SPEA (Zitzler & Thiele 1999) emprega uma estimativa de densidade baseada em um mecanismo de agrupamento, cuja determinação envolve o cálculo de distâncias Euclidianas e apresenta complexidade computacional $\mathcal{O}(N^3)$. Assim sendo, embora o NSGA-II seja mais rápido do que o SPEA, este último é capaz de estimar soluções melhor distribuídas ao longo da fronteira Pareto, mas apresenta elevado esforço computacional associado (Deb et al. 2003).

Tomando-se por base o impasse descrito anteriormente, este trabalho visa propor uma nova forma relaxada de dominância que permita a elaboração de novos algoritmos e novas definições que garantam, simultaneamente, a convergência e a diversidade das soluções estimadas. Para este fim, o autor baseia-se nos conceitos de ϵ -dominância definidos em (Laumanns et al. 2002) e em importantes trabalhos que o sucederam (Deb et al. 2003, Deb, Mohan & Mishra 2005, Hernández-Díaz et al. 2007). Outro item discutido no âmbito desta tese refere-se à aplicação da técnica relaxada de dominância proposta para tratar problemas com muitos objetivos.

1.2. Contexto Histórico

Embora o trabalho inicial a sugerir o uso de algoritmos evolucionários para a solução de problemas multiobjetivo tenha sido apresentado por Rosenberg (Rosenberg 1967), David Schaffer é normalmente considerado o primeiro pesquisador a modelar um AE multiobjetivo.

Após a apresentação do estudo de doutorado de Schaffer (Schaffer 1984), e devido as influências do trabalho de Goldberg (Goldberg 1989), verificou-se um intenso interesse em algoritmos evolucionários multiobjetivo. Entretanto, dentre os vários algoritmos sugeridos na literatura desde a proposição do “Vector Evaluated Genetic Algorithm” (VEGA) (Schaffer 1984), poucos foram largamente utilizados pela comunidade científica.

Dentre os que se apoiam nos conceitos de relação de dominância e nicho estabelecidos por Goldberg (Goldberg 1989), os mais populares, ditos não-elitistas⁴, são “Multi-Objective Genetic Algorithm” (MOGA) (Fonseca & Fleming 1993), “Niche Pareto Genetic Algorithm” (NPGA) (Horn et al. 1994), e “Nondominated Sorting Genetic Algorithm” (NSGA) (Srinivas & Deb 1994). Estes métodos caracterizam a primeira fase de estudos dedicados à elaboração de técnicas evolucionárias multiobjetivo.

Embora algumas noções sobre elitismo tenham sido contempladas por alguns pesquisadores em meados da década de 1990 (Husbands 1994, Osyczka & Kundu 1996), foi apenas após a publicação do “Strength Pareto Evolutionary Algorithm” (SPEA) (Zitzler & Thiele 1999) que esta técnica tornou-se comum em algoritmos evolucionários multiobjetivo, dando início assim à segunda fase de pesquisas em AEs multiobjetivo. Embora existam vários AEs multiobjetivo considerados elitistas, poucos tornaram-se populares na literatura especializada (Knowles & Corne 1999, Zitzler et al. 2001), e dentre estes, o que mais se destaca nos dias atuais é o “Nondominated Sorting Genetic Algorithm II” (NSGA-II) (Deb et al. 2002).

Se por um lado muita pesquisa foi dedicada à formulação de novos AEs multiobjetivo durante as duas últimas décadas, por outro lado observa-se atualmente um interesse crescente por outras áreas, tais como, a elaboração de técnicas que aumentem a eficiência dos algoritmos existentes, a incorporação das preferências do usuário ao longo do processo de otimização, métodos alternativos de otimização, análise de desempenho dos algoritmos, formas relaxadas de dominância, tratamento de restrições, controle de parâmetros, escalabilidade, etc. Isso tem motivado também a aplicação de AEs multiobjetivo em várias áreas do conhecimento e em interessantes estudos de casos (Coello Coello et al. 2005, Coello Coello 2006, Coello Coello 2009).

⁴Em otimização mono-objetivo, elitismo representa um operador que armazena a melhor solução encontrada na população do AE, e a insere inalterada na geração seguinte. Entretanto, em otimização multiobjetivo, elitismo envolve todas as soluções não-dominadas da população, e normalmente é implementado usando um arquivo externo, no qual somente as soluções não-dominadas com relação a todas as populações anteriores são armazenadas.

1.3. Conceitos Básicos

A modelagem matemática de um problema a partir de um sistema real é de fundamental importância em otimização. O engenheiro, ou projetista, deve ser capaz de identificar as funções objetivo e restrições, além de especificar as variáveis de controle e o domínio viável intrínseco das mesmas. Conhecidos esses parâmetros, o problema de otimização multiobjetivo é definido a seguir⁵:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m \\ \text{sujeito a: } \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned} \quad (1.1)$$

em que Ω é o conjunto factível, matematicamente definido por:

$$\Omega = \begin{cases} g_i(\mathbf{x}) \leq 0; \quad i = 1, \dots, p \\ h_j(\mathbf{x}) = 0; \quad j = 1, \dots, q; \quad q \leq n \\ \mathbf{x} \in \mathbb{X} \end{cases} \quad (1.2)$$

As funções $\mathbf{g}(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$ e $\mathbf{h}(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^q$ representam restrições de desigualdade e igualdade, respectivamente. Além disso, tem-se $\Omega \subseteq \mathbb{X}$, em que o conjunto $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ define o espaço de busca delimitado pelo domínio das variáveis de otimização:

$$\mathbb{X} = \begin{cases} x_k^{min} \leq x_k \leq x_k^{max} \\ k = 1, \dots, n \end{cases} \quad (1.3)$$

em que n representa o número de parâmetros do problema, e x_k^{min} e x_k^{max} são os limites inferior e superior da k -ésima variável de otimização, respectivamente.

O vetor de funções objetivo $\mathbf{f}(\cdot) : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ mapeia o espaço de parâmetros $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ para o espaço de objetivos $\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^m$.

Algumas definições importantes em otimização multiobjetivo são dadas a seguir (Takahashi 2004):

⁵A escolha por um problema de minimização é arbitrária, e será adotada ao longo deste trabalho.

Definição 1.1. (Dominância) Supondo $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$ dois pontos factíveis, diz-se que \mathbf{x}_1 domina \mathbf{x}_2 se $f_i(\mathbf{x}_1) \leq f_i(\mathbf{x}_2) \forall i \in \{1, \dots, m\}$ e $\exists i$ tal que $f_i(\mathbf{x}_1) < f_i(\mathbf{x}_2)$. Equivalentemente, diz-se que $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \in \mathbb{Y}$ domina $\mathbf{f}(\mathbf{x}_2) \in \mathbb{Y}$ no espaço de objetivos. Essa relação de dominância é comumente escrita como $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \prec \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$. \square

Definição 1.2. (Soluções incomparáveis) Supondo $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$ dois pontos factíveis, diz-se que os mesmos são não-dominados entre si, ou incomparáveis entre si, caso ambas as relações de dominância $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \prec \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$ e $\mathbf{f}(\mathbf{x}_2) \prec \mathbf{f}(\mathbf{x}_1)$ não sejam verificadas. \square

Definição 1.3. (Solução Pareto-ótima) Supondo $\mathbf{x}^* \in \Omega$ um ponto factível, diz-se que \mathbf{x}^* é uma solução Pareto-ótima do problema multiobjetivo se não existe qualquer outra solução factível $\mathbf{x} \in \Omega$, tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \prec \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$, ou seja, \mathbf{x}^* não é dominado por nenhum outro ponto factível. \square

Definição 1.4. (Solução Pareto-ótima local) Supondo $\mathbf{x}^* \in \Omega$ um ponto factível, diz-se que \mathbf{x}^* é uma solução localmente Pareto-ótima do problema multiobjetivo em uma dada vizinhança $\mathcal{V}_\delta(\mathbf{x}^*)$ definida por um raio $\delta > 0$, se não existe qualquer outra solução $\mathbf{x} \in \mathcal{V}_\delta(\mathbf{x}^*) \cap \Omega$ que satisfaça $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \prec \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$, ou seja, se \mathbf{x}^* não é dominado por nenhum outro ponto factível dessa vizinhança. \square

Definição 1.5. (Solução Pareto-ótima global) Supondo $\mathbf{x}^* \in \Omega$ um ponto factível, diz-se que \mathbf{x}^* é uma solução globalmente Pareto-ótima do problema multiobjetivo se não existe nenhum outro ponto factível $\mathbf{x} \in \Omega$, tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \prec \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$. Além disso, uma solução Pareto-ótima global é também uma solução Pareto-ótima local. \square

Finalmente, define-se matematicamente o conjunto Pareto-ótimo \mathcal{P} e a fronteira Pareto-ótima \mathcal{F} para o problema de otimização multiobjetivo.

Definição 1.6. (Conjunto Pareto-ótimo) Dado o problema de otimização multiobjetivo (1.1), o seu conjunto Pareto-ótimo global é definido como:

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{x}^* \in \Omega \mid \nexists \mathbf{x} \in \Omega : \mathbf{f}(\mathbf{x}) \prec \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)\} \quad (1.4)$$

\square

Definição 1.7. (Fronteira Pareto-ótima) A fronteira Pareto-ótima global do problema de otimização multiobjetivo (1.1) corresponde à imagem do conjunto Pareto-ótimo global no espaço de objetivos, i.e., $\mathcal{F} = \mathbf{f}(\mathcal{P})$. Dito de outra forma:

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{P}\} \quad (1.5)$$

□

Note que quando se trata de problemas com variáveis reais, a cardinalidade do conjunto \mathcal{P} é frequentemente infinita ($|\mathcal{P}| = \infty$), sendo limitada na otimização combinatória ($|\mathcal{P}| < \infty$). Nesse sentido, do ponto de vista prático é mais interessante estimar um conjunto de soluções eficientes de tamanho limitado, porém representativo de \mathcal{P} . Além disso, caso seja difícil estabelecer a otimalidade global das soluções encontradas, ou essa globalidade seja desnecessária, a aproximação de um conjunto de soluções não-dominadas representativas de \mathcal{P} é suficiente. Essa premissa viabiliza as seguintes definições.

Definição 1.8. (Conjunto localmente ótimo) Supondo $\mathcal{X} \subseteq \Omega$ um conjunto arbitrário de soluções factíveis, o conjunto localmente ótimo associado é definido como:

$$\mathcal{X}^* = \{\mathbf{x}' \in \mathcal{X} \mid \nexists \mathbf{x} \in \mathcal{X} : \mathbf{f}(\mathbf{x}) \prec \mathbf{f}(\mathbf{x}')\} \quad (1.6)$$

□

Definição 1.9. (Fronteira localmente ótima) Supondo $\mathcal{X} \subseteq \Omega$ um conjunto arbitrário de soluções factíveis, a fronteira localmente ótima associada (\mathcal{Y}^*) corresponde à imagem do conjunto localmente ótimo (\mathcal{X}^*) mapeada no espaço de objetivos, i.e., $\mathcal{Y}^* = \mathbf{f}(\mathcal{X}^*)$:

$$\mathcal{Y}^* = \{\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{X}^*\} \quad (1.7)$$

□

De maneira geral, supondo que $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})} \subseteq \Omega$ seja um conjunto arbitrário factível que contenha o conjunto Pareto-ótimo global \mathcal{P} , então, o conjunto localmente ótimo $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})}^*$ é único. Dito de outra forma, $P(\mathcal{X}_{(\mathcal{P})}) = \{\mathcal{X}_{(\mathcal{P})}^*\}$, em que $P(\cdot)$ denota o conjunto não-dominado do seu argumento. Além disso, como $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})} \supseteq \mathcal{P}$, então $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})}^*$ é também o conjunto Pareto-ótimo global, i.e., $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})}^* = \mathcal{P}$. Analogamente, uma vez que $\mathcal{Y}_{(\mathcal{F})}$ denota

a imagem de $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})}$ no domínio de objetivos ($\mathcal{Y}_{(\mathcal{F})} = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{(\mathcal{P})})$), então, $F(\mathcal{Y}_{(\mathcal{F})}) = \{\mathcal{Y}_{(\mathcal{F})}^*\}$, sendo que $F(\cdot)$ denota a fronteira não-dominada do seu argumento. Devido ao mesmo motivo anterior, a fronteira localmente ótima $\mathcal{Y}_{(\mathcal{F})}^*$ é também a fronteira Pareto-ótima global \mathcal{F} . Como $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})}^* = \mathcal{P}$, e frequentemente $|\mathcal{P}| = \infty$ em problemas com variáveis reais, então a determinação numérica de $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})}^*$ é impossível, além de questionável como resultado de um problema de otimização, uma vez que essa grande quantidade de soluções dificultaria o processo de escolha do decisor. Dessa forma, conforme citado anteriormente, do ponto de vista prático é mais desejável determinar um conjunto de tamanho limitado, porém representativo de $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})}^*$, que domine aproximadamente todas as soluções de $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})}$. Este conjunto pode então ser utilizado pelo tomador de decisões para determinar regiões de interesse do espaço de objetivos a serem exploradas nas iterações seguintes.

1.4. Condições de Otimalidade

As condições de otimalidade descritas por Karush, Kuhn e Tucker (Bazaraa et al. 1979) podem ser estendidas para problemas multiobjetivo, fornecendo as condições necessárias de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para eficiência (Takahashi 2004). A proposição seguinte expressa essas condições.

Proposição 1.1. (*Condições necessárias de Karush-Kuhn-Tucker para eficiência*) Uma solução factível $\mathbf{x}^* \in \mathcal{P}$ satisfaz as condições necessárias de Karush-Kuhn-Tucker para eficiência se a equação (1.8) é atendida e, além disso, devem existir $\nu^* \geq 0$, $\mu^* \geq 0$ e $\lambda^* \geq 0$, com pelo menos uma desigualdade estrita $\nu^* > 0$. \square

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^m \nu_l \nabla f_l(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^q \lambda_j \nabla h_j(\mathbf{x}^*) &= 0 \\ g_i(\mathbf{x}^*) &\leq 0, \quad \mu_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad i = 1, \dots, p \\ h_j(\mathbf{x}^*) &= 0, \quad j = 1, \dots, q \end{aligned} \tag{1.8}$$

A Fig. 1.1 mostra uma interpretação geométrica para a condição de Karush-Kuhn-Tucker considerando-se uma restrição de desigualdade e dois objetivos. Observe que no ponto de solução \mathbf{x}^* essa restrição está ativa, e que é possível determinar os valores dos multiplicadores ν_1^* , ν_2^* e μ^* positivos, tal que a soma dos vetores gradiente em \mathbf{x}^* se anule.

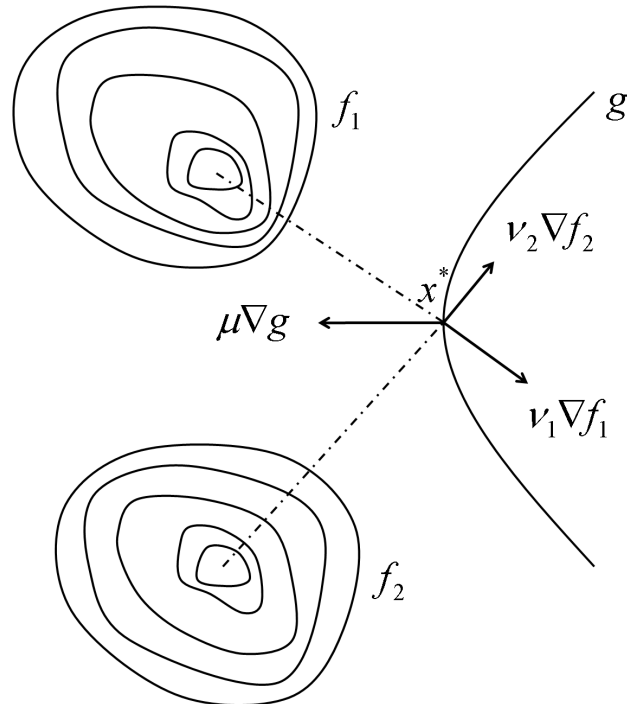


Figura 1.1.: Ilustração das condições de Karush-Kuhn-Tucker em um problema bi-objetivo. Note que a solução \mathbf{x}^* atende às condições de KKT para eficiência, i.e., é possível determinar os valores dos multiplicadores ν_1^* , ν_2^* e μ^* positivos, tal que a soma dos vetores gradiente em \mathbf{x}^* se anule.

1.5. Estrutura Geral de um AE Multiobjetivo

Eficiência Pareto, ou otimalidade Pareto, é um conceito importante em economia, com larga aplicação nas engenharias e ciências sociais. Este termo originou-se após os estudos de Vilfredo Pareto (1848-1923), um renomado economista italiano, e pioneiro em otimização com múltiplos objetivos.

Em linhas gerais, dado um conjunto arbitrário de soluções factíveis $\{\mathbf{y}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1), \mathbf{y}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2), \dots, \mathbf{y}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i), \dots, \mathbf{y}_N = \mathbf{f}(\mathbf{x}_N)\} \in \mathbf{f}(\Omega)$, estas podem ser classificadas, ou ordenadas, no domínio de objetivos por meio de fronteiras $\mathcal{Y} = \{\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \dots, \mathcal{Y}_j, \dots, \mathcal{Y}_M\}$, sendo cada uma destas composta por soluções incomparáveis entre si⁶. Por uma questão de formalidade matemática, pode-se dizer que uma dada fronteira $\mathcal{Y}_j \subset \mathbf{f}(\Omega)$, mapeada no espaço de objetivos, corresponde à imagem do conjunto $\mathcal{X}_j \subset \Omega$ definido no espaço de parâmetros.

Uma vez conhecidos os conjuntos $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_j, \dots, \mathcal{X}_M\}$, a representação destes em fronteiras é importante, pois possibilita classificar os vetores $\mathbf{y}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$, atribuindo um valor de aptidão aos mesmos com base na fronteira a qual pertencem. Dessa forma, os vetores da primeira fronteira \mathcal{Y}_1 são ditos incomparáveis entre si e melhores do que os da segunda \mathcal{Y}_2 , e por sua vez estes são incomparáveis entre si e melhores do que os da terceira \mathcal{Y}_3 , e assim por diante. A Fig. 1.2 ilustra a classificação em fronteiras de um conjunto arbitrário de pontos dada a tarefa de minimização dos objetivos f_1 e f_2 . A fronteira Pareto-ótima real \mathcal{F} está representada pela curva contínua indicada.

O **Algoritmo 1.1** apresenta a estrutura básica de um AE multiobjetivo com população de memória. Nota-se que após a inicialização aleatória de uma população de soluções candidatas $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_N)$, e a criação de um arquivo externo (\mathcal{A}) inicialmente vazio, estes vetores são avaliados nas funções objetivo, sendo penalizados caso ocorram violações das restrições. Posteriormente, os mesmos são classificados em fronteiras, possibilitando aplicar os mecanismos de seleção e variação (cruzamento, recombinação e, ou, mutação), gerando assim a nova população. O arquivo externo é então atualizado, e o processo se repete até que seja verificado algum critério de parada especificado. Nesse ponto, o algoritmo retorna o conjunto de soluções estimadas, armazenado na população de arquivo.

⁶Uma fronteira é definida por um conjunto de soluções factíveis entre as quais não há relação de dominância. Qualquer vetor \mathbf{y}_i pertencente à fronteira \mathcal{Y}_j não pode ser pior que os demais vetores desta fronteira em todos os objetivos.

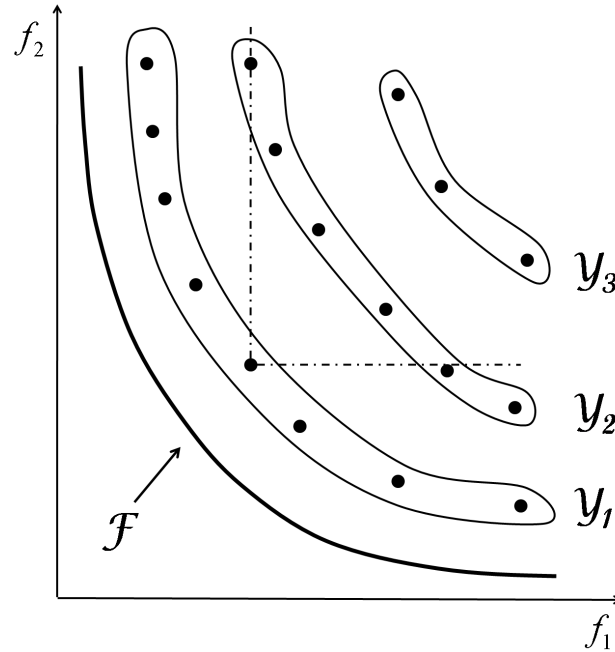


Figura 1.2.: Representação em fronteiras de um conjunto arbitrário de pontos dada a tarefa de minimização dos objetivos f_1 e f_2 . Nesta ilustração, \mathcal{F} corresponde à fronteira Pareto-ótima global.

Algoritmo 1.1: Ciclo básico de funcionamento de um AE multiobjetivo.

Entrada: Tamanho da população N , tamanho máximo do arquivo ρ , espaço de busca \mathbb{X} , funções objetivo e restrições $\mathbf{f}(\cdot)$, $\mathbf{g}(\cdot)$, $\mathbf{h}(\cdot)$

Saída: Estimativa de \mathcal{P} e \mathcal{F} armazenados na população de arquivo $\mathcal{A}(t)$

1 **início**

2 $t = 0$;

3 $\mathcal{I}(t) = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\} \leftarrow$ População inicial;

4 $\mathcal{A}(t) = \emptyset \leftarrow$ Arquivo inicial; /* armazena as melhores soluções */

5 **enquanto** não critério de parada **faça**

6 $\Phi(t) = \{\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_1), \dots, \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_N)\} \leftarrow$ Avaliação ($\mathcal{I}(t), \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$);

7 $\mathcal{Y}(t) = \{\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_M\} \leftarrow$ Classificação ($\Phi(t)$);

8 $\mathcal{S}(t) \leftarrow$ Seleção ($\mathcal{I}(t), \mathcal{A}(t), \Phi(t), \mathcal{Y}(t)$);

9 $\mathcal{I}(t+1) \leftarrow$ Variação ($\mathcal{S}(t)$);

10 $\mathcal{A}(t+1) \leftarrow$ Atualização ($\mathcal{A}(t), \mathcal{I}(t), \rho$);

11 $t = t + 1$;

12 **fim**

13 **fim**

Sendo mais específico, o conjunto $\mathcal{I}(t)$ representa a população corrente do algoritmo, e esta evolui suas características ao longo das iterações t em função dos operadores de seleção e variação. O conjunto $\mathcal{A}(t)$ corresponde à população de memória, ou arquivo externo, onde são armazenadas as melhores soluções encontradas durante o processo de otimização. Este arquivo é atualizado a cada iteração do método, visando armazenar o conjunto de soluções candidatas não-dominadas com relação a todas as soluções obtidas nas gerações anteriores, favorecendo assim a convergência do algoritmo. Além disso, técnicas de nicho são comumente empregadas durante a atualização da população de memória. Desta forma, este arquivo funciona como um mecanismo simples e útil para evitar que soluções redundantes sejam armazenadas durante o processo de busca, possibilitando a determinação de soluções melhor distribuídas ao longo da fronteira estimada. Informações mais esclarecidas sobre a convergência e a diversidade das soluções da fronteira estimada são apresentadas nos capítulos seguintes.

O valor de aptidão atribuído a cada uma das soluções candidatas depende especificamente do vetor de funções objetivo $\mathbf{f}(\cdot)$, e da técnica empregada no tratamento das restrições de desigualdade $\mathbf{g}(\cdot)$ e de igualdade $\mathbf{h}(\cdot)$. Atualmente, diferentes mecanismos têm sido usados para tratar restrições em AEs multiobjetivo (Woldesenbet et al. 2009).

O sistema de classificação das soluções em fronteiras é basicamente influenciado pela relação de dominância adotada no algoritmo. Uma das técnicas mais populares, conhecida como dominância Pareto, foi proposta em (Goldberg 1989), sendo largamente utilizada na literatura. Entretanto, formas relaxadas de dominância Pareto têm sido sugeridas como um mecanismo para regular a convergência e a diversidade das soluções em AEs multiobjetivo (Ikeda et al. 2001, Laumanns et al. 2002).

Finalmente, é importante salientar que embora os operadores de variação do algoritmo sejam implementados com base em técnicas estocásticas, o processo de busca não é destituído de direção, pois a existência de mecanismos de pressão seletiva favorece a evolução das características das soluções candidatas a cada iteração do método.

1.6. Algumas Aplicações

O domínio de aplicações de técnicas evolucionárias multiobjetivo apresentou um crescimento significativo nos últimos anos (Fleming & Purshouse 2002, Coello Coello & Lamont 2004, Coello Coello 2006). Alguns exemplos de trabalhos que caracterizam diferentes contextos de aplicação de AEs multiobjetivo são: engenharia elétrica (Carrano et al. 2006); engenharia hidráulica (Farmani et al. 2005); engenharia estrutural (Papadimitriou 2005); engenharia aeronáutica (Chiba et al. 2007); engenharia de controle e robótica (Fleming & Purshouse 2002); projeto e manufatura (Zhang & Gen 2010); escalonamento de tarefas (Hanne & Nickel 2005); alocação de recursos (Osmana et al. 2005); química (Agrafiotis 2001); física (Manos et al. 2005); medicina (Lahanas 2004); dentre outros.

O forte interesse em AEs multiobjetivo tem motivado também o emprego destes métodos em outras áreas do conhecimento, por exemplo, reconhecimento de padrões (Bandyopadhyay et al. 2004), mineração de dados (Freitas 2004), bioinformática (Handl et al. 2007), e aplicações financeiras (Schlottmann & Seese 2004).

1.7. Objetivos da Tese

Os principais objetivos desta tese são investigar, implementar e testar o uso de diferentes formas relaxadas de dominância Pareto combinadas a algoritmos evolucionários multiobjetivo, visando avaliar o desempenho relativo destas estratégias com relação às qualidades de convergência e diversidade das soluções aproximadas, considerando-se a otimização de problemas com dois e três objetivos. Este trabalho é dividido em três partes principais:

1. Discussão detalhada sobre os principais mecanismos relaxados de dominância Pareto; realização de uma análise crítica focada nas definições que sustentam a operação de cada uma das técnicas abordadas, enumerando suas vantagens e desvantagens frente à otimização de problemas multiobjetivo; e apresentação de um breve histórico de aplicações destas estratégias, relatando os principais trabalhos e resultados da literatura especializada.

2. Investigação de uma nova metodologia que preserve as qualidades observadas nas técnicas previamente estudadas, e que minimize as limitações frequentemente criticadas por outros pesquisadores da área. Esta nova abordagem deve ser simples, fácil de implementar, e sua funcionalidade deverá justificar o seu uso como ferramenta de otimização.
3. Implementação, teste e validação do mecanismo proposto considerando-se problemas bi- e tri-objetivo conhecidos da literatura.

1.8. Contribuições da Tese

O presente trabalho traz ganhos à comunidade acadêmica dedicada ao desenvolvimento de sistemas evolutivos para otimização multiobjetivo. Em linhas gerais, este texto investiga um tema de grande relevância no atual contexto da otimização multicritério, o qual se refere ao emprego de formas relaxadas de dominância Pareto na etapa de atualização da população de memória em AEs multiobjetivo.

De maneira específica, acredita-se que os pontos apresentados a seguir representam contribuições originais desta tese.

- Revisão crítica e sistematização das principais técnicas relaxadas de dominância Pareto;
- Proposição de uma nova forma relaxada de dominância Pareto capaz de manter as vantagens observadas nas demais técnicas presentes na literatura, além de tratar várias das limitações existentes nas mesmas;
- Incorporação da estratégia proposta em um algoritmo evolucionário multiobjetivo, e avaliação do desempenho deste considerando-se um conjunto de problemas testes e outros dois AEs multiobjetivo. O estudo experimental realizado mostra que o mecanismo sugerido produz resultados competitivos, principalmente, quanto à capacidade do método de estimar fronteiras Pareto com excelentes cobertura, convergência, e distribuição das soluções para todos os problemas testados;
- Proposição de um critério de dominância não-relaxado para tratar problemas com dois e três objetivos. Os resultados sugerem que este mecanismo é tão eficiente quanto as outras técnicas comparadas;

- Proposição de um critério de dominância para (i) a otimização de problemas com muitos objetivos e (ii) a minimização do problema de redundância⁷. Os resultados sugerem que este mecanismo representa uma ferramenta útil para tratar problemas com um elevado número de funções objetivo, e também para reduzir a presença de soluções redundantes na população final de arquivo.

Uma parte substancial destas contribuições foi desenvolvida ao longo do Exame de Qualificação, e encontra-se na literatura especializada (Batista et al. 2011c). Um estudo mais elaborado, o qual caracteriza melhor o trabalho desenvolvido nesta tese, foi recentemente submetido ao periódico “Evolutionary Computation”. Outras contribuições originais desta tese são discutidas em (Batista, Oliveira, Guimarães, Silva & Ramírez 2010, Batista, Campelo, Guimarães & Ramírez 2010, Batista et al. 2011a, Batista et al. 2011b).

1.9. Estrutura do Trabalho

Os assuntos discutidos neste trabalho estão organizados conforme mostrado a seguir.

Capítulo 2 – Dominância Pareto Relaxada: Este capítulo discorre acerca dos principais trabalhos dedicados à investigação de formas relaxadas de dominância Pareto. Visando tornar o texto autocontido, apresenta-se um estudo detalhado considerando-se as técnicas mais citadas na literatura, a saber, α -dominância, ϵ -dominância e $pa\epsilon$ -dominância. Esse assunto é particularmente interessante, pois tais estratégias permitem regular simultaneamente ambas as propriedades de convergência e diversidade das soluções estimadas durante o processo de otimização.

Capítulo 3 – Pareto Cone ϵ -Dominância: Com o objetivo de contornar algumas das limitações observadas nas técnicas α -dominância, ϵ -dominância, e $pa\epsilon$ -dominância, propõe-se uma nova estratégia relaxada de dominância, chamada cone ϵ -dominância. Ao contrário das demais, o desempenho da técnica cone ϵ -dominância é menos sensível à geometria da fronteira Pareto, e possibilita estimar o número especificado de soluções eficientes quando a fronteira é conexa. Além disso, permite estimar soluções bem distribuídas ao longo da fronteira mesmo quando esta é desconexa.

⁷O problema de redundância caracteriza-se pela existência de soluções fracamente não-dominadas na população final de arquivo, cuja presença é muito difícil de ser eliminada. Outros detalhes sobre este problema são apresentados nos capítulos seguintes.

Capítulo 4 – Resultados: Inicialmente são descritos os experimentos utilizados para a validação da estratégia proposta. De maneira geral, são apresentados os algoritmos evolucionários multiobjetivo empregados no experimento, bem como os problemas testes considerados. Além disso, discorre-se sobre as métricas de avaliação de desempenho e o ajuste de parâmetros dos métodos. Por fim, apresenta-se o planejamento estatístico utilizado para a realização da análise dos resultados. Considerando-se este estudo estatístico, os resultados encontrados mostram que o algoritmo baseado na relação cone ϵ -dominância obteve ganhos significativos, principalmente, na métrica de diversidade, com um desempenho médio 16% superior ao ϵ -MOEA e 22% melhor que o NSGA-II. Estes resultados indicam também que a relação cone ϵ -dominância mantém as propriedades de convergência da estratégia ϵ -dominância enquanto melhora significativamente as características de diversidade dos conjuntos Pareto estimados.

Capítulo 5 – Conclusões: Conclui o desenvolvimento do texto de doutorado apresentando uma discussão geral sobre o trabalho. Este capítulo é encerrado com a enumeração de sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2.

Dominância Pareto Relaxada

“Uma ideia é um ponto de partida e nada mais (...).”

— Pablo Picasso, 1881–1973

“Um relato honesto se desenrola melhor se o fazem sem rodeios.”

— William Shakespeare, 1564–1616

2.1. Introdução

O estudo de técnicas relaxadas de dominância Pareto representa uma das tendências atuais de pesquisa em otimização multiobjetivo. O principal motivo desse interesse deve-se ao fato de que estas permitem regular simultaneamente ambas as propriedades de convergência e diversidade das soluções estimadas durante o processo de otimização. Este capítulo discorre acerca dos principais métodos existentes na literatura, tais como α -dominância, ϵ -dominância, e $p\alpha\epsilon$ -dominância. A compreensão do funcionamento destas estratégias, bem como suas vantagens e desvantagens, possui especial relevância quanto à proposição da nova forma relaxada de dominância Pareto sugerida neste trabalho.

2.2. Formas Relaxadas de Dominância Pareto: Trabalhos Relacionados

Recentemente, alguns trabalhos têm sugerido o uso de formas relaxadas de dominância Pareto com o objetivo de prover melhorias ao desempenho de métodos evolucionários multiobjetivo. Um dos primeiros trabalhos nessa linha foi proposto em (Ikeda et al. 2001), onde os autores sugerem uma estratégia chamada α -dominância. Entretanto, a técnica mais popular atualmente é conhecida como ϵ -dominância, a qual foi introduzida em (Laumanns et al. 2002). Este mecanismo age como uma estratégia de atualização da população externa, ou população de arquivo, de maneira a regular simultaneamente tanto as propriedades de convergência em direção ao conjunto Pareto-ótimo real, quanto as propriedades de diversidade das soluções estimadas.

A estratégia α -dominância (Ikeda et al. 2001) foi especificamente sugerida para tratar soluções ditas resistentes à dominância. Estas soluções são qualitativamente e quantitativamente pouco significativas para a solução do problema de otimização, porém normalmente são encontradas em regiões dificilmente dominadas por outras soluções. A ideia fundamental deste mecanismo consiste em estabelecer limites inferior e superior de relações de compromisso entre os objetivos do problema, considerados dois a dois, o que permite a ampliação do hipervolume dominado por cada uma das soluções candidatas. Nesta técnica, uma solução \mathbf{y}_1 pode dominar uma solução \mathbf{y}_2 se, por exemplo, \mathbf{y}_1 for ligeiramente pior que \mathbf{y}_2 em algum objetivo, mas sensivelmente melhor que \mathbf{y}_2 em vários outros objetivos. A definição formal deste mecanismo é apresentada na seção 2.3.

Já a estratégia ϵ -dominância (Laumanns et al. 2002) emprega um conjunto de caixas, ou hipercubos, distribuídos ao longo do espaço de objetivos, em que o tamanho destes é definido pelo parâmetro ϵ , usualmente especificado pelo usuário. Com o objetivo de assegurar as características de convergência e diversidade das soluções encontradas, cada caixa é ocupada somente por uma única solução não-dominada. Assim sendo, considerando-se um valor elevado para ϵ , o usuário supostamente poderá aumentar a velocidade de convergência do algoritmo, porém a qualidade da fronteira Pareto estimada é prejudicada. De maneira similar, caso deseje-se uma aproximação da fronteira Pareto com uma melhor resolução (qualidade), então um valor reduzido de ϵ deve ser adotado. Este fato torna a definição de ϵ um passo muito importante e difícil a ser dado pelo usuário, principalmente quando não se tem informações prévias sobre a forma da fronteira Pareto-ótima real do problema de otimização. Além disso, a escolha de ϵ está in-

timamente relacionada à quantidade de soluções não-dominadas desejadas na população de arquivo, e normalmente são necessárias várias execuções do algoritmo para estimar um valor apropriado para este parâmetro. Em função da forma como foi definido, este mecanismo tende também a eliminar certas regiões da fronteira Pareto estimada, pois a relação ϵ -dominância não permite que dois vetores com uma diferença de ϵ_i no i -ésimo objetivo sejam mutualmente não-dominados entre si. Devido a isto, frequentemente não será possível estimar “segmentos aproximadamente paralelos aos eixos de coordenadas”, e os extremos da fronteira Pareto, sendo esta a principal limitação do método. Esta técnica é detalhada na seção 2.4.

Devido às propriedades matemáticas relativamente simples empregadas pela técnica ϵ -dominância, o seu uso tornou-se muito popular nos últimos anos (Deb et al. 2003, Deb, Mohan & Mishra 2005, Mostaghim & Teich 2003, Santana-Quintero & Coello Coello 2005, Cai et al. 2007).

Deb e co-autores (Deb et al. 2003, Deb, Mohan & Mishra 2005) propuseram um AE multiobjetivo baseado no conceito de ϵ -dominância, “The steady-state Multiobjective Evolutionary Algorithm” (ϵ -MOEA). Este método incorpora também uma estratégia eficiente para a atualização da população evolutiva e do arquivo de memória, o que permite a obtenção de soluções melhor distribuídas ao longo da fronteira estimada, em um tempo computacional relativamente baixo.

Mostaghim e Teich (Mostaghim & Teich 2003) estudaram a influência da ϵ -dominância em métodos baseados em populações de partículas, i.e., “Multiobjective Particle Swarm Optimization” (MOPSO). Os autores destacam que o papel mais importante da ϵ -dominância relaciona-se a especificação do número máximo de soluções não-dominadas a serem armazenadas na população de memória, o que influencia diretamente no tempo computacional do processo de otimização, e também na convergência e diversidade das soluções estimadas.

Santana-Quintero e Coello Coello (Santana-Quintero & Coello Coello 2005) apresentaram um AE multiobjetivo baseado em evolução diferencial. Este método, chamado ϵ -MyDE, incorpora também o conceito de ϵ -dominância para obter uma melhor distribuição das soluções armazenadas no arquivo. O objetivo principal deste trabalho consiste em unir a alta velocidade de convergência observada em algoritmos baseados em evolução diferencial com a técnica ϵ -dominância, assegurando assim as propriedades de convergência e diversidade das soluções encontradas.

Cai e co-autores (Cai et al. 2007) sugeriram um novo AE multiobjetivo baseado em evolução diferencial (ϵ -DEMO). Este método utiliza os conceitos de ϵ -dominância com a finalidade de obter soluções bem distribuídas ao longo da fronteira estimada, e com um baixo custo computacional associado. Além disso, o processo de convergência do algoritmo é acelerado ao empregar um arranjo ortogonal para a geração da população evolutiva inicial, a qual é uniformemente espalhada sobre a região factível do problema de otimização.

Embora os conceitos de ϵ -dominância sejam de grande significância para regular as propriedades de convergência e diversidade das soluções estimadas por AEs multiobjetivo, o valor de ϵ é dependente das características do problema de otimização, e a escolha apropriada deste parâmetro representa uma decisão difícil a ser tomada pelo usuário. Por exemplo, a escolha inadequada de ϵ poderá conduzir à aproximação de uma fronteira Pareto pouco representativa do conjunto Pareto-ótimo real e, além disso, poderá ocasionar a eliminação de soluções pertencentes aos extremos do Pareto. Estas limitações são discutidas com detalhes nas seções seguintes.

Com o objetivo de contornar a principal limitação observada na técnica ϵ -dominância, i.e., a perda de várias soluções não-dominadas em função da discretização do arquivo em hipercubos, uma variante deste mecanismo foi proposta em (Hernández-Díaz et al. 2007), chamada “Pareto-adaptive ϵ -dominance” (pa ϵ -dominance). Este mecanismo considera não somente valores distintos de ϵ para os objetivos, mas um vetor $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m)$ associado aos objetivos $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, sendo que os valores em ϵ_i dependem das características geométricas da fronteira Pareto-ótima. Este método minimiza algumas limitações relacionadas ao sistema original, ϵ -dominância, e permite estimar um elevado número de soluções eficientes. Entretanto, o uso de pa ϵ -dominância requer a geração de uma aproximação inicial da fronteira Pareto para calcular os valores dos vetores $\boldsymbol{\epsilon}$. Neste caso, surge um novo problema, pois a quantidade e a qualidade das soluções obtidas na estimativa inicial da fronteira Pareto podem ser críticas ao desempenho final do algoritmo. Assim sendo, caso a aproximação inicial desta fronteira não seja gerada eficientemente, várias soluções não-dominadas podem ser perdidas durante os processos de atualização da população de memória, e o desempenho final do algoritmo pode ser muito pobre.

Gong e co-autores (Gong et al. 2009, Gong & Cai 2009) propuseram um eficiente algoritmo multiobjetivo baseado em evolução diferencial. Além de incorporar os conceitos de pa ϵ -dominância, o método sugerido utiliza um arranjo ortogonal associado a uma técnica de quantização para gerar a população evolutiva e também o arquivo de

memória, o que favorece uma melhor e mais rápida aproximação inicial da fronteira Pareto, a partir da qual são estimados os valores dos vetores ϵ . O algoritmo proposto, chamado $pa\epsilon$ -ODEMO, também emprega várias características interessantes observadas em outros AEs multiobjetivo, por exemplo, as soluções dos extremos da fronteira estimada são armazenadas durante o processo de otimização e então inseridas na população de memória final, remediando assim uma das limitações da ϵ -dominância. Além disso, adota-se um mecanismo de seleção híbrido, em que uma seleção aleatória¹ e uma seleção elitista² são alternadas, evitando assim a convergência prematura do método e possibilitando também empregar soluções do arquivo para guiar o processo de busca para a fronteira Pareto-ótima global.

Outros trabalhos relacionados à investigação de critérios relaxados de dominância Pareto foram propostos na literatura – veja por exemplo (Hernández-Díaz et al. 2011, Li et al. 2011). Entretanto, os mesmos não são considerados nesta tese, principalmente devido às suas recentes publicações.

Visando tornar este texto autocontido, as seções seguintes apresentam as definições formais acerca das formas relaxadas de dominância Pareto mencionadas anteriormente, i.e., α -dominância (Ikeda et al. 2001), ϵ -dominância (Laumanns et al. 2002), e $pa\epsilon$ -dominância (Hernández-Díaz et al. 2007). Baseado neste estudo, propõe-se uma nova forma relaxada de dominância Pareto, chamada *cone* ϵ -dominância. Este mecanismo, discutido no capítulo seguinte, mantém as mesmas propriedades de convergência e diversidade observadas nas técnicas citadas neste texto e, além disso, minimiza várias das limitações de α -dominância, ϵ -dominância, e $pa\epsilon$ -dominância. A relação *cone* ϵ -dominância apresenta também uma formulação matemática simples e eficiente, cujo desempenho é menos sensível à forma da fronteira Pareto-ótima global.

¹Ambos os indivíduos pais são selecionados aleatoriamente a partir da população evolutiva.

²Ambos os indivíduos pais são selecionados aleatoriamente, sendo o primeiro da população evolutiva, e o segundo do arquivo de memória.

2.3. Estratégia α -Dominância

Conforme mencionado anteriormente, a ideia básica da α -dominância (Ikeda et al. 2001) consiste em estabelecer limites inferior e superior de relações de compromisso entre os objetivos do problema, considerados dois a dois. De maneira geral, estes limites são definidos por meio do parâmetro α_{ij} , em que (i, j) representam diferentes objetivos do problema de otimização. Este conceito é formalmente apresentado na **Definição 2.1**.

Definição 2.1. (α -Dominância) Supondo $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$ dois pontos factíveis, diz-se que \mathbf{x}_1 α -domina \mathbf{x}_2 se, e somente se, $\forall i w_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \leq 0$, e $\exists i$ tal que $w_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) < 0$, em que a função $w_i(\cdot, \cdot)$ é definida em (2.1) e $i \in \{1, \dots, m\}$. Equivalentemente, diz-se que $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \in \mathbb{Y}$ α -domina $\mathbf{f}(\mathbf{x}_2) \in \mathbb{Y}$ no espaço de objetivos. Essa relação de dominância é escrita como $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \overset{\alpha}{\prec} \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$.

$$w_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = f_i(\mathbf{x}_1) - f_i(\mathbf{x}_2) + \sum_{j \neq i}^{1 \dots m} \alpha_{ij} (f_j(\mathbf{x}_1) - f_j(\mathbf{x}_2)) \quad (2.1)$$

□

Nota-se que quando $\alpha_{ij} = 0 \forall (i \neq j)$, então a relação α -dominância converge para a relação de dominância usual (**Definição 1.1**).

Uma vez definido o conceito de α -dominância, define-se também o conceito de solução α -Pareto-ótima.

Definição 2.2. (Solução α -Pareto-ótima) Supondo $\mathbf{x}^* \in \Omega$ um ponto factível, diz-se que \mathbf{x}^* é uma solução α -Pareto-ótima do problema multiobjetivo se não existe qualquer outra solução factível $\mathbf{x} \in \Omega$, tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \overset{\alpha}{\prec} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$, ou seja, \mathbf{x}^* não é α -dominado por nenhum outro ponto factível:

$$\mathbf{x}^* \in \Omega \text{ é } \alpha\text{-Pareto-ótima} \Leftrightarrow \left\{ \mathbf{x} \in \Omega \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}) \overset{\alpha}{\prec} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) \right\} = \emptyset \quad (2.2)$$

□

Com base nos conceitos apresentados, escreve-se os dois corolários mostrados a seguir. A prova matemática destes é descrita em (Ikeda et al. 2001).

Corolário 2.1. (*Dominância implica α -dominância*) Sendo $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$ dois pontos factíveis, a condição $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \prec \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$ implica na condição $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \prec^\alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \prec \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \prec^\alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) \tag{2.3}$$

□

Corolário 2.2. (*Conjunto α -Pareto-ótimo*) O conjunto α -Pareto-ótimo (2.4) é um subconjunto do conjunto Pareto-ótimo real \mathcal{P} .

$$\mathcal{X}_\alpha = \{\mathbf{x}^* \in \mathcal{P} \mid \mathbf{x}^* \text{ é uma solução } \alpha\text{-Pareto-ótima}\} \tag{2.4}$$

□

A interpretação geométrica do conceito de α -dominância pode ser observada na Fig. 2.1. Nota-se que embora a solução \mathbf{y}_2 pertença à fronteira Pareto-ótima global, a mesma é α -dominada pela solução \mathbf{y}_1 . O hipervolume α -dominado pela solução \mathbf{y}_1 está representado pela região hachurada, e a fronteira α -Pareto-ótima corresponde à curva contínua destacada na figura. As soluções pertencentes aos segmentos pontilhados são α -dominadas.

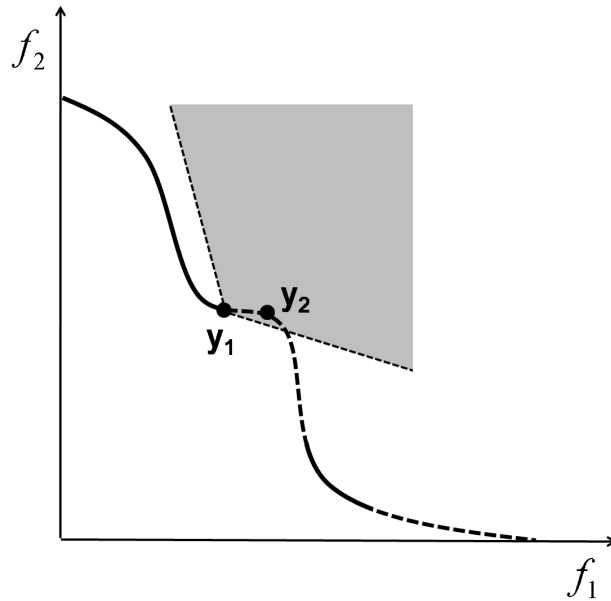
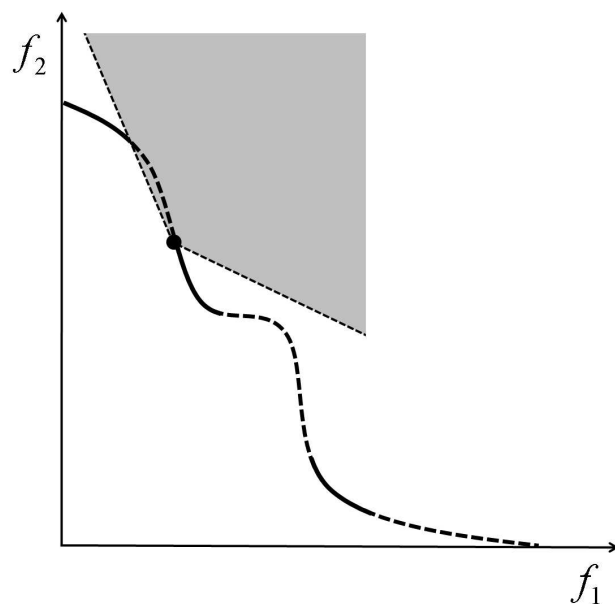


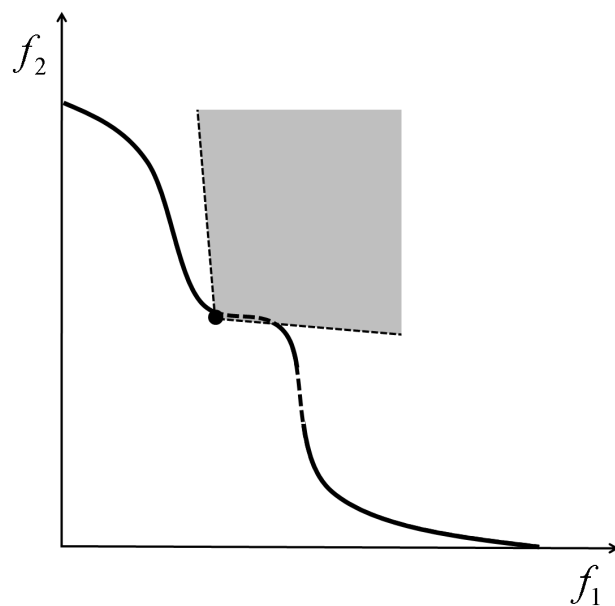
Figura 2.1.: Ilustração do conceito de α -dominância em um problema bi-objetivo. A fronteira α -Pareto-ótima corresponde aos trechos de curva contínua, e as soluções pertencentes aos segmentos pontilhados são α -dominadas.

De maneira geral, a estratégia α -dominância permite eliminar soluções ditas resistentes à dominância. Estas soluções são pouco atrativas como resposta ao problema de otimização, e normalmente são encontradas em regiões dificilmente dominadas por outros vetores, o que explica o termo “resistência à dominância” (Ikeda et al. 2001). Além disso, este critério favorece a obtenção de um conjunto α -Pareto-ótimo representativo do conjunto Pareto-ótimo global. Entretanto, a escolha do parâmetro α_{ij} é dependente das características geométricas da fronteira Pareto-ótima global e, caso seja mal estimado pelo usuário, poderá ocasionar a eliminação de extensas regiões da fronteira Pareto-ótima, principalmente segmentos aproximadamente paralelos aos eixos de coordenadas, e os extremos da fronteira.

A Fig. 2.2 ilustra o compromisso existente entre o valor escolhido para α e o desempenho final de um AE multiobjetivo baseado na relação α -dominância. Observe que quando α_{ij} é elevado (Fig. 2.2(a)), o hipervolume α -dominado por cada uma das soluções candidatas é ampliado, e várias regiões da fronteira Pareto real não são estimadas. Por outro lado, quando adota-se um pequeno valor para α_{ij} (Fig. 2.2(b)), praticamente toda a fronteira Pareto é estimada. Entretanto, embora não esteja representado nesta figura, um número maior de soluções resistentes à dominância não são α -dominadas, ocasionando possivelmente a redução da capacidade de convergência do método. Obviamente, quando α_{ij} tende a zero, a relação α -dominância converge para a relação de dominância usual. A descrição íntegra deste mecanismo é apresentada em (Ikeda et al. 2001).



(a) Valor de α_{ij} elevado.



(b) Valor de α_{ij} pequeno.

Figura 2.2.: Ilustração do efeito da relação α -dominância em função do valor de α . A fronteira α -Pareto-ótima corresponde aos trechos de curva contínua, e as soluções pertencentes aos segmentos pontilhados são α -dominadas.

2.4. Estratégia ϵ -Dominância

Conforme observado na literatura, a maioria dos métodos elitistas multiobjetivo não são capazes de assegurar simultaneamente as propriedades de convergência e diversidade das soluções Pareto encontradas (Laumanns et al. 2002). Assim sendo, é notável a existência de trabalhos que focam exclusivamente a qualidade da distribuição das soluções ou a preservação da eficiência das mesmas, visando então garantir a convergência do algoritmo. Por exemplo, os métodos PAES (Knowles & Corne 1999), SPEA (Zitzler & Thiele 1999) e NSGA-II (Deb et al. 2002) empregam diferentes mecanismos para regular a diversidade das soluções estimadas, entretanto, uma vez que o processo de seleção utilizado por estes algoritmos normalmente enfatiza a escolha de soluções não-dominadas pertencentes às regiões menos povoadas, o conjunto Pareto aproximado fica susceptível a falhas de deterioração, i.e., algumas soluções não-dominadas podem ser excluídas da população de memória e novamente reinseridas neste arquivo ao longo das iterações. Dessa forma, embora consiga-se estimar soluções representativas do conjunto Pareto-ótimo global, estes métodos não garantem a convergência das mesmas. Por outro lado, os principais trabalhos teóricos a sugerirem mecanismos reguladores das propriedades de convergência em otimização evolucionária multiobjetivo são encontrados em (Rudolph 1998a, Rudolph 1998b, Rudolph 2001, Rudolph & Agapie 2000, Hanne 1999, Hanne 2001). Nestes artigos são sugeridas técnicas de seleção eficientes, minimizando assim o problema de deterioração. Entretanto, estes métodos não garantem a preservação da diversidade das soluções Pareto estimadas.

Com o objetivo de regular convergência e diversidade em um único algoritmo, o trabalho apresentado em (Laumanns et al. 2002) propõe eficientes estratégias para a realização das etapas de seleção e atualização da população de arquivo. A técnica sugerida, ϵ -dominância, garante simultaneamente a evolução das soluções para o conjunto Pareto-ótimo e a completa cobertura da fronteira estimada. O uso do conceito de ϵ -dominância é muito interessante também do ponto de vista prático, pois permite ao decisor controlar a resolução (qualidade) do conjunto Pareto estimado em função do valor escolhido para ϵ . A definição formal destes conceitos é apresentada nas subseções seguintes.

2.4.1. Conceitos Básicos

Nas próximas linhas são dadas várias definições com relação ao conceito de ϵ -dominância (Laumanns et al. 2002).

Definição 2.3. (ϵ -Dominância) Supondo $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$ dois pontos factíveis, diz-se que \mathbf{x}_1 ϵ -domina \mathbf{x}_2 se, e somente se, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ e $\epsilon_i > 0$, $f_i(\mathbf{x}_1) - \epsilon_i \leq f_i(\mathbf{x}_2)$. Equivalentemente, diz-se que $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \in \mathbb{Y}$ ϵ -domina $\mathbf{f}(\mathbf{x}_2) \in \mathbb{Y}$ no espaço de objetivos. Essa relação de dominância é comumente escrita como $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \stackrel{\epsilon}{\prec} \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$. \square

A Fig. 2.3 ilustra os conceitos de dominância (Fig. 2.3(a)) e ϵ -dominância (Fig. 2.3(b)), em que a região hachurada representa o hipervolume dominado pela solução \mathbf{y} em um problema bi-objetivo.

Definição 2.4. (Conjunto não ϵ -dominado) Supondo $\mathcal{X} \subseteq \Omega$ um conjunto arbitrário de soluções factíveis e $\epsilon_i > 0$, $i \in \{1, \dots, m\}$, então \mathcal{X}_ϵ é chamado um conjunto não ϵ -dominado de \mathcal{X} , se todo vetor $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ é ϵ -dominado por pelo menos um vetor $\mathbf{x}' \in \mathcal{X}_\epsilon$, i.e.,

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} : \exists \mathbf{x}' \in \mathcal{X}_\epsilon \text{ tal que } \mathbf{f}(\mathbf{x}') \stackrel{\epsilon}{\prec} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.5)$$

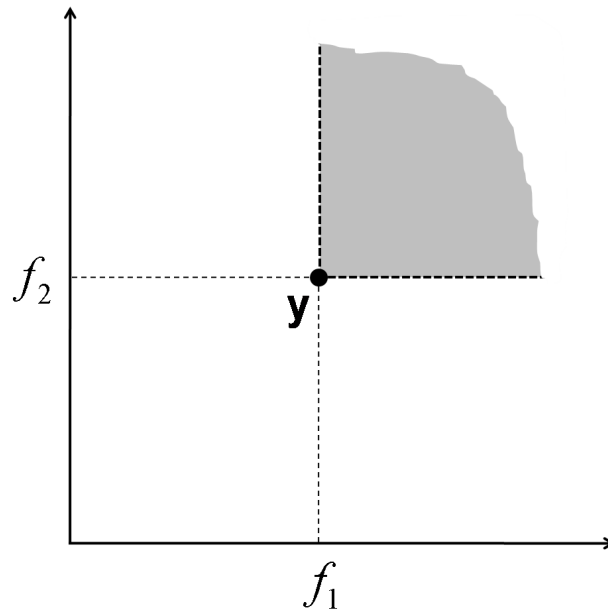
O conjunto não ϵ -dominado de \mathcal{X} é denotado $P_\epsilon(\mathcal{X})$. Ver ilustração na Fig. 2.4(a). \square

Definição 2.5. (Conjunto Pareto ϵ -aproximado) Supondo $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})} \subseteq \Omega$ um conjunto arbitrário factível que contenha o conjunto Pareto-ótimo global \mathcal{P} , e $\epsilon_i > 0$, $i \in \{1, \dots, m\}$, então \mathcal{X}_ϵ é chamado um conjunto Pareto ϵ -aproximado de $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})}$, se todo vetor $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_{(\mathcal{P})}$ é ϵ -dominado por pelo menos um vetor $\mathbf{x}' \in \mathcal{X}_\epsilon$, i.e.,

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}_{(\mathcal{P})} : \exists \mathbf{x}' \in \mathcal{X}_\epsilon \text{ tal que } \mathbf{f}(\mathbf{x}') \stackrel{\epsilon}{\prec} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.6)$$

O conjunto Pareto ϵ -aproximado de $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})}$ é denotado $P_\epsilon(\mathcal{X}_{(\mathcal{P})})$. Ver ilustração na Fig. 2.4(b). \square

Note que a diferença entre os conjuntos \mathcal{X}_ϵ e \mathcal{X}_ϵ é tal que o primeiro ϵ -domina todas as soluções contidas em \mathcal{P} (Fig. 2.4(b)), enquanto o segundo ϵ -domina todas as soluções pertencentes a um conjunto arbitrário factível $\mathcal{X} \subseteq \Omega$ (Fig. 2.4(a)). Obviamente, ambos os conjuntos \mathcal{X}_ϵ e \mathcal{X}_ϵ não são únicos, pois são diretamente influenciados pela escolha do parâmetro ϵ .



(a) Relação de dominância usual (Definição 1.1).

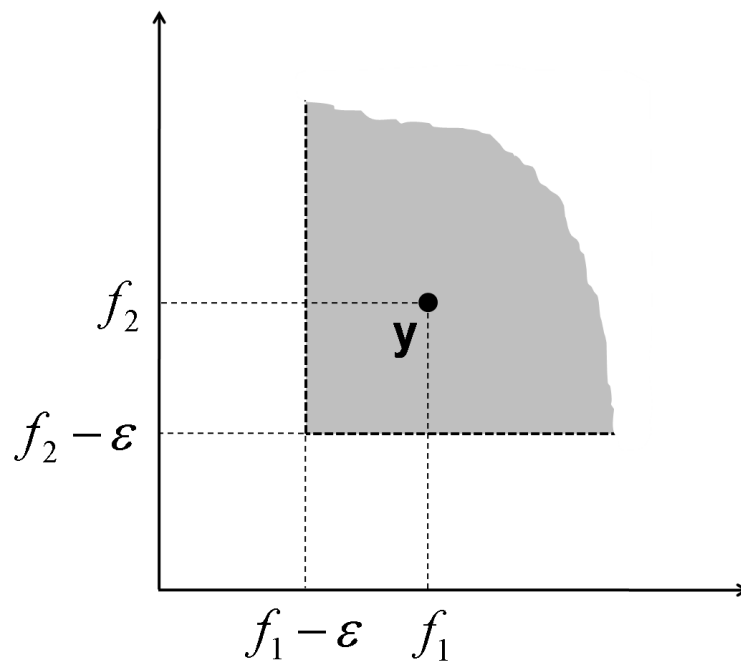
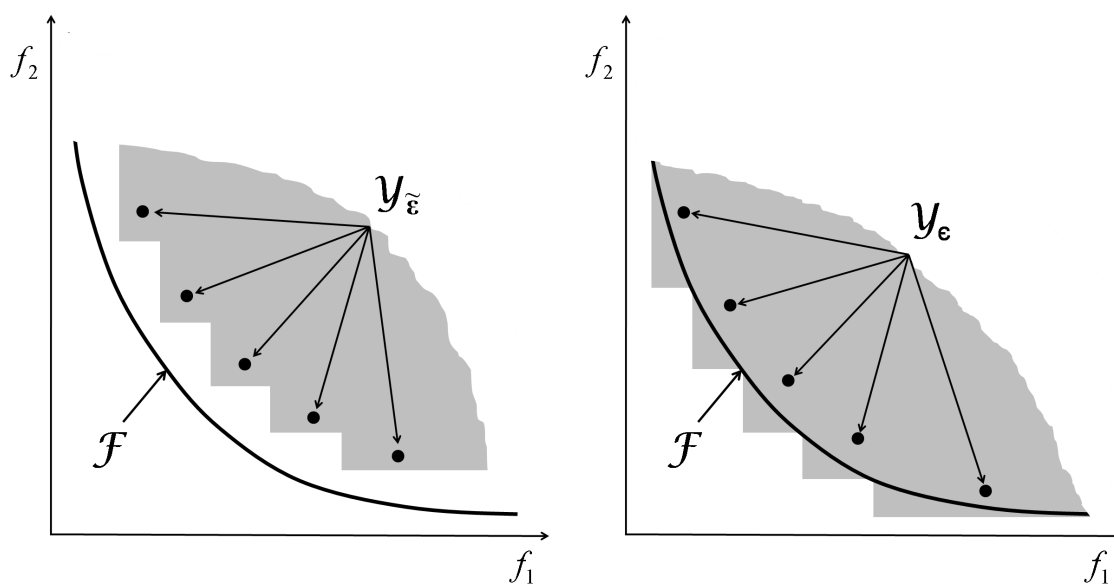
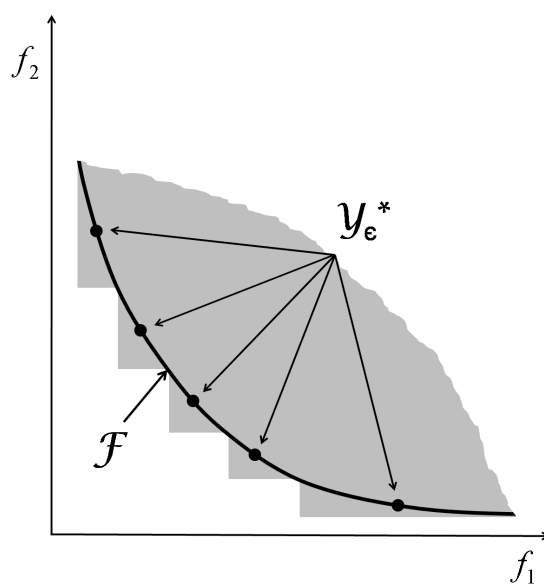
(b) Relação ϵ -dominância ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$).

Figura 2.3.: Ilustração dos conceitos de dominância e ϵ -dominância. A região hachurada representa o hipervolume dominado pela solução \mathbf{y} em um problema bi-objetivo.



(a) Fronteira não ϵ -dominada.

(b) Fronteira Pareto ϵ -aproximada.



(c) Fronteira ϵ -Pareto-ótima.

Figura 2.4.: Ilustração dos conceitos de fronteira não ϵ -dominada, fronteira Pareto ϵ -aproximada, e fronteira ϵ -Pareto-ótima. Note que, em todos os casos, cada caixa é ocupada apenas por uma única solução não ϵ -dominada, garantindo assim a manutenção de diversidade entre as soluções estimadas. A fronteira ϵ -Pareto-ótima \mathcal{Y}_{ϵ}^* não somente ϵ -domina todas as soluções em $\mathcal{Y}_{(\mathcal{F})} \subseteq \mathbf{f}(\Omega)$, mas consiste apenas de soluções Pareto-ótimas de $\mathcal{Y}_{(\mathcal{F})}$, portanto, $F_{\epsilon}^*(\mathcal{Y}_{(\mathcal{F})}) \subseteq F_{\epsilon}(\mathcal{Y}_{(\mathcal{F})})$.

Observe que pela **Definição 2.5**, tem-se que cada solução Pareto-ótima é aproximadamente dominada por pelo menos um ponto do conjunto \mathcal{X}_ϵ . Além disso, uma vez que somente caixas não-dominadas são ocupadas, é possível mostrar que para qualquer $\epsilon_i > 0$ finito e qualquer conjunto factível $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})} \subseteq \Omega$, tem-se um conjunto \mathcal{X}_ϵ de tamanho limitado dado por:

$$|\mathcal{X}_\epsilon| \leq \prod_{i=1}^{m-1} \frac{K-1}{\epsilon_i} \quad (2.7)$$

em que $1 \leq f_i \leq K \forall i \in \{1, \dots, m\}$ denota o espaço de objetivos normalizado, e a função $|\cdot|$ especifica a cardinalidade do conjunto em seu argumento.

Embora o conceito de ϵ -dominância descrito neste texto seja baseado em uma aproximação aditiva (**Definição 2.3**), este conceito pode ser reescrito considerando-se a seguinte aproximação multiplicativa:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \stackrel{\epsilon}{\prec} \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) \Leftrightarrow f_i(\mathbf{x}_1)(1 - \epsilon_i) \leq f_i(\mathbf{x}_2) \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}. \quad (2.8)$$

Neste caso, o tamanho limite do conjunto Pareto ϵ -aproximado é calculado pela equação a seguir.

$$|\mathcal{X}_\epsilon| \leq \prod_{i=1}^{m-1} \frac{-\log K}{\log(1 - \epsilon_i)} \quad (2.9)$$

O refinamento do conceito de um conjunto Pareto ϵ -aproximado conduz à definição de um conjunto ϵ -Pareto-ótimo.

Definição 2.6. (Conjunto ϵ -Pareto-ótimo) Supondo $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})} \subseteq \Omega$ um conjunto arbitrário factível que contenha o conjunto Pareto-ótimo global \mathcal{P} , e $\epsilon_i > 0$, $i \in \{1, \dots, m\}$, então o conjunto $\mathcal{X}_\epsilon^* \subseteq \mathcal{X}_{(\mathcal{P})}$ é chamado um conjunto ϵ -Pareto-ótimo de $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})}$ se:

1. \mathcal{X}_ϵ^* é um conjunto Pareto ϵ -aproximado de $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})}$, i.e., $\mathcal{X}_\epsilon^* \in P_\epsilon(\mathcal{X}_{(\mathcal{P})})$, e
2. \mathcal{X}_ϵ^* contém somente soluções Pareto de $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})}$, i.e., $\mathcal{X}_\epsilon^* \subseteq \mathcal{P}$.

O conjunto ϵ -Pareto-ótimo de $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})}$ é denotado $P_\epsilon^*(\mathcal{X}_{(\mathcal{P})})$. □

O conceito definido anteriormente é ilustrado na Fig. 2.4(c) no domínio de objetivos. Observe que uma fronteira ϵ -Pareto-ótima \mathcal{Y}_ϵ^* não somente ϵ -domina todas as soluções em $\mathcal{Y}_{(\mathcal{F})} \subseteq \mathbf{f}(\Omega)$, mas consiste apenas de soluções Pareto-ótimas de $\mathcal{Y}_{(\mathcal{F})}$, portanto, $F_\epsilon^*(\mathcal{Y}_{(\mathcal{F})}) \subseteq F_\epsilon(\mathcal{Y}_{(\mathcal{F})})$.

Conforme mencionado no texto, determinar o conjunto Pareto de um conjunto arbitrário factível $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})} \subseteq \Omega$ é usualmente impraticável, principalmente em função do seu tamanho. Por isso, o conceito de conjunto Pareto ϵ -aproximado é interessante do ponto de vista prático, pois além de ser representativo de todos os vetores contidos em $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})}$, consiste de um pequeno número de soluções. Entretanto, o conjunto ϵ -Pareto é ainda mais atrativo, pois consiste apenas de soluções Pareto-ótimas.

2.4.2. Preservação de um Conjunto Pareto ϵ -Aproximado

A função de atualização que conduz à preservação de um conjunto Pareto ϵ -aproximado é mostrada no **Algoritmo 2.1**. De acordo com este algoritmo, novos pontos somente são aceitos na população de arquivo (\mathcal{A}) caso não sejam ϵ -dominados por nenhum outro ponto deste arquivo. Além disso, caso um ponto aceito domine outras soluções, segundo a relação de dominância usual, estas são então removidas do arquivo. Neste algoritmo, a operação $a \triangleq b$ indica que a é definido como b .

Algoritmo 2.1: Função de atualização do conjunto Pareto ϵ -aproximado.

Entrada: \mathcal{A}, \mathbf{y}

1 **início**

2 **se** $\exists \mathbf{y}' \in \mathcal{A}$ tal que $\mathbf{y}' \prec_\epsilon \mathbf{y}$ **então**

3 $\mathcal{A}' \triangleq \mathcal{A};$

4 **senão**

5 $\mathbf{R} \triangleq \{\mathbf{y}' \in \mathcal{A} \mid \mathbf{y} \prec \mathbf{y}'\};$

6 $\mathcal{A}' \triangleq (\mathcal{A} \cup \{\mathbf{y}\}) \setminus \mathbf{R};$

7 **fim**

8 **fim**

Saída: \mathcal{A}'

A preservação de um conjunto Pareto ϵ -aproximado é garantida pelo **Teorema 2.3**, cuja prova é apresentada em (Laumanns et al. 2002).

Teorema 2.3. (Estratégia de atualização do conjunto Pareto ϵ -aproximado)

Suponha $\mathcal{Y}^{(t)} = \bigcup_{j=1}^t \mathbf{y}^{(j)}$, $1 \leq f_i \leq K$, $i \in \{1, \dots, m\}$, o conjunto de todas as soluções geradas pelo **Algoritmo 1.1** até a iteração t , e entregue à função de atualização definida no **Algoritmo 2.1**. Então, a população de memória $\mathcal{A}(t)$ corresponde a um conjunto Pareto ϵ -aproximado de $\mathcal{X}^{(t)} = \mathbf{f}^{-1}(\mathcal{Y}^{(t)})$ com tamanho limitado, i.e.,

1. $\mathcal{A}(t) \in P_\epsilon(\mathcal{X}^{(t)})$, e
2. $|\mathcal{A}(t)| \leq \prod_{i=1}^m \frac{K-1}{\epsilon_i}$.

□

2.4.3. Preservação de um Conjunto ϵ -Pareto-Ótimo

Além de preservar a diversidade das soluções estimadas, deseja-se também garantir que os vetores em $\mathcal{A}(t)$ sejam soluções Pareto de todas as soluções candidatas geradas até a iteração t . O **Algoritmo 2.2** apresenta a função de atualização do conjunto ϵ -Pareto a partir da qual ambos os critérios de convergência e diversidade são satisfeitos. Este algoritmo possui dois níveis conceituais. No primeiro nível, o espaço de objetivos é discretizado em hipercubos, ou caixas, e cada uma destas pode ser ocupada unicamente por uma solução (**Algoritmo 2.3**). Usando a relação de dominância padrão, o algoritmo sempre mantém um conjunto de hipercubos não-dominados, garantindo assim a propriedade ϵ -aproximada. Em um nível mais refinado, cada hipercubo é ocupado por no máximo uma solução, e esta pode ser substituída somente por uma solução que a dominar, garantindo assim a convergência do método.

Observe que o operador $\lfloor \cdot \rfloor$ utilizado no **Algoritmo 2.3** retorna o menor inteiro mais próximo do valor em seu argumento.

Finalmente, a convergência da estratégia de atualização, bem como a preservação da diversidade das soluções, são garantidas simultaneamente pelo **Teorema 2.4**. A prova deste teorema é descrita em (Laumanns et al. 2002).

Teorema 2.4. (Estratégia de atualização do conjunto ϵ -Pareto-ótimo) *Suponha $\mathcal{Y}^{(t)} = \bigcup_{j=1}^t \mathbf{y}^{(j)}$, $1 \leq f_i \leq K$, $i \in \{1, \dots, m\}$, o conjunto de todas as soluções geradas pelo Algoritmo 1.1 até a iteração t , e entregue à função de atualização definida no Algoritmo 2.2. Então, a população de memória $\mathcal{A}(t)$ corresponde a um conjunto ϵ -Pareto de $\mathcal{X}^{(t)} = \mathbf{f}^{-1}(\mathcal{Y}^{(t)})$ com tamanho limitado, i.e.,*

1. $\mathcal{A}(t) \in P_\epsilon^*(\mathcal{X}^{(t)})$, e
2. $|\mathcal{A}(t)| \leq \prod_{i=1}^{m-1} \frac{K-1}{\epsilon_i}$.

□

Algoritmo 2.2: Função de atualização do conjunto ϵ -Pareto.

Entrada: \mathcal{A}, \mathbf{y}

1 início

2 $R \triangleq \{\mathbf{y}' \in \mathcal{A} \mid \text{box}(\mathbf{y}) \prec \text{box}(\mathbf{y}')\};$

3 se $R \neq \emptyset$ então

4 $\mathcal{A}' \triangleq (\mathcal{A} \cup \{\mathbf{y}\}) \setminus R;$

5 senão se $\exists \mathbf{y}' : (\text{box}(\mathbf{y}') = \text{box}(\mathbf{y}) \wedge \mathbf{y} \prec \mathbf{y}')$ então

6 $\mathcal{A}' \triangleq (\mathcal{A} \cup \{\mathbf{y}\}) \setminus \{\mathbf{y}'\};$

7 senão se $\nexists \mathbf{y}' : (\text{box}(\mathbf{y}') = \text{box}(\mathbf{y}) \vee \text{box}(\mathbf{y}') \prec \text{box}(\mathbf{y}))$ então

8 $\mathcal{A}' \triangleq \mathcal{A} \cup \{\mathbf{y}\};$

9 senão

10 $\mathcal{A}' \triangleq \mathcal{A};$

11 fim

12 fim

Saída: \mathcal{A}'

Algoritmo 2.3: Define os índices do hiper cubo usado na relação ϵ -dominância.

Entrada: $\mathbf{y} = \mathbf{f}(x)$

1 início

2 para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ faça

3 $b_i \triangleq \left\lfloor \frac{y_i - 1}{\epsilon_i} \right\rfloor;$

4 fim

5 $\mathbf{b} \triangleq (b_1, \dots, b_m);$

6 fim

Saída: $\text{box}(\mathbf{y}) = \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$

/* vetor de índices do hiper cubo */

A segunda afirmação deste teorema pode ser facilmente verificada a partir da Fig. 2.5. O espaço de objetivos é dividido em $\left(\frac{K-1}{\epsilon}\right)^m$ hipercubos, e no máximo uma solução de cada cubo pode pertencer ao conjunto $\mathcal{A}(t)$ ao mesmo tempo. Supondo que os cubos, cujas coordenadas são idênticas em exatamente $(m-1)$ dimensões, represente uma classe de hipercubos semelhantes, então, existem $\left(\frac{K-1}{\epsilon}\right)^{(m-1)}$ classes e $\left(\frac{K-1}{\epsilon}\right)$ cubos em cada classe. Como no máximo uma solução de cada uma destas classes pode ser membro do conjunto $\mathcal{A}(t)$ ao mesmo tempo (**Algoritmo 2.2**), então a segunda afirmação do **Teorema 2.4** é verdadeira. Observe que a fronteira Pareto mostrada na Fig. 2.5 não é linear e, por isso, apenas três soluções foram estimadas. Neste caso, a solução pertencente à classe 3 ϵ -domina qualquer hipercubo pertencente à classe 4.

Note que os limites estabelecidos para os valores de aptidão das soluções, $1 \leq f_i \leq K \forall i \in \{1, \dots, m\}$, não são usados na definição dos algoritmos e não são necessários para provar a convergência da estratégia proposta. Estes valores são empregados somente para provar a relação existente entre o parâmetro ϵ e o tamanho do arquivo \mathcal{A} .

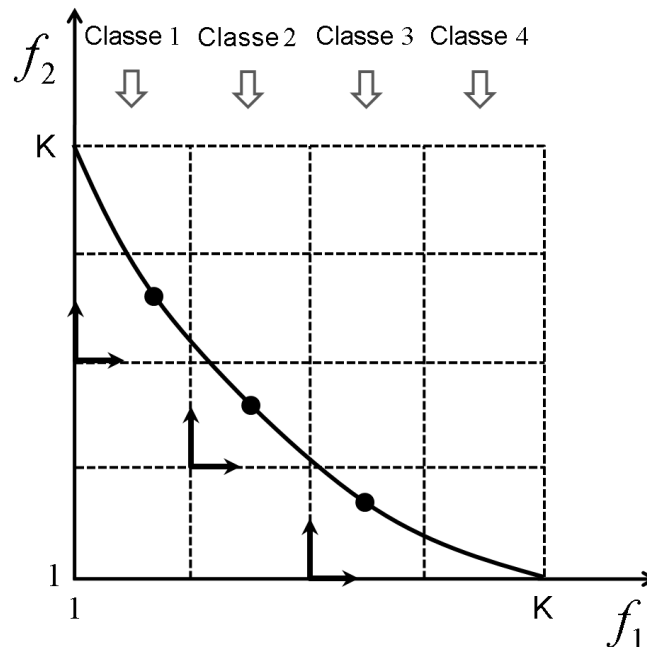


Figura 2.5.: Ilustração da relação existente entre o valor do parâmetro ϵ e o tamanho limite da população de arquivo \mathcal{A} . O espaço de objetivos é discretizado segundo a relação ϵ -dominância ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$), sendo que o número máximo de hipercubos não-dominados é $|\mathcal{A}|_{max} = 4$. Observe que a fronteira Pareto não é linear e, por isso, apenas 3 soluções foram estimadas.

2.4.4. Principais Limitações da Estratégia ϵ -Dominância

Algumas das principais limitações da relação ϵ -dominância são enumeradas a seguir.

1. Uma quantidade significativa de soluções eficientes pode ser perdida caso o decisor não considere, ou não conheça *a priori*, as características geométricas da fronteira Pareto-ótima do problema de otimização;
2. Dependendo do valor escolhido para ϵ , a discretização do espaço de objetivos pode resultar na perda dos pontos extremos da fronteira Pareto, e também de pontos localizados em segmentos aproximadamente paralelos aos eixos de coordenadas do espaço de objetivos. A Fig. 2.6 ilustra esta limitação;
3. De acordo com a segunda afirmação do **Teorema 2.4**, o valor do parâmetro ϵ pode ser determinado em função do tamanho limite do arquivo \mathcal{A} especificado pelo decisor. Entretanto, na relação ϵ -dominância, o tamanho máximo de \mathcal{A} somente é alcançado quando a fronteira Pareto-real é linear;
4. Quando o esquema multiplicativo é adotado (2.8), o volume do hipercubo ϵ -dominado por uma solução factível $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ é influenciado pela localização de \mathbf{y} no espaço de objetivos, i.e., esse volume depende das coordenadas y_i , $i \in \{1, \dots, m\}$ neste domínio. De maneira geral, observa-se que quanto maiores os valores de y_i , maior o volume do hipercubo ϵ -dominado. Por outro lado, quando os valores de y_i são reduzidos, a relação ϵ -dominância tende à relação de dominância tradicional. Neste caso, a discretização do espaço de objetivos utilizando o esquema multiplicativo pode comprometer o desempenho do método. A Fig. 2.7 ilustra esta limitação considerando-se um problema bi-objetivo em que $\epsilon_1 = \epsilon_2$. Note que a situação é crítica, principalmente, em problemas cuja fronteira Pareto é côncava (Fig. 2.7(a)).

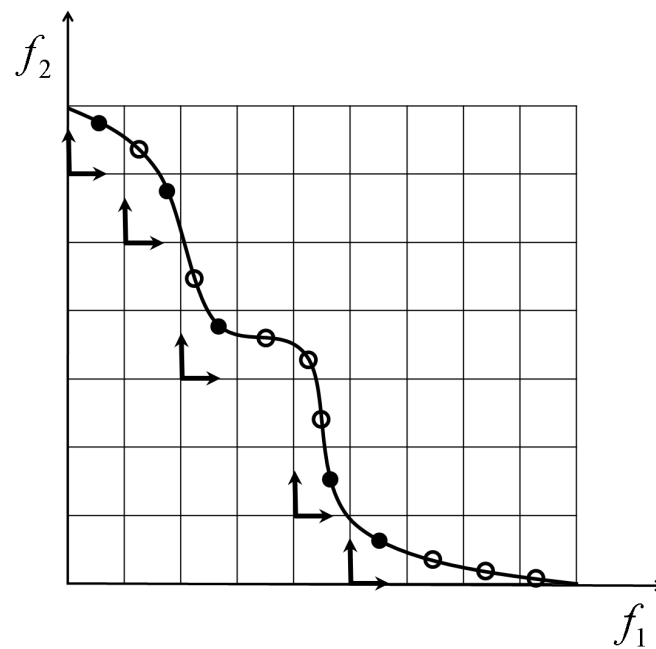
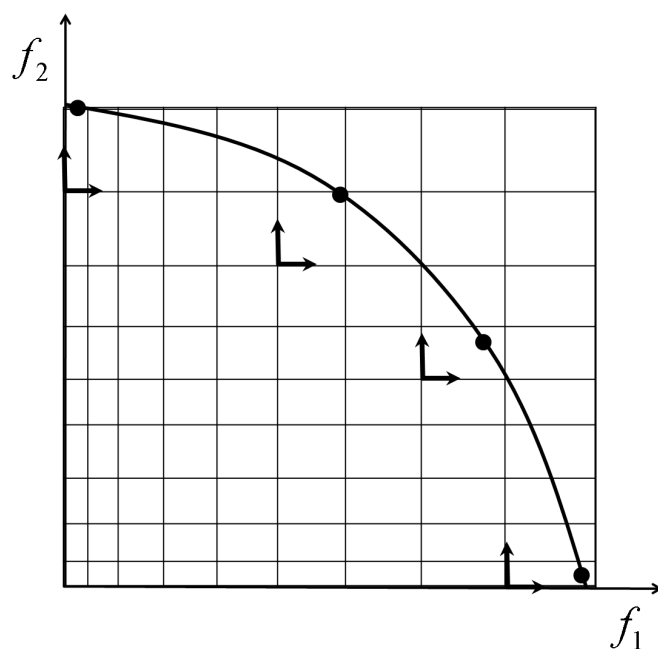
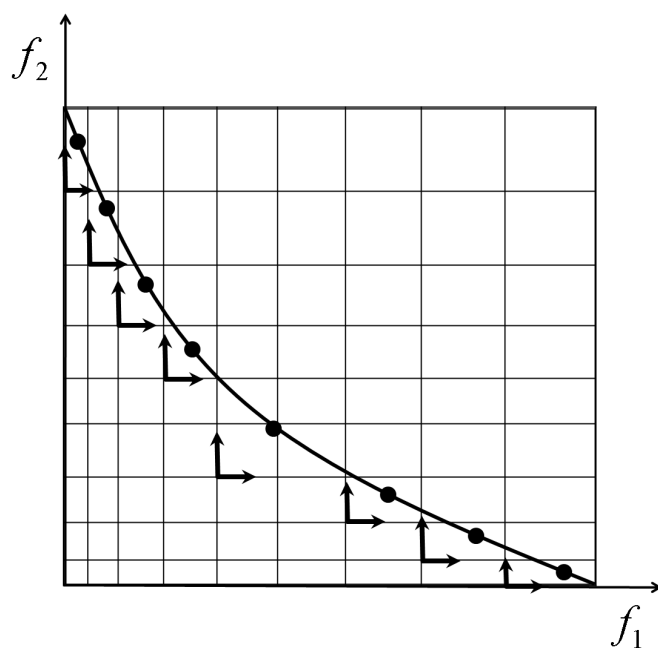


Figura 2.6.: Ilustra a perda de soluções eficientes devido a aplicação da relação ϵ -dominância ($\epsilon_1 = \epsilon_2$). Comumente, as soluções eliminadas compõem os extremos do Pareto, e segmentos aproximadamente paralelos aos eixos de coordenadas do espaço de objetivos. Os pontos (●) representam soluções ϵ -Pareto-ótimas, já os pontos (○), embora sejam soluções da fronteira Pareto real, são soluções ϵ -dominadas.



(a) Fronteira Pareto-ótima côncava.



(b) Fronteira Pareto-ótima convexa.

Figura 2.7.: Ilustra a discretização do espaço de objetivos utilizando a relação ϵ -dominância multiplicativa. Quanto maiores os valores dos objetivos, maiores se tornam os volumes dos hipercubos ϵ -dominados. Este fato compromete o desempenho da técnica, por exemplo, em problemas cuja fronteira Pareto é côncava. No caso ilustrado, a discretização realizada permite a estimação de apenas 4 soluções ϵ -Pareto-ótimas quando a fronteira global é côncava, e 8 soluções ϵ -Pareto-ótimas quando a fronteira global é convexa.

2.5. Estratégia $\text{pa}\epsilon$ -Dominância

Visando minimizar algumas limitações da técnica ϵ -dominância, uma variante deste mecanismo, chamada “Pareto-adaptive ϵ -dominance” ($\text{pa}\epsilon$ -dominance), é proposta em (Hernández-Díaz et al. 2007). Uma vez que este mecanismo também adota a estratégia de atualização descrita no **Algoritmo 2.2**, a técnica $\text{pa}\epsilon$ -dominância garante as mesmas propriedades de convergência e diversidade observadas na técnica ϵ -dominância.

A estratégia proposta em (Hernández-Díaz et al. 2007) representa um mecanismo alternativo da relação ϵ -dominância aditiva (**Definição 2.3**). De maneira geral, este mecanismo considera não somente valores distintos de ϵ para os objetivos, mas um vetor $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m)$ associado aos objetivos $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, sendo que os valores em ϵ_i dependem das características geométricas da fronteira Pareto-ótima. A ideia básica deste mecanismo consiste em adaptar o tamanho de cada hipercubo em função da sua localização no espaço de objetivos, de forma que hipercubos menores sejam criados, por exemplo, nos extremos da fronteira Pareto, e hipercubos maiores em outras partes menos problemáticas da fronteira.

Com o objetivo de implementar esta estratégia, a fronteira Pareto do problema de otimização é associada a uma das curvas da família a seguir:

$$\sum_{i=1}^m z_i^s = 1 \quad : \quad z_i \in (0, 1), \quad s \in (0, \infty) \quad (2.10)$$

onde m é o número de objetivos, $0 \leq f_i \leq 1, \forall i \in \{1, \dots, m\}$, representa o espaço de objetivos normalizado, e o parâmetro s controla a característica da superfície definida em (2.10).

O valor de s é determinado com base em uma aproximação inicial obtida para a fronteira Pareto global. Após a estimação desta fronteira inicial (\mathcal{Y}_0), o valor de s é definido tal que a superfície descrita em (2.10) seja a mais representativa possível das características geométricas da fronteira \mathcal{Y}_0 . Assim sendo, determina-se os valores dos vetores em ϵ tomando-se por base a superfície analítica aproximada.

Observe que tanto o número de soluções contidas em \mathcal{Y}_0 quanto a distribuição destas ao longo da fronteira podem ser críticos para o desempenho final do método, pois caso o valor escolhido para s não seja apropriado, a discretização do espaço de objetivos também não será apropriada. Obviamente, quanto maior a quantidade de soluções em \mathcal{Y}_0 , e quanto melhor a qualidade da distribuição destas soluções, melhor será o desempenho da discretização gerada. Por outro lado, visando manter as propriedades de convergência e diversidade observadas na técnica ϵ -dominância, a aproximação inicial de \mathcal{Y}_0 deve ser obtida o mais rápido possível. Usualmente, a relação padrão de dominância é empregada até que 100 soluções localmente ótimas sejam estimadas, e só então gera-se a discretização do espaço de objetivos (Hernández-Díaz et al. 2007, Gong et al. 2009, Gong & Cai 2009).

A determinação do parâmetro s envolve o cálculo do hipervolume dominado pelas soluções contidas em \mathcal{Y}_0 . Uma vez especificada essa região, o valor de $s \in (0, +\infty)$ é estimado por meio de um processo de interpolação. De forma geral, o valor de s é escolhido quando a região dominada pela superfície definida em (2.10) é similar ao hipervolume dominado pelas soluções em \mathcal{Y}_0 . Esta precisão é previamente fornecida pelo usuário.

Embora o procedimento assuma uma aproximação simétrica para a fronteira Pareto, o método pode ser generalizado adotando-se a família de superfícies definidas a seguir.

$$\sum_{i=1}^m z_i^{s_i} = 1 \quad : \quad z_i \in (0, 1), \quad s_i \in (0, \infty), \quad \forall i \in \{0, \dots, m\} \quad (2.11)$$

Entretanto, este procedimento é mais instável, pois é fortemente dependente das soluções em \mathcal{Y}_0 , podendo conduzir à estimação dos parâmetros s_1, \dots, s_m com erros significativos.

Obviamente, tanto a ϵ -dominância quanto a $pa\epsilon$ -dominância apresentam um melhor desempenho em problemas cuja fronteira Pareto é contínua. Para tratar fronteiras desconexas, ambas as técnicas devem ser cuidadosamente ajustadas.

2.5.1. Determinação do Parâmetro ϵ

Uma vez que o valor de s é estimado, e o número de soluções Pareto desejadas ($T = |\mathcal{A}|$) é especificado pelo decisor, calcula-se o tamanho dos hipercubos para cada objetivo $i \in \{1, \dots, m\}$, ou seja, $\epsilon_i = (\epsilon_i^1, \epsilon_i^2, \dots, \epsilon_i^T)$.

Estes valores são calculados utilizando-se uma sequência geométrica dependente de s , T , e do tamanho do primeiro hipercubo de cada dimensão (ϵ_i^1), tal que, para $k \geq 2$, tem-se:

$$\epsilon_i^k = \frac{\epsilon_i^{k-1}}{s^{v_i}} = \frac{\epsilon_i^{k-2}}{(s^{v_i})^2} = \dots = \frac{\epsilon_i^1}{(s^{v_i})^{k-1}} \quad (2.12)$$

em que v_i controla a velocidade de variação do valor de ϵ .

Os valores de v_i e ϵ_i^1 são calculados com base no sistema a seguir. O desenvolvimento destas equações encontra-se em (Hernández-Díaz et al. 2007).

$$\begin{cases} \epsilon_i^1 = \frac{(s^{(v_i)} - 1)s^{(T-1)v_i}}{s^{(Tv_i-1)}} \\ (1 - 2^{(1/s)})s^{(Tv_i)} + 2^{(1/s)}s^{(Tv_i/2)} - 1 = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

2.5.2. Determinação do Vetor de Índices dos Hipercubos

Como observado na técnica ϵ -dominância, no máximo uma solução é permitida em cada hipercubo, e esta solução representativa somente é substituída por uma outra que a dominar. Com o objetivo de verificar essas condições, cada solução $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ é associada a um hipercubo definido pelo vetor de índices $\mathbf{b}(\mathbf{y}) = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{Z}^m$. Dessa forma, em um nível inicial, o algoritmo sempre mantém um conjunto de hipercubos não-dominados, i.e., um conjunto de hipercubos cujos vetores de índices são não-dominados. Já em um nível mais refinado, caso duas soluções compartilhem o mesmo hipercubo, a solução representativa somente é eliminada caso a segunda a domine.

Dada uma solução $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, o vetor de índices correspondente $\mathbf{b}(\mathbf{y})$ é obtido utilizando-se o **Algoritmo 2.4**. Neste algoritmo, o operador $\lfloor \cdot \rfloor$ retorna o menor inteiro mais próximo do valor em seu argumento. Informações adicionais sobre a definição de $\mathbf{b}(\cdot)$ são apresentadas em (Hernández-Díaz et al. 2007).

Algoritmo 2.4: Define os índices do hipercubo usado na relação pa ϵ -dominância.

Entrada: $\mathbf{y} = \mathbf{f}(x)$

1 início

2 para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ faça

3 $b_i \triangleq \left\lceil \frac{\log \left(\frac{\epsilon_1^i s^{(v_i)} - (s^{(v_i)} - 1)y_i}{\epsilon_1^i} \right)}{\log \left(\frac{1}{s^{(v_i)}} \right)} + 1 \right\rceil$;

4 fim

5 $\mathbf{b} \triangleq (b_1, \dots, b_m)$;

6 fim

Saída: $\text{box}(\mathbf{y}) = \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ /* vetor de índices do hipercubo */

Finalmente, vale mencionar que na técnica pa ϵ -dominância, caso duas soluções viáveis $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{f}(\Omega)$ compartilhem o mesmo hipercubo, i.e., $\mathbf{b}(\mathbf{y}_1) = \mathbf{b}(\mathbf{y}_2)$, e ambas sejam não-dominadas entre si, então, mantém-se aquela mais próxima da origem do hipercubo, por exemplo, utilizando a distância Euclidiana.

A Fig. 2.8 ilustra a discretização do espaço de objetivos, e o desempenho hipotético alcançado pelas técnicas ϵ -dominância (Fig. 2.8(a)) e pa ϵ -dominância (Fig. 2.8(b)) em um problema bi-objetivo côncavo. Como pode ser facilmente verificado, o mecanismo pa ϵ -dominância permite a estimação de um maior número de soluções eficientes.

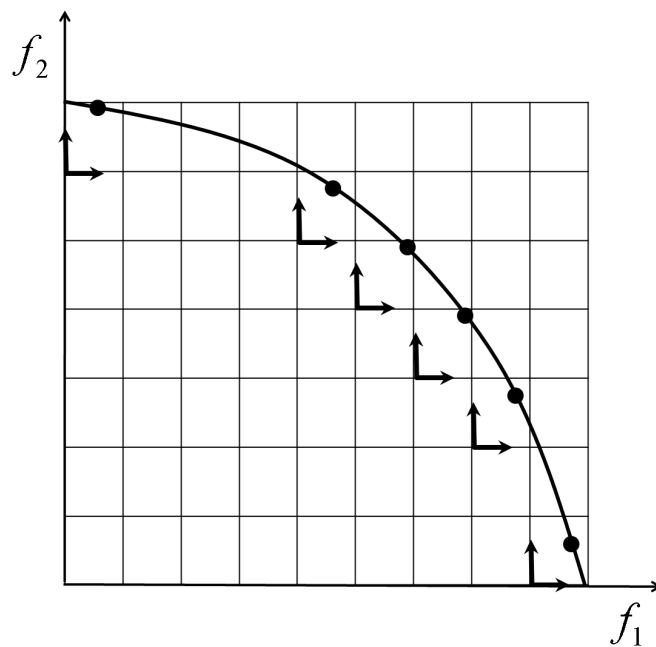
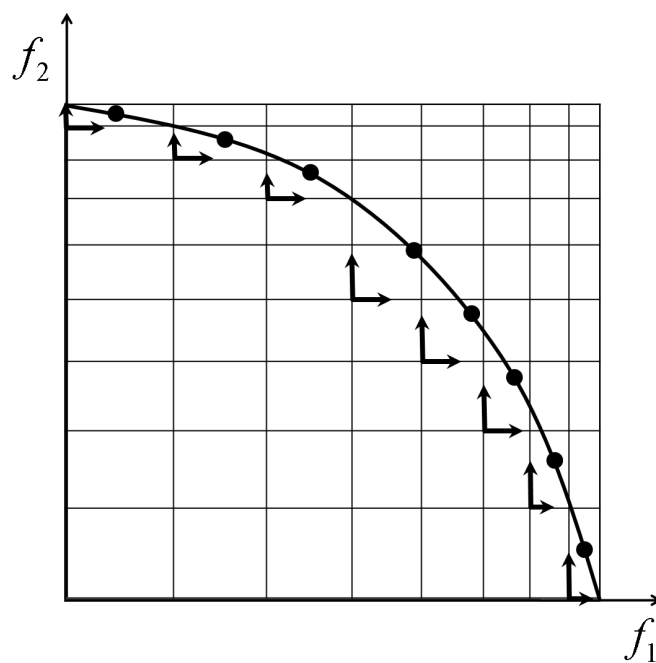
(a) Soluções ϵ -Pareto-ótimas.(b) Soluções $pa\epsilon$ -Pareto-ótimas.

Figura 2.8.: Ilustra a discretização do espaço de objetivos utilizando ϵ -dominância e $pa\epsilon$ -dominância. Conforme observado, o mecanismo adaptativo $pa\epsilon$ -dominância permite a estimativa de um maior número de soluções eficientes. Ambas as técnicas baseiam-se no esquema aditivo.

2.5.3. Principais Limitações da Estratégia $pa\epsilon$ -Dominância

Embora algumas limitações da relação $pa\epsilon$ -dominância tenham sido discutidas ao longo das seções anteriores, as principais são destacadas a seguir. Outras limitações desta técnica são enumeradas no capítulo 3.

1. Este mecanismo requer a geração de uma aproximação inicial da fronteira Pareto (\mathcal{Y}_0) para calcular os valores dos vetores ϵ . Neste caso, tanto a quantidade quanto a qualidade das soluções obtidas na estimativa inicial da fronteira Pareto podem ser críticas ao desempenho final do algoritmo. Assim sendo, caso a aproximação inicial desta fronteira não seja gerada eficientemente, várias soluções não-dominadas podem ser perdidas durante os processos de atualização da população de memória, e o desempenho final do algoritmo pode ser muito pobre. Note que, embora o nome desta estratégia sugira um mecanismo adaptativo, os vetores ϵ são adaptados somente uma única vez, considerando-se apenas a aproximação inicial \mathcal{Y}_0 . A realização de outras adaptações durante a evolução das características das soluções estimadas certamente melhoraria o desempenho do método;
2. A determinação do parâmetro s envolve o cálculo do hipervolume dominado pelas soluções contidas em \mathcal{Y}_0 , i.e., o valor de s é escolhido quando a região dominada pela aproximação analítica definida em (2.10) é similar ao hipervolume dominado pelas soluções de \mathcal{Y}_0 . Entretanto, o cálculo do hipervolume quando $m \geq 4$ não é trivial, o que torna o procedimento desmotivante. Além disso, a obtenção da aproximação analítica torna-se tão susceptível a erros quanto maior o número de objetivos;
3. Independente da característica geométrica da fronteira Pareto-ótima do problema de otimização, a família de superfícies analíticas utilizada considera uma aproximação simétrica para as soluções em \mathcal{Y}_0 , podendo conduzir a um desempenho final pobre. Note que o método pode ser generalizado adotando-se superfícies assimétricas. Entretanto, o procedimento torna-se menos robusto, podendo conduzir à estimação dos vetores ϵ com erros significativos (Hernández-Díaz et al. 2007);
4. As propriedades de convergência e diversidade observadas na técnica ϵ -dominância são asseguradas somente após a aproximação inicial de \mathcal{Y}_0 , e a “discretização” do espaço de objetivos.

2.6. Conclusão

Ao longo do capítulo corrente discorreu-se acerca das principais estratégias relaxadas de dominância Pareto citadas na literatura especializada, a saber, α -dominância (Ikeda et al. 2001), ϵ -dominância (Laumanns et al. 2002), e $pa\epsilon$ -dominância (Hernández-Díaz et al. 2007). Conforme mostrado, estas técnicas são comumente empregadas como ferramentas de atualização da população de memória em algoritmos evolucionários multiobjetivo. Este fato se deve, principalmente, à capacidade destes métodos de regular simultaneamente ambas as propriedades de convergência e diversidade das soluções estimadas durante o processo de otimização. Além disso, estes mecanismos permitem ao projetista controlar a resolução (qualidade) do conjunto Pareto aproximado, e também direcionar a busca para regiões de interesse da fronteira Pareto.

Embora os avanços já obtidos sejam de grande valia no contexto da otimização multiobjetivo, as técnicas até então sugeridas apresentam limitações que comprometem o desempenho final do método. Várias dessas limitações foram abordadas ao longo das seções deste capítulo. Com o objetivo de contornar tais problemas, propõe-se uma nova forma relaxada de dominância Pareto, chamada cone ϵ -dominância. Este mecanismo, discutido no capítulo seguinte, mantém as mesmas propriedades de convergência e diversidade observadas nas técnicas citadas neste texto e, além disso, apresenta uma formulação matemática simples e eficiente, cujo desempenho é menos sensível à forma da fronteira Pareto-ótima global.

Capítulo 3.

Pareto Cone ϵ -Dominância

“A mente que se abre a uma nova ideia jamais volta ao seu tamanho original.”

— Albert Einstein, 1879–1955

“Aprender é a única coisa de que a mente nunca se cansa (...).”

— Leonardo da Vinci, 1452–1519

3.1. Introdução

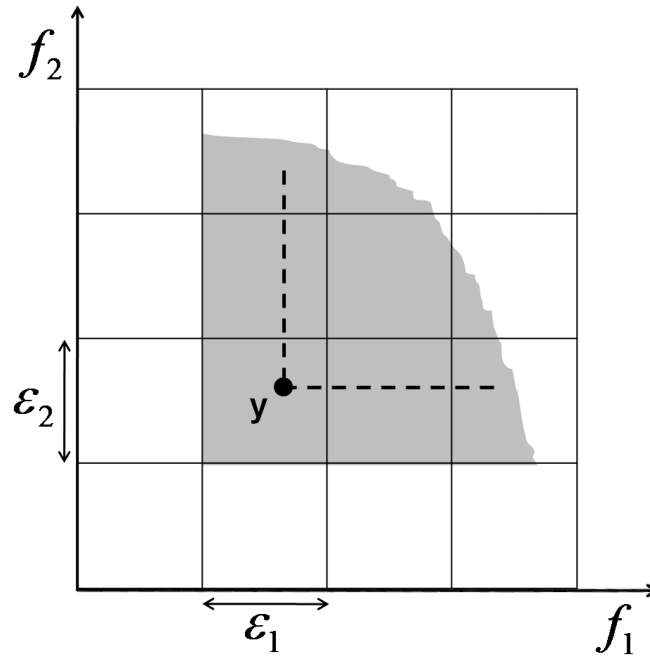
Com o objetivo de contornar algumas das limitações observadas nas técnicas de dominância relaxada apresentadas no capítulo 2, uma nova estratégia relaxada de dominância Pareto, chamada cone ϵ -dominância, é proposta. Ao contrário das demais, o desempenho da técnica cone ϵ -dominância é menos sensível à geometria da fronteira Pareto-ótima global, e possibilita estimar o número especificado de soluções eficientes quando a fronteira é conexa. Além disso, permite estimar soluções bem distribuídas ao longo da fronteira mesmo quando esta é desconexa. A cone ϵ -dominância apresenta também uma formulação matemática simples e eficiente.

3.2. Estratégia Cone ϵ -Dominância

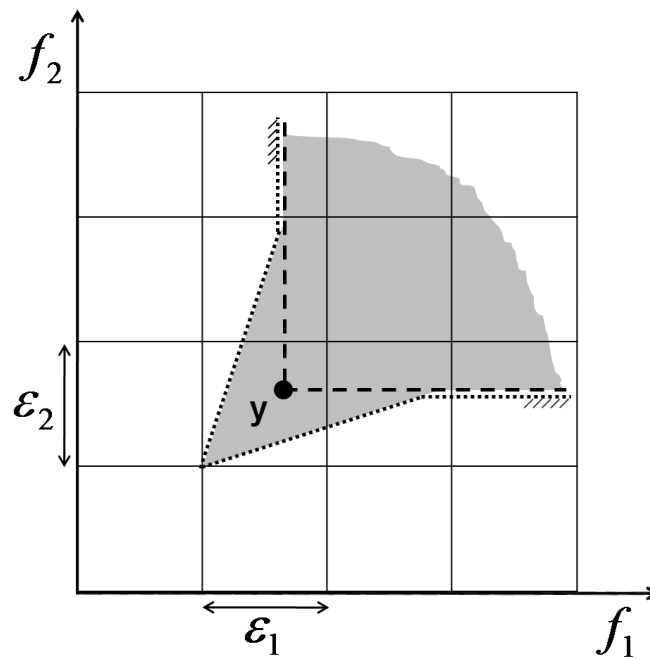
Conforme discutido no capítulo anterior, relações relaxadas de dominância Pareto representam mecanismos simples, porém muito úteis na otimização de problemas multiobjetivo, pois permitem regular as propriedades de convergência e diversidade das soluções estimadas. Entretanto, embora os avanços já obtidos sejam de grande valia no contexto da otimização multiobjetivo, as técnicas até então sugeridas apresentam limitações que comprometem o desempenho final do método. Várias dessas limitações foram abordadas ao longo das seções do capítulo 2.

Visando enriquecer um pouco mais o conhecimento acerca deste tema, propõe-se uma nova forma relaxada de dominância Pareto, chamada cone ϵ -dominância. Assim como $\text{pa}\epsilon$ -dominância, a estratégia sugerida neste trabalho corresponde também a uma variante da técnica ϵ -dominância aditiva (**Definição 2.3**), porém, além de ser menos susceptível à forma da fronteira Pareto, não requer uma estimativa inicial para a mesma.

Inicialmente, apresenta-se uma interpretação conceitual desta técnica. Para isto, ambas as estratégias ϵ -dominância e cone ϵ -dominância são contrastadas na Fig. 3.1. Com o objetivo de obter um conjunto de soluções não-dominadas, o mecanismo proposto engloba tanto o espaço Pareto dominado quanto a área dominada pelo cone (região hachurada na Fig. 3.1(b)), i.e., o hipervolume dominado por \mathbf{y} , considerando-se a relação cone ϵ -dominância, representa uma relaxação daquele dominado por \mathbf{y} quando empregando a dominância Pareto usual. Note que esta relaxação possibilita a aproximação de pontos eficientes em vários hipercubos adjacentes, os quais são ϵ -dominados pela solução \mathbf{y} . Essencialmente, como a influência que a relação cone ϵ -dominância exerce sobre a ordenação de pontos é limitada a uma vizinhança local no espaço de objetivos, o seu efeito é provavelmente menos dramático do que aquele desempenhado pela relação ϵ -dominância. Observe também que o critério proposto pode ser interpretado como um híbrido entre a relação ϵ -dominância e a ordenação parcial induzida por um cone de dominância no domínio de objetivos (Miettinen 1998).



(a) Estratégia ϵ -dominância.



(b) Estratégia cone ϵ -dominância.

Figura 3.1.: Ilustração dos conceitos de ϵ -dominância e cone ϵ -dominância. A estratégia cone ϵ -dominância corresponde a uma relaxação da técnica usual de dominância. A região hachurada representa o hipervolume dominado pela solução y considerando os dois critérios mencionados.

3.2.1. Definições Gerais

Para facilitar a compreensão do mecanismo sugerido, convém recordar alguns conceitos importantes sobre cones (Takahashi 2004), reproduzidos a seguir.

Definição 3.1. (Cone) O conjunto \mathcal{C} é um cone se:

$$\mathbf{y} \in \mathcal{C} \Rightarrow (\lambda \mathbf{y}) \in \mathcal{C} \quad \forall \lambda \geq 0 \quad (3.1)$$

□

Definição 3.2. (Cone gerado) O cone gerado pelos vetores \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 é o conjunto definido por:

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{z} : \mathbf{z} = \lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\} \quad (3.2)$$

□

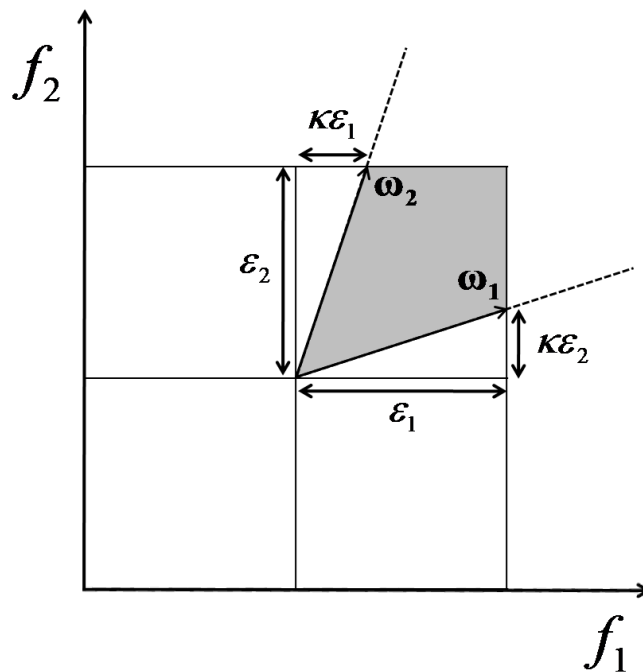
Note que o conceito de cone gerado pode ser estendido para m dimensões. Neste caso, o hipercone gerado pelos vetores $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^m$, $i \in \{1, \dots, m\}$, é o conjunto definido por:

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{z} : \mathbf{z} = \lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2 + \dots + \lambda_i \mathbf{y}_i + \dots + \lambda_m \mathbf{y}_m, \quad \forall \lambda_i \geq 0\} \quad (3.3)$$

Neste momento é conveniente a apresentação do conceito de cone de um hiper-cubo.

Definição 3.3. (Cone de um hiper-cubo) O cone \mathcal{C} definido no interior do hiper-cubo cujo vetor de índices é dado por $\mathbf{b} \triangleq (b_1, \dots, b_m)$ é chamado o cone deste hiper-cubo. Formalmente, essa relação é representada por $\mathcal{C}(\mathbf{b}(\cdot))$, em que a função $\mathbf{b}(\cdot)$ especifica o hiper-cubo que contém o vetor em seu argumento (**Algoritmo 3.1**). □

Note que na relação cone ϵ -dominância, o vetor de índices de um dado hiper-cubo é mapeado no domínio real, i.e., $\mathbf{b}(\cdot) \in \mathbb{R}^m$, representando assim a origem deste hiper-cubo no espaço de objetivos. Nas técnicas ϵ -dominância e $\text{pa}\epsilon$ -dominância, a função $\mathbf{b}(\cdot)$ é mapeada no domínio dos números inteiros.



(a) Esquema de controle da abertura do hipercone em 2D.

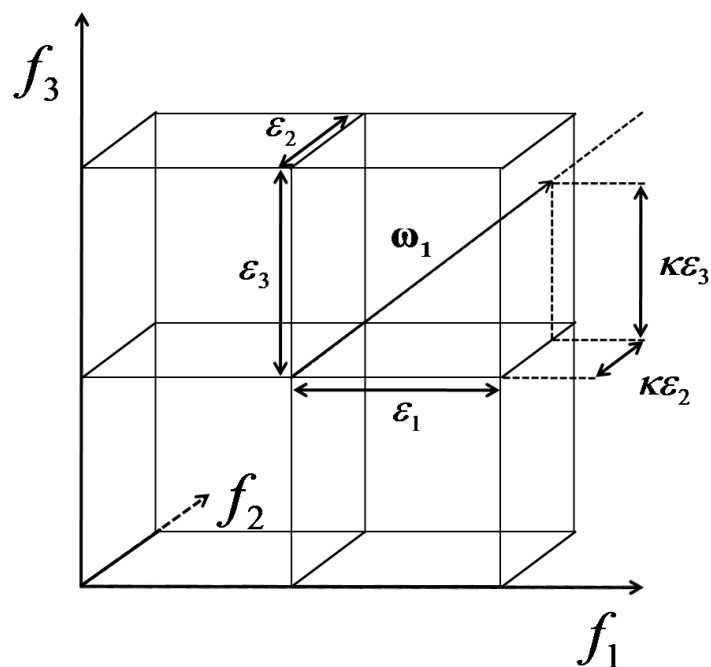
(b) Esquema de controle da abertura do hipercone em 3D (por simplicidade, apenas o vetor w_1 é mostrado na ilustração).

Figura 3.2.: Ilustra a relação existente entre o hipervolume dominado por ϵ -dominância e cone ϵ -dominância. Note que a estratégia cone ϵ -dominância converge para a estratégia ϵ -dominância quando $\kappa \rightarrow 0$.

Assim, substituindo os valores de \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 em (3.5), o conjunto \mathcal{C} é reescrito a seguir:

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{z} : \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \kappa\epsilon_1 \\ \kappa\epsilon_2 & \epsilon_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}, \forall \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \right\} \quad (3.6)$$

em que o cone gerado por \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 pode ser expresso por meio de uma matriz cone-dominância (Ψ), i.e.,

$$\Psi(\epsilon_1, \epsilon_2, \kappa) = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \kappa\epsilon_1 \\ \kappa\epsilon_2 & \epsilon_2 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Além disso, tem-se que o conjunto \mathcal{C} também pode ser apresentado utilizando-se uma notação matricial:

$$\mathcal{C} = \{ \mathbf{z} : \mathbf{z} = \Psi\boldsymbol{\lambda}, \forall \lambda_i \geq 0, i \in \{1, \dots, m\} \} \quad (3.8)$$

Até o presente momento, o leitor foi conduzido à determinação de uma matriz cone-dominância definida no domínio bi-objetivo, i.e., gerada a partir de dois vetores \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 . Para o caso de três objetivos, os vetores \mathbf{w}_1 , \mathbf{w}_2 e \mathbf{w}_3 são obtidos conforme ilustrado na Fig. 3.2(b):

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \kappa\epsilon_2 \\ \kappa\epsilon_3 \end{bmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} \kappa\epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \kappa\epsilon_3 \end{bmatrix}; \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} \kappa\epsilon_1 \\ \kappa\epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Dessa forma, a matriz cone-dominância em três dimensões é dada por:

$$\Psi(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \kappa) = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \kappa\epsilon_1 & \kappa\epsilon_1 \\ \kappa\epsilon_2 & \epsilon_2 & \kappa\epsilon_2 \\ \kappa\epsilon_3 & \kappa\epsilon_3 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Por indução, para m objetivos tem-se $\Psi \mapsto \mathbb{R}^{m \times m}$, i.e.,

$$\Psi(\epsilon_i, \kappa) = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \kappa\epsilon_1 & \kappa\epsilon_1 & \dots & \kappa\epsilon_1 \\ \kappa\epsilon_2 & \epsilon_2 & \kappa\epsilon_2 & \dots & \kappa\epsilon_2 \\ \kappa\epsilon_3 & \kappa\epsilon_3 & \epsilon_3 & \dots & \kappa\epsilon_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa\epsilon_m & \kappa\epsilon_m & \kappa\epsilon_m & \dots & \epsilon_m \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Note que quando $\kappa \rightarrow 0$, a matriz cone-dominância converge para a matriz ϵ -dominância, representando a abertura total do cone no domínio de objetivos.

Finalmente, define-se formalmente alguns conceitos relacionados à estratégia cone ϵ -dominância.

Definição 3.4. (Cone ϵ -dominância) Supondo $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$ dois pontos factíveis, diz-se que \mathbf{x}_1 cone ϵ -domina \mathbf{x}_2 , dados os valores de $\boldsymbol{\epsilon}$ e κ , se, e somente se, $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1)$ Pareto domina $\mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$ ou a solução do sistema linear $\Psi\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{z}$, com $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) - [\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \boldsymbol{\epsilon}]$, fornece $\lambda_i \geq 0 \forall i \in \{1, \dots, m\}$, sendo $\epsilon_i > 0$. Equivalentemente, diz-se que $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \in \mathbb{Y}$ cone ϵ -domina $\mathbf{f}(\mathbf{x}_2) \in \mathbb{Y}$ no espaço de objetivos, $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \overset{\text{cone}\epsilon}{\prec} \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$, se e somente se:

$$(\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \prec \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)) \vee (\Psi\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{z} \mid \lambda_i \geq 0 \text{ para todo } i = \{1, \dots, m\}) . \quad (3.12)$$

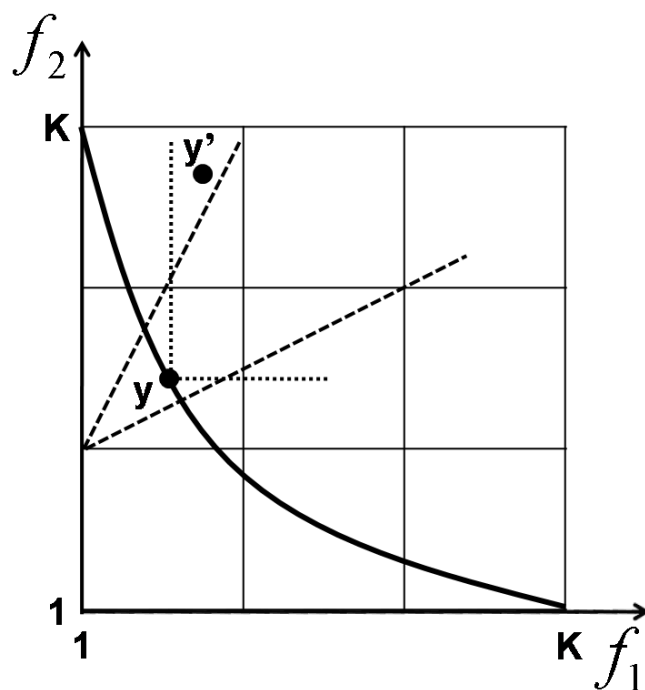
□

Definição 3.5. (Cone-dominância) Supondo $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$ dois pontos factíveis, diz-se que \mathbf{x}_1 cone-domina \mathbf{x}_2 , dados os valores de $\boldsymbol{\epsilon}$ e κ , se, e somente se, a solução do sistema linear $\Psi\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{z}$, com $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) - [\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \boldsymbol{\epsilon}]$, fornece $\lambda_i \geq 0 \forall i \in \{1, \dots, m\}$, sendo $\epsilon_i > 0$. Equivalentemente, diz-se que $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \overset{\text{cone}}{\prec} \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$. □

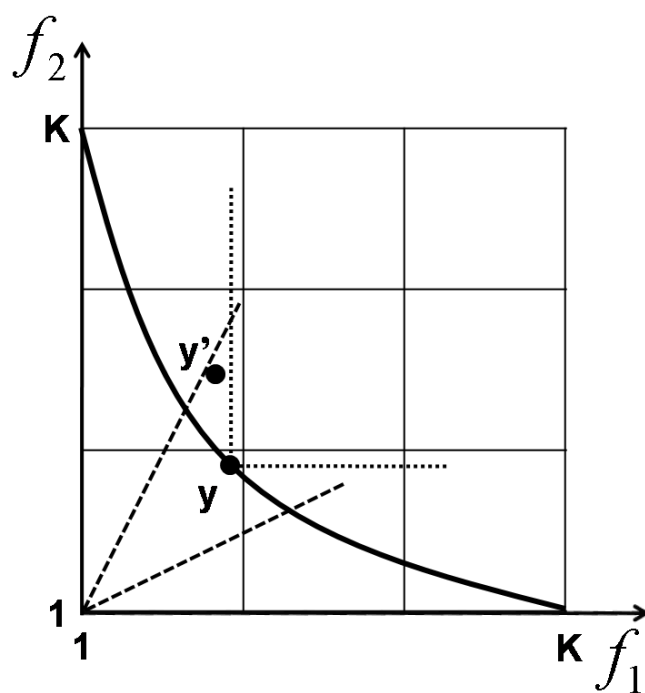
Observe que o conceito de cone ϵ -dominância evidencia que a relação Pareto dominância, $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \prec \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$, não implica na relação cone-dominância, $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \overset{\text{cone}}{\prec} \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$, sendo o contrário também verdadeiro, i.e.:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \prec \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) \not\Leftrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \overset{\text{cone}}{\prec} \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) \quad (3.13)$$

A não-implicabilidade estabelecida em (3.13) é ilustrada na Fig. 3.3.



(a) $y \prec y' \not\Rightarrow y \prec^{cone} y'$.



(b) $y \prec^{cone} y' \not\Rightarrow y \prec y'$.

Figura 3.3.: Ilustra o conceito de não-implicabilidade entre dominância e cone-dominância.

Definição 3.6. (Conjunto não cone ϵ -dominado) Supondo $\mathcal{X} \subseteq \Omega$ um conjunto arbitrário de soluções factíveis e $\epsilon_i > 0$, $i \in \{1, \dots, m\}$, então $\mathcal{X}_{\widetilde{\text{cone}}} \subseteq \mathcal{X}$ é chamado um conjunto não cone ϵ -dominado de \mathcal{X} , se para todo $\text{box}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^*$, \mathcal{X}^* o conjunto localmente ótimo de \mathcal{X} , existe pelo menos um vetor não cone ϵ -dominado $\mathbf{x}' \in \mathcal{X}_{\widetilde{\text{cone}}}$ tal que $\text{box}(\mathbf{f}(\mathbf{x}')) = \text{box}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$, i.e.,

$$\forall \text{box}(\mathbf{f}(\mathbf{x})); \mathbf{x} \in \mathcal{X}^* : \exists \mathbf{x}' \in \mathcal{X}_{\widetilde{\text{cone}}} \mid \text{box}(\mathbf{f}(\mathbf{x}')) = \text{box}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \quad (3.14)$$

O conjunto não cone ϵ -dominado de \mathcal{X} é representado por $P_{\widetilde{\text{cone}}}(\mathcal{X})$. Veja a ilustração na Fig. 3.4(a). \square

Definição 3.7. (Conjunto Pareto cone ϵ -aproximado) Supondo $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})} \subseteq \Omega$ um conjunto arbitrário factível que contenha o conjunto Pareto-ótimo global \mathcal{P} e, $\epsilon_i > 0$, $i \in \{1, \dots, m\}$, então $\mathcal{X}_{\text{cone}} \subseteq \mathcal{X}_{(\mathcal{P})}$ é chamado um conjunto Pareto cone ϵ -aproximado de $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})}$, se para todo $\text{box}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$, existe pelo menos um vetor não cone ϵ -dominado $\mathbf{x}' \in \mathcal{X}_{\text{cone}}$ tal que $\text{box}(\mathbf{f}(\mathbf{x}')) = \text{box}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$, i.e.,

$$\forall \text{box}(\mathbf{f}(\mathbf{x})); \mathbf{x} \in \mathcal{P} : \exists \mathbf{x}' \in \mathcal{X}_{\text{cone}} \mid \text{box}(\mathbf{f}(\mathbf{x}')) = \text{box}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \quad (3.15)$$

O conjunto Pareto cone ϵ -aproximado de $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})}$ é denotado $P_{\text{cone}}(\mathcal{X}_{(\mathcal{P})})$. Veja a ilustração na Fig. 3.4(b). \square

O conceito de um conjunto Pareto cone ϵ -aproximado é refinado, permitindo assim a definição do conceito de um conjunto cone ϵ -Pareto-ótimo.

Definição 3.8. (Conjunto cone ϵ -Pareto-ótimo) Supondo $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})} \subseteq \Omega$ um conjunto arbitrário factível que contenha o conjunto Pareto-ótimo global \mathcal{P} e, $\epsilon_i > 0$, $i \in \{1, \dots, m\}$, então o conjunto $\mathcal{X}_{\text{cone}}^* \subseteq \mathcal{X}_{(\mathcal{P})}$ é chamado um conjunto cone ϵ -Pareto-ótimo de $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})}$ se:

1. $\mathcal{X}_{\text{cone}}^*$ é um conjunto Pareto cone ϵ -aproximado de $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})}$, i.e., $\mathcal{X}_{\text{cone}}^* \in P_{\text{cone}}(\mathcal{X}_{(\mathcal{P})})$, e
2. $\mathcal{X}_{\text{cone}}^*$ contém somente soluções Pareto de $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})}$, i.e., $\mathcal{X}_{\text{cone}}^* \subseteq \mathcal{P}$.

O conjunto cone ϵ -Pareto-ótimo de $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})}$ é denotado $P_{\text{cone}}^*(\mathcal{X}_{(\mathcal{P})})$. Veja a ilustração na Fig. 3.4(c). \square

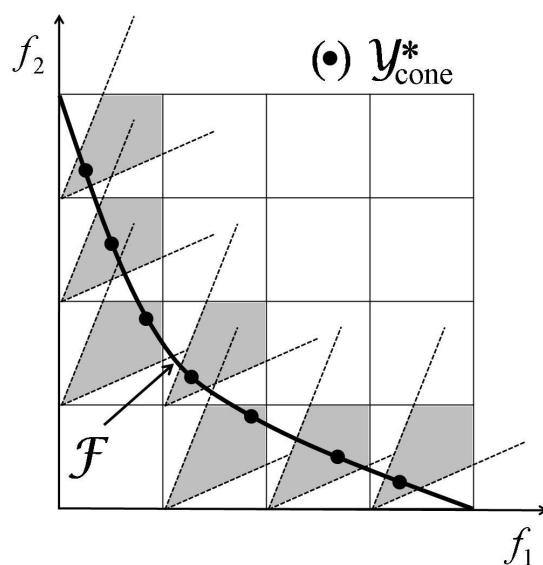
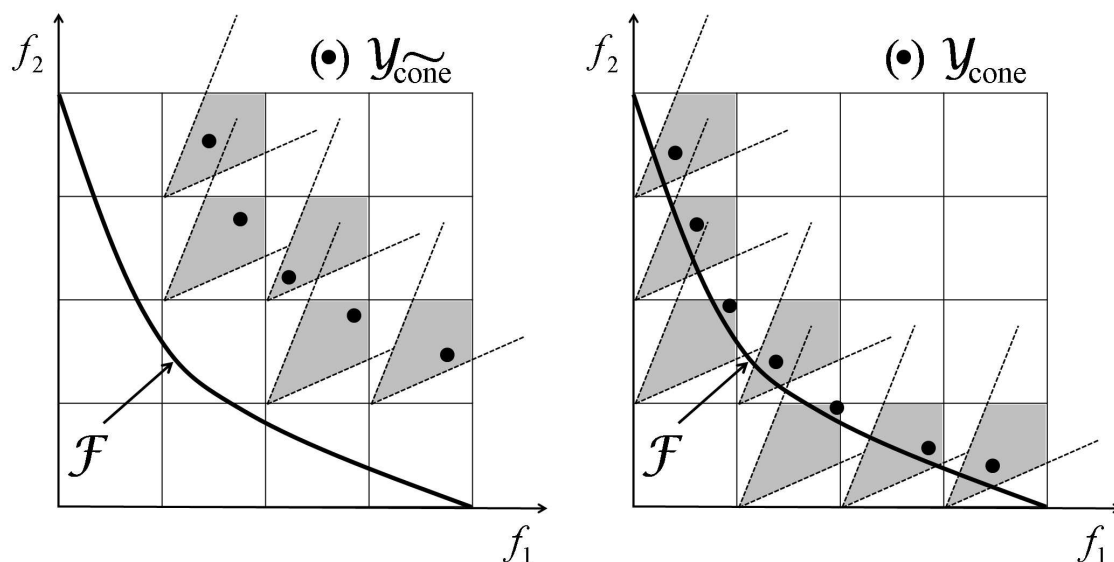


Figura 3.4.: Ilustração dos conceitos de fronteira não cone ϵ -dominada, fronteira Pareto cone ϵ -aproximada, e fronteira cone ϵ -Pareto-ótima. Note que, em todos os casos, cada hipercubo é ocupado apenas por uma única solução não cone ϵ -dominada, garantindo assim a manutenção de diversidade entre as soluções estimadas. Note que a fronteira cone ϵ -Pareto-ótima $\mathcal{Y}_{\text{cone}}^*$ consiste apenas de soluções Pareto-ótimas de $\mathcal{Y}_{(\mathcal{F})}$, portanto, $F_{\text{cone}}^*(\mathcal{Y}_{(\mathcal{F})}) \subseteq F_{\text{cone}}(\mathcal{Y}_{(\mathcal{F})})$.

Obviamente, dado o conjunto de soluções factíveis $\mathcal{X}_{(P)} \subseteq \Omega$, os conjuntos $\widetilde{\mathcal{X}}_{cone}$, \mathcal{X}_{cone} e, conseqüentemente, \mathcal{X}_{cone}^* não são únicos, pois são influenciados pela matriz cone-dominância Ψ , principalmente em função da escolha dos parâmetros ϵ e κ .

3.2.2. Preservação de um Conjunto Cone ϵ -Pareto-Ótimo

A preservação de um conjunto cone ϵ -Pareto-ótimo satisfaz ambos os critérios de convergência e diversidade. De maneira geral, a propriedade de convergência é garantida pelo fato de os vetores armazenados em $\mathcal{A}(t)$ representarem soluções localmente ótimas de todas as soluções candidatas geradas ao longo do processo evolutivo. Além disso, uma vez que somente uma única solução não-dominada pode ocupar cada hipercubo, a propriedade de diversidade é também assegurada.

O **Algoritmo 3.2** apresenta a função de atualização de um conjunto cone ϵ -Pareto a partir da qual os critérios mencionados são garantidos. Este algoritmo possui dois níveis de funcionamento. No primeiro nível, o espaço de objetivos é discretizado em hipercubos (**Algoritmo 3.1**), sendo que cada hipercubo pode ser ocupado por uma única solução, mantendo assim a diversidade das mesmas. Além disso, o algoritmo sempre mantém um conjunto de soluções não-dominadas com base na relação de dominância padrão. Em um nível mais refinado, supondo que duas soluções compartilhem o mesmo hipercubo, aquela pertencente ao arquivo somente é substituída por uma outra que a dominar ou que se localizar mais próxima da origem do hipercubo, garantindo assim a convergência do método. Cada uma das situações verificadas neste algoritmo é descrita a seguir.

1. A primeira condição (linha 2) verifica se a solução candidata \mathbf{y} é cone ϵ -dominada por algum membro da população de memória $\mathbf{y}' \in \mathcal{A}$. Caso verdadeiro, a solução \mathbf{y} é rejeitada e o arquivo não sofre alterações (linha 3). Ver ilustração na Fig. 3.5(a).
2. Supondo que a primeira condição seja falsa, então, o controle é transferido à segunda condição (linha 4), onde se avalia se \mathbf{y} compartilha o mesmo hipercubo com algum $\mathbf{y}' \in \mathcal{A}$. Caso verdadeiro, uma condição adicional é verificada. Dessa forma, se \mathbf{y} Pareto dominar \mathbf{y}' ou \mathbf{y} estiver mais próxima da origem do hipercubo $\mathbf{b}(\mathbf{y})$ (linha 5), então eliminam-se todos os membros do arquivo que são cone ϵ -dominados por \mathbf{y} , e substitui \mathbf{y}' por \mathbf{y} (linhas 6 e 7). De outra forma, a solução \mathbf{y} é rejeitada e o arquivo não é alterado (linha 9). Ver ilustração nas Figs. 3.5(b) e 3.5(c). A função $d(\cdot, \cdot)$ informa a distância Euclidiana entre os vetores em seu argumento.

3. Uma vez que as condições anteriores não sejam satisfeitas, então, o algoritmo testa se a solução candidata \mathbf{y} cone ϵ -domina algum $\mathbf{y}' \in \mathcal{A}$ (linha 11). Caso verdadeiro, eliminam-se todos os membros do arquivo que são cone ϵ -dominados por \mathbf{y} , e \mathbf{y} é aceita na população de memória (linhas 12 e 13). Ver ilustração na Fig. 3.5(d).
4. Por fim, supondo que ambas as condições testadas sejam falsas, então, a solução candidata \mathbf{y} é simplesmente inserida no arquivo (linha 15). Nesta situação, \mathbf{y} é inserida em um hipercubo ainda vazio. Além disso, \mathbf{y} não apresenta nenhuma relação de cone ϵ -dominância com qualquer membro do arquivo.

Algoritmo 3.2: Função de atualização do conjunto cone ϵ -Pareto.

Entrada: $\mathcal{A}, \Psi, \mathbf{y}$

- 1 **início**
- 2 **se** \mathbf{y} é cone ϵ -dominada por qualquer $\mathbf{y}' \in \mathcal{A}$ **então**
- 3 | Rejeite \mathbf{y} ;
- 4 **senão se** \mathbf{y} compartilha a mesma caixa com um membro do arquivo \mathbf{y}' **então**
- 5 | **se** \mathbf{y} domina \mathbf{y}' ou \mathbf{y} está mais próxima da origem da caixa do que \mathbf{y}' **então**
- 6 | Delete todos os membros do arquivo que são cone ϵ -dominados;
- 7 | Substitua \mathbf{y}' por \mathbf{y} ;
- 8 | **senão**
- 9 | Rejeite \mathbf{y} ;
- 10 | **fim**
- 11 **senão se** \mathbf{y} cone ϵ -domina qualquer $\mathbf{y}' \in \mathcal{A}$ **então**
- 12 | Delete todos os membros do arquivo que são cone ϵ -dominados;
- 13 | Insira \mathbf{y} na população de arquivo;
- 14 | **senão**
- 15 | Insira \mathbf{y} na população de arquivo;
- 16 | **fim**
- 17 **fim**

Saída: \mathcal{A}'

Observe que pela **Definição 3.7**, tem-se que cada hipercubo $\mathbf{b}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$, é representado por pelo menos um vetor não cone ϵ -dominado $\mathbf{x}' \in \mathcal{X}_{cone}$. Além disso, uma vez que somente caixas não cone ϵ -dominadas são ocupadas (**Algoritmo 3.2**), é possível mostrar que para qualquer $\epsilon_i > 0$ finito e qualquer conjunto factível $\mathcal{X}_{(\mathcal{P})} \subseteq \Omega$, tem-se um conjunto $\mathcal{X}_{cone}^* \in P_{cone}^*(\mathcal{X}_{(\mathcal{P})})$ de tamanho limitado dado por:

$$|\mathcal{X}_{cone}^*| \leq m \left[\left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{K-1}{\epsilon_i} \right) - \left(\prod_{i=1}^{m-2} \frac{K-1}{\epsilon_i} \right) \right] + 1 \quad (3.16)$$

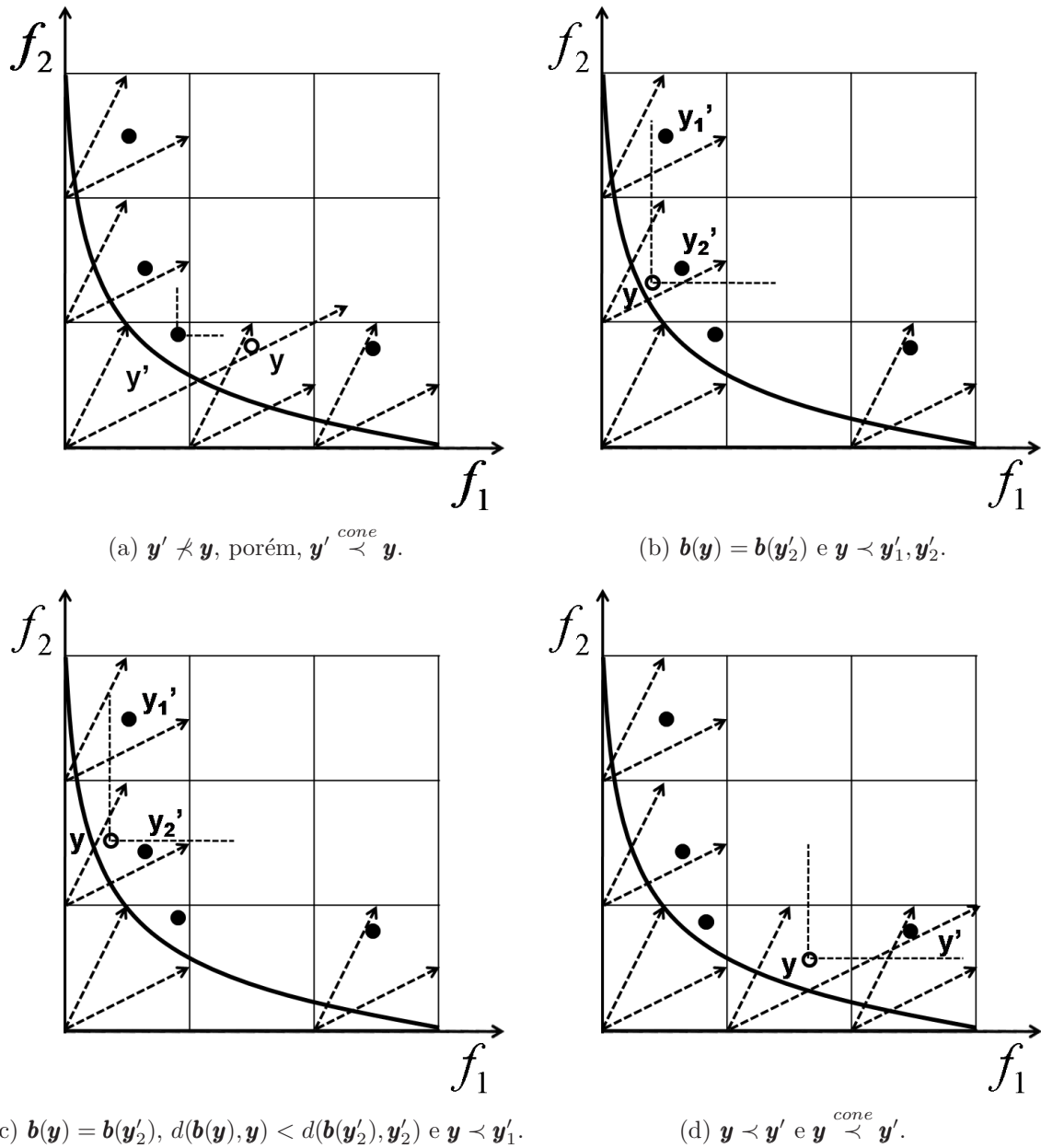


Figura 3.5.: Ilustra as etapas de funcionamento do algoritmo de preservação do conjunto cone ϵ -Pareto. Os pontos (●) representam soluções da população de memória, já o ponto (○) refere-se à solução submetida à função de atualização do conjunto cone ϵ -Pareto (Algoritmo 3.2).

em que $1 \leq f_i \leq K \forall i \in \{1, \dots, m\}$ denota o espaço de objetivos normalizado ($K > \epsilon_i$), e a função $|\cdot|$ especifica a cardinalidade do conjunto em seu argumento. Além disso, pode-se provar que se a fronteira Pareto-ótima é conexa, então é possível estimar (para um dado κ) o número máximo de soluções cone ϵ -Pareto dado por (3.16).

Note que considerando um mesmo valor de ϵ para todos os objetivos, i.e., $\epsilon_i = \epsilon, \forall i \in \{1, \dots, m\}$, então a expressão (3.16) pode ser reescrita conforme mostrado a seguir:

$$|\mathcal{X}_{cone}^*| \leq m \left[\left(\frac{K-1}{\epsilon} \right)^{m-1} - \left(\frac{K-1}{\epsilon} \right)^{m-2} \right] + 1 \quad (3.17)$$

Dessa forma, supondo que o usuário deseje estimar um número máximo de T pontos não cone ϵ -dominados na população de memória, o valor de ϵ pode ser calculado a partir de (3.17) por meio da resolução da equação (3.18). A simplificação de (3.17) para (3.18) é mostrada no Apêndice A.

$$\left(\frac{T-1}{m} \right) \epsilon^{(m-1)} + (K-1)^{(m-2)} \epsilon - (K-1)^{(m-1)} = 0. \quad (3.18)$$

A convergência da estratégia de atualização, bem como a preservação da diversidade das soluções, são garantidas simultaneamente pelo **Teorema 3.1**.

Teorema 3.1. (Estratégia de atualização do conjunto cone ϵ -Pareto-ótimo)

Suponha $\mathcal{Y}^{(t)} = \bigcup_{j=1}^t \mathbf{y}^{(j)}$, $1 \leq f_i \leq K, i \in \{1, \dots, m\}$, o conjunto de todas as soluções geradas pelo **Algoritmo 1.1** até a iteração t , e entregue à função de atualização definida no **Algoritmo 3.2**. Nesta situação, a população de memória $\mathcal{A}(t)$ corresponde a um conjunto cone ϵ -Pareto de $\mathcal{X}^{(t)} = \mathbf{f}^{-1}(\mathcal{Y}^{(t)})$ com tamanho limitado, i.e.,

1. $\mathcal{A}(t) \in P_{cone}^* (\mathcal{X}^{(t)})$;

2. $|\mathcal{A}(t)| \leq m \left[\left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{K-1}{\epsilon_i} \right) - \left(\prod_{i=1}^{m-2} \frac{K-1}{\epsilon_i} \right) \right] + 1$.

Prova:

1. Suponha que o **Algoritmo 3.2** não esteja correto, i.e., existe t tal que $\mathcal{A}(t) \notin P_{cone}^*(\mathcal{X}^{(t)})$. Conforme apresentado na **Definição 3.8** isso ocorre somente se existe uma solução $\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(\tau)}$, $\tau \leq t$, não cone ϵ -dominada por nenhum membro de $\mathcal{A}(t)$ e (a) $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$ não pertence a $\mathcal{A}(t)$, ou (b) $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$ pertence a $\mathcal{A}(t)$, mas não pertence ao conjunto cone ϵ -Pareto de $\mathcal{X}^{(t)}$.

Situação (a): Para que a solução $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(\tau)}$, não pertença ao arquivo $\mathcal{A}(t)$, existem duas possibilidades: ou esta solução foi rejeitada quando $t = \tau$, ou foi aceita quando $t = \tau$ e removida posteriormente. Note que sua remoção é possível somente se uma nova solução $\mathbf{x}' = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}')$, inserida em \mathcal{A} a cone ϵ -dominar ou, caso pertençam ao mesmo hipercubo e sejam não-dominadas entre si, \mathbf{y}' encontrar-se mais próxima da origem do hipercubo. Obviamente, a verificação de qualquer uma destas condições implica na existência de um elemento em \mathcal{A} que impossibilite a inserção de $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$ neste arquivo, o que contradiz a suposição inicial. Por outro lado, $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$ será rejeitada somente se existir uma outra solução $\mathbf{x}' = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}')$, $\mathbf{x}' \in \mathcal{A}(\tau)$, que a cone ϵ -domine ou, caso pertençam ao mesmo hipercubo e sejam não-dominadas entre si, \mathbf{y} localizar-se mais distante da origem do hipercubo. Assim sendo, sempre existirá em \mathcal{A} uma solução que impossibilita a inserção de $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$ neste arquivo, contradizendo mais uma vez a suposição inicial.

Situação (b): Visto que $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$ não pertence ao conjunto cone ϵ -Pareto de $\mathcal{X}^{(t)}$, então existe $\mathbf{y}' = \mathbf{y}^{(\tau')}$, $\tau' \neq \tau$, $\mathbf{y}' \in \mathcal{Y}_{cone}^{*(t)}$, tal que $\mathbf{y}' \overset{conec}{\prec} \mathbf{y}$. Portanto, caso $\tau' < \tau$, $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$ não teria sido aceito em \mathcal{A} . Caso $\tau' > \tau$, $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$ teria sido removido de \mathcal{A} . Então, $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) \notin \mathcal{A}(t)$, o que contradiz a suposição.

2. O espaço de objetivos é dividido em $\left(\frac{K-1}{\epsilon}\right)^m$ hipercubos, sendo cada um associado a um hipercone. Além disso, no máximo uma solução de cada hipercubo pode pertencer ao conjunto $\mathcal{A}(t)$ ao mesmo tempo (**Algoritmo 3.2**), assegurando assim a preservação da diversidade das soluções estimadas. Uma vez que a relação de dominância usual garante que a fronteira Pareto possua uma característica geométrica monotônica, então, o número máximo de hipercubos que podem ser “tocados” por uma dada fronteira é limitado. Entretanto, a estimação de soluções eficientes no interior destes hipercubos depende da conexidade da fronteira Pareto e também do valor do parâmetro κ .

Situação (a): De maneira geral, o número máximo de hipercubos “tocados” é sempre alcançado ao estabelecer qualquer fronteira (monotônica) conexa entre os hipercubos dos extremos do Pareto. A Fig. 3.6(a) ilustra uma possível situação em que o número de soluções cone ϵ -Pareto estimadas é máximo, i.e., igual ao número de hipercubos “tocados” pela fronteira. Observe que dado o valor de $\epsilon > 0$, $K > \epsilon$, o número máximo de soluções cone ϵ -Pareto é $|\mathcal{A}| = m \left[\left(\frac{K-1}{\epsilon} \right)^{m-1} - \left(\frac{K-1}{\epsilon} \right)^{m-2} \right] + 1$. A Fig. 3.6(b) ilustra uma situação interessante em que a fronteira toca nos vértices de alguns hipercubos. Note que ainda assim é possível estimar o número máximo de soluções. Este fato indica que, para $\kappa > 0$, a linearidade da fronteira não interfere na cardinalidade do arquivo de memória. No entanto, observa-se que valores reduzidos de κ tendem a diminuir o número de soluções estimadas (ver Fig. 3.6(c)). Conforme está evidente neste exemplo, o hipercone inferior esquerdo cone-domina toda região factível pertencente aos hipercubos adjacentes. Além disso, quando $\kappa \rightarrow 0$, a estratégia cone ϵ -dominância converge para a estratégia ϵ -dominância e, portanto, $|\mathcal{A}| \leq \left(\frac{K-1}{\epsilon} \right)^{m-1}$, sendo que o valor máximo é alcançado somente para fronteiras Pareto lineares.

Situação (b): Assumindo que uma dada fronteira seja desconexa, então, o número de soluções cone ϵ -Pareto que poderão ser estimadas é influenciado tanto pela escolha de κ quanto pela característica geométrica desta fronteira. A Fig. 3.7 mostra duas situações em que o número máximo de soluções cone ϵ -Pareto não pode ser alcançado.

□

Note que os limites estabelecidos para os valores de aptidão das soluções, $1 \leq f_i \leq K$ $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, não são usados na definição dos algoritmos e não são necessários para provar a convergência da estratégia proposta. Estes valores são empregados somente para provar a relação existente entre o parâmetro ϵ e o tamanho do arquivo \mathcal{A} .

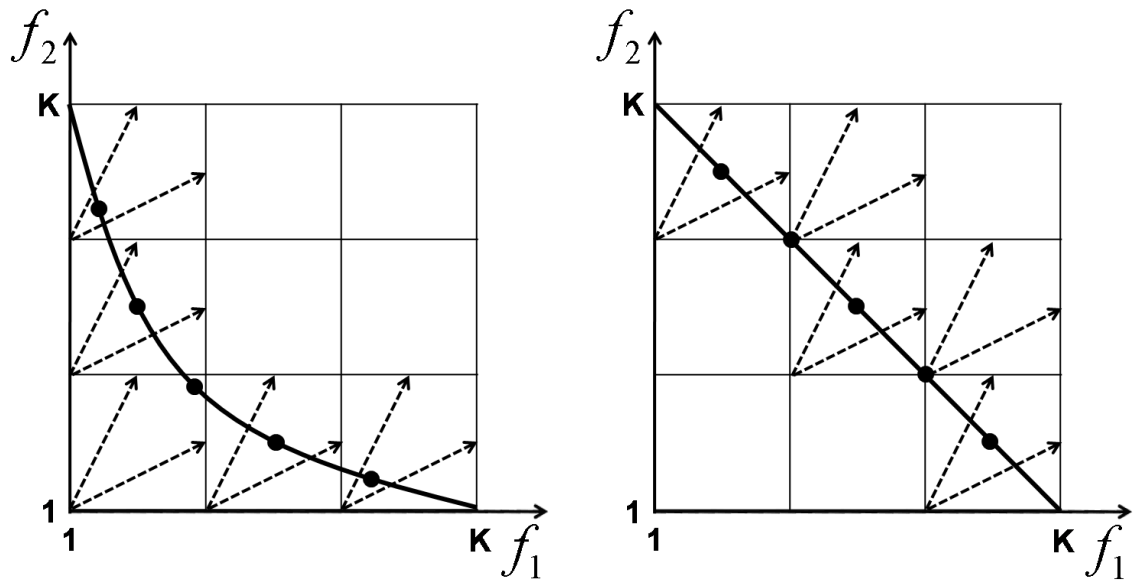
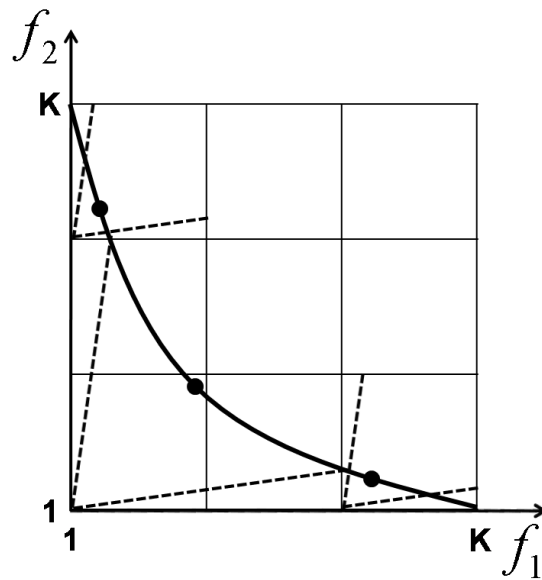
(a) Fronteira Pareto não-linear ($|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}|_{max}$).(b) Fronteira Pareto linear ($|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}|_{max}$).(c) Fronteira Pareto não-linear ($|\mathcal{A}| < |\mathcal{A}|_{max}$).

Figura 3.6.: Ilustra a influência da matriz cone-dominância Ψ na cardinalidade do conjunto cone ϵ -Pareto considerando-se fronteiras conexas.

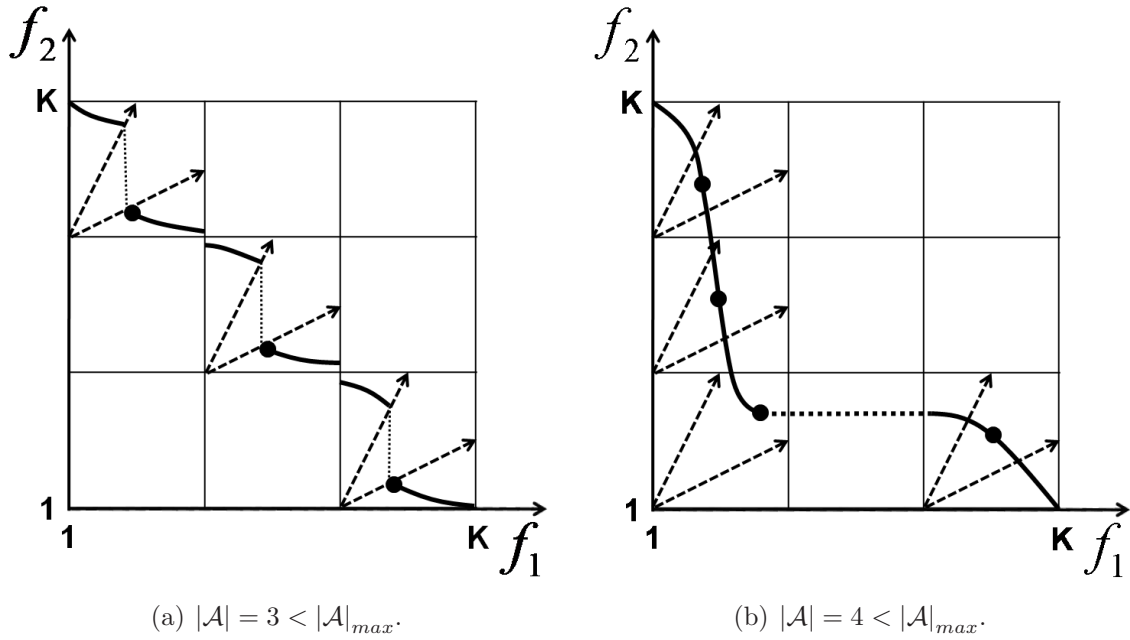


Figura 3.7.: Ilustra a influência da matriz cone-dominância Ψ na cardinalidade do conjunto cone ϵ -Pareto considerando-se fronteiras desconexas.

3.2.3. Vantagens e Limitações da Técnica Cone ϵ -Dominância

Conforme discutido na seção anterior, a técnica cone ϵ -dominância permite estimar o máximo número de soluções eficientes quando a fronteira Pareto é conexa. Este fato é principalmente importante, pois fronteiras conexas são muito comuns em problemas multiobjetivo. Por outro lado, quando se trata de fronteiras desconexas o número de soluções estimadas poderá ser menor do que $|\mathcal{A}|_{max}$ (Fig. 3.7). Nas linhas seguintes são apresentadas algumas ilustrações a partir das quais são destacadas as vantagens e limitações da técnica proposta frente à estratégia ϵ -dominância. Além disso, o texto é encerrado com uma discussão conceitual abrangendo as estratégias cone ϵ -dominância e $\text{pa}\epsilon$ -dominância.

A Fig. 3.8 compara o desempenho das técnicas cone ϵ -dominância e ϵ -dominância considerando-se uma fronteira Pareto conexa. Note que a discretização do espaço de objetivos é a mesma para ambas as técnicas. Como está evidente, as soluções estimadas pela estratégia cone ϵ -dominância são mais representativas da fronteira Pareto-ótima do que as soluções encontradas pela técnica ϵ -dominância. De maneira geral, a relação cone ϵ -dominância permite estimar soluções melhor distribuídas ao longo da fronteira, independente da característica geométrica da mesma. Uma vez que a fronteira é conexa,

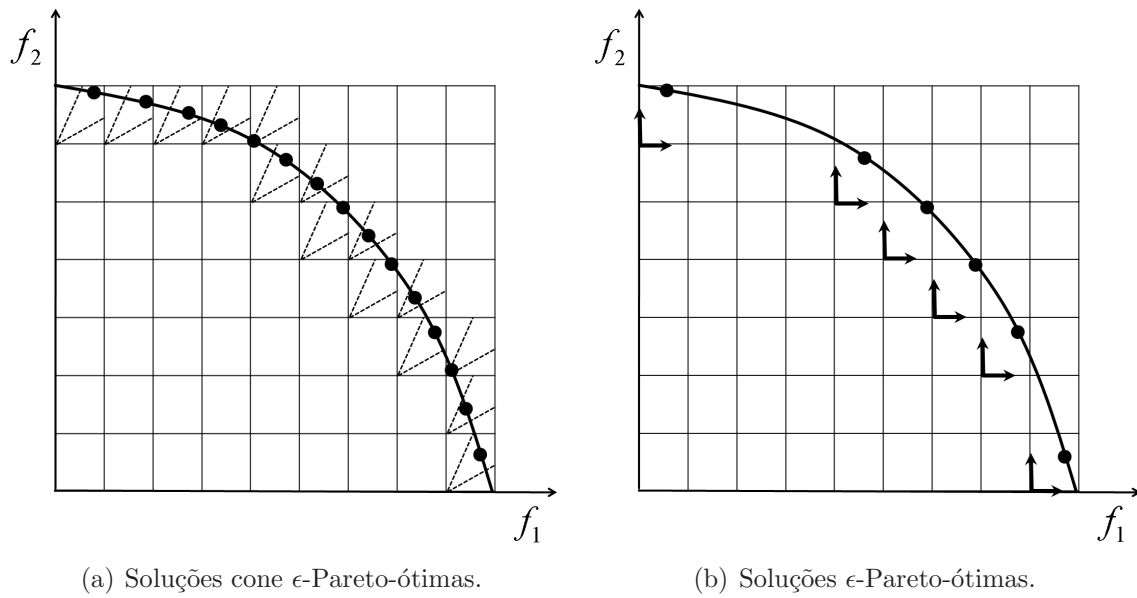


Figura 3.8.: Ilustração comparativa entre cone ϵ -dominância e ϵ -dominância diante de uma fronteira conexa. Observe que a estratégia cone ϵ -dominância permite a estimativa de um maior número de soluções eficientes.

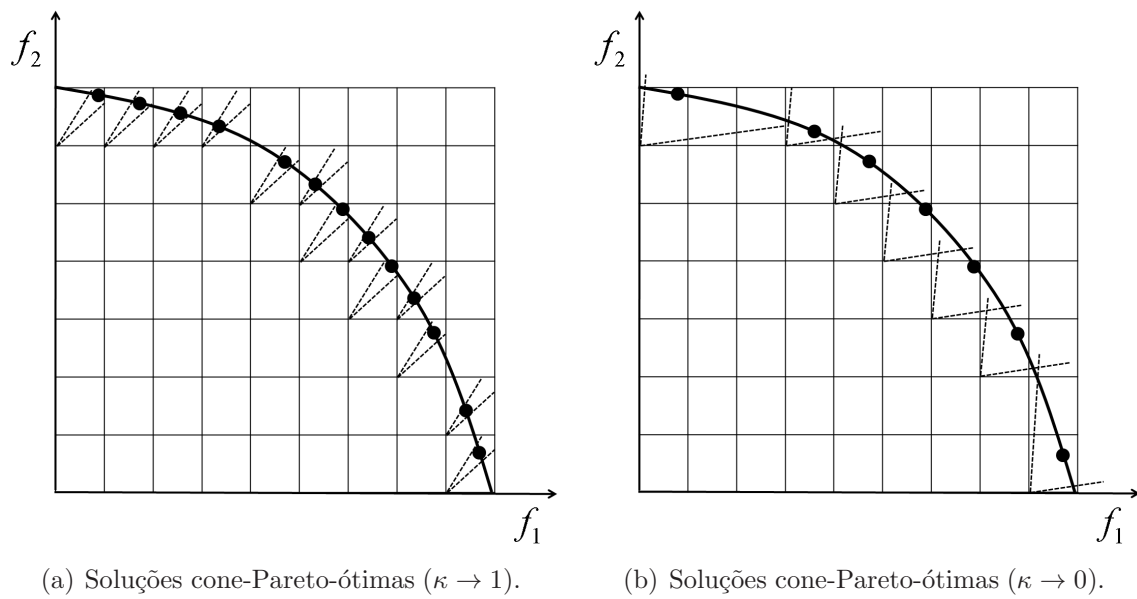


Figura 3.9.: Ilustra a influência do parâmetro κ no desempenho da estratégia cone ϵ -dominância.

tem-se que a técnica proposta possibilita a estimação do número máximo de soluções eficientes ($|\mathcal{A}|_{max} = 15$). Este valor corresponde ao número de hipercubos que são “tocados” pela fronteira de um extremo ao outro do Pareto (Fig. 3.8(a)). Por outro lado, o número máximo de soluções ϵ -Pareto permitidas equivale ao número máximo de hipercubos não-dominados, ou seja, $|\mathcal{A}|_{max} = 7$. Entretanto, em função da característica geométrica da fronteira, a técnica ϵ -dominância permitiu a estimação de apenas seis soluções (Fig. 3.8(b)).

É importante ressaltar neste momento qual a influência do parâmetro κ no desempenho da estratégia cone ϵ -dominância. A Fig. 3.9 ilustra o comportamento do mecanismo proposto quando $\kappa \rightarrow 1$ (Fig. 3.9(a)) e quando $\kappa \rightarrow 0$ (Fig. 3.9(b)). Observe que a fronteira Pareto utilizada é a mesma mostrada na Fig. 3.8, facilitando assim eventuais comparações. Embora seja possível estimar um elevado número de soluções quando $\kappa \rightarrow 1$, o hipervolume cone-dominado no interior de cada hipercubo tende a zero e, dessa forma, o efeito do cone de dominância torna-se muito local, i.e., a evolução das soluções candidatas fica susceptível apenas à relação de dominância usual. Note que no limite, quando $\kappa = 1^-$, a estratégia cone ϵ -dominância converge para a estratégia usual de dominância. Por outro lado, quando $\kappa \rightarrow 0$, o número máximo de soluções eficientes dificilmente é alcançado. Isso ocorre em função do aumento da abertura dos cones no domínio de objetivos. No limite, quando $\kappa = 0$, a técnica cone ϵ -dominância é idêntica à técnica ϵ -dominância, e somente soluções eficientes pertencentes a hipercubos não-dominados são estimadas. A princípio, essa discussão induz a conjectura de que a escolha de valores medianos para κ é mais interessante.

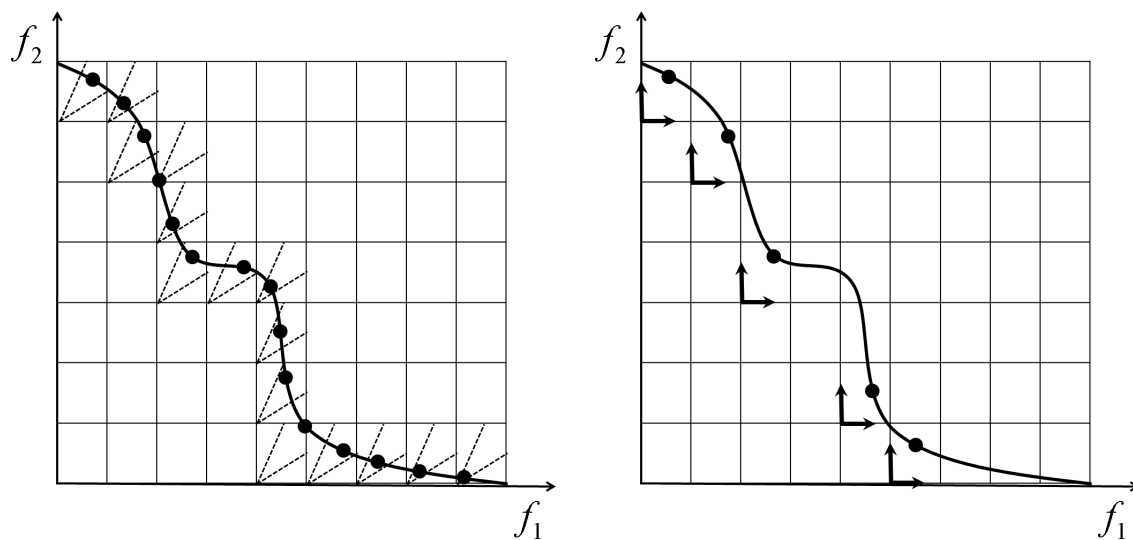
Anteriormente, mostrou-se que se um problema de otimização multiobjetivo possui uma fronteira Pareto-ótima conexa, então, é possível estimar (para um dado κ) o número máximo de soluções cone ϵ -Pareto ($|\mathcal{A}|_{max}$). Este número máximo de pontos eficientes é dado por (3.18). Entretanto, embora o valor de κ possa interferir na quantidade de soluções aproximadas, o mesmo não faz parte da expressão (3.18). De maneira geral, observe que à medida que o valor de κ aumenta, a influência do cone de dominância limita-se a uma vizinhança cada vez mais local, não causando assim uma perda significativa de soluções eficientes. Por outro lado, quando o valor de κ diminui, o efeito do cone de dominância torna-se mais global, podendo aproximar-se daquele desempenhado pela relação ϵ -dominância, aumentando sensivelmente as chances de eliminação de pontos factíveis. Uma vez que o limite inferior de κ , o qual não conduz à perda de soluções viáveis, depende das características geométricas da fronteira Pareto do problema em

questão, este parâmetro não foi incluído em (3.18) e, mais uma vez, essa discussão induz a conjectura de que a escolha de valores medianos para κ é mais razoável.

A Fig. 3.10 considera novamente uma fronteira conexa, porém, composta por segmentos aproximadamente paralelos aos eixos de coordenadas. Visando comparar as estratégias cone ϵ -dominância e ϵ -dominância, adota-se a mesma discretização do espaço de objetivos. Na ilustração apresentada, a técnica cone ϵ -dominância possibilitou a estimação do número máximo de soluções eficientes, i.e., $|\mathcal{A}|_{max} = 15$ (Fig. 3.10(a)). Entretanto, a técnica ϵ -dominância mostrou-se muito sensível à geometria da fronteira e, por isso, ineficiente para estimar soluções representativas do conjunto Pareto-ótimo (Fig. 3.10(b)).

Por fim, as estratégias de dominância relaxada são avaliadas frente a uma fronteira desconexa (Fig. 3.11). De maneira geral, considerando-se a mesma discretização do espaço de objetivos, tem-se que a técnica cone ϵ -dominância permitiu uma melhor estimativa da fronteira Pareto real. Observe pela Fig. 3.11(a) que $|\mathcal{A}|_{max} = 17$, entretanto, como se trata de uma fronteira desconexa, obteve-se 14 soluções. Por outro lado, embora a técnica ϵ -dominância permita a estimação de nove soluções, a geometria da fronteira possibilitou a determinação de apenas quatro soluções (Fig. 3.11(b)).

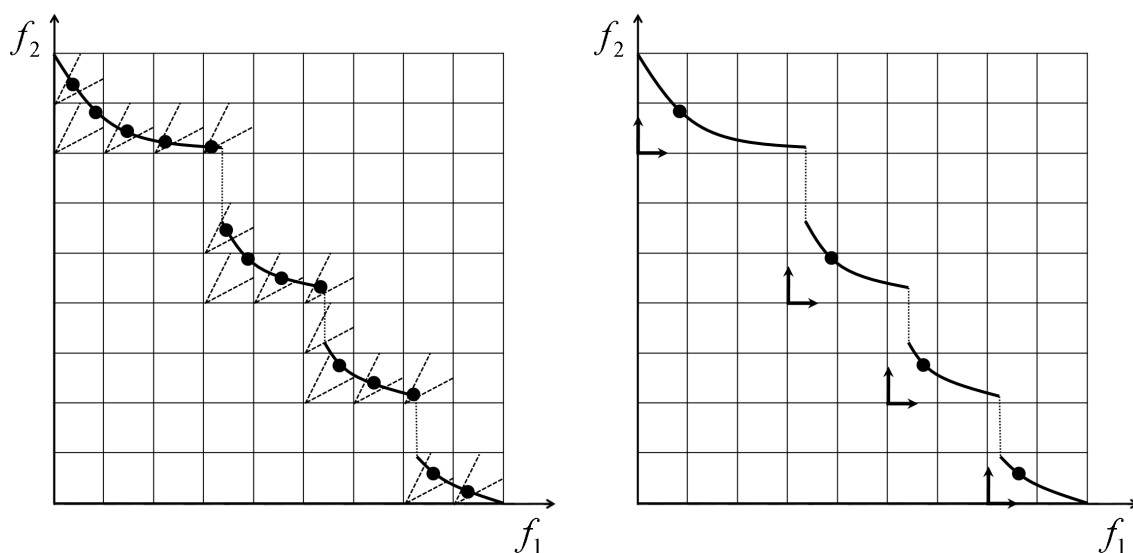
Os exemplos apresentados nesta seção reforçam a ideia de que a técnica cone ϵ -dominância é pouco influenciada pela geometria da fronteira Pareto. Conforme ilustrado, a estratégia proposta frequentemente possibilita estimar o número máximo de soluções eficientes quando a fronteira é conexa. Além disso, permite a estimação de soluções bem distribuídas ao longo da fronteira mesmo quando esta é desconexa, embora não seja possível encontrar o número máximo de soluções. De maneira geral, tem-se que na estratégia cone ϵ -dominância o parâmetro ϵ está diretamente relacionado à resolução da fronteira estimada, sendo esta uma das principais características que diferencia o mecanismo proposto da técnica ϵ -dominância.



(a) Soluções cone ϵ -Pareto-ótimas.

(b) Soluções ϵ -Pareto-ótimas.

Figura 3.10.: Ilustração comparativa entre cone ϵ -dominância e ϵ -dominância diante de uma fronteira conexa composta por segmentos aproximadamente paralelos aos eixos de coordenadas. Observe que a estratégia cone ϵ -dominância permite a estimativa de um maior número de soluções eficientes.



(a) Soluções cone ϵ -Pareto-ótimas.

(b) Soluções ϵ -Pareto-ótimas.

Figura 3.11.: Ilustração comparativa entre cone ϵ -dominância e ϵ -dominância diante de uma fronteira desconexa. Observe que a estratégia cone ϵ -dominância permite a estimativa de um maior número de soluções eficientes.

Observe que em nenhuma das ilustrações mostradas comparou-se as técnicas cone ϵ -dominância e $\text{pa}\epsilon$ -dominância. Isso se deve ao fato de que a discretização do espaço de objetivos empregado pela estratégia $\text{pa}\epsilon$ -dominância é dependente da estimativa inicial da fronteira Pareto (\mathcal{Y}_0). Entretanto, é possível contrastar conceitualmente estes mecanismos:

1. O desempenho final da estratégia $\text{pa}\epsilon$ -dominância é influenciado pela aproximação inicial \mathcal{Y}_0 , i.e., tanto o número de soluções quanto a diversidade destas em \mathcal{Y}_0 são fatores de peso utilizados na definição da discretização do espaço de objetivos. Assim sendo, quanto melhor a aproximação de \mathcal{Y}_0 , melhor é a qualidade da fronteira $\text{pa}\epsilon$ -Pareto final. Entretanto, para que \mathcal{Y}_0 seja estimada são necessárias algumas gerações de evolução do algoritmo, e a qualidade de \mathcal{Y}_0 tende a ser tanto melhor quanto maior for o tempo investido em sua obtenção. Obviamente, durante esse período as propriedades de convergência e diversidade não são garantidas, pois a pressão seletiva empregada é normalmente baseada em métricas de estimativa de densidade de soluções, permitindo assim a ocorrência de falhas por deterioração. Uma vez que a técnica cone ϵ -dominância atua desde a primeira geração do algoritmo, acredita-se que a fronteira cone ϵ -Pareto-ótima seja estimada em um tempo computacional menor, além de ser menos susceptível a problemas de deterioração.
2. Conforme apresentado na seção 2.5, a fronteira inicialmente estimada \mathcal{Y}_0 é aproximada por uma superfície analítica, a partir da qual são calculados os valores do vetor ϵ_i para cada objetivo $i \in \{1, \dots, m\}$, permitindo assim a discretização do espaço de objetivos. Entretanto, a família de superfícies analíticas utilizada considera uma aproximação simétrica da fronteira estimada \mathcal{Y}_0 . Assim sendo, independente da característica geometria de \mathcal{Y}_0 , a sua aproximação analítica será simétrica, podendo então conduzir a um desempenho final pobre. Obviamente, o método pode ser generalizado a fim de possibilitar a aproximação de superfícies analíticas assimétricas. Entretanto, a sua estimativa torna-se fortemente dependente das soluções em \mathcal{Y}_0 , podendo desestabilizar o procedimento, além de levar à determinação dos vetores ϵ_i com erros significativos. Felizmente, embora a técnica cone ϵ -dominância seja susceptível à desconexidade da fronteira Pareto, a mesma não é sensível a sua simetria.
3. É pertinente mencionar ainda que a determinação da superfície analítica envolve o cálculo do hipervolume dominado pelas soluções contidas em \mathcal{Y}_0 . De forma geral, esta superfície é definida tal que a região dominada pela mesma seja similar ao hipervolume dominado pelas soluções em \mathcal{Y}_0 . Esta precisão deve ser previamente

fornecida pelo decisor. Assim sendo, a utilização da estratégia $pa\epsilon$ -dominância em problemas com mais de três objetivos torna-se pouco interessante, pois a implementação de funções para o cálculo do hipervolume dominado pelas soluções em \mathcal{Y}_0 não é trivial. Além disso, a obtenção da aproximação analítica torna-se tão susceptível a erros quanto maior o número de objetivos. Por outro lado, parece razoável supor que a aplicação da técnica cone ϵ -dominância quando $m > 3$ não acrescenta qualquer dificuldade.

4. A Fig. 3.12 ilustra uma possível discretização do espaço de objetivos utilizando-se as técnicas cone ϵ -dominância (Fig. 3.12(a)) e $pa\epsilon$ -dominância (Fig. 3.12(b)). Como pode ser observado neste exemplo, ambas as técnicas apresentam um desempenho similar, i.e., o número de soluções estimadas é igual e, além disso, estão bem distribuídas ao longo da fronteira Pareto. Entretanto, embora não esteja evidente na figura, com base nos itens enumerados anteriormente é plausível supor que o custo computacional associado à estratégia cone ϵ -dominância seja inferior ao exigido pela $pa\epsilon$ -dominância, principalmente em problemas assimétricos e com mais de dois ou três objetivos, nos quais o desempenho da técnica $pa\epsilon$ -dominância pode ser comprometido.

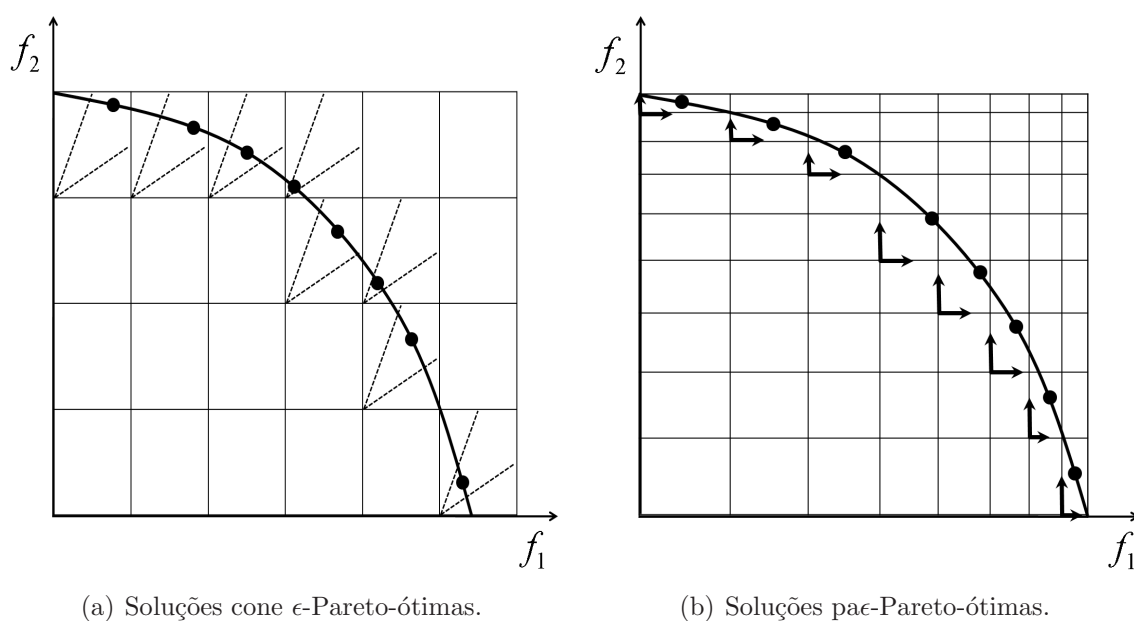


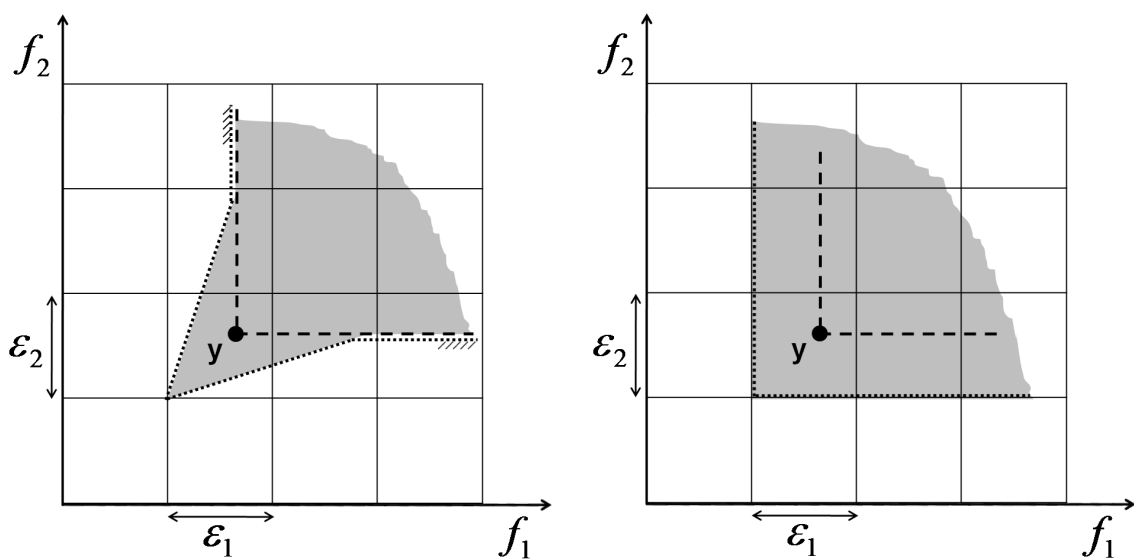
Figura 3.12.: Ilustra a discretização do espaço de objetivos utilizando cone ϵ -dominância e $pa\epsilon$ -dominância. Conforme observado, ambas as técnicas apresentam um desempenho similar.

3.2.4. Generalização da Estratégia Cone ϵ -Dominância

Embora tenha sido mencionado ao longo do texto que a técnica cone ϵ -dominância tende à estratégia ϵ -dominância quando $\kappa \rightarrow 0$, esta relação entre estes critérios é melhor ilustrada nesta seção. Além disso, apresenta-se uma generalização das técnicas Pareto dominância, α -dominância e ϵ -dominância em um contexto único da estratégia cone ϵ -dominância.

Retomando o conceito do critério de dominância proposto neste trabalho (**Definição 3.4**), diz-se que $\mathbf{x}_1 \in \Omega$ cone ϵ -domina $\mathbf{x}_2 \in \Omega$ se, e somente se, $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1)$ Pareto domina $\mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$ ou a solução do sistema linear $\Psi\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{z}$, com $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) - [\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \boldsymbol{\epsilon}]$, fornece $\lambda_i \geq 0 \forall i \in \{1, \dots, m\}$, sendo $\epsilon_i > 0$. Além disso, o mecanismo sugerido para controlar o hipervolume cone-dominado é ajustado por meio da alteração do parâmetro κ , em que $\kappa \in [0, 1)$ (veja a Fig. 3.2).

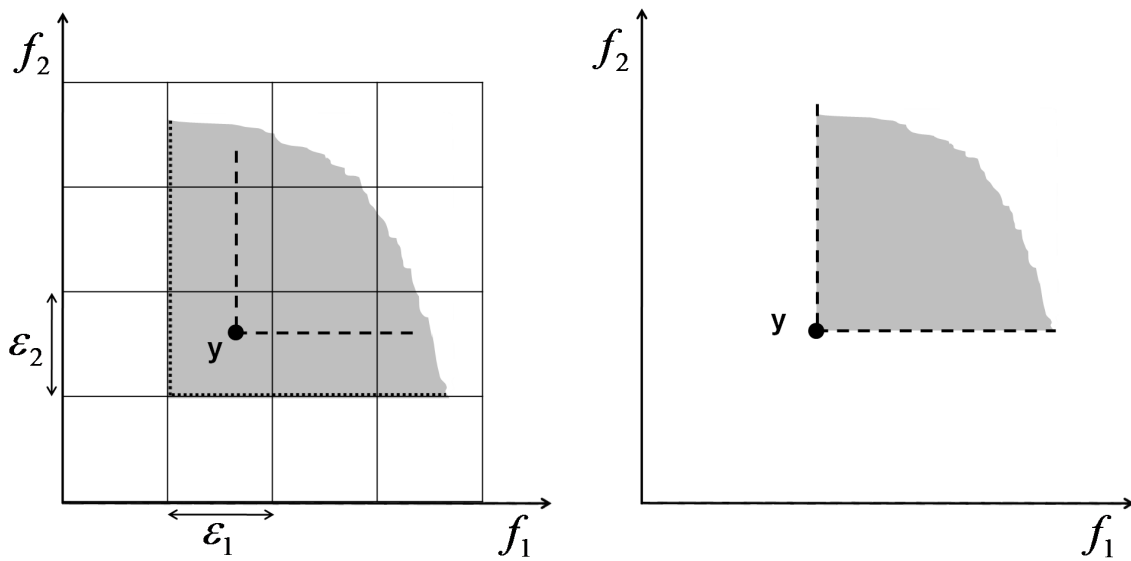
O leitor pode facilmente verificar que quando $\kappa \rightarrow 0$, os vetores geradores do cone de dominância são definidos paralelamente aos eixos de coordenadas do espaço de objetivos. Dessa forma, a cone ϵ -dominância comporta-se exatamente como a ϵ -dominância (veja a Fig. 3.13) e, além disso, observe que apenas a resolução do sistema linear $\Psi\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{z}$ é suficiente para garantir que somente soluções Pareto não-dominadas sejam aproximadas.



(a) Relação cone ϵ -dominância: $\kappa \in [0, 1)$ e $\epsilon_i > 0$. (b) Relação cone ϵ -dominância: $\kappa = 0$ e $\epsilon_i > 0$.

Figura 3.13.: Generalização entre cone ϵ -dominância e ϵ -dominância. A relação cone ϵ -dominância converge para a técnica ϵ -dominância quando $\kappa \rightarrow 0$.

Observe também que, mantendo-se $\kappa = 0$ e considerando-se $\epsilon = 0$, o cone de dominância representado pelo sistema linear $\Psi\lambda = z$ passa a desempenhar o papel da relação usual de dominância, pois o vetor z , anteriormente definido como $z = f(x_2) - [f(x_1) - \epsilon]$, torna-se $z = f(x_2) - f(x_1)$. Neste caso, a origem do cone de dominância é deslocada para a posição da solução y no espaço de objetivos (veja a ilustração mostrada na Fig. 3.14).



(a) Relação cone ϵ -dominância: $\kappa = 0$ e $\epsilon_i > 0$. (b) Relação cone ϵ -dominância: $\kappa = 0$ e $\epsilon_i = 0$

Figura 3.14.: Generalização entre cone ϵ -dominância e Pareto dominância. A relação cone ϵ -dominância converge para a técnica usual de dominância quando $\kappa \rightarrow 0$ e $\epsilon \rightarrow 0$.

É importante notar ainda que, embora a relação cone ϵ -dominância tenha sido definida para $\kappa \in [0, 1)$, esta estratégia possibilita também a consideração de valores negativos para este parâmetro. Neste caso, o efeito do cone de dominância no espaço de objetivos torna-se mais global que aquele proporcionado pela relação ϵ -dominância. Esta situação é ilustrada na Fig. 3.15(a), onde se considera $\kappa \in [-1, 0)$ e $\epsilon_i > 0$. Partindo-se deste ponto, basta supor $\epsilon_i = 0$ para que a técnica cone ϵ -dominância atue conforme a relação α -dominância, discutida na seção 2.3 (veja a Fig. 3.15(b)).

Por outro lado, quando $\kappa \rightarrow 1$ o efeito do cone de dominância torna-se desprezível, e apenas a relação de dominância padrão exerce influência sobre a ordenação, ou classificação, das soluções no espaço de objetivos (veja a Fig. 3.16(a)). No limite, quando $\kappa = 1^-$, a técnica cone ϵ -dominância comporta-se conforme ilustrado na Fig. 3.16(b). Observe que embora o critério de dominância ilustrado nesta figura não tenha sido tratado neste

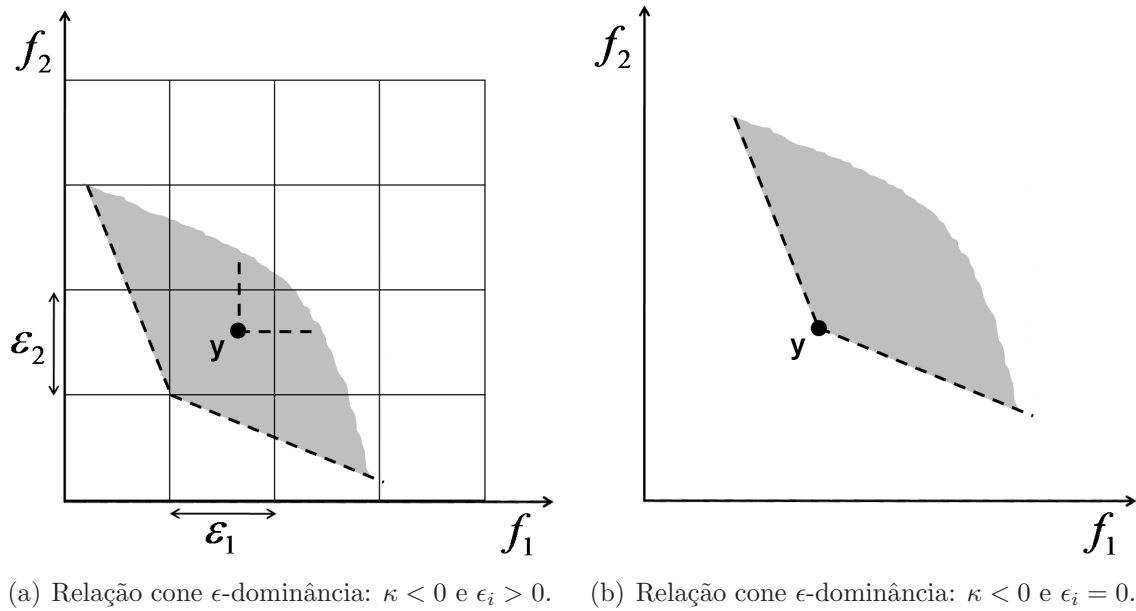


Figura 3.15.: Generalização entre cone ϵ -dominância e α -dominância. A estratégia cone ϵ -dominância converge para a técnica α -dominância quando adota-se $\kappa < 0$, $\kappa \in [-1, 0)$, e $\epsilon \rightarrow 0$.

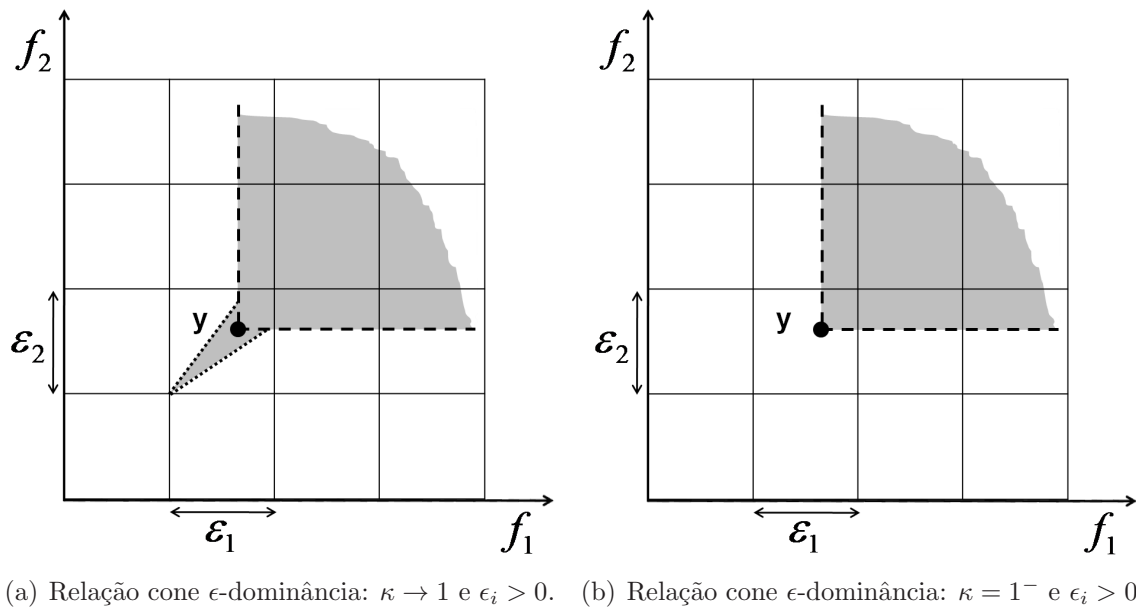
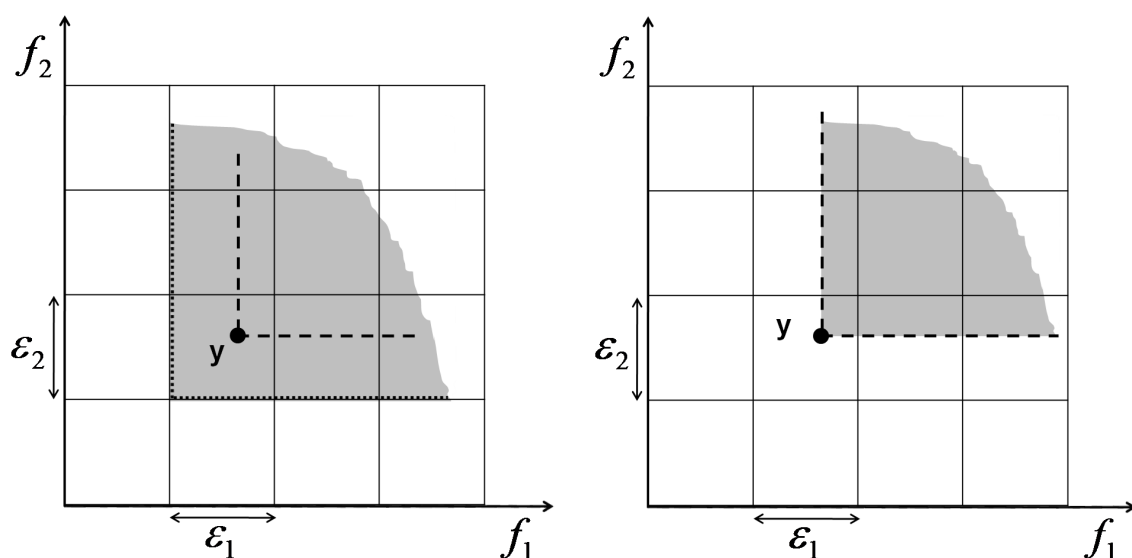


Figura 3.16.: A relação cone ϵ -dominância pode ser utilizada adotando-se $\kappa = 1^-$ e $\epsilon_i > 0$. Embora esta consideração estabeleça um critério de dominância não-relaxado, o mesmo assegura as propriedades de convergência e diversidade das soluções aproximadas. Além disso, possibilita uma verificação mais rápida da relação de dominância entre dois vetores, pois apenas o critério usual de dominância é testado.

trabalho, o estudo do mesmo parece muito promissor, pois além de garantir a aproximação de um conjunto de soluções Pareto não-dominadas, ambas as propriedades de convergência e diversidade, discutidas no início deste capítulo, são também asseguradas. É importante notar ainda que a verificação da relação de dominância entre dois vetores torna-se mais rápida, pois apenas o critério usual de dominância é testado.

Na discussão anterior considerou-se o caso extremo em que $\kappa = 1^-$, pois a técnica cone ϵ -dominância não é definida para $\kappa = 1$. No entanto, o critério ilustrado na Fig. 3.16(b) pode também ser obtido supondo $\kappa = 0$ com $\epsilon_i > 0$ (Fig. 3.17(a)), e posteriormente redefinindo-se o vetor \mathbf{z} , tal que seja desconsiderado o parâmetro ϵ , i.e., $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1)$, deslocando assim a origem do cone de dominância para a posição da solução \mathbf{y} no espaço de objetivos (veja a Fig. 3.17(b)).



(a) Relação cone ϵ -dominância: $\kappa = 0$, $\epsilon_i > 0$ e $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) - (\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \boldsymbol{\epsilon})$.
 (b) Relação cone ϵ -dominância: $\kappa = 0$, $\epsilon_i > 0$ e $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1)$.

Figura 3.17.: A relação cone ϵ -dominância pode ser utilizada adotando-se $\kappa = 0$, $\epsilon_i > 0$, e $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1)$. Embora esta consideração estabeleça um critério de dominância não-relaxado, o mesmo assegura as propriedades de convergência e diversidade das soluções aproximadas. Além disso, possibilita uma verificação mais rápida da relação de dominância entre dois vetores, pois apenas o critério usual de dominância é testado.

Esta seção foi escrita visando mostrar ao leitor que as relações ϵ -dominância, α -dominância e Pareto dominância podem ser vistas como casos particulares da estratégia cone ϵ -dominância. Para finalizar, apresenta-se uma discussão adicional na qual sugere-se um mecanismo mais intuitivo para a realização do controle da região cone-dominada.

Uma vez que o parâmetro κ não possui um sentido físico claro, o mecanismo de controle utilizado para regular a abertura do cone de dominância pode ser modificado, bastando substituir o parâmetro κ por um correspondente dado em graus, o qual possibilitaria um ajuste mais intuitivo pelo usuário. De acordo com a Fig. 3.18(a), os vetores geradores do cone de dominância podem ser escritos, com relação à origem do cone no espaço de objetivos, como $\boldsymbol{\eta}_1 = [1 \ \sin \phi]^T$ e $\boldsymbol{\eta}_2 = [\sin \phi \ 1]^T$. Dessa forma, o cone de dominância ilustrado na Fig. 3.18(a) é definido a seguir:

$$\mathcal{C}_{\Xi} = \left\{ \boldsymbol{\eta} : \overbrace{\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{\eta}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \\ \sin \phi & 1 \end{bmatrix}}^{\Xi} \overbrace{\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{\rho}}, \forall \rho_1, \rho_2 \geq 0 \right\} \quad (3.19)$$

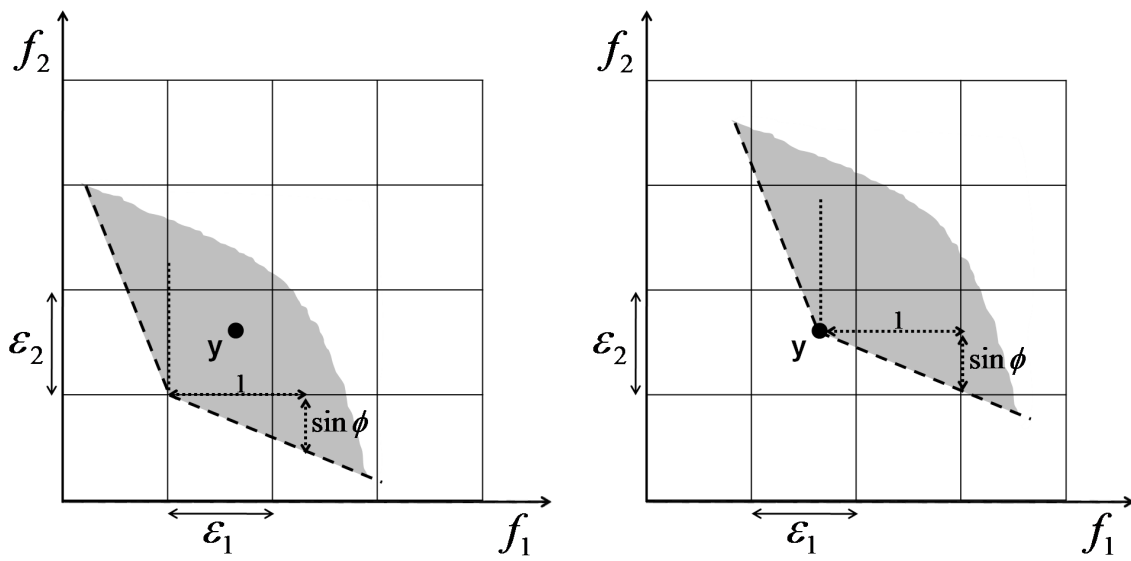
em que $\phi \in (-90^\circ, 90^\circ)$ controla o hipervolume cone-dominado, e o cone \mathcal{C}_{Ξ} contém todas as soluções $\boldsymbol{\eta}$. Sabendo-se que $\sin \phi = \cos(90^\circ - \phi)$, e fazendo $\theta = (90^\circ - \phi)$, o sistema linear $\Xi \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\eta}$ pode ser reescrito como:

$$\mathcal{C}_{\Xi} = \left\{ \boldsymbol{\eta} : \overbrace{\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{\eta}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & 1 \end{bmatrix}}^{\Xi} \overbrace{\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{\rho}}, \forall \rho_1, \rho_2 \geq 0 \right\} \quad (3.20)$$

em que $\theta \in (0^\circ, 180^\circ)$. Observe que a definição (3.20) é mais intuitiva, pois para obter um cone de dominância totalmente fechado basta utilizar $\theta = 0^\circ$; por outro lado, $\theta = 180^\circ$ implica em um cone de dominância totalmente aberto. Além da possibilidade de controlar a abertura do cone de dominância por meio da variação do ângulo θ , note que a origem do cone pode ser definida tanto (i) na origem do hipercubo quanto (ii) na posição da solução \boldsymbol{y} no espaço de objetivos:

- Na situação (i), para que a origem do cone coincida com a origem do hipercubo, faz-se $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2) - [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{\epsilon}]$ (veja a Fig. 3.18(a));
- Na situação (ii), para que a origem do cone coincida com a posição da solução \boldsymbol{y} no espaço de objetivos, faz-se $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)$ (veja a Fig. 3.18(b)).

Obviamente, o emprego deste mecanismo alternativo para o controle da região cone-dominada não inviabiliza nenhuma das considerações feitas até o momento. Além disso, vale mencionar que este esquema de controle angular é escalável para ambas as situações anteriores. Dessa forma, supondo um espaço de objetivos com m dimensões, diz-se que $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \in \mathbb{R}^m$ cone-domina $\mathbf{f}(\mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^m$ se, e somente se, a solução do sistema linear $\Xi\rho = \boldsymbol{\eta}$ fornece $\eta_i \geq 0 \forall i \in \{1, \dots, m\}$.



(a) Relação cone ϵ -dominância: $\epsilon_i > 0$, $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) - (\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \boldsymbol{\epsilon})$, e $\phi \in (-90^\circ, 90^\circ)$.

(b) Relação cone ϵ -dominância: $\epsilon_i > 0$, $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1)$, e $\phi \in (-90^\circ, 90^\circ)$.

Figura 3.18.: Mecanismo alternativo para o controle da região cone-dominada.

3.3. Conclusão

Neste capítulo apresentou-se a contribuição mais relevante deste trabalho. De maneira geral, propôs-se uma nova forma relaxada de dominância Pareto visando contornar as limitações das principais técnicas existentes na literatura, i.e., α -dominância, ϵ -dominância, e $pa\epsilon$ -dominância. Conforme descrito, a estratégia sugerida, chamada cone ϵ -dominância, mantém as mesmas propriedades de convergência garantidas pela técnica ϵ -dominância e, além disso, possibilita um melhor controle sobre a resolução da fronteira Pareto aproximada, independente da característica geométrica da mesma. A cone ϵ -dominância apresenta também uma formulação matemática simples e eficiente. O capítulo é encerrado com a realização de uma discussão conceitual comparativa entre cone ϵ -dominância, ϵ -dominância, e $pa\epsilon$ -dominância, e com a apresentação da generalização das técnicas estudadas em um contexto único da estratégia cone ϵ -dominância.

Com o objetivo de validar o mecanismo proposto, o capítulo seguinte dedica-se à realização de testes envolvendo as técnicas cone ϵ -dominância, ϵ -dominância, e Pareto-dominância. Conforme mostrado, o AE multiobjetivo baseado na relação cone ϵ -dominância encontrou resultados competitivos em todos os problemas utilizados no experimento.

Capítulo 4.

Resultados

“O conhecimento é o processo de acumular dados; a sabedoria reside na sua simplificação.”

— Martin H. Fischer, 1879–1962

4.1. Introdução

Neste capítulo são apresentados e discutidos os principais resultados referentes ao desempenho da estratégia proposta, cone ϵ -dominância. De maneira geral, os experimentos realizados neste trabalho envolvem somente as técnicas cone ϵ -dominância, ϵ -dominância e Pareto-dominância, os quais são suficientes para validar a eficiência da relação de dominância sugerida. Para a efetivação dos testes são considerados dezesseis problemas analíticos, e três algoritmos de otimização multiobjetivo: NSGA-II, ϵ -MOEA, e cone ϵ -MOEA. Este último é idêntico ao método ϵ -MOEA, exceto pelo emprego da técnica cone ϵ -dominância em substituição ao conceito de ϵ -dominância, favorecendo assim uma avaliação comparativa entre os desempenhos destas duas técnicas.

4.2. Experimentos e Validação da Técnica Proposta

Com o objetivo de avaliar o critério de dominância proposto, três algoritmos são considerados para o estudo experimental: o primeiro emprega o conceito usual de dominância Pareto; o segundo usa a estratégia ϵ -dominância; e o terceiro é implementado fazendo-se uma modificação sobre o segundo, substituindo-se o mecanismo de atualização da população de arquivo ϵ -dominância por cone ϵ -dominância. Este processo viabiliza comparar o desempenho do mesmo algoritmo na presença e ausência do critério proposto. Os três algoritmos evolucionários multiobjetivo são apresentados a seguir:

1. **“Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm II” (NSGA-II):** Este algoritmo foi proposto em (Deb et al. 2002). Em termos gerais, as populações de “progenitores” e “descendentes” são combinadas ao longo das gerações do método, e as soluções são avaliadas (classificadas) usando a técnica “fast non-dominated sorting”, um esquema de elitismo, e um eficiente mecanismo de nicho conhecido como “crowding-distance assignment”. Considerando uma população com N pontos, o procedimento “crowding-distance” requer uma complexidade computacional de $\mathcal{O}(N \log N)$, o qual torna o algoritmo computacionalmente rápido. Entretanto, embora o NSGA-II apresente um desempenho singular em problemas com dois ou três objetivos, o operador “crowding-distance” não é adequado para manter uma boa distribuição de soluções em problemas com um número elevado de funções objetivo (Deb, Mohan & Mishra 2005).
2. **ϵ -MOEA:** Este método foi proposto por Deb e co-autores (Deb et al. 2003, Deb, Mohan & Mishra 2005), e consiste de um algoritmo evolucionário multiobjetivo baseado no conceito de ϵ -dominância. Neste método observa-se a evolução simultânea de duas populações (população evolutiva e população de memória), e a cada iteração duas novas soluções são criadas considerando-se um antecessor de cada população. Cada solução gerada é então empregada na atualização de ambas as populações, aumentando as chances de criação de melhores soluções. Note, entretanto, que a população de arquivo é atualizada baseando-se no conceito de ϵ -dominância, enquanto o conceito usual de dominância é empregado na atualização da população evolutiva. Uma observação cuidadosa revela que o método ϵ -MOEA enfatiza a obtenção de soluções não-dominadas, mantém a diversidade na população de arquivo em função do conceito de ϵ -dominância, e representa um mecanismo elitista.

3. **cone ϵ -MOEA:** Este método representa uma modificação do algoritmo ϵ -MOEA, em que o conceito de ϵ -dominância é substituído pela estratégia cone ϵ -dominância.

4.2.1. Preservação de Diversidade no Domínio de Objetivos

Os algoritmos mencionados anteriormente utilizam diferentes mecanismos para manter a diversidade entre as soluções do conjunto não-dominado encontrado. Por um lado, o NSGA-II baseia-se em uma técnica para a estimação da densidade de soluções no espaço de objetivos, popularmente conhecida como “crowding-distance” (Deb et al. 2002). Os demais métodos, ϵ -MOEA e cone ϵ -MOEA, empregam a estratégia ϵ -aproximada (Laumanns et al. 2002), descrita com detalhes nos capítulos 2 e 3.

De forma geral, o operador de diversidade utilizado pelo NSGA-II enfatiza a escolha dos pontos não-dominados que maximizam a distância entre as soluções vizinhas. Este mecanismo atua da seguinte maneira: inicialmente, as soluções são organizadas segundo a ordem crescente do valor do objetivo, considerando-se cada um dos objetivos; feito isto, cada solução é associada a uma distância, ao longo de cada um dos objetivos, dada pela diferença entre os valores de objetivo normalizados das soluções vizinhas. A Fig. 4.1 mostra os hipercubos utilizados para calcular estas distâncias para cada uma das soluções em uma fronteira não-dominada. O valor total atribuído à “crowding distance” da solução i é igual a soma das distâncias ao longo dos objetivos. Note, entretanto, que este mecanismo está sujeito à deterioração das soluções estimadas, i.e., visando obter um arquivo final com boa diversidade, soluções Pareto-ótimas são frequentemente eliminadas e, posteriormente, reinseridas no arquivo. Isso ocorre pois o operador em questão sempre enfatiza a escolha de pontos localizados nas regiões menos densas da fronteira, e estas regiões alteram-se ao longo das gerações.

Por outro lado, a técnica ϵ -aproximada, utilizada pelos métodos ϵ -MOEA e cone ϵ -MOEA, permite associar um hipercubo, definido no espaço de objetivos, a cada uma das soluções estimadas. Além disso, cada hipercubo pode ser ocupado somente por uma única solução ao mesmo tempo, garantindo assim a preservação da diversidade das soluções ao longo da evolução das mesmas. Uma vez que este procedimento possibilita arquivar as melhores soluções encontradas durante o processo evolutivo, o problema de deterioração é minimizado. Observe, entretanto, que o controle exercido sobre a diversidade das soluções aproximadas é diferente, e depende da relação de dominância adotada. No caso do algoritmo ϵ -MOEA, a técnica ϵ -dominância tende a eliminar certas regiões da fronteira Pareto estimada, pois este critério não permite que dois vetores com

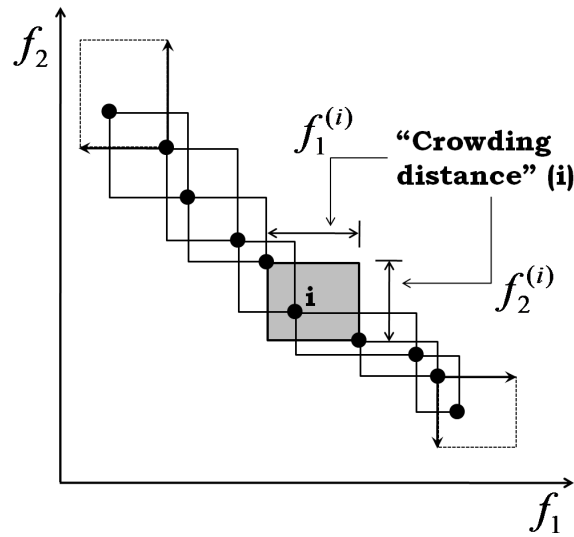


Figura 4.1.: Ilustração do mecanismo “crowding-distance” usado pelo NSGA-II.

uma diferença de ϵ_i no i -ésimo objetivo sejam mutualmente não-dominados entre si. Já a estratégia cone ϵ -dominância possibilita a determinação de várias soluções ϵ -dominadas, pois a influência que o cone de dominância exerce sobre a ordenação de pontos é limitada a uma vizinhança local no espaço de objetivos, e o seu efeito é provavelmente menos dramático que aquele desempenhado pela relação ϵ -dominância. Dessa forma, a cone ϵ -dominância permite, frequentemente, uma aproximação mais detalhada da fronteira Pareto-ótima global.

Estes métodos foram implementados, em Matlab, baseando-se nos códigos fontes disponibilizados em (Deb 2005)¹. Nos tópicos seguintes são apresentadas informações adicionais sobre os problemas testes, as métricas de avaliação de desempenho, o ajuste dos parâmetros dos algoritmos, e o planejamento estatístico dos experimentos.

4.2.2. Problemas Analíticos

Ao longo do exame de qualificação realizou-se um estudo preliminar, no qual a escolha dos problemas testes foi direcionada com respeito às características geométricas das fronteiras Pareto, e não com base na dificuldade de se resolver tais problemas. Parte substancial deste trabalho encontra-se na literatura especializada (Batista et al. 2011c). Agora, com o objetivo de desenvolver uma análise mais apropriada, um maior número

¹Os algoritmos implementados, e vários outros arquivos contendo dados processados relativos aos experimentos realizados estão disponíveis na internet (Batista et al. 2011d).

de problemas é considerado, cada um promovendo um tipo diferente de dificuldade para algoritmos evolucionários multiobjetivo. Inicialmente, escolheu-se dois problemas contínuos, Deb52 (Deb 1999) e Pol (Poloni 1995), ambos empregados no trabalho anterior (Batista et al. 2011c). Cinco problemas bi-objetivo pertencentes à família ZDT também foram selecionados (Zitzler et al. 2000). Como o trabalho corrente trata somente problemas com parâmetros contínuos, o teste ZDT5 foi ignorado, pois o mesmo é definido para parâmetros binários. Obviamente, os algoritmos citados anteriormente podem ser aplicados a problemas com codificação binária, bastando modificar os operadores de recombinação e mutação. Por fim, considerou-se nove problemas tri-objetivo pertencentes à família DTLZ (Deb, Thiele, Laumanns & Zitzler 2005). Informações adicionais acerca destes problemas são apresentadas nas Tabelas 4.1 e 4.2, e também ao longo da análise dos resultados. Nas tabelas mencionadas, o parâmetro n representa a dimensão do espaço de busca.

Tabela 4.1.: Problemas analíticos adotados no estudo experimental – parte A.

Problema	n	Limites	Funções Objetivo	Fronteira Pareto
P1: Deb52	2	[0, 1]	$f_1(\mathbf{x}) = 1 - \exp(-4x_1) \sin^4(10\pi x_1)$ $f_2(\mathbf{x}) = g(x_2)h(x_1) ; g(x_2) = 1 + x_2^2$ $h(x_1) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{f_1(\mathbf{x})}{g(x_2)}\right)^{10} & \text{if } f_1(\mathbf{x}) \leq g(x_2) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$	Côncava
P2: Pol	2	$[-\pi, \pi]$	$f_1(\mathbf{x}) = 1 + (A_1 - B_1)^2 + (A_2 - B_2)^2$ $f_2(\mathbf{x}) = (x_1 + 3)^2 + (x_2 + 1)^2$ $A_1 = 0.5 \sin 1 - 2 \cos 1 + \sin 2 - 1.5 \cos 2$ $A_2 = 1.5 \sin 1 - \cos 1 + 2 \sin 2 - 0.5 \cos 2$ $B_1 = 0.5 \sin x_1 - 2 \cos x_1 + \sin x_2 - 1.5 \cos x_2$ $B_2 = 1.5 \sin x_1 - \cos x_1 + 2 \sin x_2 - 0.5 \cos x_2$	Não-convexa e desconexa
P3: ZDT1	30	[0, 1]	$f_1(\mathbf{x}) = x_1 ; f_2(\mathbf{x}) = 1 - \sqrt{x_1/g(\mathbf{x})}$ $g(\mathbf{x}) = 1 + 9 (\sum_{i=2}^n x_i) / (n - 1)$	Convexa
P4: ZDT2	30	[0, 1]	$f_1(\mathbf{x}) = x_1 ; f_2(\mathbf{x}) = 1 - (x_1/g(\mathbf{x}))^2$ $g(\mathbf{x}) = 1 + 9 (\sum_{i=2}^n x_i) / (n - 1)$	Não-convexa
P5: ZDT3	30	[0, 1]	$f_1(\mathbf{x}) = x_1 ; f_2(\mathbf{x}) = 1 - \sqrt{h} - h \sin(10\pi x_1)$ $g(\mathbf{x}) = 1 + 9 (\sum_{i=2}^n x_i) / (n - 1)$ e $h = x_1/g(\mathbf{x})$	Desconexa (partes convexas)
P6: ZDT4	10	$x_1 \in [0, 1]$ $x_i \in [-5, 5],$ $i = 2, \dots, n$	$f_1(\mathbf{x}) = x_1$ $f_2(\mathbf{x}) = 1 - \sqrt{x_1/g(\mathbf{x})}$ $g(\mathbf{x}) = 1 + 10(n - 1) + \sum_{i=2}^n (x_i^2 - 10 \cos(4\pi x_i))$	Não-convexa (problema multimodal)
P7: ZDT6	10	[0, 1]	$f_1(\mathbf{x}) = 1 - \exp(-4x_1) \sin^6(6\pi x_1)$ $f_2(\mathbf{x}) = 1 - (f_1/g(\mathbf{x}))^2$ $g(\mathbf{x}) = 1 + 9 [(\sum_{i=2}^n x_i) / (n - 1)]^{0.25}$	Não-convexa (espaço de busca não-uniforme)

Tabela 4.2.: Problemas analíticos adotados no estudo experimental – parte B.

Problema	n	Limites	Funções Objetivo	Fronteira Pareto
P8: DTLZ1	7	[0, 1]	$f_1(\mathbf{x}) = 0.5x_1x_2(1 + g(\mathbf{x}_m))$ $f_2(\mathbf{x}) = 0.5x_1(1 - x_2)(1 + g(\mathbf{x}_m))$ $f_3(\mathbf{x}) = 0.5(1 - x_1)(1 + g(\mathbf{x}_m))$ $g(\mathbf{x}_m) = 100 (\mathbf{x}_m + \sum_{x_i \in \mathbf{x}_m} h_i)$ $h_i = (x_i - 0.5)^2 - \cos(20\pi(x_i - 0.5))$	Hiperplano linear
P9: DTLZ2	n	[0, 1]	$f_1(\mathbf{x}) = (1 + g(\mathbf{x}_m)) \prod_{i=1}^{m-1} \cos(x_i^\alpha \pi/2)$ $f_j(\mathbf{x}) = (1 + g(\mathbf{x}_m)) \left(\prod_{i=1}^{m-j} \cos(x_i^\alpha \pi/2) \right) \sin(x_M^\alpha \pi/2)$ $f_m(\mathbf{x}) = (1 + g(\mathbf{x}_m)) \sin(x_1^\alpha \pi/2)$; $M = m - j + 1$ $g(\mathbf{x}_m) = \sum_{x_i \in \mathbf{x}_m} (x_i - 0.5)^2$; $\alpha = 1$ $n = m + k - 1$, $k = 10$ e $j = 2, \dots, m - 1$	Superfície côncava
P10: DTLZ3	12	[0, 1]	f_1, f_2 e f_3 como em DTLZ2 $g(\mathbf{x}_m) = 100 (\mathbf{x}_m + \sum_{x_i \in \mathbf{x}_m} h_i)$ $h_i = (x_i - 0.5)^2 - \cos(20\pi(x_i - 0.5))$	Superfície côncava
P11: DTLZ4	12	[0, 1]	f_1, f_2 e f_3 como em DTLZ2, mas $\alpha = 100$	Superfície côncava
P12: DTLZ5	12	[0, 1]	$f_1(\mathbf{x}) = (1 + g(\mathbf{x}_m)) \cos(\theta_1) \cos(\theta_2)$ $f_2(\mathbf{x}) = (1 + g(\mathbf{x}_m)) \cos(\theta_1) \sin(\theta_2)$ $f_3(\mathbf{x}) = (1 + g(\mathbf{x}_m)) \sin(\theta_1)$ $\theta_1 = x_1 \pi/2$ e $\theta_2 = \frac{\pi}{4(1+g(r))} (1 + 2g(r)x_2)$ $g(\mathbf{x}_m) = \sum_{x_i \in \mathbf{x}_m} (x_i - 0.5)^2$	Curva côncava
P13: DTLZ6	12	[0, 1]	f_1, f_2 e f_3 como em DTLZ5 $g(\mathbf{x}_m) = \sum_{x_i \in \mathbf{x}_m} x_i^{0.1}$	Curva côncava
P14: DTLZ7	22	[0, 1]	$f_1(\mathbf{x}) = x_1$; $f_2(\mathbf{x}) = x_2$; $f_3(\mathbf{x}) = (1 + g(\mathbf{x}_m))h$ $h = 3 - \sum_{i=1}^2 \left[\frac{f_i}{1+g} (1 + \sin(3\pi f_i)) \right]$ $g(\mathbf{x}_m) = 1 + \frac{9}{20} \sum_{x_i \in \mathbf{x}_m} x_i$	Desconexa (áreas convexas não-contíguas)
P15: DTLZ8	30	[0, 1]	$f_i(\mathbf{x}) = 0.1 \sum_{j=10(i-1)+1}^{10j} x_j$; $i = 1, 2, 3$ $g_i(\mathbf{x}) = f_3(\mathbf{x}) + 4f_i(\mathbf{x}) - 1 \geq 0$; $i = 1, 2$ $g_3(\mathbf{x}) = 2f_3(\mathbf{x}) + f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x}) - 1 \geq 0$	Combinação entre uma linha e um hiperplano
P16: DTLZ9	30	[0, 1]	$f_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=10(i-1)+1}^{10j} x_j^{0.1}$; $i = 1, 2, 3$ $g_i(\mathbf{x}) = f_3^2(\mathbf{x}) + f_i^2(\mathbf{x}) - 1 \geq 0$; $i = 1, 2$	Curva côncava

4.2.3. Métricas de Avaliação de Desempenho

Ao contrário do que se observa na otimização mono-objetivo, a avaliação do desempenho de técnicas de otimização multiobjetivo requer a consideração de dois aspectos distintos: (i) convergência para a fronteira Pareto-ótima, e (ii) preservação de um conjunto de soluções bem distribuídas ao longo da fronteira. Para considerar esta natureza multi-critério inerente à avaliação de algoritmos multiobjetivo, utilizou-se quatro métricas para a realização da análise dos resultados.

- “Convergence metric” (γ) (Deb et al. 2002)

Esta métrica mensura a distância entre a fronteira não-dominada obtida \mathcal{A} e uma amostra detalhada da fronteira Pareto-ótima global \mathcal{A}^* :

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^{|\mathcal{A}|} d_i}{|\mathcal{A}|} \quad (4.1)$$

em que d_i representa a distância Euclidiana, no domínio de objetivos, entre a solução $i \in \mathcal{A}$ e o membro mais próximo de \mathcal{A}^* , e o operador $|\cdot|$ retorna a cardinalidade do conjunto em seu argumento. Dessa forma, quanto menor o valor de γ , melhor é a convergência das soluções em \mathcal{A} . Note que um resultado com $\gamma = 0$ implica que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$, caso contrário, \mathcal{A} não converge completamente para \mathcal{A}^* .

- “Diversity metric” (Δ) (Deb et al. 2002)

Esta métrica reflete a extensão da dispersão encontrada entre as soluções não-dominadas armazenadas em \mathcal{A} . Considerando-se que é desejável obter um conjunto de soluções que cubra, ou represente, toda a região Pareto-ótima, o valor de Δ é definido como:

$$\Delta = \frac{\sum_{i=1}^m d_i^e + \sum_{i=1}^{|\mathcal{A}|} |d_i - \bar{d}|}{\sum_{i=1}^m d_i^e + |\mathcal{A}| \bar{d}} \quad (4.2)$$

em que d_i^e denota a distância Euclidiana entre os pontos extremos de \mathcal{A} e \mathcal{A}^* ao longo da i -ésima coordenada, d_i representa a distância Euclidiana de cada ponto em \mathcal{A} para o vizinho mais próximo contido neste mesmo conjunto, e \bar{d} é a média de d_i , $i \in (1, \dots, |\mathcal{A}|)$. Assim sendo, quanto menor o valor de Δ , melhor é a distribuição das soluções. Observe que um resultado com $\Delta = 0$ implica que os pontos extremos de \mathcal{A}^* foram estimados pelo algoritmo e, além disso, os valores de d_i são iguais a \bar{d} para todo i .

- “S-metric” ou “Hypervolume” (HV) (Zitzler & Thiele 1999)

Esta métrica calcula o hipervolume confinado entre a fronteira estimada \mathcal{A} e um ponto de referência dominado por todas as soluções desta fronteira, computando portanto o tamanho da região dominada pelo conjunto aproximado. Dessa forma, quanto maior o volume dominado, melhor é a aproximação da fronteira. Para todos os problemas testes considerou-se um ponto de referência 10% maior do que os limites superiores da fronteira Pareto-ótima global. Embora esta métrica estime tanto a convergência quanto a diversidade das soluções em \mathcal{A} , a mesma é mais sensível à convergência dos pontos para a fronteira Pareto (Zitzler et al. 2007).

- “Coverage of Two Sets” (CS) (Zitzler & Thiele 1999)

Uma vez que métricas unárias possuem uma eficiência limitada (Knowles & Corne 2002, Zitzler et al. 2003), considerou-se também uma métrica de avaliação de desempenho binária (CS), a qual permite uma comparação mais apropriada entre dois conjuntos não-dominados. Esta métrica quantifica a porcentagem de soluções que a população final de um determinado algoritmo domina em relação a um conjunto estimado por outro método. A função CS é definida da seguinte forma:

$$CS(X', X'') = \frac{|a'' \in X''; \exists a' \in X' : a' \preceq a''|}{|X''|} \quad (4.3)$$

onde X' e X'' são dois conjuntos do espaço de objetivos, e $a' \preceq a''$ significa que a' cobre a'' , isto é, ou $a' \prec a''$ ou $a' = a''$. A função CS mapeia o par (X_i, X_j) para o intervalo $[0, 1]$, em que X_i e X_j representam as populações finais obtidas pelos algoritmos i e j , respectivamente. O valor $CS(X_i, X_j) = 1$ implica que todos os pontos em X_j são dominados por ou iguais aos pontos em X_i . Por outro lado, $CS(X_i, X_j) = 0$ representa a situação em que nenhum ponto de X_j é coberto pelo conjunto X_i . Note que ambos os valores $CS(X_i, X_j)$ e $CS(X_j, X_i)$ precisam ser considerados independentemente, pois os mesmos não são complementares.

Como é o caso das duas primeiras métricas, necessita-se conhecer uma amostra detalhada da fronteira Pareto-ótima global de cada problema teste. Felizmente, como os problemas tratados são comumente referenciados na literatura, obter a fronteira Pareto-ótima para os mesmos não é uma tarefa difícil. Neste trabalho, considerou-se uma amostra de soluções Pareto-ótimas uniformemente espaçadas ao longo da fronteira global. Para todos os problemas considerados, estas amostras estão disponibilizadas na internet (Batista et al. 2011d).

4.2.4. Ajuste de Parâmetros

Para estabelecer uma base de comparação que possibilite avaliar o desempenho da estratégia proposta, alguns parâmetros de todos os algoritmos são ajustados da mesma forma: tamanho da população $N = 100$, e probabilidades de cruzamento e mutação $p_{xover} = 1$ e $p_{mut} = 1/n$, respectivamente. Uma vez que todos os problemas testes envolvem variáveis de decisão com codificação real, empregou-se os operadores de cruzamento binário simulado (SBX) (Deb & Agrawal 1995) e mutação polinomial (Deb & Goyal 1996) para a geração das soluções. Os índices de distribuição de cruzamento (η_{xover}) e mutação (η_{mut}) adotados em cada problema são mostrados na Tabela 4.3. Além disso, para a realização de uma comparação justa, todos os algoritmos são executados considerando-se um número fixo de soluções avaliadas: 100.000 avaliações para o ZDT4 e o DTLZ8; 50.000 para o DTLZ9; 30.000 para o DTLZ3 e o DTLZ4; e 20.000 para os demais.

Tabela 4.3.: Índices de distribuição de cruzamento e mutação adotados pelos algoritmos.

	Deb52, Pol, ZDT1, ZDT3 ZDT6, DTLZ2, DTLZ4	ZDT4, DTLZ1 e DTLZ3	ZDT2 e DTLZ5–DTLZ9
η_{xover}	15	2	2
η_{mut}	20	20	5

Visando obter uma população final de arquivo com 100 soluções, considerou-se os valores de ϵ mostrados na Tabela 4.4. Os valores calculados para ϵ foram obtidos seguindo as definições fornecidas em (Laumanns et al. 2002) e (Batista et al. 2011c), para os algoritmos ϵ -MOEA (2.7) e cone ϵ -MOEA (3.16), respectivamente. Uma vez que as estratégias ϵ -dominância e cone ϵ -dominância podem perder soluções não-dominadas, estimou-se valores de ϵ com o objetivo de obter aproximadamente 100 soluções na população final de arquivo. Para a relação ϵ -dominância, os valores estimados foram obtidos a partir de (Deb et al. 2003, Deb, Mohan & Mishra 2005), enquanto para a estratégia cone ϵ -dominância, a estimação foi realizada testando-se diferentes valores de ϵ com o intuito de obter aproximadamente 100 soluções no arquivo ao fim da execução do algoritmo. De forma geral, dado um problema específico, o algoritmo é inicialmente executado considerando-se o valor calculado para ϵ . Baseando-se então no tamanho da população final de arquivo, o valor de ϵ é ajustado iterativamente, podendo ser decrescido ou acrescido de δ , dependendo se a cardinalidade do arquivo encontrado é inferior ou superior ao número desejado, respectivamente. O parâmetro δ pode ser tanto fixo, e.g., 1/1000 ou 1/100, quanto variável, e sua escolha ditará o tempo de máquina necessário para a estimação adequada de ϵ . Embora este processo de estimação represente um custo

adicional para as técnicas ϵ - e cone ϵ -dominância, o mesmo não é considerado durante a análise de desempenho dos algoritmos.

Note que, para o método cone ϵ -MOEA, os valores estimados para ϵ , mostrados na Tabela 4.4, diferenciam-se daqueles calculados apenas em oito dos dezesseis problemas, dentre os quais três possuem fronteira Pareto-ótima desconexa, e valores inadequados calculados para ϵ já eram esperados. Por outro lado, no método ϵ -MOEA todos os valores de ϵ sofreram alterações. Este fenômeno sugere que a relação cone ϵ -dominância seja menos susceptível à perda de soluções não-dominadas do que a estratégia ϵ -dominância. Esta situação está claramente ilustrada nas Figs. 4.2 e 4.3, as quais mostram a distribuição das soluções nos problemas Deb52 e Pol com o intuito de obter $T = 30$ e $T = 50$ pontos, respectivamente. O número de soluções aproximadas pelos métodos está indicado nestas figuras por meio da cardinalidade da fronteira Pareto final $|\mathcal{A}|$. Nesta simulação, os valores de ϵ foram calculados usando (2.7) para o algoritmo ϵ -MOEA e (3.16) para o cone ϵ -MOEA. Os hipercubos ocupados pelas soluções estimadas são também mostrados nestas figuras. É interessante notar que todas as soluções são não-dominadas segundo os respectivos critérios adotados, e cada caixa é ocupada por um único vetor solução. Além disso, a técnica cone ϵ -dominância possibilitou uma distribuição mais regular das soluções encontradas, inclusive no problema Pol, o qual possui fronteira Pareto desconexa. Com base nesta breve discussão, uma vez que ambos os métodos utilizados para o cálculo do vetor ϵ nem sempre fornecem o número desejado de soluções eficientes, somente os valores “estimados” para ϵ são considerados para a realização dos experimentos.

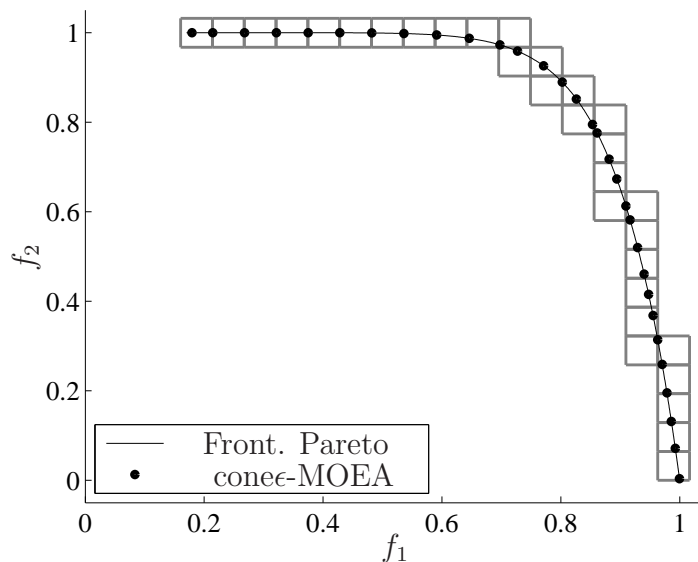
Uma vez que a estratégia cone ϵ -dominância é influenciada pelo parâmetro κ , realizou-se alguns testes preliminares com o objetivo de observar o efeito de diferentes valores de κ no desempenho do método cone ϵ -MOEA. A Tabela 4.5 apresenta o efeito deste parâmetro nos valores das métricas unárias γ , Δ e HV para os problemas testes Deb52, ZDT1, e DTLZ2 com três e quatro funções objetivo. Note que, conforme esperado, a resolução do conjunto Pareto estimado é pouco influenciada pelo parâmetro κ , exceto nos casos em que este parâmetro aproxima-se de zero. Baseando-se neste teste limitado, observa-se que valores intermediários para κ produzem um desempenho razoável para todas as métricas. Dessa forma, adotou-se $\kappa = 0.5$ para a realização de todos os experimentos deste trabalho. No entanto, à medida que o número de objetivos aumenta, a adoção de um pequeno valor para κ parece mais razoável, pois em um espaço m -dimensional, geralmente para $m > 3$, um efeito mais global exercido pelo cone de dominância possivelmente viabilizará uma maior pressão seletiva e também a convergência do algoritmo.

Tabela 4.4.: Valores calculados (primeira linha) e estimados (segunda linha) de ϵ para os algoritmos $\underline{\epsilon}$ -MOEA e \underline{c} one- ϵ -MOEA. Estes valores foram obtidos com o intuito de encontrar aproximadamente 100 soluções na população final de arquivo. O sinal “–” significa que não foi necessário estimar valores para ϵ . Nos casos em que isto ocorre, o método de cálculo específico forneceu valores adequados para ϵ .

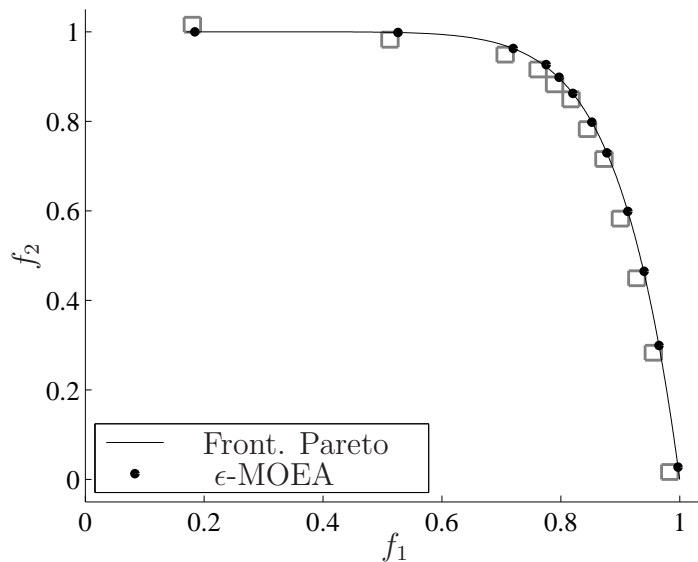
Problemas Bi-Objetivo							
Alg.	Deb52	Pol	ZDT1	ZDT2	ZDT3	ZDT4	ZDT6
ϵ	[0.0083,0.010] [0.003,0.003]	[0.16,0.25] [0.038,0.038]	$\epsilon_i = 0.010$ $\epsilon_i = 0.0075$	$\epsilon_i = 0.010$ $\epsilon_i = 0.0076$	[0.0085,0.018] $\epsilon_i = 0.0026$	$\epsilon_i = 0.010$ $\epsilon_i = 0.0065$	[0.0072,0.0093] $\epsilon_i = 0.0067$
c	[0.0164,0.0198] –	[0.3168,0.4950] [0.20,0.33]	$\epsilon_i = 0.0198$ –	$\epsilon_i = 0.0198$ –	[0.0168,0.0356] [0.012,0.025]	$\epsilon_i = 0.0198$ –	[0.0143,0.0184] –

Problemas Tri-Objetivo					
Alg.	DTLZ1	DTLZ2	DTLZ3	DTLZ4	DTLZ5
ϵ	$\epsilon_i = 0.05$ [0.02,0.02,0.05]	$\epsilon_i = 0.10$ [0.06,0.06,0.066]	$\epsilon_i = 0.10$ [0.06,0.06,0.066]	$\epsilon_i = 0.10$ $\epsilon_i = 0.062$	[0.007,0.007,0.01] $\epsilon_i = 0.005$
c	$\epsilon_i = 0.0798$ [0.05,0.05,0.0833]	$\epsilon_i = 0.1595$ –	$\epsilon_i = 0.1595$ –	$\epsilon_i = 0.1595$ –	[0.014,0.014,0.02] $\epsilon_i = 0.025$

Alg.	DTLZ6	DTLZ7	DTLZ8	DTLZ9
ϵ	[0.007,0.007,0.01] $\epsilon_i = 0.005$	[0.086,0.086,0.3386] $\epsilon_i = 0.05$	[0.075,0.075,0.10] [0.02,0.02,0.04]	$\epsilon_i = 0.010$ $\epsilon_i = 0.025$
c	[0.014,0.014,0.02] $\epsilon_i = 0.017$	[0.1372,0.1372,0.5404] [0.12,0.12,0.30]	[0.12,0.12,0.16] $\epsilon_i = 0.03$	$\epsilon_i = 0.0198$ [0.27,0.27,0.25]

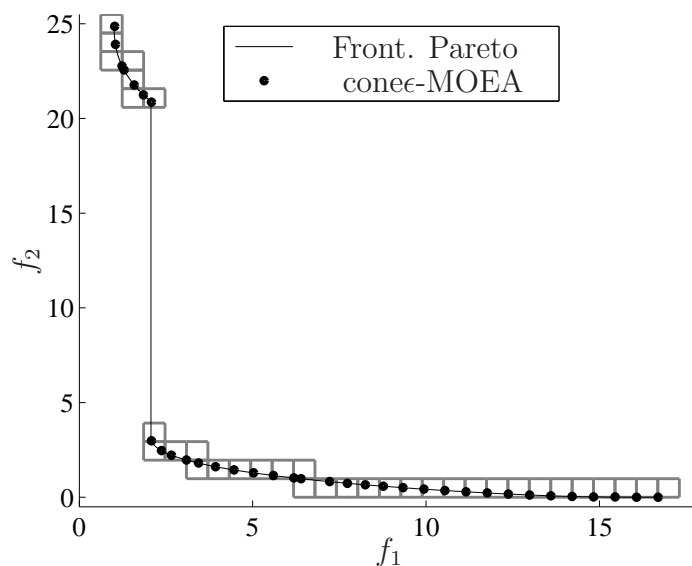


(a) Distribuição obtida pelo método $\text{cone}\epsilon\text{-MOEA}$ no teste Deb52: $\epsilon = (0.0535, 0.0645)$, $|\mathcal{A}| = 31$, $T = 30$.

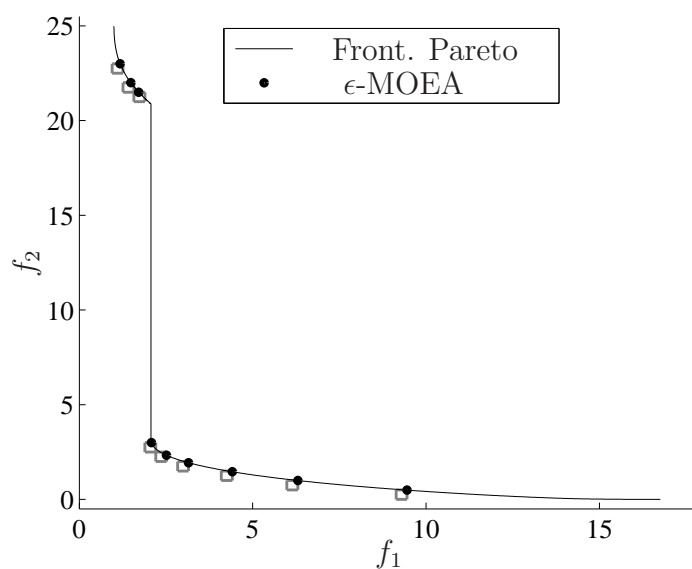


(b) Distribuição obtida pelo método $\epsilon\text{-MOEA}$ no teste Deb52: $\epsilon = (0.0277, 0.0333)$, $|\mathcal{A}| = 12$, $T = 30$.

Figura 4.2.: Soluções eficientes geradas pelos métodos $\text{cone}\epsilon\text{-MOEA}$ e $\epsilon\text{-MOEA}$ considerando-se valores calculados de ϵ para fornecerem um valor máximo de T soluções no arquivo final. O número de soluções aproximadas por cada método é indicado pela cardinalidade da fronteira Pareto final $|\mathcal{A}|$. As fronteiras apresentadas foram obtidas a partir de uma execução típica de cada um dos algoritmos.



(a) Distribuição obtida pelo método cone ϵ -MOEA no teste Pol:
 $\epsilon = (0.6180, 0.9804)$, $|\mathcal{A}| = 38$, $T = 50$.



(b) Distribuição obtida pelo método ϵ -MOEA no teste Pol:
 $\epsilon = (0.3151, 0.5000)$, $|\mathcal{A}| = 09$, $T = 50$.

Figura 4.3.: Soluções eficientes geradas pelos métodos cone ϵ -MOEA e ϵ -MOEA considerando-se valores calculados de ϵ para fornecerem um valor máximo de T soluções no arquivo final. O número de soluções aproximadas por cada método é indicado pela cardinalidade da fronteira Pareto final $|\mathcal{A}|$. As fronteiras apresentadas foram obtidas a partir de uma execução típica de cada um dos algoritmos.

Tabela 4.5.: Influência de diferentes valores de κ no desempenho do método cone-MOEA considerando-se os problemas testes Deb52, ZDT1, e DTLZ2 com três e quatro funções objetivo. Apresenta-se a mediana (M) e o desvio padrão (DP) para 30 execuções independentes. Valores intermediários para κ produzem um desempenho razoável para todas as métricas. Um estudo mais apropriado é necessário para caracterizar formalmente o efeito deste parâmetro.

Métrica		κ ; Deb52										
		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.99
γ	M	0.0006	0.0006	0.0005	0.0006	0.0005	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006
	DP	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	0.0001	0.0001
Δ	M	0.6766	0.6813	0.5244	0.2991	0.2552	0.2432	0.2648	0.2892	0.3147	0.3194	0.3199
	DP	0.0004	0.0021	0.0025	0.0027	0.0034	0.0039	0.0017	0.0019	0.0016	0.0042	0.0066
HV	M	0.2735	0.2779	0.2794	0.2802	0.2806	0.2806	0.2806	0.2806	0.2806	0.2806	0.2806
	DP	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$
A	M	19.00	51.00	74.00	93.00	101.00	101.00	101.00	101.00	101.00	101.00	101.00
	DP	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	0.2537	0.3457	0.4842	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	0.1826	0.1826	0.1826

Métrica		κ ; ZDT1										
		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.99
γ	M	0.0103	0.0069	0.0055	0.0059	0.0074	0.0040	0.0042	0.0051	0.0053	0.0050	0.0038
	DP	0.0072	0.0038	0.0057	0.0047	0.0049	0.0042	0.0060	0.0058	0.0040	0.0050	0.0034
Δ	M	0.3046	0.5543	0.3678	0.2084	0.1818	0.1812	0.1898	0.1937	0.1934	0.1956	0.1891
	DP	0.0122	0.0607	0.0480	0.0408	0.0235	0.0220	0.0234	0.0251	0.0240	0.0232	0.0155
HV	M	0.8435	0.8561	0.8602	0.8607	0.8598	0.8652	0.8650	0.8636	0.8633	0.8638	0.8657
	DP	0.0115	0.0066	0.0094	0.0079	0.0082	0.0069	0.0099	0.0096	0.0066	0.0083	0.0057
A	M	37.00	63.00	84.50	98.00	100.00	101.00	101.00	101.00	101.00	101.00	101.00
	DP	0.6397	5.7211	2.8730	5.0901	3.8201	0.5467	0.8584	0.9371	0.9377	1.3515	0.7112

Métrica		κ ; DTLZ2 (m = 3)										
		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.99
γ	M	0.0062	0.0069	0.0072	0.0070	0.0074	0.0079	0.0074	0.0076	0.0074	0.0078	0.0072
	DP	0.0002	0.0013	0.0015	0.0013	0.0012	0.0014	0.0010	0.0019	0.0007	0.0014	0.0009
Δ	M	0.0503	0.6066	0.3029	0.2411	0.2386	0.2308	0.2274	0.2175	0.2079	0.2173	0.1982
	DP	0.0041	0.0422	0.0357	0.0302	0.0264	0.0219	0.0316	0.0275	0.0306	0.0295	0.0239
HV	M	0.6731	0.7149	0.7383	0.7435	0.7458	0.7469	0.7467	0.7469	0.7470	0.7470	0.7471
	DP	0.0066	0.0042	0.0023	0.0012	0.0007	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0003
A	M	21.00	69.00	88.00	93.00	94.50	95.00	95.00	95.00	95.00	95.00	94.00
	DP	1.3047	3.1639	2.8367	2.0424	1.7750	1.9464	2.2894	2.0197	1.5643	2.2614	1.7100

Métrica		κ ; DTLZ2 (m = 4)										
		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.99
γ	M	0.0001	0.0311	0.0385	0.0312	0.0449	0.0404	0.0445	0.0488	0.0590	0.0489	0.0534
	DP	0.0001	0.0198	0.0218	0.0239	0.0283	0.0240	0.0369	0.0281	0.0284	0.0241	0.0304
Δ	M	0.1390	0.4700	0.3602	0.3296	0.3299	0.3429	0.3377	0.3258	0.3253	0.3304	0.3319
	DP	0.1173	0.0304	0.0307	0.0226	0.0255	0.0263	0.0187	0.0262	0.0210	0.0254	0.0259
A	M	14.00	79.50	90.00	92.00	95.00	96.00	95.50	97.00	98.00	95.50	97.00
	DP	1.9815	4.9642	4.8476	4.2372	4.6307	4.2129	5.8530	5.0496	4.5945	4.6233	4.3423

4.2.5. Planejamento Estatístico dos Experimentos

Para a avaliação dos resultados obtidos são empregados dois testes com os objetivos de a) prover uma indicação sobre a significância estatística de eventuais diferenças entre o desempenho dos algoritmos considerados; e b) estimar o tamanho destas diferenças. Estes testes, definidos nos parágrafos seguintes, são executados de maneira independente para cada problema analítico e para cada uma das medidas de qualidade descritas anteriormente.

Os valores das métricas de qualidade são determinados com base nos conjuntos finais de Pareto obtidos para 50 execuções independentes de cada algoritmo, considerando-se cada um dos problemas testes. A análise estatística é então realizada empregando-se tais valores.

Para as métricas unárias (γ , Δ e HV), a hipótese nula utilizada supõe a igualdade dos valores de mediana, contra a hipótese alternativa bilateral. Por exemplo, as hipóteses para a comparação entre os métodos $\text{one}\epsilon\text{-MOEA}$ e $\epsilon\text{-MOEA}$ usando a métrica γ , e tomando-se por base o problema Deb52, são definidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H_0^{P1;\gamma;(c,\epsilon)} &: \tilde{\mu}_{c,\gamma}^{P1} - \tilde{\mu}_{\epsilon,\gamma}^{P1} = 0 \\ H_1^{P1;\gamma;(c,\epsilon)} &: \tilde{\mu}_{c,\gamma}^{P1} - \tilde{\mu}_{\epsilon,\gamma}^{P1} \neq 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

em que $P1$ indica o número do problema em questão (Tabelas 4.1 e 4.2), e $\tilde{\mu}_{c,\gamma}^{P1}$ e $\tilde{\mu}_{\epsilon,\gamma}^{P1}$ representam os valores medianos da métrica γ obtidos para o problema $P1$, considerando-se os métodos $\text{one}\epsilon\text{-MOEA}$ e $\epsilon\text{-MOEA}$, respectivamente. Hipóteses similares são definidas para todas as métricas unárias e todos os problemas testes.

Para a métrica binária CS , as hipóteses testadas são definidas pela diferença entre as coberturas mútuas dos pares de algoritmos (retoma o exemplo anterior (4.4)):

$$\begin{aligned} H_0^{P1;CS;(c,\epsilon)} &: \tilde{\mu}_{CS(c,\epsilon)}^{P1} - \tilde{\mu}_{CS(\epsilon,c)}^{P1} = 0 \\ H_1^{P1;CS;(c,\epsilon)} &: \tilde{\mu}_{CS(c,\epsilon)}^{P1} - \tilde{\mu}_{CS(\epsilon,c)}^{P1} \neq 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

em que $\tilde{\mu}_{CS(c,\epsilon)}^{P1}$, $\tilde{\mu}_{CS(\epsilon,c)}^{P1}$ representam os valores medianos calculados sobre $CS(X', X'')$ e $CS(X'', X')$, respectivamente, para o problema teste $P1$.

Neste trabalho, estas hipóteses são testadas empregando-se o teste da soma de postos de Wilcoxon (Montgomery & Runger 2003) com um nível de significância predefinido

igual a 99%. As estimações do tamanho do efeito são calculadas por meio do estimador de Hodges-Lehmann (HL), sendo este obtido a partir da mediana das diferenças entre duas amostras independentes (Hodges & Lehmann 1963, Monahan 1984). Este mecanismo representa uma estimação robusta do deslocamento de posição entre duas amostras quaisquer \mathbf{u} e \mathbf{v} de um mesmo indicador de qualidade, em que \mathbf{u} e \mathbf{v} são vetores com cardinalidade $n^{(\mathbf{u})}$ e $n^{(\mathbf{v})}$, respectivamente. O estimador HL é determinado por meio da mediana das $n^{(\mathbf{u})} \times n^{(\mathbf{v})}$ diferenças $(u_i - v_j)$, $i \in \{1, \dots, n^{(\mathbf{u})}\}$, $j \in \{1, \dots, n^{(\mathbf{v})}\}$. Formalmente:

$$HL = \text{mediana} \{ (u_i - v_j) \mid i \in \{1, \dots, n^{(\mathbf{u})}\}; j \in \{1, \dots, n^{(\mathbf{v})}\} \} \quad (4.6)$$

Para o cálculo deste indicador são considerados valores de qualidade normalizados. Para as métricas γ e Δ , os vetores de qualidade obtidos para cada método, e para cada problema específico, são normalizados com relação ao maior valor de qualidade encontrado. No caso da métrica HV os valores de qualidade obtidos para cada algoritmo são normalizados considerando-se o hipervolume da fronteira Pareto-ótima “real” de cada problema. Os dados da métrica CS não são alterados, pois os valores de qualidade retornados por este indicador pertencem ao intervalo $[0, 1]$ por definição.

Note que o estimador de Hodges-Lehmann mensura o deslocamento de posição entre duas amostras de qualidade. Assim sendo, quanto maior o valor absoluto deste efeito, maior é o deslocamento de posição entre os resultados encontrados para uma dada métrica, e mais significativa é a diferença de desempenho entre os métodos comparados. Observe também que, em função da normalização realizada, o valor absoluto da mediana das diferenças é mapeado no intervalo $[0, 1]$, o que permitirá analisar as diferenças entre os algoritmos em termos do ganho percentual, e não por meio de valores absolutos.

O teste de Gore (Gore 1973) é também empregado para a realização de uma análise geral dos dados obtidos com o experimento. Este teste representa uma alternativa robusta e poderosa, em relação ao popular teste de Friedman (Sheskin 2011), para a análise não-paramétrica de variância. O modelo estatístico considerado pelo teste de Gore é similar àquele desenvolvido pela ANOVA unidirecional com blocos. Por exemplo, para a métrica de diversidade Δ , tem-se:

$$y_{ijk}^{\Delta} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ijk} \quad (4.7)$$

em que y_{ijk}^{Δ} representa o valor desta métrica obtido na k -ésima execução do i -ésimo algoritmo para o j -ésimo problema; μ é a média de Δ considerando-se todas as observações;

α_i é a contribuição devida ao i -ésimo algoritmo; β_j é a componente devida ao j -ésimo problema, ou bloco; e ϵ_{ijk} é o residual. Além de ser mais poderoso do que o teste de Friedman, o teste de Gore é utilizado neste trabalho devido a sua facilidade de tratar amostras desbalanceadas, as quais podem ser prontamente identificadas caso o algoritmo não convirja em algumas das execuções para um dado problema.

Para cada métrica de qualidade, o procedimento estabelecido por Gore é aplicado para testar as hipóteses nulas da ausência de diferença entre os três algoritmos avaliados considerando-se todos os problemas. Dessa forma (retoma o exemplo anterior (4.7)):

$$\begin{cases} H_0^\Delta : \alpha_i = 0, \forall i \\ H_1^\Delta : \alpha_i \neq 0 \text{ para qualquer } i \end{cases} \quad (4.8)$$

Para os casos em que as hipóteses nulas são rejeitadas a um nível de significância de 99%, os estimadores de mínimos quadrados dos efeitos de bloco são obtidos (Montgomery 2008) e então subtraídos das amostras, possibilitando assim uma comparação par a par entre os algoritmos, e independente dos problemas. Obteve-se também a estimação por bootstrap da distribuição das médias (Davison & Hinkley 1997) para os algoritmos em cada métrica de qualidade, o que permitiu empregar o teste t para comparação de duas amostras independentes e estimadores paramétricos das diferenças das médias (Montgomery & Runger 2003) para a realização de comparações post-hoc por pares.

Finalmente, tomando-se por base a definição de cone ϵ -dominância, espera-se que o desempenho do método cone ϵ -MOEA seja superior ao obtido pelos algoritmos ϵ -MOEA e NSGA-II, principalmente nos critérios utilizados para mensurar a diversidade das soluções ao longo da fronteira Pareto estimada. Métricas em que considera-se somente a convergência em direção ao conjunto Pareto global (neste trabalho, a métrica γ) devem apresentar diferenças muito pequenas ou não-significativas entre os métodos ϵ -MOEA e cone ϵ -MOEA. Por outro lado, aquelas que mensuram somente a diversidade dos pontos obtidos (e.g., a métrica Δ) devem indicar um efeito de deslocamento de posição mais significativo em favor do algoritmo cone ϵ -MOEA. Métricas híbridas, como “s-metric” (HV) e “coverage of two sets” (CS), devem apresentar resultados com uma tendência, em geral, de indicar melhores valores para o algoritmo baseado no conceito de cone ϵ -dominância. Estas suposições e expectativas são avaliadas ao longo das seções de discussão dos resultados.

4.3. Discussão dos Resultados

Os resultados obtidos a partir dos experimentos computacionais descritos anteriormente são apresentados e discutidos nesta seção. Inicialmente, faz-se uma discussão geral sobre as diferenças de desempenho dos algoritmos comparados, em que considera-se cada uma das métricas empregadas. Esta etapa visa uma apresentação mais direta e concisa dos resultados alcançados. Posteriormente, realiza-se uma análise mais detalhada baseada no comportamento dos algoritmos em cada um dos problemas testados. Para isto, algumas propriedades destes problemas bem como as principais dificuldades que os mesmos impõem aos algoritmos evolucionários multiobjetivo são também discutidas.

4.3.1. Análise Geral

As Tabelas 4.6 e 4.7, e também as Figs. 4.4 e 4.5, resumizam os resultados encontrados para as quatro métricas de avaliação de desempenho considerando-se os valores estimados para ϵ . Nestas tabelas, apresenta-se apenas o estimador de Hodges-Lehmann do tamanho do efeito para os casos onde diferenças significativas foram encontradas. O valor-p, obtido utilizando-se o teste da soma de postos de Wilcoxon, embora tenha sido empregado no processamento dos resultados, não é mostrado. Contudo, o leitor pode conferir estes dados no Apêndice B.

Em primeiro lugar, observa-se claramente que o ganho de desempenho esperado para a métrica de diversidade Δ foi verificado. O algoritmo $\text{cone}\epsilon$ -MOEA apresentou um desempenho significativamente melhor do que o NSGA-II em todos os problemas testados, exceto no DTLZ5, com ganhos percentuais entre 7.4% e 43%. De forma similar, o $\text{cone}\epsilon$ -MOEA também mostrou-se superior ao ϵ -MOEA na maioria dos casos, alcançando ganhos de até 71%: diferenças significativas não foram observadas nos testes DTLZ2, DTLZ3 e DTLZ8; observou-se um efeito positivo pequeno no teste ZDT4 (8%); e pequenos efeitos negativos nos problemas ZDT6 (5%), DTLZ4 (8%) e DTLZ5 (4.5%). O método ϵ -MOEA foi significativamente melhor do que o $\text{cone}\epsilon$ -MOEA somente no problema DTLZ7, com um ganho em torno de 15%. O teste de Gore para esta métrica foi fortemente significativo (valor-p: 4.4×10^{-7}). As diferenças par a par das médias foram significativas para os três pares testados, com o método $\text{cone}\epsilon$ -MOEA apresentando um desempenho médio 16.4% superior ao encontrado pelo ϵ -MOEA, e 22.8% melhor do que o obtido pelo NSGA-II. A Fig. 4.4(a) mostra, para o indicador Δ , a distribuição estimada das médias para os três algoritmos considerados. De maneira geral, o tamanho

dos ganhos positivos observados para o método cone ϵ -MOEA foi razoável, o que está de acordo com o comportamento esperado para a estratégia proposta.

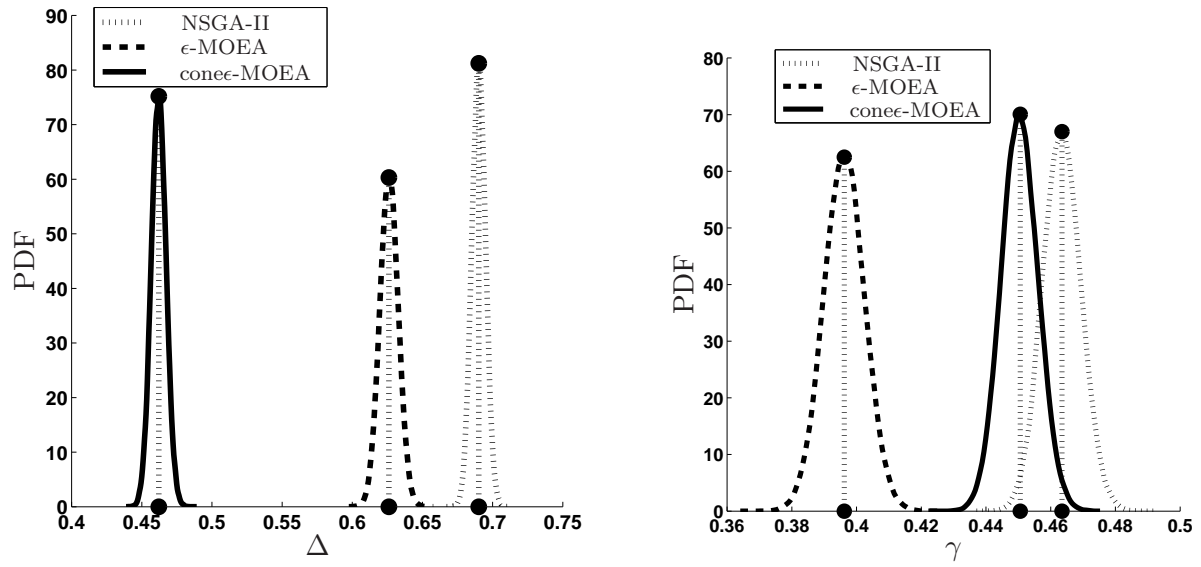
O comportamento esperado foi também observado para a métrica de convergência γ . Nota-se que diferenças significativas entre as comparações de algoritmos não foram observadas para a maioria dos problemas testados, e mesmo aquelas estatisticamente significativas apresentaram efeitos muito pequenos. Ainda assim, o método cone ϵ -MOEA mostrou um desempenho comparativamente interessante nos testes ZDT2, DTLZ2, DTLZ6, DTLZ8 e DTLZ9, alcançando ganhos de até 44%. O teste de Gore indicou um resultado estatístico extremamente significativo, com um valor-p menor do que a precisão numérica do simulador utilizado. Entretanto, as comparações par a par revelam um tamanho pequeno para este efeito significativo, sendo o desempenho médio do algoritmo ϵ -MOEA 5.4% superior ao do cone ϵ -MOEA, e 6.7% superior ao do NSGA-II, e sem diferença significativa entre os dois últimos métodos. Estas observações podem ser visualizadas na Fig. 4.4(b), e são compatíveis com a ideia de que a abordagem cone ϵ -dominância aperfeiçoa principalmente a distribuição das soluções ao longo da fronteira Pareto aproximada, com efeitos positivos pequenos ou não-significativos com relação a habilidade do algoritmo de convergir para a vizinhança da fronteira Pareto global.

Para a métrica de hipervolume (HV), na qual ambas as propriedades de convergência e diversidade são consideradas, vários resultados individuais mostraram-se novamente positivos para o método cone ϵ -MOEA. Entretanto, o tamanho dos efeitos obtidos foi, em grande parte, relativamente pequeno, com o maior valor em torno de 4.2%. Desconsiderando-se os resultados não-significativos, tem-se que o algoritmo cone ϵ -MOEA foi melhor do que o ϵ -MOEA e o NSGA-II em sete problemas. De maneira geral, observa-se diferenças significativas entre o NSGA-II e os demais métodos, sendo o desempenho médio do primeiro inferior aqueles obtidos pelos algoritmos cone ϵ -MOEA (tamanho do efeito: 3.8%) e ϵ -MOEA (tamanho do efeito: 4.0%). Entretanto, não foi encontrada diferença significativa entre os métodos cone ϵ -MOEA e ϵ -MOEA. A distribuição estimada das médias para os três algoritmos adotados é mostrada na Fig. 4.4(c). Note que esta métrica de qualidade não foi utilizada para avaliar os problemas DTLZ8 e DTLZ9. Os motivos são explicados na seção seguinte.

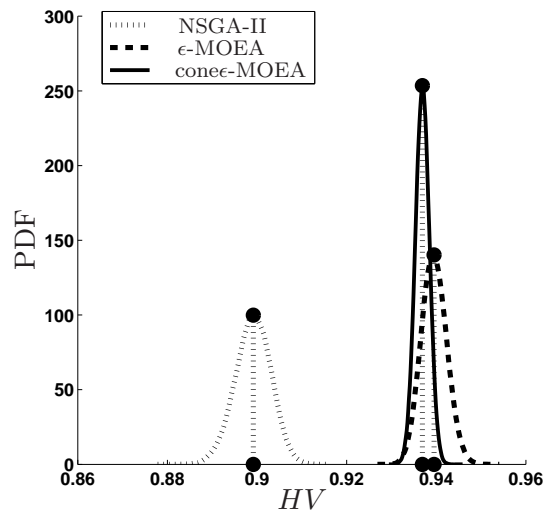
Finalmente, embora o método cone ϵ -MOEA tenha apresentado, segundo o estimador de Hodges-Lehmann, efeitos positivos significativos em alguns problemas, os resultados alcançados para a métrica CS não apresentam qualquer padrão global de superioridade entre os algoritmos testados, e diferenças significativas não foram observadas entre as comparações ($\epsilon \times \mathbf{c}$), valor-p igual a 0.56; ($\mathbf{N} \times \mathbf{c}$), valor-p igual a 0.06; e ($\mathbf{N} \times \epsilon$), valor-p

igual a 0.33. A Fig. 4.5 ilustra a distribuição das médias por bootstrap para cada caso mencionado. Observe que o estimador de Hodges-Lehmann apresentou efeito nulo em uma situação na qual os resultados são estatisticamente diferentes segundo o teste da soma de postos de Wilcoxon. Este caso ocorreu ao comparar os métodos cone- ϵ -MOEA e ϵ -MOEA no problema Deb52. A obtenção deste efeito nulo deve-se a ocorrência de muitos “empates” entre os dados dos vetores de qualidade, e também à forma como o estimador de Hodges-Lehmann é determinado, i.e., por meio da mediana das diferenças entre os dados destes vetores de qualidade.

Em termos gerais, os resultados obtidos para os experimentos realizados indicam que o uso da abordagem cone ϵ -dominância pode melhorar significativamente a distribuição das soluções no domínio de objetivos, enquanto preserva outras características do algoritmo, tais como, o custo computacional associado ao número de soluções avaliadas, ou a habilidade de convergência para a vizinhança da fronteira Pareto global. Além disso, é importante notar que a estratégia cone ϵ -dominância fornece um melhor controle sobre o tamanho do conjunto Pareto aproximado, i.e., o parâmetro ϵ está diretamente relacionado à resolução da fronteira estimada (ver Tabela 4.4), o que também encoraja o uso desta estratégia no lugar da relação ϵ -dominância.



(a) Distribuição das médias para a métrica Δ . (b) Distribuição das médias para a métrica γ .



(c) Distribuição das médias para a métrica HV.

Figura 4.4.: Distribuição das médias por bootstrap para os três algoritmos considerando-se os indicadores de qualidade (a) Δ , (b) γ , e (c) HV.

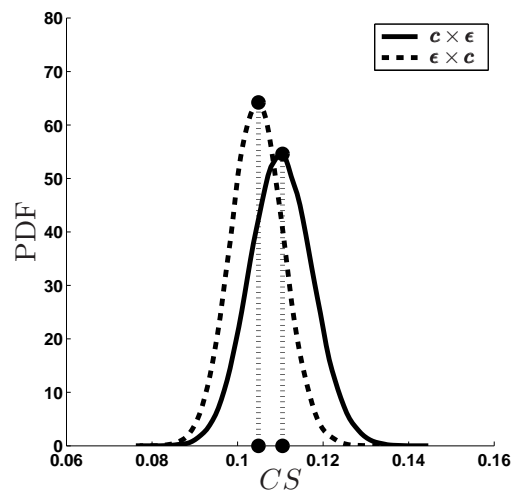
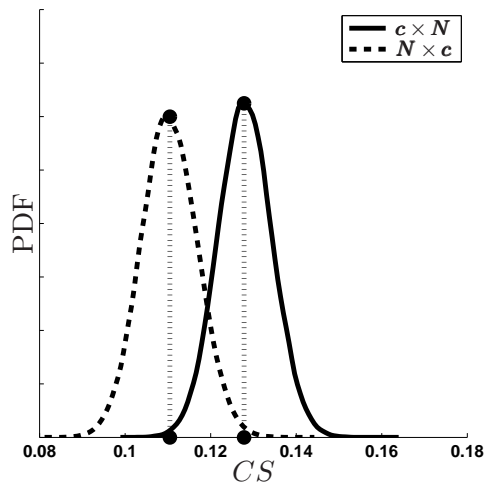
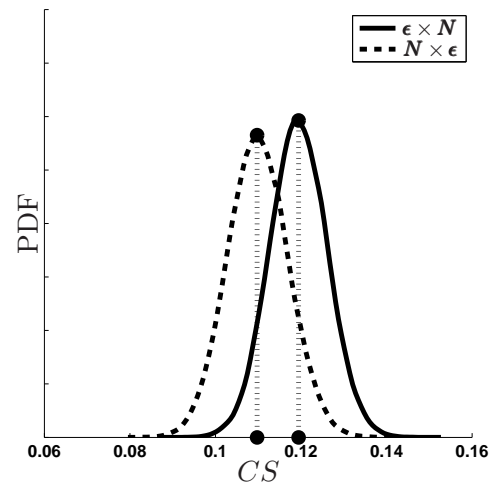
(a) ϵ -MOEA e cone ϵ -MOEA.(b) NSGA-II e cone ϵ -MOEA.(c) NSGA-II e ϵ -MOEA.

Figura 4.5.: Distribuição das médias por bootstrap para a combinação por pares dos algoritmos cone ϵ -MOEA, ϵ -MOEA e NSGA-II, considerando-se a métrica CS.

Tabela 4.6.: Comparação entre $Cone\epsilon$ -MOEA, ϵ -MOEA e NSGA-II para os valores estimados de ϵ (Tabela 4.4). Para cada métrica, o valor-p foi obtido usando o teste da soma de postos de Wilcoxon para a diferença dos valores medianos (Tabela B.1). Para o estimador de Hodges-Lehmann do tamanho do efeito, os algoritmos foram considerados segundo a ordem dada, e somente os efeitos estatisticamente significativos (99%) foram calculados. Em todas as comparações envolvendo o método $cone\epsilon$ -MOEA, efeitos positivos indicam a superioridade deste algoritmo em relação àquele com o qual é comparado. Os valores estimados de Hodges-Lehmann em negrito destacam os casos em que efeitos positivos estatisticamente significativos são observados para o método $cone\epsilon$ -MOEA.

Problemas Bi-Objetivo								
		Deb52	Pol	ZDT1	ZDT2	ZDT3	ZDT4	ZDT6
γ	(ϵ, C)	–	-3.4×10^{-2}	–	4.4×10^{-1}	–	–	5.0×10^{-3}
	(N, C)	–	2.4×10^{-2}	–	1.6×10^{-1}	–	-1.2×10^{-1}	-3.1×10^{-3}
	(N, ϵ)	–	5.9×10^{-2}	-1.3×10^{-1}	-2.8×10^{-1}	–	-1.1×10^{-1}	-8.1×10^{-3}
Δ	(ϵ, C)	6.7×10^{-1}	7.1×10^{-1}	3.3×10^{-1}	1.8×10^{-1}	3.0×10^{-1}	8.0×10^{-2}	-5.0×10^{-2}
	(N, C)	2.0×10^{-1}	2.9×10^{-1}	4.2×10^{-1}	3.5×10^{-1}	1.6×10^{-1}	1.2×10^{-1}	3.0×10^{-1}
	(N, ϵ)	-4.8×10^{-1}	-4.2×10^{-1}	8.4×10^{-2}	1.7×10^{-1}	-1.4×10^{-1}	3.9×10^{-2}	3.5×10^{-1}
HV	(C, ϵ)	-1.7×10^{-3}	4.6×10^{-4}	–	2.9×10^{-3}	–	–	4.1×10^{-3}
	(C, N)	1.5×10^{-3}	-2.4×10^{-4}	–	3.2×10^{-3}	–	–	–
	(ϵ, N)	3.1×10^{-3}	-7.0×10^{-4}	-6.0×10^{-3}	–	–	–	-3.6×10^{-3}
CS	(C, ϵ)	0	-9.8×10^{-3}	–	1.6×10^{-1}	–	–	2.2×10^{-1}
	(C, N)	6.0×10^{-2}	2.1×10^{-2}	–	8.5×10^{-2}	–	–	–
	(ϵ, N)	6.0×10^{-2}	8.5×10^{-2}	-2.9×10^{-1}	-7.0×10^{-2}	–	–	-2.0×10^{-1}

Tabela 4.7.: Comparação entre *Cone* ϵ -MOEA, ϵ -MOEA e *NSGA*-II para os valores estimados de ϵ (Tabela 4.4). Para cada métrica, o valor-p foi obtido usando o teste da soma de postos de Wilcoxon para a diferença dos valores medianos (Tabela B.2). Para o estimador de Hodges-Lehmann do tamanho do efeito, os algoritmos foram considerados segundo a ordem dada, e somente os efeitos estatisticamente significativos (99%) foram calculados. Em todas as comparações envolvendo o método *cone* ϵ -MOEA, efeitos positivos indicam a superioridade deste algoritmo em relação àquele com o qual é comparado. Os valores estimados de Hodges-Lehmann em negrito destacam os casos em que efeitos positivos estatisticamente significativos são observados para o método *cone* ϵ -MOEA.

		Problemas Tri-Objetivo								
		DTLZ1	DTLZ2	DTLZ3	DTLZ4	DTLZ5	DTLZ6	DTLZ7	DTLZ8	DTLZ9
γ	(ϵ, C)	-1.8×10^{-2}	2.8×10^{-1}	-3.4×10^{-2}	-8.7×10^{-2}	-2.5×10^{-1}	1.0×10^{-1}	-2.8×10^{-1}	-2.9×10^{-1}	-4.2×10^{-1}
	(N, C)	7.6×10^{-2}	1.7×10^{-1}	–	-2.1×10^{-1}	-3.7×10^{-1}	–	–	2.8×10^{-1}	3.3×10^{-1}
	(N, ϵ)	9.4×10^{-2}	-1.1×10^{-1}	9.2×10^{-2}	-1.2×10^{-1}	-1.2×10^{-1}	-8.4×10^{-2}	2.8×10^{-1}	5.7×10^{-1}	7.6×10^{-1}
Δ	(ϵ, C)	1.2×10^{-1}	–	–	-8.0×10^{-2}	-4.5×10^{-2}	5.4×10^{-1}	-1.5×10^{-1}	–	1.7×10^{-1}
	(N, C)	4.3×10^{-1}	3.8×10^{-1}	2.9×10^{-1}	3.6×10^{-1}	-7.0×10^{-2}	3.2×10^{-1}	7.4×10^{-2}	1.0×10^{-1}	1.0×10^{-1}
	(N, ϵ)	3.1×10^{-1}	3.9×10^{-1}	2.7×10^{-1}	4.4×10^{-1}	–	-2.1×10^{-1}	2.2×10^{-1}	1.3×10^{-1}	-7.1×10^{-2}
<i>HV</i>	(C, ϵ)	3.2×10^{-2}	1.6×10^{-2}	-2.6×10^{-3}	1.4×10^{-2}	-2.9×10^{-3}	-6.1×10^{-4}	2.4×10^{-2}	×	×
	(C, N)	–	4.2×10^{-2}	3.9×10^{-2}	3.8×10^{-2}	-3.1×10^{-3}	2.2×10^{-3}	1.3×10^{-2}	×	×
	(ϵ, N)	-3.4×10^{-2}	2.6×10^{-2}	4.1×10^{-2}	2.4×10^{-2}	–	2.8×10^{-3}	-1.1×10^{-2}	×	×
<i>CS</i>	(C, ϵ)	–	7.6×10^{-2}	–	3.0×10^{-2}	2.5×10^{-2}	1.0×10^{-2}	-5.7×10^{-2}	-4.6×10^{-2}	-4.0×10^{-1}
	(C, N)	3.0×10^{-2}	5.0×10^{-2}	3.0×10^{-2}	-2.9×10^{-2}	-8.4×10^{-2}	7.5×10^{-2}	-1.8×10^{-2}	2.4×10^{-1}	4.0×10^{-1}
	(ϵ, N)	1.5×10^{-2}	-1.0×10^{-2}	2.5×10^{-2}	-3.9×10^{-2}	-8.0×10^{-2}	6.5×10^{-2}	7.0×10^{-2}	2.5×10^{-1}	6.1×10^{-1}

4.3.2. Análise Baseada nas Propriedades dos Problemas

A discussão apresentada nesta seção baseia-se nas informações contidas nas Tabelas 4.1, 4.2, 4.6 e 4.7.

O problema Deb52 testa a habilidade de um AE multiobjetivo quanto a sua capacidade de encontrar soluções Pareto-ótimas em uma fronteira não-convexa (Deb 1999). Como este problema contínuo possui apenas duas variáveis de decisão, todos os algoritmos apresentaram um desempenho similar em termos de convergência. Por outro lado, uma vez que a fronteira global é representada por uma curva de concavidade acentuada, e a relação ϵ -dominância é sensível à perda de soluções viáveis, a estratégia cone ϵ -dominância encontrou a melhor diversidade de soluções. O problema Pol, embora simples, traz um certo grau de dificuldade pois introduz descontinuidades em uma fronteira Pareto não-convexa (Poloni 1995). Como o espaço de parâmetros é também mapeado por meio de duas variáveis, os tamanhos de efeitos observados para o indicador de convergência foram muito pequenos, entretanto, o método cone ϵ -MOEA encontrou a melhor distribuição de soluções com relação aos demais algoritmos. As Figs. 4.2 e 4.3 ilustram, para uma configuração particular, a convergência e distribuição das soluções encontradas pelas estratégias ϵ - e cone ϵ -dominância.

O problema ZDT1 possui 30 variáveis de decisão e sua fronteira Pareto-ótima é convexa (Zitzler et al. 2000). Considerando-se as métricas γ , HV e CS , não foram observadas diferenças significativas ao comparar o método cone ϵ -MOEA com os outros algoritmos; no entanto, o NSGA-II apresentou um desempenho melhor que o ϵ -MOEA em todos estes indicadores. Devido ao conceito de cone ϵ -dominância, o método cone ϵ -MOEA encontrou a melhor distribuição de soluções, com ganhos relativamente altos. Ainda com relação à métrica de diversidade, o algoritmo ϵ -MOEA encontrou o segundo melhor resultado. O problema ZDT2, também com 30 variáveis de decisão, é muito similar ao ZDT1, porém testa a habilidade de AEs multiobjetivo de aproximar soluções Pareto-ótimas em uma fronteira não-convexa (Zitzler et al. 2000). Neste problema, o método cone ϵ -MOEA foi significativamente superior aos outros algoritmos em todos os indicadores de qualidade, apresentando tamanhos de efeitos elevados para as métricas γ , Δ e CS , e ganhos moderados para o indicador de hipervolume.

Conforme observado para o teste Pol, o problema ZDT3 impõe também um certo grau de dificuldade devido a introdução de descontinuidades no espaço de objetivos, sendo a fronteira Pareto composta de várias partes convexas não-contíguas. Entretanto, o espaço de parâmetros ($n = 30$) não possui descontinuidades (Zitzler et al. 2000). Em

função das características da fronteira deste problema, algumas execuções de todos os AEs utilizados neste trabalho não produziram soluções ao longo de toda a extensão da fronteira Pareto. Especificamente, das 50 execuções independentes de cada algoritmo nesta instância, o número de vezes em que toda a fronteira Pareto foi aproximada, i.e., todas as seções desconexas, foi igual a 44, 36 e 49 para os métodos cone ϵ -MOEA, ϵ -MOEA e NSGA-II, respectivamente. Uma vez que este fato pode comprometer os resultados finais, somente as execuções que produziram uma distribuição de soluções em todas as seções desconexas da fronteira Pareto foram consideradas para a avaliação das métricas de convergência (γ), diversidade (Δ), e hipervolume (HV). Mais uma vez, o método cone ϵ -MOEA apresentou o melhor desempenho em termos de diversidade entre as soluções encontradas, mas diferenças significativas não foram observadas para os demais indicadores de qualidade.

O problema ZDT4, com 10 variáveis de decisão, contém várias fronteiras Pareto locais e, por isto, testa a habilidade de um AE multiobjetivo de tratar multimodalidade e, ao mesmo tempo, investiga sua capacidade de convergir para a fronteira Pareto-ótima global (Zitzler et al. 2000). Neste problema, o método cone ϵ -MOEA estimou a melhor diversidade de soluções, sendo o segundo melhor resultado encontrado pelo ϵ -MOEA. Por outro lado, o NSGA-II obteve a melhor convergência. No problema ZDT6 ($n = 10$), as soluções Pareto-ótimas são distribuídas não-uniformemente ao longo da fronteira Pareto global (Zitzler et al. 2000). Essencialmente, observou-se tamanhos de efeitos muito pequenos para as métricas de convergência e hipervolume, e o algoritmo ϵ -MOEA apresentou a melhor diversidade entre as soluções, seguido de perto pelo cone ϵ -MOEA, o qual foi superior ao NSGA-II. Para o indicador CS , o AE baseado na relação cone ϵ -dominância mostrou um desempenho melhor do que o ϵ -MOEA, mas diferenças significativas não foram observadas considerando-se o NSGA-II.

O problema tri-objetivo DTLZ1 possui sete variáveis de decisão, e as soluções Pareto-ótimas localizam-se no plano que satisfaz a igualdade $\sum_{i=1}^m f_i = 0.5$, tal que $f_i \in [0, 0.5]$ para todo $i = \{1, 2, 3\}$ (Deb, Thiele, Laumanns & Zitzler 2005). Para as métricas γ , HV e CS , o método cone ϵ -MOEA apresentou efeitos positivos pequenos na maioria dos casos, exceto em uma única situação onde o ϵ -MOEA encontrou uma convergência melhor do que o cone ϵ -MOEA, mas com um ganho pequeno em torno de 1.8%. Apesar desta observação, o método cone ϵ -MOEA encontrou conjuntos com a melhor distribuição de soluções. Devido ao conceito de ϵ -dominância, o método ϵ -MOEA foi superior ao NSGA-II em termos da diversidade entre as soluções obtidas. A Fig. 4.6 apresenta uma comparação visual entre as fronteiras estimadas a partir de uma execução típica de

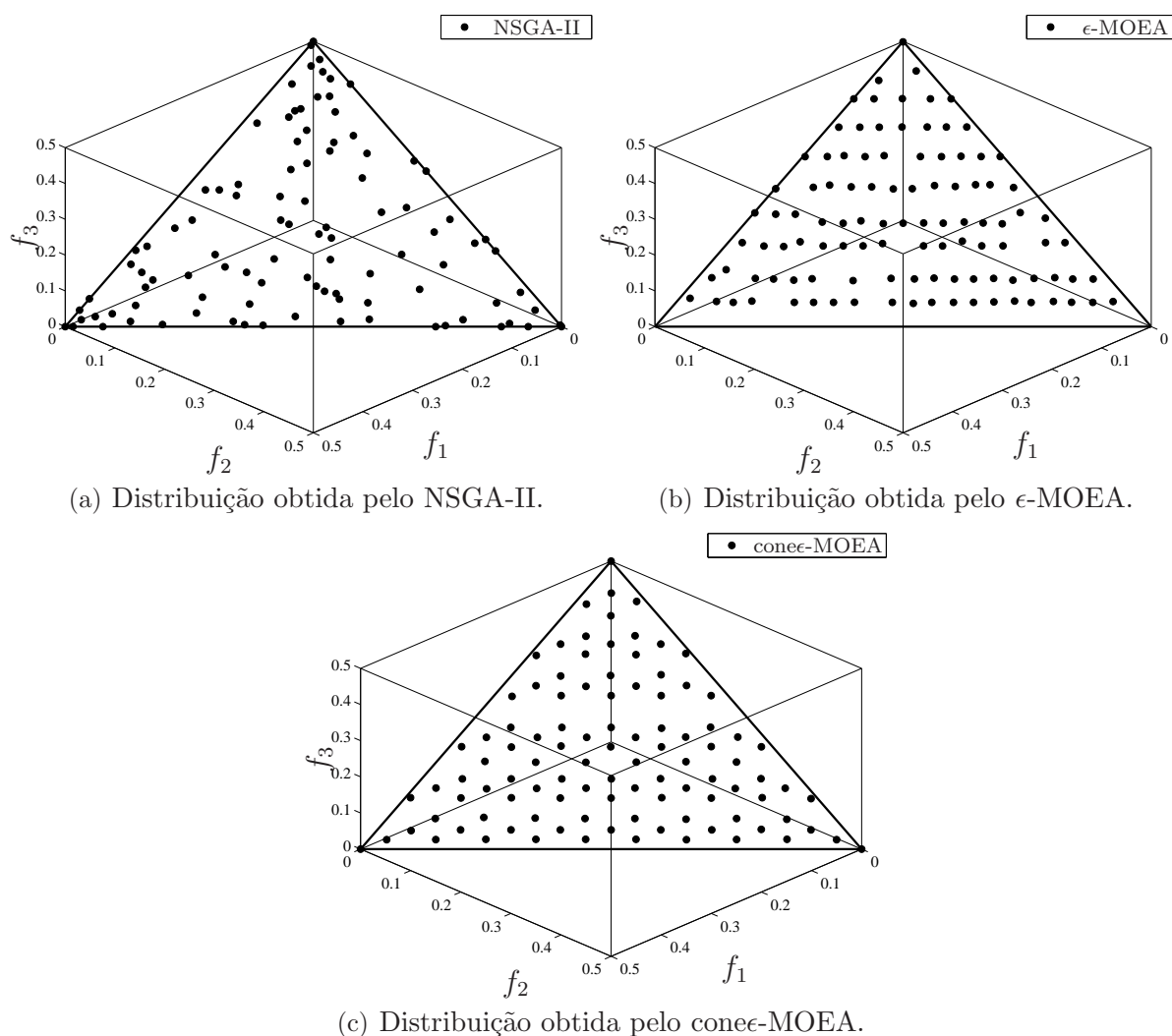


Figura 4.6.: Soluções eficientes geradas para o problema DTLZ1 considerando-se os valores estimados para ϵ (Tabela 4.4). As fronteiras apresentadas foram obtidas a partir de uma execução típica dos algoritmos.

cada um dos algoritmos considerados neste estudo. Note que a distribuição de soluções aproximada pelo NSGA-II é a mais pobre comparada aos demais métodos.

O problema teste DTLZ2 possui doze parâmetros de controle, e as soluções Pareto-ótimas localizam-se na calota esférica que satisfaz a igualdade $\sum_{i=1}^m f_i^2 = 1$, tal que $f_i \in [0, 1]$ para todo $i = \{1, 2, 3\}$ (Deb, Thiele, Laumanns & Zitzler 2005). Considerando-se os indicadores de qualidade HV e CS , o uso da estratégia cone ϵ -dominância possibilitou a observação de vantagens estatisticamente significativas, embora pequenas, com relação aos outros mecanismos. Além disso, o método cone ϵ -MOEA aproximou soluções com a melhor convergência e diversidade, com ganhos comparativamente elevados. Embora

não tenha sido observado diferenças significativas entre os algoritmos cone ϵ -MOEA e ϵ -MOEA para a métrica de diversidade, tem-se pela Fig. 4.7 que as regiões da borda da fronteira Pareto foram melhor mapeadas pelo cone ϵ -MOEA. Note que, mesmo que estas fronteiras caracterizem uma única execução dos métodos, ambas as técnicas ϵ - e cone ϵ -dominância sempre produzem estes mesmos padrões de espalhamento de pontos. No caso do algoritmo ϵ -MOEA, parece existir uma “lacuna” entre as soluções da borda da fronteira e os pontos vizinhos mais próximos. Isto ocorre devido ao fato de existir uma inclinação suave próxima às soluções localizadas na borda da superfície esférica, e

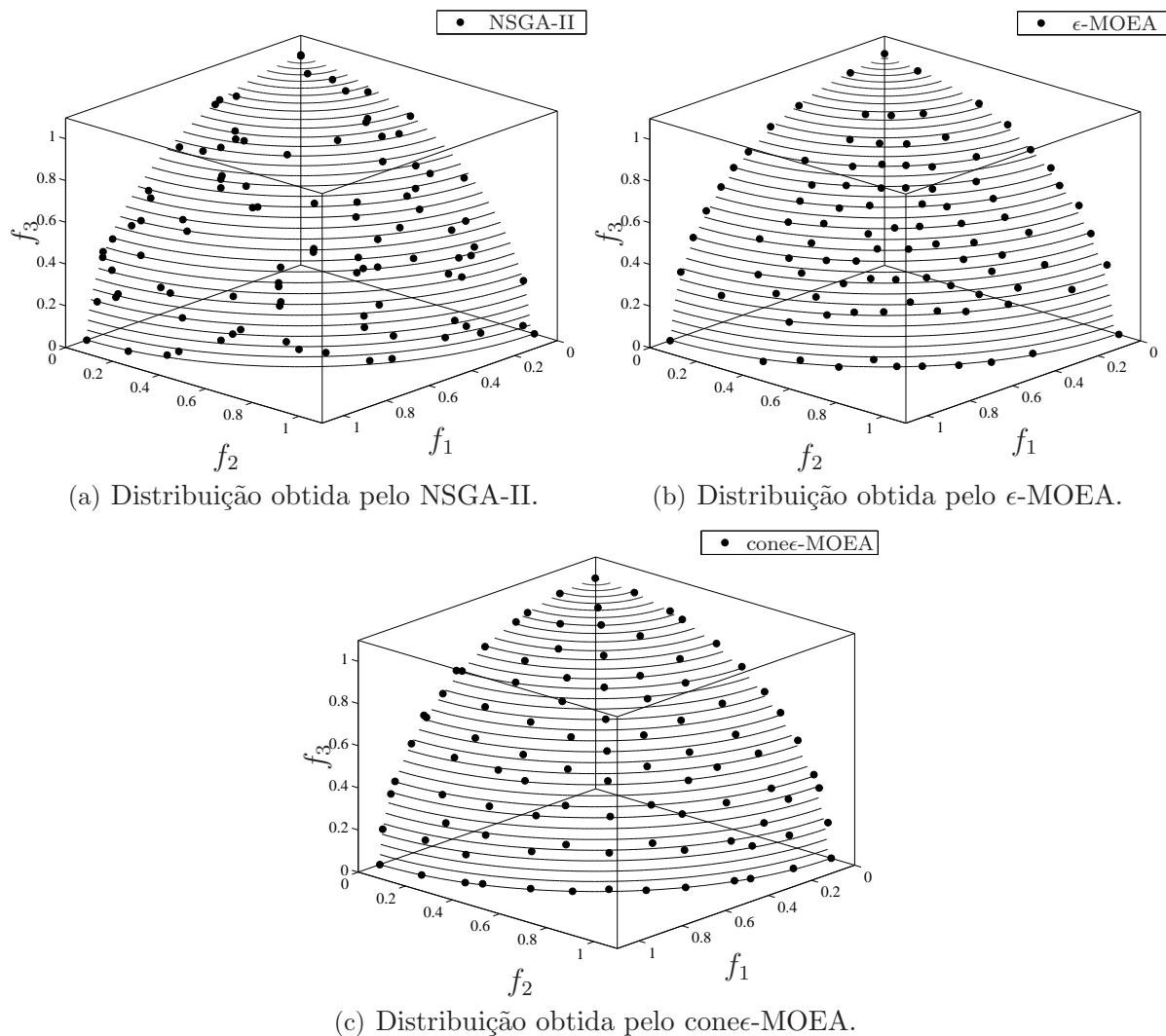


Figura 4.7.: Soluções eficientes geradas para o problema DTLZ2 considerando-se os valores estimados para ϵ (Tabela 4.4). As fronteiras apresentadas foram obtidas a partir de uma execução típica dos algoritmos.

a relação ϵ -dominância não permite dois ou mais pontos não-dominados a uma distância ϵ_i no i -ésimo objetivo (Deb et al. 2003, Deb, Mohan & Mishra 2005).

O teste DTLZ3, com 12 variáveis de decisão, possui um número elevado de fronteiras Pareto locais e investiga a habilidade de um AE multiobjetivo de convergir para a fronteira Pareto-ótima global. De maneira similar ao problema anterior, a fronteira global satisfaz a expressão $\sum_{i=1}^m f_i^2 = 1$, tal que $f_i \in [0, 1]$ para todo $i = \{1, 2, 3\}$ (Deb, Thiele, Laumanns & Zitzler 2005). Neste problema, o número de sucessos, em 50 execuções, em que toda a fronteira Pareto foi aproximada pelos métodos foi igual a 47, 46 e 50 para o cone ϵ -MOEA, ϵ -MOEA e NSGA-II, respectivamente. Dessa forma, somente as execuções que produziram uma distribuição de soluções ao longo de toda a extensão da fronteira Pareto foram consideradas para a avaliação das métricas de convergência (γ), diversidade (Δ), e hipervolume (HV). Embora diferenças significativas não tenham sido observadas entre os algoritmos cone ϵ -MOEA e ϵ -MOEA para a métrica de diversidade, estes dois métodos foram superiores ao NSGA-II neste indicador. Considerando-se os outros indicadores, observou-se efeitos pequenos para todas as comparações entre os algoritmos. A Fig. 4.8 apresenta uma comparação visual entre as fronteiras aproximadas. Conforme discutido para o teste DTLZ2, note que as regiões da borda da fronteira Pareto foram novamente melhor mapeadas pelo cone ϵ -MOEA.

O problema DTLZ4 possui 12 variáveis de decisão e introduz uma densidade não-uniforme de soluções em uma fronteira Pareto tri-dimensional. Dessa forma, este teste investiga a habilidade de um AE multiobjetivo de manter uma boa distribuição de soluções nesta fronteira. A imagem do Pareto global no espaço de objetivos é representada pela superfície que satisfaz $\sum_{i=1}^m f_i^2 = 1$, em que $f_i \in [0, 1]$ para todo $i = \{1, 2, 3\}$ (Deb, Thiele, Laumanns & Zitzler 2005). Como neste problema tem-se uma grande densidade de pontos próxima aos planos f_1-f_2 e f_1-f_3 , algumas execuções de todos os algoritmos encontraram soluções somente nestas regiões. Assim sendo, o número de sucessos, em 50 execuções, em que toda a fronteira Pareto foi aproximada pelos métodos foi igual a 40, 42 e 47 para o cone ϵ -MOEA, ϵ -MOEA e NSGA-II, respectivamente. Novamente, apenas as execuções que produziram uma distribuição de soluções ao longo de toda a extensão da fronteira Pareto foram consideradas para a avaliação das métricas de convergência (γ), diversidade (Δ), e hipervolume (HV). Neste teste, o NSGA-II foi o melhor em termos de convergência das soluções, seguido pelo ϵ -MOEA, o qual apresentou uma pequena vantagem em relação ao método cone ϵ -MOEA. Por outro lado, considerando-se a distribuição das soluções, ambos os algoritmos baseados na técnica ϵ -dominância foram superiores ao NSGA-II. Embora exista um pequeno efeito positivo em favor do método ϵ -MOEA em

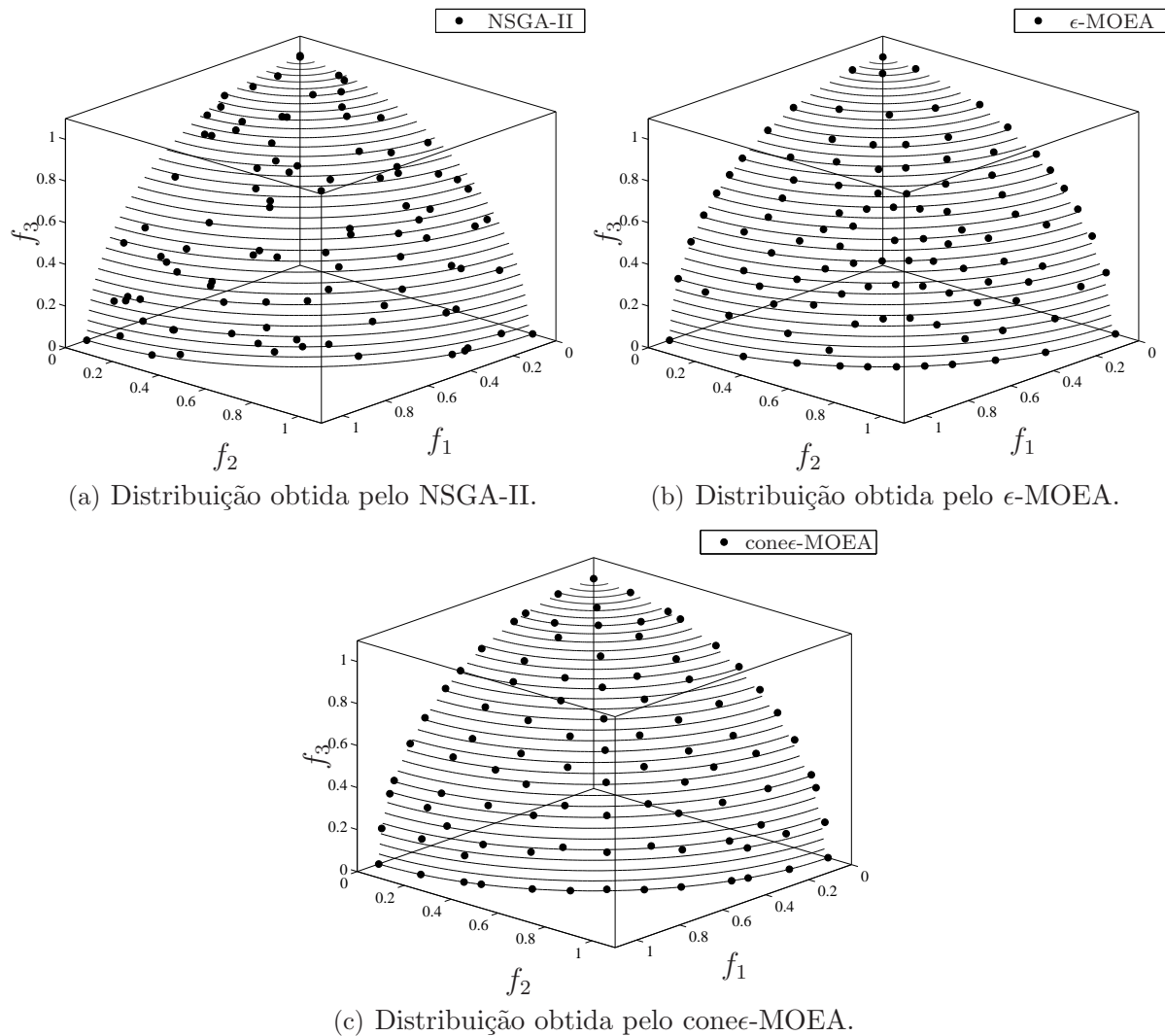


Figura 4.8.: Soluções eficientes geradas para o problema DTLZ3 considerando-se os valores estimados para ϵ (Tabela 4.4). As fronteiras apresentadas foram obtidas a partir de uma execução típica dos algoritmos.

comparação ao cone ϵ -MOEA, observa-se pela Fig. 4.9 que as regiões da borda da fronteira Pareto foram melhor mapeadas pelo cone ϵ -MOEA. Note também que, mesmo que estas fronteiras caracterizem uma única execução dos algoritmos, ambas as técnicas ϵ - e cone ϵ -dominância sempre produzem estes mesmos padrões de espalhamento de pontos. Para os indicadores de qualidade HV e CS , apenas diferenças muito pequenas foram observadas entre os pares de métodos testados.

O problema tri-objetivo DTLZ5 ($n = 12$) possui uma fronteira Pareto-ótima que também satisfaz a igualdade $\sum_{i=1}^m f_i^2 = 1$, em que $f_i \in [0, 1]$ para todo $i = \{1, 2, 3\}$. Este teste investiga a habilidade de um AE multiobjetivo de aproximar uma curva Pareto

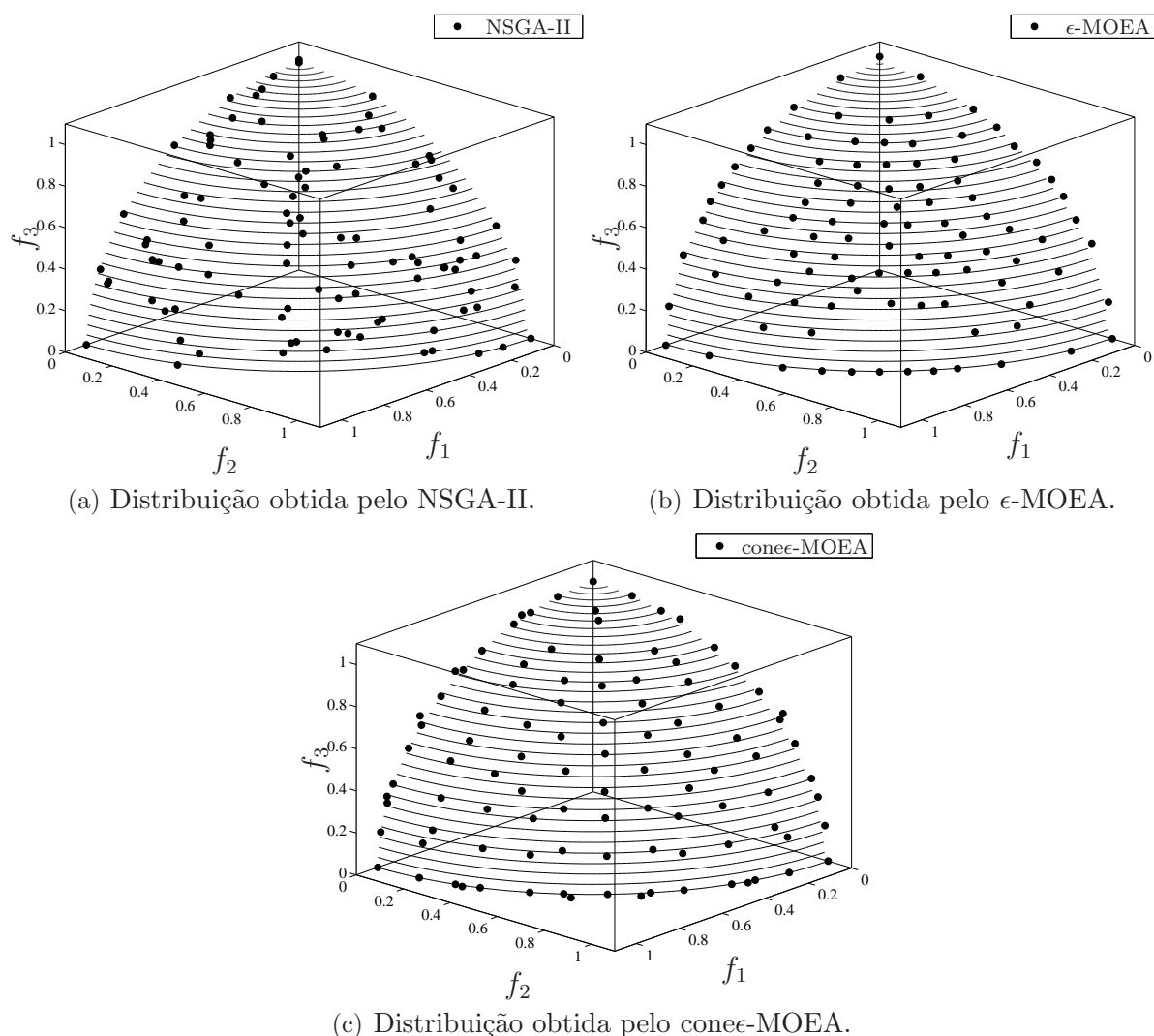


Figura 4.9.: Soluções eficientes geradas para o problema DTLZ4 considerando-se os valores estimados para ϵ (Tabela 4.4). As fronteiras apresentadas foram obtidas a partir de uma execução típica dos algoritmos.

bi-dimensional definida no espaço de objetivos tri-dimensional (Deb, Thiele, Laumanns & Zitzler 2005). Neste problema, o método ϵ -MOEA encontrou soluções com a melhor convergência, seguido de perto pelo NSGA-II. No entanto, estes algoritmos foram muito similares com relação ao indicador de diversidade, apresentando um pequeno ganho sobre o cone ϵ -MOEA. O problema DTLZ6 apresenta as mesmas características do teste DTLZ5, porém aquele é obtido elaborando-se uma versão mais difícil deste (Deb, Thiele, Laumanns & Zitzler 2005). Neste teste, o método cone ϵ -MOEA mostrou o melhor desempenho tanto para a convergência quanto para a distribuição das soluções estimadas.

Em ambas as instâncias, DTLZ5 e DTLZ6, as métricas HV e CS indicaram diferenças muito pequenas entre o cone ϵ -MOEA e os outros algoritmos testados.

O problema DTLZ7 é definido por 22 parâmetros de controle e possui um conjunto desconexo de áreas Pareto-ótimas no espaço de busca. Dessa forma, este problema testa a habilidade do algoritmo de manter subpopulações nas diferentes regiões da fronteira Pareto (Deb, Thiele, Laumanns & Zitzler 2005). Para a configuração utilizada, o método ϵ -MOEA foi superior aos outros algoritmos em ambos os indicadores de convergência e diversidade, enquanto um efeito não significativo e pequeno foi observado entre o cone ϵ -MOEA e o NSGA-II, para as métricas γ e Δ , respectivamente. Novamente, as métricas HV e CS caracterizaram diferenças muito pequenas entre os algoritmos, mas com efeitos positivos em favor do cone ϵ -MOEA no indicador de hipervolume. A Fig. 4.10 mostra as fronteiras obtidas a partir de uma execução típica de cada um dos métodos. Uma vez que a influência na ordenação de pontos, exercida pelo cone de dominância, ficou limitada a uma vizinhança local no espaço de objetivos quando usando $\kappa = 0.5$, o algoritmo cone ϵ -MOEA não foi capaz de estimar uma aproximação bem distribuída da fronteira Pareto global (veja a Fig. 4.10(c)). Devido a isto, tanto o cone ϵ -MOEA quanto o NSGA-II obtiveram uma diversidade de soluções muito similar neste teste. Note, entretanto, que o desempenho da técnica cone ϵ -dominância poderia ser aperfeiçoado considerando-se um valor menor para κ . A Fig. 4.10(d) ilustra um caso particular onde adota-se $\kappa = 0.02$. Como está claro, uma qualidade mais desejável para a convergência e diversidade das soluções foi encontrada.

No problema tri-objetivo DTLZ8 ($n = 30$), a fronteira Pareto-ótima é definida pela combinação entre uma linha contínua e um hiperplano. Este problema envolve $p = 3$ restrições de desigualdade: a linha contínua é obtida pela interseção das primeiras $p - 1$ restrições, enquanto o hiperplano é representado pela última. Comumente, AEs multiobjetivo encontram dificuldades para estimar soluções em ambas as regiões do Pareto e também para manter uma boa distribuição de pontos no hiperplano (Deb, Thiele, Laumanns & Zitzler 2005). Neste estudo, as restrições foram tratadas empregando-se um método simples de penalidade ($f_i + 1000 \sum_{j=1}^p \max(0, g_j)$) para todos os algoritmos. Conforme discutido em outros trabalhos (Deb et al. 2003, Deb, Mohan & Mishra 2005, Deb, Thiele, Laumanns & Zitzler 2005), AEs multiobjetivo baseados em relações de dominância sofrem, neste problema particular, do que se conhece como “problema de redundância”. Em termos gerais, mesmo que muitas soluções sejam estimadas na fronteira Pareto global, existirão muitas outras fracamente não-dominadas na população final de arquivo. Na Fig. 4.11(a), estas “soluções redundantes” são aquelas localizadas nas superfícies

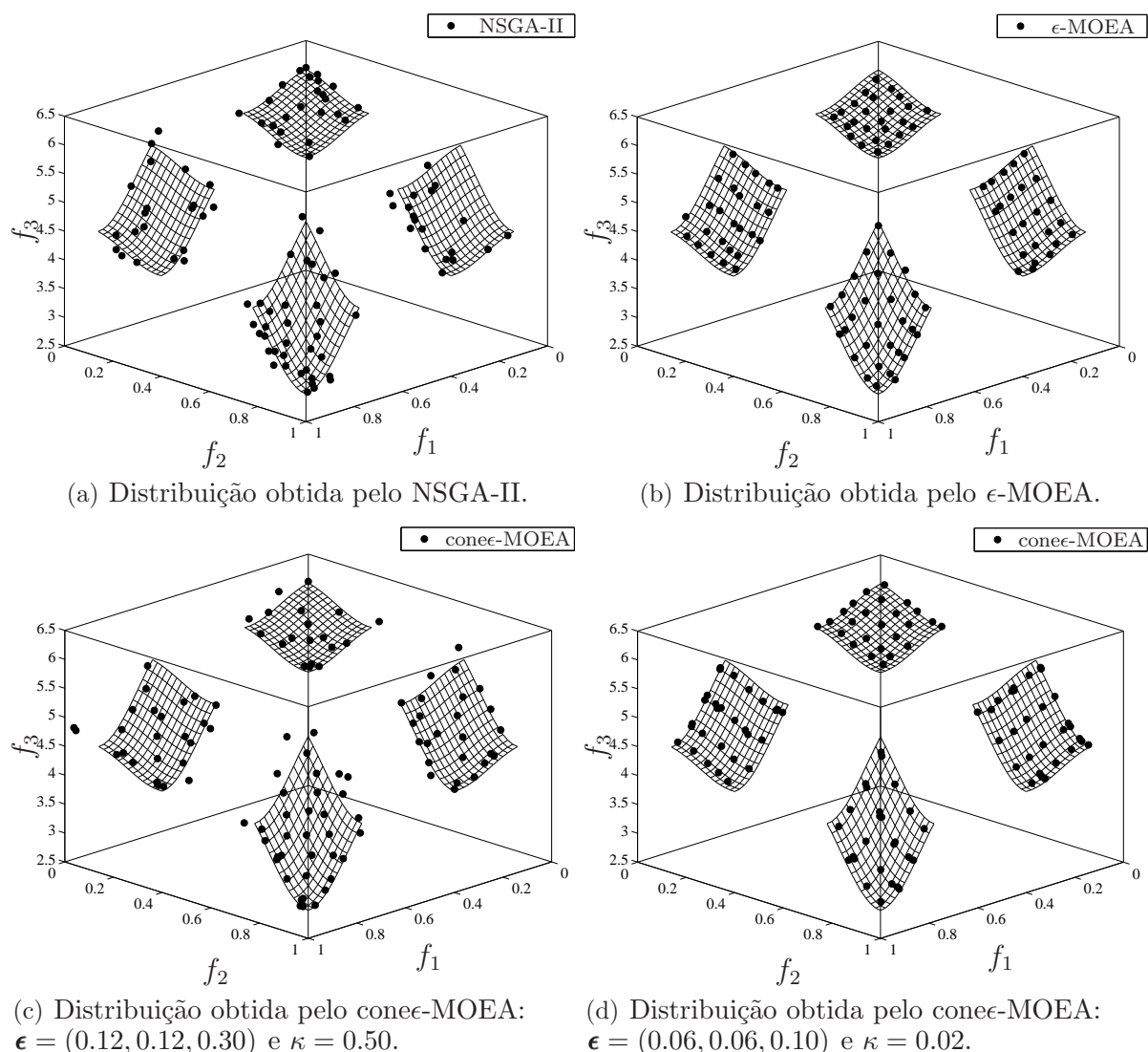


Figura 4.10.: Soluções eficientes geradas para o problema DTLZ7 considerando-se os valores estimados para ϵ (Tabela 4.4). As fronteiras apresentadas foram obtidas a partir de uma execução típica dos algoritmos.

adjacentes da fronteira Pareto-ótima, e sua presença no conjunto final de pontos não-dominados é muito difícil de ser eliminada em AEs multiobjetivo cujos parâmetros de otimização possuem codificação real (Ikeda et al. 2001). Devido a esta característica, o conjunto de soluções obtido poderá mapear equivocadamente uma superfície de alta dimensão para a fronteira Pareto, embora a fronteira Pareto global tenha uma dimensão menor. Como uma consequência direta deste fato, tem-se que a métrica HV não foi considerada neste problema, pois a presença de soluções redundantes afetaria o indicador de hipervolume. De acordo com a Fig. 4.11(b), muitas destas soluções redundantes foram ϵ -dominadas pelas soluções Pareto-ótimas aproximadas. No caso da estratégia

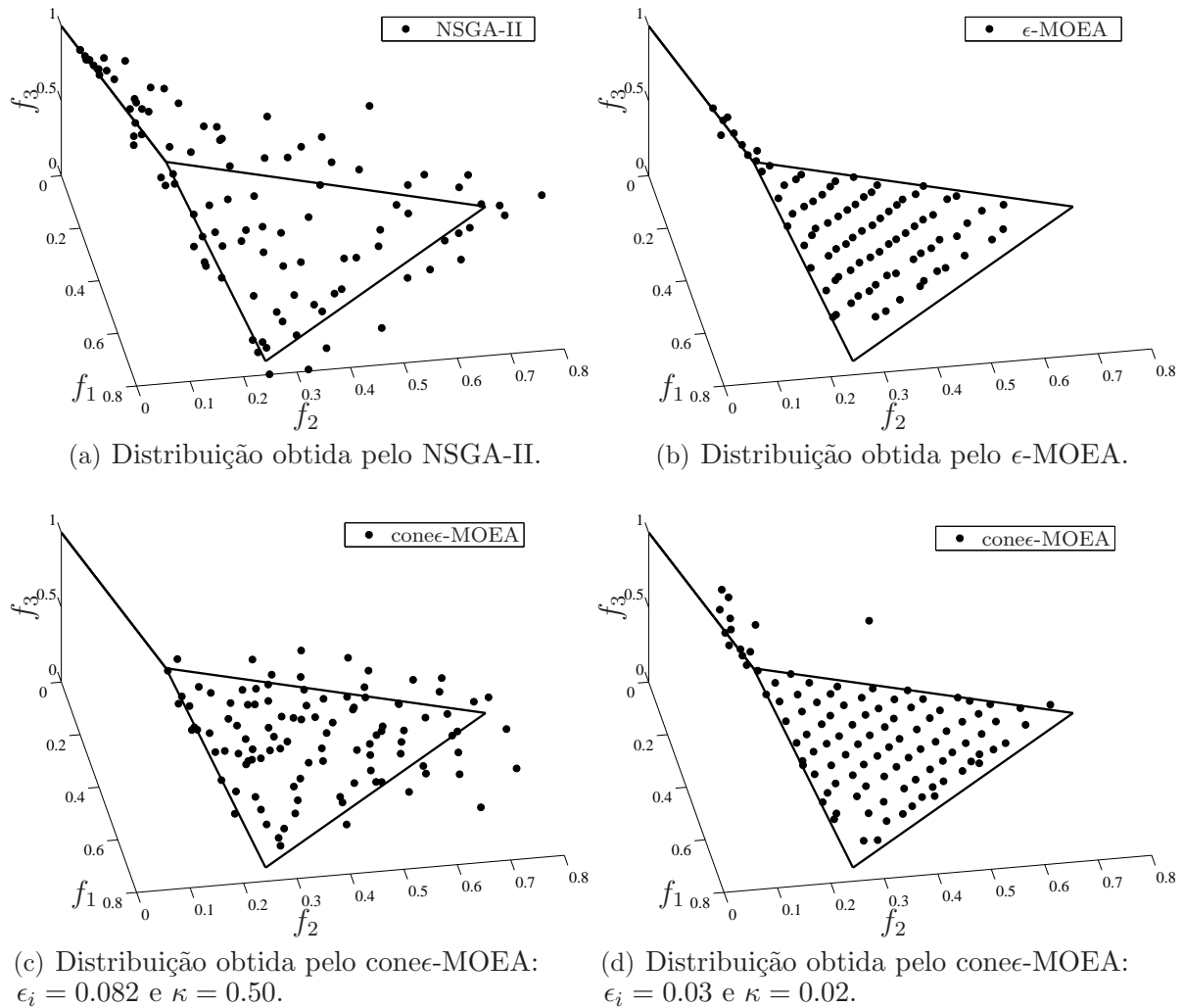


Figura 4.11.: Soluções eficientes geradas para o problema DTLZ8 considerando-se os valores estimados para ϵ (Tabela 4.4). As fronteiras apresentadas foram obtidas a partir de uma execução típica dos algoritmos.

cone ϵ -dominância, como o cone de dominância exerceu um efeito local no espaço de objetivos quando usando $\kappa = 0.5$, apenas um número reduzido de soluções redundantes foi removido do arquivo (veja a Fig. 4.11(c)). É importante notar, entretanto, que o cone de dominância pode exercer um efeito mais global adotando-se um pequeno valor para κ . A Fig. 4.11(d) mostra uma situação particular onde $\kappa = 0.02$, em que o método cone ϵ -MOEA foi capaz de eliminar muitas das soluções redundantes. Apesar desta observação, todos os resultados foram obtidos considerando-se $\kappa = 0.50$. Pela Tabela 4.7, tem-se que embora não tenha sido encontrado uma diferença significativa entre os métodos ϵ - e cone ϵ -MOEA com relação à distribuição das soluções, os mesmos apresentaram um desempenho superior ao NSGA-II em todos os indicadores de qualidade. Além disso,

o ϵ -MOEA obteve os melhores resultados segundo as métricas γ e CS , seguido de perto pelo algoritmo cone ϵ -MOEA.

O problema DTLZ9 possui 30 variáveis de decisão e também foi criado usando a mesma abordagem restritiva empregada pelo teste DTLZ8. A fronteira Pareto-ótima é uma curva localizada em um espaço de objetivos tri-dimensional, e a densidade de soluções aumenta à medida que as mesmas aproximam-se da região Pareto-ótima. Esta curva é definida pela interseção de todas as restrições de desigualdade. Como no problema anterior, o teste DTLZ9 investiga a habilidade de um AE multiobjetivo de tratar soluções redundantes (Deb, Thiele, Laumanns & Zitzler 2005). Novamente, as restrições foram tratadas empregando-se um método de penalidade ($f_i + 1000 \sum_{j=1}^p \max(0, g_j)$) para todos os algoritmos. A Fig. 4.12 permite uma fácil visualização bi-dimensional, no plano f_1 - f_3 , das soluções que aproximam a curva Pareto-ótima. Pela Tabela 4.7, tem-se que o método cone ϵ -MOEA foi superior aos outros algoritmos em termos da diversidade entre as soluções. Entretanto, encontrou o segundo melhor valor para as métricas de convergência (γ) e cobertura (CS). Nestes indicadores de qualidade, diferenças significativas foram observadas em favor do método ϵ -MOEA. Mais uma vez, a métrica HV não foi considerada neste problema, pois a presença de soluções redundantes pode afetar o indicador de hipervolume. É importante notar que o algoritmo cone ϵ -MOEA mostrou dificuldades para tratar soluções redundantes (veja a Fig. 4.12(c)), o que pode ter afetado negativamente os resultados obtidos. Neste caso, o desempenho da estratégia cone ϵ -dominância poderia ser aperfeiçoado empregando-se um menor valor para κ . Por exemplo, a Fig. 4.12(d) mostra uma situação particular onde $\kappa = 0.01$, em que o método cone ϵ -MOEA foi capaz de remover boa parte das soluções redundantes.

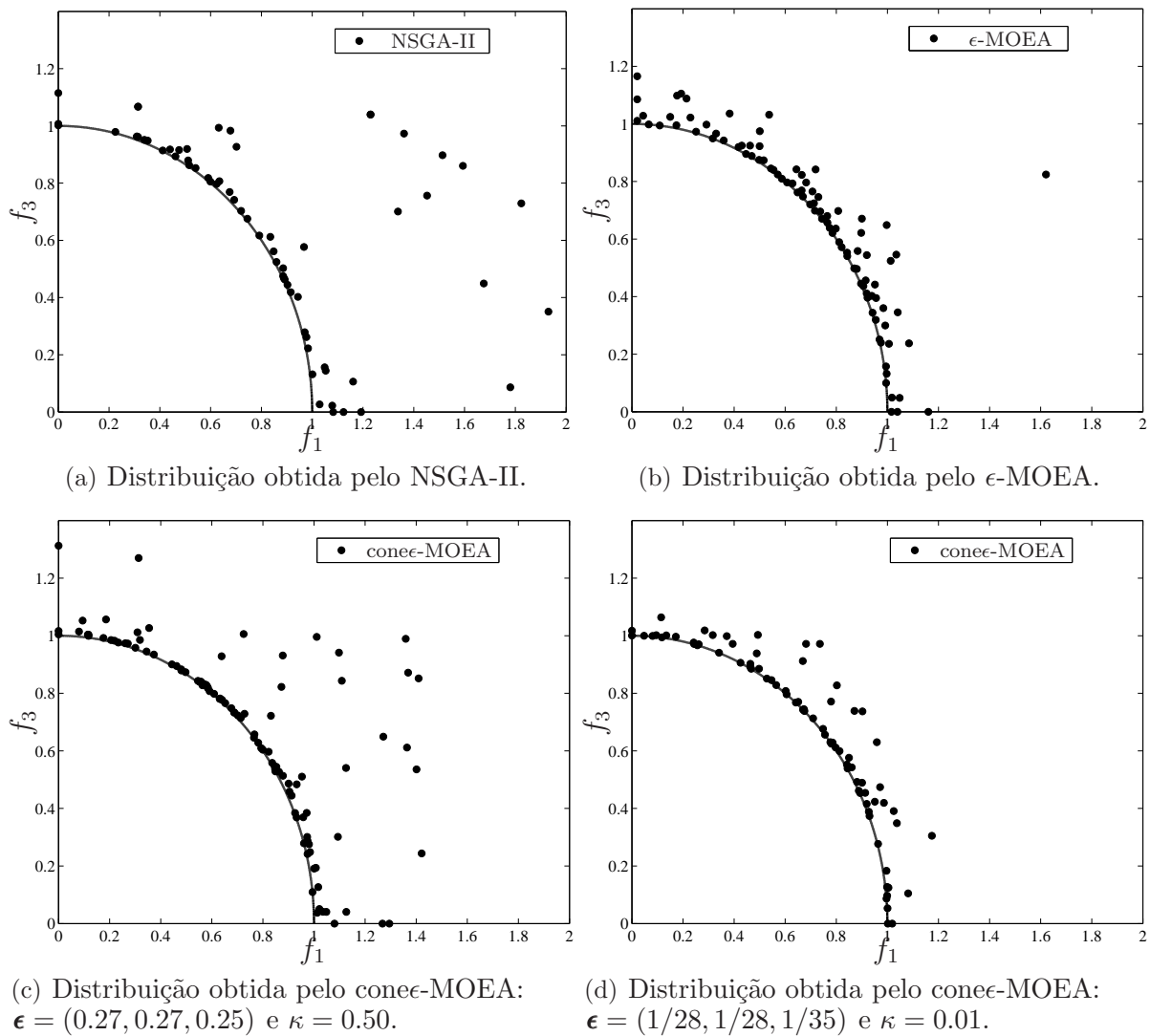


Figura 4.12.: Soluções eficientes geradas para o problema DTLZ9 considerando-se os valores estimados para ϵ (Tabela 4.4). As fronteiras apresentadas foram obtidas a partir de uma execução típica dos algoritmos.

4.4. Outras Considerações sobre a Técnica Proposta

Antes de concluir este capítulo, acredita-se que seja pertinente dissertar sobre outras aplicabilidades da relação cone ϵ -dominância. Assim sendo, nas subseções seguintes (i) discute-se sobre a influência do parâmetro ϵ na velocidade de evolução de AEs multi-objetivo baseados na estratégia ϵ -aproximada; (ii) propõe-se um mecanismo eficiente, baseado na técnica cone ϵ -dominância, para tratar problemas bi- e tri-objetivo; e (iii) apresenta-se resultados com relação a otimização de problemas com múltiplos objetivos.

4.4.1. Convergência e Diversidade em Função da Variação de ϵ

No capítulo 2 supõe-se que seja possível alterar a velocidade de convergência de AEs multiobjetivo baseados na técnica ϵ -aproximada. De maneira geral, uma vez que cada hipercubo pode conter apenas uma única solução não-dominada, a escolha de valores elevados para ϵ permitiria aumentar a velocidade de convergência do algoritmo, ao custo da aproximação de uma fronteira Pareto com baixa qualidade. Por outro lado, caso fosse desejado uma estimativa da fronteira com melhor resolução (qualidade), um valor reduzido de ϵ deveria ser adotado. Além disso, supõe-se que a técnica ϵ -aproximada permite uma distribuição mais rápida das soluções encontradas. O objetivo desta subseção é verificar estas suposições.

Uma vez que deseja-se mensurar apenas o efeito que o parâmetro ϵ exerce sobre a convergência e a distribuição das soluções ao longo do processo evolutivo, a estratégia cone ϵ -dominância é utilizada considerando-se $\kappa = 0$, i.e., atua conforme a relação ϵ -dominância. A Fig. 4.13 mostra a evolução do valor mediano do indicador de qualidade γ (4.1) para 30 execuções do problema ZDT1. Os tamanhos médios das populações finais de arquivos para os valores escolhidos para ϵ são: $|\mathcal{A}| = 97$ ($\epsilon_i = 0.008$), $|\mathcal{A}| = 39$ ($\epsilon_i = 0.02$), e $|\mathcal{A}| = 26$ ($\epsilon_i = 0.03$). Exceto pelos valores de κ e de ϵ , os parâmetros do algoritmo de otimização para este problema são os mesmos adotados na seção anterior.

Este teste, embora limitado, sugere que o valor escolhido para ϵ não interfere significativamente na velocidade de convergência do algoritmo em termos do número de soluções avaliadas. Entretanto, vale destacar que o tempo médio de cada execução do algoritmo foi igual a $0.89s$ para $\epsilon_i = 0.008$, $0.63s$ para $\epsilon_i = 0.02$, e $0.57s$ para $\epsilon_i = 0.03$. Dessa forma, empregando-se valores mais elevados para ϵ , o algoritmo poderá convergir em um tempo mais curto do que quando utiliza-se pequenos valores para este parâme-

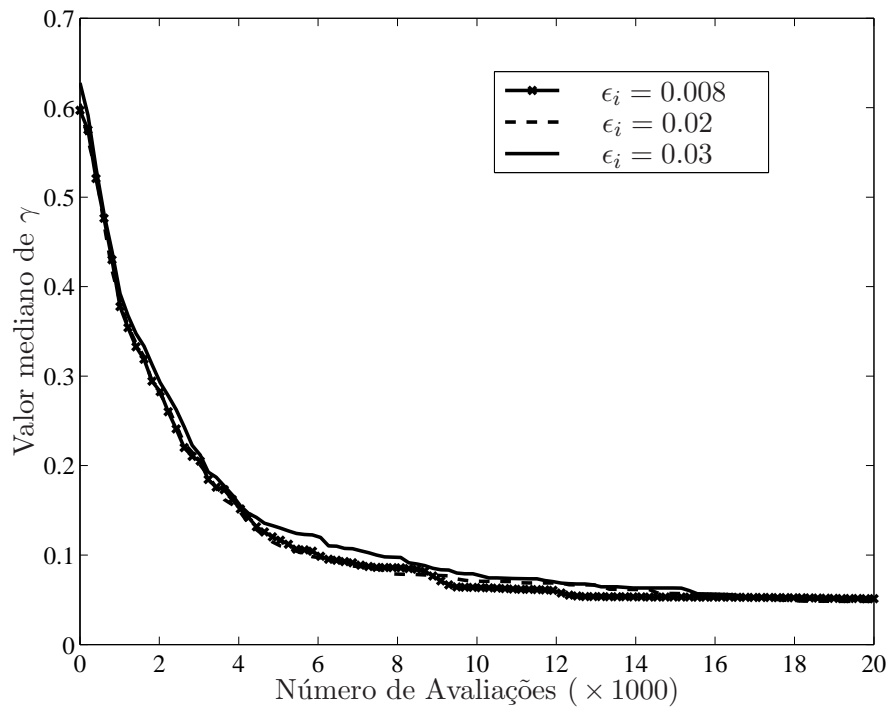


Figura 4.13.: Velocidade de convergência em função da variação do parâmetro ϵ . Os valores medianos de γ foram obtidos considerando-se 30 execuções independentes do problema ZDT1. Este teste limitado sugere que o valor escolhido para ϵ não interfere significativamente na velocidade de convergência das soluções aproximadas para a fronteira Pareto global.

tro. Note que, em problemas analíticos, o custo temporal de uma execução é definido, principalmente, em função da relação de dominância e, ou, mecanismo de diversidade adotados. Uma vez que valores elevados de ϵ causam a estimação de um arquivo com um baixo número de soluções não-dominadas, a atualização da população de memória é realizada em um tempo relativamente baixo, o que explica o menor tempo médio de execução encontrado quando $\epsilon_i = 0.03$. Entretanto, em problemas práticos de engenharia, onde o processo de avaliação das soluções frequentemente define o tempo de execução do algoritmo, a escolha de valores elevados para ϵ certamente não seria suficiente para acelerar o processo de convergência.

Para verificar a segunda suposição, utiliza-se uma versão modificada da métrica de diversidade, i.e.:

$$\Delta' = \frac{\sum_{i=1}^{|\mathcal{A}|} |d_i - \bar{d}|}{|\mathcal{A}| \bar{d}} \quad (4.9)$$

em que d_i é a distância Euclidiana de cada ponto estimado contido em \mathcal{A} para o seu vizinho mais próximo, e \bar{d} representa o valor médio de d_i . Note que o indicador Δ' mensura basicamente a uniformidade da distribuição das soluções aproximadas, e não a cobertura da fronteira Pareto-ótima. Apesar disto, vale destacar que a fronteira global foi completamente estimada em todas as execuções do algoritmo.

A Fig. 4.14 mostra a evolução do indicador Δ' considerando-se os mesmos valores de ϵ empregados anteriormente. Os resultados encontrados pelo NSGA-II também são apresentados. De forma geral, este teste sugere que métodos baseados na técnica ϵ -aproximada possibilitam uma distribuição mais rápida das soluções, sendo esta diversidade mantida (melhorada) durante o processo evolutivo. Além disso, este efeito intensifica-se à medida que o valor de ϵ é aumentado. Observe, entretanto, que embora o NSGA-II tenha estimado rapidamente um conjunto bem distribuído de soluções, o operador “crowding-distance” não foi capaz de melhorar, ou mesmo manter, a qualidade da diversidade das soluções ao longo das gerações. Conforme discutido neste capítulo, este problema deve-se à deterioração das soluções aproximadas.

Como este experimento baseou-se apenas no problema ZDT1, as conclusões feitas são muito subjetivas, e uma análise mais detalhada é necessária para caracterizar melhor a influência da variação do parâmetro ϵ nas velocidades de convergência e distribuição das soluções encontradas por métodos que utilizam a estratégia ϵ -aproximada.

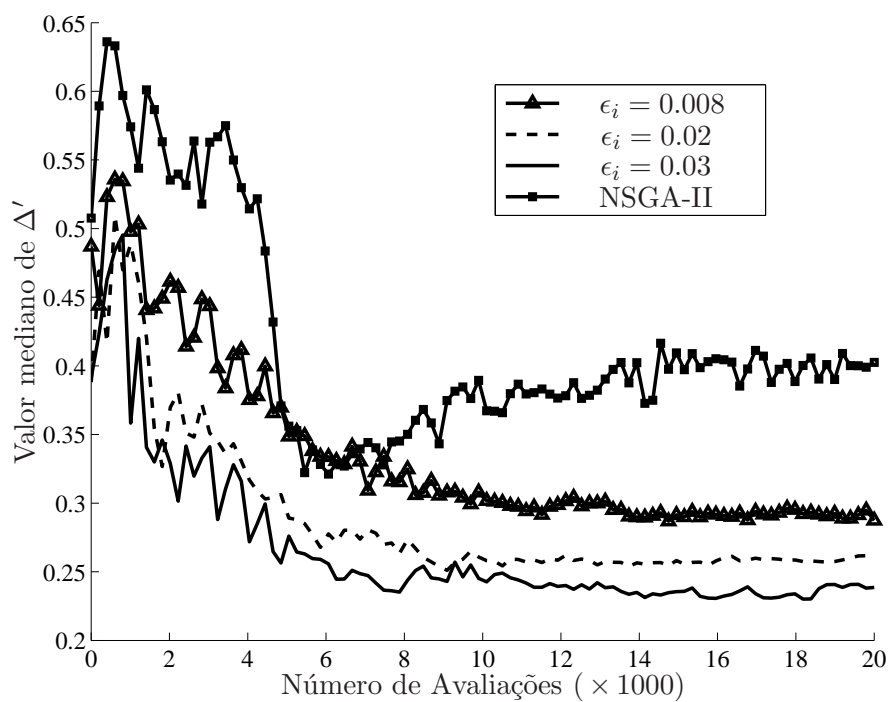


Figura 4.14.: Velocidade de espalhamento das soluções em função da variação do parâmetro ϵ . Os valores medianos de Δ' foram obtidos considerando-se 30 execuções independentes do problema ZDT1. Este teste limitado sugere que métodos baseados na técnica ϵ -aproximada permitem uma distribuição mais rápida das soluções, sendo esta diversidade mantida (melhorada) ao longo do processo evolutivo.

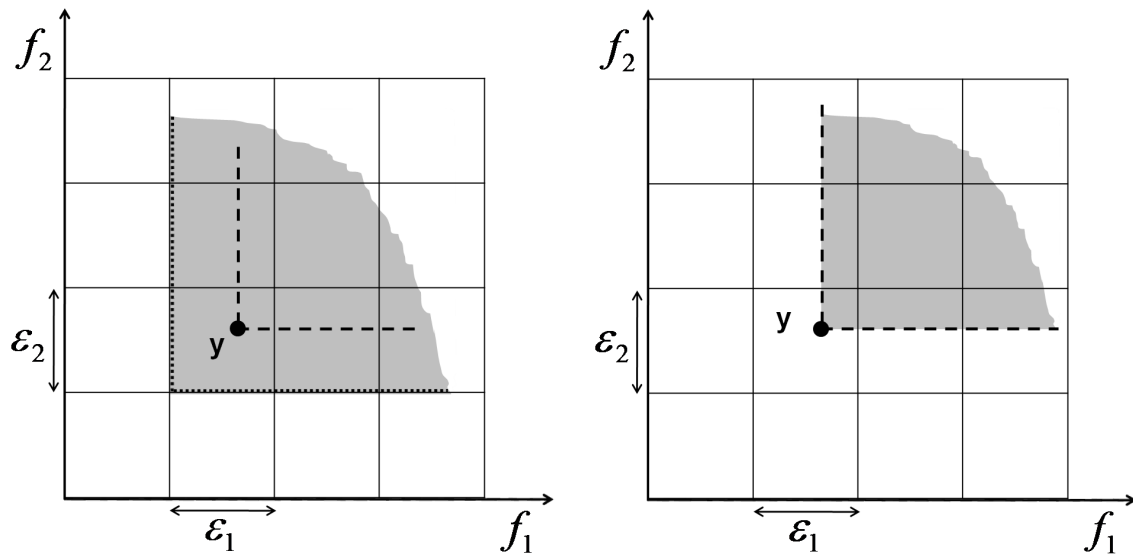
4.4.2. Uma Alternativa para Testes Bi- e Tri-Objetivo

Conforme estabelecido na **Definição 3.4**, a verificação da relação cone ϵ -dominância entre dois vetores requer, no pior caso, a resolução de dois sistemas lineares. Dessa forma, este mecanismo torna o algoritmo mais lento e computacionalmente mais caro comparado às estratégias ϵ - e Pareto-dominância, as quais resolvem um único sistema linear para a mesma situação. Devido a isto, sugere-se uma alternativa mais eficiente para a otimização de problemas com dois e três objetivos. Este mecanismo alternativo já foi abordado no final do capítulo 3, e representa um caso particular da estratégia cone ϵ -dominância.

Para facilitar a discussão, o critério sugerido é apresentado novamente na Fig. 4.15(b). Observe que esta relação de dominância é obtida fazendo $\kappa = 0$ com $\epsilon_i > 0$ (Fig. 4.15(a)), e posteriormente redefinindo-se o vetor \mathbf{z}^2 , tal que seja desconsiderado o parâmetro ϵ , i.e., $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1)$, deslocando assim a origem do cone de dominância para a posição da solução \mathbf{y} no espaço de objetivos (Fig. 4.15(b)). Note que além de garantir a aproximação de um conjunto de soluções Pareto não-dominadas, ambas as propriedades de convergência e diversidade são também asseguradas. É importante observar ainda que a verificação da relação de dominância entre dois vetores torna-se mais rápida, pois apenas o critério usual de dominância é testado.

Com o objetivo de validar este critério de dominância, apresenta-se na Tabela 4.8 os resultados comparativos para 50 execuções dos algoritmos cone ϵ -MOEA, NSGA-II, e p ϵ -MOEA. Este último caracteriza o AE multiobjetivo baseado no mecanismo sugerido, o qual emprega a relação Pareto dominância no interior do hipercubo definido pelo vetor $\boldsymbol{\epsilon}$. Neste teste, apenas os problemas ZDT1 e DTLZ2 são considerados. Conforme esperado, não foram observadas diferenças significativas entre os métodos cone ϵ -MOEA e p ϵ -MOEA em nenhuma das métricas de qualidade e, além disso, estes algoritmos foram igualmente superiores ao NSGA-II nestes indicadores. Observe também que o tempo mediano de uma execução dos métodos cone ϵ -MOEA e p ϵ -MOEA reduziu de 1.44s para 0.74s no ZDT1, e de 1.47s para 0.80s no DTLZ2. Estes resultados justificam o uso deste mecanismo alternativo para a otimização de problemas com dois e três objetivos.

²De acordo com a **Definição 3.4**, diz-se que $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \in \mathbb{R}^m$ cone-domina $\mathbf{f}(\mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^m$ se, e somente se, a solução do sistema linear $\Psi\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{z}$, com $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) - [\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \boldsymbol{\epsilon}]$, fornece $\lambda_i \geq 0 \forall i \in \{1, \dots, m\}$.



(a) Relação cone ϵ -dominância: $\kappa = 0$, $\epsilon_i > 0$,
 $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) - (\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \boldsymbol{\epsilon})$.

(b) Relação cone ϵ -dominância: $\kappa = 0$, $\epsilon_i > 0$,
 $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1)$.

Figura 4.15.: A relação cone ϵ -dominância pode ser utilizada adotando-se $\kappa = 0$, $\epsilon_i > 0$, e $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1)$. Embora esta consideração estabeleça um critério de dominância não-relaxado, o mesmo assegura as propriedades de convergência e diversidade das soluções aproximadas. Além disso, possibilita uma verificação mais rápida da relação de dominância entre dois vetores, pois apenas o critério usual de dominância é testado.

Vale frisar que embora não exista nenhuma restrição teórica quanto ao uso deste mecanismo em problemas com múltiplos objetivos, este critério será menos eficiente para tratar soluções redundantes do que a configuração cone ϵ -dominância empregada na obtenção dos resultados discutidos na seção anterior, pois esta última representa uma relaxação da técnica proposta nesta seção e, por isto, exerce um efeito mais global no domínio de objetivos.

Tabela 4.8.: Comparação entre $p\epsilon$ -MOEA, $\text{cone}\epsilon$ -MOEA e NSGA-II. Os valores de ϵ utilizados pelo $p\epsilon$ -MOEA são idênticos aos estimados para o $\text{cone}\epsilon$ -MOEA (Tabela 4.4). Para cada métrica, o valor-p foi obtido usando o teste da soma de postos de Wilcoxon para a diferença dos valores medianos (Tabela B.3). Para o estimador de Hodges-Lehmann do tamanho do efeito, os algoritmos foram considerados segundo a ordem dada, e somente os efeitos estatisticamente significativos (99%) foram calculados. Em todas as comparações envolvendo o método $p\epsilon$ -MOEA, efeitos positivos indicam a superioridade deste algoritmo em relação àquele com o qual é comparado. Os valores estimados de Hodges-Lehmann em negrito destacam os casos em que efeitos positivos estatisticamente significativos são observados para o método $p\epsilon$ -MOEA.

		ZDT1 ($m = 2$)	DTLZ2 ($m = 3$)
γ	(c, p)	–	–
	(N, p)	–	1.7×10^{-1}
	(N, c)	–	1.7×10^{-1}
Δ	(c, p)	–	–
	(N, p)	4.1×10^{-1}	3.7×10^{-1}
	(N, c)	4.2×10^{-1}	3.8×10^{-1}
HV	(p, c)	–	8.5×10^{-4}
	(p, N)	–	4.3×10^{-2}
	(c, N)	–	4.2×10^{-2}
CS	(p, c)	–	–
	(p, N)	–	5.5×10^{-2}
	(c, N)	–	5.0×10^{-2}

4.4.3. Uma Alternativa para Testes com Múltiplos Objetivos

O leitor deve ter percebido ao longo da análise dos resultados que, mesmo em alguns problemas com três objetivos (DTLZ8 e DTLZ9), todos os critérios de dominância considerados apresentaram dificuldades para tratar soluções redundantes. As Figs. 4.11 e 4.12 ilustram claramente esta limitação. Uma vez que o efeito local exercido pelo cone de dominância ($\kappa = 0.5$) não foi suficiente para reduzir o problema de redundância, apresentou-se também, apenas para uma comparação visual, a distribuição aproximada pelo método $\text{cone}\epsilon$ -MOEA empregando-se um pequeno valor para κ . De acordo com as Figs. 4.11(d) e 4.12(d), observa-se que um efeito mais global do cone de dominância possibilitou estimar fronteiras com uma melhor qualidade. Entretanto, à medida que κ aproxima-se de zero, a estratégia cone ϵ -dominância tende à relação ϵ -dominância, e mesmo o AE multiobjetivo baseado nesta técnica, o ϵ -MOEA, não foi capaz de remover completamente as soluções redundantes presentes na população final de arquivo,

e.g., no teste DTLZ9. Este fato sugere que em problemas com muitos objetivos, nos quais a probabilidade de ocorrência do problema de redundância é elevada (Deb, Thiele, Laumanns & Zitzler 2005), as técnicas ϵ -, cone ϵ -, e Pareto-dominância poderão apresentar dificuldades ainda maiores para tratar soluções redundantes, comprometendo assim a convergência para a fronteira Pareto-ótima global, e também a preservação da diversidade entre as soluções estimadas.

Com o objetivo de reduzir o problema de redundância, comumente presente em testes com muitos objetivos (Deb, Thiele, Laumanns & Zitzler 2005), sugere-se utilizar uma relaxação da técnica ϵ -dominância, i.e., um mecanismo que exerça um efeito mais global no domínio de objetivos do que aquele proporcionado pela relação ϵ -dominância. A Fig. 4.16(a) ilustra esta ideia. Note que, mais uma vez, o critério proposto representa um caso particular da relação cone ϵ -dominância, onde se considera $\kappa \in [-1, 0)$ e $\epsilon_i > 0$. Conforme discutido no final do capítulo 3, este mecanismo também pode ser representado pelo sistema linear $\Xi\rho = \eta$, reescrito a seguir (veja a Fig. 4.16(b)):

$$\mathcal{C}_\Xi = \left\{ \eta : \begin{array}{c} \overbrace{\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}}^\eta = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & 1 \end{bmatrix}}^\Xi \overbrace{\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix}}^\rho \end{array}, \forall \rho_1, \rho_2 \geq 0 \right\} \quad (4.10)$$

Note que esta definição é mais intuitiva, pois o controle da região cone-dominada é ajustada por meio do parâmetro θ , onde $\theta = (90^\circ - \phi)$. Uma vez que deseja-se uma relaxação da estratégia ϵ -dominância, adota-se $\theta \in (90^\circ, 180^\circ)$.

Para testar o efeito desta relação em problemas com múltiplos objetivos, o teste DTLZ2 é otimizado considerando-se 4, 6, 8 e 10 funções de minimização. O número total de variáveis de otimização é dado por $n = m + 9$. Uma vez que este problema possui uma fronteira Pareto “esférica” definida no espaço m -dimensional, i.e., $\sum_{i=1}^m f_i^2 = 1$ em que $f_i \in [0, 1]$ para todo $i = \{1, 2, \dots, m\}$, esta equação é utilizada como uma medida de distância para calcular as métricas γ e Δ (o indicador de hipervolume (HV) não é empregado neste experimento). Para uma análise adequada, os algoritmos comparados são executados 50 vezes considerando-se um número fixo de soluções avaliadas. Assim sendo, estipulou-se 20.000 avaliações para $m = 4$, e 30.000 para $m > 4$. Os demais parâmetros são idênticos aos utilizados na otimização do problema DTLZ2 tri-objetivo.

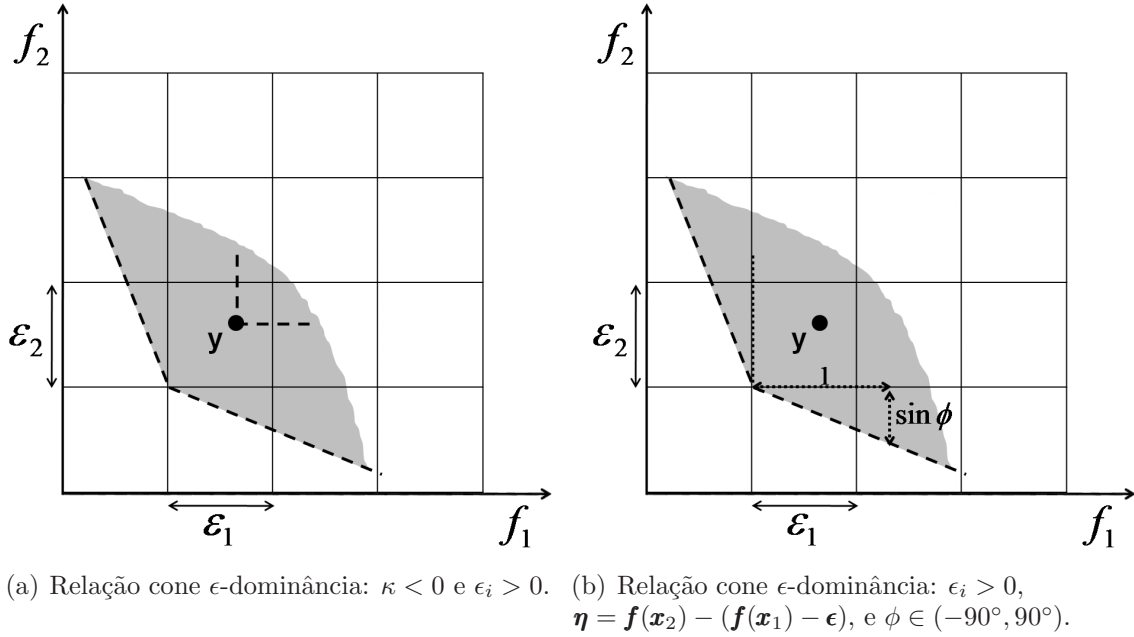


Figura 4.16.: Critério alternativo para tratar problemas com múltiplos objetivos. A relação cone ϵ -dominância pode ser utilizada adotando-se $\kappa \in [-1, 0)$ e $\epsilon_i > 0$. Entretanto, o sistema linear $\Xi \rho = \eta$ permite uma interpretação mais intuitiva deste mecanismo.

Visando obter uma população final de arquivo com 100 soluções quando $m = 4$ e 200 quando $m > 4$, adotou-se os valores de ϵ e θ mostrados na Tabela 4.9. Para o método ϵ -MOEA, os valores de ϵ foram estimados com o intuito de obter o número desejado de pontos no arquivo final. No caso do algoritmo θ -MOEA, i.e., o método no qual a região cone-dominada é controlada por meio do parâmetro θ (4.10), escolheu-se valores de ϵ menores que aqueles adotados pelo ϵ -MOEA, o que conduz à aproximação de um maior número de soluções não-dominadas. Dessa forma, estimou-se valores de θ , $\theta > 90^\circ$, tal que fosse encontrada uma população final de arquivo com cardinalidade em torno do valor especificado.

Uma vez que o teste DTLZ9 investiga, especificamente, a capacidade de um AE multiobjetivo de tratar soluções redundantes (Deb, Thiele, Laumanns & Zitzler 2005), este problema também é otimizado considerando-se $m = 4$. Neste teste, o número de variáveis de otimização é bem superior ao número de objetivos ($n = 10m$). Para ambos os métodos, os valores atribuídos a ϵ e θ foram obtidos utilizando-se o mesmo procedimento descrito no parágrafo anterior (Tabela 4.9), os quais permitem encontrar uma população final de arquivo com aproximadamente 125 pontos não-dominados, ao

Tabela 4.9.: Parâmetros utilizados para a otimização de problemas com múltiplos objetivos.

Algoritmo	DTLZ2 (m = 4)	DTLZ2 (m = 6)	DTLZ2 (m = 8)	DTLZ2 (m = 10)	DTLZ9 (m = 4)
ϵ -MOEA	$\epsilon_i = 0.126$	$\epsilon_i = 0.199$	$\epsilon_i = 0.267$	$\epsilon_i = 0.276$	$\epsilon_i = 0.079$
θ -MOEA	$\epsilon_i = 0.124$ $\theta = 91^\circ$	$\epsilon_i = 0.193$ $\theta = 91^\circ$	$\epsilon_i = 0.263$ $\theta = 91.2^\circ$	$\epsilon_i = 0.274$ $\theta = 91.9^\circ$	$\epsilon_i = 0.02$ $\theta = 93^\circ$

final de 200.000 avaliações de soluções. Novamente, adotou-se os mesmos parâmetros de otimização do problema DTLZ9 tri-objetivo e 50 execuções independentes dos algoritmos.

Os resultados obtidos pelos AEs multiobjetivo são mostrados na Tabela 4.10. Note que o método θ -MOEA apresentou um desempenho melhor que o ϵ -MOEA em todos os testes. Além disso, visto que o operador “crowding-distance” não é adequado para tratar problemas com muitos objetivos (Deb, Mohan & Mishra 2005), ambos os algoritmos θ -MOEA e ϵ -MOEA foram superiores ao NSGA-II, com ganhos relativamente grandes em todas as comparações. Vale destacar também que, no caso do problema DTLZ9, o critério apresentado exerceu uma pressão seletiva mais intensa que a relação ϵ -dominância, e as diferenças de desempenho observadas foram estatisticamente significativas, principalmente para os indicadores de convergência (γ) e cobertura (CS), nos quais o θ -MOEA foi superior ao ϵ -MOEA com ganhos de aproximadamente 39% e 54%, respectivamente. Note que o NSGA-II não participou das comparações de desempenho para o teste DTLZ9, pois não convergiu em nenhuma das execuções realizadas. Este estudo sugere que o mecanismo proposto representa uma ferramenta útil tanto para tratar problemas com muitos objetivos, quanto para reduzir a presença de soluções redundantes na população final de arquivo. Apesar desta observação, e da existência de um trabalho preliminar no qual se avalia a habilidade da relação cone ϵ -dominância de ordenar soluções em problemas com múltiplos objetivos (Batista et al. 2011a), uma investigação profunda deste tópico é deixada para um trabalho futuro. A Fig. 4.17 permite uma fácil visualização bi-dimensional, no plano f_1 - f_4 , das fronteiras obtidas a partir de uma execução típica dos métodos θ -MOEA e ϵ -MOEA.

Tabela 4.10.: Comparação entre θ -MOEA, ϵ -MOEA e NSGA-II. Os valores de ϵ e θ utilizados pelos algoritmos são mostrados na Tabela 4.9. Para cada métrica, o valor-p foi obtido usando o teste da soma de postos de Wilcoxon para a diferença dos valores medianos (Tabela B.4). Para o estimador de Hodges-Lehmann do tamanho do efeito, os algoritmos foram considerados segundo a ordem dada, e somente os efeitos estatisticamente significativos (99%) foram calculados. Em todas as comparações envolvendo o método θ -MOEA, efeitos positivos indicam a superioridade deste algoritmo em relação àquele com o qual é comparado. Os valores estimados de Hodges-Lehmann em negrito destacam os casos em que efeitos positivos estatisticamente significativos são observados para o método θ -MOEA.

	DTLZ2 (m = 4)	DTLZ2 (m = 6)	DTLZ2 (m = 8)	DTLZ2 (m = 10)	DTLZ9 (m = 4)	
γ	(ϵ, θ)	3.5×10^{-1}	9.3×10^{-3}	1.4×10^{-2}	8.5×10^{-3}	3.9×10^{-1}
	(N, θ)	7.2×10^{-1}	9.5×10^{-1}	9.7×10^{-1}	9.6×10^{-1}	×
	(N, ϵ)	3.7×10^{-1}	9.4×10^{-1}	9.5×10^{-1}	9.6×10^{-1}	×
Δ	(ϵ, θ)	2.4×10^{-1}	2.7×10^{-2}	–	3.2×10^{-2}	4.9×10^{-2}
	(N, θ)	6.6×10^{-1}	6.4×10^{-1}	5.3×10^{-1}	6.4×10^{-1}	×
	(N, ϵ)	4.2×10^{-1}	6.2×10^{-1}	5.4×10^{-1}	6.1×10^{-1}	×
CS	(θ, ϵ)	1.4×10^{-1}	5.7×10^{-2}	1.6×10^{-1}	1.9×10^{-2}	5.4×10^{-1}
	(θ, N)	1.4×10^{-1}	8.9×10^{-1}	8.6×10^{-1}	7.9×10^{-1}	×
	(ϵ, N)	4.0×10^{-2}	7.6×10^{-1}	7.1×10^{-1}	4.5×10^{-1}	×

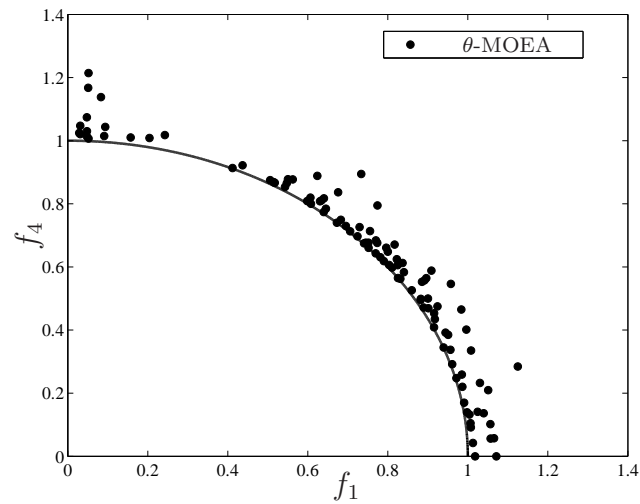
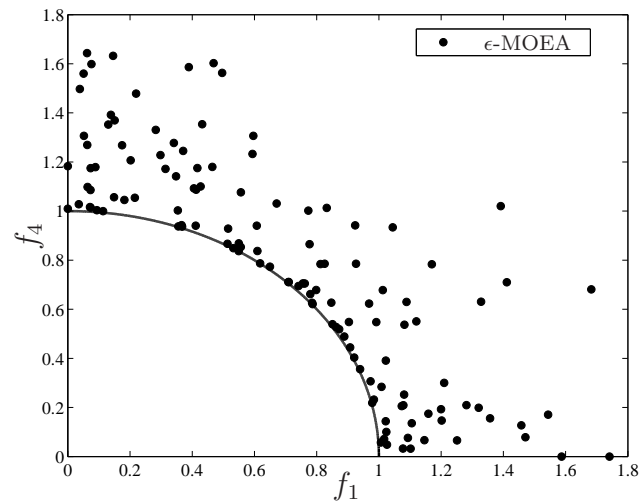
(a) Distribuição obtida pelo θ -MOEA.(b) Distribuição obtida pelo ϵ -MOEA.

Figura 4.17.: Soluções eficientes geradas para o problema DTLZ9 considerando-se quatro funções objetivo. As fronteiras apresentadas foram obtidas a partir de uma execução típica dos algoritmos θ -MOEA e ϵ -MOEA.

4.5. Conclusão

Neste capítulo apresentou-se uma criteriosa avaliação da estratégia cone ϵ -dominância considerando-se problemas com dois e três objetivos. Esta relação é utilizada na etapa de atualização da população de arquivo com o objetivo de assegurar ambas as propriedades de convergência em direção à fronteira Pareto-ótima e diversidade entre as soluções estimadas. Basicamente, a técnica cone ϵ -dominância mantém os aspectos positivos observados na estratégia ϵ -dominância e, além disso, minimiza algumas de suas limitações. Conforme mostrado, o mecanismo sugerido provê um melhor controle sobre a resolução do Pareto encontrado, e também uma melhor distribuição das soluções ao longo da fronteira.

Visando avaliar a eficiência relativa da metodologia proposta, considerou-se três algoritmos evolucionários multiobjetivo: NSGA-II, ϵ -MOEA, e cone ϵ -MOEA, no qual o conceito de ϵ -dominância é substituído pela técnica cone ϵ -dominância. Em todos os dezesseis problemas, o método cone ϵ -MOEA aproximou conjuntos não-dominados com excelentes diversidade e convergência, destacando o seu compromisso entre a distribuição e a convergência das soluções obtidas. Os resultados encontrados utilizando a análise estatística mostram que o algoritmo cone ϵ -MOEA obteve ganhos significativos na métrica de diversidade, com um desempenho médio 16% superior ao ϵ -MOEA e 22% melhor que o NSGA-II. Ainda com relação a este indicador de qualidade, o cone ϵ -MOEA apresentou ganhos superiores a 70% em problemas individuais. De maneira geral, os resultados sugerem que a relação cone ϵ -dominância mantém as propriedades de convergência da estratégia ϵ -dominância enquanto melhora significativamente as características de diversidade dos conjuntos Pareto estimados.

O capítulo seguinte apresenta uma visão geral sobre o trabalho desenvolvido neste documento e, além disso, enumera as principais conclusões e sugestões de continuidade.

Capítulo 5.

Conclusões

“Já que se há de escrever, que pelo menos não se esmaguem com palavras as entrelinhas.”

— Clarice Lispector, 1920–1977

Este capítulo conclui a tese de doutorado. Apresenta-se inicialmente uma discussão geral sobre o tema abordado, referenciando as principais técnicas relaxadas de dominância Pareto tratadas neste documento. As características destes mecanismos que motivaram o desenvolvimento deste trabalho são novamente pontuadas. Discorre-se também sobre a estratégia proposta, com ϵ -dominância, comentando suas vantagens em relação às demais e destacando os resultados mais relevantes alcançados. Finalmente, enumeram-se as contribuições originais deste trabalho e também algumas sugestões para trabalhos futuros.

5.1. Conclusões

Os principais propósitos estabelecidos no início desta tese foram alcançados: (i) realizou-se um criterioso estudo bibliográfico com respeito ao emprego de técnicas relaxadas de dominância Pareto na etapa de atualização da população de arquivo em AEs multiobjetivo; (ii) cada uma das técnicas abordadas foi cuidadosamente analisada, e suas vantagens e desvantagens avaliadas; (iii) propôs-se uma nova forma relaxada de dominância Pareto, nomeada cone ϵ -dominância; e, por fim, (iv) a técnica sugerida foi incorporada a um AE multiobjetivo (cone ϵ -MOEA), sendo este comparado a outros dois renomados algoritmos presentes na literatura (ϵ -MOEA e NSGA-II).

Nos parágrafos seguintes apresenta-se uma visão geral sobre a pesquisa realizada, destacando a relevância deste trabalho no âmbito da otimização multiobjetivo e discorrendo sobre os ganhos alcançados por meio deste estudo.

No Capítulo 1 apresentou-se uma introdução geral sobre algoritmos evolucionários multiobjetivo, onde se destacou principalmente sua praticidade e eficiência em relação às técnicas tradicionais utilizadas para a otimização de problemas multiobjetivo. Esta classe de problemas possui um conjunto de soluções ditas não-dominadas, ou Pareto-eficientes, que expressam relações de compromisso entre cada uma das funções objetivo, e os algoritmos evolutivos são frequentemente avaliados quanto a sua habilidade de encontrar tais soluções. Formalmente, tem-se que os problemas tratados neste trabalho envolvem a minimização simultânea dos termos da função vetorial mostrada a seguir:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m \\ \text{sujeito a: } \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned} \quad (5.1)$$

em que Ω é o conjunto factível, matematicamente definido por:

$$\Omega = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{X} : g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \dots, p; h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, \dots, q \right\}. \quad (5.2)$$

Uma vez que o conjunto global de soluções Pareto-eficientes (5.3), que satisfaz o problema de otimização multiobjetivo (5.1), apresenta frequentemente cardinalidade infinita, a determinação numérica de todos os vetores deste conjunto é impossível, além de questionável como resultado de um problema de otimização, pois inviabiliza o processo de escolha do decisor. Devido a isto, este trabalho enfatizou a determinação de um

conjunto limitado, porém representativo de \mathcal{P} . A imagem do conjunto Pareto-ótimo no espaço de objetivos é definida como $\mathcal{F} = \mathbf{f}(\mathcal{P})$.

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{x}^* \in \Omega \mid \nexists \mathbf{x} \in \Omega : \mathbf{f}(\mathbf{x}) \prec \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)\} \quad (5.3)$$

Ainda no Capítulo 1, discorreu-se sobre a evolução histórica do uso de algoritmos evolucionários para a solução de problemas multiobjetivo, e foram relatados os principais trabalhos e métodos que marcaram os primeiros passos rumo a esta grande área de pesquisa. Os conceitos que embasam a teoria de otimização multiobjetivo e que, de certa forma, sustentam o escopo desta tese também foram definidos nesta etapa. Por fim, enumerou-se os objetivos deste trabalho.

A popularidade de AEs multiobjetivo deve-se, praticamente, a sua capacidade de evoluir paralelamente um conjunto de soluções eficientes em direção à fronteira Pareto global, e quanto mais detalhada a aproximação desta fronteira, melhor são as características de convergência e diversidade das soluções do conjunto Pareto estimado. Uma vez que grande parte dos métodos populares não são capazes de assegurar simultaneamente convergência e diversidade durante o processo evolutivo, comumente apenas uma destas propriedades é focada no algoritmo de otimização. Para contornar esta situação, alguns trabalhos desenvolvidos na última década propuseram técnicas relaxadas de dominância visando garantir a convergência e preservar a diversidade das soluções encontradas em um único método. Algumas destas estratégias foram discutidas no Capítulo 2. Os itens a seguir indicam as principais características destas técnicas e que motivaram o desenvolvimento deste trabalho.

- Visto que as soluções estimadas evoluem ao longo de um espaço “discretizado”, no domínio de objetivos, estas estratégias, e.g., cone ϵ -dominância, ϵ -dominância e $\rho\epsilon$ -dominância, permitem regular simultaneamente ambas as propriedades de convergência e diversidade das soluções aproximadas durante o processo de otimização.
- Uma vez que o tamanho dessa “discretização” é controlado pelo parâmetro ϵ , estes mecanismos possibilitam também que o projetista especifique a resolução (qualidade) da fronteira Pareto a ser estimada. Este fato é especialmente interessante, pois tais técnicas permitem ao decisor avaliar a relação custo e benefício entre a resolução desejada e o tempo de máquina exigido.

- Devido a forma como são definidos, os conceitos de cone ϵ -dominância, ϵ -dominância e $pa\epsilon$ -dominância promovem a redução da cardinalidade do conjunto Pareto-ótimo, i.e., cada hipercubo do espaço discretizado pode conter apenas uma única solução eficiente. Logo, estas estratégias favorecem a aproximação de soluções bem distribuídas em um tempo computacional relativamente baixo.
- Em algoritmos como PAES, SPEA e NSGA-II, uma solução não-dominada pertencente à população de arquivo pode ser substituída por outra, uma vez que o mecanismo de seleção adotado nestas técnicas baseia-se somente na medida de densidade das soluções ou em um procedimento de agrupamento. Dessa forma, o problema de deterioração parcial¹ irá possivelmente ocorrer ao longo das gerações do método. Esta característica é certamente indesejável, pois não se pode garantir convergência para nenhum destes algoritmos, mesmo que todos os elementos do conjunto Pareto real sejam gerados. Embora este assunto seja de interesse principalmente teórico, a solução do problema de deterioração parcial possui também grande relevância prática. Ao empregar as estratégias ϵ -, $pa\epsilon$ -, ou cone ϵ -dominância na etapa de atualização da população de arquivo, o projetista assegura não somente uma boa distribuição das soluções aproximadas, mas também um algoritmo verdadeiramente elitista, no sentido de que as soluções eficientes encontradas não são perdidas durante a otimização, e são somente substituídas por aquelas que apresentarem um melhor desempenho.

Levando em consideração cada uma das propriedades enumeradas anteriormente, tem-se que os conceitos de ϵ -dominância e $pa\epsilon$ -dominância possuem importância teórica e prática indiscutível. Entretanto, apesar da estratégia proposta também compartilhar destas propriedades, o conceito de cone ϵ -dominância remedia algumas das limitações observadas nestes mecanismos, conforme abordado nos Capítulos 3 e 4. No geral, o critério de dominância sugerido é facilmente implementado, possui eficiência equivalente ou superior à das estratégias comparadas, e mostra-se mais robusto quanto a estimação do número especificado de soluções não-dominadas, considerando-se fronteiras Pareto conexas. Para o caso de fronteiras desconexas, o valor calculado para ϵ não possibilita alcançar o número máximo de soluções desejadas, no entanto, ainda assim obtém-se uma aproximação de soluções bem distribuídas ao longo da fronteira, independente das características geométricas da mesma.

¹Pontos não-dominados – mesmo aqueles pertencentes ao conjunto Pareto global – podem ser perdidos, e ao longo do processo de busca podem ser substituídos até mesmo por soluções dominadas.

No Capítulo 4 apresentou-se um criterioso estudo sobre a relação cone ϵ -dominância, sendo o seu desempenho comparado ao das técnicas ϵ - e Pareto-dominância em dezesseis problemas conhecidos da literatura. Em linhas gerais, considerando-se o processo evolutivo formalizado por meio da equação (5.4), estudou-se o efeito do operador $\zeta \{ \cdot \}$ sobre a atualização das populações evolutiva (\mathcal{I}) e de memória (\mathcal{A}).

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{I}(t+1) \\ \mathcal{A}(t+1) \end{array} \right\} \leftarrow \zeta \left\{ V \left(S \left(\begin{array}{l} \mathcal{I}(t) \\ \mathcal{A}(t) \end{array} \right) \right) \right\} \quad (5.4)$$

Vale esclarecer que $S(\cdot)$ representa o operador de seleção, $V(\cdot)$ caracteriza os operadores de variação, t é o contador, e $\zeta \{ \cdot \}$ é implementado por um dos critérios de dominância abordados.

Para avaliar as possíveis diferenças entre estes mecanismos, realizou-se uma análise estatística dos resultados considerando-se quatro indicadores de qualidade, visando mensurar a convergência e a diversidade das soluções estimadas. Os resultados obtidos no Capítulo 4 mostraram que o algoritmo evolucionário multiobjetivo baseado na relação cone ϵ -dominância, nomeado cone ϵ -MOEA, foi significativamente superior às outras técnicas testadas, principalmente, em termos da diversidade entre as soluções Pareto-ótimas encontradas, com ganhos de aproximadamente 16% sobre o ϵ -MOEA e 22% sobre o NSGA-II. Ainda com relação à métrica de diversidade, o método cone ϵ -MOEA obteve ganhos superiores a 70% em problemas individuais. Além disso, diferenças significativas foram observadas também para os outros indicadores testados, porém com pequenos tamanhos de efeito, sustentando a ideia de que a relação cone ϵ -dominância mantém as propriedades de convergência da técnica ϵ -dominância enquanto melhora as características de diversidade dos conjuntos não-dominados aproximados. Estes resultados justificam o uso da relação cone ϵ -dominância como uma poderosa ferramenta para a otimização de problemas multiobjetivo.

5.2. Contribuições da Tese

Como parte das conclusões, enumera-se novamente os pontos que representam contribuições originais desta tese.

- Revisão crítica e sistematização das principais técnicas relaxadas de dominância Pareto;
- Proposição de uma nova forma relaxada de dominância Pareto capaz de manter as vantagens observadas nas demais técnicas presentes na literatura, além de tratar várias das limitações existentes nas mesmas;
- Incorporação da estratégia proposta em um algoritmo evolucionário multiobjetivo, e avaliação do desempenho deste considerando-se um conjunto de problemas testes e outros dois AEs multiobjetivo. O estudo experimental realizado mostrou que o mecanismo sugerido produz resultados competitivos, os quais sustentam a ideia de que a relação cone ϵ -dominância mantém as propriedades de convergência da técnica ϵ -dominância enquanto melhora significativamente as características de diversidade dos conjuntos não-dominados aproximados;
- Proposição de um critério de dominância eficiente, baseado na relação cone ϵ -dominância, para tratar problemas com dois e três objetivos. Os resultados sugerem que este critério é tão eficiente quanto a técnica cone ϵ -dominância, e diferenças significativas entre estes mecanismos não foram observadas em nenhuma das métricas de qualidade consideradas. Além disso, o critério sugerido possui menor complexidade computacional;
- Proposição de um critério de dominância, também baseado na relação cone ϵ -dominância, para (i) a otimização de problemas com muitos objetivos e (ii) a minimização do problema de redundância. Os resultados sugerem que este mecanismo representa uma ferramenta útil para tratar problemas com um elevado número de funções objetivo, e também para reduzir a presença de soluções redundantes na população final de arquivo.

5.3. Sugestões para Trabalhos Futuros

Os itens a seguir resumem algumas sugestões para trabalhos futuros.

1. Investigação de um mecanismo de controle adaptativo para ϵ e, ou, θ :

Estudar um mecanismo eficiente para a realização do controle adaptativo dos parâmetros da estratégia cone ϵ -dominância. Conforme observado em alguns testes, o método empregado para o cálculo do vetor ϵ não produziu valores adequados, e o tamanho especificado para a população de arquivo não foi obtido, sendo necessário então a estimação dos valores deste vetor. Dessa forma, parece razoável supor um controle adaptativo para o ajuste deste parâmetro, e que opere durante a busca pela fronteira Pareto-ótima global. Obviamente, a garantia de convergência das soluções estimadas só será possível após a última adaptação do vetor ϵ . O controle adaptativo do parâmetro θ , ou κ , pode também ser realizado com o objetivo de regular o efeito que o cone de dominância exerce no espaço de objetivos m -dimensional. Este ajuste adaptativo pode ser eficaz tanto para controlar a diversidade entre as soluções aproximadas, quanto para reduzir a presença de soluções redundantes na população final de arquivo.

2. Investigação do critério proposto para tratar problemas bi- e tri-objetivo:

Realizar uma investigação mais detalhada do critério de dominância sugerido na seção 4.4 para a otimização de problemas com dois e três objetivos. Este mecanismo de dominância representa um caso particular da técnica cone ϵ -dominância, e os resultados mostraram um desempenho similar entre estas estratégias, em termos da qualidade da convergência e da diversidade das soluções aproximadas. Além disso, a complexidade computacional associada à verificação da relação de dominância entre dois vetores é menor que aquela exigida pela configuração original da relação cone ϵ -dominância.

3. Otimização de problemas com elevado número de objetivos:

Usar a abordagem cone ϵ -dominância, conforme sugerido na seção 4.4, para tratar a escalabilidade em AEs multiobjetivo. Nas últimas décadas, muitos pesquisadores se dedicaram à solução de problemas multiobjetivo com apenas dois ou três objetivos e, além disso, acreditava-se na escalabilidade destes métodos com relação à solução de problemas com elevado número de objetivos. Entretanto, essa suposição vem se mostrando incoerente. Uma possível explicação para esta questão é que à medida

que o número de objetivos aumenta, a proporção de soluções não-dominadas da população também cresce rapidamente. Dessa forma, na presença de vários objetivos, a seleção de novas soluções é realizada de maneira aproximadamente aleatória, uma vez que a grande maioria das soluções apresentam-se igualmente eficientes segundo o senso comum de dominância Pareto. O estudo realizado sugere que o mecanismo proposto representa uma ferramenta útil para tratar problemas com muitos objetivos.

4. Incorporação das preferências do usuário durante a otimização:

Empregar o conceito de cone ϵ -dominância de maneira a considerar as preferências do usuário ao longo do processo de otimização. Em aplicações práticas de AEs multiobjetivo, os usuários não estão normalmente interessados em mapear grandes extensões da região de Pareto. Pelo contrário, é comum o interesse em observar a relação custo e benefício entre os objetivos em regiões específicas da fronteira. Por exemplo, o usuário poderia estar interessado em mapear apenas as soluções ao redor do “joelho” da fronteira Pareto. Dessa forma, considerando que estas preferências sejam incorporadas ao mecanismo de seleção de um AE multiobjetivo, o processo de busca torna-se muito mais eficiente, uma vez que a evolução da população é direcionada somente para a área de interesse. Para a efetivação desta aplicação da estratégia cone ϵ -dominância poderiam ser utilizados diferentes valores de ϵ , visando aumentar a resolução da fronteira estimada a cada interação com o decisor. Assim sendo, alguns conjuntos de Pareto estimados seriam apresentados ao tomador de decisões de forma que este determine a região de interesse do espaço de objetivos a ser explorada nas iterações seguintes. Obviamente, embora garanta-se uma boa distribuição das soluções durante a otimização, a convergência das mesmas poderá ser assegurada somente após a última modificação sobre o vetor ϵ .

5. Avaliação da influência de ϵ na velocidade de evolução do algoritmo:

Avaliar a influência do parâmetro ϵ (i) na velocidade de convergência do algoritmo, e também (ii) na velocidade de obtenção de diversidade entre as soluções da fronteira Pareto estimada. O estudo apresentado sugere que o tamanho da discretização adotada não interfere significativamente na velocidade de convergência das soluções em direção à fronteira global. Por outro lado, os resultados mostraram que a técnica ϵ -aproximada favorece uma representação, ou aproximação, mais rápida da fronteira Pareto-ótima. Entretanto, um maior número de problemas deverão ser empregados para uma análise mais efetiva destas observações.

6. Estudo da influência de κ no desempenho da técnica cone ϵ -dominância:

Realizar uma avaliação mais detalhada quanto ao efeito de diferentes valores de κ no desempenho da estratégia cone ϵ -dominância, considerando-se problemas com dois e três objetivos. Obviamente, o efeito causado por este parâmetro é influenciado pela característica geométrica da fronteira Pareto do problema sob teste. Entretanto, conforme mostrado no Capítulo 4 (Tabela 4.5), acredita-se que este efeito não seja significativo – para valores medianos de κ – a ponto de comprometer a qualidade da convergência e da diversidade das soluções estimadas. Por exemplo, utilizando-se $\kappa = 0.5$ estimou-se soluções bem distribuídas tanto para o problema Deb52 (fronteira fortemente côncava) quanto para o problema ZDT6 (fronteira aproximadamente linear).

“Mestre não é quem sempre ensina, mas quem de repente aprende.”

— Guimarães Rosa, 1908–1967

Apêndice A.

Suporte Matemático

Introdução

A equação (A.1) foi definida no Capítulo 3, e fornece o limite superior para o número de soluções não-dominadas, considerando-se a relação cone ϵ -dominância, que podem pertencer à população de arquivo ao mesmo tempo. Nesta expressão, \mathcal{X}_{cone}^* representa um conjunto cone ϵ -Pareto-ótimo, $1 \leq f_i \leq K$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, denota o espaço de objetivos normalizado ($K > \epsilon$), e a função $|\cdot|$ especifica a cardinalidade do conjunto em seu argumento.

$$|\mathcal{X}_{cone}^*| \leq m \left[\left(\frac{K-1}{\epsilon} \right)^{m-1} - \left(\frac{K-1}{\epsilon} \right)^{m-2} \right] + 1 \quad (\text{A.1})$$

Supondo que o projetista deseje estimar o número máximo de $T = |\mathcal{X}_{cone}^*|_{max}$ pontos não-dominados na população de memória, aplicando a técnica cone ϵ -dominância, então o valor de ϵ pode ser calculado a partir de (A.1) por meio da resolução da equação (A.2). O objetivo deste Apêndice é apresentar a dedução da expressão (A.2).

$$\left(\frac{T-1}{m} \right) \epsilon^{(m-1)} + (K-1)^{(m-2)} \epsilon - (K-1)^{(m-1)} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Dedução Matemática

Uma vez que deseja-se determinar o valor de ϵ que permite a obtenção do número máximo de soluções não-dominadas na população de arquivo, então considere resolver a igualdade definida em (A.1). Por simplicidade de notação, adota-se $T = |\mathcal{X}_{cone}^*|$ e $\wp = K - 1$. Dessa forma, tem-se:

$$T = m \left[\left(\frac{\wp}{\epsilon} \right)^{m-1} - \left(\frac{\wp}{\epsilon} \right)^{m-2} \right] + 1$$

$$\frac{T-1}{m} = \left(\frac{\wp}{\epsilon} \right)^{m-1} - \left(\frac{\wp}{\epsilon} \right)^{m-2}$$

$$\frac{T-1}{m} = \wp^{(m-1)} \epsilon^{(1-m)} - \wp^{(m-2)} \epsilon^{(2-m)}$$

Aplicando o operador $\log_\epsilon(\cdot)$ aos dois lados da expressão anterior, e empregando algumas propriedades logarítmicas, segue-se:

$$\log_\epsilon \left(\frac{T-1}{m} \right) = \log_\epsilon \left(\wp^{(m-1)} \epsilon^{(1-m)} - \wp^{(m-2)} \epsilon^{(2-m)} \right)$$

$$\log_\epsilon \left(\frac{T-1}{m} \right) = \log_\epsilon \left(\wp^{(m-1)} \epsilon^{(1-m)} \right) + \log_\epsilon \left[1 - \left(\frac{\wp^{(m-2)} \epsilon^{(2-m)}}{\wp^{(m-1)} \epsilon^{(1-m)}} \right) \right]$$

$$\log_\epsilon \left(\frac{T-1}{m} \right) = \log_\epsilon \left(\wp^{(m-1)} \epsilon^{(1-m)} \right) + \log_\epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{\wp} \right)$$

$$\log_\epsilon \left(\frac{T-1}{m} \right) = \log_\epsilon \left(\wp^{(m-1)} \right) + \log_\epsilon \left(\epsilon^{(1-m)} \right) + \log_\epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{\wp} \right)$$

$$\log_\epsilon \left(\frac{T-1}{m} \right) = (m-1) \log_\epsilon \wp + (1-m) + \log_\epsilon (\wp - \epsilon) - \log_\epsilon \wp$$

$$\log_\epsilon \left(\frac{T-1}{m} \right) = (m-2) \log_\epsilon \wp + \log_\epsilon (\wp - \epsilon) + (1-m)$$

Realizando a mudança de base para o logaritmo natural, a simplificação continua:

$$\log_{\epsilon} \left(\frac{T-1}{m} \right) = (m-2) \log_{\epsilon} \wp + \log_{\epsilon} (\wp - \epsilon) + (1-m)$$

$$\frac{\ln \left(\frac{T-1}{m} \right)}{\ln \epsilon} = (m-2) \frac{\ln \wp}{\ln \epsilon} + \frac{\ln (\wp - \epsilon)}{\ln \epsilon} + (1-m)$$

$$\ln \left(\frac{T-1}{m} \right) = (m-2) \ln \wp + \ln (\wp - \epsilon) + (1-m) \ln \epsilon$$

$$\frac{T-1}{m} = \exp ((m-2) \ln \wp + \ln (\wp - \epsilon) + (1-m) \ln \epsilon)$$

$$\frac{T-1}{m} = \exp ((m-2) \ln \wp) \exp (\ln (\wp - \epsilon)) \exp ((1-m) \ln \epsilon)$$

$$\frac{T-1}{m} = [e^{\ln \wp}]^{(m-2)} [e^{\ln \epsilon}]^{(1-m)} (\wp - \epsilon)$$

$$\frac{T-1}{m} = \wp^{(m-2)} \epsilon^{(1-m)} (\wp - \epsilon)$$

Rearranjando os termos da última expressão, tem-se:

$$\frac{T-1}{m} - \wp^{(m-2)} \epsilon^{(1-m)} (\wp - \epsilon) = 0$$

$$\frac{T-1}{m} + \wp^{(m-2)} \epsilon^{(2-m)} - \wp^{(m-1)} \epsilon^{(1-m)} = 0$$

$$\frac{T-1}{m} + \wp^{(m-2)} \frac{\epsilon^2}{\epsilon^m} - \wp^{(m-1)} \frac{\epsilon}{\epsilon^m} = 0$$

$$\left(\frac{T-1}{m} \right) \epsilon^m + \wp^{(m-2)} \epsilon^2 - \wp^{(m-1)} \epsilon = 0$$

Finalmente, obtém-se (A.2) conforme mostrado a seguir:

$$\left(\frac{T-1}{m}\right)\epsilon^{(m-1)} + \wp^{(m-2)}\epsilon - \wp^{(m-1)} = 0$$

em que $\wp = K - 1$.

Vale observar o caso particular onde $m = 2$. Nesta situação, o valor de ϵ é obtido diretamente:

$$\left(\frac{T-1}{2}\right)\epsilon + \epsilon - \wp = 0 \quad \Longrightarrow \quad \epsilon = \frac{2\wp}{T+1} = \frac{2(K-1)}{T+1} .$$

Apêndice B.

Dados Estatísticos

Os resultados discutidos no capítulo 4 foram analisados considerando-se (i) o teste da soma de postos de Wilcoxon (Montgomery & Runger 2003), (ii) o estimador de Hodges-Lehmann do tamanho do efeito (Hodges & Lehmann 1963, Monahan 1984), e (iii) o teste de Gore (Gore 1973). Entretanto, visando uma apresentação clara destes resultados, apenas o estimador de Hodges-Lehmann do tamanho do efeito foi tabelado no capítulo em questão. Este Apêndice mostra o valor-p obtido por meio do teste da soma de postos de Wilcoxon (Montgomery & Runger 2003). Estes dados foram utilizados para prover uma indicação sobre a significância estatística de eventuais diferenças entre o desempenho dos algoritmos considerados.

Tabela B.1.: Indicador da significância estatística de eventuais diferenças entre o desempenho dos algoritmos $Cone\epsilon$ -MOEA, ϵ -MOEA e NSGA-II. Para cada métrica, o valor-p apresentado nesta tabela foi obtido usando o teste da soma de postos de Wilcoxon para a diferença dos valores medianos. Para o estimador de Hodges-Lehmann do tamanho do efeito, somente os efeitos estatisticamente significativos (99%) foram calculados.

		Problemas Bi-Objetivo						
		Deb52	Pol	ZDT1	ZDT2	ZDT3	ZDT4	ZDT6
γ	(ϵ, C)	4.9×10^{-1}	9.4×10^{-16}	1.9×10^{-1}	7.1×10^{-18}	1.2×10^{-1}	1.5×10^{-1}	3.4×10^{-4}
	(N, C)	1.0×10^{-1}	1.6×10^{-6}	1.6×10^{-2}	8.0×10^{-17}	1.5×10^{-1}	2.1×10^{-4}	2.7×10^{-4}
	(N, ϵ)	1.3×10^{-1}	7.1×10^{-18}	7.0×10^{-4}	3.0×10^{-17}	6.6×10^{-1}	7.9×10^{-3}	1.4×10^{-8}
Δ	(ϵ, C)	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}	1.9×10^{-14}	8.1×10^{-9}	1.5×10^{-6}
	(N, C)	7.1×10^{-18}	7.5×10^{-18}	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}	1.2×10^{-11}	7.0×10^{-10}	9.9×10^{-16}
	(N, ϵ)	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}	1.3×10^{-8}	3.5×10^{-17}	3.6×10^{-13}	3.7×10^{-3}	1.4×10^{-14}
HV	(C, ϵ)	1.3×10^{-16}	7.1×10^{-18}	8.2×10^{-2}	7.1×10^{-18}	4.9×10^{-1}	4.3×10^{-1}	1.4×10^{-5}
	(C, N)	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}	9.9×10^{-2}	7.1×10^{-18}	7.9×10^{-2}	1.0×10^{-1}	3.2×10^{-1}
	(ϵ, N)	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}	9.9×10^{-4}	4.4×10^{-2}	5.5×10^{-1}	4.1×10^{-2}	1.5×10^{-4}
CS	(C, ϵ)	3.1×10^{-7}	1.7×10^{-4}	1.3×10^{-1}	4.5×10^{-20}	1.2×10^{-1}	2.1×10^{-1}	2.5×10^{-5}
	(C, N)	5.5×10^{-20}	1.9×10^{-10}	4.2×10^{-1}	1.8×10^{-18}	5.1×10^{-1}	2.5×10^{-1}	1.1×10^{-1}
	(ϵ, N)	1.8×10^{-18}	2.5×10^{-19}	9.7×10^{-4}	3.6×10^{-15}	1.6×10^{-1}	2.4×10^{-2}	1.1×10^{-6}

Tabela B.2.: Indicador da significância estatística de eventuais diferenças entre o desempenho dos algoritmos *Conec*-MOEA, ϵ -MOEA e *NSGA-II*. Para cada métrica, o valor-p apresentado nesta tabela foi obtido usando o teste da soma de postos de Wilcoxon para a diferença dos valores medianos. Para o estimador de Hodges-Lehmann do tamanho do efeito, somente os efeitos estatisticamente significativos (99%) foram calculados.

		Problemas Tri-Objetivo								
		DTLZ1	DTLZ2	DTLZ3	DTLZ4	DTLZ5	DTLZ6	DTLZ7	DTLZ8	DTLZ9
γ	(ϵ, C)	7.1×10^{-17}	1.0×10^{-17}	2.5×10^{-16}	1.2×10^{-5}	1.7×10^{-15}	8.5×10^{-18}	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}
	(N, C)	2.1×10^{-15}	7.7×10^{-15}	8.8×10^{-1}	4.5×10^{-15}	7.1×10^{-18}	2.7×10^{-2}	8.4×10^{-1}	4.7×10^{-17}	7.1×10^{-18}
	(N, ϵ)	7.1×10^{-18}	3.4×10^{-9}	1.1×10^{-14}	6.9×10^{-15}	7.1×10^{-18}	2.4×10^{-15}	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}
Δ	(ϵ, C)	1.3×10^{-16}	6.0×10^{-1}	2.2×10^{-1}	2.0×10^{-12}	1.4×10^{-5}	7.1×10^{-18}	1.6×10^{-16}	4.3×10^{-1}	6.7×10^{-17}
	(N, C)	1.3×10^{-16}	7.1×10^{-18}	6.2×10^{-3}	1.2×10^{-15}	2.5×10^{-6}	7.1×10^{-18}	1.4×10^{-5}	2.4×10^{-14}	6.0×10^{-16}
	(N, ϵ)	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}	3.4×10^{-17}	5.2×10^{-16}	2.8×10^{-2}	4.5×10^{-16}	6.7×10^{-17}	2.3×10^{-13}	4.3×10^{-8}
<i>HV</i>	(C, ϵ)	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}	1.0×10^{-16}	6.8×10^{-15}	7.1×10^{-18}	1.1×10^{-13}	1.5×10^{-16}	×	×
	(C, N)	1.2×10^{-2}	7.1×10^{-18}	2.3×10^{-17}	1.2×10^{-15}	2.6×10^{-17}	7.1×10^{-18}	2.3×10^{-13}	×	×
	(ϵ, N)	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}	3.4×10^{-17}	1.2×10^{-15}	1.1×10^{-1}	7.5×10^{-18}	4.0×10^{-8}	×	×
<i>CS</i>	(C, ϵ)	1.6×10^{-1}	3.0×10^{-18}	1.6×10^{-1}	3.7×10^{-5}	6.3×10^{-3}	4.2×10^{-23}	5.8×10^{-18}	1.1×10^{-11}	5.8×10^{-18}
	(C, N)	4.7×10^{-18}	1.2×10^{-15}	6.4×10^{-13}	2.2×10^{-6}	7.4×10^{-18}	2.9×10^{-20}	1.6×10^{-3}	6.6×10^{-18}	7.0×10^{-18}
	(ϵ, N)	4.8×10^{-14}	4.1×10^{-8}	2.0×10^{-14}	1.5×10^{-12}	2.1×10^{-19}	2.9×10^{-20}	4.0×10^{-19}	2.1×10^{-19}	4.0×10^{-18}

Tabela B.3.: Indicador da significância estatística de eventuais diferenças entre o desempenho dos algoritmos $p\epsilon$ -MOEA, $c\text{one}\epsilon$ -MOEA e NSGA-II. Para cada métrica, o valor-p apresentado nesta tabela foi obtido usando o teste da soma de postos de Wilcoxon para a diferença dos valores medianos. Para o estimador de Hodges-Lehmann do tamanho do efeito, somente os efeitos estatisticamente significativos (99%) foram calculados.

		ZDT1 ($m = 2$)	DTLZ2 ($m = 3$)
γ	(c, p)	3.3×10^{-1}	4.3×10^{-1}
	(N, p)	2.0×10^{-1}	2.9×10^{-11}
	(N, c)	1.6×10^{-2}	7.7×10^{-15}
Δ	(c, p)	6.1×10^{-1}	1.2×10^{-1}
	(N, p)	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}
	(N, c)	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}
HV	(p, c)	3.1×10^{-1}	9.1×10^{-9}
	(p, N)	6.5×10^{-1}	7.1×10^{-18}
	(c, N)	9.9×10^{-2}	7.1×10^{-18}
CS	(p, c)	5.4×10^{-1}	1.2×10^{-1}
	(p, N)	3.5×10^{-1}	1.3×10^{-17}
	(c, N)	4.2×10^{-1}	1.2×10^{-15}

Tabela B.4.: Indicador da significância estatística de eventuais diferenças entre o desempenho dos algoritmos θ -MOEA, ϵ -MOEA e NSGA-II. Para cada métrica, o valor-p apresentado nesta tabela foi obtido usando o teste da soma de postos de Wilcoxon para a diferença dos valores medianos. Para o estimador de Hodges-Lehmann do tamanho do efeito, somente os efeitos estatisticamente significativos (99%) foram calculados.

		DTLZ2 ($m = 4$)	DTLZ2 ($m = 6$)	DTLZ2 ($m = 8$)	DTLZ2 ($m = 10$)	DTLZ9 ($m = 4$)
γ	(ϵ, θ)	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}
	(N, θ)	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}	\times
	(N, ϵ)	1.1×10^{-17}	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}	\times
Δ	(ϵ, θ)	7.1×10^{-18}	9.9×10^{-10}	3.8×10^{-2}	8.2×10^{-11}	2.2×10^{-3}
	(N, θ)	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}	\times
	(N, ϵ)	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}	7.1×10^{-18}	\times
CS	(θ, ϵ)	3.3×10^{-20}	3.3×10^{-20}	3.3×10^{-20}	1.3×10^{-19}	3.0×10^{-18}
	(θ, N)	3.2×10^{-20}	3.2×10^{-20}	3.2×10^{-20}	3.2×10^{-20}	\times
	(ϵ, N)	5.1×10^{-14}	3.2×10^{-20}	3.3×10^{-20}	3.3×10^{-20}	\times

Referências

- Agrafiotis, D. K. (2001). Multiobjective optimization of combinatorial libraries, *IBM Journal Of Research and Development* **45**(3–4): 545–566.
- Bandyopadhyay, S., Pal, S. K. & Aruna, B. (2004). Multiobjective gas, quantitative indices, and pattern classification, *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics* **34**(5): 2088–2099.
- Batista, L. S., Campelo, F., Guimarães, F. G. & Ramírez, J. A. (2010). A new self-adaptive approach for evolutionary multiobjective optimization, *Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation, CEC 2010*, Piscataway: IEEE Press, Barcelona, pp. 1–8.
- Batista, L. S., Campelo, F., Guimarães, F. G. & Ramírez, J. A. (2011a). A comparison of dominance criteria in many-objective optimization problems, *Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation, CEC 2011*, Piscataway: IEEE Press, New Orleans, pp. 2359–2366.
- Batista, L. S., Campelo, F., Guimarães, F. G. & Ramírez, J. A. (2011b). Multi-domain topology optimization with ant colony systems, *to appear in The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical Engineering (COMPEL)* **30**(6): 1–16.
- Batista, L. S., Campelo, F., Guimarães, F. G. & Ramírez, J. A. (2011c). Pareto cone ϵ -dominance: Improving convergence and diversity in multiobjective evolutionary algorithms, in R. H. C. Takahashi, K. Deb, E. F. Wanner & S. Greco (eds), *Evolutionary Multi-Criterion Optimization, EMO 2011, LNCS 6576*, Springer, pp. 76–90.
- Batista, L. S., Campelo, F., Guimarães, F. G. & Ramírez, J. A. (2011d). Source codes, samples of the true Pareto fronts, and raw and processed results of the experiments, Available online. <http://www.ppgee.ufmg.br/~fcampelo/files/EC-2011-01>.
- Batista, L. S., Oliveira, D. B., Guimarães, F. G., Silva, E. J. & Ramírez, J. A. (2010).

- Dynamic multiobjective clonal selection algorithm for engineering design, *IEEE Transactions on Magnetics* **46**(8): 3033–3036.
- Bazaraa, M. S., Sherali, H. D. & Shetty, C. M. (1979). *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, 2 edn, John Wiley & Sons.
- Cai, Z., Gong, W. & Huang, Y. (2007). A novel differential evolution algorithm based on ϵ -domination and orthogonal design method for multiobjective optimization, *Evolutionary Multi-Criterion Optimization*, Vol. 4403 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer Berlin, Heidelberg, pp. 286–301.
- Carrano, E. G., Soares, L. A. E., Takahashi, R. H. C., Saldanha, R. R. & Neto, O. M. (2006). Electric distribution network multiobjective design using a problem-specific genetic algorithm, *IEEE Transactions on Power Delivery* **21**(2): 995–1005.
- Chiba, K., Oyama, A. & Morino, H. (2007). Multidisciplinary design optimization and data mining for transonic regional-jet wing, *Journal of Aircraft* **44**(4): 1100–1112.
- Coello Coello, C. A. (2006). Evolutionary multi-objective optimization: A historical view of the field, *Computational Intelligence Magazine* **1**(1): 28–36.
- Coello Coello, C. A. (2009). Evolutionary multi-objective optimization: Some current research trends and topics that remain to be explored, *Computer Science* **3**(1): 18–30.
- Coello Coello, C. A., Hernández Aguirre, A. & Zitzler, E. (eds) (2005). *Evolutionary Multi-Criterion Optimization*, Vol. 3410 of *Lecture Notes in Computer Science*, Guanajuato, Mexico.
- Coello Coello, C. A. & Lamont, G. B. (eds) (2004). *Applications of Multi-Objective Evolutionary Algorithms*, World Scientific Publishing Company.
- Corne, D., Dorigo, M. & Glover, F. (1999). *New Ideas in Optimisation*, McGraw-Hill Inc., US.
- Davison, A. C. & Hinkley, D. V. (1997). *Bootstrap Methods and their Application*, 1st edn, Cambridge University Press.
- Deb, K. (1999). Multi-objective genetic algorithms: Problem difficulties and construction of test problems, *Evolutionary Computation* **7**(3): 205–230.
- Deb, K. (2005). Kanpur Genetic Algorithms Laboratory (KanGAL) - (director), online,

- acessado 15 de agosto de 2010. [Online] <http://www.iitk.ac.in/kangal/codes.shtml>.
- Deb, K. & Agrawal, R. B. (1995). Simulated binary crossover for continuous search space, *Complex System* **9**(2): 115–148.
- Deb, K. & Goyal, M. (1996). A combined genetic adaptive search (GeneAS) for engineering design, *Computer Science and Informatics* **26**: 30–45.
- Deb, K., Mohan, M. & Mishra, S. (2003). Towards a quick computation of well-spread Pareto-optimal solutions, *Evolutionary Multi-Criterion Optimization*, Vol. 2632 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer Berlin, Heidelberg, pp. 222–236.
- Deb, K., Mohan, M. & Mishra, S. (2005). Evaluating the ϵ -domination based multi-objective evolutionary algorithm for a quick computation of Pareto-optimal solutions, *Evolutionary Computation* **13**(4): 501–525.
- Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S. & Meyarivan, T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* **6**(2): 182–197.
- Deb, K., Thiele, L., Laumanns, M. & Zitzler, E. (2005). Scalable test problems for evolutionary multiobjective optimization, in A. Abraham, L. Jain & R. Goldberg (eds), *Evolutionary Multiobjective Optimization*, Theoretical Advances and Applications, Springer, USA, pp. 105–145.
- Ehrgott, M. (2005). *Multicriteria Optimization*, Vol. 491 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 2nd edn, Springer.
- Eiben, A. E. & Smith, J. E. (2003). *Introduction to Evolutionary Computing*, 1st edn, Springer, Natural Computing Series.
- Farmani, R., Savic, D. A. & Walters, G. A. (2005). Evolutionary multi-objective optimization in water distribution network design, *Engineering Optimization* **37**(2): 167–183.
- Fleming, P. J. & Purshouse, R. C. (2002). Evolutionary algorithms in control systems engineering: A survey, *Control Engineering Practice* **10**(11): 1223–1241.
- Fogel, L. J. (1999). *Intelligence Through Simulated Evolution: Forty Years of Evolutionary Programming*, Wiley-Interscience.
- Fonseca, C. M. & Fleming, P. J. (1993). Genetic algorithms for multiobjective op-

- timization: Formulation, discussion and generalization, *Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms*, pp. 416–423.
- Freitas, A. A. (2004). A critical review of multi-objective optimization in data mining: A position paper, *ACM SIGKDD Explorations Newsletter* **6**(2): 77–86.
- Goldberg, D. E. (1989). *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts.
- Gong, W. & Cai, Z. (2009). An improved multiobjective differential evolution based on Pareto-adaptive ϵ -dominance and orthogonal design, *European Journal of Operational Research* **198**(2): 576–601.
- Gong, W., Cai, Z. & Zhu, L. (2009). An efficient multiobjective differential evolution algorithm for engineering design, *Structural and Multidisciplinary Optimization* **38**(2): 137–157.
- Gore, A. (1973). Some nonparametric tests and selection procedures for main effects in two-way layouts, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **27**(1): 487–500.
- Handl, J., Kell, D. B. & Knowles, J. (2007). Multiobjective optimization in bioinformatics and computational biology, *IEEE-ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics* **4**(2): 279–292.
- Hanne, T. (1999). On the convergence of multiobjective evolutionary algorithms, *European Journal of Operational Research* **117**(3): 553–564.
- Hanne, T. (2001). Global multiobjective optimization with evolutionary algorithms: Selection mechanisms and mutation control, *Evolutionary Multi-Criterion Optimization*, Vol. 1993 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer Berlin, Heidelberg, pp. 197–212.
- Hanne, T. & Nickel, S. (2005). A multiobjective evolutionary algorithm for scheduling and inspection planning in software development projects, *European Journal of Operational Research* **167**(3): 663–678.
- Hernández-Díaz, A. G., Santana-Quintero, L. V., Coello Coello, C. A. & Molina, J. (2007). Pareto-adaptive ϵ -dominance, *Evolutionary Computation* **15**(4): 493–517.
- Hernández-Díaz, A. G., Santana-Quintero, L. V., Coello Coello, C. A., Molina, J. & Caballero, R. (2011). Improving the efficiency of ϵ -dominance based grids, *Information Sciences* **181**(15): 3101–3129.

- Hodges, J. L. & Lehmann, E. L. (1963). Estimation of location based on ranks, *Annals of Mathematical Statistics* **34**: 598–611.
- Horn, J., Nafpliotis, N. & Goldberg, D. E. (1994). A niched Pareto genetic algorithm for multiobjective optimization, *In Proceedings of the First IEEE Conference on Evolutionary Computation, IEEE World Congress on Computational Intelligence*, Vol. 1, pp. 82–87.
- Husbands, P. (1994). Distributed coevolutionary genetic algorithms for multi-criteria and multi-constraint optimisation, *Selected Papers from AISB Workshop on Evolutionary Computing*, Vol. 865 of *Lecture Notes In Computer Science*, Springer-Verlag London, UK, pp. 150–165.
- Ikeda, K., Kita, H. & Kobayashi, S. (2001). Failure of Pareto-based MOEAs: Does non-dominated really mean near to optimal?, *Proceedings of the 2001 Congress on Evolutionary Computation*, Vol. 2, Seoul, South Korea, pp. 957–962.
- Knowles, J. & Corne, D. (1999). The Pareto archived evolution strategy: A new baseline algorithm for multiobjective optimization, *Congress on Evolutionary Computation*, pp. 98–105.
- Knowles, J. & Corne, D. (2002). On metrics for comparing non-dominated sets, *Proceedings of the 2002 Congress on Evolutionary Computation, CEC 2002*, Honolulu, HI, USA, pp. 711–716.
- Lahanas, M. (2004). Application of multiobjective evolutionary optimization algorithms in medicine, *in* C. A. Coello Coello & G. B. Lamont (eds), *Applications of Multi-Objective Evolutionary Algorithms*, World Scientific, Singapore, pp. 365–391.
- Laumanns, M., Thiele, L., Deb, K. & Zitzler, E. (2002). Combining convergence and diversity in evolutionary multi-objective optimization, *Evolutionary Computation* **10**(3): 263–282.
- Li, M., Liu, L. & Lin, D. (2011). A fast steady-state ϵ -dominance multi-objective evolutionary algorithm, *Computational Optimization and Applications* **48**(1): 109–138.
- Manos, S., Poladian, L., Bentley, P. & Large, M. (2005). Photonic device design using multiobjective evolutionary algorithms, *in* C. A. Coello Coello, A. H. Aguirre & E. Zitzler (eds), *Evolutionary Multi-Criterion Optimization*, Vol. 3410 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag Berlin, pp. 636–650.

- Miettinen, K. M. (1998). *Nonlinear Multiobjective Optimization*, Vol. 12 of *International Series in Operations Research & Management Science*, 1st edn, Springer.
- Monahan, J. F. (1984). Algorithm 616: Fast computation of the Hodges-Lehmann location estimator, *ACM Transactions on Mathematical Software* **10**(3): 265–270.
- Montgomery, D. C. (2008). *Design and Analysis of Experiments*, 7th edn, Wiley.
- Montgomery, D. C. & Runger, G. C. (2003). *Applied Statistics and Probability for Engineers*, third edn, Wiley.
- Mostaghim, S. & Teich, J. (2003). The role of ϵ -dominance in multi-objective particle swarm optimization methods, *Proceedings of IEEE Congress on Evolutionary Computation*, Vol. 3, Canberra, Australia, pp. 1764–1771.
- Osmana, M. S., Abo-Sinna, M. A. & Mousa, A. A. (2005). An effective genetic algorithm approach to multiobjective resource allocation problems (MORAPs), *Applied Mathematics and Computation* **163**(2): 755–768.
- Osyczka, A. & Kundu, S. (1996). A genetic algorithm approach to multicriteria network optimization problems, *Proceedings of the 20th International Conference on Computers and Industrial Engineering*, pp. 329–332.
- Papadimitriou, C. (2005). Pareto optimal sensor locations for structural identification, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **194**(12–16): 1655–1673.
- Poloni, C. (1995). Hybrid GA for multiobjective aerodynamic shape optimization, in G. Winter, J. Periaux, M. Galan & P. Cuesta (eds), *Genetic Algorithms in Engineering and Computer Science*, Wiley, Chichester, pp. 397–416.
- Rosenberg, R. S. (1967). *Simulation of genetic populations with biochemical properties*, PhD thesis, University of Michigan, Ann Harbor, Michigan.
- Rudolph, G. (1998a). Evolutionary search for minimal elements in partially ordered finite sets, *Evolutionary Programming*, Proceedings of the 7th Annual Conference on Evolutionary Programming, The MIT Press, San Diego CA.
- Rudolph, G. (1998b). On a multi-objective evolutionary algorithm and its convergence to the Pareto set, *Evolutionary Computation*, Proceedings of the 5th IEEE Conference on Evolutionary Computation, IEEE Press, Piscataway, pp. 511–516.
- Rudolph, G. (2001). Evolutionary search under partially ordered fitness sets, *Innovations*

- in Engineering of Natural and Artificial Intelligent Systems*, Proceedings of the International Symposium on Information Science, ICSC Academic Press, pp. 818–822.
- Rudolph, G. & Agapie, A. (2000). Convergence properties of some multi-objective evolutionary algorithms, *Congress on Evolutionary Computation* **2**: 1010–1016.
- Santana-Quintero, L. V. & Coello Coello, C. A. (2005). An algorithm based on differential evolution for multi-objective problems, *International Journal of Computational Intelligence Research* **1**(2): 151–169.
- Schaffer, J. D. (1984). *Some Experiments in Machine Learning Using Vector Evaluated Genetic Algorithms*, PhD thesis, Vanderbilt University.
- Schlottmann, F. & Seese, D. (2004). Financial applications of multi-objective evolutionary algorithms: Recent developments and future research directions, in C. A. Coello Coello & G. B. Lamont (eds), *Applications of Multi-Objective Evolutionary Algorithms*, World Scientific, Singapore, pp. 627–652.
- Sheskin, I. (2011). *Handbook of Parametric and Nonparametric Statistical Procedures*, 5th edn, Chapman and Hall/CRC.
- Srinivas, N. & Deb, K. (1994). Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms, *Evolutionary Computation* **2**(3): 221–248.
- Takahashi, R. H. C. (2004). Otimização escalar e vetorial, online, acessado 10 de fevereiro de 2010. [Online] <http://www.mat.ufmg.br/~taka/>.
- Woldesenbet, Y. G., Yen, G. G., & Tessema, B. G. (2009). Constraint handling in multi-objective evolutionary optimization, *IEEE Transactions On Evolutionary Computation* **13**(3): 514–525.
- Zhang, W. Q. & Gen, M. S. (2010). Process planning and scheduling in distributed manufacturing system using multiobjective genetic algorithm, *IEEJ Transactions on Electrical and Electronic Engineering* **5**(1): 62–72.
- Zitzler, E., Brockhoff, D. & Thiele, L. (2007). The hypervolume indicator revisited: On the design of Pareto-compliant indicators via weighted integration, in S. Obayashi, K. Deb, C. Poloni, T. Hiroyasu & T. Murata (eds), *Evolutionary Multi-Criterion Optimization, EMO 2007, LNCS 4403*, Springer, pp. 862–876.
- Zitzler, E., Deb, K. & Thiele, L. (2000). Comparison of multiobjective evolutionary

- algorithms: Empirical results, *Evolutionary Computation* **8**(2): 173–195.
- Zitzler, E., Laumanns, M. & Thiele, L. (2001). SPEA2: Improving the strength Pareto evolutionary algorithm for multiobjective optimization, *Technical Report 103*, Computer Engineering and Networks Laboratory (TIK), Swiss Federal Institute of Technology (ETH) Zurich, Gloriastrasse 35, CH-8092 Zurich, Switzerland.
- Zitzler, E. & Thiele, L. (1999). Multiobjective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength Pareto approach, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* **3**(4): 257–271.
- Zitzler, E., Thiele, L., Laumanns, M., Fonseca, C. M. & Fonseca, V. G. (2003). Performance assessment of multiobjective optimizers: An analysis and review, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* **7**(2): 117–132.