

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**Instituto de Ciências Exatas**  
**Programa de Pós-Graduação em Estatística**

Javier Eduardo Beltrán Bautista

**Sobre um sistema de fila com chegadas programadas sujeitas a perturbações  
do tipo Pareto**

Belo Horizonte  
2025

Javier Eduardo Beltrán Bautista

**Sobre um sistema de fila com chegadas programadas sujeitas a perturbações  
do tipo Pareto**

**Versão Final**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Estatística.

Orientador: Sokol Ndreca

Belo Horizonte  
2025

2025, Javier Eduardo Beltrán Bautista.  
Todos os direitos reservados

Beltrán Bautista, Javier Eduardo.

B453s Sobre um sistema de fila com chegadas programadas sujeitas a perturbações do tipo Pareto [recurso eletrônico] / Javier Eduardo Beltrán Bautista – 2025.  
1 recurso online (71 f. il., color.) : pdf.

Orientador: Sokol Ndreca.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Estatística.

Referências: f. 60-65

1. Estatística - Teses. 2. Teoria das filas - Teses. I. Ndreca, Sokol. I. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Estatística. III. Título.

CDU 519.2(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irénquer Vismeg Lucas Cruz  
CRB 6/819 - Universidade Federal de Minas Gerais - ICEx



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

UFMG

## FOLHA DE APROVAÇÃO

**“Sobre um sistema de fila com chegadas programadas sujeitas a perturbações do tipo Pareto”**

**JAVIER EDUARDO BELTRAN BAUTISTA**

Dissertação submetida à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ESTATÍSTICA, como requisito para obtenção do grau de Mestre em ESTATÍSTICA, área de concentração ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE.

Aprovada em 26 de fevereiro de 2025, pela banca constituída pelos membros:

Prof. Sokol Ndreca (EST/UFMG)

Prof. Bernardo Nunes Borges de Lima (MAT/UFMG)



Documento assinado digitalmente

RODRIGO BERNARDO DA SILVA

Data: 26/02/2025 11:31:29-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Rodrigo Bernardo da Silva (EST/UFPB)



Documento assinado digitalmente

ROGER WILLIAM CAMARA SILVA

Data: 26/02/2025 12:35:56-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Roger William Câmara Silva (EST/UFMG)

Belo Horizonte, 26 de fevereiro de 2025.

*Dedicatória A Myriam e Luis, meus pais, pelo amor incondicional e pela confiança em cada passo que dou. Ao meu orientador, Sokol, pela orientação constante e apoio generoso. E a todos que me incentivaram a sonhar alto e atravessar fronteiras: obrigado por me encorajar a vir para o Brasil.*

# Agradecimentos

Agradeço à Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), ao Instituto de Ciências Exatas e ao Departamento de Estatística por me acolherem, bem como à Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa que foi fundamental para minha estadia e que permitiu minha dedicação exclusiva à formação como mestre. Também agradeço a todas as outras agências que, direta ou indiretamente, permitem e fortalecem a estrutura de um ambiente acadêmico.

Agradeço a todos os professores do Departamento de Estatística da UFMG que participaram da minha formação. Um agradecimento especial ao meu professor orientador, Dr. Sokol Ndreca. Quero também agradecer aos meus colegas que ajudaram na minha adaptação, em particular ao meu colega e amigo Álvaro Alexander Burbano Moreno, que me acompanhou e foi uma ajuda fundamental com o idioma.

Agradeço à senhora Myriam Bautista Pacheco, ao senhor Luis Eduardo Beltrán Romero, meus queridos pais, e ao meu irmão Diego Armando Beltrán, que sempre me apoiaram. Agradeço também a todas as pessoas que, de uma forma ou de outra, me ajudaram ou me incentivaram a iniciar este processo.

*“Todos os modelos são errôneos, mas alguns são úteis.”*  
(George Box)

# Resumo

Dissertamos sobre os resultados e demonstrações do artigo de Araman et al. [2], que estuda sistemas de filas sujeitos a chegadas programadas afetadas por perturbações e tempos de atendimento determinísticos. Nesse contexto, a chegada  $n$ -ésima está programada para o instante  $n$ , mas ocorre efetivamente no tempo  $n + \xi_n$ , onde  $\xi_n$  são variáveis aleatórias *i.i.d.*. O comportamento do sistema com um único servidor é analisado assumindo que as perturbações seguem distribuições de caudas pesadas similares à distribuição de Pareto, com média finita. Apesar das caudas pesadas das perturbações, o sistema mantém intensidade unitária e apresenta caudas leves, o que indica que as perturbações individuais não dominam o comportamento global do sistema. O artigo analisa o comportamento da fila resultante de uma soma de variáveis aleatórias independentes do tipo Bernoulli. Sob a suposição de perturbações com média finita, o uso dessas variáveis Bernoulli permite decompor o processo de chegadas programadas. Essa representação facilita a caracterização matemática da influência das perturbações, além de ajudar a obter uma aproximação para a carga de trabalho em estado estacionário, tanto no caso de carga crítica quanto no caso de tráfego pesado.

**Palavras-chave:** tráfego programado; distribuição de cauda pesada; tráfego intenso; assintótica de caudas.

# Abstract

We discuss the results and proofs presented in the article by Araman et al. [2], which studies queueing systems with scheduled arrivals affected by perturbations and deterministic service times. In this context, the  $n$ -th arrival is scheduled at time  $n$  but actually occurs at time  $n + \xi_n$ , where  $\xi_n$  are i.i.d. random variables. The behavior of the single-server system is analyzed under the assumption that the perturbations follow heavy-tailed distributions similar to the Pareto distribution, with finite mean. Despite the heavy tails of the perturbations, the system maintains unit intensity and exhibits light tails, indicating that individual perturbations do not dominate the global behavior of the system. The paper analyzes the queue behavior resulting from a sum of independent Bernoulli random variables. Assuming perturbations with finite mean, the use of these Bernoulli-type variables allows for a decomposition of the scheduled arrival process. This representation facilitates the mathematical characterization of the influence of perturbations and aids in obtaining an approximation for the stationary workload queue, both in the critically loaded case and in the heavy traffic scenario.

**Keywords:** scheduled traffic; heavy-tailed distribution; heavy traffic; tail asymptotics.

# Lista de Figuras

2.1	Ilustração do conceito diretamente Riemann integrável . . . . .	17
2.2	Representação de um sistema de filas . . . . .	21
2.3	Carga de trabalho . . . . .	24
3.1	Programação e Realização das Chegadas em um Sistema de Filas . . . . .	25
5.1	$N(t)$ gerado com perturbações de caudas leves . . . . .	56
5.2	$N(t)$ gerado com perturbações de caudas pesadas . . . . .	57
5.3	Estimador de Hill para o processo $N(t)$ e suas perturbações . . . . .	57
5.4	Trajetórias de $W(t)$ com perturbações Pareto(1.0025,0.05) . . . . .	58
5.5	$W(t)$ com perturbações Pareto e $\alpha > 1$ ate o tempo 100 . . . . .	59
5.6	$W(t)$ com perturbações de caudas pesadas . . . . .	59

# Lista de Tabelas

2.1	Lista de Símbolos e Notações . . . . .	15
2.2	Notação de Fila - A/B/m/k/d . . . . .	22

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>Conceitos elementares</b>	<b>15</b>
2.1	Notação e Convenções . . . . .	15
2.2	Fundamentos Matemáticos . . . . .	16
2.3	Processos estocásticos . . . . .	19
2.4	Modelos de filas . . . . .	21
2.4.1	Características de uma fila . . . . .	21
2.4.2	Carga de trabalho . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Tráfego programado</b>	<b>25</b>
3.1	Propriedades do Processo $N(t)$ . . . . .	26
3.1.1	Uma representação do processo $N(\cdot)$ . . . . .	33
3.2	Somas Bernoulli . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Processo de Trabalho</b>	<b>47</b>
4.1	Carga de trabalho sobre carga crítica . . . . .	47
4.2	Carga de trabalho sobre tráfego pesado . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Simulação</b>	<b>56</b>
5.1	Simulação do processo $N(t)$ . . . . .	56
5.2	Simulação do processo $W(t)$ . . . . .	58
	<b>Referências</b>	<b>61</b>
	<b>Apêndice A</b>	<b>64</b>
A.1	Demonstrações de resultados . . . . .	64
	<b>Apêndice B</b>	<b>67</b>

# 1 Introdução

A teoria de filas é um ramo da matemática aplicada que se concentra na análise de sistemas onde entidades, pessoas, veículos ou dados chegam a um ponto de entrada e precisam esperar antes de serem processados ou atendidos. Esse campo é fundamental para a otimização de recursos e para melhoria da eficiência em diversas áreas, como telecomunicações, logística, manufatura, gestão de serviços, entre outras. No entanto, os sistemas reais frequentemente apresentam uma complexidade que nem sempre pode ser capturada pelos modelos tradicionais.

Os modelos clássicos de teoria de filas, introduzidos por Erlang [12, 13, 14] e desenvolvidos posteriormente por Pollaczek [25], Khinchin [19] que derivaram a fórmula de Pollaczek-Khinchin para o modelo  $M/G/1$  (notação de Kendall ver Tabela 2.2), a qual estabelece a distribuição do tempo de espera sob chegadas do tipo Poisson e tempos de serviço gerais. Em 1953, Kendall [18] introduziu a notação  $A/B/C$ , amplamente adotada até os dias atuais, e desenvolveu a análise do modelo  $GI/M/1$ , baseiam-se em suposições de chegadas descritas por um processo de renovação e tempos de serviço independentes. Especificamente, sistemas de filas onde a sequência  $X = (X_n : n \geq 1)$  de tempos entre chegadas é composta por variáveis aleatórias não negativas, frequentemente modeladas por variáveis aleatórias exponenciais (chegadas descritas por um processo de Poisson) tempo de serviço com distribuições exponenciais. Esses modelos de fila com um único servidor, que são representados pela notação de Kendall como  $M/M/1$ , têm sido amplamente aplicados em sistemas como redes de telecomunicações, transporte e manufatura.

Araman et al. [2] discutem como esses modelos nem sempre refletem a complexidade dos sistemas reais, onde os padrões de chegada podem ser influenciados por horários predefinidos ou perturbações externas. Isso motivou o desenvolvimento de modelos mais avançados que incorporam elementos determinísticos e estocásticos.

Em muitas aplicações práticas, as chegadas não são completamente aleatórias, mas sujeitas a horários programados. Por exemplo, em sistemas logísticos, os envios geralmente são planejados em intervalos regulares; em sistemas de saúde, os pacientes têm consultas agendadas; e no transporte, voos e trens seguem horários predefinidos. Esses sistemas programados estão expostos a perturbações aleatórias, como atrasos causados por trânsito ou interrupções operacionais, entre outros.

Assumindo que o tempo de serviço é igual para todos os elementos que entram no

sistema, o  $n$ -ésimo elemento programado para entrar no sistema chega no tempo  $n$ , mas, na prática, chega no tempo  $n + \xi_n$ , onde  $\xi = (\xi_n : n \geq 0)$  é uma sequência de variáveis aleatórias estacionárias. Assim, as  $\xi_n$  representam as perturbações sobre a programação.

O conceito de chegadas programadas foi introduzido por Winsten [31]. Posteriormente, Mercer [24, 23] ampliou esse enfoque ao incluir distribuições mais gerais de tempos de serviço e chegadas em lotes. Esses primeiros estudos demonstraram que filas alimentadas por tráfego programado tendem a exibir um comportamento mais regular em comparação com os modelos de renovação tradicionais.

Distribuições com caudas pesadas trazem contribuições importantes na teoria da probabilidade e na suas aplicações em sistemas de filas. Kingman [20] estabeleceu os fundamentos dos teoremas de tráfego pesado para um sistema de filas com um servidor, mostrando que a aproximação gaussiana nem sempre é adequada quando as chegadas ou serviços apresentam variância infinita.

Chen e Zhao [9] investigaram o uso de modelos para processos de pouso de aeronaves. Este trabalho destaca a importância da coordenação em sistemas programados e demonstra que perturbações limitadas resultam em tempos de espera finitos, mesmo em condições críticas.

Doi et al. [11] analisaram filas com tempos de chegada programados e distribuições exponenciais, investigando as distribuições estacionárias de tempos de espera. Embora o sistema programado seja mais restrito, pois qualquer chegada que ocorra após o previsto para o próximo atendimento é descartada, compartilha semelhanças com o artigo de Araman et al. [2] ao estudar sistemas organizados sob diferentes hipóteses estatísticas.

Araman e Glynn [3] demonstraram que o movimento browniano fracionário pode surgir de modelos de tráfego programado com perturbações de caudas pesadas, estabelecendo o comportamento limite para sistemas sob condições de tráfego pesado. Por outro lado, Araman e Glynn [4] analisaram sistemas de filas onde o tráfego programado está sujeito a perturbações de caudas ultrapesadas, investigando o comportamento assintótico desses sistemas em regime de tráfego pesado.

O artigo objeto desta dissertação é intitulado ‘*On a single server queue fed by a scheduled traffic with Pareto perturbations*’, de Araman et al. [2], onde os autores analisaram um sistema de filas programadas e obtiveram os seguintes resultados:

1. Propriedades importantes do processo de contagem  $N(t)$  que conta o número de chegadas no intervalo  $[0, t]$ , como o comportamento de seu valor esperado, bem como a estrutura da covariância, mostrando que esta é sempre negativa.
2. Estabelecem uma representação útil do processo  $N(t)$  quando as perturbações possuem média finita, o que ajuda a demonstrar que a diferença entre o número de chegadas e o número programado no intervalo  $[0, t]$  não cresce indefinidamente, ver o Teorema 3.1.1.

3. Analisam o comportamento das caudas do processo  $N(t)$  quando as perturbações possuem caudas pesadas, ver o Teorema 3.2.2.
4. O comportamento da cauda do processo de carga de trabalho  $W(t)$  quando a taxa de chegadas é igual à taxa de serviços e, além disso, as perturbações seguem uma distribuição de Pareto, ver o Teorema 4.1.1.
5. Quando as perturbações seguem uma distribuição de Pareto e a taxa de chegadas é menor que a taxa de serviço, estabelecem a distribuição de equilíbrio do sistema, ver o Teorema 4.2.1.

Nossa dissertação se inicia pelos conceitos prévios necessários, seguidos da análise dos resultados e demonstrações referentes às propriedades do processo de contagem associado às entradas do sistema. Depois analisando os resultados relacionados ao processo de carga de trabalho, e finalizando com algumas simulações que ilustram os resultados estudados.

## 2 Conceitos elementares

Neste capítulo, estabeleceremos definições e notações básicas relacionadas à teoria de filas e à análise de sistemas de atendimento. Trabalhando com o modelo proposto no artigo de Araman et al. [2], exploraremos alguns resultados de interesse que são fundamentais para a compreensão e aplicação dessa teoria.

### 2.1 Notação e Convenções

A tabela a seguir apresenta os principais símbolos utilizados ao longo do estudo, juntamente com suas respectivas explicações.

Símbolo	Descrição
$a_n$	Sequência de números indexados por $n$
$\nu \ll \mu$	a medida $\nu$ é absolutamente contínua com respeito à medida $\mu$
$\mathbb{P}$	Medida de probabilidade
$\mathbb{E}(X)$	Valor esperado de $X$
$\text{Var}(X)$	Variância de $X$
$\text{Cov}(X, Y)$	Covariância entre $X$ e $Y$
$\lfloor t \rfloor$	Parte inteira do número $t$
$\stackrel{D}{=}$	Igualdade em distribuição
$\stackrel{\Delta}{=}$	Igualdade por definição
$f(x) \sim g(x)$	indica que $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1$ quando $x \rightarrow \infty$
$\Rightarrow$	convergência em distribuição
$\mathbb{N}$	Números naturais $\{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	Números inteiros $\{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}_+$	Números inteiros não negativos $\{0, 1, 2, \dots\}$
$v.a.$	Variável aleatória
$i.i.d.$	independente e identicamente distribuída
$q.c.$	quase certamente

Tabela 2.1: Lista de Símbolos e Notações

## 2.2 Fundamentos Matemáticos

Nesta seção, apresentamos as definições e os resultados teóricos básicos que serão utilizados ao longo do documento.

**Definição 2.2.1.** (Apostol [1]) Dadas duas sequências de números reais  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  tais que  $b_n \geq 0$  para todo  $n$ , escrevemos

$$a_n = O(b_n) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty \text{ (lê-se: "a}_n \text{ é O grande de } b_n \text{")}$$

se existe uma constante  $M > 0$  tal que  $|a_n| \leq Mb_n$  para todo  $n$ .

Escrevemos

$$a_n = o(b_n) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty \text{ (lê-se: "a}_n \text{ é o pequeno de } b_n \text{")}$$

se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ .

**Nota.** Uma equação da forma  $a_n = c_n + O(b_n)$  significa  $a_n - c_n = O(b_n)$ . Analogamente,  $a_n = c_n + o(b_n)$  significa que  $a_n - c_n = o(b_n)$ . A vantagem desta notação está no fato de que permite substituir certos tipos de desigualdades por equações. Por exemplo,

$$0 \leq \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx - D \leq f(n)$$

implica

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(x) dx + D + O(f(n)),$$

onde  $f$  é uma função decrescente definida em  $[1, \infty)$  e  $0 \leq D \leq f(1)$ .

**Definição 2.2.2.** (Asmussen [5]) A equação de renovação é a equação de convolução  $Z = z + F * Z$

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t Z(t-u)F(du), \quad t \geq 0,$$

onde  $Z$  é uma função desconhecida em  $[0, \infty)$ ,  $z$  uma função conhecida em  $[0, \infty)$  e  $F$  como uma medida não negativa conhecida.

**Definição 2.2.3.** (Asmussen [5]) Suponha que  $z$  na equação de renovação  $Z = z + F * Z$  seja não negativa, e para  $h > 0$  definimos

$$\overline{z}_h(x) = \sup_{y \in I_n^h} z(y), \quad \underline{z}_h(x) = \inf_{y \in I_n^h} z(y), \quad x \in I_n^h = [nh, (n+1)h].$$

Chamamos então  $z$  de diretamente Riemann integrável (d.R.i.) se  $\int_0^\infty \overline{z}_h(x) dx$  for finito para algum (e então para todo)  $h$ , e  $\int_0^\infty \overline{z}_h - \int_0^\infty \underline{z}_h \rightarrow 0$  quando  $h \rightarrow 0$ . Para funções com suporte compacto, esse conceito é o mesmo que integrabilidade de Riemann. Se  $z$  assumir também valores negativos, dizemos que  $z$  é d.R.i. se tanto  $z^+$  quanto  $z^-$  o forem.

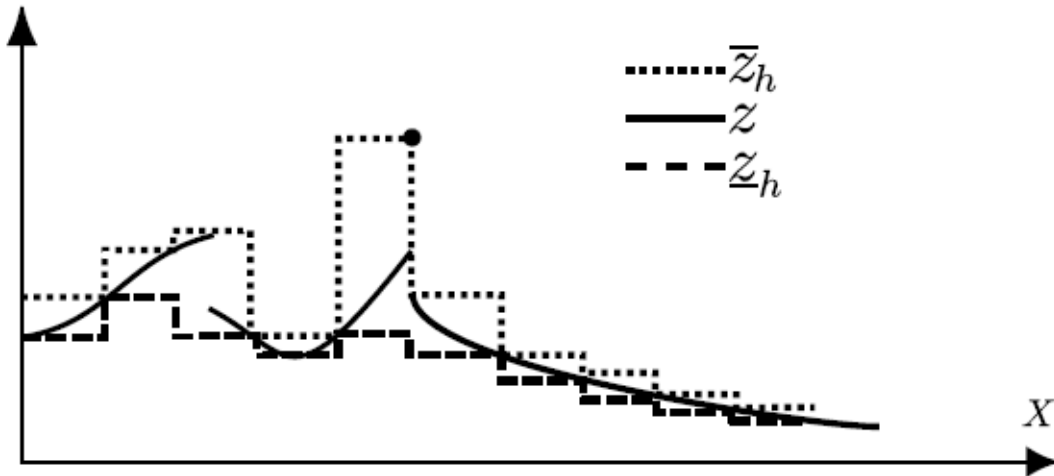


Figura 2.1: Ilustração do conceito diretamente Riemann integrável

Fonte: Asmussen [5].

A Figura 2.1 ilustra o conceito de diretamente integrável no sentido de Riemann (d.R.i.), mostrando uma função  $z(x)$  (linha contínua) acompanhada de duas funções em degraus que a limitam superior e inferiormente:  $\bar{z}_h(x)$ , que toma o supremo de  $z$  em intervalos  $[nh, (n+1)h)$ , e  $\underline{z}_h(x)$ , que toma o ínfimo nesses mesmos intervalos.

**Definição 2.2.4.** (Folland [16]) Seja  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  um espaço mensurável e defina

$$L^+ \triangleq \text{o espaço de todas as funções mensuráveis de } X \text{ a } [0, \infty).$$

**Definição 2.2.5.** (Folland [16]) Sejam dois espaços de medida  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  e  $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ . Se  $E \subset X \times Y$ , para  $x \in X$  e  $y \in Y$ , definimos a **seção-x**  $E_x$  e a **seção-y**  $E^y$  de  $E$  por

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}, \quad E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}.$$

Além disso, se  $f$  é uma função em  $X \times Y$ , definimos a **seção-x**  $f_x$  e a **seção-y**  $f^y$  de  $f$  por

$$f_x(y) = f^y(x) = f(x, y).$$

Assim, por exemplo,  $(\chi_E)_x = \chi_{E_x}$  e  $(\chi_E)^y = \chi_{E^y}$ .

**Teorema 2.2.1.** (Folland [16]) **Teorema de Fubini-Tonelli.** Suponha que  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  e  $(Y, \mathcal{N}, \nu)$  são espaços mensuráveis  $\sigma$ -finitos.

(a) (Tonelli) Se  $f \in L^+(X \times Y)$ , então as funções  $g(x) = \int f_x d\nu$  e  $h(y) = \int f^y d\mu$  estão em  $L^+(X)$  e  $L^+(Y)$ , respectivamente, e

$$\int f d(\mu \times \nu) = \int \left( \int f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

$$= \int \left( \int f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

(b) (Fubini) Se  $f \in L^1(\mu \times \nu)$ , então  $f_x \in L^1(\nu)$  para quase todo  $x \in X$  e  $f^y \in L^1(\mu)$  para quase todo  $y \in Y$ . As funções definidas quase em todo lugar  $g(x) = \int f_x d\nu$  e  $h(x) = \int f^y d\mu$  estão em  $L^1(\mu)$  e  $L^1(\nu)$ , respectivamente, e a equação (2.38) é válida.

**Teorema 2.2.2. Teorema da Convergência Limitada** (Royden e Fitzpatrick [29])

Seja  $\{f_n\}$  uma sequência de funções mensuráveis em um conjunto  $E$  de medida finita. Suponha que  $\{f_n\}$  seja uniformemente limitada em  $E$ , ou seja, existe um número  $M \geq 0$  tal que  $|f_n| \leq M$  em  $E$  para todo  $n$ . Se  $\{f_n\} \rightarrow f$  pontualmente em  $E$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n = \int_E f.$$

**Definição 2.2.6.** (Feller [15]) A sequência  $\{X_n\}$  é estocasticamente limitada se para cada  $\varepsilon > 0$  existe um constante  $a$  tal que para todo  $n$  suficientemente grande,

$$P\{|X_n| > a\} < \varepsilon.$$

Essa noção aplica-se igualmente a distribuições em dimensões superiores.

**Definição 2.2.7.** (Resnick [27]) Uma função mensurável  $U : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  é regularmente variável em  $\infty$  com índice  $\rho \in \mathbb{R}$  (escrito  $U \in RV_\rho$ ) se, para  $x > 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^\rho.$$

Chamamos  $\rho$  de expoente de variação.

**Exemplo 2.2.1.** (Resnick [27]) A função canônica  $\rho$ -variável é  $x^\rho$ . As funções  $\log(1+x)$ ,  $\log \log(e+x)$  são lentamente variáveis, assim como  $\exp\{(\log x)^\alpha\}$ , com  $0 < \alpha < 1$ . Qualquer função  $U$  tal que  $\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) \triangleq U(\infty)$  existe, é positiva e finita, é lentamente variável.

As seguintes funções não são regularmente variáveis:  $e^x$ ,  $\sin(x+2)$ . Note que  $[\log x]$  é lentamente variável, mas  $\exp([\log x])$  não é regularmente variável.

Em aplicações de probabilidade, estamos interessados em distribuições cujas caudas sejam regularmente variáveis. Exemplos são

$$1 - F(x) = x^{-\alpha}, \quad x \geq 1, \quad \alpha > 0,$$

e a distribuição de valor extremo

$$\Phi_\alpha(x) = \exp\{-x^{-\alpha}\}, \quad x \geq 0.$$

$\Phi_\alpha(x)$  tem a propriedade

$$1 - \Phi_\alpha(x) \sim x^{-\alpha}$$

A densidade de Cauchy  $f(x) = (\pi(1 + x^2))^{-1}$  tem uma função de distribuição  $F$  com a propriedade

$$1 - F(x) \sim (\pi x)^{-1}.$$

**Definição 2.2.8.** (Resnick [27]) O estimador de Hill é definido como segue: Assuma, para simplificação, que as observações  $X_1, \dots, X_n$  são não negativas. Para  $1 \leq i \leq n$ , denote  $X_{(i)}$  como o  $i$ -ésimo maior valor de  $X_1, \dots, X_n$ , de modo que

$$X_{(1)} \geq X_{(2)} \geq \dots \geq X_{(n)}.$$

O estimador de Hill de  $1/\alpha$ , onde  $\alpha$  é o  $RV_{-\alpha}$ , baseado nas  $k$  estatísticas de ordem superiores, é definido como

$$H_{k,n} \triangleq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log \frac{X_{(i)}}{X_{(k+1)}}.$$

## 2.3 Processos estocásticos

**Definição 2.3.1.** (Blanco et al. [7]) Um processo estocástico real é uma coleção de variáveis aleatórias  $\{X_t; t \in T\}$  definidas em um espaço de probabilidade comum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  com valores em  $\mathbb{R}$ .  $T$  é chamado de conjunto de índices do processo ou espaço paramétrico, que geralmente é um subconjunto de  $\mathbb{R}$ . O conjunto de valores que a variável aleatória  $X_t$  pode assumir é chamado de espaço de estados do processo e é denotado por  $S$ . A função definida para cada  $\omega \in \Omega$ ,

$$\begin{aligned} X_t(\omega) &: T \rightarrow S \\ &t \mapsto X_t(\omega), \end{aligned}$$

é chamada de trajetória amostral do processo ao longo do tempo ou uma realização do processo estocástico.

**Definição 2.3.2.** (Blanco et al. [7]) (**Distribuições Finito-Dimensionais do Processo**) Seja  $\{X_t; t \in T\}$  um processo estocástico e  $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subset T$  onde  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ . A distribuição finito-dimensional do processo é definida por:

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) := P(X_{t_1} < x_1, \dots, X_{t_n} < x_n), \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n.$$

**Definição 2.3.3.** (Blanco et al. [7]) (**Incrementos Independentes**) Se, para todos  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$  tais que  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , as variáveis aleatórias  $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  são independentes (ou, equivalentemente,  $X_{t+s} - X_t$  é independente de  $X_s$  para  $s < t$ ), então o processo  $\{X_t; t \in T\}$  é dito ser um processo com incrementos independentes.

**Definição 2.3.4.** (Blanco et al. [7]) (**Incrementos Estacionários**) Um processo estocástico  $\{X_t; t \in T\}$  é dito ter incrementos estacionários se  $X_{t_2+\tau} - X_{t_1+\tau}$  tem a mesma distribuição que  $X_{t_2} - X_{t_1}$  para todas as escolhas de  $t_1, t_2$  e  $\tau > 0$ .

**Definição 2.3.5.** (Blanco et al., [7]) (**Processo Estacionário**) Se, para qualquer  $t_1, t_2, \dots, t_n$  tais que  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , as distribuições conjuntas do vetor de variáveis aleatórias  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  e  $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h})$  são as mesmas para todo  $h > 0$ , então o processo estocástico  $\{X_t; t \in T\}$  é dito ser um processo estocástico estacionário de ordem  $n$  (ou simplesmente um processo estacionário). O processo estocástico  $\{X_t; t \in T\}$  é dito ser um processo estocástico estritamente estacionário ou processo estritamente estacionário se a propriedade acima for satisfeita para todo  $n$ .

**Definição 2.3.6.** (Ross [28]) Um processo estocástico  $\{N(t), t \geq 0\}$  é dito um processo de contagem se  $N(t)$  representa o número total de ‘eventos’ que ocorreram até o tempo  $t$ . Portanto, um processo de contagem  $N(t)$  deve satisfazer:

(i)  $N(t) \geq 0$ .

(ii)  $N(t)$  tem valor inteiro.

(iii) Se  $s < t$ , então  $N(s) \leq N(t)$ .

(iv) Para  $s < t$ ,  $N(t) - N(s)$  é igual ao número de eventos que ocorreram no intervalo  $(s, t]$ .

**Definição 2.3.7.** (Resnick [26]) Seja  $\{X_t, t \in T\}$  uma família definidas em um espaço de probabilidade comum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Se, para cada  $t$  em algum conjunto de índices  $T$ ,

$$X_t : (\Omega, \mathcal{B}) \mapsto (\Omega', \mathcal{B}'),$$

então denotamos

$$\sigma(X_t, t \in T) = \bigvee_{t \in T} \sigma(X_t),$$

como a menor  $\sigma$ -álgebra que contém todas as  $\sigma(X_t)$ .

**Lema 2.3.1.** (Resnick [26]) Seja  $\{\mathcal{B}_t, t \in T\}$  uma família de  $\sigma$ -álgebras independentes. Seja  $S$  um conjunto de índices e suponha que para  $s \in S$ ,  $T_s \subset T$  e  $\{T_s, s \in S\}$  sejam conjuntos disjuntos. Agora defina

$$\mathcal{B}_{T_s} = \bigvee_{t \in T_s} \mathcal{B}_t.$$

Então,  $\{\mathcal{B}_{T_s}, s \in S\}$  é uma família de  $\sigma$ -álgebras independentes.

## 2.4 Modelos de filas

As filas estão presentes em diversos contextos do cotidiano, e seu funcionamento, de maneira geral, é simples. Há uma fonte de chegadas, como, por exemplo, clientes em uma loja. Os indivíduos ou objetos que chegam aguardam por um serviço, e, como nem todos podem ser atendidos simultaneamente, forma-se uma fila de espera. O serviço, então, consiste em atender os elementos que esperam na fila, e, após serem atendidos, eles saem do sistema. Esse processo é ilustrado no gráfico abaixo.

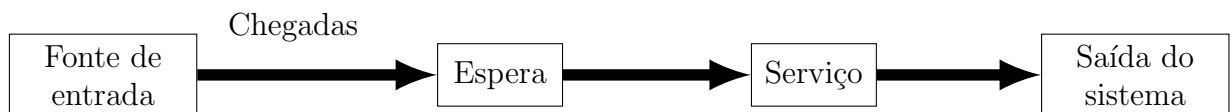


Figura 2.2: Representação de um sistema de filas

### 2.4.1 Características de uma fila

Para compreender os diferentes cenários em que surgem filas de espera é essencial estabelecer modelos que permitam uma caracterização precisa desses sistemas. Em seguida, serão exploradas, com base em Magalhães [21] e Asmussen [5], as principais características de um modelo de filas, incluindo elementos como a chegada de clientes, a disciplina de atendimento e a capacidade do sistema, fundamentais para a análise e gestão eficaz de sistemas de espera.

- a) **Chegadas:** O processo de chegada descreve como os usuários entram no sistema. Se as chegadas ocorrem em intervalos fixos de tempo, o processo é considerado determinístico. Caso as chegadas sejam aleatórias, é necessário descrever suas propriedades probabilísticas. Na teoria clássica das filas os tempos entre chegadas são *i.i.d.* Assim, se  $T_n$  denota o tempo decorrido entre a  $n$ -ésima e a  $(n + 1)$ -ésima chegada, então as  $T_n$  são variáveis aleatórias *i.i.d.*.
- b) **Tempo de serviço:** Para simplificar a análise, geralmente assume-se que o tempo de atendimento é independente para cada cliente no sistema e também é independente do processo de chegada. Além disso, assim como no processo de chegada, o tempo de atendimento pode ser determinístico ou aleatório. Quando consideramos o tempo de atendimento do cliente  $n$ , denotado por  $U_n$ , podemos afirmar que os  $U_n$  são variáveis aleatórias *i.i.d.*.
- c) **Número de servidores:** O total de servidores paralelos para atendimento no sistema deve ser especificado.

d) **Disciplina:** É a maneira como os usuários serão atendidos. As disciplinas mais comuns são:

- FIFO: Primeiro a entrar, primeiro a sair (First In, First Out)
- LIFO: Último a chegar, primeiro a sair (Last In, First Out)
- SIRO: Serviço em ordem aleatória (Service In Random Order)
- PS: Compartilhamento de Processador (Processor Sharing)
- RR: Sistema de rodízio (Round Robin)

e) **Capacidade do sistema:** É uma limitação intrínseca do sistema e refere-se ao número máximo de elementos ou clientes que ele pode suportar simultaneamente, incluindo aqueles que estão em atendimento e os que estão em espera

A notação de processos de filas mais utilizada foi proposta por Kendall [18] em 1953 é representada por uma série de símbolos, como  $A/B/m/k/M$ . Neste contexto,  $A$  indica a distribuição do processo de chegada ao sistema,  $B$  representa a distribuição de probabilidade para o tempo de serviço,  $m$  é o número de canais de serviços paralelos (servidores),  $k$  refere-se à capacidade do sistema e  $M$  denota a disciplina de filas. Abaixo são apresentadas algumas características de um processo de filas utilizando a notação de Kendall.”

Características	Símbolo	Explicação
Distribuição de Tempo Entre Chegadas (A) e Distribuição de Tempo de Serviço (B)	M	Exponencial
	D	Determinístico
	$E_k$	Tipo $k$ -Erlang ( $k = 1, 2, \dots$ )
	$H_k$	Mistura de $k$ exponenciais
	PH	Tipo Fase
	S	Programadas
	G	Geral
Número Paralelo de Servidores ( $m$ )	$m \in \mathbb{N}$	
Restrição na capacidade do sistema ( $k$ )	$k \in \mathbb{N}$	
Disciplina da fila (d)	FCFS	First Come First Served
	LCFS	Last Come First Served
	RSS	Seleção Aleatória por Serviço
	PR	Prioridade
	GD	Disciplina Geral

Tabela 2.2: Notação de Fila -  $A/B/m/k/d$

**Definição 2.4.1.** (Asmussen [5]) Há uma medida do desempenho de um sistema de filas, chamada intensidade de tráfego, definida para um sistema  $GI/G/m$  da seguinte forma:

$$\rho = \frac{\mathbb{E}U_k}{m\mathbb{E}T_k}.$$

Portanto,  $\rho$  é aproximadamente a razão entre o número de chegadas e o número de serviços disponíveis.

- Se  $\rho > 1$ , o número de chegadas excede o número de serviços, então espera-se que a fila cresça indefinidamente.
- Se  $\rho < 1$ , mesmo uma fila inicial muito longa acabará desaparecendo, no sentido de que nem todos os servidores estarão ocupados o tempo todo.

## 2.4.2 Carga de trabalho

**Definição 2.4.2.** (Asmussen [5]) Em relação a um sistema de filas, surgem diversos processos estocásticos. Em particular, os que são definidos a seguir correspondem ao sistema  $GI/G/s$ , embora possam ser generalizados para outros modelos.

- $W_n$ : Define o tempo de espera real (ou apenas tempo de espera) do cliente  $n$ , ou seja, o tempo desde a chegada ao sistema até o início do serviço.
- $V_t$ : A carga de trabalho no sistema no tempo  $t$ , ou seja, o tempo total que os  $m$  servidores têm para trabalhar para esvaziar o sistema. Assim,  $V_t$  é a soma dos tempos residuais de atendimento dos clientes que estão sendo atendidos atualmente e dos clientes que aguardam atendimento. No caso  $m = 1$  de um único servidor, isso é simplesmente o tempo necessário para o servidor esvaziar o sistema, desde que nenhum novo cliente chegue, ou seja, o tempo de espera de um cliente hipotético que chegasse logo após  $t$ . Por essa razão,  $V_t$  é às vezes denotado como o tempo de espera virtual no tempo  $t$  para  $m = 1$ . No gráfico abaixo é apresentada uma representação da carga de trabalho de um único servidor (tempo de espera virtual).

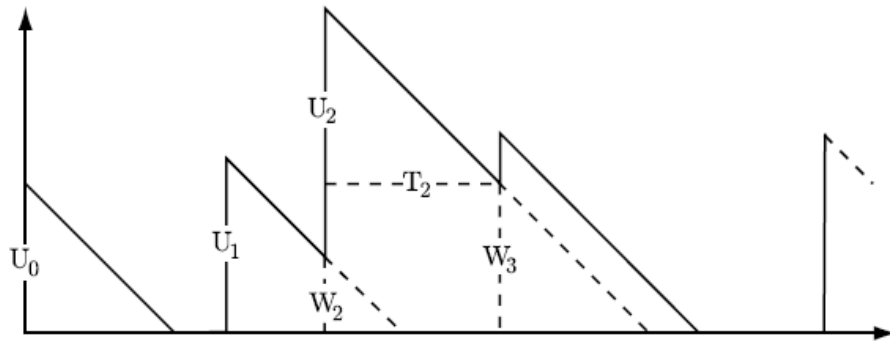


Figura 2.3: Carga de trabalho

Fonte: Asmussen [5]

A Figura 2.3 ilustra o processo de carga de trabalho  $V(t)$  em um sistema com um único servidor e taxa de serviço constante  $c$ . Cada salto  $U_n$  corresponde à chegada de um cliente que adiciona uma quantidade de trabalho, enquanto a carga diminui linearmente devido ao atendimento contínuo.

Os valores  $W_n$  representam o tempo de espera virtual imediatamente antes de cada chegada. O valor  $T_2$  indica o tempo entre as chegadas do cliente 2 e do cliente 3, durante o qual o sistema continua processando a carga existente.

Essa representação permite visualizar como a carga de trabalho se acumula ou se dissipa conforme o padrão de chegadas e a taxa de serviço.

### 3 Tráfego programado

Neste capítulo é apresentado o tráfego programado junto com algumas de suas propriedades. Em seguida, é introduzida uma representação que facilita sua análise, e são discutidos diversos resultados que permitem uma melhor compreensão do seu comportamento.

**Definição 3.0.1.** *Seja  $(\xi_j, j \in \mathbb{Z})$  uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. (de perturbações). Dados os  $\xi_j$ 's, para qualquer subconjunto mensurável da reta real,  $A$ , definimos a medida aleatória  $\tilde{N}$  via*

$$\tilde{N}(A) = \sum_j \mathcal{I}(j + \xi_j + U \in A),$$

onde  $U$  é uma v.a. uniforme em  $[0, 1]$  independente das  $\xi_j$ 's.

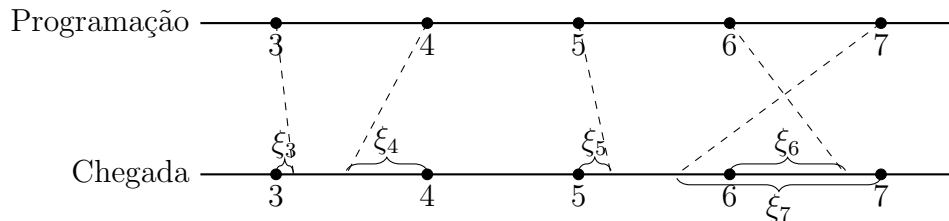


Figura 3.1: Programação e Realização das Chegadas em um Sistema de Filas

Na Figura 3.1, temos uma representação gráfica de uma parte do sistema. No segmento denominado “Programação” estão indicados os tempos programados para a entrada dos indivíduos no sistema, enquanto o segmento denominado “Chegada” representa os tempos reais de entrada. As diferenças entre os horários programados e os tempos de chegada, denotadas por  $\xi_j$ , correspondem às perturbações que afetam as entradas no sistema.

A variável aleatória  $U$ , que é independente das  $\xi_i$ , pode ser considerada como um ponto de início aleatório de chegada no tempo. Além disso, é ela que nos permite estabelecer que  $\tilde{N}$  é estacionário no tempo, o que é necessário para assegurar que  $\tilde{N}(\cdot+t) \stackrel{D}{=} \tilde{N}(\cdot)$ , onde  $A+t \triangleq \{x+t : x \in A\}$ .

Apresentamos abaixo uma demonstração completa, não fornecida no artigo original. Seja  $z \in A + t$ , então existe  $x$  tal que  $x = z - t$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tilde{N}(A + t) \leq n) &= \mathbb{P}\left(\sum_j \mathcal{I}(j + \xi_j + U \in (A + t)) \leq n\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_j \mathcal{I}(j + \xi_j + U - t \in A) \leq n\right). \end{aligned}$$

A translação de  $U$  por um valor  $t$ , seja  $V = U - t$ , faz com que a variável  $V$  assumam valores no intervalo  $[-t, 1 - t]$ . Agora, tomando  $U' = V \bmod 1$ , estamos essencialmente reajustando esta distribuição no intervalo  $[0, 1]$ , o que implica que  $U'$  tem distribuição uniforme em  $[0, 1]$ . Além disso, como a soma é sobre todos os inteiros  $j \in \mathbb{Z}$ , estamos considerando todos os possíveis deslocamentos  $j + \xi_j$ , cobrindo completamente a reta real. Logo garante que a distribuição se mantenha invariante,

$$\mathbb{P}\left(\sum_j \mathcal{I}(j + \xi_j + U - t \in A) \leq n\right) = \mathbb{P}\left(\sum_j \mathcal{I}(j + \xi_j + U' \in A) \leq n\right),$$

o que equivale a dizer que  $\tilde{N}(A + t) \stackrel{D}{=} \tilde{N}(A)$ .

Por simplicidade, denotaremos o processo de contagem  $N = (N(t), t \geq 0)$  através do nosso processo  $\tilde{N}$  como  $N(t) = \tilde{N}((0, t])$ .

### 3.1 Propriedades do Processo $N(t)$

Nesta seção, apresentaremos e discutiremos as propriedades do processo de tráfego programado. Serão exploradas as características fundamentais e os comportamentos esperados desses processos. Em primeiro lugar, examinaremos o comportamento da esperança do processo  $N(t)$ , onde será demonstrado que ele possui intensidade unitária, independentemente das perturbações terem ou não média finita. De fato,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}N(t) &= \mathbb{E}\left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{I}(j + \xi_j + U \in (0, t])\right) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(\mathcal{I}(j + \xi_j + U \in (0, t])) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(j + \xi_j + U \in (0, t]) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \mathbb{P}(j + \xi_0 + x \in (0, t]) dx \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_j^{j+1} \mathbb{P}(r + \xi_0 \in (0, t]) dr = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(r + \xi_0 \in (0, t]) dr \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(r \in (-\xi_0, t - \xi_0]) dr = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[\mathcal{I}(r \in (-\xi_0, t - \xi_0])] dr. \\ &= \mathbb{E} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{I}(r \in (-\xi_0, t - \xi_0]) dr = \mathbb{E}(t) = t. \end{aligned}$$

Na terceira linha, foi feita uma mudança de variável, considerando  $r = j + x$ . Na última linha, dado que a função indicadora é limitada e mensurável, é possível aplicar o Teorema de Fubini-Tonelli (Teorema 2.2.1).

Como vimos, o processo  $N(t)$  tem uma esperança igual a  $t$ , o que implica que o processo possui uma intensidade unitária, ou seja, espera-se, em média, uma chegada por unidade de tempo. Isso se verifica independentemente da natureza das caudas das perturbações  $\xi_j$ , sejam elas leves ou pesadas. Assim, mesmo que as perturbações individuais sigam distribuições de caudas pesadas, o processo  $N(t)$ , apresenta caudas leves. Isso se reflete no fato de que a função geradora de momentos de  $N(t)$  é sempre finita, uma característica distintiva de processos com caudas leves. Efetivamente temos,

$$\begin{aligned}
\log(\mathbb{E} \exp(\theta N(t))) &= \log \mathbb{E} \exp \left( \theta \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{I}(j + \xi_j + U \in (0, t]) \right) \\
&= \log \prod_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \exp (\theta \mathcal{I}(j + \xi_j + U \in (0, t])) \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \log \mathbb{E} \exp (\theta \mathcal{I}(j + \xi_0 + U \in (0, t])) \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \log \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E} \exp (\theta \mathcal{I}(j + \xi_0 + U \in (0, t]) | U = x) f_U(x) dx \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \log \int_0^1 \mathbb{E} \exp (\theta \mathcal{I}(j + \xi_0 + U \in (0, t]) dx \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \log \int_j^{j+1} (e^\theta \mathbb{P}(r + \xi_0 \in (0, t]) + e^0(1 - \mathbb{P}(r + \xi_0 \in (0, t]))) dr \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \log \left( 1 + (e^\theta - 1) \int_j^{j+1} \mathbb{P}(r + \xi_0 \in (0, t]) dr \right). \\
&\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} (e^\theta - 1) \int_j^{j+1} \mathbb{P}(r + \xi_0 \in (0, t]) dr \\
&\leq (e^\theta - 1) \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_j^{j+1} \mathbb{P}(r + \xi_0 \in (0, t]) dr = (e^\theta - 1)t.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Para desigualdade (3.1) pelo fato que para  $x \in (-1, \infty)$  temos que  $\log(x + 1) \leq x$ , e fazendo  $x = (e^\theta - 1) \int_j^{j+1} \mathbb{P}(r + \xi_0 \in (0, t]) dr$ , obtemos o resultado.

Para entender como estão relacionadas as variações de  $N(t)$  em diferentes momentos do tempo, faz-se a análise de sua covariância. Para isso, definimos  $\Delta N(t) = N(t) - N(t - 1)$ , que representa o número de chegadas no intervalo  $(t - 1, t]$ ,

$$\begin{aligned}
\Delta N(t) &= N(t) - N(t - 1) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{I}(j + \xi_j + U \in (0, t]) - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{I}(j + \xi_j + U \in (0, t - 1]) \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} (\mathcal{I}(j + \xi_j + U \in (0, t - 1]) + \mathcal{I}(j + \xi_j + U \in (t - 1, t]))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{I}(j + \xi_j + U \in (0, t - 1]) \\
& = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{I}(j + \xi_j + U \in (t - 1, t]) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{I}(j - [t] + \xi_j + U \in (t - [t] - 1, t - [t])) \\
& \stackrel{D}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{I}(k + \xi_k + U \in (t - [t] - 1, t - [t])).
\end{aligned}$$

Especificamente, estuda-se  $\mathbb{C}ov(\Delta N(1), \Delta N(t))$ , que mede a relação linear entre o número de chegadas no intervalo inicial  $(0, 1]$  e em qualquer outro intervalo  $(t - 1, t]$ . Temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}ov(\Delta N(1), \Delta N(t)) &= \mathbb{E}(\Delta N(1)\Delta N(t)) - \mathbb{E}\Delta N(1)\mathbb{E}\Delta N(t) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\Delta N(1)\Delta N(t)|U)) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(\Delta N(1)|U))\mathbb{E}(\mathbb{E}(\Delta N(t)|U)) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\Delta N(1)\Delta N(t)|U)) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(\Delta N(1)|U)\mathbb{E}(\Delta N(t)|U)) \\
&\quad + \mathbb{E}(\mathbb{E}(\Delta N(1)|U)\mathbb{E}(\Delta N(t)|U)) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(\Delta N(1)|U))\mathbb{E}(\mathbb{E}(\Delta N(t)|U)).
\end{aligned}$$

Agora, agrupando os dois primeiros termos e introduzindo-os na esperança, e agrupando os dois últimos, temos o seguinte

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}ov(\Delta N(1), \Delta N(t)) &= \mathbb{E}\mathbb{C}ov((\Delta N(1), \Delta N(t))|U) + \mathbb{C}ov(\mathbb{E}(\Delta N(1)|U), \mathbb{E}(\Delta N(t)|U)). \quad (3.2)
\end{aligned}$$

$\mathbb{E}(\Delta N(t)|U)$  é o valor esperado condicional do número de chegadas no intervalo  $(t - 1, t]$ , dado  $U$ . Esse valor depende apenas de  $t - [t]$ , ou seja, da parte fracionária de  $t$ , já que  $U$ , uma variável uniforme em  $[0, 1]$ , afeta como as chegadas se distribuem dentro de cada intervalo. Como  $U$  é aleatório, os padrões de chegadas em diferentes intervalos são independentes de onde começamos a contar o tempo, e o que importa é como estamos posicionados no intervalo atual.

O segundo termo de (3.2),  $\mathbb{C}ov(\mathbb{E}[\Delta N(1)|U], \mathbb{E}[\Delta N(t)|U])$ , mede a correlação causada pela origem comum  $U$  e não tende a zero quando  $t \rightarrow \infty$ , já que  $U$  é fixo e mantém uma dependência residual entre as chegadas em diferentes intervalos. Logo, o termo mais relevante é  $\mathbb{C}ov(\Delta N(1), \Delta N(t)|U)$ , que mede a relação entre os incrementos no intervalo inicial  $(0, 1]$  e o intervalo  $(t - 1, t]$ , condicionado à posição aleatória  $U$ . Para  $t \geq 2$  temos,

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}ov((\Delta N(1), \Delta N(t))|U) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\Delta N(1)|U)\mathbb{E}(\Delta N(t)|U)) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(\Delta N(1)|U))\mathbb{E}(\mathbb{E}(\Delta N(t)|U)) \\
&= \mathbb{E} \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{I}(j + \xi_j + U \in (0, 1]) \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \in (t - 1, t]) \middle| U \right) \\
&\quad - \mathbb{E} \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{I}(j + \xi_j + U \in (0, 1]) \middle| U \right) \mathbb{E} \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{I}(j + \xi_j + U \in (t - 1, t]) \middle| U \right) \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(\mathcal{I}(j + \xi_j + U \in (0, 1]), i + \xi_i + U \in (t - 1, t])|U) \\
&\quad - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(\mathcal{I}(j + \xi_j + U \in (0, 1])|U) \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(\mathcal{I}(i + \xi_i + U \in (t - 1, t])|U)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}((j + \xi_j + U \in (0, 1], i + \xi_i + U \in (t - 1, t]) | U) \\
&- \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}((j + \xi_j + U \in (0, 1] | U) \mathbb{P}((i + \xi_i + U \in (t - 1, t]) | U),
\end{aligned}$$

se  $i = j$  e  $t \geq 2$  então  $j + \xi_j + U \in (0, 1] \cap i + \xi_i + U \in (t - 1, t] = \emptyset$ ,

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}ov((\Delta N(1), \Delta N(t)) | U) &= \sum_{i \neq j} \mathbb{P}((j + \xi_j + U \in (0, 1], i + \xi_i + U \in (t - 1, t]) | U) \\
&- \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}((j + \xi_j + U \in (0, 1] | U) \mathbb{P}((j + \xi_j + U \in (t - 1, t]) | U) \\
&- \sum_{i \neq j} \mathbb{P}((j + \xi_j + U \in (0, 1] | U) \mathbb{P}((i + \xi_i + U \in (t - 1, t]) | U).
\end{aligned}$$

Logo pela independência das  $\xi_i$

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}ov((\Delta N(1), \Delta N(t)) | U) \\
&= - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(j + \xi_0 + U \in (0, 1] | U) \mathbb{P}(j + \xi_0 + U \in (t - 1, t] | U). \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Portanto, a  $\mathbb{C}ov((\Delta N(1), \Delta N(t)) | U)$  é não positiva. Isso pode ser interpretado como uma característica do tráfego programado, se um número anormalmente alto de “clientes” chega em um intervalo de tempo, espera-se que em um intervalo posterior o número de chegadas seja baixo. Intuitivamente, isso ocorre porque um grande número de chegadas reduz a quantidade de clientes disponíveis para entrar no sistema no intervalo posterior. Vamos agora estudar o comportamento assintótico da covariância.

**Proposição 3.1.** (Araman et al. [2]) (i) Suponha que  $\xi_0$  tem uma densidade limitada  $f$  para a qual existem constantes positivas  $c_1, c_2, \alpha_1, \alpha_2$  tais que

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim c_1 x^{-\alpha_1 - 1} \\
f(-x) &\sim c_2 x^{-\alpha_2 - 1}
\end{aligned}$$

Se  $\alpha_1 < \alpha_2$ , então

$$\mathbb{C}ov((\Delta N(1), \Delta N(n)) | U) \sim -c_1 n^{-\alpha_1 - 1}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Se  $\alpha_2 < \alpha_1$ , então

$$\mathbb{C}ov((\Delta N(1), \Delta N(n)) | U) \sim -c_2 n^{-\alpha_2 - 1}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Se  $\alpha_1 = \alpha_2$ , então

$$\mathbb{C}ov((\Delta N(1), \Delta N(n)) | U) \sim -(c_1 + c_2) n^{-\alpha_1 - 1},$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

(ii) Suponha que  $\xi_0$  tem uma densidade limitada  $f$  para a qual existem constantes positivas  $d_1, d_2, \beta_1, \beta_2$  tais que:  $f(x) \sim d_1 e^{-\beta_1 x}$ ,  $f(-x) \sim d_2 e^{-\beta_2 x}$

Se  $\beta_1 < \beta_2$ , então

$$\begin{aligned} \text{Cov}((\Delta N(1), \Delta N(n))|U) &\sim -ne^{-\beta_1 n} \frac{d_1}{\beta_1} (1 - e^{-\beta_1}) \\ &\quad \times \sum_j e^{\beta_1(j+U)} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (j-1, j]|U) \end{aligned}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Se  $\beta_2 < \beta_1$ , então

$$\begin{aligned} \text{Cov}((\Delta N(1), \Delta N(n))|U) &\sim -ne^{-\beta_2 n} \frac{d_2}{\beta_2} (1 - e^{-\beta_2}) \\ &\quad \times \sum_j e^{\beta_2(j+U)} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (j-1, j]|U) \end{aligned}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Se  $\beta_1 = \beta_2$ , então

$$\text{Cov}((\Delta N(1), \Delta N(n))|U) \sim -ne^{-\beta_1(n+1)} \frac{d_1 d_2}{\beta_1^2} (1 - e^{-\beta_1})^2$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Usando a Expressão (3.3) temos que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\Delta N(1), \Delta N(n))|U &= - \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(i + \xi_0 + U \in (0, 1]|U) \mathbb{P}(i + \xi_0 + U \in (n-1, n]|U) \\ &= - \sum_{j > -\frac{n}{2}} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (j-1, j]|U) \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (n+j-1, n+j]|U) \\ &\quad - \sum_{j \leq -\frac{n}{2}} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (j-1, j]|U) \mathbb{P}(j + \xi_0 + U \in (n+j-1, n+j]|U). \end{aligned}$$

Fazendo a seguinte alteração na segunda soma  $k = j + n$  temos

$$\begin{aligned} \text{Cov}((\Delta N(1), \Delta N(n))|U) &= - \sum_{j > -\frac{n}{2}} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (j-1, j]|U) \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (n+j-1, n+j]|U) \\ &\quad - \sum_{k \leq \frac{n}{2}} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (k-n-1, k-n]|U) \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (k-1, k]|U). \end{aligned}$$

Definimos  $g_n(x) = n^{\alpha_1+1} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (n+j-1, n+j] | U = x)$ , além disso, para cada valor fixo de  $j$ , a sequência  $g_n(x)$  converge pontualmente quando  $n \rightarrow \infty$ . A função de densidade de  $\xi_0$ , que tem comportamento  $x^{-\alpha_1-1}$ , garante que  $g_n(x)$  é uniformemente limitada. Então, pelo Teorema da Convergência Limitada (Teorema 2.2.2),

$$n^{\alpha_1+1} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (n+j-1, n+j] | U) \rightarrow c_1.$$

Agora, para  $n^{\alpha_1+1} \sum_{j > -\frac{n}{2}} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (j-1, j]|U) \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (n+j-1, n+j]|U)$ ,

como cada termo da soma é uma probabilidade condicional e todas estão uniformemente

limitadas, pois  $n^{\alpha_1+1}\mathbb{P}(\xi_0 + U \in (n + j - 1, n + j] | U)$ , para  $j > -\frac{n}{2}$  é uniformemente limitada, então aplicamos novamente o Teorema da Convergência Limitada (Teorema 2.2.2). Raciocinando como antes, quando  $n \rightarrow \infty$ , temos que

$$n^{\alpha_1+1} \sum_{j > -\frac{n}{2}} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (j - 1, j] | U) \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (n + j - 1, n + j] | U) \rightarrow c_1.$$

Raciocinando da mesma forma, quando  $n \rightarrow \infty$ , temos que

$$n^{\alpha_2+1} \sum_{k \leq \frac{n}{2}} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (k - n - 1, k - n] | U) \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (k - 1, k] | U) \rightarrow c_2,$$

o que prova a parte (i).

Para a parte (ii), supomos que  $\beta_1 < \beta_2$ . Para  $j$  grande o suficiente, o valor de  $U$  é pequeno em comparação com  $j$ , de modo que a influência de  $U$  no intervalo é menor. Temos,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-\beta_1 j} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (j - 1, j] | U) \\ = \sum_{j < 0} e^{-\beta_1 j} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (j - 1, j] | U) + \sum_{j \geq 0} e^{-\beta_1 j} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (j - 1, j] | U) < \infty, \end{aligned}$$

além disso, também temos que

$$e^{\beta_1 n} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (n + j - 1, n + j] | U) \approx e^{\beta_1 n} \int_{n+j-U-1}^{n+j-U} d_1 e^{-\beta_1 x} dx \rightarrow \frac{d_1}{\beta_1} (e^{-\beta_1} - 1) e^{-\beta_1(j+U)},$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Como  $e^{\beta_1 n} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (j - 1, j] | U)$  com  $j \geq 0$ , é uniformemente limitada, aplicando o Teorema da Convergência Limitada (Teorema 2.2.2),

$$\begin{aligned} e^{\beta_1 n} \sum_{j > -n} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (j - 1, j] | U) \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (n + j - 1, n + j] | U) \\ = \sum_{j > -n} e^{-\beta_1 j} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (j - 1, j] | U) e^{\beta_1(n+j)} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (n + j - 1, n + j] | U) \\ \rightarrow \frac{d_1}{\beta_1} (e^{\beta_1} - 1) e^{\beta_1 U} \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-\beta_1 j} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (j - 1, j] | U), \end{aligned} \quad (3.4)$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Raciocinamos analogamente para concluir

$$\begin{aligned} e^{\beta_2 n} \sum_{k < 0} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (k - n - 1, k - n] | U) \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (k - 1, k + j] | U) \\ \rightarrow \frac{d_2}{\beta_2} (1 - e^{\beta_2}) e^{-\beta_2 U} \sum_{k < 0} e^{\beta_2 k} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (k - 1, k] | U). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dos resultados acima concluímos

$$e^{\beta_1 n} \mathbf{Cov}((\Delta N(1), \Delta N(n)) | U) \rightarrow \frac{d_1}{\beta_1} (e^{\beta_1} - 1) \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-\beta_1(j-U)} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (j - 1, j] | U).$$

No caso de  $\beta_2 < \beta_1$  raciocinamos de forma idêntica e obtemos

$$e^{\beta_2 n} \mathbf{Cov}((\Delta N(1), \Delta N(n)) | U) \rightarrow \frac{d_2}{\beta_2} (e^{\beta_2} - 1) \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-\beta_2(j-U)} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (j - 1, j] | U).$$

Para o caso em que  $\beta_1 = \beta_2$ , reescrevemos a covariância como

$$\begin{aligned} \text{Cov}((\Delta N(1), \Delta N(n))|U) &= - \sum_{j \geq 0} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (j-1, j]|U) \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (n+j-1, n+j]|U) \\ &\quad - \sum_{-n < j < 0} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (j-1, j]|U) \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (n+j-1, n+j]|U) \\ &\quad - \sum_{k < 0} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (k-n-1, k-n]|U) \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (k-1, k]|U). \end{aligned}$$

Usando um raciocínio semelhante e os resultados dados em (3.4) e (3.5) temos que o primeiro termo é de ordem  $O(e^{-\beta_1 n})$  e o terceiro termo é de ordem  $O(e^{-\beta_2 n})$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Reescrevendo agora o segundo termo da seguinte forma

$$\begin{aligned} &- \sum_{-n < j < 0} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (j-1, j]|U) \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (n+j-1, n+j]|U) \\ &= - \sum_{-n < j < -\frac{n}{2}} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (j-1, j]|U) \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (n+j-1, n+j]|U) \\ &\quad - \sum_{-\frac{n}{2} < j < 0} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (j-1, j]|U) \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (n+j-1, n+j]|U) \quad (3.6) \\ &= - \sum_{0 < k < \frac{n}{2}} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (k-n-1, k-n]|U) \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (k-1, k]|U) \\ &\quad - \sum_{-\frac{n}{2} < j < 0} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (j-1, j]|U) \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (n+j-1, n+j]|U). \end{aligned}$$

A partir dos resultados anteriores, podemos escrever o segundo termo acima como

$$- \sum_{-\frac{n}{2} < j < 0} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (j-1, j]|U) \frac{d_1}{\beta_1} (e^{\beta_1} - 1) e^{-\beta_1(n+j-U)} (1 + o(1)),$$

quando  $n \rightarrow \infty$  o termo  $o(1)$  permanece pequeno de forma uniforme para todos os valores de  $j$  no intervalo  $-\frac{n}{2} \leq j < 0$ . Assim, essa soma é igual a

$$-(1 + o(1)) e^{-\beta_1 n} \sum_{-\frac{n}{2} < j < 0} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (j-1, j]|U) \frac{d_1}{\beta_1} (e^{\beta_1} - 1) e^{-\beta_1(j-U)}.$$

Quando  $\beta_1 = \beta_2$  para valores grandes e negativos de  $j$ , essa expressão converge

$$e^{\beta_1 j} \mathbb{P}(\xi_0 + U \in (j-1, j]|U) \rightarrow \frac{d_2}{\beta_1} (e^{\beta_1} - 1) e^{-\beta_1 U} \quad j \rightarrow -\infty.$$

Para valores grandes de  $n+j$ , a probabilidade de que  $\xi_0 + U$  caia no intervalo  $(n+j-1, n+j]$  é aproximada por

$$\mathbb{P}(\xi_0 + U \in (n+j-1, n+j]|U) \approx d_1 e^{-\beta_1(n+j)} \quad n \rightarrow \infty.$$

Logo, do anterior, analisando as somatórias em (3.6), podemos concluir

$$\text{Cov}((\Delta N(1), \Delta N(n))|U) \sim -ne^{-\beta_1(n+1)} \frac{d_1 d_2}{\beta_1^2} (1 - e^{-\beta_1})^2.$$

□

A Proposição 3.1 estabelece que as autocorrelações condicionais de nosso processo de contagem (isto é, as correlações entre os valores deste processo em diferentes momentos no tempo) são sempre somáveis, independentemente dos valores dos parâmetros  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , ambos maiores que 0. A somabilidade dessas autocorrelações implica que a dependência temporal do processo de contagem diminui rápido o suficiente para garantir a convergência da série de autocorrelações. Mesmo que as perturbações tenham média infinita (o que pode ocorrer quando  $0 < \alpha_1 \leq 1$  ou  $0 < \alpha_2 \leq 1$ ), as autocorrelações ainda são somáveis. Como mostrado em [3], o comportamento assintótico do processo de contagem será dominado pela cauda mais pesada das duas, ou seja, pelo menor dos valores  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . Ao normalizar utilizando o termo  $n^{(1-\min\{\alpha_1, \alpha_2\})/2}$ , o processo de contagem  $N(\cdot)$  converge em distribuição para um movimento browniano fracionário com parâmetro de Hurst  $H < 1/2$ . Para maior informação sobre o movimento browniano fracionário ver Pavliotis [6], Mandelbrot e Van [22] ou Blanco e Garzon [8].

### 3.1.1 Uma representação do processo $N(\cdot)$

Seja  $\mathcal{E}(t)$  o número total de clientes que chegaram antes do previsto até o tempo  $t$ , ou seja, clientes adiantados em relação ao seu horário programado. Por outro lado, definimos  $\mathcal{L}(t)$  como o número total de clientes que, embora estivessem programados para chegar antes de  $t$ , chegarão apenas após esse instante, representando os clientes atrasados.

**Definição 3.1.1.** *Se  $\mathbb{E}|\xi_0| < \infty$  então vale a seguinte representação:*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \sum_{i+U>t} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \leq t), \\ \mathcal{L}(t) &= \sum_{i+U \leq t} \mathcal{I}(i + \xi_i + U > t). \end{aligned}$$

**Observação 3.1.1.** (i) *A v.a.  $\mathcal{E}(t)$  é finito se e somente se  $\mathbb{E}\xi_0^- \triangleq \mathbb{E} \max(-\xi_0, 0) < \infty$*   
(ii) *A v.a.  $\mathcal{L}(t)$  é finito se e somente se  $\mathbb{E}\xi_0^+ \triangleq \mathbb{E} \max(\xi_0, 0) < \infty$*

*Demonstração.* De fato,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \sum_{i+U>t} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \leq t) = \sum_{i+U-t>0} \mathcal{I}(\xi_i \leq t - U - i) \\ &= \sum_{j>0} \mathcal{I}(\xi_i \leq -j) = \sum_{j>0} \mathcal{I}(-\xi_i \geq j) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{I}(\xi_i^- > i). \end{aligned}$$

Observe que  $\sum_{i \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{I}(\xi_i^- > i) < \infty$  se e somente se,  $\xi_i > i$  ocorre finitas vezes. Como as  $\xi_i$  são *i.i.d.* temos que  $\sum_{i \in \mathbb{Z}^+} \mathbb{P}\{\xi_i > i\} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^+} \mathbb{P}\{\xi_0 > i\}$ , portanto por Borel Cantelli  $\sum_{i \in \mathbb{Z}^+} \mathbb{P}\{\xi_0 > i\} < \infty$  se e somente se  $\mathbb{E}\xi_0 < \infty$ . Para a parte (ii) o raciocínio é o mesmo.  $\square$

Além disso, o processo  $((\mathcal{E}(t), \mathcal{L}(t)), t \in \mathbb{R})$  é estacionário no tempo, o que significa que suas propriedades estatísticas não dependem do instante de observação  $t$ .

**Proposição 3.2.** (Araman et al. [2]) Se  $\mathbb{E}|\xi_0| < \infty$  então para  $t \geq 0$

$$N(t) - t = \left( \sum_{i+U \in (0,t]} 1 \right) - t + (\mathcal{E}(t) - \mathcal{L}(t)) - (\mathcal{E}(0) - \mathcal{L}(0)).$$

*Demonstração.* De fato,

$$\begin{aligned} N(t) - t &= \left( \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \in (0, t]) \right) - t \\ &= -t + \sum_{i+U \in (0,t]} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \in (0, t]) + \sum_{i+U > t} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \in (0, t]) \\ &\quad + \sum_{i+U \leq 0} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \in (0, t]) \\ &= -t + \sum_{i+U \in (0,t]} (1 - \mathcal{I}(i + \xi_i + U > t) - \mathcal{I}(i + \xi_i + U < 0)) \\ &\quad + \sum_{i+U > t} (\mathcal{I}(i + \xi_i + U \leq t) - \mathcal{I}(i + \xi_i + U < 0)) \\ &\quad + \sum_{i+U \leq 0} (\mathcal{I}(i + \xi_i + U > 0) - \mathcal{I}(i + \xi_i + U > t)) \\ &= \left( \sum_{i+U \in (0,t]} 1 \right) - t + \sum_{i+U > t} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \leq t) \\ &\quad - \left( \sum_{i+U \in (0,t]} \mathcal{I}(i + \xi_i + U > t) + \sum_{i+U \leq 0} \mathcal{I}(i + \xi_i + U > t) \right) \\ &\quad - \left( \sum_{i+U \in (0,t]} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \leq 0) + \sum_{i+U > t} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \leq 0) \right) \\ &\quad + \sum_{i+U \leq 0} \mathcal{I}(i + \xi_i + U > 0) \\ &= \left( \sum_{i+U \in (0,t]} 1 \right) - t + \left( \sum_{i+U > t} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \leq t) - \sum_{i+U \leq t} \mathcal{I}(i + \xi_i + U > t) \right) \\ &\quad - \left( \sum_{i+U > 0} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \leq 0) - \sum_{i+U \leq 0} \mathcal{I}(i + \xi_i + U > 0) \right) \end{aligned}$$

$$= \left( \sum_{i+U \in (0,t]} 1 \right) - t + (\mathcal{E}(t) - \mathcal{L}(t)) - (\mathcal{E}(0) - \mathcal{L}(0)).$$

□

A Proposição 3.2 estabelece uma representação fundamental para o processo de contagem  $N(t)$ , sob a suposição de que  $E|\xi_0| < \infty$ . De forma simplificada, a proposição decompõe-se  $N(t)$  em três partes:

- Clientes programados: A soma  $\sum_{i+U \in (0,t]} 1$  representa o número de clientes programados para chegar no intervalo  $[0, t]$ .
- Clientes que chegam cedo: A variável  $\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(0)$  conta os clientes que chegaram antes do horário programado no período  $(0, t]$ .
- Clientes que não chegam: A variável  $\mathcal{L}(t) - \mathcal{L}(0)$  conta os clientes programados em  $(0, t]$  que não chegaram.

Assim, o processo  $N(t)$  em qualquer instante  $t$  é dado pelo número de chegadas programadas menos  $t$  (o número esperado), mais a diferença entre chegadas antecipadas e atrasadas.

O seguinte lema será útil para a convergência do processo  $N(n+s) - (n-s)$  com  $s \in [0, 1)$ .

**Lema 3.1.1.** *Suponha que  $\mathbb{E}|\xi_0| < \infty$  então,*

$$\begin{aligned} & (\mathcal{E}(n+s) - \mathcal{E}(0), \mathcal{L}(n+s) - \mathcal{L}(0)) \\ & \stackrel{D}{=} \left( \hat{\mathcal{E}}''(n+s) - \hat{\mathcal{E}}_n - \hat{\mathcal{E}}_n''(n+s), \hat{\mathcal{L}}_n''(n+s) + \mathcal{L}_n''(n+s) - \hat{\mathcal{L}}_n(n+s) \right). \end{aligned}$$

Onde

$$\begin{aligned} \mathcal{E}''(n+s) &\stackrel{\Delta}{=} \sum_{i+U > n+s} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \in (0, n+s]), & \hat{\mathcal{L}}_n''(n+s) &\stackrel{\Delta}{=} \sum_{i+U \in (0, k_n]} \mathcal{I}(i + \xi_i + U > n+s), \\ \hat{\mathcal{E}}_n &\stackrel{\Delta}{=} \sum_{i+U \in (0, k_n]} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \leq 0), & \mathcal{L}_n''(n+s) &\stackrel{\Delta}{=} \sum_{i+U \in (k_n, n+s]} \mathcal{I}(i + \xi_i + U > n+s), \\ \hat{\mathcal{E}}_n''(n+s) &\stackrel{\Delta}{=} \sum_{i+U \in (k_n, n+s]} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \leq 0), & \hat{\mathcal{L}}_n(n+s) &\stackrel{\Delta}{=} \sum_{i+U \leq 0} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \in (0, n+s]). \end{aligned}$$

*Demonstração.* Pode ver o desenvolvimento do resultado em A.1 □

**Teorema 3.1.1.** *(Araman et al. [2]) Suponha que  $\mathbb{E}|\xi_0| < \infty$  e fixe  $s \in [0, 1)$ , então,*

$$N(n+s) - (n+s) \Rightarrow -s + \mathcal{I}(U \leq s) + (\mathcal{E}'(s) - \mathcal{L}'(s)) - (\mathcal{E}(0) - \mathcal{L}(0))$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , onde  $\mathcal{E}'(s)$ ,  $\mathcal{L}'(s)$ ,  $\mathcal{E}(0)$ ,  $\mathcal{L}(0)$  são condicionalmente independentes dado  $U$ , e  $\mathcal{E}'(s) \stackrel{D}{=} \mathcal{E}(0)$ ,  $\mathcal{L}'(s) \stackrel{D}{=} \mathcal{L}(0)$ .

*Demonstração.* Pela Proposição 3.2 temos que

$$N(n-s) - (n+s) = \left( \sum_{i+U \in (0, n+s]} 1 \right) - (n+s) + (\mathcal{E}(n+s) - \mathcal{E}(0)) - (\mathcal{L}(n+s) - \mathcal{L}(0)).$$

Primeiro vamos analisar o termo  $\left( \sum_{i+U \in (0, n+s]} 1 \right) - (n+s)$ , lembrando que  $i \in \mathbb{Z}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i+U \in (0, n+s]} 1 - (n+s) &= \sum_{i \in (-U, n+s-U]} 1 - n - s = \sum_{i=0}^{\lfloor n+s-U \rfloor} 1 - n - s \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} 1 + \mathcal{I}(n+s-U \geq n) - n - s \\ &= n + \mathcal{I}(U \leq s) - n - s \\ &= -s + \mathcal{I}(U \leq s). \end{aligned}$$

Note que podemos usar a Afirmação 3.1.1 para obter o comportamento dos outros termos. Logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \hat{\mathcal{L}}_n''(n+s) | U \right] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{i+U \in (0, k_n]} \mathcal{I}(i + \xi_i + U > n+s) \right] = \sum_{i+U \in (0, k_n]} \mathbb{P}(i + \xi_i + U > n+s | U) \\ &\leq \sum_{i+U \leq k_n} \mathbb{P}(\xi_i > n+s-i-U | U) = \sum_{j+U \leq 0} \mathbb{P}(\xi_j > n+s-j-k_n-U | U) \\ &\leq \sum_{i+U \leq k_n} \mathbb{P}(\xi_0 > n-i-k_n-1 | U). \end{aligned}$$

Por hipótese, temos que  $\mathbb{E}|\xi_0| < \infty$ , o que implica que  $\sum_{i \in \mathbb{Z}_+} \mathbb{P}(\xi_0 > i) < \infty$ . Portanto, a cauda da série tende a zero, ou seja,  $\sum_{i=m}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_0 > i) \rightarrow 0$  quando  $m$  é suficientemente grande, o que demonstra que  $\hat{\mathcal{L}}_n''(n+s) \Rightarrow 0$ . De maneira análoga, obtemos que  $\hat{\mathcal{E}}_n''(n+s) \Rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

As quatro variáveis aleatórias  $(\mathcal{E}''(n+s), \hat{\mathcal{E}}_n, \mathcal{L}''(n+s), \hat{\mathcal{L}}_n(n+s))$  pelo Lema 2.3.1 são condicionalmente independentes, dada a variável aleatória  $U$ . Além disso, note que,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n''(n+s) &= \sum_{i+U \in (k_n, n+s]} \mathcal{I}(i + \xi_i + U > n+s) = \sum_{j+n+U \in (k_n, n+s]} \mathcal{I}(j+n + \xi_{j+n} + U > n+s) \\ &= \sum_{i+U \in (k_n-n, s]} \mathcal{I}(j + \xi_{j+n} + U > s) \\ &\stackrel{D}{=} \sum_{i+U \in (k_n-n, s]} \mathcal{I}(j + \xi_j + U > s) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{i+U \leq s} \mathcal{I}(j + \xi_j + U > s). \end{aligned}$$

O que prova que  $\mathcal{L}_n''(n+s) \Rightarrow \mathcal{L}'(s) \stackrel{D}{=} \mathcal{L}(0)$  quando  $n \rightarrow \infty$  similarmente se prova que  $\mathcal{E}_n''(n+s) \Rightarrow \mathcal{E}'(s)$ . Agora, vejamos  $\hat{\mathcal{E}}_n$  e  $\hat{\mathcal{L}}_n$ , lembrando que  $\frac{k_n}{n} \rightarrow v \in (0, 1)$ , logo  $k_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$

$$\hat{\mathcal{E}}_n = \sum_{i+U \in (0, k_n)} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \leq 0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{i+U > 0} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \leq 0)$$

$$\hat{\mathcal{L}}_n = \hat{\mathcal{L}}(n+s) \sum_{i+U \leq 0} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \in (0, n+s]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{i+U \leq 0} \mathcal{I}(i + \xi_i + U > 0).$$

Logo  $\hat{\mathcal{E}} \Rightarrow \mathcal{E}(0)$  e  $\hat{\mathcal{L}} \Rightarrow \mathcal{L}(0)$ . □

Para obter convergência fraca no comportamento do processo de contagem  $N(t)$ , devemos nos restringir a sequências de tempo da forma  $t_n = n + s$ , onde  $n \rightarrow \infty$ . Isso significa que não podemos tomar  $t \rightarrow \infty$  arbitrariamente e precisamos controlar como  $t$  cresce em relação a  $n$ . A razão para essa restrição é que sem ela o comportamento assintótico do processo  $N(t) - t$  pode depender de  $t - [t]$ , o que impede uma convergência fraca generalizada. Por exemplo, no caso em que  $\xi_0 = 0$  q.c. ilustra por que essa restrição é necessária. Se  $\xi_0 = 0$ , as chegadas de  $N(t)$  coincidem exatamente com os valores inteiros mais  $U$ , onde  $U$  é uma v.a. uniforme  $(0, 1)$ , uma perturbação aleatória. Portanto:

$$N(t) - t = \sum_{i+U \in (0, t]} 1 - t = -(t - [t]) + \mathcal{I}(U \leq t - [t]).$$

O ponto chave aqui é que a distribuição do lado direito depende diretamente de  $t - [t]$ . Isso significa que, embora  $t$  cresça, a distribuição de  $N(t) - t$  continua a depender do valor exato de  $t$ , e não converge fracamente para uma distribuição limite única.

O Teorema 3.1.1 estabelece que,  $N(t) - t$  é estocasticamente limitado em  $t$ . Isso significa que  $N(t) - t$  não cresce indefinidamente; suas flutuações são controladas e permanecem em um intervalo finito para qualquer  $t$ .

Isso contrasta com o processo de renovação com tempo entre chegadas de variância finita. De fato nesse caso, conforme mencionado em Ross [28], o processo  $t^{-\frac{1}{2}}(N(t) - t)$  converge fracamente para uma distribuição normal, portanto as flutuações do processo  $N(t) - t$  são da ordem de  $t^{\frac{1}{2}}$ .

## 3.2 Somas Bernoulli

Os processos  $N$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{L}$  podem ser representados como somas de v.a. independentes tipo Bernoulli. Agora veremos o comportamento das caudas de somas Bernoulli. Para isso, seja  $(\mathcal{I}_j : j \in \mathbb{Z})$  uma família de variáveis aleatórias independentes Bernoulli com as seguintes probabilidades:  $p_j = \mathbb{P}(\mathcal{I}_j = 1) = 1 - \mathbb{P}(\mathcal{I}_j = 0)$ .

**Teorema 3.2.1.** (Araman et al. [2]) *Suponha que existem constantes  $c > 0$  e  $\alpha > 1$  para as quais  $p_n \sim cn^{-\alpha}$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Se  $Z = \sum_{j \geq 0} \mathcal{I}_j$ , então*

$$\frac{1}{z \log z} \log \mathbb{P}(Z > z) \rightarrow -\alpha, \quad \text{quando } z \rightarrow \infty.$$

*Demonstração.* Trabalharemos de forma similar ao que é usual na teoria de grandes desvios, conforme apresentado por Dembo e Zeitouni [10]. Começaremos pela função cumulante

$$\begin{aligned} \psi(\theta) &\triangleq \log \mathbb{E} [\exp(\theta Z)] = \log \mathbb{E} \left[ \exp \left( \theta \sum_{j \geq 0} \mathcal{I}_j \right) \right] = \log \mathbb{E} \left[ \prod_{j \geq 0} \exp(\theta \mathcal{I}_j) \right] \\ &= \log \prod_{j \geq 0} \mathbb{E} [\exp(\theta \mathcal{I}_j)] = \sum_{j \geq 0} \log \mathbb{E} [\exp(\theta \mathcal{I}_j)] = \sum_{j \geq 0} \log (1 - p_j + e^\theta p_j) \\ &= \sum_{j \geq 0} \log (p_j (e^\theta - 1) + 1), \end{aligned} \quad (3.7)$$

a soma converge, pois  $\alpha > 1$ . Escolha  $\theta = \theta(z)$  tal que  $e^{\theta(z)} = rz^\alpha$  com  $r > 0$ , e tomando  $\varepsilon > 0$ ,  $\theta > 0$ , e  $z$  suficientemente grande,

$$\begin{aligned} \psi(\theta(z)) &= \sum_{0 \leq j \leq [\varepsilon z]} \log (p_j (e^{\theta(z)} - 1) + 1) + \sum_{j > [\varepsilon z]} \log (p_j (e^{\theta(z)} - 1) + 1) \\ &\leq \sum_{0 \leq j \leq [\varepsilon z]} \log (p_j (e^{\theta(z)} - 1) + 1) + \sum_{j > [\varepsilon z]} \log ((1 + \varepsilon) c j^{-\alpha} e^{\theta(z)} + 1) \\ &\leq ([\varepsilon z] + 1) \log (rz^\alpha + 1) + \sum_{j > [\varepsilon z]} \log \left( (1 + \varepsilon) r c \left( \frac{j}{z} \right)^{-\alpha} + 1 \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

O segundo termo da equação (3.8), ao ser multiplicado por  $\frac{1}{z}$ , é uma aproximação de somas de Riemann, assim obtemos

$$\frac{1}{z} \sum_{j > [\varepsilon z]} \log \left( (1 + \varepsilon) r c \left( \frac{j}{z} \right)^{-\alpha} + 1 \right) \rightarrow \int_{\varepsilon}^{\infty} \log ((1 + \varepsilon) r c x^{-\alpha} + 1) dx \quad \text{quando } z \rightarrow \infty.$$

Note que a função  $\log ((1 + \varepsilon) r c x^{-\alpha} + 1)$  é diretamente Riemann integrável o que implica que a sua aproximação de Riemann no intervalo  $[\varepsilon, \infty)$  converge. Além disso, sabemos que  $\log(x + 1) < x$ , logo

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \log ((1 + \varepsilon) r c x^{-\alpha} + 1) dx \leq \int_{\varepsilon}^{\infty} (1 + \varepsilon) r c x^{-\alpha} dx = (1 + \varepsilon) r c \left( \frac{\varepsilon^{-\alpha+1}}{1 - \alpha} \right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z \log z} \psi(\theta(z)) &\leq ([\varepsilon] + 1) \log(1 + z^\alpha) + (1 + \varepsilon) r c \left( \frac{\varepsilon^{-\alpha+1}}{1 - \alpha} \right) \frac{1}{z \log z} \\ &\leq \frac{\varepsilon z + 1}{z} \frac{\log(1 + z^\alpha)}{\log z} + \frac{(1 + \varepsilon) r c \varepsilon^{-\alpha+1}}{(1 - \alpha) z \log z}. \end{aligned}$$

Aplicando o limite e utilizando L'Hôpital, obtemos:

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \left[ \frac{\varepsilon z + 1}{z} \frac{\log(1 + z^\alpha)}{\log(z)} + \frac{(1 + \varepsilon)rc\varepsilon^{-\alpha+1}}{(1 - \alpha)z \log z} \right] = \alpha\varepsilon.$$

Assim, concluímos que

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z \log z} \psi(\theta(z)) \leq \varepsilon\alpha.$$

Usando a desigualdade de Markov temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z > z) &= \mathbb{P}(\theta(z)Z > \theta(z)z) = \mathbb{P}(\exp(\theta(z)Z) > \exp(\theta(z)z)) \\ &\leq \frac{\mathbb{E} \exp(\theta(z)Z)}{\exp(\theta(z)z)} = \exp(-\theta(z)z) \exp(\log \mathbb{E}(\exp(\theta(z)Z))) \\ &= \exp(-\theta(z)z + \psi(\theta(z))). \end{aligned} \tag{3.9}$$

De (3.9) temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{z \log z} \log \mathbb{P}(Z > z) &\leq \frac{-\theta(z)}{\log z} + \frac{\psi(\theta(z))}{z \log z} = \frac{-\log(rz^\alpha)}{\log z} + \frac{\psi(\theta(z))}{z \log z} \\ &= -\alpha - \alpha \frac{-\log(r)}{\log z} + \frac{\psi(\theta(z))}{z \log z} \end{aligned}$$

Aplicando o limite, obtemos:

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z \log z} \log \mathbb{P}(Z > z) \leq -\alpha + \varepsilon\alpha = -\alpha(1 - \varepsilon).$$

Como  $\varepsilon$  é arbitrariamente maior que zero, podemos escolhê-lo pequeno o suficiente para completar

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z \log z} \log \mathbb{P}(Z > z) \leq -\alpha. \tag{3.10}$$

Com o resultado anterior, estabelecemos uma cota superior. Agora, para obter a cota inferior, realizaremos uma mudança de medida para  $z > 0$ , visando a ajustar o sistema facilitando a obtenção da cota desejada para o comportamento assintótico do sistema,

$$\tilde{\mathbb{P}}_z(\cdot) = \mathbb{E}(\mathcal{I}(\cdot) \exp(\theta(z)Z - \psi(\theta(z)))).$$

Agora, pelo Teorema de Radon-Nikodým (para mais detalhes veja A.1.1). Além disso,  $\tilde{\mathbb{E}}_z(\cdot)$  o operador de esperança associado à medida  $\tilde{\mathbb{P}}(\cdot)$ , então

$$\mathbb{P}(Z > z) = \tilde{\mathbb{E}}_z(\mathcal{I}(Z > z) \exp(-\theta(z)Z + \psi(\theta(z))))). \tag{3.11}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}_z(Z) &= \int Z d\tilde{\mathbb{P}}_z = \int Z \exp(-\theta(z)Z + \psi(\theta(z))) d\mathbb{P} = \mathbb{E}[Z \exp(-\theta(z)Z + \psi(\theta(z)))] \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}(\exp(\theta(z)Z))} \mathbb{E}(Z \exp(\theta(z)Z)) = \frac{d \log(\mathbb{E}(\exp(\theta(z)Z)))}{d\theta(z)} = \psi'(\theta(z)). \end{aligned}$$

Agora de o resultado obtido em (3.7) temos

$$\tilde{\mathbb{E}}_z(Z) = \psi'(\theta(z)) = \sum_{j \geq 0} \frac{p_j e^{\theta(z)}}{p_j(e^{\theta(z)} - 1) + 1}. \quad (3.12)$$

Então multiplicando (3.12) por  $\frac{1}{z}$  e tomando um  $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{z} \tilde{\mathbb{E}}_z(Z) = \frac{1}{z} \sum_{j \geq 0} \frac{p_j e^{\theta(z)}}{p_j(e^{\theta(z)} - 1) + 1} = \frac{1}{z} \sum_{0 \leq \frac{j}{z} < \varepsilon} \frac{p_j e^{\theta(z)}}{p_j(e^{\theta(z)} - 1) + 1} + \frac{1}{z} \sum_{\frac{j}{z} \geq \varepsilon} \frac{p_j e^{\theta(z)}}{p_j(e^{\theta(z)} - 1) + 1}.$$

Dado que  $p_j z^\alpha \sim c \left(\frac{j}{z}\right)^{-\alpha}$  quando  $j \rightarrow \infty$  e  $z$  grande o suficiente

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} \tilde{\mathbb{E}}_z(Z) &= \frac{1}{z} \sum_{0 \leq \frac{j}{z} < \varepsilon} \frac{p_j e^{\theta(z)}}{p_j(e^{\theta(z)} - 1) + 1} + \frac{1}{z} \sum_{\frac{j}{z} \geq \varepsilon} \frac{\left(\frac{j}{z}\right)^{-\alpha} rc}{\left(\frac{j}{z}\right)^{-\alpha} rc - c j^{-\alpha} + 1} \\ &= \frac{1}{z} \sum_{0 \leq \frac{j}{z} < \varepsilon} \frac{p_j e^{\theta(z)}}{p_j(e^{\theta(z)} - 1) + 1} + \frac{1}{z} \sum_{\frac{j}{z} \geq \varepsilon} \frac{rc}{rc - c z^{-\alpha} + \left(\frac{j}{z}\right)^\alpha}. \end{aligned}$$

Agora tomando  $\frac{j}{z} = x$ , e  $z \rightarrow \infty$  o primeiro termo de cima vai para zero, então

$$\frac{1}{z} \tilde{\mathbb{E}}_z(Z) \rightarrow \int_0^\infty \frac{cr}{cr + x^\alpha} dx. \quad (3.13)$$

Vamos agora ver o valor de  $\tilde{\mathbb{V}}ar_z(Z)$ , calculamos primeiro  $\tilde{\mathbb{E}}_z(Z^2)$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}_z(Z^2) &= \int Z^2 d\tilde{\mathbb{P}} = \int Z^2 \exp(-\theta(z)Z + \psi(\theta(z))) d\mathbb{P} \\ &= \mathbb{E}(Z^2 \exp(-\theta(z)Z + \psi(\theta(z)))) = \frac{\mathbb{E}(Z^2 \exp(\theta(z)Z))}{\mathbb{E}(\exp(\theta(z)Z))}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{V}}ar_z(Z) &= \tilde{\mathbb{E}}_z(Z^2) - (\tilde{\mathbb{E}}_z(Z))^2 = \frac{\mathbb{E}(Z^2 \exp(\theta(z)Z))}{\mathbb{E}(\exp(\theta(z)Z))} - \left( \frac{\mathbb{E}(Z \exp(\theta(z)Z))}{\mathbb{E}(\exp(\theta(z)Z))} \right)^2 \\ &= \frac{\mathbb{E}(Z^2 \exp(\theta(z)Z)) \mathbb{E}(\exp(\theta(z)Z)) - (\mathbb{E}(Z \exp(\theta(z)Z)))^2}{(\mathbb{E}(\exp(\theta(z)Z)))^2} \\ &= \frac{d \left( \frac{\mathbb{E}(Z \exp(\theta(z)Z))}{\mathbb{E}(\exp(\theta(z)Z))} \right)}{d\theta(z)} = \frac{d^2 \log(\mathbb{E} \exp(\theta(z)Z))}{d\theta(z)} = \psi''(\theta(z)). \end{aligned}$$

Portanto, multiplicando por  $\frac{1}{z}$  e tomando um  $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{z} \tilde{\mathbb{V}}ar_z(Z) = \frac{1}{z} \psi''(\theta(z)) = \frac{1}{z} \frac{d^2 \left( \sum_{j \geq 0} \log(p_j(e^{\theta(z)} - 1) + 1) \right)}{d\theta^2(z)} = \frac{1}{z} \frac{d \left( \sum_{j \geq 0} \frac{p_j e^{\theta(z)}}{p_j(e^{\theta(z)} - 1) + 1} \right)}{d\theta(z)}$$

$$= \sum_{j \geq 0} \frac{p_j e^{\theta(z)} (1 - p_j)}{(p_j (e^{\theta(z)} - 1) + 1)^2} = \sum_{0 \leq \frac{j}{z} < \varepsilon} \frac{p_j e^{\theta(z)} (1 - p_j)}{(p_j (e^{\theta(z)} - 1) + 1)^2} + \sum_{\frac{j}{z} \geq \varepsilon} \frac{p_j e^{\theta(z)} (1 - p_j)}{(p_j (e^{\theta(z)} - 1) + 1)^2}.$$

Dado que  $p_j z^\alpha \sim c \left(\frac{j}{z}\right)^{-\alpha}$  quando  $j \rightarrow \infty$  e  $z$  grande o suficiente

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} \tilde{\text{Var}}_z(Z) &= \frac{1}{z} \sum_{0 \leq \frac{j}{z} < \varepsilon} \frac{p_j r z^\alpha (1 - p_j)}{(p_j (r z^\alpha - 1) + 1)^2} + \frac{1}{z} \sum_{\frac{j}{z} \geq \varepsilon} \frac{rc \left(\frac{j}{z}\right)^{-\alpha} (1 - c j^{-\alpha})}{\left(rc \left(\frac{j}{z}\right)^{-\alpha} - c j^{-\alpha} + 1\right)^2} \\ &= \frac{1}{z} \sum_{0 \leq \frac{j}{z} < \varepsilon} \frac{p_j r z^\alpha (1 - p_j)}{(p_j (r z^\alpha - 1) + 1)^2} + \frac{1}{z} \sum_{\frac{j}{z} \geq \varepsilon} \frac{rc \left(\left(\frac{j}{z}\right)^\alpha - c z^{-\alpha}\right)}{\left(rc - z^{-\alpha} + \left(\frac{j}{z}\right)^\alpha\right)^2}. \end{aligned}$$

Agora tomando  $\frac{j}{z} = x$ , e  $z \rightarrow \infty$  o primeiro termo de cima vai para zero, então

$$\frac{1}{z} \tilde{\text{Var}}_z(Z) \rightarrow \int_0^\infty \frac{cr x^\alpha}{(cr + x^\alpha)^2} dx.$$

Para  $\varepsilon > 0$  e  $c > 0$ , podemos selecionar  $r$ , ver Afirmação [A.1.2](#) tal que

$$\int_0^\infty \frac{cr}{cr + x^\alpha} dx = 1 + \varepsilon. \quad (3.14)$$

Pelo fato de que  $\psi(\theta(z)) > 0$ , temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z > z) &= \tilde{\mathbb{E}}_z \mathcal{I}(Z > z) \exp(-\theta(z)Z + \psi(\theta(z))) \\ &\geq \tilde{\mathbb{E}}_z \mathcal{I}(z(1 + 2\varepsilon) > Z > z) \exp(-\theta(z)Z + \psi(\theta(z))) \\ &\geq \tilde{\mathbb{E}}_z \mathcal{I}(z(1 + 2\varepsilon) > Z > z) \exp(-\theta(z)z(1 + 2\varepsilon) + \psi(\theta(z))) \\ &= \exp(-\theta(z)z(1 + 2\varepsilon) + \psi(\theta(z))) \tilde{\mathbb{E}}_z \mathcal{I}(z(1 + 2\varepsilon) > Z > z) \\ &\geq \exp(-\theta(z)z(1 + 2\varepsilon)) \tilde{\mathbb{P}}_z(z(1 + \varepsilon) > Z > z). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Pelos resultados [\(3.13\)](#), [\(3.14\)](#) e para  $z$  suficientemente grande

$$\left| \frac{1}{z} \tilde{\mathbb{E}}_z(Z) - (1 + \varepsilon) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{logo} \quad \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) z \leq \tilde{\mathbb{E}}_z(Z) \leq \left(1 + \frac{3\varepsilon}{2}\right) z.$$

Usando a desigualdade de Chebyshev, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_z((1 + 2\varepsilon)z > Z > z) &= \tilde{\mathbb{P}}_z((1 + 2\varepsilon)z - \tilde{\mathbb{E}}_z(Z) > Z - \tilde{\mathbb{E}}_z(Z) > z - \tilde{\mathbb{E}}_z(Z)) \\ &\geq \tilde{\mathbb{P}}_z\left(\left((1 + 2\varepsilon)z - \left(1 + \frac{3\varepsilon}{2}\right)z > Z - \tilde{\mathbb{E}}_z(Z) > z - \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)z\right)\right) \\ &= \tilde{\mathbb{P}}_z\left(\left|Z - \tilde{\mathbb{E}}_z(Z)\right| < \frac{z\varepsilon}{2}\right) = 1 - \tilde{\mathbb{P}}_z\left(\left|Z - \tilde{\mathbb{E}}_z(Z)\right| < \frac{z\varepsilon}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\geq 1 - \frac{4\text{Var}(Z)}{z^2\varepsilon^2} \rightarrow 1 \quad (3.17)$$

quando  $z \rightarrow \infty$ . Tendo em conta (3.16) e (3.15) então,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z \log(z)} \log \mathbb{P}(Z > z) &\geq \frac{1}{z \log(z)} (-\theta(z)z(1+2\varepsilon)) = \frac{1}{z \log(z)} (-\log(rz^\alpha)z(1+2\varepsilon)) \\ &= -\frac{\log(rz^\alpha)(1+2\varepsilon)}{\log(z)}. \end{aligned}$$

Agora, fazendo  $z \rightarrow \infty$  e pela regra de L'Hôpital, tem-se que

$$\underline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z \log(z)} \log \mathbb{P}(Z > z) \geq -\alpha.$$

O que prova o Teorema. □

Agora, analisamos a cauda de  $Z$ , quando  $Z$  é a diferença de duas somas independentes de Bernoulli,  $\sum_{j \geq 0} \mathcal{I}_j$  e  $\sum_{j < 0} \tilde{\mathcal{I}}_j$ , como mostra o seguinte corolário.

**Corolário 3.2.1.** (Araman et al. [2]) *Suponha que  $\mathbb{E} \sum_{j < 0} \tilde{\mathcal{I}}_j < \infty$  e que existem constantes  $c > 0$  e  $\alpha > 1$  para as quais  $\mathbb{E} \mathcal{I}_n \sim cn^{-\alpha}$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Se  $Z = \sum_{j \geq 0} \mathcal{I}_j - \sum_{j < 0} \tilde{\mathcal{I}}_j$ , então*

$$\frac{1}{z \log z} \log \mathbb{P}(Z > z) \rightarrow -\alpha, \quad \text{quando } z \rightarrow \infty.$$

*Demonstração.* Note que  $\mathbb{P}(Z < z) \leq \mathbb{P}\left(\sum_{j \geq 0} \mathcal{I}_j > z\right)$ . Logo, aplicando o Teorema 3.2.1, obtemos

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z \log z} \log \mathbb{P}(Z > z) \leq -\alpha.$$

Para o limite inferior, observamos que, pela independência, temos

$$\mathbb{P}(Z > z) \geq \mathbb{P}\left(\sum_{j \geq 0} \mathcal{I}_j > z + d, \sum_{j \geq 0} \tilde{\mathcal{I}}_j \leq d\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{j \geq 0} \mathcal{I}_j > z + d\right) \mathbb{P}\left(\sum_{j \geq 0} \tilde{\mathcal{I}}_j \leq d\right).$$

Agora apliquemos novamente o Teorema 3.2.1

$$\underline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z \log z} \log \mathbb{P}(Z > z) \geq \underline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z \log z} \log \mathbb{P}\left(\sum_{j \geq 0} \mathcal{I}_j > z + d\right) = -\alpha.$$

□

Com base no Teorema 3.2.1 e no Corolário 3.2.1, é possível examinar o comportamento das caudas dos processos  $\mathcal{L}(t)$ ,  $\mathcal{E}(t)$  e  $N(t)$ .

**Teorema 3.2.2.** (Araman et al. [2]) i.) Suponha que  $\xi_0$  seja tal que  $\mathbb{P}(\xi_0 > x) \sim c_1 x^{-\alpha_1}$  quando  $x \rightarrow \infty$  e para  $c_1 > 0, \alpha_1 > 1$ . Então

$$\frac{1}{x \log x} \log \mathbb{P}(\mathcal{L}(t) > x) \rightarrow -\alpha_1 \quad \text{quando } x \rightarrow \infty.$$

ii.) Suponha que  $\xi_0$  seja tal que  $\mathbb{P}(\xi_0 < -x) \sim c_2 x^{-\alpha_2}$  quando  $x \rightarrow \infty$  e para  $c_2 > 0, \alpha_2 > 1$ . Então

$$\frac{1}{x \log x} \log \mathbb{P}(\mathcal{E}(t) > x) \rightarrow -\alpha_2 \quad \text{quando } x \rightarrow \infty.$$

iii.) Suponha que  $\xi_0$  tenha uma densidade limitada  $f$  para a qual existem constantes positivas  $c_1, c_2, \alpha_1, \alpha_2$ , tais que

$$\begin{aligned} f(x) &\sim c_1 x^{-\alpha_1-1} \\ f(-x) &\sim c_2 x^{-\alpha_2-1} \end{aligned}$$

quando  $x \rightarrow \infty$ . Então,

$$\frac{1}{x \log x} \log \mathbb{P}(N(t) > x) \rightarrow -\min(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1) \quad (3.18)$$

quando  $x \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Para a parte (i), lembrando que  $\mathcal{L}(t) \stackrel{D}{=} \mathcal{L}(0)$  e além disso temos que  $\mathbb{P}(\xi_{j+1} > j) \leq \mathbb{P}(-j\xi_{-j} + U > 0) \leq \mathbb{P}(\xi_j > j - 1)$  tal que,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{I}_j > x\right) \leq \mathbb{P}(\mathcal{L}(t) > x) \leq \mathbb{P}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{I}_j > x\right) \quad (3.19)$$

onde as  $\mathcal{I}_j$  são variáveis aleatórias Bernoulli, independentes com  $\mathcal{I}_j = \mathcal{I}(\xi_j > j - 1)$ . Aplicando o Teorema 3.2.1 aos dois extremos da desigualdade (3.19), temos

$$-\alpha_1 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \log x} \log \mathbb{P}(\mathcal{L}(t) > x) \leq -\alpha_1,$$

portanto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \log x} \log \mathbb{P}(\mathcal{L}(t) > x) = -\alpha_1.$$

O que prova a parte (i) do Teorema.

Para a parte (ii) lembremos que  $\mathcal{E}(t) \stackrel{D}{=} \mathcal{E}(0)$  e  $\mathbb{P}(\xi_{j+1} < -j) \leq \mathbb{P}(j + \xi_{-j} + U < 0) \leq \mathbb{P}(\xi_j < -j + 1)$  tal que

$$\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{I}_j > x\right) \leq \mathbb{P}(\mathcal{E}(t) > x) \leq \mathbb{P}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{I}_j > x\right) \quad (3.20)$$

onde as  $\mathcal{I}_j$  são variáveis aleatórias Bernoulli, independentes com  $\mathcal{I}_j = \mathcal{I}(\xi_j < -j + 1)$ . Aplicando o Teorema 3.2.1 a (3.20), temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \log x} \log \mathbb{P}(\mathcal{E}(t) > x) = -\alpha_2.$$

Para a parte (iii) assume-se  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  e seja  $\mathcal{I}_j = \mathcal{I}(j + \xi_j + U \in (0, t])$  e fixando um inteiro  $d \geq 1$ , temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sum_{j \leq 0} \mathcal{I}_j > x\right) &\leq \mathbb{P}(N(t) > x) = \mathbb{P}\left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{I}_j > x\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{j \leq 0} \mathcal{I}_j + \sum_{j > 0} \mathcal{I}_j > x\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{d-1} \left(\sum_{j \leq 0} \mathcal{I}_j \in x \left[\frac{k}{d}, \frac{k+1}{d}\right), \sum_{j > 0} \mathcal{I}_j > x \left(1 - \frac{k+1}{d}\right)\right)\right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{d-1} \mathbb{P}\left(\sum_{j \leq 0} \mathcal{I}_j \in x \left[\frac{k}{d}, \frac{k+1}{d}\right), \sum_{j > 0} \mathcal{I}_j > x \left(1 - \frac{k+1}{d}\right)\right) \quad (3.21) \\
&\leq d \max_{0 \leq k \leq d-1} \mathbb{P}\left(\sum_{j \leq 0} \mathcal{I}_j \geq x \frac{k}{d}\right) \mathbb{P}\left(\sum_{j > 0} \mathcal{I}_j \geq x \left(1 - \frac{k+1}{d}\right)\right).
\end{aligned}$$

Dado que a função de densidade é limitada, pelo Teorema da Convergência Limitada 2.2.2 podemos concluir que

$$\mathbb{P}(I_{-j} = 1) \sim c_1 t j^{-\alpha_1 - 1} \quad \text{quando } j \rightarrow \infty.$$

Seguindo um raciocínio similar, concluímos que

$$\mathbb{P}(I_j = 1) \sim c_2 t j^{-\alpha_2 - 1} \quad \text{quando } j \rightarrow \infty.$$

Aplicando o Teorema 3.2.1, argumentando como nas partes (i) e (ii), temos que

$$\frac{1}{x \log x} \log \mathbb{P}\left(\sum_{j \leq 0} \mathcal{I}_j > x\right) \rightarrow -(\alpha_1 + 1) \quad (3.22)$$

e

$$\frac{1}{x \log x} \log \mathbb{P}\left(\sum_{j > 0} \mathcal{I}_j > x\right) \rightarrow -(\alpha_2 + 1) \quad (3.23)$$

quando  $x \rightarrow \infty$ . Agora, observamos que para  $0 \leq k \leq d-1$  temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x \log x} \log \left[ \mathbb{P}\left(\sum_{j \leq 0} \mathcal{I}_j \geq x \frac{k}{d}\right) \mathbb{P}\left(\sum_{j > 0} \mathcal{I}_j \geq x \left(1 - \frac{k+1}{d}\right)\right) \right] \\
&= \frac{1}{x \log x} \log \mathbb{P}\left(\sum_{j \leq 0} \mathcal{I}_j \geq x \frac{k}{d}\right) + \frac{1}{x \log x} \log \mathbb{P}\left(\sum_{j > 0} \mathcal{I}_j \geq x \left(1 - \frac{k+1}{d}\right)\right).
\end{aligned}$$

Vamos analisar o primeiro termo da soma. Se  $k = 0$ , esse termo vai para 0, logo interessa quando  $k > 0$ . Seja  $z = x \frac{k}{d}$ , então  $x = z \frac{d}{k}$ , e por (3.22) temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x \log x} \log \mathbb{P}\left(\sum_{j \leq 0} \mathcal{I}_j \geq x \frac{k}{d}\right) &= \frac{1}{z \frac{d}{k} \log(z \frac{d}{k})} \log \mathbb{P}\left(\sum_{j > 0} \mathcal{I}_j \geq z\right) \\
&= \frac{k}{d} \left( \frac{1}{z \log(z \frac{d}{k})} \log \mathbb{P}\left(\sum_{j > 0} \mathcal{I}_j \geq z\right) \right) \rightarrow \frac{k}{d} (-\alpha_1 - 1) \quad (3.24)
\end{aligned}$$

quando  $z \rightarrow \infty$ . Agora, para o segundo termo da soma, considerando que  $1 - \frac{k+1}{d} \in [0, 1)$ , se  $k = d - 1$ , esse termo vai para 0, então interessa quando  $k \neq d - 1$ . Seja  $z = x \left(1 - \frac{k+1}{d}\right)$  e por (3.23) temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{z \left(\frac{d}{d-k-1}\right) \log \left(\frac{d}{d-k-1}\right)} \log \mathbb{P} \left( \sum_{j>0} \mathcal{I}_j \geq z \right) &= \frac{d-k-1}{d} \left( \frac{1}{z \log \left(\frac{d}{d-k-1}\right)} \log \mathbb{P} \left( \sum_{j>0} \mathcal{I}_j \geq z \right) \right) \\ &\rightarrow \frac{d-k-1}{d} (-\alpha_2 - 1) \end{aligned} \quad (3.25)$$

quando  $z \rightarrow \infty$ . De (3.24) e (3.25), temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x \log x} \log \left[ \mathbb{P} \left( \sum_{j \leq 0} \mathcal{I}_j \geq x \frac{k}{d} \right) \mathbb{P} \left( \sum_{j > 0} \mathcal{I}_j \geq x \left(1 - \frac{k+1}{d}\right) \right) \right] \\ \rightarrow -\frac{(\alpha_1 + 1)k}{d} - \frac{(\alpha_2 + 1)(d - (k+1))}{d} \leq -(\alpha_1 + 1) \frac{d-1}{d} \end{aligned} \quad (3.26)$$

quando  $x \rightarrow \infty$ . Logo, em (3.21), nos extremos da desigualdade, fazendo  $x \rightarrow \infty$  e depois enviando  $d \rightarrow \infty$ , temos:

$$\frac{1}{x \log x} \log \mathbb{P}(N(t) > x) \rightarrow -(\alpha_1 + 1) \quad \text{quando } \alpha_1 < \alpha_2.$$

Assumindo  $\alpha_2 < \alpha_1$  e argumentando de forma similar, podemos concluir

$$\frac{1}{x \log x} \log \mathbb{P}(N(t) > x) \rightarrow -\min(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1).$$

□

O Teorema 3.2.2 descreve o comportamento das caudas do processo  $N(t)$  para um tempo  $t$  finito, quando  $x \rightarrow \infty$ . Por outro lado, o Teorema 3.1.1 foca no limite de equilíbrio (estado estacionário) do processo  $N(t)$ , quando  $t \rightarrow \infty$ . Assim, não é possível trocar arbitrariamente os limites  $x \rightarrow \infty$  (para as filas) e  $t \rightarrow \infty$  (tempo). Isso significa que o comportamento de  $N(t)$  para tempos grandes, mas finitos.

Em seguida, fixa-se um parâmetro  $s \in [0, 1]$  para analisar o comportamento relativo em diferentes escalas temporais no estado estacionário, utilizando os processos  $\mathcal{E}'(s)$  e  $\mathcal{L}'(s)$  mencionados no Teorema 3.1.1.

**Proposição 3.3.** (Araman et al. [2]) *Suponha que  $\xi_0$  seja tal que  $\mathbb{P}(\xi_0 > x) \sim c_1 x^{-\alpha_1}$  e  $\mathbb{P}(\xi_0 < -x) \sim c_2 x^{-\alpha_2}$  quando  $x \rightarrow \infty$  para  $c_1, c_2 > 0$  e  $\alpha_1, \alpha_2 > 1$ . Então,*

$$\frac{1}{x \log x} \log \mathbb{P}((\mathcal{E}'(s) - \mathcal{L}'(s)) - (\mathcal{E}(0) - \mathcal{L}(0)) > x) \rightarrow -\min(\alpha_1, \alpha_2)$$

quando  $x \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Lembrando que,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}'(s) &= \sum_{j+U>s} \mathcal{I}(\xi_0 + j + U \leq s) & \text{e} & \quad \mathcal{E}'(s) \stackrel{\text{D}}{=} \mathcal{E}(0) \\ \mathcal{L}'(s) &= \sum_{j+U\leq s} \mathcal{I}(\xi_0 + j + U > s) & \text{e} & \quad \mathcal{L}'(s) \stackrel{\text{D}}{=} \mathcal{L}(0).\end{aligned}$$

Como vimos anteriormente, os processos  $\mathcal{E}(t)$  e  $\mathcal{L}(t)$  têm esperança finita. Além disso, por hipótese, temos  $\mathbb{P}(\xi_0 + n + U < s) \sim c_2 n^{-\alpha_2}$  quando  $n \rightarrow \infty$  e  $\mathbb{P}(\xi_0 - n + U > 0) \sim c_1 n^{-\alpha_1}$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto, usando o Corolário 3.2.1, obtemos

$$\frac{1}{x \log x} \log \mathbb{P}(\mathcal{E}'(s) - \mathcal{L}'(s) > x) \rightarrow -\alpha_2$$

e

$$\frac{1}{x \log x} \log \mathbb{P}(\mathcal{L}(0) - \mathcal{E}(0) > x) \rightarrow -\alpha_1$$

quando  $x \rightarrow \infty$ . Podemos usar o mesmo argumento que em (3.21) para estabelecer o limite superior, e então podemos concluir que

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \log x} \log \mathbb{P}((\mathcal{E}'(s) - \mathcal{L}'(s)) - (\mathcal{E}(0) - \mathcal{L}(0)) > x) \leq -\min(\alpha_1, \alpha_2).$$

Para a cota inferior, suponhamos sem perda de generalidade que  $\alpha_2 \leq \alpha_1$ . Encontramos que

$$\mathbb{P}((\mathcal{E}'(s) - \mathcal{L}'(s)) - (\mathcal{L}(0) - \mathcal{E}(0)) > x) \geq \mathbb{P}(\mathcal{E}'(s) - \mathcal{L}'(s) > x + d) \mathbb{P}(\mathcal{L}(0) - \mathcal{E}(0) \geq -d).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x \log x} \mathbb{P}((\mathcal{E}'(s) - \mathcal{L}'(s)) - (\mathcal{E}(0) - \mathcal{L}(0)) > x) \\ \geq \frac{1}{x \log x} \mathbb{P}(\mathcal{E}'(s) - \mathcal{L}'(s) > x + d) + \frac{1}{x \log x} \mathbb{P}(\mathcal{L}(0) - \mathcal{E}(0) \geq -d).\end{aligned}$$

Tomando o limite, temos

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \log x} \mathbb{P}((\mathcal{E}'(s) - \mathcal{L}'(s)) - (\mathcal{E}(0) - \mathcal{L}(0)) > x) \geq -\alpha_2.$$

Argumentamos de forma simétrica para o caso em que  $\alpha_1 < \alpha_2$ , o que prova o resultado.  $\square$

Como vimos anteriormente, para qualquer sequência de perturbações *i.i.d.*, o processo de contagem  $N(t)$  possui caudas leves. Ou seja, embora as perturbações tenham cauda pesada, o processo  $N(t)$  não herda essa propriedade. Por outro lado, o Teorema 3.2.2 mostra o comportamento assintótico do processo de contagem  $N(t)$  quando as perturbações são do tipo Pareto, com a seguinte característica:  $P(N(t) > x) \sim \exp(-Cx \log x)$  quando  $x \rightarrow \infty$  onde  $C$  é uma constante positiva, o que implica que o processo  $N(t)$  tem cauda mais leve do que uma distribuição exponencial, mas ainda é mais pesada do que uma distribuição normal.

## 4 Processo de Trabalho

Neste capítulo, exploramos o comportamento da carga de trabalho  $W(t)$  em sistemas de chegadas programadas com tempo de atendimento determinístico e servidor único ( $S/D/1$ ) sob duas condições operacionais principais:

- **Carga crítica:** Quando a taxa de chegadas coincide exatamente com a capacidade do servidor, analisamos como  $W(t)$  evolui no longo prazo e sua relação direta com o número de clientes no sistema.
- **Tráfego pesado:** Quando o servidor possui uma capacidade maior do que a necessária ( $\rho < 1$ ), mas opera próximo ao seu limite ( $\rho \rightarrow 1$ ). Estudamos o comportamento de  $W_\rho(t)$  no regime estacionário e como é influenciado pela aproximação ao limite crítico.

### 4.1 Carga de trabalho sobre carga crítica

Estudamos um sistema  $S/D/1$  no qual cada cliente necessita de um tempo fixo de serviço unitário e o servidor processa trabalho a uma taxa constante de uma unidade por tempo. Nesse cenário, a taxa de chegada é igual à capacidade do servidor, colocando o sistema em condições de carga crítica.

Definimos a carga de trabalho  $W(t)$  no instante  $t$  como o tempo adicional que o sistema precisaria para se esvaziar completamente, supondo que após  $t$  não chega mais trabalho (ou seja,  $t + W(t)$  seria o primeiro instante em que o sistema estaria vazio).

**Definição 4.1.1.** (Araman et al. [2]) *Seja  $W(t)$  a carga de trabalho no sistema no tempo  $t$ . Se  $W(0) = 0$ , então*

$$W(t) = \max_{0 \leq s \leq t} [(N(t) - t) - (N(s) - s)]. \quad (4.1)$$

Estamos interessados no comportamento de  $W(t)$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Note também que, como os tempos de serviço são determinísticos com duração unitária, o número de clientes no sistema no momento  $t$  é igual a  $\lceil W(t) \rceil$ .

Se  $\mathbb{E}|\xi_0| < \infty$ , pela Proposição 3.2, podemos reescrever

$$\begin{aligned}
W(t) &= \max_{0 \leq s \leq t} [(N(t) - t) - (N(s) - s)] \\
&= \max_{0 \leq s \leq t} \left[ \left( \sum_{i+U \in (0,t]} 1 \right) - t + (\mathcal{E}(t) - \mathcal{L}(t)) - (\mathcal{E}(0) - \mathcal{L}(0)) \right. \\
&\quad \left. - \left( \sum_{i+U \in (0,t]} 1 \right) + s - (\mathcal{E}(s) - \mathcal{L}(s)) + (\mathcal{E}(0) - \mathcal{L}(0)) \right] \\
&= \max_{0 \leq s \leq t} \left[ \mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(s) - \mathcal{L}(t) + \mathcal{L}(s) - (t - s) + \sum_{i+U \in (s,t]} 1 \right] \\
&= \max_{0 \leq s \leq t} [\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(s) - \mathcal{L}(t) + \mathcal{L}(s)] + O_p(1), \tag{4.2}
\end{aligned}$$

onde  $O_p(1)$  é um termo estocasticamente limitado em  $t$ . Devido à estacionariedade de  $((\mathcal{E}(t), \mathcal{L}(t)), t \in \mathbb{R})$  o primeiro termo em (4.2) tem a mesma distribuição que

$$\begin{aligned}
M(t) &= \max_{0 \leq r \leq t} [\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(-(t-s)) + \mathcal{L}(0) + \mathcal{L}(-(t-s))] \\
&= \max_{0 \leq s \leq t} [\mathcal{L}(-(t-s)) - \mathcal{E}(-(t-s)) - \mathcal{L}(0) + \mathcal{E}(0)] \\
&= \max_{0 \leq r \leq t} [\mathcal{E}^*(r) - \mathcal{L}^*(r)] - \mathcal{E}^*(0) + \mathcal{L}^*(0). \tag{4.3}
\end{aligned}$$

Para simplificar a análise, utiliza-se a reversão temporal do sistema. Nesse contexto, as perturbações são transformadas em seus inversos temporais, e os processos  $\mathcal{E}(t)$  e  $\mathcal{L}(t)$  são reinterpretados como  $\mathcal{E}^*(r)$  e  $\mathcal{L}^*(r)$ , representando o comportamento dos clientes em um sistema invertido no sentido do tempo. As perturbações são dadas por  $(-\xi_{-j} : j \in \mathbb{Z})$ , e no sistema revertido, geram-se pela transformação  $1-U$ , em vez de  $U$ . Essa mudança preserva propriedades como simetria e estacionariedade, mas é essencial para definir  $\mathcal{E}^*$  e  $\mathcal{L}^*$ . Nesse cenário,  $\mathcal{E}^*(r)$  descreve as chegadas antecipadas (equivalentes às tardias no sistema original), enquanto  $\mathcal{L}^*(r)$  representa as tardias (refletindo as antecipadas originais). Em particular,  $\mathcal{E}^*(r) \stackrel{D}{=} \mathcal{L}(-r)$  e  $\mathcal{L}^*(r) \stackrel{D}{=} \mathcal{E}(-r)$ .

O crescimento de  $M(t)$  é dominado por  $\mathcal{E}^*(\cdot)$ , com a cauda direita de  $\xi_0$  determinando seu comportamento assintótico. Por outro lado, a cauda esquerda de  $-\xi_0$  tem menor influência, pois representa chegadas antecipadas que limitam a acumulação futura. Em resumo, mais chegadas antecipadas implicam menos clientes disponíveis para picos futuros de atividade. Essa assimetria entre as caudas reflete as dinâmicas de  $\mathcal{E}^*$  e  $\mathcal{L}^*$ : enquanto a cauda direita impulsiona o crescimento de  $M(t)$ , a esquerda reduz o potencial de acumulação futura, explicando a maior influência da cauda direita.

**Teorema 4.1.1.** (Araman et al. [2]) *Suponha que  $\mathbb{E}\xi_0^- < \infty$  e que existem constantes  $c > 0$  e  $\alpha > 1$  para o qual  $\mathbb{P}(\xi_0 > x) \sim cx^{-\alpha}$  quando  $x \rightarrow \infty$ . Então*

$$\frac{W(t)}{\log(t)/\log \log(t)} \Rightarrow \frac{1}{\alpha}$$

quando  $t \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Primeiro observe que,

$$\max_{0 \leq r \leq t} [\mathcal{E}^*(r) - \mathcal{L}^*(r)] \leq \max_{0 \leq r \leq t} \mathcal{E}^*(r) \leq \max_{0 \leq n \leq \lfloor t \rfloor + 1} \max_{0 \leq s \leq 1} \mathcal{E}^*(n - s).$$

Para  $0 \leq s < 1$  e  $n \geq 1$  temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^*(n - s) &= \sum_{j+U \leq -n+s} \mathcal{I}(j + U + \xi_j > -n + s) \\ &\leq \sum_{j+U \leq -n+s} \mathcal{I}(j + U + \xi_j > -n) = \mathcal{E}^*(n) + \sum_{-n \leq j+U \leq -n+s} \mathcal{I}(j + U + \xi_j > -n) \\ &\leq \mathcal{E}^*(n) + \sum_{-n \leq j+U \leq -n+s} 1 = \mathcal{E}^*(n) + 1. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Do exposto obtemos,

$$\max_{0 \leq r \leq t} [\mathcal{E}^*(r) - \mathcal{L}^*(r)] \leq 1 + \max_{1 \leq n \leq \lfloor t \rfloor + 1} \mathcal{E}^*(n).$$

Agora para  $\varepsilon > 0$  e  $t$  grande o suficiente,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left( 1 + \max_{0 \leq r \leq t} [\mathcal{E}^*(r) - \mathcal{L}^*(r)] > \frac{1 + 3\varepsilon}{\alpha} \frac{\log t}{\log \log t} \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left( 1 + \max_{1 \leq n \leq \lfloor t \rfloor + 1} \mathcal{E}^*(n) > \frac{1 + 3\varepsilon}{\alpha} \frac{\log t}{\log \log t} \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq n \leq \lfloor t \rfloor + 1} \mathcal{E}^*(n) > \frac{1 + 2\varepsilon}{\alpha} \frac{\log t}{\log \log t} + \frac{\varepsilon \log t}{\alpha \log \log t} - 1 \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left( \bigcup_{n=1}^{\lfloor t \rfloor + 1} \mathcal{E}^*(n) > \frac{1 + 2\varepsilon}{\alpha} \frac{\log t}{\log \log t} \right) \leq \sum_{n=1}^{\lfloor t \rfloor + 1} \mathbb{P} \left( \mathcal{E}^*(n) > \frac{1 + 2\varepsilon}{\alpha} \frac{\log t}{\log \log t} \right) \\ &\leq (\lfloor t \rfloor + 1) \mathbb{P} \left( \mathcal{E}^*(0) > \frac{1 + 2\varepsilon}{\alpha} \frac{\log t}{\log \log t} \right) \\ &= (\lfloor t \rfloor + 1) \exp \left( \log \mathbb{P} \left( \mathcal{L}(0) > \frac{1 + 2\varepsilon}{\alpha} \frac{\log t}{\log \log t} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} &\leq (\lfloor t \rfloor + 1) \exp \left( \frac{1 + \varepsilon}{\alpha} \frac{\log t}{\log \log t} \log \left( \frac{1 + \varepsilon}{\alpha} \frac{\log t}{\log \log t} \right) (-\alpha) \right) \\ &\leq (\lfloor t \rfloor + 1) \exp \left( -(1 + \varepsilon) \log t \left( \frac{\log \frac{1+\varepsilon}{\alpha}}{\log \log t} + 1 - \frac{\log \log \log t}{\log \log t} \right) \right) \\ &\leq (\lfloor t \rfloor + 1) \exp(- (1 + \varepsilon) \log t) = O(t^{-\varepsilon}) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

quando  $t \rightarrow \infty$ . Para obter (4.6) fazemos uso do Teorema 3.2.2. Para conseguir a cota inferior, fixa-se  $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{8\alpha}\right)$ . Se escolhermos  $\tau \in \left(1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2, 1 - 2\varepsilon - \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon}{2\alpha}\right)$ , também para simplificar a notação, seja  $b(t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\log t}{\log \log t}$ ,  $c(t) = (1 - 2\varepsilon)^2 b(t)^2$  e  $k(t) =$

$[t^\tau]$ . De forma similar ao que foi feito na demonstração do Teorema 3.2.1, para  $\theta > 0$  temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{E}(0) \geq n) &= \mathbb{P}\left(\sum_{j+U>0} \mathcal{I}(j + \xi_j + U \leq 0) \geq n\right) \leq \mathbb{P}\left(\sum_{j \geq -1} \mathcal{I}(j + \xi_j \leq 0) \geq n\right) \\
&\leq \exp\left(-\theta n + \sum_{j \geq -1} \log(\mathbb{P}(j + \xi_0 \leq 0)(e^\theta - 1) + 1)\right) \\
&\leq \exp\left(-\theta n + \sum_{j \geq -1} \mathbb{P}(j + \xi_0 \leq 0)(e^\theta - 1)\right) \\
&= \exp\left(-\theta n + (e^\theta - 1) \sum_{j \geq -1} \mathbb{E}(\mathcal{I}(j + \xi_0 \leq 0))\right) \\
&= \exp\left(-\theta n + (e^\theta - 1) \mathbb{E}\left(\sum_{j \geq -1} \mathcal{I}(j \leq -\xi_0)\right)\right) \\
&= \exp\left(-\theta n + (e^\theta - 1) \mathbb{E}\left(\sum_{j=-1}^{\lfloor -\xi_0 \rfloor} 1\right)\right) \\
&\leq \exp(-\theta n + (e^\theta - 1)(\mathbb{E}\xi_0^- + 3)).
\end{aligned}$$

Ao definir  $\theta = \log n$ , concluímos que

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}(0) \geq n) \leq \exp(-n \log n + (n-1)(\mathbb{E}\xi_0^- + 3)) \approx \exp(-n \log n + O(n)).$$

Substituindo  $n$  por  $\varepsilon b(t)$ , temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{E}(0) \geq \varepsilon b(t)) &\leq \exp(-\varepsilon b(t) \log(\varepsilon b(t)) + O(\varepsilon b(t))) \\
&= \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\alpha} \frac{\log t}{\log \log t} \log\left(\frac{\varepsilon}{\alpha} \frac{\log t}{\log \log t}\right) + O\left(\frac{\varepsilon}{\alpha} \frac{\log t}{\log \log t}\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\alpha} \log t \left(\frac{\log \frac{\varepsilon}{\alpha}}{\log \log t} + \frac{\log \log t}{\log \log t} - \frac{\log \log \log t}{\log \log t}\right) + O\left(\frac{\varepsilon}{\alpha} \frac{\log t}{\log \log t}\right)\right) \\
&\leq \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2\alpha} \log t\right) = t^{-\frac{\varepsilon}{2\alpha}}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

para  $t$  grande o suficiente. Além disso, uma análise da demonstração do Teorema 3.2.1 mostra que o que está sendo realizado cumpre as condições estabelecidas nesse teorema. Portanto, podemos concluir que

$$\frac{1}{z \log z} \log \mathbb{P}\left(\sum_{j=0}^{\lceil z^2 \rceil} \mathcal{I}_j > z\right) \rightarrow -\alpha \tag{4.8}$$

quando  $z \rightarrow \infty$ . Agora dividindo o intervalo  $[-t, 0]$  em  $k(t)$  subintervalos de igual comprimento e sejam  $r_1, r_2, \dots, r_{k(t)}$  os extremos direitos dos  $k(t)$  subintervalos. Então,

$$\mathbb{P}\left(\max_{0 \leq r \leq t} [\mathcal{E}^*(r) - \mathcal{L}^*(r)] > (1 - 3\varepsilon)b(t)\right)$$

$$\begin{aligned}
&\geq \mathbb{P} \left( \max_{0 \leq i \leq k(t)} [\mathcal{L}(r_i) - \mathcal{E}(r_i)] > (1 - 3\varepsilon)b(t) \right) \\
&\geq \mathbb{P} \left( \max_{0 \leq i \leq k(t)} [(\mathcal{L}(r_i) - \mathcal{E}(r_i))\mathcal{I}(\mathcal{L}^*(r_i) \leq \varepsilon b(t))] > (1 - 3\varepsilon)b(t) \right) \\
&\geq \mathbb{P} \left( \max_{0 \leq i \leq k(t)} [(\mathcal{L}(r_i) - \mathcal{E}(r_i))\mathcal{I}(\mathcal{E}(r_i) \leq \varepsilon b(t))] > (1 - 3\varepsilon)b(t) \right) \\
&\geq \mathbb{P} \left( \max_{0 \leq i \leq k(t)} [\mathcal{L}(r_i)\mathcal{I}(\mathcal{E}(r_i) \leq \varepsilon b(t))] > (1 - 2\varepsilon)b(t) \right).
\end{aligned}$$

Seja  $i^*$  o ponto onde  $\mathcal{L}(r_i)$  atinge o máximo, podemos então escrever que:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P} \left( \max_{0 \leq r \leq t} [\mathcal{E}^*(r) - \mathcal{L}^*(r)] > (1 - 3\varepsilon)b(t) \right) \\
&\geq \mathbb{P} \left( \max_{0 \leq i \leq k(t)} \mathcal{L}(r_i) > (1 - 2\varepsilon)b(t), \mathcal{E}(r_{i^*}) \leq \varepsilon b(t) \right) \\
&= \mathbb{P} \left( \max_{0 \leq i \leq k(t)} \mathcal{L}(r_i) > (1 - 2\varepsilon)b(t) \right) - \mathbb{P} \left( \max_{0 \leq i \leq k(t)} \mathcal{L}(r_i) > (1 - 2\varepsilon)b(t), \mathcal{E}(r_{i^*}) > \varepsilon b(t) \right) \\
&\geq \mathbb{P} \left( \max_{0 \leq i \leq k(t)} \mathcal{L}(r_i) > (1 - 2\varepsilon)b(t) \right) - \mathbb{P} \left( \max_{0 \leq i \leq k(t)} \mathcal{L}(r_i)\mathcal{I}(\mathcal{E}(r) > \varepsilon b(t)) > (1 - 2\varepsilon)b(t) \right) \\
&\geq \mathbb{P} \left( \max_{0 \leq i \leq k(t)} \mathcal{L}(r_i) > (1 - 2\varepsilon)b(t) \right) - \sum_{i=1}^{k(t)} \mathbb{P}(\mathcal{L}(r_i)\mathcal{I}(\mathcal{E}(r_i) > \varepsilon b(t)) > (1 - 2\varepsilon)b(t)).
\end{aligned}$$

Lembrando que  $\mathcal{L}(r_i) \stackrel{D}{=} \mathcal{L}(0)$  e  $\mathcal{E}(r_i) \stackrel{D}{=} \mathcal{E}(0)$ . Podemos então escrever que:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P} \left( \max_{0 \leq r \leq t} [\mathcal{E}^*(r) - \mathcal{L}^*(r)] > (1 - 3\varepsilon)b(t) \right) \\
&\geq \mathbb{P} \left( \max_{0 \leq i \leq k(t)} \mathcal{L}(r_i) > (1 - 2\varepsilon)b(t) \right) - k(t)\mathbb{P}(\mathcal{L}(0) > (1 - 2\varepsilon)b(t), \mathcal{E}(0) > \varepsilon b(t)) \\
&\geq \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq i \leq k(t)} \sum_{r_i - c(t) \leq j \leq r_i - 1} \mathcal{I}(j + \xi_j > r_i) > (1 - 2\varepsilon)b(t) \right) \\
&\quad - k(t)\mathbb{P}(\mathcal{L}(0) > (1 - 2\varepsilon)b(t))\mathbb{P}(\mathcal{E}(0) > \varepsilon b(t)) \\
&= 1 - \left( 1 - \mathbb{P} \left( \sum_{-c(t) \leq j \leq -1} \mathcal{I}(j + \xi_j > 0) > (1 - 2\varepsilon)b(t) \right) \right)^{k(t)} \\
&\quad - k(t)\mathbb{P}(\mathcal{L}(0) > (1 - 2\varepsilon)b(t))\mathbb{P}(\mathcal{E}(0) > \varepsilon b(t)). \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Novamente utilizamos a independência de  $\mathcal{E}(t)$  e  $\mathcal{L}(t)$ , além pelo Lema 2.3.1 que garanta a independência das variáveis indicadoras com índices disjuntos, nas duas últimas expressões mostradas acima usamos a distribuição do máximo. A partir de (4.8), obtemos:

$$\mathbb{P} \left( \sum_{-c(t) \leq j \leq -1} \mathcal{I}(j + \xi_j > 0) > (1 - 2\varepsilon)b(t) \right) \geq t^{-(1-2\varepsilon)-\varepsilon^2}$$

para  $t$  suficientemente grande. Em vista da escolha de  $\tau$ , concluímos que:

$$\left( 1 - \mathbb{P} \left( \sum_{-c(t) \leq j \leq -1} \mathcal{I}(j + \xi_j > 0) > (1 - 2\varepsilon)b(t) \right) \right)^{k(t)} \rightarrow 0 \quad (4.10)$$

quando  $t \rightarrow \infty$ . Por outro lado,

$$\mathbb{P}(\mathcal{L}(0) > (1 - 2\varepsilon)b(t)) \leq t^{-(1-2\varepsilon)+\varepsilon^2}$$

para  $t$  suficientemente grande. Usando (4.5) e nossa escolha de  $\tau$ , concluímos que:

$$k(t) \mathbb{P}(\mathcal{L}(0) > (1 - 2\varepsilon)b(t)) \mathbb{P}(\mathcal{E}(0) > b(t)) \rightarrow 0 \quad (4.11)$$

quando  $t \rightarrow \infty$ . As relações (4.7), (4.9), (4.10) e (4.11) provam o teorema.  $\square$

O Teorema 4.1.1 estabelece que, em uma fila  $S/D/1$  sob carga crítica, a carga de trabalho cresce de maneira muito lenta a uma taxa proporcional a  $\frac{\log t}{\log \log t}$ , mesmo na presença de perturbações com caudas pesadas. Isso significa que o sistema permanece relativamente estável, e o impacto sobre o tempo de espera cresce de forma moderada. Esse comportamento contrasta de forma significativa com o de uma fila  $G/D/1$ , onde as chegadas são modeladas por um processo de renovação com variância finita e positiva, e a carga de trabalho sob condições críticas cresce a uma taxa muito maior, aproximadamente  $t^{\frac{1}{2}}$  (ver Glynn [17], Sigman e Whitt [30]).

Esse contraste destaca como as características do tráfego programado em uma fila  $S/D/1$  permitem um gerenciamento mais eficiente da carga de trabalho, minimizando os tempos de espera mesmo em cenários desafiadores. Observa-se o impacto positivo da programação no desempenho do sistema, evidenciando como uma estrutura planejada de chegadas pode mitigar os efeitos adversos de perturbações extremas e oferecer maior estabilidade. Em comparação, a natureza mais aleatória de uma fila  $G/D/1$ , com crescimento mais rápido da carga de trabalho, reforça a importância de uma programação adequada para melhorar a eficiência e a estabilidade do sistema.

## 4.2 Carga de trabalho sobre tráfego pesado

Em uma fila  $S/D/1$ , se a capacidade do servidor excede as necessidades do sistema ( $\rho < 1$ , onde  $\rho$  é a intensidade de tráfego), o servidor processa trabalho a uma taxa de  $\frac{1}{\rho}$ . Embora o trabalho continue chegando a uma taxa média de uma unidade por tempo, com tempos de serviço determinísticos, a capacidade extra reduz a acumulação de carga de trabalho, medida por  $W_\rho(t)$ , que representa o tempo adicional necessário para esvaziar o sistema no instante  $t$ .

Quando  $\rho \rightarrow 1$ , o sistema opera próximo ao regime de tráfego pesado, indicando que a dinâmica se aproxima de condições críticas. Esse comportamento conecta  $W_\rho(t)$  ao

seu limite, permitindo analisar como o tráfego determinístico influencia a acumulação em condições de alta utilização.

**Definição 4.2.1.** (Araman et al. [2]) *Seja  $W_\rho(\cdot)$  processo de carga de trabalho associado. Então,*

$$W_\rho(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \left[ \mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(s) - \mathcal{L}(t) + \mathcal{L}(s) + a(t) - a(s) - \frac{1-\rho}{\rho}(t-s) \right]$$

onde  $a(t) := -(t - \lfloor t \rfloor) + \mathcal{I}(U \leq t - \lfloor t \rfloor)$  como em (4.3) obtemos,  $W_\rho(t) \stackrel{D}{=} M_\rho(t)$ , e

$$M_\rho(t) = \max_{0 \leq r \leq t} \left[ \mathcal{E}^*(r) - \mathcal{L}^*(r) - \frac{1-\rho}{\rho}r + a(0) - a(-r) \right] - \mathcal{E}^*(0) + \mathcal{L}^*(0) \quad (4.12)$$

O processo  $M_\rho(t)$  representa o nível de carga de trabalho acumulada até o tempo  $t$  no sistema  $S/D/1$ , que, por definição do sistema, é não decrescente. Seu crescimento é limitado pela capacidade do sistema de serviço, logo,  $M_\rho(t) \nearrow M_\rho(\infty)$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Da mesma forma, segue-se que  $W_\rho(t) \xrightarrow{D} W_\rho(\infty)$  quando  $t \rightarrow \infty$ , onde  $W_\rho(\infty) \stackrel{D}{=} M_\rho(\infty)$ .

**Teorema 4.2.1.** (Araman et al. [2]) *Suponha que  $\mathbb{E}\xi_0^- < \infty$  e que existem constantes  $c > 0$  e  $\alpha > 1$  para o qual  $\mathbb{P}(\xi_0 > x) \sim cx^{-\alpha}$  quando  $x \rightarrow \infty$ . Então*

$$\frac{\log \log \left( \frac{1}{1-\rho} \right)}{\log \left( \frac{1}{1-\rho} \right)} W_\rho(\infty) \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \quad (4.13)$$

quando  $\rho \nearrow 1$ .

*Demonstração.* Para  $\frac{1}{2} < \rho < 1$ , temos que,

$$\begin{aligned} \max_{r \geq 0} \left[ \mathcal{E}^*(r) - \mathcal{L}^*(r) - \frac{1-\rho}{\rho}r \right] &\geq \max_{0 \leq r \leq \frac{1}{1-\rho}} \left[ \mathcal{E}^*(r) - \mathcal{L}^*(r) - \frac{1-\rho}{\rho}r \right] \\ &\geq \max_{0 \leq r \leq \frac{1}{1-\rho}} [\mathcal{E}^*(r) - \mathcal{L}^*(r)] - 2. \end{aligned}$$

Além disso, o Teorema 4.1.1 garante que,

$$\frac{\log \log \left( \frac{1}{1-\rho} \right)}{\log \left( \frac{1}{1-\rho} \right)} \max_{0 \leq r \leq \frac{1}{1-\rho}} [\mathcal{E}^*(r) - \mathcal{L}^*(r)] \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \quad (4.14)$$

quando  $\rho \nearrow 1$ . Obtendo a cota inferior para (4.13). Para obter a cota superior, observemos que,

$$\begin{aligned} &\max_{r \geq 0} \left[ \mathcal{E}^*(r) - \mathcal{L}^*(r) - \frac{1-\rho}{\rho}r \right] \\ &\leq \max_{0 \leq r \leq \left( \frac{1}{1-\rho} \right)^{1+\varepsilon}} [\mathcal{E}^*(r) - \mathcal{L}^*(r)] + \max_{r \geq \left( \frac{1}{1-\rho} \right)^{1+\varepsilon}} \left[ \mathcal{E}^*(r) - \frac{1-\rho}{\rho}r \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Aplicando o Teorema 4.1.1 no primeiro termo, temos

$$\frac{\log \log \left( \left( \frac{1}{1-\rho} \right)^{1+\varepsilon} \right)}{\log \left( \left( \frac{1}{1-\rho} \right)^{1+\varepsilon} \right)} \max_{0 \leq r \leq \left( \frac{1}{1-\rho} \right)^{1+\varepsilon}} [\mathcal{E}^*(r) - \mathcal{L}^*(r)] \Rightarrow \frac{1}{\alpha}$$

quando  $\rho \nearrow 1$ . Podemos escrever então,

$$\begin{aligned} & \frac{\log \log \left( \frac{1}{1-\rho} \right) + \log(1 + \varepsilon)}{(1 + \varepsilon) \log \left( \frac{1}{1-\rho} \right)} \max_{0 \leq r \leq \left( \frac{1}{1-\rho} \right)^{1+\varepsilon}} [\mathcal{E}^*(r) - \mathcal{L}^*(r)] \\ &= \frac{\log \log \left( \frac{1}{1-\rho} \right)}{(1 + \varepsilon) \log \left( \frac{1}{1-\rho} \right)} \max_{0 \leq r \leq \left( \frac{1}{1-\rho} \right)^{1+\varepsilon}} [\mathcal{E}^*(r) - \mathcal{L}^*(r)] \\ &+ \frac{\log(1 + \varepsilon)}{(1 + \varepsilon) \log \left( \frac{1}{1-\rho} \right)} \max_{0 \leq r \leq \left( \frac{1}{1-\rho} \right)^{1+\varepsilon}} [\mathcal{E}^*(r) - \mathcal{L}^*(r)]. \end{aligned}$$

Logo concluímos que

$$\frac{\log \log \left( \frac{1}{1-\rho} \right)}{\log \left( \frac{1}{1-\rho} \right)} \max_{0 \leq r \leq \left( \frac{1}{1-\rho} \right)^{1+\varepsilon}} [\mathcal{E}^*(r) - \mathcal{L}^*(r)] \Rightarrow \frac{1 + \varepsilon}{\alpha}. \quad (4.16)$$

quando  $\rho \nearrow 1$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left( \max_{r \geq \left( \frac{1}{1-\rho} \right)^{1+\varepsilon}} \left[ \mathcal{E}^*(r) - \frac{1-\rho}{\rho} r \right] \geq 1 \right) \\ &= \mathbb{P} \left( \max_{n \geq 0} \left[ \mathcal{E}^* \left( n + \left( \frac{1}{1-\rho} \right)^{1+\varepsilon} \right) - \frac{1-\rho}{\rho} \left( n + \left( \frac{1}{1-\rho} \right)^{1+\varepsilon} \right) \right] \geq 1 \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left( \max_{n \geq 1} \left[ \max_{0 \leq s \leq 1} \mathcal{E}^* \left( \left( \frac{1}{1-\rho} \right)^{1+\varepsilon} + n - s \right) - \left( \frac{1}{1-\rho} \right)^\varepsilon \frac{1}{\rho} - \frac{1-\rho}{\rho} n \right] \geq 1 \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left( \max_{n \geq 1} \left[ \mathcal{E}^* \left( \left( \frac{1}{1-\rho} \right)^{1+\varepsilon} + n \right) - \left( \frac{1}{1-\rho} \right)^\varepsilon - (1-\rho)n \right] \geq 0 \right), \quad (4.17) \end{aligned}$$

na primeira linha realizamos uma mudança de variável e, posteriormente, aplicamos (4.4) para estabelecer a última desigualdade. Dessa forma, (4.17) pode ser limitada superiormente por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P} \left( \mathcal{E}^*(0) \geq \frac{1}{(1-\rho)^\varepsilon} + (1-\rho)n \right). \quad (4.18)$$

Pelo Teorema 3.2.2 temos que,

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}^*(0) \geq t) \leq \exp(-at)$$

para  $t$  suficientemente grande, concluímos que a soma dada em (4.18) é dominada por:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\alpha\left(\frac{1}{(1-\rho)^\varepsilon} + (1-\rho)n\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{\alpha}{(1-\rho)^\varepsilon}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\alpha(1-\rho)n) = \exp\left(-\frac{\alpha}{(1-\rho)^\varepsilon}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (\exp(-\alpha(1-\rho)))^n \\
&= \exp\left(-\frac{\alpha}{(1-\rho)^\varepsilon}\right) (1 - \exp(-\alpha(1-\rho)))^{-1} \\
&\sim \exp\left(-\frac{\alpha}{(1-\rho)^\varepsilon}\right) \left(\frac{1}{\alpha(1-\rho)}\right) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

quando  $\rho \nearrow 1$ , para a última linha, foi utilizada a expansão em séries de Taylor de  $\exp(-\alpha(1-\rho))$ . Os resultados obtidos em (4.14), (4.15), (4.16) e (4.17) demonstram o teorema, visto que  $\varepsilon$  pode ser arbitrariamente pequeno.  $\square$

No caso  $G/D/1$ , o tempo médio de espera no estado estacionário ( $W_\rho(\infty)$ ) escala como  $\frac{1}{(1-\rho)}$ , o que reflete que, à medida que o sistema se satura, as esperas aumentam significativamente. No entanto, para que essas flutuações de  $\frac{1}{(1-\rho)}$  sejam evidentes, são necessários tempos longos da ordem de  $\frac{1}{(1-\rho)^2}$ . Isso ocorre porque as chegadas aleatórias introduzem variabilidade adicional, e o sistema exige mais tempo para se estabilizar no regime de tráfego pesado (ver Glynn [17], Sigman e Whitt [30]).

Por outro lado, no sistema  $S/D/1$ , com chegadas programadas, o tempo necessário para alcançar o equilíbrio é muito menor, da ordem de  $\frac{1}{(1-\rho)}$ . Isso se deve ao fato de que as chegadas determinísticas reduzem a variabilidade, permitindo que o sistema atinja seu estado estacionário mais rapidamente. Nesse sentido, o sistema  $S/D/1$  se ajusta mais rapidamente às condições de tráfego intenso, enquanto o  $G/D/1$  demora mais para se estabilizar devido à sua maior aleatoriedade.

Em resumo, o  $S/D/1$  se equilibra mais rápido, mas as flutuações no  $G/D/1$  demoram mais para se manifestar devido à necessidade de tempos prolongados para que as propriedades aleatórias se reflitam no sistema. Isso destaca como a natureza das chegadas (determinísticas versus generalizadas) afeta o comportamento do sistema sob tráfego intenso.

## 5 Simulação

Para ilustrar de maneira prática os resultados teóricos e obter uma compreensão mais clara de como os sistemas  $S/D/1$  se comportam, recorre-se a simulações computacionais. Neste trabalho, utilizamos a linguagem de programação R para simular diversos cenários e analisar o desempenho dos sistemas sob diferentes configurações, modificando a distribuição e os parâmetros das perturbações.

Através dessas simulações, buscamos explorar os resultados obtidos. Ao fazer isso, poderemos observar de maneira mais tangível o comportamento de  $N(t)$  e  $W(t)$ , com diferentes distribuições ou parâmetros das perturbações.

### 5.1 Simulação do processo $N(t)$

Simulamos 1000 realizações do processo  $N(t)$  para obter uma amostra e estimar sua densidade do processo  $N(t)$ , utilizando diferentes distribuições para as perturbações (Normal, Pareto e Uniforme). A densidade de  $N(t)$  estimada pode ser observada na Figura 5.1.

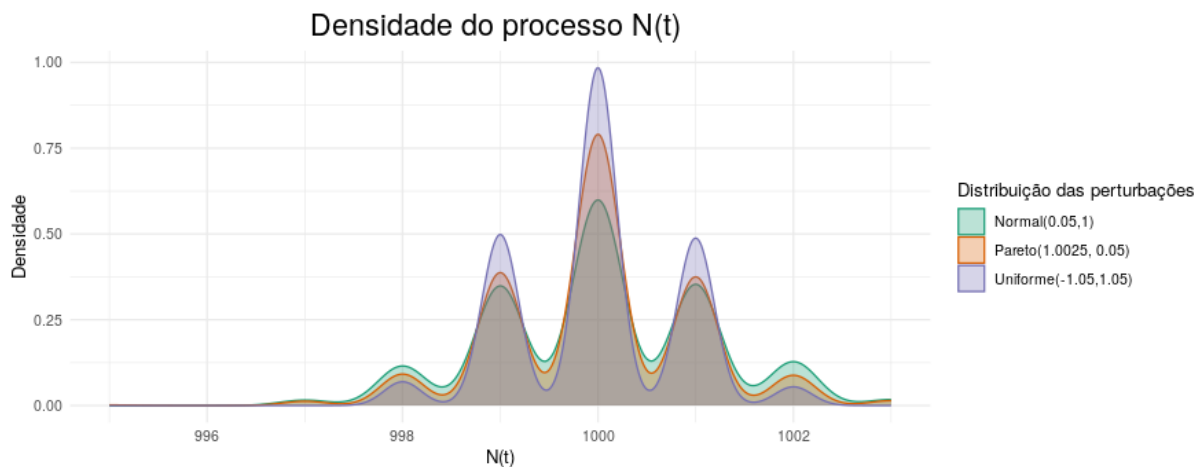


Figura 5.1:  $N(t)$  gerado com perturbações de caudas leves

Para ilustrar a propriedade de que o processo  $N(t)$  possui caudas leves, mesmo quando as perturbações associadas apresentam caudas pesadas, simulamos, como no caso

anterior, 1000 realizações do processo  $N(t)$ . Neste caso, utilizamos distribuições de caudas pesadas para as perturbações, especificamente a distribuição Pareto com  $\alpha < 1$ , Log-Normal e Cauchy.

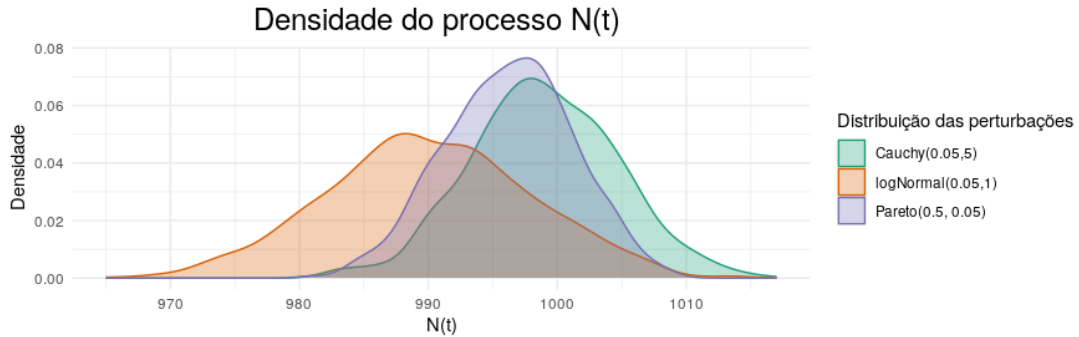


Figura 5.2:  $N(t)$  gerado com perturbações de caudas pesadas

Como se observa na Figura 5.2, embora as perturbações utilizadas possuam caudas pesadas (Cauchy, Log-Normal e Pareto com  $\alpha < 1$ ), a densidade estimada do processo  $N(t)$  não aparenta, visualmente, apresentar esse comportamento.

Para analisar de forma mais rigorosa as caudas do processo  $N(t)$  e das perturbações associadas, utilizaremos o estimador de Hill. A seguir, apresentaremos os valores estimados do parâmetro  $\alpha$  em cada caso, conforme ilustrado na próxima figura. Como podemos

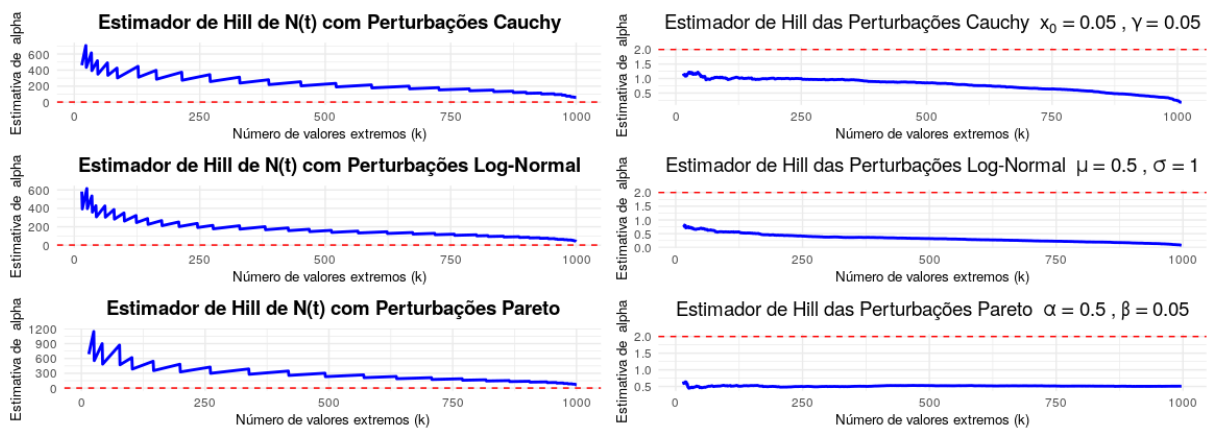


Figura 5.3: Estimador de Hill para o processo  $N(t)$  e suas perturbações

observar na Figura 5.3 os gráficos à esquerda, o  $\alpha$  estimado, associado ao estimador de Hill, é superior a 2. Portanto, podemos concluir que não há evidência estatística para assumir que o processo  $N(t)$  possui caudas leves em todos os casos apresentados. Por outro lado, os gráficos à direita mostram que o  $\alpha$  estimado, também associado ao estimador de Hill, é inferior a 2. Isso permite concluir que há evidência estatística para assumir que as perturbações possuem caudas pesadas, o que era esperado dadas as distribuições utilizadas para gerar as perturbações neste caso.

Assim, este exemplo ilustra que o processo  $N(t)$  apresenta caudas leves, independentemente de as perturbações associadas possuírem caudas pesadas.

## 5.2 Simulação do processo $W(t)$

Para ilustrar o comportamento do processo de carga de trabalho  $W(t)$  em um sistema S/D/1, foram simuladas quatro trajetórias geradas com perturbações do tipo Pareto, utilizando os parâmetros  $\alpha = 1.0025$  e  $\beta = 0.05$ . Essas simulações permitem observar a evolução temporal do processo.

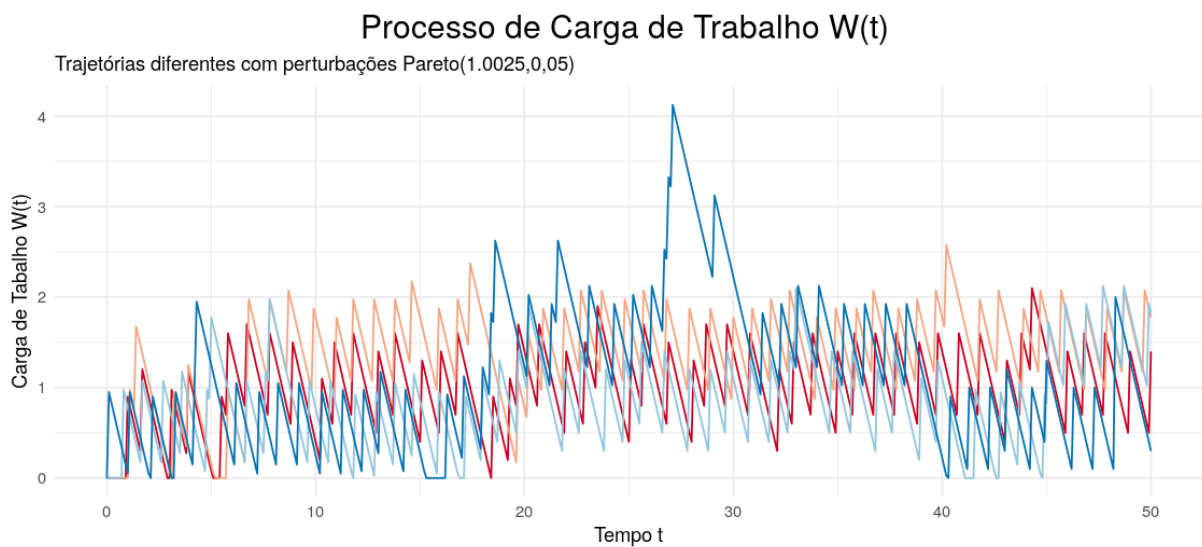


Figura 5.4: Trajetórias de  $W(t)$  com perturbações Pareto(1.0025,0,05)

Na Figura 5.4, observa-se que as quatro trajetórias simuladas do processo  $W(t)$  apresentam um comportamento estável pelo menos até o tempo  $t = 50$ . Em seguida, simulam-se trajetórias com perturbações de Pareto para diferentes valores de  $\alpha > 1$ .

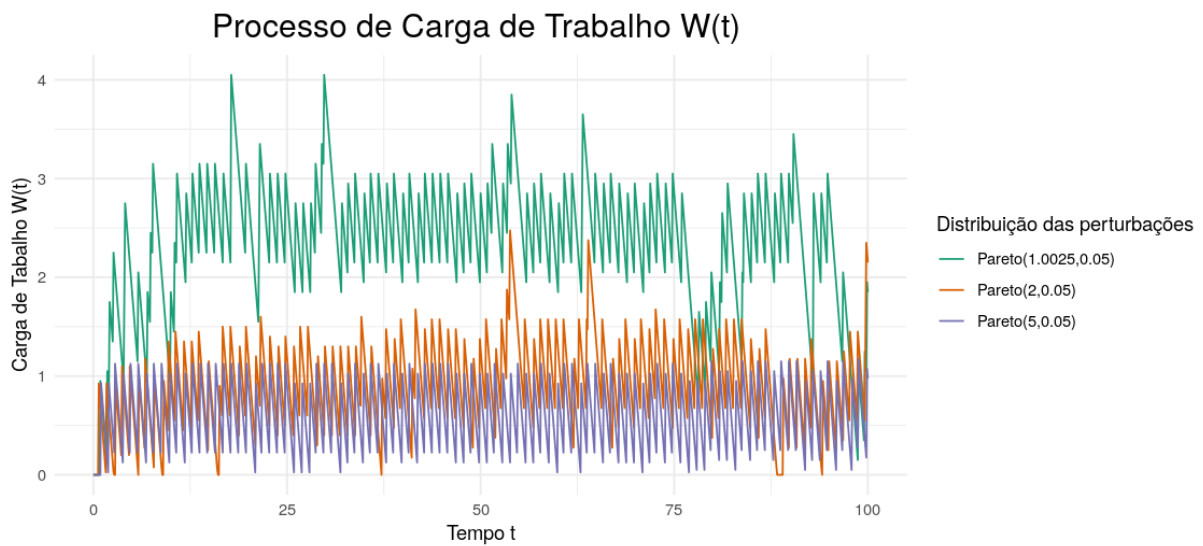


Figura 5.5:  $W(t)$  com perturbações Pareto e  $\alpha > 1$  até o tempo 100

Para as três trajetórias do processo  $W(t)$  simuladas, com perturbações do tipo Pareto, usamos  $\beta = 0.05$  e variamos  $\alpha \in \{1.0025, 2, 5\}$ . Como podemos observar na Figura 5.5, pelo menos até o tempo  $t = 100$ , quanto maior for o valor de  $\alpha$ , menor é o crescimento do processo  $W(t)$ .

Agora, para ilustrar o comportamento do processo  $W(t)$  com perturbações provenientes de outras distribuições de caudas pesadas, simulamos três trajetórias para observar seu comportamento.

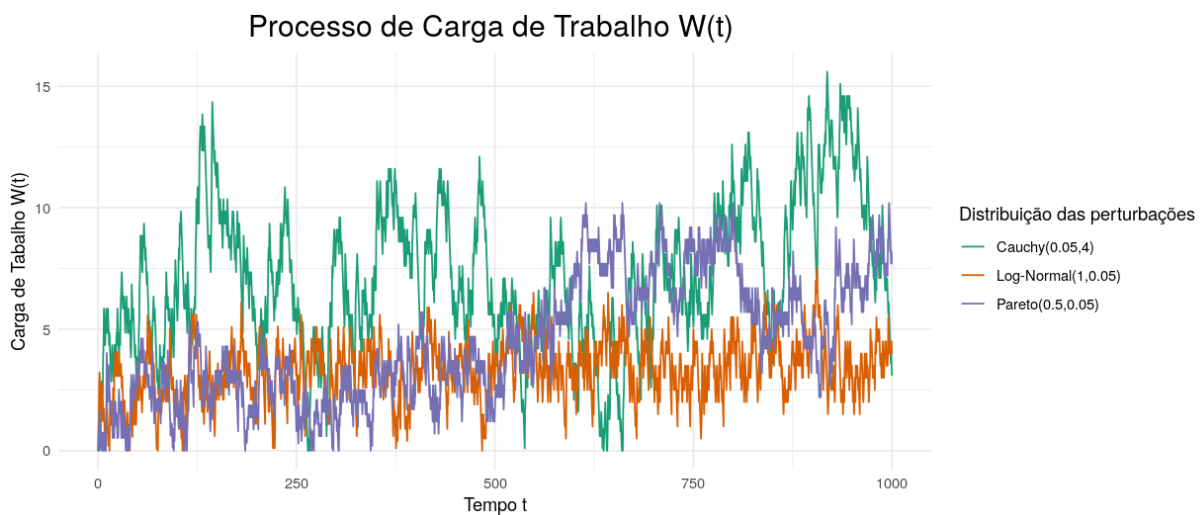


Figura 5.6:  $W(t)$  com perturbações de caudas pesadas

Na Figura 5.6 observa-se que as três distribuições geram dinâmicas distintas em  $W(t)$ . A trajetória associada a perturbações com distribuição Cauchy apresenta maiores oscilações, enquanto a trajetória associada a perturbações Pareto também exibe volatilidade, mas em menor grau. A Log-Normal gera uma trajetória mais estável e contida.

A simulação destaca como a escolha da distribuição de perturbações afeta a estabilidade do sistema. As distribuições com caudas pesadas geram cargas de trabalho mais voláteis, o que pode levar a congestionamentos.

## Referências

- [1] Tom M. Apostol. *Análisis Matemático*. Editorial Reverte, Madrid, España, 2nd edition, 1997. Reimpresión.
- [2] V. F. Araman, H. Chen, P. W. Glynn, and L. Xia. On a single server queue fed by a scheduled traffic with Pareto perturbations. *Queueing Systems*, 100(1):61–91, 2022.
- [3] Victor F. Araman and Peter W. Glynn. Fractional Brownian motion with  $H < 1/2$  as a limit of scheduled traffic. *Journal of Applied Probability*, 49(3):710 – 718, 2012.
- [4] Victor F. Araman and Peter W. Glynn. Gaussian limits for scheduled traffic with super-heavy tailed perturbations. *Queueing Systems*, 105(1):5–15, 2023.
- [5] Søren Asmussen. *Applied probability and queues*. Springer, 2003.
- [6] Grigorios A. Pavliotis (auth.). *Stochastic Processes and Applications: Diffusion Processes, the Fokker-Planck and Langevin Equations*. Texts in Applied Mathematics 60. Springer-Verlag New York, 1 edition, 2014.
- [7] Liliana Blanco Castañeda, Viswanathan Arunachalam, and Delvamuthu Dharmaraja. *Introduction to Probability and Stochastic Processes with Applications*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, USA, 2018.
- [8] Liliana Blanco Castañeda and Johanna Garzón Merchán. Hoja browniana fraccional. *Revista Colombiana de Estadística*, 28(2):193–205, 2005.
- [9] Hong Chen and Yiyuan Zhao. A new queueing model for aircraft landing process. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 1997. <https://doi.org/10.2514/6.1997-3737>.
- [10] Amir Dembo and Ofer Zeitouni. *Large Deviations Techniques and Applications*, volume 38 of *Applications of Mathematics*. Springer, New York, 2nd edition, 1998.
- [11] Makoto Doi, Yow-Mow Chen, and Hideo Ōsawa. A queueing model in which arrival times are scheduled. *Operations Research Letters*, 21(5):249–252, 1997.
- [12] Agner Krarup Erlang. The theory of probabilities and telephone conversations. *Nyt Tidsskrift for Matematik*, B(20):33–39, 1909.

- 
- [13] Agner Krarup Erlang. Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges. *Elektroteknikeren*, 13:5–13, 1917.
- [14] Agner Krarup Erlang. The calculation of the probability of blocking in telephone traffic. *Post Office Electrical Engineers' Journal*, 17:189–197, 1920.
- [15] William Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, volume 2. Wiley, New York, 2nd edition, 1971.
- [16] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Wiley, New York, 1999.
- [17] Peter W. Glynn. Diffusion approximations. In D. Heyman and M. Sobel, editors, *Stochastic Models: Handbooks of Operations Research and Management Science*, volume 2. Elsevier Science, Amsterdam, 1990.
- [18] David G. Kendall. Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and their Analysis by the Method of the Imbedded Markov Chain. *The Annals of Mathematical Statistics*, 24(3):338 – 354, 1953.
- [19] Aleksandr Khinchin. Zur theorie der warteschlangen. *Mathematische Zeitschrift*, 35:506–528, 1932.
- [20] J. F. C. Kingman. On queues in heavy traffic. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 24(2):383–392, 1962.
- [21] Marcos Nascimento Magalhães. *Introdução à Rede de Filas*. Associação Brasileira de Estatística, São Paulo, 1996. Edição apresentada no 12<sup>o</sup> SINAPE.
- [22] Benoit B. Mandelbrot and John W. Van Ness. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*, 10(4):422–437, 1968.
- [23] A. Mercer. Queues with scheduled arrivals: A correction, simplification and extension. *Journal of the royal statistical society series b-methodological*, 35:104–116, 1973.
- [24] A. Mercer. A queueing problem in which the arrival times of the customers are scheduled. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 22(1):108–113, 12 2018.
- [25] Felix Pollaczek. Über eine aufgabe der wahrscheinlichkeitsrechnung. *Mathematische Zeitschrift*, 32:64–100, 1930.
- [26] Sidney I. Resnick. *A Probability Path*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser, Boston, MA, 1999. Reprinted in 2005 as part of the Modern Birkhäuser Classics series.

- 
- [27] Sidney I. Resnick. *Heavy-Tail Phenomena: Probabilistic and Statistical Modeling*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, New York, 2007.
- [28] Sheldon M. Ross. *Stochastic Processes*. Wiley, New York, NY, USA, 2 edition, 1996.
- [29] H. L. Royden and P. M. Fitzpatrick. *Real Analysis*. Pearson, Upper Saddle River, NJ, 4th edition, 2010.
- [30] Karl Sigman and Ward Whitt. Heavy-traffic limits for nearly deterministic queues. *Journal of Applied Probability*, 48(3):657–678, 2011.
- [31] Chris B. Winsten. Geometric distributions in the theory of queues. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 21(1):1–10, 1959.

# Apêndice A

Neste apêndice, apresentamos as afirmações juntamente com suas respectivas demonstrações, que foram utilizadas.

## A.1 Demonstrações de resultados

Demostramos o Lema 3.1.1 o qual nos diz que se  $\mathbb{E}|\xi_0| < \infty$  então,

$$\begin{aligned} & (\mathcal{E}(n+s) - \mathcal{E}(0), \mathcal{L}(n+s) - \mathcal{L}(0)) \\ & \stackrel{D}{=} \left( \mathcal{E}''(n+s) - \hat{\mathcal{E}}_n - \hat{\mathcal{E}}_n''(n+s), \hat{\mathcal{L}}_n''(n+s) + \mathcal{L}''_n(n+s) - \hat{\mathcal{L}}_n(n+s) \right) \quad (\text{A.1}) \end{aligned}$$

*Demonstração:* Seja  $n \in \mathbb{Z}_+$  e  $s \in [0, 1)$ , consideremos uma sequência de valores inteiros  $k_n$  tal que  $k_n < n$  para todo  $n$  e  $\frac{k_n}{n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} v \in (0, 1)$ . Então,

$$\begin{aligned} & (\mathcal{E}(n+s) - \mathcal{E}(0), \mathcal{L}(n+s) - \mathcal{L}(0)) \\ & = \left( \sum_{i+U>t} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \leq n+s) - \sum_{i+U>0} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \leq 0), \right. \\ & \quad \left. \sum_{i+U \leq n+s} \mathcal{I}(i + \xi_i + U > t) - \sum_{i+U \leq 0} \mathcal{I}(i + \xi_i + U > 0) \right) \\ & = \left( \sum_{i+U>n+s} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \leq n+s) - \sum_{i+U \in (0, n+s]} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \leq 0) - \sum_{i+U>n+s} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \leq 0), \right. \\ & \quad \left. \sum_{i+U \leq 0} \mathcal{I}(i + \xi_i + U > n+s) + \sum_{i+U \in (0, n+s]} \mathcal{I}(i + \xi_i + U > n+s) - \sum_{i+U \leq 0} \mathcal{I}(i + \xi_i + U > 0) \right) \\ & = \left( \sum_{i+U>n+s} (\mathcal{I}(i + \xi_i + U \leq n+s) - \mathcal{I}(i + \xi_i + U \leq 0)) - \sum_{i+U \in (0, n+s]} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \leq 0), \right. \\ & \quad \left. \sum_{i+U \in (0, n+s]} \mathcal{I}(i + \xi_i + U > n+s) - \sum_{i+U \leq 0} (\mathcal{I}(i + \xi_i + U > 0) - \mathcal{I}(i + \xi_i + U > n+s)) \right) \\ & = \left( \sum_{i+U>n+s} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \in (0, n+s]) - \sum_{i+U \in (0, n+s]} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \leq 0), \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \sum_{i+U \in (0, n+s]} \mathcal{I}(i + \xi_i + U > n + s) - \sum_{i+U \leq 0} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \in (0, n + s]) \right) \\
= & \left( \sum_{i+U > n+s} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \in (0, n + s]) - \sum_{i+U \in (0, k_n]} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \leq 0) - \sum_{i+U \in (k_n, n+s]} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \leq 0), \right. \\
& \left. \sum_{i+U \in (0, k_n]} \mathcal{I}(i + \xi_i + U > n + s) + \sum_{i+U \in (k_n, n+s]} \mathcal{I}(i + \xi_i + U > n + s) - \sum_{i+U \leq 0} \mathcal{I}(i + \xi_i + U \in (0, n + s]) \right) \\
\stackrel{D}{=} & \left( \mathcal{E}''(n + s) - \hat{\mathcal{E}}_n - \hat{\mathcal{E}}_n''(n + s), \hat{\mathcal{L}}_n''(n + s) + \mathcal{L}_n''(n + s) - \hat{\mathcal{L}}_n(n + s) \right)
\end{aligned}$$

**Afirmação A.1.1.** *Sejam  $\alpha > 1$  e  $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{8\alpha}\right)$ , então  $1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 < 1 - 2\varepsilon - \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon}{2\alpha} < 1$*

*Demonstração.* Por hipótese temos  $\varepsilon < \frac{1}{8\alpha} < \frac{1}{4\alpha}$  logo  $2\varepsilon^2 < \frac{\varepsilon}{2\alpha}$ , como  $\alpha > 1$ , temos que  $-2 + \frac{1}{2\alpha} < 0$  logo  $-2\varepsilon - \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon}{2\alpha} = \varepsilon \left(-2 + \frac{1}{2\alpha}\right) - \varepsilon^2 < 0$ , portanto  $1 - 2\varepsilon - \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon}{2\alpha} < 1$   $\square$

**Nota A.1.1.** *A seguir veremos como o teorema do Radon-Nikodým é aplicado para a mudança de medida na demonstração do Teorema 3.2.1*

*Seja  $f = \exp(\theta(z)Z - \psi(\theta(s)))$  além disso, temos por definição que se  $\mathbb{P}(A) = 0$  então  $\mathbb{E}(\mathcal{I}(A) \exp(\theta(z)Z - \psi(\theta(z)))) = 0$  isto é,  $\tilde{\mathbb{P}}_z \ll \mathbb{P}$  pelo teorema de Radon-Nikodým*

$$f = \frac{d\tilde{\mathbb{P}}_z}{d\mathbb{P}} \text{ logo } \int_{Z > z} d\mathbb{P} = \int_{Z > z} \exp(-\theta(z)Z + \psi(\theta(z))) d\tilde{\mathbb{P}}_z$$

**Afirmação A.1.2.** *Para  $\varepsilon > 0$ ,  $\alpha > 1$  e  $c > 0$ , podemos selecionar  $r$  único tal que*

$$\int_0^\infty \frac{cr}{cr + x^\alpha} dx = 1 + \varepsilon.$$

*Demonstração.* Seja  $u = \frac{x^\alpha}{cr}$ , lo que implica que  $x = (ucr)^{1/\alpha}$  e  $dx = \frac{1}{\alpha} (cr)^{1/\alpha} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du$ . Então

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{cr}{cr + x^\alpha} dx &= \int_0^\infty \frac{1}{1 + \frac{x^\alpha}{cr}} dx = \int_0^\infty \frac{1}{1 + u} \cdot \frac{1}{\alpha} (cr)^{\frac{1}{\alpha}} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du. \\
&= \frac{(cr)^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha} \int_0^1 \frac{\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}}{1 + \frac{t}{1-t}} \frac{1}{(1-t)^2} dt \tag{A.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(cr)^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha} \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} (1-t)^{-1} dt = \frac{(cr)^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha} \int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-1} (1-t)^{-\frac{1}{\alpha}} dt \\
&= \frac{(cr)^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha} B\left(\frac{1}{\alpha}, 1 - \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{(cr)^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1 - \frac{1}{\alpha}\right)} \tag{A.3}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(cr)^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{(cr)^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha} \frac{\pi}{\text{sen}\left(\pi \frac{1}{\alpha}\right)}. \tag{A.4}$$

Para a equação (A.2) nos substituímos  $u = \frac{t}{1-t}$ , para a equação (A.3) nós usamos a função Beta y a função Gamma e em (A.4) empregamos a identidade de reflexão de Euler. Logo para  $\varepsilon > 0$  podemos escolher  $r$ , do seguinte modo,

$$r = \frac{1}{c} \left( (1 + \varepsilon) \frac{\text{sen} \left( \pi \frac{1}{\alpha} \right)}{\pi \alpha} \right)^\alpha$$

□

## Apêndice B

Neste apêndice, encontram-se os códigos das funções utilizadas para as simulações.

```
>sessionInfo()
R version 4.3.2 (2023-10-31)
Platform: x86_64-pc-linux-gnu (64-bit)
Running under: Ubuntu 22.04.3 LTS

Matrix products: default
BLAS: /usr/lib/x86_64-linux-gnu/openblas-pthread/libblas.so.3
LAPACK: /usr/lib/x86_64-linux-gnu/openblas-pthread/libopenblas-p-r0.3.20.so;
LAPACK version 3.10.0

ddistri <- function(dist, n, parame1) {
  # Verifica a distribuição e gera a amostra
  x <- switch(dist,
    "pareto" = Pareto::rPareto(n=n, t=parame1[2],
                              alpha=parame1[1]),
    "lognormal" = rlnorm(n=n, meanlog = parame1[1],
                        sdlog = parame1[2]),
    "weibull" = rweibull(n=n, shape=parame1[1],
                        scale = parame1[2]),
    "uniformep"=runif(n=n,min = parame1[1],
                     max = parame1[2]),
    "triangularp"=rtriangle(n=n,parame1[1],
                          parame1[2],parame1[3]),
    "exponencial" = rexp(n=n, rate=parame1),
    # posit e negati
    "normal" = rnorm(n=n, mean = parame1[1],
                    sd = parame1[2]),
    "triangular"=rtriangle(n=n,parame1[1],
                          parame1[2],parame1[3]),
```

```

        "uniforme"=runif(n=n,min = parame1[1],
                        max = parame1[2]),
        "tstudent"=rt(n=n,df=parame1),
        "cauchy" = rcauchy(n=n, location=parame1[1],
                           scale=parame1[2]),
        stop("Distribuição não reconhecida"))
    return(x)
}
# calcula N(t) ##
Ns<-function(t,secuencia_n,xi0,u){
  fil<-(secuencia_n+xi0+u)
  f<-which(fil>0 & fil<=t)
  Nt<-length(f)
  return(Nt)
}
# calcula W(t) #####
Wt<-function(t,secuencia_n,xi0,u){
  if(t<100) st<-seq(0,t,0.0125)
  if(t<250) st<-seq(0,t,0.025)
  if(t>=250) st<-seq(0,t,0.1)
  Nst<-sapply(st,Ns,secuencia_n=secuencia_n,xi0=xi0,u=u)
  Nt<-Ns(t,secuencia_n=secuencia_n,xi0=xi0,u=u)
  Wt<-max((Nt-t)-(Nst-st))
  return(Wt)
}
# uma amostra para N(t)
muestra.Nt<-function(m,p,parame1,parame2,t,dist,semilla=2024){
  set.seed(semilla)
  dis1<-c("pareto","lognormal","wibull","lognormal","triangularp",
          "uniformep","exponencial")
  dis2<-c("cauchy","normal","tstudent","triangular","uniforme")
  n <- 3000+4*ceiling(t)
  Nt<-NULL
  mxi_0<-c()
  #n <- 2000+ceiling(t)
  for (k in 1:m) {
    u<-runif(1,0,1)#; u
    xi0<-NULL
    if(dist%in%dis1){

```

---

```

    y = rbinom ( size = 1, prob = p , n = n)#; length(y)
    i<-1
    for (j in y) {
      if(j==1)
        xi0[i] = distri(dist,1,paramel)
      else
        xi0[i] = -distri(dist,1,parame2)
      i<-i+1
    }
  } #dis
  if(dist%in%dis2){
    xi0=distri(dist,n,paramel)
  }
  secuencia_n <- seq(from = floor((-n+1)/2), floor((n-1)/2))
  mxi_0<-c(mxi_0,xi0)
  Nt[k]<-Ns(t,secuencia_n=secuencia_n,xi0=xi0,u=u)
}
return(list(Nt,mxi_0))
}
# calcula W(t)
wt_carga_dist<-function(p,paramel,paramel2,t,dist,semilla=2024){
  set.seed(semilla)
  dis1<-c("pareto","lognormal","wibull","lognormal","triangularp",
          "uniformep","exponencial")
  dis2<-c("cauchy","normal","tstudent","triangular","uniforme")
  n <- 3000+4*ceiling(t)
  #n <- 2000+ceiling(t)
  u<-runif(1,0,1)#; u
  xi0<-NULL
  if(dist%in%dis1){
    y = rbinom ( size = 1, prob = p , n = n)#; length(y)
    i<-1
    for (j in y) {
      if(j==1)
        xi0[i] = distri(dist,1,paramel)
      else
        xi0[i] = -distri(dist,1,parame2)
      i<-i+1
    }
  }
}

```

---

```
} #dis
if(dist%in%dis2){
  xi0=distri(dist,n,paramel)
}
secuencia_n <- seq(from = floor((-n+1)/2), floor((n-1)/2))
if(t<250) swt<-seq(0,t,0.1)
else swt<-seq(0,t,0.5)
#swt<-seq(0,t,0.1)
wtt<-sapply(swt,Wt,secuencia_n=secuencia_n,xi0=xi0,u=u)
Nt<-Ns(t,secuencia_n=secuencia_n,xi0=xi0,u=u)
return(list(xi0=xi0,Nt=Nt,Wt=wtt,tiempo=swt))
}
```