

**Associação de um Feixe de Correlação ao  
Campo Gerado pela Conversão Paramétrica  
Descendente**

Pablo Lima Saldanha

Março de 2006

**Associação de um Feixe de Correlação ao Campo Gerado  
pela Conversão Paramétrica Descendente**

Pablo Lima Saldanha

Orientador: Prof. Carlos Henrique Monken

Dissertação apresentada à  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS,  
como requisito parcial para a obtenção do grau de  
MESTRE EM FÍSICA.

Março de 2006

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente àqueles que contribuíram para a minha formação como pessoa, pois sem a pessoa não existiria o trabalho.

Agradeço aos meus familiares, em especial aos meus pais e à minha irmã, por tudo que fizeram por mim nesse quarto de século de minha existência. Muito obrigado pelos ensinamentos e pelo excelente convívio nesses anos.

Agradeço aos meus grandes, médios e pequenos amigos, especialmente aos grandes, que felizmente são muitos, por todos os bons momentos proporcionados, que felizmente também são muitos. Não vou citar nomes, certamente minha memória cometeria injustiças, vocês sabem quem vocês são. Meus amigos do bairro, da 7ªH, do Coltec, da Física, do ICB e de outras tantas partes de onde vocês surgem. Sou muito grato!

Agradeço secundamente àqueles que, além de contribuírem para a minha formação como pessoa, contribuíram diretamente para o desenvolvimento dessa dissertação. Agradeço ao meu orientador, aos meus colegas de laboratório, aos alunos, professores e funcionários do departamento de Física da UFMG. Muito obrigado!

Ao André Buião.

# Conteúdo

<b>RESUMO</b>	<b>viii</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>ix</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Feixes Eletromagnéticos</b>	<b>5</b>
2.1 Espectro Angular <sup>1</sup> . . . . .	6
2.2 Feixes Paraxiais . . . . .	9
2.3 Feixe Gaussiano . . . . .	12
2.4 Feixes Hermite-Gaussianos . . . . .	15
<b>3 Correlações em Ótica</b>	<b>19</b>
3.1 Correlações Sob Uma Ótica Clássica . . . . .	20
3.2 Correlações Sob Uma Ótica Quântica . . . . .	27
3.2.1 Quantização do Campo Eletromagnético . . . . .	28
3.2.2 Correlações Quânticas . . . . .	33
<b>4 Feixe de Correlação em 4<sup>a</sup> Ordem Para a CPD</b>	<b>38</b>
4.1 A Conversão Paramétrica Descendente (CPD) . . . . .	38
4.2 Correlações em 4 <sup>a</sup> Ordem Para o Estado Gerado Pela CPD . . . . .	42
4.3 Experimento: Variação da Largura do Feixe de Correlação com a Propagação . . . . .	47
4.4 Proposta de Experimento: Medida da Fase de Gouy do Bifóton . . . . .	54
<b>5 Conclusões e Perspectivas</b>	<b>62</b>

---

<sup>1</sup>Esta seção e a próxima estão baseadas nas seções 3.2 e 5.6 da referência [1]

<b>A</b>	<b>Larguras Inferidas para Curvas Medidas com Fendas Finitas</b>	<b>64</b>
A.1	Medidas de Intensidade do Feixe: 1 Detector . . . . .	64
A.2	Medidas de Curvas em Coincidência: 2 Detectores . . . . .	65

# Lista de Figuras

2.1	Frentes de onda de uma onda paraxial . . . . .	10
2.2	Parâmetros de um feixe Gaussiano que se propaga na direção $z$ : a) Intensidade do campo em função da distância do eixo em um plano $z$ constante. b) Largura do feixe em função de $z$ . c) Raio de curvatura da frente de onda em função de $z$ . d) Fase de Gouy em função de $z$ .	14
2.3	Ilustração do significado geométrico do parâmetro $R(z)$ , a curvatura da frente de onda . . . . .	15
2.4	Comparação entre a fase de uma onda plana e a de um feixe Gaussiano com mesmo comprimento de onda. A diferença ao longo do eixo se denomina fase de Gouy . . . . .	16
2.5	Distribuição de intensidade ( $ U ^2$ ) de feixes Hermite-Gaussianos: a) $HG_{00}$ (Gaussiano) b) $HG_{01}$ c) $HG_{03}$ d) $HG_{23}$ . . . . .	17
3.1	Interferômetro de Young . . . . .	21
3.2	Padrões de interferência com diferentes visibilidades $V$ . . . . .	24
3.3	Interferômetro de Michelson . . . . .	26
4.1	a) Conversão Paramétrica Descendente do Tipo I: Os fótons gêmeos têm polarização ortogonal à do laser. Os cones internos possuem fótons com maior energia. b) Visão frontal. As marcas com X ligadas por uma linha pontilhada indicam regiões em que se encontram pares de fótons gêmeos. . . . .	40

4.2	a) Conversão Paramétrica Descendente do Tipo II: Os fótons do feixe extraordinário têm a mesma polarização do feixe e os do ordinário têm polarização ortogonal. b) Visão frontal. As marcas com X ligadas por uma linha pontilhada indicam regiões em que se encontram pares de fótons gêmeos. . . . .	41
4.3	Gráfico da função $\text{sinc}(x^2) = \frac{\text{sen}(x^2)}{x^2}$ . . . . .	46
4.4	Montagem experimental para a verificação da relação entre a largura do feixe laser e a largura da curva de contagens em coincidência para os fótons gêmeos. O Laser MIRA-900 gera um feixe com $\lambda = 830\text{nm}$ . O cristal dobrador converte alguns pares de fótons de $830\text{nm}$ em fótons de $415\text{ nm}$ . A lente $L_1$ focaliza o feixe no cristal dobrador, para aumentar a eficiência da conversão, e a lente $L_2$ o colima novamente. Ambas as lentes têm distância focal $50\text{mm}$ . $E_{D1}$ e $E_{D2}$ são espelhos dicróicos que têm reflectância alta para o comprimento de onda de $415\text{nm}$ e baixa para $830\text{nm}$ . $O_1$ é um orifício com $300\mu\text{m}$ de diâmetro. $O_2$ é uma íris com $5\text{mm}$ de diâmetro. Esses orifícios têm a função de tornar o feixe após $O_2$ aproximadamente Gaussiano, como discutido no texto. As lentes $L_3$ , divergente com distância focal $-75\text{mm}$ , e $L_4$ , convergente com distância focal $200\text{mm}$ , servem para deixar a cintura do feixe após o cristal BBO( $\beta$ - borato de bário), responsável pela conversão paramétrica, e com um comprimento de Rayleigh que permita uma visualização da variação da largura do feixe com a propagação. O medidor de potência é utilizado para medir as larguras do feixe laser e $D_1$ e $D_2$ fazem as contagens simples e em coincidência dos fótons gêmeos. . . . .	48
4.5	Padrão de difração de uma onda plana por uma abertura circular. À direita está representada a curva de intensidade ao longo de uma linha que passa pelo centro do padrão. . . . .	49
4.6	a) Perfil de intensidade do Laser em $z=760\text{mm}$ . Ajuste Gaussiano 4.25 fornece $w = (0,287 \pm 0,001)\text{mm}$ . b) Largura inferida (levando-se em conta o tamanho finito da fenda no medidor) do feixe $w$ em função de $z$ . O ajuste 4.26 fornece $w_0 = (50,2 \pm 0,2)\mu\text{m}$ e $z_C = (653,7 \pm 0,7)\text{mm}$ .	51

4.7	a) Contagens simples e em coincidência para os fótons gêmeos gerados pela CPD com os detetores em $z=560\text{mm}$ . Ajuste Gaussiano 4.25 fornece $w = (0,557 \pm 0,007)\text{mm}$ . b) Largura das curvas em coincidência dividida por dois em função de $z$ . A curva contínua corresponde ao ajuste 4.26 para o feixe laser mostrado no gráfico 4.6b) . . . . .	53
4.8	Montagem experimental para se verificar a fase de Gouy de um feixe. $L_1$ é uma lente convergente que focaliza o feixe a uma certa distância $z_C$ . $E_1$ e $E_2$ são espelhos, $BS_1$ e $BS_2$ são divisores de feixe 50% . . . . .	55
4.9	Montagem experimental para se verificar a fase de Gouy na correlação em quarta ordem para o feixe formado pelos fótons gêmeos gerados pela CPD. $L_1$ é uma lente convergente que focaliza o feixe laser a uma certa distância $z_C$ . O cristal tipo II é o responsável pela conversão paramétrica. $ED_1$ é um espelho dicróico que transmite os fótons gêmeos e reflete o feixe laser. $P_1$ e $P_2$ são placas de onda $\lambda/2$ para os fótons gêmeos. $P_1$ gira a polarização em $45^\circ$ e $P_2$ em $90^\circ$ . $PBS$ é um divisor de feixe polarizado, que transmite fótons com polarização horizontal e reflete os com polarização vertical. $E_1$ e $E_2$ são espelhos e $BS$ é um divisor de feixe 50%. . . . .	57
4.10	Geração do par de fótons gêmeos no regime colinear . . . . .	57
4.11	Detector de 2 fótons com eficiência de 50% . . . . .	58
4.12	Ilustração das bases de polarização $ H\rangle$ , $ V\rangle$ , $ +\rangle$ , $ -\rangle$ . . . . .	59
4.13	Exemplo de curvas previstas para o número de contagens em coincidência por segundo para o experimento de medida da fase de Gouy em quarta ordem para o bifóton: a) Em $z = z_{d1}$ b) Em $z = z_{d2}$ . . . . .	61

A.1 a) Curvas  $e^{-2x^2/w_m^2}$  com  $w_m = 0,065\text{mm}$  e  $g(x)/g(0)$  (A.1) com  $a = 0,050\text{mm}$  e  $w = 0,049\text{mm}$ . Esses valores correspondem aos valores medido e inferido para a largura da curva de intensidade do feixe na posição da cintura no capítulo 4 ( $z=640\text{mm}$  na tabela 4.1). b) Curvas  $e^{-2x^2/w_m^2}$  com  $w_m = 0,288\text{mm}$  e  $G(x)/G(0)$  (A.3) com  $a = 0,100\text{mm}$  e  $w = 0,263\text{mm}$ . Esses valores correspondem aos valores medido e inferido para a largura da curva de coincidências para os fótons gêmeos na posição da cintura do feixe no capítulo 4 ( $z=640\text{mm}$  na tabela 4.1). Em ambos os casos é quase impossível distinguir as 2 curvas traçadas. . . . . 65

# Lista de Tabelas

4.1	Larguras $w$ das curvas Gaussianas 4.25 ajustadas para as medidas de intensidade do feixe laser ( $w_{\text{Feixe med.}}$ ) e contagens em coincidência dos fótons gêmeos gerados pela CPD ( $w_{\text{CPD med.}}$ ) para diferentes distâncias $z$ ao cristal responsável pela conversão. Também constam na tabela os valores inferidos para essas grandezas levando em consideração as larguras finitas das fendas utilizadas na medição ( $w_{\text{Feixe inf.}}$ e $1/2 w_{\text{CPD inf.}}$ ), conforme descrito no apêndice A. . . . .	52
-----	--	----

# Resumo

Nessa dissertação será mostrado que a correlação quântica em quarta ordem para o campo eletromagnético gerado pela conversão paramétrica descendente está diretamente relacionada com a correlação em segunda ordem para o campo clássico do feixe de bombeamento que gera a conversão. Isso é um reflexo do fato de que a amplitude de probabilidade para as detecções em coincidência dos fótons gêmeos gerados no cristal não-linear em um plano a uma certa distância dele se relaciona com a amplitude do feixe de bombeamento nesse plano. Associamos então um *feixe de correlação* em quarta ordem ao campo gerado pela conversão paramétrica descendente, já que a função de correlação em quarta ordem obedece à equação de um feixe.

Um experimento que mostra a relação entre a largura de um feixe de bombeamento Gaussiano e a largura das curvas em coincidência para os fótons gêmeos será mostrado. Também será discutida uma proposta de experimento para se verificar a influência da fase de Gouy do feixe nas contagens em coincidência dos fótons gêmeos.

# Abstract

In this dissertation it will be shown that the quantum correlations in fourth order for the electromagnetic field generated by the parametric down-conversion is directly related to the second order correlation for the classic field of the pump beam that generates the conversion. This comes as a result of the fact that the probability amplitude for the detection in coincidences of the twin photons generated in the non-linear crystal in a plane after it is related to the pump field amplitude in this plane. We then associate a *correlation beam* in fourth order for the field generated by the parametric down-conversion, since the fourth order correlation function obeys a beam equation.

An experiment showing the relation among the width of a Gaussian pump beam and the width of the coincidence curves for the twin photons will be shown. Also it will be discussed a proposal of an experiment for verifying the influence of the Gouy phase in the coincidence counts for the twin photons.

# Capítulo 1

## Introdução

De acordo com a física clássica, o universo seria constituído de 2 elementos básicos: a matéria e a radiação. A matéria seria composta de partículas indivisíveis que podem ou não conter carga elétrica. Essas partículas seriam perfeitamente localizáveis e o estado de cada uma seria definido em cada instante pela sua posição e velocidade, num total de seis variáveis dinâmicas que obedecem as equações de Newton para o movimento. A existência de partículas carregadas que se movimentam no espaço gera campos elétricos e magnéticos que obedecem as equações de Maxwell para o eletromagnetismo, sendo esses campos os constituintes básicos da radiação eletromagnética. O estado do campo eletromagnético possui infinitas variáveis dinâmicas, correspondentes ao valor dos campos elétrico e magnético em cada ponto do espaço. As equações de Maxwell levam a uma equação de onda para os campos elétrico e magnético na ausência de cargas no espaço, sendo assim a radiação teria um comportamento ondulatório.

No contexto da física clássica, todas as variáveis dinâmicas citadas acima possuem um valor real em cada instante de tempo e definem o estado do sistema naquele instante. Essas variáveis evoluem de acordo com equações diferenciais estabelecidas pela mecânica e pelo eletromagnetismo clássicos de maneira determinística, gerando uma evolução determinística do estado físico.

A luz é composta de radiação eletromagnética. Sendo assim, no contexto clássico os campos elétrico e magnético que compõem a luz possuem uma realidade objetiva em cada ponto do espaço. Contudo, quando se trata de fontes extensas, é extremamente difícil se descrever como o campo de radiação foi produzido, de forma

que não podemos calcular o campo resultante no espaço de forma determinística. Uma maneira que dispomos para conhecer o campo produzido por uma determinada fonte é medindo as propriedades desse campo. Mas também há limitações para isso, pois é extremamente difícil se medir o campo com uma resolução temporal da ordem do período das ondas de luz visível. O que normalmente conseguimos medir é a intensidade média da luz ao longo de vários ciclos. Mas podemos medir correlações existentes entre diferentes pontos do espaço e do tempo através de experimentos interferométricos, associando medidas de intensidade com propriedades estatísticas do campo eletromagnético através das funções de correlação [1, 2]. As funções de correlação correspondem a médias temporais do produto do campo em diferentes pontos do espaço e diferentes tempos.

As coisas ocorrem de maneira bem diferente no caso da física quântica. A teoria é construída sobre um formalismo matemático extremamente abstrato. O estado de um sistema é definido por um vetor no espaço de Hilbert. As variáveis dinâmicas aparecem como operadores que atuam nesses vetores de estado, bem como a evolução temporal do sistema, que se dá através do operador evolução. Embora a evolução do estado seja determinística, o resultado de uma medida de uma grandeza física do sistema é fornecido de forma probabilística pela teoria [3].

A física clássica não é capaz de prever uma série de resultados experimentais obtidos a partir do final do século XIX, que só podem ser previstos corretamente com a utilização da mecânica quântica. Essa é a razão da existência da mecânica quântica, uma teoria absolutamente não-intuitiva, capaz de prever o comportamento não-intuitivo de todos os experimentos realizados até hoje.

Um ponto altamente não intuitivo da teoria quântica é que, em muitos casos, não se pode dizer que uma determinada grandeza física, como por exemplo a posição de uma partícula ou o campo elétrico em determinado ponto, tenha uma realidade física objetiva independente do observador. Antes de se realizar a medida, aquela propriedade pode simplesmente estar indeterminada. Ao incidirmos um feixe de elétrons em uma fenda dupla de Young, por exemplo, observamos um padrão de interferência em um anteparo posicionado atrás das fendas, um indício de que estamos lidando com um fenômeno ondulatório. Contudo, ao observarmos atentamente o anteparo, vemos que cada elétron incidente marca um ponto nele, indicando que se trata de uma partícula. A marca no anteparo é uma medida de posição, mas não

podemos atribuir uma posição ao elétron anterior a essa medida, como por exemplo indagando por qual fenda ele passou. Esse questionamento não faz sentido no contexto da teoria quântica. E qualquer tentativa de se medir por qual fenda o elétron passou destrói o padrão de interferência [4].

A ótica quântica consiste na aplicação do formalismo e dos conceitos da mecânica quântica aos fenômenos relacionados à radiação eletromagnética [1, 5]. A luz passa a ser descrita como sendo composta de fótons, espécies de “partículas” quânticas que correspondem a excitações do campo eletromagnético. Surgem então várias previsões não-intuitivas para o comportamento da luz, todas confirmadas experimentalmente. Essas previsões também são baseadas em funções de correlação, que neste contexto relacionam propriedades do campo eletromagnético com probabilidades de se detectarem fótons. Essas funções de correlação quânticas são valores esperados de operadores associados ao campo eletromagnético em diferentes tempos e pontos do espaço.

Uma ferramenta importante no estudo das propriedades quânticas da luz é o fenômeno da Conversão Paramétrica Descendente (CPD). Esse fenômeno consiste na conversão espontânea de um fóton proveniente de um feixe laser em dois fótons de energia menor ao passar por um cristal birrefringente não-linear [6]. O processo ocorre de forma que a energia e o momento se conservam. Os dois fótons assim gerados são denominados gêmeos e são emaranhados em diversos graus de liberdade: polarização, momento, energia, etc... Sendo assim, diversos experimentos realizados com o par de fótons gêmeos, inclusive os presentes nessa dissertação, só podem ser previstos utilizando-se a ótica quântica.

Diversos trabalhos foram realizados utilizando medidas de detecção em coincidência (ao mesmo tempo) com os fótons gêmeos demonstrando que o par de fótons possui, de certa forma, características do feixe laser que o gerou [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. O objetivo dessa dissertação é demonstrar, teórica e experimentalmente, que as correlações quânticas ditas em quarta ordem para a detecção em coincidência dos fótons gêmeos gerados pela CPD possui, em alguns casos específicos, uma correspondência com as correlações clássicas ditas em segunda ordem para o campo elétrico do feixe laser que gera a conversão.

No capítulo 2 serão discutidas propriedades de feixes eletromagnéticos, em especial propriedades do feixe Gaussiano. A representação de uma campo eletro-

magnético clássico através do seu espectro angular, necessária para a discussão, também será explicada.

No capítulo 3 serão discutidas as funções de correlação clássicas e quânticas para o campo eletromagnético. Discutirei como obter informações sobre o campo eletromagnético nos dois contextos (clássico e quântico) relacionando experimentos interferométricos com as funções de correlação e essas com as propriedades estatísticas do campo.

No capítulo 4 os conceitos de função de correlação serão aplicados ao fenômeno da conversão paramétrica descendente. Na seção 4.1 será abordado o fenômeno da CPD. Na 4.2 será calculada a função de correlação quântica em quarta ordem para o campo gerado pela CPD nas condições em que ela está diretamente associada ao feixe laser que gera a conversão. Na seção 4.3 será descrito o experimento realizado para verificar que a largura da curva em coincidências para os fótons gêmeos está associada à largura do feixe no plano de detecção. Finalmente, na seção 4.4 será descrita uma proposta de experimento para se medir a influência fase de Gouy do feixe nas detecções em coincidência dos fótons gêmeos.

# Capítulo 2

## Feixes Eletromagnéticos

O caráter ondulatório da radiação eletromagnética nos impede de construir um feixe que se propague sem sofrer dispersão angular e tenha um confinamento arbitrário ao longo das direções ortogonais à de propagação <sup>1</sup>. Um exemplo de solução da equação de onda é a onda plana, que não tem dispersão angular. Ela se propaga em uma direção bem definida, a do seu vetor de onda. Contudo, uma onda plana é uma abstração matemática, já que ela ocuparia todo o espaço, não possuindo nenhum tipo de confinamento. Uma onda esférica é um exemplo oposto. É oriunda de uma fonte pontual, mas se propaga em todas as direções.

Um feixe eletromagnético tem como propriedades uma dispersão angular pequena e um confinamento que torna o campo nulo (ou praticamente nulo) fora de uma determinada região nas direções ortogonais à de propagação. O seu comportamento, portanto, está entre o de uma onda plana e o de uma esférica. Neste capítulo serão mostradas as características de um feixe eletromagnético, bem como as equações que deverá satisfazer e exemplos de feixes. A representação de um campo através do seu espectro angular, que será explicada na primeira seção, será utilizada para isso.

---

<sup>1</sup>Os feixes Bessel [14, 15] são feixes que têm uma distribuição de intensidade no plano ortogonal ao de propagação com um máximo central envolto por anéis concêntricos. Esses feixes são muitas vezes considerados como livres de difração porque a porção central do feixe tem uma dispersão praticamente nula. Contudo apenas uma pequena parte da energia do feixe está nessa porção. Se considerarmos o feixe inteiro, há dispersão.

## 2.1 Espectro Angular <sup>2</sup>

Uma maneira útil de descrever campos eletromagnéticos propagantes é através do espectro angular de ondas planas [16, 17]. Nessa descrição, o campo eletromagnético em um determinado plano é escrito como uma combinação de ondas planas. Como a propagação de uma onda plana é calculada de forma simples, apenas com um acréscimo de fase dependente do vetor de onda, essa descrição simplifica o tratamento de problemas de difração e propagação. Conhecendo o campo em um plano perpendicular à direção de propagação, podemos calcular qual o campo em um plano perpendicular à direção de propagação posterior.

De acordo com as equações de Maxwell para o eletromagnetismo, em um meio homogêneo e isotrópico com permeabilidade magnética  $\mu$  e permeabilidade elétrica  $\epsilon$  na ausência de cargas, os campos elétrico  $\mathbf{E}$  e magnético  $\mathbf{B}$  devem satisfazer equações de onda [18]:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (2.1)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (2.2)$$

Em uma equação desse tipo,  $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$  é a velocidade da onda. A concordância entre o valor calculado para  $c$  (através de  $\mu$  e  $\epsilon$ ) e o valor medido para a velocidade da luz levou Maxwell à conclusão de que a luz é composta de ondas eletromagnéticas. O tipo mais simples de solução para essas equações são as ondas planas  $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ . Considerando-se um campo monocromático em que os campos elétrico e magnético oscilam em cada ponto do espaço com frequência angular  $\omega$  temos, em notação complexa:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ ;  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ . A notação complexa facilita os cálculos e será adotada ao longo da dissertação. O campo elétrico é dado simplesmente pela parte real de  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , o mesmo valendo para o campo magnético. Levando-se campos desse tipo nas equações 2.1 e 2.2, vemos que cada componente dos campos elétrico e magnético deve obedecer à equação de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2)U(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.3)$$

---

<sup>2</sup>Esta seção e a próxima estão baseadas nas seções 3.2 e 5.6 da referência [1]

com  $k = \omega/c$  e  $U(\mathbf{r})$  é um campo escalar que representa uma das componentes do campo elétrico ou magnético.

O caso de interesse é aquele em que temos um campo eletromagnético gerado na região  $z < 0$  e queremos analisar a propagação desse campo na região  $z \geq 0$ . Suponhamos que em qualquer plano  $z = \text{const.} \geq 0$  o campo possa ser escrito como uma integral de Fourier bidimensional <sup>3</sup>:

$$U(x, y, z) = \int \int \tilde{U}(q_x, q_y; z) e^{i(q_x x + q_y y)} dq_x dq_y . \quad (2.4)$$

Tomando-se a transformada inversa:

$$\tilde{U}(q_x, q_y; z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int U(x, y, z) e^{-i(q_x x + q_y y)} dx dy . \quad (2.5)$$

Substituindo a equação 2.4 na 2.3 e colocando a operação  $(\nabla^2 + k^2)$  sob as integrais, obtemos:

$$\int \int [\nabla^2 + k^2][\tilde{U}(q_x, q_y; z) e^{i(q_x x + q_y y)}] dq_x dq_y = 0 . \quad (2.6)$$

Realizando-se a diferenciação:

$$\int \int \left[ (-q_x^2 - q_y^2 + k^2) \tilde{U}(q_x, q_y; z) + \frac{\partial^2 \tilde{U}(q_x, q_y; z)}{\partial z^2} \right] e^{i(q_x x + q_y y)} dq_x dq_y = 0 . \quad (2.7)$$

Como a equação 2.7 deve valer para quaisquer valores de  $x$  e  $y$ , o termo entre colchetes deve ser nulo. Logo a função  $\tilde{U}(u, v, z)$  deve satisfazer a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}(q_x, q_y; z)}{\partial z^2} + s^2 \tilde{U}(q_x, q_y; z) = 0 , \quad (2.8)$$

com

$$s^2 = k^2 - q_x^2 - q_y^2 , \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} s &= +(k^2 - q_x^2 - q_y^2)^{1/2} \text{ quando } q_x^2 + q_y^2 \leq k^2 , \\ &= +i(q_x^2 + q_y^2 - k^2)^{1/2} \text{ quando } q_x^2 + q_y^2 > k^2 . \end{aligned} \quad (2.10)$$

---

<sup>3</sup>Nessa dissertação, sempre que os limites de integração não forem explicitados, a integração ocorre de  $-\infty$  a  $+\infty$ .

A solução geral da equação 2.8 é

$$\tilde{U}(q_x, q_y; z) = A(q_x, q_y)e^{isz} + B(q_x, q_y)e^{-isz}, \quad (2.11)$$

em que  $A(q_x, q_y)$  e  $B(q_x, q_y)$  são funções arbitrárias. Substituindo esse resultado na equação 2.4:

$$U(x, y, z) = \int \int A(q_x, q_y)e^{i(q_x x + q_y y + sz)} du dv + \int \int B(q_x, q_y)e^{i(q_x x + q_y y - sz)} dq_x dq_y. \quad (2.12)$$

Observamos, a partir da equação 2.9, que  $q_x^2 + q_y^2 + s^2 = k^2$ , de forma que cada termo dentro das integrais acima obedece à equação de Helmholtz 2.3. Portanto a equação 2.12 é uma representação do campo em termos dos modos desse campo. Para  $q_x^2 + q_y^2 \leq k^2$  cada termo dentro da primeira integral representa uma onda plana de amplitude  $A(q_x, q_y)$  e vetor de onda  $\mathbf{k} = (q_x, q_y, s)$  se propagando no sentido  $z$  positivo. Para  $q_x^2 + q_y^2 > k^2$  temos  $s$  imaginário e a amplitude da onda decresce exponencialmente com  $z$  (proporcional a  $e^{-|s|z}$ ), ou seja, temos uma onda evanescente. Os termos da segunda integral também correspondem a ondas planas e evanescentes, porém que se propagam no sentido  $z$  negativo. Portanto as componentes do campo gerado por ondas eletromagnéticas que se propagam no sentido  $z$  positivo podem ser escritas como:

$$U(x, y, z) = \int \int A(q_x, q_y)e^{i(q_x x + q_y y + sz)} dq_x dq_y, \quad (2.13)$$

com  $s$  dado pela equação 2.10.

É conveniente fazer uma mudança de variáveis:

$$q_x = kp, \quad q_y = kq, \quad s = km. \quad (2.14)$$

Assim

$$U(x, y, z) = \int \int a(p, q)e^{ik(px + qy + mz)} dp dq, \quad (2.15)$$

com

$$a(p, q) = k^2 A(kp, kq). \quad (2.16)$$

e

$$\begin{aligned} m &= +(1 - p^2 - q^2)^{1/2} \text{ quando } p^2 + q^2 \leq 1, \\ &= +i(p^2 + q^2 - 1)^{1/2} \text{ quando } p^2 + q^2 > 1. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Comparando-se as equações 2.15 e 2.4 no plano  $z = 0$  podemos concluir que

$$a(p, q) = k^2 \tilde{U}(kp, kq, 0) = \frac{k^2}{(2\pi)^2} \int \int U(x, y, 0) e^{-ik(px+qy)} dx dy . \quad (2.18)$$

A equação 2.15 mostra o campo eletromagnético em um plano decomposto em ondas planas (com vetor de onda  $\mathbf{k} = (pk, qk, mk)$ ) e evanescentes, com amplitudes dadas por  $a(p, q)$ . Mas as ondas evanescentes só são relevantes na região próxima ao plano, pois decaem exponencialmente com  $z$ . Como normalmente estamos interessados no campo a uma distância apreciável, é usual desprezar esses termos e considerar apenas os termos com  $p^2 + q^2 \leq 1$ . Devido a essa interpretação física, as representações  $a(p, q)$  (equação 2.18) e  $\tilde{U}(q_x, q_y) \equiv \tilde{U}(q_x, q_y; 0)$  (equação 2.5) se denominam espectro angular de ondas planas.

## 2.2 Feixes Paraxiais

Uma onda paraxial monocromática é aquela que, ao ser escrita como uma superposição de modos de ondas planas, apenas aqueles modos cujos vetores de onda não se desviem muito da direção de propagação da onda têm amplitude considerável. Ou seja, para uma onda que se propaga na direção  $z$ , o espectro angular dado pela equação 2.15 é tal que  $|a(p, q)| \approx 0$  a não ser que  $p^2 + q^2 \ll 1$ . Assim a onda terá uma dispersão angular pequena, tendo frentes de onda praticamente planas, como na figura 2.1. Logo, de acordo com 2.17, a expansão não contém ondas evanescentes. Um feixe paraxial é uma onda paraxial que tem um confinamento do campo nas direções ortogonais à de propagação. Nessas condições, é possível fazer a aproximação:

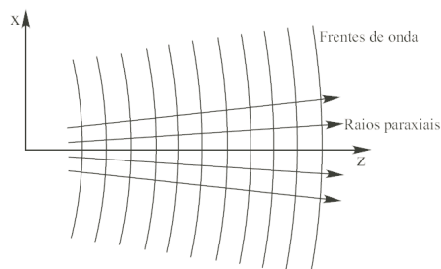
$$m = (1 - p^2 - q^2)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}(p^2 + q^2) . \quad (2.19)$$

Utilizando essa aproximação na equação 2.15 temos:

$$U(x, y, z) = e^{ikz} \int \int a(p, q) e^{ik(px+qy)} e^{-ik(p^2+q^2)z/2} dp dq , \quad (2.20)$$

com  $a(p, q)$  dado pela equação 2.18. Escrevendo  $a(p, q)$  explicitamente:

$$U(x, y, z) = e^{ikz} \frac{k^2}{(2\pi)^2} \int \int \int \int U(x', y', 0) e^{-ik(px'+qy')} e^{ik(px+qy)} e^{-ik(p^2+q^2)z/2} dx' dy' dp dq . \quad (2.21)$$



**Figura 2.1:** Frentes de onda de uma onda paraxial

Definindo  $G(x, y, z)$  como

$$G(x - x', y - y', z) = \frac{k^2}{(2\pi)^2} \int \int e^{ik[(x-x')p+(y-y')q]} e^{-ik(p^2+q^2)z/2} dp dq . \quad (2.22)$$

Vemos que essa função é o produto de duas transformadas de Fourier unidimensionais de funções Gaussianas, cuja solução é dada por [1]:

$$\int e^{-\beta^2 t^2} e^{-iqt} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{-q^2/4\beta^2} . \quad (2.23)$$

Logo a função  $G(x, y, z)$  vale

$$G(x, y, z) = -\frac{ik}{2\pi z} e^{ik(x^2+y^2)/2z} \quad (2.24)$$

e

$$U(x, y, z) = e^{ikz} \int \int U(x', y', 0) G(x - x', y - y', z) dx' dy' . \quad (2.25)$$

Essa equação mostra como se propaga o campo de um feixe paraxial a partir do plano  $z = 0$ .

É interessante notar que essa equação para a propagação do campo é idêntica à construída utilizando-se o princípio de Huygens-Fresnel para a propagação da luz [19] na aproximação paraxial. De acordo com esse princípio, cada ponto em uma frente de onda se comporta como uma fonte de uma onda esférica ( $\frac{e^{ik \cdot r}}{r}$ ). O campo no plano  $z$  pode ser obtido através da superposição das ondas geradas pelas frentes de onda no plano  $z = 0$ :

$$U(x, y, z) = \int \int U(x', y', 0) \frac{e^{ik[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{1/2}}}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{1/2}} K(\chi) dx' dy' , \quad (2.26)$$

em que  $K(\chi)$  é um fator de inclinação,  $\chi$  sendo o ângulo entre a normal à frente de onda no ponto  $(x', y', 0)$  e a reta que liga esse ponto ao ponto de observação  $(x, y, z)$ . De acordo com a teoria de difração de Kirchoff, esse fator vale  $K(\chi) = -\frac{i}{2\pi}(1 + \cos \chi)$ .

Na aproximação paraxial, temos uma onda que se propaga próxima ao eixo  $z$ , logo  $z$  é em geral muito maior que  $x$ ,  $x'$ ,  $y$  e  $y'$  para  $U(x, y, z)$  e  $U(x', y', 0)$  com valores significativos. Outro fato é que as frentes de onda são praticamente planas. Portanto se justificam as aproximações:

$$\chi \approx 0, \quad (2.27)$$

$$[(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2]^{1/2} \approx z + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z}. \quad (2.28)$$

Utilizando a aproximação 2.28 no termo exponencial de 2.26 e apenas o primeiro termo dessa aproximação no denominador, chegamos a uma forma idêntica à 2.25. A justificativa de se utilizar uma aproximação melhor no termo exponencial é que  $k$  é em geral um número de onda grande ( $\approx 10^7 \text{ m}^{-1}$  para luz visível), portanto uma variação da ordem do comprimento de onda da luz em  $[(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2]^{1/2}$  produz uma grande variação na função exponencial, enquanto o denominador permanece praticamente constante.

Há ainda uma outra maneira de se estudar o problema, que é mais intuitiva no sentido de se visualizar o feixe paraxial. Podemos escrever esse feixe como uma onda plana modulada por uma função que gera um confinamento ao campo. A direção de propagação é definida como sendo o eixo  $z$ . Sendo assim, temos

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{ikz}, \quad (2.29)$$

em que  $A(\mathbf{r})$  é a envoltória que modula a onda plana e  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Para que essa onda de fato não tenha uma dispersão angular grande,  $A(\mathbf{r})$  deve variar muito pouco em intervalos da ordem do comprimento de onda. Tratemos o caso em que essa variação é lenta o suficiente para que  $|\partial^2 A / \partial z^2| \ll 2k \partial A / \partial z$ . Aplicando-se a equação de Helmholtz 2.3 em 2.29, temos:

$$\left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) A(\mathbf{r}) \right] e^{ikz} = 0. \quad (2.30)$$

Desprezando-se o termo  $\partial^2 A / \partial z^2$  da equação acima, chegamos à Equação Paraxial de Helmholtz:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) A(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.31)$$

De acordo com 2.29,  $A(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})e^{-ikz}$ . Representando  $U(\mathbf{r})$  através do espectro angular 2.15 e utilizando a aproximação 2.19 temos:

$$A(x, y, z) = \int \int a(p, q) e^{ik(px+qy)} e^{-ik(p^2+q^2)z/2} dp dq . \quad (2.32)$$

Ao substituírmos  $A(x, y, z)$  dado por 2.32 na equação paraxial de Helmholtz 2.31 e adotarmos um procedimento semelhante ao da seção anterior, concluímos que  $U(x, y, z)$  deve satisfazer à equação 2.25. Portanto solucionar a equação paraxial de Helmholtz é um procedimento equivalente aos adotados anteriormente para encontrar essa equação de propagação para um feixe paraxial.

## 2.3 Feixe Gaussiano

Um tipo de feixe paraxial de suma importância, pois é o produzido pela maioria dos lasers, é o feixe Gaussiano. Esse feixe é produzido quando temos um campo do tipo

$$U_G(x, y, 0) = A e^{-(x^2+y^2)/w_0^2} \quad (2.33)$$

no plano  $z = 0$ , com  $A$  constante. Observamos que, ao nos afastarmos uma distância  $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2} = w_0$  do eixo de simetria do feixe, a amplitude do campo diminui para  $1/e$  da amplitude máxima (no centro).

Para calcularmos o campo de um feixe Gaussiano em qualquer ponto na região  $z \geq 0$ , primeiro precisamos calcular  $a_G(p, q)$ . De acordo com 2.18:

$$a_G(p, q) = A \frac{k^2}{(2\pi)^2} \int \int e^{-(x^2+y^2)/w_0^2} e^{-ik(px+qy)} dx dy . \quad (2.34)$$

Utilizando 2.23

$$a_G(p, q) = \frac{A(kw_0)^2}{4\pi} e^{-(kw_0)^2(p^2+q^2)/4} . \quad (2.35)$$

Para que o feixe não tenha dispersão angular grande, também devemos ter  $|a_G(p, q)| \approx 0$  a não ser que  $p^2 + q^2 \ll 1$ . Da equação 2.35 vemos que  $a_G(p, q)$  tem seu valor máximo para  $p = q = 0$  e cai para um valor  $1/e$  do máximo quando  $(p^2 + q^2) = 4/(kw_0)^2$ . Como  $k = 2\pi/\lambda$ , essa condição se resume a  $w_0 \gg 2/k \rightarrow w_0 \gg \lambda/\pi$ . Essa condição é uma exemplificação da afirmativa anterior de que a modulação da onda plana  $A(x, y, 0) = U(x, y, 0)$  não pode ter variação significativa em distâncias comparáveis ao comprimento de onda.

Portanto, de acordo com 2.25 a amplitude do campo obedece:

$$U_G(x, y, z) = A \frac{(kw_0)^2}{4\pi} e^{ikz} \int \int e^{-[(kw_0)^2/4+ikz/2](p^2+q^2)} e^{ik(px+qy)} dp dq . \quad (2.36)$$

Essas integrais podem ser calculadas utilizando 2.23. Definindo  $\boldsymbol{\rho} \equiv (x, y)$ , temos:

$$U_G(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{A(kw_0)^2}{(kw_0)^2 + 2ikz} e^{-(k\rho)^2/[(kw_0)^2+2ikz]} e^{ikz} . \quad (2.37)$$

Para deixar mais evidentes as características desse feixe, definimos os seguintes parâmetros [20]:

$$z_r = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} , \quad (2.38)$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_r}\right)^2} , \quad (2.39)$$

$$R(z) = z \left[ 1 + \left(\frac{z_r}{z}\right)^2 \right] , \quad (2.40)$$

$$\xi(z) = \arctan \left( \frac{z}{z_r} \right) . \quad (2.41)$$

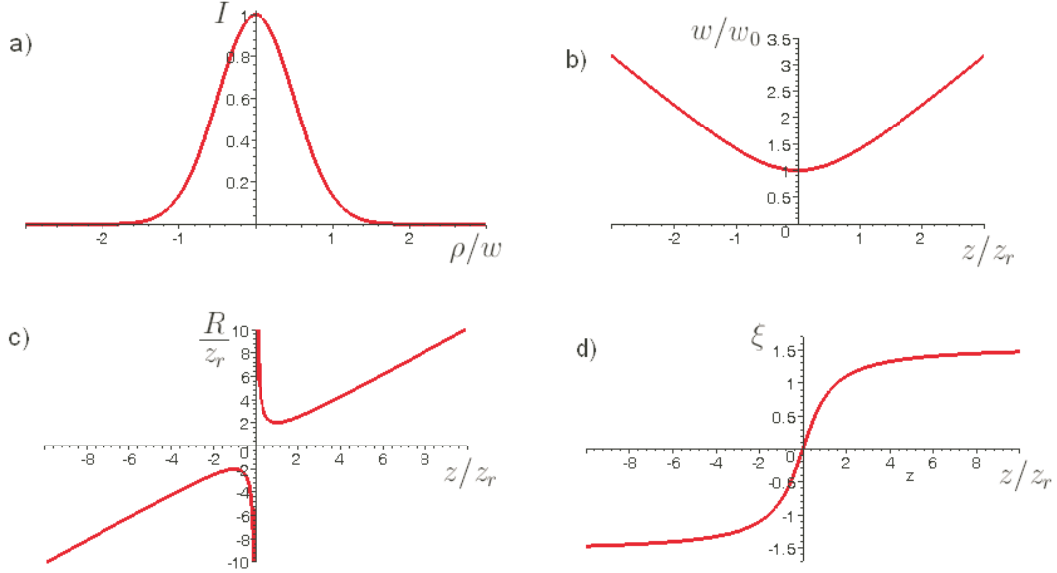
Utilizando esses novos parâmetros, após diversas manipulações algébricas [1] a amplitude do feixe Gaussiano dada pela equação 2.37 pode ser escrita como:

$$U_G(\boldsymbol{\rho}, z) = A \left[ \frac{w_0}{w(z)} \right] e^{-\rho^2/w(z)^2} e^{i\{k[z+(\rho^2/2R(z))]-\xi(z)\}} . \quad (2.42)$$

A equação 2.42, que foi obtida para o campo na região  $z > 0$ , bem como os parâmetros definidos em 2.38 - 2.41, na verdade também são válidos para a região  $z < 0$ .

$z_r$  é uma distância característica do feixe ao longo da sua direção de propagação que estabelece uma escala para a variação dos outros parâmetros definidos acima. Esse parâmetro é conhecido como *comprimento de Rayleigh*.

Podemos observar que o perfil de intensidade do feixe Gaussiano, dado por  $I(\boldsymbol{\rho}, z) = |U_G(\boldsymbol{\rho}, z)|^2$  em um plano  $z = const.$ , é sempre Gaussiano, daí o seu nome. Vemos que o valor da intensidade é máximo em  $\rho = 0$  e cai para um valor  $1/e^2 \approx 0.135$  desse máximo em  $\rho = w(z)$ .  $w(z)$  é denominada, portanto, a *largura do feixe*.  $2w(z)$  é o *diâmetro do feixe*. Na figura 2.2a temos o gráfico de  $I(\boldsymbol{\rho})$  em

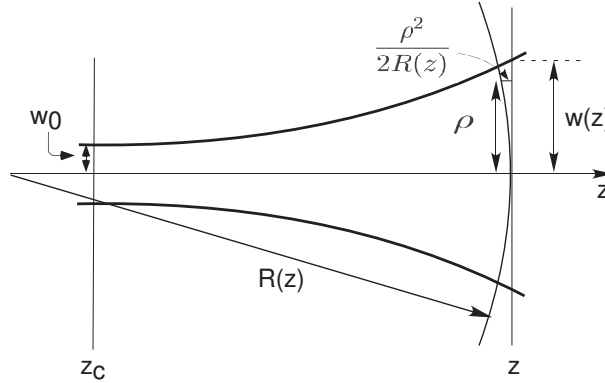


**Figura 2.2:** Parâmetros de um feixe Gaussiano que se propaga na direção  $z$ : a) Intensidade do campo em função da distância do eixo em um plano  $z$  constante. b) Largura do feixe em função de  $z$ . c) Raio de curvatura da frente de onda em função de  $z$ . d) Fase de Gouy em função de  $z$

um plano  $z$  constante. O valor mínimo de  $w(z)$  é  $w_0$  e ocorre no plano  $z = 0$ . Esse plano é denominado *cintura do feixe*. Vemos que o diâmetro aumenta à medida em que  $|z|$  aumenta. Em  $z = z_r$ ,  $w(z_r) = \sqrt{2}z_0$ . Na figura 2.2b temos o comportamento da cintura do feixe a medida em que ele se propaga.

Analisando a equação 2.42 e a figura 2.3, vemos que o parâmetro  $R(z)$  representa a curvatura da frente de onda no plano  $z$ . A frente de onda corresponde à aproximação paraxial (parabólica) de uma onda esférica centrada em um ponto no eixo  $z$  a uma distância  $R(z)$  do plano de observação. Vemos que, para  $z \rightarrow 0$  e  $z \rightarrow \infty$ ,  $R(z) \rightarrow \infty$ . Portanto nessas regiões temos uma onda praticamente plana. O valor mínimo de  $R(z)$  acontece em  $z = z_r$  e vale  $2z_r$ . Na figura 2.2c vemos o comportamento de  $R(z)$ .

O parâmetro  $\xi(z)$ , denominado fase de Gouy [21, 22], aparece como uma anomalia da fase do campo próximo ao foco. Na figura 2.2d vemos o gráfico de  $\xi(z)$ . A



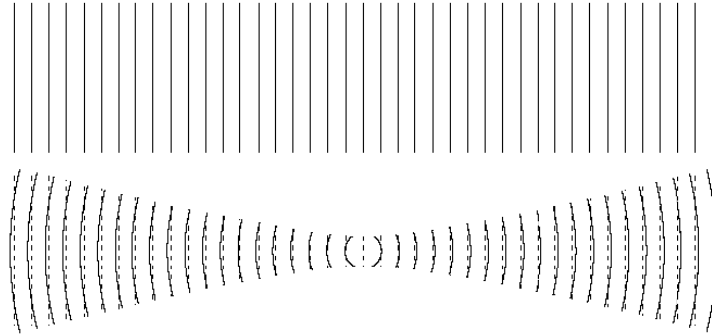
**Figura 2.3:** Ilustração do significado geométrico do parâmetro  $R(z)$ , a curvatura da frente de onda

fase de Gouy acarreta em um adiantamento da fase do feixe em relação a uma onda plana com o mesmo comprimento de onda. Quando  $z \rightarrow -\infty$ ,  $\xi \rightarrow -\pi/2$ , e quando  $z \rightarrow \infty$ ,  $\xi \rightarrow \pi/2$ . O adiantamento total da fase é, portanto,  $\pi$ . A figura 2.4 compara as frentes de onda do feixe Gaussiano com as de uma onda plana com mesmo comprimento de onda. A velocidade de fase próximo ao foco é, portanto, maior que a velocidade da luz. A velocidade de grupo de um pacote de ondas também pode ser superluminal na região do foco [23]. Contudo, não há nenhuma violação do princípio de relatividade, pois nem a fase nem um pico de amplitude do pacote de ondas podem carregar informação. Nenhuma informação pode ser transportada com velocidade acima da velocidade da luz.

## 2.4 Feixes Hermite-Gaussianos

O feixe Gaussiano é um membro de uma família de soluções para a equação paraxial de Helmholtz 2.31, os feixes Hermite-Gaussianos. A amplitude de um feixe Hermite-Gaussiano no plano  $z = 0$  é dada pelo produto de polinômios de Hermite e uma função Gaussiana. Os feixes são determinados pelos coeficientes naturais  $m$  e  $n$ :

$$HG_{m,n}(x, y, z) = A \left[ \frac{w_0}{w(z)} \right] \sqrt{\frac{1}{2^{m+n} m! n!}} H_m \left( \frac{x\sqrt{2}}{w(z)} \right) H_n \left( \frac{y\sqrt{2}}{w(z)} \right) \times \exp \left[ \frac{-(x^2 + y^2)}{w(z)^2} \right] \exp \left[ \frac{ik(x^2 + y^2)}{2R(z)} - i(m + n + 1)\xi(z) \right]. \quad (2.43)$$



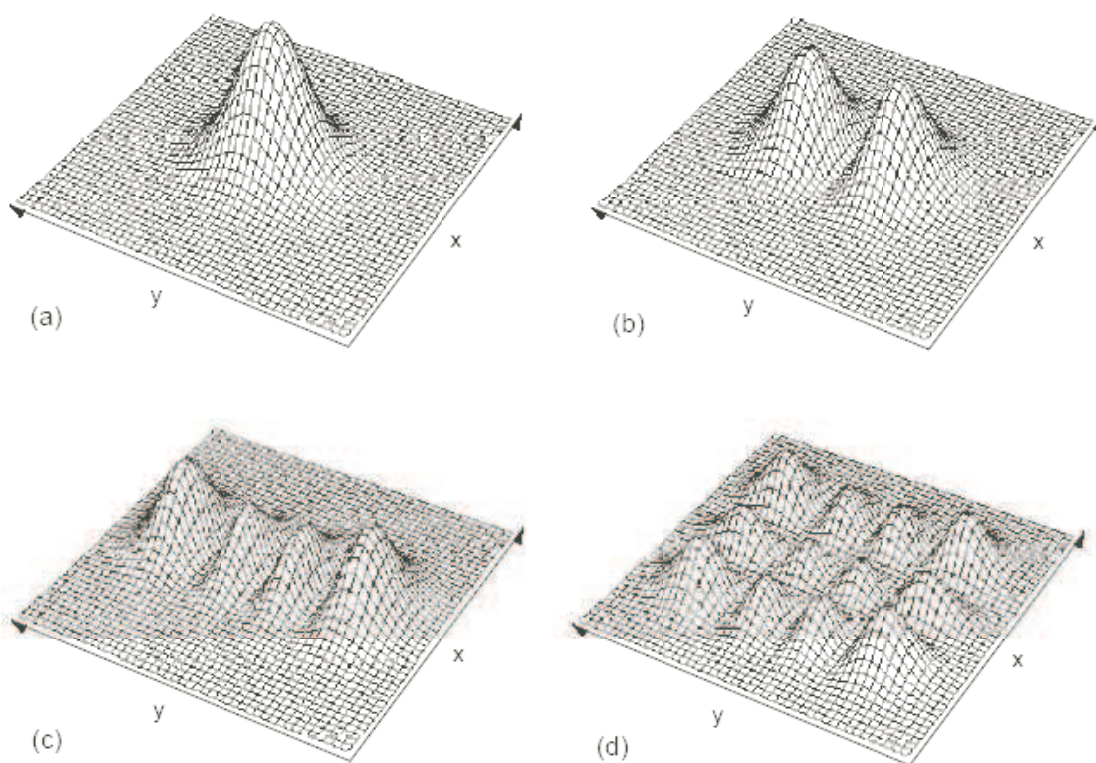
**Figura 2.4:** Comparação entre a fase de uma onda plana e a de um feixe Gaussiano com mesmo comprimento de onda. A diferença ao longo do eixo se denomina fase de Gouy

$H_m(x)$  representa o polinômio de Hermite de ordem  $m$  [24]. Como exemplo, temos  $H_0(x) = 1$ ,  $H_1(x) = 2x$ ,  $H_2(x) = 4x^2 - 2$ . Os polinômios de ordem par são pares e os de ordem ímpar são ímpares. Os parâmetros  $w(z)$ ,  $R(z)$  e  $\xi(z)$  são os mesmos definidos na seção anterior. Vemos que o feixe Gaussiano é o Hermite-Gaussiano com índices  $m = n = 0$ :  $U_G(x, y, z) = HG_{0,0}(x, y, z)$ . Na figura 2.5 temos representados os perfis de intensidade de alguns modos Hermite-Gaussianos.

A fase de Gouy para feixes Hermite-Gaussianos vale  $(m + n + 1)\xi(z)$ . Portanto a fase próxima ao foco difere cada vez mais de uma onda plana quando aumentamos os valores de  $m$  e  $n$ . A velocidade de fase na região próxima ao foco é cada vez maior.

Os polinômios de Hermite formam um conjunto completo de funções ortonormais. Portanto o campo em um determinado plano pode ser expresso como uma combinação de polinômios de Hermite com as devidas fases. Devido a esse fato, um feixe paraxial arbitrário pode ser escrito como uma superposição de feixes Hermite-Gaussianos.

Os aparelhos laser normalmente emitem feixes Gaussianos, pois esse é o modo de excitação da cavidade de menor energia. Uma maneira de fazer com que o aparelho gere um feixe  $HG_{10}$  é introduzindo um fio vertical que passe pelo eixo de simetria da cavidade [25]. Sendo assim, o campo se anula ao longo do eixo  $y$  (definido na vertical), ou seja, quando  $x = 0$ , impedindo a geração do modo Gaussiano. A cavidade passa então a operar no modo de menor energia que tem intensidade nula



**Figura 2.5:** Distribuição de intensidade ( $|U|^2$ ) de feixes Hermite-Gaussianos: a)  $HG_{00}$  (Gaussiano) b)  $HG_{01}$  c)  $HG_{03}$  d)  $HG_{23}$

ao longo desse eixo, o modo  $HG_{10}$ . Os modos  $HG_{01}$ ,  $HG_{20}$  e  $HG_{02}$  também podem ser gerados de forma semelhante, posicionando o fio de modo a produzir mínimos de intensidade nas posições correspondentes.

# Capítulo 3

## Correlações em Ótica

Uma descrição exata do campo eletromagnético no espaço e no tempo raramente se adequa de forma correta aos experimentos realizados. Nenhuma fonte de radiação consegue produzir um campo que seja conhecido com precisão absoluta em todos os pontos do espaço. Sempre existem flutuações. Mais do que o resultado de uma incapacidade técnica para descrever o campo, essas flutuações são uma propriedade fundamental da natureza prevista pela mecânica quântica. Sendo assim, é usual descrever o campo eletromagnético de forma probabilística.

Em ótica, frequentemente estamos interessados em saber as correlações do campo eletromagnético em diferentes instantes de tempo e regiões do espaço. Ou seja, para um determinado campo, queremos saber que relações têm os parâmetros desse campo em diversos pontos do espaço-tempo. Como o campo é descrito de forma probabilística, essas correlações são calculadas como médias estatísticas.

Por exemplo, em um tratamento clássico, podemos nos perguntar se o conhecimento do campo elétrico em um determinado ponto  $\mathbf{r}$  no tempo  $t$  nos permite inferir sobre qual será o campo no ponto  $\mathbf{r}'$  nesse mesmo instante de tempo. Caso haja alguma relação, mesmo que não determinística, dizemos que os campos nesses pontos do espaço estão correlacionados.

No contexto da ótica quântica, podemos nos perguntar se a detecção de um fóton em um determinado ponto  $\mathbf{r}$  no tempo  $t$  nos permite inferir sobre qual será a probabilidade de se detectar um fóton no ponto  $\mathbf{r}'$  no tempo  $t'$ . Caso essa probabilidade de detecção se altere com a detecção do fóton em  $(\mathbf{r}, t)$ , dizemos que os

campos nesses pontos estão correlacionados.<sup>1</sup>

### 3.1 Correlações Sob Uma Ótica Clássica

Como foi dito anteriormente, o campo eletromagnético é usualmente descrito de forma probabilística. Mesmo em um tratamento clássico onde desprezamos os efeitos quânticos de incerteza, nós somos incapazes de descrever exatamente a maneira como o campo foi gerado. Se temos uma fonte de luz térmica, como uma lâmpada incandescente ou o Sol, o campo resultante é a combinação dos campos gerados pelos diversos átomos ou moléculas da fonte. E esses átomos e moléculas emitem luz de maneira independente, de forma que um tratamento estatístico se faz absolutamente necessário. Mesmo em um laser, onde temos diversos átomos excitados que decaem emitindo luz de forma correlacionada através da emissão estimulada, ainda temos o efeito de emissão espontânea, que causa uma descorrelação na emissão de luz em tempos maiores que o tempo de vida desse estado excitado. Como não podemos descrever exatamente a maneira como o campo foi gerado, o campo em si deve ser descrito de forma probabilística.

Uma limitação existente para a verificação de correlações no campo é que a frequência de oscilação em uma onda de luz visível é extremamente alta, da ordem de  $10^{15}$  Hz. As técnicas existentes hoje para se medir o campo elétrico nessa escala de tempo são bastante complexas [26, 27]. Sendo assim, normalmente não podemos verificar a correlação do campo elétrico em diferentes tempos e pontos do espaço diretamente. O que podemos medir é a intensidade média da luz ao longo de vários ciclos do campo elétrico. A maneira usual de se verificar a existência de correlações é através do fenômeno de interferência.

Imagine um interferômetro de Young, esquematizado na figura 3.1. A fonte  $F$  gera um campo no plano  $A$ . Os orifícios no plano  $A$  são como fontes que produzem um campo no plano  $B$ , onde temos um detector que mede a intensidade do campo resultante em um ponto  $\mathbf{r}$ . O detector pode ser, por exemplo, os olhos de uma pessoa, que observam um anteparo colocada no plano  $B$ . Onde os olhos enxergam um brilho intenso, há uma grande intensidade luminosa. Onde há pouco brilho, há

---

<sup>1</sup>Caso a probabilidade de detecção não se altere, isso não quer dizer que os campos não estejam correlacionados. Eles podem estar correlacionados sob outros aspectos.

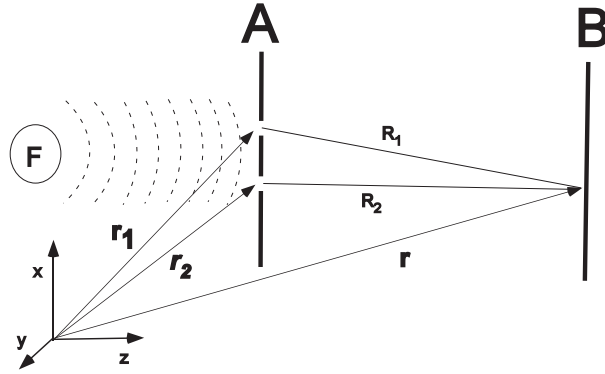


Figura 3.1: Interferômetro de Young

pouca intensidade. De acordo com o princípio de superposição, o campo no ponto  $\mathbf{r}$  será a soma dos campos provenientes dos dois orifícios, descontado-se o tempo que a luz leva para percorrer a distância de cada orifício até o ponto  $\mathbf{r}$ .

$$U(\mathbf{r}, t) = K_1 U(\mathbf{r}_1, t - t_1) + K_2 U(\mathbf{r}_2, t - t_2). \quad (3.1)$$

Como no capítulo anterior,  $U(\mathbf{r}, t)$  representa uma das componentes do campo elétrico ou magnético gerado pela fonte em notação complexa.  $K_1$  e  $K_2$  são constantes complexas que relacionam o campo transmitido por cada orifício ao campo proveniente da fonte. Mostra-se que essas constantes são imaginárias [19]. Pela figura,  $t_1 = R_1/c$  e  $t_2 = R_2/c$ ,  $c$  sendo a velocidade da luz.

A intensidade de um campo é proporcional à sua amplitude ao quadrado. Em notação complexa, definimos a intensidade (na verdade uma média da intensidade em um ciclo) no ponto  $\mathbf{r}$  no tempo  $t$  como:

$$I(\mathbf{r}, t) = U^*(\mathbf{r}, t) U(\mathbf{r}, t). \quad (3.2)$$

Sendo assim, a intensidade luminosa em  $\mathbf{r}$  no tempo  $t$  é dada por:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}, t) &= U^*(\mathbf{r}, t) U(\mathbf{r}, t) \\ &= |K_1|^2 I_1(\mathbf{r}_1, t - t_1) + |K_2|^2 I_2(\mathbf{r}_2, t - t_2) + \\ &\quad + 2\text{Re}[K_1^* K_2 U^*(\mathbf{r}_1, t - t_1) U(\mathbf{r}_2, t - t_2)]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Como o campo é descrito probabilisticamente, essa intensidade flutua no tempo. Considerando apenas campos estacionários, ou seja, campos cujas distribuições de probabilidades para os seus diversos parâmetros são constantes ao longo

do tempo, podemos tomar a média temporal da intensidade ao longo de um tempo arbitrariamente grande de forma que essa média será constante. Na prática, o que qualquer detector detecta é a média da intensidade ao longo de um tempo muito maior que o período da onda. Podemos escrever:

$$\begin{aligned} \langle I(\mathbf{r}, t) \rangle &= |K_1|^2 \langle I_1(\mathbf{r}_1, t - t_1) \rangle + |K_2|^2 \langle I_2(\mathbf{r}_2, t - t_2) \rangle + \\ &+ 2\text{Re}[K_1^* K_2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t - t_1, t - t_2)] , \end{aligned} \quad (3.4)$$

com

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \langle U^*(\mathbf{r}_1, t_1) U(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T U^*(\mathbf{r}_1, t_1 - t) U(\mathbf{r}_2, t_2 - t) dt \quad (3.5)$$

e

$$\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle = \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, t, t) . \quad (3.6)$$

Como o campo é considerado estacionário, é de se esperar que  $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t - t_1, t - t_2)$  dependa de  $t_1$  e  $t_2$  apenas através da diferença  $t_2 - t_1 \equiv \tau$ , já que as propriedades estatísticas do campo são independentes de  $t$ . Sendo assim, definimos a função de correlação cruzada [1, 2]:

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T U^*(\mathbf{r}_1, t) U(\mathbf{r}_2, t + \tau) dt . \quad (3.7)$$

Definimos também uma função normalizada, o grau de coerência complexo:

$$\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{[\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, 0)]^{1/2} [\Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, 0)]^{1/2}} = \frac{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{[I(\mathbf{r}_1, t)]^{1/2} [I(\mathbf{r}_2, t)]^{1/2}} . \quad (3.8)$$

Mostra-se que  $0 \leq \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \leq 1$ . Para simplificar a notação, é conveniente definir:

$$|K_1|^2 \langle I(\mathbf{r}_1, t) \rangle = \langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle ; \quad |K_2|^2 \langle I(\mathbf{r}_2, t) \rangle = \langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle . \quad (3.9)$$

Observa-se que  $\langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle$  representa a intensidade luminosa que chega ao ponto  $\mathbf{r}$  proveniente do orifício em  $\mathbf{r}_1$  apenas, com o outro tampado.  $\langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle$  representa a intensidade devida ao outro orifício. Como  $K_1$  e  $K_2$  são puramente imaginários, temos que:

$$K_1^* K_2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1 - t_2) = [\langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle]^{1/2} [\langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle]^{1/2} \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, (R_1 - R_2)/c) . \quad (3.10)$$

Utilizando 3.9 e 3.10 em 3.4, a intensidade média no ponto  $\mathbf{r}$  pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \langle I(\mathbf{r}, t) \rangle &= \langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle + \langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle + \\ &+ 2[\langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle]^{1/2}[\langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle]^{1/2} \text{Re}[\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)] , \end{aligned} \quad (3.11)$$

com  $\tau = (R_1 - R_2)/c$ .

Para deixar evidente o sentido físico de  $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ , escrevamos  $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)| \exp[i\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)]$  e consideremos o caso em que  $\langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle = I$ . Nesse caso podemos escrever 3.11 como:

$$\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle = 2I\{1 + |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)| \cos[\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)]\} . \quad (3.12)$$

Para o caso ideal de luz monocromática com frequência angular  $\omega$  que incide com vetor de onda perpendicular ao plano dos orifícios (de forma que a fase em  $\mathbf{r}_1$  é igual a em  $\mathbf{r}_2$ ) temos:

$$\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = e^{-i\omega\tau} , \quad |\gamma| = 1 , \quad (3.13)$$

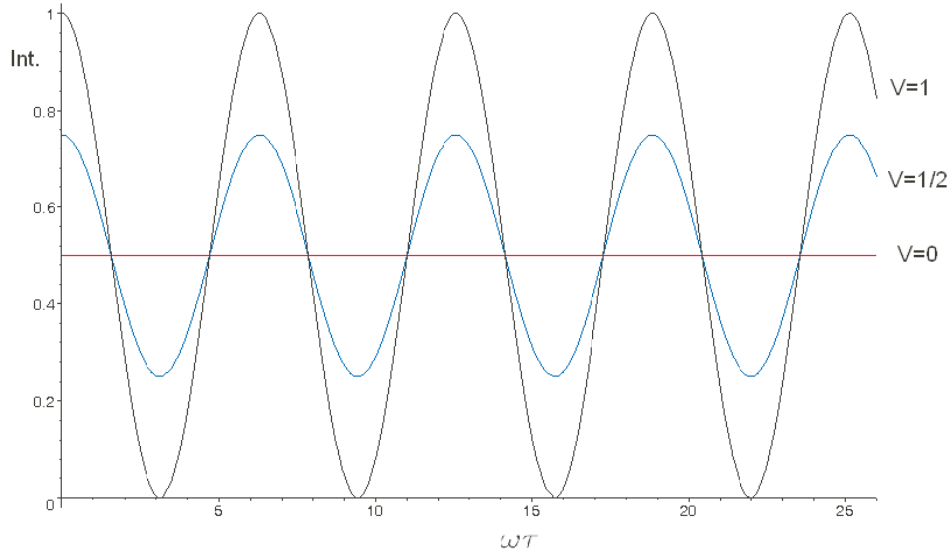
$$\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle = 2I \left\{ 1 + \cos \left[ \omega \left( \frac{R_1 - R_2}{c} \right) \right] \right\} . \quad (3.14)$$

Vemos que nesse caso ao percorrermos o plano  $B$  temos máximos e mínimos de intensidade quando a diferença de caminho óptico entre os orifícios e o ponto de observação é um múltiplo inteiro ou semi-inteiro de comprimentos de onda. A fase de  $\gamma$  representa a defasagem da luz proveniente dos dois pontos quando esta chega ao ponto de observação.

Esse é o caso em que temos visibilidade 1. A visibilidade de um padrão de interferência  $V$  é definida com sendo:

$$V = \frac{\langle I \rangle_{max} - \langle I \rangle_{min}}{\langle I \rangle_{max} + \langle I \rangle_{min}} . \quad (3.15)$$

A visibilidade de um padrão representa, como o nome sugere, uma medida da capacidade de distinção das franjas de interferência. Quando vale 1, temos uma distinção perfeita, pois a intensidade vai a zero em algumas regiões. Quando a visibilidade é nula, não há padrão de interferência. Em um caso intermediário, há regiões de maior e menor intensidade luminosa. A figura 3.2 mostra as curvas de intensidade em função de  $\tau$  para os três casos.



**Figura 3.2:** Padrões de interferência com diferentes visibilidades  $V$

Em um caso mais realista, não temos um campo perfeitamente monocromático, mas com uma frequência média  $\nu$  e uma dispersão  $\Delta\nu$ . Nesse caso, a visibilidade será, em geral, menor que 1. Para que tenhamos uma visibilidade não nula, é necessário que  $\Delta\nu \ll \nu$ . Caso contrário, cada componente espectral do campo gerará interferência construtiva em regiões diferentes, anulando o padrão. A partir de 3.11 vemos que as intensidades máxima e mínima serão:

$$\langle I \rangle_{max} = I(1 + |\gamma|), \quad \langle I \rangle_{min} = I(1 - |\gamma|). \quad (3.16)$$

Comparando-se 3.16 e 3.15, vemos que

$$|\gamma| = V. \quad (3.17)$$

Portanto o módulo do grau de coerência complexo  $\gamma$  nos dá a visibilidade do padrão de interferência.

Mas o que queremos analisar no final das contas são as correlações do campo eletromagnético gerado pela fonte  $F$ . Uma suposição que fazemos para conseguir isso é a da ergodicidade do campo. Sob essa hipótese, todas as médias temporais obtidas nesse tratamento são consideradas iguais às médias de ensemble para as realizações

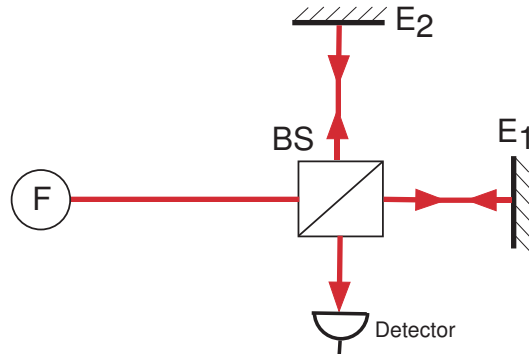
do campo. Portanto as propriedades estatísticas observadas nos experimentos interferométricos são assumidas como correspondentes às propriedades intrínsecas do campo.

Dessa maneira, o que o módulo de  $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$  nos fornece, sob um ponto de vista mais fundamental, é uma medida de quão correlacionados estão o campo no ponto  $\mathbf{r}_1$  no tempo  $t$  e o campo em  $\mathbf{r}_2$  no tempo  $t + \tau$ . Quando  $|\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)| = 1$ , os campos nessas posições e nesses tempos estão perfeitamente correlacionados, ou seja, há uma relação determinista entre eles. Obviamente,  $|\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, 0)| = 1$  sempre. A medida em que aumentamos as distâncias entre  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  ou  $\tau$ , os campos tendem a ser menos correlacionados e  $|\gamma|$  diminui, chegando a zero para grandes distâncias entre  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  ou grandes diferenças de tempo. Já a fase de  $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$  nos fornece, após descontarmos as fases impostas por  $K_1$  e  $K_2$ , a defasagem esperada para o campo nesses pontos com essa diferença de tempo.

Podemos, portanto, atribuir um sentido físico a  $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$  independente do aparato experimental. Essa função descreve as correlações do campo eletromagnético no espaço-tempo.

O interferômetro de Michelson, esquematizado na figura 3.3, nos permite analisar o comportamento de  $\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau)$  em função de  $\tau$ . O campo gerado pela fonte  $F$  (um feixe) passa pelo divisor de feixe  $BS$  (beam splitter) que transmite parte do campo por um braço do interferômetro até o espelho  $E_1$  e reflete a outra parte pelo outro braço em direção ao espelho  $E_2$ . Cada porção do campo é refletida de volta para o divisor, onde há uma recombinação dos campos. Um detector pontual de intensidade é colocado na saída  $S$  do divisor, posicionado no eixo de simetria dos feixes recombinados. Os feixes que seguem nas direções de  $E_1$  e  $E_2$  percorrem, em geral, distâncias diferentes até retornarem ao divisor. Eles podem, portanto, dependendo da diferença de caminho, interferir construtivamente seguindo para o detector ou de volta à fonte.

Variando-se o comprimento de um dos braços, observamos uma variação na intensidade medida pelo detector devido à interferência. A curva produzida é análoga à equação 3.11, com  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$  sendo o ponto do divisor de feixes em que os campos que seguem para o detector se recombinam e  $\tau$  a diferença de caminho dividida por  $c$ . Contudo, quando a diferença de caminhos é muito grande, maior que um valor  $L_c$ , deixamos de observar esse padrão de interferência. Isso acontece por-


**Figura 3.3:** Interferômetro de Michelson

que os campos provenientes de  $E_1$  e  $E_2$  que chegam ao divisor de feixes não estão mais correlacionados.  $L_c$  é denominado o comprimento de coerência do campo e  $\tau_c = L_c/c$  é o tempo de coerência. Mostra-se que  $\tau_c \simeq 1/\Delta\nu$ , onde  $\Delta\nu$  é a dispersão em frequência do campo. Temos que  $|\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau)| > 0$  para  $\tau < \tau_c$  e  $|\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau)| = 0$  para  $\tau > \tau_c$ . A figura 3.2 também pode representar esse experimento, nos casos em que a diferença de caminhos é quase nula ( $V = 1$ ), intermediária ( $V = 0.5$ ) e maior que o comprimento de coerência ( $V = 0$ ).

Montando um interferômetro de Young como o da figura 3.1 com a separação entre os orifícios ajustável, observamos que se afastarmos muito esses orifícios o padrão de interferência no plano B desaparece. Se isso ocorre a partir de uma distância  $L_a$  entre eles,  $A_c \approx L_a^2$  é denominada a área de coerência do campo. Dessa forma,  $V_c = A_c \times L_c$  é o volume de coerência do campo. É importante ressaltar que o volume de coerência depende em geral da região de observação. O volume de coerência próximo à fonte pode ser diferente do de uma região distante, por exemplo. Em um determinado instante de tempo, o campo em dois pontos dentro de um volume de coerência possui algum grau de correlação, enquanto que o campo em dois pontos que não compartilham um volume de coerência são descorrelacionados.

A função de correlação cruzada  $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$  é dita de segunda ordem, pois representa a média do produto de duas funções. Podemos definir também funções de correlação de ordem superior. Seja a função de correlação cruzada de ordem  $M + N$ :

$$\Gamma^{(M,N)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{M+N}; t_1, t_2, \dots, t_{M+N}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle U^*(\mathbf{r}_1, t_1)U^*(\mathbf{r}_2, t_2)\dots U^*(\mathbf{r}_M, t_M) \times \\
 &\quad \times U(\mathbf{r}_{M+1}, t_{M+1})U(\mathbf{r}_{M+2}, t_{M+2})\dots U(\mathbf{r}_{M+N}, t_{M+N}) \rangle . \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

Essas funções são úteis para descrever correlações em campos gerados por processos não lineares, como a conversão paramétrica descendente. Contudo uma descrição quântica para esses fenômenos é mais adequada. Portanto a discussão de correlações de ordem superior à segunda será deixada para mais adiante.

## 3.2 Correlações Sob Uma Ótica Quântica

Até aqui o campo eletromagnético foi tratado como um campo clássico, obedecendo as equações de Maxwell para o eletromagnetismo. Nesse tratamento, os campos elétrico e magnético em cada ponto do espaço e em cada instante de tempo possuem uma realidade objetiva. Se nos utilizamos de uma descrição estatística, foi por uma incapacidade técnica para descrevermos a maneira como os campos foram gerados. Contudo, esse tratamento não é capaz de prever corretamente diversos resultados experimentais, em especial os que serão discutidos nessa dissertação. Para isso é necessário tratar o campo quanticamente [1, 5].

O estado do campo será representado por um vetor no espaço de Hilbert<sup>2</sup>, enquanto as grandezas mensuráveis (como o campo elétrico em um ponto ou a energia do sistema) serão representados por operadores que atuam nesse vetor de estado. Essas grandezas não podem mais ser consideradas como possuidoras de uma realidade física objetiva, a não ser quando o estado do sistema é um autoestado do operador correspondente.

Essa descrição abstrata dos sistemas físicos no contexto da mecânica quântica, apesar de ser altamente não intuitiva, não nos permitindo uma visualização do fenômeno estudado como uma descrição clássica permite, se mostra bem mais eficiente no sentido de prever corretamente os resultados experimentais. A teoria quântica não tem o objetivo de descrever como os fenômenos físicos acontecem, ela apenas prevê quais são os resultados possíveis dos experimentos realizados e qual a probabilidade de cada um ocorrer. A física deixa então de ter a pretensão de expli-

---

<sup>2</sup>No caso mais geral, em que podemos não ter um conhecimento exato do estado do sistema, o estado é representado pelo operador de estado. Nessa dissertação os estados tratados serão considerados puros.

car como o mundo é, passando a apenas descrever como nós enxergamos o mundo, através dos experimentos.

### 3.2.1 Quantização do Campo Eletromagnético

Existe uma receita para a quantização de sistemas físicos baseada no princípio da correspondência. Devemos primeiramente descrever o sistema no formalismo Hamiltoniano, através de variáveis canonicamente conjugadas [28]. O exemplo mais comum de variáveis canonicamente conjugadas são a posição  $q$  e o momento linear  $p$  de uma partícula num sistema unidimensional. Substituímos então essas variáveis por operadores e impomos uma relação de comutação a todo par de operadores obtidos a partir de variáveis canonicamente conjugadas:

$$[\hat{q}, \hat{p}] \equiv \hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q} = i\hbar, \quad (3.19)$$

em que  $\hbar$  é a constante de Planck dividida por  $2\pi$ . Os operadores são representados com um  $\hat{\phantom{x}}$  sobre o símbolo clássico correspondente.

O primeiro passo para quantizarmos o campo eletromagnético no espaço livre é obter o Hamiltoniano clássico para o campo em termos de variáveis canonicamente conjugadas [1, 5]. O Hamiltoniano nesse caso equivale à energia do sistema, que é dada por:

$$H = \frac{1}{2} \int \left[ \varepsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \right] d^3r. \quad (3.20)$$

A integral deve ser efetuada em todo o espaço. Temos então um problema: precisamos escrever o campo elétrico e o magnético em termos de variáveis conjugadas em cada ponto do espaço. Uma maneira de contornar este problema é escrever os campos elétrico e magnético em termos dos modos desses campos. Uma outra medida que também simplifica os cálculos é considerar um volume finito para a quantização do campo. Utilizemos então uma caixa cúbica de aresta  $L$  com condições periódicas de contorno como nosso volume de quantização. Como  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  satisfazem a equação de onda no vácuo, os modos para os campos são ondas planas de vetor de onda  $\mathbf{k}$ . O campo elétrico pode ser escrito como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_s U_{\mathbf{k}s} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} + \text{c.c.}, \quad (3.21)$$

em que c.c. representa o complexo conjugado e o vetor de onda  $\mathbf{k}$  tendo como componentes:

$$k_x = 2\pi n_x/L, \quad k_y = 2\pi n_y/L, \quad k_z = 2\pi n_z/L, \quad (3.22)$$

com  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$  inteiros, para que as condições de contorno sejam respeitadas. O somatório em  $\mathbf{k}$  representa de forma abreviada um somatório sobre esses índices, considerando portanto todos os vetores de onda que façam com que o campo respeite as condições de contorno.  $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s}$  é um vetor de polarização. Para cada vetor de onda, existem dois vetores de polarização ortogonais, já que o campo elétrico em uma onda plana deve apontar sempre numa direção ortogonal ao seu vetor de onda. Esses vetores de polarização podem representar duas polarizações lineares ortogonais, polarizações circulares à direita e à esquerda, etc. O somatório em  $s$  representa as contribuições dos dois vetores de polarização para cada vetor de onda  $\mathbf{k}$ .  $U_{\mathbf{k}s}$  é a amplitude do campo em cada modo definido por  $\mathbf{k}$  e  $s$ . Ao contrário da seção e do capítulo anteriores, em que a notação complexa foi utilizada,  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  representa o campo elétrico real. A realidade de  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  é garantida se  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t)$ , o que é evidente em 3.21.

Como  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  e  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  devem satisfazer as equações de Maxwell para o vácuo [18], isso implica que  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  deve ser:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_s U_{\mathbf{k}s} \frac{\mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s}}{\omega} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} + c.c. \quad (3.23)$$

Utilizando as relações

$$\int_{L^3} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} d^3r = L^3 \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (3.24)$$

$$(\mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s}^*) \cdot (\mathbf{k}' \times \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}'s'}) = k^2 \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}'s'} = k^2 \delta_{ss'}, \quad (3.25)$$

$$c = \omega/k = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \quad (3.26)$$

e a expansão para os campos elétrico e magnético em termos dos seus modos, chegamos à seguinte expressão para o Hamiltoniano 3.20, invertendo a ordem dos somatórios e da integral e integrando no volume:

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \left[ \epsilon_0 |U_{\mathbf{k}s}|^2 L^3 + \frac{1}{\mu_0} \frac{k^2}{\omega^2} |U_{\mathbf{k}s}|^2 L^3 \right] = 2\epsilon_0 L^3 \sum_{\mathbf{k}} \sum_s |U_{\mathbf{k}s}|^2. \quad (3.27)$$

A energia é, portanto, expressa como uma soma de energias para os diferentes modos. Para realizarmos a quantização, é necessário escrever o Hamiltoniano em termos de variáveis canonicamente conjugadas. Definimos então o seguinte par de variáveis canonicamente conjugadas para determinado modo  $(\mathbf{k}, s)$  do campo:

$$q_{\mathbf{k}s}(t) = \frac{\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}}{\omega} [U_{\mathbf{k}s} e^{-i\omega t} + U_{\mathbf{k}s}^* e^{i\omega t}] , \quad (3.28)$$

$$p_{\mathbf{k}s}(t) = i\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2} [U_{\mathbf{k}s} e^{-i\omega t} + U_{\mathbf{k}s}^* e^{i\omega t}] . \quad (3.29)$$

Em termos dessas novas variáveis o Hamiltoniano 3.27 se torna:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s [p_{\mathbf{k}s}^2(t) + \omega^2 q_{\mathbf{k}s}^2(t)] . \quad (3.30)$$

Esse Hamiltoniano equivale à energia de um sistema de osciladores harmônicos independentes, um para cada modo  $(\mathbf{k}, s)$  do campo. O estado do campo eletromagnético é definido ao especificarmos os valores das variáveis canonicamente conjugadas  $q_{\mathbf{k}s}(t)$  e  $p_{\mathbf{k}s}(t)$  para os infinitos modos do campo.

Podemos inverter as relações 3.28 e 3.29 e escrever as amplitudes dos modos do campo  $U_{\mathbf{k}s}$  em termos de  $q_{\mathbf{k}s}$  e  $p_{\mathbf{k}s}$ :

$$U_{\mathbf{k}s}(p_{\mathbf{k}s}, q_{\mathbf{k}s}) e^{-i\omega t} = \frac{1}{2\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} [\omega q_{\mathbf{k}s}(t) + ip_{\mathbf{k}s}(t)] . \quad (3.31)$$

Logo os campos elétrico 3.21 e magnético 3.23 são escritos em termos das variáveis canonicamente conjugadas como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s [\omega q_{\mathbf{k}s}(t) + ip_{\mathbf{k}s}(t)] \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \text{c.c.} , \quad (3.32)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s [q_{\mathbf{k}s}(t) + \frac{i}{\omega} p_{\mathbf{k}s}(t)] \mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \text{c.c.} . \quad (3.33)$$

Até aqui estamos tratando um campo clássico, descrito no formalismo Hamiltoniano. A quantização se dá ao considerarmos os conjuntos  $q_{\mathbf{k}s}(t)$  e  $p_{\mathbf{k}s}(t)$  não mais como variáveis dinâmicas do sistema, mas como operadores que obedecem as relações de comutação:

$$\begin{aligned} [\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t), \hat{p}_{\mathbf{k}'s'}(t)] &= i\hbar \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^3 \delta_{ss'} , \\ [\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t), \hat{q}_{\mathbf{k}'s'}(t)] &= 0 , \\ [\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t), \hat{p}_{\mathbf{k}'s'}(t)] &= 0 . \end{aligned} \quad (3.34)$$

Sendo assim, o estado do campo eletromagnético passará a ser descrito como um vetor no espaço de Hilbert e as grandezas físicas mensuráveis serão operadores que atuam nesse vetor. O Hamiltoniano quantizado para o campo será:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s [\hat{p}_{\mathbf{k}s}^2(t) + \omega^2 \hat{q}_{\mathbf{k}s}^2(t)] . \quad (3.35)$$

É conveniente se escrever o Hamiltoniano em termos dos operadores não-Hermitianos:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) = \frac{1}{(2\hbar\omega)^{1/2}} [\omega \hat{q}_{\mathbf{k}s}(t) + i\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t)] , \quad (3.36)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t) = \frac{1}{(2\hbar\omega)^{1/2}} [\omega \hat{q}_{\mathbf{k}s}(t) - i\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t)] . \quad (3.37)$$

A partir das relações de comutação 3.34 obtemos as relações de comutação para  $\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t)$  e  $\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t)$ :

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t), \hat{a}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger(t)] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^3 \delta_{ss'} , \quad (3.38)$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t), \hat{a}_{\mathbf{k}'s'}(t)] = 0 ,$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t), \hat{a}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger(t)] = 0 .$$

Podemos ver, comparando as equações 3.36 e 3.31 e as conjugadas, que as variáveis dinâmicas associadas aos operadores  $\hat{a}_{\mathbf{k}s}$  e  $\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger$  diferem das amplitudes  $U_{\mathbf{k}s}e^{-i\omega t}$  e  $U_{\mathbf{k}s}^*e^{i\omega t}$  apenas por constantes, de forma que a dependência temporal dos operadores deve ser a mesma:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) = \hat{a}_{\mathbf{k}s}(0)e^{-i\omega t} , \quad (3.39)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t) = \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(0)e^{i\omega t} . \quad (3.40)$$

Dessa forma os operadores campo elétrico e magnético podem ser escritos como (conforme 3.32, 3.33, 3.36, 3.37 e o princípio de correspondência):

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \underbrace{\sum_{\mathbf{k}, s} \left( \frac{\hbar\omega}{2L^3\varepsilon_0} \right)^{1/2} \hat{a}_{\mathbf{k}s} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}}_{\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)} + \underbrace{\sum_{\mathbf{k}, s} \left( \frac{\hbar\omega}{2L^3\varepsilon_0} \right)^{1/2} \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}}_{\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t)} , \quad (3.41)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \underbrace{\sum_{\mathbf{k}, s} \left( \frac{\hbar}{2L^3\omega\epsilon_0} \right)^{1/2} \hat{a}_{\mathbf{k}s}(\mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}}_{\hat{\mathbf{B}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)} + \underbrace{\sum_{\mathbf{k}, s} \left( \frac{\hbar}{2L^3\omega\epsilon_0} \right)^{1/2} \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(\mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}}_{\hat{\mathbf{B}}^{(-)}(\mathbf{r}, t)}, \quad (3.42)$$

em que  $\hat{a}_{\mathbf{k}s}$  e  $\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger$  são notações simplificadas para  $\hat{a}_{\mathbf{k}s}(0)$  e  $\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(0)$ .

A escrita de  $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$  como a soma dos operadores  $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ , que possui apenas operadores  $\hat{a}$ , e  $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$ , que possui apenas  $\hat{a}^\dagger$ , será útil no futuro. O mesmo para  $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$ .

Em termos dos operadores  $\hat{a}_{\mathbf{k}s}$  e  $\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger$  o Hamiltoniano se expressa:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \hbar\omega [\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t) \hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) + 1/2], \quad (3.43)$$

que é o Hamiltoniano de um conjunto de osciladores harmônicos quantizados independentes, um para cada modo do campo. Sabemos que os autoestados para o Hamiltoniano de um oscilador harmônico são os estados de Fock  $|n\rangle$  com energia  $(n + 1/2)\hbar\omega$ . Logo os autoestados do Hamiltoniano para o campo eletromagnético 3.43 são produtos tensoriais de estados de Fock para cada modo do campo e a energia do estado é a soma das energias de cada modo:

$$|\{n\}\rangle = \prod_{\mathbf{k}s} |n_{\mathbf{k}s}\rangle, \quad (3.44)$$

$$\hat{n}_{\mathbf{k}s} |\{n\}\rangle = n_{\mathbf{k}s} |\{n\}\rangle, \quad (3.45)$$

$$E_{\{n\}} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \hbar\omega (n_{\mathbf{k}s} + 1/2), \quad (3.46)$$

em que  $\hat{n}_{\mathbf{k}s} \equiv \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}s}$  é o operador número de fótons no modo  $(\mathbf{k}, s)$ .

Os estados de Fock são ortogonais entre si. Quando o campo se encontra num estado de Fock, ele tem um número exato de quanta de excitações em cada modo,  $n_{\mathbf{k}s}$ , possuindo uma energia bem definida. Esses quanta de excitações recebem o nome de fótons. O operador  $\hat{a}_{\mathbf{k}s}$  tem a propriedade de, se aplicado a um estado de Fock, levar o estado a um outro estado de Fock com um fóton a menos no modo  $(\mathbf{k}, s)$ , recebendo por isso o nome de operador de aniquilação. Caso seja aplicado em um estado que não possui fótons no modo  $(\mathbf{k}, s)$ , resulta num vetor de estado nulo, pois não pode haver um número negativo de fótons. Já o operador  $\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger$  tem a propriedade de aumentar em uma unidade o número de fótons daquele modo,

recebendo o nome de operador de criação. Essas propriedades são expressas pelas seguintes relações, que podem ser facilmente obtidas [3]:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}'s'} \prod_{\mathbf{k}s} |n_{\mathbf{k}s}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}'s'}} |n_{\mathbf{k}'s'} - 1\rangle \prod_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}' \text{ e } s \neq s'} |n_{\mathbf{k}s}\rangle, \quad (3.47)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger \prod_{\mathbf{k}s} |n_{\mathbf{k}s}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}'s'} + 1} |n_{\mathbf{k}'s'} + 1\rangle \prod_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}' \text{ e } s \neq s'} |n_{\mathbf{k}s}\rangle. \quad (3.48)$$

### 3.2.2 Correlações Quânticas

Como foi dito anteriormente, não podemos atribuir um valor bem definido para grandezas físicas de um sistema quântico a não ser quando o sistema se encontra em um autoestado do operador correspondente àquela grandeza. Por exemplo, para um estado de Fock com  $n$  fótons no modo  $(\mathbf{k}, s)$  e zero nos demais, o valor esperado para o campo elétrico é nulo:

$$\langle n_{\mathbf{k}s} | \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) | n_{\mathbf{k}s} \rangle = 0, \quad (3.49)$$

o que é facilmente visto utilizando-se 3.41 e 3.47 e o fato de os diferentes estados de Fock serem ortogonais.

Em princípio esse resultado pode parecer bem razoável, uma vez que a média de um campo oscilante é zero. Mas o valor esperado de uma grandeza é diferente da média dessa grandeza. É importante ressaltar que o valor esperado do campo foi calculado em um ponto específico em um tempo específico e, para um campo monomodo, seria razoável se o valor esperado desse campo oscilasse no tempo. Isso acontece quando o estado do campo é um autoestado do operador  $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ . Os estados coerentes, autoestados do operador  $\hat{a}$ , têm essa propriedade:  $\hat{a}_{\mathbf{k}s} |\alpha_{\mathbf{k}s}\rangle = \alpha_{\mathbf{k}s} |\alpha_{\mathbf{k}s}\rangle$ :

$$\langle \alpha_{\mathbf{k}s} | \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) | \alpha_{\mathbf{k}s} \rangle \propto \alpha_{\mathbf{k}s} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \text{c.c.} = |\alpha_{\mathbf{k}s}| \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s}, \quad (3.50)$$

em que  $\delta$  é uma fase que surge ao escrevermos  $\alpha_{\mathbf{k}s} = |\alpha_{\mathbf{k}s}| e^{i\delta}$ . Contudo esses estados não possuem um valor bem definido de energia. Na verdade, existe uma probabilidade não nula de que, ao medirmos o número de fótons do campo, qualquer valor, desde nulo até extremamente alto, seja encontrado.

Um resultado inusitado que ocorre é o de que, embora o campo elétrico seja uma grandeza indefinida para um campo no estado de Fock, os campos em diferentes

pontos do espaço e em diferentes tempos estão correlacionados, como será mostrado adiante.

Na seção anterior foi discutido o fato de que os instrumentos disponíveis para se detectar o campo eletromagnético em frequências óticas são medidores de intensidade. Daí a necessidade de realizar experimentos interferométricos para se verificar as correlações do campo. Hoje existem instrumentos extremamente sensíveis para se medir a intensidade luminosa. Existem detectores que absorvem energia do campo fóton a fóton. Eles funcionam baseados no efeito fotoelétrico, que é a base de funcionamento de todos os detectores de luz disponíveis, desde os nossos olhos, as fotomultiplicadoras, os fotodiodos e os filmes fotográficos. Os detectores de intensidade usuais detectam um número astronômico de fótons por segundo, daí a impressão de que há um contínuo de energia sendo absorvido. Mas o mundo é, em última instância (pelo menos até o momento) quântico, e os fenômenos de detecção da luz são descritos pela mecânica quântica.

Não discutirei nessa dissertação o fenômeno de interação da radiação com a matéria, que é o responsável pelo efeito fotoelétrico e a conseqüente detecção dos fótons. De forma resumida: O tratamento da absorção de fótons deve ser feito em um espaço de Hilbert que engloba o campo eletromagnético e o sistema de detecção. Há a evolução do sistema, de acordo com o Hamiltoniano total que envolve o campo, o sistema de detecção e a interação entre os dois subsistemas. São considerados eventos de detecção aqueles em que o sistema de detecção evolui para um estado que pode gerar, normalmente através de amplificação da corrente de um fotoelétron, um pulso clássico de corrente que pode ser medido e tratado eletronicamente. Esses eventos acabam por aniquilar fótons do campo, a energia dos fótons sendo transferida para o sistema de detecção.

Utilizando um tratamento conforme descrito acima, com um Hamiltoniano adequado, concluímos que o processo de detecção se traduz no subespaço do campo eletromagnético na ação de um operador no estado do campo. A absorção de um fóton na região em torno do ponto  $\mathbf{r}$  e no tempo  $t$  pode ser representada pela atuação do operador  $\hat{\mathbf{V}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$  no estado do campo. Da mesma forma, o operador  $\hat{\mathbf{V}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{V}}^{(+)\dagger}(\mathbf{r}, t)$  aplicado ao estado do campo gera um fóton nas imediações

de  $\mathbf{r}$  no tempo  $t$ .

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{V}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{[\mathbf{k}, s]} \hat{a}_{\mathbf{k}s} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \\ \hat{\mathbf{V}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{[\mathbf{k}, s]} \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}.\end{aligned}\quad (3.51)$$

O conjunto  $[k, s]$  representa os modos do campo eletromagnético aos quais o detector responde.

De acordo com as leis da mecânica quântica, a probabilidade de o estado do campo passar de  $|\psi_1\rangle$  para  $|\psi_2\rangle$  mediante a absorção de um fóton no ponto  $\mathbf{r}$  no tempo  $t$  é proporcional a  $|\langle\psi_2|\hat{\mathbf{V}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)|\psi_1\rangle|^2$ . É importante ressaltar que a detecção em um ponto do espaço e em um intervalo de tempo nulo é uma simplificação de linguagem. A detecção ocorre num volume definido pelas dimensões do detector e em um intervalo de tempo não nulo. Considerando o caso mais simples de apenas uma absorção, a probabilidade de isso ocorrer será a soma das probabilidades de o estado passar de  $|\psi_1\rangle$  para qualquer outro estado mediante a absorção de um fóton:

$$\begin{aligned}P_1(\mathbf{r}, t) &\propto \sum_{|\psi_2\rangle} |\langle\psi_2|\hat{\mathbf{V}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)|\psi_1\rangle|^2 = \sum_{|\psi_2\rangle} \langle\psi_1|\hat{\mathbf{V}}^{(-)}(\mathbf{r}, t)|\psi_2\rangle \langle\psi_2|\hat{\mathbf{V}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)|\psi_1\rangle \\ &\propto \langle\psi_1|\hat{\mathbf{V}}^{(-)}(\mathbf{r}, t)\hat{\mathbf{V}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)|\psi_1\rangle,\end{aligned}\quad (3.52)$$

já que  $\sum_{|\psi_2\rangle} |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$  é o operador identidade.

É importante notar a semelhança entre os operadores  $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$  e  $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$  (3.41),  $\hat{\mathbf{B}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$  e  $\hat{\mathbf{B}}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$  (3.42),  $\hat{\mathbf{V}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$  e  $\hat{\mathbf{V}}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$  (3.51). Todos possuem apenas o operador  $\hat{a}$  (superscrito  $(+)$ ) ou  $\hat{a}^\dagger$  (superscrito  $(-)$ ). Além disso, todos dependem da posição e do tempo na forma de uma onda plana para cada modo. Sendo assim, os operadores evoluem no tempo e no espaço como ondas, além de ser válido o princípio de superposição. Portanto, em um interferômetro de Young como o da figura 3.1, o operador campo elétrico no ponto  $\mathbf{r}$  no tempo  $t$  pode ser escrito como:

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = K_1 \hat{E}(\mathbf{r}_1, t - t_1) + K_2 \hat{E}(\mathbf{r}_2, t - t_2), \quad (3.53)$$

em completa analogia com o caso clássico 3.1. Portanto todo o formalismo de função de correlação em segunda ordem descrito na seção anterior tem imediata aplicação para o caso quântico, substituindo os campos por operadores e as médias estatísticas

por valores esperados no estado quântico do campo. Seja  $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t)$  um dos operadores citados ( $\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{V}}$ ). Como medimos o campo através da absorção de fótons, apenas os termos com  $\hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$  à direita de  $\hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$  têm relevância:

$$\Gamma_{\mathbf{F}}^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = \langle \Psi | \hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) | \Psi \rangle, \quad (3.54)$$

com o superscrito (1, 1) explicitando o fato de a função de correlação ser de segunda ordem. Por exemplo, para um estado de Fock com 1 fóton no modo  $(\mathbf{k}, s)$  temos (utilizando 3.41 e 3.47):

$$\Gamma_{\mathbf{E}}^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = \langle \Psi | \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) | \Psi \rangle = \left( \frac{\hbar\omega}{2L^3\epsilon_0} \right) e^{i[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)-\omega(t_2-t_1)]}. \quad (3.55)$$

Vemos que o campo elétrico em dois pontos distintos possui correlação. O mesmo acontece com o operador de detecção  $\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{r}, t)$ . Portanto se tivermos um interferômetro de Young nas mesmas condições que levaram à expressão 3.14 no caso clássico, a probabilidade de detetarmos um fóton no anteparo após ele passar pelo interferômetro será proporcional a:

$$\begin{aligned} P_1(\mathbf{r}, t) &\propto \Gamma_{\mathbf{V}}^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_1, t_1) + \Gamma_{\mathbf{V}}^{(1,1)}(\mathbf{r}_2, t_2, \mathbf{r}_2, t_2) + \Gamma_{\mathbf{V}}^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) + \\ &\quad + \Gamma_{\mathbf{V}}^{(1,1)}(\mathbf{r}_2, t_2, \mathbf{r}_1, t_1) = 1 + 1 + e^{-i\omega(t_2-t_1)} + e^{i\omega(t_2-t_1)} \\ &\propto \left\{ 1 + \cos \left[ \omega \left( \frac{R_2 - R_1}{c} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Percebemos que a probabilidade de detecção do fóton no anteparo é proporcional à intensidade do campo clássico monomodo correspondente. Portanto, se realizarmos o experimento de passar os fótons um a um no interferômetro e acumularmos um número muito grande de fótons, o efeito resultante no anteparo é o mesmo de um campo clássico. Embora a descrição do campo clássico como um conjunto de estados de Fock de um fóton esteja longe de ser adequada, o exemplo acima ilustra como que se justificam os experimentos clássicos utilizando-se ótica quântica.

Assim como no caso clássico, podemos definir funções de correlação de ordens superiores à segunda. Essas funções são essenciais para a descrição quântica do campo eletromagnético, em especial para os fenômenos que serão discutidos nessa dissertação. Sendo assim, definimos a função de correlação de ordem  $(M + N)$ :

$$\Gamma_{\hat{\mathbf{F}}}^{(M,N)}(\mathbf{r}_1, t_1, \dots, \mathbf{r}_N, t_N; \mathbf{r}'_M, t'_M, \dots, \mathbf{r}'_1 t'_1) \equiv$$

$$\equiv \langle \Psi | \hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \dots \hat{\mathbf{F}}^{(-)}(\mathbf{r}_M, t_M) \hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r}'_M, t'_M) \dots \hat{\mathbf{F}}^{(+)}(\mathbf{r}'_1, t'_1) | \Psi \rangle . \quad (3.57)$$

Quando  $N = M$  e  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_1, t_1 = t'_1, \dots, \mathbf{r}_N = \mathbf{r}'_N, t_N = t'_N$ , essas funções estão relacionadas à probabilidade de absorção de  $N$  fótons do campo, nas posições e tempos especificados, o que pode ser verificado com um tratamento análogo ao que foi feito para a absorção de um fóton.

# Capítulo 4

## Feixe de Correlação em 4<sup>a</sup> Ordem Para a CPD

Nesse capítulo serão mostradas correspondências entre a correlação em quarta ordem para o campo gerado pela Conversão Paramétrica Descendente (CPD) e a correlação em segunda ordem do feixe de laser que gera a conversão. Será mostrado, teórica e experimentalmente, que a correlação em quarta ordem para a CPD obedece, em algumas circunstâncias, a equação para um feixe eletromagnético.

### 4.1 A Conversão Paramétrica Descendente (CPD)

A conversão paramétrica descendente é um processo ótico resultante da interação não-linear de um campo eletromagnético com um meio material. Essa não linearidade da interação faz com que a polarização induzida no meio não oscile senoidalmente como o campo incidente, suposto monocromático. Sendo assim, se fizermos uma decomposição de Fourier do campo que deixa o meio, ele não terá apenas uma componente espectral, como o campo incidente, mas outras componentes que se devem à interação desse campo com o meio.

Em uma descrição quântica para o processo, o que ocorre é a conversão espontânea de, por exemplo, um fóton do campo incidente em dois fótons de energia menor. Outra possibilidade é a conversão de dois fótons do campo incidente em um fóton de energia maior. A conversão paramétrica descendente, objeto de estudo deste trabalho, corresponde ao primeiro caso. Os fótons assim gerados são denominados fótons gêmeos.

Em um tratamento formal [6], o campo eletromagnético é quantizado dentro do volume do meio, um cristal não-linear e não-magnético, com Hamiltoniano dado por:

$$H = \frac{1}{2} \int_V \left[ P_i(\mathbf{r}, t) E_i(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \right] dV, \quad (4.1)$$

com somatório sobre índices repetidos omitido e a integral realizada sobre o volume do cristal.  $P_i$  representa a componente  $i$  da polarização do meio, que em até segunda ordem é expressa por:

$$P_i = \varepsilon_0 \chi_{ij} E_j + \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \dots \quad (4.2)$$

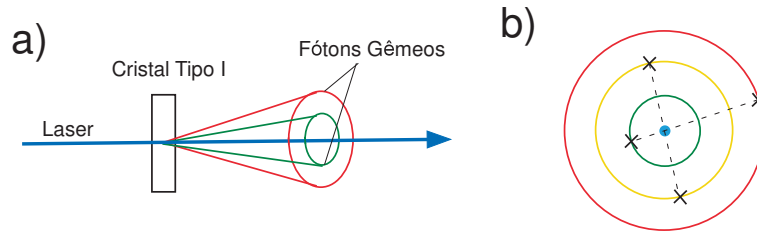
$\chi$  são os tensores de susceptibilidade elétrica. Considerando-se apenas o termo linear, chegamos a um Hamiltoniano proporcional ao Hamiltoniano para o vácuo 3.20. Já o termo não-linear leva, após a quantização e a substituição da variável campo elétrico pelo operador campo elétrico 3.41, a termos com  $\hat{a}_{\mathbf{k}_1, s_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2, s_2}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_3, s_3}$  no Hamiltoniano 4.1, que operam no estado do campo aniquilando um fóton no modo  $(\mathbf{k}_3, s_3)$  e criando outros dois, nos modos  $(\mathbf{k}_1, s_1)$  e  $(\mathbf{k}_2, s_2)$ . Como a evolução temporal do estado é dada pela atuação do operador  $\exp\left[-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t\right]$ , esses termos acabam por converterem fótons do campo incidente em pares de fótons, denominados fótons gêmeos. Obviamente também haverá outros termos no Hamiltoniano que não correspondem à conversão paramétrica, como com 3 operadores de criação de fótons, por exemplo. Mas termos como esse não conservam energia e portanto não devem ser considerados.

Energia e momento devem ser conservados no processo. Isso implica em:

$$\hbar\omega_3 = \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2, \quad n_3 \frac{\omega_3}{c} \hat{\mathbf{k}}_3 = n_1 \frac{\omega_1}{c} \hat{\mathbf{k}}_1 + n_2 \frac{\omega_2}{c} \hat{\mathbf{k}}_2, \quad (4.3)$$

com  $\hat{\mathbf{k}}_i = \mathbf{k}_i / |\mathbf{k}_i|$ . Caso os índices de refração  $n_i$  sejam iguais, a equação para a conservação da energia concorda com a equação para a conservação do momento para fótons gêmeos com vetor de onda na mesma direção do fóton incidente. Contudo, qualquer meio que não o vácuo possui dispersão, ou seja, o índice de refração aumenta com a frequência<sup>1</sup>. Sendo assim,  $n_3$  é, em geral, maior que  $n_1$  e  $n_2$ , já que  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ . Nesse caso, não é possível se satisfazer ambas as equações. Para contornar este problema, são utilizados cristais não-lineares birrefringentes, em que o

<sup>1</sup>Em determinadas regiões do espectro, próximo à região de ressonância do cristal, o índice de refração pode diminuir com o aumento da frequência, mas este não é o caso.

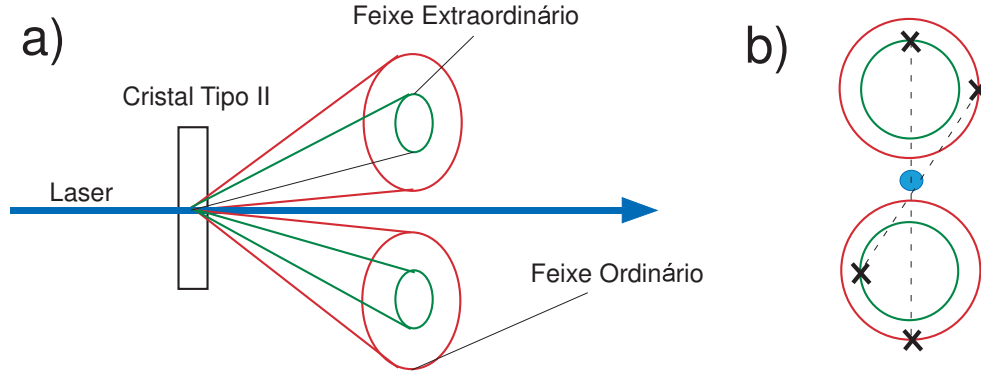


**Figura 4.1:** a) Conversão Paramétrica Descendente do Tipo I: Os fótons gêmeos têm polarização ortogonal à do laser. Os cones internos possuem fótons com maior energia. b) Visão frontal. As marcas com X ligadas por uma linha pontilhada indicam regiões em que se encontram pares de fótons gêmeos.

índice de refração depende da frequência e da polarização do campo. Dessa forma, é possível posicionar o eixo óptico do cristal de forma a permitir que ambas as equações 4.3 sejam satisfeitas dependendo da polarização dos fótons envolvidos. Por exemplo, se o fóton incidente tiver polarização vertical e os fótons convertidos (supostos com mesma frequência) tiverem polarização horizontal, a birrefringência pode compensar a dispersão de forma que  $n_3 = n_1 = n_2$  e o processo conserve energia e momento.

Neste caso em que os fótons gêmeos possuem polarização ortogonal à polarização do campo incidente (também chamado de campo de bombeamento), o processo é denominado conversão paramétrica descendente do tipo I, esquematizado na figura 4.1. As condições de conservação de momento e energia fazem com que os fótons de determinada frequência saiam do cristal ao longo de um cone com vértice no cristal e com eixo de simetria coincidente com a direção de propagação do feixe incidente. Pares de fótons gêmeos são encontrados em cones cuja soma de frequências resulta na frequência do feixe incidente e em lados opostos dos cones em relação ao eixo.

Uma outra possibilidade para a conservação de energia e momento 4.3 é que um fóton convertido tenha a mesma polarização do feixe incidente (extraordinário) e o outro tenha polarização ortogonal (ordinário). Esse caso é o denominado conversão do tipo II, esquematizado na figura 4.2. Os fótons de mesma frequência saem em cones cujo eixo depende de sua polarização, não sendo mais a direção de propagação do feixe incidente. Variando-se o ângulo que o eixo óptico do cristal faz com a vertical, os eixos dos cones ordinário e extraordinário se afastam ou se aproximam.



**Figura 4.2:** a) Conversão Paramétrica Descendente do Tipo II: Os fótons do feixe extraordinário têm a mesma polarização do feixe e os do ordinário têm polarização ortogonal. b) Visão frontal. As marcas com X ligadas por uma linha pontilhada indicam regiões em que se encontram pares de fótons gêmeos.

Isso pode fazer com que os cones tenham uma reta em comum, coincidente com o feixe de bombeamento. Esse é o caso de geração de fótons gêmeos no regime colinear que será utilizado adiante.

Utilizando a aproximação monocromática para a CPD, que consiste em considerar campos monocromáticos para o feixe incidente e para os fótons gêmeos, possibilitada com o posicionamento de filtros de interferência na frente dos detectores, e da aproximação paraxial, que é válida para um feixe paraxial incidente e se os ângulos de observação dos fótons gêmeos em relação ao feixe incidente forem pequenos, o tratamento quântico para o fenômeno leva ao seguinte estado para o campo dos fótons convertidos em um cristal fino centrado na origem [7, 29, 30]:

$$|\psi\rangle = \epsilon_1|vac\rangle + \epsilon_2 \int d\mathbf{q}_s \int d\mathbf{q}_i \tilde{U}(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) \text{sinc} \left[ \frac{L}{4K} |\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_i|^2 \right] |\mathbf{q}_s\rangle |\mathbf{q}_i\rangle. \quad (4.4)$$

$K$  é o número de onda do feixe de bombeamento no cristal.  $|\mathbf{q}_s\rangle$  e  $|\mathbf{q}_i\rangle$  representam estados de 1 fóton nos modos  $\mathbf{q}_s$  e  $\mathbf{q}_i$ . Os índices “s” e “i” são abreviaturas para “signal” e “idler”, nomes utilizados na literatura para denominar os fótons gêmeos da conversão paramétrica. Este é um estado emaranhado, pois não podemos escrevê-lo como um produto tensorial entre um vetor de estado para o fóton “signal” e um para o “idler”. E, como tal, produz uma série de previsões que não podem ser previstas pela ótica clássica, mas que são observadas experimentalmente.

A soma das frequências dos fótons gêmeos deve ser igual à frequência do feixe incidente e seus vetores de onda são dados por  $\mathbf{k}_j = \mathbf{q}_j + k_{jz}\hat{\mathbf{z}}$  com  $k_{jz} = \sqrt{k_j^2 - q_j^2}$ , de forma que  $\mathbf{q}_j$  especifica o vetor de onda em questão ( $\mathbf{k}_i$  ou  $\mathbf{k}_s$ ). Quando o volume de quantização tende para infinito, a separação entre modos adjacentes com diferentes valores de  $\mathbf{q}_j$  tende para zero. Como há uma grande densidade de modos, o somatório para os modos do campo foi substituído por integrais. Dessa forma temos  $\langle \mathbf{q}_1 | \mathbf{q}_2 \rangle = \delta^2(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1)$ . A função  $\text{sinc}(x)$  é definida como:  $\text{sinc}(x) = \text{sen}(x)/x$ . O estado de polarização dos fótons foi omitido, já que depende do tipo de conversão: tipo I ou tipo II.  $\tilde{U}(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i)$  é o espectro angular do feixe incidente:

$$\tilde{U}(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int U(x, y, 0) e^{-i(q_x x + q_y y)} dx dy, \quad (4.5)$$

$U(x, y, 0)$  sendo a amplitude do campo no plano correspondente ao centro do cristal na direção  $z$ .

Vale lembrar que este estado corresponde aos fótons observados nas regiões dos cones que permitam a conservação de energia e momento no processo de CPD. Esse estado se mostrou eficiente na descrição de diversos experimentos realizados com fótons gêmeos gerados pela conversão paramétrica descendente [8, 9, 10, 11, 12, 13] e será utilizado nessa dissertação para descrever o campo gerado pela CPD.

## 4.2 Correlações em 4ª Ordem Para o Estado Gerado Pela CPD

De acordo com o que foi discutido no capítulo 3, a probabilidade de detecção de um fóton na posição  $\mathbf{r}_1$  e outro na posição  $\mathbf{r}_2$  no mesmo intervalo de tempo (entre  $t$  e  $t + \Delta t$ ) para o campo no estado  $|\psi\rangle$  é proporcional a:

$$\begin{aligned} P_2(\mathbf{r}_1, t, \mathbf{r}_2, t) &\propto \langle \psi | \hat{\mathbf{V}}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t) \hat{\mathbf{V}}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t) \hat{\mathbf{V}}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t) \hat{\mathbf{V}}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) | \psi \rangle = \\ &= \langle \psi | \hat{\mathbf{V}}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t) \hat{\mathbf{V}}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t) \left[ \sum_{n_1, \mathbf{k}_1, s_1} \sum_{n_2, \mathbf{k}_2, s_2} |n_1\rangle_{\mathbf{k}_1, s_1} \otimes |n_2\rangle_{\mathbf{k}_2, s_2} \langle n_1|_{\mathbf{k}_1, s_1} \otimes \langle n_2|_{\mathbf{k}_2, s_2} \right] \\ &\hat{\mathbf{V}}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t) \hat{\mathbf{V}}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) | \psi \rangle. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Na segunda linha foi introduzido, entre colchetes, o operador identidade na base dos estados de Fock para cada modo do campo.

Como o estado gerado pela conversão paramétrica (4.4) é um estado em que há no máximo 2 fótons e o operador  $\hat{V}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t)\hat{V}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t)$  aniquila dois fótons do campo, o produto escalar  $\langle n_1 |_{\mathbf{k}_1, s_1} \otimes \langle n_2 |_{\mathbf{k}_2, s_2} \hat{V}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t)\hat{V}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) |\psi\rangle$  pode ser não nulo apenas para os termos de vácuo em cada modo quando  $|\psi\rangle$  é dado por 4.4:

$$\langle vac | \hat{V}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t)\hat{V}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) |\psi\rangle .$$

Portanto podemos escrever a probabilidade de detecção para os fótons gêmeos como o módulo quadrado de uma amplitude de probabilidade de detecção:

$$P_2(\mathbf{r}_1, t, \mathbf{r}_2, t) \propto |A_C(\mathbf{r}_1, t, \mathbf{r}_2, t)|^2 , \quad (4.7)$$

com

$$A_C(\mathbf{r}_1, t, \mathbf{r}_2, t) = \langle vac | \hat{V}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t)\hat{V}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) |\psi\rangle . \quad (4.8)$$

O subscrito  $C$  significa que esta é a amplitude de detecção em coincidência (temporal) de dois fótons, ou seja, no mesmo intervalo de tempo entre  $t$  e  $t + \Delta t$ , intervalo cuja duração é dada pela resolução temporal do instrumento de medida.

Logo, quando queremos analisar a probabilidade de todos os fótons do campo serem detectados, podemos substituir as funções de correlação 3.57 pelos módulos quadrados das amplitudes de probabilidade 4.8, o que simplifica a notação. Vale lembrar que a propriedade de superposição para as funções de correlação continua sendo válida para as amplitudes de detecção.

Portanto a amplitude de probabilidade de detecção em coincidência dos fótons gêmeos gerados pela conversão paramétrica descendente nas posições  $\mathbf{r}_s$  e  $\mathbf{r}_i$  é dada por 4.8 com  $|\psi\rangle$  dado por 4.4 e  $\hat{V}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$  por 3.51. Como estamos trabalhando na aproximação paraxial, é conveniente escrever:

$$\mathbf{r}_i = \boldsymbol{\rho}_i + z_i \hat{\mathbf{z}} , \quad \mathbf{k}_i = \mathbf{q}_i + k_{z_i} \hat{\mathbf{z}} \approx \mathbf{q}_i + \left( k_i - \frac{q_i^2}{2k_i} \right) \hat{\mathbf{z}} . \quad (4.9)$$

Portanto a amplitude de probabilidade de detecção em coincidência nas posições  $\mathbf{r}_s$  e  $\mathbf{r}_i$  pode ser escrita como<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} A_C(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) &\propto \int d\mathbf{q}_s \int d\mathbf{q}_i \tilde{U}(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) \text{sinc} \left[ \frac{L}{4K} |\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_i|^2 \right] \times \\ &\times \exp \left\{ i \left[ \mathbf{q}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_s + \left( k_s - \frac{q_s^2}{2k_s} \right) z_s + \mathbf{q}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i + \left( k_i - \frac{q_i^2}{2k_i} \right) z_i \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.10)$$

<sup>2</sup>Como as detecções ocorrem ao mesmo tempo, a dependência em  $t$  de  $A_C(\mathbf{r}_1, t, \mathbf{r}_2, t)$  será uma fase global que não influenciará na probabilidade de detecção. Por isso essa dependência será omitida.

Definindo:

$$G(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) = \tilde{U}(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) \operatorname{sinc} \left[ \frac{L}{4K} |\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_i|^2 \right], \quad (4.11)$$

$$H(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) = \exp \left[ i \left( k_s - \frac{q_s^2}{2k_s} \right) z_s + i \left( k_i - \frac{q_i^2}{2k_i} \right) z_i \right], \quad (4.12)$$

vemos que  $A_C(r_s, r_i)$  é a transformada de Fourier nas variáveis  $\mathbf{q}_s$  e  $\mathbf{q}_i$  do produto  $G(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)H(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)$ . De acordo com um teorema em transformada de Fourier, a transformada de um produto de 2 funções é igual à convolução das transformadas das duas funções [16]. Ou seja,

$$A_C(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) \propto \mathcal{F}_{\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i} \{G(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)H(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)\} = \mathcal{F}_{\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i} \{G(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)\} * \mathcal{F}_{\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i} \{H(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)\}. \quad (4.13)$$

$\mathcal{F}_x\{f(x)\}$  representa a transformada de Fourier da função  $f(x)$  na variável  $x$  e a convolução de duas funções é definida como:

$$f(\mathbf{x}) * g(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{u} f(\mathbf{u})g(\mathbf{x} - \mathbf{u}). \quad (4.14)$$

$H(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)$  é uma Gaussiana com expoente imaginário. Suas transformadas de Fourier em  $\mathbf{q}_s$  e  $\mathbf{q}_i$  podem ser facilmente calculadas utilizando-se 2.23:

$$\mathcal{F}_{\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i} \{H(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)\} \propto \exp \left\{ i \left[ k_s z_s + k_i z_i + \frac{k_s \rho_s^2}{2z_s} + \frac{k_i \rho_i^2}{2z_i} \right] \right\}. \quad (4.15)$$

Definindo:

$$\mathbf{R} \equiv \frac{1}{2}(\boldsymbol{\rho}_s + \boldsymbol{\rho}_i), \quad \mathbf{S} \equiv (\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_i), \quad \mathbf{P} \equiv (\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i), \quad \mathbf{Q} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_i), \quad (4.16)$$

vemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} &= \frac{1}{2} [\boldsymbol{\rho}_s \cdot \mathbf{q}_s + \boldsymbol{\rho}_i \cdot \mathbf{q}_i + \boldsymbol{\rho}_s \cdot \mathbf{q}_i + \boldsymbol{\rho}_i \cdot \mathbf{q}_s + \boldsymbol{\rho}_s \cdot \mathbf{q}_s + \boldsymbol{\rho}_i \cdot \mathbf{q}_i - \boldsymbol{\rho}_s \cdot \mathbf{q}_i - \boldsymbol{\rho}_i \cdot \mathbf{q}_s] = \\ &= \boldsymbol{\rho}_s \cdot \mathbf{q}_s + \boldsymbol{\rho}_i \cdot \mathbf{q}_i. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Utilizando essas transformações de variáveis para calcular  $\mathcal{F}_{\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i} \{G(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)\}$ , temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \{G(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)\} &= \int d\mathbf{P} \tilde{U}(\mathbf{P}) e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}} \int d\mathbf{Q} \operatorname{sinc} \left[ \frac{L}{4K} |\mathbf{Q}|^2 \right] e^{i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}} \propto \\ &\propto U_0(\mathbf{R})V(\mathbf{S}), \end{aligned} \quad (4.18)$$

em que  $U_0(\mathbf{R})$  é a amplitude do feixe de bombeamento no cristal ( $z = 0$ ) e  $V(\mathbf{S})$  é a transformada de Fourier de  $\text{sinc} \left[ \frac{L}{4K} |\mathbf{Q}|^2 \right]$ .

Utilizando 4.15 e 4.18 em 4.13, temos:

$$A_C(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) \propto e^{i(k_s z_s + k_i z_i)} \int \int d\boldsymbol{\rho}'_s d\boldsymbol{\rho}'_i U_0 \left( \frac{\boldsymbol{\rho}'_s + \boldsymbol{\rho}'_i}{2} \right) V(\boldsymbol{\rho}'_s - \boldsymbol{\rho}'_i) \times \\ \times \exp \left\{ i \left[ \frac{k_s}{2z_s} (\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}'_s)^2 + \frac{k_i}{2z_i} (\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}'_i)^2 \right] \right\}. \quad (4.19)$$

Para o caso  $k_s = k_i = K/2$  ( $K$  é o número de onda do feixe laser) e  $z_s = z_i = z$ , a equação 4.19 se simplifica e as integrais podem ser resolvidas. A exponencial sob as integrais se torna:

$$\exp\{\dots\} = \exp \left\{ i \frac{K}{4z} [(\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}'_s)^2 + (\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}'_i)^2] \right\} = \\ = \exp \left\{ i \frac{K}{8z} \{ [(\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}'_s) + (\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}'_i)]^2 + [(\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}'_s) - (\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}'_i)]^2 \} \right\} = \\ = \exp \left\{ i \frac{K}{8z} [4(\mathbf{R} - \mathbf{R}')^2 + (\mathbf{S} - \mathbf{S}')^2] \right\}, \quad (4.20)$$

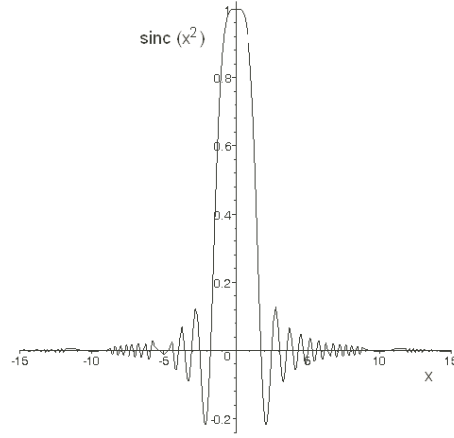
com  $\mathbf{R}' = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\rho}'_s + \boldsymbol{\rho}'_i)$  e  $\mathbf{S}' = (\boldsymbol{\rho}'_s - \boldsymbol{\rho}'_i)$ .

Logo as integrais em 4.19 se separam:

$$A_C(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) \propto \int d\mathbf{R}' U_0(\mathbf{R}') e^{iKz} e^{\frac{iK}{2z}(\mathbf{R}-\mathbf{R}')^2} \int d\mathbf{S}' V(\mathbf{S}') e^{\frac{iK}{8z}(\mathbf{S}-\mathbf{S}')^2}. \quad (4.21)$$

A função  $V(\mathbf{S})$  é a transformada de Fourier da função  $\text{sinc} \left[ \frac{L}{4K} |\mathbf{Q}|^2 \right]$ , que está esboçada em uma dimensão na figura 4.3. Vemos que a função é praticamente nula para  $\sqrt{\frac{L}{4K}} |\mathbf{Q}| > 5$ . Logo a função tem uma largura de aproximadamente  $20\sqrt{\frac{K}{L}}$  nas componentes  $Q_x$  e  $Q_y$ . Sua transformada de Fourier terá uma largura aproximada de o inverso disso, ou seja,  $\frac{1}{20}\sqrt{\frac{L}{K}}$ , em  $S_x$  e  $S_y$ . No experimento, temos  $K = 2\pi/\lambda \approx 1,5 \times 10^7 \text{m}^{-1}$  e  $L = 5\text{mm}$ . Portanto  $V(\mathbf{S})$  tem uma largura de cerca de  $10^{-6}\text{m}$ . A largura da função  $U_0(\mathbf{R})$  (largura do feixe de bombeamento em  $z = 0$ ) é da ordem de alguns milímetros, ou seja, mais de 1.000 vezes a largura de  $V(\mathbf{S})$ . Portanto é razoável aproximarmos  $V(\mathbf{S}')$  por  $\delta^2(\mathbf{S}')$ , de forma que a integração em  $\mathbf{S}'$  fornece uma constante.

Comparando a integração em  $\mathbf{R}'$  em 4.21 com as equações 2.25 e 2.24, vemos que a integração é análoga à propagação do campo do feixe do plano  $z = 0$  para o



**Figura 4.3:** Gráfico da função  $\text{sinc}(x^2) = \frac{\text{sen}(x^2)}{x^2}$

plano dos detectores <sup>3</sup>. Diante desses fatos, temos que a amplitude de probabilidade para a detecção em coincidência dos fótons gêmeos vale:

$$A_C(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) \propto U\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_s + \boldsymbol{\rho}_i}{2}, z\right), \quad (4.22)$$

em que  $U(\boldsymbol{\rho}, z)$  representa a amplitude do campo do feixe de bombeamento no plano de detecção ( $z$ ). Portanto vemos que a correlação em quarta ordem para o campo gerado pela CPD obedece, sob certos aspectos, à equação de um feixe, já que  $U(\boldsymbol{\rho}, z)$  representa um feixe. Daí a expressão “Feixe de Correlação” utilizada ao longo da dissertação. É importante ressaltar que a correlação em segunda ordem para o campo convertido no cristal não obedece à equação de um feixe. Outro fato relevante é que a correlação em quarta ordem segue um comprimento de onda igual ao do feixe de bombeamento (4.21), enquanto que a correlação em segunda ordem segue o comprimento de onda dos fótons gêmeos, que é o dobro.

<sup>3</sup>O termo  $1/z$  em 2.24 está ausente na integração 4.21. Isso se deve ao fato de termos considerado detectores pontuais. À medida em que nos afastamos do cristal, os cones com fótons de mesma frequência se abrem e, caso consideremos que os detectores tenham uma área efetiva de detecção (uma situação mais realista), os detectores enxergam uma porção cada vez menor do cone. Isso acaba por acrescentar o termo  $1/z$  à integração.

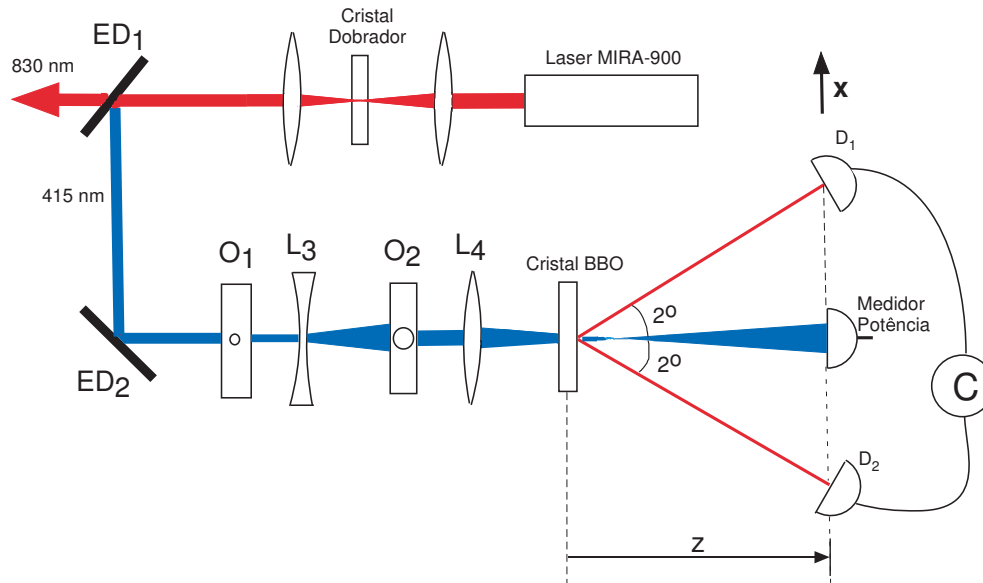
### 4.3 Experimento: Variação da Largura do Feixe de Correlação com a Propagação

Ao bombearmos o cristal com um feixe paraxial monocromático cujo campo é descrito por uma função  $U(\boldsymbol{\rho}, z)e^{-i\omega t}$ , a probabilidade de detectarmos fótons em coincidência com detectores posicionados em um plano a uma distância  $z$  do cristal, com filtros de interferência quase monocromáticos que transmitem apenas frequências angulares próximas a  $\omega/2$  e aberturas pequenas, de forma que as aproximações que levam à equação 4.22 sejam válidas, será proporcional a:

$$P_2(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) \propto |A_C(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i)|^2 \propto \left| U\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_s + \boldsymbol{\rho}_i}{2}, z\right) \right|^2. \quad (4.23)$$

Logo, ao mantermos um dos detectores fixo e movermos o outro na direção  $\hat{\mathbf{x}}$ , o perfil das contagens em coincidência será idêntico ao perfil de intensidade do feixe, salvo por um fator de escala 1/2 para o deslocamento em  $\hat{\mathbf{x}}$ . Se utilizarmos um feixe Gaussiano, como o descrito na seção 2.3, o perfil das contagens em coincidência também será Gaussiano, porém com o dobro da largura.

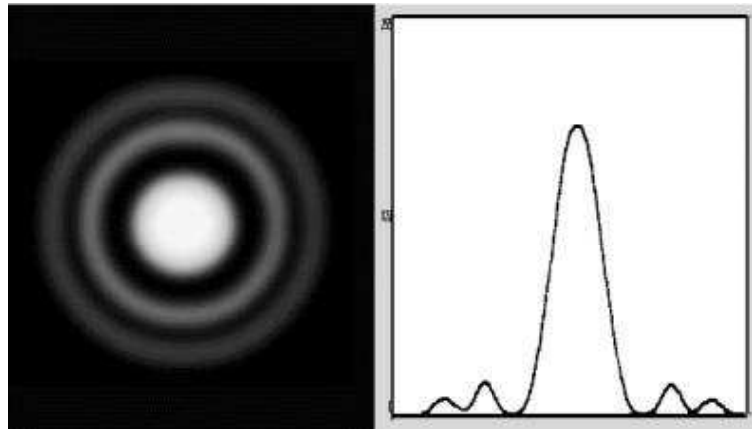
A montagem experimental está indicada na figura 4.4. O aparelho laser Mira-900 gera um feixe pulsado com comprimento de onda ajustável entre 700nm e 1.000nm, com uma melhor eficiência (maior potência) em torno de 800nm. Mas os detectores disponíveis para a realização das medidas têm uma boa eficiência de detecção para comprimentos de onda em torno de 700nm. Portanto devemos gerar fótons gêmeos com um comprimento de onda próximo a esse, o que significa que o comprimento de onda do feixe de bombeamento deve ser em torno de 350nm. Antes de chegar ao cristal que gera os fótons gêmeos, o feixe passa por um outro cristal que faz o processo contrário à CPD: converte pares de fótons no infravermelho ( $\lambda = 830\text{nm}$ ) para fótons no violeta ( $\lambda = 415\text{nm}$ ). Ao bombearmos esse cristal “dobrador” (de frequência) com um feixe de 830nm, na saída teremos esse mesmo feixe com intensidade um pouco reduzida (a eficiência da conversão é pequena) e outro bem menos intenso com comprimento de onda de 415nm. As lentes  $L_1$  e  $L_2$  têm a função de focalizar o feixe no cristal, aumentando a eficiência da conversão, e colimá-lo novamente. Os espelhos dicróicos  $E_{D1}$  e  $E_{D2}$  têm reflectância alta para o comprimento de onda de 415nm e baixa para 830nm, de forma que apenas uma pequena porção do feixe de 830nm sofre as duas reflexões. Os dois feixes com comprimentos de onda



**Figura 4.4:** Montagem experimental para a verificação da relação entre a largura do feixe laser e a largura da curva de contagens em coincidência para os fótons gêmeos. O Laser MIRA-900 gera um feixe com  $\lambda = 830\text{nm}$ . O cristal dobrador converte alguns pares de fótons de  $830\text{nm}$  em fótons de  $415\text{nm}$ . A lente  $L_1$  focaliza o feixe no cristal dobrador, para aumentar a eficiência da conversão, e a lente  $L_2$  o colima novamente. Ambas as lentes têm distância focal  $50\text{mm}$ .  $E_{D1}$  e  $E_{D2}$  são espelhos dicróicos que têm refletância alta para o comprimento de onda de  $415\text{nm}$  e baixa para  $830\text{nm}$ .  $O_1$  é um orifício com  $300\mu\text{m}$  de diâmetro.  $O_2$  é uma íris com  $5\text{mm}$  de diâmetro. Esses orifícios têm a função de tornar o feixe após  $O_2$  aproximadamente Gaussiano, como discutido no texto. As lentes  $L_3$ , divergente com distância focal  $-75\text{mm}$ , e  $L_4$ , convergente com distância focal  $200\text{mm}$ , servem para deixar a cintura do feixe após o cristal BBO ( $\beta$  - borato de bário), responsável pela conversão paramétrica, e com um comprimento de Rayleigh que permita uma visualização da variação da largura do feixe com a propagação. O medidor de potência é utilizado para medir as larguras do feixe laser e  $D_1$  e  $D_2$  fazem as contagens simples e em coincidência dos fótons gêmeos.

diferentes podem ser considerados separados a partir de então.

O feixe Gaussiano é o feixe gerado pela maioria dos aparelhos laser, como foi dito anteriormente. Contudo, o MIRA-900 gera um feixe com perfil alongado na direção vertical em relação à horizontal devido a uma fenda existente na saída da cavidade. O feixe Gaussiano tem propriedades bem conhecidas, sendo mais indicado



**Figura 4.5:** Padrão de difração de uma onda plana por uma abertura circular. À direita está representada a curva de intensidade ao longo de uma linha que passa pelo centro do padrão.

para a verificação da teoria de conversão paramétrica. O procedimento utilizado para gerar um feixe aproximadamente Gaussiano é descrito a seguir.

$O_1$  é um orifício com  $300\mu\text{m}$  de diâmetro. Esse diâmetro é bem menor que a largura do feixe nessa posição (da ordem de  $1,5\text{mm}$  na direção  $\hat{x}$  e  $4,0\text{mm}$  na  $\hat{y}$ ). Portanto o padrão de difração será bem próximo ao de uma onda plana que passa por uma abertura circular, que consiste em um máximo central circular envolto por anéis concêntricos, conforme a figura 4.5. O perfil de intensidade ao longo de uma linha que passa pelo centro do padrão também está indicado nessa figura. Vemos que o máximo central se assemelha muito com uma Gaussiana. Portanto, se bloquearmos o restante da figura de difração, teremos um feixe aproximadamente Gaussiano. Esse bloqueio é feito por  $O_2$ , uma íris com  $5\text{mm}$  de diâmetro que bloqueia o campo fora do primeiro mínimo de intensidade na figura 4.5.

As lentes  $L_3$ , divergente com distância focal  $-75\text{mm}$ , e  $L_4$ , convergente com distância focal  $200\text{mm}$ , servem para deixar a cintura do feixe após o cristal BBO ( $\beta$  - borato de bário), responsável pela conversão paramétrica, e com um comprimento de Rayleigh que permita uma visualização da variação da largura do feixe com a propagação. Um feixe Gaussiano continua Gaussiano após passar por uma lente esférica, apenas seus parâmetros comprimento de Rayleigh (e conseqüentemente a largura da cintura) e posição da cintura mudam [20].

A direção  $\hat{z}$  foi definida como a direção de propagação do feixe. A posição  $z = 0$  foi definida como a posição do centro do cristal BBO. A direção  $\hat{x}$  é horizontal e a  $\hat{y}$  vertical. Para medir a largura do feixe em um determinado plano  $z$ , utilizei um medidor de potência com uma fenda de  $50\mu\text{m}$  na frente de sua abertura e medi a intensidade em função do deslocamento horizontal da fenda, obtendo uma curva Gaussiana. As larguras de uma curva Gaussiana bidimensional medida com um detector pontual ou com uma fenda estreita são as mesmas. O efeito da fenda é uma integração da curva em  $y$  para cada ponto  $x$ :

$$f(x) = \int e^{-\frac{(x^2+y^2)}{w^2}} dy = e^{-\frac{x^2}{w^2}} \int e^{-\frac{y^2}{w^2}} dy = \sqrt{\frac{\pi}{w}} e^{-\frac{x^2}{w^2}}. \quad (4.24)$$

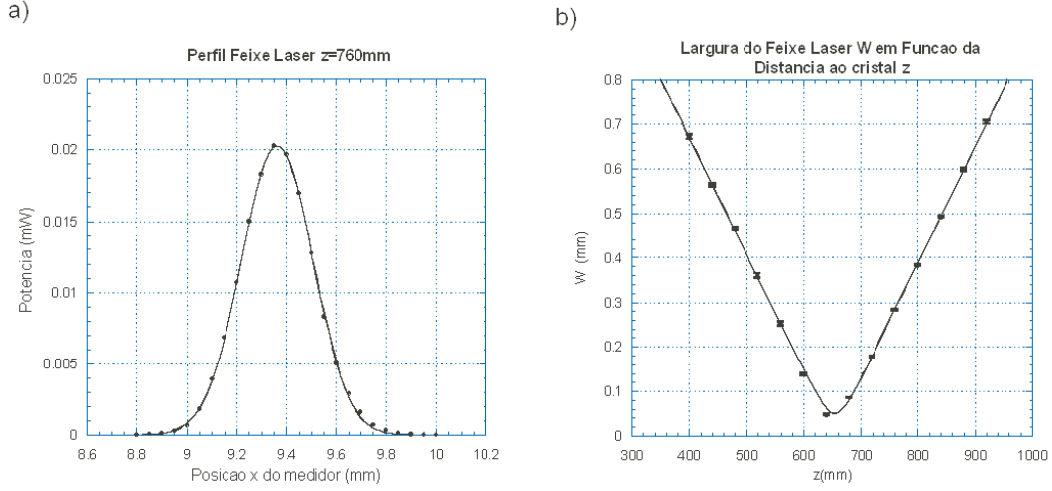
Portanto o fato de utilizarmos uma fenda para medirmos uma curva Gaussiana bidimensional apenas aumenta uniformemente a intensidade dos pontos obtidos em relação à que teríamos com um detector pontual. A forma da curva não se altera. Logo foram ajustadas curvas Gaussianas para a intensidade em função da posição horizontal  $x$  do medidor:

$$I(x) = |U(x, 0)|^2 = I_0 \exp \left\{ \frac{-2(x - x_0)^2}{w^2} \right\}. \quad (4.25)$$

O medidor de potência foi posicionado em um trilho e foram feitas medidas a diversas distâncias  $z$  do cristal BBO movendo-se o medidor no trilho. Para cada posição  $z$  foi medida a largura do feixe. Em algumas medidas, as larguras obtidas para as Gaussianas foram comparáveis à largura da fenda. Nesses casos, obviamente a consideração de um detector pontual não é boa. Um procedimento descrito no apêndice A foi utilizado para inferir qual a largura real do feixe em função da largura medida.

As larguras medidas e inferidas para a intensidade do feixe a diferentes distâncias  $z$  do cristal conversor estão presentes na tabela 4.1. Um exemplo de medida, com o detector a  $760\text{mm}$  do cristal, está mostrado na figura 4.6a. A curva obtida para a largura inferida do feixe em função de  $z$  a partir dos pontos da tabela 4.1 está na figura 4.6b. A equação utilizada para o ajuste é a 2.39, com  $z_r$  dado por 2.38 e  $z$  substituído por  $z - z_C$ , já que em 2.39 a cintura é definida como estando em  $z = 0$  e no experimento ela está em  $z = z_C$ :

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left[ \frac{\lambda}{\pi w_0^2 (z - z_C)} \right]^2}. \quad (4.26)$$



**Figura 4.6:** a) Perfil de intensidade do Laser em  $z=760\text{mm}$ . Ajuste Gaussiano 4.25 fornece  $w = (0,287 \pm 0,001)\text{mm}$ . b) Largura inferida (levando-se em conta o tamanho finito da fenda no medidor) do feixe  $w$  em função de  $z$ . O ajuste 4.26 fornece  $w_0 = (50,2 \pm 0,2)\mu\text{m}$  e  $z_C = (653,7 \pm 0,7)\text{mm}$ .

Os valores fornecidos pelo ajuste são  $w_0 = (50,2 \pm 0,2)\mu\text{m}$  e  $z_C = (653,7 \pm 0,7)\text{mm}$ .

Na etapa seguinte do experimento, ajustei o cristal BBO (conversão do tipo II) para gerar fótons gêmeos com  $830\text{nm}$  de comprimento de onda a  $2^\circ$  do feixe incidente. Os detectores contadores de fótons  $D_1$  e  $D_2$  foram posicionados em trilhos que permitem um deslocamento que faça com que eles observem sempre o cristal com um ângulo de  $2^\circ$  em relação ao feixe laser. Cada detector possui uma fenda de  $100\mu\text{m}$  de largura e um filtro de interferência com largura espectral de  $11\text{nm}$  centrado em  $830\text{nm}$  antes de sua abertura. O tamanho não nulo das fendas também gera discrepâncias entre a largura medida para cada curva e sua largura real. Um procedimento para inferir a largura real a partir da medida nesse caso também consta no apêndice A.

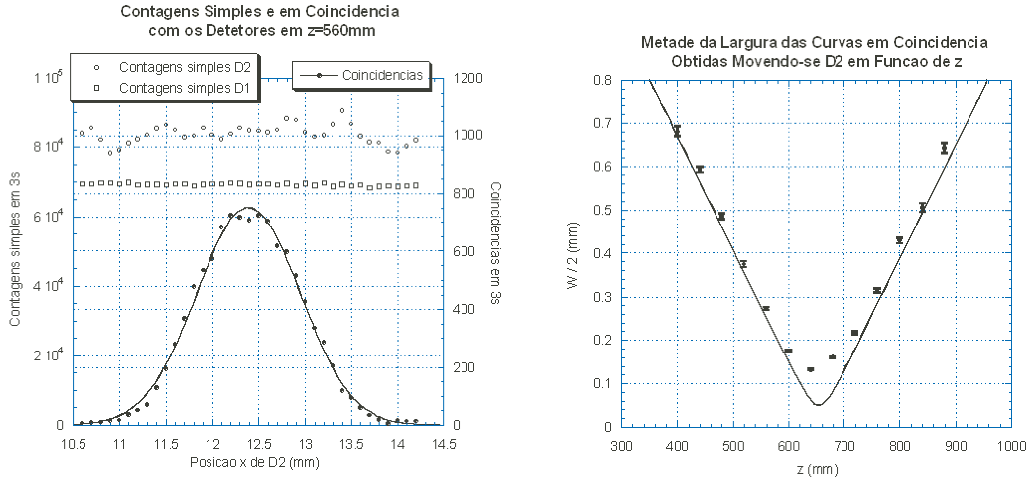
Com os detectores em um plano a uma distância  $z$  do cristal, mantive um deles fixo e movi o outro na direção  $x$ . Para cada posição  $x$  desse detector, foram acumuladas as contagens de fótons coincidentes em um determinado intervalo de tempo, que variou de 3 a 10 segundos dependendo da posição  $z$  dos detectores nas medidas. Foram obtidas curvas para o número de fótons coincidentes em função

Tabela 4.1: Larguras  $w$  das curvas Gaussianas 4.25 ajustadas para as medidas de intensidade do feixe laser ( $w_{\text{Feixe med.}}$ ) e contagens em coincidência dos fótons gêmeos gerados pela CPD ( $w_{\text{CPD med.}}$ ) para diferentes distâncias  $z$  ao cristal responsável pela conversão. Também constam na tabela os valores inferidos para essas grandezas levando em consideração as larguras finitas das fendas utilizadas na medição ( $w_{\text{Feixe inf.}}$  e  $1/2 w_{\text{CPD inf.}}$ ), conforme descrito no apêndice A.

$z(\text{mm})$	$w_{\text{Feixe med.}}(\text{mm})$	$w_{\text{CPD med.}}(\text{mm})$	$w_{\text{Feixe inf.}}(\text{mm})$	$1/2 w_{\text{CPD inf.}}(\text{mm})$
400	0,671	1,363	0,671	0,680
440	0,564	1,190	0,563	0,593
480	0,466	0,975	0,465	0,485
520	0,362	0,756	0,360	0,374
560	0,255	0,557	0,252	0,272
600	0,149	0,369	0,138	0,175
640	0,065	0,288	0,049	0,131
680	0,095	0,339	0,085	0,160
720	0,183	0,448	0,178	0,217
760	0,287	0,637	0,283	0,313
800	0,386	0,865	0,383	0,428
840	0,494	1,016	0,492	0,505
880	0,598	1,287	0,597	0,642

de  $x$  como a do gráfico 4.7a para diferentes distâncias  $z$ . O ajuste nessas curvas também é o 4.25. Também são mostradas nesse gráfico as contagens simples de cada detector. Observa-se que estas são praticamente constantes, apenas as contagens em coincidência variam com a posição  $x$  do detector.

Na tabela 4.1, constam as larguras das curvas ajustadas para as detecções em coincidência ( $w_{\text{CPD med.}}$ ) para diferentes distâncias  $z$  entre o cristal BBO e os detectores. Também constam as larguras inferidas para a correlação, levando-se em conta a abertura finita dos detectores, conforme descrito no apêndice A, divididas por 2 ( $1/2 w_{\text{CPD inf.}}$ ). De acordo com a teoria, as larguras das curvas em coincidência para os fótons gêmeos deve ser o dobro das curvas de intensidade para o feixe laser em cada posição  $z$ . No gráfico 4.7b, temos a largura inferida das curvas das medidas em coincidência dividida por 2 em função de  $z$ . Os pontos experimentais deveriam concordar com a curva ajustada para o feixe laser, presente no gráfico. Há uma boa concordância para os valores medidos, salvo na região da cintura. Na tabela 4.1, vemos que, para  $z = 640\text{mm}$ , temos  $w_{\text{Feixe inf.}} = 0,047\text{mm}$  e  $1/2 w_{\text{CPD inf.}} =$



**Figura 4.7:** a) Contagens simples e em coincidência para os fótons gêmeos gerados pela CPD com os detetores em  $z=560\text{mm}$ . Ajuste Gaussiano 4.25 fornece  $w = (0,557 \pm 0,007)\text{mm}$ . b) Largura das curvas em coincidência dividida por dois em função de  $z$ . A curva contínua corresponde ao ajuste 4.26 para o feixe laser mostrado no gráfico 4.6b)

0,131mm. Mas essa discrepância não causa assombro, uma vez que as aproximações utilizadas pela teoria não concordam com a realidade do experimento. A teoria se aplica a feixes monocromáticos e a detectores com filtros de interferência quase monocromáticos. Mas o laser utilizado, por ser pulsado, possui uma largura espectral grande, da ordem de 8nm. Já os filtros, como foi dito anteriormente, têm largura de 11nm.

Diante da não concordância entre os resultados teóricos e experimentais, duas alternativas se apresentam: Tornar a teoria mais geral, de forma a englobar a realidade experimental, ou realizar uma nova montagem experimental que se adeque às aproximações da teoria. A primeira alternativa não forneceu muitos frutos, uma vez que, ao considerarmos diferentes frequências para os fótons gêmeos na equação 4.19, as integrais não mais se separam nas variáveis  $\mathbf{R}'$  e  $\mathbf{S}'$  como antes, tornando esse caminho tenebroso e não mais relacionando de forma direta a amplitude de detecção em coincidências e a amplitude do campo do feixe como em 4.22. Já para se tentar a segunda alternativa, é necessário um aparelho que gere um laser contínuo

e monocromático, o que não tive ao meu dispor durante o mestrado.

Desconsiderando essas discrepâncias entre teoria e experimento, com razões já discutidas, vemos que a correlação em segunda ordem do feixe que gera os fótons gêmeos se relaciona com a correlação em quarta ordem para o campo gerado pela conversão paramétrica descendente, da forma esquematizada abaixo:

$$\underbrace{I(\mathbf{r}, t) = \Gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}, t)}_{\text{Perfil de Intensidade - Feixe Laser}} \longmapsto \underbrace{P_2(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i, t) \propto \Gamma^{(2,2)}(\mathbf{r}_s, t, \mathbf{r}_i, t; \mathbf{r}_i, t, \mathbf{r}_s, t)}_{\text{Contagens em Coincidências - Fótons Gêmeos}}, \quad (4.27)$$

de acordo com 4.22:  $I(\mathbf{r}, t) = |U(\boldsymbol{\rho}, z)|^2$ ,  $P_2(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i, t) \propto |U(\frac{\boldsymbol{\rho}_s + \boldsymbol{\rho}_i}{2}, z)|^2$ .

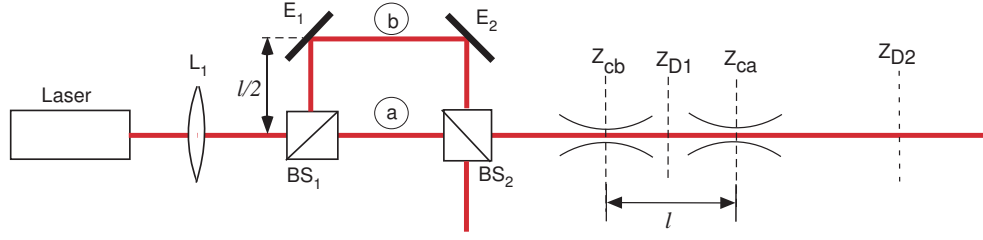
## 4.4 Proposta de Experimento: Medida da Fase de Gouy do Bifóton

Na seção 2.3 foi calculada a amplitude do campo para um feixe Gaussiano que se propaga na direção  $\hat{\mathbf{z}}$  (2.42). O termo  $\xi(z)$ , denominado fase de Gouy, gera um adiantamento da fase do feixe ao passar pela sua cintura em relação a uma onda plana com o mesmo comprimento de onda, conforme ilustrado na figura 2.4d. O adiantamento total, acumulado com a propagação do feixe de  $z = -\infty$  a  $z = \infty$ , é de  $\pi$ .

Naquela seção, a cintura do feixe foi definida como estando na posição  $z = 0$ . Aqui a cintura estará numa posição  $z = z_C$ . As equações desenvolvidas para o campo (2.42, 2.38 - 2.41) se aplicam nesse caso substituindo-se  $z$  por  $z - z_C$ . Em particular, a fase de Gouy será:

$$\xi(z) = \arctan\left(\frac{z - z_C}{z_r}\right). \quad (4.28)$$

Considere a montagem ilustrada na figura 4.8, utilizada para se verificar a existência da fase de Gouy de um feixe.  $L_1$  é uma lente convergente que focaliza o feixe a uma certa distância  $z_C$ .  $E_1$  e  $E_2$  são espelhos,  $BS_1$  e  $BS_2$  são divisores de feixe 50%. O campo na saída do interferômetro pode ser escrito como  $U_T(\boldsymbol{\rho}, z) = 1/2[U(\boldsymbol{\rho}, z) + U(\boldsymbol{\rho}, z + l)]$ , onde  $U(\boldsymbol{\rho}, z)$  é a componente do feixe que passa pelo caminho  $a$  e tem sua cintura no plano  $z_{ca}$ ,  $U(\boldsymbol{\rho}, z + l)$  é a componente que passa pelo caminho  $b$  e tem sua cintura no plano  $z_{cb}$  e  $l$  é a diferença de caminho entre



**Figura 4.8:** Montagem experimental para se verificar a fase de Gouy de um feixe.  $L_1$  é uma lente convergente que focaliza o feixe a uma certa distância  $z_C$ .  $E_1$  e  $E_2$  são espelhos,  $BS_1$  e  $BS_2$  são divisores de feixe 50%

os braços do interferômetro. Se a posição da lente é definida como  $z = 0$  temos  $z_{ca} = z_C$  e  $z_{cb} = z_C - l$ .

Calculando a função de correlação no eixo de simetria ( $\rho = 0$ ):  $\gamma_0(z_1, z_2) \equiv \gamma(0\hat{x} + 0\hat{y} + z_1\hat{z}, 0\hat{x} + 0\hat{y} + z_2\hat{z}, 0)$  para o campo em  $z_{d1} = (z_{ca} + z_{cb})/2 = z_C - l/2$  e considerando o campo monocromático, temos (utilizando 3.7 e 3.8 e o fato de que  $|U(\rho, z_C + l/2)| = |U(\rho, z_C - l/2)|$ ):

$$\begin{aligned} \gamma_0(z_{d1}, z_{d1} + l) &= \gamma_0(z_C - l/2, z_C + l/2) = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-i[k(z_C - l/2) - \xi(z_C - l/2) - \omega t]} e^{i[k(z_C + l/2) - \xi(z_C + l/2) - \omega t]} dt = \\ &= e^{i[kl - \xi(z_C + l/2) + \xi(z_C - l/2)]}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

Portanto a intensidade nesse ponto vale (de acordo com 3.11 e 3.12):

$$\langle I(\mathbf{r}_1, t) \rangle \propto \{1 + \cos[kl - \xi(z_C + l/2) + \xi(z_C - l/2)]\} \approx \{1 + \cos[kl - \pi]\}, \quad (4.30)$$

em que a aproximação feita é válida quando  $l \gg z_r$ ,  $z_r$  sendo o comprimento de Rayleigh do feixe.

Já no plano  $z = z_{d2}$  com  $z_{d2} - z_C \gg l$ , temos  $|U(0, z_{d2})| \approx |U(0, z_{d2} + l)|$  e um cálculo análogo nos leva a:

$$\langle I(\mathbf{r}_2, t) \rangle \propto \{1 + \cos[kl - \xi(z_{d2} + l) + \xi(z_{d2})]\} \approx \{1 + \cos[kl]\}, \quad (4.31)$$

já que  $\xi(z_{d2} + l) \approx \xi(z_{d2})$ .

Portanto vemos que, devido à fase de Gouy, quando tivermos uma diferença de caminho  $l$  entre os braços do interferômetro que gere um máximo de intensidade

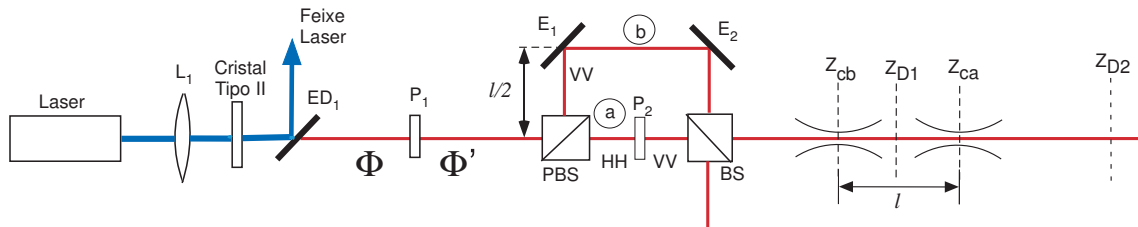
no centro do padrão de interferência em  $z = z_{d1}$ , teremos um mínimo central em  $z = z_{d2}$ . Já quando tivermos um mínimo central em  $z = z_{d1}$ , teremos um máximo em  $z = z_{d2}$ . O mesmo acontece, na realidade, para todas as regiões no padrão de interferência, não apenas para a porção central. Essa inversão dos máximos e mínimos de interferência com a propagação do campo no experimento da figura 4.8 é uma demonstração experimental da existência da fase de Gouy.

Como a amplitude de detecção em coincidência dos fótons gêmeos gerados pela conversão paramétrica descendente dentro das aproximações utilizadas na seção 4.2 é proporcional à amplitude do feixe que gera a conversão (equação 4.22), é possível montar um experimento que mostre a influência da fase de Gouy na correlação em quarta ordem do campo gerado pela CPD.

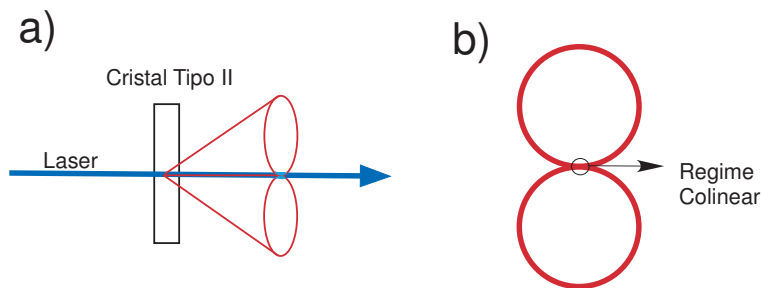
Experimentos interferométricos realizados com pares de fótons gerados pela CPD mostram que, se a diferença de caminho óptico entre os diferentes caminhos do interferômetro for menor que o comprimento de coerência do laser que produz a conversão [31], mesmo que nenhum padrão de interferência seja observado em segunda ordem (caso a diferença de caminho seja maior que o comprimento de coerência dos fótons gêmeos), há correlação em quarta ordem que faz com que seja observado um padrão de interferência nas medidas em coincidência [32, 33, 8]. E este padrão de interferência corresponde a um comprimento de onda igual ao do laser. Esse fato reforça a esperança de se observar outras características do feixe incidente na correlação em quarta ordem para o par de fótons além do seu comprimento de onda, como a fase de Gouy por exemplo.

A montagem experimental está ilustrada na figura 4.9. A posição de  $L_1$ , uma lente convergente que faz com que a cintura do feixe fique a uma distância  $z_C$ , é definida como  $z = 0$ . O cristal não linear responsável pela conversão paramétrica descendente do tipo 2 é posicionado para gerar os dois cones com fótons com metade do comprimento de onda do feixe incidente com uma reta em comum, como ilustrado na figura 4.10. Dessa forma, os fótons gêmeos formam um feixe colinear com o feixe laser. Aos fótons gêmeos se propagando juntos é dado o nome bifóton.

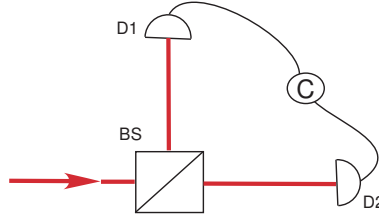
Para se detectar o bifóton, podemos utilizar o “detector de 2 fótons” esquematizado na figura 4.11. Esse detector tem, em um caso ideal, eficiência de 50%, já que em metade das vezes os fótons seguem para o mesmo lado após o  $BS$ , não fornecendo contagens em coincidência, e em metade seguem um para cada lado, havendo con-



**Figura 4.9:** Montagem experimental para se verificar a fase de Gouy na correlação em quarta ordem para o feixe formado pelos fótons gêmeos gerados pela CPD.  $L_1$  é uma lente convergente que focaliza o feixe laser a uma certa distância  $z_C$ . O cristal tipo II é o responsável pela conversão paramétrica.  $ED_1$  é um espelho dicróico que transmite os fótons gêmeos e reflete o feixe laser.  $P_1$  e  $P_2$  são placas de onda  $\lambda/2$  para os fótons gêmeos.  $P_1$  gira a polarização em  $45^\circ$  e  $P_2$  em  $90^\circ$ .  $PBS$  é um divisor de feixe polarizado, que transmite fótons com polarização horizontal e reflete os com polarização vertical.  $E_1$  e  $E_2$  são espelhos e  $BS$  é um divisor de feixe 50%.



**Figura 4.10:** Geração do par de fótons gêmeos no regime colinear



**Figura 4.11:** Detector de 2 fótons com eficiência de 50%

tagem em coincidência. As contagens em coincidência são medidas de detecção do bifóton.

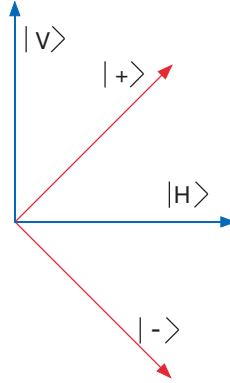
Para que a amplitude de detecção em coincidência dos fótons gêmeos seja proporcional à amplitude do feixe que os gerou, devemos detectar ambos os fótons à mesma distância do cristal. Caso cada fóton passe por um braço do interferômetro, a equação 4.22 não é mais válida para a amplitude de detecção. Portanto, para verificarmos a influência da fase de Gouy na correlação em quarta ordem, os fótons devem passar ambos pelo caminho “a” ou ambos pelo caminho “b” no interferômetro. Para garantirmos isso, podemos nos valer do emaranhamento dos fótons gêmeos em polarização.

Na CPD tipo 2 com o feixe laser com polarização vertical, são gerados um fóton com polarização horizontal e outro com vertical. Como no regime colinear não podemos distinguir de qual cone cada fóton é oriundo, o estado de polarização do bifóton é emaranhado. Dependendo do posicionamento do cristal [34], podemos gerar o seguinte estado de polarização:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H_s\rangle|V_i\rangle + |V_s\rangle|H_i\rangle) . \quad (4.32)$$

$ED_1$  é um espelho de alta reflectância para o comprimento de onda do laser e baixa para os fótons gêmeos, deixando apenas esses últimos seguirem para o interferômetro.  $P_1$  é uma placa  $\lambda/2$  posicionada para girar a polarização dos fótons em  $45^\circ$ , transformando  $|H\rangle$  em  $|-\rangle$  e  $|V\rangle$  em  $|+\rangle$ , de acordo com o sistema de bases da figura 4.12. Após passar por  $P_1$ , o estado de polarização do bifóton passa a ser:

$$\Phi' = \frac{1}{\sqrt{2}} (| -_s \rangle | +_i \rangle + | +_s \rangle | -_i \rangle) . \quad (4.33)$$



**Figura 4.12:** Ilustração das bases de polarização  $|H\rangle$ ,  $|V\rangle$ ,  $|+\rangle$ ,  $|-\rangle$ .

Mas os estados  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$  podem ser escritos em termos de  $|H\rangle$  e  $|V\rangle$ :

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + |V\rangle) , \quad (4.34)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle - |V\rangle) . \quad (4.35)$$

Utilizando essa transformação de bases para  $\Phi'$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \Phi' &= \frac{1}{2} [(|H_s\rangle - |V_s\rangle)(|H_i\rangle + |V_i\rangle) + (|H_s\rangle + |V_s\rangle)(|H_i\rangle - |V_i\rangle)] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H_s\rangle|H_i\rangle - |V_s\rangle|V_i\rangle) . \end{aligned} \quad (4.36)$$

*PBS* é um divisor de feixe polarizado, que reflete fótons com polarização vertical e transmite os que têm polarização horizontal. Sendo assim, o estado de polarização  $\Phi'$  garante que ambos os fótons passam pelo caminho “a” ou pelo caminho “b”.

Para calcularmos a amplitude de probabilidade de detecção do bifóton, é necessário escrevermos o estado do campo num espaço de Hilbert expandido, que leva em consideração o vetor de onda dos fótons (4.4) e a polarização dos mesmos (4.36). Como o termo com  $|vac\rangle$  não contribui para as detecções em coincidência, ele será omitido:

$$|\psi'\rangle \propto \int d\mathbf{q}_s \int d\mathbf{q}_i \tilde{U}(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) \text{sinc} \left[ \frac{L}{4K} |\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_i|^2 \right] [|\mathbf{q}_s\rangle|H_s\rangle|\mathbf{q}_i\rangle|H_i\rangle + |\mathbf{q}_s\rangle|V_s\rangle|\mathbf{q}_i\rangle|V_i\rangle] . \quad (4.37)$$

Para simplificar a notação o operador de aniquilação de um fóton nas imediações do ponto  $\mathbf{r}$  no tempo  $t$   $\hat{V}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$  definido em 3.51 será substituído pelo operador abaixo, escalar e já representado na aproximação paraxial, e operadores que atuam no estado de polarização do fóton.

$$\hat{V}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}, z, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{[\mathbf{k}, s]} \hat{a}_{\mathbf{k}, s} e^{i \left[ \left( k - \frac{q^2}{2k} \right) z + \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega t \right]}. \quad (4.38)$$

O operador para o estado de polarização dos fóton que passam pelo caminho “b” é o projetor  $|V\rangle\langle V|$ , indicando que apenas fótons com polarização vertical passam por esse caminho. Já o operador para o caminho “a” consiste em um projetor  $|H\rangle\langle H|$  seguido do operador que representa uma placa de  $\lambda/2$  que faz as transformações  $|V\rangle \rightarrow |H\rangle$  e  $|H\rangle \rightarrow -|V\rangle$ :  $(|H\rangle\langle V| - |V\rangle\langle H|)|H\rangle\langle H| = -|V\rangle\langle H|$ .

Portanto a amplitude de probabilidade de detecção do bifóton em uma posição  $z$  após o interferômetro é:

$$A_c(\boldsymbol{\rho}, z, t) \propto -\langle vac | \hat{V}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}, z, t) \otimes |V\rangle\langle H| \otimes \hat{V}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}, z, t) \otimes |V\rangle\langle H| | \psi' \rangle + \\ + \langle vac | \hat{V}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}, z + l, t) \otimes |V\rangle\langle V| \otimes \hat{V}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}, z + l, t) \otimes |V\rangle\langle V| | \psi' \rangle ,$$

em que  $\langle vac |$  é uma notação simplificada para:

$$\langle vac | = \sum_{S_s} \sum_{S_i} \int dq_s \int dq_i \langle 0q_s | \langle S_s | \langle 0q_i | \langle S_i | . \quad (4.39)$$

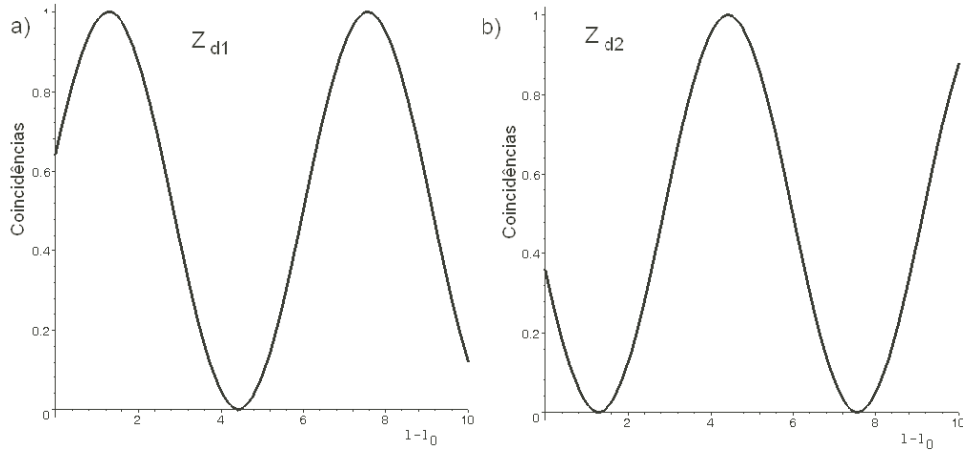
Realizando os produtos nos espaços de polarização e omitindo fase global, temos:

$$A_c(\boldsymbol{\rho}, z, t) \propto \langle vac | \hat{V}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}, z, t) \otimes \hat{V}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}, z, t) | \psi \rangle + \\ + \langle vac | \hat{V}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}, z + l, t) \otimes \hat{V}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}, z + l, t) | \psi \rangle \propto \\ \propto U \left( \frac{\boldsymbol{\rho}_s + \boldsymbol{\rho}_i}{2}, z \right) + U \left( \frac{\boldsymbol{\rho}_s + \boldsymbol{\rho}_i}{2}, z + l \right) . \quad (4.40)$$

Portanto se posicionarmos o “detector de 2 fótons” na posição  $z_{d1} = z_C + l/2$  ou em  $z_{d2}$  com  $z_{d2} - z_C \gg l$  no eixo de simetria ( $\boldsymbol{\rho} = 0$ ), as probabilidades de detecção do bifóton em coincidência serão iguais às intensidades no experimento clássico (4.30 e 4.31):

$$A_c(0, z_{d1}, t) \propto 1 + \cos[kl - \pi] , \quad (4.41)$$

$$A_c(0, z_{d2}, t) \propto 1 + \cos[kl] . \quad (4.42)$$



**Figura 4.13:** Exemplo de curvas previstas para o número de contagens em coincidência por segundo para o experimento de medida da fase de Gouy em quarta ordem para o bifóton: a) Em  $z = z_{d1}$  b) Em  $z = z_{d2}$

Portanto se variarmos a diferença de caminho entre os braços  $l$  a partir de um valor  $l_0$ , as curvas obtidas para as detecções em coincidência para  $z_{d1}$  e  $z_{d2}$  estarão defasadas em  $\pi$ , conforme ilustrado na figura 4.13. Essa defasagem seria uma verificação experimental da influência da fase de Gouy na correlação em quarta ordem para o campo gerado pela CPD. Ela confirmaria que a correlação se propaga como o feixe de bombeamento, não apenas com o seu comprimento de onda, tendo inclusive uma velocidade superluminal na região do foco do feixe laser.

# Capítulo 5

## Conclusões e Perspectivas

Foi visto que a correlação em quarta ordem para o estado do campo gerado pela conversão paramétrica descendente se relaciona com a correlação em segunda ordem para o feixe eletromagnético que gera a conversão, de acordo com a equação 4.22. A amplitude de detecção em coincidência para os fótons gêmeos a uma distância  $z$  do cristal não-linear é proporcional à amplitude do feixe a essa distância. Isso nos levou à associação de um *feixe de correlação* para o campo gerado pela conversão paramétrica, já que a correlação em quarta ordem obedece à equação de um feixe.

Se analisarmos o *bifóton* como uma entidade única, concluímos que ele tem um comprimento de onda de de Broglie igual ao dos fótons que compõe o feixe de bombeamento, o que foi comprovado em experimentos com interferômetros de Young [8], Mach-Zender [32] e Michelson [35]. Além disso, o presente trabalho mostra que os *bifótons* se propagam em um feixe relacionado diretamente com o feixe laser responsável pela conversão. Esta interpretação concorda com o fato de que os bifótons podem gerar imagens de objetos colocados no seu caminho com resolução melhor que as obtidas com luz do comprimento de onda dos fótons individuais, através das detecções em coincidência [36, 12]. Estamos, nesse caso, iluminando o objeto com um feixe de “partículas” com comprimento de onda de Broglie igual ao dos fótons do feixe laser, que é menor que o dos fótons individuais, gerando portanto uma imagem com melhor resolução.

Uma consequência dessa associação de um *feixe de correlação* para o campo gerado pela CPD foi a previsão de que as curvas obtidas para as contagens em coincidência dos fótons gêmeos após o cristal ao movermos um dos detectores, mantendo

o outro fixo, devem ser idênticas ao perfil de intensidade do feixe nessa posição, salvo por um fator de 2 na escala. Vale lembrar que as contagens simples de cada detector devem ser constantes ao longo das medidas. Para se explicar o fenômeno, é necessário fazer uso da ótica quântica. Não podemos explicá-lo com física clássica.

As medidas realizadas utilizando um feixe Gaussiano mostraram um acordo razoável com a teoria, salvo na região da cintura do feixe. Como foi discutido, isso provavelmente se deve à utilização de um feixe laser pulsado com grande largura espectral e filtros largos de interferência nos detectores, o que contradiz a aproximação monocromática utilizada pela teoria. Se mostra necessário realizar, assim que for possível, os experimentos com um aparato que se adeque melhor às aproximações utilizadas pela teoria, para verificá-la de forma eficaz.

Essa relação entre a amplitude de detecção em coincidência dos fótons gêmeos e a amplitude do feixe que gera a conversão paramétrica também levou a uma previsão teórica de uma influência da fase de Gouy do feixe nas detecções em coincidência dos fótons gêmeos que pode ser verificada através de um experimento interferométrico. Deve-se, agora, verificar experimentalmente essa previsão, que pode mostrar pela primeira vez a influência da fase de Gouy na correlação em quarta ordem de um campo eletromagnético, no caso o gerado pela conversão paramétrica descendente.

# Apêndice A

## Larguras Inferidas para Curvas Medidas com Fendas Finitas

### A.1 Medidas de Intensidade do Feixe: 1 Detector

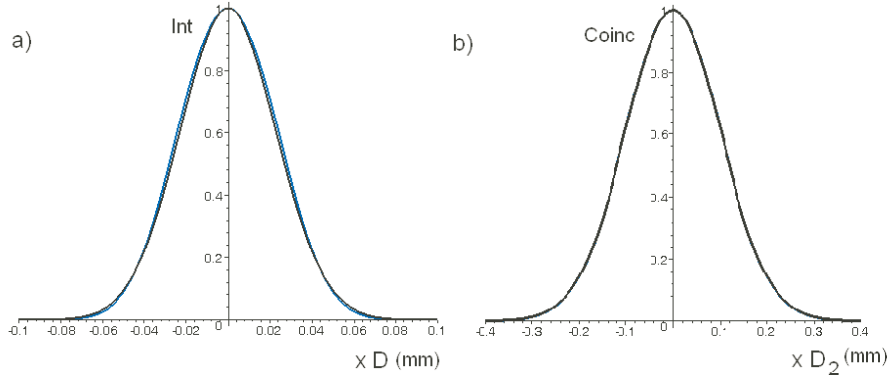
Ao medirmos uma função  $I(x) = e^{-2x^2/w^2}$  com um detector posicionado atrás de uma fenda de largura  $a$ , medimos na realidade a função:

$$g(x) \propto \int_{-a/2}^{a/2} I(x+x')dx' = \int_{-a/2}^{a/2} e^{-2(x+x')^2/w^2} dx' . \quad (\text{A.1})$$

Quando  $I(x)$  é uma função Gaussiana,  $g(x)$  é uma função que se assemelha muito a uma Gaussiana, como ilustrado no gráfico da figura A.1a.

Para o ajuste experimental de uma curva, a utilização da função  $g(x)$  ou de uma função Gaussiana mais larga que  $I(x)$  terão a mesma precisão quando a largura da função  $f(x)$  é maior que a largura da fenda, o que é o caso em todas as medidas realizadas. Sendo assim, conforme discutido no capítulo 4, foram utilizadas funções Gaussianas para ajustar as curvas obtidas experimentalmente. Para inferir qual a largura real da curva, que seria medida com a utilização de um detector pontual, tracei gráficos no programa *Maple 8* das funções  $g(x)/g(0)$  e da função Gaussiana  $e^{-2x^2/w_m^2}$ , com  $w_m$  sendo a largura obtida através do ajuste da curva experimental. Variei então o parâmetro  $w$  em  $g(x)$ , até que as duas curvas se sobrepusessem. Esse valor de  $w$  foi considerado o valor real para a largura da Gaussiana.

## Apêndice A. Larguras Inferidas para Curvas Medidas com Fendas Finitas 65



**Figura A.1:** a) Curvas  $e^{-2x^2/w_m^2}$  com  $w_m = 0,065\text{mm}$  e  $g(x)/g(0)$  (A.1) com  $a = 0,050\text{mm}$  e  $w = 0,049\text{mm}$ . Esses valores correspondem aos valores medido e inferido para a largura da curva de intensidade do feixe na posição da cintura no capítulo 4 ( $z=640\text{mm}$  na tabela 4.1). b) Curvas  $e^{-2x^2/w_m^2}$  com  $w_m = 0,288\text{mm}$  e  $G(x)/G(0)$  (A.3) com  $a = 0,100\text{mm}$  e  $w = 0,263\text{mm}$ . Esses valores correspondem aos valores medido e inferido para a largura da curva de coincidências para os fótons gêmeos na posição da cintura do feixe no capítulo 4 ( $z=640\text{mm}$  na tabela 4.1). Em ambos os casos é quase impossível distinguir as 2 curvas traçadas.

## A.2 Medidas de Curvas em Coincidência: 2 Detectores

Ao medirmos a função  $P_2(x_s, x_i) = P_2(x_s + x_i) = |A_C(x_s, x_i)|^2 \propto |U(\frac{x_s+x_i}{2}, z)|^2$  (4.22) com fendas finitas de largura  $a$  na frente dos detectores, estamos medindo na realidade a função:

$$G(x_s, x_i) \propto \int_{-a/2}^{a/2} dx_1 \int_{-a/2}^{a/2} dx_2 P_2(x_s + x_1 + x_i + x_2). \quad (\text{A.2})$$

Podemos realizar a seguinte troca de variáveis na integração:  $u = x_1 + x_2$ ,  $v = 1/2(x_1 - x_2)$ .  $u$  varia de  $-a$  ( $x_1 = x_2 = -a/2$ ) a  $a$  ( $x_1 = x_2 = a/2$ ). Podemos colocar estes limites para a integração em  $u$  tomando o cuidado de verificar quais os limites que devemos colocar na integração em  $v$ . Para um valor positivo para  $u$ , temos que  $x_1 = u - x_2$  e o valor mínimo para  $x_2$  deve ser  $-a/2 + u$ , caso contrário teremos  $x_1 = u - x_2 > a/2$ . Esse também deve ser o valor mínimo para  $x_1$ , por um argumento análogo. Sendo assim, o valor mínimo que  $v$  pode ter para esse  $u$  deve ser  $v_{min} = -a/2 + u/2$  (quando  $x_1 = -a/2 + u$  e  $x_2 = a/2$ ) e o máximo  $v_{max} = a/2 - u/2$

## Apêndice A. Larguras Inferidas para Curvas Medidas com Fendas Finitas 66

(quando  $x_1 = a/2$  e  $x_2 = -a/2 + u$ ). Um raciocínio análogo nos mostra que quando  $u$  é negativo, os limites de integração em  $v$  são  $v_{min} = -a/2 - u/2$  e  $v_{max} = a/2 + u/2$ . Portanto temos:

$$\begin{aligned}
 G(x_s, x_i) &\propto \int_{-a}^0 du \int_{-a/2-u/2}^{a/2+u/2} dv P_2(x_s + x_i + u) + \int_0^a du \int_{-a/2+u/2}^{a/2-u/2} dv P_2(x_s + x_i + u) = \\
 &= \int_{-a}^0 du (a + u) P_2(x_s + x_i + u) + \int_0^a du (a - u) P_2(x_s + x_i + u) = \\
 &= \int_{-a}^a du (a - |u|) P_2(x_s + x_i + u). \tag{A.3}
 \end{aligned}$$

Quando  $P_2(x)$  é uma função Gaussiana de largura não maior que  $a$ , a expressão A.3 é uma curva praticamente Gaussiana, conforme mostrado na figura A.1b. Um procedimento análogo ao da seção anterior, através da visualização das curvas A.3 e de uma Gaussiana no programa *Maple 8*, foi utilizado para inferir qual a largura da função  $P_2(x_s + x_i)$  a partir da largura da Gaussiana ajustada para a curva experimental.

# Bibliografia

- [1] L. Mandel and E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge, New York, 1995.
- [2] H. Moysés Nussenzveig. *Introduction to Quantum Optics*. Gordon and Breach, New York, 1973.
- [3] A. Messiah. *Quantum Mechanics*. Dover, New York, 1999.
- [4] M. O. Scully and K. Drühl. Quantum eraser: A proposed photon correlation experiment concerning observation and "delayed choice" in quantum mechanics. *Phys. Rev. A*, 25:2208, 1982.
- [5] M. O. Scully and M. S. Zubary. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [6] C. K. Hong and L. Mandel. Theory of parametric frequency down conversion of light. *Phys. Rev. A*, 31:2409, 1985.
- [7] C. H. Monken, P. H. Souto Ribeiro and S. Pádua. Transfer of angular spectrum and image formation in spontaneous parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 57:3123, 1998.
- [8] E. J. S. Fonseca, P. H. Souto Ribeiro, S. Pádua and C. H. Monken. Quantum interference by a nonlocal double slit. *Phys. Rev. A*, 60:1530, 1999.
- [9] E. J. S. Fonseca, C. H. Monken and S. Pádua. Measurement of the de Broglie wavelength of a multiphoton wave packet. *Phys. Rev. Lett.*, 82:2868, 1999.
- [10] S. P. Walborn, A. N. de Oliveira, S. Pádua and C. H. Monken. Multimode Hong-Ou-Mandel interference. *Phys. Rev. Lett.*, 90:143601, 2003.

- [11] W. A. T. Nogueira , S. P. Walborn , S. Pádua and C. H. Monken. Generation of a two-photon singlet beam. *Phys. Rev. Lett.*, 92:043602, 2004.
- [12] Ivan F. Santos *et al.* Generation and detection of magnified images via illumination by entangled photon pairs. *Phys. Rev. A*, 72:033802, 2005.
- [13] L. Neves *et al.* Generation of entangled states of qudits using twin photons. *Phys. Rev. Lett.*, 94:100501, 2005.
- [14] J. Durnin. Exact solutions for nondiffracting beams. I. the scalar theory. *J. Opt. Soc. Am. A*, 4:651, 1987.
- [15] J. Durnin , J.J. Miceli Jr. and J.H. Eberly. Diffraction-free beams. *Phys. Rev. Lett.*, 58:1499, 1987.
- [16] Joseph W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. McGraw-Hill, Singapura, 2nd edition, 1996.
- [17] P. Pellat-Finet. *Lecciones de Óptica de Fourier*. Springer-Verlag, 2004.
- [18] D. J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, New Jersey, 3rd edition, 1999.
- [19] M. Born and E. Wolf. *Principles of Optics*. Macmillan, New York, 2nd edition, 1964.
- [20] B. E. A. Saleh and M. Teich. *Fundamentals of Photonics*. John Wiley & Sons, New York, 1991.
- [21] M. Gouy. Sur une propriété nouvelle des ondes lumineuses. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 110:1251, 1890.
- [22] M. Gouy. Sur la propagation anormale des ondes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 111:33, 1890.
- [23] Z.L. Horváth , J.Vinkó , Zs. Bor , D. von der Linde. Acceleration of femtosecond pulses to superluminal velocities by Gouy phase shift. *Applied Physics B*, 63:481, 1996.

- [24] M. Boas. *Mathematical Methods in the Physical Sciences*. John Wiley & Sons, New York, 2nd edition, 1983.
- [25] M. W. Beijersbergen , L. Allen , H. E. L. O. van der Veen and J. P. Woerdman. Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum. *Optics Comm*, 96:123, 1993.
- [26] E. Goulielmakis *et al.* Direct measurement of light waves. *Science*, 305:1267, 2004.
- [27] Charles Day. Attosecond bursts trace the electric field of optical laser pulses. *Physics Today*, page 21, October 2004.
- [28] H. Goldstein , C. Poole and J. Safko. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, San Francisco, 3rd edition, 2002.
- [29] E. J. S. Fonseca. *Interferência com pacotes de onda de dois fótons e a medida do seu comprimento de onda de de Broglie*. Tese de doutorado, UFMG, 2000.
- [30] R. S. Thebaldi. Estados de dois fótons com momento angular orbital. Dissertação de mestrado, UFMG, 2001.
- [31] R. A. Campos , B. E. A. Saleh and M. C. Teich. Fourth-order interference of joint single-photon wave packets in lossless optical systems. *Phys. Rev. A*, 42:4127, 1990.
- [32] J. G. Rarity *et al.* Two-photon interference in a Mach-Zehnder interferometer. *Phys. Rev. Lett.*, 65:1348, 1990.
- [33] J. D. Franson. Two-photon interferometry over large distances. *Phys. Rev. A*, 44:4552, 1991.
- [34] P. G. Kwiat *et al.* New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 75:4337, 1995.
- [35] P. G. Kwiat *et al.* Correlated two-photon interference in a dual-beam Michelson interferometer. *Phys. Rev. A*, 41:2910, 1990.

- [36] Ivan F. Santos *et al.* Resolution and apodization in images generated by twin photons. *Phys. Rev. A*, 67:033812, 2003.