

**Modulador espacial de luz para processos quânticos:
algoritmo de Deutsch, concentração de emaranhamento
e simulação de sistemas quânticos abertos**

Breno Marques Gonçalves Teixeira

Abril 2013



Modulador espacial de luz para processos quânticos: algoritmo de Deutsch, concentração de emaranhamento e simulação de sistemas quânticos abertos

Breno Marques Gonçalves Teixeira

Orientador: Sebastião José Nascimento de Pádua

Coorientador: Marcelo Paleólogo França Santos

Tese apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial à obtenção do grau de Doutor em Física.

Abril 2013

Dedico este trabalho à minha esposa
e à minha família

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à Ana, minha querida esposa, que esteve sempre ao meu lado ao longo de toda minha história na física, sempre me apoiando, me incentivando e me ajudando bastante, inclusive com esta tese.

Agradeço à minha irmã, aos meus pais e à família da Ana que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse onde estou.

À turma do Anta Vesga, agradeço por ser minha válvula de escape, com muito companheirismo e bom humor, muito embora os dias de zoação em Maravilhas estejam se tornando cada vez mais raros. Com certeza, sem eles não teria chegado onde estou agora.

Agradeço ao Sebastião e ao França pelo orientação, incentivo e auxílio ao longos desses anos, pelas várias discussões produtivas, pela transmissão de conhecimento, e por me tornar a ser um pesquisador. Ao Monken e ao Terra que mesmo não sendo meus orientadores, sempre me ajudaram a resolver minhas dúvidas.

A todos do Grupo EnLight que, além de serem ótimos amigos, tivemos ótimas discussões ao longo das reuniões. Aos que passaram noites em claro no laboratório fazendo medidas, comendo pizza e bebendo energético para conseguirmos finalizá-las, agradeço porque sem vocês não teria concluído meu doutorado. A todos aqueles que quebraram cabeça nas várias análises tentando dar sentido ao que medimos.

Agradeço ao Waguinho e à Karla que tanto contribuíram para a minha experiência com docência e me ajudaram a ter gosto por dar aula.

Agradeço ao meus amigos de sala, exceto o Edmilson, pelos bons momentos juntos, pelas bebedeiras e jogatinas. Aos colegas do Departamento de Física que estiveram ao meu lado, jogando conversa fora na sala do café, resolvendo os exercícios das matérias e incentivando uns aos outros.

A todo o corpo docente, às Secretarias da pós e do departamento, à oficina mecânica e a todos os funcionários pelos ótimos 9 anos que passei no DF entre graduação e pós.

Agradeço ao CNPq, à Fapemig, CAPES pelo suporte financeiro.

Nesta tese demonstramos experimentalmente a implementação de processos quânticos e a simulação de dinâmicas complexas, através da manipulação de um sistema quântico. A conversão paramétrica descendente espontânea (SPDC), através da qual pares de fótons emaranhados são gerados, foi o sistema quântico utilizado. O estado emaranhado em caminho transversal, dos pares de fótons, foi manipulado com o uso de moduladores espaciais programáveis (SLM). Um cristal não-linear com casamento de fase tipo I e um feixe de laser contínuo com comprimento de onda na região do violeta, foram utilizados para a geração de fótons gêmeos em estados quânticos emaranhados em caminho e com dimensões variadas no espaço de Hilbert. Três protocolos quânticos foram estudados experimentalmente nesta tese: algoritmo de Deutsch mínimo, concentração de emaranhamento e simulação de dinâmicas dissipativas. No experimento do algoritmo de Deutsch foi usado um fóton gêmeo gerado pela SPDC e uma fenda dupla, para codificar um qubit espacial. O segundo fóton do par foi utilizado como “trigger” na preparação condicional do estado de um fóton. O SLM foi usado como o oráculo mencionado no algoritmo, isto é, o responsável pela implementação das funções constante e balanceada. Na implementação do protocolo de concentração de emaranhamento para estados de dois qutrits, foram gerados estados parcialmente emaranhados usando a SPDC juntamente com um SLM que modula amplitude. Um segundo SLM, modulador de fase, dentro de um interferômetro de Sagnac, foi usado para implementar o protocolo utilizando o método conhecido como Procusteano. O terceiro protocolo demonstrado experimentalmente foi a simulação de duas dinâmicas dissipativas em qutrits: defasagem e amplitude, onde um dos fótons passa por canal ruidoso com essas propriedades e o estado transmitido é caracterizado.

ABSTRACT

In this thesis we demonstrate experimentally the implementation of quantum processes and simulation of complex dynamics, through the manipulation of a quantum system. Pairs of entangled photons generated by spontaneous parametric down conversion (SPDC) were used as the quantum system. The entangled state in the transversal path has been manipulated using programmable spatial light modulators (SLM). A nonlinear crystal with phase matching type I and a continuous laser beam with wavelength in the violet region were used for the generation of twin photons in entangled path states that allow us to vary the Hilbert space dimension. Three quantum protocols were experimentally studied in this thesis: minimum Deutsch algorithm, entanglement concentration and simulation of dissipative dynamics. In the Deutsch algorithm implementation were used twin photons generated by SPDC and a double slit to encode a spatial qubit were used. The second photon was used as a trigger to prepare a conditional state of the first. The SLM was used as the oracle mentioned in the algorithm, *i. e.*, it is responsible for implementing the balanced and constant functions. The entanglement concentration protocol for two-qutrit states was also implemented. Partially entangled path states were generated using SPDC along with a SLM that modules amplitude only. A second SLM phase modulator inside a Sagnac interferometer was used to implement the protocol using the method known as Procustean. The third protocol demonstrated experimentally was the simulation of two dissipative dynamics in qudits: dephasing and amplitude. One of the photons passes through a noisy channel, implemented using a SLM, and the transmitted state is characterized allowing us to identify the noisy channel properties.

1	Introdução	1
2	Conceitos Básicos	3
2.1	Sistemas Quânticos	3
2.1.1	Sistema Quântico	3
2.1.2	Operações Quânticas	5
2.1.3	Emaranhamento	5
2.2	Geração de Estados Quânticos Emaranhados	8
2.2.1	Fundamentos da Conversão Paramétrica Descendente	8
2.2.2	Estado Quântico dos Fótons Gêmeos	10
2.2.3	Geração de Qudits Emaranhados Usando Momento Transversal	12
2.3	Modulador Espacial de Luz	15
2.3.1	Os Dispositivos	15
2.3.2	Caracterizando o SLM Usando Matriz de Jones	16
2.3.3	Calibração do Modulador de Fase Usando o Interferômetro de Sagnac	21
2.3.4	Usando o SLM Junto com Fendas Múltiplas	22
3	Algoritmo de Deutsch Mínimo	25
3.1	Introdução	25
3.2	Algoritmo de Deutsch Mínimo	26
3.3	Descrição Experimental	27
3.4	Resultados Experimentais	29
3.5	Discussão	31
3.6	Conclusão	33
4	Concentração Ótima de Emaranhamento	35
4.1	Introdução	35
4.2	Protocolo de Concentração de Emaranhamento	36
4.3	Implementação Experimental	37

4.3.1	Montagem Experimental	37
4.3.2	Geração de estados parcialmente emaranhados	39
4.3.3	Medidas generalizadas para a concentração de emaranhamento	40
4.3.4	Resultados experimentais	42
4.4	Conclusão	44
5	Simulação de Sistemas Quânticos Abertos	45
5.1	Introdução	45
5.2	Sistemas Quânticos Abertos	46
5.2.1	Mapa de Defasagem	47
5.2.2	Mapa de Amplitude	48
5.3	Implementação Experimental: Defasagem	49
5.3.1	Defasagem de Qubits	51
5.3.2	Defasagem em Ququarts	54
5.4	Implementação Experimental: Amplitude	58
5.5	Conclusão	62
6	Considerações Finais e Perspectivas	63
	Apêndices	65
A	Criando Imagens para o SLM Usando o Matlab	65
B	Projetores em um padrão de interferência	67
B.1	Propagação do Campo usando Óptica de Fourier	68
B.2	Cálculo do Operador de Medida	70
B.3	Detector Finito	72
B.4	Soma de duas lentes para formação do padrão de interferência	73
B.5	Padrão de Interferência Condicional dos Fótons Gêmeos	74
	Publicações	76
	Bibliografia	78

Durante os últimos anos tem-se mostrado que sistemas quânticos de maior dimensão (qudits), ou sistemas multipartites, são importantes para realizar várias tarefas em computação quântica [1] e em investigações fundamentais [2–5]. Além disso, a computação quântica vem se mostrando uma ferramenta poderosa para resolver problemas de maneira mais eficiente que sua contraparte clássica [1], como: criptografia quântica [6, 7], código super denso [8], algoritmo de Deutsch [9], algoritmo de busca (algoritmo de Grover [10]), algoritmo de fatorização (algoritmo de Shor [11, 12]); e teleportação [13]. Em várias dessas tarefas, um recurso importante para a computação quântica é o emaranhamento [14]. Um sistema quântico que possa ser facilmente manipulado e tem possibilidade de gerar qudits nos permite implementar uma gama grande de processos quânticos.

Os fótons gêmeos da conversão paramétrica descendente espontânea [15, 16] (SPDC - *spontaneous parametric downconversion*) podem ser utilizados para implementação de processos quânticos, pois são fótons emaranhados, e podem ser manipulados facilmente [1]. Outra vantagem desse sistema é que a correlação pode ser gerada em diferentes graus de liberdade como: polarização [17, 18], momento transversal [19], momento longitudinal [20, 21], momento angular orbital [22–26], energia tempo [27–29] e “*time-bin*” [30, 31]; ou mesmo em mais de um grau de liberdade ao mesmo tempo.

Em nossos trabalhos nós usamos qudits codificados em momento linear transversal, chamados de qudits espaciais. Vários experimentos já demonstraram que esse sistema gera qudits emaranhados [19, 32–37] e já foram usados em várias investigações [38–44].

Uma possível forma de implementar operações em sistemas ópticos é o uso de moduladores espaciais de luz (SLM - *spatial light modulator*). Esses dispositivos permitem uma modulação de fase e amplitude simples por usarem uma tela de cristal líquido, sendo atualmente usados em: qudits fotônicos codificados em momento angular orbital [22, 45–47] e qudits espaciais [38, 39, 41, 48, 49]. O uso do SLM para implementar operações em qudits espaciais é uma característica em nossas montagens experimentais que pode ser vista nos trabalhos de tomografia de dois qubits [39] e da testemunha de emaranhamento de qudits [37]. Nesta tese são apresentados outros três trabalhos feitos com essas mesmas características: algoritmo de Deutsch mínimo [43],

concentração de emaranhamento em qudits [50] e simulação de dinâmicas dissipativas.

O algoritmo de Deutsch é um exemplo simples de como a computação quântica pode ter ganhos em relação a computação clássica. O problema de Deutsch [9], cujo o algoritmo é utilizado para resolvê-lo, consiste em determinar, por exemplo, se uma moeda é justa (cara de um lado e coroa do outro) ou se é falsa (cara ou coroa, dos dois lados). Deutsch mesmo mostrou que, quando explorada a superposição dos estados quânticos, somente um exame da “moeda” é necessário, não sendo requerido o exame dos dois lados. Em nosso experimento [43], usamos uma fenda dupla para codificar um qubit nos modos transversais do fóton gerado pelo processo da SPDC e o SLM para implementar a “moeda falsa” e a “moeda justa”.

A concentração de emaranhamento [51–55] é uma técnica que nos permite levar um estado parcialmente emaranhado para um maximamente emaranhado de forma probabilística. Como o emaranhamento é fundamental para a implementação de vários protocolos de computação quântica, a sua perda por canais quânticos imperfeitos diminui as performances desses protocolos, e um protocolo para aumentá-lo se mostra, portanto, importante. No experimento mostrado nessa tese [50] nós implementamos a concentração de emaranhamento ótima em estados de qutrits espaciais, onde estados maximamente emaranhados são obtidos com a máxima probabilidade. A implementação foi baseada no uso do SLM e técnicas de interferometria para execução das operações necessárias.

A simulação de dinâmicas complexas quânticas [56–59] é um dos principais usos da computação quântica. Um tipo de dinâmica que a comunidade de informação quântica tem interesse são as dissipativas, onde há degradação de recursos importantes para a computação quântica, como o emaranhamento. Nesse trabalho [60] nós apresentamos a simulação de duas dinâmicas dissipativas: defasagem e amplitude. A implementação foi feita usando qudits espaciais e, para executar os mapas dissipativos, foi usado o SLM.

No Capítulo 2 abordaremos os conceitos fundamentais para os trabalhos que serão mostrados nesta tese; no Capítulo 3 será apresentado a implementação mínima do algoritmo de Deutsch; o trabalho sobre a concentração de emaranhamento ótima de qutrits será apresentado no Capítulo 4; e a simulação de dinâmicas dissipativas de qudits será mostrada no Capítulo 5. Reservamos o Capítulo 6 para as considerações finais e perspectivas.

CAPÍTULO 2

CONCEITOS BÁSICOS

O objetivo ao longo desse doutorado foi a implementação de processos quânticos em qudits codificados em estados de caminho usando moduladores de luz espaciais para implementar as operações necessárias. Neste capítulo definiremos os conceitos básicos da teoria quântica, a teoria do estado dos fótons gêmeos criados usando conversão paramétrica descendente e o funcionamento dos moduladores de luz.

2.1 SISTEMAS QUÂNTICOS

Ao longo do século XIX começa a história da física moderna com diferentes descobertas científicas, sendo as duas mais intrigantes a radiação de corpo negro, observada por Gustav Kirchhoff em 1859, e o efeito fotoelétrico, por Heinrich Hertz em 1887, não sendo possíveis serem explicadas com a física desenvolvida até então. A sugestão de que a energia de um sistema poderia ser discreta, feita por Ludwig Boltzmann em 1877; a hipótese de quantização da energia, feita por Max Planck em 1900 conseguindo explicar o espectro de energia de corpo negro; e a explicação do efeito fotoelétrico em 1905, feita por Einstein, se mostraram eficazes dando início ao desenvolvimento da teoria atualmente chamada de mecânica quântica. No começo do século XX, a teoria foi consolidada por vários físicos conseguindo explicar vários fenômenos na escala microscópica e sendo uma das principais teorias que possibilitaram o desenvolvimento da tecnologia atual. Nessa seção faremos uma breve revisão de alguns conceitos importantes de mecânica quântica: sistemas quânticas, emaranhamento e operações quânticas.

2.1.1 Sistema Quântico

Suponha um sistema quântico A associado a um espaço de Hilbert H_A de dimensão d_A [61]. Já um sistema composto $A + B$ é descrito no espaço que é o produto tensorial entre cada parte, i.e., $H_{AB} = H_A \otimes H_B$. Um estado puro arbitrário $|\psi\rangle$ pode ser expandido pelo produto tensorial entre as bases ortogonais $\{|A_i\rangle\} \in H_A$ e $\{|B_j\rangle\} \in H_B$ com $i = 1, 2, \dots, d_A$ e $j = 1, 2, \dots, d_B$, sendo

escrito na forma:

$$|\psi\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |A_i\rangle \otimes |B_j\rangle, \quad (2.1)$$

onde $c_{ij} = \langle A_i B_j | \psi \rangle$ são coeficientes complexos que satisfazem $\sum_{ij} |c_{ij}|^2 = 1$. Os estados puros são os tipos de estados em que temos mais conhecimento sobre o sistema. Caso não tenhamos conhecimento máximo sobre o sistema, o estado é dito misto. Um estado misto é descrito pela matriz densidade definida como:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (2.2)$$

onde $\sum_i p_i = 1$ e o estado é descrito por uma soma convexa de estados puros semelhantes ao da equação 2.1. Pode-se descrevê-lo para somente uma parte do sistema, por exemplo a parte A , calculando-se o operador densidade reduzido:

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB}), \quad (2.3)$$

onde a operação Tr_B é o *traço parcial* em B , calculado ao se somar os estados do subsistema B do estado ρ_{AB} .

A *informação quântica* e a *computação quântica* [1] são áreas de estudo de como processos informacionais podem ser realizado usando as propriedades de sistemas quânticos. Nesse contexto, fazemos uma analogia à unidade básica da informação clássica, o bit (sistema que pode assumir dois valores $\{0, 1\}$), chamando a unidade básica da informação quântica de qubit (*quantum bit*) $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Extrapolando a nomenclatura chamamos um sistema de dimensão d de qudit $\{|0\rangle, |1\rangle, \dots, |d-1\rangle\}$. Vários protocolos que usam propriedades intrínsecas de sistemas quânticos já se mostraram vantajosos em relação aos protocolos clássicos como: criptografia quântica [6, 7], código super denso [8], algoritmo de Deutsch [9], algoritmo de busca (algoritmo de Glover [10]), algoritmo de fatorização (algoritmo de Shor [11, 12]); e outros protocolos que foram possíveis usando somente sistemas quânticos como a teleporteação [13]. O uso de qudits pode ser algo interessante, pois em alguns aspectos eles se mostram mais eficientes. A maioria dos sistemas que podem ser usados para fazer computação quântica [23, 62, 63] têm naturalmente dimensão maior que dois e, quando um qubit é codificado, só são considerados dois níveis (como em um átomo ou em um oscilador harmônico). Pensando em envio de informação, podemos codificar mais informação em um sistema quando mais níveis forem considerados, podendo aumentar a eficiência de transmissão por constituinte [64]. Além disso, outras vantagens dos qudits podem ser apontadas como: a maior resistência a ruído [65, 66]; distribuição de chaves quânticas [29, 67–76]; vantagens em testes fundamentais de mecânica quântica de contextualidade [4, 77–80] e testes de Bell [3, 26, 28, 47, 81–84]; e quando usamos sistemas de maiores dimensões para codificar qubits é possível proteger melhor o sistema contra ruído [85].

2.1.2 Operações Quânticas

Mapa quântico é qualquer operação em um estado quântico que leva, com certa probabilidade, a um outro estado quântico. Para deixar mais claro, suponha um mapa M que atua em um estado quântico ρ gerando o estado ρ'

$$\rho' = M(\rho). \quad (2.4)$$

Para que essa operação seja fisicamente possível M tem que seguir algumas regras.

1. $Tr[M(\rho)]$ é a probabilidade do processo caracterizado por M acontecer, então $0 \leq Tr[M(\rho)] \leq 1$.
2. M é um mapa linear. Considerando um mapa qualquer atuando em um estado misto escrito na forma de 2.2,

$$M\left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|\right) = \sum_i p_i M(|\psi_i\rangle \langle \psi_i|). \quad (2.5)$$

3. M tem que ser um mapa completamente positivo. Isso quer dizer que, se A é um operador positivo, então $M_A(A)$ e $(M_A \otimes I_B)(A \otimes B)$ também o serão. O exemplo mais comum de operação que não respeita essa regra é a transposição parcial [86].

Três exemplos de operações quânticas são:

- transformações unitárias $\rho' = U\rho U^\dagger$ que podem descrever dinâmicas de sistemas fechados;
- medições projetivas $\rho_m = |\psi_m\rangle \langle \psi_m| \rho |\psi_m\rangle \langle \psi_m|$, onde o estado pós medição tem que ser renormalizado $\rho' = M(\rho)/Tr[M(\rho)]$;
- dinâmica de um sistema quântico aberto, onde a dinâmica depende de dois sistemas ($A \otimes B$), mas somente temos interesse na evolução de uma das partes (A):

$$\rho'_A = Tr_B(\rho'_{AB}) = Tr_B(U\rho_{AB}U^\dagger). \quad (2.6)$$

Qualquer mapa quântico pode ser escrito na forma dos operadores de Kraus [87, 88]:

$$M(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger, \quad (2.7)$$

onde o conjunto $\{K_i\}$ forma uma base para os operadores no espaço onde o estado ρ é definido, logo $\sum_i K_i K_i^\dagger = I$. Essa notação tem várias vantagens, pois ela assegura que o mapa respeita todas as propriedades listadas e que pode ser escrito de diversas formas, podendo fornecer informações complementares sobre a dinâmica ou o estado [89, 90].

2.1.3 Emaranhamento

Ao longo da história da mecânica quântica, emaranhamento e correlações quânticas são alvo de vários estudos [14]. O *paradoxo de EPR* [91–93], em 1935, é o primeiro trabalho em que Einstein,

Podolsky e Rosen propõe um experimento mental que, para eles, demonstrava que a mecânica quântica era uma teoria incompleta. Em 1964, Bell [94] propõe um experimento real que pode demonstrar qual é a verdadeira natureza das correlações existentes em sistemas quânticos. Esses experimentos visam testar as *desigualdades de Bell* e existem várias, sendo a mais famosa a CHSH [95], que foi usada por A. Aspect no primeiro teste experimental em 1981 [96]. Esse experimento mostra grande indício de que a teoria está correta, porém não foi feito um experimento conclusivo sem falhas intrínsecas [97] (“loopholes”) até hoje. Existem grupos tentando achar melhores formas de medidas [98–101] e outros melhorando os equipamentos de medida [102] para que se consiga um resultado sem loopholes, algo que se acredita estar próximo.

Mesmo ao longo desses anos, a definição de emaranhamento não tem sido fácil de compreender fundamentalmente. Porém, se levarmos para o lado mais operacional, podemos definir estado emaranhado como todos aqueles que não são separáveis. Isso quer dizer que um estado separável sempre pode ser escrito da forma:

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i |A_i\rangle \langle A_i| \otimes |B_i\rangle \langle B_i|, \quad (2.8)$$

com $p_i \geq 0$ e $\sum_i p_i = 1$. Um estado é dito emaranhado caso ele não possa ser escrito da forma da equação 2.8.

Para o uso do emaranhamento como recurso é necessário quantificá-lo [103, 104]. Existem vários quantificadores, sendo os mais usados: o emaranhamento de formação [105–107], a negatividade [86, 108] e a robustez [109]. A seguir, será comentado rapidamente sobre cada quantificador.

- Emaranhamento de formação quantifica quantos estados de Bell (estados maximamente emaranhados de dois qubits) são necessários para preparar um estado ρ usando somente operações locais (operações do tipo $U_A \otimes U_B$). Esse quantificador é definido como a minimização sobre todas possibilidades de decompor um estado misto:

$$E_f(\rho) = \min_{\epsilon} (p_i E_A(|\psi_i\rangle)), \quad (2.9)$$

onde $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$, $\epsilon = \{(p_i, |\psi_i\rangle)\}$ define as diferentes possibilidades de escrever o estado ρ e $E_A(|\psi\rangle)$ é a entropia de emaranhamento definida a partir da entropia de Von Neumann de do estado reduzido

$$E_A(\rho) = S(\rho_A) = S(\rho_B) = -\text{Tr}[\rho_A \log(\rho_A)]. \quad (2.10)$$

Para estados puros o emaranhamento é fácil de calcular para qualquer dimensão [110]. Porém, para estados mistos, só existe uma forma simples de calculá-lo para sistemas com dimensão $2 \otimes 2$ e $2 \otimes 3$ [111].

- Negatividade é um quantificador de emaranhamento que sai diretamente do critério de Perez-Horodecki, também conhecido como PPT (*positive partial transposition* - transposição

parcial positiva). Esse critério é uma condição necessária para que um estado quântico seja emaranhado. A negatividade é definida como a soma dos auto-valores negativos da matriz transposta parcial:

$$N(\rho) = \sum_i \frac{|\lambda_i| - \lambda_i}{2}, \quad (2.11)$$

onde λ_i são os auto-valores da matriz transposição parcial do estado ρ ,

$$\rho^{TA} = (T \otimes I)\rho. \quad (2.12)$$

Como a negatividade é baseada em um critério necessário para emaranhamento, mas não suficiente, existem estados que são emaranhados e têm negatividade nula [112].

- Robustez quantifica a resistência do emaranhamento de um estado quando este é misturado com outro estado. Uma forma de definir o quantificador a robustez de um estado ρ é calcular o mínimo que se precisa misturá-lo com um estado pertencente ao separável:

$$R(\rho) = \min_{\rho_s \in M_s} \left[\min_{s \geq 0} s : \rho' = \frac{\rho + s\rho_s}{1 + s} \in M_s \right], \quad (2.13)$$

onde M_s define o conjunto de todos os estados separáveis, ρ_s é o estado que, com a menor mistura com ρ mistura faz com que ρ' seja separável. Esse tipo de quantificação é interessante principalmente quando estamos lidando com evoluções dissipativas. Porém, a robustez não é aditiva. Isso quer dizer que, caso eu tenha dois sistemas com estados ρ_1 e ρ_2 temos que

$$R(\rho_1 \otimes \rho_2) \neq R(\rho_1) + R(\rho_2), \quad (2.14)$$

dificultando, assim, seu para quantificar o emaranhamento como recurso.

Como foi dito anteriormente, todos os quantificadores tem suas vantagens e desvantagens, sendo este o motivo por existirem várias formas de quantificar o emaranhamento.

2.2 GERAÇÃO DE ESTADOS QUÂNTICOS EMARANHADOS

Na seção anterior apresentamos uma breve revisão sobre computação quântica e discutimos um pouco sobre informação quântica, porém temos o interesse em suas aplicações experimentais. Para isso, um conjunto de condições suficientes [113, 114] para a realização experimental da computação e comunicação quântica se fazem necessárias. Uma variedade de sistemas físicos são candidatos para a realização de protocolos de informação quântica e têm sido investigados experimentalmente, por exemplo: armadilha de íons [115], ressonância nuclear magnética [116], pontos quânticos [117], dispositivos supercondutores [118] e átomos em cavidades [119].

Em 1970 Burnham e Weinberg [120] observaram pela primeira vez correlações entre campos ópticos na conversão paramétrica descendente espontânea (SPDC - *spontaneous parametric down-conversion*). O estudo foi continuado pelo grupo do Mandel [121–125] cunhando o termo *fótons gêmeos*, pois os fótons da SPDC “nascem” juntos, logo possuem correlações temporais. Somente na década de 1990 foram feitos estudos que nos permitiram entender melhor as correlações espaciais dos fótons gêmeos [126, 127] que mostraram ser um bom sistema para implementar protocolos de informação quântica ao longo desses anos. Nessa seção discutiremos os fundamentos da SPDC [15, 16, 128], além de mostrar como se pode produzir qudits emaranhados usando o momento transversal dos fótons.

2.2.1 Fundamentos da Conversão Paramétrica Descendente

A teoria quântica da conversão paramétrica descendente pode ser derivada da descrição da interação da luz com um meio não linear, seguida da quantização do campo eletromagnético [15]. Podemos escrever uma componente da polarização de um meio não linear e não centro-simétrico até a segunda ordem quando um campo elétrico óptico $\vec{E}$ se propaga através dele [16]:

$$P_i(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int_0^\infty dt' \chi_{ij}^{(1)}(t') E_j(\vec{r}, t - t') + \epsilon_0 \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dt'' \chi_{ijk}^{(2)}(t', t'') E_j(\vec{r}, t - t') E_k(\vec{r}, t - t''), \quad (2.15)$$

onde $E_j(\vec{r}, t - t')$ é a componente j do vetor campo elétrico e $\chi^{(1)}$ e $\chi^{(2)}$ são os tensores de susceptibilidade de primeira e segunda ordem [129], respectivamente, cuja soma nos índices repetidos na equação 2.15 é subentendida. Quando a parte não linear entre o meio e o campo é suficientemente fraca podemos dividir o hamiltoniano do sistema em uma parte que inclui todas as componentes lineares, H_l , e um hamiltoniano de perturbação dada pela parte não linear:

$$H_{nl}(t) = \frac{1}{2} \int_V dr^3 \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{P}_{nl}(\vec{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V dr^3 \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dt'' \chi_{ijk}^{(2)}(t', t'') E_i(\vec{r}, t) E_j(\vec{r}, t - t') E_k(\vec{r}, t - t''), \quad (2.16)$$

em que $\vec{P}_{nl}$ é a componente não linear da polarização elétrica e V é o volume de interação entre o campo e o meio. Para tratar o problema quanticamente, basta substituir os campos na equação 2.16

pelos operadores campo elétrico que são dados por [128]:

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \vec{E}^+(\vec{r}, t) + \vec{E}^-(\vec{r}, t) \quad (2.17)$$

$$\vec{E}^+(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{v}} \sum_{\vec{k}s} \vec{e}_{\vec{k}s} l(\omega) \hat{a}_{\vec{k}s} G(\omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (2.18)$$

$$\vec{E}^-(\vec{r}, t) = \vec{E}^+(\vec{r}, t)^\dagger, \quad (2.19)$$

onde v é a volume de quantização, $\vec{k}$ é o vetor de onda dentro do cristal, s é a polarização do campo, $\hat{a}_{\vec{k}s}$ ($\hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger$) são os operadores destruição (criação), $\vec{e}_{\vec{k}s}$ é um vetor bidimensional de polarização, ω é a frequência, $G(\omega)$ é a função transmissão do filtro de interferência e $l(\omega)$ é dado por

$$l(\omega) = i \left[\frac{\hbar \omega(\vec{k}, s)}{2\epsilon_0 n^2(\vec{k}, s)} \right]^{1/2}, \quad (2.20)$$

em que $n(\vec{k}, s)$ denota o índice de refração do meio não linear. Substituindo a equação 2.19 no Hamiltoniano 2.16 tem-se o Hamiltoniano quântico:

$$\begin{aligned} \hat{H}_I(t) &= \frac{1}{V^{3/2}} \sum_{k_s, s_s} \sum_{k_i, s_i} \sum_{k_p, s_p} g^*(\omega_s) g^*(\omega_i) g^*(\omega_p) \hat{a}_{k_s, s_s}^\dagger \hat{a}_{k_i, s_i}^\dagger \hat{a}_{k_p, s_p} e^{i(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t} \\ &\times [\tilde{\chi}_{ijk}^{(2)}(\vec{e}_{k_p, s_p})_i (\vec{e}_{k_s, s_s})_j^* (\vec{e}_{k_i, s_i})_k^*] \int_V d\vec{r} e^{-i(\vec{k}_s + \vec{k}_i - \vec{k}_p) \cdot \vec{r}} + C.H. \quad , \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde nomeamos os três campos como *pump* (p) ou bombeamento, *signal* (s) e *idler* (i); $g(\omega_j) = l(\omega_j)G(\omega_j)$. Também foram desconsiderados todos os termos que oscilam muito rápido (aproximação de onda girante) e definimos $\tilde{\chi}_{ijk}$ como:

$$\tilde{\chi}_{ijk} \equiv \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_p = \omega_s + \omega_i) + \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_i = \omega_s + \omega_p) + \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_s = \omega_i + \omega_p), \quad (2.22)$$

com

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega = \omega' + \omega'') = \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dt'' \chi_{ijk}^{(2)}(t', t'') e^{-i(\omega' t' + \omega'' t'')}. \quad (2.23)$$

O Hamiltoniano 2.21 evidencia a criação de pares de fótons na conversão paramétrica descendente (figura 2.1), pois há a destruição do fóton do pump ($\hat{a}_{k_p, s_p}$) e a criação dos fótons *signal* ($\hat{a}_{k_s, s_s}^\dagger$) e *idler* ($\hat{a}_{k_i, s_i}^\dagger$). O termo não explicitado na equação 2.21 é responsável pela geração do segundo harmônico [130, 131] (geração de um campo com o dobro da frequência do campo incidente no meio não linear).

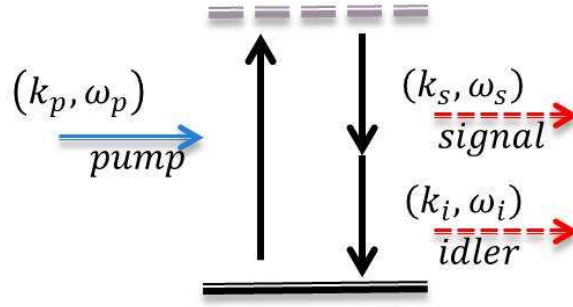


FIGURA 2.1: Um feixe de bombeamento interagindo em um cristal não linear produz feixes signal e idler pelo processo de SPDC, onde há conservação de energia e momento.

2.2.2 Estado Quântico dos Fótons Gêmeos

Para encontrar o estado quântico em um tempo t , vamos considerar que a interação começa no tempo $t_0 = 0$ quando o estado inicial é $|\psi(0)\rangle$. O estado no tempo t é dado pelo operador evolução temporal atuando no estado inicial

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\psi(0)\rangle, \quad (2.24)$$

onde

$$\hat{U}(t) = \exp\left(\frac{1}{i\hbar} \int_0^t d\tau \hat{H}_I(\tau)\right). \quad (2.25)$$

Se o campo de bombeamento é suficientemente fraco, tal que o tempo de interação é pequeno comparado ao tempo de interação entre conversões, podemos assim aproximar o evolução temporal pelos dois primeiros termos da expansão em série:

$$\hat{U}(t) \approx 1 + \left(\frac{1}{i\hbar} \int_0^t d\tau \hat{H}_I(\tau)\right). \quad (2.26)$$

O primeiro termo da expansão representa a não criação dos fótons gêmeos, enquanto o segundo termo está associado à criação de um par. Os termos de ordem superiores estão associados à geração de mais de um par de fótons [132, 133]. Usando a equação 2.21 pode-se mostrar que:

$$\begin{aligned} \int_0^t d\tau \hat{H}_I(\tau) &= \frac{1}{V^{3/2}} \sum_{k_s, s_s} \sum_{k_i, s_i} \sum_{k_p, s_p} l^*(\omega_s) l^*(\omega_i) l^*(\omega_p) \hat{a}_{k_s, s_s}^\dagger \hat{a}_{k_i, s_i}^\dagger \hat{a}_{k_p, s_p} e^{i(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t/2} \\ &\times [\tilde{\chi}_{ijk}^{(2)}(\vec{\epsilon}_{k_p, s_p})_i (\vec{\epsilon}_{k_s, s_s})_j^* (\vec{\epsilon}_{k_i, s_i})_k^*] \frac{\sin[(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t/2]}{(\omega_s + \omega_i - \omega_p)/2} \\ &\times \prod_{m=1}^3 \left[\frac{\sin[(\vec{k}_s + \vec{k}_i - \vec{k}_p)_m L_m/2]}{(\vec{k}_s + \vec{k}_i - \vec{k}_p)_m/2} \right] e^{-i(\vec{k}_s + \vec{k}_i - \vec{k}_p) \cdot \vec{r}_0} + c.h., \end{aligned} \quad (2.27)$$

em que $V = L_x \times L_y \times L_z$ e L_m é a dimensão do meio não linear na direção m .

No cálculo do estado quântico dos fótons gêmeos [16, 134] as seguintes considerações e aproximações podem ser feitas para simplificar a equação 2.27:

1. o tempo de interação é longo o suficiente para que o termo $\text{sinc}[(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t/2]$ ¹ seja significativo somente quando $\omega_s + \omega_i = \omega_p$;
2. o uso de um filtro de interferência fino na frente do detector faz com que a faixa de frequência detectável do campo da conversão seja pequena comparada ao da frequência central;
3. os termos $l(\omega)$ e $\tilde{\chi}_{ijk}^{(2)}(\omega)$ são funções que variam lentamente, podendo ser consideradas contantes no intervalo de interesse;
4. o pump propaga no eixo z e o cristal é largo o suficiente nas direções x e y de forma a conter todo o perfil transversal do feixe de bombeamento, podendo escrever o produtório da equação 2.27 como:

$$\prod_{m=x,y,z} \text{sinc}[(\vec{k}_s + \vec{k}_i - \vec{k}_p)l_m/2] \approx \delta(\vec{q}_s + \vec{q}_i - \vec{q}_p) \text{sinc}[(\vec{k}_{sz} + \vec{k}_{iz} - \vec{k}_{pz})L/2],$$

com $\vec{q}_j = (\vec{k}_{ix}, \vec{k}_{iy})$ sendo a componente transversal do vetor de onda $\vec{k}_j$ e $L = L_z$ sendo a espessura do cristal;

5. os campos pump, signal e idler são observados somente em pontos próximos ao eixo z , de forma que $|\vec{q}| \ll |\vec{k}|$, o que significa que a magnitude da componente transversal do vetor de onda é muito menor que a magnitude do próprio (considerando que os campos estão na aproximação paraxial);
6. os somatórios em $\vec{k}$ podem ser aproximados por integrais em $\vec{k}$, $\sum_k \rightarrow \frac{v}{(2\pi)^3} \int d\vec{k}$;
7. o estado inicial do sistema formado pelo signal e o idler é o vácuo $|\psi(0)\rangle = |vac\rangle$;
8. o campo do feixe de bombeamento é considerado um estado coerente.

Usando esse pequeno conjunto de suposições [15, 16, 128, 134] é possível mostrar que a equação 2.27 pode ser reescrita como

$$\int_0^t dt' \hat{H}_I(t') = \eta \int_{\Omega} d\vec{q}_s \int_{\Omega} d\vec{q}_i v(\vec{q}_s + \vec{q}_i) \hat{a}^\dagger(\vec{q}_s) \hat{a}^\dagger(\vec{q}_i) + c.h., \quad (2.28)$$

onde η é uma constante que absorve todas as constantes que aparecem no cálculo, Ω é a região de integração onde valem as aproximações e $v(\vec{q})$ é o espectro angular do feixe de bombeamento em $z = 0$ (a origem do sistema de coordenada foi considerada no centro do cristal). Usando as equações 2.24, 2.26 e 2.28 podemos escrever, finalmente, o estado dos fótons gerados por meio da SPDC:

$$|\psi\rangle = |vac\rangle + \eta \int_{\Omega} d\vec{q}_s \int_{\Omega} d\vec{q}_i v(\vec{q}_s + \vec{q}_i) |1\vec{q}_s\rangle |1\vec{q}_i\rangle, \quad (2.29)$$

em que $|1\vec{q}_j\rangle$ é o estado de Fock para um fóton no modo $j = s, i$ com vetor de onda transversal $\vec{q}_j$.

¹a função sinc é definida como $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$

No caso do estado descrito pela equação 2.29 observe que nas aproximações consideradas, o momento transversal é conservado, i.e., $\vec{q}_s + \vec{q}_i = \vec{q}_p$. Portanto, os fótons gêmeos serão anti correlacionados nesse grau de liberdade. Essa anti correlação se torna maior quanto menor for a incerteza no momento transversal do pump. Vários trabalhos já mostraram resultados da correlação entre os fótons gêmeos como: medida do comprimento de onda de Broglie de um pacote de dois fótons [135, 136], observação de interferência condicional [137], anti agrupamento espacial dos fótons [138, 139] e formação de imagem com fótons gêmeos [134, 140, 141].

2.2.3 Geração de Qudits Emaranhados Usando Momento Transversal

A conversão paramétrica é um recurso natural de sistemas emaranhados porque os fótons podem estar emaranhados em vários graus de liberdade: polarização [17, 18], momento transversal [19], momento longitudinal [20, 21], momento angular orbital [22–26], energia tempo [27–29] e “time-bin” [30, 31]. Os estados emaranhados dos fótons também podem estar emaranhados em mais de um grau de liberdade, sendo chamados de hiperemaranhamento [142–146]. A geração de qudits usando SPDC pode ser feita em diversos graus de liberdade, sendo os mais usuais: o momento angular orbital [22–26, 47], bifótons [147–151], momento transversal [19, 32–35, 152]. Para usar o momento transversal dos fótons da conversão paramétrica para gerar qudits é necessário discretizar o sistema, para isso usamos fendas múltiplas (figura 2.2). Usando um cristal não linear e fendas múltiplas pode-se gerar o estado [16]:

$$|\psi\rangle = \int dq_s \int dq_i F(q_s, q_i) |1q_s\rangle |1q_i\rangle, \quad (2.30)$$

com

$$\begin{aligned} F(q_s, q_i) &= \gamma \int dx_s \int dx_i A_s(x_s) A_i(x_i) \exp(ik(x_i - x_s)^2/8z_A) \\ &\times W((x_s + x_i)/2; z_A) \exp(-i(q_s x_s + q_i x_i)), \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde z_A é o plano das fendas múltiplas (para o caso particular cuja distância é igual para os dois fótons, i. e., $z_{Ai} = z_{As} = z_A$), $|1q_j\rangle$ é o estado de um fóton no modo de momento transversal q_j e A é a função transmissão das fendas mostrada na figura 2.2 dada por:

$$A(x) = \sum_{\ell=-\ell_D}^{\ell_D} \Pi\left(\frac{x - \ell d}{2a}\right), \quad (2.32)$$

onde $\ell_D = (D - 1)/2$ e ℓ define o rótulo de uma fenda deslocada de ℓd do centro do anteparo, $2a$ é a largura da fenda, d é a separação (centro a centro) entre duas fendas consecutivas, e $\Pi(x)$ é uma função retângulo de largura e altura unitária. O perfil transversal do feixe de bombeamento $W(\vec{\sigma}, z)$ (com $\vec{\sigma} = \vec{x} + \vec{y}$) pode ser escrito como uma decomposição de ondas planas, onde a amplitude é

dada pelo espectro angular do campo $v(\vec{q}, z)$ [153]

$$W(\vec{\sigma}, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\vec{q} v(\vec{q}, z) e^{i\vec{q} \cdot \vec{\sigma}}. \quad (2.33)$$

Na equação 2.31 nós consideramos que os fótons gêmeos têm o mesmo comprimento de onda, $k_s = k_i = k/2$ (pode ser obtido através de filtros de caminho); a dimensão na direção y é muito maior que na direção x portanto pode-se considerar as equações em uma dimensão ($\vec{\sigma}_j \rightarrow x_j$ e $\vec{q}_j \rightarrow q_j$).

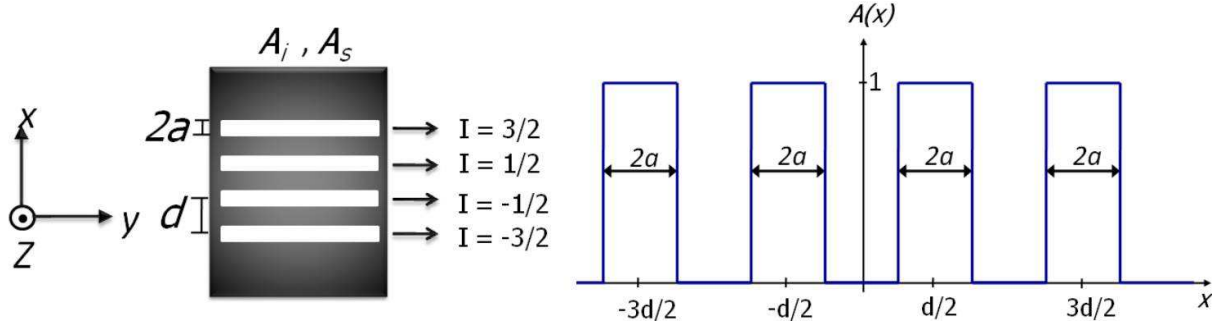


FIGURA 2.2: Exemplo da função de uma fenda múltipla com largura das fendas $2a$ e distância entre as fendas d para gerar estados de um fóton com dimensão $D = 4$.

Se inserirmos a equação 2.32 em 2.31 e fizermos a mudança de variável $x_s \rightarrow x_s - \ell d$ e $x_i \rightarrow x_i - md$, a amplitude $F(q_s, q_i)$ presente no estado dos fótons gêmeos após as fendas, pode ser escrita como:

$$F(q_s, q_i) = \gamma \sum_{\ell=-\ell_D}^{\ell_D} \sum_{m=-\ell_D}^{\ell_D} e^{-i(q_s \ell + q_i m)d} \int_{-a}^a dx_s \int_{-a}^a dx_i W\left(\frac{x_s + \ell d}{2} + \frac{x_i + md}{2}; z_A\right) \times \exp\left[\frac{ik}{8z_a}((x_i - x_s) + d(m - \ell))^2 - i(q_s x_s + q_i x_i)\right]. \quad (2.34)$$

Note que, na equação 2.34, a integral é feita na região de cada fenda. Se considerarmos fendas estreitas, duas aproximações que respeitam nossa realidade experimental podem ser feitas na expressão 2.34: a exponencial quadrática complexa na região de integração pode ser reescrita como:

$$\exp\left[\frac{ik}{8z_a}((x_i - x_s) + d(m - \ell))^2 - i(q_s x_s + q_i x_i)\right] \approx \exp\left[i\frac{kd^2(m - \ell)^2}{8z_A}\right], \quad (2.35)$$

e o perfil transversal do feixe pode ser aproximado pelo valor do campo no ponto médio de cada fenda ($x_s = x_i = 0$)

$$W\left(\frac{x_s + \ell d}{2} + \frac{x_i + md}{2}; z_A\right) \approx W\left(\frac{(\ell + m)d}{2}; z_A\right) = W_{\ell m}. \quad (2.36)$$

Com essas aproximações a amplitude dos fótons gêmeos pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
F(q_s, q_i) &= \sum_{-\ell_D}^{\ell_D} \sum_{-\ell_D}^{\ell_D} W_{lm} e^{i \frac{k d^2}{8 z_A} (m-\ell)^2} e^{-i(q_s \ell + q_i m) d} \int_{-a}^a dx_s e^{-i q_s x_s} \int_{-a}^a dx_i e^{-i q_i x_i} \\
&= \sum_{-\ell_D}^{\ell_D} \sum_{-\ell_D}^{\ell_D} W_{lm} e^{i \frac{k d^2}{8 z_A} (m-\ell)^2} e^{-i(q_s \ell d) \text{sinc}(q_s a)} e^{-i(q_i m d) \text{sinc}(q_i a)}. \tag{2.37}
\end{aligned}$$

Podemos definir o estado de uma fenda $|\ell\rangle$ [154] como

$$|\ell\rangle = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \int dx \Pi[(x - \ell d)/2a] |1x\rangle = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int dq e^{-i q \ell d} \text{sinc}(q a) |1q\rangle, \tag{2.38}$$

em que $|\ell\rangle$ é o estado do fóton ao ser transmitido por uma fenda na posição ℓd de largura $2a$. Usando a equação 2.38 e as aproximações acima pode-se reescrever a equação 2.30 como

$$|\psi\rangle = \sum_{\ell=-\ell_D}^{\ell_D} \sum_{m=-\ell_D}^{\ell_D} W_{\ell m} e^{i \frac{k d^2}{8 z_A} (m-\ell)^2} |\ell\rangle_s \otimes |m\rangle_i. \tag{2.39}$$

Um estado maximamente emaranhado pode ser gerado [34], por exemplo, quando a largura do feixe de bombeamento no plano das fendas múltiplas é menor que a separação entre as fendas. Considerando a situação na qual o perfil transversal do pump é constante ao longo de uma fenda, então $W(x; z_A) = W_o \Pi(x/2a)$, onde W_o é uma constante. Este perfil pode ser obtido experimentalmente de forma aproximada, focalizando o feixe de bombeamento no plano das fendas em uma região menor que a largura entre duas aberturas. Esta consideração implica que $W_{\ell m}$ é não nulo somente para $\ell + m = 0$, podendo ser escrito como $W_{\ell m} \propto \delta_{m, -\ell}$. Escrevendo o estado 2.39 para essa situação temos:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{\ell=-\ell_D}^{\ell_D} e^{i k \frac{d^2 \ell^2}{2 z_A}} |\ell\rangle_s \otimes |-\ell\rangle_i, \tag{2.40}$$

onde é fácil ver que os fótons gêmeos são anti-correlacionados, ou seja, quando um fóton passa pela fenda ℓ , o outro passa pela fenda simetricamente oposta $-\ell$. Além disso, por eles estarem em uma superposição coerente de estados do tipo $|\ell\rangle_s \otimes |-\ell\rangle_i$ com mesma amplitude $1/\sqrt{D}$ podemos afirmar que este estado é maximamente emaranhado para qualquer dimensão.

2.3 MODULADOR ESPACIAL DE LUZ

Os cristais líquidos [155] foram descobertos em 1888 em uma molécula de colesterol [156], e esse estado da matéria levou esse nome pois apresenta simultaneamente propriedades físicas características dos líquidos (como fluidez) e de sólidos (como birrefringência). Exemplos de cristais líquidos podem ser encontrados naturalmente em algumas proteínas, colesterol e membranas celulares. Em 1962, painéis eletrônicos começaram a ser desenvolvidos [157], e hoje são usados em diversos dispositivos, sendo o mais comum as telas de cristais líquidos (LCD - *liquid crystal display*). LCDs começaram a ficar populares em laboratórios de óptica na década de 90, pois possuem um conjunto extenso de possibilidades de usos a baixo custo. Um dos principais usos dessas telas é a modulação espacial de um feixe (fase e amplitude), em dispositivos geralmente chamados de moduladores espaciais de luz [158] (SLM - *spatial light modulator*). Alguns usos do SLM atualmente em informação quântica e óptica são em: manipulação de qudits fotônicos codificados em momento angular orbital [22, 45–47], qudits codificados em momento linear transversal [38, 39, 41, 48, 49] e pinças ópticas [159–161]. A introdução de SLMs em nossas montagens é a principal característica de todos os trabalhos feitos atualmente em nosso laboratório e iremos discutir a seguir o funcionamento e caracterização desses dispositivos.

2.3.1 Os Dispositivos

Podemos dividir os SLMs que usam LCD em dois tipos: os de transmissão [162] (o feixe transmitido sofre a modulação espacial) e de reflexão [163] (o feixe refletido sofre a modulação espacial). Por usar uma tela de LCD, o SLM pode criar uma grande variedade de modulações espaciais, restritas somente ao tamanho do pixel e às características da tela. A Figura 2.3 mostra exemplos de imagens que são usadas em nossos experimentos. As imagens são em graus de cinza (0 = preto indo até 255 = branco) e usamos um programa desenvolvido no Matlab por mim e pelo doutorando Marcos Carvalho para gerá-las (um código de Matlab para a geração das imagens está disponível no Apêndice A). Outras variantes na modulação são a polarização de incidência, a polarização de saída (necessitando ter um polarizador após o SLM) e o ângulo de incidência do feixe.

Temos disponíveis para uso dois SLMs de reflexão. O primeiro que foi adquirido pelo laboratório é o *LC-R 2500*, da empresa Holoeye Photonics [164]. Usando esse SLM temos a possibilidade de modular fase (de 0 a 2π) e amplitude variando o grau de cinza e as polarizações de entrada e saída do SLM. Infelizmente as duas modulações não são independentes, sendo complicado encontrar um conjunto de modulações ótimas para um experimento. Na subseção 2.3.2 será apresentada uma forma de prever a modulação usando matrizes de Jones.

O nosso segundo SLM é o *LCOS-SLM X10468 series*, da empresa Hamamatsu [165]. Esse modulador tem um diferencial em relação ao do Holoeye, a modulação é somente de fase para um feixe incidente de polarização horizontal. Temos disponível dois dispositivos desta série cuja funcionalidade é otimizada para diferentes faixas de comprimentos de onda: o X10468-01 (400-700nm) e o X10468-02 (750-850nm). Para esse tipo de SLM a caracterização da modulação foi

feita usando o interferômetro de Sagnac, e será detalhada na subseção 2.3.3



FIGURA 2.3: Exemplos de figuras que podem ser usadas nos SLMs: (a) dividindo o SLM em 4 modulações distintas; (b) para alguns tipos de SLMs não é necessário o uso de fendas físicas, sendo possível criá-las usando o SLM, como no exemplo dessa figura, que foi construída uma fenda tripla

2.3.2 Caracterizando o SLM Usando Matriz de Jones

Uma forma de caracterizar a modulação de um SLM é determinar a Matriz de Jones para cada grau de cinza [166] (conforme do trabalho de I. Moreno *et. al.* [166] da Universidade Miguel Hernández, Espanha). Esta proposta não determina propriedades internas no modulador, mas nos permite descrever como ele modifica o feixe. Fazendo medidas da intensidade de um feixe que passa por um primeiro polarizador, o SLM e um segundo polarizador, como mostrado na figura 2.4, podemos determinar a Matriz de Jones fazendo somente 10 medidas (7 medidas são usadas no cálculo e 3 extras são usadas para a normalização da intensidade).

Considerando que o modulador não absorve luz (mais especificamente, as perdas independem da polarização de entrada), a caracterização do modulador é dada por uma Matriz de Jones unitária,

$$M = \begin{pmatrix} X - iY & Z - iW \\ -Z - iW & X + iY \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

em que os valores dos parâmetros estão no intervalo $[-1, 1]$ e satisfazem à condição de normalização $X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2 = 1$. Mesmo sendo um tratamento clássico do campo eletromagnético, é conveniente o uso da notação de Dirac para descrever a polarização de um feixe como:

$$|P\rangle = |\theta, \phi\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta)\exp(i\phi) \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

com $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e $0 \leq \phi < 2\pi$. Identificando a polarização do campo eletromagnético de entrada como $|P_{in}\rangle = |\theta_1, \phi_1\rangle$ e a polarização de saída como $|P_{out}\rangle = |\theta_2, \phi_2\rangle$, a intensidade da luz refletida por todo o sistema pode ser escrita como:

$$I = |\langle J | J \rangle|^2 = |\langle \theta_2, \phi_2 | M | \theta_1, \phi_1 \rangle|^2, \quad (2.43)$$

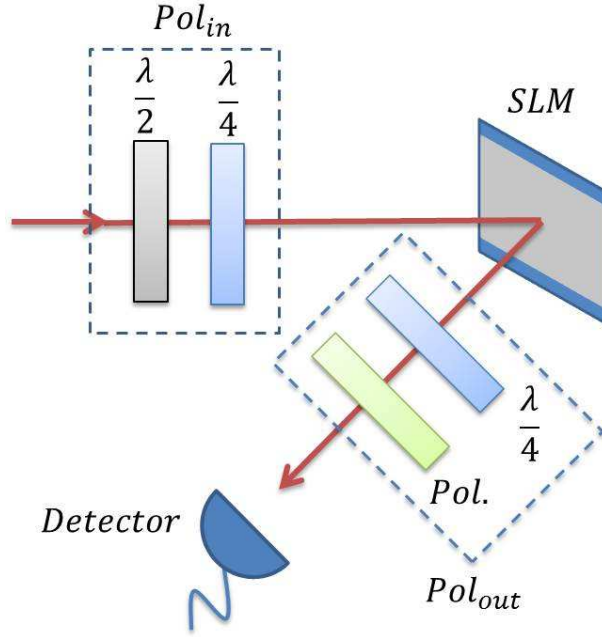


FIGURA 2.4: Esquema da calibração do SLM usando a matriz de Jones. Em nosso caso o SLM é de reflexão, o feixe polarizado passa por um conjunto de placas $\lambda/2$ e $\lambda/4$ (P_{in}) modificando a polarização de entrada e após o SLM coloca-se uma placa $\lambda/4$ e um polarizador (P_{out}) para fazer a projeção.

onde o vetor de Jones $|J\rangle$ do campo transmitido é:

$$|J\rangle = |\theta_2, \phi_2\rangle \langle\theta_2, \phi_2| M |\theta_1, \phi_1\rangle = A \exp(-i\delta) |\theta_2, \phi_2\rangle, \quad (2.44)$$

com A sendo a modulação da amplitude e δ sendo a modulação de fase:

$$A = |\langle\theta_2, \phi_2| M |\theta_1, \phi_1\rangle| \quad \delta = \arg(\langle\theta_2, \phi_2| M |\theta_1, \phi_1\rangle). \quad (2.45)$$

Usando 7 configurações descritas a seguir e suas respectivas normalizações, podemos determinar a Matriz de Jones do SLM.

1. Polarização do feixe incidente horizontal e ângulo do polarizador de saída na horizontal,

$$I_1 = |\langle 0, 0 | M | 0, 0 \rangle|^2 = X^2 + Y^2;$$

2. Polarização do feixe incidente horizontal e ângulo do polarizador de saída vertical,

$$I_2 = |\langle \pi/2, 0 | M | 0, 0 \rangle|^2 = Z^2 + W^2;$$

3. Polarização do feixe incidente horizontal e projeção na polarização circular a esquerda,

$$I_3 = |\langle \pi/4, 3\pi/2 | M | 0, 0 \rangle|^2 = 1/2(X + W)^2 + 1/2(Y + Z)^2;$$

4. Polarização do feixe incidente circular a direita e ângulo do polarizador de saída vertical,

$$I_4 = |\langle \pi/2, 0 | M | \pi/4, \pi/2 \rangle|^2 = 1/2(Z + Y)^2 + 1/2(X - W)^2;$$

5. Polarização do feixe incidente 45° e ângulo do polarizador de saída horizontal,

$$I_5 = |\langle 0, 0 | M | \pi/4, 0 \rangle|^2 = 1/2(X + Z)^2 + 1/2(Y + W)^2;$$

6. Polarização do feixe incidente 45° e ângulo do polarizador de saída vertical,

$$I_6 = |\langle \pi/2, 0 | M | \pi/4, 0 \rangle|^2 = 1/2(X - Z)^2 + 1/2(Y - W)^2;$$

7. Polarização do feixe incidente horizontal e ângulo do polarizador de saída 45° ,

$$I_7 = |\langle \pi/4, 0 | M | 0, 0 \rangle|^2 = 1/2(X - Z)^2 + 1/2(Y + W)^2.$$

Manipulando as definições anteriores, logo podemos encontrar os módulos dos parâmetros XYZW:

$$\begin{aligned} X^2 &= \frac{I_1}{1 + \left(\frac{I_7 - I_6}{I_3 - I_4}\right)^2} & Y^2 &= \frac{I_1}{1 + \left(\frac{I_3 - I_4}{I_7 - I_6}\right)^2} \\ Z^2 &= \frac{I_2}{1 + \left(\frac{I_3 - I_4}{I_5 - I_7}\right)^2} & W^2 &= \frac{I_2}{1 + \left(\frac{I_5 - I_7}{I_3 - I_4}\right)^2}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Para determinar completamente os parâmetros é necessário encontrar seus sinais. Para isso fixamos um sinal, neste caso $\text{sin}(X) = +1$ para o grau de cinza igual a zero. Com isso podemos encontrar os sinais dos outros 3 parâmetros sendo:

$$\text{sin}(Z) = \frac{\text{sin}(I_5 - I_7)}{\text{sin}(X)} \quad \text{sin}(W) = \frac{\text{sin}(I_3 - I_4)}{\text{sin}(X)} \quad \text{sin}(Y) = \frac{\text{sin}(I_7 - I_6)}{\text{sin}(W)}. \quad (2.47)$$

Analisando somente feixes de luz com polarizações lineares de entrada e saída do SLM ($\phi_1 = \phi_2 = 0$), para simplificar tanto o experimento quanto os cálculos, podemos encontrar a modulação da amplitude e da fase sendo:

$$I = |A|^2 = [X \cos(\theta_1 - \theta_2) + Z \sin(\theta_1 - \theta_2)]^2 + [Y \cos(\theta_1 + \theta_2) + W \sin(\theta_1 + \theta_2)]^2 \quad (2.48)$$

$$\delta = \arctan \left(\frac{Y \cos(\theta_1 + \theta_2) + W \sin(\theta_1 + \theta_2)}{X \cos(\theta_1 - \theta_2) + Z \sin(\theta_1 - \theta_2)} \right). \quad (2.49)$$

A Figura 2.5 mostra um exemplo de uma calibração feita no SLM da Holoeye. Um teste que nos dá indício de que a calibração foi bem sucedida é comparar os resultados obtidos da amplitude normalizada medida e prevista pela calibração, como mostrada na Figura 2.6. Por mais que as medidas da calibração sejam bem feitas, sempre refazemos a calibração quando modificamos algo na montagem, pois a modulação é muito sensível ao ângulo de incidência (uma lente ou uma placa de onda podem ser suficientes para modificar a calibração). Com a calibração do dispositivo pronta podemos fazer imagens como mostradas na Figura 2.3 para serem usadas em nossos experimentos. Na subseção 2.3.4 será mostrado como nós usamos a modulação do SLM em conjunto de fendas múltiplas.

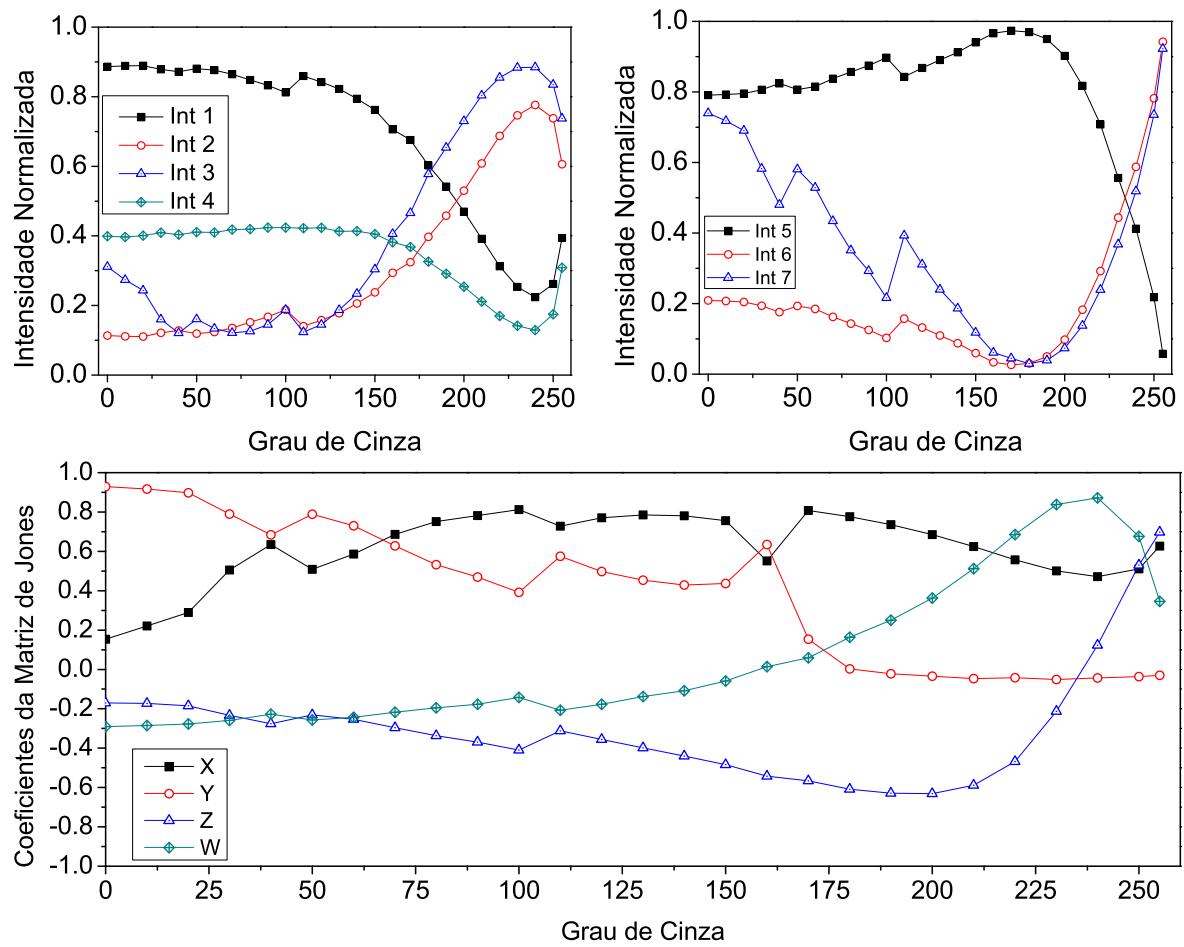


FIGURA 2.5: Medidas para a calibração do SLM da Holoeye: (superiores) valores das 7 medidas de intensidade normalizadas; (inferior) valores dos parâmetros X , Y , Z e W . Uma linha contínua ligando os pontos foi adicionada para ajudar na visualização das curvas.

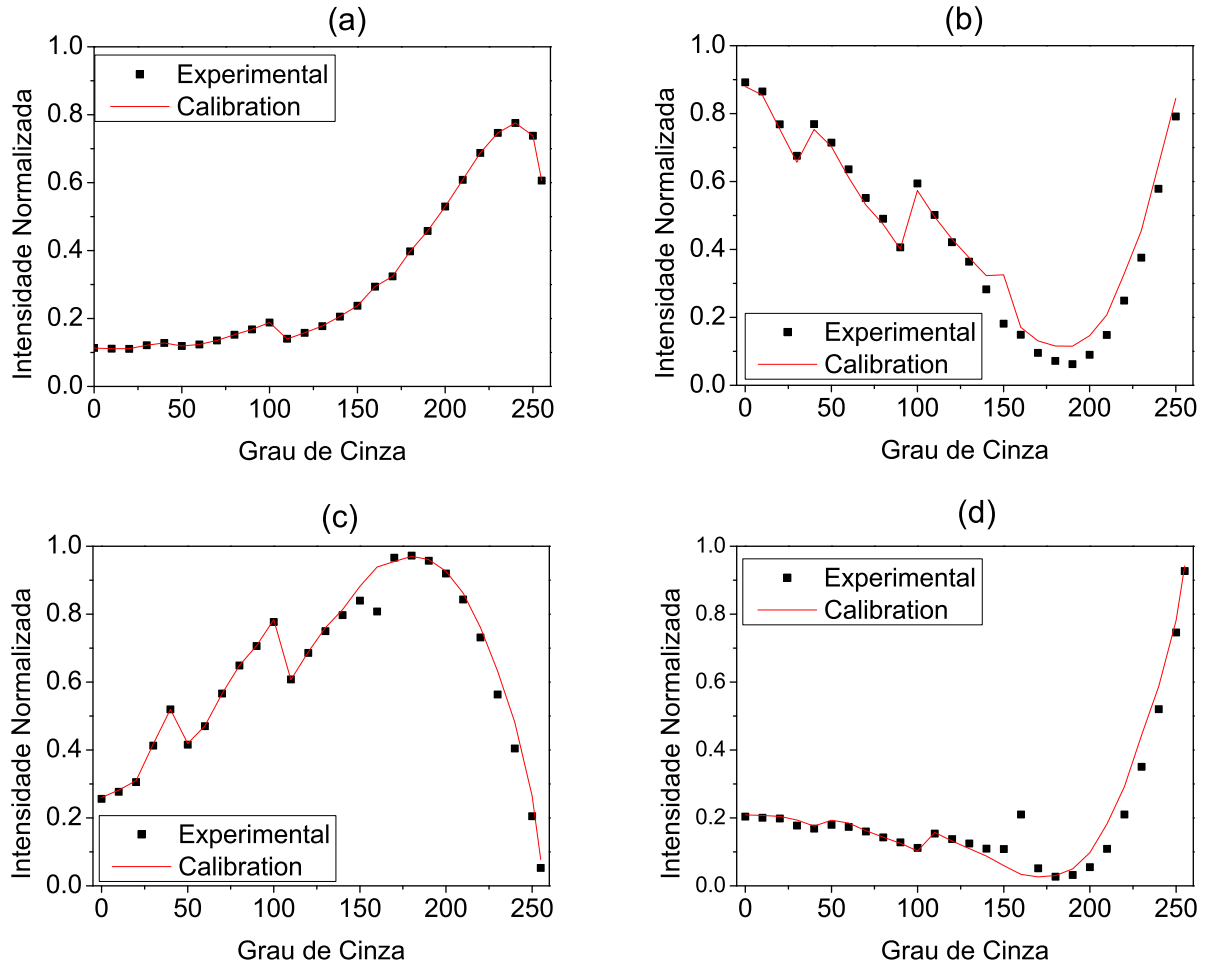


FIGURA 2.6: Comparação da modulação da amplitude medida com os valores calculados pela calibração para as seguintes polarizações de entrada e saída: (a) $P_{in} = 0^\circ$ e $P_{out} = 0^\circ$ (b) $P_{in} = 90^\circ$ e $P_{out} = 30^\circ$, (c) $P_{in} = 0^\circ$ e $P_{out} = 45^\circ$, e (d) $P_{in} = 45^\circ$ e $P_{out} = 90^\circ$.

2.3.3 Calibração do Modulador de Fase Usando o Interferômetro de Sagnac

SLMs que modulam somente fase são mais fáceis de serem calibrados usando um interferômetro, pois já se obtém a calibração em um único conjunto de medidas. No caso do nosso SLM da Hamamatsu que somente modula a componente horizontal de um feixe, nós usamos um interferômetro de Sagnac [167, 168] com uma placa $\lambda/2$ dentro, como mostrado na Figura 2.7. Todas as medidas foram realizadas com o feixe de fótons gêmeos, sendo que um passa pelo Sagnac e o outro é usado como “trigger”. Em nosso sistema, o feixe chega no Sagnac com polarização vertical e é dividido no divisor de feixe (BS - *beam splitter*). O feixe transmitido chega no SLM com polarização vertical, e é refletido como se o SLM fosse um espelho, ou seja, não há acréscimo de fase dependente do grau de cinza. Já o feixe refletido pelo BS passa por uma placa $\lambda/2$ que gira sua polarização para horizontal antes de incidir no SLM, fazendo com que sofra a modulação. Como o feixe transmitido também passa pela placa de onda, os dois feixes saem do Sagnac com polarização horizontal interferindo com uma diferença de fase extra dada pelo SLM. Nós usamos o Sagnac triangular ao invés do quadrado, mais comumente usado, pois o feixe a ser modulado tem que ter ângulo de incidência menor que 10° em relação a normal da tela do SLM e, com essa geometria, facilita montá-lo com essa restrição.

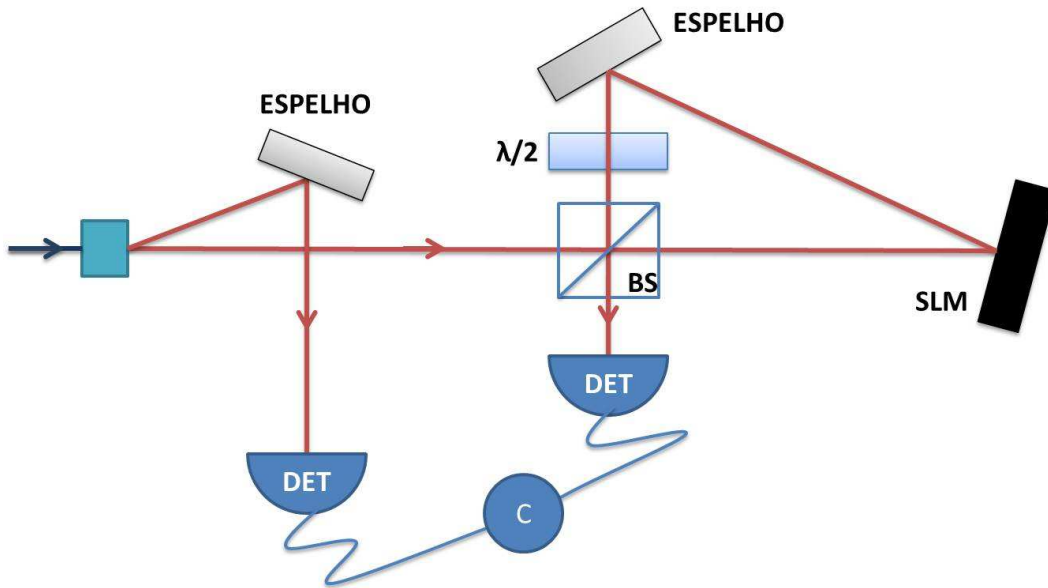


FIGURA 2.7: Montagem experimental que foi usada para fazer a calibração do SLM de fase usando o interferômetro de Sagnac. Todas as medidas foram feitas com os fótons gêmeos, com um passando pelo Sagnac e o outro sendo usado como “trigger”.

A Figura 2.8 mostra a medida da intensidade quando variamos o grau de cinza e a associação entre o grau de cinza e a fase dada, chegando no máximo a 320° para o comprimento de onda $\lambda = 710 \text{ nm}$.

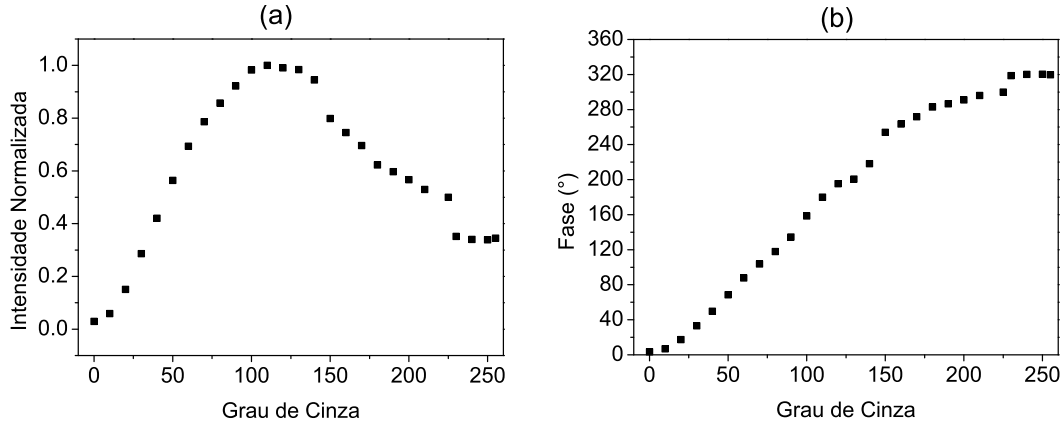


FIGURA 2.8: Resultados da calibração do SLM de fase da Hamamatsu usando o interferômetro de Sagnac, em que a figura (a) mostra a intensidade normalizada medida pelo grau de cinza e a figura (b) mostra a relação entre a variação de fase medida e o grau de cinza.

2.3.4 Usando o SLM Junto com Fendas Múltiplas

Uma parte importante no nosso uso dos SLMs é modular cada abertura da fenda múltipla com um grau de cinza distinto. Para conseguir esse tipo de modulação é necessário que a imagem da fenda múltipla seja projetada na tela do SLM e, então encontrar os pixels relacionados a cada abertura. A imagem pode ser feita de duas formas: colocando o plano da tela muito próximo ao plano da fenda múltipla (Figura 2.9(a)); ou projetando a imagem da fenda múltipla no SLM com auxílio de uma lente (Figura 2.10(a) ou Figura 2.11(a)). Para conseguir uma montagem experimental com dois SLMs nós usamos o SLM da Holoeye na primeira configuração e o SLM da Hamamatsu na segunda. Esse tipo de uso do SLM independe da forma que as imagens são feitas no SLM e somente gera mapas diagonais

$$U_{slm} = \sum_{\ell=-\ell_D}^{\ell_D} A_{\ell} e^{i\phi_{\ell}} |\ell\rangle \langle \ell|, \quad (2.50)$$

onde A_{ℓ} é a modulação de amplitude e ϕ_{ℓ} é a modulação de fase dada pelo SLM ao estado de fenda $|\ell\rangle$. No caso do SLM que modula somente fase $A_{\ell} = A_m, \forall \ell, m$ e o que só modula amplitude $\phi_{\ell} = \phi_m, \forall \ell, m$.

Para identificar os pixels do SLM da Holoeye nós dividimos o SLM em duas regiões com graus de cinza distintos: uma em que o feixe passa sem sofrer modulação de amplitude ($A_{\ell} = 1$) e outra em que o feixe é totalmente atenuado ($A_{\ell} \approx 0$). Usando o programa de controle do SLM conseguimos movimentar a interface e fizemos medidas das contagens simples em função dessa posição (Figura 2.9(b)). A medida é feita inicialmente com todas as aberturas da fenda múltipla em uma mesma região e com o detector sem filtro espacial. Modificando a posição da imagem na tela do SLM podemos ver pelas quedas de intensidade quando a interface passa por uma abertura. Com essa medida conseguimos saber qual região do SLM está associada às aberturas da fenda múltipla.

No caso do SLM da Hamamatsu a caracterização descrita anteriormente não funciona, pois esse SLM só modula fase, sendo necessário usar interferometria. Nós usamos duas configurações

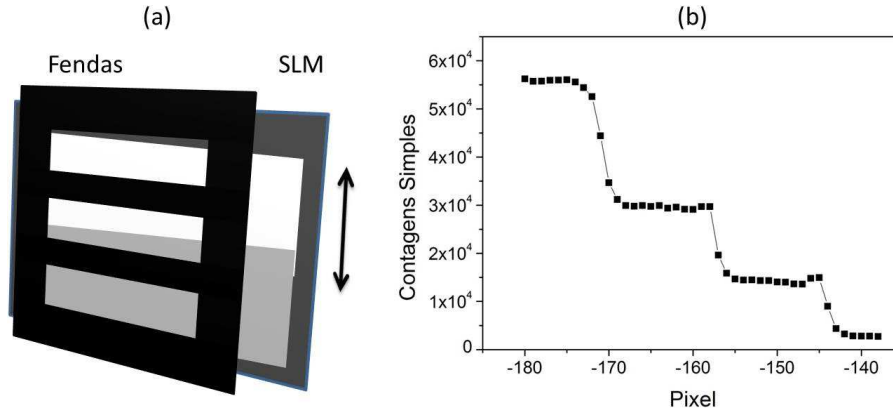


FIGURA 2.9: Esquema experimental (a) e resultado (b) de como encontrar os pixels no SLM da Holoeye. (a) Esquema usado para encontrar os pixels referentes as aberturas da fenda múltipla quando o SLM está próximo. (b) Medida da contagem simples em função da posição da interface entre duas regiões: uma que não modula o feixe e a outra que atenua o feixe totalmente. A medida é feita sem usar nenhuma fenda na frente do detector. A fenda múltipla tem abertura de $2a = 100\mu m$ e distância entre os centros de duas aberturas vizinhas de $d = 250\mu m$. O sinal negativo na posição dos pixels corresponde às aberturas estarem na parte inferior da tela do SLM, já que o pixel zero está no centro.

distintas de lente para fazer a imagem da fenda múltipla no plano da tela do SLM: uma lente esférica na configuração $2f - 2f$ (Figura 2.10 (a)); e uma lente cilíndrica, com foco curto, a uma distância das fendas múltiplas igual ao seu foco (Figura 2.11(a)).

No caso do uso da lente esférica, o SLM foi dividido em duas regiões, uma com fase zero e a outra com fase π . Para encontrar a correspondência espacial entre as regiões de abertura projetadas no SLM e os pixels da tela de cristal líquido, detecta-se os fótons gêmeos em coincidência em detectores com fendas de largura de $100\mu m$ posicionados no máximo de coincidência do padrão de interferência condicional. Quando mudamos o pixel da interface, se a imagem das duas aberturas estão em uma mesma região, continuamos detectando um máximo em coincidência; porém, quando estamos com cada abertura em regiões de graus de cinza distintos, vemos um mínimo na taxa de coincidência, como mostrado na medida da Figura 2.10(b), achando assim, os pixels referentes a parte escura entre as aberturas.

Na montagem experimental na qual usamos uma lente cilíndrica para projetar a imagem das aberturas no plano do SLM (vide figura 2.11(a)), foi necessário usar um feixe de laser de He-Ne auxiliar no caminho dos fótons gêmeos para conseguir relacionar a imagem das aberturas com a posição dos pixels. O feixe de He-Ne propaga por todos os componentes e incide em um anteparo que nos permite visualizar a imagem da fenda tripla. Nessa montagem experimental temos que a distância entre o SLM e a fenda múltipla é muito maior que o foco da lente cilíndrica, então pode-se considerar que o plano onde o SLM se encontra já está no campo distante [153]. Como pode ser visto na Figura 2.11(b), quando dividimos o SLM em duas regiões aparece uma pequena linha na imagem que nos permite saber qual é a posição do pixel da interface correspondente a determinado ponto das aberturas. Modificando o pixel referente à interface, conseguimos encontrar as regiões que estão relacionadas às aberturas da fenda múltipla.

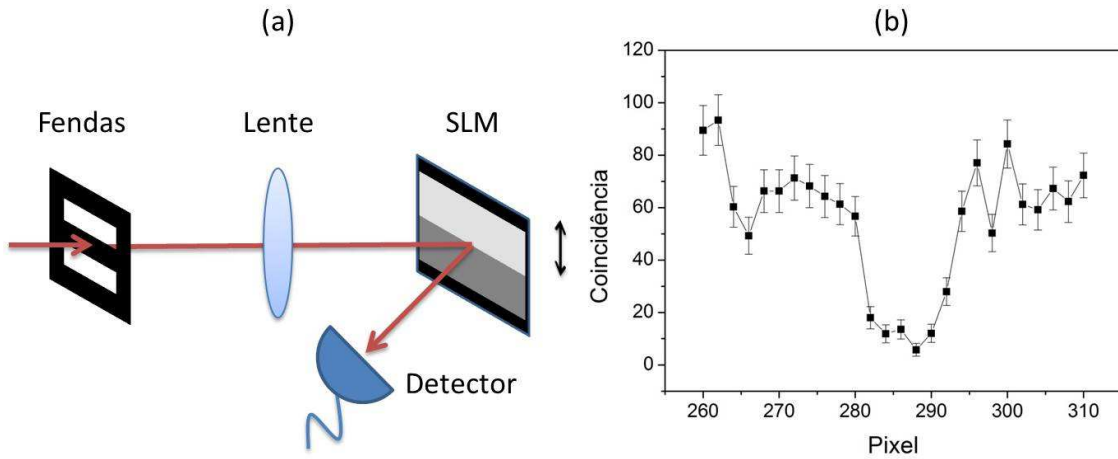


FIGURA 2.10: Esquema experimental (a) e resultado (b) de como encontrar os pixels no SLM de fase da Hamamatsu. (a) Foram usadas para fazer a medida uma fenda dupla ($2a = 100\mu m$ e $d = 250\mu m$) e uma lente esférica com foco de $f = 125\text{ mm}$ posicionada de tal forma que cria a imagem da fenda múltipla no plano da tela do SLM. (b) Medida da contagem em coincidência em função da posição da interface, em que uma região não coloca fase extra e a outra coloca uma fase de π . A medida é feita com os dois fótons gêmeos passando pela fenda e os dois detectores centrados no padrão de interferência, tendo um máximo de coincidência. O gráfico mostra uma região de mínimo quando variamos a posição da interface, que representa uma posição que cada fenda sofre modulação distinta.

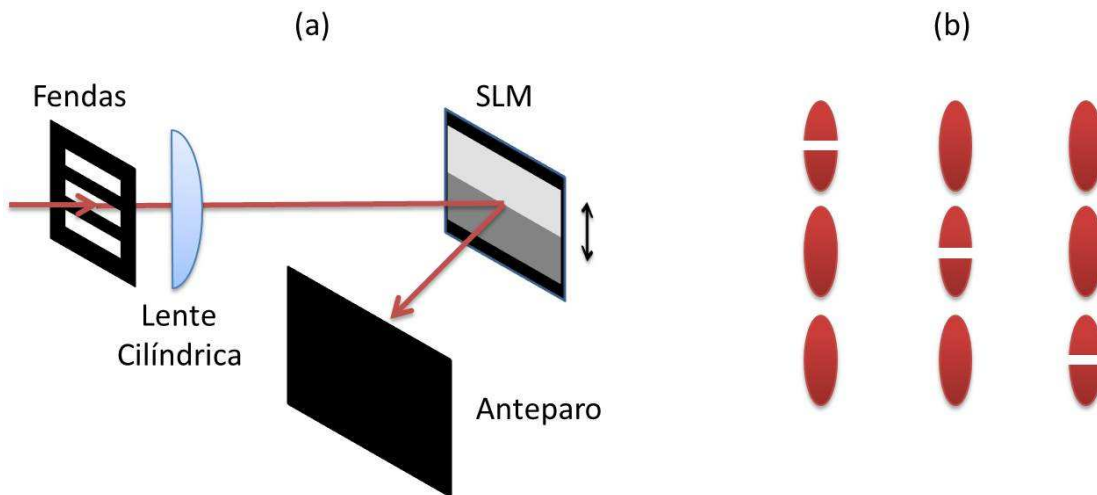


FIGURA 2.11: Esquema experimental (a) e resultado (b) de como encontrar a posição dos pixels no SLM de fase da Hamamatsu. (a) Foi usado para fazer a medida uma fenda tripla, um feixe de He-Ne alinhado em relação ao caminho dos fótons gêmeos e uma lente cilíndrica de comprimento focal f posicionada de tal forma que cria a imagem da fenda múltipla no infinito. (b) Representação esquemática do feixe de He-Ne após refletir no SLM mostrando a interface em diferentes posições, o que nos permitiu encontrar os pixels entre as aberturas.

CAPÍTULO 3

ALGORITMO DE DEUTSCH MÍNIMO

Demonstramos experimentalmente uma implementação do algoritmo de Deutsch mínimo [43]¹, usando a fonte de fótons gêmeos descrito na seção 2.2. Nessa versão, a redundância é removida da forma mais famosa do algoritmo. A versão original envolve a manipulação de dois qubits enquanto na versão mínima somente um qubit é necessário. O qubit é codificado nos modos espaciais transversais dos fótons da SPDC, com o auxílio das fendas duplas, onde o fóton idler é usado como “trigger” da nossa fonte de fóton único. O SLM é programado para gerar as funções necessárias para a realização da versão mínima do algoritmo, mostrando assim que o SLM pode ser usado para implementações de protocolos quânticos.

3.1 INTRODUÇÃO

A Computação quântica [1] emergiu ao longo das últimas décadas como uma ferramenta potencialmente poderosa para resolver problemas mais eficiente que a computação clássica. Um exemplo simples seria determinar se uma moeda é verdadeira (cara de um lado e coroa do outro) ou se é falsa (cara ou coroa dos dois lados). Essa é uma versão do problema de Deutsch [9]. Explorando a superposição dos estados quânticos, Deutsch mostrou ser possível determinar qual o tipo de moeda usando somente uma verificação, enquanto classicamente a solução requer duas verificações, ou seja, observar cada lado da moeda. Embora o algoritmo original proposto por Deutsch [9] envolva a manipulação de dois qubits, é possível a manipulação de apenas um qubit em uma versão mínima do algoritmo [170]. Neste sentido, o algoritmo de Deutsch mínimo pode ser considerada como o mais básico e simples protocolo quântico. Tanto o algoritmo de Deutsch quanto sua generalização [171] já foram implementados usando fótons [172, 173] e sua versão mínima usando pontos quânticos [174].

Neste capítulo nós reportamos a implementação experimental do algoritmo mínimo de Deutsch

¹Esse trabalho já foi tema da dissertação de mestrado da aluna Mariana Barros [169], porém nessa dissertação é apresentada a proposta experimental e apenas uma medida preliminar, além de não conter as discussões referentes a uma realização do algoritmo como descrita na seção 3.5.

em nosso sistema óptico. O SLM é usado para emular a “moeda falsa” e a “moeda verdadeira” em nossa montagem experimental, pode ser entendida como prova de princípio do algoritmo, pois são realizadas várias consultas ao oráculo. Mostraremos que a probabilidade de se obter uma resposta sobre qual o tipo de moeda com apenas uma consulta é maior que 50%, valor da probabilidade quando se utiliza o algoritmo clássico.

3.2 ALGORITMO DE DEUTSCH MÍNIMO

O Paralelismo quântico permite que um sistema quântico possa avaliar uma função $f(x)$ para diferentes valores de x simultaneamente. O algoritmo de Deutsch é um bom exemplo de como o paralelismo quântico pode responder uma questão clássica, pois a solução do problema pode ser obtida usando uma única avaliação.

Considere um *oráculo* que pode responder a questão de um bit com um bit de resposta usando uma função determinística $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$. A função é dita balanceada se $f(0) \neq f(1)$; caso contrário é dita constante, $f(0) = f(1)$. O problema de Deutsch consiste em determinar se uma função desconhecida é balanceada ou constante. Para responder à questão usando o algoritmo clássico é necessário consultar o oráculo duas vezes: perguntar o valor da função f em 0 e em 1. Por outro lado, o algoritmo de Deutsch requer somente uma avaliação, usando o paralelismo quântico. Note que esse problema é análogo ao problema de descobrir se a moeda é verdadeira ou falsa.

Na versão mínima do algoritmo de Deutsch [170], o oráculo é codificado por uma operação unitária U_f que é aplicada em um estado de entrada específico. Na base computacional temos que o estado de saída é dado por:

$$U_f |x\rangle = (-1)^{f(x)} |x\rangle, \quad (3.1)$$

onde $x = 0, 1$. Se o estado de superposição $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ é usado como entrada, as duas questões são respondidas ao mesmo tempo com o estado de saída sendo:

$$|\psi\rangle = U_f \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{(-1)^{f(0)} |0\rangle + (-1)^{f(1)} |1\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (3.2)$$

Desconsiderando as fases globais, tem-se

$$|\psi\rangle = \begin{cases} |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), & \text{se } f(0) = f(1), \\ |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle), & \text{se } f(0) \neq f(1). \end{cases} \quad (3.3)$$

Note que o primeiro estado de resposta é ortogonal ao segundo, então, fazendo as medidas projetivas na base $[|+\rangle, |-\rangle]$ podemos encontrar se a função é balanceada ($|-\rangle$) ou constante ($|+\rangle$). A operação unitária é implementada pelo oráculo. Quatro possibilidades de mapas U_{ij}

são possíveis, onde $i = f(0)$ e $j = f(1)$:

$$\begin{aligned}
U_{00} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & f(0) = f(1) = 0, \\
U_{01} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & f(0) = 0 \neq f(1) = 1, \\
U_{10} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & f(0) = 1 \neq f(1) = 0, \\
U_{11} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & f(0) = f(1) = 1.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Como será mostrado na seção posterior, o SLM é usado para criar os mapas quânticos necessários para o algoritmo de Deutsch e os fótons gêmeos gerados pela SPDC são usados para gerar uma fonte de fóton único anunciado.

3.3 DESCRIÇÃO EXPERIMENTAL

A montagem experimental é mostrada na Figura 3.1. Um laser de He-Cd com potência de 50 mW operando em $\lambda_p = 325 \text{ nm}$ é usado como feixe de bombeamento em um cristal de iodado de lítio (tipo I) com 2mm de espessura gerando pares de fótons degenerados não colinear. Os fótons signal e idler ($\lambda_i = \lambda_s = 650 \text{ nm}$) passam primeiramente por uma placa de meia onda $\lambda/2$ e depois por uma fenda dupla a uma distância de 250 mm do cristal. O plano da fenda dupla (plano $x - y$) é alinhado perpendicularmente à direção do feixe de bombeamento da conversão paramétrica (direção z), com a menor dimensão da abertura paralela à direção x . As aberturas são $2a = 100 \text{ } \mu m$ de largura e tem a separação de $2d = 250 \text{ } \mu m$. A lente $L_1 = 300 \text{ mm}$ é usada para gerar um estado de fótons gêmeos emaranhados no caminho transversal [16, 19, 34, 152]. O fóton idler é utilizado na preparação do estado e anúncio² do fóton signal, que será utilizado no algoritmo.

Os estados de caminho transversal serão codificados da seguinte maneira: fótons que passam pela fenda inferior estarão no estado $|0\rangle$ e no estado $|1\rangle$, quando passarem pela fenda superior. O SLM (Holoeye) depois da fenda dupla, juntamente com a placa $\lambda/2$ e o polarizador P_s funcionam como o oráculo. O mapa referente à função do oráculo é constante (U_{00} ou U_{11}) se a fase dada pelo SLM é igual para duas fendas ou balanceada (U_{01} ou U_{10}) se a diferença de fase dada pelo SLM entre as fendas é π . Quando o feixe de bombeamento é focalizado no plano das fendas duplas, geramos o estado de Bell $|\psi^+\rangle = 1/\sqrt{2}(|01\rangle + |10\rangle)$ [34, 152]. Um espelho dicróico (não mostrado na Figura 3.1) é colocado logo após o cristal para remover o feixe de bombeamento do sistema e transmitir os fótons signal e idler. O fóton idler, que será usado para anunciar o fóton signal,

²Anúnciação é uma tradução literal do inglês “heralding”. Essa é uma estratégia utilizada para produzir fontes de um fóton à partir da geração de pares de fótons. Ao se detectar um fóton idler (anúncio) preparamos o estado do outro fóton (signal) condicionado à detecção do seu par.

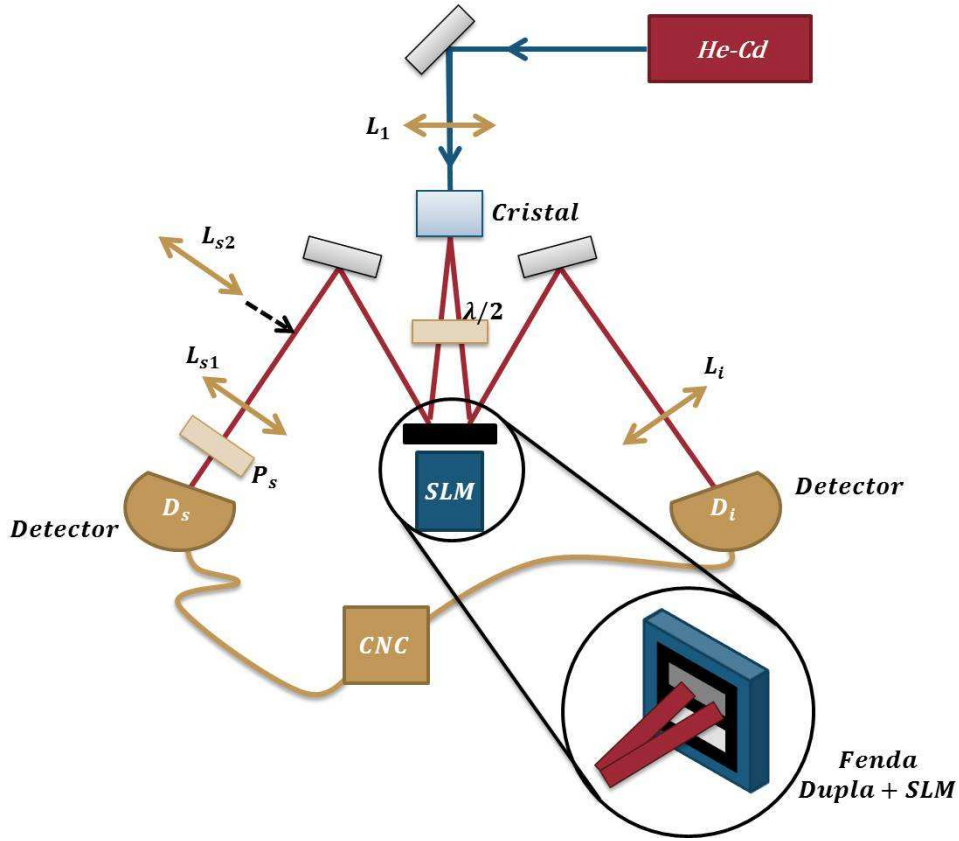


FIGURA 3.1: Esquema experimental para implementação do algoritmo de Deutsch mínimo. A lente L_1 focaliza o feixe de bombeamento no plano da fenda dupla; as lentes L_{s1} e L_i são usadas para se detectar os fótons sinal e idler no plano de Fourier, enquanto a lente L_{s2} é usada para se projetar a imagem da fenda dupla no detector. A placa de meia onda é colocada logo após o cristal e o polarizador P_s é posicionado logo antes do detector. CNC corresponde a um sistema eletrônico para detecção de fótons em coincidência e o SLM é posicionado logo atrás das fendas duplas.

também passa pela fenda dupla e é refletido pelo SLM. Porém, por não ter um polarizador em seu caminho, não sofre nenhuma modulação de fase ou amplitude do SLM. A Figura 3.2 mostra que conseguimos experimentalmente colocar uma diferença de fase entre as duas fendas sem modificar a razão entre as transmissões de cada uma delas, ou seja, implementar as matrizes 3.4. Como usamos o SLM da Holoeye neste experimento, usamos a calibração comentada na subseção 2.3.2 para escolher o conjunto de parâmetros adequados para a produção de acréscimos de fase sem atenuação.

Os detectores utilizados são diodos de avalanche contidos dentro de um módulo de detecção de fótons únicos, SPCM-14, fabricado pela Pensum-Elmer. Fendas simples de $100 \mu m$ de largura são colocadas em frente aos detectores para aumentar a resolução espacial das medidas necessárias do algoritmo de Deutsch (para ver com mais detalhe como são os operadores de medida implementados no laboratório veja o Apêndice B). A menor dimensão da fenda simples é paralela a direção x. Logo após a fenda simples, uma lente objetiva de microscópio, de comprimento focal de $2 mm$ focaliza os fótons no diodo avalanche. Filtros de interferência, centrados em $650 nm$ com

largura de banda de 10 nm, são acoplados ao detector (não mostrados na Figura 3.1). Os pulsos dos detectores são mandados para um contador de fótons e são detectados em coincidências com uma resolução de tempo de 5 ns. Todo o conjunto, fenda simples, filtro de interferência, lente objetiva e módulo de detecção de fótons únicos, foi montado sobre um deslocador x-y com resolução espacial de 10 μm .

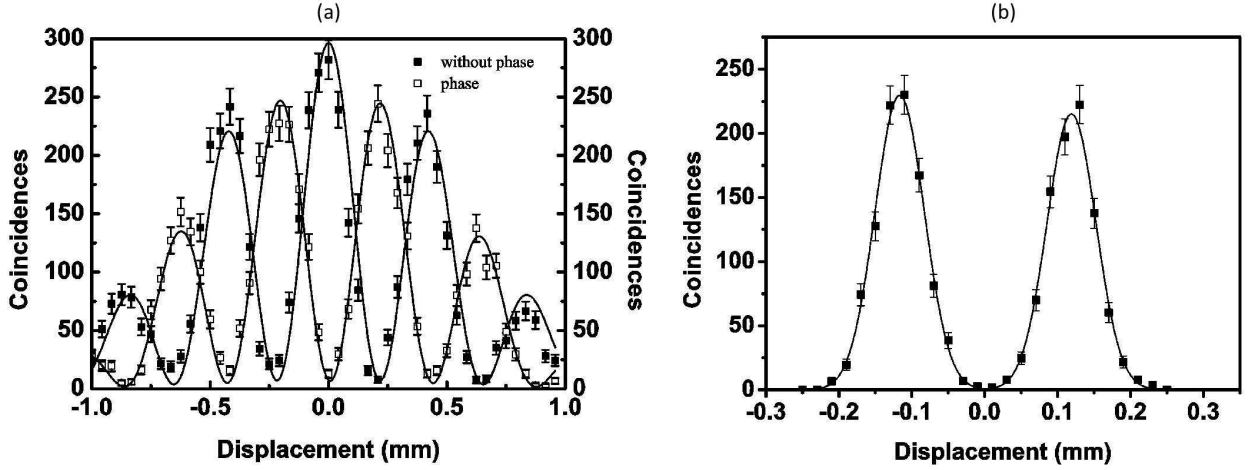


FIGURA 3.2: (a) Padrão de interferência de fenda dupla. Os quadrados fechados mostram o padrão de interferência quando o SLM tem o mesmo grau de cinza nas duas aberturas da fenda múltipla que definem os estados de caminho do fóton signal. Os quadrados abertos mostram o padrão de interferência quando é colocado um grau de cinza diferente em cada abertura, gerando uma fase relativa de π entre os estados de caminho do fóton. Nos dois padrões, o fóton idler não é modulado pelo SLM. O detector do idler é fixado em $x_i = 0$, enquanto o detector do signal é varrido em passos de $40\mu m$ e com tempo de aquisição de 60 segundos. As lentes L_i e L_{s1} foram usadas. (b) Imagem da fenda dupla, medida em coincidência. Esse resultado é obtido com o detector idler fixado em $x_i = 0$, enquanto o detector signal é varrido. Os mesmos graus de cinza utilizados para a produção do padrão de interferência com quadrados abertos são colocados no SLM. O tempo de aquisição é de 20 segundos e as lentes L_i (a mesma que é usada nos padrões de interferência) e L_{s2} são usadas. O detector signal é colocado no plano da imagem, enquanto o detector idler está no plano de Fourier.

3.4 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Para implementarmos o algoritmo de Deutsch é necessário implementar os mapas U_{ij} ($i, j \in \{0, 1\}$) da equação 3.4. Como mostrado em [166] e na subseção 2.3.2, o SLM com escalas de cinza adequadas e os polarizadores de entrada (substituídos por placa de meia onda nesta montagem) e saída com ângulos de rotação também adequados, nos permitem fazer transformações onde $A_0 = A_1$ e $\phi_k = 0, \pi$ (vide equação 2.50). A tela de cristal líquido do SLM é dividida em duas regiões, cada uma adiciona uma fase nos caminhos do fóton signal ($|0\rangle$ e $|1\rangle$) sem atenuação relativa (como mostrado na Figura 3.2).

Na Figura 3.2(a) são mostrados dois padrões de interferência de fenda dupla, medindo as contagens em coincidência. Ambos são obtidos movimentando o detector do fóton signal com

passos de $40 \mu m$, enquanto o detector do idler está fixo na posição correspondente ao máximo do padrão de interferência ($x_i = 0$). A curva com quadrados pretos representa a medida em que foi usado o mesmo grau de cinza no SLM para as duas aberturas, já no padrão dos quadrados brancos, foi inserida uma fase relativa apropriada ao experimento entre os dois caminhos. Ajustando a curva do padrão de interferência, nós medimos uma fase relativa de $\Delta\phi = 3.25 \pm 0.03 \text{ rad}$ entre os dois padrões, mostrando que a diferença de fase imposta pelo SLM é de aproximadamente $\pi \text{ rad}$. Para obter o padrão de interferência foram usados as lentes L_i e L_{s1} em nossa montagem experimental (Figura 3.1).

Na Figura 3.2(b) é mostrada a imagem de fenda dupla obtida através da detecção em co incidência dos fótons. O resultado é obtido usando a lente L_{s2} no sinal e L_i no idler. Em nossa montagem experimental, o pico em x_s negativo é associado ao estado de caminho do fóton sinal, $|0\rangle$, e, em x_s positivo, ao estado $|1\rangle$. Novamente o detector idler está parado em $x_i = 0$, e o detector signal é varrido com passos de $20 \mu m$. A medida da imagem foi realizada acrescentando a diferença de fase $\Delta\phi \approx \pi$ entre as aberturas, como feita na medida de interferência com quadrados abertos da Figura 3.2(a). Nessa configuração o detector de signal está no plano da imagem, enquanto o detector de idler está no plano de Fourier. Podemos inferir que os graus de cinza usados para obter a fase de π não modificam a amplitude dos estados de caminho calculando a área embaixo de cada pico, que correspondem a cada abertura. Nas curvas mostradas, temos as áreas de $(77 \pm 2) \text{ contagens.mm}$ para o estado $|0\rangle$ e $(72 \pm 2) \text{ contagens.mm}$ para o estado $|1\rangle$. Podemos concluir que os graus de cinza usados para fazer as medidas da curva com quadrados abertos da Figura 3.2(a) e a Figura 3.2(b) implementam o mapa U_{01} . Para implementar todos os mapas U_{ij} , um grau de cinza específico é escolhido para cada fenda, correspondendo ao valor 1 o grau de cinza que coloca uma fase extra de π em uma abertura e 0 ao que não coloca fase extra.

Para implementar o algoritmo de Deutsch nós precisamos criar o estado $|+\rangle$ para o fóton signal e posteriormente medir na base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$. Detectando no plano de Fourier com os detectores posicionados na origem, nós somos capazes de fazer uma medida muito próxima do projetor $|+\rangle\langle+|$ [34, 175] (veja Apêndice B). Usando a SPDC, fendas duplas e focalizando o feixe de bombeamento no plano das fendas nós preparamos o estado de Bell $|\psi_{s,i}\rangle = |\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_s 1_i\rangle + |1_s 0_i\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+_s +_i\rangle - |-_s -_i\rangle)$ [16, 19, 152]. Se o fóton idler é detectado usando o projetor $|+\rangle\langle+|$, nós projetamos o signal no estado que precisamos. Então, em nosso experimento, a pergunta para o oráculo é realizada quando o fóton idler é detectado em $x_i = 0$, pois o qubit lógico, o signal, é então preparado no estado apropriado $|+\rangle$. A resposta do oráculo é proveniente da detecção ou não do fóton signal. Note, entretanto, que a preparação de nosso qubit lógico é feita após o mapa U_{ij} ser aplicado no qubit; porém, como estes operadores comutam, isso não afeta a estatística final.

O resultado experimental de todas as possibilidades de mapas são mostrados na Tabela 3.1. As medidas dos fótons em coincidência foram obtidas com os detectores do signal e do idler fixos na posição $x_s = x_i = 0$ (no centro do padrão de interferência), no plano de Fourier. As medidas foram feitas em 1000 s. Os resultados mostram claramente a diferença entre as funções balanceadas e constantes (caminhos do fóton signal com diferença de fase π ou com fases iguais).

TABELA 3.1: Resultados experimentais de todas as possibilidades de mapas.

$f(0)$	$f(1)$	Coincidence
0	0	5218 ± 72
0	1	450 ± 21
1	0	427 ± 20
1	1	5399 ± 73

3.5 DISCUSSÃO

Na seção anterior nós apresentamos os resultados do algoritmo de Deutsch para várias realizações, mostradas na tabela 3.1, cuja perfeita discriminação entre as funções balanceadas e constantes (alta e baixa contagem) foi possível. Porém, o algoritmo de Deutsch referente à otimização do problema de Deutsch com menor número de perguntas feitas ao oráculo não é mostrado nesses resultados. Será discutido nessa seção a realização única do protocolo em nossa montagem experimental.

Consideraremos efeitos individuais em nossa análise devido, entre outras razões, ao fato de que uma detecção de fóton em uma posição x corresponde à projeção no estado $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\phi(x)}|1\rangle)$, onde a função ϕx depende da posição do detector e de outros fatores [34, 152, 175]. Em um detector infinitesimal posicionado em $x = 0$, o projetor é $|+\rangle\langle +|$, porém o detector finito com abertura $2b$ (que é a largura da fenda posicionada logo à frente do detector) mede o operador positivo que é a soma de todos os projetores de $x = -b$ até $x = b$ (ver apêndice B.3). Além disso, a não detecção do fóton não necessariamente corresponde à projeção no estado $|-\rangle$. Não obstante, nós podemos usar o resultado mostrado na Figura 3.2(a) para prever a probabilidade de detecção (e, portanto, também quando não há) computando a área sobre as curvas (normalizadas) correspondentes à largura da abertura do detector.

Pelos gráficos, e também pela tabela 3.1, vemos que as chances de detecção da função constante são bem maiores que as chances da função balanceada em torno de $x_s = 0$, então realmente uma única realização nos dá alguma informação sobre a função. Porém, na prática, nenhum dos eventos nos diz definitivamente qual é o tipo da função. Uma detecção também pode ser associada a uma função balanceada, porém mais raramente. Um evento de não detecção, por outro lado, pode ser relacionado a três distintas situações: a função é balanceada, como nós queremos, e essa tem uma probabilidade de detecção muito baixa na origem; a função é constante, mas o detector falhou; ou a função é constante, mas o fóton foi em um ponto no plano de Fourier fora da abertura do detector. Pelo motivo de termos a terceira situação, mesmo para uma montagem experimental perfeita, a não detecção de um fóton também tem a possibilidade de corresponder a uma função constante.

Para entender melhor a vantagem quântica dessa implementação, nós podemos considerar um cenário nas quais as funções são dadas, com a mesma probabilidade⁸, e nós devemos apostar em contante ou balanceada com somente uma consulta ao oráculo. Classicamente, não podemos fazer melhor que um chute de 50% de probabilidade de acerto, porém, em nosso experimento nós conseguimos. De fato, pelas discussões anteriores, já pode ser visto que a detecção está mais

associada à função constante e a não detecção à função balanceada.

Para ver de maneira quantitativa, considere S um evento onde o tipo da função é apostada corretamente. Nós podemos escrever a probabilidade para esse evento como:

$$P(S) = \sum_{i,j=0,1} P(f = ij)P(S|f = ij), \quad (3.5)$$

onde $P(f = ij) = 1/4$ é a probabilidade de ter as funções $f(0) = i$, $f(1) = j$ enquanto $P(S|f = ij)$ é a probabilidade de sucesso dada a função. Nós denotamos p_{ij} a probabilidade para o fóton acertar a plano de Fourier na abertura do detector, dada a função implementada $f = ij$. Temos que p_{ij} é dado facilmente pela área normalizada da curva da Figura 3.2(a) sobre o intervalo que o detector está fixado.

Agora, se a função for constante 00, nós obtemos sucesso em nossa aposta quando o fóton é detectado, acontecendo com probabilidade ηp_{00} , onde η é a eficiência do detector. Similarmente, para função $f = 11$, nós temos $P(S|f = 11) = \eta p_{11}$. Para a função 01, por outro lado, nós acertamos a aposta se não há detecção com probabilidade $(1 - p_{01}) + (1 - \eta)p_{01}$. O primeiro termo da soma corresponde ao caso que o fóton acerta fora da área do detector e o segundo ao caso quando o fóton acerta a área do detector, porém não é detectado. Para o caso da função $f = 10$ temos $P(S|f = 10) = (1 - p_{10}) + (1 - \eta)p_{10}$. Uma vez que o experimento é projetado de forma tal que $p_{00} \approx p_{11} \equiv p_c$ e $p_{01} \approx p_{10} \equiv p_b$, temos finalmente

$$P(S) = \frac{1}{2}[1 + \eta(p_c - p_b)]. \quad (3.6)$$

Independente da área do detector, a probabilidade é $1/2$ para $\eta = 0$, pois não obtemos nenhuma informação sobre a função. O sucesso aumenta linearmente em função de η e, para o tamanho do detector usado ($100\mu m$), chega ao máximo de sucesso de 0,55.

Nós podemos analisar como a chance de sucesso é afetada pelo tamanho do detector. A Figura 3.3 mostra a probabilidade de sucesso quando o tamanho do detector é mudado (nessa análise o detector é considerado perfeito). O melhor tamanho do detector é de $260\mu m$ que corresponde a probabilidade de sucesso de 0,58. Para alguns valores do tamanho do detector, a chance de detectar um fóton de função balanceada é maior que o da função constante, fazendo com que se chegue a conclusões erradas da função, diminuindo para baixo de $1/2$ a probabilidade de sucesso.

Nós notamos, também, que em nosso experimento nós temos uma assimetria entre a confiança de aposta entre as funções balanceadas e constantes: para detectores pequenos, a detecção implica em uma função constante com grande probabilidade, porém não detecção implica uma função

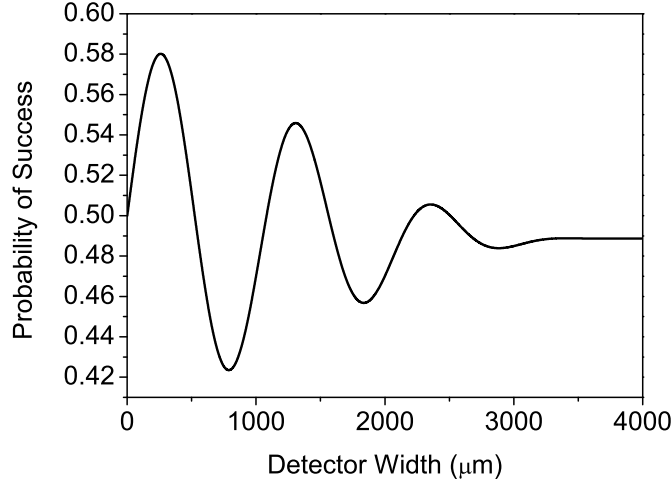


FIGURA 3.3: Probabilidade de sucesso quando o tamanho do detector do fóton signal é variado (a espessura da fenda simples posta na frente do detector é variada). Os detectores dos fótons são fixados nas posições $x_i = x_s = 0$. Consideramos que os detectores são perfeitos e consideramos a média de probabilidade dos dois eventos, detecção e não detecção. É assumido, também, que sempre que o fóton é detectado (não detectado) a aposta é feita na função constante (balanceada). O tamanho ótimo do detector é de $260\mu m$, com probabilidade de sucesso de 0,58.

balanceada com moderada probabilidade. De fato, pela fórmula de Bayes³, nós podemos calcular:

$$P(f = constante|deteccao) = \frac{p_c}{p_c + p_b}, \quad (3.7)$$

$$P(f = balanceada|naodeteccao) = \frac{1 - \eta p_b}{2 - \eta(p_c + p_b)}. \quad (3.8)$$

Para um detector muito pequeno temos $p_b \ll p_c \ll 1$ então $P(f = constante|deteccao) \approx 1$ enquanto $P(f = balanceada|naodeteccao) \approx 1/2$. Isso ocorre pelo posicionamento do detector. Caso ele estivesse centrado na posição do plano de Fourier correspondente a projeção $|-\rangle \langle -|$ a simetria se inverteria.

Caso uma CCD fosse usada ao invés de nosso detector, teríamos a mesma confiança para apostar nas duas funções, aumentando a chance de acerto. Porém, mesmo usando a CCD, ainda teria posições nas quais não se poderia inferir o tipo de função, como perto da posição que gera a projeção no estado $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$. Essa posição corresponde à $0,11mm$ nos padrões de interferência mostrados na Figura 3.2(a).

3.6 CONCLUSÃO

Nesse trabalho nós implementamos a versão do algoritmo de Deutsch mínimo para um qubit usando SPDC e preparando o estado do fóton signal de forma condicional através da detecção do fóton

³Fórmula de Bayes $P(A|B) = P(B|A)P(A)/P(B)$

idler. O SLM foi usado como oráculo implementando as 4 possíveis funções do qubit codificado usando uma fenda dupla. Além disso, nós discutimos a melhoria específica da implementação quântica em comparação com o análogo clássico. O uso do SLM abre possibilidades de implementação de algoritmos mais complexos. Um exemplo é modificar a fenda dupla para uma com oito aberturas [19], onde pode ser implementado o análogo mínimo do algoritmo de Deutsch-Jozsa para uma função de três bits $f : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$.

CAPÍTULO 4

CONCENTRAÇÃO ÓTIMA DE EMARANHAMENTO

Neste capítulo será discutido a implementação do protocolo de concentração ótima de emaranhamento para um sistema quântico composto de duas partes de d dimensões. Estados maximamente emaranhados são probabilisticamente obtidos aplicando medidas generalizadas em um estado conhecido, codificado em caminho dos fótons gêmeos, descrito na seção 2.2.3. Neste experimento foi usado para a implementação do protocolo o modulador da Holoeye, juntamente com a SPDC, para a preparação de um estado não maximamente emaranhado, e um modulador da Hamamatsu, substituindo um espelho em um interferômetro de Sagnac, montado no caminho dos fótons, para a implementação das operações necessárias para concentração.

4.1 INTRODUÇÃO

A maioria dos protocolos de informação quântica são baseados no uso de estados maximamente emaranhados (EME). Porém, na maioria das fontes de estados emaranhados, os EME não são produzidos, diminuindo a eficiência dos protocolos [1]. Então, para se ter estados maximamente emaranhados, a concentração de emaranhamento [51] de um estado parcialmente emaranhado (EPE) conhecido pode ser feito usando uma ou mais cópias do estado. No caso de uma cópia, a concentração de emaranhamento pode ser realizada usando o método Procrustiano¹ [51–55] por medição generalizada, cujos parâmetros dependem do EPE. Nesse caso, a transformação de um EPE em um EME tem uma probabilidade de sucesso máxima [176].

A concentração de emaranhamento já foi implementada para estados de qubits fotônicos emaranhados em polarização [177–179] e para dois qutrits fotônicos emaranhados em momento angular [180]. Neste trabalho mostraremos a implementação do protocolo para qudits espaciais emaranhados parcialmente em estados de caminho. Diferente do experimento do algoritmo de Deutsch descrito no capítulo anterior, usaremos dois moduladores: um para produzir os EPEs e

¹Na mitologia grega, Procrusto era um ferreiro desonesto e sádico que atacava fisicamente seus hóspedes, esticando-os ou cortando suas pernas, de forma a forçá-los a se ajustar ao tamanho de uma cama de ferro. Em geral, quando algo é Procrustiano, diferentes comprimentos, tamanhos ou propriedades são ajustados a um padrão arbitrário.

um segundo, juntamente com um interferômetro de Sagnac, para implementar a concentração de emaranhamento. Os momentos longitudinais dos fótons foram usados como sistema auxiliar para executar as medidas generalizadas.

4.2 PROTOCOLO DE CONCENTRAÇÃO DE EMARANHAMENTO

Seguindo a referência [181], o protocolo pode ser facilmente implementado para aumentar o emaranhamento do sistema operando somente em uma das partes. O método funciona quando o sistema é descrito por um estado puro previamente caracterizado. Considere um estado puro composto por dois qudits com dimensão D escrito usando a decomposição de Schmidt:

$$|\psi_{in}\rangle_{12} = \sum_{i=-\ell_D}^{\ell_D} \sqrt{\lambda_i} |i\rangle_1 | -i\rangle_2, \quad (4.1)$$

com $\ell_D = (D - 1)/2$, $\sum_i \lambda_i = 1$ e o conjunto $\{|i\rangle_j\}$ forma uma base no espaço de Hilbert do subsistema j . Para a conexão direta com o experimento, foi considerado uma decomposição de Schmidt com o sinal de menos no estado do segundo qudit. Para quantificar o emaranhamento do estado podemos usar a *I-concorrência* normalizada definida como [110]

$$C(|\psi_{in}\rangle_{12}) = \frac{1}{N} \sqrt{2[1 - \text{Tr}(\rho_1^2)]} = \frac{1}{N} \sqrt{2[1 - \text{Tr}(\rho_2^2)]}, \quad (4.2)$$

onde ρ_1 (ρ_2) é o estado reduzido de 1 (2) e $N = \sqrt{2(d-1)/d}$. Para o estado produto ser descrito pela equação 4.1 $\lambda_k = 1$ e $\lambda_i = 0, \forall i \neq k$, com a I-concorrência é nula, enquanto para o estado maximamente emaranhado, $\lambda_i = 1/D \forall i$, com a I-concorrência é 1.

Para um EPE onde $0 < C(|\psi_{in}\rangle_{12}) < 1$, a concentração de emaranhamento consiste em montar uma operação em uma das partes do sistema de tal maneira que seu estado após o protocolo seja mais emaranhado. Uma maneira simples de construir esta operação é implementando uma medida generalizada utilizando um sistema auxiliar de dois níveis $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ acoplado em uma componente do sistema usando uma operação unitária da forma:

$$U_{1,a} |+\rangle_a |i\rangle_1 = \left(\sqrt{\Lambda_i} |+\rangle_a + \sqrt{1 - \Lambda_i} |-\rangle_a \right) |i\rangle_1. \quad (4.3)$$

Então, quando a operação é aplicada no estado $|\psi_{in}\rangle_{1,2}$ com o sistema auxiliar, todo o sistema composto pode ser escrito da forma:

$$|\psi_{out}\rangle_{1,2,a} = (U_{1,a} \otimes I_2) |\psi_{in}\rangle_{1,2} |+\rangle_a \quad (4.4)$$

$$= \sqrt{P_S} |\psi_S\rangle_{1,2} |+\rangle_a + \sqrt{P_F} |\psi_F\rangle_{1,2} |-\rangle_a, \quad (4.5)$$

onde

$$|\psi_S\rangle_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{P_S}} \sum_i \sqrt{\Lambda_i \lambda_i} |i\rangle_1 | -i\rangle_2, \quad (4.6)$$

$$|\psi_F\rangle_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{P_F}} \sum_i \sqrt{(1 - \Lambda_i) \lambda_i} |i\rangle_1 | -i\rangle_2, \quad (4.7)$$

com $P_S = \sum \lambda_i \Lambda_i$ ($P_F = 1 - P_S$) simbolizando a probabilidade do estado de saída ser $|\psi_S\rangle_{12}$ ($|\psi_F\rangle_{12}$). Após a aplicação de $U_{1,a}$, a medida é realizada projetando o ancilla em $\{|+\rangle_a, |-\rangle_a\}$. A projeção no estado $|+\rangle_a$ ($|-\rangle_a$) ocorre com probabilidade P_S (P_F) e transforma o estado $|\psi_{in}\rangle_{12}$ em $|\psi_S\rangle_{12}$ ($|\psi_F\rangle_{12}$). Em particular, se queremos levar um estado EPE em um EME, escolhemos os parâmetros da operação da concentração de emaranhamento de tal forma que:

$$\Lambda_i \lambda_i / P_S = 1/D, \quad \forall \quad i. \quad (4.8)$$

Note que, P_S é a probabilidade de ser bem sucedido no aumento do emaranhamento, enquanto P_F é a chance de falha. O protocolo ótimo é aquele que maximiza a probabilidade de sucesso, que é dada por [176]

$$P_S^{opt} = d\lambda_{min}, \quad (4.9)$$

onde $\lambda_{min} = \min\{\lambda_i\}_{-\ell_d}^{\ell_d}$. Então, podemos encontrar o conjunto ótimo de parâmetros $\{\Lambda_i\}$ para a transformação unitária sendo

$$\Lambda_i = \frac{\lambda_{min}}{\lambda_i}, \quad \forall \quad i. \quad (4.10)$$

4.3 IMPLEMENTAÇÃO EXPERIMENTAL

Nessa seção será descrito o experimento realizado para demonstração do protocolo ótimo de concentração de emaranhamento. Foram preparados estados fotônicos de dois qutrits espaciais em nosso experimento, porém o protocolo pode ser estendido para estados de dois qudits de dimensões arbitrárias.

4.3.1 Montagem Experimental

A montagem experimental usada para demonstrar a concentração de emaranhamento em qudits de variáveis espaciais é mostrado na Figura 4.1. Um laser de estado sólido de $100mW$ operando à $\lambda = 355nm$ é utilizado como feixe de bombeamento em um cristal BiBo de $5mm$ de espessura, gerando pares de fótons gêmeos não colineares com polarização horizontal, como explicado na seção 2.2.3. Os fótons signal e idler ($\lambda_{i,s} = 710nm$) passam por um divisor de feixe polarizador (PBS - *polarizing beam splitter*) antes de cruzar as fendas múltiplas, que são posicionadas a $250mm$ do cristal. Considerando o pump propagando na direção z , as fendas múltiplas são posicionadas no plano $x - y$ com a menor dimensão na direção x . As fendas têm abertura com largura de $2a = 0.1mm$ e separação $2d = 0.25mm$.

A lente L_p com foco de $300mm$ é colocada a $50mm$ antes do cristal, sendo usada para focalizar o feixe de bombeamento no plano das fendas triplas, gerando estados emaranhados de caminho [16, 19, 32, 33, 152], como mostrado na equação 2.40,

$$|\psi'_{in}\rangle = \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{\ell=-\ell_D}^{\ell_D} |\ell\rangle_s |-\ell\rangle_i, \quad (4.11)$$

onde, neste caso, a fase foi incorporada ao estado.

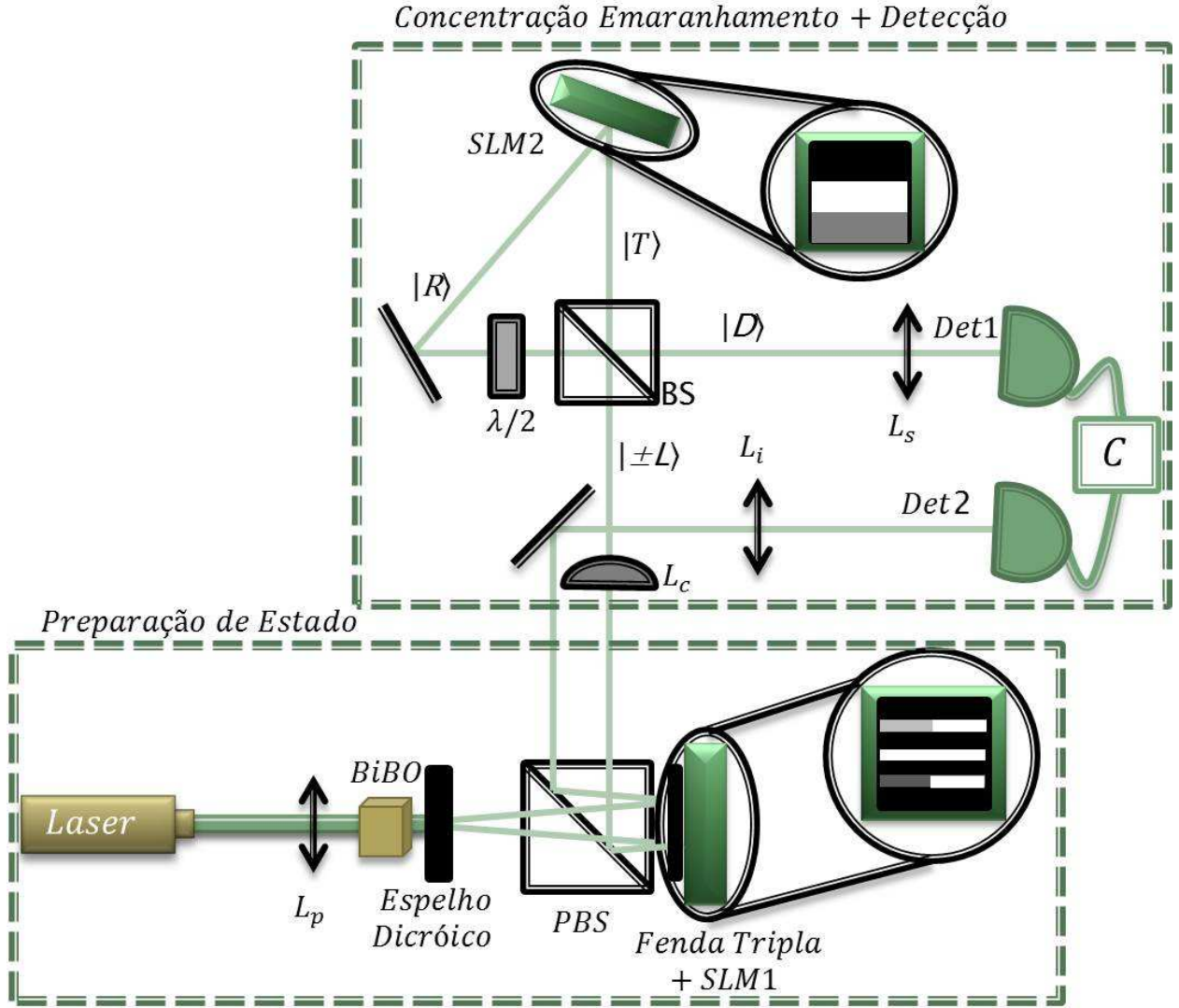


FIGURA 4.1: Montagem experimental para a concentração de emaranhamento de dois qubits codificados em estados de caminho dos fótons gêmeos. A lente L_p focaliza o feixe de bombeamento no plano das fendas múltiplas; a lente cilíndrica L_c é usada para projetar a imagem das fendas múltiplas no infinito. A lente L_i gera a imagem das fendas no det2 e a lente L_s diminui o tamanho das imagens propagadas pela lente cilíndrica, aumentando assim a contagem. Os fótons gêmeos são gerados com polarização horizontal, passam pelo PBS, onde o estado é preparado usando o primeiro SLM. O segundo SLM dentro do interferômetro de Sagnac é usado para implementar o operador necessário para a concentração. Os modos longitudinais $|\pm L\rangle$, $|T\rangle$, $|R\rangle$ e $|D\rangle$ são usados como sistema auxiliar para implementar a operação. Os detectores são deslocados medindo em coincidência a população das fendas.

4.3.2 Geração de estados parcialmente emaranhados

Para preparar os EPE é necessário modificar o estado descrito na equação 4.11. A preparação do estado começa com o SLM1 (Holoeye LC-R 2500) sendo posicionado logo atrás das fendas múltiplas, a uma distância de $1.0mm$, para prevenir a difração. Os fótons gêmeos são refletidos pelo SLM1 sofrendo modulação em cada fenda, como mencionado na seção 2.3. A operação

realizada pelo SLM é dada por:

$$U_{slm1} = \sum_{\ell} a_{\ell} e^{i\phi_{\ell}} |\ell\rangle \langle \ell|, \quad (4.12)$$

onde a_{ℓ} é a modulação de amplitude e $e^{i\phi_{\ell}}$ é a modulação de fase. Se o SLM1 aplicar a operação U_{slm1} de tal maneira que a modulação de amplitude seja $a_{\ell} = \sqrt{D\lambda_{\ell}}$, gerará o estado EPE

$$|\psi_{in}\rangle = \sum_{\ell=-\ell_D}^{\ell_D} \sqrt{\lambda_{\ell}} e^{i\eta_{\ell}} |\ell\rangle_s |-\ell\rangle_i. \quad (4.13)$$

A diferença de fase entre as fendas, para esse estado, não muda o emaranhamento, logo podemos incorporá-la ao estado de fenda $|\ell\rangle$. Então, o SLM1 é usado para preparar o estado inicial parcialmente emaranhado [48].

4.3.3 Medidas generalizadas para a concentração de emaranhamento

Agora descreveremos como as medidas da concentração de emaranhamento são feitas. Após os fótons gêmeos serem refletidos pelo SLM1 e transmitidos novamente pela fenda múltipla, a componente vertical do estado de polarização é refletida pelo PBS. O fóton idler passa pela lente L_i que produz a imagem das fendas no plano de detector. O fóton signal passa através de uma lente cilíndrica que projeta a imagem da fenda múltipla no infinito, propagando a imagem ao longo do interferômetro de Sagnac. Dentro do interferômetro, uma placa de meia onda (HWP - half wave plate) e o SLM2, um Hamamatsu LCOS-SLM, vão implementar a concentração de emaranhamento. Mencionamos anteriormente que apenas os fótons com polarização horizontal têm a sua fase variada pelo SLM2, *i. e.*, sofrem modulação. Portanto, a componente longitudinal transmitida pelo BS do fóton signal, $|T\rangle$, não sofre modulação de fase. No entanto, a componente longitudinal do fóton refletida pelo BS, $|R\rangle$, tem sua polarização girada para horizontal pela placa de meia onda e tem sua fase modulada pelo SLM2. Os fótons que saem em direção ao Det1, no estado longitudinal $|D\rangle$, saem com polarização horizontal e uma diferença de fase ϕ entre as componentes transmitidas e refletida (veja Figura 4.1). Como a lente L_c projeta a imagem das fendas no infinito, é possível ao SLM2 adicionar fases ϕ distintas para cada abertura individualmente. Para aumentar o número de fótons detectados do signal, uma segunda lente L_s é utilizada para projetar uma imagem reduzida das fendas múltiplas no plano do detector. O estado logo antes do fóton passar pelo BS pela segunda vez será então:

$$U_{slm2} |L\rangle |\ell\rangle_s = \frac{1}{\sqrt{2}} (|T\rangle + ie^{i\phi_{\ell}} |R\rangle) |\ell\rangle_s, \quad (4.14)$$

onde U_{slm2} é a operação realizada pelo SLM2; $|L\rangle$, $|T\rangle$ e $|R\rangle$ são os modos longitudinais antes do BS, transmitido e refletido pelo BS, respectivamente. Quando o fóton passa através do BS uma

segunda vez, o fóton interfere longitudinalmente e nós temos:

$$U_{sag} |L\rangle |\ell\rangle_s = \frac{1}{2} [(i + ie^{i\phi_\ell}) |-L\rangle + (1 - ie^{i\phi_\ell}) |D\rangle] |\ell\rangle_s \quad (4.15)$$

$$= ie^{\frac{i\phi_\ell}{2}} \left(\cos\left(\frac{\phi_\ell}{2}\right) |-L\rangle + \sin\left(\frac{\phi_\ell}{2}\right) |D\rangle \right) |\ell\rangle_s, \quad (4.16)$$

onde U_{sag} é a operação realizada pelo interferômetro de Sagnac como um todo, os modos longitudinais $|D\rangle$ ($|-L\rangle$) são associados a propagação do fóton signal para o detector (de volta para a lente cilíndrica L_c), como mostrada na Figura 4.1. A fase $ie^{i\phi_\ell/2}$ pode ser encorporada pelo estado de fenda.

Considerando que os dois modos longitudinais $\{|D\rangle, |-L\rangle\}$ são nossa ancilla, U_{sag} implementa uma transformação semelhante a U_{1a} , identificando que $\sin(\phi_\ell/2) = \sqrt{\Lambda_\ell}$. Essa ação no estado dos fótons gêmeos dada pela equação 4.13 pode ser descrita como:

$$U_{SAG}^{(s)} |\psi_{in}\rangle |L\rangle = \sqrt{P_S} |\psi_{out}\rangle |D\rangle + \sqrt{P_F} |\chi_{out}\rangle |-L\rangle, \quad (4.17)$$

onde

$$|\psi_{out}\rangle = \frac{1}{\sqrt{P_S}} \sum_{\ell=-1}^1 \sqrt{\lambda_\ell} \sin(\phi_\ell/2) |\ell\rangle_s |-\ell\rangle_i, \quad (4.18)$$

e

$$|\chi_{out}\rangle = \frac{1}{\sqrt{P_F}} \sum_{\ell=-1}^1 \sqrt{\lambda_\ell} \cos(\phi_\ell/2) |\ell\rangle_s |-\ell\rangle_i. \quad (4.19)$$

Novamente, $P_S = \sum \lambda_\ell \sin^2(\phi_\ell/2)$ e $P_F = 1 - P_S$ são as probabilidades de transformar o estado $|\psi_{in}\rangle$ em $|\psi_{out}\rangle$ e $|\chi_{out}\rangle$, respectivamente. A medida da ancilla na base $\{|D\rangle, |-L\rangle\}$ consiste em selecionar o fóton signal em uma das duas portas de saída do Sagnac². Aqui, nós consideramos que a saída $|D\rangle$ corresponde a um evento de sucesso no protocolo de concentração. Para converter o EPE $|\psi_{in}\rangle$ em um EME $|\psi_{out}\rangle$ com máxima probabilidade de sucesso a fase ϕ_ℓ dada pelo SLM2 tem que ser:

$$\phi_\ell = 2 \arcsin \left(\sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_\ell}} \right), \quad (4.20)$$

mostrando, assim, que o protocolo de concentração ótimo pode ser implementado em nossa montagem experimental, como será demonstrado a seguir.

²O modo longitudinal $|-L\rangle$ pode ser medido colocando um PBS especial antes do interferômetro. Vamos supor que esse PBS transmite (reflete) os fótons com polarização vertical (horizontal), os fótons dessa porta podem ser separados do modo “L” e posteriormente medidos. Esse PBS pode ser construído com um PBS comercial colocado entre duas placas de meia onda orientadas para girar de 90° a polarização do feixe transmitido por elas.

4.3.4 Resultados experimentais

Nós caracterizamos em cada etapa do experimento os estados de caminho dos qutris. Inicialmente temos o $|\psi_{MES}\rangle$, que é o estado quando não há modulação dos SLMs. Posteriormente geramos dois EPEs, chamados de $|\psi_{in}\rangle_1$ e $|\psi_{in}\rangle_2$ usando o SLM1. Finalmente, após o interferômetro de Sagnac, cuja implementação da transformação U_{sag} é feita, nós obtivemos aproximadamente um EME, $|\psi_{out}\rangle_1$ e $|\psi_{out}\rangle_2$ no modo $|D\rangle$. Esses cinco estados foram caracterizados medindo as contagens em coincidência no plano da imagem do signal e do idler. Detectores quase pontuais, descritos na Figura 4.1 são fixados nas posições correspondentes às imagens das fendas ℓ_s e m_i (com $\ell_s, m_i = -1, 0, 1$). As coincidências são medidas nas nove possíveis combinações. Mesmo que essas medidas sozinhas não demonstrem o emaranhamento, trabalhos anteriores realizados neste mesmo sistema mostram estados puros emaranhados em qudits de caminho [19, 32–37, 152] preparados em condições similares às demonstradas neste experimento.

Os resultados experimentais estão apresentados na tabela 4.1 e na Figura 4.2 para cada estado gerado. Vemos que, as contagens em coincidência (tabela 4.1), logo também as populações (Figura 4.2), têm contribuição dominante proveniente dos estados anticorrelacionados: $|1\rangle_s |-1\rangle_i$, $|0\rangle_s |0\rangle_i$ e $|-1\rangle_s |1\rangle_i$; enquanto as outras seis componentes têm contribuição negligenciável. O grau de emaranhamento $C(|\psi\rangle)$ de cada estado é mostrado na tabela 4.1. Nós podemos ver que o emaranhamento dos EPE preparados, $|\psi_{in}\rangle_1$ e $|\psi_{in}\rangle_2$ são concentrados para $|\psi_{out}\rangle_1$ e $|\psi_{out}\rangle_2$, respectivamente. Esses últimos são aproximadamente maximamente emaranhados, o que é indicado pela I-concorrência. A razão para não obtermos exatamente um EME se deve à imperfeições e desalinhamentos presentes no experimento, principalmente ao do Sagnac.

A implementação do protocolo ótimo pode ser discutida comparando a probabilidade de sucesso experimental e o esperado para cada estado. Primeiramente, baseado na preparação do EPE, pode-se obter a probabilidade de sucesso ótima para um EME pela equação 4.9. Para isso, nós normalizamos as coincidências obtidas na detecção dos estados de $|\psi_{in}\rangle_1$ e $|\psi_{in}\rangle_2$ considerando somente as populações das componentes anti-correlacionadas. Usando 4.9, com $d = 3$, nós obtivemos os valores mostrados na linha P_S^{opt} da tabela 4.1. Por outro lado, a probabilidade de sucesso em nosso experimento pode ser calculada fazendo a razão entre o número total das coincidências médias entre o estado final $N_c(|\psi_{out}\rangle_j)$ e do estado inicial $N_c(|\psi_{in}\rangle_j)$:

$$P_S^{exp} = \frac{N_c(|\psi_{out}\rangle_j)}{N_c(|\psi_{in}\rangle_j)}, \quad (4.21)$$

onde $N_c(|\psi\rangle_j) = \sum_{l,m=-1}^1 N_c(|l_s, m_i\rangle_j)$ para $j = 1, 2$. Os valores obtidos estão mostrados na linha P_S^{exp} da tabela 4.1 e pode-se ver que o resultado é maior que o P_S^{opt} . A razão para isso acontecer é que os EPE não são concentrados exatamente para um EME. A probabilidade de converter um EPE $|\psi_{in}\rangle_j$ em outro EPE $|\psi_{out}\rangle_j$ é dada por:

$$\mathbb{P}_S^{opt} = \frac{\lambda_{\min}^{in}}{\lambda_{\min}^{out}} = \frac{P_S^{opt}}{d\lambda_{\min}^{out}}, \quad (4.22)$$

onde $\lambda_{\min}^{out}$ é o menor coeficiente de Schimidt do estado final $|\psi_{out}\rangle_j$. A probabilidade de converter um estado em outro com mais emaranhamento é maior quanto mais próximo for a quantidade de emaranhamento entre os dois. Caso tenhamos o estado $|\psi_{out}\rangle_j$ sendo um EME, $\lambda_{\min}^{out} = 1/d$, fazendo com que $\mathbb{P}_S^{\text{opt}} = P_S^{\text{opt}}$ como esperado. Para encontrar o $\lambda_{\min}^{in}$ ($\lambda_{\min}^{out}$) nós normalizamos as coincidências do estado $|\psi_{in}\rangle_j$ ($|\psi_{out}\rangle_j$) mostrados na tabela 4.1 e novamente só consideramos as populações das componentes anti-correlacionadas. Pode-se ver que os resultados de $\mathbb{P}_S^{\text{opt}}$ e P_S^{exp} são muito próximos, mostrando que o procolo foi implementado de maneira ótima, apesar de suas imperfeições.

TABELA 4.1: Medidas das populações para cada estado e seu respectivo emaranhamento e, para os estados concentrados, $|\psi_i\rangle_{out}$, as probabilidades de sucesso do protocolo.

	$ \psi_{\text{MES}}\rangle$	$ \psi_{in}\rangle_1$	$ \psi_{in}\rangle_2$	$ \psi_{out}\rangle_1$	$ \psi_{out}\rangle_2$
$ -1, -1\rangle$	45 ± 6	31 ± 5	19 ± 4	15 ± 3	27 ± 5
$ -1, 0\rangle$	48 ± 6	34 ± 5	14 ± 3	44 ± 6	9 ± 3
$ -1, 1\rangle$	6602 ± 81	822 ± 28	840 ± 28	856 ± 29	847 ± 29
$ 0, -1\rangle$	39 ± 6	44 ± 6	27 ± 5	9 ± 3	20 ± 4
$ 0, 0\rangle$	8418 ± 91	8952 ± 94	1077 ± 32	1329 ± 36	982 ± 31
$ 0, 1\rangle$	42 ± 6	14 ± 3	6 ± 2	2 ± 1	9 ± 3
$ 1, -1\rangle$	7179 ± 84	7152 ± 84	7132 ± 84	1031 ± 32	863 ± 29
$ 1, 0\rangle$	41 ± 6	58 ± 7	8 ± 2	8 ± 2	6 ± 2
$ 1, 1\rangle$	28 ± 5	12 ± 3	9 ± 3	1 ± 1	3 ± 1
$C(\psi\rangle)$	0.986 ± 0.008	0.887 ± 0.008	0.724 ± 0.009	0.97 ± 0.02	0.97 ± 0.02
P_S^{opt}	—	—	—	0.15 ± 0.01	0.28 ± 0.02
P_S^{exp}	—	—	—	0.19 ± 0.01	0.30 ± 0.02
$\mathbb{P}_S^{\text{opt}}$	—	—	—	0.19 ± 0.01	0.30 ± 0.02

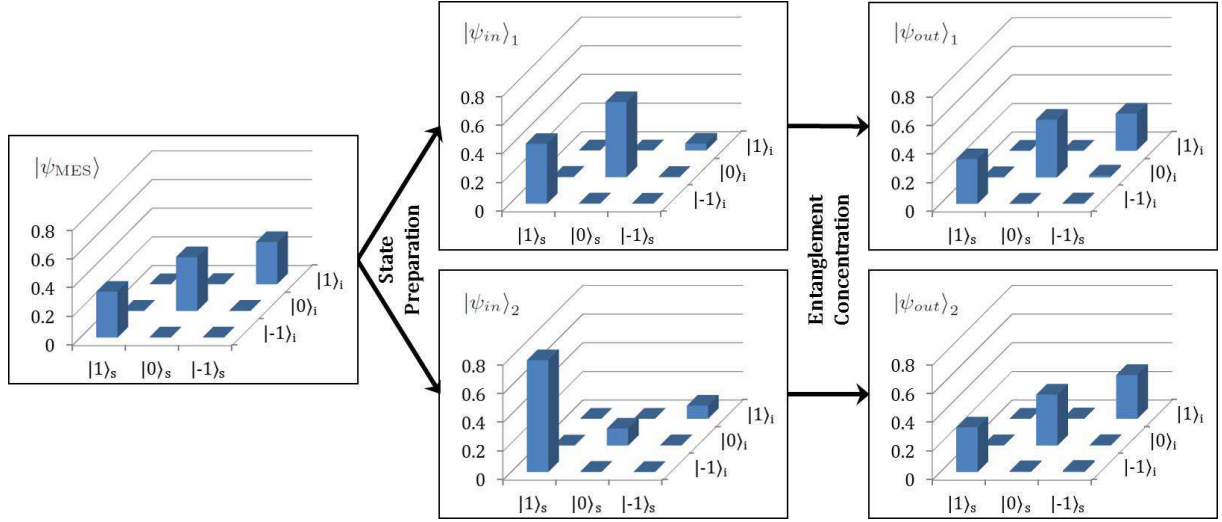


FIGURA 4.2: Populações dos estados de fenda na base $\{|l\rangle_s \otimes |m\rangle_i\}$ para cada estado preparado no experimento. Elas foram obtidas normalizando as contagens em coincidência correspondentes mostradas na tabela 4.1. O estado inicial $|\psi_{MES}\rangle$ foi usado para preaparar os EPE $|\psi_{in}\rangle_1$ e $|\psi_{in}\rangle_2$, que tiveram seu emaranhamento concentrado gerando os estados $|\psi_{out}\rangle_1$ e $|\psi_{out}\rangle_2$.

4.4 CONCLUSÃO

Nesse trabalho nós demonstramos experimentalmente o protocolo ótimo para concentração de emaranhamento para dois qutrits de caminho. Com a ajuda do SLM nós preparamos dois EPEs com diferentes graus de emaranhamento. No protocolo de concentração de emaranhamento foi usado medidas generalizadas realizadas em um fóton do par. Essas medidas foram implementadas através de um interferômetro de Sagnac com um SLM dentro, programado para aplicar mudanças de fases em cada fenda. Usando os modos longitudinais como sistema auxiliar e colocando as fases apropriadas no SLM, fomos capazes de concentrar o emaranhamento em um dos modos. Essa tarefa foi realizada com a máxima probabilidade de sucesso.

Apesar de nossa demonstração estar restrita à qutrits, nossa montagem experimental pode manipular inicialmente qudits de dimensão arbitrária. Além disso, a montagem experimental é muito versátil podendo ser possível implementar outros protocolos quânticos em um sistema com espaço de Hilbert grande (sistema de dimensão $10 \otimes 10$).

CAPÍTULO 5

SIMULAÇÃO DE SISTEMAS QUÂNTICOS ABERTOS

Nesse capítulo nós mostraremos a implementação de dinâmicas de qudits quando o sistema está interagindo com o ambiente. Os qudits são codificados em estados de caminho, como descrito na seção 2.2. Foram implementadas duas dinâmicas: defasagem e amplitude, cujas implementações foram feitas usando um SLM de fase.

5.1 INTRODUÇÃO

Um dos principais usos da computação quântica [1] é a simulação de dinâmicas complexas em análogos de simples implementação. Um tipo de dinâmica muito estudado é quando um sistema interage com o ambiente e, eventualmente, sofre a influência de decoerência [182]. Este é um dos maiores obstáculos para implementação de processos da comunicação quântica e informação quântica, pois essa interação “estraga” o estado, gerando degradação de recursos, como emaranhamento e coerência, necessários para os algoritmos quânticos.

Vários resultados de estudos de dinâmica de emaranhamento mostram que o emaranhamento se comporta de maneira muito diferente em relação ao estado inicial e ao tipo de interação entre o sistema e o ambiente [183–196]. Além disso, outros estudos mostram uma possível maneira de usar a interação do sistema com o ambiente de maneira útil: a implementação de computação quântica universal [197]; quantificação de emaranhamento [198–200] e a concentração de emaranhamento [201]. Trabalhos simulando dinâmicas de sistemas quânticos abertos também já foram feitos usando: fótons gêmeos emaranhados em polarização [56, 57, 59], ressonância magnética nuclear [58] e íons armadilhados [59].

Neste trabalho, nós apresentamos uma forma de simular esse tipo de dinâmica em qudits usando estados de caminho, como descritos na seção 2.2, em uma montagem que inclui SLMs. Nesse tipo de montagem foi implementado dois tipos de dinâmicas de sistemas abertos: defasagem [202] e amplitude [203]. No caso da defasagem a dinâmica foi implementada completamente para dois tamanhos de sistemas: qubits e ququarts (sistema com quatro níveis). Já no caso da dinâmica de amplitude, nós implementamos, em qutrits, somente a dinâmica conhecida como sem saltos.

Na próxima seção, explicaremos a teoria sobre sistemas quânticos abertos; posteriormente mostraremos como implementamos os mapas necessários para as dinâmicas para defasagem e para amplitude; na última seção finalizaremos a discussão deste trabalho.

5.2 SISTEMAS QUÂNTICOS ABERTOS

Nesta seção vamos refinar o tratamento dado às operações quânticas da seção 2.1.2, dando uma ênfase maior aos mapas que descrevem a dinâmica de sistemas quânticos abertos. Podemos reescrever a evolução de um sistema quântico aberto, descrito pela equação 2.6, mostrando a dependência temporal

$$\rho_S(t) = \text{Tr}_E(\rho_{SE}(t)) = \text{Tr}_E(U(t)\rho_{SE}(0)U(t)^\dagger), \quad (5.1)$$

onde ρ_S é o estado sistema de interesse, $\rho_{SE}(0)$ é o estado composto pelo sistema e o ambiente (E) no tempo $t = 0$ e $U(t)$ é uma evolução unitária do estado ρ_{SE} onde seu gerador é o hamiltoniano:

$$H = H_S \otimes I_E + I_S \otimes H_E + H_I, \quad (5.2)$$

com H_j sendo o hamiltoniano da parte j ($j = S, E$) isolada e H_I o hamiltoniano de interação entre o sistema e o ambiente (esquema da dinâmica está mostrado na figura 5.1). Em óptica quântica, quando a interação é fraca e o ambiente tem muitos graus de liberdade, podemos descrever essa dinâmica somente do sistema (S) usando uma *equação mestra* [204–206]:

$$\dot{\rho}_S = \frac{i}{\hbar} [H_s, \rho_s] \sum_j 2A_j \rho_S A_j^\dagger - \rho_S A_j^\dagger A_j - A_j^\dagger A_j \rho_S, \quad (5.3)$$

com $\dot{\rho}_S = d\rho_S/dt$. Essa equação é conhecida como equação de Lindblad e os operadores A_k são conhecidos como operadores de Lindblad [205]. Esses operadores determinam qual o tipo de evolução o sistema sofrerá e depende de vários fatores, sendo um dos mais importantes a forma da interação entre o sistema S e o ambiente E . Os operadores de Kraus fornecem a solução da equação mestra

$$\rho_S(t) = \sum_{i=0}^{D^2-1} p_i(t) K_i \rho_S K_i^\dagger, \quad (5.4)$$

onde K_i ¹ são os operadores de Kraus e $p_i(t)$ são parâmetros que dependem do tempo.

Podemos usar essa descrição para modelar uma gama enorme de dinâmicas. Segue adiante uma descrição mais detalhada das dinâmicas que foram implementadas nesta tese.

¹O mapa quântico descrito na equação 5.4 necessita de restrições para que seja completamente positivo e preserve o traço, $\text{Tr}[\rho_S(t)] = 1$, descrevendo assim uma evolução.

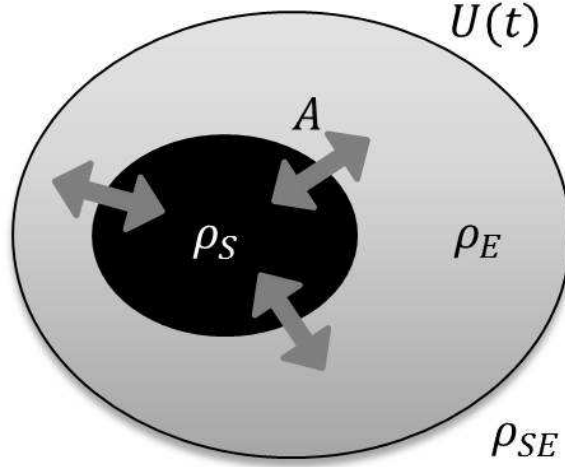


FIGURA 5.1: Esquema mostrando o sistema de interesse ρ_S , interagindo com o ambiente ρ_E , onde A caracteriza a interação entre o sistema e o ambiente. Quando estamos lidando com o conjunto sistema e ambiente, o estado global ρ_{SE} evolui via uma operação unitária dada por $U(t)$, como na equação 5.1. Porém, quando se quer tratar somente a dinâmica do sistema é necessário usar uma equação mestra, como descrito pela equação 5.3.

5.2.1 Mapa de Defasagem

Defasagem é quando um sistema sofre alguma perturbação levando à perda de coerência ao longo do tempo, sem ganho/perda de energia. Uma maneira de tratar a dinâmica de defasagem para um qudit é utilizando os operadores de Kraus:

$$K_D = I_D, \quad K_j = \sum_{i=0}^{D-1} e^{i\pi\delta_{ij}} |i\rangle \langle i|, \quad 0 \leq j \leq D-1, \quad (5.5)$$

com I_D sendo a matriz identidade no espaço de dimensão D . Podemos escrever a evolução temporal do sistema ao sofrer defasagem como:

$$\rho_S(\{p_i\}) = \sum_{i=0}^D p_i K_i \rho_S K_i^\dagger, \quad (5.6)$$

onde $\{p_i\}$ são parâmetros que dependem do tempo. Escrevendo o estado na forma matricial, $\langle i|\rho|j\rangle = \rho_{ij}$, podemos mostrar o que ocorre com os elementos da matriz densidade de ρ_S . Para os termos da diagonal temos:

$$\rho'_{ii} = \rho_{ii}, \quad \forall \quad i, \quad (5.7)$$

mostrando que as populações do estado não são modificadas. Já para os termos fora da diagonal temos:

$$\rho_{ij} = (1 - 2p_i - 2p_j)\rho_{ij}, \quad \forall \quad i \neq j, \quad (5.8)$$

explicitando a perda de coerência do sistema. Para simplificar a implementação experimental consideramos que $p_i = p/4$ para $0 \leq i \leq D-1$ e $p_D = 1 - Dp/4$ para que o mapa dependa somente de um parâmetro. Reescrevendo os termos fora da diagonal após a aplicação do mapa obtemos:

$$\rho_{ij} = (1 - p)\rho_{ij}, \quad \forall \quad i \neq j, \quad (5.9)$$

com $0 \leq p \leq 1$. A relação entre o parâmetro p e o tempo pode ser explicitada, caso consideremos o sistema físico no qual a defasagem atua. Um exemplo comum é um átomo interagindo com um campo eletromagnético ruidoso sem troca de energia [204], onde temos $p = 1 - e^{-\gamma t}$, onde γ é a taxa de perda de coerência que depende das características do sistema e de seu ambiente. Usando essa descrição podemos ver que com o passar do tempo o sistema vai perdendo coerência e em $t \rightarrow \infty$ ($p = 1$), o sistema a perde completamente.

5.2.2 Mapa de Amplitude

Esse mapa representa uma interação dissipativa entre o sistema e o ambiente. Neste trabalho nos concentraremos em estudar um oscilador harmônico amortecido quântico interagindo com um ambiente formado por infinitos osciladores sem excitações (representação de um banho térmico com temperatura nula) que pode ser descrito pela equação mestra²:

$$\dot{\rho}_S = 2\gamma a \rho_S a^\dagger - \gamma \rho_S a^\dagger a - \gamma a^\dagger a \rho_S, \quad (5.10)$$

onde a ($a^\dagger$) é o operador destruição (criação) do oscilador e γ é uma constante de amortecimento. O método de trajetórias quânticas [207–222] é uma outra maneira de analisar a dinâmica de um sistema quântico, e consiste em dividir a evolução do estado em realizações únicas com o ambiente sendo monitorado [223, 224]. Esse monitoramento nos dirá se em um intervalo de tempo $\{t, t + \delta t\}$ o sistema perdeu uma excitação (teve um salto quântico) ou não perdeu uma excitação (evolução sem salto). Caso o sistema tenha evoluído no intervalo δt sem saltos quânticos, o seu estado será:

$$\rho_S(t + \delta t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H_{eff} \delta t} \rho_S(t) e^{\frac{i}{\hbar} H_{eff} \delta t}, \quad (5.11)$$

onde $H_{eff} = i\hbar\gamma a^\dagger a/2$. Caso o sistema perca uma excitação no intervalo $\{t, t + \delta t\}$ temos que o sistema evolui com um salto:

$$\rho(t + \delta t) = \frac{\delta t}{\delta p} a \rho(t) a^\dagger, \quad (5.12)$$

onde

$$\delta p = \delta t \gamma \text{Tr}(a \rho(t) a^\dagger) \quad (5.13)$$

²A equação 5.10 está descrita na representação de interação. Como estamos querendo mostrar a implementação da dinâmica dissipativa, essa representação se faz mais adequada.

é a probabilidade de ocorrer um salto nesse intervalo de tempo. Note que quanto maior a energia do oscilador harmônico do estado, maior a chance de um salto ocorrer:

$$\delta p = \delta t \gamma \text{Tr}(a |N\rangle \langle N| a^\dagger) = \delta t \gamma N, \quad (5.14)$$

com $|N\rangle$ sendo o N-ésimo estado excitado do oscilador. Para uma abordagem mais detalhada sobre trajetórias quânticas é recomendado consultar a minha dissertação de mestrado [225] e o livro “*The theory of open quantum system*”, Brewer e Petruccione [206].

O oscilador harmônico quântico pode parecer inicialmente um exemplo somente didático, mas se mostra muito importante pois existem vários sistemas físicos que são descritos com operadores que possuem a mesma álgebra como: micro cavidades [226, 227], pontos quânticos [228, 229] e sistemas opto-mecânicos [230, 231]. Outro motivo para escolhermos esse sistema é mostrar que, para esse tipo de dissipação, é possível em nossa montagem implementar diferentes taxas de decaimento (a probabilidade de salto é dependente do nível de energia do oscilador harmônico).

5.3 IMPLEMENTAÇÃO EXPERIMENTAL: DEFASAGEM

A montagem experimental usada para implementar os mapas de defasagem e amplitude em qudits de variáveis espaciais é mostrado na Figura 5.2. Um laser de estado sólido de 100 mW operando a $\lambda = 355 \text{ nm}$ ³ é usado como feixe de bombeamento em um cristal BiBO de 5 mm de espessura gerando os fótons gêmeos não colineares com polarização horizontal, como explicado na seção 2.2.3. Os fótons signal e idler ($\lambda_{i,s} = 710 \text{ nm}$) passam por um divisor de feixe polarizador (PBS) antes de cruzar as fendas múltiplas que são posicionadas a $Z_A = 250 \text{ mm}$ do cristal. Considerando o feixe de bombeamento propagando na direção z , as fendas múltiplas são posicionadas no plano $x - y$ com a menor dimensão na direção x . As fendas têm $2a = 0.1 \text{ mm}$ de abertura e separação de $d = 0.25 \text{ mm}$.

A lente L_p com foco de 300 mm é colocada a 50 mm antes do cristal, sendo usada para focalizar o feixe de bombeamento no plano de fendas múltiplas, gerando estados emaranhados de caminho [19]. A preparação do estado começa com o SLM1 sendo posicionado logo atrás das fendas múltiplas, a uma distância de 1.0 mm, para prevenir a difração. Os fótons gêmeos são refletidos pelo SLM1 sofrendo modulação em cada fenda, como mencionado na seção 2.3. O estado inicial é preparado após os fótons cruzarem o PBS pela segunda vez, saindo com polarização vertical.

Para a implementação do mapa e visualização de seu efeito foi necessário fazer a projeção das fendas múltiplas no SLM de fase (SLM2) e posteriormente ter um plano de interferência no plano do detector. Não foi possível usar uma lente cilíndrica como no caso da concentração de emaranhamento ou da implementação da dinâmica de amplitude, que será explicada na próxima

³Como poderá ser visto posteriormente, a defasagem para dois qubits foi feita com o laser de 405 nm com potência de 50 mW e um cristal BiBO de 2 mm. Exatamente por causa disso temos menos contagens nessas medidas e os resultados piores.

seção. Esse tipo de montagem gera um padrão muito pequeno, não tendo resolução espacial necessária para caracterização usando o nosso aparato de medida. Então, para fazermos a imagem da fenda múltipla no SLM2 foi usado uma lente esférica com foco de $L_c = 125 \text{ mm}$ na configuração $2f - 2f$. Para o padrão de interferência ser formado no plano do detector, foi necessário usar uma lente de $L_s = 200 \text{ mm}$ a uma distância de 300 mm , por causa da combinação de lentes (a combinação de lentes está explicada com maiores detalhes no Apêndice B.4). Já para o fóton idler a medida é feita usando somente uma lente com foco de 200 mm focalizando no detector, como no experimento do algoritmo de Deutsch (descrição no apêndice B.2).

A dinâmica de defasagem foi feita para dois sistemas de dimensões diferentes, qubits e ququarts, com o parâmetro p sendo modificado de duas formas diferentes. Nos dois casos, para verificar se o

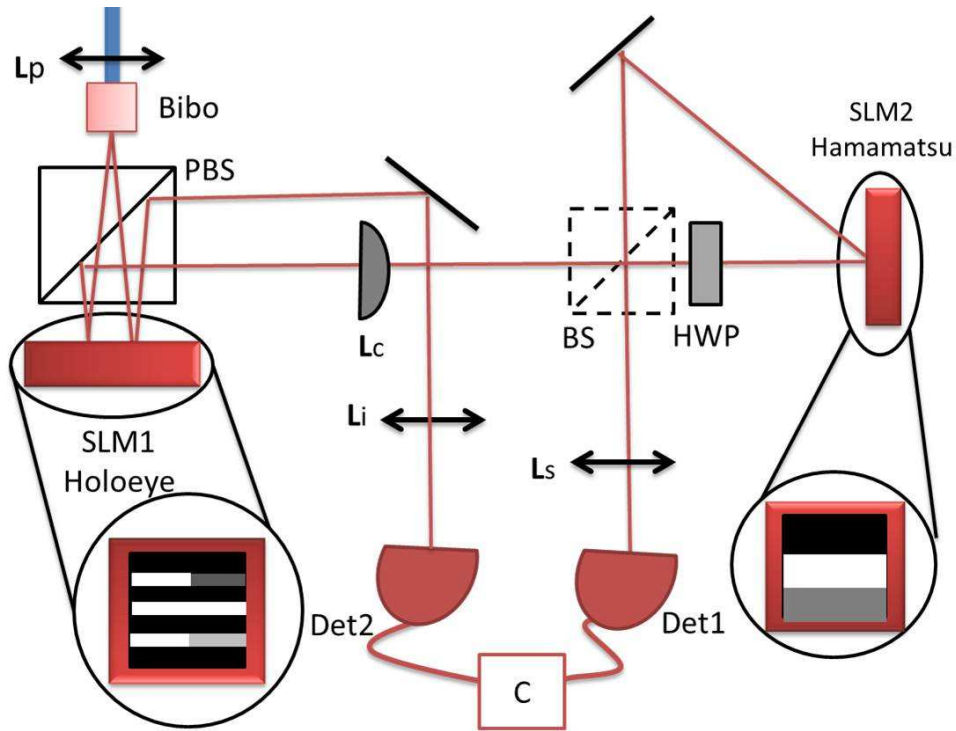


FIGURA 5.2: Montagem experimental para implementação dos mapas de defasagem e amplitude para dois qubits codificados em estados de caminho dos fótons gêmeos. A lente L_p focaliza o feixe de bombeamento no plano das fendas múltiplas. Um espelho dicróico logo após o cristal (não mostrado na figura) reflete o laser de bombeamento e transmite os fótons gêmeos. No mapa da defasagem, a lente L_c é esférica e faz a imagem das fendas múltiplas no SLM2 e as lentes L_i e L_s focalizam o sinal e o idler no plano do detector para produzir o padrão de interferência condicional a ser medido. O divisor de feixe (BS) mostrado em linha pontilhada não é usado na implementação da defasagem. No mapa da amplitude, uma lente cilíndrica L_c é usada para projetar a imagem das fendas múltiplas no infinito, a lente L_s diminui o tamanho da imagem para facilitar a detecção e a lente L_i faz a imagem das fendas múltiplas no plano do detector do idler usando a configuração $2f - 2f$. O SLM2 é usado dentro de um Sagnac para montar as operações necessárias para a implementação do mapa de amplitude. Os fótons gêmeos são gerados com polarização horizontal, passam pelo divisor de feixe polarizador (PBS), onde o estado é preparado usando o SLM1. Os detectores são varridos em um plano da imagem ou de Fourier nos dois detectores e medem em coincidência os fótons sinal e idler.

mapa foi implementado com sucesso, nós usamos medidas do padrão de interferência condicional para obter experimentalmente o valor de p e comparamos com o previsto. Para obter o valor de p , nós ajustamos as medidas dos padrões de interferência considerando a propagação dos estados de caminho do plano das fendas até os planos dos detectores (veja a seção no apêndice B.5 para maiores detalhes), cuja equação que descreve o padrão de interferência no plano da detecção é dada por:

$$\begin{aligned}
P(x_i, x_s) = & A \operatorname{sinc}^2\left(\frac{kax_i}{f}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{kax_s}{f\beta}\right) \\
& \times \left[1 + \sum_{\ell > m = \ell_d}^{\ell_d} (1-p) |\langle \ell, -\ell | \rho(0) | m, -m \rangle| \operatorname{sinc}\left((\ell-m)\frac{kdb}{f}\right) \operatorname{sinc}\left((\ell-m)\frac{kdb}{f\beta}\right) \right. \\
& \times \left. \cos\left((\ell-m)\frac{kdx_i}{f} - (\ell-m)\frac{kdx_s}{f\beta} + \arg(\langle \ell, -\ell | \rho(0) | m, -m \rangle)\right) \right], \quad (5.15)
\end{aligned}$$

onde k é vetor de onda dos fótons, $2a$ é a largura das fendas, f é o foco da lente posicionada a uma distância f do detector do idler, d é a distância entre as fendas, $2b$ é largura da fenda na frente dos detectores, A é uma constante de normalização, $\rho(0)$ é o estado inicial dos qudits cujos elementos de matriz nulos já foram eliminados e β é um fator de escala que aparece devido ao fóton signal passa por duas lentes (esse fator na equação 5.15 está explicado na seção B.4 do apêndice). Essa equação é válida para os estados gerados usando nossa preparação dos estados de caminho, mostrado na equação 2.40, para qualquer dimensão.

5.3.1 Defasagem de Qubits

Na implementação da defasagem em qubits nós usamos uma imagem fixa no SLM, pois os mapas K_0 e K_1 são iguais a menos de uma fase global, $K_1 = e^{i\pi} K_0$. A imagem coloca uma diferença de fase de π entre os fótons com polarização horizontal que passam por uma das fendas. O parâmetro p é modificado girando a polarização do fóton incidente no SLM de fase:

$$p(\theta) = 2 \sin^2(2\theta), \quad (5.16)$$

onde $0 \leq \theta \leq \pi/8$ é o ângulo da placa de meia onda ($HW P$) posicionada anteriormente ao SLM. Note que é possível obter todos os valores possíveis de p usando essa variação. Essa mudança na polarização faz com que a componente da polarização horizontal sofra a ação do operador K_1 e a componente vertical sofra a influência do operador K_2 (identidade). Para mostrar a dinâmica da defasagem do sistema foi preparado o estado:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_s |1\rangle_i + |1\rangle_s |0\rangle_i) \quad (5.17)$$

e implementamos o mapa para 6 valores distintos de θ , $\{0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 22.5^\circ\}$. Para cada valor de θ foi feito o padrão de interferência varrendo o detector do fóton idler para duas posições fixas do detector signal: posicionado em $x = 0$ e $x = x_\pi$, onde x_π corresponde à posição do

detector tal que $fdx_\pi/f\beta = \pi$. A Figura 5.3 mostra esses padrões onde pode-se ver a perda da coerência do sistema na perda de visibilidade.

A tabela 5.1 mostra a comparação entre o valor experimental e teórico de p para os dois conjuntos de medidas: $x_s = 0$ e $x_s = x_\pi$. Pode-se ver que a implementação da defasagem dessa forma foi parcialmente sucedida, pois observamos experimentalmente a perda de coerência do sistema, porém mais “lenta” do que o esperado. Isso se deve a problemas de alinhamento, problemas de instabilidades do posicionamento do feixe do laser ⁴ e pelo baixo número de contagens nas medidas, apresentando maior ruído, piorando a análise dos dados.

TABELA 5.1: Valores de p para defasagem de dois qubits. O valor $p_{x=0}$ ($p_{x=x_\pi}$) foi obtido do ajuste feito para cada padrão de interferência com o detector parado em $x = 0$ ($x = x_\pi$) mostrado na Figura 5.3. Os valores de $p_{previsto}$ são os valores que esperávamos obter variando o ângulo da HWP antes do SLM. Como o ângulo tem imprecisão, também há um erro na previsão.

$p_{x=0}$	$p_{x=x_\pi}$	$p_{previsto}$
0.000 ± 0.076	0.000 ± 0.044	0.000 ± 0.053
0.060 ± 0.079	0.057 ± 0.033	0.060 ± 0.053
0.23 ± 0.11	0.178 ± 0.054	0.234 ± 0.053
0.261 ± 0.080	0.275 ± 0.067	0.500 ± 0.053
0.607 ± 0.088	0.509 ± 0.081	0.826 ± 0.053
0.757 ± 0.092	0.782 ± 0.087	0.986 ± 0.053

⁴lembrando que o laser usado nessas medidas é o de diodo 405 nm e potência de 50 mW

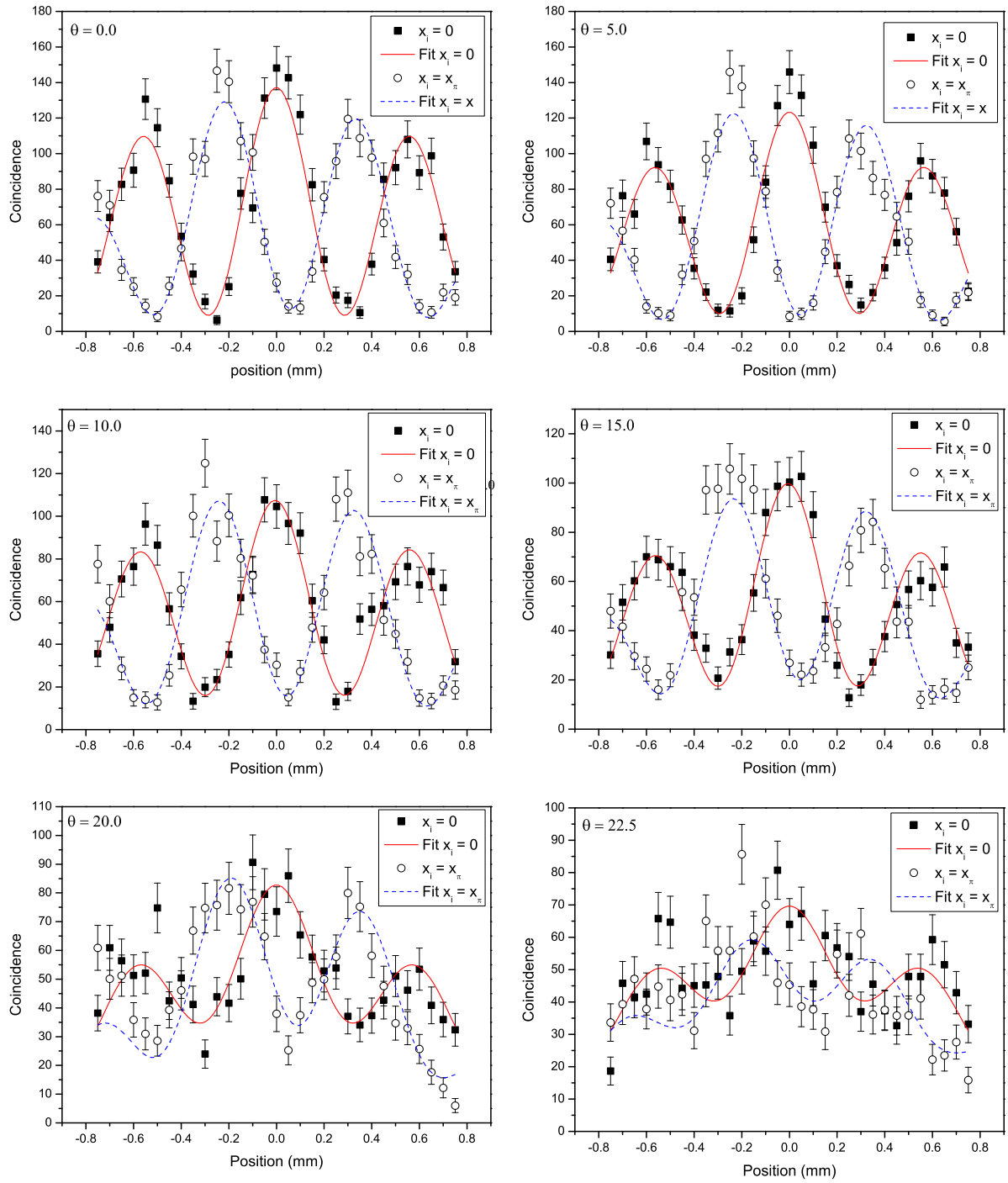


FIGURA 5.3: Gráficos dos padrões de interferência de fenda dupla medidos varrendo o detector do fóton idler, com o detector do sinal parado em $x_s = 0 \text{ mm}$ (quadrados fechados) e $x_s = 0.26 \text{ mm}$ (círculos abertos) para todos os valores de p medidos. Para calcular o valor de p nós ajustamos os gráficos usando a equação 5.15 com dimensão 2, $\ell_d = 1/2$.

5.3.2 Defasagem em Ququarts

A equação 5.6 mostra que o operador K_i atua com probabilidade p_i no estado ρ_S . Porém, podemos interpretar essa equação de outra forma: K_i atua em $N p_i$ dos constituintes do ensemble formado por N sistemas e descrito pelo estado ρ_S . Com isso, podemos dizer que a implementação do mapa para qubits na seção anterior é dado por: K_0 atua em $N \cos^2(2\theta)$ dos fótons (polarização vertical) e K_2 em $N \sin^2(2\theta)$ fótons (polarização horizontal), onde N é o número de fótons que passam pelo SLM no intervalo de detecção para cada ponto das medidas mostradas na Figura 5.3. Note que, nessa medida usamos a polarização para dividir o ensemble em partes i com cada uma sendo modificada por um operador K_i .

Porém a polarização não é a única maneira dividir o ensemble. Uma maneira mais eficiente de dividi-lo é particionar o tempo de aquisição, onde cada divisão atuará um operador distinto. E é exatamente isso que foi feito para implementação do mapa de defasagem para ququarts. Para isso, ao invés de usar uma única imagem no SLM ao longo do tempo de aquisição, foi usado um “filme”⁵, cujas imagens que o forma são as implementações dos operadores K_i , usados para formar este mapa (as imagens referentes a cada operador K_i estão mostradas na figura 5.4).

Para a implementação da dinâmica, o p é variado modificando o filme que é passado na tela do SLM. O filme é montado com a mesma duração do tempo de aquisição. Para a implementação nós dividimos o tempo de aquisição em 32 intervalos, onde cada um fica exposto na tela do SLM2 pela mesma duração. Como mostrado na Figura 5.5, para $p = 0$, o filme é formado por 32 imagens iguais, onde esta imagem se refere ao operador K_4 (identidade). Para o próximo valor implementado, $p = 0.125$, foram usados em 28 intervalos a imagens referentes à operação K_4 e para cada um dos outros quatro intervalos, foi usado um dos operadores K_i , com $i = 0, 1, 2, 3$. Foi feito esse processo com o p variando em passos de 0.125 até o valor de $p = 1$, onde não se tem nenhum intervalo com a imagem correspondente a K_4 e as outras 4 imagens são expostas igualmente, cada uma correspondendo a 8 intervalos.

Para cada valor de p foram feitas medidas do padrão de interferência condicional varrendo o detector do idler e o detector do sinal parado nas posições $x_s = 0$ e $x_s = x_\pi$ ($kdx_\pi/f\beta = \pi$), como pode ser visto na Figura 5.6. Para mostrar que a implementação do mapa foi bem sucedida, nós fitamos as medidas mostradas na Figura 5.6 usando a equação 5.15, onde $D = 4$ e $\ell_D = 3/2$, para encontrar os valores de p para cada medida. Os valores encontrados de p estão mostrados na tabela 5.2 para as duas posições do detector signal.

Implementando o mapa usando filmes ao invés de modificar a polarização se mostrou mais bem sucedida, como pode ser visto pelas comparações nas tabelas 5.1 e 5.2. As principais fontes de erro na implementação da defasagem para ququarts são a modulação de fase que tem um erro por causa da calibração e um pequeno ruído que aparece quando há mudança das imagens usadas no SLM. Uma maneira mais robusta de determinar o sucesso da implementação do mapa seria fazer a tomografia de qudits [40], porém, para o caso medido, seria necessário, no mínimo, 256 medidas

⁵Como estamos gerando imagens em sequência em uma tela, acredito que a melhor nomenclatura seja essa.

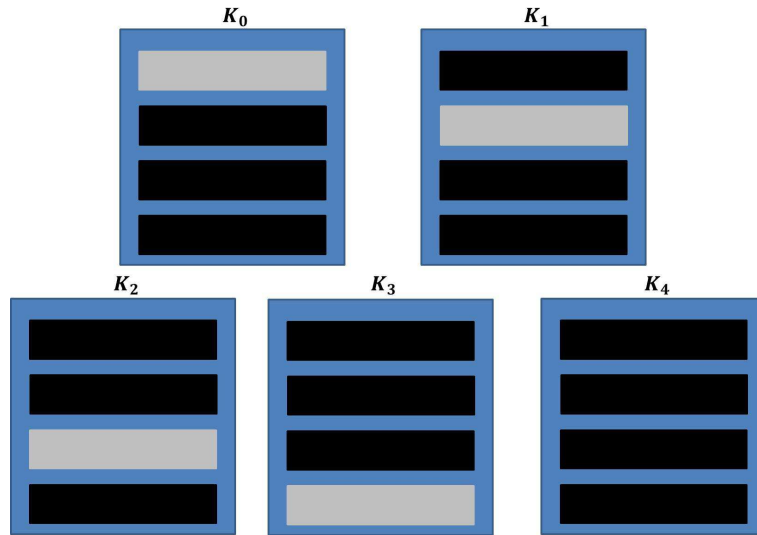


FIGURA 5.4: Imagens usadas na montagem dos filmes necessários para implementar os operadores da dinâmica de defasagem. Para posicionar a imagem foi usada uma técnica semelhante à mostrada na Figura 2.10.

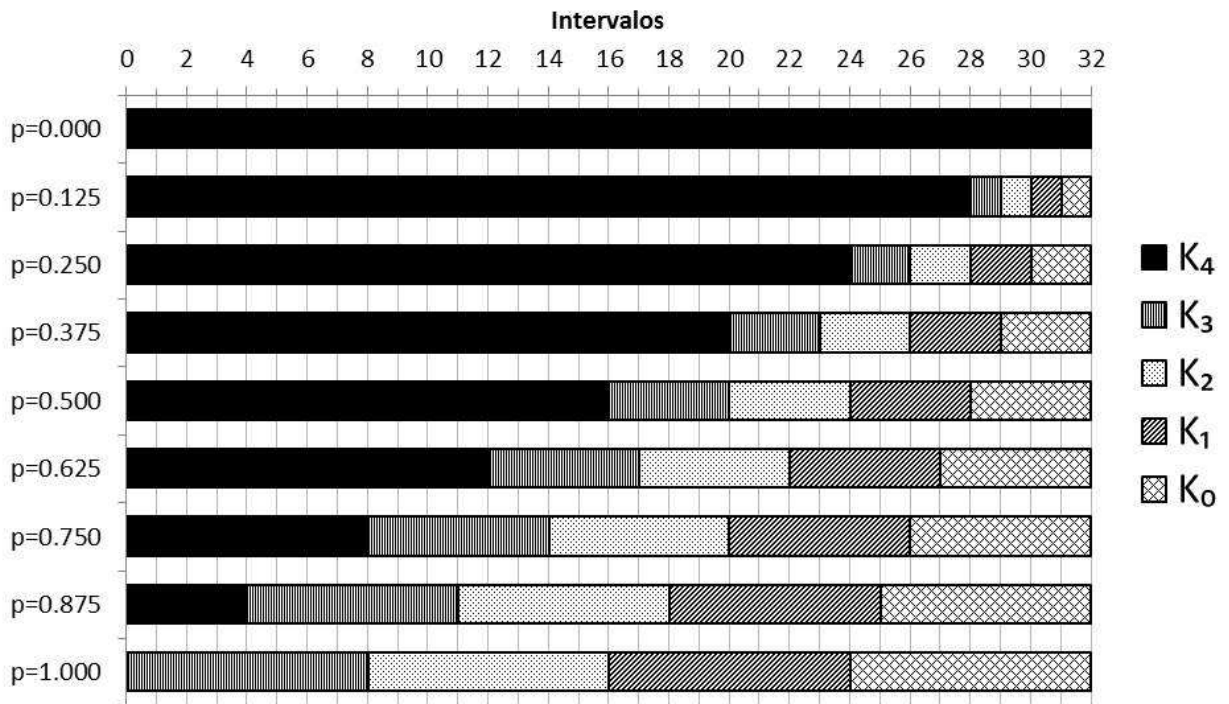


FIGURA 5.5: Esquema mostrando como os filmes foram montados para implementação da dinâmica de defasagem para ququarts.

para cada valor de p , tornando algo inviável em nossa montagem experimental.

TABELA 5.2: Valores de p para defasagem de dois ququarts. Os valores $p_{x=0}$ ($p_{x=x_\pi}$) foram tirados do ajuste feito para cada padrão de interferência com o detector do fóton signal parado em $x = 0$ ($x = x_\pi$) mostrados na Figura 5.6. Os valores de $p_{previsto}$ estão relacionados a cada filme usado e como a precisão é alta, não foi considerado erro experimental.

$p_{x=0}$	$p_{x=x_\pi}$	$p_{previsto}$
0.000 ± 0.063	0.000 ± 0.044	0.000
0.101 ± 0.066	0.113 ± 0.055	0.125
0.234 ± 0.071	0.248 ± 0.054	0.250
0.359 ± 0.071	0.369 ± 0.052	0.375
0.489 ± 0.066	0.490 ± 0.053	0.500
0.603 ± 0.073	0.617 ± 0.058	0.625
0.737 ± 0.062	0.753 ± 0.051	0.750
0.871 ± 0.050	0.869 ± 0.061	0.875
0.982 ± 0.069	0.94 ± 0.10	1.000

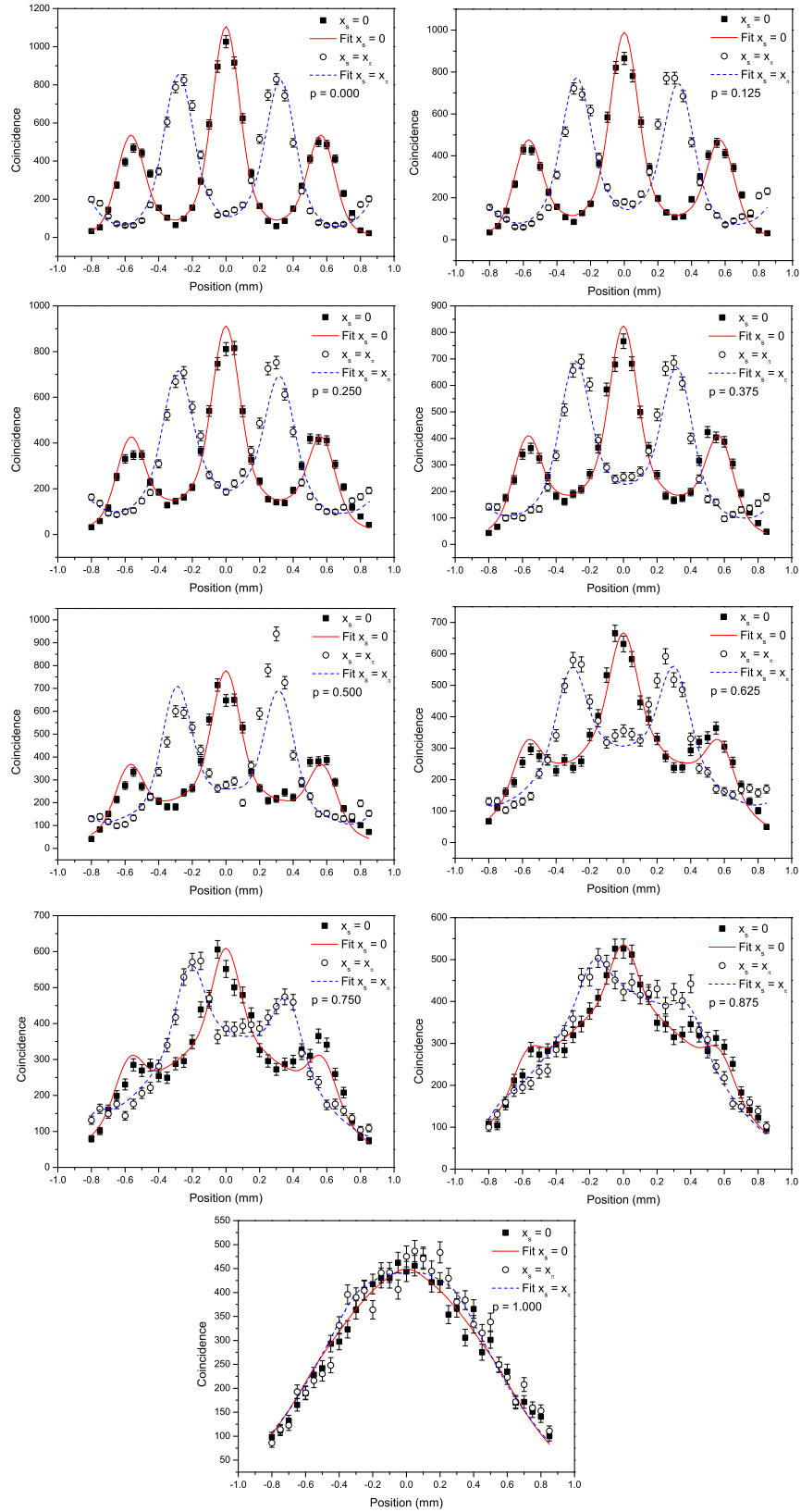


FIGURA 5.6: Gráficos dos padrões de interferência de fenda quádrupla medidos varrendo o detector do fóton idler, com o detector sinal parado em $x_s = 0 \text{ mm}$ (quadrados fechados) e $x_s = 0.26 \text{ mm}$ (círculos abertos) para todos os valores de p medidos. Para calcular o valor de p nós ajustamos os gráficos usando a equação 5.15 com $\ell_D = 3/2$.

5.4 IMPLEMENTAÇÃO EXPERIMENTAL: AMPLITUDE

Para mostrar a implementação do mapa de amplitude vamos usar um sistema de três níveis, como mostrado na Figura 5.7. Como já foi dito anteriormente, nós implementaremos somente as trajetórias sem salto⁶, onde podemos reescrever a equação 5.11 para a dimensão usada em nosso experimento como:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H_{eff}t} |\psi(0)\rangle = \frac{1}{N(t)} (a |0_s 2_i\rangle + b e^{-\gamma t} |1_s 1_i\rangle + c e^{-2\gamma t} |2_s 0_i\rangle), \quad (5.18)$$

onde $|\psi(0)\rangle = a |20\rangle + b |11\rangle + c |20\rangle$ com a , b e c sendo as amplitudes do estado inicial; e $N(t)$ é a normalização. Foi considerado que o estado inicial $|\psi(0)\rangle$ é dado pela equação 2.40, porém com a nomenclatura mostrada na Figura 5.7 e com a preparação do estado parcialmente emaranhado usando o SLM1, como mostrado na seção 4.3.2.

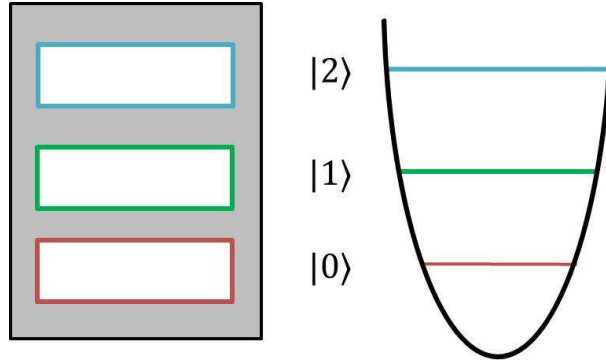


FIGURA 5.7: A figura mostra um esquema de correspondência entre nosso sistema de fendas triplas e os três níveis do oscilador harmônico.

A montagem experimental da implementação das trajetórias sem saltos está mostrada na Figura 5.2, onde o SLM1 foi usado para preparar um estado parcialmente emaranhado $|\psi(0)\rangle$ e o SLM2, substituindo um espelho no Sagnac (“Sagnac modificado”), foi utilizado para implementar o mapa da dinâmica, $\exp(-iH_{eff}t/\hbar)$. Note que, na equação 5.18, a variação do tempo diminui as amplitudes dos estados de caminho correspondentes aos estados excitados, $|1\rangle_s$ e $|2\rangle_s$, e mantém constante a amplitude do estado de caminho referente ao estado fundamental, $|0\rangle_s$. Isso faz com que tenhamos associado para cada caminho transversal do fóton signal uma operação distinta feita pelo Sagnac modificado, dada por:

$$U_{sag}(t)|\ell\rangle = \sin(\phi_\ell(t)/2) |\ell\rangle, \quad (5.19)$$

onde $U_{sag}(t)$ a operação do interferômetro do Sagnac modificado em um dos estado de fenda $|\ell\rangle$ e $\phi_\ell(t)$ é definido individualmente para cada fenda $|\ell\rangle$, pois a variação da amplitude depende

⁶Como discutido na subseção 2.3.4, a operação que o SLM aplica ao estado de fenda é diagonal. Isso implica que operações como a de salto quântico, como mostrada na equação 5.12, são inviáveis usando este método de modulação.

do estado de fenda. O Sagnac modificado faz uma operação nesse experimento igual à feita no experimento da Concentração de Emaranhamento, descrita na seção 4.3.3. Para implementar o mapa em questão, as funções $\phi_\ell(t)$ para cada fenda devem satisfazer:

$$\begin{aligned}\phi_0(t) &= 1, \\ \phi_1(t) &= \arcsin(e^{-\gamma t}), \\ \phi_2(t) &= \arcsin(e^{-2\gamma t}).\end{aligned}\tag{5.20}$$

Então, em nossa montagem experimental, podemos associar um valor de grau de cinza a um $\phi_\ell(t)$ (como mostrado na seção 2.3.3) e encontrar a relação entre o grau de cinza e o tempo. Por a variação do tempo ser distinta para cada fenda, a variação do grau de cinza para cada fenda é exclusiva, como mostrado nas equações 5.20. Para produzir as operações necessárias para implementar este mapa foi utilizado uma taxa de variação do grau de cinza distinto para cada fenda.

A Tabela 5.3 mostra as medidas que visam caracterizar a implementação do mapa de amplitude. Nós medimos todas as populações para diferentes valores de γt ⁷. Na simulação óptica do mapa de amplitude que afeta um sistema de três níveis, os níveis são representados pelos estados de caminho dos fótons ao atravessar uma fenda tripla, Figura 5.7. Portanto, medir as populações significa detectar a imagem das fendas após o fóton sofrer a operação feita pelo Sagnac modificado. Podemos ver na Figura 5.8 que nessa implementação temos a população dos estados de fenda referentes aos níveis menos energéticos aumentando a amplitude, enquanto as fendas referentes aos níveis mais energéticos diminuindo, como esperado.

Uma característica interessante desse mapa é que, caso os níveis de maior energia tenham maior população que os de menor energia ($a < b < c$), temos um aumento do emaranhamento do sistema (onde usamos a I-concorrência normalizada, descrita na equação 4.2, para quantificar o emaranhamento). A escolha do estado inicial foi feita de tal forma que esse efeito ocorresse, como pode ser visto na Figura 5.9. Além disso, podemos comparar a evolução do emaranhamento esperada com a calculada a partir da medida, o que nos mostra uma boa concordância, explicitando o êxito da implementação. Como o número de coincidências caem quando aumentamos γt , os erros estatísticos de cada medida aumentam, fazendo com que o erro do cálculo do emaranhamento seja grande para γt alto. Para gerar valores maiores de γt seria necessário aumentar o tempo de aquisição, algo inviável em nosso laboratório, por motivo de instabilidade do interferômetro.

⁷Foi usado γt ao invés de t para deixar a variação temporal independente de unidade.

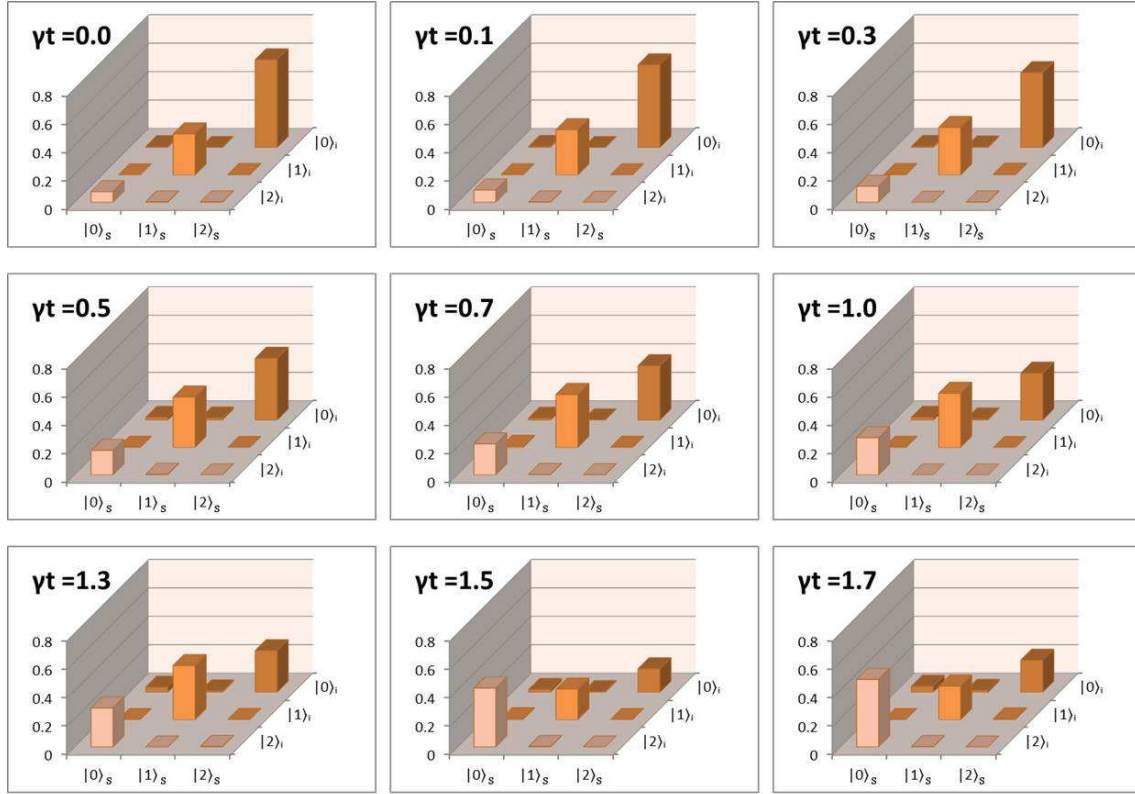


FIGURA 5.8: Populações para os estados de caminho de dois fótons medidos ao longo do tempo. Pode-se ver que as populações vão se equilibrando até $\gamma t = 1.0$ e após esse tempo começam a se desequilibrar, tendendo à estados de fenda que correspondem aos níveis de menor energia. Além disso, podemos ver que com o passar do tempo, o estado tende para o estado $|\psi(t \rightarrow \infty)\rangle = |02\rangle$, como esperado.

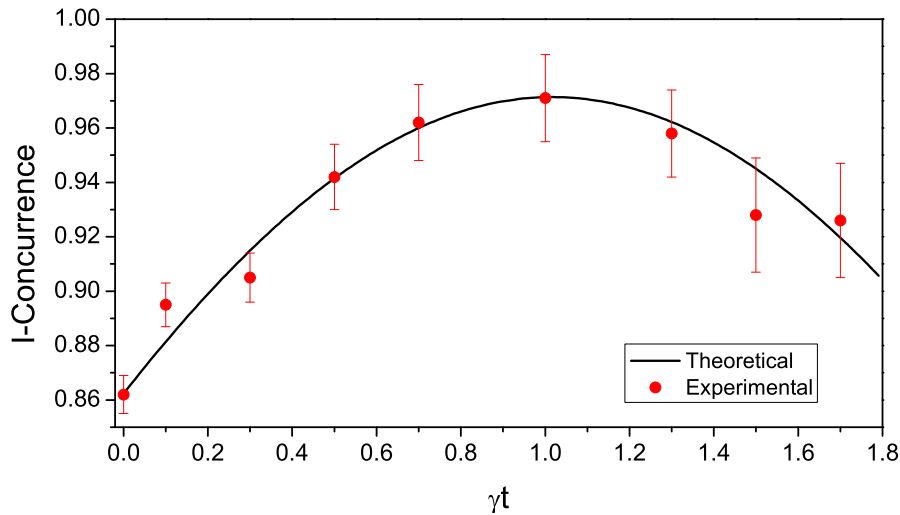


FIGURA 5.9: Gráfico do emaranhamento em função de γt que mostra os os valores da I-concorrência para os estados medidos após a implementação do mapa de amplitude (pontos) e compara com o valor previsto teoricamente (linha).

TABELA 5.3: Medidas das populações para os estados do sistema para diferentes valores de γt . Foi calculado a I-Concorrência [110] para cada γt , $C_{exp}(|\psi(\gamma t)\rangle)$, e comparada com o emaranhamento previsto, $C_{prev}(|\psi(\gamma t)\rangle)$. Podemos usar o emaranhamento para identificar se o mapa foi implementado corretamente.

	$\gamma t = 0.0$	$\gamma t = 0.1$	$\gamma t = 0.3$	$\gamma t = 0.5$	$\gamma t = 0.7$	$\gamma t = 1.0$	$\gamma t = 1.3$	$\gamma t = 1.5$	$\gamma t = 1.7$
$ 0, 0\rangle$	24 ± 5	21 ± 5	19 ± 4	28 ± 5	16 ± 4	17 ± 4	33 ± 6	12 ± 3	22 ± 5
$ 0, 1\rangle$	0 ± 0	2 ± 1	6 ± 3	1 ± 1	10 ± 3	1 ± 1	0 ± 0	4 ± 2	0 ± 0
$ 0, 2\rangle$	249 ± 16	220 ± 15	262 ± 16	252 ± 16	273 ± 17	232 ± 16	248 ± 16	245 ± 16	252 ± 16
$ 1, 0\rangle$	4 ± 2	0 ± 0	12 ± 3	20 ± 4	1 ± 1	6 ± 2	9 ± 3	3 ± 2	7 ± 3
$ 1, 1\rangle$	953 ± 31	814 ± 29	775 ± 28	517 ± 23	465 ± 22	339 ± 18	345 ± 19	227 ± 15	125 ± 11
$ 1, 2\rangle$	10 ± 3	4 ± 2	1 ± 1	7 ± 3	4 ± 2	0 ± 0	0 ± 0	2 ± 1	1 ± 1
$ 2, 0\rangle$	2042 ± 45	1490 ± 39	1222 ± 35	635 ± 23	476 ± 22	290 ± 18	265 ± 16	98 ± 10	120 ± 11
$ 2, 1\rangle$	10 ± 3	4 ± 2	11 ± 3	0 ± 0	3 ± 2	5 ± 2	1 ± 1	0 ± 0	3 ± 1
$ 2, 2\rangle$	11 ± 3	0 ± 0	5 ± 2	2 ± 1	2 ± 1	0 ± 0	4 ± 2	0 ± 0	0 ± 0
$C_{exp}(\psi(\gamma t)\rangle)$	0.862 ± 0.007	0.895 ± 0.008	0.905 ± 0.009	0.942 ± 0.012	0.962 ± 0.014	0.971 ± 0.016	0.958 ± 0.016	0.928 ± 0.021	0.926 ± 0.021
$C_{prev}(\psi(\gamma t)\rangle)$	0.864	0.881	0.914	0.942	0.960	0.972	0.962	0.945	0.919

5.5 CONCLUSÃO

Apresentamos resultados que simulam as dinâmicas de qudits interagindo com o reservatório. Os qudits codificados em caminho, juntamente com um SLM, mostraram que este sistema pode simular dinâmicas de sistemas quânticos abertos. Os mapas implementados são gerais e simulam a dinâmica para qualquer estado inicial, além de serem facilmente estendíveis para sistemas de diferentes dimensões. Conseguimos com sucesso implementar o mapa completo de defasagem. Já para o mapa de amplitude, conseguimos mostrar a dinâmica sem saltos. Nos dois casos vimos uma boa concordância entre os resultados experimentais e o esperado teoricamente. Para identificar o sucesso da implementação nós usamos um parâmetro que representa a principal característica do mapa. No mapa da defasagem usamos as medidas do padrão de interferência para calcular o parâmetro p , que nos permite caracterizar a perda de coerência do sistema. Já no de amplitude nós medimos a população, nos permitindo identificar as modificações das populações, característica da atuação desse tipo de mapa.

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

Os trabalhos apresentados nesta tese tiveram como objetivo estudar e implementar processos quânticos usando moduladores espaciais de luz e qudits codificados em caminho. O uso do SLM foi de grande importância nos três trabalhos e se mostrou uma ferramenta muito eficaz para implementação de operações quânticas de maneira simples. Procedimentos que necessitam de um conjunto grande de operações se beneficiam da facilidade de modificar as modulações aplicadas pelo SLM. O acréscimo de mais de um SLM na montagem experimental permite executar tarefas ainda mais complexas em nosso sistema, permitindo a implementação de processos quânticos mais elaborados.

No Capítulo 3, onde relatamos o experimento do algoritmo de Deutsch mínimo, conseguimos com sucesso executar as operações necessárias para sua implementação. O SLM foi usado como oráculo aplicando as 4 funções possíveis em um qubit codificado usando os caminhos de um fóton passando por uma fenda dupla. Além disso, foi feita uma discussão sobre a melhoria específica da implementação quântica em comparação com a clássica. Uma parte da discussão importante nesse trabalho foi a análise de como a medida muda a eficiência do algoritmo. Nessa análise, conseguimos entender melhor os projetores que medimos, nos permitindo ter um controle ainda melhor sobre a sua implementação.

No Capítulo 4, demos o protocolo ótimo para a concentração de emaranhamento de dois qutrits de caminho. No protocolo de concentração foram usadas medidas generalizadas em um par de fótons. Essas medidas foram implementadas através de um interferômetro de Sagnac com um SLM substituindo um dos espelhos. O uso do momento longitudinal como grau de liberdade auxiliar em operações de qudits codificados em caminho transversal se mostra promissor para outros trabalhos que virão. Um trabalho que está em andamento e usa essa técnica é a visualização da fase topológica em qudits.

Finalmente, no Capítulo 5, a simulação de dinâmicas dissipativas em qudits foi implementada com sucesso. Usando qudits codificados em caminho, juntamente com um SLM, foi possível mostrar que esse tipo de montagem experimental consegue simular dinâmicas de sistemas quânticos aberto. Conseguimos com sucesso implementar o mapa completo de defasagem. Já

o mapa da amplitude conseguimos mostrar a dinâmica sem saltos. Nos dois casos vimos uma boa concordância entre os resultados experimentais e o esperado teoricamente. Porém, nesse experimento, uma restrição de nossa montagem experimental se mostrou presente, o SLM só consegue fazer operações diagonais. Caso fosse possível implementar mapas não diagonais, também conseguiríamos implementar o mapa completo de amplitude. Isso é um desafio que ainda temos e, caso consigamos implementar esse tipo de operação, essa montagem experimental se tornará ainda mais abrangente.

Acreditamos que o uso do SLM em experimentos com qudits codificados em caminho é uma boa possibilidade para implementação de processos quânticos. Ao longo desses últimos anos, após dominar as operações do SLM, vimos que ele é uma ferramenta que trás uma gama muito grande de operações disponíveis para manipular qudits. Mesmo assim, ainda vemos a possibilidade de usá-lo de maneiras distintas das atuais, permitindo, assim, abrir ainda mais o leque de possibilidades.

APÊNDICE A

CRIANDO IMAGENS PARA O SLM USANDO O MATLAB

Para criar as imagens do SLM foi usado o Matlab R2010a. Para facilitar nós dividimos a criação da imagem em 4 partes: definição dos parâmetros, tamanho da imagem, criação das regiões e criação da imagem. Os programas e funções para definir as imagens para o SLM a seguir podem ser copiados sem nenhuma instalação extra de pacotes que funcionará sem maiores complicações e a maior parte do mérito é do Doutorando Marcos Aurélio. Aqui exemplificaremos somente um programa, porém, caso seja entendido o seu funcionamento, modificá-lo para outros usos é simples. Nós usamos como base para criar os nossos programas a dissertação de mestrado de Martin Stütz [232] com o Professor Anton Zeilinger. Os programas estão comentados (% define o que é comentário) para facilitar o entendimento e, como exemplo, esse programa gera imagens com 4 regiões com graus de cinza diferentes para o SLM Holoeye LCD LC-R 2500 (Imagem gerada na Figura A.1). Para modificar entre SLMs com tamanho de telas e resoluções diferentes é necessário trocar a variável do pixel, na parte “criação das regiões” e o tamanho do espaço, na parte “tamanho da imagem”.

- **Definição de Parâmetros:**

```
NOME = 'REGIAO_3.bmp'; % Define o nome da imagem que será gerada. O formato é .bmp  
  
G = [0 70; 140 210]; % Matriz que representa os graus de cinza para cada região.  
  
D = [50 -100; 200 50]; % Matrix que representa quais são os pixels que vão ser a interfasse entre duas regiões  
  
writegraybmp3(cria4regioes(G(1,1), G(1,2), G(2,1), G(2,2), D(1,1), D(1,2), D(2,1), D(2,2)),  
NOME); % Chama as próximas funções para fazer a imagem.
```

- **Tamanho da imagem:**

```
function [X,Y] = xgagrid(z) % Produz um mesh bidimensional de coordenadas  
extendendo de [-4z/3,4z/3] X [-z,z] com 1024 x 768 pontos.  
  
[X,Y] = meshgrid(linspace(-4/3 * z, 4/3 * z, 1024), linspace(-z, z, 768));
```

- **Criação das regiões:**

```
function [cria4regioes] = cria4regioes (g11,g12,g21,g22,d11,d12,d21,d22)
[x,y] = xgagrid(0.0146/2); % chama a função de criação da grade que vai definir a imagem.
o valor 0.0146 é a menor dimensão da tela em metros.

d = 0.000019010416666666; % Tamanho do pixel

a11 = (y < d * d11)&(x < d * d12); % Define a região superior esquerda
a12 = (y >= d * d11)&(x < d * d21); % Define a região inferior esquerda
a21 = (y < d * d22)&(x >= d * d12); % Define a região superior direita
a22 = (y >= d * d22)&(x >= d * d21); % Define a região inferior direita

cria4regioes = a11 * g11 + a12 * g12 + a21 * g21 + a22 * g22; % monta as 4 regiões com
os respectivos valores.
```

- **Criação da imagem:**

```
function writegraybmp3(IMG, filename) % cria uma imagem em tons de cinza em .bmp
usando os parâmetros de IMG e com nome filename

imwrite(IMG, grays, filename)
```



FIGURA A.1: Imagem mostrando o que foi gerado pelo método mostrado neste apêndice.

APÊNDICE B

PROJETORES EM UM PADRÃO DE INTERFERÊNCIA

Quando é realizado uma medição de um fóton em um estado de momento ou caminho transversal [19, 233], é comumente usado um conjunto de lentes juntamente com um detector que possa ser movimentado perpendicularmente à propagação do feixe. Neste apêndice descreveremos o caso mais simples de detecção, onde se tem uma lente de foco f entre as fendas e o detector como mostrado na Figura B.1. Inicialmente consideraremos o caso mais geral possível, onde não tem relação nenhuma entre as distâncias entre os componentes ópticos e o foco da lente.

Uma medida projetiva no sistema de fendas pode ser descrita pela equação

$$p(x, z) = \text{Tr}[\Pi(x, z)\rho], \quad (\text{B.1})$$

onde $p(x, z)$ é a probabilidade de detectar o estado ρ associado ao operador de medida $\Pi(x, z)$ [33, 35], onde x é a posição transversal do detector e z é a distância entre o detector e as fendas.

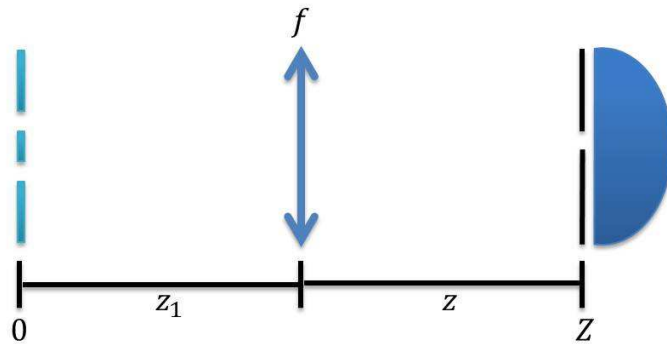


FIGURA B.1: Esquema simplificado da montagem usada para fazer as medidas usando uma lente entre a fenda e o detector. A distância entre a fenda e a lente é de z_1 e da lente ao detector é de z .

Podemos escrever o estado de fendas geral de um qudit (dimensão D) sendo:

$$\rho = \sum_{\ell, m=0}^{D-1} \rho_{\ell, m} |\ell\rangle \langle m|, \quad (\text{B.2})$$

onde $|\ell\rangle$ ¹ foram definidos na equação 2.38. Como o detector usado destrói o fóton na medição [15, 128], podemos descrever o operador de medida $\Pi(x, z) = E^-(x, z)E^+(x, z)$, onde $E^-(x, z)$ ($E^+(x, z)$) é o operador o campo elétrico, de frequência positiva (negativa), proporcionais ao operador de destruição a (criação $a^\dagger$) do fóton no plano z . O projetor pode ser escrito na base das fendas sendo:

$$\Pi(x, z) = \sum_{\ell, m} [\langle m| E^-(x, z) |vac\rangle \langle vac| E^+(x, z) |\ell\rangle] |m\rangle \langle \ell|. \quad (\text{B.3})$$

Então, para sabermos como são as medidas no plano do detector é necessário calcular a propagação do operador campo elétrico do plano das aberturas, $E^+(x, 0)$, até o plano detector, $E^-(x, Z)$. Para isso usaremos os princípios da óptica de Fourier [153].

B.1 PROPAGAÇÃO DO CAMPO USANDO ÓPTICA DE FOURIER

Considere um campo elétrico $v(\vec{r}, t)$ monocromático e escalar. Como esse campo tem uma dependência bem definida no tempo, podemos separar a componente temporal da espacial, $v(\vec{r}, t) = V(\vec{r})e^{i\omega t}$, onde ω é a frequência angular. Se a onda eletromagnética se propaga em um meio linear e isotrópico, a componente espacial da equação da onda satisfaz a equação de Helmholtz:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) + k^2 V(\vec{r}) = 0, \quad (\text{B.4})$$

com $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$ sendo o módulo ao quadrado do vetor de onda, onde μ e ϵ são a permissividade e permeabilidade do meio, respectivamente. O vetor de onda total pode ser dividido em uma parte transversal q e outra longitudinal k_z ,

$$k^2 = k_z^2 + q^2. \quad (\text{B.5})$$

Em nosso caso podemos considerar o sistema contendo duas dimensões²: uma componente de propagação longitudinal (z) e uma componente transversal (x), onde o campo pode ser reescrito na forma $V(x, z)$. Esse campo pode ser escrito como uma expansão infinita de ondas planas, com vetor de onda transversal q , com peso:

$$\tilde{E}(q, z) = \frac{1}{2\pi} \int V(x, z) e^{iqx} dx, \quad (\text{B.6})$$

¹Rotular as fendas usando $\{-\ell_D, \ell_D\}$ ou $\{0, D-1\}$ é análogo e não muda nada nas contas feitas neste apêndice.

²Por estarmos trabalhando com um sistema de fendas estreitas, a maior dimensão da abertura na fenda pode ser desconsiderada em nossa análise.

onde é definido como espectro angular do campo.

Quando um campo se propaga através de um dispositivo óptico cuja função transmissão é dada por $S(x)$, a relação entre os campos incidente ($E_{in}(x, z)$) e transmitido ($E_{out}(x, z)$) é dada por

$$E_{out}(x, z) = S(x)E_{in}(x, z). \quad (B.7)$$

Já o espectro angular pode ser obtido da convolução das duas funções:

$$\tilde{E}_{out}(q, z) = \frac{1}{2\pi} \int s(q - q') \tilde{E}_{in}(q', z) dq', \quad (B.8)$$

onde $s(q)$ é a transformada de Fourier de S . Através do uso das equações B.7 e B.8 é possível obter o campo transmitido por um conjunto de elementos ópticos distribuídos ao longo do caminho percorrido. Uma forma conveniente de tratar este problema é definir operações lineares para cada componente óptico ou propagação livre. Através da atuação em série desses operadores podemos obter o campo transmitido em função do campo incidente e parâmetros dos elementos ópticos e geométricos da montagem.

Para simplificar os cálculos podemos nos restringir à porção da frente de onda que está próxima ao eixo de propagação, conhecido como aproximação paraxial, podendo expandir k_z em série de Taylor e considerar somente os dois primeiros termos da expansão da equação B.5:

$$k_z = \sqrt{k^2 - q^2} \approx k(1 - \frac{q^2}{2k^2}), \quad (B.9)$$

essa aproximação nos permite encontrar o campo transmitido através de uma lente de foco f de maneira simples sendo [153, 234]:

$$E_{out}(x, z) = Q(-\frac{1}{f})E_{in}(x, z) = e^{-i\frac{kx^2}{2f}} E_{in}(x, z); \quad (B.10)$$

onde $Q(-1/f)$ é a função transmissão através de uma lente convergente de foco f . O campo propagado livremente por uma distância d sendo:

$$E_{out}(x, z + d) = R(d)E_{in}(x, z) = \sqrt{\frac{k}{2\pi id}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{k}{2d}(x-x')^2} E_{in}(x', z) dx', \quad (B.11)$$

onde $R(d)$ é um operador integral linear. Além disso, para nos auxiliar em nossa análise, ainda podemos definir outras duas funções: mudança de escala

$$E_{out}(x, z) = P(b)E_{in}(x, z) = \sqrt{|b|} E_{in}(bx, z) \quad (B.12)$$

e transformada de Fourier

$$E_{out}(x, z) = \tilde{E}_{in}(x, z) = F\{E(x, z)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixp} E_{in}(p, z) dp, \quad (B.13)$$

TABELA B.1: Relações entre operadores. [153, p. 118]

	P	F	Q	R
P	$P[t_2]P[t_1] = P[t_2t_1]$	$P[t]F = FP[\frac{1}{t}]$	$P[t]Q[c] = Q[t^2c]P[t]$	$P[t]R[d] = R[\frac{d}{t^2}]V[t]$
F	$FP[t] = P[\frac{1}{t}]F$	$FF = P[-1]$	$FQ[c] = R[-\frac{c}{\lambda^2}]F$	$FR[d] = Q[-\lambda^2d]F$
Q	$Q[c]P[t] = P[t]Q[\frac{c}{t^2}]$	$Q[c]F = FR[-\frac{c}{\lambda^2}]$	$Q[c_2]Q[c_1] = Q[c_2 + c_1]$	$Q[c]R[d] = R[(d^{-1} + c)^{-1}] \cdot P[1 + cd] \cdot Q[(c^{-1} + d)^{-1}]$
R	$R[d]P[t] = V[t]R[t^2d]$	$R[d]F = FQ[-\lambda^2d]$	$R[d]Q[c] = Q[(c^{-1} + d)^{-1}] \cdot P[(1 + cd)^{-1}] \cdot R[(d^{-1} + c)^{-1}]$	$R[d_2]R[d_1] = R[d_1 + d_2]$

onde $P(b)$ e $F\{E(x)\}$ são respectivamente as operações de mudança de escala e de transformada de Fourier. Com esses quatro operadores mais as relações entre os mesmos definidos na tabela B.1, podemos fazer a propagação do campo ao longo de lentes com facilidade (veja referência [153] para maior detalhes).

B.2 CÁLCULO DO OPERADOR DE MEDIDA

Podemos calcular o campo propagado das fendas até o detector, como mostrado na Figura B.1, da seguinte forma:

$$E(x, Z) = R(z_l)Q(-1/f)R(z)E(x, 0). \quad (\text{B.14})$$

Inicialmente não faremos nenhuma relação entre as distâncias entre as fendas e a lente, e entre a lente e o detector. Usando a igualdade $R(a+b) = R(a)R(b)$ podemos reescrever a equação anterior como:

$$\begin{aligned} E(x, Z) &= R(z_l - f)R(f)Q\left(-\frac{1}{f}\right)R(f)R(z - f)E(x, 0) \\ &= R(z_l - f)P\left(\frac{1}{\lambda f}\right)F\{R(z - f)E(x, 0)\}, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

em que da primeira para segunda linha da equação B.15 foi usada a relação $R(f)Q(-1/f)R(f) = P[1/(\lambda f)]F$. Modificando a ordem de atuação das funções usando as relações da tabela B.1 temos:

$$\begin{aligned} E(x, Z) &= R(z - f)Q\left(\frac{z_l - f}{f^2}\right)P\left(\frac{k}{f}\right)F\{E(x, 0)\} \\ &= R(z - f)Q\left(\frac{z_l - f}{f^2}\right)\tilde{E}\left(\frac{kx}{f}, 0\right). \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Agora, com as simplificações e rearranjos feitos entre os operadores, podemos explicitar o campo no plano do detector:

$$\begin{aligned} E(x, Z) &\propto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{k(x-x')^2}{2(z-f)}} e^{i\frac{kx'^2(z_l-f)}{2f^2}} \tilde{E}\left(\frac{kx'}{f}, 0\right) \\ &\propto e^{i\frac{kx^2}{2(z-f)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ikxx'}{z-f}} e^{-ikx'^2 \frac{f^2-(z_l-f)(z-f)}{2f^2(z-f)}} \tilde{E}\left(\frac{kx'}{f}, 0\right). \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

No caso de nosso experimento temos que $z = f$, reduzindo a equação anterior à

$$E(x, Z) \propto e^{-ikx^2 \frac{z_l-f}{2f^2}} \tilde{E}\left(\frac{kx}{f}, 0\right). \quad (\text{B.18})$$

onde $\tilde{E}(kx'/f, 0)$ é o espectro angular do campo logo após as fendas.

Agora com a evolução do campo elétrico feita, podemos escrever o operador campo elétrico no plano do detector, fazendo a quantização através de:

$$E^+(x, Z) \propto e^{-ikx^2 \frac{z_l-f}{2f^2}} a\left(\frac{kx}{f}\right) \quad \text{SE } z = f, \quad (\text{B.19})$$

e usá-lo para calcular o projetor descrito na equação B.3 como:

$$\begin{aligned} \Pi(x, Z) &\propto \sum_{\ell, m} \left[e^{-ikx^2 \frac{z_l-f}{2f^2}} \langle m | a^\dagger\left(\frac{kx}{f}\right) | vac \rangle e^{ikx^2 \frac{z_l-f}{2f^2}} \langle vac | a\left(\frac{kx}{f}\right) | \ell \rangle \right] | m \rangle \langle \ell | \\ &\propto \sum_{\ell, m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iqld} \text{sinc}(qa) \langle vac | a^\dagger\left(\frac{kx}{f}\right) | 1, q \rangle dq \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} e^{iq'ld} \text{sinc}(q'a) \langle 1, q' | a\left(\frac{kx}{f}\right) | 1, q' \rangle dq' | m \rangle \langle \ell | \\ \Pi(x, Z) &= N \sum_{\ell, m} e^{-i(\ell-m) \frac{kxd}{f}} \text{sinc}^2\left(\frac{ka}{f}x\right) | m \rangle \langle \ell |, \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

onde N é uma constante de normalização e $\langle vac | a(\alpha) | 1, \beta \rangle = \delta(\alpha - \beta)$. Note que, a equação B.20 nos diz qual é o projetor, dependendo da posição do detector. No caso do algoritmo de Deutsch mostrado no capítulo 3, as medidas foram feitas com o detector parado em $x = 0$, e vemos que:

$$\Pi(0, Z) = N \sum_{\ell, m} | m \rangle \langle \ell | \propto | + \rangle \langle + |, \quad (\text{B.21})$$

onde $| + \rangle = 1/\sqrt{2}(| 0 \rangle + | 1 \rangle)$, mostrando que o projetor que estamos medindo é proporcional ao operador de medida necessário para a demonstração do algoritmo de Deutsch.

Podemos calcular a probabilidade de detectar um fóton no estado $\rho = \sum \rho_{rt} | r \rangle \langle t |$ à distância focal de uma lente de comprimento focal f , i. e., no plano de Fourier, utilizando a equação B.20.

A probabilidade de detectar um fóton na posição x no plano do detector é dada por:

$$p_d(x, Z) = \text{Tr} [\Pi(x, Z)\rho] \\ = N \text{sinc}^2 \left(\frac{ka}{f} x \right) \sum_{s=0}^1 \langle s | \left[\sum_{\ell, m, r, t=0}^1 e^{-i(\ell-m) \frac{kxd}{f}} |m\rangle \langle \ell| \rho_{r,t} |r\rangle \langle t| \right] |s\rangle \quad (\text{B.22})$$

$$= N \text{sinc}^2 \left(\frac{ka}{f} x \right) \sum_{s, \ell, m, r, t} e^{-i(\ell-m) \frac{kxd}{f}} \rho_{r,t} \delta_{s,\ell} \delta_{m,r} \delta_{t,s} \\ = N \text{sinc}^2 \left(\frac{ka}{f} x \right) \sum_{\ell, m=0}^1 e^{-i(\ell-m) \frac{kxd}{f}} \rho_{m,\ell}. \quad (\text{B.23})$$

Se usarmos que o estado quântico tem que ser hermitiano ($\rho_{m,\ell} = \rho_{\ell,m}^*$) e que o traço é unitário, quando abrimos a soma obtemos:

$$p_d(x, Z) = N \text{sinc}^2 \left(\frac{ka}{f} x \right) \left[\rho_{0,0} + \rho_{1,1} + |\rho_{0,1}| \left(e^{-i \frac{kxd}{f} + \phi} + e^{i \frac{kxd}{f} - \phi} \right) \right] \\ p_d(x, Z) = N \text{sinc}^2 \left(\frac{ka}{f} x \right) \left[1 + 2|\rho_{0,1}| \cos \left(\frac{kxd}{f} - \phi \right) \right], \quad (\text{B.24})$$

onde para os termos fora da diagonal foi usado que $\rho_{0,1} = |\rho_{0,1}| e^{i\phi}$. Podemos ver que a probabilidade de encontrar o fóton no plano do detector segue o mesmo perfil de um padrão de interferência clássica, como esperado para o estado de um fóton.

B.3 DETECTOR FINITO

Usando os resultados mostrados na equação B.20 podemos fazer um tratamento mais real de nossas medidas, considerando o detector finito. Supondo um detector com abertura $2b$ e centrado em x_0 temos:

$$\Pi'(x_0, Z) = \sum_{m,\ell} \int_{x_0-b}^{x_0+b} \text{sinc}^2 \left(\frac{kax}{f} \right) e^{-i(\ell-m) \frac{kxd}{f}} dx |m\rangle \langle \ell|. \quad (\text{B.25})$$

No trabalho do algoritmo de Deutsch, descrito no capítulo 3, a análise foi feita usando esse tipo de projetor. Para os outros casos, onde o detector pode ser considerado pequeno ($ka/f \gg 1/b$) podemos considerar que a sinc é constante na abertura do detector. Com essa consideração e a substituição de variável $x = x' + x_0$, a equação B.25 pode ser reescrita como:

$$\Pi'(x, Z) = N \text{sinc}^2 \left(\frac{kax_0}{f} \right) \sum_{m,\ell} e^{-i(\ell-m) \frac{kxd_0}{f}} \int_{-b}^b e^{-i(\ell-m) \frac{kxd'}{f}} dx' |m\rangle \langle \ell| \\ = 2Nb \text{sinc}^2 \left(\frac{kax_0}{f} \right) \sum_{m,\ell} \text{sinc} \left[(\ell-m) \frac{kdb}{f} \right] e^{-i(\ell-m) \frac{kxd_0}{f}} |m\rangle \langle \ell|. \quad (\text{B.26})$$

Note que o tamanho do detector diminui as componentes de coerência do operador de medida, fazendo com que ele não seja mais um projetor (caso de $b = 0$), logo diminuindo a quantidade de

informação adquirida pela medida. Para exemplificar isso podemos usar o caso de duas fendas, em que podemos decompor o operador de medida em matrizes de Pauli (σ_j com $j = x, y, z$):

$$\Pi'(x, Z) = 2N \text{sinc}^2 \left(\frac{kax_0}{f} \right) \left\{ I_2 + \text{sinc} \left(\frac{kdb}{f} \right) \left[\cos \left(\frac{kx_0d}{f} \right) \sigma_x + \sin \left(\frac{kx_0d}{f} \right) \sigma_y \right] \right\}, \quad (\text{B.27})$$

com I_2 sendo a identidade. Na equação B.27 pode-se ver que, dependendo do tamanho do detector, a informação adquirida pela detecção do fóton pode ser nula, ocorrendo quando $kdb/f = n\pi$, com $n = \{1, 2, 3 \dots\}$.

B.4 SOMA DE DUAS LENTES PARA FORMAÇÃO DO PADRÃO DE INTERFERÊNCIA

Nas medidas do experimento onde é simulado um ambiente de defasagem, mostradas na seção 5.3, diferente das medidas tratados até agora neste apêndice, foram usadas duas lentes, uma para projetar a imagem no segundo SLM e outra para medirmos o padrão de interferência no plano do detector, como mostrado na Figura B.2. Podemos usar o método explicado na seção B.1 para essa situação, escrevendo a propagação do campo como:

$$E(x, Z) = R(z)Q \left(-\frac{1}{f_2} \right) R(z_2)Q \left(-\frac{1}{f_1} \right) R(z_1)E(x, 0). \quad (\text{B.28})$$

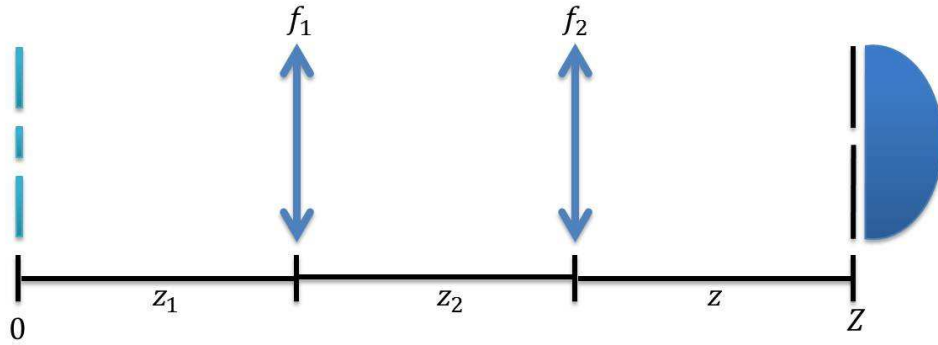


FIGURA B.2: Esquema simplificado da montagem usada para fazer as medidas dos padrões de interferência na defasagem. Foram usadas duas lentes com foco f_1 e f_2 , onde a distância das fendas e a primeira lente é z_1 , a distância entre as duas lentes é z_2 e da segunda lente e o detector é z .

Podemos simplificar a equação B.28 para chegar em algo semelhante a equação B.16:

$$\begin{aligned}
E(x, Z) &= R(z)Q\left(-\frac{1}{f_2}\right)R(z_2 - f_1)R(f_1)Q\left(-\frac{1}{f_1}\right)R(f_1)R(z_1 - f_1)E(x, 0) \\
&= R(z)Q\left(-\frac{1}{f_2}\right)R(z_2 - f_1)P\left(-\frac{k}{f_1}\right)F\{R(z_1 - f_1)E(x, 0)\} \\
&= R(z)Q\left(-\frac{1}{f_2}\right)R(z_2 - f_1)Q\left(-\frac{z_1 - f_1}{f_1^1}\right)\tilde{E}\left(\frac{kx}{f_1}, 0\right). \tag{B.29}
\end{aligned}$$

Mudando a ordem de atuação $R(z_2 - f_1)$ com o $Q(-1/f_2)$ como mostrado na tabela B.1 podemos reescrever a propagação sendo:

$$\begin{aligned}
E(x, Z) &= R(Z)R\left[-\frac{f_2(z_2 - f_1)}{z_2 - f_1 - f_2}\right]V\left(1 - \frac{z_2 - f_1}{f_2}\right) \\
&\quad \times Q\left(\frac{1}{z_2 - f_1 - f_2}\right)Q\left(-\frac{z_1 - f_1}{f_1^1}\right)\tilde{E}\left(\frac{kx}{f_1}, 0\right) \\
E(x, Z) &= R\left[z - \frac{f_2(z_2 - f_1)}{z_2 - f_1 - f_2}\right]Q(\alpha)\tilde{E}\left[\left(1 - \frac{z_2 - f_1}{f_2}\right)^{-1}\frac{kx}{f_1}, 0\right], \tag{B.30}
\end{aligned}$$

onde α^3 é uma constante que depende das distâncias dos elementos e dos focos da lentes. Para que seja formado o padrão de interferência no plano do detector é necessário que o termo do operador R seja nulo na equação B.30, então:

$$z - \frac{f_2(z_2 - f_1)}{z_2 - f_1 - f_2} = 0. \tag{B.31}$$

Pelas distâncias em nossa montagem experimental mostrada na Figura 5.2, temos que $f_1 = 125 \text{ mm}$ e $z_2 = 415 \text{ mm}$; $f_2 = 200 \text{ mm}$ e $z = 325 \text{ mm}$ para obtermos o padrão de interferência no plano do detector. Note que, por usarmos duas lentes dessa forma, perdemos um pouco a resolução espacial em relação a quando usamos somente uma lente, fazendo com que o tamanho do padrão possua uma diminuição para 62%.

B.5 PADRÃO DE INTERFERÊNCIA CONDICIONAL DOS FÓTONS GÊMEOS

Vamos considerar nessa seção a montagem mostrada na Figura 5.2, onde um dos fótons está com uma lente (idler), como descrito na seção B.2, e o outro está na configuração de duas lentes (signal), descrita na seção B.4. A medida em coincidência entre os dois sistemas pode ser escrito como:

$$p(x_s, x_i) = \text{Tr} [\Pi(x_i, Z) \otimes \Pi(x_s, Z)\rho]. \tag{B.32}$$

³Como o $Q(\alpha)$ só vai dar uma fase global no sistema, não a explicitamos na equação. De qualquer forma, $\alpha = -(f_1^2 + f_2^2 - f_2 z_1 + z_1 z_2 - f_1(z_1 + z_2 - f_2))/f_2^3$.

Nessa montagem experimental o operador de medida que define a detecção do idler é descrito pela equação B.26, e o operador de medida que descreve a detecção do sinal é dada quando consideramos o campo propagado da equação B.30 incidindo em um detector finito que pode ser escrito explicitamente como:

$$\Pi(x_s) = 2N' \text{sinc}^2 \sum_{r,s} \text{sinc} \left[(r-s) \frac{kdb}{f_2\beta} \right] e^{-(r-s) \frac{k_d}{f_2\beta}} |r\rangle \langle s|, \quad (\text{B.33})$$

onde $2b$ é a largura da fenda no detector, N' é uma constante de normalização e

$$\beta = \frac{f_2}{f_1} - \frac{z_2 - f_1}{f_1} \quad (\text{B.34})$$

é o fator de escala que aparece com a propagação do operador pelas duas lentes. Com os dois operadores de medida definidos é possível obter explicitamente o padrão de interferência previsto nessa configuração através dos projetores na equação B.32:

$$\begin{aligned} p(x_s, x_i) &= 4NN' \text{sinc}^2 \left(\frac{kax_i}{f} \right) \text{sinc}^2 \left(\frac{kax_s}{f\beta} \right) \\ &\times \left[1 + \sum_{\ell \neq m, r \neq s = -\ell_d}^{\ell_d} |\langle \ell, r | \rho | m, s \rangle| \text{sinc} \left((\ell - m) \frac{kdb}{f} \right) \text{sinc} \left((r - s) \frac{kdb}{f\beta} \right) \right. \\ &\times \left. \exp \left(i(\ell - m) \frac{kx_i d}{f} + i(r - s) \frac{kx_s d}{f\beta} + i \arg(\langle \ell, r | \rho | m, s \rangle) \right) \right]. \quad (\text{B.35}) \end{aligned}$$

Como na nossa montagem a segunda lente por onde o sinal passa tem o mesmo foco que a lente do idler, tem-se que $f_2 = f$. Por a matriz densidade ser hermitiana, podemos reescrever a equação B.35 agrupando os termos conjugados:

$$\begin{aligned} p(x_s, x_i) &= 4NN' \text{sinc}^2 \left(\frac{kax_i}{f} \right) \text{sinc}^2 \left(\frac{kax_s}{f\beta} \right) \\ &\times \left[1 + \sum_{\ell > m, r > s = -\ell_d}^{\ell_d} |\langle \ell, r | \rho | m, s \rangle| \text{sinc} \left((\ell - m) \frac{kdb}{f} \right) \text{sinc} \left((r - s) \frac{kdb}{f\beta} \right) \right. \\ &\times \left. \cos \left((\ell - m) \frac{kx_i d}{f} + (r - s) \frac{kx_s d}{f\beta} + \arg(\langle \ell, r | \rho | m, s \rangle) \right) \right]. \quad (\text{B.36}) \end{aligned}$$

A equação acima descreve qualquer padrão de interferência de dois qudits de caminho, independente do estado, na montagem experimental mostrada na Figura 5.2.

ARTIGOS PUBLICADOS

- ✓ W. M. Pimenta, B. Marques, M. A. Carvalho, M. R. Barros, J. G. Fonseca, J. Ferraz, M. Terra Cunha e S. Pádua; *Minimal state tomography of spatial qubits using a spatial light modulator*, *Optics Express* **18**, 24423 (2010).
- ✓ E. C. M. Mascarenhas, B. Marques, D. Cavalcanti, M. Terra Cunha e M. França Santos; *Protection of quantum information and optimal singlet conversion through higher-dimensional quantum systems and environment monitoring*, *Physical Review A* **81**, 032310 (2010).
- ✓ E. C. M. Mascarenhas, B. Marques, M. Terra Cunha e M. França Santos; *Continuous quantum error correction through local operations*, *Physical Review A* **82**, 032327 (2010).
- ✓ A. J. Gutiérrez-Esparza, W. M. Pimenta, B. Marques, A. A. Matoso, M. Lucio e S. Pádua; *Experimental characterization of two spatial qutrits using entanglement witnesses*, *Optics Express* **20**, 26351 (2012).
- ✓ B. Marques, M. R. Barros, W. M. Pimenta M. A. Carvalho, J. Ferraz, R. Drumond, M. Terra Cunha e S. Pádua ; *Double-slit implementation of the minimal Deutsch algorithm.*, *Physical Review A* **86**, 032306 (2012).
- ✓ A. Z. Khoury, L. E. Oxman, B. Marques, A. A. Matoso, S. Pádua *Fractional topological phase on spatially encoded photonic qudits*, *Physical Review A* **87**, 042113 (2013).

-  B. Marques, A. A. Matoso, W. M. Pimenta, A. J. Gutiérrez-Esparza, G. Lima, L. Neves, A. Delgado, C. Saavedra e S. Pádua *Optimal entanglement concentration for photonic qutrits encoded in path variables*, submetido à *Physical Review A*.
-  W. M. Pimenta, B. marques, T. Maciel, R. O. Vianna, A. Delgado, C. Saavedra e S. Pádua *Minimum tomography of two entangled qutrits using local measurements of one-qutrit SIC-POVM*, submetido à *Physical Review A*.
-  B. Marques, A. A. Matoso, W. M. Pimenta, A. J. Gutiérrez-Esparza, M. F. Santos e S. Pádua *Simulation of dissipative dynamics using spatial light modulator on photonic qutrits encoded in path variables*, em preparação para ser submetido à *New Journal of Physics*.

- [1] MICHAEL A. NIELSEN AND ISAAC L. CHUANG. *Quantum Computation and Quantum Information*. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2000.
- [2] J.-W. PAN, Z.-B. CHEN, C.-Y. LU, H. WEINFURTER, A. ZEILINGER, AND M. ZUKOWSKI. MULTI-PHOTON ENTANGLEMENT AND INTERFEROMETRY. *Review Modern Physics*, 84:777–838, 2012.
- [3] T. VÉRTESI, S. PIRONIO, AND N. BRUNNER. CLOSING THE DETECTION LOOPHOLE IN BELL EXPERIMENTS USING QUDITS. *Physical Review Letters*, 104:060401, 2010.
- [4] A. CABELLO. EXPERIMENTALLY TESTABLE STATE-INDEPENDENT QUANTUM CONTEXTUALITY. *Physical Review Letters*, 101:210401, 2008.
- [5] M. GENOVESE AND P. TRAINA. REVIEW ON QUDITS PRODUCTION AND THEIR APPLICATION TO QUANTUM COMMUNICATION AND STUDIES ON LOCAL REALISM. *ADVANCED SCIENCE LETTERS*, 1:153–160, 2008.
- [6] C. H. BENNETT AND G. BRASSARD. QUANTUM CRYPTOGRAPHY: PUBLIC KEY DISTRIBUTION AND COIN TOSSING. IN *Proceedings of the IEEE International Conference on Computers, Systems, and Signal Processing, Bangalore, India*, PAGES 175–179. IEEE COMPUTER SOCIETY PRESS, 1984.
- [7] A. K. EKERT. QUANTUM CRYPTOGRAPHY BASED ON BELL’S THEOREM. *Physical Review Letters*, 67:661–663, 1991.
- [8] C. H. BENNETT AND S. J. WIESNER. COMMUNICATION VIA ONE- AND TWO-PARTICLE OPERATORS ON EINSTEIN-PODOLSKY-ROSEN STATES. *Physical Review Letters*, 69:2881–2884, 1992.
- [9] DAVID DEUTSCH. THE CHURCH-TURING PRINCIPLE AND THE UNIVERSAL QUANTUM COMPUTER. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 400:97–117, 1985.
- [10] L. K. GROVER. FROM SCHRÖDINGER’S EQUATION TO THE QUANTUM SEARCH ALGORITHM. *American Journal of Physics*, 69:769–777, 2001.
- [11] P. W. SHOR. POLYNOMIAL-TIME ALGORITHMS FOR PRIME FACTORIZATION AND DISCRETE LOGARITHMS ON A QUANTUM COMPUTER. *SIAM Journal on Computing*, 26:1484–1509, 1997.
- [12] A. EKERT AND R. JOZSA. QUANTUM COMPUTATION AND SHOR’S FACTORING ALGORITHM. *Reviews of Modern Physics*, 68:733–753, 1996.
- [13] C. H. BENNETT, G. BRASSARD, C. CRÉPEAU, R. JOZSA, A. PERES, AND W. K. WOOTTERS. TELEPORTING AN UNKNOWN QUANTUM STATE VIA DUAL CLASSICAL AND EINSTEIN-PODOLSKY-ROSEN CHANNELS. *Physical Review Letters*, 70:1895–1899, 1993.
- [14] MARCELO TERRA CUNHA. *Emaranhamento: caracterização, manipulação e consequências*. UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, 2005.

- [15] EMIL WOLF AND LEONARD MANDEL. *Optical Coherence and Quantum Optics*. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1995.
- [16] S. P. WALBORN, C. H. MONKEN, S. PÁDUA, AND P. H. SOUTO RIBEIRO. SPATIAL CORRELATIONS IN PARAMETRIC DOWN-CONVERSION. *Physics Reports*, 495:87–139, 2010.
- [17] Z. Y. OU AND L. MANDEL. VIOLATION OF BELL’S INEQUALITY AND CLASSICAL PROBABILITY IN A TWO-PHOTON CORRELATION EXPERIMENT. *Physical Review Letters*, 61:50–53, 1988.
- [18] Y. H. SHIH AND C. O. ALLEY. NEW TYPE OF EINSTEIN-PODOLSKY-ROSEN-BOHM EXPERIMENT USING PAIRS OF LIGHT QUANTA PRODUCED BY OPTICAL PARAMETRIC DOWN CONVERSION. *Physical Review Letters*, 61:2921–2924, 1988.
- [19] L. NEVES, G. LIMA, J. G. AGUIRRE GÓMEZ, C. H. MONKEN, C. SAAVEDRA, AND S. PÁDUA. GENERATION OF ENTANGLED STATES OF QUDITS USING TWIN PHOTONS. *Physical Review Letters*, 94:100501, 2005.
- [20] J. G. RARITY AND P. R. TAPSTER. EXPERIMENTAL VIOLATION OF BELL’S INEQUALITY BASED ON PHASE AND MOMENTUM. *Physical Review Letters*, 64:2495–2498, 1990.
- [21] A. ROSSI, G. VALLONE, A. CHIURI, F. DE MARTINI, AND P. MATALONI. MULTIPATH ENTANGLEMENT OF TWO PHOTONS. *Physical Review Letters*, 102:153902, 2009.
- [22] A. MAIR, A. VAZIRI, G. WEIHS, AND A. ZEILINGER. ENTANGLEMENT OF THE ORBITAL ANGULAR MOMENTUM STATES OF PHOTONS. *Nature*, 412:313–316, 2001.
- [23] N. K. LANGFORD, R. B. DALTON, M. D. HARVEY, J. L. O’BRIEN, G. J. PRYDE., A. GILCHRIST, S. D. BARTLETT, AND A. G. WHITE. MEASURING ENTANGLED QUTRITS AND THEIR USE FOR QUANTUM BIT COMMITMENT. *Physical Review Letters*, 93:053601, 2004.
- [24] A. VAZIRI, G. WEIHS, AND A. ZELLINGER. EXPERIMENTAL TWO-PHOTON, THREE-DIMENSIONAL ENTANGLEMENT FOR QUANTUM COMMUNICATION. *Physical Review Letters*, 89:240401, 2002.
- [25] B.-J. PORS, F. MIATTO, G. W. ’T HOOFT, E. R. ELIEL, AND J. P. WOERDMAN. HIGH-DIMENSIONAL ENTANGLEMENT WITH ORBITAL-ANGULAR-MOMENTUM STATES OF LIGHT. *Journal of Optics*, 13:064008, 2011.
- [26] A. C. DADA, J. LEACH, G. S. BULLER, M. J. PADGETT, AND E. ANDERSSON. EXPERIMENTAL HIGH-DIMENSIONAL TWO-PHOTON ENTANGLEMENT AND VIOLATIONS OF GENERALIZED BELL INEQUALITIES. *Nature Physics*, 7:677–680, 2011.
- [27] J. D. FRANSON. BELL INEQUALITY FOR POSITION AND TIME. *Physical Review Letters*, 62:2205–2208, 1989.
- [28] R. THEW, A. ACIN, H. ZBINDEN, , AND N. Gisin. BELL-TYPE TEST OF ENERGY-TIME ENTANGLED QUTRITS. *Physical Review Letters*, 93:010503, 2004.
- [29] R. THEW, A. ACIN, H. ZBINDEN, AND N. Gisin. EXPERIMENTAL REALIZATION OF ENTANGLED QUTRITS FOR QUANTUM COMMUNICATION. *Quantum Information & Computation*, 4:93–101, 2004.
- [30] J. BRENDDEL, N. Gisin, W. TITTEL, AND H. ZBINDEN. PULSED ENERGY-TIME ENTANGLED TWIN-PHOTON SOURCE FOR QUANTUM COMMUNICATION. *Physical Review Letters*, 82:2594–2597, 1999.
- [31] A. ROSSI, G. VALLONE, F. DE MARTINI, AND P. MATALONI. GENERATION OF TIME-BIN-ENTANGLED PHOTONS WITHOUT TEMPORAL POSTSELECTION. *Physical Review A*, 78:012345, 2008.
- [32] G. LIMA, L. NEVES, I. F. SANTOS, J. G. AGUIRRE GÓMEZ, C. SAAVEDRA, AND S. PÁDUA. PROPAGATION OF SPATIALLY ENTANGLED QUDITS THROUGH FREE SPACE. *Physical Review A*, 73:032340, 2006.
- [33] G. TAGUCHI, T. DOUGAKIUCHI, M. IINUMA, H. F. HOFMANN, AND Y. KADOYA. RECONSTRUCTION OF SPATIAL QUTRIT STATES BASED ON REALISTIC MEASUREMENT OPERATORS. *Physical Review A*, 80:062102, 2009.

- [34] L. NEVES, G. LIMA, E. J. S. FONSECA, L. DAVIDOVICH, AND S. PÁDUA. CHARACTERIZING ENTANGLEMENT IN QUBITS CREATED WITH SPATIALLY CORRELATED TWIN PHOTONS. *Physical Review A*, 76:032314, 2007.
- [35] W. H. PEETERS, J. J. RENEMA, AND M. P. VAN EXTER. ENGINEERING OF TWO-PHOTON SPATIAL QUANTUM CORRELATIONS BEHIND A DOUBLE SLIT. *Physical Review A*, 79:043817, 2009.
- [36] M. A. D. CARVALHO, J. FERRAZ, G. F. BORGES, P. L. DE ASSIS, S. PÁDUA, AND S. P. WALBORN. EXPERIMENTAL OBSERVATION OF QUANTUM CORRELATIONS IN MODULAR VARIABLES. *Physical Review A*, 86:032332, 2012.
- [37] A. J. GUTIÉRREZ-ESPARZA, W. M. PIMENTA, B. MARQUES, A. A. MATOSO, J. L. LUCIO M., AND S. PÁDUA. EXPERIMENTAL CHARACTERIZATION OF TWO SPATIAL QUTRITS USING ENTANGLEMENT WITNESSES. *Optics Express*, 20:26351–26362, 2012.
- [38] G. LIMA, L. NEVES, R. GUZMÁN, E. S. GÓMEZ, W. A. T. NOGUEIRA, A. DELGADO, A. VARGAS, AND C. SAAVEDRA. EXPERIMENTAL QUANTUM TOMOGRAPHY OF PHOTONIC QUDITS VIA MUTUALLY UNBIASED BASIS. *Optics Express*, 19:3542, 2011.
- [39] W. M. PIMENTA, B. MARQUES, M. A. CARVALHO, M. R. BARROS, J. G. FONSECA, J. FERRAZ, M. TERRA CUNHA, AND S. PÁDUA. MINIMAL STATE TOMOGRAPHY OF SPATIAL QUBITS USING A SPATIAL LIGHT MODULATOR. *Optics Express*, 18:24423–24433, 2010.
- [40] W. M. PIMENTA, B. MARQUES, T. MACIEL, R. O. VIANNA, A. DELGADO, C. SAAVEDRA, AND S. PÁDUA. TOMOGRAPHY OF TWO ENTANGLED QUTRITS USING A SYMMETRIC INFORMATIONALLY COMPLETE POSITIVE OPERATOR-VALUED MEASUREMENTS. *Submetido para Physical Review A*, 2013.
- [41] S. CIALDI, D. BRIVIO, AND M. G. A. PARIS. DEMONSTRATION OF A PROGRAMMABLE SOURCE OF TWO-PHOTON MULTIQUBIT ENTANGLED STATES. *Physical Review A*, 81:042322, 2010.
- [42] W. A. T. NOGUEIRA, M. SANTIBA NEZ, S. PÁDUA, A. DELGADO, C. SAAVEDRA, L. NEVES, AND G. LIMA. INTERFERENCE AND COMPLEMENTARITY FOR TWO-PHOTON HYBRID ENTANGLED STATES. *Physical Review A*, 82:042104, 2010.
- [43] B. MARQUES, M. R. BARROS, W. M. PIMENTA, M. A. D. CARVALHO, J. FERRAZ, R. C. DRUMOND, M. TERRA CUNHA, AND S. PÁDUA. DOUBLE-SLIT IMPLEMENTATION OF THE MINIMAL DEUTSCH ALGORITHM. *Physical Review A*, 86:032306, 2012.
- [44] P. KOLENDERSKI, U. SINHA, L. YOUNING, T. ZHAO, M. VOLPINI, A. CABELLO, R. LAFLAMME, AND T. JENNEWAIN. AHARON-VAIDMAN QUANTUM GAME WITH A YOUNG-TYPE PHOTONIC QUTRIT. *Physical Review A*, 86:012321, 2012.
- [45] M. STÜTZ, S. GRÖBLACHER, T. JENNEWAIN, AND A. ZEILINGER. HOW TO CREATE AND DETECT N-DIMENSIONAL ENTANGLED PHOTONS WITH AN ACTIVE PHASE HOLOGRAM. *Applied Physics Letters*, 90:261114, 2007.
- [46] G. GIBSON, J. COURTIAL, M. J. PADGETT, M. VASNETSOV, V. PAS’KO, S. M. BARNETT, AND S. FRANKE-ARNOLD. FREE-SPACE INFORMATION TRANSFER USING LIGHT BEAMS CARRYING ORBITAL ANGULAR MOMENTUM. *Optical Express*, 12:5448, 2004.
- [47] J. LEACH, B. JACK, J. ROMERO, M. RITSCH-MARTE, R. W. BOYD, A. K. JHA, S. M. BARNETT, S. FRANKE-ARNOLD, AND M. J. PADGETT. VIOLATION OF A BELL INEQUALITY IN TWO-DIMENSIONAL ORBITAL ANGULAR MOMENTUM STATE-SPACES. *Optics Express*, 17:8287–8293, 2009.
- [48] G. LIMA, A. VARGAS, L. NEVES, R. GUZMÁN, AND C. SAAVEDRA. MANIPULATING SPATIAL QUDIT STATES WITH PROGRAMMABLE OPTICAL DEVICES. *Optics Express*, 17:10688–10696, 2009.
- [49] G. PUENTES, C. LA MELA, S. LEDESMA, C. IEMMI, J. P. PAZ, AND M. SARACENO. OPTICAL SIMULATION OF QUANTUM ALGORITHMS USING PROGRAMMABLE LIQUID-CRYSTAL DISPLAYS. *Physical Review A*, 69:042319, 2004.

- [50] B. MARQUES, A. A. MATOSO, W. M. PIMENTA, A. J. GUTIÉRREZ-ESPARZA, G. LIMA, L. NECES, A. DELGADO, C. SAAVEDRA, AND S. PÁDUA. OPTIMAL ENTANGLEMENT CONCENTRATION FOR PHOTONIC QUTRITS ENCODED IN PATH VARIABLES. *Physical Review A*, SUBMETIDO.
- [51] C. H. BENNETT, H. J. BERNSTEIN, S. POPESCU, AND B. SCHUMACHER. CONCENTRATING PARTIAL ENTANGLEMENT BY LOCAL OPERATIONS. *Physical Review A*, 53:2046–2052, 1996.
- [52] C. H. BENNETT, G. BRASSARD, S. POPESCU, B. SCHUMACHER, J. A. SMOLIN, AND W. K. WOOTTERS. PURIFICATION OF NOISY ENTANGLEMENT AND FAITHFUL TELEPORTATION VIA NOISY CHANNELS. *Physical Review Letters*, 78:2031–2031, 1997.
- [53] H.-K. LO AND S. POPESCU. CONCENTRATING ENTANGLEMENT BY LOCAL ACTIONS: BEYOND MEAN VALUES. *Physical Review A*, 63:022301, 2001.
- [54] C. H. BENNETT, G. BRASSARD, S. POPESCU, B. SCHUMACHER, J. A. SMOLIN, AND W. K. WOOTTERS. PURIFICATION OF NOISY ENTANGLEMENT AND FAITHFUL TELEPORTATION VIA NOISY CHANNELS. *Physical Review Letters*, 76:722, 1996.
- [55] S. BOSE, V. VEDRAL, AND P. L. KNIGHT. PURIFICATION VIA ENTANGLEMENT SWAPPING AND CONSERVED ENTANGLEMENT. *Physical Review A*, 60:194–197, 1999.
- [56] A. SALLES, F. MELO, M. P. ALMEIDA, M. HOR-MEYLL, S. P. WALBORN, P. H. SOUTO RIBEIRO, AND L. DAVIDOVICH. EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF THE DYNAMICS OF ENTANGLEMENT: SUDDEN DEATH, COMPLEMENTARITY, AND CONTINUOUS MONITORING OF THE ENVIRONMENT. *Physical Review A*, 78:022322, 2008.
- [57] O. JIMÉNEZ FARIÁS, A. VALDÉS-HERNÁNDEZ, G. H. AGUILAR, P. H. SOUTO RIBEIRO, S. P. WALBORN, AND L. DAVIDOVICH. EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF DYNAMICAL INVARIANTS IN BIPARTITE ENTANGLEMENT. *Physical Review A*, 85:012314, 2012.
- [58] J. BAUGH, O. MOUSSA, C. A. RYAN, A. NAYAK, AND R. LAFLAMME. EXPERIMENTAL IMPLEMENTATION OF HEAT-BATH ALGORITHMIC COOLING USING SOLID-STATE NUCLEAR MAGNETIC RESONANCE. *Nature*, 438:470–473, 2005.
- [59] O. JIMÉNEZ FARIÁS, C. LOMBARD LATUNE, S. P. WALBORN, L. DAVIDOVICH, AND P. H. SOUTO RIBEIRO. DETERMINING THE DYNAMICS OF ENTANGLEMENT. *Science*, 324:1414–1417, 2009.
- [60] B. MARQUES, A. A. MATOSO, W. M. PIMENTA, A. J. GUTIÉRREZ-ESPARZA, M. F. SANTOS, AND S. PÁDUA. SIMULATION OF DISSIPATIVE DYNAMICS USING SPATIAL LIGHT MODULATOR ON PHOTONIC QUDITS ENCODED IN PATH VARIABLES. *New Journal of Physics*, EM PREPARO PARA SUBMISSÃO.
- [61] C. COHEN-TANNOUDJI, B. DIU, AND F. LALOE. *Quantum Mechanics*. HERMANN, 1977.
- [62] D. P. O’LEARY, G. K. BRENNEN, AND STEPHEN S. BULLOCK. PARALLELISM FOR QUANTUM COMPUTATION WITH QUDITS. *Physical Review A*, 74:032334, 2006.
- [63] E. NAGALI, D. GIOVANNINI, L. MARRUCCI, S. SLUSSARENKO, E. SANTAMATO, AND F. SCIARRINO. EXPERIMENTAL OPTIMAL CLONING OF FOUR-DIMENSIONAL QUANTUM STATES OF PHOTONS. *Physical Review Letters*, 105:073602, 2010.
- [64] H. BECHMANN-PASQUINUCCI AND A. PERES. QUANTUM CRYPTOGRAPHY WITH 3-STATE SYSTEMS. *Physical Review Letters*, 85:3313–3316, 2000.
- [65] D. KASZLIKOWSKI, P. GNACIŃSKI, M. ŻUKOWSKI, W. MIKLASZEWSKI, AND A. ZEILINGER. VIOLATIONS OF LOCAL REALISM BY TWO ENTANGLED N -DIMENSIONAL SYSTEMS ARE STRONGER THAN FOR TWO QUBITS. *Physical Review Letters*, 85:4418–4421, 2000.
- [66] D. COLLINS, N. Gisin, N. LINDEN, S. MASSAR, AND S. POPESCU. BELL INEQUALITIES FOR ARBITRARILY HIGH-DIMENSIONAL SYSTEMS. *Physical Review Letters*, 88:040404, 2002.
- [67] H. BECHMANN-PASQUINUCCI AND A. PERES. QUANTUM CRYPTOGRAPHY WITH 3-STATE SYSTEMS. *Physical Review Letters*, 85:3313–3316, 2000.

- [68] D. BRUSS AND C. MACCHIAVELLO. OPTIMAL EAVESDROPPING IN CRYPTOGRAPHY WITH THREE-DIMENSIONAL QUANTUM STATES. *Physical Review Letters*, 88:127901, 2002.
- [69] M. BOURENNANE, A. KARLSSON, AND G. BJÖRK. QUANTUM KEY DISTRIBUTION USING MULTILEVEL ENCODING. *Physical Review A*, 64:012306, 2001.
- [70] N. J. CERF, M. BOURENNANE, A. KARLSSON, AND N. GISIN. SECURITY OF QUANTUM KEY DISTRIBUTION USING d -LEVEL SYSTEMS. *Physical Review Letters*, 88:127902, 2002.
- [71] S. GRÖBLACHER, T. JENNEWAIN, A. VAZIRI, G. WEIHS, AND ANTON ZEILINGER. EXPERIMENTAL QUANTUM CRYPTOGRAPHY WITH QUTRITS. *New Journal of Physics*, 8:75, 2006.
- [72] S. P. WALBORN, D. S. LEMELLE, M. P. ALMEIDA, AND P. H. SOUTO RIBEIRO. QUANTUM KEY DISTRIBUTION WITH HIGHER-ORDER ALPHABETS USING SPATIALLY ENCODED QUDITS. *Physical Review Letters*, 96:090501, 2006.
- [73] T. DURT, N. J. CERF, N. GISIN, AND M. ŻUKOWSKI. SECURITY OF QUANTUM KEY DISTRIBUTION WITH ENTANGLED QUTRITS. *Physical Review A*, 67:012311, 2003.
- [74] L. SHERIDAN AND V. SCARANI. SECURITY PROOF FOR QUANTUM KEY DISTRIBUTION USING QUDIT SYSTEMS. *Physical Review A*, 82:030301, 2010.
- [75] N. J. CERF, M. BOURENNANE, A. KARLSSON, AND N. GISIN. SECURITY OF QUANTUM KEY DISTRIBUTION USING D -LEVEL SYSTEMS. *Physical Review Letters*, 88:127902, 2002.
- [76] S. P. WALBORN, A. BUCHLEITNER, F. NINTERT, L. DAVIDOVICH, AND P. H. S. RIBEIRO. EXPERIMENTAL DETERMINATION OF ENTANGLEMENT WITH A SINGLE MEASUREMENT. *Nature*, 440:1022–1025, 2006.
- [77] S. KOCHEN AND E.P. SPECKER. THE PROBLEM OF HIDDEN VARIABLES IN QUANTUM MECHANICS. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 17:59–87, 1967.
- [78] A. CABELLO AND M. T. CUNHA. PROPOSAL OF A TWO-QUTRIT CONTEXTUALITY TEST FREE OF THE FINITE PRECISION AND COMPATIBILITY LOOPHOLES. *Physical Review Letters*, 106:190401, 2011.
- [79] A. CABELLO, E. AMSELEM, K. BLANCHFIELD, M. BOURENNANE, AND I. BENGTSSON. PROPOSED EXPERIMENTS OF QUTRIT STATE-INDEPENDENT CONTEXTUALITY AND TWO-QUTRIT CONTEXTUALITY-BASED NONLOCALITY. *Physical Review A*, 85:032108, 2012.
- [80] E. AMSELEM, L. E. DANIELSEN, AND A. LÓPEZ-TARRIDA AND J. R. PORTILLO. EXPERIMENTAL FULLY CONTEXTUAL CORRELATIONS. *Physical Review Letters*, 108:200405, 2012.
- [81] N. D. MERMIN. EXTREME QUANTUM ENTANGLEMENT IN A SUPERPOSITION OF MACROSCOPICALLY DISTINCT STATES. *Physical Review Letters*, 65:1838–1840, 1990.
- [82] S. MASSAR, S. PIRONIO, J. ROLAND, AND B. GISIN. BELL INEQUALITIES RESISTANT TO DETECTOR INEFFICIENCY. *Physical Review A*, 66:052112, 2002.
- [83] S. MASSAR. NONLOCALITY, CLOSING THE DETECTION LOOPHOLE, AND COMMUNICATION COMPLEXITY. *Physical Review A*, 65:032121, 2002.
- [84] M. BARBIERI, F. DE MARTINI, P. MATALONI, G. VALLONE, AND A. CABELLO. ENHANCING THE VIOLATION OF THE EINSTEIN-PODOLSKY-ROSEN LOCAL REALISM BY QUANTUM HYPERENTANGLEMENT. *Physical Review Letters*, 97:140407, 2006.
- [85] E. MASCARENHAS, B. MARQUES, D. CAVALCANTI, M. T. CUNHA, AND M. F. SANTOS. PROTECTION OF QUANTUM INFORMATION AND OPTIMAL SINGLET CONVERSION THROUGH HIGHER-DIMENSIONAL QUANTUM SYSTEMS AND ENVIRONMENT MONITORING. *Physical Review A*, 81:032310, 2010.
- [86] A. PERES. SEPARABILITY CRITERION FOR DENSITY MATRICES. *Physical Review Letters*, 77:1413–1415, 1996.

- [87] K. KRAUS. *States Effects and Operations: Fundamental Notions of Quantum Theory (Lecture Notes in Physics)*. SPRINGER-VERLAG, 1983.
- [88] J. PRESKILL. LECTURE NOTES, 1997-2004. [HTTP://WWW.THEORY.CALTECH.EDU/PEOPLE/PRESKILL/](http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/).
- [89] H. NHA AND H. J. CARMICHAEL. ENTANGLEMENT WITHIN THE QUANTUM TRAJECTORY DESCRIPTION OF OPEN QUANTUM SYSTEMS. *Physical Review Letters*, 93:120408, 2004.
- [90] E. MASCARENHAS, D. CAVALCANTI, V. VEDRAL, AND M. F. SANTOS. PHYSICALLY REALIZABLE ENTANGLEMENT BY LOCAL CONTINUOUS MEASUREMENTS. *Physical Review A*, 83:022311, 2011.
- [91] A. EINSTEIN, B. PODOLSKY, AND N. ROSEN. CAN QUANTUM-MECHANICAL DESCRIPTION OF PHYSICAL REALITY BE CONSIDERED COMPLETE? *Phys. Rev.*, 47:777–780, 1935.
- [92] N. BOHR. CAN QUANTUM-MECHANICAL DESCRIPTION OF PHYSICAL REALITY BE CONSIDERED COMPLETE? *Physics Review*, 48:696–702, 1935.
- [93] E. SCHRÖDINGER. THE PRESENT SITUATION IN QUANTUM MECHANICS: A TRANSLATION OF SCHRÖDINGER’ “CAT PARADOX” PAPER. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 31:555, 1935.
- [94] J. S. BELL. ON THE EINSTEIN PODOLSKY ROSEN PARADOX. *Physics*, 1:195–200, 1964.
- [95] J. F. CLAUSER, M. A. HORNE, A. SHIMONY, AND R. A. HOLT. PROPOSED EXPERIMENT TO TEST LOCAL HIDDEN-VARIABLE THEORIES. *Physical Review Letters*, 23:880–884, 1969.
- [96] A. ASPECT, J. DALIBARD, AND G. ROGER. EXPERIMENTAL TEST OF BELL’S INEQUALITIES USING TIME-VARYING ANALYZERS. *Physical Review Letters*, 49:1804–1807, 1982.
- [97] A. GARG AND N. D. MERMIN. DETECTOR INEFFICIENCIES IN THE EINSTEIN-PODOLSKY-ROSEN EXPERIMENT. *Physical Review D*, 35:3831–3835, 1987.
- [98] A. CABELLO AND J.-Å. LARSSON. MINIMUM DETECTION EFFICIENCY FOR A LOOPHOLE-FREE ATOM-PHOTON BELL EXPERIMENT. *Physical Review Letters*, 98:220402, 2007.
- [99] A. CABELLO, J.-Å. LARSSON, AND DAVID RODRÍGUEZ. MINIMUM DETECTION EFFICIENCY FOR A LOOPHOLE-FREE ATOM-PHOTON BELL EXPERIMENT. *Physical Review A*, 79:062109, 2009.
- [100] G. LIMA, G. VALLONE, A. CHIURI, A. CABELLO, AND P. MATALONI. EXPERIMENTAL BELL-INEQUALITY VIOLATION WITHOUT THE POSTSELECTION LOOPHOLE. *Physical Review A*, 81:040101(R), 2010.
- [101] M. T. QUINTINO, M. ARAÚJO, D. CAVALCANTI, M. F. SANTOS, AND M. T. CUNHA. MAXIMAL VIOLATIONS AND EFFICIENCY REQUIREMENTS FOR BELL TESTS WITH PHOTODETECTION AND HOMODYNE MEASUREMENTS. *Journal of Physics A*, 45:215308, 2012.
- [102] R. H. HADFIELD. SINGLE-PHOTON DETECTORS FOR OPTICAL QUANTUM INFORMATION APPLICATIONS. *Nature Photonics*, 3:696–705, 2009.
- [103] I. BENGTSOON AND K. ZYCZKOWSKI. *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2007.
- [104] R. HORODECKI, P. HORODECKI, M. HORODECKI, AND K. HORODECKI. QUANTUM ENTANGLEMENT. *Reviews of Modern Physics*, 81:865–942, 2009.
- [105] C. H. BENNETT, D. P. DIVINCENZO, J.A. SMOLIN, AND W. K. WOOTTERS. MIXED-STATE ENTANGLEMENT AND QUANTUM ERROR CORRECTION. *Physical Review A*, 54:3824–3851, 1996.
- [106] S. HILL AND W. K. WOOTTERS. ENTANGLEMENT OF A PAIR OF QUANTUM BITS. *Physical Review Letters*, 78:5022–5025, 1997.
- [107] W. K. WOOTTERS. ENTANGLEMENT OF FORMATION OF AN ARBITRARY STATE OF TWO QUBITS. *Physical Review Letters*, 80:2245–2248, 1998.

- [108] G. VIDAL AND R. F. WERNER. COMPUTABLE MEASURE OF ENTANGLEMENT. *Physical Review A*, 65:032314, 2002.
- [109] G. VIDAL AND R. TARRACH. ROBUSTNESS OF ENTANGLEMENT. *Physical Review A*, 59:141–155, 1999.
- [110] P. RUNGTA, V. BUŽEK, C. M. CAVES, M. HILLERY, AND G. J. MILBURN. UNIVERSAL STATE INVERSION AND CONCURRENCE IN ARBITRARY DIMENSIONS. *Physical Review A*, 64:042315, 2001.
- [111] S. RYU, W. CAI, AND A. CARO. QUANTUM ENTANGLEMENT OF FORMATION BETWEEN QUDITS. *Physical Review A*, 77:052312, 2008.
- [112] M. HORODECKI, P. HORODECKI, AND R. HORODECKI. SEPARABILITY OF MIXED STATES: NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS. *Physics Letters A*, 223:1–8, 1996.
- [113] D. P. DI VINCENZO. QUANTUM GATES AND CIRCUITS. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 439:553, 1992.
- [114] D. P. DI VINCENZO. QUANTUM COMPUTATION. *Science*, 270:255, 1995.
- [115] J. I. CIRAC AND P. ZOLLER. QUANTUM COMPUTATIONS WITH COLD TRAPPED IONS. *Physical Review Letters*, 74:4091–4094, 1995.
- [116] I. L. CHUANG, N. GERSHENFELD, AND M. KUBINEC. EXPERIMENTAL IMPLEMENTATION OF FAST QUANTUM SEARCHING. *Physical Review Letters*, 80:3408–3411, 1998.
- [117] C. SANTORI, D. FATTAL, J. VUCKOVIĆ, G. S. SOLOMON, AND Y. YAMAMOTO. INDISTINGUISHABLE PHOTONS FROM A SINGLE PHOTON DEVICE. *Nature*, 419:594–597, 2002.
- [118] Y. NAKAMURA, Y. A. PASHKIN, AND J. S. TSAI. COHERENT CONTROL OF MACROSCOPIC QUANTUM STATES IN A SINGLE-COOPER-PAIR BOX. *Nature*, 398:786–788, 1999.
- [119] A. KUHN, M. HENNRICH, AND G. REMPE. DETERMINISTIC SINGLE-PHOTON SOURCE FOR DISTRIBUTED QUANTUM NETWORKING. *Physical Review Letters*, 89:067901, 2002.
- [120] D. C. BURNHAM AND D. L. WEINBERG. OBSERVATION OF SIMULTANEITY IN PARAMETRIC PRODUCTION OF OPTICAL PHOTON PAIRS. *Physical Review Letters*, 25:84–87, 1970.
- [121] S. FRIBERG, C. K. HONG, AND L. MANDEL. MEASUREMENT OF TIME DELAYS IN THE PARAMETRIC PRODUCTION OF PHOTON PAIRS. *Physical Review Letters*, 54:2011–2013, 1985.
- [122] C. K. HONG AND L. MANDEL. THEORY OF PARAMETRIC FREQUENCY DOWN CONVERSION OF LIGHT. *Physical Review A*, 31:2409–2418, 1985.
- [123] C. K. HONG AND L. MANDEL. EXPERIMENTAL REALIZATION OF A LOCALIZED ONE-PHOTON STATE. *Physical Review Letters*, 56:58–60, 1986.
- [124] R. GHOSH AND L. MANDEL. OBSERVATION OF NONCLASSICAL EFFECTS IN THE INTERFERENCE OF TWO PHOTONS. *Physical Review Letters*, 59:1903–1905, 1987.
- [125] Z. Y. OU AND L. MANDEL. OBSERVATION OF SPATIAL QUANTUM BEATING WITH SEPARATED PHOTODETECTORS. *Physical Review Letters*, 61:54–57, 1988.
- [126] A. JOOBEUR, B. E. A. SALEH, AND M. C. TEICH. SPATIOTEMPORAL COHERENCE PROPERTIES OF ENTANGLED LIGHT BEAMS GENERATED BY PARAMETRIC DOWN-CONVERSION. *Physical Review A*, 50:3349–3361, 1994.
- [127] P. H. S. RIBEIRO, S. PÁDUA, J. C. MACHADO DA SILVA, AND G. A. BARBOSA. CONTROLLING THE DEGREE OF VISIBILITY OF YOUNG’S FRINGES WITH PHOTON COINCIDENCE MEASUREMENTS. *Physical Review A*, 49:4176–4179, 1994.
- [128] JOHN C. GARRISON AND RAYMOND Y. CHIAO. *Quantum Optics*. OXFORD UNIVERSITY PRESS, 2008.

- [129] JOHN DAVID JACKSON. *Classical Electrodynamics*. JOHN WILEY & SONS, 1998.
- [130] P. A. FRANKEN, A. E. HILL, C. W. PETERS, AND G. WEINREICH. GENERATION OF OPTICAL HARMONICS. *Physical Review Letters*, 7:118–119, 1961.
- [131] J. A. ARMSTRONG, N. BLOEMBERGEN, J. DUCUING, AND P. S. PERSHAN. INTERACTIONS BETWEEN LIGHT WAVES IN A NONLINEAR DIELECTRIC. *Physical Review*, 127:1918–1939, 1962.
- [132] O. COSME, S. PÁDUA, F. A. BOVINO, A. MAZZEI, F. SCIARRINO, AND F. DE MARTINI. HONG-OU-MANDEL INTERFEROMETER WITH ONE AND TWO PHOTON PAIRS. *Physical Review A*, 77:053822, 2008.
- [133] P. L. DE ASSIS, M. A. D. CARVALHO, L. P. BEZZUEZE, J. FERRAZ, I. F. SANTOS, F. SCIARRINO, AND S. PÁDUA. CONTROL OF QUANTUM TRANSVERSE CORRELATIONS ON A FOUR-PHOTON SYSTEM. *Optical Express*, 19:3715–3729, 2011.
- [134] C. H. MONKEN, P. H. S. RIBEIRO, AND S. PÁDUA. TRANSFER OF ANGULAR SPECTRUM AND IMAGE FORMATION IN SPONTANEOUS PARAMETRIC DOWN-CONVERSION. *Physical Review A*, 57:3123–3126, 1998.
- [135] E. J. S. FONSECA, C. H. MONKEN, AND S. PÁDUA. MEASUREMENT OF THE DE BROGLIE WAVELENGTH OF A MULTIPHOTON WAVE PACKET. *Physical Review Letters*, 82:2868–2871, 1999.
- [136] E. J. S. FONSECA, ZOLTAN PAULINI, P. NUSSENZVEIG, C. H. MONKEN, AND S. PÁDUA. NONLOCAL DE BROGLIE WAVELENGTH OF A TWO-PARTICLE SYSTEM. *Physical Review A*, 63:043819, 2001.
- [137] E. J. S. FONSECA, J. C. MACHADO DA SILVA, C. H. MONKEN, AND S. PÁDUA. CONTROLLING TWO-PARTICLE CONDITIONAL INTERFERENCE. *Physical Review A*, 61:023801, 2000.
- [138] W. A. T. NOGUEIRA, S. P. WALBORN, S. PÁDUA, AND C. H. MONKEN. EXPERIMENTAL OBSERVATION OF SPATIAL ANTIBUNCHING OF PHOTONS. *Physical Review Letters*, 86:4009–4012, 2001.
- [139] W. A. T. NOGUEIRA, S. P. WALBORN, S. PÁDUA, AND C. H. MONKEN. SPATIAL ANTIBUNCHING OF PHOTONS WITH PARAMETRIC DOWN-CONVERSION. *Physical Review A*, 66:053810, 2002.
- [140] I. F. SANTOS, L. NEVES, G. LIMA, C. H. MONKEN, AND S. PÁDUA. GENERATION AND DETECTION OF MAGNIFIED IMAGES VIA ILLUMINATION BY ENTANGLED PHOTON PAIRS. *Physical Review A*, 72:033802, 2005.
- [141] D. P. CAETANO AND P. H. SOUTO RIBEIRO. IMAGE FORMATION BY MANIPULATION OF THE ENTANGLED ANGULAR SPECTRUM. *Optics Communication*, 239:121–127, 2004.
- [142] P. G. KWIAT. HYPER-ENTANGLED STATES. *Journal of Modern Optics*, 44:2173–2184, 1997.
- [143] C. CINELLI, M. BARBIERI, R. PERRIS, P. MATALONI, AND F. DE MARTINI. ALL-VERSUS-NOTHING NONLOCALITY TEST OF QUANTUM MECHANICS BY TWO-PHOTON HYPERENTANGLEMENT. *Physical Review Letters*, 95:240405, 2005.
- [144] T. YANG, Q. ZHANG, J. ZHANG, J. YIN, Z. ZHAO, M. ŻUKOWSKI, Z.-B. CHEN, AND J.-W. PAN. ALL-VERSUS-NOTHING VIOLATION OF LOCAL REALISM BY TWO-PHOTON, FOUR-DIMENSIONAL ENTANGLEMENT. *Physical Review Letters*, 95:240406, 2005.
- [145] B. C. DOS SANTOS, K. DECHOUM, AND A. Z. KHOURY. CONTINUOUS-VARIABLE HYPERENTANGLEMENT IN A PARAMETRIC OSCILLATOR WITH ORBITAL ANGULAR MOMENTUM. *Physical Review Letters*, 103:230503, 2009.
- [146] G. VALLONE, R. CECCARELLI, F. DE MARTINI, AND P. MATALONI. HYPERENTANGLEMENT OF TWO PHOTONS IN THREE DEGREES OF FREEDOM. *Physical Review A*, 79:030301, 2009.
- [147] YU. I. BOGDANOV, M. V. CHEKHOVA, S. P. KULIK, G. A. MASLENNIKOV, A. A. ZHUKOV, C. H. OH, AND M. K. TEY. QUTRIT STATE ENGINEERING WITH BIPHOTONS. *Physical Review Letters*, 93:230503, 2004.

- [148] A. LAMAS-LINARES, J. C. HOWELL, AND D. BOUWMEESTER. STIMULATED EMISSION OF POLARIZATION-ENTANGLED PHOTONS. *Nature*, 412:887–890, 2001.
- [149] J. C. HOWELL, A. LAMAS-LINARES, AND D. BOUWMEESTER. EXPERIMENTAL VIOLATION OF A SPIN-1 BELL INEQUALITY USING MAXIMALLY ENTANGLED FOUR-PHOTON STATES. *Physical Review Letters*, 88:030401, 2002.
- [150] E. V. MOREVA, G. A. MASLENNIKOV, S. S. STRAUPE, AND S. P. KULIK. REALIZATION OF FOUR-LEVEL QUDITS USING BIPHOTONS. *Physical Review Letters*, 97:023602, 2006.
- [151] G. VALLONE, E. POMARICO, F. DE MARTINI, P. MATALONI, AND M. BARBIERI. EXPERIMENTAL REALIZATION OF POLARIZATION QUTRITS FROM NONMAXIMALLY ENTANGLED STATES. *Physical Review A*, 76:012319, 2007.
- [152] L. NEVES, S. PÁDUA, AND C. SAAVEDRA. CONTROLLED GENERATION OF MAXIMALLY ENTANGLED QUDITS USING TWIN PHOTONS. *Physical Review A*, 69:042305, 2004.
- [153] JOSEPH W. GOODMAN. *Introduction to Fourier Optics*. ROBERTS AND COMPANY PUBLISHERS, 2004.
- [154] L. NEVES, G. LIMA, J. G. A. GÓMEZ, C. H. MONKEN, C. SAAVEDRA, AND S. PÁDUA. TWO-PHOTON HIGH-DIMENSIONAL SPATIAL ENTANGLEMENT: THEORY AND EXPERIMENT. *Modern Physics Letters B*, 20:1–23, 2006.
- [155] S. CHANDRASEKHAR. *Liquid Crystal*. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1992.
- [156] O. LEHMANN. ÜBER FLIESENDE KRYSTALLE. *Zeitschrift für Physikalische Chemie*, 4:462–472, 1889.
- [157] S. CHANDRASEKHAR. *Liquid Gold: The Story of Liquid Crystal Displays and the Creation of an Industry*. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1992.
- [158] INVENTOR: JEFFREY B. L AND PLANO TEX. *Spatial Light Modulator*. TEXAS INSTRUMENTS INCORPORATED DALLAS, TEX. PATENT NUMBER: 4,954,789, SEP. 28, 1989.
- [159] A. JESACHER, S. FÜRHAPTER, S. BERNET, AND M. RITSCH-MARTE. DIFFRACTIVE OPTICAL TWEEZERS IN THE FRESNEL REGIME. *Optical Express*, 12:2243, 2004.
- [160] G. SINCLAIR, P. JORDAN, J. COURTIAL, M. PADGETT, J. COOPER, AND Z. LACZIK. ASSEMBLY OF 3-DIMENSIONAL STRUCTURES USING PROGRAMMABLE HOLOGRAPHIC OPTICAL TWEEZERS. *Optical Express*, 12:5475, 2004.
- [161] RICHARD W. BOWMAN, AMANDA J. WRIGHT, AND MILES J. PADGETT. AN SLM-BASED SHACK HARTMANN WAVEFRONT SENSOR FOR ABERRATION CORRECTION IN OPTICAL TWEEZERS. *Journal of Optics*, 12:124004, 2010.
- [162] H. S. KWOK. PARAMETER SPACE REPRESENTATION OF LIQUID CRYSTAL DISPLAY OPERATING MODES. *Journal of Applied Physics*, 80:3687, 1996.
- [163] S. STALLINGA. EQUIVALENT RETARDER APPROACH TO REFLECTIVE LIQUID CRYSTAL DISPLAYS. *Journal of Applied Physics*, 86:4756, 1999.
- [164] HOLOEYE PHOTONICS. *LC-R 2500 Spacial Light Modulator: Operation Instruction and Application Software*.
- [165] HAMAMATSU. *Report on test results of LCOS-SLM (X10468)*.
- [166] I. MORENO, P. VELÁSQUEZ, C. R. FERNÁNDEZ-POUSA, AND M. M. SÁNCHEZ-LÓPES. JONES MATRIX METHOD FOR PREDICTING AND OPTIMIZING THE OPTICAL MODULATION PROPERTIES OF A LIQUID-CRYSTAL DISPLAY. *Journal of Applied Physics*, 94:3697, 2003.
- [167] GEORGES SAGNAC. THE DEMONSTRATION OF THE LUMINIFEROUS AETHER BY AN INTERFEROMETER IN UNIFORM ROTATION. *Comptes Rendus*, 157:708–710, 1913.

- [168] GEORGES SAGNAC. ON THE PROOF OF THE REALITY OF THE LUMINIFEROUS AETHER BY THE EXPERIMENT WITH A ROTATING INTERFEROMETER. *Comptes Rendus*, 157:1410–1413, 1913.
- [169] MARIANA RODRIGUES BARROS. *Demonstração óptica do algoritmo de Deutsch-Jozsa com 1 qubit*. UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, 2010.
- [170] D. COLLINS, K. W. KIM, AND W. C. HOLTON. DEUTSCH-JOZSA ALGORITHM AS A TEST OF QUANTUM COMPUTATION. *Physical Review A*, 58:R1633–R1636, 1998.
- [171] D. DEUTSCH AND R. JOZSA. RAPID SOLUTION OF PROBLEMS BY QUANTUM COMPUTATION. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 439:553–558, 1992.
- [172] A. N. DE OLIVEIRA, S. P. WALBRON, AND C. H. MONKEN. IMPLEMENTING THE DEUTSCH ALGORITHM WITH POLARIZATION AND TRANSVERSE SPATIAL MODES. *Journal of Optics B*, 7:288, 2005.
- [173] G. VALLONE, G. DONATI, N. BRUNO, A. CHIURI, AND P. MATALONI. EXPERIMENTAL REALIZATION OF THE DEUTSCH-JOZSA ALGORITHM WITH A SIX-QUBIT CLUSTER STATE. *Physical Review A*, 81:050302, 2010.
- [174] P. BIANUCCI, A. MULLER, C. K. SHIH, Q. Q. WANG, Q. K. XUE, AND C. PIERMAROC. SINGLE QUBIT DEUTSCH-JOZSA ALGORITHM IN A QUANTUM DOT. IN *International Quantum Electronics Conference*. OPTICAL SOCIETY OF AMERICA, 2004.
- [175] M. A. SOLÍS-PROSSER AND L. NEVES. MEASUREMENT STRATEGY FOR SPATIALLY ENCODED PHOTONIC QUBITS. *Physical Review A*, 82:055801, 2010.
- [176] A. CHEFLES. UNAMBIGUOUS DISCRIMINATION BETWEEN LINEARLY INDEPENDENT QUANTUM STATES. *Physics Letters A*, 239:339–347, 1998.
- [177] Y.-H. KIM, S. P. KULIK, M. V. CHEKHOVA, W. P. GRICE, AND Y. SHIH. EXPERIMENTAL ENTANGLEMENT CONCENTRATION AND UNIVERSAL BELL-STATE SYNTHESIZER. *Physical Review A*, 67:010301, 2003.
- [178] Z. ZHAO, T. YANG, Y.-A. CHEN, A.-N. ZHANG, AND J.-W. PAN. EXPERIMENTAL REALIZATION OF ENTANGLEMENT CONCENTRATION AND A QUANTUM REPEATER. *Physical Review Letters*, 90:207901, 2003.
- [179] F.A. TORRES-RUIZ, J. AGUIRRE, A. DELGADO, G. LIMA, L. NEVES, S. PÁDUA, L. ROA, AND C. SAAVEDRA. UNAMBIGUOUS MODIFICATION OF NONORTHOGONAL SINGLE- AND TWO-PHOTON POLARIZATION STATES. *Physical Review A*, 79:052113, 2009.
- [180] A. VAZIRI, J.-W. PAN, T. JENNEWINE, G. WEIHS, AND A. ZEILINGER. CONCENTRATION OF HIGHER DIMENSIONAL ENTANGLEMENT: QUTRITS OF PHOTON ORBITAL ANGULAR MOMENTUM. *Physical Review Letters*, 91:227902, 2003.
- [181] M. YANG, A. DELGADO, L. ROA, AND C. SAAVEDRA. ENTANGLEMENT CONCENTRATION FOR NON-MAXIMALLY ENTANGLED STATES OF QUDITS. *Optics Communications*, 282:1482–1487, 2009.
- [182] W. H. ZUREK. DECOHERENCE, EINSELECTION, AND THE QUANTUM ORIGINS OF THE CLASSICAL. *Reviews of Modern Physics*, 75:715, 2003.
- [183] F. MINTERT, A. R. R. CARVALHO, M. KUŚ, AND A. BUCHLEITNER. MEASURES AND DYNAMICS OF ENTANGLED STATES. *Physics Reports*, 415:207–259, 2005.
- [184] K. ŻYCZKOWSKI, P. HORODECKI, M. HORODECKI, AND R. HORODECKI. DYNAMICS OF QUANTUM ENTANGLEMENT. *Physical Review A*, 65:012101, 2001.
- [185] P. J. DODD AND J. J. HALLIWELL. DISENTANGLEMENT AND DECOHERENCE BY OPEN SYSTEM DYNAMICS. *Physical Review A*, 69:052105, 2004.
- [186] W. D’UR AND H. J. BRIEGEL. STABILITY OF MACROSCOPIC ENTANGLEMENT UNDER DECOHERENCE. *Physical Review Letters*, 92:180403, 2004.

- [187] T. YU AND J. H. EBERLY. FINITE-TIME DISENTANGLEMENT VIA SPONTANEOUS EMISSION. *Physical Review Letters*, 93:140404, 2004.
- [188] A. R. R. CARVALHO, F. MINTERT, AND A. BUCHLEITNER. DECOHERENCE AND MULTIPARTITE ENTANGLEMENT. *Physical Review Letters*, 93:230501, 2004.
- [189] M. HEIN, W. D^íUR, AND H. J. BRIEGEL. ENTANGLEMENT PROPERTIES OF MULTIPARTITE ENTANGLED STATES UNDER THE INFLUENCE OF DECOHERENCE. *Physical Review A*, 71:032350, 2005.
- [190] B. V. FINE, F. MINTERT, AND A. BUCHLEITNER. EQUILIBRIUM ENTANGLEMENT VANISHES AT FINITE TEMPERATURE. *Physical Review B*, 71:153105, 2005.
- [191] M. F. SANTOS, P. MILMAN, L. DAVIDOVICH, AND N. ZAGURY. DIRECT MEASUREMENT OF FINITE-TIME DISENTANGLEMENT INDUCED BY A RESERVOIR. *Physical Review A*, 73:040305, 2006.
- [192] T. YU AND J. H. EBERLY. QUANTUM OPEN SYSTEM THEORY: BIPARTITE ASPECTS. *Physical Review Letters*, 97:140403, 2006.
- [193] M. P. ALMEIDA, F. DE MELO, M. HOR-MEYLL, A. SALLES, S. P. WALBORN, P. H. S. RIBEIRO, AND L. DAVIDOVICH. ENVIRONMENT-INDUCED SUDDEN DEATH OF ENTANGLEMENT. *Science*, 316:579, 2007.
- [194] A. R. R. CARVALHO, F. MINTERT, S. PALZER, AND A. BUCHLEITNER. ENTANGLEMENT DYNAMICS UNDER DECOHERENCE: FROM QUBITS TO QUDITS. *European Physical Journal D*, 41:425, 2007.
- [195] J. LAURAT, K. S. CHOI, H. DENG, C. W. CHOU, AND H. J. KIMBLE. HERALDED ENTANGLEMENT BETWEEN ATOMIC ENSEMBLES: PREPARATION, DECOHERENCE, AND SCALING. *Physical Review Letters*, 99:180504, 2007.
- [196] L. AOLITA, R. CHAVES, D. CAVALCANTI, A. ACÍN, AND L. DAVIDOVICH. SCALING LAWS FOR THE DECAY OF MULTIQUBIT ENTANGLEMENT. *Physical Review Letters*, 100:080501, 2008.
- [197] M. F. SANTOS, M. TERRA CUNHA, R. CHAVES, AND A. R. R. CARVALHO. QUANTUM COMPUTING WITH INCOHERENT RESOURCES AND QUANTUM JUMPS. *Physical Review Letters*, 108:170501, 2012.
- [198] A. R. R. CARVALHO, M. BUSSE, O. BRODIER, C. VIVIESCAS, AND A. BUCHLEITNER. OPTIMAL DYNAMICAL CHARACTERIZATION OF ENTANGLEMENT. *Physical Review Letters*, 98:190501, 2007.
- [199] S. VOGELSBERG AND D. SPEHNER. AVERAGE ENTANGLEMENT FOR MARKOVIAN QUANTUM TRAJECTORIES. *Physical Review A*, 82:052327, 2010.
- [200] E. MASCARENHAS, D. CAVALCANTI, V. VEDRAL, AND M. F. SANTOS. PHYSICALLY REALIZABLE ENTANGLEMENT BY LOCAL CONTINUOUS MEASUREMENTS. *Physical Review A*, 83:022311, 2011.
- [201] E. MASCARENHAS, B. MARQUES, M. T. CUNHA, AND M. F. SANTOS. CONTINUOUS QUANTUM ERROR CORRECTION THROUGH LOCAL OPERATIONS. *Physical Review A*, 82:032327, 2010.
- [202] D. LEIBFRIED, R. BLATT, C. MONROE, AND D. WINELAND. QUANTUM DYNAMICS OF SINGLE TRAPPED IONS. *Reviews of Modern Physics*, 75:281–324, 2003.
- [203] V. WEISSKOPF AND E. WIGNER. BERECHNUNG DER NAT¹₄RLICHEN LINIENBREITE AUF GRUND DER DIRACSCHEN LICHTTHEORIE. *ZZ. f^{ur} Phys.*, 63:54, 1930.
- [204] H. J. CARMICHAEL. *Statistical Methods in Quantum Optics 1: Master Equation and Fokker-Planck Equations*. SPRINGER-VERLAG BELIN HEIDELBERG NEW YORK, 1999.
- [205] G. LINDBLAD. ON THE GENERATORS OF QUANTUM DYNAMICAL SEMIGROUPS. *Communication in Mathematical Physics*, 48:119–130, 1976.
- [206] H. P. BREUER AND F. PETRUCCIONE. *The Theory of Open Quantum Systems*. OXFORD UNIVERSITY PRESS, 2002.

- [207] R. DUM AND P. ZOLLER. MONTE CARLO SIMULATION OF THE ATOMIC MASTER EQUATION FOR SPONTANEOUS EMISSION. *Physical Review A*, 45:4879–4887, 1992.
- [208] R. DUM, A. S. PARKINS, AND P. ZOLLER. MONTE CARLO SIMULATION OF MASTER EQUATIONS IN QUANTUM OPTICS FOR VACUUM, THERMAL, AND SQUEEZED RESERVOIRS. *Physical Review A*, 46:4382–4396, 1992.
- [209] J. DALIBARD AND Y. CASTIN. WAVE-FUNCTION APPROACH TO DISSIPATIVE PROCESSES IN QUANTUM OPTICS. *Physical Review Letters*, 68:580–583, 1992.
- [210] K. MØLMER, Y. CASTIN, AND J. DALIBARD. MONTE CARLO WAVE-FUNCTION METHOD IN QUANTUM OPTICS. *Journal of the Optical Society of America B*, 10:524–538, 1993.
- [211] K. MØLMER AND Y. CASTIN. MONTE CARLO WAVEFUNCTIONS IN QUANTUM OPTICS. *Quantum and Semiclassical Optics*, 8:49, 1996.
- [212] M. B. PLENIO AND P. L. KNIGHT. THE QUANTUM-JUMP APPROACH TO DISSIPATIVE DYNAMICS IN QUANTUM OPTICS. *Review of Modern Physics*, 70:101–144, 1998.
- [213] N. GISIN. QUANTUM MEASUREMENTS AND STOCHASTIC PROCESSES. *Physical Review Letters*, 52:1657–1660, 1984.
- [214] N. GISIN. WAVE-FUNCTION APPROACH TO DISSIPATIVE PROCESSES: ARE THERE QUANTUM JUMPS? *Physical Letters A*, 167:315–318, 1992.
- [215] N. GISIN AND C. PERCIVAL. QUANTUM STATE DIFFUSION, LOCALIZATION AND QUANTUM DISPERSION ENTROPY. *Journal of Physics A*, 26:2233, 1993.
- [216] H. M. WISEMAN AND G. J. MILBURN. QUANTUM THEORY OF FIELD-QUADRATURE MEASUREMENTS. *Physical Review A*, 47:642–662, 1993.
- [217] H. M. WISEMAN AND G. J. MILBURN. INTERPRETATION OF QUANTUM JUMP AND DIFFUSION PROCESSES ILLUSTRATED ON THE BLOCH SPHERE. *Physical Review A*, 47:1652–1666, 1993.
- [218] L. DIÓSI, N. GISIN, J. HALLIWELL, AND I. C. PERCIVAL. DECOHERENT HISTORIES AND QUANTUM STATE DIFFUSION. *Physical Review Letters*, 74:203–207, 1995.
- [219] H. M. WISEMAN AND L. DIÓSI. COMPLETE PARAMETERIZATION, AND INVARIANCE, OF DIFFUSIVE QUANTUM TRAJECTORIES FOR MARKOVIAN OPEN SYSTEMS. *Chemical Physics*, 268:91–104, 2001.
- [220] C. W. GARDINER. *Handbook of Stochastic Methods*. SPRINGER, NEW YORK, 1997.
- [221] BERNT ØKSENDAL. *Stochastic Differential Equations*. SPRINGER, NEW YORK, 2007.
- [222] F. C. KLEBANER. *Introduction to Stochastic Calculus With Applications*. IMPERIAL COLLEGE PRESS, LONDON, 2005.
- [223] H. MABUCHI AND P. ZOLLER. INVERSION OF QUANTUM JUMPS IN QUANTUM OPTICAL SYSTEMS UNDER CONTINUOUS OBSERVATION. *Physical Review Letters*, 76:3108–3111, 1996.
- [224] M. B. PLENIO, V. VEDRAL, AND L. KNIGHT. QUANTUM ERROR CORRECTION IN THE PRESENCE OF SPONTANEOUS EMISSION. *Physical Review A*, 55:67–71, 1997.
- [225] BRENO MARQUES. *Desemaranhamento de Qutrits*. UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, 2009.
- [226] S. GLEYZES, S. KUHR, C. GUERLIN, J. BERNU, S. BELÉGLISE, U. B. HOFF, M. BRUNE, J.-M. RAIMOND, AND S. HAROCHE. QUANTUM JUMPS OF LIGHT RECORDING THE BIRTH AND DEATH OF A PHOTON IN A CAVITY. *Nature*, 446:297–300, 2007.
- [227] C. GUERLIN, J. BERNU, S. BELÉGLISE, C. SAYRIN, S. GLEYZES, S. KUHR, M. BRUNE, J.-M. RAIMOND, AND S. HAROCHE. PROGRESSIVE FIELD-STATE COLLAPSE AND QUANTUM NON-DEMOLITION PHOTON COUNTING. *Nature*, 448:889–893, 2007.

- [228] A. I. EKIMOV AND A. A. ONUSHCHENKO. QUANTUM SIZE EFFECT IN THREE-DIMENSIONAL MICROSCOPIC SEMICONDUCTOR CRYSTALS. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 34:345, 1981.
- [229] M. A. REED, J. N. RANDALL, R. J. AGGARWAL, R. J. MATYI, AND T. M. MOORE. OBSERVATION OF DISCRETE ELECTRONIC STATES IN A ZERO-DIMENSIONAL SEMICONDUCTOR NANOSTRUCTURE. *Physical Review Letters*, 60:535–537, 1988.
- [230] G. ANETSBERGER, O. ARCIZET, Q. P. UNTERREITHMEIER, R. RIVIÈRE¹, A. SCHLIESSER, E. M. WEIG, J. P. KOTTHAUS, AND T. J. KIPPENBERG. NEAR-FIELD CAVITY OPTOMECHANICS WITH NANOMECHANICAL OSCILLATORS. *Nature Physics*, 5:909–914, 2009.
- [231] T. A. PALOMAKI, J. W. HARLOW, J. D. TEUFEL, R. W. SIMMONDS, AND K. W. LEHNERT. COHERENT STATE TRANSFER BETWEEN ITINERANT MICROWAVE FIELDS AND A MECHANICAL OSCILLATOR. *Nature*, 495:210–214, 2013.
- [232] MARTIN STÜTZ. *Qutrit-Manipulation mit aktiven Phasenhologrammen*. INSTITUT FÜR EXPERIMENTALPHYSIK DER UNIVERSITÄT WIEN, 2005.
- [233] G. TAGUCHI, T. DOUGAKIUCHI, N. YOSHIMOTO, K. KASAI, M. IINUMA, H. F. HOFMANN, AND Y. KADOYA. MEASUREMENT AND CONTROL OF SPATIAL QUBITS GENERATED BY PASSING PHOTONS THROUGH DOUBLE SLITS. *Physical Review A*, 78:012307, 2008.
- [234] B. E. A. SALEH AND M. C. TEICH. *Fundamental of Photonics*. WILEY-INTERSCIENCE, SECOND EDITION, 2007.