

Teorias de Calibre e Modelos de Unificação

José Eloy Ottoni

Orientadora: Profa. Maria Carolina Nemes

29 de outubro de 2002

...die erste aller Fragen:

Warum ist überhaupt Seiendes und nicht vielmehr Nichts?

Martin Heidegger.

Agradecimentos

Agradeço à Maria Carolina pela paciência, gentileza e compreensão com que me orientou.

Dedico ao meu filho Rafael pela motivação e à Vera pelo apoio.

Agradeço à minha mãe por ter me introduzido carinhosamente à vida e ao meu pai pelos exemplos.

Agradeço também aos meus irmãos Eduardo, Octávio Augusto, Luiz Felipe e Maria Antonietta e aos meus amigos da física, e de fora do departamento; ao Tiago e ao Alisson.

Finalmente, à agência financiadora FAPEMIG, que tornou possível a realização desse trabalho.

Abstract

In this work we present a concise review of the modern approach to the gauge theories on particle physics. We start with a basic presentation of the fundamental tools for the precise understanding of the ways the models of Unification are built in the realm of gauge theories. Group theory, as well as a simple introduction to the powerful ideas of Lie's groups are stressed and the indispensable phenomenology of particle physics is shown within a historical approach. The very important subjects of renormalization of gauge theories, quantization of the gauge fields, hidden and broken symmetries, as well as a deeper understanding of the Glashow-Weinberg-Salam model of eletroweak unification and color gauge theory are deliberately avoided for further studies.

This is a didactic work intended to serve as a minimum and sufficient background for future developments in this area.

Resumo

Nesse trabalho fazemos uma apresentação sumária da abordagem moderna às teorias de calibre em física de partículas. Começamos com uma exibição simples das ferramentas fundamentais para um melhor entendimento das maneiras que os modelos de Unificação são desenvolvidos no domínio das teorias de calibre. A Teoria de Grupos, assim como uma simples introdução às poderosas idéias dos grupos de Lie são enfatizados e também a indispensável fenomenologia da física de partículas que é apresentada em abordagem histórica. Os importantes tópicos de renormalização das teorias de calibre, quantização dos campos de calibre, simetrias escondidas e simetrias quebradas, assim como um aprofundamento nos modelos de Glashow-Weinberg-Salam da unificação eletrofraca e teoria de calibre de cor foram evitados deliberadamente para estudos posteriores.

Este é um trabalho didático que visa solidificar conhecimentos para desenvolvimentos posteriores nessa área.

Sumário

1	Simetrias e Grupos	1
1.1	Simetrias	1
1.1.1	Simetrias na Física Clássica	3
1.1.2	Simetrias na Física Quântica	6
1.2	Grupos	7
1.2.1	Grupos	7
1.2.2	Representações de Grupos	14
1.2.3	Grupos Contínuos	29
1.3	Simetrias e grupos em Física Quântica	34
2	Fenomenologia	37
2.1	Introdução Histórica	37
2.2	O Modelo Padrão	45
2.3	Spin, momento angular orbital e os grupos $SU(2)$ e $SO(3)$	54
2.4	Isospin e o grupo $SU(2)$, simetrias de sabores	58
2.5	Cor e o grupo $SU(3)$	61
3	Teorias de Calibre	62
3.1	Introdução Histórica	62
3.2	A Matemática das Teorias de Calibre	70
4	O modelo $SU(5)$ de Unificação das forças fundamentais	72
4.1	Introdução	72
4.2	O grupo $SU(5)$	74
4.2.1	Inserindo $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)$ em $SU(5)$	78
4.3	A Lagrangeana da Teoria de Calibre $SU(5)$	83

SUMÁRIO	v
4.4 Conclusões	88

Lista de Figuras

1.1	Eixos de simetria de um triângulo	16
2.1	Espalhamento e-p e a estrutura do próton	44
2.2	Diagrama de Feynman-QED	49
2.3	Diagrama de Feynman - Espalhamento Möller	49
2.4	Diagrama de Feynman-QCD	51
2.5	Diagramas de Feynman-QCD, acoplamentos de glúons	51
2.6	Diagramas de Feynman-teoria GWS, léptons	52
2.7	Diagramas de Feynman-teoria GWS, quarks	53
2.8	Diagramas de Feynman-teoria GWS, acoplamentos dos bósons	53
3.1	Experimento Aharonov-Bohm	67
4.1	Simetrias entre quarks e léptons	73
4.2	Unificação das Forças	88
4.3	Dcaimento do Próton	90

Lista de Tabelas

1.1	Teorema de Noether	5
1.2	Tabela do grupo do exemplo 1.	9
1.3	Tabela do grupo D_3	9
1.4	Tabela do grupo S_3	11
1.5	Tabela de caracteres de D_3	24
2.1	Propriedades dos Léptons	47
2.2	Propriedades dos Quarks	47
2.3	Forças e mediadores de Forças	48
2.4	Classificação das partículas por spin	48
2.5	Constantes de estrutura do grupo $SU(3)$	61

Capítulo 1

Simetrias e Grupos

1.1 Simetrias

Poderíamos definir simetria como toda transformação que, quando aplicada a um objeto, não permite uma verificação posterior de alterações em seu estado. Os mais simples e atraentes objetos “simétricos” que usualmente temos em mente quando o assunto é simetria são os cristais. Poderíamos citar muitos mais; desde flocos de neve aos tapetes Persas. Mas esses são apenas alguns exemplos daquilo que poderíamos chamar de “simetrias estáticas”, em contraste com as relativamente recentes “simetrias dinâmicas” das quais a física moderna é hoje rica em exemplos especialmente no que tange a interações fundamentais.

Simetrias representam um papel muito importante na ciência em geral e, particularmente na física, poderíamos mesmo dizer que esse papel é preponderante na física moderna. Talvez por evidenciar a harmonia, a regularidade, a simplicidade e, por que não, a beleza dos objetos em estudo; é nossa esperança que hajam simetrias nas leis físicas e nos sistemas físicos - que são os sistemas mais simples da Natureza. A expressão máxima dessa esperança é a confiança de muitos físicos nas chamadas “Teorias de Tudo” (exemplo: Supercordas), e em suas formas mais moderadas, as GUTs (Grand Unified Theories, Teorias da Grande Unificação), Supersimetria, Supergravidade. Essas são teorias que procuram apresentar as chamadas quatro interações (ou forças) básicas da Natureza: Eletromagnética, Gravitacional (essas duas são bem conhecidas), Nuclear Forte (responsável pelos fenômenos de fusão e

fissão nuclear de conseqüências atualmente bem conhecidas) e Nuclear Fraca (responsável por fenômenos como o decaimento radioativo de alguns elementos químicos conhecido como desintegração beta), como aspectos diferentes de uma única e fundamental interação. Um tal modelo englobaria simultaneamente todos os fenômenos conhecidos pelo homem no Universo, desde os que têm parte em escala subatômica aos que ocorrem em escala cósmica, como, em última análise, a manifestação de uma realidade subjacente, mais simples, mais regular e mais congruente. Esses extraordinários modelos teóricos descendem diretamente de brilhantes obras de grandes físicos e matemáticos do passado como Newton, Maxwell, Einstein, Weyl, Kaluza, Klein, etc.

Segundo A. Salam ([1]), o primeiro a afirmar explicitamente que todos os fenômenos físicos sobre o Sol, a Terra e a Lua obedecem às mesmas leis teria sido Al-Biruni, que viveu no Afeganistão mil anos atrás. Essa idéia ilusoriamente simples é a base de toda nossa ciência. De fato, não poderia haver ciência universal se as leis básicas dependessem do lugar e momento do universo em que os eventos estivessem acontecendo! Essa mesma idéia de universalidade das leis naturais foi independentemente afirmada e demonstrada por Galileu, que usou seu telescópio para observar que *as leis da projeção de sombras são as mesmas tanto na Lua como na Terra*. Graças a isso esse princípio fundamental - a universalidade das leis físicas - é conhecido como “simetria galileana”.

Newton, por volta de 1680, afirmou que a força que segura a Lua em sua órbita é a mesma que derruba uma maçã do galho, e ainda nos deu uma forma precisa da maneira como essa força universal age. E Maxwell por sua vez, por volta de 1865, em apenas quatro equações, sintetizou com extraordinário sucesso fenômenos aparentemente tão distintos quanto a eletricidade estática, a atração magnética de um ímã e a ótica física, graças a trabalhos de inúmeros físicos experimentais e teóricos anteriores e contemporâneos a ele, culminando no eletromagnetismo. Os trabalhos de Einstein deram contribuições a quase todas as áreas da física teórica; o eletromagnetismo encontrou o seu ambiente adequado na sua Teoria da Relatividade Restrita de 1905 onde o espaço e o tempo se situam em pé de igualdade, a Gravidade foi mais plenamente compreendida graças à sua Teoria da Relatividade Geral de 1916 onde ele realizou uma geometrização da física, e passou grande parte de sua vida concentrado no esforço de encontrar a chamada Teoria do Campo Unificado, uma

unificação do eletromagnetismo e da gravidade. É importante frisar que Einstein tem um papel preponderante na história das teorias de unificação. Ele foi responsável por várias idéias unificadoras de grande alcance e sua influência nos atinge até hoje. Sobre isso podemos citar Freeman J. Dyson ([1]):

“...Os grandes triunfos da física foram triunfos de unificação. Chegamos quase a considerar ponto pacífico que o caminho do progresso na física será uma unificação cada vez mais ampla, que introduzirá um número crescente de fenômenos no âmbito de uns poucos princípios fundamentais. Einstein tinha tal confiança na correção dessa rota que, no fim da vida, não manifestava quase nenhum interesse pelas descobertas experimentais que começavam então a tornar o mundo da física mais complicado. É difícil encontrar entre físicos oposições sérias à unificação.”

Einstein dedicou os últimos 35 anos de sua vida ao problema do Campo Unificado sem êxito, e coube, na verdade, aos matemáticos Theodor Kaluza (1921) e Oscar Klein (1926), a primeira formulação parcialmente bem sucedida da unificação da gravidade com o eletromagnetismo. Uma espécie de geometrização também do eletromagnetismo por meio de uma dimensão extra “enroscada” num comprimento de cerca de $10^{-35}m$ (o chamado comprimento de Planck). Hoje está havendo um retorno às idéias de Kaluza-Klein, porém em variedades de dimensão $(4 + N)$ e não apenas pentadimensional $(4 + 1)$. Por exemplo, a teoria das Supercordas pressupõe dez (ou até 26!) dimensões.

E, finalmente; em 1967, Abdus Salam, Sheldon Glashow e Steven Weinberg, apresentaram uma teoria unificada do eletromagnetismo e da força nuclear fraca e por isto receberam o prêmio Nobel de física de 1979. A idéia decisiva que permitiu essa unificação foi a de que essas são forças de *gauge* (calibre). Teremos muito a falar sobre forças de Gauge em outros capítulos. Essa chamada teoria eletrofraca tem encontrado confirmação experimental em nossos dias.

1.1.1 Simetrias na Física Clássica

Podemos dizer que a falha dos Gregos, grandes admiradores das simetrias da Natureza, na descrição dos movimentos planetares foi uma interpretação limitada do sentido de simetria. Que algo deveria ser “simétrico”, enquanto os planetas se moviam, isso eles percebiam, o erro foi achar que as *trajetórias* deveriam ser simétricas,

por isso, talvez, a insistência nos movimentos circulares, pois o círculo é a forma “perfeita”, a mais simétrica. Coube então a Newton detectar a falha. Mesmo Copérnico, pouco tempo anterior a Newton, não deixou de lado as idéias preconcebidas; em seu livro “*De Revolutionibus Orbium Coelestium*” ([2]) fazia uso de tantos epiciclos quanto o modelo de Ptolomeu, acreditava serem as formas das trajetórias dos planetas circulares ou compostas de pequenos movimentos circulares (pode-se ler no primeiro capítulo de seu livro que ele acreditava ser a forma do Universo esférica, por ser essa a forma mais perfeita). Até mesmo Galileu enganou-se nesse ponto, defendendo ele que um objeto, se posto em movimento sem interferência nenhuma, faria uma trajetória circular. Newton não procurou simetria nas trajetórias dos corpos, mas sim nas famílias das possíveis trajetórias que esses corpos poderiam percorrer sob influência de alguma força.

Desde a formulação analítica da mecânica surgiu, em meados do começo do século XIX, com contribuições de muitos matemáticos como D’Alembert, Euler, Lagrange e Hamilton, o papel das simetrias e leis de conservação na física começou a se tornar mais evidente. Por exemplo, se assumirmos o espaço como sendo homogêneo, i.e., com a mesma estrutura em qualquer lugar, de maneira que nenhum experimento possa ser feito para se detectar que algum ponto desse espaço seja “privilegiado” com uma estrutura diferente (o que é o mesmo que dizer que a solução de um dado problema físico é invariante por translações nesse espaço), notamos que isso implica na conservação do momento linear para um sistema isolado.

Essa homogeneidade do espaço é refletida na Lagrangiana L desse sistema da seguinte maneira: se fizermos uma mudança nas coordenadas das partículas desse sistema $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \mathbf{a}$, (onde $\mathbf{a}$ constante, arbitrário); então $L(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, t)$ permanece invariante:

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i = \mathbf{a} \cdot \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = 0$$

como $\mathbf{a}$ é arbitrário

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = 0$$

portanto

$$\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i}, \sum_i \frac{\partial L}{\partial y_i}, \sum_i \frac{\partial L}{\partial z_i} \right) = 0$$

que é o gradiente de L com respeito a $\mathbf{r}_i$, e da equação de Euler-Lagrange:

Simetria	Lei de conservação
Translação espacial (homogeneidade)	Momento linear
Translação temporal (homogeneidade)	Energia
Rotação espacial (isotropia)	Momento angular

Tabela 1.1: Teorema de Noether

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

onde os q_i são as coordenadas generalizadas do sistema ($q_i = x_i, y_i, z_i$), segue-se que:

$$\frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} P_x = 0 \implies P_x = \text{constante}$$

analogamente para P_y e P_z onde $P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$, $P_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}$ e $P_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i}$ e onde $\mathbf{P} = (\sum_i P_{x_i}, \sum_i P_{y_i}, \sum_i P_{z_i})$ é o momento linear total. Finalmente ficamos com

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{P}_i = \text{constante}$$

que é precisamente a lei de conservação do momento linear em mecânica clássica. Um conceito mais geral de homogeneidade do espaço seria a invariância apenas das equações de movimento e não da Lagrangeana, nesse caso também há uma quantidade conservada que não é necessariamente o momento canônico.

Em 1917, a matemática Emmy Noether publicou seu famoso trabalho em que relacionava simetrias e leis de conservação: toda simetria do espaço (tempo) implica uma lei de conservação de uma grandeza física, e vice-versa (vide Tabela 1.1).

Simetria $\iff$ Lei de conservação

1.1.2 Simetrias na Física Quântica

É interessante, como tanto na física clássica quanto na física quântica, a existência de simetrias em um sistema físico leva a uma variedade de simplificações ([3]). De certa maneira, o estudo de simetrias ajuda a encontrar aspectos unificadores na física pela ênfase na similaridade entre diferentes áreas e diferentes objetos. O estudo das consequências das simetrias no domínio da física quântica é um assunto bem mais amplo que na física clássica, e há diversas razões para isso. Como exemplo podemos citar o importante tópico da indistingüibilidade de partículas elementares, como o elétron. Costuma-se dizer que não se pode pintar uma mancha em um elétron; isso expressa de forma bem simples a idéia de indistingüibilidade ao nível microscópico, característica essa fundamentalmente inexistente ao nível macroscópico. Por mais que se diga que uma moeda é igual a outra, pode-se “pintar uma mancha” em uma delas e distingüi-las, ou seja, pode-se seguir a trajetória dessas moedas. Mesmo que não o façamos, a simples possibilidade de o fazermos muda nossa física. Ao nível microscópico as coisas são bem diferentes, pelo simples fato de se tratar de objetos *elementares*, não podemos “pintar uma mancha” em um desses objetos. Um elétron é indistingüível de outro! E isso simplifica enormemente o nosso estudo dos sistemas quânticos; não precisamos nos preocupar com elétrons grandes ou pequenos, velhos ou novos, leves ou pesados. Essa identidade absoluta é de certa maneira bem representada pelo princípio de exclusão de Pauli.

Pode-se citar inúmeros exemplos da aplicação da teoria de grupos - o instrumento matemático adequado ao estudo das simetrias - em física quântica; como regras de transição de amplo uso em espectroscopia (a probabilidade da transição de um estado inicial ψ_i para um estado final ψ_f é dada por $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_f^*(x)g(x)\psi_i(x)dx$, e o estudo das simetrias $g(x)$, onde $g(x)$ representa um operador de transição, de $\psi_f(x)$ e de $\psi_i(x)$, como a paridade, que nos dirá se $I = 0$ ou não), efeito Zeeman (a degenerescência na eletrosfera de um átomo é quebrada por um campo magnético dando origem a um multiplete de níveis de energia próximos) etc... Mas nos concentraremos no que for mais imediatamente necessário para nossos propósitos. Adiaremos para depois da apresentação formal das ferramentas matemáticas um estudo um pouco mais aprofundado das simetrias em física quântica (ver seção 1.3).

1.2 Grupos

A ferramenta com a qual os físicos estudam simetrias é chamada Teoria de Grupos. Pode-se situar o surgimento da Teoria de Grupos em meados do começo do século *XIX*, com os trabalhos dos matemáticos Évariste Galois e Augustin Louis Cauchy, mas o surgimento da teoria de representações de grupos, um passo crucial no estudo de simetrias só veio a se desenvolver em meados dos anos de 1920, coincidentemente com o surgimento da Mecânica Quântica, e logo ficou aparente o seu importante significado na formulação dessa teoria, graças aos esforços de Hermann Weyl (1928), Eugene Wigner (1931) e Van-der-Waerden (1932). Existe uma analogia interessante entre o surgimento da Física Clássica e o Cálculo Diferencial e Integral com Newton por um lado e o surgimento da Teoria de Representações de Grupos e a Mecânica Quântica por outro.

1.2.1 Grupos

De maneira sucinta, dizemos que um grupo é um conjunto finito ou infinito de elementos que tem uma certa estrutura ou propriedade. Em física, geralmente esses elementos são identificados com mudanças ou transformações ([4]), e as propriedades são:

1. quaisquer duas mudanças consecutivas devem dar um resultado que poderia ser obtido por uma outra mudança única;
2. desde que a ordem seja obedecida, não importa como fazemos as mudanças;
3. deve haver a possibilidade da não-mudança;
4. deve haver a possibilidade de se reverter ou desfazer cada mudança para restaurar o estado original.

Mais rigorosamente, definimos um grupo como um conjunto (finito ou infinito) G de elementos $G_1, G_2, G_3, \dots$ junto com uma operação chamada multiplicação definida entre todos os seus elementos que obedece aos quatro seguintes postulados:

1. fechamento: $G_i, G_j \in G \Rightarrow G_i G_j \in G$
2. associatividade: $G_i(G_j G_k) = (G_i G_j)G_k$
3. existência da identidade: $EG_i = G_iE = G_i$ para todo G_i
4. inversa única: $G_i G_j = G_j G_i = E$ um único $G_i = G_j^{-1}$ para todo G_i

Um grupo infinito pode ainda ser classificado em discreto ou contínuo. Um grupo que tem a propriedade adicional de comutatividade entre todos seus elementos é chamado *Abeliano*. Por enquanto, trataremos grupos infinitos de maneira informal, definições mais precisas (mas menos ilustrativas) serão postergadas. Ao longo desta subseção exploraremos alguns conceitos relacionados a grupos.

Assim como todas as informações sobre um conjunto qualquer podem ser dadas em uma simples listagem de seus elementos, todas as informações sobre um grupo podem ser dadas em uma tabela com os resultados de todos os produtos de seus elementos. Pelas definições de um grupo, cada elemento desse grupo deve aparecer apenas uma vez em cada linha e em cada coluna (ver exemplos nas tabelas 1.2, 1.3 e 1.4). O número de elementos de um grupo é chamado a *ordem* do grupo e denotaremos por g .

Exemplo 1:

Os números 1 e -1, junto com a multiplicação ordinária, formam um grupo. Pela tabela 1.2 podemos ver todas as informações desse grupo. Notemos que esse é um grupo abeliano e cíclico, ou seja, todos os seus elementos podem ser formados tomando potências de um de seus elementos ($1 = (-1)^2$). Notemos que todo grupo cíclico deve ser abeliano. Um exemplo de grupo não-abeliano é o grupo das rotações no espaço euclidiano tridimensional, mas como é um grupo com um número infinito de elementos trataremos desse exemplo mais tarde.

	G_j	1	-1
G_i	$G_i G_j$		
1		1	-1
-1		-1	1

Tabela 1.2: Tabela do grupo do exemplo 1.

$G_i \downarrow, G_j$	E	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
E	E	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
R_1	R_1	R_2	E	R_4	R_5	R_3
R_2	R_2	E	R_1	R_5	R_3	R_4
R_3	R_3	R_5	R_4	E	R_2	R_1
R_4	R_4	R_3	R_5	R_1	E	R_2
R_5	R_5	R_4	R_3	R_2	R_1	E

Tabela 1.3: Tabela do grupo D_3

Exemplo 2:

O conjunto das simetrias rotacionais de um triângulo equilátero forma um grupo não-abeliano. As operações de simetria desse triângulo são:

- E, a operação identidade (ou seja; não fazer nada com o triângulo não o afeta em nada).
- R_1 e R_2 , rotações de $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$, respectivamente, em torno do eixo que passa pelo centro do triângulo, perpendicularmente ao plano do triângulo.
- R_3 , R_4 e R_5 , rotações de π em torno dos três eixos de simetria no plano do triângulo (que chamaremos de plano xy).

Esse grupo é denominado D_3 e sua tabela de multiplicação está dada acima (tabela 1.3).

Exemplo 3:

O conjunto das permutações de 3 objetos forma outro grupo não-abeliano chamado S_3 . Como é comum representar permutações em teoria de grupos:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

denota que o objeto rotulado por i é trocado pelo objeto rotulado por p_i ,

$$i \rightarrow p_i$$

As operações desse grupo são:

- E , a operação identidade.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- P_4 e P_5 , onde P_4 troca os objetos da seguinte maneira: $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$ e $3 \rightarrow 1$ e onde P_5 troca os objetos da seguinte maneira: $1 \rightarrow 3$, $2 \rightarrow 1$ e $3 \rightarrow 2$.

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- P_1 , P_2 e P_3 , onde P_1 troca os objetos da seguinte maneira: $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 1$ e $3 \rightarrow 3$, e onde P_2 troca os objetos da seguinte maneira: $1 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 3$ e $3 \rightarrow 2$, e finalmente, P_3 troca os objetos da seguinte maneira: $1 \rightarrow 3$, $2 \rightarrow 2$ e $3 \rightarrow 1$.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A tabela de multiplicação desse grupo também é dada (tabela 1.4).

Podemos citar ainda alguns outros grupos mais comumente encontrados na física:

O grupo denotado por $\mathcal{R}_n$ é o grupo das rotações próprias (sem reflexão ou inversão) num espaço euclidiano n -dimensional.

$G_i \downarrow, G_j$	E	P_5	P_4	P_1	P_2	P_3
E	E	P_5	P_4	P_1	P_2	P_3
P_5	P_5	P_4	E	P_2	P_3	P_1
P_4	P_4	E	P_5	P_3	P_1	P_2
P_1	P_1	P_3	P_2	E	P_4	P_5
P_2	P_2	P_1	P_3	P_5	E	P_4
P_3	P_3	P_2	P_1	P_4	P_5	E

Tabela 1.4: Tabela do grupo S_3

O grupo denotado por $O(n)$ é o grupo das matrizes ortogonais $n \times n$ também chamado de ortogonal completo (full orthogonal) e é o grupo de todas as rotações (próprias e impróprias) nesse mesmo espaço. O grupo denotado por $SO(n)$ (special-orthogonal) é o grupo das matrizes ortogonais $n \times n$ de determinante=+1 (que é isomorfo a $\mathcal{R}_n$, logo podemos nos referir ao grupo das rotações como o grupo $\mathcal{R}_n$ ou $SO(n)$, entendendo-se por rotações como rotações próprias).

O grupo denotado por $U(n)$ é o grupo das matrizes unitárias $n \times n$ e $SU(n)$ o grupo das matrizes unitárias $n \times n$ de determinante=+1.

O grupo de todas as permutações de n objetos é denotado por S_n (ou por P_n).

Notemos que as tabelas dos exemplos 2 e 3 são idênticas se fizermos a seguinte identificação biunívoca:

$$E \longleftrightarrow E, R_1 \longleftrightarrow P_5, R_2 \longleftrightarrow P_4, R_3 \longleftrightarrow P_1, R_4 \longleftrightarrow P_2, R_5 \longleftrightarrow P_3.$$

Esse exemplo ilustra aquilo que se denomina *isomorfismo* entre dois grupos. Precisamente, definimos isomorfismo como uma correspondência biunívoca entre os elementos de dois grupos G e H : $G_i \longleftrightarrow H_i$ de maneira tal que se temos $G_a G_b = G_c$ então temos $H_a H_b = H_c$. Chamamos *Homomorfismo* uma relação semelhante entre dois grupos mas onde não há uma correspondência de um-para-um (não é biunívoca). Portanto, como vimos D_3 e S_3 são isomórficos e, como veremos mais tarde (seção 2.3), $\mathcal{R}_3$ e $SU(2)$ são homomórficos.

Um *subgrupo* é um subconjunto de um grupo qualquer que também satisfaz as definições de grupo. Por exemplo $\mathcal{R}_2$ é um subgrupo de $\mathcal{R}_3$. Subgrupos representam um papel importante nas teorias de perturbações. Existe um elegante teorema sobre subgrupos devido a Lagrange denominado Teorema de Lagrange (!), que diz que a ordem de um subgrupo deve ser um divisor da ordem do grupo.

Suponhamos que um grupo K contenha dois subgrupos G e H tais que seus elementos comutam, $G_a H_b = H_b G_a$, onde G_a é um elemento qualquer de G e H_b um elemento qualquer de H e se, além do mais, qualquer elemento de K pode ser escrito de forma única como um produto $G_a H_b$ então K é chamado o produto direto de G e H :

$$K = G \times H$$

A vantagem de se reconhecer um grupo como o produto direto de outros é que suas propriedades podem ser deduzidas das propriedades dos grupos que o compõem. Podemos citar como exemplo o grupo $O(3)$ que é o produto direto dos grupos $\mathcal{R}_3$ com o grupo das inversões.

Diz-se que um elemento G_a de um grupo é *conjugado* a outro G_b quando há um terceiro elemento qualquer G_n desse mesmo grupo tal que:

$$G_a = G_n G_b G_n^{-1}$$

Essa é obviamente uma propriedade transitiva, i.e.; se G_b e G_c são ambos conjugados a G_a então segue-se que eles são conjugados entre si, o que nos leva ao conceito de classe. Uma classe C_p de um grupo é um subconjunto desse grupo em que todos os elementos são conjugados. Notemos que um elemento só pode pertencer a uma classe e que, em um grupo Abeliano, todos os elementos desse grupo estão em uma classe própria, ou seja, todas as classes desse grupo contêm apenas um elemento, devido à comutatividade. Por esse mesmo motivo a identidade é sempre uma classe própria. Para ilustrarmos o conceito de classes, consideremos a seguinte transformação ortogonal própria arbitrária de coordenadas (rotação) R em um espaço tridimensional:

- Vetores são transformados da seguinte maneira:

$$\mathbf{k}' = R\mathbf{k}$$

- Operadores são transformados da seguinte maneira:

$$A' = RAR^{-1}$$

Consideremos que $A = R_{\vec{k}}(a)$, ou seja, nossa operação que será submetida a uma transformação é uma rotação de um ângulo “ a ” em torno da direção dada por $\mathbf{k}$ e que $A' = R_{\vec{k}'}(a)$, então:

$$R_{\vec{k}'}(a) = RR_{\vec{k}}(a)R^{-1}$$

como R , $R_{\vec{k}}(a)$, $R_{\vec{k}'}(a)$, R^{-1} são rotações no espaço tridimensional, a relação acima pode ser considerada uma relação de conjugação de elementos do grupo $\mathcal{R}_3$, portanto quaisquer rotações de um ângulo “ a ” estão em uma mesma classe, independentemente de qual seja a direção do eixo de rotação (e da mesma maneira, duas rotações de ângulos diferentes não podem estar na mesma classe). Portanto também podemos ver a partir do exemplo 2 que R_1 e R_2 formam uma classe e R_3 , R_4 e R_5 outra (analogamente P_1 , P_2 e P_3 , P_4 , P_5). Notemos também que as classes de grupos que são produtos diretos são facilmente deduzidas das classes dos grupos que os compõem:

Seja $K = G \times H$ e suponhamos que G_aH_b e G_cH_d estejam em uma mesma classe, isso implica que há um elemento G_eH_f tal que

$$G_eH_fG_aH_b(G_eH_f)^{-1} = G_cH_d \implies (G_eG_aG_e^{-1})(H_fH_bH_f^{-1}) = G_cH_d$$

de maneira que $G_eG_aG_e^{-1} = G_c$ e $H_fH_bH_f^{-1} = H_d$, mostrando que G_a e G_c estão em uma mesma classe de G e que H_b e H_d estão em uma mesma classe de H . Portanto uma classe de $G \times H$ conterá todos os produtos G_aH_b onde G_a percorre por uma classe de G e H_b percorre por uma classe de H . Haverá uma classe de $G \times H$ para cada par de classes, uma de G e uma de H . Por exemplo, o grupo totalmente ortogonal O_3 tem duas classes associadas a cada ângulo de rotação a , em uma há as

rotações próprias $R_{\vec{k}}(a)$ e na outra, as rotações impróprias $IR_{\vec{k}}(a)$.

E por fim, antes de começarmos a importante teoria das representações de grupos, anunciaremos um simples e útil teorema, o chamado “teorema de rearranjo de grupos”, que diz que se G_a é um elemento fixo qualquer de G e G_b é permitido percorrer todos os elementos de G , então o produto $G_a G_b$ também percorre todos os elementos de G , cada elemento aparecendo apenas uma vez.

1.2.2 Representações de Grupos

A importante teoria das representações de grupos faz uso de duas idéias matemáticas simples: espaços vetoriais e teoria de grupos, associando-as ([5]).

Se podemos encontrar um conjunto T de operadores lineares $T(G_a)$ em um espaço vetorial L que correspondam aos elementos G_a de um grupo G no sentido que:

$$T(G_a)T(G_b) = T(G_a G_b), \quad T(E) = 1$$

então dizemos que esse conjunto de operadores formam uma representação do grupo G no espaço vetorial L . O espaço L é dito ser o *espaço de representações* de T . Essa representação é chamada *fiel* (faithful) se ela é isomórfica. Mas, geralmente, as representações são homeomórficas, tendo muitos elementos do grupo representados por apenas um operador do espaço vetorial, por exemplo, o caso trivial da representação identidade, no qual todos os elementos são representados pelo operador unitário 1.

Mas antes de mais nada explicitemos algo que deveremos utilizar amplamente. Diz respeito à transformação de funções em um espaço vetorial de funções $\phi(\mathbf{r})$ induzida por um elemento G_a de G . Denotamos essa transformação induzida por $T(G_a)$, e definimos:

$$T(G_a)\phi(\mathbf{r}) = \phi(G_a^{-1}\mathbf{r})$$

notemos que aqui fazemos uso de dois espaços vetoriais, o espaço das coordenadas de $\mathbf{r}$, no qual $T(G)$ está definido, e o espaço das funções de $\phi(\mathbf{r})$. A convenção de

usar G_a^{-1} ao invés de G_a leva a importantes simplificações e tem significado físico. Suponhamos que $\phi(\mathbf{r})$ representa a temperatura de um corpo em um ponto $\mathbf{r}$ (em três dimensões) e que G_a denota a rotação desse corpo em torno da origem, então a definição dada anteriormente nos assegura que a nova função $\phi'(\mathbf{r}) = T(G_a)\phi(\mathbf{r})$ represente a temperatura em $\mathbf{r}$ após a rotação, pois a rotação G_a leva $\mathbf{r}$ em $\mathbf{r}'$ ($G_a\mathbf{r} = \mathbf{r}'$) e a nova temperatura em $\mathbf{r}$ (dada por $\phi'(\mathbf{r})$) deve ser a temperatura em $G_a^{-1}\mathbf{r}$ antes da rotação (dada por $\phi(G_a^{-1}\mathbf{r})$).

Escolhendo uma base ortonormal $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_s$ em L , podemos encontrar uma matriz para cada operador $T(G_a)$ com elementos $T_{ij}(G_a) = \langle \mathbf{e}_i, T(G_a)\mathbf{e}_j \rangle$ formando uma representação do grupo:

$$T_{ij}(G_a G_b) = \sum_i T_{ik}(G_a) T_{kj}(G_b)$$

Exemplo 1:

Ilustremos com a representação do grupo D_3 , exemplo 2 da seção 1.2.1. Podemos formar uma representação fiel escrevendo as transformações induzidas por cada operação no espaço Cartesiano tridimensional. Escolhamos uma base de vetores $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ e $\mathbf{e}_z$ como na figura 1. Nesse caso ficamos com:

$$T(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E, dado que:

$$T(R_1)\mathbf{e}_x = -\frac{1}{2}\mathbf{e}_x + \sqrt{\frac{3}{4}}\mathbf{e}_y$$

$$T(R_1)\mathbf{e}_y = -\sqrt{\frac{3}{4}}\mathbf{e}_x - \frac{1}{2}\mathbf{e}_y$$

$$T(R_1)\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z$$

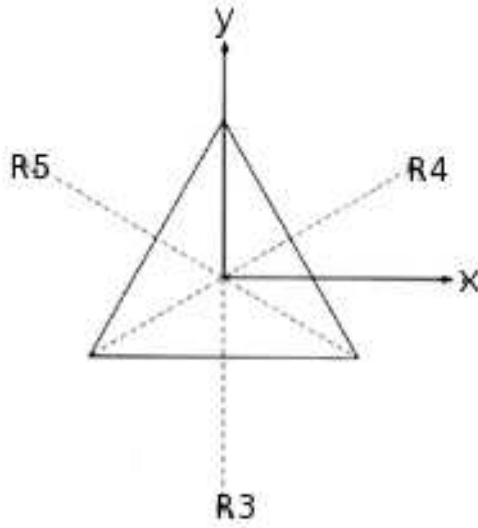


Figura 1.1: Eixos de simetria de um triângulo

Chegamos, via equação $T_{ij}(G_a) = \langle \mathbf{e}_i, T(G_a)\mathbf{e}_j \rangle$:

$$T(R_1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{3}{4}} & 0 \\ \sqrt{\frac{3}{4}} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

analogamente para os outros elementos do grupo:

$$T(R_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{4}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{3}{4}} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T(R_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T(R_4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{3}{4}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{3}{4}} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, T(R_5) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{4}} & 0 \\ \sqrt{\frac{3}{4}} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pode-se verificar que essas matrizes têm a mesma tabela de multiplicação dos elementos do grupo. Por exemplo $T(R_1)T(R_4) = T(R_5)$ que é consistente com $R_1R_4 = R_5$ (tabela 1.3). Podemos gerar a representação identidade de D_3 (que

denotamos por $T^{(1)}$ associando +1 a cada elemento do grupo:

$$T^{(1)}(R_1) = 1, T^{(1)}(R_2) = 1, T^{(1)}(R_3) = 1$$

$$T^{(1)}(R_4) = 1, T^{(1)}(R_5) = 1, T^{(1)}(E) = 1$$

Podemos também gerar uma representação unidimensional de D_3 partindo do espaço unidimensional do vetor $\mathbf{e}_z$ (que denotamos por $T^{(2)}$):

$$T^{(2)}(R_1) = 1, T^{(2)}(R_2) = 1, T^{(2)}(R_3) = -1$$

$$T^{(2)}(R_4) = -1, T^{(2)}(R_5) = -1, T^{(2)}(E) = 1$$

Nota-se que $T^{(2)}$ está representada pelos elementos da terceira coluna, terceira linha, da representação $T(R)$ que fizemos acima, as matrizes 2×2 formadas pelas duas primeiras linhas e colunas dessa representação é na verdade uma representação bidimensional desse mesmo grupo D_3 (no espaço gerado pela base $\mathbf{e}_x$ e $\mathbf{e}_y$) que denotamos por $T^{(3)}$.

Exemplo 2:

Podemos usar o mesmo espaço do exemplo anterior para gerar uma representação do grupo infinito $\mathcal{R}_2$ das rotações em torno do eixo z . Os elementos desse grupo, $R(a)$, agora são rotulados por um parâmetro contínuo a no intervalo $0 \leq a < 2\pi$, com a matriz sendo dada por:

$$T(a) = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 0 \\ \sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

verificamos que $T(a)T(b) = T(a+b)$, para qualquer a e b , consistentemente com $R(a)R(b) = R(a+b)$.

Um conceito muito importante para a teoria das representações de grupos é o conceito de espaços invariantes.

Um subespaço L_1 de L é dito ser um *subespaço invariante* com respeito às transformações induzidas pelo grupo G (ou simplesmente um “subespaço invariante”) se, para qualquer vetor $\mathbf{r}_1$ de L_1 , o vetor transformado $\mathbf{r}'_1$ também está em L_1 , para todo operador $T(G_a)$ dessa representação do grupo G :

$$\mathbf{r}_1 \in L_1, \mathbf{r}'_1 = T(G_a)\mathbf{r}_1 \implies \mathbf{r}'_1 \in L_1, \forall T(G_a) \in T(G)$$

Podemos gerar um subespaço invariante partindo de um único vetor arbitrário do espaço L . Seja $\mathbf{r}$ um vetor qualquer de L , e definido um conjunto de g (g é a ordem de G) vetores $\mathbf{r}_a$ pela equação

$$\mathbf{r}_a = T(G_a)\mathbf{r}, \mathbf{r} \in L, \forall T(G_a) \in T(G)$$

segue-se imediatamente que o conjunto de vetores $\mathbf{r}_a$ gera um subespaço invariante de L , pois

$$T(G_b)\mathbf{r}_a = T(G_b)T(G_a)\mathbf{r} = T(G_bG_a)\mathbf{r} = T(G_c)\mathbf{r} = \mathbf{r}_c, \mathbf{r}_c \in L, G_c = G_bG_a$$

Se todos os vetores $\mathbf{r}_a$ forem linearmente independentes, eles formarão uma base para uma representação g -dimensional do grupo G , mas geralmente eles não o serão. Nesse caso será sempre possível construir uma base s -dimensional ($s \leq g$) ortonormal utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

É fácil ver que é sempre possível fazermos representações matriciais de tamanho (dimensão) tão grande quanto se queira simplesmente aumentando a dimensão do espaço vetorial L . No entanto há uma propriedade muito interessante das representações de grupos bastante explorada na matemática da física quântica e da física das partículas elementares que simplifica consideravelmente nosso estudo de representações de dimensões grandes:

Para um grupo finito, qualquer representação pode ser construída por um número finito de representações irredutíveis distintas.

Seja L um espaço invariante com respeito as transformações $T(G_a)$ induzidas por um grupo G de elementos G_a . Então se L_1 for um subespaço invariante de L ,

e se L_2 , o complemento ortogonal de L_1 , também for um subespaço invariante de L , então dizemos que a representação T reduz, ou é redutível, caso contrário dizemos que é uma representação irredutível. Desde que as representações $T(G_a)$ sejam hermitianas, e esse é o caso para quase toda representação de interesse na física, a invariância de L_1 implica na invariância de L_2 . Provando:

Seja $\mathbf{e}_i$ uma base de L_1 e $\mathbf{e}'_j$ uma base de L_2 , sabendo que L_2 é o complemento ortogonal de $L_1 \implies \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}'_j \rangle = 0$. Da invariância de L_1 segue-se que:

$$\langle T(G_a)\mathbf{e}_i, \mathbf{e}'_j \rangle = 0$$

E, como $T(G_a)^\dagger = T(G_a)$, $\forall T(G_a) \in T(G)$:

$$\langle \mathbf{e}_i, T(G_a)\mathbf{e}'_j \rangle = 0$$

Portanto os vetores $T(G_a)\mathbf{e}'_j$ são ortogonais aos vetores $\mathbf{e}_i$ e devem fazer em L_2 , de maneira que L_2 deve ser invariante. Q.E.D.

Portanto, é possível dividir qualquer espaço L em uma soma de subespaços L_q invariantes e irredutíveis, apesar de essa divisão não ser necessariamente única:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \dots$$

Correspondentemente, podemos escrever a redução da representação como:

$$T(G_a) = T^{(1)}(G_a) \dot{+} T^{(2)}(G_a) \dot{+} T^{(3)}(G_a) \dot{+} \dots$$

onde $T^{(q)}(G_a)$ é a representação irredutível de G_a induzida no espaço L_q , e onde essa soma deve ser interpretada como a soma de operadores $T^{(q)}(G_a)$ que operam em espaços diferentes L_q .

Analogamente à equação para os operadores, temos a equação para a representação matricial:

$$T(G_a) = T^{(1)}(G_a) \dot{+} T^{(2)}(G_a) \dot{+} T^{(3)}(G_a) \dot{+} \dots$$

mas onde “ $\dot{+}$ ” indica que essa não é uma soma usual de matrizes, mas significa que T é composto das matrizes quadradas $T^{(q)}(G_a)$ da seguinte maneira:

* Nas representações matriciais, as matrizes aparecerão na forma bloco-diagonal (block-diagonal form):

$$T(G_a) \doteq \begin{pmatrix} T^{(1)}(G_a) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T^{(2)}(G_a) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & T^{(3)}(G_a) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Os zeros representam matrizes retangulares, $T^{(q)}(G_a)$ são matrizes quadradas de dimensão igual à do subespaço L_q . Claro deve ser que a representação na forma bloco-diagonal é feita na base apropriada de L . Ou seja, admitindo que o ordenamento dos vetores da base sejam:

$$\mathbf{r} \doteq \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^{(1)} \\ \mathbf{e}_2^{(1)} \\ \dots \\ \mathbf{e}_1^{(2)} \\ \mathbf{e}_2^{(2)} \\ \dots \\ \mathbf{e}_1^{(3)} \\ \mathbf{e}_2^{(3)} \\ \dots \end{pmatrix}$$

Cada $T^{(q)}(G_a)$ é uma representação matricial irredutível do grupo G .

Conforme descrevemos como construir um espaço invariante com um vetor arbitrário $\mathbf{r}$, se esse espaço é então reduzido à uma soma de subespaços irredutíveis, segue-se que o vetor $\mathbf{r}$ também pode ser escrito como uma espécie de soma e dizemos que ele é analisado em suas componentes irredutíveis $\mathbf{r}_q$:

$$L = \sum_q L_q, \implies \mathbf{r} = \sum_q \mathbf{r}_q, \mathbf{r}_q \in L_q$$

Concentraremos agora nossos esforços nas propriedades das representações irredutíveis, sendo que agora sabemos que delas deduzimos as propriedades de qualquer representação redutível. Mesmo assim ainda nos resta um número infinito de

possíveis representações irredutíveis! Observe, por exemplo, que bastaria termos escolhido uma diferente base no plano xy do exemplo 2 da seção 1.2.1 e teríamos representações matriciais totalmente diferentes para D_3 . Mas as propriedades essenciais de uma representação de um grupo são independentes de uma tal mudança de base! Esse é, basicamente, o conceito de representações equivalentes.

Denotemos por $T(G_a)$ uma representação de um grupo G em um espaço L . Então, se A é um mapeamento de L (transformação de similaridade) em um novo espaço L' com a mesma dimensão, segue-se que o conjunto de operadores $T'(G_a) = AT(G_a)A^{-1}$ que agem em L' também formam uma representação de G :

$$\begin{aligned} T'(G_a)T'(G_b) &= AT(G_a)A^{-1}AT(G_b)A^{-1} = AT(G_a)T(G_b)A^{-1} \\ &= AT(G_aG_b)A^{-1} = T'(G_aG_b) \end{aligned}$$

dizemos então que as duas representações T e T' são equivalentes. Essa é uma propriedade transitiva, o que nos leva ao conceito de uma classe de representações mutuamente equivalentes. Restringiremos nossa atenção a apenas uma representação de uma classe dessas. Daremos preferência ao estudo das representações unitárias por serem mais elegantes (e mais tratáveis) e por causa do Teorema de Maschke que diz que para qualquer grupo finito e para quase todo grupo infinito de interesse em física, toda classe de representações equivalentes contém representações unitárias. Provemos esse teorema mostrando que qualquer representação é equivalente a uma representação unitária:

Mostremos que o operador

$$S = \left[\sum_b T^\dagger(G_b)T(G_b) \right]^{\frac{1}{2}}$$

transforma $T'(G_a) = ST(G_a)S^{-1}$ de maneira que $T'(G_a)^\dagger = T'(G_a)^{-1}$, observando que $S = S^\dagger$:

$$\begin{aligned} T(G_a)^\dagger S^2 T(G_a) &= \sum_b T(G_a)^\dagger T(G_b)^\dagger T(G_b) T(G_a) = \sum_b T(G_a)^\dagger T(G_b)^\dagger T(G_b G_a) \\ &= \sum_b T(G_b G_a)^\dagger T(G_b G_a) = \sum_c T(G_c)^\dagger T(G_c) = S^2, \quad G_c = G_b G_a. \end{aligned}$$

utilizando o teorema do rearranjo de grupos. E pós-multiplicando ambos os lados dessa equação por $T^{-1}(G_a)S^{-1}$, e pré-multiplicando por S^{-1} , chegamos em:

$$S^{-1}T(G_a)^{\dagger}S = ST^{-1}(G_a)S^{-1} , \implies (ST(G_a)S^{-1})^{\dagger} = (ST(G_a)S^{-1})^{-1}$$

Q.E.D.

Convém, portanto, que façamos referência a duas representações irredutíveis equivalentes como a mesma representação. Duas representações $T(G_a)$ e $T'(G_a)$ são ditas inequivalentes se não há algum operador A que possa satisfazer $T'(G_a) = AT(G_a)A^{-1}$ para todo G_a de G . Isso significa que a redução a uma soma de suas componentes irredutíveis pode tomar a forma:

$$T = \sum_{\alpha} m_{\alpha} T^{(\alpha)} , m_{\alpha} \in \mathbb{Z}$$

Uma característica importante de uma representação matricial é o traço de suas matrizes, chamado *caráter* da representação matricial e denotado por $\chi(G_a)$.

$$\chi(G_a) = \sum_{i=1}^s T_{ii}(G_a)$$

E, notando que o caráter é invariante por uma transformação de similaridade:

$$\chi'(G_a) = \sum_{i=1}^s T'_{ii}(G_a) = \text{Tr}(AT(G_a)A^{-1}) = \text{Tr}(T(G_a))$$

Pois $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BCA) = \text{Tr}(CAB)$. Podemos entender por que o caráter é interessante para o estudo de representações - representações equivalentes têm o mesmo caráter. E por um argumento similar, também podemos ver que todos os elementos $T(G_i)$ de uma classe devem ter o mesmo caráter.

Enunciemos agora o mais importante teorema da teoria dos grupos finitos, o chamado Grande Teorema da Ortogonalidade (GOT; Great Orthogonality Theorem):

$$\sum_{a=1}^g T_{ip}^{(\alpha)}(G_a) T_{jq}^{(\beta)}(G_a)^* = g \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} \delta_{pq} / s_{\alpha}$$

essa relação de ortogonalidade é extremamente poderosa, e só é válida para representações irredutíveis, o que nos levará a um teste algébrico simples para descobrirmos se uma representação é redutível ou não. Como caso particular, o caso não-nulo:

$$\sum_{a=1}^g |T_{ip}^{(\alpha)}(G_a)|^2 = g/s_\alpha, \forall i, p.$$

Podemos também enunciar uma relação semelhante para os caracteres de um grupo:

$$\sum_{a=1}^g \chi^{(\alpha)}(G_a) \chi^{(\beta)}(G_a)^* = g \delta_{\alpha\beta}$$

Essa relação é conhecida como o Pequeno Teorema da Ortogonalidade (LOT; Little Orthogonality Theorem).

Se tomarmos os elementos conjugados em classes (com um mesmo número c_p de elementos), essa relação se torna:

$$\sum_{p=1}^n c_p \chi_p^{(\alpha)}(G_a) \chi_p^{(\beta)}(G_a)^* = g \delta_{\alpha\beta}$$

o caso não-nulo:

$$\sum_{p=1}^n c_p |\chi_p^{(\alpha)}(G_a)|^2 = g$$

Uma segunda relação de ortogonalidade para os caracteres de um grupo é dada por:

$$\sum_{\alpha} \chi_p^{(\alpha)*} \chi_q^{(\alpha)} = g \delta_{pq} / c_p$$

Um fato muito importante que também podemos enunciar é:

Número de classes em um grupo = Número de representações inequivalentes irredutíveis desse grupo

Do exemplo 1 da seção 1.2.2 podemos construir uma tabela que ilustra tudo isso bem (tabela 1.5).

Representação $\downarrow \times$ Classe	$C_1(E)$	$C_2(R_1, R_2)$	$C_3(R_3, R_4, R_5)$
$T^{(1)}$	1	1	1
$T^{(2)}$	1	1	-1
$T^{(3)}$	2	-1	0

Tabela 1.5: Tabela de caracteres de D_3

Podemos reduzir uma representação utilizando caracteres da seguinte maneira: Dado que $\chi_p = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \chi_p^{(\alpha)}$, se conhecemos $\chi_p^{(\alpha)}$ (é geralmente tabelado), precisamos apenas do LOT:

$$\frac{1}{g} \sum_p c_p \chi_p^{(\beta)*} \chi_p = \frac{1}{g} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \sum_p c_p \chi_p^{(\beta)*} \chi_p^{(\alpha)} = \frac{1}{g} \sum_{\alpha} m_{\alpha} g \delta_{\alpha\beta} = m_{\beta}$$

Ilustrando com o exemplo 1 da seção 1.2.2 (a representação tridimensional de D_3) que nos dá os caracteres $\chi = (3, 0, -1)$ para as três classes de D_3 , e escrevendo:

$$T = m_1 T^{(1)} + m_2 T^{(2)} + m_3 T^{(3)}$$

e usando a equação logo acima:

$$m_1 = \frac{1}{6}(3 + 0 - 3) = 0$$

$$m_2 = \frac{1}{6}(3 + 0 + 3) = 1$$

$$m_3 = \frac{1}{6}(6 + 0 + 0) = 1$$

mostrando que T reduz em $T = T^{(2)} + T^{(3)}$, o que já era evidente pelo aspecto das matrizes.

Sabemos que se uma representação é irredutível temos:

$$\sum_{p=1}^n c_p |\chi_p^{(\alpha)}(G_a)|^2 = g$$

mas, caso contrário:

$$\sum_{p=1}^n c_p |\chi_p^{(\alpha)}(G_a)|^2 = \sum_{\alpha\beta p}^n c_p m_{\alpha} m_{\beta} \chi_p^{(\alpha)} \chi_p^{(\beta)*} = g \sum_{\alpha} m_{\alpha}^2$$

logo $\sum_{\alpha} m_{\alpha}^2 = 1$, contradizendo a suposição que $m_{\alpha} \in \mathbb{Z}$, donde concluimos que $\sum_{p=1}^n c_p |\chi_p^{(\alpha)}(G_a)|^2 = g$ é uma condição necessária e suficiente para que a representação seja irredutível.

De tudo isso, resumidamente podemos concluir que as tabelas de carácter como a dada anteriormente devem ser quadradas, com linhas e colunas mutuamente ortogonais.

Para grupos cíclicos de ordem n , os caracteres das representações irredutíveis são dadas por $\chi^{(m)}(C_n^p) = \exp(2\pi i mp/n)$ com $m = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$.

Definimos o produto direto de duas representações como $T^{(\alpha \otimes \beta)}$:

$$T^{(\alpha \otimes \beta)} = T^{(\alpha)} \otimes T^{(\beta)}$$

sendo o produto direto de matrizes $(A \otimes B)_{ij,kl} = A_{ij}B_{kl}$, temos que a representação matricial fica:

$$T_{ij,kl}^{(\alpha \otimes \beta)}(G_a) = T_{ik}^{(\alpha)}(G_a)T_{jl}^{(\beta)}(G_a)$$

e o carácter desse produto direto fica:

$$\chi^{(\alpha \otimes \beta)}(G_a) = \sum_{ij} T_{ij,ij}^{(\alpha \otimes \beta)}(G_a) = \sum_{ij} T_{ii}^{(\alpha)}(G_a)T_{jj}^{(\beta)}(G_a) = \chi^{(\alpha)}(G_a)\chi^{(\beta)}(G_a)$$

Mas $T^{(\alpha \otimes \beta)}$ pode ou não ser redutível, e, caso não seja, podemos reduzi-lo como no último exemplo:

$$T^{(\alpha \otimes \beta)} = \sum_{\gamma} m_{\gamma} T^{(\gamma)}$$

e da equação $m_{\beta} = \frac{1}{g} \sum_p c_p \chi_p^{(\beta)*} \chi_p$:

$$m_{\gamma} = \frac{1}{g} \sum_p c_p \chi_p^{(\gamma)*} \chi_p^{(\alpha)} \chi_p^{(\beta)}$$

No caso de grupos contínuos, essa redução de produtos diretos é calculada convenientemente com os chamados *Tableau de Young* (ver [3]), muito importantes na física de partículas elementares mas do qual apenas citaremos, pois nos bastará saber o seu significado, que é claro após o aventado. Cabe aqui alguns exemplos,

como o caso do grupo $SU(2)$ (spin, por exemplo). Simbolizamos a representação fundamental de $SU(2)$ na forma:

$$\left[\frac{1}{2}\right]$$

e, um produto direto de duas representações fundamentais desse grupo poderia ser escrito:

$$\left[\frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}\right] = [1] + [0]$$

assim como a soma de dois spins meio (duplete) resultam em um tripleto ($[1]$) e um singleto ($[0]$), conforme sabemos da mecânica quântica (ver [6]). E também

$$\left[\frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}\right] = \left[\frac{3}{2}\right] + \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2}\right].$$

Na prática, a representação de produtos direto ocorre naturalmente quando consideramos produtos de funções. Se o conjunto de s_α funções $\phi_k^{(\alpha)}$ transformam de acordo com $T^{(\alpha)}$ e o conjunto de s_β funções $\psi_l^{(\beta)}$ transformam de acordo com $T^{(\beta)}$, então o conjunto de $s_\alpha s_\beta$ produtos $[\phi_k^{(\alpha)} \psi_l^{(\beta)}]$ transformam de acordo com $T^{(\alpha \otimes \beta)}$. Para vermos isso, consideremos:

$$\begin{aligned} T(G_a)[\phi_k^{(\alpha)} \psi_l^{(\beta)}] &= \sum_i \sum_j T_{ik}^{(\alpha)}(G_a) T_{jl}^{(\beta)}(G_a) [\phi_k^{(\alpha)} \psi_l^{(\beta)}] \\ &= \sum_{ij} T_{ij,kl}^{(\alpha \otimes \beta)}(G_a) [\phi_k^{(\alpha)} \psi_l^{(\beta)}] \end{aligned}$$

Supondo que a representação do produto direto reduz:

$$T^{(\alpha \otimes \beta)} = \sum_{\gamma} m_{\gamma} T^{(\gamma)}$$

então, deve ser possível, por uma transformação de base, escolher combinações lineares:

$$\Psi_k^{(\gamma)t} = \sum_{ij} C(\alpha\beta\gamma t, ijk) [\phi_k^{(\alpha)} \psi_l^{(\beta)}]$$

que transformam irredutivelmente de acordo com $T^{(\gamma)}$. Os coeficientes $C(\alpha\beta\gamma t, ijk)$ são denominados *coeficientes de Clebsch-Gordan* para o grupo, e são geralmente normalizados:

$$\sum_{ij} |C(\alpha\beta\gamma t, ijk)|^2 = 1$$

As funções $\Psi_k^{(\gamma)t}$ são normalizadas e serão ortogonais com relação a γ e t , e portanto, o conjunto $\Psi_k^{(\gamma)t}$ é ortonormal, e a transformação:

$$\Psi_k^{(\gamma)t} = \sum_{ij} C(\alpha\beta\gamma t, ijk) [\phi_k^{(\alpha)} \psi_l^{(\beta)}]$$

é unitária e sua inversa pode ser escrita como:

$$[\phi_i^{(\alpha)} \psi_j^{(\beta)}] = \sum_{rtk} C^*(\alpha\beta\gamma t, ijk) \Psi_k^{(\gamma)t}$$

A teoria dos grupos e a teoria das representações de grupos são auxílios consideráveis no importante tópico de classificação de operadores, que tem interesse físico direto em mecânica quântica, onde observáveis físicos são descritos por operadores. Um estudo de suas propriedades de transformação leva diretamente a um entendimento, por exemplo, de regras de seleção em processos de transição.

Consideremos as transformações $T(G_a)$ em algum espaço L , se S é um operador qualquer em L então seja uma transformação de S :

$$S' = T(G_a) S T(G_a)^{-1}$$

definimos um conjunto irreduzível de operadores $S_i^{(\alpha)}$ pela propriedade:

$$S_i'^{(\alpha)} \equiv T^{(\alpha)}(G_a) S_i^{(\alpha)} T^{(\alpha)}(G_a)^{-1} = \sum_i T_{ij}^{(\alpha)}(G_a) S_i^{(\alpha)}$$

e a um tal conjunto de operadores se diz que transformam-se de acordo com a representação irreduzível $T^{(\alpha)}$. O número de operadores desse conjunto é igual à dimensão de $T^{(\alpha)}$, s_α . Em particular, um operador escalar $S' = S$ transformará de acordo com a representação identidade. O produto de dois operadores $S_i^{(\alpha)} S_j^{(\beta)}$ transformará de acordo com a linha ij da representação do produto direto $T^{(\alpha \otimes \beta)}$. Consideremos o resultado de uma operação $S_i^{(\alpha)}$ em uma função $\phi_j^{(\beta)}$, onde, como a notação implica, ambos transformam de acordo com a representação irreduzível do mesmo grupo. O conjunto de $s_\alpha s_\beta$ funções ψ_{ij} definidos por:

$$\psi_{ij} = S_i^{(\alpha)} \phi_j^{(\beta)}$$

transformará de acordo com a representação do produto direto $T^{(\alpha \otimes \beta)}$ dado que:

$$\begin{aligned} T(G_a)\psi_{ij} &= T(G_a)S_i^{(\alpha)}T(G_a)^{-1}T(G_a)\phi_j^{(\beta)} \\ &= \sum_{k,m} T_{ki}^{(\alpha)}(G_a)T_{mj}^{(\beta)}(G_a)S_k^{(\alpha)}\phi_m^{(\beta)} = \sum_{k,m} T_{km,ij}^{(\alpha \otimes \beta)}(G_a)\psi_{km} \end{aligned}$$

Podemos, portanto, expandir cada ψ_{ij} em componentes irredutíveis usando $[\phi_i^{(\alpha)}\psi_j^{(\beta)}] = \sum_{rtk} C^*(\alpha\beta\gamma t, ijk)\Psi_k^{(\gamma)t}$:

$$\psi_{ij} = \sum_{\gamma', t, k'} C^*(\alpha\beta\gamma' t, ijk')\Psi_{k'}^{(\gamma')t}$$

e os elementos da matriz de um operador irredutível $S_i^{(\alpha)}$ entre as bases $\phi_j^{(\beta)}$ e $\phi_k^{(\gamma)}$. Temos:

$$\begin{aligned} \langle \phi_k^{(\gamma)}, S_i^{(\alpha)}\phi_j^{(\beta)} \rangle &= \langle \phi_k^{(\gamma)}, \psi_{ij} \rangle = \sum_{\gamma', t, k'} C^*(\alpha\beta\gamma' t, ijk') \langle \phi_k^{(\gamma)}, \Psi_{k'}^{(\gamma')t} \rangle \\ &= \sum_t C^*(\alpha\beta\gamma t, ijk) \langle \phi_k^{(\gamma)}, \Psi_k^{(\gamma)t} \rangle \end{aligned}$$

Isso mostra, primeiramente, que o elemento de matriz do operador $S_i^{(\alpha)}$ é zero, a menos que a representação irredutível $T^{(\gamma)}$ ocorra na redução do produto $T^{(\alpha)} \otimes T^{(\beta)}$. Desde que os coeficientes de Clebsch-Gordan são conhecidos da teoria dos grupos (são tabelados), essa equação contém apenas uma constante para cada termo na soma em T . Em particular, para um grupo simplesmente-redutível, há apenas uma dessas constantes. O termo “elementos da matriz reduzida” é usado para essas constantes, com a notação:

$$\langle \phi_k^{(\gamma)} || \mathbf{S}^{(\alpha)} || \phi_j^{(\beta)} \rangle_t = \langle \phi_k^{(\gamma)}, \Psi_k^{(\gamma)t} \rangle$$

com essa notação, a última equação fica:

$$\langle \phi_k^{(\gamma)}, S_i^{(\alpha)}\phi_j^{(\beta)} \rangle = \sum_t C^*(\alpha\beta\gamma t, ijk) \langle \phi_k^{(\gamma)} || \mathbf{S}^{(\alpha)} || \phi_j^{(\beta)} \rangle_t$$

que é conhecido como o *Teorema de Wigner-Eckart* e mostra que a dependência em i, j e k está inteiramente contida nos coeficientes de Clebsch-Gordan.

Por fim, enunciamos o resultado que, dado duas representações matriciais irredutíveis $T^{(\alpha)}(G_a)$ de G e $U^{(\beta)}(H_b)$ de H , as matrizes produto direto definidas por:

$$K^{(\alpha \otimes \beta)}(G_a H_b) = T^{(\alpha)}(G_a) \otimes U^{(\beta)}(H_b)$$

formam uma representação irredutível do grupo $K = G \otimes H$.

1.2.3 Grupos Contínuos

Os grupos que são de interesse em teorias de Gauge são os grupos contínuos. Desde que tenhamos estudado a teoria mais simples e intuitiva dos grupos finitos fica fácil entender o tratamento matemático consideravelmente mais complicado dos grupos contínuos, que possuem algumas propriedades muito diferentes (ver [7],[8] e [9]). Os grupos contínuos são grupos infinitos com propriedades semelhantes às propriedades de algumas funções ordinárias diferenciáveis ou analíticas. Um exemplo simples é o conjunto de todos os fatores de fase de uma função de onda na mecânica quântica:

$$U(\theta) = e^{i\theta}$$

Dado que:

$$U(\theta)U(\theta') = e^{i(\theta+\theta')} = U(\theta + \theta')$$

e que:

$$U^{-1}(\theta) = e^{-i\theta} = U(-\theta) \quad , \quad U_0(\theta) = U(0) = 1$$

notamos que $U(\theta) = e^{i\theta}$ apresenta as propriedades de grupo. Esse grupo contínuo unidimensional é conhecido como grupo unidimensional unitário $U(1)$, podendo cada elemento deste grupo ser caracterizado por um único θ , que é um parâmetro contínuo (daí o nome grupo contínuo). Podemos assumir que θ adquire qualquer dos infinitos valores entre 0 e 2π , e notemos que esse grupo definido dessa maneira é também abeliano e diferenciável. Observando que:

$$dU = U(\theta + d\theta) - U(\theta) = e^{i\theta}(1 + id\theta) - e^{i\theta} = ie^{i\theta}d\theta = iUd\theta$$

e como a derivada

$$\frac{dU}{d\theta} = iU = e^{\pi i/2}U$$

também é um elemento deste grupo, dizemos que $U(1)$ é diferenciável.

Temos muitos exemplos de grupos contínuos familiares em física, muitos já foram mencionados - o grupo das rotações em um espaço tridimensional $O(3)$, o grupo das transformações de Lorentz, etc. Os grupos contínuos mais interessantes para as teorias de Gauge são os chamados grupos de Lie (em homenagem ao matemático norueguês Sophus Lie, 1842-1899), que têm a característica distinta de que os parâmetros de cada um de seus elementos serem funções analíticas de cada um dos parâmetros dos outros elementos do grupo. Definições mais formais serão abordadas depois e ilustraremos, por hora, com exemplos.

Portanto, para um grupo de Lie:

$$U(\gamma) = U(\alpha)U(\beta) , \quad \gamma = f(\alpha, \beta)$$

para quaisquer produtos do grupo, onde f é função analítica de α e β . É trivial mostrar que o exemplo anterior, $U(1)$, é um grupo de Lie:

$$U(\gamma) = U(\alpha)U(\beta) , \quad \gamma = f(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$$

para todo produto em $U(1)$, e f é obviamente analítico em α e em β .

Um grupo de Lie *compacto* é um grupo no qual os parâmetros são definidos em um intervalo fechado. Esta é uma propriedade importante, pois garante que o grupo seja unitário (ou tenha uma representação unitária). O grupo $U(1)$ é então, também, um exemplo de grupo de Lie compacto, pois θ está definido em $[0, 2\pi]$. Também o é o grupo $O(3)$, e o grupo de Lorentz é um exemplo de grupo não-compacto, já que não é definido para a transformação $v = c$; ou os chamados parâmetros de “impulsão” (*boost*) $\eta = \text{arctgh}(v/c)$ não são restritos a intervalos fechados e são representados por matrizes não-unitárias.

É importante mencionar nesse ponto que os únicos grupos usados até o momento em teorias de Gauge; são os grupos de Lie compactos. Aparentemente, essa restrição é devida ao fato de que os números quânticos “internos”, como o isospin, estarem relacionados com grupos de simetria compactos ([10]).

Para um grupo de Lie compacto é sempre possível encontrarmos um conjunto de operadores, conhecidos como *geradores*, que geram todos os elementos

desse grupo. O conceito de gerador é uma das ferramentas mais importantes para o estudo dos grupos de Lie e de teorias de Gauge, reconhece-se o conceito dos estudos de mecânica quântica (e mesmo mecânica clássica) onde são vistos informalmente, por exemplo; os momentos angulares como geradores do grupo de rotação, $R(\theta) = e^{(-i\theta\mathbf{n}\cdot\mathbf{J})}$, onde $\mathbf{J}$ é o operador momento angular, que “gera” todos os elementos do grupo de rotações, e que obedece à relação de comutação $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$. Analogamente, para um grupo de Lie qualquer, há um conjunto de operadores F_k , os geradores do grupo, que geram os elementos desse grupo:

$$U = \exp(-i\alpha_k F_k)$$

geralmente o número desses geradores é igual ao número de parâmetros do grupo e satisfazem uma relação de comutação semelhante à relação dos momentos angulares:

$$[F_i, F_j] = ic_{ijk}F_k$$

que determina unicamente os geradores F_i , e portanto, a estrutura do grupo. Por isso os elementos c_{ijk} são conhecidos como *constantes de estrutura* do grupo.

O grupo $O(n)$ deve então ter $n(n-1)/2$ geradores, $O(3)$ com 3 geradores e com valores para as constantes de estrutura ± 1 ou 0. Claramente $SU(n)$ tem $n^2 - 1$ geradores e um grupo abeliano tem todas as constantes de estrutura igual a zero.

Observemos que os geradores têm propriedades matemáticas bem distintas do grupo que geram, por exemplo, enquanto “multiplicamos” os elementos do grupo “somamos” os geradores. O que acontece na verdade é que o conjunto dos geradores forma uma base para um espaço vetorial que tem definido um produto escalar e uma forma de produto vetorial que é definido pela relação de comutação vista e que é chamada *produto cruzado* ou *produto de Lie*. Esse espaço vetorial especial é conhecido como *álgebra de Lie* e é um caso especial de espaços mais gerais conhecidos como *álgebras lineares* ([8]). Podemos citar um exemplo familiar de produto escalar de geradores definido em um desses espaços: o quadrado do momento angular total $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$, que é um caso especial de produtos escalares conhecidos como *invariantes de Casimir*, que são invariantes sob todas as transformações do grupo (comutam com todos os geradores) e que têm a importante propriedade de que seus autovalores são os números quânticos conservados associados com o grupo de simetria (exemplo: os autovalores j e l são invariantes por rotações), esses invariantes

sempre podem ser escritos como a soma de quadrados dos geradores para grupos de Lie compactos e o número desses invariantes depende do grupo em questão. Por exemplo, os grupos $SU(2)$ e $O(3)$ têm apenas um e $SU(3)$, dois.

Muitas das propriedades vistas para grupos discretos seguem também para os grupos contínuos, entretanto, o processo de soma dos elementos de um grupo deve ser substituído por integrais sob os parâmetros do grupo. Podemos estabelecer um pouco mais rigorosamente as propriedades principais e a notação dos grupos contínuos:

Denotando por $G(a_1, a_2, \dots, a_r)$ os elementos de um grupo contínuo, onde os a_q são os parâmetros (com um domínio definido) e r é o número mínimo necessário desses parâmetros para uma descrição do grupo (a dimensão do grupo). A multiplicação de dois elementos quaisquer desse grupo é outro elemento do grupo:

$$G(a_1, a_2, \dots, a_r)G(b_1, b_2, \dots, b_r) = G(c_1, c_2, \dots, c_r)$$

sendo que:

$$c_q = \phi_q(a_1, a_2, \dots, a_r; b_1, b_2, \dots, b_r)$$

são funções diferenciáveis nos grupos de Lie. Os elementos das representações matriciais devem agora ser funções contínuas:

$$T_{ij}^{(\alpha)}(a_1, a_2, \dots, a_r)$$

e também os caracteres:

$$\chi^{(\alpha)}(a_1, a_2, \dots, a_r)$$

Aqui, portanto, não há mais tabelas finitas de caracteres e o número de representações irredutíveis inequivalentes também passa a ser infinito, apesar de as dimensões das representações irredutíveis serem, em geral, finitas. O número de elementos do grupo (g) deve ser substituído por um “volume” do grupo obtido por uma integração sob todos os valores dos parâmetros. Em geral, convencionou-se para a identidade:

$$T(0, 0, \dots, 0) = 1$$

Podemos encontrar, para uma representação $T(\mathbf{a})$ do grupo G em um espaço L , os geradores da seguinte forma: seja a aproximação em primeira ordem da repre-

sentação $T(\mathbf{a})$:

$$T(\mathbf{a}) \cong 1 + \sum_{q=1} a_q X_q$$

onde X_q são operadores lineares fixos, independentes de a_q e podem, portanto ser calculados como:

$$X_q = \lim_{a_q \rightarrow 0} [T(0, 0, \dots, a_q, \dots, 0) - 1]/a_q = \left[\frac{\partial}{\partial a_q} T(\mathbf{a}) \right]_{\mathbf{a}=0}$$

por isso esses operadores são muitas vezes chamados *operadores infinitesimais* da representação T . Pode-se mostrar que qualquer $T(\mathbf{a})$ (finito, por exemplo) pode ser determinado unicamente pelos operadores infinitesimais X_q e pelos parâmetros a_q . As propriedades mais importantes dos operadores infinitesimais podem ser resumidas nos três teoremas que enunciamos em seguida e que são conhecidos como os três teoremas de Lie (ver [7]):

Teorema 1. Se duas representações quaisquer de um grupo G têm os mesmos operadores infinitesimais, então, elas são a mesma representação.

Teorema 2. Para qualquer representação T de G , o conjunto dos operadores infinitesimais X_q satisfaz a seguinte relação:

$$[X_q, X_p] = \sum_t c_{qp}^t X_t$$

onde as constantes de estrutura do grupo (que já foram mencionadas) são as mesmas para toda representação desse grupo.

Teorema 3. Qualquer conjunto de operadores X_q , definido em um espaço L , serão os operadores infinitesimais de uma representação T de G em L se satisfizerem a relação de comutação acima.

De certa maneira as tabelas de multiplicação dos grupos contínuos são substituídas por essas constantes de estrutura. E pode-se mostrar que, se um subconjunto dos operadores infinitesimais de um grupo é fechado sob a operação de comutação, então esse subconjunto gera um subgrupo desse grupo.

Por fim, consideremos um conjunto de funções $\phi_i^{(\alpha)}$, tais que:

$$T\phi_j^{(\alpha)} = \sum_i T_{ij}\phi_i^{(\alpha)}$$

então diz-se que as funções $\phi_i^{(\alpha)}$ transformam de acordo com a representação T , e é importante saber que as mudanças infinitesimais em $\phi_i^{(\alpha)}$ são dadas pelas matrizes X_q :

$$X_q\phi_j^{(\alpha)} = \sum_i (X_q)_{ij}\phi_i^{(\alpha)}$$

1.3 Simetrias e grupos em Física Quântica

A ocorrência de degenerescências é resultado das simetrias em um sistema quântico. Demonstramos isso de forma simples considerando um sistema qualquer com um Hamiltoniano H e descrito por uma função de onda ψ .

$$H\psi = E\psi$$

Agora consideremos uma transformação de coordenadas qualquer que transforma ψ em ψ' , mas tal que $H' = H$, ou seja, H é invariante por essa transformação, H “possui essa simetria”. Então, como a energia E é um escalar (é um número, invariante por uma transformação de coordenadas):

$$H'\psi' = E'\psi' \implies H\psi' = E\psi'$$

O que nos mostra que ψ' e ψ são duas autofunções de H com a mesma energia E . A menos que tenhamos $\psi' = \alpha\psi$ (α uma constante), isso nos dará uma degenerescência dupla. Notemos que dizer que H é invariante sob essa transformação S é o mesmo que dizer que $[H, S] = 0$, e que podemos generalizar essa transformação para o caso de ser uma transformação não necessariamente de coordenadas.

Mais formalmente, consideremos um hamiltoniano independente do tempo $H(\mathbf{r})$ e uma função de onda arbitrária $\psi(\mathbf{r})$. Qualquer grupo G define um conjunto de transformações induzidas $T(G_a)$ no espaço de funções de onda pela maneira

dada pela equação $\psi'(\mathbf{r}) = T(G_a)\psi(\mathbf{r}) = \psi(G_a^{-1}\mathbf{r})$ (como vimos na subseção 1.2.2.), e define também o operador H transformado $H' = T(G_a)HT^{-1}(G_a)$ (idem), se o hamiltoniano é invariante sob essas transformações:

$$H = T(G_a)HT^{-1}(G_a) , \forall G_a \in G$$

então dizemos que G é um grupo de simetria do hamiltoniano. Pós-multiplicando a última equação por $T(G_a)$ temos uma equação equivalente:

$$[T(G_a), H] = 0 , \forall G_a \in G$$

Notemos que o termo da energia cinética em H é invariante para muitas transformações, o que nos leva a considerar as transformações apenas em $V(\mathbf{r})$. Notemos também que o conjunto de autofunções degeneradas de um autovalor E gera uma base de um espaço vetorial e que este espaço vetorial U é invariante com respeito às transformações induzidas por G :

$$\psi'(\mathbf{r}) = T(G_a)\psi(\mathbf{r})$$

então:

$$H\psi'(\mathbf{r}) = HT(G_a)\psi(\mathbf{r}) = T(G_a)H\psi(\mathbf{r}) = ET(G_a)\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

logo as representações $T(G_a)$ nesse espaço vetorial U formam uma representação do grupo de simetria G . Podendo essa representação ser redutível ou irredutível, e se irredutível, a degenerescência será igual à dimensão de U , e maior caso contrário.

Em mecânica quântica, dizemos que um observável é conservado se seu valor esperado em qualquer estado do sistema não varia no tempo. Mostremos que (para operadores independentes do tempo):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \psi, A\psi \rangle &= \langle \frac{\partial}{\partial t}\psi, A\psi \rangle + \langle \psi, A\frac{\partial}{\partial t}\psi \rangle \\ &= (-\langle H\psi, A\psi \rangle + \langle \psi, AH\psi \rangle)/i\hbar = \langle \psi, [A, H]\psi \rangle /i\hbar \end{aligned}$$

se $[A, H] = 0$, então:

$$\frac{d}{dt} \langle \psi, A\psi \rangle = 0$$

assim como em física clássica.

Nota-se também que todo observável é representado por operadores que são simétricos com respeito à permutação das partículas do sistema. É esse o significado matemático preciso do enunciado da indistingüibilidade das partículas dos sistemas quânticos tratados na seção 1.1.2. O hamiltoniano de um sistema de n partículas interagentes idênticas é portanto necessariamente invariante sob permutações de tal maneira que o grupo S_n das permutações de n objetos é um grupo de simetria do sistema. Existem muitas representações irreduzíveis diferentes para S_n (exceto, claro, para n pequeno) *mas* a Natureza parece fazer uso apenas de duas representações de S_n : as duas representações unidimensionais correspondendo aos estados totalmente antissimétrico e totalmente simétrico! Não sabemos exatamente o por quê disso, mas é exatamente isso que os experimentos têm nos mostrado. A representação totalmente simétrica é a representação identidade ($P\psi_S = \psi_S$ para todo P) e a totalmente antissimétrica, a segunda representação unidimensional ($P_{ij}\psi_A = -\psi_A$ para todo par i, j . P_{ij} representando a permuta dos objetos i com j). Observa-se que bósons têm funções de onda totalmente simétricas e que férmions têm funções de onda totalmente antissimétricas. Existe um belo teorema relacionado à estatística de spins que afirma que férmions não podem ter funções de onda simétricas e bósons não podem ter funções de onda antissimétricas, mas nada é dito a respeito das representações de simetria mista tanto para férmions quanto para bósons! Houveram inclusive especulações sobre a possibilidade dos quarks pertencerem a estas representações (paraestatística).

Capítulo 2

Fenomenologia

2.1 Introdução Histórica

O objetivo deste capítulo é resumir o conhecimento experimental dos fatos em teoria das partículas elementares antes de apresentarmos seu estudo teórico.

Poderíamos dizer que o chamado Modelo Padrão da física de partículas elementares é o resultado de mais de dois mil anos de evolução do pensamento sobre a Natureza ([11]). É essa a melhor resposta que podemos dar atualmente à pergunta que nos intriga há tantos séculos:

- De que a matéria é constituída?

A física tem suas raízes nos pensamentos dos grandes filósofos pré-socráticos e evoluiu bastante desde a concepção de substância primordial da matéria por Tales de Mileto, um elemento fundamental que ele identificou com a água e que comporia todas as coisas, e da concepção Pitagórica de que todas as coisas são números, passando pelo atomismo de Leucipo (~ 440 a.C.) e Demócrito (~ 420 a.C.) que postularam que todas as coisas seriam compostas de pequenas partes indivisíveis e perpétuas em movimento determinístico (passando assim de uma concepção teológica para uma concepção mais mecanicista dos fenômenos), até os dias de hoje. Salientemos que muitas das concepções dos gregos antigos podem hoje parecer até ingênuas, como a de Anaxímenes (antes de 494 a.C.) que concebia que a substância última era o ar, Heráclito o fogo, ou de Anaximandro, semelhante a de Aristóteles

e de Empédocles que imaginavam que tudo era formado pelos quatro elementos: terra, ar, água e fogo. Mas a eles devemos muitas de nossas mais caras idéias que de tão arraigadas sequer nos apercebemos, como as idéias de *Teoria, Espaço, leis da Natureza, simetrias, átomos, partículas*, etc...

A concepção moderna dos átomos como constituintes últimos da matéria deve sua existência à muitos cientistas como Newton, que concebia os átomos como centros de força, e ao irlandês Robert Boyle, mas foi o inglês John Dalton, em 1803, quem fez afirmações com base em experimentos que indicavam a precisão da hipótese atômica. Dalton afirmava que toda matéria é formada por partículas extremamente pequenas e indivisíveis, os chamados átomos (do grego: sem partes), e que o número de diferentes tipos de átomos que existem na Natureza é relativamente pequeno mas em número enorme de cópias iguais, e esses átomos formam toda a matéria à nossa volta através de diferentes associações de tipos diferentes ou não.

Mas no fim do século dezenove algumas descobertas viriam a conduzir a física do século vinte à novos rumos. Em 1879, William Crookes, baseando-se nas experiências dos cientistas alemães H. Geissler, J. Plucker e Eugen Goldstein, descobriu os raios catódicos. Em 1887 Hermann Hertz descobriu o efeito fotoelétrico e em 1891 o irlandês George Johnstone Stoney calculou a quantidade mínima de carga elétrica negativa na matéria, baseado nas experiências de Faraday e Arrhenius e à essa carga mínima deu o nome *elétron*. W. Roentgen, em 1895, descobriu os raios X. Em 1896 nasceu o estudo da radioatividade com Henri Becquerel e finalmente, em 1897, Joseph John Thomson, baseando-se em várias experiências próprias e de muitos físicos, mostrou que os raios catódicos são constituídos de partículas muito pequenas com carga elétrica negativa, que identificou com os elétrons de Stoney. Inaugurara-se a Física das Partículas Elementares. Seguiram-se pesquisas para determinar as propriedades dessa partícula, como sua massa e carga, como as experiências do Norte-americano R.A.Millikan, entre outros. Thomson supôs acertadamente que o elétron seria um constituinte básico dos átomos. Essa foi a primeira “descoberta” de uma partícula elementar. Mas a suposição de Thomson de que os átomos seriam “pudins positivamente carregados com elétrons incrustados como ameixas” (o famoso modelo *plum-pudding*; pudim de ameixas) foi definitivamente repudiado pelas experiências

do Neo-zelandês Ernest Rutherford e seus colaboradores.

Não nos aprofundaremos na história do surgimento da física quântica e nuclear, mas o experimento de Rutherford tem um papel importante para a física de partículas elementares exatamente por ilustrar o tipo de experimento com que os físicos lidam nessa área. Basicamente, de três maneiras estuda-se a estrutura fundamental da matéria: com experimentos de espalhamento, de estados ligados ou decaimentos. A física se beneficiou bastante dos raios cósmicos nesse sentido. Partículas de todos os tipos e de energias arbitrárias (até com energias da ordem de décimos de Zev ou seja 10^{20} ev! já foram detectadas, mas calcula-se que este tipo de partícula ultra-relativística seja tão raro quanto um evento por quilômetro quadrado por século) decaem e deixam traços em placas de emulsões fotográficas, câmaras de bolha, câmaras de nuvem, cintiladores, contadores Geiger, detectores de radiação Čerenkov, fotomultiplicadores e etc... mas logo tornou-se claro que esperar à sorte por alguns eventos não era um método muito bom de estudo. Estuda-se também o resultado de colisões de um sem número de partículas em aceleradores no que chamamos de experimentos de espalhamento. E foram nesses variados aceleradores, que são os microscópios para observarmos coisas a esse nível, que a física descobriu muitas das inúmeras partículas que conhecemos hoje, em experimentos semelhantes ao de Rutherford, onde incide-se um feixe de partículas em um alvo e estuda-se (geralmente) o ângulo do espalhamento das partículas - a maioria das partículas passa sem muita alteração na direção de incidência, enquanto uma pequena parte delas choca-se violentamente e voltam formando um ângulo muito obtuso com a direção de incidência.

Em 1932, o inglês James Chadwick descobriu uma partícula com aproximadamente a mesma massa do próton mas carga nula, pondo um ponto final às questões que intrigavam os físicos naquela época, como a da existência dos isótopos, mas também pondo um ponto final ao que hoje chamamos de período clássico da física de partículas. Jamais a estrutura da matéria (e da radiação) havia sido tão simples, toda ela formada por apenas três constituintes básicos; o próton (ou o núcleo de um átomo de Hidrogênio), o elétron e o nêutron, juntamente claro, com o fóton que havia sido sugerido por Einstein em 1905, e conclusivamente demonstrado em experimentos por A.H. Compton em 1923, e com o “irmão” positivo do elétron, o

pósitron que havia sido previsto por P.A.M. Dirac em 1927 (sem que ele tivesse acreditado) como uma das soluções de sua famosa equação; o antielétron, e detectada por Anderson em 1931, - mas o pósitron não parecia representar qualquer papel na estrutura da matéria. A física tinha portanto uma bela e simples teoria para a estrutura da matéria, mas não uma teoria completa ([12]).

Em 1933, o físico italiano Enrico Fermi formulou uma teoria que propunha uma explicação para o chamado decaimento radioativo beta (fenômeno descoberto por Madame Curie), sua teoria implicava na existência de uma terceira força fundamental da Natureza, mais fraca que a eletromagnética, que foi denominada *força fraca*, força essa que desempenha um papel decisivo na produção de energia pelo Sol.

Questões como o que mantinha o núcleo dos átomos (com número atômico maior que um) coesos continuavam em aberto, e a resposta para isso foi chamada *força nuclear forte*, uma outra força básica da Natureza que deveria ser relativamente muito grande mas de muito curto alcance (ao contrário da eletromagnética e da gravitacional, de alcance infinito). A primeira teoria significativa dessa força foi proposta pelo Japonês Hideki Yukawa em 1934, que supôs um campo para essa força da forma $V = ge^{-r/R}/4\pi r$ onde $R = \hbar/Mc$, M a massa do quanta do campo (o méson de Yukawa), uma relação fácil de se calcular partindo do princípio da incerteza de Heisenberg $\Delta E \Delta t \cong \hbar$: segundo o princípio da incerteza, um núcleon (próton ou nêutron) pode “emprestar” uma quantidade de energia da ordem de $\Delta E \cong Mc^2$ (a energia de repouso do méson) pelo intervalo de tempo da ordem de $\Delta t \cong R/c$ (uma fração do tempo que a luz leva para atravessar o núcleo, $R \cong 10^{-15}m$), $\Delta E \Delta t \cong Mc^2 R/c \cong \hbar$ portanto $R \cong \hbar/Mc$. Yukawa calculou as propriedades do quanta do campo dessa força e mostrou que a massa dessa partícula nunca antes observada deveria ser intermediária entre a massa do elétron e a massa do próton e, exatamente por isso, ela veio a ser conhecida como *méson* (usando a relação demonstrada acima, $M \cong 300$ vezes a massa do elétron). Em 1937, dois grupos de físicos independentemente identificaram, em raios cósmicos, partículas que se encaixavam mais ou menos com a descrição do méson de Yukawa, (Anderson e Neddermeyer na costa Oeste dos EUA e Street e Stevenson) mas logo tornou-se evidente que a aparência era apenas superficial, a massa da partícula parecia ser discrepante com cálculos mais precisos, e essas partículas detectadas interagiam fracamente com os

núcleos dos átomos. Em 1947, o brasileiro César Lattes, trabalhando no grupo do inglês Cecil Powell descobriu que existiam na verdade dois tipos de partículas de peso médio nos raios cósmicos detectados até então, a que denominaram pión (π) e múon (μ), das quais o π era o quanta de Yukawa e o μ um “irmão” pesado do elétron (a existência do qual levou I. Rabi a perguntar “Quem encomendou isto?” dado que não parecia ter papel nenhum na ordem das coisas). A teoria original de Fermi do decaimento beta era do tipo interação de contato, ou seja, a interação que Fermi propusera não admitia partículas intermediadoras como a teoria de Yukawa previa. Mais tarde foram propostos outros modelos que previam os chamados *bósons vetoriais intermediadores*, porém, certas propriedades como a massa dessas partículas, não poderiam ser preditas da maneira em que se previra a massa do pión de Yukawa - basicamente por que a força fraca não forma “estados ligados”.

Logo começaram a ser detectadas partículas de todos os tipos. Em 1953, C.L. Cowan e F. Rives, em um reator nuclear na Carolina do Sul, tiveram confirmação da existência da partícula que W. Pauli previra existir ainda em 1930, para explicar a conservação da energia nos eventos de desintegração beta, e que veio a ser chamada *neutrino*. Em 1955, foram descobertos o antipróton e o antinêutron no bévatron de Berkeley. Em 1959, F. Davis e D.S. Harmer, procuraram e descobriram que o neutrino e o antineutrino eram na verdade partículas diferentes (diferentemente de, por exemplo o fóton, que é indistinguível do antifóton). E ainda antes, em 1947 G.D. Rochester e C.C. Butler publicaram uma fotografia de uma câmara de bolhas que mostrava os traços de uma partícula neutra mais pesada que o π (e mais leve que o nêutron), a que veio a ser chamada Káon (K^0), e em 1949, C. Powell publicou uma fotografia que aparentemente indicava a existência de uma partícula Káon positiva (K^+). Em 1950 detectou-se o Λ (que é mais massivo que o próton). Depois descobriram os η , ϕ , ω , ρ ... essas partículas pesadas causaram tanto embaraço e tinham características tão diferentes que os físicos as denominaram partículas *estranhas*. E esse infindável “dilúvio” de partículas parecia um tanto sem ordem, não eram reconhecidos muitos padrões nesse “zoológico” de partículas (como o denominou R. Oppenheimer) a tal ponto que E. Fermi afirmou que se soubesse que a física iria se tornar um exercício de procurar partículas e anotar suas características ele preferiria ter se tornado um botânico. Até que em 1961, Murray Gell-Mann (e inde-

pendentemente, o israelense Yuval Ne'eman) introduziu o que denominou de “Senda Óctupla”, uma espécie de tabela periódica das partículas elementares, figuras que dispunham as partículas em arranjos geométricos simples de acordo com suas cargas e estranhezas, chamadas supermultipletos. Gell-Mann notou que uma das partículas figurando em um de seus decupletos não havia sido detectada, então ele calculou sua massa e tempo de vida, carga e estranheza e, em 1964, o Ω^- foi detectado. Desde então muitas outras partículas foram previstas da mesma maneira, e não restam mais dúvidas da funcionalidade da Senda Óctupla.

Pouco tempo depois, em 1964 Gell-Mann (e independentemente, G. Zweig) propôs, como explicação para a existência desses supermultipletos, que essas partículas pesadas deveriam ser compostas de constituintes mais básicos os quais chamou de *quarks*. Em 1964 eram necessários apenas três tipos (ou “sabores”) diferentes de quarks, a que ele chamou de “up” (u), “down” (d) e “strange” (s , originariamente “sideway”) de cargas elétricas fracionárias, e seus correspondentes antiquarks (com carga e estranheza opostas). O modelo de quarks postulava que toda partícula na Natureza, com exceção das partículas “leves” (daí o nome grego *lépton*) conhecidas à época: elétron, múon, neutrinos e correspondentes antipartículas, deveriam ser compostas ou de três quarks ligados (três antiquarks formando uma antipartícula), ao qual denominamos *bárion* (do grego: pesado), ou a um estado ligado quark-antiquark, ao qual denominamos *méson* (do grego: médio). Todas as partículas, bárions ou mésons (com exceção dos léptons e dos quanta dos campos de forças), sendo conhecidas coletivamente como *hádrons* (do grego: forte, dado que, como veremos; os léptons não interagem via força nuclear forte, ao contrário dos hádrons). Deve ser logo claro que o modelo dos quarks proposto por Gell-Mann não era uma combinação simplória de quarks formando partículas, mas uma mesma combinação de quarks podendo resultar em diferentes partículas, assim como um estado ligado de um elétron e um próton podem representar um átomo de hidrogênio no estado fundamental ou em qualquer outro estado excitado, um estado ligado de dois quarks up com um quark down podendo representar tanto um próton quanto um delta-mais, por exemplo. A diferença é que, enquanto um estado ligado do hidrogênio tem apenas alguns elétrons-volts de diferença do estado fundamental; daí considerarmos ambos como átomos de hidrogênio, um delta-mais tem milhões de elétrons-volts de

diferença do próton, por isso consideramos como partículas distintas. Entretanto, apesar de todo esse sucesso, o modelo dos quarks passou por uma crise: - Os quarks livres nunca foram observados! Inúmeros experimentos levados à cabo ao final da década de sessenta e na década de setenta, à procura de quarks livres, falharam e surgiu um certo ceticismo quanto à realidade da hipótese dos quarks. Conciliando o extraordinário sucesso do modelo dos quarks com o decepcionante fato de ser aparentemente impossível observá-los isolados (em grandes escalas, maior que o tamanho de um próton) surgiu o conceito de *confinamento de quarks* ([13]): - De alguma maneira ainda não compreendida, os quarks “individuais” estariam confinados ao interior dos hádrons.

Em 1964, Oscar W. Greenberg, Moo-young Han e Yoichiro Nambu propuseram independentemente uma idéia que viria a dar mais suporte ao modelo dos quarks; o conceito de “cor”. Segundo Greenberg, todo quark deveria possuir apenas um dos três tipos possíveis de cor: “verde”, “azul” e “vermelho”, cada antiquark possuindo uma das correspondentes anticores, e todo hádron sendo um estado ligado “incolor” de quarks, onde incolor significa um quark com uma determinada cor ligado a um antiquark qualquer mas possuindo a correspondente anticor (“anulando” a cor total), ou um estado ligado de três quaisquer quarks, cada um com uma cor diferente (assim como *azul + verde + vermelho = branco*), ou três antiquarks com anticores diferentes (*antiazul + antiverde + antivermelho = antibranco*, antibranco também devidamente compreendido como incolor), a definição formal sendo:

Toda partícula da Natureza é um singlete de cor.

Solucionando alguns dos embaraçosos problemas (ou pelo menos sugerindo respostas) que o modelo dos quarks tinha, como o porquê dos quarks combinarem-se apenas em grupos de três (ou como quark-antiquark) e não quatro ou dez (ou sozinho!)... ou o sério problema de três quarks com o mesmo sabor (como o próprio Ω^- previsto por Gell-Mann, como um estado ligado de três quarks strange) em um mesmo estado contradizer o princípio de exclusão de Pauli, dado que os quarks são férmions de spin meio. Mais tarde foram feitos experimentos que demonstraram conclusivamente a realidade do conceito de cor, que é hoje, como veremos; tão fundamental.

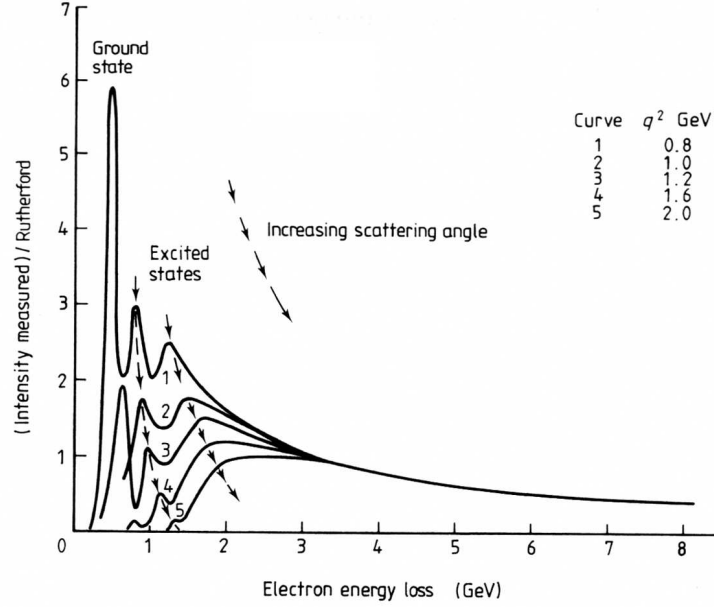


Figura 2.1: Espalhamento e-p e a estrutura do próton

Experimentos de espalhamentos do tipo do experimento de Rutherford, feitos no final da década de sessenta e na década de setenta, projetando elétrons altamente energéticos (no SLAC, Stanford Linear Accelerator Center), feixes de neutrinos (no CERN, Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire) e mais tarde com feixes de prótons no qual os “alvos” não eram átomos, e sim prótons, com o objetivo de sondar a estrutura dos hádrons, obtiveram resultados semelhantes aos obtidos por Rutherford e seus colaboradores, mostrando que a carga do próton estava concentrada em *três* subestruturas (que foram chamadas *pártons*), dando forte suporte ao modelo dos quarks (ver figura 2.1).

Então, em 1974 dois grupos, independentemente, publicaram uma descoberta que deu o apoio final para a aceitação do modelo dos quarks, o grupo de C.C. Ting de Brookhaven, e o grupo de Burton Richter do SLAC, detectaram um méson neutro extremamente pesado (mais de três vezes mais pesado que o próton) e com tempo de vida-médio muito longo ($\simeq 10^{-20} s$, mil vezes o tempo de vida médio de hádrons com essa massa aproximada), que foi denominado ψ por Richter e J por Ting. Observou-se que esse méson era, na verdade, um estado ligado de um novo quark. Esse quarto

quark, chamado *charm* havia sido previsto ainda em 1964 por Glashow e Bjorken, levados por um possível paralelo entre quarks e léptons, até aquela data sabia-se da existência de quatro léptons (elétron, múon e seus correspondentes neutrinos) e apenas três quarks (up, down e strange). E, por razões mais técnicas, Glashow, Iliopoulos e Maiani em 1970 esperavam por esse quark.

Em 1975, um quinto lépton, o tau (τ) foi descoberto, e como se esperava que existisse o seu correspondente neutrino, o neutrino tauônico (ν_τ), assim como ocorre com o elétron e o múon com seus respectivos neutrinos eletrônico (ν_e) e muônico (ν_μ); o número total de léptons passava de quatro para seis! Correspondentemente o número de sabores de quarks também deveria passar de quatro para seis. A correspondência mostrou-se funcional, dado que em 1977, o méson pesado úpsilon (Υ) foi detectado e mostrou-se que era um estado ligado de um quinto tipo de quark chamado quark *bottom*, ou *beauty* (b).

Graças ao surgimento da teoria eletrofraca de Salam, Weinberg e Glashow, foi possível prever as massas dos três *bósons vetoriais intermediadores* da força fraca e, em Janeiro de 1983, o grupo de Carlo Rubbia, no colisor próton-antipróton do CERN, anunciou a descoberta do chamado bóson W e, cinco meses depois, o bóson Z .

E finalmente, em 1993; o sexto e último quark (espera-se!) foi detectado por uma equipe do CERN. Esse quark de massa muito grande recebeu o nome de *top* (t), confirmando esplendidamente, pelo menos até hoje, a estreita analogia entre quarks e léptons.

2.2 O Modelo Padrão

A mais efetiva, completa e congruente teoria que já foi proposta sobre a natureza íntima da matéria ao seu nível mais elementar chama-se *O Modelo Padrão de Física de Partículas Elementares*, mas esta é antes mais uma coleção de teorias afins do que uma teoria única. O Modelo Padrão incorpora a Eletrodinâmica Quântica (QED), a Cromodinâmica Quântica (QCD) e a teoria eletrofraca, descrevendo, com exceção da gravidade, todas as interações fundamentais da Natureza. Essas teorias

são afins por obedecerem um princípio geral que tem se mostrado muito profícuo e profundo, o requerimento da *invariância de calibre local* do qual dedicamos todo um capítulo subsequente, dada a sua importância.

Portanto, façamos a descrição da estrutura básica da matéria e da radiação segundo o modelo padrão.

A primeira distinção que podemos fazer é entre partículas intermediadoras e as partículas que se interagem por meio delas. As últimas são divididas ainda em léptons e quarks. Toda a matéria e radiação é composta destes três tipos básicos de “tijolos”. As partículas intermediadoras são bósons e os léptons e quarks, férmions. À todo lépton ou quark corresponde a existência de suas antipartículas, os antiquarks e antiléptons.

Os léptons podem ser classificados em três famílias ou gerações de dubletos (duplas) de propriedades análogas, mas com massas diferentes (aqui não consideramos o problema das massas dos neutrinos), todos eles com spin meio. Na primeira geração; o dubleto elétron e neutrino eletrônico, na segunda; a geração do múon, e na terceira; a geração do tau:

$$(e, \nu_e) \quad (\mu, \nu_\mu) \quad (\tau, \nu_\tau)$$

Analogamente para os quarks, temos seis sabores divididos em três gerações de quarks (todos de spin meio, como os léptons):

$$(u, d) \quad (s, c) \quad (b, t)$$

Em um tabela (tabela 2.1), mostramos as propriedades dos léptons, como massa (M), carga (Q), tempo de vida médio, número eletrônico (L_e), número muônico (L_μ) e número tauônico (L_τ). As propriedades dos antiléptons são as mesmas, com sinal trocado.

Lépton	Massa (MeV/c^2)	Q	L_e	L_μ	L_ν	lifetime (s)
e	0.511003	-1	1	0	0	∞
ν_e	0	0	1	0	0	∞
μ	105.659	-1	0	1	0	2.197×10^{-6}
ν_μ	0	0	0	1	0	∞
τ	1784	-1	0	0	1	3.3×10^{-13}
ν_τ	0	0	0	0	1	∞

Tabela 2.1: Propriedades dos Léptons

Mostramos também as propriedades dos quarks em uma tabela apropriada (tabela 2.2). As propriedades dos antiquarks são as mesmas, com sinal trocado. Classificamos as propriedades dos quarks, como carga (Q), massa “nua” (bare mass, M), estranheza (S), charme (C), beleza (B) e “autenticidade” (truth ou topness, T). Note-se que grandezas como “upness” (U) e “downness” (D) são redundantes.

Quark	Massa nua (MeV/c^2)	Q	S	C	B	T	lifetime (s)
d	7.5	-1/3	0	0	0	0	∞
u	4.2	+2/3	0	0	0	0	∞
s	150	-1/3	-1	0	0	0	∞
c	1100	+2/3	0	1	0	0	∞
b	4200	-1/3	0	0	-1	0	∞
t	>23000	+2/3	0	0	0	1	∞

Tabela 2.2: Propriedades dos Quarks

Em outra tabela (tabela 2.3) relacionamos as propriedades das quatro forças fundamentais, com suas respectivas partículas intermediadoras (todas de spin um, exceto o hipotético gráviton, de spin 2); o fóton para o eletromagnetismo (γ), os bósons W^+ , W^- e Z^0 para a força fraca e os oito glúons para a força nuclear forte. As intensidades relativas que são dadas devem ser admitidas apenas pictoricamente, com exceção da relação gravitação-eletromagnetismo, todas as outras relações dependem da escala, e mesmo esta, depende das fontes admitidas. Figuramos a gravidade

entre elas, apesar de o modelo padrão não incorporá-la, para ilustrar os aspectos semelhantes de todas as forças fundamentais conhecidas até o momento, sendo a gravidade descrita pela teoria da relatividade geral.

Teoria	Intensidade	Mediador	Massa	Q	lifetime
Geometrodinâmica	10^{-43}	gráviton	0	0	∞
Eletrodinâmica (QED)	10^{-3}	fóton (γ)	0	0	∞
Flavordinâmica	10^{-14}	$W^\pm$	81800	± 1	?
		Z^0	92600	0	?
Cromodinâmica (QCD)	1	glúons (g)	0	0	∞

Tabela 2.3: Forças e mediadores de Forças

Mas apesar de algumas semelhanças, um fator que agrava o paralelismo entre a gravidade e as outras forças é que, enquanto o gráviton é uma partícula intermediadora de spin 2, o fóton, os oito glúons e os bósons W e Z são todas partículas intermediadoras de spin 1 - condição necessária para serem teorias de calibre. Classificamos também em outra tabela (tabela 2.4) as partículas por seus spins, na primeira linha as partículas *elementares* segundo o modelo padrão, e na segunda linha; as *compostas*.

spin 0	spin 1/2	spin 1	spin 3/2
$\times$	léptons e quarks	intermediadores	$\times$
mésons pseudo-esc.	octeto de bárions	mésons vetoriais	dec. de bárions

Tabela 2.4: Classificação das partículas por spin

Passemos a uma descrição sucinta e qualitativa das três teorias das forças tratadas pelo modelo padrão: QED, QCD e Flavordinâmica (termo sem aceitação geral). No próximo capítulo essas teorias serão tratadas como teorias de calibre e algumas de suas simetrias são apresentadas em outra seção deste capítulo, por hora expomos algumas de suas características.

A primeira a tratarmos é a *Eletrodinâmica Quântica*, posta em sua forma final por Feynman, Schwinger e Tomonaga nos anos 1940. O diagrama de Feynman que representa o processo mais elementar da QED pode ser representado como na figura 2.2 (tempo crescente para cima).

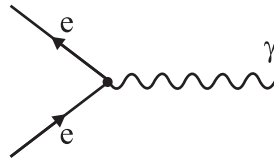


Figura 2.2: Diagrama de Feynman-QED

Este diagrama não representa um processo físico real.

E o diagrama de um possível processo físico que podemos apresentar é o diagrama que pode representar a repulsão de Coulomb, processo conhecido como *espalhamento Möller* na QED (figura 2.3).

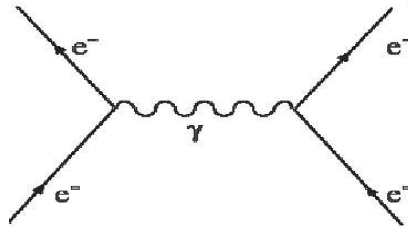


Figura 2.3: Diagrama de Feynman - Espalhamento Möller

É permitido fazermos “torções” e rotações nesses diagramas e os cálculos serão os mesmos. Nos diagramas de Feynman o que interessa são suas propriedades topológicas, isso reflete um princípio geral da física de partículas chamado “*simetria de cruzamento*” (*crossing symmetry*) que afirma que; em qualquer reação elementar permitida, as reações obtidas passando uma das partículas em um dos lados da equação para o outro lado, mas como sua correspondente antipartícula, é também permitida. Este princípio é derivado da importante interpretação de Stuckelberg e Feynman (1940s) das soluções de energia negativa da equação de Dirac como estados

de energia positivos da correspondente antipartícula ([12]). Como exemplo, seja a seguinte reação permitida:

$$A + B \rightarrow C + D$$

segundo esse princípio, também seriam permitidas as reações:

$$\begin{array}{ll} A \rightarrow \bar{B} + C + D & A + \bar{C} \rightarrow \bar{B} + D \\ \bar{C} + \bar{D} \rightarrow \bar{A} + \bar{B} & B + \bar{C} + \bar{D} \rightarrow \bar{A} \end{array}$$

etc...

Portanto, por exemplo; a repulsão de Coulomb (espalhamento Möller) e a atração de Coulomb (espalhamento Bhabha) podem ser interpretadas como manifestações diferentes de um mesmo processo fundamental:

$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^- \qquad e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$$

assim como a aniquilação de um par partícula-antipartícula e o espalhamento Compton:

$$\gamma + e^- \rightarrow e^- + \gamma \qquad e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$$

Sendo todos estes diagramas com apenas dois vértices, e à eles correspondendo um número que deve ser somado na série com todos os outros diagramas possíveis para nos fornecer o cálculo da probabilidade do fenômeno real ocorrer. Apenas sendo partículas *observáveis* ou (*reais*) as representadas pelas linhas externas, as linhas internas representam partículas que não são observáveis (ou *virtuais*). Essa probabilidade mencionada é calculada apropriadamente usando as *regras de Feynman*, quanto mais vértices em um dado diagrama, menor a sua contribuição na soma total (para a QED, por um fator de $\alpha = e^2/\hbar c \cong 1/137$, a *constante de estrutura fina*)

O formalismo é semelhante para a *Cromodinâmica Quântica*. O estudo das simetrias básicas do formalismo matemático da QCD foi formulado ainda em 1954 por C.N. Yang e Robert L. Mills, mas só foi reconhecido e aplicado para a força nuclear forte em 1960 por Jun John Sakurai. Os diagramas de Feynman dos processos mais elementares da QCD podem ser representados por (figura 2.4):

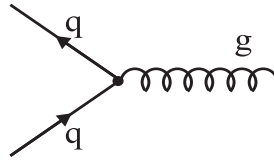


Figura 2.4: Diagrama de Feynman-QCD

Como apenas os quarks e os glúons carregam cor (a “carga” da QCD), não existe um diagrama semelhante para léptons. A analogia com a QED é limitada dado que enquanto o fóton não carrega carga o glúon carrega cor, logo podendo haver acoplamento direto com outros glúons (e mesmo estados ligados de glúons chamados *glueballs*), (figura 2.5).

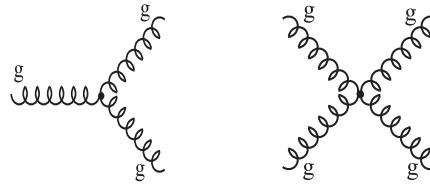


Figura 2.5: Diagramas de Feynman-QCD, acoplamentos de glúons

A QCD é muito mais complexa e rica que a QED, alguns dos fatores agravantes em cálculos da QCD são: o fato de sua constante de estrutura (α_s) ser maior que 1 (tornando a contribuição dos diagramas mais complexos *maior*) e não ser essa constante *de fato* constante, mas *dependente da distância* de separação das partículas interagentes (*constante de acoplamento “variável”, running coupling constant*). Apesar de essa constante ser grande em escalas da ordem do tamanho de núcleos atômicos ou mais, a constante é pequena (menor que 1) para escalas da ordem do tamanho de um próton ou menos - é essa a origem do fenômeno da *liberdade assintótica* (*asymptotic freedom*) que ocasiona o movimento relativamente livre de quarks no interior dos hádrons e nos permite utilizar os cálculos de Feynman para o regime das altas energias. No entanto, a QCD ainda não tem uma demonstração conclusiva para o fenômeno de *confinamento de quarks*, dado que envolve o comportamento das interações dos quarks em grandes escalas, onde os cálculos de

Feynman não se mostram úteis.

Quanto à *Interação Fraca*, existem algumas particularidades que não tem analogia com as outras interações. A força fraca é *quase* universal (como a força gravitacional), ela age tanto em léptons quanto em quarks, tanto em partículas carregadas quanto em partículas de carga nula, tanto massivas quanto de massa nula, porém; apenas em partículas de *helicidade esquerda* (*helicity*, *handedness* ou *quiralidade*, *chirality*, definida como a projeção do spin na direção do movimento da partícula) o que nos diz que um Universo totalmente destro não manifestaria essa força! A “carga” correspondente da força fraca é denominada *carga fraca* (*weak charge*) e temos dois tipos básicos de interações, as carregadas (mediadas pelos bósons W 's) e as neutras (mediadas pelo bóson Z), os diagramas de Feynman mais elementares das interações fracas podem ser representados pela figura 2.6 (para léptons):

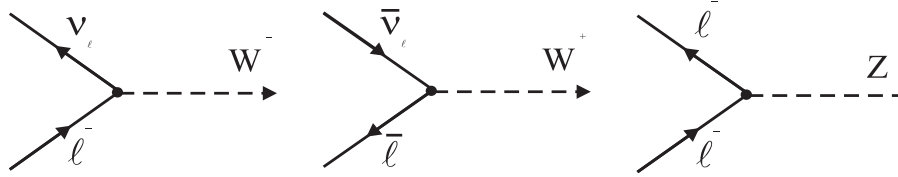
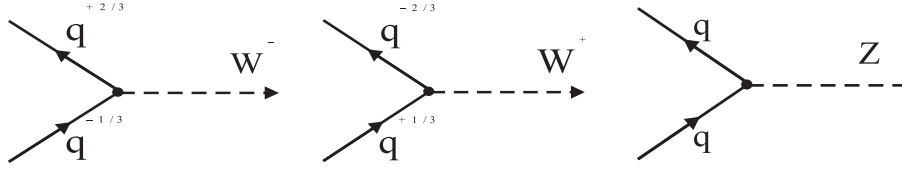


Figura 2.6: Diagramas de Feynman-teoria GWS, léptons

No entanto, outra particularidade das interações fracas é que enquanto os léptons continuam na mesma geração quando emitem ou absorvem um bóson W ou Z , havendo portanto conservação dos números eletrônico, muônico e tauônico, o sabor não é conservado nas interações fracas, podendo inclusive mudar as gerações dos quarks. Logo, os diagramas de Feynman mais elementares das interações fracas entre quarks podem ser representados pela figura 2.7 (para quarks).

Cabbibo, em 1963, Glashow, Illiopoulos e Maiani em 1970, e mais tarde em 1973, Kobayashi e Maskawa, mostraram como as gerações de quarks são distorcidas nas interações fracas. Basicamente, o que o mecanismo Cabbibo/GIM/KM mostra, é que ao invés de acoplar quarks nas mesmas gerações:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$


Figura 2.7: Diagramas de Feynman-teoria GWS, quarks

acoplam os pares de quarks:

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}$$

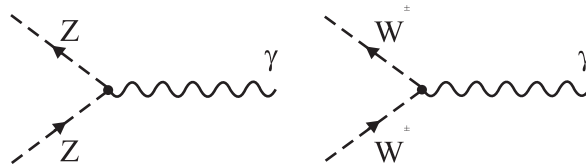
onde os quarks d' , s' e b' são combinações lineares dos quarks d , s e b segundo a matriz de Kobayashi-Maskawa:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

sendo, por exemplo V_{ud} ; uma medida do acoplamento de u com d , que experimentalmente encontramos:

$$\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0.9705 - 0.9770 & 0.21 - 0.24 & 0. - 0.14 \\ 0.21 - 0.24 & 0.971 - 0.973 & 0.036 - 0.070 \\ 0. - 0.024 & 0.036 - 0.069 & 0.997 - 0.999 \end{pmatrix}$$

E, observamos também que; assim como acontece na QCD, as partículas intermediadoras na teoria de GWS acoplam-se entre si, e ainda, no caso dos bósons W poderem acoplar com o fóton (dado que portam carga) (figura 2.8):


Figura 2.8: Diagramas de Feynman-teoria GWS, acoplamentos dos bósons

2.3 Spin, momento angular orbital e os grupos $SU(2)$ e $SO(3)$

Nos atuais limites de resolução ($\sim 10^{-16}cm$), o elétron é (assim como os outros léptons e quarks), até onde sabemos; uma partícula *puntual* - aparentemente não tem nenhuma estrutura interna. Mas mesmo assim, como sabemos dos estudos elementares de mecânica quântica ([6]), atribui-se ao elétron um momento angular intrínseco além do momento angular orbital. Esse momento angular intrínseco, ou *spin*, só veio a encontrar explicação apropriada na teoria quântica relativística de campos (com Dirac), mas não há necessidade de aprofundarmos nessa teoria para conhecermos bem as propriedades do spin.

Assim como o momento angular orbital, uma medida de uma componente qualquer do spin altera inevitavelmente os valores das componentes previamente medidas, é impossível medi-las simultaneamente com precisão arbitrária - chamamos de observáveis *incompatíveis*. Mas, diferentemente do momento angular orbital, no qual as partículas podem se apresentar em diferentes estados orbitais, o spin é fixo. E assim como uma medida do quadrado do momento angular orbital L^2 , nos retorna um *espectro* discreto de valores:

$$l(l+1)\hbar^2, \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots$$

uma medida do quadrado do spin de uma partícula (ou de um sistema quântico qualquer) pode apresentar um dos valores do espectro discreto:

$$s(s+1)\hbar^2, \quad s = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$$

com s fixo para a partícula (ou sistema). E, como uma medida de uma componente qualquer de $\mathbf{L}$ (L_z por convenção) sempre dá:

$$m_l\hbar, \quad m_l = -l, -l+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, l-1, l$$

com um total de $(2l+1)$ possibilidades, uma medida de uma componente qualquer de $\mathbf{S}$ (S_z por convenção) analogamente, sempre dá:

$$m_s\hbar, \quad m_s = -s, -s+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, s-1, s$$

com um total de $(2s + 1)$ possibilidades.

Claramente, podemos ver que o spin mais simples é o spin meio. E é também o mais importante. Como vimos, todas as partículas constituintes que consideramos atualmente como elementares, os léptons e os quarks; são férmions de spin meio. É também importante por que podemos estudar as propriedades de todos os outros spins partindo das propriedades do spin $s = 1/2$. A estrutura da teoria do spin meio é idêntica à estrutura de um número quântico denominado *isospin* e por tudo isso vale a pena estudarmos quais são essas estruturas.

Uma partícula de spin $s = 1/2$ pode se apresentar em dois estados, o estado “up”; com $m_s = +1/2$ e o estado “down”; com $m_s = -1/2$, ou em uma superposição desses dois estados. Podemos fazer uma representação adequada do operador spin meio em um espaço especial, o espaço bidimensional complexo C^2 ([8]). Um espinor é um vetor nesse espaço e de certa maneira podemos imaginá-lo como um objeto intermediário entre escalares e vetores: - escalar (uma componente), espinor (duas componentes), vetor (três componentes).

Em notação espinorial:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |1/2, +1/2\rangle \quad (m_s = +1/2), \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1/2, -1/2\rangle \quad (m_s = -1/2)$$

Nesse espaço, representamos os operadores S_x , S_y e S_z da seguinte maneira:

$$S_x \doteq \frac{\hbar}{2} \sigma_x, \quad S_y \doteq \frac{\hbar}{2} \sigma_y, \quad S_z \doteq \frac{\hbar}{2} \sigma_z$$

onde σ_i (i=x,y,z) são as matrizes de Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que têm as propriedades:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \quad e \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$$

ou, resumidamente:

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

de onde segue que, para quaisquer dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

E também os importantes operadores:

$$\sigma_+ = L_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = L_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 = S_z$$

Assim como as componentes dos vetores transformam-se de uma maneira prescrita quando fazemos uma rotação, as componentes de um espinor transformam-se da maneira determinada:

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = e^{-i\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma}/2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

onde o vetor $\boldsymbol{\theta}$ tem a magnitude do ângulo da rotação e aponta na direção do eixo dessa rotação. Portanto, as partículas de spin meio transformam sob rotações de acordo com a representação fundamental (bidimensional) de $SU(2)$, as partículas de spin um, pertencerão à representação tridimensional, as partículas de spin um e meio pertencerão à representação quadridimensional, etc...

Por fim, mostramos o homomorfismo entre $SO(3)$ (ou $\mathcal{R}_3$) e $SU(2)$ que citamos na seção 1.2.1.

O grupo $SO(3)$, como sabemos, é o grupo das rotações próprias (deixam o comprimento invariante) no espaço euclidiano tridimensional, ou, o grupo das matrizes ortogonais 3×3 , e, os elementos desse grupo podem ser representados convenientemente pelos ângulos de Euler α , β e γ da maneira convencional:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$$

Onde $R_z(\alpha)$ por exemplo, é uma rotação de um ângulo α em torno do eixo z , etc. E são representados por:

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Já o grupo $SU(2)$, que como sabemos, é o grupo das matrizes unitárias 2×2 com $\det(U) = +1$ que deixam a “probabilidade” $|u|^2 + |v|^2$ invariante:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Mas dado que $\det(U) = ad - bc = 1$:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Agora basta notarmos que se fizermos as transformações:

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \quad y = \frac{1}{2i}(u^2 + v^2), \quad z = uv$$

as transformações induzidas por $SU(2)$ deixam o quadrado da distância $(x^2 + y^2 + z^2)$ no espaço das novas coordenadas x, y, z invariante, logo, qualquer rotação tridimensional pode ser associada com um elemento de $SU(2)$. E para mostrarmos o outro sentido do homomorfismo fazemos as transformações:

$$a = \cos \frac{\beta}{2} e^{i(\alpha+\gamma)/2}, \quad b = \sin \frac{\beta}{2} e^{-i(\alpha-\gamma)/2}$$

onde α, β e γ são os ângulos de Euler. Um $R(\alpha, \beta, \gamma)$ fica associado à um elemento de $SU(2)$ qualquer da maneira:

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} e^{i(\alpha+\gamma)/2} & \sin \frac{\beta}{2} e^{-i(\alpha-\gamma)/2} \\ -\sin \frac{\beta}{2} e^{i(\alpha-\gamma)/2} & \cos \frac{\beta}{2} e^{-i(\alpha+\gamma)/2} \end{pmatrix}$$

definindo uma relação entre os ângulos de Euler e os parâmetros de $SU(2)$, porém, não de forma unívoca! Para ver isso basta fazer $(\beta = 0 \text{ e } \gamma = 0)$ ou $(2\pi \text{ e } \gamma = 0)$ que darão o mesmo resultado no espaço tridimensional mas corresponderão a resultados distintos em $SU(2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

respectivamente. A matriz acima relaciona, na verdade, dois elementos de $SU(2)$ para cada elemento de $SO(3)$ (se diz que $SU(2)$ é o *grupo de recobrimento* de $SO(3)$) estabelecendo então o homomorfismo. Daqui podemos ver por que $SU(2)$ estende o grupo das rotações na mecânica quântica para momentos angulares inteiros e semi-inteiros.

2.4 Isospin e o grupo $SU(2)$, simetrias de sabores

Pouco depois da descoberta do nêutron em 1932, Werner Heisenberg observou que essa partícula era quase idêntica ao próton. Com exceção das cargas diferentes e das massas aproximadamente iguais, elas pareciam idênticas e Heisenberg imaginou que se pudéssemos “desligar” a força eletromagnética elas se assemelhariam a dois estados diferentes de uma mesma partícula, o *núcleon* - assim como dois elétrons com spins opostos, up e down. Heisenberg cunhou o termo *isospin* I para esse novo grau de liberdade e as propriedades matemáticas do isospin são idênticas às do spin. Escrevamos um núcleon como um isoespinor N :

$$N = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Os vetores da base de autoestados seriam:

$$p = |1/2, +1/2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n = |1/2, -1/2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Portanto, o próton sendo isospin up e o nêutron isospin down. O isospin, como Heisenberg o via, claramente nada tinha a ver com espaço e tempo, mas sim com relações entre diferentes partículas, I não é um vetor no espaço tridimensional ordinário, mas sim em um espaço abstrato de isospin com componentes que podemos chamar de I_1 , I_2 e I_3 , por isso dizemos que esse espaço de isospin é um *espaço interno*. Uma rotação de 180° no eixo 1 transformaria um próton em um nêutron, e vice-versa. Heisenberg, postulou que as forças nucleares forte entre núcleons deviam ser invariantes sob rotações no espaço de isospin, assim como forças elétricas são invariantes sob rotações no espaço ordinário, e chegou à conclusão, segundo o teorema de Noether, que o isospin deve ser conservado em todas as interações fortes (como o momento angular é conservado nas interações elétricas).

Na linguagem de teoria de grupos, diríamos que as interações fortes são invariantes sob o grupo de simetria interno $SU(2)$ e que os núcleons pertencem à representação bidimensional (fundamental, isospin $\frac{1}{2}$) desse grupo. Outras partículas poderiam ser assim, classificadas em multipletos de isospin, por exemplo:

$$\pi^+ = |1, 1\rangle, \quad \pi^0 = |1, 0\rangle, \quad \pi^- = |1, -1\rangle, \quad \Lambda = |0, 0\rangle$$

$$\Delta^{++} = |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle, \quad \Delta^+ = |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \quad \Delta^0 = |\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\rangle, \quad \Delta^- = |\frac{3}{2}, \frac{-3}{2}\rangle$$

etc...

Identicamente à composição de spins. Note-se que a terceira componente I_3 , é determinada pela carga, Q , da partícula. Para os hádrons compostos apenas de quarks u , d e s , a relação explícita entre Q e I_3 é dada pela fórmula de Gell-Mann-Nishijima:

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(B + S)$$

onde B é o número bariônico e S a estranheza. E como Q , B e S são sempre conservados nas interações eletromagnéticas, segue-se que também o é I_3 , mas não I . Nas reações envolvendo interações nucleares fracas, I e I_3 não são conservados (S não é).

Nos anos cinquenta, a história se repetiria. Assim como em 1932, o próton e o nêutron pareciam formar um dubleto, parecia que as muitas partículas que estavam sendo detectadas nos aceleradores formavam supermultipletos e presumia-se que elas pertenceriam à mesma representação de algum grupo de simetria mais amplo, no qual $SU(2)$ deveria ser um subgrupo. A senda óctupla de Gell-Mann era a resposta para essas questões afirmando que esse grupo seria o grupo $SU(3)$, tendo os quarks u , d e s como a representação fundamental, os octetos como representação octodimensional e os decupletos como representações decadimensionais:

$$[3] \times [3] \times [3] = [1] + [8] + [8] + [10]$$

e para os mésons:

$$[3] \times [3]^* = [1] + [8]$$

Claro que quando os outros quarks se impuseram, esses grupos de simetria aumentaram - $SU(4)$ para incluir o quark d , $SU(5)$ para incluir o quark b , etc... Mas, enquanto a simetria de isospin $SU(2)$ era muito boa, $SU(3)$ regular, $SU(4)$ já

não dava bons resultados, na hora de prever, por exemplo, as massas dos bárions e mésons. É ainda pior no caso de $SU(5)$, e absolutamente desastroso para $SU(6)$. O modelo padrão atribui isso às diferentes massas dos quarks, que o modelo não prevê.

2.5 Cor e o grupo $SU(3)$

Porém, enquanto as simetrias de sabores não são exatas, a simetria $SU(3)$ das cores da cromodinâmica quântica é exata. Por isso, convém tratarmos de mostrar algumas propriedades importantes de $SU(3)_C$. Os oito geradores desse grupo são representados pelas *matrizes de Gell-Mann*:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_5 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Os geradores λ_3 e λ_8 comutam e estão relacionados no modelo $SU(3)$ dos quarks aos operadores de spin I_3 e de hipercarga Y :

$$I_3 = \lambda_3, \quad Y = \frac{1}{2\sqrt{3}}\lambda_8$$

E, por fim, listamos as constantes de estrutura para o grupo em uma tabela (tabela 2.5: apenas para os casos $i < j < k$, os outros casos são dedutíveis da propriedade de antissimetria sob qualquer permuta de um par de índices desse grupo).

ijk	123	147	156	246	257	345	367	458	678
c_{ijk}	1	1/2	-1/2	1/2	1/2	1/2	-1/2	3/2	3/2

Tabela 2.5: Constantes de estrutura do grupo $SU(3)$

Capítulo 3

Teorias de Calibre

3.1 Introdução Histórica

Uma revolução ocorreu na física durante a década de setenta. Essa revolução se chama “Teoria de Calibre” (ver [14], [15] e [10]). É interessante citarmos um comentário do físico Freeman Dyson poucos anos antes dessa revolução, em 1965:

“ It still remains a mystery that the geometrical analysis which led to such a deep understanding of gravitation has no success elsewhere in physics.”

Muito pouco tempo haveria a se passar desde a época desse comentário até o surgimento (ou melhor; ressurgimento) desse modelo teórico que rivaliza em importância com as teorias da relatividade e quântica. Uma teoria única e coerente da unificação das forças, com a provável exceção da gravidade, pode vir a ser extraída das possibilidades no âmbito das teorias de calibre. E uma parte desse antigo sonho de unificação já podemos considerar como realizada - A teoria de calibre eletrofraca de Salam, Glashow e Weinberg que foi proposta no final dos anos sessenta tem se mostrado bem sucedida em todos os testes experimentais e encorajado tentativas de ampliação para englobar a força forte. Essas teorias representam uma síntese nova da mecânica quântica a simetrias que permeiam todo o campo da física de partículas elementares e tem se notado que suas áreas de aplicação vão ainda muito além. Como toda grande idéia, tem-se encontrado uso em áreas aparentemente tão diversas como matemática pura, física da matéria condensada e fenômenos ondulatórios

não-lineares. O comentário de Dyson é ainda mais interessante se entendemos que essas maravilhosas teorias têm origens que podem ser traçadas diretamente até a teoria da gravitação de Einstein que Dyson salientou.

Em 1919, o alemão Hermann Weyl propôs a idéia revolucionária de invariância de calibre, inspirado na brilhante confirmação, no mesmo ano, da Teoria da Relatividade Geral de Einstein por um grupo de cientistas liderados pelo inglês Arthur Eddington. Weyl propunha uma formulação geométrica para o eletromagnetismo análoga à bem sucedida proposta da formulação geométrica da gravitação por Einstein, a gravidade e o eletromagnetismo eram as únicas forças conhecidas àquela época.

Em sua Teoria da Relatividade Geral de 1916, Einstein apresentou uma formulação mais geral do princípio da não existência de referenciais especiais no Universo. Na sua teoria restrita de 1905, ele já formulara esse mesmo princípio, porém, restrito a referenciais com movimentos uniformes, ou referenciais inercias. Imaginemos que um quadrivetor A_μ representa alguma quantidade física, uma mudança de referencial transformaria esse quadrivetor da seguinte maneira:

$$A'_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} A_\mu = \Lambda_\nu^\mu A_\mu$$

essas transformações de Lorentz são transformações lineares *globais*, ou seja, independentes da localização espaço-temporal em que ocorrem, dependendo apenas da velocidade relativa. Por isso, o grupo das transformações de Lorentz da relatividade especial é um exemplo do que chamamos de simetria global. Uma generalização desse princípio para referenciais com movimentos não uniformes ou em campos gravitacionais levou Einstein a generalizar essas transformações, tornando-as simetrias *locais*. Vejamos por alto como ele levou a cabo esse empreendimento, considerando o seguinte *gedankenexperiment*: um físico F é posto em um elevador E para medir o movimento de uma partícula em um campo gravitacional, o cabo do elevador se quebra, passando E a cair em queda livre e levando consigo o físico. O físico considera que não há campo gravitacional, dado que a partícula cai junto com ele e seu referencial e tudo mais no elevador, como estabelece o princípio da equivalência, que nasce da constatação do fato de que *todos os objetos observados caem com a mesma aceleração em um campo gravitacional*. Em uma região infinitesimal, onde o campo gravitacional pode ser considerado uniforme, podemos considerar um referencial que

se move com a mesma velocidade da partícula naquele ponto, e portanto, *localmente* podemos definir um referencial inercial. Mas agora, medidas de grandezas físicas não podem mais estar relacionadas em diferentes referenciais de forma tão simples como a anterior, não mais podemos assumir que uma transformação entre dois referenciais seja linear e global.

Assim como $A'_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} A_\mu$ em relatividade restrita, dA'_ν também é um quadri-vetor:

$$dA'_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dA_\mu$$

mas em relatividade geral:

$$dA'_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dA_\mu + A_\mu \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\nu \partial x'^\lambda} dx'^\lambda$$

o termo extra é conhecido em geometria diferencial como *símbolo de Christoffel da segunda forma*, ou também chamados de *conexão afim*:

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} \equiv \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\nu \partial x'^\lambda} \Rightarrow dA'_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dA_\mu + A_\mu \Gamma^\mu_{\nu\lambda} dx'^\lambda$$

e está relacionado à transformações curvilíneas, e depende das propriedades do campo gravitacional em cada ponto do espaço-tempo. Claramente, para transformações lineares os $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ são nulos. As conexões dão as orientações relativas entre referenciais locais no espaço-tempo.

De forma similar, Weyl propôs que a magnitude de uma grandeza física vetorial também não fosse uma quantidade absoluta, mas assim como a orientação, dependesse de sua localização no espaço-tempo. Para relacionar o comprimento de vetores em diferentes posições, deveria ser necessária uma nova conexão, e Weyl imaginou que o eletromagnetismo deveria estar relacionado com essa nova conexão. Por supor transformações em *comprimentos*, a teoria original de Weyl ficou conhecida como teoria de *calibre*.

Consideremos que a norma de um vetor em um ponto x seja dada por $f(x)$, a norma em um ponto $x + dx$ é dada em primeira ordem por:

$$f(x + dx) = f(x) + \partial_\mu f dx^\mu$$

uma mudança local (i.e. em cada ponto do espaço-tempo) no calibre desse vetor é dada pelo fator multiplicativo de escala $S(x)$. Por conveniência definimos $S(x)$ igual

a 1 em x . Em $x + dx$, $S(x)$ é dado por:

$$S(x + dx) = 1 + \partial_\nu S dx^\nu$$

a norma de um vetor em $x + dx$ deve ser dada então pelo produto dos dois termos.

Em primeira ordem:

$$S(x + dx)f(x + dx) = f + (\partial_\nu S)f dx^\nu + \partial_\mu f dx^\mu$$

$$S(x + dx)f(x + dx) - f = \partial_\mu f dx^\mu + (\partial_\nu S)f dx^\nu$$

$$df' \cong df + f(\partial_\nu S)dx^\nu$$

Então, analogamente à Teoria da Relatividade Geral, a “conexão” associada a uma transformação de gauge é a derivada $\partial_\mu S$ e foi identificada por Weyl com o potencial eletromagnético A_μ . Uma razão para essa identificação reside no fato de que a conexão transforma como o potencial:

$$A'_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$$

enquanto uma segunda transformação de calibre Λ dá:

$$\partial_\mu S' \rightarrow \partial_\mu S + \partial_\mu \Lambda$$

Apesar da beleza da idéia, logo ficou reconhecido que a teoria de Weyl era falha. Einstein e outros mostraram que a idéia central da invariância de escala levaria a conflitos com fatos físicos e, alguns anos depois, P. Bergmann apontou conflitos na interpretação original da teoria de Weyl com a mecânica quântica (como a simples idéia do comprimento de onda Compton das partículas, $\lambda = h/Mc$, uma *escala global* definida naturalmente).

Sem uma interpretação aceitável da invariância de calibre como uma transformação das coordenadas físicas, as transformações de gauge ficaram por um tempo relegadas a simetrias “acidentais” do eletromagnetismo, uma afirmação da arbitrariedade do potencial em física clássica e encarada apenas como um método útil de simplificações de cálculos. O papel do potencial eletromagnético era reconhecido em formulações como a teoria de campos clássicos de Hamilton-Jacobi, tratado como se fosse uma coordenada generalizada nas equações de Euler-Lagrange ($\mathcal{L} = \frac{1}{2}(p_\mu - eA_\mu)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$) e como parte integral do momento canônico

$(p'_\mu \rightarrow p_\mu - eA_\mu)$; mas apenas os campos elétricos e magnéticos eram considerados reais e observáveis.

Quase dez anos depois da proposta de Weyl, V. Fock e F. London em 1927 e o próprio Weyl em 1929 deram um significado totalmente novo às transformações de calibre. Eles observaram que poderia-se interpretar as transformações de calibre não como mudanças de escala, mas como *mudanças nas fases das funções de onda* da então recém criada mecânica quântica, desde que interpretemos essa fase como uma nova *variável local*:

$$A'_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi(x) , \quad \psi' \rightarrow \psi e^{-iq\chi(x)/\hbar}$$

Eles viram que a equação de Schrödinger para uma partícula carregada em um campo eletromagnético:

$$\frac{1}{2m}[(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A})^2 + q\phi + V]\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

é invariante se fizermos as duas transformações simultaneamente. Chegamos a essa equação se fizermos as associações :

$$\begin{array}{ll} p_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu & \text{logo } (\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar\nabla \text{ e } E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}) \\ p'_\mu \rightarrow p_\mu - eA_\mu & \text{logo } (-i\hbar\nabla \rightarrow -i\hbar\nabla - q\mathbf{A} \text{ e } i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + q\phi) \end{array}$$

E pode-se mostrar que a equação é invariante sob as transformações mencionadas. Apesar de essa nova interpretação do significado do calibre como mudança de fase, a designação “calibre” perdurou.

A nova interpretação é ainda mais válida dado que as objeções à interpretação anterior não se aplicam a esse caso. Entende-se agora o potencial eletromagnético como uma conexão que relaciona fases de uma função de onda em diferentes lugares (pontos vizinhos). A arbitrariedade do potencial agora é vista como uma liberdade em escolher valores da fase de uma função de onda sem afetarmos as equações de movimento. A mecânica quântica permitiu a redescoberta da invariância de calibre como *invariância nas mudanças de fase das funções de onda*.

Mas o papel do potencial eletromagnético não continuaria a ser o de um mero instrumento de simplificações de cálculos. Um experimento proposto por David

Bohm e Y. Aharonov, em 1959, veio a mudar definitivamente a idéia de que o potencial A_μ não poderia produzir efeitos físicos observáveis. O experimento Aharonov-Bohm é um simples experimento de interferência de elétrons com um solenóide introduzido entre as fendas e o anteparo (ver figura 3.1), e esse solenóide é de tal forma que gera um campo magnético não nulo apenas na região interior desse solenóide (porém o Potencial Magnético é não nulo no exterior do solenóide). Observa-se que o padrão de interferência é alterado com a mudança da corrente elétrica no solenóide, ainda que os elétrons não passem em nenhuma região com campo magnético não-nulo! O que esse experimento veio a deixar claro é que o papel representado pelo potencial eletromagnético na teoria quântica é o de uma conexão direta entre fases de pontos vizinhos, como já foi afirmado. Mesmo em uma região onde os campos elétricos e magnéticos são nulos pode-se observar uma interferência (diferença de fase) proporcional ao potencial na região - conclui-se desse experimento que se consideramos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ como elementares (e não o potencial), então as interações eletromagnéticas devem ser não-locais!

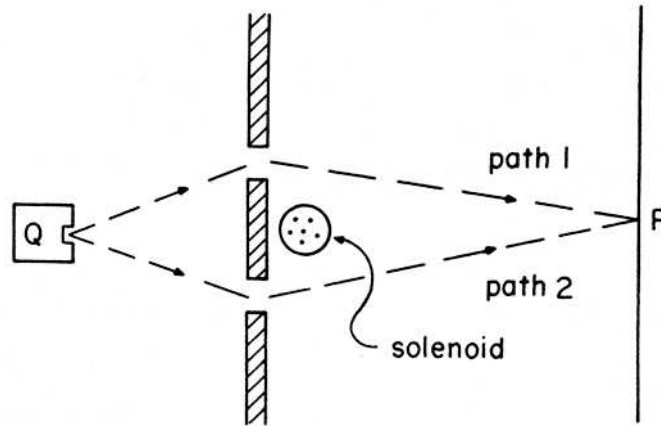


Figura 3.1: Experimento Aharonov-Bohm

Então, em 1954, os físicos C. N. Yang e R. Mills inauguraram uma nova fase das teorias de calibre quando criaram a proposta de uma teoria para as interações nucleares fortes que era invariante de calibre, postulando que o grupo de calibre

local dessa teoria deveria ser o grupo $SU(2)$ do isospin. Essa simetria local do isospin imporia restrições à arbitrariedade da escolha dos isospins das partículas. Uma vez que rotulássemos o estado de uma partícula em um ponto, a conexão definiria o estado em um ponto vizinho, e em analogia com o eletromagnetismo, essa conexão deve ser dada pelo potencial de isospin. A teoria *local* de Yang e Mills está para a invariância *global* da força nuclear forte quanto à rotações no espaço de isospin assim como a relatividade geral (invariância *local* dos referenciais) está para a relatividade restrita (invariância *global* dos referenciais). A estreita analogia com o eletromagnetismo, porém, tem suas limitações, dado que os grupos associados às duas interações são diferentes; $SU(2)$ para a força nuclear forte e $U(1)$ para o eletromagnetismo. Na teoria de Yang-Mills a fase é substituída por variáveis mais complicadas que indicam a direção do estado do isospin em cada ponto. A conexão portanto age exatamente como um operador de rotações na direção desse estado no espaço de isospins. Essa idéia revolucionária mostra como o grupo de simetria da teoria de calibre é fundamental na dinâmica da interação entre campos e partículas. Matematicamente isso é posto da seguinte forma:

$$A_\mu = \sum_i A_\mu^i(\mathbf{x}) L_i$$

Onde os L_i são os operadores de “momento angular” do espaço interno, ou seja; os geradores do grupo de simetria da teoria, e os $A_\mu^i(\mathbf{x})$ coeficientes que são funções das coordenadas do espaço-tempo. Lembrando que uma rotação nesse espaço interno (identicamente à rotação de uma função de onda no espaço tridimensional pois há um homomorfismo entre $SU(2)$ e $SO(3)$) pode ser escrita como:

$$R(\theta)\psi = e^{-i\theta \mathbf{L}/\hbar} \psi$$

Essa forma para o potencial garante que as mudanças de fase serão proporcionais ao potencial no ponto e nos mostra o duplo papel do potencial, como operador (gerador) no espaço interno e como campo no espaço-tempo.

Algumas propriedades desse potencial são fáceis de serem analisadas e levam à conclusões muito interessantes, como por exemplo; a existência de três componentes de carga correspondentes aos três operadores L_+ , L_- e L_z . A componente do potencial que age como o operador L_+ transforma um estado de isospin “down” em um estado “up”. Na teoria de Yang-Mills da força nuclear forte isso poderia

corresponder a um processo físico do tipo um nêutron absorver uma unidade de isospin do campo e transformar-se em um próton. Esse exemplo serve para ilustrar como o campo de calibre de Yang-Mills deve ser carregado (diferentemente do campo eletromagnético) e conseqüentemente o quanta desse campo pode ter carga (diferentemente do fóton). Entretanto, tanto no caso eletromagnético quanto no caso Yang-Mills *ambos os campos devem ter quantas com massa nula*. Esse é um requerimento natural das teorias de calibre e levou à alguns impasses históricos. O motivo pelo qual as teorias de calibre devem ter campos com massa nula segue se observarmos que o termo de massa do potencial deve entrar na Lagrangeana (na verdade, na densidade de Lagrangeana) na forma:

$$m^2 A_\mu A^\mu$$

que não é invariante por transformações de calibre (introduz termos que não podem ser cancelados por transformações da função de onda, por exemplo). A conclusão de que teorias de calibre devem não ter campos massivos levou ao abandono do modelo de Yang-Mills da força nuclear forte (que tem, sabe-se, alcance curto, interagindo por meio de quantas massivos). Mas o começo da revolução das teorias de calibre agora tinha sido estabelecido.

A teoria de calibre $SU(2)$ de Yang-Mills para a força nuclear forte era brilhante, mas prematura. Todo o arcabouço fenomenológico que deu origem ao modelo dos quarks, por exemplo, ainda estava nascendo e um novo ingrediente ainda estava por surgir - a idéia da quebra espontânea de simetrias - que explica convenientemente como uma simetria de calibre perfeita pode resultar em campos massivos, ou, como os bósons de calibre podem “adquirir” massa. Atualmente, o modelo universalmente aceito das interações fortes (a cromodinâmica) baseia-se no calibre $SU(3)_C$, onde C , o grau de liberdade da teoria, é a cor. E o modelo aceito das interações eletrofracas (o modelo Glashow-Weinberg-Salam) baseia-se na simetria $SU(2)_L \times U(1)$.

3.2 A Matemática das Teorias de Calibre

A teoria de Yang e Mills inaugurou a aplicação de um novo tipo de geometria na física a partir da hora em que propunham que os graus de liberdade internos das partículas devem estar intrinsecamente relacionados com a dinâmica do movimento no espaço-tempo. A formulação matemática precisa do que estamos chamando de espaço interno é dada pela análise dos *fibrados*. O espaço interno do grupo $U(1)$ pode ser visualizado como um anel (um grau de liberdade) e o espaço interno do grupo $SU(2)$ pelo interior de uma esfera (três graus de liberdade). Enquanto a partícula move no espaço-tempo ela percorre uma trajetória no espaço interno, e quando ela é submetida a um campo externo ela percorre um caminho suave nesse espaço interno determinado pelo potencial, e percorre uma trajetória arbitrária se esse campo é zero. À essa união do espaço-tempo quadridimensional e o espaço interno dá-se o nome *feixe de fibrados*. A matemática dos feixes de fibrados surgiu aproximadamente na mesma época do ressurgimento das teorias de calibre.

Façamos uma apresentação formal das teorias de calibre com uma generalização das interações eletromagnéticas para o caso de calibres não-abelianos.

O fóton é descrito pela Lagrangeana:

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \ , \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

E o acoplamento do fóton com o elétron (por exemplo), pelo termo de interação:

$$\mathcal{L}_{int} = \bar{\Psi}(p_\mu - eA_\mu)\gamma^\mu\Psi$$

Esses termos são invariantes sob as transformações:

$$A_\nu(x) \rightarrow A_\nu(x) - \partial_\nu\theta(x) \ , \quad \psi(x) \rightarrow e^{ie\theta(x)}\psi(x)$$

Com isso em mente, fazemos a transição para um grupo de calibre mais geral, substituindo as funções complexas A_μ por funções matriciais:

$$A_\nu(x) \rightarrow \bar{A}_\nu(x) = \sum_j \lambda^j A_\nu^j(x) , \quad \theta(x) \rightarrow \bar{\theta}(x) = \sum_j \lambda^j \theta^j(x)$$

onde os λ^j ($j = 1, 2, \dots, N$) formam uma base no espaço escolhido (na teoria de Yang-Mills que tratamos na seção anterior $\lambda^j = L_j$). A forma específica das matrizes escolhidas determina o grupo de simetria subjacente, se, por exemplo, escolhermos matrizes 3×3 hermitianas de traço nulo, então a transformação:

$$\exp \left(ie \sum_j \lambda^j \theta^j(x) \right)$$

é uma representação tridimensional das transformações de $SU(3)$. Claramente, qualquer outra representação de $SU(3)$ é possível. Finalmente, observando que as matrizes λ^j em geral não comutam, as equações para as Lagrangeanas devem ser um pouco alteradas (substituímos e por g):

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{4} \text{Tr} [\bar{F}^{\mu\nu} \bar{F}_{\mu\nu}] , \quad \bar{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \bar{A}_\nu - \partial_\nu \bar{A}_\mu + ig[\bar{A}_\mu, \bar{A}_\nu]$$

E o termo de acoplamento:

$$\mathcal{L}_{int} = \bar{\Psi}(p_\mu - e\bar{A}_\mu)\gamma^\mu\Psi$$

Que são invariantes sob as transformações:

$$\bar{A}_\nu(x) \rightarrow e^{ig\bar{\theta}(x)} \left(\bar{A}_\nu(x) - \frac{i}{g} \partial_\nu \right) e^{-ig\bar{\theta}(x)} , \quad \bar{\Psi}(x) \rightarrow e^{ig\bar{\theta}(x)} \Psi(x)$$

entendendo $\Psi(x)$ como um vetor correspondendo à escolha de $\bar{A}_\nu(x)$. Se escolhermos $\Psi(x)$ como matriz, então o traço de $\mathcal{L}_{int}$ também deve ser calculado (como será um dos casos tratados no próximo capítulo).

Capítulo 4

O modelo $SU(5)$ de Unificação das forças fundamentais

4.1 Introdução

Em 1974, Sheldon Lee Glashow e Howard Georgi publicaram um modelo teórico baseado nas simetrias do grupo $SU(5)$ que apresentava uma unificação das três forças fundamentais ([16]). A procura dessa simetria ampla, que incluiria o modelo padrão, isto é, a cromodinâmica ($SU(3)_C$) e a teoria eletrofraca ($SU(2)_L \times U(1)$), como componente estrutural, não é única. Diversos modelos teóricos (grupos) servem igualmente à esse propósito, mas estudaremos, em particular, a teoria de Glashow e Georgi, que foi considerado o mais forte candidato por ter algumas vantagens como a de ser o menor grupo simples que inclui o modelo padrão. Essa teoria incorpora os léptons e os quarks em uma única família e proporciona um meio de transformar um tipo de partícula em outro. A energia estimada em que efeitos dessa unificação seriam observáveis é da ordem de 10^{15}GeV , extremamente alta para ser atingida mesmo pelos mais equipados aceleradores, portanto só podendo de fato ser testada por suas *consequências* nas energias acessíveis atualmente.

O fato de que todos os átomos são, com muita precisão, eletricamente neutros, pode ser encarado como evidência de uma profunda simplicidade subjacente à estrutura da matéria que nos leva para além do modelo padrão! Segue da igualdade da magnitude das cargas do próton e do elétron a exata proporcionalidade das cargas

de quarks e léptons, os dois tipos básicos de partículas que são fundamentalmente distintas e não intercambiáveis, segundo o modelo padrão. Esse tipo de relação entre partículas aparentemente independentes (arbitrário no modelo padrão) é que gostaríamos de ver explicado em um modelo unitário. A figura 4.1 sugere uma possível simetria entre léptons e quarks ([17]).

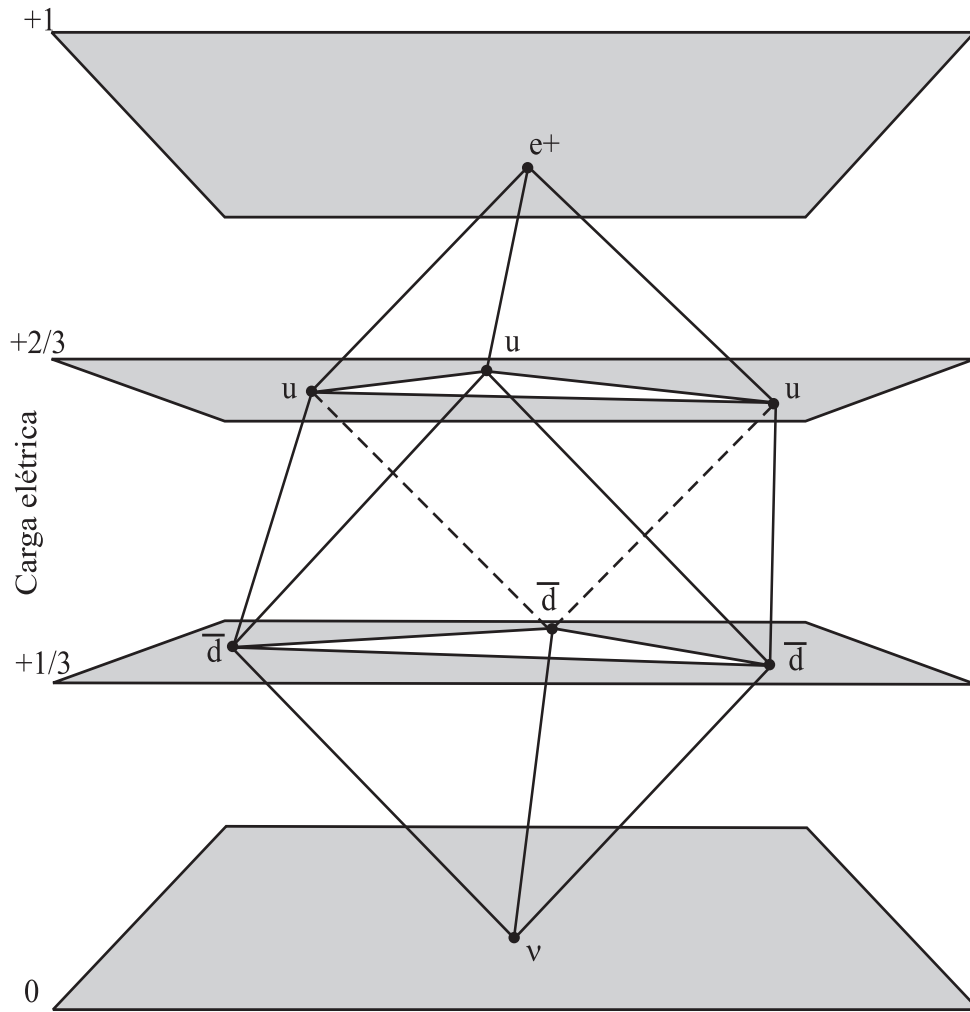


Figura 4.1: Simetrias entre quarks e léptons

Podemos observar também que, tanto para os quarks quanto para os léptons, a soma da carga e do número bariônico é um número inteiro:

$$e : \quad Q = -1, \quad B = 0 \quad \longrightarrow \quad Q + B = -1$$

$$\nu : \quad Q = 0, \quad B = 0 \quad \longrightarrow \quad Q + B = 0$$

$$u : \quad Q = +2/3, \quad B = 1/3 \quad \longrightarrow \quad Q + B = +1$$

$$d : \quad Q = -1/3, \quad B = 1/3 \quad \longrightarrow \quad Q + B = 0$$

E, relações similares podem ser estabelecidas para a hipercarga:

$$Y_L^{(l)} + 3Y_L^{(q)} = 0$$

Essas “equivalências” qualitativas entre léptons e quarks, portanto, levaram a hipótese que o grupo $SU(3)_C$ das interações fortes e o grupo $SU(2)_L \times U(1)$ da teoria de calibre de Glashow-Salam-Weinberg seriam parte de uma simetria maior e o grupo mais simples que incorpora a simetria $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)$ como subgrupo é o grupo $SU(5)$. Antes de discutirmos alguns detalhes do modelo de Georgi e Glashow, exploremos algumas propriedades matemáticas básicas do grupo $SU(5)$ ([18]).

4.2 O grupo $SU(5)$

$SU(5)$ é o grupo das matrizes unitárias 5×5 de determinante +1. Qualquer matriz unitária pode ser escrita como o exponencial da sua matriz geradora:

$$U = \exp(iH), \quad H^\dagger = H$$

$$U^{-1} = \exp(-iH) = \exp(-iH^\dagger) = \exp(iH)^\dagger = U^\dagger$$

Como as matrizes geradoras H são hermitianas ($h_{ij} = h_{ji}^*$) o conjunto total de geradores linearmente independentes para $U(5)$ é $5 \times 5 = 25$, com a restrição $\det(U) = 1$ (que leva à matrizes geradoras com traço igual à zero) concluimos que o grupo $SU(5)$ tem um total de $(5 \times 5) - 1 = 24$ geradores.

Portanto, como o grupo $U(5)$ tem 25 matrizes geradoras, podemos fazer a representação mais simples delas se fizermos uso do conjunto das matrizes que têm todos os elementos nulos, exceto um, da seguinte maneira:

Essas matrizes são denotadas por $C_{\alpha\beta}$ onde apenas o elemento $(C_{\alpha\beta})_{ij}$ com $i = \alpha$ e $j = \beta$ é diferente de zero (é igual a um):

$$(C_{\alpha\beta})_{ij} = \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j}$$

E, usando combinações lineares dessas mesmas matrizes, podemos construir uma representação simples do conjunto dos 25 geradores de $U(5)$. Dado que:

$$C_{\alpha\beta} + C_{\beta\alpha}, \quad i(C_{\beta\alpha} - C_{\alpha\beta})$$

são hermitianos, podemos usá-los como geradores ($\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4, 5$). E, para $SU(5)$, devemos ter matrizes geradoras com traço nulo. Esse requerimento pode ser satisfeito com as seguintes matrizes:

$$C'_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta} \quad (\alpha \neq \beta)$$

$$C'_{\alpha\alpha} = C_{\alpha\alpha} - \frac{1}{5}\mathbf{1} = C_{\alpha\alpha} - \left(\sum_{\alpha=1}^5 C_{\alpha\alpha}\right)/5,$$

que, aparentemente, ainda resulta em 25 matrizes independentes, apesar de termos dito que $SU(5)$ tem um total de 24 geradores. De fato, temos apenas 24 matrizes independentes quando fazemos o requerimento do traço nulo. Pode-se conferir essa afirmativa observando-se que as 5 matrizes $C'_{\alpha\beta}$ não são, na verdade, independentes:

$$\sum_{\alpha=1}^5 C'_{\alpha\alpha} = \sum_{\alpha=1}^5 C_{\alpha\alpha} - \frac{1}{5}\left(\sum_{\alpha=1}^5 \mathbf{1}\right) = 0$$

Podemos construir as quatro matrizes diagonais independentes da maneira convencional:

$$C'_{11} - C'_{22}, \quad C'_{11} + C'_{22}, \quad C'_{33} - C'_{44}, \quad C'_{33} + C'_{44}.$$

Podemos também observar que, dado que as relações de comutação das matrizes $C_{\alpha\beta}$ são:

$$\begin{aligned} (C_{\alpha\beta}C_{\gamma\delta} - C_{\gamma\delta}C_{\alpha\beta})_{ij} &= \sum_l (C_{\alpha\beta})_{il}(C_{\gamma\delta})_{lj} - \sum_l (C_{\gamma\delta})_{il}(C_{\alpha\beta})_{lj} \\ &= \sum_l \delta_{\alpha i} \delta_{\beta l} \delta_{\gamma l} \delta_{\delta j} - \sum_l \delta_{\gamma i} \delta_{\delta l} \delta_{\alpha l} \delta_{\beta j} \\ &= \delta_{\alpha i} \delta_{\beta \gamma} \delta_{\delta j} - \delta_{\gamma i} \delta_{\delta \alpha} \delta_{\beta j} = \delta_{\beta \gamma} (C_{\alpha\delta})_{ij} - \delta_{\delta \alpha} (C_{\gamma\beta})_{ij} , \end{aligned}$$

ou, em notação matricial:

$$[C_{\alpha\beta}, C_{\gamma\delta}] = \delta_{\beta\gamma} C_{\alpha\delta} - \delta_{\alpha\delta} C_{\gamma\beta} ,$$

essa é a mesma relação de comutação que as matrizes de $SU(5)$ deverão obedecer, dado que a matriz $\mathbf{1}$ comuta com qualquer matriz.

$$[C'_{\alpha\beta}, C'_{\gamma\delta}] = \delta_{\beta\gamma} C'_{\alpha\delta} - \delta_{\alpha\delta} C'_{\gamma\beta}$$

Convencionou-se escolher as quatro matrizes diagonais independentes normalizadas de maneira que o traço do quadrado de cada uma dessas matrizes é igual a dois:

$$\begin{aligned} (C'_{11} - C'_{22}) &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \sqrt{\frac{5}{3}}(C'_{11} + C'_{22}) &= \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(C'_{33} - C'_{44}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\frac{5}{3}}(C'_{33} + C'_{44}) = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Além destas quatro matrizes diagonais convencionais, temos vinte (4×5) geradores não-diagonais. O número de geradores diagonais de um grupo é chamado *rank* desse grupo, e como deixamos implícito no primeiro capítulo, o rank de um grupo de Lie é igual ao número de operadores de Casimir independentes desse grupo (que são os operadores que comutam com todos os geradores desse grupo). O operador de Casimir mais simples e mais importante é:

$$C_2 = \sum_{\alpha, \beta} C'_{\alpha\beta} C'_{\beta\alpha} ,$$

que comuta com qualquer gerador do grupo, pois:

$$\begin{aligned} [C_2, C'_{\gamma\delta}] &= \sum_{\alpha, \beta} [C'_{\alpha\beta} C'_{\beta\alpha}, C'_{\gamma\delta}] = \sum_{\alpha, \beta} C'_{\alpha\beta} [C'_{\beta\alpha}, C'_{\gamma\delta}] + \sum_{\alpha, \beta} [C'_{\alpha\beta}, C'_{\gamma\delta}] C'_{\beta\alpha} \\ &= \sum_{\alpha, \beta} (C'_{\alpha\beta} (\delta_{\alpha\gamma} C'_{\beta\delta} - \delta_{\beta\delta} C'_{\gamma\alpha}) + (\delta_{\beta\gamma} C'_{\alpha\delta} - \delta_{\alpha\delta} C'_{\gamma\beta}) C'_{\beta\alpha}) \\ &= \sum_{\beta} C'_{\gamma\beta} C'_{\beta\delta} - \sum_{\alpha} C'_{\alpha\delta} C'_{\gamma\alpha} + \sum_{\alpha} C'_{\alpha\delta} C'_{\gamma\alpha} - \sum_{\beta} C'_{\gamma\beta} C'_{\beta\delta} = 0 . \end{aligned}$$

E, finalmente, é possível, através dos diagramas de Young, determinar as dimensões das representações irredutíveis do grupo $SU(5)$ ([6],[18]):

$$5, 10, 15, 24, 35, 40, \dots$$

E, também pelo mesmo método, é possível demonstrarmos que:

$$\begin{aligned} [5] \times [5] &= [15] + [10] \\ [5] \times [5] \times [5] &= [35] + [40] + [40] + [\bar{10}] \\ [\bar{5}] \times [5] &= [1] + [24] \end{aligned}$$

para as possíveis reduções.

4.2.1 Inserindo $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)$ em $SU(5)$

Devemos considerar algumas evidências experimentais já estabelecidas antes de incorporarmos os três grupos das interações básicas na estrutura do grupo $SU(5)$. Sabemos que o grupo $SU(3)_C$ da cor “ignora” completamente as interações fracas descritas pelo modelo de Weinberg-Salam-Glashow $SU(2)_L \times U(1)$, no modelo padrão. Qualquer quark de determinado sabor, independentemente se este é verde, vermelho ou azul terá a mesma carga elétrica ou fraca. Isso implica que, quando unificados em $SU(5)$, os grupos $SU(3)_C$ e $SU(2)_L \times U(1)$ devem comutar e isso só é possível se os geradores de $SU(2)_L \times U(1)$ comportarem-se como matrizes unitárias (ou nulas) com respeito aos geradores de $SU(3)_C$ no subespaço tridimensional de $SU(3)_C$. Podemos levar isso em consideração destinando as primeiras três colunas e linhas da representação pentadimensional dos geradores de $SU(5)$ para o grupo $SU(3)$ e as duas últimas colunas e linhas para o grupo $SU(2)_L$. Dessa maneira especificamos completamente a estrutura de $SU(5)$ e ainda determinamos como é incorporado o grupo $U(1)$.

Consideremos primeiramente os geradores diagonais do grupo $SU(3) \subset SU(5)$ que podem ser construídos com as matrizes diagonais C_{11} , C_{22} e C_{33} que têm zeros nas linhas e colunas quatro e cinco. Para terem o traço nulo, que é um requerimento dos geradores de $SU(3)$, admitimos as seguintes combinações:

$$C''_{11} = C_{11} - \frac{1}{3}(C_{11} + C_{22} + C_{33}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C''_{22} = C_{22} - \frac{1}{3}(C_{11} + C_{22} + C_{33}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E uma combinação desses elementos nos dará os geradores de $SU(3)$, $\tilde{\lambda}_3$ e $\tilde{\lambda}_8$, que são usados convencionalmente:

$$\tilde{\lambda}_3 = C''_{11} - C''_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\lambda}_8 = \sqrt{3}(C''_{11} + C''_{22}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E, analogamente, construímos o gerador diagonal do grupo $SU(2)$ a partir dos geradores C''_{44} e C''_{55} :

$$\tilde{\lambda}_{23} \equiv \tilde{\tau}_3 = (C''_{44} - C''_{55}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

E, finalmente, o gerador correspondente ao grupo $U(1)$ deve ser diagonal e na forma de matriz unidade com respeito à $SU(3)$ e $SU(2)$ e ainda ter o traço nulo. As únicas matrizes que correspondem a esses requisitos são proporcionais à:

$$\tilde{Y} \equiv \sqrt{\frac{5}{3}}(C''_{44} + C''_{55}) = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Agora, consideremos os outros geradores (não-diagonais) do grupo $SU(5)$ que determinam $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subseteq SU(5)$, como determinados pela seção anterior:

$$\tilde{\lambda}_1 = (C_{12} + C_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\lambda}_2 = i(C_{21} - C_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\lambda}_4 = (C_{13} + C_{31}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\lambda}_5 = i(C_{31} - C_{13}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\lambda}_6 = (C_{23} + C_{32}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\lambda}_7 = i(C_{32} - C_{23}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\lambda}_9 = (C_{14} + C_{41}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\lambda}_{10} = i(C_{41} - C_{14}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\lambda}_{11} = (C_{24} + C_{42}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\lambda}_{12} = i(C_{42} - C_{24}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\lambda}_{13} = (C_{34} + C_{43}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\lambda}_{14} = i(C_{43} - C_{34}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\lambda}_{15} = (C_{15} + C_{51}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\lambda}_{16} = i(C_{51} - C_{15}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\lambda}_{17} = (C_{25} + C_{52}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\lambda}_{18} = i(C_{52} - C_{25}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\lambda}_{19} = (C_{35} + C_{53}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\lambda}_{20} = i(C_{53} - C_{35}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E, também:

$$\tilde{\lambda}_{21} \equiv \tilde{\tau}_1 = (C_{45} + C_{54}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\lambda}_{22} \equiv \tilde{\tau}_2 = i(C_{54} - C_{45}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\lambda}_{23} \equiv \tilde{\tau}_3 = (C_{44}'' - C_{55}'') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Observando que $\tilde{\lambda}_{24} \equiv \tilde{Y}$.

Na mais simples representação do grupo $SU(5)$ - o quintupeto $[5]$ - os 5 elementos são: três quarks *down* dextrógiros, nas cores vermelha, azul e verde, um pósitron dextrógiro e um antineutrino eletrônico dextrógiro:

$$[5] = (d_1 \ d_2 \ d_3 \ e^+ \ -\nu_e^C)_R$$

E o antiquintupeto:

$$[\bar{5}] = (d_1^C \ d_2^C \ d_3^C \ e^- \ \nu_e)_L$$

Como veremos na próxima seção, 24 bósons intermediadores efetuam todas as possíveis transições entre esses 5 elementos. Quatros dessas partículas são o fóton, o Z^0 (ou W^3) e dois glúons G^3 e G^8 (sem cor). Dado que essas partículas não carregam nenhum tipo de carga, eles só participam de interações que não mudam a identidade das partículas (e logo pertencem aos elementos diagonais da matriz). Dos restantes 20 bósons, oito nos são familiares. São os seis glúons remanescentes da QCD (que transformam as cores dos quarks) mais os bósons intermediadores W^+ e W^- (que convertem pósitron em antineutrino e vice-versa). Com esses 12 bósons, todas as interações do modelo padrão são contabilizadas. Os 12 bósons restantes, que são necessários se queremos que a teoria tenha o máximo possível de simetria (e que vá além do modelo padrão), denominamos bóson X e Y , e mediam a transformação de léptons em quarks e vice-versa.

Os férmions remanescentes da primeira geração do modelo padrão podem ser construídos na próxima representação mais simples do grupo, uma família de 10 partículas levóginas:

$$[10] = \begin{pmatrix} 0 & u_3^C & -u_2^C & -u_1 & -d_1 \\ -u_3^C & 0 & u_1^C & -u_2 & -d_2 \\ u_2^C & -u_1^C & 0 & -u_3 & -d_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 & -e^C \\ d_1 & d_2 & d_3 & e^C & 0 \end{pmatrix}_L$$

Assim como podemos construir as remanescentes 10 partículas dextróginas do modelo padrão, totalizando *precisamente* todas as 30 partículas elementares da primeira geração!

Representações equivalentes para as outras gerações podem ser construídas fazendo-se:

$$[5] = (s_1 \ s_2 \ s_3 \ \mu^+ \ -\nu_\mu^C)_R$$

$$[5] = (b_1 \ b_2 \ b_3 \ \tau^+ \ -\nu_\tau^C)_R$$

É interessante notar que esse procedimento bem sucedido de representação precisa de todas as partículas elementares conhecidas é um notável sucesso do modelo $SU(5)$, diferentemente de outros candidatos a modelos de unificação. Com base em tudo isso, podemos construir agora a Lagrangeana do modelo $SU(5)$.

4.3 A Lagrangeana da Teoria de Calibre $SU(5)$

Os 24 bósons A_μ^i ($i = 1, 2, \dots, 24$) previstos pela Teoria de Calibre $SU(5)$ são representados convenientemente pelas matrizes 5×5 . Podemos escrever o *operador bóson de calibre* a partir dos 24 geradores de $SU(5)$ encontrados na última seção:

$$\begin{aligned} \hat{A}_\mu &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{24} A_\mu^a \tilde{\lambda}_a = \frac{1}{2} \left[\sum_{a=1}^8 G_\mu^a \tilde{\lambda}_a + \sum_{a=9}^{20} A_\mu^a \tilde{\lambda}_a + \sum_{a=21}^{23} A_\mu^a \tilde{\lambda}_a + B_\mu \tilde{\lambda}_{24} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{ccc|cc} & & & X_{1\mu}^C & Y_{1\mu}^C \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_a G_\mu^a \lambda_a & & X_{2\mu}^C & Y_{2\mu}^C \\ & & & X_{3\mu}^C & Y_{3\mu}^C \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ X_{1\mu} & X_{2\mu} & X_{3\mu} & \frac{W_\mu^3}{\sqrt{2}} & W_\mu^+ \\ Y_{1\mu} & Y_{2\mu} & Y_{3\mu} & W_\mu^- & \frac{-W_\mu^3}{\sqrt{2}} \end{array} \right) \\ &\quad + \frac{B_\mu}{2\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ou, em detalhes:

$$\hat{A}_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{A_\mu^3}{\sqrt{2}} + \frac{A_\mu^8}{\sqrt{6}} - \frac{2B_\mu}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 - iA_\mu^2) & \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^4 - iA_\mu^5) & | & X_{1\mu}^C & Y_{1\mu}^C \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 + iA_\mu^2) & -\frac{A_\mu^3}{\sqrt{2}} + \frac{A_\mu^8}{\sqrt{6}} - \frac{2B_\mu}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^6 - iA_\mu^7) & | & X_{2\mu}^C & Y_{2\mu}^C \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^4 + iA_\mu^5) & \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^6 + iA_\mu^7) & -\sqrt{\frac{2}{3}}A_\mu^8 - \frac{2B_\mu}{\sqrt{30}} & | & X_{3\mu}^C & Y_{3\mu}^C \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & + & \text{---} & \text{---} \\ X_{1\mu} & X_{2\mu} & X_{3\mu} & | & \frac{W_\mu^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B_\mu}{\sqrt{30}} & W_\mu^+ \\ Y_{1\mu} & Y_{2\mu} & Y_{3\mu} & | & W_\mu^- & \frac{-W_\mu^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B_\mu}{\sqrt{30}} \end{array} \right)$$

Onde:

$$\begin{aligned} W_\mu^3 &= A_\mu^{23} \quad , \\ W_\mu^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^{21} \mp iA_\mu^{22}) \quad , \\ X_{1\mu} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^9 + iA_\mu^{10}) \quad , \quad X_{1\mu}^C = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^9 - iA_\mu^{10}) \quad , \\ X_{2\mu} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^{11} + iA_\mu^{12}) \quad , \quad X_{2\mu}^C = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^{11} - iA_\mu^{12}) \quad , \\ X_{3\mu} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^{13} + iA_\mu^{14}) \quad , \quad X_{3\mu}^C = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^{13} - iA_\mu^{14}) \quad , \\ Y_{1\mu} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^{15} + iA_\mu^{16}) \quad , \quad Y_{1\mu}^C = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^{15} - iA_\mu^{16}) \quad , \\ Y_{2\mu} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^{17} + iA_\mu^{18}) \quad , \quad Y_{2\mu}^C = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^{17} - iA_\mu^{18}) \quad , \\ Y_{3\mu} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^{19} + iA_\mu^{20}) \quad , \quad Y_{3\mu}^C = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^{19} - iA_\mu^{20}) \quad , \end{aligned}$$

E a derivada covariante de $SU(5)$ é dada por:

$$i\hat{D}_\mu = i\partial_\mu + \frac{g_5}{2} \sum_i A_\mu^i \tilde{\lambda}_i = i\partial_\mu + g_5 \hat{A}_\mu$$

E podemos construir a Lagrangeana da Teoria de Calibre $SU(5)$ da seguinte maneira:

Aplicaremos a transformação unitária:

$$U = e^{-ig\theta_a(x)\tilde{\lambda}^a/2} \quad ,$$

na representação [10].

O campo de calibre se transformará de acordo com:

$$A'^{\mu a} \frac{\tilde{\lambda}_a}{2} = U(x) \left[A^{\mu b} \frac{\tilde{\lambda}_b}{2} - \frac{i}{g} \partial^\mu \right] U^{-1}(x)$$

Levando-se em conta que a representação $[10]$ é baseada na representação $[5]$ da seguinte maneira:

$$\Psi^{[10]} = (\Psi^{[5]} \otimes \Psi^{[5]})_{anti}$$

Ou seja;

$$\begin{aligned} \Psi_{ij}^{[10]} &= (\Psi_i^{[5]} \Psi_j^{[5]} - \Psi_j^{[5]} \Psi_i^{[5]}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & u_3^C & -u_2^C & -u_1 & -d_1 \\ -u_3^C & 0 & u_1^C & -u_2 & -d_2 \\ u_2^C & -u_1^C & 0 & -u_3 & -d_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 & -e^C \\ d_1 & d_2 & d_3 & e^C & 0 \end{pmatrix}_L \end{aligned}$$

E como $\Psi^{[5]}$ transforma de acordo com:

$$\Psi_i'^{[5]} = U(x)_{ij} \Psi_j^{[5]}$$

Temos portanto:

$$\begin{aligned} \Psi_{ij}'^{[10]} &= (\Psi_i'^{[5]} \Psi_j'^{[5]} - \Psi_j'^{[5]} \Psi_i'^{[5]}) \\ &= \left(U(x)_{ik} \Psi_k^{[5]} U(x)_{jl} \Psi_l^{[5]} - U(x)_{jl} \Psi_l^{[5]} U(x)_{ik} \Psi_k^{[5]} \right) \\ &= U(x)_{ik} \left(\Psi_k^{[5]} \otimes \Psi_l^{[5]} \right)_{anti} U(x)_{jl} = U(x)_{ik} \Psi_{kl}^{[10]} U^T(x)_{lj} \end{aligned}$$

ou;

$$\Psi'^{[10]} = U(x) \Psi^{[10]} U^T(x)$$

E a derivada covariante pode ser determinada de maneira a cancelar os termos surgidos da aplicação da transformação de calibre dada acima, quando é aplicado um quadrigradiente às funções $\Psi'^{[10]}$:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \Psi'^{[10]} &= \partial_\mu (U(x) \Psi^{[10]} U^T(x)) \\ &= (\partial_\mu U(x)) \Psi^{[10]} U^T(x) + U(x) (\partial_\mu \Psi^{[10]}) U^T(x) + U(x) \Psi^{[10]} (\partial_\mu U^T(x)) \end{aligned}$$

$$= U(x)(\partial_\mu \Psi^{[10]})U^T(x) - U(x) \left[ig\partial_\mu \theta_a \frac{\tilde{\lambda}_a}{2} \Psi^{[10]} + \Psi^{[10]} ig\partial_\mu \theta_a \frac{\tilde{\lambda}_a^T}{2} \right] U^T(x)$$

A expressão entre chaves é compensada se formularmos a derivada covariante da função de onda $\Psi^{[10]}$ da maneira:

$$D_\mu \Psi^{[10]} = \partial_\mu \Psi^{[10]} + ig \left[A_\mu^a \frac{\tilde{\lambda}_a}{2} \Psi^{[10]} + \Psi^{[10]} A_\mu^a \frac{\tilde{\lambda}_a^T}{2} \right]$$

E podemos ver que a maneira que essa derivada covariante se transforma sob a transformação de calibre dada:

$$\begin{aligned} D'_\mu \Psi'^{[10]} &= \partial_\mu \Psi'^{[10]} + ig \left[A_\mu'^a \frac{\tilde{\lambda}_a}{2} \Psi'^{[10]} + \Psi'^{[10]} A_\mu'^a \frac{\tilde{\lambda}_a^T}{2} \right] \\ &= U(x)(\partial_\mu \Psi^{[10]})U^T(x) - U(x) \left[ig\partial_\mu \theta_a \frac{\tilde{\lambda}_a}{2} \Psi^{[10]} + \Psi^{[10]} ig\partial_\mu \theta_a \frac{\tilde{\lambda}_a^T}{2} \right] U^T(x) \\ &\quad + ig \left[U(x) \left(A^{\mu b} \frac{\tilde{\lambda}_b}{2} + (\partial^\mu \theta^b) \frac{\tilde{\lambda}_b}{2} \right) U^{-1}(x) U(x) \Psi^{[10]} U^T(x) \right] \\ &\quad + ig \left[U(x) \Psi^{[10]} U^T(x) (U^T(x))^{-1} \left[A^{\mu b} \frac{\tilde{\lambda}_b^T}{2} (\partial^\mu \theta^b) \frac{\tilde{\lambda}_b^T}{2} \right] U^T(x) \right] \\ &= U(x) \left(\partial_\mu \Psi^{[10]} + ig \left[A_\mu'^a \frac{\tilde{\lambda}_a}{2} \Psi^{[10]} + \Psi^{[10]} A_\mu'^a \frac{\tilde{\lambda}_a^T}{2} \right] \right) U^T(x) \end{aligned}$$

Enfim,

$$D'_\mu \Psi'^{[10]} = U(x) D_\mu \Psi^{[10]} U^T(x)$$

Se definimos a parte cinética da Lagrangeana:

$$\mathcal{L}_{kin}^{[10]} = Tr \left[\bar{\Psi}^{[10]} \gamma^\mu D_\mu \Psi^{[10]} \right]$$

Chegamos em:

$$\mathcal{L}'_{kin}^{[10]} = Tr \left[\bar{\Psi}'^{[10]} \gamma^\mu D'_\mu \Psi'^{[10]} \right]$$

e usando o resultado $D'_\mu \Psi'^{[10]} = U(x) D_\mu \Psi^{[10]} U^T(x)$ que acabamos de calcular:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{kin}^{[10]} &= Tr [(U(x)\bar{\Psi}^{[10]}U^T(x))U(x)\gamma^\mu D_\mu \Psi^{[10]}U^T(x)] \\
 &= Tr [(U^T)^{-1}(x)\Psi^{[10]\dagger}U^{-1}(x)U(x)\gamma^\mu D_\mu \Psi^{[10]}U^T(x)] \\
 &= Tr [\bar{\Psi}^{[10]}\gamma^\mu D_\mu \Psi^{[10]}] = \mathcal{L}_{kin}^{[10]}
 \end{aligned}$$

A parte cinética da Lagrangeana de $SU(5)$ para o acoplamento dos campos de calibre com férmions na representação $[10]$ também é invariante sob as mesmas transformações de calibre. E, na nossa notação, para o acoplamento do quintupletto de $SU(5)$ com os campos de calibre:

$$\mathcal{L}_{kin}^{[5]} = Tr [\bar{\Psi}^{[5]}\gamma^\mu D_\mu \Psi^{[5]}]$$

Levando tudo isso em consideração:

$$\mathcal{L}_{int} = Tr [\bar{\Psi}^{[10]}\gamma^\mu D_\mu \Psi^{[10]}] + \bar{\Psi}^{[5]}\gamma^\mu D_\mu \Psi^{[5]}$$

E, finalmente, os termos da parte da Lagrangeana da interação:

$$\mathcal{L}_{int} = ig\bar{\Psi}^{[10]}\gamma^\mu A_\mu \frac{\tilde{\lambda}_a}{2}\Psi^{[10]} + ig\bar{\Psi}^{[10]}\Psi^{[10]}$$

A construção da Lagrangeana de um modelo é o passo fundamental para se efetuar, de fato, cálculos preditivos de quaisquer observáveis de interesse em Teoria Quântica de Campo, que são realizados com as chamadas regras de Feynman, deduzidas de acordo com as simetrias dessa Lagrangeana.

4.4 Conclusões

O fato significativo mais óbvio do modelo $SU(5)$ é que léptons e quarks deixam de ser famílias irreconciliavelmente diferentes. Passam a ser realmente membros intercambiáveis de uma mesma família. Outra consequência da unificação das forças elementares é que a intensidade das forças fraca, forte e eletromagnética (as constantes de acoplamento) devem ser iguais. Certamente que essas características não se manifestam, ou pelo menos não são diretamente verificáveis em nossa escala de energia, afinal, eventos de conversão do tipo quark-léptons nunca foram observados nem mesmo nos mais poderosos aceleradores de partículas.

Se a simetria $SU(5)$ realmente existe na natureza, ela está quebrada, e as partículas X e Y devem ter massa muito grande, de tal forma que reações envolvendo elas são fortemente suprimidas e raras, no universo atual. À distâncias muito curtas, ou energias muito elevadas, na chamada *escala de unificação*, a simetria torna-se novamente manifesta, e a disparidade entre as intensidades das forças deixa de existir. O gráfico da figura 4.2 mostra como pode-se inferir, em altas energias, a convergência das constantes.

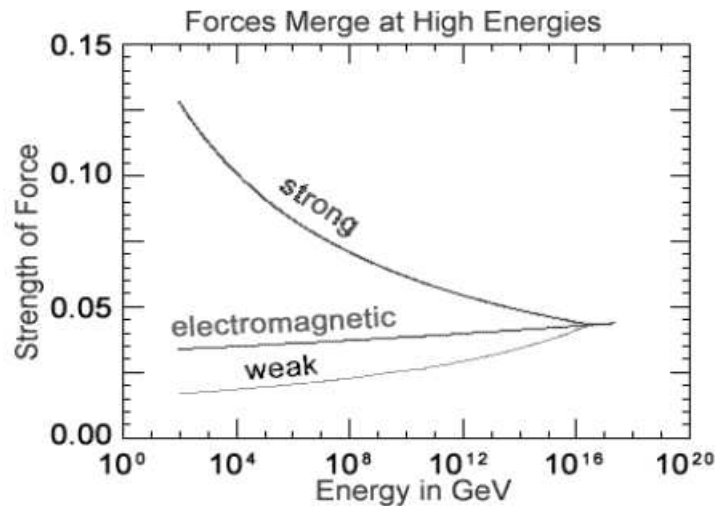


Figura 4.2: Unificação das Forças

O cálculo da escala de unificação foi levado a cabo em 1974, por H. Georgi, H. Quinn e S. Weinberg, e foi estimado em $10^{-29}cm$ ([19]). Essa é uma escala extraordinariamente pequena e não acessível nem pelo mais fantástico acelerador de partícula jamais planejado, e as partículas X e Y devem ter massas dessa ordem, e portanto, dificilmente detectáveis. Eventos intermediados por elas devem ser extremamente raros, porém prontamente discernidos, dada a sua peculiaridade: a transformação de quarks em léptons. Esse processo põe em questão a própria estabilidade da matéria!

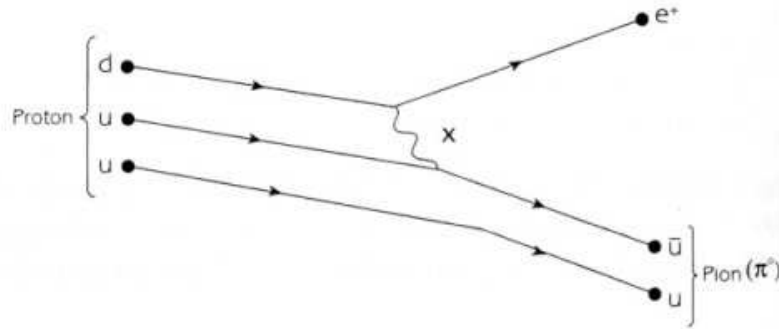
As interações mediadas pelas partículas X diferem de todas as outras interações nesse sentido, ao violar o princípio da conservação do número bariônico. Se a conservação do número bariônico for uma lei absoluta da natureza, o próton nunca decai, dado que ele é o mais leve bárion. Mas o modelo $SU(5)$ prevê exatamente tal decaimento!

Em um possível cenário, um quark d do próton poderia emitir um bóson X , convertendo-se em um pósitron, enquanto um quark u desse mesmo próton absorveria o bóson X transformando-se em um antiquark u^C . Uma reação dessa poderia acontecer em um próton de um átomo de Hidrogênio, que decairia dessa forma, em um méson pi neutro e um par elétron-pósitron.

Em laboratório, poderia-se detectar até mesmo uma seqüência de eventos ainda mais singulares: o decaimento do Hidrogênio em um méson pi neutro que poderia decair em fótons energéticos, assim como o par elétron-pósitron poderia se aniquilar, resultando mais fótons energéticos (raios gama). De maneira que o resultado final é a singular previsão do decaimento do Hidrogênio em radiação pura!

A taxa com que esses eventos poderiam acontecer, de acordo com o modelo $SU(5)$ é extremamente pequena, e o valor da vida-média do próton é um valor crucial para a verificação experimental da validade do modelo, e é estimado em cerca de 10^{31} anos. Essa taxa de vida-média implica que em uma coleção de 10^{31} prótons, um decaimento deverá ser observado por ano. Portanto a estratégia de detecção desses eventos passa pela monitoração cuidadosa de grandes quantidades de matéria.

Vários grupos de pesquisa continuam os experimentos de detecção do decaimento do próton ([20], [21]), e as evidências parecem descartar o modelo minimal $SU(5)$. Além de dar uma explicação satisfatória para a quantização da carga elétrica, o modelo tem a vantagem de reduzir o número de constantes arbitrárias. Entre outros fatores que a teoria prevê está o ângulo de Weinberg e a razão da massa do

**Figura 4.3:** Decaimento do Próton

quark b para a massa do lépton tau. E finalmente, o modelo pode possivelmente dar uma solução satisfatória ao problema da assimetria entre matéria e antimatéria ([22]).

Entre as teorias de calibre, muitos outros grupos, com maior ou menor sucesso, se mostram como candidatos a Teoria de Unificação. Caberá, possivelmente, à próxima geração de aceleradores de partícula, a determinação do(s) melhor(es) modelo(s) de descrição dos fenômenos elementares.

Pretendemos aqui ter apresentado, com o modelo de calibre mais simples $SU(5)$, como se dá a implementação de uma Teoria de Unificação, no âmbito das teorias de calibre.

Por fim, salientamos que a possibilidade da constatação de que toda a matéria poderia eventualmente se desintegrar é um empreendimento que ainda está sendo levado a cabo.

Referências Bibliográficas

- [1] Salam, A.; Heisenber, W.; Dirac, P.A.M, *A Unificação das Forças Fundamentais - O Grande Desafio da Física Contemporânea*, Ciência e Cultura, Jorge Zahar Editor, 1993.
- [2] Copérnico, N., *A Revolução dos Orbes Celestes*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- [3] Greiner W. and Müller B., *Quantum Mechanics Symmetries*, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2nd edition, 1989,94 (Ch. 1 - 6, 9).
- [4] Barrow, J.D., *Teorias de Tudo - A Busca da Explicação Final*, Ciência e Cultura, Jorge Zahar Editor, RJ 1994 (pg. 38).
- [5] Elliott J. P. and Dawber P. G., *Symmetry in Physics V.1 - Principles and Simple Applications*, The Macmillan Press LTD, 1979 (Ch. 6, 9).
- [6] Sakurai, J. J., *Modern Quantum Mechanics*, Revised Edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1994 (Ch. 3,4,6).
- [7] Elliott J. P. and Dawber P. G., *Symmetry in Physics V.2 - Further Application*, The Macmillan Press LTD, 1979 (Ch. 15, 16, 17, 18).
- [8] Gilmore R., *Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications*, John Wiley and Sons, Inc. 1974 (Ch. 1,2,3,4).
- [9] von Westenholz C., *Differential forms in Mathematical Physics*, North-Holland.
- [10] Moryasu, K., *An Elementary Primer for Gauge Theory*, World Scientific Publishing Company, 1983.

- [11] Lopes J. L., *A Estrutura Quântica da Matéria*, Erca Editora e Gráfica, RJ 1992.
- [12] Griffiths J. J., *Introduction to Elementary Particles*, John Wiley and sons, inc., 1987.
- [13] Greiner W., Schäfer and Andreas, *Quantum Chromodynamics*, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 1994 (Ch. 1,2,4).
- [14] Quigg C., *Gauge Theory of the Strong, Weak and Electromagnetic Interactions*, The Benjamin/Cumming Publishing Company, 1983 (Ch. 1 - 5, 6 - 9).
- [15] Aitchinson I. J. R. and Hey A. J. G., *Gauge Theory in Particle Physics*, Graduate Student Series in Physics, Adam Hilger, Bristol and Philadelphia, 1989.
- [16] Georgi H. and Glashow S.L., 1974, *Phys. Rev. Lett.*, 32, 438.
- [17] Georgi H., “A Unified Theory of Elementary Particles and Forces” *Scientific American*, apr. 1981, vol. 244, p. 48-63.
- [18] Greiner W. and Müller B., *Gauge Theory of Weak Interactions*, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 1993 (Ch. 1,4,9).
- [19] Georgi H. M., Quinn, H. R., and Weinberg, S., 1974, *Phys. Rev. Lett.*, 33, 451.
- [20] LoSecco J.M., Reines F., Sinclair D., “The Search for Proton Decay” *Scientific American*, june 1985, vol. 252, p. 54-62.
- [21] Weinberg S., “The Decay of the Proton” *Scientific American*, june 1981, vol. 244, p. 64-75.
- [22] Wilczek F., “The Cosmic Asymmetry between Matter and Antimatter” *Scientific American*, dec. 1980, vol. 243, p. 82-90.