

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Laboratório de Modelagem, Análise e Controle de Sistemas Não Lineares

Pablo Henrique Gonçalves

**ESTIMAÇÃO DE ESTADOS DE SISTEMAS NÃO LINEARES:
abordagem robusta via métodos de otimização convexa**

Belo Horizonte
2025

Pablo Henrique Gonçalves

**ESTIMAÇÃO DE ESTADOS DE SISTEMAS NÃO LINEARES:
abordagem robusta via métodos de otimização convexa**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientadores:

Prof. Dr. Bruno Otávio Soares Teixeira

Prof. Dr. Víctor Costa da Silva Campos

Belo Horizonte

2025

G635e

Gonçalves, Pablo Henrique.

Estimacão de estados de sistemas não lineares [recurso eletrônico] : abordagem robusta via métodos de otimização convexa / Pablo Henrique Gonçalves. - 2025.

1 recurso online (118 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Bruno Otávio Soares Teixeira.

Coorientador: Víctor Costa da Silva Campos.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Inclui bibliografia.

1. Engenharia elétrica - Teses. 2. Sistemas não lineares - Teses. 3. Desigualdades matriciais lineares - Teses. 4. Kalman, Filtragem de - Teses. 5. Otimização - Teses. I. Teixeira, Bruno Otávio Soares. II. Campos, Víctor Costa da Silva. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.

CDU: 621.3(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Escola de Engenharia

COLEGIADO DO CURSO DE GRADUAÇÃO / PÓS-GRADUAÇÃO EM Engenharia Elétrica

FOLHA DE APROVAÇÃO

"Estimação de Estados de Sistemas Não Lineares: Abordagem Robusta Via Métodos de Otimização Convexa"

Pablo Henrique Gonçalves

Tese de Doutorado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 08 de agosto de 2025.

Por:

Prof. Dr. Bruno Otávio Soares Teixeira
DELT (UFMG) - Orientador

Prof. Dr. Víctor Costa da Silva Campos
DELT (UFMG) - Co-orientador

Prof. Dr. Leonardo Amaral Mozelli
DELT (UFMG)

Prof. Dr. Luciano Antônio Frezzato Santos
PTC (EP-USP)

Prof. Dr. Márcio Júnior Lacerda
(London Metropolitan University)

Prof. Dr. Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira

FEEC (Unicamp)



Documento assinado eletronicamente por **Márcio Júnior Lacerda, Usuário Externo**, em 21/08/2025, às 19:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Bruno Otavio Soares Teixeira, Professor do Magistério Superior**, em 26/08/2025, às 10:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira, Usuário Externo**, em 26/08/2025, às 14:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Leonardo Amaral Mozelli, Professor do Magistério Superior**, em 26/08/2025, às 16:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Victor Costa da Silva Campos, Professor do Magistério Superior**, em 26/08/2025, às 16:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Luciano Antonio Frezzato Santos, Usuário Externo**, em 27/08/2025, às 10:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador 4414458 e o código CRC 4D913A15.

À minha família e aos meus amigos.

Agradecimentos

Agradeço à Deus por me dar forças e sabedoria. Aos professores Dr. Bruno Otávio Soares Teixeira e Dr. Víctor Costa da Silva Campos pela dedicação, disponibilidade, parceria e paciência na orientação, bem como pelos ensinamentos repassados, os quais foram essenciais para a minha formação profissional. À toda minha família, em especial à minha mãe, minha irmã e minha sobrinha, que sempre me apoiaram e me incentivaram a alcançar novos horizontes. Aos professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (UFMG) pelos ensinamentos e dedicação a mim ao longo da minha caminhada. Aos colegas do Programa, em especial a Nath, sempre presente, tornando todo o caminho mais fácil de ser seguido. Aos amigos, professores, alunos e funcionários do Adjetivo-CETEP e IFMG-OP pelo aprendizado durante o tempo em que estive por lá. À FAPEMIG, CAPES e CNPq pelo suporte ao trabalho.

“A persistência é o caminho do êxito.”

Charles Chaplin

Resumo

Enquanto a estimativa de estados de sistemas lineares possui abordagens bem estabelecidas na literatura, para os sistemas não lineares, diversas metodologias têm sido propostas de forma a superar as diversas dificuldades encontradas na obtenção de uma solução sub-ótima, de acordo com algum critério. Ao considerar uma modelagem convexa de não linearidades usando politopos, o Teorema do Valor Médio Diferencial (DMVT) ou técnicas de fatoração, é possível derivar condições baseadas em otimização convexa, por meio de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs), para atingir os objetivos do projeto. Nesse contexto, este trabalho visa desenvolver novas abordagens de estimação de estados para sistemas não lineares de tempo discreto ou contínuo que empregam condições LMI para a síntese de estimadores de estado. Mais especificamente, o presente trabalho propõe três novas metodologias baseadas nas etapas de predição e assimilação de dados do filtro de Kalman clássico. A primeira consiste numa abordagem de Filtro de Kalman de Covariância Garantida (GCKF), a segunda apresenta uma abordagem de filtro não linear que garante a robustez a sinais exógenos desconhecidos e, por fim, a terceira conta com um problema de otimização multiobjetivo, que garante a minimização da matriz de covariância do erro de estimativa e a robustez aos ruídos, indicados nas duas primeiras abordagens. Exemplos simulados são empregados para ilustrar e validar as metodologias propostas neste trabalho.

Palavras-chave: sistemas não lineares; filtro de Kalman; covariância garantida; robustez aos ruídos; desigualdades matriciais lineares.

Abstract

While the state estimation for linear systems has well-established approaches in the literature, for nonlinear systems, several methodologies have been proposed to overcome the various difficulties encountered in obtaining a sub-optimal solution, according to some criterion. By considering a convex modeling of nonlinearities using polytopes, the Differential Mean Value Theorem (DMVT) or factorization techniques, it is possible to derive conditions based on convex optimization, through Linear Matrix Inequalities (LMIs), to achieve the project objectives. In this context, this work aims at developing new state estimation approaches for discrete-time or continuous-time nonlinear systems that employ LMI conditions for the synthesis of state estimators. More specifically, this work proposes three new methodologies based on the prediction and data assimilation steps of the classical Kalman filter. The first consists of a Guaranteed Covariance Kalman Filter (GCKF) approach, the second presents a nonlinear filter approach that guarantees robustness to unknown exogenous signals and, finally, the third solves a multiobjective optimization problem, which guarantees the minimization of the covariance matrix of the estimation error and robustness to noise, indicated in the first two approaches. Simulated examples are used to illustrate and validate the methodologies proposed in this work.

Keywords: nonlinear systems; Kalman filter; guaranteed covariance; robustness to noise; linear matrix inequalities.

Lista de Figuras

3.1	Diagrama das características das abordagens para tratar a incompatibilidade das variáveis premissas mensuráveis e não mensuráveis.	48
4.1	Evolução do erro de estimativa. Em preto: o erro e em vermelho: os limites dados pela variância em 3σ . GCKF em estado estacionário para o sistema de Lorenz com medições em x_1 e x_2	75
4.2	Evolução do erro médio de estimativa para 1000 simulações. GCKF em estado estacionário para o sistema de Lorenz com medições em x_1 e x_2	75
4.3	Evolução do erro de estimativa. Em preto: o erro e em vermelho: os limites dados pela variância em 3σ . GCKF recursivo para o sistema de Lorenz com medições em x_1 e x_3	77
4.4	Zoom da evolução do erro de estimativa. Em preto: o erro e em vermelho: os limites dados pela variância em 3σ . GCKF recursivo para o sistema de Lorenz com medições em x_1 e x_3	78
4.5	Evolução dos estados. Em preto os estados e em vermelho os estados estimados. Filtro não linear com H_∞ garantido considerando a fatoração do erro para a representação da dinâmica do erro.	78
4.6	Ganho \mathcal{L}_2 ao longo do tempo para a simulação e o limitante superior para ruído de medição. Em azul o limitante superior encontrado pelas condições LMIs e em vermelho a norma H_∞ do sistema. Sistema de Lorenz.	79
4.7	Ganho \mathcal{L}_2 ao longo do tempo para a simulação e o limitante superior para ruído de processo. Em azul o limitante superior encontrado pelas condições LMIs e em vermelho a norma H_∞ do sistema. Sistema de Lorenz.	80
4.8	Solução Pareto para o sistema de Lorenz considerando a abordagem por restrição para a técnica de resolução da otimização multiobjetivo.	81
4.9	Evolução do erro de estimativa. Em preto: o erro e em vermelho: os limites dados pela variância em 3σ . Filtro multiobjetivo com custo por restrição para o sistema de Lorenz.	82

4.10	Ganho \mathcal{L}_2 ao longo do tempo para a simulação e o limitante superior para ruído de processo. Em azul o limitante superior encontrado pelas condições LMIs e em vermelho a norma H_∞ do sistema. Filtro multiobjetivo com custo por restrição para o sistema de Lorenz com ruído branco.	83
4.11	Ganho \mathcal{L}_2 ao longo do tempo para a simulação e o limitante superior para ruído de processo. Em azul o limitante superior encontrado pelas condições LMIs e em vermelho a norma H_∞ do sistema. Filtro multiobjetivo com custo por restrição para o sistema de Lorenz com ruído senoidal.	83
4.12	Simulação da trajetória dos estados com indicação dos limites máximo e mínimo. Em preto as trajetórias dos estados e em vermelho os limites.	84
4.13	Evolução do erro de estimativa. Em preto: o erro e em vermelho: os limites dados pela variância em 3σ . GCKF em estado estacionário com ganho escalonado K , para o sistema numérico com não linearidades na equação de medição. . . .	88
4.14	Elipse de incertezas para cada amostra. Em azul os estados e em vermelho os estados estimados. GCKF em estado estacionário com ganho escalonado K , para o sistema numérico com não linearidades na equação de medição.	89
4.15	Ganho \mathcal{L}_2 ao longo do tempo para a simulação e o limitante superior para ruído de medição. Em azul o limitante superior encontrado pelas condições LMIs e em vermelho a norma H_∞ do sistema. Sistema com não linearidade na equação de saída.	89
4.16	Solução Pareto para o sistema numérico com não linearidade na equação de medição, considerando a abordagem por restrição para a técnica de resolução da otimização multiobjetivo.	91
4.17	Evolução do erro de estimativa. Em preto: o erro e em vermelho: os limites dados pela variância em 3σ . Filtro multiobjetivo com custo escalar para o sistema numérico com não linearidades na equação de medição.	92
4.18	Ganho \mathcal{L}_2 ao longo do tempo para a simulação e o limitante superior para ruído de processo. Em azul o limitante superior encontrado pelas condições LMIs e em vermelho a norma H_∞ do sistema. Filtro multiobjetivo com custo escalar para o sistema numérico com ruído branco.	93
5.1	Evolução do erro de estimativa. Em preto: o erro e em vermelho: os limites dados pela variância em 3σ . GCKF em estado estacionário para o sistema de Lorenz a tempo contínuo com medições em x_1 e x_2	102
5.2	Evolução do erro médio de estimativa para 1000 simulações. GCKF em estado estacionário para o sistema de Lorenz com medições em x_1 e x_2	103

5.3	Evolução do erro de estimativa. Em preto: o erro e em vermelho: os limites dados pela variância em 3σ . GCKF em estado estacionário para o sistema numérico a tempo contínuo com não linearidades tanto na equação da dinâmica quanto na equação de medição.	107
-----	---	-----

Lista de Tabelas

4.1	Comparação entre técnicas simuladas - Dinâmica Não Linear - Lorenz 1	74
4.2	Comparação entre técnicas simuladas - Dinâmica Não Linear - Lorenz 2	76
4.3	RMSE dos estados estimados - Filtro não linear com H_∞ garantido	78
4.4	Comparação entre técnicas simuladas - Filtro Multiobjetivo - Lorenz	80
4.5	Comparação entre técnicas simuladas - Não linearidade na equação de saída . .	87
4.6	RMSE dos estados estimados - Filtro não linear com H_∞ garantido	89
4.7	Comparação entre técnicas simuladas - Filtro Multiobjetivo - Não linearidade na equação de medição	90
5.1	Resultados Numéricos Simulados - GCKF Contínuo - Lorenz	101
5.2	Comparação entre Filtro Discretizado e Filtro Discreto	102
5.3	Resultados Numéricos Simulados - GCKF Contínuo - Não Linearidade na Equação de Dinâmica e na Equação de Saída	106

Lista de Algoritmos

1	GCKF à Tempo Discreto Recursivo.	59
2	Método Matemático para Obtenção do Ganho K_k e da Matriz de Covariância $P_{k k}$	62
3	Método Matemático para Obtenção dos Limitantes dos Ruídos η e γ e do Ganho K	66
4	Simulação dos Filtros em Estado Estacionário, H_∞ e Multiobjetivo.	68

Lista de Siglas e Símbolos

Siglas

BIBS	Bounded-Input Bounded-State
DMVT	Differential Mean Value Theorem
EKF	Extended Kalman Filter
GCKF	Guaranteed Covariance Kalman Filter
KF	Kalman Filter
LMI	Linear Matrix Inequalities
PV	Premise Variable
q-LPV	quasi-Linear Parameter Varying
RMSE	Root Mean-Square Error
SVD	Singular Value Decomposition
TS	Takagi-Sugeno
UKF	Unscented Kalman Filter

Símbolos

f	Função de transição de estados de sistemas não lineares
h	Função de medição de sistemas não lineares
x	Vetor de variáveis de estados
u	Vetor de variáveis de entradas
y	Vetor de medições
w	Ruído de processo
v	Ruído de medição
n	Ordem do sistema
m	Número de entradas do sistema
p	Número de saídas do sistema
q	Número de entradas de ruídos do sistema
l	Número de modelos locais
\hat{x}	Estado estimado

\hat{y}	Saída estimada
e	Erro de estimativa
\mathcal{J}	Matriz Jacobiana
z	Variáveis premissas
K	Ganho dos observadores
\dot{e}	Dinâmica do erro de estimativa
s	Estados do sistema imerso em novas coordenadas
$E(\cdot)$	Operador de esperança matemática
V	Função de Lyapunov
P	Matriz da função de Lyapunov ou matriz de covariância, a depender do contexto
\mathcal{H}_∞	Norma H-infinito
L_2	Norma L_2
A	Matriz de estado
B_u	Matriz de entrada
C	Matriz de saída
D	Matriz de transmissão direta
B_w	Matriz de ruídos de processo
ω	Função de pertinência das variáveis premissas
$\mathcal{H}(X)$	Soma da matriz X com a sua transposta
$\delta(x)$	Operador de avanço em sistemas discretos e derivada temporal em sistemas contínuos
F	Matriz associada às não linearidades nos estados
G	Matriz associada às não linearidades nas saídas
ϕ	Função das não linearidades nos estados
ψ	Função das não linearidades nas saídas
\mathcal{E}	Matriz da dinâmica de erro das não linearidades na equação de estados
\mathcal{G}	Matriz da dinâmica de erro das não linearidades na equação de saída
Δ	Variação
$*$	Transposto
X	Matriz de variáveis de folga
Y	Matriz de variáveis de folga
Z	Matriz de transformações de similaridade
S	Matriz de transformações de similaridade
Q	Matriz de covariância do ruído de processo
R	Matriz de covariância do ruído de medição
I	Matriz identidade
T_s	Tempo de amostragem
η	Limitante superior para os ruídos de processo em \mathcal{H}_∞
γ	Limitante superior para os ruídos de medição em \mathcal{H}_∞

Sumário

1	Introdução	20
1.1	Motivação e Justificativa	20
1.2	Formulação do Problema	25
1.3	Objetivos	26
1.4	Produções Bibliográficas Decorrentes deste Trabalho	27
1.5	Estrutura do Documento	27
2	Conceitos Preliminares	29
2.1	Introdução	29
2.2	Modelos Takagi-Sugeno	30
2.2.1	Modelo <i>fuzzy</i> TS Dinâmico	30
2.2.2	Não Linearidade de Setor	31
2.3	Abordagem Determinística para Estimação de Estados	33
2.3.1	Projeto de Observador: Variáveis Premissas Medidas	34
2.3.2	Projeto de Observador: Variáveis Premissas Estimadas	35
3	Revisão dos Métodos Determinísticos de Estimação de Estados	37
3.1	Estrutura <i>Fuzzy</i> N-TS	37
3.1.1	Metodologia	38
3.1.2	Observador N-TS	40
3.2	Dinâmica Auxiliar e Técnicas de Imersão	40
3.2.1	Metodologia	41
3.3	Fatoração do Erro	44
3.3.1	Expressões Polinomiais	45
3.3.2	Expressões Não Polinomiais	46
3.4	Considerações Finais	47
4	Métodos para Sistemas a Tempo Discreto	49
4.1	Incompatibilidade de Variáveis Medidas e Não Medidas	49
4.1.1	Teorema do Valor Médio Diferencial	51
4.1.2	Fatoração do Erro	52

4.2	Inclusão a Diferenças	53
4.3	Projeto do GCKF a Tempo Discreto	55
4.3.1	GCKF Recursivo	57
4.3.2	GCKF em Estado Estacionário	60
4.4	Projeto do Filtro com Desempenho H_∞ Garantido	64
4.5	Projeto do Filtro Multiobjetivo	66
4.6	Resultados Numéricos - Não Linearidade na Dinâmica	68
4.6.1	O Tratamento das Não Linearidades	69
4.6.2	GCKF Recursivo	71
4.6.3	GCKF em Estado Estacionário	72
4.6.4	Resultados Simulados	73
4.6.5	Filtro com Desempenho H_∞ Garantido	77
4.6.6	Filtro Multiobjetivo	79
4.7	Resultados Numéricos - Não Linearidade na Equação de Saída	84
4.7.1	O Tratamento das Não Linearidades	85
4.7.2	GCKF Recursivo	86
4.7.3	GCKF em Estado Estacionário	87
4.7.4	Resultados Simulados	87
4.7.5	Filtro com H_∞ Garantido	88
4.7.6	Filtro Multiobjetivo	90
4.8	Considerações Finais	92
5	Métodos para Sistemas a Tempo Contínuo	94
5.1	Projeto do GCKF a Tempo Contínuo	94
5.1.1	Dinâmica da Covariância	96
5.1.2	GCKF em Estado Estacionário	97
5.2	Resultados Numéricos - Não Linearidade na Dinâmica	99
5.2.1	O Tratamento das Não Linearidades	100
5.2.2	Resultados Simulados	101
5.3	Resultados Numéricos - Não Linearidade na Equação de Saída	104
5.3.1	O Tratamento das Não Linearidades	104
5.3.2	Resultados Simulados	106
5.4	Considerações Finais	106
6	Considerações Finais e Propostas de Continuidade	109
6.1	Resumo das Contribuições do Trabalho	109
6.2	Sugestões de Continuidade	111
	Referências Bibliográficas	112

A	O Filtro de Kalman e suas Derivações	116
A.1	Filtro de Kalman Linear Discreto	117
A.2	Filtro de Kalman Estendido	117
A.3	Filtro de Kalman <i>Unscented</i>	118

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação e Justificativa

Em muitas situações práticas da engenharia, não é possível obter medições de todas as variáveis em um sistema. Dessa forma, sinais de entrada e saída são usados, juntamente com o modelo do sistema, para obter estimativas dos estados do sistema dinâmico. O filtro de Kalman, do inglês *Kalman filter* (KF), é um estimador recursivo ótimo que foi proposto para sistemas lineares com incertezas representadas por variáveis aleatórias com distribuição Gaussiana. Tal representação permite o uso de apenas dois momentos para especificar incertezas, a média e a covariância. As duas etapas do KF correspondem à predição, ou seja, propagação usando o modelo, e a assimilação de dados, que corresponde ao uso de novas informações. Para sistemas lineares e invariantes no tempo, a propagação da função densidade de probabilidade permanece Gaussiana (Kalman, 1960).

Alguns estimadores, como o KF, podem ser interpretados como algoritmos que implementam uma função densidade de probabilidade condicional e um critério de otimalidade. Devido às premissas de linearidade que lhe garantem otimalidade, o método original só se aplica a sistemas lineares. Baseado na otimalidade do KF para os sistemas lineares com incertezas Gaussianas, outras abordagens foram propostas para lidar com os sistemas não lineares.

Para sistemas não lineares, a propagação da média e da covariância não pode ser feita por um único modelo linear e a função densidade de probabilidade não é Gaussiana, então mais momentos são geralmente empregados, além da média e da covariância, para descrever as incertezas. Uma maneira de estender o KF a sistemas não lineares é por meio do filtro de Kalman estendido, do inglês *Extended Kalman Filter* (EKF) (Jazwinski, 1970; Simon, 2006), que consiste na linearização analítica do sistema em torno do estado atual. Alternativamente, Julier e Uhlmann (2004) propuseram uma solução que não requer linearização analítica das equações, conhecida como o filtro de Kalman *Unscented*, do inglês *Unscented Kalman Filter* (UKF). A solução proposta pelo UKF se baseia em escolher poucas realizações dos estados e saídas, que sejam representativas, no sentido de não haver diferenças entre as matrizes de

covariância amostral calculadas a partir destas poucas realizações, ao se comparar com o cálculo das matrizes feito com um grande número de realizações.

Para sistemas que têm apenas medições discretas, seja de um sistema discreto ou contínuo, o KF discreto pode ser usado. As medições discretas surgem em sistemas amostrados, talvez como parte de um sistema de controle digital. Devido às tecnologias de microprocessadores e sua maior precisão e poder de computação, quando comparado aos computadores analógicos, o filtro digital é usado com mais frequência. No entanto, um estudo completo de estimativa ótima deve incluir o KF contínuo (Wiberg, 2010).

O KF para sistemas de tempo contínuo às vezes é chamado de filtro de Kalman-Bucy, devido a uma colaboração entre Kalman e Bucy em abril de 1960 para sua publicação (Simon, 2006).

Existem várias maneiras de derivar o KF contínuo, uma delas é por meio da equação de Wiener-Hopf. A relação do KF contínuo com o filtro de Wiener fornece um elo essencial entre as técnicas clássicas e modernas (Wiberg, 2010). O filtro de Wiener é usado em casos em que a relação sinal-ruído é alta. Sua função de custo é o valor quadrático médio do erro estimado, que é minimizado como um critério de estimativa estatística (Haykin, 1989). O filtro é chamado de estimador linear ótimo porque tem a característica de lidar com estatísticas de primeira e segunda ordem do sinal desejado e do ruído aditivo a este sinal (Diniz et al., 2002; Diniz, 2008).

Uma das vantagens do filtro de Kalman de tempo contínuo é que ele pode ser aplicado independentemente da natureza estatística do ruído, desde que tenha média zero, ou seja, é um estimador ótimo mesmo quando o ruído não é Gaussiano (Simon, 2006).

Por outro lado, vários trabalhos são baseados no KF discreto e suas derivações. Baseado no filtro de Kalman clássico para sistemas lineares, Rocha e Terra (2021) propõem um filtro de Kalman robusto para sistemas lineares de tempo discreto incertos. Todos os sistemas e matrizes de medição estão sujeitos a incertezas paramétricas limitadas por normas. O trabalho apresenta um problema de estimativa de mínimos quadrados regularizado robusto com o método da função de penalidade. O filtro de estado estacionário proposto é estável e, para sistemas quadraticamente estáveis, uma variância de erro limitada é garantida.

Mokhtari e Yen (2020) propõem um UKF *fuzzy* adaptável bilateral para detecção de falhas em sistemas não lineares. Os autores usam a lógica *fuzzy* Mamdani na determinação da covariância do ruído de medição. Melhor precisão e menor tempo de cálculo na detecção de falhas são observados quando comparados ao UKF. O trabalho de Neto et al. (2018) apresenta um estudo comparativo entre os algoritmos baseados no KF e ainda propõe uma estrutura *fuzzy* para o filtro de Kalman para sistemas contínuos. A comparação é ilustrada por meio de um processo de quatro tanques acoplados. A proposta de obter uma estrutura *fuzzy* para o filtro de Kalman se mostra promissora, visto que tal estrutura consegue a garantia de um observador robusto de mínima covariância. Um ponto a ser analisado em tal trabalho é o fato de que os autores apresentam a estrutura *fuzzy* para sistemas não lineares e afirmam que o projeto de filtro

de Kalman *fuzzy* de variância mínima se torna um problema de minimização da norma \mathcal{H}_2 . Tal afirmativa é verdadeira para os sistemas lineares. Contudo, os sistemas não lineares não possuem representação para resposta ao impulso e tal afirmativa não pode ser considerada.

O KF e suas derivações são estimadores baseados em conceitos estatísticos, considerando que as incertezas são aproximadas por variáveis aleatórias Gaussianas, cujo domínio é ilimitado e com uma função densidade de probabilidade completamente caracterizada por média e covariância, ou aproximações para o caso não linear. Essas incertezas vêm de entradas exógenas desconhecidas (Ackermann, 2012). Outra maneira de se representar tais incertezas é baseada em associação de conjuntos, como intervalos, politopos, poliedros, e zonotopos (de Paula et al., 2022; Jaulin and Kieffer, 2001). Esta representação considera as incertezas limitadas em regiões. Todas as técnicas de associação de conjuntos visam obter estimativas que garantem que os estados estão contidos nos conjuntos limitados. O conhecimento das incertezas é definido por meio de seus limites, motivo pelo qual a técnica sempre trata o pior caso de distúrbio.

Enquanto os algoritmos baseados no filtro de Kalman estão bem consolidados na literatura, algoritmos e representações baseadas em associação de conjuntos vêm crescendo e ganhando notoriedade na literatura. Representações politópicas vêm sendo utilizadas para tratar sistemas não lineares. Essa representação, por ser convexa, permite a utilização de desigualdades matriciais lineares, do inglês *Linear Matrix Inequalities* (LMIs), para resolver diversos problemas existentes na área de modelagem e controle de sistemas, tanto lineares quanto não lineares. As LMIs podem ser resolvidas de forma eficiente, caracterizam os limites de desempenho do sistema, possuem flexibilidade para tratar diversos casos, incluindo sistemas incertos e invariantes no tempo e permitem um procedimento de síntese para obter, por exemplo, robustez aos ruídos (Duan and Yu, 2013).

Incorporando as condições do KF com a utilização das LMIs, o trabalho de Shaked et al. (2001) apresenta um projeto de filtro robusto que garanta limites mínimos da variância do erro para sistemas a tempo discreto com incertezas paramétricas. Os autores consideram a incerteza politópica em vez de incerteza limitada por norma. Por mais que a incerteza politópica possua um custo computacional maior para o seu processamento, em relação à incerteza limitada por norma, considerar incertezas politópicas faz com que o filtro possua um melhor desempenho em relação aos limites da variância do erro. São apresentadas duas abordagens, a primeira se refere ao filtro em estado estacionário que garante que o limite da variância do erro obtido será válido para todos os pontos dentro do politopo das incertezas paramétricas e o segundo garante que o limite encontrado será válido apenas nos vértices do politopo ou em um conjunto finito de pontos. O trabalho apresenta resultados promissores, mas é apresentado apenas para sistemas lineares e além disso não há uma prova de convergência do filtro em estado estacionário.

No trabalho de Vafamand et al. (2018), um algoritmo de aprendizado é proposto para identificar um modelo *fuzzy* Takagi-Sugeno (TS), aprender os parâmetros e determinar sua estrutura, com base no UKF. Por outro lado, Zhou et al. (2008) apresentam um algoritmo para

lidar com incertezas *fuzzy*. Para o algoritmo proposto, a distribuição Gaussiana é substituída por uma função de pertinência trapezoidal e a propagação é feita por pontos principais da distribuição, por meio de modelos não lineares, dessa forma, o centro de gravidade e a incerteza de propagação são recalculados. A abordagem proposta lida com mudanças abruptas de estados. Por outro lado, Jiménez et al. (2021) apresentam um conjunto de experimentos práticos para validar o KF *fuzzy*. O trabalho de Aboukheir et al. (2021) obtém experimentalmente um conjunto politópico de modelos lineares de tempo discreto, com base em um sistema TS, para descrever a região operacional do sistema não linear. LMIs são usadas para obter ganhos de observador que garantem a estabilidade de todo o politopo e, portanto, o rastreamento e filtragem do sistema na região de operação.

Abordagens usando modelos TS vêm ganhando notoriedade para observadores não lineares. Sun et al. (2020) apresentam uma filtragem distribuída para sistemas não lineares estocásticos de tempo discreto com atraso de tempo, com base em regras *fuzzy*. A metodologia utiliza o modelo TS para aproximar não linearidades. Da mesma forma, Li et al. (2020) apresenta um filtro robusto para estimar os estados de um sistema não linear, descrito por um modelo TS *fuzzy*. O algoritmo apresentado é baseado na relação entre o KF e os mínimos quadrados regularizados, em que a influência do erro do modelo causado pelas incertezas dos parâmetros do sistema é considerada. Esta metodologia tem um algoritmo e complexidade computacional próximos aos do KF. Por outro lado, Ramadoss et al. (2006) propõem a representação do sistema não linear como uma família de modelos de espaço de estados lineares locais e o filtro de Kalman *fuzzy* é proposto para um vetor de estado aumentado, que combina os estimadores de estado local.

Nesse contexto, vários trabalhos foram desenvolvidos, utilizando incertezas politópicas e limitadas por normas para o cenário de estimativa de estados de sistemas não lineares. Todos os trabalhos propostos apresentam abordagens robustas. No entanto, são abordagens aplicadas a determinadas classes de sistemas e consideram condições específicas dos mesmos. Assim como os trabalhos de Abbaszadeh e Marquez (2012) e Zhang et al. (2015) apresentam uma metodologia de filtragem robusta para sistemas descritores não lineares com condições de Lipschitz e incertezas paramétricas variantes no tempo, o trabalho de Darouach et al. (2011) estuda uma forma geral de sistemas singulares não lineares com condição de Lipschitz. Esse último trabalho apresenta estruturas de observador de ordem completa, reduzida e mínima para garantir estabilidade e manter um desempenho de atenuação de perturbação. Os três trabalhos somam grandes contribuições para o estudo, porém são aplicados a classes restritas de sistemas e possuem um certo conservadorismo na derivação das condições LMIs.

Os trabalhos de Shaheen et al. (2020) e Ríos (2020) são desenvolvidos para sistemas a tempo contínuo, em contrapartida, consideram incertezas e perturbações limitadas em norma. O trabalho de Shaheen et al. (2020) apresenta um projeto de observador robusto generalizado para sistemas descritores não lineares sob incertezas paramétricas e distúrbios externos. O observador generalizado é obtido baseado em condições LMIs e é utilizado para lidar com um grande

número de sistemas, tanto os singulares como os não singulares, a fim de garantir a estabilidade assintótica e lidar com distúrbios limitados na norma L_2 . As não linearidades, incertezas e perturbações externas são consideradas nos estados e nas saídas para avaliar casos mais gerais, o que aumenta a complexidade da metodologia proposta. O trabalho de Ríos (2020) considera a estimação de estados para uma classe de sistemas não lineares incertos e possivelmente ilimitados e projeta um observador não linear. A síntese do observador é formulada em termos de LMIs. O observador projetado busca a convergência em tempo finito e não requer nenhuma condição de entrada-limitada estado-limitado, do inglês *bounded-input bounded-state* (BIBS), portanto é capaz de estimar o estado de um sistema cujas trajetórias podem crescer.

Enquanto os trabalhos de Shaheen et al. (2020) e Ríos (2020) são apresentados para sistemas a tempo contínuo, os trabalhos de Quintana et al. (2020), Ichalal et al. (2018) e Pan et al. (2020) possuem derivações tanto para sistemas a tempo contínuo quanto para sistemas a tempo discreto. Uma lacuna observada nos três últimos trabalhos é a não consideração de distúrbios e incertezas paramétricas. O trabalho de Quintana et al. (2020) propõe a construção de um modelo de erro exato e tratamento das premissas não medidas. O projeto do observador não linear requer uma incorporação politópica para escrever o sistema de erro separando as variáveis medidas das não medidas, explorando LMIs para enriquecer a estrutura do observador, o ganho e reduzir sua ordem.

Uma dificuldade, que é abordada nos trabalhos indicados acima, é a dependência das funções de pertinência em variáveis não medidas. Várias soluções parciais foram propostas para contornar tal impasse. O trabalho de Ichalal et al. (2010) apresentou uma solução baseada na atenuação da norma L_2 e incompatibilidade de premissas. O trabalho de Guerra et al. (2018) apresentou soluções parciais baseadas no teorema do valor médio, do inglês *Differential Mean Value Theorem* (DMVT). Quintana et al. (2020) propõem a construção de um modelo de erro exato e tratamento de suposições não mensuráveis, indicando que o sistema de erro é sempre exatamente passível de uma forma polinomial de matriz de gradiente explícita. Também pode ser feita menção a Ichalal et al. (2018), que usa técnicas de geração de dinâmica auxiliar e de imersão para incorporar sistemas TS com funções de pertinência dependentes de estado não medidos em um sistema TS maior com funções de pertinência dependendo apenas das variáveis medidas. Pan et al. (2020) propõem reescrever o modelo não linear como um modelo *fuzzy* específico com dois tipos de não linearidades locais, medidas e não medidas. No trabalho de Mao et al. (2022), os valores de funções de pertinência desconhecidas podem ser tratados como ruído multiplicativo em relação ao erro de estimativa.

No âmbito de estimação de estados, investigar e reproduzir as abordagens já propostas e fornecer novas metodologias para a realização de estimativa de estados de sistemas não lineares que atendam classes mais gerais de sistemas é um trabalho de suma importância, visto que as metodologias propostas até o momento são restritas e com algumas limitações.

Enquanto as abordagens estocásticas tratam uma estimativa não polarizada e de mínima variância para os estados, na grande maioria das condições de projeto de observador para sis-

temas não lineares, por meio de LMIs, o foco é garantir a estabilidade do erro de estimação ou um limitante para o ganho L_2 de entradas exógenas para o erro de estimação. Sendo assim, os esforços deste trabalho serão direcionados a gerar novas abordagens generalizadas de estimação de estados de sistemas não lineares considerando a influência de sinais exógenos desconhecidos, tanto descritos por sinais estocásticos quanto em termos de sinais determinísticos, que podem ser resolvidas utilizando condições baseadas em LMIs.

1.2 Formulação do Problema

Seja o sistema quasi linear a parâmetros variantes, do inglês *quasi-linear parameter varying* (qLPV) a tempo contínuo,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(x(t))x(t) + B_u(x(t))u(t) + B_w w(t) \\ y(t) &= C(x(t))x(t) + v(t),\end{aligned}\tag{1.1}$$

em que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_u \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ são matrizes reais que podem ou não depender do vetor de estados $x \in \mathbb{R}^n$, e $B_w \in \mathbb{R}^{n \times q}$ uma matriz real constante, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas supostamente conhecido, e $y \in \mathbb{R}^p$ são as saídas medidas; $w \in \mathbb{R}^q$ é o ruído do processo e $v \in \mathbb{R}^p$ é o ruído de medição, que são variáveis aleatórias independentes, com média zero, que satisfazem: $E[w(\tau)w(s)^T] = Q\delta(\tau - s)$, $E[v(\tau)v(s)^T] = R\delta(\tau - s)$ e $E[v(\tau)w(s)^T] = 0$.

Considere ainda, uma aproximação a tempo discreto dada como:

$$\begin{aligned}x_k &= A(x_{k-1})x_{k-1} + B_u(x_{k-1})u_{k-1} + B_w w_{k-1} \\ y_k &= C(x_k)x_k + v_k,\end{aligned}\tag{1.2}$$

em que $w \in \mathbb{R}^q$ é o ruído do processo e $v \in \mathbb{R}^p$ é o ruído de medição, que são variáveis aleatórias independentes, com média zero, que satisfazem: $E[w_k w_k^T] = Q$, $E[v_k v_k^T] = R$ e $E[v_i w_j^T] = 0, \forall i, j$. Para as definições estocásticas foram considerados sinais senoidais para os ruídos.

Portanto, baseado nos sistemas dados por (1.1) ou (1.2) e nas eventuais não linearidades associadas, o objetivo é estimar os estados x a partir das saídas medidas y e das entradas u , de sistemas a tempo contínuo ou discreto utilizando métodos de otimização convexa. Utilizando a teoria de estabilidade de Lyapunov, pretende-se obter condições convexas para a busca de um observador generalizado que atenda os requisitos de robustez. Para cobrir uma classe maior de sistemas não lineares, são utilizadas duas formas de representação do modelo de sistema não linear: uma que atende funções não lineares analíticas (Quintana et al., 2020) e outra que atende funções continuamente diferenciáveis (Nguyen et al., 2021). A representação do sistema em forma convexa permite o uso de LMIs computacionalmente eficientes, de modo a superar a complexidade computacional encontrada no filtro robusto para sistemas não lineares apresentado por Li et al. (2020).

Baseado em condições LMIs, o objetivo da estimação de estados pela abordagem de-

terminística é obter a convergência assintótica do erro de estimativa ($e = x - \hat{x}$) considerando sinais exógenos desconhecidos (w e v), independente da sua amplitude, garantindo o tempo de convergência da estimativa e lidando com distúrbios limitados em norma L_2 , que corresponde a um critério de desempenho associado à robustez do sistema às perturbações externas. A norma L_2 é indicada para obter um sistema menos suscetível a ruídos pertencentes ao espaço de funções quadraticamente integráveis no caso contínuo ou quadraticamente somáveis no caso discreto. Assim, pode-se considerar a minimização da relação entre a norma-2 do vetor de saída e a norma-2 do vetor de entrada ruidosa para diferentes frequências, $\frac{\|y\|_2}{\|w\|_2}$, para sistemas com ruídos descritos por meio de sinais determinísticos.

Por outro lado, a abordagem estocástica, para sinais exógenos, objetiva encontrar uma estimativa não polarizada e uma minimização da variância do erro de estimação, para sistemas sem incerteza, e minimizar o erro de estimação e a variância, para sistemas incertos. Com base em Rocha e Terra (2021) e em Shaked et al. (2001), que propuseram um filtro de estado estacionário que garante a variância do erro limitada, para sistemas lineares a tempo discreto, uma nova metodologia que garante a variância do erro para sistemas não lineares a tempo discreto ou a tempo contínuo é aqui proposta. Assim, pode-se considerar a minimização da variância do erro de estimação para sistemas com ruídos descritos em termos de sinais estocásticos.

1.3 Objetivos

O objetivo geral desta tese de doutorado é investigar e desenvolver metodologias para a estimação de estados de sistemas dinâmicos não lineares com sinais exógenos desconhecidos utilizando métodos de otimização convexa. Para atingir tal objetivo geral, são definidos os seguintes objetivos específicos:

1. Compreender e aplicar formas de representação de sistemas não lineares que permitam a representação convexa dos sistemas.
2. Para a abordagem determinística:
 - (a) investigar algoritmos de estimação de estados relacionados às abordagens determinísticas, utilizando sinais exógenos determinísticos, que podem ser resolvidos por LMIs e, implementá-los a fim de avaliar o desempenho dos algoritmos;
 - (b) propor um algoritmo para a estimação de estados de sistemas não lineares com minimização da norma \mathcal{H}_∞ .
3. Para a abordagem estocástica:
 - propor algoritmos baseados no KF e suas derivações, que encontrem um estimativa não polarizada, \hat{x}_k , com um limite superior mínimo garantido para a covariância, $E[e_{k|k}e_{k|k}^T] = P_{k|k}$, do erro de estimativa $e_k = x_k - \hat{x}_k$, considerando sinais exógenos desconhecidos w_k e v_k , para sistemas a tempo discreto e a tempo contínuo.
4. Propor um algoritmo multiobjetivo que seja capaz de obter uma estimativa de estado com a minimização da norma \mathcal{H}_∞ e com um limite superior mínimo garantido para a

covariância.

5. Avaliar o desempenho das abordagens propostas, verificando os resultados dos algoritmos simulados.
6. Comparar os resultados obtidos com resultados da literatura de forma qualitativa e quantitativa, por meio de estudos de casos em sistemas de interesse prático da engenharia.

1.4 Produções Bibliográficas Decorrentes deste Trabalho

Os trabalhos aceitos e/ou publicados referentes às pesquisas desenvolvidas nesta tese são:

1. Gonçalves P. H., Teixeira, B. O. S., e Campos, V. C. S. (2023). A Convex Approach for the Design of a Guaranteed H_∞ Nonlinear Filter. *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, 1(2).
2. Gonçalves P. H., Teixeira, B. O. S., e Campos, V. C. S. (2025). A Convex Approach to the Design of a Guaranteed Covariance Kalman Filter for Discrete-Time Nonlinear Systems. *Journal of Controle, Automation and Electrical Systems*, Springer, **aceito**.

Trabalho em produção:

1. A Convex Approach to the Design of a Steady State Multiobjective Nonlinear Filter for Discrete-Time Nonlinear Systems.
2. A Convex Approach to the Design of a Guaranteed-Covariance Kalman Filter in Steady State for Continuous-Time Nonlinear Systems.

1.5 Estrutura do Documento

Este documento está estruturado em seis capítulos da seguinte forma.

No Capítulo 1, a motivação e a justificativa para o estudo dos métodos de estimação de estados de sistemas não lineares são apresentadas. Logo após, as definições de alguns problemas em aberto no mesmo contexto foram percorridas. Adicionalmente, a formulação dos problemas a serem estudados é destacada. Neste capítulo, também foram apresentados os objetivos principais desta pesquisa.

No Capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica sobre a estimação de estados. Logo após, a estimação de estados via métodos de otimização convexa é evidenciada.

O Capítulo 3 apresenta a descrição dos métodos de estimação de estados via otimização convexa, presentes na literatura, pelo ensejo em contribuir com essas metodologias no futuro. Especificamente, são apresentados alguns exemplos em que os resultados obtidos são analisados e servem de motivação para as estratégias apontadas nos Capítulos 4 e 5.

O Capítulo 4 apresenta as contribuições teóricas propostas para os sistemas a tempo discreto. São apresentadas três metodologias. A primeira segue a direção do filtro de Kalman,

garantindo a covariância mínima para a estimação. A segunda direção se refere à garantia de robustez do sistema aos ruídos, garantindo assim a minimização da norma \mathcal{H}_∞ . A terceira é a junção das duas primeiras direções, contendo uma otimização multiobjetivo. Por fim, são apresentados os resultados numéricos obtidos com a simulação dos métodos propostos ao longo do capítulo.

O Capítulo 5 apresenta as contribuições teóricas propostas para sistemas a tempo contínuo. É apresentada a metodologia do filtro de Kalman, garantindo a covariância mínima para a estimação. Por fim, são apresentados os resultados numéricos obtidos com a simulação dos métodos propostos ao longo do capítulo.

Por fim, as conclusões, considerações finais sobre o trabalho e as propostas de trabalhos futuros são apresentadas no Capítulo 6.

No Apêndice A apresenta-se uma breve revisão do filtro de Kalman e suas derivações que são bem consolidadas na literatura.

Capítulo 2

Conceitos Preliminares

O presente capítulo apresenta os conceitos preliminares referentes à estimação de estados de sistemas lineares e não lineares. Na Seção 2.1 é apresentada uma breve introdução. Na Seção 2.2 são introduzidos os conceitos referentes aos modelos TS. Na Seção 2.3 é apresentada a metodologia de estimação de estados baseada em conceitos determinísticos bem consolidada na literatura, utilizando os conceitos abordados na Seção 2.2.

2.1 Introdução

Para entender como um sistema funciona, é necessário ter informações sobre certas variáveis importantes associadas ao sistema. Muitos problemas na tomada de decisão, monitoramento e controle requerem o conhecimento das variáveis, ou seja, estados e parâmetros do sistema envolvido. Em situações práticas, medir todas essas variáveis pode não ser possível devido a razões técnicas ou econômicas. Portanto, a estimativa de estados e parâmetros em sistemas dinâmicos é um pré-requisito importante para uma operação segura e econômica. Assim, é parte integrante de aplicações como monitoramento de processos, detecção de falhas e otimização de processos. Além disso, qualquer projeto de controle de realimentação de estado requer o conhecimento das variáveis de estado, desta forma, faz-se necessário obter uma estimativa dos estados que seja confiável para utilizar no controle do sistema (Lendek and De Schutter, 2010).

Uma forma de se estimar os estados do sistema é por meio dos observadores de estado. Os observadores, em geral, usam os sinais de entrada e saída de um sistema, juntamente com um modelo para o sistema. A estrutura do observador é basicamente a mesma que a de um modelo da planta, exceto por um termo adicional que incorpora o erro de estimação para compensar as incertezas nas matrizes do modelo, o efeito de ruídos e entradas exógenas desconhecidas, e a presença do erro inicial. Eles geram uma estimativa do estado do sistema, que pode então ser posteriormente empregada no controle, monitoramento, detecção de falhas. Os observadores foram propostos e desenvolvidos pela primeira vez por Luenberger (1971). Desde os primei-

ros desenvolvimentos, foram propostos observadores para sistemas lineares e não lineares com entradas conhecidas e desconhecidas (Lendek and De Schutter, 2010).

2.2 Modelos Takagi-Sugeno

Esta seção apresenta um método para construir modelos TS baseados em um determinado sistema não linear. A abordagem da não linearidade de setor pode ser utilizada para obter uma representação *fuzzy* exata do sistema não linear considerado, em um conjunto compacto do espaço de estados. Os desenvolvimentos e definições apresentados aqui seguem o apresentado por Lendek e De Schutter (2010).

O modelo *fuzzy* TS, originalmente proposto por Takagi e Sugeno (1985), consiste em uma base de regras se-então. Os antecedentes da regra particionam um subconjunto das variáveis do modelo em conjuntos nebulosos. O consequente de cada regra é uma expressão funcional simples. A i -ésima regra é descrita como

$$\text{Se } z_1 \in Z_1^i \text{ e } \dots \text{ e } z_p \in Z_p^i \text{ então } y = F_i(z), \quad (2.1)$$

em que o vetor z tem p componentes, z_j , $j = 1, 2, \dots, p$ e representa o vetor de variáveis antecedentes (também conhecidas como variáveis premissas) e são parte integrante na determinação do grau em que as regras são ativas. Os conjuntos Z_j^i , $j = 1, 2, \dots, p$, $i = 1, 2, \dots, m$, onde m é o número de regras, são os conjuntos *fuzzy* antecedentes.

O valor de uma variável premissa z_j pertence a um conjunto *fuzzy* Z_j^i com um valor dado pela função de pertinência $\omega_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$. O valor para uma regra inteira, $\omega_i(z)$, é determinado com base nas variáveis premissas individuais, usando um operador de conjunção, sendo este sempre o produto algébrico, no caso de modelos TS.

A saída de uma regra i é o valor dado pela função vetorial consequente F_i , e geralmente depende das variáveis premissas; y é a saída do modelo, calculada como a combinação ponderada da saída das regras. A partir dessas considerações, e de um defuzzificador de média central, a inferência do modelo TS resulta em uma função de z , expressa como:

$$y = \sum_{i=1}^m \omega_i(z) F_i(z). \quad (2.2)$$

2.2.1 Modelo *fuzzy* TS Dinâmico

Seja o sistema dinâmico não linear contínuo dado por (1.1), desconsiderando os termos de distúrbios, um modelo TS composto por um conjunto de regras se-então, para um conjunto de variáveis premissas, estabelece que, localmente, a dinâmica do sistema não linear pode ser representada por um modelo linear. O modelo *fuzzy* Takagi-Sugeno para o sistema não linear

de tempo contínuo pode ser descrito por:

$$\begin{aligned} \text{Regra } R_i : & \text{ Se } z_1(t) \in \mathcal{M}_1^i \text{ e } \dots \text{ e } z_p(t) \in \mathcal{M}_p^i \\ \text{Então } & \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t), \end{cases} \end{aligned}$$

em que o vetor z tem p componentes e representa o vetor de variáveis antecedentes. Os conjuntos \mathcal{M}_p^i são os conjuntos *fuzzy* antecedentes. O valor de uma variável antecedente pertence a um conjunto *fuzzy* com um valor verdade dado pela função de pertinência. Utilizando o centro de gravidade como método de defuzzificação (Jang et al., 1997), o modelo *fuzzy* pode ser representado na forma compacta por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^m \omega_i(z(t)) (A_i x(t) + B_{u_i} u(t)) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^m \omega_i(z(t)) (C_i x(t)), \end{aligned} \tag{2.3}$$

em que m é o número de modelos locais (regras), $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_{u_i} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$ são as matrizes do sistema de tamanhos apropriados e ω_i são as funções de pertinência normalizadas e determinam o grau em que as regras são ativas, tal que $\omega_i(z(t)) \geq 0$ e $\sum_{i=1}^m \omega_i(z(t)) = 1$, $\forall m \in \mathbb{Z}$. $z_m \in \mathbb{R}^n$ corresponde ao vetor de variáveis antecedentes.

Se as variáveis premissas forem as variáveis de estado do sistema, então, desta forma, $\omega_i(z)$ se torna $\omega_i(x)$. Este não precisa ser necessariamente o caso e, o modelo inferido pode utilizar variáveis premissas arbitrárias.

Esse modelo apresenta várias vantagens. O modelo TS é um aproximador universal e muitos sistemas não lineares podem ser representados de forma exata por um conjunto compacto de variáveis de estado como sistemas TS. Além disso, (2.3) é a combinação convexa de modelos lineares locais, o que facilita a análise de estabilidade e projeto de controladores e observadores para tais sistemas. Muitas condições de estabilidade e projeto já disponíveis para o sistema TS podem ser formuladas como desigualdades matriciais lineares, para as quais existem algoritmos eficientes capazes de verificar sua viabilidade (Lendek and De Schutter, 2010).

2.2.2 Não Linearidade de Setor

Duas abordagens principais podem ser usadas para obter modelos *fuzzy* TS: i) identificação do modelo usando dados medidos ou simulados e ii) construção analítica de um modelo TS que representa ou se aproxima exatamente de um determinado sistema dinâmico não linear.

Pela abordagem da construção analítica, um dos métodos a ser aplicado é o da não linearidade de setor. Esta abordagem é uma das mais frequentemente utilizadas para a construção de modelos TS para projeto de controle *fuzzy*, pois pode obter uma representação exata de um determinado sistema não linear em um conjunto compacto do espaço de estados contendo a

oritem (Lendek and De Schutter, 2010).

Em uma determinada função escalar não linear, procura-se um setor, dentro do domínio desejado, de modo que:

$$f(x) \in [a_2 \ a_1]x. \quad (2.4)$$

Se for possível reescrever a função como

$$f(x) = g(x)x, \quad (2.5)$$

pode-se calcular

$$a_1 = \max(g(x)), \quad a_2 = \min(g(x)). \quad (2.6)$$

Deste modo, pode-se reescrever a função como:

$$f(x) = \sum_{i=1}^2 \omega_i(x)a_ix, \quad (2.7)$$

e encontrar as funções de pertinência $\omega_i(x)$ como:

$$\omega_1(x) = \frac{g(x) - a_2}{a_1 - a_2}, \quad \omega_2(x) = \frac{g(x) - a_1}{a_2 - a_1}. \quad (2.8)$$

As funções de pertinência são tais que $\omega_i(x) \geq 0$, $\forall i$ e $\sum_{i=1}^2 \omega_i(x) = 1$ e, portanto, são vistas como funções de pertinência normalizadas.

Exemplo 1. Seja a função $\text{sen}(x)$ com um domínio $x \in [-\pi, \pi]$. Ela pode ser reescrita como $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}x$. Considerando o máximo e o mínimo de $\frac{\text{sen}(x)}{x}$ dentro da região de análise, sendo $a_1 = 1$ e $a_2 = 0$.

Então obtém-se:

$$\omega_1 = \frac{\frac{\text{sen}(x)}{x} - 0}{1 - 0} = \frac{\text{sen}(x)}{x}, \quad (2.9)$$

$$\omega_2 = \frac{\frac{\text{sen}(x)}{x} - 1}{0 - 1} = \frac{x - \text{sen}(x)}{x} = 1 - \omega_1, \quad (2.10)$$

logo:

$$\begin{aligned} \text{sen}(x) &= \omega_1(x)a_1x + \omega_2(x)a_2x, \\ \text{sen}(x) &= \frac{\text{sen}(x)}{x} \cdot 1 \cdot x + \frac{x - \text{sen}(x)}{x} \cdot 0 \cdot x, \\ \text{sen}(x) &= \frac{\text{sen}(x)}{x} \cdot x, \\ \text{sen}(x) &= \text{sen}(x). \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.3 Abordagem Determinística para Estimação de Estados

Esta seção apresenta o conceito de observadores usados para sistemas *fuzzy* TS e analisa métodos para projetar observadores de forma que o erro de estimativa convirja assintoticamente para zero.

O observador considerado usa o modelo do sistema e as medições de entrada e saída disponíveis. Considere o sistema *fuzzy* dado por (2.3), em que x denota o vetor de estado, y o vetor de medição e u o vetor de entrada, que é conhecido. O problema de projeto do observador surge assim que o vetor de medição não coincide com o vetor de estado, ou seja, $y \neq x$.

O observador é da forma

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \sum_{i=1}^m \omega_i(\hat{z})(A_i \hat{x} + B_{u_i} u + K_i(y - \hat{y})) \\ \hat{y} &= \sum_{i=1}^m \omega_i(\hat{z})(C_i \hat{x}),\end{aligned}\tag{2.12}$$

onde \hat{x} é o vetor de estados estimados, \hat{y} é o vetor de saída medida estimada, \hat{z} é o vetor das variáveis premissas estimadas. K_i são os ganhos do observador que devem ser projetados. Por brevidade de notação, será omitida a variável independente tempo, t . Ao projetar um observador, geralmente, é necessário que os estados estimados convirjam assintoticamente para os estados verdadeiros. Este requisito é equivalente à dinâmica do erro de estimativa ser assintoticamente estável e, portanto, muitas condições de projeto são formuladas em termos da estabilidade assintótica do erro de estimativa.

A observabilidade e, similarmente, a controlabilidade de sistemas TS raramente é discutida na literatura. Os sistemas TS são não lineares e, como os observadores são projetados de forma que cada regra tenha um ganho local, é necessário que os modelos locais sejam observáveis, ou detectáveis, em vez do sistema não linear completo. Em geral, esse requisito não é suficiente nem necessário para que o sistema não linear seja observável ou detectável. Porém, devido à forma do observador (2.12), é necessário, e para o projeto, é implicitamente assumido que os modelos locais sejam observáveis.

A dinâmica do erro de estimação pode ser derivada como:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}},\tag{2.13}$$

chegando a:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \sum_{i=1}^m \omega_i(\hat{z})(A_i e - K_i(\sum_{j=1}^m \omega_j(\hat{z})C_j e + \sum_{j=1}^m (\omega_j(z) - \omega_j(\hat{z}))(C_j x))) + \\ &+ \sum_{i=1}^m (\omega_i(z) - \omega_i(\hat{z}))(A_i x + B_{u_i} u).\end{aligned}\tag{2.14}$$

Desde que $\sum_{j=1}^m \omega_j(\hat{z}) = 1$, temos:

$$\begin{aligned} \dot{e} = & \sum_{i=1}^m \omega_i(\hat{z}) \sum_{j=1}^m \omega_j(\hat{z}) (A_i - K_i C_j) e + \\ & + \sum_{i=1}^m \omega_i(\hat{z}) K_i \sum_{j=1}^m (\omega_j(z) - \omega_j(\hat{z})) (C_j x) + \sum_{i=1}^m (\omega_i(z) - \omega_i(\hat{z})) (A_i x + B_{u_i} u). \end{aligned} \quad (2.15)$$

A expressão acima representa o caso geral, quando todas as variáveis premissas dependem de variáveis de estado não medidas e a medida é não linear nos estados. No que se segue, dois casos serão abordados: i) o vetor de variáveis premissas não depende de estados não medidos, ou seja, no observador as variáveis premissas conhecidas (medidas) podem ser usadas; e ii) o vetor de variáveis premissas depende de estados que não são medidos. Porém, para este segundo caso, pela simplicidade dos cálculos, considera-se que a matriz de medidas é comum para todas as regras, ou seja, as medidas são lineares nos estados.

2.3.1 Projeto de Observador: Variáveis Premissas Medidas

Considerando os casos em que as variáveis premissas dependem apenas das variáveis medidas, ou seja, não dependem dos estados que serão estimados, o observador é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \sum_{i=1}^m \omega_i(z) (A_i \hat{x} + B_{u_i} u + K_i (y - \hat{y})) \\ \hat{y} &= \sum_{i=1}^m \omega_i(z) (C_i \hat{x}), \end{aligned} \quad (2.16)$$

e a dinâmica de erro pode ser escrita como:

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \omega_i(z) \omega_j(z) (A_i - K_i C_j) e. \quad (2.17)$$

Para a estabilidade, condições suficientes foram formuladas utilizando a função de Lyapunov candidata: $V = e^T P e$ com $P = P^T > 0$, conforme indicado no Lema 1.

Lema 1. (Lendek and De Schutter, 2010) *A dinâmica de erro (2.17) é assintoticamente estável se existir $P = P^T > 0$ e K_i , $i = 1, 2, \dots, m$, tais que:*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(P(A_i - K_i C_i)) &< 0 \\ \mathcal{H}(P(A_i - K_i C_j + A_j - K_j C_i)) &\leq 0, \end{aligned} \quad (2.18)$$

para $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = i + 1, i + 2, \dots, m$, desde que duas regras sejam simultaneamente ativas. Onde \mathcal{H} representa a parte simétrica de uma matriz, ou seja, $\mathcal{H}(X) = X + X^T$.

Fazendo as devidas mudanças de variáveis para evitar o produto de variáveis de decisão

nas LMIs, tem-se $M_i = PK_i$, para $i = 1, 2, \dots, m$, assim:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(P(A_i - M_i C_i)) &< 0 \\ \mathcal{H}(PA_i + PA_j - M_i C_j - M_j C_i) &\leq 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

O ganho do observador pode ser recuperado realizando $K_i = P^{-1}M_i$.

2.3.2 Projeto de Observador: Variáveis Premissas Estimadas

Considera-se agora o problema de projeto do observador quando o vetor de variáveis premissas depende dos estados a serem estimados. Observe que, neste caso, as verdadeiras variáveis premissas não podem ser usadas no observador e, em vez disso, seus valores estimados devem ser usados. Para a simplicidade da notação, apenas o caso com matrizes de medição comuns, ou seja, $C_i = C$, $i = 1, 2, \dots, m$, será considerado. Se a matriz de medição for diferente para cada regra, os ganhos do observador podem ser projetados de forma semelhante, embora as condições do projeto sejam mais complexas.

Considerando que $C_i = C$ para $i = 1, 2, \dots, m$. O observador é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \sum_{i=1}^m \omega_i(\hat{z})(A_i \hat{x} + B_{u_i} u + K_i(y - \hat{y})) \\ \hat{y} &= C \hat{x}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

E a dinâmica de erro é expressa por:

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^m \omega_i(\hat{z})(A_i - K_i C)e + \sum_{i=1}^m (\omega_i(z) - \omega_i(\hat{z}))(A_i x + B_{u_i} u). \quad (2.21)$$

O problema está na diferença $\omega_i(z) - \omega_i(\hat{z})$. Para que os estados estimados convirjam para os reais, o observador deve ser robusto o suficiente para lidar com essa diferença. Para tratar tal diferença, Lendek e De Schutter (2010) propõem o resultado enunciado pelo Teorema 2.

Teorema 2. (Lendek and De Schutter, 2010) *Considere o erro do sistema indicado em (2.21) e assumo que:*

$$\left\| \sum_{i=1}^m (\omega_i(z) - \omega_i(\hat{z}))(A_i x + B_{u_i} u) \right\| \leq \mu \|e\|, \quad (2.22)$$

em que $\mu > 0$ é uma constante conhecida. Então o erro do sistema é assintoticamente estável, se existe $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$ e K_i , $i = 1, 2, \dots, m$, tais que:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(P(A_i - K_i C)) &\leq -Q \\ \begin{pmatrix} Q - \mu^2 I & P \\ P & I \end{pmatrix} &> 0, \end{aligned} \quad (2.23)$$

para $i = 1, 2, \dots, m$.

Observação 1. *Observe que, desde que as funções de pertinência sejam suaves e as variáveis sejam definidas em um conjunto compacto, existe $\mu > 0$ para que (2.22) seja válida. A constante delimitadora μ em geral pode ser encontrada resolvendo o problema de otimização:*

$$\mu = \max_{x, u, \hat{x}, \hat{z}} \left\| \frac{\partial(\omega_i(z) - \omega_i(\hat{z}))(A_i x + B_{u_i} u)}{\partial e} \right\|. \quad (2.24)$$

Capítulo 3

Revisão dos Métodos Determinísticos de Estimação de Estados

Diversos estudos vêm sendo realizados para tratar o problema do observador para sistemas não lineares, considerando o caso em que há o descasamento entre as variáveis premissas mensuráveis e não mensuráveis ($\omega_i(z) - \omega_i(\hat{z})$). Algumas das metodologias encontradas na literatura para solucionar tal problema serão revisitadas a seguir, destacando suas aplicações e limitações. O objetivo é obter métodos que tratem a incompatibilidade entre as variáveis premissas mensuráveis e não mensuráveis. Inicialmente, na seção 3.1, é apresentado o método proposto por Pan et al. (2020), que consiste em reescrever o modelo não linear como um modelo *fuzzy* específico, com dois tipos de não linearidades, as mensuráveis e as não mensuráveis. Em seguida, na seção 3.2, é apresentada a metodologia indicada por Ichalal et al. (2018). Tal metodologia propõe utilizar técnicas de imersão para evitar variáveis premissas dependentes de estados e, assim, facilitar o projeto do observador. Por fim, na seção 3.3, a metodologia indicada por Quintana et al. (2020) propõe a construção do sistema de erro a partir da manipulação do gradiente, fazendo com que o sinal de erro apareça fatorado. Os conceitos e derivações apresentados em cada seção são derivados dos seus respectivos trabalhos.

3.1 Estrutura *Fuzzy* N-TS

O trabalho de Pan et al. (2020) propõe reescrever o modelo não linear como um modelo *fuzzy* específico com dois tipos de não linearidades locais: mensuráveis e não mensuráveis. Em seguida, aplica-se o DMVT às não linearidades não mensuráveis. Isso permite representar a dinâmica do erro de estimativa como uma forma politópica especial envolvendo funções de pertinência mensuráveis e parâmetros variantes no tempo desconhecidos mas limitados. Condições LMIs são derivadas para garantir a convergência assintótica do erro de estimativa. Os interesses na nova estrutura *fuzzy* são reduzir o conservadorismo do projeto e a complexidade numérica do observador *fuzzy* para aplicações no mundo real.

O trabalho de Pan et al. (2020) é citado por Nguyen et al. (2022) no qual é investigado o problema de observadores baseados em modelos TS para sistemas não lineares com entradas desconhecidas e incertezas paramétricas. Os autores propõem o uso de dois observadores em cascata que permitem uma estimativa simultânea dos estados, das incertezas e das entradas desconhecidas do sistema não linear. Além disso, outros trabalhos também citam tal método como uma vantagem para separar as variáveis premissas mensuráveis das não mensuráveis. O trabalho de Lu et al. (2022) propõe o projeto de observador TS com a separação dos termos não lineares não mensuráveis dos mensuráveis para obter as variáveis de estados e entradas desconhecidas de um veículo elétrico de quatro rodas com atuação independente.

Diversas direções de pesquisas futuras estão relacionadas à nova estrutura de projeto do observador. Em primeiro lugar, pode-se explorar esta estrutura para o projeto de controle baseado em observador de sistemas *fuzzy* com variáveis premissas não mensuráveis. Em segundo lugar, uma extensão dos resultados propostos para sistemas *fuzzy* TS tipo 2 será útil para lidar com incertezas paramétricas. Outro tópico promissor consiste em projetar observadores *fuzzy* para sistemas com não linearidades rígidas não medidas, como atrito, histerese ou saturação.

3.1.1 Metodologia

A metodologia revista a seguir reformula o sistema não linear original como um sistema *fuzzy* TS com consequentes não lineares (N-TS Fuzzy - N-Rule TS *fuzzy*) capaz de separar as não linearidades medidas das não medidas. As variáveis referentes às não linearidades medidas permanecem como variáveis premissas do modelo, enquanto que as não linearidades que não são medidas são incorporadas aos consequentes das regras.

O DMVT é aplicado exclusivamente às não linearidades não mensuráveis do modelo nebuloso N-TS para lidar com o descasamento causado pelas variáveis premissas não mensuráveis. Portanto, a dinâmica de erro da estimativa pode ser reescrita como um sistema politópico envolvendo variáveis premissas mensuráveis e parâmetros desconhecidos que variam no tempo. Estes parâmetros desconhecidos, oriundos da aplicação do DMVT, pertencem a um conjunto convexo limitado, que pode ser caracterizado pelas matrizes jacobianas das não linearidades locais não mensuráveis. Usando argumentos baseados em funções de Lyapunov, condições suficientes são derivadas para projetar um observador nebuloso N-TS para o sistema, garantindo a convergência assintótica da dinâmica de erro da estimativa.

Seja o modelo não linear proposto por Pan et al. (2020):

$$\begin{aligned}\delta[x] &= A(z_\alpha)x + f_\alpha(z_\alpha, u) + F(z_\alpha)\phi(x, u) \\ y &= C(z_\alpha)x + g_\alpha(z_\alpha, u) + G(z_\alpha)\psi(x, u),\end{aligned}\tag{3.1}$$

em que as funções não lineares $\phi(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_\phi}$ e $\psi(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_\psi}$ não são mensuráveis e todos os elementos das funções $f_\alpha(\cdot)$ e $g_\alpha(\cdot)$ são mensuráveis. $\delta[x]$ representa o operador de avanço para sistemas discretos e derivada temporal para sistemas contínuos. As matrizes de espaço de esta-

dos A , C , F e G são exclusivamente dependentes das variáveis premissas mensuráveis. Assim o modelo fuzzy N-TS é obtido:

Regra R_i : Se $z_{\alpha 1}$ é \mathcal{M}_1^i e \dots e $z_{\alpha p}$ é \mathcal{M}_p^i então :

$$\begin{aligned}\delta[x] &= A_i x + f_\alpha(z_\alpha, u) + F_i \phi(x, u) \\ y &= C_i x + g_\alpha(z_\alpha, u) + G_i \psi(x, u),\end{aligned}\tag{3.2}$$

onde as matrizes constantes de dimensões apropriadas (A_i , F_i , C_i e G_i) são conhecidas. As funções de pertinência respeitam as propriedades de soma convexa. Desta forma, utilizando o método de defuzzificação por centro de gravidade, o sistema pode ser representado na forma compacta por:

$$\begin{aligned}\delta[x] &= A(\omega)x + F(\omega)\phi(x, u) + f_\alpha(z_\alpha, u) \\ y &= C(\omega)x + G(\omega)\psi(x, u) + g_\alpha(z_\alpha, u),\end{aligned}\tag{3.3}$$

tal que:

$$\begin{bmatrix} A(\omega) & F(\omega) \\ C(\omega) & G(\omega) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \omega_i(z_\alpha) \begin{bmatrix} A_i & F_i \\ C_i & G_i \end{bmatrix},\tag{3.4}$$

em que r é o número de regras de inferência do modelo fuzzy e $\omega_i(z_\alpha)$ é a função de pertinência relativa a cada regra do modelo inferido.

A matriz Jacobiana das funções não lineares $\phi(x, u)$ e $\psi(x, u)$ são definidas como:

$$\mathcal{J}_\phi(x, u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(x, u) & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{n_x}}(x, u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_{n_\phi}}{\partial x_1}(x, u) & \dots & \frac{\partial \phi_{n_\phi}}{\partial x_{n_x}}(x, u) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_\phi \times n_x},\tag{3.5}$$

$$\mathcal{J}_\psi(x, u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(x, u) & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_{n_x}}(x, u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_{n_\psi}}{\partial x_1}(x, u) & \dots & \frac{\partial \psi_{n_\psi}}{\partial x_{n_x}}(x, u) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_\psi \times n_x}.\tag{3.6}$$

Devido ao fato das matrizes jacobianas (3.5) e (3.6) serem formadas pelo uso do Teorema do Valor Médio, cada linha da matriz deve ser considerada separadamente quando se obtém um modelo convexo das matrizes jacobianas. O teorema do valor médio afirma que, para qualquer função continuamente diferenciável, com uma única saída escalar, a diferença entre sua avaliação em quaisquer dois pontos de seu domínio pode ser escrita como o seu gradiente, avaliado em um ponto localizado em uma linha entre os dois pontos, vezes a diferença entre os dois pontos. Tal igualdade só é verdadeira para funções que produzem um único valor escalar e, como tal, o teorema tem que ser empregado separadamente para cada linha de $\phi(\cdot)$ e $\psi(\cdot)$.

3.1.2 Observador N-TS

Para a estimação de estados do sistema dado por (3.3), a estrutura do observador N-TS é:

$$\begin{aligned}\delta[\hat{x}] &= A(\omega)\hat{x} + F(\omega)\phi(\hat{x},u) + f_\alpha(z_\alpha,u) + K(\omega)(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C(\omega)\hat{x} + G(\omega)\psi(\hat{x},u) + g_\alpha(z_\alpha,u), \quad \hat{x}(0) = 0.\end{aligned}\tag{3.7}$$

As variáveis premissas não mensuráveis estão isoladas em $\phi(\hat{x},u)$ e $\psi(\hat{x},u)$.

A dinâmica de erro é dada por:

$$\delta[e] = (A(\omega) - K(\omega)C(\omega))e + F(\omega)\Delta_\phi - K(\omega)G(\omega)\Delta_\psi,\tag{3.8}$$

com $\Delta_\phi = \phi(x,u) - \phi(\hat{x},u)$ e $\Delta_\psi = \psi(x,u) - \psi(\hat{x},u)$.

Os termos Δ_ϕ e Δ_ψ são reformulados como funções do erro de estimação $e = x - \hat{x}$. A partir daí, com a utilização do teorema do valor médio e de funções de Lyapunov, obtém-se as condições LMIs suficientes para o projeto do observador para sistemas a tempo contínuo e a tempo discreto. O desenvolvimento das condições LMIs não é utilizado nas propostas que serão abordadas no próximo capítulo, apenas o tratamento da representação dos sistemas não lineares utilizando o teorema do valor médio. Portanto, para informações referentes às condições de síntese para o observador, verificar em Pan et al. (2020).

3.2 Dinâmica Auxiliar e Técnicas de Imersão

No artigo de Ichalal et al. (2018), o problema de projeto de observadores para sistemas não lineares via sistemas TS é investigado. É mostrado que o uso de dinâmica auxiliar e técnicas de imersão antes da transformação do sistema não linear original em um sistema TS é interessante para evitar variáveis premissas dependentes de estado e, assim, facilitar o projeto do observador. O exemplo fornecido ilustra a eficácia da abordagem proposta.

A metodologia proposta consiste em, primeiramente, transformar, por imersão, o sistema não linear original. O objetivo é estender o vetor de estado de modo que o sistema original seja imerso em um sistema afim de estado maior ou quasi-LPV (q-LPV) com não linearidades dependendo apenas de sinais mensuráveis (entradas e saídas), preservando o mapa de entradas e saídas. Em seguida, aplica-se a não linearidade de setor no sistema estendido para obter um sistema TS com variáveis premissas mensuráveis. Finalmente, o projeto do observador é realizado no modelo TS com variável premissa mensurável. Em comparação com os trabalhos existentes que usam a técnica de imersão, a novidade é que a forma procurada, ou seja, o formalismo q-LPV, é mais genérica do que as anteriores. Além disso, na transformação de coordenadas proposta, as variáveis de estado originais a serem estimadas são os n primeiros componentes do vetor de estado estendido. Consequentemente, nenhuma transformação inversa é necessária

para recuperar as variáveis de estado originais.

3.2.1 Metodologia

A metodologia visa vincular o projeto do observador com a variável premissa, do inglês *Premise Variable* (PV), estimada ao projeto menos conservador do observador Takagi-Sugeno com PV medido. A metodologia é baseada em três etapas. Seja o sistema não linear:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= Cx(t).\end{aligned}\tag{3.9}$$

Inicialmente, usa-se a dinâmica auxiliar para definir novas coordenadas e imergir o sistema não linear (3.9) em um sistema q-LPV cujos parâmetros dependem apenas dos sinais medidos $u(t)$ e $y(t)$, tal que:

$$\begin{aligned}\dot{s}(t) &= A(u(t), y(t))s(t) + B(u(t), y(t))u(t) + \varphi(u(t), y(t)) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} s(t),\end{aligned}\tag{3.10}$$

em que s corresponde ao novo espaço de estados maior e $s \in \mathbb{R}^N$, com $N \geq n$.

Em seguida, aplica-se a não linearidade de setor ao sistema q-LPV para obter o seguinte sistema TS com PV medida:

$$\begin{aligned}\dot{s}(t) &= \sum_{i=1}^r \omega_i(z(t))(A_i s(t) + B_i u(t) + \varphi(u(t), y(t))) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} s(t).\end{aligned}\tag{3.11}$$

Finalmente, projeta-se o observador TS, da forma:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{s}}(t) &= \sum_{i=1}^r \omega_i(z(t))(A_i \hat{s}(t) + B_i u(t) + \varphi(u(t), y(t))) + K_i (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \hat{s}(t).\end{aligned}\tag{3.12}$$

A variável premissa $z(t)$ depende apenas das variáveis mensuráveis $y(t)$ e $u(t)$, então a dinâmica do erro de estimativa de estado estendido $e_s(t) = s(t) - \hat{s}(t)$ é um sistema autônomo com PV mensurável.

Geração de Dinâmica Auxiliar

A técnica para a geração da dinâmica auxiliar consiste em imergir o espaço de estados $x \in \mathbb{R}^n$ do sistema original em um espaço de estados maior $s \in \mathbb{R}^N$, com $N \geq n$. Essa transformação afeta apenas o espaço de estados, mas o mapa de entrada e saída do sistema ori-

ginal é preservado. É uma extensão do vetor de estados com novas variáveis provenientes das não linearidades do sistema.

Considera-se que as n primeiras novas variáveis são definidas pelas variáveis de estado originais $s_i = x_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Em seguida, para $k = n + 1, n + 2, \dots, n + n$, obtém-se a derivada temporal de $s_k(t)$ de acordo com o sistema original, como o seguinte sistema q-LPV com termo não linear aditivo $\varphi(u, y)$:

$$\dot{s}_k(t) = \sum_{i=1}^n a_{k,i}(u(t), y(t))s_i(t) + \sum_{i=n+1}^l a_{k,i}(u(t), y(t))s_i(t) + \varphi_k(u(t), y(t)). \quad (3.13)$$

Se $a_{k,i} = 0$ para $i > n$, nenhuma nova variável é necessária e o algoritmo termina. Se novas variáveis s_i com $i > n$ forem necessárias, para cada nova variável, calcula-se sua derivada temporal de acordo com o sistema original, separa-se todas as funções dependendo apenas das variáveis medidas y e u e definem-se as funções não-lineares restantes como novas variáveis s_k , $k > n$.

Verifica-se se a derivada temporal das k primeiras variáveis de estado $\dot{s}_i(t)$ para $i = 1, \dots, k$ depende de novas variáveis s_l com $l > k$, caso a dependência exista, todo o processo é realizado novamente, caso contrário, o algoritmo termina.

Exemplo 2. (Ichalal et al., 2018; Lorenz, 1963; Quintana et al., 2020) Considere o Sistema de Lorenz:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a(x_1(t) - x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= bx_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= cx_3(t) + x_1(t)x_2(t) \\ y(t) &= x_2(t), \end{aligned} \quad (3.14)$$

com $a = -10$, $b = 28$ e $c = -\frac{8}{3}$. Considerando que $-20 \leq x_1 \leq 20$, $-30 \leq x_2 \leq 30$ e $0 \leq x_3 \leq 50$.

Para utilizar a metodologia descrita anteriormente, primeiramente, definem-se as novas variáveis $s_i = x_i$, para $i = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} \dot{s}_1(t) &= a(s_1(t) - s_2(t)) \\ \dot{s}_2(t) &= bs_1(t) - s_2(t) - s_1(t)s_3(t) \\ \dot{s}_3(t) &= cs_3(t) + s_1(t)s_2(t) \\ y(t) &= s_2(t). \end{aligned} \quad (3.15)$$

No argumento $s_1(t) = s_1$, o termo relativo ao tempo (t) será omitido para facilitar a escrita.

Observam-se duas não linearidades, s_1s_3 que depende de variáveis de estados não mensuráveis e s_1s_2 que está na forma adequada, visto que pode ser substituída por ys_1 .

Assim, cria-se uma nova variável $s_4 = s_1s_3$, e sua derivada temporal é dada por:

$$\dot{s}_4(t) = (a+c)s_4(t) - ay(t)s_3(t) + y(t)s_1^2(t). \quad (3.16)$$

Uma nova não linearidade é observada s_1^2 , assim, uma nova variável é criada $s_5 = s_1^2$ e sua derivada temporal:

$$\dot{s}_5(t) = 2as_5(t) - 2ay(t)s_1(t). \quad (3.17)$$

Assim, com o novo sistema de coordenadas proposto $s_1 = x_1$, $s_2 = x_2$, $s_3 = x_3$, $s_4 = x_1x_3$, $s_5 = x_1^2$, com $B(u(t),y(t)) = 0$, $\varphi(u(t),y(t)) = 0$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Então,

$$A(u(t),y(t)) = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 28 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ y(t) & 0 & -\frac{8}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10y(t) & -\frac{38}{3} & y(t) \\ 20y(t) & 0 & 0 & 0 & -20 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Por não linearidade de setor, o sistema TS é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \sum_{i=1}^2 \omega_i(y)A_i s(t) \\ y(t) &= Cs(t), \end{aligned} \quad (3.19)$$

com $\omega_1(y(t)) = \frac{s_2+30}{60}$ e $\omega_2(y(t)) = \frac{30-s_2}{60}$ e

$$A_1 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 28 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 30 & 0 & -\frac{8}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 300 & -\frac{38}{3} & 30 \\ 600 & 0 & 0 & 0 & -20 \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 28 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -30 & 0 & -\frac{8}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -300 & -\frac{38}{3} & -30 \\ -600 & 0 & 0 & 0 & -20 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Assim, o erro de estimativa é dado por: $e_s(t) = s(t) - \hat{s}(t)$, tendo o projeto trivial, considerando as variáveis medidas, logo $\dot{e}_s(t) = \sum_{i=1}^2 \omega_i(y(t))(A_i - K_i C)e_s(t)$, o problema pode ser resolvido por duas LMIs, utilizando o Lema 1.

Uma limitação de tal método ocorre para seu emprego em um sistema que possua ruídos de processos. O fato do sistema possuir ruídos de processo faz com que, durante o processo

de imersão do sistema em um sistema maior, o ruído será transportado não linear e dificultará a utilização do método. Além disso, o algoritmo pode não convergir, visto que o número de iterações para obter o sistema aumentado pode ser infinito, conforme mostrado no exemplo a seguir.

Exemplo 3. (Ichalal et al., 2018) *Seja o sistema não linear:*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) - x_2^2(t) \\ y(t) &= x_1(t).\end{aligned}\tag{3.22}$$

Para utilizar a metodologia descrita anteriormente, primeiramente, definem-se as novas variáveis $s_i = x_i$, para $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned}\dot{s}_1(t) &= s_1(t)s_2(t) \\ \dot{s}_2(t) &= -s_1(t) - s_2^2(t) \\ y(t) &= s_1(t).\end{aligned}\tag{3.23}$$

Observam-se duas não linearidades: s_2^2 que depende de variáveis de estados não mensuráveis e s_1s_2 que está na forma adequada, visto que pode ser substituída por ys_2 .

Assim, cria-se uma nova variável $s_3 = s_2^2$, e sua derivada temporal é dada por:

$$\dot{s}_3(t) = -2s_1s_2 - 2s_2^3.\tag{3.24}$$

Uma nova não linearidade é observada s_2^3 , assim, uma nova variável é criada $s_4 = s_2^3$ e sua derivada temporal precisará de um novo termo, cuja derivada temporal precisará de um novo termo e assim por diante, sem nunca convergir.

3.3 Fatoração do Erro

O trabalho de Quintana et al. (2020) propõe uma solução abrangente para problemas persistentes enfrentados pelo projeto de observadores não lineares por meio de técnicas de otimização convexa, ou seja, a construção de um modelo de erro exato e o tratamento de variáveis premissas não mensuráveis. Em vez de usar o teorema do valor médio diferencial, mostra-se que o sistema de erro é sempre exatamente suscetível, via rearranjos algébricos, a uma forma polinomial de matriz explícita do gradiente, onde o sinal de erro aparece fatorado no lado mais à direita, permitindo assim que condições LMIs sejam derivadas baseadas na função de Lyapunov. Em contraste com abordagens recentes, a saída não precisa ser linear nem os sistemas envolvidos serem afins no controle.

O trabalho de Coutinho et al. (2022) cita tal abordagem para lidar com o problema de estimação de estados e entradas desconhecidas para sistemas não lineares com um grau

relativo arbitrário em relação às entradas desconhecidas. Os autores citam tal representação da dinâmica de erro como adequada para obter uma representação politópica local do sistema não linear. O trabalho de Martinez et al. (2021) também cita a metodologia como vantajosa porque evita o uso de constantes de Lipschitz, o DMVT ou técnicas robustas para separar as variáveis mensuráveis das não mensuráveis. O trabalho apresenta a detecção de falhas de atuadores de sistemas não lineares descritores de tempo discreto utilizando observadores de entradas desconhecidas. Outros trabalhos também citam a metodologia, como os trabalhos de Nguyen et al. (2022) e trabalhos que utilizam filtro de potência ativa, como os trabalhos de Terán Gonzalez et al. (2022) e Terán Gonzalez et al. (2021).

O problema tratado é o projeto do observador baseado em LMIs para sistemas não lineares $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ com saída $y = h(x(t), u(t))$, que consiste em encontrar um ganho, possivelmente não linear $K(\hat{x}, y, u)$ que depende apenas dos estados do observador, da saída do sistema e/ou da entrada de controle, de modo que $\hat{\dot{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) + K(\hat{x}, y, u)(y - \hat{y})$, e $\hat{y} = h(\hat{x}, u)$ atenda $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ onde $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. Assim, o sistema de erro pode ser exatamente escrito como $\dot{e}(t) = (A(x, \hat{x}, u) - K(\hat{x}, y, u)C(x, \hat{x}, u))e(t)$. O sistema não precisa ser afim no controle e nem a saída linear. A representação convexa faz uma separação nítida de sinais mensuráveis e não mensuráveis por meio de uma incorporação politópica mais fina, conhecida como modelo do produto tensorial. Procura-se fatorar o sinal de erro no lado mais à direita baseado puramente no conhecimento do sistema e do observador. Tal tarefa é recursiva, ou seja, pode ser decomposta em problemas escalares do mesmo tipo. As expressões polinomiais são consideradas primeiro, depois as não polinomiais.

3.3.1 Expressões Polinomiais

Considere a notação dada por Quintana et al. (2020): $deg(\cdot)$ representa o grau de seus argumentos, $x_{i,0} = x_i$, $x_{i,1} = \hat{x}_i$, $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots, j_n)$, $j_i \in \{0, 1\}$, $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, $q_i \in \{\mathbb{N} \cup 0\}$, $\mathbf{x}_j^{\mathbf{q}} = x_{1,j_1}^{q_1} x_{2,j_2}^{q_2} \dots x_{n,j_n}^{q_n}$. Dada essa notação, pode-se revisitar os seguintes lemas, para a fatoração do sinal de erro em expressões polinomiais, descritos por Quintana et al. (2020):

Lema 3. (Quintana et al., 2020)

Uma expressão multivariada da forma $x_0^{\mathbf{q}} - x_1^{\mathbf{q}}$ com grau maior ou igual a 2 pode ser escrita como uma soma convexa cujos termos tem a forma $x_0^{r_1}(x_0^{r_2} - x_1^{r_1}) + x_1^{r_2}(x_0^{r_1} - x_1^{r_1})$ com $deg(x_0^{r_i}) < deg(x_0^{\mathbf{q}})$, com $i \in \{1, 2\}$.

A aplicação repetida do lema anterior é o que produz o sinal de erro no lado direito das expressões polinomiais.

Lema 4. (Quintana et al., 2020)

Dado um polinômio multivariado $p(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, a expressão $p(x) - p(\hat{x})$ pode ser escrita como $q(x, \hat{x})e$ com $e = x - \hat{x}$ e $q(x, \hat{x})$ qualquer polinômio resultante da aplicação repetida do Lema 3.

3.3.2 Expressões Não Polinomiais

Considere uma função não polinomial de uma variável $g(\cdot)$ tal que sua expansão em série de Taylor existe e converge para todo $x, \hat{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}$. Assim, $g(x) - g(\hat{x})$ em Ω pode ser escrito como:

$$g(x) - g(\hat{x}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{g^{(i)}(0)}{i!} x^i - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{g^{(i)}(0)}{i!} \hat{x}^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{g^{(i)}(0)}{i!} (x^i - \hat{x}^i), \quad (3.25)$$

$$g(x) - g(\hat{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g^{(i)}(0)}{i!} (x^{i-1} + x^{i-2}\hat{x} + \dots + x\hat{x}^{i-2} + \hat{x}^{i-1})e, \quad (3.26)$$

com $r_i(x, \hat{x}) = (x^{i-1} + x^{i-2}\hat{x} + \dots + x\hat{x}^{i-2} + \hat{x}^{i-1})$. Foi empregado o fato de que uma diferença de potências $x^i - \hat{x}^i$ sempre admite uma fatoração de $e = x - \hat{x}$. A convergência de $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{g^{(i)}(0)}{i!} r_i(x, \hat{x})$ é garantida quando a série de Taylor é assumida. Assim, a série de Taylor traduz um problema não polinomial em uma soma infinita convergente de polinômios, caindo na família de casos coberta pelo Lema 4.

Os termos na soma convergente infinita que acompanham o e desaparecem progressivamente à medida que a ordem aumenta, devido ao fatorial crescente que os divide, o que significa que apenas v termos da soma infinita seriam necessários, do ponto de vista numérico.

Exemplo 4. (Ichalal et al., 2018; Quintana et al., 2020) Seja o sistema de Lorenz:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & -a & 0 \\ b & -1 & -x_1 \\ 0 & x_1 & c \end{bmatrix} x \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x, \end{aligned} \quad (3.27)$$

com $a = -10$, $b = 28$, $c = -\frac{8}{3}$ e $\Omega = \{|x| : |x_1| \leq 20, |x_2| \leq 30, 0 \leq x_3 \leq 50\}$.

O erro pode ser representado como:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} a & -a & 0 \\ b - x_3 & -1 & -\hat{x}_1 \\ x_2 & \hat{x}_1 & c \end{bmatrix} - K(\hat{x}, y, u) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) e. \quad (3.28)$$

Escolhendo os sinais disponíveis: $z_1 = y = x_2 \in [-30, 30]$ e $z_2 = \hat{x}_1 \in [-20, 20]$ e o sinal não disponível $\zeta_1 = x_3 \in [0, 50]$, a dinâmica de erro pode ser escrita de maneira convexa.

Em comparação com o método apresentado no trabalho Ichalal et al. (2018), que utiliza as técnicas de dinâmica auxiliar e imersão, a vantagem apresentada, comparando o mesmo sistema simulado (sistema de Lorenz), é a não necessidade de aumentar o sistema em duas ordens para obter a estimação dos estados.

3.4 Considerações Finais

Ao longo deste capítulo, foram apresentados e analisados três métodos para tratar o problema de incompatibilidade das variáveis premissas. A análise visa contribuir com uma visão geral dos problemas que se pretende abordar nas contribuições desta tese, de forma aplicar tais abordagens para resolver o problema inicial da incompatibilidade entre as variáveis mensuráveis e não mensuráveis.

Em relação ao sistema e o modelo empregado para a estimação de estados, os trabalhos de Pan et al. (2020), Ichalal et al. (2018) e Quintana et al. (2020) utilizam a abordagem do modelo TS obtido por não linearidade de setor, podendo ser aplicados tanto para sistemas contínuos quanto para sistemas discretos. Os trabalhos que utilizam o modelo TS possuem uma limitação dos estados no espaço compacto em que a metodologia da não linearidade de setor é válida. Nos trabalhos de Pan et al. (2020) e Quintana et al. (2020) o modelo é obtido com a separação das variáveis premissas mensuráveis das não mensuráveis para lidar com o problema do descasamento das suas funções de pertinência. Pan et al. (2020) propuseram um novo modelo (N-TS) que indica claramente esta separação, em que as variáveis não mensuráveis possuem os limites considerados pela matriz jacobiana. Já no trabalho de Ichalal et al. (2018) é realizada a imersão do sistema original, mantendo o mesmo mapa de entradas e saídas, num sistema maior, antes de se obter o modelo TS, para obter o observador dependente apenas das variáveis premissas mensuráveis.

O projeto do observador dos trabalhos de Pan et al. (2020), Ichalal et al. (2018) e Quintana et al. (2020) é feito com base apenas nas informações das variáveis premissas mensuráveis. As variáveis não mensuráveis nestes trabalhos servem apenas como limites para obter os ganhos do observador não linear. No trabalho de Pan et al. (2020), o descasamento das variáveis premissas é tratado pelo teorema do valor médio e no trabalho de Quintana et al. (2020) o observador é não linear no modelo TS.

Algumas lacunas são observadas nos trabalhos citados. Os trabalhos de Pan et al. (2020), Ichalal et al. (2018) e Quintana et al. (2020) não consideram incertezas paramétricas e nem distúrbios. Ichalal et al. (2018) utilizam a abordagem de dinâmica auxiliar e imersão antes da transformação do sistema em um modelo TS para evitar o uso de variáveis premissas dependentes de estados não mensuráveis, uma desvantagem é que nesta imersão o algoritmo pode não convergir e não ser possível obter um modelo com variáveis premissas dependentes apenas de estados mensuráveis. Já no trabalho de Quintana et al. (2020) o observador é obtido a partir da fatoração do erro, desta forma, quando o sistema possui expressões não polinomiais, muitos cálculos devem ser realizados antes do projeto do observador, o que torna uma tarefa árdua para o projeto do observador.

De posse dos estudos realizados, pode-se observar alguns aspectos importantes, como mostrados na Figura 3.1. Três abordagens para tratar as incompatibilidades foram apresentadas. A técnica de imersão não se apresenta como um caminho promissor por dois moti-

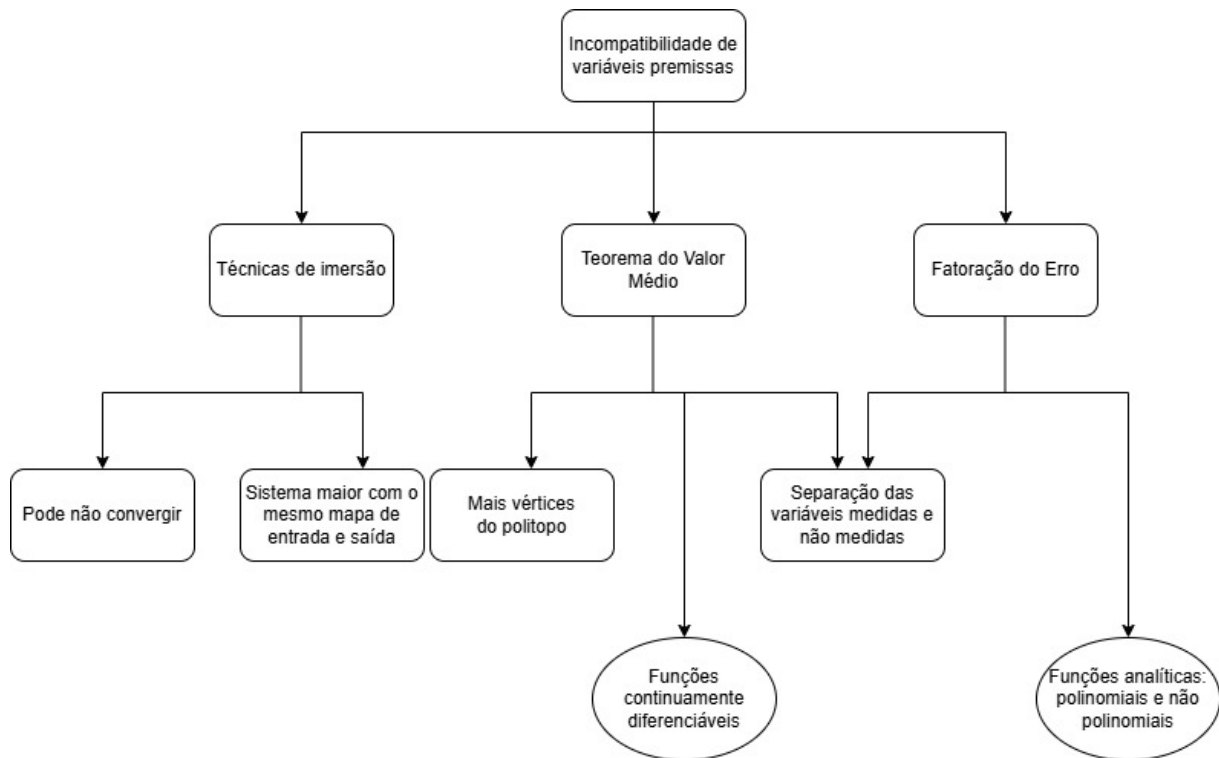


Figura 3.1: Diagrama das características das abordagens para tratar a incompatibilidade das variáveis premissas mensuráveis e não mensuráveis.

vos, primeiramente pode não haver a convergência do algoritmo e desta forma não se obter a nova representação; caso haja a convergência, a nova representação do sistema obtido será uma representação maior. Desta forma, as técnicas que utilizam a fatoração do erro e o DMVT serão consideradas ao longo das metodologias que serão desenvolvidas. A vantagem destas duas últimas abordagens é que em ambas existe a separação das variáveis medidas das não medidas. A abordagem que utiliza o DMVT pode possuir mais vértices dos polítopos quando comparada à abordagem pela fatoração do erro. Porém, uma das abordagens é aplicada para funções continuamente diferenciáveis e a outra abordagem para funções analíticas polinomiais e não polinomiais. Desta forma, as duas últimas abordagens serão aplicadas para atender uma classe maior de sistemas não lineares.

Capítulo 4

Métodos para Sistemas a Tempo Discreto

São apresentadas, no presente capítulo, três metodologias para a estimação de estados de sistemas não lineares a tempo discreto. O primeiro método, apresentado na seção 4.3, se refere ao projeto do filtro de Kalman com covariância garantida, em que, baseado nas etapas do filtro de Kalman, é possível derivar um filtro que garanta um limite máximo para a covariância do erro de estimação dos estados. Para o filtro de Kalman com covariância garantida, do inglês *Guaranteed Covariance Kalman Filter* (GCKF), são apresentadas abordagens para o filtro em estado estacionário e para o filtro recursivo. O segundo método, apresentado na seção 4.4, corresponde a um filtro robusto aos ruídos, considerando a minimização da norma H_∞ . Por fim, o terceiro método, abordado na seção 4.5, corresponde à união dos dois primeiros métodos, desta forma, um filtro multiobjetivo é projetado, para atender tanto a robustez aos ruídos, com as características do filtro com a garantia da norma H_∞ , quanto a minimização da matriz de covariância do erro de estimação.

Para os métodos aqui apresentados, foram utilizadas duas das técnicas revisadas no capítulo anterior, para o tratamento da incompatibilidade das variáveis mensuráveis e não mensuráveis. As técnicas utilizadas foram a técnica da fatoração do erro, revisitada na seção 3.3, e a técnica do DMVT, revisitada na seção 3.1, desta forma, os métodos poderão ser aplicados a uma ampla classe de sistemas, que consideram os sistemas com funções continuamente diferenciáveis, para o DMVT, e, funções analíticas polinomiais e não polinomiais, para a fatoração do erro. A técnica de imersão poderia ter sido considerada, porém, há casos em que ela pode não convergir, além de aumentar a ordem do sistema para a análise.

4.1 Incompatibilidade de Variáveis Medidas e Não Medidas

Considere o sistema qLPV dado por (1.2), com base em condições LMIs e em uma abordagem estocástica, o objetivo da estimativa de estado é encontrar uma estimativa não polarizada, $\hat{x}_{k|k}$, com um limite superior mínimo garantido para a covariância, $E[e_{k|k}e_{k|k}^T] = P_{k|k}$, do erro de estimativa $e_k = x_k - \hat{x}_k$, considerando sinais exógenos desconhecidos w_k e v_k .

Considerando as etapas de predição e assimilação de dados do filtro de Kalman, duas abordagens para calcular o ganho de Kalman são propostas nesta seção: (i) covariâncias variáveis no tempo com atualizações em tempo real e, (ii) filtro de estado estacionário. Assume-se que $\hat{x}_{k|k-1}$ corresponde à estimativa de x no tempo k , usando os dados disponíveis até o tempo $k-1$.

A etapa de predição do filtro de Kalman consiste em propagar o vetor de estados $\hat{x}_{k-1|k-1}$ para a próxima iteração, resultando na estimativa *a priori* $\hat{x}_{k|k-1}$. Tal propagação é realizada utilizando-se o modelo dinâmico, que descreve como o vetor de estados muda de uma iteração para a próxima (Simon, 2006). Assim, obtém-se:

$$\hat{x}_{k|k-1} = A(\hat{x}_{k-1|k-1})\hat{x}_{k-1|k-1} + B_u(\hat{x}_{k-1|k-1})u_{k-1}. \quad (4.1)$$

A etapa de assimilação de dados do filtro de Kalman ocorre com a chegada de nova informação na iteração k . Utilizando essa informação, é possível corrigir o vetor de estados disponível previamente à chegada da medição, $x_{k|k-1}$, para dar origem ao vetor de estados corrigido, $x_{k|k}$ (Simon, 2006). Assim:

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(y_k - C(\hat{x}_{k|k-1})\hat{x}_{k|k-1}). \quad (4.2)$$

É possível determinar o erro de estimação *a priori* e *a posteriori*:

$$e_{k|k-1} = x_k - \hat{x}_{k|k-1}, \quad (4.3)$$

$$e_{k-1|k-1} = x_{k-1} - \hat{x}_{k-1|k-1}. \quad (4.4)$$

Substituindo (1.2) e (4.1) em (4.3), encontra-se a dinâmica do erro da etapa de predição:

$$e_{k|k-1} = A(x_{k-1})x_{k-1} + B_u(x_{k-1})u_{k-1} + B_w w_{k-1} - (A(\hat{x}_{k-1|k-1})\hat{x}_{k-1|k-1} + B_u(\hat{x}_{k-1|k-1})u_{k-1}). \quad (4.5)$$

Da mesma forma, o erro *a posteriori*, que representa a dinâmica do erro da etapa de assimilação de dados, pode ser escrito como

$$e_{k|k} = e_{k|k-1} - K_k(C(x_k)x_k + v_k - C(\hat{x}_{k|k-1})\hat{x}_{k|k-1}). \quad (4.6)$$

Observando (4.5) e (4.6), nota-se um problema de incompatibilidade de variáveis mensuráveis e não mensuráveis, dado por $A(x_{k-1})x_{k-1} - A(\hat{x}_{k-1|k-1})\hat{x}_{k-1|k-1} + B_u(x_{k-1})u_{k-1} - B_u(\hat{x}_{k-1|k-1})u_{k-1}$ e $C(x_k)x_k - C(\hat{x}_{k|k-1})\hat{x}_{k|k-1}$, respectivamente.

Muitas das abordagens atuais na literatura consideram que o sistema pode ser reescrito em uma forma que separa não linearidades medidas e não medidas (Darouach et al., 2011; Ichalal et al., 2018; Pan et al., 2020; Quintana et al., 2020; Ramadoss et al., 2006). No entanto, em vista da consideração de que as medições são corrompidas pelo sinal v_k , as não linearidades dos estados podem ser consideradas como não medidas, e, assim, a representação de Pan et al.

(2020) foi adaptada, levando a uma decomposição de termos lineares e não lineares:

$$\begin{aligned} x_k &= \bar{A}x_{k-1} + \bar{B}_u u_{k-1} + F\phi(x_{k-1}, u_{k-1}) + B_w w_{k-1}, \\ y_k &= \bar{C}x_k + G\psi(x_k) + v_k, \end{aligned} \quad (4.7)$$

em que as matrizes $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{B}_u \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $\bar{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ representam os termos lineares nas matrizes $A(x_{k-1})$, $B_u(x_{k-1})$ e $C(x_k)$ respectivamente; $F \in \mathbb{R}^{n \times n_\phi}$ e $G \in \mathbb{R}^{p \times n_\psi}$ são matrizes que representam como os termos não lineares $\phi(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_\phi}$ e $\psi(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_\psi}$ afetam a dinâmica do sistema.

Com a representação em (4.7), (4.1) e (4.2) podem ser reescritos como:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k-1} &= \bar{A}\hat{x}_{k-1|k-1} + \bar{B}_u u_{k-1} + F\phi(\hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1}), \\ \hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} + K_k(y_k - \bar{C}\hat{x}_{k|k-1} - G\psi(\hat{x}_{k|k-1})), \end{aligned} \quad (4.8)$$

baseado em (4.5), (4.6) e (4.8), a dinâmica do erro pode ser reescrita como:

$$e_{k|k-1} = \bar{A}e_{k-1|k-1} + F\Delta_\phi + B_w w_{k-1}, \quad (4.9)$$

$$e_{k|k} = (I - K_k \bar{C})e_{k|k-1} - K_k(G\Delta_\psi + v_k), \quad (4.10)$$

$$\Delta_\phi = \phi(x_{k-1}, u_{k-1}) - \phi(\hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1}), \quad (4.11)$$

$$\Delta_\psi = \psi(x_k) - \psi(\hat{x}_{k|k-1}). \quad (4.12)$$

Nesta nova representação, os termos de incompatibilidade são representados pelos termos Δ_ϕ e Δ_ψ . Existem muitas abordagens na literatura para lidar com esse problema de incompatibilidade, mas serão aplicadas duas metodologias, a fim de cobrir uma ampla classe de sistemas. A primeira se refere ao uso do DMVT (Pan et al., 2020), em que se considera a aplicação a funções continuamente diferenciáveis, e a segunda obtém uma forma polinomial matricial explícita do gradiente (Quintana et al., 2020), considerando funções analíticas polinomiais e não polinomiais.

4.1.1 Teorema do Valor Médio Diferencial

Como indicado na Seção 3.1, o DMVT pode ser aplicado para tratar a incompatibilidade dada pelos termos Δ_ϕ e Δ_ψ . O DMVT afirma que, para qualquer função continuamente diferenciável, que tenha uma única saída escalar, a diferença entre sua avaliação em quaisquer dois pontos de seu domínio pode ser escrita como seu gradiente, avaliado em um ponto localizado em uma reta entre os dois pontos, vezes a diferença entre os dois pontos, conforme o Lema dado por Nguyen et al. (2021) enunciado a seguir, no qual $\text{co}(\cdot)$ representa o fecho convexo de seus

argumentos.

Lema 5 (Lema 1 de Nguyen et al. (2021) - Teorema do Valor Médio Diferencial). *Sejam $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $a, b \in \mathbb{R}^n$. Se $f(x)$ é continuamente diferenciável em $\text{co}(a, b)$, então $\exists c \in \text{co}(a, b)$, tal que*

$$f(a) - f(b) = \nabla_x f|_c (a - b). \quad (4.13)$$

Ao usar o DMVT, no problema de incompatibilidade aqui tratado, o ponto crítico é que este ponto intermediário será sempre desconhecido, visto que o valor do estado real é sempre desconhecido. Além disso, a igualdade só é verdadeira para funções que geram um único valor escalar e, como tal, o teorema deve ser empregado separadamente para cada linha de $\phi(\cdot)$ e $\psi(\cdot)$. De seu uso, segue-se que:

$$\Delta\phi_i = \nabla\phi_i|_{z_i, u_{k-1}} e_{k-1|k-1}, \quad (4.14)$$

$$\Delta\psi_i = \nabla\psi_i|_{\kappa_i} e_{k|k-1}, \quad (4.15)$$

com z_i e κ_i representando pontos desconhecidos para os possíveis valores de x_k . Assim, pode-se definir:

$$\mathcal{E}(z_k, u_k) = \bar{A} + F \begin{bmatrix} \nabla\phi_1|_{z_1, u_{k-1}} \\ \vdots \\ \nabla\phi_{n_\phi}|_{z_{n_\phi}, u_{k-1}} \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

$$\mathcal{G}(\kappa_k) = \bar{C} + G \begin{bmatrix} \nabla\psi_1|_{\kappa_1} \\ \vdots \\ \nabla\psi_{n_\psi}|_{\kappa_{n_\psi}} \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

permitindo que a dinâmica do erro em (4.9)-(4.12) seja reescrita como:

$$e_{k|k-1} = \mathcal{E}(z_{k-1}, u_{k-1}) e_{k-1|k-1} + B_w w_{k-1}, \quad (4.18)$$

$$e_{k|k} = (I - K_k \mathcal{G}(\kappa_k)) e_{k|k-1} - K_k v_k. \quad (4.19)$$

4.1.2 Fatoração do Erro

Como indicado na Seção 3.3, a obtenção de uma forma polinomial matricial explícita do gradiente pode ser aplicada para tratar a incompatibilidade dada pelos termos $\Delta\phi$ e $\Delta\psi$. Utilizando tal técnica é possível fatorar o erro, considerando funções analíticas polinomiais e não polinomiais e, a partir daí, separar as variáveis mensuráveis das não mensuráveis.

Tentando chegar a uma representação que utilize melhor a estrutura do sistema, a segunda abordagem emprega uma maneira inteligente de reescrever as diferenças em Δ_ϕ e Δ_ψ , empregando os lemas 3 e 4. Se as não linearidades forem expressões não polinomiais, mas ainda forem funções analíticas, sua expansão em série de Taylor pode ser empregada com uma ordem alta o suficiente para que o erro de truncamento possa ser desconsiderado, conforme discutido em (Quintana et al., 2020, Seção 2.1).

Ao utilizar esta metodologia, a dinâmica do erro pode ser escrita como:

$$e_{k|k-1} = \mathcal{E}(x_{k-1}, \hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1}) e_{k-1|k-1} + B_w w_{k-1}, \quad (4.20)$$

$$e_{k|k} = (I - K_k \mathcal{G}(x_k, \hat{x}_{k|k-1})) e_{k|k-1} - K_k v_k. \quad (4.21)$$

No entanto, observe que os estados verdadeiros x_{k-1} e x_k nunca podem ser conhecidos com exatidão. Nesse sentido, são substituídos pelas variáveis desconhecidas z_{k-1} e κ_k , que podem assumir qualquer valor em uma região conhecida do espaço de estados, levando à representação:

$$e_{k|k-1} = \mathcal{E}(z_{k-1}, \hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1}) e_{k-1|k-1} + B_w w_{k-1}, \quad (4.22)$$

$$e_{k|k} = (I - K_k \mathcal{G}(\kappa_k, \hat{x}_{k|k-1})) e_{k|k-1} - K_k v_k. \quad (4.23)$$

Embora sejam bastante semelhantes às representações em (4.18) e (4.19), as equações (4.22) e (4.23) dependem explicitamente de $\hat{x}_{k-1|k-1}$ e $\hat{x}_{k|k-1}$, que são sempre conhecidos. Isso pode, em alguns casos, permitir um melhor uso das informações sobre as não linearidades. Além disso, embora sejam utilizados z_{k-1} e κ_k , para ambas as representações, observa-se que z e κ em (4.18) e (4.19) são criados para cada ϕ_i e ψ_i diferentes, enquanto sinais semelhantes podem ser agrupados em (4.22) e (4.23).

Para simplificar a apresentação, a partir deste ponto, considera-se que a dinâmica do erro é representada por (4.22) e (4.23), independentemente da abordagem empregada. Portanto, ao utilizar o DMVT, pode-se simplesmente ignorar a dependência de $\hat{x}_{k-1|k-1}$ e $\hat{x}_{k|k-1}$ nessas equações. Além disso, às vezes, será utilizada a seguinte notação abreviada: $\mathcal{E}_z = \mathcal{E}(z_{k-1}, \hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1})$ e $\mathcal{G}_\kappa = \mathcal{G}(\kappa_k, \hat{x}_{k|k-1})$.

4.2 Inclusão a Diferenças

Para considerar os politopos envolvendo a dinâmica não linear e, assim obter ganhos robustos, o seguinte lema é usado:

Lema 6. *Sejam z_{k-1} e κ_k variáveis desconhecidas, que assumem quaisquer valores possíveis dentro da região de interesse. Pode-se representar a dinâmica de erro por um sistema incerto, substituindo a dinâmica de erro não linear original por uma inclusão à diferenças com valor*

definido. Essa representação com valor definido é linear nas variáveis aleatórias e permite escrever que:

$$E[\mathcal{E}_z e_{k-1|k-1}] \subseteq \mathcal{E}_z E[e_{k-1|k-1}], \quad (4.24)$$

$$E[(I - K_k \mathcal{G}_\kappa) e_{k|k-1}] \subseteq (I - K_k \mathcal{G}_\kappa) E[e_{k|k-1}]. \quad (4.25)$$

Demonstração. Para fazer uso das matrizes \mathcal{E}_z e \mathcal{G}_κ , emprega-se uma representação politópica da forma (similarmente para \mathcal{G}_κ):

$$\mathcal{E}(z_{k-1}, \hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1}) = \sum_{i_1=1}^{r_z} \sum_{i_2=1}^{r_x} \sum_{i_3=1}^{r_u} \alpha_{i_1}(z_{k-1}) \beta_{i_2}(\hat{x}_{k-1|k-1}) \gamma_{i_3}(u_{k-1}) \mathcal{E}_{i_1 i_2 i_3}. \quad (4.26)$$

Considerando z e κ como sinais desconhecidos, a equação (4.26) é, na verdade, uma inclusão diferencial, na qual se considera que α_i assume todos os valores possíveis no simplex padrão $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ para todo o tempo, e também pode ser descrita como um subconjunto de um fecho convexo. Com isso em mente, α_i não é uma variável aleatória, mas uma função de valor definido, e pode-se, alternativamente, escrever:

$$\mathcal{E}(z_{k-1}, \hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1}) \subseteq \sum_{i_2=1}^{r_x} \sum_{i_3=1}^{r_u} \beta_{i_2}(\hat{x}_{k-1|k-1}) \gamma_{i_3}(u_{k-1}) \text{co} \{ \mathcal{E}_{1i_2i_3}, \mathcal{E}_{2i_2i_3}, \dots, \mathcal{E}_{r_z i_2 i_3} \}. \quad (4.27)$$

Ao considerar essa representação de valores definidos para \mathcal{E}_z e \mathcal{G}_κ (substituindo as variáveis possivelmente aleatórias z e κ por uma representação de valores definidos que sempre representa todos os valores possíveis para essas variáveis), essencialmente foi substituída uma representação aleatória por uma representação de conjuntos. Embora isso possa ser conservador, sua principal vantagem é que permite um tratamento mais simples da esperança.

Para o tratamento da esperança matemática, segue:

$$E[\mathcal{E}(z_{k-1}, \hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1}) e_{k-1|k-1}] \subseteq E[(\sum_{i_2=1}^{r_x} \sum_{i_3=1}^{r_u} \beta_{i_2}(\hat{x}_{k-1|k-1}) \gamma_{i_3}(u_{k-1}) \text{co} \{ \mathcal{E}_{1i_2i_3}, \mathcal{E}_{2i_2i_3}, \dots, \mathcal{E}_{r_z i_2 i_3} \}) e_{k-1|k-1}]. \quad (4.28)$$

Em $\beta_{i_2}(\hat{x}_{k-1|k-1})$, $\hat{x}_{k-1|k-1}$ é precisamente conhecido, assim como u_{k-1} em $\gamma_{i_3}(u_{k-1})$, então:

$$\begin{aligned}
& E\left[\left(\sum_{i_2=1}^{r_x} \sum_{i_3=1}^{r_u} \beta_{i_2}(\hat{x}_{k-1|k-1}) \gamma_{i_3}(u_{k-1}) \text{co}\{\mathcal{E}_{1i_2i_3}, \mathcal{E}_{2i_2i_3}, \dots, \mathcal{E}_{r_z i_2i_3}\}\right) e_{k-1|k-1}\right] = \\
& = \sum_{i_2=1}^{r_x} \sum_{i_3=1}^{r_u} \beta_{i_2}(\hat{x}_{k-1|k-1}) \gamma_{i_3}(u_{k-1}) E[\text{co}\{\mathcal{E}_{1i_2i_3}, \mathcal{E}_{2i_2i_3}, \dots, \mathcal{E}_{r_z i_2i_3}\} e_{k-1|k-1}],
\end{aligned}$$

que é igual a:

$$\sum_{i_2=1}^{r_x} \sum_{i_3=1}^{r_u} \beta_{i_2}(\hat{x}_{k-1|k-1}) \gamma_{i_3}(u_{k-1}) \text{co}\{E[\mathcal{E}_{1i_2i_3} e_{k-1|k-1}], E[\mathcal{E}_{2i_2i_3} e_{k-1|k-1}], \dots, E[\mathcal{E}_{r_z i_2i_3} e_{k-1|k-1}]\}. \quad (4.29)$$

Como,

$$\text{co}\{\mathcal{E}_{1i_2i_3}, \mathcal{E}_{2i_2i_3}, \dots, \mathcal{E}_{r_z i_2i_3}\} = \left[\sum_{i_1=1}^{r_z} \alpha_{i_1} \mathcal{E}_{i_1}, \alpha_{i_1} \in [0, 1], \sum_{i_1=1}^{r_z} \alpha_{i_1} = 1 \right], \quad (4.30)$$

então:

$$E[\text{co}\{\mathcal{E}_{1i_2i_3}, \mathcal{E}_{2i_2i_3}, \dots, \mathcal{E}_{r_z i_2i_3}\} e_{k-1|k-1}] = E\left[\sum_{i_1=1}^{r_z} \alpha_{i_1} \mathcal{E}_{i_1} e_{k-1|k-1}\right], \quad (4.31)$$

que é igual a:

$$E[\text{co}\{\mathcal{E}_{1i_2i_3}, \mathcal{E}_{2i_2i_3}, \dots, \mathcal{E}_{r_z i_2i_3}\} e_{k-1|k-1}] = \sum_{i_1=1}^{r_z} \alpha_{i_1} \mathcal{E}_{i_1} E[e_{k-1|k-1}], \quad (4.32)$$

porque α_{i_1} é fixo para cada elemento do conjunto e não é aleatório. Dessa forma, (4.28) é verdadeiro e obtém-se:

$$E[\mathcal{E}(z_{k-1}, \hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1}) e_{k-1|k-1}] \subseteq \sum_{i_2=1}^{r_x} \sum_{i_3=1}^{r_u} \beta_{i_2}(\hat{x}_{k-1|k-1}) \gamma_{i_3}(u_{k-1}) \text{co}\{\mathcal{E}_{1i_2i_3}, \mathcal{E}_{2i_2i_3}, \dots, \mathcal{E}_{r_z i_2i_3}\} E[e_{k-1|k-1}]. \quad (4.33)$$

□

4.3 Projeto do GCKF a Tempo Discreto

Considere que $P_{k|k-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representa a matriz de covariância da etapa de predição atual, que $P_{k-1|k-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representa a matriz de covariância da etapa de assimilação de dados anterior e que $P_{k|k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representa a matriz de covariância da etapa de assimilação de dados atual.

Considerando que a dinâmica do erro pode ser tratada conforme proposto anteriormente e, utilizando o lema 6, sabendo que $E[v_i w_j^T] = 0, \forall i, j$, a matriz de covariância do GCKF, na

etapa de predição, é dada por:

$$P_{k|k-1} = E[e_{k|k-1}e_{k|k-1}^T], \quad (4.34)$$

$$P_{k|k-1} \subseteq E[(\mathcal{E}_z e_{k-1|k-1} + B_w w_{k-1})(\mathcal{E}_z e_{k-1|k-1} + B_w w_{k-1})^T], \quad (4.35)$$

$$P_{k|k-1} \subseteq E[\mathcal{E}_z e_{k-1|k-1} e_{k-1|k-1}^T \mathcal{E}_z^T + \mathcal{E}_z e_{k-1|k-1} w_{k-1}^T B_w^T + B_w w_{k-1} e_{k-1|k-1}^T \mathcal{E}_z^T + B_w w_{k-1} w_{k-1}^T B_w^T], \quad (4.36)$$

assim, como o ruído de processo em uma iteração não está correlacionado com o erro de estimação na mesma iteração, $E[e_{k-1|k-1} w_{k-1}^T] = E[w_{k-1} e_{k-1|k-1}^T] = 0$, e $E[e_{k-1|k-1} e_{k-1|k-1}^T] = P_{k-1|k-1}$ obtém-se:

$$P_{k|k-1} \subseteq \mathcal{E}_z P_{k-1|k-1} \mathcal{E}_z^T + B_w Q B_w^T. \quad (4.37)$$

A matriz de covariância do GCKF na etapa de assimilação de dados é dada por:

$$P_{k|k} = E[e_{k|k} e_{k|k}^T], \quad (4.38)$$

$$P_{k|k} \subseteq E[((I - K_k \mathcal{G}_\kappa) e_{k|k-1} - K_k v_k)((I - K_k \mathcal{G}_\kappa) e_{k|k-1} - K_k v_k)^T], \quad (4.39)$$

$$P_{k|k} \subseteq E[(I - K_k \mathcal{G}_\kappa) e_{k|k-1} e_{k|k-1}^T (I - K_k \mathcal{G}_\kappa)^T - (I - K_k \mathcal{G}_\kappa) e_{k|k-1} v_k^T K_k^T - K_k v_k e_{k|k-1}^T (I - K_k \mathcal{G}_\kappa)^T + K_k v_k v_k^T K_k^T], \quad (4.40)$$

assim, como $E[e_{k|k-1} v_k^T] = E[v_k e_{k|k-1}^T] = 0$, uma vez que o ruído de medição em uma iteração não está correlacionado ao erro da estimação corrigido naquela iteração e, $E[e_{k|k-1} e_{k|k-1}^T] = P_{k|k-1}$, obtém-se:

$$P_{k|k} \subseteq (I - K_k \mathcal{G}_\kappa) P_{k|k-1} (I - K_k \mathcal{G}_\kappa)^T + K_k R K_k^T. \quad (4.41)$$

Embora as equações (4.37) e (4.41) possam parecer as equações discretas usuais de Riccati para propagar covariâncias em um Filtro de Kalman, vale a pena notar que essas são, na verdade, inclusões de diferenças, uma vez que \mathcal{E}_z e \mathcal{G}_κ são matrizes incertas que podem assumir qualquer valor dentro de um conjunto (daí o uso de \subseteq em vez da igualdade usual). Uma abordagem baseada em LMIs, no entanto, é capaz de encontrar um limite superior garantido para essas covariâncias. A seguir, serão apresentadas duas abordagens diferentes para o GCKF: uma atualização em tempo real, atualizando o ganho de Kalman (K_k) e as covariâncias em cada passo de tempo, e uma abordagem de filtro em estado estacionário.

4.3.1 GCKF Recursivo

A etapa de predição decorre do uso de uma relação de limite superior para a matriz de covariância em (4.37), juntamente com a previsão da estimativa de estado em (4.1), produzindo:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k-1} &= A(\hat{x}_{k-1|k-1})\hat{x}_{k-1|k-1} + B_u(\hat{x}_{k-1|k-1})u_{k-1}, \\ &\min_{P_{k|k-1}} \text{tr}(P_{k|k-1}), \text{ s.a} \\ P_{k|k-1} &\geq \mathcal{E}(z_{k-1}, \hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1})P_{k-1|k-1}\mathcal{E}(z_{k-1}, \hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1})^T + B_wQB_w^T. \end{aligned} \quad (4.42)$$

A etapa de assimilação de dados decorre da descoberta de um ganho de Kalman K_k que minimiza uma relação de limite superior para a matriz de covariância em (4.41), juntamente com a correção da estimativa de estado em (4.2), produzindo:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} + K_k(y_k - C(\hat{x}_{k|k-1})\hat{x}_{k|k-1}), \\ &\min_{P_{k|k}, K_k} \text{tr}(P_{k|k}), \text{ s.a} \\ P_{k|k} &\geq (I - K_k\mathcal{G}(\kappa_k, \hat{x}_{k|k-1}))P_{k|k-1}(I - K_k\mathcal{G}(\kappa_k, \hat{x}_{k|k-1}))^T + K_kRK_k^T. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Embora a derivação do KF clássico, normalmente, utilize a minimização do traço da matriz de covariância, para o GCKF será utilizada a maximização do logaritmo do determinante da inversa da matriz de covariância. Essa métrica apresenta vantagens numéricas em relação ao traço e, além disso, está mais diretamente relacionada ao volume da elipse de incerteza. Para isso, a proposição trabalha com o inverso das matrizes de covariância em vez das matrizes de covariância usuais, e define-se $S_{k|k} = P_{k|k}^{-1}$, $S_{k|k-1} = P_{k|k-1}^{-1}$ e $S_{k-1|k-1} = P_{k-1|k-1}^{-1}$. Com isso em mente, o GCKF em tempo real pode ser resumido pelo seguinte teorema.

Teorema 7. *Se existe uma matriz $S_{k|k-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que:*

$$\begin{aligned} &\max_{S_{k|k-1}} \log \det(S_{k|k-1}), \text{ s.a} \\ &\begin{bmatrix} S_{k|k-1} & S_{k|k-1}\mathcal{E}(z_{k-1}, \hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1}) & S_{k|k-1}B_w \\ * & S_{k-1|k-1} & 0 \\ * & * & Q^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, \end{aligned} \quad (4.44)$$

então $S_{k|k-1}$ é um limite inferior para o inverso da matriz de covariância a priori. Além disso, se houver matrizes $S_{k|k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{n \times p}$, tais que:

$$\begin{aligned} &\max_{S_{k|k}, Z} \log \det(S_{k|k}), \text{ s.a} \\ &\begin{bmatrix} S_{k|k} & S_{k|k} - Z\mathcal{G}(\kappa_k, \hat{x}_{k|k-1}) & Z \\ * & S_{k|k-1} & 0 \\ * & * & R^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, \end{aligned} \quad (4.45)$$

então $S_{k|k}$ é um limite inferior para o inverso da matriz de covariância a posteriori, enquanto o ganho de Kalman K_k pode ser encontrado em $K_k = S_{k|k}^{-1}Z$. Com * correspondendo à transposta.

Demonstração. Considere as condições *a priori* dadas em (4.42). Utilizando o complemento de Schur:

$$\begin{bmatrix} P_{k-1|k-1} & \mathcal{E}(z_{k-1}, \hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1}) & B_w \\ * & P_{k|k-1}^{-1} & 0 \\ * & * & Q^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.46)$$

e multiplicando-o à esquerda e à direita por:

$$\begin{bmatrix} P_{k|k-1}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (4.47)$$

chega a:

$$\begin{bmatrix} P_{k|k-1}^{-1} & P_{k|k-1}^{-1} \mathcal{E}(z_{k-1}, \hat{x}_{k-1}, u_{k-1}) & P_{k|k-1}^{-1} B_w \\ * & P_{k-1|k-1}^{-1} & 0 \\ * & * & Q^{-1} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4.48)$$

Definindo $S_{k|k-1} = P_{k|k-1}^{-1}$ e $S_{k-1|k-1} = P_{k-1|k-1}^{-1}$, leva a (4.44).

Da mesma forma, na etapa de assimilação de dados, em (4.43), fazendo uso do complemento de Schur:

$$\begin{bmatrix} P_{k|k} & I - K_k \mathcal{G}(\kappa_k, \hat{x}_{k|k-1}) & K_k \\ * & P_{k-1|k-1}^{-1} & 0 \\ * & * & R^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.49)$$

e multiplicando-o à esquerda e à direita por:

$$\begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (4.50)$$

chega a:

$$\begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} & P_{k|k}^{-1} - P_{k|k}^{-1} K_k \mathcal{G}(\kappa_k, \hat{x}_{k|k-1}) & P_{k|k}^{-1} K_k \\ * & P_{k|k-1}^{-1} & 0 \\ * & * & R^{-1} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4.51)$$

Definindo $S_{k|k-1} = P_{k|k-1}^{-1}$, $S_{k|k} = P_{k|k}^{-1}$ e $Z = S_{k|k} K_k$, leva a (4.45).

□

Observação 2. Como é padrão na literatura, a matriz de covariância pode ser utilizada para definir uma elipse de incerteza centrada em torno da média de uma distribuição, com seus

autovalores determinando o comprimento dos semieixos e seus autovetores as direções correspondentes. Enquanto o traço da matriz de covariância, comumente utilizado como métrica do tamanho da covariância, corresponde à soma dos autovalores (e, portanto, indiretamente ao tamanho dessa elipse), seu determinante corresponde ao produto deles (que é diretamente proporcional ao volume de uma elipse). Para a função objetivo, o $\log\det$ foi utilizado ao invés do traço, visto que o determinante da matriz de covariância é diretamente proporcional ao volume da elipse de incerteza, enquanto o traço é uma medida indireta. Além disso, \log é monotonicamente crescente e, portanto, não altera a localização do seu mínimo, portanto $\operatorname{argmin}(-\log\det(x))$ é o mesmo que $\operatorname{argmin}(\frac{1}{\det(x)})$.

Para utilizar este teorema em cada passo de tempo, as matrizes $\mathcal{E}(z_{k-1}, \hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1})$ e $\mathcal{G}(\kappa_k, \hat{x}_{k|k-1})$ são representadas usando politopos (semelhante ao procedimento realizado na abordagem de não linearidade setorial (Tanaka and Wang, 2001)). Observa-se que os valores de $\hat{x}_{k-1|k-1}$, $\hat{x}_{k|k-1}$ e u_{k-1} são conhecidos e podem ser empregados em uma abordagem politópica ou substituídos em tempo real.

Em resumo, o Teorema 7 pode ser aplicado conforme o Algoritmo 1 a seguir:

Algoritmo 1: GCKF à Tempo Discreto Recursivo.

Entrada: \bar{A} , B_w , \bar{C} , \mathcal{G} , \mathcal{E} , x_0 , \hat{x}_0 , Q , R , $P_{k-1|k-1}$

Saída: $P_{k|k}$, K_k , $\hat{x}_{k|k-1}$, $\hat{x}_{k|k}$

- 1 Inicialize a matriz de covariância *a priori* $P_{k-1|k-1}$, o vetor de estados x_0 e o vetor de estados estimados \hat{x}_0
 - 2 Defina o número de iterações n_{max}
 - 3 **enquanto** $n < n_{max}$ **faça**
 - 4 $\hat{x}_{k|k-1} = A(\hat{x}_{k-1|k-1})\hat{x}_{k-1|k-1} + B_u(\hat{x}_{k-1|k-1})u_{k-1}$
 - 5 Resolva (4.44)
 - 6 Utilize $P_{k|k-1}$ encontrado anteriormente no próximo passo
 - 7 Resolva (4.45)
 - 8 Encontre $P_{k|k}$ e K_k
 - 9 $\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(y_k - C(\hat{x}_{k|k-1})\hat{x}_{k|k-1})$
 - 10 $n \leftarrow n + 1$
 - 11 **fim**
-

Devido ao custo computacional da abordagem indicada nesta seção, uma nova abordagem é apresentada considerando o filtro em estado estacionário, a fim de obter um baixo custo computacional. Além disso, motivado pelos sistemas lineares e invariantes no tempo, em que o filtro recursivo converge para o filtro em estado estacionário, o GCKF em estado estacionário é derivado. Entretanto, no caso aqui apresentado não há a garantia de convergência e, então, são considerados dois filtros distintos.

4.3.2 GCKF em Estado Estacionário

A condição do filtro de estado estacionário considera que, em estado estacionário, as covariâncias *a priori* e *a posteriori* podem ser limitadas superiormente por valores fixos. Assim, para a proposta do filtro de estado estacionário, assume-se que $P_{k|k}$ e $P_{k|k-1}$ são limitados superiormente por P^+ e P^- , respectivamente. Dessa forma, obtém-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} P^- &\geq \mathcal{E}(z_{k-1}, \hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1}) P^+ \mathcal{E}(z_{k-1}, \hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1})^T + B_w Q B_w^T, \\ P^+ &\geq (I - K \mathcal{G}(\kappa_k, \hat{x}_{k|k-1})) P^- (I - K \mathcal{G}(\kappa_k, \hat{x}_{k|k-1}))^T + K R K^T. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Assim, considerando o sistema não linear descrito por (1.2), é possível projetar o filtro de Kalman com covariância garantida, conforme o Teorema abaixo.

Teorema 8. *Se existem matrizes $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{n \times p}$, e também matrizes simétricas $S^- \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $S^+ \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que as condições*

$$\begin{aligned} &\max_{S^-, S^+, Z, Y} \log \det(S^+), \text{ s.a} \\ &\begin{bmatrix} X^T + X - S^- & X^T \mathcal{E}_z & X^T B_w \\ * & S^+ & 0 \\ * & * & Q^{-1} \end{bmatrix} \geq 0 \\ &\begin{bmatrix} Y^T + Y - S^+ & Y - Z \mathcal{G}_\kappa & Z \\ * & S^- & 0 \\ * & * & R^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, \end{aligned} \quad (4.53)$$

sejam satisfeitas, com * correspondendo à transposta, então o ganho do filtro de Kalman e as matrizes de covariância mínima garantidas do limite superior, dadas por P^+ e P^- , são obtidos por meio de $P^+ = (S^+)^{-1}$, $P^- = (S^-)^{-1}$ e $K = Y^{-1}Z$.

Demonstração. A partir de (4.52), aplicando o complemento de Schur, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} P^- & \mathcal{E}_z & B_w \\ * & (P^+)^{-1} & 0 \\ * & * & Q^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.54)$$

$$\begin{bmatrix} P^+ & I - K \mathcal{G}_\kappa & K \\ * & (P^-)^{-1} & 0 \\ * & * & R^{-1} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4.55)$$

Fazendo $(P^+)^{-1} = S^+$ em (5.15) e $(P^-)^{-1} = S^-$ em (5.16) e adicionando variáveis de folga de forma que, (5.15) seja multiplicado à esquerda por

$$\begin{bmatrix} X^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (4.56)$$

e à direita, por sua transposta. De forma semelhante, mas usando a variável de folga Y no lugar de X para (5.16), resulta em:

$$\begin{bmatrix} X^T(S^-)^{-1}X & X^T\mathcal{E}_z & X^TB_w \\ * & S^+ & 0 \\ * & * & Q^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.57)$$

$$\begin{bmatrix} Y^T(S^+)^{-1}Y & Y - YK\mathcal{G}_\kappa & YK \\ * & S^- & 0 \\ * & * & R^{-1} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4.58)$$

Como $X^T(S^-)^{-1}X \geq X^T + X - S^-$ em (4.57) e $Y^T(S^+)^{-1}Y \geq Y^T + Y - S^+$ em (5.17), e, para eliminar a bilinearidade de (5.17), considera-se $Z = YK$. Dessa forma, as condições indicadas no Teorema 8 são obtidas.

□

Observação 3. Apesar de considerar que as matrizes de covariância convergem para valores constantes ao longo do tempo, pode-se considerar que elas variam de acordo com z_{k-1} , κ_k , $\hat{x}_{k-1|k-1}$, $\hat{x}_{k|k-1}$, u_{k-1} , levando a

$$P^+(z_{k-1}, \kappa_k, \hat{x}_{k-1|k-1}, \hat{x}_{k|k-1}, u_{k-1})$$

e

$$P^-(z_{k-1}, \kappa_k, \hat{x}_{k-1|k-1}, \hat{x}_{k|k-1}, u_{k-1}),$$

ou um subconjunto desses sinais com parâmetros variáveis. Se optar por usar essas matrizes de covariância com parâmetros variáveis, S^+ e S^- também precisam ter essa dependência. Para isso, é comum adicionar uma condição extra

$$S^+(z_{k-1}, \kappa_k, \hat{x}_{k-1|k-1}, \hat{x}_{k|k-1}, u_{k-1}) \geq S \quad (4.59)$$

e a maximização é tomada em relação a $\log \det(S)$. Além disso, o inverso dessa matriz S também deve ser tomado como a matriz de covariância a posteriori garantida, uma vez que z_{k-1} e κ_k são sinais desconhecidos.

Observação 4. Apesar de ser constante ao longo do tempo nesta abordagem, o ganho de Kalman K pode ser tratado com uma dependência de $\hat{x}_{k|k-1}$ e u_k , uma vez que os outros sinais

variáveis dos parâmetros são incertos ou dependem de K para serem calculados. Essa dependência permite o ganho escalonado, de acordo com as funções de pertinência obtidas para cada vértice do politopo.

Observação 5. Observe que, a partir das derivações apresentadas para o filtro de estado estacionário, se as covariâncias iniciais do erro forem menores que as encontradas nas condições de projeto de estado estacionário, o GCKF de estado estacionário garante que as covariâncias do erro sempre serão limitadas pelos valores encontrados nas condições de projeto.

Em resumo, o Teorema 8 pode ser aplicado conforme o Algoritmo 2 a seguir:

Algoritmo 2: Método Matemático para Obtenção do Ganho K_k e da Matriz de Covariância $P_{k|k}$.

Entrada: $\bar{A}, B_w, \bar{C}, \mathcal{G}, \mathcal{E}, Q, R$

Saída: $P_{k|k-1}, P_{k|k}, K_k$

1 Resolva (4.53)

2 Encontre $P_{k|k}$ e K_k

Ao executar o Algoritmo 2, são encontradas algumas matrizes de ganho K . Desta forma, pode-se aplicar o algoritmo de duas formas distintas. A primeira considera apenas uma matriz de ganho K escolhida de acordo com as matrizes de covariância $P_{k|k}$ encontradas para cada matriz K . A segunda abordagem considera todas as matrizes de ganho K , desta forma escalona-se o ganho, de acordo com as funções de pertinência obtidas para cada vértice dos politopos utilizados.

Observe que uma propriedade interessante do GCKF em estado estacionário é que pode-se mostrar que ele é assintoticamente não polarizado, conforme indicado no Teorema abaixo.

Teorema 9. O filtro de Kalman de covariância garantida em estado estacionário (GCKF) é assintoticamente não polarizado (o erro médio de estimativa converge assintoticamente para zero).

Demonstração. Considere a dinâmica do erro na equação (4.22). Tomando sua esperança matemática, conclui-se que:

$$\begin{aligned} E[e_{k|k-1}] &= E[\mathcal{E}(z_{k-1}, \hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1})e_{k-1|k-1} + B_w w_{k-1}], \\ E[e_{k|k-1}] &= E[\mathcal{E}(z_{k-1}, \hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1})e_{k-1|k-1}] + B_w E[w_{k-1}]. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Como w tem média zero, $E[w_{k-1}] = 0$, então:

$$E[e_{k|k-1}] = E[\mathcal{E}(z_{k-1}, \hat{x}_{k-1}, u_{k-1})e_{k-1|k-1}]. \quad (4.61)$$

Conforme discutido no lema 6:

$$E[e_{k|k-1}] \subseteq \mathcal{E}(z_{k-1}, \hat{x}_{k-1}, u_{k-1})E[e_{k-1|k-1}]. \quad (4.62)$$

Da mesma forma, para a etapa de assimilação de dados, a equação (4.23) pode ser analisada para obter:

$$\begin{aligned} E[e_{k|k}] &\subseteq E[(I - K\mathcal{G}(\kappa_k, \hat{x}_{k|k-1}))e_{k|k-1} - K\mathbf{v}_k], \\ E[e_{k|k}] &\subseteq E[(I - K\mathcal{G}(\kappa_k, \hat{x}_{k|k-1}))e_{k|k-1}] - KE[\mathbf{v}_k]. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Como \mathbf{v} tem média zero, isso leva a:

$$E[e_{k|k}] = E[(I - K\mathcal{G}(\kappa_k, \hat{x}_{k|k-1}))e_{k|k-1}]. \quad (4.64)$$

Conforme discutido no lema 6:

$$E[e_{k|k}] \subseteq (I - K\mathcal{G}_\kappa)E[e_{k|k-1}]. \quad (4.65)$$

Substituindo (4.62) em (4.65), obtém-se:

$$E[e_{k|k}] \subseteq (I - K\mathcal{G}_\kappa)\mathcal{E}_z E[e_{k-1|k-1}]. \quad (4.66)$$

Considerando a função candidata de Lyapunov

$$V(E[e_{k-1|k-1}]) \subseteq E[e_{k-1|k-1}]^T S^+ E[e_{k-1|k-1}], \quad (4.67)$$

sua diferença é dada por:

$$\Delta V \subseteq E[e_{k-1|k-1}]^T (\mathcal{E}_z^T (I - K\mathcal{G}_\kappa)^T S^+ (I - K\mathcal{G}_\kappa) \mathcal{E}_z - S^+) E[e_{k-1|k-1}]. \quad (4.68)$$

Como as condições de síntese para o GCKF no Teorema 8 implicam que as condições em (4.52) são satisfeitas, e desconsiderando os termos de ruído, uma vez que são sempre pelo menos semidefinidos positivos, chega-se a:

$$\begin{aligned} P^- &\geq \mathcal{E}(z_{k-1}, \hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1}) P^+ \mathcal{E}^T(z_{k-1}, \hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1}), \\ P^+ &\geq (I - K\mathcal{G}(\kappa_k, \hat{x}_{k|k-1})) P^- (I - K\mathcal{G}(\kappa_k, \hat{x}_{k|k-1}))^T. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Combinando as duas expressões obtém-se:

$$P^+ \geq (I - K\mathcal{G}_\kappa) \mathcal{E}_z P^+ \mathcal{E}_z^T (I - K\mathcal{G}_\kappa)^T. \quad (4.70)$$

que é equivalente a

$$(I - K\mathcal{G}_\kappa) \mathcal{E}_z P^+ \mathcal{E}_z^T (I - K\mathcal{G}_\kappa)^T - P^+ \leq 0. \quad (4.71)$$

Aplicando o complemento de Schur a (4.71)

$$\begin{bmatrix} -P^+ & (I - K\mathcal{G}_K)\mathcal{E}_z \\ * & (-P^+)^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (4.72)$$

como $S^+ = (P^+)^{-1}$, também segue que

$$\begin{bmatrix} -(S^+)^{-1} & (I - K\mathcal{G}_K)\mathcal{E}_z \\ * & -S^+ \end{bmatrix} \leq 0. \quad (4.73)$$

Aplicando outro complemento de Schur, é possível chegar a

$$-S^+ + \mathcal{E}_z^T (I - K\mathcal{G}_K)^T S^+ (I - K\mathcal{G}_K)\mathcal{E}_z \leq 0. \quad (4.74)$$

O que garante que a diferença da equação de Lyapunov em (4.74) é definida negativa e, portanto, prova que o filtro é assintoticamente não polarizado. \square

Observação 6. Desde que o modelo esteja dentro dos limites dados pelos vértices dos politopos, a convergência do erro é global, considerando o espaço de estados do erro.

4.4 Projeto do Filtro com Desempenho H_∞ Garantido

De acordo com a abordagem determinística para observadores de estado, é possível garantir um limitante superior para a norma H_∞ do ruído w para o erro de estimação, de modo a minimizar o ganho de energia do sinal exógeno desconhecido. Considerando o sistema qLPV dado por (1.2), as etapas de predição e assimilação de dados do KF e as técnicas para o tratamento das não linearidades, indicadas anteriormente, é possível projetar um filtro robusto aos ruídos com a garantia da minimização de um limitante superior da norma H_∞ , conforme o teorema abaixo:

Teorema 10. Dado $-1 \leq \mu \leq 1$, se existirem matrizes $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, uma matriz simétrica e definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e escalares η e γ , tais que as condições ¹

$$\begin{bmatrix} P - N - N^T & -\mu N^T + N\mathcal{E} - X\mathcal{G}\mathcal{E} & NB_w - X\mathcal{G}B_w & -X \\ * & -P + I + \mu[\mathcal{H}(N\mathcal{E} - X\mathcal{G}\mathcal{E})] & \mu(NB_w - X\mathcal{G}B_w) & -\mu X \\ * & * & -\eta^2 I & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.75)$$

são atendidas, com $\mathcal{H}(X) = X + X^T$, então o erro de estimação a posteriori em (4.6), utilizando

¹Note que nesta seção, para o desenvolvimento do filtro com desempenho H_∞ garantido, a matriz P não corresponde à matriz de covariância, e se refere a matriz associada à função candidata de Lyapunov. A nomenclatura não foi alterada devido ao uso comum da matriz P tanto para a matriz de covariância, quanto para a matriz da função de Lyapunov.

o filtro representado por (4.1) e (4.2), tem η e γ como limitantes superiores para a norma H_∞ do ruído de processo e medição, respectivamente. O ganho do filtro é dado por $K = N^{-1}X$.

Demonstração. Se existe $P > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que a função de Lyapunov, $V(e) = e^T P e > 0$, e a sua diferença, $\Delta V = V(e_{k|k}) - V(e_{k-1|k-1})$ é tal que

$$\Delta V + e_{k-1|k-1}^T e_{k-1|k-1} - \eta^2 w_{k-1}^T w_{k-1} - \gamma^2 v_k^T v_k \leq 0,$$

η e γ serão limitantes superiores para a norma H_∞ . Sendo η o limitante superior da norma H_∞ para o ruído de processo e γ para o ruído de medição.

Para garantir as condições:

$$\begin{bmatrix} e_{k|k}^T & e_{k-1|k-1}^T & w_{k-1}^T & v_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I-P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{k|k} \\ e_{k-1|k-1} \\ w_{k-1} \\ v_k \end{bmatrix} \leq 0. \quad (4.76)$$

Sendo o erro de estimação dado em (4.23) é possível obter:

$$\begin{bmatrix} -I & \mathcal{E} - K\mathcal{G}\mathcal{E} & B_w - K\mathcal{G}B_w & -K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{k|k} \\ e_{k-1|k-1} \\ w_{k-1} \\ v_k \end{bmatrix} = 0. \quad (4.77)$$

Utilizando o Lema de Finsler (de Oliveira and Skelton, 2001), $\exists x \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{Q} + \mathcal{X}\mathcal{B} +$

$\mathcal{B}^T \mathcal{X}^T < 0$, com $\mathcal{X} = \begin{bmatrix} N \\ \mu N \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e fazendo $X = NK$, onde:

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I-P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}, \quad (4.78)$$

e

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -I & \mathcal{E} - K\mathcal{G}\mathcal{E} & B_w - K\mathcal{G}B_w & -K \end{bmatrix}, \quad (4.79)$$

obtém-se o enunciado pelo Teorema 10.

□

Em resumo, o teorema pode ser aplicado conforme o Algoritmo 3 a seguir:

Algoritmo 3: Método Matemático para Obtenção dos Limitantes dos Ruídos η e γ e do Ganho K .

Entrada: $\bar{A}, B_w, \bar{C}, \mathcal{G}, \mathcal{E}, Q, R, \mu$

Saída: η, γ, K

- 1 Determine um intervalo de busca para a variável de folga μ
 - 2 **enquanto** μ estiver dentro do intervalo **faça**
 - 3 Resolva (4.75)
 - 4 Encontre η, γ e K
 - 5 Incremente μ
 - 6 **fim**
 - 7 Escolha o valor de μ dentro do intervalo que forneceu o melhor desempenho
 - 8 Resolva (4.75)
 - 9 Encontre η, γ e K
-

4.5 Projeto do Filtro Multiobjetivo

O GCKF e o filtro com H_∞ garantido apresentados nas seções 4.3 e 4.4, respectivamente, possuem objetivos diferentes. O primeiro filtro foi proposto para garantir um limitante superior para a variância do erro de estimação, tanto para o filtro recursivo, quanto para o filtro em estado estacionário. O segundo filtro apresentado foi proposto para garantir uma robustez aos ruídos, considerando um limitante superior mínimo para a norma H_∞ . Os objetivos dos filtros foram distintos, porém ambos foram propostos com base na estrutura preditora-corretora do filtro de Kalman e nas técnicas para o tratamento das não linearidades observadas nos sistemas. Diante disso, um terceiro filtro é proposto, combinando as características dos dois anteriores e, assim, tornando o problema em um problema multiobjetivo, com a garantia do limitante superior da matriz de covariância e o limitante superior da norma H_∞ .

Para o projeto deste novo filtro, as mesmas condições foram utilizadas, porém em conjunto, garantindo assim que os dois objetivos sejam atendidos. Unindo os Teoremas 8 e 10 e, apenas mantendo a mesma nomenclatura para as variáveis de folga adicionadas em cada teorema, obtém-se o seguinte teorema:

Teorema 11. *Dado $-1 \leq \mu \leq 1$, se existem matrizes $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{n \times p}$, uma matriz simétrica e definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e escalares η e γ , e também matrizes simétricas $S^- \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $S^+ \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que as condições*

$$\begin{aligned}
& \max_{S^-, S^+, Z, Y} \log \det(S^+), \text{ s.a} \\
& \begin{bmatrix} X^T + X - S^- & X^T \mathcal{E}_z & X^T B_w \\ * & S^+ & 0 \\ * & * & Q^{-1} \end{bmatrix} \geq 0 \\
& \begin{bmatrix} Y^T + Y - S^+ & Y - Z \mathcal{G}_K & Z \\ * & S^- & 0 \\ * & * & R^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, \\
& \begin{bmatrix} P - Y - Y^T & -\mu Y^T + Y \mathcal{E} - Z \mathcal{G} \mathcal{E} & Y B_w - Z \mathcal{G} B_w & -Z \\ * & -P + I + \mu [\mathcal{H}(Y \mathcal{E} - Z \mathcal{G} \mathcal{E})] & \mu(Y B_w - Z \mathcal{G} B_w) & -\mu Z \\ * & * & -\eta^2 I & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0,
\end{aligned} \tag{4.80}$$

são atendidas, com * correspondendo à transposta e $\mathcal{H}(X) = X + X^T$, então o ganho do filtro de Kalman proposto e as matrizes de covariância mínima garantidas do limite superior são obtidos executando $P^+ = (S^+)^{-1}$, $P^- = (S^-)^{-1}$ e $K = Y^{-1}Z$, além disso, o erro de estimação a posteriori em (4.6), utilizando o filtro representado por (4.1) e (4.2), tem η e γ como limitantes superiores para a norma H_∞ do ruído de processo e medição.

Observação 7. A prova das condições apresentadas no Teorema 11 já foram apresentadas nos Teoremas 8 e 10.

Ao se utilizar as variáveis de folga nos teoremas 8 e 10 foi possível derivar o teorema 11 garantindo o mesmo ganho, mas com variáveis de decisão diferentes. Caso não fossem utilizadas as mesmas variáveis de folga X e Y dos dois filtros descritos anteriormente, não seria possível separar a função da matriz P , fazendo com que ela tivesse a mesma função, tanto para a função de Lyapunov, quanto para a matriz de covariância. Ao utilizar tais variáveis de folga é possível manter a conexão entre os teoremas, com o mesmo ganho, mas com funções diferentes para cada uma delas.

Observação 8. Para a solução das condições LMIs apresentadas no Teorema 11, duas abordagens podem ser consideradas. A primeira abordagem é a abordagem de custo escalar, em que considera-se um peso (α_i) para cada objetivo da função, sendo custo = $\alpha_1 \eta + \alpha_2 \gamma + \alpha_3 \log \det(S^+)$ e, a partir daí, pondera-se os objetivos do projeto. A segunda abordagem é a abordagem com restrições, em que escolhe-se a variável objetivo como o $\log \det(S^+)$ e determina restrições máximas para os limitantes superiores da norma H_∞ , tal que $\eta < \alpha_1$ e $\gamma < \alpha_2$. Tais abordagens são conhecidas para técnicas de otimização multiobjetivo (Collette and Siarry, 2004).

Observação 9. O algoritmo correspondente ao método matemático para o caso multiobjetivo é a junção dos algoritmos 2 e 3.

De posse dos resultados obtidos com os Algoritmos 2 e 3, para os filtros GCKF em estado estacionário, filtro com H_∞ garantido e o filtro multiobjetivo, é possível utilizar o ganho

K encontrado em cada caso e aplicar ao sistema para a simulação. O Algoritmo 4 abaixo indica como tal simulação é realizada.

Algoritmo 4: Simulação dos Filtros em Estado Estacionário, H_∞ e Multiobjetivo.

Entrada: \bar{A} , B_w , \bar{C} , x_0 , \hat{x}_0 , Q , R , K_k , w , v

Saída: $\hat{x}_{k|k-1}$, $\hat{x}_{k|k}$

- 1 Inicialize o vetor de estados x_0 e o vetor de estados estimados \hat{x}_0
 - 2 Defina o número de iterações n_{max}
 - 3 Simule o sistema:
 - 4 $x_k = A(x_{k-1})x_{k-1} + B_u(x_{k-1})u_{k-1} + B_w w_{k-1}$
 - 5 $y_k = C(x_k)x_k + v_k$
 - 6 **enquanto** $n < n_{max}$ **faça**
 - 7 $\hat{x}_{k|k-1} = A(\hat{x}_{k-1|k-1})\hat{x}_{k-1|k-1} + B_u(\hat{x}_{k-1|k-1})u_{k-1}$
 - 8 $\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(y_k - C(\hat{x}_{k|k-1})\hat{x}_{k|k-1})$
 - 9 $n \leftarrow n + 1$
 - 10 **fim**
-

4.6 Resultados Numéricos - Não Linearidade na Dinâmica

A presente seção apresenta os resultados numéricos obtidos a partir da implementação dos métodos propostos no capítulo. É apresentado um exemplo numérico considerando não linearidades presentes na equação da dinâmica.

Para realizar os experimentos, foi utilizado um computador com processador Intel Core i7-11390H com 16Gb de RAM, Windows 11, Matlab versão R2023a e o resolvidor MOSEK (ApS, 2024) e o interpretador YALMIP (Löfberg, 2004).

Considere o sistema de Lorenz: (Lorenz, 1963; Quintana et al., 2020)

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= a(x_1(t) - x_2(t)), \\
 \dot{x}_2(t) &= bx_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t), \\
 \dot{x}_3(t) &= cx_3(t) + x_1(t)x_2(t), \\
 y(t) &= 0,5x_1(t) + 0,5x_2(t),
 \end{aligned} \tag{4.81}$$

com $a = -10$, $b = 28$ e $c = -\frac{8}{3}$. Deseja-se obter uma estimativa do estado não medido x_3 . Considerando que $-20 \leq x_1 \leq 20$, $-30 \leq x_2 \leq 25$ e $-2,5 \leq x_3 \leq 50$. Limites maiores poderiam ser considerados, o que seria mais conservador. Dessa forma, os limites eram valores menores que cobriam a região dos estados. O modelo de espaço de estados é dado por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 - x_3 & -1 & 0 \\ x_2 & 0 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} x + B_w w, \\ y &= \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} x + v. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Considere ainda, que o sistema é discretizado usando o método de Euler, de modo que $\dot{x} \approx \frac{1}{T_s}(x_k - x_{k-1})$, com tempo de amostragem $T_s = 0,01s$, resultando em:

$$\begin{aligned} x_k &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + T_s \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 - x_{3,k-1} & -1 & 0 \\ x_{2,k-1} & 0 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \right) x_{k-1} + B_w w_{k-1}, \\ y_k &= \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} x_k + v_k, \end{aligned} \quad (4.83)$$

em que $B_w = I$ é a matriz de ruído do processo, v é um ruído gaussiano com $R = 0,04I_{3 \times 3}$ e w com $Q = 0,0025I_{3 \times 3}$. Para as implementações dos sistemas a tempo discreto, considera-se que as condições iniciais dos estados são aleatórias, com distribuição normal com média 0,1 e desvio padrão 0,3, e as condições iniciais das estimativas são nulas.

4.6.1 O Tratamento das Não Linearidades

Reescrevendo o sistema de Lorenz discretizado na forma (4.7), obtém-se:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,28 & 0,99 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9733 \end{bmatrix}, \\ F &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \phi &= \begin{bmatrix} -0,01x_{1,k-1}x_{3,k-1} \\ 0,01x_{1,k-1}x_{2,k-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.84)$$

O problema encontrado é a incompatibilidade entre as não linearidades envolvendo os estados mensuráveis e não mensuráveis. Para lidar com essa incompatibilidade, dois métodos foram apresentados nos Capítulos 3 e 4: o primeiro método trata a incompatibilidade via DMVT (Pan et al., 2020). Sendo as não linearidades dadas por:

$$\phi = \begin{bmatrix} -T_s x_{1,k-1} x_{3,k-1} \\ T_s x_{1,k-1} x_{2,k-1} \end{bmatrix}. \quad (4.85)$$

A matriz Jacobiana pode ser obtida, usando o DMVT, de forma que:

$$\frac{d\phi}{dx} = \begin{bmatrix} -T_s x_{3,k-1} & 0 & -T_s x_{1,k-1} \\ T_s x_{2,k-1} & T_s x_{1,k-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.86)$$

então a matriz \mathcal{E}_z em (4.16) pode ser escrita como:

$$\mathcal{E}_z = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,28 - T_s x_{3,k-1}|_{z_1} & 0,99 & -T_s x_{1,k-1}|_{z_1} \\ T_s x_{2,k-1}|_{z_2} & T_s x_{1,k-1}|_{z_2} & 0,9733 \end{bmatrix}. \quad (4.87)$$

Usando o DMVT, ao procurar uma representação convexa de (4.87), pode-se usar apenas 16 vértices, porque as não linearidades semelhantes de linhas diferentes não podem ser agrupadas.

O segundo método lida com tal incompatibilidade de acordo com o trabalho de Quintana et al. (2020), então para o sistema de Lorenz, obtém-se como parte da dinâmica do erro, com base em (4.9) e (5.29):

$$\begin{aligned} e_{k|k-1} &= \bar{A} e_{k-1|k-1} + F \Delta\phi + B_w w_{k-1} \\ e_{k|k-1} &= \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,28 & 0,99 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9733 \end{bmatrix} e_{k-1|k-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta\phi + B_w w_{k-1}. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Dado que:

$$\Delta\phi = \left(\begin{bmatrix} -0,01 x_{1,k-1} x_{3,k-1} \\ 0,01 x_{1,k-1} x_{2,k-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0,01 \hat{x}_{1,k-1|k-1} \hat{x}_{3,k-1|k-1} \\ 0,01 \hat{x}_{1,k-1|k-1} \hat{x}_{2,k-1|k-1} \end{bmatrix} \right), \quad (4.89)$$

então:

$$\begin{aligned} e_{k|k-1} &= \left(\begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,28 & 0,99 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9733 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,01 x_{1,k-1} x_{3,k-1} \\ 0,01 x_{1,k-1} x_{2,k-1} \end{bmatrix} \right) x_{k-1} - \\ &- \left(\begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,28 & 0,99 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9733 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,01 \hat{x}_{1,k-1|k-1} \hat{x}_{3,k-1|k-1} \\ 0,01 \hat{x}_{1,k-1|k-1} \hat{x}_{2,k-1|k-1} \end{bmatrix} \right) \hat{x}_{k-1|k-1} + B_w w_{k-1}. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Como $e_{k|k-1} = x_k - \hat{x}_{k|k-1}$, $T_s = 0,01$ e ignorando o termo $B_w w_{k-1}$ para compactar a expressão, então obtém-se:

$$\bar{A}e_{k-1|k-1} + F\Delta\phi = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,28 - T_s x_{3,k-1} & 0,99 & 0 \\ T_s x_{2,k-1} & 0 & 0,9733 \end{bmatrix} x_{k-1} - \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,28 - T_s \hat{x}_{3,k-1|k} & 0,99 & 0 \\ T_s \hat{x}_{2,k-1|k} & 0 & 0,9733 \end{bmatrix} \hat{x}_{k-1|k}. \quad (4.91)$$

Fatorando o erro $x_{2,k-1}x_{1,k-1} - \hat{x}_{2,k-1|k}\hat{x}_{1,k-1|k} = x_{1,k-1}x_{2,k-1} - x_{1,k-1}\hat{x}_{2,k-1|k} + x_{1,k-1}\hat{x}_{2,k-1|k} - \hat{x}_{1,k-1|k}\hat{x}_{2,k-1|k}$ que é o mesmo que $x_{1,k-1}e_{2,k-1|k} + \hat{x}_{2,k-1|k}e_{1,k-1|k}$. Observe que diferentes fatorações podem ser aplicadas, no entanto, a fatoração utilizada obtém um número menor de vértices para o politopo. De forma que a dinâmica do erro pode ser representada por:

$$e_{k|k-1} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,28 - T_s \hat{x}_{3,k-1|k} & 0,99 & -T_s x_{1,k-1} \\ T_s \hat{x}_{2,k-1|k} & T_s x_{1,k-1} & 0,9733 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1,k-1|k} \\ e_{2,k-1|k} \\ e_{3,k-1|k} \end{bmatrix}. \quad (4.92)$$

Utilizando o método indicado por Quintana et al. (2020), a não linearidade x_1 pode ser considerada semelhante nas duas linhas da matriz \mathcal{E}_z , portanto, existem 3 não linearidades, obtendo 8 vértices do politopo. Os vértices do politopo são formados a partir de todas as combinações possíveis entre os máximos e mínimos de cada não linearidade considerada como incerteza no politopo.

Como não há não linearidades na equação de saída do exemplo numérico, a matriz \mathcal{G}_K que correspondente às não linearidades presentes na equação de saída é constante e igual à matriz C .

4.6.2 GCKF Recursivo

Conforme mencionado na Seção 4.1.1, para o DMVT, o Lema 5 é válido apenas para funções que produzem um único valor escalar e, portanto, cada linha de $\phi(\cdot)$ e $\psi(\cdot)$ deve ser considerada separadamente. Por outro lado, usando a fatoração de erro apresentada por Quintana et al. (2020), as não linearidades comuns podem ser consideradas como uma única não linearidade, mesmo que em linhas diferentes. Além disso, para tais casos, é possível usar os estados estimados, como sendo medidos, para realimentação. Tais simplificações nem sempre são possíveis, mas o método proposto pode ser aplicado mesmo sem elas, como indicado nos resultados, nos quais o método foi usado considerando casos com e sem simplificação do número de vértices do politopo.

Para a abordagem do GCKF recursivo, há uma atualização das matrizes de covariância a cada iteração. Observando (4.87), quatro não linearidades podem ser consideradas, de acordo

com a abordagem indicada por Pan et al. (2020), pelo DMVT, conforme destacado em vermelho abaixo:

$$\begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,28 - T_s x_{3,k-1}|_{z_1} & 0,99 & -T_s x_{1,k-1}|_{z_1} \\ T_s x_{2,k-1}|_{z_2} & T_s x_{1,k-1}|_{z_2} & 0,9733 \end{bmatrix}. \quad (4.93)$$

Como existem quatro não linearidades e a matriz foi obtida via DMVT, então só é possível estimar os estados usando um polítopo com 16 vértices para a matriz de dinâmica de erro.

Ao analisar (4.92), observa-se uma grande semelhança com a matriz anterior, mesmo que obtida via abordagem indicada por Quintana et al. (2020). Observa-se novamente, quatro não linearidades e assim é possível obter também um polítopo com 16 vértices. No entanto, a não linearidade x_1 pode ser considerada semelhante em ambas as linhas da matriz da dinâmica de erro, fazendo com que o número de não linearidades seja reduzido para três e, consequentemente, o número de vértices do polítopo para 8.

Além da simplificação considerando x_1 comum nas duas últimas linhas da matriz, é possível observar uma diferença em relação aos estados x_2 e x_3 , que pela abordagem do DMVT eram os próprios estados, mas na abordagem via fatoração do erro, são os estados estimados, conforme indicado abaixo:

$$\begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,28 - T_s \hat{x}_{3,k-1|k} & 0,99 & -T_s x_{1,k-1} \\ T_s \hat{x}_{2,k-1|k} & T_s x_{1,k-1} & 0,9733 \end{bmatrix}. \quad (4.94)$$

Considerando os estados estimados \hat{x}_2 e \hat{x}_3 , uma outra maneira de representar os vértices do polítopo para o filtro de Kalman com atualização em tempo real é considerar tais estados estimados como estados medidos e usá-los a partir da realimentação a cada iteração realizada pelo filtro que os estima. Com os estados realimentados, apenas uma não linearidade existirá na matriz, o estado x_1 e, portanto, dois vértices do polítopo podem ser considerados, reduzindo a complexidade do sistema.

4.6.3 GCKF em Estado Estacionário

O filtro de estado estacionário possui apenas uma matriz de covariância constante para todo o processo de estimação. Isso reduz o custo computacional da estimativa e se torna uma possibilidade para estimar estados de sistemas não lineares usando o filtro de Kalman de estado estacionário. A abordagem que considera a representação de não linearidades usando o DMVT, vista em (5.30), possui quatro não linearidades e, portanto, 16 vértices para o sistema, conforme explicado na seção anterior. Por outro lado, observando (4.92), podem-se considerar três não linearidades, de acordo com a abordagem da fatoração do erro, assim como no filtro recur-

sivo. Como no filtro em estado estacionário não há a atualização dos estados estimados a cada iteração, então não é possível utilizar os estados estimados para realimentar o sistema, porém ao se utilizar a técnica da fatoração do erro, pode-se considerar uma abordagem de escalonamento do ganho de Kalman K , de tal forma que o ganho dependerá apenas dos estados mensuráveis, ou seja, dos estados estimados $\hat{x}_{2,k-1|k-1}$ e $\hat{x}_{3,k-1|k-1}$, obtendo assim quatro matrizes de ganho que são escalonadas com as funções de pertinência relativas aos máximos e mínimos das não linearidades consideradas nos vértices do polítopo.

4.6.4 Resultados Simulados

Os resultados simulados apresentados mostram um caminho promissor para novas técnicas de estimativa de estado.² Cada um dos métodos possui suas particularidades, vantagens e desvantagens. A Tabela 4.1 apresenta uma comparação contendo o índice do erro quadrático médio, do inglês *root mean-square error* (RMSE), o traço da matriz de covariância, $Tr(P^+)$ ³, e o tempo de processamento, T^{CPU} , de uma iteração (em segundos) para cada método simulado e adicionalmente, o EKF, para fins de comparação. Em relação às siglas para representar os métodos: ON refere-se ao filtro recursivo; OFF refere-se ao filtro em estado estacionário. As letras F e G correspondem às abordagens de representação da dinâmica do erro, F à fatoração do erro e G ao DMVT. A sigla ESC corresponde ao método do ganho escalonado e FF corresponde ao método de realimentação do estado estimado. Por fim, os números ao final de cada sigla indicam o número de não linearidades consideradas em cada implementação.

A simulação de GCKF em estado estacionário, aplicando DMVT com 4 não linearidades, resultou na matriz de ganho K dada por:

$$K = \begin{bmatrix} 1,2627 & 0,1154 \\ 0,1522 & 0,9641 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.95)$$

a matriz S^+ , que indica o limite superior para a matriz de covariância, foi encontrada:

$$S^+ = \begin{bmatrix} 10,77 & -1,77 & 0 \\ -1,77 & 13,38 & 0 \\ 0 & 0 & 17,07 \end{bmatrix}, \quad (4.96)$$

assim, as 16 matrizes de covariância encontradas não excedem os limites dados por S^+ .⁴

²Para as simulações realizadas foram utilizados os teoremas e algoritmos indicados anteriormente. Para o caso do GCKF recursivo, as simulações se basearam no teorema 7 e a execução do algoritmo 1. Para a simulação do GCKF em estado estacionário, as simulações se basearam no teorema 8 e a execução dos algoritmos 2 e 4.

³Por mais que o objetivo das condições LMIs tenha relação com o determinante da matriz de covariância, os resultados são apresentados utilizando o traço da matriz de covariância por ser mais comumente utilizado na literatura.

⁴As matrizes de ganho e covariância das outras simulações não foram apresentadas devido ao fato de haver matrizes diferentes em cada simulação, especialmente nas simulações GCKF recursivo.

Tabela 4.1: Comparação entre técnicas simuladas - Dinâmica Não Linear - Lorenz 1

	RMSE - x_1	RMSE - x_2	RMSE - x_3	Tr (P^+)	T^{CPU}
OFF-KF-G4	0,26	0,23	0,26	0,22	$6,7 \times 10^{-3}$
OFF-KF-F3	0,15	0,35	0,28	3,60	$6,6 \times 10^{-3}$
OFF-KF-F-ESC	0,13	0,30	0,31	2,75	8×10^{-3}

Ao analisar a Tabela 4.1, observa-se potencial nas metodologias propostas para estimação de estados de sistemas não lineares. Para o caso considerado, em que não linearidades estão presentes nos estados, é perceptível que o GCKF em estado estacionário apresenta bons resultados com a aplicação dos métodos de representação da dinâmica de erros estudados. Em todos os casos do filtro em estado estacionário, o erro converge assintoticamente para zero, uma vez que as LMIs são factíveis. Em relação ao tempo de processamento, o GCKF em estado estacionário apresenta um tempo de processamento baixo, o que é uma vantagem em relação ao custo computacional. O RMSE dos estados estimados é próximo em todos os casos, apresentando um índice menor para o estado x_3 , que corresponde ao estado não medido. Para o traço da matriz de covariância, ao utilizar a técnica de fatoração, observa-se um traço maior, mas que decresce conforme o número de vértices do politopo diminui.

A abordagem do filtro de estado estacionário se mostra eficaz em relação ao tempo de processamento, pois não há necessidade de executar LMIs a cada iteração, como o filtro recursivo, nem da linearização analítica de estados, como no EKF. O filtro de estado estacionário já tem o tempo de processamento como um ponto positivo, além de ser assintoticamente não polarizado. Com base nas estimações obtidas, é possível concluir que as estimativas convergiram para os estados, utilizando o GCKF em estado estacionário. Por outro lado, para este exemplo, o EKF e o GCKF com atualização em tempo real não convergiram devido a limitações de observabilidade, assim, apenas o GCKF em estado estacionário obteve as estimativas de estado, indicando que a abordagem é promissora do ponto de vista computacional e de convergência.

A dinâmica do erro para o OFF-KF-G4 é indicada na Figura 4.1, juntamente com a variância. Como pode ser visto na Figura 4.1, o erro permanece dentro da faixa de variância do erro (adotada como 3σ), não excedendo os limites superior e inferior, conforme proposto na metodologia. Considerando uma distribuição gaussiana, 3σ representa uma chance de 99,74% do erro estar dentro da faixa de variância do erro.

Para ilustrar o Teorema 9, foram realizadas 1000 simulações para o sistema de Lorenz utilizando GCKF em estado estacionário, considerando a estimativa inicial dos estados como $[20, 20, 20]$ e estados iniciais aleatórios para o sistema (com distribuição normal com média 0,1 e desvio padrão 0,3), garantindo uma estimativa inicial polarizada. A Figura 4.2 indica a evolução do erro médio de estimativa das 1000 simulações, ilustrando que o GCKF é assintoticamente não polarizado, uma vez que o erro médio de estimativa converge para zero.

O sistema (4.83) tem uma limitação de observabilidade e, portanto, o EKF e o GCKF recursivo não convergem. Assim, um segundo sistema de Lorenz foi analisado, considerando

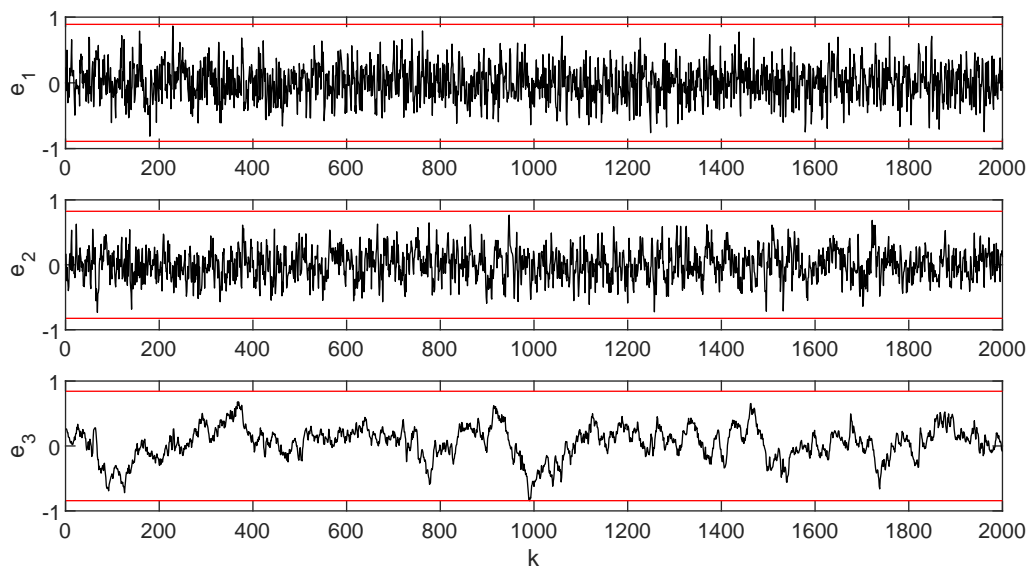


Figura 4.1: Evolução do erro de estimativa. Em preto: o erro e em vermelho: os limites dados pela variância em 3σ . GCKF em estado estacionário para o sistema de Lorenz com medições em x_1 e x_2 .

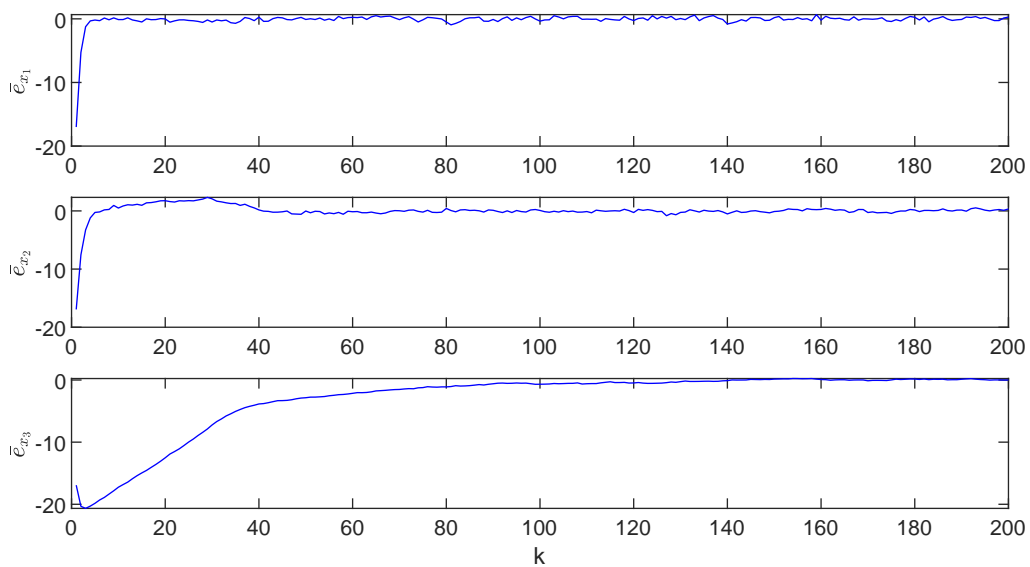


Figura 4.2: Evolução do erro médio de estimativa para 1000 simulações. GCKF em estado estacionário para o sistema de Lorenz com medições em x_1 e x_2 .

Tabela 4.2: Comparação entre técnicas simuladas - Dinâmica Não Linear - Lorenz 2

	RMSE - x_1	RMSE - x_2	RMSE - x_3	Tr (P^+)	T^{CPU}
ON-KF-G4	0,29	1,28	0,21	5,27	164,53
ON-KF-F4	0,26	0,57	0,27	0,85	162,77
ON-KF-F3	0,25	0,47	0,25	0,62	121,02
ON-KF-FF1	0,21	0,45	0,22	0,40	91,98
OFF-KF-G4	0,31	1,46	0,55	4,28	7×10^{-3}
OFF-KF-F3	0,18	0,30	0,29	0,33	$6,8 \times 10^{-3}$
OFF-KF-F-ESC	0,23	0,54	0,27	0,71	$8,3 \times 10^{-3}$
EKF	0,13	0,24	0,14	0,10	$11,3 \times 10^{-3}$

medições nos estados x_1 e x_3 , sendo a matriz C dada por:

$$C = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}. \quad (4.97)$$

Aguirre e Letellier (2011) apresentam uma ordem de qualidade para a reconstrução do espaço de estados, que é fortemente influenciada pelas características de observabilidade, para alguns sistemas não lineares. Usando a Decomposição de Valor Singular, do inglês *Singular Value Decomposition* (SVD), observa-se que, para o sistema de Lorenz, a qualidade de observabilidade está na seguinte ordem: $x_3 \triangleright x_1 \triangleright x_2$. A ordem da qualidade de observabilidade do sistema é dada do maior para o menor valor singular. O maior valor singular corresponde às geometrias locais mais simples. Assim, a matriz C de (4.97) é usada para a análise, uma vez que há medições nas duas variáveis com a maior observabilidade.

A Tabela 4.2 indica os valores obtidos com a implementação do sistema de Lorenz considerando medidas em x_1 e x_3 . Devido à qualidade de observabilidade dos estados, houve convergência em todos os métodos, porém observa-se que, tanto para o GCKF recursivo quanto para o GCKF em regime permanente, a utilização do DMVT obteve traços da matriz de covariância maiores. Além disso, para o filtro recursivo, conforme o número de vértices do polítopo diminuía era obtido um valor menor para o traço da matriz de covariância. Era esperado que a técnica do ganho escalonado para o GCKF em regime permanente obtivesse um menor traço, porém não ocorreu. O índice RMSE dos estados estimados permanece em faixas próximas, mas observa-se que, utilizando DMVT, tanto para o filtro recursivo quanto para o filtro em estado estacionário, os índices RMSE são maiores. Para o GCKF com atualização em tempo real (recursivo), o uso dos estados estimados para realimentação a cada iteração gera resultados com índices RMSE e traço da matriz de covariância menores. Para o caso estudado, fica claro que o EKF apresenta valores de RMSE e traço da matriz de covariância ligeiramente inferiores aos valores apresentados para o GCKF em estado estacionário. No entanto, o EKF não obteve condições viáveis no primeiro sistema de Lorenz estudado, pois foi polarizado. Em relação ao custo computacional, o GCKF ainda apresenta um custo computacional ligeiramente inferior ao do EKF. Assim, fica claro que a grande vantagem do GCKF é sua não polarização.

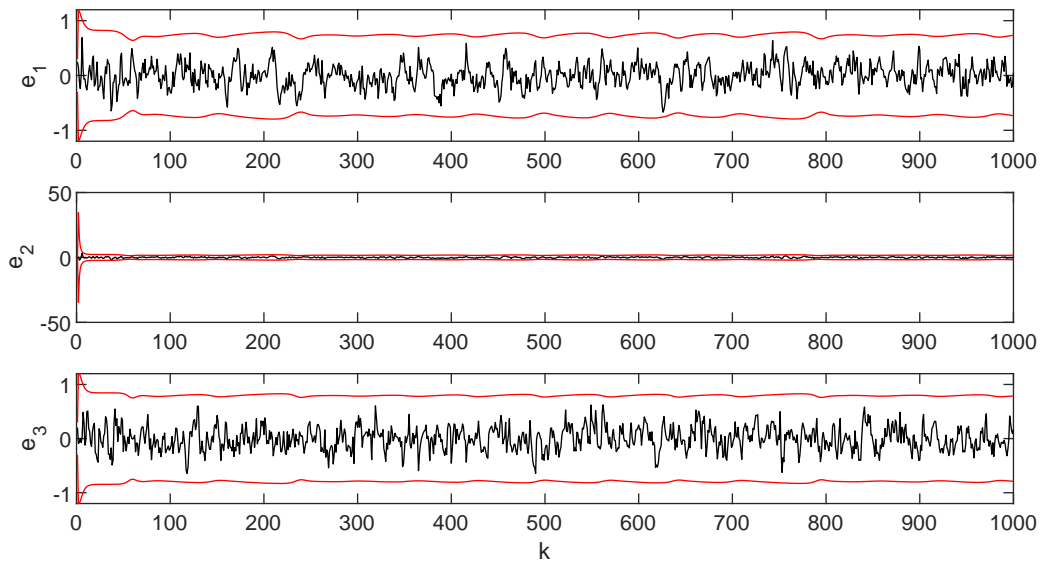


Figura 4.3: Evolução do erro de estimativa. Em preto: o erro e em vermelho: os limites dados pela variância em 3σ . GCKF recursivo para o sistema de Lorenz com medições em x_1 e x_3 .

A dinâmica do erro para este último caso é indicada na Figura 4.3, juntamente com a variância.

Como pode ser observado na Figura 4.3, o erro permanece dentro da faixa de variância do erro (adotada como 3σ), não ultrapassando os limites superior e inferior, conforme proposto na metodologia. Para melhor visualização, foi aplicado um zoom na Figura 4.3, conforme indicado na Figura 4.4.

4.6.5 Filtro com Desempenho H_∞ Garantido

Ao se utilizar o método da fatoração do erro, conforme indicado em (4.92), é possível considerar três não linearidades, levando a um politopo de oito vértices. Desta forma, aplica-se o Algoritmo 3, baseado no Teorema 10, para obter os limitantes dos ruídos de processo (η) e de medição (γ) e o ganho K . Utilizando a variável de folga $\mu = 0,99$ a aplicação do algoritmo encontrou os seguintes valores: $\eta = 84,37$ e $\gamma = 149,77$ e o ganho K :

$$K = \begin{bmatrix} 1,1144 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0,0703 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.98)$$

A estimação dos estados está representada na Figura 4.5.

Ao observar os estados estimados, o erro quadrático médio (RMSE) de cada estado é calculado como um índice de desempenho, obtendo-se o que é indicado na Tabela 4.3.

Em relação ao RMSE, o estado x_3 que é o único estado não medido, não possui o maior RMSE, indicando um bom resultado da estimação dos estados não mensuráveis. De forma a avaliar os limitantes encontrados, computa-se o ganho \mathcal{L}_2 ao longo do tempo, considerando o

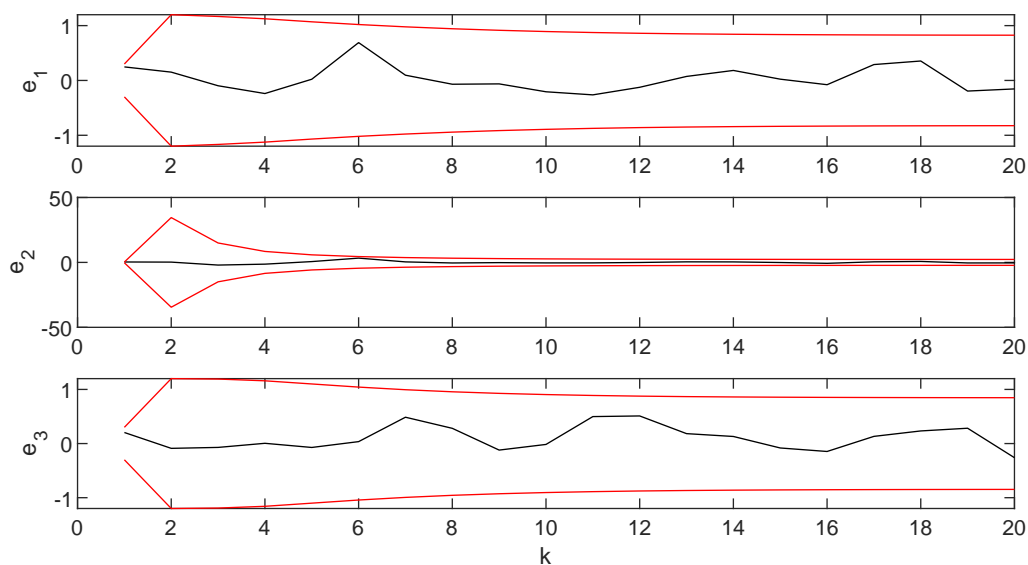


Figura 4.4: Zoom da evolução do erro de estimativa. Em preto: o erro e em vermelho: os limites dados pela variância em 3σ . GCKF recursivo para o sistema de Lorenz com medições em x_1 e x_3 .

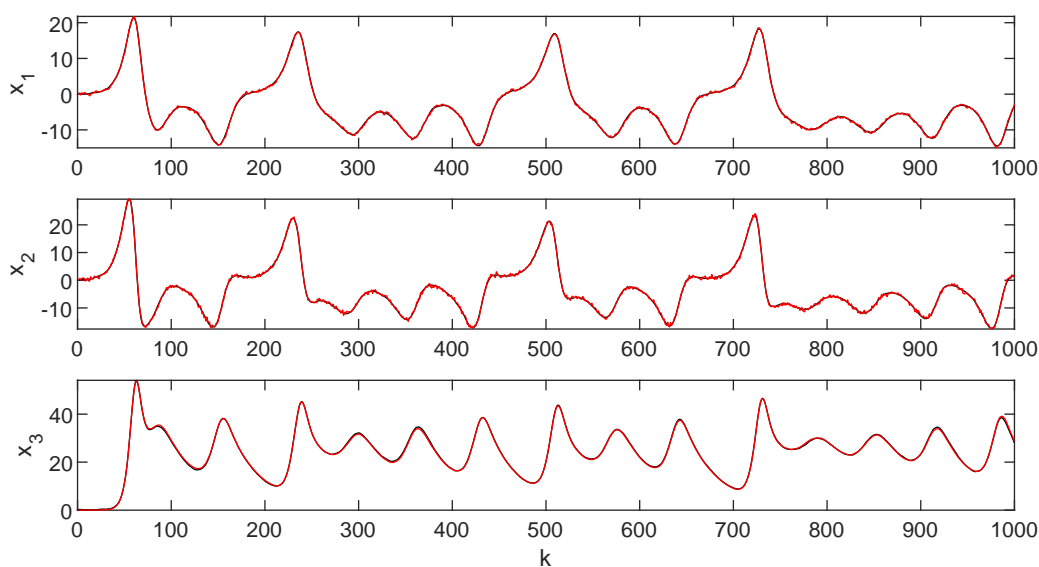


Figura 4.5: Evolução dos estados. Em preto os estados e em vermelho os estados estimados. Filtro não linear com H_∞ garantido considerando a fatoração do erro para a representação da dinâmica do erro.

Tabela 4.3: RMSE dos estados estimados - Filtro não linear com H_∞ garantido

Estados	RMSE
x_1	0,24
x_2	0,41
x_3	0,28

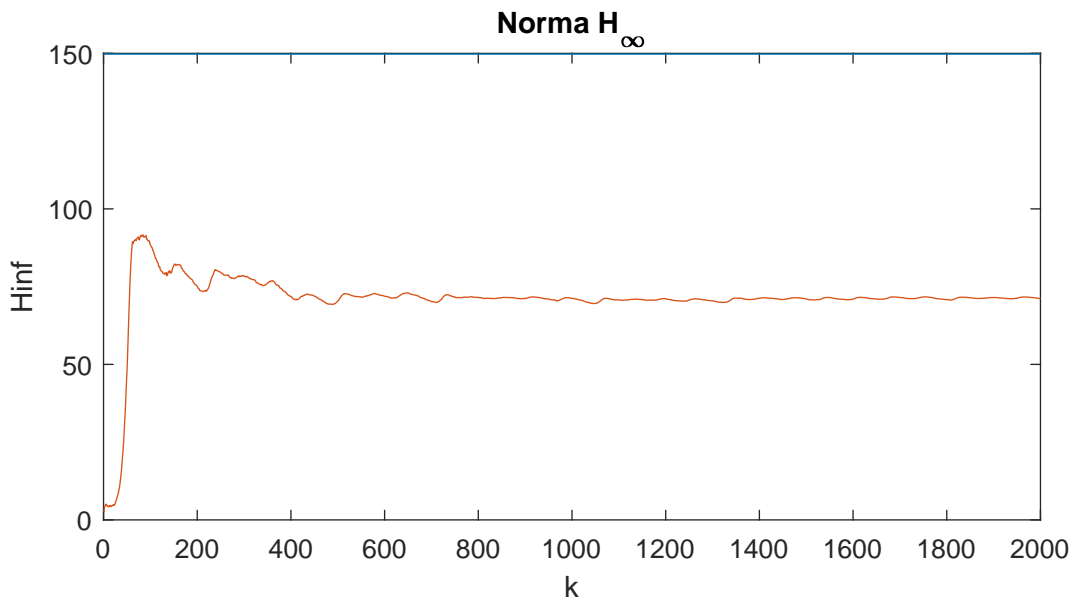


Figura 4.6: Ganho \mathcal{L}_2 ao longo do tempo para a simulação e o limitante superior para ruído de medição. Em azul o limitante superior encontrado pelas condições LMIs e em vermelho a norma H_∞ do sistema. Sistema de Lorenz.

ruído de medição na Figura 4.6 e o ruído de processo na Figura 4.7

Ao analisar o ganho \mathcal{L}_2 ao longo do tempo, percebe-se que mesmo com um limitante superior alto, encontrado pelas condições LMIs, o ganho \mathcal{L}_2 foi bem inferior quando comparado ao limitante. Isso demonstra a eficiência da metodologia proposta em relação à robustez aos ruídos.

4.6.6 Filtro Multiobjetivo

A observabilidade do sistema de Lorenz foi analisada anteriormente, desta forma, para a implementação do filtro multiobjetivo a tempo discreto, utilizou-se o sistema de Lorenz considerando a matriz C conforme a equação (4.97) em que os estados medidos são x_1 e x_3 . Além disso, foi utilizada apenas a técnica da fatoração do erro para tratar o problema das não linearidades, visto que tal técnica permite o uso de menos vértices para o politopo, conforme indicado nos resultados simulados anteriormente. Para manter um padrão nas simulações, a variável de folga μ foi definida a mesma para as duas abordagens: por restrição e escalar. Para a abordagem do custo com restrição, limita-se os pesos para η e γ e a partir daí determina-se a minimização da variância. Por outro lado a abordagem de custo escalar pondera os três objetivos e, nesse caso, os objetivos para a minimização de η e γ tiveram um custo maior, considerando $\alpha_1 = 0,4$, $\alpha_2 = 0,4$ e $\alpha_3 = 0,2$, sendo o custo dado por $\alpha_1\eta + \alpha_2\gamma + \alpha_3\log\det(S^+)$ e, assim, a minimização da variância obteve um valor maior para o traço da matriz. A variável de folga definida foi $\mu = 0,7$, já que para tal valor as LMIs foram factíveis em todos os casos

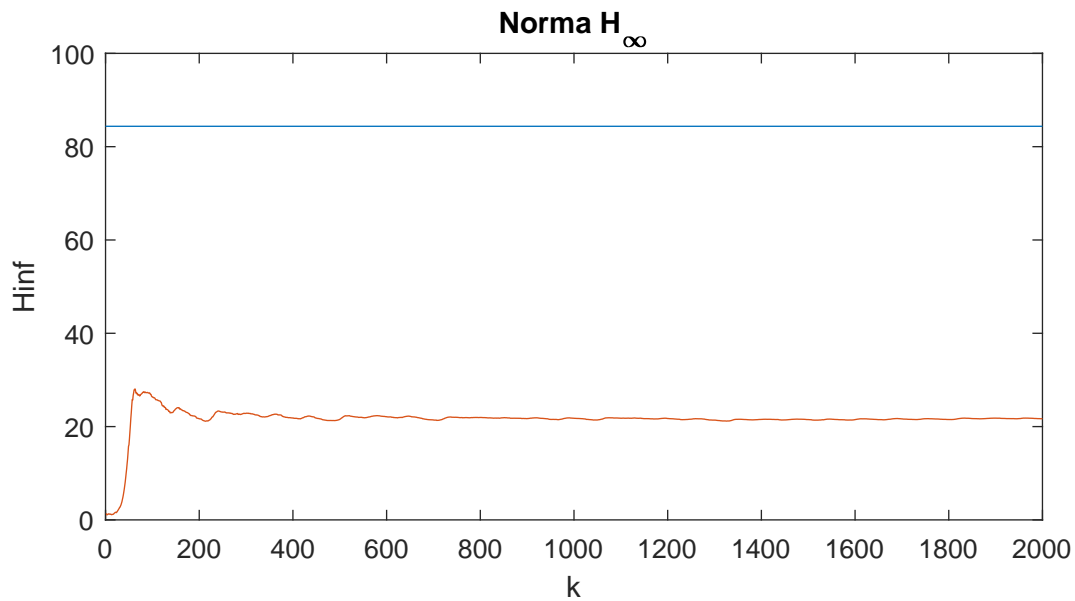


Figura 4.7: Ganho \mathcal{L}_2 ao longo do tempo para a simulação e o limitante superior para ruído de processo. Em azul o limitante superior encontrado pelas condições LMIs e em vermelho a norma H_∞ do sistema. Sistema de Lorenz.

Tabela 4.4: Comparação entre técnicas simuladas - Filtro Multiobjetivo - Lorenz

Ruído	Restrição		Escalar	
	Branco	Senoidal	Branco	Senoidal
η	13,9642	13,9642	12,5736	12,5736
γ	13,9642	13,9642	11,6905	11,6905
RMSE - x_1	0,2214	0,2299	0,2429	0,2517
RMSE - x_2	0,5202	0,5078	0,6903	0,6792
RMSE - x_3	0,3091	0,3116	0,3966	0,3986
Tr (P^+)	0,5838	0,5838	1,2544	1,2544
T^{CPU}	0,0071	0,0077	0,0078	0,0064

estudados.⁵

Dado que as abordagens para resolução de técnicas de otimização multiobjetivo podem gerar diversos resultados factíveis, e considerando os pesos diferentes α_i aplicados a cada função objetivo, foi obtido o conjunto de soluções de Pareto (ou soluções eficientes), que mostra diversos valores de soluções para o problema multiobjetivo. A Figura 4.8 indica as possíveis soluções encontradas para a abordagem de custo com restrição, em que S_{custo} corresponde ao custo da inversa da matriz de covariância.

A partir das possíveis soluções encontradas em cada abordagem, uma das soluções foi escolhida para cada caso, para a análise dos resultados obtidos, conforme indicado na Tabela 4.4.

Ao analisar os resultados indicados na tabela, percebe-se uma pequena diferença entre

⁵A simulação foi realizada com base no teorema 11 e a execução do algoritmo 4 para simular os resultados obtidos.

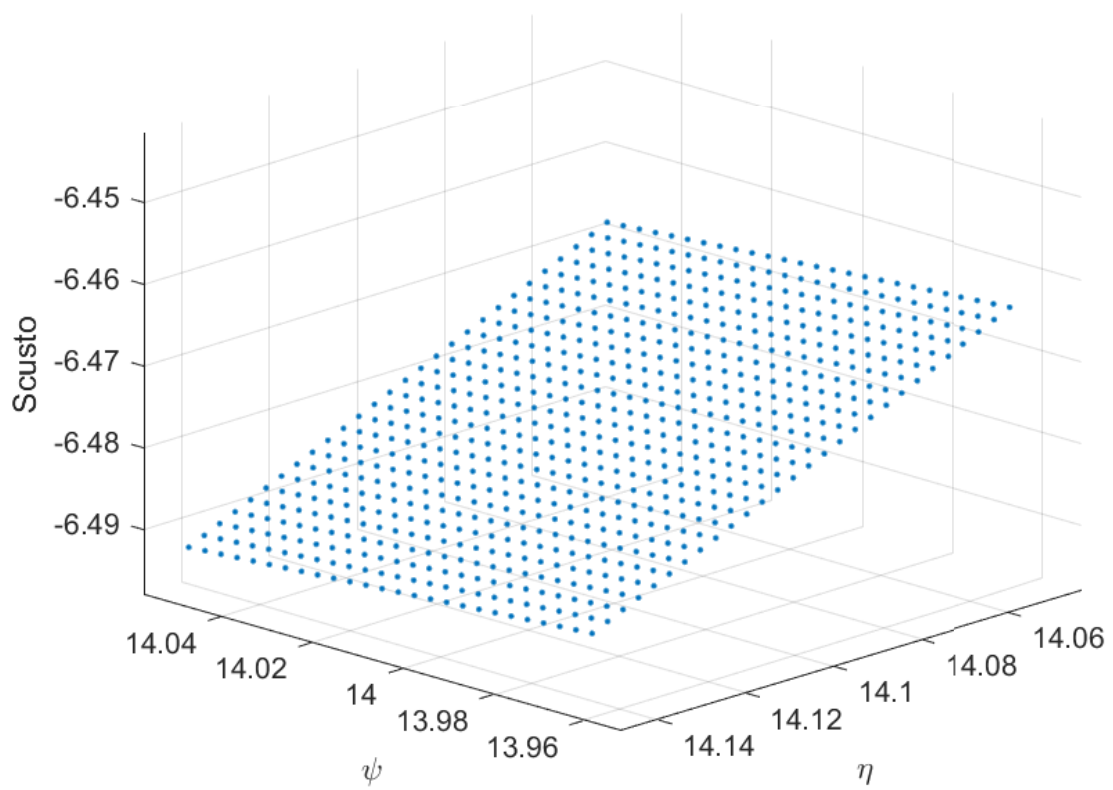


Figura 4.8: Solução Pareto para o sistema de Lorenz considerando a abordagem por restrição para a técnica de resolução da otimização multiobjetivo.

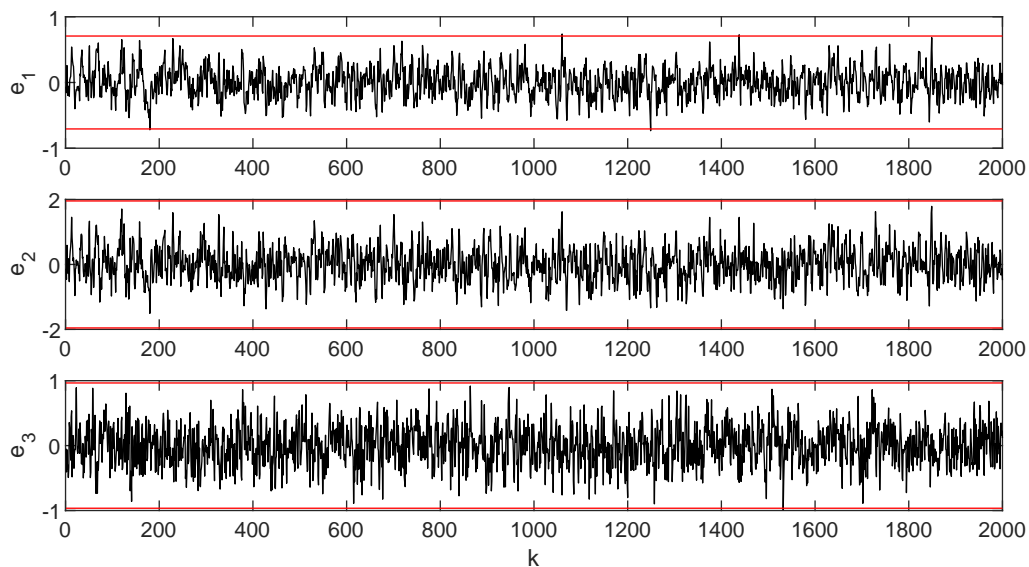


Figura 4.9: Evolução do erro de estimativa. Em preto: o erro e em vermelho: os limites dados pela variância em 3σ . Filtro multiobjetivo com custo por restrição para o sistema de Lorenz.

o RMSE dos estados, e , considerando que o estado x_2 é o único estado não medido, ele possui o maior índice RMSE. Além disso, a abordagem ainda mantém um tempo de processamento baixo, como pode-se notar pela linha T^{CPU} . Ainda observa-se pela tabela que para cada abordagem foram realizadas simulações considerando dois tipos de ruídos diferentes no sistema, o ruído branco e o ruído senoidal. Os dois ruídos foram aplicados separadamente para observar a robustez do sistema aos ruídos, uma vez que a abordagem multiobjetivo possui a garantia da minimização do limitante superior para a norma H_∞ . Os resultados alcançados são satisfatórios, mas o que apresenta a diferença entre a abordagem de custo escalar para a abordagem de custo com restrição é em relação às prioridades na função objetivo, visto que na abordagem escalar a prioridade era dada pela minimização da norma \mathcal{H}_∞ , visto que os pesos de ponderação α_i eram maiores para tal objetivo. Por outro lado, pela técnica de restrição, o objetivo era a minimização da covariância, visto que os limitantes da norma \mathcal{H}_∞ só possuíam um limitante máximo.

Em relação ao objetivo da minimização da variância, a Figura 4.9 apresenta a dinâmica do erro juntamente com os limites da variância encontrados, para o caso da técnica de otimização por restrição. Observa-se que o erro de estimativa para os três estados se manteve dentro dos limites encontrados. Devido a similaridade dos resultados gráficos, para o caso escalar não foi apresentado, porém o erro também se mantém dentro dos limites encontrados.

Em relação ao objetivo de robustez aos ruídos, a norma \mathcal{L}_2 foi traçada indicando que ela se mantém abaixo do limitante superior obtido pelas condições LMIs. As Figuras 4.10 e 4.11 apresentam o ganho \mathcal{L}_2 para o sistema com ruído branco e com ruído senoidal, respectivamente.

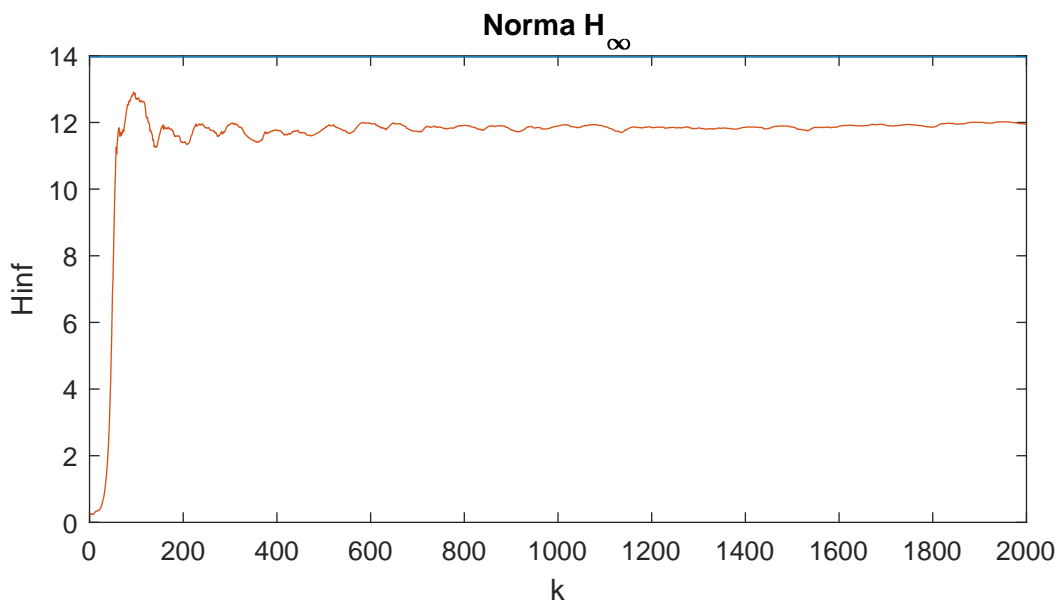


Figura 4.10: Ganho \mathcal{L}_2 ao longo do tempo para a simulação e o limitante superior para ruído de processo. Em azul o limitante superior encontrado pelas condições LMIs e em vermelho a norma H_∞ do sistema. Filtro multiobjetivo com custo por restrição para o sistema de Lorenz com ruído branco.

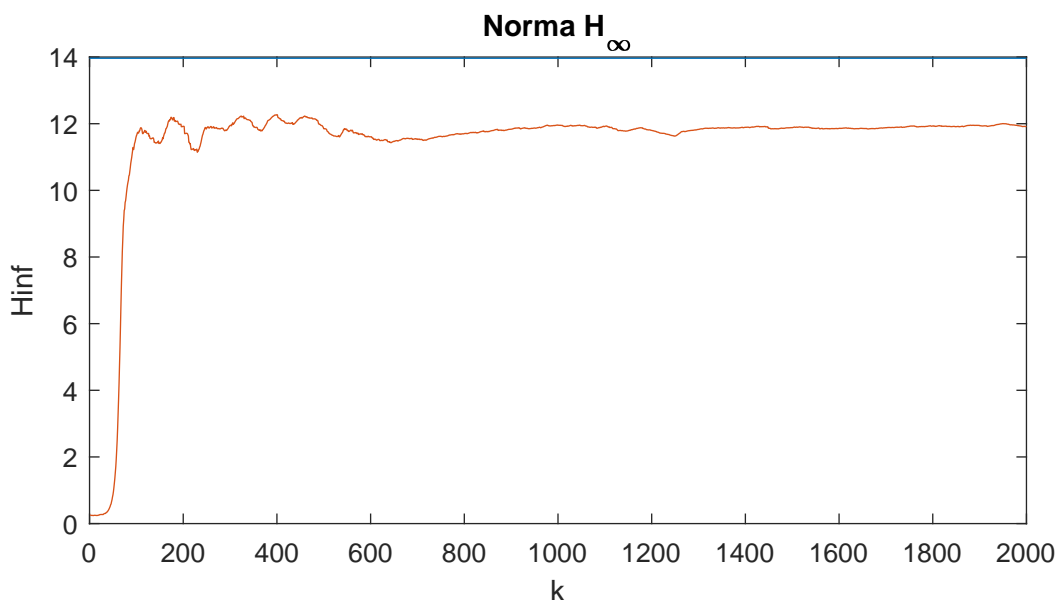


Figura 4.11: Ganho \mathcal{L}_2 ao longo do tempo para a simulação e o limitante superior para ruído de processo. Em azul o limitante superior encontrado pelas condições LMIs e em vermelho a norma H_∞ do sistema. Filtro multiobjetivo com custo por restrição para o sistema de Lorenz com ruído senoidal.

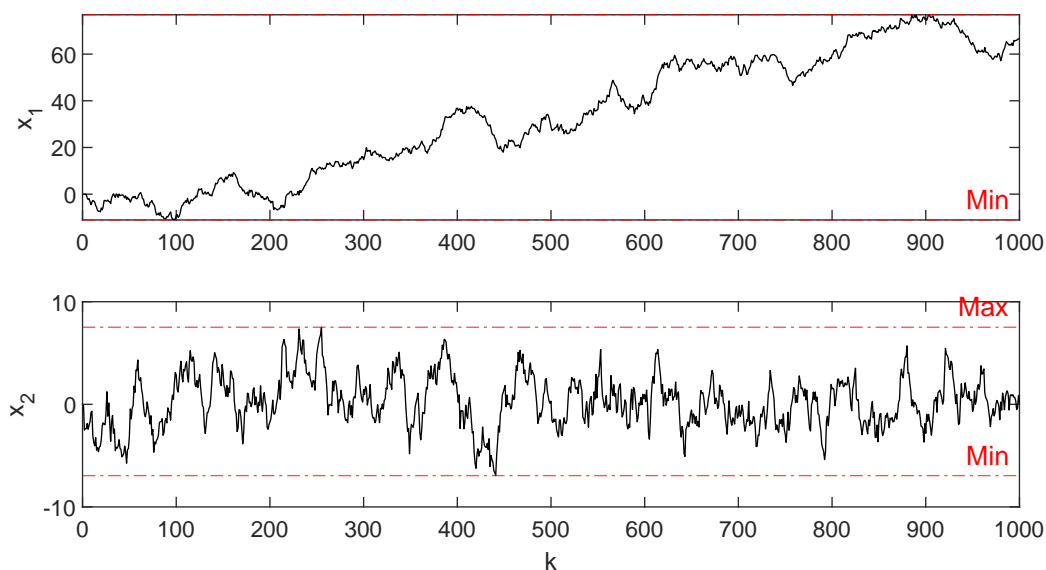


Figura 4.12: Simulação da trajetória dos estados com indicação dos limites máximo e mínimo. Em preto as trajetórias dos estados e em vermelho os limites.

4.7 Resultados Numéricos - Não Linearidade na Equação de Saída

A presente seção apresenta os resultados numéricos obtidos a partir da implementação dos métodos propostos neste capítulo. É apresentado um exemplo numérico considerando não linearidades presentes na equação de saída. Considere o sistema numérico a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0,1 \\ 0 & 0,9 \end{bmatrix} x_{k-1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w_{k-1}, \\ y_k &= \begin{bmatrix} x_{2,k} + 100 & x_{2,k} \end{bmatrix} x_k + v_k. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Considerando que $-11,0554 \leq x_1 \leq 76,8531$ e $-6,9483 \leq x_2 \leq 7,5125$, considerados próximos aos valores máximo e mínimo dos estados encontrados pela simulação. Um limite mais alto poderia ser considerado, o que seria mais conservador. A simulação da trajetória dos estados é utilizada para obter informações sobre o limite intervalar das variáveis de estado.

O sistema numérico foi simulado. Inicialmente, foi realizada uma simulação apenas para observar a trajetória dos estados, considerando o sistema descrito. Dessa forma, as trajetórias definiram os limites superior e inferior descritos. A figura 4.12 mostra a simulação da trajetória dos estados.

A simulação da trajetória dos estados serviu para obter informações sobre o limite do intervalo das variáveis de estado.

Sendo v_k e w_k ruídos Gaussianos, considera-se para as simulações que as condições ini-

ciais dos estados e estimativas são aleatórias, com distribuição normal com média 0,1 e desvio-padrão 0,3, e a matriz de covariância inicial corresponde a $P_{k-1|k-1} = 100I_{2 \times 2}$ e $Q = 0,0025I_{2 \times 2}$ e $R = 0,04I_{1 \times 1}$.

4.7.1 O Tratamento das Não Linearidades

Ao analisar (4.99), percebe-se que não há não linearidades presentes na dinâmica do sistema descrito. Essa análise é realizada observando-se que a matriz A é constante. Dessa forma, a matriz \mathcal{E}_z , correspondente às não linearidades presentes na dinâmica será constante e igual à matriz A . Por outro lado, ao observar a equação de medição y_k , nota-se a presença de não linearidades associadas à equação de saída do sistema. A matriz C não é constante e depende do estado x_2 , assim, a matriz \mathcal{G}_k deixa de ser constante, como visto no exemplo do sistema de Lorenz.

Reescrevendo o sistema na forma de (4.7):

$$\begin{aligned} x_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0,1 \\ 0 & 0,9 \end{bmatrix} x_{k-1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w_{k-1}, \\ y_k &= \begin{bmatrix} 100 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} [x_{1,k}x_{2,k} + x_{2,k}^2] + v_k, \end{aligned} \quad (4.100)$$

então:

$$\begin{aligned} \bar{C} &= \begin{bmatrix} 100 & 0 \end{bmatrix}, \\ G &= \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \\ \Psi &= \begin{bmatrix} x_{1,k}x_{2,k} + x_{2,k}^2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.101)$$

O problema encontrado é a incompatibilidade entre as não linearidades que envolvem estados mensuráveis e não mensuráveis. Para tratar essa incompatibilidade, dois métodos foram apresentados: o primeiro método trata a incompatibilidade por meio da aplicação do DMVT (Pan et al., 2020). As não linearidades são:

$$\Psi = \begin{bmatrix} x_{1,k-1}x_{2,k-1} + x_{2,k-1}^2 \end{bmatrix}. \quad (4.102)$$

A matriz Jacobiana pode ser obtida, tal que:

$$\frac{d\Psi}{dx} = \begin{bmatrix} x_{2,k-1} & x_{1,k-1} + 2x_{2,k-1} \end{bmatrix}, \quad (4.103)$$

então:

$$\mathcal{G}_k = \begin{bmatrix} x_{2,k-1} + 100 & x_{1,k-1} + 2x_{2,k-1} \end{bmatrix}. \quad (4.104)$$

O segundo método trata tal incompatibilidade fatorando o erro presente no trabalho de Quintana et al. (2020), assim para o sistema numérico, obtém-se, com base em (4.17) e (4.101):

$$\begin{bmatrix} x_{2,k} + 100 & x_{2,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{x}_{2,k|k} + 100 & \hat{x}_{2,k|k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{1,k|k} \\ \hat{x}_{2,k|k} \end{bmatrix}. \quad (4.105)$$

Fatorando o erro $x_{2,k-1}x_{1,k-1} - \hat{x}_{2,k-1|k-1}\hat{x}_{1,k-1|k-1} = x_{1,k-1}x_{2,k-1} - x_{1,k-1}\hat{x}_{2,k-1|k-1} + x_{1,k-1}\hat{x}_{2,k-1|k-1} - \hat{x}_{1,k-1|k-1}\hat{x}_{2,k-1|k-1}$ que é o mesmo que $x_{1,k-1}e_2 + \hat{x}_{2,k-1|k-1}e_1$. De modo que o erro de estimação pode ser dado por:

$$e_{k|k-1} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{2,k-1|k-1} + 100 & x_{1,k-1} + (x_{2,k-1} + \hat{x}_{2,k-1|k-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1,k-1|k-1} \\ e_{2,k-1|k-1} \end{bmatrix}. \quad (4.106)$$

Assim, a matriz \mathcal{G}_k é dada por:

$$\mathcal{G}_k = \begin{bmatrix} \hat{x}_{2,k-1|k-1} + 100 & x_{1,k-1} + (x_{2,k-1} + \hat{x}_{2,k-1|k-1}) \end{bmatrix}. \quad (4.107)$$

Observação 10. As matrizes \mathcal{G}_k obtidas em ambas as abordagens são análogas, portanto, as simulações foram realizadas em relação à fatoração de erro, uma vez que os estados estimados podem ser usados para realimentação no filtro recursivo e no filtro de estado estacionário com ganho escalonado K . Os vértices do politopo para a matriz \mathcal{G}_k são formados da mesma forma que para a matriz \mathcal{E}_z do sistema de Lorenz discutido anteriormente.

4.7.2 GCKF Recursivo

Observando (4.106), duas não linearidades não medidas podem ser consideradas, de acordo com a abordagem indicada por Quintana et al. (2020). Dessa forma, é possível estimar os estados utilizando 4 vértices para a matriz de dinâmica de erros. Uma proposta para aprimorar os resultados obtidos com o filtro recursivo foi utilizar as informações dos estados estimados de instantes anteriores para estimar os estados nos passos de tempo futuros; dessa forma, os estados estimados serão realimentados ao sistema. Tal abordagem só pode ser aplicada utilizando a técnica de fatoração de erros apresentada por Quintana et al. (2020), uma vez que essa técnica permite o uso dos estados estimados em sua representação da dinâmica do erro. Dessa forma, apenas uma não linearidade não mensurável pode ser considerada, correspondente a $x_{2,k}$, destacado de azul:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{2,k-1|k-1} + 100 & x_{1,k-1} + (x_{2,k-1} + \hat{x}_{2,k-1|k-1}) \end{bmatrix}. \quad (4.108)$$

Assim, é possível estimar os estados utilizando apenas dois vértices para a matriz de

Tabela 4.5: Comparação entre técnicas simuladas - Não linearidade na equação de saída

	RMSE - x_1	RMSE - x_2	Tr (P^+)	T^{CPU}
ON-KF-F2	0,06	0,14	0,06	146,96
ON-KF-FF1	0,06	0,15	0,07	84,64
OFF-KF-F2	0,07	0,12	0,02	5×10^{-3}
OFF-KF-F-ESC	0,09	0,12	0,02	$6,4 \times 10^{-3}$
EKF	$2,2 \times 10^{-3}$	0,11	0,01	$8,1 \times 10^{-3}$

dinâmica de erros. As não linearidades que compõem os estados estimados serão atualizadas a cada iteração e então consideradas como estados mensuráveis.

4.7.3 GCKF em Estado Estacionário

O filtro de estado estacionário possui apenas uma matriz de covariância constante para todo o processo de estimação, o que torna o custo computacional da estimativa menor. Duas abordagens foram consideradas: a primeira considera duas não linearidades em (4.106); dessa forma, é possível estimar os estados utilizando 4 vértices para a matriz de dinâmica de erros. A segunda abordagem considera o escalonamento do ganho de Kalman K , de forma que o ganho dependa apenas dos estados mensuráveis, ou seja, do estado estimado $\hat{x}_{2,k-1|k-1}$, obtendo-se assim duas matrizes de ganho que são escalonadas com as funções de pertinência relativas aos máximos e mínimos das não linearidades consideradas nos vértices do politopo.

4.7.4 Resultados Simulados

A Tabela 4.5 contendo o índice de desempenho adotado (RMSE), o traço da matriz de covariância e o tempo de processamento de uma iteração (em segundos) para cada método simulado é apresentada para fins de comparação.

Ao analisar os resultados obtidos, considerando a não linearidade na medição, observa-se que os métodos propostos alcançaram bons resultados, assim como no caso da não linearidade nos estados. Computacionalmente, filtros recursivos são menos eficazes devido ao seu tempo de processamento, mesmo obtendo baixos índices RMSE e minimizando a matriz de covariância. Este método parece promissor e, portanto, sua convergência deve ser investigada. O método do filtro em estado estacionário mais uma vez obteve bons resultados, garantindo a convergência e minimizando a matriz de covariância. Quando comparado ao resultado obtido com o EKF, pode-se observar que os resultados são muito próximos, mas a grande vantagem é em relação ao tempo de processamento, visto que, para o filtro em estado estacionário proposto, este é menor do que para o filtro de Kalman estendido.

Para GCKF recursivo, há uma vantagem em usar os estados estimados para realimentar o sistema a cada iteração, obtendo assim um menor tempo de processamento, uma vez que apenas uma não linearidade é considerada e, conseqüentemente, menos vértices do politopo. Para o

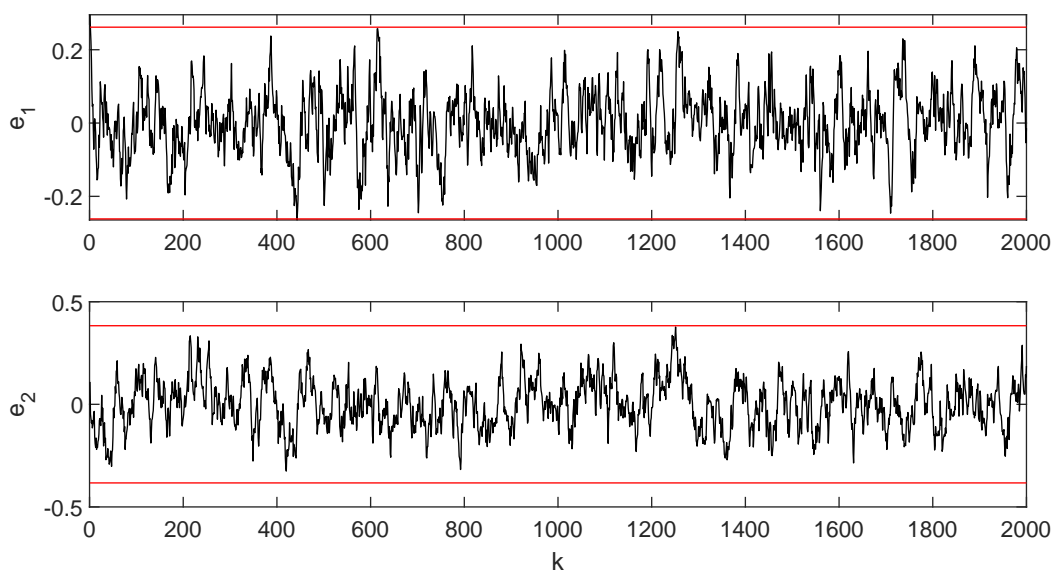


Figura 4.13: Evolução do erro de estimativa. Em preto: o erro e em vermelho: os limites dados pela variância em 3σ . GCKF em estado estacionário com ganho escalonado K , para o sistema numérico com não linearidades na equação de medição.

GCKF em estado estacionário, observa-se uma proximidade em ambos os casos avaliados. Para ilustrar os resultados, a Figura 4.13 apresenta a dinâmica do erro juntamente com sua variância, para o GCKF em estado estacionário usando o ganho escalonado K . Como pode ser visto na Figura 4.13, o erro permanece dentro do intervalo de variância do erro (adotado como 3σ), não excedendo os limites superior e inferior, conforme proposto na metodologia.

Em todas as abordagens é possível verificar a elipse de incerteza e se os estados do sistema e os estados estimados se mantêm dentro da elipse. A Figura 4.14 apresenta a elipse de incerteza relacionada ao GCKF em estado estacionário com ganho K escalonado.

4.7.5 Filtro com H_∞ Garantido

Ao se utilizar o método da fatoração do erro, conforme indicado em (4.107), é possível considerar duas não linearidades, logo um polítopo de quatro vértices. Desta forma, aplica-se o Algoritmo 3 para obter os limitantes dos ruídos de processo (η) e de medição (γ) e o ganho K . Utilizando a variável de folga $\mu = 0,99$ a aplicação do algoritmo encontrou os seguintes valores: $\eta = 1,2812$ e $\gamma = 1,0797$ e o ganho K :

$$K = \begin{bmatrix} 0,0032 \\ 0,0020 \end{bmatrix}. \quad (4.109)$$

Ao observar os estados estimados, o erro quadrático médio (RMSE) de cada estado é calculado como um índice de desempenho, obtendo-se o que é indicado na Tabela 4.6.

De forma a avaliar os limitantes encontrados, computa-se o ganho \mathcal{L}_2 ao longo do tempo, considerando o ruído de medição na Figura 4.15.

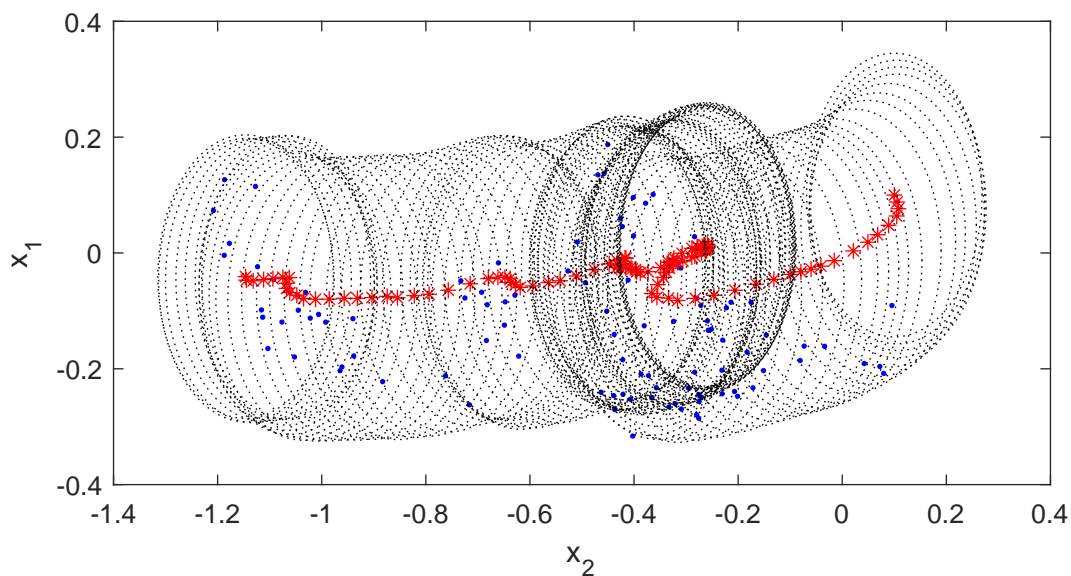


Figura 4.14: Elipse de incertezas para cada amostra. Em azul os estados e em vermelho os estados estimados. GCKF em estado estacionário com ganho escalonado K , para o sistema numérico com não linearidades na equação de medição.

Tabela 4.6: RMSE dos estados estimados - Filtro não linear com H_∞ garantido

Estados	RMSE
x_1	0,056
x_2	0,036

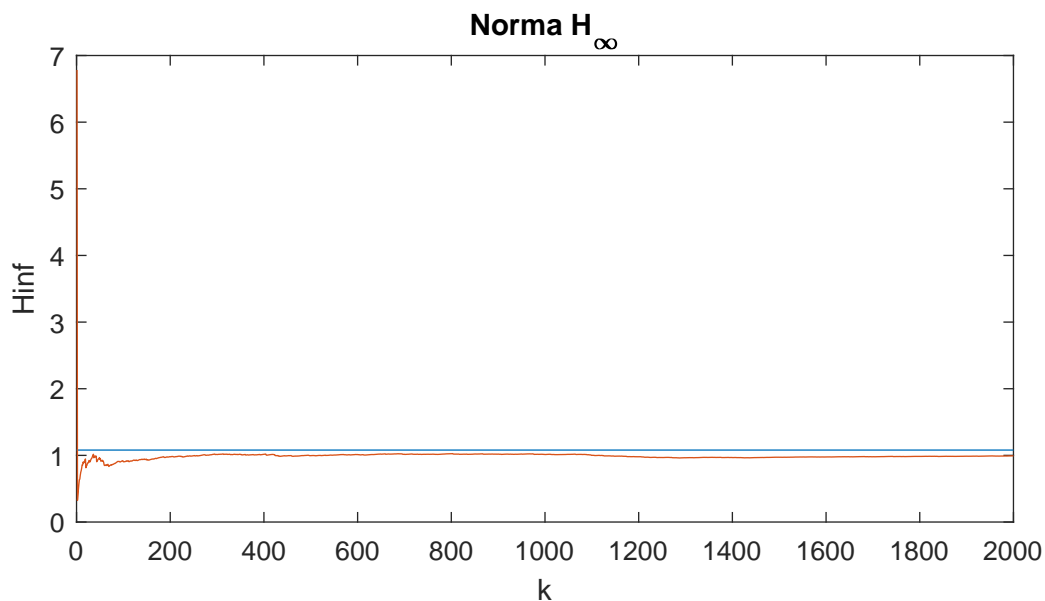


Figura 4.15: Ganho \mathcal{L}_2 ao longo do tempo para a simulação e o limitante superior para ruído de medição. Em azul o limitante superior encontrado pelas condições LMIs e em vermelho a norma H_∞ do sistema. Sistema com não linearidade na equação de saída.

Tabela 4.7: Comparação entre técnicas simuladas - Filtro Multiobjetivo - Não linearidade na equação de medição

Ruído	Restrição		Escalar	
	Branco	Senoidal	Branco	Senoidal
η	9,9499	9,9499	9,9372	9,9372
γ	9,9699	9,9699	51,4816	51,4816
RMSE - x_1	0,0446	0,0043	0,0412	0,0041
RMSE - x_2	0,1212	0,0051	0,1226	0,0050
Tr (P^+)	7,6619	7,6619	0,5754	0,5754
T^{CPU}	0,0058	0,0070	0,0085	0,0066

Ao analisar o ganho \mathcal{L}_2 ao longo do tempo, percebe-se o ganho \mathcal{L}_2 foi inferior ao limitante encontrado pelas condições LMIs. Isso demonstra a eficiência da metodologia proposta em relação à robustez aos ruídos.

4.7.6 Filtro Multiobjetivo

Para a implementação do filtro multiobjetivo foi utilizada apenas a técnica da fatoração do erro para tratar o problema das não linearidades, visto que tal técnica permite o uso de menos vértices para o politopo, conforme indicado nos resultados simulados anteriormente. Para manter um padrão nas simulações, a variável de folga μ foi definida a mesma para as duas abordagens: por restrição e escalar. A variável de folga definida foi $\mu = 0,7$, já que para tal valor as LMIs foram factíveis em todos os casos estudados.

Dado que as abordagens para resolução de técnicas de otimização multiobjetivo podem gerar diversos resultados factíveis, e considerando os pesos diferentes α_i aplicados a cada função objetivo, foi obtido o conjunto de soluções de Pareto, que mostra diversos valores de soluções para o problema multiobjetivo. A Figura 4.16 indica as possíveis soluções encontradas para a abordagem de custo com restrição, em que S_{custo} corresponde ao custo da inversa da matriz de covariância.

A partir das possíveis soluções encontradas em cada abordagem, uma das soluções foi escolhida para cada caso para a análise dos resultados obtidos, conforme indicado na Tabela 4.7.

Ao analisar os resultados indicados na tabela, percebe-se uma pequena diferença entre o RMSE dos estados, e, que o sistema responde melhor quando é submetido a ruídos senoidais do que ruídos brancos. Além disso, a abordagem ainda mantém um tempo de processamento baixo, como pode-se notar pela linha T^{CPU} . Diferentemente do caso simulado para o sistema de Lorenz, aqui, foi definido, no projeto, para a abordagem de custo escalar, que o custo em relação ao objetivo da minimização da matriz de covariância tivesse um maior peso, $\alpha_3 = 0,6$ enquanto que para o limitante η o custo foi de $\alpha_1 = 0,3$ e para γ foi de $\alpha_3 = 0,1$. Desta forma, percebe-se que o método obteve um menor limitante para a variância do erro, quando

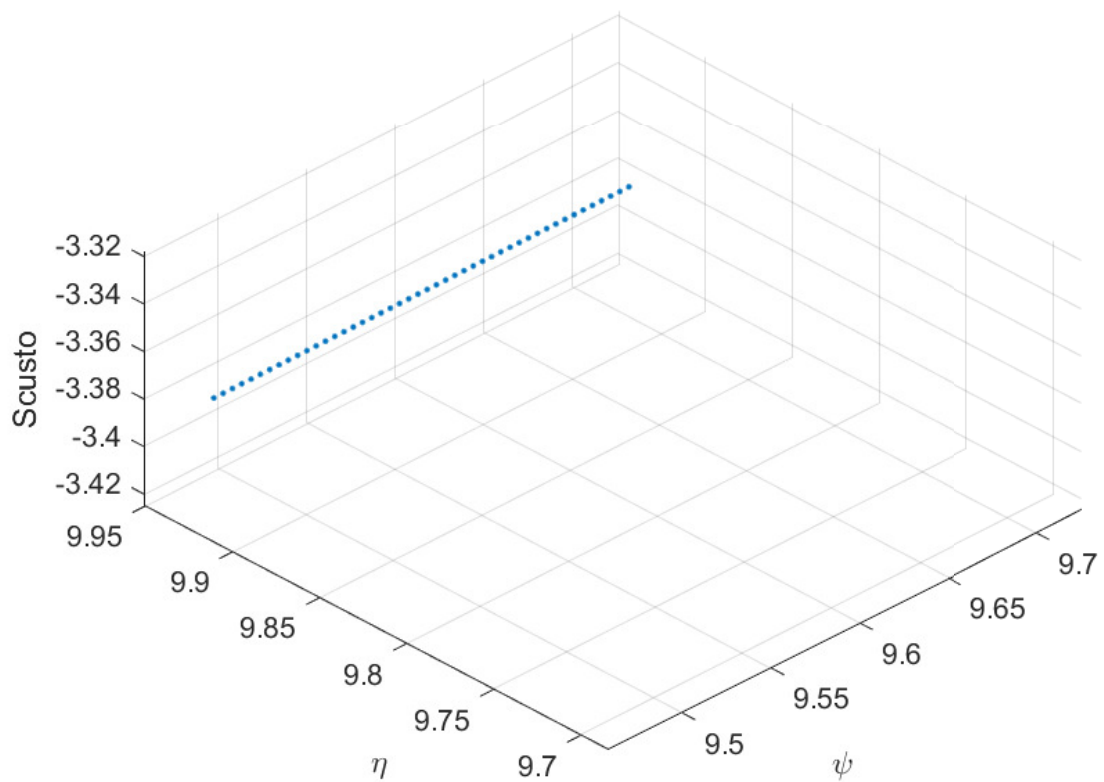


Figura 4.16: Solução Pareto para o sistema numérico com não linearidade na equação de medição, considerando a abordagem por restrição para a técnica de resolução da otimização multiobjetivo.

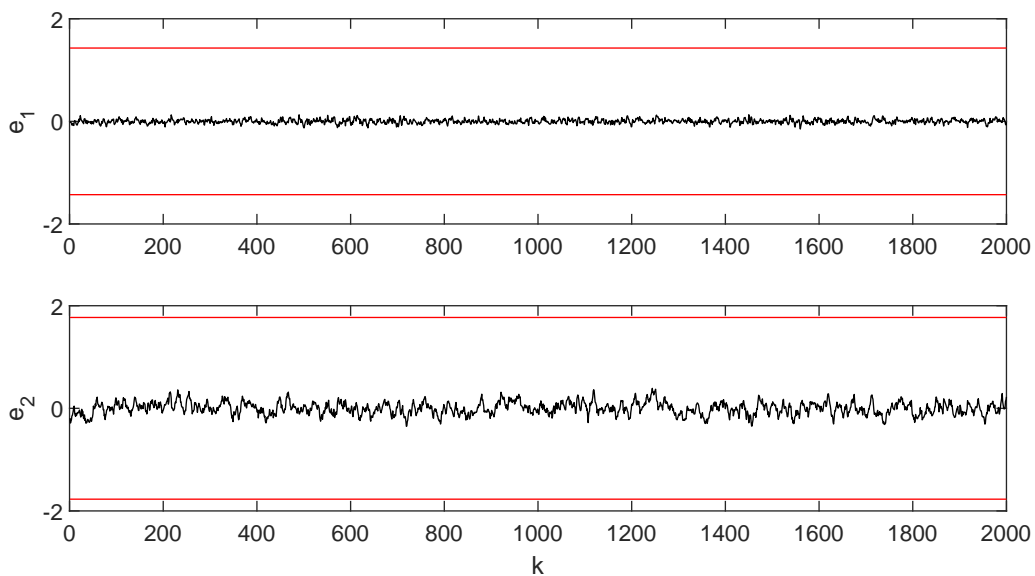


Figura 4.17: Evolução do erro de estimativa. Em preto: o erro e em vermelho: os limites dados pela variância em 3σ . Filtro multiobjetivo com custo escalar para o sistema numérico com não linearidades na equação de medição.

comparado ao método por restrição. Do mesmo modo, os limitantes superiores para a norma H_∞ foram menores quando a otimização se deu por custo com restrição.

Em relação ao objetivo da minimização da variância, a Figura 4.17 apresenta a dinâmica do erro juntamente com os limites da variância encontrados, para o caso da técnica de otimização por custo escalar. Observa-se que o erro de estimativa para os dois estados se manteve dentro dos limites encontrados.

Em relação ao objetivo de robustez aos ruídos, a norma \mathcal{L}_2 foi traçada indicando que ela se mantém abaixo do limitante superior obtido pelas condições LMIs. A Figura 4.18 apresenta o ganho \mathcal{L}_2 para o sistema com ruído senoidal.

4.8 Considerações Finais

Ao longo deste capítulo foram apresentados e analisados três métodos para a estimação de estados de sistemas não lineares a tempo discreto. Os três métodos utilizaram das técnicas de fatoração do erro e do DMVT para tratar o problema de incompatibilidade das variáveis premissas mensuráveis e não mensuráveis. As técnicas utilizadas garantem que uma classe maior de sistemas não lineares possa ser atendida pelos métodos de estimação apresentados.

Em relação aos métodos apresentados observa-se que todos eles são derivados das etapas do clássico filtro de Kalman. As manipulações matemáticas foram realizadas de forma a obter condições LMIs que fossem factíveis nos problemas apresentados. O primeiro método apresentou resultados que garantem que o filtro assegura um limite para a covariância do erro de estimação. Tal método foi dividido em dois filtros, o de estado estacionário e o recursivo.

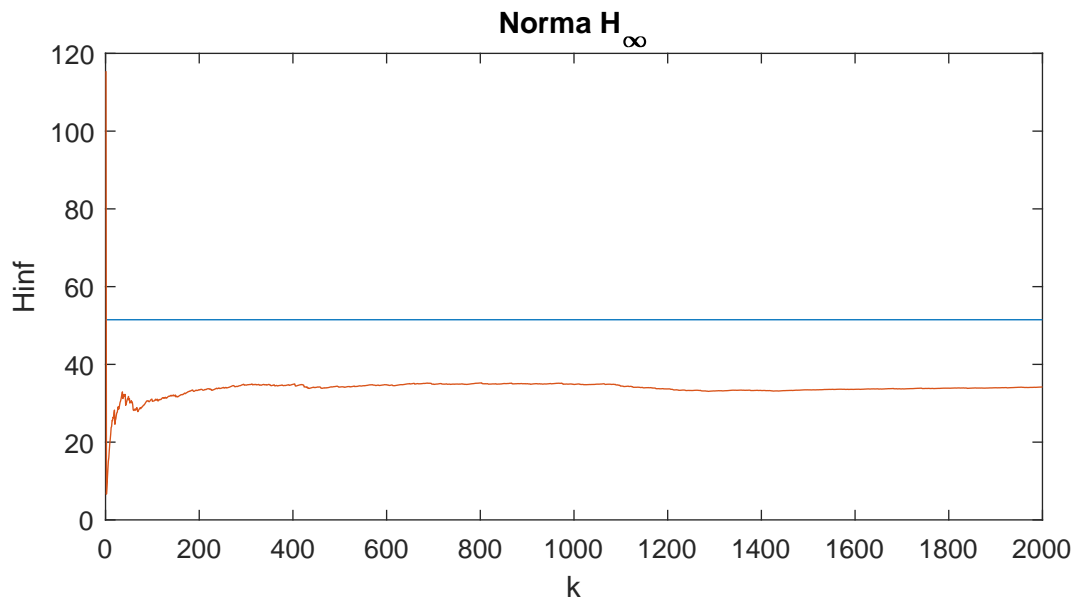


Figura 4.18: Ganho \mathcal{L}_2 ao longo do tempo para a simulação e o limitante superior para ruído de processo. Em azul o limitante superior encontrado pelas condições LMIs e em vermelho a norma H_∞ do sistema. Filtro multiobjetivo com custo escalar para o sistema numérico com ruído branco.

Ambos os filtros obtiveram resultados satisfatórios para as estimativas de estado, porém para o filtro de estado estacionário há a garantia de convergência assintótica do erro médio de estimativa e uma redução no custo computacional. O segundo método proposto visa garantir um limitante superior para a norma H_∞ do ruído de processo e de medição para o filtro proposto. Diferentemente do primeiro método, o segundo garante uma robustez aos ruídos. Por fim, para garantir um filtro com uma minimização da covariância do erro de estimação e uma robustez aos ruídos, um filtro multiobjetivo foi apresentado acoplando as características dos dois primeiros métodos propostos.

Tanto para o filtro de estado estacionário quanto para o filtro H_∞ , a análise das figuras aparenta que, no início do processo de estimação, os limites não são respeitados para os casos em que a condição inicial é polarizada. Porém, isso era o esperado, visto que os limites consideram que o filtro está em regime em ambos os casos. Foi apresentado que o filtro em estado estacionário é assintoticamente não polarizado e o filtro H_∞ é estável, ou seja, após o transitório inicial os limites são sempre respeitados.

De posse dos resultados obtidos, percebe-se que as três metodologias propostas obtiveram resultados satisfatórios e que garantem o objetivo em que são propostos. A análise dos métodos foi realizada em comparação ao EKF, de forma a apresentar resultados que são suficientemente aceitos e validados. Além disso, conforme apresentado, existem casos em que o EKF não converge e, por outro lado, o GCKF de estado estacionário é uma solução viável.

Capítulo 5

Métodos para Sistemas a Tempo Contínuo

No presente capítulo, a metodologia para a estimação de estados de sistemas não lineares a tempo contínuo é apresentada. O método apresentado se refere ao projeto do filtro de Kalman com covariância garantida, assim como o método apresentado para sistemas a tempo discreto. Para sistemas a tempo contínuo, a otimização em tempo real não faz sentido devido à natureza contínua dos dados e processos. Em outras palavras, a otimização em tempo contínuo não se limita a buscar uma solução pontual em um determinado instante, mas sim garantir um desempenho ótimo contínuo ao longo do tempo. Desta forma, para o método proposto, é considerada apenas a abordagem do filtro em estado estacionário.

Para o método aqui apresentado, foi utilizada apenas a técnica do DMTV apresentada no capítulo 3 para o tratamento da incompatibilidade das variáveis premissas mensuráveis e não mensuráveis, de forma a simplificar a apresentação dos resultados. Porém, tal representação pode ser facilmente modificada utilizando as estratégias similares as do capítulo anterior.

5.1 Projeto do GCKF a Tempo Contínuo

Considere o sistema a tempo contínuo dado por (1.1):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(x(t))x(t) + B_u(x(t))u(t) + B_w w(t) \\ y(t) &= C(x(t))x(t) + v(t),\end{aligned}$$

em que $w \in \mathbb{R}^q$ é o ruído do processo e $v \in \mathbb{R}^p$ é o ruído de medição, que são variáveis aleatórias independentes, com média zero, que satisfazem: $E[w(\tau)w(s)^T] = Q\delta(\tau - s)$, $E[v(\tau)v(s)^T] = R\delta(\tau - s)$ e $E[v(\tau)w(s)^T] = 0$. Com base nas condições LMIs e em uma abordagem estocástica, o objetivo da estimativa de estado é encontrar uma estimativa não polarizada, \hat{x} , com um limite superior mínimo garantido para a covariância, $E[ee^T] = P$, do erro de estimativa ($e = x - \hat{x}$), considerando sinais exógenos desconhecidos w e v .

Adaptando a representação de Pan et al. (2020), chega-se a uma decomposição de termos

lineares e não lineares, similar ao apresentado no capítulo anterior, tal que:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \bar{A}x + \bar{B}_u u + F\phi(x, u) + B_w w, \\ y &= \bar{C}x + G\psi(x) + v,\end{aligned}\tag{5.1}$$

em que as matrizes $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{B}_u \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $\bar{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ representam os termos lineares nas matrizes $A(x)$, $B_u(x)$ e $C(x)$ respectivamente; $F \in \mathbb{R}^{n \times n_\phi}$ e $G \in \mathbb{R}^{p \times n_\psi}$ são matrizes que representam como os termos não lineares $\phi(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_\phi}$ e $\psi(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_\psi}$ afetam a dinâmica do sistema.

Usando a representação de (5.1), define-se o filtro como:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \bar{A}\hat{x} + \bar{B}_u u + F\phi(\hat{x}, u) - K(\hat{y} - y), \\ \hat{y} &= \bar{C}\hat{x} + G\psi(\hat{x}),\end{aligned}\tag{5.2}$$

de forma que a dinâmica do erro é dada por:

$$\dot{e} = \bar{A}e + F\Delta_\phi + B_w w - K(\bar{C}e + G\Delta_\psi + v).\tag{5.3}$$

Nesta nova representação, os termos de incompatibilidade são representados pelos termos Δ_ϕ e Δ_ψ . A metodologia para lidar com tal problema refere-se ao uso do DMVT apresentado por Pan et al. (2020) indicado na Seção 4.1.1.

A partir do uso do DMVT, segue:

$$\Delta_{\phi_i} = \nabla \phi_i|_{z_i, u} e,\tag{5.4}$$

$$\Delta_{\psi_i} = \nabla \psi_i|_{\kappa_i} e,\tag{5.5}$$

com z_i e κ_i representando pontos desconhecidos entre os valores de estado e os estados estimados.

Como esses valores não são conhecidos, considera-se, de forma conservadora, que eles podem assumir qualquer um dos valores possíveis de x . Nesse sentido, pode-se considerar uma representação politópica incerta.

$$\nabla \phi_i|_{z_i, u} = \sum_{k_i=1}^{r_i} \alpha_{ik_i} \bar{E}_{ik_i},\tag{5.6}$$

$$\nabla \psi_i|_{\kappa_i} = \sum_{j_i=1}^{s_i} \beta_{ij_i} \bar{G}_{ij_i},\tag{5.7}$$

com $\alpha_{ik_i} \geq 0$, $\sum_{k_i=1}^{r_i} \alpha_{ik_i} = 1$, $\beta_{ij_i} \geq 0$, $\sum_{j_i=1}^{s_i} \beta_{ij_i} = 1$, e defina

$$\mathcal{E}(z_k, u) = \sum_{k_1=1}^{r_1} \dots \sum_{k_{n_\phi}=1}^{r_{n_\phi}} \left(\prod_{p=1}^{n_\phi} \alpha_{pk_p} \right) \left(\bar{A} + F \begin{bmatrix} \bar{E}_{1k_1} \\ \vdots \\ \bar{E}_{n_\phi k_{n_\phi}} \end{bmatrix} \right), \quad (5.8)$$

$$\mathcal{G}(\kappa_k) = \sum_{j_1=1}^{s_1} \dots \sum_{j_{n_\psi}=1}^{s_{n_\psi}} \left(\prod_{p=1}^{n_\psi} \beta_{pj_p} \right) \left(\bar{C} + G \begin{bmatrix} \bar{G}_{1j_1} \\ \vdots \\ \bar{G}_{n_\psi j_{n_\psi}} \end{bmatrix} \right), \quad (5.9)$$

levando à seguinte dinâmica de erro

$$\dot{e} = (\mathcal{E}(z, u) - K\mathcal{G}(\kappa))e + B_w w - Kv. \quad (5.10)$$

Como os valores α e β somam um, a dinâmica do erro pode ser escrita com uma única soma incerta homogeneizada, levando a

$$\dot{e} \subseteq \sum_{k=1}^r \bar{\alpha}_k ((\mathcal{E}_k - K\mathcal{G}_k)e + B_w w - Kv). \quad (5.11)$$

Para facilidade de representação sobre $\bar{\alpha}_k$, a seguir, será utilizada a notação curta $\mathcal{E}_{\bar{\alpha}} = \sum_{k=1}^r \bar{\alpha}_k \mathcal{E}_k$ e $\mathcal{G}_{\bar{\alpha}} = \sum_{k=1}^r \bar{\alpha}_k \mathcal{G}_k$. Considerando z e κ variáveis desconhecidas, que assumem quaisquer valores possíveis dentro de uma região de interesse, é possível substituir a dinâmica de erro não linear original por uma inclusão diferencial com valor definido. Desta forma, o lema 6 é válido de forma similar para o projeto do GCKF para sistemas a tempo contínuo.

5.1.1 Dinâmica da Covariância

Ao integrar a equação (5.11) ao longo do tempo,

$$e(t + \Delta t) \subseteq e(t) + \int_t^{t+\Delta t} (\mathcal{E}_{\bar{\alpha}} - K\mathcal{G}_{\bar{\alpha}})e(\tau) + B_w w(\tau) - Kv(\tau) d\tau.$$

Como $E[e(s)w(\tau)^T] = E[e(s)v(\tau)^T] = E[w(\tau)v(s)^T] = 0$, $E[w(\tau)w(s)^T] = Q\delta(\tau - s)$, $E[v(\tau)v(s)^T] = R\delta(\tau - s)$, e definindo $P(t) = E[e(t)e(t)^T]$, segue que

$$\begin{aligned} P(t + \Delta t) - P(t) &\leq \int_t^{t+\Delta t} E[e(t)e(\tau)^T] (\mathcal{E}_{\bar{\alpha}} - K\mathcal{G}_{\bar{\alpha}})^T d\tau + \int_t^{t+\Delta t} (\mathcal{E}_{\bar{\alpha}} - K\mathcal{G}_{\bar{\alpha}})E[e(\tau)e(t)^T] d\tau \\ &+ \Delta t B_w Q B_w^T + \Delta t K R K^T + \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} (\mathcal{E}_{\bar{\alpha}} - K\mathcal{G}_{\bar{\alpha}})E[e(\tau)e(s)^T] (\mathcal{E}_{\bar{\alpha}} - K\mathcal{G}_{\bar{\alpha}})^T d\tau ds. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Dividindo ambos os lados por Δt e tomando o limite como $\Delta t \rightarrow 0$, segue que

$$\dot{P}(t) \leq (\mathcal{E}_{\bar{\alpha}} - K\mathcal{G}_{\bar{\alpha}})P(t) + P(t)(\mathcal{E}_{\bar{\alpha}} - K\mathcal{G}_{\bar{\alpha}})^T + B_w Q B_w^T + K R K^T \quad (5.13)$$

5.1.2 GCKF em Estado Estacionário

Considerando o sistema não linear descrito por (1.1), é possível projetar o filtro de Kalman com covariância garantida, conforme o Teorema abaixo.

Teorema 12. *Se existirem uma matriz $Z \in \mathbb{R}^{n \times p}$ e uma matriz simétrica definida positiva $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que as condições*

$$\begin{aligned} & \min_{W,Z} -\log \det(W), \text{ s.a} \\ & \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{\bar{\alpha}}^T W - \mathcal{G}_{\bar{\alpha}}^T Z^T + W \mathcal{E}_{\bar{\alpha}} - Z \mathcal{G}_{\bar{\alpha}} & W B_w & Z \\ * & -Q^{-1} & 0 \\ * & * & -R^{-1} \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

são satisfeitas, então o ganho do filtro de Kalman proposto e as matrizes de covariância de limite superior mínimo garantido são obtidos por meio de $P^{-1} = W$ e $K = W^{-1}Z$.

Demonstração. A condição (5.13) garante que $\dot{P}(t) \leq 0$, ou seja, a variância diminui ou se mantém constante, para um determinado limitante superior que será encontrado. Desta forma, aplicando o complemento de Schur e considerando o filtro de estado estacionário ($P(t) = P$), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} P \mathcal{E}_{\bar{\alpha}}^T - P \mathcal{G}_{\bar{\alpha}}^T K^T + \mathcal{E}_{\bar{\alpha}} P - K \mathcal{G}_{\bar{\alpha}} P & B_w^T & K^T \\ * & -Q^{-1} & 0 \\ * & * & -R^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (5.15)$$

(5.15) é multiplicada à esquerda por

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (5.16)$$

e à direita pela sua transposta, resultando em:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_{\bar{\alpha}}^T P^{-1} - \mathcal{G}_{\bar{\alpha}}^T K^T P^{-1} + P^{-1} \mathcal{E}_{\bar{\alpha}} - P^{-1} K \mathcal{G}_{\bar{\alpha}} & P^{-1} B_w^T & P^{-1} K^T \\ * & -Q^{-1} & 0 \\ * & * & -R^{-1} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (5.17)$$

Fazendo $P^{-1} = W$ e considerando $Z = W K$, obtemos assim as condições indicadas no Teorema 12. \square

Assim como para o método proposto para sistemas a tempo discreto, o operador logdet foi utilizado ao invés do traço da matriz de covariância, para o método para sistemas a tempo contínuo. Além disso, o GCKF em estado estacionário para sistemas a tempo contínuo é assintoticamente não polarizado, conforme indicado no Teorema abaixo.

Teorema 13. *O filtro de Kalman de covariância garantida em estado estacionário é assintoticamente não polarizado (o erro médio de estimativa converge assintoticamente para zero).*

Demonstração. Considere a dinâmica do erro de estimativa dado em (5.11). Tomando sua esperança matemática, conclui-se que:

$$E[\dot{e}] \subseteq E[(\mathcal{E}_{\bar{\alpha}} - K\mathcal{G}_{\bar{\alpha}})e + B_w w - K\mathbf{v}], \quad (5.18)$$

$$E[\dot{e}] \subseteq (\mathcal{E}_{\bar{\alpha}} - K\mathcal{G}_{\bar{\alpha}})E[e] + B_w E[w] - KE[\mathbf{v}]. \quad (5.19)$$

Se w e \mathbf{v} são variáveis aleatórias independentes com média zero, então $E[w] = 0$ e $E[\mathbf{v}] = 0$. Portanto:

$$E[\dot{e}] \subseteq (\mathcal{E}_{\bar{\alpha}} - K\mathcal{G}_{\bar{\alpha}})E[e]. \quad (5.20)$$

Considerando a função candidata de Lyapunov:

$$V(E[e]) = E[e]^T P^{-1} E[e] < 0, \quad P > 0, \quad (5.21)$$

sua derivada é dada por:

$$\dot{V}(E[e]) = E[\dot{e}]^T P^{-1} E[e] + E[e]^T P^{-1} E[\dot{e}], \quad (5.22)$$

$$\dot{V}(E[e]) = E[e]^T ((\mathcal{E}_{\bar{\alpha}} - K\mathcal{G}_{\bar{\alpha}})^T P^{-1} + P^{-1}(\mathcal{E}_{\bar{\alpha}} - K\mathcal{G}_{\bar{\alpha}}))E[e]. \quad (5.23)$$

Note que, a partir da demonstração do Teorema 12, se as condições em (5.14) forem satisfeitas, segue-se que

$$(\mathcal{E}_{\bar{\alpha}} - K\mathcal{G}_{\bar{\alpha}})P + P(\mathcal{E}_{\bar{\alpha}} - K\mathcal{G}_{\bar{\alpha}})^T + B_w Q B_w^T + K R K^T \leq 0 \quad (5.24)$$

e uma vez que $Q > 0$ e $R > 0$, implica que:

$$(\mathcal{E}_{\hat{\alpha}} - K\mathcal{G}_{\hat{\alpha}})P + P(\mathcal{E}_{\hat{\alpha}} - K\mathcal{G}_{\hat{\alpha}})^T \leq 0, \quad (5.25)$$

$$(\mathcal{E}_{\hat{\alpha}} - K\mathcal{G}_{\hat{\alpha}})^T P^{-1} + P^{-1}(\mathcal{E}_{\hat{\alpha}} - K\mathcal{G}_{\hat{\alpha}}) \leq 0. \quad (5.26)$$

em que esta última desigualdade resulta da multiplicação de (5.25), à esquerda e à direita, por P^{-1} . Multiplicando esta última desigualdade à esquerda por $E[e]^T$ e à direita por $E[e]$, obtém-se que $\dot{V}(E[e])$ em (5.23) é definido negativo, o que, por sua vez, prova que o filtro é assintoticamente não polarizado. \square

Observação 11. *O algoritmo para a execução do GCKF à tempo contínuo é análogo ao Algoritmo 2.*

5.2 Resultados Numéricos - Não Linearidade na Dinâmica

A presente seção apresenta os resultados numéricos obtidos a partir da implementação do método proposto no capítulo. É apresentado um exemplo numérico considerando não linearidades presentes na equação da dinâmica.

Considere o sistema de Lorenz: (Lorenz, 1963; Quintana et al., 2020)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a(x_1(t) - x_2(t)), \\ \dot{x}_2(t) &= bx_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) &= cx_3(t) + x_1(t)x_2(t), \\ y(t) &= 0,5x_1(t) + 0,5x_2(t), \end{aligned} \quad (5.27)$$

com $a = -10$, $b = 28$ e $c = -\frac{8}{3}$. Deseja-se obter uma estimativa do estado não medido x_3 . Considerando que $-20 \leq x_1 \leq 20$, $-30 \leq x_2 \leq 25$ e $-2,5 \leq x_3 \leq 50$. Limites maiores poderiam ser considerados, o que seria mais conservador. Dessa forma, os limites eram valores menores que cobriam a região dos estados. O modelo de espaço de estados é dado por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 - x_3 & -1 & 0 \\ x_2 & 0 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} x + B_w w, \\ y &= \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} x + v. \end{aligned} \quad (5.28)$$

em que $B_w = I$ é a matriz de ruído do processo, v é um ruído gaussiano com $R = 0,04I_{3 \times 3}$ e w com $Q = 0,0025I_{3 \times 3}$. Para as implementações do sistema a tempo contínuo, as condições

iniciais dos estados são assumidas como $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, e as condições iniciais das estimativas são assumidas como $\begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \end{bmatrix}$.

5.2.1 O Tratamento das Não Linearidades

Reescrevendo o sistema de Lorenz discretizado na forma (5.1), obtém-se:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}, \\ F &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \phi &= \begin{bmatrix} -x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{5.29}$$

O problema encontrado é a incompatibilidade entre as não linearidades envolvendo os estados mensuráveis e não mensuráveis. Para lidar com essa incompatibilidade, utilizando o DMVT (Pan et al., 2020) e, considerando as não linearidades dadas por ϕ , a matriz Jacobiana pode ser obtida, usando o DMVT, de forma que:

$$\frac{d\phi}{dx} = \begin{bmatrix} -x_3 & 0 & -x_1 \\ x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.30}$$

então a matriz \mathcal{E}_z em (5.8) pode ser escrita como:

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 - x_3|_{z_1} & -1 & -x_1|_{z_1} \\ x_2|_{z_2} & x_1|_{z_2} & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}. \tag{5.31}$$

Usando o DMVT, ao procurar uma representação convexa de (5.31), pode-se usar apenas 16 vértices, porque as não linearidades semelhantes de linhas diferentes não podem ser agrupadas.

Observação 12. *A diferença da representação do sistema contínuo para o discreto se dá apenas na discretização feita utilizando o tempo de amostragem indicado anteriormente.*

Como não há não linearidades na equação de saída do exemplo numérico, a matriz \mathcal{G}_κ que correspondente às não linearidades presentes na equação de saída é constante e igual à matriz C .

5.2.2 Resultados Simulados

A simulação de GCKF em estado estacionário, baseada no Teorema 12, aplicando DMVT com 4 não linearidades, resultou na matriz de ganho K dada por:

$$K = \begin{bmatrix} 15,946 & 28,971 \\ 28,971 & 128,329 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.32)$$

A Tabela 5.1 apresenta o índice de desempenho adotado, RMSE, obtido com o método proposto.

Tabela 5.1: Resultados Numéricos Simulados - GCKF Contínuo - Lorenz

	RMSE - x_1	RMSE - x_2	RMSE - x_3
GCKF-SS	0,2006	0,3168	0,3118

Ao analisar a Tabela 5.1, é perceptível que o GCKF-SS em estado estacionário apresenta bons resultados, assim como para o caso de sistemas a tempo discreto. O erro converge assintoticamente para zero, uma vez que as LMIs são factíveis. O RMSE dos estados estimados é próximo, apresentando um índice baixo mesmo para o estado x_3 , que corresponde ao estado não medido. Com base nisso, é possível concluir que as estimativas convergiram para os estados.

A dinâmica do erro para o GCKF é indicada na Figura 5.1, juntamente com a variância. Como pode ser visto na Figura 5.1, o erro permanece dentro da faixa de variância do erro (adotada como 3σ), não excedendo os limites superior e inferior, conforme proposto na metodologia. O único momento em que o erro está fora da faixa de variância é durante o regime transiente, após o qual o erro é limitado à região demarcada.

Para ilustrar o Teorema 13, foram realizadas 1000 simulações para o sistema de Lorenz usando o GCKF-SS, considerando a estimativa inicial dos estados como $[10, 10, 10]$ e os estados iniciais como $[1, 1, 1]$, garantindo uma estimativa inicial polarizada. A Figura 5.2 indica a evolução do erro médio de estimativa das 1000 simulações, ilustrando que o GCKF-SS é assintoticamente não polarizado, uma vez que o erro médio de estimativa converge para zero.

Adicionalmente, para comparar os resultados obtidos a partir das condições para sistemas a tempo discreto e para sistemas a tempo contínuo, foi realizada a simulação do filtro discretizado, utilizando o ganho obtido pelas condições desenvolvidas para sistemas a tempo contínuo. Desta forma, o sistema emulado foi comparado com os resultados obtidos pela simulação do filtro para sistemas discretos, a partir do sistema de Lorenz discretizado. A simulação dos sistemas foi realizada utilizando o DMVT com politopo de 16 vértices. A tabela 5.2 apresenta a comparação entre o RMSE dos estados, comparando as duas simulações.

Ao observar os resultados indicados na tabela 5.2, percebe-se que as condições LMIs desenvolvidas para sistemas a tempo contínuo, podem ser utilizadas para se obter o ganho do GCKF e a partir daí, utilizar o ganho e discretizar o filtro. Desta forma, os resultados obtidos

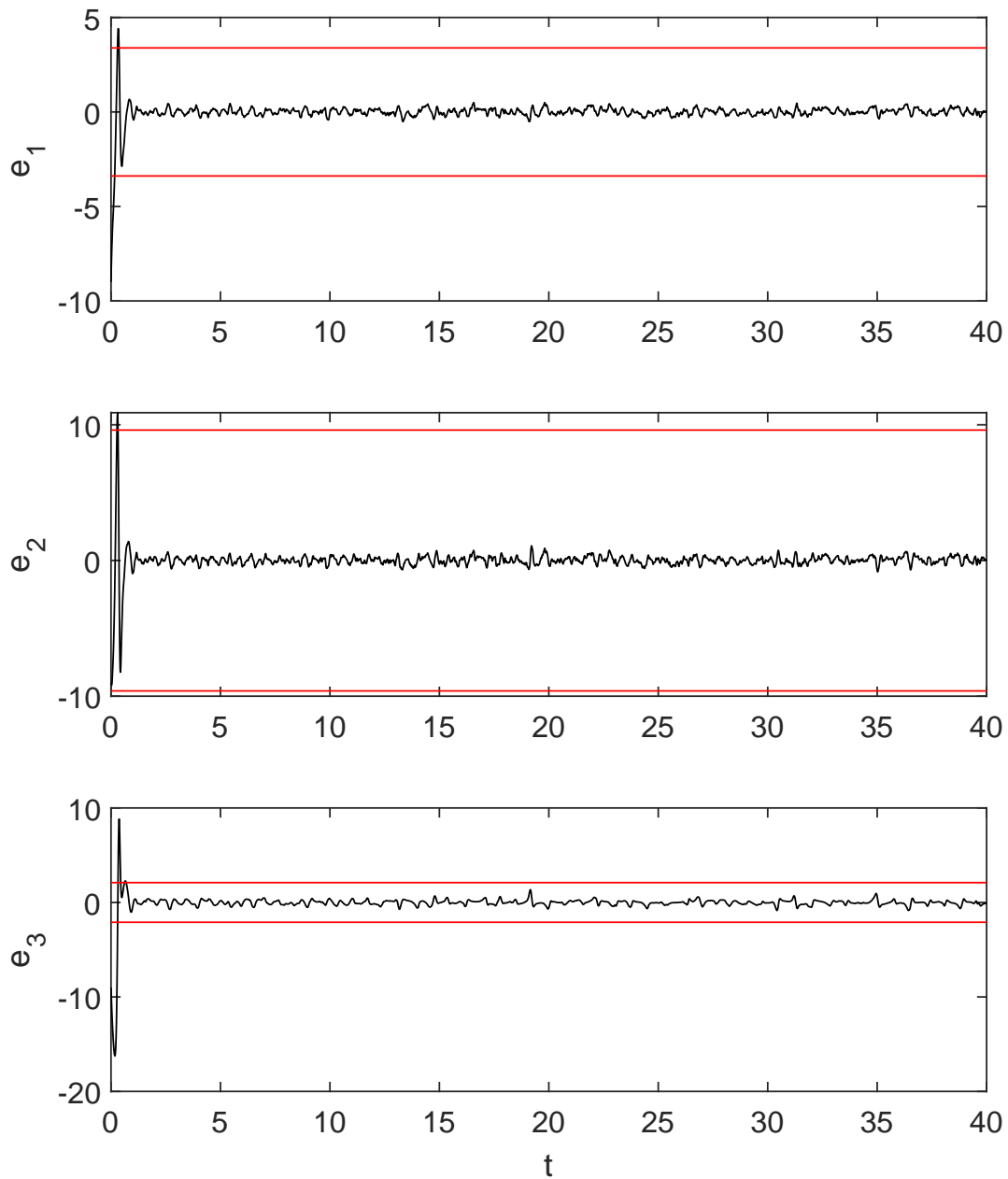


Figura 5.1: Evolução do erro de estimativa. Em preto: o erro e em vermelho: os limites dados pela variância em 3σ . GCKF em estado estacionário para o sistema de Lorenz a tempo contínuo com medições em x_1 e x_2 .

Tabela 5.2: Comparação entre Filtro Discretizado e Filtro Discreto

	RMSE - x_1	RMSE - x_2	RMSE - x_3
Filtro Discreto	0,29	1,28	0,21
Filtro Discretizado	0,13	0,28	0,30

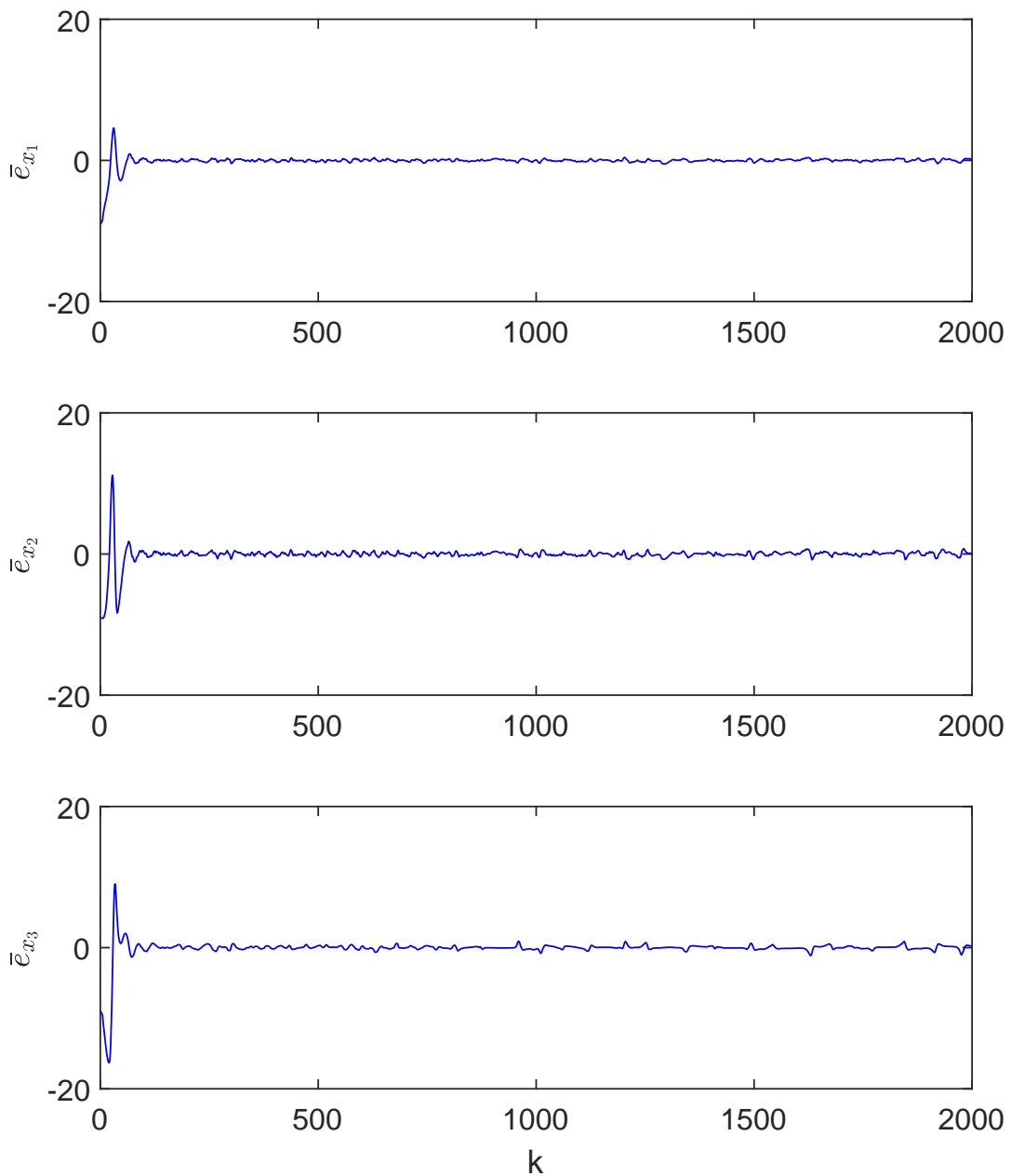


Figura 5.2: Evolução do erro médio de estimativa para 1000 simulações. GCKF em estado estacionário para o sistema de Lorenz com medições em x_1 e x_2 .

para o caso do sistema de Lorenz foram melhores do que os resultados obtidos para o sistema de Lorenz discretizado com o uso das condições LMIs para sistemas a tempo discreto, justificando o projeto do GCKF a tempo contínuo.

5.3 Resultados Numéricos - Não Linearidade na Equação de Saída

O sistema numérico a tempo contínuo utilizado, é adaptado do sistema de Lendek e De Schutter (2010):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -x_1 & 1 \\ x_1 x_2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix} x + v_k. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Considerando que $-1 \leq x_1 \leq 1$ e $-1 \leq x_2 \leq 1$, sendo v_k e w_k ruídos Gaussianos com $Q = 0,0025I_{2 \times 2}$ e $R = 0,04I_{1 \times 1}$. Considera-se ainda, para as simulações, que as condições iniciais dos estados são assumidas como $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, e as condições iniciais das estimativas são assumidas como $\begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}$.

5.3.1 O Tratamento das Não Linearidades

Ao analisar (5.33), percebe-se que existem não linearidades presentes tanto na dinâmica do sistema descrito, quanto na equação de medição. Reescrevendo o sistema na forma de (5.1):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1^2 x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 x_2 \end{bmatrix} + v, \end{aligned} \quad (5.34)$$

então:

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\
F &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
\phi &= \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1^2 x_2 \end{bmatrix}, \\
\bar{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
G &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
\psi &= [x_1 x_2],
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Para tratar a incompatibilidade entre as não linearidades que envolvem estados mensuráveis e não mensuráveis, utiliza-se a aplicação do DMVT (Pan et al., 2020). As não linearidades na equação de saída são:

$$\psi = [x_1 x_2]. \tag{5.36}$$

A matriz Jacobiana pode ser obtida, tal que:

$$\frac{d\psi}{dx} = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 \end{bmatrix}, \tag{5.37}$$

então:

$$\mathcal{G}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix}. \tag{5.38}$$

Assim, considera-se na matriz \mathcal{G} , duas não linearidades e, portanto quatro vértices.

Neste exemplo, existem não linearidades tanto na equação de saída quanto na equação da dinâmica dos estados. As não linearidades na equação da dinâmica são:

$$\phi = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1^2 x_2 \end{bmatrix}. \tag{5.39}$$

A matriz Jacobiana pode ser obtida, tal que:

$$\frac{d\phi}{dx} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 0 \\ 2x_1 x_2 & x_1^2 \end{bmatrix}, \tag{5.40}$$

então:

$$\mathcal{E}_K = \begin{bmatrix} -2x_1 & 1 \\ 2x_1x_2 & x_1^2 - 1 \end{bmatrix}. \quad (5.41)$$

Assim, considera-se na matriz \mathcal{E} , três não linearidades e, portanto oito vértices.

5.3.2 Resultados Simulados

A simulação de GCKF em estado estacionário, baseada no Teorema 12, aplicando DMVT, resultou na matriz de ganho K dada por:

$$K = \begin{bmatrix} 7,24 & 0 \\ 4,4884 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.42)$$

A Tabela 5.3 apresenta o índice de desempenho adotado, RMSE, obtido com o método proposto.

Tabela 5.3: Resultados Numéricos Simulados - GCKF Contínuo - Não Linearidade na Equação de Dinâmica e na Equação de Saída

	RMSE - x_1	RMSE - x_2
GCKF-SS	0,0510	0,1450

Ao analisar a Tabela 5.3, é perceptível que o GCKF em estado estacionário apresenta bons resultados, assim como para o caso de sistemas a tempo discreto. O erro converge assintoticamente para zero, uma vez que as LMIs são factíveis. O RMSE dos estados estimados é próximo, apresentando um índice baixo. Com base nisso, é possível concluir que as estimativas convergiram para os estados. Além disso, percebe-se que o método aqui apresentado é eficaz tanto para sistemas que possuem não linearidades apenas na equação da dinâmica, quanto para sistemas que possuem não linearidade apenas na equação de saída e, por fim, sistema que possuem não linearidades em ambas.

A dinâmica do erro para o GCKF é indicada na Figura 5.3, juntamente com a variância. Como pode ser visto na Figura 5.3, o erro permanece dentro da faixa de variância do erro (adotada como 3σ), não excedendo os limites superior e inferior, conforme proposto na metodologia.

5.4 Considerações Finais

Ao longo deste capítulo foi apresentado e analisado um método para a estimação de estados de sistemas não lineares a tempo contínuo. O método utilizou da técnica da aplicação do DMVT para tratar o problema de incompatibilidade das variáveis premissas mensuráveis e não mensuráveis.

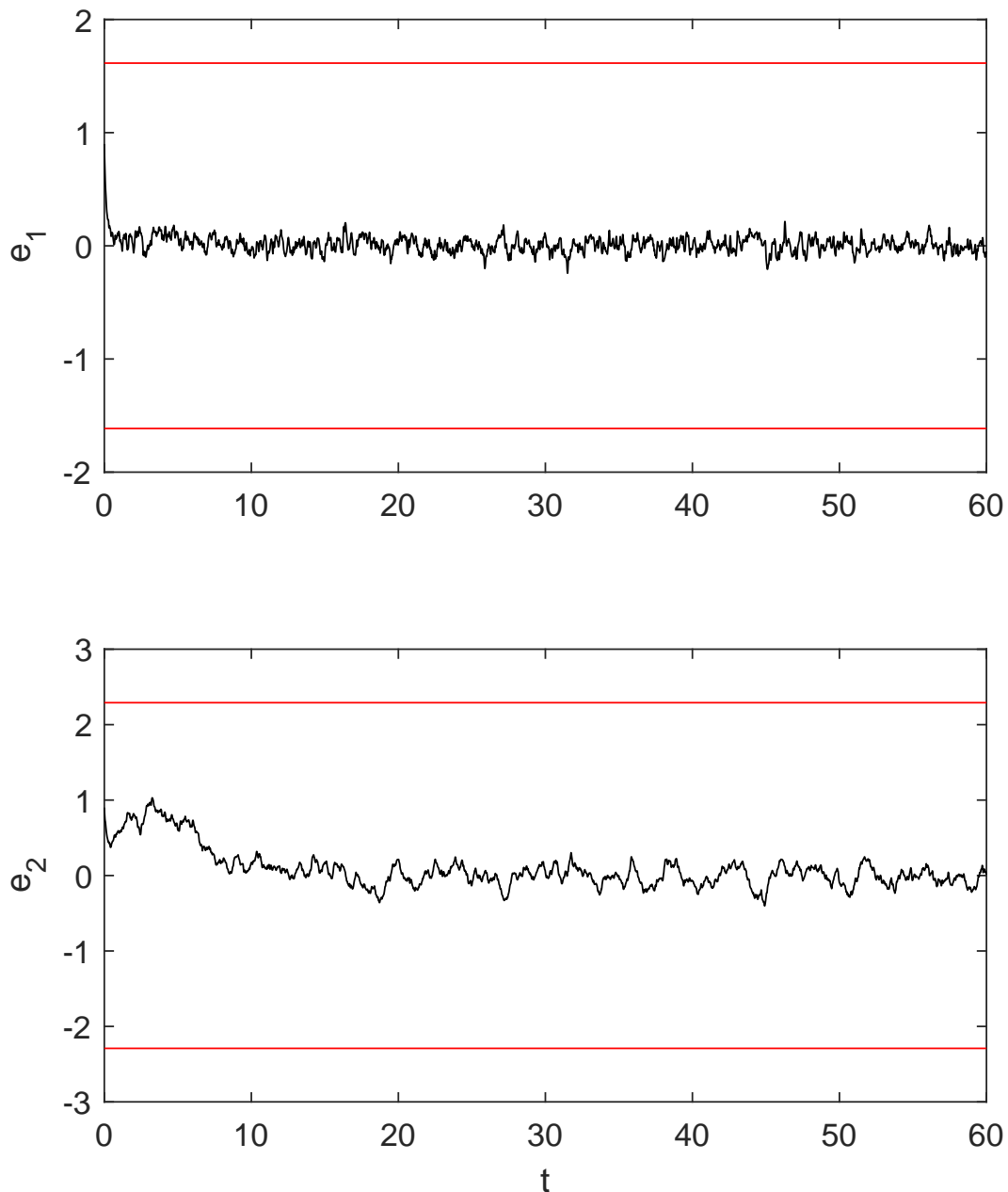


Figura 5.3: Evolução do erro de estimativa. Em preto: o erro e em vermelho: os limites dados pela variância em 3σ . GCKF em estado estacionário para o sistema numérico a tempo contínuo com não linearidades tanto na equação da dinâmica quanto na equação de medição.

Para garantir a aplicação do GCKF, apresentado no capítulo anterior, aos sistemas de tempo contínuo, baseado nas etapas do KF, o GCKF a tempo contínuo foi formulado e apresentado. De forma similar ao apresentado para sistemas a tempo discreto, o projeto do GCKF a tempo contínuo apresentou bons resultados e a garantia de uma minimização da covariância do erro. A análise das figuras aparenta que, no início do processo de estimação, os limites da

variância do erro não são respeitados. Porém, os limites consideram que o filtro está em regime, dessa forma, após o transitório inicial os limites são sempre respeitados.

Devido às características dos sistemas a tempo contínuo, o GCKF apresentado foi formulado apenas em estado estacionário. Ainda não foram avaliados os projetos dos filtros que garantam a minimização da norma H_∞ dos ruídos de processo e medição e o projeto do filtro multiobjetivo para sistemas a tempo contínuo, mas considera-se que tais projetos sejam viáveis e promissores para o estudo de estimadores de estado.

Capítulo 6

Considerações Finais e Propostas de Continuidade

6.1 Resumo das Contribuições do Trabalho

A estimação de estados é uma importante ferramenta na solução de problemas de engenharia. Durante vários anos, as atenções foram voltadas para a estimação de estados em sistemas lineares e logo após para sistemas não lineares utilizando as derivações do filtro de Kalman. Alguns métodos vêm sendo desenvolvidos a fim de obter uma forma geral para o observador de estados que atenda a uma ampla classe de sistemas. Muitos sistemas não possuem variáveis disponíveis para medição ou então estão corrompidas por ruídos. Desta forma, os esforços deste trabalho foram direcionados para tratar os casos em que não há compatibilidade entre as funções de pertinência das variáveis disponíveis e as não disponíveis ($\omega_i(z) - \omega_i(\hat{z})$) de um modelo convexo. As contribuições deste trabalho são direcionadas para o projeto de filtros para estimação de estados de sistemas não lineares. Três direções foram seguidas, a primeira se refere ao filtro de Kalman com covariância garantida, a segunda se refere ao filtro não linear com H_∞ garantido e por fim, um filtro não linear multiobjetivo.

Na primeira abordagem aqui proposta, as derivações LMI podem ser utilizadas para obter um ganho de Kalman que garanta uma matriz de covariância mínima, fazendo com que o filtro de Kalman tenha convergência rápida. Para utilizar esta metodologia, foi necessário, por meio de manipulações algébricas, obter expressões para a dinâmica do erro e, assim, utilizando condições, teoremas e lemas baseados em LMIs, obter o ganho do filtro que garanta a covariância mínima. Com esta solução, pretende-se observar se o filtro de Kalman com covariância garantida pode ser aplicado a uma ampla classe de sistemas não lineares, considerando que as não linearidades são tratadas pela dinâmica do erro da estimação de estado, por exemplo, utilizando os métodos descritos por Quintana et al. (2020) e Pan et al. (2020). Utilizando o DMVT, é possível aplicar o método a sistemas nos quais existem não linearidades continuamente diferenciáveis. Por outro lado, ao utilizar a técnica de fatoração do erro, é possível

aplicar o método proposto a sistemas que apresentam não linearidades polinomiais ou não linearidades analíticas por meio de aproximações em série de Taylor. Com um modelo que permite a separação de sinais medidos e não medidos, é possível derivar condições LMIs para obter um filtro de Kalman robusto, que garanta a covariância mínima. Além disso, aspectos como o custo computacional são discutidos. O filtro recursivo é proposto com a expectativa de obter melhores resultados do que o filtro de estado estacionário, considerando os casos em que o filtro não diverge. O filtro de estado estacionário é uma vantagem devido ao seu custo computacional e por ser um caminho que métodos de filtragem de Kalman estocásticos, como EKF e UKF, não conseguem alcançar. O EKF lineariza analiticamente o sistema, usando os primeiros termos da série de Taylor, portanto, o filtro recursivo serve como uma opção que garante a robustez do método proposto, mesmo com um custo computacional maior, quando comparado ao filtro de estado estacionário. No entanto, o filtro de estado estacionário é o único que tem garantia de ser assintoticamente não polarizado. Portanto, se as condições LMIs forem viáveis, o valor esperado do erro tende a zero com o passar do tempo, o que não pode ser garantido nem para o EKF nem para o GCKF recursivo. As propostas indicadas foram formuladas e exemplificadas matematicamente tanto para sistemas a tempo discreto quanto para sistemas a tempo contínuo. Exemplos numéricos foram desenvolvidos para verificar a consistência da metodologia proposta, bem como comparações realizadas em relação ao EKF.

A segunda abordagem apresentada utilizou-se das mesmas técnicas de representação das não linearidades não medidas em politopos, porém com um objetivo de rejeição de distúrbios, obtido pela derivação das condições da norma H_∞ . Observa-se nos resultados numéricos que a metodologia proposta obteve limitantes superiores para a norma e de acordo com o ganho do filtro encontrado, esses limitantes não foram ultrapassados pela norma \mathcal{L}_2 . O filtro se mostrou uma alternativa eficaz para a estimação de estados de sistemas lineares e não lineares, garantindo uma robustez aos ruídos para sistemas a tempo discreto.

Tanto para o filtro de estado estacionário, para sistemas a tempo contínuo e sistemas a tempo discreto, quanto para o filtro H_∞ , para sistemas a tempo discreto, os limites são respeitados para os casos em que a condição inicial é polarizada. Os limites consideram que o filtro está em regime, ou seja, após o transitório inicial eles são sempre respeitados, conforme foi apresentado que o GCKF em estado estacionário é assintoticamente não polarizado e o filtro H_∞ é estável.

Por fim, a terceira metodologia apresentada se refere a um problema de otimização multiobjetivo que, unindo as duas primeiras metodologias, pretende alcançar os objetivos da minimização da matriz de covariância do erro de estimativa e a minimização do limitante da norma H_∞ para garantir uma estimativa confiável e robustez aos ruídos. A metodologia apresentada utilizou dos mesmos modelos de representação de sistemas não lineares e se demonstrou eficaz com os resultados obtidos via simulações numéricas. Além disso, de acordo com a teoria de otimização multiobjetivo, apresentam-se duas abordagens para se obter os ganhos dos filtros não lineares, a primeira é com custo escalar e a segunda com custo por restrição. Desta forma,

é possível ponderar a prioridade no projeto do filtro não linear multiobjetivo.

Todos os filtros apresentados foram descritos matematicamente com as respectivas provas matemáticas e validados a partir dos resultados numéricos apresentados.

6.2 Sugestões de Continuidade

Como continuidade da pesquisa indica-se obter novos algoritmos, avaliar os algoritmos aqui apresentados em outras classes de sistemas, utilizar novas representações dos sistemas, de forma que os métodos aqui propostos atinjam uma classe ainda maior de sistemas não lineares, assim, sugere-se:

- a obtenção de algoritmos para a minimização da norma H_∞ e para o filtro multiobjetivo, para sistemas a tempo contínuo, já que, para tais casos, foram apresentados apenas os algoritmos para sistemas a tempo discreto;
- a avaliação dos métodos apresentados para a estimativa de estados de sistemas não lineares considerando incertezas paramétricas associadas aos modelos;
- a utilização de novas formas de representação para os sistemas não lineares com a separação de variáveis medidas e não medidas, para atender a uma classe ainda maior de sistemas.

Por outro lado, considerando os algoritmos recursivos apresentados, é importante obter novas abordagens que os tornem computacionalmente mais baratos, bem como a avaliação e a prova da polarização dos algoritmos. Assim, sugere-se:

- a redução da complexidade dos algoritmos recursivos para torná-los computacionalmente mais viáveis;
- o estudo da influência da observabilidade nos métodos recursivos propostos, visto que, para o sistema de Lorenz, a qualidade da observabilidade de cada estado influenciou diretamente nos resultados apresentados;
- o estudo da polarização dos algoritmos recursivos, já que estes não possuem a garantia de serem assintoticamente não polarizados.

Referências Bibliográficas

- Abbaszadeh, M. and Marquez, H. J. (2012). A generalized framework for robust non-linear H_∞ filtering of Lipschitz descriptor systems with parametric and non-linear uncertainties. *Automatica*, 48(5):894–900.
- Aboukheir, H., Herrera, M., Iglesias, E., and Camacho, O. (2021). Fuzzy Kalman filter using linear matrix inequalities. In *2021 IEEE CHILEAN Conference on Electrical, Electronics Engineering, Information and Communication Technologies (CHILECON)*, pages 1–6.
- Ackermann, J. (2012). *Robust control: Systems with uncertain physical parameters*. Springer Science & Business Media.
- Aguirre, L. A. and Letellier, C. (2011). Investigating observability properties from data in nonlinear dynamics. *Physical Review E*, 83.
- ApS, M. (2024). *The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual. Version 10.2.7*.
- Collette, Y. and Siarry, P. (2004). *Multiobjective Optimization: Principles and Case Studies*. Springer.
- Coutinho, P. H., Bessa, I., Xie, W., Nguyen, A.-T., and Palhares, R. (2022). A sufficient condition to design unknown input observers for nonlinear systems with arbitrary relative degree. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*.
- Darouach, M., Boutat-Baddas, L., and Zerrougui, M. (2011). Observers design for a class of non-linear singular systems. *Automatica*, 47(11):2517–2525.
- de Oliveira, M. C. and Skelton, R. E. (2001). Stability tests for constrained linear systems. In Moheimani, S. R., editor, *Perspectives in robust control*, pages 241–257, London. Springer London.
- de Paula, A. A., Raffo, G. V., and Teixeira, B. O. (2022). Zonotopic filtering for uncertain nonlinear systems: Fundamentals, implementation aspects, and extensions. *IEEE Control Systems*, 42:19–51.
- Diniz, P., Netto, S., and Silva, E. D. (2002). *Digital Signal Processing*. Cambridge University Press, USA.

- Diniz, P. d. S. (2008). *Adaptive Filtering: Algorithms and Practical Implementation*.
- Duan, G.-R. and Yu, H.-H. (2013). *LMIs in Control Systems: Analysis, Design and Applications*. CRC Press, 1a edition.
- Guerra, T., Márquez, R., Kruszewski, A., and Bernal, M. (2018). H_∞ LMI-based observer design for nonlinear systems via Takagi-Sugeno models with unmeasured premise variables. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 26(3):1498–1509.
- Haykin, S. (1989). *Modern Filters*. New York : Macmillan; London : Collier Macmillan.
- Ichalal, D., Marx, B., Mammar, S., Maquin, D., and Ragot, J. (2018). How to cope with unmeasurable premise variables in Takagi-Sugeno observer design: Dynamic extension approach. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 67:430–435.
- Ichalal, D., Marx, B., Ragot, J., and Maquin, D. (2010). State estimation of Takagi-Sugeno systems with unmeasurable premise variables. *IET Control Theory & Applications*, 4(5):897–908.
- Jang, J.-S. R., Sun, C.-T., and Mizutani, E. (1997). *Neuro-Fuzzy and Soft Computing: A Computational Approach to Learning and Machine Intelligence*. Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall.
- Jaulin, L. and Kieffer, M. (2001). Applied interval analysis. *Springer*.
- Jazwinski, A. H. (1970). Stochastic processes and filtering theory. *Academic Press, Inc*.
- Jiménez, V., Alvarado, B. P., and Matía, F. (2021). A set of practical experiments to validate the fuzzy Kalman filter. *Fuzzy Sets and Systems*, 417:152–170.
- Julier, S. J. and Uhlmann, J. K. (2004). Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*, 92(3):401–422.
- Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, 82(1):35–45.
- Lendek, Z.; Guerra, T. M. B. R. and De Schutter, B. (2010). *Stability Analysis and Nonlinear Observer Design Using Takagi-Sugeno Fuzzy Models*, volume 262.
- Li, Z., Wang, J., and Liu, H. (2020). A robust state estimator for T-S fuzzy system. *IEEE Access*, 8:84063–84069.
- Löfberg, J. (2004). Yalmip : A toolbox for modeling and optimization in Matlab. In *In Proceedings of the CACSD Conference*, Taipei, Taiwan.
- Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of Atmospheric Sciences*, 20(2):130–141.

- Lu, J., Pan, J., Lai, W., and Zheng, J. (2022). Fuzzy unknown input observers design for four-wheel independently actuated electric vehicles. *2022 6th CAA International Conference on Vehicular Control and Intelligence (CVCI)*, pages 1–6.
- Luenberger, D. (1971). An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16:596–620.
- Mao, J., Meng, X., and Ding, D. (2022). Fuzzy set-membership filtering for discrete-time nonlinear systems. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 9(6):1026–1036.
- Martinez, J., Aguiar, B., Estrada-Manzo, V., and Bernal, M. (2021). Actuator fault detection for discrete-time descriptor systems via a convex unknown input observer with unknown scheduling variables. *Mathematical Problems in Engineering*, 2021:1–16.
- Mokhtari, S. and Yen, K. K. (2020). A novel bilateral fuzzy adaptive unscented Kalman filter and its implementation to nonlinear systems with additive noise. In *2020 IEEE Industry Applications Society Annual Meeting*, pages 1–6.
- Neto, A. W., de Carvalho, V. M. R., Tognetti, E. S., and Fortaleza, E. L. (2018). Estudo comparativo entre filtros de Kalman clássicos e fuzzy Takagi-Sugeno em um processo benchmark de quatro tanques. *Anais do Congresso Brasileiro de Automática*, 1(1).
- Nguyen, A.-T., Campos, V., and Guerra, T.-M. (2021). Takagi-Sugeno fuzzy observer design for nonlinear descriptor systems with unmeasured premise variables and unknown inputs. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31(17):8353–8372.
- Nguyen, C. M., Nguyen, A.-T., and Delprat, S. (2022). Cascade Takagi-Sugeno fuzzy observer design for nonlinear uncertain systems with unknown inputs: A sliding mode approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*.
- Pan, J., Nguyen, A.-T., Guerra, T.-M., and Ichalal, D. (2020). A unified framework for asymptotic observer design of fuzzy systems with unmeasurable premise variables. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, PP(0):1–10.
- Quintana, D., Estrada-Manzo, V., and Bernal, M. (2020). An exact handling of the gradient for overcoming persistent problems in nonlinear observer design via convex optimization techniques. *Fuzzy Sets and Systems*, 3-305.
- Ramados, S., Janarthanan, K., and Jagadeesan, P. (2006). Nonlinear state estimation using fuzzy Kalman filter. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 45.
- Rocha, K. D. and Terra, M. H. (2021). Robust Kalman filter for systems subject to parametric uncertainties. *Systems & Control Letters*, 157(105034).
- Ríos, H. (2020). State estimation for a class of uncertain nonlinear systems: A finite-time observer approach. *International Journal of Control*, 0(0):1–9.

- Shaheen, B., Nazir, M. S., Rehan, M., and Ahmad, S. (2020). Robust generalized observer design for uncertain one-sided Lipschitz systems. *Applied Mathematics and Computation*, 365:124588.
- Shaked, U., Xie, L., and Soh, Y. C. (2001). New approaches to robust minimum variance filter design. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49(11):2620–2629.
- Simon, D. (2006). *Optimal state estimation: Kalman, H infinity, and nonlinear approaches*. John Wiley & Sons.
- Sun, Y., Mao, J., Liu, H., and Ding, D. (2020). Distributed recursive filtering for discrete time-delayed stochastic nonlinear systems based on fuzzy rules. *Neurocomputing*, 400:412–419.
- Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 15:116–132.
- Tanaka, K. and Wang, H. O. (2001). *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*. Wiley-Interscience, New York, NY.
- Terán Gonzalez, R. A. D. J., Pérez Ramírez, J., and Beristain, J. (2022). TS model-LMI based observer for improving active power filter performance. *Journal of Circuits, Systems and Computers*, 32.
- Terán Gonzalez, R. A. D. J., Pérez Ramírez, J., and Beristain-Jimenez, J. (2021). Takagi-Sugeno exact model and linear matrix inequalities for an active power filter control. *International Transactions on Electrical Energy Systems*, 31.
- Vafamand, N., Arefi, M. M., and Khayatian, A. (2018). Nonlinear system identification based on Takagi-Sugeno fuzzy modeling and unscented Kalman filter. *ISA Transactions*, 74:134–143.
- Wiberg, D. M. (2010). Optimal and robust estimation with an introduction to stochastic control theory. *IEEE Control Systems Magazine*, 30(4):103–106.
- Zhang, W., Xie, H., Su, H., and Zhu, F. (2015). Improved results on generalised robust H_∞ filtering for Lipschitz descriptor non-linear systems with uncertainties. *IET Control Theory & Applications*, 9(14):2107–2114.
- Zhou, Z.-J., hu, C., Zhang, B.-C., and Chen, L. (2008). An improved fuzzy Kalman filter for state estimation of nonlinear systems. *Journal of Physics: Conference Series*, 96.

Apêndice A

O Filtro de Kalman e suas Derivações

A filtragem Bayesiana é uma classe de métodos que podem ser usados para estimar o estado de um sistema dinâmico que é indiretamente observado por meio de medições ruidosas. O Filtro de Kalman e suas derivações são estimadores baseados em conceitos estatísticos, considerando que as incertezas são representadas por variáveis aleatórias Gaussianas ou aproximadas, no caso não linear, cujo domínio é ilimitado e com função de densidade de probabilidade completamente caracterizada por média e covariância. Essas incertezas são provenientes de entradas exógenas desconhecidas (Ackermann, 2012).

Seja o modelo linear discreto:

$$\begin{aligned} x_k &= A_{k-1}x_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} + B_{w_{k-1}}w_{k-1}, \\ y_k &= C_kx_k + v_k. \end{aligned} \tag{A.1}$$

As matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B_w \in \mathbb{R}^{n \times q}$ e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ são matrizes reais de dimensões apropriadas, $x \in \mathbb{R}^n$ corresponde ao vetor de estados, $u \in \mathbb{R}^m$ corresponde ao vetor de entradas e $y \in \mathbb{R}^p$ são as saídas medidas. Sendo w o ruído de processo e v o ruído de medição, variáveis aleatórias independentes, de média nula, que satisfazem $E[w_k w_k^T] = Q_k$, $E[v_k v_k^T] = R_k$ e $E[v_i w_j^T] = 0 \quad \forall i, j$, em que $E[\cdot]$ corresponde a esperança matemática.

O problema é encontrar uma estimativa $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^n$ para o sistema dinâmico A.1, dadas as condições iniciais \hat{x}_0 e sua matriz de covariância P_0 , bem como a sequência das entradas $u_k \in \mathbb{R}^m$ e as medições $y_k \in \mathbb{R}^p$.

Quando se tem uma medição muito ruidosa, há pouca confiança na medição e maior confiança no modelo. Quando há grande incerteza no modelo, a medição tem maior peso na determinação da saída (Simon, 2006).

O procedimento de filtragem possui duas etapas. Primeiramente, o vetor de estados é propagado para a próxima iteração. Tal propagação é realizada utilizando-se o modelo dinâmico, que descreve como é que o vetor de estados muda de uma iteração para a seguinte. Ao longo da etapa de propagação, a incerteza aumenta pois considera-se ruído de processo presente no

sistema original. A segunda etapa, a de correção ou assimilação, ocorre com a chegada de nova informação. Utilizando essa nova informação é possível corrigir o vetor de estados disponível previamente à chegada da medição, para dar origem ao vetor de estado corrigido (Kalman, 1960).

A.1 Filtro de Kalman Linear Discreto

Uma sequência de cálculo do filtro de Kalman, considerando conhecidas as condições iniciais e a matriz de covariância, é:

$$\hat{x}_{k|k-1} = A_{k-1}\hat{x}_{k-1|k-1} + B_{k-1}u_{k-1}, \quad (\text{A.2})$$

$$P_{k|k-1} = A_{k-1}P_{k-1|k-1}A_{k-1}^T + B_{w_{k-1}}Q_{k-1}B_{w_{k-1}}^T, \quad (\text{A.3})$$

$$K_k = P_{k|k-1}C_k^T [C_k P_{k|k-1} C_k^T + R_k]^{-1}, \quad (\text{A.4})$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k [y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1}], \quad (\text{A.5})$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k P_{k|k-1} K_k^T, \quad (\text{A.6})$$

em que $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se refere a matriz de covariância e K é o ganho de Kalman.

As expressões (A.2) e (A.3) se referem a etapa de predição. Observando (A.3), percebe-se que a incerteza aumenta devido à adição presente na expressão, em que a matriz Q_k se refere ao ruído de processo. (A.4) se refere ao ganho de Kalman e a matriz R_k se refere ao ruído de medição. (A.5) e (A.6) são relativas à etapa de assimilação, e por (A.6) percebe-se que a incerteza diminui, devido à subtração presente na expressão. Em (A.5), dentro das chaves, encontra-se a inovação, que se refere ao erro cometido pelo filtro de Kalman ao propagar a saída utilizando o modelo da iteração anterior (Kalman, 1960).

A.2 Filtro de Kalman Estendido

Para o filtro de Kalman assume-se que o sistema é linear. No caso de sistemas lineares, as distribuições a priori e a posteriori são gaussianas e, portanto, são totalmente caracterizadas por suas médias e matrizes de covariância. No caso não linear, nem a propagação pode ser feita por um único modelo linear, nem é matematicamente correto considerar que a distribuição seja Gaussiana, assim, não se pode considerar que (A.3) descreva a covariância.

Seja o modelo não linear discreto:

$$\begin{aligned} x_k &= f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}), \\ y_k &= h(x_k) + v_k. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Conhecidas as funções não lineares f e h , o modelo (A.7) pode ser utilizado para pro-

pagar, tanto o vetor de estado x , quanto o vetor de saída y . Dessa forma, o EKF foi proposto para sistemas não lineares. O método consiste em linearizar analiticamente o sistema em torno do estado atual e aplicar as equações do KF. O problema no caso não linear é que não há expressões fechadas para determinar as médias e matrizes de covariância associadas. As matrizes de covariância e o ganho de Kalman são obtidos utilizando as matrizes Jacobianas de f e h , ou seja, as linearizações de tais funções em torno do estado atual (Jazwinski, 1970).

$$\hat{x}_{k|k-1} = f(\hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1}), \quad (\text{A.8})$$

$$P_{k|k-1} = Df(x_{k-1})P_{k-1|k-1}Df(\hat{x}_{k-1|k-1})^T + Df(w_{k-1})Q_{k-1}Df(w_{k-1})^T, \quad (\text{A.9})$$

$$K_k = P_{k|k-1}Dh(x_k)^T [Dh(x_k)P_{k|k-1}Dh(x_k)^T + Dh(x_k)R_k^{-1}Dh(x_k)^T], \quad (\text{A.10})$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k[y_k - h(\hat{x}_{k|k-1})], \quad (\text{A.11})$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_kDh(x_k)P_{k|k-1}. \quad (\text{A.12})$$

A.3 Filtro de Kalman *Unscented*

O filtro de Kalman *Unscented* não requer linearização analítica das equações do sistema. O algoritmo implementa uma linearização estatística para a propagação temporal da média e da matriz de covariância dos estados do sistema não linear (Simon, 2006).

Para os sistemas lineares, as expressões matemáticas para determinar a matriz de covariância a posteriori analiticamente são utilizadas. No caso não linear, o EKF consiste em linearizar o sistema em torno do estado atual. Uma outra solução é tomar um grande número de realizações de x e propagá-las usando as funções f e h para se obter o mesmo número de realizações de y , assim pode-se obter a matriz de covariância numericamente, utilizando-se as definições de covariância. Uma dificuldade é que um grande número de realizações precisa ser manipulada a cada iteração do filtro para determinar a matriz de covariância da função densidade de probabilidade "a posteriori". Para contornar tal problema, a ideia é escolher poucas realizações de x e y , mas realizações que sejam representativas, no sentido de que não haverá grande diferença entre as matrizes de covariância amostral calculadas a partir destas poucas realizações. Uma das aproximações feitas no desenvolvimento é a caracterização de uma função de densidade de probabilidade não gaussiana por meio da média e variância (Julier and Uhlmann, 2004).

As equações de assimilação do KF, EKF e UKF são idênticas. Na etapa de propagação dos estados para o KF é feita utilizando o modelo linear e para o EKF e UKF é o modelo não linear. Tanto o EKF quanto o UKF calculam a média e a covariância de maneira aproximada. O EKF utiliza a linearização analítica e o UKF utiliza os pontos sigma que não possuem informação sobre todos os momentos da distribuição "a priori".