

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO Nº 1088

**SISTEMAS DE TELEOPERAÇÃO BILATERAL SUJEITOS A ATRASOS
VARIANTES NO TEMPO**

MATHEUS VEIGA DE LIMA

DATA DA DEFESA: 21/11/2018

Universidade Federal de Minas Gerais

Escola de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

**SISTEMAS DE TELEOPERAÇÃO BILATERAL SUJEITOS A
ATRASOS VARIANTES NO TEMPO**

MATHEUS VEIGA DE LIMA

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Fernando de Oliveira Souza

Belo Horizonte - MG

Novembro de 2018

L732s Lima, Matheus Veiga de.
Sistemas de teleoperação bilateral sujeitos a atrasos variantes no tempo [manuscrito] / Matheus Veiga de Lima. - 2018.
60 f., enc.: il.

Orientador: Fernando de Oliveira Souza.

Dissertação (mestrado) Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndices: f. 55-60.

Bibliografia: f. 51-54.

1. Engenharia elétrica - Teses. 2. Simulação (Computadores) - Teses.
I. Souza, Fernando de Oliveira. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 621.3(043)



Sistemas de Teleoperação Bilateral Sujeitos a Atrasos Variantes no Tempo

Matheus Veiga de Lima

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica. Aprovada pela Banca Examinadora abaixo:

Prof. Dr. Fernando de O. Souza

Orientador

Departamento de Engenharia Eletrônica – UFMG

Prof. Dr. Armando Alves Neto

Departamento de Engenharia Eletrônica – UFMG

Prof. Dr. Leonardo A. Mozelli

Departamento de Engenharia Eletrônica – UFMG

Prof. Dr. Leonardo A. B. Tôres

Departamento de Engenharia Eletrônica – UFMG

Belo Horizonte, 21 de novembro de 2018

À minha mãe Ana.
À minha avó Lourdes.

Agradecimentos

Os agradecimentos são direcionados

- à minha família pelo investimento na minha educação;
- ao meu orientador Fernando, pela paciência, dedicação e atenção;
- aos colegas do D!FCOM, Fúlvia, Iury, Klenilmar, Luiz, Murilo, Pedro C., Pedro S., Rodrigo, Rosileide, Tiago, Wagner, entre outros, pelo convívio nos últimos anos;
- ao VERLab pelo empréstimo dos manipuladores utilizados no experimento;
- aos funcionários e docentes do PPGEE, em especial aos professores Armando Neto, Leonardo Tôrres e Leonardo Mozelli pelas contribuições para a melhoria deste trabalho;
- à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo fomento.

*Anseio de ir sempre além
Vontade de nunca parar
Jamais porto tão sedutor
A ponto de me fazer ancorar.*

Pitty, O Porto.

Resumo

Este trabalho apresenta métodos de análise de estabilidade para sistemas de teleoperação bilateral sujeitos a atrasos variantes no tempo. Um sistema de teleoperação bilateral consiste num sistema robótico no qual um operador atua sobre um manipulador local e esse comando é transmitido até um manipulador remoto. A bilateralidade se deve à força de interação com o ambiente, a qual é refletida de volta ao operador. Para que essa transmissão de dados ocorra é necessário um canal de comunicação que inevitavelmente, devido às longas distâncias entre os manipuladores, tráfego da rede, entre outros fatores, insere atrasos variantes no tempo ao sistema que podem reduzir seu desempenho ou até mesmo instabilizá-lo. O principal resultado desta pesquisa é uma condição algébrica que relaciona os atrasos de comunicação no sistema com os parâmetros da lei de controle, de forma que não há necessidade de dispêndio computacional para determinar se o sistema se mantém estável para dados valores de atrasos e parâmetros do controlador, ou alternativamente, determinar os parâmetros do controlador que garantam a estabilidade do sistema para valores máximos de atrasos dados. Simulações computacionais e experimentos reais são apresentados para ilustrar a efetividade do resultado proposto.

Palavras-chave

Teleoperação bilateral; Atraso variante no tempo; Desigualdades Matriciais Lineares.

Abstract

This work presents methods for stability analysis of bilateral teleoperation systems subject to time-varying delays. A bilateral teleoperation system is a robotic system where an operator acts on a local manipulator and this command is transmitted to a remote manipulator. The bilaterality is due to the environmental interaction force, which is reflected back to the operator. For the data transmission a communication channel is required which inevitably, due to long distances between the manipulators, network traffic, among other factors, inserts time-varying delays into the system that can reduce its performance or even destabilize it. The main result in this research is an algebraic condition that relates the communication delays in the system with the control law parameters, so that no computational cost is demanded to assert the system stability for given delays and controller parameters, or alternatively the controller parameters that guarantee the system stability for given maximum delays upper bounds. Computational simulations and real experiences are presented to illustrate the effectiveness of the proposed result.

Keywords

Bilateral Teleoperation; Time-Varying Delay; Linear Matrix Inequalities.

Sumário

1	Introdução	15
1.1	Teleoperação Bilateral	15
1.2	Revisão bibliográfica	16
1.3	Objetivos e Metodologia	18
1.4	Organização do trabalho	19
2	Formulação do problema	20
2.1	Modelagem Euler-Lagrange	20
2.2	Lei de controle	21
2.3	Atraso variante no tempo	22
3	Análise de estabilidade	23
3.1	Condições LMIs para análise de estabilidade	23
3.1.1	Condição baseada no método de Hua e Liu (2010) e na desigualdade de Jensen	23
3.1.2	Condição baseada nos métodos de Hua e Liu (2010) e Shao (2009)	27
3.1.3	Equivalência das condições	30
3.2	Condição algébrica	30
4	Simulações e experimentos	33
4.1	Resultados dos Teoremas	33
4.2	Modelo de simulação	34
4.3	Simulações	35
4.3.1	Cenário 1 - Movimento livre	35
4.3.2	Cenário 2 - Movimento livre com atraso violando o critério de estabilidade	37
4.3.3	Cenário 3 - Somente aplicação de força humana	39
4.3.4	Cenário 4 - Aplicação de força humana e interação ambiental	41
4.4	Experimentos Reais	43
5	Conclusão	49
5.1	Trabalhos Futuros	50
A	Ferramentas Matemáticas	55
A.1	Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)	55
A.2	O Complemento de Schur	55
A.3	Desigualdade de Jensen	56
A.4	Estabilidade via Lyapunov-Krasovskii	56
B	Resultados da Literatura	58
B.1	Contribuição de Hua e Liu (2010)	58
B.2	Contribuição de Nuno et al. (2008)	59

Lista de figuras

Figura 1.1	Sistema de Teleoperação Bilateral.	16
Figura 2.1	Esquema de Controle	22
Figura 4.1	Cenário 1 - Movimento livre e critério de estabilidade atendido - Evolução das posições das juntas dos manipuladores.	35
Figura 4.2	Cenário 1 - Movimento livre e critério de estabilidade atendido - Evolução das velocidades das juntas dos manipuladores.	36
Figura 4.3	Cenário 1 - Movimento livre e critério de estabilidade atendido - Evolução da posição cartesiana dos manipuladores.	36
Figura 4.4	Cenário 1 - Movimento livre e critério de estabilidade atendido - Evolução do erro de posição entre os manipuladores.	37
Figura 4.5	Cenário 1 - Movimento livre e critério de estabilidade atendido - Estado inicial e final dos manipuladores.	37
Figura 4.6	Cenário 2 - Movimento livre e critério de estabilidade não atendido - Evolução das posições das juntas dos manipuladores.	38
Figura 4.7	Cenário 2 - Evolução das velocidades das juntas dos manipuladores.	38
Figura 4.8	Cenário 2 - Movimento livre e critério de estabilidade não atendido - Evolução da posição cartesiana dos manipuladores.	38
Figura 4.9	Cenário 2 - Movimento livre e critério de estabilidade não atendido - Evolução do erro de posição entre os manipuladores.	39
Figura 4.10	Cenário 2 - Movimento livre e critério de estabilidade não atendido - Estado inicial e final dos manipuladores.	39
Figura 4.11	Cenário 3 - Aplicação de força humana e critério de estabilidade atendido - Força que operador humano aplica no efetivador do robô mestre.	40
Figura 4.12	Cenário 3 - Aplicação de força humana e critério de estabilidade atendido - Evolução das posições das juntas dos manipuladores.	40
Figura 4.13	Cenário 3 - Aplicação de força humana e critério de estabilidade atendido - Evolução das velocidades das juntas dos manipuladores.	40
Figura 4.14	Cenário 3 - Aplicação de força humana e critério de estabilidade atendido - Evolução da posição cartesiana dos manipuladores.	41
Figura 4.15	Cenário 3 - Aplicação de força humana e critério de estabilidade atendido - Evolução do erro de posição entre os manipuladores.	41
Figura 4.16	Cenário 3 - Aplicação de força humana e critério de estabilidade atendido - Estado inicial e final dos manipuladores.	41
Figura 4.17	Cenário 4 - Aplicação de força humana, interação com ambiente e critério de estabilidade atendido - Evolução das posições das juntas dos manipuladores.	42

Figura 4.18 Cenário 4 - Aplicação de força humana, interação com ambiente e critério de estabilidade atendido - Evolução das velocidades das juntas dos manipuladores.	42
Figura 4.19 Cenário 4 - Evolução da posição cartesiana dos manipuladores.	43
Figura 4.20 Cenário 4 - Aplicação de força humana, interação com ambiente e critério de estabilidade atendido - Evolução do erro de posição entre os manipuladores.	43
Figura 4.21 Cenário 4 - Aplicação de força humana, interação com ambiente e critério de estabilidade atendido - Estado inicial e final dos manipuladores.	43
Figura 4.22 Robôs utilizados no experimento: <i>AX-12A Smart Robotic Arm</i> .	44
Figura 4.23 Definição dos nomes das juntas dos manipuladores.	44
Figura 4.24 Evolução da junta da base dos manipuladores durante o experimento de deslocamento de uma garrafa plástica.	46
Figura 4.25 Evolução da junta do ombro dos manipuladores durante o experimento de deslocamento de uma garrafa plástica.	46
Figura 4.26 Evolução da junta do cotovelo dos manipuladores durante o experimento de deslocamento de uma garrafa plástica.	47
Figura 4.27 Evolução da junta do punho dos manipuladores durante o experimento de deslocamento de uma garrafa plástica.	47
Figura 4.28 Evolução da junta da garra dos manipuladores durante o experimento de deslocamento de uma garrafa plástica.	48

Lista de tabelas

Tabela 4.1	Conjuntos de parâmetros da lei de controle	33
Tabela 4.2	Máximos das somas dos atrasos obtidos aplicando os critérios propostos para cada um dos conjuntos de parâmetros da Tabela 4.1	33
Tabela 4.3	Parâmetros físicos dos manipuladores.	35

Lista de Abreviaturas

- LMI – Desigualdade Matricial Linear
- PD – Proporcional Derivativo
- P+d – Proporcional mais injeção de amortecimento

Lista de Símbolos e Notações

$\mathbb{R}^{n \times m}$	– Conjunto das matrizes reais de dimensão $n \times m$
$X > 0$ ($X \geq 0$)	– Matriz (semi)definida positiva
$X < 0$ ($X \leq 0$)	– Matriz (semi)definida negativa
X^T	– Matriz X transposta
I_n	– Matriz identidade de ordem $n \times n$
0_n	– Matriz de zeros de ordem $n \times n$
*	– Elemento transposto em uma matriz simétrica
\mathcal{L}_∞	– Espaço dos sinais limitados
\mathcal{L}_2	– Espaço dos sinais quadraticamente integráveis
q	– Posição das juntas
\dot{q}	– Velocidade das juntas
$M(q)$	– Matriz de inércia
$C(q, \dot{q})$	– Matriz de efeitos centrífugos e de Coriolis
$g(q)$	– Vetor de efeitos gravitacionais
$J(q)$	– Jacobiana Geométrica

Capítulo 1

Introdução

1.1 Teleoperação Bilateral

Nos últimos 60 anos, uma abundância de pesquisas têm tido com alvo a compreensão e superação dos problemas pertinentes a teleoperação bilateral. Desde a metade década de 40, quando o primeiro teleoperador foi construído por Goertz, o campo de teleoperação passou por muitos estágios desde o entendimento da interação entre humanos e robôs, até o campo do controle teórico (Hokayem e Spong, 2006). Esses sistemas têm sido um popular tópico de pesquisa na comunidade roboticista, sendo utilizados em aplicações que ocorrem em ambientes perigosos, como usinas nucleares para descarte de resíduos nucleares, nos hospitais para realizar cirurgias minimamente invasivas, no espaço para realizar reparos de módulos orbitais, etc. (Denasi et al., 2013).

Um sistema de teleoperação viabiliza a extensão das capacidades da manipulação humana a um ambiente remoto. Isto é alcançado instalando um manipulador chamado de mestre/local no mesmo ambiente do humano que, por sua vez, provê comandos de movimento a um manipulador com a mesma configuração, chamado escravo/remoto, o qual de fato desempenha a tarefa. Neste cenário, o conhecimento da força de contato do manipulador pelo operador é de suma importância. Quando a força devido à interação ambiental é sentida nos motores do manipulador mestre, diz-se que o sistema possui teleoperação bilateral.

Um teleoperador bilateral é referido como o sistema robótico da Figura 1.1, composto de elementos interconectados: um *operador humano* que aplica força a um *manipulador local/mestre* conectado por um *canal de comunicação* a um *manipulador remoto/escravo* que interage com o *ambiente*, tal interação então é refletida de volta ao operador (Nuño et al., 2011). Seu objetivo consiste na realização de uma tarefa utilizando recursos dispostos em dois ambientes distintos, o remoto e o local. No primeiro estão presentes os dispositivos robóticos, sensores, atuadores e demais objetos necessários para a realização da tarefa. O operador, que planeja e executa a tarefa, está no ambiente local

junto a dispositivos que fornecem realimentação sobre o estado do ambiente remoto. Desta forma, é possível utilizar a capacidade de adaptação e percepção do ser humano para a realização de tarefas complexas sem expô-lo a situações de risco ou a ambientes insalubres.

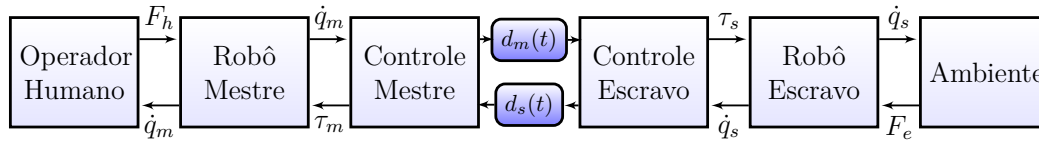


Figura 1.1: Sistema de Teleoperação Bilateral.

Do ponto de vista do controle os principais objetivos de uma teleoperação são: transparência e estabilidade. O primeiro objetivo é que o robô escravo/remoto rastreie a posição do robô mestre/local e proveja a sensação da telepresença (sentir-se fisicamente presente no ambiente remoto) ao operador humano. O segundo objetivo é manter a estabilidade do sistema em malha fechada independentemente do comportamento do operador humano e da interação com o ambiente. De fato, o principal propósito é projetar um esquema de controle estável para transmissão de posição, velocidade e força do mestre para o escravo e vice-versa.

Os canais de comunicação frequentemente envolvem grandes distâncias ou impõem limites na transferência de dados entre o ambiente local e o remoto. Tais situações podem resultar em atrasos de tempo significativos entre o comando do operador e a execução do movimento pelo manipulador remoto, idem para a reflexão da interação (Nuño et al., 2011). Um desses canais é a Internet que se tornou um meio onipresente de comunicação, bem conhecido por suas aplicações e protocolos. Mesmo com o uso da Internet, redes comutadas por pacotes ou comunicações não confiáveis impõem atrasos variantes no tempo e perdas de pacote (Chopra et al., 2008a). Estes atrasos no tempo contribuem para a complexidade do sistema, impactando na estabilidade e desempenho.

1.2 Revisão bibliográfica

O primeiro trabalho a abordar o atraso e a reflexão de força em sistemas de teleoperação foi apresentado em Anderson e Spong (1989). Usando a teoria de dispersão e passividade, o critério desenvolvido mostra porque sistemas bilaterais são instáveis para certos ambientes e também mostra que a lei de controle proposta é estável para qualquer atraso constante no tempo. A desvantagem desse critério é não garantir consenso entre as posições dos manipuladores. Também usando o formalismo da passividade, somado as noções de variável de onda e transmissão de onda, o trabalho de Niemeyer

e Slotine (1991) aprimorou os resultados de Anderson e Spong (1989) ao adicionar controle adaptativo, permitindo modelos com incertezas, mas ainda sem abordar o erro de posição entre os robôs.

Em Chopra et al. (2006) há as primeiras ideias de como resolver o problema do erro de posição. É proposta uma nova arquitetura para sistemas de teleoperação baseada no trabalho de Niemeyer e Slotine (1991), a qual possibilita o seguimento de trajetória e boa reflexão de forças. A nova configuração também se baseia em variável de onda, mas tem a adição de controladores proporcionais em ambos os lados do sistema, os quais usam a informação de posição com atraso como sinal de referência.

Nuño et al. (2009) expande o trabalho de Chopra et al. (2006), agora abordando o problema de atrasos variantes no tempo. É provado, que selecionando os ganhos do controlador apropriadamente, o erro de posição é limitado e, se não houver interação do operador com o ambiente, o erro converge para zero.

Abandonando a abordagem mais tradicional do formalismo de variável de onda, mas mantendo a suposição de passividade, Nuno et al. (2008) provaram que uma lei de controle similar ao controlador Proporcional e Derivativo (PD) é capaz de estabilizar e garantir erro de posição nulo, em regime estacionário, para sistemas com atrasos constantes e simétricos e na ausência de forças externas. Outra característica relevante deste trabalho é a condição de estabilidade proposta ser algébrica, a qual depende somente dos ganhos do controlador.

Outra recente abordagem consiste em definir uma variável de sincronização e utilizar controle adaptativo como apresentado por Chopra et al. (2008b). Naquele trabalho é proposta uma arquitetura de coordenação adaptativa que utiliza realimentação dos estados para definir uma nova saída passiva, contendo informação tanto de posição quanto de velocidade. Apesar de garantir erro de posição nulo, a lei de controle proposta tem a limitação de sempre convergir para a posição zero, o que não é desejado na prática. Para corrigir esse problema Nuño et al. (2010) propõem uma alteração na definição da variável de sincronização e assim é possível mostrar que os robôs sujeitos a atrasos constantes no tempo podem ser sincronizados em qualquer posição.

Utilizando também uma lei de controle similar ao controle PD, em Hua e Liu (2010) é feito uso de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) (veja Apêndice A.1) para formular uma condição de estabilidade. Além do uso de LMIs, esse trabalho vai além ao considerar o atraso variante e assimétrico, considerando essa mais próximas da realidade. No entanto, não é provado que a condição proposta garante a estabilidade do sistema para todo atraso menor

ou igual que um dado valor máximo. Ademais, não são propostas condições de projeto dos controladores.

Forouzantabar et al. (2012), utiliza uma lei de controle baseada em redes neurais a fim de superar as limitações dos controladores mais convencionais como o similar o PD e adaptativo. As redes neurais são usadas para aproximar funções não lineares da dinâmica do robô. Também é mostrado que esse novo controlador preserva a passividade do sistema. Os atrasos são modelados como constantes e assimétricos.

Yang et al. (2015) em seu trabalho mostram que, para os mesmos exemplos estudados na literatura, os seus resultados garantem estabilidade para atrasos maiores que aqueles apresentados até então, mas como desvantagem dependem do conhecimento da taxa de variação dos atrasos, a qual deve ser exclusivamente positiva ou negativa, ou seja, não é aplicável quando a taxa de variação troca de sinal ou até mesmo quando o atraso no tempo é constante. Essa desvantagem é bastante restritiva tendo em vista que atrasos puramente crescentes ou decrescentes são dificilmente observados na prática.

Abandonando a suposição de passividade das forças externas, mas fixando uma dinâmica para as mesmas, Islam et al. (2015) aborda o problema de estabilidade de teleoperadores bilaterais sujeitos a atrasos variantes no tempo e simétricos. A lei de controle utilizada também é similar ao PD, mas sem a adição do termo de compensação gravitacional, sendo substituída por um termo adaptativo.

Recentemente, foi abordado também o problema de saturação nos atuadores no trabalho de Hua et al. (2017). Apesar de ser bastante relevante considerar saturação e atrasos variantes e assimétricos, o trabalho fica limitado ao considerar somente atrasos estritamente crescentes, ou seja, atrasos com derivada positiva, o que, como mencionado anteriormente, dificilmente representa a realidade.

Também nos últimos anos, foi abordado por Wang et al. (2017) o problema de sincronização de sistemas de teleoperação sujeitos a atraso no tempo e histerese. Nesse trabalho é utilizado uma lei de controle baseada em redes neurais.

1.3 Objetivos e Metodologia

O principal objetivo da dissertação é apresentar métodos de análise de estabilidade para sistemas de teleoperação bilateral na presença de atrasos de comunicação entre os sistemas mestre e escravo. Considera-se retardos que podem ser variantes no tempo e assimétricos. São exploradas ferramentas de controle robusto, como por exemplo, Desigualdades Matriciais Lineares

(LMIs), para o aprimoramento de resultados presentes na literatura, sempre avaliando as vantagens dos métodos estudados.

O desenvolvimento do trabalho baseou-se, primeiramente, na revisão bibliográfica sobre controle de sistemas de teleoperação bilateral. Como resultado da revisão, foi feito o levantamento das principais limitações e melhorias que poderiam ser feitas nas abordagens existentes até o momento.

A metodologia utilizada baseia-se principalmente no uso de:

- Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) (veja Apêndice A.1) e
- teoria de Lyapunov-Krasovskii (veja Apêndice A.4).

Destaca-se que a formulação LMI é muito eficiente, pois condições LMIs podem ser resolvidas em tempo polinomial e de forma exata por meio de algoritmos de otimização convexa.

A implementação e avaliação dos métodos propostos são realizadas por meio de simulações computacionais, utilizando os softwares Matlab[®] e *Robotics Toolbox*. Os resultados foram validados com experimentos reais utilizando um par de manipuladores com cinco graus de liberdade.

1.4 Organização do trabalho

O trabalho está dividido em cinco capítulos, organizados da seguinte forma. No Capítulo 1, foi introduzido o contexto de controle de sistemas teleoperados bilaterais sujeitos a atrasos variantes no tempo. Também foram apresentados os objetivos principais deste trabalho e uma breve descrição do estado da arte.

O Capítulo 2 é dedicado à formulação matemática do problema. São descritos o modelo matemático, a lei de controle utilizada e a caracterização dos atrasos de comunicação.

No Capítulo 3 são apresentados dois critérios de estabilidade e demonstra-se serem equivalentes entre si, resultando no mesmo problema de factibilidade. Em seguida, é apresentada uma solução algébrica, dependente somente dos parâmetros do controlador, para o mesmo problema de análise de estabilidade.

Simulações numéricas e experimentais reais são apresentados no Capítulo 4.

Por fim, as considerações finais sobre o trabalho e as propostas para trabalhos futuros são apresentadas no Capítulo 5.

Capítulo 2

Formulação do problema

Este capítulo apresenta a descrição e a formulação matemática do problema de controle de sistemas teleoperados bilaterais sujeitos a atrasos variantes no tempo. Em seguida é apresentada a modelagem do sistema, suas propriedades, e a caracterização dos atrasos.

2.1 Modelagem Euler-Lagrange

Na área da robótica dedicada a análise dinâmica dos mecanismos, tais como manipuladores robóticos, estuda-se a relação entre os torques e forças aplicados nas juntas e as consequentes forças lineares e momentos angulares nos elos. Para tal, considera-se que um robô pode ser representado pelo seguinte modelo de Euler-Lagrange para robôs com n graus de liberdade

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau + F_{ext} \quad (2-1)$$

no qual $q(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ é o vetor de posições das juntas, $\dot{q}(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ é o vetor de velocidades das juntas, $\ddot{q}(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ é vetor de acelerações das juntas, $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de inércias, $C(q,\dot{q}) \in \mathbb{R}^n$ representa os efeitos centrífugos e de Coriolis, $g(q) \in \mathbb{R}^n$ são os torques devido a gravidade, $\tau \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de torques aplicados nas juntas e $F_{ext} \in \mathbb{R}^n$ é vetor de forças externas generalizadas aplicadas ao robô.

Ressalta-se que o modelo de (2-1) possui, dentre outras, as seguintes propriedades (Spong et al., 2006; Kelly et al., 2006; Nuño et al., 2009):

Propriedade 2.1 *$M(q)$ é simétrica positiva definida e limitada, $0 < \lambda_{min}I_n \leq M(q) \leq \lambda_{max}I_n < \infty$, para todo $q \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda_{min}, \lambda_{max} \in \mathbb{R}^+$;*

Propriedade 2.2 *A matriz $\dot{M} - 2C$ é antissimétrica, ou seja, $u^T(\dot{M} - 2C)u = 0$, $\forall u \in \mathbb{R}^n$.*

Propriedade 2.3 *Para todo $q, x, y \in \mathbb{R}^n$, existe um escalar positivo γ tal que $\|C(q,x)y\| \leq \gamma\|x\|\|y\|$.*

Propriedade 2.4 *Se \dot{q} e \ddot{q} são limitados, a derivada temporal de $C(q, \dot{q})$ é limitada.*

Assim, neste trabalho é considerado o modelo Euler-Lagrange para sistemas de teleoperação bilateral

$$\begin{cases} M_m(q_m)\ddot{q}_m + C_m(q_m, \dot{q}_m)\dot{q}_m + g_m(q_m) = \tau_m - F_h \\ M_s(q_s)\ddot{q}_s + C_s(q_s, \dot{q}_s)\dot{q}_s + g_s(q_s) = \tau_s + F_e \end{cases} \quad (2-2)$$

no qual o subscrito m denota mestre, s denota escravo, $F_h \in \mathbb{R}^n$ e $F_e \in \mathbb{R}^n$ são os torques aplicados respectivamente pelo operador humano e pelo ambiente. Em relação F_h e F_e é considerado a seguinte suposição:

Suposição 2.1 *É assumido que o operador humano e o ambiente definem um mapeamento passivo de força-velocidade.*

$$\int_0^t \dot{q}_m^T(\sigma)F_h(\sigma)d\sigma \geq 0, \quad - \int_0^t \dot{q}_s^T(\sigma)F_e(\sigma)d\sigma \geq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Note os sinais das forças externas, os quais são consistentes com a convenção padrão de fluxo de potência.

2.2 Lei de controle

A lei de controle é definida como proporcional ao erro de posição mais injeção de amortecimento local (P+d), com compensação dos efeitos gravitacionais locais, como

$$\begin{cases} \tau_m = -k_m(q_m - q_s(t - d_s(t))) - \alpha_m\dot{q}_m + g_m(q_m), \\ \tau_s = -k_s(q_s - q_m(t - d_m(t))) - \alpha_s\dot{q}_s + g_s(q_s), \end{cases} \quad (2-3)$$

sendo k_m , α_m , k_s e α_s escalares reais positivos, $d_m(t)$ é o atraso de tempo no canal de comunicação do mestre para o escravo; e $d_s(t)$ é o atraso de tempo no canal de comunicação do escravo para o mestre. Cabe ressaltar que os atrasos $d_m(t)$ e $d_s(t)$ não são conhecidos a priori, mas os dados de q_s chegam ao manipulador mestre, para o cálculo de $\tau_m(t)$, com atraso. O mesmo ocorre com $q_m(t - d_m(t))$ no cálculo de $\tau_s(t)$.

A parcela proporcional ao erro de posição tem como objetivo minimizar a diferença de posição entre o mestre e o escravo. Já a parcela que envolve velocidade tem como finalidade manter a estabilidade do sistema ao dissipar a energia do movimento.

Esta lei de controle é utilizada em todas as condições de estabilidade propostas neste trabalho.

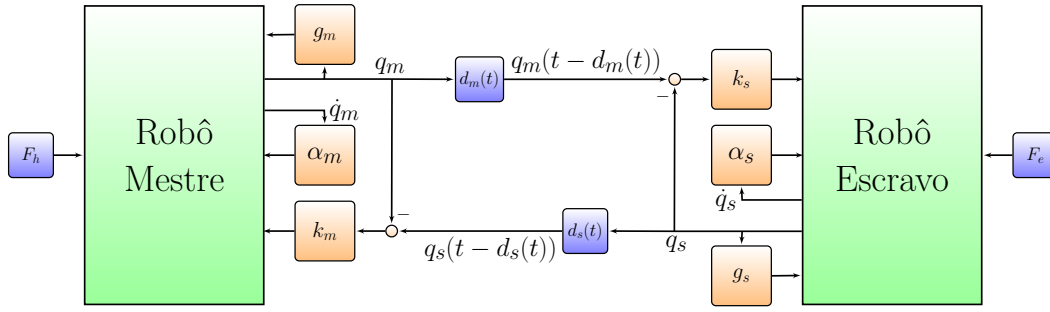


Figura 2.1: Esquema de Controle

2.3 Atraso variante no tempo

Assume-se nesta pesquisa que os atrasos aos quais os sistemas de teleoperação estão sujeitos são, possivelmente, assimétricos e variantes no tempo. Ser assimétrico significa que o atraso do mestre para escravo é independente do atraso do escravo para o mestre. Ser variante no tempo significa que o atraso pode assumir qualquer valor no intervalo de 0 até um valor máximo e com uma taxa de variação qualquer. Este modelo para o atraso é o que mais se aproxima do encontrado em canais de comunicação reais, por exemplo como aqueles que constituem a Internet.

Para os atrasos $d_m(t)$ e $d_s(t)$, existem os escalares \bar{d}_m e \bar{d}_s , tais que

$$0 \leq d_m(t) \leq \bar{d}_m < \infty \quad \text{e} \quad 0 \leq d_s(t) \leq \bar{d}_s < \infty \quad \forall t \geq 0. \quad (2-4)$$

Capítulo 3

Análise de estabilidade

Neste capítulo são apresentadas diferentes condições de análise de estabilidade para sistemas teleoperados bilaterais sujeitos a atrasos variantes no tempo. Inicialmente são apresentadas condições LMIs, as quais são baseadas em diferentes métodos de análise de estabilidade para sistemas sujeitos a atraso variante no tempo disponíveis na literatura. Posteriormente, é apresentada uma condição algébrica dependente dos parâmetros da lei de controle e dos valores máximos dos atrasos.

3.1 Condições LMIs para análise de estabilidade

A seguir são apresentados os principais resultados dessa dissertação.

3.1.1 Condição baseada no método de Hua e Liu (2010) e na desigualdade de Jensen

Em Hua e Liu (2010), fundamentado na teoria de Lyapunov-Krasovskii, é estudado o mesmo problema abordado nesta dissertação, sendo proposta uma condição de análise de estabilidade para sistemas de teleoperação bilateral formulada em termos de LMIs (veja Apêndice B.1). Entretanto em Hua e Liu (2010) é utilizado uma desigualdade (veja Lema B.1, Apêndice B.1) que pode atribuir muito conservadorismo a condição resultante.

Portanto, na tentativa de reduzir um possível conservadorismo presente na condição apresentada em Hua e Liu (2010), é proposta uma condição LMI alternativa. Para a obtenção deste resultado seguimos passos similares ao apresentados em Hua e Liu (2010), mas a aplicação da desigualdade no Lema B.1 é substituída pela desigualdade de Jensen (veja Apêndice A.3).

Teorema 3.1 *Seja o sistema de teleoperação bilateral (2-2), sob a suposição 2.1, governado pela lei de controle em (2-3), cujos atrasos no tempo satisfazem (2-4). Se existirem matrizes simétricas e definidas positivas R_m e $R_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que a LMI*

$$\begin{bmatrix} -2\alpha_m I_n + \bar{d}_m R_m & -k_m I_n & 0_n & 0_n \\ * & -\frac{R_s}{d_s} & 0_n & 0_n \\ * & * & -2\frac{k_m \alpha_s}{k_s} I_n + \bar{d}_s R_s & -k_m I_n \\ * & * & * & -\frac{R_m}{d_m} \end{bmatrix} < 0 \quad (3-1)$$

seja satisfeita. Então:

I. Velocidades e erros de posição são limitados, isto é, $\{\dot{q}_m, \dot{q}_s, q_m - q_s\} \in \mathcal{L}_\infty$, $\{\dot{q}_m, \dot{q}_s\} \in \mathcal{L}_2$, e além disso, $\{|q_m(t) - q_s(t - d_s(t))|, |q_s(t) - q_m(t - d_m(t))|\} \in \mathcal{L}_\infty$.

II. No caso do operador humano não movimentar o manipulador mestre e o manipulador escravo não interagir com o ambiente ($F_m = F_h = 0$), as velocidades e erros de posição convergem para zero assintoticamente:

$$\begin{aligned} \dot{q}_m(t) &\rightarrow 0, t \rightarrow \infty; \\ \dot{q}_s(t) &\rightarrow 0, t \rightarrow \infty; \\ |q_m(t) - q_s(t - d_s(t))| &\rightarrow 0, t \rightarrow \infty; \\ |q_s(t) - q_m(t - d_m(t))| &\rightarrow 0, t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Prova. Seja o funcional candidato de Lyapunov-Krasovskii proposto em Hua e Liu (2010):

$$V = \sum_{i=1}^3 V_i \quad (3-2)$$

com

$$\begin{aligned} V_1 &= \dot{q}_m^T M_m(q_m) \dot{q}_m + \frac{k_m}{k_s} \dot{q}_s^T M_s(q_s) \dot{q}_s + \\ & 2 \int_0^t \dot{q}_m^T(\sigma) F_h(\sigma) - \frac{k_m}{k_s} \dot{q}_s^T(\sigma) F_e(\sigma) d\sigma; \end{aligned} \quad (3-3)$$

$$V_2 = k_m (q_m - q_s)^T (q_m - q_s); \quad (3-4)$$

$$V_3 = \sum_{r=m,s} \int_{-\bar{d}_r}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{q}_r^T(\sigma) R_r \dot{q}_r(\sigma) d\sigma d\theta. \quad (3-5)$$

Inicialmente, note que considerando a Propriedade 2.1, a Suposição 2.1, $R_m > 0$ e $R_s > 0$, então V satisfaz a condição de positividade da teoria de Lyapunov-Krasovskii, i.e. $V > 0$.

Em seguida, é mostrado que se as condições no teorema são satisfeitas, então $\dot{V} \leq 0$.

Diferenciando V_1 (3-3) temos

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & 2\dot{q}_m^T M_m(q_m)\ddot{q}_m + \dot{q}_m^T \dot{M}_m(q_m)\dot{q}_m \\ & + \frac{k_m}{k_s}(2\dot{q}_s^T M_s(q_s)\ddot{q}_s + \dot{q}_s^T \dot{M}_s(q_s)\dot{q}_s) + 2\dot{q}_m^T F_h - 2\frac{k_m}{k_s}\dot{q}_s^T F_e \end{aligned} \quad (3-6)$$

na qual é inserida a dinâmica do sistema (2-2), obtendo

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & 2\dot{q}_m^T(\tau_m - F_h - C_m(q_m, \dot{q}_m)\dot{q}_m - g_m(q_m)) + \dot{q}_m^T \dot{M}_m(q_m)\dot{q}_m + 2\dot{q}_m^T F_h \\ & + \frac{k_m}{k_s}(2\dot{q}_s^T(\tau_s + F_e - C_s(q_s, \dot{q}_s)\dot{q}_s - g_s(q_s)) + \dot{q}_s^T \dot{M}_s(q_s)\dot{q}_s - 2\dot{q}_s^T F_e). \end{aligned}$$

Aplicando a Propriedade 2.2 temos que

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & 2\dot{q}_m^T(\tau_m - F_h - g_m(q_m)) + 2\dot{q}_m^T F_h \\ & + \frac{k_m}{k_s}(2\dot{q}_s^T(\tau_s + F_e - g_s(q_s)) - 2\dot{q}_s^T F_e) \\ = & 2\dot{q}_m^T(\tau_m - g_m(q_m)) + 2\frac{k_m}{k_s}\dot{q}_s^T(\tau_s - g_s(q_s)). \end{aligned}$$

Substituindo a lei de controle (2-3) resulta em

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & 2\dot{q}_m^T(-k_m(q_m - q_s(t - d_s(t))) - \alpha_m \dot{q}_m) \\ & + 2\frac{k_m}{k_s}\dot{q}_s^T(-k_s(q_s - q_m(t - d_m(t))) - \alpha_s \dot{q}_s) \end{aligned}$$

e utilizando a identidade $q_r(t - d_r(t)) = q_r - \int_{t-d_r}^t \dot{q}_r(\sigma)d\sigma$ vemos que

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & 2\dot{q}_m^T(-k_m(q_m - q_s + \int_{t-d_s(t)}^t \dot{q}_s(\sigma)d\sigma)) - \alpha_m \dot{q}_m) \\ & + 2\frac{k_m}{k_s}\dot{q}_s^T(-k_s(q_s - q_m + \int_{t-d_m(t)}^t \dot{q}_m(\sigma)d\sigma) - \alpha_s \dot{q}_s) \end{aligned}$$

Rearranjando alguns termos obtemos

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & -2\alpha_m \dot{q}_m^T \dot{q}_m - 2k_m(q_m - q_s)^T(\dot{q}_m - \dot{q}_s) - 2\frac{k_m \alpha_s}{k_s} \dot{q}_s^T \dot{q}_s \\ & - 2k_m \dot{q}_m^T \int_{t-d_s(t)}^t \dot{q}_s(\sigma)d\sigma - 2k_m \dot{q}_s^T \int_{t-d_m(t)}^t \dot{q}_m(\sigma)d\sigma. \end{aligned} \quad (3-7)$$

Agora diferenciando V_2 (3-4) temos

$$\dot{V}_2 = 2k_m(q_m - q_s)^T(\dot{q}_m - \dot{q}_s) \quad (3-8)$$

Por fim, diferenciando V_3 (3-5) obtemos

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= \sum_{r=m,s} \left\{ \bar{d}_r \dot{q}_r^T R_r \dot{q}_r - \int_{t-\bar{d}_r}^t \dot{q}_r^T(\sigma) R_r \dot{q}_r(\sigma) d\sigma \right\}, \\ &\leq \sum_{r=m,s} \left\{ \bar{d}_r \dot{q}_r^T R_r \dot{q}_r - \int_{t-d_r(t)}^t \dot{q}_r^T(\sigma) R_r \dot{q}_r(\sigma) d\sigma \right\}. \end{aligned} \quad (3-9)$$

Aqui aplica-se a desigualdade de Jensen (veja Apêndice A.3) ao termo dentro da caixa

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &\leq \sum_{r=m,s} \left\{ \bar{d}_r \dot{q}_r^T R_r \dot{q}_r - \frac{1}{d_r(t)} \int_{t-d_r(t)}^t \dot{q}_r^T(\sigma) d\sigma R_r \int_{t-d_r(t)}^t \dot{q}_r(\sigma) d\sigma \right\}, \\ &\leq \sum_{r=m,s} \left\{ \bar{d}_r \dot{q}_r^T R_r \dot{q}_r - \frac{1}{d_r} \int_{t-d_r(t)}^t \dot{q}_r^T(\sigma) d\sigma R_r \int_{t-d_r(t)}^t \dot{q}_r(\sigma) d\sigma \right\}. \end{aligned}$$

Definindo o vetor de estados aumentado

$$\xi^T = \left[\dot{q}_m^T(t) \quad \int_{t-d_s(t)}^t \dot{q}_s^T(\sigma) d\sigma \quad \dot{q}_s^T(t) \quad \int_{t-d_m(t)}^t \dot{q}_m^T(\sigma) d\sigma \right]$$

temos

$$\dot{V} \leq \xi^T \Phi \xi$$

com

$$\Phi = \begin{bmatrix} -2\alpha_m I_n + \bar{d}_m R_m & -k_m I_n & 0_n & 0_n \\ * & -\frac{R_s}{d_s} & 0_n & 0_n \\ * & * & -2\frac{k_m \alpha_s}{k_s} I_n + \bar{d}_s R_s & -k_m I_n \\ * & * & * & -\frac{R_m}{d_m} \end{bmatrix}. \quad (3-10)$$

Portanto, se $\Phi < 0$ então $\dot{V} \leq 0$. Ademais, temos que $\dot{q}_m, \dot{q}_s, q_m - q_s \in \mathcal{L}_\infty$ e $\dot{q}_m, \dot{q}_s \in \mathcal{L}_2$. Notando que $q_m - q_s(t - d_s(t)) = q_m - q_s + \int_{t-d_s(t)}^t \dot{q}_s(\sigma) d\sigma$, conclui-se que $q_m - q_s(t - d_s(t))$ é limitado. Similarmente $q_s - q_m(t - d_m(t))$ também é limitado.

Para provar a estabilidade assintótica, além de supor forças externas nulas, é necessário mostrar que as acelerações \ddot{q}_m e \ddot{q}_s sejam limitadas. A partir das equações (2-2) e (2-3) temos

$$\ddot{q}_m = M_m^{-1}(q_m) [-C_m(q_m, \dot{q}_m) \dot{q}_m - \alpha_m \dot{q}_m - k_m (q_m - q_s(t - d_s(t)))]. \quad (3-11)$$

Devido \dot{q}_m e $q_m - q_s(t - d_s(t))$ serem limitados e as propriedades 2.1 e 2.3, temos que \ddot{q}_m também é limitado, e conseqüentemente \dot{q}_m é uniformemente contínua. Baseado no lema de Barbalat, sabemos que $\dot{q}_m \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, e similarmente, $\dot{q}_s \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Agora é provado que o erro de posição converge assintoticamente para

zero. Baseado na equação (3-11), para mostrar que o erro de posição é assintoticamente estável quando $F_h = F_e = 0$, é necessário provar que $\ddot{q}_m \rightarrow 0$. Para isso primeiro é preciso mostrar que a derivada de \ddot{q}_m é limitada.

Diferenciando ambos os lados da equação (3-11), temos

$$\begin{aligned} \ddot{q}_m = & \dot{M}_m^{-1}(q_m)(-C_m(q_m, \dot{q}_m)\dot{q}_m - \alpha_m \dot{q}_m - k_m(q_m - q_s(t - d_s(t)))) \\ & + M_m^{-1}(q_m)(-C_m(q_m, \dot{q}_m)\ddot{q}_m - \dot{C}_m(q_m, \dot{q}_m)\dot{q}_m - \alpha_m \ddot{q}_m - k_m(\dot{q}_m \\ & - (1 - \dot{d}_s)\dot{q}_s(t - d_s(t)))). \end{aligned}$$

Utilizando as propriedades 2.1 – 2.4, a limitação de \ddot{q}_m e a convergência assintótica das velocidades \dot{q}_m e \dot{q}_s temos que $\ddot{q}_m \in \mathcal{L}_\infty$ e consequentemente \ddot{q}_m é uniformemente contínua. Então, como $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}_m(t) = 0$ e baseado no lema de Barbalat, $\ddot{q}_m \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e consequentemente, $q_m(t) - q_s(t - d_s(t)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Similarmente $q_s(t) - q_m(t - d_m(t)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Com tudo exposto a convergência assintótica dos erros de posição na ausência de forças externas é garantida. ■

3.1.2 Condição baseada nos métodos de Hua e Liu (2010) e Shao (2009)

O resultado apresentado a seguir segue as mesmas diretrizes básicas da seção anterior. Entretanto, para o desenvolvimento do resultado apresentado no teorema a seguir, o uso da desigualdade de Jensen é substituído pelo método proposto por Shao (2009). Em Shao (2009) é proposta uma condição LMI para análise de estabilidade de sistemas lineares sujeitos a atrasos variantes no tempo, o resultado proposto se baseia em uma escolha apropriada do funcional de Lyapunov-Krasovskii e propriedades de combinações convexas.

Teorema 3.2 *Seja o sistema de teleoperação bilateral (2-2), sob a suposição 2.1, governado pela lei de controle em (2-3), cujos atrasos no tempo satisfazem (2-4). Se existirem matrizes simétricas e definidas positivas R_m e $R_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que a LMI*

$$\begin{bmatrix} -2\alpha_m I_n + \bar{d}_m^2 R_m & -k_m I_n & 0_n & 0_n \\ * & -R_s & 0_n & 0_n \\ * & * & -2\frac{k_m \alpha_s}{k_s} I_n + \bar{d}_s^2 R_s & -k_m I_n \\ * & * & * & -R_m \end{bmatrix} < 0. \quad (3-12)$$

Então:

1. Velocidades e erros de posição são limitados, isto é, $\{\dot{q}_m, \dot{q}_s, q_m - q_s\} \in \mathcal{L}_\infty$, $\{\dot{q}_m, \dot{q}_s\} \in \mathcal{L}_2$, além disso, $\{|q_m(t) - q_s(t - d_s(t))|, |q_s(t) - q_m(t - d_m(t))|\} \in \mathcal{L}_\infty$.

2. No caso do operador humano não movimentar o manipulador mestre e o manipulador escravo não interagir com o ambiente ($F_m = F_h = 0$), as velocidades e erros de posição assintoticamente convergem para zero:

$$\begin{aligned}\dot{q}_m(t) &\rightarrow 0, t \rightarrow \infty; \\ \dot{q}_s(t) &\rightarrow 0, t \rightarrow \infty; \\ |q_m(t) - q_s(t - d_s(t))| &\rightarrow 0, t \rightarrow \infty; \\ |q_s(t) - q_m(t - d_m(t))| &\rightarrow 0, t \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Prova. Seja o funcional candidato de Lyapunov-Krasovskii

$$V = \sum_{i=1}^3 V_i, \quad (3-13)$$

com V_1 e V_2 dados em (3-3) e (3-4), respectivamente, e

$$V_3 = \sum_{r=m,s} \bar{d}_r \int_{-\bar{d}_r}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{q}_r^T(\sigma) R_r \dot{q}_r(\sigma) d\sigma d\theta. \quad (3-14)$$

Na prova do Teorema 3.1 verificamos que este funcional satisfaz a condição de positividade da teoria de Lyapunov-Krasovskii e temos \dot{V}_1 e \dot{V}_2 dadas em (3-7) e (3-8), respectivamente. Logo, diferenciando (3-14) temos:

$$\begin{aligned}\dot{V}_3 &= \sum_{r=m,s} \left\{ \bar{d}_r^2 \dot{q}_r^T R_r \dot{q} - \bar{d}_r \int_{t-\bar{d}_r}^t \dot{q}_r^T(\sigma) R_r \dot{q}_r(\sigma) d\sigma \right\}, \\ &= \sum_{r=m,s} \left\{ \bar{d}_r^2 \dot{q}_r^T R_r \dot{q} - \bar{d}_r \int_{t-d_r(t)}^t \dot{q}_r^T(\sigma) R_r \dot{q}_r(\sigma) d\sigma \right. \\ &\quad \left. - \bar{d}_r \int_{t-\bar{d}_r}^{t-d_r(t)} \dot{q}_r^T(\sigma) R_r \dot{q}_r(\sigma) d\sigma \right\}, \\ &= \sum_{r=m,s} \left\{ \bar{d}_r^2 \dot{q}_r^T R_r \dot{q} - (\bar{d}_r - d_r(t)) \int_{t-d_r(t)}^t \dot{q}_r^T(\sigma) R_r \dot{q}_r(\sigma) d\sigma \right. \\ &\quad - d_r(t) \int_{t-d_r(t)}^t \dot{q}_r^T(\sigma) R_r \dot{q}_r(\sigma) d\sigma - (\bar{d}_r - d_r(t)) \int_{t-\bar{d}_r}^{t-d_r(t)} \dot{q}_r^T(\sigma) R_r \dot{q}_r(\sigma) d\sigma \\ &\quad \left. - d_r(t) \int_{t-\bar{d}_r}^{t-d_r(t)} \dot{q}_r^T(\sigma) R_r \dot{q}_r(\sigma) d\sigma \right\}.\end{aligned}$$

Notando que $d_m(t)/\bar{d}_m \in [0, 1]$ e, similarmente, $d_s(t)/\bar{d}_s \in [0, 1]$, são

definidas as novas variáveis $\beta_m = d_m(t)/\bar{d}_m$ e $\beta_s = d_s(t)/\bar{d}_s$ obtendo:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= \sum_{r=m,s} \left\{ \bar{d}_r^2 \dot{q}_r^T R_r \dot{q} - \bar{d}_r (1 - \beta_r) \int_{t-d_r(t)}^t \dot{q}_r^T(\sigma) R_r \dot{q}_r(\sigma) d\sigma \right. \\ &\quad - d_r(t) \int_{t-d_r(t)}^t \dot{q}_r^T(\sigma) R_r \dot{q}_r(\sigma) d\sigma \\ &\quad \left. - (\bar{d}_r - d_r(t)) \int_{t-\bar{d}_r}^{t-d_r(t)} \dot{q}_r^T(\sigma) R_r \dot{q}_r(\sigma) d\sigma - \beta_r \bar{d}_r \int_{t-\bar{d}_r}^{t-d_r(t)} \dot{q}_r^T(\sigma) R_r \dot{q}_r(\sigma) d\sigma \right\}, \\ &\leq \sum_{r=m,s} \left\{ \bar{d}_r^2 \dot{q}_r^T R_r \dot{q} - d_r(t) (1 - \beta_r) \int_{t-d_r(t)}^t \dot{q}_r^T(\sigma) R_r \dot{q}_r(\sigma) d\sigma \right. \\ &\quad - d_r(t) \int_{t-d_r(t)}^t \dot{q}_r^T(\sigma) R_r \dot{q}_r(\sigma) d\sigma \\ &\quad - (\bar{d}_r - d_r(t)) \int_{t-\bar{d}_r}^{t-d_r(t)} \dot{q}_r^T(\sigma) R_r \dot{q}_r(\sigma) d\sigma \\ &\quad \left. - \beta_r (\bar{d}_r - d_r(t)) \int_{t-\bar{d}_r}^{t-d_r(t)} \dot{q}_r^T(\sigma) R_r \dot{q}_r(\sigma) d\sigma \right\}. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Jensen nos termos dentro das caixas chegamos a

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &\leq \sum_{r=m,s} \left\{ \bar{d}_r^2 \dot{q}_r^T R_r \dot{q} - (2 - \beta_r) \int_{t-d_r(t)}^t \dot{q}_r^T(\sigma) d\sigma R_r \int_{t-d_r(t)}^t \dot{q}_r(\sigma) d\sigma \right. \\ &\quad \left. - (1 + \beta_r) \int_{t-\bar{d}_r}^{t-d_r(t)} \dot{q}_r^T(\sigma) d\sigma R_r \int_{t-\bar{d}_r}^{t-d_r(t)} \dot{q}_r(\sigma) d\sigma \right\}. \end{aligned}$$

Por fim, combinando a desigualdade acima com (3-7) e (3-8) obtemos

$$\dot{V} \leq \xi^T \Phi(\beta_m, \beta_s) \xi$$

sendo

$$\Phi(\beta_m, \beta_s) = \begin{bmatrix} \Phi_{1,1} & -k_m I_n & 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ * & \Phi_{2,2} & 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ * & * & \Phi_{3,3} & -k_m I_n & 0_n & 0_n \\ * & * & * & \Phi_{4,4} & 0_n & 0_n \\ * & * & * & * & -(1 + \beta_m) R_m & 0_n \\ * & * & * & * & * & -(1 + \beta_s) R_s \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

com $\Phi_{1,1} = -2\alpha_m I_n + \bar{d}_m^2 R_m$, $\Phi_{2,2} = -(2 - \beta_s) R_s$, $\Phi_{3,3} = -2 \frac{k_m \alpha_s}{k_s} I_n + \bar{d}_s^2 R_s$,

$\Phi_{4,4} = -(2 - \beta_m)R_m$ e

$$\xi^T = \begin{bmatrix} \dot{q}_m^T(t) \int_{t-d_s(t)}^t \dot{q}_s^T(\sigma)d\sigma & \dot{q}_s^T(t) \int_{t-d_m(t)}^t \dot{q}_m^T(\sigma)d\sigma \\ \int_{t-\bar{d}_m}^{t-d_m(t)} \dot{q}_m^T(\sigma)d\sigma & \int_{t-\bar{d}_s}^{t-d_s(t)} \dot{q}_s^T(\sigma)d\sigma \end{bmatrix}. \quad (3-16)$$

Logo, se $\Phi(\beta_m, \beta_s) < 0$ para $\forall \beta_m \in [0, 1]$ e $\forall \beta_s \in [0, 1]$, então $\dot{V} \leq 0$. Felizmente, note que esta condição é satisfeita, se simplesmente $\Phi(\beta_m, \beta_s) < 0$ para $\beta_m = \beta_s = 1$. Ademais, note que por definição $R_m > 0$ e $R_s > 0$, assim as duas últimas linhas e colunas de (3-15) são redundantes e podem ser eliminadas. Portanto, a LMI no teorema corresponde a impor que $\Phi(1,1)$ sem suas duas últimas linhas e colunas seja definida negativa. O restante da prova segue os mesmos passos na prova do Teorema 3.1. ■

3.1.3 Equivalência das condições

Apesar do esforço dispendido, podemos verificar que as condições apresentadas nos dois teoremas anteriores são equivalentes a condição proposta em Hua e Liu (2010). Esta constatação é apresentada no Lema a seguir.

Lema 3.1 *As condições LMIs (3-1) e (3-12) são equivalentes a condição LMI proposta em Hua e Liu (2010) (B-1).*

Prova. Para verificar que (3-1) é equivalente a (B-1), basta pré e pós multiplicar (3-1) por

$$T = \begin{bmatrix} I_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ * & -\bar{d}_s I_n & 0_n & 0_n \\ * & * & I_n & 0_n \\ * & * & * & -\bar{d}_m I_n \end{bmatrix}$$

para obter (B-1). Ademais, que (3-1) é equivalente a (3-12) é verificado simplesmente definindo em (3-12) $R_m = \bar{R}_m/\bar{d}_m$ e $R_s = \bar{R}_s/\bar{d}_s$. ■

3.2 Condição algébrica

Nesta seção é apresentada uma solução algébrica de análise de estabilidade para sistemas teleoperados bilaterais sujeitos a atrasos variantes no tempo. Assim, o problema de factibilidade LMI pode ser substituído por uma simples condição de estabilidade dependente somente dos parâmetros da lei de controle, substituindo o custo computacional polinomial em n por um custo constante. Ademais, destaca-se que esta condição algébrica pode ser utilizada para projeto dos controladores em função dos valores dos atrasos.

Teorema 3.3 *Seja o sistema de teleoperação bilateral (2-2) sob a suposição 2.1, governado pela lei de controle em (2-3), cujos atrasos no tempo satisfazem (2-4). Se a condição*

$$\bar{d}_m + \bar{d}_s < 2\sqrt{\frac{\alpha_m \alpha_s}{k_m k_s}} \quad (3-17)$$

for satisfeita. Então:

- I. *Velocidades e erros de posição são limitados, isto é, $\{\dot{q}_m, \dot{q}_s, q_m - q_s\} \in \mathcal{L}_\infty$, $\{\dot{q}_m, \dot{q}_s\} \in \mathcal{L}_2$, além disso, $\{|q_m(t) - q_s(t - d_s(t))|, |q_s(t) - q_m(t - d_m(t))|\} \in \mathcal{L}_\infty$.*
- II. *No caso do operador humano não movimentar o manipulador mestre e o manipulador escravo não interagir com o ambiente ($F_m = F_h = 0$), as velocidades e erros de posição convergem para zero assintoticamente:*

$$\begin{aligned} \dot{q}_m(t) &\rightarrow 0, t \rightarrow \infty; \\ \dot{q}_s(t) &\rightarrow 0, t \rightarrow \infty; \\ |q_m(t) - q_s(t - d_s(t))| &\rightarrow 0, t \rightarrow \infty; \\ |q_s(t) - q_m(t - d_m(t))| &\rightarrow 0, t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Prova. Seja o funcional candidato de Lyapunov-Krasovskii

$$V = \sum_{i=1}^3 V_i, \quad (3-18)$$

com V_1 e V_2 dados em (3-3) e (3-4), respectivamente, e

$$\begin{aligned} V_3 = & \bar{d}_m \sqrt{\frac{k_m k_s \alpha_m}{\alpha_s}} \int_{-\bar{d}_m}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{q}_m^T(\sigma) \dot{q}_m(\sigma) d\sigma d\theta + \\ & \bar{d}_s k_m \sqrt{\frac{k_m \alpha_s}{k_s \alpha_m}} \int_{-\bar{d}_s}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{q}_s^T(\sigma) \dot{q}_s(\sigma) d\sigma d\theta. \end{aligned} \quad (3-19)$$

Inicialmente, note que considerando a Propriedade 2.1, a Suposição 2.1, $\alpha_m > 0$, $\alpha_s > 0$, $k_m > 0$ e $k_s > 0$, então V satisfaz a condição de positividade da teoria de Lyapunov-Krasovskii, i.e. $V > 0$ e temos \dot{V}_1 e \dot{V}_2 dadas em (3-7)

e (3-8), respectivamente. Logo, diferenciando (3-19) temos:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_3 &= \bar{d}_m \sqrt{\frac{k_m k_s \alpha_m}{\alpha_s}} \dot{q}_m^T \dot{q}_m - \sqrt{\frac{k_m k_s \alpha_m}{\alpha_s}} \int_{t-\bar{d}_m}^t \dot{q}_m^T(\sigma) \dot{q}_m(\sigma) d\sigma + \\
 &\quad \bar{d}_s k_m \sqrt{\frac{k_m \alpha_s}{k_s \alpha_m}} \dot{q}_s^T \dot{q}_s - k_m \sqrt{\frac{k_m \alpha_s}{k_s \alpha_m}} \int_{t-\bar{d}_s}^t \dot{q}_s^T(\sigma) \dot{q}_s(\sigma) d\sigma \\
 &\leq \bar{d}_m \sqrt{\frac{k_m k_s \alpha_m}{\alpha_s}} \dot{q}_m^T \dot{q}_m - \boxed{\sqrt{\frac{k_m k_s \alpha_m}{\alpha_s}} \int_{t-d_m(t)}^t \dot{q}_m^T(\sigma) \dot{q}_m(\sigma) d\sigma} + \\
 &\quad \bar{d}_s k_m \sqrt{\frac{k_m \alpha_s}{k_s \alpha_m}} \dot{q}_s^T \dot{q}_s - \boxed{k_m \sqrt{\frac{k_m \alpha_s}{k_s \alpha_m}} \int_{t-d_s(t)}^t \dot{q}_s^T(\sigma) \dot{q}_s(\sigma) d\sigma}. \tag{3-20}
 \end{aligned}$$

Aqui aplica-se o Lema B.1 aos termos dentro das caixas

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_3 &\leq \bar{d}_m \sqrt{\frac{k_m k_s \alpha_m}{\alpha_s}} \dot{q}_m^T \dot{q}_m + \bar{d}_m k_m \sqrt{\frac{k_m \alpha_s}{k_s \alpha_m}} \dot{q}_s^T \dot{q}_s + 2k_m \dot{q}_s^T \int_{t-d_m(t)}^t \dot{q}_m(\sigma) d\sigma + \\
 &\quad \bar{d}_s k_m \sqrt{\frac{k_m \alpha_s}{k_s \alpha_m}} \dot{q}_s^T \dot{q}_s + \bar{d}_s \sqrt{\frac{k_m k_s \alpha_m}{\alpha_s}} \dot{q}_m^T \dot{q}_m + 2k_m \dot{q}_m^T \int_{t-d_s(t)}^t \dot{q}_s(\sigma) d\sigma.
 \end{aligned}$$

Por fim, combinando a desigualdade acima com (3-7) e (3-8) obtemos

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &\leq - \left(2\alpha_m - \bar{d}_m \sqrt{\frac{k_m k_s \alpha_m}{\alpha_s}} - \bar{d}_s \sqrt{\frac{k_m k_s \alpha_m}{\alpha_s}} \right) \dot{q}_m^T \dot{q}_m \\
 &\quad - \left(2\frac{k_m \alpha_s}{k_s} - \bar{d}_s k_m \sqrt{\frac{k_m \alpha_s}{k_s \alpha_m}} - \bar{d}_m k_m \sqrt{\frac{k_m \alpha_s}{k_s \alpha_m}} \right) \dot{q}_s^T \dot{q}_s. \tag{3-21}
 \end{aligned}$$

Note que $2\alpha_m > (\bar{d}_m + \bar{d}_s) \sqrt{\frac{k_m k_s \alpha_m}{\alpha_s}}$ e $2\frac{\alpha_s}{k_s} > (\bar{d}_m + \bar{d}_s) \sqrt{\frac{k_m \alpha_s}{k_s \alpha_m}}$ se a condição (3-17) for satisfeita. Então $\dot{V} \leq 0$.

O restante da prova segue os mesmos passos na prova do Teorema 3.1. ■

Vale ressaltar que a Proposição 1 apresentada em Nuno et al. (2008) pode ser vista com um caso especial do Teorema 3.3 quando o atraso é simétrico e constante (veja Apêndice B.2).

Capítulo 4

Simulações e experimentos

Neste capítulo a aplicação dos métodos de análise de estabilidade propostos é ilustrada. A verificação da eficácia dos critérios de estabilidade propostos foi realizada por meio de simulações numéricas e experimentos reais utilizando um sistema de teleoperação bilateral sujeito a atrasos variantes no tempo. As simulações consideram manipuladores com 2 graus de liberdade e os experimentos reais consideram manipuladores com 5 graus de liberdade.

4.1 Resultados dos Teoremas

Nesta seção são comparados os resultados obtidos pela aplicação dos teoremas apresentados no capítulo anterior. Os testes de factibilidade das LMIs foram realizados utilizando o programa MatlabTM com auxílio das ferramentas Yalmip (Lofberg, 2004) e SDPT-3 (Toh et al., 1999).

	α_m	α_s	k_m	k_s
Conjunto 1	3	3	2	2
Conjunto 2	6	4	2	3
Conjunto 3	2,5	3	2,5	8

Tabela 4.1: Conjuntos de parâmetros da lei de controle

	$\bar{d}_m + \bar{d}_s$		
	Conj. 1	Conj. 2	Conj. 3
Teorema 3.1	2,9999	3,9999	1,2247
Teorema 3.2	2,9999	3,9999	1,2247
Teorema 3.3	2,9999	3,9999	1,2247
Teorema B.1	2,9999	3,9999	1,2247

Tabela 4.2: Máximos das somas dos atrasos obtidos aplicando os critérios propostos para cada um dos conjuntos de parâmetros da Tabela 4.1

Na Tabela 4.1 são apresentados alguns conjuntos de parâmetros da lei de controle. A Tabela 4.2 apresenta o maior valor obtido para a soma dos atrasos

máximos em cada teorema e para cada um dos conjuntos dos parâmetros presentes na Tabela 4.1.

Como apresentado no Lema 3.1 as LMIs dos Teoremas 3.1–3.2 e Teorema B.1 são equivalentes e apresentam o mesmo resultado. O Teorema 3.3 se mostrou também equivalente às LMIs, mas com a vantagem de ser uma condição algébrica que dispensa o uso ferramentas computacionais.

4.2 Modelo de simulação

A presente simulação do problema de teleoperação bilateral foi realizada utilizando o programa MatlabTM e o pacote computacional *Robotic Toolbox* (Corke, 1996). Os robôs mestre e escravo foram considerados como manipuladores planares com 2 graus de liberdade e dinâmica da forma:

$$\begin{cases} M_m(q_m)\ddot{q}_m + C_m(q_m, \dot{q}_m)\dot{q}_m + g_m(q_m) = \tau_m - J_m^T f_h, \\ M_s(q_s)\ddot{q}_s + C_s(q_s, \dot{q}_s)\dot{q}_s + g_s(q_s) = \tau_s + J_s^T f_e. \end{cases} \quad (4-1)$$

A matriz de inércia $M_\bullet(q_\bullet)$ ¹ é explicitamente dada por

$$M_\bullet(q_\bullet) = \begin{bmatrix} \mu & m_{2\bullet}(l_{2\bullet}^2 + l_{1\bullet}l_{2\bullet}\cos(q_{2\bullet})) \\ * & m_{2\bullet}l_{2\bullet}^2 \end{bmatrix}, \quad (4-2)$$

sendo $\mu = m_{2\bullet}l_{2\bullet}^2 + (m_{1\bullet} + m_{2\bullet})l_{1\bullet}^2 + 2m_{2\bullet}l_{1\bullet}l_{2\bullet}\cos(q_{2\bullet})$.

As forças centrífugas e de coriolis são modeladas como

$$C_\bullet(q_\bullet, \dot{q}_\bullet) = \begin{bmatrix} -2\beta\dot{q}_{2\bullet} & -\beta\dot{q}_{2\bullet} \\ -\beta\dot{q}_{1\bullet} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4-3)$$

sendo $\beta = m_{2\bullet}l_{1\bullet}l_{2\bullet}\sin(q_{2\bullet})$, $\dot{q}_{1\bullet}$ e $\dot{q}_{2\bullet}$ as velocidades angulares de cada elo.

Os efeitos gravitacionais para cada manipulador são representados por

$$g_\bullet(q_\bullet) = \begin{bmatrix} m_{2\bullet}gl_{2\bullet}\cos(q_{1\bullet} + q_{2\bullet}) + (m_{1\bullet} + m_{2\bullet})gl_{1\bullet}\cos(q_{1\bullet}) \\ m_{2\bullet}gl_{2\bullet}\cos(q_{1\bullet} + q_{2\bullet}) \end{bmatrix}, \quad (4-4)$$

sendo g a aceleração gravitacional. É necessário esclarecer que o operador humano aplica força no efetuador do robô mestre e a interação do ambiente com o robô escravo também é medida no efetuador. Então, para realização das simulações, as seguintes expressões são usadas $F_h = J_m^T(q_m)f_h$ e $F_e = J_s^T(q_s)f_e$, sendo $J_\bullet(q_\bullet)$ a matriz Jacobiana geométrica do robô manipulador. A Jacobiana para robôs com esta configuração é

$$J_\bullet(q_\bullet) = \begin{bmatrix} -l_{1\bullet}\sin(q_{1\bullet}) - l_{2\bullet}\sin(q_{1\bullet} + q_{2\bullet}) & -l_{2\bullet}\sin(q_{1\bullet} + q_{2\bullet}) \\ l_{1\bullet}\cos(q_{1\bullet}) + l_{2\bullet}\cos(q_{1\bullet} + q_{2\bullet}) & l_{2\bullet}\cos(q_{1\bullet} + q_{2\bullet}) \end{bmatrix}. \quad (4-5)$$

¹Ao longo deste capítulo será utilizada o subscrito \square_\bullet quando o elemento (\square) for tanto relativo ao mestre (m) quanto ao escravo (s).

Os valores dos parâmetros físicos utilizados na simulação estão na Tabela 4.3.

	Massa 1 (Kg)	Comp. 1 (m)	Massa 2 (Kg)	Comp. 2 (m)
Mestre	3,9473	0,38	0,6232	0,38
Escravo	3,2409	0,38	0,3185	0,38

Tabela 4.3: Parâmetros físicos dos manipuladores.

4.3 Simulações

A seguir são considerados quatro cenários distintos para a realização das simulações. No cenário 1 testa-se os robôs em movimento livre, ou seja, na ausência de forças externas. O cenário 2 repete o cenário 1, mas com atrasos maiores daqueles permitidos para o ajuste de parâmetros da lei de controle utilizada. Para o cenário 3 é considerada que a força que o operador aplica sobre o robô mestre não é nula. O cenário 4 repete o cenário 3 com a diferença de que agora uma parede no lado do robô escravo causa uma força de interação com o ambiente.

4.3.1 Cenário 1 - Movimento livre

Neste cenário as forças externas são nulas, ou seja, $F_h = F_e = 0$. Os parâmetros do controlador são $\alpha_m = 6$, $\alpha_s = 4$, $k_m = 2$ e $k_s = 3$, com esses parâmetros e usando o Teorema 3.3 temos que a soma dos atrasos máximos deve respeitar o limite de 4 segundos ($\bar{d}_m + \bar{d}_s < 4$).

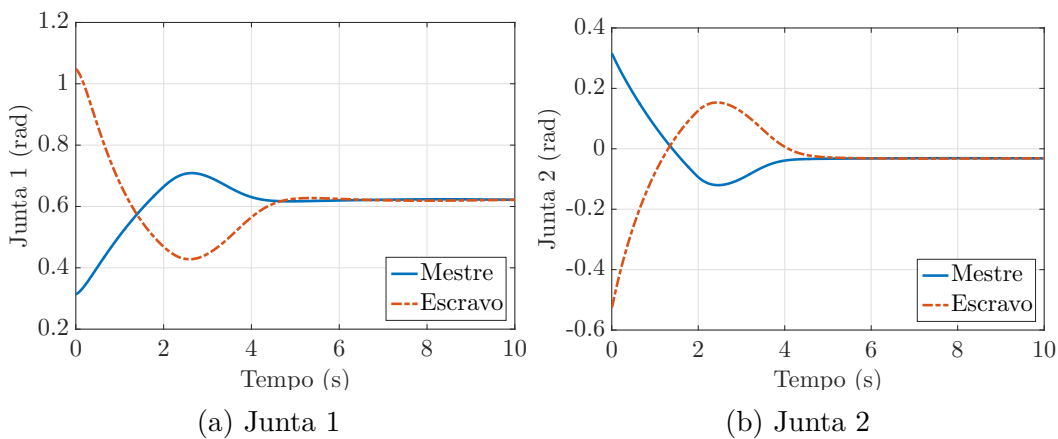


Figura 4.1: Cenário 1 - Movimento livre e critério de estabilidade atendido - Evolução das posições das juntas dos manipuladores.

Assim, é considerado que o atraso de comunicação do mestre para o escravo é $d_m(t) = 1,5 + 0,4999\text{sen}(t)$ e o atraso do escravo para o mestre é

$d_s(t) = 1 + 0,9999\text{sen}(t)$. Além disso, são consideradas as condições iniciais $q_m = [\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}]$, $q_s = [\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}]$ e $\dot{q}_m = \dot{q}_s = [0, 0]$ que podem ser vistas na Figura 4.5a.

Observando a Figura 4.1 é possível verificar que em pouco mais de 4s as juntas convergem para a mesma configuração. Na Figura 4.2 verifica-se que as velocidades das juntas não assumem valores elevados e convergem para 0.

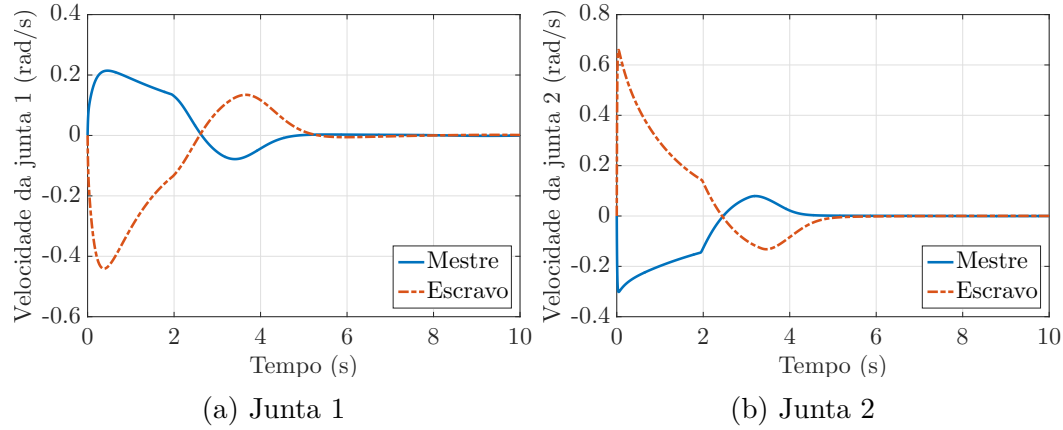


Figura 4.2: Cenário 1 - Movimento livre e critério de estabilidade atendido - Evolução das velocidades das juntas dos manipuladores.

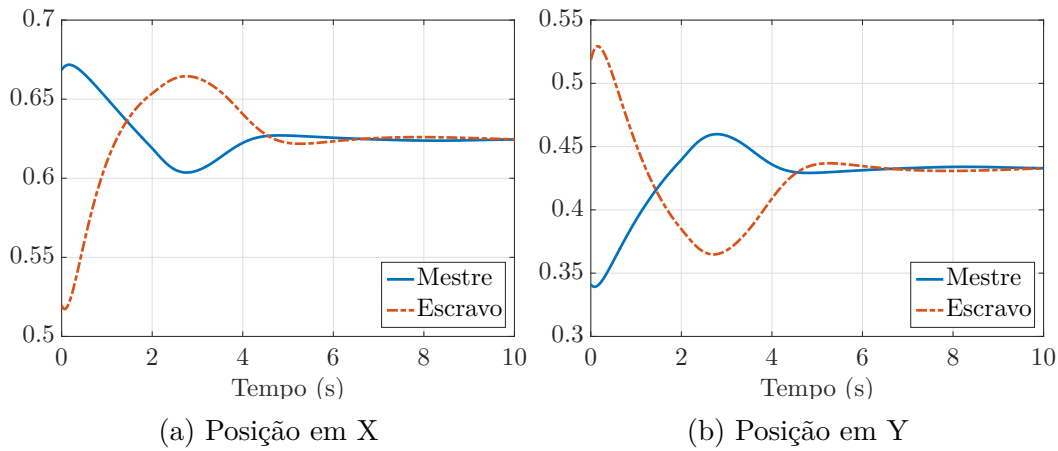


Figura 4.3: Cenário 1 - Movimento livre e critério de estabilidade atendido - Evolução da posição cartesiana dos manipuladores.

Uma forma de verificar a dinâmica do sistema no plano cartesiano é pela Figura 4.3 e o erro de posição na Figura 4.4. A posição final pode ser vista na Figura 4.5b.

No geral, é possível verificar que com a condição de estabilidade satisfeita e na ausência de forças externas, os robôs convergem assintoticamente para a mesma posição.

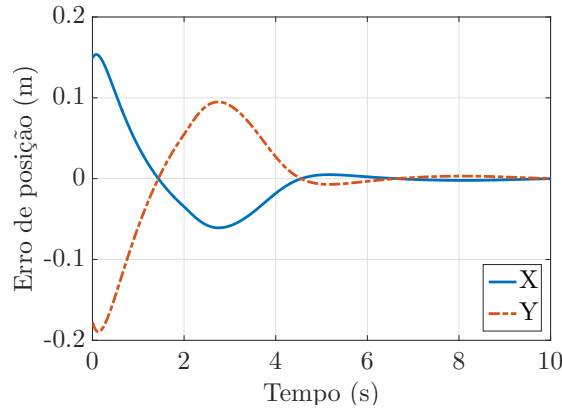


Figura 4.4: Cenário 1 - Movimento livre e critério de estabilidade atendido - Evolução do erro de posição entre os manipuladores.

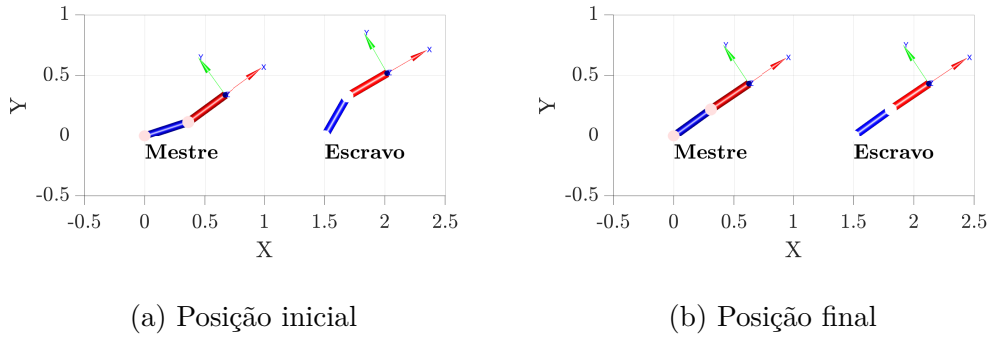


Figura 4.5: Cenário 1 - Movimento livre e critério de estabilidade atendido - Estado inicial e final dos manipuladores.

4.3.2 Cenário 2 - Movimento livre com atraso violando o critério de estabilidade

Neste cenário as forças externas são nulas, $F_h = F_e = 0$, e os parâmetros do controlador são: $\alpha_m = 6$, $\alpha_s = 4$, $k_m = 2$ e $k_s = 3$.

O atraso de comunicação do mestre para o escravo é $d_m(t) = 2,5 + 0,5\text{sen}(t)$ e o atraso do escravo para o mestre é $d_s(t) = 2 + \text{sen}(t)$, maiores que os atrasos no cenário 1, tal que a soma dos seus valores máximos não respeitam a condição de estabilidade no Teorema 3.3 que limita a soma dos atrasos máximos em 4 segundos. A condição inicial considerada é $q_m = [\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}]$, $q_s = [\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}]$ e $\dot{q}_m = \dot{q}_s = [0, 0]$.

É possível ver pelas Figuras 4.6–4.7 que o sistema mesmo não respeitando o critério de estabilidade mantém a estabilidade, o que reforça o fato de o critério proposto ser uma condição suficiente mas não necessária.

As Figuras 4.8–4.9 indicam que apesar de manter a estabilidade existe uma piora de desempenho em relação ao tempo de assentamento se comparada com o cenário 1.

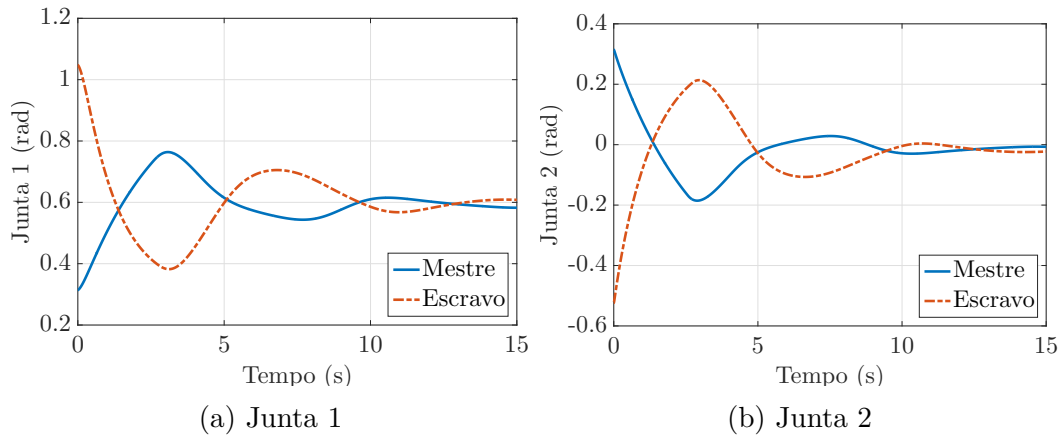


Figura 4.6: Cenário 2 - Movimento livre e critério de estabilidade não atendido - Evolução das posições das juntas dos manipuladores.

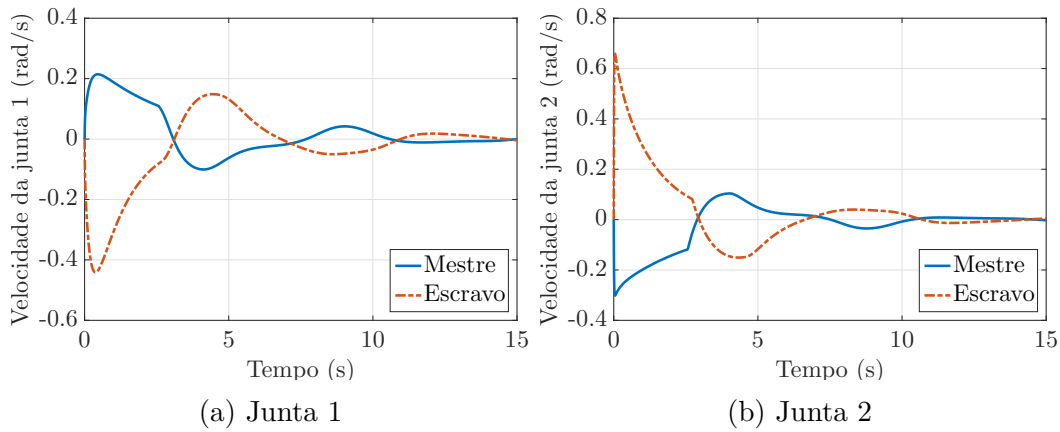


Figura 4.7: Cenário 2 - Evolução das velocidades das juntas dos manipuladores.

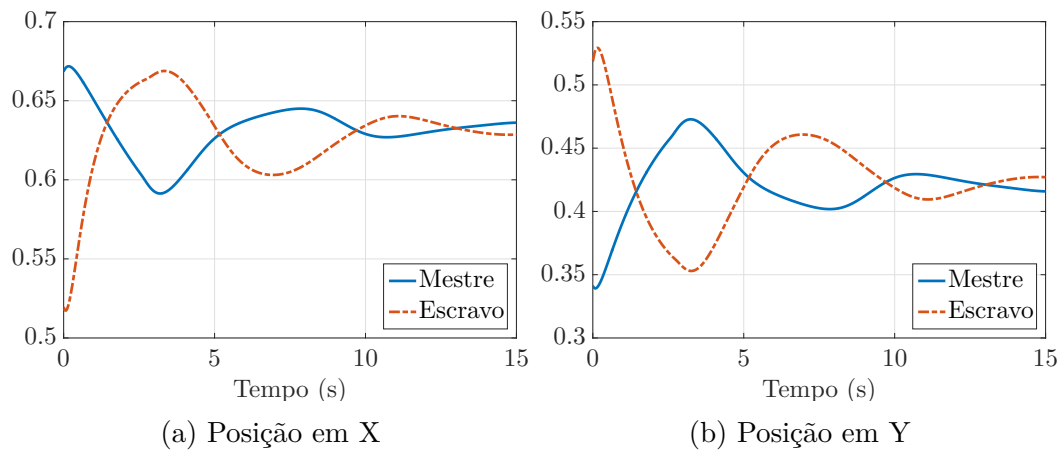


Figura 4.8: Cenário 2 - Movimento livre e critério de estabilidade não atendido - Evolução da posição cartesiana dos manipuladores.

Este cenário mostra que os critérios de análise de estabilidade utilizados não são exatos e, portanto, podem existir outros métodos de análise de estabilidade menos conservadores que permitam obter maiores limitantes para os atrasos garantindo a estabilidade.

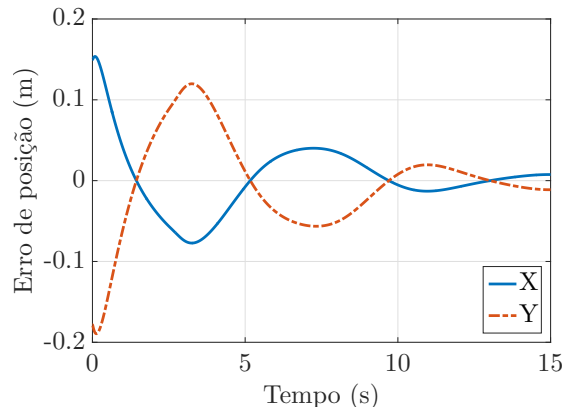
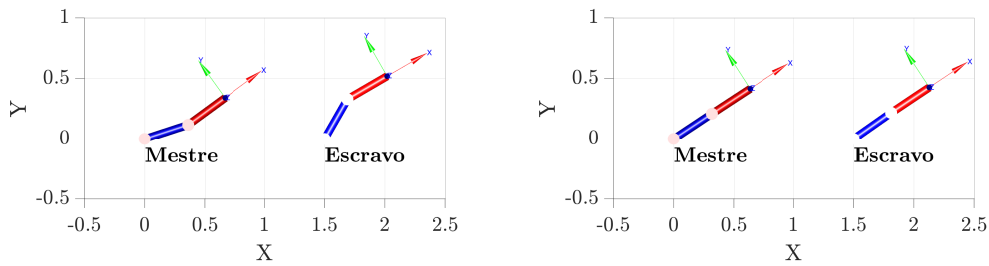


Figura 4.9: Cenário 2 - Movimento livre e critério de estabilidade não atendido - Evolução do erro de posição entre os manipuladores.



(a) Posição inicial

(b) Posição final

Figura 4.10: Cenário 2 - Movimento livre e critério de estabilidade não atendido - Estado inicial e final dos manipuladores.

4.3.3 Cenário 3 - Somente aplicação de força humana

Neste cenário a força ambiental é nula ($f_e = 0$) e a força que o operador aplica sobre o robô mestre f_h tem seus valores apresentados no gráfico na Figura 4.11. Os parâmetros do controlador são os seguintes: $\alpha_m = 6$, $\alpha_s = 4$, $k_m = 2$ e $k_s = 3$. O atraso de comunicação do mestre para o escravo é $d_m(t) = 1,5 + 0,4999\text{sen}(t)$ e o atraso do escravo para o mestre é $d_s(t) = 1 + 0,9999\text{sen}(t)$ satisfazendo o critério estabelecido no Teorema 3.3. A condição inicial considerada é $q_m = [\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}]$, $q_s = [\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}]$ e $\dot{q}_m = \dot{q}_s = [0, 0]$.

A Figura 4.15 deixa claro, que na presença de força externa, não se pode garantir que o erro de posição convirja para zero, só sendo garantido que ele será limitado.

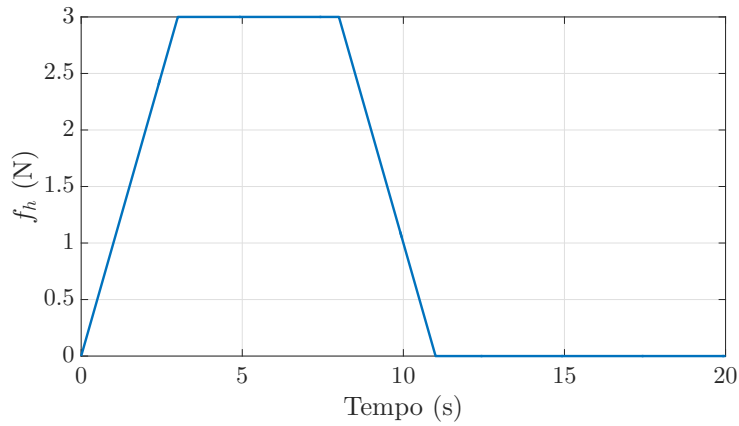
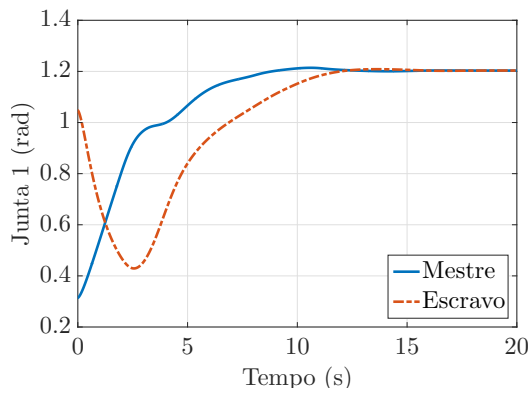
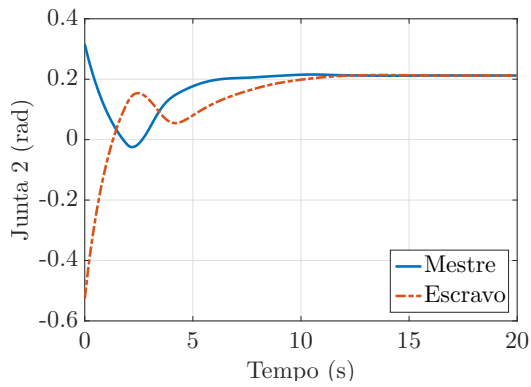


Figura 4.11: Cenário 3 - Aplicação de força humana e critério de estabilidade atendido - Força que operador humano aplica no efetivador do robô mestre.

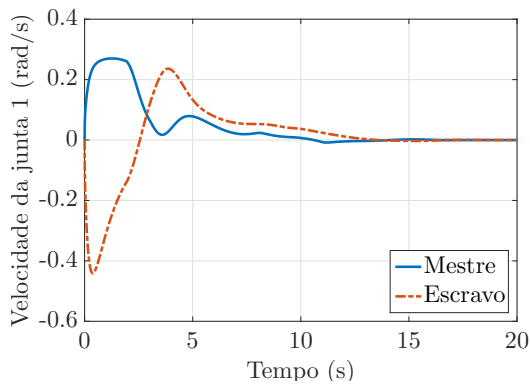


(a) Junta 1

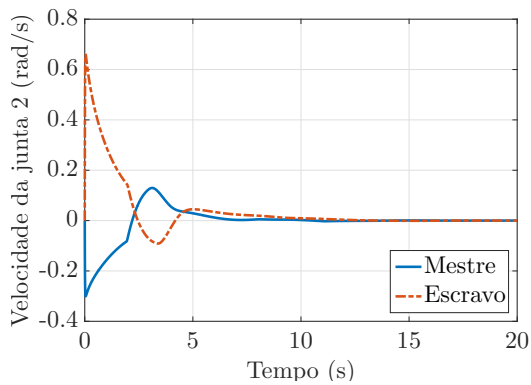


(b) Junta 2

Figura 4.12: Cenário 3 - Aplicação de força humana e critério de estabilidade atendido - Evolução das posições das juntas dos manipuladores.



(a) Junta 1



(b) Junta 2

Figura 4.13: Cenário 3 - Aplicação de força humana e critério de estabilidade atendido - Evolução das velocidades das juntas dos manipuladores.

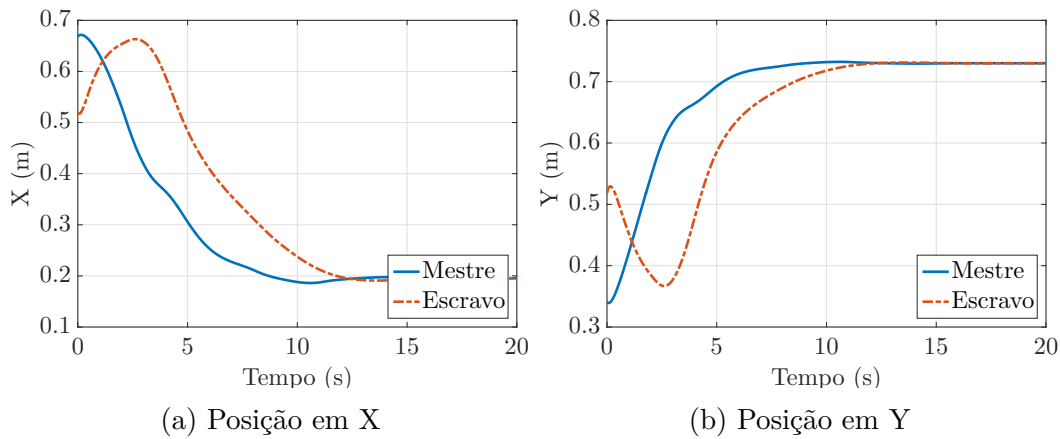


Figura 4.14: Cenário 3 - Aplicação de força humana e critério de estabilidade atendido - Evolução da posição cartesiana dos manipuladores.

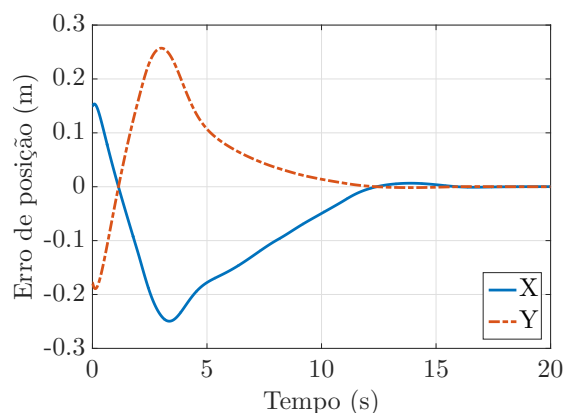


Figura 4.15: Cenário 3 - Aplicação de força humana e critério de estabilidade atendido - Evolução do erro de posição entre os manipuladores.

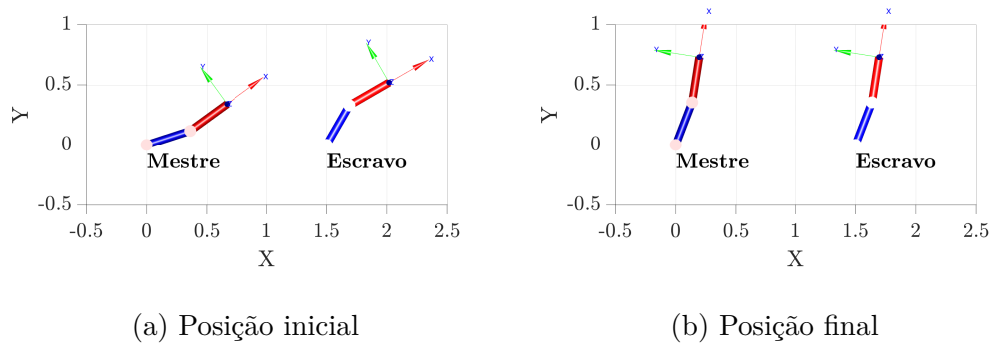


Figura 4.16: Cenário 3 - Aplicação de força humana e critério de estabilidade atendido - Estado inicial e final dos manipuladores.

4.3.4 Cenário 4 - Aplicação de força humana e interação ambiental

Neste cenário a força F_h é apresentada na Figura 4.11, a força ambiental é gerada pela interação do robô escravo com uma parede de rigidez de $20.000N/m$ e localizada na altura $y = 0,65 m$. Os parâmetros do controlador

são os seguintes $\alpha_m = 6$, $\alpha_s = 4$, $k_m = 2$ e $k_s = 3$. O atraso de comunicação do mestre para o escravo é $d_m(t) = 1,5 + 0,4999\text{sen}(t)$ e o atraso do escravo para o mestre é $d_s(t) = 1 + 0,9999\text{sen}(t)$. A condição inicial considerada é $q_m = [\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}]$, $q_s = [\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}]$ e $\dot{q}_m = \dot{q}_s = [0, 0]$.

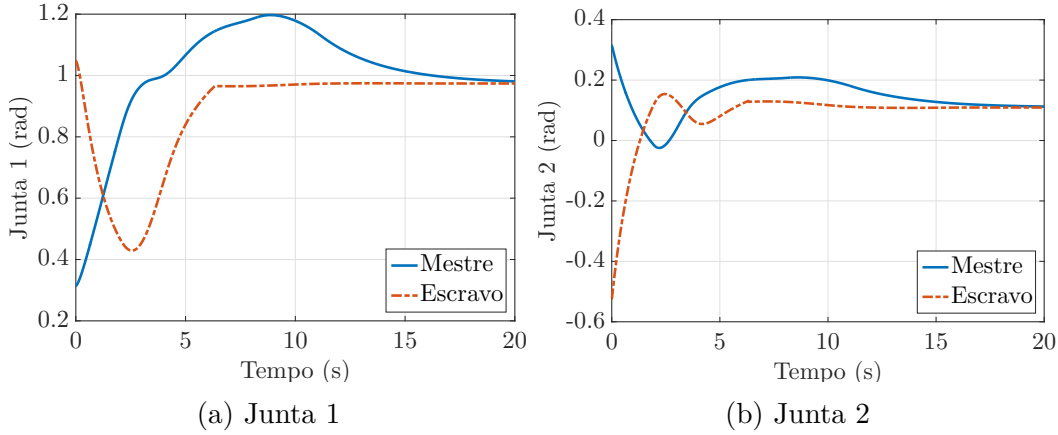


Figura 4.17: Cenário 4 - Aplicação de força humana, interação com ambiente e critério de estabilidade atendido - Evolução das posições das juntas dos manipuladores.

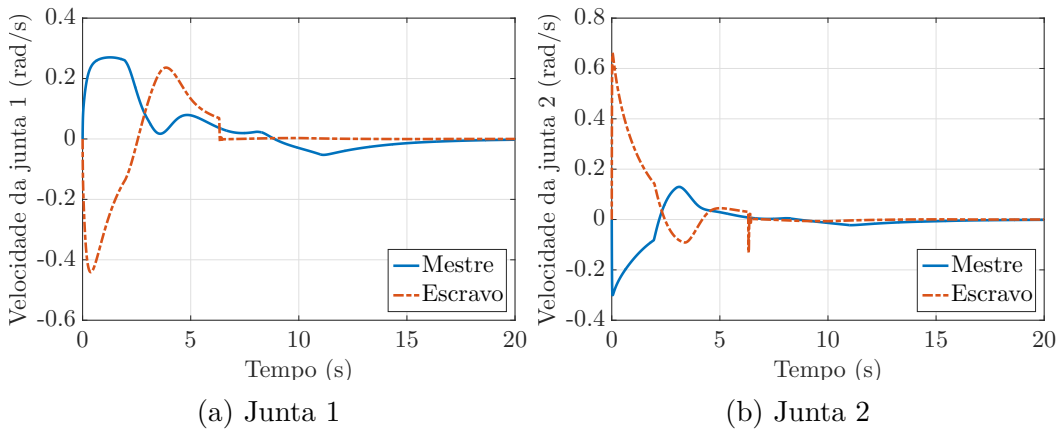


Figura 4.18: Cenário 4 - Aplicação de força humana, interação com ambiente e critério de estabilidade atendido - Evolução das velocidades das juntas dos manipuladores.

Nas Figuras 4.17–4.18 é possível ver que em torno de 6 segundos o manipulador escravo atinge a parede mantendo essa posição até o fim. Quando a força aplicada pelo operador humano cessa, o manipulador mestre converge para a posição do escravo.

As Figuras 4.19–4.20 mostram que, mesmo na presença de força externa em ambos os lados, o erro de posição continua estável e, logo após a extinção das forças, os robôs convergem. A Figura 4.21 mostra o estado inicial e final dos manipuladores.

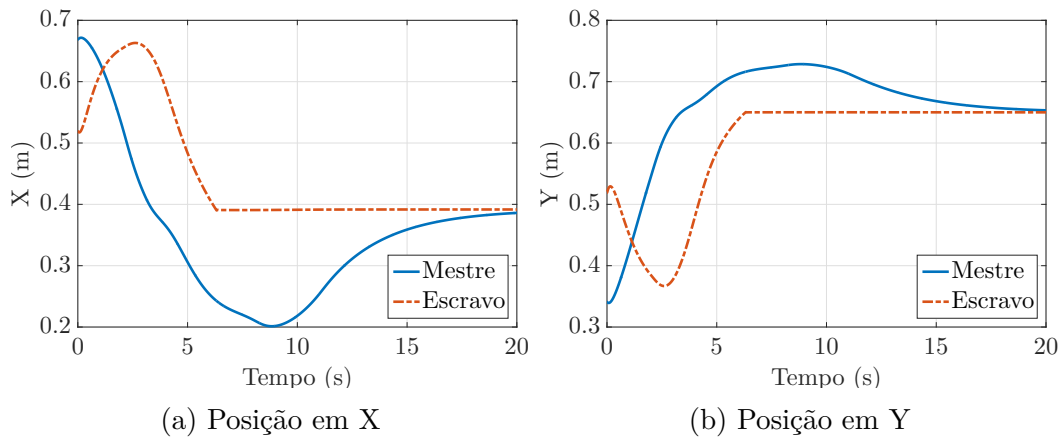


Figura 4.19: Cenário 4 - Evolução da posição cartesiana dos manipuladores.

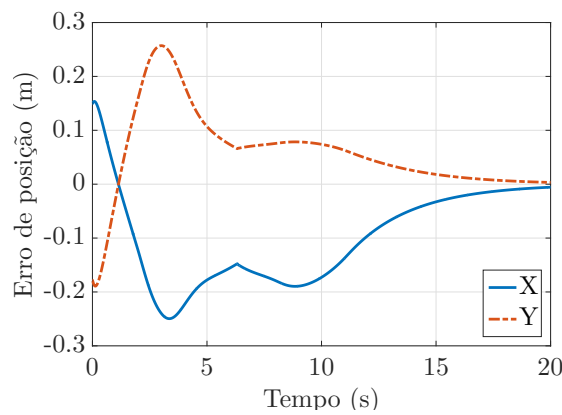


Figura 4.20: Cenário 4 - Aplicação de força humana, interação com ambiente e critério de estabilidade atendido - Evolução do erro de posição entre os manipuladores.

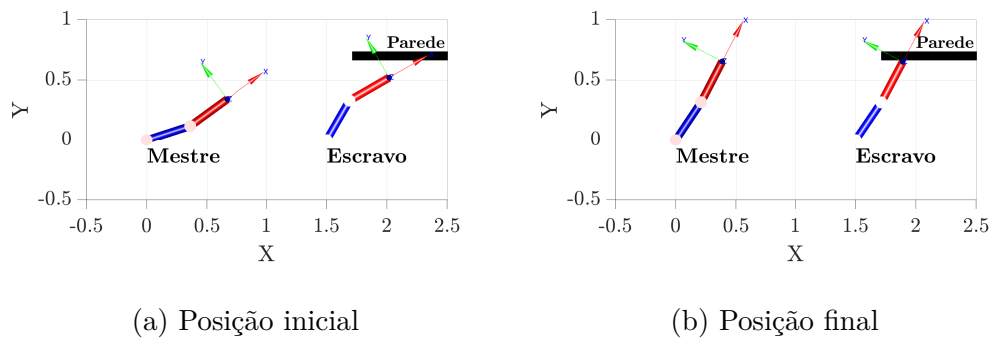


Figura 4.21: Cenário 4 - Aplicação de força humana, interação com ambiente e critério de estabilidade atendido - Estado inicial e final dos manipuladores.

4.4 Experimentos Reais

Esta seção apresenta os experimentos feitos para verificar a efetividade do resultado proposto. O sistema de teleoperação bilateral inclui dois *AX-12A Smart Robotic Arms* com 5 graus de liberdade, como mostrado na Figura 4.22.



Figura 4.22: Robôs utilizados no experimento: *AX-12A Smart Robotic Arm*.

Cada uma das cinco juntas são nomeadas como **Base**, **Ombro**, **Cotovelo**, **Punho** e **Garra**, como ilustrado pela Figura 4.23.

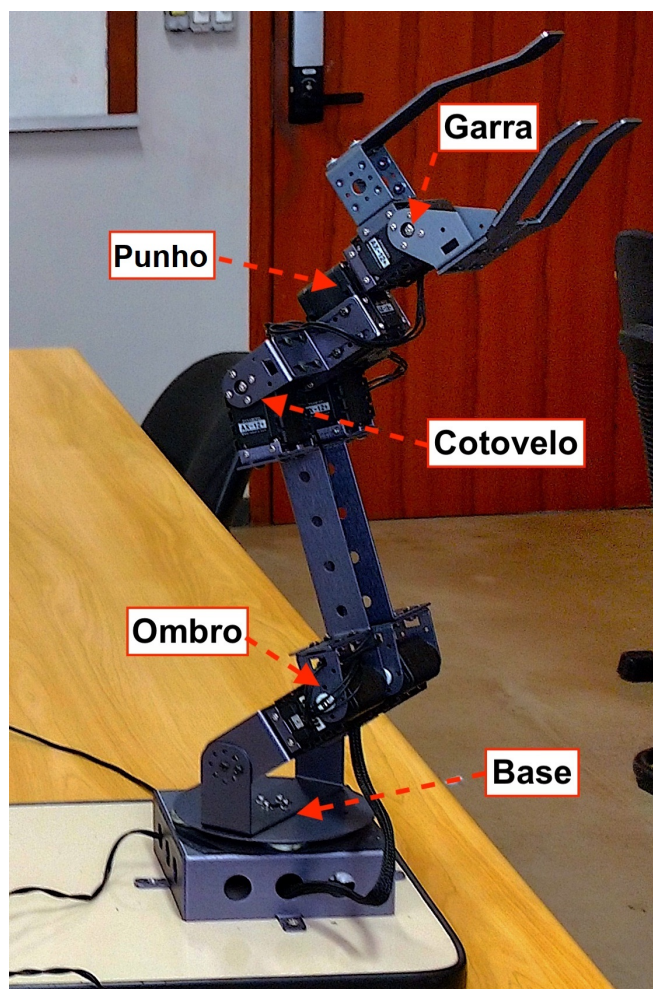


Figura 4.23: Definição dos nomes das juntas dos manipuladores.

Os manipuladores mestre e escravo são conectados via *USB* a um *Raspberry Pi*, o qual roda o programa de controle desenvolvido em *Python*. São utilizadas duas *threads*, cada uma controlando um manipulador, que são responsáveis pela leitura de dados e o cálculo da ação de controle. O tempo de amostragem foi definido em $10ms$.

Para o cálculo do termo relativo a compensação gravitacional foi utilizado o seguinte modelo para o vetor de efeitos gravitacionais:

$$g(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ m_{cot}g l_{cot} \cos(q_{omb} + q_{cot}) + (m_{omb} + m_{cot})g l_{omb} \cos(q_{omb}) \\ m_{cot}g l_{cot} \cos(q_{omb} + q_{cot}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

sendo q_{omb} e q_{cot} os elementos relativos à junta do ombro e a do cotovelo respectivamente.

Os atrasos aqui são provenientes do tempo de leitura dos dados dos sensores de cada servomotor, tarefa esta feita de forma serial, somado ao tempo de processamento computacional. Os limitantes superiores dos atrasos mestre-escravo e escravo-mestre foram estimados empiricamente ao mover um robô e observar o tempo de reação do outro. Foi adotado os seguintes valores: $\bar{d}_m = \bar{d}_s = 0,6s$. Os ganhos de controle utilizados são $\alpha_m = 2,5$, $\alpha_s = 3$, $k_m = 2,5$ e $k_s = 8$. Utilizando estes parâmetros de controle a condição presente no Teorema 3.3 é satisfeita.

O experimento consiste em manipular o mestre de forma a fazer o escravo apanhar uma garrafa plástica vazia em um determinado local e soltá-la em outro local. O operador humano exerce força sobre o manipulador mestre e o escravo acompanha o movimento.

A evolução das posições das juntas pode ser verificada nas Figuras 4.24 – 4.28.

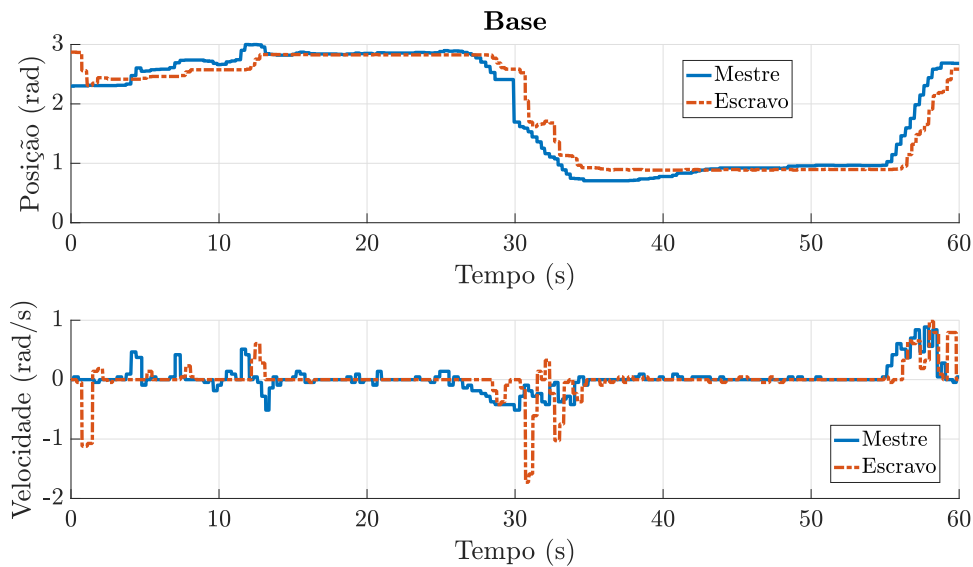


Figura 4.24: Evolução da junta da base dos manipuladores durante o experimento de deslocamento de uma garrafa plástica.

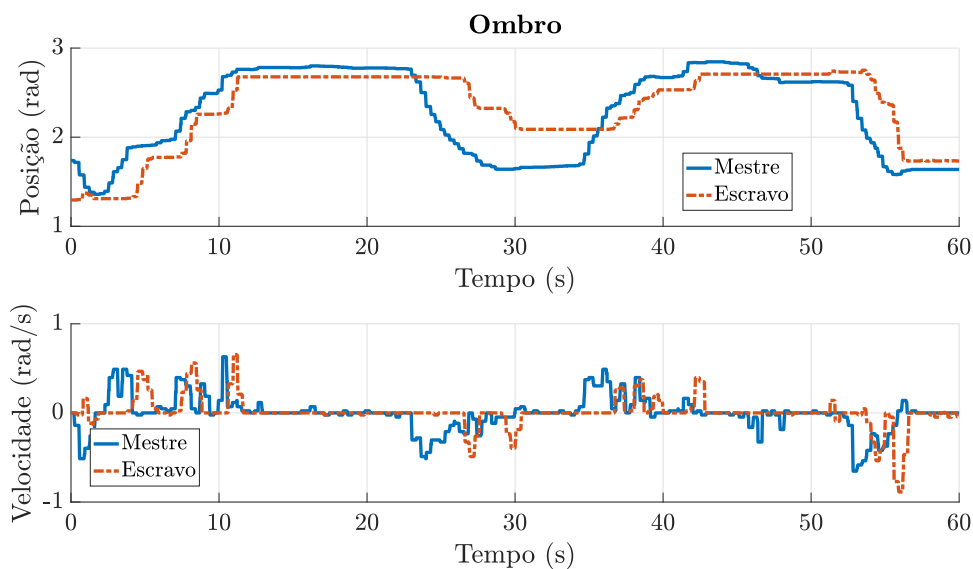


Figura 4.25: Evolução da junta do ombro dos manipuladores durante o experimento de deslocamento de uma garrafa plástica.

Nos segundos finais do experimento não há aplicação de força por parte do operador humano, mas apesar disto não ocorre a convergência do erro de posição para zero. Este fato se deve às características não consideradas no modelo como, por exemplo, atrito seco, atrito de Coulomb e influência da carga. Uma forma de minimizar esse erro é elevando o valor dos ganhos relativos aos erros de posição k_m e k_s , o que justifica o elevado valor escolhido para k_s no experimento.

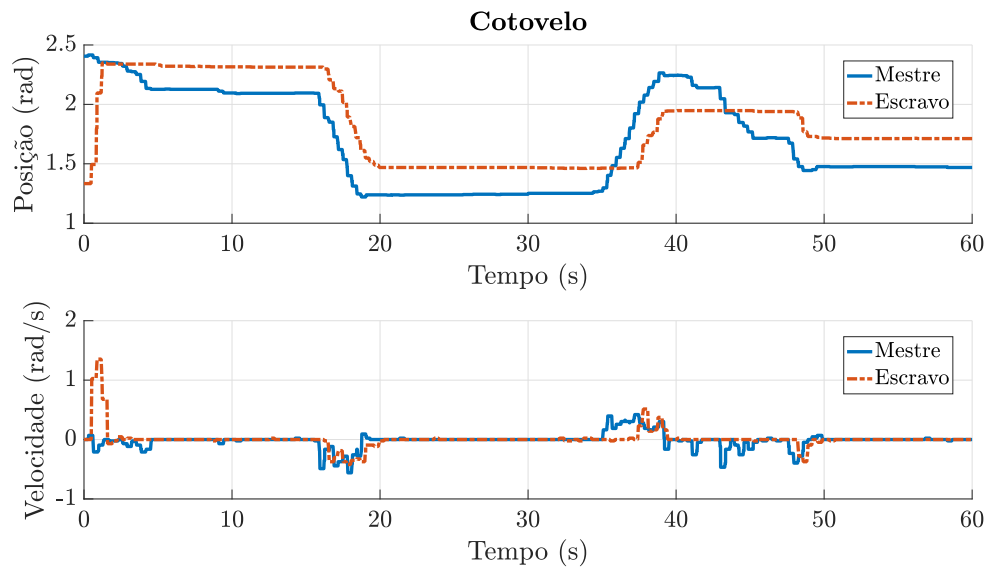


Figura 4.26: Evolução da junta do cotovelo dos manipuladores durante o experimento de deslocamento de uma garrafa plástica.

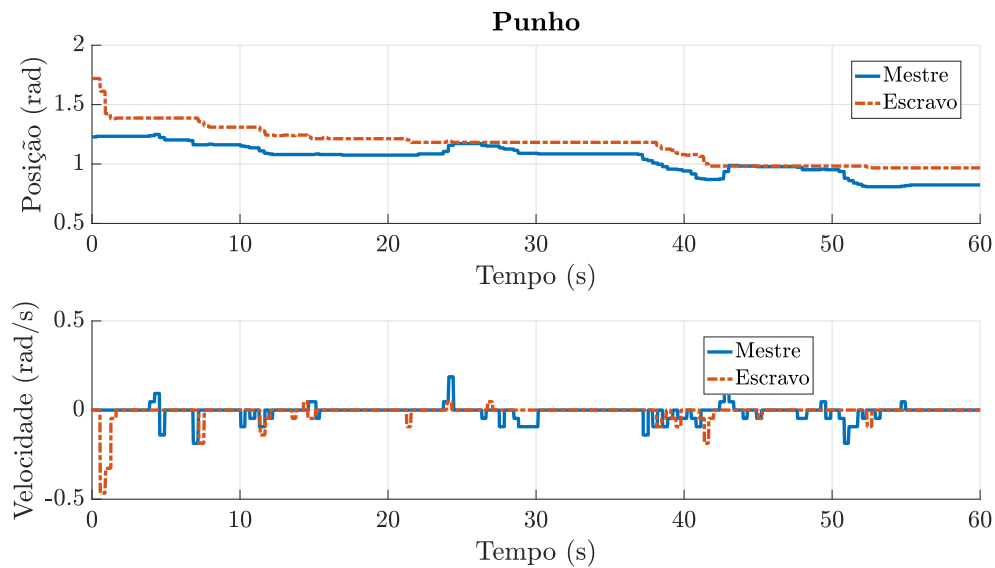


Figura 4.27: Evolução da junta do punho dos manipuladores durante o experimento de deslocamento de uma garrafa plástica.

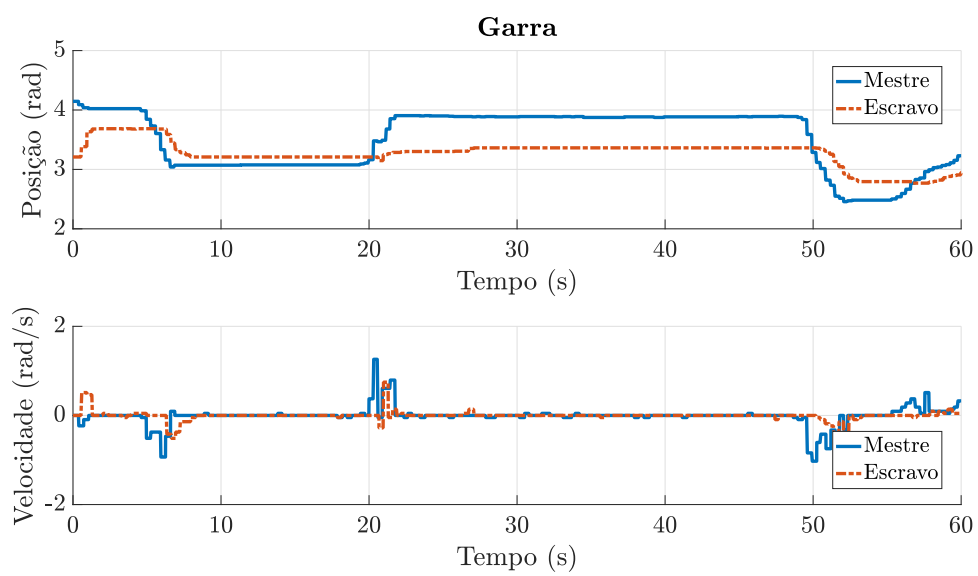


Figura 4.28: Evolução da junta da garra dos manipuladores durante o experimento de deslocamento de uma garrafa plástica.

Capítulo 5

Conclusão

Este trabalho apresentou três condições de análise de estabilidade para sistemas de teleoperação bilateral sujeitos a atrasos variantes no tempo, sendo duas condições baseadas em desigualdades matriciais lineares (LMIs do inglês Linear Matrix Inequalities) e uma condição algébrica. Foram empregadas metodologias menos conservadoras disponíveis na literatura e, apesar disto, foi possível demonstrar que as condições LMIs apresentadas são equivalentes entre si. Ademais, em experimentos numéricos a condição algébrica também se mostrou equivalente as condições LMIs. Destaca-se que a condição algébrica proposta permite transformar o problema de factibilidade LMI em um simples teste dependente dos parâmetros da lei de controle, o que permite inclusive o projeto do controlador desde que sejam conhecidos os valores máximos que os atrasos podem assumir.

A lei de controle utilizada consisti de uma parcela proporcional ao erro de posição entre os manipuladores mestre e escravo, somado a uma parcela de injeção de amortecimento. Esta lei é utilizada em todos os métodos tratados nesta pesquisa e também em outros trabalhos presentes na literatura. A condição de análise estabilidade algébrica proposta, além de evitar dispêndio computacional, possui outras vantagens em relação a critérios semelhantes apresentados na literatura, tais como: maiores limitantes para os atrasos, independem do conhecimento da taxa de variação dos atrasos.

As simulações apresentadas no Capítulo 4 mostram que, se o critério analítico de análise de estabilidade proposto for satisfeito, a estabilidade do sistema é garantida. No caso do critério não ser satisfeito, não implica em instabilidade do sistema, fato este que indica que o critério pode ser melhorado em pesquisas futuras.

Os experimentos reais indicam que o modelo utilizado não contempla de forma satisfatória o sistema real, o que gerou erros de posição em regime permanente nos experimentos realizados.

5.1 Trabalhos Futuros

Como possibilidade de continuidade desta pesquisa, sugere-se a investigação dos seguintes assuntos em trabalhos futuros:

- Encontrar condições de análise de estabilidade dependentes dos atrasos no tempo que sejam menos conservadoras;
- Considerar suposições menos conservadoras que a passividade no mapeamento força - velocidade;
- Utilizar um modelo mais completo que contemple o efeito dos atritos nos manipuladores;
- Desenvolvimento de condições para análise da estabilidade do sistema com saturação nos atuadores.

Finalmente, é importante destacar que parte dos resultados apresentados nesta dissertação foram publicados em Lima e Souza (2018), na 22^a edição do Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2018).

Referências bibliográficas

Albert, A.

1969. Conditions for positive and nonnegative definiteness in terms of pseudoinverses. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 17(2):434–440.

Anderson, R. J. e M. W. Spong

1989. Bilateral control of teleoperators with time delay. *IEEE Transactions on Automatic control*, 34(5):494–501.

Boyd, S., L. El Ghaoui, E. Feron, e V. Balakrishnan

1994. *Linear matrix inequalities in system and control theory*, volume 15. Siam.

Chopra, N., P. Berestesky, e M. W. Spong

2008a. Bilateral teleoperation over unreliable communication networks. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 16(2):304–313.

Chopra, N., M. W. Spong, e R. Lozano

2008b. Synchronization of bilateral teleoperators with time delay. *Automatica*, 44(8):2142–2148.

Chopra, N., M. W. Spong, R. Ortega, e N. E. Barabanov

2006. On tracking performance in bilateral teleoperation. *IEEE Transactions on Robotics*, 22(4):861–866.

Corke, P. I.

1996. A robotics toolbox for matlab. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 3(1):24–32.

Denasi, A., D. Kostić, e H. Nijmeijer

2013. Time delay compensation in bilateral teleoperations using impact. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 21(3):704–715.

Forouzantabar, A., H. Talebi, e A. Sedigh

2012. Adaptive neural network control of bilateral teleoperation with constant time delay. *Nonlinear Dynamics*, 67(2):1123–1134.

Fridman, E.

2014. *Introduction to time-delay systems: Analysis and control*. Springer.

Gu, K.

2000. An integral inequality in the stability problem of time-delay systems. In *Decision and Control, 2000. Proceedings of the 39th IEEE Conference on*, volume 3, Pp. 2805–2810. IEEE.

Gu, K., J. Chen, e V. L. Kharitonov

2003. *Stability of time-delay systems*. Springer Science and Business Media.

Hokayem, P. F. e M. W. Spong

2006. Bilateral teleoperation: An historical survey. *Automatica*, 42(12):2035–2057.

Hua, C.-C. e X. P. Liu

2010. Delay-dependent stability criteria of teleoperation systems with asymmetric time-varying delays. *IEEE Transactions on Robotics*, 26(5):925–932.

Hua, C.-C., X. Yang, J. Yan, e X.-P. Guan

2017. On exploring the domain of attraction for bilateral teleoperator subject to interval delay and saturated $p+d$ control scheme. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(6):2923–2928.

Islam, S., P. Liu, A. El Saddik, e Y. B. Yang

2015. Bilateral control of teleoperation systems with time delay. *IEEE/ASME Trans. Mechatronics*, 20(1):1–12.

Kelly, R., V. S. Davila, e J. A. L. Perez

2006. *Control of robot manipulators in joint space*. Springer Science and Business Media.

Kharitonov, V.

2012. *Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices*. Springer Science and Business Media.

Lima, M. V. e F. O. Souza

2018. Análise de estabilidade de sistemas teleoperados bilaterais sujeitos a atraso no tempo e saturação nos atuadores. In *XXII Congresso Brasileiro de Automática - CBA2018*, Pp. 1–8, João Pessoa - PB, Brasil.

Lofberg, J.

2004. Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab. In *Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on*, Pp. 284–289. IEEE.

Niemeyer, G. e J.-J. Slotine

1991. Stable adaptive teleoperation. *IEEE Journal of oceanic engineering*, 16(1):152–162.

Nuño, E., L. Basañez, e R. Ortega

2011. Passivity-based control for bilateral teleoperation: A tutorial. *Automatica*, 47(3):485–495.

Nuño, E., L. Basañez, R. Ortega, e M. W. Spong

2009. Position tracking for non-linear teleoperators with variable time delay. *The International Journal of Robotics Research*, 28(7):895–910.

Nuno, E., R. Ortega, N. Barabanov, e L. Basañez

2008. A globally stable pd controller for bilateral teleoperators. *IEEE Transactions on Robotics*, 24(3):753–758.

Nuño, E., R. Ortega, e L. Basañez

2010. An adaptive controller for nonlinear teleoperators. *Automatica*, 46(1):155–159.

Shao, H.

2009. New delay-dependent stability criteria for systems with interval delay. *Automatica*, 45(3):744–749.

Souza, F. O.

2008. *Estabilidade e síntese de controladores e filtros robustos para sistemas com retardo no tempo: Novas fronteiras*. PhD thesis, Ph. D. dissertation, Universidade Federal de Minas Gerais.

Spong, M. W., S. Hutchinson, M. Vidyasagar, et al.

2006. *Robot modeling and control*, volume 3. Wiley New York.

Toh, K.-C., M. J. Todd, e R. H. Tütüncü

1999. Sdpt3—a matlab software package for semidefinite programming, version 1.3. *Optimization methods and software*, 11(1-4):545–581.

Wang, H., P. X. Liu, e S. Liu

2017. Adaptive neural synchronization control for bilateral teleoperation systems with time delay and backlash-like hysteresis. *IEEE transactions on cybernetics*, 47(10):3018–3026.

Yang, X., C. Hua, J. Yan, e X. Guan

2015. Synchronization analysis for nonlinear bilateral teleoperator with

interval time-varying delay. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 25(13):2142–2161.

Capítulo A

Ferramentas Matemáticas

Neste apêndice é apresentada uma breve descrição das principais ferramentas matemáticas utilizadas no decorrer do trabalho. São apresentados conceitos referentes a desigualdades matriciais lineares, complemento de Schur e desigualdade de Jensen.

A.1 Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

Uma LMI é uma desigualdade matricial do tipo $F(x) > 0$, no qual $F(x)$ é simétrica e afim nas variáveis de busca que são representadas pelo vetor x . Assim, uma LMI pode ser genericamente apresentada na forma

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (\text{A-1})$$

sendo $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes dadas e x_i variáveis escalares a serem determinadas de forma a satisfazer a desigualdade (se possível). Quando existe uma solução $g = [x_1 \cdots x_m]^T$ para $F(x) > 0$, dizemos que a LMI é factível (Boyd et al., 1994).

É importante enfatizar que uma LMI pode ser representada de várias formas e dificilmente aparece em um problema na forma genérica afim (A-1).

Para a resolução de problemas na forma de LMIs, existem vários pacotes de otimização disponíveis na literatura. Entre ele está o SDPT-3 (Toh et al., 1999) desenvolvido para uso no *MATLAB*.

A.2 O Complemento de Schur

Em geral, algumas propriedades são usadas para a formulação de LMIs a partir de inequações não lineares. Dentre tais propriedades está o complemento de schur, apresentado no lema a seguir.

Lema A.1 (Albert, 1969) *Seja a matriz de blocos*

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2^T & \Phi_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A-2})$$

onde Φ_1 e Φ_3 são simétricas. Então

- para $\Phi_1 > 0$, $\Phi > 0$ se, e somente se, $\Phi_3 - \Phi_2^T \Phi_1^{-1} \Phi_2 > 0$;
- para $\Phi_3 > 0$, $\Phi > 0$ se, e somente se, $\Phi_1 - \Phi_2 \Phi_3^{-1} \Phi_2^T > 0$.

Essa propriedade pode ser utilizada, por exemplo, para transformar a desigualdade

$$A^T X + XA + XBX + C < 0 \quad (\text{A-3})$$

com $B > 0$ e $X = X^T$, que aparece frequentemente em problemas de controle, em uma LMI, bastando fazer $\Phi_1 = A^T X + XA + C$, $\Phi_2 = X$ e $\Phi_3 = B$. Com isso, obtém-se

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA + C & X \\ X & -B^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (\text{A-4})$$

Se $B \leq 0$, podemos escrever $B = QQ^T$. Dessa forma, usando a mesma ideia aplicada anteriormente, obtém-se a relação

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA + C & XQ \\ Q^T X & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{A-5})$$

que é também equivalente a (A-3).

A.3 Desigualdade de Jensen

Desigualdades em integrais quadráticas são ferramentas importantes no tratamento de problemas de sistemas sujeitos a atrasos no tempo formulados por meio de LMIs dada a necessidade da utilização de limitantes superiores para que o problema em questão possa ser formulado como um problema convexo. Uma dessas desigualdades, também conhecida como Desigualdade de Jensen, utilizada nesta dissertação é apresentada no lema a seguir:

Lema A.2 *Gu (2000)* Para qualquer matriz contante $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R = R^T > 0$, escalar $d > 0$, função vetorial $\omega : [0, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que as integrais a seguir sejam bem definidas, então

$$d \int_0^d \omega^T(\sigma) R \omega(\sigma) d\sigma \geq \left[\int_0^d \omega(\sigma) d\sigma \right]^T R \left[\int_0^d \omega(\sigma) d\sigma \right]. \quad (\text{A-6})$$

A.4 Estabilidade via Lyapunov-Krasovskii

Existem métodos de análise de estabilidade de sistemas sujeitos a atrasos tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. Entretanto os métodos no domínio do tempo geralmente são preferidos no contexto de atrasos variantes no tempo. Existem duas principais extensões do método de Lyapunov para sistemas sujeitos a atrasos no tempo: a de Krasovskii e

a de Razumikhin. O método de Krasovskii é aplicável a um maior número de problemas e comumente leva a resultados menos conservadores em relação ao método de Razumikhin (Fridman, 2014).

O método de análise de estabilidade de Lyapunov-Krasovskii corresponde a uma extensão do método de Lyapunov para sistemas sujeitos a atrasos no tempo. Esse método se baseia na proposição de um funcional quadrático e limitado, que leve em conta não só a evolução temporal do sistema, mas também seu histórico temporal (Souza, 2008).

Teorema A.1 (Gu et al., 2003) *Um sistema sujeito a atrasos no tempo é assintoticamente estável se, para algum $\epsilon > 0$, exista um funcional de Lyapunov-Krasovskii quadrático e limitado $V(x(t))$ que satisfaça:*

$$\begin{aligned} V(x_t) &\geq \epsilon \|x(t)\|^2, \\ \dot{V}(x_t) &\leq -\epsilon \|x(t)\|^2, \end{aligned}$$

no qual x_t corresponde ao valor de $x(\sigma)$ com $\sigma \in [t - \tau, t]$ sendo $\tau > 0$ o atraso máximo a que o sistema está sujeito, e $\dot{V}(x_t)$ a derivada do funcional ao longo das trajetórias do sistema.

Baseado na teoria de estabilidade de Lyapunov existem duas abordagens básicas para a obtenção de condições de estabilidade. A primeira baseia-se na escolha de um funcional definido positivo e são então impostas condições de negatividade sobre a derivada temporal do funcional ao longo das trajetórias do sistema. Este é um procedimento muito usado para a obtenção de condições de estabilidade baseado em desigualdades matriciais lineares (LMIs). A outra abordagem segue a ordem inversa da primeira, partindo da escolha da derivada temporal de Lyapunov. Os resultados da segunda forma costumam ser mais complexos que a da primeira (Kharitonov, 2012).

Capítulo B

Resultados da Literatura

Neste apêndice são apresentados importantes resultados na análise de estabilidade de sistemas teleoperados bilaterais sujeito a atrasos variantes no tempo disponíveis na literatura.

B.1 Contribuição de Hua e Liu (2010)

A condição de estabilidade proposta por Hua e Liu (2010) para o problema de teleoperação sujeita a atrasos variantes no tempo, baseia-se no seguinte lema

Lema B.1 *Dado a matriz definida positiva Υ , a seguinte desigualdade é satisfeita:*

$$-2a^T(t) \int_{t-d(t)}^t b(\sigma) d\sigma - \int_{t-d(t)}^t b^T(\sigma) \Upsilon b(\sigma) d\sigma \leq \bar{d} a^T(t) \Upsilon^{-1} a(t)$$

onde $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$ são funções vetoriais, e $d(t)$ é um escalar variante no tempo com $0 \leq d(t) \leq \bar{d}$.

Sua principal contribuição é o seguinte teorema:

Teorema B.1 *(Hua e Liu, 2010) Seja o sistema de teleoperação bilateral (2-2), cujos atrasos satisfazem (2-4). Se existirem matrizes definidas positivas Z e S tais que a LMI (B-1) seja satisfeita e a força do operador humano F_h e a força de interação com o ambiente F_e sejam zero, então a seguinte lei de controle:*

$$\begin{cases} \tau_m = -k_m(q_m - q_s(t - d_s(t))) - \alpha_m \dot{q}_m + g_m(q_m) \\ \tau_s = -k_s(q_s - q_m(t - d_m(t))) - \alpha_s \dot{q}_s + g_s(q_s) \end{cases}$$

sendo k_m , α_m , k_s e α_s escalares reais, faz as velocidades \dot{q}_m e \dot{q}_s e o erro de posição $q_m - q_s$ convergir assintoticamente para zero.

$$\begin{bmatrix} -2\alpha_m I_n + \bar{d}_m R_m & \bar{d}_s k_m I_n & 0_n & 0_n \\ * & -\bar{d}_s R_s & 0_n & 0_n \\ * & * & -2\frac{k_m \alpha_s}{k_s} I_n + \bar{d}_s R_s & \bar{d}_m k_m I_n \\ * & * & * & -\bar{d}_m R_m \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{B-1})$$

B.2 Contribuição de Nuno et al. (2008)

A condição de estabilidade proposta por Nuno et al. (2008) para o problema de teleoperação sujeita a atrasos simétricos e constantes no tempo, é a seguinte:

Teorema B.2 (Nuno et al., 2008) *Considere o sistema de teleoperação (2-2), controlado por*

$$\begin{cases} \tau_m = -K_m [q_m - q_s(t - T)] - B_m \dot{q}_m \\ \tau_s = -K_s [q_s - q_m(t - T)] - B_s \dot{q}_s, \end{cases}$$

sendo K_m , B_m , K_s e B_s escalares reais positivos, $T \geq 0$ é o atraso constante presente tanto na via mestre-escravo quanto na via escravo-mestre, e F_h , F_e satisfazem a Suposição 2.1. Escolhendo os parâmetros da lei de controle tais que

$$B_m B_s > T^2 K_m K_s. \quad (\text{B-2})$$

Então:

1) *Velocidades e erros de posição são limitados, ou seja, \dot{q}_m , \dot{q}_s , $q_m - q_s \in \mathcal{L}_\infty$, e além disso, \dot{q}_m , $\dot{q}_s \in \mathcal{L}_2$.*

2) *Assumindo também que:*

A1) *O operador humano não aplica força no manipulador mestre, e o manipulador escravo não interaja com o ambiente remoto ($F_h(t) \equiv 0$ e $F_e(t) \equiv 0$).*

A2) *Um termo de compensação da gravidade é adicionado ao controlador, isto é,*

$$\begin{cases} \tau_m = -K_m [q_m - q_s(t - T)] - B_m \dot{q}_m + g_m(q_m) \\ \tau_s = -K_s [q_s - q_m(t - T)] - B_s \dot{q}_s + g_s(q_s), \end{cases}$$

A3) *Os termos $\partial^2 M_i^{jk} / \partial q_i^m \partial q_i^s$ serem limitados.*

Sob essas condições, as velocidades do mestre e do escravo convergem assintoticamente para zero e a coordenação de posição é alcançada, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|q_m(t) - q_s(t - T)\| = 0.$$