UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Departamento de Matemática

MÉTODOS MULTICRITÉRIOS QUE ENVOLVEM A TOMADA DE DECISÂO

Maria Betânia Aparecida Campos

Belo Horizonte, 14 de fevereiro de 2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Departamento de Matemática

MÉTODOS MULTICRITÉRIOS QUE ENVOLVEM A TOMADA DE DECISÂO

Maria Betânia Aparecida Campos

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Matemática para professores do Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para a obtenção do grau de Especialista em Matemática, na Ênfase em Matemática de Cálculo.

Área de concentração: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Hiroschi Caldeira Takahashi

Belo Horizonte, 14 de fevereiro de 2011

Campos, Maria Betânia Aparecida
Métodos multicritérios que envolvem a tomada de decisão / Maria Betânia Aparecida Campos. – 2011.x, 51p. il.
Orientador: Takahashi, Ricardo Hiroshi Caldeira
Monografia (especialização) – Universidade Federal de Minas Gerais. Departamento de Matemática.
1. Matemática – Monografias. 2. Métodos Multicritérios 3. Tomada de Decisão I. Takahashi, Ricardo Hiroshi Caldeira II. Universidade Federal de Minas Gerais. Departamento de Matemática. III. Título.

Agradeço à Deus e a todos que colaboraram direta ou indiretamente para a relização deste trabalho.

A todos, meu muito obrigada.

RESUMO

Este presente estudo de cunho monográfico e bibliográfico teve o objetivo de analisar os métodos multicritérios que ajudam na tomada de decisão. Observou-se que as decisões e atitudes do tomador de decisão não são tão simples e podem demandar mais tempo para análise, bem como a criação de vários critérios, buscando aperfeiçoar as escolhas. A análise de métodos multicritérios na solução de problemas de tomada de decisão tem sido bastante utilizada, uma vez que procuram esclarecer ao decisor as possibilidades de escolhas. Apóia o processo decisório, embasado nas informações existentes, incorporando valores dos agentes, na busca da melhor solução. No estudo de caso apresentado observou-se que a análise multicritério ajuda a tomada de decisão.

PALAVRAS CHAVE – MATEMÁTICA – MULTICRITÉRIOS – TOMADA DE DECISÃO

ABSTRACT

This monographic study aimed to examine aspects of multi-criteria that help decision making.It was observed that the decisions and attitudes of the decision maker are not so simple and may require more time for analysis, as well as the creation of several criteria, seeking to refine their choices. Advanced analysis methods in solving problems of decision making had been widely used since they sought to clarify the decision-maker the possibilities of choices. They supports the decision process, based on existing information, incorporating values of agents the search of the best solution. In the case study presented is is shown that the multicriteria analysis helps decision making.

KEYWORDS – MATHEMATICS – MULTI-CRITERIA – DECISION MAKING

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A tomada de decisão por um gestor, independente de sua área de atuação, leva em consideração alguns critérios, definidos previamente, objetivando a melhor decisão a ser tomada.

Ao optar por esta ou aquela decisão o gestor, ou Tomador de Decisão (TD) como se encontra na literatura, busca dentre as opções, encontrar aquela que mais se adequa ao objetivo do setor, empresa ou Instituição a que pertence.

Parece uma decisão fácil, entre o SIM e o NÃO, entre o MELHOR ou PIOR, e dentro deste contexto, o tomador de decisão escolhe a alternativa que melhor lhe parece.

Este trabalho tem o objetivo de mostrar que decisões e atitudes do tomador de decisão não são tão simples e podem demandar mais tempo para análise, bem como a criação de vários critérios, buscando aperfeiçoar as escolhas.

Assim, partir-se-á da seguinte problemática: Quais seriam os múltiplos critérios envolvidos em uma tomada de decisão em uma empresa que, por exemplo, resolva conceder uma bolsa de estudos para seus funcionários? Dados os critérios, como é o processo que parte destes e leva à tomada de decisão?

A motivação para escolha do tema é mostrar que a matemática é aplicável em atividades diversas e presente em nosso dia a dia ainda que não percebamos .

Em decorrência do meu trabalho como secretária na Pró-Reitoria de Recursos Humanos da UFMG, desenvolvendo uma atividade rotineira de seleção de servidores que solicitam bolsas integrais de estudo para os cursos de especialização ofertados pela UFMG e, onde a Pró-Reitoria define quem serão os contemplados e sendo a pré-seleção destes candidatos uma de minhas atribuições, percebi que fazia exatamente uma análise de multicritérios, onde obviamente estes definiam os contemplados.

Estes critérios são observados de acordo com o retorno para a Instituição como tempo de casa, idade, correlação do curso de interesse com as atividades desenvolvidas e se é primeira especialização.

Assim, ficou clara a aplicação do tema em uma atividade administrativa e seu desenvolmento tornou-se mais interessante.

As fórmulas e equações aqui utilizadas para o desenvolvimento deste trabalho não serão demonstradas, uma vez que se encontram nas referências bibliográficas e não são objetivo de nosso estudo.

Para desenvolver este estudo de caso será considerado que a empresa em questão irá contemplar 3 (três) funcionários com a bolsa, inicia-se portanto, um processo seletivo para concessão das mesmas criando-se então critérios para indicação dos bolsistas.

Assim, propomos o estudo da tomada de decisão multicritério, de uma forma racional e utilizando a matemática como ferramenta importante para fundamentar as atitudes do tomador de decisão.

A análise dos vários critérios pré-definidos apresentados sobre a forma de gráficos facilita a decisão, bem como deixa claras as melhores opções dentre as existentes.

CAPÍTULO 1-
CONCEITOS BÁSICOS

1.1 Conceitos básicos

Decisão significa tomar uma atitude que faça com que um processo evolua ou não.

Decidir ou tomar uma decisão pode interferir negativa ou positivamente num fluxo de rotinas de uma empresa, de um setor ou até mesmo em nossa vida pessoal. Daí a necessidade de se avaliar bem o ato, pois as conseqüências dele vão se refletir no sucesso de nossas escolhas.

É preciso analisar, avaliar e utilizar todas as ferramentas disponíveis buscando sempre encontrar a melhor opção, entre simples ou complexas e específicas ou estratégicas, etc.

Nesta linha de raciocínio, as conseqüências de uma decisão podem ser imediatas, a curto e longo prazos ou combinar todas as formas apresentadas.

Decidir implica o processo de coleta de informações, avaliar a importância destas e buscar alternativas de solução. Diariamente tomamos decisões. A todo momento avaliamos nossos atos baseados nas informações obtidas através de conhecimento prévio, experiência ou coleta de dados. O simples fato de decidirmos comprar um móvel novo, nos leva a analisar dados que podem influenciar em nossa decisão, por exemplo, o tamanho, a cor, o preço, etc.

Partindo desse princípio nos deparamos com outros parâmetros a serem avaliados como:

- Durabilidade;
- Prazo de entrega;
- Conforto proporcionado;
- Tipo de material utilizado na confecção;
- Etc.

A análise então é feita, de acordo com os quesitos apresentados, respeitando-se sua relevância.

1.2 O processo decisório

No processo decisório, tentamos levantar quais seriam os quesitos importantes e imprescindíveis para satisfação do resultado final. Em um processo decisório empresarial nossas altitudes podem tornar-se mais complexas do que em decisões de cunho pessoal, considerando que o número de variáveis a considerar pode ser maior, e que a decisão escolhida terá repercussão coletiva.

De acordo com Oliveira (2003) decidir é escolher entre alternativas, tomar decisão é o mesmo que emitir uma opinião, sentenciar, resolver, optar.

Gomes (1998) *apud* Oliveira (2003) ressalta que a tomada de decisão num ambiente complexo caracteriza-se pela existência de pelo menos, alguns dos sete aspectos relacionados a seguir:

1- os critérios de resolução do problema são em número de, pelo menos, dois e conflitam entre si;

2- tanto os critérios como as alternativas de solução não são claramente definidos e as conseqüências da escolha de uma dada alternativa com relação a, pelo menos um critério, não são claramente compreendidas;

3- os critérios e as alternativas podem estar interligados, de tal forma que um dado critério parece refletir-se parcialmente em um outro, ao passo que a eficácia da escolha de uma dada alternativa depende de outra ter sido ou não escolhida, no caso, as alternativas não são mutuamente exclusivas;

4- a solução do problema depende de um conjunto de pessoas, cada uma das quais tem seu próprio ponto de vista;

5- as restrições do problema não são bem definidas, podendo mesmo haver alguma dúvida a respeito do que é critério e do que é restrição;

6- alguns dos critérios são quantificáveis, ao passo que outros só o são através de julgamentos de valor, efetuados sobre uma escala;

7- a escala para um dado critério pode ser cardinal, verbal ou ordinal, dependendo dos dados disponíveis e da própria natureza dos critérios.

O ser humano, muitas vezes, é limitado na percepção das possibilidades existentes para compreender ou processar todas as informações que recebe.

De acordo com Porto (1997) apud Oliveira (2003) o homem soluciona problemas a partir de dois elementos essenciais: a *informação*, que permite conhecer uma determinada situação que requer sua atuação, e a *concepção intelectual* do problema, ou seja, suas variáveis e como elas se interagem. Uma das abordagens científicas adotadas para o estudo dos problemas decisórios é a abordagem normativa, que procura atingir uma decisão "ótima", ou seja, prescreve como as decisões devem ser tomadas, e uma outra a comportamental, que se preocupa em entender como as pessoas agem diante de problemas decisórios. Na abordagem normativa, o modelo admite que o tomador de decisões aja sempre racionalmente, no sentido de maximizar a utilidade de sua escolha; em outras palavras, ele é capaz de calcular as conseqüências de cada uma das alternativas, relacioná-las em ordem de preferência e, finalmente, escolher aquela que maximiza a sua utilidade. Essa teoria procura formalizar e tornar mais objetiva a solução do problema da escolha de uma entre muitas alternativas em um ambiente de incerteza, não diz ter a fórmula para a tomada das melhores decisões, pois apóia-se, em grande parte, no conceito de valor ou preferência do tomador de decisão.

Para Rudolphi (2000) a análise de decisão é uma filosofia, articulada por um conjunto de axiomas e procedimentos, que visam analisar a complexidade inerente a problemas de decisão. O processo de decisão é caracterizado por quatro fases fundamentais: estruturação do problema, avaliação das possíveis conseqüências das alternativas, determinação do valor das preferências dos decisores, avaliação e comparação das alternativas.

Segundo Kaufman (1999) *apud* Rudolphi (2000) existem três fontes de restrição:

- Capacidade limitada do processamento do cérebro humano;
- Desconhecimento de todas as alternativas possíveis de resolver o problema;
- Influência dos aspectos emocionais e afetivos.

É preciso assegurar a coerência, eficácia e eficiência das decisões tomadas em função das informações disponíveis, antevendo cenários futuros. Decidir, por exemplo, sobre a compra de um veículo para atender ao departamento de transportes implica:

1. a compra de um veículo
2. novo ou usado

Para decidir se o veículo a ser adquirido deve ser novo ou usado é preciso avaliar primeiramente o custo. Sabemos perfeitamente que o preço de um veículo novo (0 km) é mais alto que de um veículo usado (semi-novo).

Neste caso, considerando o valor disponível para compra a decisão parece bem simples, por exemplo:

> Se tenho X disponível, decido qual o veículo comprar, no entanto é preciso considerar a manutenção, o gasto de combustível, entre outros quesitos, ou seja, avaliar a relação custo/benefício na hora da palavra final para a compra.

Nesse processo, portanto, é necessária a análise de mais critérios, ou seja, multicritérios, que balizam uma decisão.

Há ainda que se planejar e criar valores para cada critério utilizado na decisão, tornando o processo coerente, eficaz, transparente bem como optar pela alternativa mais viável, antevendo soluções de possíveis problemas futuros, levando-se esta decisão para a tomada de decisão multicritério.

Ressalta-se que o processo inicial, ou seja, a escolha entre adquirir algo ou não, por exemplo, é comum para qualquer processo de otimização. A fronteira de Pareto é formada pelos pontos no espaço das funções-objetivo que corresponde ao conjunto Pareto-ótimo que é o conjunto de soluções não dominadas. Soluções muito distantes da *Fronteira de Pareto* não são desejáveis, pois estão distantes dos objetivos traçados. Porém, encontrar a maior diversidade dentro das soluções é uma meta específica para Otimização Multi-Objetivo, objetivando encontrar dentro do conjunto de soluções aquela mais adequada. A figura 1a mostra uma boa distribuição de soluções na fronteira de Pareto, enquanto que na Figura 1b as soluções estão distribuídas apenas em algumas regiões. É necessário assegurar a maior cobertura possível da fronteira, já que isso implica em ter um bom conjunto de soluções comprometidas com os objetivos desejados. Como em Problemas de Otimização Multi-Objetivo trabalha-se com o espaço de decisões e o espaço de objetivos, é desejável que as soluções tenham uma boa diversidade nestes espaços. Normalmente, uma boa diversidade em um destes espaços garante também a diversidade no outro. Ressalta-se que normalmente é necessário um critério adicional para diferenciar as soluções encontradas no conjunto Pareto-ótimo, de modo que se tenha uma única solução ótima. Isso pode ser feito por algum especialista, após o processo de otimização ter descoberto um conjunto de soluções não-dominadas, ou pode-se adotar algum critério que diferencie as soluções do conjunto Pareto-ótimo durante o processo de otimização.

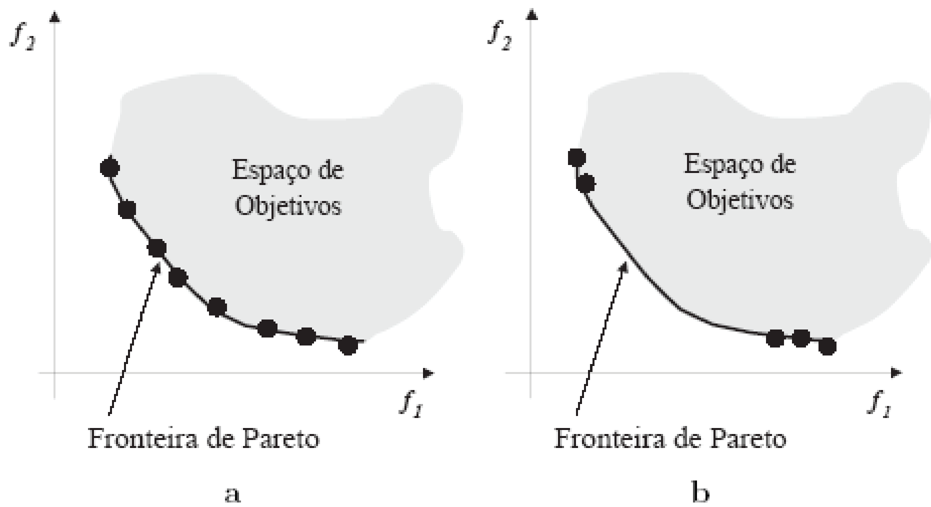


Figura 1: Distribuição e soluções na fronteira de pareto

1.3 Análise de multicritério

Métodos multicritérios têm sido muito utilizados na solução de problemas de tomada de decisão, uma vez que procuram esclarecer ao decisor as possibilidades de escolhas. Apóiam o processo decisório, embasado nas informações existentes, incorporando valores dos agentes, na busca da melhor solução.

De acordo com Oliveira (2003) na década de 40 já existiam pesquisadores e estudiosos que contribuíram direta ou indiretamente para o desenvolvimento desta área, preocupados com a racionalidade do processo decisório. Mas é só na década de 60 que surgem métodos probabilísticos voltados para a tomada de decisão; estes foram aplicados em diversos trabalhos técnicos, desenvolvidos até a década passada, mas que estão sendo suplantados por métodos cuja matemática é menos complexa, a transparência é inegavelmente maior e são corretos do ponto de vista científico, pois são fundamentados em axiomas rigorosos. Na década de 70, uma nova fase do processo de apoio à decisão começou a tomar forma e a iniciar uma comunidade científica, antes dispersa, interessada pelo domínio multicritério. Em 1975, Roy organizou o primeiro encontro *Euro Working Group on Multicriteria Aid for Decisions*, em Bruxelas, e Hervè Thiriez e Stanley Zionts organizaram a primeira conferência, que, mais tarde, tornou-se a *International*

Society on Multiple Criteria Decision Making. Assim, nascem paralelamente duas correntes científicas de apoio à tomada de decisão: a americana, que mais tarde virá a ser conhecida como a *Multiple Attribute Utility Theory* (MAUT) e a européia ou francesa.

Vale ressaltar que as Escolas Americana e Francesa foram as pioneiras na utilização de métodos multicritérios de apoio a decisão. Tais problemas podem ser modelados matematicamente de forma a apresentar alternativa para a tomada de decisão. O apoio multicritério à decisão busca relacionar preferências entre as alternativas apresentadas.

De acordo com as Escolas Americanas a análise de multicritérios pode ser entendida, onde, o valor cardinal de uma alternativa (ai) é formado por um conjunto de valores (v1i, v2i,... , vni), onde cada (vni) é o valor assumido pela alternativa (ai) em cada um dos (n) critérios. Isto significa que, caso um determinado critério ou atributo seja considerado pouco importante diante de outros critérios ou atributos, ele receberá um peso ou valor atribuído, inferior ao peso atribuído àqueles de maior importância (Gomes, 2002 apud Oliveira, 2003). A teoria americana, ainda admite definir uma função que busque agregar os valores das alternativas, segundo cada critério. Isto reflete o fato de que a importância relativa de cada critério advém do conceito de taxa de substituição ou *trade-off*. O decisor defronta-se, ainda, com o problema de identificação da taxa de substituição de um critério em relação ao outro. Esta abordagem exclui a incomparabilidade. Esta teoria assume que: a) todos os estados são comparáveis, isto é, não se admite a situação de incomparabilidade; b) existe transitividade na relação de preferências; c) existe transitividade nas relações de indiferença. (Oliveira, 2003)

Já de acordo com a escola francesa, o decisor pode deparar-se com uma das quatro situações, ao comparar duas alternativas, neste caso, observa-se que: uma alternativa é preferida à outra com preferência forte, também denominada preferência sem hesitação; uma alternativa é preferida à outra com preferência fraca, também denominada preferência com hesitação; uma alternativa é indiferente à outra; uma alternativa é incomparável à outra. Não existe, neste caso, uma função de valor ou de utilidade. Existem, no entanto, as preferências dos decisores, mas não existe transitividade de preferências e/ou de indiferenças. A utilização destes métodos não pressupõe uma definição de preferências por parte do decisor ao iniciar o processo de decisão. A Escola Francesa adota as seguintes convicções básicas: a) onipresença da subjetividade no processo decisório; b) paradigma da aprendizagem pela participação; c) convicção do construtivismo; d) reconhece as limitações do ótimo matemático e utiliza uma abordagem que não parte de quaisquer pré-condições, mas que procura construir um modelo de elementos-chave que capacitam os atores do processo de decisão a evoluir no processo decisório, como resultado pura e simplesmente dos seus próprios objetivos, convicções e sistemas de valores. A Escola Francesa ainda permite uma modelagem mais flexível do problema, pois não admite necessariamente a comparabilidade entre todas as alternativas, além de não imporem ao analista de decisões uma estruturação hierárquica dos critérios existentes. Alguns autores fazem a seguinte comparação: a Escola Francesa tende o seu foco de estudo para metodologias onde as preferências pessoais dos decisores tenham menor influência na alternativa escolhida e em contrapartida, a Escola Americana buscaria métodos para melhor explicitar esta preferência, que teria uma grande influência na escolha final. Ainda afirmam que uma boa decisão só será possível se as duas influências forem equilibradas.(Oliveira, 2003)

Temos necessidades constantes de tomarmos decisões e o fazemos por meio de comparações, classificações e ordenações de alternativas. Diferentes decisores optam por diferentes caminhos, em problemas idênticos, uma vez que cada decisor atribui valores diferentes a cada critério.

Entre as vantagens da utilização da metodologia multicritério, menciona-se: (Oliveira, 2003)

a) uso fácil por não especialistas, preferencialmente transformada em um programa de computador que seja o mais amigável possível com o usuário, dispondo de recursos gráficovisuais;

b) constituiu-se em um método lógico e transparente;

c) provê liberdade de ambigüidade para interpretações dos dados de entrada;

d) engloba tanto critérios quantitativos como qualitativos;

e) os julgamentos de valor

f) permite ao decisor dispor de algoritmos que permitam a utilização de critérios independentes uns dos outros, como algoritmos que auxiliem em problemas onde os critérios de avaliação são interdependentes, bem como, analogamente, pode lidar com alternativas independentes umas das outras;

g) incorpora questões do comportamento humano nos processos de decisão.

De acordo com Arroyo (2002) na solução de problemas multiobjetivos, dois aspectos importantes podem ser identificados: busca de soluções e tomada de decisões. O primeiro aspecto refere-se ao processo de otimização no qual a região factível é direcionada para soluções Pareto-ótimas. Como no caso de otimização mono-objetivo, a busca pode tornar-se difícil devido ao tamanho e complexidade do espaço de busca, podendo inviabilizar o uso de métodos exatos, mas não prejudica o processo decisório. A tomada de decisões envolve a seleção de um critério adequado para a escolha de uma solução do conjunto Pareto-ótimo. É necessário que o decisor faça uma ponderação (*trade-off*) dos objetivos conflitantes. [1]

A partir do ponto de vista do *decisor*, os métodos de otimização multiobjetivos podem ser classificados em três categorias, descritos na tabela abaixo:

Métodos a-priori	São caraterizados pela participação do decisor antes do processo de busca de soluções: 1) Os objetivos do problema são combinados em um único objetivo. Isto requer a determinação explícita de pesos para refletir a preferência de cada objetivo, utilizando ou não a atribuição de

[1] Em otimização multiobjetivo, ao contrário de otimização mono-objetivo, em geral, não existem soluções ótimas no sentido de minimizarem (ou maximizarem) individualmente todos os objetivos. A característica principal de otimização multiobjetivo é a existência de um conjunto grande de soluções aceitáveis que são superiores às demais. Estas soluções aceitáveis são denominadas soluções Pareto-ótimas ou eficientes. A escolha de uma solução eficiente particular depende das caraterísticas próprias do problema e é atribuída ao decisor (*decision maker*).(Arroyo, 2002)

	pesos. A vantagem deste método é que podem ser aplicadas estratégias clássicas de otimização mono-objetivo sem nenhuma modificação. 2) Os objetivos são classificados em ordem decrescente de prioridade. Feito isto, o problema é resolvido para o primeiro objetivo sem considerar os demais. A seguir, o problema é resolvido para o segundo objetivo sujeito ao valor ótimo encontrado para o primeiro objetivo. Este processo é continuado até que o problema seja resolvido para o ultimo objetivo sujeito aos valores ótimos dos outros objetivos. Para o caso de dois objetivos temos o seguinte problema: minimizar $f_2(x)$ sujeito a $f_1(x) = f_1^*$, $x \in X^*$ onde f_1^* é a solução do problema. Minimizar $f_1(x)$ sujeito a $x \in X^*$.
Métodos a-posteriori	Nestes métodos, o processo de decisão é feito logo após a realização da busca de soluções. A busca é feita, considerando-se que todos os objetivos são de igual importância. Ao final do processo da busca tem-se um conjunto de soluções aproximadas, exatas ou Pareto-ótimas. A partir deste conjunto, o responsável pelas decisões deve selecionar uma solução que representa a solução adequada do problema.
Métodos iterativos	Uma característica da otimização multiobjetivo é a existência de objetivos conflitantes, isto é, nenhuma das soluções factíveis otimiza simultaneamente todos

	os objetivos. As soluções ótimas para cada objetivo são, geralmente, diferentes e não satisfazem as necessidades do decisor. O decisor pode precisar de soluções que satisfaçam certas prioridades associadas com os objetivos. Para encontrar tais soluções, os métodos interativos fazem consultas progressivas ao decisor, à medida em que a otimização é processada, de maneira a guiar a solução para a solução Pareto-ótima preferida.

Tabela 1: Métodos de otimização multiobjetivos

De acordo com Oliveira (2003) para análise de problemas de tomada de decisão, é importante conhecer algumas terminologias usadas com freqüência durante o processo:

O analista	Refere-se ao cientista ou técnico, que tem como papel fundamental ajudar o decisor no processo. Ele auxilia o decisor a expressar suas preferências, para tirar conclusões definitivas sobre o conjunto de ações (alternativas viáveis).
O decisor	É empregado para referenciar o indivíduo ou grupo de indivíduos que intervém no processo, influenciando direta ou indiretamente a decisão, através da manifestação das preferências e julgamentos de valor fornecidos em distintas fases do processo.
O facilitador	É um líder experiente, que deve focalizar a sua atenção na resolução

	do problema, coordenando os pontos de vista do decisor, mantendo este motivado e destacando o aprendizado no processo de decisão. O seu papel fundamental é esclarecer e modelar o processo de avaliação e ou negociação conducente à tomada de decisão. Deve-se manter neutro durante o processo de decisão, para não influenciar nos julgamentos dos decisores.
Pesos	Correspondem à importância relativa dos atributos - se houver independência aditiva nas preferências entre atributos, os *trade-offs* permitem deduzir pesos de importância relativa. Se, além disso, os *trade-offs* forem constantes, os pesos também serão constantes.
Critério	É uma medida base para a efetividade da avaliação, ou seja, permite estabelecer um julgamento de preferência entre as ações; os critérios podem ser metas, alvos ou objetivos almejados
Conjunto de critérios	É usualmente chamado família de critérios (F), deve ser coerente com a definição do problema e mutuamente exclusivos.
Atributo	É uma medida que fornece uma base para avaliar os níveis de vários objetivos e definir se as metas têm sido atingidas ou não dada uma decisão particular, ou seja, os atributos funcionam como um aspecto

	mensurável de julgamento, pelo qual uma variável de decisão pode ser caracterizada.
Ação	A representação que um decisor constrói para si da solução de um problema
Alternativa Dominada (ou Inferior)	Uma solução é dominada se existe outra melhor pelo menos em um critério, sem ser pior em nenhum outro
Alternativa Eficiente (ou Não-dominada ou Ótima de Pareto)	Uma solução é eficiente se não é dominada por nenhuma solução admissível.
Trade-off	Valor de compensação entre dois atributos x e y - relação entre o que é preciso perder em x para ganhar uma unidade em y, sem sair da curva de indiferença. Definido a partir da tangente à curva, em geral, depende dos valores de x e y e também dos valores dos outros atributos.
Caracterização na forma cardinal	Quando é possível estabelecer-se uma escala numérica de comparação

Tabela 1.1: Terminologias. Oliveira (2003)

CAPÍTULO 2
OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO

2.1 A problematização Multiobjetivo

Um problema geral de otimização multiobjetivo consiste em encontrar um vetor de variáveis de decisão (solução) que satisfaça restrições e otimize uma função vetorial cujos elementos representam as funções objetivos. Estas funções representam os critérios de otimalidade que, usualmente, são conflitantes. Portanto, o termo "otimizar" significa encontrar soluções com todos os valores dos objetivos que não podem ser melhorados simultaneamente.

Formalmente, isto pode ser definido da seguinte maneira:

$$
(\mathrm{P1}) \quad
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar (ou maximizar)} & z = f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_r(x)) \\
\text{Sujeito a} & g(x) = (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_p(x)) \leq b \\
 & x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X \\
 & z = (z_1, z_2, \ldots, z_r) \in Z
\end{array}
$$

onde, $\boldsymbol{x}$ é o vetor decisão, $\boldsymbol{z}$ é o vetor objetivo, $\boldsymbol{X}$ denota o *espaço de decisões*, e $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})$ é a imagem de $\boldsymbol{X}$ denominada *espaço de objetivos*.

As restrições $g(x) \leq b,\ b \in \Re^p$ e o espaço $\boldsymbol{X}$ determinam o *conjunto das soluções factíveis*: $X^* = \{\ x \in X : g(x) \leq b\ \}$. Portanto, o problema (P1) pode ser escrito como:

A imagem de X^* é denominado *espaço objetivo factível* e é denotada por $Z^* = f(X^*) = \{ f(x) : x \in X^* \}$. Note que, a imagem de uma solução $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^*$ no espaço objetivo é um ponto $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_r) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, tal que $z_j = f_j(\boldsymbol{x})$, $j = 1, \ldots, r$. Na Figura abaixo mostra-se o espaço objetivo factível do problema de minimização (P2) com dois objetivos.

Na otimização de um único objetivo f, o espaço objetivo factível é *completamente ordenado*, o significa que, dados quaisquer dois elementos $x, y \in X^*$ é sempre verdade que $f(\boldsymbol{x}) \geq f(y)$ ou $f(x) \leq f(y)$. O objetivo é encontrar a solução (ou soluções) que forneça o mínimo (ou máximo) valor de *f*. No entanto, quando são considerados vários objetivos conflitantes em otimização multiobjetivo, não existe uma única solução que seja ótima com respeito a todos os objetivos. Por exemplo, em um problema de minimização, minimizar um dos objetivos pode causar o acréscimo de outros objetivos. O espaço de objetivos, em geral, não é completamente ordenado, mas é *parcialmente ordenado* (Pareto, 1896). A ordenação parcial dos vetores de objetivos é responsável pela distinção básica entre problemas de otimização multiobjetivo. Dados quaisquer dois vetores de decisão $x, y \in X^*$, de acordo com a relação de preferência "$\leq$", existem três possibilidades para seus correspondentes vetores objetivos:

$$f(x) \leq f(y),\ \ f(y) \leq f(x) \text{ ou } (\ f(x) \nleq f(y) \text{ e } f(y) \nleq f(x)\ ).$$

Exemplo:

Sejam $x, y \in X^*$ tal que:

1) Se $f(x) = (7, 3)$ e $f(y) = (9, 4)$ então $f(x) \leq f(y)$;

2) Se $f(x) = (7, 3)$ e $f(y) = (9, 2)$ então $f(x) \nleq f(y)$ e $f(y) \nleq f(x)$.

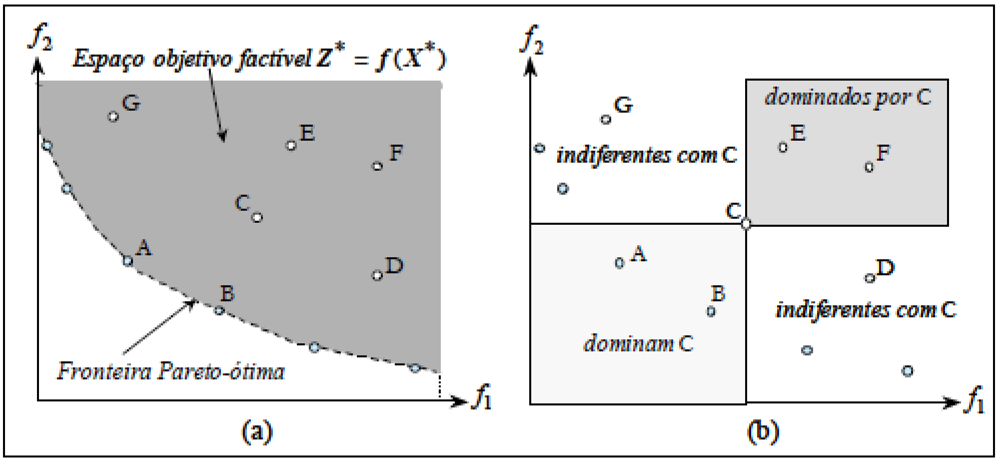
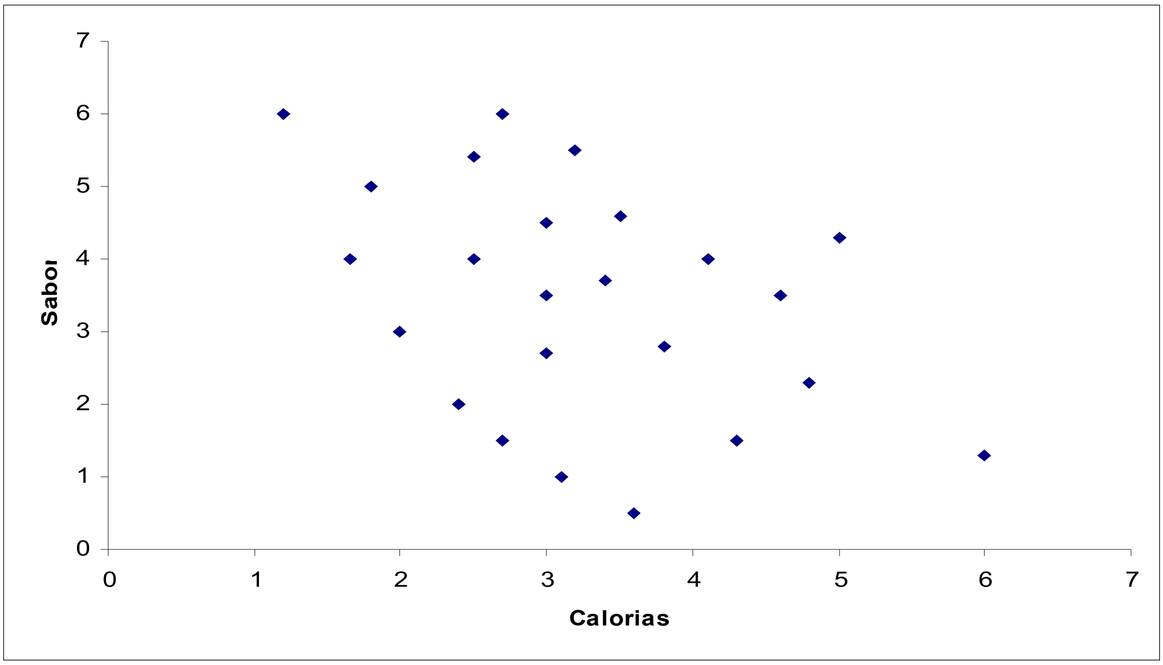


Figura 1: Dominância de pareto

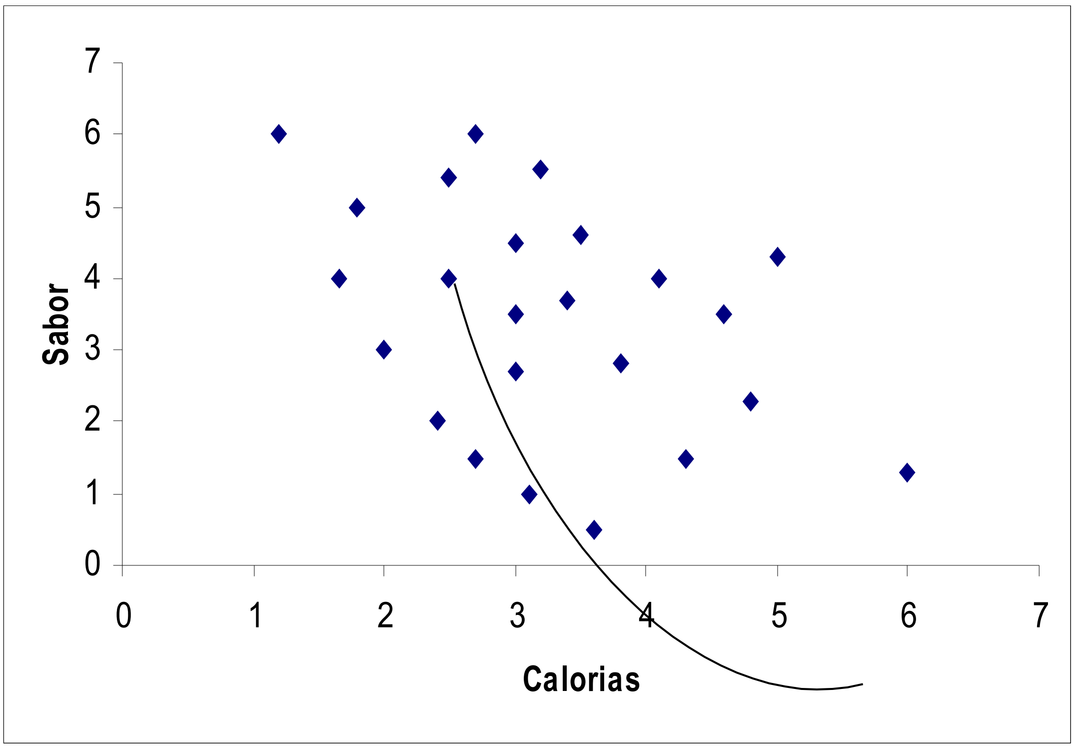
Um aplicação das soluções de pareto pode ser observada em exemplos comuns, vejamos:

Suponhamos que uma empresa queira inserir no mercado um novo produto para o mercado de diabéticos e então teríamos que apresentar um produto saboroso e com poucas calorias. Iniciamos então um processo de seleção das receitas apresentadas.

No gráfico abaixo observamos a posição de cada uma daquelas indicadas para degustação:

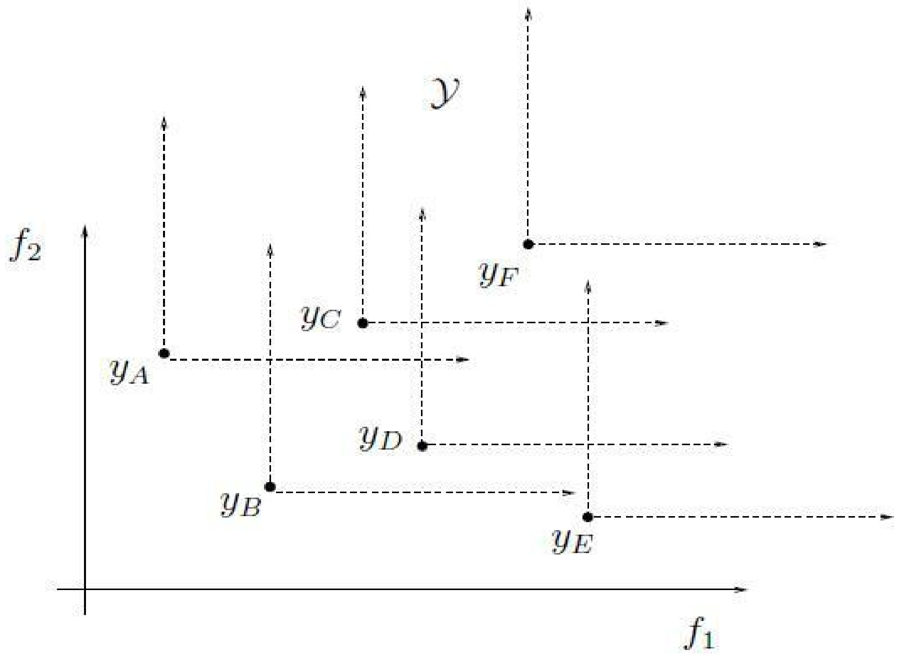


Passamos então para a fase seguinte, trabalharemos com a fronteira de pareto para a tomada de decisão



Percebemos então que aqueles que se encontram na fronteira são os mais indicados pois atendem aos nossos objetivos.

A Dominânia de Pareto então é estudada, conforme exemplo abaixo:



Traçamos cones usando os pontos da fronteira como vértices e todos aqueles que sem encontram dentro da varredura do ângulo formado são dominados, tornando-se opções que se encontram nesta posição indesejáveis.

A seguir, são apresentadas definições para problemas de minimização.

Definição 1 (Dominância de Pareto no Espaço de Objetivos)

Para quaisquer dois vetores objetivos, $z^1 = (z_1^1,\dots,z_r^1)$ e $z^2 = (z_1^2,\dots,z_r^2)$, diz- que:

1. z^1 *domina* z^2 se $z^1 \le z^2$ e $z^1 \ne z^2$, isto é, $\forall j,\ z_j^1 \le z_j^2$ e para algum $j,\ z_j^1 < z_j^2$.

2. z^1 e z^2 são *indiferentes* (ou possuem o mesmo grau de dominância) se z^1 não domina z^2 nem z^2 domina z^1.

Como se observa na figura, o ponto C domina os pontos pertencentes ao retângulo superior direito (subconjunto do espaço objetivo). Os pontos pertencentes ao retângulo inferior esquerdo dominam o ponto C. Os pontos G, C e D são indiferentes.

Definição 2 (Dominância de Pareto no Conjunto de Soluções Factíveis X^*)

Para quaisquer duas soluções $x, y \in X^*$, diz-se que:

1. x *domina* y se a imagem de x domina a imagem de y, isto é, $f(x) \leq f(y)$ e $f(x) \neq f(y)$.
2. x é *indiferente* com y se $f(x) \nleq f(y)$ e $f(y) \nleq f(x)$.

Definição 3 (Otimalidade de Pareto)

1. Diz-que $x^* \in X^*$ é uma *solução eficiente* (ou *Pareto-ótima*) se não existe qualquer outra solução $x^* \in X^*$ tal que ***x*** domine x^*; $z^* = f(x^*)$ é chamado de *ponto eficiente* ou ponto Pareto-ótimo.
2. O conjunto de todas as soluções eficientes é denominado *conjunto eficiente* (ou *conjunto Pareto-ótimo*).
3. A imagem em Z^* do conjunto Pareto-ótimo é denominada *fronteira Pareto-ótima*.

Verifica-se na figura 1 um exemplo da *fronteira Pareto-ótima*. Os pontos pertencentes a esta fronteira são os pontos Pareto-ótimos. Note que estes pontos são indiferentes uns aos outros.

Definição 4

Um ponto $z^o = (z_1^o, \ldots, z_r^o) \in Z^*$ tal que:

$z_j^o = min\{f_j(x) : x \in X^*\}, j = 1, \ldots, r$ é chamado de ponto ideal ou ponto utópico. Observe que se existe o ponto ideal, então o problema estaria resolvido. Obviamente esta situação é extremamente improvável se o problema envolve objetivos conflitantes.

Definição 5

Uma solução $x \in X^*$ é dominada por um subconjunto $A \subseteq X^*$ se existe uma solução $y \in A$ tal que *y* domina *x.* Entre os modelos clássicos que têm sido utilizados para resolver problemas de multicritérios, menciona-se:

a- O método da soma ponderada: este é o mais simples dos métodos clássicos que consiste em transformar o problema multiobjetivo original em um problema escalar mono-objetivo. Usando pesos diferentes para cada objetivo, forma-se uma função *f* que é a combinação linear dos objetivos. O problema escalar resultante é:

$$(\mathbf{P3}) \qquad \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) = \sum_{i=1}^{r} w_i . f_i(x) \\ \text{Sujeito a} & x \in X^* \end{array}$$

Onde $w_i \geq 0$ é o peso que representa a importância relativa do objetivo f_i comparado com os outros. Estes pesos, geralmente, são normalizados, tal que:

$$\sum_{i=1}^{r} w_i = 1.$$

Segundo Arroyo (2002) o teorema a seguir fornece condições suficientes para que uma solução do problema ponderado (P3) seja Pareto-ótima.

TEOREMA:

Dado um vetor de pesos, $w = (w_1,...,w_r)$, uma solução de x^* de P(3) é solução pareto-ótima se:

a) x^* é a solução única de (P3) ou

b) $w_i > 0, \forall i = 1,...,r.$

Assim, para tentar a obtenção de soluções Pareto-ótimas[2], deve-se resolver interativamente o problema (P3) considerando diferentes vetores de pesos positivos. Neste caso, o decisor ou o otimizador é encarregado pela definição dos pesos apropriados de acordo com a importância dos objetivos. Para que os pesos w_i reflitam aproximadamente a importância dos objetivos, as funções objetivo devem ser normalizadas expressando aproximadamente os mesmos valores. A principal desvantagem deste método é que ele não consegue gerar todas as soluções Pareto-ótimas quando o conjunto de soluções, no espaço de objetivos é não convexo. Isto é ilustrado no gráfico abaixo, para o caso de dois objetivos. Considere os pesos $w1$ e $w2$ para minimizar a seguinte função:

$$y = w_1.f_1(x) + w_2.f_2(x)\ ,\ x \in X^*.$$

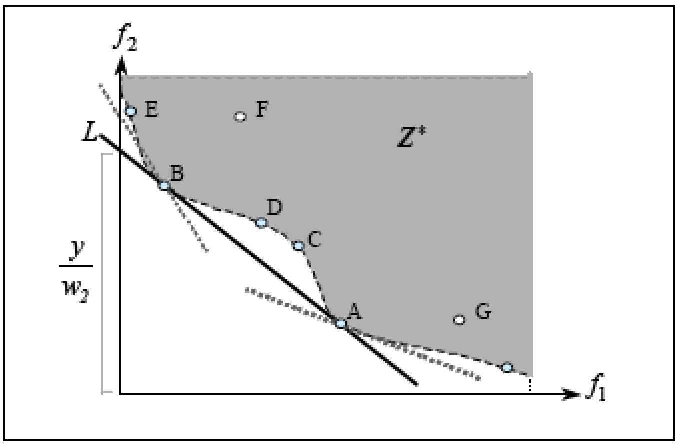


Gráfico 1: Interpretação gráfica do método da soma ponderada

[2] As soluções Pareto-ótimas são obtidas resolvendo alguns problemas particulares, derivados do original, cujos ótimos globais correspondem às soluções Pareto-ótimas. Um exemplo típico é o método de escalarização das funções objetivos (ou das formas ponderadas) definido sobre o espaço das soluções factíveis do problema multiobjetivo original (Wierzbick, 1986).

b- O método ε-restrito: Este método é baseado na minimização do objetivo de maior prioridade sujeito à limitação dos outros objetivos. Sendo *f*1 o objetivo de maior importância, o problema pode ser formulado da seguinte maneira:

$$
\textbf{(P4)} \qquad \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f_1(x) \\ \text{Sujeito a} & f_i(x) \leq \varepsilon_i\ ,\ i = 2,\ldots, r \\ & x \in X^* \end{array}
$$

Onde ε_i são limitantes superiores dos objetivos, $f_i\ ,\ i = 2,\ldots, r.$

Variando convenientemente os limitantes $\varepsilon_i.$ é possível gerar o conjunto Pareto-ótimo, mesmo quando o conjunto de soluções no espaço de objetivos é não convexo. Quando as funções objetivo e as funções restrições são lineares, então (P4) é um problema de programação linear. Na gráfico abaixo, mostra-se um exemplo deste método para o caso de um problema biobjetivo. A reta $\varepsilon_2 = k$ limita o espaço de soluções, os pontos A, B, C, D e G correspondem a soluções factíveis do problema. Entre os problemas deste modelo ressalta-se que se o limitante superior não é selecionado adequadamente $\varepsilon_2 = k$, o subconjunto do espaço obtido pela interseção dos pontos que atendem às restrições pode ser vazio, por exemplo, o problema (P4) não possui solução. Para evitar esta situação, inicialmente deve-se gerar um conjunto de valores apropriados para ε_i.

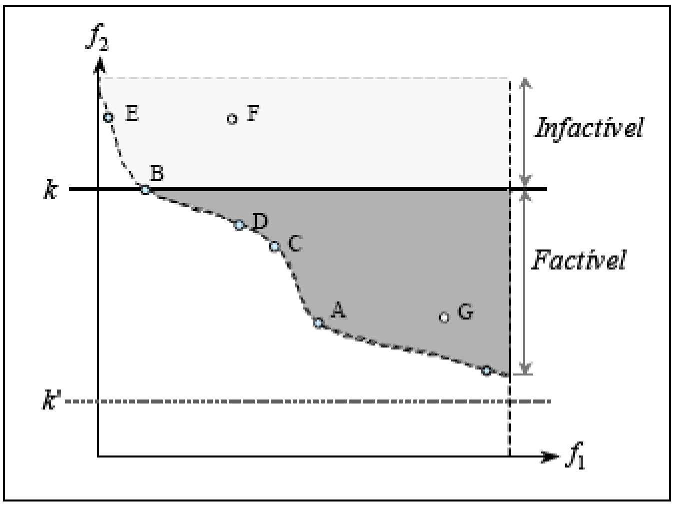


Gráfico 2: O método ε-restrito

A modelagem matemática desses problemas, atribuindo valores aos critérios a serem considerados auxilia o decisor na sua tomada de decisão, no entanto, é preciso definir critérios com clareza, afim de que as conseqüências a curto, médio e longos prazos não sejam comprometidas. O conceito de otimalidade de Pareto desenvolvido por Vilfredo Pareto e outros, agrega à solução de problemas uma qualidade superior, ou seja:

- Situação eficiente
- Não inferior
- Não dominada
- Fronteira e fronteira de eficiência
- Eficiência de pareto
- Pareto ótimo.

As soluções de Pareto (homenagem a Vilfredo Pareto, renomado Economista (1848-1923) e pioneiro em otimização multiobjetivo), são utilizadas com muita freqüência para a análise de problemas multicritérios. A solução destes problemas envolve a otimização de várias funções objetivo que são geralmente conflitantes.

- Fulano quer comprar um carro
  Tamanho do carro
  Consumo de combustível
  Preço

Quando são analisados mais critérios teremos como resposta um conjunto de solução e neste conjunto de soluções obtidas é possível que nenhuma delas seja melhor que as demais, ou seja, podemos escolher qualquer uma das soluções apresentadas uma vez que todas são Pareto-ótimas. Nas soluções multiobjetivo ou soluções de Pareto não existe um ordenamento. Ao analisarmos um conjunto de soluções não há como definir que uma é melhor que a outra, mas ver as que mais se aproximam do objetivo. Uma solução $\mathbf{x_1}$ domina uma solução $\mathbf{x_2}$, se as seguintes condições se verificam:

1. $\forall\, i : F_i\,(x_1) \leq F_i\,(x_2)$

2. $\exists\, i : F_i\,(x_1) < Fi\,(x_2)$

Exemplo:

Dado um conjunto de soluções

x	f1(x)	f2(x)
1	10	5
2	13	6
3	8	10
4	7	11
5	7	12

x = 3 é dominado por x = 4

x = 5 é dominado por x = 1

x = 1, 2 e 4 são soluções não dominadas

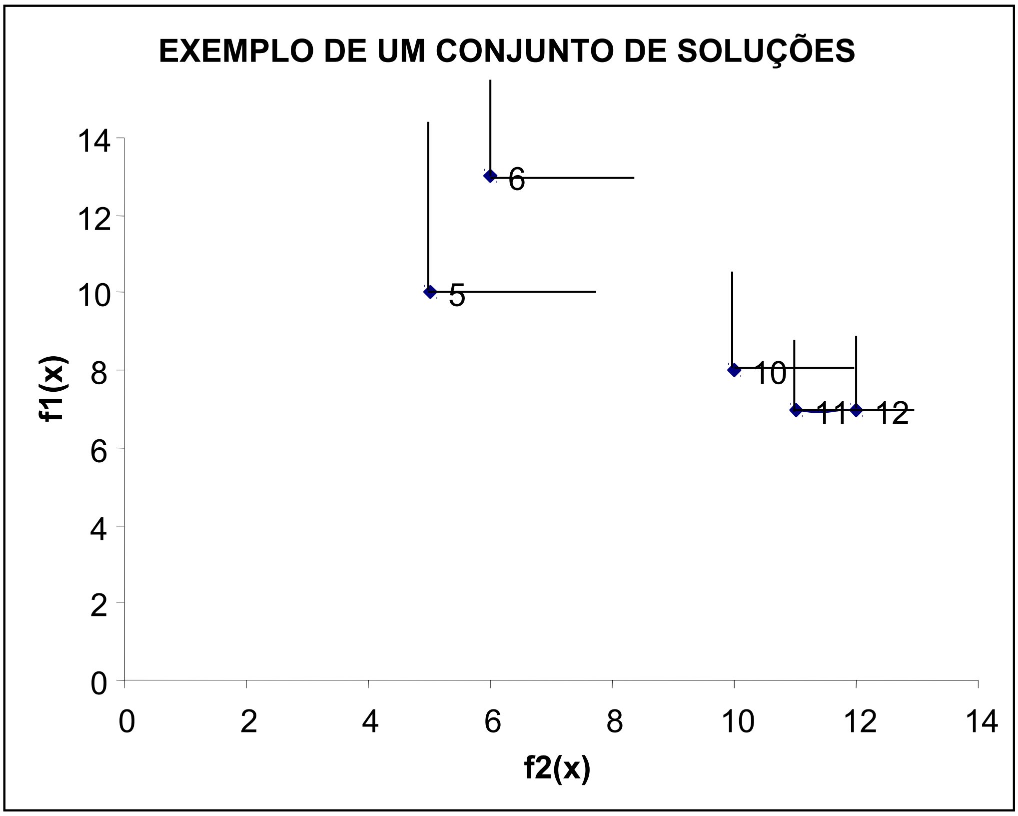


Gráfico 3: Conjunto de soluções

O gráfico acima mostra um exemplo de conjunto de soluções. São mostrados os pontos 5, 6, 10, 11 e 12 pertencentes ao espaço objetivo. Traçamos então cones paralelos ao espaço objetivo, com vértices em cada um desses pontos. Os pontos do interior de cada cone são dominados pelo ponto que se localiza no vértice, assim:

- 5 domina 6
- 6 não domina nenhum outro ponto, porém é dominado por 5
- 10 não domina nenhum outro ponto, no entanto não é dominado
- 11 domina 12 e não é dominado por nenhum outro ponto
- 12 não domina nenhum outro ponto, porém é dominado por 11

As soluções 5, 10 e 11 são soluções não dominadas. A estas soluções não dominadas chamamos de conjunto de soluções Pareto-ótimo. O exemplo acima mostra um conjunto de soluções não convexo.

x	**f1(x)**	**f2(x)**
-6	36	64
-4	16	36
-2	4	16
0	0	4
2	4	0
4	16	4
6	36	16

$F_1 = x^2$
$F_2 = (x-2)^2$

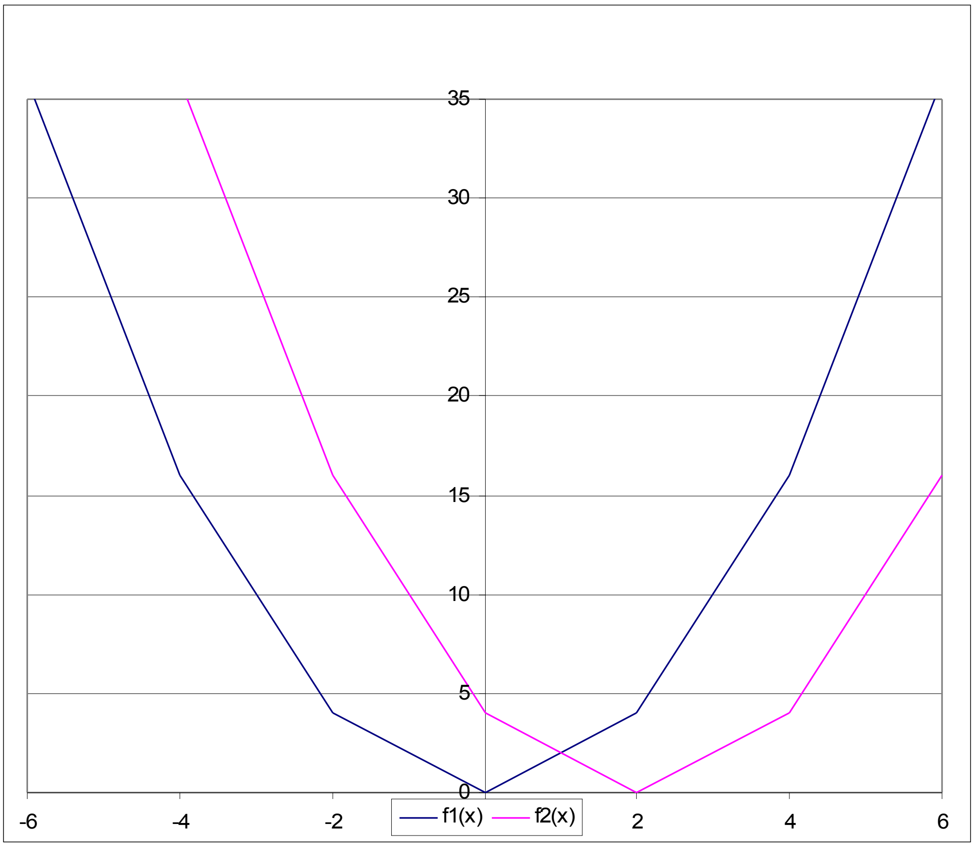


Gráfico 4: Conjunto de soluções Pareto-ótimo

Conjunto Pareto-ótimo

$P = \{ x \mid 0 \leq x \leq 2\}$

Os métodos ponderados tratam do problema de agregar várias funções-objetivo distintas em uma única função a ser minimizada. O problema multiobjetivo se transforma em minimizar $F = \Sigma w_i F_i$, onde w_i é o peso usado para atribuir mais relevância a uma função. A desvantagem deste método é a dificuldade de encontrar pesos adequados, isto é feito, muitas vezes, pela intuição do decisor. É possível encontrar pontos do conjunto Pareto variando os pesos e não podem ser encontradas múltiplas soluções em uma única rodada. Muitos métodos não podem manipular eficientemente problemas com variáveis discretas e com múltiplas soluções. Um método que pode contribuir para a solução deste problema é o Procedimento de Ranking (Goldberg, 1989). Para realizar este procedimento, o primeiro passo é atribuir rank = 1 para as soluções não dominadas; o segundo passo é retirar as soluções de rank = 1 e atribuir rank = 2 para as não dominadas restantes; o terceiro passo é repetir o procedimento para rank = 3, 4, 5.... até esgotar as soluções não dominadas.

Em relação ao procedimento de ranking, verifica-se que seja $\mathbf{r}_i$, o número de soluções que dominam a solução $\mathbf{x}_i$: Então o rank de $\mathbf{x}_i$ é dado por: rank ($\mathbf{x}_i$) = $\mathbf{r}_i$ + 1

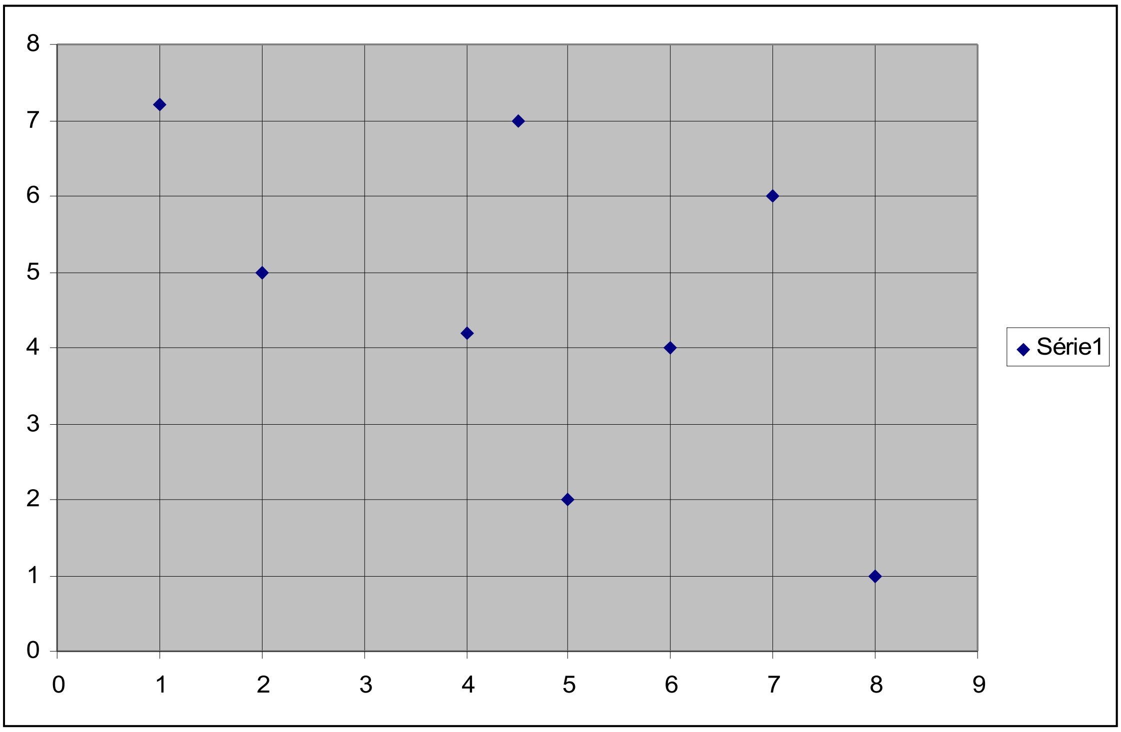


Gráfico 5: Procedimento de Ranking

CAPÍTULO 3

A ESCOLHA DE CRITÉRIOS

3.1 A escolha de critérios

Para utilização das soluções de Pareto para a tomada de uma decisão é preciso criar critérios que auxiliados por programas matemáticos definirão a decisão final.

Criados então os critérios para análise da decisão, estes critérios precisam ser pontuados de forma a serem MAIS ou MENOS importantes. Nos problemas multicritério, por motivos diversos, alguns critérios são mais relevantes que outros e isso varia obviamente em função da natureza de cada problema.

De acordo com Oliveira (2003) a decisão multicritério ocorre quando se tem um conjunto K de alternativas ou ações, submetidas à avaliação. Em uma família de critérios, pretende-se: determinar um conjunto de ações ou alternativas, conjunto K, que sejam consideradas as melhores para resolver um certo problema; dividir o conjunto K em subconjuntos; ordenar as alternativas em ordem crescente ou decrescente, considerando solucionar o problema. A idéia central, a qual preserva a metodologia multicritério à decisão, é a de haver sempre a presença da subjetividade no processo decisório, sendo esta individual ou grupal. A filosofia dos métodos de apoio à decisão vai mais além, quando afirmam que é impossível prever se uma situação é boa ou má, analisando apenas métodos matemáticos. Precisa existir o fator humano, nunca poderá ser uma situação onde as decisões sejam geradas somente através de algoritmos.

Por intermédio da decisão humana os métodos multicritérios são postos em funcionamento. O decisor, a partir de seus conhecimentos sobre o problema, conduz ao caminho mais adequado de ação. Para identificar o sistema de preferências dos decisores, antes, é necessário: (Oliveira, 2003)

- Considerar a subjetividade dos atores de decisão, as percepções individuais e vislumbrar em quais aspectos dos problemas os decisores encontram maior dificuldade de explicitar as suas percepções individuais;
- Estruturar o problema de acordo com a visão compartilhada;
- Identificar os pontos de vista comuns;
- Saber onde os decisores são inconsistentes;
- Verificar o que pode ser mudado e por qual motivo.

As preferências dos decisores são cruciais para a estruturação e modelação do problema de decisão multicritério. Os participantes do processo de decisão que julgarem conveniente usar da metodologia multicritério para auxílio na estruturação dos seus problemas e, posteriormente, priorizar ou escolher as alternativas factíveis, devem primeiramente:

1. definir e estruturar o problema;

2. definir o conjunto de critérios e/ou atributos que serão utilizados para classificar as alternativas;

3. escolher se utilizarão métodos discretos ou contínuos; se optarem por métodos discretos (concebidos para trabalhar-se com um número finito de alternativas), deverão privilegiar o uso de métodos da Escola Francesa ou da Escola Americana;

4. identificar o sistema de preferências dos decisores e

5. escolher o procedimento de agregação.

Na fase de modelagem de um problema, utilizando como apoio os métodos multicritério é importante levar em consideração:

a) a escolha das alternativas;

b) a construção dos critérios e agregação das informações;

c) a classificação das alternativas onde se identifique a dominância dos grupos;

d) a ordenação de uma hierarquia de classificação entre as alternativas.

A fase de estruturação de um problema pode ser dividida em três partes:

a) a estrutura e composição dos componentes;

b) a análise;

c) a sintetização das informações.

No primeiro passo, quando busca identificar as alternativas, especificar os objetivos, critérios e atributos (Oliveira, 2003)

A árvore de decisão é genérica para todos os métodos abordados na modelagem multicritério, embora estes se diferenciem em alguns aspectos, como, por exemplo, o nível de detalhamento do problema, as técnicas empregadas, os métodos de agregação (Oliveira, 2003):

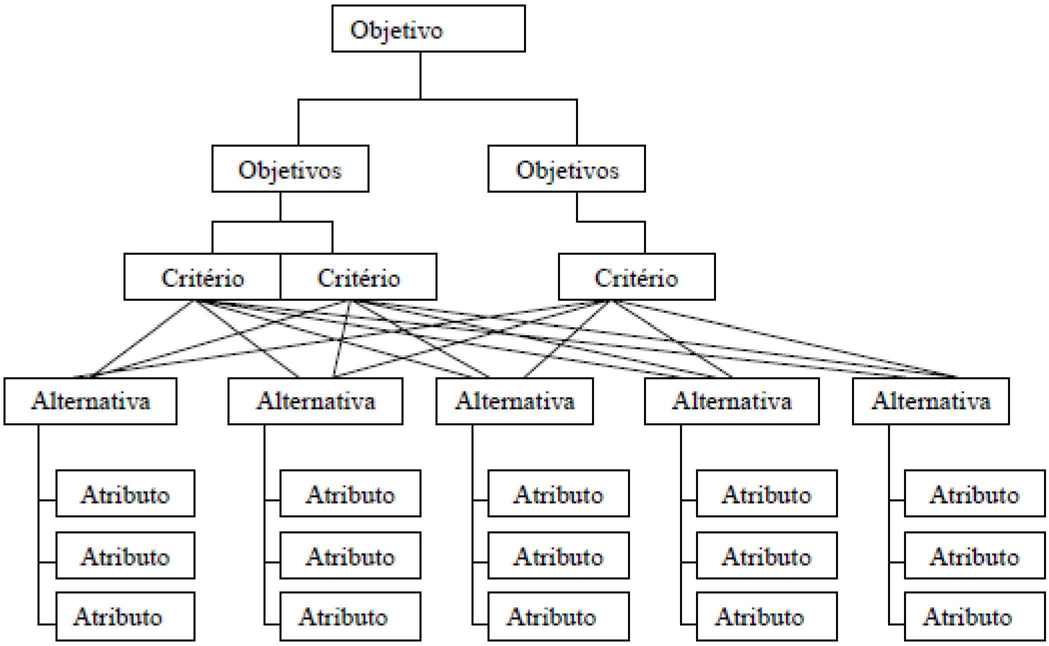


Figura 2: A árvore da decisão

Na escolha, por exemplo, entre diversas marcas para aquisição de um produto, características como preço, qualidade, estética, durabilidade etc., devem ser consideradas. Essas características são denominadas atributos. A esses atributos associamos informações relativas às preferências do consumidor. Consideradas estas informações definimos os critérios de escolha.

Se no processo de escolha, estivesse envolvida a seleção de uma TV, a qualidade do produto poderia englobar por exemplo, qualidade de imagem e som, ou seja, a definição de critério de escolha.

Logo, teríamos $g(b) > g(a) \Rightarrow a \ P \ b$

Onde P é uma relação binária e seu conteúdo semântico seria: *"a é preferível a b".*

Os critérios de decisão podem ser quantitativos (como preço, velocidade, etc) ou qualitativos (como conforto, impacto ambiental, qualidade, etc.)

Na construção dos critérios devemos nos preocupar com alguns aspectos relevantes:

1. Os critérios devem ser expressos em unidades físicas claras;
2. o processo deve ser compreensível e claro

3. a escolha de um critério deve levar em conta a qualidade dos dados utilizados.

Supondo que procuramos um profissional para atuar num determinado setor da Empresa, devemos considerar critérios que nos levem a escolher o profissional mais completo, assim, por exemplo:

Critério 1:

- Avaliação do curriculum de cada um dos candidatos

Nesta avaliação, suponha que tenhamos chegado ao seguinte resultado:

CANDIDATO	NOTAS		MÉDIA
	ELETRICA	MECÂNICA	
A	10	8	**9**
B	8	10	**9**

Tabela 2 Avaliação

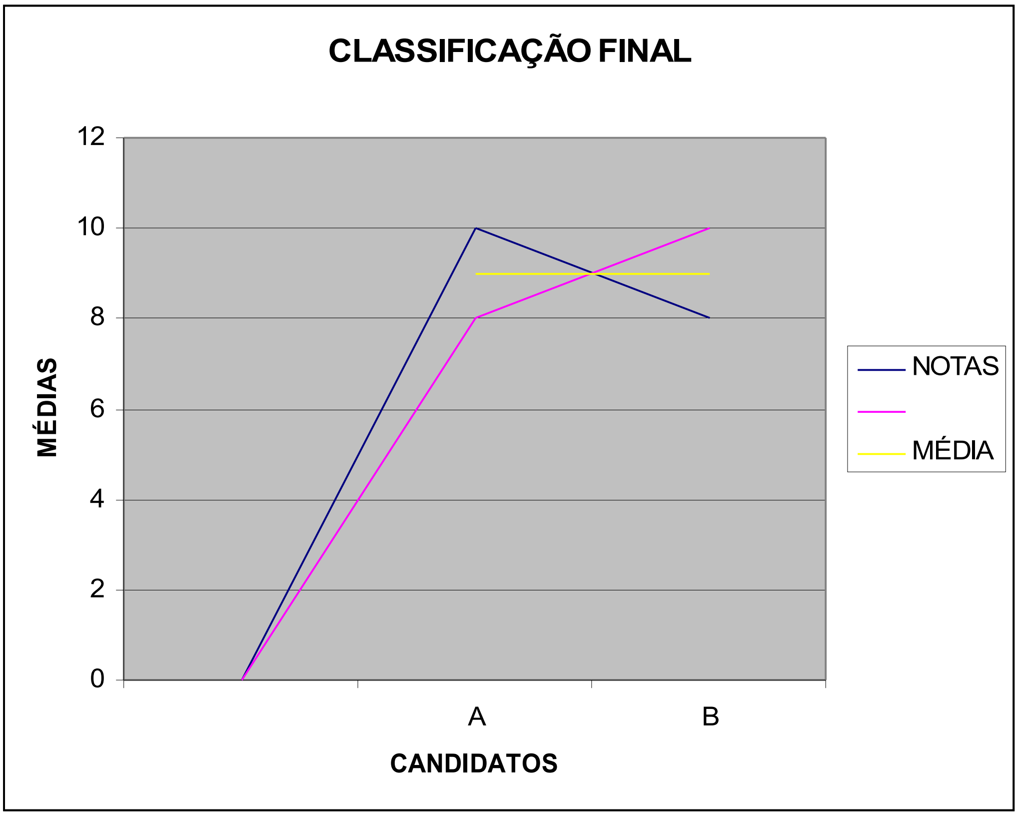


Gráfico 6: Classificação final

Observamos dois candidatos com médias iguais, porém com notas diferentes nas áreas avaliadas.

A solução encontrada visualizada no gráfico mostra que ambos estão aptos a ocupar a vaga oferecida. Possuem o mesmo rendimento global, no entanto, é preciso atribuir pesos diferentes, considerando o perfil procurado na tentativa de encontrar a solução mais adequada.

Essas variáveis vão então auxiliar o tomador de decisão a optar pelo melhor candidato. A escolha depende então da definição dos critérios de decisão.

Em alguns casos podemos encontrar uma única solução, no entanto, há situação em que as soluções consideradas eficientes podem se apresentar como um conjunto de soluções, ou seja, várias soluções eficientes para um mesmo caso e então cabe ao decisor fazer sua escolha buscando outros métodos que justifiquem sua decisão.

A modelagem matemática auxilia na decisão e cria condições de tomada de decisão entre as apresentadas mas pode não ser o único método de apoio.

No exemplo apresentado acima, poderíamos atribuir pesos de acordo com o perfil desejado para a área de atuação.

Considerando a área de atuação em mecânica mais importante, teríamos então:

	CANDIDATOS		**PESOS**	**MÉDIA**	
DISCIPLINAS AVALIADAS	**A**	**B**		**A**	**B**
ELETRICA	10	8	1	**13**	**14**
MECÂNICA	8	10	2		

Tabela 3: Disciplinas Avaliadas

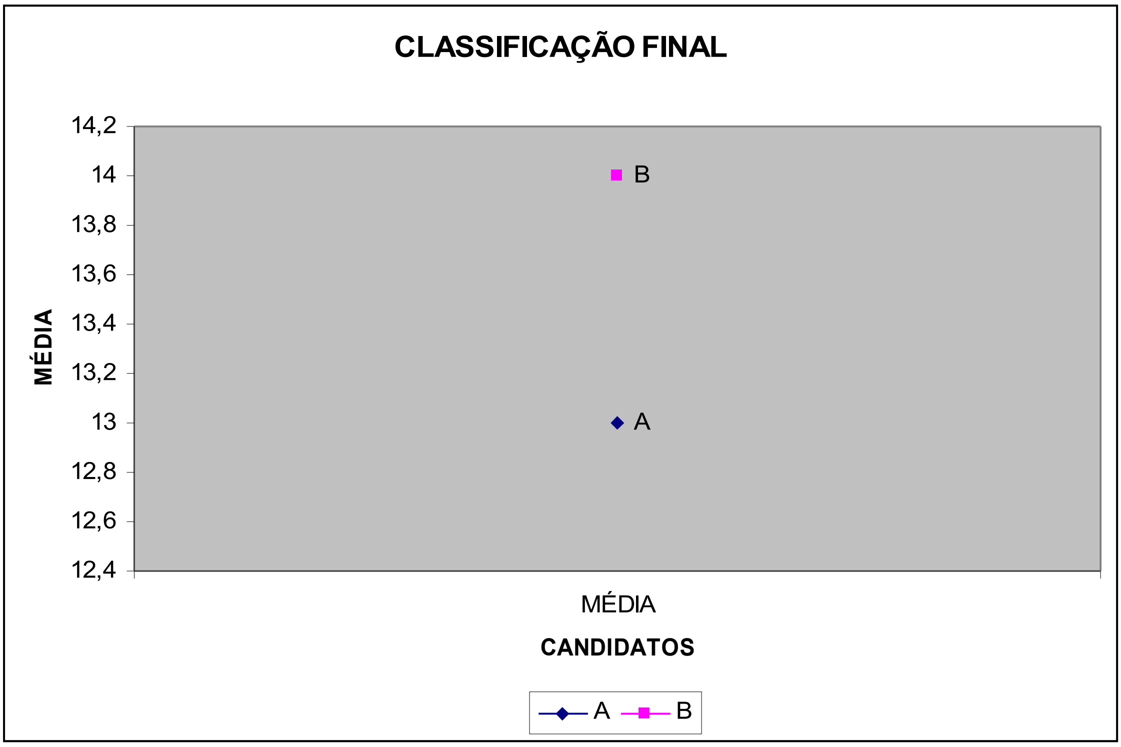


Gráfico 7: Classificação dos resultados

Analisando os resultados apresentados, optamos então pelo candidato B que conseguiu uma média mais alta, dentro dos critérios de decisão.

Neste caso ambas alternativas eram eficientes (ou seja, não havia relação de dominância entre elas). Foi feita a escolha de uma alternativa a partir da atribuição de preferências pelo decisor, expressa na forma de pesos.

Em outro exemplo, apresenta-se um exemplo do mercado de carros temos múltiplos modelos para adquirir. Cada modelo dispõe de certas características técnicas e de um preço, este último normalmente relacionado com sua qualidade. Quando um indivíduo vai comprar um carro, cabem em princípio duas possibilidades:

1) Que a pessoa tenha dinheiro de sobra e deseja adquirir um veículo. Neste caso, o objetivo único é encontrar um carro que esteja dentro do orçamento e atenda às suas necessidades;

2) Que a pessoa tenha um orçamento ajustado. Neste caso, além das prestações também considerará o preço. Estamos diante de um problema multi-objetivo (neste caso com 2 objetivos). Frente a esta situação cabe uma pergunta. Qual é o melhor carro para comprar? A resposta é que não há um modelo sozinho que se considere o melhor.

Por conseguinte um carro, *carro*$_1$, diz-se que é uma solução Pareto-ótima quando não existe outro carro, *carro*$_2$, tal que tenha um melhor aprecio que *carro*$_1$ bem como não ofereça melhores condições de pagamento que o *carro*$_1$. É por isso, pelo que interessa dispor, não de uma solução, senão de várias, para que à hora de tomar decisões estas contemplem todas as soluções Pareto-ótimas possíveis.

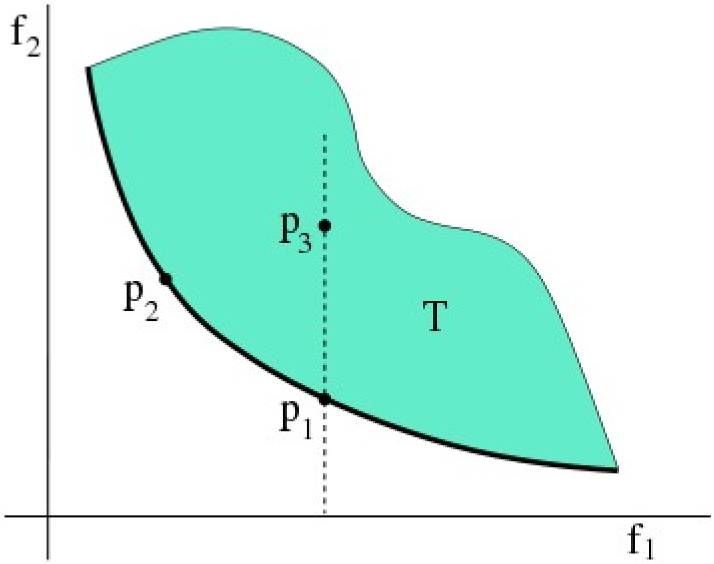


Figura 3: Frente de Pareto de uma função com dois objetivos

Na figura representa-se, com traço forte, a frente de Pareto de uma função com 2 objetivos. A área colorida T representa a imagem de dita função objetivo. Pode-se observar que não existe nenhum ponto pertencente a T que melhore no sentido de Pareto, a algum ponto da Frente: elegendo um ponto de T de forma arbitrária, por exemplo p_3, pode-se traçar a vertical até obter o ponto de corte com a Frente de Pareto, neste caso p_1; dito ponto de corte sempre terá o mesmo valor de f_1 e um valor melhor de f_2 . Também se pode observar que para 2 pontos quaisquer da Frente de Pareto, nunca haverá um que melhore de forma simultânea os dois objectivos com respeito ao outro ponto. Tendo por exemplos os pontos p_1 e p_2, observa-se que para p_1 melhora f_2, mas a custa de piorar f_1 (se estamos considerarando um caso de minimização). Em análise econômica denomina-se ótimo de Pareto àquele ponto de equilíbrio no que nenhum dos agentes afetados poderá melhorar sua situação sem reduzir o bem-estar de qualquer dos outros agentes.

CAPÍTULO IV

ESTUDO DE CASO

Vamos supor que uma empresa resolva conceder bolsa de estudos para seus funcionários. Considerando que esta empresa possui um número X de funcionários e vai agraciar 14 (quatorze) deles com a bolsa, inicia-se ai um processo seletivo para concessão das mesmas criando-se então critérios para indicação dos bolsistas. O estudo foi baseado no estudo de Rangel e Gomes (2010).

Podemos iniciar o processo objetivando a exclusão de candidatos aplicando uma prova, por exemplo, e aos candidatos que obtiverem 60% de rendimento outras avaliações até que consigamos atingir o numero desejado de bolsistas.

Percebemos claramente a dificuldade de decisão utilizando apenas um critério, ou seja, a prova de conhecimentos específicos. Mesmo que utilizássemos mais de uma prova poderíamos ter dificuldades de tomada de decisão.

Assim, nesta pesquisa, a empresa que dará as bolsas é a decisora e os quatro critérios considerados nesta pesquisa são: o número de questões certas dos candidatos na primeira fase e as três notas das respectivas provas discursivas de Redação, Física e Matemática, da segunda fase.

Com a finalidade de obter os pesos dos critérios empregados pela empresa, um sistema de equações foi resolvido, utilizando-se como dado de entrada os desempenhos dos candidatos. Depois de determinados, os pesos foram normalizados e seus valores são apresentados a seguir: o peso do critério C1 (Número de questões certas da Primeira Fase) foi aproximadamente 0,067; o peso dos critérios C2 (Nota da Prova de Redação), C3 (Nota da Prova de Matemática) e C4 (Nota da Prova de Física) foi 0,311, igualmente para cada um deles.

Esta pesquisa foi realizada selecionando-se 14 entre os 119 funcionários, classificados e não classificados. Não foram considerados nesta avaliação os candidatos eliminados por ausência ou por nota.

A Tabela 4 apresenta os desempenhos dos candidatos em relação aos quatro critérios empregados nesta pesquisa, isto é, a matriz de avaliação. Os candidatos selecionados foram os seguintes: A1, A5, A10, A20, A30, A40, A50, A60, A70, A80, A90, A100, A110 e A115. Os índices associados a cada alternativa Aj, em que j varia de 1 a 119, representam a ordenação dos candidatos na avaliação realizada pela UFF.

Candidatos	Critérios				Ordenação final
	C_1	C_2	C_3	C_4	
A_1	55	8,5	6,6	6,2	1
A_5	44	8,0	4,9	6,8	5
A_{10}	40	7,0	7,1	5,7	10
A_{20}	51	7,0	1,6	5,3	20
A_{30}	47	5,75	3,0	5,0	30
A_{40}	38	7,5	3,1	3,5	40
A_{50}	36	7,75	2,8	2,7	50
A_{60}	40	5,5	4,2	2,0	60
A_{70}	28	6,0	4,1	3,1	70
A_{80}	23	7,25	3,0	3,1	80
A_{90}	21	8,0	0,5	3,7	90
A_{100}	24	8,5	0,4	1,4	100

Tabela 4: Critérios

A ordenação das alternativas representa a primeira restrição no problema de programação linear da formulação dos dois métodos (UTA e URA-CR). Esta restrição indica que a alternativa A1 é preferível à alternativa A5 e que a alternativa A5 é preferível à alternativa A10, e assim sucessivamente. Por considerar a transitividade entre as alternativas, não há necessidade de analisar relações entre alternativas não sucessivas, tais como A1 com A10, nem A70 com A100. As outras restrições do modelo são: monotonicidade dos critérios; somatório dos valores extremos máximos de cada critério igual a uma unidade, e valores mínimos de cada critério iguais a zero. A última restrição do problema de programação linear diz respeito à não negatividade das variáveis.

O valor do parâmetro δ empregado na implementação dos dois métodos foi de 0,01 e seguiu a recomendação dos autores do método UTA

(JACQUET-LAGRÉZE; SISKOS, 1982), que definem o valor deste parâmetro pertencente ao intervalo [1/10Q, 1/Q].

Assim, neste estudo de caso, cada alternativa foi considerada como sendo uma classe. Como o conjunto de referência possui 14 elementos, é este, portanto, o número de classes consideradas. Esta consideração em relação ao número de classes resulta em um modelo que não possui relação de indiferença entre as alternativas presentes na análise. Note-se que o valor nulo do parâmetro “s”, adotado na implementação dos dois métodos, significa que as funções a serem determinadas pelos modelos matemáticos dos dois métodos podem ser paralelas ou coincidir com o eixo das abscissas.

O valor da função objetivo obtido com a implementação do [PPL1] foi nulo, significando que o modelo matemático do método UTA conseguiu representar perfeitamente as preferências dos decisores. Então, foi realizada a análise pós-otimização com a implementação dos problemas de programação linear [PPL2] e [PPL3], com a finalidade de determinar os valores médios das variáveis. Oito implementações foram realizadas e, assim, determinaram-se as funções de utilidade dos critérios presentes na análise. Os resultados obtidos com as implementações deste método são apresentados em forma de gráfico, por meio de linha tracejada no gráfico abaixo.

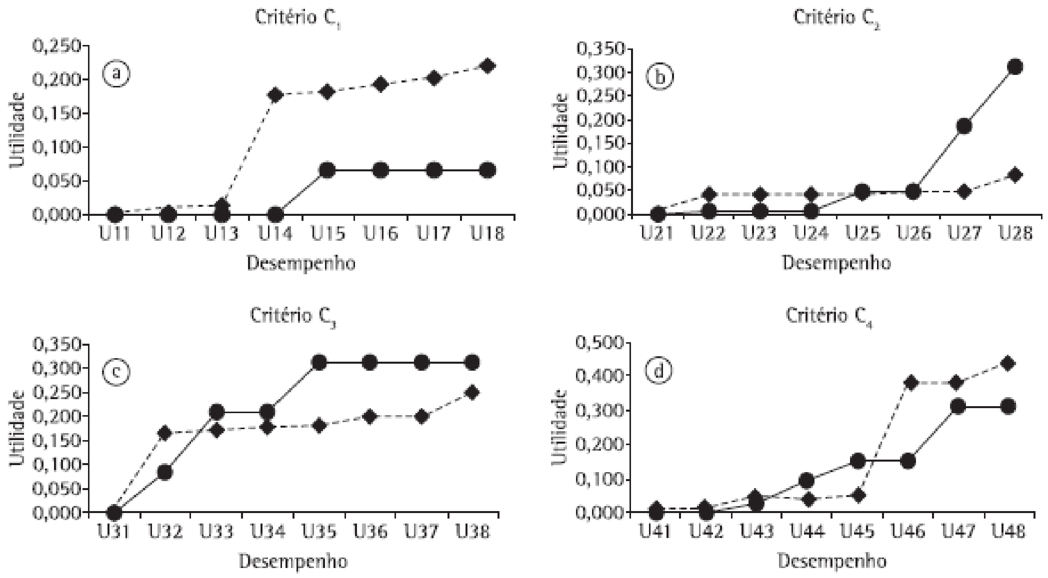


Gráfico 8- Desempenho

Com o intuito de realizar uma analogia dos resultados com aplicação de outro método, a aplicação do método UTA-CR [PPL4] empregando os mesmos valores dos parâmetros da aplicação do método UTA. Os resultados com a aplicação do método UTA são apresentados no Gráfico 8, por intermédio de linha contínua. É importante ressaltar que não é preciso a realização de oito implementações - quatro do [PPL2] e quatro do [PPL3]. Em uma única implementação [PPL4], os valores das variáveis são obtidos.

Realizando a comparação de resultados, verifica-se que entre as diferenças das funções de utilidade dos critérios, obtidas na implementação dos dois métodos, buscam representar da melhor forma possível as preferências dos decisores (Gráfico 8).

Nas aplicações dos dois métodos, atestam-se as diferenças dos valores máximos obtidos para cada critério. Verificou-se que, no critério C_1 (Número de questões certas da Primeira Fase), o valor proposto foi 0,067; o valor obtido pelo método UTA foi 0,221 e o obtido pelo método UTA-CR foi 0,067. Apresentam-se os valores obtidos para cada critério, respectivos aos métodos UTA e UTA-CR: critério C_2 (Nota da Prova de Redação) - 0,084 e 0,311; critério C_3 (Nota da Prova de Matemática) - 0,250 e 0,311; critério C_4 (Nota da Prova de Física) - 0,444 e 0,311.

Conclui-se, por intermédio dos resultados apresentados pelo método UTA que os valores dos pesos dos critérios estão bem diferentes dos propostos a priori pelos decisores. Estes valores propostos foram 0,067, 0,311, 0,311, e 0,311, e os valores obtidos com o emprego deste método foram 0,221, 0,084, 0,250 e 0,444, para os critérios C_1, C_2, C_3 e C_4, respectivamente. Atesta-se que embora o modelo matemático conseguisse representar as preferências dos decisores - pois o valor obtido pela função objetivo do [PPL1] foi nulo -, isto não significa que estes valores evidenciem com perfeição as preferências dos decisores. Esse fato ocorre porque o problema de programação linear é degenerado.

Empregando-se o método UTA-CR os valores obtidos dos pesos foram 0,067, 0,311, 0,311 e 0,311 para os critérios C_1, C_2, C_3 e C_4, respectivamente. Estes valores são os mesmos propostos *a priori* pelos decisores. O modelo matemático que representa este método busca obter os valores dos pesos com afastamento mínimo, tanto para mais como para menos, do valor proposto. Logo, este modelo determina as funções de utilidade dos critérios o mais próximo possível das preferências dos decisores.

Observa-se finalmente que as formas das funções de utilidade dos critérios obtidas com o emprego dos dois métodos são distintos, isso se explica pelo fato dos problemas de programação matemática que representam os dois métodos são degenerados. De um lado, o método UTA-CR emprega um número maior de restrições levando em consideração os pesos dos critérios e emprega, também, uma nova função objetivo. Chama-se atenção que os pesos definidos pela instituição para os quatro critérios C_1, C_2, C_3 e C_4 neste processo de avaliação foram 0,067, 0,311, 0,311 e 0,311, respectivamente. Estes mesmos valores foram obtidos para os pesos critérios através do método UTA-CR.

Do outro lado, é importante a observação que os pesos para os critérios determinados através do método UTA foram distintos. Para os critérios C_1, C_2, C_3 e C_4 seus pesos foram 0,211, 0,084, 0,250 e 0,444, respectivamente. Verifica-se, desta forma, que as funções de utilidade dos critérios obtidas com o método UTA-CR estão mais próximas das preferências dos decisores do que as obtidas com o método UTA, conforme os resultados das aplicações verificadas.

CONCLUSÃO

Este trabalho mostrou que decisões e atitudes do tomador de decisão não são tão simples e podem demandar mais tempo para análise, bem como a criação de vários critérios, buscando aperfeiçoar as escolhas.

Métodos multicritério têm sido bastante empregados na solução de problemas de tomada de decisão, uma vez que procuram esclarecer ao decisor as possibilidades de escolhas. Apóiam o processo decisório, embasados nas informações existentes, incorporando valores dos agentes, na busca da melhor solução.

Para selecionar, dentre as soluções de Pareto de um problema de otimização multiobjetivo, aquela solução que será efetivamente praticada, é preciso estabelecer critérios para a tomada de decisão final.

No estudo de caso apresentado observou-se que a análise multicritério ajuda a tomada de decisão.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARROYO, José Elias Cláudio. **Heurísticas e metaheurísticas para otimização combinatória multiobjetivo**. Campinas, SP: [s.n.], 2002.

OLIVEIRA, S.T. J e MORAES, L. F. R. de, **Avaliação multicritério de projetos de produção da indústria de petróleo no Brasil: uma analise comparativa dos métodos PROMETHEE e TODIM**, p.122, Mestrado, Eng. De Produção, UFF, 2003.

PARETO, V. **Cours D'Economie Politique**, vol. 1. Lausanne: F. Rouge. 1986.
Para Rudolphi. 2000.

RUDOLPHI, V. **Multiobjective evolutionary algorithms**: Analysing the state-of art", Evolutionary Computation, vol. 8(2),2000.

CHANKONG, V. HAIMES, Y. Y. **Multiobjective decision makinkg: theory and methodology**, 1983.

GOMES, L.F.A.M., GOMES, C. F. S., ALMEIDA, A.T. **Tomada de decisão gerencial: enfoque multicritério.** 2ª ed. 2006.