

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Antenas de Microfita Anulares Cilíndricas Embutidas

Tiago Braga Ventura

GAPTEM - Grupo de Antenas, Propagação e Teoria Eletromagnética

Departamento de Engenharia Eletrônica

Setembro de 2009

Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG

# Antenas de Microfita Anulares Cilíndricas Embutidas

Dissertação de mestrado submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como requerimento parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E TELECOMUNICAÇÕES

Aluno: Tiago Braga Ventura (UFMG)

Orientador: Prof. Dr. Odilon Maroja da Costa Pereira Filho (UFPE)

Co-orientador: Prof. Dr. Cássio Gonçalves do Rego (UFMG)

Departamento de Engenharia - UFMG

2009

# Agradecimentos

Agradeço inicialmente a Deus.

Este trabalho é fruto de várias pessoas que ao longo de minha vida tiveram presença marcante, onde direta ou indiretamente contribuíram para que o mesmo se realizasse.

Agradeço principalmente ao meu orientador, Professor Odilon Maroja da Costa Perreira Filho, que se dedicou para a realização deste trabalho, e que mesmo com a distância sempre esteve tão perto. E hoje para mim, o considero não só como um professor, mas também como amigo.

Agradeço ao professor e co-orientador, Cassió Gonçalves do Rego, e ao professor Fernando José da Silva Moreira, pelos valorosos ensinamentos passados nas aulas cursadas com os mesmos.

Aos meus pais, Aldemir e Francisca, que me permitiram obter a educação que hoje tenho, através de muito esforço e carinho ao longo de toda minha vida.

À minha namorada, Júnia, que sempre esteve do meu lado e por muitos anos vem me acompanhado nesta jornada.

Aos meus colegas de estudos da UFMG, pelo companheirismo e amizade ao longo dos anos que estive presente na UFMG, os meus mais sinceros agradecimentos.

Agradeço a todos meus familiares e amigos que ao longo da vida estão sempre presentes e contribuíram para minha formação pessoal e profissional.

# Resumo

O presente trabalho é dedicado ao estudo de antenas de microfita anulares cilíndricas montadas sobre uma cavidade formada por paredes metálicas e preenchida por um material dielétrico. Esta camada dielétrica recebe o nome de substrato. A cavidade está localizada em um cilindro condutor elétrico perfeito que se estende ao infinito. O objetivo principal deste trabalho é analisar os efeitos da cavidade sobre as características de diagrama de radiação da e impedância de entrada da antena.

Para a análise das características da antena serão determinados os campos eletromagnéticos internos à cavidade. Utilizando o teorema da equivalência será formulada uma distribuição de corrente magnética sobre a interface dielétrica na forma de funções de base, onde uma série de coeficientes fazem parte da equação. Os coeficientes serão determinados com a utilização da técnica numérica do método dos momentos. Determinados os coeficientes, é possível definir a distribuição das correntes magnéticas na interface dielétrica. Elas são consideradas as fontes geradoras dos campos externos à cavidade. Conhecidas as correntes magnéticas na interface dielétrica, serão determinados os campos eletromagnéticos irradiados pela antena e a impedância de entrada.

Resultados de diagrama de radiação e impedância de entrada serão apresentados a fim de se observar os efeitos da cavidade sobre tais características. Estes resultados serão comparados à outros obtidos por antenas de microfita anulares cilíndricas.

## Abstract

This work presents an analysis of cavity-backed cylindrical wraparound antennas. The cavity is filled by a dielectric, called substrate, and is built within an infinite cylindrical conductor. The effects of the cavity on the radiation pattern and input impedance are presented. The analysis is based on equivalence principle and method of moments. The equivalence principle allows the problem to be split into 2 regions, inside and outside the cavity, connected by an equivalent surface magnetic current distribution. The magnetic current is expanded in a set of basis functions, with coefficients that are determined from integral equations that follow from the boundary conditions. The knowledge of the current distribution allows the calculation of radiation fields, and the input impedance, from the fields inside the cavity. Results are presented and compared to those for a cylindrical microstrip antenna, and to those from using cavity method, also presented.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
1.1	Revisão bibliográfica . . . . .	11
1.2	Objetivo . . . . .	14
1.3	Organização . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Análise de antenas de microfita anulares cilíndricas embutidas pelo método dos momentos</b>	<b>16</b>
2.1	Introdução . . . . .	16
2.2	Teorema da equivalência . . . . .	17
2.3	Expansão dos campos internos à cavidade . . . . .	19
2.3.1	Campos eletromagnéticos internos à cavidade . . . . .	23
2.3.2	Teorema da equivalência para correntes magnéticas internas à cavidade . . . . .	25
2.4	Expansão dos campos externos à cavidade . . . . .	30
2.4.1	Campos eletromagnéticos externos à cavidade . . . . .	31
2.4.2	Teorema da equivalência para correntes magnéticas externas à cavidade . . . . .	33
2.5	Funções de base . . . . .	37
2.5.1	Funções de base $M_z$ . . . . .	37
2.5.2	Funções de base $M_\phi$ . . . . .	44
2.6	Excitação da antena anular . . . . .	46
2.6.1	Excitação por múltiplos alimentadores . . . . .	48
2.7	Método de Galerkin . . . . .	50
2.7.1	Elementos da submatriz $Z^{zz}$ . . . . .	52
2.7.2	Elementos da submatriz $Z^{z\phi}$ . . . . .	56
2.7.3	Elementos da submatriz $V^z$ . . . . .	60
2.7.4	Elementos da submatriz $Z^{\phi z}$ . . . . .	63

2.7.5	Elementos da submatriz $Z^{\phi\phi}$ . . . . .	67
2.7.6	Elementos da submatriz $V^{\phi}$ . . . . .	72
2.8	Expansão dos campos na região de campo distante . . . . .	74
2.8.1	Expansão assintótica do campo $E_{\theta}$ . . . . .	76
2.8.2	Expansão assintótica do campo $E_{\phi}$ . . . . .	77
2.9	Diretividade . . . . .	79
2.9.1	Resultados . . . . .	80
2.10	Impedância de entrada . . . . .	91
2.10.1	Impedância de entrada para múltiplos alimentadores . . . . .	92
2.10.2	Resultados . . . . .	93
2.11	Auto impedância do alimentador . . . . .	99
2.11.1	Expansão dos campos internos à cavidade . . . . .	100
2.11.2	Expansão modal dos campos excitados por um cabo coaxial . . . . .	103
2.11.3	Impedância de entrada em um alimentador . . . . .	106
2.11.4	Resultados . . . . .	107
2.12	Síntese e conclusões . . . . .	108

<b>3</b>	<b>Análise de antenas de microfita anulares cilíndricas pelo método da cavidade</b>	<b>110</b>
3.1	Introdução . . . . .	110
3.2	Campos internos à cavidade . . . . .	111
3.2.1	Correntes magnéticas superficiais . . . . .	115
3.3	Campos irradiados devido às correntes magnéticas . . . . .	117
3.4	Corrente magnética superficial transformada . . . . .	121
3.5	Expansão dos campos excitados por um cabo coaxial . . . . .	122
3.6	Expansão dos campos na região de campo distante . . . . .	125
3.6.1	Expansão assintótica do campo $E_{\theta}$ . . . . .	126
3.6.2	Expansão assintótica do campo $E_{\phi}$ . . . . .	127
3.7	Diretividade . . . . .	128
3.7.1	Resultados . . . . .	129
3.8	Tangente de perdas . . . . .	132
3.9	Impedância de entrada . . . . .	137
3.9.1	Resultados . . . . .	138
3.10	Síntese e conclusões . . . . .	142

<b>4</b>	<b>Conclusões</b>	<b>144</b>
4.1	Conclusões finais . . . . .	144
4.2	Proposta para trabalhos futuros . . . . .	145

# Lista de Figuras

1.1	Antena de microfita anular cilíndrica . . . . .	10
1.2	Antena de microfita anular cilíndrica embutida . . . . .	11
2.1	Representação das fontes produzindo campos dentro e fora da região $S$ . .	18
2.2	Correntes equivalentes produzindo os mesmos campos na região externa de $S$	18
2.3	Correntes magnéticas equivalentes sobre a interface dielétrica . . . . .	19
2.4	Correntes magnéticas superficiais internas à cavidade . . . . .	26
2.5	Correntes magnéticas superficiais externas à cavidade . . . . .	34
2.6	Condições de contorno sobre a interface dielétrica (substrato-ar) . . . . .	38
2.7	Função triângulo simples . . . . .	38
2.8	Condições de contorno nas bordas da antena . . . . .	41
2.9	Representação da função de base $M_{z_{ut}}$ na borda de baixo da antena . . . .	41
2.10	Representação da função de base $M_{z_{ut}}$ na borda de cima da antena . . . .	42
2.11	Representação das funções de base $M_{z_{ut}}$ na interface dielétrica . . . . .	43
2.12	Função pulso simples . . . . .	44
2.13	Representação da função de base $M_{\phi_{ut}}$ na interface dielétrica . . . . .	46
2.14	Antena alimentada por uma fita condutora . . . . .	47
2.15	Antena alimentada por multiplas fitas condutoras . . . . .	48
2.16	Diagrama de radiação do modo $TM_{11}$ - $E_{\theta}$ x $\theta$ no plano $\phi = 90^{\circ}$ . . . . .	82
2.17	Diagrama de radiação do modo $TM_{11}$ - $E_{\phi}$ x $\theta$ - linha azul (MoM) e círculos verdes (Habashy) no plano $\phi = 90^{\circ}$ . . . . .	83
2.18	Diagrama de radiação do modo $TM_{11}$ - $E_{\theta}$ x $\phi$ - linha azul (MoM) e círculos verdes (Habashy) no plano $\theta = 45^{\circ}$ . . . . .	83
2.19	Diagrama de radiação do modo $TM_{11}$ - $E_{\phi}$ x $\phi$ no plano $\theta = 45^{\circ}$ . . . . .	84
2.20	Diagrama de radiação $E_{\theta}$ x $\phi$ - 1 alimentador - Exemplo I . . . . .	86
2.21	Diagrama de radiação $E_{\theta}$ x $\phi$ - 2 alimentadores - Exemplo I . . . . .	87
2.22	Diagrama de radiação $E_{\theta}$ x $\phi$ - 3 alimentadores - Exemplo I . . . . .	87
2.23	Diagrama de radiação $E_{\theta}$ x $\phi$ - 4 alimentadores - Exemplo I . . . . .	88

2.24	Diagrama de radiação $E_\theta$ x $\phi$ - 3 alimentadores - Exemplo II . . . . .	89
2.25	Diagrama de radiação $E_\theta$ x $\phi$ - 4 alimentadores - Exemplo II . . . . .	90
2.26	Diagrama de radiação $E_\theta$ x $\phi$ - 5 alimentadores - Exemplo II . . . . .	90
2.27	Diagrama de radiação $E_\theta$ x $\phi$ - 6 alimentadores - Exemplo II . . . . .	91
2.28	Impedância de entrada x frequência, para a antena de microfita anular cilíndrica embutida (MoM) e a antena de microfita anular cilíndrica de [10] (Habashy) . . . . .	95
2.29	Impedância de entrada x frequência, variando o tamanho da cavidade ( $L_{zc}$ ) - $h = 1mm$ , $\epsilon_r = 9,6$ . . . . .	97
2.30	Impedância de entrada x frequência, variando a espessura do substrato ( $h$ ) - $L_{zc} = 5cm$ , $\epsilon_r = 9,6$ . . . . .	98
2.31	Impedância de entrada x frequência, variando a permissividade dielétrica do substrato ( $\epsilon_r$ ) - $L_{zc} = 5cm$ , $h = 1mm$ . . . . .	99
2.32	Impedância de entrada x frequência, em um alimentador, considerando a impedância própria do alimentador . . . . .	108
3.1	Representação das correntes magnéticas externas à cavidade . . . . .	115
3.2	Correntes filamentosas sobre o cilindro condutor . . . . .	116
3.3	Antena alimentada por uma fita condutora de largura $W_f$ . . . . .	122
3.4	Diagrama de radiação do modo $TM_{11}$ - $E_\phi$ x $\theta$ - círculos verdes (MC) e linha azul (MoM) no plano $\phi = 90^\circ$ . . . . .	131
3.5	Diagrama de radiação do modo $TM_{11}$ - $E_\theta$ x $\phi$ - círculos verdes (MC) e linha azul (MoM) no plano $\theta = 45^\circ$ . . . . .	132
3.6	Impedância de entrada x frequência - (MC), (MoM) e (Habashy) para o modo $TM_{01}$ . . . . .	139
3.7	Impedância de entrada x frequência - (MC) variando espessura do substrato com $\epsilon_r = 9,6$ . . . . .	141
3.8	Impedância de entrada x frequência - (MC) para diferentes valores de permissividade dielétrica do substrato com $h = 1mm$ . . . . .	142

# Capítulo 1

## Introdução

A utilização de antenas de microfitas teve um grande crescimento comercial nos últimos anos influenciada principalmente pelo aumento do uso dessas em dispositivos móveis pessoais e também em links de rádio terrestres de altas frequências. O avanço nos estudos de novas antenas de microfita permitirá sua utilização em dispositivos que antes eram inimagináveis serem utilizados através de comunicação sem fio.

As antenas de microfita estão sendo muito utilizadas em aplicações terrestres e aéreas, principalmente pelo baixo custo de fabricação, perfil, peso, e a possibilidade de serem montadas sobre superfícies curvas. As antenas de microfita planares foram largamente estudadas nas últimas décadas, enquanto as antenas de microfita montadas sobre superfícies cilíndricas começaram a despertar maior interesse nos últimos anos. As antenas de microfita montadas sobre superfícies cilíndricas são também conhecidas como antenas de microfita conformais cilíndricas, AMCC. As mesmas encontram muitas aplicações na área industrial como aeronaves, foguetes, mísseis e satélites. Um tipo de AMCC que tem grandes aplicações nos objetos mencionados anteriormente são as anulares cilíndricas, fig 1.1.

As antenas de microfita são em suas formas mais básicas estruturadas da seguinte maneira. Uma superfície metálica (também conhecida como plano condutor) é coberta por um fino material dielétrico chamado de substrato e sobre o substrato é impressa uma microfita constituída por um material de boa condutividade elétrica (chamado de elemento radiador).

O formato do elemento radiador impresso sobre o substrato varia de acordo com as características desejáveis para a antena. O formato do elemento mais comum em aplicações comerciais e também o mais estudado é o retangular. A quantidade de elementos que serão utilizados também pode ser alterada. O acréscimo de elementos faz variar

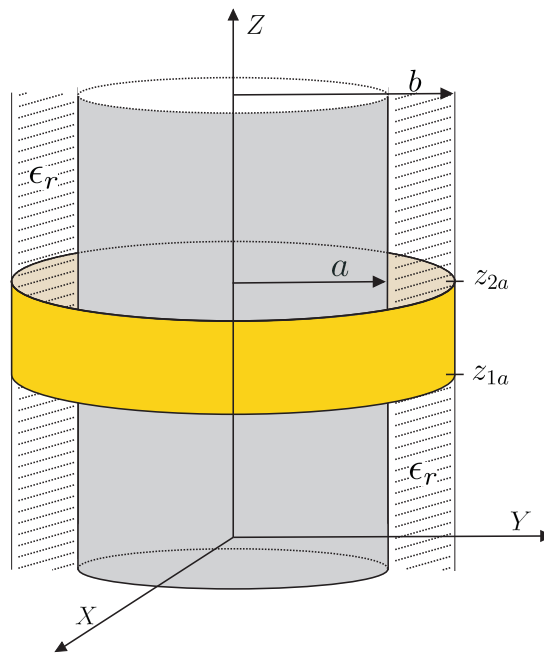


Figura 1.1: Antena de microfita anular cilíndrica

as características da antena, onde o aumento no número de elementos está principalmente relacionado à variação no diagrama de radiação da antena.

A forma básica da estrutura das antenas de microfita (plano condutor, substrato e elemento radiador) pode ser modificada com o objetivo de alterar suas características elétricas e estruturais. Uma das possíveis alterações é o acréscimo de uma camada dielétrica sobre o elemento radiador e o substrato. Esta segunda camada dielétrica é chamada de superestrato. Foi demonstrado em Oliveira [1], que a utilização do superestrato pode aumentar a diretividade da antena. Do ponto de vista estrutural, esta segunda camada dielétrica serve como uma proteção para o elemento radiador. Uma outra alteração na forma das antenas de microfita é colocar o elemento radiador dentro de uma cavidade embutida no plano condutor. Esta última tem como principal objetivo, minimizar o acoplamento mútuo entre os elementos radiadores. Do ponto de vista estrutural, tal modificação implica na não necessidade de se cobrir todo o plano condutor com um material dielétrico.

A alimentação das antenas de microfita pode ser realizada por um cabo coaxial alimentando diretamente o elemento radiador ou através de uma microfita alimentadora. O cabo coaxial é mais utilizado em aplicações com apenas um ou poucos elementos radiadores, enquanto que, quando o número de elementos aumenta de forma significativa se torna mais viável alimentá-los utilizando microfita.

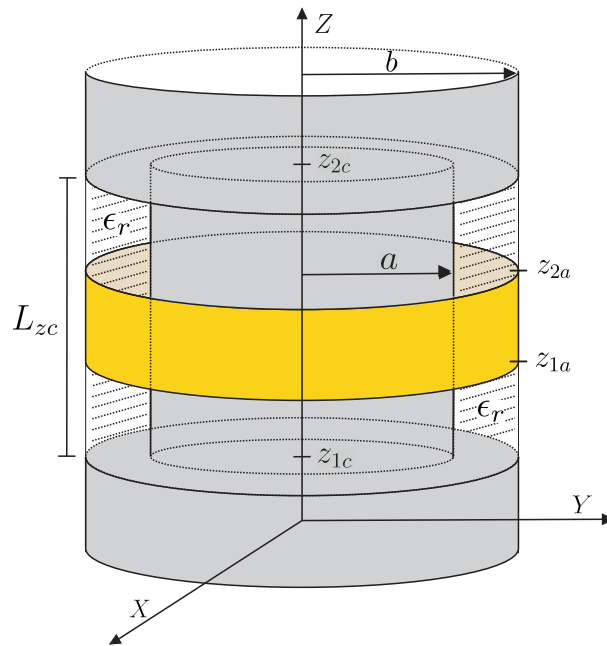


Figura 1.2: Antena de microfita anular cilíndrica embutida

O presente trabalho tem como objetivo estudar o comportamento de antenas de microfita anulares cilíndricas montadas sobre uma cavidade preenchida por um material dielétrico de permissividade relativa  $\epsilon_r$ , fig. 1.2. Este tipo de antena é também conhecido como antena de microfita anular cilíndrica embutida. O elemento radiador dessas antenas enlaça a estrutura do corpo cilíndrico no qual ele é montado. A antena é alimentada por cabo coaxial, que será de forma teórica representado por uma fita condutora. Será apresentada a formulação teórica para o estudo dessas antenas e posteriormente os resultados de diagrama de radiação e impedância de entrada. Como não se sabe de outros trabalhos que apresentem estudos sobre antenas de igual formato, os resultados serão comparados com outros obtidos por antenas de microfita anulares cilíndricas. Também serão apresentados resultados particulares para esse tipo de antena, pois a presença da cavidade altera o comportamento dos campos eletromagnéticos no substrato, e conseqüentemente as características de diagrama de radiação e impedância de entrada.

## 1.1 Revisão bibliográfica

A variedade de técnicas que podem ser utilizadas para se analisar antenas de microfita é grande. A forma da antena pode influenciar na escolha da técnica a ser utilizada na análise da antena. Será apresentado um breve histórico de alguns trabalhos sobre

antenas de microfita, onde são comentados os resultados obtidos e quais foram as técnicas utilizadas.

Funções diádicas de Green foram utilizadas por Fonseca [2] para ser estudado o diagrama de radiação de antenas de microfita anulares cilíndricas. Foi obtida uma aproximação assintótica para as funções diádicas de Green. O diagrama de radiação para vários raios de cilindro, permissividade dielétrica e espessura do substrato foram obtidos utilizando como fonte uma corrente magnética anular.

O método da cavidade foi utilizado em [3]-[9] para a análise de antenas de microfita montadas sobre corpos cilíndricos. Esse método considera a região entre a microfita e o plano condutor (neste caso o cilindro) como uma cavidade, e utilizando os princípios da equivalência é obtida uma formulação para determinar os campos eletromagnéticos na região de campo distante, considerando correntes magnéticas equivalentes irradiando na presença de uma superfície cilíndrica. O método da cavidade foi utilizado por Yang, em [3], o mesmo analisou os efeitos do raio de curvatura sobre o diagrama de radiação em antenas de microfita anulares cilíndricas. Wong, em [4], apresentou o comportamento de antenas de microfita anulares cilíndricas operando nos modos  $TE_{01}$  e  $TM_{11}$ . Também foram analisados os efeitos da posição do alimentador sobre a impedância de entrada. Os estudos de [5]-[9] foram realizados sobre antenas no formato retangular. Por Ke [5] foram demonstradas as condições necessárias para ser obtida uma polarização circular através da posição dos alimentadores. O trabalho de Luk [6] apresentou os efeitos da curvatura sobre a frequência de ressonância e o diagrama de radiação. O estudo de Krowne [7] apresentou vários resultados de impedância de entrada para uma antena retangular operando em diferentes modos e variando os parâmetros da estrutura. No trabalho de Lee [8] foram analisados os efeitos da curvatura, permissividade dielétrica e espessura do substrato sobre o diagrama de radiação, fator de qualidade e impedância de entrada. No trabalho realizado por Richards [9] foi apresentado um estudo referente aos efeitos da variação da impedância de entrada pela localização do ponto de alimentação em uma antena de microfita retangular. Sendo também demonstrada a possibilidade de se obter polarização circular nesse tipo de antena.

O método dos momentos foi utilizado por Habashy em [10] e [11] para analisar antenas de microfita retangulares e anulares cilíndricas. Nesse método a distribuição de corrente sobre a antena é representada por funções de base. É desenvolvido um conjunto de equações integrais derivadas da distribuição de corrente sobre a antena e pelas condições de contorno. Este conjunto de equações integrais é então resolvido através da técnica numérica do método dos momentos. Em [10] apresentou-se os resultados de impedância

de entrada para antenas anulares variando-se a permissividade dielétrica do substrato e o modo de operação, enquanto que, para antenas retangulares foi demonstrado o comportamento da antena operando no modo  $TM_{01}$ . Também foram apresentados resultados de diagrama de radiação de uma antena retangular operando nos modos  $TM_{10}$  e  $TM_{11}$ , e para a antena anular operando no modo  $TM_{11}$ . Em [11] foram apresentados os resultados de frequência de ressonância para antenas retangulares e anulares cilíndricas operando em diferentes modos.

A análise de antenas de microfita retangulares e anulares cilíndricas utilizando o método das correntes elétricas superficiais foi realizada por Ashkenazy [12]. Para o caso das antenas anulares, foram apresentados os resultados de diretividade variando-se o valor da permissividade dielétrica e espessura do substrato, e o raio do cilindro. Para as antenas retangulares, foram alterados os valores de largura da antena em relação à coordenada  $\phi$  e o raio do cilindro. Em todos os resultados obtidos em [12], foi utilizada uma antena com tamanho de meio comprimento de onda em relação à coordenada  $z$ .

O trabalho realizado por Munson [13] apresentou as vantagens da utilização de antenas de microfita em aplicações práticas. Foi demonstrada a possibilidade de se obter um diagrama omnidirecional em antenas do tipo anular cilíndrica com a utilização de uma rede de alimentadores. Também foram apresentados os efeitos de múltiplos alimentadores sobre a impedância de entrada. Wong [14] também apresentou a possibilidade de se utilizar múltiplos alimentadores para a obtenção de um diagrama de radiação omnidirecional. O mesmo apresentou uma formulação baseada no método da cavidade.

Antenas de microfita retangulares cilíndricas embutidas foram estudadas por Kempel [15]. O método utilizado foi o *finite element-boundary integral* (FE-BI). Foram analisados os efeitos do raio de curvatura sobre a frequência de ressonância, ganho, diagrama de radiação e impedância de entrada.

A frequência de ressonância em antenas de microfita retangulares cilíndricas com duas camadas dielétricas foi analisada por Giarola [16] utilizando funções diádicas de Green e método dos momentos. Foram demonstradas que as características das antenas são substancialmente afetadas quando a permissividade e a espessura da segunda camada dielétrica (superestrato) aumentam.

As características de impedância de entrada e diagrama de radiação em antenas de microfita retangulares cilíndricas embutidas com duas camadas dielétricas, foram estudadas por Pereira [17] utilizando o método dos momentos. Foram observados os efeitos da cavidade e de diferentes valores de permissividade dielétrica do superestrato sobre o diagrama de radiação e a impedância de entrada da antena.

## 1.2 Objetivo

O objetivo do presente trabalho é analisar os efeitos da cavidade sobre as características de radiação e impedância de entrada em antenas de microfita anulares cilíndricas embutidas. A maior parte dos estudos sobre antenas de microfita conformais cilíndricas é realizado utilizando um cilindro condutor elétrico perfeito infinito coberto por uma camada dielétrica. A forma da estrutura que será analisada no presente trabalho apresenta uma situação mais real, uma vez que, a grande maioria das estruturas que utilizam essas antenas não são inteiramente cobertas por um material dielétrico. Como no caso de aviões, foguetes e mísseis, onde grande parte da fuselagem dos mesmos é composta por uma estrutura metálica. Antenas de microfita embutidas permitem que a utilização do dielétrico ocorra em menor quantidade, o que as tornam mais viáveis do ponto de vista estrutural.

Para realizar tal objetivo, será apresentada a formulação matemática para serem encontrados os campos eletromagnéticos internos e externos à cavidade e posteriormente os resultados de diagrama de radiação e impedância de entrada. Serão realizadas variações no tamanho da cavidade que permitirão observar os efeitos da cavidade sobre o comportamento da antena de microfita anular cilíndrica.

## 1.3 Organização

O presente trabalho está organizado de forma que permita ao leitor o entendimento das formulações que foram desenvolvidas para a análise da antena em questão, juntamente com as teorias e técnicas que foram utilizadas.

O capítulo 2 apresenta a formulação matemática e teórica utilizada neste trabalho para o desenvolvimento e estudo de antenas de microfita anulares cilíndricas embutidas baseada no método dos momentos. O capítulo demonstrará as técnicas que foram utilizadas para determinação dos campos eletromagnéticos internos e externos à cavidade, e das correntes magnéticas consideradas as fontes geradoras dos campos. Será demonstrada a formulação para serem determinados os diagramas dos campos elétricos e a impedância de entrada. Posteriormente a essas formulações serão apresentados os resultados das características das antenas em diferentes situações e então observado o comportamento das antenas de microfita anulares cilíndricas embutidas.

O capítulo 3 será apresentado a título comparativo e de validação da formulação apresentada no capítulo 2. O mesmo apresentará a formulação teórica para a análise de antenas de microfita anulares cilíndricas sobre um cilindro condutor elétrico perfeito

coberto por uma camada dielétrica. A técnica utilizada neste capítulo é o método da cavidade. A estrutura analisada se difere da apresentada no capítulo anterior, mas será apresentada devido a não existência de estudos sobre antenas de microfita anulares embutidas. Mesmo apresentando as diferenças estruturais é esperado que o comportamento de tais antenas seja de certa forma similar. Os resultados apresentados servirão de base para serem observadas as diferenças e similaridades entre as duas antenas.

O capítulo 4 apresentará as conclusões finais sobre o trabalho. Serão realizadas as análises e observações sobre as diferenças e similaridades apresentadas entre as antenas apresentadas nos capítulos 2 e 3. Por fim serão apresentadas as sugestões para futuros desenvolvimentos.

## Capítulo 2

# Análise de antenas de microfita anulares cilíndricas embutidas pelo método dos momentos

### 2.1 Introdução

A antena de microfita anular analisada está montada sobre uma cavidade cilíndrica fechada atrás e aos lados por um material condutor elétrico perfeito, preenchida por um substrato de permissividade relativa  $\epsilon_r$ . A partir da cavidade existe um cilindro condutor elétrico perfeito de raio igual ao da microfita que se estende ao infinito na direções  $-z$  e  $+z$ . A geometria da antena pode ser observada pela fig. 1.2.

Através do método conhecido como técnica das equações integrais, uma distribuição de corrente na interface dielétrica será formulada, onde uma densidade de corrente magnética desconhecida faz parte do integrando.

Será desenvolvido um sistema linear formado por um conjunto de equações integrais e correntes magnéticas superficiais expandidas em um conjunto de funções de base satisfazendo as condições de contorno da estrutura. A técnica numérica do método dos momentos será utilizada para solucionar o sistema e determinar os coeficientes desconhecidos das funções de base. Conhecendo-se os coeficientes das funções de base, as correntes magnéticas podem ser determinadas. Uma vez que a distribuição de corrente na interface dielétrica é conhecida, os campos irradiados e a impedância de entrada podem ser calculados.

O desenvolvimento deste capítulo terá os seguintes passos:

1. Expansão dos campos eletromagnéticos interiores e exteriores à cavidade, onde serão

- determinadas as funções de Green para problema em questão;
2. Determinar as funções de base relativas às correntes magnéticas na interface dielétrica substrato-ar;
  3. Determinar a densidade de corrente superficial proveniente de um ou múltiplos alimentadores moldados por uma fita condutora;
  4. Demonstrar a formulação para construção da matriz de impedância e a matriz de tensão do método dos momentos;
  5. Após o sistema linear ser montado, os coeficientes desconhecidos podem ser determinados computacionalmente.
  6. Com os coeficientes determinados, a distribuição de corrente na interface dielétrica pode ser calculada, e conseqüentemente os campos eletromagnéticos irradiados e a impedância de entrada.
  7. Por fim, será demonstrada a formulação para o cálculo campos dos elétricos irradiados, diretividade da antena e impedância de entrada.

## **2.2 Teorema da equivalência**

Duas fontes produzindo os mesmos campos dentro de uma região do espaço são consideradas equivalentes dentro daquela região. Para conhecermos os campos em uma determinada região do espaço, não necessariamente precisamos conhecer as fontes reais. Estes campos podem ser determinados com a utilização de fontes equivalentes.

Considere uma região do espaço limitada pela superfície  $S$ , fig. 2.3, onde dentro desta região existe uma fonte e fora da mesma é um espaço livre. Quando fazemos com que os campos fora da região  $S$  existam, e os campos dentro da mesma sejam nulos, devem haver correntes superficiais,  $\vec{J}_s$  e  $\vec{M}_s$ , sobre  $S$ , que permitam a existência dos campos externos, fig. 2.2. Essas correntes são expressas por:

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H} \quad (2.1)$$

$$\vec{M}_s = -\hat{n} \times \vec{E} \quad (2.2)$$

onde  $\hat{n}$  é o vetor unitário apontando para fora da região  $S$ , e  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  são os campos originais sobre a superfície de  $S$ .

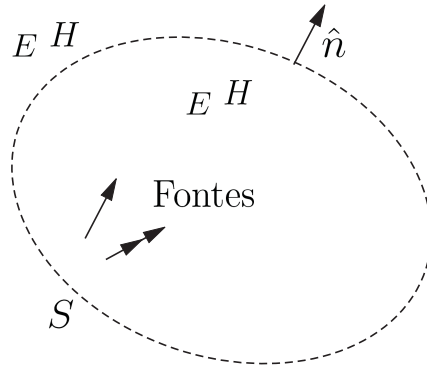


Figura 2.1: Representação das fontes produzindo campos dentro e fora da região  $S$

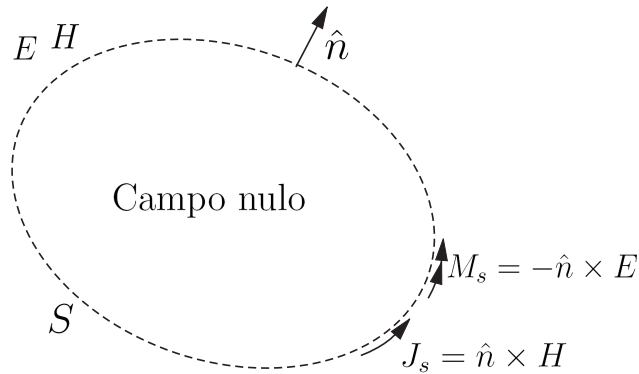


Figura 2.2: Correntes equivalentes produzindo os mesmos campos na região externa de  $S$

Um problema equivalente pode ser encontrado apenas em termos de correntes magnéticas ou correntes elétricas.

Dada uma determinada região  $S$  do espaço onde dentro dessa existe uma fonte, podemos formular um problema equivalente cobrindo a superfície de  $S$  com um condutor elétrico perfeito e sobre o condutor adicionamos uma corrente magnética. Externamente à superfície de  $S$  são considerados existirem os mesmos campos do problema original, enquanto que dentro os campos são nulos. Como o campo elétrico interno à região é nulo e igual ao problema original na região externa, a corrente magnética superficial será:

$$\vec{M}_s = -\hat{n} \times \vec{E} \quad (2.3)$$

O problema apresentado pela antena de microfita anular cilíndrica embutida também pode ser analisado pelos princípios da equivalência, fig. 2.3. Neste caso, as fontes geradoras dos campos eletromagnéticos internos e externos à cavidade são as correntes magnéticas na superfície da cavidade. Para determinarmos os campos nessas regiões,

cobrimos a região da interface dielétrica (substrato-ar) com um condutor elétrico perfeito, e aplicamos o princípio da equivalência adicionando as correntes magnéticas sobre o condutor.

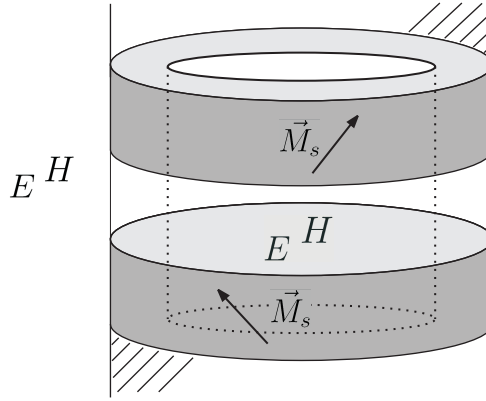


Figura 2.3: Correntes magnéticas equivalentes sobre a interface dielétrica

Primeiramente será formulada uma distribuição de campo nas regiões interna e externa à cavidade, em função de correntes magnéticas desconhecidas. Com a utilização de uma técnica numérica as correntes magnéticas serão desenvolvidas na forma de equações integrais.

### 2.3 Expansão dos campos internos à cavidade

Na análise de problemas de radiação, o procedimento usual é especificar as fontes e então obter os campos por elas irradiados. Mas também é muito comum a introdução de funções auxiliares conhecidas como potenciais vetores. Os potenciais vetores mais comuns são o potencial vetor magnético,  $\vec{A}$ , e o potencial vetor elétrico,  $\vec{F}$ .

No interior da cavidade, os campos são expandidos em componentes  $TM_z$  e  $TE_z$ . Esta imposição implica que os potenciais vetores tenham as seguintes formas:

$$\vec{A} = A_z \hat{a}_z \tag{2.4a}$$

$$\vec{F} = F_z \hat{a}_z \tag{2.4b}$$

Problemas envolvendo contornos que coincidem com as coordenadas cilíndricas são usualmente resolvidos em coordenadas cilíndricas. Os campos eletromagnéticos podem ser escritos em termo de suas componentes  $TM_z$  e  $TE_z$ , [19]:

$$E_\rho = \frac{1}{j\omega\epsilon_d} \frac{\partial^2 A_z}{\partial\rho\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial\phi} \quad (2.5a)$$

$$E_\phi = \frac{1}{j\omega\epsilon_d\rho} \frac{\partial^2 A_z}{\partial\phi\partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial\rho} \quad (2.5b)$$

$$E_z = \frac{1}{j\omega\epsilon_d} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_d^2 \right) A_z \quad (2.5c)$$

$$H_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial\phi} + \frac{1}{j\omega\mu_d} \frac{\partial^2 F_z}{\partial\rho\partial z} \quad (2.5d)$$

$$H_\phi = -\frac{\partial A_z}{\partial\rho} + \frac{1}{j\omega\mu_d\rho} \frac{\partial^2 F_z}{\partial\phi\partial z} \quad (2.5e)$$

$$H_z = \frac{1}{j\omega\mu_d} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_d^2 \right) F_z \quad (2.5f)$$

onde  $k_d^2 = \omega^2\epsilon_d\mu_d$  (já incluídas as perdas).

Os potenciais vetores devem ser solução da equação de onda, ou seja:

$$\nabla^2 A_z + k_d^2 A_z = 0 \quad (2.6a)$$

$$\nabla^2 F_z + k_d^2 F_z = 0 \quad (2.6b)$$

Uma possível forma para os potenciais vetores internos à cavidade é descrita em [19].

$$A_z = h_\phi^A(n\phi) h_z^A(k_z z) B_n^A(k_{\rho d}\rho) \quad (2.7a)$$

$$F_z = h_\phi^F(n\phi) h_z^F(k_z z) B_n^F(k_{\rho d}\rho) \quad (2.7b)$$

onde  $h_\phi(n\phi)$  e  $h_z(k_z z)$  são funções harmônicas (não necessariamente iguais), e  $B_n(k_{\rho d}\rho)$  é uma função de Bessel de ordem  $n$ .

A escolha da função harmônica em  $\phi$  exige alguns cuidados. A continuidade dos campos e dos potenciais vetores em  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ , requer que  $h_\phi(n\phi)$  seja periódica em  $\phi$ , isto é,  $n$  deve ser inteiro. Muitas vezes a escolha da função harmônica em  $\phi$  é dada como  $\sin(n\phi)$  ou  $\cos(n\phi)$ , ou por exponenciais  $e^{jn\phi}$  ou  $e^{-jn\phi}$ . Para este caso, a função harmônica em  $\phi$  será fornecida na forma exponencial, tanto para o potencial vetor magnético quanto para o potencial vetor elétrico.

$$h_{\phi}^{A,F}(n\phi) = e^{-jn\phi} \quad (2.8)$$

para  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Substituindo (2.8) em (2.7a) e (2.7b):

$$A_z = e^{-jn\phi} h_z^A(k_z z) B_n^A(k_{\rho d} \rho) \quad (2.9a)$$

$$F_z = e^{-jn\phi} h_z^F(k_z z) B_n^F(k_{\rho d} \rho) \quad (2.9b)$$

A condição de contorno em  $z$  é garantida desde que os campos elétricos tangenciais às paredes da cavidade, ou seja, em  $z = z_{1c}$  e  $z = z_{2c}$  sejam nulos. Para isso, é necessário que:

$$E_{\rho} = \frac{1}{j\omega\epsilon_d} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \rho \partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} = 0 \quad (2.10a)$$

$$E_{\phi} = \frac{1}{j\omega\epsilon_d \rho} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \phi \partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial \rho} = 0 \quad (2.10b)$$

Para que a condição de contorno em  $z$  seja mantida, os potenciais vetores devem manter as seguintes condições em  $z = z_{1c}$  e  $z = z_{2c}$ :

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} = 0 \quad (2.11a)$$

$$F_z = 0 \quad (2.11b)$$

De modo a satisfazer as condições de contorno na direção  $z$ , as funções harmônicas  $h_z(k_z z)$  dos potenciais vetores magnético e elétrico, serão respectivamente:

$$h_z^A(k_z z) = \cos \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right], \quad (2.12)$$

para  $q = 0, 1, 2, \dots$

$$h_z^F(k_z z) = \text{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right], \quad (2.13)$$

para  $q = 1, 2, \dots$

onde  $L_{zc} = z_{2c} - z_{1c}$ .

Substituindo (2.12) em (2.9a), uma possível solução "nq" para o potencial vetor magnético terá a seguinte forma:

$$A_{z_{nq}} = e^{-jn\phi} \cos \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] B_n^A(k_{\rho_d}\rho) \quad (2.14)$$

A solução geral pode ser escrita por:

$$A_{z_{nq}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} C_{nq} e^{-jn\phi} \cos \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] B_n^A(k_{\rho_d}\rho) \quad (2.15)$$

Observe que o potencial vetor magnético pode ser escrito como uma série de Fourier exponencial em  $\phi$  e uma série de Fourier em cosseno em  $z$ . Definindo o par de transformadas:

$$A(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \tilde{A}^{ec}(\rho, n, q) e^{-jn\phi} \cos \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] \quad (2.16a)$$

$$\tilde{A}^{ec}(\rho, n, q) = \frac{1}{2\pi} \frac{L_q}{L_{zc}} \int_0^{2\pi} \int_{z_{1c}}^{z_{2c}} A(\rho, \phi, z) e^{jn\phi} \cos \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] dz d\phi \quad (2.16b)$$

onde:

$$L_q = \begin{cases} 1 & \text{para } q = 0, \\ 2 & \text{para } q \neq 0. \end{cases}$$

Os superescritos "ec" correspondem a uma série de Fourier exponencial em  $\phi$ , e uma série de Fourier em cosseno em  $z$ . Assim o potencial vetor magnético pode ser escrito como:

$$A_z(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \tilde{A}_z^{ec}(\rho, n, q) e^{-jn\phi} \cos \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] \quad (2.17)$$

onde  $\tilde{A}_z^{ec}(\rho, n, q) = B_n^A(k_{\rho_d}\rho)$ , e deve satisfazer as condições de contorno em  $\rho$ , e

$$(k_{\rho_d})^2 = k_d^2 - k_z^2 = k_d^2 - \left( \frac{q\pi}{L_{zc}} \right)^2$$

Substituindo (2.13) em (2.9b), uma possível solução "nq" para o potencial vetor elétrico terá a seguinte forma:

$$F_{z_{nq}} = e^{-jn\phi} \sen \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] B_n^F(k_{\rho_d}\rho) \quad (2.18)$$

Da mesma forma como foi realizado para o potencial vetor magnetico, o potencial vetor elétrico pode ser expresso como um somatório das soluções da equação homogênea.

$$F_{z_{nq}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} D_{nq} e^{-jn\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] B_n^F(k_{\rho_d} \rho) \quad (2.19)$$

O potencial vetor elétrico pode ser escrito como uma série de Fourier exponencial em  $\phi$  e uma série de Fourier em seno em  $z$ . Definindo o par de transformadas:

$$F(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{F}^{es}(\rho, n, q) e^{-jn\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] \quad (2.20a)$$

$$\tilde{F}^{es}(\rho, n, q) = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{L_{zc}} \int_0^{2\pi} \int_{z_{1c}}^{z_{2c}} F(\rho, \phi, z) e^{jn\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] dz d\phi \quad (2.20b)$$

Os superescritos "es" correspondem a uma série de Fourier exponencial em  $\phi$  e uma série de Fourier em senos em  $z$ . Assim o potencial vetor elétrico pode ser escrito como:

$$F_z(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{F}_z^{es}(\rho, n, q) e^{-jn\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] \quad (2.21)$$

onde  $\tilde{F}_z^{es}(\rho, n, q) = B_n^F(k_{\rho_d} \rho)$ , e deve satisfazer às condições de contorno em  $\rho$ .

### 2.3.1 Campos eletromagnéticos internos à cavidade

Substituindo (2.17) e (2.21) em (2.5a)-(2.5f) e aplicando as derivadas em  $z$  e  $\phi$ , os campos eletromagnéticos internos à cavidade podem ser escritos como:

(i) Componente  $E_\rho$ :

$$E_\rho(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[ -\frac{1}{j\omega\epsilon_d} \frac{q\pi}{L_{zc}} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{A}_z^{ec}(\rho, n, q) + \frac{jn}{\rho} \tilde{F}_z^{es}(\rho, n, q) \right] \cdot e^{-jn\phi} \operatorname{sen} \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \quad (2.22a)$$

Comparando (2.22a) com (2.20a) veremos que:

$$\tilde{E}_\rho^{es}(\rho, n, q) = -\frac{1}{j\omega\epsilon_d} \frac{q\pi}{L_{zc}} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{A}_z^{ec}(\rho, n, q) + \frac{jn}{\rho} \tilde{F}_z^{es}(\rho, n, q) \quad (2.22b)$$

(ii) Componente  $E_\phi$ :

$$E_\phi(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[ \frac{jn}{j\omega\epsilon_d \rho} \frac{q\pi}{L_{zc}} \tilde{A}_z^{ec}(\rho, n, q) + \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{F}_z^{es}(\rho, n, q) \right] \cdot e^{-jn\phi} \operatorname{sen} \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \quad (2.23a)$$

Comparando (2.23a) com (2.20a) veremos que:

$$\tilde{E}_\phi^{es}(\rho, n, q) = \frac{n}{\omega\epsilon_d\rho} \frac{q\pi}{L_{zc}} \tilde{A}_z^{ec}(\rho, n, q) + \frac{\partial}{\partial\rho} \tilde{F}_z^{es}(\rho, n, q) \quad (2.23b)$$

(iii) Componente  $E_z$ :

$$E_z(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{j\omega\epsilon_d} \left[ \left( -\frac{q\pi}{L_{zc}} \right)^2 + k_d^2 \right] \tilde{A}_z^{ec}(\rho, n, q) e^{-jn\phi} \cos \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \quad (2.24a)$$

Comparando (2.24a) com (2.16a) veremos que:

$$\tilde{E}_z^{ec}(\rho, n, q) = \frac{1}{j\omega\epsilon_d} \left[ k_d^2 - \left( \frac{q\pi}{L_{zc}} \right)^2 \right] \tilde{A}_z^{ec}(\rho, n, q) \quad (2.24b)$$

Lembrando que:

$$(k_{\rho_d})^2 = k_d^2 - k_z^2 = k_d^2 - \left( \frac{q\pi}{L_{zc}} \right)^2$$

A equação (2.24b) pode ser reescrita como:

$$\tilde{E}_z^{ec}(\rho, n, q) = \frac{1}{j\omega\epsilon_d} (k_{\rho_d})^2 \tilde{A}_z^{ec}(\rho, n, q) \quad (2.24c)$$

(iv) Componente  $H_\rho$ :

$$H_\rho(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[ -\frac{jn}{\rho} \tilde{A}_z^{ec}(\rho, n, q) + \frac{1}{j\omega\mu_d} \frac{q\pi}{L_{zc}} \frac{\partial}{\partial\rho} \tilde{F}_z^{es}(\rho, n, q) \right] \cdot e^{-jn\phi} \cos \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \quad (2.25a)$$

Comparando (2.25a) com (2.16a) veremos que:

$$\tilde{H}_\rho^{ec}(\rho, n, q) = -\frac{jn}{\rho} \tilde{A}_z^{ec}(\rho, n, q) + \frac{1}{j\omega\mu_d} \frac{q\pi}{L_{zc}} \frac{\partial}{\partial\rho} \tilde{F}_z^{es}(\rho, n, q) \quad (2.25b)$$

(iv) Componente  $H_\phi$ :

$$H_\phi(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[ -\frac{\partial}{\partial\rho} \tilde{A}_z^{ec}(\rho, n, q) - \frac{jn}{j\omega\mu_d} \frac{q\pi/L_{zc}}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \tilde{F}_z^{es}(\rho, n, q) \right] \cdot e^{-jn\phi} \cos \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \quad (2.26a)$$

Comparando (2.26a) com (2.16a) veremos que:

$$\tilde{H}_\phi^{ec}(\rho, n, q) = -\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{A}_z^{ec}(\rho, n, q) - \frac{n}{\omega \mu_d \rho} \frac{q\pi}{L_{zc}} \tilde{F}_z^{es}(\rho, n, q) \quad (2.26b)$$

(vi) Componente  $H_z$ :

$$H_z(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{j\omega\mu_d} \left[ \left( -\frac{q\pi}{L_{zc}} \right)^2 + k_d^2 \right] \tilde{F}_z^{es}(\rho, n, q) e^{-jn\phi} \operatorname{sen} \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \quad (2.27a)$$

Comparando (2.27a) com (2.20a) veremos que:

$$\tilde{H}_z^{es}(\rho, n, q) = \frac{1}{j\omega\mu_d} \left[ k_d^2 - \left( \frac{q\pi}{L_{zc}} \right)^2 \right] \tilde{F}_z^{es}(\rho, n, q) \quad (2.27b)$$

Lembrando que:

$$(k_{\rho_d})^2 = k_d^2 - k_z^2 = k_d^2 - \left( \frac{q\pi}{L_{zc}} \right)^2$$

A equação (2.27b) pode ser reescrita como:

$$\tilde{H}_z^{es}(\rho, n, q) = \frac{1}{j\omega\mu_d} (k_{\rho_d})^2 \tilde{F}_z^{es}(\rho, n, q) \quad (2.27c)$$

### 2.3.2 Teorema da equivalência para correntes magnéticas internas à cavidade

Fontes fictícias dentro de uma região são ditas equivalentes se elas produzem dentro daquela região os mesmos campos que as fontes reais [20]. Utilizando o teorema da equivalência as correntes magnéticas transformadas serão determinadas a partir dos campos eletromagnéticos transformados provenientes da região interna da cavidade. Dessa forma, os campos eletromagnéticos externos à cavidade são considerados nulos, fig. 2.4.

Pelo teorema da equivalência a seguinte condição deve ser satisfeita em  $\rho = b$ :

$$\vec{M}_s^i = -\hat{n} \times \vec{E}(b, \phi, z) \quad (2.28)$$

O vetor normal aponta para a região de interesse. Neste caso  $\hat{n}$  apontará para a região interna à cavidade, e o vetor normal será igual à  $-\hat{a}_\rho$ , o que resulta em:

$$\vec{M}_s^i = +\hat{a}_\rho \times \vec{E}(b, \phi, z) \quad (2.29)$$

As correntes magnéticas internas à cavidade são determinadas por:

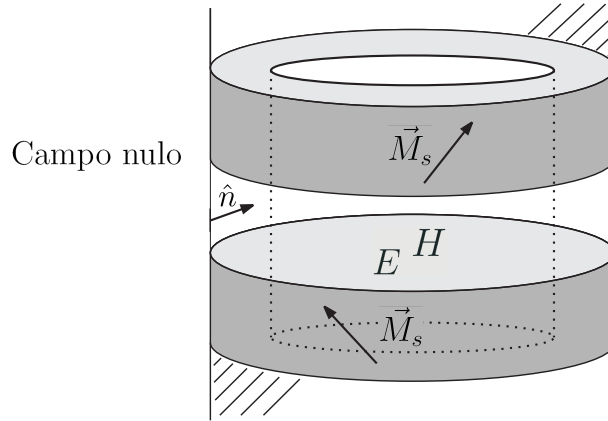


Figura 2.4: Correntes magnéticas superficiais internas à cavidade

$$\vec{M}_\phi^i(\phi, z)\hat{a}_\phi + \vec{M}_z^i(\phi, z)\hat{a}_z = +\hat{a}_\rho \times \left[ \vec{E}_\phi(b, \phi, z)\hat{a}_\phi + \vec{E}_z(b, \phi, z)\hat{a}_z + \vec{E}_\rho(b, \phi, z)\hat{a}_\rho \right] \quad (2.30)$$

Aplicando o produto vetorial entre o vetor normal e o campo elétrico, as correntes magnéticas na interface dielétrica serão:

$$M_z^i(\phi, z) = E_\phi(b, \phi, z) \quad (2.31a)$$

$$M_\phi^i(\phi, z) = -E_z(b, \phi, z) \quad (2.31b)$$

Tomando as transformadas de (2.31a) e (2.31b):

$$\widetilde{M}_z^{es}(n, q) = \widetilde{E}_\phi^{es}(b, n, q) \quad (2.32a)$$

$$\widetilde{M}_\phi^{ec}(n, q) = -\widetilde{E}_z^{ec}(b, n, q) \quad (2.32b)$$

Substituindo (2.23b) e (2.24c) em (2.32a) e (2.32b), respectivamente:

$$\widetilde{M}_z^{es}(n, q) = \frac{n}{\omega\epsilon_d b} \frac{q\pi}{L_{zc}} \widetilde{A}_z^{ec}(b, n, q) + \frac{\partial}{\partial \rho} \widetilde{F}_z^{es}(b, n, q) \quad (2.33a)$$

$$\widetilde{M}_\phi^{ec}(n, q) = -\frac{1}{j\omega\epsilon_d} (k_{\rho d})^2 \widetilde{A}_z^{ec}(b, n, q) \quad (2.33b)$$

Para satisfazer as condições de contorno em  $\rho = a$ , os campos tangenciais ao cilindro interno à cavidade devem ser nulos, ou seja:

$$E_z(a, \phi, z) = E_\phi(a, \phi, z) = 0 \quad (2.34a)$$

e conseqüentemente suas transformadas:

$$\tilde{E}_z^{ec}(a, n, q) = \tilde{E}_\phi^{es}(a, n, q) = 0 \quad (2.34b)$$

Para que (2.23b) e (2.24b) satisfassam a condição de contorno em  $\rho = a$ ,

$$\tilde{E}_z^{ec}(a, n, q) = \frac{n}{\omega\epsilon_d a} \frac{q\pi}{L_{zc}} \tilde{A}_z^{ec}(a, n, q) + \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{F}_z^{es}(a, n, q) = 0 \quad (2.35a)$$

$$\tilde{E}_\phi^{es}(a, n, q) = \frac{1}{j\omega\epsilon_d} (k_{\rho d})^2 \tilde{A}_z^{ec}(a, n, q) = 0 \quad (2.35b)$$

é necessário que:

$$\tilde{A}_z^{ec}(a, n, q) = 0 \quad (2.35c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{F}_z^{es}(a, n, q) = 0 \quad (2.35d)$$

Lembrando que  $\tilde{A}_z^{ec}$  e  $\tilde{F}_z^{es}$  são combinações de funções de Bessel satisfazendo simultaneamente (2.33a), (2.33b), (2.35a) e (2.35b).

As equações a seguir são combinações de funções de Bessel que satisfazem as condições de contorno descritas anteriormente, e irão representar as funções do potencial vetor magnético e do potencial vetor elétrico transformados.

$$\tilde{A}_z^{ec}(\rho, n, q) = c_1 [J_n(k_{\rho d}\rho) H_n^{(2)}(k_{\rho d}a) - J_n(k_{\rho d}a) H_n^{(2)}(k_{\rho d}\rho)] \quad (2.36a)$$

$$\tilde{F}_z^{es}(\rho, n, q) = c_2 [J_n(k_{\rho d}\rho) H_n^{(2)'}(k_{\rho d}a) - J_n'(k_{\rho d}a) H_n^{(2)}(k_{\rho d}\rho)] \quad (2.36b)$$

Onde  $J_n$  é uma função de Bessel de primeiro tipo e ordem  $n$  e  $H_n^{(2)}$  é uma função de Hankel de segundo tipo e ordem  $n$ .

Substituindo (2.36a) e (2.36b) em (2.33a), a corrente magnética transformada  $\tilde{M}_z^{es}$  terá a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_z^{es}(n, q) = \frac{n}{\omega\epsilon_d b} \frac{q\pi}{L_{zc}} c_1 [J_n(k_{\rho d}b) H_n^{(2)}(k_{\rho d}a) - J_n(k_{\rho d}a) H_n^{(2)}(k_{\rho d}b)] \\ + c_2 k_{\rho d} [J_n'(k_{\rho d}b) H_n^{(2)'}(k_{\rho d}a) - J_n'(k_{\rho d}a) H_n^{(2)'}(k_{\rho d}b)] \end{aligned} \quad (2.37)$$

Definindo

$$\vartheta_1(n, q) = \left[ J'_n(k_{\rho_d} b) H_n^{(2)'}(k_{\rho_d} a) - J'_n(k_{\rho_d} a) H_n^{(2)'}(k_{\rho_d} b) \right] \quad (2.38)$$

e

$$\vartheta_5(n, q) = \left[ J_n(k_{\rho_d} b) H_n^{(2)}(k_{\rho_d} a) - J_n(k_{\rho_d} a) H_n^{(2)}(k_{\rho_d} b) \right] \quad (2.39)$$

$\widetilde{M}_z^{es}$  pode ser reescrita como:

$$\widetilde{M}_z^{es}(n, q) = \frac{n}{\omega \epsilon_d b} \frac{q\pi}{L_{zc}} c_1 \vartheta_5(n, q) + c_2 k_{\rho_d} \vartheta_1(n, q) \quad (2.40)$$

Substituindo (2.36a) em (2.33b), a corrente magnética transformada  $\widetilde{M}_\phi^{ec}$  terá a seguinte forma:

$$\widetilde{M}_\phi^{ec}(n, q) = -\frac{1}{j\omega \epsilon_d} (k_{\rho_d})^2 c_1 \left[ J_n(k_{\rho_d} b) H_n^{(2)}(k_{\rho_d} a) - J_n(k_{\rho_d} a) H_n^{(2)}(k_{\rho_d} b) \right] \quad (2.41)$$

Substituindo (2.39) em (2.41):

$$\widetilde{M}_\phi^{ec}(n, q) = -\frac{1}{j\omega \epsilon_d} (k_{\rho_d})^2 c_1 \vartheta_5(n, q) \quad (2.42)$$

O coeficiente  $c_1$  é dado por:

$$c_1 = -\frac{j\omega \epsilon_d}{(k_{\rho_d})^2 \vartheta_5(n, q)} \widetilde{M}_\phi^{ec}(n, q) \quad (2.43)$$

Substituindo (2.43) em (2.40):

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_z^{es}(n, q) &= \frac{n}{\omega \epsilon_d b} \frac{q\pi}{L_{zc}} \left[ -\frac{j\omega \epsilon_d}{(k_{\rho_d})^2 \vartheta_5(n, q)} \widetilde{M}_\phi^{ec}(n, q) \right] \vartheta_5 + c_2 k_{\rho_d} \vartheta_1(n, q) \\ &= -\frac{jn}{b(k_{\rho_d})^2} \frac{q\pi}{L_{zc}} \widetilde{M}_\phi^{ec}(n, q) + c_2 k_{\rho_d} \vartheta_1(n, q) \end{aligned} \quad (2.44)$$

O coeficiente  $c_2$  é dado por:

$$c_2 = \frac{1}{(k_{\rho_d}) \vartheta_1(n, q)} \left[ \widetilde{M}_z^{es}(n, q) + \frac{jn}{b(k_{\rho_d})^2} \frac{q\pi}{L_{zc}} \widetilde{M}_\phi^{ec}(n, q) \right] \quad (2.45)$$

Substituindo (2.43) em (2.36a):

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_z^{ec}(\rho, n, q) &= -\frac{j\omega \epsilon_d}{(k_{\rho_d})^2 \vartheta_5(n, q)} \left[ J_n(k_{\rho_d} \rho) H_n^{(2)}(k_{\rho_d} a) - J_n(k_{\rho_d} a) H_n^{(2)}(k_{\rho_d} \rho) \right] \\ &\quad \cdot \widetilde{M}_\phi^{ec}(n, q) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Fazendo:

$$\tilde{G}_{M\phi}^{Ad}(\rho, n, q) = -\frac{j\omega\epsilon_d}{(k_{\rho_d})^2 \vartheta_5(n, q)} \left[ J_n(k_{\rho_d}\rho) H_n^{(2)}(k_{\rho_d}a) - J_n(k_{\rho_d}a) H_n^{(2)}(k_{\rho_d}\rho) \right] \quad (2.47)$$

$\tilde{A}_z^{ec}$  pode ser reescrito como:

$$\tilde{A}_z^{ec}(\rho, n, q) = \tilde{G}_{M\phi}^{Ad}(\rho, n, q) \tilde{M}_\phi^{ec}(n, q) \quad (2.48)$$

Substituindo (2.45) em (2.36b):

$$\begin{aligned} \tilde{F}_z^{es}(\rho, n, q) = \frac{1}{(k_{\rho_d}) \vartheta_1(n, q)} & \left[ \tilde{M}_z^{es}(n, q) + \frac{jn}{b(k_{\rho_d})^2} \frac{q\pi}{L_{zc}} \tilde{M}_\phi^{ec}(n, q) \right] \\ & \cdot \left[ J_n(k_{\rho_d}\rho) H_n^{(2)'}(k_{\rho_d}a) - J_n'(k_{\rho_d}a) H_n^{(2)}(k_{\rho_d}\rho) \right] \end{aligned} \quad (2.49)$$

Fazendo:

$$\tilde{G}_{M\phi}^{Fd}(\rho, n, q) = \frac{jn}{b(k_{\rho_d})^3 \vartheta_1(n, q)} \frac{q\pi}{L_{zc}} \left[ J_n(k_{\rho_d}\rho) H_n^{(2)'}(k_{\rho_d}a) - J_n'(k_{\rho_d}a) H_n^{(2)}(k_{\rho_d}\rho) \right] \quad (2.50)$$

e

$$\tilde{G}_{Mz}^{Fd}(\rho, n, q) = \frac{1}{(k_{\rho_d}) \vartheta_1(n, q)} \left[ J_n(k_{\rho_d}\rho) H_n^{(2)'}(k_{\rho_d}a) - J_n'(k_{\rho_d}a) H_n^{(2)}(k_{\rho_d}\rho) \right] \quad (2.51)$$

$\tilde{F}_z^{es}$  pode ser reescrito como:

$$\tilde{F}_z^{es}(\rho, n, q) = \tilde{G}_{M\phi}^{Fd}(\rho, n, q) \tilde{M}_\phi^{ec}(n, q) + \tilde{G}_{Mz}^{Fd}(\rho, n, q) \tilde{M}_z^{es}(n, q) \quad (2.52)$$

onde  $\tilde{G}_{M\phi}^{Ad}$ ,  $\tilde{G}_{M\phi}^{Fd}$  e  $\tilde{G}_{Mz}^{Fd}$  são as funções de Green dos potenciais vetores  $A_z$  e  $F_z$  devido as correntes magnéticas  $M_\phi^i$  e  $M_z^i$ .

Substituindo-se (2.48) e (2.52) nas componentes de campo eletromagnético transformados:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_\rho^{es}(\rho, n, q) = -\frac{1}{j\omega\epsilon_d} \frac{q\pi}{L_{zc}} & \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Ad}(\rho, n, q) \tilde{M}_\phi^{ec}(n, q) \right] \\ + \frac{jn}{\rho} & \left[ \tilde{G}_{M\phi}^{Fd}(\rho, n, q) \tilde{M}_\phi^{ec}(n, q) + \tilde{G}_{Mz}^{Fd}(\rho, n, q) \tilde{M}_z^{es}(n, q) \right] \end{aligned} \quad (2.53a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_\phi^{es}(\rho, n, q) &= \frac{n}{\omega\epsilon_d\rho} \frac{q\pi}{L_{zc}} \left[ \tilde{G}_{M\phi}^{Ad}(\rho, n, q) \tilde{M}_\phi^{ec}(n, q) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial\rho} \left[ \tilde{G}_{M\phi}^{Fd}(\rho, n, q) \tilde{M}_\phi^{ec}(n, q) + \tilde{G}_{Mz}^{Fd}(\rho, n, q) \tilde{M}_z^{es}(n, q) \right] \end{aligned} \quad (2.53b)$$

$$\tilde{E}_z^{ec}(\rho, n, q) = \frac{1}{j\omega\epsilon_d} (k_{\rho d})^2 \left[ \tilde{G}_{M\phi}^{Ad}(\rho, n, q) \tilde{M}_\phi^{ec}(n, q) \right] \quad (2.53c)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\rho^{ec}(\rho, n, q) &= -\frac{jn}{\rho} \left[ \tilde{G}_{M\phi}^{Ad}(\rho, n, q) \tilde{M}_\phi^{ec}(n, q) \right] + \frac{1}{j\omega\mu_d} \frac{q\pi}{L_{zc}} \frac{\partial}{\partial\rho} \\ &\cdot \left[ \tilde{G}_{M\phi}^{Fd}(\rho, n, q) \tilde{M}_\phi^{ec}(n, q) + \tilde{G}_{Mz}^{Fd}(\rho, n, q) \tilde{M}_z^{es}(n, q) \right] \end{aligned} \quad (2.53d)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\phi^{ec}(\rho, n, q) &= -\frac{\partial}{\partial\rho} \left[ \tilde{G}_{M\phi}^{Ad}(\rho, n, q) \tilde{M}_\phi^{ec}(n, q) \right] - \frac{n}{\omega\mu_d\rho} \frac{q\pi}{L_{zc}} \\ &\cdot \left[ \tilde{G}_{M\phi}^{Fd}(\rho, n, q) \tilde{M}_\phi^{ec}(n, q) + \tilde{G}_{Mz}^{Fd}(\rho, n, q) \tilde{M}_z^{es}(n, q) \right] \end{aligned} \quad (2.53e)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_z^{es}(\rho, n, q) &= \frac{1}{j\omega\mu_d} (k_{\rho d})^2 \left[ \tilde{G}_{M\phi}^{Fd}(\rho, n, q) \tilde{M}_\phi^{ec}(n, q) + \right. \\ &\left. \tilde{G}_{Mz}^{Fd}(\rho, n, q) \tilde{M}_z^{es}(n, q) \right] \end{aligned} \quad (2.53f)$$

## 2.4 Expansão dos campos externos à cavidade

Como dito anteriormente, problemas com formas que coincidem com as coordenadas cilíndricas são usualmente resolvidos em coordenadas cilíndricas, e as componentes de campo para a região externa à cavidade também devem ser solução da equação de onda. Uma possível forma para os potenciais vetores externos à cavidade é descrita em [19]:

$$A_z = \sum_n \int_{k_z} d_o(n, k_z) B_n(k_{\rho o}\rho) h_\phi(n\phi) h_z(k_z z) dk_z \quad (2.54a)$$

$$F_z = \sum_n \int_{k_z} f_o(n, k_z) B_n(k_{\rho o}\rho) h_\phi(n\phi) h_z(k_z z) dk_z \quad (2.54b)$$

onde  $h_\phi(n\phi)$  e  $h_z(k_z z)$  são funções harmônicas (não necessariamente iguais),  $B_n(k_{\rho o}\rho)$  é uma função de Bessel de ordem  $n$ ,  $d_o(n, k_z)$  e  $f_o(n, k_z)$  são funções que serão determinadas pelas condições de radiação.

Assim como na região interna à cavidade, para ser mantida a continuidade dos campos e dos potenciais vetores,  $h_\phi$  deve ser dado por 2.8.

Para a função  $h_z(k_z z)$  uma possível solução é  $e^{-jk_z z}$ , onde a mesma representa uma onda não atenuada viajando na direção  $+z$  (para  $k_z$  positivo e real):

$$h_z(k_z z) = e^{-jk_z z} \quad (2.55)$$

A função  $H_n^{(2)}(k_{\rho_o} \rho)$  satisfaz a condição de radiação e será utilizada para representar a função  $B_n(k_{\rho_o} \rho)$ :

$$B_n(k_{\rho_o} \rho) = H_n^{(2)}(k_{\rho_o} \rho) \quad (2.56)$$

As funções  $d_o(n, k_z)$  e  $f_o(n, k_z)$  serão determinadas mais à frente.

### 2.4.1 Campos eletromagnéticos externos à cavidade

Determinada a forma de cada função que compõe a solução da equação de onda para a região externa à cavidade, os campos eletromagnéticos podem ser obtidos a partir dos potenciais vetores  $A_{z_o}$  e  $F_{z_o}$ , escritos como superposição de ondas cilíndricas satisfazendo à continuidade em  $\phi$  e condição de radiação em  $z$  e  $\rho$ , como demonstrado por [19]:

Assim, substituindo as equações (2.8), (2.55) e (2.56) em (2.54a) e (2.54b), os potenciais vetores terão as seguintes formas:

$$A_{z_o}(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d_o(n, k_z) H_n^{(2)}(k_{\rho_o} \rho) e^{-jk_z z} e^{-jn\phi} dk_z \quad (2.57a)$$

$$F_{z_o}(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_o(n, k_z) H_n^{(2)}(k_{\rho_o} \rho) e^{-jk_z z} e^{-jn\phi} dk_z \quad (2.57b)$$

Definindo o par de transformadas:

$$P(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{P}^{ef}(\rho, n, k_z) e^{-jk_z z} e^{-jn\phi} dk_z \quad (2.58a)$$

$$\tilde{P}^{ef}(\rho, n, k_z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} P(\rho, \phi, z) e^{jk_z z} e^{jn\phi} d\phi dz \quad (2.58b)$$

Analisando os potenciais vetores por (2.58a) pode-se determinar que as transformadas dos potenciais vetores  $A_{z_o}$  e  $F_{z_o}$  são:

$$\tilde{A}_{z_o}^{ef}(\rho, n, k_z) = d_o(n, k_z) H_n^{(2)}(k_{\rho_o} \rho) \quad (2.59a)$$

$$\tilde{F}_{z_o}^{ef}(\rho, n, k_z) = f_o(n, k_z) H_n^{(2)}(k_{\rho_o} \rho) \quad (2.59b)$$

Dessa forma, os potenciais vetores  $A_{z_o}$  e  $F_{z_o}$  podem ser reescritos como:

$$A_{z_o}(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}_{z_o}^{ef}(\rho, n, k_z) e^{-jk_z z} e^{-jn\phi} dk_z \quad (2.60a)$$

$$F_{z_o}(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}_{z_o}^{ef}(\rho, n, k_z) e^{-jk_z z} e^{-jn\phi} dk_z \quad (2.60b)$$

Os campos eletromagnéticos externos à cavidade podem ser obtidos dos potenciais vetores por [19].

$$E_{\rho} = \frac{1}{j\omega\epsilon_o} \frac{\partial^2 A_{z_o}}{\partial \rho \partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_{z_o}}{\partial \phi} \quad (2.61a)$$

$$E_{\phi} = \frac{1}{j\omega\epsilon_o \rho} \frac{\partial^2 A_{z_o}}{\partial \phi \partial z} + \frac{\partial F_{z_o}}{\partial \rho} \quad (2.61b)$$

$$E_z = \frac{1}{j\omega\epsilon_o} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_d^2 \right) A_{z_o} \quad (2.61c)$$

$$H_{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_{z_o}}{\partial \phi} + \frac{1}{j\omega\mu_o} \frac{\partial^2 F_{z_o}}{\partial \rho \partial z} \quad (2.61d)$$

$$H_{\phi} = -\frac{\partial A_{z_o}}{\partial \rho} + \frac{1}{j\omega\mu_o \rho} \frac{\partial^2 F_{z_o}}{\partial \phi \partial z} \quad (2.61e)$$

$$H_z = \frac{1}{j\omega\mu_o} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_d^2 \right) F_{z_o} \quad (2.61f)$$

As derivadas " $\frac{\partial}{\partial z}$ " e " $\frac{\partial}{\partial \phi}$ " no domínio espacial transformam-se em

$$\frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow -jk_z \quad (2.62a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \Rightarrow -jn \quad (2.62b)$$

no domínio da transformada. Assim, usando (2.62a) e (2.62b), as componentes de campo transformados são:

$$\tilde{E}_{\rho}^{ef}(\rho, n, k_z) = -\frac{jk_z}{j\omega\epsilon_o} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{A}_{z_o}^{ef}(\rho, n, k_z) + \frac{jn}{\rho} \tilde{F}_{z_o}(\rho, n, k_z) \quad (2.63a)$$

$$\tilde{E}_\phi^{ef}(\rho, n, k_z) = -\frac{nk_z}{j\omega\epsilon_o\rho}\tilde{A}_{z_o}^{ef}(\rho, n, k_z) + \frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{F}_{z_o}^{ef}(\rho, n, k_z) \quad (2.63b)$$

$$\tilde{E}_z^{ef}(\rho, n, k_z) = \frac{(k_{\rho_o})^2}{j\omega\epsilon_o}\tilde{A}_{z_o}^{ef}(\rho, n, k_z) \quad (2.63c)$$

$$\tilde{H}_\rho^{ef}(\rho, n, k_z) = -\frac{jn}{\rho}\tilde{A}_{z_o}^{ef}(\rho, n, k_z) - \frac{jk_z}{j\omega\mu_o}\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{F}_{z_o}^{ef}(\rho, n, k_z) \quad (2.63d)$$

$$\tilde{H}_\phi^{ef}(\rho, n, k_z) = -\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{A}_{z_o}^{ef}(\rho, n, k_z) - \frac{nk_z}{j\omega\mu_o\rho}\tilde{F}_{z_o}^{ef}(\rho, n, k_z) \quad (2.63e)$$

$$\tilde{H}_z^{ef}(\rho, n, k_z) = \frac{(k_{\rho_o})^2}{j\omega\mu_o}\tilde{F}_{z_o}^{ef}(\rho, n, k_z) \quad (2.63f)$$

## 2.4.2 Teorema da equivalência para correntes magnéticas externas à cavidade

Assumindo que os campos externos existem no exterior da cavidade e que o meio interno é livre de fontes, em uma região de espaço livre. Para os campos externos existirem, deve haver uma corrente superficial  $\vec{J}_s$ ,  $\vec{M}_s$  na superfície da interface dielétrica, que obedece a seguinte regra:

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H} \quad (2.64a)$$

$$\vec{M}_s^e = -\hat{n} \times \vec{E} \quad (2.64b)$$

onde  $\hat{n}$  é um vetor unitário que aponta para fora da cavidade e  $\vec{H}$  e  $\vec{E}$  são os campos obtidos anteriormente.

Neste caso as correntes de interesse são as correntes magnéticas, e o vetor unitário que aponta para a região de fora da cavidade é um vetor unitário na direção  $\hat{\rho}$ . Sendo assim teremos que:

$$\hat{n} = +\hat{a}_\rho \quad (2.65)$$

Substituindo (2.65) em (2.64b):

$$\vec{M}_s^e = -(+\hat{a}_\rho) \times \vec{E}(b, \phi, q) = -\hat{a}_\rho \times \vec{E}(b, \phi, q) \quad (2.66)$$

As correntes magnéticas equivalentes externas são determinadas por:

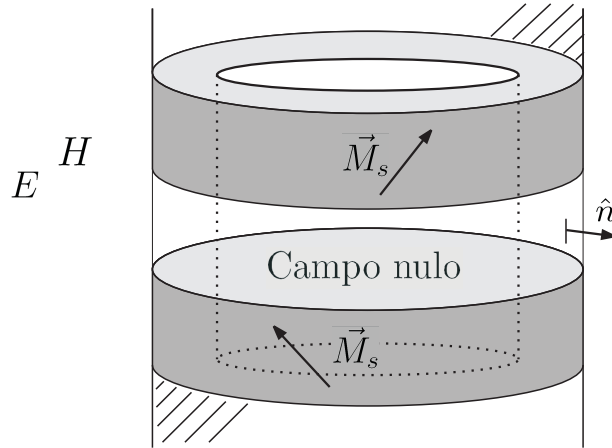


Figura 2.5: Correntes magnéticas superficiais externas à cavidade

$$M_\phi^e(\phi, z)\hat{a}_\phi + M_z^e(\phi, z)\hat{a}_z = -\hat{a}_\rho \times [E_\phi(b, \phi, z)\hat{a}_\phi + E_z(b, \phi, z)\hat{a}_z + E_\rho(b, \phi, z)\hat{a}_\rho] \quad (2.67)$$

Aplicando o produto vetorial entre o vetor normal e o campo elétrico, as correntes magnéticas sobre a interface dielétrica serão:

$$M_\phi^e(\phi, z) = E_z(b, \phi, z) \quad (2.68a)$$

$$M_z^e(\phi, z) = -E_\phi(b, \phi, z) \quad (2.68b)$$

Comparando as correntes magnéticas externas com as correntes magnéticas internas, observa-se que:

$$M^e = -M^i$$

Sendo que as correntes magnéticas transformadas serão:

$$\widetilde{M}_\phi^{ef}(n, k_z) = -\widetilde{E}_z^{ef}(b, \phi, z) \quad (2.69a)$$

$$\widetilde{M}_z^{ef}(n, k_z) = \widetilde{E}_\phi^{ef}(b, \phi, z) \quad (2.69b)$$

Substituindo (2.59a) em (2.63c) e posteriormente em (2.69a)

$$\widetilde{M}_\phi^{ef}(n, k_z) = -\frac{(k_{\rho_o})^2}{j\omega\epsilon_o} d_o(n, k_z) H_n^{(2)}(k_{\rho_o}b) \quad (2.70)$$

obtemos que:

$$d_o(n, k_z) = -\frac{j\omega\epsilon_o}{(k_{\rho_o})^2} \frac{\widetilde{M}_\phi^{ef}(n, k_z)}{H_n^{(2)}(k_{\rho_o}b)} \quad (2.71)$$

Substituindo (2.59a) e (2.59b) em (2.63b) e posteriormente em (2.69b):

$$\widetilde{M}_z^{ef}(n, k_z) = -\frac{nk_z}{j\omega\epsilon_o b} d_o(n, k_z) H_n^{(2)}(k_{\rho_o}b) + f_o(n, k_z) k_{\rho_o} H_n^{(2)'}(k_{\rho_o}b) \quad (2.72)$$

Substituindo (2.71) em (2.72):

$$\widetilde{M}_z^{ef}(n, k_z) = -\frac{nk_z}{j\omega\epsilon_o b} \left( -\frac{j\omega\epsilon_o}{(k_{\rho_o})^2} \widetilde{M}_\phi^{ef}(n, k_z) \right) + k_{\rho_o} f_o(n, k_z) H_n^{(2)'}(k_{\rho_o}b) \quad (2.73)$$

$$k_{\rho_o} f_o(n, k_z) H_n^{(2)'}(k_{\rho_o}b) = \widetilde{M}_z^{ef}(n, k_z) - \frac{nk_z}{(k_{\rho_o})^2 b} \widetilde{M}_\phi^{ef}(n, k_z) \quad (2.74)$$

Neste desenvolvimento fica definido que:

$$f_o(n, k_z) = \frac{1}{k_{\rho_o} H_n^{(2)'}(k_{\rho_o}b)} \left[ \widetilde{M}_z^{ef}(n, k_z) - \frac{nk_z}{(k_{\rho_o})^2 b} \widetilde{M}_\phi^{ef}(n, k_z) \right] \quad (2.75)$$

Substituindo (2.71) em (2.59a) e (2.75) em (2.59b) serão determinados os potenciais vetores magnético e elétrico transformados para a região externa à cavidade:

$$\widetilde{A}_{z_o}^{ef}(\rho, n, k_z) = -\frac{j\omega\epsilon_o}{(k_{\rho_o})^2} \frac{H_n^{(2)}(k_{\rho_o}\rho)}{H_n^{(2)}(k_{\rho_o}b)} \widetilde{M}_\phi^{ef}(n, k_z) \quad (2.76a)$$

$$\widetilde{F}_{z_o}^{ef}(\rho, n, k_z) = \frac{1}{k_{\rho_o}} \frac{H_n^{(2)}(k_{\rho_o}\rho)}{H_n^{(2)'}(k_{\rho_o}b)} \left[ \widetilde{M}_z^{ef}(n, k_z) - \frac{nk_z}{(k_{\rho_o})^2 b} \widetilde{M}_\phi^{ef}(n, k_z) \right] \quad (2.76b)$$

Fazendo:

$$\widetilde{G}_{M_\phi}^{Ao}(\rho, n, k_z) = -\frac{j\omega\epsilon_o}{(k_{\rho_o})^2} \frac{H_n^{(2)}(k_{\rho_o}\rho)}{H_n^{(2)}(k_{\rho_o}b)} \quad (2.77a)$$

$$\widetilde{G}_{M_\phi}^{Fo}(\rho, n, k_z) = -\frac{nk_z}{(k_{\rho_o})^3 b} \frac{H_n^{(2)}(k_{\rho_o}\rho)}{H_n^{(2)'}(k_{\rho_o}b)} \quad (2.77b)$$

$$\widetilde{G}_{M_z}^{Fo}(\rho, n, k_z) = \frac{1}{k_{\rho_o}} \frac{H_n^{(2)}(k_{\rho_o}\rho)}{H_n^{(2)'}(k_{\rho_o}b)} \quad (2.77c)$$

$\widetilde{A}_{z_o}^{ef}$  e  $\widetilde{F}_{z_o}^{ef}$  podem ser reescritos da seguinte forma:

$$\tilde{A}_{z_o}^{ef}(\rho, n, k_z) = \tilde{G}_{M\phi}^{Ao}(\rho, n, k_z) \tilde{M}_\phi^{ef}(n, k_z) \quad (2.78a)$$

$$\tilde{F}_{z_o}^{ef}(\rho, n, k_z) = \tilde{G}_{M\phi}^{Fo}(\rho, n, k_z) \tilde{M}_\phi^{ef}(n, k_z) + \tilde{G}_{Mz}^{Fo}(\rho, n, k_z) \tilde{M}_z^{ef}(n, k_z) \quad (2.78b)$$

onde (2.77a), (2.77b) e (2.77c) são as funções de Green para a região externa do problema em questão.

Substituindo (2.78a) e (2.78b) nas equações (2.63a)-(2.63f), obtem-se os campos eletromagnéticos transformados para a região externa à cavidade:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_\rho^{ef}(\rho, n, k_z) = & \left[ -\frac{jk_z}{j\omega\epsilon_o} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Ao}(\rho, n, k_z) + \frac{jn}{\rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Fo}(\rho, n, k_z) \right] \tilde{M}_\phi^{ef}(n, k_z) \\ & + \frac{jn}{\rho} \tilde{G}_{Mz}^{Fo}(\rho, n, k_z) \tilde{M}_z^{ef}(n, k_z) \end{aligned} \quad (2.79a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_\phi^{ef}(\rho, n, k_z) = & \left[ -\frac{nk_z}{j\omega\epsilon_o\rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Fo}(\rho, n, k_z) + \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Fo}(\rho, n, k_z) \right] \tilde{M}_\phi^{ef}(n, k_z) \\ & + \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{G}_{Mz}^{Fo}(\rho, n, k_z) \tilde{M}_z^{ef}(n, k_z) \end{aligned} \quad (2.79b)$$

$$\tilde{E}_z^{ef}(\rho, n, k_z) = \frac{(k_{\rho_o})^2}{j\omega\epsilon_o} \tilde{G}_{M\phi}^{Ao}(\rho, n, k_z) \tilde{M}_\phi^{ef}(n, k_z) \quad (2.79c)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\rho^{ef}(\rho, n, k_z) = & \left[ -\frac{jn}{\rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Ao}(\rho, n, k_z) - \frac{jk_z}{j\omega\mu_o}(\rho, n, k_z) \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Fo}(\rho, n, k_z) \right] \\ & \cdot \tilde{M}_\phi^{ef}(n, k_z) - \frac{jk_z}{j\omega\mu_o} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{G}_{Mz}^{Fo}(\rho, n, k_z) \tilde{M}_z^{ef}(n, k_z) \end{aligned} \quad (2.79d)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\phi^{ef}(\rho, n, k_z) = & \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Ao}(\rho, n, k_z) - \frac{nk_z}{j\omega\mu_o\rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Fo}(\rho, n, k_z) \right] \tilde{M}_\phi^{ef}(n, k_z) \\ & - \frac{nk_z}{j\omega\mu_o\rho} \tilde{G}_{Mz}^{Fo}(\rho, n, k_z) \tilde{M}_z^{ef}(n, k_z) \end{aligned} \quad (2.79e)$$

$$\tilde{H}_z^{ef}(\rho, n, k_z) = \frac{(k_{\rho_o})^2}{j\omega\mu_o} \tilde{G}_{M\phi}^{Fo}(\rho, n, k_z) \tilde{M}_\phi^{ef}(n, k_z) + \frac{(k_{\rho_o})^2}{j\omega\mu_o} \tilde{G}_{Mz}^{Fo}(\rho, n, k_z) \tilde{M}_z^{ef}(n, k_z) \quad (2.79f)$$

## 2.5 Funções de base

Nas seções anteriores foi formulada uma distribuição de campo nas regiões interna e externa à cavidade em termo de correntes magnéticas a serem determinadas. O próximo passo será aplicar uma técnica numérica para discretizar as equações integrais. Isto é feito escrevendo as correntes magnéticas desconhecidas  $M_\phi$  e  $M_z$ , como combinações de funções de base.

Um passo muito importante em qualquer solução numérica é a escolha das funções de base. Em geral escolhe-se as funções de base como um conjunto que tem a habilidade de representar com precisão e antecipadamente as funções desconhecidas, enquanto minimiza o custo computacional.

Teoricamente existem muitas possibilidades de funções de base. Entretanto, apenas um limitado número são usados na prática. Estas funções podem ser divididas em duas classes gerais. A primeira classe consiste de funções de subdomínio, que são não-zero apenas sobre uma parte do domínio de representação. Este domínio é a superfície da estrutura. A segunda classe consiste de funções de domínio inteiro que existem sobre todo o domínio da função desconhecida. A expansão em funções de base de domínio inteiro é análoga ao método da série de Fourier.

A utilização de determinado tipo de função de base dependerá do problema que se quer resolver. Um bom conhecimento das condições de contorno da estrutura que está sendo estudada, será de grande ajuda para determinar as funções de base do problema. E justamente por este conhecimento prévio serão utilizadas funções de base de subdomínio. A técnica das funções de base de subdomínio consiste na subdivisão da estrutura em  $N$  segmentos não sobrepostos.

Será realizada uma prévia análise da estrutura em questão para serem determinadas as condições de contorno do problema. Do princípio que os campos elétricos tangenciais se anulam sobre uma superfície condutora elétrica perfeita, e analisando as paredes da cavidade, os campos elétricos  $E_\phi$  e  $E_\rho$  devem ser nulos sobre as paredes da cavidade, ou seja, em  $z = z_{1c}$  e  $z = z_{2c}$ .

Lembrando que  $M_z$  depende de  $E_\phi$ , a mesma deve ser nula em  $z = z_{1c}$  e  $z = z_{2c}$ . Não há restrição semelhante para as correntes magnéticas equivalentes  $M_\phi$ , dependentes de  $E_z$ . Elas podem assumir valores não nulos em  $z = z_{1c}$  e  $z = z_{2c}$ .

### 2.5.1 Funções de base $M_z$

Primeiramente  $M_z$  será expandida em uma série finita da forma:

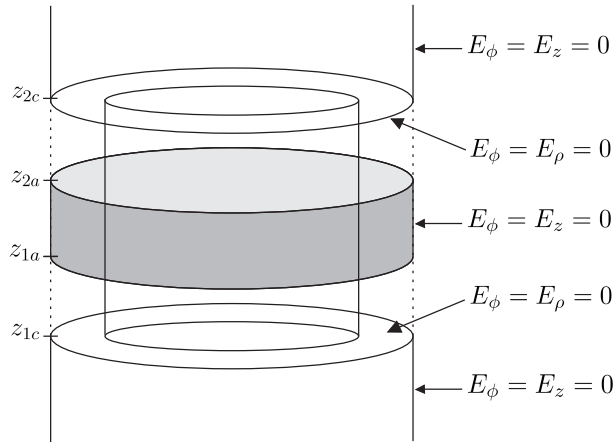


Figura 2.6: Condições de contorno sobre a interface dielétrica (substrato-ar)

$$M_z(\phi, z) = \sum_{u=-U}^U \sum_{t=1}^{T_z} c_{ut} M_{zut}(\phi, z) \quad (2.80)$$

onde  $M_{zut}$  representa a função de base,  $c_{ut}$  são os coeficientes a serem determinados,  $U$  é o número máximo de períodos em  $\phi$  e  $T_z$  é o número total de segmentos correspondentes à subdivisão nas duas regiões de interface dielétrica (substrato-ar) em relação à coordenada  $z$ , sendo igual a  $2N$ .

Na direção  $\phi$  não existem restrições para a corrente  $M_z$  e a mesma será expandida em uma série exponencial de Fourier. Na direção  $z$  a corrente  $M_z$  deve satisfazer as condições de contorno em  $z = z_{1c}$  e  $z = z_{2c}$  e será expandida em funções do tipo "triângulo", representada pela fig. 2.7.

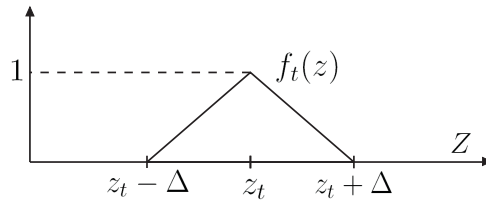


Figura 2.7: Função triângulo simples

A função de base  $M_{zut}$  terá a seguinte forma:

$$M_{zut}(\phi, z) = f_t(z) e^{-ju\phi} \quad (2.81)$$

onde:

$$f_t(z) = \begin{cases} 1 + \frac{z-z_t}{\Delta} & z_t - \Delta < z < z_t \\ 1 + \frac{z_t-z}{\Delta} & z_t < z < z_t + \Delta \\ 0 & \text{fora} \end{cases} \quad (2.82)$$

sendo que  $z_t$  é a coordenada central da função de base  $M_{z_{ut}}$ .

Na análise desenvolvida nas seções anteriores, os campos eletromagnéticos foram expandidos no domínio da transformada. Para serem mantidas as relações de desenvolvimento, as funções de base das correntes magnéticas também serão expandidas no domínio da transformada.

De acordo com o que foi definido anteriormente em (2.58b), a transformada de  $M_{z_{ut}}$  para a região externa à cavidade é definida como:

$$\widetilde{M}_{z_{ut}}^{ef}(n, k_z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} M_{z_{ut}}(\phi, z) e^{jk_z z} e^{jn\phi} d\phi dz \quad (2.83)$$

Substituindo (2.81) em (2.83):

$$\widetilde{M}_{z_{ut}}^{ef}(n, k_z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{j(n-u)\phi} d\phi}_{=2\pi \cdot \delta_{(n,u)}} \int_{-\infty}^{\infty} f_t(z) e^{jk_z z} dz \quad (2.84)$$

onde a função  $\delta_{(n,u)}$  é a delta de Kroner:

$$\delta_{(n,u)} = \begin{cases} 1 & \text{para } n = u \\ 0 & \text{para } n \neq u \end{cases} \quad (2.85)$$

Substituindo (2.82) em (2.84):

$$\widetilde{M}_{z_{ut}}^{ef}(n, k_z) = \frac{1}{(2\pi)} \delta_{(n,u)} \int_{z_t-\Delta}^{z_t+\Delta} f_t(z) e^{jk_z z} dz \quad (2.86)$$

De acordo com a equação (2.82) a integral da equação (2.86) deve ser dividida da seguinte forma:

$$\widetilde{M}_{z_{ut}}^{ef}(n, k_z) = \frac{1}{(2\pi)} \delta_{(n,u)} \left[ \int_{z_t-\Delta}^{z_t} \left(1 + \frac{z-z_t}{\Delta}\right) e^{jk_z z} dz + \int_{z_t}^{z_t+\Delta} \left(1 + \frac{z_t-z}{\Delta}\right) e^{jk_z z} dz \right] \quad (2.87)$$

Fazendo a integração por partes, a equação (2.87) será:

$$\widetilde{M}_{z_{ut}}^{ef}(n, k_z) = \delta_{(n,u)} \frac{e^{jk_z z_t}}{\pi \Delta k_z^2} [1 - \cos(k_z \Delta)] \quad (2.88)$$

Assim como  $\widetilde{M}_{zut}^{ef}$  está para região externa à cavidade,  $\widetilde{M}_{zut}^{es}$  está para a região interna. A transformada de  $M_{zut}$  para a região interna à cavidade é definida como:

$$\widetilde{M}_{zut}^{es}(n, q) = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{L_{zc}} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_{zut}(\phi, z) e^{-jn\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] dz d\phi \quad (2.89)$$

Substituindo (2.81) em (2.89):

$$\widetilde{M}_{zut}^{es}(n, q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{2}{L_{zc}} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{j(n-u)\phi} d\phi}_{2\pi \cdot \delta_{(n,u)}} \int_{-\infty}^{\infty} f_t(z) \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] dz \quad (2.90)$$

Substituindo (2.82) em (2.90):

$$\widetilde{M}_{zut}^{es}(n, q) = \frac{2}{L_{zc}} \delta_{(n,u)} \int_{z_t-\Delta}^{z_t+\Delta} f_t(z) \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] dz \quad (2.91)$$

De acordo com a equação (2.82) a integral da equação (2.91) será dividida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_{zut}^{es}(n, q) &= \frac{2}{L_{zc}} \delta_{(n,u)} \int_{z_t-\Delta}^{z_t} \left( 1 + \frac{z - z_t}{\Delta} \right) \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] dz \\ &\quad + \frac{2}{L_{zc}} \delta_{(n,u)} \int_{z_t}^{z_t+\Delta} \left( 1 + \frac{z_t - z}{\Delta} \right) \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] dz \end{aligned} \quad (2.92)$$

Fazendo a integração por partes, a equação (2.92) será:

$$\widetilde{M}_{zut}^{es}(n, q) = \delta_{(n,u)} \frac{4}{L_{zc} \Delta (q\pi/L_{zc})^2} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z_t - z_{1c}) \right] \left[ 1 - \cos \left( \frac{q\pi \Delta}{L_{zc}} \right) \right] \quad (2.93)$$

onde a função  $\delta_{(n,u)}$  foi definida por (2.85).

Na borda da parte de baixo da antena em  $z = z_{1a}$ , e na borda de acima em  $z = z_{2a}$ , o campo elétrico ao longo de  $\phi$  não se anula. Existe então a necessidade de se criar uma função de base específica para estas partes da antena, fig. 2.8.

Na borda de baixo da antena a função de base  $M_{zut}$  terá a seguinte forma:

$$M_{zut}(\phi, z) = f_{t2}(z) e^{-ju\phi} \quad (2.94)$$

onde:

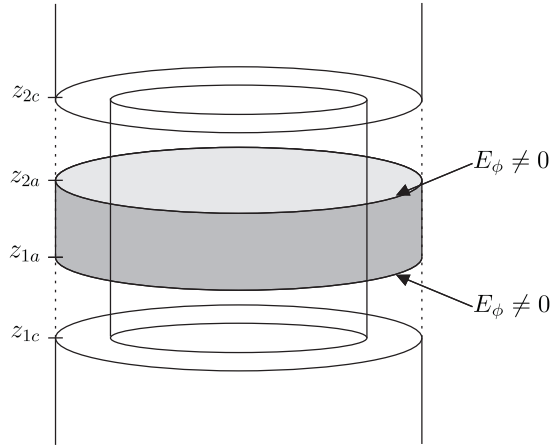


Figura 2.8: Condições de contorno nas bordas da antena

$$f_{t2}(z) = \begin{cases} \frac{z-z_t}{\Delta} & z_t < z < z_t + \Delta \\ 0 & \text{fora} \end{cases} \quad (2.95)$$

A função para a borda de baixo da antena pode ser representada pela fig. 2.9. Seguindo o mesmo raciocínio de (2.86):

$$\widetilde{M}_{z2ut}^{ef}(n, k_z) = \frac{1}{(2\pi)} \delta_{(n,u)} \int_{z_t}^{z_t+\Delta} f_{t2}(z) e^{jk_z z} dz \quad (2.96)$$

Substituindo (2.95) em (2.96):

$$\widetilde{M}_{z2ut}^{ef}(n, k_z) = \frac{1}{(2\pi)} \delta_{(n,u)} \int_{z_t}^{z_t+\Delta} \frac{z - z_t}{\Delta} e^{jk_z z} dz \quad (2.97)$$

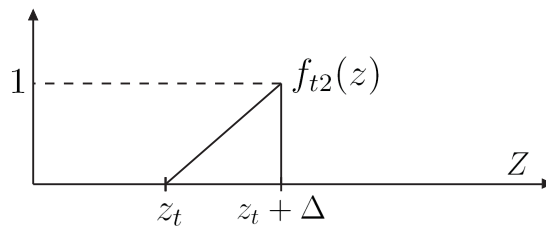


Figura 2.9: Representação da função de base  $M_{zut}$  na borda de baixo da antena

Fazendo a integração por partes, a equação (2.97) será:

$$\widetilde{M}_{z2ut}^{ef}(n, k_z) = \delta_{(n,u)} \frac{e^{jk_z(z_t+\Delta)}}{2\pi} \left( \frac{1}{jk_z} + \frac{1}{\Delta k_z^2} \right) - \frac{e^{jk_z z_t}}{2\pi \Delta k_z^2} \quad (2.98)$$

Seguindo o mesmo raciocínio de (2.91):

$$\widetilde{M}_{z2ut}^{es}(n, q) = \delta_{(n,u)} \frac{2}{L_{zc}} \int_{z_t}^{z_t+\Delta} f_{t2}(z) \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] dz \quad (2.99)$$

Substituindo (2.95) em (2.99):

$$\widetilde{M}_{z2ut}^{es}(n, q) = \delta_{(n,u)} \frac{2}{L_{zc}} \int_{z_t}^{z_t+\Delta} \frac{z - z_t}{\Delta} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] dz \quad (2.100)$$

Fazendo a integração por partes, a equação (2.100) será:

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_{z2ut}^{es}(n, q) = & \delta_{(n,u)} \frac{2}{q\pi} \left\{ -\cos \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z_t + \Delta - z_{1c}) \right] \right\} \\ & + \delta_{(n,u)} \frac{2L_{zc}}{\Delta(q\pi)^2} \left\{ \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z_t + \Delta - z_{1c}) \right] - \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z_t - z_{1c}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.101)$$

Na borda de cima da antena a função de base  $M_{zut}$  terá a seguinte forma:

$$M_{z3ut}(\phi, z) = f_{t3}(z) e^{-ju\phi} \quad (2.102)$$

onde:

$$f_{t3}(z) = \begin{cases} \left[ \frac{z_t - z}{\Delta} + 1 \right] & z_t < z < z_t + \Delta \\ 0 & \text{fora} \end{cases} \quad (2.103)$$

A função para a borda de baixo da antena pode ser representada pela fig. 2.10.

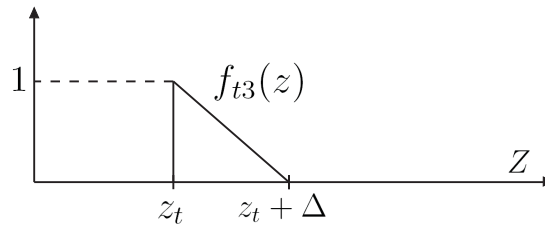


Figura 2.10: Representação da função de base  $M_{zut}$  na borda de cima da antena

Seguindo o mesmo raciocínio de (2.86):

$$\widetilde{M}_{z3ut}^{ef}(n, k_z) = \frac{1}{(2\pi)} \delta_{(n,u)} \int_{z_t}^{z_t+\Delta} f_{te}(z) e^{jk_z z} dz \quad (2.104)$$

Substituindo (2.103) em (2.104):

$$\widetilde{M}_{z3ut}^{ef}(n, k_z) = \frac{1}{(2\pi)} \delta_{(n,u)} \int_{z_t}^{z_t+\Delta} \left[ \frac{z_t - z}{\Delta} + 1 \right] e^{jk_z z} dz \quad (2.105)$$

Fazendo a integração por partes, a equação (2.105) será:

$$\widetilde{M}_{z3ut}^{ef}(n, k_z) = \delta_{(n,u)} \frac{e^{jk_z z_t}}{2\pi} \left( -\frac{1}{jk_z} + \frac{1}{\Delta k_z^2} \right) - \frac{e^{jk_z(z_t+\Delta)}}{2\pi \Delta k_z^2} \quad (2.106)$$

Seguindo o mesmo raciocínio de (2.91):

$$\widetilde{M}_{z3ut}^{es}(n, q) = \delta_{(n,u)} \frac{2}{L_{zc}} \int_{z_t}^{z_t+\Delta} f_{t_i}(z) \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] dz \quad (2.107)$$

Substituindo (2.103) em (2.107):

$$\widetilde{M}_{z3ut}^{es}(n, q) = \delta_{(n,u)} \frac{2}{L_{zc}} \int_{z_t}^{z_t+\Delta} \left( \frac{z_t - z}{\Delta} + 1 \right) \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] dz \quad (2.108)$$

Fazendo a integração por partes, a equação (2.108) será:

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_{z3ut}^{es}(n, q) = & \delta_{(n,u)} \frac{2}{q\pi} \left\{ \cos \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z_t - z_{1c}) \right] \right\} - \\ & \frac{2L_{zc}}{\Delta(q\pi)^2} \left\{ \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z_t + \Delta - z_{1c}) \right] - \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z_t - z_{1c}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.109)$$

Definidas as funções de base para a corrente  $M_z$  na direção  $z$ , as mesmas podem ser representadas pela fig. 2.11.

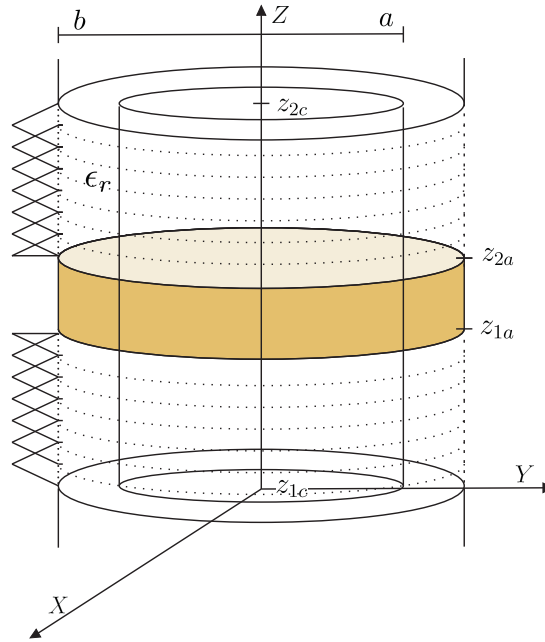


Figura 2.11: Representação das funções de base  $M_{zut}$  na interface dielétrica

### 2.5.2 Funções de base $M_\phi$

As condições de contorno discutidas anteriormente não implicam em nenhuma restrição sobre os valores de  $M_\phi$  em  $z = z_{2a}$  e  $z = z_{2c}$ . Dessa forma é mais conveniente utilizar uma função de base do tipo pulso. Esta função de base irá produzir uma representação do tipo escada.

Assim como  $M_z$ ,  $M_\phi$  será expandida em uma série finita da forma:

$$M_\phi(\phi, z) = \sum_{u=-U}^U \sum_{t=1}^{T_\phi} d_{ut} M_{\phi_{ut}}(\phi, z) \quad (2.110)$$

onde  $M_{\phi_{ut}}(\phi, z)$  representa a função de base,  $d_{ut}$  são os coeficientes a serem determinados,  $U$  é o número máximo de períodos em  $\phi$  e  $T_\phi$  é o número total de segmentos correspondentes à subdivisão nas duas regiões de interface dielétrica (substrato-ar) em relação à coordenada  $z$ , sendo igual a  $2N$ .

Na direção  $\phi$  não existem restrições para a corrente  $M_\phi$  e a mesma será expandida em uma série exponencial de Fourier. Na direção  $z$  a corrente  $M_\phi$  pode assumir qualquer valor ao longo da interface dielétrica e será expandida em funções do tipo "pulso", representada pela fig. 2.12.

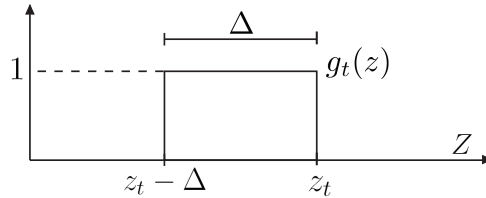


Figura 2.12: Função pulso simples

A função de base  $M_{\phi_{ut}}(\phi, z)$  terá a seguinte forma:

$$M_{\phi_{ut}}(\phi, z) = g_t(z) e^{-ju\phi} \quad (2.111)$$

onde:

$$g_t(z) = \begin{cases} 1 & z_{t-1} < z < z_t \\ 0 & \text{fora} \end{cases} \quad (2.112)$$

De acordo com o que foi definido anteriormente em (2.58b), a transformada de  $M_{\phi_{ut}}$  para a região externa à cavidade é definida como:

$$\widetilde{M}_{\phi_{ut}}^{ef}(n, k_z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} M_{\phi_{ut}}(\phi, z) e^{jk_z z} e^{jn\phi} d\phi dz \quad (2.113)$$

Substituindo (2.111) em (2.113):

$$\widetilde{M}_{\phi_{ut}}^{ef}(n, k_z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{j(n-u)\phi} d\phi}_{2\pi \cdot \delta_{(n,u)}} \int_{-\infty}^{\infty} g_t(z) e^{jk_z z} dz \quad (2.114)$$

Substituindo (2.112) em (2.114):

$$\widetilde{M}_{\phi_{ut}}^{ef}(n, k_z) = \delta_{(n,u)} \frac{1}{(2\pi)} \int_{z_t - \Delta}^{z_t} e^{jk_z z} dz \quad (2.115)$$

Fazendo a integração por partes, a equação (2.115) será:

$$\widetilde{M}_{\phi_{ut}}^{ef}(n, k_z) = \delta_{(n,u)} \frac{e^{jk_z z_t}}{j2\pi k_z} (1 - e^{jk_z \Delta}) \quad (2.116)$$

Onde a função  $\delta_{(n,u)}$  foi definida em (2.85).

Assim como  $\widetilde{M}_{\phi_{ut}}^{ef}$  está para região externa à cavidade,  $\widetilde{M}_{\phi_{ut}}^{es}$  está para a região interna.

A transformada de  $M_{\phi_{ut}}$  para a região interna à cavidade é definida como:

$$\widetilde{M}_{\phi_{ut}}^{ec}(n, q) = \frac{1}{2\pi} \frac{L_q}{L_{zc}} \int_0^{2\pi} \int_{z_{1c}}^{z_{2c}} M_{\phi_{ut}}(\phi, z) e^{-jn\phi} \cos \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] dz d\phi \quad (2.117)$$

Substituindo (2.111) em (2.117):

$$\widetilde{M}_{\phi_{ut}}^{ec}(n, q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{L_q}{L_{zc}} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{j(n-u)\phi} d\phi}_{2\pi \cdot \delta_{(n,u)}} \int_{z_{1c}}^{z_{2c}} g_t(z) \cos \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] dz \quad (2.118)$$

Substituindo (2.112) em (2.118):

$$\widetilde{M}_{\phi_{ut}}^{ec}(n, q) = \delta_{(n,u)} \frac{L_q}{L_{zc}} \int_{z_t - \Delta}^{z_t} \cos \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] dz \quad (2.119)$$

Fazendo a integração por partes, a equação (2.119) será:

$$\widetilde{M}_{\phi_{ut}}^{ec}(n, q) = \delta_{(n,u)} \frac{L_q}{L_{zc}} \left\{ \text{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z_t - z_{1c}) \right] - \text{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z_t - \Delta - z_{1c}) \right] \right\} \quad (2.120)$$

Para  $q = 0$ , a equação (2.120) reduzira à:

$$\widetilde{M}_{\phi_{ut}}^{ec}(n, q) = \delta_{(n,u)} \frac{\Delta}{L_{zc}} \quad (2.121)$$

A função de base para a corrente magnética  $M_\phi$  na direção  $z$  pode ser representada pela fig. 2.13.

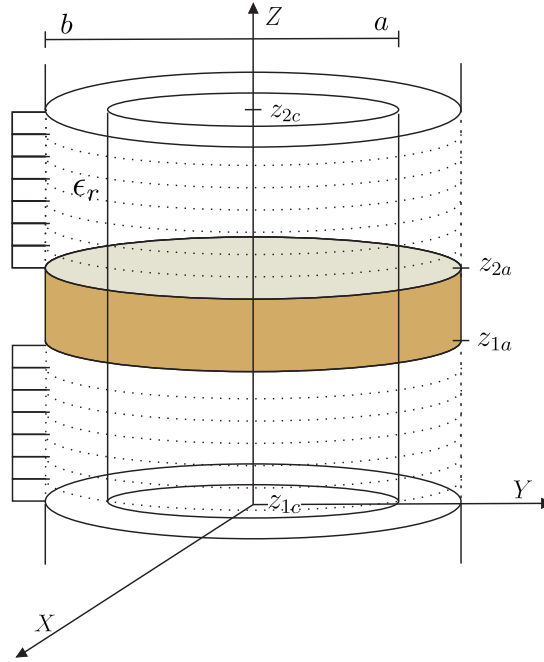


Figura 2.13: Representação da função de base  $M_{\phi_{ut}}$  na interface dielétrica

## 2.6 Excitação da antena anular

Em muitas situações, devido ao raio do cabo coaxial que alimenta a antena ser muito menor que o comprimento de onda que o sistema está operando, assume-se que a corrente do alimentador (cabo coaxial) pode ser aproximada por uma linha de corrente de espessura zero, assim como realizado em [10].

Neste trabalho a antena será excitada por um cabo coaxial representado por uma fita condutora de largura média  $W_f$ , fig. 2.14. A fita estará situada em  $z = z_f$  e entre  $\phi = \phi_{1_f}$  e  $\phi = \phi_{2_f}$ , onde  $\Delta_{\phi_f} = \phi_{2_f} - \phi_{1_f}$ , posicionada ao longo da direção  $\hat{\rho}$ , compreendida entre o cilindro condutor elétrico perfeito (posicionado em  $\rho = a$ ) e a antena (posicionada em  $\rho = b$ ).

A densidade de corrente do alimentador será representada da seguinte forma:

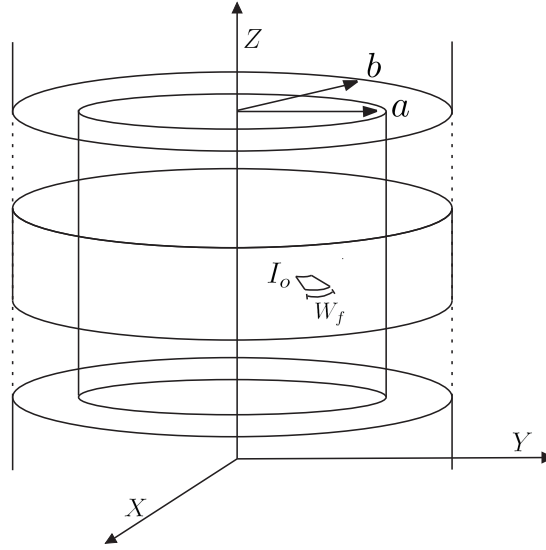


Figura 2.14: Antena alimentada por uma fita condutora

$$\vec{J}_f(\rho, \phi, z) = \begin{cases} \frac{I_o}{\rho \Delta \phi_f} \delta(z - z_f) \hat{\rho} & (\phi_{1f} \leq \phi \leq \phi_{2f}) \text{ e } (a \leq \rho \leq b) \\ 0 & \text{fora} \end{cases} \quad (2.122)$$

Fazendo a transformada de Fourier da densidade de corrente de acordo com a equação (2.20b), teremos que:

$$\tilde{J}_f^{es}(\rho, n, q) = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{L_{zc}} \int_0^{2\pi} \int_{z_{1c}}^{z_{2c}} \vec{J}_f(\rho, \phi, z) e^{jn\phi} \text{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] dz d\phi \quad (2.123)$$

Substituindo (2.122) em (2.123):

$$\tilde{J}_f^{es}(\rho, n, q) = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{L_{zc}} \int_{\phi_{1f}}^{\phi_{2f}} \int_{z_{1c}}^{z_{2c}} \frac{I_o}{\rho \Delta \phi_f} \delta(z - z_f) e^{jn\phi} \text{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] dz d\phi \quad (2.124)$$

Fazendo a integral em  $z$ :

$$\tilde{J}_f^{es}(\rho, n, q) = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{L_{zc}} \int_{\phi_{1f}}^{\phi_{2f}} \frac{I_o}{\rho \Delta \phi_f} e^{jn\phi} \text{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z_f - z_{1c}) \right] d\phi \quad (2.125)$$

Fazendo a integral em  $\phi$ :

$$\tilde{J}_f^{es}(\rho, n, q) = \frac{I_o}{\pi L_{zc} \rho \Delta \phi_f} \text{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z_f - z_{1c}) \right] \frac{e^{jn\phi}}{jn} \Big|_{\phi_{1f}}^{\phi_{2f}} \quad (2.126)$$

Assim, para o caso da excitação ser feita por um alimentador teremos que:

$$\tilde{J}_f^{es}(\rho, n, q) = \frac{I_o \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z_f - z_{1c}) \right] \left[ e^{jn\phi_{2f}} - e^{jn\phi_{1f}} \right]}{jn\pi L_{zc} \rho \Delta\phi_f} \quad (2.127)$$

### 2.6.1 Excitação por múltiplos alimentadores

A excitação da antena pode ser realizada por mais de um alimentador. Nesta forma de alimentação, a antena anular é alimentada por um conjunto de alimentadores espalhados simetricamente ao redor da antena. Se o espaço entre os alimentadores é menor que o comprimento de onda no substrato, obtém-se uma aproximação uniforme da distribuição azimutal dos campos elétricos. Neste caso apenas os modos  $TM_{0N}$  são excitados.

Uma vez que apenas a posição dos alimentadores ao longo de  $\phi$  será alterada, os coeficientes  $\phi_{1f}$  e  $\phi_{2f}$ , representam respectivamente o ângulo inicial e o ângulo final da fita alimentadora da antena, e os mesmos podem ser descritos da seguinte forma:

$$\phi_{1f} = \phi_f - \frac{\Delta\phi_f}{2} \quad (2.128)$$

$$\phi_{2f} = \phi_f + \frac{\Delta\phi_f}{2} \quad (2.129)$$

onde  $\phi_f$  é o ângulo central da fita alimentadora.

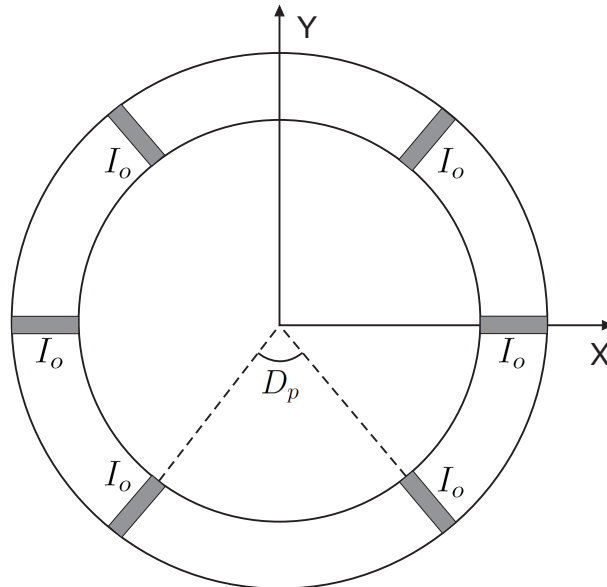


Figura 2.15: Antena alimentada por multiplas fitas condutoras

Substituindo (2.128) e (2.129) em (2.127):

$$\tilde{J}_f^{es}(\rho, n, q) = \frac{I_o \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z_f - z_{1c}) \right] e^{jn\phi_f} \left[ e^{jn\frac{\Delta\phi_f}{2}} - e^{-jn\frac{\Delta\phi_f}{2}} \right]}{jn\pi L_{zc} \rho \Delta\phi_f} \quad (2.130)$$

Onde:

$$\left[ e^{jn\frac{\Delta\phi_f}{2}} - e^{-jn\frac{\Delta\phi_f}{2}} \right] = 2j \operatorname{sen} \left( \frac{n\Delta\phi_f}{2} \right) \quad (2.131)$$

Substituindo (2.131) em (2.130):

$$\tilde{J}_f^{es}(\rho, n, q) = \frac{2I_o \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z_f - z_{1c}) \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\Delta\phi_f}{2} \right) e^{jn\phi_f}}{n\pi L_{zc} \rho \Delta\phi_f} \quad (2.132)$$

Utilizando múltiplos alimentadores, os mesmos devem estar igualmente espaçados ao longo da coordenada  $\phi$ , portanto o ângulo entre os mesmos pode ser encontrado facilmente pela seguinte equação:

$$D_p = \frac{2\pi}{N_p} \quad (2.133)$$

Onde  $D_p$  e  $N_p$  representam respectivamente o ângulo entre os alimentadores ao longo da coordenada  $\phi$  em relação ao centro de cada alimentador e o número total de alimentadores.

Para incluir a contribuição de cada alimentador na função de densidade de corrente transformada, basta substituir a exponencial  $e^{jn\phi_f}$ , por um somatório contendo a contribuição de cada alimentador em sua determinada posição em  $\phi$ . Dessa forma, a contribuição dos  $N_p$  alimentadores pode ser representada da seguinte forma:

$$\sum_{I_p=0}^{N_p-1} e^{jn[\phi_f + I_p D_p]} \quad (2.134)$$

A equação (2.134) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\sum_{I_p=0}^{N_p-1} e^{jn[\phi_f + I_p \frac{2\pi}{N_p}]} = e^{jn\phi_f} \sum_{I_p=0}^{N_p-1} e^{jn I_p D_p} \quad (2.135)$$

Substituindo a exponencial  $e^{jn\phi_f}$  da equação (2.132) pela equação (2.135), a densidade de corrente transformada para um ou mais alimentadores é fornecida por:

$$\tilde{J}_f^{es}(\rho, n, q) = \frac{2I_o \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z_f - z_{1c}) \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\Delta\phi_f}{2} \right)}{n\pi L_{zc} \rho \Delta\phi_f} \cdot e^{jn\phi_f} \sum_{I_p=0}^{N_p-1} e^{jn I_p D_p} \quad (2.136)$$

## 2.7 Método de Galerkin

Na seção (2.4) as correntes magnéticas  $M_z$  e  $M_\phi$  foram expandidas em séries finitas das seguintes formas:

$$M_z(\phi, z) = \sum_{u=-U}^U \sum_{t=1}^{T_z} c_{ut} M_{z_{ut}}(\phi, z)$$

$$M_\phi(\phi, z) = \sum_{u=-U}^U \sum_{t=1}^{T_\phi} d_{ut} M_{\phi_{ut}}(\phi, z)$$

onde as funções  $M_{z_{ut}}$  e  $M_{\phi_{ut}}$  representam as funções de base. As mesmas foram analisadas de acordo com as condições de contorno do problema e foram determinadas as funções de base transformadas  $\widetilde{M}_{z_{ut}}$  e  $\widetilde{M}_{\phi_{ut}}$ . Os coeficientes  $c_{ut}$  e  $d_{ut}$  são desconhecidos, e serão determinados com a utilização da técnica numérica do método dos momentos.

Na interface dielétrica (substrato-ar) da cavidade, em  $\rho = b$ , a seguinte condição de contorno deve ser satisfeita,  $H^< = H^>$ . Onde  $H^<$  representa os campos magnéticos no interior da cavidade devido às correntes  $M_z$ ,  $M_\phi$  e  $J_f$ , e  $H^>$  representa os campos magnéticos no exterior da cavidade devido às correntes  $M_z$  e  $M_\phi$ .

A condição acima descrita pode ser melhor interpretada da seguinte forma:

$$\underbrace{H^<(M_z) + H^<(M_\phi) + H^<(J_f)}_{H^<} = \underbrace{H^>(M_z) + H^>(M_\phi)}_{H^>} \quad (2.137)$$

Substituindo as correntes  $M_z$  e  $M_\phi$  em suas formas expandidas dadas pelas equações (2.80) e (2.110), em (2.137), a condição de contorno na interface dielétrica da cavidade pode ser reescrita como:

$$\sum_{u=-U}^U \sum_{t=1}^{T_z} c_{ut} [H^<(M_{z_{ut}}) - H^>(M_{z_{ut}})] + \sum_{u=-U}^U \sum_{t=1}^{T_\phi} d_{ut} [H^<(M_{\phi_{ut}}) - H^>(M_{\phi_{ut}})] = -H^<(J_f) \quad (2.138)$$

A condição de independência linear entre os elementos e a simplicidade computacional são importantes características das funções de base. Por causa disso, as funções de base são frequentemente utilizadas como funções de teste. Esta técnica é conhecida como método de Galerkin.

Fazendo o produto simétrico entre a equação (2.138) e as funções de base, o problema em questão pode ser dividido da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{u=-U}^U \sum_{t=1}^{T_z} c_{ut} \langle H_z^<(M_{z_{ut}}) - H_z^>(M_{z_{ut}}), M_{z_{ms}} \rangle \\
 + & \sum_{u=-U}^U \sum_{t=1}^{T_z} d_{ut} \langle H_z^<(M_{\phi_{ut}}) - H_z^>(M_{\phi_{ut}}), M_{z_{ms}} \rangle = - \langle H_z^<(J_f), M_{z_{ms}} \rangle \quad (2.139)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{u=-U}^U \sum_{t=1}^{T_z} c_{ut} \langle H_\phi^<(M_{z_{ut}}) - H_\phi^>(M_{z_{ut}}), M_{\phi_{ms}} \rangle \\
 + & \sum_{u=-U}^U \sum_{t=1}^{T_z} d_{ut} \langle H_\phi^<(M_{\phi_{ut}}) - H_\phi^>(M_{\phi_{ut}}), M_{\phi_{ms}} \rangle = - \langle H_\phi^<(J_f), M_{\phi_{ms}} \rangle \quad (2.140)
 \end{aligned}$$

Reescrevendo em forma matricial, as equações (2.139) e (2.140) ficam:

$$\begin{bmatrix} Z_{ms,ut}^{zz} & Z_{ms,ut}^{z\phi} \\ Z_{ms,ut}^{\phi z} & Z_{ms,ut}^{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{ut} \\ d_{ut} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{ms}^z \\ V_{ms}^\phi \end{bmatrix} \quad (2.141)$$

onde:

$Z_{ms,ut}^{zz}$  é definido como o produto simétrico entre o campo  $H_z$  devido a corrente  $M_{z_{ut}}$  pela função de base  $M_{z_{ms}}$ .

$Z_{ms,ut}^{z\phi}$  é definido como o produto simétrico entre o campo  $H_z$  devido a corrente  $M_{\phi_{ut}}$  pela função de base  $M_{z_{ms}}$ .

$Z_{ms,ut}^{\phi z}$  é definido como o produto simétrico entre o campo  $H_\phi$  devido a corrente  $M_{z_{ut}}$  pela função de base  $M_{\phi_{ms}}$ .

$Z_{ms,ut}^{\phi\phi}$  é definido como o produto simétrico entre o campo  $H_\phi$  devido a corrente  $M_{\phi_{ut}}$  pela função de base  $M_{\phi_{ms}}$ .

$V_{ms}^z$  é definido como o produto simétrico entre o campo  $H_z$  devido a densidade de corrente  $J_f$  pela função de base  $M_{z_{ms}}$ .

$V_{ms}^\phi$  é definido como o produto simétrico entre o campo  $H_\phi$  devido a densidade de corrente  $J_f$  pela função de base  $M_{\phi_{ms}}$ .

$c_{ut}$  e  $d_{ut}$  são os coeficientes a serem determinados.

A montagem no sistema na forma matricial permite que o mesmo seja resolvido computacionalmente através da aplicação da matriz inversa, onde os resultados são os valores dos coeficientes  $c_{ut}$  e  $d_{ut}$ . O conhecimento desses coeficientes permite determinar a distribuição das correntes magnéticas superficiais sobre a interface dielétrica substrato-ar, e consequentemente os campos eletromagnéticos internos e externos à cavidade.

### 2.7.1 Elementos da submatriz $Z^{zz}$

Os elementos da submatriz  $Z_{ms,ut}^{zz}$  são calculados através do produto simétrico entre o campo magnético  $H_z$  das regiões interna e externa à cavidade devido à corrente magnética  $M_{zut}$ , pela função de teste, que nesse caso será a própria função de base  $M_{zms}$ . Assim teremos que:

$$Z_{ms,ut}^{zz} = \langle H_z^<(M_{zut}) - H_z^>(M_{zut}), M_{zms} \rangle \quad (2.142)$$

Pelas propriedades do produto simétrico,  $Z_{ms,ut}^{zz}$  pode ser escrito como:

$$Z_{ms,ut}^{zz} = \langle H_z^<(M_{zut}), M_{zms} \rangle - \langle H_z^>(M_{zut}), M_{zms} \rangle \quad (2.143)$$

Dando prosseguimento ao desenvolvimento do primeiro produto simétrico da submatriz  $Z_{ms,ut}^{zz}$ , de (2.27c) o campo magnético  $\tilde{H}_z^{es}$  devido à corrente magnética  $\tilde{M}_{zut}^{es}$  vale:

$$\tilde{H}_z^{es<}(\tilde{M}_{zut}^{es})(b, n, q) = \frac{(k_{\rho_d})^2}{j\omega\mu_d} \tilde{F}_z^{es}(\tilde{M}_{zut}^{es})(b, n, q) \quad (2.144)$$

De (2.52) o potencial vetor elétrico  $\tilde{F}_z^{es}$  devido à corrente magnética  $\tilde{M}_{zut}^{es}$  é igual a:

$$\tilde{F}_z^{es}(\tilde{M}_{zut}^{es})(b, n, q) = \tilde{G}_{Mz}^{Fd}(b, n, q) \tilde{M}_{zut}^{es}(n, q) \quad (2.145)$$

Substituindo (2.145) em (2.144):

$$\tilde{H}_z^{es}(\tilde{M}_{zut}^{es})(b, n, q) = \frac{(k_{\rho_d})^2}{j\omega\mu_d} \tilde{G}_{Mz}^{Fd}(b, n, q) \tilde{M}_{zut}^{es}(n, q) \quad (2.146)$$

Tomando a transformada inversa, de acordo com (2.20a), o campo magnético  $H_z^<(M_{zut})$  será:

$$H_z^<(M_{zut})(b, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{H}_z^{es}(\tilde{M}_{zut}^{es})(b, n, q) e^{-jn\phi} \text{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}}(z - z_{1c}) \right] \quad (2.147)$$

Substituindo (2.146) em (2.147):

$$H_z^<(M_{zut})(b, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[ \frac{(k_{\rho_d})^2}{j\omega\mu_d} \tilde{G}_{Mz}^{Fd}(b, n, q) \tilde{M}_{zut}^{es}(n, q) \right] e^{-jn\phi} \text{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}}(z - z_{1c}) \right] \quad (2.148)$$

Pela equação (2.93):

$$\widetilde{M}_{zut}^{es}(n, q) = \delta_{(n,u)} \underbrace{\frac{4}{L_{zc}\Delta (q\pi/L_{zc})^2} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z_t - z_{1c}) \right]}_{\widetilde{f}_t^s(q)} \left[ 1 - \cos \left( \frac{q\pi\Delta}{L_{zc}} \right) \right] \quad (2.149)$$

Substituindo (2.149) em (2.148):

$$H_z^<(M_{zut})(b, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[ \frac{(k_{\rho_d})^2}{j\omega\mu_d} \widetilde{G}_{Mz}^{Fd}(b, n, q) \delta_{(n,u)} \widetilde{f}_t^s(q) \right] e^{-jn\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] \quad (2.150)$$

Aplicando  $\delta_{(n,u)}$ ,  $H_z^<(M_{zut})$  será definido como:

$$H_z^<(M_{zut})(b, \phi, z) = \sum_{q=1}^{\infty} \left[ \frac{(k_{\rho_d})^2}{j\omega\mu_d} \widetilde{G}_{Mz}^{Fd}(b, u, q) \widetilde{f}_t^s(q) \right] e^{-ju\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] \quad (2.151)$$

Fazendo o produto simétrico entre  $H_z^<(M_{zut})$  e  $M_{zms}$ :

$$\langle H_z^<(M_{zut}), M_{zms} \rangle = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_z^<(M_{zut})(b, \phi, z) M_{zms}(\phi, z) b d\phi dz \quad (2.152)$$

Substituindo (2.151) em (2.152):

$$\begin{aligned} \langle H_z^<(M_{zut}), M_{zms} \rangle &= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(k_{\rho_d})^2}{j\omega\mu_d} \widetilde{G}_{Mz}^{Fd}(b, u, q) \widetilde{f}_t^s(q) b \\ &\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} M_{zms}(\phi, z) e^{-ju\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] d\phi dz \end{aligned} \quad (2.153)$$

Usando a definição de transformada dada por (2.20b) sobre o integrando da equação (2.153), o mesmo pode ser reescrito como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} M_{zms}(\phi, z) e^{-ju\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] d\phi dz = \pi L_{zc} \widetilde{M}_{zms}^{es}(-u, q) \quad (2.154)$$

De (2.93):

$$\widetilde{M}_{zms}^{es}(-u, q) = \delta_{(m,-u)} \underbrace{\frac{4}{L_{zc}\Delta (q\pi/L_{zc})^2} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z_s - z_{1c}) \right]}_{\widetilde{f}_s^s(q)} \left[ 1 - \cos \left( \frac{q\pi\Delta}{L_{zc}} \right) \right] \quad (2.155)$$

A equação (2.154) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} M_{z_{ms}}(\phi, z) e^{-ju\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}}(z - z_{1c}) \right] d\phi dz = \pi L_{zc} \delta_{(m,-u)} \tilde{f}_s^s(q) \quad (2.156)$$

Substituindo (2.156) em (2.153):

$$\langle H_z^<(M_{z_{ut}}), M_{z_{ms}} \rangle = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(k_{\rho d})^2}{j\omega\mu_d} \tilde{G}_{Mz}^{Fd}(b, u, q) \tilde{f}_t^s(q) b\pi L_{zc} \delta_{(m,-u)} \tilde{f}_s^s(q) \quad (2.157)$$

Assim:

$$\langle H_z^<(M_{z_{ut}}), M_{z_{ms}} \rangle = \delta_{(m,-u)} \frac{b\pi L_{zc}}{j\omega\mu_d} \sum_{q=1}^{\infty} (k_{\rho d})^2 \tilde{G}_{Mz}^{Fd}(b, u, q) \tilde{f}_t^s(q) \tilde{f}_s^s(q) \quad (2.158)$$

Analisando o segundo produto simétrico de (2.143). De (2.63f) o campo magnético externo  $\tilde{H}_z^{ef}$  devido à corrente magnética  $\tilde{M}_{z_{ut}}$  vale:

$$\tilde{H}_z^{ef}(\tilde{M}_{z_{ut}})(b, n, k_z) = \frac{(k_{\rho o})^2}{j\omega\mu_o} \tilde{F}_{z_o}^{ef}(\tilde{M}_{z_{ut}}^{ef})(b, n, k_z) \quad (2.159)$$

De (2.78b) o potencial vetor elétrico  $\tilde{F}_z^{ef}$  devido à corrente magnética  $\tilde{M}_{z_{ut}}^{ef}$  é igual a:

$$\tilde{F}_{z_o}^{ef}(\tilde{M}_{z_{ut}}^{ef})(\rho, n, k_z) = \tilde{G}_{Mz}^{Fo}(\rho, n, k_z) \tilde{M}_{z_{ut}}^{ef}(n, k_z) \quad (2.160)$$

Substituindo (2.160) em (2.159):

$$\tilde{H}_z^{ef}(\tilde{M}_{z_{ut}})(b, n, k_z) = \frac{(k_{\rho o})^2}{j\omega\mu_o} \tilde{G}_{Mz}^{Fo}(b, n, k_z) \tilde{M}_{z_{ut}}^{ef}(n, k_z) \quad (2.161)$$

Tomando a transformada inversa, de acordo com (2.58a), o campo magnético  $H_z^>(M_{z_{ut}})$  será:

$$H_z^>(M_{z_{ut}})(b, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}_z^{ef}(\tilde{M}_{z_{ut}})(b, n, k_z) e^{-jk_z z} e^{-jn\phi} dk_z \quad (2.162)$$

Substituindo (2.161) em (2.162):

$$H_z^>(M_{z_{ut}})(b, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{(k_{\rho o})^2}{j\omega\mu_o} \tilde{G}_{Mz}^{Fo}(b, n, k_z) \tilde{M}_{z_{ut}}^{ef}(n, k_z) \right] e^{-jk_z z} e^{-jn\phi} dk_z \quad (2.163)$$

De (2.88):

$$\widetilde{M}_{zut}^{ef}(n, k_z) = \delta_{(n,u)} \underbrace{\frac{e^{jk_z z t}}{\pi \Delta k_z^2} [1 - \cos(k_z \Delta)]}_{\widetilde{f}_t^f(k_z)} \quad (2.164)$$

Substituindo (2.164) em (2.163):

$$H_z^>(M_{zut})(b, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{(k_{\rho_o})^2}{j\omega\mu_o} \widetilde{G}_{Mz}^{Fo}(b, n, k_z) \delta_{(n,u)} \widetilde{f}_t^f(k_z) \right] e^{-jk_z z} e^{-jn\phi} dk_z \quad (2.165)$$

Aplicando  $\delta_{(n,u)}$ ,  $H_z^>(M_{zut})$  será definido como:

$$H_z^>(M_{zut})(b, \phi, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{(k_{\rho_o})^2}{j\omega\mu_o} \widetilde{G}_{Mz}^{Fo}(b, u, k_z) \widetilde{f}_t^f(k_z) \right] e^{-jk_z z} e^{-ju\phi} dk_z \quad (2.166)$$

Fazendo o produto simétrico entre  $H_z^>(M_{zut})$  e  $M_{zms}$ :

$$\langle H_z^>(M_{zut}), M_{zms} \rangle = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_z^>(M_{zut})(b, \phi, z) M_{zms}(\phi, z) b d\phi dz \quad (2.167)$$

Substituindo (2.166) em (2.167):

$$\begin{aligned} \langle H_z^>(M_{zut}), M_{zms} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(k_{\rho_o})^2}{j\omega\mu_o} \widetilde{G}_{Mz}^{Fo}(b, u, k_z) \widetilde{f}_t^f(k_z) \\ &\cdot \left[ \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_{zms}(\phi, z) e^{-jk_z z} e^{-ju\phi} d\phi dz \right] b dk_z \end{aligned} \quad (2.168)$$

Usando a definição de transformada dada por (2.58b) sobre o integrando da equação (2.168), o mesmo pode ser reescrito como:

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_{zms}(\phi, z) e^{-jk_z z} e^{-ju\phi} d\phi dz dk_z = (2\pi)^2 \widetilde{M}_{zms}^{ef}(-u, -k_z) \quad (2.169)$$

De (2.88):

$$\widetilde{M}_{zms}^{ef}(-u, -k_z) = \delta_{(m,-u)} \underbrace{\frac{e^{-jk_z z s}}{\pi \Delta k_z^2} [1 - \cos(-k_z \Delta)]}_{\widetilde{f}_s^f(-k_z)} \quad (2.170)$$

A equação (2.169) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_{zms}(\phi, z) e^{-jk_z z} e^{-ju\phi} d\phi dz = (2\pi)^2 \delta_{(m,-u)} \widetilde{f}_s^f(-k_z) \quad (2.171)$$

Substituindo (2.171) em (2.168):

$$\langle H_z^>(M_{z_{ut}}), M_{z_{ms}} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(k_{\rho_o})^2}{j\omega\mu_o} \tilde{G}_{M_z}^{Fo} (b, u, k_z) \tilde{f}_t^f(k_z) (2\pi)^2 \delta_{(m,-u)} \tilde{f}_s^f(-k_z) b dz \quad (2.172)$$

Assim:

$$\langle H_z^>(M_{z_{ut}}), M_{z_{ms}} \rangle = \delta_{(m,-u)} \frac{(2\pi)^2 b}{j\omega\mu_o} \int_{-\infty}^{\infty} (k_{\rho_o})^2 \tilde{G}_{M_z}^{Fo} (b, u, k_z) \tilde{f}_t^f(k_z) \tilde{f}_s^f(-k_z) dk_z \quad (2.173)$$

Substituindo (2.158) e (2.173) em (2.143), o elemento da submatriz  $Z_{ms,ut}^{zz}$  será:

$$\begin{aligned} Z_{ms,ut}^{zz} &= \delta_{(m,-u)} \frac{b\pi L_{zc}}{j\omega\mu_d} \sum_{q=1}^{\infty} (k_{\rho_d})^2 \tilde{G}_{M_z}^{Fd} (b, u, q) \tilde{f}_t^s(q) \tilde{f}_s^s(q) \\ &- \delta_{(m,-u)} \frac{(2\pi)^2 b}{j\omega\mu_o} \int_{-\infty}^{\infty} (k_{\rho_o})^2 \tilde{G}_{M_z}^{Fo} (b, u, k_z) \tilde{f}_t^f(k_z) \tilde{f}_s^f(-k_z) dk_z \end{aligned} \quad (2.174)$$

### 2.7.2 Elementos da submatriz $Z^{z\phi}$

Os elementos da submatriz  $Z_{ms,ut}^{z\phi}$  são calculados através do produto simétrico entre o campo magnético  $H_z$  das regiões interna e externa à cavidade devido à corrente magnética  $M_{\phi_{ut}}$ , pela função de teste  $M_{z_{ms}}$ . Assim teremos que:

$$Z_{ms,ut}^{z\phi} = \langle H_z^<(M_{\phi_{ut}}) - H_z^>(M_{\phi_{ut}}), M_{z_{ms}} \rangle \quad (2.175)$$

Pelas propriedades do produto simétrico,  $Z_{ms,ut}^{z\phi}$  pode ser escrito como:

$$Z_{ms,ut}^{z\phi} = \langle H_z^<(M_{\phi_{ut}}), M_{z_{ms}} \rangle - \langle H_z^>(M_{\phi_{ut}}), M_{z_{ms}} \rangle \quad (2.176)$$

Dando prosseguimento ao desenvolvimento do primeiro produto simétrico da submatriz  $Z_{ms,ut}^{z\phi}$ , de (2.27c) o campo magnético  $\tilde{H}_z^{es}$  devido à corrente magnética  $\tilde{M}_{\phi_{ut}}^{ec}$  vale:

$$\tilde{H}_z^{es}(\tilde{M}_{\phi_{ut}}) (b, n, q) = \frac{(k_{\rho_d})^2}{j\omega\mu_d} \tilde{F}_z^{es}(\tilde{M}_{\phi_{ut}}^{ec}) (b, n, q) \quad (2.177)$$

De (2.52) o potencial vetor elétrico  $\tilde{F}_z^{es}$  devido à corrente magnética  $\tilde{M}_{\phi_{ut}}^{ec}$  é igual a:

$$\tilde{F}_z^{es}(\tilde{M}_{\phi_{ut}}^{ec}) (b, n, q) = \tilde{G}_{M_\phi}^{Fd} (b, n, q) \tilde{M}_{\phi_{ut}}^{ec} (n, q) \quad (2.178)$$

Substituindo (2.178) em (2.177):

$$\tilde{H}_z^{es}(\tilde{M}_{\phi_{ut}}^{ec})(b, n, q) = \frac{(k_{\rho_d})^2}{j\omega\mu_d} \tilde{G}_{M\phi}^{Fd}(b, n, q) \tilde{M}_{\phi_{ut}}^{ec}(n, q) \quad (2.179)$$

Tomando a transformada inversa, de acordo com (2.20a), o campo magnético  $H_z^<(M_{\phi_{ut}})$  será:

$$H_z^<(M_{\phi_{ut}})(b, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{H}_z^{es}(\tilde{M}_{\phi_{ut}}^{ec})(b, n, q) e^{-jn\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}}(z - z_{1c}) \right] \quad (2.180)$$

Substituindo (2.179) em (2.180):

$$H_z^<(M_{\phi_{ut}})(b, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[ \frac{(k_{\rho_d})^2}{j\omega\mu_d} \tilde{G}_{M\phi}^{Fd}(b, n, q) \tilde{M}_{\phi_{ut}}^{ec}(n, q) \right] e^{-jn\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}}(z - z_{1c}) \right] \quad (2.181)$$

Pela equação (2.120):

$$\tilde{M}_{\phi_{ut}}^{ec}(n, q) = \delta_{(n,u)} \frac{L_q}{L_{zc}} \underbrace{\left\{ \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}}(z_t - z_{1c}) \right] - \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}}(z_t - \Delta - z_{1c}) \right] \right\}}_{\tilde{g}_t^c(q)} \quad (2.182)$$

Substituindo (2.182) em (2.181):

$$H_z^<(M_{\phi_{ut}})(b, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[ \frac{(k_{\rho_d})^2}{j\omega\mu_d} \tilde{G}_{M\phi}^{Fd}(b, n, q) \delta_{(n,u)} \tilde{g}_t^c(q) \right] e^{-jn\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}}(z - z_{1c}) \right] \quad (2.183)$$

Aplicando  $\delta_{(n,u)}$ ,  $H_z^<(M_{\phi_{ut}})$  será definido como:

$$H_z^<(M_{\phi_{ut}})(b, \phi, z) = \sum_{q=1}^{\infty} \left[ \frac{(k_{\rho_d})^2}{j\omega\mu_d} \tilde{G}_{M\phi}^{Fd}(b, u, q) \tilde{g}_t^c(q) \right] e^{-ju\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}}(z - z_{1c}) \right] \quad (2.184)$$

Fazendo o produto simétrico entre  $H_z^<(M_{\phi_{ut}})$  e  $M_{z_{ms}}$ :

$$\langle H_z^<(M_{\phi_{ut}}), M_{z_{ms}} \rangle = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_z^<(M_{\phi_{ut}})(b, \phi, z) M_{z_{ms}}(\phi, z) b d\phi dz \quad (2.185)$$

Substituindo (2.184) em (2.185):

$$\begin{aligned} \langle H_z^<(M_{\phi_{ut}}), M_{z_{ms}} \rangle &= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(k_{\rho_d})^2}{j\omega\mu_d} \tilde{G}_{M\phi}^{Fd}(b, u, q) \tilde{g}_t^c(q) \cdot \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} M_{z_{ms}}(\phi, z) e^{-ju\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}}(z - z_{1c}) \right] b d\phi dz \end{aligned} \quad (2.186)$$

Usando a definição de transformada dada por (2.20b) sobre o integrando da equação (2.186), o mesmo pode ser reescrito de acordo com a equação (2.156).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} M_{z_{ms}}(\phi, z) e^{-ju\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}}(z - z_{1c}) \right] d\phi dz = \pi L_{zc} \delta_{(m,-u)} \tilde{f}_s^s(q)$$

Substituindo (2.156) em (2.186):

$$\langle H_z^<(M_{\phi_{ut}}), M_{z_{ms}} \rangle = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(k_{\rho_d})^2}{j\omega\mu_d} \tilde{G}_{M\phi}^{Fd}(b, u, q) \tilde{g}_t^c(q) b\pi L_{zc} \delta_{(m,-u)} \tilde{f}_s^s(q) \quad (2.187)$$

Assim:

$$\langle H_z^<(M_{\phi_{ms}}), M_{z_{ms}} \rangle = \delta_{(m,-u)} \frac{b\pi L_{zc}}{j\omega\mu_d} \sum_{q=1}^{\infty} (k_{\rho_d})^2 \tilde{G}_{M\phi}^{Fd}(b, u, q) \tilde{g}_t^c(q) \tilde{f}_s^s(q) \quad (2.188)$$

Analisando o segundo produto simétrico de (2.176). De (2.63f) o campo magnético externo  $\tilde{H}_z^{ef}$  devido à corrente magnética  $\tilde{M}_{\phi_{ut}}$  vale:

$$\tilde{H}_z^{ef}(\tilde{M}_{\phi_{ut}})(b, n, k_z) = \frac{(k_{\rho_o})^2}{j\omega\mu_o} \tilde{F}_{z_o}^{ef}(\tilde{M}_{\phi_{ut}})(b, n, k_z) \quad (2.189)$$

De (2.78b) o potencial vetor elétrico  $\tilde{F}_{z_o}^{ef}$  devido à corrente magnética  $\tilde{M}_{\phi_{ut}}^{ef}$  é igual a:

$$\tilde{F}_{z_o}^{ef}(\tilde{M}_{\phi_{ut}}^{ef})(b, n, k_z) = \tilde{G}_{M\phi}^{Fo}(b, n, k_z) \tilde{M}_{\phi_{ut}}^{ef}(n, k_z) \quad (2.190)$$

Substituindo (2.190) em (2.189):

$$\tilde{H}_z^{ef}(\tilde{M}_{\phi_{ut}})(b, n, k_z) = \frac{(k_{\rho_o})^2}{j\omega\mu_o} \tilde{G}_{M\phi}^{Fo}(b, n, k_z) \tilde{M}_{\phi_{ut}}^{ef}(n, k_z) \quad (2.191)$$

Tomando a transformada inversa, de acordo com (2.58a), temos que o campo magnético  $H_z^>(M_{\phi_{ut}})$  será:

$$H_z^>(M_{\phi_{ut}})(b, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}_z^{ef}(\tilde{M}_{\phi_{ut}}^{ef})(b, n, k_z) e^{-jk_z z} e^{-jn\phi} dk_z \quad (2.192)$$

Substituindo (2.191) em (2.192):

$$H_z^>(M_{\phi_{ut}})(b, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{(k_{\rho_o})^2}{j\omega\mu_o} \tilde{G}_{M\phi}^{Fo}(b, n, k_z) \tilde{M}_{\phi_{ut}}^{ef}(n, k_z) \right] e^{-jk_z z} e^{-jn\phi} dk_z \quad (2.193)$$

De (2.116):

$$\widetilde{M}_{\phi_{ut}}^{ef}(n, k_z) = \delta_{(n,u)} \underbrace{\frac{e^{jk_z z t} (1 - e^{jk_z \Delta})}{j2\pi k_z}}_{\widetilde{g}_t^f(k_z)} \quad (2.194)$$

Substituindo (2.194) em (2.193):

$$H_z^>(M_{\phi_{ut}})(b, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{(k_{\rho_o})^2}{j\omega\mu_o} \widetilde{G}_{M\phi}^{Fo}(b, n, k_z) \delta_{(n,u)} \widetilde{g}_t^f(k_z) \right] e^{-jk_z z} e^{-jn\phi} dk_z \quad (2.195)$$

Aplicando  $\delta_{(n,u)}$ ,  $H_z^>(M_{\phi_{ut}})$  será definido como:

$$H_z^>(M_{\phi_{ut}})(b, \phi, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{(k_{\rho_o})^2}{j\omega\mu_o} \widetilde{G}_{M\phi}^{Fo}(b, u, k_z) \widetilde{g}_t^f(k_z) \right] e^{-jk_z z} e^{-ju\phi} dk_z \quad (2.196)$$

Fazendo o produto simétrico entre  $H_z^>(M_{\phi_{ut}})$  e  $M_{z_{ms}}$ :

$$\langle H_z^>(M_{\phi_{ut}}), M_{z_{ms}} \rangle = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_z^>(M_{\phi_{ut}})(b, \phi, z) M_{z_{ms}}(\phi, z) b d\phi dz \quad (2.197)$$

Substituindo (2.196) em (2.197):

$$\langle H_z^>(M_{\phi_{ut}}), M_{z_{ms}} \rangle = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(k_{\rho_o})^2}{j\omega\mu_o} \widetilde{G}_{M\phi}^{Fo}(b, u, k_z) \widetilde{g}_t^f(k_z) e^{-jk_z z} e^{-ju\phi} dk_z \right] \cdot M_{z_{ms}}(\phi, z) b d\phi dz \quad (2.198)$$

$$\begin{aligned} \langle H_z^>(M_{\phi_{ut}}), M_{z_{ms}} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(k_{\rho_o})^2}{j\omega\mu_o} b \widetilde{G}_{M\phi}^{Fo}(b, u, k_z) \widetilde{g}_t^f(k_z) \\ &\cdot \left[ \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_{z_{ms}}(\phi, z) e^{-jk_z z} e^{-ju\phi} d\phi dz \right] dk_z \end{aligned} \quad (2.199)$$

Usando a definição de transformada dada por (2.58b) sobre o integrando da equação (2.199), o mesmo pode ser reescrito de acordo com a equação (2.171):

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_{z_{ms}}(\phi, z) e^{-jk_z z} e^{-ju\phi} d\phi dz = (2\pi)^2 \delta_{(m,-u)} \widetilde{f}_s^f(-k_z)$$

Substituindo (2.171) em (2.199):

$$\langle H_z^>(M_{\phi_{ut}}), M_{z_{ms}} \rangle = \frac{b}{j\omega\mu_o} \int_{-\infty}^{\infty} (k_{\rho_o})^2 \tilde{G}_{Mz}^{Fo} (b, u, k_z) \tilde{g}_t^f(k_z) (2\pi)^2 \delta_{(m,-u)} \tilde{f}_s^f(-k_z) dk_z \quad (2.200)$$

Assim:

$$\langle H_z^>(M_{\phi_{ut}}), M_{z_{ms}} \rangle = \delta_{(m,-u)} \frac{(2\pi)^2 b}{j\omega\mu_o} \int_{-\infty}^{\infty} (k_{\rho_o})^2 \tilde{G}_{Mz}^{Fo} (b, u, k_z) \tilde{g}_t^f(k_z) \tilde{f}_s^f(-k_z) dk_z \quad (2.201)$$

Substituindo (2.188) e (2.201) em (2.176), o elemento da submatriz  $Z_{ms,ut}^{z\phi}$  será:

$$\begin{aligned} Z_{ms,ut}^{z\phi} &= \delta_{(m,-u)} \frac{b\pi L_{zc}}{j\omega\mu_d} \sum_{q=1}^{\infty} (k_{\rho_d})^2 \tilde{G}_{M\phi}^{Fd} (b, u, q) \tilde{g}_t^c(q) \tilde{f}_s^s(q) \\ &- \delta_{(m,-u)} \frac{(2\pi)^2 b}{j\omega\mu_o} \int_{-\infty}^{\infty} (k_{\rho_o})^2 \tilde{G}_{M\phi}^{Fo} (b, u, k_z) \tilde{g}_t^f(k_z) \tilde{f}_s^f(-k_z) dk_z \end{aligned} \quad (2.202)$$

### 2.7.3 Elementos da submatriz $V^z$

Os elementos da submatriz  $V_{ms}^z$  são calculados através produto simétrico entre o campo magnético  $H_z$  devido a densidade de corrente elétrica  $J_f$ , pela função de teste  $M_{z_{ms}}$ . Pela equação (2.139) teremos que:

$$V_{ms}^z = - \langle H_z^<(J_f), M_{z_{ms}} \rangle \quad (2.203)$$

$$\langle H_z^<(J_f), M_{z_{ms}} \rangle = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_z^<(J_f) (b, \phi, z) M_{z_{ms}}(\phi, z) b d\phi dz \quad (2.204)$$

Usando o teorema da Reciprocidade [20].

$$\int \int \int_v [\vec{E}^a \cdot \vec{J}^b - \vec{H}^a \cdot \vec{M}^b] dv = \int \int \int_v [\vec{E}^b \cdot \vec{J}^a - \vec{H}^b \cdot \vec{M}^a] dv \quad (2.205)$$

onde  $\vec{J}^a$ ,  $\vec{M}^a$  e  $\vec{J}^b$ ,  $\vec{M}^b$  são dois conjuntos de fontes, que são permitidos irradiarem simultaneamente ou individualmente dentro do mesmo meio na mesma frequência e produzem os campos,  $\vec{E}^a$ ,  $\vec{H}^a$  e  $\vec{E}^b$ ,  $\vec{H}^b$ , respectivamente.

Nesse caso as fontes estão configuradas da seguinte forma:

$$\vec{J}^a = J_f(\rho, \phi, z) \cdot \hat{a}_\rho \quad (2.206a)$$

$$\vec{M}^a = 0 \quad (2.206b)$$

$$\vec{J}^b = 0 \quad (2.206c)$$

$$\vec{M}^b = M_{z_{ms}}(\phi, z)\delta(\rho - b) \cdot \hat{a}_z \quad (2.206d)$$

Substituindo (2.206a)-(2.206d) em (2.205):

$$\begin{aligned} \int \int \int_v [0 - H_z(J_f)(b, \phi, z) \cdot M_{z_{ms}}(\phi, z)\delta(\rho - b)] dv = \\ \int \int \int_v [E_\rho(M_{z_{ms}})(b, \phi, z) \cdot J_f(\rho, \phi, z) - 0] dv \end{aligned} \quad (2.207)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty -H_z(J_f)(b, \phi, z) \cdot M_{z_{ms}}(\phi, z)\delta(\rho - b)\rho d\rho d\phi dz = \\ \int \int \int_v E_\rho(M_{z_{ms}})(b, \phi, z) \cdot J_f(\rho, \phi, z) dv \end{aligned} \quad (2.208)$$

Integrando o lado esquerdo da equação (2.208) em relação à  $\rho$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty -H_z(J_f)(b, \phi, z) \cdot M_{z_{ms}}(\phi, z) b d\phi dz = \\ \int \int \int_v E_\rho(M_{z_{ms}})(\rho, \phi, z) \cdot J_f(b, \phi, z) dv \end{aligned} \quad (2.209)$$

Substituindo (2.209) em (2.204):

$$-\langle H_z^<(J_f), M_{z_{ms}} \rangle = \int \int \int_v E_\rho(M_{z_{ms}})(\rho, \phi, z) \cdot J_f(b, \phi, z) dv = V_{ms}^z \quad (2.210)$$

De (2.53a) observa-se que o campo elétrico transformado em função da corrente  $\widetilde{M}_z$  será:

$$\widetilde{E}_\rho^{es}(\widetilde{M}_z)(\rho, n, q) = \frac{jn}{\rho} \widetilde{G}_{Mz}^{Fd}(\rho, n, q) \widetilde{M}_{z_{ms}}^{es}(n, q) \quad (2.211)$$

Tomando a transformada inversa, de acordo com (2.20b), temos que o campo elétrico  $E_\rho(M_{z_{ms}})$  será:

$$E_\rho(M_{z_{ms}})(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \widetilde{E}_\rho^{es}(\widetilde{M}_{z_{ms}}^{es})(\rho, n, q) e^{-jn\phi} \text{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] \quad (2.212)$$

Substituindo (2.211) em (2.212):

$$E_{\rho}(M_{z_{ms}})(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{jn}{\rho} \tilde{G}_{Mz}^{Fd}(\rho, n, q) \tilde{M}_{z_{ms}}^{es}(n, q) e^{-jn\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] \quad (2.213)$$

De (2.155):

$$\tilde{M}_{z_{ms}}^{es}(n, q) = \delta_{(m,n)} \tilde{f}_s^s(q)$$

$$E_{\rho}(M_{z_{ms}})(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{jn}{\rho} \tilde{G}_{Mz}^{Fd}(\rho, n, q) \delta_{(m,n)} \tilde{f}_s^s(q) e^{-jn\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] \quad (2.214)$$

Aplicando  $\delta_{(m,n)}$ ,  $E_{\rho}(M_{z_{ms}})$  será definido como:

$$E_{\rho}(M_{z_{ms}})(\rho, \phi, z) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{jm}{\rho} \tilde{G}_{Mz}^{Fd}(\rho, m, q) \tilde{f}_s^s(q) e^{-jm\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] \quad (2.215)$$

Substituindo (2.215) em (2.210):

$$V_{ms}^z = \int_a^b \sum_{q=1}^{\infty} \frac{jm}{\rho} \tilde{G}_{Mz}^{Fd}(\rho, m, q) \tilde{f}_s^s(q) \left[ \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{J}_f(\rho, \phi, z) e^{-jm\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] dz d\phi \right] \cdot \rho d\rho \quad (2.216)$$

Usando a definição de transformada dada por (2.20b) sobre o integrando da equação (2.216), o mesmo pode ser reescrito de acordo como:

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{J}_f(\rho, \phi, z) e^{-jm\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] dz d\phi = \pi L_{zc} \tilde{J}_f^{es}(\rho, -m, q) \quad (2.217)$$

Substituindo (2.217) em (2.216):

$$V_{ms}^z = \int_a^b \sum_{q=1}^{\infty} \frac{jm}{\rho} \tilde{G}_{Mz}^{Fd}(\rho, m, q) \tilde{f}_s^s(q) \pi L_{zc} \tilde{J}_f^{es}(\rho, -m, q) \cdot \rho d\rho \quad (2.218)$$

Assim:

$$V_{ms}^z = jm\pi L_{zc} \int_a^b \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{G}_{Mz}^{Fd}(\rho, m, q) \tilde{f}_s^s(q) \tilde{J}_f^{es}(\rho, -m, q) d\rho \quad (2.219)$$

Onde  $\tilde{J}_f^{es}(\rho, -m, q)$  é definido por (2.136).

### 2.7.4 Elementos da submatriz $Z^{\phi z}$

Os elementos da submatriz  $Z_{ms,ut}^{\phi z}$  são calculados através do produto simétrico entre o campo magnético  $H_\phi$  das regiões interna e externa à cavidade devido à corrente magnética  $M_{zut}$ , pela função de teste  $M_{\phi ms}$ . Assim teremos que:

$$Z_{ms,ut}^{\phi z} = \langle H_\phi^<(M_{zut}) - H_\phi^>(M_{zut}), M_{\phi ms} \rangle \quad (2.220)$$

Pelas propriedades do produto simétrico,  $Z_{ms,ut}^{\phi z}$  pode ser escrito como:

$$Z_{ms,ut}^{\phi z} = \langle H_\phi^<(M_{zut}), M_{\phi ms} \rangle - \langle H_\phi^>(M_{zut}), M_{\phi ms} \rangle \quad (2.221)$$

Dando prosseguimento ao desenvolvimento do primeiro produto simétrico da submatriz  $Z_{ms,ut}^{\phi z}$ , de (2.26b) o campo magnético  $\tilde{H}_\phi^{ec}$  devido à corrente magnética  $\tilde{M}_{zut}$  vale:

$$\tilde{H}_\phi^{ec}(\tilde{M}_{zut})(b, n, q) = -\frac{n}{\omega\mu_d b} \frac{q\pi}{L_{zc}} \tilde{F}_z^{es}(\tilde{M}_{zut}^{es})(b, n, q) \quad (2.222)$$

De (2.52) o potencial vetor elétrico  $\tilde{F}_z^{es}$  devido à corrente magnética  $\tilde{M}_{zut}$  é igual a:

$$\tilde{F}_z^{es}(\tilde{M}_{zut}^{es})(b, n, q) = \tilde{G}_{Mz}^{Fd}(b, n, q) \tilde{M}_{zut}^{es}(n, q) \quad (2.223)$$

Substituindo (2.223) em (2.222):

$$\tilde{H}_\phi^{ec}(\tilde{M}_{zut})(b, n, q) = -\frac{n}{\omega\mu_d b} \frac{q\pi}{L_{zc}} \tilde{G}_{Mz}^{Fd}(b, n, q) \tilde{M}_{zut}^{es}(n, q) \quad (2.224)$$

Tomando a transformada inversa, de acordo com (2.20a), o campo magnético  $H_\phi^<(M_{zut})$  será:

$$H_\phi^<(M_{zut})(b, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \tilde{H}_\phi^{ec}(\tilde{M}_{zut})(b, n, q) e^{-jn\phi} \cos \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}}(z - z_{1c}) \right] \quad (2.225)$$

Substituindo (2.224) em (2.225):

$$H_\phi^<(M_{zut})(b, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} -\frac{n}{\omega\mu_d b} \frac{q\pi}{L_{zc}} \tilde{G}_{Mz}^{Fd}(b, n, q) \tilde{M}_{zut}^{es}(n, q) e^{-jn\phi} \cos \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}}(z - z_{1c}) \right] \quad (2.226)$$

Pela equação (2.149):

$$\tilde{M}_{zut}^{es}(n, q) = \delta_{(n,u)} \tilde{f}_t^s(q) \quad (2.227)$$

Substituindo (2.227) em (2.226):

$$H_{\phi}^{<}(M_{zut})(b, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} -\frac{n}{\omega\mu_d b} \frac{q\pi}{L_{zc}} \tilde{G}_{Mz}^{Fd}(b, n, q) \delta_{(n,u)} \tilde{f}_t^s(q) e^{-jn\phi} \cos \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}}(z - z_{1c}) \right] \quad (2.228)$$

Aplicando  $\delta_{(n,u)}$ , e observando que o termo  $q = 0$  do somatório pode ser excluído,  $H_{\phi}^{<}(M_{zut})$  pode ser definido como:

$$H_{\phi}^{<}(M_{zut})(b, \phi, z) = \sum_{q=1}^{\infty} -\frac{u}{\omega\mu_d b} \frac{q\pi}{L_{zc}} \tilde{G}_{Mz}^{Fd}(b, u, q) \tilde{f}_t^s(q) e^{-ju\phi} \cos \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}}(z - z_{1c}) \right] \quad (2.229)$$

Fazendo o produto simétrico entre  $H_{\phi}^{<}(M_{zut})$  e  $M_{\phi_{ms}}$ :

$$\langle H_{\phi}^{<}(M_{zut}), M_{\phi_{ms}} \rangle = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{\phi}^{<}(M_{zut})(b, \phi, z) M_{\phi_{ms}}(\phi, z) b d\phi dz \quad (2.230)$$

Substituindo (2.229) em (2.230):

$$\begin{aligned} \langle H_{\phi}^{<}(M_{zut}), M_{\phi_{ms}} \rangle &= \sum_{q=1}^{\infty} -\frac{u}{\omega\mu_d} \frac{q\pi}{L_{zc}} \tilde{G}_{Mz}^{Fd}(b, u, q) \tilde{f}_t^s(q) \\ &\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} M_{\phi_{ms}}(\phi, z) e^{-ju\phi} \cos \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}}(z - z_{1c}) \right] d\phi dz \end{aligned} \quad (2.231)$$

Usando a definição de transformada dada por (2.16b) sobre o integrando da equação (2.231), o mesmo pode ser reescrito como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} M_{\phi_{ms}}(\phi, z) e^{-ju\phi} \cos \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}}(z - z_{1c}) \right] d\phi dz = 2\pi \frac{L_{zc}}{L_q} \tilde{M}_{\phi_{ms}}^{ec}(-u, q) \quad (2.232)$$

De (2.120):

$$\tilde{M}_{\phi_{ms}}^{ec}(-u, q) = \delta_{(m,-u)} \underbrace{\frac{L_q}{L_{zc}} \left\{ \text{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}}(z_s - z_{1c}) \right] - \text{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}}(z_s - \Delta - z_{1c}) \right] \right\}}_{\tilde{g}_s^c(q)} \quad (2.233)$$

A equação (2.232) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} M_{\phi_{ms}}(\phi, z) e^{-ju\phi} \cos \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}}(z - z_{1c}) \right] d\phi dz = 2\pi \frac{L_{zc}}{L_q} \delta_{(m,-u)} \tilde{g}_s^c(q) \quad (2.234)$$

Substituindo (2.234) em (2.231):

$$\langle H_\phi^<(M_{zut}), M_{\phi ms} \rangle = \sum_{q=1}^{\infty} -\frac{u}{\omega\mu_d} \frac{q\pi}{L_{zc}} \tilde{G}_{Mz}^{Fd}(b, u, q) \tilde{f}_t^s(q) 2\pi \frac{L_{zc}}{L_q} \delta_{(m,-u)} \tilde{g}_s^c(q) \quad (2.235)$$

Como o termo  $q = 0$  é nulo, e  $L_q = 2$  para  $q > 0$ , o produto simétrico é definido como:

$$\langle H_\phi^<(M_{zut}), M_{\phi ms} \rangle = -\delta_{(m,-u)} \frac{u\pi^2}{\omega\mu_d} \sum_{q=1}^{\infty} q \tilde{G}_{Mz}^{Fd}(b, u, q) \tilde{f}_t^s(q) \tilde{g}_s^c(q) \quad (2.236)$$

Analisando o segundo produto simétrico de (2.221). De (2.63e) o campo magnético externo  $\tilde{H}_\phi^{ef}$  devido à corrente magnética  $\tilde{M}_{zut}$  vale:

$$\tilde{H}_\phi^{ef}(\tilde{M}_{zut})(b, n, k_z) = -\frac{nk_z}{j\omega\mu_o b} \tilde{F}_{zo}^{ef}(\tilde{M}_{zut}^{ef})(b, n, k_z) \quad (2.237)$$

De (2.78b) o potencial vetor elétrico  $\tilde{F}_{zo}^{ef}$  devido à corrente magnética  $\tilde{M}_{zut}^{ef}$  é igual a:

$$\tilde{F}_{zo}^{ef}(b, n, k_z) = \tilde{G}_{Mz}^{Fo}(b, n, k_z) \tilde{M}_{zut}^{ef}(n, k_z) \quad (2.238)$$

Substituindo (2.238) em (2.237):

$$\tilde{H}_\phi^{ef}(\tilde{M}_{zut})(b, n, k_z) = -\frac{nk_z}{j\omega\mu_o b} \tilde{G}_{Mz}^{Fo}(b, n, k_z) \tilde{M}_{zut}^{ef}(n, k_z) \quad (2.239)$$

Tomando a transformada inversa, de acordo com (2.58a), temos que o campo magnético  $H_\phi^>(M_{zut})$  será:

$$H_\phi^>(M_{zut})(b, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}_\phi^{ef}(\tilde{M}_{zut}^{ef})(b, n, k_z) e^{-jk_z z} e^{-jn\phi} dk_z \quad (2.240)$$

Substituindo (2.239) em (2.240):

$$H_\phi^>(M_{zut})(b, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{nk_z}{j\omega\mu_o b} \tilde{G}_{Mz}^{Fo}(b, n, k_z) \tilde{M}_{zut}^{ef}(n, k_z) e^{-jk_z z} e^{-jn\phi} dk_z \quad (2.241)$$

De (2.164):

$$\tilde{M}_{zut}^{ef}(n, k_z) = \delta_{(n,u)} \underbrace{\frac{e^{jk_z z_t}}{\pi \Delta k_z^2} [1 - \cos(k_z \Delta)]}_{\tilde{f}_t^f(k_z)}$$

Substituindo (2.164) em (2.241):

$$H_{\phi}^{\>}(M_{zut})(b, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{nk_z}{j\omega\mu_0 b} \tilde{G}_{Mz}^{Fo}(b, n, k_z) \delta_{(n,u)} \tilde{f}_t^f(k_z) e^{-jk_z z} e^{-jn\phi} dk_z \quad (2.242)$$

Aplicando  $\delta_{(n,u)}$ ,  $H_{\phi}^{\>}(M_{zut})$  será definido como:

$$H_{\phi}^{\>}(M_{zut})(b, \phi, z) = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{uk_z}{j\omega\mu_0 b} \tilde{G}_{Mz}^{Fo}(b, u, k_z) \tilde{f}_t^f(k_z) e^{-jk_z z} e^{-ju\phi} dk_z \quad (2.243)$$

Fazendo o produto simétrico entre  $H_{\phi}^{\>}(M_{zut})$  e  $M_{\phi_{ms}}$ :

$$\langle H_{\phi}^{\>}(M_{zut}), M_{\phi_{ms}} \rangle = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{\phi}^{\>}(M_{zut})(b, \phi, z) M_{\phi_{ms}}(\phi, z) b d\phi dz \quad (2.244)$$

Substituindo (2.243) em (2.244):

$$\begin{aligned} \langle H_{\phi}^{\>}(M_{zut}), M_{\phi_{ms}} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{uk_z}{j\omega\mu_0} \tilde{G}_{Mz}^{Fo}(b, u, k_z) \tilde{f}_t^f(k_z) \\ &\cdot \left[ \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_{\phi_{ms}}(\phi, z) e^{-jk_z z} e^{-ju\phi} d\phi dz \right] dk_z \end{aligned} \quad (2.245)$$

Usando a definição de transformada dada por (2.58b) sobre o integrando da equação (2.245), o mesmo pode ser reescrito como:

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_{\phi_{ms}}(\phi, z) e^{-jk_z z} e^{-ju\phi} d\phi dz = (2\pi)^2 \tilde{M}_{\phi_{ms}}^{ef}(-u, -k_z) \quad (2.246)$$

De (2.116):

$$\tilde{M}_{\phi_{ms}}^{ef}(-u, -k_z) = \delta_{(m,-u)} \underbrace{\frac{e^{-jk_z z_s}}{j2\pi k_z} (1 - e^{-jk_z \Delta})}_{\tilde{g}_s^f(-k_z)} \quad (2.247)$$

A equação (2.246) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_{\phi_{ms}}(\phi, z) e^{-jk_z z} e^{-ju\phi} d\phi dz = (2\pi)^2 \delta_{(m,-u)} \tilde{g}_s^f(-k_z) \quad (2.248)$$

Substituindo (2.248) em (2.245):

$$\langle H_{\phi}^{\>}(M_{zut}), M_{\phi_{ms}} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{uk_z}{j\omega\mu_0} \tilde{G}_{Mz}^{Fo}(b, u, k_z) \tilde{f}_t^f(k_z) (2\pi)^2 \delta_{(m,-u)} \tilde{g}_s^f(-k_z) dk_z \quad (2.249)$$

Assim:

$$\langle H_\phi^>(M_{z_{ut}}), M_{\phi_{ms}} \rangle = -\delta_{(m,-u)} \frac{(2\pi)^2 u}{j\omega\mu_o} \int_{-\infty}^{\infty} k_z \tilde{G}_{Mz}^{Fo}(b, u, k_z) \tilde{f}_t^f(k_z) \tilde{g}_s^f(-k_z) dk_z \quad (2.250)$$

Substituindo (2.236) e (2.250) em (2.221), o elemento da submatriz  $Z_{ms,ut}^{\phi z}$  será:

$$\begin{aligned} Z_{ms,ut}^{\phi z} = & -\delta_{(m,-u)} \frac{u\pi^2}{\omega\mu_d} \sum_{q=1}^{\infty} q \tilde{G}_{Mz}^{Fd}(b, u, q) \tilde{f}_t^s(q) \tilde{g}_s^c(q) \\ & + \delta_{(m,-u)} \frac{(2\pi)^2 u}{j\omega\mu_o} \int_{-\infty}^{\infty} k_z \tilde{G}_{Mz}^{Fo}(b, u, k_z) \tilde{f}_t^f(k_z) \tilde{g}_s^f(-k_z) dk_z \end{aligned} \quad (2.251)$$

### 2.7.5 Elementos da submatriz $Z^{\phi\phi}$

Os elementos da submatriz  $Z_{ms,ut}^{\phi\phi}$  são calculados através do produto simétrico entre o campo magnético  $H_\phi$  das regiões interna e externa à cavidade devido à corrente magnética  $M_{\phi_{ut}}$ , pela função de teste  $M_{\phi_{ms}}$ . Assim teremos que:

$$Z_{ms,ut}^{\phi\phi} = \langle H_\phi^<(M_{\phi_{ut}}) - H_\phi^>(M_{\phi_{ut}}), M_{\phi_{ms}} \rangle \quad (2.252)$$

Pelas propriedades do produto simétrico,  $Z_{ms,ut}^{\phi\phi}$  pode ser escrito como:

$$Z_{ms,ut}^{\phi\phi} = \langle H_\phi^<(M_{\phi_{ut}}), M_{\phi_{ms}} \rangle - \langle H_\phi^>(M_{\phi_{ut}}), M_{\phi_{ms}} \rangle \quad (2.253)$$

Dando prosseguimento ao desenvolvimento do primeiro produto simétrico da submatriz  $Z_{ms,ut}^{\phi\phi}$ , de (2.26b) o campo magnético  $\tilde{H}_\phi^{ec}$  devido à corrente magnética  $\tilde{M}_{\phi_{ut}}$  vale:

$$\tilde{H}_\phi^{ec}(\tilde{M}_{\phi_{ut}})(b, n, q) = -\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{A}_z^{ec}(\tilde{M}_{\phi_{ut}})(b, n, q) - \frac{n}{\omega\mu_d b} \frac{q\pi}{L_{zc}} \tilde{F}_z^{es}(\tilde{M}_{\phi_{ut}})(b, n, q) \quad (2.254)$$

De (2.48) e (2.52) os potenciais vetores magnético e elétrico transformados,  $\tilde{A}_z^{ec}$  e  $\tilde{F}_z^{es}$ , devido à corrente magnética  $\tilde{M}_{\phi_{ut}}$  são respectivamente:

$$\tilde{A}_z^{ec}(\tilde{M}_{\phi_{ut}})(b, n, q) = \tilde{G}_{M\phi}^{Ad}(b, n, q) \tilde{M}_{\phi_{ut}}^{ec}(n, q) \quad (2.255)$$

$$\tilde{F}_z^{es}(\tilde{M}_{\phi_{ut}})(b, n, q) = \tilde{G}_{M\phi}^{Fd}(b, n, q) \tilde{M}_{\phi_{ut}}^{ec}(n, q) \quad (2.256)$$

Substituindo (2.255) e (2.256) em (2.254):

$$\tilde{H}_\phi^{ec}(M_{\phi_{ut}})(b, n, q) = -\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Ad}(b, n, q) \tilde{M}_\phi^{ec}(n, q) - \frac{n}{\omega \mu_d \rho} \frac{q\pi}{L_{zc}} \tilde{G}_{M\phi}^{Fd}(b, n, q) \tilde{M}_\phi^{ec}(n, q) \quad (2.257)$$

Tomando a transformada inversa, de acordo com (2.20a), o campo magnético  $H_\phi^<(M_{\phi_{ut}})$  será:

$$H_\phi^<(M_{\phi_{ut}})(b, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \tilde{H}_\phi^{ec}(\tilde{M}_{\phi_{ut}})(b, n, q) e^{-jn\phi} \cos \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}}(z - z_{1c}) \right] \quad (2.258)$$

Substituindo (2.257) em (2.258):

$$H_\phi^<(M_{\phi_{ut}})(b, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} -\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Ad}(b, n, q) \tilde{M}_\phi^{ec}(n, q) e^{-jn\phi} \cos \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}}(z - z_{1c}) \right] - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{n}{\omega \mu_d \rho} \frac{q\pi}{L_{zc}} \tilde{G}_{M\phi}^{Fd}(b, n, q) \tilde{M}_\phi^{ec}(n, q) e^{-jn\phi} \cos \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}}(z - z_{1c}) \right] \quad (2.259)$$

Pela equação (2.182):

$$\tilde{M}_{\phi_{ut}}^{ec}(n, q) = \delta_{(n,u)} \tilde{g}_t^c(q)$$

Substituindo (2.182) em (2.259):

$$H_\phi^<(M_{\phi_{ut}})(b, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} -\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Ad}(b, n, q) \delta_{(n,u)} \tilde{g}_t^c(q) e^{-jn\phi} \cos \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}}(z - z_{1c}) \right] - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{n}{\omega \mu_d b} \frac{q\pi}{L_{zc}} \tilde{G}_{M\phi}^{Fd}(b, n, q) \delta_{(n,u)} \tilde{g}_t^c(q) e^{-jn\phi} \cos \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}}(z - z_{1c}) \right] \quad (2.260)$$

$$H_\phi^<(M_{\phi_{ut}})(b, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Ad}(b, n, q) - \frac{n}{\omega \mu_d \rho} \frac{q\pi}{L_{zc}} \tilde{G}_{M\phi}^{Fd}(b, n, q) \right] \cdot \delta_{(n,u)} \tilde{g}_t^c(q) e^{-jn\phi} \cos \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}}(z - z_{1c}) \right] \quad (2.261)$$

Aplicando  $\delta_{(n,u)}$ ,  $H_\phi^<(M_{\phi_{ut}})$  será definido como:

$$H_\phi^<(M_{\phi_{ut}})(b, \phi, z) = \sum_{q=0}^{\infty} \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Ad}(b, u, q) - \frac{u}{\omega \mu_d b} \frac{q\pi}{L_{zc}} \tilde{G}_{M\phi}^{Fd}(b, u, q) \right] \cdot \tilde{g}_t^c(q) e^{-ju\phi} \cos \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}}(z - z_{1c}) \right] \quad (2.262)$$

Fazendo o produto simétrico entre  $H_\phi^<(M_{\phi_{ut}})$  e  $M_{\phi_{ms}}$ :

$$\langle H_\phi^<(M_{\phi_{ut}}), M_{\phi_{ms}} \rangle = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_\phi^<(M_{\phi_{ut}})(b, \phi, z) M_{\phi_{ms}}(\phi, z) b d\phi dz \quad (2.263)$$

Substituindo (2.262) em (2.263):

$$\begin{aligned} \langle H_\phi^<(M_{\phi_{ut}}), M_{\phi_{ms}} \rangle &= \sum_{q=0}^{\infty} \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Ad}(b, u, q) - \frac{u}{\omega \mu_d b} \frac{q\pi}{L_{zc}} \tilde{G}_{M\phi}^{Fd}(b, u, q) \right] \tilde{g}_t^c(q) b \\ &\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} M_{\phi_{ms}}(\phi, z) e^{-ju\phi} \cos \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}}(z - z_{1c}) \right] d\phi dz \quad (2.264) \end{aligned}$$

Usando a definição de transformada dada por (2.16b) sobre o integrando da equação (2.264), o mesmo pode ser reescrito da mesma forma que a equação (2.234):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} M_{\phi_{ms}}(\phi, z) e^{-ju\phi} \cos \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}}(z - z_{1c}) \right] d\phi dz = 2\pi \frac{L_{zc}}{L_q} \delta_{(m, -u)} \tilde{g}_s^c(q)$$

Substituindo (2.234) em (2.264):

$$\begin{aligned} \langle H_\phi^<(M_{\phi_{ut}}), M_{\phi_{ms}} \rangle &= \sum_{q=0}^{\infty} \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Ad}(b, u, q) - \frac{u}{\omega \mu_d b} \frac{q\pi}{L_{zc}} \tilde{G}_{M\phi}^{Fd}(b, u, q) \right] \tilde{g}_t^c(q) b \\ &\cdot 2\pi \frac{L_{zc}}{L_q} \delta_{(m, -u)} \tilde{g}_s^c(q) \quad (2.265) \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \langle H_\phi^<(M_{\phi_{ut}}), M_{\phi_{ms}} \rangle &= \delta_{(m, -u)} 2\pi b L_{zc} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{L_q} \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Ad}(b, u, q) - \frac{u}{\omega \mu_d b} \frac{q\pi}{L_{zc}} \tilde{G}_{M\phi}^{Fd}(b, u, q) \right] \\ &\cdot \tilde{g}_t^c(q) \tilde{g}_s^c(q) \quad (2.266) \end{aligned}$$

Analisando o segundo produto simétrico de (2.253). De (2.63e) o campo magnético externo  $\tilde{H}_\phi^{ef}$  devido à corrente magnética  $\tilde{M}_{\phi_{ut}}$  vale:

$$\tilde{H}_\phi^{ef}(\tilde{M}_{\phi_{ut}})(b, n, k_z) = -\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{A}_{z z_o}^{ef}(\tilde{M}_{\phi_{ut}})(b, n, k_z) - \frac{nk_z}{j\omega \mu_o b} \tilde{F}_{z z_o}^{ef}(\tilde{M}_{\phi_{ut}})(b, n, k_z) \quad (2.267)$$

De (2.78a) e (2.78b), os potenciais vetores magnético e elétrico transformados,  $\tilde{A}_\phi^{ef}$  e  $\tilde{F}_\phi^{ef}$ , devido à corrente magnética  $\tilde{M}_{\phi_{ut}}$  são respectivamente:

$$\tilde{A}_{z_o}^{ef}(\tilde{M}_{\phi_{ut}})(b, n, k_z) = \tilde{G}_{M\phi}^{Ao}(b, n, k_z) \tilde{M}_{\phi_{ut}}^{ef}(n, k_z) \quad (2.268)$$

$$\tilde{F}_{z_o}^{ef}(\tilde{M}_{\phi_{ut}})(b, n, k_z) = \tilde{G}_{M\phi}^{Fo}(b, n, k_z) \tilde{M}_{\phi_{ut}}^{ef}(n, k_z) \quad (2.269)$$

Substituindo (2.268) e (2.269) em (2.267):

$$\tilde{H}_{\phi}^{ec}(\tilde{M}_{\phi_{ut}})(b, n, q) = \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Ao}(b, n, k_z) - \frac{nk_z}{j\omega\mu_o b} \tilde{G}_{M\phi}^{Fo}(b, n, k_z) \right] \tilde{M}_{\phi_{ut}}^{ef}(n, k_z) \quad (2.270)$$

Tomando a transformada inversa, de acordo com (2.58a), temos que o campo magnético  $H_{\phi}^>(M_{\phi_{ut}})$  será:

$$H_{\phi}^>(M_{\phi_{ut}})(b, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}_{\phi}^{ef}(\tilde{M}_{\phi_{ut}})(b, n, k_z) e^{-jk_z z} e^{-jn\phi} dk_z \quad (2.271)$$

Substituindo (2.270) em (2.271):

$$H_{\phi}^>(M_{\phi_{ut}})(b, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Ao}(b, n, k_z) - \frac{nk_z}{j\omega\mu_o b} \tilde{G}_{M\phi}^{Fo}(b, n, k_z) \right] \cdot \tilde{M}_{\phi_{ut}}^{ef}(n, k_z) e^{-jk_z z} e^{-jn\phi} dk_z \quad (2.272)$$

De (2.194):

$$\tilde{M}_{\phi_{ut}}^{ef}(n, k_z) = \delta_{(n,u)} \underbrace{\frac{e^{jk_z z_t}}{j2\pi k_z} (1 - e^{jk_z \Delta})}_{\tilde{g}_t^f(k_z)}$$

Substituindo (2.194) em (2.272):

$$H_{\phi}^>(M_{\phi_{ut}})(b, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Ao}(b, n, k_z) - \frac{nk_z}{j\omega\mu_o b} \tilde{G}_{M\phi}^{Fo}(b, n, k_z) \right] \cdot \delta_{(n,u)} \tilde{g}_t^f(k_z) e^{-jk_z z} e^{-jn\phi} dk_z \quad (2.273)$$

Aplicando  $\delta_{(n,u)}$ ,  $H_{\phi}^>(M_{\phi_{ut}})$  será definido como:

$$H_{\phi}^>(M_{\phi_{ut}})(b, \phi, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Ao}(b, u, k_z) - \frac{uk_z}{j\omega\mu_o b} \tilde{G}_{M\phi}^{Fo}(b, u, k_z) \right] \cdot \tilde{g}_t^f(k_z) e^{-jk_z z} e^{-ju\phi} dk_z \quad (2.274)$$

Fazendo o produto simétrico entre  $H_\phi^>(M_{\phi_{ut}})$  e  $M_{\phi_{ms}}$ :

$$\langle H_\phi^>(M_{\phi_{ut}}), M_{\phi_{ms}} \rangle = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_\phi^>(M_{\phi_{ut}})(b, \phi, z) M_{\phi_{ms}}(\phi, z) b d\phi dz \quad (2.275)$$

Substituindo (2.274) em (2.275):

$$\begin{aligned} \langle H_\phi^>(M_{\phi_{ut}}), M_{\phi_{ms}} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Ao}(b, u, k_z) - \frac{uk_z}{j\omega\mu_o b} \tilde{G}_{M\phi}^{Fo}(b, u, k_z) \right] \tilde{g}_t^f(k_z) b \\ &\quad \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_{\phi_{ms}}(\phi, z) e^{-jk_z z} e^{-ju\phi} d\phi dz \right] dk_z \end{aligned} \quad (2.276)$$

Usando a definição de transformada dada por (2.58b) sobre o integrando da equação (2.276), o mesmo pode ser reescrito da mesma forma que a equação (2.248):

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_{\phi_{ms}}(\phi, z) e^{-jk_z z} e^{-ju\phi} d\phi dz = (2\pi)^2 \delta_{(m,-u)} \tilde{g}_s^f(-k_z)$$

Substituindo (2.248) em (2.276):

$$\begin{aligned} \langle H_\phi^>(M_{\phi_{ut}}), M_{\phi_{ms}} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Ao}(b, u, k_z) - \frac{uk_z}{j\omega\mu_o b} \tilde{G}_{M\phi}^{Fo}(b, u, k_z) \right] \\ &\quad \cdot (2\pi)^2 b \delta_{(m,-u)} \tilde{g}_t^f(k_z) \tilde{g}_s^f(-k_z) dk_z \end{aligned} \quad (2.277)$$

Assim:

$$\begin{aligned} \langle H_\phi^>(M_{\phi_{ut}}), M_{\phi_{ms}} \rangle &= \delta_{(m,-u)} (2\pi)^2 b \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Ao}(b, u, k_z) - \frac{uk_z}{j\omega\mu_o b} \tilde{G}_{M\phi}^{Fo}(b, u, k_z) \right] \\ &\quad \cdot \tilde{g}_t^f(k_z) \tilde{g}_s^f(-k_z) dk_z \end{aligned} \quad (2.278)$$

Substituindo (2.266) e (2.278) em (2.253), o elemento da submatriz  $Z_{ms,ut}^{\phi\phi}$  será:

$$\begin{aligned} Z_{ms,ut}^{\phi\phi} &= \delta_{(m,-u)} 2\pi b L_{zc} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{L_q} \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Ad}(b, u, q) - \frac{u}{\omega\mu_d b} \frac{q\pi}{L_{zc}} \tilde{G}_{M\phi}^{Fd}(b, u, q) \right] \\ &\quad \cdot \tilde{g}_t^c(q) \tilde{g}_s^c(q) - \delta_{(m,-u)} (2\pi)^2 b \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Ao}(b, u, k_z) - \frac{uk_z}{j\omega\mu_o b} \tilde{G}_{M\phi}^{Fo}(b, u, k_z) \right] \\ &\quad \cdot \tilde{g}_t^f(k_z) \tilde{g}_s^f(-k_z) dk_z \end{aligned} \quad (2.279)$$

### 2.7.6 Elementos da submatriz $V^\phi$

Os elementos da submatriz  $V_{ms}^\phi$  são calculados através do produto simétrico entre o campo magnético  $H_\phi$  devido a densidade de corrente elétrica  $J_f$ , pela função de teste  $M_{\phi_{ms}}$ . Pela equação (2.140) teremos que:

$$V_{ms}^\phi = - \langle H_\phi^<(J_f), M_{\phi_{ms}} \rangle \quad (2.280)$$

$$\langle H_\phi^<(J_f), M_{\phi_{ms}} \rangle = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_\phi^<(J_f)(b, \phi, z) M_{\phi_{ms}}(\phi, z) b d\phi dz \quad (2.281)$$

Usando o teorema da Reciprocidade [20]:

$$\int \int \int_v [\vec{E}^a \cdot \vec{J}^b - \vec{H}^a \cdot \vec{M}^b] dv = \int \int \int_v [\vec{E}^b \cdot \vec{J}^a - \vec{H}^b \cdot \vec{M}^a] dv \quad (2.282)$$

onde  $\vec{J}^a$ ,  $\vec{M}^a$  e  $\vec{J}^b$ ,  $\vec{M}^b$  são dois conjuntos de fontes, que são permitidos irradiarem simultaneamente ou individualmente dentro do mesmo meio na mesma frequência e produzem os campos,  $E^a$ ,  $H^a$  e  $E^b$ ,  $H^b$ , respectivamente.

Nesse caso as fontes estão configuradas da seguinte forma:

$$\vec{J}^a = J_f(\rho, \phi, z) \cdot \hat{a}_\rho \quad (2.283a)$$

$$\vec{M}^a = 0 \quad (2.283b)$$

$$\vec{J}^b = 0 \quad (2.283c)$$

$$\vec{M}^b = M_{\phi_{ms}}(\phi, z) \delta(\rho - b) \cdot \hat{a}_\phi \quad (2.283d)$$

Substituindo (2.283a)-(2.283d) em (2.282):

$$\begin{aligned} \int \int \int_v [0 - H_\phi(J_f)(b, \phi, z) \cdot M_{\phi_{ms}}(\phi, z) \delta(\rho - b)] dv = \\ \int \int \int_v [E_\rho(M_{\phi_{ms}})(b, \phi, z) \cdot J_f(\rho, \phi, z) - 0] dv \end{aligned} \quad (2.284)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty -H_\phi(J_f)(b, \phi, z) \cdot M_{\phi_{ms}}(\phi, z) \delta(\rho - b) \rho d\rho d\phi dz = \\ \int \int \int_v E_\rho(M_{\phi_{ms}})(\rho, \phi, z) \cdot J_f(\rho, \phi, z) dv \end{aligned} \quad (2.285)$$

Integrando o lado esquerdo da equação (2.285) em relação à  $\rho$ :

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -H_\phi(J_f)(b, \phi, z) \cdot M_{\phi_{ms}}(\phi, z) b d\phi dz = \int \int \int_v E_\rho(M_{\phi_{ms}})(\rho, \phi, z) \cdot J_f(\rho, \phi, z) dv \quad (2.286)$$

Substituindo (2.286) em (2.281):

$$-\langle H_\phi^<(J_f), M_{\phi_{ms}} \rangle = \int \int \int_v E_\rho(M_{\phi_{ms}})(\rho, \phi, z) \cdot J_f(\rho, \phi, z) dv = V_{ms}^\phi \quad (2.287)$$

De (2.53a), observa-se que o campo elétrico transformado em função da corrente  $\widetilde{M}_\phi$  será:

$$\widetilde{E}_\rho^{es}(\widetilde{M}_\phi)(\rho, n, q) = \frac{-1}{j\omega\epsilon_d} \frac{q\pi}{L_{zc}} \frac{\partial}{\partial \rho} \widetilde{G}_{M\phi}^{Ad}(\rho, n, q) \widetilde{M}_\phi^{ec}(n, q) + \frac{jn}{b} \widetilde{G}_{M\phi}^{Fd}(\rho, n, q) \widetilde{M}_\phi^{ec}(n, q) \quad (2.288)$$

Tomando a transformada inversa, de acordo com (2.20b), temos que o campo elétrico  $E_\rho(M_{\phi_{ms}})$  será:

$$E_\rho(M_{\phi_{ms}})(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \widetilde{E}_\rho^{es}(\widetilde{M}_{\phi_{ms}}^{ec})(\rho, n, q) e^{-jn\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] \quad (2.289)$$

Substituindo (2.288) em (2.289):

$$E_\rho(M_{\phi_{ms}})(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[ \frac{-1}{j\omega\epsilon_d} \frac{q\pi}{L_{zc}} \frac{\partial}{\partial \rho} \widetilde{G}_{M\phi}^{Ad}(\rho, n, q) + \frac{jn}{b} \widetilde{G}_{M\phi}^{Fd}(\rho, n, q) \right] \cdot \widetilde{M}_{\phi_{ms}}^{ec}(n, q) e^{-jn\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] \quad (2.290)$$

Pela equação (2.233):

$$\widetilde{M}_{\phi_{ms}}^{ec}(n, q) = \delta_{(m,n)} \widetilde{g}_s^c(q)$$

Substituindo (2.233) em (2.290):

$$E_\rho(M_{\phi_{ms}})(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left[ \frac{-1}{j\omega\epsilon_d} \frac{q\pi}{L_{zc}} \frac{\partial}{\partial \rho} \widetilde{G}_{M\phi}^{Ad}(\rho, n, q) + \frac{jn}{b} \widetilde{G}_{M\phi}^{Fd}(\rho, n, q) \right] \cdot \delta_{(m,n)} \widetilde{g}_s^c(q) e^{-jn\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] \quad (2.291)$$

Aplicando  $\delta_{(m,n)}$ ,  $E_\rho(M_{\phi_{ms}})$  será definido como:

$$E_\rho(M_{\phi_{ms}})(\rho, \phi, z) = \sum_{q=1}^{\infty} \left[ \frac{-1}{j\omega\epsilon_d} \frac{q\pi}{L_{zc}} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Ad}(\rho, m, q) + \frac{jm}{b} \tilde{G}_{M\phi}^{Fd}(\rho, m, q) \right] \cdot \tilde{g}_s^c(q) e^{-jm\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] \quad (2.292)$$

Substituindo (2.292) em (2.287):

$$V_{ms}^\phi = \int_a^b \sum_{q=1}^{\infty} \left[ \frac{-1}{j\omega\epsilon_d} \frac{q\pi}{L_{zc}} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Ad}(\rho, m, q) + \frac{jm}{b} \tilde{G}_{M\phi}^{Fd}(\rho, m, q) \right] \tilde{g}_s^c(q) \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{J}_f(\rho, \phi, z) e^{-jm\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] dz d\phi \right] \cdot \rho d\rho \quad (2.293)$$

O integrando da equação (2.293) foi definido por (2.217).

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{J}_f(\rho, \phi, z) e^{-jm\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{q\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] dz d\phi = \pi L_{zc} \tilde{J}_f^{es}(\rho, -m, q) \quad (2.294)$$

Substituindo (2.217) em (2.293):

$$V_{ms}^\phi = \int_a^b \sum_{q=1}^{\infty} \left[ \frac{-1}{j\omega\epsilon_d} \frac{q\pi}{L_{zc}} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Ad}(\rho, m, q) + \frac{jm}{b} \tilde{G}_{M\phi}^{Fd}(\rho, m, q) \right] \cdot \tilde{g}_s^c(q) \pi L_{zc} \tilde{J}_f^{es}(\rho, -m, q) \rho d\rho \quad (2.295)$$

Assim:

$$V_{ms}^\phi = \pi L_{zc} \int_a^b \sum_{q=1}^{\infty} \left[ \frac{-1}{j\omega\epsilon_d} \frac{q\pi}{L_{zc}} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{G}_{M\phi}^{Ad}(\rho, m, q) + \frac{jm}{b} \tilde{G}_{M\phi}^{Fd}(\rho, m, q) \right] \cdot \tilde{g}_s^c(q) \tilde{J}_f^{es}(\rho, -m, q) \rho d\rho \quad (2.296)$$

Onde  $\tilde{J}_f^{es}(\rho, -m, q)$  é definido por (2.136).

## 2.8 Expansão dos campos na região de campo distante

Quando os campos irradiados estão distantes da fonte, os mesmos são mais fáceis de serem avaliados que os campos próximos da fonte. Os campos irradiados por uma antena para

o infinito são ondas esféricas [18]. De acordo com [19] os campos  $E_\theta$  e  $E_\phi$  distantes das fontes são descritos da seguintes formas:

$$E_\theta = -j\omega\mu_o A_\theta - jk_o F_\phi \quad (2.297)$$

$$E_\phi = -j\omega\mu_o A_\phi + jk_o F_\theta \quad (2.298)$$

Lembrando que o desenvolvimento dos campos foram realizados em coordenadas cilíndricas, para aplicarmos as expressões (2.297) e (2.298) será necessário realizar a transformação das componentes de campo de coordenadas cilíndricas para esféricas. Esse procedimento será realizado de acordo com [18]. Como só existem as componentes dos potenciais vetores na direção  $z$ , os potenciais vetores não nulos para as coordenadas esféricas terão a seguinte forma:

$$A_\theta = -A_z \sin\theta \quad (2.299)$$

$$F_\theta = -F_z \sin\theta \quad (2.300)$$

Substituindo (2.299) e (2.300) em (2.297) e (2.298), as componentes de campo elétrico  $E_\theta$  e  $E_\phi$  terão a seguinte forma:

$$E_\theta = j\omega\mu_o \sin\theta A_{z_o} \quad (2.301)$$

$$E_\phi = -jk_o \sin\theta F_{z_o} \quad (2.302)$$

Pelas expressões dos potenciais vetores elétrico e magnético para a região externa à cavidade, dado pelas equações (2.60a)-(2.60b) e (2.76a)-(2.76b):

$$A_{z_o}(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}_{z_o}^{ef}(\rho, n, k_z) e^{-jk_z z} e^{-jn\phi} dk_z$$

$$F_{z_o}(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}_{z_o}^{ef}(\rho, n, k_z) e^{-jk_z z} e^{-jn\phi} dk_z$$

Sendo  $\tilde{A}_{z_o}^{ef}$  e  $\tilde{F}_{z_o}^{ef}$  fornecidos por (2.76a) e (2.76b):

$$\tilde{A}_{z_o}^{ef}(\rho, n, k_z) = \frac{-j\omega\epsilon_o H_n^{(2)}(k_{\rho_o}\rho)}{(k_{\rho_o})^2 H_n^{(2)}(k_{\rho_o}b)} \tilde{M}_\phi^{ef}(n, k_z)$$

$$\tilde{F}_{z_o}^{ef}(\rho, n, k_z) = \frac{1}{k_{\rho_o}} \frac{H_n^{(2)}(k_{\rho_o}\rho)}{H_n^{(2)'}(k_{\rho_o}b)} \left[ \tilde{M}_z^{ef}(n, k_z) - \frac{nk_z}{(k_{\rho_o})^2 b} \tilde{M}_\phi^{ef}(n, k_z) \right]$$

### 2.8.1 Expansão assintótica do campo $E_\theta$

A componente de campo  $E_\theta$  pode ser determinada substituindo (2.60a) em (2.301):

$$E_\theta = j\omega\mu_o \sin\theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}_{z_o}^{ef}(\rho, n, k_z) e^{-jk_z z} e^{-jn\phi} dk_z \quad (2.303)$$

Substituindo (2.76a) em (2.303):

$$E_\theta = j\omega\mu_o \sin\theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{j\omega\epsilon_o}{(k_{\rho_o})^2} \frac{H_n^{(2)}(k_{\rho_o}\rho)}{H_n^{(2)}(k_{\rho_o}b)} \tilde{M}_\phi^{ef}(n, k_z) e^{-jk_z z} e^{-jn\phi} dk_z \quad (2.304)$$

onde  $\omega^2\mu_o\epsilon_o = k_o^2$ .

$$E_\theta = k_o^2 \sin\theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\tilde{M}_\phi^{ef}(n, k_z)}{(k_{\rho_o})^2 H_n^{(2)}(k_{\rho_o}b)} \right] H_n^{(2)}(k_{\rho_o}\rho) e^{-jk_z z} dk_z \quad (2.305)$$

A integral da equação (2.305) pode ser avaliada assintoticamente de acordo com [19], para pontos de observação tendendo ao infinito.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \vec{I}(-k_z) H_n^{(2)}\left(\rho\sqrt{k_o^2 - k_z^2}\right) e^{jk_z z} dk_z \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 2 \frac{e^{-jk_o r}}{r} j^{n+1} \vec{I}(+k_o \cos\theta) \quad (2.306)$$

Trocando  $-k_z$  por  $+k_z$ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \vec{I}(+k_z) H_n^{(2)}\left(\rho\sqrt{k_o^2 - k_z^2}\right) e^{-jk_z z} dk_z \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 2 \frac{e^{-jk_o r}}{r} j^{n+1} \vec{I}(+k_o \cos\theta) \quad (2.307)$$

Fazendo o desenvolvimento da equação (2.305) pela avaliação assintótica descrita em (2.307):

$$E_\theta = k_o^2 \sin\theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\phi} \frac{2e^{-jk_o r}}{r} j^{n+1} \frac{\tilde{M}_\phi^{ef}(n, k_o \cos\theta)}{(k_{\rho_o})^2 H_n^{(2)}(k_{\rho_o}b)} \quad (2.308)$$

onde:

$$(k_{\rho_o})^2 = k_o^2 - k_z^2 = k_o^2 - k_o^2 \cos^2\theta = k_o^2 \sin^2\theta \quad (2.309)$$

Substituindo (2.309) em (2.308) o campo  $E_\theta$  pode ser descrito assintoticamente como:

$$E_\theta = \frac{2e^{-jk_0r}}{r \sin \theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\phi} j^{n+1} \frac{\widetilde{M}_\phi^{ef}(n, k_0 \cos \theta)}{H_n^{(2)}(k_{\rho_0} b)} \quad (2.310)$$

Pelas definições apresentadas por (2.110) e (2.194),

$$M_\phi(\phi, z) = \sum_{u=-U}^U \sum_{t=1}^{T_\phi} d_{ut} \widetilde{M}_{\phi_{ut}}(\phi, z)$$

$$\widetilde{M}_{\phi_{ut}}^{ef}(n, k_z) = \delta_{(n,u)} \widetilde{g}_t^f(k_z)$$

A corrente magnética transformada  $\widetilde{M}_\phi^{ef}$  pode ser representada como:

$$\widetilde{M}_\phi^{ef}(\phi, z) = \sum_{u=-U}^U \sum_{t=1}^{T_\phi} d_{ut} \widetilde{M}_{\phi_{ut}}^{ef}(\phi, z) \quad (2.311)$$

Substituindo (2.194) em (2.311):

$$\widetilde{M}_\phi^{ef}(\phi, z) = \sum_{u=-U}^U \sum_{t=1}^{T_\phi} d_{ut} \delta_{(n,u)} \widetilde{g}_t^f(k_z) \quad (2.312)$$

Substituindo (2.312) em (2.310):

$$E_\theta = \frac{2e^{-jk_0r}}{r \sin \theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jn\phi} j^{n+1}}{H_n^{(2)}(k_{\rho_0} b)} \sum_{u=-U}^U \sum_{t=1}^{T_\phi} d_{ut} \delta_{(n,u)} \widetilde{g}_t^f(k_0 \cos \theta) \quad (2.313)$$

Aplicando  $\delta_{(n,u)}$ ,  $E_\theta$  será definido como:

$$E_\theta = \frac{2e^{-jk_0r}}{r \sin \theta} \sum_{n=-U}^U \frac{e^{-jn\phi} j^{n+1}}{H_n^{(2)}(k_{\rho_0} b)} \sum_{t=1}^{T_\phi} d_{nt} \widetilde{g}_t^f(k_0 \cos \theta) \quad (2.314)$$

## 2.8.2 Expansão assintótica do campo $E_\phi$

A componente de campo  $E_\phi$  pode ser definida substituindo a equação (2.60b) em (2.302):

$$E_\phi = -jk_0 \sin \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{F}_{z_0}^{ef}(\rho, n, k_z) e^{-jk_z z} e^{-jn\phi} dk_z \quad (2.315)$$

Substituindo (2.76b) em (2.315):

$$E_\phi = -jk_o \text{sen } \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_{\rho_o}} \frac{H_n^{(2)}(k_{\rho_o} \rho)}{H_n^{(2)'}(k_{\rho_o} b)} \left[ \widetilde{M}_z^{ef}(n, k_z) - \frac{nk_z}{(k_{\rho_o})^2 b} \widetilde{M}_\phi^{ef}(n, k_z) \right] \cdot e^{-jk_z z} e^{-jn\phi} dk_z \quad (2.316)$$

$$E_\phi = -jk_o \text{sen } \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k_{\rho_o} H_n^{(2)'}(k_{\rho_o} b)} \left[ \widetilde{M}_z^{ef}(n, k_z) - \frac{nk_z}{(k_{\rho_o})^2 b} \widetilde{M}_\phi^{ef}(n, k_z) \right] \right\} \cdot H_n^{(2)}(k_{\rho_o} \rho) e^{-jk_z z} dk_z \quad (2.317)$$

Seguindo o mesmo procedimento realizado para a equação (2.305), o integrando da equação (2.317) também pode ser avaliado assintoticamente através de [19].

$$E_\phi = -jk_o \text{sen } \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\phi} \frac{2e^{-jk_o r}}{r} \frac{j^{n+1}}{k_{\rho_o} H_n^{(2)'}(k_{\rho_o} b)} \cdot \left[ \widetilde{M}_z^{ef}(n, k_o \cos \theta) - \frac{nk_o \cos \theta}{(k_{\rho_o})^2 b} \widetilde{M}_\phi^{ef}(n, k_o \cos \theta) \right] \quad (2.318)$$

onde:

$$k_{\rho_o} = k_o |\text{sen } \theta| \quad (2.319)$$

Substituindo (2.319) em (2.318):

$$E_\phi = \frac{-j \text{sen } \theta}{|\text{sen } \theta|} \frac{2e^{-jk_o r}}{r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\phi} \frac{j^{n+1}}{H_n^{(2)'}(k_{\rho_o} b)} \cdot \left[ \widetilde{M}_z^{ef}(n, k_o \cos \theta) - \frac{nk_o \cos \theta}{(k_{\rho_o})^2 b} \widetilde{M}_\phi^{ef}(n, k_o \cos \theta) \right] \quad (2.320)$$

Pelas definições apresentadas por (2.80) e (2.164),

$$M_z(\phi, z) = \sum_{u=-U}^U \sum_{t=1}^{T_z} c_{ut} M_{zut}(\phi, z)$$

$$\widetilde{M}_{zut}^{ef}(n, k_z) = \delta_{(n,u)} \widetilde{f}_t^f(k_z)$$

A corrente magnética transformada  $\widetilde{M}_z^{ef}$  pode ser representada como:

$$\widetilde{M}_z^{ef}(\phi, z) = \sum_{u=-U}^U \sum_{t=1}^{T_\phi} c_{ut} \widetilde{M}_{zut}^{ef}(\phi, z) \quad (2.321)$$

Substituindo (2.164) em (2.321):

$$\widetilde{M}_z^{ef}(\phi, z) = \sum_{u=-U}^U \sum_{t=1}^{T_\phi} c_{ut} \delta_{(n,u)} \widetilde{f}_t^f(k_z) \quad (2.322)$$

Substituindo (2.312) e (2.322) em (2.320):

$$E_\phi = \frac{-j \operatorname{sen} \theta}{|\operatorname{sen} \theta|} \frac{2e^{-jk_o r}}{r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\phi} \frac{j^{n+1}}{k_{\rho_o} H_n^{(2)'}(k_{\rho_o} \rho)} \cdot \left[ \sum_{u=-U}^U \sum_{t=1}^{T_\phi} c_{ut} \delta_{(n,u)} \widetilde{f}_t^f(k_o \cos \theta) - \frac{nk_o \cos \theta}{(k_{\rho_o})^2 b} \sum_{u=-U}^U \sum_{t=1}^{T_\phi} d_{ut} \delta_{(n,u)} \widetilde{g}_t^f(k_o \cos \theta) \right] \quad (2.323)$$

Aplicando  $\delta_{(n,u)}$ ,  $E_\phi$  será definido como:

$$E_\phi = \frac{-j \operatorname{sen} \theta}{|\operatorname{sen} \theta|} \frac{2e^{-jk_o r}}{r} \sum_{n=-U}^U e^{-jn\phi} \frac{j^{n+1}}{k_{\rho_o} H_n^{(2)'}(k_{\rho_o} \rho)} \cdot \left[ \sum_{t=1}^{T_\phi} c_{nt} \widetilde{f}_t^f(k_o \cos \theta) - \frac{nk_o \cos \theta}{(k_{\rho_o})^2 b} \sum_{t=1}^{T_\phi} d_{nt} \widetilde{g}_t^f(k_o \cos \theta) \right] \quad (2.324)$$

## 2.9 Diretividade

A diretividade de uma antena é definida como a razão da intensidade de irradiação em uma determinada direção da antena pela intensidade de irradiação média em todas as direções. A intensidade de irradiação média é igual a potência total irradiada pela antena dividido por  $4\pi$  [18].

$$D(\theta, \phi) = \frac{4\pi U(\theta, \phi)}{P_{rad}} \quad (2.325)$$

onde  $U(\theta, \phi)$  é a intensidade de irradiação em uma determinada direção e  $P_{rad}$  é a potência total irradiada pela antena.

Para a região de campo distante, a intensidade de radiação é relatada como:

$$U(\theta, \phi) = \frac{r^2}{2\eta} |E|^2 \quad (2.326)$$

Substituindo (2.326) em (2.325), a diretividade fica definida como:

$$D(\theta, \phi) = \frac{2\pi r^2 |E|^2}{\eta P_{rad}} \quad (2.327)$$

Para a região de campo distante  $E_\theta$  e  $E_\phi$  são as componentes do campo elétrico, e  $\eta$  é a impedância intrínseca do meio.

A potência total irradiada pela antena é obtida integrando a intensidade de radiação sobre um ângulo sólido de  $4\pi$  [18]. Assim:

$$P_{rad} = \oint_{\Omega} U(\theta, \phi) d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} U(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi \quad (2.328)$$

onde  $d\Omega =$  elemento de ângulo sólido  $= \sin\theta d\theta d\phi$ .

Substituindo (2.326) em (2.328), obtem-se a potência total irradiada:

$$P_{rad} = \oint_{\Omega} U(\theta, \phi) d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{r^2}{2\eta} |E|^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad (2.329)$$

Lembrando que para a região de campo distante da antena teremos apenas as componentes de campo elétrico  $E_\theta$  e  $E_\phi$ :

$$P_{rad} = \frac{r^2}{2\eta} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2) \sin\theta d\theta d\phi \quad (2.330)$$

Os campos  $E_\theta$  e  $E_\phi$  foram obtidos na seção anterior, e são dados respectivamente por (2.314) e (2.323).

A diretividade da antena poderá ser definida como:

$$D(\theta, \phi) = 4\pi (|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2) \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2) \sin\theta d\theta d\phi \right]^{-1} \quad (2.331)$$

### 2.9.1 Resultados

Em [10] foram apresentados os diagramas de radiação para uma antena de microfita anular cilíndrica montada sobre um cilindro condutor elétrico perfeito coberto por uma fina camada dielétrica, utilizando o método dos momentos. A diferença entre as antenas anular cilíndrica e a anular cilíndrica embutida é que, na primeira a microfita está localizada diretamente sobre o cilindro coberto pela camada dielétrica e na segunda a microfita está na superfície de uma cavidade cilíndrica preenchida por um material dielétrico. Na antena embutida só existe a camada dielétrica dentro da cavidade. Devido a similaridade estrutural entre as antenas, acredita-se que os resultados de diagrama de radiação e impedância de entrada também sejam similares. Os resultados serão utilizados a fim de validar a formulação desenvolvida neste capítulo e também para comparação de comportamento entre as duas antenas.

Os resultados de diagrama de radiação apresentados em [10] são referentes à uma antena anular cilíndrica operando no modo  $TM_{11}$ . A formulação desenvolvida no presente trabalho não permite que resultados de um modo específico sejam obtidos de forma direta. Para simular os resultados da antena operando no modo  $TM_{11}$ , foi especificado o número máximo de períodos em  $\phi$  igual a 1 ( $U = 1$ ), e a frequência de operação foi ajustada para aquela onde o valor da parte resistiva da impedância de entrada é máximo. Esse procedimento faz com que a antena opere próximo ao modo  $TM_{11}$ . Por não permitir a operação exata no modo  $TM_{11}$ , os resultados serão influenciados pela existência de outros modos. Entretanto acredita-se que esta influência seja pequena, pois a antena estará operando na frequência de ressonância do modo  $TM_{11}$ .

Serão apresentados os diagramas referentes aos campos  $E_\theta$  e  $E_\phi$  como relação aos planos  $\theta$  e  $\phi$ .

Os parâmetros utilizados para a estrutura são apresentados à seguir.

- Raio da antena:  $b = 10,2\text{cm}$
- Comprimento da antena em  $z$ :  $L_{za} = 8\text{cm}$
- Comprimento a cavidade em  $z$ :  $L_{zc} = 12\text{cm}$
- Espessura do substrato:  $h = 2\text{mm}$
- Permissividade relativa do substrato:  $\epsilon_r = 2,3$
- Localização do alimentador em  $z$ :  $z_f = 2\text{cm}$
- Localização do alimentador em  $\phi$ :  $\phi_o = 90^\circ$
- Largura do alimentador:  $W_f = 2\text{mm}$
- Frequência de operação:  $f = 1,217\text{GHz}$
- Número de modos em relação à  $\phi$ :  $U = 1$
- Número de segmentos em relação à  $z$ :  $N_{seg} = 15$

Obs: Em todos os exemplos apresentados neste trabalho, tanto a antena quanto a cavidade estão centralizadas em  $z = 0$ .

Em [10] só foram apresentados os resultados dos diagramas  $E_\phi$  x  $\theta$  e  $E_\theta$  x  $\phi$ . O diagrama  $E_\theta$  x  $\theta$ , fig. 2.16, apresenta um máximo de radiação em  $\theta = 90^\circ$ , e que o campo aumenta para  $\theta$  tendendo  $0^\circ$  e  $180^\circ$ , próximo ao eixo da estrutura. Este aumento do campo

próximo ao eixo é explicado pela presença do condutor elétrico que se estende ao infinito. Analisando os resultados do diagrama  $E_\phi \times \theta$ , fig. 2.17, observa-se que em ambos os casos a intensidade de campo é nula em  $\theta = 90^\circ$  e tende a aumentar quando  $\theta$  se aproxima de  $0^\circ$  e  $180^\circ$ . O resultado da antena embutida apresenta uma maior distribuição de campo ao longo de  $\theta$ . Os resultados do diagrama  $E_\theta \times \phi$  das duas antenas são praticamente idênticos, fig. 2.18. A única diferença está em  $\phi = 0^\circ$  e  $\phi = 180^\circ$ , onde a intensidade de campo da antena anular é zero, e para a antena embutida a intensidade de campo apenas tende a zero. A razão para a intensidade de campo da antena embutida não ser nula em  $\phi = 0^\circ$  e  $\phi = 180^\circ$  pode estar relacionada ao fato da antena não estar operando unicamente no modo  $TM_{11}$ . O diagrama para  $E_\phi \times \phi$ , fig. 2.19, apresenta dois máximos de radiação em  $\theta = 0^\circ$  e  $\theta = 180^\circ$ , e o campo é nulo em  $\theta = 90^\circ$  e  $\theta = 270^\circ$ .

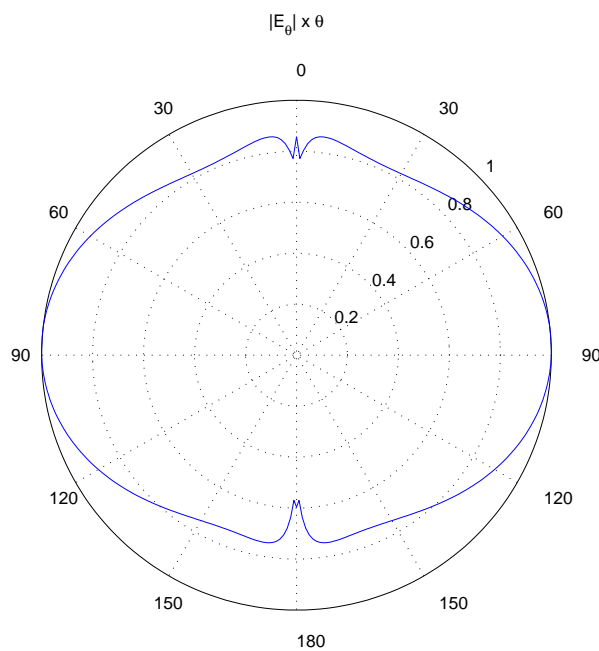


Figura 2.16: Diagrama de radiação do modo  $TM_{11}$  -  $E_\theta \times \theta$  no plano  $\phi = 90^\circ$

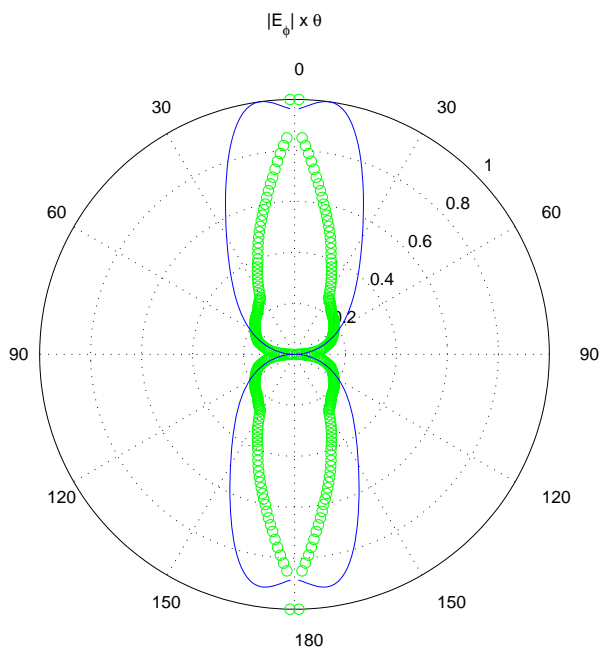


Figura 2.17: Diagrama de radiação do modo  $TM_{11}$  -  $E_\phi \times \theta$  - linha azul (MoM) e círculos verdes (Habashy) no plano  $\phi = 90^\circ$

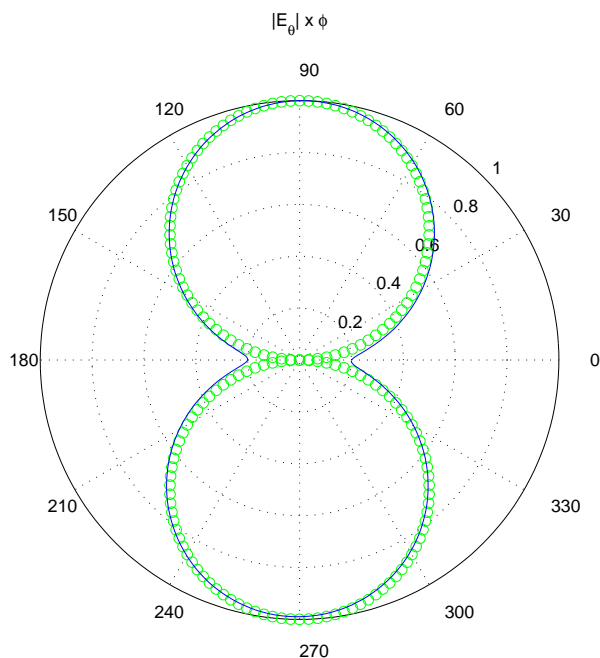


Figura 2.18: Diagrama de radiação do modo  $TM_{11}$  -  $E_\theta \times \phi$  - linha azul (MoM) e círculos verdes (Habashy) no plano  $\theta = 45^\circ$

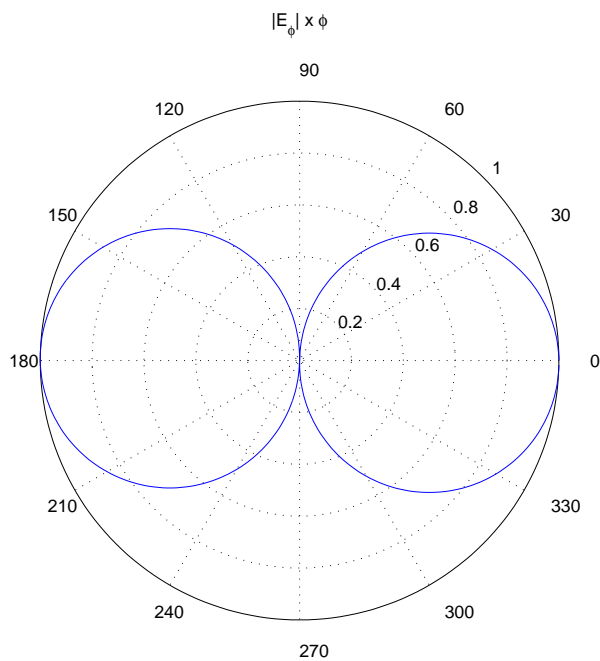


Figura 2.19: Diagrama de radiação do modo  $TM_{11}$  -  $E_\phi \times \phi$  no plano  $\theta = 45^\circ$

## Múltiplos alimentadores

Com o objetivo de demonstrar os efeitos do uso de múltiplos alimentadores em antenas de microfita anulares cilíndricas embutidas, serão apresentados dois exemplos. Os diagramas de radiação do campo  $E_\theta$  x  $\phi$  em função do número de alimentadores serão analisados.

### Exemplo I

Os parâmetros utilizados no exemplo I foram:

- Raio da antena:  $b = 27\text{mm}$
- Comprimento da antena em  $z$ :  $L_{za} = 32,96\text{mm}$
- Comprimento da cavidade em  $z$ :  $L_{zc} = 50\text{mm}$
- Espessura do substrato:  $h = 1\text{mm}$
- Permissividade relativa do substrato:  $\epsilon_r = 2,3$
- Localização do alimentador em  $z$ :  $z_f = 8,24\text{mm}$
- Largura do alimentador:  $W_f = 2\text{mm}$
- Frequência de operação:  $f = 3,0\text{GHz}$
- Número de modos em relação à  $\phi$ :  $U = 5$
- Número de segmentos em relação à  $z$ :  $N_{seg} = 25$

Os diagramas de radiação para 1, 2, 3 e 4 alimentadores serão mostrados pelas figuras 2.20-2.23, respectivamente.

Analisando as figuras 2.20-2.23, é possível observar que o aumento gradativo no número de alimentadores faz variar a distribuição de campo ao longo de  $\phi$ . Quando a distância entre cada alimentador e seus adjacentes diretos é menor que o comprimento de onda no dielétrico, a distribuição de campo ao longo de  $\phi$  tende a ficar mais uniforme, fazendo com que a irradiação dos campos ao redor da antena passe a ser aproximadamente omnidirecional.

Neste exemplo o comprimento de onda no dielétrico é de  $79,52mm$  e o perímetro do cilindro é de  $169,64mm$ . Na configuração com 2 alimentadores, fig. 2.21, a distância entre cada alimentador e seus adjacentes diretos é de  $84,82mm$ . Para 3 alimentadores, fig. 2.22, a distância é de  $56,54mm$ , e para 4 alimentadores, fig. 2.23, a distância é de  $42,41mm$ . Mesmo a configuração com 3 alimentadores apresentando uma distância entre os mesmos  $28,89\%$  menor que o comprimento de onda, essa não foi suficiente para gerar uma distribuição de campo tão uniforme a ponto de ser considerada omnidirecional. Foram necessários 4 alimentadores, com uma distância entre os mesmos  $46,66\%$  menor que comprimento de onda para se obter um diagrama aproximadamente omnidirecional.

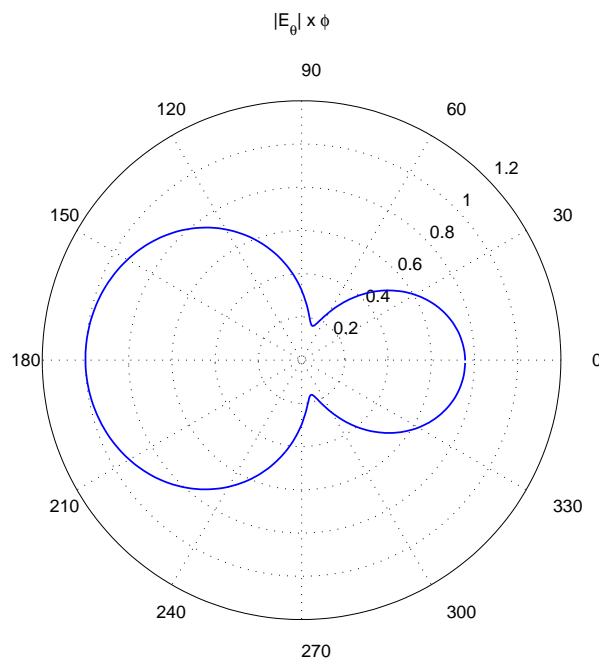


Figura 2.20: Diagrama de radiação  $E_{\theta} \times \phi$  - 1 alimentador - Exemplo I

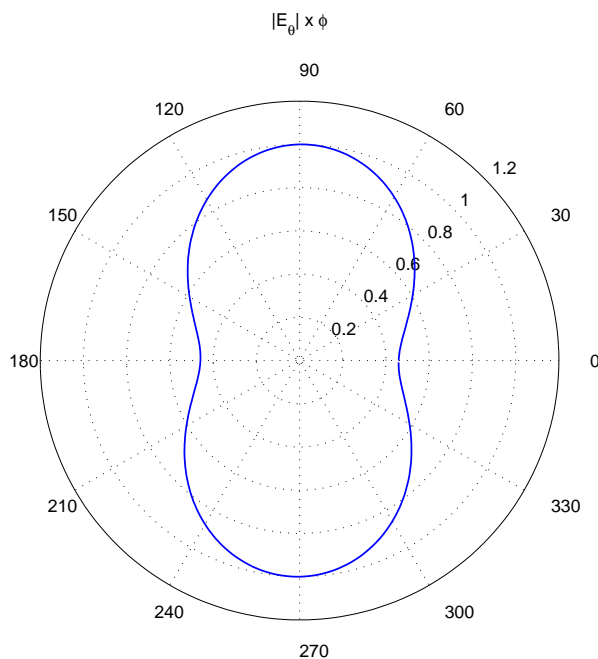


Figura 2.21: Diagrama de radiação  $E_\theta \times \phi$  - 2 alimentadores - Exemplo I

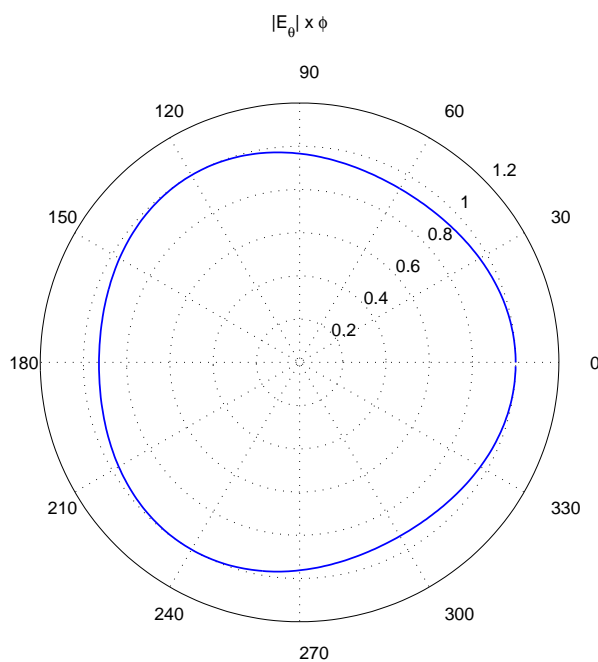


Figura 2.22: Diagrama de radiação  $E_\theta \times \phi$  - 3 alimentadores - Exemplo I

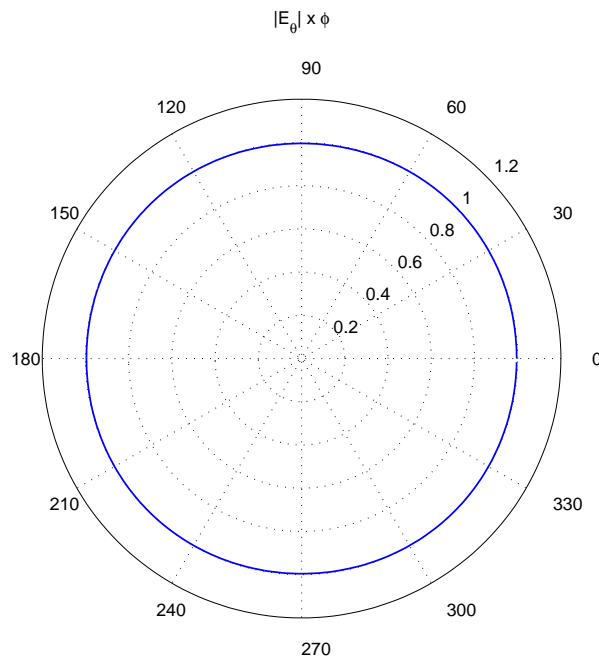


Figura 2.23: Diagrama de radiação  $E_{\theta} \times \phi$  - 4 alimentadores - Exemplo I

### Exemplo II

Os parâmetros utilizados no exemplo II foram:

- Raio da antena:  $b = 21\text{mm}$
- Comprimento da antena em  $z$ :  $L_{za} = 30\text{mm}$
- Comprimento a cavidade em  $z$ :  $L_{zc} = 40\text{mm}$
- Espessura do substrato:  $h = 1\text{mm}$
- Permissividade relativa do substrato:  $\epsilon_r = 1,0$
- Localização do alimentador em  $z$ :  $z_f = 5\text{mm}$
- Largura do alimentador:  $W_f = 2\text{mm}$
- Frequência de operação:  $f = 9,0\text{GHz}$
- Número de modos em relação à  $\phi$ :  $U = 10$
- Número de segmentos em relação à  $z$ :  $N_{seg} = 25$

Neste exemplo o comprimento de onda no dielétrico é de  $33,31mm$  e o perímetro do cilindro é de  $131,94mm$ . A distância entre cada alimentador e seus adjacentes diretos para as configurações com 3, 4, 5 e 6 alimentadores é:

- 3 alimentadores, fig. 2.24 -  $43,98mm$  (32,03% maior que o comprimento de onda);
- 4 alimentadores, fig. 2.25 -  $32,98mm$  (0,99% menor que o comprimento de onda);
- 5 alimentadores, fig. 2.26 -  $26,38mm$  (20,82% menor que o comprimento de onda);
- 6 alimentadores, fig. 2.27 -  $21,99mm$  (33,00% menor que o comprimento de onda).

Para este exemplo foi necessário utilizar uma quantidade maior de alimentadores que no exemplo anterior. Este comportamento era esperado, visto que o comprimento de onda no dielétrico é 3,96 vezes menor que o perímetro do cilindro, enquanto que no exemplo anterior o comprimento de onda no dielétrico é 2,13 vezes menor que o perímetro do cilindro.

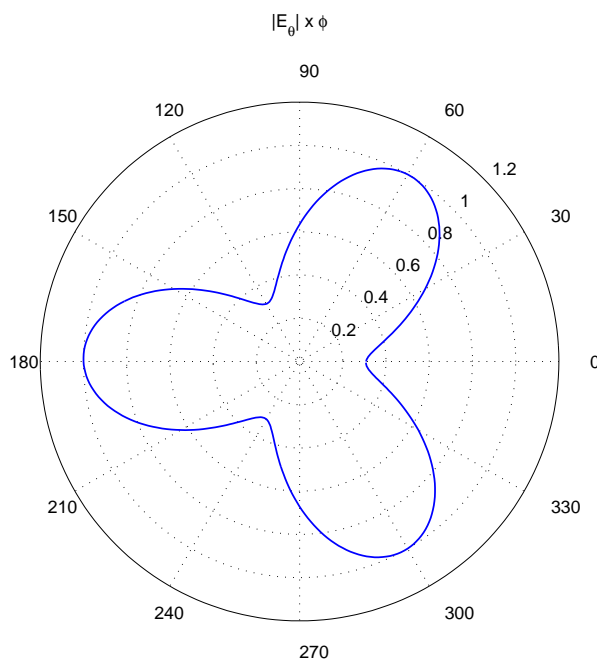


Figura 2.24: Diagrama de radiação  $E_{\theta} \times \phi$  - 3 alimentadores - Exemplo II

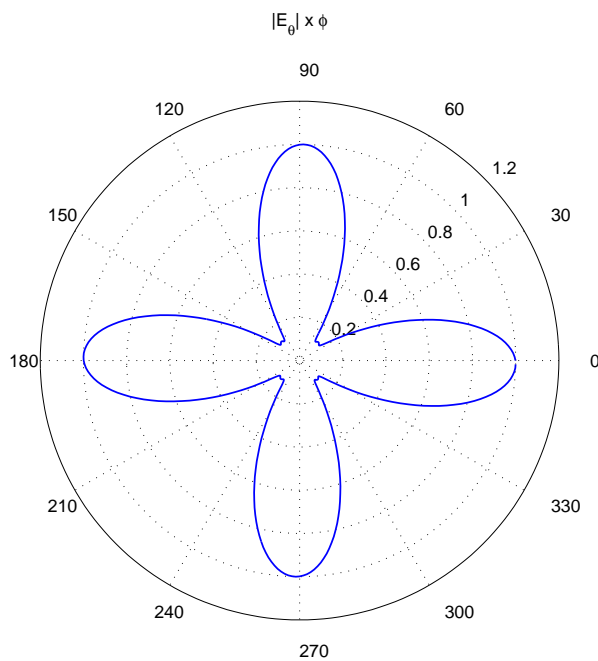


Figura 2.25: Diagrama de radiação  $E_\theta \times \phi$  - 4 alimentadores - Exemplo II

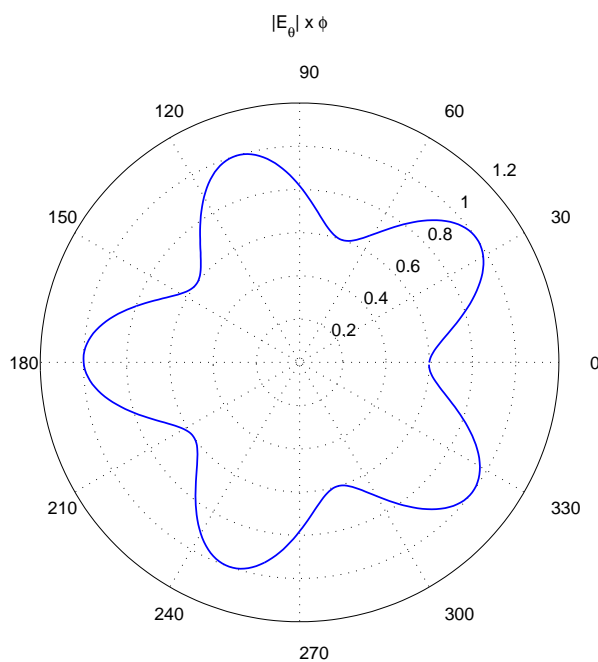


Figura 2.26: Diagrama de radiação  $E_\theta \times \phi$  - 5 alimentadores - Exemplo II

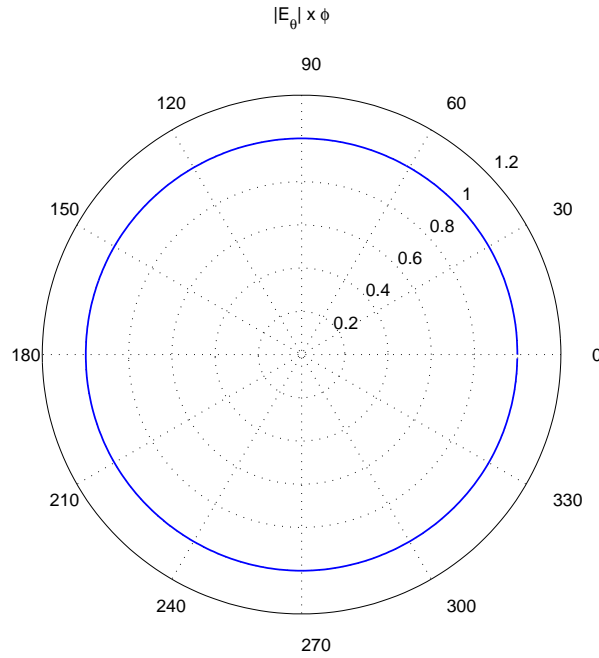


Figura 2.27: Diagrama de radiação  $E_\theta \times \phi$  - 6 alimentadores - Exemplo II

## 2.10 Impedância de entrada

A impedância de entrada é definida como a impedância presente nos terminais de uma antena ou a razão entre a tensão e a corrente em um par de terminais ou a razão dos apropriados componentes de campo elétrico e magnético à um ponto [18].

Pela expressão variacional, a impedância de entrada pode ser definida como:

$$Z_{in} = -\frac{1}{I_o^2} \int \int \int_v \vec{E} \cdot \vec{J}_f dv \quad (2.332)$$

Onde  $I_o$  é a corrente total fornecida pela fonte,  $\vec{E}$  é o campo elétrico gerado pela corrente da fonte, e  $\vec{J}_f$  é a densidade de corrente da fonte.

No problema em questão as fontes geradoras dos campos eletromagnéticos são as correntes magnéticas. Nesse caso teremos que a impedância de entrada será definida como:

$$Z_{in} = \frac{-1}{I_o^2} \int \int \int_v \vec{E} (M_z \hat{a}_z + M_\phi \hat{a}_\phi) \cdot \vec{J}_f dv \quad (2.333)$$

De acordo com as equações (2.80) e (2.110) as correntes magnéticas  $M_z$  e  $M_\phi$  foram definidas em funções de base da seguinte forma:

$$M_z(\phi, z) = \sum_{u=-U}^U \sum_{t=1}^{T_z} c_{ut} M_{z_{ut}}(\phi, z)$$

$$M_\phi(\phi, z) = \sum_{u=-U}^U \sum_{t=1}^{T_\phi} d_{ut} M_{\phi_{ut}}(\phi, z)$$

Substituindo (2.80) e (2.110) em (2.333):

$$Z_{in} = \frac{1}{I_o^2} \sum_{u=-U}^U \sum_{t=1}^{T_z} c_{ut} \int \int \int_v E_\rho(M_{z_{ut}})(\rho, \phi, z) \cdot J_f(\rho, \phi, z) dv$$

$$- \frac{1}{I_o^2} \sum_{u=-U}^U \sum_{t=1}^{T_\phi} d_{ut} \int \int \int_v E_\rho(M_{\phi_{ut}})(\rho, \phi, z) \cdot J_f(\rho, \phi, z) dv \quad (2.334)$$

De (2.210) e (2.287) estão definidos que:

$$\int \int \int_v E_\rho(M_{z_{ms}})(\rho, \phi, z) \cdot J_f(b, \phi, z) dv = V_{ms}^z$$

$$\int \int \int_v E_\rho(M_{\phi_{ms}})(\rho, \phi, z) \cdot J_f(\rho, \phi, z) dv = V_{ms}^\phi$$

Comparando as equações (2.210) e (2.287) com os integrandos da equação (2.334), podemos definir a impedância de entrada como:

$$Z_{in} = \frac{-1}{I_o^2} \left\{ \sum_{u=-U}^U \sum_{t=1}^{T_z} c_{ut} V_{ut}^z + \sum_{u=-U}^U \sum_{t=1}^{T_\phi} d_{ut} V_{ut}^\phi \right\} \quad (2.335)$$

### 2.10.1 Impedância de entrada para múltiplos alimentadores

Para o cálculo da impedância de entrada utilizando-se múltiplos alimentadores, foi assumido que cada alimentador possui uma corrente  $I_o$ . Dessa forma, a corrente total no cabo coaxial que alimenta a antena é igual a soma da corrente de cada alimentador, ou seja,  $I_o$  vezes  $N_p$ . Onde  $N_p$  é o número total de alimentadores.

Pela expressão variacional, a impedância de entrada no cabo coaxial será:

$$Z_{in} = -\frac{1}{(N_p I_o)^2} \int \int \int_v \vec{E}(M_z \hat{a}_z + M_\phi \hat{a}_\phi) \cdot \vec{J}_f dv \quad (2.336)$$

Da mesma forma como foi realizado para a impedância de entrada para apenas um alimentador, o integrando de (2.336) pode ser substituído pela equações (2.210) e (2.287). A impedância de entrada para múltiplos alimentadores é então definida como:

$$Z_{in} = -\frac{1}{(N_p I_o)^2} \left\{ \sum_{u=-U}^U \sum_{t=1}^{T_z} c_{ut} V_{ut}^z + \sum_{u=-U}^U \sum_{t=1}^{T_\phi} d_{ut} V_{ut}^\phi \right\} \quad (2.337)$$

### 2.10.2 Resultados

A parte resistiva da impedância de entrada é definida como resistência de radiação. A resistência de radiação é o mecanismo no qual a potência é transferida do meio guiado para o espaço. A potência irradiada pela antena está diretamente relacionada a resistência de radiação. Quanto maior a resistência de radiação, maior será a potência irradiada. Dessa forma, a frequência de ressonância é definida como a frequência na qual a resistência de radiação é máxima, ou seja, é a frequência na qual a antena irradia com maior intensidade.

A largura de banda de uma antena é definida como a faixa de frequência na qual a antena opera com relação a uma característica (impedância de entrada, diagrama de radiação, ganho, ...) seguindo um padrão especificado. Ou seja, é a faixa de frequência onde ambos os lados de uma frequência central estão dentro um valor aceitável a partir da frequência central. Como as características de uma antena não variam necessariamente da mesma maneira, não há um padrão único para a largura de banda. O valor de 3dB é muito utilizado para definir a faixa de operação de uma antena com relação ao ganho.

Como não é objetivo deste trabalho verificar com exatidão a largura de banda das antenas com relação à potência irradiada, não será definido um valor específico que determine a frequência de operação da antena. Para analisarmos a largura de banda da antena consideraremos a frequência de ressonância como sendo a frequência central, e de forma geral analisaremos os resultados para as frequências imediatamente anteriores e posteriores.

Em [10] foram apresentados resultados referentes à impedância de entrada de uma antena de microfita anular cilíndrica operando no modo  $TM_{01}$  utilizando o método dos momentos. Mesmo que a estrutura que está sendo analisada neste trabalho e a apresentada em [10] não sejam idênticas, as mesmas devem apresentar uma certa similaridade de comportamento da impedância de entrada. Serão apresentados os gráficos de impedância de entrada utilizando os mesmos parâmetros de [10] para a antena operando no modo  $TM_{01}$  com o objetivo de avaliar a formulação desenvolvida e verificar a similaridade de comportamento das antenas.

Foi comentado anteriormente que a formulação desenvolvida no presente trabalho não permite obter de forma direta resultados de um modo de operação específico. Para serem obtidos resultados no modo  $TM_{0N}$ , é necessário obter uma excitação uniforme ao longo da

coordenada  $\phi$ . Tal imposição é possível de ser obtida a partir da utilização de múltiplos alimentadores. Esse procedimento já foi utilizado para gerar os diagramas de radiação omnidirecionais. Para essa configuração de antena, 4 alimentadores são suficientes para anular os modos em  $\phi$ . Para serem obtidos os resultados no modo  $TM_{01}$ , serão calculados os resultados nas frequências próximas à primeira resistência de radiação, e utilizando 4 alimentadores igualmente espaçados ao longo de  $\phi$ .

Os parâmetros utilizados para obtenção da impedância de entrada são os mesmos fornecidos por [10], considerando algumas particularidades da antena embutida.

Os parâmetros utilizados foram:

- Raio da antena:  $b = 2,1\text{cm}$
- Comprimento da antena em  $z$ :  $L_{za} = 2\text{cm}$
- Comprimento da cavidade em  $z$ :  $L_{zc} = 5\text{cm}$
- Espessura do substrato:  $h = 1\text{mm}$
- Permissividade relativa do substrato:  $\epsilon_r = 9,6$
- Localização dos alimentadores em  $z$ :  $z_f = 0,5\text{cm}$
- Localização dos alimentadores em  $\phi$ :  $\phi_o = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  e  $270^\circ$
- Largura do alimentador:  $W_f = 2\text{mm}$
- Número de modos em relação à  $\phi$ :  $U = 5$
- Número de segmentos em relação à  $z$ :  $N_{seg} = 50$

Analisando os resultados apresentados pela fig. 2.28 pode-se verificar a similaridade de comportamento da estrutura que está sendo analisada neste trabalho e a estrutura analisada em [10]. Para a antena embutida a frequência de ressonância é de 2,28 GHz enquanto a antena anular de [10] é de 2,3 GHz. Mesmos que os resultados de [10] apresentem poucos pontos de amostragem, é possível observar uma similaridade na largura de banda das antenas. A parte reativa da impedância de entrada nos dois resultados também se comporta de forma similar.

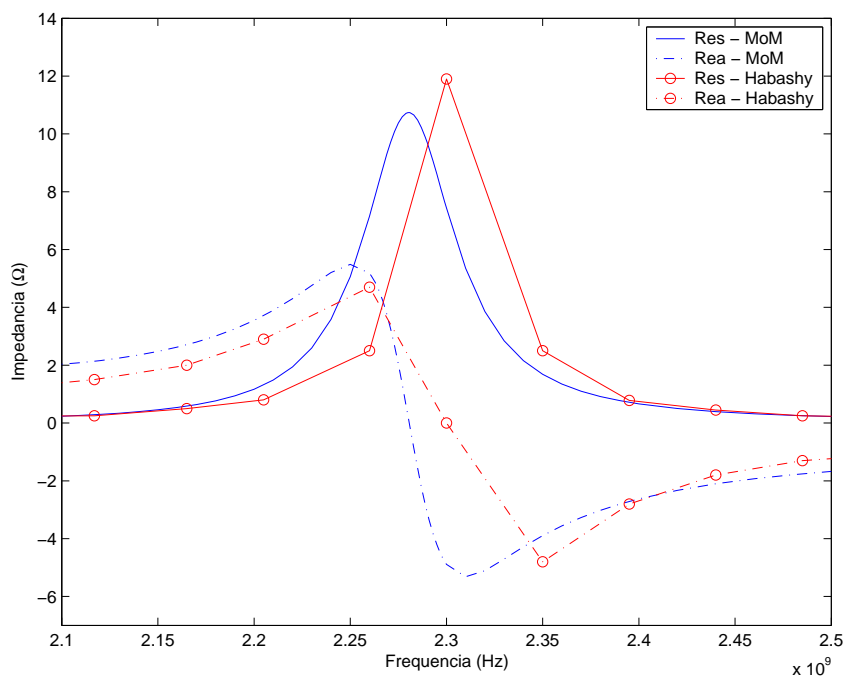


Figura 2.28: Impedância de entrada x frequência, para a antena de microfita anular cilíndrica embutida (MoM) e a antena de microfita anular cilíndrica de [10] (Habashy)

### Avaliação das características da antena anular cilíndrica embutida

Para analisar o comportamento da antena de microfita anular embutida em relação à impedância de entrada, serão investigados três parâmetros da estrutura:

1. Tamanho da cavidade em relação à coordenada  $z$ ;
2. Espessura do substrato;
3. Permissividade dielétrica do substrato.

Para todos os casos listados acima, a alimentação da antena anular cilíndrica embutida será realizada por quatro alimentadores e na primeira frequência de ressonância dos modos  $TM_{0N}$ . Dessa forma a mesma estará operando no modo  $TM_{01}$ .

Nos resultados a seguir, os parâmetros utilizados para todas as estrutura das antenas foram:

- Raio da antena:  $b = 2,1\text{cm}$
- Comprimento da antena em  $z$ :  $L_{za} = 2\text{cm}$
- Localização do alimentador em  $z$ :  $z_f = 0,5\text{cm}$
- Localização dos alimentadores em  $\phi$ :  $\phi_o = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  e  $270^\circ$
- Largura do alimentador:  $W_f = 1\text{mm}$
- Número de modos em relação à  $\phi$ :  $U = 5$
- Número de segmentos em relação à  $z$ :  $N_{seg} = 50$

Tamanho da cavidade com relação à coordenada  $z$

A fig. 2.29 mostra que a variação no tamanho da cavidade não tem grande influência sobre o valor da parte resistiva da impedância de entrada. A curva de resistividade para as três cavidade permaneceu praticamente inalterada. Ou seja, Para os três casos a frequência de ressonância é praticamente a mesma. Também não houve grande alteração com relação à largura de banda. O motivo pelo qual não ocorre grandes alterações na parte resistiva da impedância de entrada pode ser explicado pela não alteração no tamanho da microfita, de forma que o modo principal sob a mesma permanece quase que inalterado. A parte reativa da impedância de entrada teve comportamento similar até a frequência de 2,3 GHz, a partir dessa frequência, as cavidades de 4 cm e 6 cm tiveram alta oscilação em um curto intervalo de frequência. Essa brusca oscilação da parte reativa da impedância de entrada indica a existência de uma frequência de ressonância da cavidade. Em situações práticas a operação em faixas de frequência onde ocorrem as altas oscilações da parte reativa devem ser evitadas, pois o casamento de impedância entre o alimentador e a antena será prejudicado.

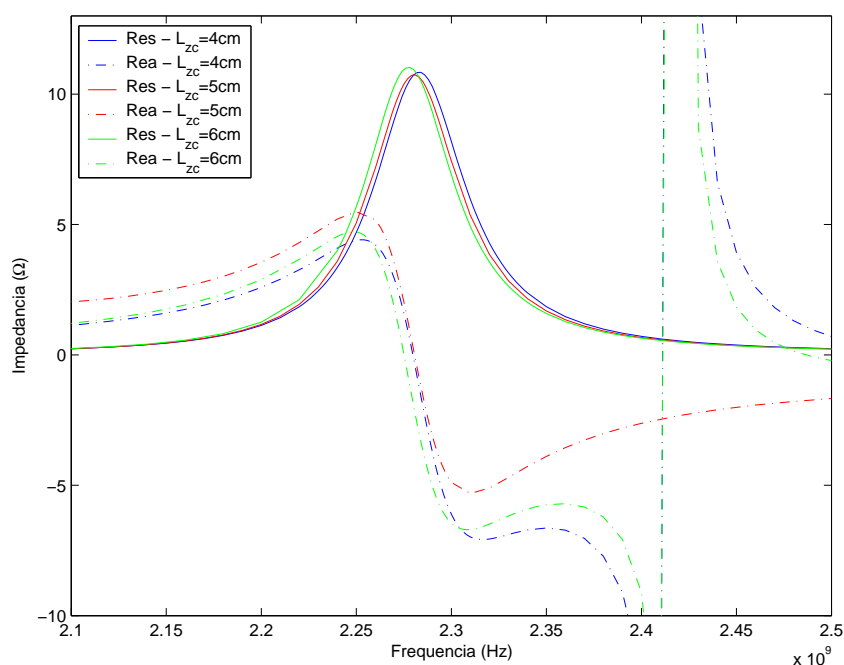


Figura 2.29: Impedância de entrada x frequência, variando o tamanho da cavidade ( $L_{zc}$ )  
 -  $h = 1mm$ ,  $\epsilon_r = 9,6$

### Espessura do substrato

A fig. 2.30 mostra que o aumento na espessura do substrato diminui a frequência de ressonância, enquanto aumenta a largura de banda. O aumento na espessura do substrato também provoca aumento na largura de banda da frequência de ressonância da cavidade. Também é observado a diminuição no valor máximo da resistência de radiação, provocando redução na potência de radiação máxima. Observa-se também a presença de uma frequência de ressonância da cavidade entre 1,8 GHz e 2,1 GHz para as três configurações. A frequência de ressonância da cavidade tem comportamento similar à resistência de radiação.

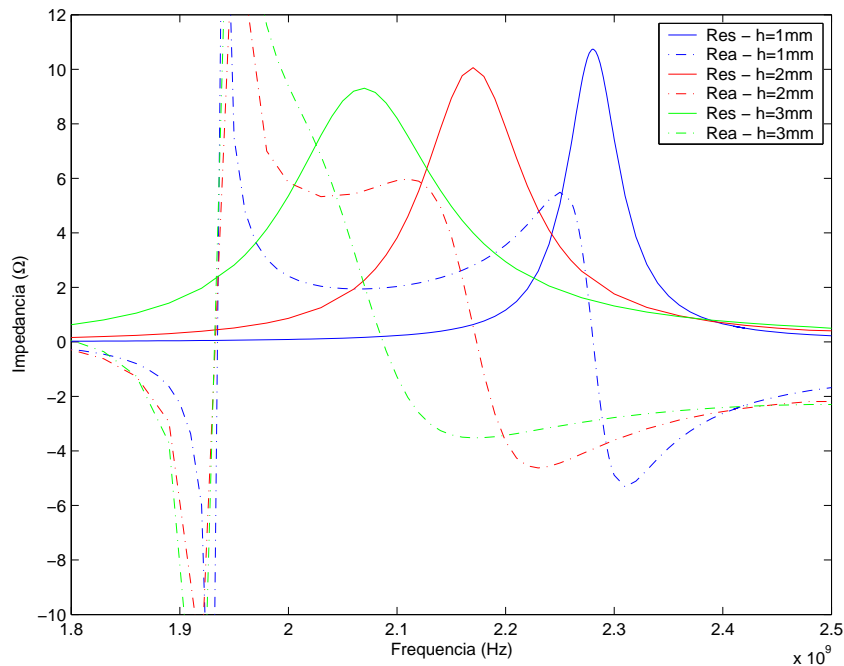


Figura 2.30: Impedância de entrada x frequência, variando a espessura do substrato ( $h$ )  
 -  $L_{zc} = 5cm$ ,  $\epsilon_r = 9,6$

### Permissividade dielétrica do substrato

A fig. 2.31 mostra que a frequência de ressonância da antena aumenta com a diminuição da permissividade do substrato. Esse mesmo comportamento é observado para a largura de banda. A resistência de radiação das antenas com substrato de permissividade relativa de 2,5 e 5,1, sofreu uma pequena queda com relação à antena com substrato de permissividade relativa de 9,6. Observa-se a existência de várias frequências de ressonancia da cavidade para as três configurações ao longo de toda a faixa de frequência apresentada.

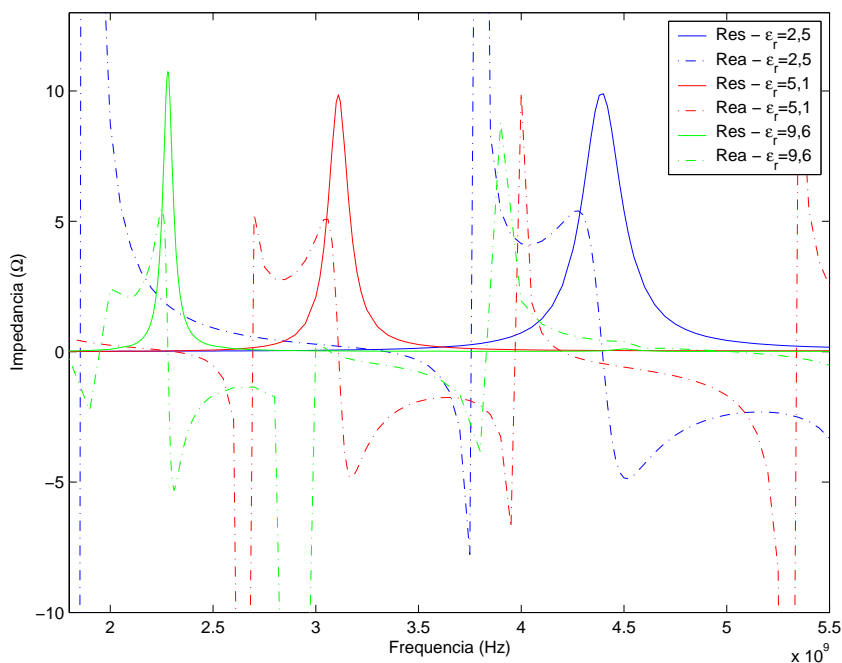


Figura 2.31: Impedância de entrada x frequência, variando a permissividade dielétrica do substrato ( $\epsilon_r$ ) -  $L_{zc} = 5cm$ ,  $h = 1mm$

## 2.11 Auto impedância do alimentador

Os resultados de impedância de entrada obtidos pelo método dos momentos consideraram as correntes magnéticas presentes na superfície da interface dielétrica como sendo as fontes dos campos eletromagnéticos internos à cavidade. Dessa forma os campos eletromagnéticos provenientes da corrente elétrica presente nos alimentadores não foram adicionados aos cálculos, desconsiderando a impedância própria dos alimentadores dentro da cavidade. Por esta razão será apresentada uma formulação baseada no método da

cavidade, onde serão determinados os campos elétricos internos à cavidade provenientes da corrente elétrica presente nos alimentadores. O conhecimento de tais campos permite determinar a impedância de entrada proveniente dos alimentadores. Essa impedância própria dos alimentadores deve ser somada à impedância de entrada obtida pelo método dos momentos.

### 2.11.1 Expansão dos campos internos à cavidade

Considerar uma região linear, homogênea e isotrópica. Pelas equações de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_o\vec{H} \quad (2.338)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon_d\vec{E} + \vec{J} \quad (2.339)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon \quad (2.340)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (2.341)$$

onde o subscrito "d" indica o meio que o campo se encontra.

Aplicando o rotacional na equação (2.338):

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_o\nabla \times \vec{H} \quad (2.342)$$

Substituindo (2.339) em (2.342):

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_o(j\omega\epsilon_d\vec{E}) - j\omega\mu_o\vec{J} = \omega^2\mu_o\epsilon_d\vec{E} - j\omega\mu_o\vec{J} \quad (2.343)$$

Definindo:

$$\omega^2\mu_o\epsilon_d = (k_d)^2 \quad (2.344)$$

a equação (2.343) pode ser expressa como:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} - (k_d)^2\vec{E} = -j\omega\mu_o\vec{J} \quad (2.345)$$

A equação (2.345) é chamada de equação de onda complexa.

Considerando a espessura do substrato muito menor que o comprimento de onda, são considerados existirem apenas componentes de campo  $E_\rho$ . Aplicando o rotacional e tomando apenas a componente na direção  $\rho$ . De [19]:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (\nabla \times \vec{E})_z - \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \times \vec{E})_\phi - (k_d)^2 E_\rho = -j\omega\mu_o J_\rho \quad (2.346)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} E_\rho \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial}{\partial z} E_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho} E_z \right] - (k_d)^2 E_\rho = -j\omega\mu_o J_\rho \quad (2.347)$$

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial \rho} (\rho E_\phi) - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} E_\rho - \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_\rho + \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} E_z - (k_d)^2 E_\rho = -j\omega\mu_o J_\rho \quad (2.348)$$

Pelas condições de contorno, campos elétricos tangências a um condutor elétrico perfeito se anulam. Em  $\rho = a$  e  $\rho = b$  esta condição deve ser satisfeita. Assim teremos que as componentes  $E_\phi$  e  $E_z$  serão nulas. O método da cavidade só converge bem quando a espessura do substrato é muito menor que o comprimento de onda. Dessa forma podemos assumir que as componentes de campo elétrico  $E_\phi$  e  $E_z$  serão nulas dentro da cavidade.

$$\text{Supondo } \begin{cases} E_\phi = E_z = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \rho} = 0 \end{cases} \quad (2.349)$$

Aplicando (2.349) em (2.348), teremos que:

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} E_\rho + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_\rho + (k_d)^2 E_\rho = j\omega\mu_o J_\rho \quad (2.350)$$

Considerando a corrente  $J_\rho$  nula, a equação (2.350) será:

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} E_\rho + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_\rho + (k_d)^2 E_\rho = 0 \quad (2.351)$$

Devido a espessura do substrato ser muito pequena, a coordenada  $\rho$  será substituída por um valor médio  $d = (\frac{a+b}{2})$ , ou seja:

$$\frac{1}{d^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} E_\rho(\phi, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_\rho(\phi, z) + (k_d)^2 E_\rho(\phi, z) = 0 \quad (2.352)$$

Usando a técnica de separação de variáveis em (2.352):

$$E_\rho(\phi, z) = \Phi(\phi)Z(z) \quad (2.353)$$

Substituindo (2.353) em (2.352), e dividindo por (2.353):

$$\frac{1}{d^2} \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2}{d\phi^2} \Phi(\phi) + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2}{dz^2} Z(z) + (k_d)^2 = 0 \quad (2.354)$$

O segundo termo é explicitamente independente de  $\rho$  e  $\phi$ . O termo em questão será expresso em função de  $k_z$ .

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2}{dz^2} Z(z) = -(k_z)^2 \quad (2.355)$$

O primeiro termo é independente de  $\rho$  e  $z$ , e os outros termos são independentes de  $\phi$ . O mesmo será expresso em função de  $\nu$ .

$$\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2}{d\phi^2} \Phi(\phi) = -\nu^2 \quad (2.356)$$

A função harmônica  $\Phi$  será expressa em forma de exponencial.

$$\Phi(\phi) = Ae^{j\nu\phi} \quad (2.357)$$

Para ser mantida a continuidade dos campos ao longo da coordenada  $\phi$ ,  $\nu$  deve ser inteiro. Dessa forma  $\nu = m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\Phi(\phi) = Ae^{jm\phi} \quad (2.358)$$

A função harmônica  $Z$  será expressa na forma de cosseno e seno, representando uma onda estacionária na direção  $z$ .

$$Z(z) = C \cos [k_z(z - z_{1c})] + D \sen [k_z(z - z_{1c})] \quad (2.359)$$

A cavidade em questão, possui paredes magnéticas em  $z = z_{1c}$  e  $z = z_{2c}$ . Pelas condições de contorno os campos elétricos tangenciais nesses pontos devem ser nulos. Ou seja:

$$E_\rho = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} Z(z) = 0 \quad (2.360)$$

para  $z = z_{1c}$  e  $z = z_2$ .

A condição de contorno impõe que o termo  $D$  deve ser nulo, e  $k_z = \left(\frac{n\pi}{L_{zc}}\right)$ . Assim (2.359) será:

$$Z(z) = D \sen \left[ \frac{n\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] \quad (2.361)$$

Lembrando que:

$$L_{zc} = z_{2c} - z_{1c}$$

Substituindo (2.358) e (2.361), o campo  $E_\rho$  pode ser reescrito como:

$$E_{\rho_{mn}}(\phi, z) = E_{mn} e^{jm\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{n\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] \quad (2.362)$$

para  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  e  $n = 0, 1, 2, \dots$ , e  $E_{mn}$  representa a amplitude do campo.

Substituindo (2.355) e (2.356) em (2.354), podemos escrever a equação de campo separadamente:

$$\frac{1}{d^2}(-\nu^2) - (k_z)^2 + (k_d)^2 = 0 \quad (2.363)$$

A equação acima é denominada de equação transcendental. Substituindo os termos  $\nu$  e  $k_z$  por  $m$  e  $n$ , respectivamente, o número de onda dos modos "mn" podem ser determinados.

$$(k_{mn})^2 = \frac{m^2}{d^2} + \left( \frac{n\pi}{L_{zc}} \right)^2 \quad (2.364)$$

onde:

$$k_{mn} = 2\pi f_{mn} \sqrt{\mu_o \epsilon_o \epsilon_r} = 2\pi f_{mn} \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c} \quad (2.365)$$

Substituindo (2.365) em (2.364), e fazendo as devidas manipulações matemáticas, as frequências de ressonâncias dos modos "mn" serão:

$$f_{mn} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\left( \frac{m}{d} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{L_{zc}} \right)^2} \quad (2.366)$$

### 2.11.2 Expansão modal dos campos excitados por um cabo coaxial

A densidade de corrente volumétrica no alimentador já foi apresentada anteriormente e é descrita por pela equação (2.11.2).

$$J_f(\rho, \phi, z) = \begin{cases} \frac{I_o}{\rho \Delta_{\phi_f}} \delta(z - z_f) & (\phi_{1f} \leq \phi \leq \phi_{2f}) \text{ e } (a \leq \rho \leq b) \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$

onde:

$$\Delta_{\phi_f} = \frac{W_f}{d}$$

Fazendo a integral de superfície sobre a densidade de corrente volumétrica do alimentador, é possível determinar a corrente total do mesmo:

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J_f(\rho, \phi, z) \rho d\phi dz = \int_{\phi_{1f}}^{\phi_{2f}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_o}{\rho \cdot \Delta\phi_f} \delta(z - z_f) \rho d\phi dz = I_o \quad (2.367)$$

onde:

$$\phi_{1f} = \phi_f - \frac{\Delta\phi_f}{2}$$

e

$$\phi_{2f} = \phi_f + \frac{\Delta\phi_f}{2}$$

Da equação (2.350) temos que:

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} E_\rho + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_\rho + (k_d)^2 E_\rho = j\omega\mu_o J_f \quad (2.368)$$

Fazendo a expansão modal do campo  $E_\rho$ :

$$E_{\rho mn}(\phi, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E_{mn} e^{jm\phi} \text{sen} \left[ \frac{n\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] \quad (2.369)$$

Substituindo (2.369) em (2.368) e fazendo as considerações sobre a espessura do dielétrico realizadas na primeira seção:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E_{mn} \left[ \frac{1}{d^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (k_d)^2 \right] \left( e^{jm\phi} \text{sen} \left[ \frac{n\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] \right) = j\omega\mu_o J_f \quad (2.370)$$

onde:

$$d = \frac{a+b}{2}$$

Aplicando as derivadas na equação (2.370) veremos que:

$$\frac{1}{d^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = - \left( \frac{m}{d} \right)^2 - \left( \frac{n\pi}{L_{zc}} \right)^2 = -(k_{mn})^2 \quad (2.371)$$

Substituindo (2.371) em (2.370):

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{ E_{mn} [(k_d)^2 - (k_{mn})^2] \} \left( e^{jm\phi} \text{sen} \left[ \frac{n\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] \right) = j\omega\mu_o J_f \quad (2.372)$$

O termo entre chaves da equação (2.372) é considerado o coeficiente da série de Fourier exponencial em  $\phi$  e de cossenos em  $z$ .

Aplicando a transformada de Fourier na densidade de corrente da equação (2.372):

$$E_{mn} [(k_d)^2 - (k_{mn})^2] = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{L_{zc}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{z_{1c}}^{z_2} j\omega\mu_o J_f(\rho, \phi, z) e^{-jm\phi} \text{sen} \left[ \frac{n\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] dz d\phi \quad (2.373)$$

Substituindo (2.11.2) em (2.373):

$$E_{mn} [(k_d)^2 - (k_{mn})^2] = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{L_{zc}} \int_{\phi_{1f}}^{\phi_{2f}} \int_{z_{1c}}^{z_2} \left( j\omega\mu_o \frac{I_o}{\rho \cdot \Delta_{\phi_f}} \delta(z - z_f) \right) \cdot e^{-jm\phi} \text{sen} \left[ \frac{n\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] dz d\phi \quad (2.374)$$

Integrando (2.374) em relação à  $z$ :

$$E_{mn} [(k_d)^2 - (k_{mn})^2] = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{L_{zc}} \left( j\omega\mu_o \frac{I_o}{\rho \cdot \Delta_{\phi_f}} \right) \text{sen} \left[ \frac{n\pi}{L_{zc}} (z_f - z_{1c}) \right] \cdot \underbrace{\int_{\phi_{1f}}^{\phi_{2f}} e^{-jm\phi} d\phi}_{I_{\phi}(m)} \quad (2.375)$$

onde:

$$I_{\phi}(m) = \begin{cases} \Delta_{\phi_f} & \text{para } m = 0, \\ \int_{\phi_f - (\Delta_{\phi_f}/2)}^{\phi_f + (\Delta_{\phi_f}/2)} e^{-jm\phi} d\phi & \text{para } m \neq 0. \end{cases}$$

Fazendo o desenvolvimento de  $I_{\phi}(m)$ , para  $m \neq 0$ :

$$I_{\phi}(m) = e^{-jm\phi_f} \frac{\text{sen} \left[ \frac{m\Delta_{\phi_f}}{2} \right]}{\frac{m\Delta_{\phi_f}}{2}} \Delta_{\phi_f} \quad (2.376)$$

onde:

$$\frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x} = \text{sinc}(x)$$

$$I_{\phi}(m) = e^{-jm\phi_f} \Delta_{\phi_f} \text{sinc} \left[ \frac{m\Delta_{\phi_f}}{2\pi} \right] \quad (2.377)$$

Como  $\text{sinc}(0) = 1$ , a equação (2.377) é válida para  $m = 0$  e  $m \neq 0$ .

Substituindo (2.377) em (2.375):

$$E_{mn} [(k_d)^2 - (k_{mn})^2] = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{L_{zc}} \left( j\omega\mu_o \frac{I_o}{d\Delta\phi_f} \right) \cos \left[ \frac{n\pi}{L_{zc}} (z_f - z_{1c}) \right] e^{-jm\phi_f} \Delta\phi_f \text{sinc} \left[ \frac{m\Delta\phi_f}{2\pi} \right] \quad (2.378)$$

$$E_{mn} = \frac{j\omega\mu_o I_o 2}{2\pi d L_{zc} [(k_d)^2 - (k_{mn})^2]} \cos \left[ \frac{n\pi}{L_{zc}} (z_f - z_{1c}) \right] e^{-jm\phi_f} \text{sinc} \left[ \frac{m\Delta\phi_f}{2\pi} \right] \quad (2.379)$$

### 2.11.3 Impedância de entrada em um alimentador

Pelo teorema da Reciprocidade [19], a impedância de entrada pode ser definida como:

$$Z_{in} = -\frac{1}{I_o^2} \int \int \int \vec{E} \cdot \vec{J}_f dv \quad (2.380)$$

onde  $I_o$  é a corrente total fornecida pela fonte,  $\vec{E}$  é o campo elétrico gerado pela corrente da fonte, e  $\vec{J}_f$  é da densidade de corrente da fonte.

Substituindo (2.11.2) e (2.369) em (2.380):

$$Z_{inA} = -\frac{1}{I_o^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_a^b \int_{\phi_{1f}}^{\phi_{2f}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E_{mn} e^{jm\phi} \text{sen} \left[ \frac{n\pi}{L_{zc}} (z - z_{1c}) \right] \cdot \frac{I_o}{\rho \cdot \Delta\phi_f} \delta(z - z_f) \rho d\phi dp dz \quad (2.381)$$

Fazendo as integrais em  $\rho$  e  $z$ :

$$Z_{in} = -\frac{1}{I_o \Delta\phi_f} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E_{mn} h \text{sen} \left[ \frac{n\pi}{L_{zc}} (z_f - z_{1c}) \right] \underbrace{\int_{\phi_{1f}}^{\phi_{2f}} e^{jm\phi} d\phi}_{I_{\phi(-m)}} \quad (2.382)$$

Substituindo (2.377) em (2.382):

$$Z_{in} = -\frac{1}{I_o \Delta\phi_f} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E_{mn} h \text{sen} \left[ \frac{n\pi}{L_{zc}} (z_f - z_{1c}) \right] e^{jm\phi_f} \Delta\phi_f \text{sinc} \left[ \frac{m\Delta\phi_f}{2\pi} \right] \quad (2.383)$$

Substituindo (2.379) em (2.383):

$$Z_{in} = -\frac{h}{I_o} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j\omega\mu_o I_o}{\pi d L_{zc} [(k_d)^2 - (k_{mn})^2]} \text{sen} \left[ \frac{n\pi}{L_{zc}} (z_f - z_{1c}) \right] \cdot e^{-jm\phi_f} \text{sinc} \left[ \frac{m\Delta\phi_f}{2\pi} \right] \text{sen} \left[ \frac{n\pi}{L_{zc}} (z_f - z_{1c}) \right] e^{jm\phi_f} \text{sinc} \left[ \frac{m\Delta\phi_f}{2\pi} \right] \quad (2.384)$$

Desenvolvendo a equação (2.384), a impedância de entrada pode ser escrita como:

$$Z_{in} = -\frac{j\omega\mu_0 h}{\pi d L_{zc}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[(k_d)^2 - (k_{mn})^2]} \text{sen}^2 \left[ \frac{n\pi}{L_{zc}} (z_f - z_{1c}) \right] \text{sinc}^2 \left[ \frac{m\Delta\phi_f}{2\pi} \right] \quad (2.385)$$

Lembrando que:

$$(k_{mn})^2 = \left( \frac{m}{d} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{L_{zc}} \right)^2$$

### 2.11.4 Resultados

O resultado de impedância de entrada apresentado é referente à impedância do ponto de vista de um alimentador. Para a obtenção do mesmo foi utilizado o método dos momentos para obter os campos elétricos internos à cavidade provenientes das correntes magnéticas sobre a interface dielétrica, mais os campos elétricos provenientes dos alimentadores. O mesmo será comparado ao resultado obtidos pelo método dos elementos finitos.

Os parâmetros utilizados foram:

- Raio da antena:  $b = 2,1\text{cm}$
- Comprimento da antena em  $z$ :  $L_{za} = 2\text{cm}$
- Comprimento da cavidade em  $z$ :  $L_{zc} = 5\text{cm}$
- Espessura do substrato:  $h = 1,45\text{mm}$
- Permissividade relativa do substrato:  $\epsilon_r = 9,6$
- Localização dos alimentadores em  $z$ :  $z_f = 0,5\text{cm}$
- Localização dos alimentadores em  $\phi$ :  $\phi_o = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  e  $270^\circ$
- Largura do alimentador:  $W_f = 2\text{mm}$
- Número de modos em relação à  $\phi$ :  $U = 5$
- Número de segmentos em relação à  $z$ :  $N_{seg} = 25$

Analisando a fig. 2.32, observa-se a grande similaridade entre os resultados obtidos pelo método dos momentos combinado ao método da cavidade e o método dos elementos finitos (HFSS). Tanto a parte resistiva quanto a parte reativa estão muito próximas. A largura de banda também apresenta comportamento muito similar.

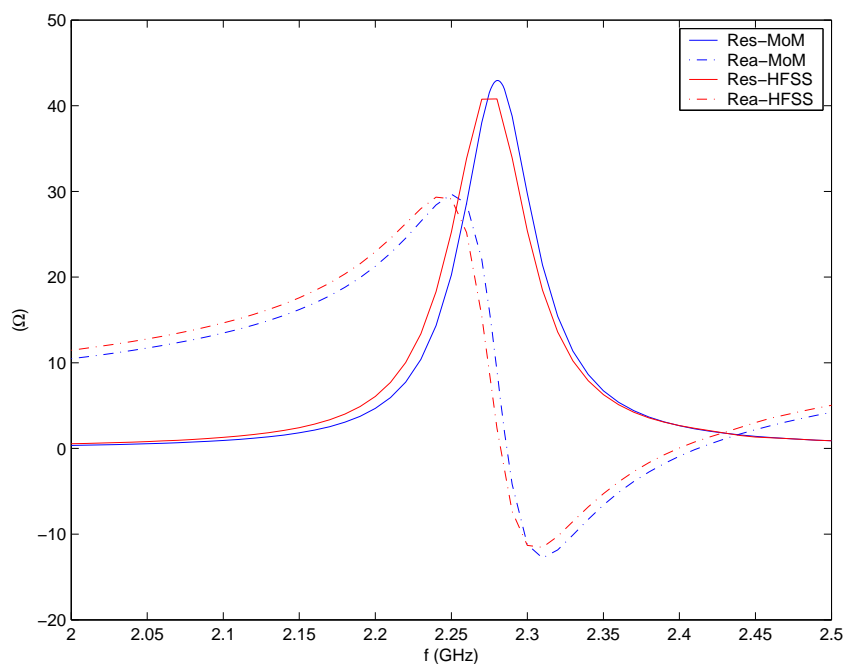


Figura 2.32: Impedância de entrada x frequência, em um alimentador, considerando a impedância própria do alimentador

## 2.12 Síntese e conclusões

### Síntese

Neste capítulo foi apresentada a formulação para a análise da antena de microfita anular cilíndrica embutida. Até onde sabemos tal estrutura não foi apresentada ou estudada em nenhuma literatura. A técnica numérica utilizada para a análise foi o método dos momentos.

Para serem determinados os campos eletromagnéticos internos e externos à cavidade, correntes magnéticas na forma de funções de base foram formuladas, e através da implementação computacional foi possível determinar os coeficientes desconhecidos que compõem tais funções.

O estudo de antenas de microfita dentro de cavidades elétricas é motivado pelo fato de que tal estrutura resulta na diminuição das ondas de superfície presentes na camada dielétrica, e assim, facilitando a utilização de múltiplos elementos radiadores, devido a redução do acoplamento entre os mesmos. Sendo de grande importância o conhecer os efeitos que a presença da cavidade gera nas características de tais antenas. O objetivo principal desse capítulo é apresentar um estudo sobre o comportamento das antenas de microfita anulares cilíndricas embutidas, considerando as características principais de uma

antena: diagrama de radiação e impedância de entrada. Como não existem estudos anteriores a este, compreendendo uma estrutura igual, uma antenna similar foi utilizada para serem feitas as comparações dos resultados e para avaliação da formulação.

Foi apresentado também o comportamento da antenna utilizando múltiplos alimentadores, já que tal técnica permite a criação de uma antenna com característica omnidirecional.

### **Conclusões**

Alguns resultados de diagrama de radiação e impedância de entrada apresentados nesse capítulo, foram obtidos utilizando parâmetros que foram utilizados em outra literatura. A maioria dos resultados apresentou comportamento similar. Através desses resultados é possível dizer que mesmo apresentando estruturas diferentes, tais antenas possuem comportamentos similares.

A utilização de múltiplos alimentadores permitiu observar a possibilidade de se criar uma antenna com característica omnidirecional. Os resultados apresentados mostraram que para obter tal característica é necessário utilizar um número de alimentadores maior do que o número de comprimentos de onda no substrato. Porém os resultados demonstraram que a utilização de um número de alimentadores imediatamente maior que o número de comprimentos de onda no dielétrico não foi suficiente para se obter um diagrama omnidirecional. No exemplo II, foi necessário utilizar três alimentadores a mais que o número de comprimentos de onda.

O gráfico comparativo de impedância de entrada entre a antenna embutida (utilizando múltiplos alimentadores) e a antenna anular de [10] mostrou que as mesmas apresentam um comportamento muito similar quando estão operando exclusivamente no modo  $TM_{01}$ .

Foram apresentados gráficos de impedância de entrada da antenna com alterações nos parâmetros da estrutura, como: tamanho da cavidade em relação à coordenada  $z$ , espessura e permissividade dielétrica do substrato. Essas alterações permitiram observar variações na impedância de entrada da antenna, tais como, alteração da frequência de ressonância, largura de banda e resistência de radiação máxima.

# Capítulo 3

## Análise de antenas de microfita anulares cilíndricas pelo método da cavidade

### 3.1 Introdução

Neste capítulo será apresentada a análise de uma antena de microfita anular montada sobre um cilindro condutor infinito coberto por um material dielétrico (substrato) de permissividade relativa  $\epsilon_r$ . A estrutura da antena é apresentada pela fig. 1.1.

A estrutura em questão será analisada utilizando o método da cavidade. A mesma já foi analisada em outros trabalhos, e aqui, será apresentada para efeito de comparação e validação dos resultados apresentados no capítulo anterior.

O método da cavidade vem sendo muito utilizado na análise de antenas de microfita, e o mesmo apresenta bons resultados quando a espessura do substrato é eletricamente fina em relação ao comprimento de onda.

No desenvolvimento deste capítulo será apresentada a formulação para serem determinadas as frequências de ressonância, o diagrama de radiação e a impedância de entrada. Em [3] a mesma estrutura foi analisada utilizando o método da cavidade, e foram apresentados resultados de diagrama de radiação. Em [10] a estrutura foi analisada utilizando o método dos momentos. Foram apresentados resultados de diagrama de radiação e a impedância de entrada. Em [11] foi apresentado o desenvolvimento das frequências de ressonância, também utilizando o método dos momentos. Em [9] foi proposta uma formulação para serem consideradas as perdas nos materiais que compõem a estrutura.

No método da cavidade a estrutura é considerada uma cavidade ressonante fechada

## Análise de antenas de microfita anulares cilíndricas pelo método da cavidade

por anéis condutores magnéticos entre a microfita e o cilindro condutor, e por paredes condutoras elétricas nas superfícies laterais.

Após considerar a estrutura em questão como uma cavidade fechada, os campos eletromagnéticos no interior da cavidade são expandidos e assim são determinadas as correntes magnéticas superficiais sobre as paredes magnéticas, onde as mesmas são consideradas as fontes geradoras dos campos irradiados.

### 3.2 Campos internos à cavidade

Considerando uma região linear, homogênea e isotrópica, as equações de Maxwell podem ser escritas como:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_o\vec{H} \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon_d\vec{E} + \vec{J} \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (3.4)$$

onde o subscrito "d" indica o meio que o campo se encontra.

Aplicando o rotacional na equação (3.1):

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_o\nabla \times \vec{H} \quad (3.5)$$

Substituindo (3.2) em (3.5):

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_o(j\omega\epsilon_d\vec{E}) - j\omega\mu_o\vec{J} = \omega^2\mu_o\epsilon_d\vec{E} - j\omega\mu_o\vec{J} \quad (3.6)$$

Definindo:

$$\omega^2\mu_o\epsilon_d = (k_d)^2 \quad (3.7)$$

a equação (3.6) é expressa como:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} - (k_d)^2\vec{E} = -j\omega\mu_o\vec{J} \quad (3.8)$$

A equação (3.8) é chamada de equação de onda complexa.

## Análise de antenas de microfita anulares cilíndricas pelo método da cavidade

Pelas condições de contorno os campos elétricos tangências a um condutor elétrico perfeito se anulam. Em  $\rho = a$  e  $\rho = b$  esta condição deve ser satisfeita. Assim teremos que as componentes  $E_\phi$  e  $E_z$  serão nulas. Considerando a espessura do substrato muito menor que o comprimento de onda, é considerado que as componentes de campo elétrico  $E_\phi$  e  $E_z$  são nulas dentro da cavidade, existindo apenas a componente de campo  $E_\rho$ . Por serem tomadas essas considerações, o método da cavidade só converge bem quando a espessura do substrato é muito menor que o comprimento de onda.

Aplicando o rotacional e tomando apenas a componente na direção  $\rho$ . De [19]:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (\nabla \times \vec{E})_z - \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \times \vec{E})_\phi - (k_d)^2 E_\rho = -j\omega\mu_o J_\rho \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} E_\rho \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial}{\partial z} E_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho} E_z \right] - (k_d)^2 E_\rho = -j\omega\mu_o J_\rho \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial \rho} (\rho E_\phi) - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} E_\rho - \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_\rho + \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} E_z - (k_d)^2 E_\rho = -j\omega\mu_o J_\rho \quad (3.11)$$

Aplicando as considerações anteriores:

$$\begin{cases} E_\phi = E_z = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \rho} = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Aplicando (3.12) em (3.11), teremos que:

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} E_\rho + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_\rho + (k_d)^2 E_\rho = j\omega\mu_o J_\rho \quad (3.13)$$

Considerando a corrente  $J_\rho$  nula, a equação (3.13) será:

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} E_\rho + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_\rho + (k_d)^2 E_\rho = 0 \quad (3.14)$$

Devido a espessura do substrato ser muito pequena, a coordenada  $\rho$  será substituída por um valor médio  $d = \left(\frac{a+b}{2}\right)$ , ou seja:

$$\frac{1}{d^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} E_\rho(\phi, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_\rho(\phi, z) + (k_d)^2 E_\rho(\phi, z) = 0 \quad (3.15)$$

Usando a técnica de separação de variáveis em (3.15):

$$E_\rho(\phi, z) = \Phi(\phi)Z(z) \quad (3.16)$$

## Análise de antenas de microfita anulares cilíndricas pelo método da cavidade

Substituindo (3.16) em (3.15), e dividindo por (3.16):

$$\frac{1}{d^2} \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2}{d\phi^2} \Phi(\phi) + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2}{dz^2} Z(z) + (k_d)^2 = 0 \quad (3.17)$$

O segundo termo é explicitamente independente de  $\rho$  e  $\phi$ . O termo em questão será expresso em função de  $k_z$ .

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2}{dz^2} Z(z) = -(k_z)^2 \quad (3.18)$$

O primeiro termo é independente de  $\rho$  e  $z$ , e os outros termos são independentes de  $\phi$ . O mesmo será expresso em função de  $\nu$ .

$$\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2}{d\phi^2} \Phi(\phi) = -\nu^2 \quad (3.19)$$

A função harmônica  $\Phi$  será expressa em forma de exponencial.

$$\Phi(\phi) = Ae^{j\nu\phi} \quad (3.20)$$

Para ser mantida a continuidade dos campos ao longo da coordenada  $\phi$ ,  $\nu$  deve ser inteiro. Dessa forma  $\nu = m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\Phi(\phi) = Ae^{jm\phi} \quad (3.21)$$

A função harmônica  $Z$  será expressa na forma de cosseno e seno, representando uma onda estacionária na direção  $z$ .

$$Z(z) = C \cos [k_z(z - z_1)] + D \sin [k_z(z - z_1)] \quad (3.22)$$

A cavidade que estamos estudando foi fechada por paredes magnéticas em  $z = z_1$  e  $z = z_2$ . Pelas condições de contorno os campos magnéticos tangenciais nesses pontos devem ser nulos. Ou seja:

$$H_\rho = H_\phi = \frac{\partial}{\partial z} E_\rho = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} Z(z) = 0 \quad (3.23)$$

para  $z = z_1$  e  $z = z_2$ .

A condição de contorno impõe que o termo  $D$  deve ser nulo, e  $k_z = \left(\frac{n\pi}{L_z}\right)$ . Assim (3.22) será:

$$Z(z) = C \cos \left[ \frac{n\pi}{L_z} (z - z_1) \right] \quad (3.24)$$

onde:

$$L_z = z_2 - z_1$$

Substituindo (3.21) e (3.24) em (3.16), o campo  $E_\rho$  pode ser reescrito como:

$$E_{\rho mn}(\phi, z) = E_{mn} e^{jm\phi} \cos \left[ \frac{n\pi}{L_z}(z - z_1) \right] \quad (3.25)$$

para  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  e  $n = 0, 1, 2, \dots$ , e  $E_{mn}$  representa a amplitude do campo.

Os campos magnéticos no interior da cavidade podem ser determinados aplicando a equação (3.1).

$$H_{\phi mn}(\phi, z) = -\frac{n\pi}{j\omega\mu_o L_z} E_{mn} e^{jm\phi} \sin \left[ \frac{n\pi}{L_z}(z - z_1) \right] \quad (3.26)$$

$$H_{z mn}(\phi, z) = \frac{m}{\omega\mu_o \rho} E_{mn} e^{jm\phi} \cos \left[ \frac{n\pi}{L_z}(z - z_1) \right] \quad (3.27)$$

Substituindo (3.18) e (3.19) em (3.17), podemos escrever a equação de campo separadamente:

$$\frac{1}{d^2}(-\nu^2) - (k_z)^2 + (k_d)^2 = 0 \quad (3.28)$$

A equação acima é denominada de equação transcendental. Substituindo os termos  $\nu$  e  $k_z$  por  $m$  e  $n$ , respectivamente, o número de onda dos modos "mn" podem ser determinados.

$$(k_{mn})^2 = \frac{m^2}{d^2} + \left( \frac{n\pi}{L_z} \right)^2 \quad (3.29)$$

onde:

$$k_{mn} = 2\pi f_{mn} \sqrt{\mu_o \epsilon_o \epsilon_r} = 2\pi f_{mn} \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c} \quad (3.30)$$

Substituindo (3.30) em (3.29), e fazendo as devidas manipulações matemáticas, as frequências de ressonâncias dos modos "mn" serão:

$$f_{mn} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\left( \frac{m}{d} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{L_z} \right)^2} \quad (3.31)$$

### 3.2.1 Correntes magnéticas superficiais

Os campos irradiados pela antena são os mesmos que são excitados pelas correntes magnéticas que estão distribuídas nas duas aberturas com a mesma largura [3]. Nas duas paredes magnéticas, em  $z = z_1$  e  $z = z_2$  os campos são determinados utilizando o Teorema da Equivalência, sendo que nessas regiões as correntes magnéticas são expressas da seguinte forma:

$$\vec{M}_s = -\hat{n} \times \vec{E} \quad (3.32)$$

Onde  $\hat{n}$  é o vetor normal à parede magnética, apontando para a região de interesse. Para esse caso deseja-se calcular os campos irradiados pela antena, por isso os vetores normais estão apontados para fora da cavidade. A direção dos vetores normais é mostrada na fig. 3.1.

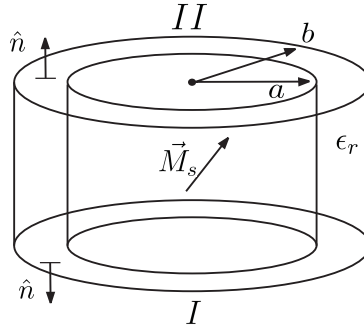


Figura 3.1: Representação das correntes magnéticas externas à cavidade

Para a região  $I$ , a corrente magnética será:

$$\vec{M}_{s_{mn}}^I = -\hat{n} \times \vec{E}_{mn} = -(-\hat{a}_z) \times (E_{\rho_{mn}} \hat{a}_\rho) = E_{\rho_{mn}} \hat{a}_\phi |_{z=z_1} \quad (3.33)$$

Substituindo (3.25) em (3.33):

$$\vec{M}_{s_{mn}}^I = E_{mn} e^{jm\phi} \cos \left[ \frac{n\pi}{L_z} (z - z_1) \right] \Big|_{z=z_1} \hat{a}_\phi \quad (3.34)$$

Para  $z = z_1$ , o valor do cosseno será 1, e  $\vec{M}_{s_{mn}}^I$  será:

$$\vec{M}_{s_{mn}}^I = E_{mn} e^{jm\phi} \hat{a}_\phi \quad (3.35)$$

Para a região  $II$ , a corrente magnética será:

$$\vec{M}_{s_{mn}}^{II} = -\hat{n} \times \vec{E}_{mn} = -\hat{a}_z \times (E_{\rho_{mn}} \hat{a}_\rho) = -E_{\rho_{mn}} \hat{a}_\phi |_{z=z_2} \quad (3.36)$$

Substituindo (3.25) em (3.36):

$$\vec{M}_{s_{mn}}^{II} = -E_{mn} e^{jm\phi} \cos \left[ \frac{n\pi}{L_z} (z - z_1) \right] \Big|_{z=z_2} \hat{a}_\phi \quad (3.37)$$

Em  $z = z_2$ ,  $\vec{M}_{s_{mn}}^{II}$  será:

$$\vec{M}_{s_{mn}}^{II} = -E_{mn} e^{jm\phi} \cos(n\pi) \hat{a}_\phi \quad (3.38)$$

Como  $n$  deve ser inteiro, a equação (3.38) pode ser reescrita como:

$$\vec{M}_{s_{mn}}^{II} = -E_{mn} e^{jm\phi} (-1)^n \hat{a}_\phi \quad (3.39)$$

Como a espessura do dielétrico é muito pequena com relação ao comprimento de onda, as correntes magnéticas dispostas sobre as paredes magnéticas da cavidade podem ser aproximadas por correntes filamentosas ao longo das bordas da antena.

$$\vec{M}_f = \int_a^b \vec{M}_s d\rho = h \cdot \vec{M}_s \quad (3.40)$$

onde  $h = b - a$ .

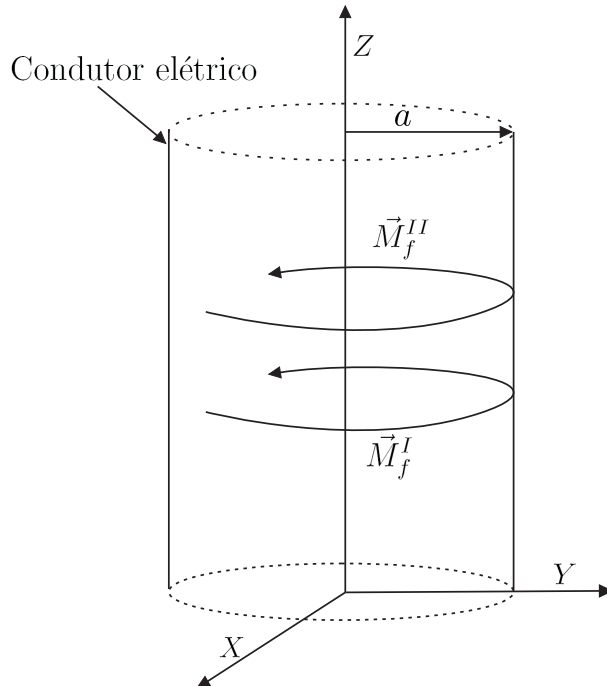


Figura 3.2: Correntes filamentosas sobre o cilindro condutor

Substituindo (3.35) e (3.39) em (3.40):

$$\begin{aligned}\vec{M}_{f_{mn}}^I &= \hat{a}_\phi E_{mn} e^{jm\phi} h \\ &= -\hat{a}_\phi E_{mn} e^{jm\phi} (-1)^n h\end{aligned}\quad (3.41)$$

Escrevendo as correntes filamentosas como corrente superficiais em  $\rho = a$ :

$$\vec{M}_{s_{mn}}^I = \vec{M}_{f_{mn}}^I \delta(z - z_1) = \hat{a}_\phi E_{mn} e^{jm\phi} h \delta(z - z_1) \quad (3.42)$$

$$\vec{M}_{s_{mn}}^{II} = \vec{M}_{f_{mn}}^{II} \delta(z - z_2) = -\hat{a}_\phi E_{mn} e^{jm\phi} (-1)^n h \delta(z - z_2) \quad (3.43)$$

Agrupando (3.42) e (3.43), a corrente magnética superficial será:

$$\vec{M}_{s\phi_{mn}} = E_{mn} e^{jm\phi} h [\delta(z - z_1) - \delta(z - z_2) (-1)^n] \quad (3.44)$$

### 3.3 Campos irradiados devido às correntes magnéticas

Na região externa à cavidade, os campos são expandidos em componentes  $TM_z$  e  $TE_z$ . Em termo dos potenciais vetores estes campos são obtidos através das componentes:

$$\vec{A} = A_z \hat{a}_z \quad (3.45a)$$

$$\vec{F} = F_z \hat{a}_z \quad (3.45b)$$

Para expressarmos o campo elétrico em termo de funções de onda em coordenadas cilíndricas, que sejam necessariamente  $TM_z$  e  $TE_z$ , as mesmas podem ser descritas por [19].

$$E_\rho = \frac{1}{j\omega\epsilon_o} \frac{\partial^2 A_z}{\partial\rho\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial\phi} \quad (3.46)$$

$$E_\phi = \frac{1}{j\omega\epsilon_o\rho} \frac{\partial^2 A_z}{\partial\phi\partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial\rho} \quad (3.47)$$

$$E_z = \frac{1}{j\omega\epsilon_o} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (k_o)^2 \right) A_z \quad (3.48)$$

onde:

$$(k_o)^2 = (k_z)^2 + (k_\rho)^2$$

Os potenciais vetores devem ser solução da equação de onda, ou seja:

$$\nabla^2 A_z + k_o^2 A_z = 0 \quad (3.49a)$$

$$\nabla^2 F_z + k_o^2 F_z = 0 \quad (3.49b)$$

A solução da equação de onda pode ser escrita como a soma de funções que satisfazem as condições de continuidade e radiação.

Definindo o par de transformadas:

$$\Psi(\phi, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}(p, k_z) e^{jk_z z} e^{jp\phi} dk_z \quad (3.50a)$$

$$\tilde{\Psi}(p, k_z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \Psi(\phi, z) e^{-jk_z z} e^{-jp\phi} d\phi dz \quad (3.50b)$$

Os potenciais vetores serão expandidos como a soma de funções que satisfazem a equação de onda.

$$A_z(\rho, \phi, z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(p, k_z) H_p^{(2)}(k_\rho \rho) e^{jk_z z} e^{jp\phi} dk_z \quad (3.51)$$

$$F_z(\rho, \phi, z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(p, k_z) H_p^{(2)}(k_\rho \rho) e^{jk_z z} e^{jp\phi} dk_z \quad (3.52)$$

Pelo Teorema da Equivalência, as correntes magnéticas sobre a interface dielétrica (substrato-ar), serão:

$$M_\phi \hat{a}_\phi + M_z \hat{a}_z = -\hat{a}_\rho \times [E_\rho \hat{a}_\rho + E_\phi \hat{a}_\phi + E_z \hat{a}_z] \quad (3.53)$$

Aplicando o produto vetorial em (3.53), as correntes magnéticas serão:

$$M_\phi = E_z \quad (3.54)$$

$$M_z = -E_\phi \quad (3.55)$$

Substituindo (3.48) em (3.54), a corrente  $M_\phi$  é definida como:

$$M_\phi = \frac{1}{j\omega\epsilon_o} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (k_o)^2 \right) A_z \quad (3.56)$$

Substituindo (3.51) em (3.56):

$$M_\phi(\rho, \phi, z) = \frac{1}{j\omega\epsilon_o} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (k_o)^2 \right) A(p, k_z) H_p^{(2)}(k_\rho \rho) e^{jk_z z} e^{jp\phi} dk_z \quad (3.57)$$

Aplicando as derivadas:

$$M_\phi(\rho, \phi, z) = \frac{1}{j\omega\epsilon_o} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(k_o)^2 - (k_z)^2] A(p, k_z) H_p^{(2)}(k_\rho \rho) e^{jk_z z} e^{jp\phi} dk_z \quad (3.58)$$

Fazendo

$$[(k_o)^2 - (k_z)^2] = (k_\rho)^2 \quad (3.59)$$

Substituindo (3.59) em (3.58), em  $\rho = a$ :

$$M_\phi(\rho, \phi, z) = \frac{1}{j\omega\epsilon_o} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (k_\rho)^2 A(p, k_z) H_p^{(2)}(k_\rho a) e^{jk_z z} e^{jp\phi} dk_z \quad (3.60)$$

Multiplicando o numerador e o denominador por  $2\pi$  :

$$M_\phi(\rho, \phi, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[ \frac{2\pi(k_\rho)^2}{j\omega\epsilon_o} A(p, k_z) H_p^{(2)}(k_\rho a) \right]}_{\text{Transformada de } M_\phi = \tilde{M}_\phi(p, k_z)} e^{jk_z z} e^{jp\phi} dk_z \quad (3.61)$$

O termo dentro da chave na equação (3.61) pode ser considerado como a transformada de  $M_\phi$ :

$$\tilde{M}_\phi(p, k_z) = \frac{2\pi(k_\rho)^2}{j\omega\epsilon_o} A(p, k_z) H_p^{(2)}(k_\rho a) \quad (3.62)$$

Dessa forma,  $A(p, k_z)$  pode ser definido como:

$$A(p, k_z) = \frac{j\omega\epsilon_o}{2\pi(k_\rho)^2} \frac{\tilde{M}_\phi(p, k_z)}{H_p^{(2)}(k_\rho a)} \quad (3.63)$$

Substituindo (3.47) em (3.55), a corrente  $M_z$  é definida como:

$$M_z = -\frac{1}{j\omega\epsilon_o \rho} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \phi \partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \quad (3.64)$$

Substituindo (3.51) e (3.52) em (3.64):

$$M_z(\rho, \phi, z) = -\frac{1}{j\omega\epsilon_o\rho} \frac{\partial^2}{\partial\phi\partial z} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(p, k_z) H_p^{(2)}(k_\rho\rho) e^{jk_z z} e^{jp\phi} dk_z - \frac{\partial}{\partial\rho} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(p, k_z) H_p^{(2)}(k_\rho\rho) e^{jk_z z} e^{jp\phi} dk_z \quad (3.65)$$

Aplicando as derivadas:

$$M_z(\rho, \phi, z) = -\frac{1}{j\omega\epsilon_o\rho} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (jp)(jk_z) A(p, k_z) H_p^{(2)}(k_\rho\rho) e^{jk_z z} e^{jp\phi} dk_z - \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_\rho F(p, k_z) H_p^{(2)'}(k_\rho\rho) e^{jk_z z} e^{jp\phi} dk_z \quad (3.66)$$

Juntando os termos, em  $\rho = a$ :

$$M_z(\rho, \phi, z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{pk_z}{j\omega\epsilon_o a} A(p, k_z) H_p^{(2)}(k_\rho a) - k_\rho F(p, k_z) H_p^{(2)'}(k_\rho a) \right] \cdot e^{jk_z z} e^{jp\phi} dk_z \quad (3.67)$$

Multiplicando o numerador e o denominador por  $2\pi$  :

$$M_z(\rho, \phi, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{2\pi \left[ \frac{pk_z}{j\omega\epsilon_o a} A(p, k_z) H_p^{(2)}(k_\rho a) - k_\rho F(p, k_z) H_p^{(2)'}(k_\rho a) \right]}_{\text{Transformada de } M_z = \tilde{M}_z(p, k_z)} \cdot e^{jk_z z} e^{jp\phi} dk_z \quad (3.68)$$

O termo sobre a chave da equação (3.68) pode ser considerado como a transformada de  $M_z$ :

$$\frac{1}{2\pi} \tilde{M}_z(\rho, \phi, z) = \frac{pk_z}{j\omega\epsilon_o a} A(p, k_z) H_p^{(2)}(k_\rho a) - k_\rho F(p, k_z) H_p^{(2)'}(k_\rho a) \quad (3.69)$$

Substituindo (3.63) em (3.69):

$$\frac{1}{2\pi} \tilde{M}_z(p, k_z) = \frac{pk_z}{j\omega\epsilon_o a} \left[ \frac{j\omega\epsilon_o}{2\pi(k_\rho)^2} \tilde{M}_\phi(p, k_z) \right] H_p^{(2)}(k_\rho a) - k_\rho F(p, k_z) H_p^{(2)'}(k_\rho a) \quad (3.70)$$

$$\frac{1}{2\pi} \widetilde{M}_z(p, k_z) = \frac{pk_z}{2\pi a(k_\rho)^2} \widetilde{M}_\phi(p, k_z) - k_\rho F(p, k_z) H_p^{(2)'}(k_\rho a) \quad (3.71)$$

$$k_\rho F(p, k_z) H_p^{(2)'}(k_\rho a) = \frac{pk_z}{2\pi a(k_\rho)^2} \widetilde{M}_\phi(p, k_z) - \frac{1}{2\pi} \widetilde{M}_z(p, k_z) \quad (3.72)$$

Dessa forma,  $F(p, k_z)$  pode ser definido como:

$$F(p, k_z) = \frac{1}{2\pi k_\rho H_p^{(2)'}(k_\rho a)} \left[ \frac{pk_z}{a(k_\rho)^2} \widetilde{M}_\phi(p, k_z) - \widetilde{M}_z(p, k_z) \right] \quad (3.73)$$

Os campos elétricos excitados pelas correntes magnéticas são obtidos substituindo-se (3.63) e (3.73) em (3.51) e (3.52), e posteriormente em (3.46)-(3.48).

### 3.4 Corrente magnética superficial transformada

A corrente magnética superficial transformada pode ser determinada aplicando (3.50b) em (3.44):

$$\widetilde{M}_{s\phi_{mn}}(p, k_z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_{s\phi_{mn}}(\phi, z) e^{-jp\phi} e^{-jk_z z} dz d\phi \quad (3.74)$$

Substituindo (3.44) em (3.74):

$$\widetilde{M}_{s\phi_{mn}}(p, k_z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{mn} e^{jm\phi} h [\delta(z - z_1) - \delta(z - z_2)(-1)^n] e^{-jp\phi} e^{-jk_z z} dz d\phi \quad (3.75)$$

Fazendo a integração em  $z$ :

$$\widetilde{M}_{s\phi_{mn}}(p, k_z) = \frac{E_{mn} h}{2\pi} [e^{-jk_z z_1} - e^{-jk_z z_2} (-1)^n] \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(m-p)\phi} d\phi}_{2\pi \delta_{(m,p)}} \quad (3.76)$$

onde:

$$\delta_{(m,p)} = \begin{cases} 1 & \text{para } m = p \\ 0 & \text{para } m \neq p \end{cases} \quad (3.77)$$

A corrente magnética superficial transformada pode ser definida como:

$$\widetilde{M}_{s\phi_{mn}}(p, k_z) = E_{mn} h \delta_{(m,p)} [e^{-jk_z z_1} - e^{-jk_z z_2} (-1)^n] \quad (3.78)$$

### 3.5 Expansão dos campos excitados por um cabo coaxial

Assim como foi realizado no capítulo anterior, a alimentação da antena anular será feita por um cabo coaxial modelado por uma fita  $W_f$ , fig. 3.3, posicionada em  $z = z_f$  e centrada em  $\phi = \phi_f$ , fig. 3.3.

A densidade de corrente superficial no alimentador é descrita pela equação (3.79).

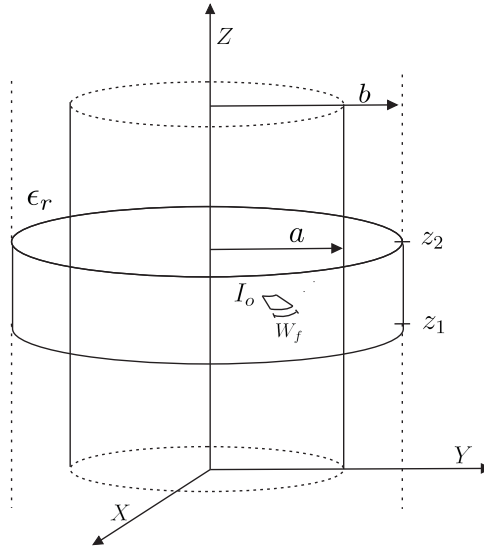


Figura 3.3: Antena alimentada por uma fita condutora de largura  $W_f$

$$J_f(\rho, \phi, z) = \begin{cases} \frac{I_o}{\rho \cdot \Delta_{\phi_f}} \delta(z - z_f) \hat{\rho} & (\phi_{1_f} \leq \phi \leq \phi_{2_f}) \text{ e } (a \leq \rho \leq b) \\ 0 & \text{fora} \end{cases} \quad (3.79)$$

onde:

$$\Delta_{\phi_f} = \frac{W_f}{d}$$

e

$$d = \frac{a + b}{2}$$

Fazendo a integral de superfície sobre a densidade de corrente superficial do alimentador, é possível determinar a corrente total do mesmo:

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J_f(\rho, \phi, z) \rho d\phi dz = \int_{\phi_{1_f}}^{\phi_{2_f}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_o}{\rho \cdot \Delta_{\phi_f}} \delta(z - z_f) \rho d\phi dz = I_o \quad (3.80)$$

onde:

$$\phi_{1f} = \phi_f - \frac{\Delta\phi_f}{2}$$

e

$$\phi_{2f} = \phi_f + \frac{\Delta\phi_f}{2}$$

Da equação (3.13) temos que:

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} E_\rho + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_\rho + (k_d)^2 E_\rho = j\omega\mu_o J_f \quad (3.81)$$

Fazendo a expansão modal do campo  $E_\rho$ :

$$E_{\rho mn}(\phi, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E_{mn} e^{jm\phi} \cos \left[ \frac{n\pi}{L_z} (z - z_1) \right] \quad (3.82)$$

Substituindo (3.82) em (3.81) e usando as considerações sobre a espessura do dielétrico realizadas na primeira seção:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E_{mn} \left[ \frac{1}{d^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (k_d)^2 \right] \left( e^{jm\phi} \cos \left[ \frac{n\pi}{L_z} (z - z_1) \right] \right) = j\omega\mu_o J_f \quad (3.83)$$

Desenvolvendo as derivadas na equação (3.83) veremos que:

$$\frac{1}{d^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = - \left( \frac{m}{d} \right)^2 - \left( \frac{n\pi}{L_z} \right)^2 = -(k_{mn})^2 \quad (3.84)$$

Substituindo (3.84) em (3.83):

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{ E_{mn} [(k_d)^2 - (k_{mn})^2] \} \left( e^{jm\phi} \cos \left[ \frac{n\pi}{L_z} (z - z_1) \right] \right) = j\omega\mu_o J_f \quad (3.85)$$

O termo entre chaves da equação (3.85) é considerado o coeficiente da série de Fourier exponencial em  $\phi$  e de cossenos em  $z$ .

Aplicando a transformada de Fourier na densidade de corrente da equação (3.85):

$$E_{mn} [(k_d)^2 - (k_{mn})^2] = \frac{1}{2\pi} \frac{L_n}{L_z} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{z_1}^{z_2} j\omega\mu_o J_f(\rho, \phi, z) e^{-jm\phi} \cos \left[ \frac{n\pi}{L_z} (z - z_1) \right] dz d\phi \quad (3.86)$$

onde:

$$L_n = \begin{cases} 1 & \text{para } q = 0, \\ 2 & \text{para } q \neq 0. \end{cases}$$

Substituindo (3.79) em (3.86):

$$E_{mn} [(k_d)^2 - (k_{mn})^2] = \frac{1}{2\pi} \frac{L_n}{L_z} \int_{\phi_{1f}}^{\phi_{2f}} \int_{z_1}^{z_2} \left( j\omega\mu_o \frac{I_o}{\rho \cdot \Delta\phi_f} \delta(z - z_f) \right) \cdot e^{-jm\phi} \cos \left[ \frac{n\pi}{L_z} (z - z_1) \right] dz d\phi \quad (3.87)$$

Integrando (3.87) em relação à  $z$ :

$$E_{mn} [(k_d)^2 - (k_{mn})^2] = \frac{1}{2\pi} \frac{L_n}{L_z} \left( j\omega\mu_o \frac{I_o}{\rho \cdot \Delta\phi_f} \right) \cos \left[ \frac{n\pi}{L_z} (z_f - z_1) \right] \cdot \underbrace{\int_{\phi_{1f}}^{\phi_{2f}} e^{-jm\phi} d\phi}_{I_\phi(m)} \quad (3.88)$$

onde:

$$I_\phi(m) = \begin{cases} \Delta\phi_f & \text{para } m = 0, \\ \int_{\phi_f - (\Delta\phi_f/2)}^{\phi_f + (\Delta\phi_f/2)} e^{-jm\phi} d\phi & \text{para } m \neq 0. \end{cases}$$

Fazendo o desenvolvimento de  $I_\phi(m)$  para  $m \neq 0$ :

$$I_\phi(m) = e^{-jm\phi_f} \frac{\text{sen} \left[ \frac{m\Delta\phi_f}{2} \right]}{\frac{m\Delta\phi_f}{2}} \Delta\phi_f \quad (3.89)$$

onde:

$$\frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x} = \text{sinc}(\pi x)$$

Dessa forma  $I_\phi(m)$  pode ser reescrito como:

$$I_\phi(m) = e^{-jm\phi_f} \Delta\phi_f \text{sinc} \left[ \frac{m\Delta\phi_f}{2\pi} \right] \quad (3.90)$$

Como  $\text{sinc}(0) = 1$ , a equação (3.90) é válida para  $m = 0$  e  $m \neq 0$ .

Substituindo (3.90) em (3.88):

$$E_{mn} = \frac{j\omega\mu_o I_o L_n}{2\pi d L_z [(k_d)^2 - (k_{mn})^2]} \cos \left[ \frac{n\pi}{L_z} (z_f - z_1) \right] \cdot e^{-jm\phi_f} \text{sinc} \left[ \frac{m\Delta\phi_f}{2\pi} \right] \quad (3.91)$$

### 3.6 Expansão dos campos na região de campo distante

As componentes de campo distante  $E_\theta$  e  $E_\phi$  são descritas da seguintes formas:

$$E_\theta = -j\omega\mu_o A_\theta - jk_o F_\phi \quad (3.92)$$

$$E_\phi = -j\omega\mu_o A_\phi + jk_o F_\theta \quad (3.93)$$

O desenvolvimento dos campos irradiados foi realizado em coordenadas cilíndricas, e será necessário realizar a transformação das componentes de campo de coordenadas cilíndricas para esféricas. Os potenciais vetores para as coordenadas esféricas terão as seguintes componentes não nulas:

$$A_\theta = -A_z \sin\theta \quad (3.94)$$

$$F_\theta = -F_z \sin\theta \quad (3.95)$$

Portanto as componentes de campo elétrico  $E_\theta$  e  $E_\phi$  serão:

$$E_\theta = j\omega\mu_o \sin\theta A_z \quad (3.96)$$

$$E_\phi = -jk_o \sin\theta F_z \quad (3.97)$$

Os potenciais vetores elétrico e magnético são fornecidos por (3.51) e (3.52), respectivamente.

### 3.6.1 Expansão assintótica do campo $E_\theta$

A componente de campo  $E_\theta$  pode ser determinada substituindo (3.51) em (3.96):

$$E_\theta = j\omega\mu_o \text{sen } \theta \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{jp\phi} \int_{-\infty}^{\infty} A(p, k_z) H_p^{(2)}(k_\rho \rho) e^{jk_z z} dk_z \quad (3.98)$$

A integral da equação (3.98) pode ser avaliada assintoticamente, para pontos de observação tendendo ao infinito, de acordo com [19].

$$\int_{-\infty}^{\infty} \vec{I}(k_z) H_n^{(2)}\left(\rho\sqrt{(k_o)^2 - (k_z)^2}\right) e^{-jk_z z} dk_z \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 2 \frac{e^{-jk_o r}}{r} j^{n+1} \vec{I}(-k_o \cos \theta) \quad (3.99)$$

Fazendo o desenvolvimento da equação (3.98) pela avaliação assintótica acima:

$$E_\theta = j\omega\mu_o \text{sen } \theta \sum_{p=-\infty}^{\infty} j^{p+1} e^{jp\phi} \frac{2e^{-jk_o r}}{r} A(p, -k_o \cos \theta) \quad (3.100)$$

Substituindo (3.63) em (3.100):

$$E_\theta = -\omega^2 \mu_o \epsilon_o \text{sen } \theta \sum_{p=-\infty}^{\infty} j^{p+1} e^{jp\phi} \frac{2e^{-jk_o r}}{2\pi r (k_\rho)^2} \frac{\widetilde{M}_\phi(p, -k_o \cos \theta)}{H_p^{(2)}(k_\rho a)} \quad (3.101)$$

onde:

$$(k_\rho)^2 = (k_o)^2 - (k_z)^2 = (k_o)^2 - (k_o)^2 \cos^2 \theta = (k_o)^2 \text{sen}^2 \theta \quad (3.102)$$

e

$$\omega^2 \mu_o \epsilon_o = (k_o)^2 \quad (3.103)$$

Substituindo (3.102) e (3.103) em (3.101):

$$E_\theta = -\frac{2e^{-jk_o r}}{2\pi r} \frac{(k_o)^2 \text{sen } \theta}{(k_o)^2 \text{sen}^2 \theta} \sum_{p=-\infty}^{\infty} j^{p+1} e^{jp\phi} \frac{\widetilde{M}_\phi(p, -k_o \cos \theta)}{H_p^{(2)}(k_\rho a)} \quad (3.104)$$

O campo  $E_\theta$  pode ser escrito assintoticamente, para a região de campo distante como:

$$E_\theta = -\frac{e^{-jk_o r}}{\pi r \text{sen}^2 \theta} \sum_{p=-\infty}^{\infty} j^{p+1} e^{jp\phi} \frac{\widetilde{M}_\phi(p, -k_o \cos \theta)}{H_p^{(2)}(k_\rho a)} \quad (3.105)$$

onde:

$$f_p(p, -k_o \cos \theta) = \frac{\widetilde{M}_\phi(p, -k_o \cos \theta)}{H_p^{(2)}(k_\rho a)} \quad (3.106)$$

Substituindo (3.106) em (3.105):

$$E_\theta = \frac{e^{-jk_o r}}{\pi r \sin^2 \theta} \sum_{p=-\infty}^{\infty} j^{p+1} e^{jp\phi} f_p(p, -k_o \cos \theta) \quad (3.107)$$

### 3.6.2 Expansão assintótica do campo $E_\phi$

A componente de campo  $E_\phi$  pode ser definida substituindo (3.52) em (3.97):

$$E_\phi = -jk_o \sin \theta \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{jp\phi} \int_{-\infty}^{\infty} F(p, k_z) H_p^{(2)}(k_\rho \rho) e^{jk_z z} dk_z \quad (3.108)$$

A integral da equação (3.108) pode ser avaliada assintoticamente da mesma forma apresentada por (3.99).

Pela formula assintótica, a equação (3.108) fica:

$$E_\phi = -jk_o \sin \theta \sum_{p=-\infty}^{\infty} j^{p+1} e^{jp\phi} \frac{2e^{-jk_o r}}{r} F(p, -k_o \cos \theta) \quad (3.109)$$

Substituindo (3.73) em (3.109):

$$E_\phi = -\frac{j2k_o \sin \theta e^{-jk_o r}}{2\pi r} \sum_{p=-\infty}^{\infty} j^{p+1} e^{jp\phi} \frac{1}{k_\rho H_p^{(2)'}(k_\rho a)} \cdot \left[ \frac{pk_z}{a(k_\rho)^2} \widetilde{M}_\phi(p, -k_o \cos \theta) - \widetilde{M}_z(p, -k_o \cos \theta) \right] \quad (3.110)$$

O campo  $E_\phi$  pode ser escrito assintoticamente, para a região de campo distante como:

$$E_\phi = -\frac{jk_o \sin \theta e^{-jk_o r}}{\pi r} \sum_{p=-\infty}^{\infty} j^{p+1} e^{jp\phi} \frac{1}{k_\rho H_p^{(2)'}(k_\rho a)} \cdot \left[ \frac{pk_z}{a(k_\rho)^2} \widetilde{M}_\phi(p, -k_o \cos \theta) - \widetilde{M}_z(p, -k_o \cos \theta) \right] \quad (3.111)$$

onde:

$$g_p(p, -k_o \cos \theta) = \frac{1}{k_\rho H_p^{(2)'}(k_\rho a)} \left[ \frac{pk_z}{a(k_\rho)^2} \widetilde{M}_\phi(p, -k_o \cos \theta) - \widetilde{M}_z(p, -k_o \cos \theta) \right] \quad (3.112)$$

Substituindo (3.112) em (3.111):

$$E_\phi = -\frac{jk_o \sin \theta e^{-jk_o r}}{\pi r} \sum_{p=-\infty}^{\infty} j^{p+1} e^{jp\phi} g_p(p, -k_o \cos \theta) \quad (3.113)$$

### 3.7 Diretividade

Na seção 2.9 foi apresentado que a diretividade de uma antena é definida como:

$$D(\theta, \phi) = \frac{4\pi U(\theta, \phi)}{P_{rad}}$$

Sendo a intensidade de radiação relatada como:

$$U(\theta, \phi) = \frac{r^2}{2\eta} |E|^2 \quad (3.114)$$

e para a pontos de observação distantes da antena, teremos apenas as componentes de campo elétrico  $E_\theta$  e  $E_\phi$ . Sendo a potência total irradiada fornecida por:

$$P_{rad} = \frac{r^2}{2\eta} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2) \sin \theta d\theta d\phi \quad (3.115)$$

onde os campos  $E_\theta$  e  $E_\phi$  foram obtidos na seção anterior.

De (3.107):

$$|E_\theta|^2 r^2 = \left[ \frac{e^{-jk_o r}}{\pi \sin^2 \theta} \right]^2 \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} j^{p+q} (-1)^q e^{j(p-q)\phi} f_p(p, -k_o \cos \theta) f_p^*(q, -k_o \cos \theta) \quad (3.116)$$

De (3.113):

$$|E_\phi|^2 r^2 = \left[ \frac{j e^{-jk_o r}}{\pi} \right]^2 \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} j^{p+q} (-1)^q e^{j(p-q)\phi} g_p(p, -k_o \cos \theta) g_p^*(q, -k_o \cos \theta) \quad (3.117)$$

Substituindo (3.116) e (3.117) em (3.115):

$$P_{rad} = \frac{1}{2\eta} \int_0^{2\pi} e^{j(p-q)\phi} d\phi \int_0^\pi \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} j^{p+q} (-1)^q \left( \frac{e^{-jk_o r}}{\pi} \right)^2 \left[ \left( \frac{1}{\sin^2 \theta} \right)^2 |f_p(p, q, k_z)|^2 - |g_p(p, q, k_z)|^2 \right] \sin \theta d\theta \quad (3.118)$$

onde:

$$\int_0^{2\pi} e^{j(p-q)\phi} d\phi = \begin{cases} 2\pi & \text{para } p = q \\ 0 & \text{para } p \neq q \end{cases} \quad (3.119)$$

Substituindo (3.119) em (3.118):

$$P_{rad} = \frac{(e^{-jk_0 r})^2 \pi}{\eta} \int_0^\pi \sum_{p=-\infty}^{\infty} -(-1)^p \cdot \left[ \left( \frac{1}{\sin^2 \theta} \right)^2 |f_p(p, k_z)|^2 - |g_p(p, k_z)|^2 \right] \sin \theta d\theta d\phi \quad (3.120)$$

A diretividade da antena pode ser encontrada substituindo (3.116), (3.117) e (3.120) na equação abaixo:

$$D(\theta, \phi) = \frac{2\pi (|E_\theta|^2 r^2 + |E_\phi|^2 r^2)}{\eta P_{rad}} \quad (3.121)$$

### 3.7.1 Resultados

No capítulo anterior, o diagrama de radiação dos campos  $E_\theta$  e  $E_\phi$  como relação aos planos  $\theta$  e  $\phi$  foram apresentados e comparados aos resultados de [10]. Os mesmos resultados da antena embutida serão agora comparados aos resultados da antena anular, obtidos pelo método da cavidade.

Para serem calculados os campos das antenas de microfita pelo método da cavidade, usualmente são utilizados valores ligeiramente maiores para as dimensões da microfita. Este procedimento é necessário para serem considerados os efeitos dos campos de franja. Em [21] foi proposta uma formulação para prever as frequências de ressonância de uma antena de microfita retangular planar. Esta formulação apresenta uma equação para corrigir as dimensões da antena, onde a mesma faz uso do conceito de constante dielétrica efetiva ( $\epsilon_{eff}$ ) apresentado em [22]. Estas considerações foram formuladas para antenas de microfita planares, e serão utilizadas como uma aproximação para a antena anular cilíndrica. Pois de acordo com [7], as frequências de ressonância de antenas de microfita montadas sobre superfícies cilíndricas são próximas às frequências de ressonância de antenas de microfita planares, desde que a espessura do substrato seja muito pequena em relação ao comprimento de onda e ao raio do cilindro condutor. A expressão dada em [22] é:

$$\epsilon_{eff}(w) = \frac{(\epsilon_r + 1)}{2} + \frac{(\epsilon_r - 1)(1 + 10h/w)^{-1/2}}{2} \quad (3.122)$$

onde  $w$  será a dimensão da microfita em relação à coordenada  $z$ . Neste caso,  $w = L_z$ , e  $\Delta L_z$  é o valor a ser somado em cada lado da microfita.

$$\Delta L_z = \frac{0.412h(\epsilon_{eff}(L_z) + 0.3)(L_z/h + 0.264)}{(\epsilon_{eff}(L_z) - 0.258)(L_z/h + 0.8)} \quad (3.123)$$

Portanto, a dimensão da microfita que será considerada na simulação será:

$$L_s = L_z + 2\Delta L_z \quad (3.124)$$

É importante resaltar que a constante dielétrica efetiva só será utilizada para corrigir as dimensões da antena.

Para facilitar a apresentação e os comentários sobre os resultados, os mesmos serão classificados da seguinte forma:

- (MC) - Resultados obtidos para a antena de microfita anular cilíndrica pelo método da cavidade, utilizando a formulação do presente capítulo.
- (MoM) - Resultados obtidos para a antena de microfita anular cilíndrica embutida pelo método dos momentos, utilizando a formulação do capítulo 2.
- (Habashy) - Resultados obtidos para a antena de microfita anular cilíndrica utilizando o método dos momentos, utilizando a formulação de [10].

Os parâmetros utilizados para a estrutura são apresentados à seguir.

- Raio da antena:  $b = 10,2cm$
- Comprimento da antena para (MC) em  $z$ :  $L_s = 8,2cm$
- Comprimento da antena para (MoM) e (Habashy) em  $z$ :  $L_{za} = 8cm$
- Comprimento da cavidade para (MoM) em  $z$ :  $L_{zc} = 12cm$
- Espessura do substrato:  $h = 2mm$
- Permissividade relativa do substrato:  $\epsilon_r = 2,3$
- Localização do alimentador em  $z$ :  $z_f = 2cm$
- Localização do alimentador em  $\phi$ :  $\phi_o = 90^\circ$
- Largura do alimentador:  $W_f = 2mm$
- Frequência de operação:  $f = 1,3GHz$

Os resultados de diagrama de radiação apresentados são para a antena operando no modo  $TM_{11}$ . A formulação desenvolvida para o método da cavidade permite obter resultados específicos de um modo de operação. As condições para se obter os resultados de diagrama de radiação para o modo  $TM_{11}$  para a formulação do (MoM) foram comentadas no capítulo anterior.

Analisando o diagrama  $E_\phi \times \theta$ , fig. 3.4, observa-se que o resultado obtido para a antena anular embutida apresenta uma assimetria em relação aos máximos de radiação localizados próximos de  $\theta = 90^\circ$  e  $\theta = 180^\circ$ , devido ao fato do alimentador estar ligeiramente deslocado do eixo da antena. Este comportamento não é observado no diagrama de radiação da antena anular cilíndrica utilizando o método da cavidade, quanto o método dos momentos, fig. 2.17. Analisando o diagrama  $E_\theta \times \phi$ , observa-se que os resultados do diagrama de radiação da antena anular cilíndrica utilizando o método da cavidade, fig. 3.5, e o método dos momentos, fig. 2.18, são idênticos. Para o resultado da antena anular embutida, a pequena diferença entre os resultados pode ser associada a não exclusividade na operação do modo  $TM_{11}$  para (MoM).

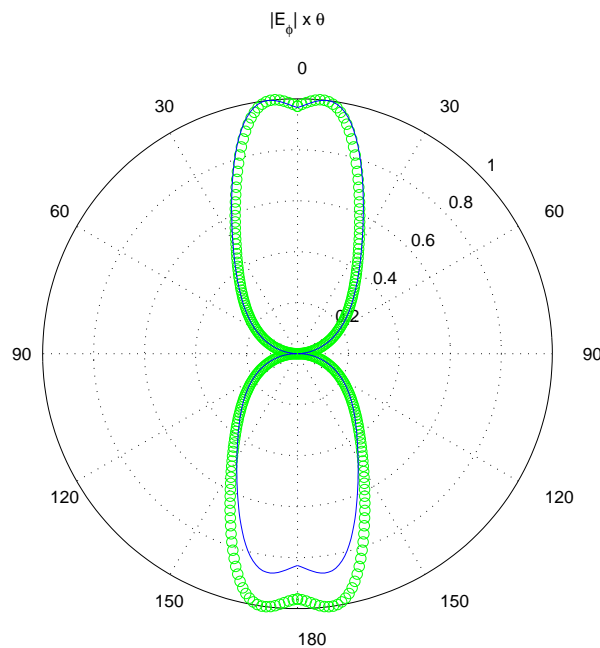


Figura 3.4: Diagrama de radiação do modo  $TM_{11}$  -  $E_\phi \times \theta$  - círculos verdes (MC) e linha azul (MoM) no plano  $\phi = 90^\circ$

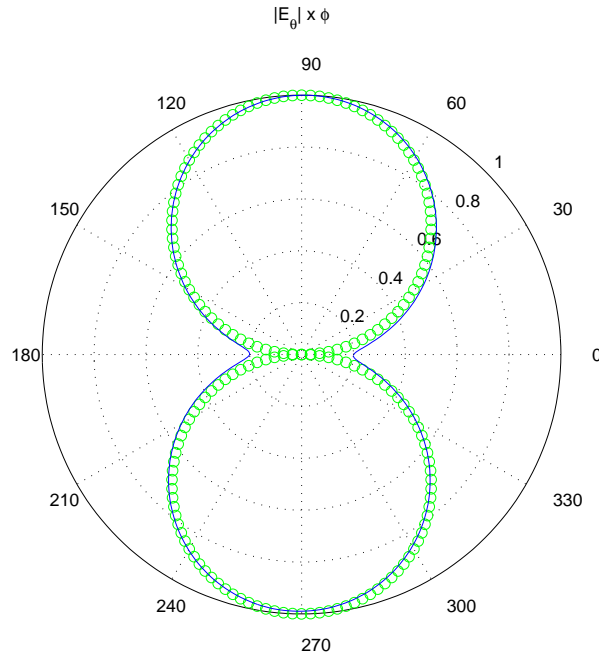


Figura 3.5: Diagrama de radiação do modo  $TM_{11}$  -  $E_{\theta} \times \phi$  - círculos verdes (MC) e linha azul (MoM) no plano  $\theta = 45^{\circ}$

### 3.8 Tangente de perdas

Foi proposto em [9] que todas as perdas presentes nos materiais que compõem a estrutura da antena podem ser computadas através de uma *tangente de perda efetiva*  $\delta_{eff}$ . E as mesmas serão adicionadas ao cálculo da impedância de entrada, substituindo  $k_d$  por um  $k_{eff}$ . Além das perdas no dielétrico e nos condutores, também serão computadas as perdas de irradiação e a potência devido as ondas de superfície.

$$k_{eff} = k_d \sqrt{(1 - j\delta_{eff})} \quad (3.125)$$

O procedimento para determinar  $\delta_{eff}$  será demonstrado a seguir.

Em uma cavidade ideal, a tangente de perdas  $\delta$  está relacionada ao fator de qualidade  $Q$  por:

$$\delta = \frac{1}{Q} \quad (3.126)$$

Dessa forma podemos definir a tangente de perda efetiva como:

$$\delta_{eff} = \frac{1}{Q} = \frac{P_d + P_c + P_{rad} + P_{sw}}{\omega(W_e + W_m)} \quad (3.127)$$

onde:

$P_d$  - Potência dissipada no dielétrico

$P_c$  - Potência dissipada nos condutores

$P_{rad}$  - Potência irradiada

$P_{sw}$  - Potência devido às ondas de superfície

$W_e$  - Energia elétrica média armazenada na cavidade

$W_m$  - Energia magnética média armazenada na cavidade

Próximo da frequência de ressonância  $W_e \approx W_m$ . Assim  $\delta_{eff}$  será:

$$\delta_{eff} = \frac{1}{Q} = \frac{P_d + P_c + P_{rad} + P_{sup}}{2\omega(W_e)} \quad (3.128)$$

Em [9] foi comentado que para antenas onde a espessura do dielétrico é muito pequena, as ondas de superfície representam apenas uma pequena porcentagem da potência total. Por este motivo, a potência devido às ondas de superfície será desprezada.

O fator de qualidade pode ser computado obtendo-se cada termo separadamente. Assim teremos um fator de qualidade específico para cada termo.

$$\frac{1}{Q} = \underbrace{\frac{P_d}{2\omega(W_e)}}_{\frac{1}{Q_d}} + \underbrace{\frac{P_c}{2\omega(W_e)}}_{\frac{1}{Q_c}} + \underbrace{\frac{P_{rad}}{2\omega(W_e)}}_{\frac{1}{Q_r}} \quad (3.129)$$

### Energia elétrica armazenada

Como será utilizada para o cálculo de todos os termos,  $W_e$  será calculada a priori.

De [19]:

$$W_e = \frac{\epsilon'}{4} \int \int \int_v |\vec{E}|^2 dv = \frac{\epsilon'}{4} \int \int \int_v |E_{\rho_{mn}}|^2 dv \quad (3.130)$$

onde  $\epsilon' = \epsilon_o \epsilon_r$ .

Substituindo (3.25) em (3.130):

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{\epsilon_o \epsilon_r}{4} |E_{mn}|^2 \int_a^b \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_{z_1}^{z_2} \cos^2 \left[ \frac{n\pi}{L_z} (z - z_1) \right] dz \\ &= \frac{\epsilon_o \epsilon_r \pi}{4} |E_{mn}|^2 \frac{L_z}{L_n} (b^2 - a^2) \end{aligned} \quad (3.131)$$

### Potência dissipada no dielétrico

A potência dissipada no dielétrico é definida como:

$$P_d = \frac{\sigma_d + \omega\epsilon''}{2} \int \int \int_v |\vec{E}|^2 dv \quad (3.132)$$

onde  $\epsilon'' = \epsilon_o\epsilon_r(-j\delta_d)$  e  $\sigma_d$  é a condutividade elétrica do dielétrico.

O fator de qualidade  $Q_d$  é expresso por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q_d} &= \frac{\frac{\sigma_d + \omega\epsilon''}{2} \int \int \int_v |\vec{E}|^2 dv}{\frac{2\omega\epsilon'}{4} \int \int \int_v |\vec{E}|^2 dv} \\ &= \frac{\sigma_d + \omega\epsilon''}{\omega\epsilon'} = \delta_d \end{aligned} \quad (3.133)$$

### Potência dissipada nos condutores

A potência dissipada nos condutores da estrutura pode ser determinada pelo método perturbacional apresentado em [20]. A potência dissipada nos condutores é dada por:

$$P_c = \frac{R_s}{2} \int \int_s |\vec{H}|^2 dS \quad (3.134)$$

onde  $R_s$  é a resistência superficial dos condutores, avaliada como:

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu_o}{2\sigma_c}} \quad (3.135)$$

Sendo que  $\sigma_c$  é a condutividade elétrica dos condutores.

Os campos magnéticos foram determinados anteriormente e são expressos por (3.26) e (3.27).

A potência dissipada deve ser calculada sobre o cilindro condutor infinito ( $\rho = a$ ) e sobre a antena anular ( $\rho = b$ ).

Para facilitar os cálculos, a potência dissipada sobre as superfícies será calculada separadamente. Assim  $P_c^{cil}$  corresponderá à potência dissipada sobre o cilindro condutor, e  $P_c^{ant}$  corresponderá à potência dissipada sobre antena.

$$P_c^{cil} = \frac{R_s}{2} \left[ \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} |H_{\phi_{mn}}|^2 a d\phi dz + \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} |H_{z_{mn}}|^2 a d\phi dz \right] \Big|_{\rho=a} \quad (3.136)$$

Fazendo a integral em  $|H_{\phi_{mn}}|^2$ , para  $\rho = a$ :

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} |H_{\phi_{mn}}|^2 a d\phi dz &= \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} \left| -\frac{n\pi}{j\omega\mu_o L_z} E_{mn} e^{jm\phi} \operatorname{sen} \left[ \frac{n\pi}{L_z} (z - z_1) \right] \right|^2 a d\phi dz \Bigg|_{\rho=a} \\ &= \left( \frac{n\pi}{\omega\mu_o L_z} \right)^2 |E_{mn}|^2 2\pi a \frac{L_z}{L_n} \Bigg|_{\rho=a} \end{aligned} \quad (3.137)$$

Fazendo a integral em  $|H_{z_{mn}}|^2$ , para  $\rho = a$ :

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} |H_{z_{mn}}|^2 a d\phi dz &= \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} \left| \left( \frac{m}{\omega\mu_o a} \right) E_{mn} e^{jm\phi} \cos \left[ \frac{n\pi}{L_z} (z - z_1) \right] \right|^2 a d\phi dz \Bigg|_{\rho=a} \\ &= \left( \frac{m}{\omega\mu_o a} \right)^2 |E_{mn}|^2 2\pi a \frac{L_z}{L_n} \Bigg|_{\rho=a} \end{aligned} \quad (3.138)$$

Seguindo o mesmo procedimento realizado na integração dos campos magnéticos na superfície do cilindro para a integração dos campos magnéticos na superfície da antena.

$$P_c^{ant} = \frac{R_s}{2} \left[ \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} |H_{\phi_{mn}}|^2 b d\phi dz + \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} |H_{z_{mn}}|^2 b d\phi dz \right] \Bigg|_{\rho=b} \quad (3.139)$$

onde:

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} |H_{\phi_{mn}}|^2 b d\phi dz = \left( \frac{n\pi}{\omega\mu_o L_z} \right)^2 |E_{mn}|^2 2\pi b \frac{L_z}{L_n} \Bigg|_{\rho=b} \quad (3.140)$$

e

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} |H_{z_{mn}}|^2 b d\phi dz = \left( \frac{m}{\omega\mu_o b} \right)^2 |E_{mn}|^2 2\pi b \frac{L_z}{L_n} \Bigg|_{\rho=b} \quad (3.141)$$

Somando os termos de  $P_c^{cil}$  e  $P_c^{ant}$ :

$$\begin{aligned} P_c &= \frac{R_s}{2} \left[ \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} H_{mn} \rho d\phi dz \Bigg|_{\rho=a} + \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} H_{mn} \rho d\phi dz \Bigg|_{\rho=b} \right] \\ &= \frac{R_s}{2} \left[ \left( \frac{n\pi}{\omega\mu_o L_z} \right)^2 |E_{mn}|^2 2\pi \frac{L_z}{L_n} (a + b) + \left( \frac{m}{\omega\mu_o} \right)^2 |E_{mn}|^2 2\pi \frac{L_z}{L_n} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right] \\ &= \frac{R_s}{2} \frac{|E_{mn}|^2}{(\omega\mu_o)^2} 2\pi \frac{L_z}{L_n} (a + b) \left[ \left( \frac{n\pi}{L_z} \right)^2 + \frac{m^2}{ab} \right] \end{aligned} \quad (3.142)$$

onde:

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{(d+h/2)(d-h/2)} = \frac{1}{d^2 - (h/2)^2} \approx \frac{1}{d^2} \quad (3.143)$$

e

$$a + b \approx 2d \quad (3.144)$$

Substituindo (3.143) e (3.144) em (3.142):

$$\begin{aligned} P_c &\approx \frac{R_s}{2} \frac{|E_{mn}|^2}{\omega^2 \mu_o^2} 2\pi \frac{L_z}{L_n} (2d) \underbrace{\left[ \left( \frac{n\pi}{L_z} \right)^2 + \frac{m^2}{d^2} \right]}_{k_{mn}^2 = \omega_{mn}^2 \mu_o \epsilon_o \epsilon_r} \\ &\approx R_s \frac{|E_{mn}|^2}{\omega^2 \mu_o^2} \pi \frac{L_z}{L_n} (2d) \omega_{mn}^2 \mu_o \epsilon_o \epsilon_r \\ &\approx R_s \frac{|E_{mn}|^2}{\omega^2 \mu_o^2} 2\pi d \frac{L_z}{L_n} \frac{\epsilon_o \epsilon_r}{\mu_o} \end{aligned} \quad (3.145)$$

De (3.131) e (3.145):

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q_c} = \frac{P_c}{2\omega W_e} &= \frac{R_s \frac{|E_{mn}|^2}{\omega^2 \mu_o^2} 2\pi d \frac{L_z}{L_n} \frac{\epsilon_o \epsilon_r}{\mu_o}}{\frac{\epsilon_o \epsilon_r \pi}{4} |E_{mn}|^2 \frac{L_z}{L_n} (b^2 - a^2) \mu_o} \\ &= \frac{R_s d / \mu_o}{\omega(b+a)(b-a)/4} \\ &= \frac{4R_s d / \mu_o}{\omega 2dh} = \frac{2R_s}{\omega \mu_o h} \end{aligned} \quad (3.146)$$

Substituído (3.135) em (3.146), e realizando algumas manipulações matemáticas:

$$\frac{1}{Q_c} = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_o \sigma_c}} \quad (3.147)$$

### Potência irradiada

Para o cálculo do fator de qualidade referente à potência irradiada, a seguinte equação será utilizada:

$$\frac{1}{Q_r} = \frac{P_{rad}}{2\omega W_e} = \delta_r \quad (3.148)$$

onde  $P_{rad}$  é a potencia irradiada pela antena, que foi obtida anteriormente pela equação (3.120). Então substituindo (3.120) e (3.131) em (3.148), será obtido o fator de qualidade referente a potência irradiada.

### 3.9 Impedância de entrada

Pelo teorema da Reciprocidade [19], a impedância de entrada pode ser definida como:

$$Z_{in} = -\frac{1}{I_o^2} \int \int \int_v \vec{E} \cdot \vec{J}_f dv \quad (3.149)$$

onde  $I_o$  é a corrente total fornecida pela fonte,  $\vec{E}$  é o campo elétrico gerado pela corrente da fonte, e  $\vec{J}_f$  é da densidade de corrente da fonte.

Substituindo (3.79) e (3.82) em (3.149):

$$Z_{in} = -\frac{1}{I_o^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_a^b \int_{\phi_{1_f}}^{\phi_{2_f}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E_{mn} e^{jm\phi} \cos \left[ \frac{n\pi}{L_z} (z - z_1) \right] \cdot \frac{I_o}{\rho \cdot \Delta_{\phi_f}} \delta(z - z_f) \rho d\phi dp dz \quad (3.150)$$

Fazendo as integrais em  $\rho$  e  $z$ :

$$Z_{in} = -\frac{1}{I_o \Delta_{\phi_f}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E_{mn} h \cos \left[ \frac{n\pi}{L_z} (z_f - z_1) \right] \underbrace{\int_{\phi_{1_f}}^{\phi_{2_f}} e^{jm\phi} d\phi}_{I_{\phi}(-m)} \quad (3.151)$$

Substituindo (3.90) em (3.151):

$$Z_{in} = -\frac{1}{I_o \Delta_{\phi_f}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E_{mn} h \cos \left[ \frac{n\pi}{L_z} (z_f - z_1) \right] e^{jm\phi_f} \Delta_{\phi_f} \text{sinc} \left[ \frac{m\Delta_{\phi_f}}{2\pi} \right] \quad (3.152)$$

Substituindo (3.91) em (3.152):

$$Z_{in} = -\frac{h}{I_o} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j\omega\mu_o I_o L_n}{2\pi d L_z [(k_d)^2 - (k_{mn})^2]} \cos \left[ \frac{n\pi}{L_z} (z_f - z_1) \right] \cdot e^{-jm\phi_f} \text{sinc} \left[ \frac{m\Delta_{\phi_f}}{2\pi} \right] \cos \left[ \frac{n\pi}{L_z} (z_f - z_1) \right] e^{jm\phi_f} \text{sinc} \left[ \frac{m\Delta_{\phi_f}}{2\pi} \right] \quad (3.153)$$

Desenvolvendo a equação (3.153), a impedância de entrada pode ser escrita como:

$$Z_{in} = -\frac{j\omega\mu_o h}{2\pi d L_z} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{[(k_d)^2 - (k_{mn})^2]} \cos^2 \left[ \frac{n\pi}{L_z} (z_f - z_1) \right] \cdot \text{sinc}^2 \left[ \frac{m\Delta_{\phi_f}}{2\pi} \right] \quad (3.154)$$

Lembrando que:

$$(k_{mn})^2 = \left(\frac{m}{d}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_z}\right)^2$$

e para serem consideradas as perdas mencionadas na seção anterior,  $k_d$  será substituído por  $k_{eff}$ .

$$Z_{in} = -\frac{j\omega\mu_0 h}{2\pi d L_z} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{[(k_{eff})^2 - (k_{mn})^2]} \cos^2 \left[ \frac{n\pi}{L_z} (z_f - z_1) \right] \cdot \text{sinc}^2 \left[ \frac{m\Delta\phi_f}{2\pi} \right] \quad (3.155)$$

### 3.9.1 Resultados

O resultado obtido no capítulo anterior para a antena anular cilíndrica embutida, operando no modo  $TM_{01}$  foi comparado ao obtido em [10]. Agora esses resultados serão comparados aos obtidos pelo método da cavidade. Lembrando que a estrutura utilizada em [10] é exatamente igual à que foi analisada pelo método da cavidade.

Como foi comentado anteriormente, a formulação do método da cavidade permite obter resultados específicos de um modo de operação. No capítulo anterior foram apresentadas as considerações que permitem obter os resultados no modo  $TM_{01}$  para (MoM).

Os parâmetros utilizados para a estrutura foram:

- Raio da antena:  $b = 2,1cm$
- Comprimento da antena para (MC) em  $z$ :  $L_s = 2,08cm$
- Comprimento da antena para (MoM) e (Habashy) em  $z$ :  $L_{za} = 2cm$
- Comprimento da cavidade para (MoM) em  $z$ :  $L_{zc} = 5cm$
- Espessura do substrato:  $h = 1mm$
- Permissividade relativa do substrato:  $\epsilon_r = 9,6$
- Localização do alimentador em  $z$ :  $z_f = 0,5cm$
- Localização do alimentador em  $\phi$ :  $\phi_o = 0^\circ$
- Largura do alimentador:  $W_f = 2mm$

A fig. 3.6 mostra que os resultados de (MC) seguem o mesmo comportamento dos resultados apresentados por (MoM) e (Habashy). A frequência de ressonância apresentou um pequeno aumento, e a largura de banda é praticamente a mesma. A parte reativa da impedância de entrada também se comporta de forma muito similar para os três casos.

As diferenças no deslocamento de frequência da impedância de entrada entre (MoM) e (Habashy) com o (MC) podem ser atribuídas à correção na dimensão da antena utilizada pelo método da cavidade para serem considerados os campos de franja. Os cálculos que estão sendo utilizados neste trabalho são relativos à antenas de microfita planares, e estão sendo utilizados como uma aproximação.

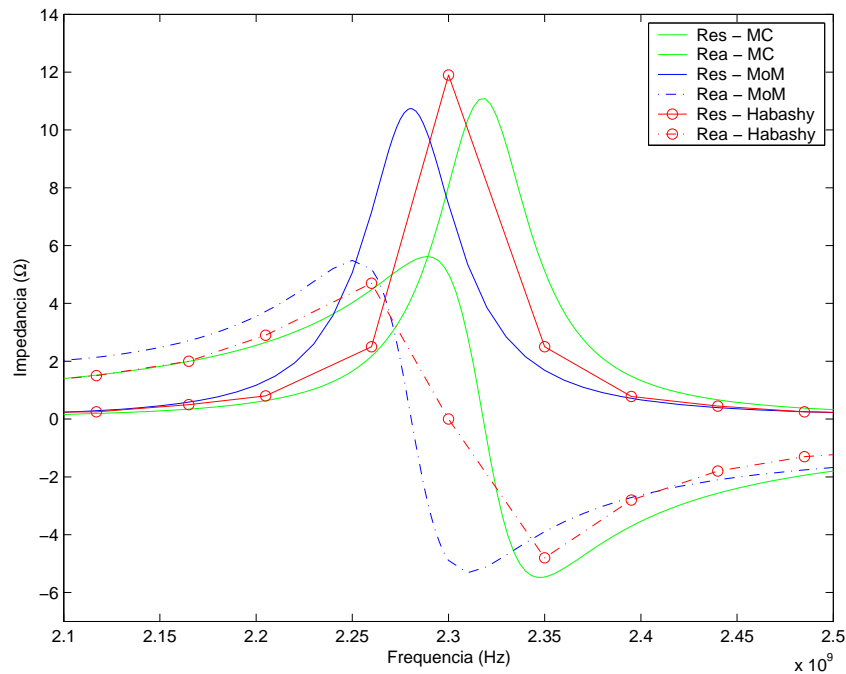


Figura 3.6: Impedância de entrada x frequência - (MC), (MoM) e (Habashy) para o modo  $TM_{01}$

No capítulo anterior foram apresentados os resultados de impedância de entrada variando-se o tamanho da cavidade com relação à coordenada  $z$ , espessura e permissividade dielétrica do substrato. A estrutura que está sendo analisada no presente capítulo não está montada sobre uma cavidade, por isso apenas resultados variando a espessura e a permissividade dielétrica do substrato serão demonstrados. Os resultados que serão apresentados são referentes ao modo de operação de  $TM_{01}$ .

Os parâmetros utilizados para a estrutura foram:

- Raio da antena:  $b = 2,1cm$
- Comprimento da antena para (MC) em  $z$ :  $L_s = 2,08cm$
- Localização do alimentador em  $z$ :  $z_f = 0,5cm$
- Localização do alimentador em  $\phi$ :  $\phi_o = 0^\circ$
- Largura do alimentador:  $W_f = 2mm$

Para a comparação de tais resultados com os apresentados no capítulo anterior será considerado o valor de  $5cm$  para o comprimento da cavidade embutida.

### **Espessura do substrato**

A fig. 3.7 demonstra que aumentando a espessura do substrato a frequência de ressonância diminui, enquanto a largura de banda aumenta. No entanto a resistência de radiação máxima apresenta uma redução, diminuindo a potência de radiação máxima da antena.

Comparando os resultados de (MoM), fig. 2.30, com (MC), observa-se a similaridade no comportamento das antenas com relação à frequência de ressonância e a largura de banda, quando a espessura do substrato é alterada. Nos dois casos o aumento na largura de banda acarreta na diminuição da resistência de radiação. Nos resultados do (MoM) para o substrato com espessura de  $2mm$  e  $3mm$ , observa-se a existência de uma frequência de ressonância da cavidade próxima à frequência de ressonância da antena. Sendo que, para o substrato com espessura de  $3mm$ , a frequência de ressonância da cavidade está mais próxima à frequência de ressonância da antena, do que no substrato com espessura de  $2mm$ .

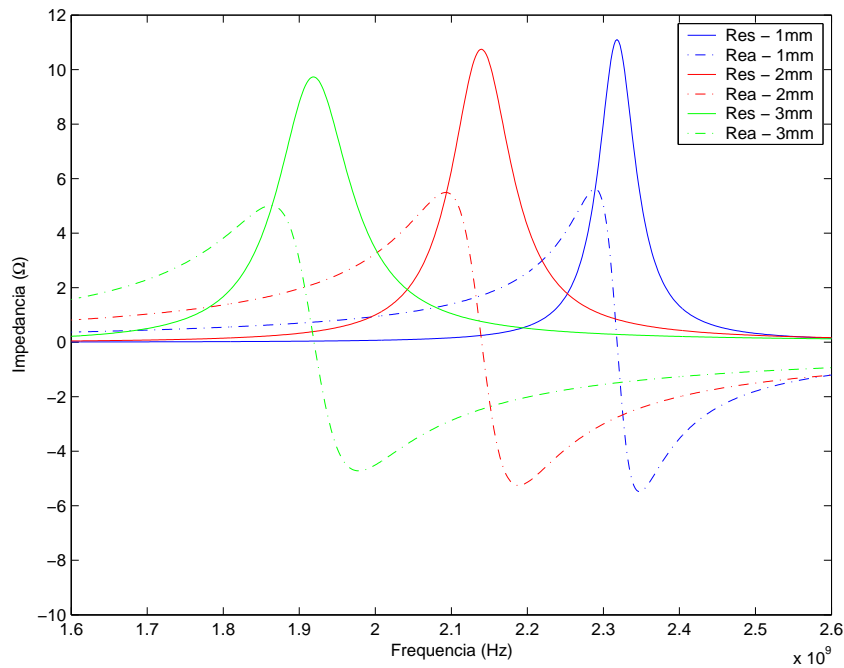


Figura 3.7: Impedância de entrada x frequência - (MC) variando espessura do substrato com  $\epsilon_r = 9,6$

### Permissividade dielétrica do substrato

Os resultados mostrados na fig. 3.8 mostram o aumento na frequência de ressonância e na largura de banda quando a permissividade dielétrica do substrato diminui. Também é observada a redução na resistência de radiação.

Assim como em (MoM), fig. 2.31, (MC) também apresentou o aumento na frequência de ressonância e na largura de banda com a diminuição da permissividade relativa do substrato. Mas é possível observar que o aumento na largura de banda em (MoM) não foi tão significativo quanto em (MC) para  $\epsilon_r = 5,1$  e  $\epsilon_r = 2,5$ . Para esses dois casos observa-se a existência de uma frequência de ressonância da cavidade próxima à frequência de ressonância da antena em (MoM).

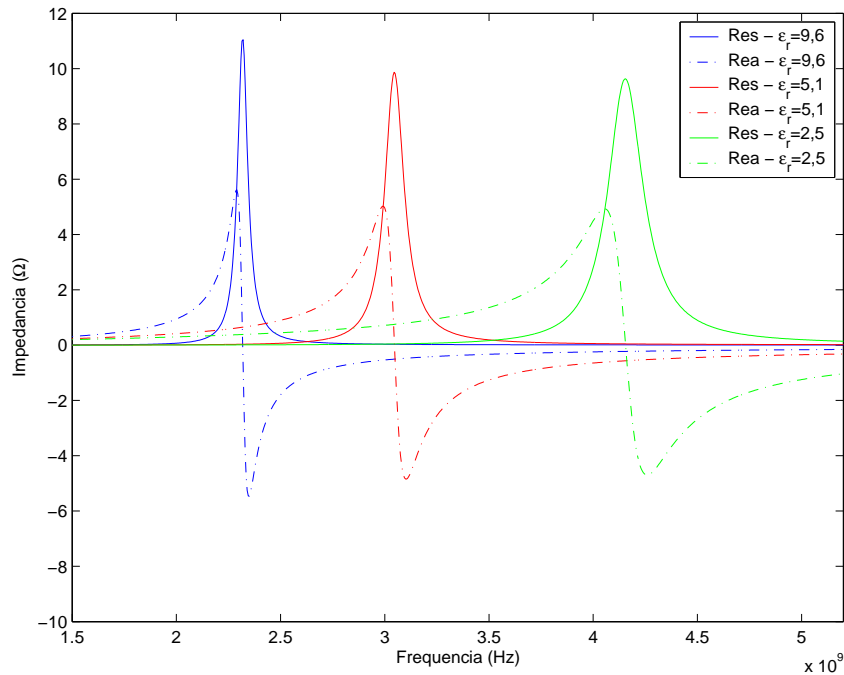


Figura 3.8: Impedância de entrada x frequência - (MC) para diferentes valores de permissividade dielétrica do substrato com  $h = 1mm$

### 3.10 Síntese e conclusões

#### Síntese

Neste capítulo foi apresentada a formulação matemática para a análise de antenas de microfita anulares cilíndricas utilizando o método da cavidade. O método da cavidade é uma técnica mais simples e de baixo custo computacional se comparada a técnica do método dos momentos desenvolvida no capítulo anterior, e apresenta bons resultados quando a espessura do substrato é muito menor do que o comprimento de onda no mesmo. Também foram apresentados resultados de diagrama de radiação e impedância de entrada modificando-se os parâmetros da antena.

Este tipo de antena de microfita anular cilíndrica já foi estudado em outros trabalhos utilizando o método da cavidade e também o método dos momentos. No presente trabalho essa formulação foi apresentada para que seus resultados fossem comparados aos do capítulo anterior, já que, não há conhecimento de outras literaturas que falem de antenas de microfita anulares cilíndricas embutidas.

#### Conclusões

Os resultados de diagrama de radiação obtidos pelo método da cavidade para a antena

anular foram similares aos obtidos utilizando o método dos momentos para a antena embutida. Tal comparação demonstra que a presença da cavidade não afeta de forma drástica o comportamento de irradiação dos campos da antena embutida.

O resultado de impedância de entrada para (MC), operando no modo  $TM_{01}$ , foi muito similar aos obtidos em (MoM) e (Habashy). Os resultados de (MC) e (MoM) com variações nos parâmetros da estrutura apresentaram comportamentos similares para a parte resistiva da impedância de entrada. Entretanto, para algumas configurações, a parte reativa de (MoM) apresentou oscilações muito grandes em regiões próximas à frequência de ressonância. Como esse comportamento não foi observado em (MC), pode-se afirmar que essas oscilações são provocadas pela presença da cavidade. Foi observado que para baixos valores de permissividade dielétrica do substrato, o aumento na largura de banda para a antena embutida não segue as mesmas proporções que a antena anular.

# Capítulo 4

## Conclusões

### 4.1 Conclusões finais

Antenas microfita anulares cilíndricas são frequentemente estudadas sobre um cilindro condutor elétrico perfeito infinito coberto por um material dielétrico. Nesse trabalho foi apresentado um novo modelo de antena de microfita anular cilíndrica, onde a mesma é analisada sobre uma cavidade com paredes elétricas, preenchida por um material dielétrico, embutida em um cilindro condutor elétrico perfeito infinito. A análise da antena foi realizada utilizando a técnica do método dos momentos.

Alguns trabalhos realizados anteriormente demonstraram que a técnica do método da cavidade apresenta bons resultados quando comparados à técnicas mais complexas como o método dos momentos ou funções diádicas de Green, através de uma formulação matemática muito mais simples. Entretanto, a utilização do método da cavidade para a análise de antenas de microfita embutidas não é aplicável, uma vez que, no método da cavidade as correntes de irradiação estão restritas às regiões imediatamente próximas ao elemento radiador. Dessa forma não são considerados os efeitos da cavidade sobre os campos eletromagnéticos.

O diagrama de radiação da antena de microfita anular cilíndrica embutida apresentou comportamento similar ao da antena microfita anular cilíndrica não embutida. Isto indica que a presença da cavidade não tem grande influência no diagrama de radiação da antena.

A utilização de múltiplos alimentadores tornou possível a excitação dos modos  $TM_{0N}$ , fazendo com que a antena apresente característica de radiação omnidirecional. Essa característica é extremamente desejável em antenas de microfita anulares cilíndricas.

Foram realizadas alterações na configuração da antena de modo que permitiu observar os efeitos da cavidade sobre as características da mesma. A variação no tamanho da cavi-

dade permitiu observar que a frequência de ressonância não sofre alterações significativas com o aumento ou a diminuição da cavidade, e a largura de banda também permaneceu estável.

O aumento na espessura do substrato resultou na diminuição da frequência de ressonância e no aumento significativo da largura de banda. Enquanto que, a redução da permissividade dielétrica do substrato representou um aumento da frequência de ressonância e também na largura de banda. Para os dois casos, o aumento na largura de banda também resultou na redução da resistência de radiação.

A presença da cavidade acarreta no aparecimento de algumas oscilações na parte reativa da impedância de entrada ao longo de toda a faixa de frequência. Este tipo de oscilação não foi observado nos resultados de antenas de microfita anulares cilíndricas. Tais oscilações indicam a presença de frequências de ressonância da cavidade. Em aplicações práticas a operação em frequências próximas às frequências de ressonância da cavidade devem ser evitadas, pois haverá problemas no casamento de impedância entre a antena e linha de transmissão.

Analisando os resultados apresentados nos capítulos 2 e 3, é possível observar que presença da cavidade na antena anular cilíndrica embutida não resultou em diferenças significativas nas características de irradiação da antena. A parte resistiva da impedância de entrada da antena embutida possui comportamento muito similar à antena anular cilíndrica, enquanto a parte reativa é muito afetada pela presença da cavidade.

## 4.2 Proposta para trabalhos futuros

Uma das vantagens da utilização de antenas de microfita embutidas é que tais estruturas podem resultar na diminuição das ondas de superfície. Dessa forma seria possível a utilização de múltiplos elementos radiadores minimizando o acoplamento mútuo entre os mesmos.

Algumas antenas de microfita fazem uso de uma segunda camada dielétrica não só porque a utilização da mesma pode gerar um ganho na diretividade e aumento na largura de banda, mas também porque em alguns casos faz-se necessário a utilização de tal camada para proteção da antena.

Após serem apresentados esses dois comentários, fica como proposta para trabalhos futuros o estudo do acoplamento mútuo entre múltiplos elementos radiadores embutidos, e também o estudo de uma segunda camada dielétrica na estrutura apresentada no capítulo 2.

# Referências Bibliográficas

- [1] F. S. de Oliveira, "Dissertação de mestrado: Antenas de Microfita Conformais Cilíndricas com Superestrato", Universidade Federal de Minas Gerais, abril de 2006.
- [2] S. B. A. Fonseca and A. J. Giarola, "Analysis of Microstrip Wraparound Antennas using Dyadic Green's Functions", IEEE Antennas and Propagation, vol. AP-31, No. 2, pp. 248-53, March 1983.
- [3] C. Yang and Y. Z. Ruan, "Radiation Characteristics of Wraparound Microstrip Antenna on Cylindrical Body", Electronic Letters, vol. 29, No. 6, pp. 512-514, March 1993.
- [4] K.-L. Wong and S.-Y. Ke, "Characteristics of the Cylindrical Wraparound Microstrip Patch Antenna", Proc. Natl. Sci. Counc. ROC(A), vol. 17, No. 6, pp. 438-442, February 1993.
- [5] K.-L. Wong and S.-Y. Ke, "Cilindrical-Rectangular microstrip patch antenna for circular polarization", Eletronics Letters, vol. 23, No. 14, , July 1993.
- [6] J. S. Dahele, R. J. Mitchell, K. M. Luk and K. F. Lee, "Effect of curvature on characteristics of rectangular patch antenna", Eletronics Letters, vol. 23, No. 14, July 1987.
- [7] C. C. Krowne, "Cylindrical-rectangular microstrip antennas", IEEE Trans. Antennas Propagation, vol. AP-31, No. 1, pp. 194-199, January 1983.
- [8] K. M. Luk, K.F. Lee and J. S. Dahele, "Analysis of the Cylindrical-Rectangular patch antenna", IEEE Antennas and Propagation, vol. 37, No. 2, pp. 143-147, February 1989.
- [9] W. F. Richards, Y. T. Lo, and D. D. Harrison, "An Improved Theory for Microstrip Antennas and Applications", IEEE Antennas and Propagation, vol. AP-29, No. 1, pp. 38-46, January 1981.

- [10] T. M. Habashy, S. M. Ali, and J. A. Kong, "Input impedance and radiation pattern of cylindrical-rectangular and wraparound microstrip antennas", *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 38, No. 5, pp. 722-731, May 1990.
- [11] S. M. Ali, T. M. Habashy, J. F. Kiang, and J. A. Kong, "Resonance in cylindrical-rectangular and wraparound structures", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 37, No. 11, pp. 1773-1783, November 1989.
- [12] J. Ashkenazy, S. Shrikman, and D. Treeves, "Electric surface current model for the analysis of microstrip antennas on cylindrical bodies," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. AP-33, pp. 295-300, March 1985.
- [13] R. E. Munson, "Conformal microstrip antennas and microstrip phased arrays", *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 22, pp. 74-78, January 1974.
- [14] K-L. Wong, "Design of Nonplanar Microstrip Antennas and Transmission Lines", Wiley Interscience, 1999.
- [15] L. C. Kempel, and J. L. Volakis, "Radiation by cavity-backed antennas on a circular cylinder", *IEE Proceedings on Microwaves, Antennas and Propagation*, vol. 142, No. 3, pp. 233-239, June 1995.
- [16] F. C. Silva, S. B. A. Fonseca, A. J. M. Soares and A. J. Giarola, "Analysis of Microstrip Antennas on Circular -Cylindrical Substrates with a Dielectric Overlay", *IEEE Antennas and Propagation*, vol. 39, No. 9, pp. 1398-1404, September 1991.
- [17] O. M. C. Pereira Filho, "Flush-mounted Cylindrical-rectangular Microstrip Antennas", artigo aceito para publicação no periódico IET Microwaves, Antennas and Propagation, January 2008.
- [18] C. A. Balanis, "Antenna Theory - Analysis and Design", John Wiley & Sons, 1997.
- [19] R. F. Harrington, "Time-Harmonic Electromagnetic Fields", McGraw Hill, 1961.
- [20] C. A. Balanis, "Advanced Engineering Eletromagnetics", John Wiley & Sons, 1989.
- [21] E. O. Hammerstad, "Equations for microstrip circuit desing", in *Proc. 5th European Micro. Conf.*, Hamburg, pp. 268-272 September 1975.
- [22] M. V. Schneider, "Microstrip dispersion", *Proc. IEEE*, pp. 144-146, January 1972.