

Wilio Aparecido Rodrigues Torres

**Análise da Rotação de Wigner Pela Propriedade Não
Comutativa da Composição Relativística de Velocidades
Não Paralelas**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Universidade Federal de Minas Gerais

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio

Belo Horizonte

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Torres, Wilio Aparecido Rodrigues.

T693a Análise da Rotação de Wigner pela propriedade não comutativa da composição relativística de velocidades não paralelas/ Wilio Aparecido Rodrigues Torres. – 2018.
72f.

Orientador: Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais – Departamento de Física.
Bibliografia: f. 60 -62.

1. Teoria da Relatividade. 2. Geometria Hiperbólica. 3. Transformações de Lorentz. 4 Rotação de Wigner. I.Título. II. Sampaio, Marcos Donizeti Rodrigues.

CDU –530.12 (043)

Elaborada pela Biblioteca Professor Manoel Lopes de Siqueira da UFMG.



Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física
Caixa Postal 702
30.123-970 Belo Horizonte - MG - Brasil

Telefone (xx) (31) 3499 5637
(xx) (31) 3499 5633
Fax (xx) (31) 3499 5688
(xx) (31) 3499 5600
e-mail pfgfisica@fisica.ufmg.br

ATA DA SESSÃO DE ARGUIÇÃO DA 600ª DISSERTAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA DEFENDIDA POR WILIO APARECIDO RODRIGUES TORRES, orientado pelo professor Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio para obtenção do grau de **MESTRE EM FÍSICA**. Às 09:00 horas de seis de abril de 2018, na sala 4123A do Departamento de Física da UFMG, reuniu-se a Comissão Examinadora, composta pelos professores **Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio** (Orientador - Departamento de Física/UFABC), **Nelson de Oliveira Yokomizo** (Departamento de Física/UFMG) e **Sebastião José Nascimento de Pádua** (Departamento de Física/UFMG) para dar cumprimento ao Artigo 37 do Regimento Geral da UFMG, submetendo o bacharel **WILIO APARECIDO RODRIGUES TORRES** à arguição de seu trabalho de dissertação, que recebeu o título de "**Análise da Rotação de Wigner Pela Propriedade Não Comutativa da Composição Relativística de Velocidades Não Paralelas**". Às 14:00 horas do mesmo dia o candidato fez uma exposição oral de seu trabalho durante aproximadamente 50 minutos. Após esta, os membros da comissão prosseguiram com a sua arguição e apresentaram seus pareceres individuais sobre o trabalho, concluindo pela aprovação do candidato.

Belo Horizonte, 06 de abril de 2018.

Prof. Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio
Orientador do estudante
Departamento de Física/UFABC

Prof. Nelson de Oliveira Yokomizo
Departamento de Física/UFMG

Prof. Sebastião José Nascimento de Pádua
Departamento de Física/UFMG

Candidato

WILIO APARECIDO RODRIGUES TORRES

**Análise da Rotação de Wigner Pela Propriedade Não
Comutativa da Composição Relativística de Velocidades
Não Paralelas**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Trabalho aprovado. Belo Horizonte, 2018:

Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio
Orientador - UFABC

Nelson de Oliveira Yokomizo
Membro da Banca - UFMG

Sebastião José Nascimento de Pádua
Membro da Banca - UFMG

Belo Horizonte

2018

Para Maria Mônica, meu amor!

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por tudo.

Agradeço aos meus pais, Jorge (*in memoriam*) e Efigênia, à minha irmã Regiana e à minha tia, Conceição, pessoas em quem sempre encontrei amor, dedicação e aconchego, pela participação, amizade, incentivo e apoio incondicional que tornaram possível que eu até aqui chegasse e realizasse este trabalho de maneira prazerosa.

Agradeço à minha filha, Maria Mônica, que me torna um ser humano melhor a cada dia com a inspiração e amor incondicional. Você é tudo para mim!

Agradeço à Sylvia, com carinho, pela minha princesa, Maria Mônica, que veio alegrar a minha vida durante a elaboração deste trabalho.

Ao professor Marcos Sampaio pela oportunidade de trabalhar com essa pessoa fantástica e tão apaixonada pela Física. Muito obrigado Marcos! Obrigado por sempre me ajudar e incentivar quando eu precisei, pela amizade, pela compreensão, pelo profissionalismo.

Ao professor Júlio César, por ter sido a minha inspiração quando era estudante secundário, por ter acreditado no meu potencial, por ter me iniciado nessa estrada maravilhosa da Física. Obrigado pela amizade, pelos conselhos, por sempre ter tempo de conversar comigo e me ajudar.

Expresso minha gratidão ao meu amigo e irmão, professor Cleidson, que iniciou essa trajetória das ciências exatas comigo e muito me ajudou no aprendizado, dedicou alguns anos da vida comigo nesse nosso interesse comum e comigo compartilhou a paixão pela Física e pela Matemática. A sua companhia e participação foram fundamentais para que eu seguisse em frente.

Agradeço ao meu parceiro de tantas jornadas, irmão dado naturalmente pela vida, professor Rogério Santos, sempre presente em todos os momentos, sempre a acrescentar no exercício que tenho na docência e na pesquisa, ser humano fantástico que é um mentor em tantos saberes.

Agradeço ao meu amigo e irmão, Heliezer Lima, sempre presente e participativo na minha vida, por seus valiosos conselhos e conjecturas.

Ao meu amigo e irmão, professor Leonardo Antônio Coelho, pela amizade, cumplicidade, participação na minha trajetória acadêmica e profissional. Você é um exemplo, uma pessoa por quem tenho imensa admiração, respeito e orgulho.

Agradeço, também, ao professor José Geraldo, da coordenação de matemática do

CEFET-MG, amigo a quem tenho grande admiração e respeito, que desde o primeiro dia que nos conhecemos esteve comigo a me incentivar e participar nas decisões que tomei. Tenho em você uma grande inspiração como profissional.

Ao professor Felipe, ex-aluno, colega de trabalho e importante amigo a quem muito admiro, por partilhar comigo, desde quando aluno do CBM, a empolgação e o desejo de estudar mais física, que é algo que nos deixa incrivelmente felizes; e por dividir comigo o seu tempo durante a elaboração deste trabalho, pelas conversas sobre dilatação do tempo, contração de comprimento e tantas outras.

À minha amiga querida, Joane Brelaz, pelo apoio, amizade e por me ajudar a cuidar da minha flor, MM, nos momentos em que, durante a escrita, a necessidade da concentração não me deixava lhe dar atenção.

Aos colegas do Departamento de Física que sempre foram companheiros.

Agradeço, ainda, ao IFMG Campus Santa Luzia, por me conceder a possibilidade de dedicar integralmente a este trabalho e à Capes pelo apoio financeiro.

*"Me entenda. Eu não sou como
um mundo comum.
Eu tenho a minha loucura,
eu vivo em outra dimensão
e eu não tenho tempo para coisas
que não têm alma."
(Charles Bukowski)*

Resumo

Transformações de Lorentz devem ser utilizadas para relacionar coordenadas do espaço-tempo de dois referenciais quando a velocidade relativa entre eles é comparável à velocidade da luz. Neste domínio, as leis da Mecânica Clássica não prevêm resultados satisfatórios em acordo com as experiências. Quando dois boosts sucessivos de Lorentz são aplicados para obter a velocidade de um objeto em um referencial de interesse, podemos substituí-los por um único boost seguido de uma rotação no espaço de coordenadas. O ângulo de rotação é denominado *Ângulo de Wigner*.

Neste trabalho, avaliamos a combinação relativística de velocidades mediante boosts de Lorentz. Nota-se que quando dois boosts são aplicados em ordens diferentes as velocidades obtidas não comutam, pois ainda que tenham os mesmos módulos, apontam em direções diferentes. Mostraremos que o ângulo entre as direções das velocidades é justamente o Ângulo de Wigner. Por fim vamos calcular o ângulo de Wigner por dois métodos diferentes, um baseado no espaço hiperbólico de Lobachevsky e o outro por uma generalização da Lei de Adição de Velocidades de Einstein no Plano Complexo.

Palavras-chave: Relatividade; Wigner; Rotação.

Abstract

Lorentz transformations should be used to relate spacetime coordinates of two frames when the relative velocity between them is comparable to the speed of light. In this field, the laws of Classical Mechanics do not foresee satisfactory results in accordance with the experiments. When two successive boosts of Lorentz are applied to obtain the velocity of an object in a reference of interest, we can substitute them by a single boost followed by a rotation in the coordinate space. The angle of rotation is called *Wigner Angle*.

In this work, we evaluate the relativistic combination of velocities using Lorentz boosts. Note that when two boosts are applied in different orders, the velocities obtained do not commute, because even though they have the same modules, they point in different directions. We will show that the angle between the velocity directions is just the Wigner Angle. Finally we calculate the Wigner angle by two different methods, one based on the hyperbolic space of Lobachevsky and the other by a generalization of the Law of Addition of Einstein Speeds in the Complex Plane.

Keywords: Relativity; Wigner; Rotation.

Lista de ilustrações

Figura 1	– <i>Dois referenciais inerciais em movimento relativo uniforme ao longo do eixo x. Adaptada de [14]</i>	16
Figura 2	– <i>Contração relativística de comprimentos só ocorre na direção do movimento. Disponível em [20]</i>	21
Figura 3	– <i>Composição de velocidades paralelas. Disponível em [25]</i>	21
Figura 4	– <i>Composição de velocidades paralelas. Adaptada de [25]</i>	23
Figura 5	– <i>Composição de velocidades perpendiculares. Disponível em [25]</i>	24
Figura 6	– <i>Composição Relativística de Velocidades não é comutativa. Existe uma rotação angular se a ordem da composição é invertida. Disponível em [25]</i>	28
Figura 7	– <i>Composição de velocidades em direções quaisquer. Disponível em [25]</i> .	30
Figura 8	– <i>Decomposição de uma velocidade qualquer em suas componentes. Disponível em [25]</i>	31
Figura 9	– <i>Simplificação do problema de velocidades quaisquer. Disponível em [25]</i>	31
Figura 10	– <i>Composição de velocidades em direções quaisquer. Adaptada de [25]</i> . .	39
Figura 11	– <i>Triângulo Hiperbólico de Velocidades</i>	48
Figura 12	– <i>Hipérbole em seção cônica (esquerda) e Definição de Hipérbole (direita). Adaptada de [26]</i>	70
Figura 13	– <i>Paralelismo em geometria hiperbólica. Adaptada de [26]</i>	71
Figura 14	– <i>Soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico. Adaptada de [30]</i>	72

Lista de abreviaturas e siglas

UFABC	Universidade Federal do ABC
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
IFMG	Instituto Federal de Minas Gerais
CEFET-MG	Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
CBM	Colégio Batista Mineiro
TG	Transformação de Galileu
TL	Transformação de Lorentz
TRR	Teoria da Relatividade Restrita
TRG	Teoria da Relatividade Geral

Sumário

	Lista de ilustrações	11
1	INTRODUÇÃO	15
2	COMBINAÇÃO RELATIVÍSTICA DE VELOCIDADES	19
2.1	Transformações de Lorentz e Efeitos Cinemáticos	19
2.2	Combinação Relativística de Velocidades	21
2.2.1	Velocidades Paralelas	21
2.2.2	Velocidades Perpendiculares	23
2.2.3	Velocidades Quaisquer	30
3	ROTAÇÃO E BOOST DE LORENTZ	33
3.1	Composição de <i>Boosts</i> Perpendiculares	33
3.2	Composição de <i>Boosts</i> arbitrários	38
4	CÁLCULO DO ÂNGULO DE WIGNER	43
4.1	Obtenção do Ângulo de Wigner pela Utilização de Geometria Hipérbolica	45
4.1.1	Determinação do Módulo de \vec{v}_{21}	46
4.1.2	Cálculo do Ângulo α entre \vec{v}_{21} e \vec{v}_1	47
4.1.3	Cálculo do Ângulo de Wigner	48
4.2	Composição de Velocidades no Plano Complexo	50
4.2.1	Lei de Adição de Velocidades Generalizada	50
4.2.2	Cálculo do Módulo de \vec{v}_{21}	51
4.2.3	Cálculo do Ângulo α entre \vec{v}_{21} e \vec{v}_1	55
4.2.4	Cálculo do Ângulo de Wigner	57
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	60
	Referências	61
	APÊNDICES	64
	APÊNDICE A – DEDUÇÃO DE ALGUMAS EQUAÇÕES	65
A.1	Dedução da Equação 2.35	65
A.2	Dedução da Equação 2.36	66
A.3	Dedução da Equação 3.15	66

A.4	Dedução da Equação 3.16	67
A.5	Dedução da Equação 3.17	67
A.6	Dedução da Equação 3.19	68
A.7	Dedução da Equação 4.15	68
A.8	Dedução da Equação 4.17	69
	APÊNDICE B – GEOMETRIA HIPERBÓLICA	70
B.1	Introdução	70
B.2	Hipérbole e Paralelismo	70
B.3	Teoremas e Figuras em Geometria Hiperbólica	71

1 Introdução

As regras que descrevem as transformações de coordenadas de um ponto material entre dois referenciais que se movem relativamente um ao outro são, com certeza, um dos assuntos de maior relevância no estudo da Física. É por meio dessas transformações que podemos verificar o quão gerais são as Leis fundamentais estabelecidas.

Desde Galileu¹ (1564-1642) até Einstein² (1879-1955) assumiu-se que se Alice mede para um ponto \mathbf{P} coordenadas $(t; x, y, z)$ e Bob, movendo-se com velocidade \vec{u} , constante, em relação a Alice, ao longo do eixo x , mede para o mesmo ponto \mathbf{P} coordenadas $(t'; x', y', z')$ (ver figura1) esses dois referenciais estão relacionados pelas Transformações de Galileu (TG),

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - ut \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (1.1)$$

Essas transformações deixam invariantes as Leis de Newton, pois

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} = \frac{d^2 x'}{dt^2} = \frac{d^2(x - ut)}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} - u \frac{dt}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2}. \quad (1.2)$$

Portanto, sendo F' a força vista por Bob e F essa mesma grandeza vista por Alice, temos

$$F' = m \frac{d^2 x'}{dt'^2} = m \frac{d^2 x}{dt^2} = F. \quad (1.3)$$

A aceleração - e por isso a força - são as mesmas nos dois referenciais. Este resultado está em perfeita harmonia com o Princípio da Relatividade que pode ser enunciado como

"As leis que descrevem todos os fenômenos da natureza são as mesmas em qualquer referencial inercial"

As Transformações de Galileu (1.1) podem ser escritas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

As Leis da Mecânica apresentam a mesma forma em todos os referenciais inerciais. Contudo, a Mecânica não pode, sozinha, fornecer a base conceitual para todos os fenômenos da natureza. As Equações de Maxwell³, formuladas no século XIX, não ficam invariantes

¹ Físico, Astrônomo e Matemático italiano, considerado o pai da ciência moderna.

² Físico alemão, considerado um dos maiores cientistas de todos os tempos.

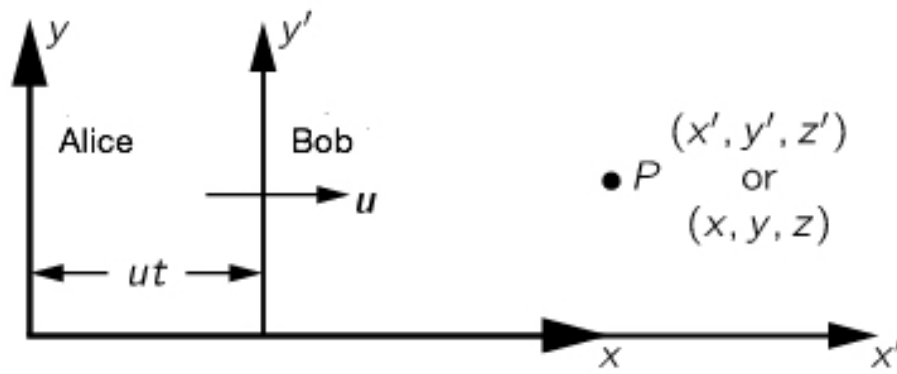


Figura 1 – *Dois referenciais inerciais em movimento relativo uniforme ao longo do eixo x.*
Adaptada de [14]

mediante uma transformação de Galileu[9]. Esse fato conduziu alguns físicos a questionarem a validade do Princípio da Relatividade. A solução para este impasse foi estabelecer transformações de coordenadas que deixassem invariantes as equações de Maxwell. Essas transformações,

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - \frac{ux}{c^2} \right) \\ x' &= \gamma (x - ut) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (1.5)$$

são denominadas **Transformações de Lorentz**⁴ (TL). As coordenadas da equação (1.5) são denominadas coordenadas do espaço-tempo. Para deixar todas elas com as mesmas dimensões, multiplica-se pela velocidade da luz no vácuo, c , a primeira daquelas equações dos dois lados da igualdade e define-se

$$\beta \equiv \frac{u}{c} \quad (1.6)$$

de modo que,

$$ct' = \gamma \left(ct - \frac{ux}{c} \right) = \gamma \left(ct - \frac{ux}{c} \right) = \gamma(ct - \beta x)$$

e

$$x' = \gamma(x - ut) = \gamma \left(x - \frac{u}{c} ct \right) = \gamma(x - \beta ct).$$

Desta forma, as transformações (1.5) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma (ct - \beta x) \\ x' &= \gamma (x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (1.7)$$

³ James Clerk Maxwell (1831 - 1879): Físico Escocês que, dentro outras importantes contribuições, deu forma à moderna teoria do Eletromagnetismo.

⁴ Hendrick Antoon Lorentz (1853-1928): Físico Holandes.

ou, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

Os vetores-coluna em (1.8) são os quadrivetores-posição, e são transformados um no outro por meio da matriz quadrada dada por

$$\Lambda \equiv \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

que é a matriz de *Transformação de Lorentz* que envolve dois referenciais que se movem com uma velocidade relativa paralela ao eixo x . Aqui,

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (1.10)$$

é conhecido como **fator de Lorentz**, que pode ser reescrito, utilizando-se (1.6), como

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.11)$$

A mecânica newtoniana, que é covariante sob transformações de Galileu (1.1), não se mostra adequada para descrever fenômenos para os quais a velocidade relativa entre dois referenciais é comparável à velocidade da luz. Neste domínio entram em cena as transformações de Lorentz com a cinemática e dinâmica relativísticas. Os fenômenos eletromagnéticos, descritos pelas equações de Maxwell estão neste domínio. Verifica-se, de fato, que tais equações são invariantes mediante transformações de Lorentz.[9]

É importante salientar que as TL's constituem uma generalização das TG's para altas velocidades. De fato, é fácil verificar por (1.6) e (1.10) aplicados a (1.7) que, para baixas velocidades comparadas a c , as TL's (1.7) se reduzem às TG's (1.1).

O caso geral ocorre quando a velocidade relativa entre os referenciais envolvidos, $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ está em uma direção arbitrária; neste caso a matriz Λ de transformação

de Lorentz é [22]

$$\Lambda \equiv \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_x^2}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_y}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_y & (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_y}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_y^2}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_z & (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_z}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_y\beta_z}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_z^2}{\beta^2} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

onde,

$$\beta_x \equiv \frac{u_x}{c}, \quad \beta_y \equiv \frac{u_y}{c} \quad e \quad \beta_z \equiv \frac{u_z}{c}, \quad (1.13)$$

$$\beta^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 \quad (1.14)$$

e

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} = (1 - \beta_x^2 - \beta_y^2 - \beta_z^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.15)$$

É fácil verificar que a matriz de Lorentz (1.12) se reduz à (1.9) para o caso em que a velocidade relativa entre os dois referenciais está na direção x , ou seja, $u_y = 0 \rightarrow \beta_y = 0$, $u_z = 0 \rightarrow \beta_z = 0$ e $\beta = \beta_x$.

2 Combinação Relativística de Velocidades

2.1 Transformações de Lorentz e Efeitos Cinemáticos

Qualquer fenômeno que ocorre em uma região de dimensões desprezíveis do espaço que pode ser considerado puntiforme e cuja duração é tão pequena que pode ser considerado instantâneo é denominado *evento*. A qualquer evento associa-se uma coordenada temporal t e e três coordenadas espaciais, x , y e z . Assim um evento é localizado no *espaço-tempo* por quatro coordenadas, representadas na forma $(t; x, y, z)$.

Se dois eventos ocorrem na mesma posição, ou seja, têm as mesmas coordenadas espaciais em um dado referencial, o intervalo de tempo $\Delta t_0 = t_2 - t_1$ entre eles, medido neste referencial, é denominado intervalo de *tempo próprio*. Naturalmente que o intervalo de tempo próprio só é medido em um referencial, já que dois eventos que tenham mesmas coordenadas espaciais em um referencial terá coordenadas distintas em outro.

As TLs (1.5) podem ser escritas na forma infinitesimal como

$$\begin{aligned} dt' &= \gamma \left(dt - \frac{udx}{c^2} \right) \\ dx' &= \gamma(dx - udt) \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \end{aligned}, \quad (2.1)$$

em que S' é o referencial que mede o intervalo de tempo próprio e S um referencial que mede o intervalo de tempo entre os eventos que ocorrem em diferentes posições. Assim,

$$dx' = 0 \rightarrow dx = udt.$$

Então,

$$dt' = \gamma \left(dt - \frac{udx}{c^2} \right) = \gamma \left(dt - \frac{u^2}{c^2} dt \right) = \gamma \left[dt \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \right].$$

Mas,

$$\gamma = \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.2)$$

Portanto,

$$dt' = \gamma \left[dt \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \right] = \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[dt \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \right] = dt \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} = dt \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}.$$

Finalmente,

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (2.3)$$

A equação (2.3) mostra que o intervalo de tempo, dt , medido entre dois eventos em um referencial no qual o objeto está em movimento - eventos medidos em posições diferentes - é maior do que o intervalo de tempo, dt' , medido em um referencial no qual o objeto está em repouso - eventos medidos na mesma posição - que caracteriza o intervalo de tempo próprio. Este fenômeno é conhecido como **dilatação do tempo**. Na notação apresentada no início do capítulo a equação (2.3) assume a forma

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (2.4)$$

Contrariamente à Mecânica Newtoniana, na qual o tempo é absoluto e eterno, aqui o tempo se torna relativo e depende da velocidade entre os referenciais. O comprimento de um corpo pode ser também medido nos dois referenciais, S e S' . Chamamos de **comprimento próprio**, L_0 , aquele que é medido em um referencial no qual o corpo está em repouso. Suponhamos que uma barra, alinhada com o eixo x , está em repouso no referencial S , no qual o comprimento medido é L_0 . A velocidade do referencial S' , em relação a S , é u . Para medir o comprimento da barra neste referencial é necessário que as coordenadas das extremidades sejam medidas simultaneamente, ou seja, no mesmo instante de tempo, de modo que em (2.1), $dt' = 0$. Sendo assim,

$$dt' = 0 \rightarrow dt = \frac{u}{c^2} dx.$$

Então,

$$dx' = \gamma(dx - udt) = \gamma\left(dx - u \cdot \frac{u}{c^2} dx\right) = \gamma\left(dx - \frac{u^2}{c^2} dx\right) = \gamma\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) dx.$$

Utilizando-se, agora, (2.2),

$$dx' = \gamma\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) dx = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) dx = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} dx$$

que, na notação convencional, fica

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \quad (2.5)$$

Deste resultado, conhecido como **contração de comprimento**, vemos que a medida do comprimento da barra em um referencial no qual ela está em movimento (L) é menor que a medida no referencial que a enxerga em repouso (L_0). É importante destacar que a contração de comprimento só ocorre na direção da velocidade do corpo em movimento, não sendo observada em outras direções, conforme mostra a figura 2.

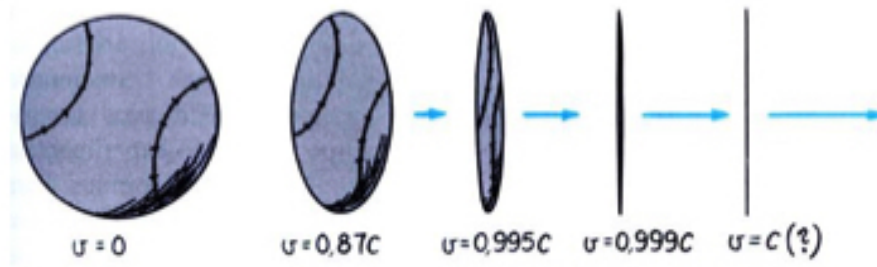


Figura 2 – Contração relativística de comprimentos só ocorre na direção do movimento. Disponível em [20]

2.2 Combinação Relativística de Velocidades

2.2.1 Velocidades Paralelas

Vamos, agora, utilizar as transformações de Lorentz para obter composição de velocidades. O caso mais simples ocorre quando as velocidades são paralelas entre si, conforme mostrado na figura (2.2). Seja v_1 a velocidade com que um observador na Terra vê Alice se mover e v_2 a velocidade de Bob medida por Alice. Queremos obter a velocidade de Bob em relação à Terra, v_{21} , a partir de v_1 e v_2 .

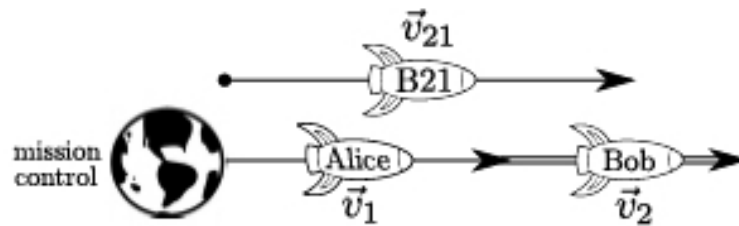


Figura 3 – Composição de velocidades paralelas. Disponível em [25]

Alinhando-se o eixo x com as velocidades v_1 e v_2 e ajustando a matriz de Lorentz (1.12) para esta situação, temos, sendo $\beta_1 = \frac{v_1}{c}$ e $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}$,

$$\begin{bmatrix} ct_T^B \\ x_T^B \\ y_T^B \\ z_T^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \gamma_1 & 0 & 0 \\ \beta_1 \gamma_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct_A^B \\ x_A^B \\ y_A^B \\ z_A^B \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

onde, por exemplo, x_T^B indica a coordenada x de Bob em relação à Terra. Aqui $v_A^T = -v_1 \mathbf{i}$, o que faz com que os termos Λ_{12} e Λ_{21} fiquem positivos. Desenvolvendo,

$$ct_T^B = \gamma_1 ct_A^B + \beta_1 \gamma_1 x_A^B \rightarrow t_T^B = \gamma_1 \left(t_A^B + \frac{v_1}{c^2} x_A^B \right)$$

$$dt_T^B = \gamma_1 \left(dt_A^B + \frac{v_1}{c^2} dx_A^B \right) \quad (2.7)$$

e,

$$x_T^B = \beta_1 \gamma_1 ct_A^B + \gamma_1 x_A^B \rightarrow x_T^B = \gamma_1 \left(x_A^B + v_1 t_A^B \right)$$

$$dx_T^B = \gamma_1 (dx_A^B + v_1 dt_A^B). \quad (2.8)$$

Claro que $y_T^B = y_A^B \therefore dy_T^B = dy_A^B = 0$ e $z_T^B = z_A^B \therefore dz_T^B = dz_A^B = 0$, pois as velocidades estão alinhadas com o eixo x . Utilizamos, agora, (2.7) e (2.8) para obter a velocidade de Bob em relação à Terra, v_{21} :

$$v_{21} \equiv v_T^B = \frac{dx_T^B}{dt_T^B} = \frac{dx_A^B + v_1 dt_A^B}{dt_A^B + \frac{v_1}{c^2} dx_A^B} = \frac{\cancel{dt_A^B} \left(\frac{dx_A^B}{\cancel{dt_A^B}} + v_1 \right)}{\cancel{dt_A^B} \left(1 + \frac{v_1}{c^2} \frac{dx_A^B}{\cancel{dt_A^B}} \right)^{v_2}},$$

que, finalmente, nos dá,

$$v_{21} = \frac{v_2 + v_1}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}. \quad (2.9)$$

Mais uma vez verificamos que no limite de baixas velocidades comparadas a c , ou seja, $v_1 \ll c$ e $v_2 \ll c$, a expressão relativística para composição de velocidades (2.9) se reduz às conhecidas relações de Galileu.

No caso simétrico, mostrado na figura (2.3), em que Alice tem velocidade v_2 em relação à Terra e Bob tem velocidade v_1 em relação à Alice, designemos por v_{12} a velocidade de Bob em relação à Terra.

Para essa situação, temos $\beta_2 = \frac{v_2}{c}$ e $\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}}$. Além disso, $v_T^A = -v_2 \mathbf{i}$. Para obter a composição de velocidades fazemos o *boost*¹ de Lorentz,

$$\begin{bmatrix} ct_T^B \\ x_T^B \\ y_T^B \\ z_T^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_2 & \beta_2 \gamma_2 & 0 & 0 \\ \beta_2 \gamma_2 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct_A^B \\ x_A^B \\ y_A^B \\ z_A^B \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Mais uma vez vamos desenvolver a equação matricial acima:

$$ct_T^B = \gamma_2 ct_A^B + \beta_2 \gamma_2 x_A^B \rightarrow t_T^B = \gamma_2 \left(t_A^B + \frac{v_2}{c^2} x_A^B \right)$$

¹ *Boost* é a matriz de Lorentz que representa uma transformação de coordenadas na qual só ocorre translação. Assim em um Boost não se verifica rotação no espaço de coordenadas.

livros texto introdutórios sobre este assunto apesar da simplicidade analítica e conceitual relacionada ao seu desenvolvimento. Para isto, vamos considerar que a velocidade de Alice em relação à Terra, \vec{v}_1 , esteja alinhada com o eixo x e que a velocidade de Bob em relação à Alice, \vec{v}_2 , seja perpendicular a \vec{v}_1 , conforme figura (2.4). Desejamos, tal como antes, obter a velocidade de Bob em relação à Terra, \vec{v}_{21} . Para isso aplicar-se-á as transformações de Lorentz em que são dadas as coordenadas retangulares e temporal de forma independente. Isto nos permitirá calcular as componentes da velocidade e, então, obter a velocidade resultante.

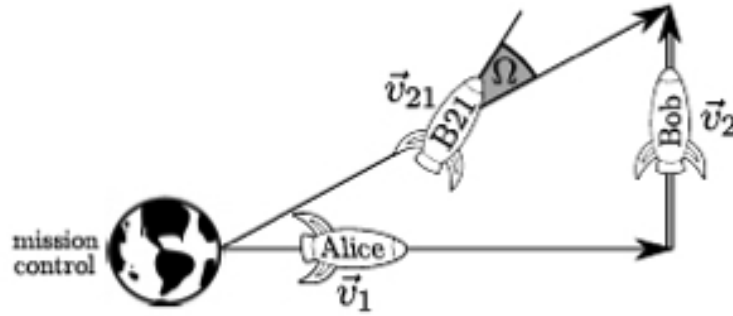


Figura 5 – Composição de velocidades perpendiculares. Disponível em [25]

Do mesmo modo que foi feito no caso de velocidades paralelas, fazemos as TL's do referencial de Alice para o referencial da Terra e consideramos Bob como o objeto para o qual queremos transformar as coordenadas entre os dois referenciais. A velocidade da Terra em relação à Alice é $\vec{v}_A^T = -v_1 \mathbf{i}$ e a velocidade de Bob em relação a Alice é $\vec{v}_A^B = v_2 \mathbf{j}$. Adequando-se a matriz de Lorentz (1.12) para esta situação, temos um *boost* idêntico a (2.6),

$$\begin{bmatrix} ct_T^B \\ x_T^B \\ y_T^B \\ z_T^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \gamma_1 & 0 & 0 \\ \beta_1 \gamma_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct_A^B \\ x_A^B \\ y_A^B \\ z_A^B \end{bmatrix}.$$

O desenvolvimento dessa equação matricial nos conduz as mesmas equações encontradas anteriormente, exceto para o caso de que a coordenada y de Bob medida nos dois referenciais não é constante. Para essa situação apenas a coordenada z ficará constante, ou seja, $z_T^B = z_A^B = cte \therefore dz_T^B = 0 = dz_A^B$. Desta forma,

$$ct_T^B = \gamma_1 ct_A^B + \beta_1 \gamma_1 x_A^B \rightarrow t_T^B = \gamma_1 \left(t_A^B + \frac{v_1}{c^2} x_A^B \right)$$

$$dt_T^B = \gamma_1 \left(dt_A^B + \frac{v_1}{c^2} dx_A^B \right), \quad (2.14)$$

$$x_T^B = \beta_1 \gamma_1 c t_A^B + \gamma_1 x_A^B \rightarrow x_T^B = \gamma_1 (x_A^B + v_1 t_A^B)$$

$$dx_T^B = \gamma_1 (dx_A^B + v_1 dt_A^B) \quad (2.15)$$

e

$$y_T^B = y_A^B \quad \therefore \quad dy_T^B = dy_A^B. \quad (2.16)$$

É importante destacar que v_1 é o módulo da velocidade relativa entre os dois referenciais e que o fator de Lorentz $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}$ é associado a esta velocidade. Em seguida calculamos as componentes da velocidade de Bob (que é o objeto que se move em relação aos dois referenciais) no referencial da Terra em termos da sua velocidade no referencial de Alice. A componente horizontal (x) da velocidade de Bob no referencial da Terra, $v_{21x} = v_{T_x}^B$ é

$$v_{21x} = \frac{dx_T^B}{dt_T^B} = \frac{\cancel{\gamma_1} (dx_A^B + v_1 dt_A^B)}{\cancel{\gamma_1} (dt_A^B + \frac{v_1}{c^2} dx_A^B)} = \frac{\cancel{dt_A^B} \left(\frac{dx_A^B}{\cancel{dt_A^B}} + v_1 \right)}{\cancel{dt_A^B} \left(1 + \frac{v_1}{c^2} \frac{dx_A^B}{\cancel{dt_A^B}} \right)}.$$

Portanto,

$$v_{T_x}^B = v_{21x} = v_1. \quad (2.17)$$

Esclareço que no cálculo precedente $\frac{dx_A^B}{dt_A^B} = 0$ porque no referencial de Alice, a velocidade de Bob é tal que não há mudança na sua posição x . Agora vamos calcular a componente vertical (y) da velocidade de Bob vista pelo referencial da Terra, $v_{21y} = v_{T_y}^B$ em termos de v_1 e v_2 :

$$v_{21y} = \frac{dy_T^B}{dt_T^B} = \frac{dy_A^B}{\gamma_1 (dt_A^B + \frac{v_1}{c^2} dx_A^B)} = \frac{\cancel{dt_A^B} \frac{dy_A^B}{\cancel{dt_A^B}}}{\gamma_1 \cancel{dt_A^B} \left(1 + \frac{v_1}{c^2} \frac{dx_A^B}{\cancel{dt_A^B}} \right)} = \frac{v_2}{\gamma_1}.$$

Isso resulta em

$$v_{T_y}^B = v_{21y} = v_2 \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}. \quad (2.18)$$

Podemos apresentar um argumento heurístico para os resultados obtidos nas equações (2.17) e (2.18). Foi argumentado, no final da seção 2.1, que não existe contração de comprimento nas direções perpendiculares ao movimento, mas ocorre dilatação de tempo quando muda-se de um referencial para o outro. O comprimento percorrido por Bob visto por Alice e pela Terra é o mesmo, enquanto que o intervalo de tempo fica dilatado de γ_1 , fator esse que representará uma redução na velocidade, isto é, $v_{21y} = \frac{v_2}{\gamma_1}$. Com esses resultados temos, no referencial da terra, a velocidade de Bob,

$$\vec{v}_{21} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} \mathbf{j}. \quad (2.19)$$

O módulo de \vec{v}_{21} pode ser obtido tomando-se a raiz quadrada do produto escalar desta velocidade por ela mesma. Então,

$$|\vec{v}_{21}|^2 = \vec{v}_{21} \cdot \vec{v}_{21}.$$

Desta forma,

$$|\vec{v}_{21}| = \sqrt{\left[v_1 \mathbf{i} + v_2 \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} \mathbf{j} \right] \cdot \left[v_1 \mathbf{i} + v_2 \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} \mathbf{j} \right]}.$$

como $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}$ e $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}$ temos,

$$|\vec{v}_{21}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^2}}. \quad (2.20)$$

Na sequência vamos realizar a transformação de velocidades para o caso simétrico em que Alice tem velocidade \vec{v}_2 em relação à Terra e Bob tem velocidade \vec{v}_1 medida pelo referencial de Alice. Queremos a velocidade de Bob vista pelo referencial da Terra. Na situação em estudo a velocidade da Terra em relação a Alice é $\vec{v}_A^T = -v_2 \mathbf{j}$. Ajustando a matriz de Lorentz (1.12) para esta situação, teremos a seguinte transformação de coordenadas que nos dá as coordenadas de Bob no referencial da Terra em termos das coordenadas medidas no referencial de Alice,

$$\begin{bmatrix} ct_T^B \\ x_T^B \\ y_T^B \\ z_T^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_2 & 0 & \beta_2 \gamma_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta_2 \gamma_2 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct_A^B \\ x_A^B \\ y_A^B \\ z_A^B \end{bmatrix}$$

onde define-se, para esta situação,

$$\beta_2 \equiv \frac{v_2}{c} \quad (2.21)$$

e

$$\gamma_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_2^2}}. \quad (2.22)$$

Prosseguindo, vamos desenvolver a relação matricial acima e com isso obter as velocidades de interesse onde, obviamente, $z_T^B = z_A^B = cte \therefore dz_T^B = 0 = dz_A^B$, como acontecia no caso anterior, pois em nossa análise os movimentos são restritos a um único plano.

$$ct_T^B = \gamma_2 ct_A^B + \beta_2 \gamma_2 y_A^B \quad \rightarrow \quad t_T^B = \gamma_2 \left(t_A^B + \frac{v_2}{c^2} y_A^B \right).$$

Então,

$$dt_T^B = \gamma_2 \left(dt_A^B + \frac{v_2}{c^2} dy_A^B \right). \quad (2.23)$$

Além disso,

$$x_T^B = x_A^B \quad \therefore \quad dx_T^B = dx_A^B \quad (2.24)$$

e

$$y_T^B = \beta_2 \gamma_2 ct_A^B + \gamma_2 y_A^B \rightarrow y_T^B = \gamma_2 \left(y_A^B + v_2 t_A^B \right).$$

Portanto,

$$dy_T^B = \gamma_2(dy_A^B + v_2 dt_A^B). \quad (2.25)$$

Destaca-se que v_2 é o módulo da velocidade relativa entre os dois referenciais de interesse (Terra e Alice) e o fator de Lorentz γ_2 , dado por (2.21), está associado a esta velocidade. Como Bob é o objeto cuja velocidade queremos obter no referencial da Terra, calculemos a componente horizontal (x) da velocidade de Bob em relação ao referencial da Terra, $v_{12x} = v_{T_x}^B$, em termos de v_1 e v_2 :

$$v_{12x} = \frac{dx_T^B}{dt_T^B} = \frac{dx_A^B}{\gamma_2 \left(dt_A^B + \frac{v_2}{c^2} dy_A^B \right)} = \frac{\cancel{dt_A^B} \frac{dx_A^B}{\cancel{dt_A^B}}}{\gamma_2 \cancel{dt_A^B} \left(1 + \frac{v_2}{c^2} \frac{dy_A^B}{\cancel{dt_A^B}} \right)} = \frac{v_1}{\gamma_2}.$$

Esse resultado pode ser reescrito como

$$v_{T_x}^B = v_{12x} = v_1 \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}. \quad (2.26)$$

Aqui $\frac{dy_A^B}{dt_A^B} = 0$ porque no referencial de Alice a coordenada y de Bob é constante. Mais uma vez, não ocorre contração de comprimento em direções perpendiculares, mas a dilatação do tempo atua de modo que se o tempo fica dilatado de γ_2 a componente da velocidade na direção perpendicular fica reduzida pelo mesmo fator, ou seja, $v_{12x} = \frac{v_1}{\gamma_2}$. Do mesmo modo podemos obter a componente vertical (y) da velocidade de Bob em relação à Terra, $v_{12y} = v_{T_y}^B$, da seguinte maneira:

$$v_{12y} = \frac{dy_T^B}{dt_T^B} = \frac{\cancel{\gamma_2} (dy_A^B + v_2 dt_A^B)}{\cancel{\gamma_2} \left(dt_A^B + \frac{v_2}{c^2} dy_A^B \right)} = \frac{\cancel{dt_A^B} \left(\frac{dy_A^B}{\cancel{dt_A^B}} + v_2 \right)}{\cancel{dt_A^B} \left(1 + \frac{v_2}{c^2} \frac{dy_A^B}{\cancel{dt_A^B}} \right)},$$

de onde obtemos o resultado já esperado,

$$v_{T_y}^B = v_{12y} = v_2. \quad (2.27)$$

Temos, pois, no referencial da Terra,

$$\vec{v}_{12} = v_1 \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}} \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j}. \quad (2.28)$$

Para calcular o módulo de \vec{v}_{12} devemos utilizar o produto escalar conforme feito para \vec{v}_{21} . Fazendo isto, obtém-se

$$|\vec{v}_{12}|^2 = \vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12},$$

que resulta em,

$$|\vec{v}_{12}| = \sqrt{\left[v_1 \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}} \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} \right] \cdot \left[v_1 \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}} \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} \right]}$$

o que, finalmente, nos dá

$$|\vec{v}_{12}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^2}}. \quad (2.29)$$

A comparação das equações (2.20) e (2.29) nos mostra que os módulos de \vec{v}_{21} e \vec{v}_{12} são iguais, ou seja,

$$|\vec{v}_{21}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^2}} = |\vec{v}_{12}|. \quad (2.30)$$

Contudo, apesar dessas duas velocidades terem o mesmo módulo vemos, por (2.19) e (2.28), que elas se orientam em direções diferentes. Deste modo,

$$\vec{v}_{21} \neq \vec{v}_{12}.$$

O fato de \vec{v}_{21} e \vec{v}_{12} terem o mesmo módulo, mas direções diferentes mostra que existe uma operação de rotação que leva um vetor ao outro. O ângulo Ω entre esses dois vetores, ilustrado na figura 2.5, pode ser facilmente calculado utilizando-se a definição analítica de produto vetorial.

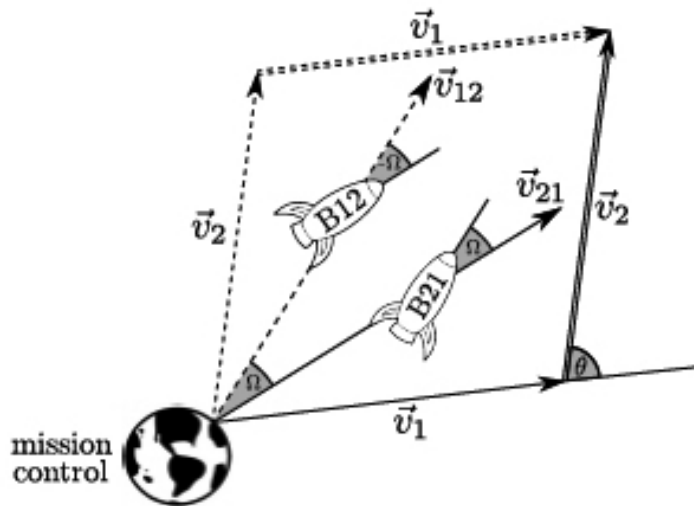


Figura 6 – *Composição Relativística de Velocidades não é comutativa. Existe uma rotação angular se a ordem da composição é invertida. Disponível em [25]*

O produto vetorial de \vec{v}_{21} por \vec{v}_{12} tem módulo dado por,

$$|\vec{v}_{21} \times \vec{v}_{12}| = |\vec{v}_{21}| |\vec{v}_{12}| \sin \Omega.$$

Portanto,

$$\sin \Omega = \frac{|\vec{v}_{21} \times \vec{v}_{12}|}{|\vec{v}_{21}| |\vec{v}_{12}|}. \quad (2.31)$$

Mas, como $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0 = \mathbf{j} \times \mathbf{j}$ e lembrando que

$$\vec{v}_{21} = \vec{v}_1 \mathbf{i} + \frac{\vec{v}_2}{\gamma_1} \mathbf{j} \quad \text{e} \quad \vec{v}_{12} = \frac{\vec{v}_1}{\gamma_2} \mathbf{i} + \vec{v}_2 \mathbf{j}$$

temos,

$$\vec{v}_{21} \times \vec{v}_{12} = \frac{v_1^2}{\gamma_2} [\mathbf{i} \times \mathbf{i}] + v_1 v_2 [\mathbf{i} \times \mathbf{j}] + \frac{v_1 v_2}{\gamma_1 \gamma_2} [\mathbf{j} \times \mathbf{i}] + \frac{v_2^2}{\gamma_1} [\mathbf{j} \times \mathbf{j}] = v_1 v_2 \mathbf{k} - \frac{v_1 v_2}{\gamma_1 \gamma_2} \mathbf{k}.$$

Desta forma,

$$|\vec{v}_{21} \times \vec{v}_{12}| = v_1 v_2 \left(1 - \frac{1}{\gamma_1 \gamma_2} \right). \quad (2.32)$$

Utilizando (2.30) vemos que,

$$|\vec{v}_{21}| |\vec{v}_{12}| = v_1^2 + v_2^2 - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^2}. \quad (2.33)$$

Substituindo-se, agora, (2.32) e (2.33) em (2.31) ficamos com

$$\text{sen } \Omega = \frac{|\vec{v}_{21} \times \vec{v}_{12}|}{|\vec{v}_{21}| |\vec{v}_{12}|} = \frac{v_1 v_2 \left(1 - \frac{1}{\gamma_1 \gamma_2} \right)}{v_1^2 + v_2^2 - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^2}} = \frac{v_1 v_2 \left(1 - \frac{1}{\gamma_1 \gamma_2} \right)}{c^2 \left(\frac{v_1^2}{c^2} + \frac{v_2^2}{c^2} - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^4} \right)}. \quad (2.34)$$

Desta forma, determina-se o ângulo entre as velocidades v_{21} e v_{12} por

$$\text{sen } \Omega = \frac{\beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2 + 1}. \quad (2.35)$$

Com o resultado expresso pela equação (2.35) podemos utilizar a relação trigonométrica fundamental para obter uma expressão explícita para o cosseno do ângulo entre as velocidades e, com isso, derivar imediatamente a tangente deste ângulo. Fazendo isto, obtemos,

$$\cos \Omega = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2 + 1}. \quad (2.36)$$

Agora, com (2.35) e (2.36), derivamos uma expressão para a tangente

$$\tan \Omega = \frac{\text{sen } \Omega}{\cos \Omega} = \frac{\frac{\beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2 + 1}}{\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2 + 1}} = \frac{\beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}.$$

Finalmente,

$$\tan \Omega = \frac{\beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}. \quad (2.37)$$

Chega-se, pois, à conclusão de que velocidade combinada relativisticamente não pode ser interpretada da forma imediata conforme se está habituado com fundamento na relatividade galileana padrão, pois nesta obteríamos o resultado exato de que $\vec{v}_{21} = \vec{v}_{12}$ o que, como mostramos, não é o caso quando se considera a combinação relativística de velocidades. Nela, ainda que as velocidades tenham o mesmo módulo, existe um ângulo entre elas. No próximo capítulo mostrar-se-á que este ângulo está associado a uma rotação do objeto no espaço de coordenadas e é denominado *ângulo de Wigner*.

2.2.3 Velocidades Quaisquer

Uma vez que obtivemos as expressões e interpretamos a combinação de velocidade nos casos particulares descritos anteriormente vamos, agora, tratar o caso geral, representado na figura (2.6), em que as velocidades têm direções arbitrárias. É claro que os resultados que obtivermos aqui deverão reproduzir os resultados anteriores quando o sistema da figura (2.6) for ajustado para qualquer uma das situações já descritas, isto é, estes serão vistos como casos particulares dos resultados que obteremos a seguir. Vamos obter expressões gerais para \vec{v}_{21} e \vec{v}_{12} utilizando as equações (2.13), (2.19) e (2.28) e argumentos heurísticos baseados em dilatação do tempo e contração de comprimento conforme já feito no caso de velocidades perpendiculares.

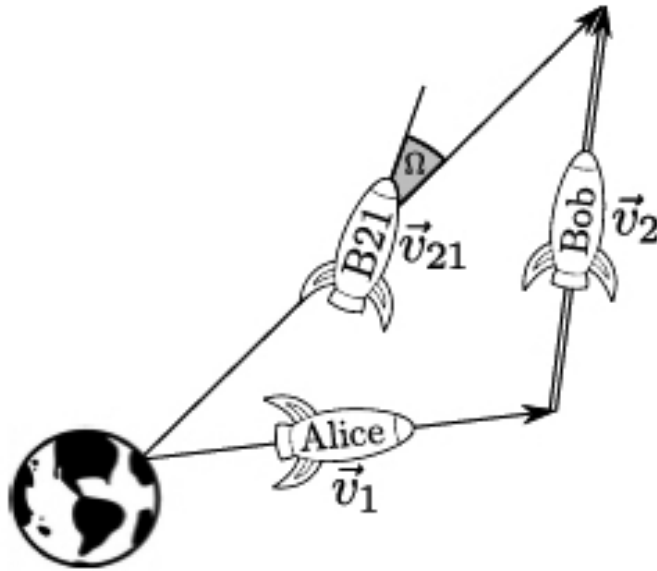


Figura 7 – Composição de velocidades em direções quaisquer. Disponível em [25]

Para facilitar a análise, alinhamos a velocidade de Alice em relação à Terra, \vec{v}_1 , com a direção horizontal. Assim a velocidade de Bob em relação à Alice, \vec{v}_2 , terá uma inclinação arbitrária em relação à essa direção. Em seguida, decompomos \vec{v}_2 em suas componentes $\vec{v}_{2\parallel 1}$ que é paralela a \vec{v}_1 e $\vec{v}_{2\perp 1}$ que é perpendicular a \vec{v}_1 , conforme ilustrado na figura (2.7).

Isto nos permitirá tratar o problema de composição de velocidade como dois problemas em que a transformação de Lorentz será realizada por meio de dois *boosts* sucessivos: Primeiro faz-se um *boost* do referencial de Alice para o referencial da Terra a fim de se obter a velocidade, em relação à Terra, \vec{v}_1^0 , de um observador auxiliar, S^0 , que se move em relação a Alice com velocidade $\vec{v}_{2\parallel 1}$. Deste modo, o que fazemos é considerar um referencial que se move em relação a Alice com velocidade $\vec{v}_{2\parallel 1}$ e determinar a sua velocidade em relação à Terra, \vec{v}_1^0 . Para este caso podemos aplicar (2.13) já que as velocidades envolvidas são

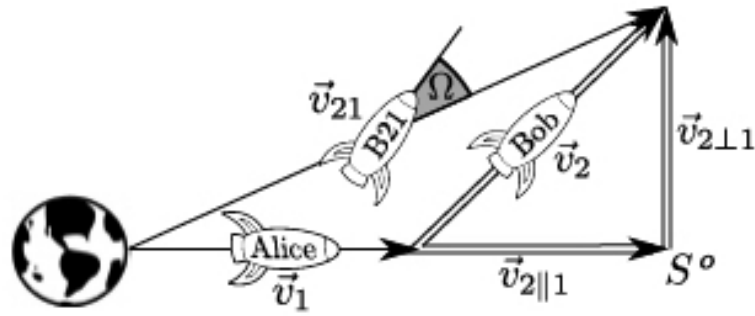


Figura 8 – Decomposição de uma velocidade qualquer em suas componentes. Disponível em [25]

paralelas, de onde obtemos,

$$\vec{v}_1^0 = \frac{v_{2||1} + v_1}{1 + \frac{v_{2||1}v_1}{c^2}} = \frac{v_{2||1} + v_1}{1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}}. \quad (2.38)$$

Com este *boost* teremos o referencial auxiliar se movendo com velocidade \vec{v}_1^0 em relação à Terra e Bob, se movendo em relação ao referencial auxiliar, S^0 , com velocidade \vec{v}_2^0 , perpendicular a \vec{v}_1^0 , conforme ilustrado na figura 2.8.

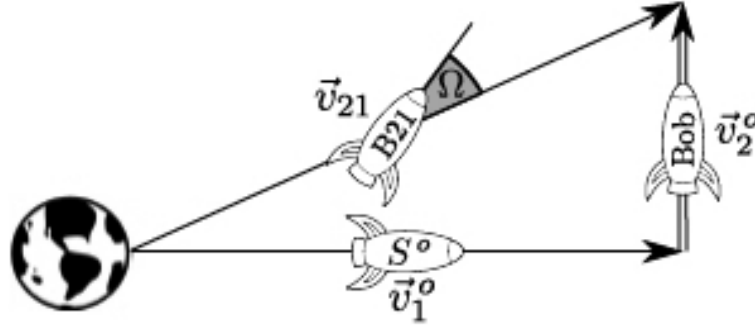


Figura 9 – Simplificação do problema de velocidades quaisquer. Disponível em [25]

Podemos obter \vec{v}_2^0 a partir de $\vec{v}_{2\perp 1}$ verificando que sendo esta e $\vec{v}_{2||1}$ perpendiculares, a velocidade $\vec{v}_{2||1}$ não causa contração de comprimento na direção de $\vec{v}_{2\perp 1}$, mas ocorre dilatação de tempo. Como o tempo próprio é medido no referencial de $\vec{v}_{2\perp 1}$, o tempo no referencial auxiliar fica dilatado de

$$\gamma_{2||1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{2||1}^2}{c^2}}}. \quad (2.39)$$

Então a velocidade de Bob em relação ao referencial auxiliar será dada por

$$\vec{v}_2^0 = \gamma_{2||1} \vec{v}_{2\perp 1} \quad (2.40)$$

Podemos, agora, obter \vec{v}_{21} utilizando a expressão (2.19), para composição de velocidades perpendiculares, obtida aplicando-se TL's. O caso ilustrado na figura 2.8 é idêntico ao caso da figura (2.4) que deu origem à (2.19). Identificamos \vec{v}_1^0 e \vec{v}_2^0 da figura (2.8), respectivamente, com \vec{v}_1 e \vec{v}_2 da figura (2.4). Deste modo,

$$\vec{v}_{21} = v_1^0 \mathbf{i} + \frac{v_2^0}{\gamma_1} \mathbf{j} = v_1^0 \mathbf{i} + \frac{\gamma_{2\parallel 1}}{\gamma_1} v_{2\perp 1} \mathbf{j} \quad (2.41)$$

onde,

$$\gamma_1^0 \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(v_1^0)^2}{c^2}}} = \gamma_{2\parallel 1} \gamma_1 \left(1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2} \right). \quad (2.42)$$

Com isso, substituindo (2.38) e (2.42) em (2.41) podemos obter uma expressão explícita para \vec{v}_{21} ,

$$\vec{v}_{21} = \left[\frac{v_1 + v_{2\parallel 1}}{1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\gamma_{2\parallel 1} v_{2\perp 1}}{\gamma_{2\parallel 1} \gamma_1 \left(1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2} \right)} \right] \mathbf{j}.$$

Finalmente, aplicando a definição de γ_1 chegamos a

$$\vec{v}_{21} = \frac{v_1 + v_{2\parallel 1}}{1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} v_{2\perp 1}}{1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}} \mathbf{j}. \quad (2.43)$$

Com argumentos totalmente análogos podemos obter uma expressão para v_{12} , chegando ao seguinte resultado:

$$\vec{v}_{12} = \frac{v_2 + v_{1\parallel 2}}{1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}} v_{1\perp 2}}{1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}} \mathbf{j}. \quad (2.44)$$

Nesta seção vimos que as transformações de coordenadas para velocidades quaisquer em condições relativísticas podem ser realizadas decompondo-se essa velocidade qualquer em suas componentes perpendiculares e, então, realizando-se duas transformações sucessivas ao longo dessas direções. Com este procedimento chega-se às transformações de coordenadas entre os referenciais e, delas, podemos obter as quantidades cinemáticas associadas ao movimento.

Pela análise das equações (2.43) e (2.44) vemos que para o caso em que as velocidades são paralelas temos $v_{2\perp 1} = 0 = v_{1\perp 2}$. Nessas circunstâncias, essas equações se reduzem à equação (2.13). Da mesma forma, para o caso em que as velocidades são perpendiculares entre si, temos $v_{2\parallel 1} = 0 = v_{1\parallel 2}$, caso para o qual as equações (2.43) e (2.44) se reduzem (2.19) e (2.28). Isto satisfaz a condição que desejávamos, na qual os resultados para os dois casos específicos de velocidades paralelas e perpendiculares são casos particulares do resultado geral, no qual não restringimos o espaço de possibilidades do ângulo entre as velocidades.

3 Rotação e Boost de Lorentz

Na última seção do capítulo 2 vimos que transformações relativísticas de velocidades podem ser realizadas decompondo-se uma das velocidades em duas componentes, uma paralela e outra perpendicular àquela que não é decomposta e, assim realizando-se transformações sucessivas nas duas direções utilizando-se os resultados já conhecidos para os casos paralelo e perpendicular. Naquela ocasião os argumentos utilizados para se chegar a este resultado foram baseados em dilatação do tempo e contração de comprimentos, fenômenos relativísticos que aparecem em decorrência das transformações de Lorentz que, por sua vez, são consequências dos postulados de Einstein,

Postulado 1 (Princípio de Invariância das Leis da Física). *As leis da física são as mesmas em todos os sistemas de referência inerciais.*

Postulado 2 (Princípio de Constância da Velocidade da Luz). *A velocidade da luz no espaço livre é uma constante universal, independente de qualquer movimento relativo entre fonte e observador.*

Neste capítulo sistematizaremos este resultado e mostraremos a sua validade com base no formalismo das transformações de Lorentz. Como veremos, os resultados implicarão em uma rotação no espaço de coordenadas, denominada *Rotação de Wigner*.

3.1 Composição de *Boosts* Perpendiculares

Vamos considerar a composição de dois *boosts* ao longo de direções mutuamente perpendiculares. Queremos saber, em primeiro lugar, se a composição é equivalente a um único *boost* ou se não é. Devemos ter em mente que *boosts* são matrizes simétricas. De fato, a matriz de Lorentz (1.12) que representa um *boost* genérico em uma direção qualquer é uma matriz simétrica, pois $\Lambda_{ij} = \Lambda_{ji} \quad \forall \quad i, j$. Com isso, a matriz L_x que representa um *boost* na direção x ,

$$L_x = \begin{bmatrix} \gamma_x & -\beta_x \gamma_x & 0 & 0 \\ -\beta_x \gamma_x & \gamma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

obtida quando se faz $\beta_y = 0 = \beta_z$ em (1.12) é uma matriz simétrica. O mesmo acontece com a matriz L_y ,

$$L_y = \begin{bmatrix} \gamma_y & 0 & -\beta_y \gamma_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta_y \gamma_y & 0 & \gamma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

obtida quando se faz $\beta_x = 0 = \beta_z$ em (1.12). Portanto, para que a composição de dois *boosts* seja também um *boost* faz-se necessário que ela seja uma matriz simétrica. Vamos, então realizar a composição tomando o produto das matrizes (3.1) e (3.2):

$$L_y L_x = \begin{bmatrix} \gamma_y & 0 & -\beta_y \gamma_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta_y \gamma_y & 0 & \gamma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_x & -\beta_x \gamma_x & 0 & 0 \\ -\beta_x \gamma_x & \gamma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto

$$L_y L_x = \begin{bmatrix} \gamma_y \gamma_x & -\gamma_y \gamma_x \beta_x & -\gamma_y \beta_y & 0 \\ -\gamma_x \beta_x & \gamma_x & 0 & 0 \\ -\gamma_y \gamma_x \beta_y & \gamma_y \gamma_x \beta_y \beta_x & \gamma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Com este resultado fica claro que o resultado do produto de dois *boosts* mutuamente perpendiculares - que corresponde à aplicação destes dois *boosts* sucessivamente - fornece como resultado uma matriz não simétrica, o que responde à pergunta inicial: a composição não é equivalente a um único *boost*. É claro que estamos a trabalhar com sistemas inerciais, requisito necessário para a aplicação da Teoria da Relatividade Restrita (TRR). Por definição o primeiro sistema é inercial; o segundo sistema inercial é o resultado da aplicação do primeiro *boost* sobre o primeiro sistema e o terceiro sistema inercial é obtido a partir da aplicação do segundo *boost* sobre o segundo sistema.

Com o objetivo de encontrar um *boost*, representado por uma matriz simétrica, na composição (3.3), vamos postular que este resultado, que é uma transformação de Lorentz, pode ser escrito como o produto de uma rotação no espaço de coordenadas, $R(\Omega)$, por um *boost*, L ,

$$L_y L_x = R(\Omega) L \quad (3.4)$$

onde

$$R(\Omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Omega & \text{sen} \Omega & 0 \\ 0 & -\text{sen} \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

é a matriz de rotação no espaço-tempo. Naturalmente que essa matriz é inversível, já que, sendo r_{ij} o termo da i -ésima linha e da j -ésima coluna da matriz,

$$\det R = r_{11} \det R_{11} = \cos^2 \Omega + \text{sen}^2 \Omega = 1 \neq 0$$

e a inversa é

$$R^{-1}(\Omega) = \frac{1}{\det R} R^T = \frac{1}{1} R^T = R^T$$

então

$$R^{-1}(\Omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Omega & -\text{sen} \Omega & 0 \\ 0 & \text{sen} \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Podemos trabalhar com (3.4) e obter

$$L_y L_x = R(\Omega) L \quad \therefore \quad R^{-1}(\Omega) L_y L_x = R^{-1}(\Omega) R(\Omega) L$$

de onde

$$L = R^{-1}(\Omega) L_y L_x. \quad (3.7)$$

Substituindo-se (3.3) e (3.6) em (3.7) temos

$$\begin{aligned} L &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Omega & -\text{sen} \Omega & 0 \\ 0 & \text{sen} \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_y \gamma_x & -\gamma_y \gamma_x \beta_x & -\gamma_y \beta_y & 0 \\ -\gamma_x \beta_x & \gamma_x & 0 & 0 \\ -\gamma_y \gamma_x \beta_y & \gamma_y \gamma_x \beta_y \beta_x & \gamma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \gamma_y \gamma_x & -\gamma_y \gamma_x \beta_x & -\gamma_y \beta_y & 0 \\ -\gamma_x \beta_x \cos \Omega + \gamma_y \gamma_x \beta_y \text{sen} \Omega & \gamma_x \cos \Omega - \gamma_y \gamma_x \beta_y \beta_x \text{sen} \Omega & -\gamma_y \text{sen} \Omega & 0 \\ -\gamma_x \beta_x \text{sen} \Omega - \gamma_y \gamma_x \beta_y \cos \Omega & \gamma_x \text{sen} \Omega + \gamma_y \gamma_x \beta_y \beta_x \cos \Omega & \gamma_y \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8) \end{aligned}$$

Queremos que a matriz L seja um *boost* e, por isso, ela deve ser simétrica. Com essa exigência vamos igualar os termos simétricos, ou seja, $L_{ij} = L_{ji}$, o que nos permitirá obter o ângulo Ω da rotação. Assim, pela condição $L_{23} = L_{32}$

$$-\gamma_y \text{sen} \Omega = \gamma_x \text{sen} \Omega + \gamma_y \gamma_x \beta_y \beta_x \cos \Omega \quad \therefore \quad (\gamma_x + \gamma_y) \text{sen} \Omega = -\gamma_y \gamma_x \beta_y \beta_x \cos \Omega$$

que nos dá

$$\tan \Omega = -\frac{\gamma_y \gamma_x \beta_y \beta_x}{\gamma_y + \gamma_x}. \quad (3.9)$$

Já a condição $L_{13} = L_{31}$ nos conduz a

$$-\gamma_y \beta_y = -\gamma_x \beta_x \text{sen} \Omega - \gamma_y \gamma_x \beta_y \cos \Omega$$

$$\gamma_y \beta_y = \gamma_x \beta_x \text{sen} \Omega + \gamma_y \gamma_x \beta_y \cos \Omega \quad (3.10)$$

mas, da equação (3.9) temos

$$\frac{\text{sen} \Omega}{\cos \Omega} = -\frac{\gamma_y \gamma_x \beta_y \beta_x}{\gamma_y + \gamma_x} \quad \therefore \quad \cos \Omega = -\frac{\gamma_y + \gamma_x}{\gamma_y \gamma_x \beta_y \beta_x} \text{sen} \Omega \quad (3.11)$$

substituindo-se, agora, a equação (3.11) na equação (3.10), temos

$$\begin{aligned}\gamma_y \beta_y &= \gamma_x \beta_x \operatorname{sen} \Omega + \cancel{\gamma_y \beta_y} \left(-\frac{\gamma_y + \gamma_x}{\cancel{\gamma_y \beta_y} \beta_x} \operatorname{sen} \Omega \right) \\ &= \gamma_x \beta_x \operatorname{sen} \Omega - \frac{\gamma_y + \gamma_x}{\beta_x} \operatorname{sen} \Omega\end{aligned}$$

portanto,

$$\gamma_y \beta_y \beta_x = (\gamma_x \beta_x^2 - \gamma_x - \gamma_y) \operatorname{sen} \Omega$$

prossequindo,

$$\operatorname{sen} \Omega = \frac{\gamma_y \beta_y \beta_x}{\gamma_x \beta_x^2 - \gamma_x - \gamma_y} = -\frac{\gamma_y \beta_y \beta_x \gamma_x}{\gamma_x (\gamma_x + \gamma_y - \gamma_x \beta_x^2)} = -\frac{\gamma_y \gamma_x \beta_y \beta_x}{\gamma_x^2 + \gamma_x \gamma_y - \gamma_x^2 \beta_x^2}$$

então temos

$$\operatorname{sen} \Omega = -\frac{\gamma_y \gamma_x \beta_y \beta_x}{\gamma_x \gamma_y + \gamma_x^2 (1 - \beta_x^2)} \quad (3.12)$$

lembrando que

$$\gamma_x = (1 - \beta_x^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \therefore \quad 1 - \beta_x^2 = \frac{1}{\gamma_x^2}$$

e utilizando isto em (3.12), temos

$$\operatorname{sen} \Omega = -\frac{\gamma_y \gamma_x \beta_y \beta_x}{\gamma_x \gamma_y + \cancel{\gamma_x^2} \frac{1}{\cancel{\gamma_x^2}}}$$

que nos conduz a uma expressão para o $\operatorname{sen} \Omega$

$$\operatorname{sen} \Omega = -\frac{\gamma_y \gamma_x \beta_y \beta_x}{\gamma_y \gamma_x + 1} \quad (3.13)$$

Para obter uma expressão para $\cos \Omega$ basta substituir (3.13) em (3.11):

$$\cos \Omega = -\frac{\gamma_y + \gamma_x}{\gamma_y \gamma_x \beta_y \beta_x} \operatorname{sen} \Omega = -\frac{\gamma_y + \gamma_x}{\cancel{\gamma_y \beta_y} \beta_x} \left(-\frac{\cancel{\gamma_y \beta_y} \beta_x}{\gamma_y \gamma_x + 1} \right)$$

portanto,

$$\cos \Omega = \frac{\gamma_y + \gamma_x}{\gamma_y \gamma_x + 1} \quad (3.14)$$

Finalmente podemos substituir os valores de seno e cosseno, dados pelas equações (3.13) e (3.14) na matriz da equação (3.8). Para o termo L_{21} obtemos

$$L_{21} = -\gamma_y \gamma_x \beta_x. \quad (3.15)$$

Com este resultado vemos que, de fato, os termos L_{12} e L_{21} são iguais. Em seguida calcularemos os demais termos e mostraremos que é válida a condição $L_{ij} = L_{ji} \quad \forall \quad i, j$ nesta matriz. Assim mostraremos que a matriz é simétrica e, portanto, consiste de um *boost* de Lorentz. Aqui e no cálculo dos próximos elementos utilizamos, em alguns passos, a substituição expressa na equação (2.35).

Com manipulações algébricas, mostramos que o termo L_{22} é

$$L_{22} = 1 + \frac{\gamma_y^2 \gamma_x^2 \beta_x^2}{\gamma_y \gamma_x + 1} \quad (3.16)$$

e para o termo L_{31} ,

$$L_{31} = -\gamma_y \beta_y. \quad (3.17)$$

Em seguida, vamos calcular o termo L_{23} .

$$\ell_{23} = -\gamma_y \text{sen} \Omega = -\gamma_y \left(-\frac{\gamma_y \gamma_x \beta_y \beta_x}{\gamma_y \gamma_x + 1} \right) = \frac{\gamma_y^2 \gamma_x \beta_y \beta_x}{\gamma_y \gamma_x + 1}. \quad (3.18)$$

De tal forma que o termo L_{32} , será

$$L_{32} = \frac{\gamma_y^2 \gamma_x \beta_y \beta_x}{\gamma_y \gamma_x + 1} \quad (3.19)$$

Por fim, o termo L_{33} será

$$L_{33} = \gamma_y \cos \theta = \gamma_y \left(\frac{\gamma_y + \gamma_x}{\gamma_y \gamma_x + 1} \right) = \frac{\gamma_y (\gamma_y + \gamma_x)}{\gamma_y \gamma_x + 1} \quad (3.20)$$

Substituindo-se, agora, as equações (3.15) a (3.20) na equação (3.8) ficamos com

$$L = \begin{bmatrix} \gamma_y \gamma_x & -\gamma_y \gamma_x \beta_x & -\gamma_y \beta_y & 0 \\ -\gamma_y \gamma_x \beta_x & 1 + \frac{\gamma_y^2 \gamma_x^2 \beta_x^2}{\gamma_y \gamma_x + 1} & \frac{\gamma_y^2 \gamma_x \beta_y \beta_x}{\gamma_y \gamma_x + 1} & 0 \\ -\gamma_y \beta_y & \frac{\gamma_y^2 \gamma_x \beta_y \beta_x}{\gamma_y \gamma_x + 1} & \frac{\gamma_y (\gamma_y + \gamma_x)}{\gamma_y \gamma_x + 1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

que uma vez comparada com a matriz de Lorentz arbitrária (1.12) nos leva a concluir que representa uma transformação de Lorentz ao longo de uma direção contida no plano xy , pois todos os termos que teriam β_z na matriz de Lorentz L são nulos. A matriz L obedece ao requisito da simetria para ser uma TL.

Conclui-se, pois, que dois *boosts* mutuamente perpendiculares, L_x e L_y , aplicados sucessivamente a um objeto equivale a uma rotação, $R(\Omega)$, no espaço de coordenadas, cujo ângulo pode ser obtido, por exemplo, por (3.9), seguida de um *boost* líquido, L , dado pela equação (3.21). Esta operação de rotação é conhecida como *Rotação de Wigner* e o ângulo assim obtido, que é ilustrado, por exemplo, na figura 3, é denominado *ângulo de Wigner* [36]. Devemos atentar-nos para que tal operação aparece em decorrência das simetrias impostas pelas Transformações de Lorentz e não possuem um análogo clássico que decorre das Transformações de Galileu. Trata-se, portanto, de um processo geométrico que ocorre no tecido do *espaçotempo*.

Comparando-se a equação (3.13) com a (2.36), a equação (3.14) com a (2.38) e a equação (3.9) com a (2.39) podemos concluir que o ângulo de Wigner, que é a rotação no espaço de coordenadas é igual ao ângulo entre as duas velocidades para as quais se realizou a composição. Na sequência vamos apresentar um argumento mais geral para mostrar que esses dois ângulos são iguais.

3.2 Composição de *Boosts* arbitrários

Continuamos a trabalhar com o formalismo das matrizes de *boost* da Teoria da Relatividade Especial. Especificamente nesta seção desenvolveremos a composição de velocidades para o caso geral por meio deste formalismo e compararemos com os resultados obtidos na seção 2.2.3, na qual o problema da composição de velocidades foi abordado com base em argumentos heurísticos de dilatação do tempo e contração de comprimento. Com isto feito, vamos mostrar que o ângulo entre as duas velocidades compostas em ordem diferentes \vec{v}_{21} e \vec{v}_{12} são iguais ao ângulo de Wigner confirmando, deste modo, os resultados obtidos na seção 3.1.

Como foi mostrado na seção anterior, qualquer transformação de Lorentz, L , pode ser decomposto em um *boost* seguido de uma rotação no espaço de coordenadas,

$$L = RB \quad (3.22)$$

Além disso, rotações tem a forma dada por (3.5), que pode ser escrita como

$$R = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R_3 \end{array} \right] \quad (3.23)$$

na qual R_3 é uma matriz de rotação no espaço tridimensional. Estamos lidando com o problema mais geral possível. Aqui não é necessário conhecer a forma da matriz de rotação no espaço 3D, muito embora ela pode ser facilmente encontrada na literatura. [16]

Na situação mais geral possível, em que um *boost* arbitrário é feito de um referencial S para um referencial S^0 , entre os quais a velocidade relativa é \vec{v} , a matriz Λ de *boost* que faz a transformação de coordenadas de S para S^0 , é a matriz (1.12) que pode ser reescrita em forma particionada como

$$B = \left[\begin{array}{c|c} \gamma & -\gamma\beta^T \\ \hline -\gamma\beta & \mathbb{I} + (\gamma - 1)\frac{\beta_i\beta_j}{\beta^2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \gamma & -\gamma\beta^T \\ \hline -\gamma\beta & P_\beta + \gamma Q_\beta \end{array} \right] \quad (3.24)$$

aqui $\beta = (\beta_x, \beta_y, \beta_z)^T$, $[P_\beta]_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\beta_i\beta_j}{\beta^2} = \delta_{ij} - \frac{v_iv_j}{v^2}$ e $Q_\beta = \mathbb{I} - P_\beta = \frac{\beta_i\beta_j}{\beta^2}$. Aqui P_β representa a projeção sobre o plano perpendicular a \vec{v} e Q_β representa a projeção sobre o plano paralelo a \vec{v} . Como em todos os pontos até aqui, $\beta_i = \frac{v_i}{c}$. \mathbb{I} representa a matriz

identidade 3×3 . Substituindo-se (3.23) e (3.24) em (3.22), temos

$$\begin{aligned} L &= \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R_3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \gamma & -\gamma\beta^T \\ \hline -\gamma\beta & P_\beta + \gamma Q_\beta \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \gamma & -\gamma\beta^T \\ \hline -\gamma R_3\beta & R_3(P_\beta + \gamma Q_\beta) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

Podemos, finalmente, considerar o caso geral, em que as duas velocidades envolvidas na composição têm direções quaisquer, conforme na figura 3.1 que é uma reprodução da figura 2.6.

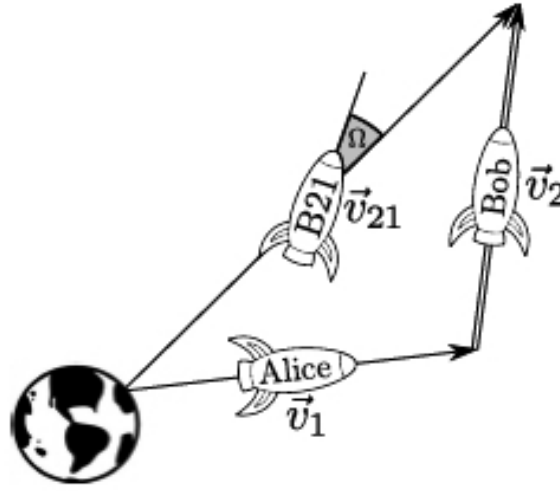


Figura 10 – Composição de velocidades em direções quaisquer. Adaptada de [25]

Agora vamos calcular como a transformação de Lorentz líquida, L_{21} é para esta situação, passando do referencial S para o referencial S^0 , realizando a composição dos dois *boosts* associados. Utilizaremos, para isto, a equação (3.24).

$$\begin{aligned} L &= B_2 B_1 = \left[\begin{array}{c|c} \gamma_2 & -\gamma_2\beta_2^T \\ \hline -\gamma_2\beta_2 & P_2 + \gamma_2 Q_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \gamma_1 & -\gamma_1\beta_1^T \\ \hline -\gamma_1\beta_1 & P_1 + \gamma_1 Q_1 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \gamma_2\gamma_1(1 + \beta_2^T\beta_1) & -\gamma_2\gamma_1\beta_1^T - \gamma_2\beta_2^T(P_1 + \gamma_1 Q_1) \\ \hline -\gamma_2\gamma_1\beta_2 - \gamma_1(P_2 + \gamma_2 Q_2)\beta_1 & (P_2 + \gamma_2 Q_2)(P_1 + \gamma_1 Q_1) + \gamma_2\gamma_1\beta_2\beta_1^T \end{array} \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

Agora vamos utilizar (3.25) e (3.26) para decompor essa transformação de Lorentz em uma rotação seguida de um *boost*, ou seja,

$$L_{21} = RB_{21} = RB_2 B_1. \quad (3.27)$$

Assim,

$$\left[\begin{array}{c|c} \gamma_{21} & -\gamma_{21}\beta_{21}^T \\ \hline -\gamma_{21}R_3\beta_{21} & R_3(P_{21} + \gamma_{21}Q_{21}) \end{array} \right] = \quad (3.28)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \gamma_2\gamma_1(1 + \beta_2\beta_1) & -\gamma_2\gamma_1\beta_1^T - \gamma_2\beta_2^T(P_1 + \gamma_1Q_1) \\ \hline -\gamma_2\gamma_1\beta_2 - \gamma_1(P_2 + \gamma_2Q_2)\beta_1 & (P_2 + \gamma_2Q_2)(P_1 + \gamma_1Q_1) + \gamma_2\gamma_1\beta_2\beta_1^T \end{array} \right].$$

Sejam 0, 1, 2, ... os números que representam linhas e colunas de uma matriz. Deste modo, comparando os termos 00 nos dois lados da equação (3.28), temos

$$\gamma_{21} = \gamma_2\gamma_1(1 + \beta_2\beta_1) = \gamma_2\gamma_1 \left(1 + \frac{v_2 v_1}{c c} \right)$$

de modo que

$$\gamma_{21} = \gamma_2\gamma_1 \left(1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2} \right) = \gamma_{12} \quad (3.29)$$

pois o produto escalar é comutativo. A equação (3.29) equivale à equação (2.44). Prosseguindo, vamos avaliar os termos 0j de (3.28). Fazendo isso, temos

$$-\gamma_{21}\beta_{21}^T = -\gamma_2\gamma_1\beta_1^T - \gamma_2\beta_2^T(P_1 + \gamma_1Q_1) \quad \therefore \quad -\gamma_{21}\frac{\vec{v}_{21}^T}{\not\ell} = -\gamma_2\gamma_1\frac{\vec{v}_1^T}{\not\ell} - \gamma_2\frac{\vec{v}_2^T}{\not\ell}(P_1 + \gamma_1Q_1)$$

$$\gamma_{21}\vec{v}_{21}^T = \gamma_2\gamma_1v_1^T\mathbf{i} + \gamma_2\vec{v}_2^T(P_1 + \gamma_1Q_1)$$

Portanto

$$\vec{v}_{21}^T = \frac{\gamma_2\gamma_1v_1^T\mathbf{i} + \gamma_2\vec{v}_2^T(P_1 + \gamma_1Q_1)}{\gamma_{21}} = \frac{v_1^T\mathbf{i} + \gamma_1^{-1}\vec{v}_2^T P_1 + \vec{v}_2^T Q_1}{\frac{\gamma_{21}}{\gamma_1\gamma_2}}$$

mas, por (3.29) $\frac{\gamma_{21}}{\gamma_2\gamma_1} = 1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}$ e

$$\gamma_1^{-1}P_1\vec{v}_2 = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}v_{2\perp 1}\mathbf{j} \quad \text{e} \quad Q_1\vec{v}_2 = v_{2\parallel 1}\mathbf{i}$$

de tal maneira que

$$\vec{v}_{21} = \frac{v_1 + v_{2\parallel 1}}{1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}v_{2\perp 1}}{1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}}\mathbf{j} = \frac{\vec{v}_2 + \gamma_1\vec{v}_1 + (\gamma_1 - 1)(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)\frac{\vec{v}_1}{v_1^2}}{\gamma_1 \left(1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2} \right)} \quad (3.30)$$

resultado que coincide com a equação (2.45), o que indica a validade dos argumentos baseados em dilatação de tempo e contração de comprimento que foram utilizados na obtenção desta expressão no capítulo 2. Com um argumento totalmente idêntico podemos obter uma expressão para \vec{v}_{12} , que será idêntica à equação (2.46):

$$\vec{v}_{12} = \frac{v_2 + v_{1\parallel 2}}{1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}v_{1\perp 2}}{1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}}\mathbf{j} = \frac{\vec{v}_1 + \gamma_2\vec{v}_2 + (\gamma_2 - 1)(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)\frac{\vec{v}_2}{v_2^2}}{\gamma_2 \left(1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2} \right)} \quad (3.31)$$

Para interpretar geometricamente a rotação de Wigner vimos que pode-se definir uma matriz de rotação R e um *boost* puro B_{21} tais que

$$B_2 B_1 = R B_{21} \quad (3.32)$$

mas como as matrizes B_1 e B_2 são simétricas e utilizando-se (3.32),

$$B_1 B_2 = B_1^T B_2^T = (B_2 B_1)^T = (R B_{21})^T = B_{21}^T R^T$$

Como visto nas equações (3.5) e (3.6), o fato de o determinante da matriz de rotação ser unitário implica que $R^T = R^{-1}$ e como já sabemos a matriz B_{21} é simétrica. Assim,

$$B_1 B_2 = B_{21}^T R^T = B_{21} R^{-1} = R^{-1} (R B_{21} R^{-1})$$

para que o termo entre parênteses na equação acima seja um *boost* puro, é necessário que ele represente uma matriz simétrica e, com isso,

$$(R B_{21} R^{-1})^T = R B_{21} R^{-1}.$$

De (3.32) esperamos que

$$B_1 B_2 = R^{-1} B_{12}. \quad (3.33)$$

Portanto definimos

$$B_{12} \equiv R B_{21} R^{-1}. \quad (3.34)$$

As equações (3.32) e (3.33) nos mostram que enquanto a Terra mede Bob se movendo com velocidade \vec{v}_{21} , ela o enxergará rodado de Ω , que é o ângulo geométrico associado à rotação R . Do mesmo modo, no caso simétrico, se a Terra mede Bob se movendo com velocidade \vec{v}_{12} , ela verá o seu referencial girado de $-\Omega$ que é o ângulo associado à rotação R^{-1} .

Para relacionarmos os ângulos entre as velocidades \vec{v}_{21} e \vec{v}_{12} , vamos considerar (3.22) e (3.23). Então o ângulo de Wigner é justamente o ângulo envolvido na rotação R , que é uma rotação tridimensional, R_3 , no espaço de coordenadas. Tomando o produto, termo a termo, entre as equações (2.46) e (3.29), temos

$$\gamma_{21} \vec{v}_{12} = \gamma_2 \gamma_1 \vec{v}_2 + \gamma_1 (P_2 + \gamma_2 Q_2) \vec{v}_1. \quad (3.35)$$

já que

$$v_{1\parallel 2} \mathbf{j} = Q_2 \vec{v}_1 \quad \text{Projeção de } \vec{v}_1 \text{ na direção paralela a } \vec{v}_2.$$

e

$$v_{1\perp 2} \mathbf{i} = P_2 \vec{v}_1 \quad \text{Projeção de } \vec{v}_1 \text{ na direção perpendicular a } \vec{v}_2.$$

Agora vamos comparar os termos $i0$ na matriz da equação (3.26):

$$\gamma_{21} R_3 \vec{v}_{21} = \gamma_2 \gamma_1 \vec{v}_2 + \gamma_1 (P_2 + \gamma_2 Q_2) \vec{v}_1. \quad (3.36)$$

Da comparação direta entre as equações (3.35) e (3.36), conclui-se que

$$\cancel{\gamma_{21}} R_3 \vec{v}_{21} = \cancel{\gamma_{21}} \vec{v}_{12}$$

que nos fornece

$$R_3 \vec{v}_{21} = \vec{v}_{12} \quad (3.37)$$

Este resultado mostra que \vec{v}_{12} é obtida aplicando-se a Rotação R (que roda um vetor de um ângulo Ω) sobre \vec{v}_{21} . Assim o ângulo entre \vec{v}_{21} e \vec{v}_{12} é justamente o ângulo de Wigner.

Já podíamos esperar estes resultados, pois as matrizes que representam boosts são hermitianas, enquanto que matrizes de rotação são unitárias; já o produto de duas matrizes hermitianas não é outra matriz hermitiana, mas o produto de uma matriz unitária e uma matriz hermitiana.

4 Cálculo do Ângulo de Wigner

Neste capítulo apresentaremos dois métodos para determinar o ângulo de Wigner, que aparece como consequência da Teoria da Relatividade Especial e que foram introduzidos nos capítulos precedentes. Já sabemos que este ângulo é igual àquele que aparece entre a composição $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ e $\vec{v}_2 + \vec{v}_1$ de duas velocidades \vec{v}_1 e \vec{v}_2 não colineares. Utilizaremos o espaço hiperbólico para determinar este ângulo no primeiro método. Em seguida, obteremos os mesmos resultados introduzindo uma generalização no plano complexo para a Lei de Adição de Velocidades de Einstein para velocidades paralelas.

Vamos, como sempre, obter os resultados calculando velocidades a partir de coordenadas relacionadas por uma transformação de Lorentz. Lembrando que

$$\gamma_i = \left(1 - \frac{v_i^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.1)$$

é o fator de Lorentz associado à velocidade \vec{v}_i , o resultado \vec{v}_{21} da adição de duas velocidades não-colineares, \vec{v}_1 e \vec{v}_2 pode ser escrito na forma

$$\vec{v}_{21} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}} - \frac{1}{c^2} \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} \frac{\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_1)}{1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}}. \quad (4.2)$$

Para verificar isto, começaremos desenvolvendo o produto vetorial triplo na equação (4.2). Realizaremos esta tarefa utilizando a fórmula de Lagrange, que é uma relação vetorial para o desenvolvimento deste produto triplo:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). \quad (4.3)$$

Deste modo temos

$$\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_1) = \vec{v}_2(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1) - \vec{v}_1(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) = v_1^2 \vec{v}_2 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \vec{v}_1 \quad (4.4)$$

que, uma vez substituída em (4.2) nos dá

$$\vec{v}_{21} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}} - \frac{1}{c^2} \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} \frac{v_1^2 \vec{v}_2 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \vec{v}_1}{1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}}.$$

que depois de ter numerador e denominador multiplicados por γ_1 pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \vec{v}_{21} &= \frac{\gamma_1 \vec{v}_1 + \gamma_1 \vec{v}_2 - \frac{1}{c^2} \frac{\gamma_1^2}{\gamma_1 + 1} [v_1^2 \vec{v}_2 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \vec{v}_1]}{\gamma_1 \left(1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)} \\ &= \frac{\gamma_1 \vec{v}_1 + \gamma_1 \vec{v}_2 - \frac{v_1^2}{c^2} \frac{\gamma_1^2}{\gamma_1 + 1} \vec{v}_2 + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma_1^2}{\gamma_1 + 1} (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \vec{v}_1}{\gamma_1 \left(1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)} \\ &= \frac{\gamma_1 \vec{v}_1 + \gamma_1 \vec{v}_2 - \frac{\beta_1^2 \gamma_1^2}{\gamma_1 + 1} \vec{v}_2 + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma_1^2}{\gamma_1 + 1} (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \vec{v}_1}{\gamma_1 \left(1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

pois $\frac{v_1}{c} = \beta_1$. Mas,

$$\gamma_1^2 = \frac{1}{1 - \beta_1^2} \quad \therefore \quad \beta_1^2 \gamma_1^2 = \gamma_1^2 - 1 = (\gamma_1 + 1)(\gamma_1 - 1) \quad (4.6)$$

e

$$\beta_1^2 \gamma_1^2 = \gamma_1^2 - 1 \quad \therefore \quad \gamma_1^2 = \frac{\gamma_1^2 - 1}{\beta_1^2} \quad (4.7)$$

além disso,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\gamma_1^2}{\gamma_1 + 1} = \frac{1}{c^2} \frac{\gamma_1^2 - 1}{\beta_1^2} \frac{1}{\gamma_1 + 1} = \frac{1}{c^2} \frac{(\cancel{\gamma_1 + 1})(\gamma_1 - 1)}{\cancel{\beta_1^2}(\gamma_1 + 1)} = \frac{\gamma_1 - 1}{v_1^2}. \quad (4.8)$$

Substituindo (4.6) a (4.8) em (4.5), chegamos a

$$\begin{aligned} \vec{v}_{21} &= \frac{\gamma_1 \vec{v}_1 + \gamma_1 \vec{v}_2 - \frac{(\cancel{\gamma_1 + 1})(\gamma_1 - 1)}{\cancel{\gamma_1 + 1}} \vec{v}_2 + (\gamma_1 - 1)(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \frac{\vec{v}_1}{v_1^2}}{\gamma_1 \left(1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)} \\ &= \frac{\gamma_1 \vec{v}_1 + \cancel{\gamma_1 \vec{v}_2} - \cancel{\gamma_1 \vec{v}_2} + \vec{v}_2 + (\gamma_1 - 1)(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \frac{\vec{v}_1}{v_1^2}}{\gamma_1 \left(1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)} \\ &= \frac{\vec{v}_2 + \gamma_1 \vec{v}_1 + (\gamma_1 - 1)(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \frac{\vec{v}_1}{v_1^2}}{\gamma_1 \left(1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

que reproduz a expressão (3.30). Neste capítulo obteremos resultados para a composição de velocidades na forma da equação (4.2) que, com o resultado (4.9) poderemos dizer que é o mesmo resultado da composição realizada pelos métodos já apresentados. É claro que o módulo da velocidade combinada dada por (4.2) é facilmente obtida pela definição do produto escalar,

$$|\vec{v}_{21}|^2 = v_{21}^2 = \vec{v}_{21} \cdot \vec{v}_{21} = \left[\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \xi \vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_1)}{1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}} \right] \cdot \left[\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \xi \vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_1)}{1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}} \right] \quad (4.10)$$

onde

$$\xi \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} \quad (4.11)$$

que resulta em

$$v_{21}^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \theta - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^2} \sin^2 \theta}{\left(1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)^2} \quad (4.12)$$

De modo totalmente idêntico, quando todas as manipulações algébricas acima são repetidas para se obter \vec{v}_{12} , resultado da adição simétrica das velocidades, teremos

$$\vec{v}_{12} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}} - \frac{1}{c^2} \frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1} \frac{\vec{v}_2 \times (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)}{1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}}. \quad (4.13)$$

4.1 Obtenção do Ângulo de Wigner pela Utilização de Geometria Hiperbólica

Neste tópico vamos utilizar o espaço de Lobachevsky para obter o ângulo de Wigner e outros resultados, tal como o módulo da velocidade combinada $|\vec{v}_{21}|$. De acordo com Fock [15], o elemento de linha no espaço de rapidez obedece a geometria não euclidiana de Lobachevsky¹, Bolyai² e Gauss³. Vamos obter resultados de interesse pelo cálculo de lados e ângulos de um triângulo hiperbólico. Para tanto, sabendo-se que serão compostas as velocidades \vec{v}_1 e \vec{v}_2 para obter a velocidade \vec{v}_{21} , vamos começar introduzindo uma notação que utilizaremos a partir de agora. Vamos definir A , B e C como

$$A = \ln \left[\frac{1 + (v_1/c)}{1 - (v_1/c)} \right]^{1/2} \quad B = \ln \left[\frac{1 + (v_2/c)}{1 - (v_2/c)} \right]^{1/2} \quad C = \ln \left[\frac{1 + (v_{12}/c)}{1 - (v_{12}/c)} \right]^{1/2} \quad (4.14)$$

Com esta definição temos

$$\sinh A = \frac{e^A - e^{-A}}{2} = \frac{\exp \left[\ln \left(\frac{1+(v_1/c)}{1-(v_1/c)} \right)^{1/2} \right] - \exp \left[- \ln \left(\frac{1+(v_1/c)}{1-(v_1/c)} \right)^{1/2} \right]}{2}$$

então

$$\sinh A = \beta_1 \gamma_1 \quad (4.15)$$

Repetindo os mesmos cálculos para $\sinh B$ e $\sinh C$, encontramos resultados tais que todos podem ser assim expresso

$$\sinh A = \beta_1 \gamma_1 \quad \sinh B = \beta_2 \gamma_2 \quad \sinh C = \beta_{12} \gamma_{12}. \quad (4.16)$$

Da mesma forma, podemos calcular os cossenos hiperbólicos:

$$\cosh A = \frac{e^A + e^{-A}}{2} = \frac{\exp \left[\ln \left(\frac{1+(v_1/c)}{1-(v_1/c)} \right)^{1/2} \right] + \exp \left[- \ln \left(\frac{1+(v_1/c)}{1-(v_1/c)} \right)^{1/2} \right]}{2}$$

de onde,

$$\cosh A = \gamma_1 \quad (4.17)$$

Estes mesmos cálculos feitos para $\cosh B$ e $\cosh C$ nos conduz a

$$\cosh A = \gamma_1 \quad \cosh B = \gamma_2 \quad \cosh C = \gamma_{12}. \quad (4.18)$$

¹ Nicolas Ivonovich Lobachevsky (1793-1856): Matemático Russo que revolucionou a geometria pelo tratamento que deu à negação do quinto postulado de Euclides, desenvolvendo a geometria hiperbólica.

² Janos Bolyai (1802-1860): Matemático húngaro que, assim com Lobachevsky, negou o quinto postulado e desenvolveu a "Ciência Absoluta do Espaço".

³ Carl Fridrich Gauss (1777 - 1855): Matemático alemão que foi um dos primeiros a visualizar uma Geometria independente do "Quinto Postulado" e a desenvolver uma série de resultados da Geometria Hiperbólica, reconhecendo assim uma geometria diferente da euclidiana.

Com as equações (4.16) e (4.18) podemos calcular as tangentes hiperbólicas. Por exemplo

$$\tanh A = \frac{\sinh A}{\cosh A} = \frac{\beta_1 \gamma_1}{\gamma_1} = \beta_1.$$

Fazendo o mesmo para $\tanh B$ e $\tanh C$, obtemos

$$\tanh A = \frac{v_1}{c} = \beta_1 \quad \tanh B = \frac{v_2}{c} = \beta_2 \quad \tanh C = \frac{v_{12}}{c} = \beta_{12}. \quad (4.19)$$

4.1.1 Determinação do Módulo de \vec{v}_{21}

Sejam A , B e C lados de um triângulo hiperbólico. Assim a *lei dos cossenos* para o triângulo hiperbólico relaciona os cossenos hiperbólicos de seus lados e é tal que

$$\cosh C = \cosh A \cosh B - \sinh A \sinh B \cos \phi \quad (4.20)$$

em que ϕ é o ângulo entre os lados A e B do triângulo. Para obter o módulo da velocidade resultante, $|\vec{v}_{21}| \equiv v_{21}$, devemos determinar o lado C do triângulo hiperbólico uma vez conhecidos os outros dois lados, A e B , e o ângulo ϕ entre eles. Aplicando-se (4.1), (4.16) e (4.18) em (4.20), obtemos

$$\gamma_{21} = \gamma_1 \gamma_2 - \beta_1 \gamma_1 \beta_2 \gamma_2 \cos \phi = \gamma_1 \gamma_2 (1 - \beta_1 \beta_2 \cos \phi) \quad (4.21)$$

sendo $\phi = \pi - \theta$,

$$\cos \phi = \cos(\pi - \theta) = \cos \pi \cos \theta + \cancel{\sin \pi} \sin \theta = -\cos \theta$$

De onde temos

$$-\cos \phi = \cos \theta. \quad (4.22)$$

utilizando, agora, (4.19) e (4.22) chegamos a

$$\gamma_{21} = \gamma_1 \gamma_2 \left(1 - \frac{v_1 v_2}{c^2} \cos \phi\right) = \gamma_1 \gamma_2 \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \cos \theta\right) \quad (4.23)$$

Aplicando-se (4.1) em (4.23),

$$\left(1 - \frac{v_{21}^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \cos \theta\right)$$

portanto,

$$1 - \frac{v_{21}^2}{c^2} = \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right) \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \cos \theta\right)^{-2} \quad (4.24)$$

mas

$$1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \cos \theta = 1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2} \quad (4.25)$$

e

$$\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right) = 1 - \frac{v_1^2}{c^2} - \frac{v_2^2}{c^2} + \frac{v_1^2 v_2^2}{c^4} \quad (4.26)$$

substituímos, então, (4.25) e (4.26) em (4.24) e chegamos a

$$1 - \frac{v_{21}^2}{c^2} = \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2} - \frac{v_2^2}{c^2} + \frac{v_1^2 v_2^2}{c^4}\right) \left(1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)^{-2}.$$

Prosseguindo,

$$\frac{v_{21}}{c^2} = 1 - \frac{1 - \frac{v_1^2}{c^2} - \frac{v_2^2}{c^2} + \frac{v_1^2 v_2^2}{c^4}}{\left(1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)^2} = \frac{\left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \cos \theta\right)^2 - \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2} - \frac{v_2^2}{c^2} + \frac{v_1^2 v_2^2}{c^4}\right)}{\left(1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)^2}$$

$$\frac{v_{21}}{c^2} = \frac{\cancel{1} + 2\frac{v_1 v_2}{c^2} \cos \theta + \frac{v_1^2 v_2^2}{c^4} \cos^2 \theta - \cancel{1} + \frac{v_1^2}{c^2} + \frac{v_2^2}{c^2} - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^4}}{\left(1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)^2}$$

$$v_{21}^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \theta + \frac{v_1^2 v_2^2}{c^2} (\cos^2 \theta - 1)}{\left(1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)^2}$$

de onde finalmente obtém-se o módulo de \vec{v}_{21} :

$$v_{21}^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \theta - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^2} \sin^2 \theta}{\left(1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2}\right)^2}. \quad (4.27)$$

A equação (4.27) é idêntica à (4.12). Obtivemos, pois, o resultado já esperado para o módulo da velocidade resultante da composição utilizando o espaço hiperbólico de Lobachevsky, o que valida este método e nos permite utilizá-lo para buscar outras grandezas de interesse.

4.1.2 Cálculo do Ângulo α entre \vec{v}_{21} e \vec{v}_1

As velocidades \vec{v}_{21} e \vec{v}_1 são identificadas como os lados C e A do triângulo hiperbólico, entre os quais há um ângulo α (Figura 4.1). Deste modo, utilizamos uma versão de (4.20) aplicada a $\cosh B$ e em seguida utilizamos (4.16) e (4.18).

$$\cosh B = \cosh A \cosh C - \sinh A \sinh C \cos \alpha$$

de tal modo que

$$\cos \alpha = \frac{\cosh A \cosh C - \cosh B}{\sinh A \sinh C} = \frac{\gamma_1 \gamma_{21} - \gamma_2}{\beta_1 \gamma_1 \beta_{21} \gamma_{21}} = \frac{\gamma_{21} \gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_{21} \gamma_1 \beta_{21} \beta_1}. \quad (4.28)$$

Lembrando-se de (4.7), que nos diz que

$$\gamma^2 - 1 = \beta^2 \gamma^2,$$

verificando que

$$\gamma_1^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}\right)^2 = \frac{1}{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} = \frac{c^2}{c^2 - v_1^2} \quad \therefore \quad \frac{\gamma_1^2}{c^2} = \frac{1}{c^2 - v_1^2}. \quad (4.29)$$

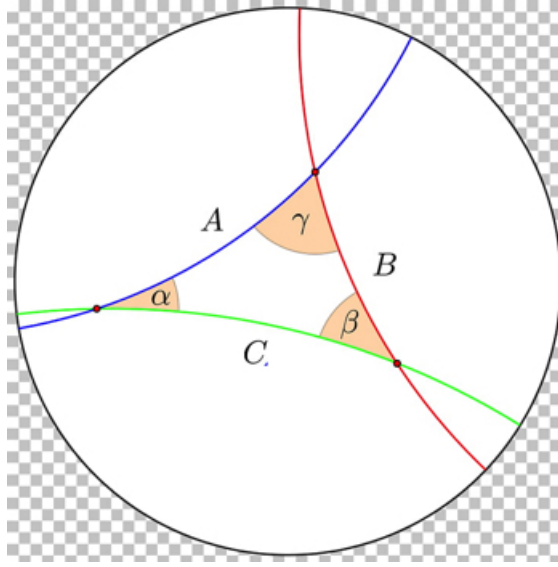


Figura 11 – Triângulo Hiperbólico de Velocidades

e multiplicando os dois lados de (4.23) por γ_1 ,

$$\gamma_1 \gamma_{21} = \gamma_1^2 \gamma_2 \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \cos \theta \right). \quad (4.30)$$

Agora vamos substituir (4.7), (4.29) e (4.30) em (4.28),

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\gamma_1^2 \gamma_2 \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \cos \theta \right) - \gamma_2}{\gamma_1^2 \gamma_2 \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \cos \theta \right) \frac{v_{21}}{c} \frac{v_1}{c}} = \frac{\cancel{\gamma_2} \left[\gamma_1^2 \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \cos \theta \right) - 1 \right]}{\gamma_1^2 \cancel{\gamma_2} \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \cos \theta \right) \frac{v_{21} v_1}{c^2}} \\ &= \frac{\gamma_1^2 \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \cos \theta \right) - 1}{v_{21} v_1 \frac{\gamma_1^2}{c^2} \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \cos \theta \right)} = \frac{\frac{c^2}{c^2 - v_1^2} \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \cos \theta \right) - 1}{v_{21} v_1 \frac{1}{c^2 - v_1^2} \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \cos \theta \right)} \\ &= \frac{c^2 \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \cos \theta \right) - c^2 - v_1^2}{\cancel{c^2} \cancel{u^2}} \cdot \frac{\cancel{c^2} \cancel{u^2}}{v_{21} v_1 \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \cos \theta \right)} \\ &= \frac{\cancel{c^2} + v_1 v_2 \cos \theta - \cancel{c^2} + v_1^2}{v_{21} v_1 \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \cos \theta \right)} = \frac{\cancel{v_1} (v_1 + v_2 \cos \theta)}{v_{21} \cancel{v_1} \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \cos \theta \right)} \end{aligned}$$

finalmente,

$$\cos \alpha = \frac{v_1 + v_2 \cos \theta}{v_{21} \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \cos \theta \right)} \quad (4.31)$$

4.1.3 Cálculo do Ângulo de Wigner

Da geometria hiperbólica sabemos que, sendo α , η e ξ os três ângulos internos do triângulo, o defeito angular δ é definido da seguinte maneira: (ver apêndice B)

$$\alpha + \eta + \xi + \delta = \pi$$

de tal modo que

$$\delta = \pi - (\alpha + \eta + \xi) \quad (4.32)$$

desta forma

$$\begin{aligned} \text{sen} \delta &= \text{sen}[\pi - (\alpha + \eta + \xi)] \\ &= \cancel{\text{sen} \pi} \overset{0}{\text{cos}}(\alpha + \eta + \xi) - \text{sen}(\alpha + \eta + \xi) \overset{-1}{\text{cos} \pi} = \text{sen}(\alpha + \eta + \xi) \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned} \text{sen} \delta &= \text{sen}[\alpha + (\eta + \xi)] = \text{sen} \alpha \text{cos}(\eta + \xi) + \text{sen}(\eta + \xi) \text{cos} \alpha \\ &= \text{sen} \alpha [\text{cos} \eta \text{cos} \xi - \text{sen} \eta \text{sen} \xi] + \text{cos} \alpha [\text{sen} \eta \text{cos} \xi + \text{sen} \xi \text{cos} \eta] \end{aligned}$$

que resulta em

$$\begin{aligned} \text{sen} \delta &= \text{sen} \alpha \text{cos} \eta \text{cos} \xi - \text{sen} \alpha \text{sen} \eta \text{sen} \xi + \\ &+ \text{cos} \alpha \text{sen} \eta \text{cos} \xi + \text{cos} \alpha \text{cos} \eta \text{sen} \xi \end{aligned} \quad (4.33)$$

Considerando, ainda, a equação (4.20), que é a *lei dos cossenos* da geometria hiperbólica, pode ser reescrita na forma

$$\text{cos} \phi = \frac{\text{cosh} A \text{cosh} B - \text{cosh} C}{\text{senh} A \text{senh} B} \quad (4.34)$$

e a *lei dos senos* da geometria hiperbólica é

$$\frac{\text{senh} A}{\text{sen} \eta} = \frac{\text{senh} B}{\text{sen} \alpha} = \frac{\text{senh} C}{\text{sen} \phi}. \quad (4.35)$$

Podemos obter, trabalhando com (4.33) a (4.35), realizando simplificações,

$$\text{sen} \delta = \frac{\text{sen} \theta (\text{cosh} A - 1)^{1/2} (\text{cosh} B - 1)^{1/2} (\text{cosh} A + 1)^{1/2} (\text{cosh} B + 1)^{1/2} + (\text{cosh} A - 1)^{1/2} (\text{cosh} B - 1)^{1/2} \text{cos} \theta}{\text{cosh} A \text{cosh} B + \text{senh} A \text{senh} B \text{cos} \theta + 1} \quad (4.36)$$

Nota-se, ainda que

$$\begin{aligned} 2(\text{cosh} A \text{cosh} B + 1) &= (\text{cosh} A + 1)(\text{cosh} B + 1) + (\text{cosh} A - 1)(\text{cosh} B - 1) \\ &= (\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1) + (\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1) \end{aligned} \quad (4.37)$$

e, utilizando-se (4.7), chegamos a

$$\begin{aligned} \text{senh} A \text{senh} B &= \beta_1 \gamma_1 \beta_2 \gamma_2 = (\beta_1 \gamma_1)(\beta_2 \gamma_2) = (\gamma_1^2 - 1)^{1/2} (\gamma_2^2 - 1)^{1/2} \\ &= (\gamma_1 - 1)^{1/2} (\gamma_1 + 1)^{1/2} (\gamma_2 - 1)^{1/2} (\gamma_2 + 1)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Substituindo-se (4.16), (4.18), (4.37) e (4.38) em (4.36), obtemos

$$\text{sen} \delta = \frac{\text{sen} \theta (\gamma_1 - 1)^{1/2} (\gamma_2 - 1)^{1/2} [(\gamma_1 + 1)^{1/2} (\gamma_2 + 1)^{1/2} + (\gamma_1 - 1)^{1/2} (\gamma_2 - 1)^{1/2} \text{cos} \theta]}{(\gamma_1 \gamma_2 + 1) + (\beta_1 \gamma_1 \beta_2 \gamma_2 \text{cos} \theta)}. \quad (4.39)$$

Utilizando (4.7), o fato de que

$$(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1) = (\gamma_1 + 1)^{1/2}(\gamma_2 + 1)^{1/2}(\gamma_1 + 1)^{1/2}(\gamma_2 + 1)^{1/2} \quad (4.40)$$

e dividindo numerador e denominador de (4.39) por $(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)$, chega-se a

$$\text{sen } \delta = \frac{\text{sen } \theta \left[\left(\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1} \right)^{1/2} \left(\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 + 1} \right)^{1/2} \right] \left[\left(\frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 + 1} \right)^{1/2} \left(\frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 + 1} \right)^{1/2} + \left(\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1} \right)^{1/2} \left(\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 + 1} \right)^{1/2} \cos \theta \right]}{\frac{1}{2} \left[\frac{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1) + (\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)} \right] + \left[\frac{(\gamma_1 - 1)^{1/2}(\gamma_1 + 1)^{1/2}(\gamma_2 - 1)^{1/2}(\gamma_2 + 1)^{1/2}}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)} \right] \cos \theta}$$

Portanto,

$$\text{sen } \delta = \frac{2 \text{sen } \theta \left[\left(\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1} \right)^{1/2} \left(\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 + 1} \right)^{1/2} \right] \left[\left(\frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 + 1} \right)^{1/2} \left(\frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 + 1} \right)^{1/2} + \left(\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1} \right)^{1/2} \left(\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 + 1} \right)^{1/2} \cos \theta \right]}{\left[\frac{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1) + (\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)} \right] + \left[\left(\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1} \right)^{1/2} \left(\frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 + 1} \right)^{1/2} \left(\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 + 1} \right)^{1/2} \left(\frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 + 1} \right)^{1/2} \right] \cos \theta}$$

e, definindo K' como

$$K' \equiv \left(\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1} \right)^{1/2} \left(\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 + 1} \right)^{1/2} \quad (4.41)$$

obtemos,

$$\text{sen } \delta = \frac{2 \text{sen } \theta K' [1 + K' \cos \theta]}{1 + K'^2 + 2K' \cos \theta}$$

mas,

$$\begin{aligned} 1 + K'^2 + 2K' \cos \theta &= 1 + K'^2(\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta) + 2K' \cos \theta \\ &= (1 + 2K' \cos \theta + K'^2 \cos^2 \theta) + K'^2 \text{sen}^2 \theta \\ &= (1 + K' \cos \theta)^2 + K'^2 \text{sen}^2 \theta \end{aligned}$$

de onde finalmente obtemos o ângulo de Wigner,

$$\text{sen } \delta = \frac{2(1 + K' \cos \theta)K' \text{sen } \theta}{(1 + K' \cos \theta)^2 + K'^2 \text{sen}^2 \theta}. \quad (4.42)$$

4.2 Composição de Velocidades no Plano Complexo

4.2.1 Lei de Adição de Velocidades Generalizada

Neste tópico vamos utilizar um método para calcular a composição relativística de velocidades não-colineares por meio da generalização da expressão de Einstein para composição de velocidades paralelas, equação (2.9), no plano complexo. Esta equação é

$$v_{12} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{v_{12}}{c} = \frac{\frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c}}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

na qual utilizaremos as equações (4.19) para obter

$$\tanh C = \frac{\tanh A + \tanh B}{1 + \tanh A \tanh B} \quad (4.43)$$

portanto,

$$\tanh C = \tanh(A + B) \quad \therefore \quad C = A + B \quad \therefore \quad \frac{C}{2} = \frac{A}{2} + \frac{B}{2}.$$

Então,

$$\tanh(C/2) = \frac{\tanh(A/2) + \tanh(B/2)}{1 + \tanh(A/2) \tanh(B/2)}. \quad (4.44)$$

Para generalizar essa lei de adição de velocidades paralelas para uma lei mais geral, que nos dá a adição de velocidades não colineares, vamos substituir cada velocidade por um número complexo na forma

$$V_1 = \tanh \frac{A}{2} e^{ia}. \quad (4.45)$$

Com essa mudança de variáveis, a tangente hiperbólica é igual ao módulo da velocidade \vec{v}_1 e a fase a relaciona-se ao ângulo que \vec{v}_1 faz com o eixo x do plano que contem as duas velocidades \vec{v}_1 e \vec{v}_2 . Deste modo, pode-se escrever o produto de dois boosts não colineares para o caso geral que inclui o ângulo entre as duas velocidades na diferença de fase, como

$$V_{21} = \frac{V_1 + V_2}{1 + V_1^* V_2} \quad (4.46)$$

em que V_1^* representa o complexo conjugado de V_1 . Aplicando equações na forma de (4.45) em (4.46), chega-se a

$$\tanh \frac{C}{2} e^{ic} = \frac{\tanh \left(\frac{A}{2} \right) e^{ia} + \tanh \left(\frac{B}{2} \right) e^{ib}}{1 + \tanh \left(\frac{A}{2} \right) e^{-ia} \tanh \left(\frac{B}{2} \right) e^{ib}} \quad (4.47)$$

4.2.2 Cálculo do Módulo de \vec{v}_{21}

Para calcular o módulo da velocidade \vec{v}_{21} em termos de \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , fazemos o produto de (4.47) com o seu complexo conjugado:

$$\tanh \frac{C}{2} e^{ic} \tanh \frac{C}{2} e^{-ic} = \frac{\tanh^2(A/2) e^{ia} + \tanh^2(B/2) e^{ib}}{1 + \tanh(A/2) e^{-ia} \tanh(B/2) e^{ib}} \cdot \frac{\tanh^2(A/2) e^{-ia} + \tanh^2(B/2) e^{-ib}}{1 + \tanh(A/2) e^{ia} \tanh(B/2) e^{-ib}}$$

de tal modo que

$$\begin{aligned} \tanh^2 \frac{C}{2} &= \frac{\tanh^2(A/2) + \tanh(A/2) \tanh(B/2) e^{i(a-b)} + \tanh(A/2) \tanh(B/2) e^{-i(a-b)} + \tanh^2(B/2)}{1 + \tanh(A/2) e^{ia} \tanh(B/2) e^{-ib} + \tanh(A/2) e^{-ia} \tanh(B/2) e^{ib} + \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2)} \\ &= \frac{\tanh^2(A/2) + \tanh(A/2) \tanh(B/2) [\cos(a-b) + i \operatorname{sen}(a-b)] + \cos(a-b) - i \operatorname{sen}(a-b) + \tanh^2(B/2)}{1 + \tanh(A/2) \tanh(B/2) [e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)}] + \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2)} \end{aligned}$$

mas, aplicando-se a identidade de Euler,

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi \quad (4.48)$$

temos

$$e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)} = \cos(a-b) + \cancel{i \operatorname{sen}(a-b)} + \cos(a-b) - \cancel{i \operatorname{sen}(a-b)} = 2 \cos(a-b)$$

e lembrando-se que a função cosseno é par e, por isso,

$$\cos(b-a) = \cos(a-b)$$

concluimos que

$$\begin{aligned} \tanh^2 \frac{C}{2} &= \frac{\tanh^2(A/2) + \tanh^2(B/2) + 2 \tanh(A/2) \tanh(B/2) \cos(a-b)}{1 + \tanh(A/2) \tanh(B/2) 2 \cos(a-b) + \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2)} \\ &= \frac{\tanh^2(A/2) + \tanh^2(B/2) + 2 \tanh(A/2) \tanh(B/2) \cos(b-a)}{1 + \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2) + 2 \tanh(A/2) \tanh(B/2) \cos(b-a)} \end{aligned} \quad (4.49)$$

De acordo com a definição em (4.45), o ângulo entre \vec{v}_1 e \vec{v}_2 é $\theta = b - a$. Além disso,

$$\frac{(e^{A/2} + e^{-A/2})(e^{A/2} + e^{-A/2})}{2} = \frac{e^A + 1 + 1 + e^{-A}}{2} = \frac{e^A + e^{-A}}{2} + 1 = \cosh A + 1$$

portanto,

$$\begin{aligned} 2 \frac{(e^{A/2} + e^{-A/2})(e^{A/2} + e^{-A/2})}{2 \cdot 2} &= \cosh A + 1 \\ 2 \cosh \frac{A}{2} \cosh \frac{A}{2} &= \cosh A + 1 \end{aligned}$$

que resulta em

$$\cosh^2 \frac{A}{2} = \frac{\gamma_1 + 1}{2}. \quad (4.50)$$

Da relação fundamental para funções hiperbólicas, temos

$$\tanh^2 \frac{A}{2} + \operatorname{sech}^2 \frac{A}{2} = 1 \quad \therefore \quad \tanh^2 \frac{A}{2} = 1 - \operatorname{sech}^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{1}{\cosh^2 \frac{A}{2}}$$

utilizando, agora, a expressão (4.50), chegamos a

$$\tanh^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{1}{\frac{\gamma_1 + 1}{2}} = 1 - \frac{2}{\gamma_1 + 1} = \frac{\gamma_1 + 1 - 2}{\gamma_1 + 1} = \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1}$$

assim chega-se a

$$\tanh \frac{A}{2} = \left(\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1} \right)^{1/2}. \quad (4.51)$$

Quando estes mesmos cálculos são repetidos para $\tanh \frac{B}{2}$ e $\tanh \frac{C}{2}$, obtém-se

$$\tanh \frac{B}{2} = \left(\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 + 1} \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad \tanh \frac{C}{2} = \left(\frac{\gamma_{21} - 1}{\gamma_{21} + 1} \right)^{1/2}. \quad (4.52)$$

Agora vamos substituir as equações (4.51) e (4.52) na equação (4.49). Para facilitar, devido ao tamanho da equação, vamos trabalhar separadamente com o numerador, N , e denominador D desta equação. Deste modo, comecemos com o numerador,

$$N \equiv \tanh^2(A/2) + \tanh^2(B/2) + 2 \tanh(A/2) \tanh(B/2) \cos(b-a) \quad (4.53)$$

o desenvolvimento dos dois primeiros termos, do segundo membro, de (4.53) nos dá, quando aplicamos (4.51) e (4.52),

$$\begin{aligned}
\tanh^2(A/2) + \tanh^2(B/2) &= \left(\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1} \right) + \left(\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 + 1} \right) \\
&= \frac{(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 + 1) + (\gamma_1 + 1)(\gamma_2 - 1)}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)} \\
&= \frac{\gamma_1\gamma_2 + \cancel{\gamma_1} - \cancel{\gamma_2} - 1 + \gamma_1\gamma_2 - \cancel{\gamma_1} + \cancel{\gamma_2} - 1}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)} \\
&= \frac{2(\gamma_1\gamma_2 - 1)}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)}. \tag{4.54}
\end{aligned}$$

Já o desenvolvimento do terceiro termo, utilizando-se (4.7), nos conduz a

$$\begin{aligned}
\tanh(A/2) \tanh(B/2) &= \left[\left(\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1} \right) \left(\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 + 1} \right) \right]^{1/2} \\
&= \left[\left(\frac{\gamma_1^2 - 1}{(\gamma_1 + 1)^2} \right) \left(\frac{\gamma_2^2 - 1}{(\gamma_2 + 1)^2} \right) \right]^{1/2} \\
&= \frac{\sqrt{(\gamma_1^2 - 1)(\gamma_2^2 - 1)}}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)} \\
&= \frac{\sqrt{\beta_1^2 \gamma_1^2 \beta_2^2 \gamma_2^2}}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)} \\
&= \frac{\beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)}. \tag{4.55}
\end{aligned}$$

Lembrando-se que $b - a = \theta$ e substituindo-se (4.54) e (4.55) em (4.53), obtém-se

$$\begin{aligned}
N &= \frac{2(\gamma_1\gamma_2 - 1)}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)} + \frac{2\beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)} \cos \theta \\
&= \frac{2(\gamma_1\gamma_2 - 1 + \beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2 \cos \theta)}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)}. \tag{4.56}
\end{aligned}$$

Por outro lado, o denominador D de (4.49) é

$$D \equiv 1 + \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2) + 2 \tanh(A/2) \tanh(B/2) \cos(b - a) \tag{4.57}$$

de tal modo que o desenvolvimento dos dois primeiros termos do segundo membro nos dá

$$\begin{aligned}
 1 + \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2) &= 1 + \left(\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1} \right) \left(\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 + 1} \right) \\
 &= \frac{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1) + (\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)} \\
 &= \frac{\cancel{\gamma_1 \gamma_2} + \cancel{\gamma_1} + \cancel{\gamma_2} + 1 + \cancel{\gamma_1 \gamma_2} - \cancel{\gamma_1} - \cancel{\gamma_2} + 1}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)} \\
 &= \frac{2(\gamma_1 \gamma_2 + 1)}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)}. \tag{4.58}
 \end{aligned}$$

O terceiro termo do segundo membro do denominador D é idêntico ao mesmo termo no numerador N , de forma que o seu desenvolvimento é dado pela equação (4.32). Por isso, substituímos (4.55) e (4.58) em (4.57),

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{2(\gamma_1 \gamma_2 + 1)}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)} + \frac{2\beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)} \cos \theta \\
 &= \frac{2(\gamma_1 \gamma_2 + 1 + \beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2 \cos \theta)}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)}. \tag{4.59}
 \end{aligned}$$

Na sequência, substituímos (4.52), (4.56) e (4.59) em (4.49),

$$\tanh^2 \frac{C}{2} = \frac{\tanh^2(A/2) + \tanh^2(B/2) + 2 \tanh(A/2) \tanh(B/2) \cos(b-a)}{1 + \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2) + 2 \tanh(A/2) \tanh(B/2) \cos(b-a)}$$

para obter

$$\left(\frac{\gamma_{21} - 1}{\gamma_{21} + 1} \right) = \frac{\cancel{2}(\gamma_1 \gamma_2 - 1 + \beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2 \cos \theta)}{\cancel{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)}} \cdot \frac{\cancel{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)}}{\cancel{2}(\gamma_1 \gamma_2 + 1 + \beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2 \cos \theta)}.$$

Portanto,

$$\frac{\gamma_{21} - 1}{\gamma_{21} + 1} = \frac{\gamma_1 \gamma_2 + \beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2 \cos \theta - 1}{\gamma_1 \gamma_2 + \beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2 \cos \theta + 1}. \tag{4.60}$$

Utilizando (4.19), temos

$$\beta_1 \beta_2 = \frac{v_1}{c} \frac{v_2}{c} = \frac{v_1 v_2}{c^2}$$

que substituída em (4.56) fica

$$\frac{\gamma_{21} - 1}{\gamma_{21} + 1} = \frac{\gamma_1 \gamma_2 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \gamma_1 \gamma_2 \cos \theta - 1}{\gamma_1 \gamma_2 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \gamma_1 \gamma_2 \cos \theta + 1}. \tag{4.61}$$

Neste momento efetua-se a comparação, numerador e denominador, dos dois lados da igualdade. Esta comparação nos leva a conjecturar que

$$\gamma_{21} = \gamma_1 \gamma_2 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \gamma_1 \gamma_2 \cos \theta = \gamma_1 \gamma_2 \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \cos \theta \right) \tag{4.62}$$

que coincide com (4.23). Deste ponto, para obter $|\vec{v}_{21}|$ os cálculos a serem realizados são os mesmos daqueles que foram apresentados entre as equações (4.23) e (4.27), com os quais obtem-se

$$v_{21}^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \theta - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^2} \sin^2 \theta}{\left(1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2} \right)^2}.$$

4.2.3 Cálculo do Ângulo α entre \vec{v}_{21} e \vec{v}_1

Vamos, agora, calcular o ângulo $\alpha = c - a$ entre \vec{v}_{21} e \vec{v}_1 . Dividindo os dois lados da expressão (4.47) por e^{ia} , ficaremos com

$$\tanh \frac{C}{2} e^{i(c-a)} = \frac{\tanh\left(\frac{A}{2}\right) + \tanh\left(\frac{B}{2}\right) e^{i(b-a)}}{1 + \tanh\left(\frac{A}{2}\right) \tanh\left(\frac{B}{2}\right) e^{i(b-a)}} \quad (4.63)$$

como $\theta = b - a$ e $\alpha = c - a$, podemos reescrever (4.63) como

$$\tanh \frac{C}{2} e^{i\alpha} = \frac{\tanh\left(\frac{A}{2}\right) + \tanh\left(\frac{B}{2}\right) e^{i\theta}}{1 + \tanh\left(\frac{A}{2}\right) \tanh\left(\frac{B}{2}\right) e^{i\theta}} \quad (4.64)$$

vamos, agora, reescrever (4.67) de modo que o seu denominador se torne um número real. Para isto, multiplica-se e divide-se esta equação por $1 + \tanh(A/2) \tanh(B/2) e^{-i\theta}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \tanh \frac{C}{2} e^{i\alpha} &= \frac{\tanh\left(\frac{A}{2}\right) + \tanh\left(\frac{B}{2}\right) e^{i\theta}}{1 + \tanh\left(\frac{A}{2}\right) \tanh\left(\frac{B}{2}\right) e^{i\theta}} \cdot \frac{1 + \tanh(A/2) \tanh(B/2) e^{-i\theta}}{1 + \tanh(A/2) \tanh(B/2) e^{-i\theta}} \\ &= \frac{\tanh(A/2) + \tanh(B/2) \tanh^2(A/2) e^{-i\theta} + \tanh(B/2) e^{i\theta} + \tanh(A/2) \tanh^2(B/2)}{1 + \tanh(A/2) \tanh(B/2) e^{-i\theta} + \tanh(A/2) \tanh(B/2) e^{i\theta} + \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2)} \end{aligned}$$

como

$$e^{-i\theta} + e^{i\theta} = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta + \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta = 2 \cos \theta$$

conclui-se que

$$\begin{aligned} \tanh(C/2) \cos \alpha + i \tanh(C/2) \operatorname{sen} \alpha &= \frac{\tanh(A/2) + \tanh^2(A/2) \tanh(B/2) \cos \theta + \tanh(B/2) \cos \theta + \tanh(A/2) \tanh^2(B/2)}{1 + 2 \tanh(A/2) \tanh(B/2) \cos \theta + \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2)} \\ &\quad + i \frac{[\tanh(B/2) - \tanh^2(A/2) \tanh(B/2)] \operatorname{sen} \theta}{1 + 2 \tanh(A/2) \tanh(B/2) \cos \theta + \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2)} \end{aligned} \quad (4.65)$$

Comparando as partes real dos números complexos na igualdade acima, temos

$$\tanh(C/2) \cos \alpha = \frac{\tanh(A/2) + \tanh^2(A/2) \tanh(B/2) \cos \theta + \tanh(B/2) \cos \theta + \tanh(A/2) \tanh^2(B/2)}{1 + 2 \tanh(A/2) \tanh(B/2) \cos \theta + \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2)}. \quad (4.66)$$

O denominador D de (4.66) é o mesmo que o de (4.49), e é dado por (4.59),

$$D = \frac{2(\gamma_1 \gamma_2 + 1 + \beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2 \cos \theta)}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)}$$

e o numerador, N , é

$$\begin{aligned} N &= \tanh(A/2) + \tanh^2(A/2) \tanh(B/2) \cos \theta + \tanh(B/2) \cos \theta + \tanh(A/2) \tanh^2(B/2) \\ &= \tanh^2(A/2) \tanh(B/2) \cos \theta + \tanh(B/2) \cos \theta + \tanh(A/2) + \tanh(A/2) \tanh^2(B/2) \\ &= \tanh(B/2) \cos \theta [1 + \tanh^2(A/2)] + \tanh(A/2) [1 + \tanh^2(B/2)]. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Vamos prosseguir trabalhando os termos entre colchetes na equação (4.67):

$$\begin{aligned} 1 + \tanh^2(A/2) &= 1 + \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1} = \frac{\gamma_1 + \cancel{1} + \gamma_1 - \cancel{1}}{\gamma_1 + 1} = \frac{2\gamma_1}{\gamma_1 + 1} \\ 1 + \tanh^2(B/2) &= 1 + \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 + 1} = \frac{\gamma_2 + \cancel{1} + \gamma_2 - \cancel{1}}{\gamma_2 + 1} = \frac{2\gamma_2}{\gamma_2 + 1} \end{aligned} \quad (4.68)$$

e ainda,

$$\begin{aligned}\tanh(A/2) &= \left(\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1}\right)^{1/2} = \left[\frac{\gamma_1^2 - 1}{(\gamma_1 + 1)^2}\right]^{1/2} = \left[\frac{\beta_1^2 \gamma_1^2}{(\gamma_1 + 1)^2}\right]^{1/2} = \frac{\beta_1 \gamma_1}{\gamma_1 + 1} \\ \tanh(B/2) &= \left(\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 + 1}\right)^{1/2} = \left[\frac{\gamma_2^2 - 1}{(\gamma_2 + 1)^2}\right]^{1/2} = \left[\frac{\beta_2^2 \gamma_2^2}{(\gamma_2 + 1)^2}\right]^{1/2} = \frac{\beta_2 \gamma_2}{\gamma_2 + 1} \\ \tanh(C/2) &= \left(\frac{\gamma_{21} - 1}{\gamma_{21} + 1}\right)^{1/2} = \left[\frac{\gamma_{21}^2 - 1}{(\gamma_{21} + 1)^2}\right]^{1/2} = \left[\frac{\beta_{21}^2 \gamma_{21}^2}{(\gamma_{21} + 1)^2}\right]^{1/2} = \frac{\beta_{21} \gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1}.\end{aligned}\quad (4.69)$$

Substituindo (4.68) e (4.69) em (4.67), temos:

$$\begin{aligned}N &= \frac{\beta_2 \gamma_2}{\gamma_2 + 1} \cos \theta \frac{2\gamma_1}{\gamma_1 + 1} + \frac{\beta_1 \gamma_1}{\gamma_1 + 1} \frac{2\gamma_2}{\gamma_2 + 1} \\ &= \frac{2\beta_2 \gamma_1 \gamma_2 \cos \theta}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)} + \frac{2\beta_1 \gamma_1 \gamma_2}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)} \\ &= \frac{2\gamma_1 \gamma_2}{(\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1)} (\beta_1 + \beta_2 \cos \theta).\end{aligned}\quad (4.70)$$

Na sequencia substituímos (4.59) e (4.70) em (4.66) e obtemos

$$\begin{aligned}\tanh(C/2) \cos \alpha &= \frac{\cancel{2} \gamma_1 \gamma_2}{(\cancel{\gamma_1 + 1})(\cancel{\gamma_2 + 1})} (\beta_1 + \beta_2 \cos \theta) \cdot \frac{(\cancel{\gamma_1 + 1})(\cancel{\gamma_2 + 1})}{\cancel{2}(\gamma_1 \gamma_2 + \beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2 \cos \theta + 1)} \\ &= \frac{\gamma_1 \gamma_2 (\beta_1 + \beta_2 \cos \theta)}{\gamma_1 \gamma_2 + \beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2 \cos \theta + 1}\end{aligned}\quad (4.71)$$

Neste momento vamos comparar a terceira das equações (4.69) com (4.71) que vai nos conduzir a

$$\frac{\beta_{21} \gamma_{21}}{\gamma_{21} + 1} \cos \alpha = \frac{\gamma_1 \gamma_2 (\beta_1 + \beta_2 \cos \theta)}{[\gamma_1 \gamma_2 (1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \cos \theta) + 1]}\quad (4.72)$$

introduzindo (4.62) em (4.72),

$$\frac{\beta_{21} \gamma_{21}}{\cancel{\gamma_{21} + 1}} \cos \alpha = \frac{\gamma_1 \gamma_2 (\beta_1 + \beta_2 \cos \theta)}{\cancel{\gamma_{21} + 1}} \quad \therefore \quad \beta_{21} \gamma_{21} \cos \alpha = \gamma_1 \gamma_2 \left(\frac{v_1 + v_2}{c} \cos \theta \right)$$

de onde segue que

$$\frac{v_{21}}{\cancel{\gamma_{21} + 1}} \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \cos \theta \right) \cos \alpha = \cancel{\gamma_{21} + 1} \left(\frac{v_1 + v_2}{\cancel{c}} \cos \theta \right).$$

Finalmente obtemos

$$\cos \alpha = \frac{v_1 + v_2 \cos \theta}{v_{21} \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \cos \theta \right)}\quad (4.73)$$

que é idêntica à equação (4.31) obtida utilizando-se o espaço hiperbólico. Este fato mostra que os dois métodos são equivalentes para o cálculo destas grandezas de interesse.

4.2.4 Cálculo do Ângulo de Wigner

Por fim, desejamos utilizar este método do plano complexo para a determinação do ângulo de Wigner, δ . Como já é sabido, as operações $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ e $\vec{v}_2 + \vec{v}_1$ não são comutativas. Sendo assim, denotemos por φ_{12} e φ_{21} os ângulos que $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ e $\vec{v}_2 + \vec{v}_1$ fazem com o eixo x , respectivamente. Utilizando (4.46) e (4.47), podemos escrever

$$\begin{aligned} \tanh(c/2)e^{i\varphi_{12}} &= \frac{\tanh(A/2)e^{ia} + \tanh(B/2)e^{ib}}{1 + \tanh(A/2)\tanh(B/2)e^{i(b-a)}} \\ &= \frac{\tanh(A/2) + \tanh(B/2)e^{i(b-a)}}{1 + \tanh(A/2)\tanh(B/2)e^{i(b-a)}}e^{ia} \\ &= \frac{\tanh(A/2) + \tanh(B/2)e^{i\theta}}{1 + \tanh(A/2)\tanh(B/2)e^{i\theta}}e^{ia} \end{aligned} \quad (4.74)$$

Isto porque, conforme dito antes, o ângulo de fase é o ângulo entre a velocidade em questão e o eixo x . Além disso,

$$\begin{aligned} \tanh(c/2)e^{i\varphi_{21}} &= \frac{\tanh(B/2)e^{ib} + \tanh(A/2)e^{ia}}{1 + \tanh(B/2)\tanh(A/2)e^{i(a-b)}} \\ &= \frac{\tanh(B/2)e^{i(b-a)} + \tanh(A/2)}{1 + \tanh(B/2)\tanh(A/2)e^{-i(b-a)}}e^{ia} \\ &= \frac{\tanh(B/2)e^{i\theta} + \tanh(A/2)}{1 + \tanh(A/2)\tanh(B/2)e^{-i\theta}}e^{ia}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Dividindo-se, agora, (4.75) por (4.74), obtemos:

$$\frac{\tanh(c/2)e^{i\varphi_{21}}}{\tanh(c/2)e^{i\varphi_{12}}} = \frac{\tanh(B/2)e^{i\theta} + \tanh(A/2)}{1 + \tanh(A/2)\tanh(B/2)e^{-i\theta}} \cdot \frac{1 + \tanh(A/2)\tanh(B/2)e^{i\theta}}{\tanh(A/2) + \tanh(B/2)e^{i\theta}}.$$

Logo,

$$e^{i(\varphi_{21} - \varphi_{12})} = \frac{1 + \tanh(A/2)\tanh(B/2)e^{i\theta}}{1 + \tanh(A/2)\tanh(B/2)e^{-i\theta}} \quad (4.76)$$

mas

$$\varphi_{21} - \varphi_{12} \equiv \delta \quad (4.77)$$

onde δ é o ângulo de Wigner. Então, de (4.76),

$$\begin{aligned} e^{i\delta} &= \frac{1 + \tanh(A/2)\tanh(B/2)e^{i\theta}}{1 + \tanh(A/2)\tanh(B/2)e^{-i\theta}} \cdot \frac{1 + \tanh(A/2)\tanh(B/2)e^{i\theta}}{1 + \tanh(A/2)\tanh(B/2)e^{i\theta}} \\ &= \frac{1 + 2\tanh(A/2)\tanh(B/2)e^{i\theta} + \tanh^2(A/2)\tanh^2(B/2)e^{2i\theta}}{1 + \tanh(A/2)\tanh(B/2)[e^{i\theta} + e^{-i\theta}] + \tanh^2(A/2)\tanh^2(B/2)} \end{aligned} \quad (4.78)$$

mas

$$e^{-i\theta} + e^{i\theta} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta + \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta = 2\cos\theta \quad (4.79)$$

utilizando (4.79) em (4.78), temos

$$e^{i\delta} = \frac{1 + 2 \tanh(A/2) \tanh(B/2) \cos \theta + \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2) \cos(2\theta)}{1 + 2 \tanh(A/2) \tanh(B/2) \cos \theta + \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2)} + i \frac{2 \tanh(A/2) \tanh(B/2) \sin \theta + \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2) \sin(2\theta)}{1 + 2 \tanh(A/2) \tanh(B/2) \cos \theta + \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2)} \quad (4.80)$$

Naturalmente que

$$\begin{aligned} \cos \delta &= \cos(\varphi_{21} - \varphi_{12}) = \Re\{e^{i\delta}\} \\ &= \frac{1 + 2 \tanh(A/2) \tanh(B/2) \cos \theta + \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2) \cos(2\theta)}{1 + 2 \tanh(A/2) \tanh(B/2) \cos \theta + \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2)} \end{aligned} \quad (4.81)$$

mas

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad (4.82)$$

assim, o numerador N de (4.81) fica

$$\begin{aligned} N &= 1 + 2 \tanh(A/2) \tanh(B/2) \cos \theta + \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2) [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta] \\ &= 1 + 2 \tanh(A/2) \tanh(B/2) \cos \theta + \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2) \cos^2 \theta - \\ &\quad - \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2) \sin^2 \theta \\ &= [1 + \tanh(A/2) \tanh(B/2) \cos \theta]^2 - \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2) \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (4.83)$$

e o seu denominador D é

$$\begin{aligned} D &= 1 + 2 \tanh(A/2) \tanh(B/2) \cos \theta + \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2) \\ &= 1 + 2 \tanh(A/2) \tanh(B/2) \cos \theta + \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2) [\cos^2 \theta + \sin^2 \theta] \\ &= 1 + 2 \tanh(A/2) \tanh(B/2) \cos \theta + \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2) \cos^2 \theta + \\ &\quad + \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2) \sin^2 \theta \\ &= [1 + \tanh(A/2) \tanh(B/2) \cos \theta]^2 + \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2) \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (4.84)$$

Substituindo, agora, (4.83) e (4.84) em (4.81), ficamos com

$$\cos \delta = \frac{[1 + \tanh(A/2) \tanh(B/2) \cos \theta]^2 - \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2) \sin^2 \theta}{[1 + \tanh(A/2) \tanh(B/2) \cos \theta]^2 + \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2) \sin^2 \theta} \quad (4.85)$$

Na sequência aplicamos (4.51) e (4.52) em (4.85). O resultado é

$$\cos \delta = \frac{\left[1 + \left(\frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+1}\right)^{1/2} \left(\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2+1}\right)^{1/2} \cos \theta\right]^2 - \left(\frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+1}\right) \left(\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2+1}\right) \sin^2 \theta}{\left[1 + \left(\frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+1}\right)^{1/2} \left(\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2+1}\right)^{1/2} \cos \theta\right]^2 + \left(\frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+1}\right) \left(\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2+1}\right) \sin^2 \theta}. \quad (4.86)$$

Substituindo (4.41) em (4.86) obtemos a seguinte expressão compacta para $\cos \delta$:

$$\cos \delta = \frac{(1 + K' \cos \theta)^2 - K'^2 \sin^2 \theta}{(1 + K' \cos \theta)^2 + K'^2 \sin^2 \theta}. \quad (4.87)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \delta &= \operatorname{sen}(\varphi_{21} - \varphi_{12}) = \operatorname{Im}\{e^{i\delta}\} \\ &= \frac{2 \tanh(A/2) \tanh(B/2) \operatorname{sen} \theta + \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2) \operatorname{sen}(2\theta)}{1 + 2 \tanh(A/2) \tanh(B/2) \cos \theta + \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2)} \end{aligned} \quad (4.88)$$

Sendo que

$$\operatorname{sen}(2\theta) = \operatorname{sen}(\theta + \theta) = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \quad (4.89)$$

Designemos como N' o numerador de (4.88), podemos desenvolvê-lo como se segue

$$\begin{aligned} N' &= 2 \tanh(A/2) \tanh(B/2) \operatorname{sen} \theta + 2 \tanh^2(A/2) \tanh^2(B/2) \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ &= 2 \tanh(A/2) \tanh(B/2) \operatorname{sen} \theta [1 + \tanh(A/2) \tanh(B/2) \cos \theta] \end{aligned} \quad (4.90)$$

para, então, substituir (4.51) e (4.52) em (4.90),

$$\operatorname{sen} \delta = \frac{2 \left(\frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+1}\right)^{1/2} \left(\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2+1}\right)^{1/2} \operatorname{sen} \theta \left[1 + \left(\frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+1}\right)^{1/2} \left(\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2+1}\right)^{1/2} \cos \theta\right]}{\left[1 + \left(\frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+1}\right)^{1/2} \left(\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2+1}\right)^{1/2} \cos \theta\right]^2 + \left(\frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+1}\right) \left(\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2+1}\right) \operatorname{sen}^2 \theta}. \quad (4.91)$$

Agora substituímos (4.41) em (4.91) e obtemos, finalmente

$$\operatorname{sen} \delta = \frac{2(1 + K' \cos \theta)K' \operatorname{sen} \theta}{(1 + K' \cos \theta)^2 + K'^2 \operatorname{sen}^2 \theta}. \quad (4.92)$$

que é idêntica à expressão (4.42), obtida para o ângulo de Wigner com utilização do espaço hiperbólico da geometria de Lobachevsky. Isto mostra, mais uma vez, a equivalência entre os dois métodos.

5 Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho utilizamos as transformações de Lorentz para mostrar que a transformação relativística de velocidades não é comutativa tal qual acontece em mecânica newtoniana. De início estudamos as transformações de Lorentz gerais, equação (1.12), que pode ser encontrada, por exemplo, em [22]. Em seguida exploramos duas de suas consequências - dilatação do tempo e contração de comprimentos - que nos permitiu compreender, mais para frente, os resultados de modo conceitual, com argumentos heurísticos.

Analizamos, em seguida, a combinação relativística de velocidades, primeiro nos casos particulares de velocidades paralelas e perpendiculares e, por fim, no caso geral em que as velocidades têm direções quaisquer. Mostramos que a combinação de dois boosts sucessivos de Lorentz, mutuamente perpendiculares, não é um boost puro, mas equivale a um boost seguido de uma rotação no espaço de coordenadas. Este ângulo foi definido como o ângulo de Wigner e mostramos que ele é o ângulo entre as duas velocidades resultantes obtidas pela composição de dois boosts em ordens diferentes.

Por fim, utilizamos dois métodos distintos para calcular o ângulo de Wigner e vimos que são totalmente equivalentes.

O trabalho aqui desenvolvido abre novas perspectivas para pesquisas futuras. Pode-se, por exemplo, analisar a rotação do elétron em torno do núcleo de um átomo como uma sucessão de boosts e verificar seu efeito sobre a precessão do *spin* do elétron.

Vejo claramente que o tópico Teoria da Relatividade pode ser mais explorado do que normalmente é em cursos de graduação em física dada a sua relevância. Fenômenos como os aqui estudados não são frequentemente trabalhados e ao meu ver contribuem expressivamente para aumentar a compreensão de estudantes sobre a teoria. Tenho a esperança de que isto mude com o tempo e que os futuros estudantes tenham acesso a um curso mais refinado sobre Teoria da Relatividade.

Referências

- [1] Marcelo Alonso and Edward J. Finn. *Física - Um Curso Universitário*, volume 1. Nenhuma citação no texto.
- [2] P. K. Aravind. The wigner angle as an anholonomy in rapidity space. *American Journal of Physics*, 65:634 – 636, Janeiro 1997. Nenhuma citação no texto.
- [3] Inedio Arcari. Um texto de geometria hiperbólica, 2008. Nenhuma citação no texto.
- [4] S. Baskal and Y. S. Kim. Rotations associated with lorentz boosts. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38:6545 – 6556, Julho 2005. Nenhuma citação no texto.
- [5] W. E. Baylis and George Jones. Special relativity with clifford algebras and 2x2 matrices, and the exact product of two boosts. *Journal of Mathematical Physics*, 29:57 – 62, Agosto 1988. Nenhuma citação no texto.
- [6] James Ward Brown and Ruel V. Churchill. *Variáveis Complexas e Aplicações*. Bookman, Porto Alegre, 9th edition, 2015. Nenhuma citação no texto.
- [7] Sean Carroll. *Spacetime and Geometry - An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, San Francisco, 2004. Nenhuma citação no texto.
- [8] Francisco Caruso and Vitor Oguri. *Física Moderna - Origens Clássicas e Fundamentos Quânticos*. LTC, Rio de Janeiro, 2nd edition, 2016. Nenhuma citação no texto.
- [9] Alaor Silvério Chaves. *Física - Ondas, Relatividade e Física Quântica*, volume 3. Reichmann & Affonso Editores, Rio de Janeiro, 1st edition, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- [10] Alaor Silvério Chaves. *Física - Mecânica*, volume 1. Reichmann & Affonso Editores, Rio de Janeiro, 1st edition, 2001. Nenhuma citação no texto.
- [11] Pedro Diniz. *Precessão de Thomas*, 2017. Monografia (Bacharel em Física), USP (Universidade de São Paulo), São Paulo, Brazil. Citado na página 72.
- [12] Ray D’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity*. Oxford University Press Inc., New York, 2nd edition, 1998. Nenhuma citação no texto.
- [13] Rafael Ferraro and Marc Thibeault. Generic composition of boosts: an elementary derivation of the wigner rotation. *European Journal of Physics*, 20:143 – 151, Janeiro 1999. Nenhuma citação no texto.

- [14] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, and Matthew Sands. *Lições de Física Vol. 1*. Bookman, Porto Alegre, 1st edition, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 16.
- [15] V. Fock. *The Theory of Space Time and Gravitation*. Pergamon Press, New York, 1st edition, 1959. Citado na página 45.
- [16] Herbert Goldstein, Charles Poole, and John Safko. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, New York, 3rd edition, 2015. Citado na página 38.
- [17] David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, Nova Jersey, 1999. Nenhuma citação no texto.
- [18] Thomas L. H. The motion of the spinning electron. *Nature*, 117:514 – 514, Janeiro 1926. Nenhuma citação no texto.
- [19] Thomas L. H. The kinematics of an electron with an axis. *Philosophical Magazine and Journal of Science*, pages 1 – 22, Janeiro 1927. Nenhuma citação no texto.
- [20] Paul G. Hewitt. *Física Conceitual*. Bookman, Porto Alegre, 12nd edition, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 21.
- [21] Kledilson Peter Ribeiro Honorato. Três modelos para a geometria hiperbólica, 2014. Nenhuma citação no texto.
- [22] J. D. Jackson. *Classical Eletrodynamics*. John Wiley & Sons, New York, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 60.
- [23] Kleber Daum Machado. *Eletromagnetismo*, volume 3. Nenhuma citação no texto.
- [24] Herch Moysés Nussenzveig. *Curso de Física Básica*. Blucher, São Paulo, 2nd edition, 2014. Nenhuma citação no texto.
- [25] Kane O’Donnell and Matt Visser. Elementary analysis of the special relativistic combination of velocities, wigner rotation and thomas precession. *European Journal of Physics*, 32:1033 – 1047, Junho 2011. Citado 8 vezes nas páginas 11, 21, 23, 24, 28, 30, 31 e 39.
- [26] Carlos Martinez Perez. Fundamentos de geometria hiperbólica, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 11, 70 e 71.
- [27] J. A. Rhodes and M. D. Semon. Relativistic velocity space, wigner rotation and thomas precession. *American Journal of Physics*, 72:943 – 960, Abril 2004. Nenhuma citação no texto.
- [28] Wolfgang Rindler. *Relativity - Special, General and Cosmological*. Oxford University Press, New York, 2nd edition, 2006. Nenhuma citação no texto.

- [29] A. N. Rocha, B. F. Rizzuti, and D. S. Mota. Transformações de galileu e lorentz: Um estudo via teoria de grupos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 35:4304, Outubro 2013. Nenhuma citação no texto.
- [30] José Pedro Alves da Silva. *As geometrias euclidiana e não-euclidianas*, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 72.
- [31] Stephen T. Thornton and Jerry B. Marion. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Thomson Brooks/Cole, Estados Unidos da América, 5th edition, 2004. Nenhuma citação no texto.
- [32] Abraham A. Ungar. Thomas rotation and the parametrization of the lorentz transformation group. *Foundations of Physics Letters*, 1:57 – 89, Fevereiro 1988. Nenhuma citação no texto.
- [33] Abraham A. Ungar. Thomas precession and its associated grouplike structure. *American Journal of Physics*, 59:824 – 834, Fevereiro 1991. Nenhuma citação no texto.
- [34] Abraham A. Ungar. Einstein's velocity addition law and its hyperbolic geometry. *An International Journal Computers & Mathematics with Applications*, 53:1228 – 1250, 2007. Nenhuma citação no texto.
- [35] J. M. Vigoureux. A generalization in the complex plane of the composition law of non-parallel velocities in special relativity. *European Journal of Physics*, 34:795 – 803, Abril 2013. Nenhuma citação no texto.
- [36] J M Vigourex. Calculations of the wigner angle. *European Journal of Physics*, 22:149 – 155, Dezembro 2001. Citado na página 37.
- [37] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology - Principles and Applications of The General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, New York, 1972. Nenhuma citação no texto.

Apêndices

APÊNDICE A – Dedução de Algumas Equações

A.1 Dedução da Equação 2.35

Utilizando-se as definições de $\beta_i = \frac{v_i}{c}$ e $\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_i^2}}$, para $i = 1, 2$ e notando-se que,

$$\begin{aligned} \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_i^2}} &\rightarrow \gamma_i^2 = \frac{1}{1-\beta_i^2} \rightarrow 1-\beta_i^2 = \frac{1}{\gamma_i^2} \\ \beta_i^2 &= \frac{\gamma_i^2 - 1}{\gamma_i^2} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

na equação (2.34), obtemos

$$\begin{aligned} \text{sen } \Omega &= \frac{\frac{v_1}{c} \frac{v_2}{c} \left(1 - \frac{1}{\gamma_1 \gamma_2}\right)}{\left(\frac{v_1^2}{c^2} + \frac{v_2^2}{c^2} - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^2 c^2}\right)} \\ &= \frac{\beta_1 \beta_2 \left(1 - \frac{1}{\gamma_1 \gamma_2}\right)}{\beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_1^2 \beta_2^2} \\ &= \frac{\beta_1 \beta_2 \left(\frac{\gamma_1 \gamma_2 - 1}{\gamma_1 \gamma_2}\right)}{\frac{\gamma_1^2 - 1}{\gamma_1^2} + \frac{\gamma_2^2 - 1}{\gamma_2^2} - \frac{(\gamma_1^2 - 1)(\gamma_2^2 - 1)}{\gamma_1^2 \gamma_2^2}} \\ &= \frac{\beta_1 \beta_2 \left(\frac{\gamma_1 \gamma_2 - 1}{\gamma_1 \gamma_2}\right)}{\frac{\gamma_2^2(\gamma_1^2 - 1) + \gamma_1^2(\gamma_2^2 - 1) - (\gamma_1^2 - 1)(\gamma_2^2 - 1)}{\gamma_1^2 \gamma_2^2}} \\ &= \frac{\beta_1 \beta_2 \left(\frac{\gamma_1 \gamma_2 - 1}{\cancel{\gamma_1 \gamma_2}}\right) \cancel{\gamma_1^2} \cancel{\gamma_2^2}}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 - \cancel{\gamma_2^2} + \cancel{\gamma_1^2} \cancel{\gamma_2^2} - \cancel{\gamma_1^2} - \cancel{\gamma_1^2} \cancel{\gamma_2^2} + \cancel{\gamma_1^2} + \cancel{\gamma_2^2} - 1} \\ \text{sen } \Omega &= \frac{\beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2 (\gamma_1 \gamma_2 - 1)}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 - 1} \\ &= \frac{\beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2 (\cancel{\gamma_1 \gamma_2 - 1})}{(\cancel{\gamma_1 \gamma_2 - 1})(\gamma_1 \gamma_2 + 1)} \end{aligned}$$

de onde determina-se o ângulo entre as velocidades v_{21} e v_{12} por

$$\text{sen } \Omega = \frac{\beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2 + 1}. \quad (\text{A.2})$$

A.2 Dedução da Equação 2.36

Utilizamos a relação trigonométrica fundamental,

$$\text{sen}^2 \Omega + \text{cos}^2 \Omega = 1 \quad (\text{A.3})$$

e as equações (A.1) e (A.2) para desenvolver o cálculo abaixo

$$\text{cos}^2 \Omega = 1 - \text{sen}^2 \Omega = 1 - \frac{\beta_1^2 \beta_2^2 \gamma_1^2 \gamma_2^2}{(\gamma_1 \gamma_2 + 1)^2} = \frac{\gamma_1^2 \gamma_2^2 + 2\gamma_1 \gamma_2 + 1 - \beta_1^2 \beta_2^2 \gamma_1^2 \gamma_2^2}{(\gamma_1 \gamma_2 + 1)^2}$$

mas, por (2.35)

$$\beta_1^2 \beta_2^2 \gamma_1^2 \gamma_2^2 = \frac{\gamma_1^2 - 1}{\cancel{\gamma_1}} \frac{\gamma_2^2 - 1}{\cancel{\gamma_2}} \cancel{\gamma_1} \cancel{\gamma_2} = \gamma_1^2 \gamma_2^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 + 1$$

desta forma,

$$\begin{aligned} \text{cos}^2 \Omega &= \frac{\gamma_1^2 \gamma_2^2 + 2\gamma_1 \gamma_2 + 1 - (\gamma_1^2 \gamma_2^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 + 1)}{(\gamma_1 \gamma_2 + 1)^2} \\ &= \frac{\cancel{\gamma_1^2 \gamma_2^2} + 2\gamma_1 \gamma_2 + \cancel{1} - \cancel{\gamma_1^2 \gamma_2^2} + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 - \cancel{1}}{(\gamma_1 \gamma_2 + 1)^2} \\ &= \frac{\gamma_1^2 + 2\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2^2}{(\gamma_1 \gamma_2 + 1)^2} = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)^2}{(\gamma_1 \gamma_2 + 1)^2} \\ \text{cos}^2 \Omega &= \left[\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2 + 1} \right]^2 \quad \therefore \quad \text{cos} \Omega = \sqrt{\left[\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2 + 1} \right]^2} \end{aligned}$$

portanto

$$\text{cos} \Omega = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2 + 1}. \quad (\text{A.4})$$

A.3 Dedução da Equação 3.15

$$\begin{aligned} L_{21} &= -\gamma_x \beta_x \text{cos} \Omega + \gamma_y \gamma_x \beta_y \text{sen} \Omega \\ &= -\gamma_x \beta_x \frac{\gamma_y + \gamma_x}{\gamma_y \gamma_x + 1} + \gamma_y \gamma_x \beta_y \left(-\frac{\gamma_y \gamma_x \beta_y \beta_x}{\gamma_y \gamma_x + 1} \right) \\ &= \frac{-\gamma_y \gamma_x \beta_x - \gamma_x^2 \beta_x - \gamma_y^2 \gamma_x^2 \beta_y^2 \beta_x}{\gamma_y \gamma_x + 1} \\ &= \frac{-\gamma_y \gamma_x \beta_x - \gamma_x^2 \beta_x - \cancel{\gamma_y^2 \gamma_x^2} \frac{\gamma_y^2 - 1}{\cancel{\gamma_y^2}} \beta_x}{\gamma_y \gamma_x + 1} \\ &= \frac{-\gamma_y \gamma_x \beta_x - \cancel{\gamma_x^2} \beta_x - \gamma_y^2 \gamma_x^2 \beta_x + \cancel{\gamma_x^2} \beta_x}{\gamma_y \gamma_x + 1} \\ &= \frac{-\gamma_y \gamma_x \beta_x (\cancel{\gamma_y \gamma_x + 1})}{\cancel{\gamma_y \gamma_x + 1}} = -\gamma_y \gamma_x \beta_x. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

A.4 Dedução da Equação 3.16

$$\begin{aligned}
 L_{22} &= \gamma_x \cos \Omega - \gamma_y \gamma_x \beta_y \beta_x \sin \Omega \\
 &= \gamma_x \frac{\gamma_y + \gamma_x}{\gamma_y \gamma_x + 1} - \gamma_y \gamma_x \beta_y \beta_x \left(-\frac{\gamma_y \gamma_x \beta_y \beta_x}{\gamma_y \gamma_x + 1} \right) \\
 &= \frac{\gamma_y \gamma_x + \gamma_x^2 + \cancel{\gamma_y^2} \gamma_x^2 \beta_y^2 \beta_x^2}{\gamma_y \gamma_x + 1} \\
 &= \frac{\gamma_y \gamma_x + \gamma_x^2 + \cancel{\gamma_y^2} \gamma_x^2 \frac{\gamma_y^2 - 1}{\cancel{\gamma_y^2}} \beta_x^2}{\gamma_y \gamma_x + 1} \\
 &= \frac{\gamma_y \gamma_x + \gamma_x^2 + \gamma_y^2 \gamma_x^2 \beta_x^2 - \gamma_x^2 \beta_x^2}{\gamma_y \gamma_x + 1} \\
 &= \frac{\gamma_y \gamma_x + \gamma_x^2 + \gamma_y^2 \gamma_x^2 \beta_x^2 - \cancel{\gamma_x^2} \frac{\gamma_x^2 - 1}{\cancel{\gamma_x^2}}}{\gamma_y \gamma_x + 1} \\
 &= \frac{\gamma_y \gamma_x + \cancel{\gamma_x^2} + \gamma_y^2 \gamma_x^2 \beta_x^2 - \cancel{\gamma_x^2} + 1}{\gamma_y \gamma_x + 1} \\
 &= \frac{(\gamma_y \gamma_x + 1) + \gamma_y^2 \gamma_x^2 \beta_x^2}{\gamma_y \gamma_x + 1} \\
 &= \frac{\cancel{\gamma_y \gamma_x + 1}}{\cancel{\gamma_y \gamma_x + 1}} + \frac{\gamma_y^2 \gamma_x^2 \beta_x^2}{\gamma_y \gamma_x + 1} \\
 &= 1 + \frac{\gamma_y^2 \gamma_x^2 \beta_x^2}{\gamma_y \gamma_x + 1}
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

A.5 Dedução da Equação 3.17

$$\begin{aligned}
 L_{31} &= -\gamma_x \beta_x \sin \Omega - \gamma_y \gamma_x \beta_y \cos \Omega \\
 &= -\gamma_x \beta_x \left(-\frac{\gamma_y \gamma_x \beta_y \beta_x}{\gamma_y \gamma_x + 1} \right) - \gamma_y \gamma_x \beta_y \frac{\gamma_y + \gamma_x}{\gamma_y \gamma_x + 1} \\
 &= \frac{\gamma_y \gamma_x^2 \beta_y \beta_x^2 - \gamma_y^2 \gamma_x \beta_y - \gamma_y \gamma_x^2 \beta_y}{\gamma_y \gamma_x + 1} \\
 &= \frac{\gamma_y \cancel{\gamma_x^2} \beta_y \frac{\gamma_x^2 - 1}{\cancel{\gamma_x^2}} - \gamma_y^2 \gamma_x \beta_y - \gamma_y \gamma_x^2 \beta_y}{\gamma_y \gamma_x + 1} \\
 &= \frac{\cancel{\gamma_y \gamma_x^2 \beta_y} - \gamma_y \beta_y - \gamma_y^2 \gamma_x \beta_y - \cancel{\gamma_y \gamma_x^2 \beta_y}}{\gamma_y \gamma_x + 1} \\
 &= \frac{\gamma_y \beta_y (\cancel{\gamma_y \gamma_x + 1})}{\cancel{\gamma_y \gamma_x + 1}} = -\gamma_y \beta_y.
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

A.6 Dedução da Equação 3.19

$$\begin{aligned}
 L_{32} &= \gamma_x \operatorname{sen} \Omega + \gamma_y \gamma_x \beta_y \beta_x \cos \Omega \\
 &= \gamma_x \left(-\frac{\gamma_y \gamma_x \beta_y \beta_x}{\gamma_y \gamma_x + 1} \right) + \gamma_y \gamma_x \beta_y \beta_x \frac{\gamma_y + \gamma_x}{\gamma_y \gamma_x + 1} \\
 &= \frac{-\cancel{\gamma_y \gamma_x^2 \beta_y \beta_x} + \gamma_y^2 \gamma_x \beta_y \beta_x + \cancel{\gamma_y \gamma_x^2 \beta_y \beta_x}}{\gamma_y \gamma_x + 1} \\
 &= \frac{\gamma_y^2 \gamma_x \beta_y \beta_x}{\gamma_y \gamma_x + 1}
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

A.7 Dedução da Equação 4.15

$$\begin{aligned}
 \operatorname{senh} A &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1 + (v_1/c)}{1 - (v_1/c)} \right)^{1/2} - \left(\frac{1 + (v_1/c)}{1 - (v_1/c)} \right)^{-1/2} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{1 + v_1/c}{1 - v_1/c}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1 + v_1/c}{1 - v_1/c}}} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\frac{1 + (v_1/c)}{1 - (v_1/c)} - 1}{\sqrt{\frac{1 + (v_1/c)}{1 - (v_1/c)}}} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\cancel{1} + v_1/c - \cancel{1} + v_1/c}{\sqrt{\frac{1 + v_1/c}{1 - v_1/c}}} \right] \frac{1}{1 - v_1/c} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\cancel{2} v_1}{\cancel{2} c (1 - v_1/c)} \frac{\sqrt{1 - v_1/c}}{\sqrt{1 + v_1/c}} = \frac{v_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} = \beta_1 \gamma_1.
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

A.8 Dedução da Equação 4.17

$$\begin{aligned}
\cosh A &= \frac{e^A + e^{-A}}{2} = \frac{\exp \left[\ln \left(\frac{1+(v_1/c)}{1-(v_1/c)} \right)^{1/2} \right] + \exp \left[-\ln \left(\frac{1+(v_1/c)}{1-(v_1/c)} \right)^{1/2} \right]}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1+(v_1/c)}{1-(v_1/c)} \right)^{1/2} + \left(\frac{1+(v_1/c)}{1-(v_1/c)} \right)^{-1/2} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{1+v_1/c}{1-v_1/c}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1+v_1/c}{1-v_1/c}}} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\frac{1+(v_1/c)}{1-(v_1/c)} + 1}{\sqrt{\frac{1+(v_1/c)}{1-(v_1/c)}}} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1 + \cancel{v_1/c} + 1 - \cancel{v_1/c}}{\sqrt{\frac{1+v_1/c}{1-v_1/c}}} \right] \frac{1}{1-v_1/c} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\cancel{2} \sqrt{1-v_1/c}}{1-v_1/c \sqrt{1+v_1/c}} = \frac{1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} = \gamma_1. \tag{A.10}
\end{aligned}$$

APÊNDICE B – Geometria Hiperbólica

B.1 Introdução

A *Geometria Hiperbólica* foi desenvolvida de forma independente e quase simultânea pelos matemáticos Lobachevsky e Janos Bolay. Etimologicamente, a palavra hipérbole está relacionada à excesso. O matemático Felix Klein, em 1871, deu o nome Geometria Hiperbólica porque, nela, o número de retas paralelas a uma reta dada por um ponto excede a quantidade da geometria euclidiana (uma). Esta geometria é construída considerando-se que, da mesma forma como proposto por Euclides, ponto, reta e plano são conceitos primitivos e, portanto, indefiníveis. Além disso, admite-se como verdadeiros os mesmos postulados da Geometria Euclidiana, exceto o quinto que é substituído pelo seguinte

Postulado 3 (Postulado de Lobachevsky). *Por um ponto não pertencente a uma reta dada, podem ser traçadas pelo menos duas retas distintas que não encontram a reta dada.*

B.2 Hipérbole e Paralelismo

A hipérbole pode ser obtida pela intersecção de uma superfície cônica circular com um plano paralelo ao seu eixo principal. (Figura B.1)

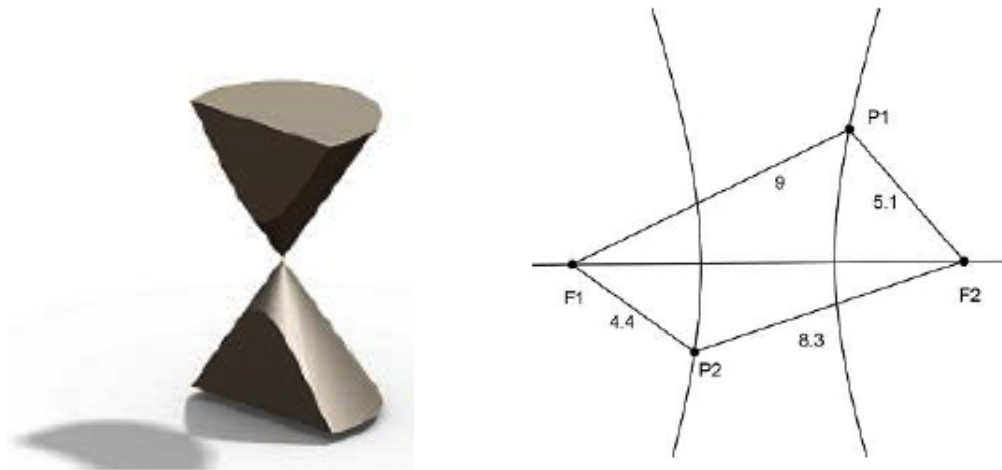


Figura 12 – Hipérbole em seção cônica (esquerda) e Definição de Hipérbole (direita). Adaptada de [26]

Por definição, a hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano, cuja diferença das distâncias a dois pontos distintos fixos desse plano, denominados focos da hipérbole, é constante Figura (B.1). Podemos perceber que os ramos da hipérbole

aproximam-se infinitamente, sem jamais tocar, das suas assíntotas. Em geometria hiperbólica plana dizemos que a hipérbole e as suas assíntotas são paralelas, e estas curvas são ditas *geodésicas coplanares*. Portanto, diferente da geometria euclidiana, na qual retas paralelas sempre mantêm a mesma distância entre si, em geometria hiperbólica, geodésicas paralelas não mantêm, necessariamente, distância constante ao longo de toda a sua extensão. (Figura B.2)

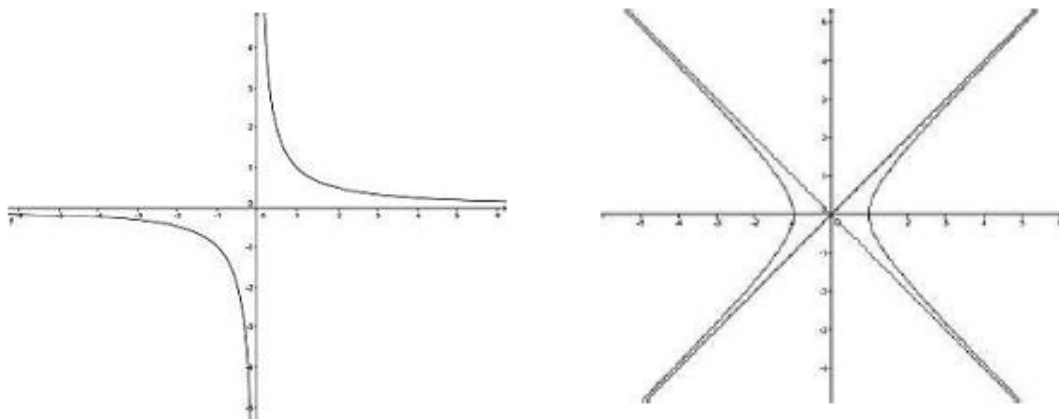


Figura 13 – Paralelismo em geometria hiperbólica. Adaptada de [26]

Chama-se *Geodésica* uma curva que representa a menor distância entre dois pontos em uma superfície. Por exemplo, na superfície plana, a geodésica é a reta. Geodésicas paralelas são aquelas que não se cruzam, como a hipérbole e suas assíntotas na figura B.2. Na Geometria Hiperbólica (ou Geometria de Lobachevsky), a paralela que passa por um ponto não é única (Postulado de Lobachevsky).

B.3 Teoremas e Figuras em Geometria Hiperbólica

Assim como a geometria euclidiana é definida sobre uma superfície plana, a geometria hiperbólica é definida sobre a superfície de um hiperbolóide, para o qual convencionamos que existe uma curvatura negativa. Nesta geometria demonstra-se o seguinte teorema:

Teorema 1 (Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo). *Na Geometria Hiperbólica, a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é menor do que 180° .*

Este teorema é uma consequência natural de a Geometria de Lobachevsky ser definida em um espaço côncavo, que é a superfície de um hiperbolóide, conforme mostrado na figura B.3. Nesta figura é mostrado, ainda, um triângulo no espaço hiperbólico. Em consequência do Teorema 1, uma vez que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é menor que 180° , define-se o defeito angular, δ , como sendo o suplemento da soma dos seus ângulos internos. Portanto, sendo α , η e γ os ângulos internos de um

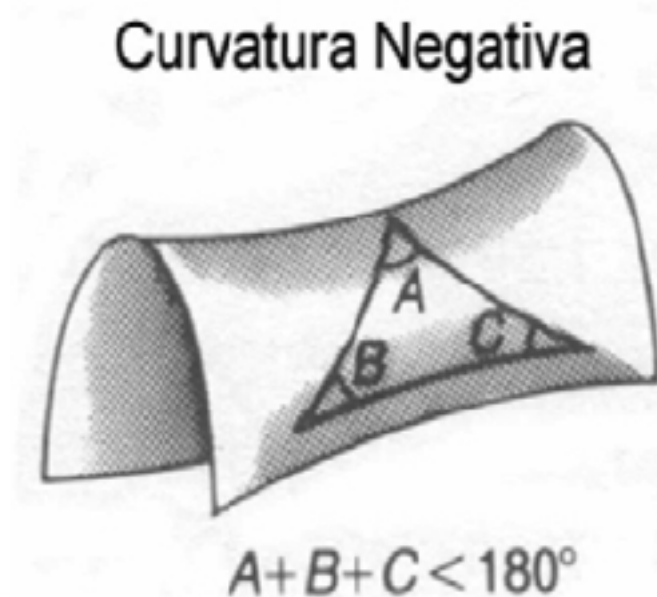


Figura 14 – Soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico. Adaptada de [30]

triângulo qualquer, temos

$$\alpha + \eta + \xi + \delta = 180^\circ$$

ou, ainda,

$$\delta = 180^\circ - (\alpha + \eta + \xi). \quad (\text{B.1})$$

É possível mostrar [11] que a rotação que um referencial sofre após a aplicação de dois boosts não colineares (rotação de Wigner) é igual ao defeito angular de um triângulo hiperbólico na geometria de Lobachevsky, que corresponde à área deste triângulo.