

Propriedades espaciais e de frequência e um estudo da pureza e fidelidade
do estado quântico gerado na conversão paramétrica descendente
em cristais uniaxiais

Alexandre Gutenberg da Costa Moura

Alexandre Gutenberg da Costa Moura

Propriedades espaciais e de frequência e um estudo da pureza e fidelidade do estado quântico gerado na conversão paramétrica descendente em cristais uniaxiais

TESE DE DOUTORADO

Belo Horizonte, MG, BRASIL

2010

Propriedades espaciais e de frequência e um estudo da pureza e fidelidade do estado quântico gerado na conversão paramétrica descendente em cristais uniaxiais

Alexandre Gutenberg da Costa Moura
Orientador: Prof. Carlos Henrique Monken

Tese de doutorado em Física
Universidade Federal de Minas
Gerais.

Belo Horizonte, MG, Brasil
2010

*Dedico esta tese de doutorado
às Marias de minha vida. Minha mãe (Maria Anunciação), filha (Maria Clara)
e à querida prima Socorrinha Costa (Maria do Perpétuo Socorro da Costa).*

AGRADECIMENTOS

- Ao Professor Carlos Monken pela orientação deste trabalho.
- À minha mãe Maria Anunciação (Kinha), minha irmã Lia Raquel, meu tio Zeca e à minha tia Mundinha pelo exemplo de vida.
- Aos grandes amigos Wallon, Álvaro, Pablo e Nadja.
- Aos professores do Departamento de Física da UFMG por terem contribuído com a minha formação acadêmica.
- Aos funcionários do Departamento de Física da UFMG por terem me auxiliado, em especial à Marluce, Ieda, Shirlei e Clarice pelos excelentes serviços prestados.
- Aos amigos Ricardo Kagimura, Olavo Cosme, Frederico Fioravante, Cristiano Fantini, César Welter, Matheus Josué, Ronaldo Batista, José Geraldo, Marco Aurélio, Caio Franca, Adriano Júnior, Marco Sagioro, Dalmir Francisco e José Ferraz pelos momentos de descontração e apoio em tempos de "guerra".
- Aos amigos da escola de música Glaubert, Carlos, Anor Luciano, Michell Antonucci, Lucas, Paula, Sandro, Renato, Filipi, Danilo (músico de coração) e Ricardo pela música sempre presente.
- Aos do Piauí que aqui se encontram e aos que lá estão, André Lino, Maurisan Lino, Irismar Gonçalves, Johnatan, Alexandre Medeiros, Alex Lima, Wittemberg, Héliques Frazão, Jonas Nascimento e Manuel Pedro.
- À dona Irani pelas sábias palavras, à Ana Maria, ao senhor Antônio e sua esposa dona Teresinha pela amizade.
- Ao Laboratório de Óptica Quântica pela possibilidade de realização de alguns experimentos.
- Ao CNPq pelo suporte financeiro.

CITAÇÕES

*Morrer, dormir, dormir talvez sonhar.
Aí se encontra o obstáculo. Pois neste sonho de morte, os sonhos
que hão de vir quando nos tivermos desvencilhado insatisfatoriamente
da carne mortal que circunda a alma, obrigam-nos a hesitar.*
Shakspeare

*Deus, coa mão cheia de fulmíneos dardos,
O arrojou de cabeça ao fundo do Abismo,
Mar lúgubre de ruínas insondável,
A fim de que atormentado ali vivesse*
John Milton

*O Diabo rodopia em uma dança macabra enquanto Deus,
sentado no alto de seu trono, aplaude a suas insanas travessuras.*
Alexandre Gutenberg

*Não debes admirar-te diante da extensão do caminho,
pois ele só deve ser trilhado em busca de coisas importantes...*
Platão

... um prelúdio para uma revolução existencial.
Dostoievski

*Ladisla:
Minha alma está preparada.
O rei (pai de Ladisla):
O cadafalso também; põe lá tua cabeça.*
Rotrou

*O tempo é a minha matéria,
o tempo presente, os homens presentes, a vida presente.*

Drummond

Morreu Maria Preá.

Dito chistoso popular amplamente empregado por Medeiros

RESUMO

Neste trabalho investigamos as propriedades espaciais e de frequência do estado de dois fótons gerados por conversão paramétrica descendente em cristais uniaxiais de comprimento arbitrário. Como ferramenta básica, empregamos a óptica de Fourier em meios birrefringentes. Apresentamos um estudo detalhado da óptica de Fourier em meios anisotrópicos uniaxiais de comprimento finito. Determinamos o estado quântico gerado no processo da Conversão Paramétrica Descendente Espontânea, levando em conta a anisotropia do cristal não-linear. Com isso, estudamos em detalhe como a transferência das propriedades do feixe bombeador para o estado de dois fótons depende da anisotropia do meio. Utilizamos este estado para fazer um estudo do emaranhamento e da pureza, em polarização, e sua dependência com o comprimento do cristal, a divergência do feixe bombeador, o ângulo de aceitação e a largura de banda em frequência dos detectores.

ABSTRACT

In this work we investigate the spatial and frequency properties of the two-photon states generated by spontaneous parametric down-conversion in uniaxial crystals of arbitrary length. As a basic tool we use Fourier optics in birefringent media. We present a detailed study of the Fourier optics in uniaxial anisotropic media of finite length. We determine the quantum states generated in the process of spontaneous parametric down-conversion, considering the anisotropy of the non-linear crystal. We study in detail the transfer of properties from pump beam to the two-photon state and its dependence on anisotropy. We use this state to study the purity and entanglement in polarization, and its dependence with the crystal length, pump beam divergence, detector angular aperture and frequency bandwidth.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Óptica de Fourier em Meios Anisotrópicos	4
2.1	As polarizações do campo e a aproximação paraxial	6
2.2	A Matriz Transferência	11
2.3	O Campo Elétrico e o Espectro Angular no Meio 2.	14
2.4	O Campo Elétrico Transmitido para o Meio 3	15
2.5	Conclusões	24
3	Propriedades Espaciais e de Frequências da Conversão Paramétrica Descendente	25
3.1	Estado de Dois Fótons Gerados pela Conversão Paramétrica Descendente Espontânea	26
3.2	Casamento de Fases do Tipo I	29
3.3	Casamento de fases do Tipo II	36
3.3.1	Conversão $e \rightarrow oe$	37
3.3.2	Conversão $e \rightarrow eo$	41
3.4	Montagem Experimental	45
3.5	Conclusões	46
4	Pureza, Fidelidade e Emaranhamento em Polarização na CPDE	47
4.1	O Emaranhamento	47
4.1.1	Emaranhamento de estados puros	48
4.1.2	Emaranhamento de estados mistos	49
4.1.3	Medida de Emaranhamento	49
4.2	A Matriz Densidade Efetiva	50
4.3	Fontes de Estados Emaranhados em Polarização Gerados por CPDE	51

4.3.1	Fontes com Casamento de fases do tipo I	52
4.3.2	Fontes com Casamento de Fases do Tipo II	56
4.4	Pureza, Fidelidade e Emaranhamento	58
4.5	Simulações Numéricas	60
4.6	Conclusões	63
5	Conclusões Gerais e Perspectivas	64
5.1	Conclusões Gerais	64
5.2	Perspectivas	66
5.2.1	Análise do emaranhamento do estado de dois fótons no casamento de fase do tipo II	66
A	A Matriz de Transferência	69

Lista de Figuras

2.1	Sistema contendo um meio anisotrópico uniaxial. Um feixe eletromagnético incide pela esquerda do material (meio 1), propaga-se através deste meio (meio 2) cujo eixo óptico está orientado no plano xz formando um ângulo agudo θ com a direção z , e emerge na esquerda do cristal (meio 3). Os meios 1 e 3 são isotrópicos. O vetor \hat{s} representa o unitário na direção do eixo óptico.	5
2.2	Representação de um meio uniaxial no espaço dos momentos. Aqui temos um cristal uniaxial e negativo pois $n_o > n_e$. A polarização extraordinária está na direção tangente às linhas vermelhas. As linhas azuis indicam a direção da polarização ordinária. O vetor \hat{s} é um unitário que aponta na direção do eixo óptico.	6
2.3	Representação bidimensional de um meio uniaxial no espaço dos momentos. O círculo representa a variação do índice ordinário e a elipse a variação do índice extraordinário. Podemos observar que é na direção do eixo óptico que os índices ordinários e extraordinário possuem o mesmo valor. Portanto, quando a luz se propaga na direção do eixo óptico o meio comporta-se como se fosse isotrópico. Poderemos ter cristais dos tipos negativos e positivo, tudo dependerá dos valores de n_o e n_e . Em (a) $n_o > n_e$ com isso teremos cristais negativo e em (b) $n_o < n_e$, que são os cristais positivos.	7
2.4	Modelo representativo de um elétron em um meio anisotrópico.	8
2.5	O plano π representa o plano principal que é formado pelo vetor \hat{k} e a direção do eixo óptico. Os vetores \hat{e}_e , \hat{s} , \hat{k}^o e \hat{k}^e são coplanares e ortogonais ao vetor \hat{e}_o . Os vetores de polarização, \hat{e}_e e \hat{e}_o , indicam as direções das componentes extraordinária e ordinária do campo elétrico. A magnitude dos vetores \hat{k}^o e \hat{k}^e são diferentes.	9

- 2.6 Em (a) temos propagação isotrópica, os vetores \hat{k} (vetor de onda unitário) e \vec{s} (vetor de Pointing) têm a mesma direção. Em (b) a propagação é anisotrópica e os vetores \hat{k} e \vec{s} estão em direções diferentes. O vetor \vec{s} sempre estará disposto, no elipsóide de índices, de maneira que uma reta tangente à superfície do elipsóide, no ponto perfurado pelo vetor de onda, forme um ângulo reto com \vec{s} , ou seja, \vec{s} é sempre perpendicular à tangente da curva em cada ponto. 10
- 2.7 Sistema representando a base formada pelos vetores diretores \hat{a} , \hat{b} e \hat{z} . Os vetores \hat{a} , \hat{b} estão no plano ζ , mesmo plano xy 13
- 2.8 Fotografia tirada no laboratório de Óptica Quântica do Departamento de Física da UFMG. Perfil de intensidade de um feixe gaussiano com $\lambda = 632.8nm$ depois de atravessar um cristal uniaxial, BBO do tipo I. 17
- 2.9 Montagem para observar as franjas de interferência entre os feixes ordinário e extraordinário. \vec{E} é o campo incidente que tem polarização vertical. $P1$ e $P2$ são polarizadores orientados a 45° com relação ao campo incidente. CNL é um cristal não linear uniaxial com eixo óptico orientado conforme indicado na figura, no plano formado pela direção de propagação e a direção do campo incidente \vec{E} . A figura de interferência é observada no anteparo A. 18
- 2.10 Perfil de intensidade de um feixe gaussiano com $\lambda = 632.8nm$ depois de atravessar um cristal uniaxial, BBO do tipo I. O feixe está ilustrado na figura 2.8. As franjas de interferência estão aproximadamente em concordância entre as curvas experimental e teórica. 19
- 2.11 Figura conoscópica de um laser de perfil gaussiano com $\lambda = 632.8nm$ e divergência total $2\varphi = 0.2rad$, atravessando um cristal uniaxial BBO de comprimento $L = 10mm$ na direção do eixo óptico. 20
- 2.12 Dependência das quantidades T_{oo} , T_{ee} , T_{eo} e T_{oe} com q_x e q_y quando $\theta = 45^\circ$. Todas as funções estão normalizadas sendo o valor máximo igual a 1. Em cima, da esquerda para direita, temos T_{oo} e T_{ee} . Vemos que para T_{oo} existe uma pequena variação em torno de 0.935, ou seja, a função varia muito pouco para este ângulo podendo ser considerada como uma constante. O mesmo é verdade para T_{ee} que tem uma pequena variação em torno de 0.945. Em baixo temos, da esquerda para a direita, T_{oe} e T_{eo} que são praticamente nulas para este ângulo. 21

- 2.13 Dependência das quantidades T_{oo} , T_{ee} , T_{eo} e T_{oe} com q_x e q_y quando $\theta = 90^\circ$. Todos as funções estão normalizadas sendo o valor máximo igual a 1. Em cima, da esquerda para direita, temos T_{oo} e T_{ee} . Vemos que para T_{oo} existe uma pequena variação em torno de 0.937, ou seja, a função varia muito pouco para este ângulo podendo ser considerada como uma constante. O mesmo é verdade para T_{ee} que varia em torno de 0.953. Em baixo temos, da esquerda para a direita, T_{oe} e T_{eo} que são praticamente nulas para este ângulo. 22
- 2.14 Dependência das quantidades T_{oo} , T_{ee} , T_{eo} e T_{oe} com q_x e q_y quando $\theta = 0^\circ$. Todos as funções estão normalizadas sendo o valor máximo igual a 1. Em cima, da esquerda para direita, temos T_{oo} e T_{ee} e em baixo T_{oe} e T_{eo} . Vemos que estas funções variam bruscamente com q_x e q_y 23
- 3.1 Geometria do problema. Um meio uniaxial tem a forma de paralelepípedo. Seu comprimento na direção z é L e possui suas faces paralelas ao plano xy . O eixo óptico está no plano xz e forma um ângulo agudo θ com a direção z positiva. 29
- 3.2 Conversão paramétrica descendente tipo I. O feixe incidente tem polarização extraordinária e gera dois fótons com polarizações ordinárias. 30
- 3.3 Componentes angulares dos campos convertidos durante o processo de luminescência paramétrica. 32
- 3.4 Ângulo de saída em função do comprimento de onda do campo convertido para um cristal de Iodato de Lítio bombeado por um feixe de laser de comprimento de onda $\lambda = 325$ nm, para três ângulos de casamento de fases θ (à esquerda). Esses resultados foram obtidos da equação (3.33). A escala horizontal foi ajustada para permitir a comparação direta com os dados experimentais de Bogdanov *et al.* [1] (à direita). 34
- 3.5 Comparação entre resultados experimentais e predições da equação (3.41) (linha sólida) para o BBO com $L = 5$ mm no regime colinear para o casamento de fases do tipo I, bombeado por feixe de laser de 405 nm com $w_0 \approx 25$ μ m. No gráfico da esquerda, os dois detectores são deslocados no mesmo sentido, na direção x . A linha tracejada mostra um perfil gaussiano correspondente ao espectro angular do laser bombeador. No gráfico da direita, os dois detectores são deslocados no mesmo sentido, na direção y 36

3.6	Conversão paramétrica descendente tipo II. O feixe incidente tem polarização extraordinária e gera dois fótons com polarizações ordinária e extraordinária.	37
3.7	Densidades de contagens simples obtidas da equação (3.74), integrada em um dos ângulos de saída e em ν , com um filtro de interferência de 10 nm, para o BBO de comprimentos $L = 1$ mm e $L = 0.25$ mm, com um feixe incidente de 407 nm e $\theta = 42.5^\circ$.	42
3.8	Comparação entre os resultados experimentais (\bullet) e as previsões da equação (3.83) (linha sólida) para o BBO com $L = 5$ mm, casamento de fases do tipo II no regime colinear, bombeado por um laser de $\lambda_p = 405$ nm e $w_0 \approx 25$ μ m. Os dois detectores se movem na mesma direção e mesmo sentido, e são equipados com filtros de interferência com largura de linha de 10 nm ($\Delta\nu \approx 0.012$). A gaussiana coincide com o perfil do espectro angular do laser. A linha pontilhada indica o perfil esperado para o caso monocromático ($\Delta\nu \rightarrow 0$).	44
3.9	Montagem experimental para a detecção em coincidência e no regime colinear no processo da conversão paramétrica descendente espontânea.	45
4.1	Fonte de pares de fótons emaranhados. Dois cristais são acoplados para produzir fótons gêmeos no processo da conversão paramétrica descendente. As linhas nos cristais representam as direções de seus eixos ópticos	53
4.2	Fonte de dois fótons construída com um único cristal do tipo I e bombeado pelos dois lados. Os campos convertidos são superpostos com a ajuda de um espelho esférico. A polarização do campo convertido é girada pela dupla passagem nas placas de quarto de onda.	55
4.3	Fonte de dois fótons construída com um único cristal com casamento de fases do tipo II.	56
4.4	Diagramas representativos das situações para as quais poderemos ter o valor do parâmetro $r \geq 0.90$ e $r \geq 0.98$ para conversão do tipo II. As quantidades Q_P , Q_D e L representam, respectivamente, a divergência, o ângulo de aceitação e o comprimento do cristal. Os valores de Q_P , Q_D e L para os quais teremos $r \geq 0.90$ e $r \geq 0.98$ são aqueles que, combinados, possuem pontos dentro dos volumes das caixas do diagrama.	59

-
- 4.5 Diagramas representativos das situações para as quais poderemos ter o valor do parâmetro $r \geq 0.90$ e $r \geq 0.98$ para conversão do tipo I. As quantidades Q_p , Q_d e L representam, respectivamente, a divergência, o ângulo de aceitação e o comprimento do cristal. O valores de Q_p , Q_D e L para os quais teremos $r \geq 0.90$ e $r \geq 0.98$ são aqueles que, combinados, possuem pontos dentro dos volumes das caixas do diagrama. 60
- 4.6 Dependência do parâmetro r com o parâmetro s definido na equação (4.46) para todos os casos analisados. Os pontos correspondem a soluções numéricas das equações (4.34)-(4.37) e (4.25)-(4.28). 61
- A.1 Interface entre dois meios uniaxiais. Os vetores \hat{s}_1 e \hat{s}_2 indicam as direções dos eixos ópticos dos meios 1 e 2, respectivamente. 69

Capítulo 1

Introdução

Ao longo do anos, uma grande quantidade de trabalhos sobre a propagação de feixes luminosos em meios birrefringentes tem sido publicada [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. A ferramenta matemática amplamente empregada para o tratamento desta propagação é a Óptica de Fourier, que consiste em escrever os campos eletromagnéticos em uma superposição de ondas planas, o que permite uma simplificação na análise da propagação do feixe. Este tratamento matemático permite um estudo detalhado da propagação de feixes em vários meios. Aqui, estamos interessados em propagar campos em meios uniaxiais, ou seja, meios birrefringentes que possuem apenas um único eixo óptico. Quando propagamos feixes nestes meios podemos decompor a luz nas polarizações ordinária e extraordinária, definidas através da orientação do eixo óptico do cristal e do vetor de onda das componentes de onda plana do feixe. Propagar luz nestes meios dá origem a uma série de fenômenos que são objetos de estudo em Óptica. Em nosso caso analisaremos o fenômeno da **Conversão Paramétrica Descendente Espontânea** (CPDE) que nos últimos anos tem sido fonte de muitos estudos, por gerar pares de fótons em estados de dois fótons emaranhados em diversos graus de liberdade, em particular os estados de Bell em polarização, o que permitiu a realização de pesquisas sobre localidade, emaranhamento, criptografia, teletransporte, [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21] etc. Um estudo sobre a transferência das propriedades transversais de pares de fótons gerados na CPDE, quando detectados em coincidência, foi analisado por Monken *et. al.*[22] que mostrou que, para cristais finos, a transferência das propriedades de correlações transversais do feixe bombeador para os fótons detectados ocorre praticamente de forma integral. Devido à pequena espessura do cristal, a expressão matemática aproximada que descreve o estado quântico no processo da con-

versão não contém termos que informam sobre a anisotropia da fonte geradora do par de fótons.

Neste trabalho investigaremos as propriedades transversais, espaciais e de frequência do estado gerado no processo da conversão paramétrica descendente quando produzido em cristais de comprimento finito, não necessariamente pequeno. Neste caso o comprimento do meio não pode ser desprezado e portanto, aparecerão efeitos de anisotropia no estado que descreve o par de fótons gerado. Dependendo da posição do eixo óptico, alguns efeitos deformarão o perfil transversal, modificando seu raio de curvatura, fase de Gouy e sua cintura. A transferência do espectro angular do feixe incidente para o par de fótons detectados em coincidência depende destes efeitos de anisotropia fora da aproximação de cristal fino. Esta transferência depende em especial de um desvio do feixe na direção de uma das componentes transversais à direção de propagação do feixe. Este desvio chamamos de **walk-off** que, dependendo de sua magnitude, poderá limitar a transferência do espectro angular. A transferência fica dependendo tanto dos efeitos de anisotropia como da divergência do feixe de entrada [23].

O emaranhamento do estado quântico dos fótons gêmeos é fortemente afetado quando consideramos a espessura do cristal. Este emaranhamento depende da anisotropia do meio tanto no estudo das variáveis discretas [24] quanto contínuas [25].

Esta tese se encontra estruturada na seguinte forma: O capítulo 2 explica a teoria da propagação dos feixes eletromagnéticos em meios birrefringentes uniaxiais. Esta teoria é um tratamento vetorial da óptica de Fourier em meios uniaxiais. Neste capítulo descrevemos o campo eletromagnético propagando-se através de um meio uniaxial e os efeitos de anisotropia que aparecem nos campos. Determinamos uma matriz transferência que informa a difração e o acoplamento do campo nas direções cartesianas para cada polarização de campo incidente. Esta matriz de transferência é proveniente das condições de contorno na interface do vácuo e cristal uniaxial e com seu auxílio podemos escrever as funções propagadoras dos campos. Isso servirá para a realização de uma série de trabalhos como estão sugeridos ao final deste capítulo. Este capítulo é de fundamental importância pois nele mostramos que podemos dar um tratamento escalar para a propagação dos campos eletromagnéticos para os ângulos de casamento de fase da CPDE dos tipos I e II. No capítulo 3 empregamos a teoria do capítulo 2 para determinar o estado quântico gerado pela CPDE com os efeitos de anisotropia do cristal uniaxial que gerou fótons gêmeos. Neste capítulo estudamos as propriedades espaciais e de frequência do estado quântico gerados pela CPDE. Analisamos a dependência da transferência do espectro angular, quando detectado em co-

incidência, com os efeitos de anisotropia. Conhecendo detalhadamente o estado gerado na CPDE poderemos estudar algumas propriedades desse estado como, por exemplo, o emaranhamento do estado quântico em diversos graus de liberdade. No capítulo 4 investigamos a concorrência e a pureza, para o grau de liberdade de polarização, do estado quântico determinado no capítulo 3. Ainda neste capítulo analisamos o quanto os estados quânticos, gerados por algumas fontes de estados emaranhados, se aproximam dos estados $|\psi^+\rangle$ e $|\phi^+\rangle$ determinando a fidelidade do estado produzido. Duas construções de fontes de pares de Bell são analisadas. Uma que gera cones cruzados e a outra através de dois cristais com eixos ópticos dispostos perpendicularmente. Analisamos para quais conjuntos de parâmetros como largura do cristal, divergência do feixe incidente, ângulo de aceitação dos detectores e largura de banda dos filtros de interferência teremos alta fidelidade e pureza de estados quando comparados ao singleto e tripleto. No capítulo 5 encontram-se as conclusões, algumas considerações finais e sugestões de trabalhos que poderão ser feitos com a teoria aqui demonstrada.

Capítulo 2

Óptica de Fourier em Meios Anisotrópicos

A representação de feixes eletromagnéticos monocromáticos em um semi-espaço isotrópico por meio do espectro de ondas planas, o espectro angular, vem sendo usada com grande sucesso há várias décadas. O espectro angular de um feixe contém ondas planas, tanto homogêneas quanto evanescentes, e a expansão de feixes eletromagnéticos em ondas planas dá origem à chamada *óptica de Fourier*, que é uma poderosa ferramenta para o tratamento de problemas de propagação em diversas áreas da óptica e da teoria eletromagnética em geral. Em se tratando do vácuo ou de meios isotrópicos homogêneos, a óptica de Fourier é em geral uma teoria escalar, válida para qualquer uma das componentes do campo. A situação muda totalmente quando lidamos com meios anisotrópicos, onde a propagação dos feixes é fortemente dependente da polarização. Mesmo assim, o conceito de espectro angular continua válido, embora não seja mais uma quantidade escalar, conforme demonstrado por Lalor [2].

Nos últimos anos, a aplicação da óptica de Fourier ao estudo da conversão paramétrica descendente tem mostrado várias possibilidades de aplicações, quase todas ligadas à transferência do espectro angular do feixe bombeador para a estrutura espacial do estado de dois fótons [22]. Porém, na maior parte dos tratamentos, a anisotropia dos cristais não-lineares é desprezada e aproximações escalares são utilizadas. Neste capítulo, desenvolvemos a teoria vetorial da óptica de Fourier em meios anisotrópicos, tal como aquele da figura 2.1, que servirá de base para a formulação de um modelo mais completo para a geração de estados de pares de fótons por conversão paramétrica descendente espontânea em cristais não-lineares uniaxiais. Aqui consideraremos o campo monocromático com dependência harmônica no tempo.

Na secção 2.1 mostramos como expressar as polarizações ordinária e extraordinária do feixe ao se propagar em um meio uniaxial através de seus vetores unitários e apresentamos alguns efeitos de anisotropia que estarão presentes no campo do meio 3. Na secção 2.2 determinamos a matriz transferência que relaciona as amplitudes espectrais dos meios 1 e 2, com base nas condições de continuidade das componentes tangenciais dos campos \vec{E} e \vec{H} . Na secção 2.3 determinamos o campo elétrico e o espectro angular propagados dentro do meio uniaxial. Na secção 2.4 determinamos o campo no meio 3 e o seu respectivo espectro angular. Mostramos também os propagadores dos campos, do meio 1 ao meio 3. Os resultados apresentados aqui derivam de uma teoria geral que foi desenvolvida por Stamnes e colaboradores, que fizeram uma formulação bastante geral para a propagação de feixes eletromagnéticos em meios anisotrópicos [3, 4, 5, 6]. A aplicação dos resultados gerais de Stamnes ao problema no qual estamos interessados e a dedução das fórmulas específicas de propagação do campo e do espectro angular em um meio uniaxial de comprimento finito são contribuições originais desta tese.

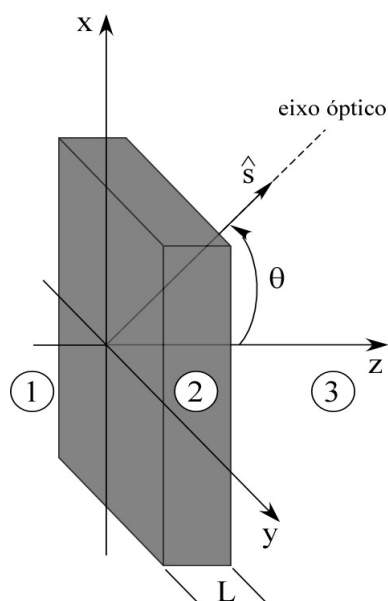


Figura 2.1: Sistema contendo um meio anisotrópico uniaxial. Um feixe eletromagnético incide pela esquerda do material (meio 1), propaga-se através deste meio (meio 2) cujo eixo óptico está orientado no plano xz formando um ângulo agudo θ com a direção z , e emerge na esquerda do cristal (meio 3). Os meios 1 e 3 são isotrópicos. O vetor \hat{s} representa o unitário na direção do eixo óptico.

2.1 As polarizações do campo e a aproximação paraxial

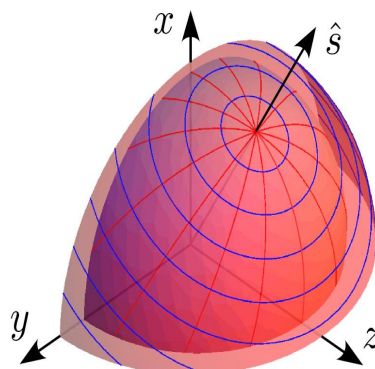


Figura 2.2: Representação de um meio uniaxial no espaço dos momentos. Aqui temos um cristal uniaxial e negativo pois $n_o > n_e$. A polarização extraordinária está na direção tangente às linhas vermelhas. As linhas azuis indicam a direção da polarização ordinária. O vetor \hat{s} é um unitário que aponta na direção do eixo óptico.

Em um meio opticamente anisotrópico, a velocidade de fase de uma onda plana não é, em geral, univocamente definida e pode depender tanto da direção do seu vetor de onda \vec{k} quanto do seu estado de polarização. Além disso, o estado de polarização da onda pode variar com a distância percorrida no meio. Em meios ditos *uniaxiais*, existe uma única direção, chamada de *eixo óptico*, para a qual a velocidade de fase é independente do estado de polarização da onda. Para todas as outras direções do vetor de onda, existem dois autoestados de polarização conhecidos como *polarização ordinária* e *polarização extraordinária*, que correspondem a duas velocidades de fase diferentes. Isso equivale a dizer que a cada autoestado de polarização corresponde um índice de refração: n_o para a polarização ordinária e $n_e(\vec{k})$ para a polarização extraordinária. Chamando de *plano principal* o plano definido pelas direções do eixo óptico e do vetor de onda, a direção de polarização ordinária é aquela perpendicular ao plano principal, enquanto que a direção extraordinária situa-se no plano principal. O valor do índice de refração ordinário não depende da direção de propagação e pode ser representado no espaço \vec{k} por uma superfície esférica. Já o índice extraordinário depende da direção de \vec{k} e pode ser representado no espaço \vec{k} por um elipsóide de revolução, cujo eixo coincide com o eixo óptico, $n_e = n_o$. A figura 2.2 ilustra as superfícies no espaço dos momentos para os índices ordinário e extraordinário. No caso

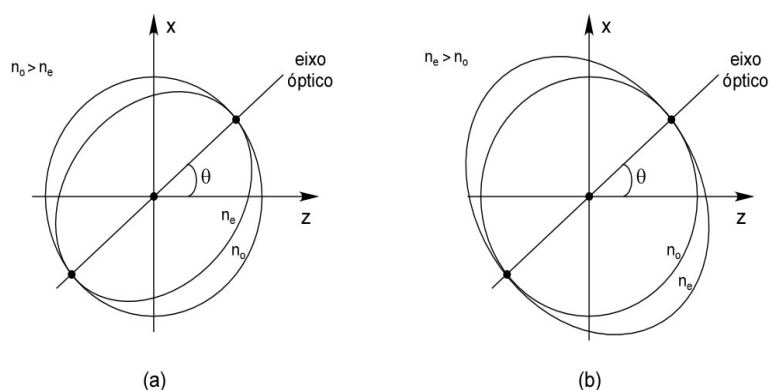


Figura 2.3: Representação bidimensional de um meio uniaxial no espaço dos momentos. O círculo representa a variação do índice ordinário e a elipse a variação do índice extraordinário. Podemos observar que é na direção do eixo óptico que os índices ordinários e extraordinário possuem o mesmo valor. Portanto, quando a luz se propaga na direção do eixo óptico o meio comporta-se como se fosse isotrópico. Poderemos ter cristais dos tipos negativos e positivo, tudo dependerá dos valores de n_o e n_e . Em (a) $n_o > n_e$ com isso teremos cristais negativo e em (b) $n_o < n_e$, que são os cristais positivos.

ilustrado temos um cristal negativo, ou seja, aquele em que $n_e < n_o$. O eixo óptico é determinado por uma reta que vai da origem do sistema até o ponto onde o elipsóide toca a esfera. Propagando luz em um meio uniaxial na direção do eixo óptico teremos uma propagação isotrópica pois naquela direção os índices de refração são iguais. Se propagarmos um feixe nesta direção, a propagação será aproximadamente isotrópica pois nesse caso teríamos um espectro de momentos propagando-se aproximadamente nessa direção. Na figura 2.3 temos uma representação bidimensional das superfícies definidas pelos índices de refração no plano (k_x, k_y) . Normalmente, refere-se ao índice extraordinário n_e como sendo aquele que corresponde a uma direção de propagação normal ao eixo óptico. A figura 2.4 representa um elétron ligado por um conjunto de molas fictícias, com diferentes constantes elásticas, para cada direção. Esta figura ilustra a polarização de um meio anisotrópico. Aplicando-se um mesmo campo elétrico para cada direção o meio manifestará diferentes polarizações. Para um meio uniaxial as constantes elásticas de duas direções devem ser iguais e diferentes da terceira.

Neste capítulo, adotaremos a seguinte convenção: o eixo óptico situa-se no plano xz , fazendo um ângulo agudo θ com o eixo z positivo, isto é, $-90^\circ < \theta \leq 90^\circ$.

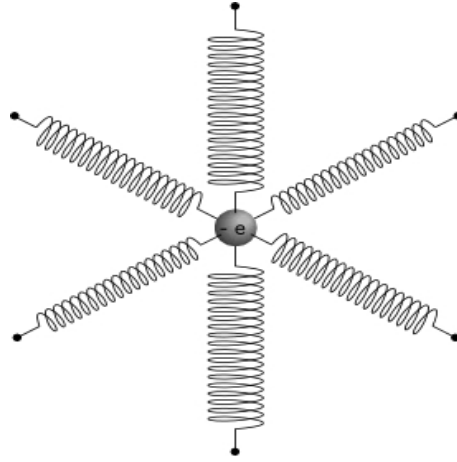


Figura 2.4: Modelo representativo de um elétron em um meio anisotrópico.

Para que as ondas planas no meio uniaxial sejam compatíveis com as equações de Maxwell, as componentes dos vetores de onda devem satisfazer

$$\frac{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}{n_o^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (2.1)$$

quando a polarização é ordinária e

$$k_x^2 \left(\frac{\cos^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_o^2} \right) + \frac{k_y^2}{n_e^2} + k_z^2 \left(\frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} \right) + 2k_x k_z \left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_o^2} \right) \sin \theta \cos \theta = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (2.2)$$

quando a polarização é extraordinária.

Para especificar com precisão as direções de polarização no meio uniaxial, adotaremos as seguintes definições: \hat{s} é um vetor unitário na direção do eixo óptico, fazendo um ângulo agudo (θ) com o eixo z positivo; \vec{k}^o é o vetor de onda de uma onda plana com polarização ordinária; \vec{k}^e é o vetor de onda de uma onda plana com polarização extraordinária; \hat{k}^o e \hat{k}^e são os unitários de \vec{k}^o e \vec{k}^e , respectivamente; \hat{e}_o e \hat{e}_e são os vetores unitários das direções de polarização ordinária e extraordinária, respectivamente. É possível mostrar que [2, 5, 6]

$$\hat{s} = \sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{z} \quad (2.3)$$

$$\vec{k}^o = n_o \frac{\omega}{c} \hat{k}^o, \quad (2.4)$$

$$\vec{k}^e = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 |\hat{k}^e \times \hat{s}|^2 + n_e^2 (\hat{k}^e \cdot \hat{s})^2}} \frac{\omega}{c} \hat{k}^e, \quad (2.5)$$

$$\hat{e}_o = C^o \vec{k}^o \times \hat{s}, \quad (2.6)$$

$$\hat{e}_e = C^e \left[(\vec{k}^o \cdot \vec{k}^o) \hat{s} - (\vec{k}^e \cdot \hat{s}) \vec{k}^e \right], \quad (2.7)$$

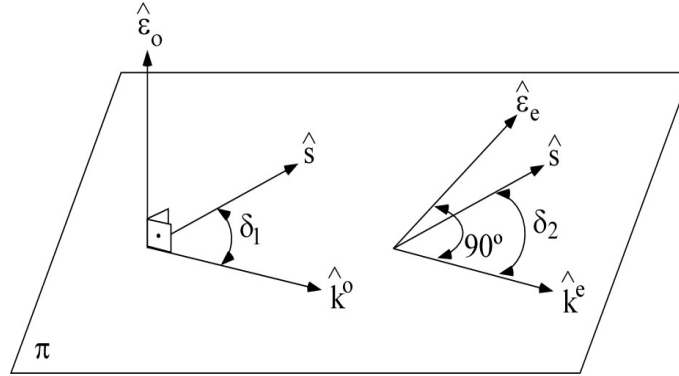


Figura 2.5: O plano π representa o plano principal que é formado pelo vetor \hat{k} e a direção do eixo óptico. Os vetores $\hat{\epsilon}_e$, \hat{s} , \hat{k}^o e \hat{k}^e são coplanares e ortogonais ao vetor $\hat{\epsilon}_o$. Os vetores de polarização, $\hat{\epsilon}_e$ e $\hat{\epsilon}_o$, indicam as direções das componentes extraordinária e ordinária do campo elétrico. A magnitude dos vetores \hat{k}^o e \hat{k}^e são diferentes.

com

$$C^o = \frac{1}{|\vec{k}^o \times \hat{s}|}, \quad (2.8)$$

$$C^e = \frac{1}{|\vec{k}^e \times \hat{s}| \sqrt{n_o^4 |\vec{k}^e \times \hat{s}|^2 + n_e^4 (\vec{k}^e \cdot \hat{s})^2}}. \quad (2.9)$$

Conforme demonstrado por Lalor [2], um feixe eletromagnético propagando em um meio anisotrópico, pode ser consistentemente descrito por uma expansão em dois tipos de ondas planas: as de polarização ordinária e as de polarização extraordinária.

Devido à anisotropia, os campos ordinário e extraordinário possuirão vetores de onda diferentes. A figura 2.6 mostra duas possibilidades de \vec{k} . Em (a) temos a propagação isotrópica e a onda plana que está polarizada no plano ortogonal ao plano principal percebe o vetor de onda \vec{k}^o , ou seja, o vetor de onda ordinário. Em contrapartida, em (b), ilustramos a propagação anisotrópica correspondente a uma onda plana de polarização coplanar ao plano principal cujo vetor de onda é aquele que chamamos de \vec{k}^e , ou seja, vetor de onda extraordinário. O espectro angular do feixe terá então duas componentes, a saber: $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}^o + \vec{\mathcal{E}}^e$, que correspondem às expansões em ondas planas com polarização ordinária e extraordinária, respectivamente. Em concordância com esta afirmação, chamando de \vec{q} a componente transversal ($k_x \hat{x} + k_y \hat{y}$) tanto de \vec{k}^o quanto de \vec{k}^e , podemos escrever

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}^e \hat{\epsilon}_e e^{i\vec{k}^e \cdot \vec{r}} d\vec{q} + \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}^o \hat{\epsilon}_o e^{i\vec{k}^o \cdot \vec{r}} d\vec{q}. \quad (2.10)$$

Com exceção de \vec{r} , todos os termos dentro das integrais são funções de \vec{q} . De acordo com as

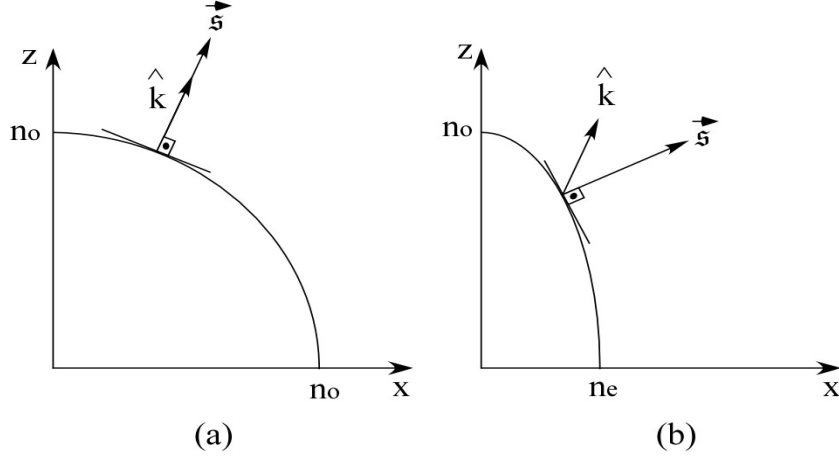


Figura 2.6: Em (a) temos propagação isotrópica, os vetores \hat{k} (vetor de onda unitário) e \vec{s} (vetor de Pointing) têm a mesma direção. Em (b) a propagação é anisotrópica e os vetores \hat{k} e \vec{s} estão em direções diferentes. O vetor \vec{s} sempre estará disposto, no elipsóide de índices, de maneira que uma reta tangente à superfície do elipsóide, no ponto perfurado pelo vetor de onda, forme um ângulo reto com \vec{s} , ou seja, \vec{s} é sempre perpendicular à tangente da curva em cada ponto.

equações (2.1) e (2.2),

$$\vec{k}^o = \vec{q} \pm \sqrt{k^2 - q^2} \hat{z}, \quad (2.11)$$

$$\vec{k}^e = \vec{q} \pm \left(\alpha q_x + \sqrt{\varkappa^2 - \beta q_x^2 - \gamma q_y^2} \right) \hat{z}, \quad (2.12)$$

onde o sinal $+$ ($-$) indica propagação no sentido do eixo z positivo (negativo), e

$$k = n_o \frac{\omega}{c}, \quad (2.13)$$

$$\varkappa = \eta \frac{\omega}{c}, \quad (2.14)$$

$$\eta = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta}}, \quad (2.15)$$

$$\alpha = \frac{(n_e^2 - n_o^2) \sin \theta \cos \theta}{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta}, \quad (2.16)$$

$$\beta = \left(\frac{n_o n_e}{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta} \right)^2, \quad (2.17)$$

$$\gamma = \frac{n_o^2}{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta}. \quad (2.18)$$

Mantendo as formas (2.11) e (2.12) para \vec{k}^o e \vec{k}^e , a solução para o problema da propagação no meio uniaxial só pode ser apresentada de forma generalizada, como feito por Stammes. No nosso caso, estamos interessados em obter expressões que nos permitam calcular os campos transmitidos pelo meio em situações específicas. Vamos portanto adotar a aproximação paraxial e escrever

$$\vec{k}^o \approx \vec{q} \pm \left(k - \frac{q^2}{2k} \right) \hat{z}, \quad (2.19)$$

$$\vec{k}^e \approx \vec{q} \pm \left(\alpha q_x + \varkappa - \frac{\beta q_x^2 + \gamma q_y^2}{2\varkappa} \right) \hat{z}. \quad (2.20)$$

O feixe é composto pelo espectro de \vec{k} e portanto, para cada \vec{k} individualmente existe um plano principal associado. Na equação (2.20), as quantidades β e γ são, respectivamente, magnificações nas componentes x e y do momento transversal. A quantidade \varkappa é o módulo do vetor de onda com anisotropia, η é o índice de refração na direção de propagação do campo extraordinário e α é o termo de *walk-off*. Veremos, posteriormente, que o termo de *walk-off* será de fundamental importância quando tratarmos de uma série de fenômenos como, por exemplo, na transferência do espectro angular de um feixe incidente para o estado de dois fótons gerados em um processo paramétrico e detectados em coincidência.

Agora estamos em posição de calcular as amplitudes \mathcal{E}^o e \mathcal{E}^e do espectro angular transmitido pelo meio.

2.2 A Matriz Transferência

Para determinarmos o campo que sai do meio uniaxial, após percorrer uma distância L , temos primeiramente que calcular o campo que é transferido para o interior do cristal. Para isso, devemos expressar as amplitudes espectrais fora do meio e depois, utilizando as condições de contorno para os campos \vec{E} e \vec{H} , calcular o campo dentro do meio uniaxial. Propagando os campos dentro destes meios, deveremos encontrar as expressões dos campos ordinários e extraordinários e logo após, utilizando novamente as condições de contorno entre os meios, determinar o campo na saída do cristal.

Os espectros angulares dos campos elétricos incidente (i), refletido (r) e transmitido (t) serão escritos na forma

$$\vec{\mathcal{E}}^m = \mathcal{E}^{em} \hat{\epsilon}_e^m + \mathcal{E}^{om} \hat{\epsilon}_o^m, \quad (2.21)$$

onde $m = i, r$, ou t .

Para os campos magnéticos, teremos uma expressão análoga:

$$\vec{\mathcal{H}}^m = \mathcal{H}^{em}(\hat{k}^{em} \times \hat{\epsilon}_e^m) + \mathcal{H}^{om}(\hat{k}^{om} \times \hat{\epsilon}_o^m). \quad (2.22)$$

Vamos determinar a matriz transferência que relaciona os campos dentro e fora do meio uniaxial. Para isso, vamos considerar inicialmente dois meios uniaxiais, meio 1 e meio 2, com eixos ópticos orientados nas direções \hat{s}_1 e \hat{s}_2 . Trataremos os meios isotrópicos como meios uniaxiais no limite $n_e \rightarrow n_o \rightarrow 1$. Na interface 1 – 2 ($z = 0$), que chamaremos de interface I, as componentes tangenciais de \vec{E} e \vec{H} são contínuas [26, 27]. Considerando que cada componente de onda plana deve satisfazer individualmente as condições de contorno na interface,

$$\hat{z} \times [\vec{\mathcal{E}}^i + \vec{\mathcal{E}}^r - \vec{\mathcal{E}}^t]_{z=0} = 0 \quad (2.23)$$

e

$$\hat{z} \times [\vec{\mathcal{H}}^i + \vec{\mathcal{H}}^r - \vec{\mathcal{H}}^t]_{z=0} = 0. \quad (2.24)$$

Para facilitar os cálculos, é mais conveniente expressar o vetor \hat{s} que especifica o eixo óptico em termos de uma base associada à componente transversal \vec{q} do vetor de onda da seguinte forma:

$$\hat{s}^m = \sigma^m \hat{z} + a^m \hat{a} + b^m \hat{b}, \quad (2.25)$$

com

$$\hat{a} = \frac{\vec{q}}{q} \quad (2.26)$$

$$\hat{b} = \hat{z} \times \hat{a}. \quad (2.27)$$

Se $m = i$ ou r , a equação (2.25) se refere ao meio 1, enquanto que se $m = t$, refere-se ao meio 2. Assim, $\hat{s}^i = \hat{s}^r = \hat{s}_1$, $\hat{s}^t = \hat{s}_2$, o mesmo valendo para a^m , b^m e σ^m . A figura 2.7 ilustra o plano em que se encontram os unitários \hat{a} e \hat{b} .

Multiplicando escalarmente (2.23) e (2.24) por \hat{a} e por \hat{b} , respectivamente, tendo em conta (2.6)-(2.9) e (2.21)-(2.22) chegamos a um conjunto de quatro equações para a interface I ($z = 0$):

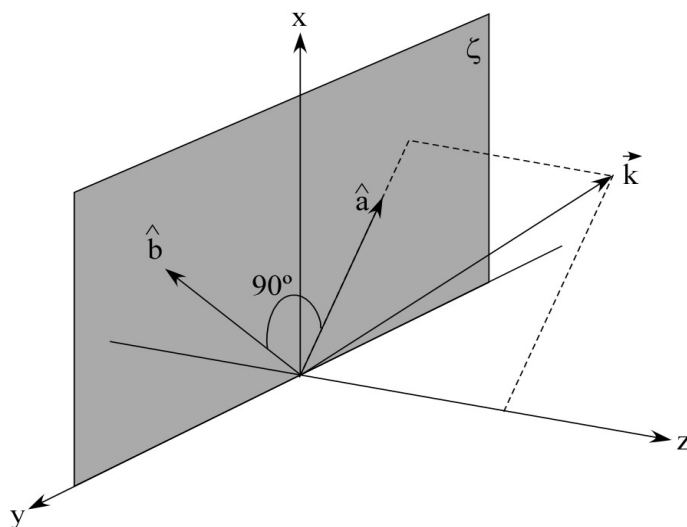


Figura 2.7: Sistema representando a base formada pelos vetores diretores \hat{a} , \hat{b} e \hat{z} . Os vetores \hat{a} , \hat{b} estão no plano ζ , mesmo plano xy .

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} A^{or} & -D^{er}(k^{or})^2 & -A^{ot} & D^{et}(k^{ot})^2 \\ -D^{or}k_z^{or} & B^{er} & D^{ot}k_z^{ot} & -B^{et} \\ D^{or}(k^{or})^2 & A^{er}(k^{or})^2 & -D^{ot}(k^{ot})^2 & -A^{et}(k^{ot})^2 \\ -B^{or} & -D^{er}(k^{or})^2k_z^{er} & B^{ot} & D^{et}(k^{ot})^2k_z^{et} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1^{or} \\ \mathcal{E}_1^{er} \\ \mathcal{E}_1^{ot} \\ \mathcal{E}_1^{et} \end{bmatrix} \\
 = & \mathcal{E}_1^{oi} \begin{bmatrix} -A^{oi} \\ D^{oi}k_z^{oi} \\ -D^{oi}(k^{oi})^2 \\ B^{oi} \end{bmatrix} + \mathcal{E}_1^{ei} \begin{bmatrix} D^{ei}(k^{oi})^2 \\ -B^{ei} \\ -A^{ei}(k^{oi})^2 \\ D^{ei}(k^{oi})^2k_z^{ei} \end{bmatrix}, \quad (2.28)
 \end{aligned}$$

onde

$$A^{pm} = C^{pm}(\sigma^m q - a^m k_z^{pm}), \quad (2.29)$$

$$B^{pm} = C^{pm}[a^{pm}(k^{om})^2 - q(\vec{k}^{pm} \cdot \hat{s}^m)], \quad (2.30)$$

$$D^{pm} = C^{pm}b^m, \quad (2.31)$$

com $p = e, o$, e $m = i, r, t$. A quantidade C^{pm} será dada por (2.8) e (2.9).

Reescrevendo a equação matricial (2.28) na forma

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & \Omega_{14} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} & \Omega_{24} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} & \Omega_{34} \\ \Omega_{41} & \Omega_{42} & \Omega_{43} & \Omega_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}^{or} \\ \mathcal{E}^{er} \\ \mathcal{E}^{ot} \\ \mathcal{E}^{et} \end{bmatrix} = \mathcal{E}^{oi} \begin{bmatrix} \Upsilon_1 \\ \Upsilon_2 \\ \Upsilon_3 \\ \Upsilon_4 \end{bmatrix} + \mathcal{E}^{ei} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ \Gamma_4 \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

poderemos determinar o valor das amplitudes espectrais a partir da regra de Cramer

$$\mathcal{E}^{or} = \frac{\mathcal{E}^{oi} \det[\Omega_1^\Upsilon] + \mathcal{E}^{ei} \det[\Omega_1^\Gamma]}{\det[\Omega]} \quad (2.33)$$

$$\mathcal{E}^{er} = \frac{\mathcal{E}^{oi} \det[\Omega_2^\Upsilon] + \mathcal{E}^{ei} \det[\Omega_2^\Gamma]}{\det[\Omega]} \quad (2.34)$$

$$\mathcal{E}^{ot} = \frac{\mathcal{E}^{oi} \det[\Omega_3^\Upsilon] + \mathcal{E}^{ei} \det[\Omega_3^\Gamma]}{\det[\Omega]} \quad (2.35)$$

$$\mathcal{E}^{et} = \frac{\mathcal{E}^{oi} \det[\Omega_4^\Upsilon] + \mathcal{E}^{ei} \det[\Omega_4^\Gamma]}{\det[\Omega]}, \quad (2.36)$$

onde Ω é a matriz 4×4 de (2.32) e as matrizes Ω_l^Υ e Ω_l^Γ são encontradas trocando a l -ésima coluna da matriz Ω pelas matrizes-colunas Υ e Γ , respectivamente. A demonstração da expressão (2.28) está no apêndice A.

Sabendo as amplitudes dos campos incidente e transmitido, poderemos determinar o campo na interface 2-3 (em $z = L$), e por fim calcular o campo no meio 3. As condições de contorno são análogas, isto é,

$$\hat{z} \times [\vec{\mathcal{E}}^i + \vec{\mathcal{E}}^r - \vec{\mathcal{E}}^t]_{z=L} = 0 \quad (2.37)$$

e

$$\hat{z} \times [\vec{\mathcal{H}}^i + \vec{\mathcal{H}}^r - \vec{\mathcal{H}}^t]_{z=L} = 0. \quad (2.38)$$

Devemos então calcular $\mathcal{E}_{\text{II}}^i$. Agora, definiremos

$$\hat{s}^\mu = \sigma^\mu \hat{z} + a^\mu \hat{a} + b^\mu \hat{b}. \quad (2.39)$$

Se $\mu = i$ ou r , a equação (2.39) se refere ao meio 2, enquanto que se $\mu = t$, refere-se ao meio 3. Assim, $\hat{s}^i = \hat{s}^r = \hat{s}_2$, $\hat{s}^t = \hat{s}_3$, o mesmo valendo para a^μ , b^μ e σ^μ .

2.3 O Campo Elétrico e o Espectro Angular no Meio 2.

De acordo com (2.10), o campo elétrico no meio 2 é dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}_1^{et} \hat{e}_e e^{i\vec{k}^e \cdot \vec{r}} d\vec{q} + \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}_1^{ot} \hat{e}_o e^{i\vec{k}^o \cdot \vec{r}} d\vec{q}, \quad (2.40)$$

onde $\hat{\epsilon}_e$, $\hat{\epsilon}_o$, k_z^e e k_z^o são calculados no meio 2, e \vec{k}^e deve ser calculado levando-se em conta que a onda se propaga no sentido z crescente.

Já vimos que as amplitudes \mathcal{E}_1^{ot} e \mathcal{E}_1^{et} são dadas em função das amplitudes incidentes \mathcal{E}_1^{oi} e \mathcal{E}_1^{ei} pelas equações (2.35) e (2.36), que reescreveremos como

$$\mathcal{E}_1^{ot} = \mathcal{A}\mathcal{E}_1^{oi} + \mathcal{B}\mathcal{E}_1^{ei}, \quad (2.41)$$

$$\mathcal{E}_1^{et} = \mathcal{C}\mathcal{E}_1^{oi} + \mathcal{D}\mathcal{E}_1^{ei}, \quad (2.42)$$

onde

$$\mathcal{A} = \det[\Omega_3^E]/\det[\Omega], \quad (2.43)$$

$$\mathcal{B} = \det[\Omega_3^F]/\det[\Omega], \quad (2.44)$$

$$\mathcal{C} = \det[\Omega_4^E]/\det[\Omega], \quad (2.45)$$

$$\mathcal{D} = \det[\Omega_4^F]/\det[\Omega]. \quad (2.46)$$

2.4 O Campo Elétrico Transmitido para o Meio 3

Fazendo $z = L$ em (2.40) obteremos o espectro angular do campo incidente na interface 2-3 ($\vec{\mathcal{E}}_{\text{II}}^i$), na qual podemos aplicar o mesmo procedimento da seção 2.2 para obter o campo no meio 3 ($\vec{\mathcal{E}}_{\text{II}}^t$) em função do campo incidente na interface 1-2 ($\vec{\mathcal{E}}_1^i$). Em todos os cálculos, estamos desprezando termos de ordem superior, isto é, o campo no meio 1 refletido pela interface II e transmitido pela interface I e as reflexões múltiplas no interior do meio 2.

O espectro angular incidente na interface II será

$$\vec{\mathcal{E}}_{\text{II}}^i = \mathcal{E}_{\text{II}}^{oi} \hat{\epsilon}_o + \mathcal{E}_{\text{II}}^{ei} \hat{\epsilon}_e, \quad (2.47)$$

onde $\hat{\epsilon}_o$ e $\hat{\epsilon}_e$ correspondem ao meio 2 e

$$\mathcal{E}_{\text{II}}^{oi} = \mathcal{E}_1^{ot} e^{ik_z^o L} = (\mathcal{A}\mathcal{E}_1^{oi} + \mathcal{B}\mathcal{E}_1^{ei}) e^{ik_z^o L} \quad (2.48)$$

$$\mathcal{E}_{\text{II}}^{ei} = \mathcal{E}_1^{et} e^{ik_z^e L} = (\mathcal{C}\mathcal{E}_1^{oi} + \mathcal{D}\mathcal{E}_1^{ei}) e^{ik_z^e L}. \quad (2.49)$$

Por um procedimento inteiramente análogo ao da seção 2.2, teremos o campo transmitido para o meio 3 na forma

$$\mathcal{E}_{\text{II}}^{ot} = \mathcal{F}\mathcal{E}_{\text{II}}^{oi} + \mathcal{G}\mathcal{E}_{\text{II}}^{ei}, \quad (2.50)$$

$$\mathcal{E}_{\text{II}}^{et} = \mathcal{L}\mathcal{E}_{\text{II}}^{oi} + \mathcal{M}\mathcal{E}_{\text{II}}^{ei}, \quad (2.51)$$

onde

$$\mathcal{F} = \det[\Lambda_3^E]/\det[\Lambda], \quad (2.52)$$

$$\mathcal{G} = \det[\Lambda_3^F]/\det[\Lambda], \quad (2.53)$$

$$\mathcal{L} = \det[\Lambda_4^E]/\det[\Lambda], \quad (2.54)$$

$$\mathcal{M} = \det[\Lambda_4^F]/\det[\Lambda]. \quad (2.55)$$

A matriz Λ tem expressão idêntica à expressão (2.28) para Ω , porém, levando-se em conta que nas expressões para A^{pm} , B^{pm} e D^{pm} , os índices $m = i$ e $m = r$ indicam que as quantidades devem ser calculadas no meio 2 (uniaxial), enquanto que $m = t$ refere-se ao meio 3 (isotrópico).

Sendo os meios 1 e 3 isotrópicos, a escolha de \hat{s}_1 e \hat{s}_3 é arbitrária. Por exemplo, podemos fazer $\hat{s}_1 = \hat{s}_3 = \hat{z}$. Essa escolha simplifica as matrizes Ω e Λ , já que faz $A^{or} = A^{er} = A^{oi} = A^{ei} = 1$, $D^{or} = D^{er} = D^{oi} = D^{ei} = 0$ em Ω e $A^{ot} = A^{et} = 1$, $D^{ot} = D^{et} = 0$ em Λ . Entretanto, dependendo do estado de polarização do feixe incidente, outras escolhas para \hat{s}_1 e \hat{s}_3 podem ser mais convenientes. Substituindo (2.48) e (2.49) em (2.50) e (2.51), chegamos a uma matriz de transferência do meio 1 para o meio 3, na base \hat{e}_o, \hat{e}_e :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{\text{II}}^{ot} \\ \mathcal{E}_{\text{II}}^{et} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{oo} & T^{oe} \\ T^{eo} & T^{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{\text{I}}^{oi} \\ \mathcal{E}_{\text{I}}^{ei} \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

onde

$$T^{oo} = \mathcal{A}\mathcal{F}e^{ik_z^o L} + \mathcal{C}\mathcal{G}e^{ik_z^e L}, \quad (2.57)$$

$$T^{oe} = \mathcal{B}\mathcal{F}e^{ik_z^o L} + \mathcal{D}\mathcal{G}e^{ik_z^e L}, \quad (2.58)$$

$$T^{eo} = \mathcal{A}\mathcal{L}e^{ik_z^o L} + \mathcal{C}\mathcal{M}e^{ik_z^e L}, \quad (2.59)$$

$$T^{ee} = \mathcal{B}\mathcal{L}e^{ik_z^o L} + \mathcal{D}\mathcal{M}e^{ik_z^e L}. \quad (2.60)$$

Chamaremos a matriz da equação (2.56) de matriz T , ou seja,

$$T = \begin{pmatrix} T^{oo} & T^{oe} \\ T^{eo} & T^{ee} \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

Para mostrar que as equações aqui estabelecidas descrevem de forma correta a propagação dos campos através de meios uniaxiais, faremos a comparação entre o perfil transversal teórico e experimental de um feixe quando atravessa estes meios. A figura 2.8 mostra a fotografia do perfil de intensidade de um feixe gaussiano de comprimento de onda 632.8nm

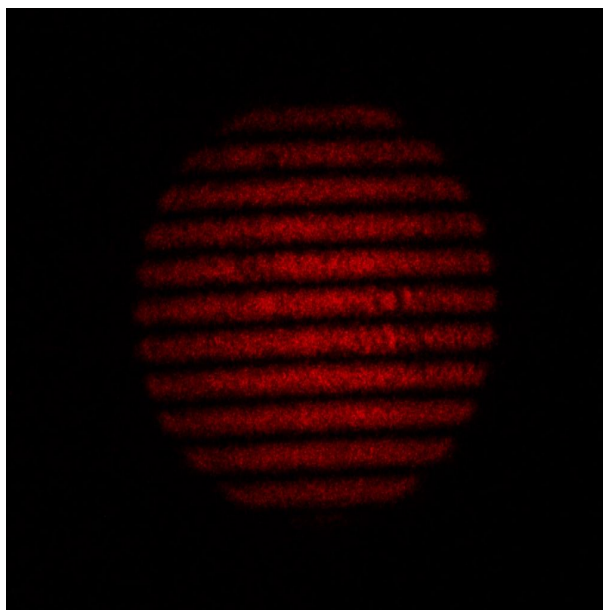


Figura 2.8: Fotografia tirada no laboratório de Óptica Quântica do Departamento de Física da UFMG. Perfil de intensidade de um feixe gaussiano com $\lambda = 632.8nm$ depois de atravessar um cristal uniaxial, BBO do tipo I.

quando atravessa um cristal BBO do tipo I de comprimento $2mm$. Esta imagem é obtida com a montagem da figura 2.9. Na figura, um campo elétrico de polarização vertical \vec{E} passa pelo polarizador P1 polarizado a 45° com relação ao feixe incidente. Luz polarizada a 45° atravessa um cristal não linear negativo ($n_e < n_o$), cujo eixo óptico se encontra no plano formado pela direção de propagação do feixe e a direção vertical. Ao atravessar o cristal há um atraso da componente extraordinária com relação à ordinária. Para observarmos a interferência entre os feixes extraordinário e ordinário necessitamos combiná-los através do polarizador P2 que está polarizado identicamente a P1. Na figura 2.10 temos a curva proveniente da equação (2.56) comparada com os máximos e mínimos da figura 2.8. Vemos que os períodos das curvas teórica e experimental concordam de forma satisfatória. Uma outra comprovação da expressão (2.56) é vislumbrada através da figura conoscópica [28] representada na figura 2.11. A figura conoscópica é obtida através da equação (2.56) quando o feixe incidente tem polarização linear a 45° com o eixo x da figura 2.1 e é altamente focalizado. O cristal é um BBO de comprimento $L = 10mm$ atravessado por um laser de comprimento de onda $\lambda = 632.8nm$ e divergência $2\varphi = 0.2rad$. A luz atravessa o cristal

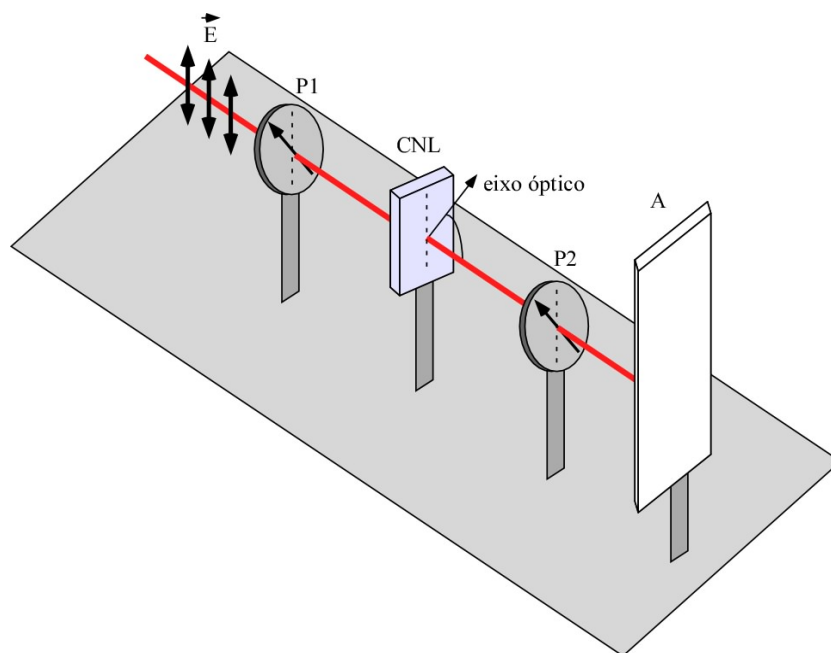


Figura 2.9: Montagem para observar as franjas de interferência entre os feixes ordinário e extraordinário. \vec{E} é o campo incidente que tem polarização vertical. $P1$ e $P2$ são polarizadores orientados a 45° com relação ao campo incidente. CNL é um cristal não linear uniaxial com eixo óptico orientado conforme indicado na figura, no plano formado pela direção de propagação e a direção do campo incidente \vec{E} . A figura de interferência é observada no anteparo A.

na direção do eixo óptico. A equação (2.56) evidencia o caráter vetorial do espectro angular em meios anisotrópicos, uma vez que os elementos T_{oe} e T_{eo} acoplam as duas componentes ortogonais de polarização. A aproximação escalar será válida quando os elementos T_{oe} e T_{eo} puderem ser desprezados.

As figuras 2.12, 2.13 e 2.14 mostram como variam as quantidades T_{oo} , T_{ee} , T_{eo} e T_{oe} em função de q_x e q_y para determinados ângulos θ do eixo óptico. Na figura 2.12 fazemos $\theta = 45^\circ$ e observamos que estas funções variam muito pouco em torno de um certo valor de modo que poderemos considerá-las como constantes. Este comportamento é também observado para ângulos próximos a $\theta = 45^\circ$, que geralmente são os ângulos que permitem o casamento de fase para a conversão paramétrica descendente [29]. Observamos que os termos cruzados T_{eo} e T_{oe} são praticamente nulos e que os termos T_{oo} e T_{ee} são muito próximos de 1.

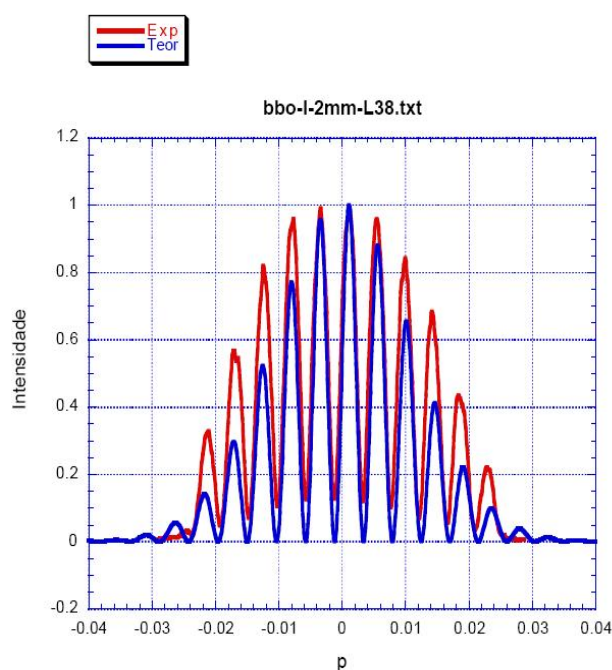


Figura 2.10: Perfil de intensidade de um feixe gaussiano com $\lambda = 632.8nm$ depois de atravessar um cristal uniaxial, BBO do tipo I. O feixe está ilustrado na figura 2.8. As franjas de interferência estão aproximadamente em concordância entre as curvas experimental e teórica.

Estes termos são como coeficientes de transmissão dos campos e eles não chegam à unidade por conta da reflexão nas interfaces. Na figura 2.13 mostramos as variações das quantidades T_{oo} , T_{ee} , T_{eo} e T_{oe} com q_x e q_y , só que agora para $\theta = 90^\circ$. Observamos, novamente, que poderemos considerar estas funções como constantes, com T_{oe} e T_{eo} desprezíveis. Nestes dois casos, onde podemos desprezar T_{oe} e T_{eo} , cada componente do espectro angular pode ser tratada de modo independente.

A situação muda completamente quando fazemos $\theta = 0^\circ$. A figura 2.14 mostra que T_{oo} , T_{ee} , T_{eo} e T_{oe} variam muito com q_x e q_y , o que impossibilita um tratamento escalar para a propagação. Neste caso há acoplamento entre os campos ordinário e extraordinário dentro do meio birrefringente, ou seja, se o campo incidente tiver polarização extraordinária, por exemplo, o campo de saída possuirá as componentes extraordinária e ordinária. Esta componente ordinária não poderá ser desprezada e a formulação vetorial faz-se necessária para explicar a propagação dos campos.

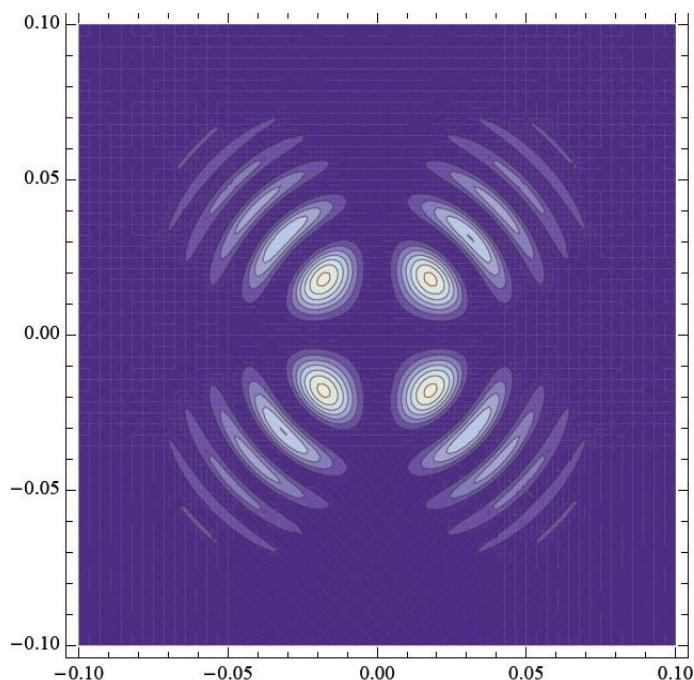


Figura 2.11: Figura conoscópica de um laser de perfil gaussiano com $\lambda = 632.8nm$ e divergência total $2\varphi = 0.2rad$, atravessando um cristal uniaxial BBO de comprimento $L = 10mm$ na direção do eixo óptico.

A equação (2.56) permite determinar o espectro angular no meio 3 conhecendo-se o espectro angular incidente, proveniente do meio 1. A determinação do espectro angular no meio 3 dos feixes que atravessam meios uniaxiais permite analisar o processo da propagação de qualquer feixe eletromagnético nestes meios. O conhecimento da matriz de transferência permite um estudo de vários fenômenos interessantes. Dentre eles, uma análise detalhada do momento angular orbital dos feixes Laguerre-Gaussianos [30, 31, 32, 33]. Estes possuem singularidade nas fases caracterizadas por seu perfil transversal que podem ser conservadas, ou não, durante o processo de propagação [21]. Com a determinação do campo no meio 3 (saída do cristal) poderemos analisar de forma detalhada a propagação destes feixes não somente ao longo do eixo óptico [8, 9, 10] ou na direção perpendicular [11] a este como também em uma direção qualquer. Poderemos também determinar os parâmetros de Stokes de feixes Laguerre-Gaussianos e Hermite-Gaussianos ao atravessarem meios birrefringentes uniaxiais [34]. O conhecimento da matriz T permite-nos saber informações dos estados de polarização do campo por meio da distribuição de intensidade [27]. Poderemos

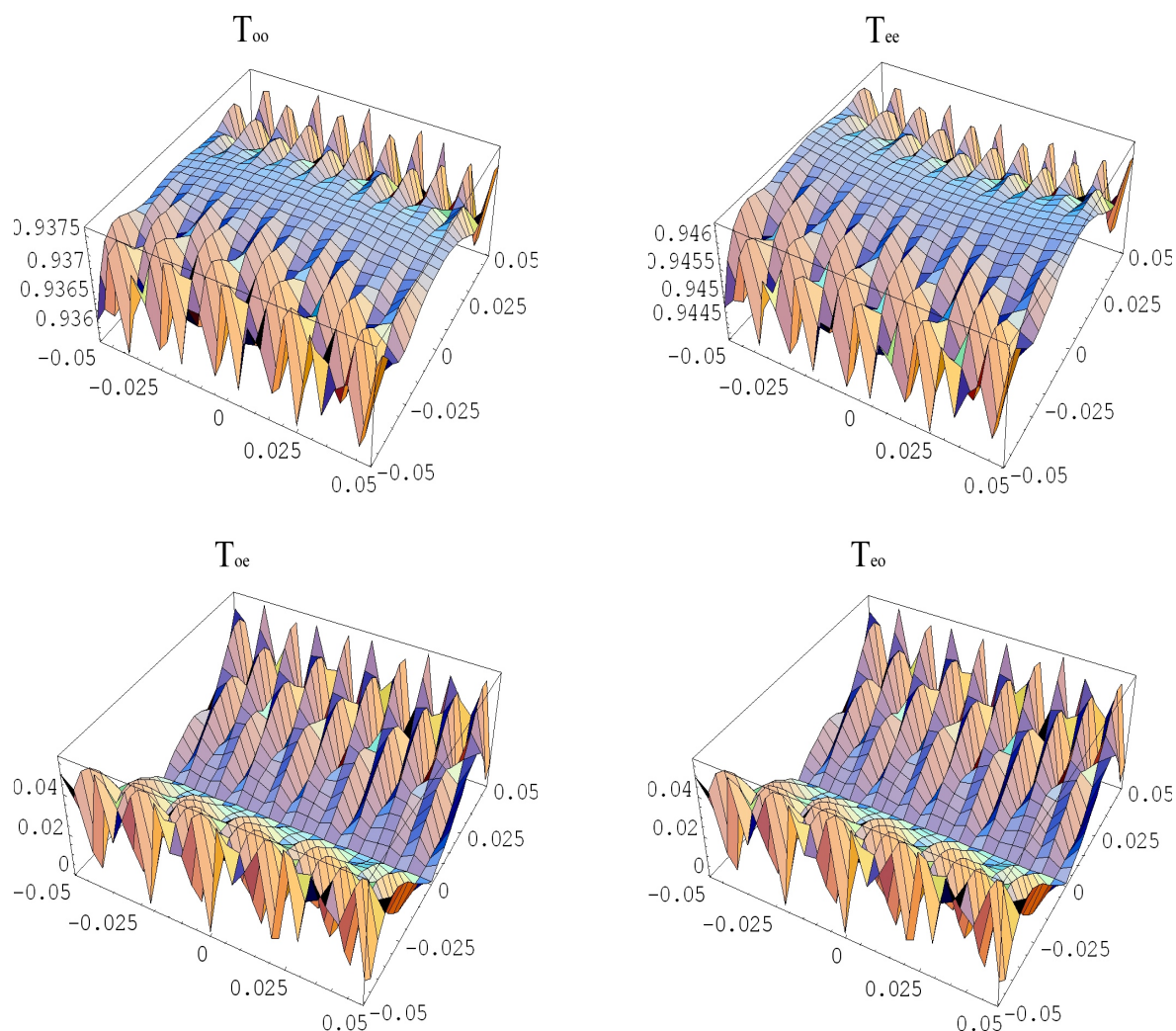


Figura 2.12: Dependência das quantidades T_{oo} , T_{ee} , T_{eo} e T_{oe} com q_x e q_y quando $\theta = 45^\circ$. Todos as funções estão normalizadas sendo o valor máximo igual a 1. Em cima, da esquerda para direita, temos T_{oo} e T_{ee} . Vemos que para T_{oo} existe uma pequena variação em torno de 0.935, ou seja, a função varia muito pouco para este ângulo podendo ser considerada como uma constante. O mesmo é verdade para T_{ee} que tem uma pequena variação em torno de 0.945. Em baixo temos, da esquerda para a direita, T_{oe} e T_{eo} que são praticamente nulas para este ângulo.

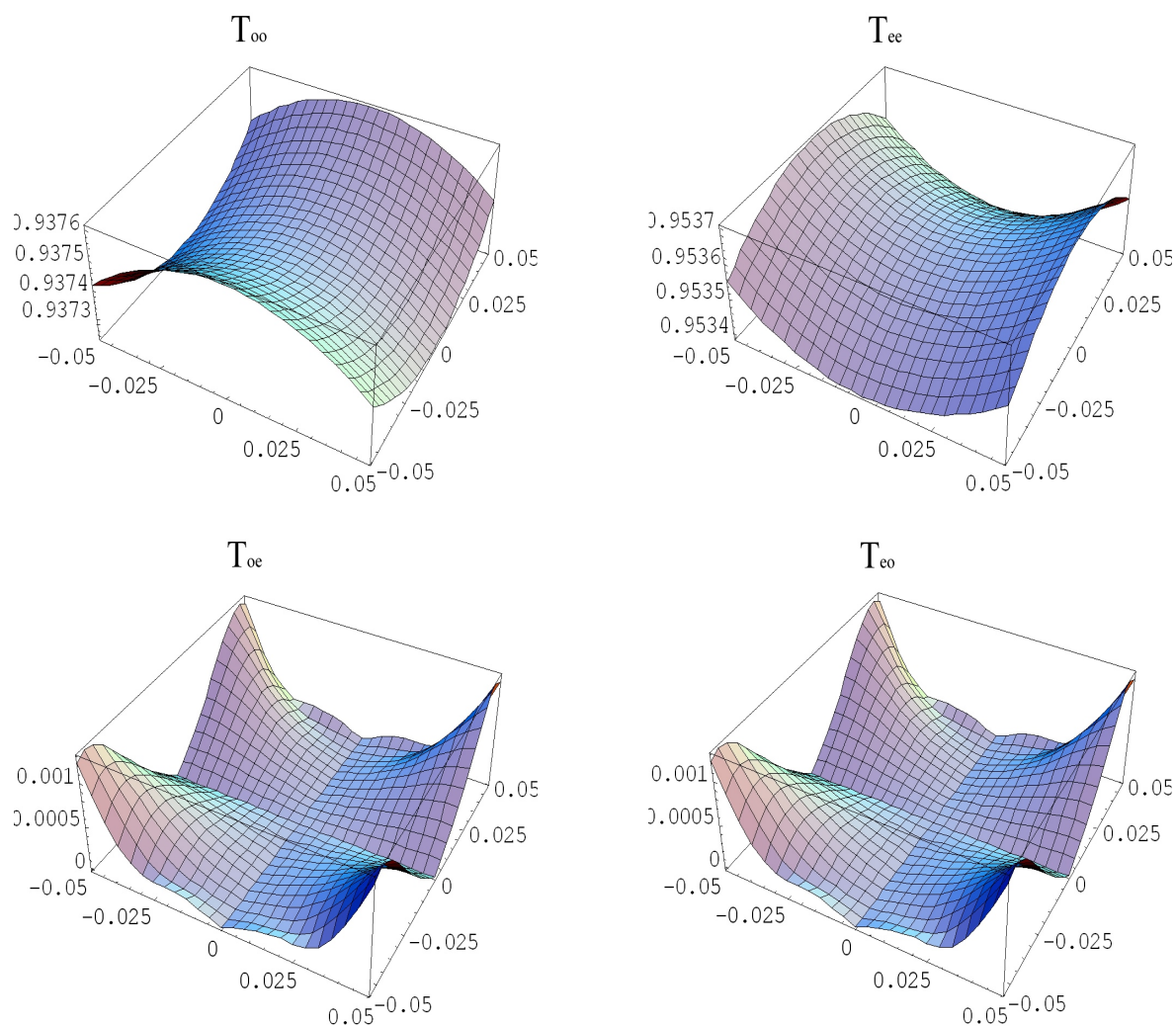


Figura 2.13: Dependência das quantidades T_{oo} , T_{ee} , T_{eo} e T_{oe} com q_x e q_y quando $\theta = 90^\circ$. Todos as funções estão normalizadas sendo o valor máximo igual a 1. Em cima, da esquerda para direita, temos T_{oo} e T_{ee} . Vemos que para T_{oo} existe uma pequena variação em torno de 0.937, ou seja, a função varia muito pouco para este ângulo podendo ser considerada como uma constante. O mesmo é verdade para T_{ee} que varia em torno de 0.953. Em baixo temos, da esquerda para a direita, T_{oe} e T_{eo} que são praticamente nulas para este ângulo.

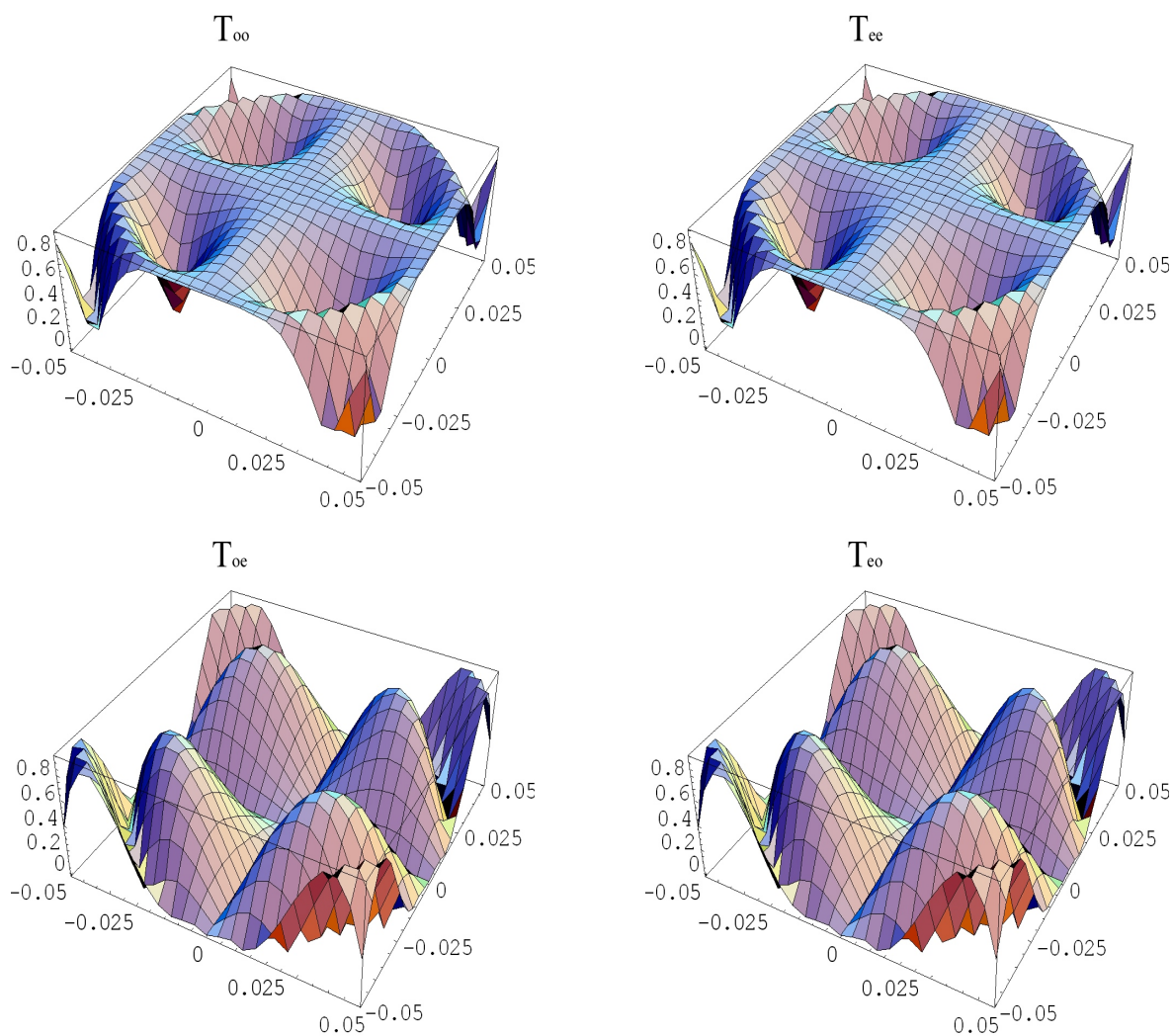


Figura 2.14: Dependência das quantidades T_{oo} , T_{ee} , T_{eo} e T_{oe} com q_x e q_y quando $\theta = 0^\circ$. Todos as funções estão normalizadas sendo o valor máximo igual a 1. Em cima, da esquerda para direita, temos T_{oo} e T_{ee} e em baixo T_{oe} e T_{eo} . Vemos que estas funções variam bruscamente com q_x e q_y .

investigar as mudanças globais do perfil transversal de feixes de altas ordens quando propagados em cristais uniaxiais [35] e um estudo da dinâmica do momento angular nestes meios [11]. Sabendo T , poderemos analisar as trocas de energia entre as componentes cartesianas do campo elétrico [12].

2.5 Conclusões

Apresentamos as equações das superfícies de k , equações (2.1) e (2.2), de onde obtemos os efeitos de anisotropia em meios uniaxiais dados por (2.13)-(2.18). Todos esses efeitos desaparecem quando propagamos luz na direção do eixo óptico. Isso ocorre quando $\theta = 0$ o que leva a $n_o = n_e$. O campo dentro do cristal poderá ser escrito na base de vetores de polarizações ordinária e extraordinária e as ondas planas do espectro angular possuirão duas componentes distintas de polarização. Determinamos a matriz transferência, representada pela equação (2.28), que relaciona os campos entre dois meios. Isso possibilitou uma forma de determinarmos o espectro angular na saída do cristal conhecendo-se o espectro angular incidente. Observamos o comportamento das quantidades T_{oo} , T_{ee} , T_{eo} e T_{oe} em função de q_x e q_y e analisamos em quais casos poderemos dar um tratamento escalar ou vetorial para a propagação dos feixes eletromagnéticos em meios uniaxiais.

Capítulo 3

Propriedades Espaciais e de Frequências da Conversão Paramétrica Descendente

A transferência do espectro angular do feixe incidente para o estado gerado pela conversão paramétrica descendente espontânea (CPDE) é a base de vários efeitos de correlações espaciais de fótons. Estas correlações revelam efeitos não clássicos do processo. Vários fenômenos podem ser estudados tais como a conservação e emaranhamento do momento angular dos fótons [21, 36, 37, 38, 39, 40]. A CPDE ocorre em meios anisotrópicos tais como β -BaB₂O₄ (BBO), LiIO₃ (Iodato de Lítio) e KTiOPO₄ (KTP). A birrefringência destes meios implica em distribuições de vetores de onda, correlações e emaranhamento espacial transversal do estado de dois fótons [41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48]. Neste capítulo determinaremos o estado quântico gerado no processo da conversão paramétrica descendente espontânea (CPDE) quando consideramos um cristal uniaxial de comprimento L com o eixo óptico no plano xz e formando um ângulo agudo θ com a direção de propagação z . Por conta da posição do eixo óptico do cristal, a amplitude do estado possuirá informações sobre a anisotropia do meio que já foram demonstradas no capítulo 2 e expressas pelas equações (2.13)-(2.18). Utilizaremos a aproximação paraxial escrevendo o estado como uma superposição de ondas planas que se propagam, aproximadamente, na direção z . Trataremos do caso do casamento de fases colinear e mostraremos como ocorre a transferência do espectro angular incidente quando fazemos a detecção em coincidência do par de fótons gêmeos. Apresentaremos, de uma forma detalhada, o estado gerado por CPDE com casamento de fases dos tipos I e II.

Na secção 3.1 faremos algumas considerações cujo objetivo é simplificar a expressão da amplitude do estado gerado e facilitar o tratamento da CPDE. Na secção 3.2 determinaremos e analisaremos a amplitude do estado para o casamento de fases do tipo I. Na secção 3.3

analisaremos o processo de detecção para o casamento de fases do tipo II com geração $e \rightarrow eo$ e $e \rightarrow oe$. A última secção constitui uma explicação da montagem experimental para a detecção em coincidência dos fótons gerados. Apresentaremos os resultados experimentais e mostraremos que estes concordam muito bem com os cálculos.

3.1 Estado de Dois Fótons Gerados pela Conversão Paramétrica Descendente Espontânea

O hamiltoniano de interação que descreve o processo óptico não-linear da CPDE em cristais birrefringentes é escrito em termos de uma forma bastante simplificada para o campo quantizado na matéria [29, 49]. Os modos do campo que participam do processo são acoplados pelo tensor suscetibilidade de segunda ordem que estão presentes em cristais que não possuem simetria de inversão [50, 51, 52]. Por conta das condições de casamento de fases, o acoplamento ocorre somente para determinados tipos de polarizações conhecidas como tipo I e tipo II. Em cristais negativos ($n_e < n_o$) tais como o BBO (β -BaB₂O₄) e o Iodato de Lítio (LiIO₃) o processo de conversão do tipo I será da forma $e \rightarrow oo$, o que significa que o fóton incidente, de polarização extraordinária, se converteu em dois fótons com polarizações ordinárias. No casamento de fases do tipo II, o processo será representado na forma $e \rightarrow oe$ o que significa que um fóton de polarização extraordinária se converteu em dois fótons, um com polarizações ordinária e o outro com polarização extraordinária.

Em uma aproximação perturbativa, o estado de dois fótons gerados pela CPDE é escrito na forma [49]

$$|\Psi\rangle = \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} \Phi_{k_p k_1 k_2 \sigma_p \sigma_1 \sigma_2} |\vec{k}_1, \sigma_1\rangle |\vec{k}_2, \sigma_2\rangle, \quad (3.1)$$

onde \vec{k}_1 e \vec{k}_2 são vetores de onda dos fótons convertidos e \vec{k}_p é o vetor de onda do fóton a ser convertido, cuja frequência é ω_p . σ_j indica a polarização de cada campo e pode ser ordinária (o) ou extraordinária (e). $|\vec{k}_j, \sigma_j\rangle$ representa o estado de um fóton no modo de onda plana \vec{k}_j e σ_j [29, 49, 41]. O módulo ao quadrado do coeficiente $\Phi_{k_p k_1 k_2 \sigma_p \sigma_1 \sigma_2}$ dará a probabilidade de registrar dois fótons nos modos \vec{k}_1, σ_1 e \vec{k}_2, σ_2 . A amplitude do estado será dada por [53]

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{k}_p \vec{k}_1 \vec{k}_2 \sigma_p \sigma_1 \sigma_2} &= g_{\vec{k}_p \sigma_p} g_{\vec{k}_1 \sigma_1}^* g_{\vec{k}_2 \sigma_2}^* \tau e^{i\Omega(t-\frac{\tau}{2})} \text{sinc}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \times \\ &\sum_{i,j,l=x,y,z} \tilde{\chi}_{ijl}^{(2)}(\hat{\epsilon}_{\vec{k}_p, \sigma_p})_i (\hat{\epsilon}_{\vec{k}_1, \sigma_1})_j^* (\hat{\epsilon}_{\vec{k}_2, \sigma_2})_l^* \mathcal{E}_{\vec{k}_p \sigma_p} \int_{\mathcal{I}} e^{-i\vec{K}\cdot\vec{r}} d\vec{r}, \quad (3.2) \end{aligned}$$

onde

$$\vec{\mathcal{K}} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_p, \quad (3.3)$$

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2 - \omega_p, \quad (3.4)$$

$$g_{\vec{k}_j, \sigma_j} = i \left[\frac{\hbar \omega_j}{2 \varepsilon_0 V n^2(\vec{k}_j, \sigma_j)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.5)$$

τ é o tempo de interação, $\tilde{\chi}_{ijl}^{(2)}$ é o tensor suscetibilidade elétrica de segunda ordem, V é o volume de quantização, \mathcal{I} é o volume de interação ($L_x L_y L_z$), $n(\vec{k}_j, \sigma_j)$ é o índice de refração correspondendo ao modo \vec{k}_j, σ_j , $(\hat{\varepsilon}_{\vec{k}_i, \sigma_i})_j$ ($j = x, y, z$) são as componentes cartesianas do vetor unitário de polarização, e $\mathcal{E}_{\vec{k}_p, \sigma_p}$ é a amplitude do campo incidente no modo \vec{k}_p, σ_p .

Com o objetivo de simplificar a expressão (3.2) faremos as seguintes aproximações e considerações:

1. A frequência do laser bombeador ω_p é bem definida e o tempo de interação é grande de modo que o termo $\text{sinc } \Omega\tau/2$ é relevante somente quando $\omega_1 + \omega_2 = \omega_p$. As frequências ω_1 e ω_2 poderão, portanto, ser escritas na forma

$$\omega_1 = \frac{1 + \nu}{2} \omega_p, \quad (3.6)$$

$$\omega_2 = \frac{1 - \nu}{2} \omega_p. \quad (3.7)$$

Esta suposição pode ser justificada pelo uso de laser contínuo onde o intervalo de tempo entre duas conversões é grande quando comparado ao tempo de detecção.

2. A largura de banda de frequência dos campos convertidos é pequena quando comparada à frequência central ($\nu \ll 1$), de modo que a variação do índice de refração em torno da frequência central $\omega_p/2$ seja pequena e uma aproximação linear para a dispersão possa ser usada. Esta suposição é justificada pelo uso de filtros de interferência de banda estreita ($\Delta\lambda \approx 10$ nm) na frente dos detectores.
3. Os termos $g_{\vec{k}_j, \sigma_j}$ e $\tilde{\chi}_{ijl}^{(2)}$ são funções de \vec{k}_j que variam tão lentamente que podem ser consideradas constantes dentro da aproximação paraxial.
4. O feixe bombeador propaga-se ao longo da direção z de forma que o seu perfil transversal está completamente contido no cristal, no plano xy . Assim, poderemos estender L_x e L_y até o infinito. Além disso, vamos considerar que a face de entrada do cristal situa-se no plano xy . Então, a integral $\int_{\mathcal{I}} e^{-i\vec{\mathcal{K}} \cdot \vec{r}} d\vec{r}$ será proporcional a

$$\delta(k_{1x} + k_{2x} - k_{px}) \delta(k_{1y} + k_{2y} - k_{py}) \int_0^L e^{-i\mathcal{K}_z z} dz \quad (3.8)$$

onde $L = L_z$ é o comprimento do cristal na direção z , e δ é a função delta de Dirac.

5. O volume de quantização é muito grande, de forma que poderemos trocar as somatórias em \vec{k} por integrais.
6. O feixe bombeador possui apenas polarização extraordinária e o cristal é negativo.

Com as considerações acima, a equação (3.1) tornar-se-á

$$|\Psi\rangle = \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \int d\nu \int d\vec{q}_1 \int d\vec{q}_2 \Phi_{\sigma_1 \sigma_2}(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \nu) |\vec{q}_1, \nu, \sigma_1\rangle |\vec{q}_2, -\nu, \sigma_2\rangle, \quad (3.9)$$

onde $|\vec{q}_j, \nu, \sigma_j\rangle$ representa um estado de um fóton no modo definido pela componente do vetor de onda transversa à direção de propagação, \vec{q}_j , pela frequência $(1 + \nu)\omega_p/2$ e pela polarização σ_j .

A amplitude do estado gerado poderá ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \Phi_{\sigma_1 \sigma_2} &\approx C_{\sigma_1 \sigma_2} G(\nu) \mathcal{E}(\vec{q}_1 + \vec{q}_2) \int_0^L e^{-i\mathcal{K}_z z} dz \\ &= C_{\sigma_1 \sigma_2} G(\nu) \mathcal{E}(\vec{q}_1 + \vec{q}_2) L e^{-\frac{i}{2}\mathcal{K}_z L} \operatorname{sinc} \frac{\mathcal{K}_z L}{2}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde $C_{\sigma_1 \sigma_2}$ é uma constante de acoplamento que depende do tensor suscetibilidade, $G(\nu)$ é uma função definida pelo perfil espectral dos filtros colocados em frente aos detectores e $\tilde{\mathcal{E}}$ é o espectro de ondas planas do feixe incidente $\tilde{\mathcal{E}}(\vec{q}_p)$, com \vec{q}_p trocado por $\vec{q}_1 + \vec{q}_2$.

Se a anisotropia do meio for desprezada e se o campo convertido for aproximadamente monocromático, para casamento de fases colinear, a quantidade \mathcal{K}_z terá uma forma simples em termos de \vec{q}_1 e \vec{q}_2 , com as componentes $k_{jz} = \sqrt{|\vec{k}_j|^2 - |\vec{q}_j|^2}$. Na aproximação paraxial, $k_{jz} \approx |\vec{k}_j| - |\vec{q}_j|^2/2|\vec{k}_j|$. Nestas condições, teremos

$$\operatorname{sinc} \frac{\mathcal{K}_z L}{2} = \operatorname{sinc} \left(\frac{L}{4|\vec{k}_p|} |\vec{q}_1 - \vec{q}_2|^2 \right), \quad (3.11)$$

que aparece na referência [22]. Em casos mais gerais devemos levar em consideração a anisotropia do meio.

A geometria do problema a ser tratado está ilustrada na figura 3.1. O fóton incidente chega a interface $z = 0$ e enquanto atravessa o cristal, por meio de um processo não-linear óptico, é convertido em dois fótons gêmeos. A amplitude do estado quântico que descreve os fótons gêmeos é dada pela equação (3.10).

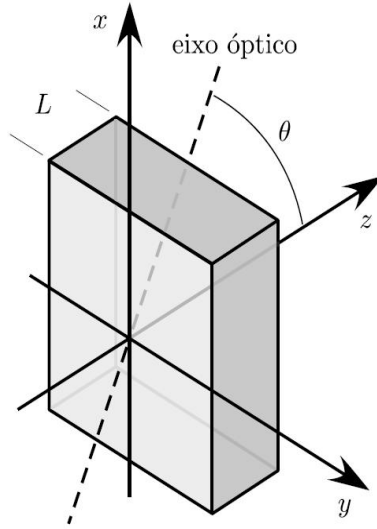


Figura 3.1: Geometria do problema. Um meio uniaxial tem a forma de paralelepípedo. Seu comprimento na direção z é L e possui suas faces paralelas ao plano xy . O eixo óptico está no plano xz e forma um ângulo agudo θ com a direção z positiva.

Nas seções seguintes discutiremos o termo

$$\Delta = \frac{\mathcal{K}_z L}{2}, \quad (3.12)$$

já que ele determina boa parte das propriedades dos campos convertidos.

3.2 Casamento de Fases do Tipo I

No casamento de fases do tipo I teremos um feixe incidente com polarização linear (\hat{e}_e para cristais negativos ou \hat{e}_o para cristais positivos) e a conversão em dois outros feixes de polarizações iguais e perpendiculares ao feixe de entrada. Em um cristal negativo,

$$|\Psi\rangle = \int d\nu \int d\vec{q}_1 \int d\vec{q}_2 \Phi_{oo}(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \nu) |\vec{q}_1, \nu, \hat{e}_o\rangle |\vec{q}_2, -\nu, \hat{e}_o\rangle. \quad (3.13)$$

A figura 3.2 ilustra o processo de produção dos fótons gêmeos e o espectro de cores observado. Os fótons convertidos possuem uma certa correlação, observadas na detecção em coincidências. Na detecção de quarta ordem ou detecção em coincidência dos fótons convertidos, poderemos observar uma série de fenômenos. Veremos que, dependendo de

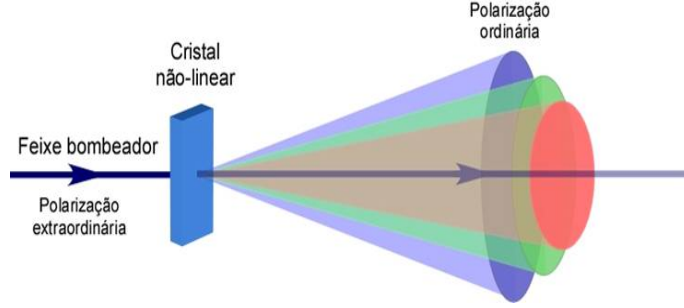


Figura 3.2: Conversão paramétrica descendente tipo I. O feixe incidente tem polarização extraordinária e gera dois fótons com polarizações ordinárias.

como movimentamos os detectores, no processo de detecção poderemos reproduzir as propriedades do feixe incidente e que as propriedades de anisotropia do meio são transferidas para o par de fótons da conversão.

Utilizando as equações (2.19) e (2.20), considerando que o fóton incidente tem polarização extraordinária ($\hat{\epsilon}_e$) e o par de fótons convertidos têm polarizações ordinárias ($\hat{\epsilon}_o$), obtemos

$$\begin{aligned} k_{pz} &\approx \kappa_p + \alpha_p q_{px} - \frac{1}{2\kappa_p} (\beta_p q_{px}^2 + \gamma_p q_{py}^2) \\ k_{1z} &\approx k_1 - \frac{q_{1x}^2 + q_{1y}^2}{2k_1} \\ k_{2z} &\approx k_2 - \frac{q_{2x}^2 + q_{2y}^2}{2k_2}. \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_p &= -\frac{n_e^2 - n_o^2}{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta} \sin \theta \cos \theta, \\ \beta_p &= \frac{n_e^2 n_o^2}{(n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta)^2}, \\ \gamma_p &= \frac{n_o^2}{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta}, \\ \kappa_p &= \eta_p \frac{\omega_p}{c}, \\ \eta_p &= \frac{n_e n_o}{\sqrt{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta}}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Nas expressões acima, os índices de refração n_o e n_e são calculados na frequência ω_p .

Vamos agora nos concentrar no cálculo de Δ , definido em (3.12), para o casamento de fases do tipo I, que chamaremos de Δ_{oo} . Na aproximação paraxial podemos escrever

$$\Delta_{oo} \approx \left[k_1 - \frac{q_1^2}{2k_1} + k_2 - \frac{q_2^2}{2k_2} - \varkappa_p + \alpha_p q_{px} + \frac{1}{2\varkappa_p} (\beta_p q_{px}^2 + \gamma_p q_{py}^2) \right] \frac{L}{2}, \quad (3.15)$$

com

$$k_1 = n_{o1} \frac{\omega_1}{c} \rightarrow k_1 = \frac{\bar{n}_o (1 + a\nu) (1 + \nu) \omega_p}{2c} \quad (3.16)$$

e

$$k_2 = n_{o2} \frac{\omega_2}{c} \rightarrow k_2 = \frac{\bar{n}_o (1 - a\nu) (1 - \nu) \omega_p}{2c}, \quad (3.17)$$

onde \bar{n}_o corresponde à frequência $\omega_p/2$. Para determinar as expressões acima utilizamos as equações (3.6) e (3.7). A quantidade α_p é o termo de *walk-off* e mostraremos, posteriormente, que este termo limita a transferência do espectro angular. O fator a nos dá uma medida da variação linear da dispersão e será

$$a = \frac{\omega_p}{2\bar{n}_o} \left. \frac{dn_o}{d\omega} \right|_{\omega=\frac{\omega_p}{2}}. \quad (3.18)$$

Como assumimos que $\nu \ll 1$ os índices n_{o1} e n_{o2} podem ser escritos como uma aproximação linear na forma

$$n_{o1} = \bar{n}_o (1 + a\nu), \quad (3.19)$$

$$n_{o2} = \bar{n}_o (1 - a\nu). \quad (3.20)$$

Como

$$q_{px} = q_{1x} + q_{2x}, \quad (3.21)$$

$$q_{py} = q_{1y} + q_{2y}, \quad (3.22)$$

$$\varkappa_p = \eta_p \frac{\omega_p}{c}, \quad (3.23)$$

ficaremos com

$$\Delta_{oo} \approx \left\{ k_1 - \frac{q_1^2}{2k_1} + k_2 - \frac{q_2^2}{2k_2} - \varkappa_p + \alpha_p (q_{1x} + q_{2x}) + \frac{1}{2\varkappa_p} \left[\beta_p (q_{1x} + q_{2x})^2 + \gamma_p (q_{1y} + q_{2y})^2 \right] \right\} \frac{L}{2} \quad (3.24)$$

O termo $k_1 + k_2 - \varkappa_p$ será

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 - \varkappa_p &= \frac{\bar{n}_o \omega_p}{c} (1 + a\nu^2) - \eta_p \frac{\omega_p}{c} \\ &= \frac{\omega_p}{c} [\bar{n}_o (1 + a\nu^2) - \eta_p] \\ &= K\mu_{oo}, \end{aligned}$$

onde

$$K = \frac{\omega_p}{c}$$

$$\mu_{oo} = \bar{n}_o (1 + a\nu^2) - \eta_p.$$

A quantidade μ_{oo} é o termo que dá o casamento de fase. Para a geração colinear, $\mu_{oo} = 0$. Trabalhando o último termo da equação (3.24), onde usaremos as relações para K , k_1 , k_2 e \varkappa_p , teremos

$$\Delta_{oo} \approx [K\mu_{oo} + \alpha_p (q_{1x} + q_{2x})] \frac{L}{2}$$

$$- \frac{L}{2\bar{n}_o K} \left[\frac{q_1^2}{(1 + a\nu)(1 + \nu)} + \frac{q_2^2}{(1 - a\nu)(1 - \nu)} - \frac{b}{2} (q_{1x} + q_{2x})^2 - \frac{g}{2} (q_{1y} + q_{2y})^2 \right], \quad (3.25)$$

onde

$$b = \beta_p \frac{\bar{n}_o}{\eta_p},$$

$$g = \gamma_p \frac{\bar{n}_o}{\eta_p}.$$

Podemos ainda escrever a equação (3.25) em termos dos ângulos de saída dos fótons gêmeos. Observando a figura 3.3 vemos que

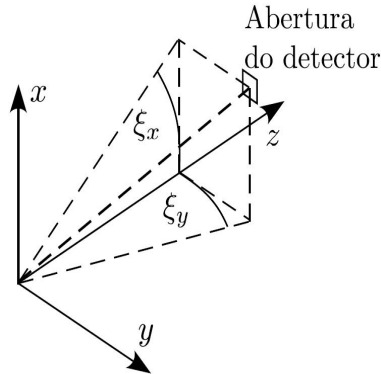


Figura 3.3: Componentes angulares dos campos convertidos durante o processo de luminescência paramétrica.

$$\tan \xi = \frac{q_x}{k} \rightarrow \tan \xi = \frac{c}{\omega} q_x. \quad (3.26)$$

Em geral os detectores são posicionados de forma que os ângulos de interesse são bastante pequenos, ou seja os campos propagam-se com pequenos ângulos com relação ao eixo z .

Considerando ξ muito pequeno, podemos aproximar $\tan \xi \approx \xi$. Aqui definimos os vetores $\vec{\xi}_1 = (\xi_{1x}, \xi_{1y})$ e $\vec{\xi}_2 = (\xi_{2x}, \xi_{2y})$, como ilustrado na figura 3.3. Com isso

$$\xi_{1j} \approx \frac{c}{\omega_1} q_{1j} \quad (3.27)$$

$$\xi_{2j} \approx \frac{c}{\omega_2} q_{2j} \quad (3.28)$$

onde $j = x, y$.

Utilizando as expressões (3.6) e (3.7), além da definição de $K = \omega_p/c$, temos que

$$\vec{q}_1 \approx \frac{1+\nu}{2} K \vec{\xi}_1, \quad (3.29)$$

$$\vec{q}_2 \approx \frac{1-\nu}{2} K \vec{\xi}_2. \quad (3.30)$$

Substituindo as expressões (3.29-3.30) em (3.25), chegamos a

$$\Delta_{oo} \approx KLf_{oo}, \quad (3.31)$$

onde

$$f_{oo} = \frac{\mu_{oo}}{2} + \frac{\alpha_p}{4} [\xi_{1x}(1+\nu) + \xi_{2x}(1-\nu)] - \frac{1}{8\bar{n}_o} \left\{ \xi_1^2(1+\nu) + \xi_2^2(1-\nu) - \frac{b}{2} [\xi_{1x}(1+\nu) + \xi_{2x}(1-\nu)]^2 - \frac{g}{2} [\xi_{1y}(1+\nu) + \xi_{2y}(1-\nu)]^2 \right\}. \quad (3.32)$$

Podemos agora calcular a amplitude (3.10) do estado para o casamento de fases do tipo I em termos dos ângulos de saída:

$$\begin{aligned} \Phi_{oo} &\approx C_{\sigma_1\sigma_2} G(\nu) \mathcal{E}(\vec{q}_1 + \vec{q}_2) L e^{-i\Delta_{oo}} \text{sinc } \Delta_{oo} \\ &= NG(\nu) \mathcal{A}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \nu) e^{-iKLf_{oo}} \text{sinc}(KLf_{oo}), \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde N é uma constante de normalização, f_{oo} é dado pela equação (3.32), e

$$\mathcal{A}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \nu) = \mathcal{E} \left(\frac{1+\nu}{2} K \vec{\xi}_1 + \frac{1-\nu}{2} K \vec{\xi}_2 \right). \quad (3.34)$$

Para mostrar que a equação (3.33) descreve corretamente a dependência de Φ_{oo} com a frequência e com os ângulos de saída, a figura 3.4 mostra a dependência de ξ_x com o comprimento de onda dos fótons convertidos para um cristal de Iodato de Lítio de largura 15 mm e bombardeado por um feixe de laser de 325 nm para três diferentes ângulos θ de casamento de fases.

Para $\theta = 59.217^\circ$ e $\theta = 59.185^\circ$, os resultados encontrados concordam muito bem com dados experimentais obtidos por Bogdanov *et al.* [1]. Resultados análogos são obtidos por

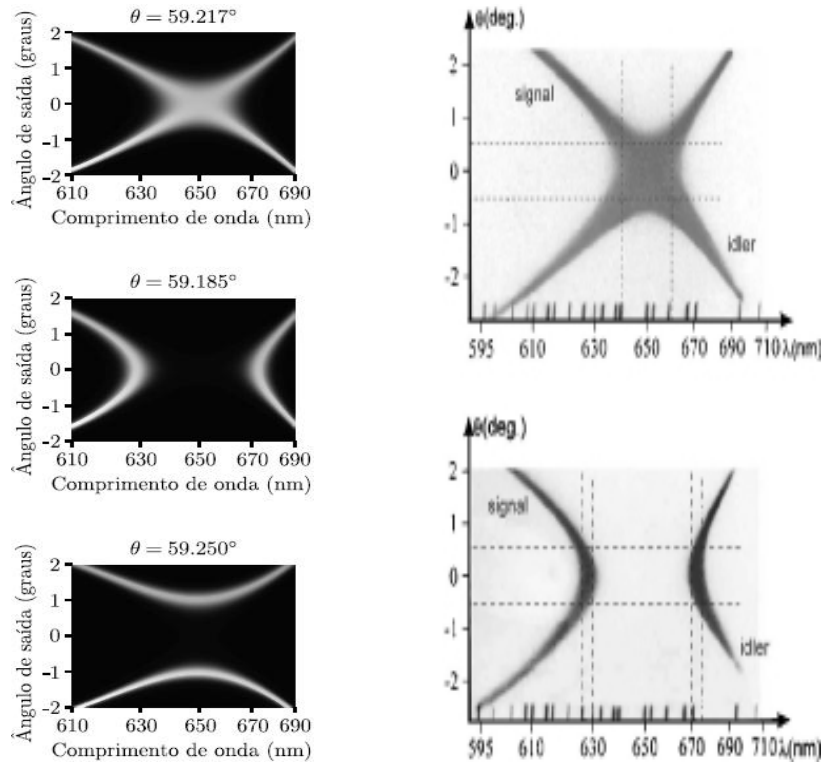


Figura 3.4: Ângulo de saída em função do comprimento de onda do campo convertido para um cristal de Iodato de Lítio bombeado por um feixe de laser de comprimento de onda $\lambda = 325$ nm, para três ângulos de casamento de fases θ (à esquerda). Esses resultados foram obtidos da equação (3.33). A escala horizontal foi ajustada para permitir a comparação direta com os dados experimentais de Bogdanov *et al.* [1] (à direita).

Baek *et al.* [46] ao estudar as propriedades espectrais do par de fótons emaranhados do tipo I na CPDE.

Uma outra representação útil para Φ_{oo} é escrita quando fazemos a seguinte mudança de representação:

$$\vec{\xi}_s = \frac{1}{2}(\vec{\xi}_1 + \vec{\xi}_2) \quad (3.35)$$

$$\vec{\xi}_d = \frac{1}{2}(\vec{\xi}_1 - \vec{\xi}_2). \quad (3.36)$$

Agora poderemos escrever a equação (3.33) na forma

$$\Phi_{oo} = N \mathcal{E} \left(K \vec{\xi}_s + K \nu \vec{\xi}_d \right) \text{sinc} (K L F_{oo}) e^{-i K L F_{oo}}, \quad (3.37)$$

onde

$$F_{oo} = \frac{\mu_{oo}}{2} + \frac{\alpha_p}{2}(\xi_{sx} + \nu\xi_{dx}) - \frac{1}{4\bar{n}_o} [(1-b)\xi_{sx}^2 + (1-g)\xi_{sy}^2 + \xi_d^2 + (2-b)\nu\xi_{sx}\xi_{dx} + (2-g)\nu\xi_{sy}\xi_{dy}].$$

Quando os parâmetros b e g são aproximados por 1, teremos

$$F_{oo} \approx \frac{\mu_{oo}}{2} + \frac{\alpha_p}{2}(\xi_{sx} + \nu\xi_{dx}) - \frac{1}{4\bar{n}_o}(\xi_d^2 + \nu\vec{\xi}_s \cdot \vec{\xi}_d). \quad (3.38)$$

No caso de frequência degenerada ($\nu = 0$), teremos

$$F_{oo} \approx \frac{\mu_{oo}}{2} + \frac{\alpha_p}{2}\xi_{sx} - \frac{\xi_d^2}{4\bar{n}_o}. \quad (3.39)$$

Quando os detectores se movem em sentidos opostos de modo que $\vec{\xi}_s = 0$, a probabilidade de detecção em coincidência (para $\nu = 0$) será proporcional a

$$|\Phi_{oo}|_d^2 \approx \left| N \mathcal{E}(0) \operatorname{sinc} \left[\frac{KL}{4\bar{n}_o} (R^2 - \xi_d^2) \right] \right|^2, \quad (3.40)$$

onde $R = \sqrt{2\bar{n}_o\mu_{oo}}$. Vemos que a probabilidade de detecção em coincidências é máxima quando o vetor $\vec{\xi}_d$ descreve um círculo de raio R .

Quando os detectores são escaneados na mesma direção e sentido, de modo que $|\vec{\xi}_d| = R$, teremos

$$|\Phi_{oo}|_s^2 \approx \left| N \mathcal{E}(K\vec{\xi}_s) \operatorname{sinc} \left(\frac{1}{2} KL\alpha_p \xi_{sx} \right) \right|^2. \quad (3.41)$$

A equação (3.41) ilustra a possibilidade de transferência do espectro angular $\mathcal{E}(\vec{q})$ do feixe bombeador para o campo convertido $\mathcal{E}(K\vec{\xi}_s) = \mathcal{E}(\vec{q}_1 + \vec{q}_2)$ [22] e sua dependência com o comprimento do cristal L e o efeito da anisotropia do sistema. A quantidade α_p , que quantifica o *walk-off*, limita a transferência do espectro angular. Se o argumento da função $\operatorname{sinc}[\dots]$ for muito pequeno, a dispersão dessa função será grande. Em contrapartida, para grandes valores deste argumento, teremos pequena dispersão e um afinamento nesta função. Para que não haja limitação na transferência do espectro angular é necessário que a largura da função $\operatorname{sinc}[\dots]$ seja maior que a largura do espectro angular. Para que isso ocorra, a magnitude do argumento $\operatorname{sinc}[\dots]$ deve ser o menor possível, o que fará com que esta função tenha grande dispersão. Dependendo então da magnitude do número de onda $K = \omega_p/c$, de α_p e do comprimento L , poderemos transferir todo o espectro angular ou não. Quando o campo incidente é Gaussiano, a transferência será satisfatória somente quando sua cintura w_0 for muito maior que $L\alpha_p/2\pi$. Para um BBO de $L \sim 1$ mm, temos $L\alpha_p/2\pi \sim 10 \mu\text{m}$. Este corte na

transferência do espectro angular, causado pelo termo de *walk-off* $\alpha_p \xi_{sx}$, tem consequências na anisotropia de emaranhamento nas variáveis espaciais do estado de dois fótons [25]. Na figura 3.5 temos as comparações entre resultados experimentais e aqueles obtidos através da equação (3.41) para o BBO com $L = 5$ mm, no regime colinear, para o tipo I, bombeado com um laser de 405 nm com cintura $w_0 \approx 25 \mu\text{m}$. No gráfico da esquerda, os dois detectores são deslocados no mesmo sentido, na direção x . A linha tracejada mostra o perfil esperado do espectro angular do laser bombeador. No gráfico da direita, os dois detectores são deslocados no mesmo sentido, na direção y . Aqui, utilizamos filtros de interferência de 10 nm, em frente aos detectores. Vemos claramente que nas condições do experimento o espectro angular do feixe bombeador só é transferido para o estado de dois fótons na direção y .

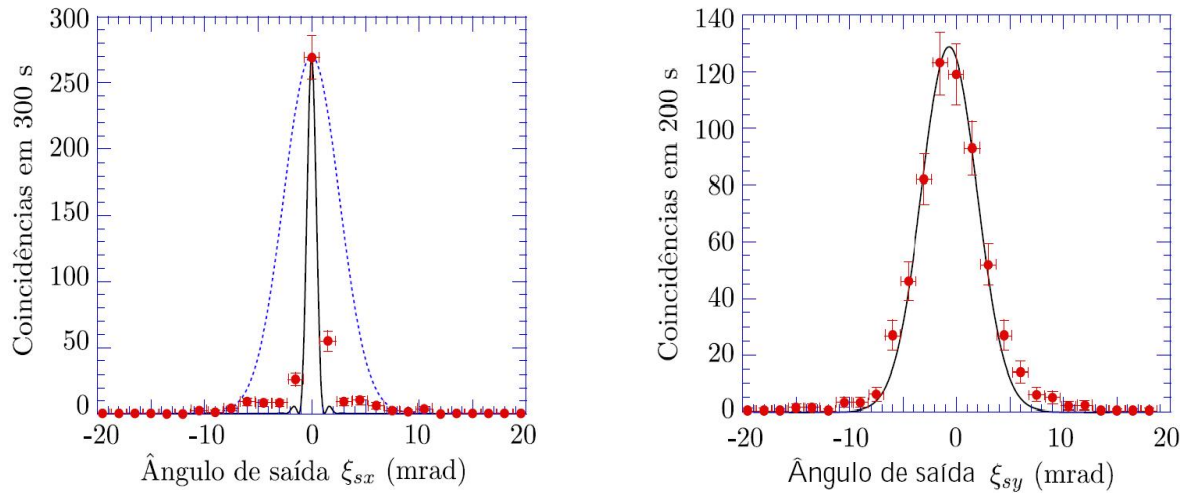


Figura 3.5: Comparação entre resultados experimentais e previsões da equação (3.41) (linha sólida) para o BBO com $L = 5$ mm no regime colinear para o casamento de fases do tipo I, bombeado por feixe de laser de 405 nm com $w_0 \approx 25 \mu\text{m}$. No gráfico da esquerda, os dois detectores são deslocados no mesmo sentido, na direção x . A linha tracejada mostra um perfil gaussiano correspondente ao espectro angular do laser bombeador. No gráfico da direita, os dois detectores são deslocados no mesmo sentido, na direção y .

3.3 Casamento de fases do Tipo II

No casamento de fases do tipo II em um cristal negativo temos um feixe com polarização extraordinária convertendo-se em dois campos de polarizações perpendiculares entre si,

sendo que a polarização de um deles é igual à polarização do feixe de entrada. A conversão pode ocorrer no seguinte esquema: $e \rightarrow eo$ ou $e \rightarrow oe$, onde e corresponde ao fóton de polarização extraordinária e o corresponde ao fóton de polarização ordinária. A figura 3.6 representa esquematicamente o processo de conversão, ao saírem dois cones de luz com um espectro de cores. Trataremos inicialmente do caso em que temos um fóton de polarização extraordinária se convertendo na ordem ordinária e extraordinária ($e \rightarrow oe$) e em seguida trataremos do outro caso. Nos dois casos os cálculos são completamente análogos possuindo apenas alguns remanejamentos de índices. Para contemplar as duas possibilidades, escreveremos a função de onda na forma

$$|\Psi\rangle = \int d\nu \int d\vec{q}_1 \int d\vec{q}_2 (\Phi_{oe}|\vec{q}_1, \nu, \hat{\epsilon}_o\rangle|\vec{q}_2, -\nu, \hat{\epsilon}_e\rangle + \Phi_{eo}|\vec{q}_1, \nu, \hat{\epsilon}_e\rangle|\vec{q}_2, -\nu, \hat{\epsilon}_o\rangle) \quad (3.42)$$

onde deveremos determinar as amplitudes Φ_{oe} e Φ_{eo} .

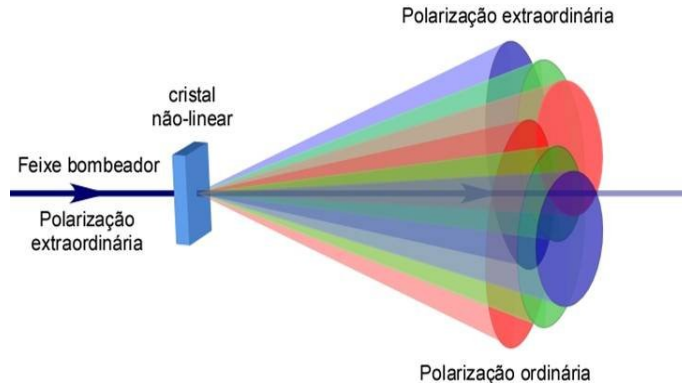


Figura 3.6: Conversão paramétrica descendente tipo II. O feixe incidente tem polarização extraordinária e gera dois fótons com polarizações ordinária e extraordinária.

3.3.1 Conversão $e \rightarrow oe$.

Neste processo de conversão, teremos que

$$k_{pz} \approx \varkappa_p - \alpha_p q_{px} - \frac{1}{2\varkappa_p} (\beta_p q_{px}^2 + \gamma_p q_{py}^2), \quad (3.43)$$

$$k_{1z} \approx k_1 - \frac{q_1^2}{2k_1}, \quad (3.44)$$

$$k_{2z} \approx \varkappa_2 - \bar{\alpha} q_{2x} - \frac{1}{2\varkappa_2} (\bar{\beta} q_{2x}^2 + \bar{\gamma} q_{2y}^2), \quad (3.45)$$

onde

$$k_1 = \bar{n}_o (1 + a\nu) (1 + \nu) \frac{\omega_p}{2c}, \quad (3.46)$$

$$\varkappa_2 = \bar{\eta} (1 - a'\nu) (1 - \nu) \frac{\omega_p}{2c}, \quad (3.47)$$

$$\varkappa_p = \eta_p \frac{\omega_p}{c}, \quad (3.48)$$

e

$$a' = \left. \frac{\omega_p}{2\bar{\eta}} \frac{d\eta}{d\omega} \right|_{\omega=\frac{\omega_p}{2}}. \quad (3.49)$$

Com a ajuda das equações (3.43-3.45), ficaremos com

$$\Delta_{oe} \approx \left[k_1 - \frac{q_1^2}{2k_1} + \varkappa_2 - \bar{\alpha}q_{2x} - \frac{1}{2\varkappa_2} (\bar{\beta}q_{2x}^2 + \bar{\gamma}q_{2y}^2) - \varkappa_p + \alpha_p q_{px} + \frac{1}{2\varkappa_p} (\beta_p q_{px}^2 + \gamma_p q_{py}^2) \right] \frac{L}{2}, \quad (3.50)$$

ou

$$\Delta_{oe} = \left[k_{oe} - \frac{q_1^2}{2k_1} - \bar{\alpha}q_{2x} - \frac{1}{2\varkappa_2} (\bar{\beta}q_{2x}^2 + \bar{\gamma}q_{2y}^2) + \alpha_p q_{px} + \frac{1}{2\varkappa_p} (\beta_p q_{px}^2 + \gamma_p q_{py}^2) \right] \frac{L}{2}, \quad (3.51)$$

com

$$k_{oe} = k_1 + \varkappa_2 - \varkappa_p. \quad (3.52)$$

Temos agora α_p e $\bar{\alpha}$, que são, respectivamente, o *walk-off* do feixe incidente e o *walk-off* de um dos feixes convertidos.

No regime colinear, a equação (3.52) deverá ser nula. Substituindo as equações (3.46-3.48) em (3.52), ficaremos com

$$\begin{aligned} k_{oe} &= n_o (1 + a\nu) (1 + \nu) \frac{\omega_p}{2c} + \bar{\eta} (1 - a'\nu) (1 - \nu) \frac{\omega_p}{2c} - \frac{\eta_p \omega_p}{c} \rightarrow \\ k_{oe} &= \frac{\bar{n}_o \omega_p}{2c} (1 + \nu + a\nu + a\nu^2) + \frac{\bar{\eta} \omega_p}{2c} (1 - \nu - a'\nu + a'\nu^2) - \frac{\eta_p \omega_p}{c}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Como $a \ll 1$, $a' \ll 1$ e $\nu^2 \ll \nu$, a equação (3.53) ficará

$$\begin{aligned} k_{oe} &\approx \frac{\bar{n}_o \omega_p}{2c} (1 + \nu) + \frac{\bar{\eta} \omega_p}{2c} (1 - \nu) - \frac{\eta_p \omega_p}{c}, \\ k_{oe} &\approx \frac{\omega_p}{c} \left[\frac{1}{2} (\bar{n}_o + \bar{\eta}) + \frac{1}{2} (\bar{n}_o - \bar{\eta}) \nu - \eta_p \right], \\ k_{oe} &\approx K \mu_{oe}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

onde

$$\mu_{oe} = \frac{1}{2} (\bar{n}_o + \bar{\eta}) + \frac{1}{2} (\bar{n}_o - \bar{\eta}) \nu - \eta_p. \quad (3.55)$$

Neste caso, o termo de casamento de fases μ_{oe} apresenta uma dependência linear com ν , enquanto que no casamento de fases do tipo I o termo μ_{oo} apresenta uma dependência com ν^2 , conforme (3.25).

Substituindo as expressões (3.46)-(3.48) em (3.51) e lembrando que $a \ll 1$, $a' \ll 1$ e $\nu^2 \ll \nu$, ficaremos com

$$\Delta_{oe} \approx [K\mu_{oe} + \alpha_p q_{1x} + (\alpha_p - \bar{\alpha})q_{2x}] \frac{L}{2} + \frac{L}{2} \left\{ -\frac{cq_1^2}{\bar{n}_o(1+\nu)\omega_p} + \frac{c}{2\eta_p\omega_p} [\beta_p(q_{1x} + q_{2x})^2 + \gamma_p(q_{1y} + q_{2y})^2] - \frac{c}{\bar{\eta}(1-\nu)\omega_p} (\bar{\beta}q_{2x}^2 + \bar{\gamma}q_{2y}^2) \right\},$$

ou

$$\Delta_{oe} \approx [K\mu_{oe} + \alpha_p q_{1x} + (\alpha_p - \bar{\alpha})q_{2x}] \frac{L}{2} + \frac{L}{2\bar{n}_o K} \left\{ \frac{b}{2}(q_{1x} + q_{2x})^2 + \frac{g}{2}(q_{1y} + q_{2y})^2 - \frac{q_1^2}{(1+\nu)} - \frac{\bar{n}_o}{\bar{\eta}(1-\nu)} (\bar{\beta}q_{2x}^2 + \bar{\gamma}q_{2y}^2) \right\}, \quad (3.56)$$

onde

$$b = \frac{\bar{n}_o\beta_p}{\eta_p},$$

$$g = \frac{\bar{n}_o\gamma_p}{\eta_p}.$$

Os dois últimos termos entre chaves da expressão (3.56) ficarão

$$\frac{q_1^2}{(1+\nu)} + \frac{\bar{n}_o}{\bar{\eta}(1-\nu)} (\bar{\beta}q_{2x}^2 + \bar{\gamma}q_{2y}^2) = \frac{\bar{\eta}q_1^2 - \bar{\eta}\nu q_1^2 + \bar{n}_o\bar{\beta}q_{2x}^2 + \bar{n}_o\nu\bar{\beta}q_{2x}^2 + \bar{n}_o\bar{\gamma}q_{2y}^2 + \bar{n}_o\nu\bar{\gamma}q_{2y}^2}{\bar{\eta}(1-\nu)(1+\nu)}.$$

O denominador da equação acima será aproximadamente igual a $\bar{\eta}$ e assim ficaremos com

$$\frac{q_1^2}{(1+\nu)} + \frac{\bar{n}_o}{\bar{\eta}(1-\nu)} (\bar{\beta}q_{2x}^2 + \bar{\gamma}q_{2y}^2) = q_1^2 + \frac{\bar{n}_o\bar{\beta}q_{2x}^2}{\bar{\eta}} + \frac{\bar{n}_o\bar{\gamma}q_{2y}^2}{\bar{\eta}} + \left(\frac{\bar{n}_o\bar{\beta}q_{2x}^2}{\bar{\eta}} - q_1^2 + \frac{\bar{n}_o\bar{\gamma}q_{2y}^2}{\bar{\eta}} \right) \nu. \quad (3.57)$$

Com isso a expressão (3.56) ficará

$$\Delta_{oe} \approx [K\mu_{oe} + \alpha_p q_{1x} + (\alpha_p - \bar{\alpha})q_{2x}] \frac{L}{2} + \frac{L}{2\bar{n}_o K} \left[\frac{b}{2}(q_{1x} + q_{2x})^2 + \frac{g}{2}(q_{1y} + q_{2y})^2 - \bar{b}q_{2x}^2 - \bar{g}q_{2y}^2 - q_1^2 + (q_1^2 - \bar{b}q_{2x}^2 - \bar{g}q_{2y}^2)\nu \right], \quad (3.58)$$

onde

$$\bar{b} = \frac{\bar{n}_o\bar{\beta}_p}{\eta_p},$$

$$\bar{g} = \frac{\bar{n}_o\bar{\gamma}_p}{\eta_p}.$$

Para alguns casos é mais útil escrever a equação (3.58) em termos dos ângulos de saída. Para tanto, tal como foi feito para o casamento de fases do tipo I,

$$\xi_{1j} \approx \frac{cq_{1j}}{\omega_1} = \frac{2q_{1j}}{(1+\nu)K} \rightarrow q_{1j} \approx \frac{1+\nu}{2} K \xi_{1j} \quad (3.59)$$

$$\xi_{2j} \approx \frac{cq_{2j}}{\omega_2} = \frac{2q_{2j}}{(1-\nu)K} \rightarrow q_{2j} \approx \frac{1-\nu}{2} K \xi_{2j}. \quad (3.60)$$

Substituindo as expressões (3.59) e (3.60) na (3.58), teremos

$$\Delta_{oe} = KLf_{oe}, \quad (3.61)$$

com

$$\begin{aligned} f_{oe} &= \frac{\mu_{oe}}{2} + \frac{\alpha_p}{4}(1+\nu)\xi_{1x} + \frac{(\alpha_p - \bar{\alpha})}{4}(1-\nu)\xi_{2x} \\ &+ \frac{1}{8\bar{n}_o} \left\{ \frac{b}{2} [(1+\nu)\xi_{1x} + (1-\nu)\xi_{2x}]^2 + \frac{g}{2} [(1+\nu)\xi_{1y} + (1-\nu)\xi_{2y}]^2 \right\} \\ &- \frac{1}{8\bar{n}_o} \left\{ (1-\nu)(1+\nu)^2 \xi_1^2 + (1+\nu)(1-\nu)^2 \xi_{2x}^2 \bar{b} + (1+\nu)(1-\nu)^2 \xi_{2y}^2 \bar{g} \right\}. \end{aligned}$$

Lembrando novamente que $a \ll 1$, $a' \ll 1$ e $\nu^2 \ll \nu$, ficaremos com

$$\begin{aligned} f_{oe} &= \frac{\mu_{oe}}{2} + \frac{\alpha_p}{4}(1+\nu)\xi_{1x} + \frac{(\alpha_p - \bar{\alpha})}{4}(1-\nu)\xi_{2x} \\ &+ \frac{1}{8\bar{n}_o} \left\{ \frac{b}{2} [(1+\nu)\xi_{1x} + (1-\nu)\xi_{2x}]^2 + \frac{g}{2} [(1+\nu)\xi_{1y} + (1-\nu)\xi_{2y}]^2 \right\} \\ &- \frac{1}{8\bar{n}_o} [(1+\nu)\xi_1^2 + (1-\nu)(\bar{b}\xi_{2x}^2 + \bar{g}\xi_{2y}^2)]. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Portanto, em termos dos ângulos de saída $\vec{\xi}_1$ e $\vec{\xi}_2$, poderemos reescrever a expressão para a amplitude dos campos na forma

$$\Phi_{oe} = NG(\nu)\tilde{\mathcal{E}} \left(\frac{1+\nu}{2} K \vec{\xi}_1 + \frac{1-\nu}{2} K \vec{\xi}_2 \right) \text{sinc}(KLf_{oe}) e^{-iKLf_{oe}}. \quad (3.63)$$

Em termos das variáveis $\vec{\xi}_s$ e $\vec{\xi}_d$, definidas em (3.35) e (3.36), escrevemos

$$\Phi_{oe} = NG(\nu)\tilde{\mathcal{E}} \left(K \vec{\xi}_s + K\nu \vec{\xi}_d \right) \text{sinc}(KLF_{oe}) e^{-iKLF_{oe}}, \quad (3.64)$$

com

$$F_{oe} \approx \frac{\mu_{oe}}{2} + \left[\frac{\alpha_p}{2} + \frac{\bar{\alpha}}{4}(1+\nu) \right] \xi_{sx} + \left[\frac{\alpha_p}{2}\nu - \frac{\bar{\alpha}}{4}(1-\nu) \right] \xi_{dx} - \frac{\xi_d^2}{4\bar{n}_o} + \frac{(1+\nu)\vec{\xi}_s \cdot \vec{\xi}_d}{4\bar{n}_o}, \quad (3.65)$$

onde as quantidades b , \bar{b} , g e \bar{g} foram aproximadas por 1. Caso contrário, a expressão para F_{oe} fica excessivamente complicada.

3.3.2 Conversão $e \rightarrow eo$.

Na conversão do tipo $e \rightarrow eo$, os cálculos são completamente similares àqueles desenvolvidos na subseção anterior, bastando trocar as posições de $\vec{\xi}_1$ e $\vec{\xi}_2$ e substituir ν por $-\nu$. Assim, teremos

$$\Phi_{eo} = NG(\nu)\tilde{\mathcal{E}}\left(\frac{1+\nu}{2}K\vec{\xi}_1 + \frac{1-\nu}{2}K\vec{\xi}_2\right) \text{sinc}(KLf_{eo})e^{-iKLf_{eo}}, \quad (3.66)$$

com

$$\begin{aligned} f_{eo} = & \frac{\mu_{eo}}{2} + \frac{\alpha_p - \bar{\alpha}}{4}(1+\nu)\xi_{1x} + \frac{\alpha_p}{4}(1-\nu)\xi_{2x} \\ & + \frac{1}{8\bar{n}_o} \left\{ \frac{b}{2} [(1+\nu)\xi_{1x} + (1-\nu)\xi_{2x}]^2 + \frac{g}{2} [(1+\nu)\xi_{1y} + (1-\nu)\xi_{2y}]^2 \right\} \\ & - \frac{1}{8\bar{n}_o} [(1+\nu)(\bar{b}\xi_{1x}^2 + \bar{g}\xi_{1y}^2) + (1-\nu)\xi_2^2], \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\mu_{eo} = \frac{1}{2}(\bar{n}_o + \bar{\eta}) - \frac{1}{2}(\bar{n}_o - \bar{\eta})\nu - \eta_p. \quad (3.68)$$

Em termos de $\vec{\xi}_s$ e $\vec{\xi}_d$,

$$\Phi_{eo} = NG(\nu)\tilde{\mathcal{E}}\left(K\vec{\xi}_s + K\nu\vec{\xi}_d\right) \text{sinc}(KLF_{eo})e^{-iKLF_{eo}}, \quad (3.69)$$

com

$$F_{eo} \approx \frac{\mu_{eo}}{2} + \left[\frac{\alpha_p}{2} + \frac{\bar{\alpha}}{4}(1-\nu)\right]\xi_{sx} + \left[\frac{\alpha_p}{2}\nu + \frac{\bar{\alpha}}{4}(1+\nu)\right]\xi_{dx} - \frac{\xi_d^2}{4\bar{n}_o} - \frac{(1-\nu)\vec{\xi}_s \cdot \vec{\xi}_d}{4\bar{n}_o}. \quad (3.70)$$

A figura 3.7 mostra gráficos da contagem simples de fótons em função do ângulo de saída para um cristal BBO com casamento de fases do tipo II, com $L = 1$ mm (esquerda) e $L = 0.25$ mm (direita), bombeado por um laser de 407 nm. Esses gráficos foram obtidos das equações (3.69) e (3.66) integrando-as em uma das variáveis e em ν , supondo que existe um filtro de interferência com largura de 10 nm em frente ao detector. Os resultados concordam perfeitamente com os dados experimentais obtidos por Lee *et al.* [54]. Vemos que os padrões produzidos pela emissão de fótons gêmeos dependem do comprimento do cristal.

Vejam agora quais são os resultados previstos para as contagens em coincidência em experimentos nos quais os detectores se deslocam em sentidos opostos e no mesmo sentido.

Se deslocarmos os detectores em sentidos contrários, isto é, $\vec{\xi}_1 = -\vec{\xi}_2$ teremos $\vec{\xi}_s = 0$. Na ausência de polarizadores, a taxa de contagens em coincidências será proporcional a

$$P_d = \int |\Phi_{oe}|_d^2 + |\Phi_{eo}|_d^2 d\nu = \int \left| NG(\nu)\tilde{\mathcal{E}}(K\nu\vec{\xi}_d) \right|^2 [\text{sinc}^2(KLF'_{oe}) + \text{sinc}^2(KLF'_{eo})] d\nu, \quad (3.71)$$

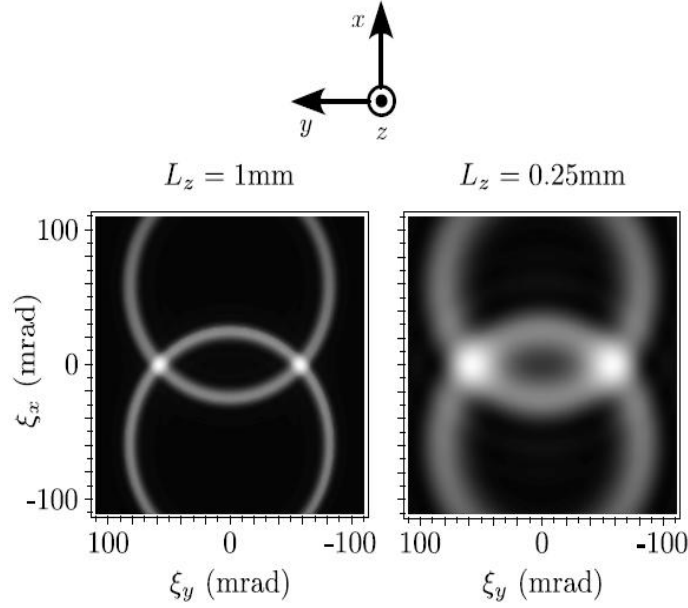


Figura 3.7: Densidades de contagens simples obtidas da equação (3.74), integrada em um dos ângulos de saída e em ν , com um filtro de interferência de 10 nm, para o BBO de comprimentos $L = 1$ mm e $L = 0.25$ mm, com um feixe incidente de 407 nm e $\theta = 42.5^\circ$.

onde

$$F'_{oe} = \frac{\mu_{oe}}{2} + \left[\frac{\alpha_p}{2}\nu + \frac{\bar{\alpha}}{4}(1-\nu) \right] \xi_{dx} - \frac{\xi_d^2}{4\bar{n}_o}, \quad (3.72)$$

$$F'_{eo} = \frac{\mu_{eo}}{2} + \left[\frac{\alpha_p}{2}\nu - \frac{\bar{\alpha}}{4}(1+\nu) \right] \xi_{dx} - \frac{\xi_d^2}{4\bar{n}_o}. \quad (3.73)$$

Rearranjando os termos em (3.72) e (3.73) e considerando que os filtros de frequência são muito finos ($\nu \rightarrow 0$), podemos escrever P_d como

$$P_d \approx \left| N\tilde{\mathcal{E}}(0) \right|^2 \left\{ \text{sinc}^2 \left[\frac{KL}{4\bar{n}_o} (R^2 - |\vec{\xi}_d - C\hat{x}|^2) \right] + \text{sinc}^2 \left[\frac{KL}{4\bar{n}_o} (R^2 - |\vec{\xi}_d + C\hat{x}|^2) \right] \right\}, \quad (3.74)$$

onde

$$R^2 = 2\bar{n}_o\mu_{oe} + \frac{\bar{n}_o^2\bar{\alpha}^2}{4}, \quad (3.75)$$

$$C = \frac{\bar{n}_o\bar{\alpha}}{2}. \quad (3.76)$$

Vemos que a taxa de contagens em coincidências só é relevante quando o vetor $\vec{\xi}_d$ descreve ou um círculo de raio R centrado em $x = C$ ou em $x = -C$, revelando assim a estrutura

especial da função de casamento de fases na CPDE tipo II degenerada ($\nu = 0$). Note que se $\mu_{oe} = \mu_{eo} = 0$, teremos $R = C$, o que significa que os dois círculos se tangenciam em $x = 0$. Este é o caso da geração colinear. Se $\mu_{oe} = \mu_{eo} \approx -\bar{n}_o \bar{\alpha}^2 / 8$, teremos $R \approx 0$, caso conhecido como *beam-like*, onde são produzidos apenas dois feixes finos com separação angular de $2C = \bar{n}_o \bar{\alpha}$.

Quando os detectores são escaneados na mesma direção, de modo que $\vec{\xi}_d = 0$, a probabilidade de detecção em coincidências é

$$P_s = \int |\Phi_{oe}|_s^2 + |\Phi_{eo}|_s^2 d\nu = \left| N \tilde{\mathcal{E}}(K \vec{\xi}_s) \right|^2 \int G^2(\nu) [\text{sinc}^2(KLF''_{oe}) + \text{sinc}^2(KLF''_{eo})] d\nu, \quad (3.77)$$

com

$$F''_{oe} = \frac{\mu_{oe}}{2} + \left[\frac{\alpha_p}{2} + \frac{\bar{\alpha}}{4}(1 + \nu) \right] \xi_{sx} \approx \frac{\mu_{oe}}{2} + \left(\frac{\alpha_p}{2} + \frac{\bar{\alpha}}{4} \right) \xi_{sx}, \quad (3.78)$$

$$F''_{eo} = \frac{\mu_{eo}}{2} + \left[\frac{\alpha_p}{2} + \frac{\bar{\alpha}}{4}(1 - \nu) \right] \xi_{sx} \approx \frac{\mu_{eo}}{2} + \left(\frac{\alpha_p}{2} + \frac{\bar{\alpha}}{4} \right) \xi_{sx}. \quad (3.79)$$

Vamos nos concentrar na geração quase-colinear, isto é, quando $(\bar{n}_o + \bar{\eta})/2 = \eta_p$ e $\mu_{oe} = -\mu_{eo} = (\bar{n}_o - \bar{\eta})\nu/2$. Neste caso particular,

$$F''_{oe} \approx \frac{1}{4} [(2\alpha_p + \bar{\alpha})\xi_{sx} + (\bar{n}_o - \bar{\eta})\nu], \quad (3.80)$$

$$F''_{eo} \approx \frac{1}{4} [(2\alpha_p + \bar{\alpha})\xi_{sx} - (\bar{n}_o - \bar{\eta})\nu]. \quad (3.81)$$

Pelas expressões (3.77), (3.80) e (3.81), vemos que a transferência de espectro angular na CPDE tipo II quase-colinear sofre, em princípio, do mesmo problema que ocorre no tipo I: O espectro angular só é completamente transferido na direção y . Entretanto, devido à dependência linear de μ_{oe} e μ_{eo} com ν , um efeito interessante acontece. Podemos reescrever (3.77) aproximadamente como

$$P_s \propto \left| \tilde{\mathcal{E}}(K \vec{\xi}_s) \right|^2 \int G^2(\nu) \left\{ \text{sinc}^2 \left[\frac{KL}{4} \left(\frac{\xi_{sx}}{m} + \nu \right) \right] + \text{sinc}^2 \left[\frac{KL}{4} \left(\frac{\xi_{sx}}{m} - \nu \right) \right] \right\} d\nu, \quad (3.82)$$

onde $m = (2\alpha_p - \bar{\alpha})/(\bar{n}_o - \bar{\eta})$. Supondo que $G(\nu)$ é uma função par, a expressão (3.82) é equivalente a

$$P_s \propto \left| \tilde{\mathcal{E}}(K \vec{\xi}_s) \right|^2 H \left(\frac{\xi_{sx}}{m} \right), \quad (3.83)$$

onde $H(x)$ é a convolução de $G^2(x)$ com $\text{sinc}^2(KLx/4)$. Nas condições experimentais mais comuns, a largura de H é praticamente igual à largura de G^2 . Vemos assim, que embora o

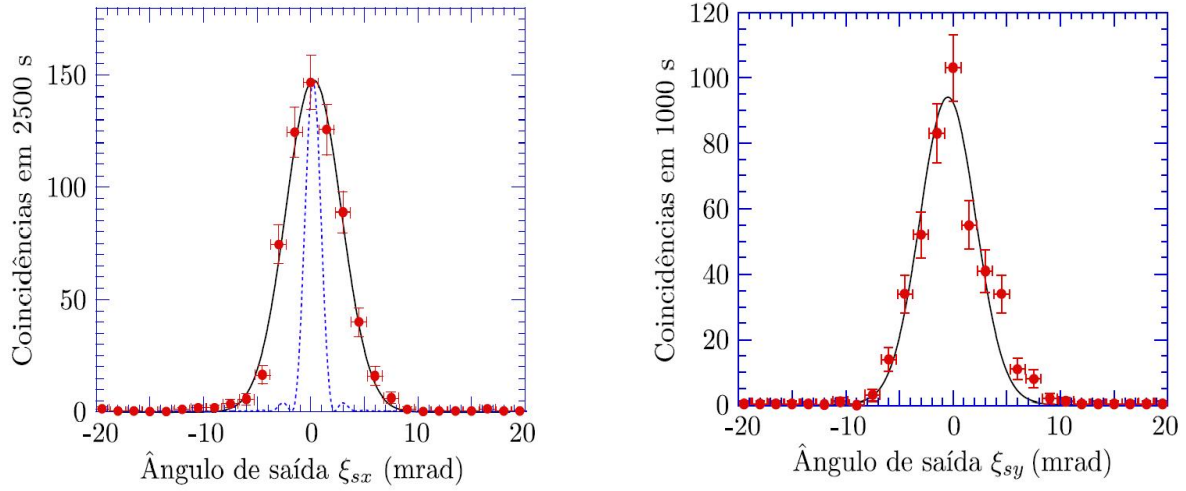


Figura 3.8: Comparação entre os resultados experimentais (\bullet) e as previsões da equação (3.83) (linha sólida) para o BBO com $L = 5$ mm, casamento de fases do tipo II no regime colinear, bombeado por um laser de $\lambda_p = 405$ nm e $w_0 \approx 25$ μ m. Os dois detectores se movem na mesma direção e mesmo sentido, e são equipados com filtros de interferência com largura de linha de 10 nm ($\Delta\nu \approx 0.012$). A gaussiana coincide com o perfil do espectro angular do laser. A linha pontilhada indica o perfil esperado para o caso monocromático ($\Delta\nu \rightarrow 0$).

espectro angular $\mathcal{E}(\vec{\xi})$ do feixe incidente não seja completamente transferido para o estado de dois fótons na CPDE tipo II, poderemos ter uma a transferência perfeita, da imagem do feixe, se a largura dos filtros de interferência $G(\nu)$ dividida pelo fator de magnificação m for muito maior que a largura de \mathcal{E} na direção x .

O efeito de transferência de imagem ora descrito foi testado experimentalmente, com os resultados apresentados na figura 3.8. Um cristal BBO com $L = 5$ mm foi bombeado por um feixe de laser com $\lambda_p = 405$ nm e $w_0 \approx 25$ μ m. O cristal foi orientado para casamento de fases colinear, com $\theta = 41.7^\circ$. Nessas condições, $m \approx 1.5$. Em frente aos detectores, foram colocados filtros de interferência com largura de linha de 10 nm, centrados em 810 nm ($\Delta\nu \approx 0.012$). Vemos claramente que a imagem do perfil de espectro angular do laser foi completamente transferida para o estado de dois fótons nas duas direções ortogonais.

3.4 Montagem Experimental

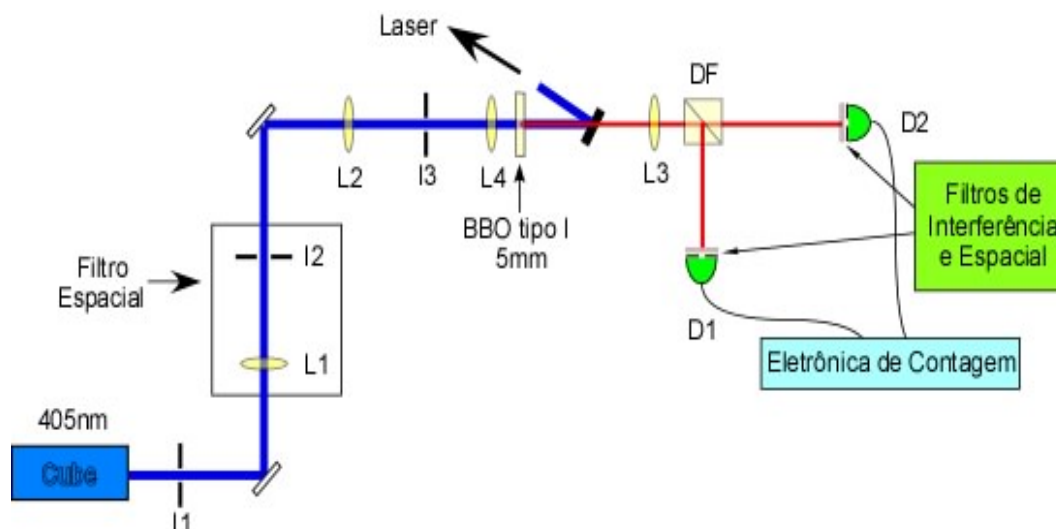


Figura 3.9: Montagem experimental para a detecção em coincidência e no regime colinear no processo da conversão paramétrica descendente espontânea.

A montagem experimental necessária para se medir a transferência do espectro angular, está representada na figura 3.9. Um laser contínuo de comprimento de onda $\lambda = 405 \text{ nm}$, com polarização linear vertical, libera um feixe. I_1 deixa passar somente a parte mais central do feixe. A lente L_1 focaliza o feixe na íris I_2 e esse conjunto forma um filtro espacial que elimina os modos mais altos do espectro angular e torna o feixe completamente gaussiano. A lente L_2 expande o perfil do feixe e I_3 é utilizada como marcador de caminho. L_4 serve para colimar o feixe no cristal não-linear BBO que dará casamento de fases dos tipos I e II. O cristal produz dois fótons gêmeos de frequências degeneradas $\omega_1 = \omega_2 = 810 \text{ nm}$. Um espelho é colocado logo após o cristal para refletir toda a luz ultravioleta e deixar atravessar somente a luz infravermelha. Os pares de fótons, gerados no regime colinear, atravessam a lente L_3 , e passam por um divisor de feixe (DF) para serem distribuídos nos sistemas de detecção D_1 e D_2 . O objetivo da lente L_3 é focalizar o feixe na região de detecção para assim tomarmos a transformada de Fourier dos perfis transversais de campo dos fótons convertidos. A estes sistemas de detecção existem ainda acoplados, orifícios de $300 \mu\text{m}$ e filtros de interferência de $(810 \pm 10) \text{ nm}$.

Podemos movimentar os detectores D_1 e D_2 de várias formas em uma direção transver-

sal à propagação dos fótons convertidos. Os detectores $D1$ e $D2$ são montados em estágios de deslocamento nas direções horizontal (y) e vertical (x).

3.5 Conclusões

Obtemos as expressões para os estados quânticos gerados na CPDE para os casamentos de fase dos tipos I e II para o caso não-monocromático com feixe incidente de frequência bem definida. Os estados foram gerados em um cristal birrefringente uniaxial de espessura L . Alguns efeitos de anisotropia estão presentes no estado quântico gerado. O termo de *walk-off* α influencia fortemente nas propriedades espaciais quando transferidas para o par de fótons detectados em coincidência. Os termos β e γ têm pouca influência no casamento de fase. Vimos que para a CPDE do tipo I a transferência do espectro angular está fortemente ligada ao termo de *walk-off* e a espessura L do cristal conforme a equação (3.41). Neste sincronismo de fase, quando varremos os detectores na direção x , vemos claramente que o efeito do *walk-off* achata o espectro angular quando observado neste plano de detecção e pode limitar sua transferência o que influenciará no emaranhamento, em variáveis espaciais, do estado de dois fótons. Quando varremos os detectores na direção y transferimos completamente o espectro angular para o par de fótons gerados. As curvas experimentais concordam muito bem a previsão teórica conforme visto pela figura 3.5. Para o casamento de fase do tipo II vemos através de (3.83) que no caso monocromático o espectro angular não é completamente transferido na direção x . A transferência ocorre completamente quando analisamos na direção y . No entanto, a imagem do feixe será completamente transferida quando a largura de banda dos filtros de interferência, dividida pelo fator de magnificação m , for muito maior que o espectro angular na direção x . Os gráficos ilustrados na figura 3.8 mostram a boa concordância entre as previsões teóricas e os dados experimentais.

Capítulo 4

Pureza, Fidelidade e Emaranhamento em Polarização na CPDE

O processo de conversão paramétrica descendente espontânea (CPDE) é muito importante na preparação de estados de fótons gêmeos com alta fidelidade e pureza [54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64]. Os estados de dois fótons gerados por CPDE dos tipos I e II, determinados no capítulo anterior, nos informam sua dependência com os efeitos de anisotropia do meio e como esses efeitos, juntamente com o filtros de interferência, influem na transferência do espectro angular do feixe bombeador para o estado de dois fótons. Neste capítulo, mostraremos a dependência da pureza e do emaranhamento dos estados gerados pelo processo supracitado com os parâmetros do cristal, tais como seu comprimento, divergência do feixe incidente e ângulo de aceitação dos detectores. Começaremos o capítulo com uma rápida revisão sobre o emaranhamento em sistemas bipartidos e sua quantificação.

4.1 O Emaranhamento

Desde a publicação do famoso trabalho de Einstein, Podolsky e Rosen (EPR)[65], em 1936, que questiona se a função de onda fornece uma descrição completa da realidade, o emaranhamento e a não-localidade têm sido pontos essenciais em várias discussões relacionadas aos fundamentos e interpretações da Mecânica Quântica. Em 1964, John Stuart Bell escreveu um trabalho de fundamentos de Mecânica Quântica sobre as limitações de uma teoria local de variáveis ocultas que supostamente forneceria uma descrição completa da realidade física conforme definida por EPR [66, 67]. Bell deduziu uma desigualdade que deveria ser obedecida por qualquer teoria local de variáveis ocultas [68]. Desde então vários trabalhos referentes a desigualdades de Bell foram desenvolvidos [69, 70, 71], sendo a violação de

algumas dessas desigualdade a primeira maneira de se detectar emaranhamento. Com o passar dos anos, muito se avançou na compreensão do emaranhamento, e surgiram várias outras formas de detectá-lo e de quantificá-lo.

4.1.1 Emaranhamento de estados puros

Vamos analisar aqui somente o emaranhamento de sistemas de duas partes ou sistemas bipartidos. Iniciemos então analisando o emaranhamento para estados puros [16, 58, 72].

Sejam dois sistemas quânticos que chamaremos de A e B . O estado físico do sistema A será descrito por um operador no espaço de Hilbert \mathcal{H}_A de dimensão d_A , e o sistema B será descrito em \mathcal{H}_B de dimensão d_B . O estado (supostamente puro) do sistema composto será descrito por um vetor $|\psi\rangle$ no espaço $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j}^{d_A, d_B} c_{ij} |a_i\rangle \otimes |b_j\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B, \quad (4.1)$$

com a matriz complexa $C = c_{ij}$ de dimensão $d_A \times d_B$.

Um estado puro $|\psi\rangle$ é chamado estado produto, ou separável, se pudermos encontrar estados $|\psi^A\rangle \in \mathcal{H}_A$ e $|\psi^B\rangle \in \mathcal{H}_B$ tais que

$$|\psi\rangle = |\psi^A\rangle \otimes |\psi^B\rangle. \quad (4.2)$$

Se isso não for possível, o estado é chamado de emaranhado. Um estado produto pode ser preparado de uma maneira local, ou seja, o sistema A é preparado no estado $|\psi^A\rangle$ e o sistema B é preparado independentemente no estado $|\psi^B\rangle$.

Uma maneira de descrever o emaranhamento de estados puros para sistemas bipartidos é através da *decomposição de Schmidt* [73, 69, 74]. Se pensarmos no estado descrito pela equação (4.1), poderemos dizer que existe um conjunto ortonormal $\{|\alpha_i\rangle\}$ de \mathcal{H}_A e um conjunto ortonormal $\{|\beta_i\rangle\}$ de \mathcal{H}_B tais que

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^R \lambda_k |\alpha_k\rangle \otimes |\beta_k\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \quad (4.3)$$

com coeficientes reais e positivos λ_k . Esses coeficientes são unicamente determinados como a raiz quadrada dos autovalores da matriz CC^\dagger , onde C é a matriz formada pelos coeficientes da equação (4.1). O número $R \leq \min\{d_A, d_B\}$ é chamado de posto de Schmidt de $|\psi\rangle$.

4.1.2 Emaranhamento de estados mistos

Geralmente descrevemos um sistema quântico através de seu operador estatístico ou matriz densidade, $\rho \in \mathcal{H}$, representado na forma

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad (4.4)$$

com $\sum p_i = 1$ e $p_i \geq 0$. Esta matriz é positiva e hermiteana pois todos os operadores $|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ são positivos e hermiteanos. Isso significa que seus autovalores são não-negativos. Em virtude da condição imposta em p_i , teremos que $\text{Tr}(\rho) = 1$. Qualquer matriz positiva de traço igual à unidade poderá ser interpretada como uma matriz densidade de algum estado. A combinação convexa de dois estados ρ_1 e ρ_2 , $\rho = \alpha\rho_1 + (1 - \alpha)\rho_2$ com $\alpha \in [0, 1]$, também é um estado, como é o caso dos estados de Werner e os estados diagonais de Bell [75, 18].

Seja ρ uma matriz densidade para um sistema composto e pertencente ao espaço de Hilbert \mathcal{H} . Dizemos que ρ é um estado produto se existirem os estados $\rho^A \in \mathcal{H}_A$ e $\rho^B \in \mathcal{H}_B$ tais que

$$\rho = \rho^A \otimes \rho^B. \quad (4.5)$$

O estado é dito separável quando pode ser expresso como uma soma convexa de estados produtos $\rho_i^A \otimes \rho_i^B$ onde todos os p_i são positivos, ou seja,

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B \quad (4.6)$$

com

$$\sum_i p_i = 1.$$

Se isso não for possível, o estado é dito emaranhado.

4.1.3 Medida de Emaranhamento

Existem diversas maneiras de se quantificar o emaranhamento de um estado bipartido. Neste capítulo utilizaremos a concorrência, ou concordância. A concorrência é uma medida de emaranhamento muito popular e que para estados puros é dada por

$$C(|\psi\rangle) = \sqrt{2[1 - \text{Tr}(\rho_A^2)]}, \quad (4.7)$$

onde ρ_A é o estado reduzido de $|\psi\rangle$ para o subsistema A [76]. Para estados mistos de dois *qubits*, a concorrência é dada por

$$C(\rho) = \text{máx}\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (4.8)$$

onde os λ_i são os autovalores da matriz $R \equiv \sqrt{\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}}$ em ordem decrescente [77]. A matriz $\tilde{\rho}$ é dada por $\tilde{\rho} = \sigma_y \otimes \sigma_y \rho^* \sigma_y \otimes \sigma_y$.

A seguir vamos determinar a pureza e a concorrência dos estados emaranhados em polarização, gerados pela CPDE, para observarmos como se dá a dependência dessas quantidades com a anisotropia do cristal e com os parâmetros básicos de um experimento e também o quanto estes mesmos estados se aproximam dos estados $|\psi^+\rangle$ e $|\phi^+\rangle$, analisando a fidelidade dos estados gerados.

4.2 A Matriz Densidade Efetiva

Para determinarmos a pureza e o emaranhamento em polarização dos estados de fótons gêmeos, vamos representá-los na forma do operador de estado ρ . Entretanto, como os estados gerados pela CPDE são multimodais, a definição de polarização dos fótons não é única. Conforme vimos no capítulo 1, cada direção de propagação \hat{u} define um sistema de vetores unitários de polarização $\hat{e}_o(\hat{u})$ e $\hat{e}_e(\hat{u})$. Assim, é formalmente impossível separar o estado multimodal em uma parte espacial e uma parte de polarização. A solução para o tratamento da polarização de estados multimodais é a utilização da chamada matriz densidade efetiva, definida da seguinte forma [78]

$$\rho_{ef} = Z_{ef} \begin{pmatrix} \langle P_{xxxx} \rangle & \langle P_{xxyx} \rangle & \langle P_{yxxx} \rangle & \langle P_{yxyx} \rangle \\ \langle P_{xxyx} \rangle & \langle P_{xxyy} \rangle & \langle P_{yxyx} \rangle & \langle P_{yxyy} \rangle \\ \langle P_{xyxx} \rangle & \langle P_{xyyx} \rangle & \langle P_{yyxx} \rangle & \langle P_{yyyx} \rangle \\ \langle P_{xyyx} \rangle & \langle P_{xyyy} \rangle & \langle P_{yyyx} \rangle & \langle P_{yyyy} \rangle \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

onde

$$P_{ijklm} = P_{ij} \otimes P_{lm}, \quad (4.10)$$

com

$$P_{ij} = \sum_{\vec{k} \in D} |\vec{k}, \hat{e}_i(\hat{z})\rangle \langle \vec{k}, \hat{e}_j(\hat{z})|, \quad (4.11)$$

onde $|\vec{k}, \hat{e}_i(\hat{z})\rangle$ representa o estado de um fóton transmitido por um polarizador com a direção de polarização $\hat{e}_i = \hat{x}$ ou \hat{y} ortogonal ao eixo z . D é o conjunto dos vetores de onda \vec{k} admitidos pelo sistema de detecção, e Z_{ef} é a constante de normalização que levará o traço de ρ_{ef} a ser igual à unidade. Trocando a soma por uma integral na definição de P_{ijklm} , teremos

$$P_{ijklm} = \iint_{Q_D} d\vec{\xi}_1 d\vec{\xi}_2 \iint_{B_D} d\nu_1 d\nu_2 M_{ij}^{(1)}(\vec{\xi}_1, \nu_1) \otimes M_{lm}^{(2)}(\vec{\xi}_2, \nu_2), \quad (4.12)$$

onde

$$M_{ij}^{(1)}(\vec{\xi}_1, \nu_1) = |\vec{\xi}_1, \nu_1, \hat{e}_i(\hat{z})\rangle \langle \vec{\xi}_1, \nu_1, \hat{e}_j(\hat{z})| \quad (4.13)$$

$$M_{lm}^{(2)}(\vec{\xi}_2, \nu_2) = |\vec{\xi}_2, \nu_2, \hat{e}_l(\hat{z})\rangle \langle \vec{\xi}_2, \nu_2, \hat{e}_m(\hat{z})|. \quad (4.14)$$

Aqui, $|\vec{\xi}_j, \nu_j, \hat{e}_i(\hat{z})\rangle$ representa um estado de 1 fóton propagando na direção definida por ξ_j (veja o Cap. 2), com frequência dada por $\omega_j = \omega_p(1 + \nu_j)/2$. Q_D e B_D são a abertura angular e a largura de banda espectral dos detectores, respectivamente, onde consideramos que a largura de banda B_D é muito maior que a largura de banda dos filtros de interferência normalmente utilizados.

Vamos analisar a partir daqui os casos em que temos a geração de estados de dois fótons por CPDE com casamento de fases dos tipos I e II e observar como alguns efeitos influenciam o grau de fidelidade, pureza e emaranhamento desses estados.

4.3 Fontes de Estados Emaranhados em Polarização Gerados por CPDE

Vamos analisar as fontes de estados bipartidos de dois fótons emaranhados em polarização gerados por CPDE com casamento de fases dos tipos I e II.

O estado de dois fótons para o casamento de fases do tipo I, na aproximação paraxial, é idealizado por

$$|\Psi\rangle = \iint_{|\vec{\xi}_j| \leq 1} d\vec{\xi}_1 d\vec{\xi}_2 \int_{-1}^1 d\nu \phi_{oo} |\vec{\xi}_1, \nu, \hat{e}_o\rangle |\vec{\xi}_2, -\nu, \hat{e}_o\rangle, \quad (4.15)$$

onde

$$\Phi_{oo} = NG(\nu) \mathcal{A}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \nu) \text{sinc} [\Delta_{oo}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \nu)] \exp[-i\Delta_{oo}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \nu)]. \quad (4.16)$$

Para o casamento de fases tipo II, teremos

$$|\Psi\rangle = \iint_{|\vec{\xi}_j| \leq 1} d\vec{\xi}_1 d\vec{\xi}_2 \int_{-1}^1 d\nu \left(\phi_{oe} |\vec{\xi}_1, \nu, \hat{e}_o\rangle |\vec{\xi}_2, -\nu, \hat{e}_e\rangle + \phi_{eo} |\vec{\xi}_1, \nu, \hat{e}_e\rangle |\vec{\xi}_2, -\nu, \hat{e}_o\rangle \right), \quad (4.17)$$

onde as amplitudes são dadas por

$$\Phi_{oe} = NG(\nu) \mathcal{A}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \nu) \text{sinc} [\Delta_{oe}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \nu)] \exp[-i\Delta_{oe}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \nu)] \quad (4.18)$$

e

$$\Phi_{eo} = NG(\nu)\mathcal{A}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \nu) \operatorname{sinc}[\Delta_{eo}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \nu)] \exp[-i\Delta_{eo}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \nu)]. \quad (4.19)$$

Os significados de $\vec{\xi}_1$, $\vec{\xi}_2$, N , $G(\nu)$, \mathcal{A} , e as expressões para $\Delta_{eo}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \nu)$, $\Delta_{oe}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \nu)$ e $\Delta_{oo}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \nu)$ são dados no capítulo anterior e na referência [23].

Consideraremos o feixe bombeador gaussiano, ou seja,

$$\mathcal{A}(\vec{\xi}) \propto e^{-|k_p w_0 \vec{\xi}|^2/4} \quad (4.20)$$

onde w_0 é a cintura do feixe. A divergência do feixe será

$$Q_p = \frac{2\lambda}{\pi w_0}. \quad (4.21)$$

Note que empregamos o dobro do valor normalmente definido para a divergência do feixe [79], pois aqui estamos trabalhando com o seu diâmetro angular. A equação (4.20) poderá ser reescrita na forma

$$\mathcal{A}(\vec{\xi}) \propto e^{-4|\vec{\xi}|^2/Q_p^2}, \quad (4.22)$$

e assim,

$$\mathcal{A}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \nu) \propto e^{-|(1+\nu)\vec{\xi}_1 + (1-\nu)\vec{\xi}_2|^2/Q_p^2}. \quad (4.23)$$

4.3.1 Fontes com Casamento de fases do tipo I

Shih e Alley [80] empregaram fontes de pares de fótons emaranhados nas quais o estado quântico era gerado através de um cristal uniaxial preparado para o casamento de fases do tipo I, onde eles mudavam a polarização de um dos feixes através de uma placa de onda e utilizavam um interferômetro de Hong- Ou-Mandel para gerar estados de Bell pós-selecionados. Outras maneiras de gerar pares de fótons emaranhados com polarizações ortogonais foram feitas por Kwiat *et. al* [62] e Altepeter[55]. Kwiat *et al.* [62] propõem uma forma de gerar fótons gêmeos através de uma fonte composta por dois cristais uniaxiais tendo seus respectivos eixos ópticos situados em planos perpendiculares entre si. A geometria do problema proposto por Kwiat *et al.* está ilustrada na figura 4.1. Com essa fonte, os autores produzem todos os pares, de uma determinada cor, emaranhados. Utilizando cristais com casamento de fases do tipo I e um feixe de entrada polarizado a 45° com relação à direção x , a componente do campo incidente que vibra no plano contendo o eixo óptico do primeiro cristal (xz) gera fótons com polarização ordinária, enquanto que a componente perpendicular ao plano xz passa livremente no primeiro cristal, como se propagasse em um

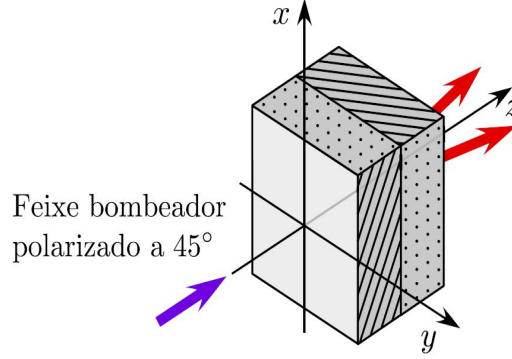


Figura 4.1: Fonte de pares de fótons emaranhados. Dois cristais são acoplados para produzir fótons gêmeos no processo da conversão paramétrica descendente. As linhas nos cristais representam as direções de seus eixos ópticos

meio isotrópico. Esta componente, que tem polarização extraordinária no segundo cristal, dará origem a fótons com polarização ordinária neste cristal. As duas polarizações, geradas no primeiro e segundo cristal, são perpendiculares entre si e dão origem a um estado que é da forma (em polarização) $HH + e^{i\phi}VV$. Controlando-se a fase ϕ , podem-se produzir estados de Bell do tipo $\phi^+ = HH + VV$ e $\phi^- = HH - VV$ e estudar o emaranhamento do sistema via visibilidade na coincidência [61].

O estado correspondente à combinação descrita acima, onde ambos os cristais têm espessura L , é

$$|\psi\rangle = \iint_{|\vec{\xi}_j| \leq 1} d\vec{\xi}_1 d\vec{\xi}_2 \int_{-1}^1 d\nu \left(\Phi_{oo} e^{i\zeta'} |\xi_1, \nu, \hat{e}_o\rangle |\xi_2, -\nu, \hat{e}_o\rangle + \Phi_{oo}^\perp e^{i\zeta''} |\xi_1, \nu, \hat{e}_e\rangle |\xi_2, -\nu, \hat{e}_e\rangle \right), \quad (4.24)$$

onde

$$\begin{aligned} \zeta' &= k_p L \left\{ \bar{\eta} - \frac{\bar{\alpha}_p}{2} [(1 + \nu)\xi_{1y} + (1 - \nu)\xi_{2y}] \right\} - \\ &\quad \frac{k_p L}{4\bar{\eta}} [(1 + \nu)(\bar{\beta}\xi_{1y}^2 + \bar{\gamma}\xi_{1x}^2) + (1 - \nu)(\bar{\beta}\xi_{2y}^2 + \bar{\gamma}\xi_{2x}^2)], \\ \zeta'' &= k_p L \left[n_o - \frac{1}{8n_o} |(1 + \nu)\vec{\xi}_1 + (1 - \nu)\vec{\xi}_2|^2 \right], \end{aligned}$$

e a amplitude Φ_{oo}^\perp é obtida trocando x por y em Φ_{oo} . O índice de refração ordinário n_o é calculado na frequência ω_p . As fases ζ' e ζ'' aparecem devido aos seguintes fatos: (a)

Os fótons gêmeos gerados no primeiro cristal têm polarização extraordinária no segundo cristal, sofrendo assim o efeito de *walk-off*, além de ganhar uma fase de propagação. (b) A componente de polarização y do feixe bombeador ganha uma fase de propagação no primeiro cristal antes de gerar fótons no segundo. A diferença nas fases entre as duas componentes do estado gerado nesta fonte significa que os cones de luz estão deslocados, um com relação ao outro de $\delta_x = \alpha_p L/2$ e $\delta_y = (2\bar{\alpha} - \alpha_p)L/2$ nas direções x e y , respectivamente. No cálculo de δ_x e δ_y , devemos levar em conta, além de ζ' e ζ'' , as fases de Φ_{oo} e Φ_{oo}^\perp . Vamos assumir aqui que δ_x e δ_y são compensadas pelo uso de cristais anisotrópicos auxiliares colocados no caminho dos fótons gêmeos.

Para o cálculo dos elementos da matriz densidade efetiva, levamos a expressão para o estado de dois fótons (4.24) nas expressões (4.9) e (4.12). Os únicos termos que sobrevivem são:

$$\langle P_{xxxx} \rangle = C \iint_{Q_D} d\vec{\xi}_1 d\vec{\xi}_2 \int_{B_D} d\nu \mathcal{A}^2 \text{sinc}^2 \Delta_{oo}^\perp \quad (4.25)$$

$$\langle P_{yyyy} \rangle = C \iint_{Q_D} d\vec{\xi}_1 d\vec{\xi}_2 \int_{B_D} d\nu \mathcal{A}^2 \text{sinc}^2 \Delta_{oo} \quad (4.26)$$

$$\langle P_{yxyx} \rangle = C \iint_{Q_D} d\vec{\xi}_1 d\vec{\xi}_2 \int_{B_D} d\nu \mathcal{A}^2 \text{sinc} \Delta_{oo} \text{sinc} \Delta_{oo}^\perp \quad (4.27)$$

$$\langle P_{xyxy} \rangle = \langle P_{yxyx} \rangle^*. \quad (4.28)$$

Como as expressões de Δ_{oo} e Δ_{oo}^\perp diferem apenas por uma rotação de 90° em torno do eixo z , os termos $\langle P_{xxxx} \rangle$ e $\langle P_{yyyy} \rangle$ são iguais, ambos diferentes de $\langle P_{yxyx} \rangle$. A constante C não precisa ser explicitada. A matriz densidade efetiva é então da forma

$$\rho_{ef} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

onde $r = \langle P_{yxyx} \rangle / \langle P_{xxxx} \rangle$. A desigualdade de Cauchy-Schwarz garante que $|r| \leq 1$. Naturalmente, o estado que se busca gerar com essa fonte é

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

Logo, vemos que quanto maior for o valor de r , mais o nosso estado se aproximará de um estado de Bell puro $|\phi^+\rangle$, cuja matriz densidade é dada pela expressão (4.30).

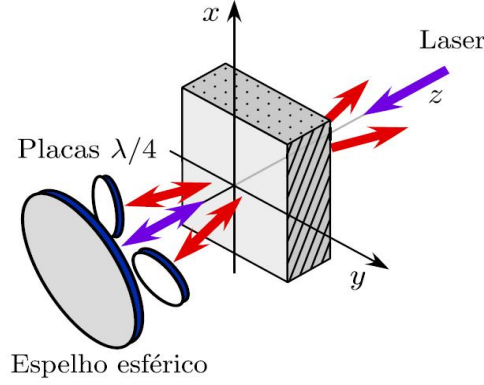


Figura 4.2: Fonte de dois fótons construída com um único cristal do tipo I e bombeado pelos dois lados. Os campos convertidos são superpostos com a ajuda de um espelho esférico. A polarização do campo convertido é girada pela dupla passagem nas placas de quarto de onda.

Uma outra forma de gerar estados de Bell do tipo $HH + VV$ utiliza o esquema ilustrado na figura 4.2, onde através de um espelho esférico e duas placas de $\lambda/4$ o feixe bombeador gera fótons gêmeos nos dois sentidos, sendo que os feixes convertidos na primeira passagem são refletidos de volta no cristal, mas com polarização girada de 90° , e se superpõem com os feixes convertidos na segunda passagem do bombeador pelo cristal. Neste caso, o estado de dois fótons será

$$|\Psi\rangle = \iint_{|\vec{\xi}_j| \leq 1} d\vec{\xi}_1 d\vec{\xi}_2 \int_{-1}^1 d\nu \Phi_{oo} \left[e^{i\zeta'} |\vec{\xi}_1, \nu, \hat{e}_o\rangle |\vec{\xi}_2, -\nu, \hat{e}_o\rangle + e^{i(\zeta'' + \phi)} |\vec{\xi}_1, \nu, \hat{e}_e\rangle |\vec{\xi}_2, -\nu, \hat{e}_e\rangle \right], \quad (4.31)$$

onde

$$\begin{aligned} \zeta' &= k_p L \left\{ \eta_p + \frac{\alpha_p}{2} [(1 + \nu)\xi_{1x} + (1 - \nu)\xi_{2x}] \right\} \\ &- \frac{k_p L}{8} \left\{ \frac{\beta_p}{2\eta_p} [(1 + \nu)\xi_{1x} + (1 - \nu)\xi_{2x}]^2 \right\} \\ &+ \frac{k_p L}{8} \left\{ \frac{\gamma_p}{2\eta_p} [(1 + \nu)\xi_{1y} + (1 - \nu)\xi_{2y}]^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.32)$$

e

$$\zeta'' = k_p L \left\{ \bar{\eta} + \frac{\bar{\alpha} 2}{2} [(1 + \nu)\xi_{1x} + (1 - \nu)\xi_{2x}] \right\} - \frac{k_p L}{4\bar{\eta}} \left\{ \frac{\beta_p}{2\eta_\eta} [(1 + \nu)(\bar{\beta}\xi_{1x}^2 + \bar{\gamma}\xi_{1y}^2) + (1 - \nu)(\bar{\beta}\xi_{2x}^2 + \bar{\gamma}\xi_{2y}^2)] \right\}. \quad (4.33)$$

Como os feixes não são colineares, a fase ϕ pode ser controlada pela posição z do espelho esférico. Agora, os cones de luz convertida são deslocados na direção x apenas por $(\alpha_p - \bar{\alpha})L/2$, que é uma quantidade desprezível. Assim, as fases ζ' e ζ'' podem ser descartadas da expressão (4.31). As expressões para $\langle P_{xxxx} \rangle$, $\langle P_{yyyy} \rangle$ e $\langle P_{xyxy} \rangle$ serão idênticas e o estado de dois fótons gerado por esta fonte é praticamente igual ao estado de Bell $|\phi^+\rangle$ (ou $|\phi^-\rangle$), dependendo de ϕ .

4.3.2 Fontes com Casamento de Fases do Tipo II

Para o caso do casamento de fases do tipo II, a fonte empregada será aquela representada na figura 4.3. O estado quântico gerado pelo processo paramétrico será aquele da equação

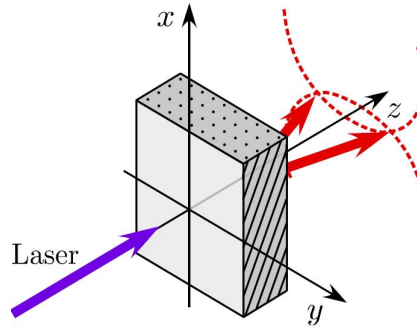


Figura 4.3: Fonte de dois fótons construída com um único cristal com casamento de fases do tipo II.

(4.17). Como já discutido nos capítulos anteriores, as quantidades α_p , $\bar{\alpha}$, β_p , $\bar{\beta}$, γ_p , $\bar{\gamma}$, η_p e $\bar{\eta}$ são termos devidos à anisotropia do cristal. Os termos α_p e $\bar{\alpha}$ são responsáveis pelo *walk-off* do feixe bombeador e do feixe convertido extraordinário, respectivamente. As quantidades β_p , $\bar{\beta}$, γ_p , $\bar{\gamma}$ deformam o feixe nas direções x e y . Os termos η_p e $\bar{\eta}$ são os índices de refração que correspondem a ondas planas com polarização extraordinária propagando na direção z . Utilizando a equação (4.17), podemos escrever as expressões para os elementos da matriz

densidade efetiva. Supondo que a diferença de fase entre Φ_{oe} e Φ_{eo} é anulada por meio de cristais compensadores, os seguintes termos sobreviverão:

$$\langle P_{xxyy} \rangle = B \iint_{Q_D} d\vec{\xi}_1 d\vec{\xi}_2 \int_{B_D} d\nu \mathcal{A}^2 \text{sinc}^2 \Delta_{eo} \quad (4.34)$$

$$\langle P_{yyxx} \rangle = B \iint_{Q_D} d\vec{\xi}_1 d\vec{\xi}_2 \int_{B_D} d\nu \mathcal{A}^2 \text{sinc}^2 \Delta_{oe} \quad (4.35)$$

$$\langle P_{yxyx} \rangle = B \iint_{Q_D} d\vec{\xi}_1 d\vec{\xi}_2 \int_{B_D} d\nu \mathcal{A}^2 \text{sinc} \Delta_{eo} \text{sinc} \Delta_{oe} \quad (4.36)$$

$$\langle P_{xyyx} \rangle = \langle P_{yxyx} \rangle^*, \quad (4.37)$$

onde B é uma constante que não necessita ser explicitada. Através das equações do capítulo anterior vemos que os termos diagonais $\langle P_{xxyy} \rangle$ e $\langle P_{yyxx} \rangle$, das equações (4.34-4.35), são iguais. Os termos fora da diagonal são diferentes daqueles da diagonal principal. Como o efeito da anisotropia afeta diferentemente cada componente do campo, os termos $\text{sinc} \Delta_{oe}$ e $\text{sinc} \Delta_{eo}$ sofrem distorções diferentes. Essa diferença se torna desprezível se o domínio de integração Q_D for muito menor que a largura da função $\text{sinc}[\dots]$ na direção afetada pelo *walk-off*, como acontece se as aberturas dos detectores forem muito pequenas. A matriz densidade efetiva resultante será da forma

$$\rho_{ef} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r & 0 \\ 0 & r & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.38)$$

onde $r = \langle P_{yxyx} \rangle / \langle P_{xxyy} \rangle$. Idealmente, esta fonte geraria o estado de Bell $|\psi^+\rangle$, cuja matriz densidade é

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

4.4 Pureza, Fidelidade e Emaranhamento

Pela forma das matrizes densidade (4.29) e (4.38), vemos imediatamente que a pureza dos estados de polarização $P = \text{Tr} \rho_{ef}^2$ em ambos os casos é dada por

$$P = \frac{1 + r^2}{2}. \quad (4.40)$$

As fidelidades dos estados representados por (4.29) e (4.38) devem ser calculadas com relação aos estados de Bell $|\phi^+\rangle$ e $|\psi^+\rangle$, respectivamente, cujas matrizes densidade são dadas pelas expressões (4.30) e (4.39). A Fidelidade entre dois estados ρ_a e ρ_b é definida como [74, 64] $F(\rho_a, \rho_b) = \text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho_b} \rho_a \sqrt{\rho_b}}$. Quando ρ_a e ρ_b comutam, $F(\rho_a, \rho_b) = \sum_i \sqrt{a_i b_i}$, onde a_i e b_i são os autovalores de ρ_a e ρ_b . Teremos então, que para ambos os casos,

$$F = \sqrt{\frac{1 + r}{2}}. \quad (4.41)$$

Para determinarmos a concorrência, empregaremos o método utilizado por Wootters para um estado arbitrário de dois qubits [77]. Primeiramente devemos calcular a matriz $\tilde{\rho} = \sigma_y \otimes \sigma_y \rho^* \sigma_y \otimes \sigma_y$ e logo após o produto $\rho \tilde{\rho}$. As raízes quadradas dos autovalores da matriz $\rho \tilde{\rho}$ fornecerão os valores das quantidades que entrarão na operação da equação (4.8). A matriz σ_y é dada por

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

e o produto $\sigma_y \otimes \sigma_y$ será

$$\sigma_y \otimes \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.43)$$

As duas matrizes densidade efetivas (4.29) e (4.38) são reais ($\rho^* = \rho$) e comutam com $\sigma_y \otimes \sigma_y$. Portanto, para ambos os casos, $\tilde{\rho} = \rho$. Logo, os autovalores a serem levados à expressão (4.8) serão os de ρ_{ef}^2 , isto é, $\lambda_1 = (1 + r)^2/4$, $\lambda_2 = (1 - r)^2/4$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Com isso, teremos

$$C = r \quad (4.44)$$

para ambos os casos.

Pode-se mostrar também que a máxima violação possível da desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt em um experimento utilizando os estados (4.29) e (4.38) é dada por

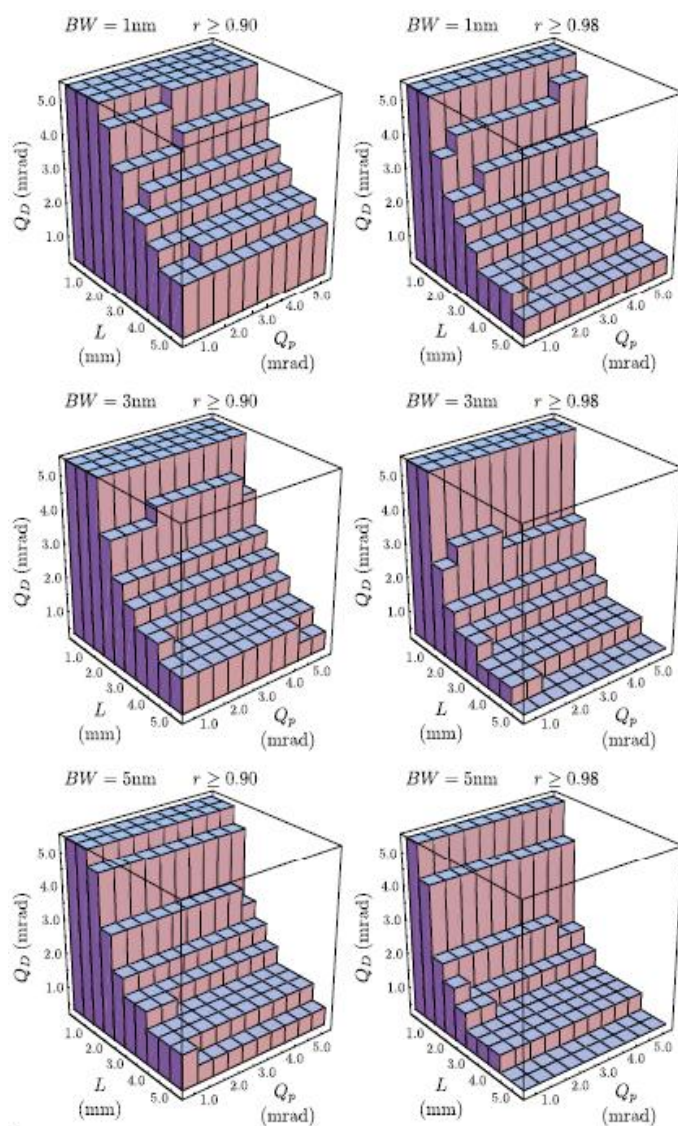


Figura 4.4: Diagramas representativos das situações para as quais poderemos ter o valor do parâmetro $r \geq 0.90$ e $r \geq 0.98$ para conversão do tipo II. As quantidades Q_P , Q_D e L representam, respectivamente, a divergência, o ângulo de aceitação e o comprimento do cristal. Os valores de Q_P , Q_D e L para os quais teremos $r \geq 0.90$ e $r \geq 0.98$ são aqueles que, combinados, possuem pontos dentro dos volumes das caixas do diagrama.

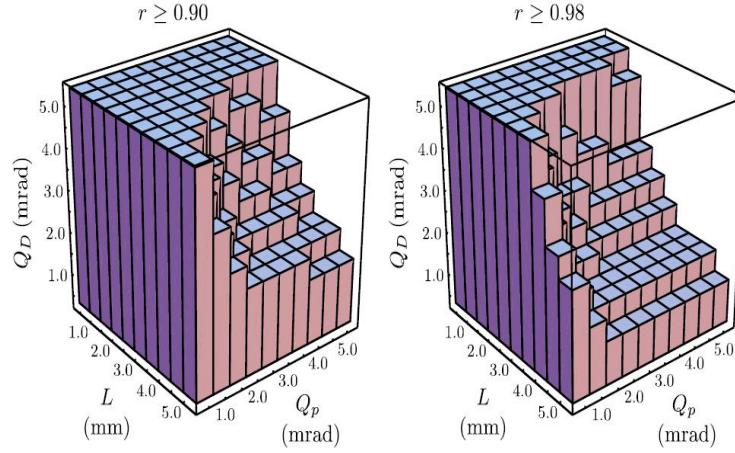


Figura 4.5: Diagramas representativos das situações para as quais poderemos ter o valor do parâmetro $r \geq 0.90$ e $r \geq 0.98$ para conversão do tipo I. As quantidades Q_p , Q_d e L representam, respectivamente, a divergência, o ângulo de aceitação e o comprimento do cristal. O valores de Q_p , Q_d e L para os quais teremos $r \geq 0.90$ e $r \geq 0.98$ são aqueles que, combinados, possuem pontos dentro dos volumes das caixas do diagrama.

$\sqrt{1+r^2}$ [75, 81], isto é,

$$S_{m\acute{a}x} = 2\sqrt{1+r^2}, \quad (4.45)$$

sendo que o limite de Cirel'son é $S_{m\acute{a}x} = 2\sqrt{2}$.

4.5 Simulações Numéricas

Para termos uma idéia das características dos dois tipos de fontes estudadas nas seções anteriores em função do comprimento do cristal, da divergência do laser, do ângulo de aceitação dos detectores e da largura de banda dos filtros de interferência, realizamos várias simulações numéricas onde foi calculado o parâmetro r para cada caso. No primeiro grupo de simulações, consideramos um cristal uniaxial BBO cortado para o casamento de fases do tipo II, bombeado por um laser de comprimento de onda $\lambda_p = 351$ nm. O casamento de fases foi ajustado para $\theta = 50.18^\circ$, que gera feixes na configuração de cones cruzados (CC) com um ângulo total de 7° entre os dois pontos de interseção. Consideramos cristais de comprimentos (L) de 0.50 mm a 5.0 mm, divergência do feixe (Q_p) de 0.50 mrad a 5.0 mrad e ângulos de aceitação dos detectores (Q_d) de 0.50 mrad a 5.0 mrad. Consideramos filtros de interferência gaussianos de largura de banda de 1, 3 e 5 nm. Para o segundo conjunto

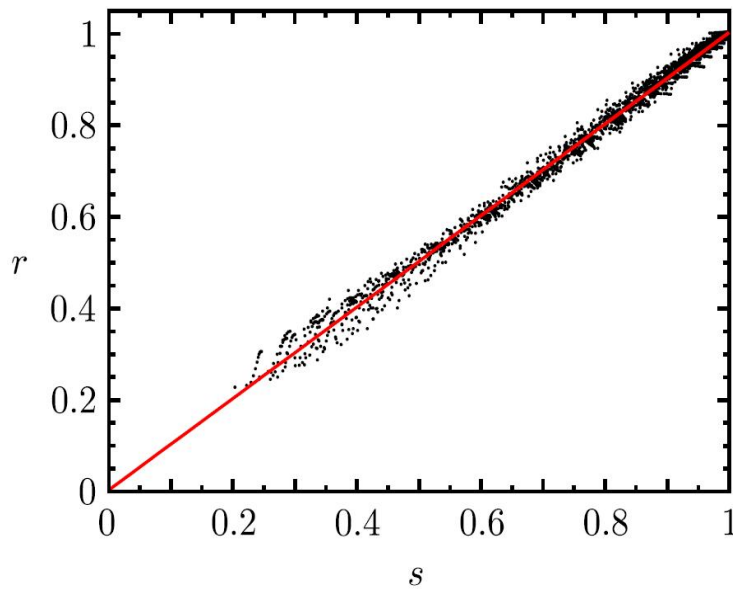


Figura 4.6: Dependência do parâmetro r com o parâmetro s definido na equação (4.46) para todos os casos analisados. Os pontos correspondem a soluções numéricas das equações (4.34)-(4.37) e (4.25)-(4.28).

de simulações utilizamos a fonte de dois cristais cortados para o casamento de fases do tipo I, com $\theta = 34.04^\circ$. Na tabela 4.1 temos os valores de todos os parâmetros utilizados nas simulações. Os resultados numéricos estão apresentados na forma de diagramas 3D. As figuras 4.4 e 4.5 representam situações em que temos o parâmetro $r \geq 0.90$ e $r \geq 0.98$ para casamento de fases do tipo I e tipo II. Os eixos x , y e z correspondem aos parâmetros L , Q_p e Q_D , respectivamente. A cada diagrama está associado um valor de largura de banda BW dos filtros de interferência. Os pontos dentro dos blocos verticais correspondem aos conjuntos desses valores para os quais a concorrência (r) assume valores acima daqueles indicados nas figuras.

As perdas de pureza e emaranhamento nestas fontes são provocadas pelas assimetrias das funções (4.25)-(4.28) e (4.34)-(4.37) com relação às direções x e y . As assimetrias ocorrem principalmente por causa do *walk-off* transversal quando feixes extraordinários atravessam o meio uniaxial. Para o sistema de cones cruzados (CC), casamento de fases do tipo II, vemos na figura 4.4 que ocorre uma degradação do estado à medida que aumentamos a largura de banda dos filtros de interferência utilizados na detecção. Isto se deve à dependência linear dos índices de casamento de fases μ_{eo} e μ_{oe} com a dessintonia ν . No caso de geração do

Parâmetro	Valor
θ (graus)	CC: 50.18, DC: 34.04
λ_p (nm)	351
n_o (351 nm)	1.7068
n_e (351 nm)	1.5774
\bar{n}_o (702 nm)	1.6640
\bar{n}_e (702 nm)	1.5471
L (mm)	de 0.50 a 5.0
Q_p (mrad)	de 0.50 a 5.0
Q_D (mrad)	de 0.50 a 5.0
BW (nm)	1, 3 e 5

Tabela 4.1: Valores dos parâmetros utilizados nas simulações numéricas.

Fonte	BW (nm)	a_1	a_2	a_3	a_4
CC	1	1.0×10^{-4}	3.3	-0.33	3.1
CC	3	1.2×10^{-3}	2.8	-0.11	2.0
CC	5	2.2×10^{-3}	2.6	-0.058	2.0
TC	<i>todos</i>	2.0×10^{-5}	3.3	1.2	2.5

Tabela 4.2: Valores das constantes de ajuste do parâmetro s .

tipo I, nas fontes de dois cristais, a dependência do termo de casamento de fases μ_{oo} com ν é quadrática, fazendo com que os filtros de interferência tenham pouca ou praticamente nenhuma influência sobre a degradação do estado. A tendência geral dos resultados aparece no diagrama na figura 4.6, onde os valores de r , obtidos numericamente, são comparados com o parâmetro s definido empiricamente da forma

$$s = \frac{1}{1 - a_1 L^{a_2} Q_p^{a_3} Q_D^{a_4}}, \quad (4.46)$$

onde L é dado em milímetros e Q_p e Q_D são dados em miliradianos. A função s foi determinada através de várias tentativas de um certo ajuste linear com r . As constantes a_j ($j = 1, \dots, 4$) são ajustadas para cada caso e são listadas na tabela 4.2.

4.6 Conclusões

Analisamos dois tipos de fontes de pares de fótons emaranhados utilizando a CPDE. No primeiro tipo de fonte geramos o estado de Bell do tipo $|\phi^+\rangle$ utilizando a configuração de dois cristais do tipo I para gerar o estado. Uma vez gerado, analisamos a fidelidade desse estado quando comparado ao estado de Bell puro $|\phi^+\rangle$. Analisamos também a concorrência do estado afim de termos uma medida de emaranhamento para compararmos a $|\phi^+\rangle$. A alta pureza e fidelidade do estado está fortemente vinculada à divergência do feixe incidente, do comprimento do cristal, da largura de banda dos filtros de interferência e do ângulo de aceitação dos detectores. À medida que focalizamos o feixe e diminuimos a espessura do cristal, para uma dada largura de banda de filtro, produziremos estados de Bell com alta fidelidade e pureza. Para fontes com casamento de fase do tipo II (fontes de cones cruzados) que geram estados de Bell na forma $|\psi^+\rangle$, a alta fidelidade e pureza dos estados produzidos, dependerão fortemente da largura de banda dos filtros de interferência. Quanto menor for a largura do filtro maior a possibilidade de produzir estados com alta fidelidade e pureza. Uma vez fixa a largura de banda dos filtros vimos, através da figura 4.4, que a pureza e fidelidade do estado dependem sensivelmente da espessura do cristal.

Capítulo 5

Conclusões Gerais e Perspectivas

5.1 Conclusões Gerais

Vimos que podemos determinar o campo eletromagnético de um feixe que atravessa um meio birrefringente uniaxial. A expressão desse campo é determinada através da equação (2.56) que informa a anisotropia e a refração do feixe ao transpassar o meio. Conhecendo esta função poderemos, em trabalho futuros, estudar a dinâmica do momento angular orbital da luz dentro de meios birrefringentes, a propagação de feixes de altas ordens em meios uniaxiais e a evolução dos parâmetros de Stokes dentro desses meios. Através da matriz transferência obtida no capítulo 2 poderemos determinar as funções de Green que propagarão os campos em meios uniaxiais. Analisando a dependência da matriz de transferência com a componente \vec{q} do vetor de onda e com o ângulo θ de corte do cristal, estabelecemos os limites de validade da aproximação escalar para a propagação em meios uniaxiais, que é utilizada no modelo teórico para a CPDE. Os efeitos de anisotropia dados pelas expressões (2.11)-(2.18) influenciarão fortemente na transferência do espectro angular para o par de fótons gerados na CPDE quando detectados em coincidência e no emaranhamento do estado quântico que descreve estes fótons quando analisamos as variáveis espaciais e a polarização do estado.

Para a CPDE do tipo I, analisamos a probabilidade de detecção em coincidência em dois esquemas. O primeiro quando deslocamos os detectores em sentidos opostos. Neste caso detectamos a função $\text{sinc}[\dots]$ que nos dá os cones de luz devido à conversão. Estes cones podem ser deslocados dependendo da condição de casamento de fase μ_{00} , que tem dependência com ν^2 . O termo de casamento de fase não afeta a largura dos cones que de-

pende somente da espessura do cristal. Quando deslocamos os detectores no mesmo sentido mostramos a transferência do espectro angular do feixe incidente para o estado detectado em coincidência. Essa transferência depende tanto da divergência do feixe incidente como dos efeitos de anisotropia do cristal que gerou o estado. O walk-off juntamente com o comprimento do cristal e o número de onda do feixe incidente, possuem grande importância nessa transferência pois, dependendo da magnitude de cada um deles, a função $\text{sinc}[\dots]$ poderá ser mais fina ou mais larga que o espectro angular incidente. Quando o argumento da função $\text{sinc}[\dots]$ é tal que ela é mais larga que o espectro angular, então conseguimos transferir todo o espectro incidente para o feixe detectado em coincidência. Para que isso ocorra o argumento da função $\text{sinc}[\dots]$ deve ser muito pequeno. Isso ocorrerá quando a cintura do feixe, w_0 , for muito maior que $L_z \alpha_p / 2\pi$.

Para a CPDE do tipo II, temos os termos de casamento de fase μ_{eo} e μ_{oe} completamente diferentes daquele determinado para o tipo I. Neste caso teremos uma dependência linear com ν o que leva a um espectro de frequência completamente diferente daquele do tipo I. Quando deslocamos os detectores em sentidos contrários, para detectarmos os cones de luz, vemos novamente que a largura dos cones não depende do termo de casamento de fase. Sua largura depende do comprimento do cristal e do walk-off. No caso monocromático e detecção colinear a largura dos cones ainda dependem do termo de walk-off e o $\text{sinc}[\dots]$ continua sofrendo um deslocamento no plano de detecção. Quando deslocamos os detectores na mesma direção vemos que a transferência do espectro angular fica dependente de ν através dos termos de casamento de fase, que desloca a função $\text{sinc}[\dots]$, e dos termos de walk-off. A transferência do espectro angular ficará por conta da largura de banda dos filtros de interferência que se for grande, para cristais longos, poderá ocorrer toda a transferência. Nas duas situações, casamentos de fase dos tipos I e II, os resultados teóricos aqui apresentados concordam muito bem com os resultados experimentais.

Utilizando os estados quânticos determinados no capítulo 3 fizemos uma análise de seu emaranhamento, pureza e fidelidade quando comparados aos estados de Bell $|\psi^+\rangle$ e $|\phi^+\rangle$ por meio da concorrência. Vimos que o comprimento do cristal, a divergência do feixe incidente, a largura de banda dos filtros de interferência e o ângulo de aceitação dos detectores influenciam fortemente no emaranhamento do estado produzido. Teremos alta fidelidade e pureza para um certo conjunto das quantidades anteriormente mencionadas. O uso de cristais longos, largos filtros de interferência e feixes de grande divergência contribuem enormemente para a degradação da pureza e emaranhamento dos estados produzidos pelas fontes. A focalização do feixe incidente tem um papel fundamental na produção de um es-

tado de alta fidelidade e pureza principalmente quando utilizamos cristais longos. Para a configuração de dois cristais onde produzimos o estado do tipo I, a alta fidelidade e pureza do estado produzido não depende de forma tão sensível da combinação entre a focalização do feixe incidente e do comprimento do cristal como no caso da configuração de cones cruzados que produzem o estado do tipo II. Para as fontes do tipo II, a produção do estado com alta fidelidade e pureza é drasticamente afetada pela largura de banda dos filtros de interferência. Quanto maior a largura dos filtros menor é a possibilidade da escolha do conjunto de parâmetros para produzir o estado com alta fidelidade.

Com o estado quântico para a CPDE do tipo II, mostrado no capítulo 3, poderemos determinar o grau de emaranhamento nas variáveis espaciais deste estado e como ele se vincula aos efeitos de anisotropia oriundos do cristal uniaxial. Poderemos proceder de forma análoga, àquela de Fedorov [25, 82, 83, 84, 45], para quantificarmos o emaranhamento nas variáveis espaciais na CPDE do tipo II, levando em consideração os efeitos de anisotropia do meio não-linear que gera os par de fótons emaranhados.

5.2 Perspectivas

Chan e Eberly[85] demonstraram que o emaranhamento em variáveis espaciais pode ser determinado através da largura do pacote de onda quando a função é um produto de duas funções Gaussianas, uma na direção x e outra na direção y . Esta dupla-Gaussiana é função para partículas livres que, a priori, é emaranhada nas coordenadas espaciais x e y e este emaranhamento é controlado pela largura dos pacotes cujo estado se torna separável quando essas larguras são iguais. A partir disso e da proposta de Fedorov [25, 45] propomos uma análise do emaranhamento nas variáveis espaciais no casamento de fase do tipo II. A seguir explicaremos, de forma sucinta, como determinar o emaranhamento nas variáveis espaciais conforme proposto por Fedorov.

5.2.1 Análise do emaranhamento do estado de dois fótons no casamento de fase do tipo II

Para determinarmos o grau de emaranhamento nas variáveis espaciais do estado e como a dispersão dos fótons convertidos durante o processo da CPDE influencia na separabilidade do sistema, poderemos partir das propostas feitas por Chan [85] e Fedorov *et. al* [82, 83, 84, 25, 45] que resolvem o problema do emaranhamento para variáveis espaciais

e a sua dependência com a anisotropia do meio que gera os fótons gêmeos na CPDE do tipo I. Deveremos, portanto, medir as dispersões condicionais e incondicionais nos graus de liberdade a serem trabalhados. Chan e Eberly [85] mostraram que, para uma função que é representada como o produto de duas funções Gaussianas, o quociente entre as dispersões do momento, quando temos detecção simples e a detecção em coincidência, é igual ao número de Schmidt, ou seja,

$$R_p \equiv \frac{\Delta k_1^{c.s.}}{\Delta k_1^{c.c.}} = K. \quad (5.1)$$

Na equação (5.1) a quantidade Δk_1 representa a dispersão da curva de detecção da partícula 1. O índice p rotula que as dispersões são calculadas para o momento e as abreviações c.s. e c.c. indicam contagem simples e contagem em coincidência, respectivamente. K é o número de Schmidt que é igual a 1 para sistemas não-emaranhados e diferente de 1 para sistemas emaranhados. O valor de R também poderia ser obtido determinando as dispersões na posição ou qualquer outro grau de liberdade vinculado aos dois primeiros. As medidas das dispersões sempre são feitas utilizando apenas uma das variáveis do sistema, por exemplo, a variável k_1 ou a variável k_2 . Temos portanto que

$$K = R_p \equiv \frac{\Delta k_1^{c.s.}}{\Delta k_1^{c.c.}} \equiv \frac{\Delta x_1^{c.s.}}{\Delta x_1^{c.c.}} = R_x. \quad (5.2)$$

Chamamos, também, a detecção simples de detecção incondicional e a detecção em coincidência de detecção condicional. Se temos, portanto, um sistema de duas partes, uma nos graus de liberdade da partícula 1 e a outra parte nos graus de liberdade da partícula 2, e desejamos determinar a dispersão incondicional da partícula 1, tomamos a densidade de probabilidade do estado e a integramos com relação ao grau de liberdade trabalhado da partícula 2, ou seja, para determinarmos a dispersão incondicional $\Delta x_1^{c.s.}$ deveremos calcular a integral [84]

$$\int dx_2 |\Psi(x_1, x_2)|^2. \quad (5.3)$$

Agora, para determinarmos a dispersão condicional, devemos apenas obter a expressão de $|\Psi(x_1, x_2)|^2$.

Conhecendo-se a solução de (5.3) e a densidade de probabilidade, poderemos tomar as dispersões das curvas obtidas nas detecções simples e em coincidência e calcular o quociente entre elas para obtermos o valor de R . No problema do trabalho de Fedorov *et al.* [45], foi necessária uma análise bi-dimensional das dispersões. Ele determinou as dispersões condicional e incondicional nas direções paralela e perpendicular ao plano principal de um

crystal uniaxial. Ele definiu o quantificador de emaranhamento como sendo o produto

$$R = R_{\perp} R_{\parallel}, \quad (5.4)$$

onde R_{\perp} e R_{\parallel} significam medidas tomadas para as direções perpendicular e paralela ao eixo óptico.

Como sabemos a expressão para o estado de dois fótons para a CPDE do tipo II, podemos determinar, de forma análoga àquela feita por Fedorov [45], a dependência do emaranhamento do estado com a anisotropia do meio uniaxial.

Apêndice A

A Matriz de Transferência

Seja o sistema ilustrado na figura A.1. Os meios 1 e 2 são separados por uma interface posicionada em $z = z_0$. Uma onda eletromagnética atravessa essa fronteira $z = z_0$, entre dois meios uniaxiais, passando do meio 1 para o meio 2. Na interface as componentes tangenciais de $\vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{\mathcal{H}}$ são contínuas[26, 27]. Portanto

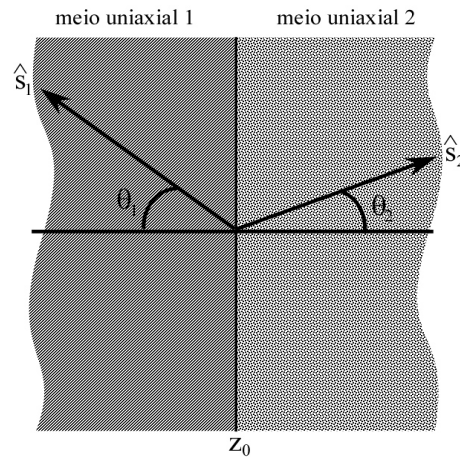


Figura A.1: Interface entre dois meios uniaxiais. Os vetores \hat{s}_1 e \hat{s}_2 indicam as direções dos eixos ópticos dos meios 1 e 2, respectivamente.

$$\hat{z} \times [\vec{\mathcal{E}}^i(\vec{r}, t) + \vec{\mathcal{E}}^r(\vec{r}, t) - \vec{\mathcal{E}}^t(\vec{r}, t)]_{z=z_0} = 0 \quad (\text{A.1})$$

e

$$\hat{z} \times [\vec{\mathcal{H}}^i(\vec{r}, t) + \vec{\mathcal{H}}^r(\vec{r}, t) - \vec{\mathcal{H}}^t(\vec{r}, t)]_{z=z_0} = 0 \quad (\text{A.2})$$

que são válidas, também para suas respectivas transformadas de Laplace-Fourier. Os vetores unitários \hat{s}_1 e \hat{s}_2 indicam, respectivamente, as direções dos eixos ópticos dos meios 1 e 2. θ_1 e θ_2 são os ângulos entre os eixos ópticos e a direção z . Como estamos tratando de ondas planas e $\vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{H}}$, poderemos relacionar os campos na forma

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu\omega} \vec{k} \times \vec{\mathcal{E}}. \quad (\text{A.3})$$

Substituindo a equação (2.21) na (A.1) e utilizando as relações (2.6) e (2.7), teremos

$$\begin{aligned} & \hat{z} \times [k^{oi2} \hat{s}_1 - (\vec{k}^{ei} \cdot \hat{s}_1) \vec{k}^{ei}] C^{ei} \mathcal{E}^{ei} + \hat{z} \times (\vec{k}^{oi} \times \hat{s}_1) C^{oi} \mathcal{E}^{oi} + \\ & \hat{z} \times [k^{or2} \hat{s}_1 - (\vec{k}^{er} \cdot \hat{s}_1) \vec{k}^{er}] C^{er} \mathcal{E}^{er} + \hat{z} \times (\vec{k}^{or} \times \hat{s}_1) C^{or} \mathcal{E}^{or} - \\ & \hat{z} \times [k^{ot2} \hat{s}_2 - (\vec{k}^{et} \cdot \hat{s}_2) \vec{k}^{et}] C^{et} \mathcal{E}^{et} - \hat{z} \times (\vec{k}^{ot} \times \hat{s}_2) C^{ot} \mathcal{E}^{ot} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Multiplicando escalarmente a equação (A.4) por \hat{b} , o primeiro termo será

$$\begin{aligned} \hat{b} \cdot \{ \hat{z} \times [k^{oi2} \hat{s}_1 - (\vec{k}^{ei} \cdot \hat{s}_1) \vec{k}^{ei}] C^{ei} \mathcal{E}^{ei} \} &= C^{ei} (\hat{b} \times \hat{z}) \cdot [k^{oi2} \hat{s}_1 - (\vec{k}^{ei} \cdot \hat{s}_1) \vec{k}^{ei}] \mathcal{E}^{ei} \\ &= C^{ei} \hat{a} \cdot [k^{oi2} \hat{s}_1 - (\vec{k}^{ei} \cdot \hat{s}_1) \vec{k}^{ei}] \mathcal{E}^{ei} \\ &= C^{ei} [a_1 k^{oi2} - q (\vec{k}^{ei} \cdot \hat{s}_1)] \mathcal{E}^{ei} \\ &= B^{ei} \mathcal{E}^{ei} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

onde

$$B^{ei} = C^{ei} [a_1 k^{oi2} - q (\vec{k}^{ei} \cdot \hat{s}_1)], \quad (\text{A.6})$$

$$q = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (\text{A.7})$$

e \hat{s}_1 , \hat{a} e \hat{b} são definidos, respectivamente, pelas equações (2.25), (2.26) e (2.27). O segundo termo de (A.4), será

$$\hat{b} \cdot [\hat{z} \times (\vec{k}^{oi} \times \hat{s}_1) C^{oi} \mathcal{E}^{oi}] = \hat{b} \cdot [(\hat{z} \cdot \hat{s}_1) \vec{k}^{oi} - (\hat{z} \cdot \vec{k}^{oi}) \hat{s}_1] C^{oi} \mathcal{E}^{oi} = -D^{oi} k_z^{oi} \mathcal{E}^{oi}, \quad (\text{A.8})$$

onde

$$D^{oi} = C^{oi} b_1. \quad (\text{A.9})$$

Utilizando o mesmo procedimento para os outros termos da equação (A.4), teremos

$$-D^{or} k_z^{or} \mathcal{E}^{or} + B^{er} \mathcal{E}^{er} + D^{ot} k_z^{ot} \mathcal{E}^{ot} - B^{et} \mathcal{E}^{et} = D^{oi} k_z^{oi} \mathcal{E}^{oi} - B^{ei} \mathcal{E}^{ei}. \quad (\text{A.10})$$

Se, por outro lado, multiplicarmos escalarmente a equação (A.4) por \hat{a} , o primeiro termo será

$$\begin{aligned}\hat{a} \cdot \{ \hat{z} \times [k^{oi2} \hat{s}_1 - (\vec{k}^{ei} \cdot \hat{s}_1) \vec{k}^{ei}] C^{ei} \mathcal{E}^{ei} \} &= C^{ei} (\hat{a} \times \hat{z}) \cdot [k^{oi2} \hat{s}_1 - (\vec{k}^{ei} \cdot \hat{s}_1) \vec{k}^{ei}] \mathcal{E}^{ei} \\ &= -C^{ei} \hat{b} \cdot [k^{oi2} \hat{s}_1 - (\vec{k}^{ei} \cdot \hat{s}_1) \vec{k}^{ei}] \mathcal{E}^{ei} \\ &= -D^{ei} k^{oi2} \mathcal{E}^{ei}\end{aligned}\quad (\text{A.11})$$

onde

$$D^{ei} = C^{ei} b_1. \quad (\text{A.12})$$

O segundo termo ficará

$$\begin{aligned}\hat{a} \cdot [\hat{z} \times (\vec{k}^{oi} \times \hat{s}_1) C^{oi} \mathcal{E}^{oi}] &= C^{oi} \hat{a} \cdot [(\hat{z} \cdot \hat{s}_1) \vec{k}^{oi} - (\hat{z} \cdot \vec{k}^{oi}) \hat{s}_1] \mathcal{E}^{oi} \\ &= C^{oi} [\sigma_1 q - a_1 k_z^{oi}] \mathcal{E}^{oi} \\ &= A^{oi} \mathcal{E}^{oi},\end{aligned}\quad (\text{A.13})$$

onde

$$A^{oi} = C^{oi} [\sigma_1 q - a_1 k_z^{oi}] \quad (\text{A.14})$$

e σ_1 é a magnitude da componente z do vetor \hat{s}_1 . Procedendo da mesma forma para os outros termos, teremos

$$A^{or} \mathcal{E}^{or} - D^{er} k^{or2} \mathcal{E}^{er} - A^{ot} \mathcal{E}^{ot} + D^{et} k^{ot2} \mathcal{E}^{et} = -A^{oi} \mathcal{E}^{oi} + D^{ei} k^{oi2} \mathcal{E}^{ei}. \quad (\text{A.15})$$

Substituindo a equação (A.3) na equação (A.2) e multiplicando escalarmente a equação resultante por \hat{a} e \hat{b} , ficaremos com as seguintes expressões

$$D^{or} k^{or2} \mathcal{E}^{or} + A^{er} k^{or2} \mathcal{E}^{er} - D^{ot} k^{ot2} \mathcal{E}^{ot} - A^{et} k^{ot2} \mathcal{E}^{et} = -D^{oi} k^{oi2} \mathcal{E}^{oi} - A^{ei} k^{oi2} \mathcal{E}^{ei} \quad (\text{A.16})$$

e

$$-B^{or} \mathcal{E}^{or} - D^{er} k^{or2} k_z^{er} \mathcal{E}^{er} + B^{ot} \mathcal{E}^{ot} + D^{et} k^{ot2} k_z^{et} \mathcal{E}^{et} = B^{oi} \mathcal{E}^{oi} + D^{ei} k^{oi2} k_1^{ei} \mathcal{E}^{ei} \quad (\text{A.17})$$

onde

$$A^{pm} = C^{pm} [\sigma_m q - a_m k_z^{pm}] \quad (\text{A.18})$$

$$B^{pm} = C^{pm} [a_m k^{om2} - q(\vec{k}^{pm} \cdot \hat{s}_m)] \quad (\text{A.19})$$

$$D^{pm} = C^{pm} b_m, \quad (\text{A.20})$$

com $p = e, o$ e $m = i, r, t$.

O sistema de equações composto pelas expressões (A.10), (A.15), (A.16) e (A.17) poderá ser escrito em forma matricial e ficará

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} A^{or} & -D^{er}(k^{or})^2 & -A^{ot} & D^{et}(k^{ot})^2 \\ -D^{or}k_z^{or} & B^{er} & D^{ot}k_z^{ot} & -B^{et} \\ D^{or}(k^{or})^2 & A^{er}(k^{or})^2 & -D^{ot}(k^{ot})^2 & -A^{et}(k^{ot})^2 \\ -B^{or} & -D^{er}(k^{or})^2k_z^{er} & B^{ot} & D^{et}(k^{ot})^2k_z^{et} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1^{or} \\ \mathcal{E}_1^{er} \\ \mathcal{E}_1^{ot} \\ \mathcal{E}_1^{et} \end{bmatrix} \\
 = & \mathcal{E}_1^{oi} \begin{bmatrix} -A^{oi} \\ D^{oi}k_z^{oi} \\ -D^{oi}(k^{oi})^2 \\ B^{oi} \end{bmatrix} + \mathcal{E}_1^{ei} \begin{bmatrix} D^{ei}(k^{oi})^2 \\ -B^{ei} \\ -A^{ei}(k^{oi})^2 \\ D^{ei}(k^{oi})^2k_z^{ei} \end{bmatrix}. \tag{A.21}
 \end{aligned}$$

Representando a matriz (A.21) de forma mais compacta

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & \Omega_{14} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} & \Omega_{24} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} & \Omega_{34} \\ \Omega_{41} & \Omega_{42} & \Omega_{43} & \Omega_{44} \end{bmatrix}}_{\Omega} \begin{bmatrix} \mathcal{E}^{or} \\ \mathcal{E}^{er} \\ \mathcal{E}^{ot} \\ \mathcal{E}^{et} \end{bmatrix} = \mathcal{E}^{oi} \underbrace{\begin{bmatrix} \Upsilon_1 \\ \Upsilon_2 \\ \Upsilon_3 \\ \Upsilon_4 \end{bmatrix}}_{\Upsilon} + \mathcal{E}^{ei} \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ \Gamma_4 \end{bmatrix}}_{\Gamma}, \tag{A.22}$$

as amplitudes espectrais poderão ser determinadas a partir da regra de Cramer

$$\mathcal{E}^{or} = \frac{\mathcal{E}^{oi} \det[\Omega_1^\Upsilon] + \mathcal{E}^{ei} \det[\Omega_1^\Gamma]}{\det[\Omega]} \tag{A.23}$$

$$\mathcal{E}^{er} = \frac{\mathcal{E}^{oi} \det[\Omega_2^\Upsilon] + \mathcal{E}^{ei} \det[\Omega_2^\Gamma]}{\det[\Omega]} \tag{A.24}$$

$$\mathcal{E}^{ot} = \frac{\mathcal{E}^{oi} \det[\Omega_3^\Upsilon] + \mathcal{E}^{ei} \det[\Omega_3^\Gamma]}{\det[\Omega]} \tag{A.25}$$

$$\mathcal{E}^{et} = \frac{\mathcal{E}^{oi} \det[\Omega_4^\Upsilon] + \mathcal{E}^{ei} \det[\Omega_4^\Gamma]}{\det[\Omega]} \tag{A.26}$$

onde as matrizes Ω_j^Υ e Ω_j^Γ são encontradas trocando a j -ésima coluna da matriz Ω pelas matrizes Υ e Γ , respectivamente, e $j = 1, 2, 3, 4$.

Bibliografia

- [1] Y. I. Bogdanov, E. V. Moreva, G. A. Maslennikov, R. F. Galeev, S. S. Straupe, and S. P. Kulik. *Phys. Rev. A*, 73:063810, 2006.
- [2] Éamon Lalor. *J. Math. Phys.*, 13(4):437, 1972.
- [3] John Gasper, George C. Sherman, and Jakob J. Stamnes. *J. Opt. Soc. Am.*, 66(9):955, 1976.
- [4] Jakob J. Stamnes and Daya Jiang. *Opt. Commun.*, 150:251–262, 1998.
- [5] Jakob J. Stamnes and George C. Sherman. *J. Opt. Soc. Am.*, 66(8):780, 1976.
- [6] Jakob J. Stamnes and George C. Sherman. *J. Opt. Soc. Am.*, 67(5):683, 1977.
- [7] George C. Sherman, Jakob J. Stamnes, and Éamon Lalor. *J. Math. Phys.*, 17(5):760, 1976.
- [8] Alessandro Ciattoni, Gabriella Cincotti, and Claudio Palma. *Opt. Commun.*, 195:55–61, 2001.
- [9] Alessandro Ciattoni, Gabriella Cincotti, Damiano Provenziani, and Claudio Palma. *Phys. Rev. E*, 67:036618, 2003.
- [10] Gabriella Cincotti, Alessandro Ciattoni, and Claudio Palma. *IEEE J. Quantum Electron.*, 37(12):1517–1524, 2001.
- [11] Alessandro Ciattoni, Gabriella Cincotti, and Claudio Palma. *Phys. Rev. E*, 67:036618, 2003.
- [12] Alessandro Ciattoni, Gabriella Cincotti, Claudio Palma, and Horst Weber. *J. Opt. Soc. Am. A*, 19(9):1894, 2002.
- [13] Michał Horodecki and Paweł Horodecki. *Phys. Rev. A*, 59(6):4206, 1999.

-
- [14] Michał Horodecki, Paweł Horodecki, and Ryszard Horodecki. *Phys. Lett. A*, 223:1, 1996.
- [15] Michał Horodecki, Paweł Horodecki, and Ryszard Horodecki. *Phys. Rev. Lett.*, 80(24):5239, 1998.
- [16] Ryszard Horodecki, Paweł Horodecki, Michał Horodecki, and Karol Horodecki. *arXiv:quant-ph/0702225v2*, 2007.
- [17] Onur Kuzucu, Franco N. C. Wong, Sunao Kurimura, and Sergey Tovstonog. *Phys. Rev. Lett.*, 101:153602, 2008.
- [18] Oliver Rudolph. *arXiv:quantum-ph/0202121v1*, pages 1–19, 2002.
- [19] Oliver Rudolph. *Phys. Rev. A*, 67:032312, 2003.
- [20] V. Vedral and M. B. Plenio. *Phys. Rev. A*, 57(3):1619, 1998.
- [21] S. P. Walborn, A. N. de Oliveira, R. S. Thebaldi, and C. H. Monken. *Phys. Rev. A*, 69:023811, 2004.
- [22] C.H. Monken, P.H. Souto Ribeiro, and S. Pádua. *Phys. Rev. A*, 57(4):3123, 1998.
- [23] A. G. da Costa Moura, W. A. T. Nogueira, C. H. Monken, and S. P. Walborn. *arXiv:quant-ph/0806.4624v1*.
- [24] Nadja K. Bernardes, A. G. da Costa Moura, and C. H. Monken. *Opt. Commun.*, 282:1830, 2009.
- [25] M.V. Fedorov, M.A. Efremov, P.A. Volkov, E.V. Moreva, S.S. Straupe, and S.P. Kulik. *Phys. Rev. Lett.*, 99:063901, 2007.
- [26] D.J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, New Jersey, 1999.
- [27] J. D Jackson. *Classical Electrodynamics*. Jonh Wiley, New York, 1999.
- [28] Yu I. Sirotnin and M. P. Shaskolskaya. *Fundamentals of Crystal Physics*. Mir Publishers Moscow, english translation, 1982.
- [29] L. Mandel and E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, New York, 1995.

- [30] L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw, and J.P. Woerdman. *Phys. Rev. A*, 45:8185, 1992.
- [31] L. Allen, J Courtial, and M.J. Padgett. *Phy. Rev. E*, 60(6):7497, 1999.
- [32] M.W. Beijersbergen, L. Allen, H.E.L.O. van der Veen, and J. P. Woerdman. *Opt. Commun.*, 96:123–132, 1993.
- [33] Alexandre Gutenberg da Costa Moura. *Propagação de Feixes Eletromagnéticos em Meios Birrefringentes Uniaxiais*. Dissertação de Mestrado, Belo Horizonte, 2003.
- [34] D. Provenziani, A. Ciattoni, G. Cincotti, C. Palma, F. Ravaccia, and C. Sapia. *Opt. Exp.*, 10(15):699–706, 2002.
- [35] R. MartínezHerrero, J. M. Movilla, and P. M. Mejías. *J. Opt. Soc. Am. A*, 18(8):2009, 2001.
- [36] H. H. Arnaut and G. A. Barbosa. *Phy. Rev. Lett.*, 85(2):286, 2000.
- [37] S. Franke-Arnold, S. M. Barnett, M. J. Padjett, and L. Allen. *Phys. Rev. A*, 65:33823–1–6, 2002.
- [38] J. P. Torres, G. MolinaTerriza, and L. Torner. *J. Opt. B*, 7:235, 2005.
- [39] G. A. Barbosa and H. H. Arnaut. *Phy. Rev. A*, 65:053801, 2002.
- [40] G. A. Barbosa. *Phy. Rev. A*, 76:033821, 2007.
- [41] C. K. Hong and L. Mandel. *Phys. Rev. A*, 31(4):2409, 1985.
- [42] D. N. Klyshko. *Sov. Phys. JETP*, 28(3):522, 1969.
- [43] M. H. Rubin. *Phys. Rev. A*, 54(6):5349, 1996.
- [44] J. P. Torres, C. I. Osorio, and L. Torner. *Opt. Lett.*, 29:1939, 2004.
- [45] M.V. Fedorov, M.A. Efremov, P.A. Volkov, E.V. Moreva, S.S. Straupe, and S.P. Kulik. *Phys. Rev. A*, 77:032336, 2008.
- [46] So-Young Baek and Yoon-Ho Kim. *Phys. Rev. A*, 77:043807, 2008.
- [47] A. Joobeur, B. Saleh, and M. Teich. *Phys. Rev. A*, 50:3349, 1994.
- [48] C. Kurtsiefer, M. Oberparleiter, and H. Weinfurter. *J. Mod. Opt.*, 48:1997, 2001.

- [49] Lijun Wang. *Investigation of Induced Coherence With and Without Induced Emission*. PhD Thesis, Rochester, 1992.
- [50] Robert W. Boyd. *Nonlinear Optics*. Academic Press, San Diego, 1992.
- [51] Y. R. Shen. *The Principles of Nonlinear Optics*. Wiley, 1984.
- [52] Amnon Yariv. *Optical Electronics*. Saunders College Publishing, Pasadena, 4th edition, 1991.
- [53] A. V. Belinky and D. N. Klyshko. *Laser Phys.*, 4:663, 1994.
- [54] P. S. K. Lee, M. P. van Exter, and J. P. Woerdman. *Phys. Rev. A*, 70:043818, 2004.
- [55] J. B. Altepeter, E. R. Jeffrey, and P. G. Kwiat. *Opt. Expr.*, 13:8951, 2005.
- [56] M. Barbieri, C. Cinelli, F. D. Martini, and P. Mataloni. *Eur. Phys. J. D*, 32:261, 2005.
- [57] G. Bitton, W. P. Grice, J. Moreau, and L. Zhang. *Phys. Rev. A*, 65:063805, 2002.
- [58] Otfried Gühner and Géza Tóth. *Phys. Rep.*, 474:1–75, 2009.
- [59] Yoon-Ho Kim, Sergei P. Kulik, and Yanhua Shih. *Phys. Rev. A*, 63:060301, 2001.
- [60] C. Kurtsiefer, M. Oberparleiter, and H. Weinfurter. *Phys. Rev. A*, 64:023802, 2001.
- [61] P. G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter, A. Zeilinger, A. V. Sergienko, and Y. Shih. *Phys. Rev. Lett.*, 75:4337, 1995.
- [62] P. G. Kwiat, E. Waks, A. G. White, and I. Appelbaum and P. H. Eberhard. *Phys. Rev. A*, 60:R773, 1999.
- [63] Y. Shih. *Rep. Prog. Phys.*, 66:1009, 2003.
- [64] Armin Uhlmann. *Phys. Rev. A*, 62:032307, 2000.
- [65] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. *Phys. Rev.*, 47:777, 1935.
- [66] J. S. Bell. *Physics*, 1:195, 1964.
- [67] J. S. Bell. *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2004.

- [68] Osvaldo Pessoa Jr. *Conceitos de Física Quântica, Vol. 2*. Livraria da Física, São Paulo, 2006.
- [69] Asher Peres. *Quantum Theory: Concepts and Methods*. Kluwer Academic Publishers, New York, 2002.
- [70] John F. Clauser and Michael A. Horne. *Phys. Rev. D*, 10(2):526, 1974.
- [71] John F. Clauser, Michael A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt. *Phys. Rev. Lett.*, 23:880, 1969.
- [72] W. Hall. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 39:14119, 2006.
- [73] A. Ekert and P. L. Knight. *Am. J. Phys.*, 63:415, 1995.
- [74] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Computação Quântica e Informação Quântica*. Bookman, São Paulo, 2003.
- [75] Charles H. Bennet, David P. DiVincenzo, John A. Smolin, and William K. Wootters. *Phys. Rev. A*, 54:3824, 1996.
- [76] Pranaw Rungta, V. Bužek, Carlton M. Caves, M. Hillery, and G. J. Milburn. *Phys. Rev. A*, 64:042315, 2001.
- [77] William Wootters. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2245, 1998.
- [78] A. Aiello and J. P. Woerdman. *Phys. Rev. A*, 70:023808, 2004.
- [79] B. E. A. Saleh and M. C. Teich. *Fundamental Photonics*. Wiley, New York, 1991.
- [80] Y. H. Shih and C. O. Alley. *Phys. Rev. Lett.*, 61(26):2921, 1988.
- [81] F. Verstraete and M. M. Wolf. *Phys. Rev. Lett.*, 89:170401, 2002.
- [82] M.V. Fedorov, M.A. Efremov, A. E. Kazakov, K. W. Chan, C. K. Law, and J. H. Eberly. *Phys. Rev. A*, 69:052117, 2004.
- [83] M.V. Fedorov, M.A. Efremov, A. E. Kazakov, K. W. Chan, C. K. Law, and J. H. Eberly. *Phys. Rev. A*, 72:032110, 2005.
- [84] M.V. Fedorov, M.A. Efremov, P.A. Volkov, and J. H. Eberly. *J. Phys. B*, 39:S467, 2006.
- [85] K. W. Chan and J. H. Eberly. *arXiv:quant-ph/0404093v2*.