UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia de Estruturas
Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL E ANÁLISE CRÍTICA DE ELEMENTOS FINITOS DE PLACAS

Samir Silva Saliba

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, como parte dos requisitos para obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS.

Orientador: Prof. Roque Luiz da Silva Pitangueira

Belo Horizonte
Abril de 2007

Nunca ande pelo caminho traçado, pois ele conduz somente onde os outros foram.

*(*Alexandre Graham Bell*)*

Para alcançarmos objetivos nunca antes alcançados, precisamos começar a fazer coisas que nunca fizemos.

*(*Stephen R. Covey*)*

Dedico este trabalho à minha família.

Índice

Índice iv

Lista de Tabelas viii

Lista de Figuras xii

Lista de Símbolos xix

Resumo xxi

Abstract xxiii

Agradecimentos xxv

1 INTRODUÇÃO 1
- 1.1 Objetivos do Trabalho . . . 3
  - 1.1.1 Objetivos Gerais . . . 3
  - 1.1.2 Objetivos Específicos . . . 4
- 1.2 Organização do Texto . . . 4

2 MODELOS MATEMÁTICOS PARA ESTUDO DE PLACAS 6
- 2.1 Introdução . . . 6
- 2.2 Teoria de Kirchhoff para Placas . . . 7
  - 2.2.1 Hipóteses . . . 7
  - 2.2.2 Campo de Deslocamentos . . . 8
  - 2.2.3 Relações Deformações-Deslocamentos . . . 9
  - 2.2.4 Relações Tensões-Deformações . . . 10
  - 2.2.5 Esforços Internos . . . 11
- 2.3 Teoria de Reissner-Mindlin para Placas . . . 13
  - 2.3.1 Hipóteses . . . 13
  - 2.3.2 Campo de Deslocamentos . . . 14
  - 2.3.3 Relações Deformações-Deslocamentos . . . 16
  - 2.3.4 Relações Tensões-Deformações . . . 17
  - 2.3.5 Esforços Internos . . . 19

3 MODELOS DISCRETOS PARA ESTUDO DE PLACAS **21**
3.1 Introdução . . . 21
3.2 Elementos Finitos para Placas Finas baseados na Teoria de Kirchhoff 22
3.2.1 Formulação dos Elementos . . . 22
3.2.2 Elemento Retangular de 4 Nós Não-Conforme (MZC) . . . 26
3.2.3 Elemento Retangular de 4 Nós Conforme (BFS) . . . 28
3.2.4 Elemento Triangular de 3 Nós Não-Conforme (CKZ) . . . 30
3.2.5 Elemento Triangular Conforme de Cowper . . . 32
3.3 Elementos Finitos para Placas Espessas baseados na Teoria de Reissner-Mindlin . . . 35
3.3.1 Formulação dos Elementos . . . 36
3.3.2 Elementos e suas Funções de Forma . . . 38
3.3.3 Condições de Contorno . . . 41
3.4 Elementos Finitos para Placas Finas baseados na Teoria de Reissner-Mindlin com Integração Reduzida / Seletiva . . . 42
3.4.1 Formulação dos Elementos . . . 44
3.4.2 Elemento Quadrilateral de 4 Nós (Q4) . . . 46
3.4.3 Elemento Quadrilateral de 8 Nós (Q8) . . . 46
3.4.4 Elemento Quadrilateral de 9 Nós (Q9) . . . 47
3.4.5 Elemento Quadrilateral Heterosis (Q9H) . . . 48
3.5 Elementos Finitos para Placas Finas baseados na Teoria de Reissner-Mindlin com Deformação de Cisalhamento Imposta . . . 50
3.5.1 Formulação dos Elementos . . . 50
3.5.2 Elemento Quadrilateral de 4 Nós (RMCIQ4) . . . 52
3.5.3 Elemento Quadrilateral de 8 Nós (RMCIQ8) . . . 60
3.5.4 Elemento Quadrilateral de 9 Nós (RMCIQ9) . . . 63
3.5.5 Elemento Triangular de 6 Nós (RMCIT6) . . . 65

4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL **68**
4.1 Introdução . . . 68
4.2 Interface `AnalysisModel` . . . 73
4.3 Interface `Shape` . . . 75
4.4 Interface `ProblemDriver` . . . 77
4.5 Classe Abstrata `Element` . . . 79

5 TESTES DA MALHA DE IRONS (*PATCH TEST*) **81**
5.1 Introdução . . . 81
5.2 Elementos de Kirchhoff . . . 82
5.2.1 *Patch Test* para Flexão . . . 83
5.2.2 *Patch Test* para Torção . . . 85
5.3 Elementos de Reissner-Mindlin . . . 87
5.3.1 *Patch Test* para Flexão . . . 88
5.3.2 *Patch Test* para Torção . . . 89
5.3.3 *Patch Test* para Cisalhamento . . . 90

6 ESTUDOS DE CONVERGÊNCIA 92
6.1 Introdução . . . 92
6.2 Elementos Finitos de Placa Fina . . . 94
6.2.1 Placas Simplesmente Apoiadas - (SA) . . . 95
6.2.2 Placas Engastadas - (EN) . . . 107
6.2.3 Comparação entre os recursos disponibilizados no INSANE para os elementos de Kirchhoff . . . 119
6.3 Elementos Finitos de Placa Espessa . . . 122
6.3.1 Placa Moderadamente Espessa . . . 122
6.3.2 Placa Espessa . . . 126
6.4 Resumo dos Resultados . . . 128
6.5 Análise Crítica dos Resultados . . . 130

7 COMPARAÇÕES COM SOLUÇÕES ANALÍTICAS 132
7.1 Introdução . . . 132
7.2 Placa Triangular . . . 133
7.3 Placa Retangular . . . 137
7.4 Placa Paralelogrâmica . . . 140
7.5 Placa Anular . . . 145
7.6 Análise Crítica dos Resultados . . . 152

8 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO 154
8.1 Introdução . . . 154
8.2 Laje Lisa . . . 154
8.3 Placa Quadrada em Concreto Armado . . . 172
8.4 Análise Crítica dos Resultados . . . 196

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS 197

A Funções de Forma e Matrizes de Rigidez dos Elementos de Kirchhoff 200
A.1 Elemento Retangular MZC (Seção 3.2.2) . . . 200
A.1.1 Funções de Forma . . . 200
A.1.2 Matriz de Rigidez . . . 201
A.2 Elemento Retangular BFS (Seção 3.2.3) . . . 201
A.2.1 Funções de Forma . . . 201
A.2.2 Matriz de Rigidez . . . 201
A.3 Elemento Triangular CKZ (Seção 3.2.4) . . . 205
A.3.1 Funções de Forma . . . 205
A.3.2 Matriz de Rigidez . . . 205
A.4 Elemento Triangular de Cowper (Seção 3.2.5) . . . 207
A.4.1 Funções de Forma . . . 208
A.4.2 Matriz de Rigidez . . . 209

B Condições de Contorno e Número de Pontos de Integração Aplicados aos Elementos de Kirchhoff **211**
B.1 Condições de Contorno 211
B.2 Pontos de Integração 213

Bibliografia **214**

Lista de Tabelas

3.1 Condições de contorno para os elementos de Reissner-Mindlin 42
3.2 Quadratura para integração da matriz de rigidez e número de mecanismos 45
3.3 Cossenos dos ângulos formado entre $\bar{\xi}_i\xi$ 55
3.4 Coordenadas referentes aos pontos de colocação 57
3.5 Coordenadas referentes aos pontos de colocação do elemento RMCIQ8 62
3.6 Coordenadas referentes aos pontos de colocação do elemento RMCIQ9 64
3.7 Coordenadas referentes aos pontos de colocação do elemento RMCIT6 66

5.1 Carregamento aplicado para o *patch test* de flexão dos elementos de Kirchhoff 83
5.2 Resultado do *patch test* de flexão dos elementos de Reissner-Mindlin . 89
5.3 Resultado do *patch test* de torção dos elementos de Reissner-Mindlin 90
5.4 Resultado do *patch test* de cisalhamento dos elementos de Reissner-Mindlin 91

6.1 Flecha máxima de uma placa SA-CC discretizada com elementos de Kirchhoff 96
6.2 Flecha máxima de uma placa SA-CC-IR discretizada com elementos de Reissner-Mindlin 98
6.3 Flecha máxima de uma placa SA-CC-IS discretizada com elementos de Reissner-Mindlin 99
6.4 Flecha máxima de uma placa SA-CC-CI discretizada com elementos de Reissner-Mindlin 100
6.5 Flecha máxima de uma placa SA-CD discretizada com elementos de Kirchhoff 102

6.6 Flecha máxima de uma placa SA-CD-IR discretizada com elementos de Reissner-Mindlin . . . 104
6.7 Flecha máxima de uma placa SA-CD-IS discretizada com elementos de Reissner-Mindlin . . . 105
6.8 Flecha máxima de uma placa SA-CD-CI discretizada com elementos de Reissner-Mindlin . . . 106
6.9 Flecha máxima de uma placa EN-CC discretizada com elementos de Kirchhoff . . . 108
6.10 Flecha máxima de uma placa EN-CC-IR discretizada com elementos de Reissner-Mindlin . . . 110
6.11 Flecha máxima de uma placa EN-CC-IS discretizada com elementos de Reissner-Mindlin . . . 111
6.12 Flecha máxima de uma placa EN-CC-CI discretizada com elementos de Reissner-Mindlin . . . 112
6.13 Flecha máxima de uma placa EN-CD discretizada com elementos de Kirchhoff . . . 114
6.14 Flecha máxima de uma placa EN-CD-IR discretizada com elementos de Reissner-Mindlin . . . 116
6.15 Flecha máxima de uma placa EN-CD-IS discretizada com elementos de Reissner-Mindlin . . . 117
6.16 Flecha máxima de uma placa EN-CD-CI discretizada com elementos de Reissner-Mindlin . . . 118
6.17 Tempo de processamento em segundos de uma placa SA-CC . . . 120
6.18 Tempo de processamento em segundos de uma placa SA-CD . . . 121
6.19 Flecha máxima de uma placa moderadamente espessa SA-CD . . . 124
6.20 Flecha máxima de uma placa moderadamente espessa EN-CD . . . 125
6.21 Flecha máxima de uma placa espessa EN-CC . . . 127
6.22 Monotonicidade - Placas Finas . . . 129
6.23 Monotonicidade - Placas Moderadamente Espessas . . . 129
6.24 Monotonicidade - Placas Espessas . . . 130

7.1 Momentos em alguns nós da placa triangular SA-CC . . . 135
7.2 Resultados obtidos na análise da placa paralelogrâmica . . . 142
7.3 Detalhes da discretização da placa anular . . . 147

7.4 Deslocamentos verticais - Placa anular 148

8.1 Detalhes da discretização da laje lisa 156
8.2 Deslocamento vertical dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.5(a) 161
8.3 Rotação θ_x dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.5(a) . . 163
8.4 Rotação θ_y dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.5(a) . . 165
8.5 Momento M_{xx} dos elementos contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.5(b) 167
8.6 Momento M_{yy} dos elementos contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.5(b) 169
8.7 Momento M_{xy} dos elementos contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.5(b) 171
8.8 Propriedades dos materiais empregados na placa em concreto 173
8.9 Informações sobre as discretizações da placa 174
8.10 Deslocamento vertical dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(a) - SEM ARMADURA 178
8.11 Deslocamento vertical dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(a) - COM ARMADURA 179
8.12 Rotação θ_x dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(a) - SEM ARMADURA 182
8.13 Rotação θ_x dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(a) - COM ARMADURA 183
8.14 Rotação θ_y dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(a) - SEM ARMADURA 186
8.15 Rotação θ_y dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(a) - COM ARMADURA 187
8.16 Momento M_{xx} dos elementos contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(b) - SEM ARMADURA 190
8.17 Momento M_{xx} dos elementos contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(b) - COM ARMADURA 191
8.18 Momento M_{yy} dos elementos contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(b) - SEM ARMADURA 194

8.19 Momento M_{yy} dos elementos contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(b) - COM ARMADURA 195

B.1 Condições de contorno para uma placa retangular 212
B.2 Condições de contorno para uma placa circular 213
B.3 Pontos de integração para os elementos de Kirchhoff 213

Lista de Figuras

1.1 Representação de uma placa submetida a ações de forças e momentos 1

2.1 Representação dos deslocamentos de uma placa 7
2.2 Representação do deslocamento de um ponto A no plano xz, segundo as hipóteses de Kirchhoff 8
2.3 Distribuição de tensões na direção x ao longo da espessura (análogo na direção y) 11
2.4 Distribuição de σ_x 12
2.5 Convenção de sinais adota para a teoria de Kirchhoff 13
2.6 Representação do deslocamento de um ponto A no plano xz, segundo as hipóteses de Reissner-Mindlin 14
2.7 Distribuição de tensões cisalhante 18
2.8 Distribuição de tensões cisalhante conforme teoria da elasticidade . . 18
2.9 Convenção de sinais adotadas para a teoria de Reissner-Mindlin . . . 20

3.1 Elemento de placa retangular MZC 26
3.2 Elemento de placa retangular BFS 28
3.3 Elemento de placa triangular CKZ 30
3.4 Elemento de placa triangular de Cowper 32
3.5 Dimensões do elemento de Cowper 34
3.6 Elemento isoparamétrico quadrilateral de quatro nós Q4 38
3.7 Elemento isoparamétrico quadrilateral de oito nós Q8 39
3.8 Elemento isoparamétrico quadrilateral de nove nós Q9 39
3.9 Elemento isoparamétrico triangular de três nós T3 40
3.10 Elemento isoparamétrico triangular de seis nós T6 40
3.11 Elemento isoparamétrico triangular de dez nós T10 41
3.12 Condições de contorno para os elementos de Reissner-Mindlin 41

3.13 Viga em balanço submetida a uma carga concentrada na extremidade 43
3.14 Representação da razão entre as flechas exata e aproximada (MEF) . 44
3.15 Elemento quadrilateral Q4 46
3.16 Elemento quadrilateral Q8 47
3.17 Elemento quadrilateral Q9 48
3.18 Elemento quadrilateral Q9H 48
3.19 Número de variáveis que intervém nas interpolações 52
3.20 Elemento quadrilateral RMCIQ4 53
3.21 Direção natural $\bar{\xi}_i$ 55
3.22 Direções de $\bar{\xi}_i$ para o elemento RMCIQ4 55
3.23 Pontos de colocação para o cálculo das deformações naturais 56
3.24 Componentes da deformação de cisalhamento avaliadas nos pontos de colocação 58
3.25 Elemento quadrilateral RMCIQ8 60
3.26 Pontos para o cálculo das deformações naturais 61
3.27 Elemento quadrilátero RMCIQ9 63
3.28 Pontos para o cálculo das deformações naturais 64
3.29 Elemento triangular RMCIT6 65
3.30 Pontos para o cálculo das deformações naturais 66

4.1 Organização atual do núcleo numérico do **INSANE** 69
4.2 Diagrama de classe para `Persistence` 70
4.3 Hierarquia da interface `Model` 70
4.4 Diagrama de classe para `Assembler` 71
4.5 Diagrama de classe para `Solution` 72
4.6 Diagrama de classe para `AnalysisModel` 74
4.7 Diagrama de classe para `Shape` 76
4.8 Diagrama de classe para `ProblemDriver` 78
4.9 Diagrama de classe para `Element` 80

5.1 Malhas utilizadas nos *Patch Tests* dos elementos de Kirchhoff 83
5.2 *Patch Test* - Deslocamento vertical 84
5.3 *Patch Test* de torção - Elemento retangular BFS 87
5.4 Malhas utilizadas nos *patch tests* dos elementos de Reissner-Mindlin . 88
5.5 *Patch test* para flexão - Elementos de Reissner-Mindlin 88

5.6 *Patch test* para torção - Elementos de Reissner-Mindlin 89
5.7 *Patch test* para cisalhamento - Elementos de Reissner-Mindlin 91

6.1 Refinamento da malha para a placa quadrada 93
6.2 Refinamento da malha para a placa circular 93
6.3 Dimensões da placa fina 94
6.4 Placa quadrada simplesmente apoiada sob a ação de uma carga concentrada no centro (SA-CC) 95
6.5 Flecha máxima de uma placa SA-CC discretizada com elementos de Kirchhoff 97
6.6 Flecha máxima de uma placa SA-CC-IR discretizada com elementos de Reissner-Mindlin 99
6.7 Flecha máxima de uma placa SA-CC-IS discretizada com elementos de Reissner-Mindlin 100
6.8 Flecha máxima de uma placa SA-CC-CI discretizada com elementos de Reissner-Mindlin 101
6.9 Placa quadrada simplesmente apoiada sob a ação de uma carga distribuída (SA-CD) 101
6.10 Flecha máxima de uma placa SA-CD discretizada com elementos de Kirchhoff 103
6.11 Flecha máxima de uma placa SA-CD-IR discretizada com elementos de Reissner-Mindlin 104
6.12 Flecha máxima de uma placa SA-CD-IS discretizada com elementos de Reissner-Mindlin 105
6.13 Flecha máxima de uma placa SA-CD-CI discretizada com elementos de Reissner-Mindlin 106
6.14 Placa quadrada engastada sob a ação de uma carga concentrada no centro (EN-CC) 107
6.15 Flecha máxima de uma placa EN-CC discretizada com elementos de Kirchhoff 109
6.16 Flecha máxima de uma placa EN-CC-IR discretizada com elementos de Reissner-Mindlin 110
6.17 Flecha máxima de uma placa EN-CC-IS discretizada com elementos de Reissner-Mindlin 111

6.18 Flecha máxima de uma placa EN-CC-CI discretizada com elementos de Reissner-Mindlin . . . 112
6.19 Placa quadrada engastada sob a ação de uma carga distribuída (EN-CD) 113
6.20 Flecha máxima de uma placa EN-CD discretizada com elementos de Kirchhoff . . . 115
6.21 Flecha máxima de uma placa EN-CD-IR discretizada com elementos de Reissner-Mindlin . . . 116
6.22 Flecha máxima de uma placa EN-CD-IS discretizada com elementos de Reissner-Mindlin . . . 117
6.23 Flecha máxima de uma placa EN-CD-CI discretizada com elementos de Reissner-Mindlin . . . 118
6.24 Tempo de processamento de uma placa SA-CC . . . 120
6.25 Tempo de processamento de uma placa SA-CD . . . 121
6.26 Dimensões da placa moderadamente espessa . . . 122
6.27 Placa quadrada moderadamente espessa simplesmente apoiada sob a ação de uma carga uniformemente distribuída (SA-CD) . . . 123
6.28 Flecha máxima de uma placa moderadamente espessa SA-CD . . . 124
6.29 Placa quadrada moderadamente espessa engastada sob a ação de uma carga uniformemente distribuída (EN-CD) . . . 124
6.30 Flecha máxima de uma placa moderadamente espessa EN-CD . . . 125
6.31 Dimensões da placa espessa . . . 126
6.32 Placa circular engastada sob a ação de uma carga concentrada central (EN-CC) . . . 126
6.33 Flecha máxima de uma placa circular espessa EN-CC . . . 127
6.34 Deslocamento vertical ao longo da linha de simetria em x de uma placa circular espessa EN-CC . . . 128

7.1 Placa triangular simplesmente apoiada sob a ação de uma carga concentrada no centróide . . . 133
7.2 Discretização da placa triangular SA-CC . . . 134
7.3 Deslocamentos verticais da placa triangular SA-CC . . . 135
7.4 Momentos ao longo da placa triangular SA-CC . . . 136
7.5 Placa retangular carregada uniformemente com dois lados opostos simplesmente apoiados, um livre e o outro engastado . . . 137

7.6 Malha utilizada na solução da placa retangular 138
7.7 Grandezas analisadas da placa retangular 140
7.8 Placa paralelogrâmica simplesmente apoiada sob a ação de uma carga uniforme distribuída 140
7.9 Malhas utilizadas para a análise da placa paralelogrâmica 142
7.10 Grandezas analisadas da placa paralelogrâmica com elementos Q8 . . 143
7.11 Grandezas analisadas da placa paralelogrâmica com elementos Q9 . . 145
7.12 Placa anular simplesmente apoiada sob ação de um carregamento uniforme distribuído no bordo interno 146
7.13 Malha utilizada na solução da placa anular 147
7.14 Deslocamentos verticais - Placa anular 149
7.15 Grandezas analisadas da placa anular com integração seletiva 150
7.16 Grandezas analisadas da placa anular com a técnica de deformação de cortante imposta 152

8.1 Dimensões da laje lisa 155
8.2 Discretização da laje lisa 156
8.3 Elemento SHELL63 (imagens retiradas do manual do ANSYS) 156
8.4 Convenção de sinais adotada 157
8.5 Nós e elementos escolhidos para comparação das grandezas na laje lisa 158
8.6 Configuração da malha deformada 159
8.7 Deslocamento vertical 160
8.8 Deslocamento vertical dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.5(a) 161
8.9 Rotação θ_x 162
8.10 Rotação θ_x dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.5(a) . . 163
8.11 Rotação θ_y 164
8.12 Rotação θ_y dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.5(a) . . 165
8.13 Momento M_{xx} 166
8.14 Momento M_{xx} dos elementos contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.5(b) 167
8.15 Momento M_{yy} 168
8.16 Momento M_{yy} dos elementos contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.5(b) 169

8.17 Momento M_{xy} 170
8.18 Momento M_{xy} dos elementos contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.5(b) 171
8.19 Placa quadrada simplesmente apoiada sob ação de um carregamento uniformemente distribuído 172
8.20 Armadura em aço 172
8.21 Camadas da placa com armadura - Dimensões em centímetros 173
8.22 Discretização da placa em concreto com e sem armadura 173
8.23 Elemento SHELL99 (imagens retiradas do manual do ANSYS) 174
8.24 Nós e elementos escolhidos para comparação das grandezas na placa em concreto 175
8.25 Deslocamento vertical 177
8.26 Deslocamento vertical dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(a) - SEM ARMADURA 178
8.27 Deslocamento vertical dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(a) - COM ARMADURA 179
8.28 Rotação θ_x 181
8.29 Rotação θ_x dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(a) - SEM ARMADURA 182
8.30 Rotação θ_x dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(a) - COM ARMADURA 183
8.31 Rotação θ_y 185
8.32 Rotação θ_y dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(a) - SEM ARMADURA 186
8.33 Rotação θ_y dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(a) - COM ARMADURA 187
8.34 Momento M_{xx} 189
8.35 Momento M_{xx} dos elementos contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(b) - SEM ARMADURA 190
8.36 Momento M_{xx} dos elementos contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(b) - COM ARMADURA 191
8.37 Momento M_{yy} 193
8.38 Momento M_{yy} dos elementos contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(b) - SEM ARMADURA 194

8.39 Momento M_{yy} dos elementos contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(b) - COM ARMADURA 195

A.1 Elemento de placa retangular MZC 200
A.2 Elemento de placa retangular BFS 201
A.3 Elemento de placa triangular CKZ 205
A.4 Elemento de placa triangular Cowper 207

B.1 Condições de contorno para os elementos de Kirchhoff 211

Lista de Símbolos

θ_x	Vetor rotação normal ao plano xz
θ_y	Vetor rotação normal ao plano yz
u	Deslocamento na direção x
v	Deslocamento na direção y
w	Deslocamento na direção z
$\underline{u}$	Vetor de deslocamentos para um ponto contido no plano médio
$\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \varepsilon_z$	Deformações normais
$\gamma_{xy},\ \gamma_{yz},\ \gamma_{xz}$	Deformações cisalhantes
$\underline{\varepsilon}$	Vetor de deformações
$\underline{\chi}$	Vetor de deformações generalizadas devido à flexão (curvaturas)
$\underline{\sigma}$	Vetor de tensões
$\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z$	Tensões normais
$\tau_{xy},\ \tau_{xz},\ \tau_{yz}$	Tensões cisalhantes
$\underline{D}$	Matriz constitutiva
$E_x,\ E_y$	Módulos de elasticidade longitudinal
$G_{xy},\ G_{xz},\ G_{yz}$	Módulos de elasticidade transversal
$\nu_{xy},\ \nu_{yx}$	Coeficientes de Poisson
$M_x,\ M_{xx}$	Vetor momento fletor normal ao plano xz
$M_y,\ M_{yy}$	Vetor momento fletor normal ao plano xz
M_{xy}	Vetor momento de torção normal aos planos xz e yz
t	Espessura da placa
$\underline{M}$	Vetor de esforços internos por unidade de comprimento
$\phi_x,\ \phi_y$	Rotações adicionais
$\underline{\varepsilon}_f$	Vetor de deformações devido à flexão
$\underline{\varepsilon}_c$	Vetor de deformações de cisalhamento transversal

$\underline{\sigma}_f$	Vetor de tensões devido à flexão
$\underline{\sigma}_c$	Vetor de tensões de cisalhamento transversal
$\underline{D}_f$	Matrix constitutiva de flexão
$\underline{D}_c$	Matrix constitutiva de cisalhamento
$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \kappa$	Fator de correção da tensão cisalhante
$Q_x,\ Q_y$	Forças cisalhantes
$\underline{\hat{\varepsilon}}_f$	Vetor de deformações generalizadas de flexão
$\underline{\hat{\varepsilon}}_c$	Vetor de deformações generalizadas de cisalhamento
$\underline{\hat{D}}_f$	Matrix constitutiva generalizada de flexão
$\underline{\hat{D}}_c$	Matrix constitutiva generalizada de cisalhamento
$\underline{\hat{D}}$	Matriz constitutiva generalizada
$\underline{\hat{\varepsilon}}$	Vetor de deformações generalizadas
$\underline{N}$	Matriz das funções de forma do elemento
$\underline{d}$	Vetor de deslocamento do elemento
$\underline{B}$	Matriz de deformações generalizadas do elemento
$\underline{k}$	Matriz de rigidez do elemento
$\underline{f}_{eq}$	Vetor de cargas nodais devido a carga distribuída
$\underline{p}$	Vetor de cargas nodais aplicadas
$\xi,\ \eta$	Direções naturais
A	Área do elemento
A^*	Área reduzida ($A^* = \alpha\ A = \frac{5}{6}A$)
$\underline{R}$	Matriz de rotação
$\underline{T}$	Matriz de transformação
$\underline{B}_f$	Matriz de deformações generalizadas de flexão do elemento
$\underline{B}_c$	Matriz de deformações generalizadas de cisalhamento do elemento
$\gamma_\xi,\ \gamma_\eta$	Deformações de cisalhamento no sistema natural
$\underline{\gamma}^{'}$	Vetor de deformações de cisalhamento no sistema natural
$\underline{\hat{B}}_c$	Matriz de deformações de cisalhamento substitutiva
D	Coeficiente de rigidez à flexão da placa

Resumo

Esta dissertação de mestrado descreve a implementação computacional de diversos elementos finitos de placas baseados nas teorias de Kirchhoff, para placas finas, e Reissner-Mindlin, que é aplicável a placas de qualquer espessura. Apresenta-se uma breve discussão sobre as formulações para os modelos matemáticos e discretos baseados nestas teorias, mostrando suas principais diferenças e particularidades, bem como a necessidade do uso de técnicas especiais para a utilização da teoria de Reissner-Mindlin no estudo de placas finas.

Entre os diversos elementos finitos para análise de placas baseados na teoria de Kirchhoff, foram implementados os elementos retangulares desenvolvidos por Melosh, Zienkiewicz e Cheung (MZC) e por Bogner, Fox e Schmit (BFS) e os triangulares desenvolvidos por Cheung, King e Zienkiewicz (CKZ) e por Cowper, Kosko, Lindberg e Olson (Cowper); os elementos baseados na teoria de Reissner-Mindlin escolhidos para a análise de placas espessas foram os quadrilaterais de quatro nós (Q4), oito nós (Q8), nove nós (Q9), nove nós heterosis, desenvolvido por Hughes e Cohen (Q9H), e os triangulares de três nós (T3), de seis nós (T6) e o de dez nós (T10); para utilização da teoria de Reissner-Mindlin na modelagem de placas finas, adotam-se a Integração Reduzida ou Seletiva com os elementos quadrilaterais citados anteriormente e a técnica de Deformação de Cisalhamento Imposta com os elementos Q4, Q8, Q9 e T6.

A implementação destes modelos foi feita no núcleo numérico do **INSANE** (*INteractive Structural ANalysis Environment*) que é um sistema desenvolvido segundo o paradigma de Programação Orientada a Objetos (POO) utilizando a linguagem

JAVA. Esta implementação é detalhada através do uso de diagramas UML (Unified Modelling Language), onde são apresentadas as diversas classes e interfaces utilizadas no núcleo numérico.

Afim de conhecer melhor os elementos implementados, apresentam-se testes de malha e estudos de convergência realizados, além de diversas simulações numéricas.

Abstract

This master's thesis describes the computacional implementation of several plate finite elements based in the Kirchhoff theory, for thin plates, and Reissner-Mindlin theory, that is applicable to plates of any thickness. It presents a brief discussion about the formulations for the mathematical and discrete models based in these theories, showing their main differences and particularities, as well as the need of the use of special techniques for the use of the Reissner-Mindlin theory in the study of thin plates.

Among the several finite elements for analysis of plates based on the Kirchhoff theory, it has been implemented the rectangular elements developed by Melosh, Zienkiewicz and Cheung (MZC) and by Bogner, Fox and Schmit (BFS) and the triangular elements developed by Cheung, King and Zienkiewicz (CKZ) and by Cowper, Kosko, Lindberg and Olson (Cowper); the elements based on the Reissner-Mindlin theory chosen for the analysis of thick plates were the quadrilaterais of four node (Q4), eight node (Q8), nine node (Q9), nine node Heterosis, developed by Hughes and Cohen (Q9H), and the triangular of three node (T3), of six node (T6) and the of ten node (T10); for use of the Reissner-Mindlin theory in the modelling of thin plates, are adopted the Reduced Integration or Selective Integration with the elements quadrilaterais mentioned previously and the technique of Substitute Shear Strain Fields with the elements Q4, Q8, Q9 and T6.

The implementation of these models was made in the numerical nucleus of **INSANE** (*INteractive Structural ANalysis Environment*) that is a system developed according to the Object Oriented Programming (OOP) paradigm using the JAVA

language. This implementation is detailed through the use of UML (Unified Modelling Language) diagrams, where the several classes and interfaces used in the numerical nucleus are presented.

To know the implemented elements better, mesh tests and convergence studies, besides several numerical simulations, are presented.

Agradecimentos

A *DEUS* por estar junto a mim em todos os momentos que necessito, me ajudando a tomar decisões que contribuam para meu crescimento e me iluminando para superar os desafios que encontro.

A *meus pais* que tanto amo e admiro, pela vida e por me concederem condições para mais esta vitória.

Aos *meus irmãos* por estarem todo o tempo ao meu lado.

À *Shirlene*, por entender minha ausência em alguns momentos e por propiciar, com muito carinho e amor, um elevado astral em minha vida.

Ao professor *Roque Luiz da Silva Pitangueira*, por ser um grande amigo, compreendendo minhas dificuldades e orientando-me de forma exemplar, por ser esta valiosa fonte de conhecimento na qual pude me apoiar para chegar até aqui.

Aos *Insanos* pela amizade, componente fundamental em qualquer grande equipe.

Ao *Samuel* e ao *Cenoura* pela valiosa contribuição neste trabalho.

Ao meu ex-professor e amigo *José Felipe Dias*, que me incentivou a enfrentar este desafio, por me ajudar de diversas formas a concretizar este sonho.

Aos *meus amigos* por me ajudarem a superar as diversas dificuldades que encontrei ao longo desta caminhada.

Aos *professores* e *funcionários* do Departamento de Engenharia de Estruturas da *UFMG* pela disponibilidade e atenção em todos os momentos a mim dispensados.

A todos aqueles que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Placas são elementos estruturais planos onde uma das três dimensões, a espessura, é muito menor que as outras duas. Geralmente, as placas são submetidas à ações que provoquem flexão. Conforme Soriano (2003) sua função principal é transmitir cargas agindo normalmente à mesma, como ocorrem em lajes e pontes. As placas são geometricamente representadas por seu plano médio, que é uma superfície equidistante dos dois planos que limitam a espessura (FIG. 1.1).

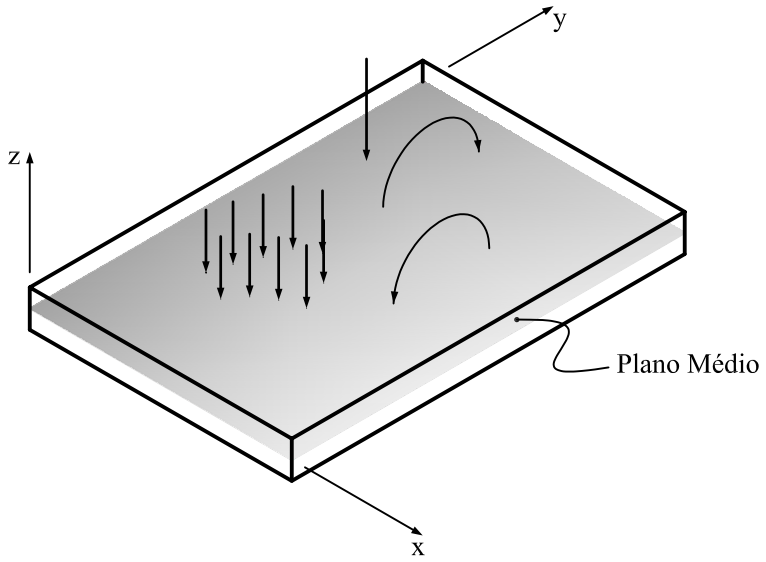


Figura 1.1: Representação de uma placa submetida a ações de forças e momentos

O estudo das placas baseia-se na teoria de Kirchhoff, também conhecida como teoria clássica, e na teoria de Reissner-Mindlin. Estas teorias são análogas às teorias de viga de Euler-Bernoulli e Timoshenko, respectivamente, entretanto no caso

das placas são utilizados modelos matemáticos bidimensionais. Elas diferem-se basicamente na idealização do esforço cisalhante, onde Kirchhoff despreza este efeito enquanto Reissner-Mindlin o considera através de uma distribuição uniforme ao longo da espessura. Isto faz com que a teoria de Kirchhoff fique limitada ao estudo das placas finas enquanto que a teoria de Reissner-Mindlin é aplicável a placas de qualquer espessura.

Os modelos matemáticos aplicáveis ao estudo de placas são expressos por equações diferenciais que fornecem a solução em qualquer ponto do domínio. Entretanto, em muitos casos, não se conhece esta solução, chamada solução analítica. Portanto, modelos discretos, obtidos a partir de uma aproximação numérica, são empregados com o objetivo de superar estas limitações. Dentre os métodos numéricos existentes, o método dos elementos finitos provou ser uma ferramenta poderosa em análise de estruturas complexas utilizando computadores.

O desenvolvimento de programas computacionais capazes de atender a modelos discretos diversos, do mais simples aos mais complexos, e que sejam amigáveis à mudanças é um grande desafio na área de métodos numéricos e computacionais aplicados à engenharia.

Historicamente, diversos softwares desenvolvidos pela comunidade acadêmica tem se mostrado totalmente dependente de sistemas operacionais, escritos em linguagens de programação não apropriadas, de expansão e/ou manutenção difíceis, com documentação deficiente, entre outras limitações. Estes inconvenientes são creditados à falta de disposição da comunidade de se apropriar das tecnologias emergentes ou mesmo à inexistência das mesmas. Porém, o avanço dos recursos para desenvolvimento de softwares, como o paradigma de programação orientada a objetos, linguagem Java, XML (eXtensible Markup Language), UML (Unified Modelling Language), CVS (Concurrent Version System), testes unitários, padrões de projeto de software, entre outros, permite o desenvolvimento de sistemas livres dos referidos inconvenientes, amigáveis à mudança e escaláveis em complexidade (Alvim, 2003).

1.1 Objetivos do Trabalho

1.1.1 Objetivos Gerais

Atualmente os recursos tecnológicos disponibilizados para o desenvolvimento de softwares oferecem totais condições para criação de sistemas eficientes em todas as áreas de pesquisa.

Conhecer e dominar estes recursos é fundamental para aplicá-los no aprimoramento progressivo dos modelos de análise estrutural. Entretanto, isto requer um ambiente computacional segmentado que seja amigável às mudanças e escalável em complexidade, conforme proposto pelo projeto **INSANE** (INteractive Structural ANalysis Environment), que está sendo desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais (`http://www.dees.ufmg.br/insane`).

De acordo com seu propósito, o ambiente do sistema é formado por três segmentos: pré-processador, processador e pós-processador. Todos estes segmentos são implementados em linguagem Java segundo o paradigma da programação orientada a objeto (POO).

O pré-processador é uma aplicação gráfica interativa cuja função é disponibilizar os recursos para criação de modelos discretos de elementos finitos. O processador representa o núcleo numérico e é o responsável por obter os resultados dos diferentes modelos discretos disponibilizados no sistema. O pós-processador, que também é uma aplicação gráfica interativa, apresenta os resultados obtidos na modelagem, como deslocamentos, deformações e tensões generalizadas.

Um dos propósitos deste trabalho é a ampliação do núcleo numérico do **INSANE**, reutilizando diversos recursos disponibilizados no sistema, como os elementos finitos paramétricos implementados por Almeida (2005) e outros desenvolvidos por Fonseca (2006).

1.1.2 Objetivos Específicos

O objetivo da dissertação que aqui se apresenta é ampliar o núcleo numérico do sistema **INSANE**, disponibilizando diversos modelos de elementos finitos para análise de placas baseados nas teoria de Kirchhoff e de Reissner-Mindlin.

Diante das dificuldades enfrentadas para obter dados sobre tais elementos, deixa-se neste trabalho um conjunto de informações valiosas e minuciosamente demonstradas com o fim de orientar quantos delas precisarem e enriquecer a bibliografia sobre o tema.

1.2 Organização do Texto

Esta dissertação é constituída de 9 capítulos.

No Capítulo 2 apresentam-se os modelos matemáticos baseados na teoria de Kirchhoff, que é aplicável às placas finas, e na teoria de Reissner-Mindlin, cuja aplicação se estende a placas de qualquer espessura.

No Capítulo 3, faz-se uma exposição dos modelos de elementos finitos utilizados nos estudos de placas, com base nas formulações matemáticas vistas no capítulo anterior.

O Capítulo 4 detalha, através de diagramas UML (Unified Modelling Language), as classes e interfaces que sofreram alterações para a implementação proposta neste trabalho.

O Capítulo 5 apresenta os testes da Malha de Irons, realizados para todos os elementos implementados.

Para conhecer melhor os elementos, no Capítulo 6, um estudo de convergência mostra o comportamento destes elementos quando aplicados a placas finas, moderadamente espessas e espessas.

Os Capítulos 7 e 8 trazem simulações numéricas de problemas cujas soluções analíticas são conhecidas e aplicações práticas, respectivamente, objetivando a validação

da implementação proposta e a apresentação de alguns dos recursos disponibilizados no **INSANE**.

Finalizando, no Capítulo 9, encontram-se as conclusões deste trabalho.

Capítulo 2

MODELOS MATEMÁTICOS PARA ESTUDO DE PLACAS

2.1 Introdução

"A primeira teoria de placa foi apresentada por Sophie Germain (1776-1831) na Academia de Ciências de Paris, em 1811, e suas diversas teorias se diferenciam basicamente quanto à idealização do efeito de esforço cortante. Na teoria clássica de Gustave Robert Kirchhoff (1824-1887), apresentada em 1850, considera-se inextensível a espessura e desprezam-se as deformações de esforço cortante, supondo que um segmento de reta normal à superfície média permaneça retilíneo e perpendicular a essa superfície após a deformação da placa. Essa teoria é uma extensão, ao caso bidimensional, da teoria elementar de viga.

Eric Reissner (1945 e 1947) e R. D. Mindlin (1951) desenvolveram teorias de placa considerando a influência das deformações de esforço cortante. A teoria de Reissner foi desenvolvida a partir de hipóteses mecânicas e a de Mindlin, a partir de hipóteses cinemáticas. Contudo, em termos práticos, estas teorias diferem entre si apenas nas relações momentos fletor - deslocamento e pela consideração da espessura inextensível na teoria de Mindlin, tornando-a mais adaptável ao desenvolvimento de elementos finitos" (Soriano, 2003, p. 250).

"O modelo de placa de Mindlin melhor se aproxima do modelo da teoria da elasticidade do que o modelo de placa de Kirchhoff, e requer no desenvolvimento de

elementos finitos conformes apenas continuidade C^0 dos campos de deslocamentos (transversal e de rotações), enquanto este último requer continuidade C^1 do deslocamento transversal" (Soriano, 2003, p. 250).

Neste capítulo, apresentam-se as hipóteses em que as teorias de Kirchhoff e Reissner-Mindlin estão fundamentadas e descrevem-se seus campos de deslocamentos, deformações e tensões.

2.2 Teoria de Kirchhoff para Placas

2.2.1 Hipóteses

A teoria de Kirchhoff, adequada para o estudo das placas onde a razão entre a espessura e a menor dimensão da superfície média seja inferior a 1/20, ou seja, adequada ao estudo de placas finas, adota as seguintes hipóteses simplificadoras (FIG. 2.1):

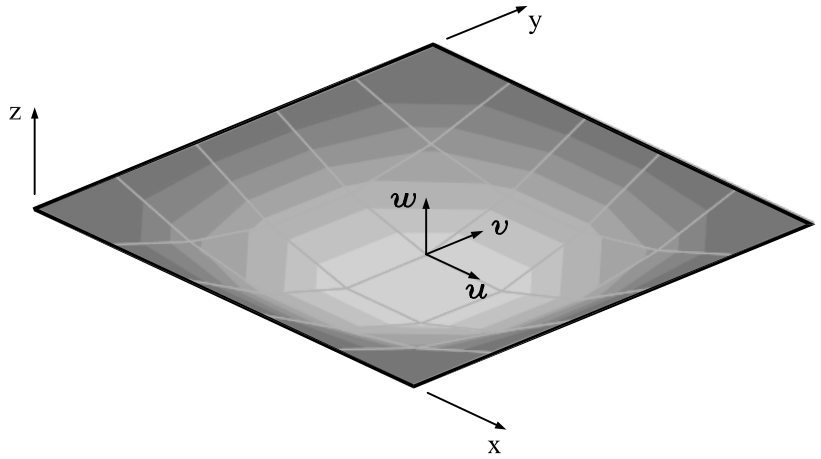


Figura 2.1: Representação dos deslocamentos de uma placa

1. Os pontos contidos no plano médio somente se deslocam verticalmente, logo os deslocamentos horizontais (u, v) são iguais à zero;

2. Todos os pontos contidos numa reta normal ao plano médio têm o mesmo deslocamento vertical;

3. A tensão normal na direção z (σ_z) é desprezível;

4. Retas normais ao plano médio da placa indeformada permanecem retas e normais ao plano médio após a deformação da placa.

2.2.2 Campo de Deslocamentos

A FIG. 2.2 apresenta o posicionamento de um ponto qualquer de uma placa, identificado por A, nos estados indeformado e deformado da mesma.

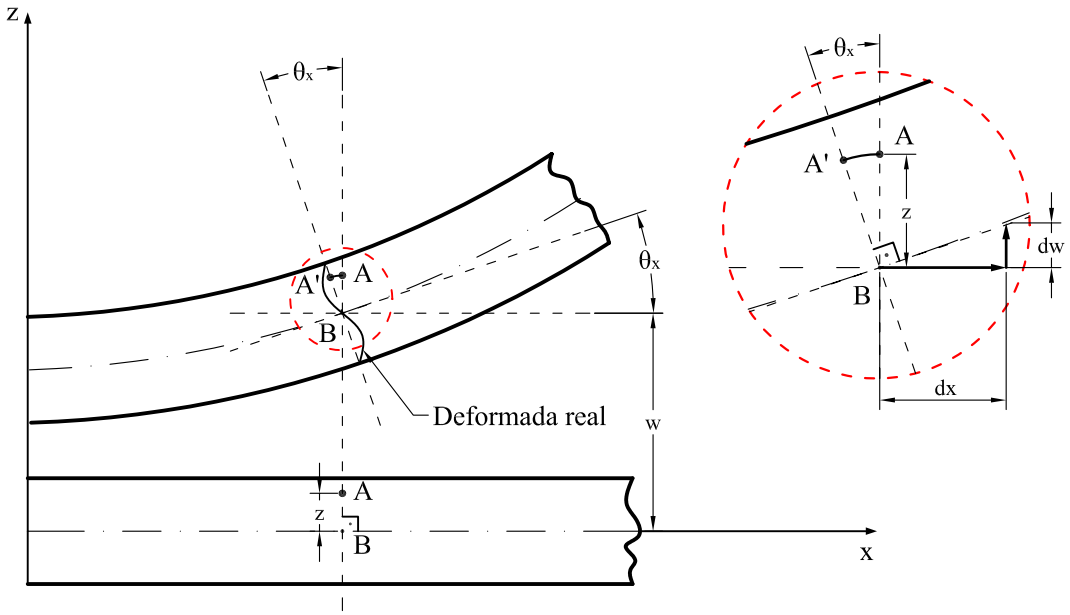


Figura 2.2: Representação do deslocamento de um ponto A no plano xz, segundo as hipóteses de Kirchhoff

Segundo as hipóteses adotadas, se o ponto A está a uma distância z do plano médio no estado indeformado, ele permanecerá a esta mesma distância após a deformação da placa. Nota-se que, no estado deformado, o plano que continha o ponto A sofre uma rotação. Assim, analisando o detalhe em destaque na FIG. 2.2, tem-se:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.1}$$

De maneira análoga, esta rotação quando analisada no plano yz é dada por:

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} \tag{2.2}$$

Desta forma, a análise de flexão da placa nos planos xz e yz permite escrever os deslocamentos de um ponto qualquer da mesma:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= -z\ \theta_x(x,y) = -z\ \frac{\partial w(x,y)}{\partial x} \\ v(x,y,z) &= -z\ \theta_y(x,y) = -z\ \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \\ w(x,y,z) &= w(x,y) \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde u, v e w são os deslocamentos nas direções x, y e z, respectivamente.

Da hipótese "1" tem-se que u e v são iguais à zero no plano médio, uma vez que esta superfície está livre de deformações. Portanto, conclui-se que uma vez encontrado o valor de w, o campo de deslocamentos do problema estará determinado, já que as rotações são obtidas a partir das derivadas de w em relação aos eixos x ou y. Assim, pode-se escrever o seguinte vetor de deslocamentos para um ponto contido no plano médio:

$$\underline{u} = \left\{ \begin{array}{c} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} w \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} \tag{2.4}$$

2.2.3 Relações Deformações-Deslocamentos

A teoria da elasticidade clássica para pequenos deslocamentos e deformações fornece as seguintes relações entre deformação e deslocamento:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}\,, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ &\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\,, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\,, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \tag{2.5}$$

A partir do campo de deslocamentos descrito pelas Eqs.(2.3) e das relações da teoria da elasticidade (Eqs.(2.5)), obtém-se as seguintes relações entre deformações e deslocamentos para um ponto qualquer da placa:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= -z\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
\varepsilon_y &= -z\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
\gamma_{xy} &= -2\ z\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
\varepsilon_z &\simeq \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Escrevendo o campo representado nas Eqs.(2.6) matricialmente, tem-se:

$$\underline{\varepsilon} = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -z\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\ z\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} = -z \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} = -z\ \underline{\chi} \tag{2.7}$$

onde

$\underline{\varepsilon} = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\}$ é o vetor de deformações e

$\underline{\chi} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right\}$ é o vetor de deformações generalizadas de flexão.

2.2.4 Relações Tensões-Deformações

Uma vez que a placa está livre para se deformar na direção z e de acordo com a hipótese "3", segundo a qual $\sigma_z \cong 0$, pode-se admitir que a relação tensão-deformação é a mesma utilizada nos problemas de Estado Plano de Tensões. Logo:

$$\underline{\sigma} = \underline{D}\ \underline{\varepsilon} \tag{2.8}$$

onde

$$\underline{\sigma} = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} \text{ é o vetor de tensões e}$$

$$\underline{D} = \frac{1}{1 - \nu_{yx}\nu_{xy}} \left[\begin{array}{ccc} E_x & \nu_{xy}E_x & 0 \\ \nu_{yx}E_x & E_y & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{xy}\nu_{yx})G_{xy} \end{array} \right] \text{ é a matriz} \qquad (2.9)$$

constitutiva para uma placa de material ortotrópico.

Substituindo o vetor de deformações dado pela Eq.(2.7) na Eq.(2.8), que relaciona a tensão e a deformação, obtém-se:

$$\underline{\sigma} = -z\ \underline{D}\ \underline{\chi} \qquad (2.10)$$

2.2.5 Esforços Internos

Partindo da Eq.(2.10), observa-se que as tensões variam linearmente ao longo da espessura e, também, que os valores máximos, em módulo, das tensões ocorrem nas superfícies limite da placa, conforme representações das FIGs. 2.3 e 2.4:

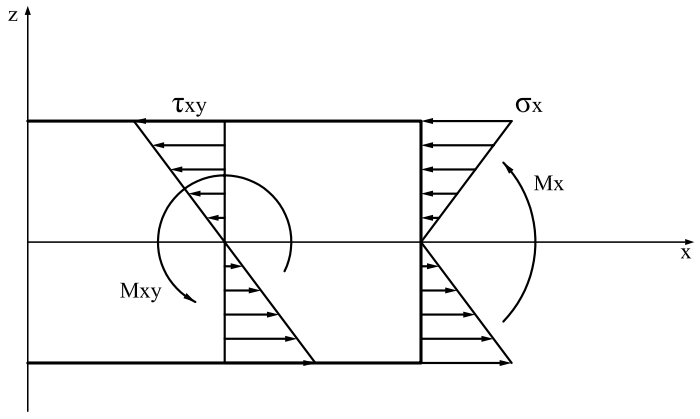


Figura 2.3: Distribuição de tensões na direção x ao longo da espessura (análogo na direção y)

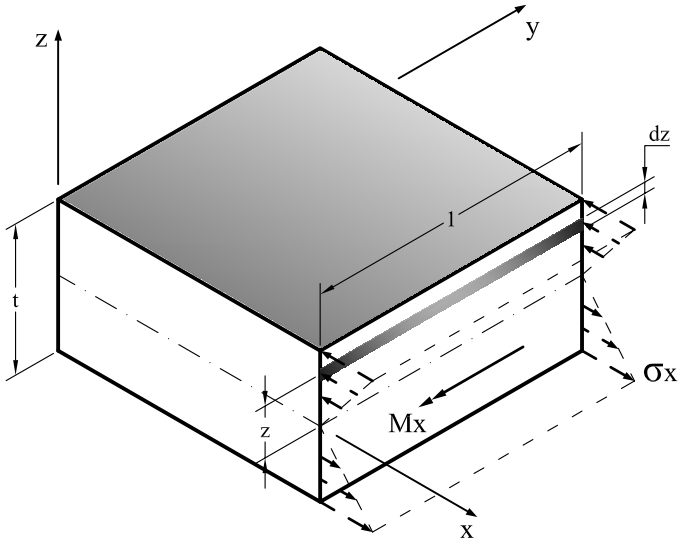


Figura 2.4: Distribuição de σ_x

Os esforços internos são obtidos a partir da integração das tensões ao longo da espessura da placa, conforme pode ser visto na FIG. 2.4. Esta integração, quando feita para uma fatia de comprimento unitário da placa, resulta em:

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \; z \; dz \tag{2.11}$$

Uma vez que a obtenção dos esforços internos ocorre segundo a Eq.(2.11), é possível concluir que para os demais esforços internos diferentes de zero, basta agir de forma análoga. Assim, pode-se escrever a seguinte equação:

$$\left\{ \begin{array}{c} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{array} \right\} = \int_{-t/2}^{t/2} \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} z \; dz = -\frac{t^3}{12} \; \underline{D} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \; \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} \tag{2.12}$$

Passando a Eq.(2.12) para a forma matricial, tem-se:

$$\underline{M} = -\frac{t^3}{12} \; \underline{D} \; \underline{\chi} \tag{2.13}$$

onde

$\underline{M} = \left\{ \begin{array}{c} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{array} \right\}$ é o vetor de esforços internos por unidade de comprimento e

M_x, M_y e M_{xy} são os momentos fletores nas direções x e y e o momento de torção, respectivamente.

As convenções de sinais adotadas são apresentadas na FIG. 2.5.

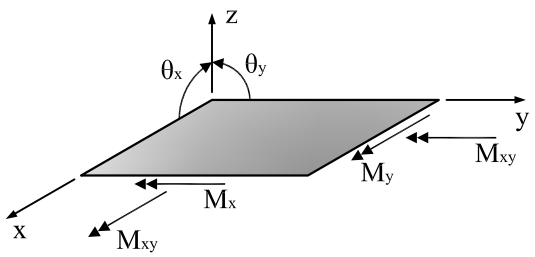


Figura 2.5: Convenção de sinais adota para a teoria de Kirchhoff

2.3 Teoria de Reissner-Mindlin para Placas

2.3.1 Hipóteses

Assim como a teoria de Kirchhoff, a teoria de Reissner-Mindlin também está fundamentada em quatro hipóteses simplificadoras, sendo as três primeiras iguais às de Kirchhoff, enquanto a última, que se refere à ortogonalidade da reta normal ao plano médio, sofre alteração:

1. Os pontos contidos no plano médio somente deslocam verticalmente, portanto têm-se os deslocamentos horizontais (u, v) iguais à zero;

2. Todos os pontos contidos numa reta normal ao plano médio têm o mesmo deslocamento vertical;

3. A tensão normal na direção z (σ_z) é desprezível;

4. Retas normais ao plano médio da placa indeformada permanecem retas, mas não necessariamente normais ao plano médio, após a deformação da placa.

2.3.2 Campo de Deslocamentos

A FIG. 2.6, em comparação com a FIG. 2.2, apresenta uma rotação adicional (ϕ_x) do plano onde o ponto A esta contido. Isto faz com que este ponto não mais permaneça a uma distância constante do plano médio no estado deformado da placa. Desta forma, "(...) as normais, inicialmente retas, se distorcem durante a deformação, sendo esta distorção mais importante quanto maior é a espessura da placa. Assim, os giros θ_x e θ_y devem ser interpretados como *valores médios* da deformada *real* da normal " (Oñate, 1995, p. 362).

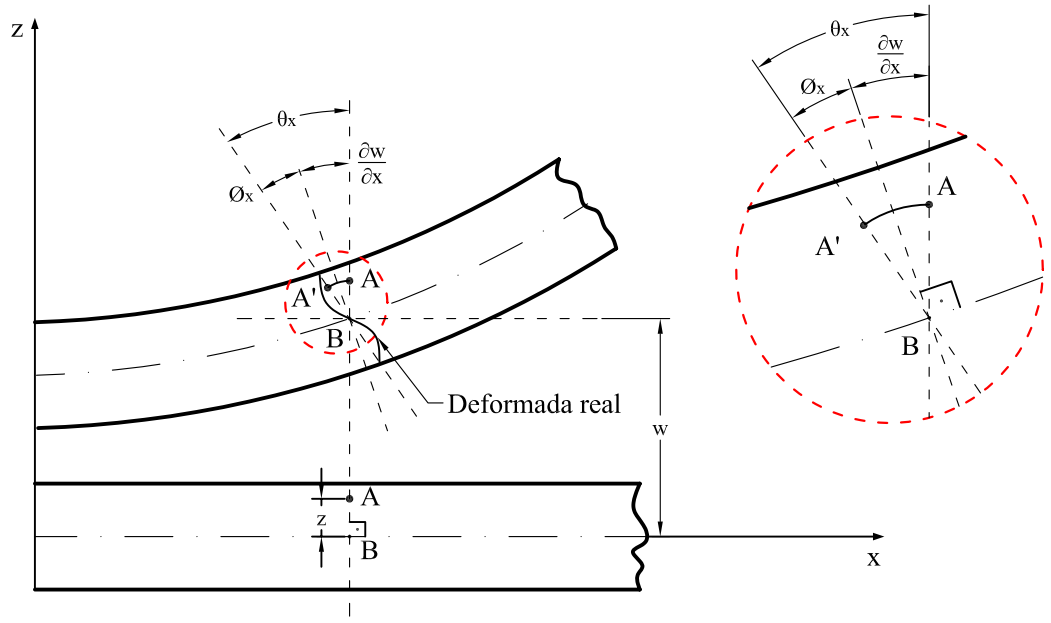


Figura 2.6: Representação do deslocamento de um ponto A no plano xz, segundo as hipóteses de Reissner-Mindlin

A observação da FIG. 2.6 permite obter o campo de deslocamento do ponto A, que é dado por:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= -z\ \theta_x(x,y) \\ v(x,y,z) &= -z\ \theta_y(x,y) \\ w(x,y,z) &= w(x,y) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Percebe-se que as equações que representam o deslocamento de um ponto qualquer contido na placa, para as teorias de Kirchhoff (Eqs.(2.3)) e Reissner-Mindlin (Eqs.(2.14)), são idênticas. Portanto, de maneira análoga, o vetor de deslocamentos de um ponto pertencente ao plano médio é dado por:

$$\underline{u} = \left\{ \begin{array}{c} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{array} \right\} \tag{2.15}$$

Entretanto, como a quarta hipótese não impõe ortogonalidade da normal, o cálculo das rotações θ_x e θ_y se difere entre as teorias. Conforme ilustrado no detalhe da FIG. 2.6, as rotações para a teoria de Reissner-Mindlin são:

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \\ \theta_y &= \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \end{aligned} \tag{2.16}$$

"As Eqs.(2.16) mostram claramente que os giros da normal θ_x e θ_y não podem ser obtidos unicamente em função da rotação do plano médio, como ocorre na teoria de Kirchhoff. Assim, pode-se considerar estes giros como variáveis independentes, sendo esta a diferença substancial entre as teorias" (Oñate, 1995, p. 361).

A hipótese "4" garante à teoria de Reissner-Mindlin uma maior flexibilidade quanto a sua empregabilidade, tornando-a, de acordo com Soriano (2003), hierarquicamente superior quando comparada à teoria de Kirchhoff, por melhor se aproximar do modelo tridimensional. Desta maneira, pode-se aplicá-la também em placas moderadamente espessas e espessas. Entretanto, a teoria de Reissner-Mindlin, quando aplicada a placas finas, pode apresentar problemas. Porém, como será apresentado posteriormente, é possível contorná-los através da utilização de algumas técnicas especiais.

2.3.3 Relações Deformações-Deslocamentos

Substituindo as Eqs.(2.14) nas Eqs.(2.5), que relacionam as deformações e os deslocamentos, obtém-se o campo de deformações, dado por:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= -z\ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\
\varepsilon_y &= -z\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\
\varepsilon_z &= 0 \\
\gamma_{xy} &= -z\ \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) \\
\gamma_{xz} &= -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = -\phi_x \\
\gamma_{yz} &= -\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} = -\phi_y
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Devido às rotações adicionais (hipótese "4"), há o surgimento de deformações transversais que, conforme apresentado nas Eqs.(2.17), são independentes da coordenada z, e são iguais, em módulo, a estas rotações.

Escrevendo-se as componentes não nulas de deformação na forma matricial, tem-se:

$$\underline{\varepsilon} = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -z\ \theta_{x,x} \\ -z\ \theta_{y,y} \\ -z\ \ (\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) \\ w_{,x} - \theta_x \\ w_{,y} - \theta_y \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{\varepsilon}_f \\ \underline{\varepsilon}_c \end{array} \right\} \tag{2.18}$$

onde

$\underline{\varepsilon}_f = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\}$ é o vetor de deformações de flexão e

$\underline{\varepsilon}_c = \left\{ \begin{array}{c} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array} \right\}$ é o vetor de deformações de cisalhamento transversal.

É importante ressaltar que, deformações transversais nulas implicam em $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}$ e $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}$, recuperando-se a condição de ortogonalidade da teoria de Kirchhoff.

2.3.4 Relações Tensões-Deformações

Da Eq.(2.8), que relaciona tensões e deformações, e da hipótese "3", que impõe $\sigma_z \cong 0$, obtém-se o seguinte vetor de tensões não nulas:

$$\underline{\sigma} = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{array} \right\} = \underline{D} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{\sigma}_f \\ \underline{\sigma}_c \end{array} \right\} \tag{2.19}$$

onde

$$\underline{\sigma}_f = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} \text{ é o vetor de tensões devido à flexão e}$$

$$\underline{\sigma}_c = \left\{ \begin{array}{c} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{array} \right\} \text{ é o vetor de tensões de cisalhamento.}$$

Devido à existência das deformações de cortante transversal, torna-se necessário que a matriz constitutiva ($\underline{D}$), apresentada na Eq.(2.9), seja modificada para a teoria de Reissner-Mindlin. Logo, tem-se:

$$\underline{D} = \left[\begin{array}{ccccc} \frac{E_x}{1-\nu_{yx}\nu_{xy}} & \frac{\nu xy E_x}{1-\nu_{yx}\nu_{xy}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu yx E_x}{1-\nu_{yx}\nu_{xy}} & \frac{E_y}{1-\nu_{yx}\nu_{xy}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{yz} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \underline{D}_f & 0 \\ 0 & \underline{D}_c \end{array} \right] \tag{2.20}$$

onde

$\underline{D}_f$ é a matriz constitutiva de flexão (semelhante à Eq.(2.9)) e

$\underline{D}_c = \left[\begin{array}{cc} G_{xz} & 0 \\ 0 & G_{yz} \end{array} \right]$ é a matriz constitutiva de cisalhamento.

Conforme citado anteriormente, as deformações de cortante são independentes da coordenada z. Da mesma forma que as deformações, as tensões tangenciais

transversais também independem de z. Isto caracteriza uma distribuição de tensões ao longo da espessura constante, conforme ilustrado na FIG. 2.7.

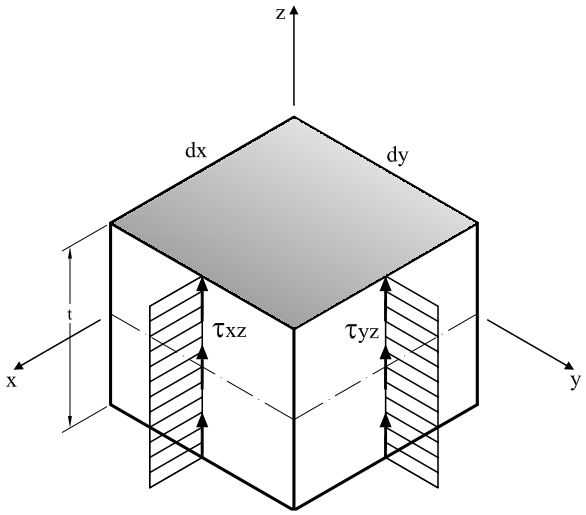


Figura 2.7: Distribuição de tensões cisalhante

(Oñate, 1995, p. 363)

Entretanto, de acordo com a teoria da elasticidade, a distribuição *exata* das tensões tangenciais transversais não é constante ao longo da espessura; esta distribuição tem forma parabólica com valores nulos nas extremidades superior e inferior da placa, conforme representado na FIG. 2.8.

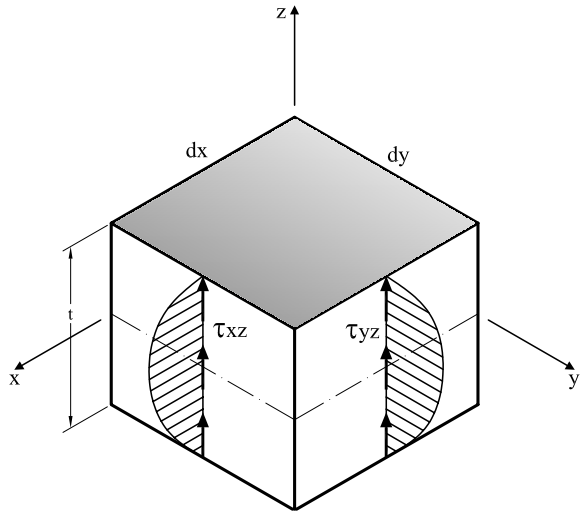


Figura 2.8: Distribuição de tensões cisalhante conforme teoria da elasticidade

(Oñate, 1995, p. 363)

Ao comparar as FIGs. 2.7 e 2.8, nota-se claramente a existência de uma divergência entre as distribuições de tensões. Para contornar este problema, utilizam-se fatores de correção dos módulos de elasticidade transversal com o objetivo de igualar o trabalho de deformação realizando entre as soluções *aproximada* (Teoria de Reissner-Mindlin) e *exata* (Teoria da Elasticidade). Portanto, faz-se uma modificação na matriz constitutiva de cortante, que passa a ter a forma:

$$\underline{D}_c = \begin{bmatrix} \alpha_1\, G_{xz} & 0 \\ 0 & \alpha_2\, G_{yz} \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

onde α_1 e α_2 são os coeficientes de correção, também conhecidos por coeficientes de distorção transversal.

Para seção retangular constante, que é o caso mais comum nas placas, adotam-se os seguintes valores:

$$\alpha = \frac{5}{6} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu}\,, \text{ conforme Dym e Shames (1973).}$$

2.3.5 Esforços Internos

O vetor de esforços internos é obtido a partir da integração das tensões ao longo da espessura de uma placa de comprimento unitário (ver FIG. 2.4). Sabendo-se que as tensões de flexão variam linearmente com a espessura e que as tensões de cisalhamento permanecem constantes, tem-se:

$$\underline{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} z\ \sigma_x \\ z\ \sigma_y \\ z\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} z\ \underline{\sigma}_f \\ \underline{\sigma}_c \end{Bmatrix} dz = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} z^2\ \underline{D}_f\ \hat{\underline{\varepsilon}}_f \\ \underline{D}_c\ \hat{\underline{\varepsilon}}_c \end{Bmatrix} dz \tag{2.22}$$

onde

$$\underline{\hat{\varepsilon}}_f = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \end{array} \right\} \text{ é o vetor de deformações generalizada de flexão e}$$

$$\underline{\hat{\varepsilon}}_c = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{array} \right\} \text{ é o vetor de deformações generalizada de cisalhamento.} \tag{2.23}$$

Resolvendo a integral da Eq.(2.22), encontra-se:

$$\underline{M} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{t^3}{12}\ \underline{D}_f\ \underline{\hat{\varepsilon}}_f \\ t\ \underline{D}_c\ \underline{\hat{\varepsilon}}_c \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{\hat{D}}_f\ \underline{\hat{\varepsilon}}_f \\ \underline{\hat{D}}_c\ \underline{\hat{\varepsilon}}_c \end{array} \right\} \tag{2.24}$$

onde

$\underline{M} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{M}_f \\ \underline{M}_c \end{array} \right\}$ é o vetor de esforços internos por unidade de comprimento,

$\underline{\hat{D}}_f = \dfrac{t^3}{12}\ \underline{D}_f$ é a matriz constitutiva generalizada de flexão e

$\underline{\hat{D}}_c = t\ \underline{D}_c$ é a matriz constitutiva generalizada de cisalhamento.

Manipulando a Eq.(2.24), é possível escrevê-la através do seguinte produto matricial:

$$\underline{M} = \left[\begin{array}{cc} \underline{\hat{D}}_f & 0 \\ 0 & \underline{\hat{D}}_c \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \underline{\hat{\varepsilon}}_f \\ \underline{\hat{\varepsilon}}_c \end{array} \right\} = \underline{\hat{D}}\ \underline{\hat{\varepsilon}} \tag{2.25}$$

onde $\underline{\hat{D}}$ é a matriz constitutiva generalizada e $\underline{\hat{\varepsilon}}$ é o vetor de deformações generalizadas.

A FIG. 2.9 apresenta a convenção de sinais adotada.

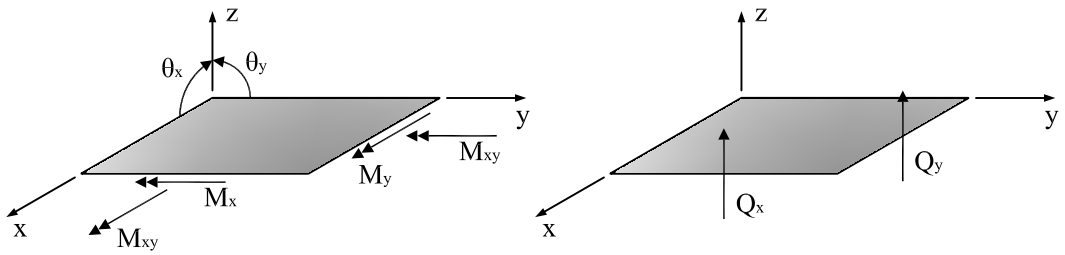


Figura 2.9: Convenção de sinais adotadas para a teoria de Reissner-Mindlin

Capítulo 3

MODELOS DISCRETOS PARA ESTUDO DE PLACAS

3.1 Introdução

Na análise do meio contínuo de caráter estrutural, utiliza-se geralmente um modelo matemático que aproxima o sistema físico original através de hipóteses simplificadoras. Este modelo matemático é expresso por equações diferenciais cujas soluções analíticas são conhecidas apenas para condições simples de contorno e carregamento. Com o intuito de superar estas limitações existentes nas soluções analíticas, adota-se um modelo numérico aproximado dito modelo discreto.

"Nos modelos discretos as equações são algébricas e as incógnitas são determinadas em um número finito de pontos, diferentemente das soluções analíticas que permitem avaliar as incógnitas em um número infinito de pontos no domínio do problema.

Dentre os métodos discretos, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é o mais difundido. No modelo de deslocamentos do MEF o problema é dividido em subdomínios de dimensões finitas, denominados elementos finitos, onde o campo de deslocamentos é arbitrado. Escrevendo-se o campo de deslocamentos de cada elemento em função dos deslocamentos nodais, obtém-se um sistema de equações algébricas que permite solucionar o problema" (Pitangueira, 2000, p. 3).

O presente capítulo apresenta os elementos finitos baseados na teoria de Kirchhoff e os elementos finitos baseados na teoria de Reissner-Mindlin, segundo os conceitos apresentados no capítulo precedente.

3.2 Elementos Finitos para Placas Finas baseados na Teoria de Kirchhoff

3.2.1 Formulação dos Elementos

No Método dos Elementos Finitos, um polinômio aproximador para o deslocamento vertical do plano médio ($w(x, y)$) é definido para o estudo do comportamento da placa. Em função do número de graus de liberdade existentes em cada nó e da quantidade de nós presente no elemento tem-se o número de termos do referido polinômio aproximador.

$$w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2\ x + \alpha_3\ y + \alpha_4\ x^2 + \alpha_5\ x\ y + \alpha_6\ y^2 + ... \tag{3.1}$$

As constantes α_i da Eq.(3.1) são obtidas a partir de condições impostas aos nós. A montagem da equação de $w(x, y)$ geralmente é realizada a partir da extração de termos do triângulo de Pascal, mostrado a seguir.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & x & & y & & \\
 & & & x^2 & & x\ y & & y^2 & \\
 & & x^3 & & x^2\ y & & x\ y^2 & & y^3 \\
 & x^4 & & x^3\ y & & x^2\ y^2 & & x\ y^3 & & y^4
\end{array}$$

Pode-se dizer que a escolha destes termos é um dos maiores problemas na formulação de um elemento finito de placa baseado na teoria de Kirchhoff, uma vez que existe um número de alternativas considerável quando os polinômios não são completos.

O elemento e suas propriedades são definidos a partir desta escolha, demandando um estudo minucioso pois, "(...) existem muitos elementos que simplesmente não funcionam na prática" (Oñate, 1995, p. 331).

As Eqs.(2.7), (2.10) e (2.13) revelam que, conhecendo os deslocamentos verticais de todos os pontos do plano médio da placa ($w(x,y)$), é possível obter as demais grandezas envolvidas no problema. Logo, escrevendo a Eq.(3.1) na forma matricial, tem-se:

$$w(x,y) = \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & x & y & x^2 & x\,y & y^2 & \dots \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \vdots \end{array} \right\}$$

Ou, simbolicamente,

$$w(x,y) = \underline{\varphi}\ \underline{\alpha} \tag{3.2}$$

onde

$$\underline{\varphi} = \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & x & y & x^2 & x\,y & y^2 & \dots \end{array} \right] \text{ e}$$
$$\underline{\alpha} = \left[\begin{array}{cccccccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \dots \end{array} \right]^T$$

Derivando-se a Eq.(3.2) em relação às variáveis x e y, obtêm-se as rotações respectivas a cada eixo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial x}\ \underline{\alpha} \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial y}\ \underline{\alpha} \end{aligned} \tag{3.3}$$

A partir das condições impostas aos graus de liberdade e das coordenadas de cada nó, podem-se escrever a seguinte equação:

$$\underline{G}\ \underline{\alpha} = \underline{d} \tag{3.4}$$

onde, as linhas de $\underline{G}$ são obtidas pela substituição das coordenadas dos nós nas matrizes $\underline{\varphi}$, $\frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial x}$ e $\frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial y}$.

Multiplicando a Eq.(3.4) por $\underline{G}^{-1}$ obtém-se o valor de $\underline{\alpha}$, que substituído na Eq.(3.2), fornece:

$$w(x,y) = \underline{\varphi}\ \underline{G}^{-1}\ \underline{d} \tag{3.5}$$

simplificando um pouco mais, tem-se:

$$w(x,y) = \underline{N}\ \underline{d} \tag{3.6}$$

onde

$$\underline{N} = \underline{\varphi}\ \underline{G}^{-1} \text{ é a matriz das funções de forma do elemento e} \tag{3.7}$$

$\underline{d}$ é o vetor de deslocamentos nodais do elemento.

Da Eq.(3.6) podem-se obter os valores aproximados de $w(x,y)$ para qualquer ponto. Porém, para obter os valores das demais grandezas, como deformação, tensão e momentos, é necessário conhecer o vetor das deformações generalizadas de flexão ou simplesmente vetor de curvaturas $\underline{\chi}$. Assim, derivando-se a equação dos deslocamentos verticais (Eq.(3.6)) de acordo com o vetor de curvaturas, encontra-se:

$$\underline{\chi} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2\ w_{,xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{N}_{,xx} \\ \underline{N}_{,yy} \\ 2\ \underline{N}_{,xy} \end{array} \right\}\ \underline{d} \tag{3.8}$$

ou, simbolicamente:

$$\underline{\chi} = \underline{B}\ \underline{d} \tag{3.9}$$

onde

$$\underline{B} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{N}_{,xx} \\ \underline{N}_{,yy} \\ 2\ \underline{N}_{,xy} \end{array} \right\} \text{ é a matriz que contém as derivadas das funções de forma.} \tag{3.10}$$

Seguindo esta linha de raciocínio, para obter o vetor de curvaturas ($\underline{\chi}$) dado pela Eq.(3.9), torna-se necessário conhecer o vetor de deslocamentos nodais $\underline{d}$. Para isto,

pode-se aplicar o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), visando obter a equação matricial de equilíbrio.

Considerando-se um elemento finito submetido a um carregamento distribuído $q(x,y)$ e a cargas pontuais P atuando na direção z, tem-se a seguinte expressão para o PTV:

$$\int_V \delta\underline{\varepsilon}^T \ \underline{\sigma} \ dV = \int_A \delta w^T \ q(x,y) \ dA + \sum_i^{NCC} \delta w_i^T \ P_i \tag{3.11}$$

onde NCC é o número total de cargas concentradas.

Substituindo os deslocamentos virtuais (δw), as deformações virtuais ($\delta\underline{\varepsilon}$) e as tensões reais aproximadas ($\underline{\sigma}$), representadas respectivamente por

$$\delta w = \underline{N} \ \delta\underline{d} \quad , \quad \delta\underline{\varepsilon} = -z \ \underline{B} \ \delta\underline{d} \quad \text{e} \quad \underline{\sigma} = -z \ \underline{D} \ \underline{B} \ \underline{d} \ ,$$

na Eq.(3.11), encontra-se:

$$\int_V \left(-z \ \underline{B}^T \delta\underline{d}^T\right) \left(-z \ \underline{D} \ \underline{B} \ \underline{d}\right) \ dV = \int_A \left(\underline{N}^T \ \delta\underline{d}^T\right) \ q(x,y) \ dA + \sum_i^{NCC} \left(\underline{N}^T \ \delta\underline{d}^T\right)_i \ P_i$$

Considerando que as cargas concentradas atuam somente nos nós do elemento, e que estão armazenadas no vetor $\underline{p}$, obtém-se:

$$\int_V [\delta\underline{d}]^T \ \underline{B}^T \ \underline{D} \ \underline{B} \ \underline{d} \ z^2 \ dV = \int_A [\delta\underline{d}]^T \ \underline{N}^T \ q(x,y) \ dA + [\delta\underline{d}]^T \ \underline{p}$$

$$[\delta\underline{d}]^T \left[\left(\int_A \underline{B}^T \ \underline{D} \ \underline{B} \ \int_{-t/2}^{t/2} z^2 \ dz \ dA \right) \ \underline{d} \right] = [\delta\underline{d}]^T \left[\int_A \underline{N}^T \ q(x,y) \ dA + \underline{p} \right]$$

$$\left(\frac{t^3}{12} \int_A \underline{B}^T \ \underline{D} \ \underline{B} \ dA \right) \ \underline{d} = \int_A \underline{N}^T \ q(x,y) \ dA + \underline{p} \tag{3.12}$$

Logo, é possível representar a Eq.(3.12) simbolicamente, na forma:

$$\underline{k} \ \underline{d} = \underline{f}_{eq} + \underline{p} \tag{3.13}$$

onde

$\underline{k} = \dfrac{t^3}{12} \displaystyle\int_A \underline{B}^T \ \underline{D} \ \underline{B} \ dA$ é a matriz de rigidez do elemento, (3.14)

$\underline{f}_{eq} = \displaystyle\int_A \underline{N}^T \ q(x,y) \ dA$ é o vetor de cargas nodais devido a carga distribuída e

$\underline{p}$ é o vetor de cargas nodais aplicadas.

Para finalizar o raciocínio, após encontrar o vetor de deslocamentos nodais ($\underline{d}$), determina-se o vetor de curvaturas ($\underline{\chi}$). Assim, como dito anteriormente, conhecendo o vetor de curvaturas é possível obter todas as demais grandezas envolvidas nos problemas de placas.

3.2.2 Elemento Retangular de 4 Nós Não-Conforme (MZC)

Desenvolvido por Melosh (1961), Zienkiewicz e Cheung (1964), o elemento MZC possui um polinômio aproximador com 12 termos (4 nós $\times$ 3 graus de liberdade, conforme mostra a FIG. 3.1). Para este elemento, $w(x, y)$ é escrito através de um polinômio de 3º grau completo e mais dois termos de 4º grau. Os termos escolhidos do triângulo de Pascal estão listados abaixo, seguidos pelo polinômio aproximador de $w(x, y)$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & x & & y & & \\
 & x^2 & & x\ y & & y^2 & \\
x^3 & & x^2\ y & & x\ y^2 & & y^3 \\
 & x^3\ y & & & & x\ y^3 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
w(x,y) = {} & \alpha_1 + \alpha_2\ x + \alpha_3\ y + \alpha_4\ x^2 + \alpha_5\ x\ y + \alpha_6\ y^2 + \alpha_7\ x^3 + \alpha_8\ x^2\ y + \alpha_9\ x\ y^2 \\
& + \alpha_{10}\ y^3 + \alpha_{11}\ x^3\ y + \alpha_{12}\ x\ y^3
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

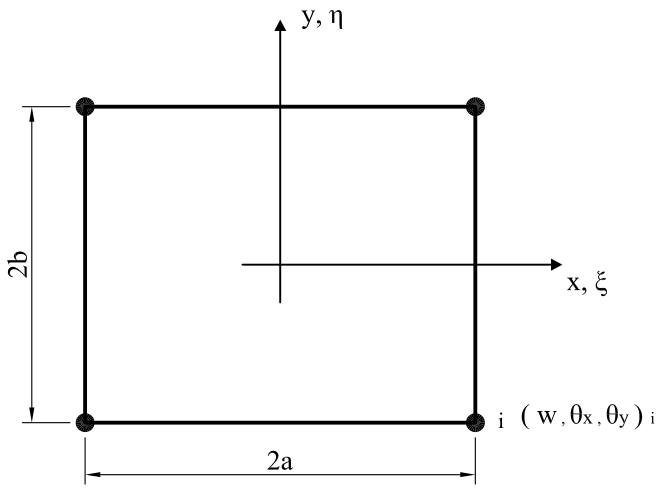


Figura 3.1: Elemento de placa retangular MZC

"Observa-se que para x (ou y) constante, a expansão anterior é polinomial cúbica completa em y (ou x) (com quatro termos) e que ao longo dos lados de x (ou y) constante, os dois deslocamentos w_i e as duas rotações θ_{xi} (ou θ_{yi}), dos vértices correspondentes, bem definem aquela expansão. Logo, tem-se continuidade de w em interface de elemento. A derivada $\frac{\partial w}{\partial x}$ (ou $\frac{\partial w}{\partial y}$) é cúbica completa em y (ou x) e não é unicamente definida naqueles lados pelos dois correspondentes deslocamentos nodais θ_{yi} (ou θ_{xi}). Isso é, não se tem continuidade de rotação normal (rotação de vetor representativo paralelo ao lado) através de interface e o elemento é não conforme" (Soriano, 2003, p. 259).

Matricialmente, o polinômio do elemento MZC (Eq.(3.15)), fica:

$$w(x,y) = \left[\begin{array}{cccccccccccc} 1 & x & y & x^2 & x\,y & y^2 & x^3 & x^2\,y & x\,y^2 & y^3 & x^3y & x\,y^3 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{12} \end{array} \right\}$$

Após toda a manipulação explicitada na seção precedente, que leva à obtenção da Eq.(3.6) para o elemento MZC, tem-se que:

$$\underline{N} = \left[\begin{array}{cccc} \underline{N}_1 & \underline{N}_2 & \underline{N}_3 & \underline{N}_4 \end{array} \right] \qquad \text{e} \qquad \underline{d} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_2 \\ \underline{d}_3 \\ \underline{d}_4 \end{array} \right\} \tag{3.16}$$

sendo que, cada sub-matriz $\underline{N}_i$ e $\underline{d}_i$ contém as informações associadas ao campo de deslocamento de cada nó i, portanto:

$$\underline{N}_i = \left[\begin{array}{ccc} N_i & \bar{N}_i & \bar{\bar{N}}_i \end{array} \right] \qquad \text{e} \qquad \underline{d}_i = \left\{ \begin{array}{c} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{array} \right\} \tag{3.17}$$

onde N_i, $\bar{N}_i$ e $\bar{\bar{N}}_i$ representam as funções de forma referentes ao deslocamento vertical, à rotação em x e à rotação em y, respectivamente, de um nó i do elemento. Tais funções se encontram relacionadas no Apêndice A.

Observa-se que derivando as funções de forma é possível obter a matriz $\underline{B}$ da Eq.(3.10) que para o elemento MZC, é dada por:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{N}_{1,xx} & \underline{N}_{2,xx} & \underline{N}_{3,xx} & \underline{N}_{4,xx} \\ \underline{N}_{1,yy} & \underline{N}_{2,yy} & \underline{N}_{3,yy} & \underline{N}_{4,yy} \\ 2\ \underline{N}_{1,xy} & 2\ \underline{N}_{2,xy} & 2\ \underline{N}_{3,xy} & 2\ \underline{N}_{4,xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B}_1 & \underline{B}_2 & \underline{B}_3 & \underline{B}_4 \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

sendo que cada sub-matriz $\underline{B}_i$ é:

$$\underline{B}_i = \begin{bmatrix} \underline{N}_{i,xx} \\ \underline{N}_{i,yy} \\ 2\ \underline{N}_{i,xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N_{i,xx} & -\bar{N}_{i,xx} & -\bar{\bar{N}}_{i,xx} \\ -N_{i,yy} & -\bar{N}_{i,yy} & -\bar{\bar{N}}_{i,yy} \\ -2\ N_{i,xy} & -2\ \bar{N}_{i,xy} & -2\ \bar{\bar{N}}_{i,xy} \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

Montada a matriz $\underline{B}$ e possuindo a matriz constitutiva (matriz $\underline{D}$) é possível obter a matriz de rigidez que para um material linear elástico isotrópico, está apresentada no Apêndice A.

3.2.3 Elemento Retangular de 4 Nós Conforme (BFS)

O elemento BFS (FIG. 3.2), desenvolvido por Bogner et al. (1965), é um elemento conforme. Ele possui, em seu vetor de deslocamentos nodais, uma variável a mais que o MZC, que é derivada cruzada, representada por $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$.

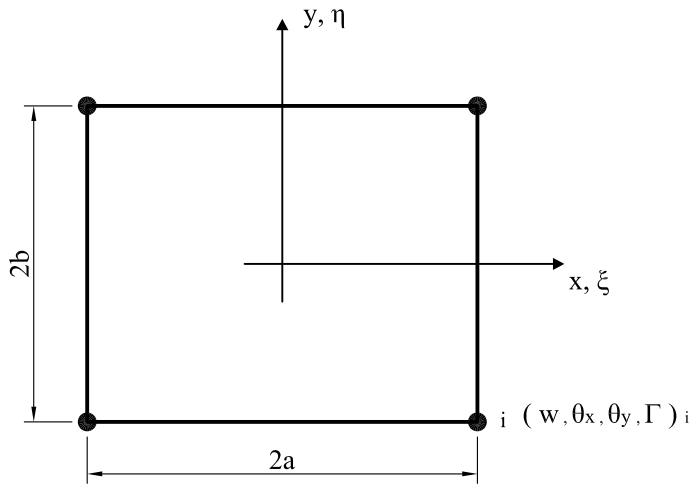


Figura 3.2: Elemento de placa retangular BFS

Logo, define-se para este elemento um polinômio aproximador com 16 termos. Estes termos encontram-se listados a seguir através do triângulo de Pascal e do polinômio aproximador do elemento.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & x & & y & & \\
 & x^2 & & x\ y & & y^2 & \\
x^3 & & x^2\ y & & x\ y^2 & & y^3 \\
 & x^3\ y & & x^2\ y^2 & & x\ y^3 & \\
 & & x^3\ y^2 & & x^2\ y^3 & & \\
 & & & x^3\ y^3 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
w = {} & \alpha_1 + \alpha_2\ x + \alpha_3\ x^2 + \alpha_4\ x^3 + \alpha_5\ y + \alpha_6\ x\ y + \alpha_7\ x^2\ y + \alpha_8\ x^3\ y \\
& + \alpha_9\ y^2 + \alpha_{10}\ x\ y^2 + \alpha_{11}\ x^2\ y^2 + \alpha_{12}\ x^3\ y^2 + \alpha_{13}\ y^3 + \alpha_{14}\ x\ y^3 \\
& + \alpha_{15}\ x^2\ y^3 + \alpha_{16}\ x^3\ y^3
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

"É possível comprovar que o elemento BFS satisfaz a continuidade das derivadas normal e cruzada ao longo de todos os seus lados, posto que a derivada normal varia sobre cada lado segundo um polinômio cúbico definido por quatro parâmetros: deslocamento vertical, os giros e a derivada cruzada em cada nó. Conseqüentemente, o elemento é conforme" (Oñate, 1995, p. 346).

As funções de forma do elemento BFS são obtidas, conforme Castro (2001), considerando quatro polinômios de Hermite definidos na direção x e quatro polinômios de Hermite definidos na direção y. A partir do produto cruzado dessas funções unidimensionais obtém-se 16 funções bidimensionais, que correspondem às funções procuradas. Estas funções encontram-se listadas no Apêndice A.

Para o elemento BFS podem-se empregar as Eqs.(3.16), apresentadas para o elemento MZC. Entretanto, as sub-matrizes de $\underline{N}$ e $\underline{d}$ são modificadas com a inclusão

de mais um elemento, referente ao grau de liberdade $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$. Logo, tem-se:

$$\underline{N}_i = \left[\begin{array}{cccc} N_i & \bar{N}_i & \bar{\bar{N}}_i & \bar{\bar{\bar{N}}}_i \end{array} \right] \qquad \text{e} \qquad \underline{d}_i = \left\{ \begin{array}{c} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \Gamma_i \end{array} \right\} \tag{3.21}$$

A matriz $\underline{B}$ do elemento BFS é montada segundo a Eq.(3.18), entretanto as sub-matrizes de $\underline{B}$ também sofrem alterações recebendo mais uma coluna, logo:

$$\underline{B}_i = \left\{ \begin{array}{c} \underline{N}_{i,xx} \\ \underline{N}_{i,yy} \\ \underline{N}_{i,xy} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc} N_{i,xx} & \bar{N}_{i,xx} & \bar{\bar{N}}_{i,xx} & \bar{\bar{\bar{N}}}_{i,xx} \\ N_{i,yy} & \bar{N}_{i,yy} & \bar{\bar{N}}_{i,yy} & \bar{\bar{\bar{N}}}_{i,yy} \\ 2\ N_{i,xy} & 2\ \bar{N}_{i,xy} & 2\ \bar{\bar{N}}_{i,xy} & 2\ \bar{\bar{\bar{N}}}_{i,xy} \end{array} \right] \tag{3.22}$$

Assim, a obtenção da matriz de rigidez acontece conforme demonstrado nas seções precedentes, necessitando apenas resolver a integral que a define. Esta matriz também é apresentada, após integração analítica da mesma para um material linear elástico isotrópico no Apêndice A.

3.2.4 Elemento Triangular de 3 Nós Não-Conforme (CKZ)

Assim como nos elementos retangulares, o problema nos elementos triangulares é a obtenção de um polinômio completo que atenda aos critérios de convergência e forneça um elemento conforme.

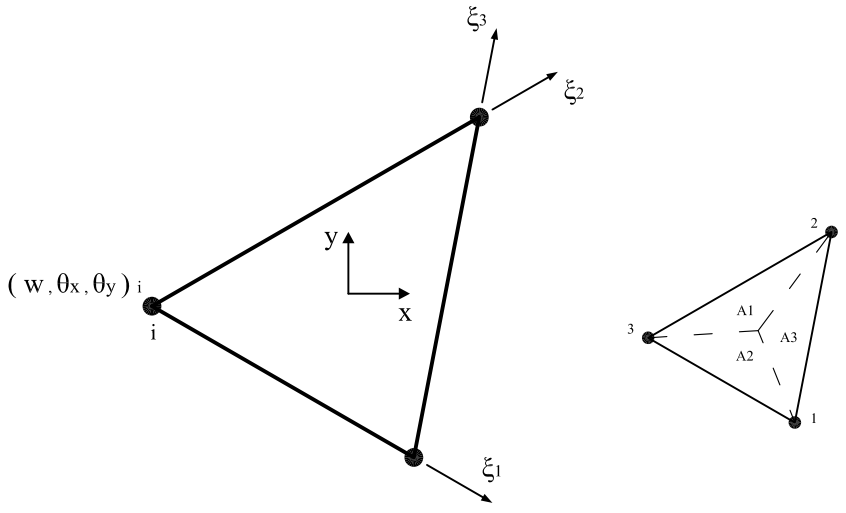


Figura 3.3: Elemento de placa triangular CKZ

O elemento CKZ (FIG. 3.3), assim chamado devido aos seus criadores Cheung et al. (1968), possui três nós e três variáveis de deslocamento por nó. Logo, o polinômio de aproximação do deslocamento vertical do plano médio possui nove termos de um polinômio de terceiro grau incompleto em coordenadas de área, como segue:

$$\begin{aligned} w = {} & \alpha_1\ \xi_1 + \alpha_2\ \xi_2 + \alpha_3\ \xi_3 + \alpha_4 \left(\xi_1^2\ \xi_2 + \frac{\xi_1\ \xi_2\ \xi_3}{2} \right) + \alpha_5 \left(\xi_2^2\ \xi_1 + \frac{\xi_1\ \xi_2\ \xi_3}{2} \right) \\ & + \alpha_6 \left(\xi_2^2\ \xi_3 + \frac{\xi_1\ \xi_2\ \xi_3}{2} \right) + \alpha_7 \left(\xi_3^2\ \xi_2 + \frac{\xi_1\ \xi_2\ \xi_3}{2} \right) + \alpha_8 \left(\xi_3^2\ \xi_1 + \frac{\xi_1\ \xi_2\ \xi_3}{2} \right) \\ & + \alpha_9 \left(\xi_1^2\ \xi_3 + \frac{\xi_1\ \xi_2\ \xi_3}{2} \right) \end{aligned} \tag{3.23}$$

onde

$$\xi_1 = \frac{A_1}{A}\ ,\ \ \xi_2 = \frac{A_2}{A}\ ,\ \ \xi_3 = \frac{A_3}{A}\ ,\ \ A = A_1 + A_2 + A_3 \tag{3.24}$$

Os elementos triangulares podem ser considerados elementos versáteis devido a sua geometria, que permite aplicá-los nas mais variadas formas de placas. Conforme dito em Oñate (1995), apesar de ser um elemento não-conforme, por não garantir a continuidade do giro normal ao longo de seus lados, o elemento CKZ apresenta uma convergência monotônica, e sua simplicidade tem lhe garantido uma boa popularidade.

Neste elemento, por possuir um número de nós inferior aos elementos apresentados nas seções anteriores, é necessário alterar a matriz das funções de forma ($\underline{N}$). Logo, tem-se:

$$\underline{N} = \left[\begin{array}{ccc} \underline{N}_1 & \underline{N}_2 & \underline{N}_3 \end{array} \right] \qquad \text{e} \qquad \underline{d} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_2 \\ \underline{d}_3 \end{array} \right\} \tag{3.25}$$

sendo que as sub-matriz $\underline{N}_i$ e $\underline{d}_i$ são as mesmas da Eq.(3.17), conforme segue:

$$\underline{N}_i = \left[\begin{array}{ccc} N_i & \bar{N}_i & \bar{\bar{N}}_i \end{array} \right] \qquad \text{e} \qquad \underline{d}_i = \left\{ \begin{array}{c} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{array} \right\} \tag{3.26}$$

e N_i, $\bar{N}_i$ e $\bar{\bar{N}}_i$ representam as funções de forma em coordenadas de área que se encontram relacionadas no Apêndice A, onde também encontra-se exposta a obtenção da matriz de rigidez deste elemento, segundo a forma proposta por Cheung et al. (1968). Entretanto, vale destacar que, assim como os demais elementos apresentados anteriormente é possível obter a matriz de rigidez a partir da Eq.(3.14).

3.2.5 Elemento Triangular Conforme de Cowper

Cowper et al. (1968) propuseram um elemento triangular com três nós onde cada nó possui seis graus de liberdade $\left(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)$, conforme mostra a FIG. 3.4.

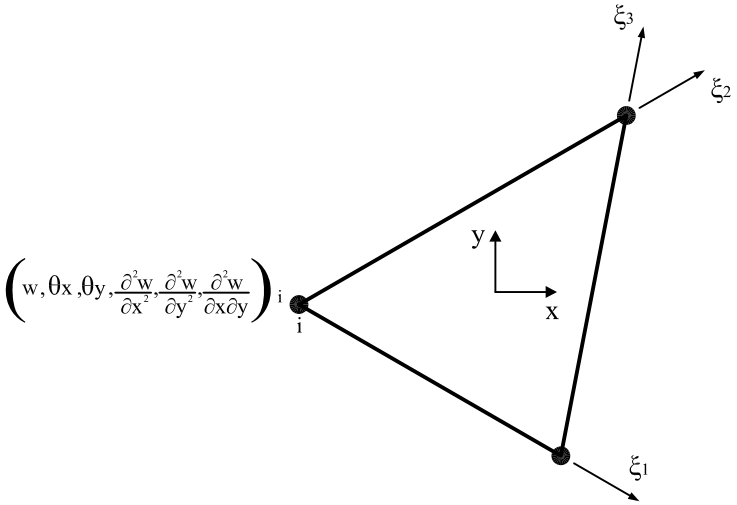


Figura 3.4: Elemento de placa triangular de Cowper

Este elemento possui um polinômio aproximador de quinto grau incompleto, conforme pode ser visto nos termos do triângulo de Pascal e no polinômio do elemento apresentados a seguir:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & x & & y & & & & \\
 & & & x^2 & & x\ y & & y^2 & & & \\
 & & x^3 & & x^2\ y & & x\ y^2 & & y^3 & & \\
 & x^4 & & x^3\ y & & x^2\ y^2 & & x\ y^3 & & y^4 & \\
x^5 & & & & x^3\ y^2 & & x^2\ y^3 & & x\ y^4 & & y^5
\end{array}
$$

$$w = \alpha_1 + \alpha_2\ x + \alpha_3\ y + \alpha_4\ x^2 + \alpha_5\ x\ y + \alpha_6\ y^2 + \alpha_7\ x^3\ y + \alpha_8\ x^2\ y$$
$$+ \alpha_9\ x\ y^2 + \alpha_{10}\ y^3 + \alpha_{11}\ x^4 + \alpha_{12}\ x^3\ y + \alpha_{13}\ x^2\ y^2 + \alpha_{14}\ x\ y^3$$
$$+ \alpha_{15}\ y^4 + \alpha_{16}\ x^5 + \alpha_{17}\ x^3\ y^2 + \alpha_{18}\ x^2\ y^3 + \alpha_{19}\ x\ y^4 + \alpha_{20}\ y^5 \qquad (3.27)$$

Observando o triângulo de Pascal percebe-se a omissão do termo $x^4\ y$ e a existência de vinte termos no polinômio. Segundo Cowper et al. (1968), isto é necessário para garantir a conformidade do elemento, entretanto, ao longo do desenvolvimento do elemento, este polinômio passa a ter somente os dezoito termos, como esperado. As funções de forma do elemento podem ser obtidas a partir de uma trabalhosa manipulação algébrica, uma vez que as matrizes envolvidas no processo são de dimensões consideráveis. Para obter estas funções basta proceder de forma análoga à demonstrada na Seção 3.2.1. No Apêndice A encontram-se os passos seguidos para obtê-las.

A montagem da matriz de rigidez é aqui apresentada de forma simples sem entrar em detalhes. Vale ressaltar que ela é aplicável apenas a materiais isotrópicos, e que algumas das matrizes envolvidas nas operações encontram-se no Apêndice A, devido às suas dimensões. A equação da matriz de rigidez, sugerida por Cowper et al. (1968), é composta por três matrizes diferentes das apresentadas na Eq.(3.14), conforme segue:

$$\underline{K} = D\ \underline{R}^T\ \underline{T}_2^T\ \underline{k}\ \underline{T}_2\ \underline{R} \qquad (3.28)$$

onde $D = \frac{E\ t^3}{12\ (1-\nu^2)}$ é o coeficiente de rigidez da placa, $\underline{R}$ é uma matriz de rotação (18×18) e $\underline{T}_2$ é uma matriz de transformação (20×18) que consiste nas dezoito primeiras colunas de $\underline{T}^{-1}$. Ambas as matrizes $\underline{R}$ e $\underline{T}$ são listadas no Apêndice A. Já a matriz $\underline{k}$ é dada por:

$$
\begin{aligned}
k_{ij} = {} & m_i\ m_j\ (m_i - 1)\ (m_j - 1)\ F(m_i + m_j - 4,\ n_i + n_j) \\
& + n_i\ n_j\ (n_i - 1)\ (n_j - 1)\ F(m_i + m_j,\ n_i + n_j - 4) \\
& + [2\ (1 - \nu)\ m_i\ m_j\ n_i\ n_j + \nu\ m_i\ n_j\ (m_i - 1)\ (n_j - 1) \\
& + \nu\ m_j\ n_i\ (m_j - 1)\ (n_i - 1)]\ F(m_i + m_j - 2,\ n_i + n_j - 2) \\
& (i, j = 1, 2, 3, \ldots, 20)
\end{aligned} \tag{3.29}
$$

sendo que m_i e n_i são os expoentes de x e y dos termos da Eq.(3.27) e $F(m, n)$ é

$$
F(m, n) = \frac{c^{n+1}\ [a^{m+1} - (-b)^{m+1}]\ m!\ n!}{(m + n + 2)!} \tag{3.30}
$$

onde a, b e c referem-se às dimensões do elemento, conforme ilustrado na FIG. 3.5.

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{(x_2 - x_3)\ (x_2 - x_1) + (y_2 - y_3)\ (y_2 - y_1)}{r} \\
b &= \frac{(x_3 - x_1)\ (x_2 - x_1) + (y_3 - y_1)\ (y_2 - y_1)}{r} \\
c &= \frac{(x_2 - x_1)\ (y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)\ (y_2 - y_1)}{r} \\
r &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}
\end{aligned}
$$

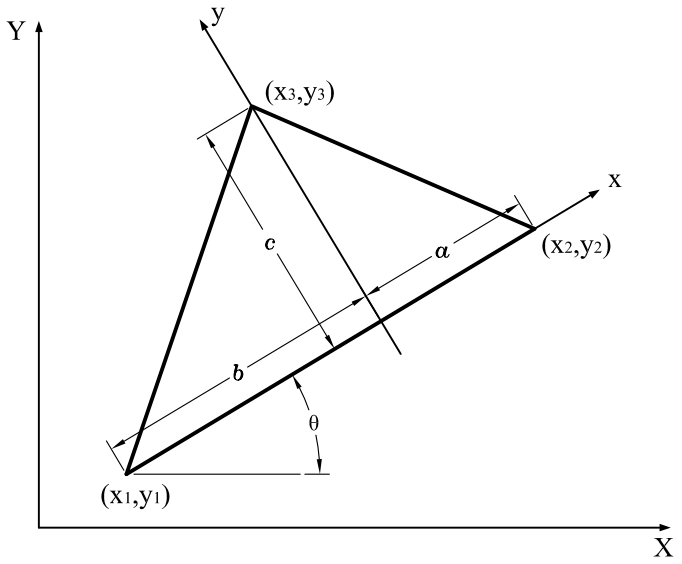


Figura 3.5: Dimensões do elemento de Cowper

(Cowper et al., 1968)

Conforme dito anteriormente, a matriz de rigidez obtida a partir da Eq.(3.28) é aplicável somente a materiais lineares elásticos e isotrópicos. Entretanto, utilizando-se a Eq.(3.14) é possível obter a matriz de rigidez deste elemento para outros tipos de materiais.

Em todos os elementos de Kirchhoff discutidos neste trabalho, apresentaram-se duas formas de obtenção da matriz de rigidez do elemento, sendo uma exposta no Apêndice A e a outra a partir da Eq.(3.14). Geralmente, a integração da matriz de rigidez, quando obtida através da Eq.(3.14), é feita de forma numérica, porém, é necessário conhecer a quantidade de pontos mínima necessária para realizar esta integração. Diante disto, listou-se no Apêndice B a quantidade mínima de pontos que devem ser empregados para obter a matriz de rigidez de cada elemento.

Uma das grandes dificuldades apresentada na utilização dos elementos de Kirchhoff é em relação às condições de contorno, uma vez que os graus de liberdade de alguns elementos são de difícil interpretação física. Portanto, apresentam-se no Apêndice B os casos mais usuais: borda simplesmente apoiada e borda engastada.

3.3 Elementos Finitos para Placas Espessas baseados na Teoria de Reissner-Mindlin

As Eqs.(2.14) a (2.16) mostram que a teoria de Reissner-Mindlin não apresenta dependência entre deslocamento e rotações. Isto implica em maior simplicidade e flexiblilidade, comparando-a com a teoria de Kirchhoff. Esta característica é vantajosa, pois permite a utilização de elementos finitos isoparamétricos bidimensionais, com ganhos significativos em generalizações.

3.3.1 Formulação dos Elementos

Como as flechas e as rotações são variáveis independentes, o vetor de deslocamentos ($\underline{u}$) da Eq.(2.15), pode ser interpolado da seguinte forma:

$$\underline{u} = \left\{ \begin{array}{c} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^{n} N_i \left\{ \begin{array}{c} w_i \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{array} \right\} = \underline{N}\ \underline{d} \tag{3.31}$$

onde n é número de nós do elemento, $\underline{N}$ é a matriz das funções de forma, configurada como segue:

$$\underline{N} = \left[\begin{array}{ccccccc} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} \underline{N}_1 & \underline{N}_2 & \dots & \underline{N}_n \end{array} \right] ,$$

com

$$\underline{N}_i = \left[\begin{array}{ccc} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{array} \right] \tag{3.32}$$

e $\underline{d}$ é o vetor de deslocamentos do elemento:

$$\underline{d} = \left[\begin{array}{ccccccc} w_1 & \theta_{x_1} & \theta_{y_1} & \dots & w_n & \theta_{x_n} & \theta_{y_n} \end{array} \right]^T = \left[\begin{array}{cccc} \underline{d}_1 & \underline{d}_2 & \dots & \underline{d}_n \end{array} \right]^T ,$$

com

$$\underline{d}_i = \left\{ \begin{array}{c} w_i \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{array} \right\} . \tag{3.33}$$

Levando o vetor de deslocamentos (Eq.(3.31)) no vetor de deformações generalizadas (Eqs.(2.23)), encontra-se:

$$\underline{\hat{\varepsilon}} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{\hat{\varepsilon}}_f \\ \underline{\hat{\varepsilon}}_c \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -\theta_{x,x} \\ -\theta_{y,y} \\ -\left(\theta_{x,y} + \theta_{y,x}\right) \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \begin{array}{c} -N_{i,x}\theta_{x_i} \\ -N_{i,y}\theta_{y_i} \\ -\left(N_{i,y}\theta_{x_i} + N_{i,x}\theta_{y_i}\right) \\ N_{i,x}w_i - N_i\theta_{x_i} \\ N_{i,y}w_i - N_i\theta_{y_i} \end{array} \right\}$$

$$\hat{\underline{\varepsilon}} = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} 0 & -N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & -N_{i,y} \\ 0 & -N_{i,y} & -N_{i,x} \\ N_{i,x} & -N_i & 0 \\ N_{i,y} & 0 & -N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{Bmatrix} \underline{B}_{f_i} \\ \underline{B}_{c_i} \end{Bmatrix} \underline{d}_i$$

$$\hat{\underline{\varepsilon}} = \underline{B}\ \underline{d} \tag{3.34}$$

onde

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{B}_1 & \underline{B}_2 & \dots & \underline{B}_n \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{B}_i = \begin{Bmatrix} \underline{B}_{f_i} \\ \underline{B}_{c_i} \end{Bmatrix}$$

sendo as sub-matrizes de $\underline{B}_i$ dadas por:

$\underline{B}_{f_i} = \begin{bmatrix} 0 & -N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & -N_{i,y} \\ 0 & -N_{i,y} & -N_{i,x} \end{bmatrix}$ é a matriz das deformações generalizadas de flexão e

$\underline{B}_{c_i} = \begin{bmatrix} N_{i,x} & -N_i & 0 \\ N_{i,y} & 0 & -N_i \end{bmatrix}$ é a matriz das deformações generalizadas de cisalhamento.

(3.35)

Substituindo a Eq.(3.34) na Eq.(2.8), encontra-se o vetor de tensões não nulas:

$$\underline{\sigma} = \underline{D}\ \underline{B}\ \underline{d} \tag{3.36}$$

Para obter os esforços internos, relacionam-se as Eqs.(2.25) e (3.34), o que leva à obtenção de:

$$\underline{M} = \hat{\underline{D}}\ \underline{B}\ \underline{d} \tag{3.37}$$

Novamente, aplicando-se o PTV para um elemento submetido a um carregamento distribuído $q(x, y)$ e a cargas pontuais P atuando na direção z, encontra-se a seguinte equação:

$$\int_V \delta\underline{\varepsilon}^T\ \underline{\sigma}\ dV = \int_A \delta w^T\ q(x,y)\ dA + \sum_{i}^{NCC} \delta w_i^T\ P_i \tag{3.38}$$

Manipulando-se conforme apresentado na Seção 3.2.1, a Eq.(3.38) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\left(\frac{t^3}{12}\int_A \underline{B}^T\ \underline{D}\ \underline{B}\ dA\right)\ \underline{d} = \int_A \underline{N}^T\ q(x,y)\ dA + \underline{p}\ \ . \tag{3.39}$$

Passando a Eq.(3.39) para uma forma simbólica, obtém-se novamente a equação matricial de equilíbrio:

$$\underline{k}\ \underline{d} = \underline{f}_{eq} + \underline{p} \tag{3.40}$$

onde

$$\underline{k} = \int_A \underline{B}^T\ \underline{\hat{D}}\ \underline{B}\ dA = \int_A \left(\underline{B}_f^T\ \underline{\hat{D}}_f\ \underline{B}_f + \underline{B}_c^T\ \underline{\hat{D}}_c\ \underline{B}_c\right)\ dA = \underline{k}_f + \underline{k}_c$$

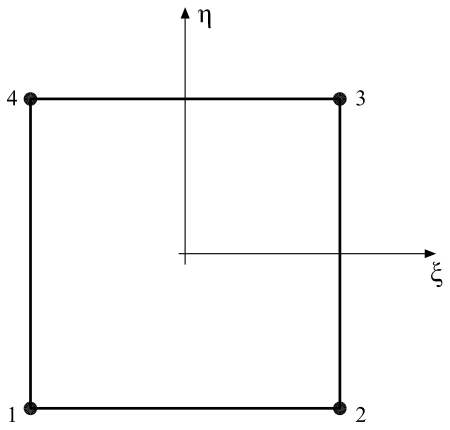
é a matriz de rigidez do elemento, (3.41)

$\underline{f}_{eq} = \int_A \underline{N}^T q dA$ é o vetor de cargas nodais equivalente à carga distribuída e

$\underline{p}$ é o vetor de cargas nodais aplicadas.

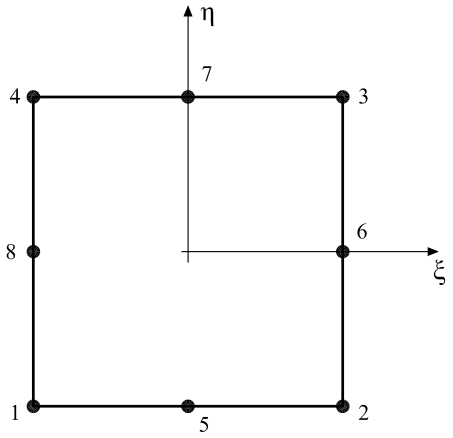
3.3.2 Elementos e suas Funções de Forma

As FIGs. 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10 e 3.11 mostram alguns dos elementos isoparamétricos aplicáveis às placas segundo a teoria de Reissner-Mindlin junto às suas respectivas funções de forma, cuja formulação geral foi apresentada previamente.



$$N_i = \tfrac{1}{4}\left(1+\xi_i\xi\right)\left(1+\eta_i\eta\right) \quad ; \quad i = 1,2,3,4$$

Figura 3.6: Elemento isoparamétrico quadrilateral de quatro nós Q4

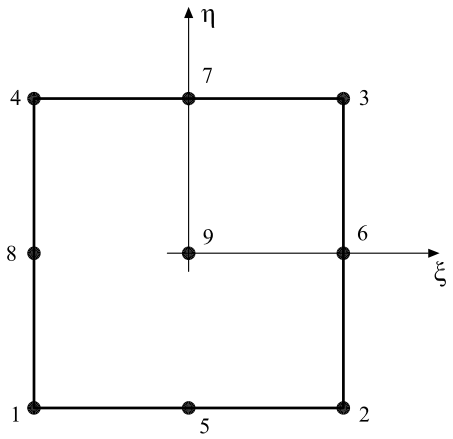


$$N_i = \frac{1}{4}\left(1+\xi_i\xi\right)\left(1+\eta_i\eta\right)\left(\xi_i\xi+\eta_i\eta-1\right) \quad ; \quad i=1,2,3,4$$

$$N_i = \frac{1}{2}\left(1+\eta_i\eta\right)\left(1-\xi^2\right) \quad ; \quad i=5,7$$

$$N_i = \frac{1}{2}\left(1+\xi_i\xi\right)\left(1-\eta^2\right) \quad ; \quad i=6,8$$

Figura 3.7: Elemento isoparamétrico quadrilateral de oito nós Q8

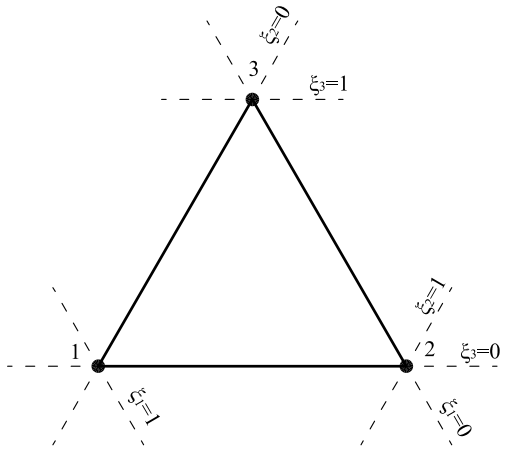


$$N_i = \frac{1}{4}\left(\xi^2+\xi_i\xi\right)\left(\eta^2+\eta_i\eta\right) \quad ; \quad i=1,2,3,4$$

$$N_i = \frac{1}{2}\eta_i^2\left(\eta^2-\eta_i\eta\right)\left(1-\xi^2\right)+\frac{1}{2}\xi_i^2\left(\xi^2-\xi_i\xi\right)\left(1-\eta^2\right) \quad ; \quad i=5,6,7,8$$

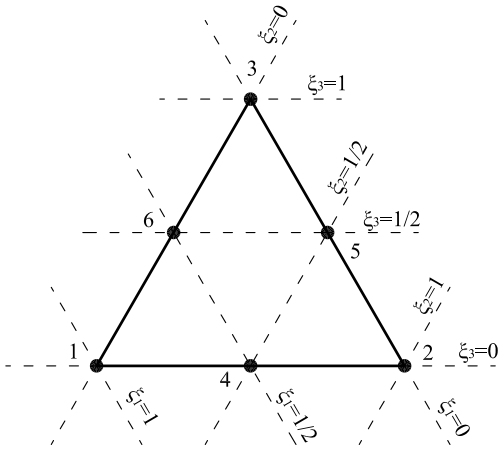
$$N_9 = \left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right)$$

Figura 3.8: Elemento isoparamétrico quadrilateral de nove nós Q9



$$N_i = \xi_i \quad ; \qquad i = 1, 2, 3$$

Figura 3.9: Elemento isoparamétrico triangular de três nós T3



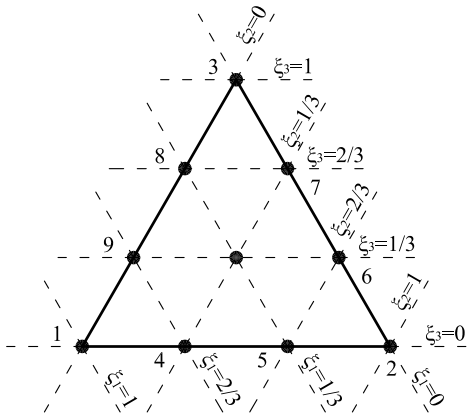
$$N_i = \xi_i(2\ \xi_i - 1) \quad ; \qquad i = 1, 2, 3$$

$$N_4 = 4\ \xi_1\ \xi_2$$

$$N_5 = 4\ \xi_2\ \xi_3$$

$$N_6 = 4\ \xi_1\ \xi_3$$

Figura 3.10: Elemento isoparamétrico triangular de seis nós T6



$$N_i = \tfrac{1}{2}\xi_i(3\ \xi_i - 1)(3\ \xi_i - 2) \quad ; \quad i = 1,2,3$$

$$N_4 = \tfrac{9}{2}(3\ \xi_1 - 1)\xi_1\ \xi_2 \quad ; \quad N_5 = \tfrac{9}{2}(3\ \xi_2 - 1)\xi_1\ \xi_2$$

$$N_6 = \tfrac{9}{2}(3\ \xi_2 - 1)\xi_2\ \xi_3 \quad ; \quad N_7 = \tfrac{9}{2}(3\ \xi_3 - 1)\xi_2\ \xi_3$$

$$N_8 = \tfrac{9}{2}(3\ \xi_3 - 1)\xi_3\ \xi_1 \quad ; \quad N_9 = \tfrac{9}{2}(3\ \xi_1 - 1)\xi_3\ \xi_1$$

$$N_{10} = 27\ \xi_1\ \xi_2\ \xi_3$$

Figura 3.11: Elemento isoparamétrico triangular de dez nós T10

3.3.3 Condições de Contorno

A FIG. 3.12 e a TAB. 3.1 mostram as condições de contorno mais comuns para elementos finitos baseada na teoria de Reissner-Mindlin.

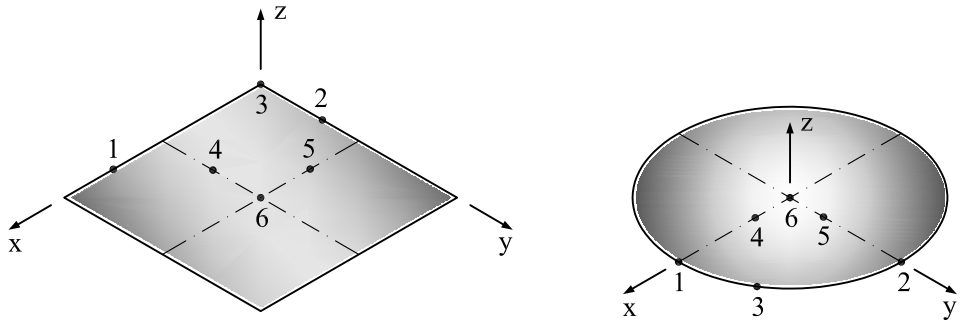


Figura 3.12: Condições de contorno para os elementos de Reissner-Mindlin

Tabela 3.1: Condições de contorno para os elementos de Reissner-Mindlin

Placa	Posição	Ponto (FIG. 3.12)	Condição de Contorno	
			Engastada	Simplesmente Apoiada
Quadrada	Borda	1	$w = \theta_x = \theta_y = 0$	$w = \theta_x = 0$
		2	$w = \theta_x = \theta_y = 0$	$w = \theta_y = 0$
		3	$w = \theta_x = \theta_y = 0$	$w = \theta_x = \theta_y = 0$
	Eixo de Simetria	4	$\theta_x = 0$	$\theta_x = 0$
		5	$\theta_y = 0$	$\theta_y = 0$
		6	$\theta_x = \theta_y = 0$	$\theta_x = \theta_y = 0$
Circular	Borda	1	$w = \theta_x = \theta_y = 0$	$w = \theta_y = 0$
		2	$w = \theta_x = \theta_y = 0$	$w = \theta_x = 0$
		3	$w = \theta_x = \theta_y = 0$	$w = 0$
	Eixo de Simetria	4	$\theta_y = 0$	$\theta_y = 0$
		5	$\theta_x = 0$	$\theta_x = 0$
		6	$\theta_x = \theta_y = 0$	$\theta_x = \theta_y = 0$

3.4 Elementos Finitos para Placas Finas baseados na Teoria de Reissner-Mindlin com Integração Reduzida / Seletiva

"(...) Em placa e em casca com as hipóteses de Reissner-Mindlin, ao se arbitrar campos independentes para os deslocamentos lineares e para as rotações, o elemento pode não ter a habilidade de representar casos críticos de deformações de esforço cortante, com a conseqüente introdução de restrições internas espúrias que podem provocar travamento" (Soriano, 2003, p. 522).

Devido à consideração do esforço cortante, à medida que a razão entre a espessura e o comprimento da placa vai se reduzindo, a rigidez pode ser exageradamente superestimada.

Para demonstrar a ocorrência deste fato, apresenta-se a seguir a solução por elementos finitos e a solução exata de uma viga em balanço (FIG. 3.13), conforme

sugerido por Oñate (1995).

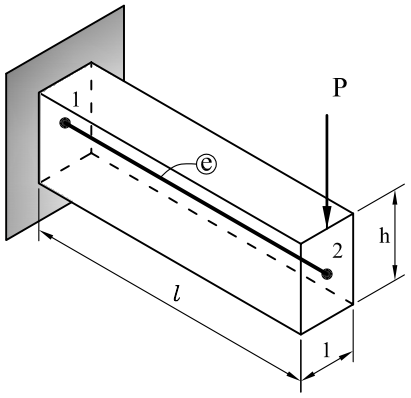


Figura 3.13: Viga em balanço submetida a uma carga concentrada na extremidade

A *solução exata* para o deslocamento vertical da extremidade livre, desprezando-se as tensões de cisalhamento, é dada por:

$$w^f_{exata} = \frac{l^3}{3\ E\ I}\ P \tag{3.42}$$

Considerando-se as tensões de cisalhamento, a solução é dada por:

$$w^c_{exata} = \left(\frac{l}{G\ A^*} + \frac{l^3}{3\ E\ I}\right)\ P \tag{3.43}$$

Adotando-se 1 (um) elemento finito (FIG. 3.13) baseado na teoria de Timoshenko para vigas (equivalente unidimensional da Teoria de Reissner-Mindlin), obtém-se:

$$w^c_{MEF} = \frac{\gamma}{\gamma + 1}\ \left(\frac{l}{G\ A^*} + \frac{l^3}{3\ E\ I}\right)\ P \tag{3.44}$$

onde $\gamma = \frac{12\ E\ I}{G\ A^*\ l^2}$ e $A^* = \alpha\ A = \frac{5}{6}A$.

A partir da razão dada por:

$$\varphi = \frac{w^c}{w^f_{exata}} \tag{3.45}$$

encontram-se os seguintes resultados:

$$\varphi_{exata} = \frac{\left(\frac{l}{G\ A^*} + \frac{l^3}{3\ E\ I}\right)\ P}{\frac{l^3}{3\ E\ I}\ P} = \frac{4\ \lambda^2 + 3}{4\ \lambda^2}\ \text{, para a solução exata} \tag{3.46}$$

$$\varphi_{MEF} = \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{\left(\frac{l}{G\ A^*} + \frac{l^3}{3\ E\ I}\right)\ P}{\frac{l^3}{3\ E\ I}\ P} = \frac{3\ (4\ \lambda^2+3)}{4\ \lambda^2\ (\lambda^2+3)} \quad \text{, para a solução do MEF.} \tag{3.47}$$

onde $\lambda = \frac{l}{h}$ é denominado coeficiente de esbeltez da viga.

A FIG. 3.14 representa graficamente as Eqs.(3.46) e (3.47), possibilitando visualizar o comportamento de tais equações, que à medida que o coeficiente de esbeltez da viga aumenta a solução aproximada (MEF) tende ao bloqueio, devido à superestimativa exagerada da rigidez.

Infelizmente, inconveniente semelhante acontece ao se adotar elementos finitos baseados na teoria de Reissner-Mindlin para a análise de placas finas. Porém, existem técnicas capazes de contornar este inconveniente, sendo as mais usuais a integração reduzida e a integração seletiva, que são expostas a seguir junto com a formulação dos elementos.

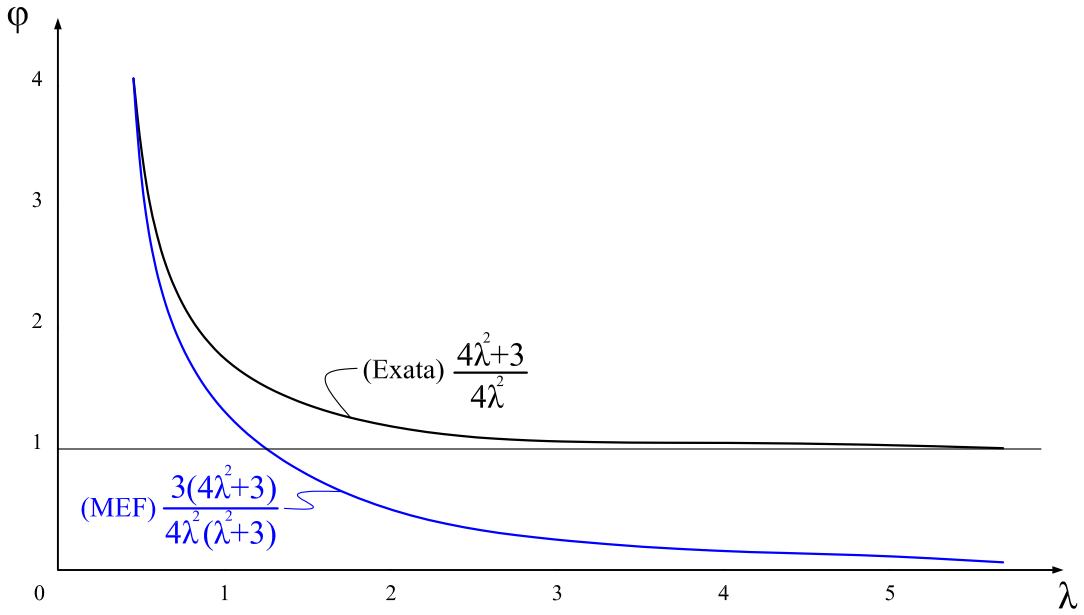


Figura 3.14: Representação da razão entre as flechas exata e aproximada (MEF)

3.4.1 Formulação dos Elementos

Numa análise onde utiliza-se a integração reduzida ou integração seletiva, o objetivo é tornar a matriz de rigidez devido ao cisalhamento singular. Para isto,

reduz-se o número de pontos de Gauss-Legendre na integração. No caso da integração reduzida adota-se o mesmo número de pontos de integração para as parcelas de flexão e de cisalhamento da matriz de rigidez. Na integração seletiva, a redução do número de pontos de Gauss somente é feita para a parcela de cisalhamento. Entretanto, ao se fazer esta redução, surgem mecanismos internos chamados de modos de energia nula ou modos espúrios, que são movimentos realizados pelo elemento sem o consumo de energia. Estes mecanismos podem ou não se propagarem pela malha, dependendo, basicamente, da compatibilidade entre os elementos e das condições de contorno. Portanto, ao se utilizar as técnicas de integração reduzida ou seletiva deve-se atentar para este fenômeno que pode influenciar de forma direta nos resultados obtidos.

A TAB. 3.2 apresenta os números de pontos de Gauss-Legendre utilizados em cada integração e o número de mecanismos que aparecem nos elementos de Reissner-Mindlin, conforme Oñate (1995).

Tabela 3.2: Quadratura para integração da matriz de rigidez e número de mecanismos

Elemento	Quadratura	Integração de		Número de Mecanismos
		k_f	k_c	
Q4	Completa	2×2	2×2	3
	Seletiva	2×2	1×1	5*
	Reduzida	1×1	1×1	7*
Q8	Completa	3×3	3×3	3
	Seletiva	3×3	2×2	3*
	Reduzida	2×2	2×2	4*
Q9	Completa	3×3	3×3	3
	Seletiva	3×3	2×2	4*
	Reduzida	2×2	2×2	7*
Q9H	Completa	3×3	3×3	3
	Seletiva	3×3	2×2	3
	Reduzida	2×2	2×2	6

* mecanismos propagáveis através das malhas.

3.4.2 Elemento Quadrilateral de 4 Nós (Q4)

Pode-se considerar este o elemento mais simples dos elementos de Reissner-Mindlin. Desenvolvido por Hughes et al. (1977) e Pugh et al. (1978), ele possui 12 graus de liberdade que se dividem em três graus por nó (deslocamento vertical e rotações), conforme FIG. 3.15.

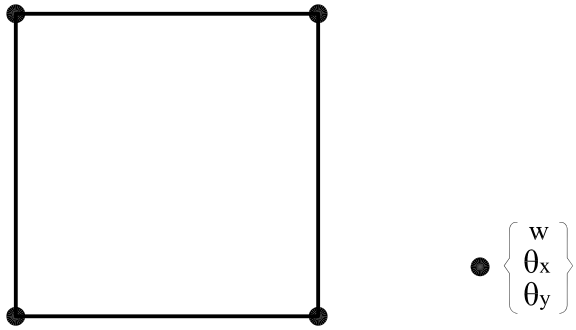


Figura 3.15: Elemento quadrilateral Q4

As funções de forma deste elemento são as mesmas do elemento quadrilateral de 4 nós ilustrado na FIG. 3.6 e, conforme TAB. 3.2, com a utilização de um ponto de integração obtém-se singularidade na matriz de rigidez k_c. Entretanto, a utilização deste elemento através da técnica de integração reduzida não é aconselhável, pois podem aparecer mecanismos internos. Portanto, sugere-se que para este elemento deva ser utilizada a integração seletiva que, apesar de também apresentar um grande número de mecanismos, sua aplicação não é tão comprometida quanto a da integração reduzida, ficando a cargo das condições de contorno o correto funcionamento do elemento.

3.4.3 Elemento Quadrilateral de 8 Nós (Q8)

O elemento quadrilateral de 8 nós (FIG. 3.16), assim como os demais, utiliza as funções de forma do elemento quadrilateral de 8 nós mostrados na FIG. 3.7, neste caso as mesmas do elemento de oito nós. Segundo Oñate (1995), o seu emprego com integração reduzida ou seletiva deve ser feito com bastante precaução, baseando-se

nos dados da TAB. 3.2. Este elemento produz mecanismos propagáveis através da malha, e quando utilizados para análise de placas esbeltas torna-se necessário uma atenção especial nas condições de contorno, tendo-se em conta que elas podem evitar a propagação dos referidos mecanismos, além de, em muitos casos, contribuírem para a ocorrência do bloqueio da solução.

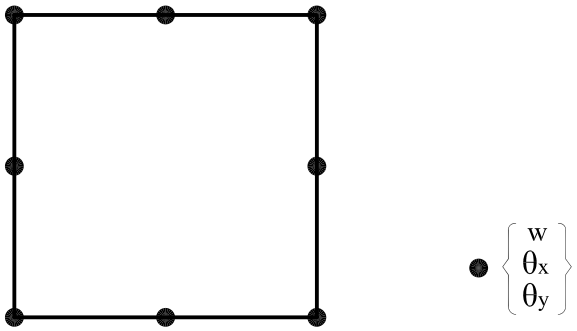


Figura 3.16: Elemento quadrilateral Q8

3.4.4 Elemento Quadrilateral de 9 Nós (Q9)

Analisando os dados apresentados na TAB. 3.2 verifica-se números bastante desfavoráveis para este elemento. "(...) Com integração reduzida o elemento apresenta quatro mecanismos além dos três de corpo rígido. Existe comprovação que estes mecanismos são facilmente propagáveis pela malha para diversas condições de contorno, o que descarta a utilização prática da integração reduzida para este elemento.

Entretanto, a integração seletiva induz a um só mecanismo espúrio. Infelizmente, diferente do que ocorre com o elemento de oito nós, este mecanismo pode propagar-se em toda a malha se determinadas condições de contorno lhe são favoráveis.

Em resumo, o comportamento do elemento quadrilateral de nove nós numa análise de placas delgadas é em parte bom, (...) por garantir a singularidade da matriz de rigidez de cisalhamento. Entretanto, o elemento não é confiável devido aos mecanismos internos mencionados, que com determinadas condições de apoio podem propagar-se por toda a malha e deteriorar a solução" (Oñate, 1995, p. 382).

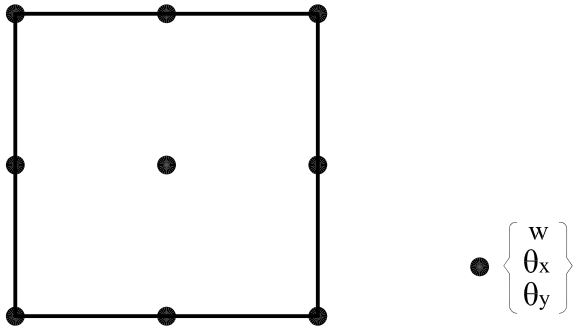


Figura 3.17: Elemento quadrilateral Q9

3.4.5 Elemento Quadrilateral Heterosis (Q9H)

Hughes e Cohen (1978) propuseram o elemento mostrado na FIG. 3.18, que utiliza as funções de forma do elemento quadrilateral de 9 nós para a interpolação das rotações e as funções de forma do elemento quadrilateral de 8 nós para interpolação da flecha. Logo, tem-se o seguinte campo de deslocamento:

$$
\begin{aligned}
w &= \sum_{i=1}^{8} N_i^S \; w_i \\
\theta_x &= \sum_{i=1}^{9} N_i^L \; \theta_{x_i} \\
\theta_y &= \sum_{i=1}^{9} N_i^L \; \theta_{y_i}
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

onde N_i^L e N_i^S são as funções de forma do elemento quadrilateral de 9 nós e do quadrilateral de 8 nós, respectivamente.

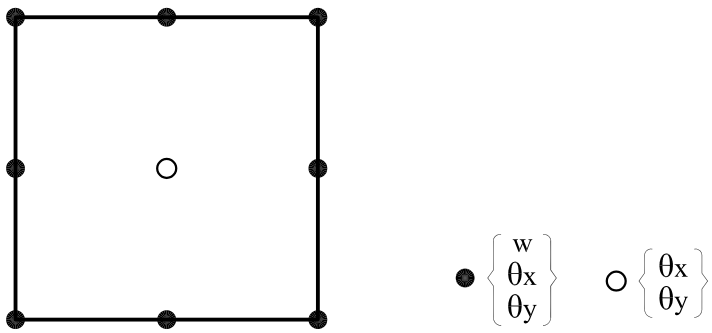


Figura 3.18: Elemento quadrilateral Q9H

Para a descrição isoparamétrica da geometria são utilizadas as funções de forma do elemento quadrilateral de 8 nós (FIG. 3.7). Vale ressaltar que a obtenção da matriz de rigidez, do vetor de deslocamentos e das demais grandezas envolvidas segue os mesmos procedimentos apresentados nas seções anteriores, alterando apenas a matriz $\underline{B}$ conforme apresentado a seguir.

$$\underline{B}_{f_i} = \begin{bmatrix} 0 & -N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & -N_{i,y} \\ 0 & -N_{i,y} & -N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, ..., 8) \tag{3.49}$$

$$\underline{B}_{c_i} = \begin{bmatrix} N_{i,x} & -N_i & 0 \\ N_{i,y} & 0 & -N_i \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, ..., 8) \tag{3.50}$$

$$\underline{B}_{f_9} = \begin{bmatrix} -N_{9,x} & 0 \\ 0 & -N_{9,y} \\ -N_{9,y} & -N_{9,x} \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

$$\underline{B}_{c_9} = \begin{bmatrix} -N_9 & 0 \\ 0 & -N_9 \end{bmatrix} \tag{3.52}$$

Este elemento é aplicável à análise de placas espessas e placas finas. No caso de placas finas recomenda-se a utilização da integração seletiva, pois, "(...) o heterosis com essa integração não tem modo espúrio de energia nula, sendo, pois, sempre utilizado desta forma" (Soriano, 2003, p. 284).

Estudos têm comprovado que o elemento heterosis possui um bom comportamento e comparado aos elementos Q8 e Q9 ele fornece resultados mais precisos. Entretanto, é necessário que se mantenha a forma retangular ou paralelogrâmica, pois, para qualquer outra forma, este elemento deixa de atender o critério da completude (Oñate, 1995).

3.5 Elementos Finitos para Placas Finas baseados na Teoria de Reissner-Mindlin com Deformação de Cisalhamento Imposta

O objetivo da técnica de deformação de cisalhamento imposta é tornar nula a parcela de deformação proveniente dos esforços cisalhantes, uma vez que, ao anular esta parcela, a teoria de Reissner-Mindlin se iguala à de Kirchhoff. Desta maneira, espera-se evitar o bloqueio da solução integrando de forma completa a matriz de rigidez, uma vez que este fenômeno não ocorre na teoria de Kirchhoff.

"(...) Uma das maneiras de tornar o elemento livre de travamento ou torná-lo menos susceptível a esse fenômeno é substituir o campo de deformações de esforço cortante, definido pelos campos de deslocamentos cinematicamente inconsistentes, por outro que seja consistente ou menos inconsistente. Diz-se, então, que o elemento resultante tem *campo assumido de deformações*" (Soriano, 2003, p. 522).

3.5.1 Formulação dos Elementos

Pode-se escrever a condição necessária para anular a deformação de cisalhamento na forma:

$$\varepsilon_c = \alpha_1(w_i,\theta_i) + \alpha_2(w_i,\theta_i)\ \xi + \alpha_3(w_i,\theta_i)\ \eta + \ldots + \alpha_n(w_i,\theta_i)\ \xi^p\ \eta^q = 0 \qquad (3.53)$$

onde ε_c é uma das componentes de deformação de cisalhamento (γ_{xz} ou γ_{yz}), escrita em função das coordenadas naturais do elemento, e α_j são os coeficientes do polinômio aproximador, dados em função dos deslocamentos (w_i) e rotações (θ_i) nodais, como pode ser visto através das Eqs.(2.18) e (3.34).

Para se obter $\varepsilon_c = 0$ é necessário que:

$$\alpha_j(w_i,\theta_i) = 0 \quad \text{(j=1,n)} \ . \qquad (3.54)$$

Entretanto, vale destacar que em muitos casos, α_j depende somente das rotações.

Nestes casos ($\alpha_j(\theta_i) = 0$), os termos $\alpha_j(\theta_i)$ somente serão nulos se as rotações forem nulas ($\theta_i = 0$), o que implica em um campo de deslocamentos nulo, caracterizando o bloqueio da solução.

Conforme apresentado por Oñate (1995), impondo-se um campo de deformações que cumpra a condição imposta pela Eq.(3.54), consegue-se reproduzir as condições de placa fina. Assim, as deformações de cisalhamento passam a ser interpoladas por:

$$\underline{\hat{\varepsilon}}_c = \sum_{k=1}^{m} N_{\gamma k}\ \gamma_k = \underline{N}_\gamma\ \underline{\gamma}^{(e)} \tag{3.55}$$

onde $\gamma_k^{(e)}$ são os valores das deformações de cisalhamento em m pontos dentro do elemento e N_γ as correspondentes funções de forma. Combinando as Eqs.(3.55) e (3.34), escreve-se:

$$\underline{\hat{\varepsilon}} = \sum_{k=1}^{m} N_{\gamma k}\ \underline{B}_{c_k}\underline{d}_k = \underline{\hat{B}}_c\ \underline{d} \tag{3.56}$$

onde $\underline{\hat{B}}_c$ é a matriz de deformação de cisalhamento substitutiva, a ser definida.

Segundo Oñate (1995), comprova-se facilmente que a Eq.(3.56) pode ser escrita na forma da Eq.(3.54), garantindo a ausência do efeito de bloqueio.

Substituindo a Eq.(3.55) na Eq.(3.38), a expressão do PTV pode ser escrita como:

$$\int_A \left[\delta\underline{\hat{\varepsilon}}_f^T\ \underline{D}_f\ \underline{\hat{\varepsilon}}_f + \delta\left(\underline{N}_\gamma\ \underline{\gamma}^{(e)}\right)^T\ \underline{D}_c\ \underline{N}_\gamma\ \underline{\gamma}^{(e)}\right]\ dA = TVE \tag{3.57}$$

onde TVE é o Trabalho Virtual Externo, representado pelo segundo membro da Eq.(3.38). Observa-se na Eq.(3.57) que somente os giros são afetados por primeiras derivadas (em $\underline{\hat{\varepsilon}}_f$) e, portanto, necessitam de continuidade C^0, enquanto que os deslocamentos e as deformações de cisalhamento podem ser descontínuos. Isto induz a utilizar diferentes interpolações para os giros, os deslocamentos e as deformações de cisalhamento. Logo:

$$\underline{\theta} = \underline{N}_\theta\ \underline{\theta}^{(e)}; \qquad w = \underline{N}_w\ \underline{w}^{(e)}; \qquad \underline{\hat{\varepsilon}}_c = \underline{N}_\gamma\ \underline{\gamma}^{(e)} \tag{3.58}$$

onde as funções de forma N_w e N_γ podem ser descontínuas.

A seleção do campo de deformações impostas deve satisfazer certas condições, uma vez que se interpolam de forma independente os deslocamentos, as rotações e as deformações de cisalhamento. Portanto, tem-se:

$$n_\theta + n_w \geq n_\gamma$$
$$n_\gamma \geq n_w \tag{3.59}$$

onde n_w, n_θ e n_γ referem-se ao número de variáveis que intervém nas interpolações dos deslocamentos, das rotações e das deformações de cisalhamento, respectivamente, após descontar as variáveis correspondentes aos movimentos prescritos (FIG. 3.19).

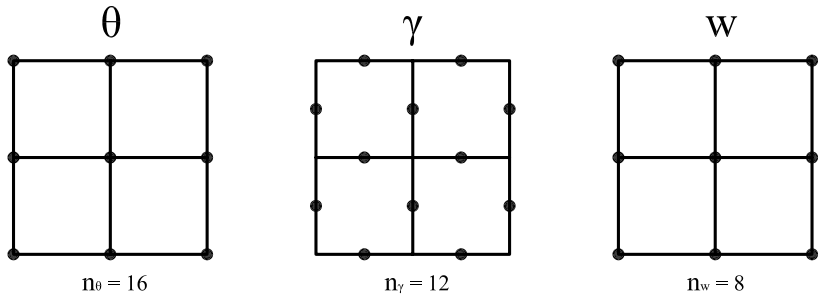


Figura 3.19: Número de variáveis que intervém nas interpolações

Para obter a matriz de deformação de cisalhamento substitutiva ($\underline{\hat{B}}_c$ na Eq.(3.56)) procede-se como demonstrado a seguir, para o elemento quadrilateral de 4 nós.

3.5.2 Elemento Quadrilateral de 4 Nós (RMCIQ4)

O elemento da FIG. 3.20 foi introduzido primeiramente por Dvorkin e Bathe (1984) e generalizado posteriormente por Hinton e Huang (1986). Este é o mais simples dos elementos quadrilaterais, pois, possui apenas 4 nós com 3 graus de liberdade (w_i,θ_{x_i},θ_{y_i}). Através do uso das coordenadas naturais, podem-se escrever suas funções de forma a partir de:

$$N_i = \frac{1}{4}\,(1+\xi_i\,\xi)\,(1+\eta_i\,\eta) \tag{3.60}$$

onde ξ_i e η_i são as coordenadas do nó i.

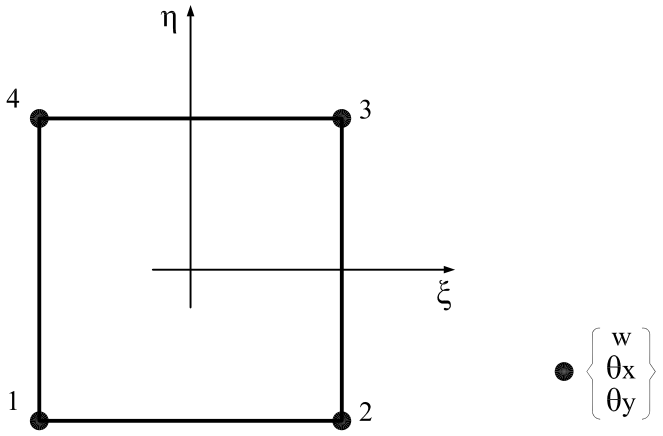


Figura 3.20: Elemento quadrilateral RMCIQ4

Para obter a matriz de deformação de cisalhamento substitutiva, é necessário passar por algumas etapas, conforme descreve-se a seguir:

3.5.2.1 Etapa 1

Primeiramente devem-se interpolar as deformações de cisalhamento no sistema ξ, η. Logo:

$$\begin{aligned} \gamma_\xi &= \alpha_1 + \alpha_2\,\xi + \alpha_3\,\eta + \alpha_4\,\xi\,\eta \\ \gamma_\eta &= \alpha_5 + \alpha_6\,\xi + \alpha_7\,\eta + \alpha_8\,\xi\,\eta \end{aligned} \tag{3.61}$$

onde γ_ξ e γ_η são deformações de cisalhamento no sistema natural (ξ, η).

Escrevendo-se a Eq.(3.61) na forma matricial, tem-se:

$$\underline{\bar{\gamma}}' = \left\{ \begin{array}{c} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & \xi & \eta & \xi\,\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\,\eta \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{array} \right\}$$

$$\underline{\bar{\gamma}}' = \underline{\bar{A}}\;\underline{\bar{\alpha}} \tag{3.62}$$

Em seguida determina-se o campo de deformações de cisalhamento inicial, que se obtém a partir da manipulação das seguintes equações:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \ , \qquad w = N_i \ w_i \ \text{ e } \qquad \theta_x = N_i \ \theta_{x_i} \tag{3.63}$$

encontrando-se:

$$\gamma_{xz} = \sum_{i=1}^{4} \left[\left(\frac{\xi_i}{4} \frac{}{a} w_i - \frac{1}{4} \theta_{x_i} \right) + \left(\frac{\xi_i \ \eta_i}{4} \frac{}{a} w_i - \frac{\eta_i}{4} \theta_{x_i} \right) + \left(\frac{\xi_i}{4} \theta_{x_i} \right) \xi - \left(\frac{\xi_i \ \eta_i}{4} \theta_{x_i} \right) \xi \ \eta \right]$$

$$= \alpha_1(w_i, \theta_{x_i}) + \alpha_2(w_i, \theta_{x_i}) \ \eta + \alpha_3(\theta_{x_i}) \ \xi + \alpha_4(\theta_{x_i}) \ \xi \ \eta \tag{3.64}$$

Para que não ocorra o bloqueio da solução, é necessário que os termos em α_3 e α_4 sejam iguais à zero, uma vez que α_3 e α_4 dependem somente das rotações. Logo, avaliando-se γ_{xz} sobre a linha onde $\xi = 0$ (analogamente para γ_{yz} em $\eta = 0$), consegue-se facilmente zerá-los. Portanto, tem-se:

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \alpha_1(w_i, \theta_{x_i}) + \alpha_2(w_i, \theta_{x_i}) \ \eta \\ \gamma_{yz} &= \bar{\alpha}_1(w_i, \theta_{x_i}) + \bar{\alpha}_2(w_i, \theta_{x_i}) \ \xi \end{aligned} \tag{3.65}$$

Entretanto, sabe-se que:

$$\underline{\gamma} = \underline{\hat{\varepsilon}}_c = \left\{ \begin{array}{c} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array} \right\} = \underline{J}^{-1} \ \underline{\bar{\gamma}}^{'} \tag{3.66}$$

onde $\underline{J}$ é a matriz de transformação jacobiana. Conseqüentemente, pode-se escrever (ver Eq.(3.62)):

$$\begin{aligned} \gamma_\xi &= \alpha_1 + \alpha_3 \ \eta \\ \gamma_\eta &= \alpha_5 + \alpha_6 \ \xi \end{aligned} \tag{3.67}$$

Simbolicamente, a Eq.(3.67) pode ser escrita por:

$$\underline{\gamma}^{'} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \xi \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{array} \right\}$$

$$\underline{\gamma}^{'} = \underline{A} \ \underline{\alpha} \tag{3.68}$$

Ainda nesta primeira etapa define-se ao longo de uma direção natural pré-definida ($\bar{\xi}_i$) a deformação de cisalhamento tangencial (FIG. 3.21), dada pela Eq.(3.69):

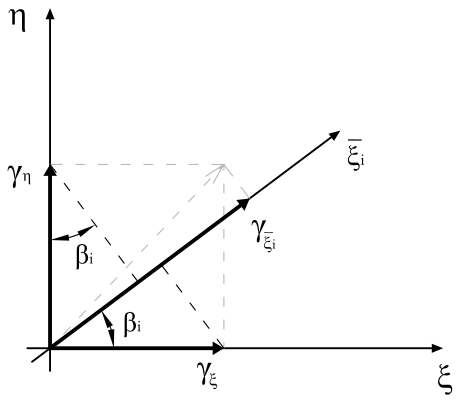


Figura 3.21: Direção natural $\bar{\xi_i}$

$$\gamma_{\bar{\xi_i}} = \cos\beta_i \ \gamma_\xi + \mathrm{sen}\beta_i \ \gamma_\eta \tag{3.69}$$

onde β_i é o ângulo que a direção $\bar{\xi_i}$ forma com a direção natural ξ.

Para o elemento RMCIQ4 as direções $\bar{\xi_i}$ estão dispostas conforme a FIG. 3.22.

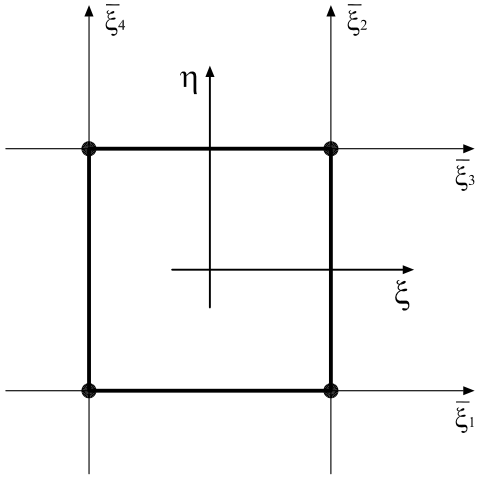


Figura 3.22: Direções de $\bar{\xi_i}$ para o elemento RMCIQ4

Logo, pode-se montar a TAB. 3.3:

Tabela 3.3: Cossenos dos ângulos formado entre $\bar{\xi_i}\xi$

i	β_i	$\cos\beta_i$	$\mathrm{sen}\beta_i$
1	0°	1	0
2	90°	0	1
3	0°	1	0
4	90°	0	1

Substituindo os valores de β_i obtidos na TAB. 3.3 na Eq.(3.69) e, em seguida, substituindo γ_ξ e γ_η dados pelas Eqs.(3.67), encontra-se:

$$\begin{aligned}
\gamma_{\bar{\xi}_1} &= \gamma_\xi = \alpha_1 + \alpha_3\ \eta \\
\gamma_{\bar{\xi}_2} &= \gamma_\eta = \alpha_5 + \alpha_6\ \xi \\
\gamma_{\bar{\xi}_3} &= \gamma_\xi = \alpha_1 + \alpha_3\ \eta \\
\gamma_{\bar{\xi}_4} &= \gamma_\eta = \alpha_5 + \alpha_6\ \xi
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Escrevendo-se matricialmente as Eqs.(3.70), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{\bar{\xi}_1} \\ \gamma_{\bar{\xi}_2} \\ \gamma_{\bar{\xi}_3} \\ \gamma_{\bar{\xi}_4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \xi \\ 1 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \tag{3.71}$$

3.5.2.2 Etapa 2

Selecionam-se n_γ pontos sobre as direções $\bar{\xi}_i$, denominados pontos de colocação, para que sejam avaliadas as deformações tangenciais $\gamma_{\bar{\xi}_i}$. Para o elemento em estudo, os pontos de colocação estão dados na FIG. 3.23.

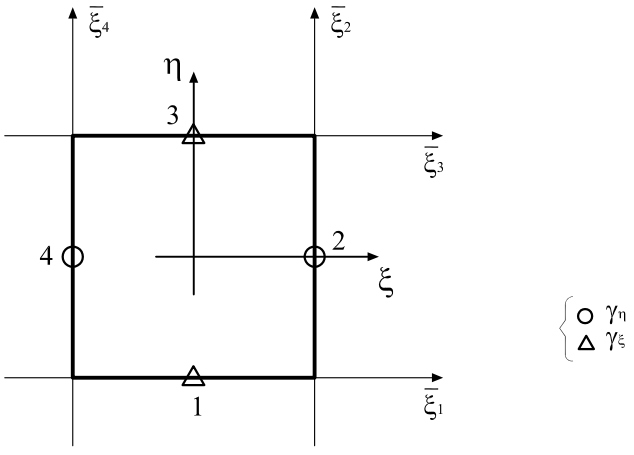


Figura 3.23: Pontos de colocação para o cálculo das deformações naturais

A partir da FIG. 3.23 pode-se montar a TAB. 3.4:

Tabela 3.4: Coordenadas referentes aos pontos de colocação

Ponto n_γ	Direção	Coordenada	
		ξ	η
1	$\bar{\xi}_1$	0	-1
2	$\bar{\xi}_2$	1	0
3	$\bar{\xi}_3$	0	1
4	$\bar{\xi}_4$	-1	0

Com a substituição das coordenadas da TAB. 3.4 nas respectivas Eqs.(3.70), encontra-se:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_3 &= \gamma_{\bar{\xi}}^1 \\ \alpha_5 + \alpha_6 &= \gamma_{\bar{\xi}}^2 \\ \alpha_1 + \alpha_3 &= \gamma_{\bar{\xi}}^3 \\ \alpha_5 - \alpha_6 &= \gamma_{\bar{\xi}}^4 \end{aligned} \tag{3.72}$$

onde $\gamma_{\bar{\xi}}^{n_\gamma}$ designa a deformação no ponto de colocação n_γ (ver TAB. 3.4).

Escrevendo as Eqs.(3.72) na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{\bar{\xi}}^1 \\ \gamma_{\bar{\xi}}^2 \\ \gamma_{\bar{\xi}}^3 \\ \gamma_{\bar{\xi}}^4 \end{Bmatrix} \tag{3.73}$$

Simbolicamente, pode-se escrever a Eq.(3.73) como:

$$\underline{P}(\xi_i, \eta_i, \beta_i)\ \underline{\alpha} = \underline{\gamma}_{\bar{\xi}} \tag{3.74}$$

onde $\underline{\gamma}_{\bar{\xi}}$ é o vetor de valores da deformação de cisalhamento imposta nos n_γ pontos. Multiplicando-se a Eq.(3.74) por $\underline{P}^{-1}$ encontra-se:

$$\underline{\alpha} = \underline{P}^{-1}\ \underline{\gamma}_{\bar{\xi}} \tag{3.75}$$

Substituindo a inversa de $\underline{P}$ na Eq.(3.75), obtém-se:

$$\underline{\alpha} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{\bar{\xi}}^1 \\ \gamma_{\bar{\xi}}^2 \\ \gamma_{\bar{\xi}}^3 \\ \gamma_{\bar{\xi}}^4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5\ \gamma_{\bar{\xi}}^1 + 0.5\ \gamma_{\bar{\xi}}^3 \\ -0.5\ \gamma_{\bar{\xi}}^1 + 0.5\ \gamma_{\bar{\xi}}^3 \\ 0.5\ \gamma_{\bar{\xi}}^2 + 0.5\ \gamma_{\bar{\xi}}^4 \\ 0.5\ \gamma_{\bar{\xi}}^2 - 0.5\ \gamma_{\bar{\xi}}^4 \end{Bmatrix} \tag{3.76}$$

3.5.2.3 Etapa 3

Após avaliar as deformações tangenciais nos n_γ pontos selecionados sobre as direções $\bar{\xi}_i$, obtêm-se as deformações cisalhantes γ_ξ e γ_η. Para tal, parte-se da relação:

$$\underline{\gamma}_{\bar{\xi}} = \underline{T}(\beta_i)\ \underline{\hat{\gamma}}' \tag{3.77}$$

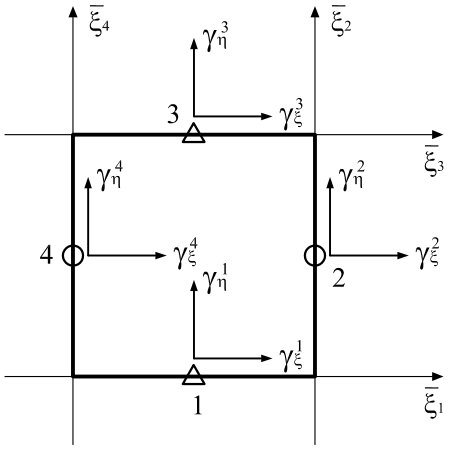


Figura 3.24: Componentes da deformação de cisalhamento avaliadas nos pontos de colocação

onde $\underline{\hat{\gamma}}'$ contém as componentes de $\underline{\gamma}'$ avaliadas nos pontos de colocação (FIG. 3.24) e $\underline{T}$ é a matriz formada pelos cossenos diretores dos eixos $\bar{\xi}_i$ (ver Eq.(3.69)).

Dos valores da TAB. 3.3 montam-se a matriz $\underline{T}$, que substituída na Eq.(3.77), fornece:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{\bar{\xi}}^1 \\ \gamma_{\bar{\xi}}^2 \\ \gamma_{\bar{\xi}}^3 \\ \gamma_{\bar{\xi}}^4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_\xi^1 \\ \gamma_\eta^1 \\ \gamma_\xi^2 \\ \gamma_\eta^2 \\ \gamma_\xi^3 \\ \gamma_\eta^3 \\ \gamma_\xi^4 \\ \gamma_\eta^4 \end{Bmatrix} \tag{3.78}$$

Relacionando as Eqs.(3.62), (3.75) e (3.77), obtém-se:

$$\underline{\gamma}' = \underline{A}\ \underline{P}^{-1}\ \underline{\gamma}_{\bar{\xi}} = \underline{A}\ \underline{P}^{-1}\ \underline{T}\ \underline{\hat{\gamma}}' \tag{3.79}$$

Logo,

$$\underline{\gamma}^{'} = \begin{bmatrix} 1 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi}^{1} \\ \gamma_{\eta}^{2} \\ \gamma_{\xi}^{3} \\ \gamma_{\eta}^{4} \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\gamma}^{'} = \begin{Bmatrix} (0.5\ \gamma_{\xi}^{1} + 0.5\ \gamma_{\xi}^{3}) + (-0.5\ \gamma_{\xi}^{1} + 0.5\ \gamma_{\xi}^{3})\eta \\ (0.5\ \gamma_{\eta}^{2} + 0.5\ \gamma_{\eta}^{4}) + (0.5\ \gamma_{\eta}^{2} - 0.5\ \gamma_{\eta}^{4})\xi \end{Bmatrix} \tag{3.80}$$

3.5.2.4 Etapa 4

As deformações de cortante em coordenadas naturais e cartesianas em cada ponto n_{γ} se relacionam através de:

$$\underline{\hat{\gamma}}_{i}^{'} = \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi}^{i} \\ \gamma_{\eta}^{i} \end{Bmatrix} = \underline{J}^{i} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{i} \\ \gamma_{yz}^{i} \end{Bmatrix} = \underline{J}^{i}\ \underline{\gamma}^{i} \tag{3.81}$$

onde $\underline{J}^{i}$ é a matriz jacobiana avaliada nos pontos n_{γ}, portanto tem-se:

$$\underline{\hat{\gamma}}_{i}^{'} = \begin{bmatrix} \underline{J}^{1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underline{J}^{n_{\gamma}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\hat{\gamma}}^{1} \\ \vdots \\ \underline{\hat{\gamma}}^{n_{\gamma}} \end{Bmatrix} = \underline{C}\ \underline{\hat{\gamma}} \tag{3.82}$$

3.5.2.5 Etapa 5

Nesta quinta etapa, relacionam-se as deformações de cisalhamento cartesianas avaliadas nos pontos de colocação (n_{γ}) com os deslocamentos nodais através de:

$$\underline{\hat{\gamma}} = \begin{Bmatrix} \underline{\hat{\gamma}}^{1} \\ \vdots \\ \underline{\hat{\gamma}}^{n_{\gamma}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{B}_{c}^{1} \\ \vdots \\ \underline{B}_{c}^{n_{\gamma}} \end{Bmatrix} \underline{d} = \underline{\bar{B}}_{c}\ \underline{d} \tag{3.83}$$

onde $\underline{B}_{c}^{i}$ é a matriz de deformação cisalhante original (Eq.(3.35)) avaliada no ponto de colocação i.

3.5.2.6 Etapa 6

Para finalizar, combinando as Eqs.(3.66), (3.79), (3.82) e (3.83) obtém-se:

$$\underline{\gamma} = \underline{J}^{-1}\ \underline{A}\ \underline{P}^{-1}\ \underline{T}\ \underline{C}\ \underline{\bar{B}}_c\ \underline{d}^{(e)} \tag{3.84}$$

É possível identificar na Eq.(3.84) a matriz de deformação de cisalhamento substitutiva $\underline{\hat{B}}_c$, logo:

$$\underline{\hat{B}}_{c_{(2\times12)}} = \underline{J}^{-1}_{(2\times2)}\ \underline{A}_{(2\times4)}\ \underline{P}^{-1}_{(4\times4)}\ \underline{T}_{(4\times8)}\ \underline{C}_{(8\times8)}\ \underline{\bar{B}}_{c_{(8\times12)}} \tag{3.85}$$

Na Eq.(3.85) as matrizes $\underline{A}$, $\underline{P}$ e $\underline{T}$ estão diretamente ligadas ao elemento com campo assumido de deformações, portanto:

$$\underline{A}\ \underline{P}^{-1}\ \underline{T} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (1-\eta) & 0 & 0 & 0 & (1+\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+\xi) & 0 & 0 & 0 & (1-\xi) \end{bmatrix} \tag{3.86}$$

Vale salientar que as matrizes $\underline{C}$ e $\underline{\bar{B}}_c$ são avaliadas nos pontos de colocação do elemento, que, para o caso do RMCIQ4, estão apresentados na TAB. 3.4. Após encontrada a matriz substitutiva $\underline{\hat{B}}_c$ a integração da matriz de rigidez é realizada de forma completa, assim, para o elemento RMCIQ4 utiliza-se a quadratura de 2×2 pontos de integração.

3.5.3 Elemento Quadrilateral de 8 Nós (RMCIQ8)

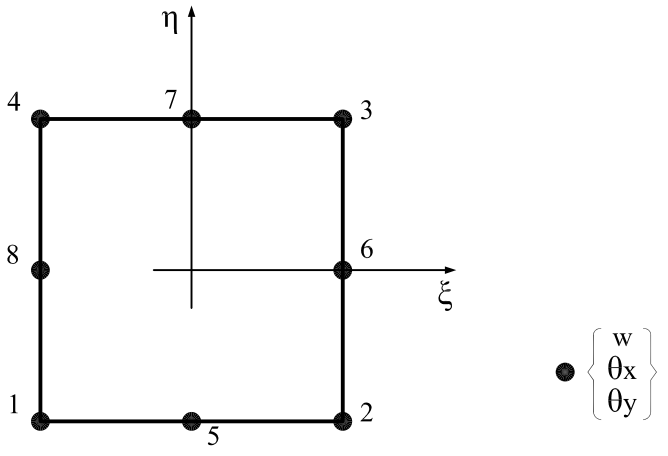


Figura 3.25: Elemento quadrilateral RMCIQ8

As funções de forma deste elemento são obtidas a partir de:

$$N_i = \frac{1}{4}\,(1+\xi_i\,\xi)\,(1+\eta_i\,\eta)\,(\xi_i\,\xi+\eta_i\,\eta-1) \qquad (i=1,2,3,4)$$
$$N_i = \frac{1}{2}\,(1+\eta_i\,\eta)\,(1-\xi^2) \qquad (i=5,7)$$
$$N_i = \frac{1}{2}\,(1+\xi_i\,\xi)\,(1-\eta^2) \qquad (i=6,8) \tag{3.87}$$

Com o objetivo de evitar o bloqueio da solução é necessário que as equações referente as deformações de cisalhamento contenha os seguintes termos:

$$\gamma_\xi = \alpha_1 + \alpha_2\,\xi + \alpha_3\,\eta + \alpha_4\,\xi\,\eta + \alpha_5\,\eta^2$$
$$\gamma_\eta = \alpha_6 + \alpha_7\,\xi + \alpha_8\,\eta + \alpha_9\,\xi\,\eta + \alpha_{10}\,\xi^2 \tag{3.88}$$

Logo, para determinação dos valores de α_i basta aplicar as etapas apresentadas na seção anterior. Porém, no caso deste elemento as direções $\bar{\xi}_i$ juntamente com os pontos de colocação (n_γ) estão ilustrados a seguir, FIG. 3.26:

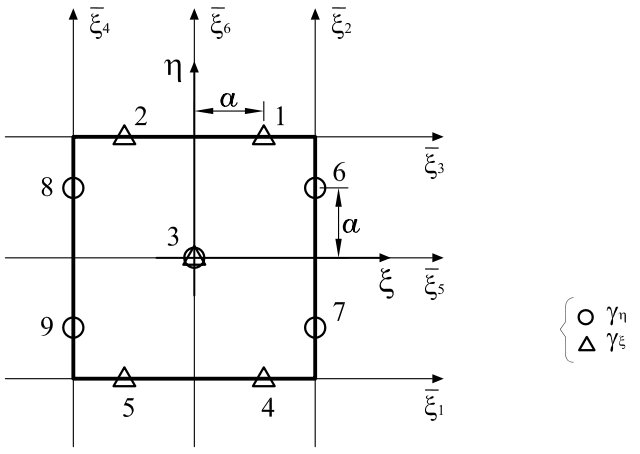


Figura 3.26: Pontos para o cálculo das deformações naturais

Tabulando os pontos de colocação e suas respectivas coordenadas, tem-se:

Tabela 3.5: Coordenadas referentes aos pontos de colocação do elemento RMCIQ8

Ponto n_γ	Direção	Coordenada	
		ξ	η
1	$\bar{\xi}_3$	a	1
2	$\bar{\xi}_3$	$-a$	1
3	$\bar{\xi}_5$	0	0
3	$\bar{\xi}_6$	0	0
4	$\bar{\xi}_1$	a	-1
5	$\bar{\xi}_1$	$-a$	-1
6	$\bar{\xi}_2$	1	a
7	$\bar{\xi}_2$	1	$-a$
8	$\bar{\xi}_4$	-1	a
9	$\bar{\xi}_4$	-1	$-a$

* $a = 1/\sqrt{3}$

O produto matricial $\underline{A}\ \underline{P}^{-1}\ \underline{T}$ referente ao elemento RMCIQ8 é dado por:

$$\underline{A}\ \underline{P}^{-1}\ \underline{T} = \frac{1}{4}\left[\begin{array}{cccccccccc|} A\eta_1 & 0 & \bar{A}\eta_1 & 0 & 4\eta_3 & 0 & -\bar{A}\eta_2 & 0 & -A\eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B\xi_1 & 0 & \bar{B}\xi_1 & 0 & 4\xi_3 & 0 & -\bar{B}\xi_2 & 0 & -B\xi_2 \end{array}\right] \tag{3.89}$$

onde

$$A = \eta + \sqrt{3}\xi\ ;\quad \bar{A} = \eta - \sqrt{3}\xi\ ;\quad B = \xi + \sqrt{3}\eta\ ;\quad \bar{B} = \xi - \sqrt{3}\eta$$

e os termos ξ_1, η_1, ξ_2, η_2, ξ_3 e η_3 são obtidos pela substituição de s por ξ ou η nas equações abaixo.

$$s_1 = (1+s)\ ;\quad s_2 = (1-s)\ ;\quad s_3 = (1-s^2) \quad \text{para} \quad s = \xi, \eta$$

Conforme Oñate (1995), o cálculo da matriz de rigidez após substituída a matriz de deformação de cisalhamento pode ser feito de forma exata utilizando uma quadratura de 3×3 pontos para todos os termos de flexão e cisalhamento, estando o elemento livre de mecanismos internos.

3.5.4 Elemento Quadrilateral de 9 Nós (RMCIQ9)

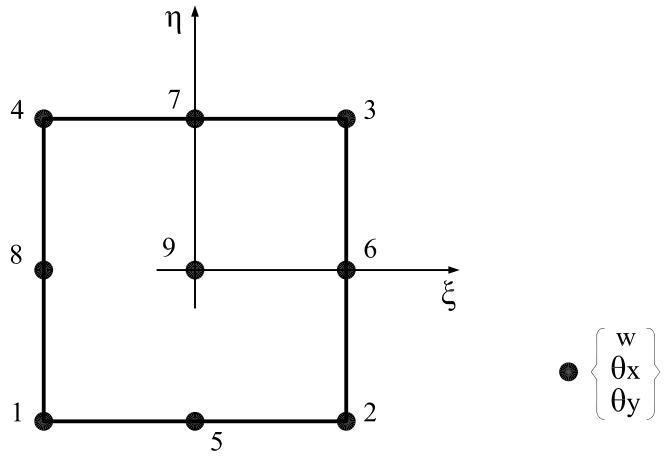


Figura 3.27: Elemento quadrilátero RMCIQ9

As funções de forma do elemento RMCIQ9 são dadas por:

$$
\begin{aligned}
N_i &= \frac{1}{4}\,(\xi^2+\xi_i\,\xi)\,(\eta^2+\eta_i\,\eta) \qquad (i=1,2,3,4)\\
N_i &= \frac{1}{2}\,\eta_i^2(\eta^2-\eta_i\,\eta)\,(1-\xi^2)+\frac{1}{2}\,\xi_i^2\,(\xi^2-\xi_i\,\xi)\,(1-\eta^2) \qquad (i=5,6,7,8)\\
N_9 &= (1-\xi 2)(1-\eta^2)
\end{aligned}
\tag{3.90}
$$

Para satisfazer a Eq.(3.54) o campo de deformação de cisalhamento deve conter os seguintes termos:

$$
\begin{aligned}
\gamma_\xi &= \alpha_1+\alpha_2\,\xi+\alpha_3\,\eta+\alpha_4\,\xi\,\eta+\alpha_5\,\eta^2+\alpha_6\,\xi\,\eta^2\\
\gamma_\eta &= \alpha_7+\alpha_8\,\xi+\alpha_9\,\eta+\alpha_{10}\,\xi\,\eta+\alpha_{11}\,\xi^2+\alpha_{12}\,\xi^2\,\eta
\end{aligned}
\tag{3.91}
$$

Aplicando as etapas apresentadas no desenvolvimento do elemento RMCIQ4, obtém-se a matriz substitutiva $\underline{\hat{B}}_c$. Entretanto, para o elemento RMCIQ9 utilizam-se as mesmas direções de $\bar{\xi}_i$ do elemento RMCIQ8 e os pontos η_γ seguem ilustrados na FIG. 3.28 e tabulados logo em seguida (TAB. 3.6).

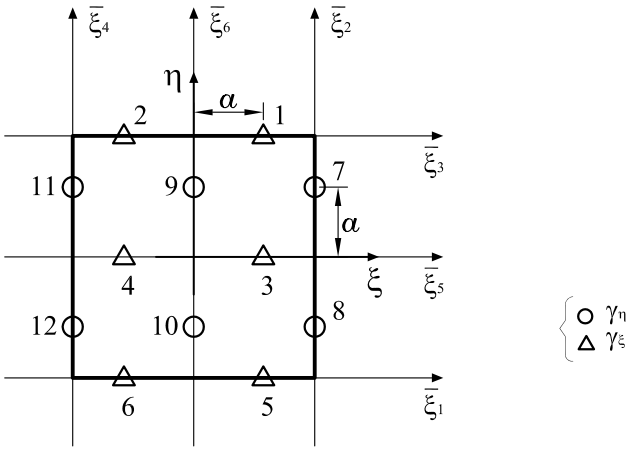


Figura 3.28: Pontos para o cálculo das deformações naturais

Tabela 3.6: Coordenadas referentes aos pontos de colocação do elemento RMCIQ9

Ponto n_γ	Direção	Coordenada	
		ξ	η
1	$\bar{\xi}_3$	a	1
2	$\bar{\xi}_3$	$-a$	1
3	$\bar{\xi}_5$	a	0
4	$\bar{\xi}_5$	$-a$	0
5	$\bar{\xi}_1$	a	-1
6	$\bar{\xi}_1$	$-a$	-1
7	$\bar{\xi}_2$	1	a
8	$\bar{\xi}_2$	1	$-a$
9	$\bar{\xi}_6$	0	a
10	$\bar{\xi}_6$	0	$-a$
11	$\bar{\xi}_4$	-1	a
12	$\bar{\xi}_4$	-1	$-a$

* $a = 1/\sqrt{3}$

Passando pelas etapas descritas na Seção 3.5.2, encontra-se o produto matricial de $\underline{A}\ \underline{P}^{-1}\ \underline{T}$ para o elemento RMCIQ9 dado por:

$$\underline{A}\ \underline{P}^{-1}\ \underline{T} = \frac{1}{4}\left[\begin{array}{cccccccccccc} A\eta_1 & 0 & \bar{A}\eta_1 & 0 & 2A\eta_3 & 0 & 2\bar{A}\eta_3 & 0 & A\eta_2 & 0 & \bar{A}\eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B\xi_1 & 0 & \bar{B}\xi_1 & 0 & 2B\xi_3 & 0 & 2\bar{B}\xi_3 & 0 & B\xi_2 & 0 & \bar{B}\xi_2 \end{array}\right] \quad (3.92)$$

onde

$$A = 1 + \sqrt{3}\xi \; ; \;\; \bar{A} = 1 - \sqrt{3}\xi \; ; \;\; B = 1 + \sqrt{3}\eta \; ; \;\; \bar{B} = 1 - \sqrt{3}\eta$$

e os termos ξ_1, η_1, ξ_2, η_2, ξ_3 e η_3 são obtidos pela substituição de s por ξ ou η nas equações abaixo.

$$s_1 = s(1+s) \; ; \;\; s_2 = s(s-1) \; ; \;\; s_3 = (1-s^2) \quad \text{para} \quad s = \xi, \eta$$

Uma vez obtido o produto matricial dado pela Eq.(3.92), obtém-se facilmente a matriz de deformações de cisalhamento substitutiva. Assim como no elemento RMCIQ8, o cálculo da matriz de rigidez pode ser feito de forma exata utilizando uma quadratura de 3×3 pontos para todos os termos de flexão e cisalhamento, estando o elemento livre de mecanismos internos (Oñate, 1995).

3.5.5 Elemento Triangular de 6 Nós (RMCIT6)

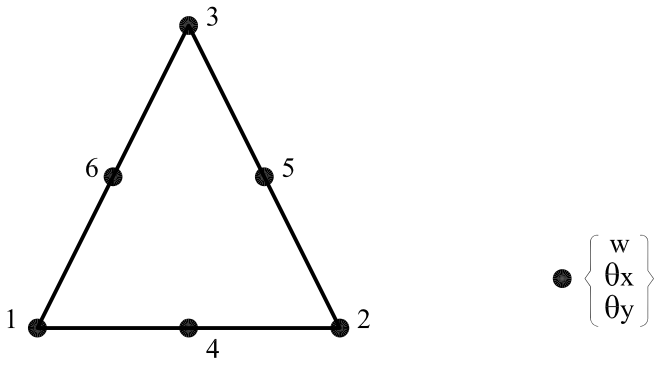


Figura 3.29: Elemento triangular RMCIT6

O elemento triangular da FIG. 3.29 foi desenvolvido por Zienkiewicz et al. (1990), tendo variação quadrática para a flecha e os giros, e interpolação linear para as deformações de cortante transversal, como segue:

$$\begin{aligned} \gamma_\xi &= \alpha_1 + \alpha_2 \, \xi + \alpha_3 \, \eta \\ \gamma_\eta &= \alpha_4 + \alpha_5 \, \xi + \alpha_6 \, \eta \end{aligned} \tag{3.93}$$

A localização dos pontos de cálculo das deformações de cisalhamento naturais são mostradas na FIG. 3.30 e nat TAB. 3.7.

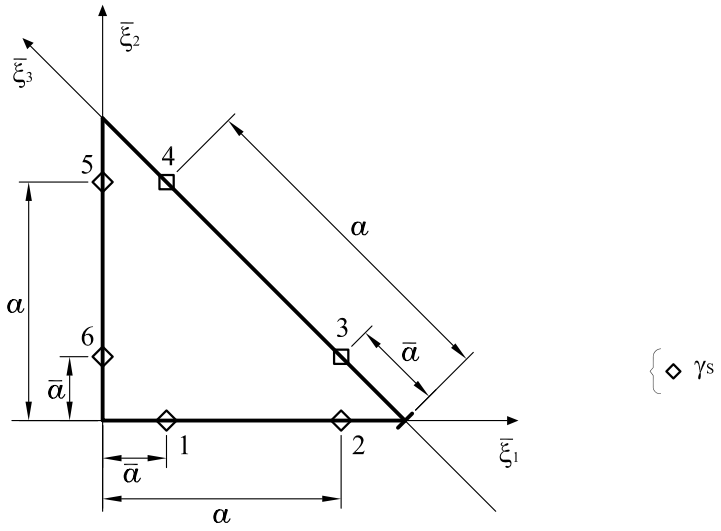


Figura 3.30: Pontos para o cálculo das deformações naturais

Tabela 3.7: Coordenadas referentes aos pontos de colocação do elemento RMCIT6

Ponto n_γ	Direção	Coordenada	
		ξ	η
1	$\bar{\xi}_1$	$\bar{a}$	0
2	$\bar{\xi}_1$	a	0
3	$\bar{\xi}_3$	a	$\bar{a}$
4	$\bar{\xi}_3$	$\bar{a}$	a
5	$\bar{\xi}_1$	0	a
6	$\bar{\xi}_1$	0	$\bar{a}$

$a{=}\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sqrt{3}})$ $\quad$ $\bar{a}{=}\frac{1}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{3}})$

Seguindo as etapas apresentadas na Seção 3.5.2, encontram-se as matrizes $\underline{A}$, $\underline{P}$ e $\underline{T}$ (Eqs.(3.94)), e utilizando os pontos da TAB. 3.7, obtém-se a matriz de deformação de cortante substitutiva.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{P} = \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 & 0 & 0 & 0 \\ -c & -c\,\xi_3 & -c\,\eta_3 & c & c\,\xi_3 & c\,\eta_3 \\ -c & -c\,\xi_4 & -c\,\eta_4 & c & c\,\xi_4 & c\,\eta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_5 & \eta_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_6 & \eta_6 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & & & & & & 0 \\ & & 1 & 0 & & & & & & & & \\ & & & & -c & c & & & & & & \\ & & & & & & -c & c & & & & \\ & & & & & & & & 0 & 1 & & \\ 0 & & & & & & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad c = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{3.94}$$

onde ξ_i e η_i são as coordenadas do ponto de colocação i.

A matriz de rigidez pode ser integrada de forma exata utilizando uma quadratura de 3 pontos. Em Zienkiewicz et al. (1990) verifica-se a convergência deste elemento em todos os exemplos apresentados.

Capítulo 4

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

4.1 Introdução

O programa **INSANE** (*Interactive Structural Analysis Environment*), desenvolvido em Linguagem JAVA no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais e disponível no site `www.dees.ufmg.br/insane`, é formado por diversas aplicações que objetivam a resolução de problemas de diferentes naturezas através de métodos numéricos, como o método de elementos finitos. Atualmente, o **INSANE** possui um pré-processador, um processador e um pós-processador. O pré-processador é a aplicação responsável por interagir com o usuário na entrada dos dados, o processador, que representa o núcleo numérico, realiza os cálculos necessários para a obtenção dos resultados e o pós-processador também interage com o usuário apresentando de forma gráfica os resultados obtidos na análise.

O núcleo numérico, onde se concentrou todo o trabalho aqui apresentado, é formado basicamente pelas interfaces: `Persistence`, `Model`, `Solution` e `Assembler`, que encontram-se organizadas conforme a FIG. 4.1.

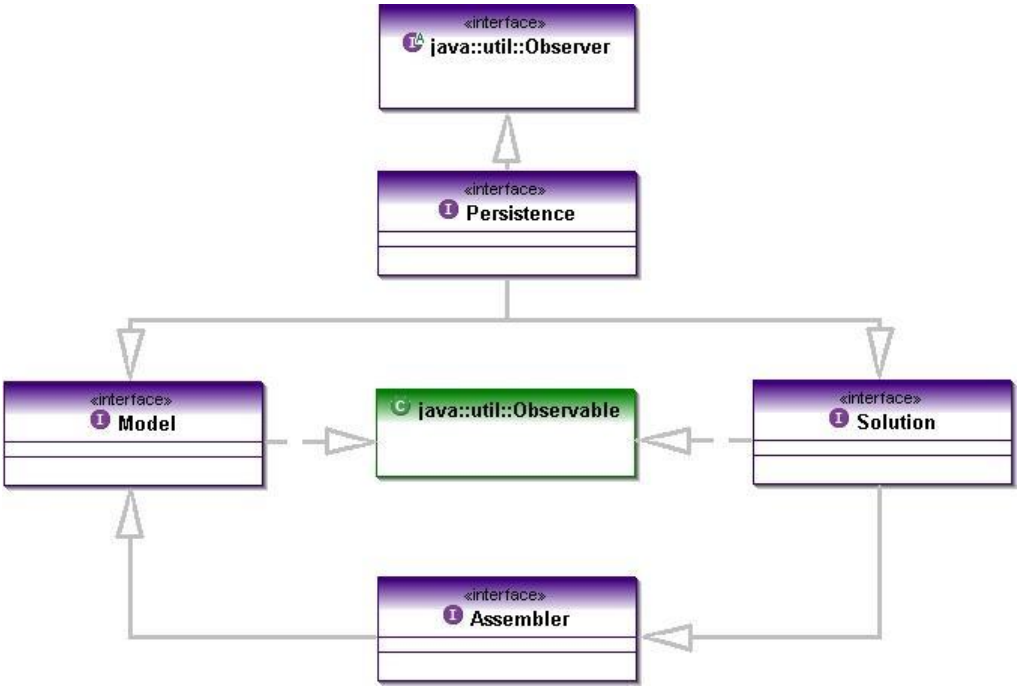


Figura 4.1: Organização atual do núcleo numérico do **INSANE**

Resumidamente, pode-se dizer que, a partir dos dados informados pelo usuário, o **INSANE**, através das quatro interfaces mostradas na FIG. 4.1, modela o problema, monta as equações necessárias para tal modelo e as soluciona, apresentando em seguida os resultados obtidos.

A interface `Persistence` é responsável por coletar os dados de entrada que, por exemplo, podem ter sido gerados pelo pré-processador. Também, persiste os dados de saída gerando arquivos XML para a utilização em outras interfaces ou aplicações do sistema, como o pós-processador. Esta interface, implementada por Fonseca (2006), encontra-se organizada conforme FIG. 4.2.

Gerados os arquivos XML de entrada, a interface `Model`, que possui as informações sobre os modelos, entra em ação buscando os dados necessários para descrição completa do mesmo. Atualmente, o **INSANE** soluciona apenas problemas modelados através do método dos elementos finitos, portanto a classe `FemModel`, que representa estes modelos implementa a interface `Model`, conforme FIG. 4.3.

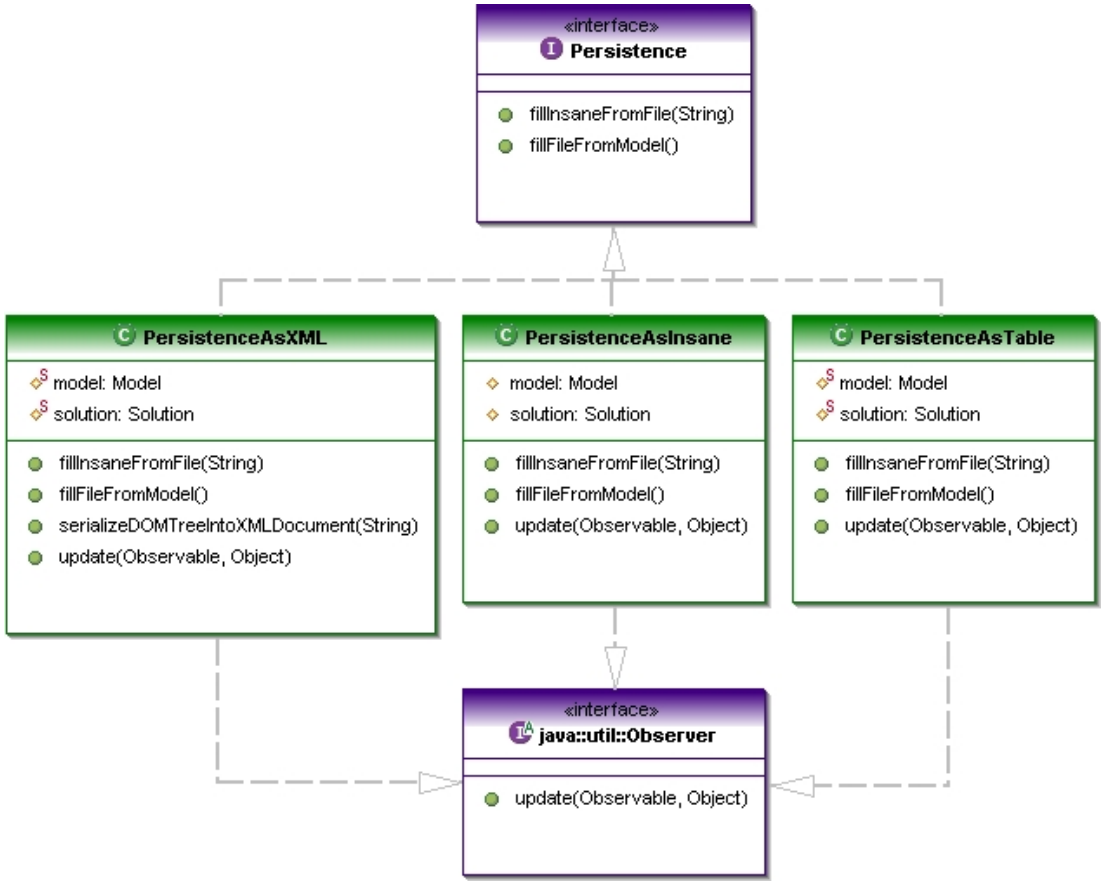


Figura 4.2: Diagrama de classe para `Persistence`

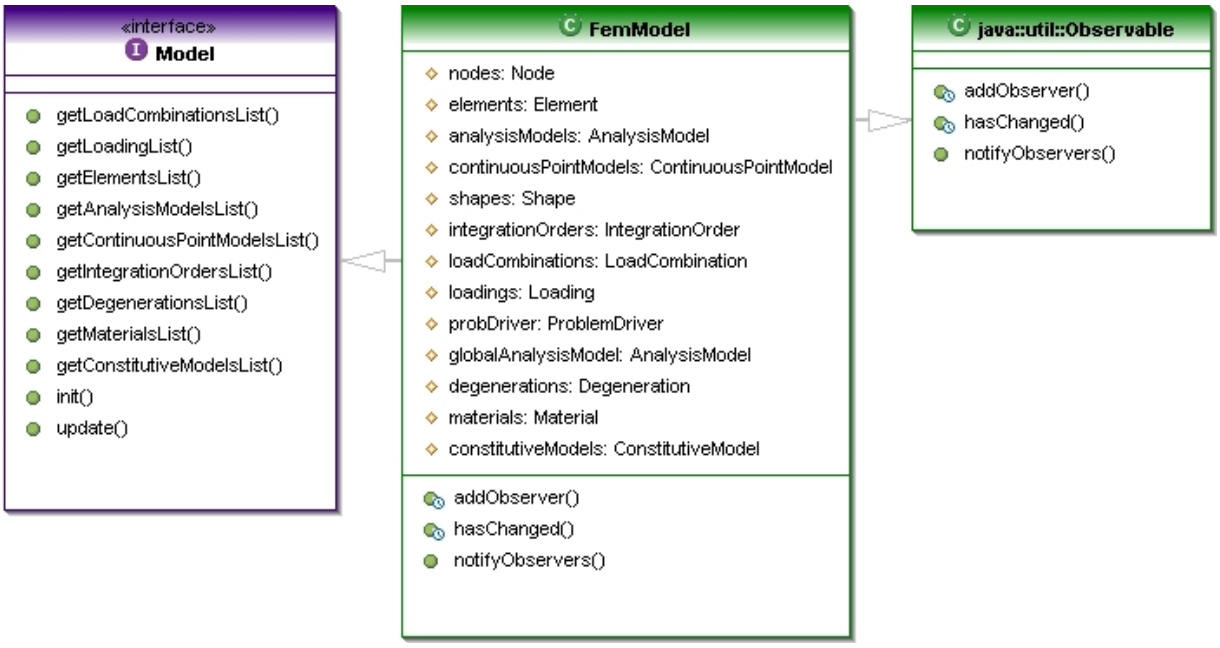


Figura 4.3: Hierarquia da interface `Model`

Determinado o modelo a ser analisado, a interface `Assembler` (FIG. 4.4) torna-se capaz de montar o sistema matricial dado pela equação:

$$\underline{A}\ \underline{\ddot{X}} + \underline{B}\ \underline{\dot{X}} + \underline{C}\ \underline{X} = \underline{R} - \underline{F} \tag{4.1}$$

onde $\underline{X}$, $\underline{\dot{X}}$ e $\underline{\ddot{X}}$ são os vetores de variáveis de estado do problema, a derivada temporal e a derivada segunda temporal deste vetor; $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{C}$ são as matrizes dos coeficientes e $\underline{R}$ e $\underline{F}$ representam os termos independentes do sistema.

Assim como a interface `Model`, a interface `Assembler` atualmente é capaz de solucionar apenas problemas modelados através do MEF, isto ocorre através da classe `FemAssembler` que a implementa. Como se sabe, nos problemas estáticos, a Eq.(4.1) é reduzida para:

$$\underline{C}\ \underline{X} = \underline{R} - \underline{F} \tag{4.2}$$

onde $\underline{C}$ é a matriz de rigidez do modelo, $\underline{X}$ é o vetor de deslocamentos nodais, $\underline{R}$ é o vetor de cargas nodais e $\underline{F}$ é o vetor de forças nodais equivalentes aos esforços internos.

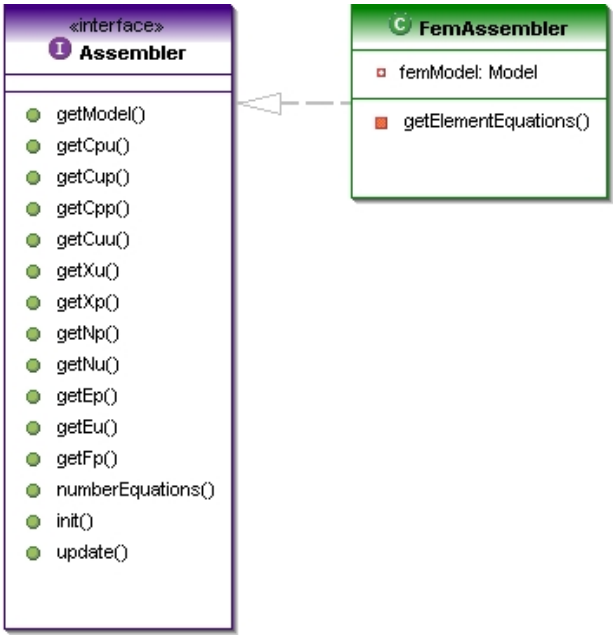


Figura 4.4: Diagrama de classe para `Assembler`

Uma vez montada a equação do problema, a interface `Solution` (FIG. 4.5) fica encarregada de solucioná-la. A classe `SteadyState` implementa a interface `Solution` e é a responsável pela solução de problemas descritos através de um único sistema de

equações algébricas lineares. Já a classe `EquilibriumPath`, que também implementa `Solution`, é capaz de obter diversos pontos de equilíbrio para problemas física e/ou geometricamente não-linear. Estas classes e interfaces foram implementadas por Fuina (2006) e estão apresentadas na FIG. 4.5.

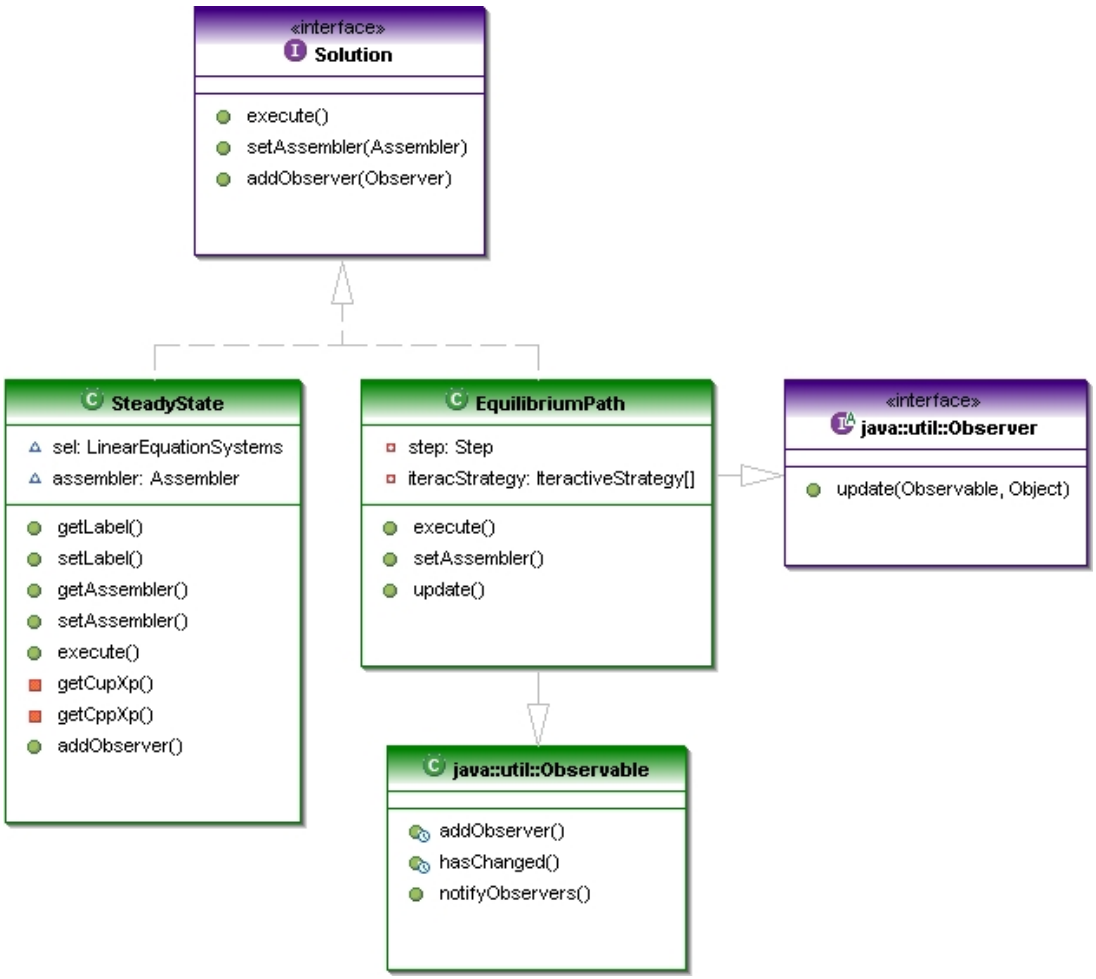


Figura 4.5: Diagrama de classe para `Solution`

Conforme Fonseca (2006), as interfaces `Model` e `Solution` comunicam-se com a interface `Persistence`, responsável por tratar a entrada de dados e persistir os dados de saída para as aplicações, quando observa-se alterações no modelo. Este processo de observar alterações ocorre através do padrão de projeto *Observer-Observable*, que é um mecanismo de propagação de mudanças. O objeto **observador** (que implementa a interface `java.util.observer`) é inscrito numa lista de observadores dos

objetos chamados **observados** (que estendem a classe `java.util.observable`). Assim, quando ocorrem alterações nos objetos observados, os observadores são notificados para se atualizarem, garantindo a consistência e a comunicação entre eles.

O presente capítulo apresenta as alterações realizadas no núcleo numérico do sistema **INSANE** para torná-lo apto a solucionar problemas de placas através das teorias de Kirchhoff e Reissner-Mindlin. Tais alterações baseiam-se na ampliação de classes ou interfaces existentes e criação de outras. Vale ressaltar que os diagramas apresentados a seguir estão focados na proposta deste trabalho, contendo na maioria dos casos apenas o que foi implementado.

Além destas interfaces citadas, o núcleo numérico é composto por algumas outras e por classes abstratas, que serão detalhadas a seguir por estarem diretamente correlacionadas com este trabalho.

4.2 Interface `AnalysisModel`

A interface `AnalysisModel` (FIG. 4.6) reúne os diversos tipos de análises que o sistema **INSANE** é capaz de realizar; ela é responsável pelas informações, referentes às análises, requeridas pelos elementos e pontos materiais. Como exemplo, esta interface é responsável por montar as matrizes de deformações generalizadas ($\underline{B}$) e constitutiva ($\underline{D}$), e informar os graus de liberdade existentes por nó.

Para a análise de placas, implementou-se uma classe para cada teoria, Kirchhoff e Reissner-Mindlin, e criaram-se derivações destas para elementos que se diferenciavam da maioria. Por exemplo, como visto na FIG. 4.6, para a teoria de Reissner-Mindlin que utiliza os elementos isoparamétricos com três graus de liberdade por nó, necessitou-se apenas criar uma derivação para o elemento Heterosis, cujo número de graus de liberdade do nó central é apenas dois (rotação em x e em y). Entretanto, para a teoria de Kirchhoff, foi necessário criar uma derivação para cada um dos elementos implementados.

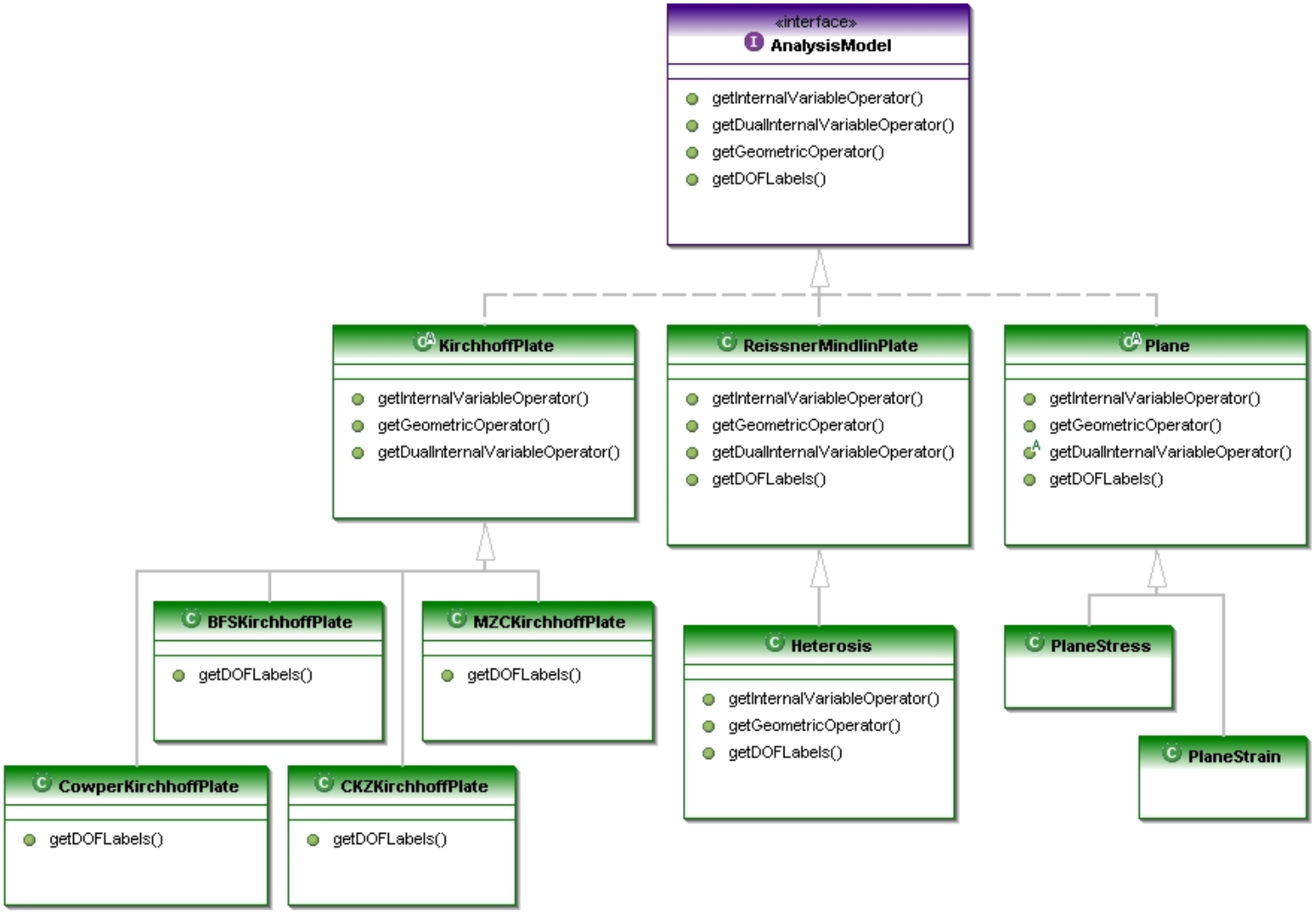


Figura 4.6: Diagrama de classe para `AnalysisModel`

4.3 Interface `Shape`

Na interface `Shape`, apresentada na FIG. 4.7, existem os métodos responsáveis por fornecer as funções de forma (`getShapeFunction()`) e suas derivadas, primeiras (`getDerivedShapeFunction()`) e segundas (`getSecondDerivedShapeFunction()`). Ela encontra-se dividida de acordo com a continuidade dos elementos, que podem ser de continuidade C^0 ou de continuidade C^1. Em um segundo nível da hierarquia encontram-se as informações, de responsabilidade desta interface, sobre os diversos elementos disponibilizados no **INSANE**, separados por sua geometria e número de nós.

De acordo com a proposta do presente trabalho, implementou-se diversas classes como também reutilizou-se algumas. Para a teoria de Kirchhoff, que possui continuidade C^1, foi necessário implementar classes para todos os elementos (MZC, BFS, CKZ e Cowper). Entretanto, para Reissner-Mindlin, que possui continuidade C^0 e utiliza os elementos isoparamétricos bidimensionais, reutilizou-se algumas classes, implementadas por Almeida (2005), referente a esses elementos. Porém, implementou-se uma classe para representar o elemento quadrilateral de nove nós heterosis, a qual recebeu o nome de `Q9H`.

Para utilizar os elementos de Reissner-Mindlin com *campo assumido de deformações* ou *campo de deformações de cortante imposta* foi necessário implementar uma nova interface, chamada (`Colocation`), que possui o método responsável pelo fornecimento dos pontos de colocação, ou seja, os pontos onde será avaliada a deformação de cortante, método *samplingPoints()*, como também o método para montar parte da matriz substitutiva (*getAPT()*).

Figura 4.7: Diagrama de classe para Shape

4.4 Interface `ProblemDriver`

A interface `ProblemDriver`, apresentada na FIG. 4.8, tem como dever informar à interface `Assembler` quais e quanto valem os coeficientes da equação do modelo, ou seja, fica a cargo desta interface passar os valores das matrizes $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{C}$ da Eq.(4.1). Diante da FIG. 4.8, verifica-se a diversidade de problemas possíveis de resolver utilizando-se modelos discretos.

Em relação às placas, para a teoria de Reissner-Mindlin, numa análise de placa espessa, que utiliza os elementos paramétricos, reutilizou-se a classe `ParametricPhysicallyNonLinearSolidMech`, que atende completamente as necessidades requeridas. No caso de uma análise de placa fina, com o uso da integração reduzida, novamente foi possível a reutilização da classe `ParametricPhysicallyNonLinearSolidMech`. Entretanto, tornou-se necessária a implementação de duas derivações de `ParametricPhysicallyNonLinearSolidMech`, que tornam possível a aplicação das outras duas técnicas apresentadas em seções anteriores. A classe `ReissnerMindlinThinPlate` é responsável pelas análises que utilizam a integração seletiva e a classe `RMThinPlateSubstituteShearStrain` pelas análises onde se aplica a técnica de deformação de cortante imposta.

No caso da teoria de Kirchhoff, é possível fazer uso da integração numérica para obter a matriz de rigidez, como também, obtê-la por integração analítica. No primeiro caso, onde utiliza-se a integração numérica, aplica-se a classe `ParametricPhysicallyNonLinearSolidMech`. Mas, para o segundo caso, foi necessária a implementação de uma nova classe, que implementa a interface `ProblemDriver`, chamada `KirchhoffThinPlate`. Desta são derivadas quatro classes que representam os elementos MZC, BFS, CKZ e Cowper, sendo que cada classe implementa a matriz de rigidez do respectivo elemento, integrada de forma analítica, para um material linear elástico isotrópico. Mais detalhes sobre estas matrizes podem ser encontrados no Apêndice A.

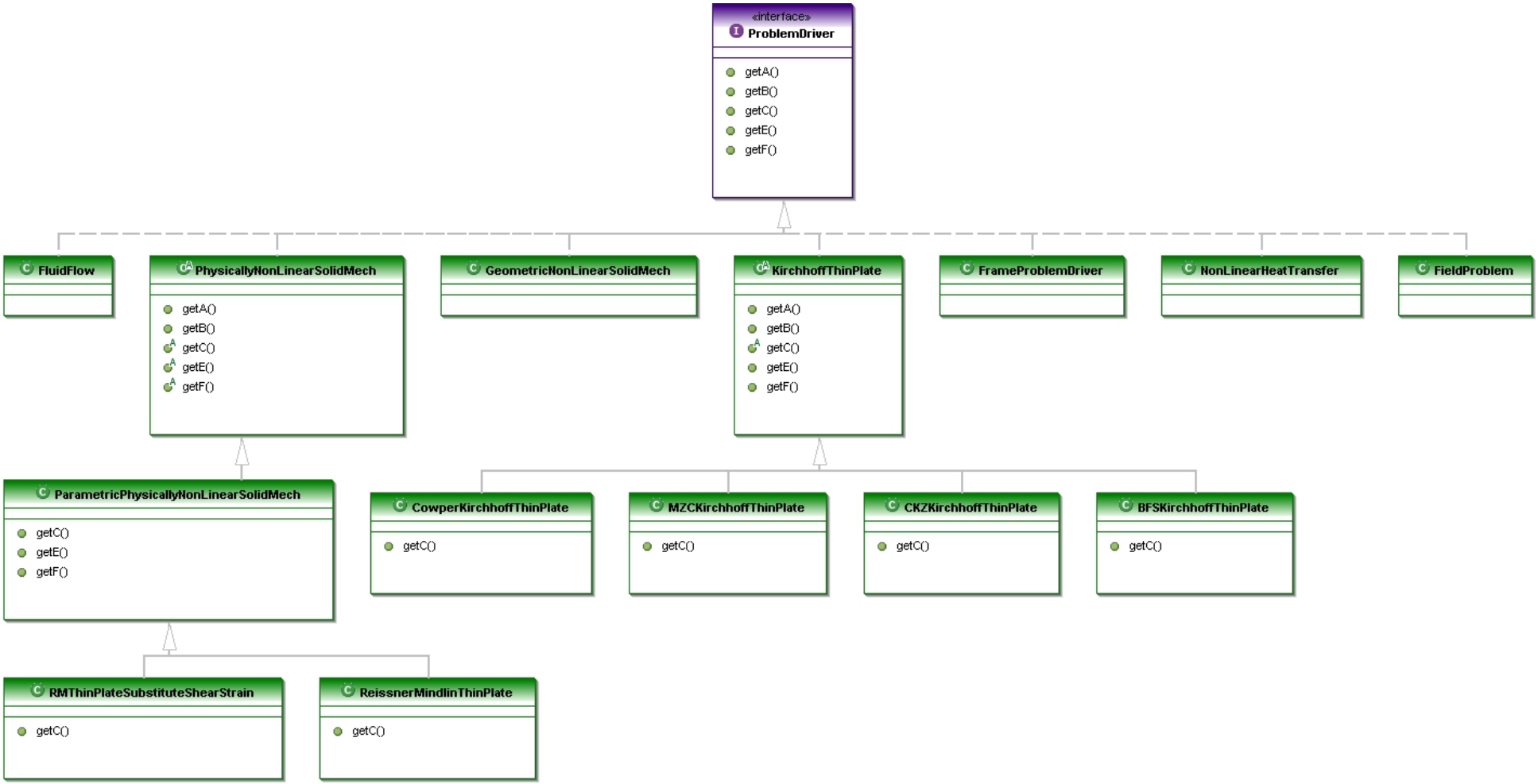


Figura 4.8: Diagrama de classe para `ProblemDriver`

4.5 Classe Abstrata `Element`

"A classe `Element` representa os elementos finitos e é estendida pela classe `ParametricElement` que representa os elementos finitos paramétricos. Esta, por sua vez, é estendida por outras classes representando os vários tipos de elementos finitos paramétricos, como mostrado na FIG. 4.9. Um objeto `Element` tem como atributos uma lista de `ElementNode`, que representa sua incidência, uma lista de `Degeneration`, que representa seus pontos de integração e sua constituição geométrica e física, um objeto `AnalysisModel`, que representa seu modelo de análise, um objeto `Shape`, que representa sua função de forma, um objeto `ConstitutiveModel`, que representa seu modelo constitutivo, e um objeto `ProblemDriver`, que armazena informações relativas ao tipo de problema que o elemento modela" (Fonseca, 2006).

A classe `ThinPlateElement`, foi implementada para os elementos finitos baseados na teoria de Kirchhoff, os quais dispõem a matriz de rigidez integrada de forma analítica.

Para a montagem das matrizes de rigidez obtidas por integração analítica é necessário ter informações sobre o material e alguns dados sobre geometria do elemento. Portanto, a classe `ThinPlateElement` através dos métodos *getYoungsModulus()* e *getPoissonsRatio()*, que fornecem o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson, respectivamente e *getThickness()* que fornece a espessura, torna-se suficiente para atender as necessidades requeridas para a montagem da matriz de rigidez.

Conforme apresentado na FIG. 4.9, a classe `ThinPlateElement` possui uma derivação que é a classe `TriangularThinPlateElement` responsável pelos elementos triangulares, esta derivação tornou-se necessária devido a particularidades referentes à geometria.

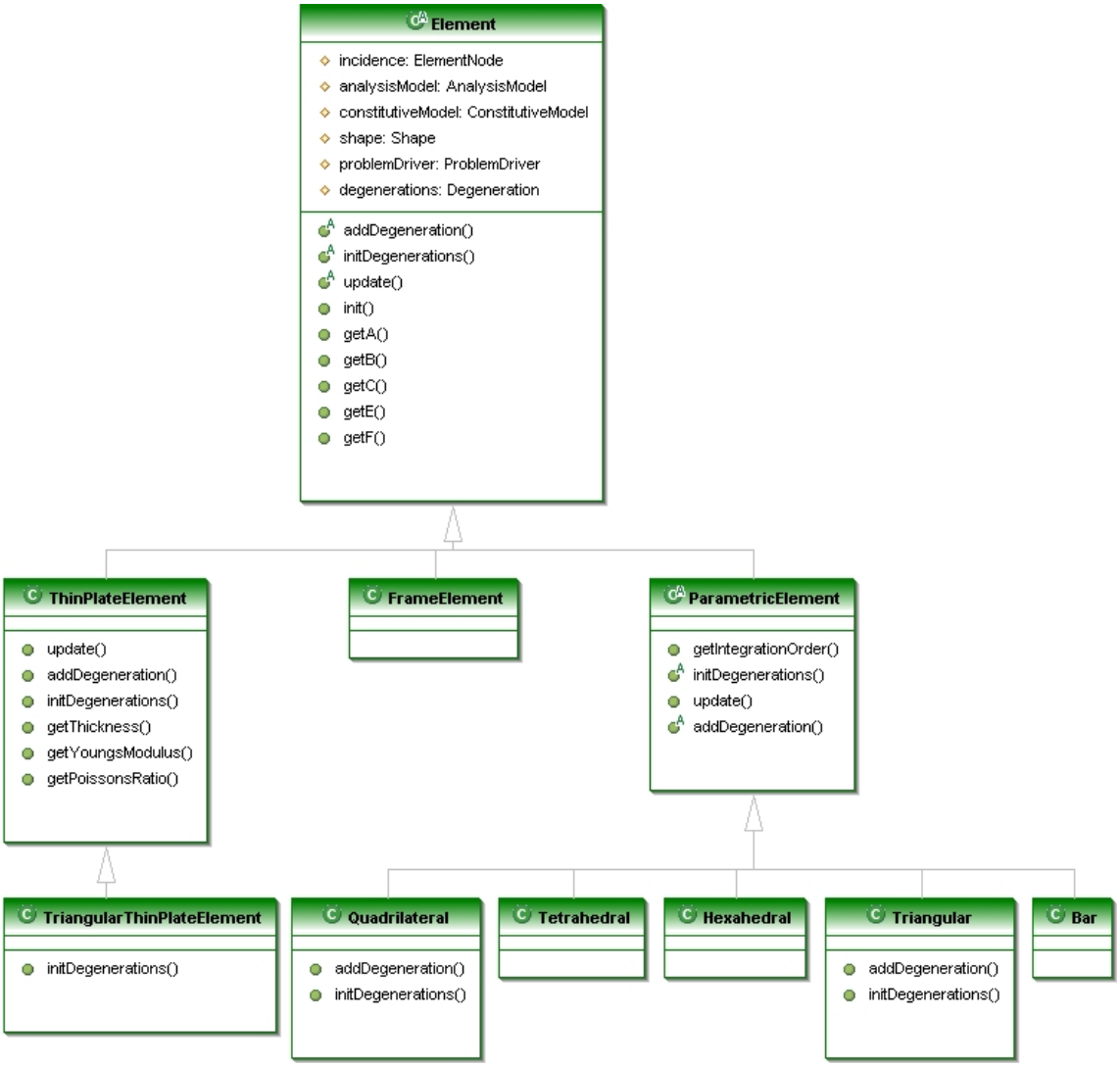


Figura 4.9: Diagrama de classe para `Element`

Capítulo 5

TESTES DA MALHA DE IRONS (*PATCH TEST*)

5.1 Introdução

O método de elementos finitos é um método numérico para solução de problemas da mecânica do contínuo que possuam graus de liberdade infinito. O desempenho de um elemento depende principalmente de suas funções de deslocamento. A escolha destas funções e a configuração nodal associada é praticamente limitada por sua existência, complexidade e economias. Qualquer que seja o modelo de elemento finito, as características do elemento têm que satisfazer certas condições necessárias para assegurar que, com o refinamento da malha, os resultados computados venham a convergir para a solução analítica. Infelizmente não se pode confiar em um elemento que forneça bons resultados para uma malha particular e maus resultados quando esta malha é refinada. A realidade é que para problemas práticos normalmente não se conhece a resposta analítica, conseqüentemente, não é possível assegurar os resultados obtidos. Se o elemento converge, o assunto pode ser resolvido (qualitativamente, se não quantitativamente) resolvendo o problema novamente com uma malha melhor (refinada). Mas, quando não se conhece nada sobre as propriedades de convergência do elemento, até mesmo os resultados de uma malha refinada tornam-se suspeitos (Razzaque, 1986).

Para solucionar este inconveniente, um teste para validação da formulação de

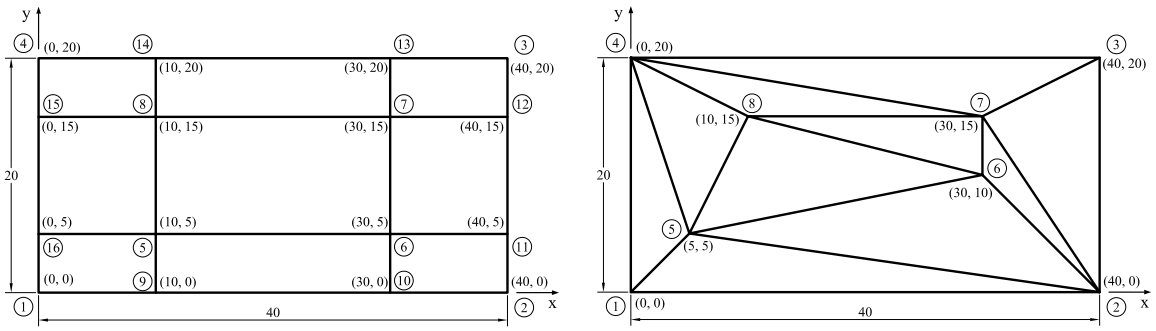
um elemento foi desenvolvido por Bruce Irons, chamado de *Patch Test*. A princípio este teste verificava simplesmente se uma discretização com elementos de tamanhos aleatórios reproduzia exatamente o comportamento de um material elástico quando submetido a deslocamentos compatíveis com deformação constante. Esta motivação física levou-o a desenvolver um teste mais formal que se tornou um procedimento largamente usado para verificação de elementos finitos e programas relacionados (Taylor et al., 1986).

Pode-se dizer que o *Patch Test* serve para estudar a convergência correta de uma formulação de elemento finito. Nesse teste utiliza-se uma discretização com elementos de tamanhos aleatórios de tal maneira que ao menos um nó fique completamente cercado por elementos. Aplicam-se restrições nodais ao contorno juntamente com deslocamentos ou cargas compatíveis com um estado de deformação constante. Calculando as deformações (ou tensões) do modelo, o *Patch Test* será satisfeito se em todos os pontos dentro dos elementos as deformações (ou tensões) calculadas forem constantes (Cook et al., 1989).

Neste capítulo apresentam-se os *Patch Tests* dos elementos de Kirchhoff e Reissner-Mindlin implementados, referentes à flexão, à torção e ao cisalhamento, lembrando que somente para os elementos de Reissner-Mindlin foram feitos testes de cisalhamento.

5.2 Elementos de Kirchhoff

Devido às suas próprias características, nos elementos de Kirchhoff testa-se somente a flexão e a torção. Para a realização destes testes, necessitou-se utilizar duas malhas, conforme FIG. 5.1, uma vez que dois dos elementos implementados (MZC e BFS) são elementos retangulares e não podem ser distorcidos.



(a) Elementos retangulares (MZC e BFS) (b) Elementos triangulares (CKZ e Cowper)

Figura 5.1: Malhas utilizadas nos *Patch Tests* dos elementos de Kirchhoff

5.2.1 *Patch Test* para Flexão

Conforme definição do *patch test*, espera-se que os elementos sejam capazes de reproduzir um campo de deformação constante. Desta maneira, para realizar os testes de flexão aplicou-se as cargas pontuais apresentadas na TAB. 5.1 nas malhas da FIG. 5.1 e restringiu-se o deslocamento vertical dos nós 2, 3 e 4.

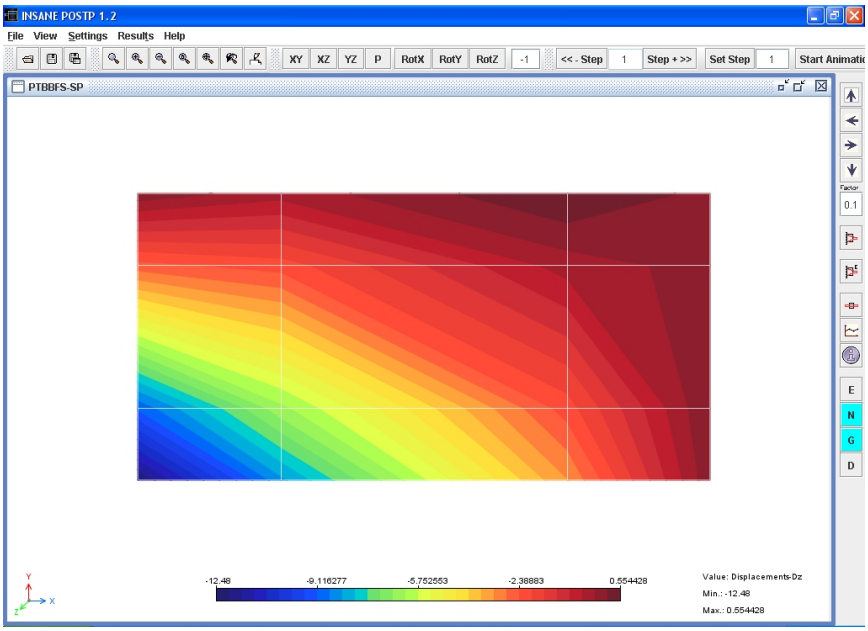
Tabela 5.1: Carregamento aplicado para o *patch test* de flexão dos elementos de Kirchhoff

Nó	Carregamento		
	$F_z(uf)$	$M_x(uf \cdot uc)$	$M_y(uf \cdot uc)$
1	-2	20	-10
2	0	20	10
3	0	-20	10
4	0	-20	-10

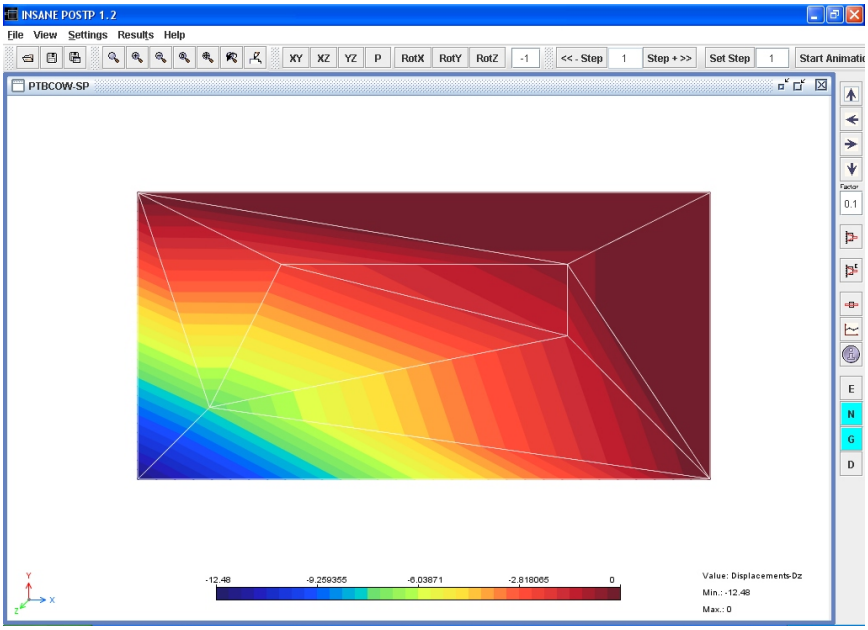
Sabendo-se que o módulo de elasticidade $E = 10^6\ uf/uc^2$, o coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e a espessura $t = 0,1\ uc$, têm-se como solução analítica para o deslocamento vertical no nó 1 $w_1 = -12,48\ uc$ e para os momentos $M_x = M_y = M_{xy} = -1\ uf \cdot uc/uc$ ao longo de toda a placa, de acordo com Gruttmann e Wagner (2003).

Dois dos elementos implementados de Kirchhoff, o retangular BFS e o triangular de Cowper obtiveram o deslocamento vertical exato (FIG. 5.2), entretanto nenhum

dos elementos (MZC, BFS, CKZ e Cowper) conseguiram reproduzir o estado constante de deformação, logo conclui-se que eles não passam neste *patch test*.



(a) Elemento retangular BFS



(b) Elemento triangular de Cowper

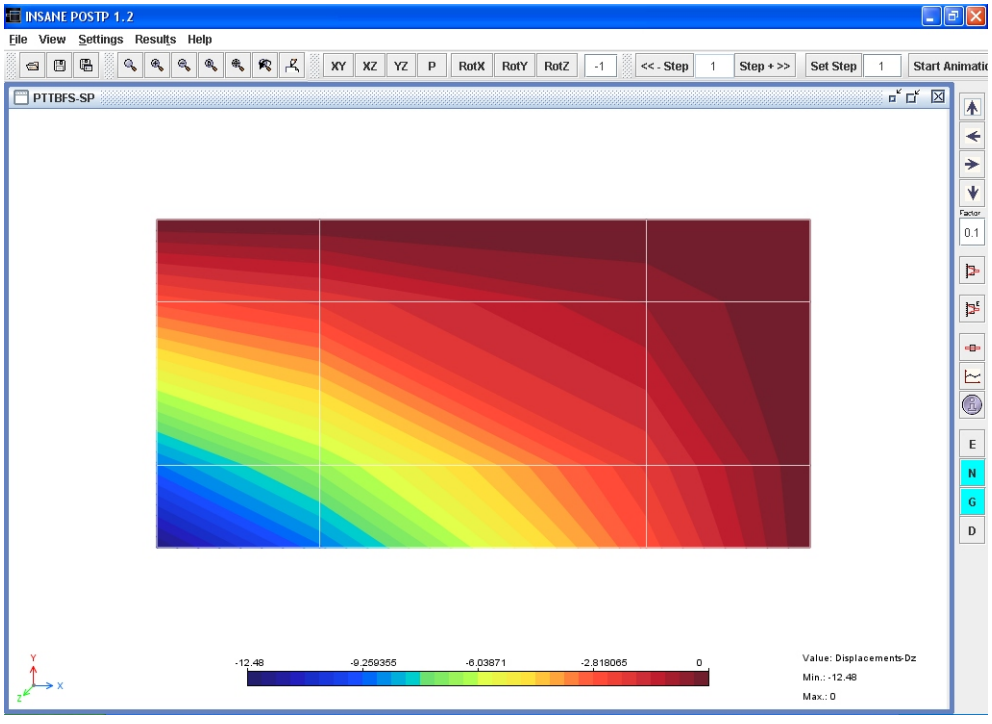
Figura 5.2: *Patch Test* - Deslocamento vertical

5.2.2 *Patch Test* para Torção

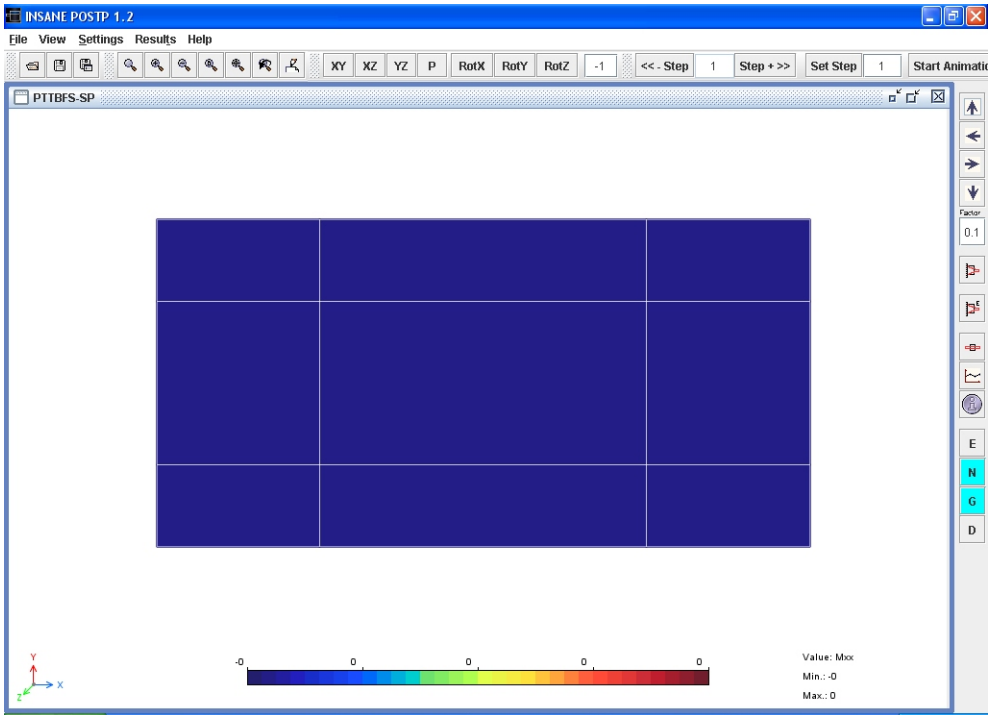
No *patch test* para torção, utilizou-se novamente as malhas da FIG. 5.1, onde os nós 2, 3 e 4 foram impedidos de deslocarem verticalmente enquanto que no nó 1 aplicou-se uma carga concentrada no valor $-2\ uf$. A placa utilizada possui módulo de elasticidade $E = 10^6\ uf/uc^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e espessura $t = 0,1\ uc$.

Neste teste espera-se obter um deslocamento vertical $w_1 = -12,48\ uc$, momentos $M_x = M_y = 0$ e $M_{xy} = -1\ uf \cdot uc/uc$ ao longo de toda a placa.

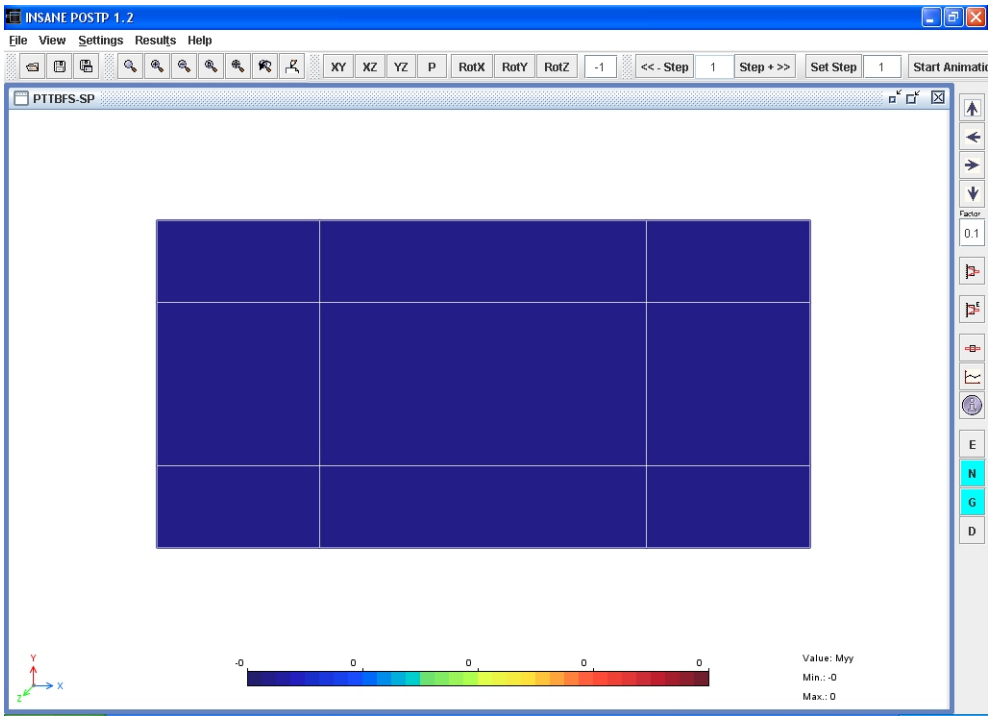
Assim como no teste anterior somente os elementos retangular BFS e triangular de Cowper obtiveram o deslocamento esperado. Porém, neste teste o elemento BFS consegue representar o estado de deformação constante, obtendo todas as respostas esperadas, conforme apresentado nas figuras a seguir (FIGs.5.3). Já os demais elementos não são capazes de reproduzir o estado de deformação constante, mostrando que eles não passam em mais este *patch test*.



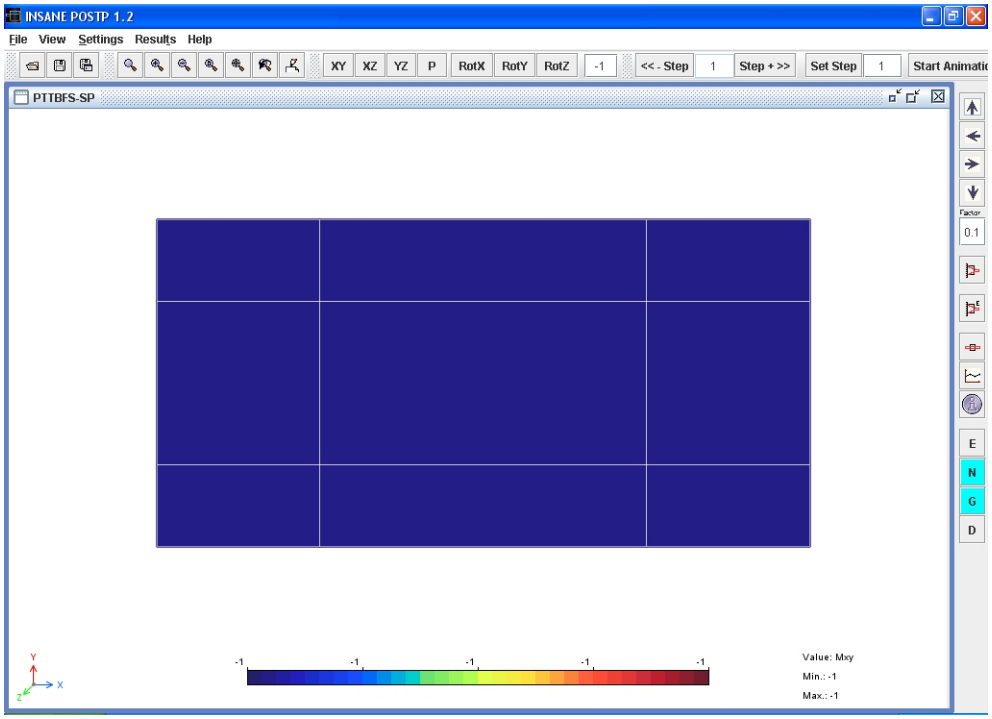
(a) Deslocamento vertical



(b) Momento fletor normal ao plano xz



(c) Momento fletor normal ao plano yz

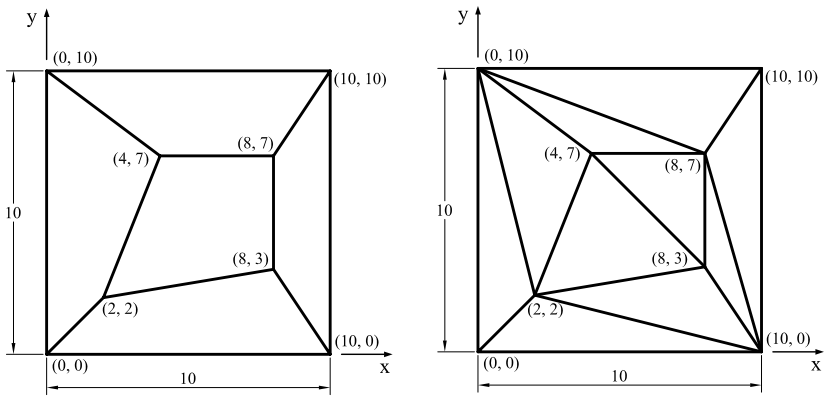


(d) Momento de torção normal aos planos xz e yz

Figura 5.3: *Patch Test* de torção - Elemento retangular BFS

5.3 Elementos de Reissner-Mindlin

Conforme apresentado na Seção 2.3, na teoria de Reissner-Mindlin considera-se a deformação devido ao cisalhamento. Assim, os elementos aqui empregados necessitam ser avaliados pelos *patch tests* de flexão e torção, e ainda pelo *patch test* de cisalhamento. Em todos estes testes empregaram-se as malhas da FIG. 5.4, para uma placa cujo módulo de elasticidade $E = 1\,092\,000\ uf/uc^2$, o coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e a espessura $t = 0,1\ uc$, conforme sugestão de Hinton e Huang (1986). Por se tratar de uma placa fina realizou-se todos os testes para as três técnicas anti-bloqueio (integração reduzida, integração seletiva e deformação de cortante imposta) implementadas.

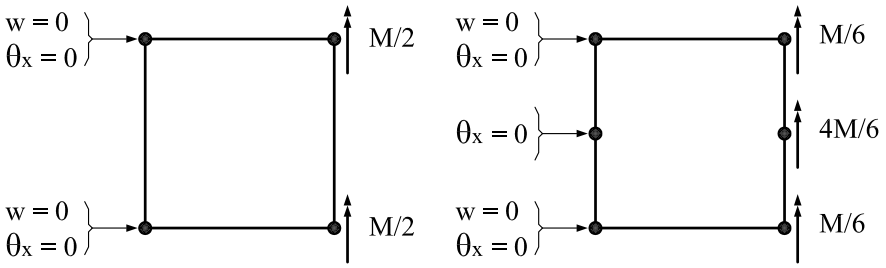


(a) Elementos quadrilaterais (b) Elemento triangular

Figura 5.4: Malhas utilizadas nos *patch tests* dos elementos de Reissner-Mindlin

5.3.1 *Patch Test* para Flexão

No *patch test* de flexão um momento distribuído é aplicado em um dos lados da malha enquanto o outro lado encontra-se impedido de deslocar-se verticalmente e rotacionar em x. As FIGs. 5.5 mostram os carregamentos nodais equivalentes devido ao momento distribuído e as condições de contorno aplicadas nos elementos.



(a) Elemento de 4 nós (b) Elementos de 6, 8 e 9 nós

Figura 5.5: *Patch test* para flexão - Elementos de Reissner-Mindlin

Se $M = 1\ uf \cdot uc$, tem-se como solução para os momentos $M_x = 0,1\ uf \cdot uc/uc$ e $M_y = M_{xy} = 0$ ao longo de toda a placa. Assim, seguem tabelados os resultados obtidos nos testes.

Tabela 5.2: Resultado do *patch test* de flexão dos elementos de Reissner-Mindlin

Elemento	M_x $(uf \cdot uc/uc)$		M_y $(uf \cdot uc/uc)$		M_{xy} $(uf \cdot uc/uc)$		Resultado
	mínimo	máximo	mínimo	máximo	mínimo	máximo	*patch test*
Q4-CI	0,100	0,100	0,000	0,000	0,000	0,000	passa
Q8-CI	0,100	0,100	0,000	0,000	0,000	0,000	passa
Q9-CI	0,100	0,100	0,000	0,000	0,000	0,000	passa
T6-CI	0,100	0,100	0,000	0,000	0,000	0,000	passa
Q4-IR	-0,560	0,531	-2,032	1,556	-0,756	0,650	não passa
Q8-IR	0,044	0,110	-0,003	0,067	-0,014	0,019	não passa
Q9-IR	-6,986	5,769	-23,619	18,896	-8,267	7,978	não passa
Q9H-IR	-3,732	3,124	-12,587	10,153	-4,430	4,256	não passa
Q4-IS	0,042	0,066	0,030	0,057	-0,006	0,004	não passa
Q8-IS	0,041	0,108	-0,003	0,065	-0,013	0,019	não passa
Q9-IS	0,100	0,100	0,000	0,000	0,000	0,000	passa
Q9H-IS	0,046	0,110	-0,003	0,067	-0,014	0,022	não passa

A TAB. 5.2 mostra que somente os elementos onde utilizou-se a técnica da deformação de cortante imposta obtiveram êxito neste teste, mostrando que são capazes de reproduzir um estado de deformação constante.

5.3.2 *Patch Test* para Torção

Neste *patch test*, utiliza-se uma placa onde três de seus lados encontra-se impedidos de deslocarem verticalmente e o quarto lado, livre de restrições, é submetido a um carregamento pontual $P = -1\ uf$, conforme ilustrado na FIG. 5.6.

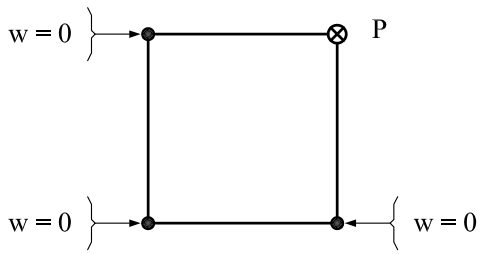


Figura 5.6: *Patch test* para torção - Elementos de Reissner-Mindlin

Como solução exata dos momentos para este problema tem-se $M_x = M_y = 0$ e

$M_{xy} = -0,5\ uf \cdot uc/uc$ ao longo de toda a placa. Os resultados obtidos no **INSANE** são apresentados a seguir através da TAB. 5.3.

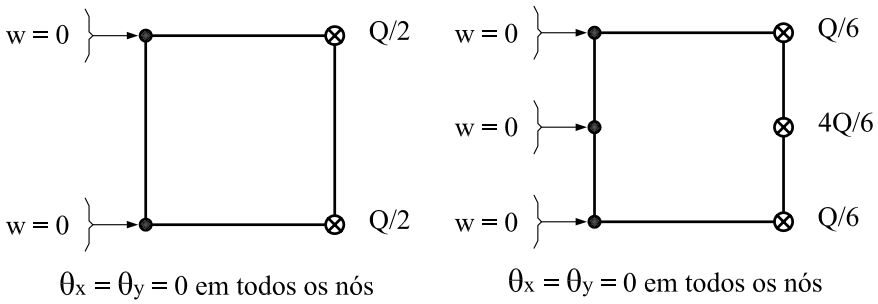
Tabela 5.3: Resultado do *patch test* de torção dos elementos de Reissner-Mindlin

Elemento	M_x $(uf \cdot uc/uc)$		M_y $(uf \cdot uc/uc)$		M_{xy} $(uf \cdot uc/uc)$		Resultado
	mínimo	máximo	mínimo	máximo	mínimo	máximo	*patch test*
Q4-CI	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,500	-0,500	passa
Q8-CI	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,500	-0,500	passa
Q9-CI	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,500	-0,500	passa
T6-CI	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,500	-0,500	passa
Q4-IR	solução deteriorada devido a modos espúrios						não passa
Q8-IR	-0,140	0,171	-0,247	0,101	-0,607	-0,391	não passa
Q9-IR	-79,453	110,680	-142,553	154,305	-76,993	61,918	não passa
Q9H-IR	-223,750	243,376	-153,045	200,700	-118,173	83,400	não passa
Q4-IS	solução deteriorada devido a modos espúrios						não passa
Q8-IS	-0,151	0,169	-0,259	0,099	-0,604	-0,388	não passa
Q9-IS	-0,123	0,139	-0,123	0,090	-0,562	-0,440	não passa
Q9H-IS	-0,129	0,190	-0,237	0,111	-0,609	-0,399	não passa

Novamente, em mais um *patch test* somente os elementos onde se utilizou a técnica de deformação de cortante imposta conseguiu ser aprovado, mostrando mais uma vez ser capaz de reproduzir um estado de deformação constante.

5.3.3 *Patch Test* para Cisalhamento

Uma placa carregada em uma de suas bordas por uma carga uniformemente distribuída, tendo a borda oposta a este carregamento engastada e impedida de rotacionar em qualquer direção é utilizada para realizar este *patch test*. A FIG. 5.7 apresenta as condições de contorno aplicada e a distribuição do carregamento nos nós, onde $Q = -1\ uf$. De acordo com Hinton e Huang (1986), os nós devem ser restringidos para impedir o desenvolvimento de um campo de momentos fletores.



(a) Elemento de 4 nós (b) Elementos de 6, 8 e 9 nós

Figura 5.7: *Patch test* para cisalhamento - Elementos de Reissner-Mindlin

Diferentemente dos *patch tests* realizados anteriormente, neste espera-se obter um cisalhamento constante ao longo de toda a placa, uma vez que a solução analítica é $Q_{xz} = 0,1\ uf$ e $Q_{yz} = 0$, enquanto que os momentos $M_x = M_y = M_{xy} = 0$.

Tabela 5.4: Resultado do *patch test* de cisalhamento dos elementos de Reissner-Mindlin

Elemento	Q_{xz} (uf)		Q_{yz} (uf)		Resultado
	mínimo	máximo	mínimo	máximo	*patch test*
Q4-CI	0,100	0,100	0,000	0,000	passa
Q8-CI	0,100	0,100	0,000	0,000	passa
Q9-CI	0,100	0,100	0,000	0,000	passa
T6-CI	0,100	0,100	0,000	0,000	passa
Q4-IR	0,100	0,100	0,000	0,000	passa
Q8-IR	0,100	0,100	0,000	0,000	passa
Q9-IR	0,100	0,100	0,000	0,000	passa
Q9H-IR	-27,610	-25,538	-0,508	0,543	não passa
Q4-IS	0,102	0,134	-0,016	0,020	não passa
Q8-IS	0,064	0,202	-0,061	0,032	não passa
Q9-IS	0,002	0,239	-0,064	0,071	não passa
Q9H-IS	-23,072	-20,551	-0,547	0,604	não passa

Analisando a TAB. 5.4, verifica-se que nenhum dos elementos, quando usada a técnica de integração seletiva, é capaz de gerar o campo de cisalhamento constante. Também, de todos os elementos, somente o elemento heterosis (Q9H) não consegue passar neste teste, independentemente da técnica utilizada.

Capítulo 6

ESTUDOS DE CONVERGÊNCIA

6.1 Introdução

O insucesso dos elementos nos *patch tests* não invalida sua utilização prática. Entretanto, esta utilização deve ser precedida de estudo de convergência, baseado em refinamentos sucessivos da malha.

Neste capítulo são apresentados os elementos de placas disponibilizados no **INSANE**, tendo como objetivo analisar a convergência de cada um deles. Para tal, utilizou-se uma placa quadrada sob diversas condições de contorno e carregamento no estudo das placas finas. Para placas moderadamente espessas fez-se o estudo através de placas quadradas submetidas a um carregamento uniforme distribuído engastada ou simplesmente apoiada. No caso das placas espessas a análise foi realizada numa placa circular sob um carregamento concentrado no centro e engastada na borda.

Em todos os casos estudados, a placa é constituída de um material com módulo de elasticidade $E = 1\,092\,000\ uf/uc^2$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Vale ressaltar que tanto nas placas quadradas quanto nas circulares utilizou-se da dupla simetria do problema, discretizando-as em apenas 1/4 de placa.

As FIGs. 6.1 e 6.2 apresentam as diversas malhas aplicadas para este estudo, tanto para os elementos quadrilaterais quanto para os elementos triangulares.

A apresentação dos resultados obtidos se faz através de tabelas e gráficos que

demonstram o comportamento dos elementos à medida que se refina a malha.

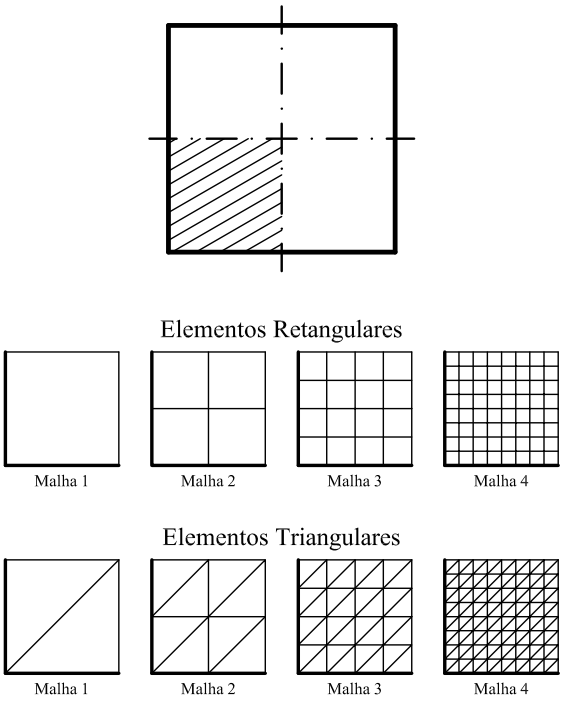


Figura 6.1: Refinamento da malha para a placa quadrada

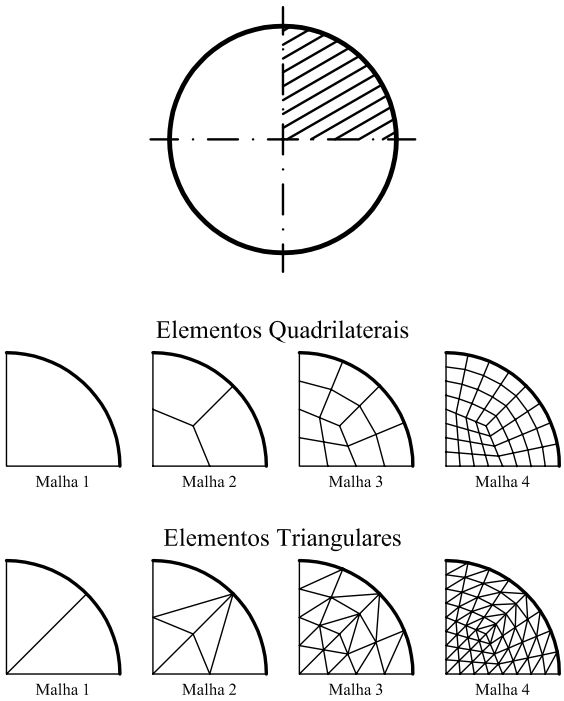


Figura 6.2: Refinamento da malha para a placa circular

6.2 Elementos Finitos de Placa Fina

Para estudar a convergência dos elementos finitos de placa fina, utilizou-se uma placa quadrada, cujas dimensões encontram-se apresentadas na FIG. 6.3.

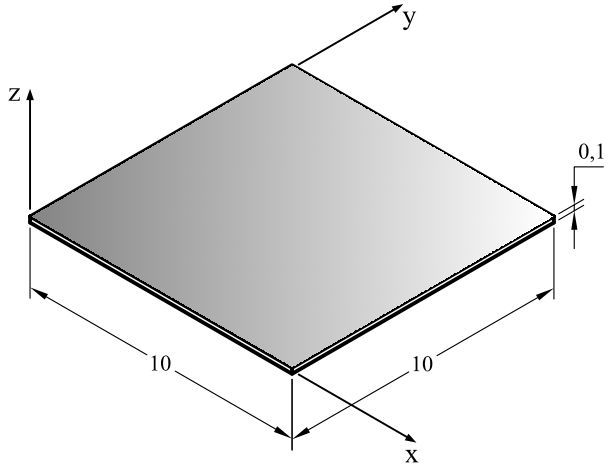


Figura 6.3: Dimensões da placa fina

Neste estudo utilizaram-se os vários recursos disponibilizados no **INSANE**, tornando possível uma melhor compreensão dos mesmos. Para exemplificar, atualmente é possível obter a matriz de rigidez dos elementos de Kirchhoff através de integração numérica como também foi disponibilizada esta matriz integrada analiticamente. Assim, devido à diversidade das situações estudadas, esta seção é dividida de acordo com as condições de contorno: simplesmente apoiada e engastada. Para finalizar, são apresentados os tempos de processamento para os diversos recursos disponibilizados.

Com o objetivo de padronizar a apresentação dos resultados obtidos, uma vez que nas placas finas aplicou-se as duas teorias anteriormente apresentadas, primeiramente são mostrados os valores obtidos através dos elementos de Kirchhoff em seguida os dos elementos de Reissner-Mindlin.

6.2.1 Placas Simplesmente Apoiadas - (SA)

6.2.1.1 Carga Concentrada no Centro - (CC)

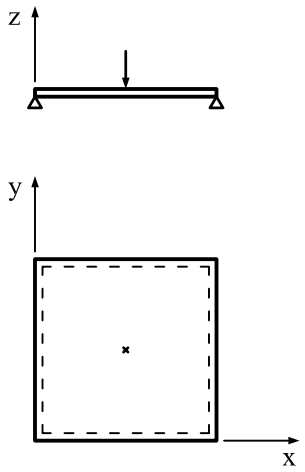


Figura 6.4: Placa quadrada simplesmente apoiada sob a ação de uma carga concentrada no centro (SA-CC)

A solução analítica do deslocamento vertical no centro para uma placa quadrada simplesmente apoiada sob a ação de uma carga concentrada central (FIG. 6.4) pode ser encontrada em Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), e é dada pela seguinte equação:

$$w_{max} = 0,0116\frac{P\ a^2}{D} \tag{6.1}$$

onde P é o valor da carga concentrada, a é comprimento do lado e D é o coeficiente de rigidez à flexão da placa, dado pela seguinte equação:

$$D = \frac{E\ t^3}{12\ (1-\nu^2)} \tag{6.2}$$

Substituindo nas Eqs.(6.1) e (6.2) os valores referente à placa em estudo, ou seja, $a = 10\ uc$, $P = -1\ uf$, $E = 1\,092\,000\ uf/uc^2$, $\nu = 0,3$ e $t = 0,1\ uc$, encontra-se:

$$w_{max} = -0,0116\ uc \tag{6.3}$$

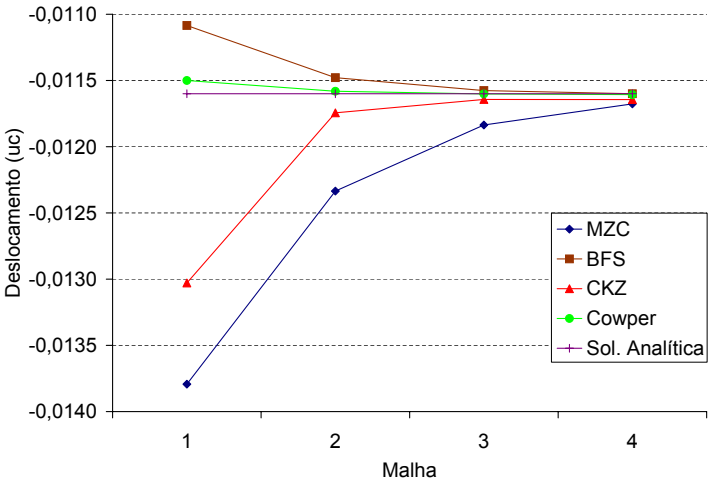
A seguir apresentam-se os resultados obtidos no **INSANE** para cada uma das malhas ilustradas na FIG. 6.1.

(a) Elementos de Kirchhoff

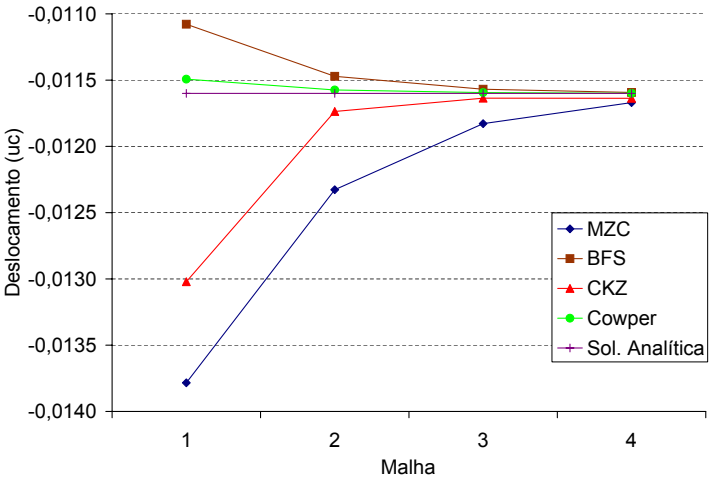
Nos estudos onde empregaram-se os elementos de Kirchhoff foram realizadas três formas de análises: integração numérica com espessura em camadas, integração numérica com espessura prescrita e integração analítica com espessura prescrita, sendo que o tipo de integração refere-se à forma como se integrou a matriz de rigidez, enquanto que a espessura pode ser discretizada em camadas ou não, neste caso denominado de espessura prescrita. Os resultados encontram-se apresentados na TAB. 6.1 e na FIG. 6.5.

Tabela 6.1: Flecha máxima de uma placa SA-CC discretizada com elementos de Kirchhoff

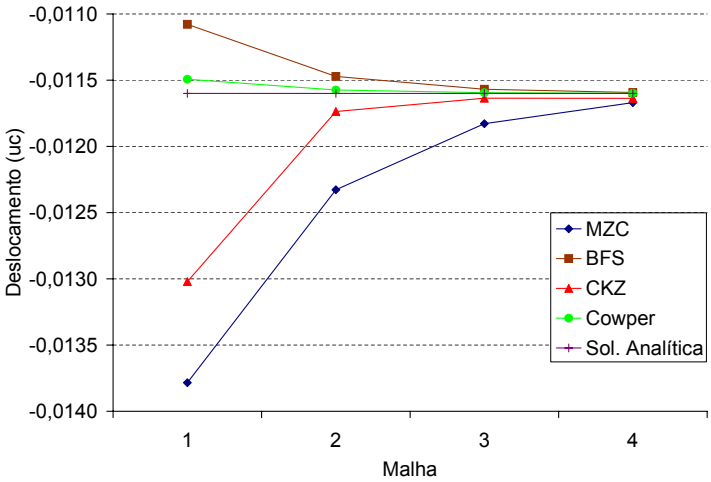
Integração	Espessura	Malha (FIG. 6.1)	Elementos			
			MZC	BFS	CKZ	Cowper
Numérica	Camadas	1	-0,01379272	-0,01108487	-0,01302897	-0,01149998
		2	-0,01233495	-0,01147857	-0,01174402	-0,01158146
		3	-0,01183593	-0,01157595	-0,01164318	-0,01160144
		4	-0,01167669	-0,01160007	-0,01164423	-0,01160643
Numérica	Prescrita	1	-0,01378410	-0,01107794	-0,01302083	-0,01149279
		2	-0,01232724	-0,01147140	-0,01173668	-0,01157422
		3	-0,01182853	-0,01156871	-0,01163590	-0,01159419
		4	-0,01166939	-0,01159282	-0,01163695	-0,01159918
Analítica	Prescrita	1	-0,01378410	-0,01107794	-0,01302083	-0,01149279
		2	-0,01232724	-0,01147140	-0,01173668	-0,01157422
		3	-0,01182853	-0,01156871	-0,01163590	-0,01159419
		4	-0,01166939	-0,01159282	-0,01163695	-0,01159918
Solução Analítica: -0,0116						



(a) Integração numérica e espessura em camadas



(b) Integração numérica e espessura prescrita



(c) Integração analítica e espessura prescrita

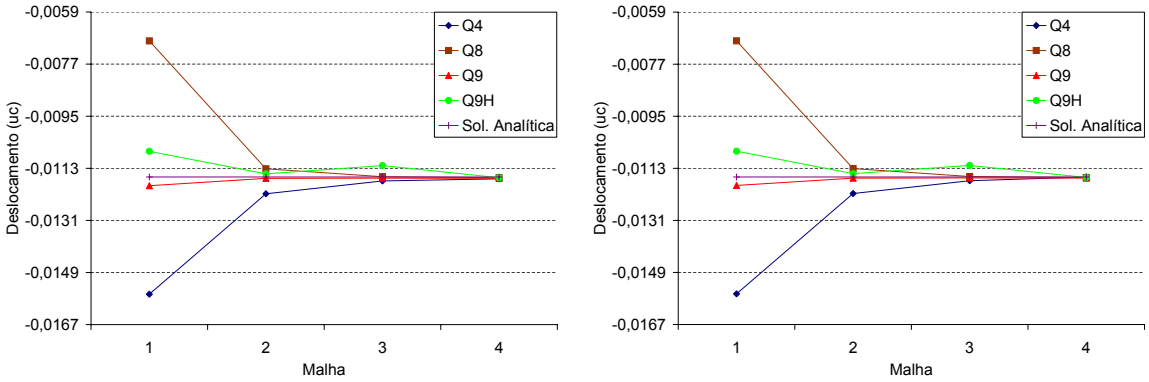
Figura 6.5: Flecha máxima de uma placa SA-CC discretizada com elementos de Kirchhoff

(b) Elementos de Reissner-Mindlin

Nos elementos de Reissner-Mindlin, onde se utiliza a formulação paramétrica, com integração numérica para obtenção da matriz de rigidez, aplicaram-se as três técnicas apresentadas em seções anteriores, que são: integração reduzida (IR), integração seletiva (IS) e o uso do campo de deformação de cortante imposta (CI). Assim, a seguir são apresentados os resultados obtidos no **INSANE**, discretizando a espessura em camadas como também utilizando-a sem discretização (prescrita). A TAB. 6.2 e a FIG. 6.6 referem-se ao uso de integração reduzida (IR), a TAB. 6.3 e FIG. 6.7 ao uso da integração seletiva (IS) e a TAB. 6.4 e a FIG. 6.8 referem-se ao uso da técnica de deformação de cortante imposta (CI).

Tabela 6.2: Flecha máxima de uma placa SA-CC-IR discretizada com elementos de Reissner-Mindlin

Espessura	Malha (FIG. 6.1)	Elementos			
		Q4	Q8	Q9	Q9H
Camadas	1	-0,01564906	-0,00689737	-0,01189957	-0,01071287
	2	-0,01217942	-0,01131557	-0,01164727	-0,01149110
	3	-0,01173587	-0,01158944	-0,01163889	-0,01120601
	4	-0,01166308	-0,01162419	-0,01164430	-0,01162498
Prescrita	1	-0,01563929	-0,00689340	-0,01189214	-0,01070619
	2	-0,01217183	-0,01130862	-0,01164000	-0,01148393
	3	-0,01172855	-0,01158222	-0,01163164	-0,01119906
	4	-0,01159874	-0,01161694	-0,01163705	-0,01161773
Solução Analítica: -0,0116					



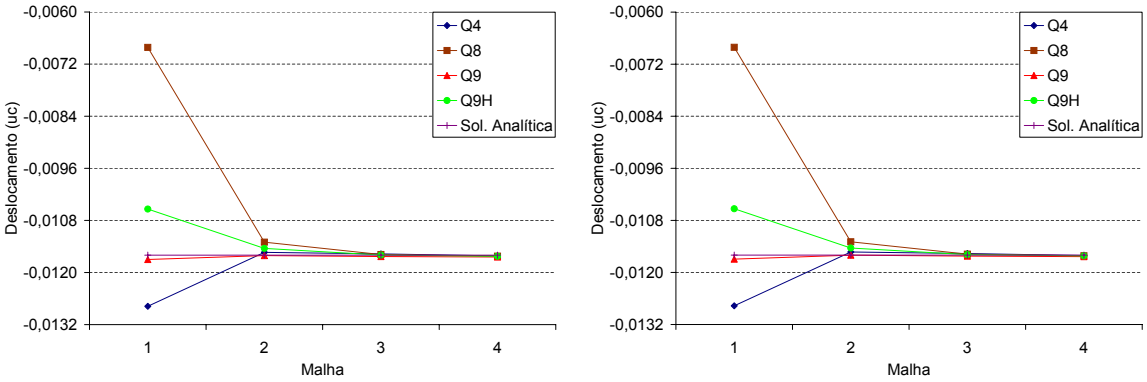
(a) Espessura em camadas

(b) Espessura prescrita

Figura 6.6: Flecha máxima de uma placa SA-CC-IR discretizada com elementos de Reissner-Mindlin

Tabela 6.3: Flecha máxima de uma placa SA-CC-IS discretizada com elementos de Reissner-Mindlin

Espessura	Malha (FIG. 6.1)	Elementos			
		Q4	Q8	Q9	Q9H
Camadas	1	-0,01277736	-0,00681530	-0,01169998	-0,01053836
	2	-0,01153550	-0,01130048	-0,01160930	-0,01144444
	3	-0,01157039	-0,01158604	-0,01163118	-0,01159710
	4	-0,01161699	-0,01162337	-0,01164251	-0,01162411
Prescrita	1	-0,01276939	-0,00681138	-0,01169268	-0,01053179
	2	-0,01152830	-0,01129354	-0,01160206	-0,01143731
	3	-0,01156317	-0,01157882	-0,01162393	-0,01158987
	4	-0,01160975	-0,01161612	-0,01163526	-0,01161686
Solução Analítica: -0,0116					



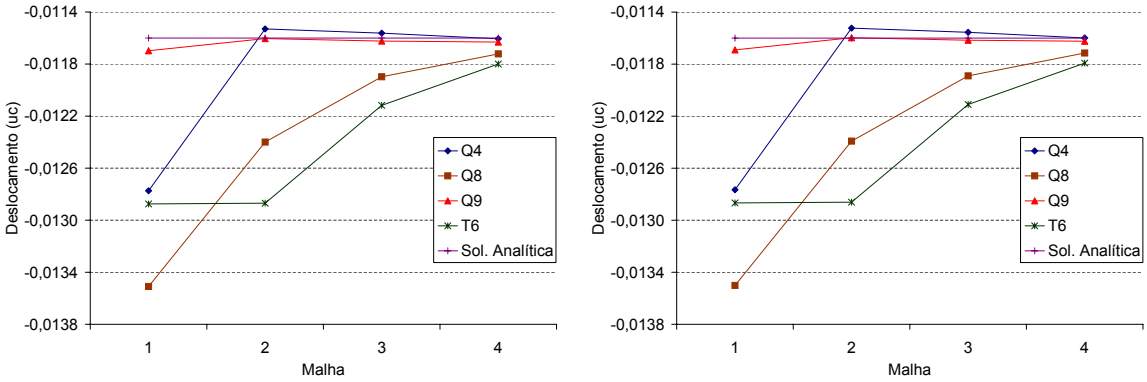
(a) Espessura em camadas

(b) Espessura prescrita

Figura 6.7: Flecha máxima de uma placa SA-CC-IS discretizada com elementos de Reissner-Mindlin

Tabela 6.4: Flecha máxima de uma placa SA-CC-CI discretizada com elementos de Reissner-Mindlin

Espessura	Malha (FIG. 6.1)	Elementos			
		Q4	Q8	Q9	T6
Camadas	1	-0,01277379	-0,01350954	-0,01169770	-0,01287503
	2	-0,01153005	-0,01239950	-0,01160423	-0,01286896
	3	-0,01156241	-0,01189764	-0,01162314	-0,01211752
	4	-0,01160598	-0,01172174	-0,01163116	-0,01179936
Prescrita	1	-0,01276582	-0,01350110	-0,01169040	-0,01286700
	2	-0,01152286	-0,01239176	-0,01159699	-0,01286093
	3	-0,01155519	-0,01189022	-0,01161589	-0,01210996
	4	-0,01159874	-0,01171443	-0,01162391	-0,01179200
Solução Analítica: -0,0116					



(a) Espessura em camadas

(b) Espessura prescrita

Figura 6.8: Flecha máxima de uma placa SA-CC-CI discretizada com elementos de Reissner-Mindlin

6.2.1.2 Carga Distribuída - (CD)

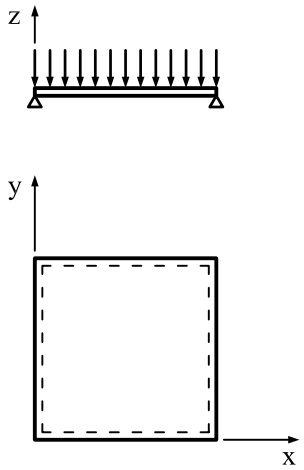


Figura 6.9: Placa quadrada simplesmente apoiada sob a ação de uma carga distribuída (SA-CD)

A solução analítica do deslocamento vertical no centro, segundo Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), para uma placa simplesmente apoiada submetida a uma carga distribuída uniforme é dada por:

$$w_{max} = 0,00406 \frac{q\ a^4}{D} \tag{6.4}$$

onde q é a intensidade da carga distribuída, a é o comprimento do lado da placa e D é o coeficiente de rigidez à flexão da placa (Eq.(6.2)).

Se $q = -1\ uf/uc^2$, obtém-se o seguinte deslocamento vertical para a placa em estudo:

$$w_{max} = -0,406\ uc \tag{6.5}$$

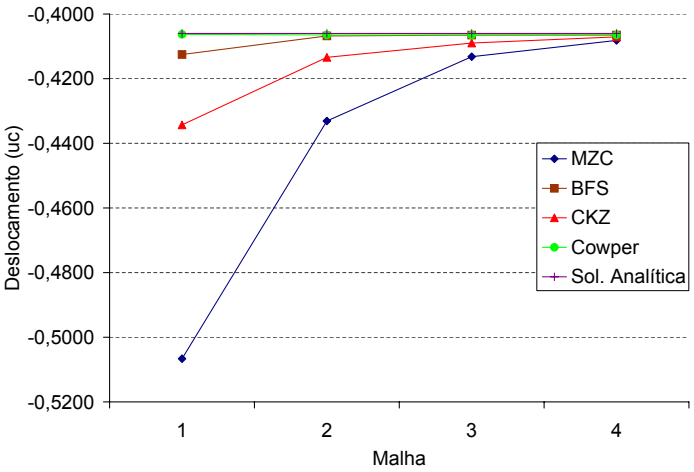
Para as malhas apresentadas na FIG. 6.1, obtiveram-se os resultados mostrados a seguir:

(a) Elementos de Kirchhoff

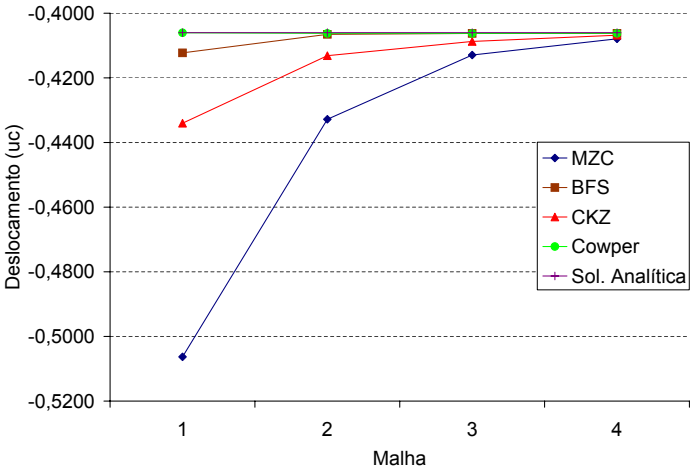
Para os elementos de Kirchhoff MZC, BFS, CKZ e Cowper, a TAB. 6.5 e a FIG. 6.10 mostram os resultados, considerando integração numérica (IN) ou analítica (IA) e espessura prescrita.

Tabela 6.5: Flecha máxima de uma placa SA-CD discretizada com elementos de Kirchhoff

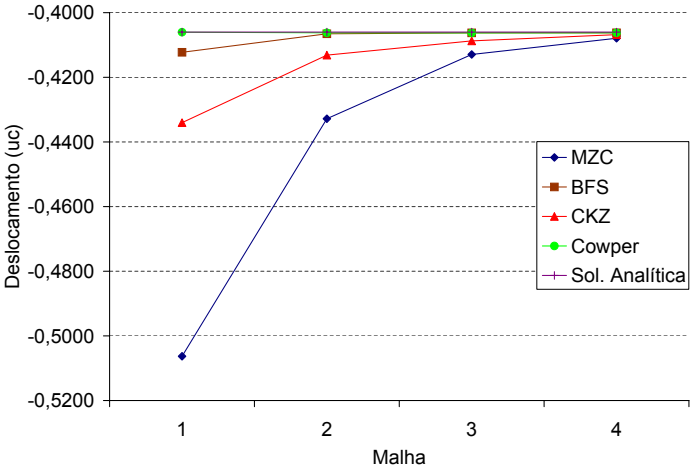
Integração	Espessura	Malha (FIG. 6.1)	Elementos			
			MZC	BFS	CKZ	Cowper
Numérica	Camadas	1	-0,50663930	-0,41252734	-0,43429742	-0,40629786
		2	-0,43308976	-0,40678615	-0,41339797	-0,40648655
		3	-0,41319614	-0,40651622	-0,40897784	-0,40650012
		4	-0,40816534	-0,40649033	-0,40706364	-0,40648926
Numérica	Prescrita	1	-0,50632272	-0,41226957	-0,43402604	-0,40604398
		2	-0,43281914	-0,40653196	-0,41313966	-0,40623255
		3	-0,41293795	-0,40626220	-0,40872228	-0,40624611
		4	-0,40791029	-0,40623633	-0,40680928	-0,40623526
Analítica	Prescrita	1	-0,50632272	-0,41226957	-0,43402604	-0,40604398
		2	-0,43281914	-0,40653196	-0,41313965	-0,40623255
		3	-0,41293795	-0,40626220	-0,40872228	-0,40624611
		4	-0,40791029	-0,40623633	-0,40680928	-0,40623526
Solução Analítica: -0,406						



(a) Integração numérica e espessura em camadas



(b) Integração numérica e espessura prescrita



(c) Integração analítica e espessura prescrita

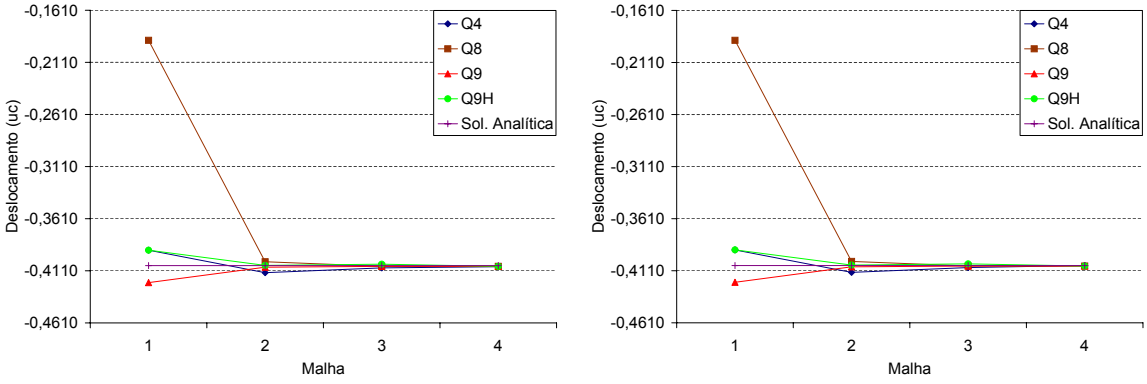
Figura 6.10: Flecha máxima de uma placa SA-CD discretizada com elementos de Kirchhoff

(b) Elementos de Reissner-Mindlin

Para os elementos de Reissner-Mindlin, a TAB. 6.6 e a FIG. 6.11 mostram os resultados considerando integração reduzida (IR), a TAB. 6.7 e a FIG. 6.12 mostram os resultados considerando integração seletiva (IS) e a TAB. 6.8 e a FIG. 6.13 mostram os resultados quando se usa a técnica de deformação de cortante imposta (CI).

Tabela 6.6: Flecha máxima de uma placa SA-CD-IR discretizada com elementos de Reissner-Mindlin

Espessura	Malha (FIG. 6.1)	Elementos			
		Q4	Q8	Q9	Q9H
Camadas	1	-0,39122639	-0,18983130	-0,42235203	-0,39120085
	2	-0,41282230	-0,40229143	-0,40750686	-0,40578642
	3	-0,40819201	-0,40668165	-0,40672184	-0,40462192
	4	-0,40706264	-0,40669894	-0,40670273	-0,40669895
Prescrita	1	-0,39098214	-0,18973049	-0,42208825	-0,39095660
	2	-0,41256448	-0,40204291	-0,40725235	-0,40553308
	3	-0,40793707	-0,40642767	-0,40646782	-0,40436952
	4	-0,40593242	-0,40644494	-0,40644872	-0,40644495
Solução Analítica: -0,406					



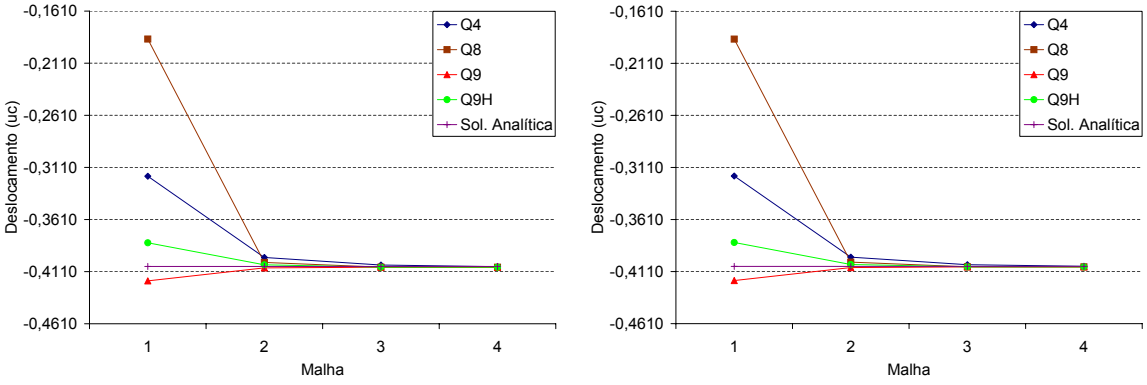
(a) Espessura em camadas

(b) Espessura prescrita

Figura 6.11: Flecha máxima de uma placa SA-CD-IR discretizada com elementos de Reissner-Mindlin

Tabela 6.7: Flecha máxima de uma placa SA-CD-IS discretizada com elementos de Reissner-Mindlin

Espessura	Malha (FIG. 6.1)	Elementos			
		Q4	Q8	Q9	Q9H
Camadas	1	-0,31943408	-0,18783146	-0,41985737	-0,38329486
	2	-0,39738479	-0,40215280	-0,40736619	-0,40442833
	3	-0,40461829	-0,40667299	-0,40671328	-0,40667694
	4	-0,40618677	-0,40669841	-0,40670219	-0,40669841
Prescrita	1	-0,31923469	-0,18773197	-0,41959515	-0,38305566
	2	-0,39713662	-0,40190436	-0,40711177	-0,40417629
	3	-0,40436560	-0,40641901	-0,40642927	-0,40642297
	4	-0,40593309	-0,40644441	-0,40644819	-0,40644441
Solução Analítica: -0,406					



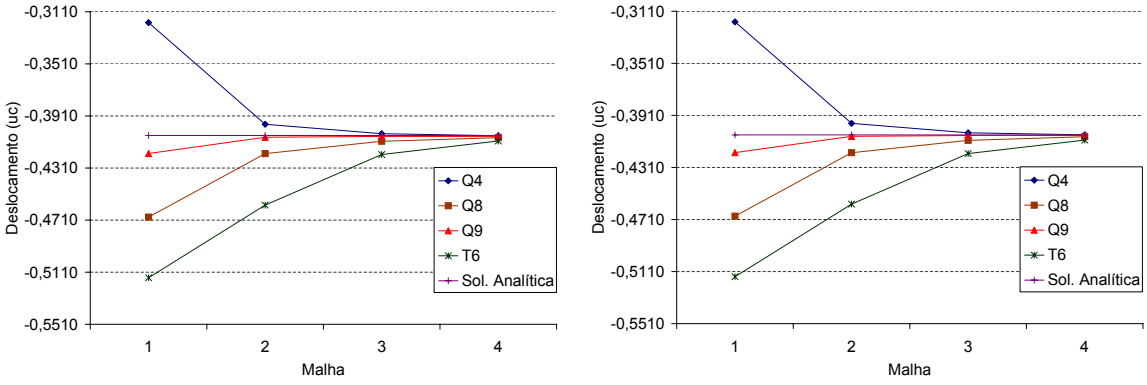
(a) Espessura em camadas

(b) Espessura prescrita

Figura 6.12: Flecha máxima de uma placa SA-CD-IS discretizada com elementos de Reissner-Mindlin

Tabela 6.8: Flecha máxima de uma placa SA-CD-CI discretizada com elementos de Reissner-Mindlin

Espessura	Malha (FIG. 6.1)	Elementos			
		Q4	Q8	Q9	T6
Camadas	1	-0,31934479	-0,46868884	-0,41985265	-0,51526096
	2	-0,39736778	-0,41994274	-0,40736574	-0,45945873
	3	-0,40461527	-0,41044766	-0,40671325	-0,42059521
	4	-0,40618610	-0,40765606	-0,40670219	-0,41024656
Prescrita	1	-0,31914541	-0,46839608	-0,41959043	-0,51493913
	2	-0,39711962	-0,41968049	-0,40711132	-0,45917176
	3	-0,40436257	-0,41019133	-0,40645923	-0,42033253
	4	-0,40593242	-0,40740146	-0,40644819	-0,40999035
Solução Analítica: -0,406					



(a) Espessura em camadas

(b) Espessura prescrita

Figura 6.13: Flecha máxima de uma placa SA-CD-CI discretizada com elementos de Reissner-Mindlin

6.2.2 Placas Engastadas - (EN)

Assim como nas placas simplesmente apoiadas, na análise das placas engastadas também foram utilizados dois casos de carregamento: concentrado e distribuído.

6.2.2.1 Carga Concentrada no Centro - (CC)

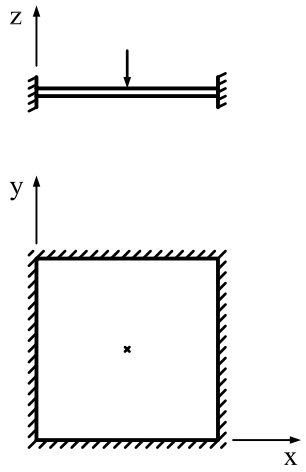


Figura 6.14: Placa quadrada engastada sob a ação de uma carga concentrada no centro (EN-CC)

O deslocamento vertical no centro da placa mostrada na FIG. 6.14, segundo Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), é obtido pela seguinte equação:

$$w_{max} = 0,0056\frac{P\ a^2}{D} \tag{6.6}$$

onde P é o valor da carga concentrada, a é comprimento do lado e D é o coeficiente de rigidez à flexão da placa (Eq.(6.2)).

Substituindo nas Eqs.(6.6) e (6.2) os valores referente à placa em estudo, sabendo-se que $P = -1\ uf$, tem-se:

$$w_{max} = -0,0056\ uc \tag{6.7}$$

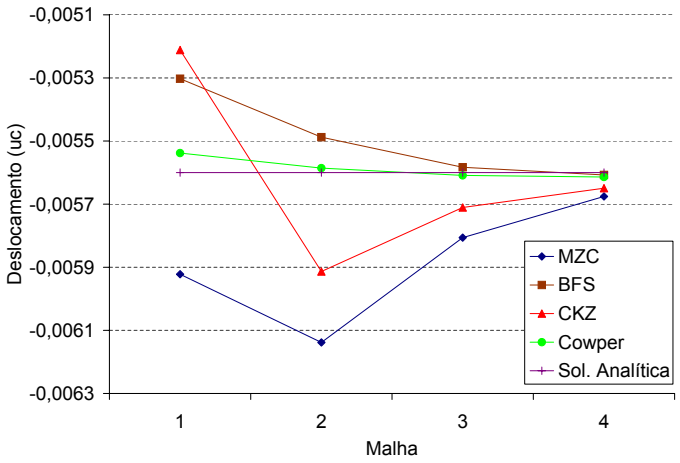
A seguir são apresentados os valores do deslocamento central obtidos no **INSANE** para cada uma das malhas ilustradas na FIG. 6.1.

(a) Elementos de Kirchhoff

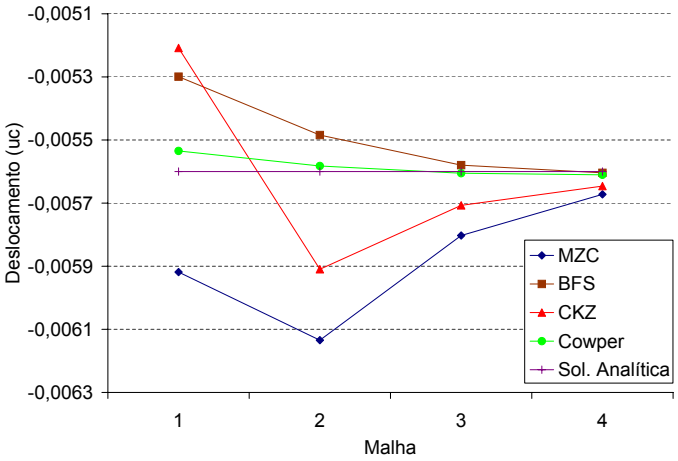
Os resultados obtidos quando se usou os elementos de Kirchhoff encontram-se apresentados na TAB. 6.9 e na FIG. 6.15.

Tabela 6.9: Flecha máxima de uma placa EN-CC discretizada com elementos de Kirchhoff

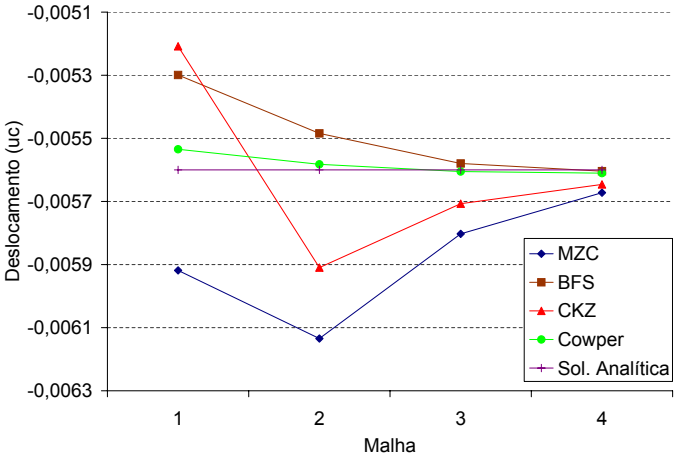
Integração	Espessura	Malha (FIG. 6.1)	Elementos			
			MZC	BFS	CKZ	Cowper
Numérica	Camadas	1	-0,00592226	-0,00530249	-0,00521159	-0,00553810
		2	-0,00613829	-0,00548776	-0,00591336	-0,00558582
		3	-0,00580620	-0,00558320	-0,00571062	-0,00560881
		4	-0,00567569	-0,00560749	-0,00564951	-0,00561387
Numérica	Prescrita	1	-0,00591856	-0,00529918	-0,00520833	-0,00553464
		2	-0,00613446	-0,00548433	-0,00590967	-0,00558233
		3	-0,00580258	-0,00557971	-0,00570705	-0,00560530
		4	-0,00567215	-0,00560398	-0,00564598	-0,00561036
Analítica	Prescrita	1	-0,00591856	-0,00529918	-0,00520833	-0,00553464
		2	-0,00613446	-0,00548433	-0,00590967	-0,00558233
		3	-0,00580258	-0,00557971	-0,00570705	-0,00560530
		4	-0,00567215	-0,00560398	-0,00564598	-0,00561036
Solução Analítica: -0,0056						



(a) Integração numérica e espessura em camadas



(b) Integração numérica e espessura prescrita



(c) Integração analítica e espessura prescrita

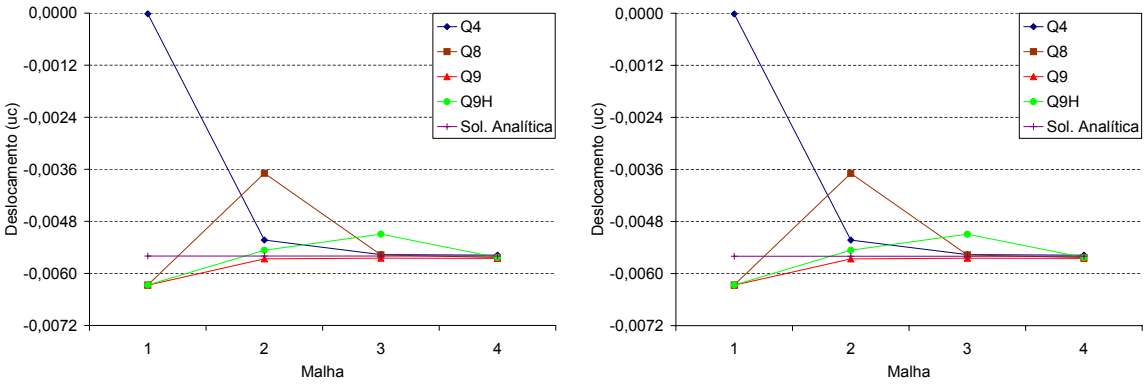
Figura 6.15: Flecha máxima de uma placa EN-CC discretizada com elementos de Kirchhoff

(b) Elementos de Reissner-Mindlin

Para o caso dos elementos de Reissner-Mindlin (Q4, Q8, Q9, Q9H e T6), os resultados estão mostrados nas TAB. 6.10 e FIG. 6.16, quando se usou integração reduzida (IR), TAB. 6.11 e FIG. 6.17, quando se adotou integração seletiva (IS) e nas TAB. 6.12 e FIG. 6.18 quando se usou a técnica de deformação de cortante imposta (CI).

Tabela 6.10: Flecha máxima de uma placa EN-CC-IR discretizada com elementos de Reissner-Mindlin

Espessura	Malha (FIG. 6.1)	Elementos			
		Q4	Q8	Q9	Q9H
Camadas	1	-0,00001429	-0,00626651	-0,00627105	-0,00626719
	2	-0,00523064	-0,00369161	-0,00566478	-0,00546526
	3	-0,00556650	-0,00557340	-0,00564844	-0,00509464
	4	-0,00557935	-0,00563270	-0,00565301	-0,00563354
Prescrita	1	-0,00001429	-0,00626261	-0,00626714	-0,00626328
	2	-0,00522738	-0,00368983	-0,00566126	-0,00546186
	3	-0,00556303	-0,00556995	-0,00564493	-0,00509154
	4	-0,00557587	-0,00562920	-0,00564950	-0,00563003
Solução Analítica: -0,0056					



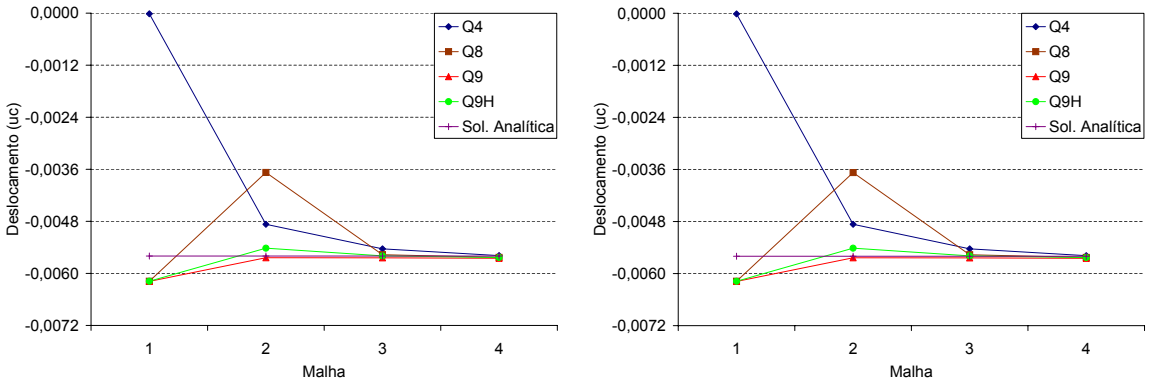
(a) Espessura em camadas

(b) Espessura prescrita

Figura 6.16: Flecha máxima de uma placa EN-CC-IR discretizada com elementos de Reissner-Mindlin

Tabela 6.11: Flecha máxima de uma placa EN-CC-IS discretizada com elementos de Reissner-Mindlin

Espessura	Malha (FIG. 6.1)	Elementos			
		Q4	Q8	Q9	Q9H
Camadas	1	-0,00001429	-0,00618017	-0,00618471	-0,00618095
	2	-0,00486722	-0,00367332	-0,00563930	-0,00541796
	3	-0,00543371	-0,00556945	-0,00564121	-0,00559566
	4	-0,00559051	-0,00563184	-0,00565123	-0,00563263
Prescrita	1	-0,00001429	-0,00617631	-0,00618086	-0,00617710
	2	-0,00486419	-0,00367155	-0,00563579	-0,00541458
	3	-0,00543033	-0,00556601	-0,00563770	-0,00559218
	4	-0,00558704	-0,00562834	-0,00564772	-0,00562912
Solução Analítica: -0,0056					



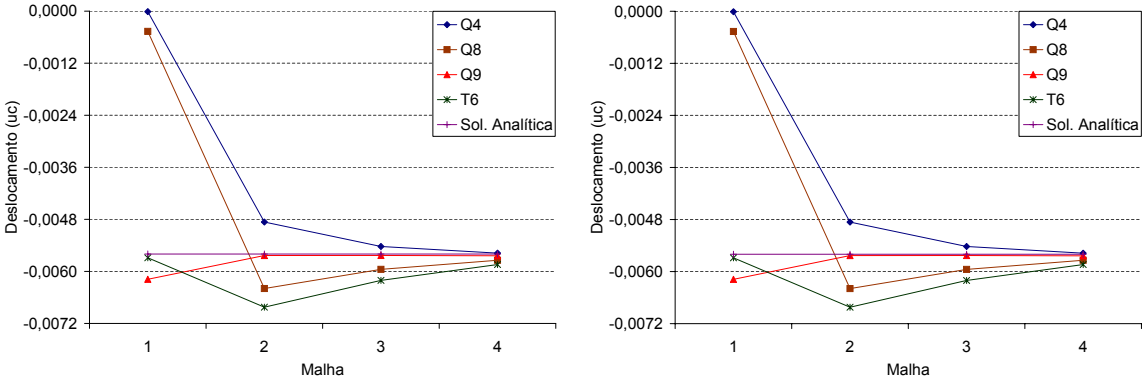
(a) Espessura em camadas

(b) Espessura prescrita

Figura 6.17: Flecha máxima de uma placa EN-CC-IS discretizada com elementos de Reissner-Mindlin

Tabela 6.12: Flecha máxima de uma placa EN-CC-CI discretizada com elementos de Reissner-Mindlin

Espessura	Malha (FIG. 6.1)	Elementos			
		Q4	Q8	Q9	T6
Camadas	1	-0,00001071	-0,00046592	-0,00618241	-0,00568621
	2	-0,00486147	-0,00639557	-0,00563366	-0,00682530
	3	-0,00542520	-0,00595278	-0,00563306	-0,00620774
	4	-0,00557935	-0,00574300	-0,00563983	-0,00584181
Prescrita	1	-0,00001071	-0,00046591	-0,00617855	-0,00568267
	2	-0,00485844	-0,00639160	-0,00563015	-0,00682104
	3	-0,00542182	-0,00594908	-0,00562955	-0,00620387
	4	-0,00557587	-0,00573943	-0,00563633	-0,00583817
Solução Analítica: -0,0056					



(a) Espessura em camadas

(b) Espessura prescrita

Figura 6.18: Flecha máxima de uma placa EN-CC-CI discretizada com elementos de Reissner-Mindlin

6.2.2.2 Carga Distribuída - (CD)

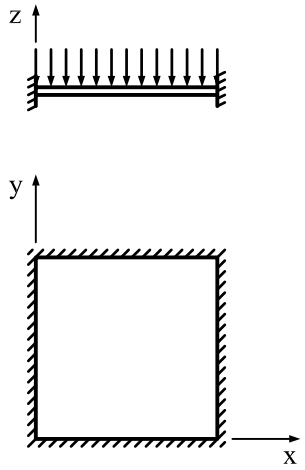


Figura 6.19: Placa quadrada engastada sob a ação de uma carga distribuída (EN-CD)

De acordo com Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), para uma placa quadrada engastada sob a ação de um carregamento uniformemente distribuído, o valor do deslocamento vertical no centro é:

$$w_{max} = 0,00126\frac{q\ a^4}{D} \tag{6.8}$$

onde q é a intensidade da carga distribuída, a é o comprimento do lado da placa e D é o coeficiente de rigidez à flexão da placa (Eq.(6.2)).

Logo, substituindo na Eq.(6.8) os valores referente à placa em estudo, sendo $q = -1\ uf/uc^2$, encontra-se o seguinte deslocamento no centro:

$$w_{max} = -0,126\ uc \tag{6.9}$$

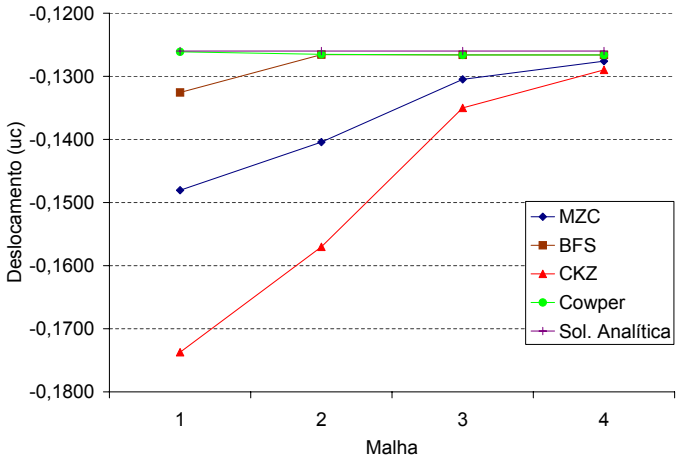
Utilizando as malhas apresentadas na FIG. 6.1 para discretizar a placa da FIG. 6.19, obtiveram-se os valores apresentados a seguir da flecha máxima.

(a) Elementos de Kirchhoff

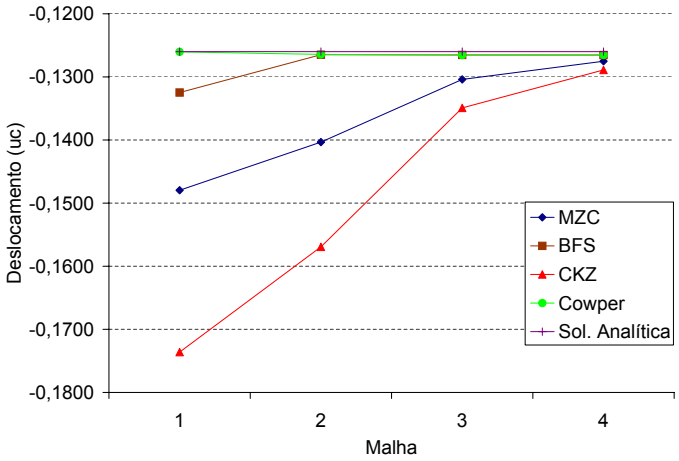
Para os elementos de Kirchhoff (MZC, BFS, CKZ e Cowper) os resultados encontram-se apresentados na TAB. 6.13 e na FIG. 6.20.

Tabela 6.13: Flecha máxima de uma placa EN-CD discretizada com elementos de Kirchhoff

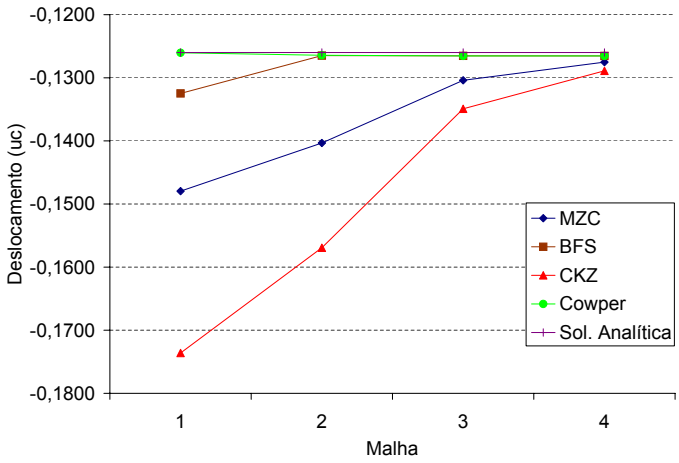
Integração	Espessura	Malha (FIG. 6.1)	Elementos			
			MZC	BFS	CKZ	Cowper
Numérica	Camadas	1	-0,14805653	-0,13256224	-0,17371897	-0,12611952
		2	-0,14042193	-0,12656589	-0,15702496	-0,12650829
		3	-0,13047866	-0,12660352	-0,13500267	-0,12661299
		4	-0,12759770	-0,12661016	-0,12897825	-0,12661097
Numérica	Prescrita	1	-0,14796402	-0,13247941	-0,17361042	-0,12604071
		2	-0,14033419	-0,12648680	-0,15692684	-0,12642924
		3	-0,13039713	-0,12652441	-0,13491831	-0,12653388
		4	-0,12751797	-0,12653104	-0,12889765	-0,12653186
Analítica	Prescrita	1	-0,14796402	-0,13247941	-0,17361042	-0,12604071
		2	-0,14033419	-0,12648680	-0,15692684	-0,12642924
		3	-0,13039713	-0,12652441	-0,13491831	-0,12653388
		4	-0,12751797	-0,12653104	-0,12889765	-0,12653186
Solução Analítica: -0,126						



(a) Integração numérica e espessura em camadas



(b) Integração numérica e espessura prescrita



(c) Integração analítica e espessura prescrita

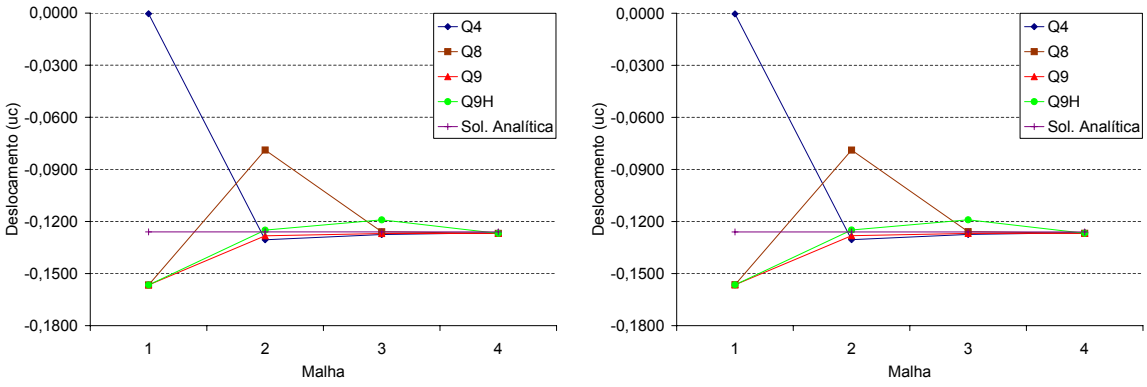
Figura 6.20: Flecha máxima de uma placa EN-CD discretizada com elementos de Kirchhoff

(b) Elementos de Reissner-Mindlin

Nos elementos de Reissner-Mindlin (Q4, Q8, Q9, Q9H e T6), os resultados encontram-se apresentados nas TAB. 6.14 e FIG. 6.21, quando adotou-se integração reduzida (IR), TAB. 6.15 e FIG. 6.22 quando adotou-se integração seletiva (IS) e nas TAB. 6.16 e FIG. 6.23 quando se fez uso da técnica de deformação de cortante imposta (CI).

Tabela 6.14: Flecha máxima de uma placa EN-CD-IR discretizada com elementos de Reissner-Mindlin

Espessura	Malha (FIG. 6.1)	Elementos			
		Q4	Q8	Q9	Q9H
Camadas	1	-0,00035715	-0,15653678	-0,15656136	-0,15657255
	2	-0,13052784	-0,07886176	-0,12824192	-0,12497183
	3	-0,12751475	-0,12593681	-0,12693978	-0,11907963
	4	-0,12649327	-0,12685865	-0,12687007	-0,12685967
Prescrita	1	-0,00035714	-0,15643908	-0,15646366	-0,15647485
	2	-0,13044643	-0,07882617	-0,12816194	-0,12489396
	3	-0,12743523	-0,12585887	-0,12686062	-0,11900663
	4	-0,12641438	-0,12677954	-0,12679095	-0,12678056
Solução Analítica: -0,126					



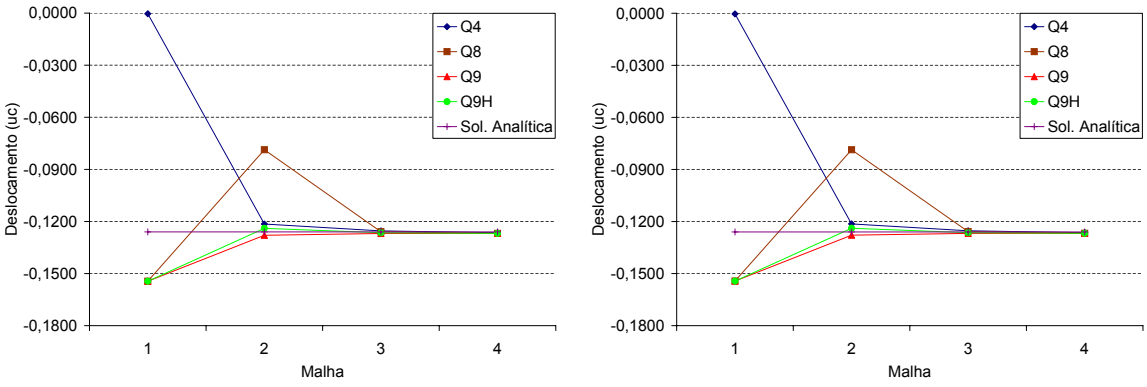
(a) Espessura em camadas

(b) Espessura prescrita

Figura 6.21: Flecha máxima de uma placa EN-CD-IR discretizada com elementos de Reissner-Mindlin

Tabela 6.15: Flecha máxima de uma placa EN-CD-IS discretizada com elementos de Reissner-Mindlin

Espessura	Malha (FIG. 6.1)	Elementos			
		Q4	Q8	Q9	Q9H
Camadas	1	-0,00035715	-0,15437813	-0,15440578	-0,15441806
	2	-0,12145884	-0,07868663	-0,12794201	-0,12396536
	3	-0,12541079	-0,12591366	-0,12691721	-0,12649589
	4	-0,12649935	-0,12685723	-0,12686867	-0,12685792
Prescrita	1	-0,00035714	-0,15428178	-0,15430943	-0,15432171
	2	-0,12138310	-0,07865112	-0,12786222	-0,12388816
	3	-0,12533258	-0,12583573	-0,12683806	-0,12641712
	4	-0,12642047	-0,12677812	-0,12678955	-0,12677881
Solução Analítica: -0,126					



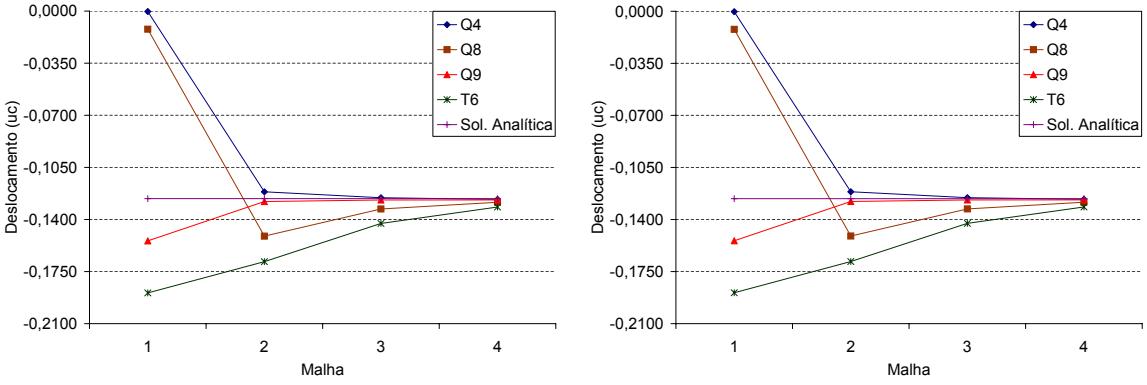
(a) Espessura em camadas

(b) Espessura prescrita

Figura 6.22: Flecha máxima de uma placa EN-CD-IS discretizada com elementos de Reissner-Mindlin

Tabela 6.16: Flecha máxima de uma placa EN-CD-CI discretizada com elementos de Reissner-Mindlin

Espessura	Malha (FIG. 6.1)	Elementos			
		Q4	Q8	Q9	T6
Camadas	1	-0,00026786	-0,01215163	-0,15439519	-0,18933784
	2	-0,12141818	-0,15120338	-0,12793329	-0,16833312
	3	-0,12539601	-0,13295892	-0,12691281	-0,14266575
	4	-0,12649327	-0,12844037	-0,12686693	-0,13164743
Prescrita	1	-0,00026786	-0,01215114	-0,15429884	-0,18921969
	2	-0,12134244	-0,15110832	-0,12785350	-0,16822809
	3	-0,12531781	-0,13287594	-0,12683366	-0,14257676
	4	-0,12641438	-0,12836028	-0,12678781	-0,13156532
Solução Analítica: -0,126					



(a) Espessura em camadas

(b) Espessura prescrita

Figura 6.23: Flecha máxima de uma placa EN-CD-CI discretizada com elementos de Reissner-Mindlin

6.2.3 Comparação entre os recursos disponibilizados no INSANE para os elementos de Kirchhoff

Para os elementos de Kirchhoff foram disponibilizados três formas de obter a matriz de rigidez, conforme dito anteriormente. É possível obtê-la a partir de uma integração numérica utilizando a espessura em camadas, que permite calcular placas compostas de materiais diferentes. Ainda com integração numérica é possível especificar a espessura da placa sem discretizá-la, ou seja, a placa é composta de um material somente ao longo de toda a espessura. Para finalizar, também foi disponibilizada a matriz de rigidez dos elementos integrada analiticamente para uma placa composta de um material linear elástico isotrópico.

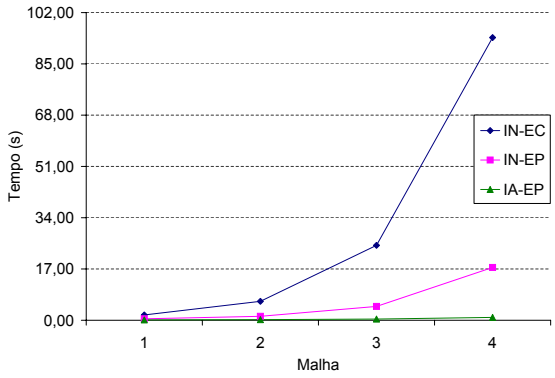
Cada uma desta formas de solução tem uma utilização prática e torna o sistema capaz de resolver um número maior de problemas. Porém, numa primeira impressão, pode parecer suficiente a integração numérica com a espessura discretizada em camadas, pois esta resolve qualquer problema. Entretanto, esta poderosa ferramenta tem um inconveniente quando aplicada de acordo com a capacidade das outras duas. Para demonstrar este inconveniente foram coletados os tempos de processamento, num computador AMD Athlon 64 3000+ 2.01GHz e 1,0GB de memória, das placas apresentadas na Seção 6.2.1, que seguem apresentados através de tabelas e gráficos.

6.2.3.1 Carga Concentrada - (CC)

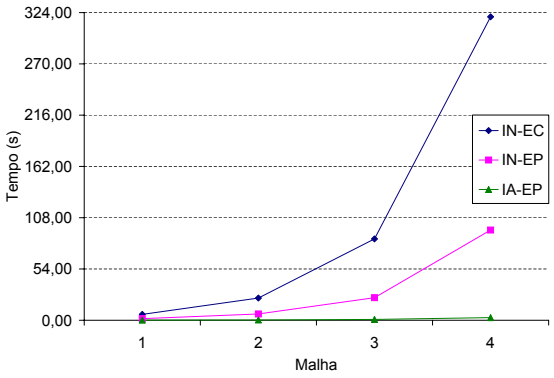
Para o caso da placa simplesmente apoiada com carga concentrada (FIG. 6.4), os tempos de processamento estão mostrados nas TAB. 6.17 e na FIG. 6.24. Tanto na tabela, quanto na figura adotou-se IN = integração numérica, IA = integração analítica, EC = espessura em camadas e EP = espessura prescrita.

Tabela 6.17: Tempo de processamento em segundos de uma placa SA-CC

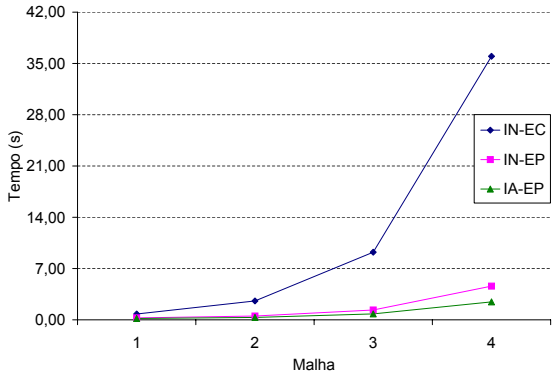
Malha	MZC			BFS			CKZ			Cowper		
(FIG. 6.1)	IN-EC	IN-EP	IA-EP	IN-EC	IN-EP	IA-EP	IN-EC	IN-EP	IA-EP	IN-EC	IN-EP	IA-EP
1	1,77	0,48	0,13	5,84	1,72	0,17	1,03	0,28	0,19	12,30	8,59	1,31
2	6,28	1,30	0,20	24,06	6,66	0,34	2,59	0,53	0,33	48,03	33,72	4,83
3	24,33	4,58	0,39	87,36	23,76	0,86	9,38	1,34	0,81	193,75	133,89	18,52
4	93,80	17,58	0,95	319,39	94,45	2,77	36,38	4,64	2,45	731,22	537,89	73,91



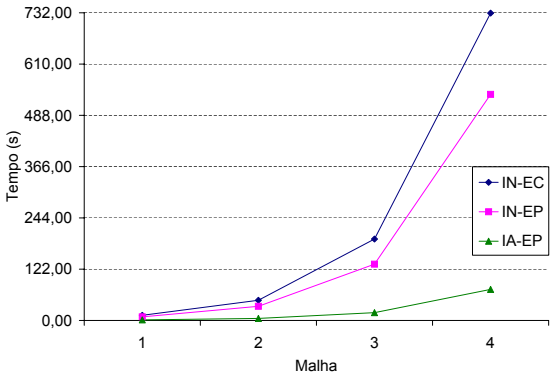
(a) Elemento MZC



(b) Elemento BFS



(c) Elemento CKZ



(d) Elemento de Cowper

Figura 6.24: Tempo de processamento de uma placa SA-CC

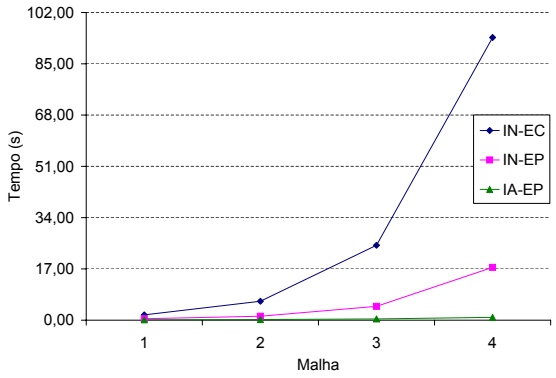
6.2.3.2 Carga Distribuída - (CD)

Para o caso da placa simplesmente apoiada com carga uniformemente distribuída (FIG. 6.9), os tempos de processamento estão mostrados nas TAB. 6.18 e na

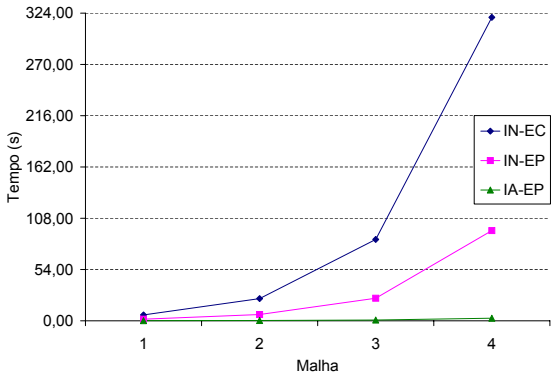
FIG. 6.25. Tanto na tabela, quanto na figura adotou-se IN = integração numérica, IA = integração analítica, EC = espessura em camadas e EP = espessura prescrita.

Tabela 6.18: Tempo de processamento em segundos de uma placa SA-CD

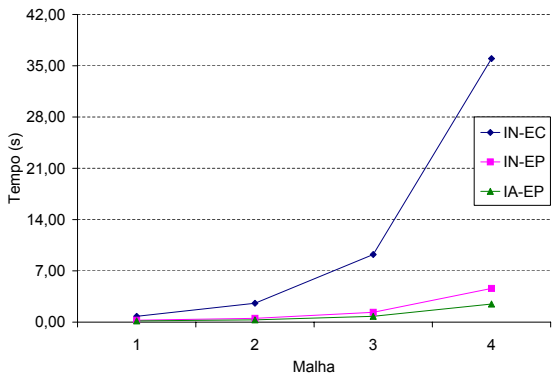
Malha	MZC			BFS			CKZ			Cowper		
(FIG. 6.1)	IN-EC	IN-EP	IA-EP	IN-EC	IN-EP	IA-EP	IN-EC	IN-EP	IA-EP	IN-EC	IN-EP	IA-EP
1	1,77	0,48	0,13	6,20	1,72	0,17	0,80	0,27	0,17	12,33	8,59	1,30
2	6,28	1,31	0,20	23,42	6,64	0,33	2,58	0,52	0,31	48,08	33,58	4,81
3	24,83	4,59	0,41	85,69	23,80	0,84	9,24	1,34	0,80	191,50	133,61	18,42
4	93,72	17,50	0,95	319,58	95,02	2,75	35,98	4,66	2,47	727,64	538,02	73,94



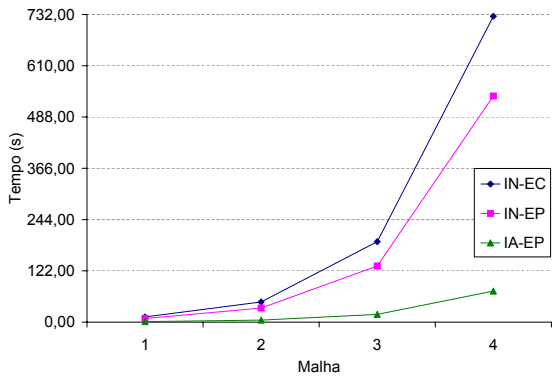
(a) Elemento MZC



(b) Elemento BFS



(c) Elemento CKZ



(d) Elemento de Cowper

Figura 6.25: Tempo de processamento de uma placa SA-CD

6.3 Elementos Finitos de Placa Espessa

Esta seção apresenta exemplos de placas moderadamente espessas e de placas espessas. Em ambos os casos, fez-se o estudo de convergência em placas cujo modulo de elasticidade $E = 1\,092\,000\ uf/uc^2$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Novamente as malhas adotadas são as das FIGs. 6.1 e 6.2.

Vale ressaltar que nesta seção somente os elementos Q4, Q8, Q9, Q9H, T3, T6 e T10 são empregados no estudo, pois, conforme apresentado anteriormente, apenas a teoria de Reissner-Mindlin é aplicável à análise de placas espessas, por considerar as deformações devido ao cisalhamento. Também, utilizou-se espessura prescrita e integração completa para todos os elementos na obtenção da matriz de rigidez, uma vez que em placas espessas não ocorre o problema de travamento.

6.3.1 Placa Moderadamente Espessa

Para estudar as placas moderadamente espessas utilizou-se uma placa quadrada, conforme FIG. 6.26, sujeita a uma carga uniformemente distribuída $q = -1\ uf/uc^2$ simplesmente apoiada e engastada.

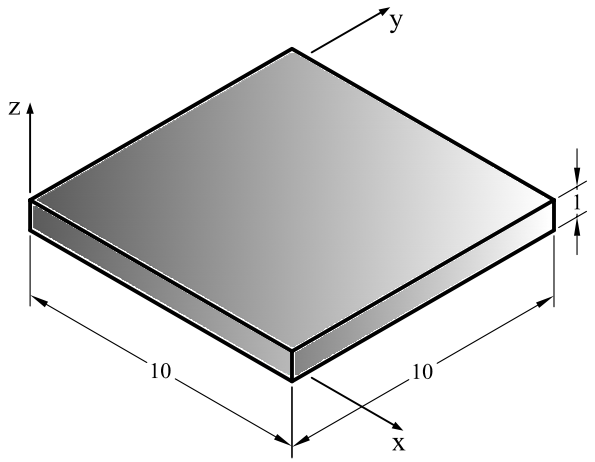


Figura 6.26: Dimensões da placa moderadamente espessa

6.3.1.1 Simplesmente Apoiada - (SA)

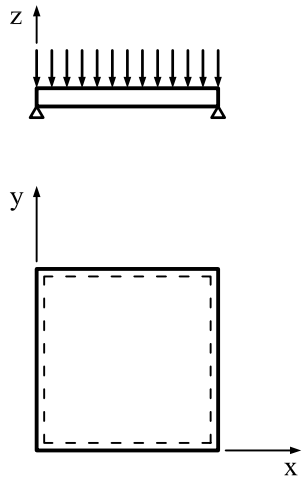


Figura 6.27: Placa quadrada moderadamente espessa simplesmente apoiada sob a ação de uma carga uniformemente distribuída (SA-CD)

A solução analítica deste problema é dada pela teoria de Mindlin, conforme Hinton e Huang (1986) e Liu e Riggs (2002), esta solução para o deslocamento vertical no centro da placa é dada por:

$$w_{max} = 0,004270\frac{q\ a^4}{D} \tag{6.10}$$

onde q é a intensidade da carga distribuída, a é o comprimento do lado da placa e D é o coeficiente de rigidez à flexão da placa (Eq.(6.2)).

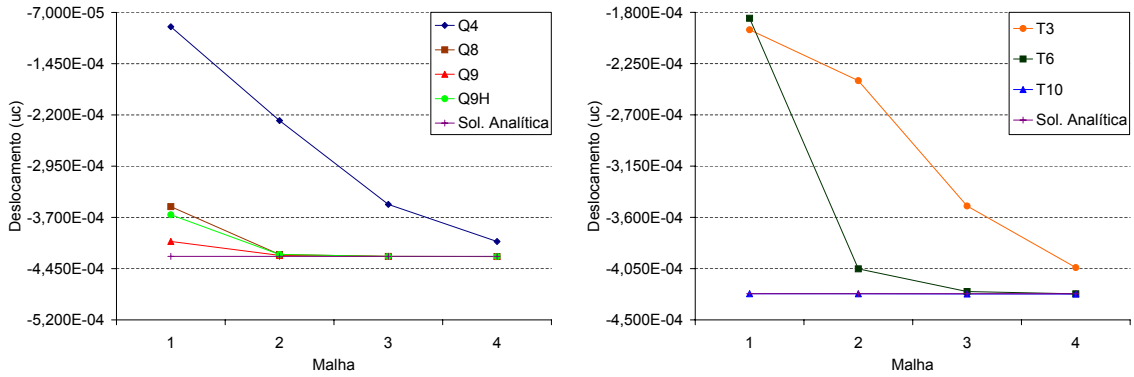
Assim, se $q = -1\ uf/uc^2$, para a placa em estudo, tem-se:

$$w_{max} = -4,270 \times 10^{-4}\ uc \tag{6.11}$$

Para este estudo, aplicaram-se novamente as malhas apresentadas na FIG. 6.1. Logo, os valores obtidos no **INSANE**, encontram-se apresentados na TAB. 6.19 e na FIG. 6.28.

Tabela 6.19: Flecha máxima de uma placa moderadamente espessa SA-CD

Malha	Elementos Quadrilaterais				Elementos Triangulares		
(FIG. 6.1)	Q4	Q8	Q9	Q9H	T3	T6	T10
1	-9,097×10^{-5}	-3,543×10^{-4}	-4,052×10^{-4}	-3,661×10^{-4}	-1,953×10^{-4}	-1,852×10^{-4}	-4,270×10^{-4}
2	-2,283×10^{-4}	-4,243×10^{-4}	-4,256×10^{-4}	-4,243×10^{-4}	-2,399×10^{-4}	-4,052×10^{-4}	-4,271×10^{-4}
3	-3,510×10^{-4}	-4,271×10^{-4}	-4,271×10^{-4}	-4,271×10^{-4}	-3,500×10^{-4}	-4,251×10^{-4}	-4,273×10^{-4}
4	-4,053×10^{-4}	-4,273×10^{-4}	-4,273×10^{-4}	-4,273×10^{-4}	-4,041×10^{-4}	-4,271×10^{-4}	-4,273×10^{-4}
Solução Analítica: -4,270×10^{-4}							



(a) Elementos quadrilaterais (b) Elementos triangulares

Figura 6.28: Flecha máxima de uma placa moderadamente espessa SA-CD

6.3.1.2 Engastada - (EN)

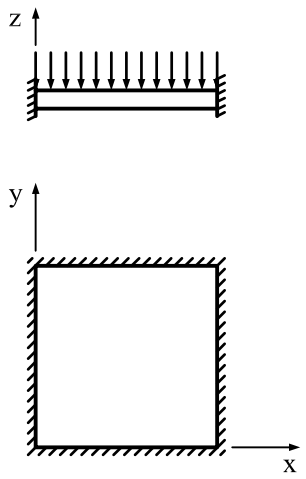


Figura 6.29: Placa quadrada moderadamente espessa engastada sob a ação de uma carga uniformemente distribuída (EN-CD)

De acordo com Hinton e Huang (1986) e Liu e Riggs (2002), a solução analítica para o deslocamento vertical no centro da placa da FIG. 6.29, segundo a teoria de Mindlin é:

$$w_{max} = 0,001500 \frac{q\ a^4}{D} \tag{6.12}$$

onde q é a intensidade da carga distribuída, a é o comprimento do lado da placa e D é o coeficiente de rigidez à flexão da placa (Eq.(6.2)).

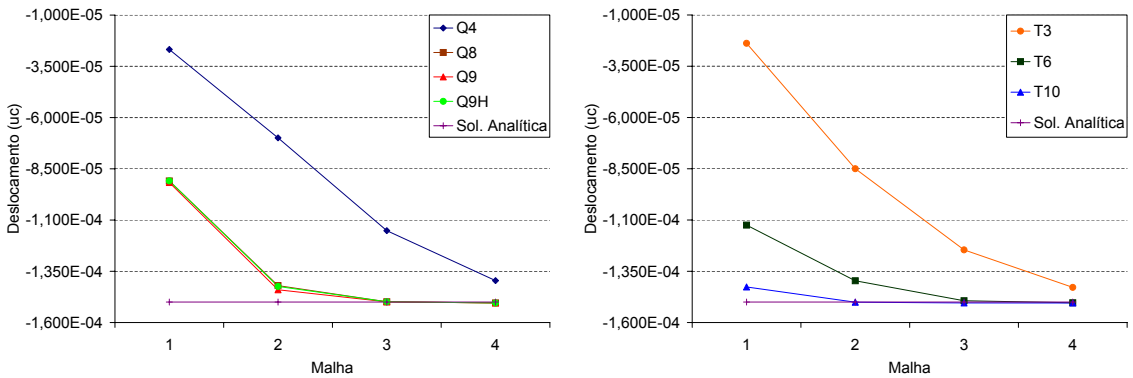
Substituindo os dados referentes à placa em estudo (FIG. 6.26) na Eq.(6.12), sabendo-se que $q = -1\ uf/uc^2$, encontra-se:

$$w_{max} = -1,500 \times 10^{-4}\ uc \tag{6.13}$$

No **INSANE**, os valores obtidos para a flecha máxima de uma placa moderadamente espessa engastada sob a ação de uma carga uniformemente distribuída são apresentados na TAB. 6.20 e na FIG. 6.30.

Tabela 6.20: Flecha máxima de uma placa moderadamente espessa EN-CD

Malha	Elementos Quadrilaterais				Elementos Triangulares		
(FIG. 6.1)	Q4	Q8	Q9	Q9H	T3	T6	T10
1	-2,679×10^{-5}	-9,091×10^{-5}	-9,167×10^{-5}	-9,089×10^{-5}	-2,381×10^{-5}	-1,125×10^{-4}	-1,426×10^{-4}
2	-6,990×10^{-5}	-1,420×10^{-4}	-1,440×10^{-4}	-1,424×10^{-4}	-8,498×10^{-5}	-1,396×10^{-4}	-1,501×10^{-4}
3	-1,152×10^{-4}	-1,499×10^{-4}	-1,499×10^{-4}	-1,499×10^{-4}	-1,245×10^{-4}	-1,494×10^{-4}	-1,504×10^{-4}
4	-1,395×10^{-4}	-1,504×10^{-4}	-1,504×10^{-4}	-1,504×10^{-4}	-1,428×10^{-4}	-1,504×10^{-4}	-1,505×10^{-4}
Solução Analítica: -1,500×10^{-4}							



(a) Elementos quadrilaterais

(b) Elementos triangulares

Figura 6.30: Flecha máxima de uma placa moderadamente espessa EN-CD

6.3.2 Placa Espessa

O estudo de convergência dos elementos na análise de placas espessas, se fez através de uma placa circular cujas dimensões estão apresentadas na FIG. 6.31.

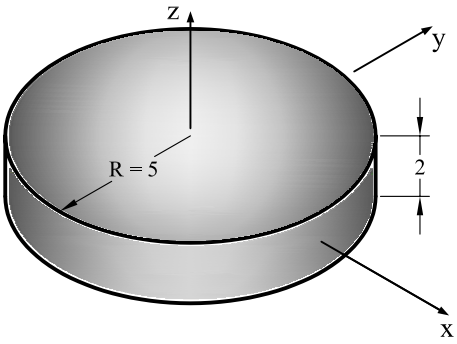


Figura 6.31: Dimensões da placa espessa

Esta placa está sujeita a uma carga concentrada central $P = -1\ uf$ e engastada ao longo de sua borda, conforme mostrado na FIG. 6.32.

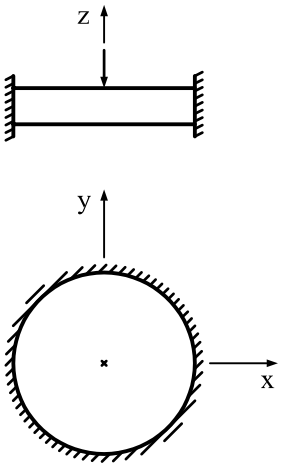


Figura 6.32: Placa circular engastada sob a ação de uma carga concentrada central (EN-CC)

De acordo com Gruttmann e Wagner (2003), a solução analítica segundo a teoria Mindlin, onde considera-se a deformação cisalhante, para o deslocamento vertical deste problema é dado por:

$$w = \frac{P\ a^2}{16\ \pi\ D}\left[\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) + \frac{2\ r^2}{a^2}\ ln\frac{r}{a} - \frac{8\ D}{\kappa\ G\ t\ a^2}\ ln\frac{r}{a}\right] \tag{6.14}$$

onde P é a intensidade da carga concentrada, a é o raio da placa, r é a distância do centro ao ponto onde será calculado o deslocamento vertical w, D é o coeficiente de rigidez à flexão da placa (Eq.(6.2)), G é o módulo de elasticidade transversal, κ é o fator de correção da tensão cisalhante ($\kappa = 5/6$) e t é a espessura da placa.

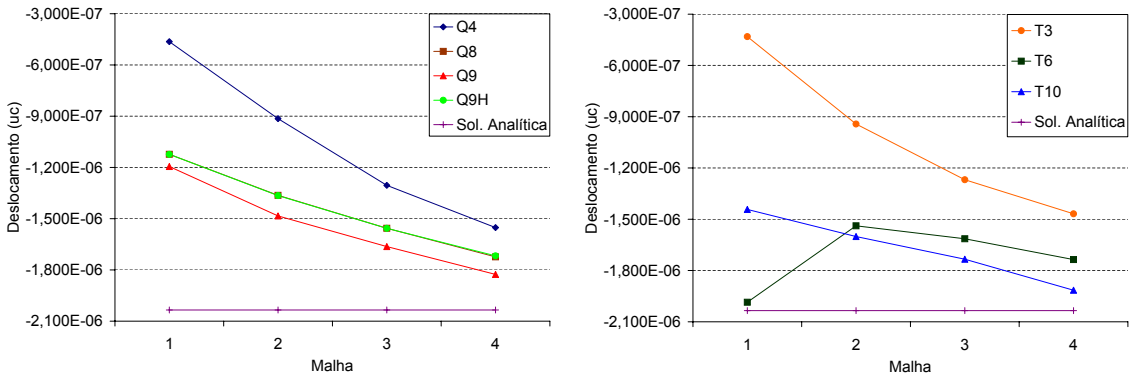
No centro da placa, onde $r = 0$, ocorre singularidade. Portanto, considerou-se $r = 0,01\ uc$ para obter o deslocamento vertical mais próximo do centro. Logo, substituindo na Eq.(6.14) os dados referentes à placa de FIG. 6.31 e sabendo-se que a carga concentrada é igual a $-1\ uf$, obtém-se:

$$w = -2,035 \times 10^{-6}\ uc \tag{6.15}$$

No **INSANE**, os valores obtidos para esta placa discretizada conforme mostrado na FIG. 6.2, seguem tabulados (TAB. 6.21) e mostrados através de gráficos (FIG. 6.33).

Tabela 6.21: Flecha máxima de uma placa espessa EN-CC

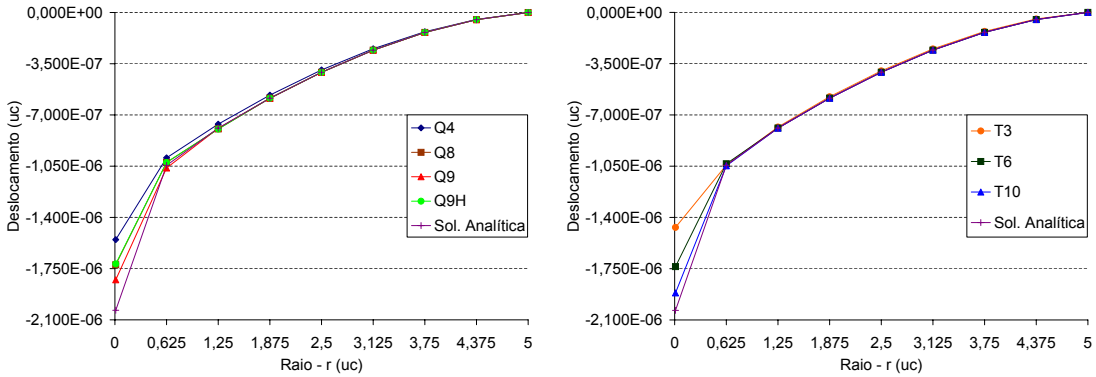
Malha	Elementos Quadrilaterais				Elementos Triangulares		
(FIG. 6.2)	Q4	Q8	Q9	Q9H	T3	T6	T10
1	$-4,637\times10^{-7}$	$-1,123\times10^{-6}$	$-1,195\times10^{-6}$	$-1,123\times10^{-6}$	$-4,311\times10^{-7}$	$-1,985\times10^{-6}$	$-1,442\times10^{-6}$
2	$-9,144\times10^{-7}$	$-1,363\times10^{-6}$	$-1,484\times10^{-6}$	$-1,365\times10^{-6}$	$-9,425\times10^{-7}$	$-1,538\times10^{-6}$	$-1,601\times10^{-6}$
3	$-1,305\times10^{-6}$	$-1,556\times10^{-6}$	$-1,663\times10^{-6}$	$-1,556\times10^{-6}$	$-1,269\times10^{-6}$	$-1,614\times10^{-6}$	$-1,734\times10^{-6}$
4	$-1,552\times10^{-6}$	$-1,723\times10^{-6}$	$-1,826\times10^{-6}$	$-1,717\times10^{-6}$	$-1,468\times10^{-6}$	$-1,736\times10^{-6}$	$-1,915\times10^{-6}$
Solução Analítica: $-2,035\times10^{-6}$							



(a) Elementos quadrilaterais (b) Elementos triangulares

Figura 6.33: Flecha máxima de uma placa circular espessa EN-CC

Um outro gráfico, FIG. 6.34, apresenta os valores do deslocamento vertical obtido nos nós ao longo da linha de simetria colinear à direção x. Para esta plotagem escolheu-se a malha 4 por possuir o maior número de elementos, e conseqüentemente se aproximar mais da solução analítica.



(a) Elementos quadrilaterais

(b) Elementos triangulares

Figura 6.34: Deslocamento vertical ao longo da linha de simetria em x de uma placa circular espessa EN-CC

6.4 Resumo dos Resultados

As TABs. 6.22, 6.23 e 6.24 resumem os resultados obtidos, para as malhas 2, 3, 4, e 5 das FIGs. 6.1 e 6.2, no que se refere à monotonicidade do processo de convergência. Para a representação do tipo de aproximação nestas tabelas utilizou-se a simbologia apresentada abaixo:

Símbolo	Tipo de aproximação
$\bullet$	Monotônica por baixo
$\circ$	Monotônica por cima
$\times$	Não monotônica

Tabela 6.22: Monotonicidade - Placas Finas

Teoria	Elemento	Placa fina			
		SA-CC	SA-CD	EN-CC	EN-CD
Kirchhoff	MZC	○	○	○	○
	BFS	●	○	●	●
	CKZ	○	○	○	○
	Cowper	●	○	●	●
Reissner-Mindlin Integração Reduzida	Q4	○	○	●	○
	Q8	●	●	●	●
	Q9	○	○	○	○
	Q9H	×	×	×	×
Reissner-Mindlin Integração Seletiva	Q4	●	●	●	●
	Q8	●	●	●	●
	Q9	●	○	●	○
	Q9H	●	●	●	●
Reissner-Mindlin Cortante Imposta	Q4	●	●	●	●
	Q8	○	○	○	○
	Q9	●	○	●	○
	T6	○	○	○	○

Tabela 6.23: Monotonicidade - Placas Moderadamente Espessas

Teoria	Elemento	Placa moderadamente espessa	
		SA-CD	EN-CD
Reissner-Mindlin	Q4	●	●
	Q8	●	●
	Q9	●	●
	Q9H	●	●
	T3	●	●
	T6	●	●
	T10	●	●

Tabela 6.24: Monotonicidade - Placas Espessas

Teoria	Elemento	Placa espessa
		EN-CC
Reissner-Mindlin	Q4	•
	Q8	•
	Q9	•
	Q9H	•
	T3	•
	T6	•
	T10	•

6.5 Análise Crítica dos Resultados

Uma análise dos gráficos e tabelas apresentados fornece uma boa compreensão do comportamento dos elementos implementados no **INSANE** para estudo de placas finas. Como destaque pode-se citar os elementos BFS e Cowper da teoria de Kirchhoff e o elemento Q9 (teoria de Reissner-Mindlin) que possui uma rápida aproximação da solução analítica, independentemente da técnica aplicada (integração reduzida, integração seletiva ou deformação de cortante imposta).

Um aspecto importante a ser observado é a monotonicidade dos resultados. Pode-se destacar os elementos baseados na teoria de Kirchhoff que apresentam monotonicidade nos quatro casos estudados e os elementos Q4, Q8, Q9 e T6, baseados na teoria de Reissner-Mindlin, que também apresentaram monotonicidade em todos os casos estudados em todas as técnicas anti-bloqueio que lhes são aplicáveis. Os elementos MZC, CKZ e T6, quando apresentam monotonicidade, têm convergência por cima (os valores de deslocamentos obtidos são superiores ao valor analítico), por outro lado, os elementos Q4 e Q8 na maioria das vezes possuem convergência monotônica por baixo (os valores de deslocamentos obtidos são inferiores ao valor analítico).

Para análise de placas finas os elementos baseados na teoria de Kirchhoff (elementos específicos para placas finas) são em geral melhores do que os elementos baseados na teoria de Reissner-Mindlin.

Comparando-se as técnicas anti-bloqueio, a utilização da técnica de deformação de cortante imposta pode ser dita superior, por não apresentar modos espúrios de energia nula, tornando sua utilização mais confiável.

A possibilidade de usar o recurso de integração analítica também merece destaque, uma vez que, em malhas muito densas o tempo de processamento pode ser relevante.

Outro aspecto de destaque é a pequena magnitude do erro obtido quando se usa discretização da espessura em camadas. Apesar de requerer maior esforço computacional, este recurso é fundamental na modelagem de placas compostas.

Analisando as tabelas referentes aos elementos baseados na teoria de Kirchhoff verifica-se que quando se utiliza espessura prescrita os resultados obtidos com integração analítica são iguais aos obtidos com integração numérica, tornando a formulação deste elementos confiável.

Nos estudos realizados de placas moderadamente espessas e espessas, todos os elementos apresentam convergência monotônica por baixo. E quanto maior o número de nós, mais rápida foi a aproximação da solução analítica.

Devido à singularidade que ocorre no problema analisado de placa espessa, verifica-se na FIG. 6.34 que à medida que se distancia do centro da placa a solução através dos elementos finitos é praticamente igual à solução analítica.

Capítulo 7

COMPARAÇÕES COM SOLUÇÕES ANALÍTICAS

7.1 Introdução

Apresentam-se neste capítulo alguns exemplos retirados da literatura resolvidos no **INSANE**, onde são confrontados os resultados obtidos com sua solução analítica. Os elementos adotados para solucionar estes problemas foram escolhidos considerando o estudo de convergência apresentado na seção anterior, bem como a aplicabilidade prática dos mesmos.

Para este estudo, procurou-se diversificar o formato e as condições de contorno das placas empregadas, uma vez que até o presente momento somente placas quadradas e circulares foram analisadas. Assim, quatro problemas apresentados por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) foram escolhidos por atenderem os critérios citados e possuírem solução analítica, sendo eles:

- Placa triangular simplesmente apoiada sob a ação de uma carga concentrada no centro;

- Placa retangular carregada uniformemente com dois lados opostos simplesmente apoiados, um livre e o outro engastado;

- Placa paralelogrâmica simplesmente apoiada sob a ação de uma carga uniformemente distribuída;

- Placa anular simplesmente apoiada sob ação de um carregamento uniformemente distribuído no bordo interno.

Em todos os casos, as placa são compostas por um material linear elástico isotrópico. Detalhes como dimensões da placa, elemento empregado na análise, discretização e outros são apresentados individualmente para cada caso.

7.2 Placa Triangular

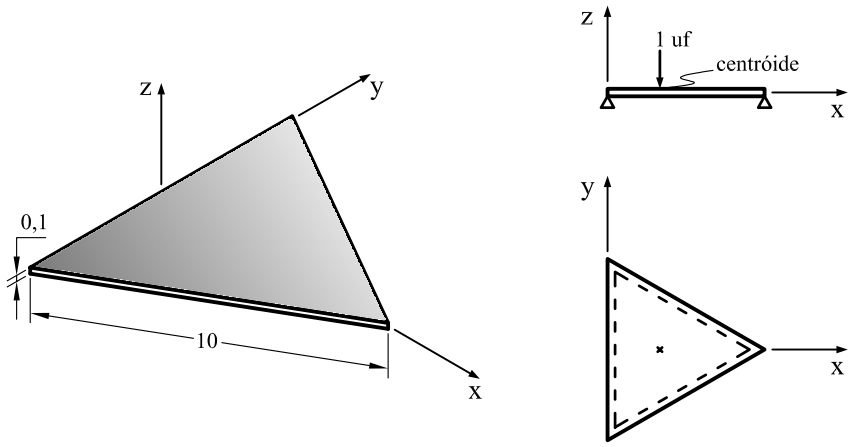


Figura 7.1: Placa triangular simplesmente apoiada sob a ação de uma carga concentrada no centróide

A FIG. 7.1 mostra uma placa na forma de um triângulo equilátero que, segundo Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), tem solução analítica para o deslocamento vertical no centróide, ou seja onde a carga atua, dada pela equação:

$$w_{centroide} = 0,00575 \frac{P\ a^2}{D} \tag{7.1}$$

onde P é o valor da carga concentrada, a é comprimento do lado e D é o coeficiente de rigidez à flexão da placa.

$$D = \frac{E\ t^3}{12\ (1-\nu^2)} \tag{7.2}$$

Tem-se ainda que os momentos a uma pequena distância c da carga, ou do centróide são dados por:

$$M_x = \frac{(1+\nu)\ P}{4\ \pi} \left(ln \frac{a\ \sqrt{3}}{\pi\ c} - 0,379 \right) - \frac{(1-\nu)\ P}{8\ \pi}$$

$$M_y = \frac{(1+\nu)\ P}{4\ \pi}\left(ln\frac{a\ \sqrt{3}}{\pi\ c} - 0,379\right) + \frac{(1-\nu)\ P}{8\ \pi} \tag{7.3}$$

Substituindo o módulo de elasticidade (E), igual a 1 092 000 uf/uc^2, o coeficiente de Poisson (ν), igual a 0,3 e a espessura (t), igual a 0,1 uc na Eq.(7.2), encontra-se:

$$D = 100\ uf \cdot uc \tag{7.4}$$

Logo, conhecendo a carga (P), o comprimento do lado (a) e o coeficiente de rigidez à flexão da placa (D), tem-se que o deslocamento vertical no centróide é:

$$w_{centroide} = -0,0043125\ uc \tag{7.5}$$

A placa triangular da FIG. 7.1 foi discretizada em 576 elementos triangulares de três nós CKZ, conforme a FIG. 7.2.

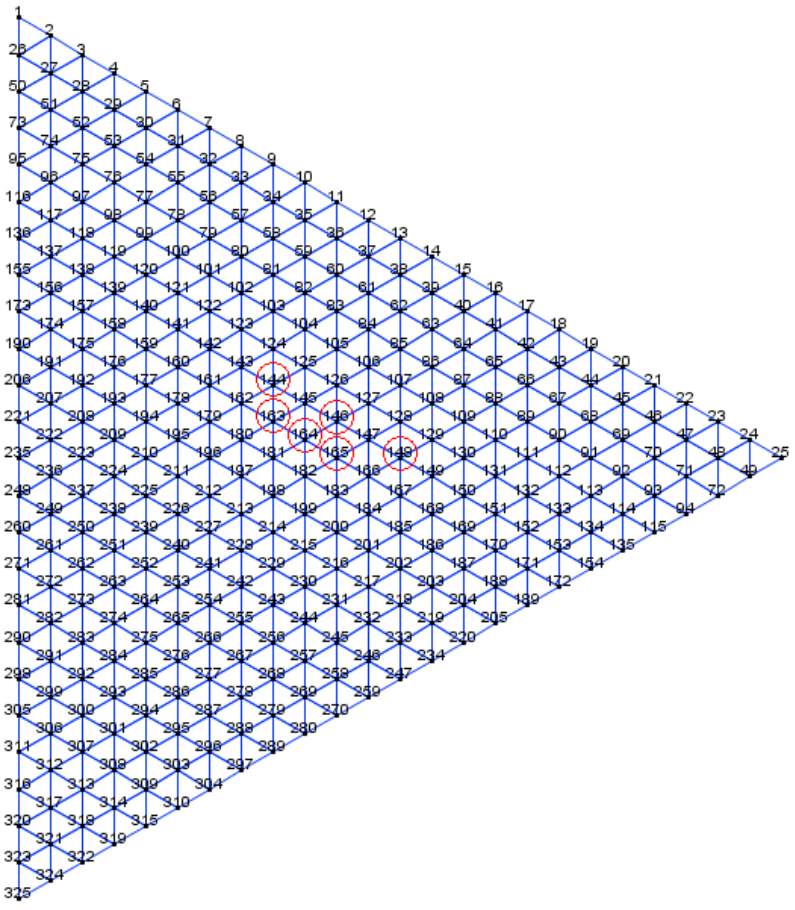


Figura 7.2: Discretização da placa triangular SA-CC

O deslocamento vertical no centróide da placa obtido no **INSANE** foi:

$$w_{centroide} = -0,0043211\ uc \tag{7.6}$$

com um erro, portanto, de 0,19942%, em relação à solução analítica.

A variação de deslocamento ao longo de toda a placa é apresentado na FIG. 7.3.

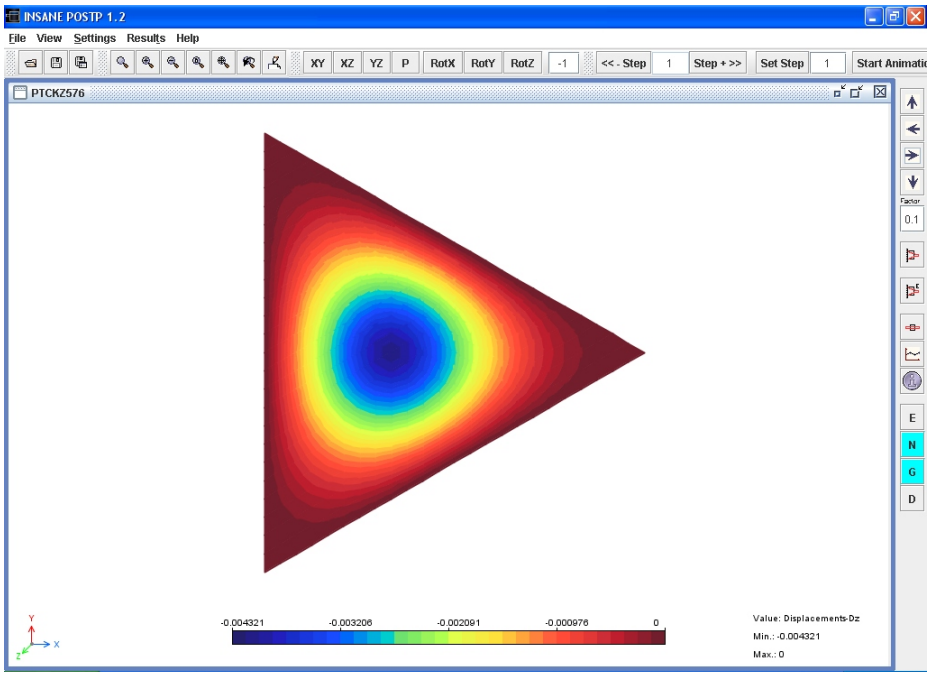


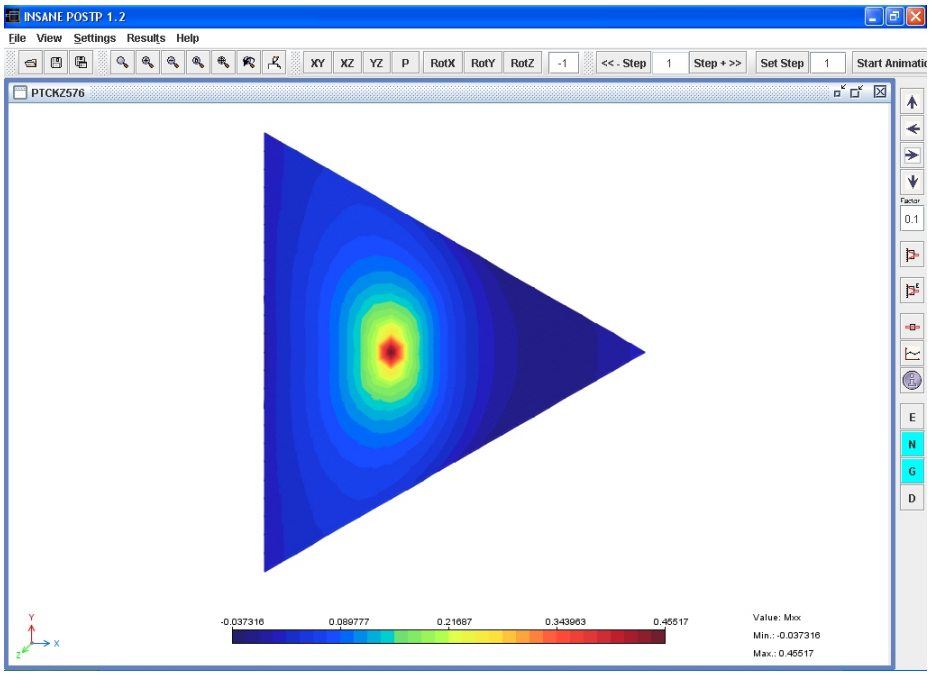
Figura 7.3: Deslocamentos verticais da placa triangular SA-CC

Para o cálculo dos momentos escolheram-se alguns nós próximo ao nó 181 onde se aplicou a carga, conforme mostra a TAB. 7.1 e destacados na FIG. 7.2.

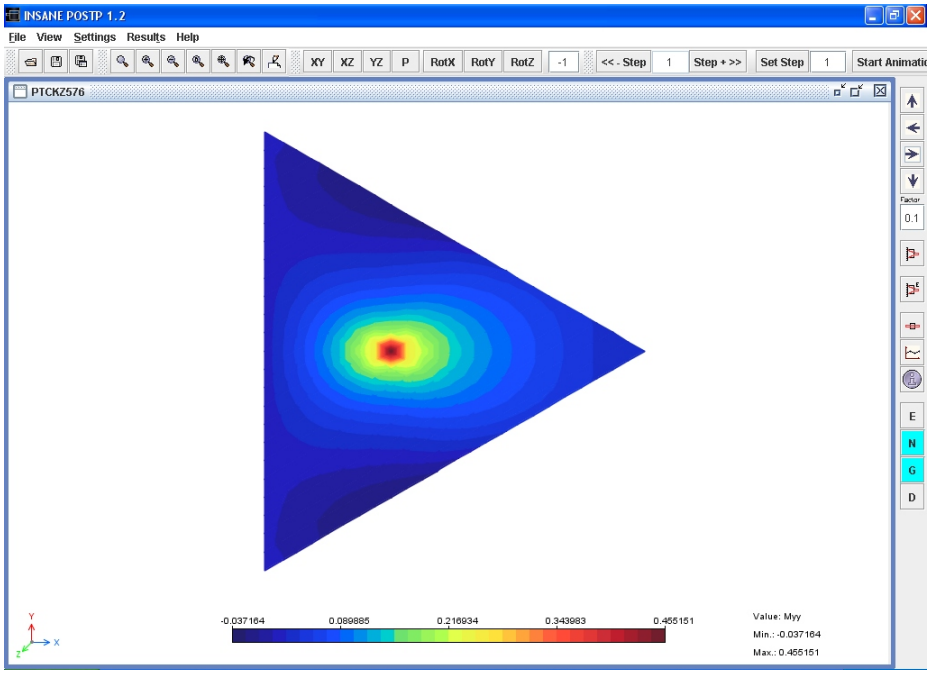
Tabela 7.1: Momentos em alguns nós da placa triangular SA-CC

Nó	Coordenada		Analítico (Eqs.(7.3))		**INSANE**		Erro (%)	
	x	y	M_x	M_y	M_x	M_y	M_x	M_y
144	2,88675	5,83333	0,12841	0,18411	0,16848	0,11249	31,204	-38,902
146	3,60844	5,41667	0,12841	0,18411	0,11875	0,16223	-7,522	-11,883
148	4,33013	5,00000	0,07158	0,12729	0,04278	0,13004	-40,234	2,162
163	2,88675	5,41667	0,20011	0,25582	0,24924	0,17707	24,546	-30,783
164	3,24760	5,20833	0,20011	0,25582	0,19118	0,23514	-4,466	-8,083
165	3,60844	5,00000	0,14329	0,19899	0,11695	0,19740	-18,384	-0,800

A FIG. 7.4 mostra as variações de momentos obtidos no **INSANE**.



(a) Momento M_{xx}



(b) Momento M_{yy}

Figura 7.4: Momentos ao longo da placa triangular SA-CC

As FIGs. 7.3 e 7.4 foram obtidas através do pós-processador do **INSANE** implementado por Penna (2007).

7.3 Placa Retangular

A placa da FIG. 7.5 possui três lados restringidos (dois apoiados e um engastado) e o outro livre, ela é composta de um material cuja suas propriedades são: módulo de elasticidade (E) igual a 200 000 000 uf/uc^2 e coeficiente de Poisson (ν) igual a 0,3.

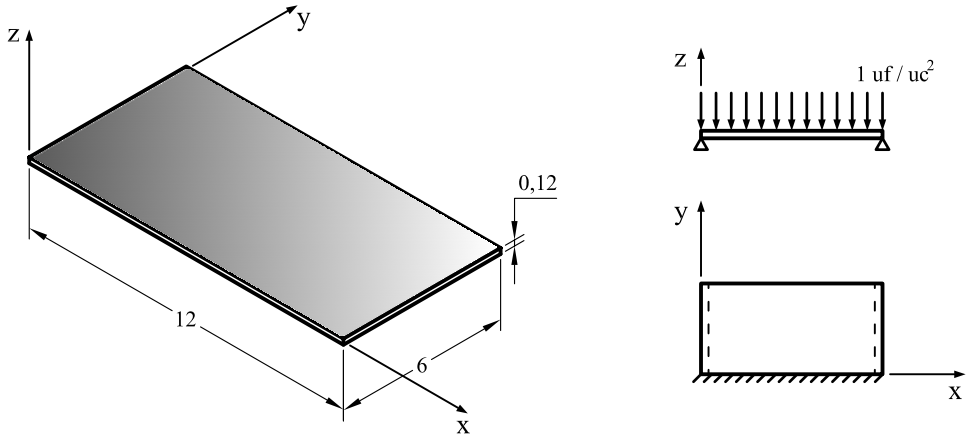


Figura 7.5: Placa retangular carregada uniformemente com dois lados opostos simplesmente apoiados, um livre e o outro engastado

De acordo com Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), a solução exata do deslocamento vertical máximo e dos momentos fletores para este problema, se $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ e $\nu = 0,3$, são:

$$\begin{aligned} w_{max} &= 0,0582\frac{q\ b^4}{D} \\ M_x &= -0,0293\ q\ a^4 \quad \text{em} \quad x = \frac{a}{2} \ \text{ e } \ y = b \\ M_y &= 0,319\ q\ b^2 \qquad \text{em} \quad x = \frac{a}{2} \ \text{ e } \ y = 0 \end{aligned} \tag{7.7}$$

onde a é o comprimento do lado na direção x, b é o comprimento do lado na direção y, q é a intensidade da carga distribuída e D é o coeficiente de rigidez da placa. Vale destacar que os sinais nas equações dos momentos foram corrigidos para adequar à convenção adotada neste trabalho.

Levando às Eqs.(7.7) os dados referentes à placa mostrada na FIG. 7.5, encontra-se:

$$\begin{aligned} w_{max} &= -0,00238329\ uc \\ M_x &= 4,2192\ uf\ \frac{uc}{uc} \\ M_y &= -11,484\ uf\ \frac{uc}{uc} \end{aligned} \tag{7.8}$$

Para a solução através do MEF, utilizando o **INSANE**, esta placa foi discretizada num total de 300 elementos (FIG. 7.6) retangulares BFS de quatro nós e quatro graus de liberdade por nó.

E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15	E16	E17	E18	E19	E20
E21	E22	E23	E24	E25	E26	E27	E28	E29	E30	E31	E32	E33	E34	E35	E36	E37	E38	E39	E40
E41	E42	E43	E44	E45	E46	E47	E48	E49	E50	E51	E52	E53	E54	E55	E56	E57	E58	E59	E60
E61	E62	E63	E64	E65	E66	E67	E68	E69	E70	E71	E72	E73	E74	E75	E76	E77	E78	E79	E80
E81	E82	E83	E84	E85	E86	E87	E88	E89	E90	E91	E92	E93	E94	E95	E96	E97	E98	E99	E100
E101	E102	E103	E104	E105	E106	E107	E108	E109	E110	E111	E112	E113	E114	E115	E116	E117	E118	E119	E120
E121	E122	E123	E124	E125	E126	E127	E128	E129	E130	E131	E132	E133	E134	E135	E136	E137	E138	E139	E140
E141	E142	E143	E144	E145	E146	E147	E148	E149	E150	E151	E152	E153	E154	E155	E156	E157	E158	E159	E160
E161	E162	E163	E164	E165	E166	E167	E168	E169	E170	E171	E172	E173	E174	E175	E176	E177	E178	E179	E180
E181	E182	E183	E184	E185	E186	E187	E188	E189	E190	E191	E192	E193	E194	E195	E196	E197	E198	E199	E200
E201	E202	E203	E204	E205	E206	E207	E208	E209	E210	E211	E212	E213	E214	E215	E216	E217	E218	E219	E220
E221	E222	E223	E224	E225	E226	E227	E228	E229	E230	E231	E232	E233	E234	E235	E236	E237	E238	E239	E240
E241	E242	E243	E244	E245	E246	E247	E248	E249	E250	E251	E252	E253	E254	E255	E256	E257	E258	E259	E260
E261	E262	E263	E264	E265	E266	E267	E268	E269	E270	E271	E272	E273	E274	E275	E276	E277	E278	E279	E280
E281	E282	E283	E284	E285	E286	E287	E288	E289	E290	E291	E292	E293	E294	E295	E296	E297	E298	E299	E300

Figura 7.6: Malha utilizada na solução da placa retangular

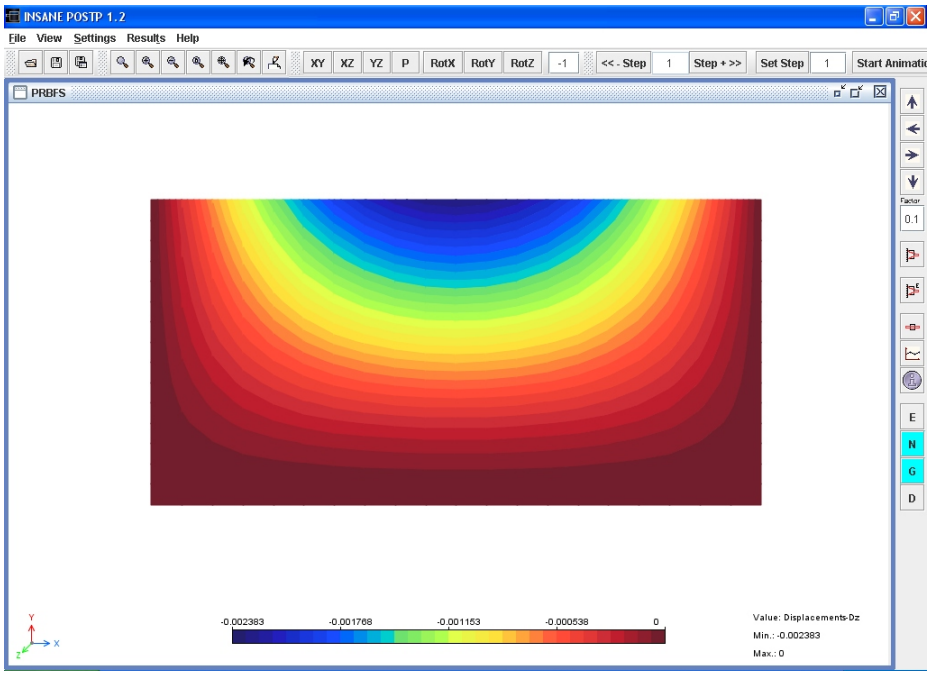
Os resultados obtidos foram:

$$\begin{aligned} w_{max} &= -0,00238303\ uc \\ M_x &= 4,2195823\ uf\ \frac{uc}{uc} \\ M_y &= -11,43195568\ uf\ \frac{uc}{uc} \end{aligned} \tag{7.9}$$

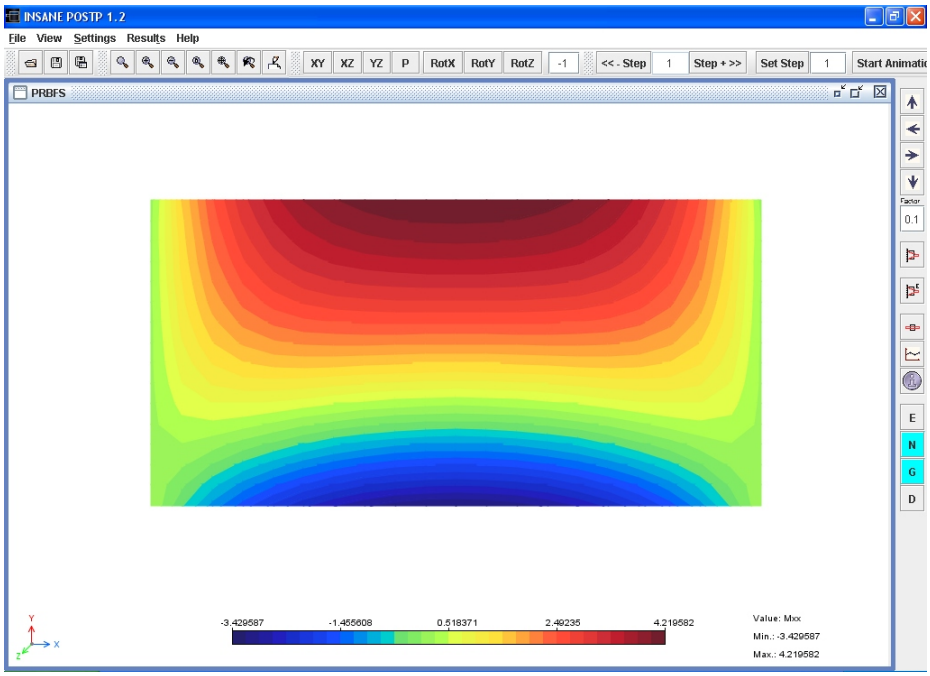
Os erros encontrados para estas grandezas são:

$$\begin{aligned} E_{(w_{max})} &= -0,01091\ \% \\ E_{(M_x)} &= 0,00906\ \% \\ E_{(M_y)} &= -0,45319\ \% \end{aligned} \tag{7.10}$$

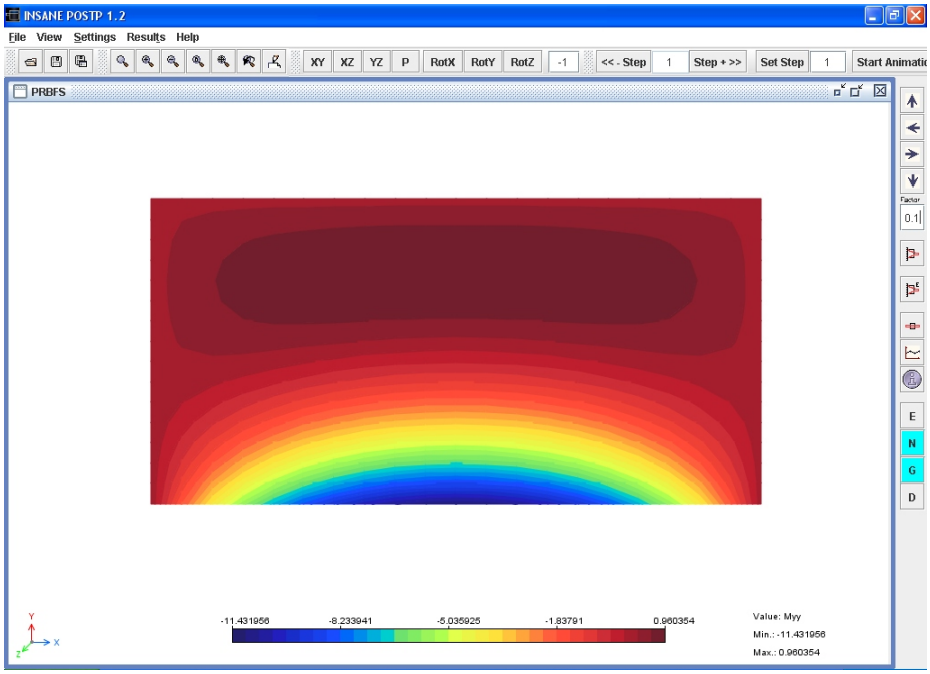
A FIG. 7.7 mostra variações dos deslocamentos verticais e dos momentos fletores para a malha utilizada.



(a) Deslocamentos verticais



(b) Momento M_{xx}



(c) Momento M_{yy}

Figura 7.7: Grandezas analisadas da placa retangular

7.4 Placa Paralelogrâmica

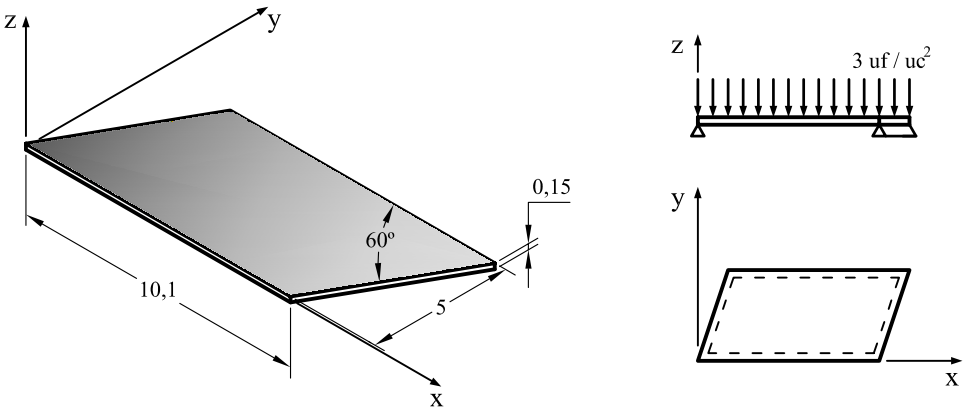


Figura 7.8: Placa paralelogrâmica simplesmente apoiada sob a ação de uma carga uniforme distribuída

A placa da FIG. 7.8 é composta por um material cujo módulo de elasticidade (E) é igual a 20 000 000 uf/uc^2 e coeficiente de Poisson igual a 0,2.

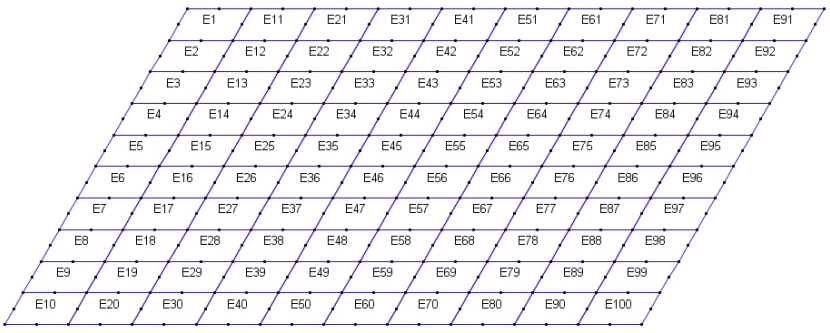
Conforme Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), a solução analítica para o deslocamento vertical e o momento máximo no centro da placa da FIG. 7.8 é dada pelas seguintes equações:

$$w_{centro} = 0,01046\frac{q\ a^4}{D}$$
$$M_{centro_{max}} = -0,0968\ q\ a^2 \tag{7.11}$$

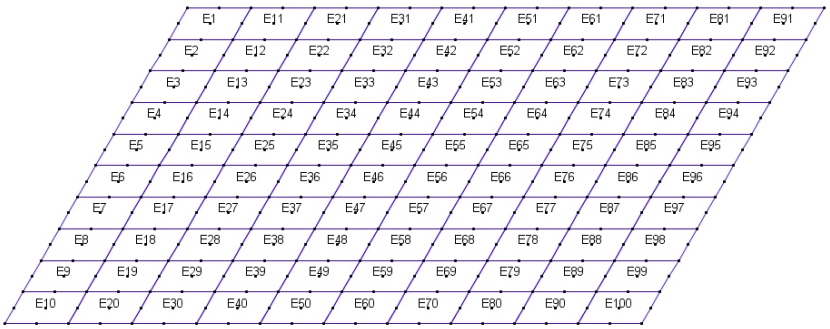
Substituindo nas Eqs.(7.12) os dados da placa em análise, tem-se:

$$w_{centro} = -0,0033472\ uc$$
$$M_{centro_{max}} = 7,26\ uf\ \frac{uc}{uc} \tag{7.12}$$

No **INSANE** esta placa foi analisada com dois elementos quadrilaterais, Q8 e Q9. Uma vez que esta placa pode ser considerada fina e os elementos utilizados são da teoria de Reissner-Mindlin, tornou-se necessário fazer uso de uma das técnicas já citadas anteriormente. Assim, optou-se pela técnica do campo assumido de deformações. Por fim, em ambos os casos a placa foi discretizada em 100 elementos conforme mostra a FIG. 7.9.



(a) Elemento quadrilateral Q8



(b) Elemento quadrilateral Q9

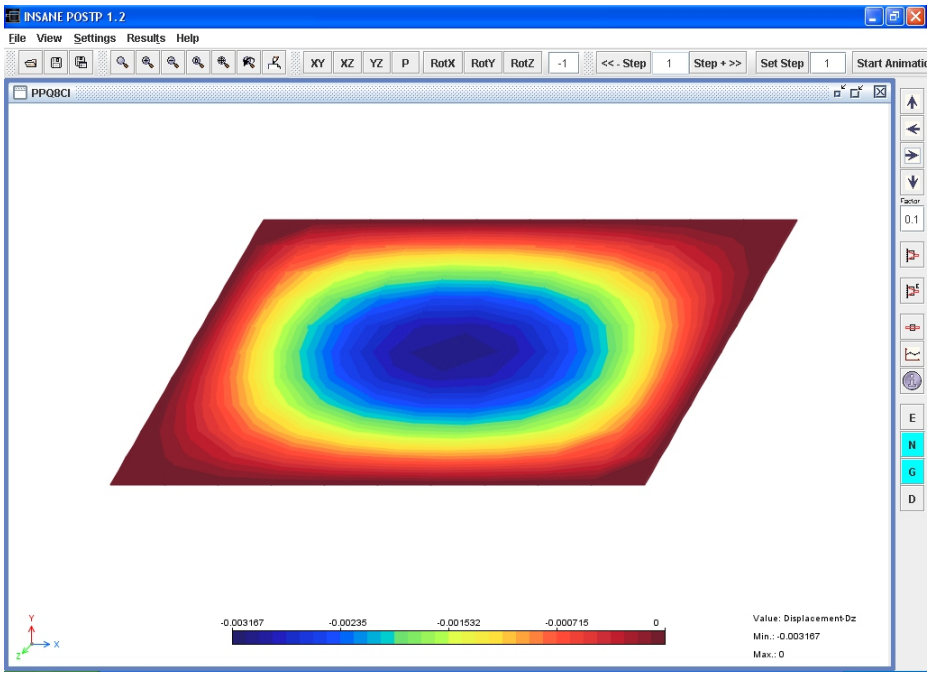
Figura 7.9: Malhas utilizadas para a análise da placa paralelogrâmica

Os resultados obtidos são apresentados na TAB. 7.2.

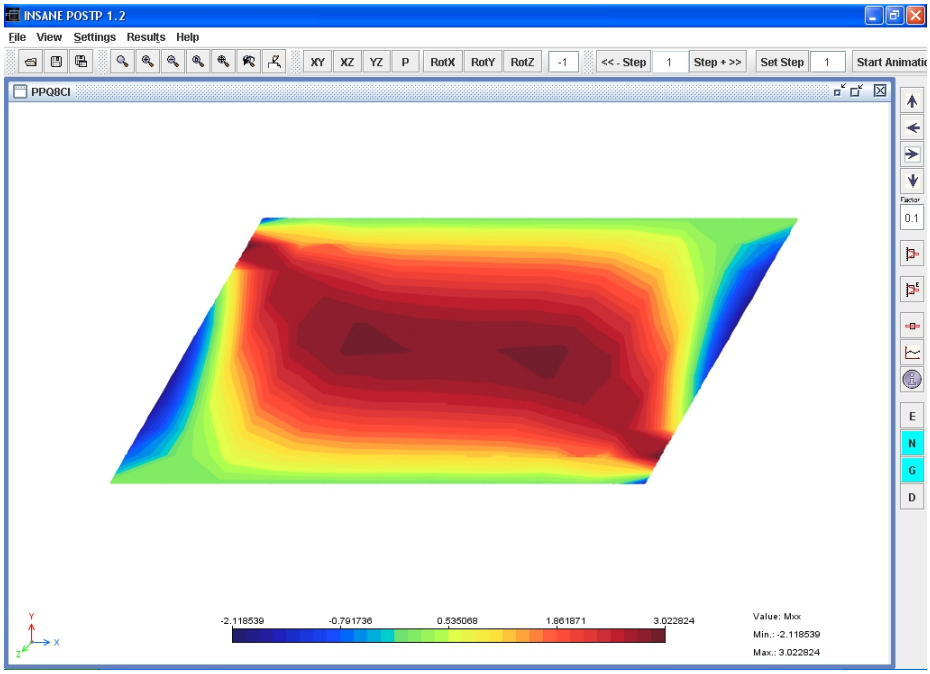
Tabela 7.2: Resultados obtidos na análise da placa paralelogrâmica

Elemento	w_{centro}	$M_{centro_{max}}$	Erro (%)	
			w	M
Q8	-0,0031669	7,3831154	-5,39	1,70
Q9	-0,0031360	7,3061053	-6,31	0,64

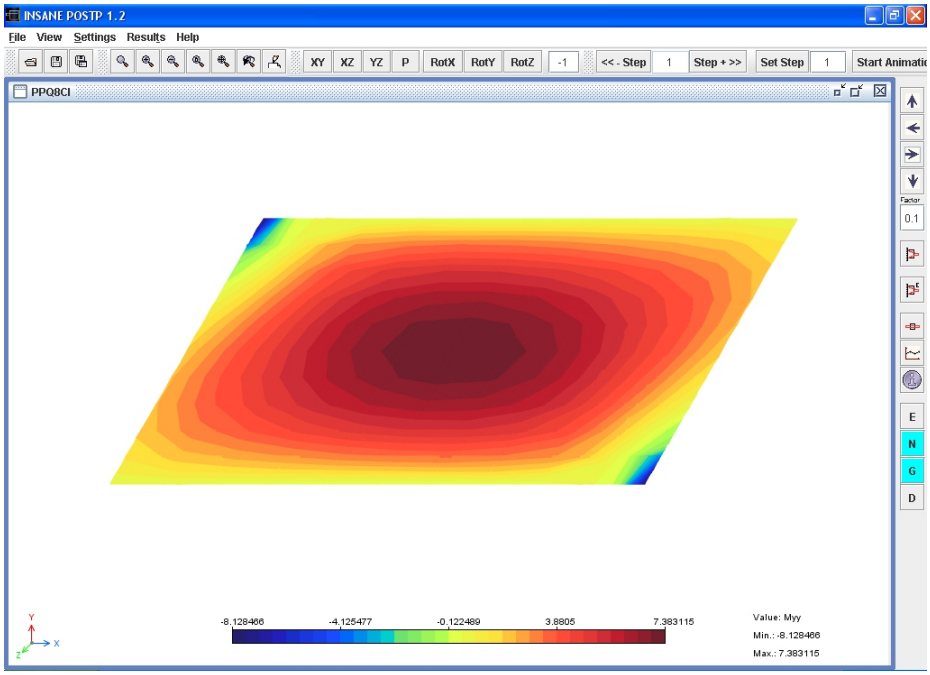
O comportamento ao longo de toda a placa do deslocamento vertical e dos momentos em ambas as análises são apresentados nas FIG. 7.10 e FIG. 7.11.



(a) Deslocamentos verticais

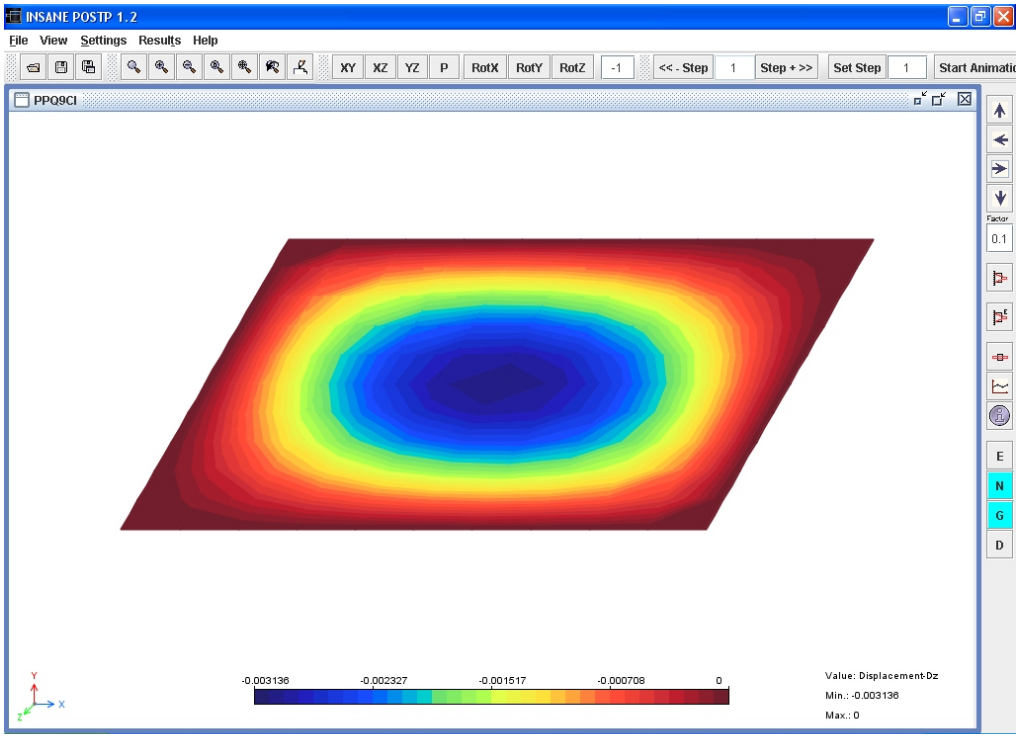


(b) Momento M_{xx}

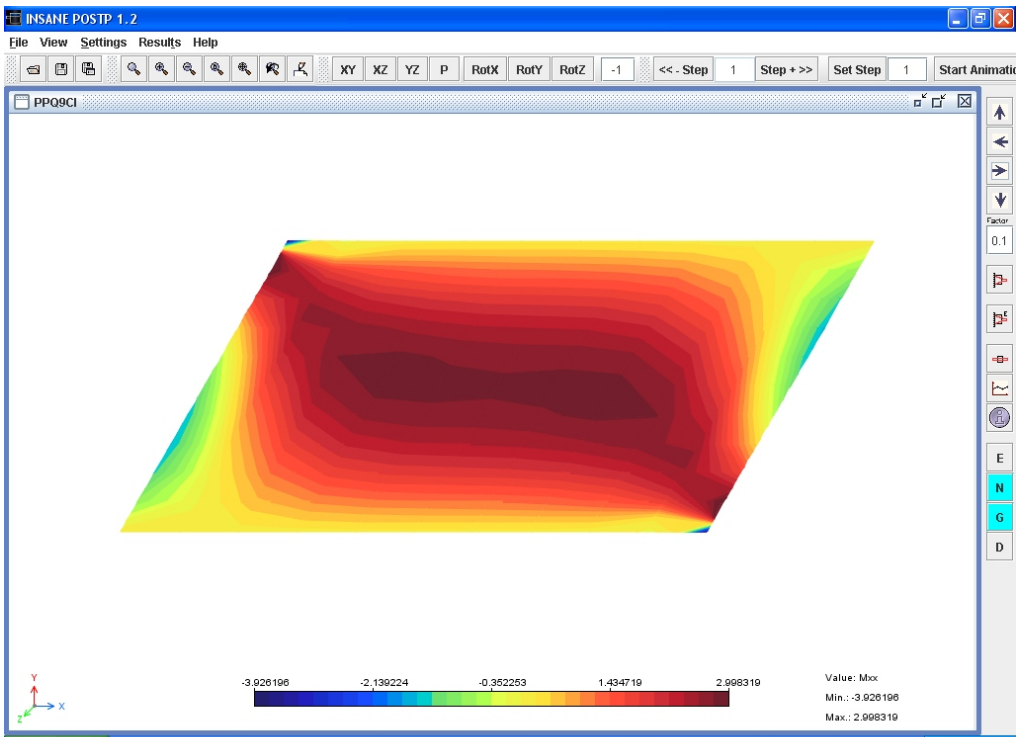


(c) Momento M_{yy}

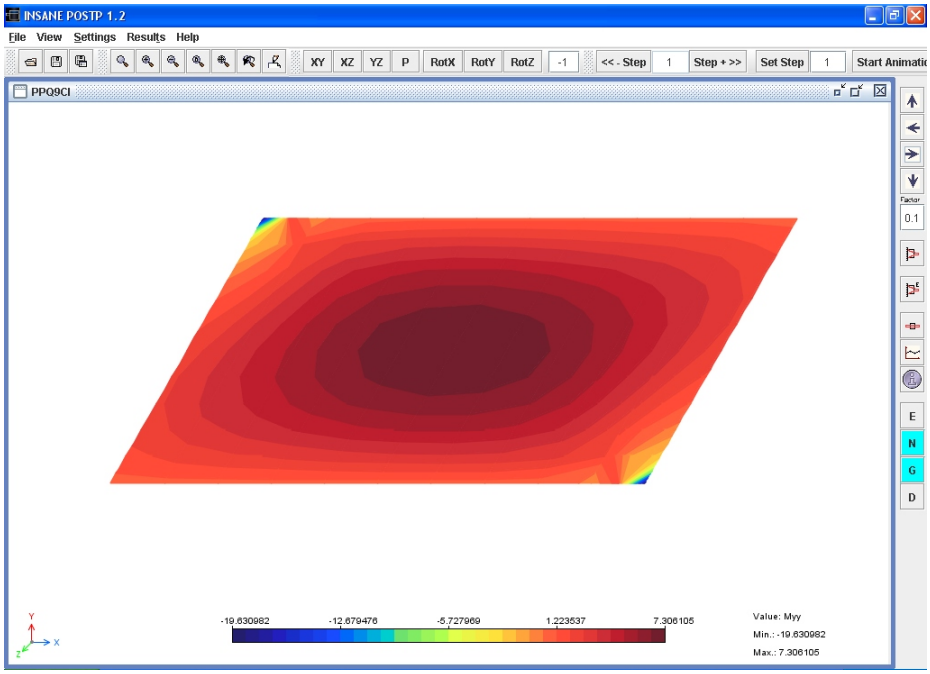
Figura 7.10: Grandezas analisadas da placa paralelogrâmica com elementos Q8



(a) Deslocamentos verticais



(b) Momento M_{xx}



(c) Momento M_{yy}

Figura 7.11: Grandezas analisadas da placa paralelogrâmica com elementos Q9

7.5 Placa Anular

Um outro exemplo analisado foi a placa da FIG. 7.12. Esta placa se encontra sob a ação de uma carga uniformemente distribuída ao longo do bordo interno e simplesmente apoiada em seu bordo externo. Ela é composta de um material linear elástico isotrópico, cujo módulo de elasticidade $E = 1\,092\,000\ uf/uc^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$.

Segundo Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) a solução analítica para o deslocamento vertical em qualquer ponto da placa é obtido a partir de:

$$w = \frac{Q\ b\ r^2}{4\ D}\left(ln\frac{r}{a} - 1\right) - \frac{C_1\ r^2}{4} - C_2\ ln\frac{r}{a} + C_3 \tag{7.13}$$

onde Q é a intensidade da carga distribuída, r é o raio onde se deseja avaliar o deslocamento vertical, a é o raio externo da placa e b é o raio interno da placa. As

constantes C_1, C_2 e C_3 são dadas por:

$$C_1 = \frac{Q\ b}{2\ D}\left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - \frac{2\ b^2}{a^2-b^2}\ ln\frac{b}{a}\right)$$

$$C_2 = -\frac{Q\ b\ (1+\nu)}{2\ D\ (1-\nu)}\ \frac{a^2\ b^2}{(a^2-b^2)}\ ln\frac{b}{a}$$

$$C_3 = \frac{Q\ b\ a^2}{4\ D}\left(1 + \frac{1-\nu}{2\ (1+\nu)} - \frac{b^2}{a^2-b^2}\ ln\frac{b}{a}\right) \tag{7.14}$$

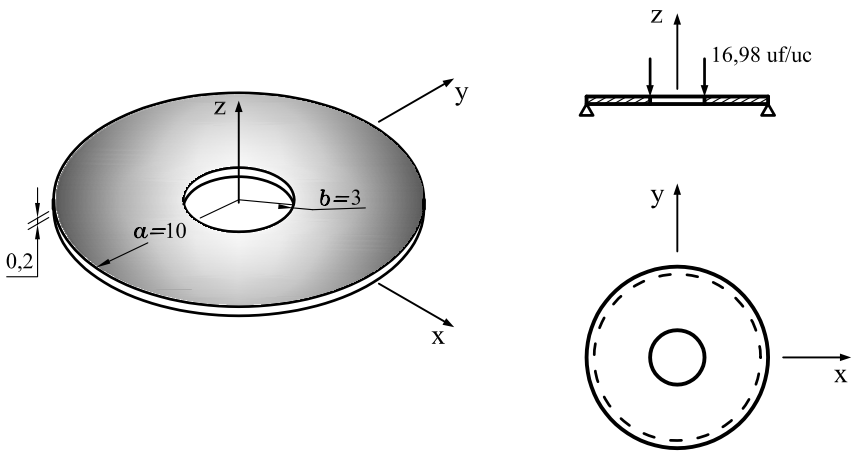


Figura 7.12: Placa anular simplesmente apoiada sob ação de um carregamento uniforme distribuído no bordo interno

Para analisar esta placa utilizou-se o elemento quadrilateral de quatro nós Q4. Por ser considerada placa fina, o uso da teoria de Reissner-Mindlin requer a aplicação de uma das técnicas apresentadas em seções anteriores para impedir o travamento da solução. Assim, aplicaram-se duas das técnicas apresentadas: a integração seletiva (IS) e a deformação de cortante imposta (CI).

Devido à dupla simetria existente no problema, somente 1/4 da placa foi analisado, conforme FIG. 7.13. A TAB. 7.3 apresenta mais detalhes sobre as discretizações adotadas.

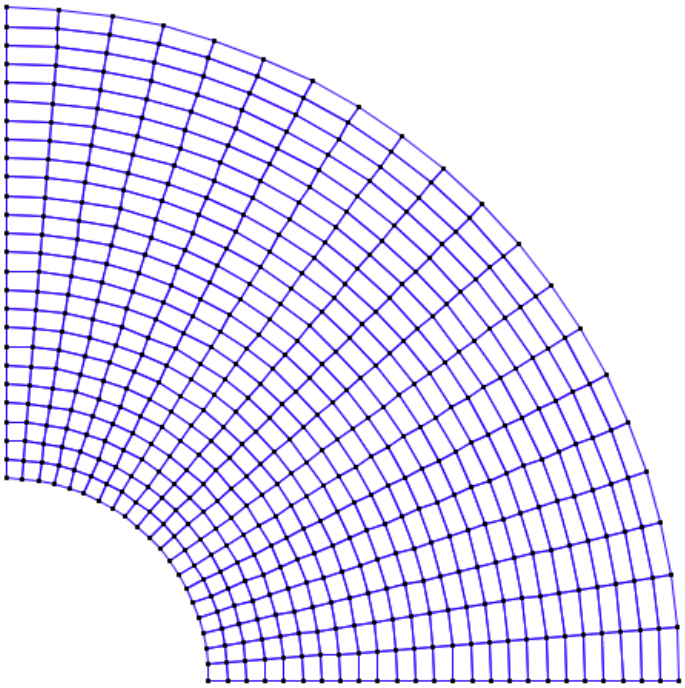


Figura 7.13: Malha utilizada na solução da placa anular

Tabela 7.3: Detalhes da discretização da placa anular

Elemento	Técnica Anti-bloqueio	Graus de Liberdade por Nó	Total de Elementos
Q4	IS	$u_z \;\; r_x \;\; r_y$	500
Q4	CI	$u_z \;\; r_x \;\; r_y$	500

A solução analítica deste problema permite obter o deslocamento vertical em qualquer ponto da placa. Assim, para confrontar os deslocamentos verticais obtidos, analiticamente e no (**INSANE**), fez-se uso dos nós ao longo da linha de simetria colinear à direção x.

A TAB. 7.4 apresenta os deslocamentos verticais e também os erros obtidos com a análise numérica. Para melhor visualização, estes valores são representados graficamente na FIG. 7.14.

Tabela 7.4: Deslocamentos verticais - Placa anular

Nó	r	Constantes			Deslocamento vertical			Erro (%)	
		C_1	C_2	C_3	Analítico	CI	IS	CI	IS
1	3,00	0,05563	-0,84765	-2,21001	-2,68627	-2,68838	-2,68011	0,078	-0,229
22	3,28	0,06650	-0,78483	-2,21001	-2,56617	-2,56814	-2,56024	0,077	-0,231
43	3,56	0,07834	-0,72716	-2,21001	-2,44871	-2,45056	-2,44302	0,076	-0,232
64	3,84	0,09115	-0,67385	-2,21001	-2,33332	-2,33506	-2,32788	0,075	-0,233
85	4,12	0,10492	-0,62430	-2,21001	-2,21957	-2,22121	-2,21437	0,074	-0,234
106	4,40	0,11967	-0,57801	-2,21001	-2,10714	-2,10868	-2,10220	0,073	-0,235
127	4,68	0,13539	-0,53457	-2,21001	-1,99581	-1,99725	-1,99111	0,073	-0,235
148	4,96	0,15207	-0,49366	-2,21001	-1,88537	-1,88673	-1,88093	0,072	-0,236
169	5,24	0,16972	-0,45500	-2,21001	-1,77572	-1,77699	-1,77152	0,072	-0,236
190	5,52	0,18835	-0,41835	-2,21001	-1,66674	-1,66793	-1,66280	0,072	-0,236
211	5,80	0,20794	-0,38351	-2,21001	-1,55837	-1,55948	-1,55468	0,071	-0,237
232	6,08	0,22850	-0,35032	-2,21001	-1,45056	-1,45160	-1,44713	0,071	-0,237
253	6,36	0,25003	-0,31862	-2,21001	-1,34329	-1,34424	-1,34010	0,071	-0,237
274	6,64	0,27253	-0,28829	-2,21001	-1,23652	-1,23740	-1,23360	0,071	-0,237
295	6,92	0,29600	-0,25921	-2,21001	-1,13027	-1,13107	-1,12759	0,071	-0,237
316	7,20	0,32044	-0,23128	-2,21001	-1,02453	-1,02526	-1,02211	0,071	-0,237
337	7,48	0,34585	-0,20442	-2,21001	-0,91932	-0,91997	-0,91714	0,071	-0,237
358	7,76	0,37222	-0,17855	-2,21001	-0,81464	-0,81522	-0,81271	0,071	-0,237
379	8,04	0,39957	-0,15359	-2,21001	-0,71053	-0,71104	-0,70884	0,071	-0,237
400	8,32	0,42789	-0,12949	-2,21001	-0,60701	-0,60744	-0,60557	0,071	-0,236
421	8,60	0,45717	-0,10619	-2,21001	-0,50410	-0,50446	-0,50290	0,071	-0,237
442	8,88	0,48743	-0,08363	-2,21001	-0,40184	-0,40213	-0,40090	0,072	-0,236
463	9,16	0,51865	-0,06177	-2,21001	-0,30027	-0,30049	-0,29956	0,072	-0,237
484	9,44	0,55084	-0,04057	-2,21001	-0,19941	-0,19956	-0,19895	0,073	-0,234
505	9,72	0,58400	-0,01999	-2,21001	-0,09931	-0,09938	-0,09908	0,074	-0,235
526	10,00	0,61813	0,00000	-2,21001	0,00000	0,00000	0,00000	0,000	0,000

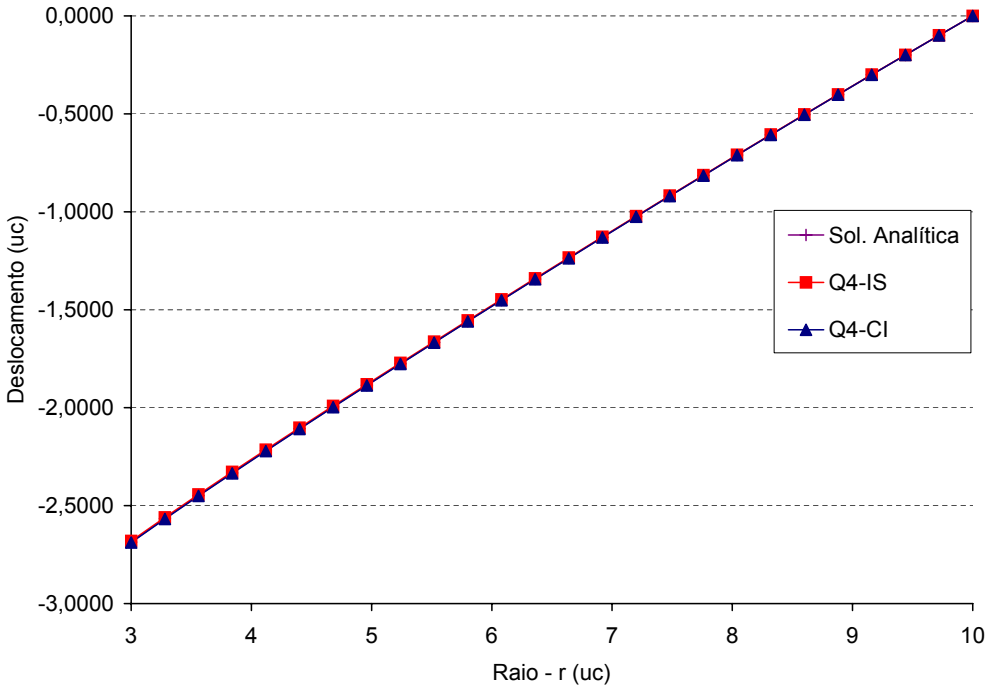
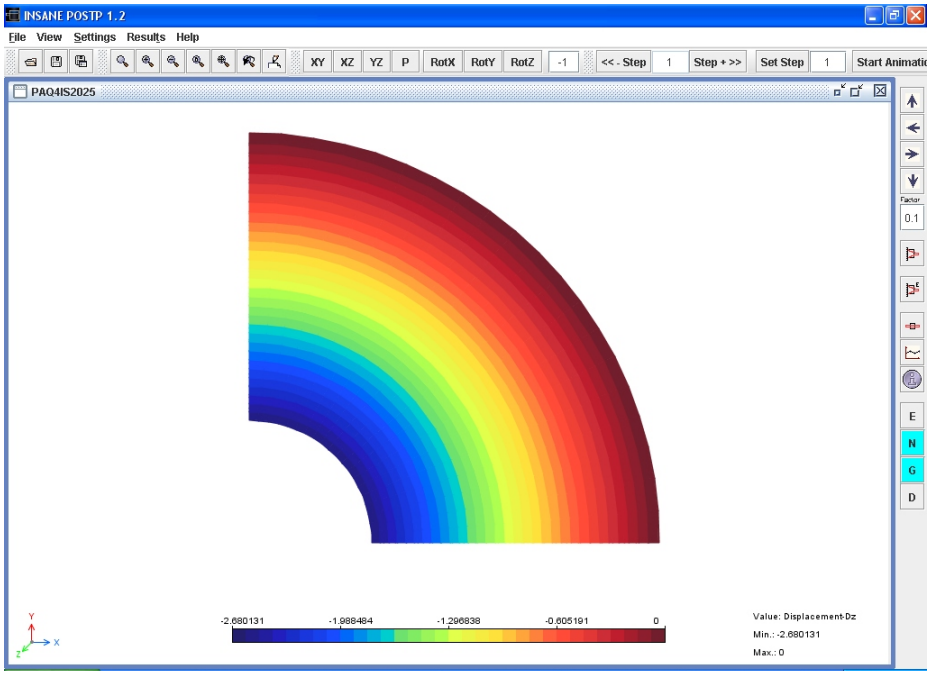
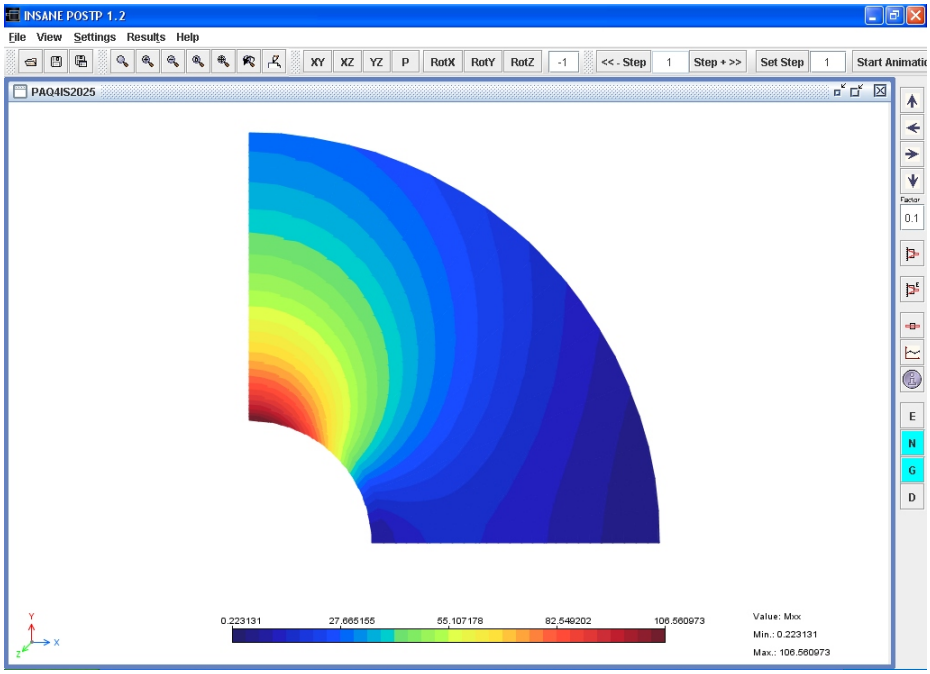


Figura 7.14: Deslocamentos verticais - Placa anular

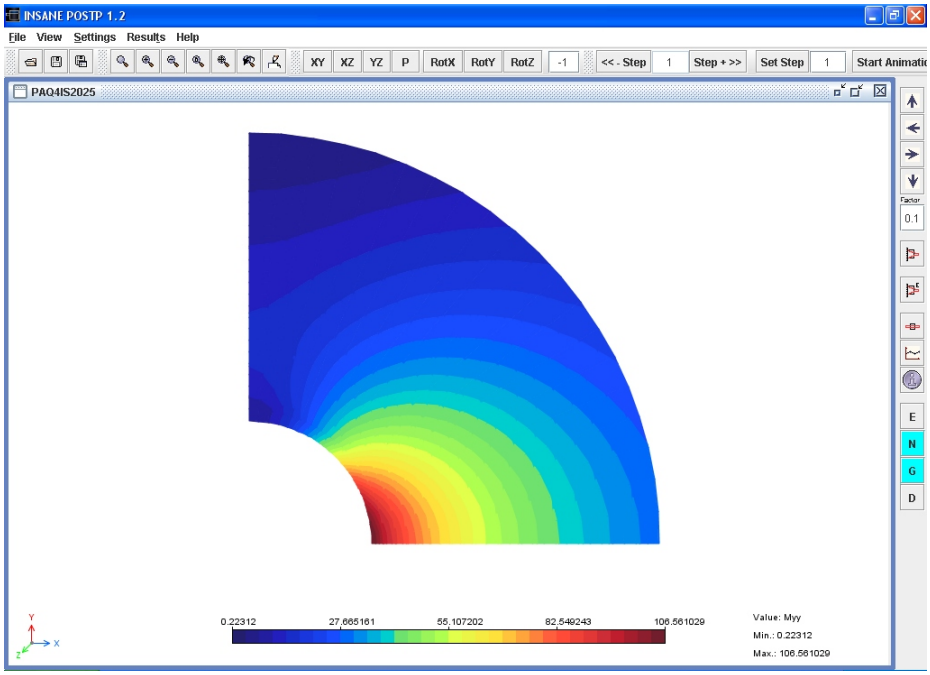
O comportamento ao longo de toda a placa do deslocamento vertical e dos momentos em ambas as análises são apresentados nas FIG. 7.15 e FIG. 7.16.



(a) Deslocamentos verticais

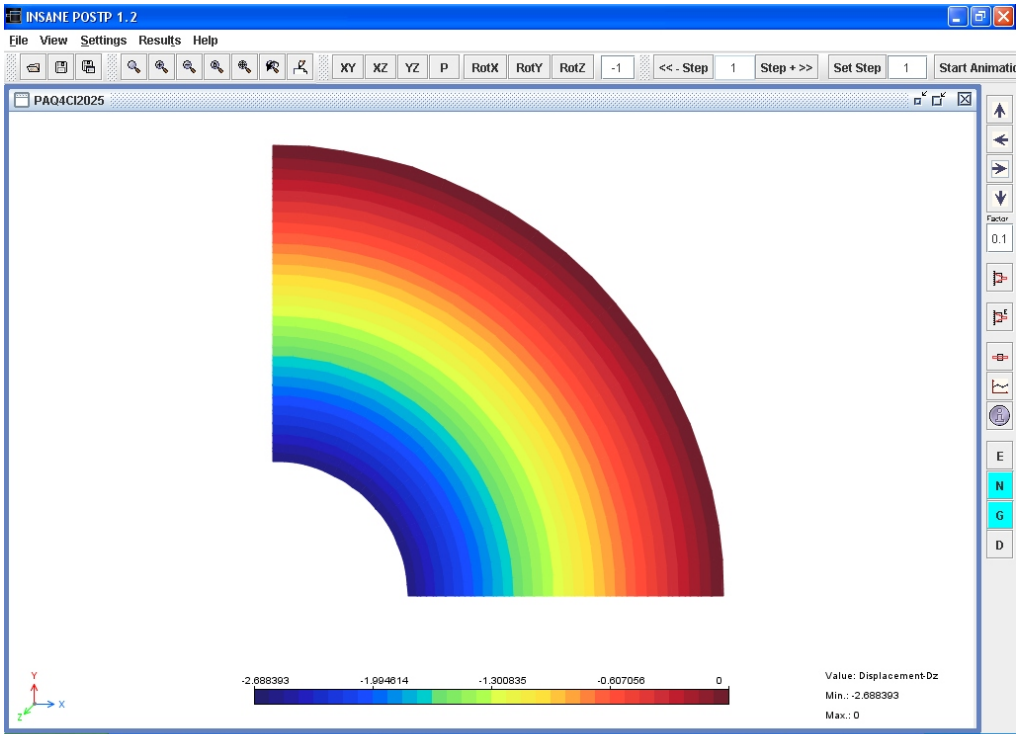


(b) Momento M_{xx}

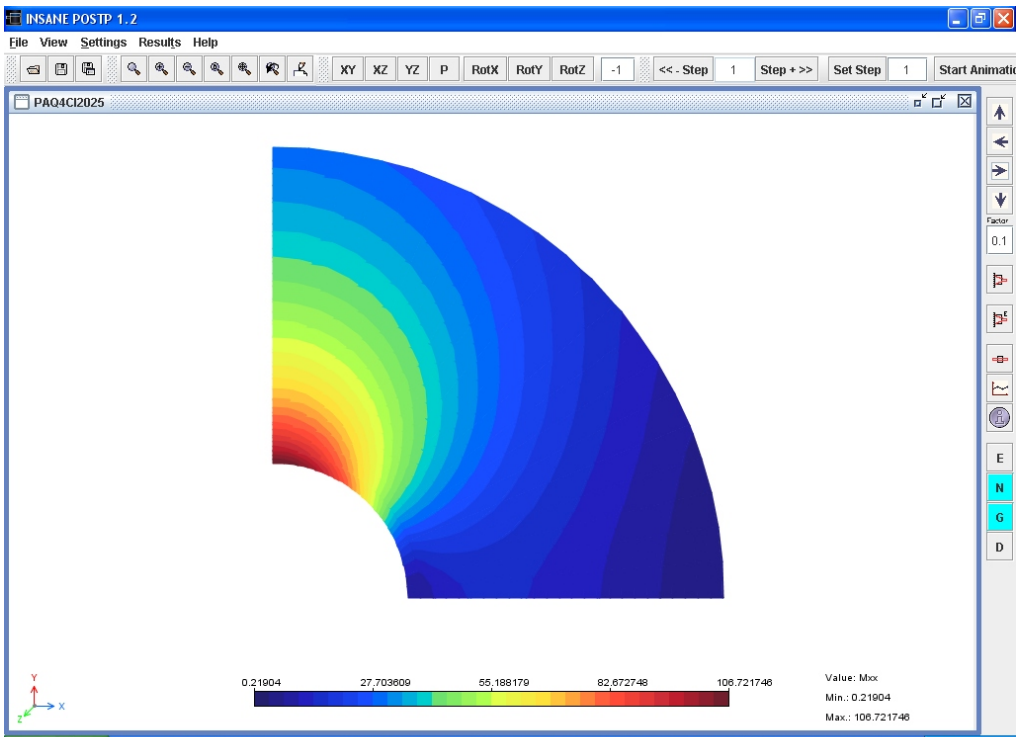


(c) Momento M_{yy}

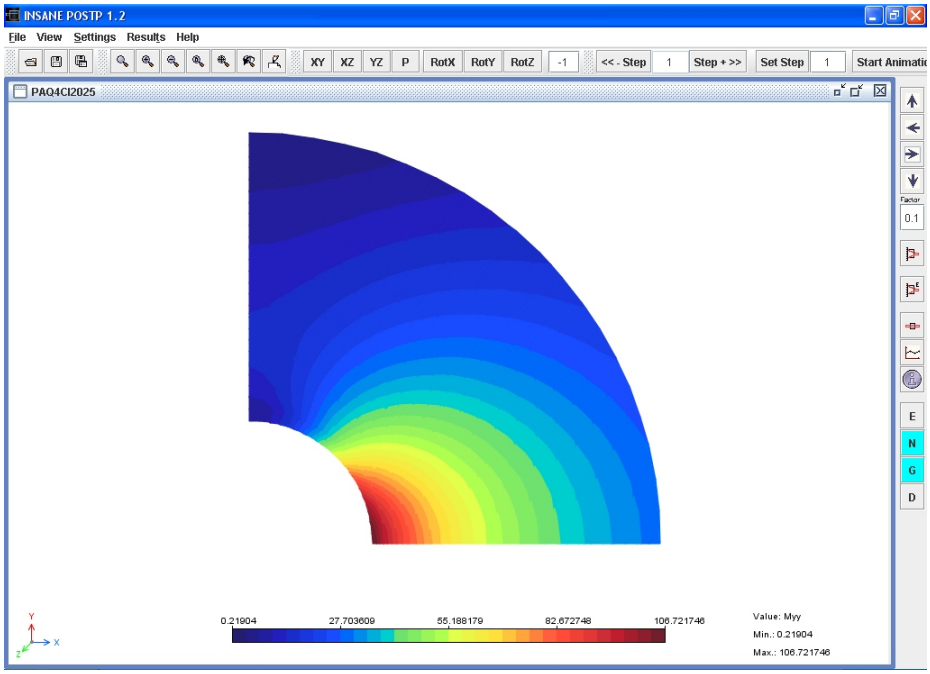
Figura 7.15: Grandezas analisadas da placa anular com integração seletiva



(a) Deslocamentos verticais



(b) Momento M_{xx}



(c) Momento M_{yy}

Figura 7.16: Grandezas analisadas da placa anular com a técnica de deformação de cortante imposta

7.6 Análise Crítica dos Resultados

Dos quatro casos estudados, verifica-se que somente na placa paralelogrâmica ocorreu um erro superior a 1% para o deslocamento vertical. De maneira geral, as discretizações utilizadas mostraram-se eficientes nas análises, mostrando a importância do estudo de convergência. Uma vez que se fez uso do mesmo para escolher os elementos a serem empregados nas análises.

Apesar de fornecer bons resultados para o deslocamento vertical avaliado na placa triangular, a discretização desta placa com elementos CKZ necessita ser refinada de forma a melhorar os resultados de momentos.

O emprego do elemento BFS na análise da placa retangular foi acertado, pois

conseguiu-se praticamente obter os valores analíticos das grandezas analisadas. Mostrando que este elemento se destaca em análises de placas finas de formatos retangulares.

Com base nos resultados obtidos na análise da placa paralelogrâmica, pode-se dizer que as discretizações utilizadas, assim como na placa triangular, necessitam de um refinamento para se aproximar da solução analítica. Vale destacar que entre estas discretizações o elemento Q8 forneceu melhores resultados do que o elemento Q9 para o deslocamento vertical, por outro lado para o momento com a discretização através do elemento Q9 foi obtido um erro menor.

Através das análises da placa anular foi possível comparar mais uma vez o comportamento entre duas técnicas anti-bloqueio (integração seletiva e deformação de cortante imposta). Os resultados apresentados na TAB. 7.4 reforçam ainda mais a tese de que a técnica de deformação de cortante imposta é superior às demais, pois, como pode ser visto, o erro obtido a partir desta técnica foi aproximadamente 3 vezes menor.

Um outro aspecto que deve ser considerado na análise da placa anular é o bom comportamento do elemento quadrilateral de quatro nós nesta situação em que se encontra distorcido.

Capítulo 8

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

8.1 Introdução

Neste capítulo apresentam-se dois exemplos de aplicação prática dos recursos disponibilizados. Os resultados destes exemplos são comparados com os obtidos através do programa comercial ANSYS (Versão 9.0).

No primeiro exemplo modela-se uma laje lisa, em seguida modela-se uma laje quadrada fazendo-se uso da discretização da espessura em camadas na comparação entre duas lajes, sendo uma sem armadura e outra com armadura em aço, ilustrando este recurso, implementado por Fonseca (2006), numa análise de placas.

8.2 Laje Lisa

A FIG. 8.1 apresenta uma laje submetida a um carregamento uniformemente distribuído igual a -10 kN/m^2 e apoiada por pilares. Esta laje é composta por um material cujas propriedades mecânicas são: módulo de elasticidade (E) igual a 20 000 000 kN/m^2 e coeficiente de Poisson (ν) igual a 0,2; e a espessura é constante e igual a 0,2 m.

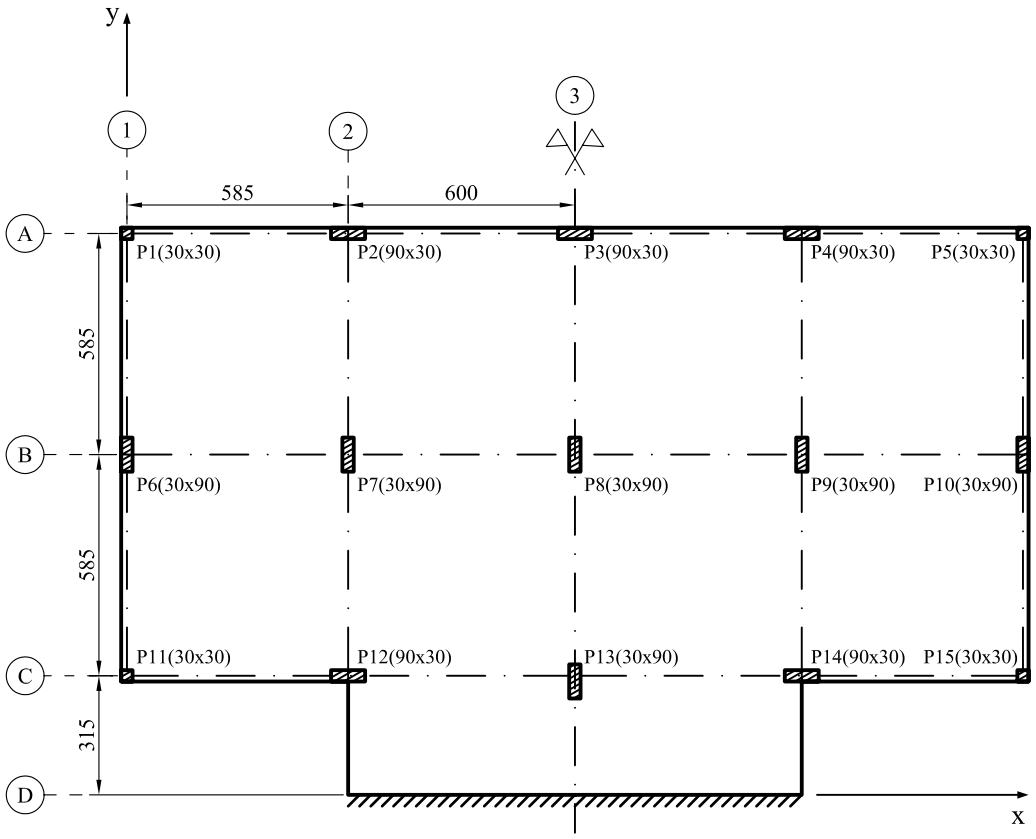
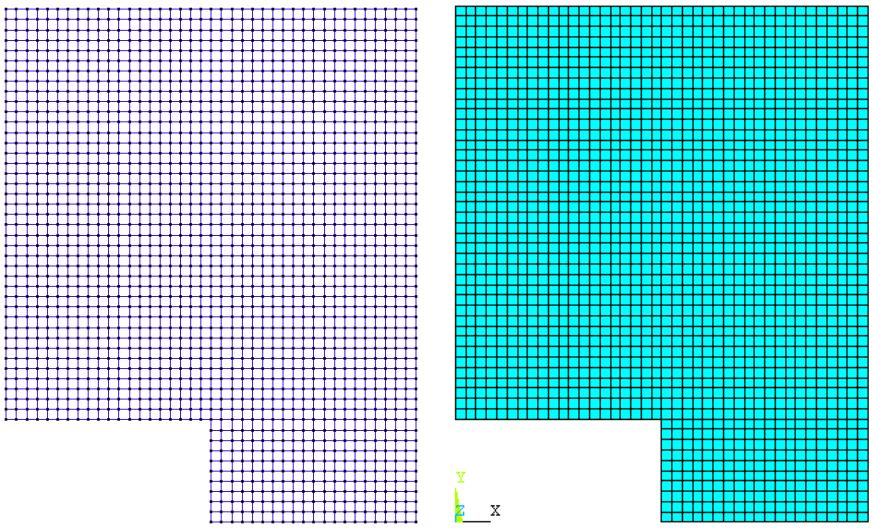


Figura 8.1: Dimensões da laje lisa

Quanto às condições de contorno, consideraram-se os pilares como apoios simples, impedindo apenas o deslocamento vertical. Ao longo do eixo "D", engastou-se todo o bordo, impedindo qualquer movimento do mesmo. No eixo de simetria "3", restringiu-se a rotação θ_x.

A laje em questão foi analisada tanto no **INSANE** quanto no ANSYS. A discretização da mesma em ambos os softwares (FIG. 8.2) foi igual em relação ao número de elementos e nós. No modelo para o **INSANE**, adotou-se o elemento quadrilateral de quatro nós isoparamétrico com a técnica de deformação de cortante imposta (Q4-CI). No modelo para o ANSYS adotou-se o elemento SHELL63 (ver ANSYS (Versão 9.0)). Os graus de liberdade de cada nó destes elementos, bem como as dimensões dos mesmos e o número total de elementos estão mostrados na TAB. 8.1 e na FIG. 8.3.



(a) **INSANE** (b) ANSYS

Figura 8.2: Discretização da laje lisa

Tabela 8.1: Detalhes da discretização da laje lisa

Software	Elemento	Graus de Liberdade por Nó	Dimensão ($m \times m$)	Total de Elementos
INSANE	Q4-CI	$u_z \quad r_x \quad r_y$	0,30×0,30	1800
ANSYS	SHELL63	$u_x \quad u_y \quad u_z \quad r_x \quad r_y \quad r_z$	0,30×0,30	1800

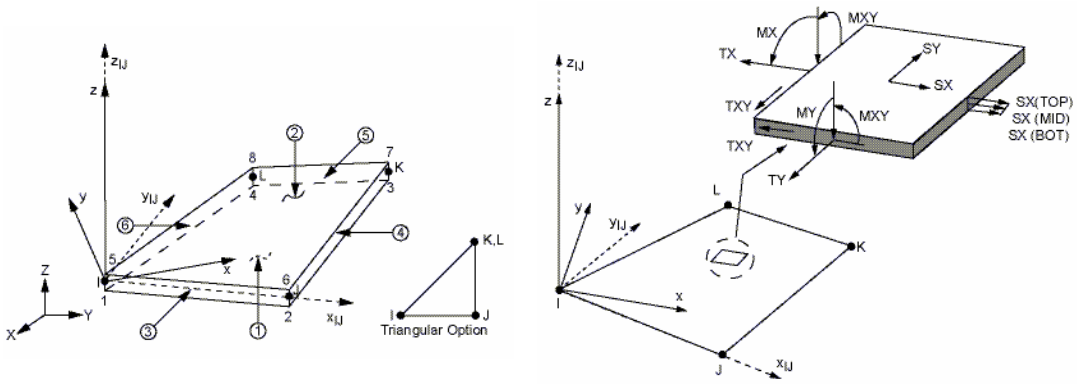
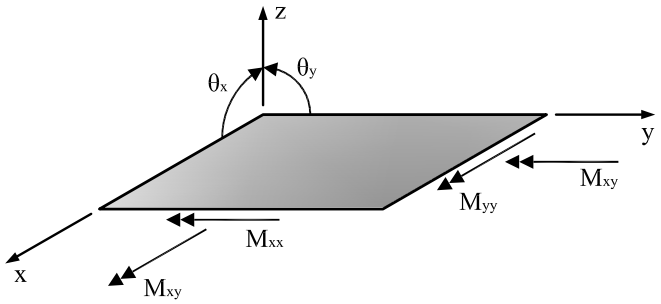


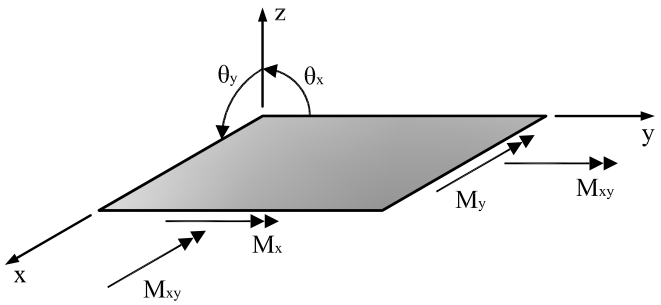
Figura 8.3: Elemento SHELL63 (imagens retiradas do manual do ANSYS)

Diversas grandezas foram escolhidas para comparar os resultados obtidos nesta análise. Vale ressaltar que, devido à diferença entre as convenções de sinais e direções adotas, conforme exposto nas FIGs. 8.4(a) e 8.4(b). Todos os momentos possuem sentidos opostos, também, a rotação θ_y do ANSYS é na verdade a rotação θ_x com

sinal trocado do **INSANE**. Assim, os resultados apresentados a seguir seguem a convenção utilizada no **INSANE** (FIG. 8.4(a)), que é a proposta neste trabalho.



(a) **INSANE**



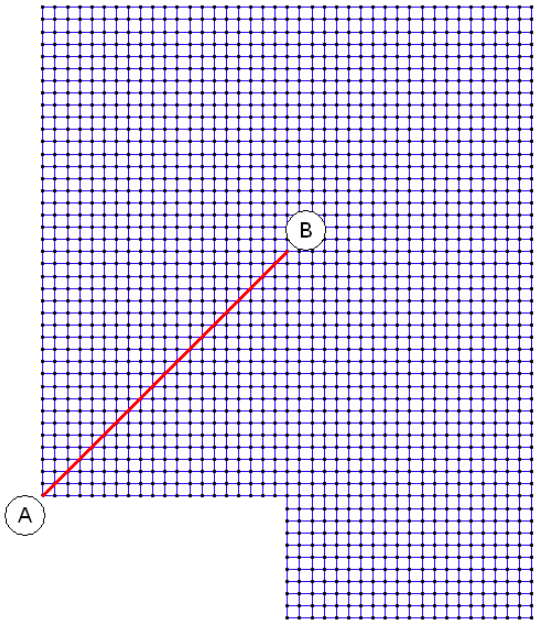
(b) ANSYS

Figura 8.4: Convenção de sinais adotada

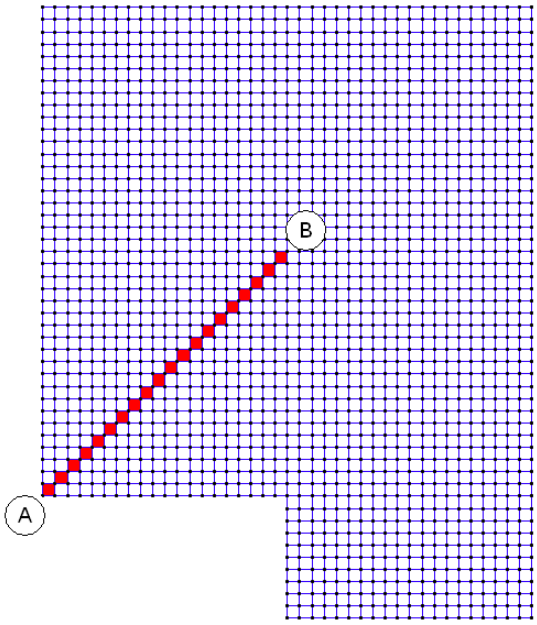
A FIG. 8.6 mostra as configurações deformadas dos modelos e a FIG. 8.7 mostra as variações dos deslocamentos verticais. As variações das rotações θ_x estão mostradas na FIG. 8.9, enquanto que as rotações θ_y estão mostradas na FIG. 8.11. Finalizando, as variações dos momentos fletores M_{xx} estão mostrados na FIG. 8.13, as variações dos momentos fletores M_{yy} estão mostradas na FIG. 8.15 e as variações dos momentos de torção M_{xy} estão mostradas na FIG. 8.17.

Após cada grandeza analisada é apresentado um gráfico onde compararam-se os resultados obtidos entre os softwares **INSANE** e ANSYS. Para comparar o deslocamento vertical e as rotações (θ_x e θ_y) foram escolhidos os nós contidos na reta AB mostrada na FIG. 8.5(a). Entretanto, para comparação dos momentos, uma

vez que o ANSYS informa esta grandeza somente por elemento, foram escolhidos os elementos que encontram-se destacados na FIG. 8.5(b).

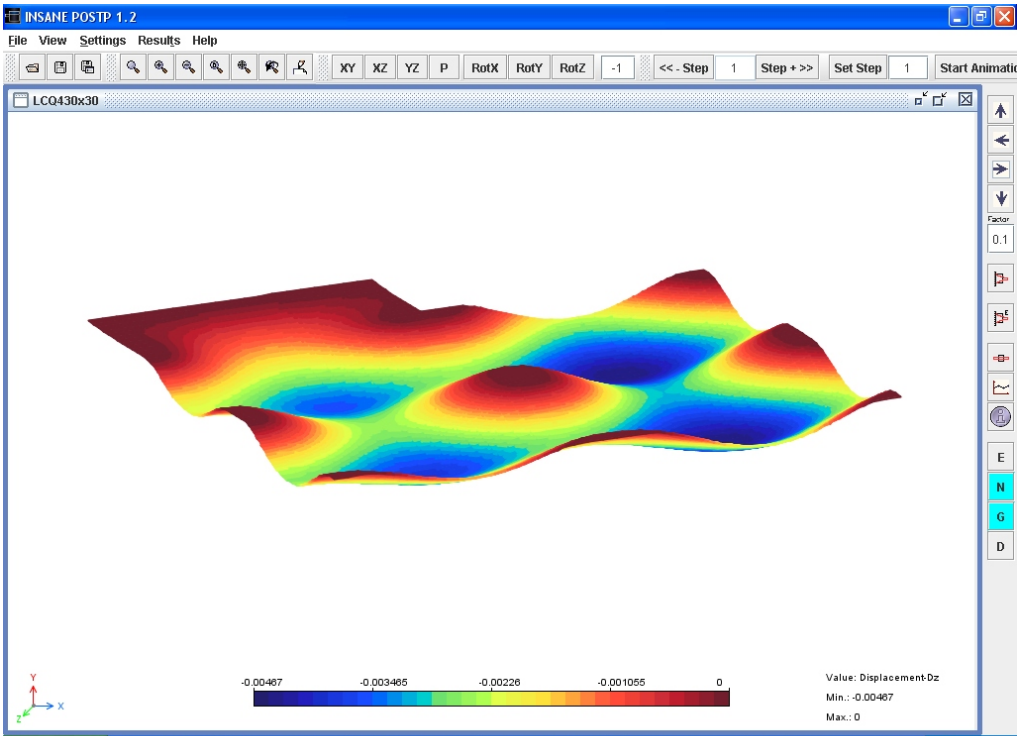


(a) Nós escolhidos para comparação do deslocamento vertical e rotações

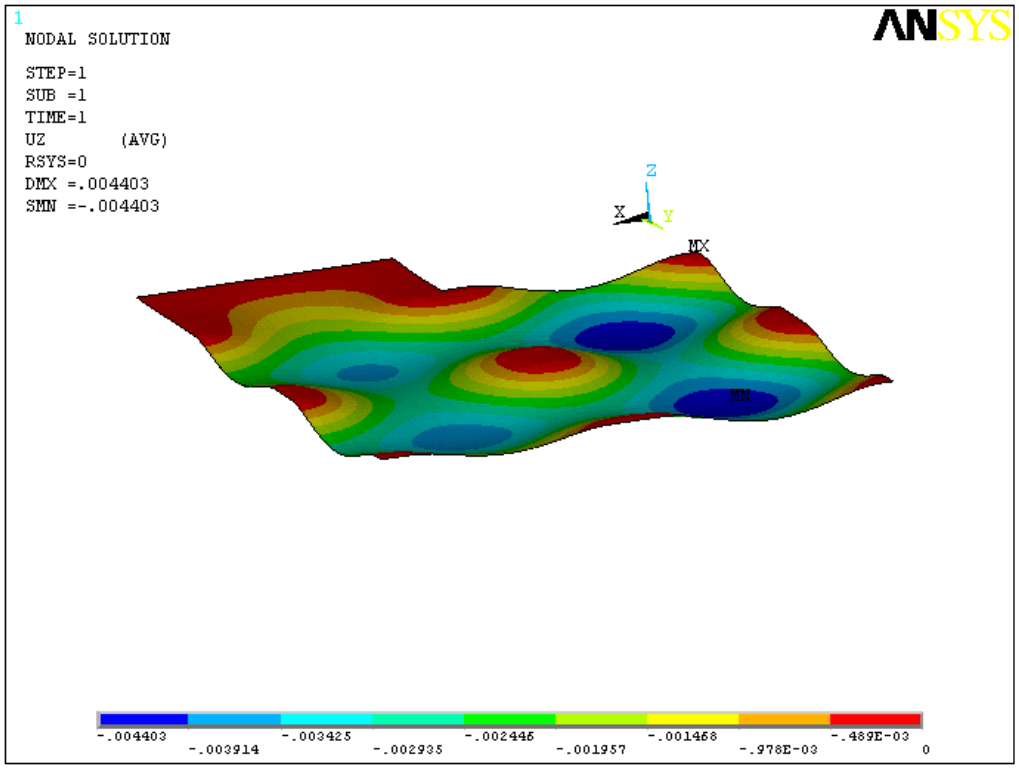


(b) Elementos escolhidos para comparação dos momentos

Figura 8.5: Nós e elementos escolhidos para comparação das grandezas na laje lisa

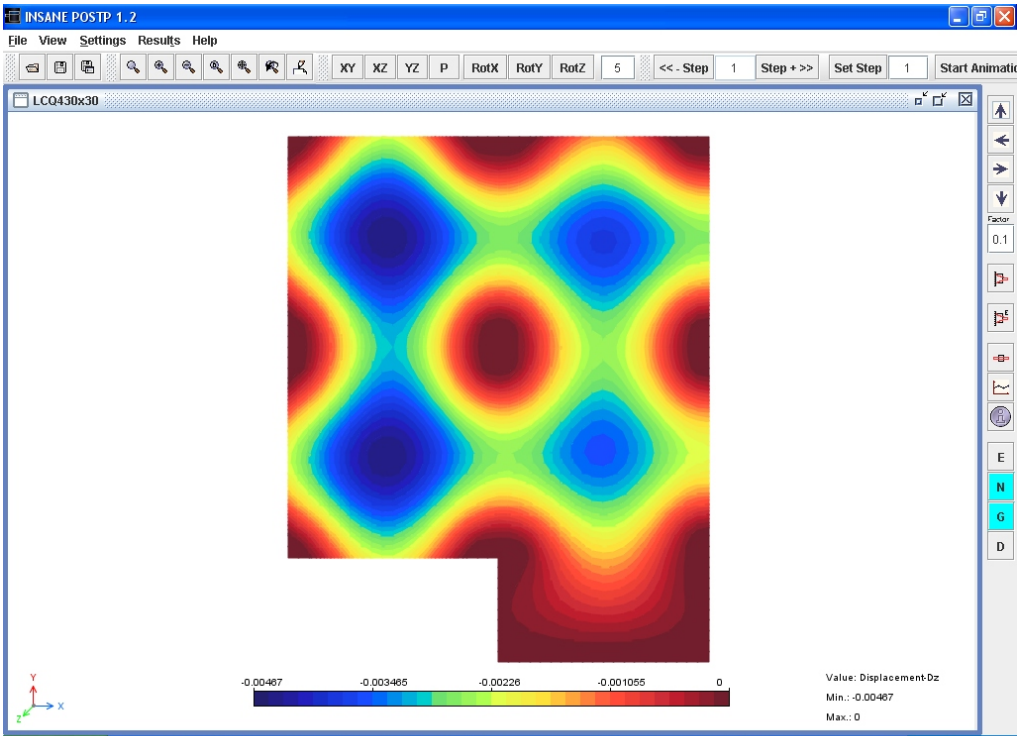


(a) **INSANE**

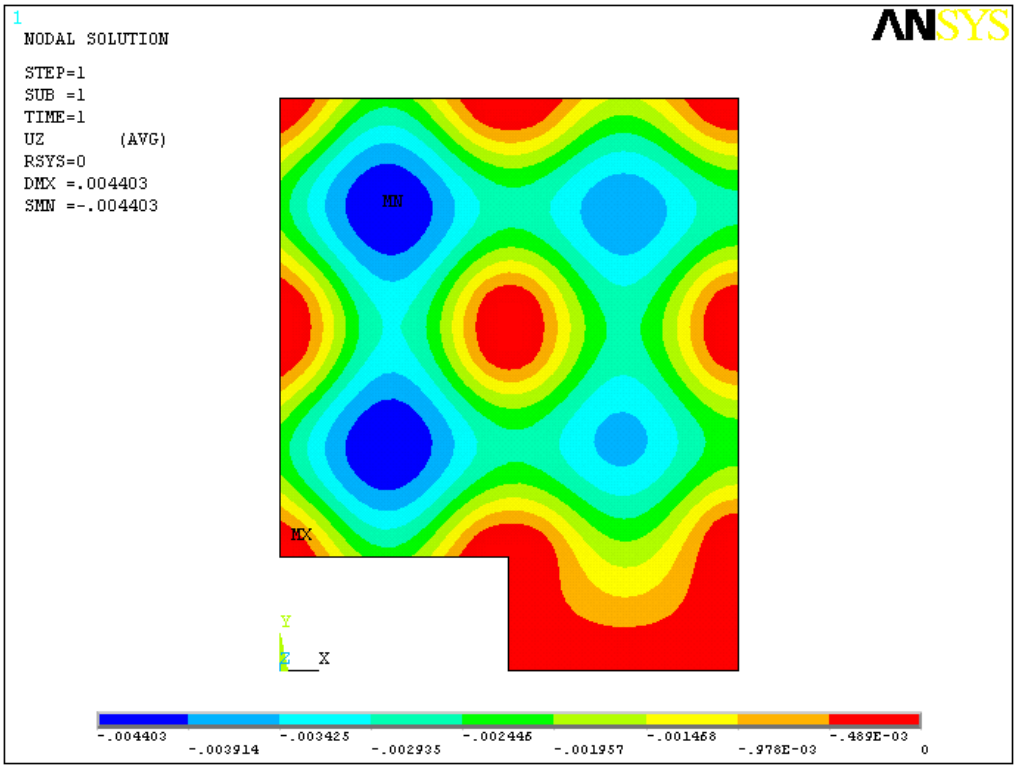


(b) ANSYS

Figura 8.6: Configuração da malha deformada



(a) **INSANE**



(b) ANSYS

Figura 8.7: Deslocamento vertical

Tabela 8.2: Deslocamento vertical dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.5(a)

Pontos	Nós	Deslocamento vertical (m)	
		INSANE	ANSYS
A	1	0,000000	0,000000
|	2	0,000000	0,000000
|	3	-0,000703	-0,000587
|	4	-0,001584	-0,001399
|	5	-0,002442	-0,002212
|	6	-0,003191	-0,002933
|	7	-0,003794	-0,003519
|	8	-0,004240	-0,003958
|	9	-0,004527	-0,004245
|	10	-0,004665	-0,004388
|	11	-0,004659	-0,004393
|	12	-0,004515	-0,004263
|	13	-0,004234	-0,003999
|	14	-0,003816	-0,003601
|	15	-0,003262	-0,003071
|	16	-0,002585	-0,002421
|	17	-0,001816	-0,001683
|	18	-0,001017	-0,000920
|	19	-0,000316	-0,000265
↓	20	0,000000	0,000000
B	21	0,000000	0,000000

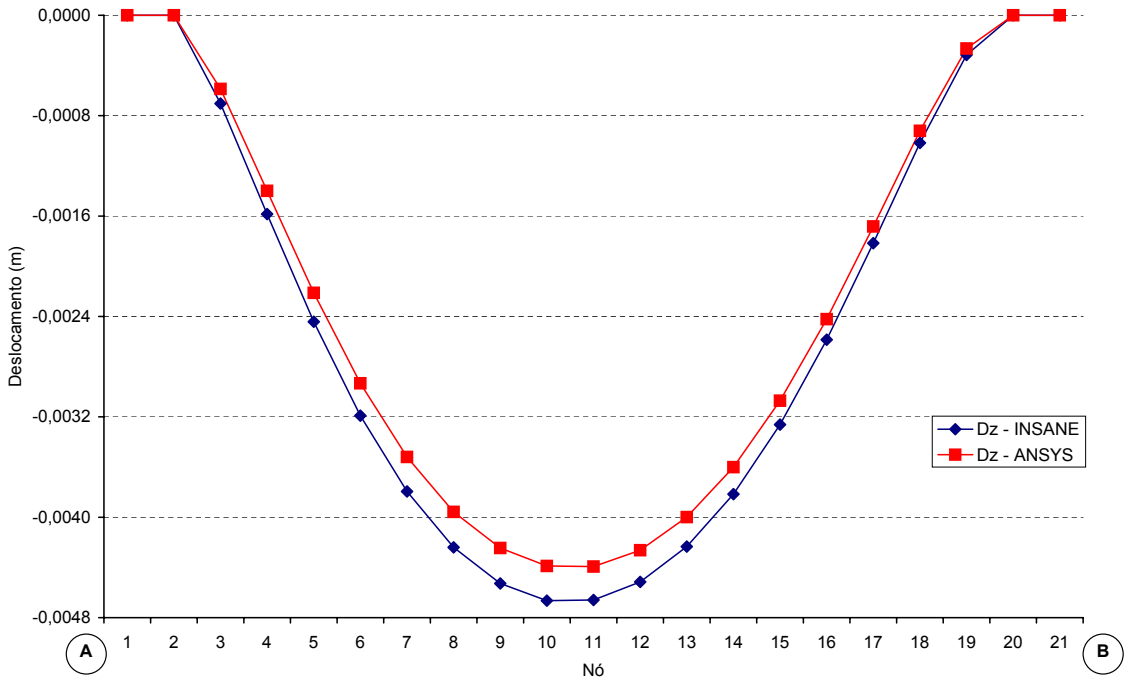
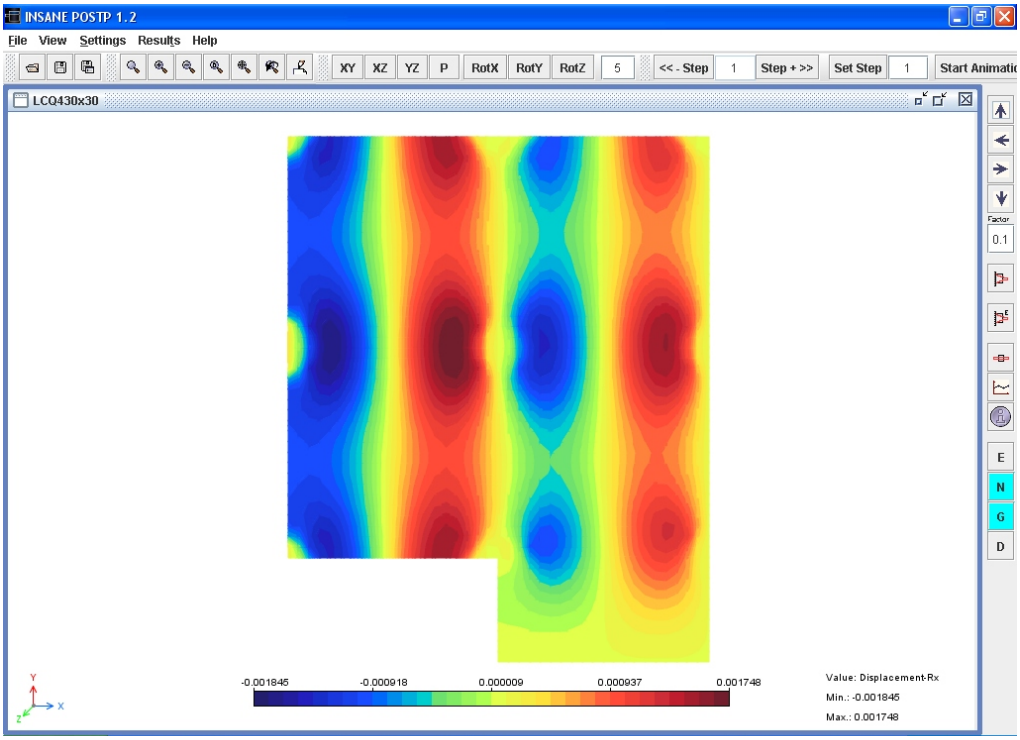
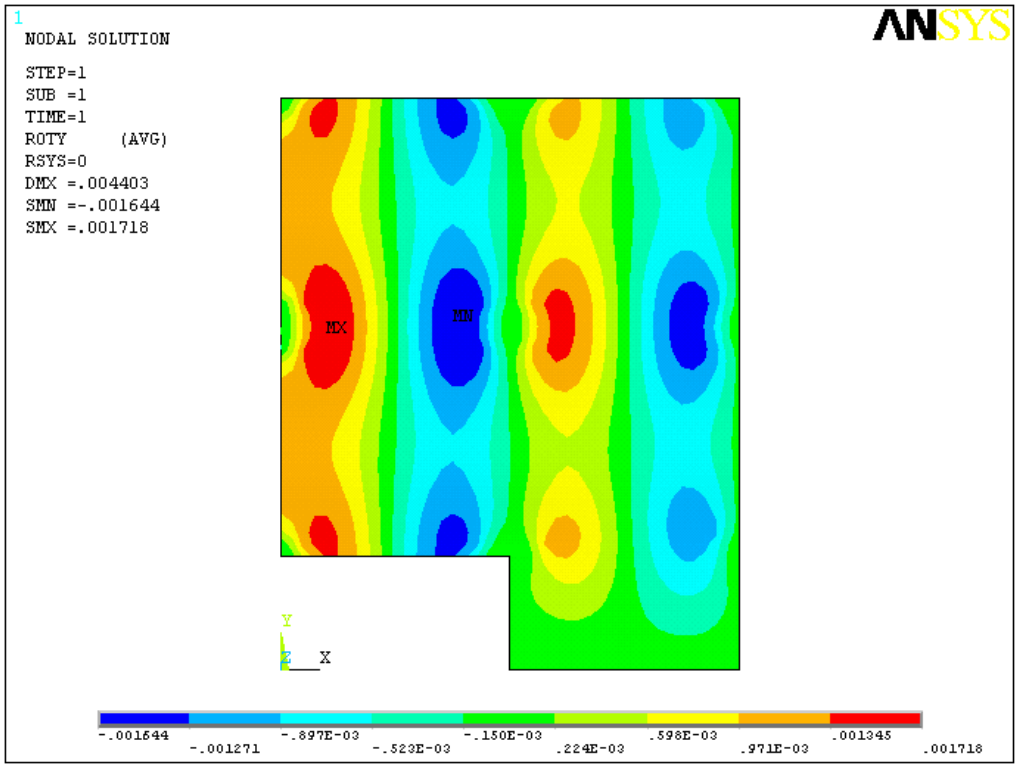


Figura 8.8: Deslocamento vertical dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.5(a)



(a) **INSANE**



(b) ANSYS

Figura 8.9: Rotação θ_x

Tabela 8.3: Rotação θ_x dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.5(a)

Pontos	Nós	Rotação θ_x (rad)	
		INSANE	ANSYS
A	1	0,000051	0,000090
|	2	-0,000549	-0,000423
|	3	-0,001373	-0,001257
|	4	-0,001480	-0,001392
|	5	-0,001356	-0,001297
|	6	-0,001136	-0,001098
|	7	-0,000876	-0,000855
|	8	-0,000607	-0,000600
|	9	-0,000344	-0,000348
|	10	-0,000092	-0,000106
|	11	0,000152	0,000130
|	12	0,000394	0,000366
|	13	0,000640	0,000604
|	14	0,000889	0,000847
|	15	0,001132	0,001084
|	16	0,001349	0,001294
|	17	0,001501	0,001439
|	18	0,001526	0,001452
|	19	0,001301	0,001193
↓	20	0,000273	0,000218
B	21	-0,000007	-0,000006

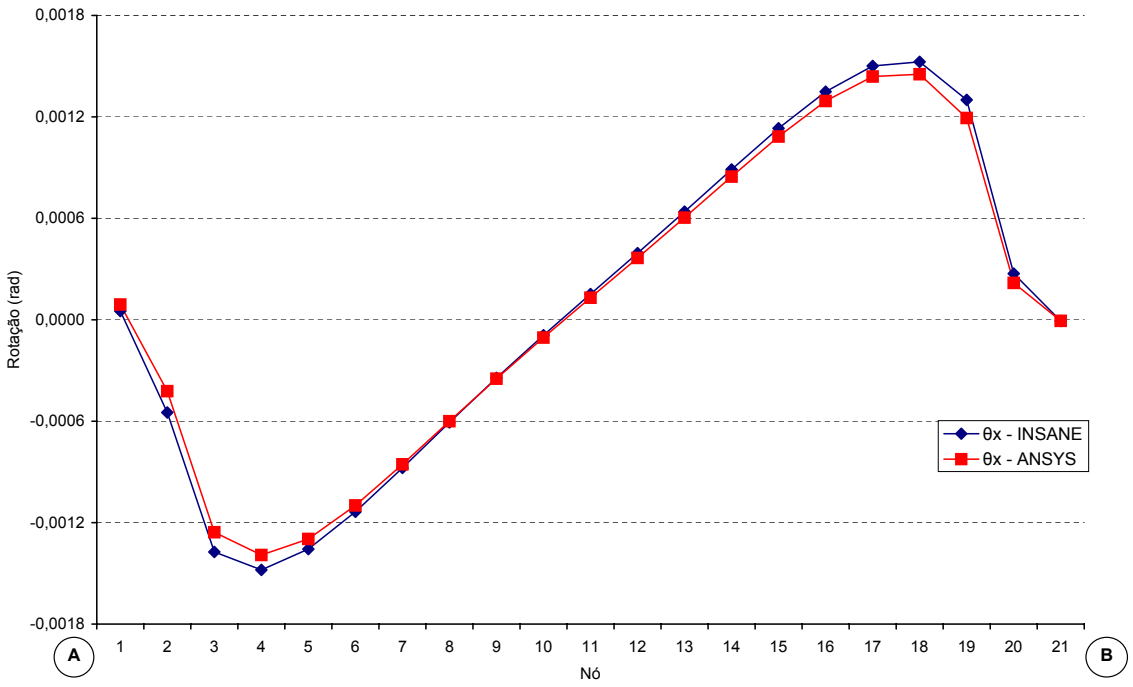
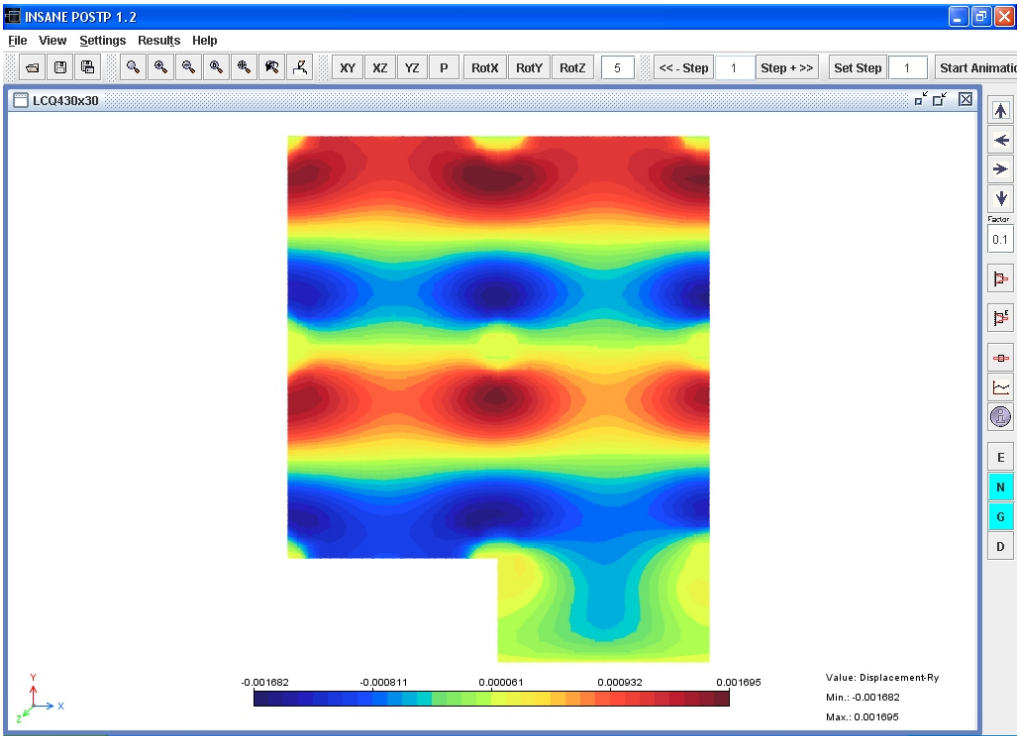
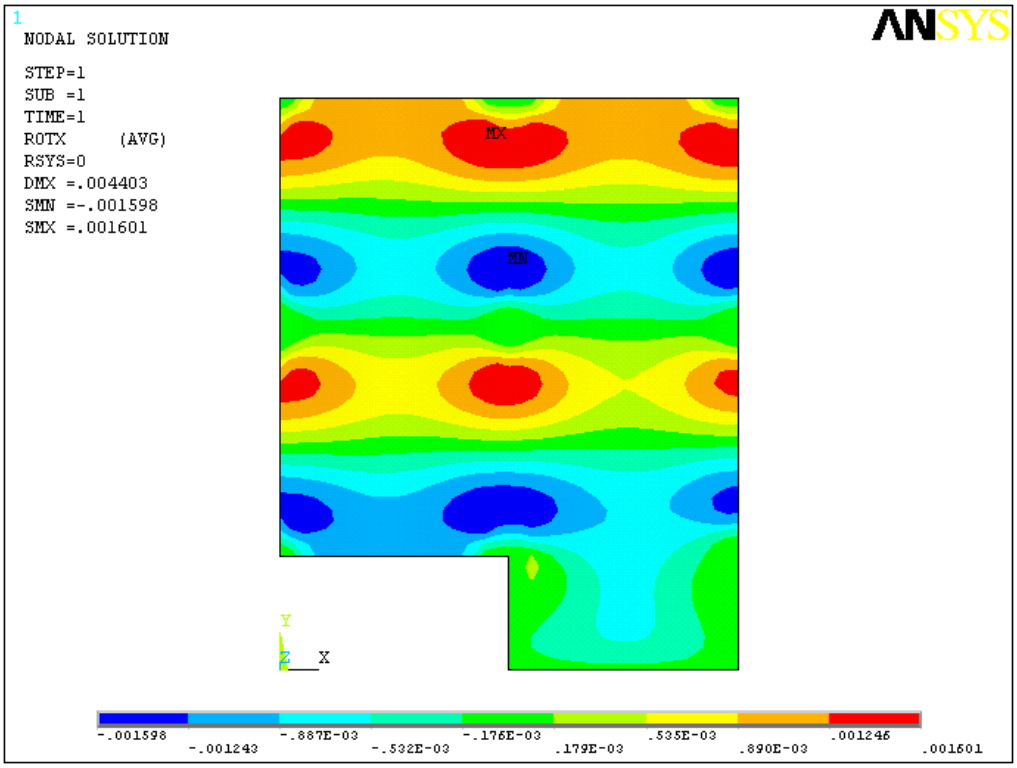


Figura 8.10: Rotação θ_x dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.5(a)



(a) **INSANE**



(b) ANSYS

Figura 8.11: Rotação θ_y

Tabela 8.4: Rotação θ_y dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.5(a)

Pontos	Nós	Rotação θ_y (rad)	
		INSANE	ANSYS
A	1	0,000049	0,000088
|	2	-0,000545	-0,000420
|	3	-0,001365	-0,001251
|	4	-0,001469	-0,001384
|	5	-0,001347	-0,001290
|	6	-0,001129	-0,001095
|	7	-0,000874	-0,000856
|	8	-0,000613	-0,000608
|	9	-0,000361	-0,000366
|	10	-0,000124	-0,000137
|	11	0,000099	0,000080
|	12	0,000315	0,000291
|	13	0,000527	0,000499
|	14	0,000735	0,000703
|	15	0,000928	0,000892
|	16	0,001082	0,001042
|	17	0,001153	0,001109
|	18	0,001059	0,001010
|	19	0,000642	0,000550
↓	20	-0,0000640	-0,000078
B	21	0,000000	0,000000

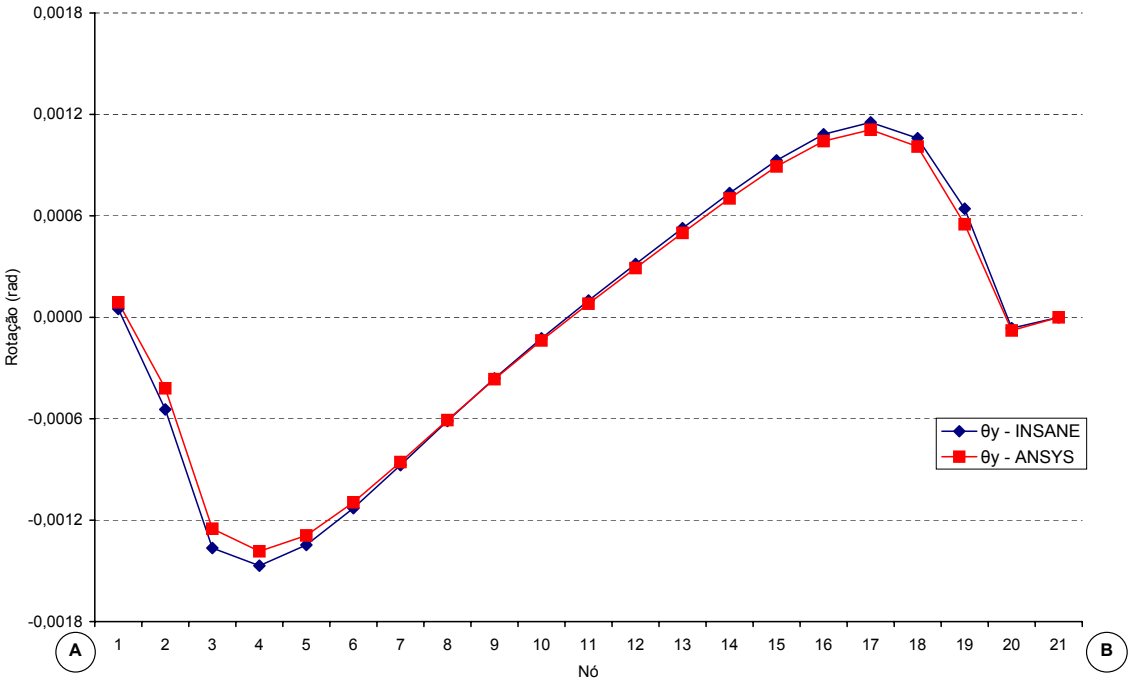
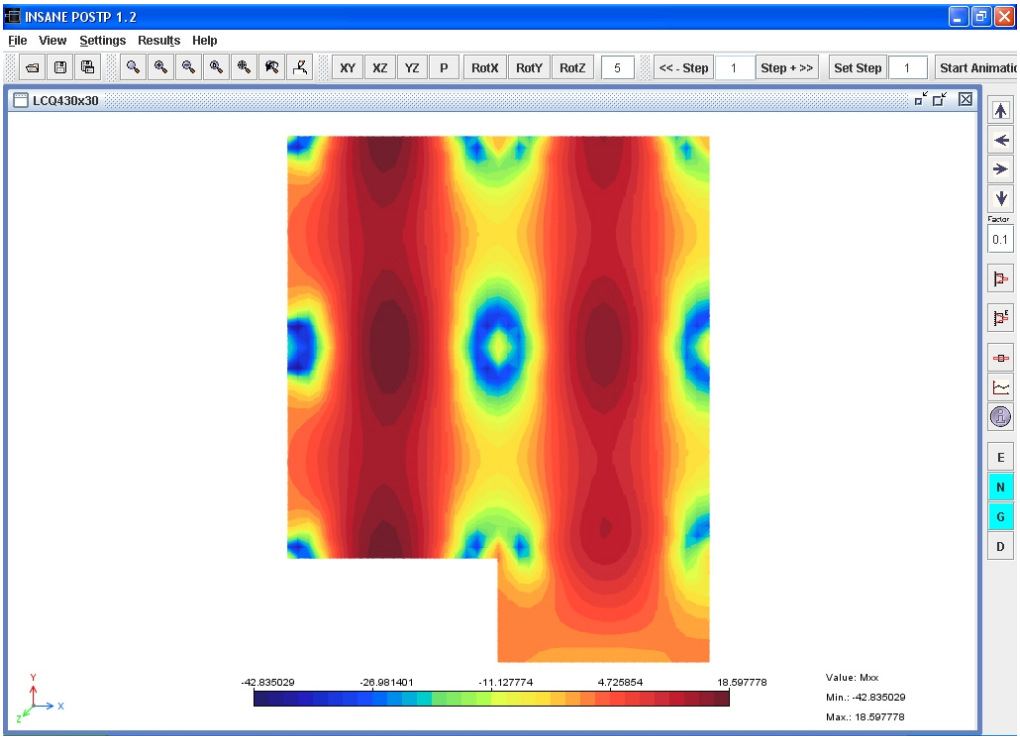
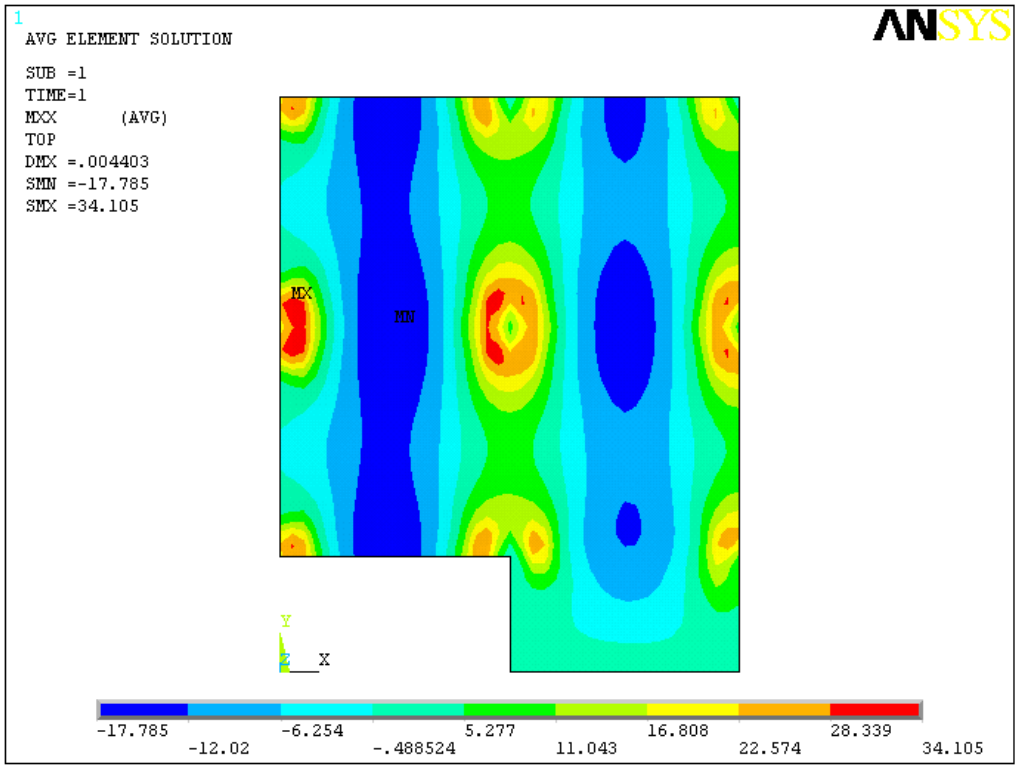


Figura 8.12: Rotação θ_y dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.5(a)



(a) **INSANE**



(b) ANSYS

Figura 8.13: Momento M_{xx}

Tabela 8.5: Momento M_{xx} dos elementos contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.5(b)

Pontos	Elementos	Momento M_{xx} $(kN \cdot m/m)$	
		INSANE	ANSYS
A	1	-28,040	-21,295
|	2	-23,974	-34,414
|	3	-7,896	-9,630
|	4	1,247	0,271
|	5	6,743	5,985
|	6	10,159	9,550
|	7	12,256	11,763
|	8	13,427	13,034
|	9	13,910	13,609
|	10	13,855	13,632
|	11	13,326	13,163
|	12	12,292	12,175
|	13	10,635	10,562
|	14	8,152	8,134
|	15	4,547	4,607
|	16	-0,614	-0,445
|	17	-8,113	-7,765
|	18	-20,197	-19,216
↓	19	-31,641	-40,331
B	20	-17,980	-9,214

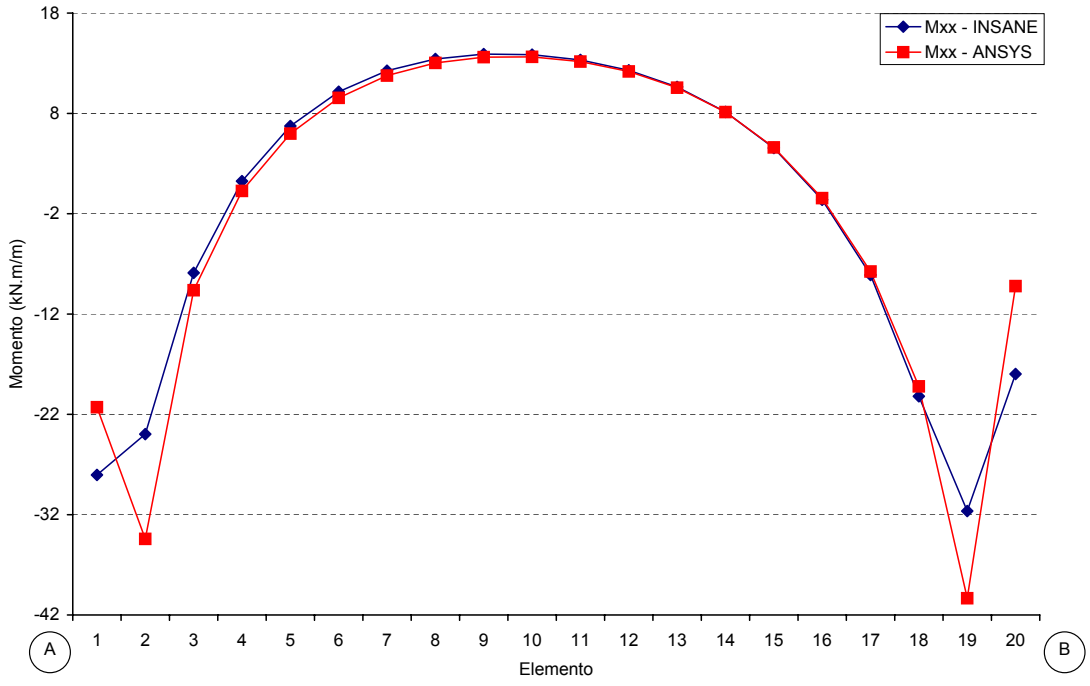
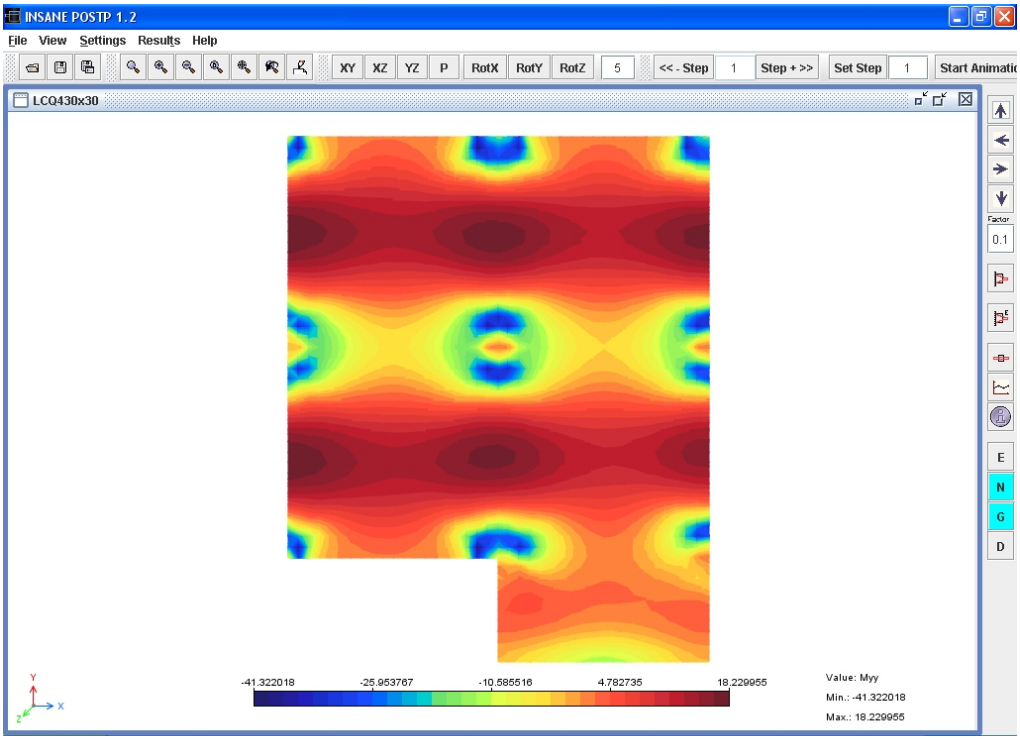
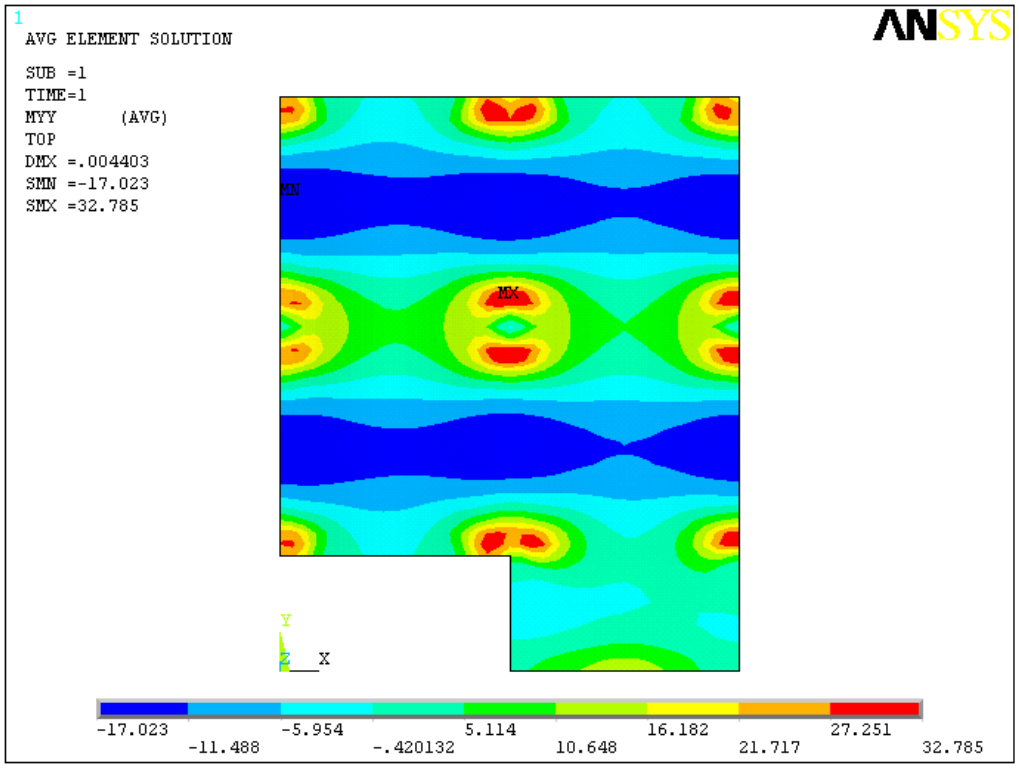


Figura 8.14: Momento M_{xx} dos elementos contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.5(b)



(a) **INSANE**



(b) ANSYS

Figura 8.15: Momento M_{yy}

Tabela 8.6: Momento M_{yy} dos elementos contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.5(b)

Pontos	Elementos	Momento M_{yy} $(kN \cdot m/m)$	
		INSANE	ANSYS
A	1	-27,797	-21,132
|	2	-23,824	-34,280
|	3	-7,842	-9,590
|	4	1,219	0,240
|	5	6,636	5,887
|	6	9,969	9,379
|	7	11,968	11,504
|	8	13,017	12,665
|	9	13,349	13,099
|	10	13,107	12,947
|	11	12,355	12,267
|	12	11,070	11,035
|	13	9,136	9,142
|	14	6,340	6,379
|	15	2,359	2,415
|	16	-3,292	-3,295
|	17	-11,262	-11,777
|	18	-21,951	-25,535
↓	19	-25,861	-28,314
B	20	-6,728	1,431

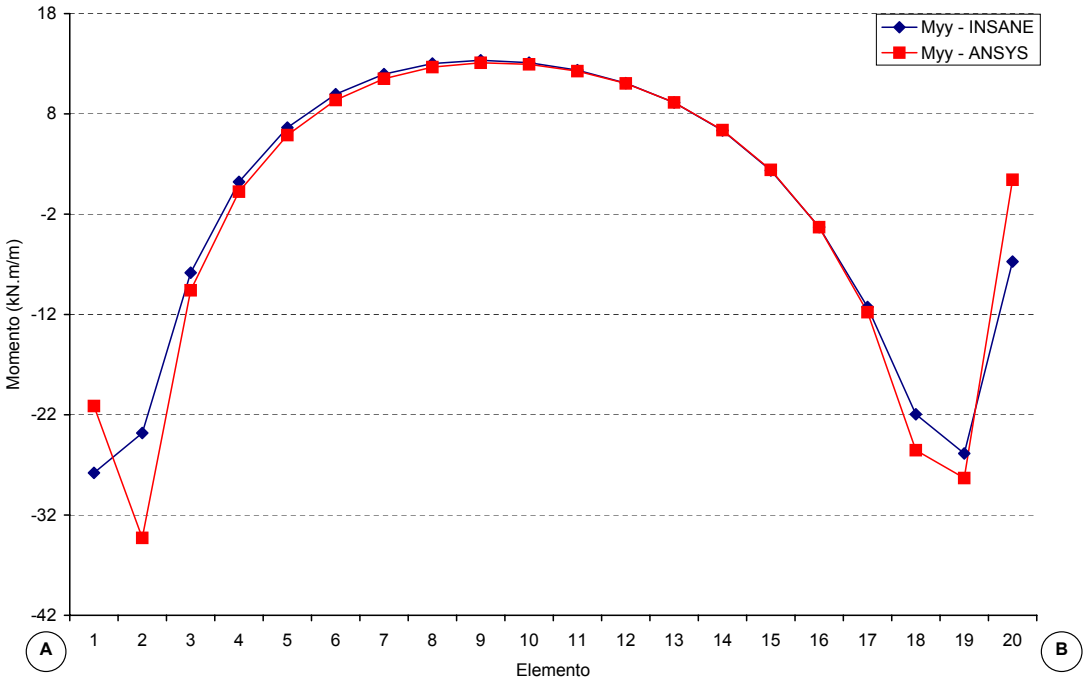
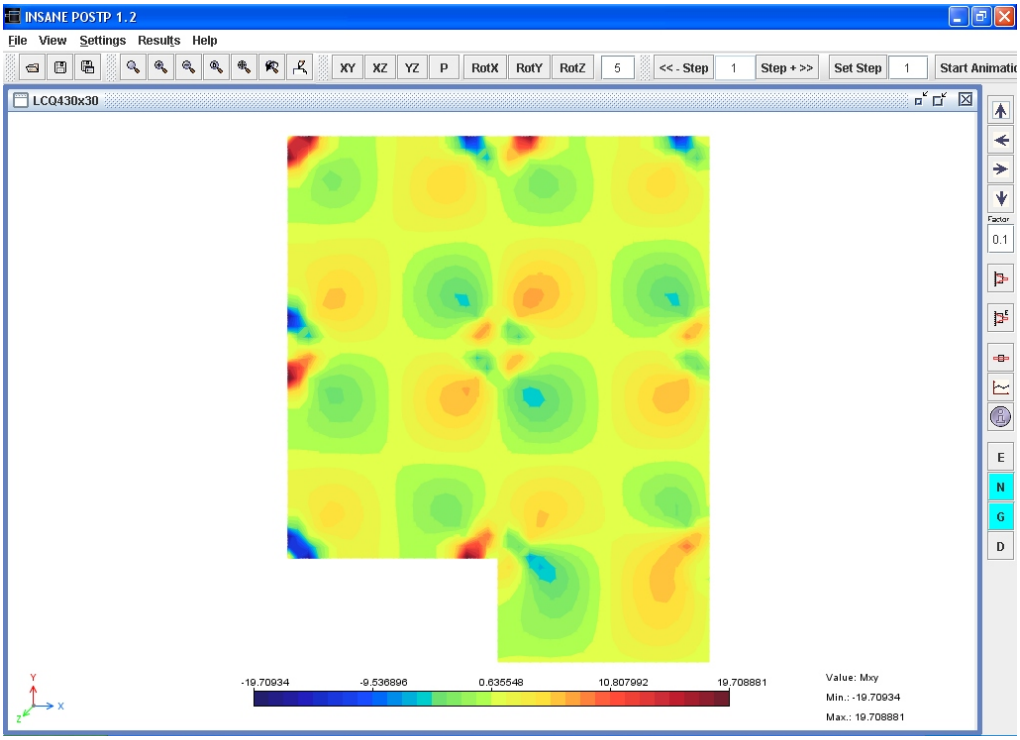
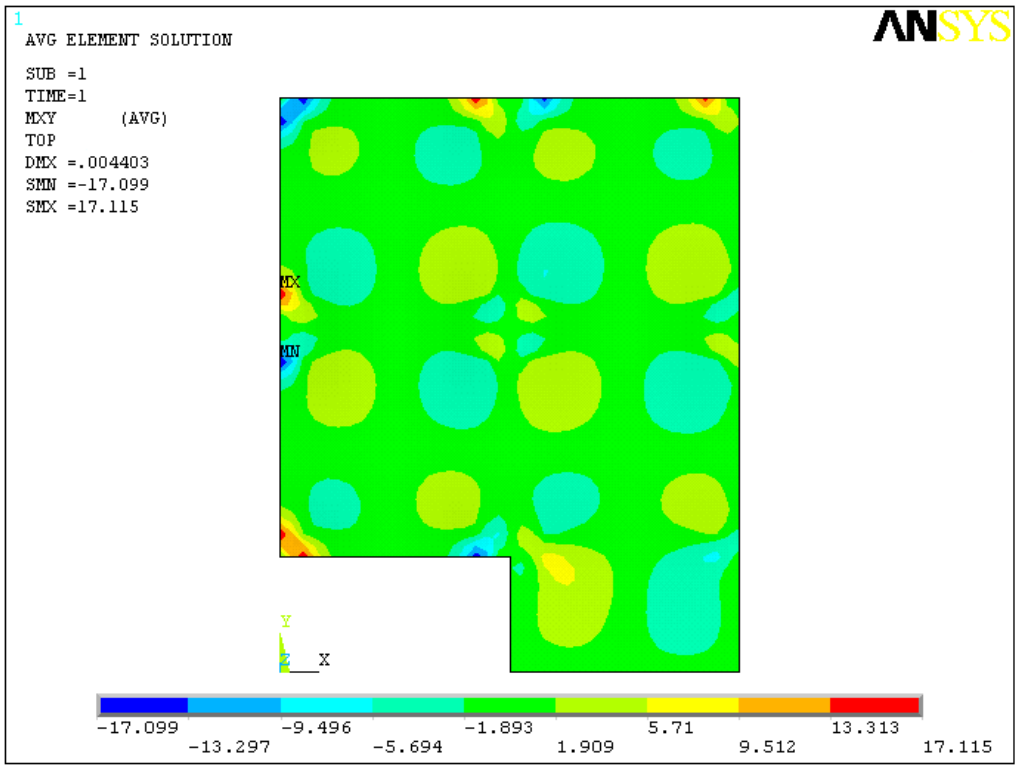


Figura 8.16: Momento M_{yy} dos elementos contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.5(b)



(a) **INSANE**



(b) ANSYS

Figura 8.17: Momento M_{xy}

Tabela 8.7: Momento M_{xy} dos elementos contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.5(b)

Pontos	Elementos	Momento M_{xy} $(kN \cdot m/m)$	
		INSANE	ANSYS
A	1	-10,686	0,000
|	2	-9,014	-4,392
|	3	0,807	1,909
|	4	3,319	3,467
|	5	3,395	3,407
|	6	2,627	2,629
|	7	1,580	1,587
|	8	0,567	0,578
|	9	-0,179	-0,165
|	10	-0,481	-0,463
|	11	-0,239	-0,221
|	12	0,531	0,545
|	13	1,705	1,713
|	14	3,073	3,077
|	15	4,354	4,370
|	16	5,164	5,236
|	17	4,802	5,058
|	18	1,413	1,825
↓	19	-4,999	-10,697
B	20	-1,049	0,000

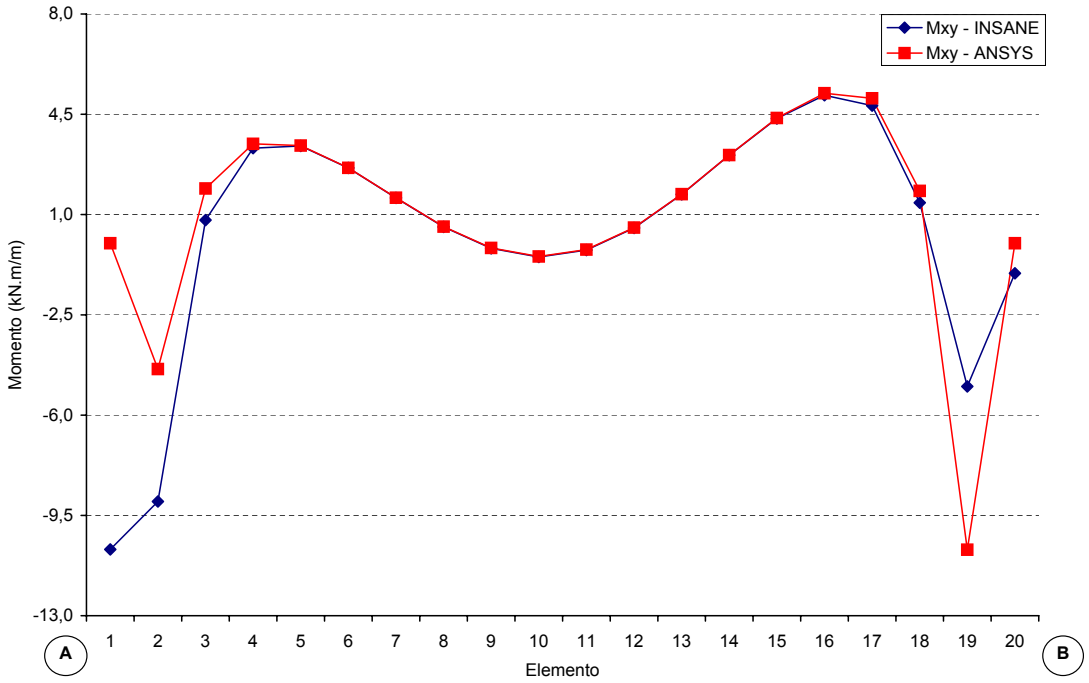


Figura 8.18: Momento M_{xy} dos elementos contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.5(b)

8.3 Placa Quadrada em Concreto Armado

Neste exemplo, objetiva-se demonstrar e validar o **INSANE** na análise de placas compostas por materiais diferentes. Para realização desta demonstração empregou-se uma placa quadrada simplesmente apoiada sob uma carga uniformemente distribuída (FIG. 8.19) cuja espessura encontra-se discretizada em camadas. Com a intenção de mostrar a influência de um outro material na composição, que no caso foi uma armadura em aço, analisou-se esta placa com e sem a adição deste segundo material.

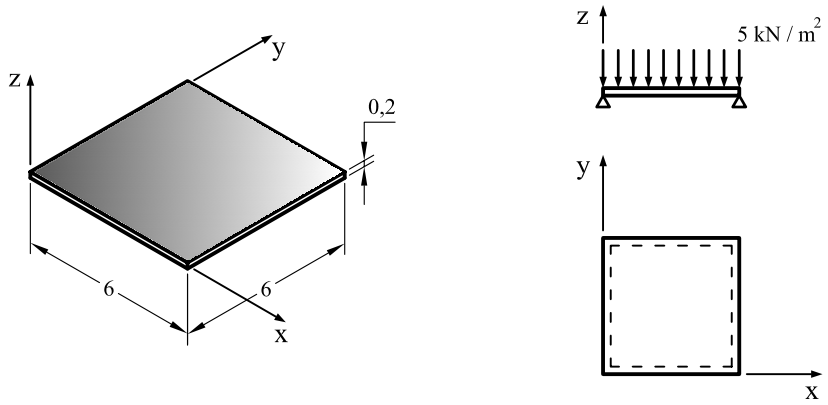


Figura 8.19: Placa quadrada simplesmente apoiada sob ação de um carregamento uniformemente distribuído

A FIG. 8.20 apresenta a armadura empregada neste estudo. Para utilização nos softwares (**INSANE** e ANSYS) necessitou-se transformar esta armadura numa camada, conforme mostra a FIG. 8.21.

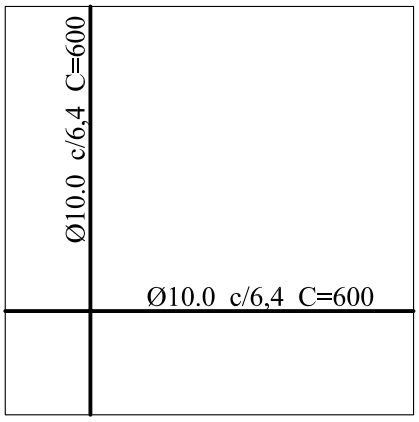


Figura 8.20: Armadura em aço

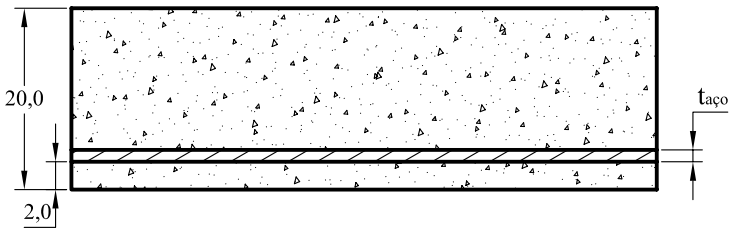
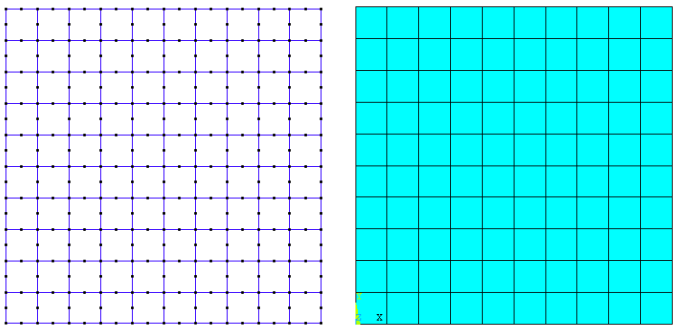


Figura 8.21: Camadas da placa com armadura - Dimensões em centímetros

O valor da espessura da camada de aço (t_{aco}) foi obtido a partir do volume de aço empregado na armadura, conforme segue:

$$
\begin{aligned}
V_{aco} &= \frac{6000}{64} \times \frac{\pi \times 10^2}{4} \times 6000 \times 2 \\
V_{aco} &= t_{aco} \times A_{placa} \\
t_{aco} &= \frac{88357293,3824}{6000^2} \\
t_{aco} &= 2,454\ mm
\end{aligned} \tag{8.1}
$$

As tabelas a seguir (TAB. 8.8 e TAB. 8.9) apresentam as informações sobre as propriedades dos materiais empregados e sobre a discretização utilizada (FIG. 8.22) na análise das placas com e sem armadura.



(a) **INSANE** (b) ANSYS

Figura 8.22: Discretização da placa em concreto com e sem armadura

Tabela 8.8: Propriedades dos materiais empregados na placa em concreto

Material	Módulo de Elasticidade E - (kN/m^2)	Coeficiente de Poisson ν
Concreto	$2,0 \times 10^7$	0,2
Aço	$2,0 \times 10^8$	0,3

Tabela 8.9: Informações sobre as discretizações da placa

Software	Elemento	Nº de Nós	Graus de Liberdade	Nº de Camadas	Total de Elementos
INSANE	Q8-CI	8	$u_z \;\; r_x \;\; r_y$	50	100
ANSYS	SHELL99	8	$u_x \;\; u_y \;\; u_z \;\; r_x \;\; r_y \;\; r_z$	3	100

O elemento SHELL99 do software ANSYS está mostrado na FIG. 8.23, que ilustra os dados de entrada e saída deste elemento, informando os sentidos e direções adotadas em cada grandeza. Também, nesta figura, verifica-se a capacidade que este elemento possui de ser discretizado em camadas.

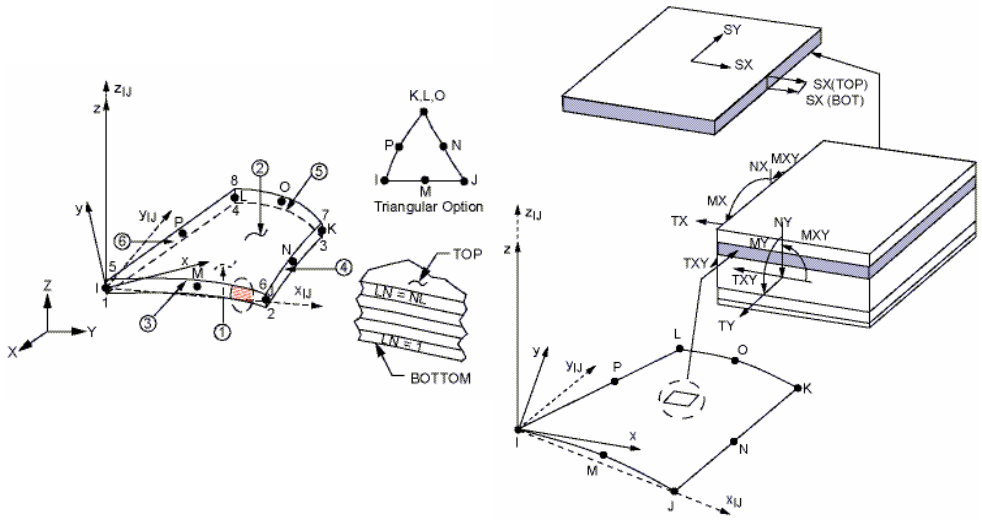


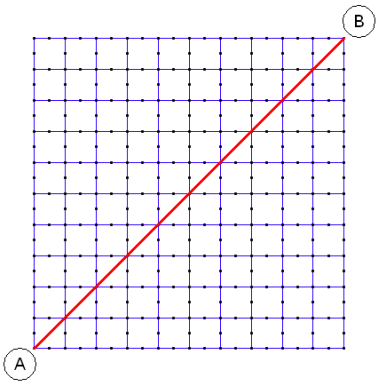
Figura 8.23: Elemento SHELL99 (imagens retiradas do manual do ANSYS)

Vale ressaltar que, pelo fato de se utilizar um elemento de casca na análise e este elemento não possuir a opção de somente flexão, necessitou-se impedir os graus de liberdade u_x , u_y , r_z de todos os nós da discretização, uma vez que estes graus de liberdade não existem numa análise de placas.

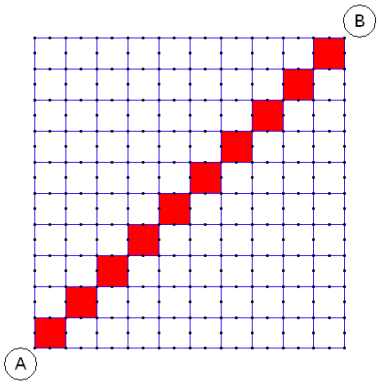
Conforme dito anteriormente, a placa da FIG. 8.19, além de ser analisada no **INSANE** e no ANSYS, foi estuda com e sem armadura de aço. A seguir apresentam-se os resultados obtidos nestes estudos para diversas grandezas. A FIG. 8.25 mostra os resultados dos deslocamentos verticais. A FIG. 8.28 mostra os resultados das rotações θ_x, enquanto que as rotações θ_y estão mostradas na FIG. 8.31. A FIG. 8.34

mostra os resultados dos momentos fletores M_{xx} e a FIG. 8.37 mostra os resultados dos momentos fletores M_{yy}.

Assim como feito na seção anterior (Seção 8.2), após cada grandeza analisada é apresentado um gráfico onde compararam-se os resultados obtidos entre os softwares **INSANE** e ANSYS. Para comparação do deslocamento vertical e das rotações (θ_x e θ_y) escolheram-se os nós contidos na reta AB mostrada na FIG. 8.24(a), para a comparação dos momentos, uma vez que o ANSYS informa esta grandeza somente por elemento, escolheram-se os elementos que se encontram destacados na FIG. 8.24(b).

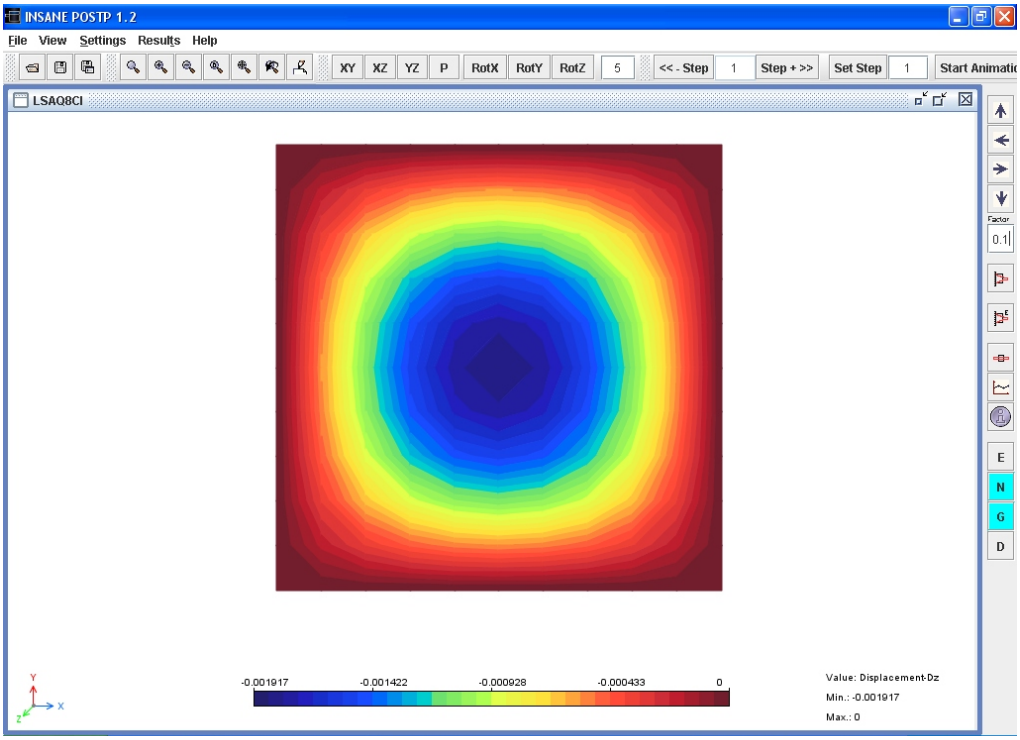


(a) Nós escolhidos para comparação do deslocamento vertical e rotações

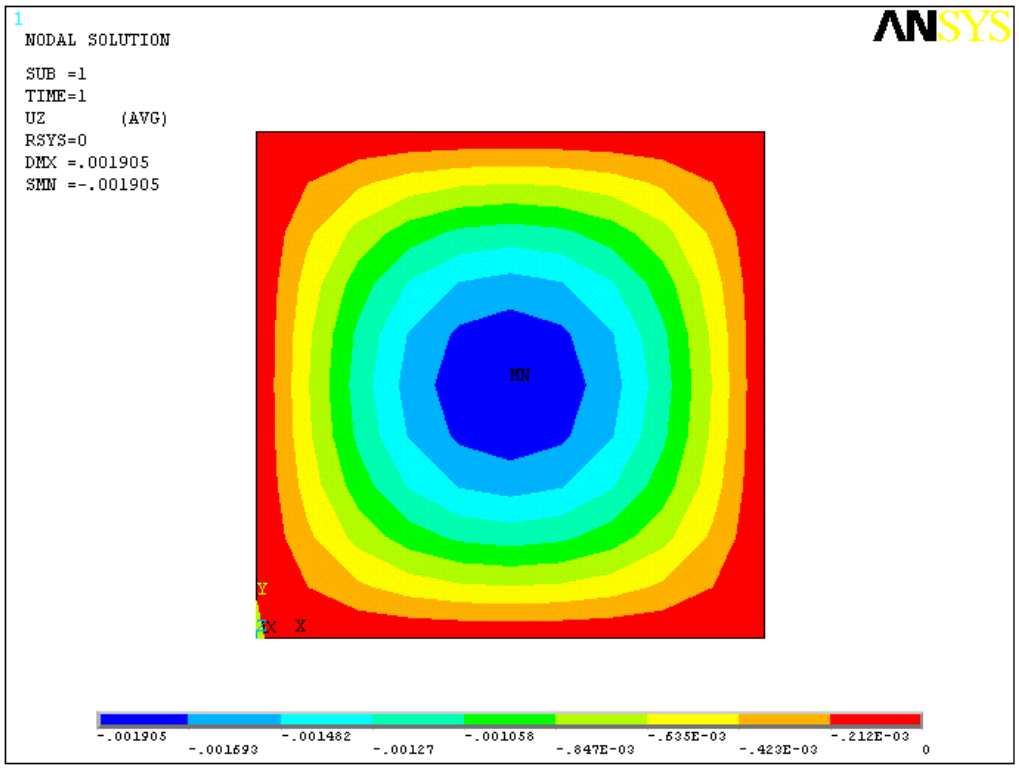


(b) Elementos escolhidos para comparação dos momentos

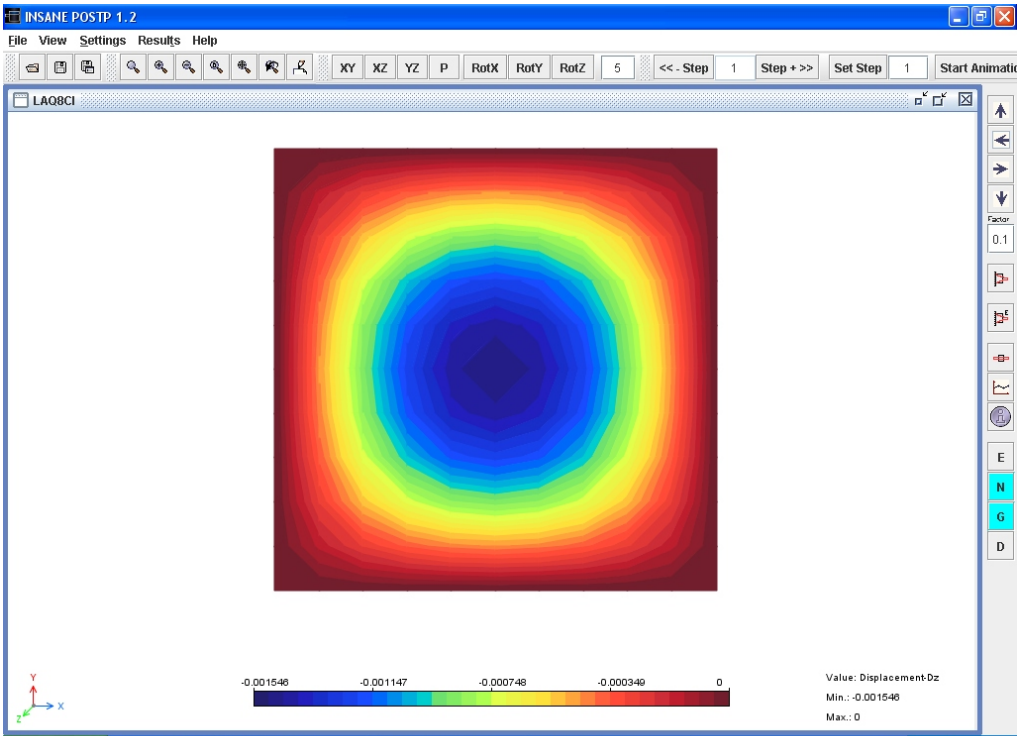
Figura 8.24: Nós e elementos escolhidos para comparação das grandezas na placa em concreto



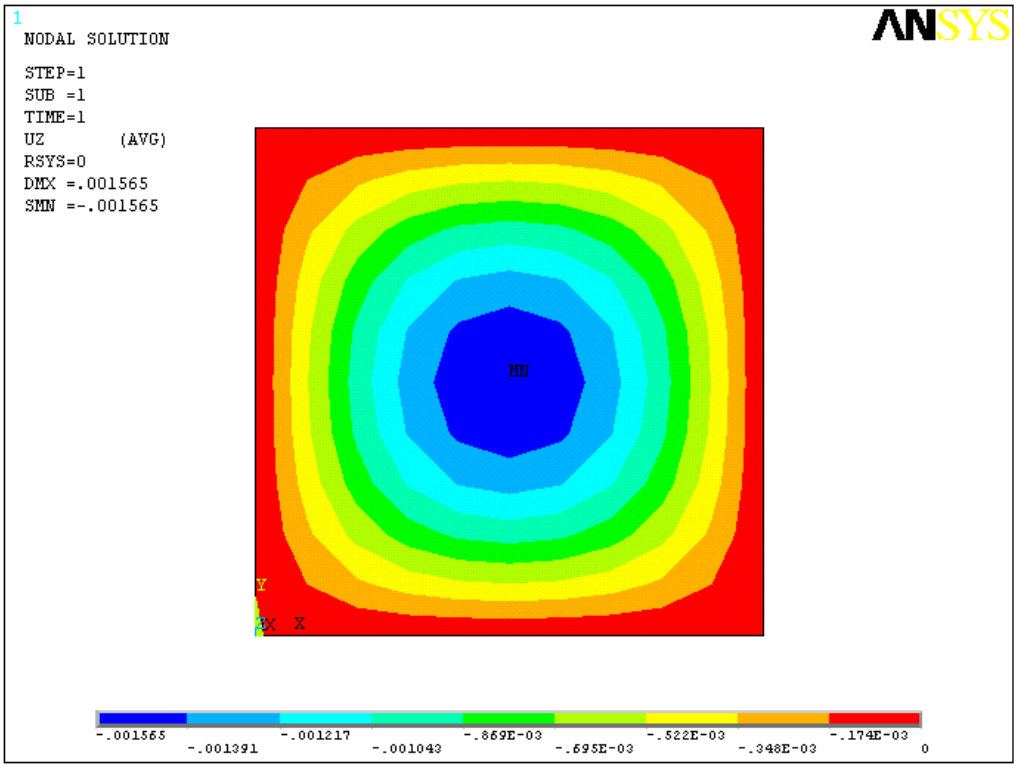
(a) **INSANE** - SEM ARMADURA



(b) ANSYS - SEM ARMADURA



(c) **INSANE** - COM ARMADURA



(d) ANSYS - COM ARMADURA

Figura 8.25: Deslocamento vertical

Tabela 8.10: Deslocamento vertical dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(a) - SEM ARMADURA

Pontos	Nós	Deslocamento vertical (m)	
		INSANE	ANSYS
A	1	0,000000	0,000000
|	2	-0,000207	-0,000204
|	3	-0,000712	-0,000706
|	4	-0,001297	-0,001287
|	5	-0,001749	-0,001737
|	6	-0,001917	-0,001905
|	7	-0,001749	-0,001737
|	8	-0,001297	-0,001287
|	9	-0,000712	-0,000706
↓	10	-0,000207	-0,000204
B	11	0,000000	0,000000

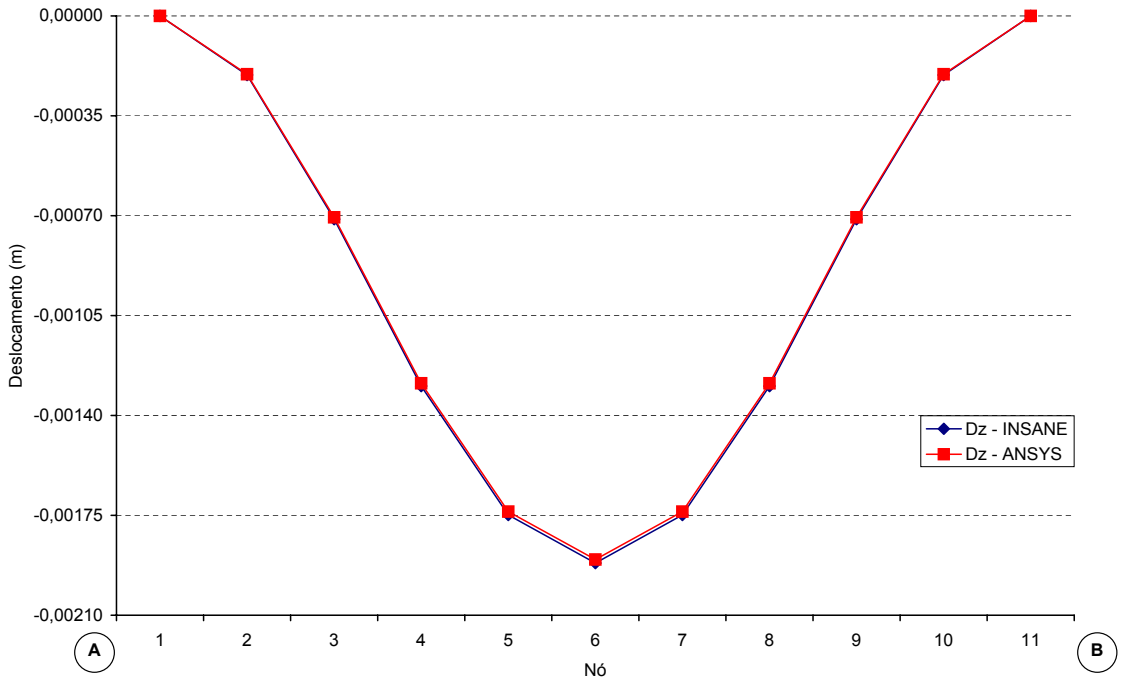


Figura 8.26: Deslocamento vertical dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(a) - SEM ARMADURA

Tabela 8.11: Deslocamento vertical dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(a) - COM ARMADURA

Pontos	Nós	Deslocamento vertical (m)	
		INSANE	ANSYS
A	1	0,000000	0,000000
|	2	-0,000167	-0,000168
|	3	-0,000574	-0,000580
|	4	-0,001046	-0,001057
|	5	-0,001410	-0,001427
|	6	-0,001546	-0,001565
|	7	-0,001410	-0,001427
|	8	-0,001046	-0,001057
|	9	-0,000574	-0,000580
↓	10	-0,000167	-0,000168
B	11	0,000000	0,000000

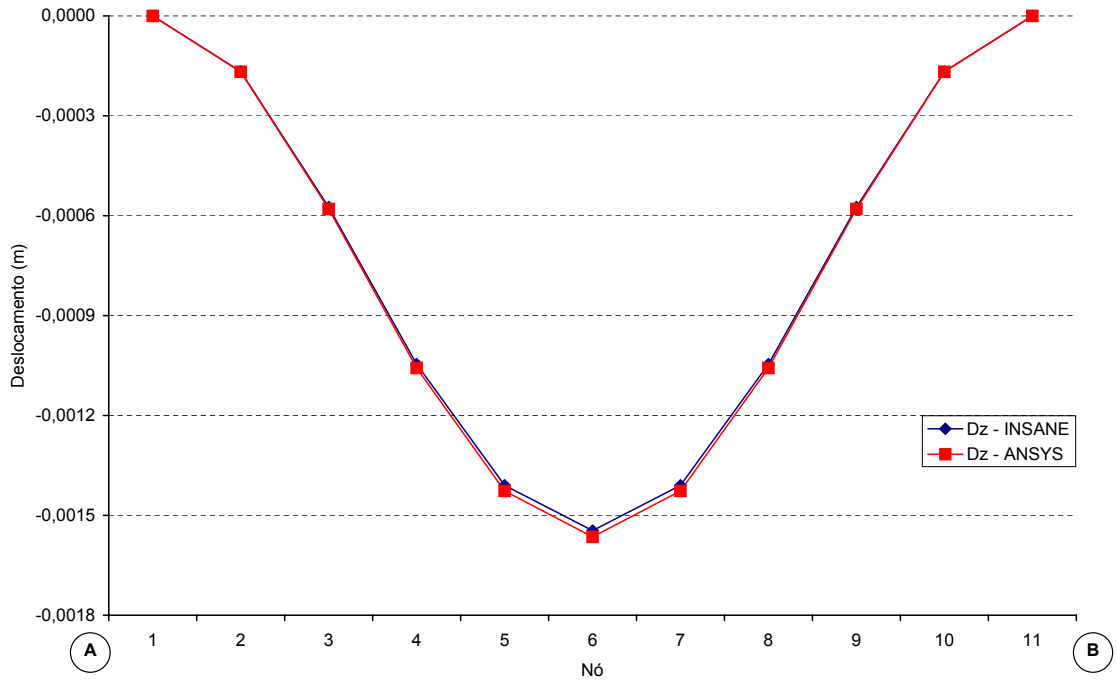
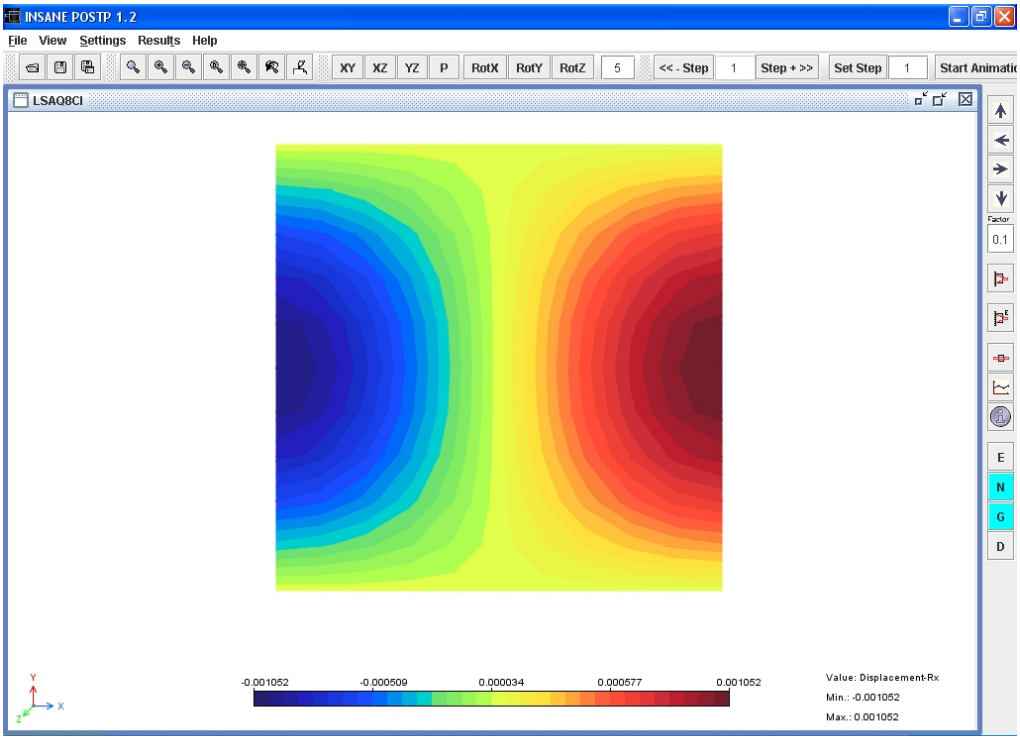
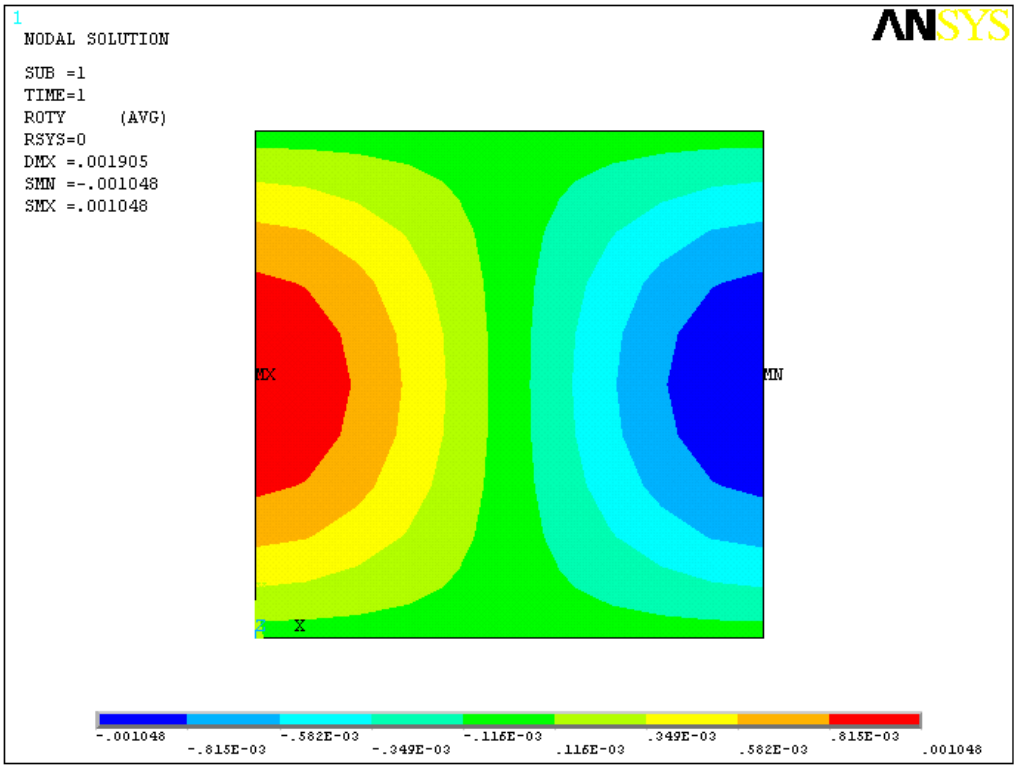


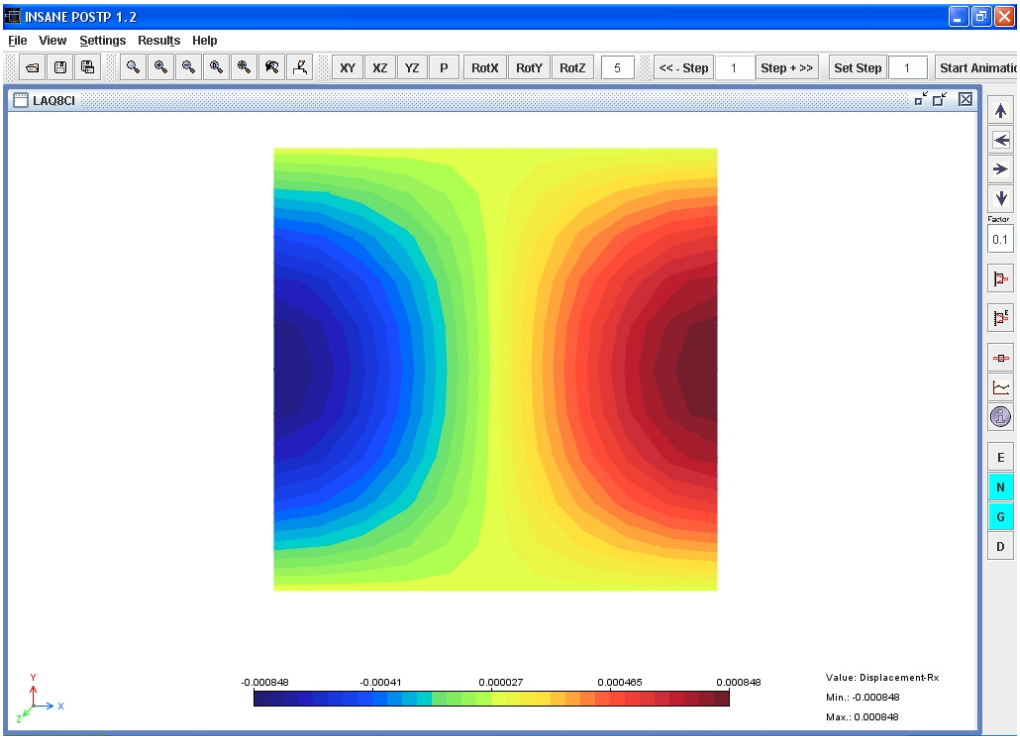
Figura 8.27: Deslocamento vertical dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(a) - COM ARMADURA



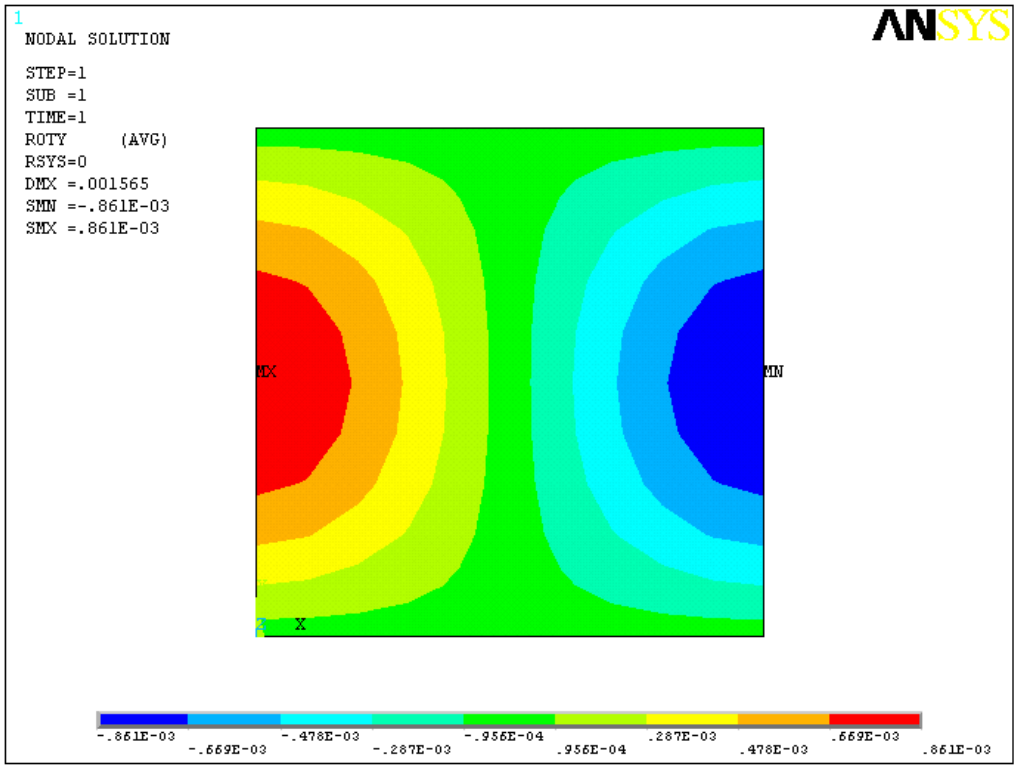
(a) **INSANE** - SEM ARMADURA



(b) ANSYS - SEM ARMADURA



(c) **INSANE** - COM ARMADURA



(d) ANSYS - COM ARMADURA

Figura 8.28: Rotação θ_x

Tabela 8.12: Rotação θ_x dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(a) - SEM ARMADURA

Pontos	Nós	Rotação θ_x (rad)	
		INSANE	ANSYS
A	1	0,000000	0,000000
|	2	-0,000319	-0,000319
|	3	-0,000481	-0,000481
|	4	-0,000454	-0,000454
|	5	-0,000271	-0,000271
|	6	0,000000	0,000000
|	7	0,000271	0,000271
|	8	0,000454	0,000454
|	9	0,000481	0,000481
↓	10	0,000319	0,000319
B	11	0,000000	0,000000

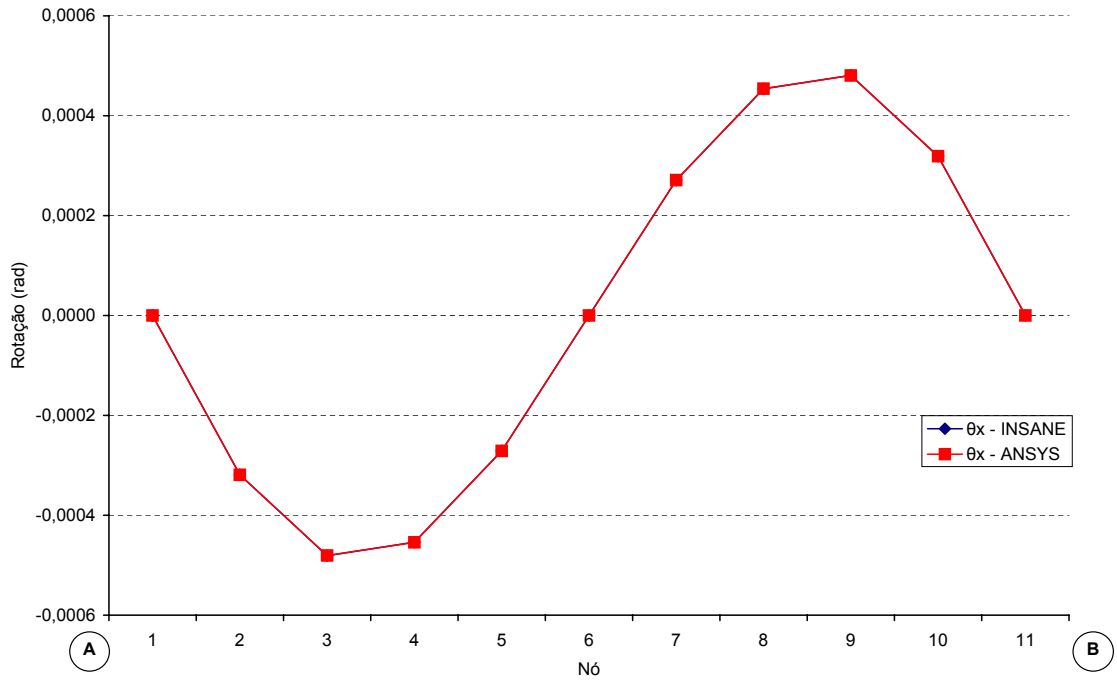


Figura 8.29: Rotação θ_x dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(a) - SEM ARMADURA

Tabela 8.13: Rotação θ_x dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(a) - COM ARMADURA

Pontos	Nós	Rotação θ_x (rad)	
		INSANE	ANSYS
A	1	0,000000	0,000000
|	2	-0,000257	-0,000262
|	3	-0,000387	-0,000394
|	4	-0,000366	-0,000373
|	5	-0,000218	-0,000223
|	6	0,000000	0,000000
|	7	0,000218	0,000223
|	8	0,000366	0,000373
|	9	0,000387	0,000394
↓	10	0,000257	0,000262
B	11	0,000000	0,000000

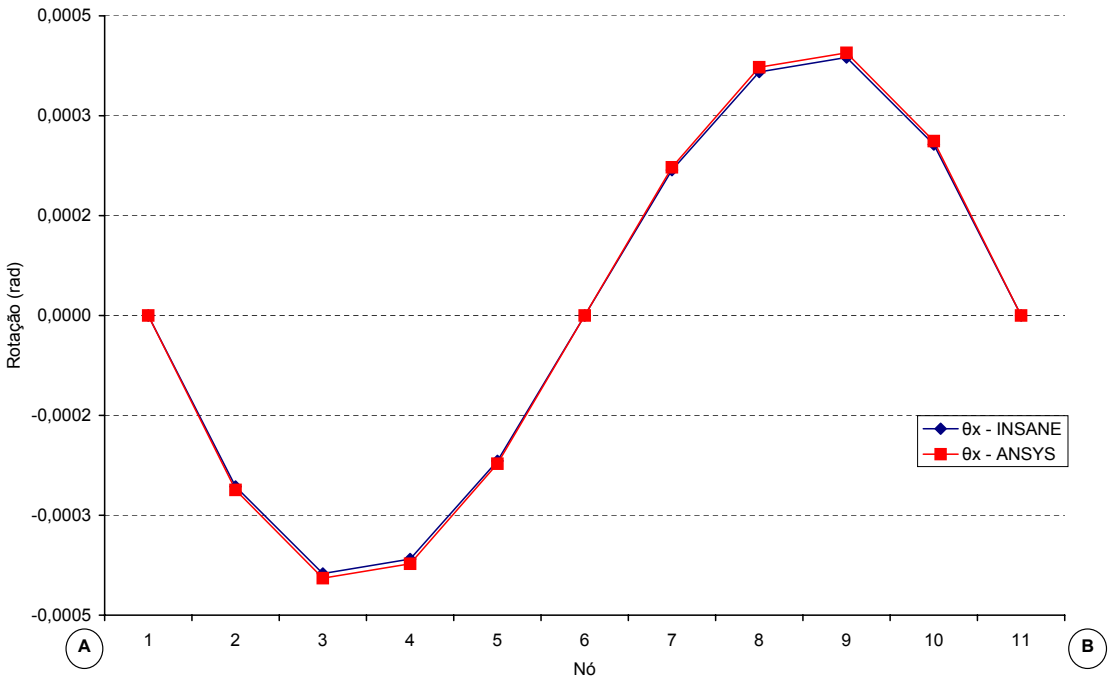
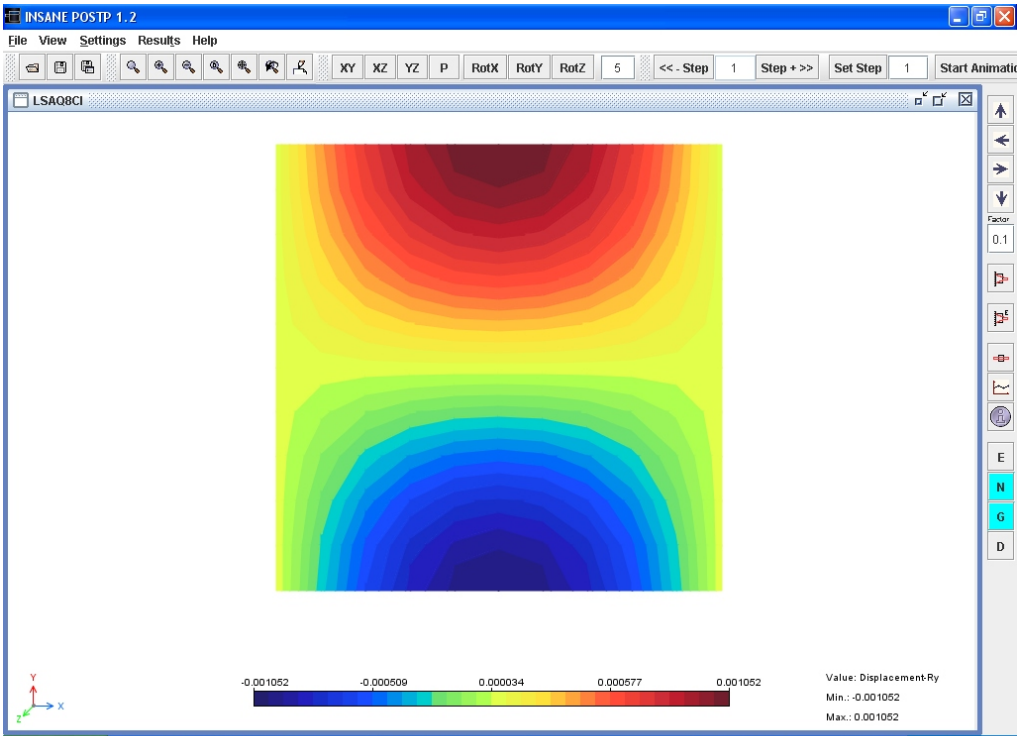
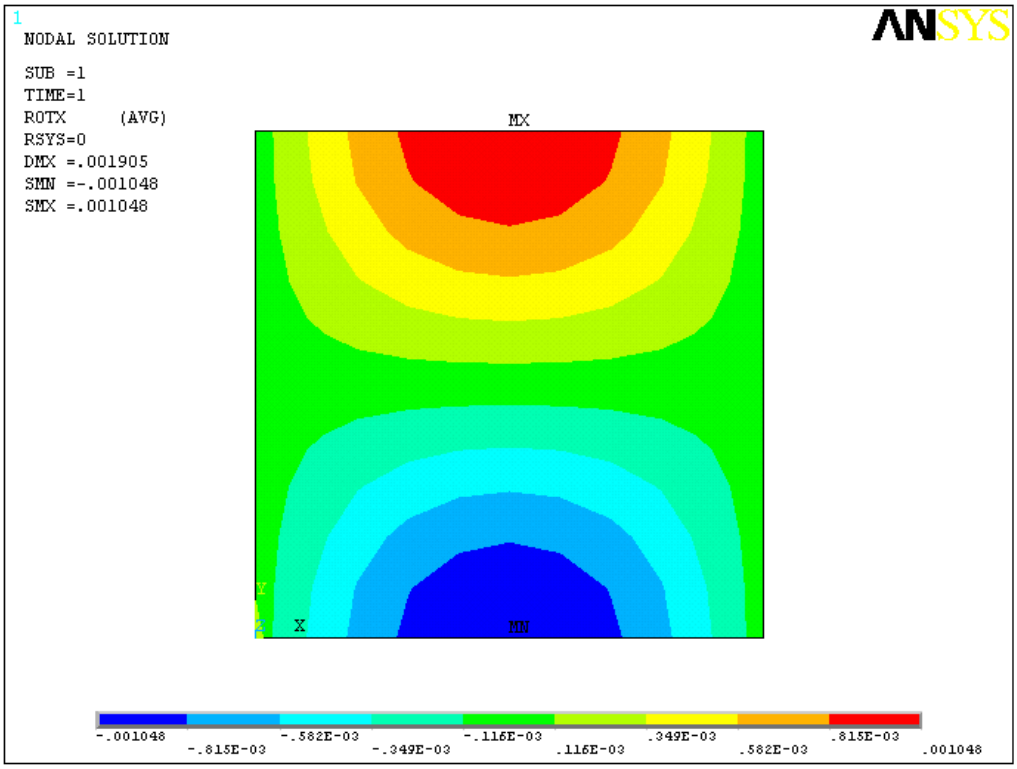


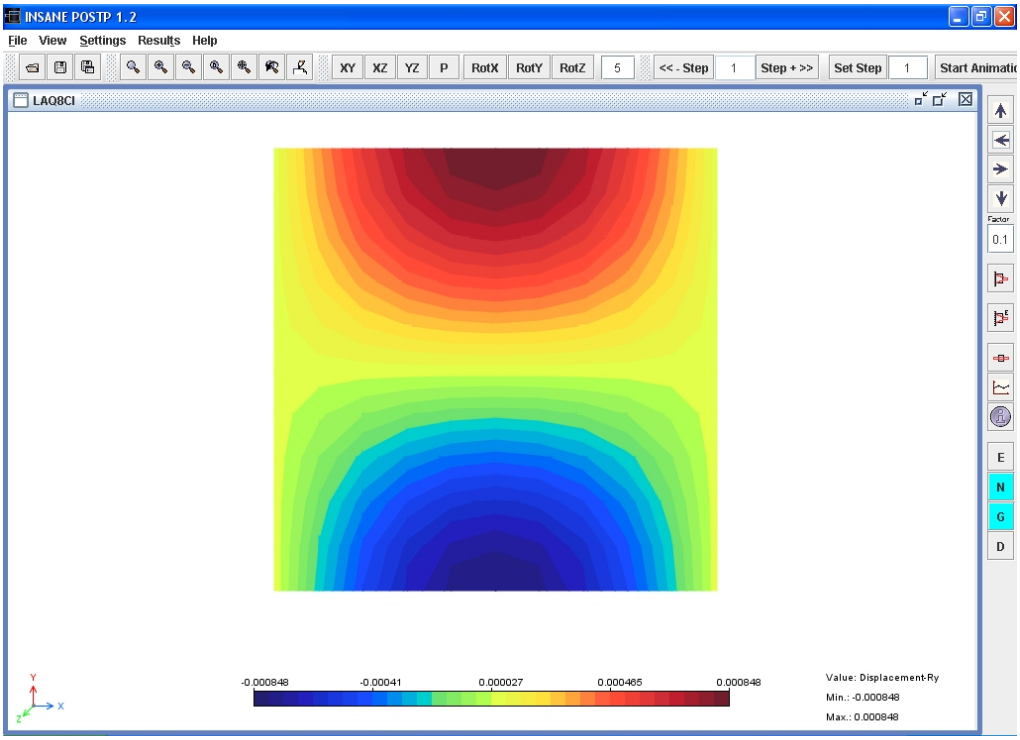
Figura 8.30: Rotação θ_x dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(a) - COM ARMADURA



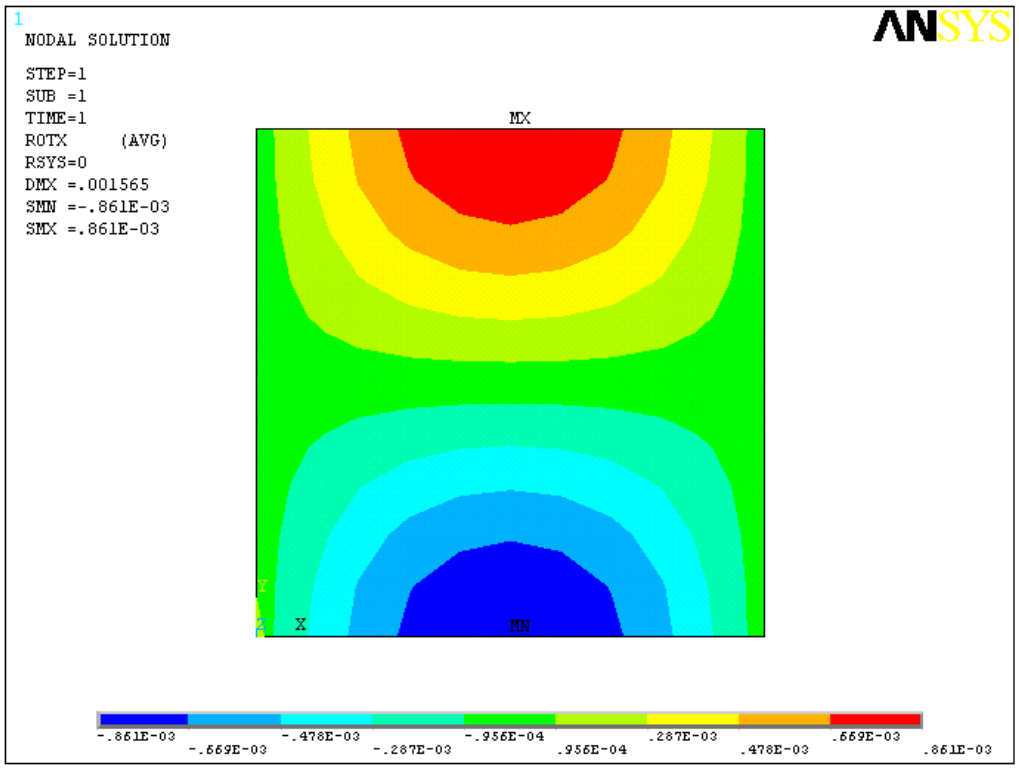
(a) **INSANE** - SEM ARMADURA



(b) ANSYS - SEM ARMADURA



(c) **INSANE** - COM ARMADURA



(d) ANSYS - COM ARMADURA

Figura 8.31: Rotação θ_y

Tabela 8.14: Rotação θ_y dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(a) - SEM ARMADURA

Pontos	Nós	Rotação θ_y (rad)	
		INSANE	ANSYS
A	1	0,000000	0,000000
|	2	-0,000319	-0,000319
|	3	-0,000481	-0,000481
|	4	-0,000454	-0,000454
|	5	-0,000271	-0,000271
|	6	0,000000	0,000000
|	7	0,000271	0,000271
|	8	0,000454	0,000454
|	9	0,000481	0,000481
↓	10	0,000319	0,000319
B	11	0,000000	0,000000

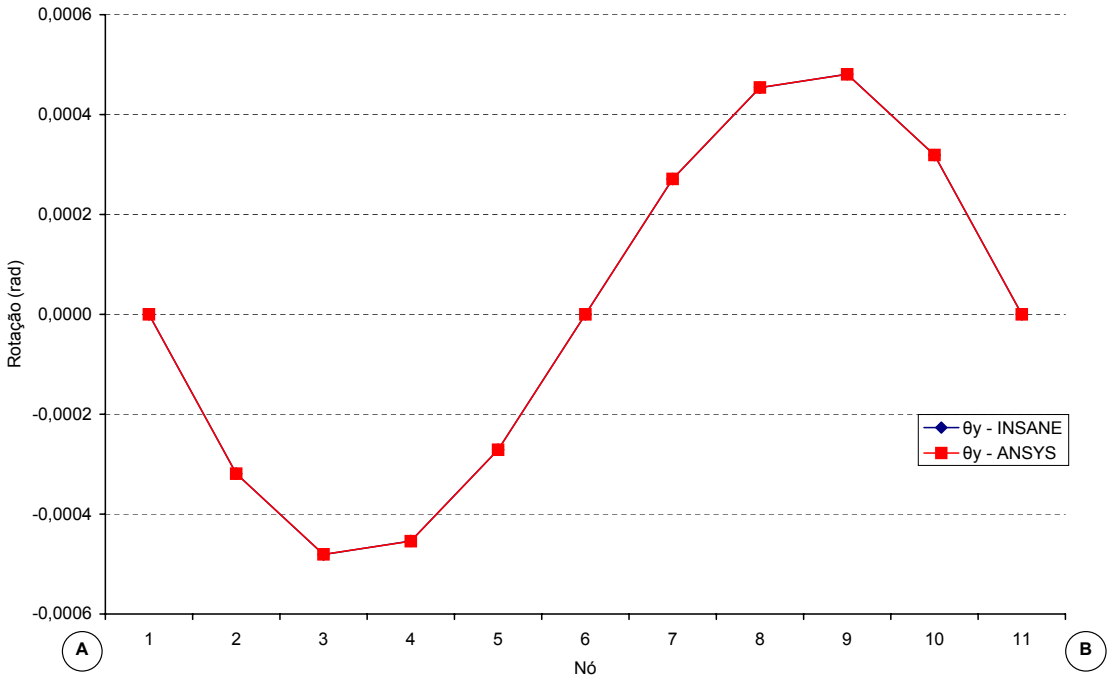


Figura 8.32: Rotação θ_y dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(a) - SEM ARMADURA

Tabela 8.15: Rotação θ_y dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(a) - COM ARMADURA

Pontos	Nós	Rotação θ_y (rad)	
		INSANE	ANSYS
A	1	0,000000	0,000000
|	2	-0,000257	-0,000262
|	3	-0,000387	-0,000394
|	4	-0,000366	-0,000373
|	5	-0,000218	-0,000223
|	6	0,000000	0,000000
|	7	0,000218	0,000223
|	8	0,000366	0,000373
|	9	0,000387	0,000394
↓	10	0,000257	0,000262
B	11	0,000000	0,000000

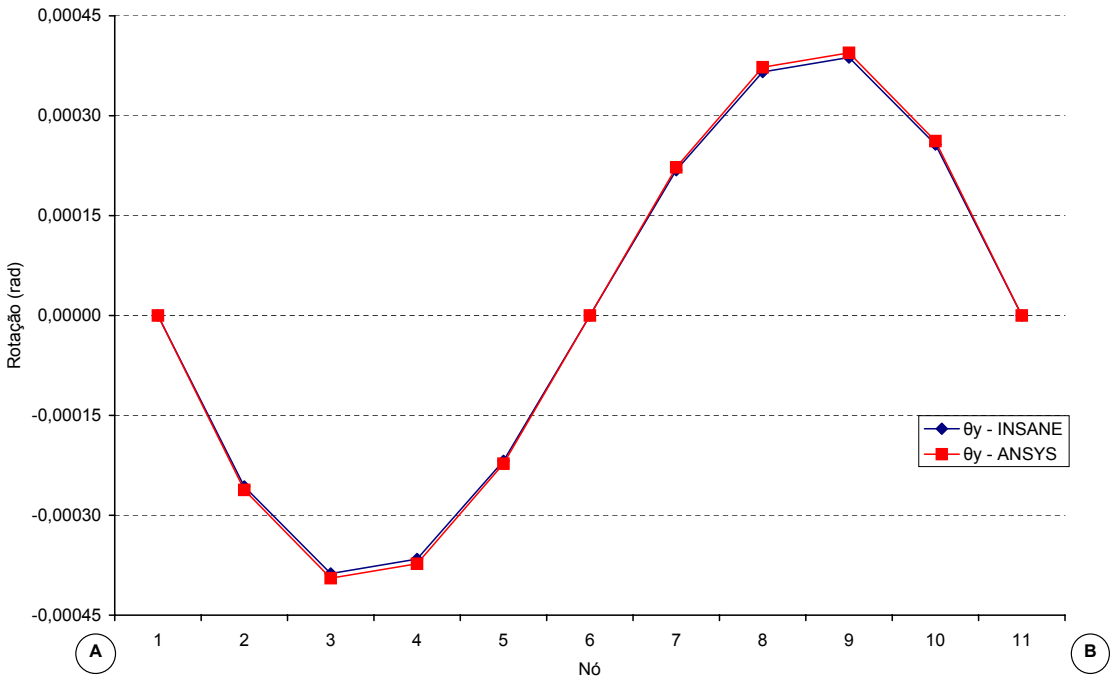
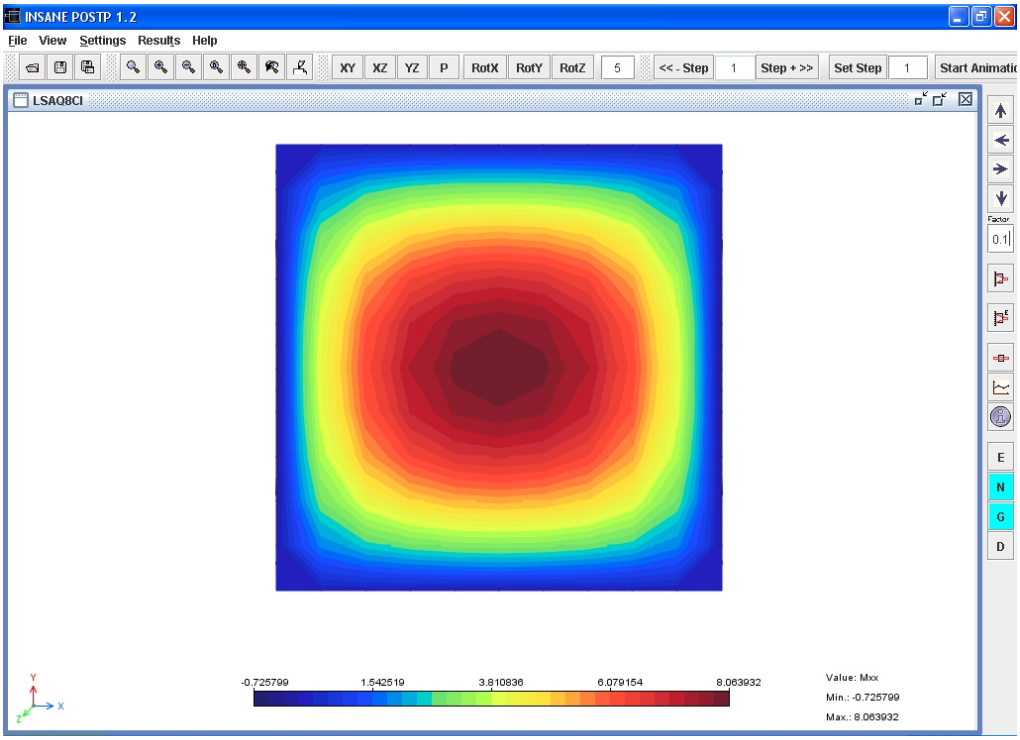
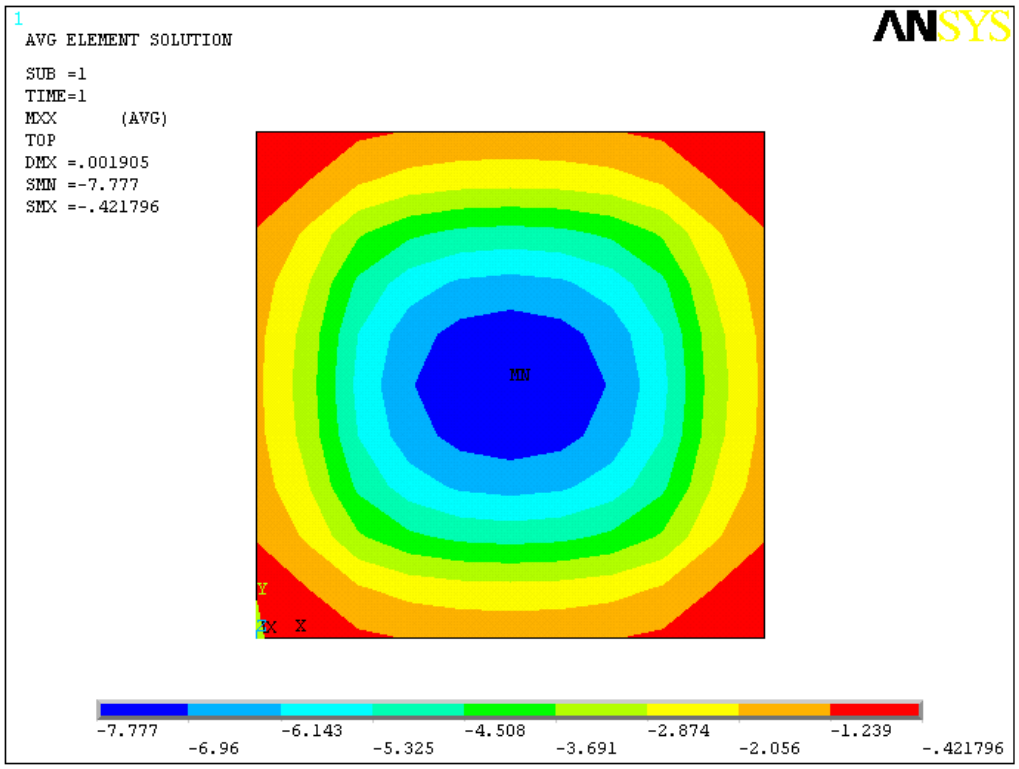


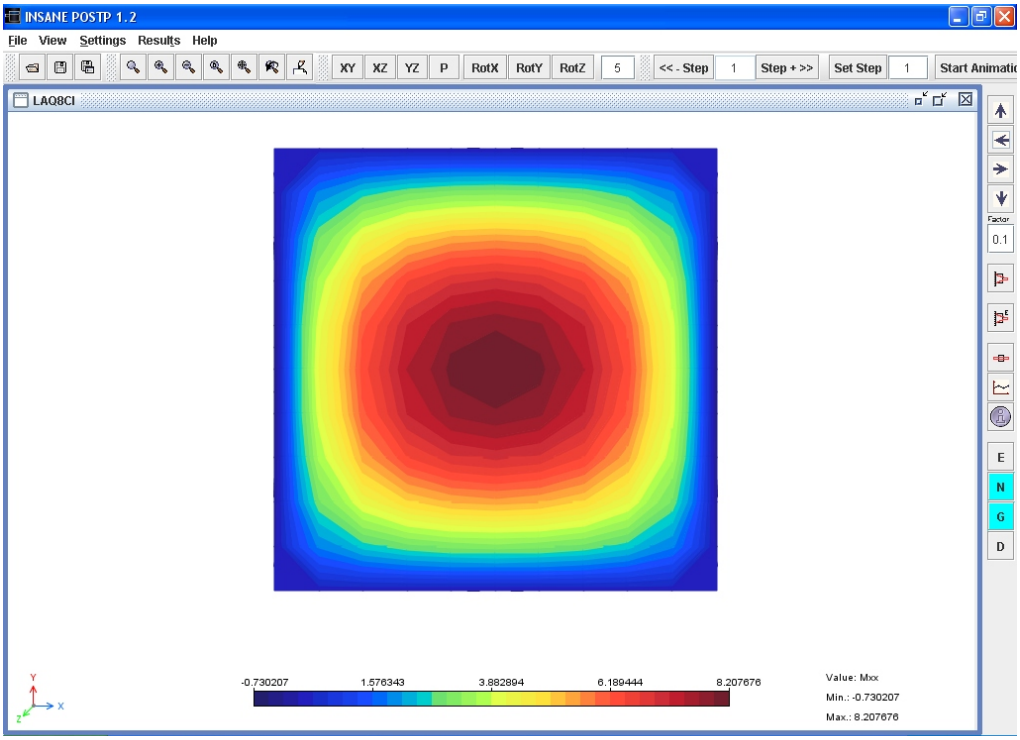
Figura 8.33: Rotação θ_y dos nós contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(a) - COM ARMADURA



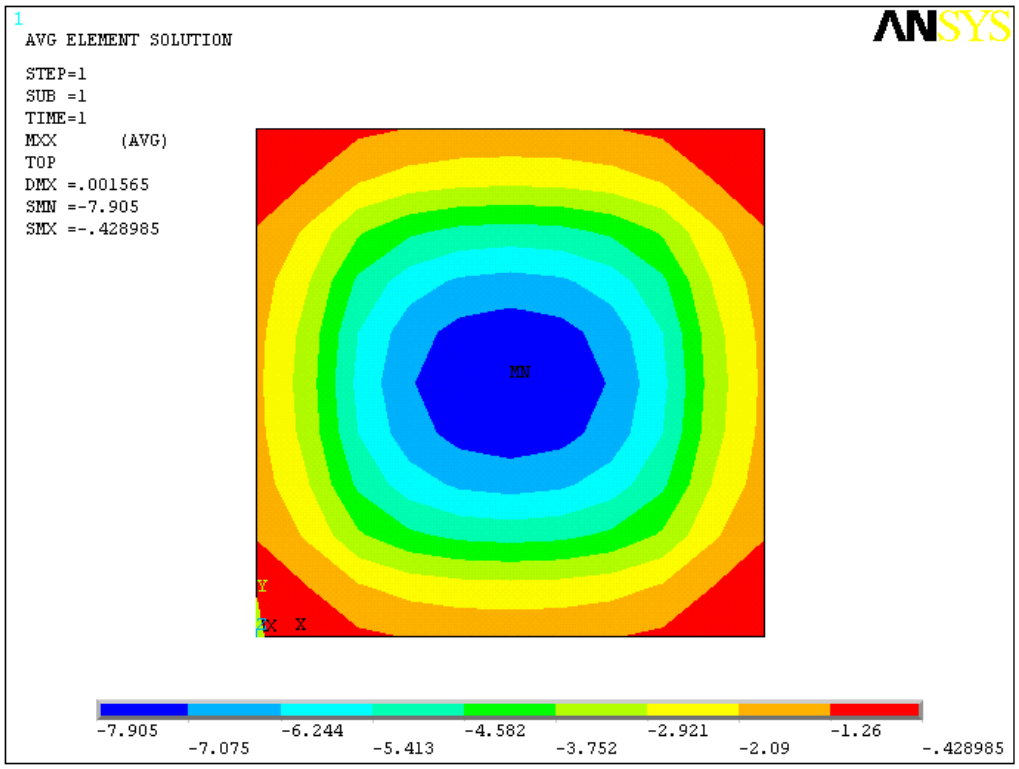
(a) **INSANE** - SEM ARMADURA



(b) ANSYS - SEM ARMADURA



(c) **INSANE** - COM ARMADURA



(d) ANSYS - COM ARMADURA

Figura 8.34: Momento M_{xx}

Tabela 8.16: Momento M_{xx} dos elementos contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(b) - SEM ARMADURA

Pontos	Elementos	Momento M_{xx} $(kN \cdot m/m)$	
		INSANE	ANSYS
A	1	0,356	0,422
|	2	2,550	2,504
|	3	4,880	4,846
|	4	6,759	6,736
|	5	7,793	7,777
|	6	7,793	7,777
|	7	6,759	6,736
|	8	4,880	4,846
↓	9	2,550	2,504
B	10	0,356	0,422

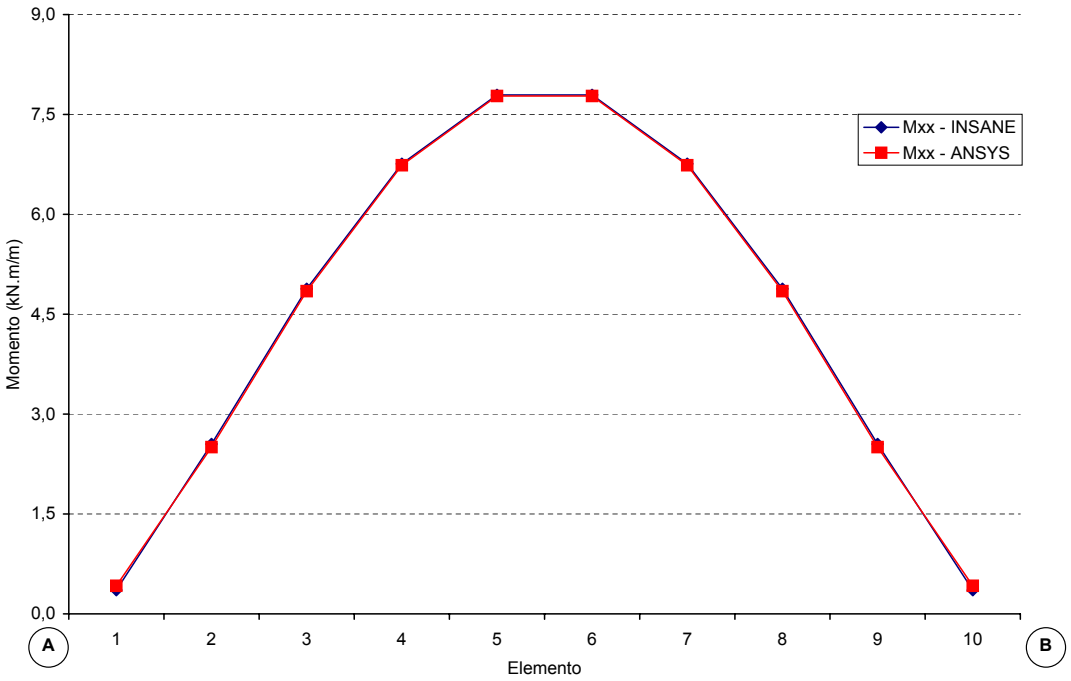


Figura 8.35: Momento M_{xx} dos elementos contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(b) - SEM ARMADURA

Tabela 8.17: Momento M_{xx} dos elementos contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(b) - COM ARMADURA

Pontos	Elementos	Momento M_{xx} $(kN \cdot m/m)$	
		INSANE	ANSYS
A	1	0,363	0,429
|	2	2,595	2,545
|	3	4,967	4,926
|	4	6,880	6,848
|	5	7,932	7,905
|	6	7,932	7,905
|	7	6,880	6,848
|	8	4,967	4,926
↓	9	2,595	2,545
B	10	0,363	0,429

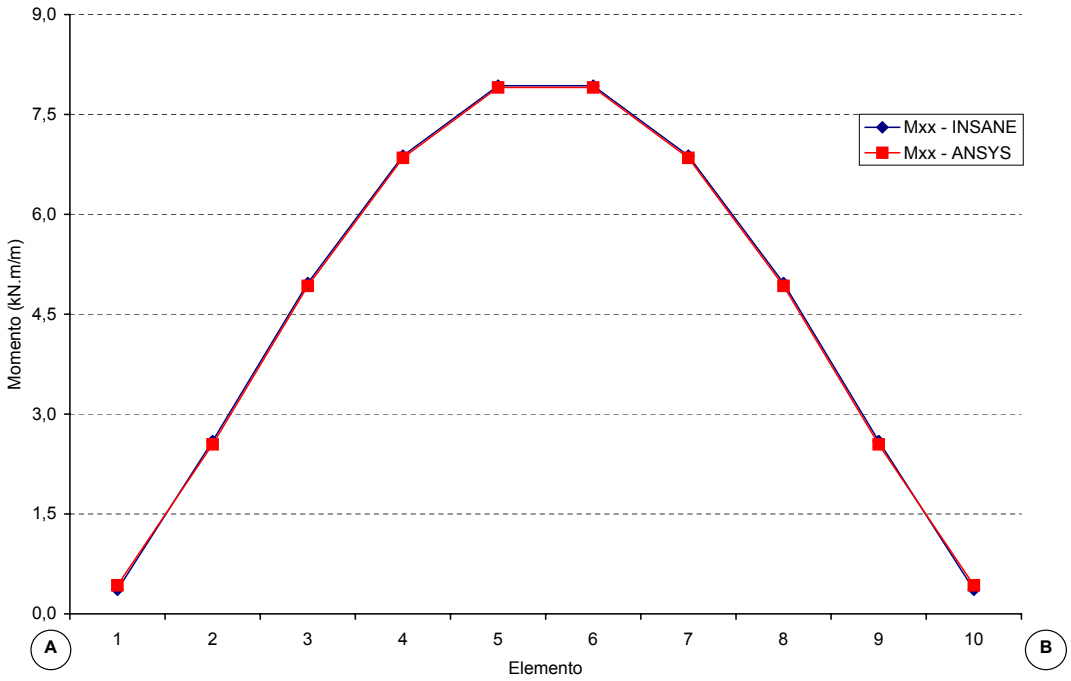
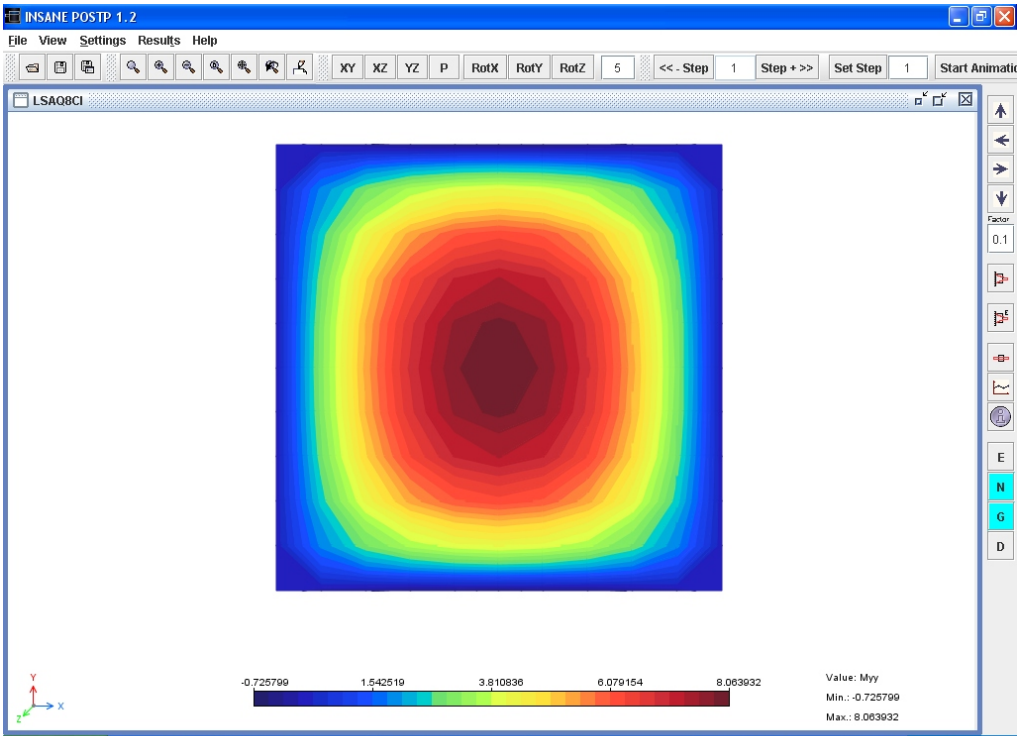
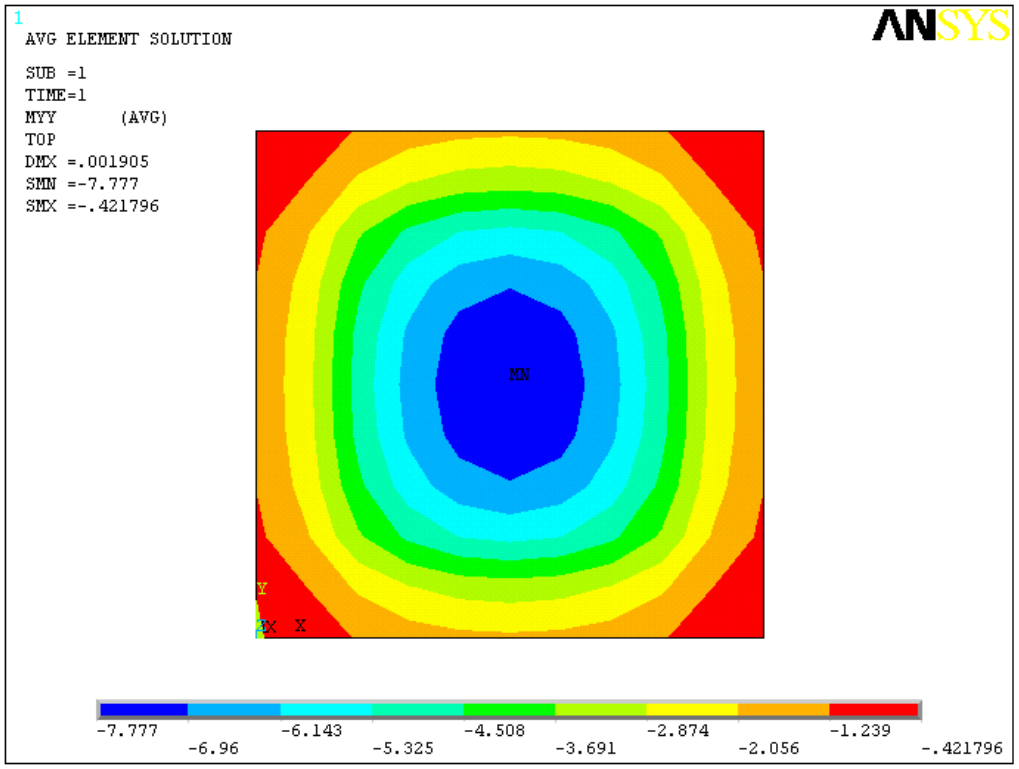


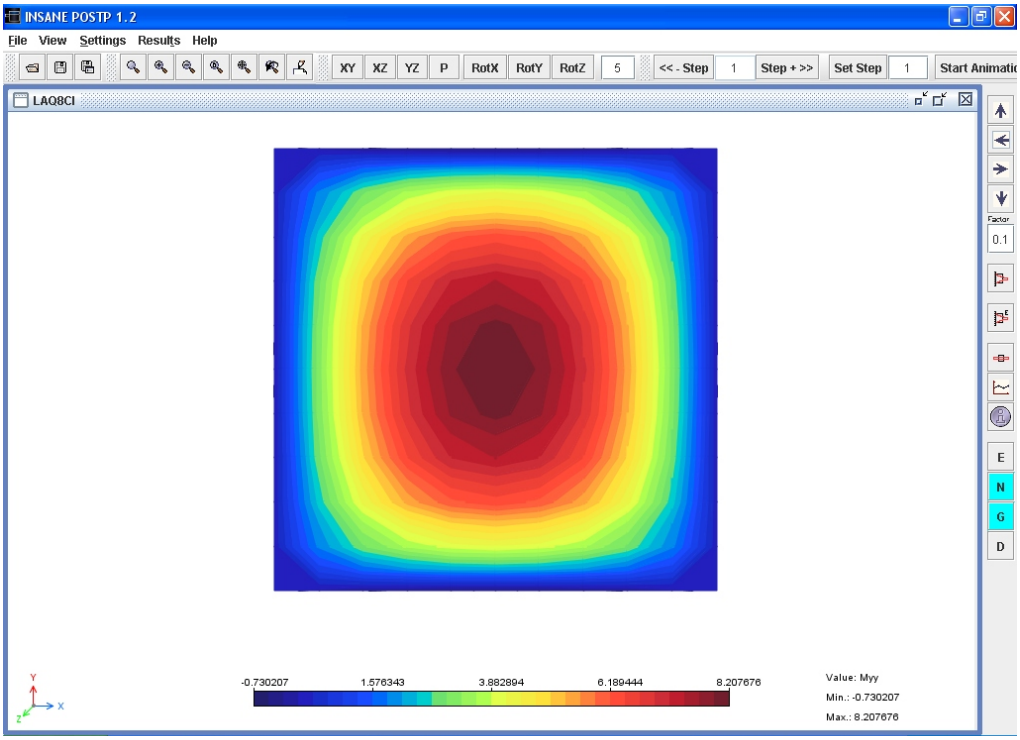
Figura 8.36: Momento M_{xx} dos elementos contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(b) - COM ARMADURA



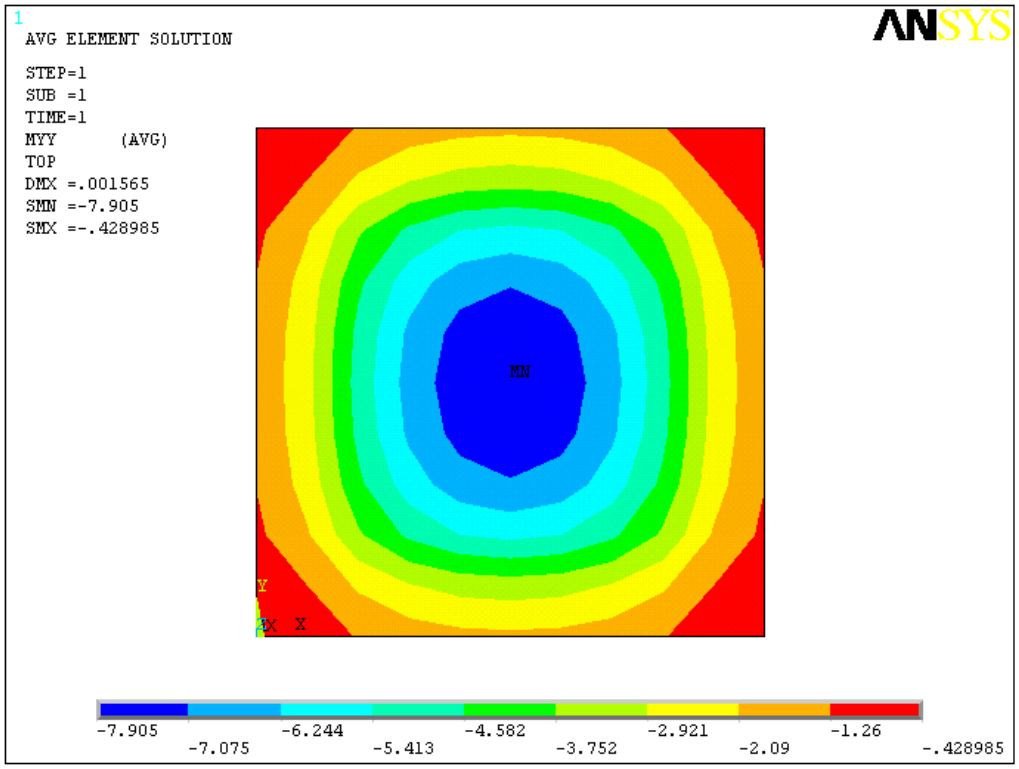
(a) **INSANE** - SEM ARMADURA



(b) ANSYS - SEM ARMADURA



(c) **INSANE** - COM ARMADURA



(d) ANSYS - COM ARMADURA

Figura 8.37: Momento M_{yy}

Tabela 8.18: Momento M_{yy} dos elementos contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(b) - SEM ARMADURA

Pontos	Elementos	Momento M_{yy} $(kN \cdot m/m)$	
		INSANE	ANSYS
A	1	0,356	0,422
|	2	2,550	2,504
|	3	4,880	4,846
|	4	6,759	6,736
|	5	7,793	7,777
|	6	7,793	7,777
|	7	6,759	6,736
|	8	4,880	4,846
↓	9	2,550	2,504
B	10	0,356	0,422

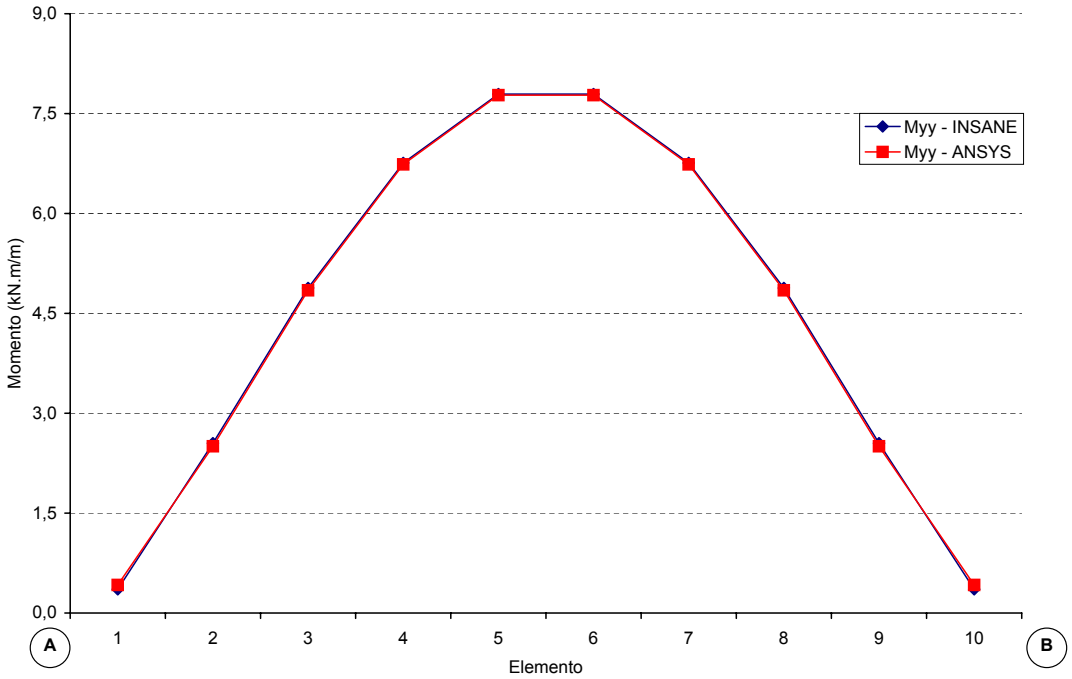


Figura 8.38: Momento M_{yy} dos elementos contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(b) - SEM ARMADURA

Tabela 8.19: Momento M_{yy} dos elementos contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(b) - COM ARMADURA

Pontos	Elementos	Momento M_{yy} $(kN \cdot m/m)$	
		INSANE	ANSYS
A	1	0,363	0,429
|	2	2,595	2,545
|	3	4,967	4,926
|	4	6,880	6,848
|	5	7,932	7,905
|	6	7,932	7,905
|	7	6,880	6,848
|	8	4,967	4,926
↓	9	2,595	2,545
B	10	0,363	0,429

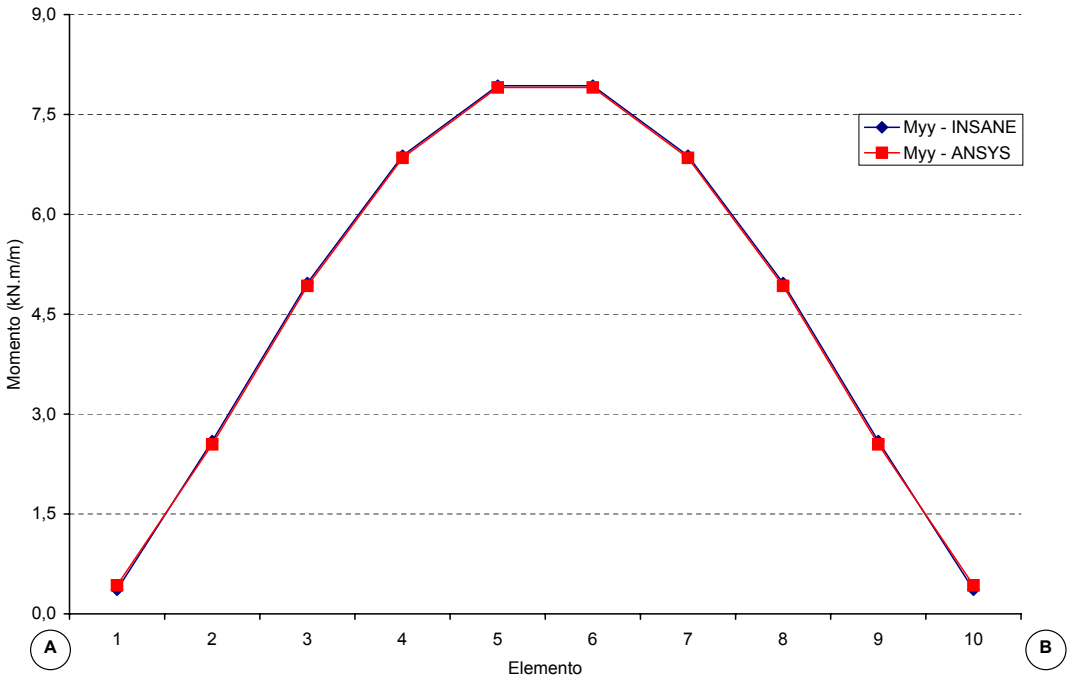


Figura 8.39: Momento M_{yy} dos elementos contidos entre os pontos A e B da FIG. 8.24(b) - COM ARMADURA

8.4 Análise Crítica dos Resultados

No exemplo da laje lisa, as figuras apresentadas demonstram a proximidade entre os resultados obtidos, através das variações de todos os valores ao longo da malha e dos valores máximos e mínimos de cada grandeza, que se encontram tabulados. Nota-se que a distribuição dos valores é bem semelhante entre os softwares em todas as outras grandezas avaliadas. É importante ressaltar que, no caso do **INSANE**, os momentos são avaliados nos pontos de integração dos elementos (neste caso 2×2=4 pontos de Gauss por elemento Q4-CI), por ser os pontos de melhor aproximação para estas grandezas, seguindo-se de um processo de suavização baseado em extrapolação dos valores para os nós e em média nodal simples. No caso do ANSYS, técnica semelhante é adotada. Entretanto o manual do ANSYS não deixa claro qual a técnica empregada para adequar a formulação paramétrica do modelo de Reissner-Mindlin para placas finas, caracterizando, uma grande desvantagem do uso de softwares proprietários, de código fechado.

Verificando os resultados obtidos na análise das placas com e sem armadura nota-se, como esperado, que a armadura, transformada em camada de aço, aumenta a rigidez da placa reduzindo seu deslocamento. Também, de acordo com o objetivo do exemplo, comparando os resultados obtidos em cada software verifica-se a proximidade entre eles, validando os obtidos pelo **INSANE**.

Capítulo 9

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um dos objetivos deste trabalho foi ampliar o núcleo numérico do sistema **INSANE** incluindo alguns dos diversos elementos de placas existentes. Assim, tornou-se possível constatar que o sistema é realmente amigável a mudanças e escalável em complexidade.

Conforme apresentado no Capítulo 4, a implementação atual do núcleo numérico do **INSANE** permite ampliá-lo, reutilizá-lo ou adaptá-lo para outras aplicações, com poucas mudanças. Pode-se afirmar que esta característica existe devido à utilização da programação orientada a objetos (POO) que propõe o encapsulamento de dados segundo suas características e isto permite alterar partes do sistema sem prejudicar outras. Além da programação orientada a objetos, a linguagem Java utilizada no sistema mostra-se bastante adequada, pois permite a reutilização de diversas bibliotecas disponíveis gratuitamente e ainda é independente da plataforma, o que torna possível a migração para outra plataforma sem transtornos.

Para a resolução dos problemas de placas apresentaram-se os modelos matemáticos baseados nas teorias de Kirchhoff e de Reissner-Mindlin. Diversos elementos finitos referente a estas teorias foram brevemente apresentados juntamente com alguns recursos necessários para utilização dos mesmos.

Foram disponibilizados de forma simples e objetiva nos apêndices, detalhes importantes sobre os elementos de Kirchhoff, para facilitar a aplicação dos mesmos.

Outro recurso de destaque no programa é a opção de discretizar a espessura em

camadas, que está disponível para todos os elementos implementados, e é extremamente importante para modelagem de placas compostas.

Na maioria das vezes, análises críticas de elementos de placa encontradas na literatura não vêm acompanhadas de confirmação através de resultados. Assim, este trabalho buscou contribuir ao máximo com informações sobre os elementos finitos aqui propostos, realizando testes da malha de Irons (*Patch test*), estudos de convergência e diversas simulações numéricas, de forma a ilustrar o comportamento dos elementos.

Para realização de todos estes estudos aqui apresentados (patch test, estudo de convergência, comparações com solução analítica e exemplos práticos), o programa foi executado 713 vezes. O que permite dizer, que a implementação dos elementos finitos de placas foi exaustivamente testada.

Para estudo de placas finas, os elementos finitos baseados na teoria de Kirchhoff, em geral, mostraram melhor comportamento do que os baseados em adaptações da teoria de Reissner-Mindlin.

Conforme aplicado nos Capítulos 5 e 6, na solução de placas finas através dos elementos baseados na teoria de Reissner-Mindlin, o programa disponibiliza três técnicas para evitar o bloqueio da solução. Dentre elas, a baseada em deformação de cortante imposta pode ser dita a mais adequada.

O Capítulo 5 deixou claro que sozinho os *patch tests* para os elementos de placas são insuficientes para decisão sobre a aplicabilidade dos mesmos. Assim, estudos de convergência apropriados devem ser realizados para este fim.

Os estudos de convergência (Capítulo 6) confirmaram que a aplicação dos elementos finitos paramétricos baseados na teoria de Reissner-Mindlin, na modelagem de placas moderadamente espessas e espessas, apresenta convergência monotônica por baixo, o que não acontece, quando estes elementos são usados para modelar placas finas, mesmo utilizando-se as técnicas para evitar bloqueio da solução.

A validação da implementação computacional também se fez através das diversas

simulações numéricas realizadas, comparando-se os resultados emitidos pelo sistema **INSANE** com soluções analíticas e com o software ANSYS, conforme apresentado nos Capítulos 7 e 8.

A comparação dos resultados com um programa comercial (ANSYS) além de validar a implementação, mostra a vantagem de usar softwares cujos detalhes de uso e implementação são claros, diferente dos programas de código fechado.

O uso de malhas bastante refinadas em exemplos de aplicações práticas (Capítulo 8) permite dizer que o **INSANE** pode ser usado com bom desempenho em projetos estruturais convencionais. Este fato também serve para inverter opiniões duvidosas sobre o desempenho da linguagem JAVA em computação científica.

Apêndice A

Funções de Forma e Matrizes de Rigidez dos Elementos de Kirchhoff

Neste apêndice apresentam-se as funções de forma, ou como obtê-las, para os elementos finitos baseados na teoria de Kirchhoff. Também são apresentadas as matrizes de rigidez destes elementos, obtidas de forma analítica considerando o material linear elástico isotrópico.

A.1 Elemento Retangular MZC (Seção 3.2.2)

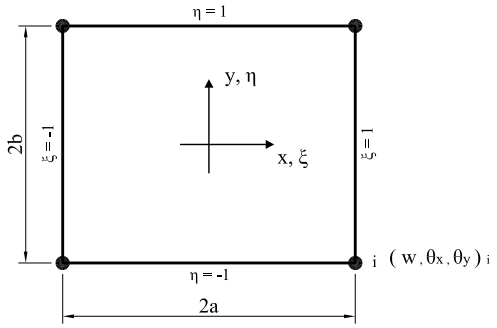


Figura A.1: Elemento de placa retangular MZC

A.1.1 Funções de Forma

$$
\begin{aligned}
N_i &= \frac{1}{8}(1+\xi_i\ \xi)(1+\eta_i\ \eta)(2+\xi_i\ \xi+\eta_i\eta-\xi^2-\eta^2) \\
\bar{N}_i &= \frac{a}{8}(\xi^2-1)(\xi+\xi_i)(1+\eta_i\ \eta) \\
\bar{\bar{N}}_i &= \frac{b}{8}(\eta^2-1)(\eta+\eta_i)(1+\xi_i\ \xi) \quad (i=1,2,3,4)
\end{aligned} \tag{A.1}
$$

onde ξ_i e η_i são as coordenadas paramétricas do nó i.

A.1.2 Matriz de Rigidez

A matriz de rigidez (Eq.(A.5)), apresentada em Oñate (1995), aplica-se a elementos constituídos de material linear elástico isotrópico.

A.2 Elemento Retangular BFS (Seção 3.2.3)

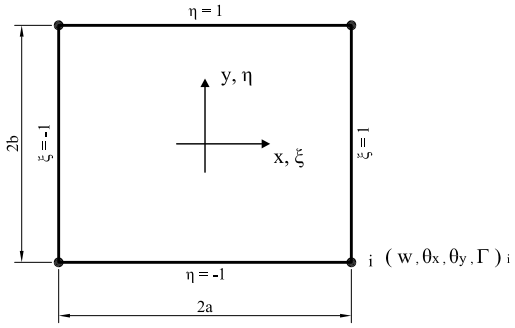


Figura A.2: Elemento de placa retangular BFS

A.2.1 Funções de Forma

Polinômios de Hermite definidos na direção x:

$$h_{1x} = \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) \quad ; \quad h_{2x} = \frac{1}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)a$$
$$h_{3x} = \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) \quad ; \quad h_{4x} = \frac{1}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)a \tag{A.2}$$

Polinômios de Hermite definidos na direção y:

$$h_{1y} = \frac{1}{4}(2 - 3\eta + \eta^3) \quad ; \quad h_{2y} = \frac{1}{4}(1 - \eta - \eta^2 + \eta^3)b$$
$$h_{3y} = \frac{1}{4}(2 + 3\eta - \eta^3) \quad ; \quad h_{4y} = \frac{1}{4}(-1 - \eta + \eta^2 + \eta^3)b \tag{A.3}$$

Conforme dito na Seção 3.2.3, as funções de forma são obtidas a partir do produto de dois polinômios de Hermite, conforme segue:

$$N_1 = h_{1x} \times h_{1y} \;;\; \bar{N}_1 = h_{2x} \times h_{1y} \;;\; \bar{\bar{N}}_1 = h_{1x} \times h_{2y} \;;\; \bar{\bar{\bar{N}}}_1 = h_{2x} \times h_{2y}$$
$$N_2 = h_{3x} \times h_{1y} \;;\; \bar{N}_2 = h_{4x} \times h_{1y} \;;\; \bar{\bar{N}}_2 = h_{3x} \times h_{2y} \;;\; \bar{\bar{\bar{N}}}_2 = h_{4x} \times h_{2y}$$
$$N_3 = h_{3x} \times h_{3y} \;;\; \bar{N}_3 = h_{4x} \times h_{3y} \;;\; \bar{\bar{N}}_3 = h_{3x} \times h_{4y} \;;\; \bar{\bar{\bar{N}}}_3 = h_{4x} \times h_{4y}$$
$$N_4 = h_{1x} \times h_{3y} \;;\; \bar{N}_4 = h_{2x} \times h_{3y} \;;\; \bar{\bar{N}}_4 = h_{1x} \times h_{4y} \;;\; \bar{\bar{\bar{N}}}_4 = h_{2x} \times h_{4y} \tag{A.4}$$

A.2.2 Matriz de Rigidez

A matriz de rigidez (Eq.(A.6)) é aplicável a elementos constituídos de material linear elástico isotrópico.

$$\underline{k} = \frac{Et^3}{12\ (1-\nu^2)} \left[\underline{k}_1^{(e)} + \underline{k}_2^{(e)} + \underline{k}_3^{(e)} + \underline{k}_4^{(e)} \right] \tag{A.5}$$

$$\underline{k}_1 = \frac{b}{6a^3} \begin{bmatrix}
6 & & & & & & & & & & & \text{sim.} \\
6a & 8a^2 & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & & & & & & & & & \\
-6 & 6a & 0 & 6 & & & & & & & & \\
6a & 4a^2 & 0 & -6a & 8a^2 & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\
-3 & -3a & 0 & 3 & -3a & 0 & 6 & & & & & \\
3a & 2a^2 & 0 & -3a & 4a^2 & 0 & -6a & 8a^2 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
3 & 3a & 0 & -3 & 3a & 0 & -6 & 6a & 0 & 6 & & \\
3a & 0 & 0 & -3a & 2a^2 & 0 & -6a & 4a^2 & 0 & 6a & 8a^2 & \\
0 & 0 & 4a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{k}_2 = \frac{a}{6b^3} \begin{bmatrix}
6 & & & & & & & & & & & \text{sim.} \\
0 & 0 & & & & & & & & & & \\
6b & 0 & 8b^2 & & & & & & & & & \\
3 & 0 & 3b & 6 & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
3b & 0 & 4b^2 & 6b & 0 & 8b^2 & & & & & & \\
-3 & 0 & -3b & -6 & 0 & -6b & 6 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
3b & 0 & 2b^2 & 6b & 0 & 4b^2 & -6b & 0 & 8b^2 & & & \\
-6 & 0 & -6b & -3 & 0 & -3b & 3 & 0 & -3b & 6 & & \\
0 & 4b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
6b & 0 & 0 & 3b & 0 & 2b^2 & -3b & 0 & 4b^2 & -6b & 0 & 8b^2
\end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_3 = \frac{\nu}{2ab} \begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & & & & \text{sim.} \\
a & 0 & & & & & & & & & & \\
b & 2ab & 0 & & & & & & & & & \\
-1 & 0 & -b & 1 & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & -a & 0 & & & & & & & \\
-b & 0 & 0 & b & -2ab & 0 & & & & & & \\
1 & 0 & 0 & -1 & a & 0 & 1 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & -a & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 2ab & 0 & & & \\
-1 & -a & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & b & 1 & & \\
-a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & -b & -2ab & 0
\end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{k}_4 = \frac{1-\nu}{30ab} \begin{bmatrix}
21 & & & & & & & & & & & \text{sim.} \\
3a & 8a^2 & & & & & & & & & & \\
3b & 0 & 8b^2 & & & & & & & & & \\
-21 & -3a & -3b & 21 & & & & & & & & \\
3a & -2a^2 & 0 & -3a & 8a^2 & & & & & & & \\
-3b & 0 & -8b^2 & 3b & 0 & 8b^2 & & & & & & \\
21 & 3a & 3b & -21 & 3a & -3b & 21 & & & & & \\
-3a & 2a^2 & 0 & 3a & -8a^2 & 0 & -3a & 8a^2 & & & & \\
3b & 0 & 2b^2 & 3b & 0 & -2b^2 & -3b & 0 & 8b^2 & & & \\
-21 & -3a & -3b & 21 & -3a & 3b & -21 & 3a & 3b & 21 & & \\
-3a & -8b^2 & 0 & 3a & 2a^2 & 0 & -3a & -2a^2 & 0 & 3a & 8a^2 & \\
3b & 0 & -2a^2 & -3b & 0 & 2b^2 & 3b & 0 & -8b^2 & -3b & 0 & 8b^2
\end{bmatrix}$$

Matriz de Rigidez do Elemento Retangular BFS

$$\underline{k} = \frac{E t^3}{12\ (1-\nu^2)} \left[\underline{k}_1^{(e)} + \underline{k}_2^{(e)} + \underline{k}_3^{(e)} + \underline{k}_4^{(e)} \right] \tag{A.6}$$

$$\underline{k}_1 = \frac{\nu}{450ab} \begin{bmatrix}
324 & & & & & & & & & & & & & & & \\
324a & 144a^2 & & & & & & & & & & & & & & \\
324b & 549ab & 144b^2 & & & & & & & & & & & & & \\
99ab & 144a^2b & 144ab^2 & 64a^2b^2 & & & & & & & & & & & & \\
-324 & -54a & -324b & -54ab & 324 & & & & & & & & & & & \\
54a & -36a^2 & 54ab & -36a^2b & -324a & 144a^2 & & & & & & & & & & \\
-324b & -54ab & -144b^2 & -24ab^2 & 324b & -549ab & 144b^2 & & & & & & & & & \\
54ab & -36a^2b & 24ab^2 & -16a^2b^2 & -99ab & 144a^2b & -144ab^2 & 64a^2b^2 & & & & & & & & \\
324 & 54a & 54b & 9ab & -324 & 324a & -54b & 54ab & 324 & & & & & & & \\
-54a & 36a^2 & -9ab & 6a^2b & 324a & -144a^2 & 54ab & -24a^2b & -324a & 144a^2 & & & & & & \\
-54b & -9ab & 36b^2 & 6ab^2 & 54b & -54ab & -36b^2 & 36ab^2 & -324b & 549ab & 144b^2 & & & & & \\
9ab & -6a^2b & -6ab^2 & 4a^2b^2 & -54ab & 24a^2b & 36ab^2 & -16a^2b^2 & 99ab & -144a^2b & -144ab^2 & 64a^2b^2 & & & & \\
-324 & -324a & -54b & -54ab & 324 & -54a & 54b & -9ab & -324 & 54a & 324b & -54ab & 324 & & & \\
-324a & -144a^2 & -54ab & -24a^2b & 54a & 36a^2 & 9ab & 6a^2b & -54a & -36a^2 & 54ab & 36a^2b & 324a & 144a^2 & & \\
54b & 54ab & -36b^2 & -36ab^2 & -54b & 9ab & 36b^2 & -6ab^2 & 324b & -54ab & -144b^2 & 24ab^2 & -324b & -549ab & 144b^2 & \\
54ab & 24a^2b & -36ab^2 & -16a^2b^2 & -9ab & -6a^2b & 6ab^2 & 4a^2b^2 & 54ab & 36a^2b & -24ab^2 & -16a^2b^2 & -99ab & -144a^2b & 144ab^2 & 64a^2b^2
\end{bmatrix} \text{sim.}$$

$$\underline{k}_2 = \frac{b}{210a^3} \begin{bmatrix}
234 & & & & & & & & & & & & & & & \\
234a & 312a^2 & & & & & & & & & & & & & & \\
66b & 66ab & 24b^2 & & & & & & & & & & & & & \\
66ab & 88a^2b & 24ab^2 & 32a^2b^2 & & & & & & & & & & & & \\
-234 & -234a & -66b & -66ab & 234 & & & & & & & & & & & \\
234a & 156a^2 & 66ab & 44a^2b & -234a & 312a^2 & & & & & & & & & & \\
-66b & -66ab & -24b^2 & -24ab^2 & 66b & -66ab & 24b^2 & & & & & & & & & \\
66ab & 44a^2b & 24ab^2 & 16a^2b^2 & -66ab & 88a^2b & -24ab^2 & 32a^2b^2 & & & & & & & & \\
-81 & -81a & -39b & -39ab & 81 & -81a & 39b & -39ab & 234 & & & & & & & \\
81a & 54a^2 & 39ab & 26a^2b & -81a & 108a^2 & -39ab & 52a^2b & -234a & 312a^2 & & & & & & \\
39b & 39ab & 18b^2 & 18ab^2 & -39b & 39ab & -18b^2 & 18ab^2 & -66b & 66ab & 24b^2 & & & & & \\
-39ab & -26a^2b & -18ab^2 & -12a^2b^2 & 39ab & -52a^2b & 18ab^2 & -24a^2b^2 & 66ab & -88a^2b & -24ab^2 & 32a^2b^2 & & & & \\
81 & 81a & 39b & 39ab & -81 & 81a & -39b & 39ab & -234 & 234a & 66b & -66ab & 234 & & & \\
81a & 108a^2 & 39ab & 52a^2b & -81a & 54a^2 & -39ab & 26a^2b & -234a & 156a^2 & 66ab & -44a^2b & 234a & 312a^2 & & \\
-39b & -39ab & -18b^2 & -18ab^2 & 39b & -39ab & 18b^2 & -18ab^2 & 66b & -66ab & -24b^2 & 24ab^2 & -66b & -66ab & 24b^2 & \\
-39ab & -52a^2b & -18ab^2 & -24a^2b^2 & 39ab & -26a^2b & 18ab^2 & -12a^2b^2 & 66ab & -44a^2b & -24ab^2 & 16a^2b^2 & -66ab & -88a^2b & 24ab^2 & 32a^2b^2
\end{bmatrix} \text{sim.}$$

$$\underline{k}_3 = \frac{a}{210b^3}\begin{bmatrix}
234 & & & & & & & & & & & & & & & \\
66a & 24a^2 & & & & & & & & & & & & & & \\
234b & 66ab & 312b^2 & & & & & & & & & & & & & \\
66ab & 24a^2b & 88ab^2 & 32a^2b^2 & & & & & & & & & & & & \\
81 & 39a & 81b & 39ab & 234 & & & & & & & & & & & \\
-39a & -18a^2 & -39ab & -18a^2b & -66a & 24a^2 & & & & & & & & & & \\
81b & 39ab & 108b^2 & 52ab^2 & 234b & -66ab & 312b^2 & & & & & & & & & \\
-39ab & -18a^2b & -52ab^2 & -24a^2b^2 & -66ab & 24a^2b & -88ab^2 & 32a^2b^2 & & & & & & & & \\
-81 & -39a & -81b & -39ab & -234 & 66a & -234b & 66ab & 234 & & & & & & & \\
39a & 18a^2 & 39ab & 18a^2b & 66a & -24a^2 & 66ab & -24a^2b & -66a & 24a^2 & & & & & & \\
81b & 39ab & 54b^2 & 26ab^2 & 234b & -66ab & 156b^2 & -44a^2b & -234b & 66ab & 312b^2 & & & & & \\
-39ab & -18a^2b & -26ab^2 & -12a^2b^2 & -66ab & 24a^2b & -44ab^2 & 16a^2b^2 & 66ab & -24a^2b & -88ab^2 & 32a^2b^2 & & & & \\
-234 & -66a & -234b & -66ab & -81 & 39a & -81b & 39ab & 81 & -39a & -81b & 39ab & 234 & & & \\
-66a & -24a^2 & -66ab & -24a^2b & -39a & 18a^2 & -39ab & 18a^2b & 39a & -18a^2 & -39ab & 18a^2b & 66a & 24a^2 & & \\
234b & 66ab & 156b^2 & 44ab^2 & 81b & -39ab & 54b^2 & -26ab^2 & -81b & 39ab & 108b^2 & -52ab^2 & -234b & -66ab & 312b^2 & \\
66ab & 24a^2b & 44ab^2 & 16a^2b^2 & 39ab & -18a^2b & 26ab^2 & -12a^2b^2 & -39ab & 18a^2b & 52ab^2 & -24a^2b^2 & -66ab & -24a^2b & 88ab^2 & 32a^2b^2
\end{bmatrix}$$

sim.

$$\underline{k}_4 = \frac{1-\nu}{450ab}\begin{bmatrix}
324 & & & & & & & & & & & & & & & \\
54a & 144a^2 & & & & & & & & & & & & & & \\
54b & 9ab & 144b^2 & & & & & & & & & & & & & \\
9ab & 24a^2b & 24ab^2 & 64a^2b^2 & & & & & & & & & & & & \\
-324 & -54a & -54b & -9ab & 324 & & & & & & & & & & & \\
54a & -36a^2 & 9ab & -6a^2b & -54a & 144a^2 & & & & & & & & & & \\
-54b & -9ab & -144b^2 & -24ab^2 & 54b & -9ab & 144b^2 & & & & & & & & & \\
9ab & -6a^2b & 24ab^2 & -16a^2b^2 & -9ab & 24a^2b & -24ab^2 & 64a^2b^2 & & & & & & & & \\
324 & 54a & 54b & 9ab & -324 & 54a & -54b & 9ab & 324 & & & & & & & \\
-54a & 36a^2 & -9ab & 6a^2b & 54a & -144a^2 & 9ab & -24a^2b & -54a & 144a^2 & & & & & & \\
-54b & -9ab & 36b^2 & 6ab^2 & 54b & -9ab & -36b^2 & 6ab^2 & -54b & 9ab & 144b^2 & & & & & \\
9ab & -6a^2b & -6ab^2 & 4a^2b^2 & -9ab & 24a^2b & 6ab^2 & -16a^2b^2 & 9ab & -24a^2b & -24ab^2 & 64a^2b^2 & & & & \\
-324 & -54a & -54b & -9ab & 324 & -54a & 54b & -9ab & -324 & 54a & 54b & -9ab & 324 & & & \\
-54a & -144a^2 & -9ab & -24a^2b & 54a & 36a^2 & 9ab & 6a^2b & -54a & -36a^2 & 9ab & 6a^2b & 54a & 144a^2 & & \\
54b & 9ab & -36b^2 & -6ab^2 & -54b & 9ab & 36b^2 & -6ab^2 & 54b & -9ab & -144b^2 & 24ab^2 & -54b & -9ab & 144b^2 & \\
9ab & 24a^2b & -6ab^2 & -16a^2b^2 & -9ab & -6a^2b & 6ab^2 & 4a^2b^2 & 9ab & 6a^2b & -24ab^2 & -16a^2b^2 & -9ab & -24a^2b & 24ab^2 & 64a^2b^2
\end{bmatrix}$$

sim.

A.3 Elemento Triangular CKZ (Seção 3.2.4)

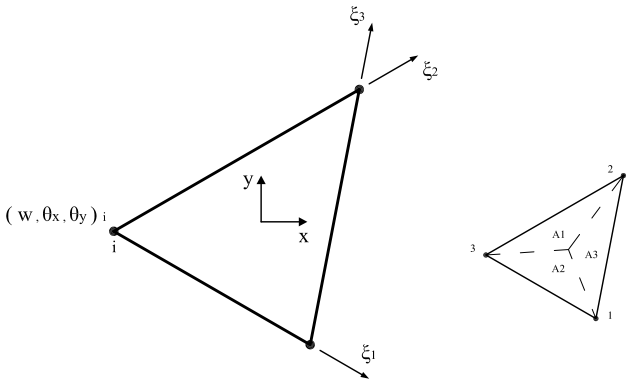


Figura A.3: Elemento de placa triangular CKZ

A.3.1 Funções de Forma

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \xi_1 + \xi_1^2\,\xi_2 + \xi_1^2\,\xi_3 - \xi_1\,\xi_2^2 - \xi_1\,\xi_3^2 \\
\bar{N}_1 &= a_3\left(\xi_1^2\,\xi_2 + \left(\frac{1}{2}\,\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\right)\right) - a_2\left(\xi_1^2\,\xi_3 + \left(\frac{1}{2}\,\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\right)\right) \\
\bar{\bar{N}}_1 &= b_3\left(\xi_1^2\,\xi_2 + \left(\frac{1}{2}\,\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\right)\right) - b_2\left(\xi_1^2\,\xi_3 + \left(\frac{1}{2}\,\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\right)\right) \\
N_2 &= \xi_2 + \xi_2^2\,\xi_3 + \xi_2^2\,\xi_1 - \xi_2\,\xi_3^2 - \xi_2\,\xi_1^2 \\
\bar{N}_2 &= a_1\left(\xi_2^2\,\xi_3 + \left(\frac{1}{2}\,\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\right)\right) - a_3\left(\xi_1\,\xi_2^2 + \left(\frac{1}{2}\,\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\right)\right) \\
\bar{\bar{N}}_2 &= b_1\left(\xi_2^2\,\xi_3 + \left(\frac{1}{2}\,\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\right)\right) - b_3\left(\xi_1\,\xi_2^2 + \left(\frac{1}{2}\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\right)\right) \\
N_3 &= \xi_3 + \xi_3^2\,\xi_1 + \xi_3^2\,\xi_2 - \xi_3\,\xi_1^2 - \xi_3\,\xi_2^2 \\
\bar{N}_3 &= a_2\left(\xi_3^2\,\xi_1 + \left(\frac{1}{2}\,\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\right)\right) - a_1\left(\xi_2\,\xi_3^2 + \left(\frac{1}{2}\,\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\right)\right) \\
\bar{\bar{N}}_3 &= b_2\left(\xi_3^2\,\xi_1 + \left(\frac{1}{2}\,\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\right)\right) - b_1\left(\xi_2\,\xi_3^2 + \left(\frac{1}{2}\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\right)\right)
\end{aligned}
\tag{A.7}
$$

onde

$$a_1 = x_3 - x_2 \quad ; \quad a_2 = x_1 - x_3 \quad ; \quad a_3 = x_2 - x_1$$

$$b_1 = y_2 - y_3 \quad ; \quad b_2 = y_3 - y_1 \quad ; \quad b_3 = y_1 - y_2$$

A.3.2 Matriz de Rigidez

Para obter a matriz de rigidez do elemento CKZ, procedeu-se segundo Cheung et al. (1968), portanto as equações e matrizes apresentadas abaixo foram retiradas deste artigo.

$$\underline{k}^{(e)} = \frac{1}{64\,\Delta^6}\,\underline{T}^T\,\underline{B}^T\left(\int\int\,\underline{A}^T\,\underline{D}\,\underline{A}\,dx\,dy\right)\,\underline{B}\,\underline{T} \tag{A.8}$$

A matriz $\underline{D}$ da Eq.(A.8) é matriz constitutiva dada pela Eq.(2.9).

Considerando um triângulo ijk, com a origem em seu centróide e numeração dos vértices anti-horária, tem-se:

$$\begin{aligned} &a_i = x_j\ y_k - x_k\ y_j \quad ; \quad b_i = y_j - y_k \quad ; \quad c_i = x_k - x_j \\ &\Delta = \frac{3}{2}\ a_i = \frac{3}{2}\ a_j = \frac{3}{2}\ a_k = \frac{3}{2}\ a \end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 \end{bmatrix} \tag{A.10}$$

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{2\Delta} & 1 & 0 & \frac{c_2}{2\Delta} & 0 & 0 & \frac{c_3}{2\Delta} & 0 & 0 \\ \frac{-b_1}{2\Delta} & 0 & 1 & \frac{-b_2}{2\Delta} & 0 & 0 & \frac{-b_3}{2\Delta} & 0 & 0 \\ \frac{c_1}{2\Delta} & 0 & 0 & \frac{c_2}{2\Delta} & 1 & 0 & \frac{c_3}{2\Delta} & 0 & 0 \\ \frac{-b_1}{2\Delta} & 0 & 0 & \frac{-b_2}{2\Delta} & 0 & 1 & \frac{-b_3}{2\Delta} & 0 & 0 \\ \frac{c_1}{2\Delta} & 0 & 0 & \frac{c_2}{2\Delta} & 0 & 0 & \frac{c_3}{2\Delta} & 1 & 0 \\ \frac{-b_1}{2\Delta} & 0 & 0 & \frac{-b_2}{2\Delta} & 0 & 0 & \frac{-b_3}{2\Delta} & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A.11}$$

A matriz $\underline{B}$ é formada pelas sub-matrizes, na forma:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{BX}^{(1)} & \underline{BY}^{(1)} & \underline{BX}^{(2)} & \underline{BY}^{(2)} & \underline{BX}^{(3)} & \underline{BY}^{(3)} \end{bmatrix} \tag{A.12}$$

As submatrizes da Eq.(A.12) são dadas pelas seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} &BX_l^{(i)} = X_l^{(i)}\ b_k - Y_l^{(i)}\ b_j + E_l\ F^{(i)} \\ &BY_l^{(i)} = X_l^{(i)}\ c_k - Y_l^{(i)}\ c_j + E_l\ G^{(i)} \quad (i = 1,2,3\ ;\ l = 1,2,\ldots,7) \end{aligned} \tag{A.13}$$

onde:

$$\begin{aligned} &X_1^i = b_i^2\ a + 2\ a\ b_i\ b_j && Y_1^i = b_i^2\ a + 2\ a\ b_i\ b_k \\ &X_2^i = 2\ b_i\ c_i\ a + 2\ b_j\ c_i\ a + 2\ b_i\ c_j\ a && Y_2^i = 2\ b_i\ c_i\ a + 2\ b_k\ c_i\ a + 2\ b_i\ c_k\ a \\ &X_3^i = c_i^2\ a + 2\ a\ c_i\ c_j && Y_3^i = c_i^2\ a + 2\ a\ c_i\ c_k \\ &X_4^i = b_i^2\ b_j && Y_4^i = b_i^2\ b_k \\ &X_5^i = 2\ b_i\ c_i\ b_j + 2\ b_i^2\ c_j && Y_5^i = 2\ b_i\ c_i\ b_k + 2\ b_i^2\ c_k \\ &X_6^i = c_i^2\ b_j + 2\ b_i\ c_i\ c_j && Y_6^i = c_i^2\ b_k + 2\ b_i\ c_i\ c_k \\ &X_7^i = c_i^2\ c_j && Y_7^i = c_i^2\ c_k \\ &F^i = \tfrac{b_k - b_j}{2} && G^i = \tfrac{c_k - c_j}{2} \end{aligned} \tag{A.14}$$

e considerando os índices i, j, k como 1-2-3, respectivamente em ordem cíclica, tem-se:

$$
\begin{aligned}
E_1 &= a \sum_{i=1,3} (b_i\ b_j) \\
E_2 &= a \sum_{i=1,3} (c_i\ b_j + b_i\ c_j) \\
E_3 &= a \sum_{i=1,3} (c_i\ c_j) \\
E_4 &= b_i\ b_j\ b_k \\
E_5 &= \sum_{i=1,3} (c_i\ b_j\ b_k) \\
E_6 &= \sum_{i=1,3} (c_i\ c_j\ b_k) \\
E_7 &= c_i\ c_j\ c_k
\end{aligned}
\tag{A.15}
$$

Vale destacar que a matriz de rigidez obtida encontra-se num padrão diferente do apresentado na seção 3.2.4, pois em Cheung et al. (1968), utilizou-se o seguinte vetor de deslocamentos nodais:

$$
\underline{d} = \left\{ \begin{array}{c} w \\ -\theta_y \\ \theta_x \end{array} \right\} \tag{A.16}
$$

Logo, é necessário alterar linhas, colunas e sinais desta matriz para obter uma matriz equivalente à encontrada de forma numérica utilizando as funções de forma apresentadas anteriormente.

A.4 Elemento Triangular de Cowper (Seção 3.2.5)

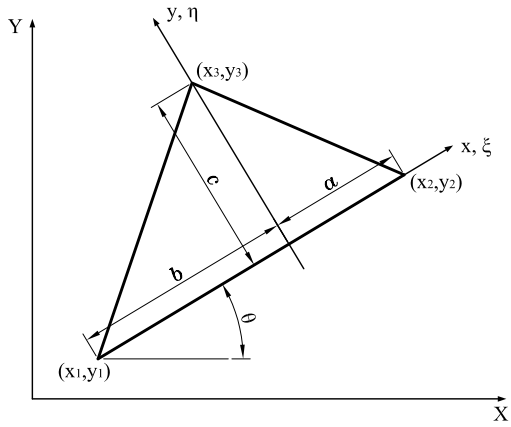


Figura A.4: Elemento de placa triangular Cowper

A.4.1 Funções de Forma

Conforme dito na Seção 3.2.5, para obter as funções de forma procede-se de forma análoga à demonstrada na Seção 3.2.1. Partindo da Eq.(3.2):

$$w = \underline{\varphi}\ \underline{\alpha} \tag{A.17}$$

onde

$$\underline{\alpha} = \underline{T}_2\ \underline{R}\ \underline{d} \tag{A.18}$$

e, para este elemento, tem-se que:

$$\underline{d} = \left\{ \begin{array}{c} w \\ w_{,x} \\ w_{,y} \\ w_{,xx} \\ w_{,xy} \\ w_{,yy} \end{array} \right\} \tag{A.19}$$

Substituindo-se a Eq.(A.18) na Eq.(A.17), tem-se:

$$w = \underline{\varphi}\ \underline{T}_2\ \underline{R}\ \underline{d} \tag{A.20}$$

Verifica-se que a Eq.(A.20) é análoga à Eq.(3.5), logo pode-se simplificá-la conforme a Eq.(3.6), encontrando-se:

$$w = \underline{N}\ \underline{d}^{(e)} \tag{A.21}$$

Assim, sabendo-se que $\underline{N}$ é a matriz das funções de forma, tem-se que para obtê-la basta realizar o seguinte produto matricial:

$$\underline{N} = \underline{\varphi}\ \underline{T}_2\ \underline{R} \tag{A.22}$$

onde:

$$\begin{aligned} \underline{\varphi} = \Big[& 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \xi^3 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \quad \eta^3 \quad \xi^4 \ \Big| \\ & \Big| \ \xi^3\eta \quad \xi^2\eta^2 \quad \xi\eta^3 \quad \eta^4 \quad \xi^5 \quad \xi^3\eta^2 \quad \xi^2\eta^3 \quad \xi\eta^4 \quad \eta^5 \ \Big] \end{aligned} \tag{A.23}$$

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \underline{R}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{R}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{R}_1 \end{bmatrix} \tag{A.24}$$

$$\underline{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & sen\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -sen\theta & cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cos^2\theta & 2sen\theta cos\theta & sen^2\theta \\ 0 & 0 & 0 & -sen\theta cos\theta & cos^2\theta - sen^2\theta & sen\theta cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & sen^2\theta & -2sen\theta cos\theta & cos^2\theta \end{bmatrix}$$

Já a matriz $\underline{T}_2$ (20×18), consiste nas dezoito primeiras colunas de $\underline{T}^{-1}$, que é o inverso da matriz $\underline{T}$ dada pela Eq.(A.25).

Segundo Cowper et al. (1968), a matriz $\underline{T}$ (Eq.(A.25)) para fins práticos nunca será singular, uma vez que a área do elemento não é nula. Portanto, esta matriz sempre poderá ser invertida. Todas as equações apresentadas acima foram retiradas deste artigo.

A.4.2 Matriz de Rigidez

Os passos a serem seguidos para obtenção da matriz de rigidez foram apresentados na Seção 3.2.5, sendo que as matrizes $\underline{R}$ e $\underline{T}$ necessárias para o cálculo são dadas nas Eqs.(A.24) e (A.25), respectivamente. Vale lembrar que a matriz obtida é válida somente para elementos de material linear elástico isotrópico.

$$\underline{T} = \begin{bmatrix}
1 & -b & 0 & b^2 & 0 & 0 & -b^3 & 0 & 0 & 0 & b^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -2b & 0 & 0 & 3b^2 & 0 & 0 & 0 & -4b^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5b^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & -b^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -6b & 0 & 0 & 0 & 12b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20b^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2b & 0 & 0 & 0 & 3b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2b & 0 & 0 & 0 & 2b^2 & 0 & 0 & 0 & -2b^3 & 0 & 0 & 0 \\
1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & a^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 4a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5a^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6a & 0 & 0 & 0 & 12a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2a & 0 & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2a & 0 & 0 & 0 & 2a^2 & 0 & 0 & 0 & 2a^3 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & c & 0 & 0 & c^2 & 0 & 0 & 0 & c^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^5 \\
0 & 1 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & c^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^4 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2c & 0 & 0 & 0 & 3c^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4c^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5c^4 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2c & 0 & 0 & 0 & 0 & 2c^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2c^3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2c & 0 & 0 & 0 & 0 & 3c^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4c^3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 6c & 0 & 0 & 0 & 0 & 12c^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20c^3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5a^4c & 3a^2c^3 - 2a^4c & -2ac^4 + 3a^3c^2 & c^5 - 4a^2c^3 & 5ac^4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5b^4c & 3b^2c^3 - 2b^4c & 2bc^4 - 3b^3c^2 & c^5 - 4b^2c^3 & -5bc^4
\end{bmatrix} \tag{A.25}$$

Apêndice B

Condições de Contorno e Número de Pontos de Integração Aplicados aos Elementos de Kirchhoff

Apresenta-se aqui as condições de contorno aplicadas aos elementos de Kirchhoff quando engastados ou simplesmente apoiados. Apresenta-se também o número mínimo de pontos de integração que devem ser empregados para a obtenção da matriz de rigidez destes elementos.

B.1 Condições de Contorno

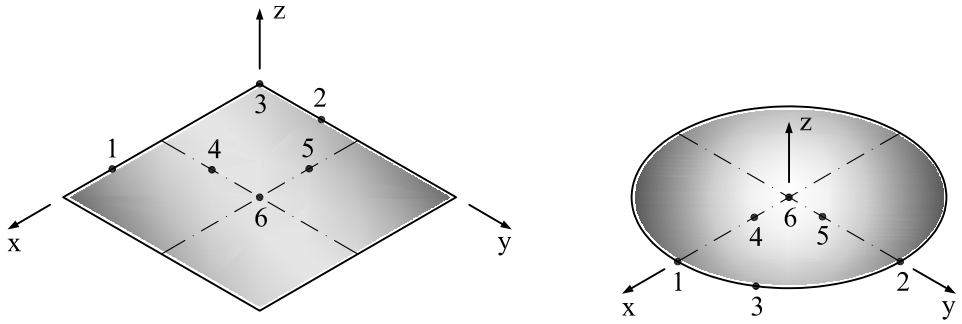


Figura B.1: Condições de contorno para os elementos de Kirchhoff

Tabela B.1: Condições de contorno para uma placa retangular

Elemento	Posição	Ponto FIG. B.1	Condição de Contorno	
			Engastada	S. Apoiada
MZC	Borda	1	$w = \theta_x = \theta_y = 0$	$w = \theta_x = 0$
		2	$w = \theta_x = \theta_y = 0$	$w = \theta_y = 0$
		3	$w = \theta_x = \theta_y = 0$	$w = \theta_x = \theta_y = 0$
	Eixo Simetria	4	$\theta_x = 0$	$\theta_x = 0$
		5	$\theta_y = 0$	$\theta_y = 0$
		6	$\theta_x = \theta_y = 0$	$\theta_x = \theta_y = 0$
BFS	Borda	1	$w = \theta_x = \theta_y = \Gamma = 0$	$w = \theta_x = 0$
		2	$w = \theta_x = \theta_y = \Gamma = 0$	$w = \theta_y = 0$
		3	$w = \theta_x = \theta_y = \Gamma = 0$	$w = \theta_x = \theta_y = 0$
	Eixo Simetria	4	$\theta_x = \Gamma = 0$	$\theta_x = \Gamma = 0$
		5	$\theta_y = \Gamma = 0$	$\theta_y = \Gamma = 0$
		6	$\theta_x = \theta_y = \Gamma = 0$	$\theta_x = \theta_y = \Gamma = 0$
CKZ	Borda	1	$w = \theta_x = \theta_y = 0$	$w = \theta_x = 0$
		2	$w = \theta_x = \theta_y = 0$	$w = \theta_y = 0$
		3	$w = \theta_x = \theta_y = 0$	$w = \theta_x = \theta_y = 0$
	Eixo Simetria	4	$\theta_x = 0$	$\theta_x = 0$
		5	$\theta_y = 0$	$\theta_y = 0$
		6	$\theta_x = \theta_y = 0$	$\theta_x = \theta_y = 0$
Cowper	Borda	1	$w = \theta_x = \theta_y = w_{,xx} = w_{,xy} = 0$	$w = \theta_x = w_{,xx} = 0$
		2	$w = \theta_x = \theta_y = w_{,xy} = w_{,yy} = 0$	$w = \theta_y = w_{,yy} = 0$
		3	$w = \theta_x = \theta_y = w_{,xx} = w_{,xy} = w_{,yy} = 0$	$w = \theta_x = \theta_y = w_{,xx} = w_{,yy} = 0$
	Eixo Simetria	4	$\theta_x = w_{,xy} = 0$	$\theta_x = w_{,xy} = 0$
		5	$\theta_y = w_{,xy} = 0$	$\theta_y = w_{,xy} = 0$
		6	$\theta_x = \theta_y = w_{,xy} = 0$	$\theta_x = \theta_y = w_{,xy} = 0$

Para os elementos retangular BFS e triangular de Cowper, o grau de liberdade $w_{,xy} = 0$, no vértice formado entre a borda e eixo de simetria para as placas simplesmente apoiadas.

Tabela B.2: Condições de contorno para uma placa circular

Elemento	Posição	Ponto	Condição de Contorno	
			Engastada	S. Apoiada
CKZ	Borda	1	$w = \theta_x = \theta_y = 0$	$w = \theta_y = 0$
		2	$w = \theta_x = \theta_y = 0$	$w = \theta_x = 0$
		3	$w = \theta_x = \theta_y = 0$	$w = 0$
	Eixo Simetria	4	$\theta_x = 0$	$\theta_x = 0$
		5	$\theta_y = 0$	$\theta_y = 0$
		6	$\theta_x = \theta_y = 0$	$\theta_x = \theta_y = 0$
Cowper	Borda	1	$w = \theta_x = \theta_y = w_{,xy} = w_{,yy} = 0$	$w = \theta_y = w_{,xy} = w_{,yy} = 0$
		2	$w = \theta_x = \theta_y = w_{,xx} = w_{,xy} = 0$	$w = \theta_x = w_{,xx} = w_{,xy} = 0$
		3	$w = \theta_x = \theta_y = w_{,xx} = w_{,xy} = w_{,yy} = 0$	$w = 0$
	Eixo Simetria	4	$\theta_y = w_{,xy} = 0$	$\theta_y = w_{,xy} = 0$
		5	$\theta_x = w_{,xy} = 0$	$\theta_x = w_{,xy} = 0$
		6	$\theta_x = \theta_y = w_{,xy} = 0$	$\theta_x = \theta_y = w_{,xy} = 0$

B.2 Pontos de Integração

A TAB. B.3 traz a quantidade mínima de pontos de integração necessária para obtenção da matriz de rigidez, calculada de forma numérica para os elementos de Kirchhoff.

Tabela B.3: Pontos de integração para os elementos de Kirchhoff

Forma Geométrica	Elemento	Número de Pontos de Integração
Retangular	MZC	3×3
	BFS	4×4
Triangular	CKZ	3
	Cowper	13

Referências Bibliográficas

Almeida, M. L., 2005. Elementos finitos paramétricos implementados em java. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

Alvim, P., 2003. 'Open source: Os novos desfios de negócios e a indústria de ti'. *Develpers Magazine*, . Citado em Almeida (2005).

ANSYS, Versão 9.0, *User's Manual*, ANSYS, Inc., Canonsburg, PA.

Bogner, F. K., Fox, R. L. e Schmit, L. A., 1965. 'The generation of interelement compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulae'. *Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech.*, . Citado em Oñate (1995).

Castro, L. M. S., 2001. 'Elementos finitos para a análise elástica de lajes'. , pp. 1–37. Disponível em: <http://www.civil.ist.utl.pt/∼luis/textos/lajesef.pdf> Acesso em: 16/06/2006.

Cheung, Y. K., King, I. P. e Zienkiewicz, O. C., 1968. 'Slab bridges with arbitrary shape and support condition: a general method of analysis based on finite elements'. *Proc. Inst. Civil Engng.*, vol. 40, pp. 9–36.

Cook, R. D., Malkus, D. S. e Plesha, M. E., 1989. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley and Sons, Nova York.

Cowper, G. R., Kosko, E., Lindberg, G. M. e Olson, M. D., 1968, A high precision triangular plate-bending element, Report LR-514, National Aeronautical Establishment, National Research Council of Canadian, Ottawa.

Dvorkin, E. N. e Bathe, K. J., 1984. 'A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis'. *Engng. Comput.*, vol. 1, pp. 77–88. Citado em Hinton e Huang (1986).

Dym, C. L. e Shames, I. I., 1973. *Solid mechanics: A variational approach*. McGraw-Hill, Inc., Tokyo.

Fonseca, M. T., 2006. Aplicação orientada a objetos para análise fisicamente não-linear com modelos reticulados de seções transversais compostas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

Fuina, J. S., 2006. Modelagem de Meios Parcialmente Frágeis Heterogêneos Utilizando o Contínuo de Cosserat e o Modelo de Microplanos. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte. (em desenvolvimento).

Gruttmann, F. e Wagner, W., 2003. 'A stabilized one-point integrated quadrilateral reissner-mindlin plate element'. , pp. 1–23. Disponível em: <http://www.bs.uni-karlsruhe.de/download/Mit_2003-07.pdf> Acesso em: 14/02/2007.

Hinton, E. e Huang, H. C., 1986. 'A family of quadrilateral mindlin plate elements with substitute shear strain fields'. *Computers and Structures*, vol. 23(3), pp. 409–431.

Hughes, T. J. R. e Cohen, M., 1978. 'The "heterosis" finite element for plate bending'. *Computers and Structures*, vol. 9, pp. 445–450.

Hughes, T. J. R., Taylor, R. L. e Kanoknukulchai, W., 1977. 'A simple and efficient element for plate bending'. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 11, pp. 1529–1543. Citado em Oñate (1995).

Liu, Y. J. e Riggs, H. R., 2002, Development of the min-n family of triangular anisoparametric mindlin plate elements, Report UHM/CE/02-02, University of Hawaii - Department of Civil and Environmental Engineering, Manoa. Disponível em: <http://cee.hawaii.edu/reports/UHM-CEE-02-02.pdf> Acesso em: 14/02/2007.

Melosh, R. J., 1961. 'A stiffness matrix for the analysis of thin plates in bending'. *Journal of Aerospace Science*, vol. 28, pp. 34–42. Citado em Oñate (1995).

Oñate, E., 1995. *Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos - Análisis Estático Lineal*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona.

Penna, S. S., 2007. Pós-processador para resultados de análise não-linear de modelos do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

Pitangueira, R. L., 2000. *Introdução ao Método dos Elementos Finitos - Notas de Aula*. Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG, Belo Horizonte.

Pugh, E. D. L., Hinton, E. e Zienkiewicz, O. C., 1978. 'A study of quadrilateral plate bending elements with reduced integration'. *J. Appl. Mech.*, vol. 12, pp. 1059–1079. Citado em Oñate (1995).

Razzaque, A., 1986. 'The patch test for elements'. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, vol. 22, pp. 63–71.

SAP2000, Versão 8.0, *User's Manual*, Computers and Structures, Inc, Berkeley, CA.

Soriano, H. L., 2003. *Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas*. EDUSP, São Paulo.

Taylor, R. L., Simo, J. C., Zienkiewicz, O. e Chan, A. C. H., 1986. 'The patch test - a condition for assessing fem convergence'. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, vol. 22(1), pp. 39–62.

Timoshenko, S. e Woinowsky-Krieger, S., 1959. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, Nova York.

Zienkiewicz, O. C. e Cheung, Y. K., 1964. 'The finite element method for analysis of elastic isotropic and isotropic slabs'. *Proc. Inst. Civ. Engng.*, vol. 28, pp. 471–488. Citado em Oñate (1995).

Zienkiewicz, O., Taylor, R. L., Papadopoulos, P. e Oñate, E., 1990. 'Plate bending elements with discrete constraints: New triangular elements'. *Computers and Structures*, vol. 35(4), pp. 505–522.