

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Instituto de Ciência Exatas - ICEX

Departamento de Matemática

**MATERIAL CONCRETO PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA**

Erika da Costa Ribeiro

Belo Horizonte

2011

Erika da Costa Ribeiro

**MATERIAL CONCRETO PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA**

Monografia de conclusão de curso  
apresentada à Especialização  
Matemática para Professores do  
Ensino Básico, da Universidade  
Federal de Minas Gerais

Orientador: Prof. Dr. Paulo  
Antônio Fonseca Machado

**Belo Horizonte**

**2011**

## Agradecimentos

Agradeço a Luz Divina por sempre iluminar meus caminhos, fazendo com que perceba as oportunidades que a vida me oferece.

Aos meus colegas do curso de Especialização e principalmente à Soraya Armond, Gleiciane Souza, Hamilton Soares e João Ribas, pois, a partir de ideias discutidas durante o curso surgiu esse trabalho.

Ao meu marido, Luis Carlos da Costa, por sempre me apoiar e incentivar nas minhas decisões.

Ao professor Paulo Antônio pelo carinho e dedicação que me recebeu como orientanda.

## RESUMO

Nesse trabalho pretende-se discutir a importância do uso de material concreto para o ensino da trigonometria, no Ensino Médio, e mostrar alguns materiais que podem ser utilizados.

Ainda, apresentaremos atividades para serem utilizadas com o material e propostas de oficinas. Essas atividades e oficinas têm como foco a formação e visualização de conceitos e relações trigonométricas.

Palavras-chave: trigonometria, material concreto, ciclo trigonométrico

## ABSTRACT

This paper was conceived to discuss the importance of dealing with concrete material in trigonometry in high school classes.

Although the work with this kind of material has been considered important in primary school many times it is forgotten in high school teaching.

In this project the goal is to show how to use concrete material in trigonometry classes and give some ideas of activities and workshops to make the mathematic classes more pleasant and meaningful to teenagers.

The main reason for this approach is the great difficulty found in teaching/learning trigonometry using only mental relations and formulas.

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	6
1.1 O uso de materiais manipulativos .....	7
2. MATERIAIS MANIPULATIVOS SUGERIDOS .....	8
2.1 O Círculo Trigonométrico .....	9
2.2 Atividades sobre funções trigonométricas .....	11
2.3 OFICINAS .....	19
2.3.1 OFICINA 1: Definição de radiano e relação com o grau .....	19
2.3.2 OFICINA 2: Construção do Círculo Trigonométrico .....	21
3. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	27
4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS .....	28

## 1. INTRODUÇÃO

Esse trabalho surgiu a partir dos questionamentos sobre o uso de material concreto durante a disciplina Produção de Material Didático. Durante a disciplina tivemos que apresentar, em grupo, um material concreto. O Material apresentado pelo nosso grupo foi o Círculo Trigonométrico exposto nesse trabalho. Motivada pelas discussões surgidas com a elaboração desse trabalho, com as leituras realizadas e com as trocas de experiências com os colegas dessa disciplina elaboramos essa monografia.

Além disso, o uso de material concreto, nas aulas de matemática, torna-se uma preocupação cada vez mais comum. Os professores têm buscado materiais que tornem a aprendizagem mais prazerosa e significativa e que ajudem os alunos na manipulação mental dos conceitos matemáticos. Observamos, porém, maior preocupação dos professores do ensino fundamental do que do ensino médio.

Partimos da ideia de Moyer, de que materiais manipulativos devem representar concretamente ideias matemáticas abstratas. Manipular ativamente tais materiais, permite aos alunos desenvolver um repertório de imagens que podem ser usadas na manipulação mental de conceitos abstratos. Essas ideias sobre manipulação vêm de encontro com as propostas de Pestalozzi (1746 - 1827) e da “escola ativa”. Ele acreditava que uma educação verdadeira deveria partir da atividade dos jovens (canto, desenho, modelagem, jogos, excursões, manipulações de objetos).

A trigonometria, ferramenta importante nos dias de hoje, é o tema do nosso material concreto. Ele se justifica pelas inúmeras dificuldades encontradas por alunos e professores em seu processo de ensino aprendizagem. Constatamos, através do cotidiano de sala de aula, as dificuldades dos alunos e muitas vezes de professores em manipular e relacionar as informações contidas no círculo trigonométrico. Os alunos têm dificuldades em partir de conceitos básicos e de forma autônoma chegar as novas relações e elaborações mentais. Ao estudar trigonometria distanciam-se dos princípios básicos (definições e do círculo trigonométrico) e listam intermináveis fórmulas e relações.

O material concreto, o círculo trigonométrico, é uma adaptação do material apresentado por Marcos Sebastião Lopes em sua monografia intitulada “Material Pedagógico para o Ensino da Trigonometria no Triângulo Retângulo e no Círculo Trigonométrico”. Partindo desse material listamos e elaboramos atividades que podem ser exploradas no ensino da trigonometria. Procuramos atividades próximas das propostas nos livros de ensino médio.

Porém, devemos estar atentos que o uso pelo uso do material certamente não levará à aprendizagem significativa. O professor deve ter objetivos claros e ser um mediador e incentivador de discussões e ações que promovam descobertas e compreensão de conceitos a respeito do conteúdo.

### **1.1. O USO DE MATERIAIS MANIPULATIVOS**

O uso de materiais manipulativos é defendido há algum tempo por pesquisadores e teóricos no campo da Educação. Vários estudos mostram que as crianças precisam entender o que estão aprendendo e o material manipulativo é um instrumento importante para esse fim, pois, contribui para a elaboração de conceitos matemáticos abstratos que só no mundo da imaginação é uma tarefa difícil, auxiliando na maturidade mental do educando.

Nos estudos de Bruner (1960,1986) podemos verificar três estágios de desenvolvimento cognitivo: enactive, icônico e simbólico.

No enactive ou ativo, a criança representa o mundo através da relação entre a experiência e a ação, da manipulação e do tocar. No icônico a representação visual da realidade já é desenvolvida; a criança consegue representar mentalmente os objetos. No simbólico, a linguagem aparece como forma de representar e organizar a realidade. Nesse estágio a criança consegue operar hipóteses formuladas sobre a realidade. O ensino deve privilegiar esses estágios em que o educando, ao manipular objetos, cria uma imagem mental sobre o mesmo, conseguindo levantar hipótese e fazer deduções.

Segundo Ponte e Serrazina (2000) os conceitos e relações matemáticas abstratos podem ser ilustrados e representados por diversos instrumentos, contribuindo na elaboração de ideias matemáticas e na construção e representação de conceitos.

Dienes<sup>1</sup>, que inspirou seus estudos nas teorias construtivistas de Piaget, tinha como foco a construção cognitiva da criança. Ele afirma que a aquisição de noções matemáticas ocorre em etapas. Primeiro, o professor deve criar um meio artificial que promova a aprendizagem de um conceito matemático; segundo, introduzir jogos (com regras claras) onde a criança se familiarize com o conceito estudado; terceiro, apresentar novos jogos, semelhantes ao primeiro, em que se pode começar a abstrair; quarto, a criança cria

---

1 Estudou latim, alemão, Matemática Pura e Aplicada (1934-1937) obteve o grau BA em 1937 com honras pela Universidade de Londres, Ph.D. formado pela Universidade de Londres, em 1939, tese sobre "Fundamentos da Matemática Construtivista Segundo Borel e Brouwer.

representações sobre o que foi manipulado e em seguida consegue utilizar a linguagem para descrever as hipóteses e conclusões sobre o conceito estudado, conseguindo a noção lógica Matemática. Segundo Dienes, para a criança abstrair é necessário que ela vivencie várias situações concretas, só assim, ela conseguirá formar conceitos, formular hipóteses e verificar sua veracidade.

Como se pode perceber, o material concreto é um instrumento importante para motivar; inovar; auxiliar na construção do conhecimento; desenvolver o pensamento matemático; criar, confrontar e verificar hipóteses, desenvolver a criatividade, entre outras. Manipular os materiais concretos permite aos alunos criar imagens mentais de conceitos abstratos. Porém, ele sozinho não consegue atingir essas funções. É preciso uma participação ativa do professor, pois, materiais concretos sozinhos não garantem a compreensão de conceitos. Ao utilizar um material é necessário que o professor o conheça bem, saiba aplicá-lo e tenha claro os seus objetivos ao utilizá-lo. Os professores devem criar uma sequência didática que promova a reflexão e a construção de significados pelo aluno. A crença do professor e dos alunos em como se aprende matemática, também, vai influenciar no resultado final. Se o professor o utiliza apenas porque está na moda ou para fazer uma aula diferente, divertida, e não orienta as ações do aluno para criar um ambiente favorável à aprendizagem, o material perderá sua finalidade e não promoverá a aprendizagem.

## **2. MATERIAIS MANIPULATIVOS SUGERIDOS**

Apresentaremos, nesse trabalho, alguns materiais utilizados para o ensino da trigonometria e algumas aplicações historicamente construídas.

O objetivo, ao utilizar as ferramentas apresentadas, é desenvolver as seguintes habilidades matemáticas:

- Associar números reais a pontos da circunferência trigonométrica.
- Familiarizar com a circunferência trigonométrica.
- Conceituar arco trigonométrico.
- Conceituar e identificar números congruentes na circunferência trigonométrica.
- Obter determinações de um arco trigonométrico, principalmente a determinação principal.

- Identificar e determinar seno e cosseno de arcos na circunferência trigonométrica.
- Calcular senos e cossenos de arcos por meio de redução ao primeiro quadrante.
- Relacionar seno e cossenos dos arcos  $x$ ,  $\pi-x$ ,  $\pi+x$  e  $2\pi-x$ .
- Conceituar e construir o gráfico da função seno.

### 2.1. O Círculo Trigonométrico<sup>2</sup>.

Esse material foi elaborado baseando-se no proposto por Marcos Sebastião Lopes<sup>3</sup>.

Materiais necessários

- ✓ Chapa de acrílico transparente circular (Raio 10,5 cm).
- ✓ Chapa de acrílico na cor branco quadrada (32 cm de lado).
- ✓ Rebite
- ✓ Impressão figura círculo trigonométrico.
- ✓ Parafuso, sem a cabeça.
- ✓ Furadeira.

Construção:

- 1º.) Imprimir o círculo trigonométrico em material PVC branco. Foi feito em uma gráfica.
- 2º.) Cortar o acrílico transparente nas formas circulares e em “cruz” (figura 2). Foi feito numa empresa especializada em acrílico.
- 3º.) Com uma furadeira fure a borda do círculo transparente e a “cruz” (figura 2).
- 4º.) Encaixe o parafuso sem cabeça no furo do círculo.
- 5º.) Ribite o círculo transparente na placa de PVC com o círculo trigonométrico desenhado.
- 6º.) Trace o raio do círculo que passa pelo ponto onde encaixaremos a “cruz” (figura 2).

---

<sup>2</sup> No Material adotamos o título Circunferência Trigonométrica para ficar de acordo com o proposto por Marcos Sebastião Lopes.

<sup>3</sup> Foi apresentado em sua Monografia: Material pedagógico para o ensino de trigonometria no triângulo retângulo e no círculo trigonométrico. Trabalho apresentado como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura Plena em Matemática pela Faculdade de Pará de Minas em 2008.

Figura 1:

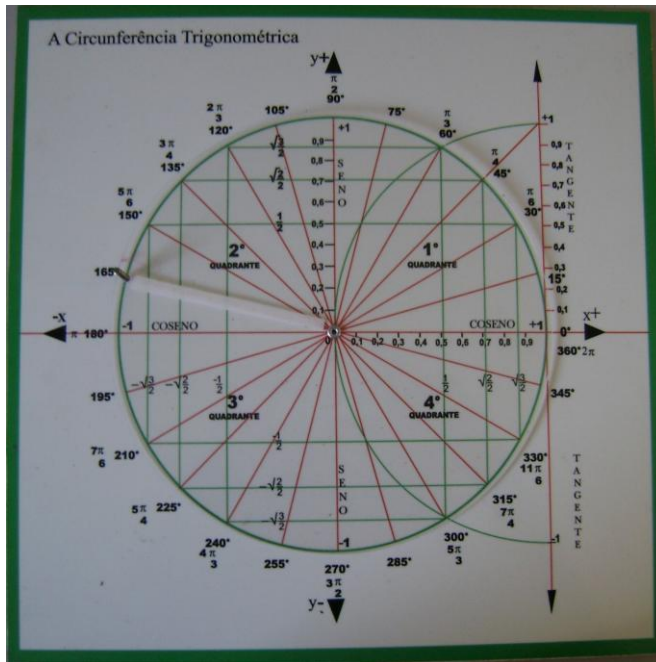


Figura 2:

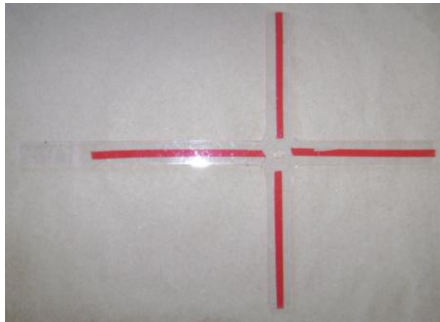
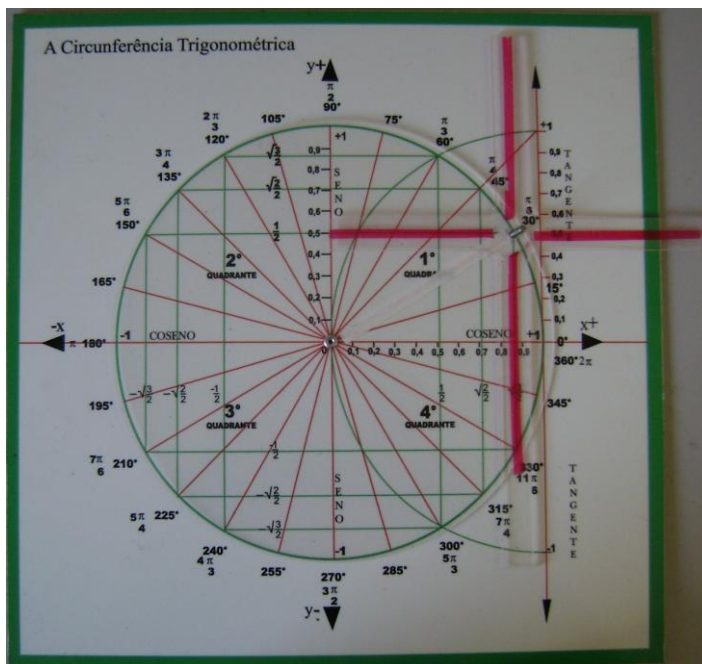


Figura 3



De posse do material, criamos atividades, para orientar o trabalho do professor. As atividades estão bem próximas das sugeridas por livros didáticos, pois, o material será um auxiliar nas aulas do professor.

As atividades foram elaboradas para serem realizadas em grupo sob orientação do professor. Elas devem ser realizadas gradativamente, à medida que os alunos forem avançando na aprendizagem.

O professor deve mediar à ação do aluno, resgatando e elaborando conceitos matemáticos para uma posterior compreensão e sistematização. O aluno deve ser sujeito ativo no desenvolvimento do conteúdo proposto.

## 2.2. Atividades sobre funções trigonométricas

Neste trabalho focamos o estudo do seno e do cosseno, mas atividades semelhantes podem ser propostas para a tangente.

Para realizar essa atividade o professor já deve ter explicado:

- ✓ Ângulos e arcos na circunferência.
- ✓ Medidas de arcos e ângulos.
- ✓ Transformação de graus em radiano e vice-versa.
- ✓ O ciclo trigonométrico.

**ANALISANDO O CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO, VAMOS RESOLVER, EM GRUPO, AS SEGUINTE ATIVIDADES:**

1- Complete a tabela com as medidas dos arcos: (Considere o raio da circunferência igual a 1 unidade)

	em grau	em radiano	Aproximação do comprimento
de uma volta			
de meia volta			
de $\frac{1}{4}$ da volta			
de $\frac{3}{4}$ da volta			

### COMENTÁRIOS:

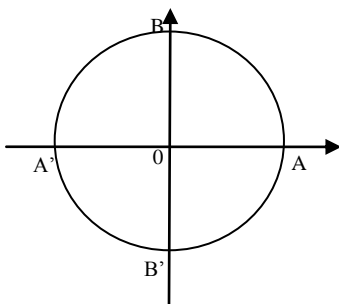
Os alunos apresentam dificuldades em associar grau e radiano. Quando a medida está em radiano não sabem se o valor do  $\pi$  é  $360^\circ$  ou aproximadamente 3,14. Muitas vezes não conseguem perceber que são formas diferentes para medir o mesmo arco. Ao calcular o

comprimento dos arcos esperamos que utilizem 3,14 como uma aproximação decimal do valor de  $\pi$ .

Esta é uma ótima atividade para associar números reais a pontos do círculo trigonométrico e falar sobre imagem de um número. Estamos adotando imagem de um número como a localização da extremidade de um arco.

2- Divida o ciclo trigonométrico em três partes iguais. Identifique os números da primeira volta positiva e da primeira volta negativa que tem como imagem os pontos onde a circunferência foi dividida.

Marque os pontos na circunferência, a partir do ponto A, e chame-os de M e N.



Agora complete:

- Uma volta completa no ciclo mede \_\_\_\_\_. (em grau, em radiano e em comprimento (aproximado))
- O menor arco **AM**, **MN**, **NA** medem \_\_\_\_\_. (em grau, em radiano e em comprimento (aproximado))
- O menor arco **AM** mede \_\_\_\_\_.(em grau, em radiano e em comprimento (aproximado))
- O menor arco **AN** mede \_\_\_\_\_.(em grau, em radiano e em comprimento (aproximado))
- O maior arco **AM** mede \_\_\_\_\_(em grau, em radiano e em comprimento (aproximado))
- O maior arco **AN** mede \_\_\_\_\_ (em grau, em radiano e em comprimento (aproximado))
- **M** é imagem de \_\_\_\_\_
- **N** é imagem de \_\_\_\_\_

**COMENTÁRIOS:**

Com o material, o aluno facilmente localiza os pontos, suas medidas e percebe suas diferenças. Facilita a visualização dos sentidos de giro e como isso influencia na medida de um arco.

3- Encontre o quadrante do ciclo em que se encontram as imagens dos números:

- a)  $\frac{5\pi}{6}$
- b)  $-\frac{3\pi}{4}$ .
- c) 3
- d) - 4,5

**COMENTÁRIOS:**

O objetivo dessa atividade é a fixação dos quadrantes. O aluno visualiza onde começa e onde termina cada um deles.

4- Faça um círculo trigonométrico como o da atividade 2. Agora divida-o em oito arcos congruentes, a partir do ponto A. Utilizando o círculo trigonométrico que seu grupo recebeu, responda:

- a) Quanto mede, em graus e radianos, cada um desses oito arcos congruentes?
- b) Indique os números da primeira volta positiva (e os valores correspondentes em graus) que têm, como imagens, cada um desses pontos.
- c) Faça o mesmo para a volta negativa.

**COMENTÁRIOS:**

Com o material o aluno facilmente faz o que está sendo pedido, e o mais importante: forma imagens mentais que servirá quando ele não tiver o material em mãos. O objetivo continua sendo a familiaridade com o círculo trigonométrico e seus elementos.

5 – Todos os números reais a seguir são da primeira volta positiva ou da primeira volta negativa. Identifique o quadrante da imagem de cada um deles.

- |                    |                       |                        |
|--------------------|-----------------------|------------------------|
| a) 2,5             | d) $\frac{9\pi}{10}$  | g) $-\frac{11\pi}{18}$ |
| b) 5,3             | e) $\frac{13\pi}{12}$ | h) $-227^\circ$        |
| c) $-\frac{13}{5}$ | f) $36^\circ$         | i) $-\frac{37\pi}{20}$ |

**6 – Determinação principal.**

I- Vamos estudar a determinação principal de um arco. Para isso, leia atentamente toda a questão e preencha o quadro abaixo:

Na circunferência trigonométrica, onde fica a imagem de um arco de:

- a)  $360^\circ$ ?
- b)  $390^\circ$ ?
- c)  $600^\circ$ ?
- d)  $720^\circ$ ?
- e)  $1000^\circ$ ?
- f)  $1720^\circ$ ?

Considerando a primeira volta positiva, a que arco eles correspondem? E se considerarmos a primeira volta negativa?

Agora preencha o quadro:

Arco	1ª. volta positiva	Quadrante	1ª. volta negativa	Quadrante
360°				
390°				
600°				
720°				
960°				
1720°				

**Podemos dizer que a medida 310° é congruente a 1750° e está na primeira volta positiva. E sua extremidade é do 4º quadrante.**

**Esses valores que encontramos para a primeira volta positiva são chamados de determinação principal de um arco.**

III- Determine a extremidade do arco correspondente a -300°. Agora, se você girar no sentido positivo, qual a medida do arco que tem como extremo esse mesmo ponto?

O que acabamos de fazer foi encontrar a determinação principal arco -300°.

Explique como podemos proceder para encontrar a determinação principal de um arco no sentido positivo e no sentido negativo.

Explique o que é a determinação principal de um arco.

**COMENTÁRIOS:**

Mais uma vez o visual e a manipulação ajudarão o aluno a perceber que basta saber quanto sobra quando terminam as voltas completas, ou seja, o resto da divisão por 360°.

7- A seguir, são dados quatro arcos trigonométricos, a partir de uma de suas determinações (em graus ou radianos). Em cada caso, achar a determinação principal e identificar o quadrante da extremidade do arco.

- a) 800°
- b) - 964°
- c)  $\frac{43\pi}{6}$
- d)  $-\frac{21\pi}{5}$

**8- Números congruentes:**

Determine os números correspondentes ao número  $\frac{\pi}{6}$  no círculo trigonométrico na 2.ª volta positiva, 3.ª volta positiva, 1.ª volta negativa e 2.ª volta negativa.

Esses números que você encontrou são chamados de números congruentes.

9 – Calcule os números congruentes a  $\frac{\pi}{3}$

- a) na 1ª volta positiva;
- b) na 2ª volta positiva;
- c) na 1ª volta negativa;
- d) na 2ª volta negativa.

10 - Calcule os números congruentes a  $-150^\circ$

- a) na 1ª volta positiva;
- b) na 2ª volta positiva;
- c) na 1ª volta negativa;
- d) na 2ª volta negativa.

**COMENTÁRIOS:**

O material concreto deve ser usado sempre durante as aulas para que o aluno visualize e crie imagens mentais sobre o ciclo trigonométrico. Muitas vezes, achamos que com uma única experimentação o material conseguirá fazer o seu papel. Porém ele se torna mais eficaz quando é manipulado várias vezes até que o aluno consiga realmente apreender as informações nele contidas. Com o tempo ele deixará de ser necessário, pois o aluno conseguirá criar imagens mentais para serem utilizadas quando precisar.

**SENO E COSSENO NO CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO.**

Neste momento o professor define o seno e o cosseno no ciclo trigonométrico.

11 - Explique as definições de seno e cosseno no ciclo trigonométrico. Depois, responda às perguntas.

- a) Qual(is) o seno e o cosseno de  $30^\circ$ ?
- b) Qual(is) o seno e o cosseno de  $225^\circ$ ?
- c) Qual(is) o seno e o cosseno de  $0^\circ$ ?
- d) Qual(is) o seno e o cosseno de  $90^\circ$ ?
- e) Qual(is) o seno e o cosseno de  $180^\circ$ ?
- f) Qual(is) o seno e o cosseno de  $270^\circ$ ?
- g) Qual(is) o seno e o cosseno de  $360^\circ$ ?
- h) Quais(is) o(s) arco(s) cujo seno é igual a 0?
- i) Qual(is) o(s) arco(s) cujo seno é igual a 1?
- j) Qual(is) o(s) arco(s) cujo seno é igual a -1?
- k) Quais(is) os arcos cujo cosseno é igual a 0?
- l) Qual(is) o(s) arco(s) cujo cosseno é igual a 1?
- m) Qual(is) o(s) arco(s) cujo cosseno é igual a -1?

12 – Os números que aparecem a seguir estão associados a pontos notáveis no ciclo trigonométrico. Calcule o seno ou o cosseno de cada um, conforme o caso.

- a)  $\text{sen } 3\pi$
- b)  $\text{sen } \frac{11\pi}{2}$
- c)  $\text{sen} \left( -\frac{3\pi}{2} \right)$
- d)  $\text{cos } 10\pi$
- e)  $\text{cos} (-7\pi)$
- f)  $\text{cos} \left( -\frac{5\pi}{2} \right)$

13– Todos os arcos a seguir têm extremidades no 1º quadrante. Determine:

- a)  $\text{sen } 750^\circ$
- b)  $\text{cos} (-300^\circ)$
- c)  $\text{sen} \left( -\frac{5\pi}{3} \right)$
- d)  $\text{cos} \left( -\frac{35\pi}{3} \right)$
- e)  $\text{sen } \frac{25\pi}{4}$

14 – Analise se cada número abaixo é positivo ou negativo:

- |                                 |  |  |
|---------------------------------|--|--|
| a) $\text{sen } 50^\circ$       | b) $\text{sen } 126^\circ$                     | c) $\text{sen } 320^\circ$                     |
| d) $\text{sen } \frac{5\pi}{4}$ | e) $\text{sen} \left( -\frac{5\pi}{3} \right)$ | f) $\text{sen} \left( -\frac{9\pi}{4} \right)$ |
| g) $\text{cos } 50^\circ$       | h) $\text{cos } 126^\circ$                     | i) $\text{cos } 320^\circ$                     |
| j) $\text{cos } \frac{5\pi}{4}$ | k) $\text{cos} \left( -\frac{5\pi}{3} \right)$ | l) $\text{cos} \left( -\frac{9\pi}{4} \right)$ |

15 – Complete as linhas pontilhadas com o sinal < ou >.

- |   |  |
|---|--|
| a) $\text{sen } 50^\circ \dots \text{sen } 12^\circ$            | g) $\text{sen } 60^\circ \dots \text{cos} (-300^\circ)$                          |
| b) $\text{sen } 80^\circ \dots \text{sen } 110^\circ$           | h) $\text{sen } \frac{7\pi}{6} \dots \text{cos } \frac{3\pi}{4}$                 |
| c) $\text{sen } \frac{\pi}{6} \dots \text{sen } \frac{5\pi}{3}$ | i) $\text{cos} \left( -\frac{\pi}{3} \right) \dots \text{sen } \frac{21\pi}{10}$ |
| d) $\text{cos } 70^\circ \dots \text{cos } 410^\circ$           | j) $\text{sen } 7\pi \dots \text{cos } \frac{8\pi}{3}$                           |

$$e) \cos \frac{\pi}{3} \dots\dots\dots \cos \frac{4\pi}{3}$$

$$f) \cos \left( -\frac{3\pi}{2} \right) \dots\dots\dots \cos \frac{3\pi}{4}$$

**O seno e o cosseno de arcos do 2.º, 3.º e 4.º quadrantes podem ser obtidos a partir do seno e do cosseno de arcos do 1.º Quadrante.**

Vamos analisar os arcos de 30°, 150°, 210° e 330°.

Determine os seus senos e cossenos. Que relação podemos perceber entre esses valores? Compare os senos e cossenos de 150°, 210° e 330° com o seno e o cosseno de 30°.

Podemos observar que ao unir os extremos dos arcos de 30°, 150°, 210° e 330° obtemos um retângulo.

Na circunferência trigonométrica você pode observar mais dois retângulos. Observe se o mesmo acontece com os senos e cossenos dos arcos correspondentes aos seus vértices.

Neste momento o professor aproveita para demonstrar, visualmente, as relações:

$\text{sen}(\pi - x) = \text{sen}x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\text{sen}(\pi + x) = -\text{sen}x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\text{sen}(2\pi - x) = -\text{sen}x$	$\cos(2\pi - x) = \cos x$

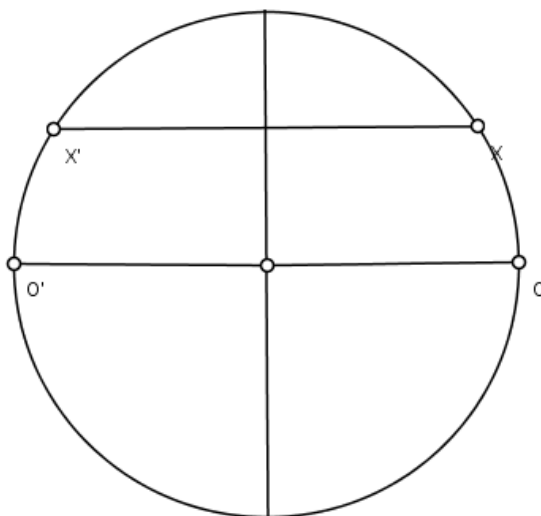
Peça ao aluno que gire um arco qualquer, sem se preocupar com seu valor.

Vamos visualizar que  $\text{sen}(\pi - x) = \text{sen}x$ .

Visualmente imagine uma paralela ao eixo horizontal passando pelo extremo desse arco.

Marquemos no círculo os pontos de encontro com a paralela ( $x$  e  $x'$ ).

Com isso é fácil verificar que o seno dos arcos  $ox$  e  $o'x'$  são iguais.



Analogamente visualizamos as demais relações.

**COMENTÁRIOS:**

Com o auxílio do material essas relações passam a ser facilmente entendidas pelos alunos. Na minha prática, percebo que a preocupação maior dos alunos é em decorá-las ao invés de compreendê-las. Com a manipulação do material, a compreensão acontece de forma natural, e mesmo que, futuramente, eles optem por decorá-las, eles entenderão – a partir da visualização – o porquê de serem verdadeiras.

**FUNÇÃO SENO E COSSENO.**

Neste momento o professor define a função seno.

A cada número real  $x$  do ciclo trigonométrico está associado um único número real  $\text{sen } x$ , ordenada do ponto  $P$ , associado ao número  $x$  no ciclo.

Seu gráfico é cartesiano e é constituído de todos os pares ordenados  $(x, Y) = (x, \text{sen } x)$ .

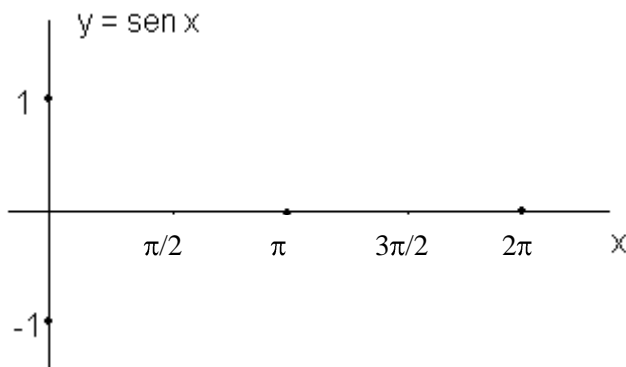
Vamos analisar a variação de  $\text{sen } x$ , à medida que  $x$  cresce no intervalo  $[0, 2\pi]$ .

- ✓ No 1º. quadrante: O que acontece com  $\text{sen } x$  quando  $x$  varia de  $0$  a  $\pi/2$ ?
- ✓ No 2º. quadrante: O que acontece com  $\text{sen } x$  quando  $x$  varia de  $\pi/2$  a  $\pi$ ?
- ✓ No 3º. quadrante: O que acontece com  $\text{sen } x$  quando  $x$  varia de  $\pi$  a  $3\pi/2$ ?
- ✓ No 4º. quadrante: O que acontece com  $\text{sen } x$  quando  $x$  varia de  $3\pi/2$  a  $2\pi$ ?

Agora preencha o quadro abaixo para a 1.ª volta positiva:

X	0	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$
Y=sen x					

Agora vamos construir o gráfico da função seno.



Responda:

- a) O que aconteceria com a curva após  $x=2\pi$ ?
- b) O que aconteceria com a curva antes de  $x=0$ ?
- c) Qual a imagem dessa função?
- d) Qual o domínio dessa função?

**COMENTÁRIOS:**

O professor pode fazer o mesmo para as funções cosseno e tangente. Percebo que os alunos têm muita dificuldade em compreender as ideias contidas na função, e por isso, optam por decorá-las. Ao construir o gráfico, com a ajuda do material, o aluno facilmente visualizará essas ideias, o seu período, sua imagem e seu domínio. E a partir desse gráfico, ele poderá construir outros mais elaborados.

**2.3. OFICINAS PARA CONSTRUÇÃO DO CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO PELOS ALUNOS.**

*“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou construção.” (FREIRE, 1996).*

Nestas oficinas os alunos irão construir o ciclo trigonométrico, que no material anterior eles já recebiam pronto. Com isso terão a oportunidade de verificar com mais clareza as relações entre ângulos, radianos e valores de seno, cosseno e tangente.

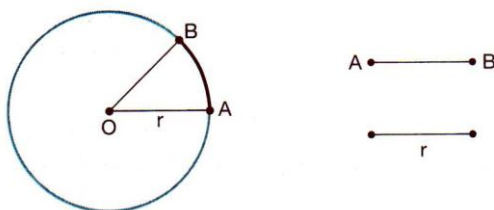
O objetivo dessas oficinas é criar condições para que o aprendizado aconteça através da participação ativa dos alunos na construção de ideias. Os alunos terão a oportunidade de levantar hipóteses, verificar sua veracidade, tirar conclusões, elaborar conceitos e, principalmente, criar modelos mentais, a partir da visualização, de conceitos trigonométricos.

**2.3.1. OFICINA 1: DEFINIÇÃO DE RADIANO E RELAÇÃO COM O GRAU.**

- 1- Com um compasso e uma régua construa quatro circunferências com os seguintes raios: 1cm, 3cm, 5cm e 8cm.
- 2- Com a ajuda de um barbante marque nas circunferências arcos consecutivos do tamanho do seu raio.

Os arcos que você mediu são denominados radiano.

Radiano é o arco cujo comprimento é igual ao comprimento do raio da circunferência que o contém.



A medida do arco AB é igual a 1 radiano, ou seja, 1 rad.

Uma volta completa corresponde a um arco de comprimento  $2\pi$  rad.

- 3- Um arco pode ser medido em grau. Desenhe uma circunferência de raio 10 cm e a divida de  $10^\circ$  em  $10^\circ$ , com a ajuda de um transferidor.

Uma volta completa tem  $360^\circ$ .

Marque na circunferência arcos com  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $210^\circ$  e  $330^\circ$ .

- 4- Com isso um arco pode ser medido em grau e em radiano. Podemos estabelecer a correspondência entre graus e radianos. Veja:

$$2\pi \text{ rad} \rightarrow 360^\circ$$

$$\pi \text{ rad} \rightarrow 180^\circ$$

$$\frac{\pi}{2} \text{ rad} \rightarrow 90^\circ \text{ e assim em diante.}$$

- 5- Pegue a sua circunferência de raio 1cm e calcule: (deixe a resposta em função de  $\pi$ )  
a) o seu comprimento.

- b) o comprimento de um arco cuja medida corresponde a  $\frac{1}{6}$  do comprimento total da circunferência.

- c) O comprimento de um arco cuja medida corresponde à metade do comprimento total da circunferência.

- 6- Faça o mesmo para a circunferência de raio 3cm e 5cm.

- 7- Baseando-se nos cálculos anteriores, qual a vantagem de se utilizar o raio de 1cm?

Neste momento, o professor mostra ao aluno a importância de adotarmos o raio igual a 1 unidade para o círculo trigonométrico.

#### **COMENTÁRIOS:**

Como já foi dito anteriormente, os alunos não têm dificuldade em compreender a definição de radiano, porém, quando relacionamos com a medida em grau, eles começam a se preocupar com os cálculos (regra de três) e se prendem a eles, esquecendo o seu significado. Começam a surgir as seguintes dúvidas: qual o valor de  $\pi$ ? Aproximadamente 3,14 ou  $180^\circ$ ?

Essa é mais uma atividade onde esperamos que os alunos criem uma imagem mental para definição de radiano e a sua relação com a medida do arco em grau. Esperamos, ainda, que os alunos compreendam o porquê de adotarmos o raio igual a 1 unidade para a circunferência trigonométrica.

### 2.3.2. OFICINA 2: CONSTRUÇÃO DO CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO.

Nessa oficina iremos construir o círculo trigonométrico. Com isso, aprenderemos a encontrar os valores de seno, cosseno e tangente e a de relacioná-los.

Material necessário:

1 Folha de cartolina ou papel cartão.

1 régua

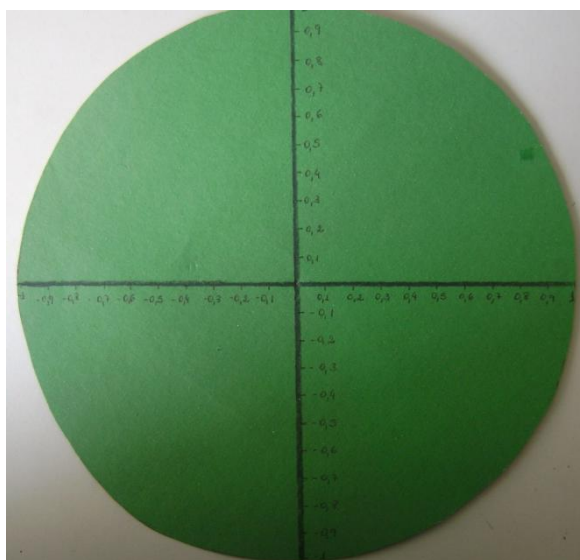
1 transferidor

1 tesoura

Lápis, caneta e borracha

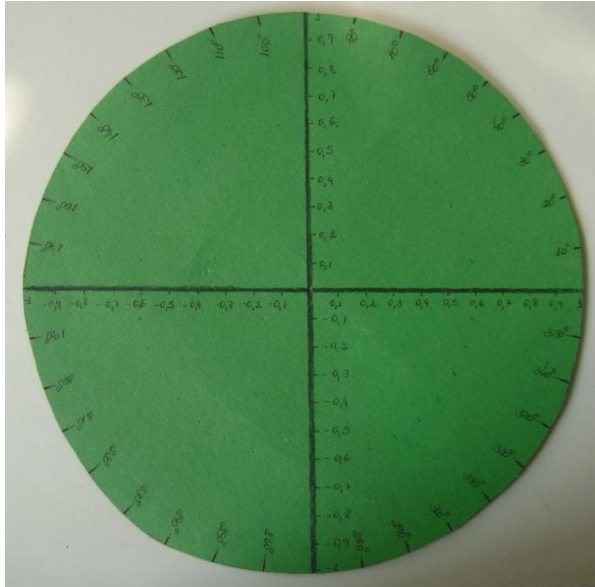
Roteiro:

- 1- Desenhe uma circunferência de 10cm de raio. Iremos convencionar que a medida do raio é de 1 unidade. (10cm = 1 unidade)
- 2- Agora, tendo o centro da circunferência como ponto em comum, desenhe duas retas perpendiculares.  
Observe que a circunferência ficou dividida em 4 partes iguais. Cada parte recebe o nome de quadrante.  
Essas retas são chamadas de eixo horizontal e eixo vertical.
- 3- Com o auxílio de uma régua divida os eixos da seguinte forma:  
A partir do centro em 10 partes iguais até a circunferência, ou seja, cada eixo ficará dividido em 20 partes iguais.  
Como convencionamos que o raio mede 1 unidade, a partir do centro numere essas partes com numa reta numérica onde o zero é o ponto de encontro dos eixos.  
Ou seja: 1cm na régua corresponde 0,1 unidade do raio.

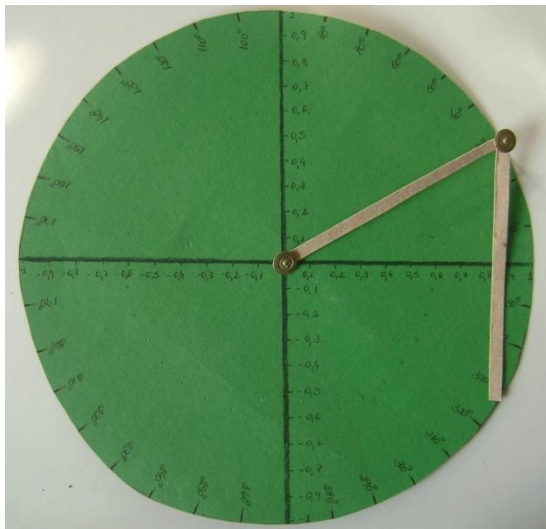


- 4- Com o auxílio de um transferidor divida a circunferência de  $10^\circ$  em  $10^\circ$ . Marque esses pontos e anote a medida dos ângulos no sentido anti-horário.

A sua figura está assim.



- 5- Agora, corte duas tiras de papel de 11cm de comprimento por 0,5cm de largura. Prenda-as com um precevejo. Pegue uma extremidade e prenda no centro da circunferência.

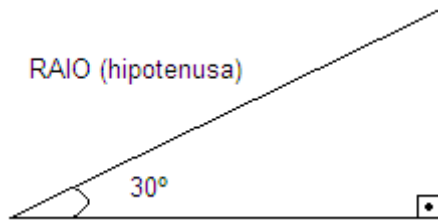


### Explorando o material construído.

Vamos explorar o seno e o cosseno de um ângulo.

- 1- Prenda o precevejo que une os dois palitos na circunferência onde indica o ângulo de  $30^\circ$ .

Podemos observar um triângulo retângulo cujos lados são: eixo horizontal e as duas tiras de papel presas com percevejo.



Pela definição de seno no triângulo retângulo, temos:

$$\text{seno de } 30^\circ = \frac{\text{cateto oposto a } 30^\circ}{\text{hipotenusa}}, \text{ como a hipotenusa é igual a 1 unidade, temos:}$$

$$\text{seno de } 30^\circ = \frac{\text{cateto oposto a } 30^\circ}{1}, \text{ ou seja,}$$

$$\text{seno de } 30^\circ = \text{projecção do ângulo de } 30^\circ \text{ no eixo vertical.}$$

O mesmo podemos fazer para o cosseno.

$$\text{cosseno de } 30^\circ = \frac{\text{cateto adjacente a } 30^\circ}{\text{hipotenusa}} =$$

$$\text{cosseno de } 30^\circ = \frac{\text{cateto adjacente a } 30^\circ}{1} =$$

$$\text{cosseno de } 30^\circ = \text{projecção do ângulo de } 30^\circ \text{ no eixo horizontal}$$

2- Vamos visualizar os valores para o seno e cosseno de  $40^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $210^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $300^\circ$ ,  $330^\circ$ ,  $360^\circ$ .

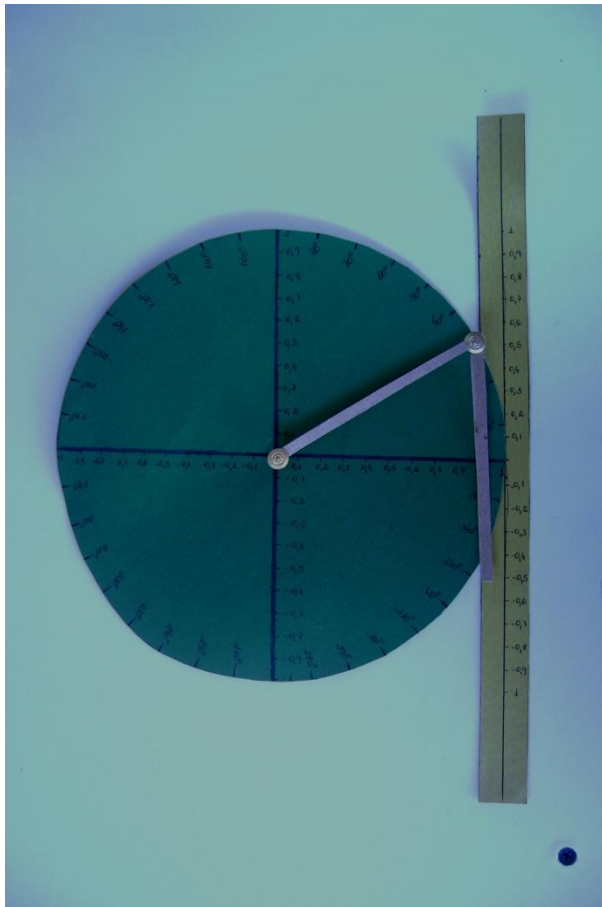
3- Agora, vamos analisar a tangente.

Para isso construa, com papel cartão, uma tira de 50 cm de comprimento e 3 cm de largura.

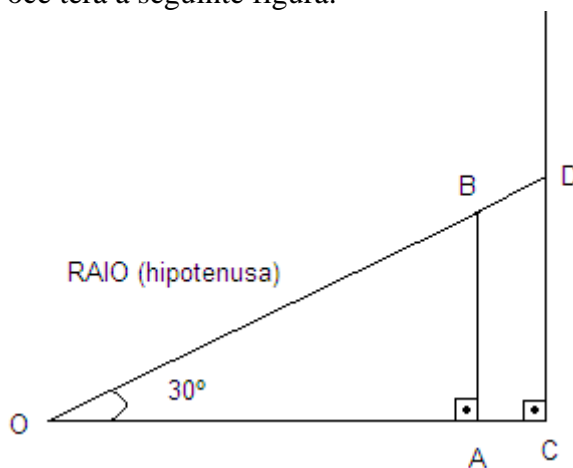
Nela você irá marcar a sua metade, onde será o zero. Agora irá marcar os valores de zero a 1 para a direita e de zero a -1 para a esquerda, como nos eixos horizontal e vertical.

Essa tira será afixada perpendicularmente ao eixo horizontal. O zero da tira irá coincidir com o 1 do eixo.

Ficará assim:



- 4- Voltemos ao nosso triângulo retângulo do item 1. Construa-o novamente. Com o auxílio de uma reta prolongue a hipotenusa até tocar a tira que você construiu. Você terá a seguinte figura:



Os triângulos OAB e OCD são semelhantes (caso A.A.). Logo,

$$\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} \rightarrow \frac{\text{COSSENO } 30^\circ}{1} = \frac{\text{SENO } 30^\circ}{CD} \rightarrow CD = \frac{\text{SENO } 30^\circ}{\text{COSSENO } 30^\circ} \rightarrow CD = \text{TANGENTE } 30^\circ$$

Com isso podemos perceber que a tira que você construiu corresponde a tangente.

- 5- Agora vamos visualizar os valores para a tangente dos ângulos:  $40^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $210^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $300^\circ$ ,  $330^\circ$ ,  $360^\circ$ .

Reflexões:

- 1- Quais os possíveis valores para o seno e o cosseno de um ângulo?
- 2- Para quais ângulos o seno é positivo? E negativo?
- 3- Para quais ângulos o cosseno é positivo? E negativo?
- 4- Quais os possíveis valores para a tangente de um ângulo?
- 5- Para quais ângulos a tangente é positiva? E negativa?
- 6- O que acontece com a tangente dos ângulos de  $90^\circ$  e  $270^\circ$ ?

Com essas perguntas, e a partir da visualização, queremos que os alunos reflitam e tirem conclusões sobre o comportamento do seno, cosseno e tangente de um ângulo. O professor dever aproveitar a atividade para concluir com o aluno:

- Intervalo real para os valores do seno, cosseno e da tangente.
- Quadrantes que os valores do seno, do cosseno e da tangente são positivos negativos e nulos.
- Período.
- Mostrar as seguintes relações:

$$\text{sen}(\pi - x) = \text{sen}x$$

$$\text{cos}(\pi - x) = -\text{cos}x$$

$$\text{sen}(\pi + x) = -\text{sen}x$$

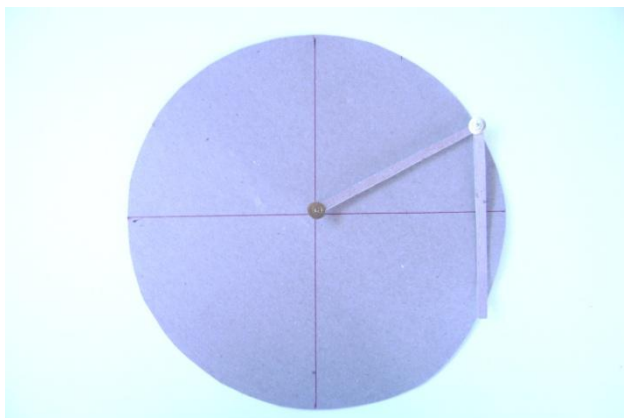
$$\text{cos}(\pi + x) = -\text{cos}x$$

$$\text{sen}(2\pi - x) = -\text{sen}x$$

$$\text{cos}(2\pi - x) = \text{cos}x$$

Essas relações já foram visualizadas anteriormente, com o primeiro material sugerido. Nesse material podemos visualizar da mesma maneira com a possibilidade de não nos prendermos aos valores que foram escritos anteriormente.

Trace, no verso do círculo trigonométrico, os eixos vertical e horizontal. Prenda as tiras com os percevejos e gire um ângulo  $x$ .



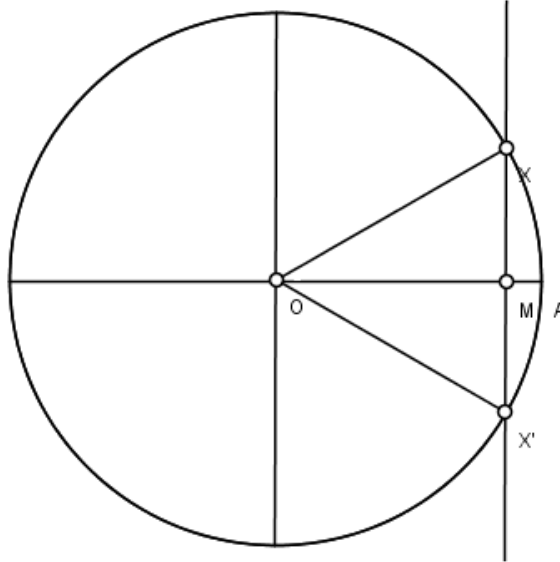
Anteriormente visualizamos  $\text{sen}(\pi - x) = \text{sen}x$ , agora iremos demonstrar  $\text{cos}(2\pi - x) = \text{cos}x$ .

Com um lápis trace uma paralela ao eixo vertical, e os raios  $OX$  e  $OX'$ . Com isso formamos o triângulo isósceles  $XOX'$  ( $ox$  é congruente com  $ox'$ , pois são raios das

circunferência). Como o segmento  $OM$  é perpendicular ao segmento  $XX'$ , temos dois triângulos retângulos congruentes, o  $XOM$  e o  $X'OM$ : Caso cateto hipotenusa.

$OX$  congruente com  $OX'$  (hipotenusa)

$OM$  lado em comum.



Analogamente demonstramos as demais relações.

### 3. CONSIDERAÇÕES FINAIS:

Acreditamos que o uso do material concreto proporciona aulas mais dinâmicas, significativas e prazerosas para alunos e professores, favorecendo a discussão, a troca de ideias, o questionamento, o levantamento de hipóteses e a formulação de conceitos por parte dos alunos. O aluno participa ativamente do seu processo de construção do conhecimento. A riqueza visual e manipulativa destes materiais ajuda os alunos a relacionarem as várias informações tratadas na trigonometria. Eles auxiliam, também, na generalização de relações a partir de situações particulares.

O professor é a peça fundamental para o sucesso desta proposta. Pois, como já dissemos anteriormente, o material por si só não promove a aprendizagem. As intervenções, estímulos e questionamentos feitos pelo professor motivarão as descobertas dos alunos.

Algumas atividades exploraram apenas o seno e o cosseno, mas facilmente, o professor consegue adaptar atividades para trabalhar a tangente. O material é um instrumento para auxiliar o professor em suas aulas e nas atividades propostas pelos próprios livros didáticos.

Ao trabalhar com a trigonometria no ensino médio, percebi, claramente, a dificuldade em visualizar figuras que os alunos tinham. Só as ilustrações que fazia no quadro não eram suficientes, para muitos, criarem imagens mentais. Acreditamos que a partir da manipulação pelos alunos dos materiais, isso se tornará mais fácil. E principalmente essa manipulação deverá ser por várias aulas e em várias atividades, até que o aluno não precise mais dele, pois conseguirá criar em sua mente imagens que os ajude nos exercícios (ou fazer pequenos esboços no círculo).

Ao produzir esse material refletimos sobre nossas inquietações em relação a nossa prática no ensino da trigonometria e procuramos instrumentos que contribuam para a melhoria de nossas aulas.

#### 4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FIorentini, Dario; Maria Ângela Miorim. *Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da Matemática*. Boletim da SBEM-SP, n.7, de julho-agosto de 1990.

NACARATO, Adair Mendes. *Eu trabalho primeiro no concreto*. Revista de Educação Matemática – Ano9. N<sup>os</sup>. 9-10, 2004-2005.

LOPES, Marcos Sebastião. *Material pedagógico para o ensino de trigonometria no triângulo retângulo e no círculo trigonométrico*. Monografia (Licenciatura em Matemática). Pará de Minas, MG: Faculdade de Pará de Minas, 2008.

RUBIÓ, Angel Panadés. *Matemática: 1<sup>a</sup>. série – Ensino Médio*. Belo Horizonte: Editora Educacional, 2008.

MOYER, Patrícia S. (Adaptação) *Ainda estamos nos divertindo? Como os professores usam materiais manipulativos para ensinar matemática*.

RPM – Revista do Professor de Matemática

BONAFÉ, Marytta. Zoltan Dienes e o Movimento da Matemática Moderna no Ensino Primário.

BOTAS, Dilaila Olivia dos Santos. *A utilização dos materiais didáticos nas aulas de Matemática Um estudo no 1º ciclo*. 2008. 182f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) – Universidade Aberta. 2008.

BESSA, Valéria da Hora. *Teoria da aprendizagem*. Curitiba: IESDE Brasil S.A., 2006