

Laboratório de Modelagem, Análise e Controle de Sistemas Não Lineares

Departamento de Engenharia Eletrônica

Universidade Federal de Minas Gerais

Av. Antônio Carlos, 6627, CEP 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil

Fone: +55 3499-3470



---

# Estratégias de Guiagem e Cooperação de Robôs Aéreos Sujeitos a Restrições nas Entradas e/ou nos Estados

---

**Tales Argolo Jesus**

Tese submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

**Orientador:** Prof. Dr. Luciano Cunha de Araújo Pimenta  
**Co-Orientadores:** Prof. Dr. Leonardo Antônio Borges Tôres  
Prof. Eduardo Mazoni Andrade Marçal Mendes, PhD

Belo Horizonte, abril de 2013

---

---

# Dedicatória

---

*A Iara e Ângelo, meus pais.  
A Taissa, minha irmã.  
A Luana, minha namorada.*

---

---

# Agradecimentos

---

Segundo Emmanuel, no livro “Paulo e Estêvão”, escrito por intermédio da faculdade psicográfica de Francisco Cândido Xavier: “Sem Estêvão, não teríamos Paulo de Tarso. O grande mártir do Cristianismo nascente alcançou influência muito mais vasta na experiência paulina do que poderíamos imaginar tão-só pelos textos conhecidos nos estudos terrestres. A vida de ambos está entrelaçada com misteriosa beleza. A contribuição de Estêvão e de outras personagens desta história real vem confirmar a necessidade e a universalidade da lei de cooperação. E, para verificar a amplitude desse conceito, recordemos que Jesus, cuja misericórdia e poder abrangiam tudo, procurou a companhia de doze auxiliares, a fim de empreender a renovação do mundo.”

Dessa maneira, é mais do que um dever que eu grafe nas linhas subsequentes o meu agradecimento pela cooperação dos corações amigos e companheiros que me auxiliaram de maneira imprescindível na execução deste trabalho.

Primeiramente, o agradecimento a Deus, o Pai Misericordioso que nos tutela sempre e nos conduz pelos caminhos da vida que culminarão, inevitavelmente, no aprendizado do Amor em suas mais profundas e variadas expressões e manifestações. Citando novamente Emmanuel: “(...) sem cooperação, não poderia existir amor; e o amor é a força de Deus, que equilibra o Universo”.

A Iara, minha mãe, a Ângelo, meu pai, e a Taissa, minha irmã, pelo amor, pelo carinho, pelo zelo e pelo investimento de longo prazo. Sem essa sustentação, com certeza eu não teria chegado até aqui.

A Luana, minha namorada, pelo amor, pelo companheirismo, pela dedicação e por preencher de poesia e de bons sentimentos os meus dias.

Aos professores Luciano Pimenta, Eduardo Mendes e Leonardo Tôrres, pelo voto de confi-

ança, por me nortearem nessa área de estudo e pesquisa que é relativamente nova para mim e pela disposição em me auxiliarem nessa empreitada com a competência que lhes caracteriza o trabalho.

Aos colegas Cristina, Gledson, Wendy, Grazi, Víctor e Dimas, pelo companheirismo e pela amizade ao longo dessa caminhada que está apenas começando.

Aos colegas de república Ciro, Leandro, Fernando e Pedro, pela alegria e pelo companheirismo que caracterizam a eterna jovialidade do espírito baiano.

Por fim, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

---

---

# Epígrafe

---

*“De muito longe venho, em surtos milenários;  
Vivi na luz dos sóis, vaguei por mil esferas  
E, preso ao turbilhão dos motos planetários,  
Fui lodo e fui cristal, no alvor de priscas eras.*

*Mil formas animei, nos reinos multifários:  
Fui planta no verdor de frescas primaveras  
E, após desenvolver impulsos embrionários,  
Galguei novos degraus: fui fera dentre as feras.*

*Depois que em mim brilhou o facho da razão,  
Fui o íncola feroz das tribos primitivas  
E como tal vivi, por vidas sucessivas.*

*E sempre na espiral da eterna evolução,  
Um dia alcançarei, em planos bem diversos,  
A glória de ser luz, na Luz dos universos.”*

Soneto intitulado *Evolução*, de autoria de Rubens Costa Romanelli. Extraído do livro *O Primado do Espírito*.

---

---

# Sumário

---

<b>Resumo</b>	<b>xiii</b>
<b>Abstract</b>	<b>xv</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xix</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xxi</b>
<b>Lista de Abreviações</b>	<b>xxiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivo . . . . .	3
1.2 Motivação . . . . .	3
1.3 Contribuições do Trabalho . . . . .	4
1.4 Organização do Texto . . . . .	5
<b>2 Fundamentação Teórica</b>	<b>7</b>
2.1 Conceitos em Robótica . . . . .	7
2.1.1 Espaço de Trabalho . . . . .	7
2.1.2 Espaço de Configurações . . . . .	8
2.1.3 Restrições de Movimento . . . . .	10
2.2 Modelo Dinâmico de uma Aeronave de Asas Fixas . . . . .	15
2.3 Teoria de Estabilidade de Lyapunov . . . . .	17
<b>3 Contextualização do Problema e Revisão Bibliográfica</b>	<b>23</b>
3.1 VANTs tratados como uniciclos . . . . .	23

3.2	Coordenação de Múltiplos Agentes em Geral . . . . .	30
3.3	Rastreamento de Curvas e Distribuição Circular Balanceada . . . . .	40
3.4	Rastreamento de Curvas, Campos Vetoriais Artificiais e Incerteza de Modelo . . . . .	42
3.5	Consenso de Sistemas de Segunda Ordem com Restrições de Velocidade . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Formação de Padrão - Rastreamento e Distribuição Circular Balanceada</b>	<b>47</b>
4.1	Definição do Problema . . . . .	48
4.2	Metodologia . . . . .	53
4.2.1	Estágio 1 - Rastreamento . . . . .	53
4.2.2	Estágio 2 - Distribuição Circular Balanceada . . . . .	64
4.2.3	Estágio 3 - Controle de Altitude . . . . .	70
4.3	Transições entre Estágios . . . . .	71
4.3.1	Transição do Estágio 1 para o Estágio 2 . . . . .	72
4.3.2	Transição do Estágio 2 para o Estágio 3 . . . . .	75
4.4	Exemplo de Simulação . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Abordagem Chaveada para Navegação de um Robô Aéreo com Incertezas e Restrições</b>	<b>83</b>
5.1	Definição do Problema . . . . .	83
5.2	Metodologia . . . . .	88
5.2.1	Projeto do Campo Vetorial Artificial . . . . .	88
5.2.2	Análise de Simulação . . . . .	99
<b>6</b>	<b>Controle de Formação - Consenso de Integradores Duplos com Restrições de Velocidade</b>	<b>105</b>
6.1	Definição do Problema . . . . .	107
6.2	Conceitos da Teoria Algébrica de Grafos . . . . .	109
6.3	Estratégia de Consenso . . . . .	110
6.4	Exemplo de Simulação . . . . .	117
<b>7</b>	<b>Conclusões e Trabalhos Futuros</b>	<b>121</b>

**Referências Bibliográficas**

---

---

# Resumo

---

Nesta tese é abordado o problema de coordenação de sistemas multiagente com ênfase em aplicações a sistemas de múltiplos Veículos Aéreos Não Tripulados (VANTs) de asas fixas. São propostas duas estratégias de coordenação descentralizadas.

Na primeira estratégia, a tarefa completa a ser realizada é dividida em três estágios: (i) cada VANT deve rastrear um círculo paralelo ao plano  $xy$  em uma dada altitude (altitudes diferentes para VANTs diferentes); (ii) os VANTs devem se distribuir de tal forma que suas projeções sobre o plano  $xy$  estejam igualmente espaçadas ao longo de um círculo; (iii) cada VANT converge para a mesma altitude a fim de rastrear o mesmo círculo. A principal contribuição desse trabalho está nas provas matemáticas da estratégia proposta para um dado modelo de VANT. Considera-se a presença de limites mínimo e máximo no comando de velocidade de translação, limite máximo no valor absoluto da velocidade angular de guinada, limite máximo no valor absoluto da taxa de variação de altitude, dinâmica de segunda ordem e uma restrição não holonômica. São apresentadas garantias de estabilidade e de evitamento de colisão durante a realização de toda a tarefa, incluindo-se as transições entre os estágios, sem violação das restrições.

Em seguida, propõe-se uma lei de controle que leva em conta a presença de incertezas de modelo na tarefa de rastreamento de um círculo executada por um único VANT, tendo por inspiração a lei de controle baseada em campos vetoriais proposta no primeiro estágio da primeira estratégia. São apresentadas garantias matemáticas de que o robô aéreo é capaz de convergir para uma região limitada e de tamanho conhecido que contém o círculo alvo.

Na segunda estratégia, é atacado o problema de consenso de integradores duplos com restrições de velocidade e com uma velocidade de referência de grupo constante. Em comparação com trabalhos anteriores, essa abordagem é diferente em três aspectos: (i) a lei de controle de um agente não depende das velocidades ou das acelerações dos vizinhos, mas apenas das posições dos vizinhos e da velocidade do próprio agente; (ii) as restrições não são simétricas; (iii)

a velocidade é restrita, mas não a aceleração. Propõe-se uma estratégia de controle descentralizado com a topologia de vizinhos descrita por um grafo de interação não-direcionado e conectado. São apresentadas garantias matemáticas de convergência sem violação das restrições. Tal abordagem pode ser aplicada ao problema de se fazer com que  $n$  VANTs, cada um viajando em linha reta e distribuídos em faixas paralelas e adjacentes, percorram uma área retangular com velocidade constante e pareados lado a lado, sem violar as restrições de velocidade.

Todos os resultados apresentados nesta tese são ilustrados por meio de simulações numéricas.

---

---

# Abstract

---

In this thesis the problem of multiagent systems coordination with emphasis on fixed-wing Unmanned Aerial Vehicles (UAVs) systems is addressed. Two decentralized coordination strategies are proposed.

In the first strategy the task to be accomplished is divided in three stages: (i) each UAV has to track a circle parallel to plane  $xy$  in a given altitude (different altitudes for different UAVs); (ii) the UAVs must distribute themselves in such a way that their projection onto plane  $xy$  are evenly spaced around a circle; (iii) each UAV converge to the same altitude to track the same circle. The main contribution of this work is in the mathematical proofs for the proposed strategy for a given UAV model. Minimum and maximum limits in the forward speed command, maximum limit in the absolute value of the yaw rate, maximum limit in the absolute value of the altitude speed, second-order dynamics, and a non-holonomic constraint are considered. Stability and collision avoidance guarantees throughout all the task accomplishment are provided, including the stage transitions, without violating the constraints.

Then, a control law inspired in the artificial vector field based approach developed in the first stage of the first strategy is proposed. Such a design takes into account the presence of model uncertainty in the task of making an UAV track a circle. Mathematical guarantees that the robot is able to converge to a bounded region of known size that contains the target curve are given.

In the second strategy, the problem of consensus for double-integrator dynamics with velocity constraints and constant group reference velocity is addressed. In comparison to previous works, this approach is different in three aspects: (i) the control law of an agent does not depend on the local neighbor's velocities or accelerations, but only on the neighbor's positions and on the own velocity; (ii) the constraints are non-symmetric; (iii) the velocity is constrained but not the acceleration. A decentralized control strategy with the neighboring topology described by

an undirected connected graph is proposed. Mathematical guarantees of convergence without violating the constraints are given. Such an approach can be applied to the problem of making  $n$  VANTs, each one flying in a straight line and distributed in parallel and adjacent lanes, span a rectangular area with constant velocity and paired side by side, without violating the velocity constraints.

All the results presented in this thesis are illustrated by means of numerical simulations.

---

# Lista de Figuras

---

1.1	MiniVANT sendo lançado com a mão pelo engenheiro aeroespacial da NASA Michael Allen. . . . .	4
1.2	AqVS - Veículo aéreo não-tripulado desenvolvido no Centro de Estudos Aero-náuticos da UFMG. . . . .	4
2.1	Exemplo de um robô móvel com três graus de liberdade. . . . .	8
2.2	Manipulador robótico planar de duas juntas. . . . .	11
2.3	Aerosonde - VANT projetado para coleta de dados climáticos, como tempera-tura, pressão atmosférica e umidade. . . . .	17
3.1	Representação simplificada de um VANT voando a uma altitude constante. . .	25
3.2	Sistema de controle em cascata. . . . .	26
3.3	Teste de rastreamento do modelo de referência por parte do modelo dinâmico do Aerosonde. . . . .	26
3.4	À esquerda, comando de direcionamento e comportamento real obtido para am-bos os modelos. À direita, comportamento dinâmico da altitude, da velocidade em relação ao solo e do ângulo de rolamento. . . . .	27
3.5	Trajetória real obtida para o modelo simplificado (3.1) e para o modelo da ae-ronave (2.18), (2.19), (2.20) e (2.21) controlado pela estratégia proposta em (Thums, 2012). . . . .	28
3.6	Representação de um unicyclo planar. Figura extraída de (Spong et al., 2006). .	28
4.1	Três estágios da estratégia de formação de padrão proposta: à esquerda, (i) rastreamento de um círculo; ao centro, (ii) distribuição circular balanceada; à direita, (iii) controle de altitude. . . . .	48
4.2	Representação do VANT no plano $xy$ em coordenadas cilíndricas. . . . .	51
4.3	Representação gráfica do ângulo $\alpha$ e do ângulo de referência $\alpha_r(\rho)$ determinado pelo campo vetorial artificial. . . . .	51
4.4	Representação do campo vetorial artificial com as linhas de fluxo como uma função da distância entre o VANT e o círculo alvo. . . . .	55

4.5	Campo vetorial artificial dado por (4.11), (4.16) e (4.18) projetado com $K_f = 0,015\text{m}^{-1}$ e $R = 50\text{m}$ . Em verde e magenta estão representadas duas curvas integrais do campo vetorial artificial para diferentes condições iniciais. . . . .	55
4.6	Representação com campo vetorial artificial em coordenadas cilíndricas. . . . .	56
4.7	Representação gráfica do conjunto de condições iniciais definido pelas desigualdades $e_\alpha(0) \geq 0$ , $\rho(0) \geq R$ e $e_\alpha(0) + \alpha_r(\rho(0)) \leq \frac{\pi}{2}$ . . . . .	60
4.8	Representação gráfica das regiões $\Omega_0$ , $\Omega_1$ , $\Omega_2$ , $\Omega_3$ e $\Omega_4$ . . . . .	61
4.9	Representação esquemática dos resultados apresentados no Teorema 2. . . . .	63
4.10	Representação esquemática da projeção de $n$ VANTs sobre o plano $z = 0$ no início da busca por distribuição circular balanceada. . . . .	65
4.11	Representação gráfica da metodologia aplicada na transição do estágio 1 para o estágio 2. . . . .	74
4.12	Projeção sobre o plano $z = 0$ de três VANTs em tarefa de formação circular no sentido anti-horário. . . . .	75
4.13	Funções de ‘energia’ $W_i$ , $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ , associadas ao estágio 1 (convergência para o círculo). . . . .	79
4.14	Função ‘energia’ $H(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}})$ associada ao estágio 2 (distribuição circular balanceada). . . . .	79
4.15	Velocidade angular de guinada dos cinco VANTs. . . . .	80
4.16	Comando de velocidade de translação dos cinco VANTs. . . . .	80
4.17	Comando de taxa de variação de altitude dos cinco VANTs. . . . .	81
4.18	Cinco VANTs em uma tarefa de formação circular balanceada. As altitudes de cada VANT são $z_1 = 2\text{m}$ (asterisco azul), $z_2 = 4\text{m}$ (asterisco verde), $z_3 = 6\text{m}$ (asterisco vermelho), $z_4 = 8\text{m}$ (asterisco magenta) e $z_5 = 10\text{m}$ (asterisco preto). As projeções dos cinco VANTs sobre o plano $z = 0$ também são apresentadas nos gráficos. . . . .	82
5.1	Discrepâncias de comportamento entre o modelo “realístico” controlado e o modelo de referência simplificado. . . . .	84
5.2	Diagrama de blocos do sistema de controle em cascata do VANT. . . . .	85
5.3	Representação do robô aéreo em coordenadas polares. . . . .	86
5.4	Representação gráfica do ângulo $\alpha$ e do ângulo de referência $\alpha_r(\rho)$ fornecido pelo campo vetorial artificial subjacente. . . . .	87
5.5	Máquina de estados do sistema híbrido resultante - Representação esquemática dos resultados apresentados no Teorema 6. . . . .	97
5.6	Valores viáveis de $K_f$ e $K_\alpha$ em função de $\Delta_\omega$ . . . . .	99
5.7	Região factível (hachurada) no plano $K_f \times K_\alpha$ para três casos diferentes: (i) $\Delta_\omega = 0,2\text{rad/s}$ ; (ii) $\Delta_\omega = 0,3\text{rad/s}$ ; (iii) $\Delta_\omega = 0,4\text{rad/s}$ (caso infactível). Os valores dos outros parâmetros para os três casos são $R = 100\text{m}$ , $\Delta_R = 30\text{m}$ , $\omega_M = 1\text{rad/s}$ e $v_M = 20\text{m/s}$ . . . . .	100
5.8	Simulação da trajetória do robô aéreo controlado pela estratégia proposta baseada em campos vetoriais artificiais. A cruz azul representa a posição inicial, e o círculo azul representa a posição final. . . . .	101

5.9	Erro em $\alpha$ , erro em $\rho$ , erro em $v$ e velocidade angular de guinada. Os UBs e as restrições são indicados pelas linhas pontilhadas. . . . .	102
5.10	Evolução temporal das funções de Lyapunov $V$ , $W$ e $H$ . Os UBs são indicados pelas linhas pontilhadas. . . . .	103
6.1	Coordenação de $n$ VANTs para a realização de varredura de uma área retangular.	107
6.2	Grafo de interação para o exemplo de simulação. . . . .	118
6.3	Resultados de simulação para a estratégia de consenso proposta. . . . .	118
6.4	Evolução temporal da função de Lyapunov $H$ . . . . .	119
6.5	Cinco VANTs em busca de consenso para executar a varredura de uma área retangular. . . . .	120

---

## Lista de Símbolos

---

$\mathbf{A}$	Matriz de adjacências
$\mathbf{e}_i$	Variável de erro associada ao $i$ -ésimo agente
$\mathbf{f}_a$	Modelo dinâmico de um robô
$\mathbf{f}_v$	Modelo cinemático de um robô
$\mathbf{L}$	Matriz Laplaciana de um grafo
$n$	Número de agentes
$\mathbf{q}$	Configuração do robô
$\dot{\mathbf{q}}$	Velocidade do robô
$\ddot{\mathbf{q}}$	Aceleração do robô
$\mathbf{r}_i$	Vetor posição do agente $i$
$\mathbf{r}_{ij}$	Vetor posição relativa dos agentes $i$ e $j$
$\mathbf{v}_{ci}$	Vetor comando de velocidade do $i$ -ésimo agente
$\mathbf{v}_d$	Vetor velocidade desejada para a estratégia de consenso
$\mathbf{v}_i$	Velocidade do $i$ -ésimo agente
$\mathbf{v}_{min}$	Vetor velocidade mínima
$\mathbf{v}_{max}$	Vetor velocidade máxima
$\alpha$	Ângulo entre o vetor radial e o vetor velocidade $[\dot{x} \ \dot{y}]^T$ do VANT
$\theta$	Ângulo de guinada
$\theta_c$	Comando de ângulo de guinada
$\theta_r$	Ângulo de arfagem de um corpo rígido
$\lambda(\rho)$	Campo vetorial artificial
$\rho$	Coordenada polar radial
$\sigma(\cdot)$	Função de saturação da velocidade
$\tau_\theta$	Constante de tempo associada à dinâmica de $\theta$
$\tau_\omega$	Constante de tempo associada à dinâmica de $\omega$
$\tau_v$	Constante de tempo associada à dinâmica de $v$
$\tau_z$	Constante de tempo associada à dinâmica de $z$
$\phi_r$	Ângulo de rolamento de um corpo rígido
$\psi$	Coordenada polar angular

$\Psi$	Ângulo de rumo
$\Psi_r$	Ângulo de guinada de um corpo rígido
$\omega$	Velocidade angular de guinada
$\omega_c$	Comando de velocidade angular de guinada
$\omega_d$	Velocidade angular de guinada desejada
$\omega_M$	Máxima magnitude da velocidade angular de guinada
$a_{ij}$	Elemento da $i$ -ésima linha e da $j$ -ésima coluna de $\mathbf{A}$
$\mathcal{C}$	Espaço de configurações
$\mathcal{C}_{livre}$	Espaço de configurações livre
$\mathcal{C} \mathcal{O}_i$	$i$ -ésimo obstáculo em $\mathcal{C}$
$\mathcal{E}$	Conjunto de arestas de um grafo
$G(\mathcal{V}, \mathcal{E})$	Grafo com conjunto de vértices $\mathcal{V}$ e conjunto de arestas $\mathcal{E}$
$\text{mod}(x, y)$	Resto da divisão de $x$ por $y$
$\mathcal{N}[\mathbf{A}]$	Espaço nulo da matriz $\mathbf{A}$
$\mathcal{N}_i$	Conjunto de vizinhos do $i$ -ésimo agente
$ \mathcal{N}_i $	Cardinalidade de $\mathcal{N}_i$
$\mathcal{S}$	Círculo alvo a ser reastreado pelo time de $n$ VANTs
$T_{\mathbf{q}}\mathcal{C}$	Espaço tangente a $\mathcal{C}$ no ponto $\mathbf{q}$
$f(\rho)$	Componente radial do campo vetorial $\lambda(\rho)$
$g(\rho)$	Componente tangencial do campo vetorial $\lambda(\rho)$
$K_\alpha$	Ganho do controlador associado à dinâmica de $\alpha$
$K_f$	Parâmetro de projeto do campo vetorial artificial $\lambda(\rho)$
$R$	Raio do círculo alvo $\mathcal{S}$
$S^1$	Um círculo unitário
$v$	Velocidade de translação
$v_c$	Comando de velocidade de translação
$v_d$	Velocidade desejada
$v_m$	Velocidade de translação mínima
$v_M$	Velocidade de translação máxima
$v_{zM}$	Máxima magnitude da taxa de variação de altitude
$\mathcal{V}$	Conjunto de vértices de um grafo
$\mathcal{W}$	Espaço de trabalho
$\mathcal{W}_{livre}$	Espaço de trabalho livre
$\mathcal{W} \mathcal{O}_i$	$i$ -ésimo obstáculo em $\mathcal{W}$
$x$	Coordenada cartesiana $x$
$y$	Coordenada cartesiana $y$
$z$	Coordenada cartesiana $z$ ou altitude
$z_c$	Comando de altitude
$\mathbf{0}_{n \times m}$	Matriz de 0's de dimensão $m \times n$
$\mathbf{1}_{n \times m}$	Matriz de 1's de dimensão $m \times n$
$\otimes$	Produto de Kronecker

---

---

# Lista de Abreviações

---

UAV *Unmanned Aerial Vehicle*

UB *Ultimate Bound*

UGV *Unmanned Ground Vehicle* (Veículo Terrestre Não Tripulado)

VANT Veículo Aéreo Não Tripulado

# Introdução

---

A robótica cooperativa trata-se de um campo de estudo que envolve a elaboração de estratégias que permitam que robôs que constituem uma equipe ou um time interajam entre si ou com seres humanos de maneira coordenada com o objetivo de cumprir uma determinada tarefa. Uma das razões para que tal área de estudo exista reside no fato de que, muitas vezes, um único robô não é capaz de realizar (ou realizaria com muito esforço) uma tarefa que uma equipe de robôs seria capaz de executar, da mesma forma que um homem sozinho muitas vezes não é capaz de levar a termo uma dada atribuição que um grupo de homens consegue atender prontamente. Um outro aspecto importante a se ressaltar nesse contexto é que uma equipe de robôs pode ser mais robusta a falhas do que um único robô em torno do qual se centralizariam todas as expectativas acerca do cumprimento de uma dada missão. Alguns exemplos de atividades em que se faz necessária a atuação coordenada de um time de robôs ou agentes seriam: (i) missões de busca e resgate de pessoas em ambientes inóspitos; (ii) mapeamento de áreas florestais por equipes de VANTs<sup>1</sup> equipados com câmeras, tanto para monitoramento de incêndios quanto para acompanhamento da degradação ambiental dessas áreas; (iii) uma linha de produção em que vários manipuladores robóticos operam paralelamente sobre um mesmo item que irá constituir um determinado produto final, como um automóvel. Especificamente no contexto de controle cooperativo de VANTs, as aplicações poderiam ser: patrulhamento de fronteiras, busca e resgate, monitoramento, mapeamento de territórios hostis, etc (Ryan et al., 2004).

Várias são as formas de se classificar as estratégias de cooperação de múltiplos agentes, e uma delas seria a que separa tais estratégias em *centralizadas* e *descentralizadas*.

Por centralizadas entendem-se as estratégias em que há a presença de uma figura central que planeja as ações para todos, acessa informações de todo grupo e diz a cada agente o que

---

<sup>1</sup>Veículos Aéreos Não Tripulados, ou *Unmanned Aerial Vehicles* (UAVs) em Inglês.

---

fazer para que a tarefa seja cumprida. Nas abordagens descentralizadas cada robô é responsável por si próprio e age com base apenas na informação local disponível. Essa segunda abordagem parece ser vantajosa no sentido de apresentar maior robustez a falhas, no entanto implica num questionamento interessante: É possível que se obtenha um comportamento global desejado a partir unicamente de informação local? Isto é, na ausência de um “maestro” responsável pelo comportamento global, é possível que se garanta que o comportamento do grupo como um todo será estável e tal que a tarefa a ser realizada seja cumprida?

Fenômenos observados na natureza parecem indicar que a resposta a essa pergunta é afirmativa. Em primeiro lugar, foi observado que alguns grupos constituídos por uma grande quantidade de vaga-lumes eram capazes de piscar em sincronismo durante longos intervalos de tempo, mesmo partindo de uma configuração inicial assíncrona (Strogatz, 2003). A explicação para esse fenômeno consiste no fato de que cada vaga-lume possui uma espécie de oscilador ou metrônomo cujo período se ajusta automaticamente em resposta ao piscar dos vizinhos. Ainda que esta não seja uma tarefa propriamente mecânica<sup>2</sup>, que é o que se esperaria de um time de robôs, observa-se a ocorrência de um comportamento coordenado na ausência de uma entidade centralizadora. Um segundo exemplo trata-se dos voos em bando ou das revoadas de pássaros, fenômeno comumente referido em inglês como *flocking*. O modelo de *flocking* se fundamenta em três princípios básicos de comportamento local de cada um dos agentes, ou pássaros no presente caso, a partir do conhecimento das posições e velocidades dos seus vizinhos (Tanner et al., 2003c): (i) separação → evitar aglomeração com os vizinhos (repulsão a curta distância); (ii) alinhamento → orientar-se de acordo com a orientação média dos vizinhos; (iii) coesão → movimentar-se na direção da posição média dos vizinhos (atração a longa distância). A superposição dessas três regras resulta em movimento em formação com mesma orientação e sem ocorrência de colisões. Vê-se portanto que a partir de regras locais é possível que se atinja a coordenação global do time de múltiplos agentes.

Após esse breve panorama acerca de cooperação e coordenação de múltiplos agentes no contexto de robótica, são apresentados a seguir o objetivo, a motivação e as contribuições deste trabalho.

---

<sup>2</sup>No sentido de que não se trata de um movimento coordenado no espaço tridimensional, mas de uma tarefa de sincronismo de grandezas físicas, no presente caso a frequência com que os vaga-lumes piscam.

## 1.1 Objetivo

O objetivo principal desta tese é propor estratégias de controle de VANTs de asas fixas, os quais serão tratados como agentes de segunda ordem<sup>3</sup> que devem atender determinadas restrições, como a não-holonomia e a existência de limites para os valores das entradas de controle e/ou das variáveis de estado do veículo. Essas estratégias, em sua maior parte, serão desenvolvidas no contexto de coordenação de times de VANTs em que também se faz necessário o evitamento de colisões.

## 1.2 Motivação

A FINEP<sup>4</sup> dispôs-se a financiar um projeto a ser executado nos laboratórios de pesquisa da UFMG (Universidade Federal de Minas Gerais) e da UFAM (Universidade Federal do Amazonas), o qual consiste no desenvolvimento de um sistema de miniVANTs capazes de executarem missões colaborativas, como atividades de monitoramento de solo via obtenção de imagens com restrições de minimização de tempo. Esses miniVANTS elétricos, para decolar, são lançados com a mão (ver Figura 1.1). Enquanto voam buscando cobrir um terreno de elevação e de fronteiras irregulares e arbitrárias em tempo mínimo, eles obtêm imagens por meio de câmeras a eles acopladas e as enviam para uma estação que se encontra no solo. Dentre as importantes aplicações relevantes para o Brasil, enumeram-se:

1. Monitoramento de áreas de preservação ambiental, objetivando identificar pontos de início de degradação antes que eles assumam proporções que os tornem irreversíveis;
2. Missões de busca e salvamento em desastres e acidentes, quando o intervalo de tempo para o encontro das vítimas for essencial para a sua sobrevivência.

O Centro de Estudos Aeronáuticos da UFMG já possui a experiência de desenvolvimento da aeronave não tripulada AqVS (ver Figura 1.2), um motoplanador de pequeno porte (2 m de envergadura e 1,6 m de comprimento) capaz de executar missões de reconhecimento de terreno

---

<sup>3</sup>Neste texto, a expressão ‘segunda ordem’ é utilizada para se referir a sistemas cujo módulo da velocidade não pode ser arbitrado instantaneamente.

<sup>4</sup>Financiadora de Estudos e Projetos, do Ministério de Ciência e Tecnologia do Brasil.



Figura 1.1: MiniVANT sendo lançado com a mão pelo engenheiro aeroespacial da NASA Michael Allen.



Figura 1.2: AqVS - Veículo aéreo não-tripulado desenvolvido no Centro de Estudos Aeronáuticos da UFMG.

e monitoramento (Iscold et al., 2010). Convém que se registre que o AqVS provavelmente foi a primeira aeronave brasileira a realizar voos autônomos com tecnologia de controle totalmente nacional.

## 1.3 Contribuições do Trabalho

As contribuições deste trabalho são:

1. O desenvolvimento de uma estratégia de coordenação descentralizada baseada em campos vetoriais para que um time de VANTs de asas fixas execute uma missão de distribuição circular balanceada em um espaço de trabalho tridimensional considerando-se que: (i) os agentes são não lineares, não holonômicos e de segunda ordem; (ii) o evitamento de colisão deve ser garantido; (iii) devem ser atendidas as restrições de limite mínimo de velocidade angular de guinada, de limite mínimo e máximo de velocidade de translação

do VANT, e de limite máximo da magnitude da variação de altitude. Garantias de convergência são apresentadas para cada uma das etapas da estratégia proposta e exemplos de simulação ilustram a eficácia dos resultados obtidos (Capítulo 4).

2. O desenvolvimento de uma lei de controle que leva em conta a presença de incertezas de modelo na etapa de rastreamento de um círculo executada por um único VANT, tendo por inspiração a lei de controle baseada em campos vetoriais proposta no Capítulo 4. A presença de tais incertezas é natural quando se considera que o modelo simplificado utilizado neste trabalho é um modelo de referência para malhas de controle mais internas do VANT. Assim, um desempenho não ideal dessas malhas de controle internas resultam em erros de modelagem que devem ser levados em consideração durante o projeto de uma estratégia de guiagem da aeronave. Nesta etapa do trabalho são apresentadas as condições que o projeto da estratégia de controle baseada em campo vetorial deve atender para que o VANT seja capaz de rastrear o círculo com um erro de rastreamento limitado (Capítulo 5).
3. O desenvolvimento de uma estratégia de coordenação descentralizada para que um time de VANTs, cada um viajando em linha reta e distribuídos em faixas paralelas e adjacentes, percorra uma área retangular com velocidade constante e pareados lado a lado, sem violar os limites mínimo e máximo de velocidade de translação. Tal problema se enquadra na categoria de problemas de consenso de sistemas multiagente. Dessa forma, a metodologia de consenso desenvolvida nesse trabalho abordou o problema mais geral de consenso de agentes de segunda ordem multi-dimensionais com limites mínimo e máximo de velocidade. Diferentemente de outros trabalhos, a estratégia aqui proposta lida com restrições assimétricas na variável de estado velocidade e a lei de controle descentralizada para cada agente depende apenas das posições dos vizinhos e da velocidade de grupo desejada (Capítulo 6).

## 1.4 Organização do Texto

Este texto está dividido em 7 Capítulos. Neste capítulo apresentou-se uma breve introdução acerca da coordenação de sistemas multi-agente, bem como o objetivo, a motivação e as

---

contribuições deste trabalho. No Capítulo 2 encontra-se uma breve revisão sobre os conceitos básicos e a nomenclatura utilizada neste trabalho. O Capítulo 3 traz a contextualização do problema e uma revisão de trabalhos relacionados ao tema encontrados na literatura. No Capítulo 4 são apresentados os desenvolvimentos referentes à tarefa de distribuição circular balanceada realizada por um time de VANTs de asas fixas. No Capítulo 5 é apresentada uma estratégia para controle de um VANT na presença de incertezas inspirada na estratégia de controle baseada em campos vetoriais apresentada no Capítulo 4. O Capítulo 6 trata do problema de consenso de sistemas de segunda ordem com restrições de velocidade. Por fim, o Capítulo 7 encerra as conclusões deste trabalho e as perspectivas de continuidade da pesquisa.

# Fundamentação Teórica

---

No presente capítulo são apresentados conceitos, ferramentas e ideias basilares para a compreensão e a fundamentação da pesquisa desenvolvida neste trabalho.

## 2.1 Conceitos em Robótica

### 2.1.1 Espaço de Trabalho

Uma vez que qualquer dispositivo mecânico que funcione com um certo grau de autonomia, normalmente controlado por um computador, pode ser considerado um robô (Spong et al., 2006), a região (ou conjunto de pontos) do mundo que pode vir a ser ocupada por esse dispositivo ao longo do tempo é chamada de *espaço de trabalho*  $\mathcal{W}$ . Tipicamente, o espaço de trabalho de um robô móvel será bidimensional ( $\mathbb{R}^2$ ) ou tridimensional ( $\mathbb{R}^3$ ). Um exemplo de espaço de trabalho bidimensional é o de um VANT que voa a uma altitude constante, e nesse caso o seu espaço de trabalho é o plano  $xy$ . Já o espaço de trabalho de um VANT que pode voar a diferentes altitudes é o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , em que  $(x, y, z)$  são as coordenadas cartesianas que lhe definem a localização dos pontos constituintes. É importante frisar que esses dois exemplos relacionados a VANTs são válidos para pequenas distâncias, em que a superfície da Terra pode ser aproximada por um plano.

É comum que algumas regiões de  $\mathcal{W}$  sejam proibidas para o robô, regiões essas chamadas de obstáculos. Seja  $\mathcal{W}_i$  o  $i$ -ésimo obstáculo. Define-se então espaço de trabalho livre como sendo o conjunto de pontos  $\mathcal{W}_{livre} = \mathcal{W} \setminus \{\cup_i \mathcal{W}_i\}$  (Choset et al., 2005).

Apesar de a representação do robô no seu espaço de trabalho parecer muito natural, muitas vezes ela não é utilizada na prática. Como será visto na próxima seção, em diversas situações

é preferível definir um robô de forma genérica em um outro espaço no qual ele é representado como um único ponto.

### 2.1.2 Espaço de Configurações

Diz-se que a *configuração*  $\mathbf{q}$  de um sistema robótico é constituída pelas variáveis cuja especificação completa é suficiente para determinar a posição de cada um dos pontos que constituem o robô. Dessa forma, o *espaço de configuração*  $\mathcal{C}$  de um sistema robótico é o espaço de todas as suas possíveis configurações, e cada configuração é representada em  $\mathcal{C}$  como um ponto. A dimensão do espaço de configurações, isto é, o número mínimo de variáveis necessário para especificar uma configuração, é o número de *graus de liberdade* do robô (Choset et al., 2005). Portanto,  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_{n_q}]^T$ , em que  $n_q$  é a dimensão do espaço de configurações.

No caso de robôs móveis que navegam sobre uma superfície planar, o espaço de trabalho  $\mathcal{W}$  é o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^2$ , mas um espaço de configuração possível seria aquele definido por  $\mathbf{q} = [x \ y \ \theta]^T$ , em que  $x$  e  $y$  são as coordenadas do centro de massa do robô e  $\theta$  é o seu ângulo de guinada, como é ilustrado na Figura 2.1.

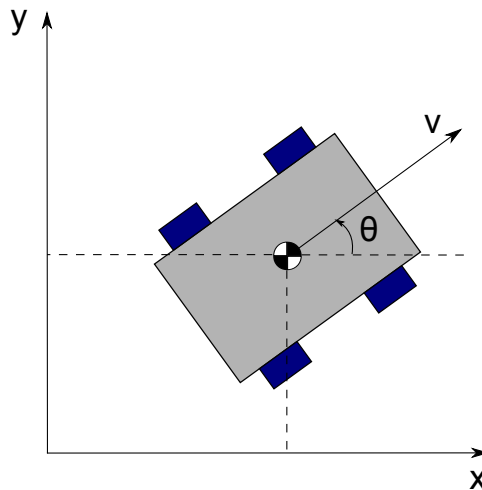


Figura 2.1: Exemplo de um robô móvel com três graus de liberdade.

É importante destacar que apesar de esse tipo de robô móvel ser um sistema com três graus de liberdade, o seu espaço de configurações  $\mathcal{C}$  não é o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , uma vez que  $\theta \in [0, 2\pi)$ . O espaço de configurações desse robô é  $\mathcal{C} : \mathbb{R}^2 \times S^1$ .

As regiões  $\mathcal{W} \setminus \mathcal{O}_i$ , que no espaço de trabalho correspondiam a obstáculos, naturalmente são

mapeadas para o espaço de configurações, definindo conjuntos de pontos que representam configurações proibidas para o robô. Portanto, define-se  $\mathcal{C}\mathcal{O}_i$  como o conjunto de configurações em que o robô intercepta um obstáculo  $\mathcal{W}\mathcal{O}_i$  em  $\mathcal{W}$ , ou seja,

$$\mathcal{C}\mathcal{O}_i = \left\{ \mathbf{q} \in \mathcal{C}; R(\mathbf{q}) \cap \mathcal{W}\mathcal{O}_i \neq \emptyset \right\}, \quad (2.1)$$

em que  $R(\mathbf{q})$  é o conjunto de pontos do espaço de trabalho ocupado pelo robô na configuração  $\mathbf{q}$ . Dessa forma, define-se o espaço de configuração livre  $\mathcal{C}_{livre}$  como

$$\mathcal{C}_{livre} = \mathcal{C} \setminus \left\{ \bigcup_i \mathcal{C}\mathcal{O}_i \right\}, \quad (2.2)$$

que claramente é a maior sub-região do espaço de configurações em que não há obstáculos.

As Eqs. (3.1-3.4) são modelos de comportamentos dinâmicos de sistemas robóticos representados nos seus respectivos espaços de configurações. No caso de um robô que pode ser descrito como um corpo rígido que não está sujeito a restrições de movimento em um espaço de trabalho tridimensional (ver Seção 3.1.3), o espaço de configurações correspondente terá seis dimensões, e a configuração do robô será  $\mathbf{q} = [x \ y \ z \ \phi_r \ \theta_r \ \psi_r]^T$ , em que  $x$ ,  $y$  e  $z$  são as coordenadas de seu centro de massa em relação a um referencial inercial e  $\phi_r$ ,  $\theta_r$  e  $\psi_r$  são os ângulos de rolamento, arfagem e guinada, que representam rotações em torno dos eixos de um referencial fixo em relação ao corpo.

É importante frisar que a representação de um sistema robótico por meio de sua configuração  $\mathbf{q}$  só traz informação acerca da localização dos pontos constituintes do robô no mundo, mas não diz nada sobre a sua velocidade ou direção de movimento. Para se ter acesso a esse tipo de informação, faz-se necessário um modelo *cinemático* do tipo

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}_v(\mathbf{q}, \mathbf{u}_v), \quad (2.3)$$

em que  $\mathbf{f}_v : \mathcal{C} \times \mathbb{R}^{n_{u_v}} \mapsto \mathbb{R}^{n_q}$  e  $\mathbf{u}_v \in \mathbb{R}^{n_{u_v}}$  é um vetor de  $n_{u_v}$  entradas externas utilizado para atuar na velocidade do robô, ou então um modelo *dinâmico* da forma

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}_a), \quad (2.4)$$

em que  $\mathbf{f}_a : \mathcal{C} \times T_{\mathbf{q}}\mathcal{C} \times \mathbb{R}^{n_{u_a}} \mapsto \mathbb{R}^{n_q}$  e  $\mathbf{u}_a \in \mathbb{R}^{n_{u_a}}$  é um vetor de  $n_{u_a}$  entradas externas (forças e momentos) utilizado para atuar na aceleração do robô. O símbolo  $T_{\mathbf{q}}\mathcal{C}$  representa o espaço tangente a  $\mathcal{C}$  no ponto  $\mathbf{q}$ , portanto ele define o conjunto que contém todas as possíveis velocidades do sistema naquela configuração.

### 2.1.3 Restrições de Movimento

É bastante frequente que robôs estejam sujeitos a restrições de movimento, as quais podem ser classificadas de várias maneiras diferentes. Uma dessas classificações se baseia no critério de as restrições dependerem ou não do tempo explicitamente. Se elas dependerem do tempo explicitamente, diz-se que elas são *restrições reonômicas*, caso contrário elas são ditas *restrições escleronômicas*. Neste trabalho, será abordado unicamente o caso de restrições escleronômicas. Em determinadas situações, a causa da presença de restrições de movimento reside em alguma característica estrutural do robô, e já em outras as restrições aparecem devido ao modo como o controle externo atua sobre ele.

Como exemplo do primeiro caso, considere-se o manipulador planar de duas juntas apresentado na Figura 2.2. Claramente neste caso, o espaço de trabalho  $\mathcal{W}$  está contido no plano  $xy$ . Sejam  $A$  o ponto da base da primeira haste presa à articulação,  $B$  o ponto de encontro entre as duas hastes e  $C$  um ponto na extremidade livre da segunda haste. Se forem conhecidas as coordenadas desses três pontos, então com base no conhecimento da geometria do robô é possível definir a posição de cada um de seus pontos. Em outras palavras, uma possível configuração para esse manipulador seria, em princípio,  $\mathbf{q} = [x_a \ y_a \ x_b \ y_b \ x_c \ y_c]^T$  e, nesse caso,  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^6$ . Acontece que as coordenadas desses três pontos, no caso do exemplo em análise, não podem assumir quaisquer valores independentemente, pois há restrições a serem consideradas. Em primeiro lugar,

$$x_a = 0, \quad (2.5)$$

$$y_a = 0, \quad (2.6)$$

uma vez que o ponto  $A$  se encontra na origem do referencial inercial. Além disso, a distância entre os pontos  $A$  e  $B$  não varia ao longo do tempo, uma vez que a haste que os contém é rígida,

assim como acontece com os pontos  $B$  e  $C$  na segunda haste. Dessa maneira,

$$d(A,B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2} \quad e \quad (2.7)$$

$$d(B,C) = \sqrt{(x_b - x_c)^2 + (y_b - y_c)^2}. \quad (2.8)$$

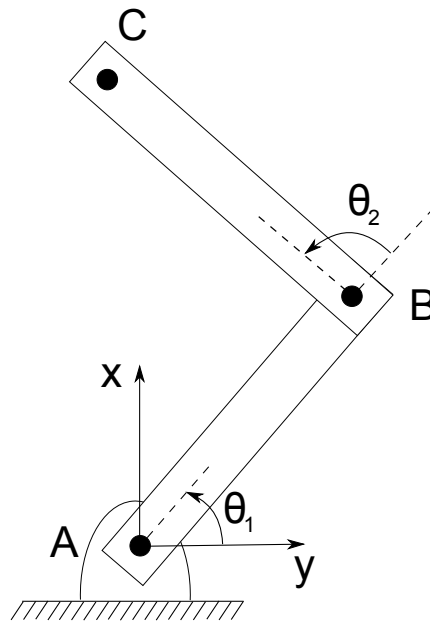


Figura 2.2: Manipulador robótico planar de duas juntas.

Portanto, apesar de o espaço de configurações proposto possuir 6 dimensões, a presença de 4 restrições indica que apenas 2 dimensões seriam suficientes para definir a configuração do robô, ou em outras palavras, o espaço de configuração foi superdimensionado. De fato, a partir unicamente dos ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , e do conhecimento da geometria do manipulador, é possível definir a localização de todos os pontos do robô, conforme se observa na Figura 2.2. A configuração do manipulador pode ser representada, portanto, como um ponto num toro bidimensional ( $\mathcal{C} = S^1 \times S^1 = T^2$ ) \* que se encontra imerso no  $\mathbb{R}^3$ . Maiores detalhes acerca das propriedades desse espaço de configuração não-euclidiano podem ser encontrados em (Choset et al., 2005).

As restrições de igualdade dadas pelas Eqs. (2.5-2.8) são exemplos de *restrições holonômicas*. Sempre que as restrições de movimento puderem ser expressas em função das variáveis

\* $S^1$  é uma representação do círculo unitário que associa a cada um de seus pontos um ângulo  $\theta$  correspondente.

de configuração, diz-se que elas são holonômicas, e os sistemas cujas restrições (se houver alguma) forem dessa natureza são ditos holonômicos. Matematicamente, elas pode ser expressas na forma geral

$$h_i(\mathbf{q}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k < n_q, \quad (2.9)$$

sendo que  $\mathbf{q} \in \mathcal{C}$  e  $h_i : \mathcal{C} \mapsto \mathbb{R}$ . Muitas vezes, assume-se que as funções  $h_i$  são suaves e independentes (Luca e Oriolo, 1995). Pelo fato de elas serem independentes, cada restrição holonômica diminui em uma unidade a dimensão do espaço de configurações. Portanto, um sistema robótico descrito por  $n$  variáveis (ou coordenadas) sujeito a  $m$  restrições holonômicas independentes terá o seu conjunto de possíveis configurações reduzido a uma subvariedade suave  $(n - m)$ -dimensional de  $\mathcal{C}$ . Uma conclusão que se pode tirar desse fato é que a presença de restrições holonômicas no espaço de configurações de um robô indica que esse espaço foi mal definido, ou seja, foram utilizadas para construí-lo mais coordenadas do que o número de graus de liberdade do sistema.

Existem outras restrições de igualdade que envolvem uma dependência não só em relação a  $\mathbf{q}$ , mas também em relação à velocidade  $\dot{\mathbf{q}}$ . Tais restrições são chamadas de *restrições cinemáticas*, e podem ser expressas na forma

$$a_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k < n_q, \quad (2.10)$$

para  $\mathbf{q} \in \mathcal{C}$ ,  $\dot{\mathbf{q}} \in T_{\mathbf{q}}\mathcal{C}$  e  $a_i : \mathcal{C} \times T_{\mathbf{q}}\mathcal{C} \mapsto \mathbb{R}$ . Essas restrições limitarão o conjunto de possíveis velocidades  $\dot{\mathbf{q}}$  do sistema para uma dada configuração. Em muitos sistemas mecânicos reais, essas restrições costumam aparecer no seguinte formato “linear nas velocidades”:

$$\mathbf{a}_i^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k < n_q, \quad \text{ou} \quad A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (2.11)$$

e nesse caso elas são classificadas como *restrições Pfaffianas*. Assume-se em geral que as funções vetoriais  $\mathbf{a}_i : \mathcal{C} \mapsto \mathbb{R}^{n_q}$  são suaves e linearmente independentes. A função matricial

$A(\cdot) : \mathcal{C} \mapsto \mathbb{R}^{k \times n_q}$  é da forma:

$$A(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} a_1^T(\mathbf{q}) \\ a_2^T(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ a_k^T(\mathbf{q}) \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

É interessante observar que, ao se derivar a Eq. (2.9) em relação ao tempo, a expressão resultante será:

$$\frac{d(h_i(\mathbf{q}))}{dt} = \frac{\partial(h_i(\mathbf{q}))}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}, \quad i = 1, 2, \dots, k < n_q, \quad (2.13)$$

a qual depende explicitamente de  $\dot{\mathbf{q}}$ . Portanto, as restrições holonômicas implicam a existência de restrições cinemáticas. Todavia, o contrário não é verdadeiro. É possível que existam restrições cinemáticas que não são integráveis, isto é, que não podem ser escritas no formato da Eq. (2.9), e neste caso elas são chamadas de *restrições não-holonômicas*. Naturalmente, os sistemas que apresentam esse tipo de restrição são chamados de *sistemas não-holonômicos*.

A lei de conservação do momento angular é uma causa típica da presença de restrições não-holonômicas em sistemas mecânicos (Choset et al., 2005). As restrições devidas à forma como o robô sofre atuações de entradas externas, como citado no primeiro parágrafo dessa seção, são exemplos de restrições não-holonômicas. No caso do robô móvel sub-atuado ilustrado na Figura 2.1, a restrição de não deslizamento lateral imposta pelas rodas também é classificada como não-holonômica. Diferentemente das restrições holonômicas, as restrições não-holonômicas não reduzem a dimensão do espaço de configuração  $\mathcal{C}$ , mas reduzem a dimensão do espaço de velocidades de  $n_q$  para  $n_q - k$ , o que dificulta a realização das tarefas de planejamento de trajetória e de controle e coordenação de robôs, justamente por limitarem as possíveis direções de velocidade instantânea de cada robô. Apesar disso, convém que se ressalve que a acessibilidade de todo o espaço de configuração é preservada (Luca e Oriolo, 1995).

Do ponto de vista de álgebra linear, a Eq. (2.11) pode ser interpretada da seguinte maneira: a velocidade  $\dot{\mathbf{q}}$  do robô pertence ao espaço nulo da matriz  $A$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[A(\mathbf{q})] &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_q} | A(\mathbf{q})\mathbf{x} = 0\}, \\ \dot{\mathbf{q}} &\in \mathcal{N}[A(\mathbf{q})]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Uma vez que o espaço nulo de uma matriz é um subespaço linear, ele possui uma base vetorial a partir da qual todos os seus vetores podem ser gerados. Para determinar a dimensão de  $\mathcal{N}[A(\mathbf{q})]$  (também chamada de nulidade de  $A(\mathbf{q})$ , ou  $\text{null}[A(\mathbf{q})]$ ), basta que se utilize a relação  $n_q = \text{rank}[A(\mathbf{q})] + \text{null}[A(\mathbf{q})]$  (Horn e Johnson, 1985). Portanto,  $\text{null}[A(\mathbf{q})] = n_q - k$ , e então o espaço nulo de  $A(\mathbf{q})$  pode ser obtido como uma combinação linear de vetores, isto é:

$$\dot{\mathbf{q}} = g_1(\mathbf{q})u_1 + g_2(\mathbf{q})u_2 + \dots + g_{n_q-k}(\mathbf{q})u_{n_q-k} \Rightarrow \dot{\mathbf{q}} = G(\mathbf{q})\mathbf{u} \quad (2.15)$$

em que  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_{n_q-k}]^T$  é um vetor de entradas arbitrárias e  $g_j: \mathcal{C} \mapsto T_{\mathbf{q}}\mathcal{C}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_q - k$  são funções vetoriais que são as colunas de  $G(\mathbf{q})$  e são tais que  $A(\mathbf{q})G(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ .

No caso do robô móvel apresentado na Figura 2.1, cálculos trigonométricos revelam que a equação  $\dot{x}\sin(\theta) - \dot{y}\cos(\theta) = 0$  deve ser sempre obedecida. Como essa equação não é integrável, diz-se que ela é uma restrição não-holonômica. E mais, como ela pode ser escrita no formato

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0, \quad (2.16)$$

ela também é Pfaffiana. Sabendo-se que  $\text{null}[A(\mathbf{q})] = n_q - k = 3 - 1 = 2$ , existem campos vetoriais linearmente independentes  $g_1(\mathbf{q})$  e  $g_2(\mathbf{q})$  que formam uma base para  $\mathcal{N}[A(\mathbf{q})]$  e tais que  $A(\mathbf{q})G(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ . Um exemplo seria:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

que é justamente o modelo cinemático de um unicyclo dado pela Eq. (3.2). Portanto, o processo acima descrito de se escrever as restrições não-holonômicas Pfaffianas de um robô e de se buscar vetores que definem uma base para o espaço nulo de  $A(\mathbf{q})$  trata-se de um procedimento sistemático para a obtenção do modelo cinemático de um sistema robótico. No problema de controle para fins de coordenação abordado nessa tese, os sistemas a serem considerados serão unicyclos cujo comportamento dinâmico é descrito por (3.1) ou (3.3), portanto tratam-se de

sistemas caracterizados pela presença de uma restrição não-holonômica idêntica à restrição de não deslizamento do uniciclo cinemático.

## 2.2 Modelo Dinâmico de uma Aeronave de Asas Fixas

Normalmente uma aeronave é representada como um corpo rígido que se move sob a influência de forças e torques. Essas forças e torques são resultantes da interação do veículo com a atmosfera que o circunda (forças aerodinâmicas e torques), da utilização de fontes de energia internas (forças e torques de propulsão) e da interação gravitacional entre o veículo e o planeta Terra (força peso).

Considerando-se uma aeronave como um corpo rígido, são necessários seis graus de liberdade para descrever seu movimento em um espaço de trabalho euclidiano tridimensional. Três graus de liberdade estão associados à translação do centro de massa da aeronave, e os outros três graus de liberdade correspondem à sua orientação no espaço. Para pequenos deslocamentos e altitudes (alguns quilômetros) e para pequenos intervalos de tempo (menos do que uma hora), também é usual considerar que a Terra é uma superfície plana e um referencial inercial, e que é possível desprezar as variações da força gravitacional. Nesse caso, as seguintes doze equações diferenciais ordinárias podem ser utilizadas para representar a dinâmica de uma aeronave (Stevens e Lewis, 1992; Etkin e Reid, 1996):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_N = U \cos \theta \cos \psi + \\ \quad V(-\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi) + \\ \quad W(\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi), \\ \dot{p}_E = U \cos \theta \sin \psi + \\ \quad V(\cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi) + \\ \quad W(-\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi) \\ \dot{p}_D = U \sin \theta - V \sin \phi \cos \theta - W \cos \phi \cos \theta. \end{array} \right. \quad (2.18)$$

$$\begin{cases} \dot{U} &= RV - QW + \frac{F_x}{m}, \\ \dot{V} &= -RU + PW + \frac{F_y}{m}, \\ \dot{W} &= QU - PV + \frac{F_z}{m}. \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\begin{cases} \dot{\phi} &= P + Q \tan \theta \sin \phi + R \tan \theta \cos \phi, \\ \dot{\theta} &= Q \cos \phi - R \sin \phi, \\ \dot{\psi} &= Q \frac{\sin \phi}{\cos \theta} + R \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\begin{cases} \dot{P} &= (-c_1 R + c_2 P)Q + c_3 \bar{L} + c_4 N, \\ \dot{Q} &= c_5 PR - c_6 (P^2 - R^2) + c_7 M, \\ \dot{R} &= (c_8 P - c_2 R)Q + c_4 \bar{L} + c_9 N, \end{cases} \quad (2.21)$$

em que

- a posição do centro de massa da aeronave em relação ao referencial inercial NED<sup>1</sup> fixo em relação ao solo é dada por  $p_N$ ,  $p_E$  e  $p_D$ ;
- a velocidade da aeronave representada no referencial ABC<sup>2</sup>, fixo em relação ao centro de massa da aeronave e cujos eixos apontam em direção ao nariz da aeronave (eixo  $x$ ), em direção à asa direita da aeronave (eixo  $y$ ) e para baixo (eixo  $z$ ), é dada por  $U$ ,  $V$  e  $W$ , respectivamente;
- a orientação espacial da aeronave é dada pelos três ângulos de rolamento  $\phi$ , arfagem  $\theta$  e guinada  $\psi$ , e determina a orientação do referencial ABC em relação ao referencial NED por uma sequência de rotações sucessivas (do referencial NED para o referencial ABC, é necessária uma rotação de  $\psi$  graus em relação ao eixo  $z$ , seguida de uma rotação de  $\theta$  graus em torno do novo eixo  $y$ , e, finalmente, seguida de uma rotação de  $\phi$  graus em torno do novo eixo  $x$ );
- as componentes da velocidade angular instantânea representada no referencial ABC são dadas por  $P$ ,  $Q$  e  $R$ ;

<sup>1</sup>Do Inglês *North-East-Down*.

<sup>2</sup>Do inglês *Aircraft Body Coordinate*

- $m$  é a massa da aeronave;
- as constantes  $c_1$  a  $c_9$  estão associadas com a inversa da matriz de inércia;
- $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$  são as componentes da força total aplicada ao veículo no referencial ABC;
- $\bar{L}$ ,  $M$  e  $N$  são as componentes do torque total aplicado ao veículo no referencial ABC.

É importante destacar que as forças e os torques que atuam em uma aeronave são na verdade funções não lineares das variáveis de estado e das deflexões das suas superfícies de controle (aileron, leme e profundor).

Um exemplo de VANT que pode ser descrito pelas equações (2.18), (2.19), (2.20) e (2.21) é o Aerosonde, mostrado na Figura 2.3, projetado para realizar coleta de dados climáticos.



Figura 2.3: Aerosonde - VANT projetado para coleta de dados climáticos, como temperatura, pressão atmosférica e umidade.

## 2.3 Teoria de Estabilidade de Lyapunov

Em uma grande quantidade de trabalhos publicados na literatura de robótica, a teoria de estabilidade de Lyapunov é utilizada no desenvolvimento das provas de convergência dos sistemas de controle projetados, seja no contexto de um único robô ou na situação em que se busca a coordenação de múltiplos agentes. Alguns de seus fundamentos e principais resultados são apresentados a seguir (Slotine e Li, 1991).

Os sistemas não-lineares podem ser representados no formato geral

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (2.22)$$

em que  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$  e  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^n$ . A sua solução  $\mathbf{x}(t)$  representa uma curva ou trajetória no espaço de estados. Pode ser que existam alguns pontos do sistema no espaço de estados em que as derivadas temporais de todos as variáveis de estado se anulam. Estes são os chamados *pontos de equilíbrio*.

**Definição 2.1 (Ponto de Equilíbrio)** *Um estado  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  é um ponto de equilíbrio do sistema  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  se, e somente se,*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, t) = \mathbf{0}, \forall t. \quad (2.23)$$

Em geral, a teoria de estabilidade de Lyapunov é utilizada para se estudar o comportamento do sistema em torno de um ponto de equilíbrio. Desse modo, uma classificação importante que deve ser levada em consideração diz respeito à estabilidade desse ponto. Como sempre é possível encontrar uma transformação de coordenadas capaz de deslocar o ponto de equilíbrio do sistema para a origem na nova representação, é comum que o comportamento do sistema seja estudado em torno da origem sem perda de generalidade.

**Definição 2.2 (Estabilidade de um Ponto de Equilíbrio)** *O ponto de equilíbrio  $\mathbf{0}$  é estável se, e somente se, para todo  $\varepsilon > 0$  e todo  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ , existir um  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$  tal que*

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0. \quad (2.24)$$

*Caso contrário, ele é instável. Se além de ser estável, existir um  $\eta(t_0) > 0$  tal que*

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| < \eta(t_0) \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow \mathbf{0} \text{ quando } t \rightarrow \infty, \quad (2.25)$$

*então o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável.*

Uma importante questão é como conseguir classificar a estabilidade de um ponto de equilíbrio do sistema a partir da Eq. (2.22). Para respondê-la, é possível que se utilize o método direto de Lyapunov. Com base nas definições acima estabelecidas, o teorema básico do método direto de Lyapunov pode ser enunciado:

**Teorema 2.1 (Teorema de Lyapunov para Estabilidade Local)** *O ponto de equilíbrio  $\mathbf{0}$  do sistema representado pela Eq. (2.22) é assintoticamente estável se existir uma função de classe  $C^1$  definida positiva localmente  $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$  e uma constante  $r$  tais que*

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) < 0, \forall t \geq t_0, \forall \mathbf{x} \in B_r, \quad (2.26)$$

em que  $B_r$  é uma bola de raio  $r$  centrada na origem e  $\dot{V}$  é avaliada ao longo das trajetórias do sistema.

Em diversas situações, é mais fácil encontrar uma função  $V(\mathbf{x}, t)$  cuja derivada temporal seja semi-definida negativa localmente, e nesse caso consegue-se provar a estabilidade do ponto de equilíbrio, porém não a sua estabilidade assintótica. Para esse caso, considerando-se sistemas autônomos representados por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2.27)$$

existe um resultado poderoso capaz de garantir estabilidade assintótica mesmo que a função  $\dot{V}(\mathbf{x})$  seja semi-definida negativa localmente. Antes de enunciá-lo, contudo, é necessário generalizar o conceito de ponto de equilíbrio definindo-se o que seja um *conjunto invariante*.

**Definição 2.3 (Conjunto Positivamente Invariante)** *Um conjunto de pontos  $\Omega$  no espaço de estados é dito ser positivamente invariante se e somente se*

$$\mathbf{x}(t_0) \in \Omega \rightarrow \mathbf{x}(t) \in \Omega, \forall t \geq t_0 \quad (2.28)$$

**Teorema 2.2 (LaSalle)** *Seja um sistema autônomo descrito pela Eq. (2.27), com  $\mathbf{f}$  contínua, e seja  $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ . Considere-se que*

- para um  $L > 0$ , a região  $\Omega_L$  definida por  $V(\mathbf{x}) < L$  seja limitada;
- $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega_L$ .

Seja  $\Omega_Z$  o conjunto de todos os pontos dentro de  $\Omega_L$  em que  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ , e seja  $\Omega_I$  o maior conjunto invariante em  $\Omega_Z$ . Então, toda solução  $\mathbf{x}(t)$  que se origine em  $\Omega_L$  tende a  $\Omega_I$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Um esboço da prova desse teorema pode ser encontrado em (Slotine e Li, 1991). É importante frisar que o maior conjunto invariante  $\Omega_I \subseteq \Omega_Z$  é a união de todos os conjuntos invariantes contidos em  $\Omega_Z$ . Quando o único conjunto invariante  $\Omega_I$  é formado pelo ponto de equilíbrio, este resultado permite que se conclua que o sistema é assintoticamente estável.

Outros resultados importantes a serem utilizados neste trabalho são apresentados a seguir, que envolvem o conceito de *ultimate boundedness* (Khalil, 2002):

**Definição 2.4 (Boundedness and Ultimate Boundedness)** *As soluções de (2.22) são*

- *uniformly bounded se existir uma constante positiva  $\gamma$ , independente de  $t_0 \geq 0$ , e se, para todo  $\alpha \in (0, \gamma)$ , existir  $\beta = \beta(\alpha) > 0$ , independente de  $t_0$ , tal que*

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| \leq \alpha \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| \leq \beta, \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.29)$$

- *globally uniformly bounded se (2.29) for válida para  $\alpha$  arbitrariamente grande*
- *uniformly ultimately bounded com ultimate bound  $\beta$  se existirem constantes positivas  $\beta$  e  $\gamma$ , independente de  $t_0 \geq 0$ , e se para todo  $\alpha \in (0, \gamma)$ , existir  $T = T(\alpha, \beta) \geq 0$ , independente de  $t_0$ , tal que*

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| \leq \alpha \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| \leq \beta, \quad \forall t \geq t_0 + T \quad (2.30)$$

- *globally uniformly ultimately bounded se (2.30) for válida para  $\alpha$  arbitrariamente grande.*

Para o caso mais específico de sistemas autônomos dados por (2.27), a palavra *uniformly* pode ser omitida, uma vez que as soluções dependem apenas de  $t - t_0$ .

**Definição 2.5 (Função de Classe  $\mathcal{K}$  e de Classe  $\mathcal{K}_\infty$ )** *Diz-se que uma função contínua  $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$  pertence à classe  $\mathcal{K}$  se ela for estritamente crescente e se  $\alpha(0) = 0$ . Diz-se que uma função que pertence à classe  $\mathcal{K}$  pertence à classe  $\mathcal{K}_\infty$  se  $a = \infty$  e se  $\alpha(r) \rightarrow \infty$  quando  $r \rightarrow \infty$ .*

**Definição 2.6 (Função de Classe  $\mathcal{KL}$ )** *Diz-se que uma função contínua  $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  pertence à classe  $\mathcal{KL}$  se, para cada  $s$  fixo, o mapeamento  $\beta(r, s)$  pertence à classe  $\mathcal{K}$  em relação a  $r$  e se, para cada  $r$  fixo, o mapeamento  $\beta(r, s)$  é decrescente em relação a  $s$  e se  $\beta(r, s) \rightarrow 0$  quando  $s \rightarrow \infty$ .*

**Teorema 2.3 (Ultimate Boundedness)** *Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um domínio que contém a origem e seja  $V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e diferenciável tal que*

$$\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}\|) \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \leq -W_3(\mathbf{x}), \quad \forall \|\mathbf{x}\| \geq \mu > 0 \quad (2.32)$$

$\forall t \geq 0$  e  $\forall \mathbf{x} \in D$ , em que  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são funções de classe  $\mathcal{K}$  e  $W_3(\mathbf{x})$  é uma função definida positiva contínua. Considere  $r > 0$  tal que  $B_r \subset D$  e suponha que

$$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)). \quad (2.33)$$

Então, existe uma função  $\beta$  de classe  $\mathcal{KL}$  e, para cada estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$ , que satisfaz  $\|\mathbf{x}(t_0)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ , existe  $T \geq 0$  (dependente de  $\mathbf{x}(t_0)$  e de  $\mu$ ) tal que a solução de (2.22) satisfaz

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \beta(\|\mathbf{x}(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad (2.34)$$

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)), \quad \forall t \geq t_0 + T. \quad (2.35)$$

Além disso, se  $D = \mathbb{R}^n$  e se  $\alpha_1$  pertencer à classe  $\mathcal{K}_\infty$ , então (2.34) e (2.35) são válidas para qualquer estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$ , sem restrições quanto à magnitude de  $\mu$ .

As desigualdades (2.34) e (2.35) mostram que  $\mathbf{x}(t)$  é *uniformly bounded* para todo  $t \geq t_0$  e *uniformly ultimately bounded* com o *ultimate bound*  $\alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu))$ . A prova desse teorema é apresentada em (Khalil, 2002).

# Contextualização do Problema e Revisão Bibliográfica

---

Um dos objetivos deste capítulo é contextualizar de maneira mais detalhada o problema específico a ser abordado nesta tese, o qual se insere no escopo geral do projeto de desenvolvimento do sistema de múltiplos VANTs descrito em linhas gerais no Capítulo 1. Além disso, pretende-se apresentar uma revisão de literatura geral acerca do que tem sido produzido em nível mundial nos últimos anos no âmbito da pesquisa em coordenação de sistemas multiagente, seguida de uma revisão bibliográfica específica às temáticas dos Capítulos 4, 5 e 6.

## 3.1 VANTs tratados como uniciclos

O projeto de desenvolvimento de um sistema de mini-VANTs de asas fixas descrito no Capítulo 1 obviamente não se limita unicamente à solução de um problema de robótica cooperativa ou de coordenação de sistemas multiagente. Essa é apenas uma de suas frentes, a qual será abordada nesta tese. Todavia, considerando-se o projeto da plataforma como um todo na qualidade de um problema real e prático, há uma hierarquia de subproblemas a serem atacados de diferentes formas a fim de que, ao término do projeto, se tenha a equipe de VANTs capacitada a realizar as tarefas que lhe forem atribuídas.

Uma primeira etapa trata-se do projeto e da construção das aeronaves leves de asas-fixas propriamente ditas. Especificamente no projeto conceitual, diversas configurações possíveis serão analisadas de forma a se determinar qual será a mais promissora para a missão a ser realizada. O próximo passo consiste na realização de uma série de análises (aerodinâmica, de estabilidade, de desempenho, etc.) por meio da utilização de métodos numéricos, a fim de que se

atinja um maior detalhamento do projeto da aeronave. Em seguida, será construído um protótipo para a realização de ensaios em solo (estruturais e aerolásticos) e em voo, com a evidente finalidade de se confirmar as previsões feitas no projeto. Espera-se ainda ser possível, a partir da aquisição de dados nos ensaios em voo, construir um simulador de voo a ser utilizado nas etapas de desenvolvimento dos sistema de controle e guiagem. Quaisquer eventuais modificações naturalmente serão incluídas no projeto antes da construção das aeronaves finais.

Um outro passo importante do projeto reside no desenvolvimento de uma estação de solo que terá o objetivo de possibilitar que o usuário interaja com o veículo aéreo tanto em solo quanto em voo, passo esse que envolverá a especificação de *software* e *hardware* apropriados.

Outra tarefa relevante é o desenvolvimento do sistema de controle e aquisição de dados. Um dos frutos que se espera dessa etapa é que o VANT, originalmente descrito por um modelo como o definido pelas equações (2.18), (2.19), (2.20) e (2.21), submetido a alguma estratégia de controle avançado em malha fechada, tenha o seu comportamento dinâmico controlado descrito, por exemplo, pelo seguinte conjunto simplificado de equações diferenciais (Ren, 2007):

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= v \cos(\theta), \\
 \dot{y} &= v \sin(\theta), \\
 \dot{z} &= \frac{1}{\tau_z}(-z + z_c), & \frac{|z_c - z|}{\tau_z} &\leq v_{zM}, \\
 \dot{\theta} &= \frac{1}{\tau_\theta}(-\theta + \theta_c), & \frac{|\theta_c - \theta|}{\tau_\theta} &\leq \omega_M, \\
 \dot{v} &= \frac{1}{\tau_v}(-v + v_c), & v_m &\leq v_c \leq v_M,
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

em que  $x$ ,  $y$  e  $z$  são as coordenadas cartesianas do seu centro de massa em relação a um referencial inercial estático em relação ao solo (ver Figura 3.1);  $\theta$  é seu o ângulo de guinada;  $v$  é a sua velocidade de translação em relação à atmosfera;  $z_c$ ,  $\theta_c$  e  $v_c$  são os sinais de controle de altitude, de ângulo de guinada e de velocidade de translação, respectivamente;  $\tau_z$ ,  $\tau_\theta$  e  $\tau_v$  são as constantes de tempo associadas a  $z$ ,  $\theta$  e  $v$ ; e, por fim,  $\omega_M$  é o máximo valor de velocidade angular de guinada, o qual deve ser função do raio de curvatura mínimo passível de ser atingido pelo VANT controlado,  $v_m$  e  $v_M$  são os valores mínimo e máximo de velocidade de translação, e  $v_{zM}$  é a magnitude máxima da taxa de variação de altitude. A razão para a existência de um

limite mínimo para a velocidade de translação decorre do fato de que, se essa velocidade for suficientemente baixa, a força de sustentação do avião será menor do que a força peso que atua sobre ele, o que claramente ocasionará a sua queda. Ademais, considera-se neste trabalho que a velocidade da atmosfera em relação ao solo é nula, o que significa que a velocidade da aeronave em relação à atmosfera é igual à velocidade da aeronave em relação ao solo.

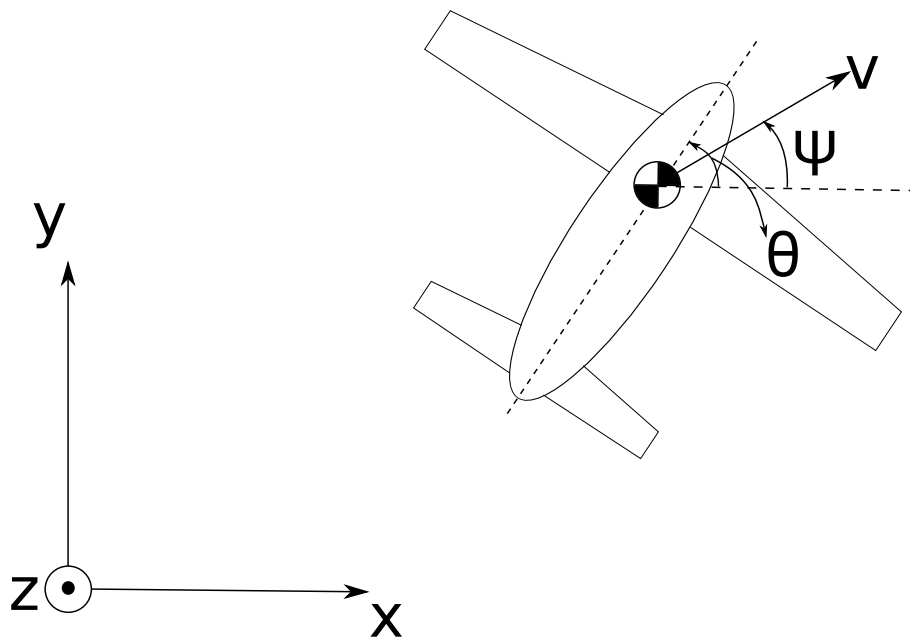


Figura 3.1: Representação simplificada de um VANT voando a uma altitude constante.

A Figura 3.2 ilustra o sistema de controle em cascata subdividido em dois ‘níveis’: interno e externo. A malha interna na verdade já foi desenvolvida por um aluno de mestrado vinculado ao projeto FINEP (Thums, 2012). Seu projeto consistiu em uma estratégia de controle PID multi-malha. O bloco ‘VANT’ implementa as equações (2.18), (2.19), (2.20) e (2.21) com os valores de parâmetros correspondentes à aeronave Aerosonde (ver Figura 2.3). Parte do trabalho da presente tese de doutorado, portanto, consiste no projeto do bloco ‘Estratégia de Guiagem e Navegação’ para a malha externa do sistema de controle em cascata da Figura 3.2, assumindo-se que a malha interna esteja realizando o seu papel de fazer com que o VANT controlado tenha um comportamento desejado descrito pelo modelo (3.1). Além disso, o bloco ‘Modelo de Referência Simplificado’ contém justamente o modelo (3.1), que funciona como um filtro das referências advindas da estratégia de guiagem e navegação para a malha de controle interna. A velocidade de resposta desse filtro pode ser projetada a partir da escolha adequada de valores

para  $\tau_z$ ,  $\tau_\theta$  e  $\tau_v$ . Quanto maiores esses valores, menos se exigirá da malha de controle interna em termos de velocidade de resposta, e vice-versa.

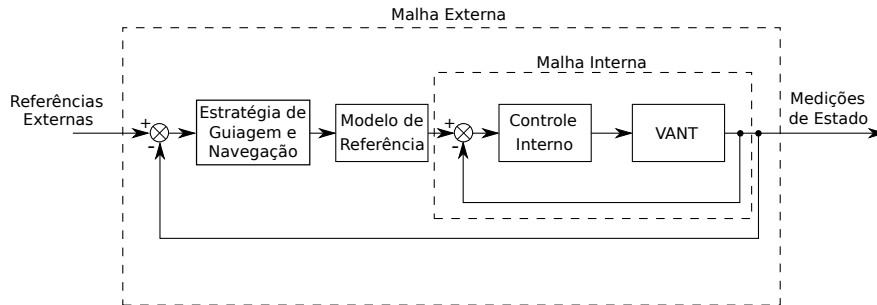


Figura 3.2: Sistema de controle em cascata.

A fim de se realizar um teste de desempenho visando comparar o comportamento do modelo de referência simplificado (3.1) com o modelo da aeronave dado pelas equações (2.18), (2.19), (2.20) e (2.21) controlado pela estratégia proposta em (Thums, 2012) (bloco ‘Controle Interno’), a malha externa da Figura 3.2 foi aberta, como pode ser observado na Figura 3.3, e foi definido um perfil de  $\theta_c$  a ser rastreado pela malha interna. Os resultados desse teste são apresentados na Figuras 3.4 e 3.5.

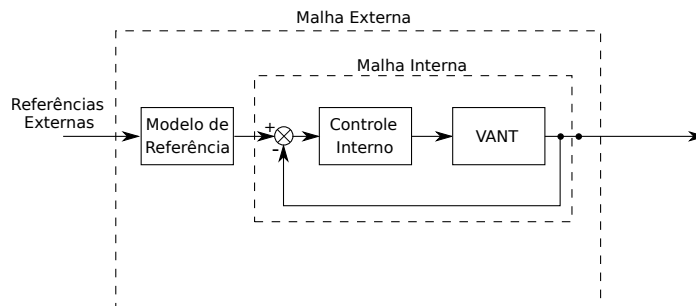


Figura 3.3: Teste de rastreamento do modelo de referência por parte do modelo dinâmico do Aerossone.

O ensaio foi realizado com velocidade inicial igual a 23 m/s e altitude inicial igual a 200 m. Foi mantido um comando de velocidade de translação  $v_c$  constante e igual 23 m/s ao longo de todo o ensaio. Além disso, foi mantido um comando de altitude  $z_c$  constante e igual a 200 m. Observa-se nas curvas da parte inferior à esquerda da Figura 3.4 que o modelo de referência simplificado (curva em vermelho) e a aeronave controlada (curva em azul) tiveram um comportamento praticamente indistinguível na tentativa de rastrear os comandos de guinada  $\theta_c$ .

apresentados na parte superior à esquerda da mesma Figura 3.4. Nos gráficos à direita são apresentados, respectivamente, a velocidade de translação e a altitude para o modelo simplificado e para a aeronave controlada, que praticamente não se alteraram ao longo de todo o ensaio, e o ângulo de rolamento da aeronave, que se manteve sempre dentro dos limites de segurança de  $\pm 45^\circ$ .

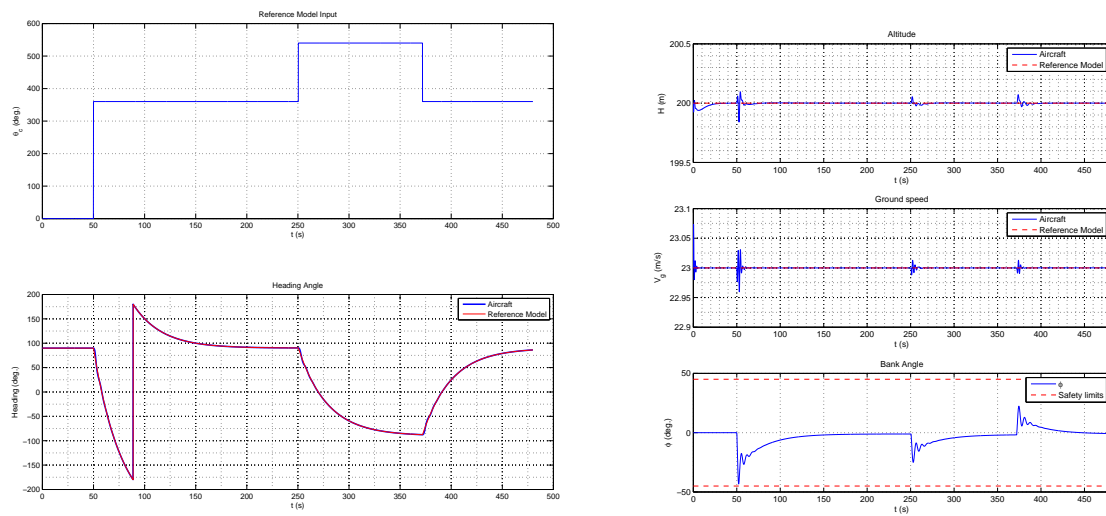


Figura 3.4: À esquerda, comando de direcionamento e comportamento real obtido para ambos os modelos. À direita, comportamento dinâmico da altitude, da velocidade em relação ao solo e do ângulo de rolamento.

A Figura 3.5, por fim, ilustra a trajetória descrita no plano  $xy$  pelo modelo de referência simplificado (curva em vermelho com asteriscos) e pela aeronave controlada (curva em azul). De fato, em consonância com os resultados descritos no parágrafo anterior, ambos os comportamentos foram praticamente indistinguíveis. Isso serve de motivação para que o modelo de referência simplificado (3.1) seja utilizado como base para o desenvolvimento das estratégias de coordenação de múltiplos VANTs a serem propostas nesta tese, tendo em vista a sua capacidade de reproduzir com fidelidade o comportamento de um modelo realístico de uma aeronave controlada.

Se  $\dot{z} = 0$ , o conjunto de equações (3.1) é justamente o modelo de um uniciclo planar (ver

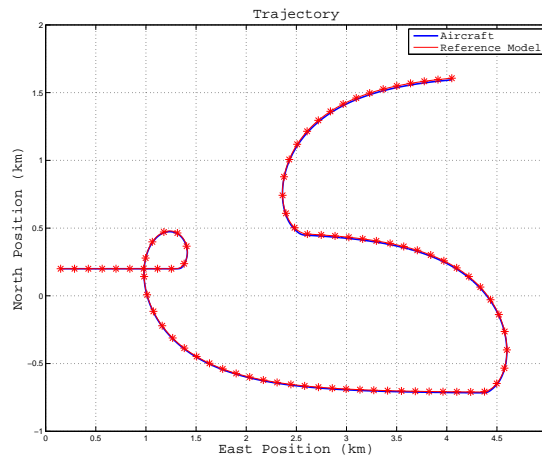


Figura 3.5: Trajetória real obtida para o modelo simplificado (3.1) e para o modelo da aeronave (2.18), (2.19), (2.20) e (2.21) controlado pela estratégia proposta em (Thums, 2012).

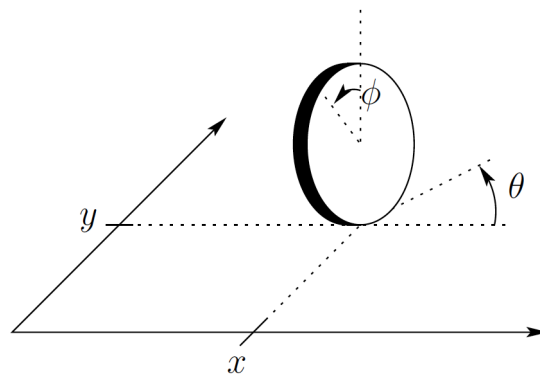


Figura 3.6: Representação de um uniciclo planar. Figura extraída de (Spong et al., 2006).

Figura 3.6), porém diferente do modelo cinemático dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos(\theta) \\ \dot{y} &= v \sin(\theta) \\ \dot{\theta} &= \omega\end{aligned}\tag{3.2}$$

em que  $u$  e  $v$  são as entradas de velocidade angular de guinada e de velocidade de translação, respectivamente. Um caso especial do modelo cinemático (3.2) é o *modelo de Dubins*, que é caracterizado pela velocidade de translação unitária ( $v = 1$ ) e pela impossibilidade de realização

de curvas cujos raios sejam inferiores a um dado valor mínimo (Dubins, 1957). Um exemplo de aplicação em alocação de tarefas para uma equipe de VANTs descritos como veículos de Dubins é apresentado em (Cheng e Kumar, 2008). A presença de uma dinâmica de primeira ordem nas variáveis  $\theta$  e  $v$ , como em (3.1), é mais realista do que considerar-se o modelo puramente cinemático (3.2). A plausibilidade de se representar uma aeronave controlada automaticamente como um uniciclo é defendida em (Ghosh e Tomlin, 2000).

Um outro modelo que poderia ser a malha fechada alvo a ser obtida via controle é dado por

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= v \cos(\theta), \\
 \dot{y} &= v \sin(\theta), \\
 \dot{z} &= \frac{1}{\tau_z}(-z + z_c), \quad \frac{|z_c - z|}{\tau_z} \leq v_{zM}, \\
 \dot{\theta} &= \omega, \\
 \dot{\omega} &= \frac{1}{\tau_\omega}(-\omega + \omega_c), \quad -\omega_M \leq \omega_c \leq \omega_M, \\
 \dot{v} &= \frac{1}{\tau_v}(-v + v_c), \quad v_m \leq v_c \leq v_M,
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

inspirado nas equações apresentadas por (Bayraktar et al., 2004), em que  $\omega_c$  é um sinal de controle de velocidade angular de guinada. Esse modelo se assemelha sobremaneira a (3.1), com a diferença de que agora o controle de guinada é realizado por um sinal de velocidade angular, e não por um sinal de posição angular.

Uma característica comum aos três modelos dados por (3.1), (3.2) e (3.3) é a presença de uma restrição não-holonômica, ou seja, ainda que todos eles atendam aos requisitos de controlabilidade de um sistema dinâmico não-linear, não é possível fazer com que o vetor velocidade aponte instantaneamente para qualquer direção no plano  $xy$ . No exemplo do VANT, na ausência de ventos o vetor velocidade de translação aponta sempre em uma direção próxima ao eixo de simetria da aeronave, conforme ilustrado na Figura 3.1, em que  $\Psi$  é o ângulo de rumo. Em outras palavras, uma direção qualquer de velocidade não pode ser imposta instantaneamente ao VANT, todavia ela pode ser alterada variando-se a atitude ou o rumo da aeronave. Para fins de simplificação, será assumido neste trabalho que  $\theta \approx \Psi$ .

## 3.2 Coordenação de Múltiplos Agentes em Geral

Diversos trabalhos tem sido trazidos à lume pela comunidade científica com base em modelos da mesma natureza que os descritos por (3.1)-(3.3), no caso de sistemas não-holonômicos, ou a partir de modelos mais simples, como integradores duplos, no caso de sistemas holonômicos.

Em (Tanner et al., 2003c), por exemplo, os autores apresentam uma metodologia para a solução do problema de *flocking* planar no contexto de agentes móveis descritos como integradores duplos (sistemas lineares, portanto), tratando-se assim de um problema de coordenação de múltiplos agentes holonômicos. Vale destacar nesse ponto que, em algumas situações, a aplicação de técnicas de linearização por realimentação não-linear de estados a determinados sistemas não-holonômicos pode transformá-los em integradores duplos (Grepl et al., 2008). O movimento em formação tem a sua estabilidade garantida por um sistema de controle de coordenação baseado em leis de controle suaves para os agentes, leis essas que são oriundas de uma combinação de forças de atração/repulsão e alinhamento geradas a partir de funções de potencial. Dessa forma, obtém-se um movimento coeso e sem colisão<sup>1</sup> dos agentes em que todos apontam para a mesma direção e, além disso, prova-se por meio do princípio da invariância de LaSalle (Slotine e Li, 1991) que as velocidades finais dos agentes convergem assintoticamente para um mesmo valor. Considera-se neste caso que a topologia de interconexões entre os agentes é fixa e invariante no tempo, ou seja, cada agente tem acesso a informações de um determinado conjunto fixo de ‘vizinhos’ em qualquer instante de tempo, topologia essa representada matematicamente por ferramentas advindas da teoria algébrica de grafos. Por fim, é importante que se ressaltem dois pontos: (i) somente é garantido que não haverá colisão entre agentes interconectados entre si, ou seja, para garantir que não ocorrerá nenhuma colisão entre quaisquer agentes, é necessário que cada agente tenha todos os outros como ‘vizinhos’, informação essa que deve estar codificada no Laplaciano do grafo de interconexões.; (ii) a geometria da formação final dos agentes pode ser pré-especificada escolhendo-se adequadamente as funções de potencial, todavia o valor de velocidade final para o qual todos os agentes convergirão é desconhecido e será função da distribuição de velocidades inicial. A restrição descrita no primeiro

---

<sup>1</sup>Uma abordagem interessante ao problema de colisão com obstáculos estáticos em que se consideram a forma do robô e as eventuais restrições de movimento pode ser encontrado em (Minguez e Montano, 2009).

ponto indica que essa abordagem muito se assemelha a uma abordagem centralizada caso se queira garantir que não haja colisões, uma vez que a informação global precisa estar disponível para todos, como se o sistema de agentes fosse uma estrutura unitária e indivisível. Outra questão a ser destacada é que não são consideradas restrições nas variáveis de estado, de modo que as velocidades dos agentes podem se anular ou apresentarem sinal negativo, o que é inadmissível no contexto de VANTs de asas fixas, como já foi enfatizado anteriormente.

Uma forma mais realista de definir essa abordagem deveria considerar a existência de uma topologia dinâmica, no sentido de que o conjunto de vizinhos de cada agente varia ao longo do tempo conforme variam as distâncias euclidianas entre os agentes, limitação essa fisicamente interpretada como o alcance limitado dos enlaces (*links*) de comunicação. Tal metodologia é apresentada em (Tanner et al., 2003d) (os casos de topologia fixa e dinâmica são tratados conjuntamente em (Tanner et al., 2007)), e nesse novo cenário são utilizadas leis de controle chaveadas ou descontínuas. Extensões da teoria de estabilidade de Lyapunov para o caso de sistemas descontínuos são utilizadas para provar que, se o grafo que representa as relações entre vizinhos sempre for conexo, todas as velocidades convergem para o mesmo valor, a formação dos agentes converge para a posição final definida pela escolha das funções de potencial artificiais e garante-se que não ocorrerão colisões entre vizinhos. Essa nova abordagem se mostra bastante interessante, mas não considera a possibilidade de haver restrições nas variáveis de estado, e parte do pressuposto de que os agentes podem ser expressos matematicamente como integradores duplos.

Os mesmos autores desenvolveram uma abordagem semelhante voltada para sistemas não-holonômicos com dinâmica, conforme pode ser verificado em (Tanner et al., 2003b). Assim como no caso descrito anteriormente sobre sistemas com topologia fixa, se o grafo que descreve as interações entre agentes for conexo, isto é, se dois agentes quaisquer estiverem conectados entre si mesmo que indiretamente, garante-se que todos os agentes convergirão para uma mesma velocidade e orientação finais e que não haverá colisão entre vizinhos. Para garantir que não haja colisão, o grafo deve ser completo, isto é, todos os agentes devem ser vizinhos uns dos outros. Diferentemente do caso anterior, agora as leis de controle locais definidas não conduzem o sistema a uma formação com geometria pré-especificada de acordo com as funções de potencial artificiais. Esse problema foi contornado, entretanto, em (Tanner et al., 2003a), em que se

garante que os agentes convergirão para uma formação que minimize o somatório das funções de potencial locais. Novamente, a abordagem carece de uma extensão que contemple os casos em que haja restrições nas variáveis de estado dos agentes constituintes do sistema. Já uma abordagem ao problema de navegação de múltiplos robôs no contexto de times mistos formados por agentes cinemáticos holonômicos e não-holonômicos pode ser encontrada em (Loizou e Kyriakopoulos, 2008), em que os autores utilizam a técnica de *backstepping* para projetar os controladores e consideram limites superiores e inferiores para os valores de velocidade.

Uma outra abordagem ao problema de controle de formação é proposta em (Cheah et al., 2009), na qual os autores desenvolvem um controlador para um enxame de robôs holonômicos cujas entradas externas são forças. Essa estratégia garante que, quando  $t \rightarrow \infty$ , todos os robôs ficam confinados a uma região que se movimenta, ao mesmo tempo em que é obedecida uma restrição de distância mínima entre dois robôs quaisquer. A prova de convergência assintótica do sistema é baseada na teoria de estabilidade de Lyapunov, todavia não é discutida a possibilidade de haver colisão entre robôs no regime transiente. Já em (Michael e Kumar, 2008), os autores propõem uma estratégia de controle de posição e orientação da formação e da adaptação do seu formato à geometria do ambiente, e os controladores propostos garantem a não-ocorrência de colisão entre os robôs. Neste mesmo trabalho também é abordado o problema de divisão e de fusão de grupos e subgrupos de agentes. Apesar de o artigo explicitar no seu título que a metodologia se aplica a robôs não-holonômicos, essa premissa não aparece no projeto da lei de controle. Desenvolvem-se os cálculos para definir o controlador pressupondo-se holonomia e, no momento de se aplicar a estratégia de controle a robôs não-holonômicos, eles são submetidos a uma linearização por realimentação não-linear de estados de modo a se comportarem aparentemente como robôs holonômicos. No caso do controle de formações variantes no tempo em que robôs móveis cumprem a tarefa de rastreamento de trajetória, (Sun et al., 2009) apresentam uma abordagem centralizada inspirada em ideias de sincronismo, porém sem considerar a possibilidade de colisão entre agentes. Um algoritmo distribuído de agregação de enxame de múltiplos agentes holonômicos cinemáticos é apresentado em (Dimarogonas e Kyriakopoulos, 2008). A estratégia se baseia em campos potenciais e teoria de grafos, garantindo a não ocorrência de colisão entre agentes. No mesmo trabalho, os autores apresentam uma extensão dessa abordagem para o caso de enxames de agentes cinemáticos não-holonômicos (uniciclos).

Ainda no âmbito do controle de formação, em (Stipanović et al., 2004) ataca-se o problema de controle de formação de múltiplos VANTs por meio de uma abordagem que os autores denominam ‘controle descentralizado com sobreposição’. Nesse contexto, cada VANT, à exceção do líder, conhece todas as variáveis de estado do veículo diretamente à sua frente, além das suas próprias. O sistema global (o time de VANTs) é considerado como um conjunto de subsistemas interconectados que se sobrepõem. Antes de qualquer outra coisa, os autores utilizam técnicas de linearização por realimentação não-linear de estados objetivando linearizar a dinâmica de cada um dos VANTs. Sabe-se que um dos aspectos restritivos dessas técnicas reside na suposição de que cada variável de estado de cada VANT é medida. Num primeiro momento, os autores partem do mesmo modelo cinemático representado pela Eq. (3.2), todavia, a matriz de desacoplamento da linearização desse modelo é singular. Para contornar essa limitação, os autores lançam mão da técnica de extensão dinâmica (Luca e Oriolo, 1995), considerando a velocidade de translação  $v$  uma variável de estado e a aceleração de translação como uma nova entrada. Depois dessa etapa preliminar, o sistema linearizado é expandido, utilizando-se o princípio da inclusão definido em (Ikeda et al., 1984), para um espaço de maior dimensão em que os subsistemas se mostram disjuntos. Desse modo, para cada subsistema projeta-se um controlador de realimentação estática de estados que garanta a estabilização robusta da dinâmica perturbada do subsistema. Para o projeto dos controladores, são utilizadas ferramentas de otimização convexa que envolvem desigualdades matriciais lineares. Por fim, os controladores projetados são mapeados de volta para o espaço original do sistema para que eles possam ser, efetivamente, implementados. Resultados de simulação são apresentados no artigo para ilustrar a eficácia da abordagem proposta. No entanto, vale frisar que essa metodologia não garante que não ocorra colisão entre os VANTs durante o regime transiente. Além do mais, não considera explicitamente nenhum limite mínimo para as velocidades direcionais, o que seria inadmissível no contexto de controle de VANTs de asas fixas, conforme já foi enfatizado anteriormente.

Em se tratando ainda do problema de *flocking*, uma outra maneira interessante de se lidar com o problema pode ser encontrada em (Zavlanos et al., 2009). Os autores propõem uma estratégia híbrida de controle de movimento (parte contínua) e de topologia de rede (parte discreta) com o objetivo comum de garantir comportamento de *flocking* em um grupo de agentes descritos como integradores duplos. Dessa forma, ao invés de se pressupor conectividade da rede, o

controle de topologia decide pelo surgimento ou pelo desaparecimento de *links* de comunicação, adaptando a rede à distribuição espacial dos agentes, ao passo que o controle de movimento preserva a topologia ditada pelo controlador de rede. Trata-se, portanto, de um esquema de controle distribuído que garante alinhamento das velocidades, coesão, separação (portanto não há ocorrência de colisões) e conectividade, por construção, do sistema multiagente. Os resultados de convergência se baseiam em um trabalho dos próprios autores acerca de estabilidade de sistemas chaveados (Zavlanos e Pappas, 2008). Novamente, não são abordados problemas de *flocking* que envolvam restrições nas variáveis de estado, e além disso seria interessante verificar a possibilidade de estender esses resultados para o caso de sistemas não-holonômicos, à maneira do que foi feito em (Tanner et al., 2003b,a).

Em verdade, muitos são os trabalhos que apresentam metodologias desenvolvidas com fins de se atacar o problema de *flocking* no caso em que os agentes podem ser descritos como integradores duplos e em que se busca a garantia de não ocorrência de colisão. O desenvolvimento de um arcabouço voltado para a resolução do problema de coordenação de agentes descritos como integradores duplos, por exemplo, pode ser encontrado em (Saber, 2006), onde se encontram algoritmos fundamentados em controle distribuído, grafos dinâmicos e teoria do consenso. Um outro trabalho aborda o problema de *flocking* no contexto de integradores cinemáticos (de primeira ordem) e de integradores inerciais (de segunda ordem) por meio de grafos balanceados (Lee e Spong, 2007). Para tanto, a malha de controle da dinâmica do grupo é decomposta em dois sistemas desacoplados: um sistema que representa a forma do grupo e um outro sistema que descreve a dinâmica do centro de massa do grupo. Considerando os dois sistemas desacoplados, é proposta uma lei de controle estabilizante que garante que a forma do grupo é estabilizada exponencialmente para uma forma desejada, ao passo que as velocidades de todos os agentes convergem para a velocidade do centro de massa do grupo.

Em (Mastellone et al., 2008), é contemplado o problema de coordenação de múltiplos agentes não-holonômicos descritos como uniciclos cinemáticos, de acordo com a Eq. (3.2). Em primeiro lugar, os autores abordam o problema de rastreamento de trajetória e de desvio de obstáculos estáticos para um único robô não-holonômico e, em seguida, estendem os resultados obtidos para o problema de rastreamento de trajetória e de desvio de obstáculos dinâmicos para vários robôs não-holonômicos, isto é, cada robô rastreia sua própria trajetória e os outros

robôs são tratados como obstáculos que se movem no espaço. Esta abordagem é aplicada a duas situações particulares, que são o controle de formação (dada uma formação desejada e uma trajetória desejada para o seu centro de massa, o objetivo é que os robôs convirjam para a formação desejada sem colidirem entre si e sigam a trajetória mantendo a formação ao longo do tempo) e o controle de formação e rastreamento coordenado, que consiste em uma estrutura formada por um líder e vários robôs seguidores que o rastreiam, evitando colisão, ao mesmo tempo em que mantêm uma formação pré-especificada. O princípio básico para que se evitem colisões consiste em definir funções de potencial dentro de regiões circulares em torno de cada robô. As provas matemáticas, tanto de convergência de rastreamento quanto de garantia de não ocorrência de colisão, são realizadas com base na Teoria de Estabilidade de Lyapunov, e a metodologia proposta foi verificada por meio de simulações computacionais e por meio de experimentos com robôs móveis se deslocando num plano. Todavia, algumas considerações simplificadoras parecem limitar o alcance dos resultados obtidos pelos autores. A título ilustrativo, o fato de eles não apresentarem uma maneira consistente de resolver o problema de *deadlock*<sup>2</sup> e de admitirem quaisquer valores reais para os sinais  $u$  e  $v$  inviabiliza a aplicação da metodologia para o caso da coordenação de múltiplos VANTs de asas fixas, por exemplo, que não admitem velocidades nulas ou negativas.

Em (Pereira et al., 2004) os autores propõem uma estratégia de controle descentralizado para o transporte de objetos em um ambiente bidimensional utilizando uma equipe de múltiplos robôs móveis. Cada robô é modelado como um integrador simples pontual completamente atuado e são apresentadas garantias suficientes de que eles são capazes de envolver um objeto e transportá-lo de um ponto a outro do ambiente. Além dos desenvolvimentos teóricos, são apresentados resultados experimentais com robôs equipados com câmeras e que se comunicam entre si. Em um trabalho mais recente dos mesmos autores (Pereira et al., 2008), eles desenvolvem um sistema de controle descentralizado para resolver o problema de planejamento de movimento para um time de robôs com restrições de configuração relativa determinadas pela natureza da tarefa a ser executada. Novamente são considerados robôs holonômicos descritos como integradores simples bidimensionais e são apresentados resultados experimentais com robôs holonômicos em um contexto de *flocking* e com robôs não-holonômicos em um contexto

---

<sup>2</sup>O termo *deadlock* caracteriza uma situação em que ocorre um impasse e dois ou mais agentes ficam impedidos de continuar suas trajetórias, ou seja, sua velocidade de translação e sua velocidade angular de guinada se anulam.

de restrições de sensoriamento e comunicação.

Em (Pereira et al., 2011) é proposta uma estratégia de controle de formação para agentes não-holonômicos com incerteza paramétrica. Para lidar com o problema da incerteza os autores utilizam o algoritmo de controle adaptativo robusto denominado ‘controle adaptativo binário’, o qual combina características interessantes do controle por modos deslizantes e do controle adaptativo. São abordados tanto o problema de regulação quanto o de rastreamento de trajetória. Os resultados teóricos são fundamentados matematicamente na teoria de estabilidade de Lyapunov e são apresentadas algumas simulações que ilustram a eficácia da abordagem proposta. Todavia, os autores não consideram a presença de restrições nas entradas e/ou nas variáveis de estado. Em um outro trabalho (Gouvea et al., 2011), é apresentada uma estratégia de controle de formação para robôs não-holonômicos com restrições de curvatura. A estratégia proposta é descentralizada, baseada em funções de potencial com saturação e garante o evitamento de colisão entre agentes. A formação que minimiza a função de potencial sempre é atingida se o grafo de comunicação dos agentes for conectado, e os autores ilustram isso por meio de resultados de simulação.

No que tange especificamente ao controle cooperativo de múltiplos VANTs, Beard et al. (2006) e Ren e Beard (2008) abordam o problema com uma metodologia que, segundo eles, foi aplicada com sucesso a diversas situações, como a temporização cooperativa (McLain e Beard, 2005), a busca cooperativa (Beard e McLain, 2003) e o monitoramento cooperativo de incêndios (Casbeer et al., 2006; Kingston et al., 2008). A abordagem proposta pode ser subdividida em quatro etapas principais:

1. **Definição das restrições de cooperação e do objetivo de cooperação** - Pode-se dizer que a cooperação será alcançada quando determinadas relações entre as variáveis de estado forem satisfeitas. Essas relações são conhecidas como restrições de cooperação. Além delas, um critério de otimização auxiliar pode ser codificado como uma função definida positiva chamada de objetivo de cooperação.
2. **Definição da variável de coordenação e da função de coordenação** - A fim de que seja atingida a cooperação, existe uma quantidade mínima de informação necessária que deve ser compartilhada entre os agentes. Essa informação é conhecida como a variável de coordenação. Já a função de coordenação é um mapeamento que parametriza o efeito

da variável de coordenação nos objetivos de cada agente.

3. **Desenvolvimento de um esquema de cooperação centralizado** - O próximo passo é derivar uma estratégia de cooperação que minimize a função objetivo de cooperação e satisfaça as restrições de cooperação, assumindo-se que cada agente possui conhecimento global da variável de coordenação e das funções de coordenação de todos os outros agentes.
4. **Desenvolvimento de um esquema de cooperação descentralizado via construção de consenso** - Em uma situação descentralizada em que os canais de comunicação entre os agentes são ruidosos e não-persistentes, torna-se inviável a aplicação da abordagem centralizada. Para contornar essa limitação, a última etapa consiste na implementação de um algoritmo de construção de consenso que garanta que cada membro do time possua informação de coordenação consistente a despeito das limitações de comunicação.

Em (Li e Jiang, 2008), é proposta uma integração de estratégias baseadas em campos potenciais artificiais e em estruturas virtuais com o objetivo de se realizar o controle de formação de um time de uniciclos que garanta a não ocorrência de colisão entre os veículos. O modelo dinâmico de uniciclo utilizado pelos autores é o seguinte:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= v \cos(\theta), \\
 \dot{y} &= v \sin(\theta), \\
 \dot{\theta} &= \omega, \\
 \dot{v} &= \frac{1}{m} F, \\
 \dot{\omega} &= \frac{1}{J} \tau,
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

em que  $x$  e  $y$  são as coordenadas cartesianas da posição do centro de massa de um uniciclo,  $\theta$  é o seu ângulo de guinada,  $v$  é a sua velocidade de translação,  $\omega$  é a sua velocidade angular de guinada,  $m$  é a sua massa,  $J$  é o seu momento de inércia devido a variações em  $\theta$  e, por fim,  $F$  e  $\tau$  são as entradas de força e torque, respectivamente. A estrutura virtual a ser estabelecida constitui-se de um líder virtual da formação e de vários líderes virtuais locais. Atribui-se a cada veículo o objetivo de rastrear um líder virtual local. As colisões são evitadas quando se restringe

o movimento de cada uniciclo a uma área específica que contenha o líder virtual local respectivo. É em relação ao líder virtual da formação que se definem as posições dos líderes virtuais locais. Em outras palavras, é justamente o comportamento do líder virtual da formação que define a trajetória a ser rastreada pelos uniciclos. Para o projeto do controlador, são utilizadas técnicas de campos potenciais artificiais e de *backstepping* (Sastry, 1999). Os campos potenciais são utilizados como funções de Lyapunov para garantir a estabilidade do controlador obtido via *backstepping*. Os autores ainda apresentam alguns resultados de simulação obtidos com a estratégia de controle projetada. Ainda que a proposta do referido artigo não esteja voltada para o controle cooperativo de múltiplos VANTs, também não foi considerada na resolução do problema nenhuma restrição nas variáveis de estado, como por exemplo o estabelecimento de um valor mínimo para a velocidade de translação.

Uma metodologia de coordenação de múltiplos agentes não-holonômicos em que se consideram restrições nas variáveis de entrada pode ser encontrada em (Oikonomopoulos et al., 2009). Como os autores se baseiam no mesmo modelo cinemático da Eq. (3.2), as restrições em  $v$  e  $\omega$  são, de fato, restrições de entrada e apresentam o mesmo formato das restrições expressas na Eq. (3.3), as quais atendem a exigência imposta pela natureza estrutural dos VANTs de asas fixas. O problema consiste em fazer com que os agentes partam cada um de sua configuração inicial (posição do centro de massa no plano e ângulo de orientação) e cheguem em sua respectiva configuração final desejada sem colidirem entre si e satisfazendo, ao mesmo tempo, as restrições de entrada. Para tanto, cada agente é modelado como um autômato híbrido e o espaço de trabalho é particionado (*tessellation*) em hexágonos regulares de mesmas dimensões, de modo que se definem primitivas de movimento dentro desses hexágonos que não desrespeitam as restrições não-holonômicas dos agentes.

Um estudo de coordenação de múltiplos VANTs com o objetivo de proteção de um grupo de veículos terrestres é apresentado em (Ding et al., 2010). Neste trabalho, os VANTs são modelados como veículos de Dubin, isto é, como uniciclos cinemáticos com velocidade de translação constante e a única entrada de controle é a velocidade angular, limitada em função do raio de curvatura de trajetória mínimo. O problema é resolvido para os casos em que os UGVs<sup>3</sup> são estacionários e para os casos em que eles estão se movendo enfileirados ao longo

---

<sup>3</sup>Do Inglês *Unmanned Ground Vehicles*.

de uma reta. A ideia é que em todo instante de tempo pelo menos um VANT seja capaz de observar os UGVs, assumindo-se que cada VANT é capaz de apontar sua câmera para baixo e cobrir uma área circular de raio  $r$  sobre o solo. Para o caso dos UGVs estacionários, os autores propõem um método de planejamento de trajetórias, baseado em teoria de controle ótimo, considerando primeiramente um único VANT de modo a garantir um caminho ótimo, constituído de primitivas de movimento, em que o máximo tempo de cobertura é atingido. Em seguida, eles mostram como coordenar um time de VANTs para garantir cobertura contínua todo o tempo e determinam o número mínimo de VANTs necessário para tanto. No caso dos UGVs que se deslocam em linha reta, os autores propõem uma estratégia de controle em que os percursos são formados por arcos de círculos que se alternam, de maneira que ocorram encontros periódicos entre os VANTs e o grupo de UGVs, e além disso eles apresentam um limite de velocidade para os UGVs que garante que a cobertura seja atingida por um único VANT em todos os instantes de tempo. Se a velocidade dos UGVs superar esse limite, eles apresentam o número mínimo de VANTs que garante sempre a cobertura completa do grupo de UGVs. Em nenhum momento os autores fazem referência ao problema de colisão entre aeronaves. O problema de restrição nas variáveis de estado foi resolvido ao se modelar cada VANT como um veículo de Dubin com um limite de raio mínimo para a realização de curvas.

Um outro trabalho interessante é apresentado em (Schwager et al., 2009) no contexto de cobertura de área por veículos aéreos autônomos equipados com câmeras, no qual os autores propõem uma estratégia de controle distribuído baseada na informação por *pixel* como critério de otimização. Ainda que não sejam apresentadas provas de não-ocorrência de colisão, os autores afirmam que é uma tendência natural do algoritmo proposto que as aeronaves vizinhas se repilam umas às outras. Já em (Bethke et al., 2009) encontra-se um trabalho semelhante, porém abordando o problema de rastreamento de alvos móveis por parte de uma equipe de VANTs.

Em (Chen et al., 2010), propõe-se um arcabouço teórico para solucionar o problema de controle de formação de múltiplos agentes não-holonômicos (uniciclos cinemáticos), ao qual é incorporado um esquema de controle preditivo (ou horizonte retrocedente) a fim de que se atinjam taxas de convergência exponenciais para a dinâmica do erro de rastreamento da formação. Segundo os autores, o método de horizonte retrocedente, ou controle preditivo baseado

em modelo, permite que se resolvam problemas de otimização de horizonte de controle preditivo com restrições nas entradas e nas variáveis de estado, característica desejável para o caso do problema do controle de formação de múltiplos VANTs de asas fixas. Todavia, no referido trabalho, como já foi mencionado, a vantagem de se lançar mão do controle preditivo foi o fato de se garantir taxas de convergência exponenciais para a dinâmica de erro, desconsiderando-se a possibilidade de se incorporar ao problema as restrições nas entradas ou nas variáveis de estado. Um outro aspecto frisado pelos autores diz respeito ao esquema de controle por eles proposto ser capaz de realizar o controle de orientação entre líder e seguidores explicitamente, diferentemente de outros métodos em que tal controle é feito implicitamente por meio de linearização via realimentação não-linear de estados. Segundo eles, definir esse controle de forma explícita os capacita a resolverem determinados problemas de controle de formação que de outra forma seriam insolúveis, como por exemplo o controle de formação em que os robôs se deslocam apenas para trás. Apesar da prova de convergência exponencial baseada na Teoria de Estabilidade de Lyapunov apresentada no artigo, em nenhum momento é feita qualquer menção ao problema de se evitar colisão entre agentes.

### **3.3 Rastreamento de Curvas e Distribuição Circular Balanceada**

Dentre os problemas de controle de múltiplos VANTs que envolvem o rastreamento de uma curva fechada e distribuição dos VANTs ao longo da curva, é possível citar o monitoramento e cobertura de fronteira (Hsieh et al., 2008), o monitoramento de incêncios em florestas (Casbeer et al., 2006) e a localização e circulação de um alvo (Franchi et al., 2010).

Há discussões interessantes na literatura acerca do desempenho de estratégias de controle baseadas em rastreamento de uma trajetória parametrizada no tempo e de estratégias baseadas em seguimento de um caminho que não depende explicitamente do tempo, como é caso das estratégias baseadas em campos vetoriais artificiais. Aguiar et al. (2008) mostram, por exemplo, que para uma determinada classe de sistemas não lineares, há limitações de desempenho para o problema de rastreamento de trajetória, e que essas mesmas limitações não existem para o problema de seguimento de caminho.

Uma metodologia baseada em campos vetoriais artificiais que trata do rastreamento de curvas em espaços de trabalho tridimensionais por meio de um time de robôs é apresentada em (Gonçalves et al., 2011). Cada robô é representado por um modelo cinemático não-holonômico com restrição de velocidade de translação mínima. Sob determinadas condições, os autores mostram que a lei de controle distribuído proposta garante que os robôs convergirão para a curva fechada desejada e a circularão indefinidamente sem violar a restrição de velocidade mínima e sem colidirem entre si. Todavia, os autores não consideram nenhuma restrição de raio de curvatura mínimo, velocidade de translação máxima, nem comportamento dinâmico de segunda ordem.

Uma outra metodologia interessante de projeto de campos vetoriais estáveis para o rastreamento de curvas *star-shaped* variantes no tempo é apresentada em (Frew e Lawrence, 2012), todavia os autores não apresentam nenhuma consideração acerca de limites de velocidade, de aceleração ou de raio de curvatura.

Em outro trabalho (Marshall et al., 2004), é estudado o problema de formações geométricas de sistemas de múltiplos veículos em perseguição cíclica. Basicamente, em um *framework* de perseguição cíclica,  $n$  agentes são ordenados e o agente  $i$  persegue o agente  $i + 1$  modulo  $n$ . Os autores consideram que os agentes são descritos como uniciclos cinemáticos com velocidade de translação constante e mostram que as formações de equilíbrio são polígonos regulares em geral. Algumas formações são estáveis e outras instáveis. Além disso, não são consideradas restrições nas entradas de controle do sistema.

Em (Ceccarelli et al., 2008) o sistema multiagente utilizado para a realização de movimento circular coletivo é composto por robôs não-holonômicos descritos como uniciclos cinemáticos planares, com velocidade de translação constante, controlados por comandos de velocidade angular. Todavia, não é considerada nenhuma restrição de raio de curvatura mínimo.

Em (Kim e Sugie, 2007) os autores propõem uma metodologia de controle cooperativo descentralizada baseada em uma estratégia de perseguição cíclica com o objetivo de fazer com que um time de agentes realize operações de circulação de alvo. Cada agente é descrito como um robô móvel cinemático completamente atuado movendo-se em um espaço de trabalho tridimensional. A abordagem é estendida em (Hara et al., 2008) para o caso de agentes com dinâmica. Em ambos os artigos, não são consideradas restrições nas entradas e/ou nas variáveis de estado.

De acordo com nossos conhecimentos, mesmo para o problema aparentemente simples de se fazer com que um time de VANTs rastreie um círculo e se distribua ao longo dele de forma balanceada, não existe um trabalho na literatura que ataque tal problema com uma abordagem matemática rigorosa considerando todos os aspectos de:

1. Restrição nas variáveis de estado e/ou nas entradas de controle;
2. Restrição não-holonômica;
3. Raio de curvatura mínimo;
4. Evitamento de colisão;
5. Dinâmica de segunda ordem.

### **3.4 Rastreamento de Curvas, Campos Vetoriais Artificiais e Incerteza de Modelo**

O rastreamento e a circulação de curvas é um problema clássico no contexto de navegação de robôs. Muitos autores têm desenvolvido trabalhos acerca de tal problema com diferentes objetivos. Uma aplicação interessante e recente pode ser encontrada em oceanografia (Hsieh et al., 2012), na qual um time de veículos autônomos subaquáticos pode ser utilizado para rastrear estruturas coerentes em fluxos e medir quantidades físicas a fim de auxiliar os cientistas na melhoria das previsões de tempo (climáticas) e em um entendimento mais profundo acerca de vários processos geofísicos. Em tal contexto, é importante que se leve em consideração a influência de incertezas associadas ao movimento turbulento dos fluidos, por exemplo.

Grande número de trabalhos na área de controle de robôs levam em consideração incertezas no modelo dinâmico devido a incerteza paramétrica ou erros de modelagem. Dentre as diferentes ferramentas utilizadas para atacar tal problema, é possível encontrar controle por modos deslizantes (Guldner e Utkin, 1995; Corradini e Orlando, 2001, 2002; Floquet et al., 2003), teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  (Scaglia et al., 2009; Ranjbarsahraei et al., 2011), estabilidade de Lyapunov e *ultimate boundedness* (Dixon et al., 2000; Lee et al., 2011), teoria de controle *ensemble* (Becker e Brel, 2012), e assim por diante. Em (Arslan e Temeltaş, 2011) é proposto um sistema de

controle de movimento que é uma combinação de campo vetorial de orientação, torque computado e controle por modos deslizantes a fim de lidar com a incerteza paramétrica no modelo do robô.

A presença de incertezas também é motivo de preocupação no contexto de planejamento de caminho, em que ambientes incertos e dinâmicos (Du Toit e Burdick, 2012), incerteza de modelo (Pepy et al., 2009), e incerteza de atuação e de medição (Latombe et al., 1991; Page e Sanderson, 1995; Pruski e Rohmer, 1997) são problemas que não podem ser simplesmente ignorados.

Em (Aguilar et al., 1998) e (Kanarat, 2004), os autores propõem uma metodologia de seguimento de caminho interessante para um unicycle cinemático levando em consideração a presença de incerteza de medição. Kanarat também lida com a presença de incerteza de atuação. Ele aborda o problema de rastreamento de uma curva pré-especificada até que o robô alcance a posição final desejada e, assim como muitos outros autores, eles utilizam a modelagem apresentada em (Samson, 1992) para representar o problema. Uma abordagem similar que lida com perturbação nas entradas de controle como uma função das medições das variáveis de estado pode ser encontrada em (Wada et al., 2004). Outro trabalho sobre seguimento de caminho com unicycle cinemático que lida apenas com incerteza de atuação, isto é, erro de velocidade angular, é (Seo e Lee, 2006), em que o autor utiliza uma abordagem baseada em controle por modos deslizantes.

Outros métodos que também são utilizados no contexto de navegação de robôs são aqueles baseados em campos vetoriais artificiais. Uma vantagem muito interessante de tais métodos é que uma parametrização no tempo da curva alvo não é necessária para a solução do problema de rastreamento. Em diversos trabalhos, simplesmente assume-se que uma estratégia baseada em campos vetoriais artificiais é robusta a erros de localização (Gonçalves et al., 2009, 2010), mas de acordo com nossos conhecimentos não há um estudo sistemático e rigoroso acerca da questão da robustez das estratégias baseadas em campos vetoriais artificiais para a navegação de robôs na presença de incertezas em geral. No presente trabalho propõe-se uma estratégia de controle baseada em campos vetoriais para rastreamento de um círculo alvo em que se leva em conta a presença de incertezas no modelo do robô móvel.

### 3.5 Consenso de Sistemas de Segunda Ordem com Restrições de Velocidade

Problemas de consenso para sistemas multiagente são abordados em (Olfati-Saber e Murray, 2004), porém o autor não lida com nenhum aspecto referente à presença de restrições nas variáveis de estado e/ou nas entradas de controle. Similarmente ao que foi proposto por Olfati-Saber, diversos algoritmos de consenso aplicados à coordenação de sistemas multiagente foram desenvolvidos (ver (Ren et al., 2005) e as referências lá indicadas). A idéia básica do consenso é fazer com que um time de agentes chegue em um acordo acerca do valor de uma variável por meio da troca de informação entre vizinhos. Tal problema normalmente é abordado sem se considerar a presença de restrições nas entradas ou nas variáveis de estado (Ren e Beard, 2005; Saber, 2006; Xie e Wang, 2007; Ren, 2007; Xiao et al., 2009). Foi demonstrado em (Li et al., 2011) que um protocolo de consenso que seja projetado sem se levar em consideração a presença de restrições de saturação continua a funcionar na presença da saturação, todavia tal abordagem é restrita a sistemas multiagente de primeira ordem com restrições de saturação simétricas.

No que concerne ao consenso de sistemas multiagente de segunda ordem, muitos trabalhos têm sido publicados recentemente. Em (Gao et al., 2012) é proposta uma metodologia para a coordenação de sistemas multiagente de segunda ordem com topologias de comunicação direcionadas e variantes no tempo; o problema de consenso de integradores duplos utilizando-se dados amostrados é abordado em (Yu et al., 2011); o quase-consenso de sistemas multiagente de segunda ordem utilizando uma estratégia do tipo  *siga o líder*  com diferentes topologias de comunicação é analisado em (Wang e Cao, 2012); o consenso de segunda ordem e o consenso para dinâmica não-linear na presença de restrições de comunicação são investigados em (Wen et al., 2012b) e (Wen et al., 2012a), respectivamente; o consenso de sistemas multiagente de segunda ordem de tempo discreto com atrasos de tempo e topologias variantes é abordado em (Lin e Jia, 2009); em (Wang e Xie, 2012) é investigado o problema de consenso de sistemas multiagente de segunda ordem de tempo contínuo por meio de controle amostrado; em (Chen et al., 2012) os autores investigam o problema de consenso de segunda ordem para agentes não idênticos com topologia fixa; o problema de *flocking* para sistemas multiagente de segunda or-

dem com topologia variante objetivando a redução da dissipação da energia de comunicação do sistema como um todo é abordado em (Luo et al., 2012); os autores de (Zhao et al., 2012) integram técnicas de *backstepping* e de controle por modos deslizantes para solucionar o problema de consenso de segunda ordem de sistemas multiagente que utilizam a estratégia *sigla o líder* na presença de incertezas; o problema de consenso utilizando topologia de comunicação direcionada é abordado em (Yu et al., 2010a) para o caso de agentes lineares de segunda ordem com atrasos de tempo e é abordado em (Yu et al., 2010b) para o caso de agentes não-lineares de segunda ordem. Todavia, em nenhuma dessas publicações é abordado o efeito das restrições nas variáveis de estados e/ou nas entradas de controle dos agentes.

Apesar de o chamado *problema de consenso com restrições* ser abordado na literatura, os autores de (Ferrari-Trecate et al., 2008; Nedić et al., 2010; Lee et al., 2011) estudaram apenas o caso de sistemas dinâmicos de tempo discreto. Um trabalho interessante em que o caso de tempo contínuo é discutido é (Lee e Mesbahi, 2011), mas os autores consideraram apenas dinâmica de primeira ordem e não levaram em consideração a possibilidade de se definir uma velocidade de referência de grupo, uma vez que o estado final alcançado pelos agentes é dependente das condições iniciais.

Há alguns trabalhos em que saturações simétricas de entradas de aceleração foram investigadas (Ren, 2008; Peng et al., 2011; Abdessameud e Tayebi, 2010; Ren, 2009b; Lawton et al., 2003; Abdessameud e Tayebi, 2011). Em (Ren, 2008) o autor propõe alguns algoritmos de consenso para sistemas formados por integradores duplos considerando restrições simétricas nas entradas de controle de aceleração e uma possível velocidade de referência de grupo variante no tempo, dentre outros aspectos. A maior parte dos resultados em consenso implicam que, após a convergência, todos os agentes alcançam a mesma posição e a mesma velocidade. Todavia, há algumas extensões baseadas em tais algoritmos que objetivam movimentos coletivos incluindo *rendezvous* e padrões circulares (Dimarogonas e Kyriakopoulos, 2007; Ren, 2009a; Lin et al., 2011; Lin e Jia, 2010; Chen et al., 2011). É importante que se note, todavia, que tais extensões não consideram a presença de saturações de entrada ou limites para os valores das variáveis de estado.

Dessa forma, não foi encontrado um trabalho na literatura que trate do problema de consenso em sistemas multi-agente que leve em consideração todos os aspectos a seguir ao mesmo tempo:

1. Dinâmica de segunda ordem;
2. Restrições de velocidade;
3. Restrições assimétricas;
4. Lei de controle baseada apenas nas posições dos vizinhos e na velocidade de grupo desejada;
5. Funções de saturação, que não sejam ímpares nem diferenciáveis, para codificar as restrições de velocidade.

# Formação de Padrão - Rastreamento e Distribuição Circular Balanceada

---

Neste capítulo, ataca-se um problema de formação de padrão com um time de  $n$  VANTs em um espaço de trabalho tridimensional definido pelas coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ . Cada agente, ou VANT, é descrito pelo modelo (3.1), sujeito a limites mínimo e máximo de velocidade de translação, limite máximo de valor absoluto da taxa de variação de altitude, restrição de raio curvatura mínimo e uma restrição não-holonômica. O objetivo da estratégia de coordenação é fazer com que os VANTs convirjam para uma configuração na qual eles estejam: (i) igualmente distribuídos ao longo de um círculo  $\mathcal{S}$  invariante no tempo; e (ii) em movimento circular no sentido anti-horário com velocidade angular constante. A principal contribuição do trabalho está nas provas matemáticas rigorosas desenvolvidas para a estratégia proposta considerando-se todas as restrições no modelo do agente. Além disso, para a resolução do problema não é utilizada a hipótese simplificadora de que cada agente seja representado como um único ponto no espaço de trabalho.

Para lidar com o problema de evitamento de colisão, a estratégia foi dividida em três estágios. No primeiro estágio, cada VANT se desloca no espaço a uma altitude constante e busca rastrear um círculo no sentido anti-horário. Após a convergência para o círculo, os VANTs iniciam o segundo estágio. Eles devem se distribuir de acordo com uma lei de controle descentralizado de modo que a projeção de cada um deles sobre o plano  $xy$  esteja separada da projeção dos seus vizinhos por uma distância angular igual a  $\frac{2\pi}{n}$  rad ao longo do círculo  $\mathcal{S}$ . Finalmente, no terceiro estágio, uma vez que a distribuição circular balanceada seja alcançada, todos os VANTs devem se deslocar para o mesmo plano que contém o círculo  $\mathcal{S}$  e percorrê-lo no sentido anti-horário preservando a separação entre vizinhos alcançada no estágio anterior. Esses

três estágios são ilustrados na Figura 4.1.

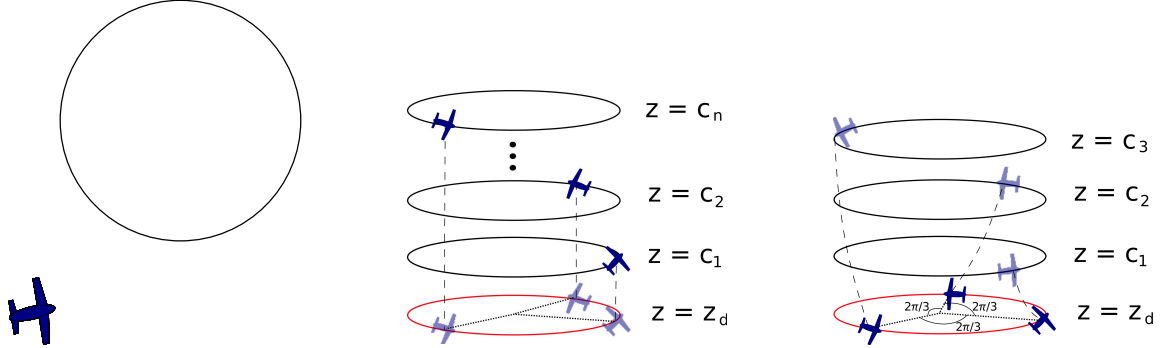


Figura 4.1: Três estágios da estratégia de formação de padrão proposta: à esquerda, (i) rastreamento de um círculo; ao centro, (ii) distribuição circular balanceada; à direita, (iii) controle de altitude.

Também são apresentadas neste capítulo as condições de transição que possibilitam aos agentes decidir quando eles devem iniciar o estágio subsequente.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira. Na Seção 4.1 é definido o problema a ser abordado. Na Seção 4.2 é apresentada estratégia de coordenação juntamente com o detalhamento das garantias matemáticas de convergência. Na Seção 4.3 as transições entre estágios são detalhadas cuidadosamente. Finalmente, um experimento numérico é apresentado e analisado na Seção 4.4.

## 4.1 Definição do Problema

O comportamento do VANT será descrito pelo modelo (3.1), repetido abaixo:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= v \cos(\theta), \\
 \dot{y} &= v \sin(\theta), \\
 \dot{z} &= \frac{1}{\tau_z}(-z + z_c), \\
 \dot{\theta} &= \frac{1}{\tau_\theta}(-\theta + \theta_c), \\
 \dot{v} &= \frac{1}{\tau_v}(-v + v_c),
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

em que  $x$ ,  $y$  e  $z$  são as coordenadas cartesianas do centro de massa do VANT,  $\theta$  é o ângulo de guinada,  $v$  é a velocidade de translação,  $z_c$  é o comando de altitude,  $\theta_c$  é o comando de guinada e  $v_c$  é o comando de velocidade de translação. Esse modelo foi inspirado pelos modelos apresentados em (Bayraktar et al., 2004), que pressupõe uma dinâmica de segunda ordem em  $\theta$ , e (Ren, 2007), que pressupõe a uma dinâmica de segunda ordem em  $z$ . Uma discussão acerca da validade do modelo (4.1) pode ser encontrada na Seção 3.1. Considere que cada agente tem o seu tamanho físico delimitado por uma esfera de raio  $r$  que o circunscreve.

É importante que se enfatize que (4.1) pode ser tratado como um modelo de referência para malhas de controle mais internas que estão controlando o VANT real, e que as malhas de controle externas desenvolvidas neste trabalho são projetadas com base em tal modelo de referência. Isso significa que o trabalho dessas malhas de controle internas pode ser facilitado com o aumento dos valores dos parâmetros  $\tau_z$ ,  $\tau_\theta$ , e  $\tau_v$ .

As restrições a serem consideradas são

$$|\dot{\theta}| = \frac{|\theta_c - \theta|}{\tau_\theta} \leq \omega_M, \quad (4.2)$$

$$v_m \leq v_c \leq v_M, \quad (4.3)$$

$$|\dot{z}| = \frac{|z_c - z|}{\tau_z} \leq v_{zM}, \quad (4.4)$$

em que  $\omega_M$ ,  $v_m$ ,  $v_M$  e  $v_{zM}$  são constantes positivas que representam, respectivamente, a velocidade angular de guinada máxima, o comando de velocidade de translação mínimo, o comando de velocidade de translação máximo e a máxima taxa de variação de altitude em módulo.

É importante notar que a restrição (4.3), juntamente com  $v_m \leq v(0) \leq v_M$  e com o fato de que a velocidade  $v$  tem o seu comportamento descrito por uma equação dinâmica de primeira ordem, implica  $v_m \leq v(t) \leq v_M, \forall t \geq 0$ , que é uma restrição de estado. Outras restrições de estado são o raio de curvatura mínimo, dado por (4.2), e a restrição não holonômica  $\dot{x} \sin(\theta) - \dot{y} \cos(\theta) = 0$  que, por sua vez, de acordo com o Teorema de Brockett (Luca e Oriolo, 1995), impõe uma limitação às possibilidades de controle do sistema. De acordo com o modelo (4.1) e com as restrições (4.2), (4.3), (4.4), é evidente que: (i) o VANT nunca pode parar; (ii) ele é um sistema de segunda ordem (o módulo da sua velocidade não pode ser arbitrado instantaneamente) e é não holonômico (o vetor velocidade não pode apontar instantaneamente para qualquer direção

no plano  $xy$ ); (iii) há um raio de curvatura mínimo dado por  $\frac{v_m}{\omega_M}$ .

Uma vez que o problema em questão envolve o rastreamento de um círculo, parece razoável que se trabalhe com um modelo em coordenadas cilíndricas (Aicardi et al., 1995). Portanto, o novo modelo equivalente a (4.1) é:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= -v \cos(\alpha), \\ \dot{\psi} &= v \frac{\sin(\alpha)}{\rho}, \\ \dot{\alpha} &= v \frac{\sin(\alpha)}{\rho} + \frac{1}{\tau_\theta} (\psi - \alpha - \theta_c), \\ \dot{z} &= \frac{1}{\tau_z} (-z + z_c), \\ \dot{v} &= \frac{1}{\tau_v} (-v + v_c),\end{aligned}\tag{4.5}$$

em que  $\rho$  é a coordenada polar radial,  $\psi$  é a coordenada polar angular,  $\alpha = \psi - \theta$  é o ângulo entre o vetor velocidade de translação  $[\dot{x} \ \dot{y}]^T$  do VANT e o vetor radial  $\rho \hat{\rho}^1$ , como se pode observar na Figura 4.2. A restrição de velocidade angular de guinada nas novas coordenadas é:

$$\frac{|\theta_c - \psi + \alpha|}{\tau_\theta} \leq \omega_M.\tag{4.6}$$

Definindo-se  $e_\alpha = \alpha - \alpha_r(\rho)$ , em que a referência  $\alpha_r(\rho)$  é o ângulo<sup>2</sup> entre uma dada direção desejada em  $\rho$  e o vetor radial  $\rho \hat{\rho}$  (ver Figura 4.3), e escolhendo-se a lei de controle

$$\theta_c = (\psi - \alpha) + \tau_\theta v \frac{\sin(\alpha)}{\rho} + \tau_\theta K_\alpha e_\alpha - \tau_\theta \dot{\alpha}_r(\rho),\tag{4.7}$$

tem-se que

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= -v \cos(e_\alpha + \alpha_r(\rho)), \\ \dot{\psi} &= v \frac{\sin(e_\alpha + \alpha_r(\rho))}{\rho}, \\ \dot{e}_\alpha &= -K_\alpha e_\alpha,\end{aligned}\tag{4.8}$$

e a dinâmica associada à variável  $e_\alpha$  torna-se exponencialmente estável se  $K_\alpha > 0$ . Uma vez

<sup>1</sup> $\hat{\rho}$  é o vetor unitário na direção radial.

<sup>2</sup>Que é determinado a partir de um campo vetorial artificial que será definido na próxima Seção.

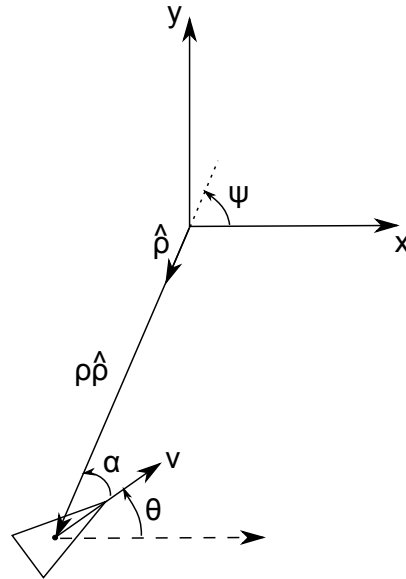


Figura 4.2: Representação do VANT no plano  $xy$  em coordenadas cilíndricas.

que as equações para  $v$  e  $z$  permanecem inalteradas, elas foram omitidas acima.

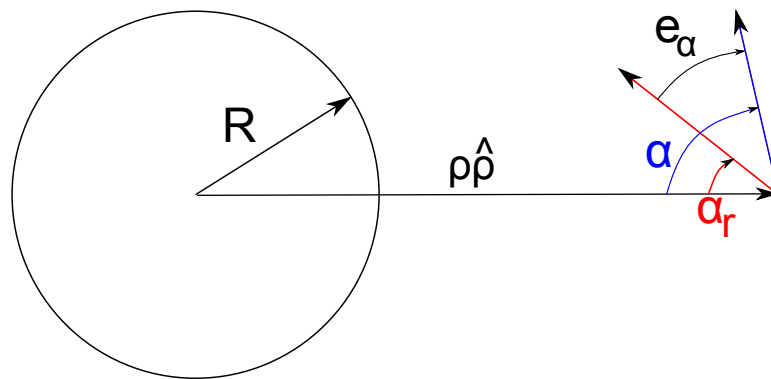


Figura 4.3: Representação gráfica do ângulo  $\alpha$  e do ângulo de referência  $\alpha_r(\rho)$  determinado pelo campo vetorial artificial.

Com a aplicação da lei de controle (4.7), a restrição (4.6) na velocidade angular de guinada pode ser reescrita como

$$\left| \tau_\theta v \frac{\sin(\alpha)}{\rho} + \tau_\theta K_\alpha e_\alpha - \tau_\theta \dot{\alpha}_r(\rho) \right| \leq \tau_\theta \omega_M,$$

que é equivalente a

$$\left| v \frac{\sin(e_\alpha + \alpha_r(\rho))}{\rho} + K_\alpha e_\alpha + \frac{\partial \alpha_r}{\partial \rho} [v \cos(e_\alpha + \alpha_r(\rho))] \right| \leq \omega_M. \quad (4.9)$$

Agora é possível definir, formalmente, o problema a ser resolvido:

*Seja um time de  $n$  VANTs modelados por (4.5), cada um deles envolvido por uma esfera de raio  $r$ . Encontre uma lei de controle descentralizada que faça o time convergir para um movimento circular com velocidade angular contante  $\omega_d$  no sentido anti-horário ao longo do círculo  $\mathcal{S}$  definido pela interseção da superfície cilíndrica  $x^2 + y^2 = R^2$  e o plano  $z = z_d$  mantendo uma separação angular constante e igual a  $\frac{2\pi}{n}$  rad entre os centros de massa de VANTs vizinhos. Além disso, as restrições (4.3), (4.4) e (4.9) devem ser sempre satisfeitas e o evitamento de colisão entre VANTS deve ser garantido.*

Para alcançar esse objetivo, e tendo como motivação a exigência de evitamento de colisão, a estratégia de coordenação será dividida em três estágios:

1. **Estágio 1 (Rastreamento)** → Cada VANT se desloca no espaço de trabalho  $\mathcal{W}$  com uma altitude constante  $z = c_i, i = 1, \dots, n$ , em que  $c_i \neq c_j, \forall i \neq j$ , e busca rastrear no sentido anti-horário um círculo definido pela interseção entre a superfície cilíndrica  $x^2 + y^2 = R^2$  e o plano  $z = c_i$ . A fim de se evitar colisão entre VANTS,  $(c_i - c_j) > 2r, \forall i \neq j$ , em que  $r$  é o raio da menor esfera que circunscreve um VANT. É importante que se enfatize que neste estágio os ângulos  $\alpha$ ,  $\psi$  e  $\theta$  são definidos no intervalo  $(-\pi, \pi]$ , e que todas os resultados de operações envolvendo esses ângulos também são mapeados para o intervalo  $(-\pi, \pi]$ .
2. **Estágio 2 (Distribuição Circular Balanceada)** → Uma vez que cada VANT esteja rastreando um círculo, eles devem se distribuir de acordo com uma lei de controle descentralizado de modo que a projeção de cada um deles sobre o plano  $z = z_d$  esteja separada da projeção dos seus vizinhos por uma distância angular constante igual a  $\frac{2\pi}{n}$  rad ao longo do círculo  $\mathcal{S}$ .
3. **Estágio 3 (Controle de Altitude)** → Uma vez que a configuração de distribuição circular balanceada é alcançada, todos os VANTS devem se deslocar para o mesmo plano que contém o círculo  $\mathcal{S}$  e rastreá-lo no sentido anti-horário preservando a separação angular entre vizinhos alcançada no estágio 2. O raio  $R$  deve ser grande o suficiente para garantir

que  $l_{ij} > l_m, \forall i \neq j$ , em  $l_{ij}$  é o comprimento de arco de raio  $R$  entre os centros de massa dos VANTs  $i$  e  $j$ , e  $l_m$  é o comprimento de arco mínimo de  $R$  entre os centros de massa de dois VANTs que define uma colisão.

Cada um desses estágios será abordado devidamente na Seção 4.2. Também será apresentada uma descrição detalhada das transições entre estágios ao longo de toda a missão. Resultados parciais relativos ao primeiro estágio foram aceitos para publicação em uma conferência (Jesus et al., 2012).

## 4.2 Metodologia

### 4.2.1 Estágio 1 - Rastreamento

Para abordar o problema de se fazer com que um VANT rastreie um círculo em um plano horizontal no sentido anti-horário, propõe-se uma abordagem baseada em projeto de campos vetoriais artificiais (Gonçalves et al., 2010). Nesse estágio, assume-se que o VANT  $i$  esteja se movendo com uma altitude constante, ou seja,

$$z_c(t) = z(t) = c_i, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.10)$$

Uma possível estrutura para um campo vetorial artificial é:

$$\lambda(\rho) = f(\rho)\hat{\rho} + g(\rho)\hat{\psi}, \quad (4.11)$$

em que  $\hat{\rho}$  é o vetor unitário na direção radial e  $\hat{\psi}$  é o vetor unitário na direção tangencial.

Buscando-se analisar a estabilidade do campo vetorial artificial  $\lambda(\rho)$ , seja a função definida positiva

$$W(\rho) = \frac{1}{2}(\rho - R)^2, \quad (4.12)$$

cuja derivada temporal é dada por

$$\dot{W}(\rho) = (\rho - R) \left. \frac{d\rho}{dt} \right|_{\lambda} \quad (4.13)$$

$$= (\rho - R)f(\rho). \quad (4.14)$$

É importante que se note que a derivada temporal de  $\rho$  considerada nessa análise não é a grandeza  $\dot{\rho}$  definida em (4.5), mas sim  $\left. \frac{d\rho}{dt} \right|_{\lambda}$ , que é a taxa de variação da coordenada polar radial de um robô que estivesse rastreando perfeitamente uma curva integral de  $\lambda(\rho)$ . Mais uma vez, isso se deve ao fato de que a análise presentemente desenvolvida diz respeito à estabilidade do campo vetorial artificial, independentemente da dinâmica do VANT.

A fim de se fazer com que o conjunto de pontos dados por  $\rho = R$  (um círculo) seja um conjunto invariante para as trajetórias induzidas pelo campo vetorial artificial, deve-se projetar  $f(\rho)$  e  $g(\rho)$  em (4.11) de modo que  $g(R) \neq 0$  e  $\dot{W}(\rho)$  seja uma função definida negativa, de acordo com o método direto de Lyapunov (Slotine e Li, 1991). Para satisfazer essa última condição, é suficiente que

$$\begin{cases} f(\rho) = 0, & \text{para } \rho = R, \\ f(\rho) > 0, & \text{para } \rho < R, \\ f(\rho) < 0, & \text{para } \rho > R. \end{cases} \quad (4.15)$$

A função  $f(\cdot)$  deve ser limitada superiormente e inferiormente devido à existência de limites máximo e mínimo para a velocidade radial. Uma função que se ajusta bem ao caso é a tangente hiperbólica

$$f(\rho) = -v_d \tanh(K_f(\rho - R)), \quad (4.16)$$

em que  $K_f > 0$  e  $R > 0$  são parâmetros de projeto do campo vetorial artificial, e  $v_d$  é a velocidade de translação desejada que deve satisfazer a desigualdade  $v_m < v_d < v_M$ .

Assumindo-se que a velocidade desejada  $v_d$  do VANT seja constante, o campo vetorial artificial deve ser normalizado de acordo com

$$\|\lambda(\rho)\| = v_d, \quad (4.17)$$

portanto a função  $g(\cdot)$  pode ser definida como

$$g(\rho) = v_d \operatorname{sech}(K_f(\rho - R)), \quad (4.18)$$

satisfazendo  $g(R) \neq 0$ , e o comando de velocidade de translação pode ser dado por

$$v_c(t) = \|\lambda(\rho)\| = v_d, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.19)$$

De acordo com a Figura 4.4, o campo vetorial definido pelas funções (4.16) e (4.18) fará com que o VANT se mova predominantemente na direção radial quando ele estiver longe do círculo alvo. Conforme ele se aproxima do círculo, a magnitude da componente tangencial se torna maior do que a da componente radial.

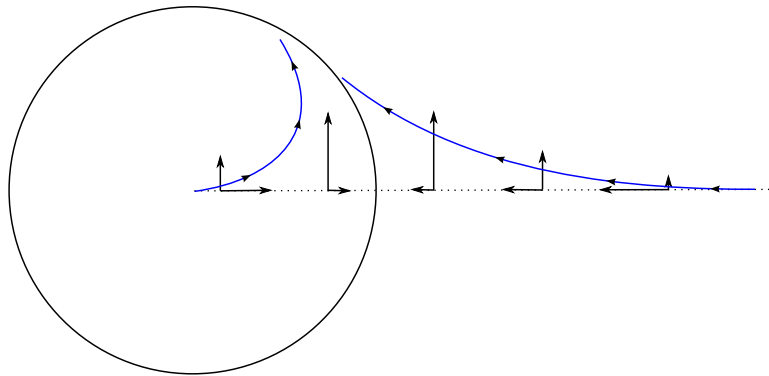


Figura 4.4: Representação do campo vetorial artificial com as linhas de fluxo como uma função da distância entre o VANT e o círculo alvo.

A Figura 4.5 ilustra o campo vetorial artificial dado por (4.11), (4.16) e (4.18) juntamente com duas de suas curvas integrais para o caso específico de  $K_f = 0,015 \text{ m}^{-1}$  e  $R = 50 \text{ m}$ .

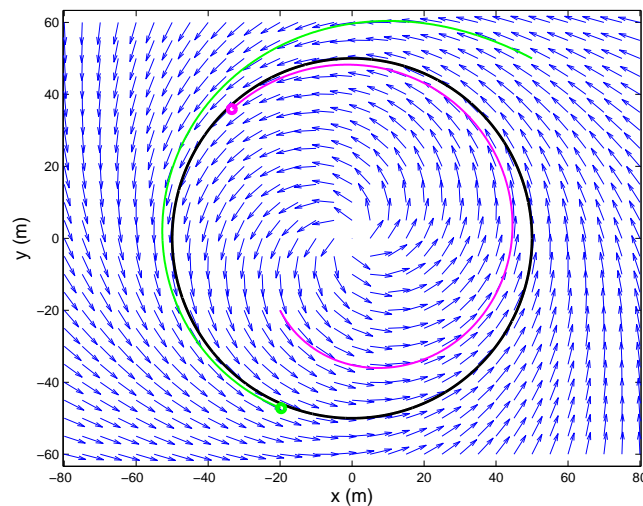


Figura 4.5: Campo vetorial artificial dado por (4.11), (4.16) e (4.18) projetado com  $K_f = 0,015 \text{ m}^{-1}$  e  $R = 50 \text{ m}$ . Em verde e magenta estão representadas duas curvas integrais do campo vetorial artificial para diferentes condições iniciais.

A partir da Figura 4.6, pode-se concluir que

$$\alpha_r(\rho) = \frac{\pi}{2} + \text{atan}\left(\frac{f(\rho)}{g(\rho)}\right). \quad (4.20)$$

A equação (4.20) implica que  $0 < \alpha_r(\rho) < \pi$ . Utilizando-se (4.16), (4.18), e (4.20), tem-se que

$$\frac{\partial \alpha_r}{\partial \rho} = -K_f \text{sech}[K_f(\rho - R)]. \quad (4.21)$$

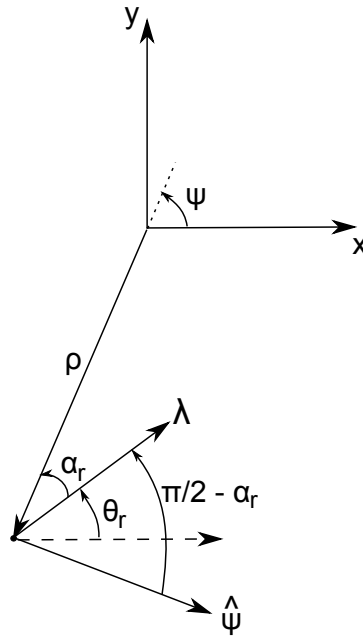


Figura 4.6: Representação com campo vetorial artificial em coordenadas cilíndricas.

Garante-se que a restrição dada por (4.9) não será violada se a seguinte condição for satisfeita:

$$v_M \left| \frac{1}{\rho} \right| + K_\alpha |e_\alpha| + v_M \left| \frac{\partial \alpha_r}{\partial \rho} \right| \leq \omega_M. \quad (4.22)$$

Portanto, um valor plausível para  $K_\alpha$  em (4.7) é:

$$K_\alpha = \frac{\omega_M - \frac{v_M}{\rho_{min}} - v_M \left| \frac{\partial \alpha_r}{\partial \rho} \right|_{max}}{e_{\alpha_{max}}}, \quad (4.23)$$

em que  $\rho_{min}$  é o raio mínimo alcançado pelo VANT ao longo da trajetória (que pode ser  $R$ , em princípio, assumindo-se que o agente inicie a trajetória fora círculo e nunca entre nele quando

submetido à lei de controle (4.7)),  $e_{\alpha_{max}}$  é o erro máximo em  $\alpha$  (que é igual a  $|e_{\alpha}(0)|$  devido ao decaimento exponencial de  $|e_{\alpha}|$  implícito em (4.8)) e, a partir de (4.21),  $\left| \frac{\partial \alpha_f}{\partial \rho} \right|_{max} = K_f$ . Portanto, uma escolha conservadora é

$$K_{\alpha} = \frac{\omega_M - \frac{v_M}{R} - v_M K_f}{|e_{\alpha}(0)|}. \quad (4.24)$$

A fim de se evitar um tempo de assentamento muito grande, é interessante que se defina um ganho variante no tempo para o controlador da seguinte maneira:

$$K_{\alpha}(e_{\alpha}(t)) = \begin{cases} \frac{\omega_M - \frac{v_M}{R} - v_M K_f}{|e_{\alpha}(t)|}, & |e_{\alpha}(t)| \geq \delta e_{\alpha}, \\ \frac{\omega_M - \frac{v_M}{R} - v_M K_f}{\delta e_{\alpha}}, & |e_{\alpha}(t)| < \delta e_{\alpha}, \end{cases} \quad (4.25)$$

em que  $\delta e_{\alpha}$  é uma constante de valor pequeno escolhida para se evitar  $K_{\alpha}(e_{\alpha}(t)) \rightarrow \infty$  quando  $e_{\alpha}(t) \rightarrow 0$ . A prova de convergência da dinâmica do erro  $\dot{e}_{\alpha} = -K_{\alpha}(e_{\alpha})e_{\alpha}$  para o controlador definido por (4.25) é baseada na definição de uma função definida positiva

$$F(e_{\alpha}) = \frac{1}{2}e_{\alpha}^2,$$

tal que

$$\dot{F}(e_{\alpha}) = e_{\alpha}\dot{e}_{\alpha} = -K_{\alpha}(e_{\alpha})e_{\alpha}^2.$$

Assumindo-se que

$$K_{\alpha}(e_{\alpha}) > 0, \forall e_{\alpha},$$

então

$$\dot{F}(e_{\alpha}) < 0, \forall e_{\alpha} \neq 0,$$

e a estabilidade assintótica global da dinâmica do erro é garantida (Slotine e Li, 1991). Além disso, uma vez que o sinal de  $\dot{e}_{\alpha}$  é sempre contrário ao sinal de  $e_{\alpha}$ ,  $|e_{\alpha}|$  é monotonicamente decrescente, e  $K_{\alpha}(e_{\alpha})$  necessariamente cresce monotonicamente ao longo do tempo até alcançar o valor máximo

$$K_{\alpha_M} = \frac{\omega_M - \frac{v_M}{R} - v_M K_f}{\delta e_{\alpha}}$$

no instante  $t = t^*$ . Uma vez que a dinâmica do erro é dada por

$$\dot{e}_\alpha = \begin{cases} -\left(\frac{\omega_M - \frac{v_M}{R} - v_M K_f}{|e_\alpha(t)|}\right) e_\alpha, & |e_\alpha(t)| \geq \delta e_\alpha, \\ -\left(\frac{\omega_M - \frac{v_M}{R} - v_M K_f}{\delta e_\alpha}\right) e_\alpha, & |e_\alpha(t)| < \delta e_\alpha, \end{cases} \quad (4.26)$$

o seguinte comportamento é obtido:

$$e_\alpha(t) = \begin{cases} e_\alpha(0) - Q \operatorname{sgn}(e_\alpha) t, & t < t^*, \\ e_\alpha(t^*) e^{-\left(\frac{Q}{\delta e_\alpha}\right) t}, & t \geq t^*, \end{cases} \quad (4.27)$$

em que  $Q = \left(\omega_M - \frac{v_M}{R} - v_M K_f\right)$ . Note que  $|e_\alpha|$  decresce linearmente quando  $t < t^*$  e decresce exponencialmente quando  $t \geq t^*$ , portanto a convergência está garantida.

Para que o valor  $K_\alpha$  escolhido de acordo com (4.24) ou (4.25) seja positivo, a seguinte desigualdade deve ser satisfeita:

$$K_f < \frac{\omega_M}{v_M} - \frac{1}{R}. \quad (4.28)$$

Como o parâmetro  $K_f$  deve ser positivo, assume-se que

$$\frac{\omega_M}{v_M} > \frac{1}{R}. \quad (4.29)$$

Definindo-se  $\frac{\omega_M}{v_M} = \frac{1}{R_{min}}$ , em que  $R_{min}$  é o raio de curvatura mínimo que pode ser descrito pelo VANT quando a velocidade de translação é igual a  $v_M$ , é imediato que

$$0 < K_f < \frac{R - R_{min}}{R R_{min}}. \quad (4.30)$$

Portanto, a expressão (4.30) pode ser utilizada para se projetar o campo vetorial artificial  $\lambda(\rho)$ . Uma vez que o valor de  $K_f$  esteja definido, o controlador variante no tempo  $K_\alpha$  é dado diretamente por (4.25). É importante notar, entretanto, que foi assumido implicitamente que  $\rho(t) \geq R, \forall t \geq 0$ , ou seja, assumiu-se que a missão começa com o VANT fora do círculo alvo e que ele se manterá sempre fora do círculo. Isto será relaxado mais adiante nesta seção.

**Teorema 1 (Rastreamento)** *O VANT cujo comportamento dinâmico é descrito pelo conjunto de equações (4.5), quando submetido à lei de controle dada por (4.7), (4.10), e (4.19), com o campo vetorial artificial descrito por (4.11), (4.16), (4.18), com  $0 < K_f < \frac{R - R_{min}}{R R_{min}}$ , e com  $K_\alpha$*

dado por (4.25), convergirá assintoticamente para uma trajetória circular de raio  $R > R_{min}$  no sentido anti-horário em torno da origem no plano  $xy$ , sem violar as restrições dadas por (4.3), (4.4), e (4.9), se a trajetória começar no conjunto  $\Omega_0$  dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} e_\alpha(0) \geq 0, \\ \rho(0) \geq R, \\ \alpha_r(\rho(0)) + e_\alpha(0) \leq \frac{\pi}{2}, \\ z(0) = c_i, \\ v_m \leq v(0) \leq v_M. \end{array} \right. \quad (4.31)$$

**Prova:** Escolhendo-se um valor de  $R$  tal que  $R > R_{min}$ , e um valor de  $K_f$  tal que  $0 < K_f < \frac{R-R_{min}}{RR_{min}}$ , e o controlador  $K_\alpha$  de acordo com a equação (4.25), a restrição na velocidade angular de guinada dada por (4.9) será sempre satisfeita desde que  $\rho(t) \geq \rho_{min} = R, \forall t \geq 0$ . Isso significa que quaisquer regiões proibidas (isto é, regiões em que a restrição dada por (4.9) é violada quando a lei de controle (4.7) estiver ativa) que possam existir serão tais que  $\rho < R$ . Portanto precisamos mostrar que o VANT nunca entrará na região definida por  $\rho < R$  quando a lei de controle (4.7) estiver ativa.

O conjunto  $\Omega_0$  de condições iniciais definido pelas relações  $e_\alpha(0) \geq 0, \rho(0) \geq R$  e  $e_\alpha(0) + \alpha_r(\rho(0)) \leq \frac{\pi}{2}$  (ignorando-se as variáveis  $\psi, z$  e  $v$ ) correspondem à região hachurada apresentada na Figura 4.7. As curvas azul e magenta correspondem aos conjuntos  $e_\alpha = 0$  e  $e_\alpha + \alpha_r(\rho) = \frac{\pi}{2}$ , respectivamente, e são as fronteiras do conjunto  $\Omega_0$ . A fim de se demonstrar que a região proibida contida no conjunto  $\rho < R$  nunca será visitada pelo VANT quando a lei de controle (4.7) estiver ativa, é suficiente provar que  $\Omega_0$  é um conjunto invariante. Em outras palavras, deve-se mostrar que o vetor  $\mathbf{x} = [\dot{e}_\alpha \ \dot{\rho}]^T$  nas fronteiras da região  $\Omega_0$  não aponta para fora de  $\Omega_0$ , isto é,

$$\mathbf{x}^T \mathbf{n} > 0,$$

em que  $\mathbf{n}$  é o vetor normal à fronteira da região  $\Omega_0$  que aponta para dentro dela.

Começando por  $e_\alpha + \alpha_r(\rho) = \frac{\pi}{2}$  (fronteira magenta na Figura 4.7), tem-se o vetor normal

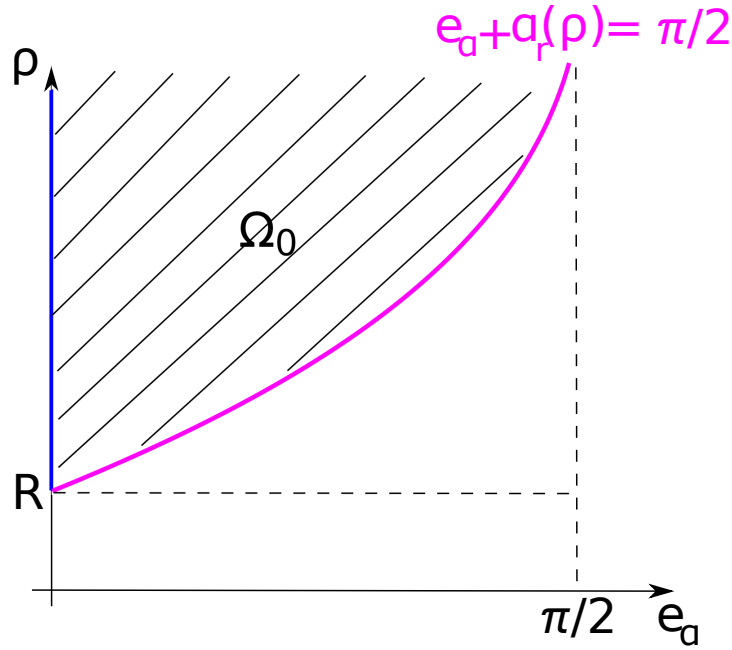


Figura 4.7: Representação gráfica do conjunto de condições iniciais definido pelas desigualdades  $e_\alpha(0) \geq 0$ ,  $\rho(0) \geq R$  e  $e_\alpha(0) + \alpha_r(\rho(0)) \leq \frac{\pi}{2}$ .

$\mathbf{n} = -[1 \frac{\partial \alpha_r}{\partial \rho}]^T$ . Assim, a partir de (4.8) e do fato de que o VANT está sobre a fronteira,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}^T \mathbf{n} &= -\dot{e}_\alpha - \dot{\rho} \frac{\partial \alpha_r}{\partial \rho} \\
 &= K_\alpha e_\alpha + v \cos(e_\alpha + \alpha_r(\rho)) \frac{\partial \alpha_r}{\partial \rho} \\
 &= K_\alpha e_\alpha.
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Uma vez que  $K_\alpha > 0$  e  $e_\alpha > 0$  na fronteira  $e_\alpha + \alpha_r(\rho) = \frac{\pi}{2}$ , segue-se que  $\mathbf{x}^T \mathbf{n} > 0$ . Se  $e_\alpha = 0$  (fronteira azul), tem-se o vetor normal  $\mathbf{n} = [1 \ 0]^T$ . Portanto  $\mathbf{x}^T \mathbf{n} = \dot{e}_\alpha = -K_\alpha e_\alpha = 0$ .

A fim de se provar a convergência para o círculo, é preciso mostrar que  $\dot{\rho} < 0$  para  $\rho \neq R$  e  $\dot{\rho} = 0$  para  $\rho = R$  em  $\Omega_0$ . Considerando-se o VANT em  $\Omega_0$  e excluindo-se a fronteira magenta que é repulsiva, de acordo com (4.32), tem-se que  $0 < e_\alpha + \alpha_r(\rho) < \pi/2$  e  $0 < \cos(e_\alpha + \alpha_r(\rho)) < 1$ . Se  $\rho > R$ , então  $\dot{\rho} = -v \cos(e_\alpha + \alpha_r(\rho)) < 0$ , isto é,  $\rho$  é monotonicamente decrescente. Se  $\rho = R$  (e portanto  $e_\alpha = 0$ ), então  $(\dot{e}_\alpha, \dot{\rho}) = (0, 0)$ . Assim, o ponto de equilíbrio  $(e_\alpha, \rho) = (0, R)$  é um atrator em  $\Omega_0$ , e define o trajeto circular de raio  $R$  no sentido

anti-horário (de acordo com a definição de  $g(\rho)$  em (4.18)) em torno da origem no plano  $xy$ .

■

O Teorema seguinte estende os resultados de convergência apresentados no Teorema 1 para um conjunto de condições iniciais maior. Antes de enunciá-lo, porém, é importante que se definam as regiões  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  e  $\Omega_4$ :

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{\rho < R, z = c_i, v_m \leq v \leq v_M\}, \\ \Omega_2 &= \{\rho \geq R, (\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi \text{ ou } -\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}), z = c_i, v_m \leq v \leq v_M\}, \\ \Omega_3 &= \{\rho \geq R, -\frac{\pi}{2} \leq \alpha < 0, z = c_i, v_m \leq v \leq v_M\}, \\ \Omega_4 &= \{\rho \geq R, 0 \leq \alpha < \alpha_r(\rho), z = c_i, v_m \leq v \leq v_M\}, \end{aligned} \tag{4.33}$$

as quais são ilustradas na Figura 4.8 juntamente com a região  $\Omega_0$ .

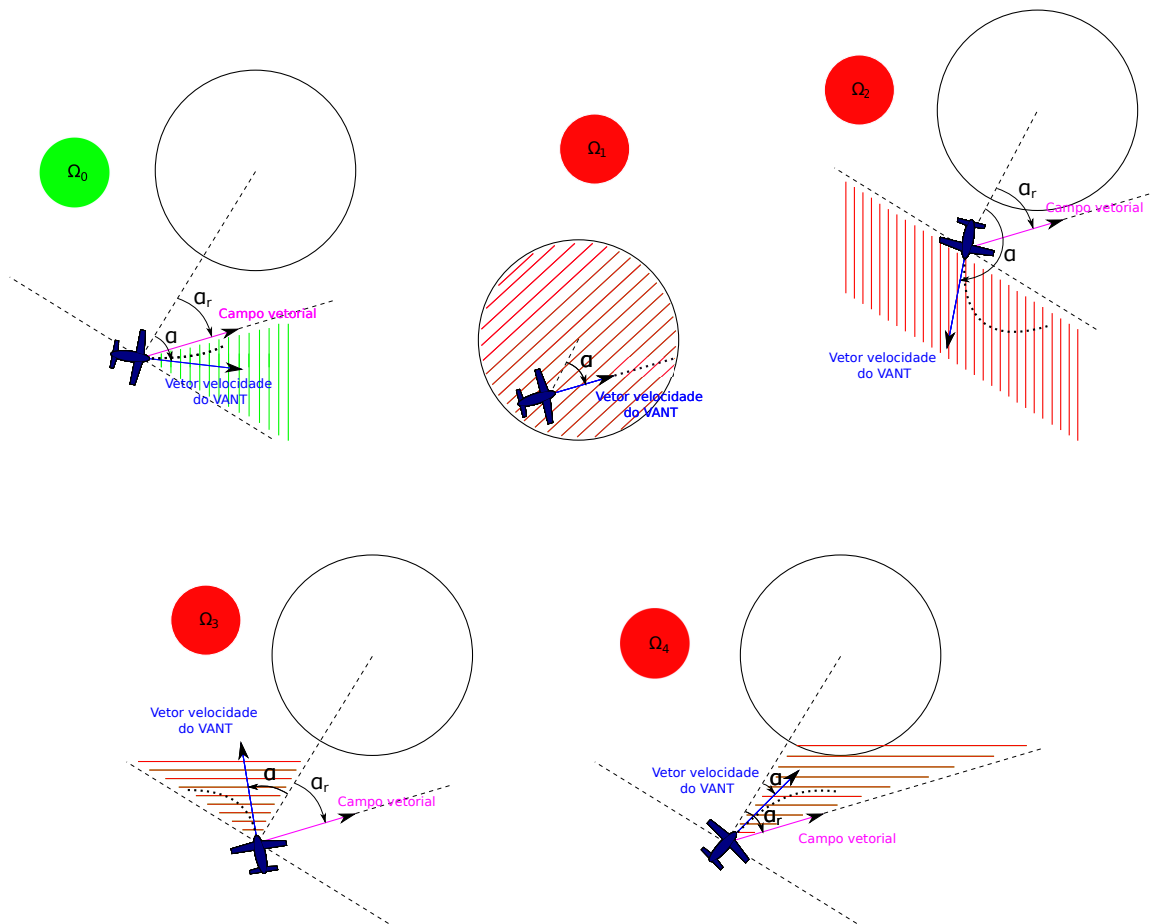


Figura 4.8: Representação gráfica das regiões  $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  e  $\Omega_4$ .

**Teorema 2** *Se o VANT descrito pelo conjunto de equações (4.5) começar sua trajetória fora de  $\Omega_0$ , uma estratégia de controle chaveada dada por (4.10), (4.19) e*

$$\theta_c = \begin{cases} \psi - \alpha & , & \text{se } \rho < R, \\ \psi - \alpha + \tau_\theta \omega_M & , & \text{se } \rho \geq R \text{ e } \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ ou } -\pi < \alpha < 0\right), \\ \psi - \alpha - \tau_\theta \omega_M & , & \text{se } \rho \geq R \text{ e } 0 \leq \alpha < \alpha_r(\rho), \end{cases} \quad (4.34)$$

*fará com que ele convirja para  $\Omega_0$  sem violar as restrições (4.3), (4.4) (4.9), se  $\omega_M > \frac{v_M}{R}$ .*

**Prova:** Deve-se notar inicialmente que (4.3), (4.4) e (4.9) são automaticamente satisfeitas quando as entradas de controle são definidas de acordo com (4.10), (4.19) e (4.34). No caso da restrição (4.9), é suficiente verificar o que acontece quando se substitui (4.34) em (4.6).

Se o VANT começar sua trajetória em  $\Omega_1$  (dentro do círculo de raio  $R$ ), tem-se que  $\dot{\psi} = \dot{\alpha} \Leftrightarrow \dot{\theta} = 0$ , e o VANT se move em uma linha reta até cruzar o círculo. No instante de cruzamento,  $\rho = R$  e  $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi \text{ ou } -\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}\right)$ , portanto o VANT entra em  $\Omega_2$ .

Em  $\Omega_2$ , a partir de (4.5) e (4.34), tem-se que

$$\dot{\alpha} = v \frac{\text{sen}(\alpha)}{\rho} - \omega_M, \quad (4.35)$$

o que significa que o VANT descreve uma curva no sentido anti-horário, uma vez que  $\dot{\theta} = \omega_M$ . Considerando-se que  $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi \text{ ou } -\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}\right)$  em  $\Omega_2$ , com base em (4.5) é possível concluir que  $\dot{\rho} > 0$ , isto é, uma vez que o VANT está em  $\Omega_2$ , ele nunca entrará em  $\Omega_1$ . De acordo com (4.35), a desigualdade  $\dot{\alpha} \leq \frac{v_M}{R} - \omega_M$  é verdadeira. Portanto, se  $R$  for escolhido de modo que  $\omega_M > \frac{v_M}{R}$  (a mesma exigência já considerada em (4.28) e (4.30)), tem-se que  $\dot{\alpha} \leq \frac{v_M}{R} - \omega_M < 0$ . Vale frisar aqui que, se  $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$ , o valor de  $\alpha$  decrescerá até  $-\pi$  e chaveará para  $\pi$ . Basta que se considere uma nova condição inicial para a equação diferencial (4.35) após esse chaveamento e  $\alpha$  continuará a decrescer até  $\frac{\pi}{2}$  sem nenhum problema. Portanto,  $\alpha$  cruzará o valor  $\frac{\pi}{2}$  rad e o VANT entrará em  $\Omega_0$ .

Em  $\Omega_3$ ,  $\alpha$  também se comporta de acordo com (4.35). Uma vez que  $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha < 0$  em  $\Omega_3$ , é verdade que  $\dot{\alpha} < 0$  em  $\Omega_3$ . Além disso, de acordo com (4.5), tem-se que  $\dot{\rho} \leq 0$ . Portanto, há dois comportamentos possíveis: (i)  $\alpha$  se torna menor do que  $-\frac{\pi}{2}$  antes que  $\rho$  se torne menor do que  $R$ , e o VANT entra em  $\Omega_2$ ; ou (ii)  $\rho$  se torna menor do que  $R$  antes que  $\alpha$  se torne menor

do que  $-\frac{\pi}{2}$ , e o VANT entra em  $\Omega_1$ .

Considerando o VANT em  $\Omega_4$ , tem-se que

$$\dot{\alpha} = v \frac{\text{sen}(\alpha)}{\rho} + \omega_M. \quad (4.36)$$

A partir de (4.5) e (4.34),  $\dot{\theta} = -\omega_M$ , e o VANT descreve uma curva no sentido horário. Uma vez que  $0 < \alpha < \alpha_r(\rho) < \frac{\pi}{2}$  em  $\Omega_4$  e a dinâmica de  $\alpha$  é dada por (4.36), conclui-se que  $\dot{\alpha} > 0$  em  $\Omega_4$ . Além disso, de acordo com (4.5),  $\dot{\rho} < 0$ . Portanto, similarmente a  $\Omega_3$ , há dois comportamentos possíveis: (i)  $\alpha$  alcança  $\alpha_r(\rho)$  antes que  $\rho$  se torne menor do que  $R$ , e o VANT entra em  $\Omega_0$ ; ou (ii)  $\rho$  se torna menor do que  $R$  antes que  $\alpha$  alcance  $\alpha_r(\rho)$ , e o VANT entra em  $\Omega_1$ .

Um resumo esquemático da discussão acima é apresentado na Figura 4.9. Ele revela que o VANT entrará em  $\Omega_0$  mais cedo ou mais tarde, independentemente de a trajetória começar em  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  ou  $\Omega_4$ , ■

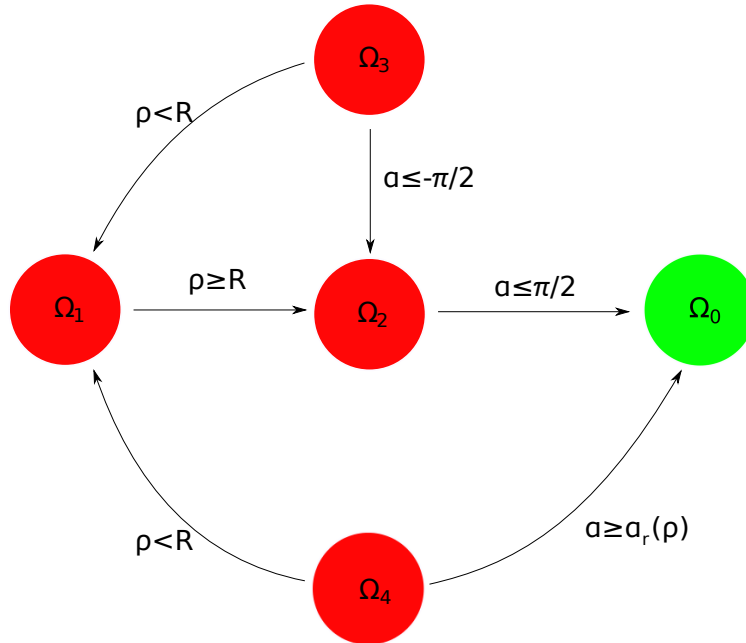


Figura 4.9: Representação esquemática dos resultados apresentados no Teorema 2.

Em resumo, se o VANT iniciar sua trajetória com uma condição inicial arbitrária, mas válida, fora do conjunto  $\Omega_0$ , a lei de controle proposta no Teorema 2 fará com que ele convirja para  $\Omega_0$ , e a lei de controle proposta no Teorema 1 garantirá a convergência da trajetória do VANT para o movimento circular desejado.

**Corolário 1** *A partir dos Teoremas 1 e 2, a lei de controle dada por (4.7), (4.10), (4.19) e (4.34) guiará o VANT assintoticamente para o círculo sem violar as restrições (4.3), (4.4) (4.9), para quaisquer condições iniciais no conjunto  $(\bigcup_{i=0}^4 \Omega_i)$  dado por (4.31) e (4.33).*

### 4.2.2 Estágio 2 - Distribuição Circular Balanceada

Na seção anterior, foi mostrado que  $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$  e  $\rho \rightarrow R$ , quando  $t \rightarrow \infty$ . A transição entre os estágios 1 e 2 será abordada cuidadosamente na Seção 4.3.

Suponha, por ora, que o VANT esteja rastreando o círculo com exatidão, e considere que o estágio 2 começa em  $t = t_1$ . Então, é conveniente definir

$$\Delta = \psi(t_1) - \text{mod}(\psi(t_1), 2\pi) \quad (4.37)$$

e

$$\begin{aligned} \psi^* &= \psi - \Delta, \\ \theta^* &= \theta - \Delta, \end{aligned} \quad (4.38)$$

a fim de se situar o valor inicial do ângulo da coordenada cilíndrica entre 0 e  $2\pi$  no estágio 2. Como consequência, ignorado-se a dinâmica de altitude, o modelo expresso em (4.5) reduz-se a:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{v}{R}, & \frac{v}{R} &\leq \omega_M, \\ \dot{v} &= \frac{1}{\tau_v}(v_c - v), & v_m &\leq v_c \leq v_M. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Um modelo alternativo para representar o VANT que já tenha convergido para o círculo é o seguinte:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_i &= \omega_i, & \omega_i &\leq \omega_M, \\ \dot{\omega}_i &= \frac{1}{\tau_\omega}(\omega_{ci} - \omega_i), & \omega_{min} &\leq \omega_{ci} \leq \omega_{max}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

em que  $\omega_i = \frac{v_i}{R}$ ,  $\omega_{ci} = \frac{v_{ci}}{R}$ ,  $\omega_{min} = \frac{v_m}{R}$ ,  $\omega_{max} = \frac{v_M}{R}$  e  $\tau_\omega = \tau_v$ . Doravante o índice  $i$  será utilizado

para representar o agente  $i$  no time de  $n$  VANTs. A ordenação dos VANTs é definida pela sua projeção ortogonal sobre o plano  $z = 0$  no começo do estágio 2, como pode ser verificado na Figura 4.10. Define-se que o agente  $i$  é vizinho dos agentes  $i - 1$  e  $i + 1$ , e considera-se que a topologia de vizinhança não se altera mesmo que um agente ultrapasse outro durante o estágio 2.

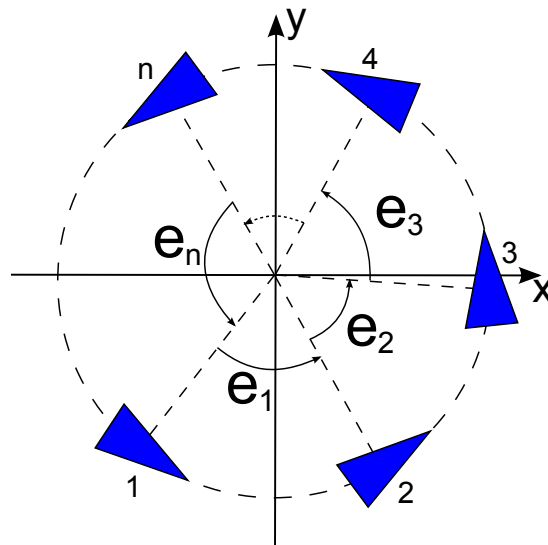


Figura 4.10: Representação esquemática da projeção de  $n$  VANTs sobre o plano  $z = 0$  no início da busca por distribuição circular balanceada.

O problema a ser solucionado neste estágio pode ser definido da seguinte forma:

*Seja um time de  $n$  VANTs cujo comportamento dinâmico individual é descrito por (4.40) (uma vez que cada VANT está descrevendo uma trajetória circular no sentido anti-horário que corresponde à interseção da superfície cilíndrica  $x^2 + y^2 - R^2 = 0$  com o plano  $z = c_i, i = 1, 2, \dots, n$ , em que  $c_i$  é uma constante diferente para cada VANT, isto é, a projeção ortogonal de todos eles sobre o plano  $z = 0$  repousam sobre um círculo), então encontre uma lei de controle distribuído que faça esse sistema multiagente, sem violar as restrições dadas por (4.3), (4.4) e (4.9), convergir para uma configuração em que todos os agentes descrevem um movimento circular uniforme com velocidade angular  $\omega_d$  e em que a distância angular entre as projeções de cada par de vizinhos sobre o plano  $z = 0$  seja constante e igual a  $\frac{2\pi}{n}$  rad. Essa configuração final é denominada ‘distribuição circular balanceada’.*

A Figura 4.10 ilustra a projeção do time de VANTs em busca da distribuição circular balanceada sobre o plano  $z = 0$ . Utilizando a mesma convenção adotada em (Kim e Sugie, 2007) e

(Hara et al., 2008), a separação angular  $e_i$  entre o VANT  $\text{mod}(i+1, n)$  e o VANT  $i$  é dada por

$$\begin{cases} e_i = \psi_{i+1}^* - \psi_i^*, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ e_n = \psi_1^* - \psi_n^* + 2\pi, & i = n. \end{cases} \quad (4.41)$$

Tal convenção possibilita a codificação da topologia do círculo em  $\mathbb{R}$ .

A fim de se evitar problemas com a notação dos índices, uma vez que o VANT 1 e o VANT  $n$  são vizinhos, é conveniente estabelecer as seguintes definições:

$$\begin{cases} \psi_0^* = \psi_n^*, & \psi_{n+1}^* = \psi_1^*, \\ e_0 = e_n, & e_{n+1} = e_1. \end{cases}$$

Uma vez que as projeções dos VANTs sobre o plano  $z = 0$  estão distribuídas em um círculo, a soma dos erros angulares é um invariante do sistema, no seguinte sentido:

$$\sum_{i=1}^n e_i = 2\pi \Rightarrow \sum_{i=1}^n \dot{e}_i = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (4.42)$$

Suponha que, ao longo da distribuição circular balanceada, as separações angulares  $e_i, i = 1, \dots, n$ , podem variar continuamente assumindo valores menores do que  $0$  rad e maiores do que  $2\pi$  rad, desde que (4.42) seja sempre satisfeita.

Com base no exposto acima, o seguinte Lema pode ser enunciado:

**Lema 1** *Seja a função vetorial  $\mathbf{G}(\mathbf{e}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por*

$$\mathbf{G}(\mathbf{e}) = b \begin{bmatrix} \tanh\left(\frac{K_\psi}{b}(e_1 - e_n) + c\right) - \tanh\left(\frac{K_\psi}{b}(e_2 - e_1) + c\right) \\ \tanh\left(\frac{K_\psi}{b}(e_2 - e_1) + c\right) - \tanh\left(\frac{K_\psi}{b}(e_3 - e_2) + c\right) \\ \vdots \\ \tanh\left(\frac{K_\psi}{b}(e_n - e_{n-1}) + c\right) - \tanh\left(\frac{K_\psi}{b}(e_1 - e_n) + c\right) \end{bmatrix}, \quad (4.43)$$

em que  $K_\psi, b$  e  $c$  são constantes reais positivas, e  $\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]^T$ . A única solução da equação

$$\mathbf{G}(\mathbf{e}) = \mathbf{0}_{n \times 1}, \quad (4.44)$$

considerando-se (4.42), é

$$\mathbf{e} = \frac{2\pi}{n} \mathbf{1}_{n \times 1}. \quad (4.45)$$

**Prova:** Se  $\mathbf{G}(\mathbf{e}) = \mathbf{0}_{n \times 1}$ , então

$$\begin{aligned} \tanh\left(\frac{K_\Psi}{b}(e_2 - e_1) + c\right) &= \tanh\left(\frac{K_\Psi}{b}(e_3 - e_2) + c\right), \\ &= \vdots \\ &= \tanh\left(\frac{K_\Psi}{b}(e_n - e_{n-1}) + c\right), \\ &= \tanh\left(\frac{K_\Psi}{b}(e_1 - e_n) + c\right). \end{aligned}$$

Uma vez que  $\tanh(\cdot)$  é uma função invertível, tem-se que

$$(e_2 - e_1) = (e_3 - e_2) = \dots = (e_n - e_{n-1}) = (e_1 - e_n). \quad (4.46)$$

Considerando-se (4.42), as três possibilidades para (4.46) são:

1.  $(e_i - e_{i-1}) > 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \Rightarrow e_1 < e_2 < \dots < e_{n-1} < e_n < e_1$  (absurdo);
2.  $(e_i - e_{i-1}) < 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \Rightarrow e_1 > e_2 > \dots > e_{n-1} > e_n > e_1$  (absurdo);
3.  $(e_i - e_{i-1}) = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \Rightarrow e_1 = e_2 = \dots = e_n = \frac{2\pi}{n}$ .

Portanto,  $\mathbf{e} = \frac{2\pi}{n} \mathbf{1}_{n \times 1}$  é a única solução de  $\mathbf{G}(\mathbf{e}) = \mathbf{0}_{n \times 1}$ . ■

A solução para o problema de distribuição circular balanceada pode ser dada agora:

**Teorema 3 (Distribuição Circular Balanceada)** *Sejam  $n$  VANTs, cada um se deslocando no espaço a uma altitude constante  $z = c_i, i = 1, \dots, n$ , e percorrendo um círculo de raio  $R$  no sentido anti-horário, submetido à estratégia de controle dada por (4.7), (4.10) e (4.34). Sendo o comportamento dinâmico de cada VANT dado por (4.40), a lei de controle distribuída*

$$\omega_{ci} = a + b \tanh\left(\frac{K_\Psi}{b}(e_i - e_{i-1}) + c\right), \quad (4.47)$$

com  $a = \frac{\omega_{min} + \min(\omega_{max}, \omega_M)}{2}$ ,  $b = \frac{\min(\omega_{max}, \omega_M) - \omega_{min}}{2}$ ,  $c = \operatorname{atanh}\left(\frac{\omega_d - a}{b}\right)$ ,  $\omega_{min} \leq \omega_d \leq \omega_{max}$  e  $K_\Psi > 0$

garantirá que, sem violar as restrições (4.3), (4.4) e (4.9), o sistema convergirá assintoticamente para a configuração

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\pi}{n} \mathbf{1}_{n \times 1} \\ \mathbf{0}_{n \times 1} \end{bmatrix}.$$

**Prova:** O comando  $\omega_{ci}$  assumirá o seu menor valor quando  $\tanh(\cdot) = -1$ , e assumirá o seu maior valor quando  $\tanh(\cdot) = 1$ , isto é, em  $\omega_{min}$  e  $\min(\omega_{max}, \omega_M)$ , respectivamente. Portanto, a restrição  $\omega_{min} \leq \omega_{ci} \leq \omega_{max}$  é satisfeita automaticamente.

Para  $\omega_M \leq \omega_{max}$ , tem-se que  $\omega_{ci} \leq \omega_M \Rightarrow \omega_i \leq \omega_M$ . Considerando-se que  $\omega_i = \dot{\psi}_i$  e  $\dot{\alpha}_i = 0 \Rightarrow \dot{\psi}_i = \dot{\theta}_i$ , tem-se que  $0 < \dot{\theta}_i \leq \omega_M$ . Portanto, a restrição de velocidade angular de guinada é satisfeita. Para  $\omega_M > \omega_{max}$ , como  $\omega_{max} \geq \dot{\theta}_i$ , tem-se que  $0 < \dot{\theta}_i < \omega_M$ . Consequentemente, a restrição de velocidade angular de guinada também é satisfeita nesse caso.

A partir de (4.40) e (4.41), tem-se que:

$$\ddot{e}_i = \frac{1}{\tau_\omega} (\omega_{c(i+1)} - \omega_{ci}) - \frac{1}{\tau_\omega} (\omega_{i+1} - \omega_i), \quad (4.48)$$

isto é,

$$\tau_\omega \ddot{e}_i + \dot{e}_i + b \left[ \tanh\left(\frac{K_\psi}{b}(e_i - e_{i-1}) + c\right) - \tanh\left(\frac{K_\psi}{b}(e_{i+1} - e_i) + c\right) \right] = 0. \quad (4.49)$$

Assim, a seguinte expressão matricial para o time de VANTs pode ser escrita:

$$\tau_\omega \ddot{\mathbf{e}} + \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{G}(\mathbf{e}) = \mathbf{0}_{n \times 1}, \quad (4.50)$$

em que  $\mathbf{G}(\mathbf{e})$  é o mesmo vetor de funções não lineares definido por (4.43). A fim de se determinar os pontos de equilíbrio desse sistema de erro, basta que se defina  $\ddot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{0}_{n \times 1}$  em (4.50), o que resulta em  $\mathbf{G}(\mathbf{e}) = \mathbf{0}_{n \times 1}$ . Portanto, de acordo com o Lema 1, o sistema com comportamento dinâmico descrito por (4.50) que satisfaz (4.42) possui o único ponto fixo, ou configuração de equilíbrio,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\pi}{n} \mathbf{1}_{n \times 1} \\ \mathbf{0}_{n \times 1} \end{bmatrix}. \quad (4.51)$$

Seja agora a função

$$H(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^T \dot{\mathbf{e}} + \frac{1}{\tau_\omega} \phi(\mathbf{e}), \quad (4.52)$$

em que

$$\phi(\mathbf{e}) = \frac{b^2}{K_\psi} \ln \left[ \prod_{i=1}^n \cosh \left( \frac{K_\psi}{b} (e_{i+1} - e_i) + c \right) \right]. \quad (4.53)$$

Uma vez que  $\cosh(\cdot) \geq 1$ , então  $\ln[\prod \cosh(\cdot)] \geq 0$ , e  $\phi(\mathbf{e})$  é uma função semidefinida positiva. Dado que as restrições (4.42) são satisfeitas, e possível verificar que  $H \rightarrow \infty$  quando  $\|[\mathbf{e} \ \dot{\mathbf{e}}]^T\| \rightarrow \infty$ . É importante que se destaque que  $\nabla \phi = \mathbf{G}(\mathbf{e})$ . Nesse caso, a derivada temporal de  $H$  é dada por

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \dot{\mathbf{e}}^T \ddot{\mathbf{e}} + \frac{1}{\tau_\omega} (\nabla \phi)^T \dot{\mathbf{e}}, \\ &= \dot{\mathbf{e}}^T \left( -\frac{1}{\tau_\omega} \dot{\mathbf{e}} - \frac{1}{\tau_\omega} \mathbf{G}(\mathbf{e}) \right) + \frac{1}{\tau_\omega} \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{G}(\mathbf{e}), \\ &= -\frac{1}{\tau_\omega} \dot{\mathbf{e}}^T \dot{\mathbf{e}} \\ &\leq 0. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Portanto,  $\dot{H}(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}})$  é uma função semidefinida negativa. A fim de se aplicar o teorema do conjunto invariante de LaSalle (Slotine e Li, 1991), deve-se notar que a região em que  $\dot{H}$  se anula é

$$\Gamma_1 = \{ \mathbf{e} \in T^n, \dot{\mathbf{e}} \in \mathbb{R}^n / \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{0}_{n \times 1} \},$$

em que  $T^n = S \times S \times \dots \times S$  é o toro  $n$ -dimensional. Dentro de  $\Gamma_1$ , o sistema é governado pela equação

$$\ddot{\mathbf{e}} = -\frac{1}{\tau_\omega} \mathbf{G}(\mathbf{e}). \quad (4.55)$$

Se o sistema começar sua trajetória em  $\Gamma_1$ , com  $\mathbf{e} \neq \frac{2\pi}{n} \mathbf{1}_{n \times 1}$ , tem-se que  $\ddot{\mathbf{e}} \neq \mathbf{0}_{n \times 1}$ , e portanto o sistema deixará a região  $\Gamma_1$ . Por essa razão, o maior conjunto invariante em  $\Gamma_1$  é dado por

$$\Gamma_2 = \left\{ \mathbf{e} \in T^n, \dot{\mathbf{e}} \in \mathbb{R}^n / \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{0}_{n \times 1}, \mathbf{e} = \frac{2\pi}{n} \mathbf{1}_{n \times 1} \right\},$$

que é o ponto fixo do sistema (4.50). Logo, o ponto fixo (4.51) é assintoticamente estável e representa a configuração em que os VANTs estão descrevendo um movimento circular na

sentido anti-horário com velocidade angular  $\omega_d$ , a diferentes altitudes, de tal maneira que suas projeções sobre o plano  $z = 0$  se encontram igualmente distribuídas ao longo do círculo. ■

### 4.2.3 Estágio 3 - Controle de Altitude

Considerando-se que a distribuição circular balanceada já tenha sido efetuada, todos os VANTs devem se deslocar para o plano  $z = z_d$  que contém o círculo  $\mathcal{S}$  e percorrê-lo no sentido anti-horário, preservando a separação angular entre vizinhos alcançada no estágio 2.

De acordo com (4.5), a dinâmica de altitude é descrita pela seguinte equação diferencial:

$$\dot{z}_i = \frac{1}{\tau_z}(-z_i + z_{ci}), \quad \left| \frac{z_i - z_{ci}}{\tau_z} \right| \leq v_{zM}. \quad (4.56)$$

Se o comando de altitude for definido como  $z_{ci} = z_i + \tau_z v_{zci}$ , o comportamento dinâmico resultante será

$$\dot{z}_i = v_{zci}, \quad |v_{zci}| \leq v_{zM}. \quad (4.57)$$

A solução desse estágio é dada pelo seguinte Teorema:

**Teorema 4 (Controle de Altitude)** *Sejam  $n$  VANTs em distribuição circular balanceada de acordo com Teorema 3. Uma vez que a dinâmica de altitude nesse caso é dada por (4.56), se  $\frac{2\pi}{n}R > l_m$ , em que  $l_m$  é o comprimento de arco mínimo de raio  $R$  entre os centros de massa de dois VANTs que define uma colisão, a lei de controle*

$$v_{zci} = \max \{ \min \{ h(z_i - z_d), v_{zM} \}, -v_{zM} \}, \quad (4.58)$$

em que

$$\begin{cases} h(z_i - z_d) = 0, & \text{para } z_i = z_d, \\ h(z_i - z_d) > 0, & \text{para } z_i < z_d, \\ h(z_i - z_d) < 0, & \text{para } z_i > z_d, \end{cases} \quad (4.59)$$

garante que cada VANT convergirá para o círculo  $\mathcal{S}$  sem violar a restrição (4.4), preservando a separação angular entre vizinhos no estágio 2, e sem colisões entre VANTs.

**Prova:** A restrição sobre  $v_{zi}$  que aparece em (4.56) é automaticamente obedecida quando se de-

fine a lei de controle de acordo com (4.58). A fim de se demonstrar a convergência da dinâmica de altitude, seja a função definida positiva

$$M(z_i) = \frac{1}{2}(z_i - z_d)^2,$$

com derivada temporal

$$\dot{M}(z_i) = (z_i - z_d)\dot{z}_i \rightarrow \dot{M}(z_i) = (z_i - z_d)v_{zci}.$$

Portanto,

$$\dot{M}(z_i) = \begin{cases} (z_i - z_d)h(z_i - z_d), & \text{para } |h(z_i - z_d)| \leq v_{zM}, \\ (z_i - z_d)v_{zM}, & \text{para } h(z_i - z_d) > v_{zM}, \\ -(z_i - z_d)v_{zM}, & \text{para } h(z_i - z_d) < -v_{zM}, \end{cases} \quad (4.60)$$

que é uma função definida negativa se  $h(z_i - z_d)$  satisfizer as relações em (4.59). Assim, de acordo com o método direto de Lyapunov (Slotine e Li, 1991), a altitude alvo  $z_i = z_d$  é globalmente assintoticamente estável.

No que tange à questão das colisões, uma vez que a dinâmica de altitude é independente de quaisquer outras variáveis de estado ou entradas do VANT  $i$ , a configuração alcançada após a distribuição circular balanceada é preservada durante o estágio 3. Se o raio  $R$  for grande o suficiente para garantir que  $\frac{2\pi}{n}R > l_m$ , em que  $l_m$  é o comprimento de arco mínimo de raio  $R$  entre os centros de massa de dois VANTs que define uma colisão, garante-se que as colisões entre VANTs não ocorrerão, ainda que eles estejam no mesmo plano  $z = z_d$ . ■

### 4.3 Transições entre Estágios

Tendo como objetivo desenvolver uma estratégia de coordenação descentralizada, é necessário que se proponham algoritmos descentralizados que determinem quando as transições entre estágios devem ocorrer. No início do estágio 1 considera-se que a cadeia de desigualdades  $\psi_1(0) < \psi_2(0) < \dots < \psi_n(0)$  define a topologia de vizinhos em termos de posições angulares iniciais. O VANT  $i$  é vizinho do VANT  $i - 1$  e do VANT  $i + 1$  e se comunica com ambos, e essa topologia mudará apenas no começo do estágio 2, a fim de se evitar ultrapassagens desnecessá-

rias entre agentes ao longo do estágio 2. Os vizinhos do agente  $n$  são os agentes  $n - 1$  e  $1$ , e os vizinhos do agente  $1$  são os agentes  $n$  e  $2$ . O número de identificação ( $id$ ) de cada VANT será sua altitude  $z_i$ , uma vez que  $z_i \neq z_j, \forall i \neq j$ .

### 4.3.1 Transição do Estágio 1 para o Estágio 2

Combinando-se as expressões para  $\dot{v}$ ,  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{e}_\alpha$  e  $\dot{\rho}$  em (4.5) (omitindo-se o índice  $i$ ), tem-se que:

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\tau_v} \left( \frac{v_c \text{sen}(\alpha)}{\rho} - \psi \right) + D, \quad (4.61)$$

em que

$$D = -K_\alpha e_\alpha \frac{v \cos(\alpha)}{\rho} + \frac{v^2 \cos(\alpha) \text{sen}(\alpha)}{\rho^2} + \frac{v^2 \cos(\alpha)^2}{\rho} K_f \text{sech}(K_f(\rho - R)). \quad (4.62)$$

Definindo-se  $\omega = \psi$  e propondo-se a lei de controle

$$v_c = \frac{\rho}{\text{sen}(\alpha)} (-\tau_v D + \omega_c), \quad (4.63)$$

tem-se que

$$\dot{\omega} = \frac{1}{\tau_v} (\omega_c - \omega), \quad (4.64)$$

que é idêntica a (4.40). Claramente os termos dinâmicos em  $D$  aparecerão na restrição do comando de velocidade de translação  $v_m \leq v_c \leq v_M$ , como é mostrado abaixo:

$$P_1 \leq \omega_c \leq P_2, \quad (4.65)$$

em que

$$P_1 = \frac{v_m \text{sen}(\alpha)}{\rho} + \tau_v D \quad \text{e} \quad P_2 = \frac{v_M \text{sen}(\alpha)}{\rho} + \tau_v D.$$

As outras duas quantidades que precisam ser definidas são

$$L_1 = \frac{v_m}{R} \quad \text{e} \quad L_2 = \frac{v_M}{R}.$$

Uma vez que a transição ocorrerá quando cada VANT estiver no conjunto  $\Omega_0$  definido no Teorema 1, o primeiro termo no lado direito de (4.62) é negativo, enquanto que o segundo e o terceiro termo são positivos. Ignorando-se o termo negativo em  $P_1$  e fazendo-se algumas simplificações conservadoras, tem-se a nova quantidade

$$A_1(\rho) = \frac{v_m}{R}(\sin(\alpha_r) + \cos(\alpha_r)) + \tau_v \frac{v_M^2 \cos(\alpha_r)}{R} \times [K_f \cos(\alpha_r) \operatorname{sech}(K_f(\rho - R)) + \sin(\alpha_r) + \cos(\alpha_r)], \quad (4.66)$$

em que  $\alpha_r(\rho)$  é o ângulo entre a direção desejada definida pelo campo vetorial artificial (4.11), (4.16) e (4.18) em  $\rho$  e o vetor radial  $\rho\hat{\rho}$  (ver Figura 4.3).

É fácil verificar que

$$A_1(\rho) \geq P_1, \quad A_1(\rho) \geq L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{\rho \rightarrow R} A_1(\rho) = L_1.$$

Ignorando-se os termos positivos em  $P_2$  e fazendo-se algumas considerações simplificadas, tem-se a nova quantidade

$$A_2(\rho) = \frac{v_M \sin(\alpha_r)}{\rho} - \tau_v K_\alpha(e_\alpha(t_{\Omega_0})) e_\alpha(t_{\Omega_0}) \frac{v_M \cos(\alpha_r)}{R}, \quad (4.67)$$

em que  $t_{\Omega_0}$  é o instante de tempo em que o VANT entra em  $\Omega_0$ , e é simples verificar que

$$A_2(\rho) \leq P_2, \quad A_2(\rho) \leq L_2 \quad \text{e} \quad \lim_{\rho \rightarrow R} A_2(\rho) = L_2.$$

Nesse momento é importante considerar a definição de limite de uma função  $A(\rho)$ :

$$\forall \varepsilon, \exists \gamma: \forall \rho, (0 < |\rho - R| < \gamma \Rightarrow |A(\rho) - L| < \varepsilon).$$

Portanto, se  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  forem escolhidos arbitrariamente ( $p(L_2 - L_1)$  e  $q(L_2 - L_1)$ , com  $0 \leq p \leq 1$  e  $0 \leq q \leq 1$ , por exemplo), é sempre possível encontrar valores correspondentes para  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  tais que,  $\forall \rho, (0 < |\rho - R| < \gamma_1 \Rightarrow |A_1(\rho) - L_1| < \varepsilon_1)$  e  $(0 < |\rho - R| < \gamma_2 \Rightarrow |A_2(\rho) - L_2| < \varepsilon_2)$ . Considerando-se que  $0 < p < 0,5$  e  $0 < q < 0,5$ , a restrição (4.65) é satisfeita porque

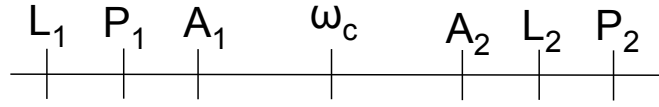


Figura 4.11: Representação gráfica da metodologia aplicada na transição do estágio 1 para o estágio 2.

ela implica que  $A_2(\rho) > A_1(\rho)$  (ver Figura 4.11). Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  forem os maiores valores que satisfazem a condição de limite com  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  escolhidos, e se for definido  $\gamma^* = \min(\gamma_1, \gamma_2)$ , então  $\omega_{min} = A_1(R + \gamma^*)$ , e  $\omega_{max} = A_2(R + \gamma^*)$  são os valores de saturação a serem considerados na lei de controle do estágio 2 dada por (4.47) no lugar de  $\frac{v_m}{R}$  e  $\frac{v_M}{R}$ , respectivamente.

Considere que uma lista  $\Xi$  contendo os *id*'s  $z_i$  e a coordenada  $\psi_i$  de cada VANT circula pelo time e é atualizada até o início do estágio 2. O algoritmo para a transição do estágio 1 ao estágio 2 para o VANT  $i$  é dado a seguir:

**repita**

**se** (VANT  $i$ )  $\in \Omega_0$  e  $A_1(\rho) \leq \omega_{min}$  e  $A_2(\rho) \geq \omega_{max}$  **então**

envie  $\Xi$  atualizada com o *id*  $z_i$  e  $\psi_i$  para o (VANT  $i + 1$ );

**se** (VANT  $i$ ) recebe  $\Xi$  do (VANT  $i - 1$ ) sem o *id*  $z_i$  **então**

envia  $\Xi$  atualizada com o *id*  $z_i$  e o valor atual de  $\psi_i$  para o (VANT  $i + 1$ );

**fim se**

**se** (VANT  $i$ ) recebe  $\Xi$  do (VANT  $i - 1$ ) com o *id*  $z_i$  **então**

realize os cálculos definidos por (4.37) e (4.38) com os valores de  $\psi$  em  $\Xi$ ;

o novo vizinho à frente do VANT  $i$  é dado por  $\arg \min_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}} \text{mod}\{\psi_j^* - \psi_i^*, 2\pi\}$ ;

o novo vizinho atrás do VANT  $i$  é dado por  $\arg \max_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}} \text{mod}\{\psi_j^* - \psi_i^*, 2\pi\}$ ;

comece o estágio 2 com a lei de controle dada por (4.47), (4.62) e (4.63);

**fim se**

**senão**

**se** (VANT  $i$ ) recebe  $\Xi$  do (VANT  $i - 1$ ) **então**

descarta  $\Xi$ ;

**fim se**

**fim se**

**até** começo do estágio 2

Assumiu-se que a comunicação entre vizinhos é instantânea, isto é, não há atrasos de comunicação. Após as mudanças na topologia de vizinhos definidas pelo algoritmo acima, a nova topologia será exatamente aquela mostrada na Figura 4.10, em que os vizinhos do agente  $i$  são os agentes  $i - 1$  e  $i + 1$ , e nos extremos tem-se que os vizinhos do agente  $n$  são os agentes  $n - 1$  e 1, e os vizinhos do agente 1 são os agentes  $n$  e 2.

### 4.3.2 Transição do Estágio 2 para o Estágio 3

Considere a configuração apresentada na Figura 4.12 para o caso de três VANTs. Essa configuração representa a colisão iminente entre dois VANTs se eles estivessem se movendo na mesma altitude. O círculo  $i$ , com raio  $r$ , é o menor círculo que contém todos os pontos do VANT  $i$ . Utilizando conceitos simples de trigonometria, é possível verificar que

$$e_{min} = 2 \arcsen \left( \frac{r}{R} \right). \quad (4.68)$$

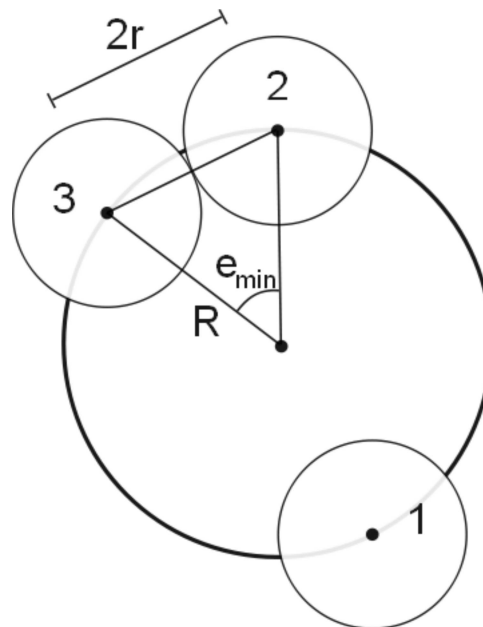


Figura 4.12: Projeção sobre o plano  $z = 0$  de três VANTs em tarefa de formação circular no sentido anti-horário.

O próximo Lema estabelece condições para evitamento de colisão com base no número de agentes  $n$  e no valor  $e_{min}$ :

**Lema 2** *Considere que  $2\pi = ne_{min} + \sigma$ ,  $\sigma > 0$  (isto é, todos os VANTs cabem distribuídos ao longo do círculo  $\mathcal{S}$ ), e que existe  $\delta_e > 0$  tal que*

$$\begin{cases} \left| \frac{K_\Psi}{b}(e_{i+1} - e_i) + c \right| < \delta_e, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \left| \frac{K_\Psi}{b}(e_1 - e_n) + c \right| < \delta_e, & i = n. \end{cases}$$

Se  $\delta_e < \frac{2K_\Psi\sigma}{bn(n-1)} + c$ , então não há colisões entre VANTs.

**Prova:** Esse resultado pode ser demonstrado via prova por contraposição. Suponha que  $e_i = e_{min}$ , isto é, há uma colisão entre dois VANTs. Sabe-se que

$$\begin{cases} \frac{K_\Psi}{b}(e_1 - e_n) + c = \eta_1 \delta_e, \\ \frac{K_\Psi}{b}(e_2 - e_1) + c = \eta_2 \delta_e, \\ \vdots \\ \frac{K_\Psi}{b}(e_i - e_{i-1}) + c = \eta_i \delta_e, \\ \vdots \\ \frac{K_\Psi}{b}(e_n - e_{n-1}) + c = \eta_n \delta_e, \end{cases}$$

em que  $-1 < \eta_k < 1$ ,  $\forall k$ . Uma vez que  $\sum_{k=1}^n e_k = 2\pi$ , tem-se que (após algumas manipulações algébricas)

$$ne_{min} + \frac{b}{K_\Psi} \left( \delta_e K - \frac{n(n-1)c}{2} \right) = 2\pi, \quad (4.69)$$

em que  $K \leq \frac{n(n-1)}{2}$ . Uma vez que  $\frac{b}{K_\Psi} \left( \delta_e K - \frac{n(n-1)c}{2} \right) = \sigma$ , tem-se que  $\delta_e \geq \frac{2K_\Psi\sigma}{bn(n-1)} + c$ , que é o oposto da premissa no enunciado no Lema. ■

Suponha que  $\exists \xi > 0$  tal que  $H(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) < \xi$ , o que implica  $\phi(\mathbf{e}) < \xi$ . Uma vez que  $\phi(\mathbf{e})$  é dada por (4.53), pode-se dizer que

$$\phi(\mathbf{e}) < \xi \rightarrow \frac{b^2}{K_\Psi \tau_\omega} \ln \left[ \cosh \left( \frac{K_\Psi}{b}(e_{i+1} - e_i) + c \right) \right] < \xi.$$

Equivalentemente,

$$\left| \frac{K_\Psi}{b}(e_{i+1} - e_i) + c \right| < \operatorname{acosh} \left( \exp \left( \frac{K_\Psi \tau_\omega \xi}{b^2} \right) \right). \quad (4.70)$$

Considerando-se que o lado direito de (4.70) é  $\delta_e$ , e uma vez que  $0 < \delta_e < \frac{2K_\psi\sigma}{bn(n-1)}$ , tem-se que

$$0 < \xi < \frac{b^2}{K_\psi\tau_\omega} \ln \left[ \cosh \left( \frac{2K_\psi}{b} \left( \frac{2\pi - ne_{min}}{n(n-1)} \right) + c \right) \right]. \quad (4.71)$$

Em resumo, uma vez que  $\dot{H} \leq 0$ , se  $H < \xi$  para  $t = t'$ , então  $H < \xi$  para  $t > t'$ , o que significa que (4.70) é válida para  $t \geq t'$ . Se  $\xi$  satisfizer a relação (4.71), então  $\delta_e < \frac{2K_\psi\sigma}{bn(n-1)} + c$ . Portanto, de acordo com o Lema 2, a transição do estágio 2 para o estágio 3 pode ocorrer porque o evitamento de colisão está garantido. Considere que a ‘energia’ total  $H$  do sistema pode ser descrita como  $H = \sum_{i=1}^n H_i$ , em que  $H_i$  é a energia associada ao VANT  $i$ . O algoritmo para a transição entre os estágios 2 e 3 para o VANT  $i$  é dado abaixo:

**se** o estágio 2 já estiver ativo **então**

**repita**

envie  $id$   $z_i$  e  $H_i$  para o (VANT  $i + 1$ );

**se** (VANT  $i$ ) recebe  $id$   $z_j$  e  $H$ ,  $j \neq i$  **então**

envie  $id$   $z_j$  and  $H \leftarrow H_i + H$  para o (VANT  $i + 1$ );

**fim se**

**se** (UAV  $i$ ) recebe  $id$   $z_i$  e  $H$  e  $H < \xi$  **então**

comece o estágio 3 com a lei de controle de altitude dada por (4.58);

**fim se**

**até** início do estágio 3

**fim se**

É importante notar que cada VANT deve conhecer o número total de agentes  $n$  a fim de determinar um valor palusível para  $\xi$ , e esse número pode ser facilmente determinado com um algoritmo similar a esse último acima.

## 4.4 Exemplo de Simulação

Uma simulação computacional foi realizada com  $n = 5$ ,  $r = 0,8$  m,  $R = 50$  m,  $K_f = 0,015$  m<sup>-1</sup>,  $\tau_\theta = \tau_v = 0,5$  s,  $\omega_M = 0,8$  rad/s,  $v_{zM} = 1$  m/s,  $v_m = 10$  m/s,  $v_M = 20$  m/s,  $v_d = 15$  m/s,  $c_i = 2i$  m,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $z_d = 0$  (sem perda de generalidade),  $K_\psi = 10$ ,  $h = -z_i$  e  $p = q = 0,1$ . Inicialmente, cada VANT foi submetido à estratégia de controle apresentada na Seção 4.2.1, e todos

eles convergiram para um movimento circular uniforme. Em seguida, a lei de controle para distribuição circular balanceada apresentada na Seção 4.2.2 foi ativada. Finalmente, o controle de altitude foi realizado de acordo com a abordagem apresentada na Seção 4.2.3. As transições entre estágios foram realizadas de acordo com as estratégias propostas na Seção 4.3. A Figura 4.13 mostra a função ‘energia’  $W$  dada por (4.12) associada a cada VANT no estágio 1. Essas funções codificam a distância entre cada VANT e o seu círculo alvo. É interessante que se note que a função  $W$  cresce para quatro dos VANTs no começo da realização da missão (antes do instante 10s), o que indica que eles tendem a se afastar do círculo inicialmente. Quando os VANTs se encontram aproximadamente alinhados com o campo vetorial artificial, as funções  $W$  tendem a decrescer até se anularem em torno do instante 20s, e isso significa que cada um deles converge para o seu círculo respectivo. A Figura 4.14 mostra a ‘energia’  $H(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}})$  dada por (4.52) associada ao sistema multiagente no estágio 2. Uma vez que ela tende a zero, tem-se que a distribuição circular balanceada é alcançada no instante 45s, aproximadamente. O estágio 2 começa em  $t_{12} \approx 32$ s e o estágio 3 começa em  $t_{23} \approx 43$ s. As Figuras 4.15, 4.16, and 5.1 apresentam, respectivamente, a velocidade angular de guinada, o comando de velocidade de translação e o comando de taxa de variação de altitude dos cinco VANTs, e a Figura 4.18 apresenta alguns instantes da trajetória do sistema multiagente durante a realização da missão.

Deve-se enfatizar que a velocidade angular de guinada convergiu para a velocidade angular desejada  $\omega_d = 0,3$ rad/s ao final do experimento numérico. Nessa simulação, pelo menos dois pontos devem ser enfatizados:

1. As restrições na velocidade angular de guinada, no comando de velocidade de translação e no comando de taxa de variação de altitude foram satisfeitas o tempo todo;
2. A ordenação dos VANTs se manteve inalterada durante o estágio 2, a despeito da plausibilidade de ocorrerem ultrapassagens durante a distribuição circular balanceada, haja vista que cada agente é um sistema de segunda ordem.

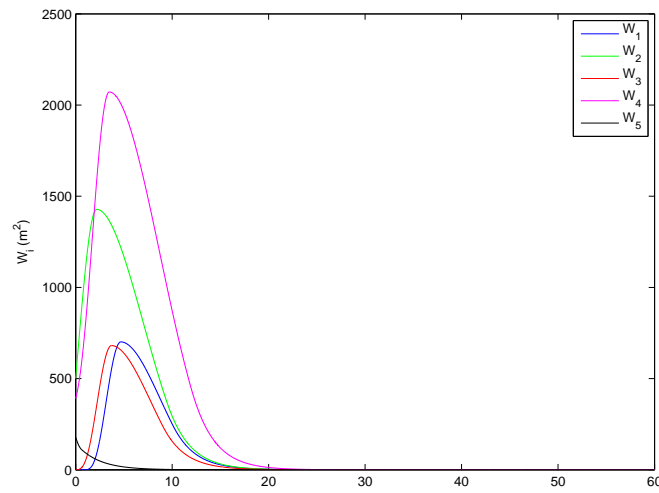


Figura 4.13: Funções de ‘energia’  $W_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ , associadas ao estágio 1 (convergência para o círculo).

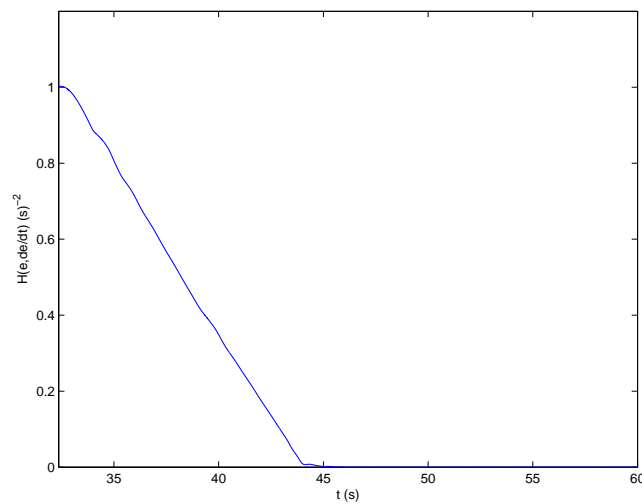


Figura 4.14: Função ‘energia’  $H(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}})$  associada ao estágio 2 (distribuição circular balanceada).

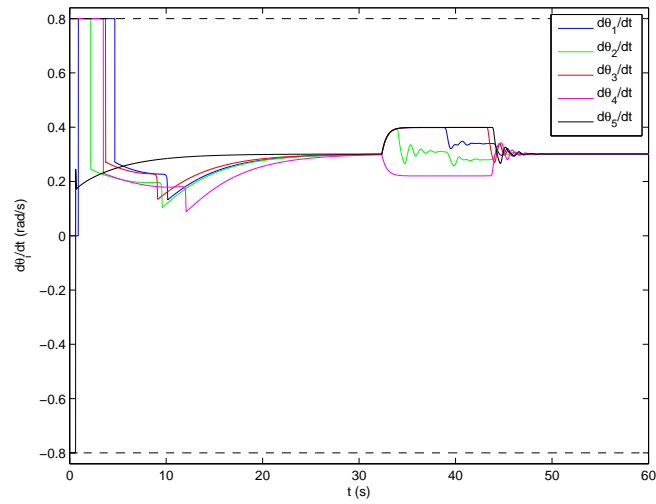


Figura 4.15: Velocidade angular de guinada dos cinco VANTs.

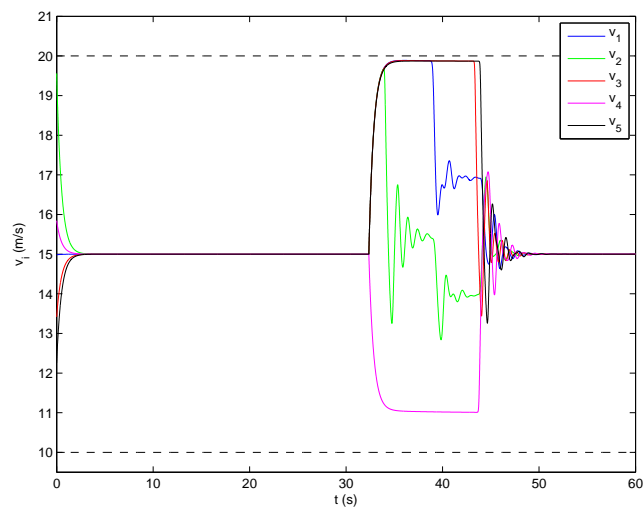


Figura 4.16: Comando de velocidade de translação dos cinco VANTs.

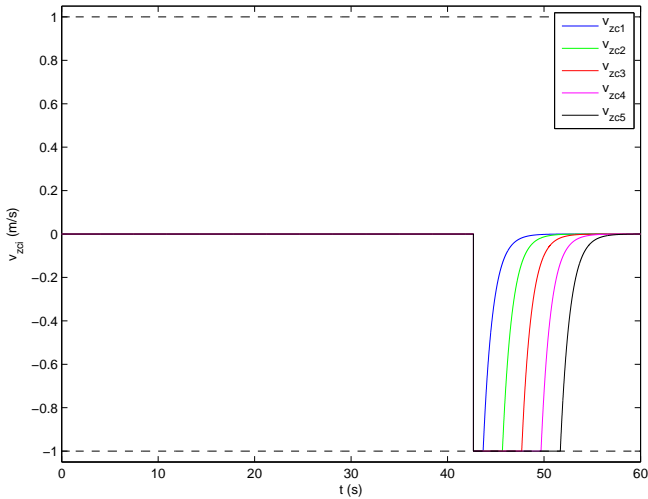


Figura 4.17: Comando de taxa de variação de altitude dos cinco VANTs.

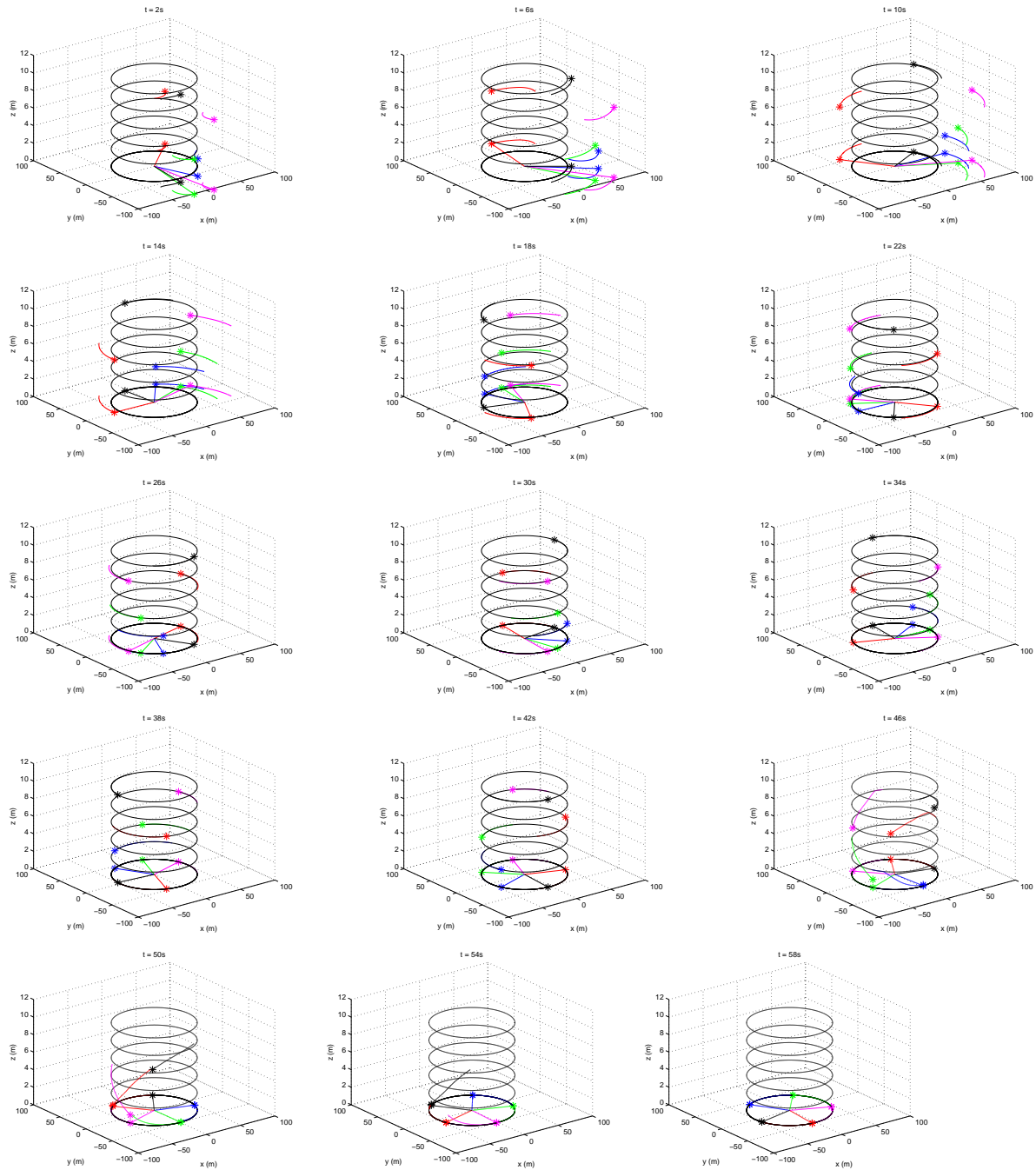


Figura 4.18: Cinco VANTs em uma tarefa de formação circular balanceada. As altitudes de cada VANT são  $z_1 = 2$  m (asterisco azul),  $z_2 = 4$  m (asterisco verde),  $z_3 = 6$  m (asterisco vermelho),  $z_4 = 8$  m (asterisco magenta) e  $z_5 = 10$  m (asterisco preto). As projeções dos cinco VANTs sobre o plano  $z = 0$  também são apresentadas nos gráficos.

# Uma Abordagem Chaveada baseada em Campos Vetoriais Artificiais para Navegação de um Robô Aéreo com Incertezas de Modelo e Restrições de Entrada/Estado

---

O objetivo deste capítulo é apresentar uma forma de se levar em consideração incerteza de modelo e restrições entrada/estado plausíveis no projeto de uma estratégia para navegação de robôs aéreos. Isto é feito por meio de uma abordagem chaveada baseada em campos vetoriais artificiais. A metodologia é desenvolvida para o mesmo modelo de VANT (4.1) utilizado no Capítulo 4.

## 5.1 Definição do Problema

Na Seção 3.1 foi apresentado o resultado de um teste visando comparar o desempenho do modelo de referência simplificado (3.1) com o desempenho de uma aeronave representada pelo modelo mais realístico dado pelas equações (2.18), (2.19), (2.20) e (2.21) submetida à estratégia de controle proposta em (Thums, 2012). A Figura 5.1 ilustra que, apesar da similitude de comportamento de ambos os sistemas, há algumas pequenas discrepâncias na variável  $\theta$ , que se traduzem naturalmente em discrepâncias também na variável  $\dot{\theta}$ .

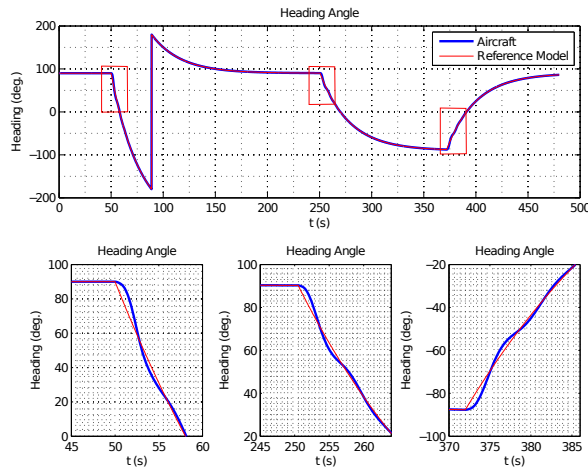


Figura 5.1: Discrepâncias de comportamento entre o modelo “realístico” controlado e o modelo de referência simplificado.

Isso serve de motivação para que seja considerado um robô aéreo descrito pelo modelo:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= v \cos(\theta), \\
 \dot{y} &= v \sin(\theta), \\
 \dot{\theta} &= \frac{1}{\tau_{\theta}}(-\dot{\theta} + \dot{\theta}_c) + \delta_{\omega}, \\
 \dot{v} &= \frac{1}{\tau_v}(-v + v_c) + \delta_a,
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

em que  $x$  e  $y$  são as coordenadas cartesianas do centro de massa do robô aéreo,  $\theta$  é o ângulo de guinada,  $v$  é a velocidade de translação,  $\theta_c$  é o comando de ângulo de guinada e  $v_c$  é o comando de velocidade de translação. Esse modelo foi inspirado nos modelos apresentados em (Bayraktar et al., 2004) e (Ren, 2007). Os termos  $\delta_{\omega}$  e  $\delta_a$  são incertezas limitadas em norma, isto é,

$$|\delta_{\omega}| \leq \Delta_{\omega}, \quad |\delta_a| \leq \Delta_a, \tag{5.2}$$

em que  $\Delta_{\omega}$  e  $\Delta_a$  são constantes reais positivas.

Assim como foi feito no Capítulo 4, é importante que se enfatize que (5.1) pode ser visto como um modelo de referência para a malha de controle interna que está controlando o VANT real. A malha de controle externa apresentada neste capítulo é então projetada com base em

tal modelo de referência. Isso significa que o trabalho da malha de controle interna pode ser facilitado com o aumento dos valores dos parâmetros  $\tau_\theta$  e  $\tau_v$ . Além disso, as incertezas podem ser vistas como uma composição de erros de modelo devidos ao desempenho não ideal dessa malha de controle interna (ver Figura 5.1). A Figura 5.2 ilustra essas idéias aqui apresentadas.

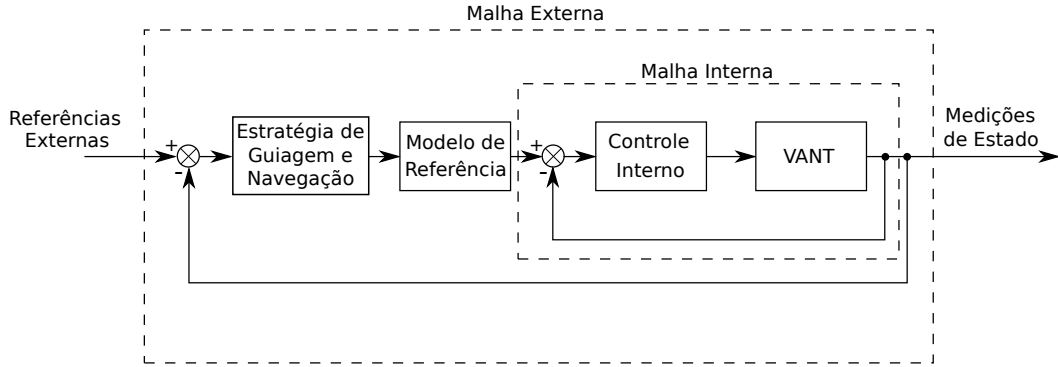


Figura 5.2: Diagrama de blocos do sistema de controle em cascata do VANT.

As restrições a serem consideradas são

$$|\dot{\theta}| = \frac{|\theta_c - \theta + \tau_\theta \delta_\omega|}{\tau_\theta} \leq \omega_M, \quad (5.3)$$

$$v_m \leq v \leq v_M, \quad (5.4)$$

em que  $\omega_M$ ,  $v_m$  e  $v_M$  são constantes positivas que representam, respectivamente, o limite máximo da velocidade angular de guinada, e os limites mínimo e máximo do comando de velocidade de translação. Diferentemente do Capítulo 4, é importante notar que a restrição (5.4) é definida em termos de  $v$ , e não de  $v_c$ , em virtude da presença da variável de perturbação  $\delta_a$ .

Equivalentemente ao que foi feito no capítulo anterior, decidiu-se por trabalhar com um modelo de referência do VANT em coordenadas polares (Aicardi et al., 1995), isto é:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -v \cos(\alpha), \\ \dot{\psi} &= v \frac{\text{sen}(\alpha)}{\rho}, \\ \dot{\alpha} &= v \frac{\text{sen}(\alpha)}{\rho} + \frac{1}{\tau_\theta} (\psi - \alpha - \theta_c) + \delta_\omega, \\ \dot{v} &= \frac{1}{\tau_v} (-v + v_c) + \delta_a, \end{aligned} \quad (5.5)$$

em que  $\alpha = \psi - \theta$  é o ângulo entre o vetor velocidade de translação  $(\dot{x}, \dot{y})$  do robô aéreo e o vetor radial  $\rho \hat{\rho}$ , como ilustrado na Figura 5.3. Assim como no Estágio 1 da estratégia apresentada no Capítulo 4, é importante que se enfatize que os ângulos  $\alpha$ ,  $\psi$  e  $\theta$  são definidos no intervalo  $(-\pi, \pi]$ , e que todos os resultados de operações envolvendo esses ângulos também são mapeados para o intervalo  $(-\pi, \pi]$ .

A restrição da velocidade angular de guinada nas novas coordenadas é:

$$\frac{|\theta_c - \psi + \alpha + \tau_\theta \delta_\omega|}{\tau_\theta} \leq \omega_M. \quad (5.6)$$

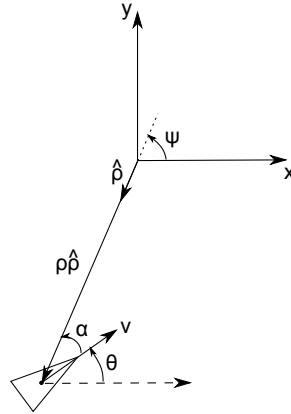


Figura 5.3: Representação do robô aéreo em coordenadas polares.

Seja  $e_\alpha = \alpha - \alpha_r(\rho)$ , em que a referência  $\alpha_r(\rho)$  é o ângulo entre uma dada direção desejada (o vetor em vermelho na Figura 5.4) e o vetor radial  $\rho \hat{\rho}$ . O ângulo  $\alpha_r(\rho)$  é obtido a partir de um campo vetorial artificial que será apresentado na próxima Seção. Escolhendo-se

$$\theta_c = (\psi - \alpha) + \tau_\theta v \frac{\text{sen}(\alpha)}{\rho} + \tau_\theta K_\alpha \text{sat}\left(\frac{e_\alpha}{\Phi}\right) - \tau_\theta \dot{\alpha}_r(\rho), \quad (5.7)$$

em que  $\Phi$  é uma constante real estritamente positiva, e

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} x, & \text{se } |x| \leq 1, \\ \text{sgn}(x), & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (5.8)$$

então

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho} &= -v \cos(e_\alpha + \alpha_r(\rho)), \\
 \dot{\psi} &= v \frac{\text{sen}(e_\alpha + \alpha_r(\rho))}{\rho}, \\
 \dot{e}_\alpha &= -K_\alpha \text{sat}\left(\frac{e_\alpha}{\Phi}\right) + \delta_\omega, \\
 \dot{v} &= \frac{1}{\tau_v}(-v + v_c) + \delta_a,
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

e a dinâmica relacionada a  $e_\alpha$  seria estável para  $K_\alpha > 0$ , se fosse desconsiderada a presença do termo  $\delta_\omega$ . A diferença entre a lei de controle (5.7) e a lei de controle proposta no Capítulo 4 é o terceiro termo envolvendo o ganho  $K_\alpha$ .

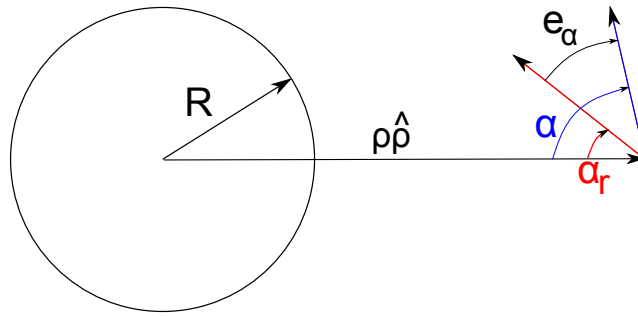


Figura 5.4: Representação gráfica do ângulo  $\alpha$  e do ângulo de referência  $\alpha_r(\rho)$  fornecido pelo campo vetorial artificial subjacente.

Após utilizar-se (5.7), a restrição (5.6) na velocidade angular de guinada pode ser reescrita como

$$\left| \tau_\theta v \frac{\text{sen}(\alpha)}{\rho} + \tau_\theta K_\alpha \text{sat}\left(\frac{e_\alpha}{\Phi}\right) - \tau_\theta \dot{\alpha}_r(\rho) + \tau_\theta \delta_\omega \right| \leq \tau_\theta \omega_M,$$

que é equivalente a

$$\left| v \frac{\text{sen}(e_\alpha + \alpha_r(\rho))}{\rho} + K_\alpha \text{sat}\left(\frac{e_\alpha}{\Phi}\right) + \frac{\partial \alpha_r}{\partial \rho} v \cos(e_\alpha + \alpha_r(\rho)) + \delta_\omega \right| \leq \omega_M. \tag{5.10}$$

Em muitos problemas de navegação de robôs, assume-se normalmente um conhecimento perfeito do modelo do sistema no projeto da estratégia de controle. Todavia, em situações práticas a presença de incertezas deve ser levada em consideração devido a sua influência no desempenho do sistema de controle. Por essa razão, neste capítulo objetiva-se atacar o seguinte

problema:

*Dadas as equações diferenciais que descrevem o movimento de um robô aéreo e um círculo alvo invariante no tempo no plano  $xy$ , projete uma lei de controle baseada em campos vetoriais artificiais que leve em consideração a influência da incerteza de modelo a fim de se fazer com que o robô aéreo convirja para o círculo alvo e o percorra indefinidamente no sentido anti-horário.*

## 5.2 Metodologia

### 5.2.1 Projeto do Campo Vetorial Artificial

Propõe-se uma abordagem baseada em campos vetoriais artificiais para atacar o problema de se fazer um robô aéreo restrear um círculo contido no plano  $xy$  no sentido anti-horário. O campo vetorial aqui projetado é exatamente o mesmo proposto no Capítulo 4. Abaixo são enumeradas as principais equações associadas ao projeto desse campo vetorial artificial:

$$\lambda(\rho) = f(\rho)\hat{\rho} + g(\rho)\hat{\psi}, \quad (5.11)$$

$$f(\rho) = -v_d \tanh[K_f(\rho - R)], \quad (5.12)$$

$$g(\rho) = v_d \operatorname{sech}[K_f(\rho - R)], \quad (5.13)$$

$$v_c(t) = \|\lambda(\rho)\| = v_d, \quad (5.14)$$

$$\alpha_r(\rho) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{atan}\left(\frac{f(\rho)}{g(\rho)}\right), \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial \alpha_r}{\partial \rho} = -K_f \operatorname{sech}[K_f(\rho - R)]. \quad (5.16)$$

Finalmente, seja o vetor

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \rho \\ \psi \\ e_\alpha \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2 \times [v_m, v_M],$$

que representa as variáveis de estado do sistema (5.9).

Dessa forma, pode-se enunciar o seguinte Teorema:

**Teorema 5** *O sistema em malha fechada descrito por (5.9), com o campo vetorial  $\lambda(\rho)$  dado por (5.11)-(5.13) e com o comando de velocidade  $v_c$  dado por (5.14), convergirá para a região  $|\rho - R| \leq \Delta_R < R$  no plano  $xy$ , em que  $\Delta_R = \frac{\text{atanh}[\tan(\Phi)]}{K_f}$  é uma constante real positiva, e circulará em torno da origem  $\rho = 0$ , sem violar as restrições (5.4) e (5.10), se ele iniciar sua trajetória na região*

$$\Omega_0 = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2 \times [v_m, v_M] \mid \rho \geq R \text{ e } |e_\alpha| \leq \Phi < 0,6663 < \pi/4\},$$

e se as desigualdades

$$v_m \leq v_d - \sqrt{2\eta}, \quad v_M \geq v_d + \sqrt{2\eta}, \quad \eta > \frac{1}{2}(\tau_v \Delta_a)^2$$

e

$$\Delta_\omega < K_\alpha \leq \omega_M - v_M \sqrt{\frac{1}{(R - \Delta_R^2)} + K_f^2} - \Delta_\omega$$

forem satisfeitas.

**Prova:**

A fim de se analisar apenas a dinâmica

$$\dot{e}_\alpha = -K_\alpha \text{sat}\left(\frac{e_\alpha}{\Phi}\right) + \delta_\omega,$$

seja a função definida positiva

$$V(e_\alpha) = \frac{1}{2}e_\alpha^2, \tag{5.17}$$

cuja derivada temporal é

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_\alpha \dot{e}_\alpha \\ &= e_\alpha \left[ -K_\alpha \text{sat}\left(\frac{e_\alpha}{\Phi}\right) + \delta_\omega \right]. \end{aligned}$$

Se for considerado que  $|e_\alpha| \leq \Phi$  (hipótese do Teorema), então

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\frac{K_\alpha}{\Phi} e_\alpha^2 + \delta_\omega e_\alpha \\ &\leq -\frac{K_\alpha}{\Phi} e_\alpha^2 + \Delta_\omega |e_\alpha|.\end{aligned}\quad (5.18)$$

De acordo com (5.18),  $\dot{V}$  é negativa na fronteira  $|e_\alpha| \leq \Phi$  se  $K_\alpha > \Delta_\omega$ . Isso significa que  $C = \{e_\alpha \mid -\Phi \leq e_\alpha \leq \Phi\}$  é um conjunto invariante. Portanto, se o robô aéreo iniciar sua trajetória em  $C$ , é garantido que  $|e_\alpha(t)| \leq \Phi, \forall t \geq 0$ .

Agora, é necessário analisar o comportamento da dinâmica radial do robô aéreo:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= -v \cos(\alpha), \\ &= -v \cos(\alpha_r(\rho) + e_\alpha), \\ &= -v \cos[\alpha_r(\rho)] \cos(e_\alpha) + v \operatorname{sen}[\alpha_r(\rho)] \operatorname{sen}(e_\alpha), \\ &= -v \tanh[K_f(\rho - R)] \cos(e_\alpha) + v \operatorname{sech}[K_f(\rho - R)] \operatorname{sen}(e_\alpha).\end{aligned}\quad (5.19)$$

Seja a função definida positiva

$$W(\rho) = \ln[\cosh(K_f(\rho - R))], \quad (5.20)$$

cuja derivada temporal é dada por

$$\begin{aligned}\dot{W} &= K_f \tanh[K_f(\rho - R)] \dot{\rho}, \\ &= K_f v \{-\tanh[K_f(\rho - R)]^2 \cos(e_\alpha) + \tanh[K_f(\rho - R)] \operatorname{sech}[K_f(\rho - R)] \operatorname{sen}(e_\alpha)\}.\end{aligned}$$

Se  $|e_\alpha| \leq \Phi < \pi/4$ , então pode-se afirmar que

$$\dot{W} < K_f v \cos(e_\alpha) \{-\tanh[K_f(\rho - R)]^2 + |\tanh[K_f(\rho - R)]| \tan(\Phi)\}. \quad (5.21)$$

De acordo com (5.21),  $\dot{W}$  é negativa fora do conjunto atrativo  $\{|\tanh[K_f(\rho - R)]| < \tan(\Phi)\}^1$ .

<sup>1</sup>Como o máximo valor da função tangente hiperbólica é 1, é preciso que  $\tan(\Phi)$  seja menor que 1. Por isso  $\Phi$  deve ser menor do que  $\pi/4$ .

Isso significa que, a partir de (5.20), para  $b = \ln[\cosh(\operatorname{atanh}(\tan(\Phi)))]$ , as soluções de (5.19) que começam ou chegam em  $\{W(\rho) \leq b\}$  permanecerão lá indefinidamente, uma vez que  $\dot{W}$  é negativa na fronteira  $W = b$ . Portanto, as soluções são *ultimately bounded*, com o *ultimate bound* (UB)

$$\ln[\cosh(K_f(\rho - R))] \leq b \Rightarrow |\rho - R| \leq \Delta_R = \frac{\operatorname{atanh}[\tan(\Phi)]}{K_f}. \quad (5.22)$$

Agora é necessário descobrir sob quais condições o robô aéreo irá circular a curva alvo após a convergência para o UB (5.22). Para tanto, deve-se analisar o comportamento dinâmico do ângulo  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= v \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\rho} \\ &= \frac{v}{\rho} \operatorname{sen}(\alpha_r(\rho) + e_\alpha) \\ &= \frac{v}{\rho} \{ \operatorname{sen}[\alpha_r(\rho)] \cos(e_\alpha) + \cos[\alpha_r(\rho)] \operatorname{sen}(e_\alpha) \} \\ &= \frac{v}{\rho} \{ \operatorname{sech}[K_f(\rho - R)] \cos(e_\alpha) + \tanh[K_f(\rho - R)] \operatorname{sen}(e_\alpha) \} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Garante-se que o robô aéreo irá circular a curva alvo se

$$\operatorname{sech}[K_f(\rho - R)] \cos(e_\alpha) + \tanh[K_f(\rho - R)] \operatorname{sen}(e_\alpha) > 0. \quad (5.24)$$

Uma vez que o robô aéreo entre na região definida pelo UB dado por (5.22), uma condição suficiente para se satisfazer (5.24) é

$$\operatorname{sech}[\operatorname{acosh}(\exp(b))] \cos(\Phi) - |\tanh[\operatorname{acosh}(\exp(b))]| \operatorname{sen}(\Phi) > 0, \quad (5.25)$$

ou, em uma forma mais compacta, utilizando-se o fato de que  $b = \ln[\cosh(\operatorname{atanh}(\tan(\Phi)))]$ ,

$$\operatorname{csch}[\operatorname{atanh}(\tan(\Phi))] > \tan(\Phi). \quad (5.26)$$

Utilizando-se  $\operatorname{csch}(\operatorname{atanh}(x)) = \sqrt{1-x^2}/x$ , e após algumas manipulações algébricas, a desi-

gualdade (5.26) pode ser expressa como

$$\Phi < 0,6663. \quad (5.27)$$

Agora é preciso considerar para quais valores de  $K_\alpha$  a restrição de velocidade angular de guinada (5.6) ou (5.10) é satisfeita. Combinando-se (5.10) e (5.16), e utilizando-se a desigualdade triangular:

$$\left| v \frac{\text{sen}(\alpha)}{\rho} + K_f v \text{sech}[K_f(\rho - R)] \cos(\alpha) + K_\alpha \text{sat}\left(\frac{e_\alpha}{\Phi}\right) + \delta_\omega \right| \leq \left| \sqrt{\left(\frac{v}{\rho}\right)^2 + (K_f v \text{sech}[K_f(\rho - R)])^2} \text{sen}(\alpha + \phi) \right| + K_\alpha \left| \text{sat}\left(\frac{e_\alpha}{\Phi}\right) \right| + |\delta_\omega| \quad (5.28)$$

em que  $\phi = \text{atan}(K_f \rho \text{sech}[K_f(\rho - R)])$ . Portanto, uma faixa conservadora de valores para  $K_\alpha$  que satisfaz a restrição (5.10) é

$$K_\alpha \leq \omega_M - v_{max} \sqrt{\frac{1}{\rho_{min}^2} + K_f^2} - \Delta_\omega, \quad (5.29)$$

em que  $v_{max}$  é um limitante superior qualquer para  $v$  e  $\rho_{min}$  é um limitante inferior qualquer para  $\rho$ . No pior caso,  $v_{max} = v_M$ . Uma vez que se assumiu no Teorema 5 que o robô aéreo inicia sua trajetória na região  $\Omega_0$ , um valor plausível para  $\rho_{min}$  é  $R - \Delta_R$ , isto é, o valor mínimo que pode ser assumido por  $\rho$  quando o robô aéreo alcança o UB definido em (5.22). Assim, (5.29) pode ser reescrita como

$$K_\alpha \leq \omega_M - v_M \sqrt{\frac{1}{(R - \Delta_R)^2} + K_f^2} - \Delta_\omega. \quad (5.30)$$

Agora é preciso verificar as condições para se satisfazer a restrição de velocidade de translação (5.4). A dinâmica de velocidade de translação com o comando  $v_c(t) = v_d$  é:

$$\dot{v} = \frac{1}{\tau_v}(-v + v_d) + \delta_a. \quad (5.31)$$

Seja a função

$$H(v) = \frac{1}{2}(v - v_d)^2, \quad (5.32)$$

cuja derivada temporal é dada por

$$\begin{aligned}
 \dot{H} &= (v - v_d) \dot{v} \\
 &= \frac{1}{\tau_v} [-(v - v_d)^2 + (v - v_d) \tau_v \delta_a] \\
 &\leq \frac{1}{\tau_v} [-(v - v_d)^2 + |v - v_d| \tau_v \Delta_a]
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

O desenvolvimento de uma análise análoga àquela após (5.21) concernente à dinâmica da variável  $\rho$  implica que o UB para a velocidade de translação é

$$|v - v_d| \leq \sqrt{2\eta}, \quad \eta > \frac{1}{2}(\tau_v \Delta_a)^2 \tag{5.34}$$

Assim, a restrição (5.4) será obedecida se

$$v_m \leq v_d - \sqrt{2\eta} \quad \text{e} \quad v_M \geq v_d + \sqrt{2\eta}. \tag{5.35}$$

Depois de o robô aéreo entrar em  $|v - v_d| \leq \sqrt{2\eta}$ ,  $v_{max}$  pode até ser atualizado para  $v_d + \sqrt{2\eta}$  na desigualdade (5.29), reduzindo-se assim o conservadorismo em  $K_\alpha$ .

Deve-se analisar agora as desigualdades que precisam ser satisfeitas durante o projeto da estratégia de controle. As referidas desigualdades são

$$K_\alpha \leq \omega_M - v_M \sqrt{\frac{1}{(R - \Delta_R)^2} + K_f^2} - \Delta_\omega, \tag{5.36}$$

$$K_\alpha > \Delta_\omega, \tag{5.37}$$

$$\Phi < 0,6663, \tag{5.38}$$

$$\Phi < \frac{\pi}{4}. \tag{5.39}$$

As desigualdades (5.36) e (5.37) podem ser combinadas da seguinte maneira:

$$\Delta_\omega < K_\alpha \leq \omega_M - v_M \sqrt{\frac{1}{(R - \Delta_R)^2} + K_f^2} - \Delta_\omega, \tag{5.40}$$

e as desigualdades (5.38) e (5.39) podem ser reduzidas a

$$\Phi < 0,6663. \quad (5.41)$$

■

O seguinte Teorema estende os resultados de convergência apresentados no Teorema 5 para um conjunto de condições iniciais maior:

**Teorema 6** *Se o robô aéreo descrito pelo conjunto de equações (5.5) iniciar sua trajetória fora do conjunto  $\Omega_0$ , uma estratégia de controle dada por*

$$v_c = v_d \quad (5.42)$$

e

$$\theta_c = \begin{cases} (\psi - \alpha) - \tau_\theta K_\theta \text{sat}\left(\frac{\theta - \theta^*}{\Gamma}\right), & \rho < R, \\ (\psi - \alpha) + \tau_\theta(\omega_M - \Delta_\omega), & \rho \geq R, (\alpha_r(\rho) \leq \alpha \leq \pi \text{ ou } -\pi < \alpha < 0), |e_\alpha| > \Phi, \\ (\psi - \alpha) - \tau_\theta(\omega_M - \Delta_\omega), & \rho \geq R, 0 \leq \alpha < \alpha_r(\rho), |e_\alpha| > \Phi, \end{cases} \quad (5.43)$$

em que  $\theta^*$  é uma constante que representa o valor inicial de  $\theta$  quando o robô aéreo entra na região do espaço de estados em que  $\rho < R$ , com

$$\Delta_\omega \leq K_\theta \leq \omega_M - \Delta_\omega, \quad \omega_M > 2\Delta_\omega, \quad \Gamma < \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \frac{v_M}{R} < \omega_M - 2\Delta_\omega,$$

fará com que o robô aéreo convirja para  $\Omega_0$  sem violar as restrições (5.4) e (5.6).

**Prova:** Sejam os conjuntos

$$\Omega_1 = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2 \times [v_m, v_M] / \rho < R\},$$

$$\Omega_2 = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2 \times [v_m, v_M] / \rho \geq R, |e_\alpha| > \Phi, (\pi/2 < \alpha \leq \pi \text{ ou } -\pi < \alpha < -\pi/2)\},$$

$$\Omega_3 = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2 \times [v_m, v_M] / \rho \geq R, |e_\alpha| > \Phi, \alpha_r(\rho) \leq \alpha \leq \pi/2\},$$

$$\Omega_4 = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2 \times [v_m, v_M] / \rho \geq R, |e_\alpha| > \Phi, 0 \leq \alpha < \alpha_r(\rho) < \pi/2\},$$

$$\Omega_5 = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2 \times [v_m, v_M] / \rho \geq R, |e_\alpha| > \Phi, -\pi/2 \leq \alpha < 0\}.$$

Note que  $e_\alpha = \alpha - \alpha_r(\rho)$ , mas decidiu-se definir os conjuntos acima por meio de algumas desigualdades em termos da variável  $\alpha$  visando-se favorecer a inteligibilidade da prova. É importante que se enfatize que o resultado da operação  $e_\alpha = \alpha - \alpha_r(\rho)$  sempre é mapeado para o intervalo  $(-\pi, \pi]$ .

Se o robô aéreo iniciar sua trajetória em  $\Omega_1$  (dentro do círculo de raio  $R$ ), tem-se a seguinte dinâmica para o ângulo de guinada:

$$\dot{\theta} = -K_\theta \text{sat}\left(\frac{\theta - \theta^*}{\Gamma}\right) + \delta_\omega. \quad (5.44)$$

A fim de se satisfazer a restrição (5.6), é suficiente que se escolha  $K_\theta$  tal que  $K_\theta + \Delta_\omega \leq \omega_M$ .

Seja a função

$$Q(\theta) = \frac{1}{2}(\theta - \theta^*)^2, \quad (5.45)$$

cuja derivada temporal é

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= (\theta - \theta^*) \dot{\theta} \\ &= (\theta - \theta^*) \left[ -K_\theta \text{sat}\left(\frac{\theta - \theta^*}{\Gamma}\right) + \delta_\omega \right]. \end{aligned}$$

Se for considerado que  $|\theta - \theta^*| > \Gamma$ , então

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= (\theta - \theta^*) [-K_\theta \text{sgn}(\theta - \theta^*) + \delta_\omega] \\ &\leq -(K_\theta - \Delta_\omega) |\theta - \theta^*|. \end{aligned} \quad (5.46)$$

De acordo com (5.46),  $\dot{Q}$  é negativa no conjunto  $E = \{\theta - \theta^* / |\theta - \theta^*| > \Gamma\}$  se  $K_\theta > \Delta_\omega$ . Isso significa que, se o sistema começar sua trajetória no conjunto  $E$ , ele alcançará o conjunto atrativo e invariante

$$F = \{\theta - \theta^* / |\theta - \theta^*| \leq \Gamma\} \quad (5.47)$$

em um tempo finito. Se o sistema chegar a  $F$  antes de eventualmente cruzar a fronteira  $\rho = R$ , e se  $\Gamma < \pi/2$ , isso significa que o vetor velocidade  $[\dot{x} \ \dot{y}]^T$  sempre terá uma projeção positiva sobre o vetor  $[\cos(\theta^*) \ \text{sen}(\theta^*)]^T$  no plano  $xy$ . Portanto, é garantido que o sistema cruzará a fronteira

$\rho = R$  com  $(\pi/2 < \alpha \leq \pi$  ou  $-\pi < \alpha < -\pi/2)$ . Se isso acontecer quando  $|e_\alpha| \leq \Phi$ , então o sistema entrará no conjunto  $\Omega_0$ ; se isso acontecer quando  $|e_\alpha| > \Phi$ , então o sistema entrará no conjunto  $\Omega_2$ .

Em  $\Omega_2$ , tem-se a seguinte dinâmica para o ângulo de guinada:

$$\dot{\theta} = \omega_M + (\delta_\omega - \Delta_\omega) \Rightarrow \omega_M - 2\Delta_\omega \leq \dot{\theta} \leq \omega_M. \quad (5.48)$$

Portanto, se  $\omega_M > 2\Delta_\omega$ , a restrição (5.6) sempre será satisfeita e o robô aéreo descreverá uma curva no sentido anti-horário. Considerando-se que  $(\pi/2 < \alpha \leq \pi$  ou  $-\pi < \alpha < -\pi/2)$  em  $\Omega_2$ , a partir de (5.5) é possível concluir que  $\dot{\rho} > 0$ , isto é, uma vez que o robô aéreo esteja em  $\Omega_2$ , ele nunca entrará em  $\Omega_1$ . A dinâmica do ângulo  $\alpha$  é dada por

$$\dot{\alpha} = v \frac{\text{sen}(\alpha)}{\rho} - [\omega_M + (\delta_\omega - \Delta_\omega)], \quad (5.49)$$

o que significa que a desigualdade  $\dot{\alpha} \leq \frac{v_M}{R} - (\omega_M - 2\Delta_\omega)$  é verdadeira. Se  $\frac{v_M}{R} < \omega_M - 2\Delta_\omega$ , então  $\dot{\alpha} < 0$ , o que significa que  $\alpha$  irá decrescer até alcançar o valor  $\pi/2$ . Vale frisar aqui que, se  $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$ , o valor de  $\alpha$  decrescerá até  $-\pi$  e chaveará para  $\pi$ , e  $\alpha$  continuará a decrescer até  $\pi/2$ . Se isso acontecer antes de  $|e_\alpha| \leq \Phi$  se tornar verdade eventualmente, então o sistema entrará em  $\Omega_3$ ; se  $|e_\alpha| \leq \Phi$  se tornar verdade antes que  $\alpha$  alcance o valor  $\pi/2$ , então o sistema entrará em  $\Omega_0$ .

Em  $\Omega_3$ , a dinâmica para o ângulo de guinada é idêntica àquela em  $\Omega_2$ . Assim, é possível afirmar que  $\dot{\alpha} < 0$  se  $\frac{v_M}{R} < \omega_M - 2\Delta_\omega$ . Considerando-se que  $\alpha_r(\rho) \leq \alpha \leq \pi/2$ , então  $\dot{\rho} = -v \cos(\alpha) < 0 \Rightarrow \dot{\alpha}_r(\rho) > 0$ . Isso significa que  $\alpha$  decresce e  $\alpha_r(\rho)$  cresce, de modo que ambos os valores tendem a alcançar um valor comum  $\alpha^*$  que satisfaz  $0 < \alpha^* < \pi/2$ . Todavia, antes que isso aconteça a desigualdade  $|e_\alpha| \leq \Phi$  se torna verdade, e o sistema entra em  $\Omega_0$ .

Em  $\Omega_4$ , tem-se a seguinte dinâmica para o ângulo de guinada:

$$\dot{\theta} = -\omega_M + (\delta_\omega + \Delta_\omega) \Rightarrow -\omega_M \leq \dot{\theta} \leq -\omega_M + 2\Delta_\omega. \quad (5.50)$$

Portanto, se  $\omega_M > 2\Delta_\omega$ , a restrição (5.6) será sempre satisfeita e o robô aéreo descreverá uma curva no sentido horário. Considerando-se que  $0 < \alpha < \alpha_r(\rho)$  em  $\Omega_4$ , tem-se que  $\dot{\rho} =$

$-\nu \cos(\alpha) < 0$ . Logo, se  $\rho < R$  se tornar verdade antes que  $|e_\alpha| \leq \Phi$  se torne verdade eventualmente, então o sistema entrará em  $\Omega_1$ ; se  $|e_\alpha| \leq \Phi$  se tornar verdade antes que  $\rho < R$  se torne verdade, então o sistema entrará em  $\Omega_0$ .

Em  $\Omega_5$ , a dinâmica para o ângulo de guinada é idêntica àquela em  $\Omega_2$  e  $\Omega_3$ . Desse modo, pode-se afirmar que  $\dot{\alpha} < 0$  se  $\frac{\nu M}{R} < \omega_M - 2\Delta\omega$ . Considerando-se que  $-\pi/2 \leq \alpha < 0$ , então  $\dot{\rho} = -\nu \cos(\alpha) < 0$ . Portanto, tanto  $\alpha$  quanto  $\rho$  decrescem. Nesse caso, três eventos significativos podem acontecer: ( $E_1$ )  $\rho < R$  se torna verdade; ( $E_2$ )  $\alpha$  alcança o valor  $-\pi/2$ ; ( $E_3$ )  $|e_\alpha| \leq \Phi$  se torna verdade. A transição entre regiões no espaço de estados dependerá do evento que ocorrer primeiro. Se for  $E_1$ , o sistema entrará em  $\Omega_1$ ; se for  $E_2$ , o sistema entrará em  $\Omega_2$ ; se for  $E_3$ , o sistema entrará em  $\Omega_0$ .

Um resumo esquemático da discussão acima é apresentado na Figura 5.5 por meio da máquina de estados do sistema híbrido resultante. Ele revela que o robô aéreo entrará em  $\Omega_0$  mais cedo ou mais tarde, mesmo que ele comece sua trajetória em  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$ ,  $\Omega_4$  ou  $\Omega_5$ . Como  $\bigcup_{i=0}^5 \Omega_i \equiv \mathbf{z}$ , todas as condições iniciais estão cobertas por este Teorema.

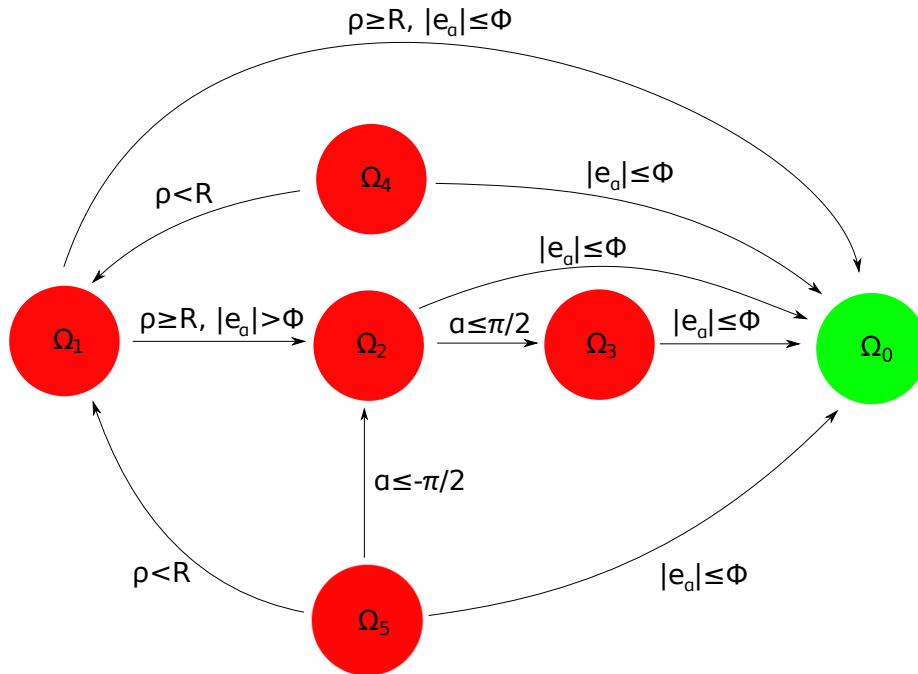


Figura 5.5: Máquina de estados do sistema híbrido resultante - Representação esquemática dos resultados apresentados no Teorema 6.

A prova de que a lei de controle (5.42) não implicará a violação da restrição (5.4) é idêntica

àquela apresentada no Teorema 5.

■

Pode-se escrever agora um corolário que resume os resultados desenvolvidos neste capítulo:

**Corolário 2** *O robô aéreo descrito pelo conjunto de equações (5.5), quando submetido à lei de controle chaveada*

$$\theta_c = \begin{cases} (\psi - \alpha) - \tau_\theta K_\theta \text{sat}\left(\frac{\theta - \theta^*}{\Gamma}\right), & \text{se } \mathbf{z} \in \Omega_1, \\ (\psi - \alpha) + \tau_\theta(\omega_M - \Delta\omega), & \text{se } \mathbf{z} \in \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_5, \\ (\psi - \alpha) - \tau_\theta(\omega_M - \Delta\omega), & \text{se } \mathbf{z} \in \Omega_4, \\ (\psi - \alpha) + \tau_\theta v \frac{\text{sen}(\alpha)}{\rho} + \tau_\theta K_\alpha \text{sat}\left(\frac{e_\alpha}{\Phi}\right) - \tau_\theta \dot{\alpha}_r(\rho), & \text{se } \mathbf{z} \in \Omega_0 \end{cases}$$

e

$$v_c = v_d, \quad (5.51)$$

com

$$\Delta\omega \leq K_\theta \leq \omega_M - \Delta\omega, \quad \omega_M > 2\Delta\omega, \quad \Gamma < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{v_M}{R} < \omega_M - 2\Delta\omega, \quad \Phi < 0,6663,$$

convergir para o UB no plano  $xy$  dado por (5.22) e circulará em torno da origem  $\rho = 0$  no sentido anti-horário, sem violar as restrições (5.4) e (5.6), se as desigualdades

$$v_m \leq v_d - \sqrt{2\eta}, \quad v_M \geq v_d + \sqrt{2\eta}, \quad \eta > \frac{1}{2}(\tau_v \Delta_a)^2$$

e

$$\Delta\omega < K_\alpha \leq \omega_M - v_M \sqrt{\frac{1}{(R - \Delta_R)^2} + K_f^2} - \Delta\omega$$

forem satisfeitas.

Tem-se, por fim, um controle com garantias de convergência feito por um sistema híbrido, incerto, com restrições.

### 5.2.2 Análise de Simulação

Foi realizado um experimento numérico que ilustra os resultados teóricos apresentados acima. Tendo em vista as muitas restrições que precisam ser levadas em consideração no projeto da estratégia de controle, serão descritos a seguir os passos seguidos na escolha dos valores de  $K_\alpha$  e  $K_f$ . Os valores de parâmetros utilizados nessa simulação foram  $R = 100\text{m}$ ,  $v_d = 15\text{m/s}$ ,  $v_m = 10\text{m/s}$ ,  $v_M = 20\text{m/s}$ ,  $\omega_M = 1\text{rad/s}$ ,  $\tau_\theta = \tau_v = 1\text{s}$ ,  $K_\theta = 0,5\text{s}^{-1}$ ,  $\Gamma = \pi/3$  e  $\Delta_\alpha = 2\text{m/s}^2$ .

Escolheu-se  $\Delta_R$  igual a  $30\text{m}$ . Uma vez que  $R$  e  $\Delta_R$  já foram definidos, e uma vez que o limitante superior para  $\Phi$  é  $0,6663$ , tem-se a partir de (5.22) que  $K_f$  é superiormente limitado por  $0,0354\text{m}^{-1}$ . De acordo com a expressão (5.40), é possível que se descubra qual é a região factível no plano  $K_f \times K_\alpha$  para um determinado valor de  $\Delta_\omega$ . A Figura 5.6 apresenta a região de valores viáveis para  $K_f$  e  $K_\alpha$  em função de  $\Delta_\omega$ . Os resultados para três valores diferentes de  $\Delta_\omega$  são apresentados na Figura 5.7: (i)  $\Delta_\omega = 0,2\text{rad/s}$ ; (ii)  $\Delta_\omega = 0,3\text{rad/s}$ ; (iii)  $\Delta_\omega = 0,4\text{rad/s}$ .

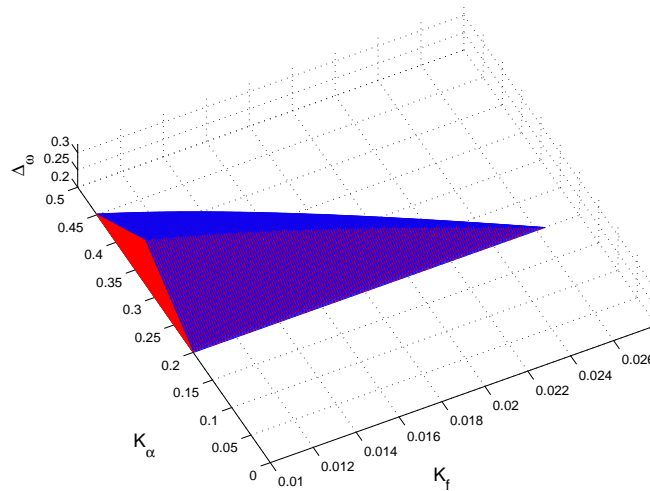


Figura 5.6: Valores viáveis de  $K_f$  e  $K_\alpha$  em função de  $\Delta_\omega$ .

Se for considerado que o nível de incerteza é  $\Delta_\omega = 0,3\text{rad/s}$ , então pode-se escolher  $K_\alpha = 0,32\text{s}^{-1}$  e  $K_f = 0,012\text{m}^{-1}$ . Tal valor de  $K_f$  corresponde a  $\Phi = 0,33$ .

As Figuras 5.8 e 5.9 ilustram os resultados da simulação. Como se pode perceber, todas as variáveis convergiram para os seus UBs e as restrições na velocidade de translação e na velocidade angular de guinada foram atendidas durante toda a simulação. A evolução temporal das funções de Lyapunov  $V$  (dinâmica de  $e_\alpha$ ),  $W$  (dinâmica radial) e  $H$  (dinâmica da velocidade

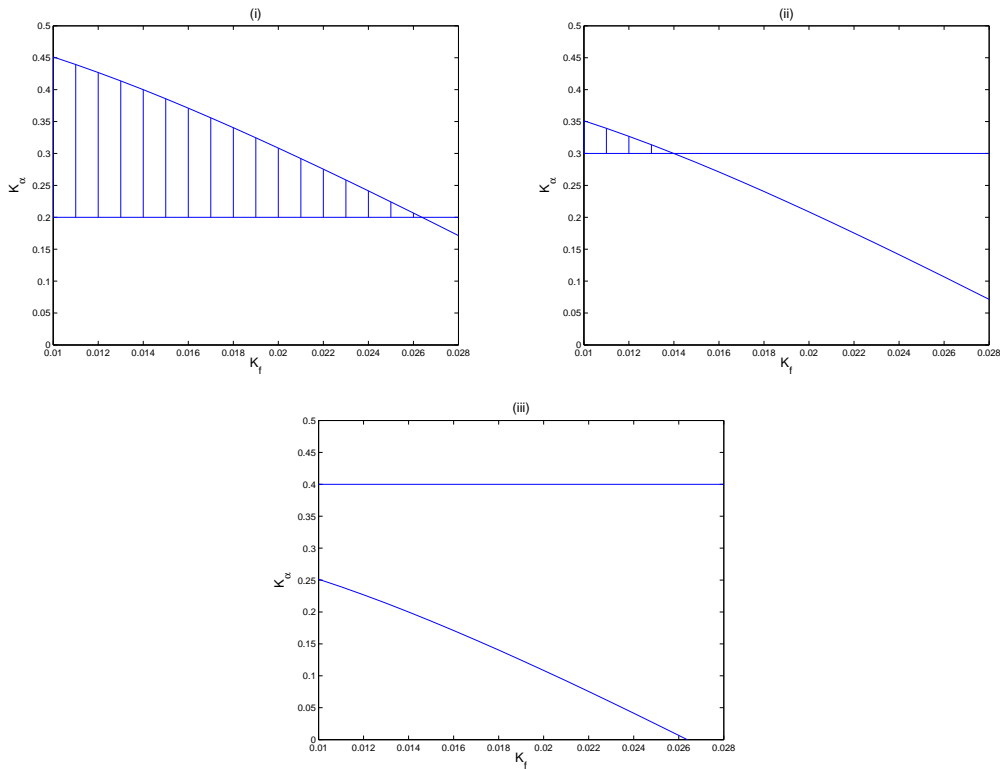


Figura 5.7: Região factível (hachurada) no plano  $K_f \times K_\alpha$  para três casos diferentes: (i)  $\Delta\omega = 0,2\text{rad/s}$ ; (ii)  $\Delta\omega = 0,3\text{rad/s}$ ; (iii)  $\Delta\omega = 0,4\text{rad/s}$  (caso infactível). Os valores dos outros parâmetros para os três casos são  $R = 100\text{m}$ ,  $\Delta_R = 30\text{m}$ ,  $\omega_M = 1\text{rad/s}$  e  $v_M = 20\text{m/s}$ .

de translação) é apresentada na Figura 5.10, e vê-se que, em um intervalo de tempo finito, elas convergem para uma faixa limitada superiormente por um valor constante correspondente aos UBs de  $e_\alpha$ ,  $\rho$  e  $v$ , respectivamente.

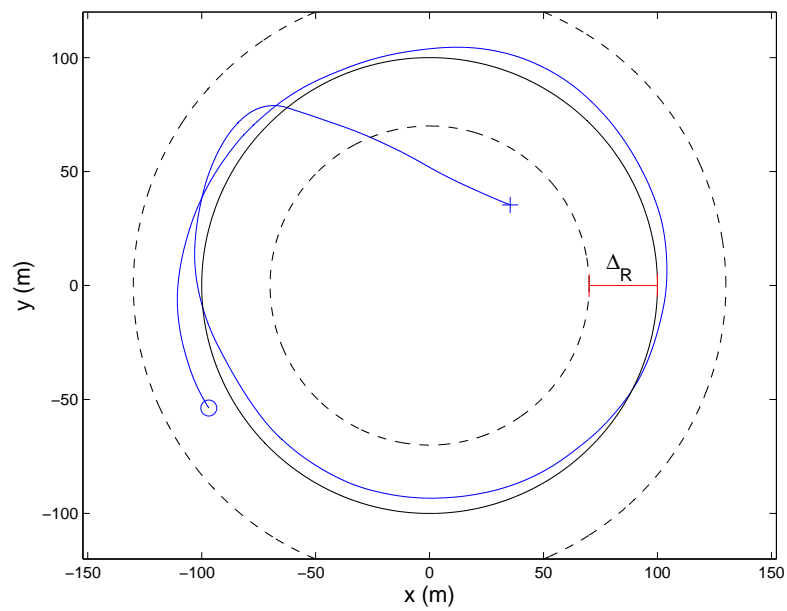


Figura 5.8: Simulação da trajetória do robô aéreo controlado pela estratégia proposta baseada em campos vetoriais artificiais. A cruz azul representa a posição inicial, e o círculo azul representa a posição final.

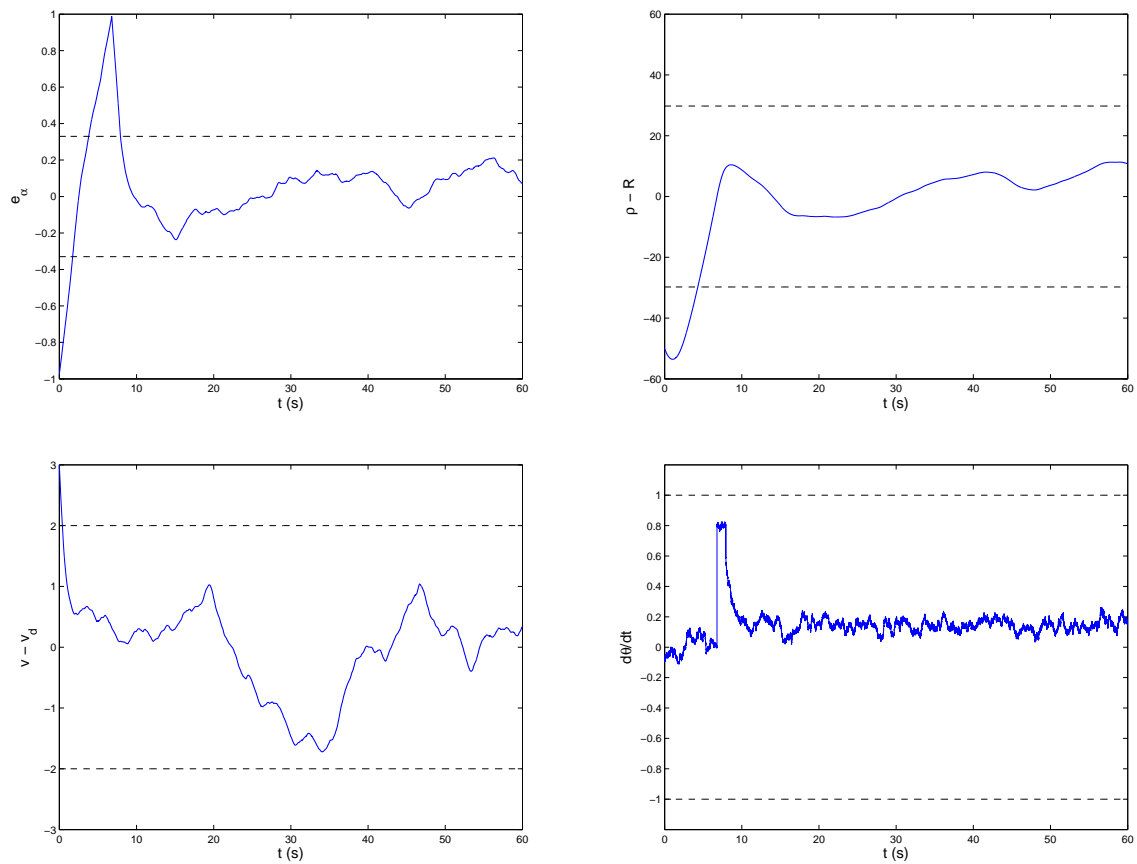


Figura 5.9: Erro em  $\alpha$ , erro em  $\rho$ , erro em  $v$  e velocidade angular de guinada. Os UBs e as restrições são indicados pelas linhas pontilhadas.

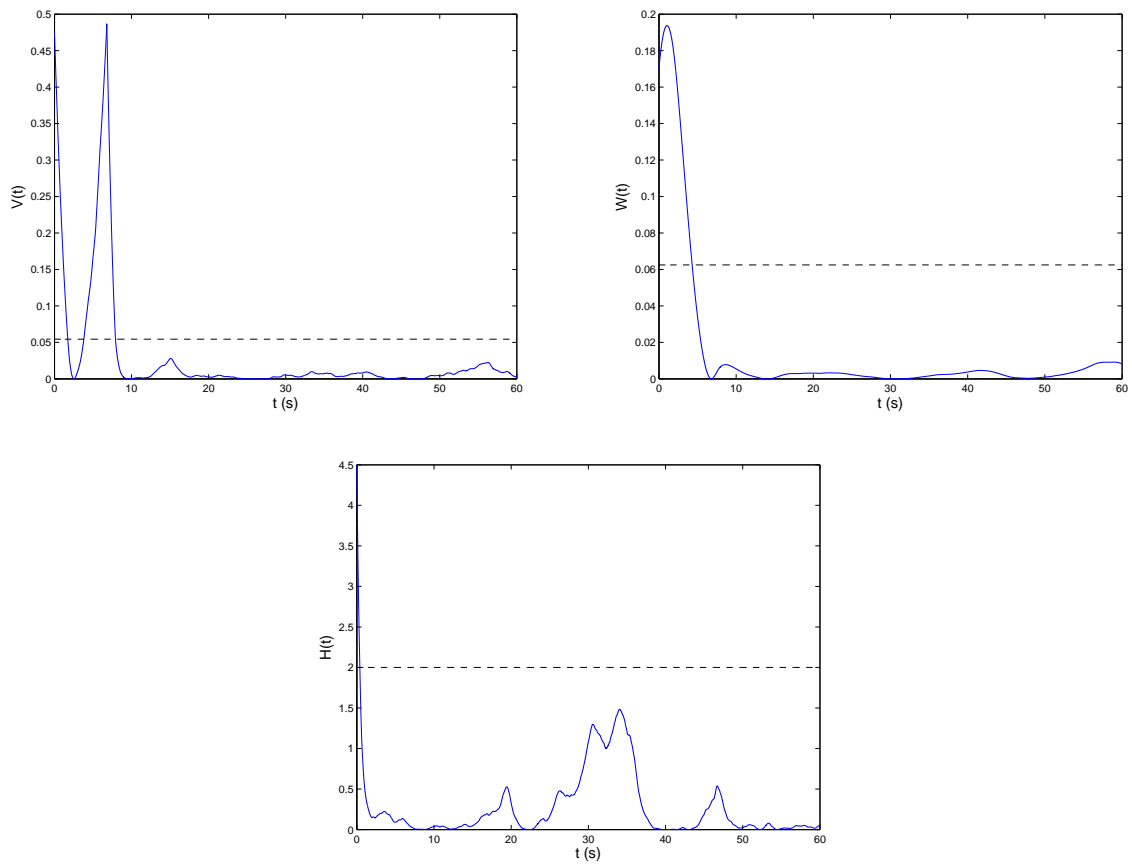


Figura 5.10: Evolução temporal das funções de Lyapunov  $V$ ,  $W$  e  $H$ . Os UBs são indicados pelas linhas pontilhadas.

# Controle de Formação - Consenso de Integradores Duplos com Restrições de Velocidade

---

Neste capítulo é abordado o problema de consenso em um sistema multiagente. Pode-se definir consenso como o processo de se fazer com que um time de agentes chegue em um acordo acerca do valor de uma ou mais variáveis por meio da troca de informação entre vizinhos. Considera-se um modelo de agente diferente do modelo considerado nos capítulos anteriores. São considerados integradores duplos sujeitos a restrições. Apesar disso, conforme será mencionado mais adiante, determinadas tarefas a serem executadas por VANTs podem fazer uso deste modelo. É proposta uma metodologia para o consenso de múltiplos agentes integradores duplos. Diferentemente de outros trabalhos (Ren, 2008; Abdessameud e Tayebi, 2010; Lawton et al., 2003; Abdessameud e Tayebi, 2011), que consideram a presença de restrições simétricas na entrada de aceleração, neste trabalho são consideradas restrições não simétricas na variável de estado velocidade. Em (Abdessameud e Tayebi, 2010) os autores propõem uma estratégia de consenso para integradores duplos com saturação de entrada (aceleração limitada) e demonstram que a velocidade de cada agente é limitada. Todavia, eles não apresentam limites explícitos para as velocidades, diferentemente da estratégia apresentada neste capítulo. Além do mais, a abordagem aqui descrita permite que uma classe mais ampla de funções não lineares seja utilizada para descrever as saturações de velocidade (ver Seção 6.1), já que elas não precisam ser ímpares, como em (Ren, 2008), (Abdessameud e Tayebi, 2010) e (Lawton et al., 2003), nem diferenciáveis, como em (Abdessameud e Tayebi, 2011).

As restrições de velocidade não simétricas devem ser consideradas, por exemplo, em um

problema de coordenação de múltiplos VANTs de asas fixas, que apresentam limites máximo e mínimo positivos na velocidade de translação. Portanto, o modelo simples tratado neste capítulo poderia ser utilizado diretamente como um modelo de referência a ser seguido no contexto do projeto de estratégias de guiagem e navegação de VANTs com o objetivo de coordenação de tais veículos. Tal filosofia de se utilizar um modelo mais simples para representar cada agente em um time de VANTs também foi utilizado em (Bayraktar et al., 2004), por exemplo.

Além disso, a lei de controle proposta de cada agente não depende das velocidades ou acelerações dos vizinhos, diferentemente do algoritmo de consenso com restrições de entrada e com referência de posição, velocidade e aceleração de grupo apresentado em (Ren, 2008), por exemplo. O fato de se propor uma lei de controle que não depende das velocidades dos vizinhos em relação ao solo é algo interessante do ponto de vista da factibilidade da missão, uma vez que a realização da medição dessas velocidades não é uma tarefa simples. No contexto de VANTs, em geral é mais fácil medir as velocidades em relação à atmosfera do que em relação ao solo.

Uma possível aplicação para a estratégia de controle aqui proposta seria fazer com que  $n$  VANTs, cada um viajando em linha reta e distribuídos em faixas paralelas e adjacentes, percorressem uma área retangular com velocidade constante e pareados lado a lado, sem violar as restrições de velocidade. A realização de tal tarefa é ilustrada esquematicamente na Figura 6.1.

Finalmente, são apresentadas garantias matemáticas de que a estratégia proposta fará com que o sistema multiagente alcance o consenso assintoticamente com uma velocidade de grupo desejada sem violar as restrições de velocidade.

Este Capítulo está organizado da seguinte maneira. Na Seção 6.1 é definido o problema de consenso a ser abordado. A Seção 6.3 apresenta a estratégia de consenso propriamente dita. Finalmente, um experimento numérico é apresentado e analisado em 6.4.

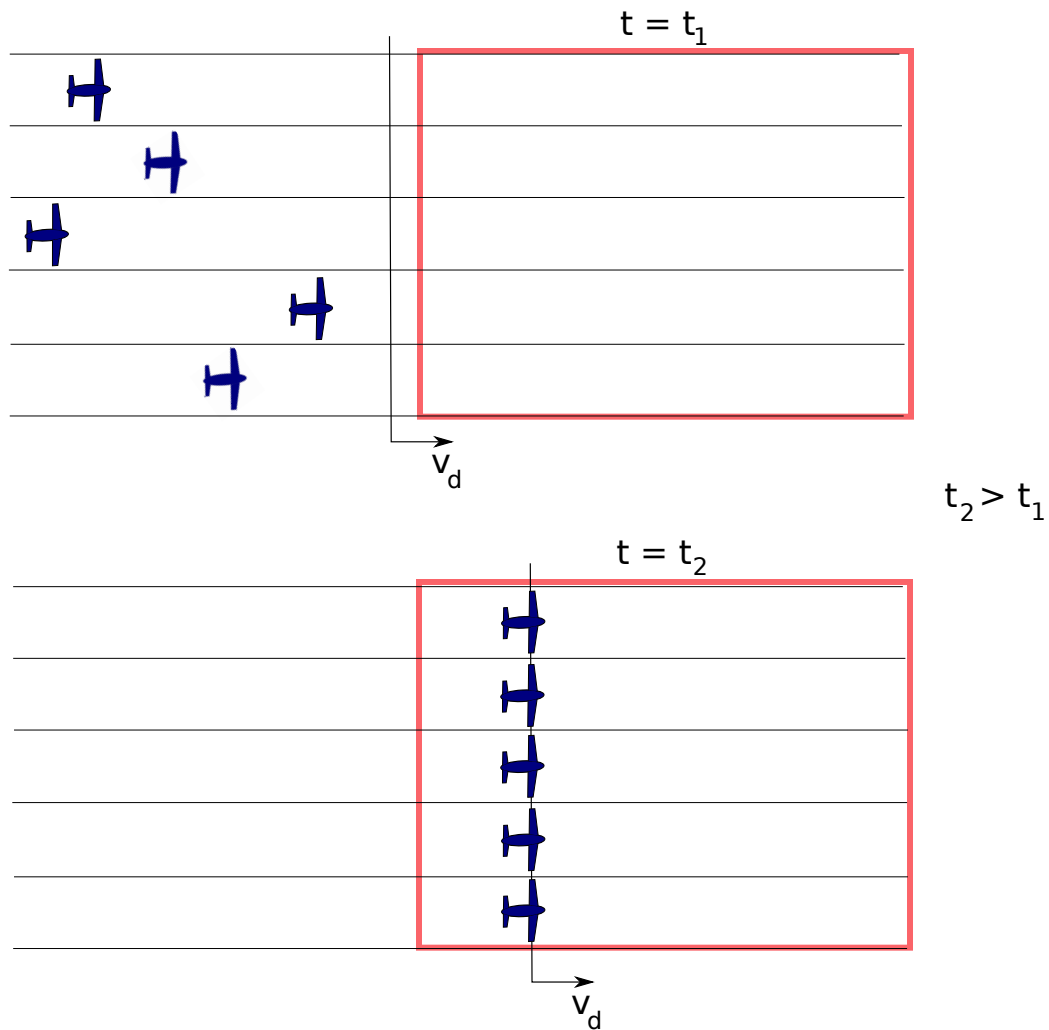


Figura 6.1: Coordenação de  $n$  VANTs para a realização de varredura de uma área retangular.

## 6.1 Definição do Problema

Neste trabalho, considera-se um grupo de  $n$  agentes com comportamento dinâmico descrito pelo seguinte modelo:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_i &= \mathbf{v}_i, \\ \dot{\mathbf{v}}_i &= \mathbf{u}_i,\end{aligned}\tag{6.1}$$

em que  $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^m$  e  $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^m$  são, respectivamente, a posição e a velocidade do  $i$ -ésimo agente, e  $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle de aceleração. Os agentes são submetidos à seguinte restrição:

$$\mathbf{v}_{min} \leq \mathbf{v}_i \leq \mathbf{v}_{max}, \quad (6.2)$$

em que  $\mathbf{v}_{min} \in \mathbb{R}^m$  e  $\mathbf{v}_{max} \in \mathbb{R}^m$  são constantes que definem, respectivamente, os limites mínimo e máximo de velocidade, e a operação representada por ‘ $\leq$ ’ é definida componente a componente, isto é,  $[x_1 \dots x_m]^T \leq [y_1 \dots y_m]^T \rightarrow x_1 \leq y_1, \dots, x_m \leq y_m$ , em que  $x_i \in \mathbb{R}$  e  $y_i \in \mathbb{R}$ . Diferentemente do que foi feito em (Li et al., 2011) que lida com restrições simétricas e integradores simples, deve-se enfatizar que (6.2) é uma restrição não-simétrica, isto é,  $\mathbf{v}_{min} \neq -\mathbf{v}_{max}$ , que é levada em conta no contexto de integradores duplos. Seja a lei de controle da forma

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{K}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{ci}), \quad (6.3)$$

em que  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  é uma matriz diagonal definida positiva. Portanto, o comportamento dinâmico de cada agente pode ser descrito por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_i &= \mathbf{v}_i, \\ \dot{\mathbf{v}}_i &= -\mathbf{K}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{ci}), \end{aligned} \quad (6.4)$$

e agora há uma equação diferencial de primeira ordem que relaciona  $\mathbf{v}_i$  à entrada virtual  $\mathbf{v}_{ci}$ .

Garantindo-se que as restrições

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{min} \leq \mathbf{v}_i(0) \leq \mathbf{v}_{max}, \\ \mathbf{v}_{min} \leq \mathbf{v}_{ci} \leq \mathbf{v}_{max}, \end{cases} \quad (6.5)$$

são sempre satisfeitas, é possível garantir-se que (6.2) será sempre satisfeita. Isso pode ser facilmente mostrado utilizando-se resultados clássicos de estabilidade BIBO de sistemas dinâmicos lineares de primeira ordem.

A fim de se levar em conta as saturações de velocidade, o comando  $\mathbf{v}_{ci}$  deve ser projetado com base em uma função contínua  $\sigma : \mathbb{R} \mapsto (-1, 1)$  que satisfaz as seguintes propriedades:

P1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sigma(x) = -1$ ;

$$P2. \lim_{x \rightarrow \infty} \sigma(x) = 1;$$

$$P3. \sigma(0) = 0;$$

P4.  $\sigma(x)$  é uma função estritamente crescente.

A partir da propriedade P4, é direto que  $\sigma(x)$  é uma função invertível. Além disso, definindo-se a função

$$\gamma(x) = \int_0^x \sigma(\xi) d\xi, \quad (6.6)$$

tem-se que  $\gamma(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Finalmente, o problema a ser resolvido pode ser definido da seguinte maneira:

*Seja um time de  $n$  agentes cujo comportamento dinâmico individual é descrito por (6.1), cada um deles sob a atuação da lei de controle  $\mathbf{u}_i$  dada por (6.3). Encontre uma lei de controle virtual  $\mathbf{v}_{ci}$  para cada agente, que se baseia apenas na posição dos vizinhos, que faça com que esse sistema multi-agente, sem violar as restrições (6.5), alcance o consenso com uma velocidade de referência de grupo  $\mathbf{v}_d$  que satisfaz  $\mathbf{v}_{min} \leq \mathbf{v}_d \leq \mathbf{v}_{max}$ , isto é, para todo  $\mathbf{r}_i(0)$  e para valores admissíveis de  $\mathbf{v}_i(0)$ ,  $\mathbf{r}_i(t) \rightarrow \mathbf{r}_j(t)$  e  $\mathbf{v}_i(t) \rightarrow \mathbf{v}_d$  assintoticamente quando  $t \rightarrow \infty$ .*

A ideia de se propor uma estratégia que se baseie apenas nas posições dos vizinhos tem por objetivo a minimização da quantidade de troca de informação entre agentes necessária para o cumprimento da tarefa proposta.

## 6.2 Conceitos da Teoria Algébrica de Grafos

Antes de se abordar a estratégia de consenso propriamente dita que foi proposta neste trabalho, convém que sejam apresentados alguns conceitos fundamentais advindos da Teoria Algébrica de Grafos.

É comum que se modele a topologia de troca de informação em um sistema multiagente por meio de grafos. Neste capítulo, considera-se que, se o agente  $i$  pode obter informação do agente  $j$ , então o agente  $j$  também pode obter informação do agente  $i$ . Tal esquema de comunicação pode ser descrito por um grafo que contém ambas as arestas  $(i, j)$  e  $(j, i)$ , isto é, por um grafo não-direcionado (Bullo et al., 2009). Portanto, é importante que se estabeleçam algumas noções sobre grafos não-direcionados.

Um grafo consiste em um conjunto de vértices ou nós  $\mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$ , um conjunto de arestas  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ , e uma matriz de adjacências  $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  com zeros na diagonal ( $a_{ii} = 0, i \in \{1, \dots, n\}$ ). Se  $(i, j)$  for uma aresta de um grafo não-direcionado, isto é,  $(i, j) \in \mathcal{E} \Rightarrow (j, i) \in \mathcal{E}$ , diz-se que os vértices  $i$  e  $j$  são adjacentes, os agentes  $i$  e  $j$  se comunicam um com o outro, e  $a_{ij} = a_{ji} = 1$ . Caso contrário,  $a_{ij} = a_{ji} = 0$ . Portanto, a matriz de adjacências  $\mathbf{A}$  de um grafo não-direcionado é sempre simétrica.

Um caminho do vértice  $i_p$  ao vértice  $i_q$  em um grafo é uma sequência de vértices distintos que começa em  $i_p$  e termina em  $i_q$  tal que vértices consecutivos sejam adjacentes, para  $i_p, i_q \in \mathcal{V}$ . Diz-se que um grafo não-direcionado é *conectado* se houver um caminho entre quaisquer dois de seus vértices.

A matriz Laplaciana  $\mathbf{L} = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  associada a  $\mathbf{A}$  é definida como

$$l_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}, \quad l_{ij} = -a_{ij}, \quad i \neq j \quad (6.7)$$

A matriz Laplaciana  $\mathbf{L}$  de um grafo não-direcionado é simétrica e semidefinida positiva. É sempre verdade que 0 é um autovalor de  $\mathbf{L}$  associado com o autovetor  $\mathbf{1}_{n \times 1}$ . Um outro fato acerca de grafos não-direcionados é que 0 é um autovalor simples de  $\mathbf{L}$  e todos os outros autovalores são positivos se e somente se o grafo não-direcionado for conectado.

## 6.3 Estratégia de Consenso

Seja a seguinte variável de erro associada ao  $i$ -ésimo agente:

$$\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{r}_{ij}, \quad \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j. \quad (6.8)$$

Escrevendo-se a definição acima para todos os  $n$  agentes, obtém-se a expressão

$$\mathbf{e} = (\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_m) \mathbf{r}, \quad (6.9)$$

em que

$$\begin{cases} \mathbf{e} = [\mathbf{e}_1^T, \dots, \mathbf{e}_n^T]^T, \\ \mathbf{r} = [\mathbf{r}_1^T, \dots, \mathbf{r}_n^T]^T. \end{cases} \quad (6.10)$$

Nesse caso:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i &= (\mathbf{1}_{1 \times n} \otimes \mathbf{I}_m) \mathbf{e} \\ &= (\mathbf{1}_{1 \times n} \otimes \mathbf{I}_m) (\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_m) \mathbf{r} \\ &= (\mathbf{1}_{1 \times n} \mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_m) \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

Como  $\mathbf{1}_{1 \times n} \mathbf{L} = \mathbf{0}_{1 \times m}$ , tem-se que

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i = \mathbf{0}_{m \times 1}. \quad (6.12)$$

Note que no caso unidimensional ( $m = 1$ ), (6.9) se reduziria a  $\mathbf{e} = \mathbf{L}\mathbf{r}$ , e (6.11) e (6.12) se reduziriam a  $\sum_{i=1}^n e_i = \mathbf{1}_{1 \times n} \mathbf{e} = \mathbf{1}_{1 \times n} \mathbf{L}\mathbf{r} = 0$ , em que  $\mathbf{e} = [e_1, \dots, e_n]^T \in \mathbb{R}^n$ .

Por fim, considera-se que a topologia de vizinhos seja descrita por um grafo de interação não-direcionado  $G(\mathcal{V}, \mathcal{E})$  que é conectado. Também é importante que se estabeleça a definição de  $\mathcal{N}_i$ , que é o conjunto de vizinhos do  $i$ -ésimo agente. A cardinalidade de  $\mathcal{N}_i$  é representada por  $|\mathcal{N}_i|$ .

Com base no que foi exposto acima, os seguintes Lemas são propostos:

**Lema 3** *Seja  $\mathbf{w} = [\mathbf{w}_1^T \ \mathbf{w}_2^T \ \dots \ \mathbf{w}_n^T]^T$ , em que  $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Se  $\mathbf{L}$  for a matriz Laplaciana associada a um grafo de interação conectado, então*

$$(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_m) \mathbf{w} = \mathbf{0}_{mn \times 1} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2 = \dots = \mathbf{w}_n.$$

**Prova:** Note primeiramente que

$$(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_m) \mathbf{w} = (\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_m) \text{vec}(\mathbf{W}),$$

em que o operador  $\text{vec}(\mathbf{W})$  representa o empilhamento vertical das colunas da matriz  $\mathbf{W}$ , com  $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Utilizando-se o fato (Bernstein, 2009), válido para quaisquer

matrizes  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times l}$  e  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{l \times k}$ , de que

$$(\mathbf{C}^T \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{B}) = \text{vec}(\mathbf{ABC}),$$

tem-se que

$$\begin{aligned} (\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_m)\text{vec}(\mathbf{W}) = \mathbf{0}_{mn \times 1} &\Leftrightarrow \text{vec}(\mathbf{I}_m \mathbf{W} \mathbf{L}^T) = \mathbf{0}_{mn \times 1}, \\ &\Leftrightarrow \mathbf{W} \mathbf{L}^T = \mathbf{0}_{m \times n} \Leftrightarrow \mathbf{L} \mathbf{W}^T = \mathbf{0}_{n \times m}, \\ &\Leftrightarrow \mathbf{L} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^T \\ \mathbf{w}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{w}_n^T \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{n \times m}, \\ &\Leftrightarrow \mathbf{L} \begin{bmatrix} w_{j1} \\ w_{j2} \\ \vdots \\ w_{jn} \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{n \times 1}; \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Uma vez que a matriz Laplaciana  $\mathbf{L}$  está associada a um grafo de interação conectado, a última equação conduz à seguinte conclusão:

$$\begin{bmatrix} w_{j1} \\ w_{j2} \\ \vdots \\ w_{jn} \end{bmatrix} = \alpha_j \mathbf{1}_{n \times 1}; \quad j = 1, 2, \dots, m;$$

para constantes  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ , portanto,

$$w_{j1} = w_{j2} = \dots = w_{jn}; \quad j = 1, 2, \dots, m \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2 = \dots = \mathbf{w}_n.$$

■

Note que para o caso unidimensional ( $m = 1$ ), o Lema 3 se reduziria a  $\mathbf{L} \mathbf{w} = \mathbf{0}_{n \times 1} \Leftrightarrow w_1 = w_2 = \dots = w_n$ , em que  $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_n]^T \in \mathbb{R}^n$ , e esse é um resultado que vem diretamente do

fato de que o espaço nulo da matriz Laplaciana associada a um grafo conectado é  $\beta \mathbf{1}_{n \times 1}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ .

O Lema seguinte será utilizado na prova de convergência da estratégia de consenso proposta neste capítulo:

**Lema 4** *Seja o conjunto de funções vetoriais  $\mathbf{g}_{ij} : \mathbb{R}^{m(|\mathcal{N}_i|+|\mathcal{N}_j|)} \mapsto \mathbb{R}^m$  dado por*

$$\mathbf{g}_{ij} = a_{ij} \left[ \sigma \left( \mathbf{K}_e \sum_{k=1}^n a_{jk} \mathbf{r}_{jk} + \mathbf{c} \right) - \sigma \left( \mathbf{K}_e \sum_{l=1}^n a_{il} \mathbf{r}_{il} + \mathbf{c} \right) \right];$$

para  $(i,j) \in \mathcal{E}$ , em que  $\mathbf{K}_e$  é uma matriz diagonal definida positiva,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$ , e  $\sigma(\cdot)$  é uma função invertível definida componente a componente de acordo com as Propriedades P1-P4. Então, para qualquer  $(i,j) \in \mathcal{E}$ ,

$$\mathbf{g}_{ij} = \mathbf{0}_{m \times 1} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{0}_{m \times 1}.$$

**Prova:** Note que

$$\mathbf{g}_{ij} = a_{ij} (\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_i),$$

em que

$$\mathbf{w}_j = \sigma \left( \mathbf{K}_e \sum_{k=1}^n a_{jk} \mathbf{r}_{jk} + \mathbf{c} \right), \text{ e } \mathbf{w}_i = \sigma \left( \mathbf{K}_e \sum_{l=1}^n a_{il} \mathbf{r}_{il} + \mathbf{c} \right).$$

Se  $\mathbf{g}_{ij} = \mathbf{0}_{m \times 1}$ ,  $\forall (i,j) \in \mathcal{E}$ , e utilizando-se o fato  $a_{ij} = 0$ ,  $\forall (i,j) \notin \mathcal{E}$ , tem-se que

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{g}_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} (\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_i) = \mathbf{0}_{m \times 1} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_m) \mathbf{w} = \mathbf{0}_{mn \times 1};$$

com  $\mathbf{w} = [\mathbf{w}_1^T \ \mathbf{w}_2^T \ \dots \ \mathbf{w}_n^T]^T$ . Nesse caso, a partir do Lema 3, tem-se que  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2 = \dots = \mathbf{w}_n$ .

Uma vez que  $\sigma(\cdot)$  é uma função invertível, e  $\mathbf{K}_e$  é uma matriz invertível, tem-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_j - \mathbf{w}_i = \mathbf{0}_{m \times 1} &\quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^n a_{jk} \mathbf{r}_{jk} = \sum_{l=1}^n a_{il} \mathbf{r}_{il}, \\ &\quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i, \end{aligned}$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $j = 1, 2, \dots, n$ . Utilizando-se o fato de que  $\sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i = \mathbf{0}_{m \times 1}$ , o resultado acima implica que  $\mathbf{e}_i = \mathbf{0}_{m \times 1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Uma vez que, nesse caso,  $(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_m) \mathbf{r} = \mathbf{e} = \mathbf{0}_{mn \times 1}$ ,

e utilizando-se novamente o resultado no Lema 3, tem-se que

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \cdots = \mathbf{r}_n \Leftrightarrow \mathbf{r}_{ij} = 0.$$

Por outro lado, é direto que, se  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{0}_{m \times 1} \Rightarrow \mathbf{w}_j = \mathbf{w}_i \Rightarrow \mathbf{g}_{ij} = \mathbf{0}_{m \times 1}$ .

■

A solução para o problema de consenso proposto pode ser dada agora.

**Teorema 7** *Sejam  $n$  agentes cujo comportamento dinâmico individual é descrito por (6.4) com as matrizes diagonais definidas positivas  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{K}_e$  escolhidas livremente, e uma velocidade de referência de grupo  $\mathbf{v}_d$  que satisfaz  $\mathbf{v}_{min} \leq \mathbf{v}_d \leq \mathbf{v}_{max}$ . Se o grafo de interação  $G(\mathcal{V}, \mathcal{E})$  for conectado, então a lei de controle distribuído*

$$\mathbf{v}_{ci} = \mathbf{a} - \mathbf{B} \sigma \left( \mathbf{K}_e \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{r}_{ij} + \mathbf{c} \right), \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (6.13)$$

com

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_{min} + \mathbf{v}_{max}), \quad (6.14)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \text{diag}\{v_{max}^1 - v_{min}^1, \dots, v_{max}^m - v_{min}^m\}, \quad (6.15)$$

$$\mathbf{c} = \sigma^{-1}(\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{a} - \mathbf{v}_d)), \quad (6.16)$$

em que  $\sigma(\cdot)$  e  $\sigma^{-1}(\cdot)$  são definidas componente a componente de acordo com as Propriedades P1-P4, garante que, sem violar as restrições (6.5), o sistema multi-agente alcançará o consenso com a velocidade de referência de grupo  $\mathbf{v}_d$ , isto é, para todo  $\mathbf{r}_i(0)$  e  $\mathbf{v}_i(0)$  que satisfaça a primeira restrição em (6.5),  $\mathbf{r}_i(t) \rightarrow \mathbf{r}_j(t)$  e  $\mathbf{v}_i(t) \rightarrow \mathbf{v}_d$  assintoticamente quando  $t \rightarrow \infty$ .

**Prova:** Deve-se observar a partir de (6.13)-(6.16) que a lei de controle é definida de tal forma que o valor mínimo de  $\mathbf{v}_{ci}$  ocorre quando  $\sigma(\cdot) \rightarrow \mathbf{1}_{m \times 1}$ , e o valor máximo ocorre quando  $\sigma(\cdot) \rightarrow -\mathbf{1}_{m \times 1}$ , isto é, em  $\mathbf{v}_{min}$  e  $\mathbf{v}_{max}$ , respectivamente. Portanto, se  $\mathbf{v}_{min} \leq \mathbf{v}_i(0) \leq \mathbf{v}_{max}$ , as restrições em (6.5) serão automaticamente satisfeitas para  $t \geq 0$ .

É preciso mostrar que o argumento  $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{a} - \mathbf{v}_d)$  da função  $\sigma(\cdot)^{-1}$  na equação (6.16) obedece à desigualdade  $-\mathbf{1}_{m \times 1} \leq \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{a} - \mathbf{v}_d) \leq \mathbf{1}_{m \times 1}$ . Considerando-se que  $\sigma(\cdot)^{-1}$  é um função

estritamente crescente, é suficiente que ela seja avaliada nos pontos extremos correspondentes a  $\mathbf{v}_d = \mathbf{v}_{min}$  e  $\mathbf{v}_d = \mathbf{v}_{max}$ , uma vez que  $\mathbf{v}_{min} \leq \mathbf{v}_d \leq \mathbf{v}_{max}$ . Se  $\mathbf{v}_d = \mathbf{v}_{min}$ , então  $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{a} - \mathbf{v}_{min}) = \mathbf{1}_{m \times 1}$ ; se  $\mathbf{v}_d = \mathbf{v}_{max}$ , então  $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{a} - \mathbf{v}_{max}) = -\mathbf{1}_{m \times 1}$ . Portanto,  $\mathbf{v}_{min} \leq \mathbf{v}_d \leq \mathbf{v}_{max} \Rightarrow -\mathbf{1}_{m \times 1} \leq \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{a} - \mathbf{v}_d) \leq \mathbf{1}_{m \times 1}$ .

A partir de (6.4), (6.8) e (6.13), e levando-se em consideração apenas as variáveis  $\mathbf{r}_{ij}$  que tenham arestas correspondentes no grafo de interação  $G(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , tem-se que:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{ij} = -\mathbf{K}(\dot{\mathbf{r}}_{ij} - \mathbf{B}\mathbf{g}_{ij}), \quad (i, j) \in \mathcal{E}. \quad (6.17)$$

A fim de se determinar os pontos de equilíbrio desse sistema de erro, basta que se defina  $\ddot{\mathbf{r}}_{ij} = \dot{\mathbf{r}}_{ij} = \mathbf{0}_{m \times 1}$ , o que resulta em  $\mathbf{g}_{ij} = \mathbf{0}_{m \times 1}$ , para  $(i, j) \in \mathcal{E}$ , uma vez que  $\mathbf{KB}$  é invertível. Portanto, de acordo com o Lema 4, o sistema com comportamento dinâmico descrito por (6.17) que satisfaz (6.12) possui o único ponto fixo, ou configuração de equilíbrio,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{ij} \\ \dot{\mathbf{r}}_{ij} \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{2m \times 1}, \quad (i, j) \in \mathcal{E}. \quad (6.18)$$

Seja a função

$$H = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \dot{\mathbf{r}}_{ij}^T \dot{\mathbf{r}}_{ij} + \phi, \quad (6.19)$$

em que

$$\phi = \mathbf{1}_{1 \times m} \mathbf{K} \mathbf{B} \mathbf{K}_e^{-1} \sum_{i=1}^n \gamma \left( \mathbf{K}_e \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \mathbf{r}_{ij} + \mathbf{c} \right). \quad (6.20)$$

Deve-se enfatizar que  $H$  é uma função de  $\mathbf{r}_{ij}$  e  $\dot{\mathbf{r}}_{ij}$ , para  $(i, j) \in \mathcal{E}$ .

A função  $\gamma(\cdot)$  em (6.20) é definida componente a componente. Uma vez que  $\gamma(x) \geq 0$ , para  $x \in \mathbb{R}$ ,  $H$  é uma função semidefinida positiva. Portanto, é possível se verificar que  $H$  é radialmente ilimitada em relação  $\mathbf{r}_{ij}$  e  $\dot{\mathbf{r}}_{ij}$ , para  $(i, j) \in \mathcal{E}$ . Note que  $\frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \mathbf{r}_{ij}} = \mathbf{K} \mathbf{B} \boldsymbol{\sigma} \left( \mathbf{K}_e \sum_{l \in \mathcal{N}_i} \mathbf{r}_{il} + \mathbf{c} \right)$ ,

e  $a_{ij} = 1$ , para  $(i, j) \in \mathcal{E}$ . Assim, a derivada temporal de  $H$  é dada por

$$\begin{aligned}
\dot{H} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \dot{\mathbf{r}}_{ij}^T \ddot{\mathbf{r}}_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \mathbf{r}_{ij}} \right)^T \dot{\mathbf{r}}_{ij} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \dot{\mathbf{r}}_{ij}^T [-\mathbf{K}(\dot{\mathbf{r}}_{ij} - \mathbf{B}\mathbf{g}_{ij})] + \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \dot{\mathbf{r}}_{ij}^T \mathbf{K}\mathbf{B} \sigma \left( \mathbf{K}_e \sum_{l \in \mathcal{N}_i} \mathbf{r}_{il} + \mathbf{c} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \dot{\mathbf{r}}_{ij}^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{r}}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \dot{\mathbf{r}}_{ij}^T \mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{g}_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \dot{\mathbf{r}}_{ij}^T \mathbf{K}\mathbf{B} \sigma \left( \mathbf{K}_e \sum_{l \in \mathcal{N}_i} \mathbf{r}_{il} + \mathbf{c} \right) \quad (6.21) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \dot{\mathbf{r}}_{ij}^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{r}}_{ij} \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Na terceira igualdade de (6.21) foram realizadas algumas manipulações algébricas utilizando-se a propriedade  $\dot{\mathbf{r}}_{ij} = -\dot{\mathbf{r}}_{ji}$  e a equação

$$\mathbf{g}_{ij} = \left[ \sigma \left( \mathbf{K}_e \sum_{k \in \mathcal{N}_j} \mathbf{r}_{jk} + \mathbf{c} \right) - \sigma \left( \mathbf{K}_e \sum_{l \in \mathcal{N}_i} \mathbf{r}_{il} + \mathbf{c} \right) \right], \quad (i, j) \in \mathcal{E},$$

a fim de se mostrar que a soma do segundo e do terceiro termo é nula.

Portanto,  $\dot{H}$  é uma função semidefinida negativa. A fim de se aplicar o teorema do conjunto invariante de LaSalle (Slotine e Li, 1991), deve-se notar que a região em que  $\dot{H}$  se anula é

$$\Gamma_1 = \left\{ \left[ \mathbf{r}_{ij}^T \quad \dot{\mathbf{r}}_{ij}^T \right]^T \in \mathbb{R}^{2m} / \dot{\mathbf{r}}_{ij} = \mathbf{0}_{m \times 1} \right\}, \quad (i, j) \in \mathcal{E}.$$

Dentro de  $\Gamma_1$ , o sistema (6.17) é governado pelas equações

$$\ddot{\mathbf{r}}_{ij} = \mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{g}_{ij}, \quad (i, j) \in \mathcal{E}. \quad (6.22)$$

Se o sistema iniciar sua trajetória em  $\Gamma_1$ , com  $\mathbf{r}_{ij} \neq \mathbf{0}_{m \times 1}$ , para qualquer par  $(i, j) \in \mathcal{E}$ , tem-se que  $\ddot{\mathbf{r}}_{ij} \neq \mathbf{0}_{m \times 1}$ , e o sistema sairá da região  $\Gamma_1$ . Por essa razão, o maior conjunto invariante em  $\Gamma_1$  é dado por

$$\Gamma_2 = \left\{ \left[ \mathbf{r}_{ij}^T \quad \dot{\mathbf{r}}_{ij}^T \right]^T \in \mathbb{R}^{2m} / \dot{\mathbf{r}}_{ij} = \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{0}_{m \times 1} \right\}, \quad (i, j) \in \mathcal{E},$$

que é o ponto fixo do sistema (6.17). Consequentemente, o ponto de equilíbrio (6.18) é assin-

oticamente estável, e isso significa que  $\mathbf{r}_i(t) \rightarrow \mathbf{r}_j(t)$  assintoticamente quando  $t \rightarrow \infty$ . Além disso, com a lei de controle proposta em (6.13), a velocidade do  $i$ -ésimo agente descrito por (6.4) se comportará de acordo com

$$\dot{\mathbf{v}}_i = -\mathbf{K}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_d) + \mathbf{s}, \quad (6.23)$$

em que  $\mathbf{s} = -\mathbf{K} \left[ \mathbf{v}_d - \mathbf{a} + \mathbf{B} \sigma(\mathbf{K}_e \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{r}_{ij} + \mathbf{c}) \right]$ . Uma vez que  $\mathbf{r}_{ij} \rightarrow \mathbf{0}_{m \times 1}$  quando  $t \rightarrow \infty$ , para  $(i, j) \in \mathcal{E}$ , tem-se que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{s} = \mathbf{0}_{m \times 1}$ , o que implica que  $\mathbf{v}_i(t) \rightarrow \mathbf{v}_d$  assintoticamente quando  $t \rightarrow \infty$ . Portanto, o consenso com uma velocidade de referência de grupo  $\mathbf{v}_d$  será alcançado, isto é, para todo  $\mathbf{r}_i(0)$  e  $\mathbf{v}_i(0)$  que satisfaça a primeira restrição em (6.5),  $\mathbf{r}_i(t) \rightarrow \mathbf{r}_j(t)$  e  $\mathbf{v}_i(t) \rightarrow \mathbf{v}_d$  assintoticamente quando  $t \rightarrow \infty$ .

■

## 6.4 Exemplo de Simulação

O sistema (6.1) foi simulado com  $m = 1$ ,  $n = 5$ ,  $\mathbf{v}_{min} = 1 \text{ m/s}$ ,  $\mathbf{v}_{max} = 5 \text{ m/s}$ ,  $\mathbf{v}_d = 3 \text{ m/s}$ ,  $\mathbf{K} = 2$  e  $\mathbf{K}_e = 2$ . No comando de velocidade  $\mathbf{v}_{ci}$  foi considerada a função  $\sigma(x) = \tanh(x)$ , portanto  $\gamma(x) = \ln(\cosh(x))$ . É importante frisar que a função  $\sigma(x)$  não precisava ser ímpar nem diferenciável, diferentemente dos trabalhos encontrados na literatura que lidam com restrições de aceleração no problema de consenso de integradores duplos. O grafo de interação que representa a topologia de comunicação é apresentado na Figura 6.2. Conforme o requisito especificado no Teorema 7 para a topologia de comunicação, trata-se de um grafo conectado. Note, a partir da Figura 6.3, que o consenso com uma velocidade de referência de grupo foi alcançado e que as restrições de velocidade foram sempre satisfeitas. A evolução temporal da função de Lyapunov  $H$  é apresentada na Figura 6.4, o que confirma a convergência do algoritmo de controle coordenado. Pensando-se no problema específico da varredura de uma área retangular realizada por um time de VANTs, a Figura 6.5 apresenta alguns instantes da trajetória do sistema multiagente durante a execução da missão. Vê-se que o consenso é atingido em termos da posição relativa entre vizinhos e em termos da velocidade de grupo desejada.

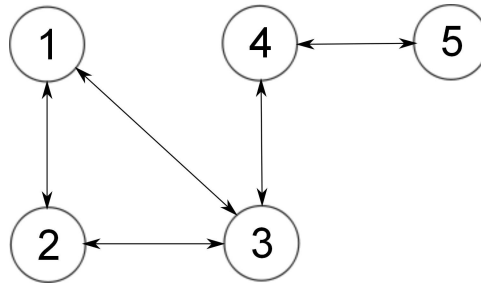


Figura 6.2: Grafo de interação para o exemplo de simulação.

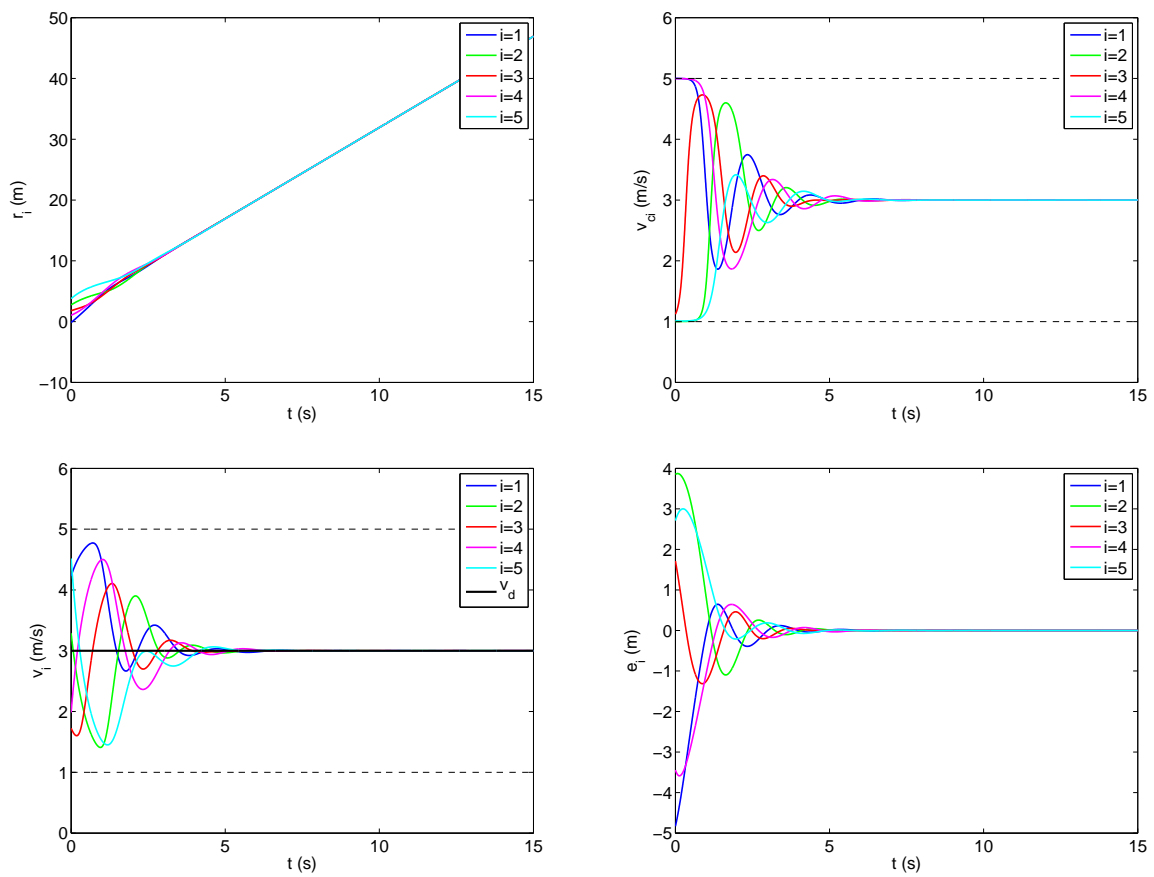


Figura 6.3: Resultados de simulação para a estratégia de consenso proposta.

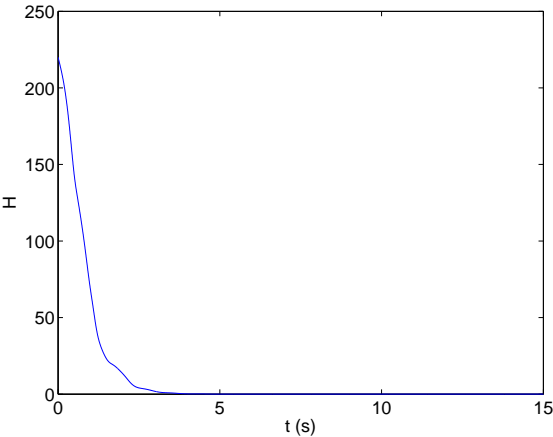


Figura 6.4: Evolução temporal da função de Lyapunov  $H$ .

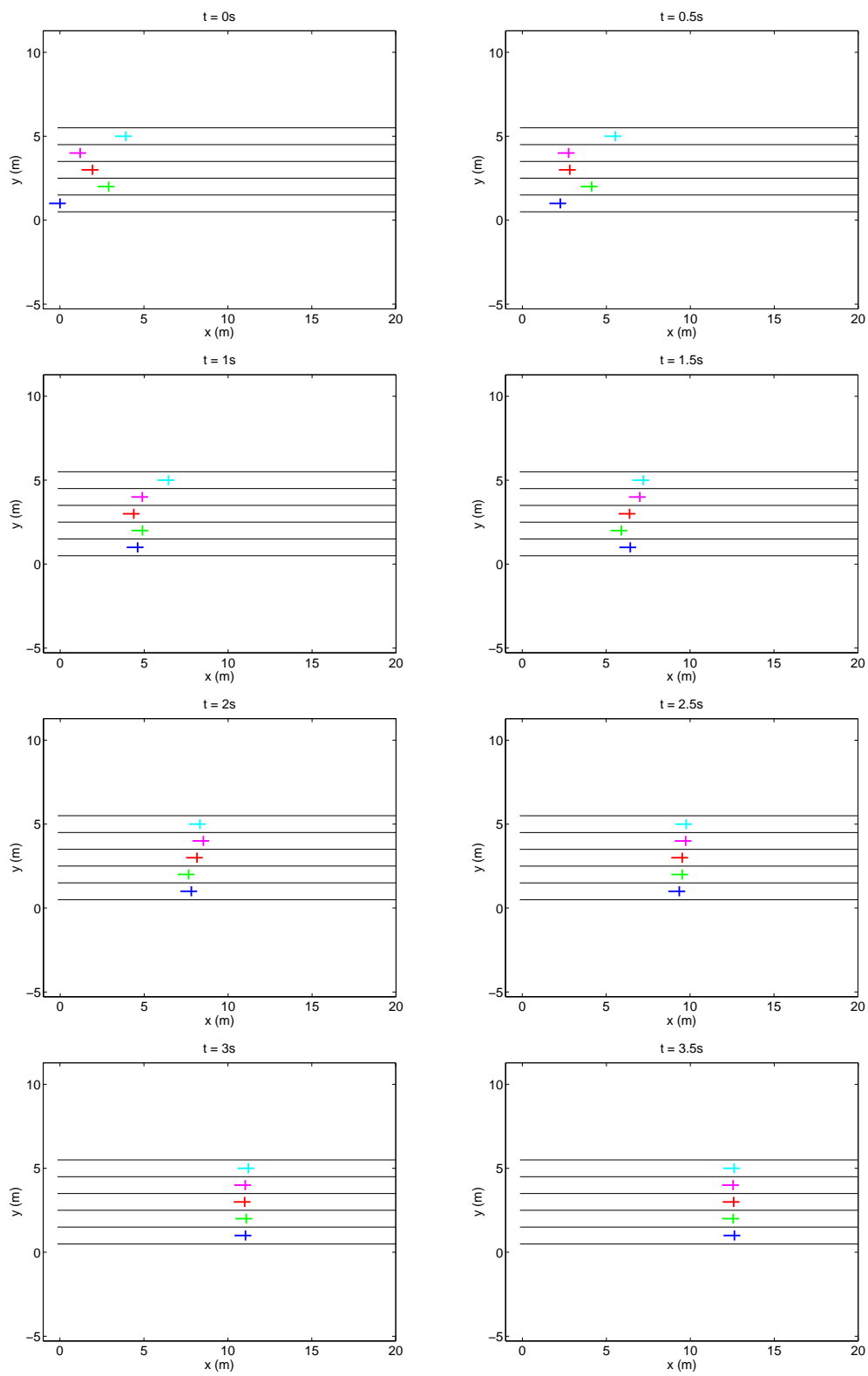


Figura 6.5: Cinco VANTs em busca de consenso para executar a varredura de uma área retangular.

## Conclusões e Trabalhos Futuros

---

Neste trabalho foram propostas duas estratégias de controle de sistemas multiagente, ambas as quais foram detalhadas nos Capítulos 4 e 6, respectivamente. Além disso, o Capítulo 5 detalha uma abordagem híbrida baseada em campos vetoriais artificiais para o controle de um único robô na presença de incertezas de modelo e sujeito a restrições nas variáveis de entrada/estado.

No Capítulo 4 foi apresentada uma estratégia de controle distribuído dividida em três estágios para a coordenação de um time de  $n$  agentes não lineares e não holonômicos com restrições nos estados e nas entradas imersos em um espaço de trabalho tridimensional. O comportamento dinâmico de cada agente foi inspirado por modelos simplificados de aeronaves de asas fixas já considerados em trabalhos experimentais (Bayraktar et al., 2004) e teóricos (Ren, 2007). O tamanho físico dos agentes foi levado em consideração definindo-se uma esfera de raio  $r$  contendo cada um deles. O objetivo da estratégia de coordenação foi fazer com que os VANTs convergissem para uma configuração de circulação alvo, na qual eles estivessem igualmente distribuídos ao longo de um círculo invariante no tempo e realizando um movimento circular com velocidade angular constante, sem violar os limites mínimo e máximo de comando de velocidade de translação, o limite máximo de valor absoluto da velocidade angular de guinada e o limite máximo de valor absoluto da taxa de variação de altitude, e com garantia de evitamento de colisão entre agentes. Além disso, o modelo considerado descreve um comportamento dinâmico de segunda ordem para os VANTs. A principal contribuição do trabalho detalhado no Capítulo 4 são as provas matemáticas de convergência que levam em conta as restrições associadas ao problema durante toda a realização da tarefa, incluindo-se as transições entre estágios. Conforme a revisão de literatura realizada neste trabalho, não foi encontrado nenhum resultado de pesquisa que atacasse o problema de coordenação de VANTs para a realização de uma missão de distribuição circular balanceada com uma abordagem matemática rigorosa considerando todos

---

os aspectos de: (i) restrição nas variáveis de estado e/ou nas entradas de controle; (ii) restrição não-holonômica; (iii) raio de curvatura mínimo; (iv) evitamento de colisão; e (v) dinâmica de segunda ordem. Os resultados de simulação apresentados ilustraram a eficácia da abordagem na solução do problema proposto. Pretende-se utilizar a estratégia proposta como uma lei de guiagem para o controle de veículos aéreos de asas fixas reais, como a aeronave AqVS apresentada em (Iscold et al., 2010). Nesse contexto, considerando-se as restrições cinemáticas e dinâmicas acima mencionadas, este trabalho representa um primeiro passo em direção a representações mais realísticas para o problema de coordenação de múltiplos VANTs de asas fixas. A estratégia de controle desenvolvida neste trabalho consiste na malha de controle mais externa de um sistema de controle em cascata de um VANT real. O modelo simplificado de robô aéreo considerado neste trabalho é na verdade um modelo de referência para as malhas de controle mais internas do referido sistema de controle em cascata. Um exemplo de projeto para essas malhas de controle mais internas considerado-se dois modelos de VANT mais realísticos foi desenvolvido em (Thums, 2012). Outras características a serem consideradas em trabalhos futuros são incertezas de modelo, perturbações externas, ruídos de medição, atrasos de comunicação e um número variável de agentes a realizarem a mesma tarefa. Outra perspectiva interessante para um trabalho futuro é a extensão dos resultados obtidos para o caso de curvas fechadas mais gerais do que o círculo.

Já no Capítulo 5, foi proposta uma lei de controle chaveada baseada em campos vetoriais artificiais para o controle de um robô aéreo. O sistema em malha fechada assim obtido pode ser visto como um sistema híbrido. Foram levadas em consideração a presença de incerteza de modelo e de restrições de entrada/estado razoáveis. O objetivo da abordagem proposta foi fazer com que o robô aéreo rastreasse uma curva circular alvo sem violar as restrições, mesmo na presença de incerteza. Foram apresentadas garantias matemáticas de convergência para a estratégia de controle chaveada e a eficácia dos resultados teóricos foi ilustrada por meio de um experimento de simulação numérica. Uma das motivações desse trabalho foi tentar desenvolver um estudo que mostrasse, de forma rigorosa, a eficácia e a robustez de uma estratégia baseada em campos vetoriais artificiais para guiagem de um robô aéreo, levando-se em consideração a presença de incertezas de modelagem adivindas, por exemplo, do desempenho não ideal da malha de controle mais interna que controla a dinâmica original do VANT (ver Figura 5.1).

Dentre os futuros desenvolvimentos para este trabalho podem ser enumerados: (i) a solução de um problema de rastreamento de curvas com um sistema multiagente na presença de incerteza de modelo e de restrições de entrada/estado; e (ii) a circulação de curvas mais gerais do que o círculo.

No Capítulo 6, por fim, uma lei de controle distribuído foi proposta para um time de  $n$  veículos com dinâmica de integrador duplo em busca de consenso. Diferentemente de trabalhos anteriores da literatura, são aspectos levados em consideração em conjunto na estratégia proposta neste capítulo: (i) a presença de restrições de velocidade assimétricas, o que é um aspecto interessante no caso de se desejar lidar, por exemplo, com o problema de coordenação de múltiplos VANTs de asas fixas; (ii) a lei de controle de cada agente não depende das velocidades ou acelerações dos vizinhos; (iii) as funções de saturação utilizadas para codificar as restrições de velocidade não são ímpares nem diferenciáveis. Garantias matemáticas foram derivadas para a abordagem proposta e uma simulação numérica foi apresentada a fim de se ilustrar a eficácia dos resultados teóricos. Como foi detalhado ainda mesmo no Capítulo 6, tal abordagem pode ser aplicada ao problema de se fazer com que  $n$  VANTs, cada um viajando em linha reta e distribuídos em faixas paralelas e adjacentes, percorram uma área retangular com velocidade constante e pareados lado a lado, sem violar as restrições de velocidade. Trabalhos futuros levarão em conta topologias de vizinhos variantes no tempo, e também pretende-se abordar o problema de controle de formação mais gerais com a inclusão de referências de posições relativas entre agentes. Além disso, uma outra contribuição interessante seria a inclusão de incertezas à estratégia de consenso proposta.

Dentre as limitações das estratégias propostas, pode-se citar o fato de que a velocidade de translação dos VANTs foi considerada em relação ao solo e não ao vento. Por essa razão, como hipótese de trabalho nesta tese assumiu-se que a atmosfera se encontra em repouso em relação ao solo. Além disso, é preciso enfatizar a demanda por comunicação entre os agentes para as estratégias de controle descentralizadas propostas.

---

## Referências Bibliográficas

---

- Abdessameud, A. e Tayebi, A. (2010). On consensus algorithms for double-integrator dynamics without velocity measurements and with input constraints. *Systems & Control Letters*, 59:812–821.
- Abdessameud, A. e Tayebi, A. (2011). Synchronization of networked lagrangian systems with input constraints. In *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, páginas 2382–2387.
- Aguiar, A. P., Hespanha, J. P., e Kokotavić, P. (2008). Performance limitations in reference-tracking and path-following for nonlinear systems. *Automatica*, 44:598–610.
- Aguilar, L. E., M. P. Souères, M. P., Courdesses, M., e Fleury, S. (1998). Robust path-following control with exponential stability for mobile robots. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, páginas 3279–3284.
- Aicardi, M., Casalino, G., Bicchi, A., e Balestrino, A. (1995). Closed loop steering of unicycle-like vehicles via Lyapunov techniques. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 2(1):27–35.
- Arslan, S. e Temeltaş, H. (2011). Robust motion control of a four wheel drive skid-steered mobile robot. In *Proceedings of the 7th International Conference on Electrical and Electronics Engineering (ELECO)*, páginas 2012–2017.
- Bayraktar, S., Fainekos, J. E., e Pappas, G. J. (2004). Hybrid modeling and experimental cooperative control of multiple unmanned aerial vehicles. Technical report, University of Pennsylvania - Department of Computer and Information Science.
- Beard, R. W. e McLain, T. W. (2003). Multiple UAV cooperative search under collision avoidance and limited range communication constraints. In *Proc. IEEE Conf. Decision Control*, páginas 25–30.
- Beard, R. W., McLain, T. W., Nelson, D. B., Kingston, D., e Johanson, D. (2006). Decentralized cooperative aerial surveillance using fixed-wing miniature UAVs. *Proceedings of the IEEE*, 94(7):1306–1324.
- Becker, A. e Brel, T. (2012). Approximate steering of a unicycle under bounded model perturbation using ensemble control. *IEEE Transactions on Robotics*, 28(3):580–591.

- Bernstein, D. S. (2009). *Matrix Mathematics: Theory, Facts and Formulas*. Princeton University Press.
- Bethke, B., Valenti, M., e How, J. (2009). Cooperative vision based estimation and tracking using multiple UAVs. In *Advances in Cooperative Control and Optimization*, volume 369 of *Lectures Notes in Control and Information Sciences*, páginas 179–189. Springer Berlin Heidelberg.
- Bullo, F., Cortés, J., e Martínez, S. (2009). *Distributed Control of Robotic Networks: A Mathematical Approach to Motion Coordination Algorithms*. Applied Mathematics Series. Princeton University Press.
- Casbeer, D. W., Kingston, D. B., Beard, R. W., McLain, T. W., Li, S.-M., e Mehra, R. (2006). Cooperative forest fire surveillance using a team of small unmanned air vehicles. *Int. J. Syst. Sci.*, 37(6):351–360.
- Ceccarelli, N., Marco, M. D., Garulli, A., e Giannitrapani, A. (2008). Collective circular motion of multi-vehicle systems. *Automatica*, 40:3025–3035.
- Cheah, C. C., Hou, S. P., e Slotine, J. J. E. (2009). Region-based shape control for a swarm of robots. *Automatica*, 45:2406–2411.
- Chen, J., Sun, D., Yang, J., e Chen, H. (2010). Leader-follower formation control of multiple non-holonomic mobile robots incorporating a receding-horizon scheme. *International Journal of Robotics Research*, 29:727–747.
- Chen, S., Ji, J. C., e Zhou, J. (2012). Second-order consensus of multiple non-identical agents with non-linear protocols. *IET Control Theory & Applications*, 6(9):1319–1324.
- Chen, X.-P., Xu, H.-B., e Ban, Y.-X. (2011). Rotating consensus of multi-agent systems without relative velocity measurement. *Chinese Physics B*, 20(9):090515.
- Cheng, P. e Kumar, V. (2008). An almost communication-less approach to task allocation for multiple unmanned aerial vehicles. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, páginas 1384–1389, Pasadena, CA.
- Choset, H., Lynch, K. M., Hutchinson, S., Kantor, G., Burgard, W., Kavraki, L. E., e Thrun, S. (2005). *Principles of Robot Motion*. MIT Press.
- Corradini, M. L. e Orlando, G. (2001). Robust tracking control of mobile robots in the presence of uncertainties in the dynamical model. *Journal of Robotic Systems*, 18(6):317–323.
- Corradini, M. L. e Orlando, G. (2002). Control of mobile robots with uncertainties in the dynamical model: a discrete time sliding mode approach with experimental results. *Control Engineering Practice*, 10:23–34.

- Dimarogonas, D. V. e Kyriakopoulos, K. J. (2007). On the rendezvous problem for multiple nonholonomic agents. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(5):916–922.
- Dimarogonas, D. V. e Kyriakopoulos, K. J. (2008). Connectedness preserving distributed swarm aggregation for multiple kinematic robots. *IEEE Transactions on Robotics*, 24(5):1213–1223.
- Ding, X. C., Rahmani, A. R., e Egerstedt, M. (2010). Multi-uav convoy protection: An optimal approach to path planning and coordination. *IEEE Transactions on Robotics*, 26:256–268.
- Dixon, W. E., Dawson, D. M., Zergeroglu, E., e Zhang, F. (2000). Robust tracking and regulation control for mobile robots. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 10:199–216.
- Du Toit, N. E. e Burdick, J. W. (2012). Robot motion planning in dynamic, uncertain environments. *IEEE Transactions on Robotics*, 28(1):101–115.
- Dubins, L. E. (1957). On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents. *American Journal of Mathematics*, 79:497–516.
- Etkin, B. e Reid, L. D. (1996). *Dynamics of Flight - Stability and Control*. John Wiley & Sons, Inc.
- Ferrari-Trecate, G., Galbusera, L., Marciandi, M. P. E., e Scattolini, R. (2008). Contractive distributed MPC for consensus in networks of single- and double-integrators. In *Proceedings of the 17th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC)*, páginas 9033–9038.
- Floquet, T., Barbot, J.-P., e Perruquetti, W. (2003). Higher-order sliding mode stabilization for a class of nonholonomic perturbed systems. *Automatica*, 39:1077–1083.
- Franchi, A., Stegagno, P., Rocco, M. D., e Oriolo, G. (2010). Distributed target localization and encircling with a multi-robot system. In *Proceedings of the IFAC Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles*.
- Frew, E. W. e Lawrence, D. (2012). Tracking expanding star curves using guidance vector fields. In *Proceedings of the American Control Conference*, páginas 1749–1754.
- Gao, L., Zhang, J., e Chen, W. (2012). Second-order consensus for multiagent systems under directed and switching topologies. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012(2012):1–21.
- Ghosh, R. e Tomlin, C. J. (2000). Nonlinear inverse dynamic control for mode-based flight. In *Proc. AIAA/GNC Conference*, Denver, CO.

- Gonçalves, M. M., Pimenta, L. C. A., e Pereira, G. A. S. (2011). Coverage of curves in 3d with swarms of nonholonomic aerial robots. In *Proceedings of the 18th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC)*, volume 18, páginas 10367–10372.
- Gonçalves, V. M., Pimenta, L. C. A., Maia, C. A., Dutra, B. C. O., e Pereira, G. A. S. (2010). Vector fields for robot navigation along time-varying curves in  $n$ -dimensions. *IEEE Transactions on Robotics*, 26(4):647–659.
- Gonçalves, V. M., Pimenta, L. C. A., Maia, C. A., e Pereira, G. A. S. (2009). Artificial vector fields for robot convergence and circulation of time-varying curves in  $n$ -dimensional spaces. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, páginas 2012–2017.
- Gouvea, J. A., Lizarralde, F., e Hsu, L. (2011). Potential function formation control of nonholonomic mobile robots with curvature constraints. In *Proceedings of the 18th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC)*, volume 18, páginas 11931–11936.
- Grepl, R., Lee, B., Kratochvíl, C., Solc, F., e Hrabec, J. (2008). Exact linearization of nonholonomic system dynamics applied to control of differentially driven soccer robot. *Engineering Mechanics*, 15(5):311–318.
- Guldner, J. e Utkin, V. I. (1995). Sliding mode control for gradient tracking and robot navigation using artificial potential fields. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 11(2):247–254.
- Hara, S., Kim, T.-H., e Sugie, T. (2008). Distribution formation control for target-enclosing operations based on a cyclic pursuit strategy. In *Proceedings of the 17th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC)*, páginas 6602–6607.
- Horn, R. A. e Johnson, C. (1985). *Matrix Analysis*. Cambridge University Press.
- Hsieh, M. A., Forgoston, E., Mather, T. W., e Schwartz, I. B. (2012). Robotic manifold tracking of coherent structures in flows. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, páginas 4242–4247, RiverCentre, Saint Paul, Minnesota, USA.
- Hsieh, M. A., Kumar, V., e Chaimowicz, L. (2008). Decentralized controllers for shape generation with robotic systems. *Robotica*, 26:691–701.
- Ikeda, M., Siljak, D. D., e E., W. D. (1984). An inclusion principle for dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29(3):244–249.
- Iscold, P. H. A., Pereira, G. A. S., e Tôrres, L. A. B. (2010). The development of a hand-launched small uav for ground reconnaissance. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 46:335–348.

- Jesus, T. A., Pimenta, L. C. A., Tôrres, L. A. B., e Mendes, E. M. A. M. (2012). A vector field approach for controlling a fixed-wing aerial robot with constraints in the inputs and in the state variables. In *XIX Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2012)*.
- Kanarat, A. (2004). *Motion Planning and Robust Control for Nonholonomic Mobile Robots under Uncertainties*. PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University.
- Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall.
- Kim, T.-H. e Sugie, T. (2007). Cooperative control for target-capturing task based on a cyclic pursuit strategy. *Automatica*, 43(3):1426–1431.
- Kingston, D., Beard, R. W., e Holt, R. S. (2008). Decentralized perimeter surveillance using a team of UAVs. *IEEE Transactions on Robotics*, 24(6):1394–1404.
- Latombe, J.-C., Lathanas, A., e Shekhar, S. (1991). Robot motion planning with uncertainty in control and sensing. *Artificial Intelligence*, 52(3):1–47.
- Lawton, J. R. T., Beard, R. W., e Young, B. J. (2003). A decentralized approach to formation maneuvers. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 19(6):933–941.
- Lee, D. e Spong, M. W. (2007). Stable flocking of multiple inertial agents on balanced graphs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52:1469–1475.
- Lee, J., Kim, J.-S., Song, H., e Shim, H. (2011). A constrained consensus problem using MPC. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 9(5):952–957.
- Lee, U. e Mesbahi, M. (2011). Constrained consensus via logarithmic barrier functions. In *Proceedings of the 50th Conference on Decision and Control*, páginas 3608–3613, Orlando, FL, USA.
- Li, Q. e Jiang, Z.-P. (2008). Formation tracking control of unicycle teams with collision avoidance. In *Proc. IEEE Conf. Decision Control*, páginas 496–501, Cancun, Mexico.
- Li, Y., Xiang, J., e Wei, W. (2011). Consensus problems for linear time-invariant multi-agent systems with saturation constraints. *IET Control Theory and Applications*, 5(6):823–829.
- Lin, P. e Jia, Y. (2009). Consensus of second-order discrete-time multi-agent systems with nonuniform time-delays and dynamically changing topologies. *Automatica*, 45(9):2154–2158.
- Lin, P. e Jia, Y. (2010). Distributed rotating formation control of multi-agent systems. *Systems & Control Letters*, 59:587–595.
- Lin, P., Qin, K., Lin, Z., e Ren, W. (2011). Collective rotating motions of second-order multi-agent systems in three-dimensional space. *Systems & Control Letters*, 60:365–372.
- Loizou, S. G. e Kyriakopoulos, K. J. (2008). Navigation of multiple kinematically constrained robots. *IEEE Transactions on Robotics*, 24(1):221–231.

- Luca, A. D. e Oriolo, G. (1995). Modelling and control of nonholonomic mechanical systems. In *CISM Courses and Lectures*, chapter 7, páginas 277–342. Springer-Verlag.
- Luo, X., Liu, D., Guan, X., e Li, S. (2012). Flocking in target pursuit for multi-agent systems with partial informed agents. *IET Control Theory & Applications*, 6(4):560.
- Marshall, J. A., Broucke, M. E., e Francis, B. A. (2004). Formations of vehicles in cyclic pursuit. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49:1963–1974.
- Mastellone, S., Stipanović, D. M., Graunke, C. R., , Intlekofer, K. A., e Spong, M. W. (2008). Formation control and collision avoidance for multi-agent systems: Theory and experiments. *International Journal of Robotics Research*, 27(1):107–126.
- McLain, T. W. e Beard, R. W. (2005). Coordination variables, coordination functions and cooperative timing missions. *AIAA J. Guidance, Contr. Dynamics*, 28(1):150–161.
- Michael, N. e Kumar, V. (2008). Controlling shapes of ensembles of robots of finite size with nonholonomic constraints. In *Proc. of Robotics: Science and Systems*, Zurich, Switzerland.
- Minguez, J. e Montano, L. (2009). Extending collision avoidance methods to consider the vehicle shape, kinematics, and dynamics of a mobile robot. *IEEE Transactions on Robotics*, 25(2):367–381.
- Nedić, A., Ozdaglar, A., e Parrilo, P. A. (2010). Constrained consensus and optimization in multi-agent networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(4):922–938.
- Oikonomopoulos, A. S., Loizou, S. G., e Kyriakopoulos, K. J. (2009). Coordination of multiple non-holonomic agents with input constraints. In *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, páginas 869–874.
- Olfati-Saber, R. e Murray, R. M. (2004). Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(9):1520–1533.
- Page, M. A. e Sanderson, A. C. (1995). Robot motion planning for sensor-based control with uncertainties. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, páginas 1333–1340.
- Peng, K., Su, H.-S., e Yang, Y.-P. (2011). Coordinated control of multi-agent systems with a varying-velocity leader and input saturation. *Communications in Theoretical Physics*, 52:449–456.
- Pepy, R., Kieffer, M., e Walter, E. (2009). Reliable robust path planning with application to mobile robots. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 19(3):413–424.

- Pereira, A. R., Gouvea, J. A., Lizarralde, F., e Hsu, L. (2011). Formation adaptive control for nonholonomic dynamic agents: Regulation and tracking. In *Proceedings of the 18th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC)*, volume 18, páginas 8969–8974.
- Pereira, G. A. S., Kumar, V., e Campos, M. F. M. (2004). Decentralized algorithms for multi-robot manipulation via caging. *The International Journal of Robotics Research*, 23:783–795.
- Pereira, G. A. S., Kumar, V., e Campos, M. F. M. (2008). Closed loop motion planning of cooperating mobile robots using graph connectivity. *Robotics and Autonomous Systems*, 56:373–384.
- Pruski, A. e Rohmer, S. (1997). Robust path planning for non-holonomic robots. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 18:329–350.
- Ranjbarsahraei, B., Roopaei, M., e Khosravi, S. (2011). Adaptive fuzzy formation control for a swarm of nonholonomic differentially driven vehicles. *Nonlinear Dynamics*, 67:2747–2757.
- Ren, W. (2007). On constrained nonlinear tracking control of a small fixed-wing UAV. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 48:525–537.
- Ren, W. (2008). On consensus algorithms for double-integrator dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53:1503–1509.
- Ren, W. (2009a). Collective motion from consensus with cartesian coordinate coupling. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53:1330–1335.
- Ren, W. (2009b). Distributed leaderless consensus algorithms for networked euler-lagrange systems. *International Journal of Control*, 82(11):2137–2149.
- Ren, W. e Beard, R. W. (2005). Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(5):655–661.
- Ren, W. e Beard, R. W. (2008). *Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control: Theory and Applications*. Communications and Control Engineering. Springer.
- Ren, W., Beard, R. W., e Atkins, E. M. (2005). A survey of consensus problems in multi-agent coordination. In *Proceedings of the American Control Conference*, páginas 1859–1864.
- Ryan, A., Zennaro, M., Howell, A., Sengupta, R., e Hedrick, K. (2004). An overview of emerging results in cooperative uav control. In *43<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, páginas 602–607.
- Saber, R. O. (2006). Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51:401–420.

- Samson, C. (1992). Path following and time-varying feedback stabilization of a wheeled mobile robot. In *Proc. of ICARCV 92*, páginas RO–13.1.1–13.1.5, Singapore.
- Sastry, S. (1999). *Nonlinear Systems - Analysis, Stability and Control*. Springer, New York, NY, USA.
- Scaglia, G. J. E., Mut, V. A., Jordan, M., Calvo, C., e Quintero, L. (2009). Robust-control-based controller design for a mobile robot. *Journal of Engineering Mathematics*, 63:17–32.
- Schwager, M., Julian, B. J., e Rus, D. (2009). Optimal coverage for multiple hovering robots with downward facing cameras. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*.
- Seo, K. e Lee, J. S. (2006). Kinematic path-following control of a mobile robot under bounded angular velocity error. *Advanced Robotics*, 20(1):1–23.
- Slotine, J.-J. e Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall.
- Spong, M. W., Hutchinson, S., e Vidyasagar, M. (2006). *Robot Modeling and Control*. John Wiley.
- Stevens, B. L. e Lewis, F. L. (1992). *Aircraft Control and Simulation*. John Wiley & sons, Inc.
- Stipanović, M. D., Inalhan, G., Teo, R., e Tomlin, C. J. (2004). Decentralized overlapping control of a formation of unmanned aerial vehicles. *Automatica*, 40:1285–1296.
- Strogatz, S. (2003). *Sync - The Emerging Science of Spontaneous Order*. Hyperion.
- Sun, D., Wang, C., Shang, W., e Feng, G. (2009). A synchronization approach to trajectory tracking of multiple mobile robots while maintaining time-varying formations. *IEEE Transactions on Robotics*, 25(5):1074–1086.
- Tanner, H. G., Jadbabaie, A., e Pappas, G. J. (2003a). Coordination of multiple autonomous vehicles. In *Proc. 11<sup>th</sup> Mediterranean Conference on Control and Automation*.
- Tanner, H. G., Jadbabaie, A., e Pappas, G. J. (2003b). Flocking in teams of nonholonomic agents. In *Lectures Notes in Control and Information Sciences*, volume 309.
- Tanner, H. G., Jadbabaie, A., e Pappas, G. J. (2003c). Stable flocking of mobile agents, part i: Fixed topology. In *Proc. IEEE Conference on Decision and Control*, páginas 2010–2015.
- Tanner, H. G., Jadbabaie, A., e Pappas, G. J. (2003d). Stable flocking of mobile agents, part ii: Dynamic topology. In *Proc. IEEE Conference on Decision and Control*, páginas 2016–2021.
- Tanner, H. G., Jadbabaie, A., e Pappas, G. J. (2007). Flocking in fixed and switching networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52:863–868.

- Thums, G. D. (2012). Sintonia PID robusta multi-malha para veículos aéreos não tripulados. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE) - Escola de Engenharia - Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG).
- Wada, N., Saeki, M., e Chen, H. (2004). Robust tracking control of a nonholonomic mobile robot in the presence of disturbances. *JSME International Journal Series C*, 47(2):694–701.
- Wang, S. e Xie, D. (2012). Consensus of second-order multi-agent systems via sampled control: undirected fixed topology case. *IET Control Theory & Applications*, 6(7):893–899.
- Wang, Z. e Cao, J. (2012). Quasi-consensus of second-order leader-following multi-agent systems. *IET Control Theory & Applications*, 6(4):545–551.
- Wen, G., Duan, Z., Li, Z., e Chen, G. (2012a). Consensus and its  $\mathcal{L}_2$  gain performance of multi-agent systems with intermittent information transmissions. *International Journal of Control*, 85(4):384–396.
- Wen, G., Duan, Z., Yu, W., e Chen, G. (2012b). Consensus in multi-agent systems with communication constraints. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 22:170–182.
- Xiao, F., Wang, L., Chen, J., e Gao, Y. (2009). Finite-time formation control for multi-agent systems. *Automatica*, 45:2605–2611.
- Xie, G. e Wang, L. (2007). Consensus control for a class of networks of dynamic agents. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 17:941–959.
- Yu, W., Chen, G., e Cao, M. (2010a). Some necessary and sufficient conditions for second-order consensus in multi-agent dynamical systems. *Automatica*, 46(6):1089–1095.
- Yu, W., Chen, G., Cao, M., e Kurths, J. (2010b). Second-order consensus for multiagent systems with directed topologies and nonlinear dynamics. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics - Part B: Cybernetics*, 40(3):881–891.
- Yu, W., Zheng, W. X., Chen, G., Ren, W., e Cao, J. (2011). Second-order consensus in multi-agent dynamical systems with sampled position data. *Automatica*, 47(7):1496–1503.
- Zavlanos, M. M. e Pappas, G. J. (2008). Distributed connectivity control of mobile networks. *IEEE Transactions on Robotics*, 26:1416–1428.
- Zavlanos, M. M., Tanner, H. G., Jadbabaie, A., e Pappas, G. J. (2009). Hybrid control for connectivity preserving flocking. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54:2869–2875.
- Zhao, D., Zou, T., Li, S., e Zhu, Q. (2012). Adaptive backstepping sliding mode control for leader-follower multi-agent systems. *IET Control Theory & Applications*, 6(8):1109–1117.