

Tamíris Roberta Calixto

**Estado de vácuo comprimido para a luz: Um
questionamento sobre sua construção experimental**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Pablo Lima Saldanha

Belo Horizonte

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

C153e Calixto, Tamíris Roberta.
Estado de vácuo comprimido para a luz: um questionamento
sobre sua construção experimental / Tamíris Roberta Calixto. –
Belo Horizonte, 2018.
71.f.:il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de
Minas Gerais – Departamento de Física.
Orientador: Pablo Lima Saldanha.
Bibliografia f. 63-66.

1. Ótica quântica. 2. Luz.
I. Saldanha, Pablo Lima. II. Título.

CDU – 535.14 (043)

Elaborada pela Biblioteca Professor Manoel Lopes de Siqueira da UFMG.

Dedico este trabalho aos meus pais, Lupe e Beto.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus que está presente comigo, é base espiritual para todas as etapas da minha vida e é meu apoio para todos os momentos, principalmente para os mais difíceis.

Agradeço aos meus pais Gilberto e Lupe pois eles são certamente meu alicerce. Me ensinaram os primeiros passos e depois possibilitaram que eu seguisse meus objetivos, me apoiando em tudo, estando presentes em todos os momentos. Aos meus irmãos Sinara e Gil que me apoiam e sempre torcem por mim. Sou muito feliz por ter vocês ao meu lado nessa jornada. Ao meu companheiro de todas as horas, que suporta toda minha loucura e estresse, que sempre me põe pra cima, me motiva e me incentiva a ir atrás dos meus sonhos, meu amor, meu namorado, meu Cacá.

Agradeço também ao Pablo por ser um excelente orientador, por todo seu apoio, incentivo, por ser presente e por toda paciência que teve comigo durante o mestrado. A todos os professores que tive a oportunidade e prazer de conhecer durante o mestrado por, de alguma maneira, contribuírem para minha formação. Agradeço também aos professores que tive durante a graduação. Em especial, agradeço ao Robson pela oportunidade de fazer o intercâmbio em Coimbra, ao Léo e ao Romeu que me ajudaram a fazer a escolha do mestrado.

Não posso deixar de agradecer também às minhas amigas de infância Mariana e Sandra, que mesmo com a distância estão sempre comigo, vocês são muito importantes para mim! À Brenda minha amiga, cunhada, irmã de outra mãe, que cresceu comigo e acompanhou esse período de perto. À Aline, por todos os memes super importantes trocados. Ao Gilber e a Érica, por terem feito o período da graduação ser muito mais agradável. Ao pessoal da república PeriJaiminho (em especial PorceAlana, Aline e Roselita - que me deu a oportunidade de conhecer sua mãe Rosi, que me ajudou muito no início do mestrado). A todos que tive o prazer de conhecer, conviver e dividir vários momentos em Coimbra. A galera que conheci durante o mestrado: os SemiMestres+Doc do café (Clara, CharlesCarlos, Clóvis, Geovani, Jéssica, Saulão da madrugada e Tiago), Ludmila, João, Rodrigo, ao pessoal do Enlight e ao Raul pela discussão que muito acrescentou em nosso trabalho. À minha tia Marlene e ao Fernando, pela imensa ajuda durante todo o mestrado.

Finalmente, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro que foi fundamental durante todo o mestrado.

*“There’s only the forces of hate and love.
One breaks things down and one builds them up.”
One More of Me, John Frusciante.*

Resumo

Estados coerentes são normalmente utilizados para a descrição do estado de um campo laser em experimentos para geração e detecção de estados comprimidos, em particular para o estado de vácuo comprimido. No entanto, o estado de um campo laser é melhor descrito por uma mistura estatística de estados coerentes ou, analogamente, por uma mistura estatística de estados de Fock. Neste sentido, o presente trabalho teve como objetivo descrever o experimento de geração do estado de vácuo comprimido sem o uso de estados coerentes para o campo laser. Para fins de uma primeira análise, o estado da luz laser foi considerado ser um estado de Fock. Posteriormente, para uma descrição mais realista, é considerada uma mistura estatística de estados de Fock para descrever o estado de saída do laser. A partir da correspondência existente entre uma mistura estatística de estados coerentes com fases aleatórias e uma mistura estatística de estados de Fock, é possível obter os resultados experimentais sem que, de fato, um estado comprimido seja gerado, uma vez que não é obtida compressão em uma quadratura específica devido à aleatoriedade da fase do campo laser. Isso levanta um questionamento se, de fato, a geração experimental de estados de vácuo comprimido já ocorreu.

Palavras-chave: Óptica Quântica em Variáveis Contínuas, Estados Comprimidos para a Luz, Estado do Campo Laser.

Abstract

Coherent states are usually used to describe the state of a laser field in experiments for the generation and detection of squeezed states, in particular for the squeezed vacuum state. Nevertheless, the state of a laser field is better described by a statistical mixture of coherent states with random phases or, similarly, by a statistical mixture of Fock states. In this sense, the present work's aim was to describe the experiment of generation of the squeezed vacuum state without using coherent states to describe the laser field. For the purpose of a first analysis, the state of the laser light was considered to be in a Fock state. Subsequently, for a more realistic description, a statistical mixture of Fock states is considered to describe the output state of the laser. From the correspondence between a statistical mixture of coherent states with random phases and a statistical mixture of Fock states, it is possible to obtain the experimental results without actually generating squeezed states, since squeezing in a specific quadrature is not obtained due to the randomness of the laser field phase. This raises a question whether, in fact, the experimental generation of the squeezed vacuum states has already occurred.

Keywords: Continuous-Variable Quantum Optics, Squeezed States of Light, State of a Laser Field.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
2	QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO	19
2.1	Quantização do Campo	19
2.2	Estados Coerentes	25
3	ESTADOS COMPRIMIDOS	31
3.1	Geração de Estados Comprimidos	31
3.1.1	Hamiltoniano de Interação	32
3.2	O Vácuo Comprimido	33
3.2.1	Variância da Quadratura para o Vácuo Comprimido	34
3.3	Deteccção de Estados Comprimidos	36
3.4	Esquema Experimental para Geração e Deteccção do Estado de Vácuo Comprimido	39
4	ESTADO QUÂNTICO DA LUZ LASER	41
4.1	Descrição do Campo de Luz Laser	41
4.2	Estado do Campo Laser na Base de Fock	42
4.3	Discussões na Literatura	42
5	DIFERENTES DESCRIÇÕES DO EXPERIMENTO DE GERAÇÃO DE ESTADOS DE VÁCUO COMPRIMIDO	47
5.1	Estado da Luz Laser como um Estado de Fock	47
5.1.1	Operador Diferença do Número de Fótons	48
5.1.2	Resultado obtido: Estado de Fock	51
5.2	Estado da Luz Laser como uma Mistura Estatística de Estados de Fock	53
5.3	Mistura Estatística de Estados Coerentes	53
6	CONCLUSÕES	57
	REFERÊNCIAS	61

ANEXOS	65
ANEXO A – OPERADOR DE COMPRESSÃO: ATUAÇÃO NOS OPERADORES ANIQUILAÇÃO E CRIAÇÃO	67
ANEXO B – EXPANSÃO $(1 - x)^{-\frac{1}{2}}$	69

1 Introdução

O estudo da luz e suas propriedades é algo há muito discutido. Na segunda metade do século XVII existiam estabelecidas duas vertentes encabeçadas por Christiaan Huygens e Isaac Newton, que defendiam a natureza e comportamento da luz como ondulatório ou corpuscular, respectivamente [1]. No início do século XIX experimentos, como por exemplo o experimento de fenda dupla, reforçaram a vertente ondulatória, mas apenas na segunda metade do século XIX com os estudos de James Clerk Maxwell sobre os fundamentos da teoria de campos e as demonstrações das chamadas equações de Maxwell, que consideram que a luz se comporta com o uma onda eletromagnética, a vertente ondulatória tornou-se amplamente aceita [1, 2]. Em 1887 Heinrich Hertz confirmou, experimentalmente, as previsões de Maxwell, experimentos estes que também o fizeram observar um novo fenômeno da luz, conhecido hoje como efeito fotoelétrico [1]. Albert Einstein foi o primeiro a propor que os quantas de energia, introduzidos primeiramente por Max Planck ao explicar o espectro de corpos térmicos, representavam a luz por si só e desta forma foi capaz de explicar a interação entre matéria e radiação, através da qual propôs um explicação para o efeito fotoelétrico [2]. Mais tarde, em 1913, Niels Bohr aplicou esta ideia de quantização à dinâmica atômica e foi capaz de fazer previsões acerca das posições de linhas atômicas espectrais [2].

Estas ideias foram cruciais para o desenvolvimento de toda a mecânica quântica e, em especial, para o estudo dos fundamentos e aplicações da óptica quântica. Um dos quesitos necessários para o estudo e compreensão dos fenômenos que a óptica quântica abrange é a conexão de resultados experimentais, provenientes de experimentos ópticos envolvendo interação da luz laser com a matéria, com a descrição teórica apropriada para cada fenômeno observado. A quantização do campo eletromagnético leva a um hamiltoniano análogo ao do oscilador harmônico quântico para cada modo do campo. Com o desenvolvimento de uma teoria quântica para explicar coerência óptica¹, baseada nos estados coerentes $|\alpha\rangle$, onde $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$, e em foto-detecção, é possível descrever o comportamento da luz no espaço de fase. Em mecânica clássica, um ponto no espaço de fase define todo o estado de um sistema, no entanto, em mecânica quântica este conceito pode ser problemático, visto que as variáveis canônicas, \hat{x} e \hat{p} são incompatíveis, ou seja, não comutam. Porém, os estados coerentes minimizam a relação de incerteza para dois operadores de quadratura ortogonais, \hat{X}_1 e \hat{X}_2 , que são análogos aos operadores de posição e momento adimensionais de um oscilador harmônico, fazendo com que as variâncias nestes dois operadores sejam iguais entre si e tenham o mesmo valor da variância

¹ Será adotada ao longo de todo trabalho coerência óptica como sendo uma superposição coerente de estados com diferentes números de fótons. Essa é a visão adotada por Klaus Mølmer em seu artigo *Optical Coherence: A Convenient Fiction*.

obtida calculando-se com o estado de vácuo [2]. Os valores esperados para os operadores de quadratura \hat{X}_1 e \hat{X}_2 utilizando os estados coerentes, dão exatamente a parte real e imaginária de α , respectivamente. Então, o plano complexo de α desempenha o papel do espaço de fase, agora com uma região de incerteza definindo o estado do sistema quântico. Desta forma, é possível utilizar conceitos de quase-probabilidades para representar um operador de densidade [2].

Através da utilização de óptica não-linear investiga-se fenômenos tais como geração de harmônicos e conversão paramétrica descendente, sendo que a partir deste último são obtidos os estados não-clássicos da luz, chamados de estados comprimidos. Alguns artigos sobre geração e detecção de estados comprimidos da luz são encontrados em [3–7]. Os estados comprimidos são estados que possuem a variância em alguma das quadraturas menor que o ruído do vácuo. Uma importante aplicação para os estados comprimidos está na área de metrologia quântica, visto que eles melhoram a sensibilidade de determinadas medições para experimentos interferométricos, como o aprimoramento da sensibilidade do detector de ondas gravitacionais LIGO [8], entre outras aplicações [6, 9–11]. Normalmente, ao abordar a geração de estados comprimidos, os livros textos [2, 12, 13] tratam a interação de um campo laser, com estado aproximado por um estado coerente, com um meio não-linear. Contudo, de acordo com o tratamento utilizado para a teoria de lasers, o estado do laser é melhor explicado ao considerá-lo como sendo uma mistura estatística de estados de Fock (ou uma mistura incoerente de estados coerentes) [12].

No ano de 1997, Klaus Mølmer publicou um artigo intitulado *Optical Coherence: a Convenient Fiction* [14], no qual concluía que os resultados de experimentos ópticos poderiam ser explicados sem a utilização de coerência no regime óptico. A partir do trabalho de Mølmer, iniciou-se uma discussão envolvendo o uso de coerência óptica para explicar experimentos em óptica quântica. Alguns artigos que decorreram a partir da publicação de Mølmer sobre coerência no regime óptico podem ser vistos em [15–24]. A dissertação aqui apresentada foi motivada pelo trabalho de Mølmer, no qual ele explica os resultados de um experimento de interferência entre duas fontes de laser independentes sem considerar que o laser está em um estado coerente. Este trabalho tratará da descrição de uma montagem experimental que pode ser utilizada para geração de estados comprimidos. O estudo focou-se em descrever o experimento de geração do estado de vácuo comprimido e da explicação dos resultados obtidos através desta, porém considerando que o estado do laser não é um estado coerente. Em particular, explica-se os resultados experimentais sem que um estado de vácuo comprimido seja de fato construído no experimento, o que levanta questões sobre qual é o aspecto quântico presente nesses experimentos. Neste sentido, este trabalho visa a obtenção de um entendimento mais profundo sobre o significado físico da geração de estados comprimidos em óptica quântica. Questiona-se se estados comprimidos para a luz já foram de fato construídos experimentalmente.

No capítulo 2 são mostrados conceitos importantes para o desenvolvimento do trabalho, a começar pela quantização do campo eletromagnético, onde são introduzidos os estados de Fock e posteriormente os estados coerentes e algumas de suas propriedades. No capítulo 3 são apresentados os estados comprimidos, os quais possuem vantagens sobre estados clássicos por apresentarem ruído em alguma das quadraturas menor que o ruído obtido para um estado coerente. Além disso, é feita uma descrição sobre o experimento que caracteriza estados de vácuo comprimido considerando-se um estado coerente para modelar o campo laser. O foco deste capítulo se faz no estado do vácuo comprimido, que foi o objetivo de estudo deste trabalho. O capítulo 4 traz uma descrição para o campo de luz laser, baseado em argumentos utilizados por Mølmer, ao mostrar o porquê de o estado inicial do laser não ser um estado coerente. Além disso, é apresentada uma breve revisão de literatura de trabalhos que foram motivados pelo fato de o estado do laser não ser um estado coerente. Finalmente, no capítulo 5 são mostrados que os resultados obtidos para a descrição do experimento utilizando-se estados coerentes, são os mesmos obtidos para a descrição utilizando-se tanto os estados de Fock para descrever o estado inicial do laser, quanto uma mistura estatística de estados de Fock ou, equivalentemente, uma mistura incoerente de estados coerentes.

2 Quantização do Campo Eletromagnético

Para o estudo de óptica quântica é necessário entender como o campo eletromagnético se comporta em uma perspectiva não-clássica. O Hamiltoniano de um modo do campo tem a mesma forma do Hamiltoniano para um oscilador harmônico clássico com uma dada frequência. Para quantizá-lo, é necessário identificar as variáveis canônicas para um sistema clássico e, utilizando a regra de correspondência, substituí-las pelos operadores equivalentes. Sendo assim, o espectro de energia do campo quantizado segue o mesmo padrão de um oscilador harmônico quântico, com uma energia mínima de $\hbar\omega/2$ e quanta de excitações com energia $\hbar\omega$, denominados fótons.

A descrição de um campo proveniente de uma fonte laser é, por vezes, feita utilizando-se estados coerentes. Estes estados são estados do oscilador harmônico quântico que apresentam a dinâmica mais similar à de um oscilador harmônico clássico. O presente capítulo aborda conceitos relacionados à quantização do campo eletromagnético e estados coerentes, que são fundamentais para o desenvolvimento dos capítulos posteriores.

2.1 Quantização do Campo

$$\begin{aligned}\hat{E}_x(z, t) &= \mathcal{E}_0(\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}) \sin kz \\ \hat{B}_y(z, t) &= \mathcal{B}_0 \frac{1}{i}(\hat{a}e^{-i\omega t} - \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}) \cos kz\end{aligned}\tag{2.1}$$

O campo eletromagnético, na ausência de cargas e correntes, é classicamente descrito pelas equações de Maxwell [2]

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\tag{2.2a}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},\tag{2.2b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,\tag{2.2c}$$

e

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0,\tag{2.2d}$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo, dada por $1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$, com μ_0 e ε_0 sendo, respectivamente, as constantes de permeabilidade magnética e permissividade do vácuo. \mathbf{E} e \mathbf{B} são os vetores de campo elétrico e campo magnético. Na ausência de fontes, as equações

de Maxwell são invariantes perante a escolha de calibre [12]. Uma escolha apropriada de calibre é o de Coulomb, que impõe

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.3)$$

onde $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ é o potencial vetor que satisfaz a equação de onda [2]

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.4)$$

Os vetores de campo elétrico e campo magnético são determinados a partir do potencial vetor, onde [2]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.5)$$

e

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (2.6)$$

É possível encontrar as soluções para a equação de onda (2.4), com condições de contorno periódicas, considerando-se que o espaço livre é modelado como uma cavidade cúbica com arestas de comprimento L [2]. Obtém-se as soluções físicas fazendo-se $L \rightarrow \infty$.

Escreve-se o potencial vetor como uma superposição linear de ondas planas [2]

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, s} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} [A_{\mathbf{k}s}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + A_{\mathbf{k}s}^*(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}], \quad (2.7)$$

com $A_{\mathbf{k}s}$ sendo a amplitude complexa do campo e $\mathbf{e}_{\mathbf{k}s}$ o vetor de polarização. A soma em \mathbf{k} significa a soma no conjunto de inteiros que especificam um modo normal do campo e a soma em s representa a soma sobre as duas polarizações independentes, que devem ser ortogonais $\mathbf{e}_{\mathbf{k}s} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}s'} = \delta_{ss'}$. Além disso, devido à escolha do calibre (2.3), os vetores de polarização satisfazem à condição de transversalidade (a polarização é ortogonal à direção de propagação) $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}} = 0$ [2]. A amplitude complexa $A_{\mathbf{k}s}(t)$, obtida pela solução da equação (2.4), é dada por [2]

$$A_{\mathbf{k}s}(t) = A_{\mathbf{k}s} e^{-i\omega_k t}, \quad (2.8)$$

com $\omega_k = ck$. A partir de (2.5) e (2.6) os vetores campo elétrico e magnético podem ser escritos como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}, s} \omega_k \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} [A_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} - A_{\mathbf{k}s}^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)}] \quad (2.9a)$$

e

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{c} \sum_{\mathbf{k}, s} \omega_k (\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}s}) [A_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} - A_{\mathbf{k}s}^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)}], \quad (2.9b)$$

com $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$.

O Hamiltoniano clássico, dado pela energia eletromagnética, tem a forma [2]

$$H = \frac{1}{2} \int_V \left(\varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right) dV. \quad (2.10)$$

As condições de contorno periódicas impõem que

$$\int_V e^{\pm i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} dV = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} V. \quad (2.11)$$

Calcula-se então a contribuição dos campos elétrico e magnético para H . Para o campo elétrico tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV &= \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_0 \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', s, s'} \omega_k^2 \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}'s'} \left\{ A_{\mathbf{k}s}(t) A_{\mathbf{k}'s'}^*(t) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} \right. \\ &\quad + A_{\mathbf{k}s}^*(t) A_{\mathbf{k}'s'}(t) e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} - A_{\mathbf{k}s}(t) A_{\mathbf{k}'s'}(t) e^{i[\mathbf{k}-(-\mathbf{k}')]\cdot\mathbf{r}} \\ &\quad \left. - A_{\mathbf{k}s}^*(t) A_{\mathbf{k}'s'}^*(t) e^{-i[\mathbf{k}-(-\mathbf{k}')]\cdot\mathbf{r}} \right\} dV. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Utilizando-se a equação (2.11) e a condição $\mathbf{e}_{\mathbf{k}s} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}'s'} = \delta_{ss'}$, verifica-se que

$$\frac{1}{2} \int_V \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV = \varepsilon_0 V \sum_{\mathbf{k}s} \omega_k^2 A_{\mathbf{k}s}(t) A_{\mathbf{k}s}^*(t) - R, \quad (2.13)$$

onde

$$R = \frac{1}{2} \varepsilon_0 V \sum_{\mathbf{k}s s'} \omega_k^2 \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} \cdot \mathbf{e}_{-\mathbf{k}s'} [A_{\mathbf{k}s}(t) A_{-\mathbf{k}s'}(t) + A_{\mathbf{k}s}^*(t) A_{-\mathbf{k}s'}^*(t)]. \quad (2.14)$$

Para obter a contribuição magnética, faz-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} dV &= \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_0 \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', s, s'} \omega_k^2 (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}s}) \cdot (\mathbf{k}' \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}'s'}) \left\{ A_{\mathbf{k}s}(t) A_{\mathbf{k}'s'}^*(t) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} \right. \\ &\quad + A_{\mathbf{k}s}^*(t) A_{\mathbf{k}'s'}(t) e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} - A_{\mathbf{k}s}(t) A_{\mathbf{k}'s'}(t) e^{i[\mathbf{k}-(-\mathbf{k}')]\cdot\mathbf{r}} \\ &\quad \left. - A_{\mathbf{k}s}^*(t) A_{\mathbf{k}'s'}^*(t) e^{-i[\mathbf{k}-(-\mathbf{k}')]\cdot\mathbf{r}} \right\} dV. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Utilizando-se a identidade vetorial [2]

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}), \quad (2.16)$$

obtém-se as relações

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}s}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}s'}) = \delta_{ss'} \quad (2.17a)$$

e

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}s}) \cdot (-\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{-\mathbf{k}s'}) = -\mathbf{e}_{\mathbf{k}s} \cdot \mathbf{e}_{-\mathbf{k}s'}. \quad (2.17b)$$

Com estes resultados e a equação (2.11), calcula-se a contribuição magnética para H

$$\frac{1}{2} \int_V \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} dV = \varepsilon_0 V \sum_{\mathbf{k}s} \omega_k^2 A_{\mathbf{k}s}(t) A_{\mathbf{k}s}^*(t) + R, \quad (2.18)$$

sendo R o mesmo mostrado em (2.14).

Somando-se os resultados obtidos em (2.13) e (2.18) e levando-se em conta (2.8), obtém-se a energia do campo como sendo

$$H = 2\varepsilon_0 V \sum_{\mathbf{k}s} \omega_k^2 A_{\mathbf{k}s} A_{\mathbf{k}s}^*. \quad (2.19)$$

Para introduzir as variáveis canônicas $p_{\mathbf{k}s}$ e $q_{\mathbf{k}s}$ definem-se

$$A_{\mathbf{k}s} = \frac{1}{2\omega_k(\varepsilon_0 V)^{1/2}}[\omega_k q_{\mathbf{k}s} + ip_{\mathbf{k}s}] \quad (2.20a)$$

e

$$A_{\mathbf{k}s}^* = \frac{1}{2\omega_k(\varepsilon_0 V)^{1/2}}[\omega_k q_{\mathbf{k}s} - ip_{\mathbf{k}s}]. \quad (2.20b)$$

Substituindo-se em (2.19), obtém-se

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}s} (p_{\mathbf{k}s}^2 + \omega_k^2 q_{\mathbf{k}s}^2), \quad (2.21)$$

no qual cada termo da soma corresponde à energia de um único oscilador harmônico de massa unitária [2]. As equações de Hamilton [25]

$$\dot{q}_{\mathbf{k}s} = \frac{\partial H}{\partial p_{\mathbf{k}s}} \quad (2.22a)$$

e

$$\dot{p}_{\mathbf{k}s} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\mathbf{k}s}}, \quad (2.22b)$$

são consistentes com (2.8), visto que

$$\frac{dq_{\mathbf{k}s}}{dt} = p_{\mathbf{k}s} \implies q_{\mathbf{k}s} = 2\sqrt{\varepsilon_0 V} A_{\mathbf{k}s} \cos \omega_k t \quad (2.23a)$$

e

$$\frac{dp_{\mathbf{k}s}}{dt} = -\omega_k^2 q_{\mathbf{k}s} \implies p_{\mathbf{k}s} = -2\sqrt{\varepsilon_0 V} \omega_k A_{\mathbf{k}s} \sin \omega_k t. \quad (2.23b)$$

Para a quantização do campo, identifica-se $p_{\mathbf{k}s}$ e $q_{\mathbf{k}s}$ como sendo os operadores $\hat{p}_{\mathbf{k}s}$ e $\hat{q}_{\mathbf{k}s}$, que obedecem às relações de comutação [2]

$$[\hat{q}_{\mathbf{k}s}, \hat{q}_{\mathbf{k}'s'}] = 0 = [\hat{p}_{\mathbf{k}s}, \hat{p}_{\mathbf{k}'s'}] \quad (2.24a)$$

e

$$[\hat{q}_{\mathbf{k}s}, \hat{p}_{\mathbf{k}'s'}] = i\hbar \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{ss'}. \quad (2.24b)$$

Definem-se os operadores de aniquilação e criação, respectivamente, como

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}}[\omega_k \hat{q}_{\mathbf{k}s} + i\hat{p}_{\mathbf{k}s}] \quad (2.25a)$$

e

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}}[\omega_k \hat{q}_{\mathbf{k}s} - i\hat{p}_{\mathbf{k}s}], \quad (2.25b)$$

os quais satisfazem às relações de comutação

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}s}, \hat{a}_{\mathbf{k}'s'}] = 0 = [\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger], \quad (2.26a)$$

e

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}s}, \hat{a}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{ss'}. \quad (2.26b)$$

Escrevendo-se os operadores $\hat{q}_{\mathbf{k}s}$ e $\hat{p}_{\mathbf{k}s}$ em termos de $\hat{a}_{\mathbf{k}s}$ e $\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger$

$$\hat{q}_{\mathbf{k}s} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega_k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}s} + \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger) \quad (2.27a)$$

e

$$\hat{p}_{\mathbf{k}s} = \frac{1}{2i} \sqrt{2\hbar\omega_k} (\hat{a}_{\mathbf{k}s} - \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger), \quad (2.27b)$$

o operador Hamiltoniano é finalmente escrito como [2]

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}s} \hbar\omega_k \left(\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}s} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.28)$$

Para um modo do campo eletromagnético, obtido fixando-se um valor para \mathbf{k} e s , tem-se as relações

$$\hat{A} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0 V}} \hat{a} \quad (2.29a)$$

e

$$\hat{A}^\dagger = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0 V}} \hat{a}^\dagger. \quad (2.29b)$$

Com isso, os operadores campo elétrico e campo magnético são escritos como

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} [\hat{a} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + \hat{a}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}] \quad (2.30a)$$

e

$$\hat{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{c} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} [\hat{a} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} - \hat{a}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}]. \quad (2.30b)$$

Portanto, o operador Hamiltoniano é dado por [2]

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.31)$$

O operador $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ que aparece em (2.31) é conhecido como operador de número e por vezes é denotado por \hat{n} . Um autoestado de energia do operador Hamiltoniano para um modo do campo eletromagnético é o estado de número, ou estado de Fock, $|n\rangle$, com autovalor de energia E_n . A equação de autoenergias para o oscilador harmônico é dada por [2]

$$\hat{H} |n\rangle = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E_n |n\rangle. \quad (2.32)$$

Multiplicando-se ambos lados da equação (2.32) pelo operador criação \hat{a}^\dagger ,

$$\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E_n \hat{a}^\dagger |n\rangle, \quad (2.33)$$

e utilizando-se a relação de comutação (2.26b) obtém-se a equação

$$\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} - 1 \right) \hat{a}^\dagger |n\rangle = E_n \hat{a}^\dagger |n\rangle, \quad (2.34)$$

que fornece uma nova equação de autovalores, agora para $\hat{a}^\dagger |n\rangle$,

$$\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) (\hat{a}^\dagger |n\rangle) = (E_n + \hbar\omega) (\hat{a}^\dagger |n\rangle). \quad (2.35)$$

Isso significa que $\hat{a}^\dagger |n\rangle$ é um autoestado do operador Hamiltoniano, com autoenergia dada por $E_n + \hbar\omega$, ou seja, um quanta (ou um fóton) de energia $\hbar\omega$ é criado. Analogamente, o operador \hat{a} aniquila um quanta (fóton) de energia $\hbar\omega$. A energia mínima do estado fundamental é dada por [2]

$$\hat{H} |0\rangle = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |0\rangle = \frac{1}{2} \hbar\omega |0\rangle, \quad (2.36)$$

uma vez que $\hat{a} |0\rangle = 0$.

Portanto, para o estado de Fock, tem-se a relação

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle. \quad (2.37)$$

Esses estados devem ser normalizados, ou seja, $\langle n|n\rangle = 1$. Para o estado $\hat{a} |n\rangle$ tem-se que

$$\hat{a} |n\rangle = c_n |n-1\rangle, \quad (2.38)$$

onde c_n é determinada através do produto interno de $\hat{a} |n\rangle$ com ele mesmo

$$\begin{aligned} (\langle n| \hat{a}^\dagger) (\hat{a} |n\rangle) &= \langle n| \hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n \\ &= \langle n-1| c_n^* c_n |n-1\rangle = |c_n|^2 \\ \therefore c_n &= \sqrt{n}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Portanto

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle. \quad (2.40)$$

Analogamente é possível mostrar que

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (2.41)$$

Por \hat{H} e \hat{n} serem operadores hermitianos, $\langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}$ e além disso, os estados de Fock formam uma base completa, logo

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = \mathbb{1}. \quad (2.42)$$

Ao contrário dos estados coerentes, que serão mostrados na sessão seguinte, os estados de Fock $|n\rangle$, não têm nenhum análogo clássico [2].

É conveniente introduzir os chamados operadores de quadratura, que são definidos como sendo análogos aos operadores de posição e momento adimensionais [2] para um oscilador harmônico,

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (2.43a)$$

e

$$\hat{X}_2 = \frac{1}{2i} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (2.43b)$$

Esses operadores satisfazem a relação de comutação

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = \frac{i}{2}. \quad (2.44)$$

Pode-se escrever de forma genérica um operador de quadratura como

$$\hat{X}(\theta) = \frac{1}{2}(\hat{a}e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta}), \quad (2.45)$$

no qual nota-se que quando $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$, recuperam-se, respectivamente, os operadores (2.43a) e (2.43b).

Para o estado de vácuo, que é um estado de Fock com $n = 0$, as variâncias nos dois operadores de quadraturas são iguais [2]

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle_{vac} = \langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle_{vac} = \frac{1}{4}, \quad (2.46)$$

de forma que a relação de incerteza $\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle \geq |\langle \hat{C} \rangle|^2 / 4$ [2], para dois operadores \hat{A} e \hat{B} que satisfazem $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$ é igualada

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle_{vac} \langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle_{vac} = \frac{1}{16}. \quad (2.47)$$

Logo, o estado de vácuo possui relação de incerteza mínima entre suas quadraturas. Os operadores de quadratura serão importantes, posteriormente, para a definição dos estados não-clássicos da luz chamados de estados comprimidos.

2.2 Estados Coerentes

Um dos estados do oscilador harmônico quântico que apresenta o comportamento “mais clássico” [2] é o chamado estado coerente. A média dos operadores de posição e momento, \hat{q} e \hat{p} , obtidos na quantização do campo eletromagnético, apresenta o comportamento semelhante ao das variáveis canônicas clássicas, q e p . Por este motivo, os estados coerentes são, por vezes, chamados de estados quase-clássicos [2, 12, 26, 27].

Os estados coerentes são também conhecidos por serem autoestados do operador de aniquilação \hat{a} [2],

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle. \quad (2.48)$$

Fisicamente, isso significa que os estados coerente são indiferentes à aniquilação de um fóton, ou seja, uma foto-detecção não perturba esses estados. Escrevendo a equação de autovalores à esquerda $\langle \alpha | \hat{a}^\dagger = \alpha^* \langle \alpha |$, vê-se que $\langle \alpha |$ são autoestados do operador de

criação \hat{a}^\dagger , com autovalor α^* [27]. Como mostrado na equação (2.42), os estados de Fock formam uma base completa. Logo, é possível expandir $|\alpha\rangle$ em termos de $|n\rangle$ [2], ou seja,

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle. \quad (2.49)$$

Portanto, atuando-se \hat{a} em (2.49) tem-se

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \hat{a} |n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sqrt{n} |n-1\rangle. \quad (2.50a)$$

Igualando-se a expressão acima a $\alpha |\alpha\rangle$, deduz-se de (2.49) que

$$C_n \sqrt{n} = \alpha C_{n-1}, \quad (2.50b)$$

que conduz à relação de recursão

$$C_n = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} C_{n-1} = \frac{\alpha^2}{\sqrt{n(n-1)}} C_{n-2} = \dots = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0. \quad (2.50c)$$

Portanto

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0 |n\rangle. \quad (2.51)$$

A constante C_0 é determinada pela normalização

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = \sum_{n,n'} |C_0|^2 \frac{\alpha^{*n'} \alpha^n}{\sqrt{n'!n!}} \langle n' | n \rangle = 1. \quad (2.52)$$

Obtém-se, então,

$$\begin{aligned} |C_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} &= |C_0|^2 e^{|\alpha|^2} \\ \therefore |C_0| &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Assim, o estado coerente é escrito como

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.54)$$

Uma outra maneira de se obter um estado coerente, escrito em termo de estados de Fock, é aplicando-se o operador de deslocamento, definido como

$$\hat{D}(\alpha) = e^{(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})}, \quad (2.55)$$

no estado de vácuo. Pode-se mostrar, utilizando-se o lema de Baker-Hausdorff, que [28]

$$\hat{D}(\alpha) = e^{(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})} = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}}. \quad (2.56)$$

Escrevendo-se o estado coerente como

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n (\hat{a}^\dagger)^n}{n!} |0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle, \quad (2.57)$$

e inserindo-se o operador¹ $e^{-\alpha^* \hat{a}}$ entre $e^{\alpha \hat{a}^\dagger}$ e $|0\rangle$, tem-se que o operador deslocamento atuando no estado de vácuo gera um estado coerente,

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} |0\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle. \quad (2.58)$$

Nota-se que a distribuição de probabilidade para o número de fótons, num estado coerente, é uma distribuição de Poisson, ou seja,

$$P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!}, \quad (2.59)$$

onde $|\alpha|^2$ é o número médio de fótons [12]. Outra maneira de verificar este número médio de fótons é calculando-se o valor esperado do operador número de fótons $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$,

$$\langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = |\alpha|^2. \quad (2.60)$$

O valor esperado do operador número de fótons ao quadrado, \hat{n}^2 , é

$$\langle \alpha | \hat{n}^2 | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle = \langle \alpha | (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}) | \alpha \rangle = |\alpha|^4 + |\alpha|^2. \quad (2.61)$$

Portanto a variância no número de fótons é dada por [2]

$$\Delta n = \sqrt{\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2} = \sqrt{|\alpha|^4 + |\alpha|^2 - |\alpha|^4} = |\alpha|. \quad (2.62)$$

Um fato importante sobre os estados coerentes é que o valor das variâncias para os operadores de quadratura, (2.43a) e (2.43b), é o mesmo obtido calculando-se com o estado de vácuo [2]. Isso pode ser verificado calculando-se

$$\langle \hat{X}_1 \rangle_\alpha = \langle \alpha | \frac{1}{2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) | \alpha \rangle = \frac{1}{2} (\alpha + \alpha^*), \quad (2.63a)$$

$$\langle \hat{X}_2 \rangle_\alpha = \langle \alpha | \frac{1}{2i} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) | \alpha \rangle = \frac{1}{2i} (\alpha - \alpha^*), \quad (2.63b)$$

$$\langle \hat{X}_1^2 \rangle_\alpha = \langle \alpha | \frac{1}{4} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) | \alpha \rangle = \frac{1}{4} (\alpha^2 + \alpha^{*2} + 2|\alpha| + 1) = \frac{1}{4} [(\alpha + \alpha^*)^2 + 1], \quad (2.63c)$$

$$\langle \hat{X}_2^2 \rangle_\alpha = -\frac{1}{4} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) | \alpha \rangle = \frac{1}{4} (\alpha^2 + \alpha^{*2} - 2|\alpha| - 1) = \frac{1}{4} [(\alpha - \alpha^*)^2 - 1]. \quad (2.63d)$$

Com isso calcula-se a variância para os operadores \hat{X}_1 e \hat{X}_2 , dadas por

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle_\alpha = \langle \hat{X}_1^2 \rangle_\alpha - \langle \hat{X}_1 \rangle_\alpha^2 = \frac{1}{4} \quad (2.64a)$$

¹ Que pode ser feito sem perda de generalidade, visto que expandindo-se em série de Taylor, tem-se

$$e^{-\alpha^* \hat{a}} |0\rangle = \left[1 - \alpha^* \hat{a} + \frac{(\alpha^* \hat{a})^2}{2!} - \dots \right] |0\rangle = |0\rangle.$$

e

$$\langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle_\alpha = \langle \hat{X}_1^2 \rangle_\alpha - \langle \hat{X}_1 \rangle_\alpha^2 = \frac{1}{4}. \quad (2.64b)$$

Logo o produto das incertezas é

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle_\alpha \langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle_\alpha = \frac{1}{16}, \quad (2.65)$$

valor este igual ao obtido em (2.47), sendo um estado com o mínimo valor possível para o produto dessas incertezas.

Fazendo-se a evolução temporal de um estado coerente $|\alpha\rangle$, com $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$, tem-se que o estado coerente evoluído, $|\psi(t)\rangle$, será

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\alpha\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{(n!)}} e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle \\ &= e^{-i\omega t/2} e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{(n!)}} e^{-i\omega t n} |n\rangle \\ &= e^{-i\omega t/2} |\alpha(t)\rangle, \end{aligned} \quad (2.66)$$

com $\alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t}$. Calculando-se $\langle \hat{X}_1 \rangle$ e $\langle \hat{X}_2 \rangle$ para o estado evoluído, obtém-se

$$\langle \hat{X}_1 \rangle_t = \langle \psi(t) | \hat{X}_1 | \psi(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle \alpha(t) | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) | \alpha(t) \rangle = \frac{1}{2} (\alpha e^{-i\omega t} + \alpha^* e^{i\omega t}) \quad (2.67a)$$

e

$$\langle \hat{X}_2 \rangle_t = \langle \psi(t) | \hat{X}_2 | \psi(t) \rangle = \frac{1}{2i} \langle \alpha(t) | (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) | \alpha(t) \rangle = \frac{1}{2i} (\alpha e^{-i\omega t} - \alpha^* e^{i\omega t}). \quad (2.67b)$$

Substituindo-se $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$ em (2.67a) e (2.67b) obtém-se as expressões

$$\langle \hat{X}_1 \rangle_t = |\alpha| \cos(\omega t - \theta) \quad (2.68a)$$

e

$$\langle \hat{X}_2 \rangle_t = -|\alpha| \sin(\omega t - \theta), \quad (2.68b)$$

que são análogas às equações de movimento obtidas para um oscilador harmônico clássico.

A representação do círculo de erro para um estado coerente $|\alpha\rangle$, com $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$, e para o estado de vácuo $|0\rangle$ é mostrada na Fig.1.

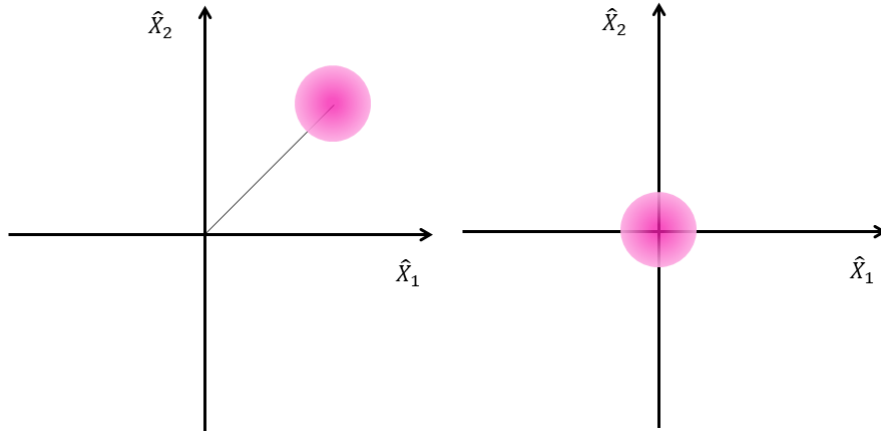


Figura 1 – Representação do círculo de erro para um estado coerente e para o estado de vácuo.

O estado do sistema não é totalmente determinado por um ponto no espaço de fase, como é o caso em mecânica clássica, mas sim por uma região de incerteza no plano das quadraturas. Para o estado coerente essas incertezas são iguais em todas as direções do espaço de fase. A distância da origem do plano das quadraturas ao centro do círculo de erro é dada por $|\alpha|$, quanto maior este valor mais próximo do “limite clássico” esse estado estará. Percebe-se que o estado de vácuo é um estado coerente centrado na origem, $|\alpha| = 0$, ou seja, o estado de vácuo é o único estado de número que também é um estado coerente [2].

O valor esperado do operador campo elétrico para um modo do campo eletromagnético, dado por

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = i \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} [\hat{a}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} - \hat{a}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}], \quad (2.69)$$

utilizando-se um estado de Fock é nulo, ou seja,

$$\langle n | \hat{E}(\mathbf{r}, t) | n \rangle = i \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\langle n | \hat{a}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} | n \rangle - \langle n | \hat{a}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} | n \rangle \right) = 0. \quad (2.70)$$

No entanto, espera-se que um estado quântico que represente o limite clássico (limite para o qual o número médio de fótons é muito grande), o valor esperado do operador campo elétrico apresente um comportamento semelhante ao do campo elétrico clássico (oscilando sinusoidalmente no tempo). Obtém-se um comportamento deste tipo para o valor esperado do operador $\hat{E}(\mathbf{r}, t)$ ao calcular-se utilizando-se um estado coerente,

$$\langle \alpha | \hat{E}(\mathbf{r}, t) | \alpha \rangle = i \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} [\alpha e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} - \alpha^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}]. \quad (2.71)$$

Escrevendo novamente α na forma polar, $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$, vê-se que o valor esperado para o operador campo elétrico de fato oscila como uma onda clássica,

$$\langle \alpha | \hat{E}(\mathbf{r}, t) | \alpha \rangle = 2 |\alpha| \left(\frac{\hbar \omega}{2 \varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \theta). \quad (2.72)$$

Analogamente, o valor esperado para o operador campo magnético também apresentará um comportamento oscilatório.

Portanto os estados coerentes são considerados estados bem próximos de “estados clássicos” pois:

- i. os valores médios para os operadores de quadratura se comportam de maneira semelhante às variáveis canônicas posição e momento para um oscilador harmônico clássico;
- ii. a incerteza relativa para o operador número de fótons decresce com o aumento do número médio de fótons ($\Delta n / \bar{n} = 1 / \sqrt{\bar{n}}$); e
- iii. eles minimizam a relação de incerteza para dois operadores de quadraturas ortogonais. Sendo assim, no limite $|\alpha| \gg 1$, tem-se um estado com valores esperados para os campos elétrico e magnético que oscilam sinusoidalmente com amplitude e fase bem definidos, como no caso clássico.

3 Estados comprimidos

Os estados não-clássicos da luz aparecem na literatura há um certo tempo e existe uma vasta gama de estudos acerca de suas aplicações, algumas destas podem ser encontradas em [4, 5, 29–32]. Estudos mais recentes [6, 8–11] também destacam importantes aplicações de estados comprimidos da luz na área de metrologia quântica, para detecção de ondas gravitacionais. Estados comprimidos são estados que apresentam em alguma quadratura um ruído menor que o ruído para o estado de vácuo. A seguir serão apresentadas algumas propriedades destes estados, em especial, para o estado de vácuo comprimido.

3.1 Geração de Estados Comprimidos

Os estados comprimidos da luz são gerados a partir de um processo paramétrico onde ocorre uma interação do laser, considerado estar em um estado coerente, com meios não lineares. Para obter um estado comprimido geral, é necessária a atuação dos operadores de compressão e deslocamento no estado de vácuo, $|\alpha, \xi\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)|0\rangle$ [2], mas para o presente trabalho o foco ateve-se em estudar o estado de vácuo comprimido, sendo os estados comprimidos de maneira geral alvo de trabalhos futuros.

O operador de compressão é definido como [2]

$$\hat{S}(\xi) = e^{[\frac{1}{2}(\xi^* \hat{a}^2 - \xi \hat{a}^{\dagger 2})]}, \quad (3.1)$$

onde $\xi = re^{i\phi}$, r o parâmetro de compressão e ϕ o ângulo de compressão, com $0 \leq r < \infty$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Este operador é unitário, portanto,

$$\hat{S}(\xi)\hat{S}^\dagger(\xi) = \hat{S}^\dagger(\xi)\hat{S}(\xi) = \mathbb{1}. \quad (3.2)$$

Para que um estado seja considerado comprimido, este deve apresentar, necessariamente, a variância em alguma quadratura menor que a variância desta mesma quadratura calculada para o estado do vácuo (2.46), como representado na Fig.2. Vê-se na figura que a medida que uma quadratura é comprimida, conseqüentemente ocorre um alongamento na quadratura ortogonal. Isto ocorre pois o princípio de incerteza deve ser respeitado.

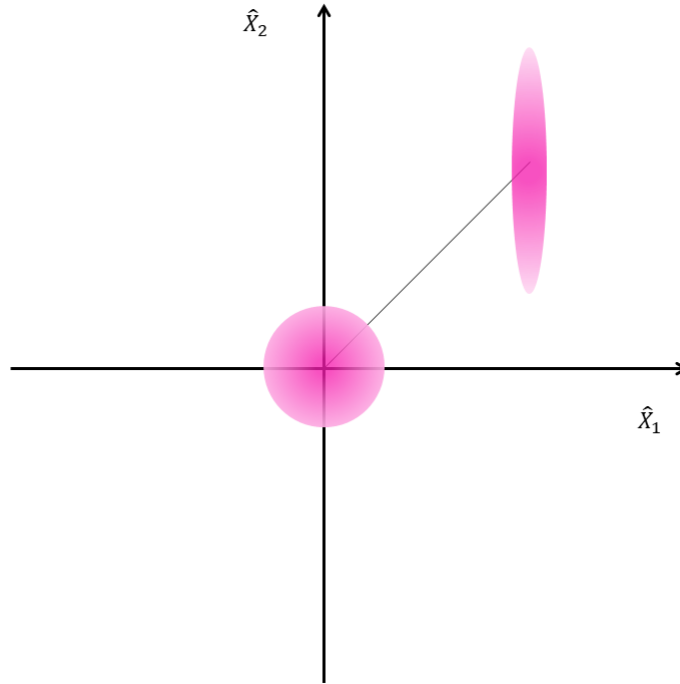


Figura 2 – Representação da elipse de erro para um estado de vácuo comprimido deslocado. Comparando-se com a elipse de erro para o estado de vácuo, vê-se que há compressão ao longo da quadratura \hat{X}_1 .

3.1.1 Hamiltoniano de Interação

O Hamiltoniano de interação do processo paramétrico para a geração de estados comprimidos da luz deve ser quadrático nos operadores de aniquilação e criação do modo do campo em que irá ocorrer a compressão, pois esses estados são produzidos pela geração espontânea de pares de fótons. Este processo pode ser realizado, por exemplo, através da conversão paramétrica descendente, onde um meio não-linear é bombeado por um campo clássico coerente de frequência ω_p e alguns fótons deste campo são convertidos em pares de fótons de frequência $\omega_p/2$ cada um. O Hamiltoniano deste processo é dado por

$$\hat{H} = \hbar\omega_p\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega\hat{b}^\dagger\hat{b} + i\hbar\chi^{(2)}(\hat{a}^2\hat{b}^\dagger - \hat{a}^{\dagger 2}\hat{b}), \quad (3.3)$$

onde \hat{b} é o operador de aniquilação do modo do campo de bombeio, \hat{a} é o operador de aniquilação do modo do campo sinal e $\chi^{(2)}$ é uma susceptibilidade não-linear de segunda ordem [2].

Para este processo, faz-se a aproximação paramétrica, na qual assume-se que o modo do campo de bombeio está em um estado coerente muito intenso (de forma que este estado permanece inalterado durante toda escala de tempo de interesse), $|\beta e^{-i\omega_p t}\rangle$, com um grande número médio de fótons, $|\beta| \gg 1$. Os operadores de aniquilação e criação, \hat{b} e \hat{b}^\dagger , no Hamiltoniano (3.3) podem então serem substituídos pelos números complexos correspondentes aos seus valores esperados. Desta forma, $\hat{b} \rightarrow \beta e^{-i\omega_p t}$ e $\hat{b}^\dagger \rightarrow \beta^* e^{i\omega_p t}$.

Portanto, a aproximação paramétrica para o Hamiltoniano em (3.3), desconsiderando termos constantes irrelevantes, é

$$\hat{H}^{(PA)} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + i\hbar(\eta^*\hat{a}^2e^{i\omega_p t} - \eta\hat{a}^{\dagger 2}e^{-i\omega_p t}) = H_0 + H_{int} \quad (3.4)$$

onde $\eta = \chi^{(2)}\beta$, $H_0 = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}$ e $H_{int} = i\hbar(\eta^*\hat{a}^2e^{i\omega_p t} - \eta\hat{a}^{\dagger 2}e^{-i\omega_p t})$. Escrevendo-se na representação de interação, obtém-se

$$\begin{aligned} \hat{H}_I(t) &= e^{i\hat{H}_0 t/\hbar}\hat{H}_{int}(t)e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} \\ &= i\hbar[\eta^*\hat{a}^2e^{i(\omega_p-2\omega)t} - \eta\hat{a}^{\dagger 2}e^{-i(\omega_p-2\omega)t}]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Escolhendo $\omega_p = 2\omega$, o Hamiltoniano torna-se independente do tempo, isto é,

$$\hat{H}_I = i\hbar[\eta^*\hat{a}^2 - \eta\hat{a}^{\dagger 2}], \quad (3.6)$$

com operador de evolução associado dado por

$$\hat{U}_I(t, 0) = e^{-i\hat{H}_I t/\hbar} = e^{(\eta^*t\hat{a}^2 - \eta t\hat{a}^{\dagger 2})}, \quad (3.7)$$

o qual possui a forma de um operador de compressão [2], mostrado em (3.1), com $2\eta t = \xi$.

3.2 O Vácuo Comprimido

Quando o operador de compressão (3.1) atua no estado de vácuo $|0\rangle$, gera-se o estado de vácuo comprimido, denotado por $|\xi\rangle$ [2]

$$|\xi\rangle = \hat{S}(\xi)|0\rangle. \quad (3.8)$$

O estado de vácuo comprimido pode ser escrito na base de estados de Fock,

$$|\xi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle. \quad (3.9)$$

Para isto, considere a atuação do operador de aniquilação no estado de vácuo, com

$$\hat{a}|0\rangle = 0. \quad (3.10)$$

Atuando o operador $\hat{S}(\xi)$ em ambos os lados da equação (3.10) e utilizando (3.2) obtém-se

$$\hat{S}(\xi)\hat{a}\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{S}(\xi)|0\rangle = \hat{S}(\xi)\hat{a}\hat{S}^\dagger(\xi)|\xi\rangle = 0. \quad (3.11)$$

Utilizando-se os resultados mostrados no anexo A, em especial as equações (A.8) e (A.9), é possível então reescrever (3.11) como

$$(\hat{a} \cosh r + e^{i\phi}\hat{a}^\dagger \sinh r)|\xi\rangle = 0. \quad (3.12)$$

Utilizando-se (3.9),

$$\left(\hat{a} \cosh r + e^{i\phi} \hat{a}^\dagger \sinh r\right) \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle = 0, \quad (3.13)$$

chega-se à relação de recursão

$$C_{n+1} = -e^{i\phi} \tanh r \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/2} C_{n-1}. \quad (3.14)$$

Esta relação conduz a duas soluções distintas (uma envolvendo apenas os números de fótons pares e outra envolvendo apenas números de fótons ímpares), mas apenas a solução que contém o vácuo é importante aqui [2]. Assim sendo, a solução para a relação de recursão é

$$C_{2m} = (-1)^m (e^{i\phi} \tanh r)^m \left[\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\right]^{1/2} C_0. \quad (3.15)$$

O coeficiente C_0 é determinado pela condição de normalização

$$\sum_{m=0}^{\infty} |C_{2m}|^2 = 1, \quad (3.16)$$

donde, utilizando as relações mostradas no anexo B, obtém-se $C_0 = \sqrt{\operatorname{sech} r}$ [13]. Desta forma, o estado de vácuo comprimido na base de Fock, é escrito como [2]

$$|\xi\rangle = \sqrt{\operatorname{sech} r} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\sqrt{(2m)!}}{2^m m!} e^{im\phi} (\tanh r)^m |2m\rangle. \quad (3.17)$$

De (3.17) vê-se que a distribuição de probabilidades para o número de fótons no campo é [2]

$$P(2m) = |\langle 2m|\xi\rangle|^2 = \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} \frac{(\tanh r)^{2m}}{\cosh r} \quad (3.18a)$$

e

$$P(2m+1) = |\langle 2m+1|\xi\rangle|^2 = 0. \quad (3.18b)$$

Portanto, a distribuição de probabilidades para o número de fótons para o estado de vácuo comprimido é nula para todos os números ímpares de fótons [2].

3.2.1 Variância da Quadratura para o Vácuo Comprimido

Para obter a variância do operador de quadratura (2.45), é necessário calcular $\langle \hat{X}(\theta) \rangle^2$ e $\langle \hat{X}^2(\theta) \rangle$. Calculando-se o valor esperado para o operador de quadratura \hat{X}^1 ,

$$\begin{aligned} \langle \hat{X} \rangle &= \langle \xi | \hat{X} | \xi \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle 0 | \hat{S}^\dagger(\xi) (\hat{a} e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta}) \hat{S}(\xi) | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left(\langle 0 | \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a} e^{-i\theta} \hat{S}(\xi) | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a}^\dagger e^{i\theta} \hat{S}(\xi) | 0 \rangle \right), \end{aligned} \quad (3.19)$$

¹ Para não carregar a notação, aqui faz-se: $\hat{X}(\theta) \equiv \hat{X}$.

e utilizando-se novamente as equações (A.8) e (A.9) mostradas no anexo A, obtém-se

$$\begin{aligned} \langle \hat{X} \rangle &= \frac{1}{2} \left[e^{-i\theta} \langle 0 | (\hat{a} \cosh r - \hat{a}^\dagger e^{i\phi} \sinh r) | 0 \rangle + \right. \\ &\quad \left. + e^{i\theta} \langle 0 | (\hat{a}^\dagger \cosh r - \hat{a} e^{-i\phi} \sinh r) | 0 \rangle \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Portanto, $\langle (\Delta \hat{X})^2 \rangle = \langle \hat{X}^2 \rangle$. Então, calculando-se $\langle \hat{X}^2 \rangle$

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{X})^2 \rangle &= \langle \xi | (\hat{X})^2 | \xi \rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle 0 | \hat{S}^\dagger(\xi) (\hat{a} e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta}) \hat{S}(\xi) \hat{S}^\dagger(\xi) (\hat{a} e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta}) \hat{S}(\xi) | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle 0 | [e^{-i\theta} (\hat{a} \cosh r - \hat{a}^\dagger e^{i\phi} \sinh r) + e^{i\theta} (\hat{a}^\dagger \cosh r - \hat{a} e^{-i\phi} \sinh r)]^2 | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{4} [\cosh^2 r + \sinh^2 r - e^{-i(2\theta-\phi)} (\sinh r \cosh r) - e^{i(2\theta-\phi)} (\sinh r \cosh r)], \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde mais uma vez foram utilizadas as equações (A.8) e (A.9). Reescrevendo, obtém-se a variância do operador de quadratura da forma

$$\langle (\Delta \hat{X})^2 \rangle = \frac{1}{4} [\cosh^2 r + \sinh^2 r - 2 \sinh r \cosh r \cos(2\theta - \phi)], \quad (3.22)$$

onde r e ϕ são os mesmos parâmetros do operador de compressão da equação (3.1).

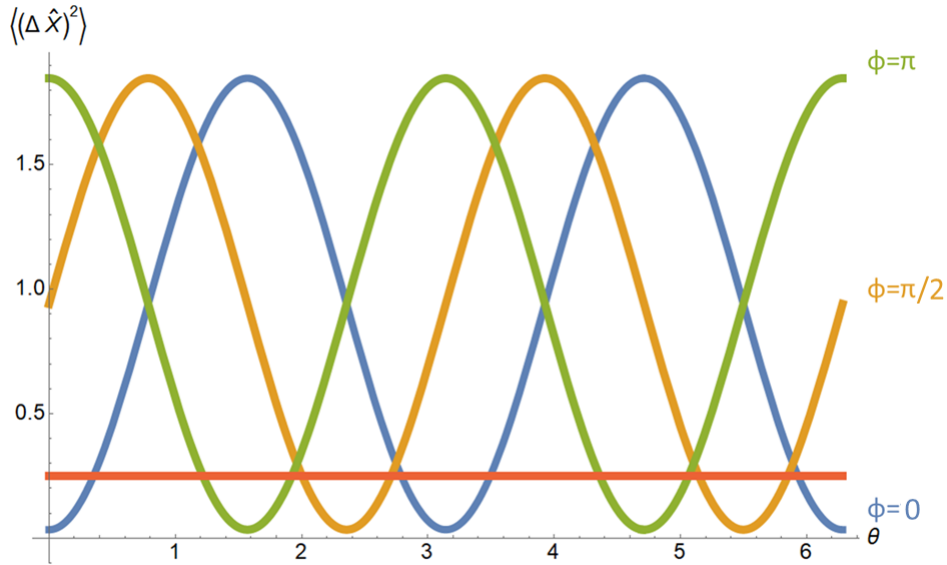


Figura 3 – Variância do operador de quadratura em função do ângulo θ , fixando-se $r = 1$. A reta vermelha indica o valor da variância para o estado do vácuo. Vê-se que para alguns valores de θ o valor da variância é menor que $1/4$. As curvas foram plotadas para três diferentes valores do ângulo ϕ .

Para que haja compressão em alguma quadratura o valor de sua variância deve ser menor que o valor da variância da quadratura calculado com um estado coerente, ou o estado de vácuo. Logo, sempre que

$$\langle (\Delta \hat{X})^2 \rangle < 1/4, \quad (3.23)$$

existe compressão em alguma quadratura [2]. A Fig.3 mostra $\langle(\Delta\hat{X})^2\rangle$ em função de θ para estados de vácuo comprimidos com diferentes ângulos ϕ . A Fig.4 mostra a representação da elipse de erro para estados de vácuo comprimido com compressão em distintas quadraturas.

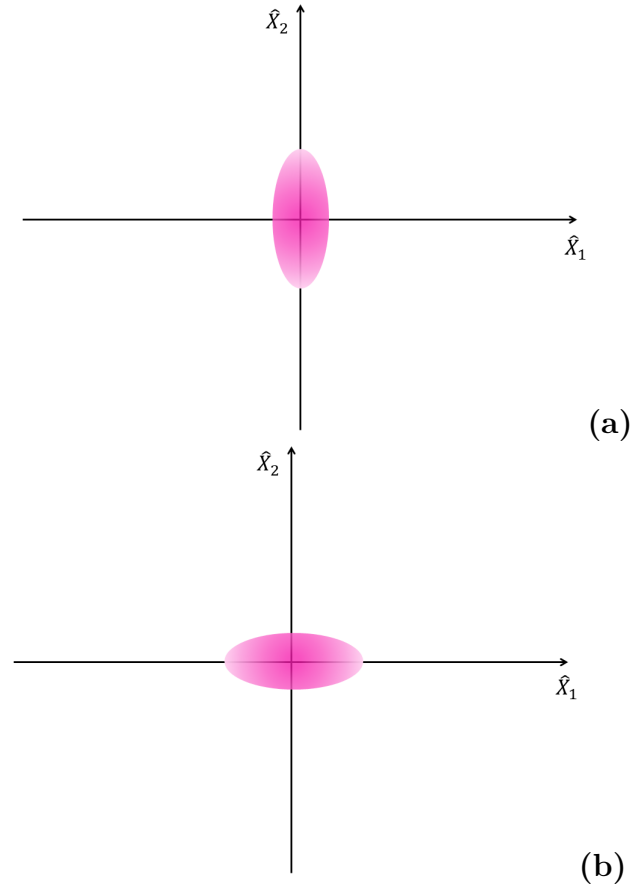


Figura 4 – Representação da elipse de erro para o estado de vácuo comprimido: em (a) a compressão existe ao longo da quadratura \hat{X}_1 , enquanto que em (b) a compressão existe ao longo da quadratura \hat{X}_2 .

A medida que há compressão em alguma direção há, obrigatoriamente, um alongamento na direção perpendicular à esta quadratura, uma vez que o princípio de incerteza deve ser respeitado. Portanto, quanto mais precisão deseja-se obter em uma dada quadratura, menor precisão obter-se-á na quadratura perpendicular a esta.

3.3 Detecção de Estados Comprimidos

Para detectar-se estados comprimidos, normalmente utiliza-se um processo conhecido por detecção homódina. Para isto, um campo conhecido por sinal, que neste caso é o campo que contém a quadratura comprimida, é combinado com um campo de referência, também chamado de oscilador local, que está num estado coerente com um grande número médio de fótons [2, 33]. Assume-se que estes dois campos estão no mesmo modo e portanto tem a mesma frequência, ω . Um esquema de detecção homódina balanceada pode ser

visto na Fig.5. Chegando no modo \hat{a}_2 o campo comprimido a ser detectado e chegando no modo \hat{a}_1 o oscilador local. Os campos passam por um divisor de feixes e as fotocorrentes provenientes de \hat{b} e \hat{c} são detectadas nos fotodetectores I_b e I_c . $(I_b - I_c)$ é um dispositivo de correlação que subtrai as duas fotocorrentes.

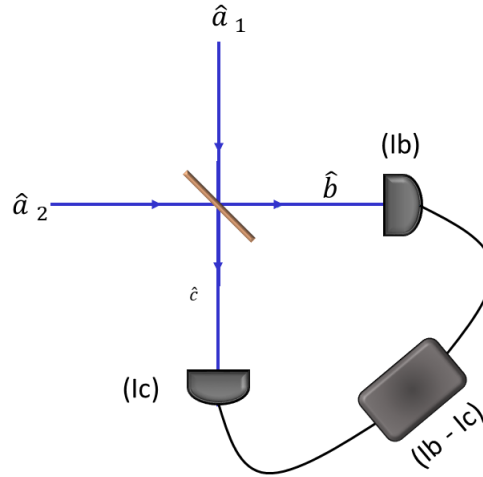


Figura 5 – Esquema para o método de detecção homódina balanceada.

Considera-se que o divisor de feixes utilizado nesse processo é 50:50, isso significa que a transmitância e reflectância do divisor de feixes são dadas por $t = 1/\sqrt{2}$ e $r = i/\sqrt{2}$, respectivamente. Portanto, as relações entre os operadores de aniquilação (\hat{a}_1, \hat{a}_2) e (\hat{b}, \hat{c}) são dadas por

$$\hat{b} = \frac{i\hat{a}_1 + \hat{a}_2}{\sqrt{2}} \quad (3.24a)$$

e

$$\hat{c} = \frac{\hat{a}_1 + i\hat{a}_2}{\sqrt{2}}. \quad (3.24b)$$

Os detectores medem as intensidades I_b e I_c . Calculando-se a diferença dessas intensidades, usando (3.24b) e (3.24a), tem-se

$$\begin{aligned} I_b - I_c &= \langle \hat{n}_{bc} \rangle = \langle \hat{b}^\dagger \hat{b} - \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle \\ &= i \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2 \hat{a}_1^\dagger \rangle. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Assumindo-se que o modo a_1 está no estado coerente $|\alpha\rangle$, com $\alpha \equiv |\alpha| e^{i\psi}$ e $|\alpha| \gg 1$, e utilizando-se a aproximação paramétrica a equação (3.25) torna-se

$$\langle \hat{n}_{bc} \rangle \approx i |\alpha| \langle \hat{a}_2^\dagger e^{i\psi} - \hat{a}_2 e^{-i\psi} \rangle, \quad (3.26)$$

que pode ser reescrita como

$$\langle \hat{n}_{bc} \rangle \approx |\alpha| \langle \hat{a}_2 e^{-i\theta} + \hat{a}_2^\dagger e^{i\theta} \rangle = 2 |\alpha| \langle \hat{X}(\theta) \rangle \quad (3.27)$$

onde $\theta = \psi + \pi/2$ e $\hat{X}(\theta)$ é o operador quadratura (2.45). A variância do operador de diferença do número de fótons é

$$\langle (\Delta \hat{n}_{bc})^2 \rangle = \langle \hat{n}_{bc}^2 \rangle - \langle \hat{n}_{bc} \rangle^2. \quad (3.28)$$

O operador \hat{n}_{bc}^2 é dado por

$$\begin{aligned} \hat{n}_{bc}^2 &= i(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2 \hat{a}_1^\dagger)^2 \\ &= -\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_2 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \hat{a}_1^\dagger. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Novamente, no limite de um oscilador local forte, com $|\alpha| \gg 1$, e utilizando-se a aproximação paramétrica, tem-se que [2]

$$\langle \hat{n}_{bc}^2 \rangle = |\alpha|^2 \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2^\dagger e^{2i\theta} + \hat{a}_2 \hat{a}_2 e^{-2i\theta} + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2 \hat{a}_2^\dagger \rangle \approx 4|\alpha|^2 \langle \hat{X}^2(\theta) \rangle. \quad (3.30)$$

Com isso, a variância do operador \hat{n}_{bc} será

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{n}_{bc})^2 \rangle &= \langle \hat{n}_{bc}^2 \rangle - \langle \hat{n}_{bc} \rangle^2 \\ &\approx 4|\alpha|^2 \langle \hat{X}^2(\theta) \rangle - 4|\alpha|^2 \langle \hat{X}(\theta) \rangle^2 = 4|\alpha|^2 \langle (\Delta \hat{X}(\theta))^2 \rangle \\ &\therefore \langle (\Delta \hat{n}_{bc})^2 \rangle \approx 4|\alpha|^2 \langle (\Delta \hat{X}(\theta))^2 \rangle \end{aligned} \quad (3.31)$$

Portanto, é possível associar $\Delta \hat{n}_{bc}$ com $\Delta \hat{X}(\theta)$. Quando mede-se a quadratura de um estado de vácuo comprimido mostrado em (3.8), de (3.22) obtém-se

$$\langle (\Delta \hat{n}_{bc})^2 \rangle \approx |\alpha|^2 [\cosh^2 r + \sinh^2 r - 2 \sinh r \cosh r \cos(2\theta - \phi)]. \quad (3.32)$$

Variando-se o ângulo θ , que pode ser feito variando-se a fase do oscilador local, é possível medir uma quadratura arbitrária do campo sinal. É possível escolher θ para o qual o valor da compressão na quadratura é máximo e, como mencionado anteriormente, sempre que $\langle (\Delta \hat{X}(\theta))^2 \rangle < 1/4$ há compressão em alguma quadratura. A medição de flutuações em $I_b - I_c$ menor do que quando o estado enviado pela entrada do divisor de feixes na Fig.5 é o vácuo caracteriza um estado comprimido para a luz incidente por esta entrada.

Um esquema para detecção homódina balanceada é mostrado na Fig.6 **a** e os dados obtidos experimentalmente, publicados primeiramente em [34], são mostrados na Fig.6 **b**. Os resultados foram obtidos para as variâncias do operador de quadratura quando o campo sinal contém a quadratura comprimida para o estado de vácuo comprimido. Em **b** são mostradas medições de potência de ruído para (i) quando o campo sinal é bloqueado; (ii) quando ϑ do oscilador local (LO) da quadratura é fixo; e (iii) quando ϑ da quadratura varia no tempo. Na situação (i) estão sendo feitas as medidas das quadraturas para o estado de vácuo. Vê-se que, para o estado de vácuo comprimido, em determinados valores do ângulo ϑ a potência de ruído obtida para esta quadratura é menor que a potência

de ruído obtida quando o campo sinal é bloqueado, caracterizando um estado de vácuo comprimido.

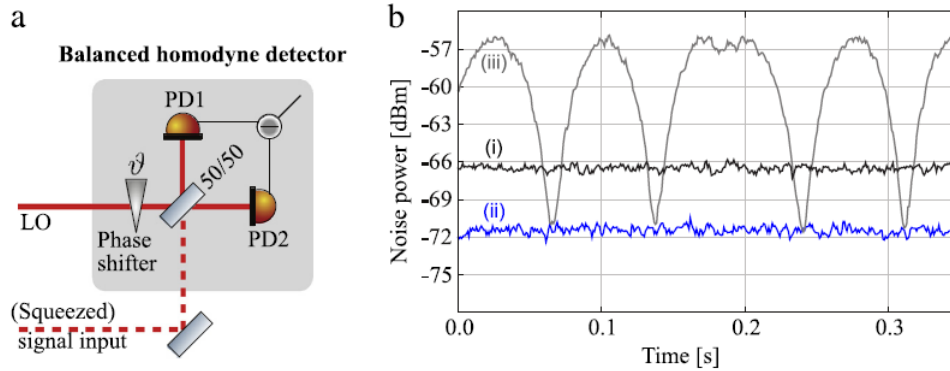


Figura 6 – Esquema de detecção homódina balanceada - **a** Arranjo experimental. **b** Dados das medições. Esta imagem foi retirada de [6].

3.4 Esquema Experimental para Geração e Detecção do Estado de Vácuo Comprimido

O experimento representado na Fig.7 é um esquema para geração e detecção de estados comprimidos.

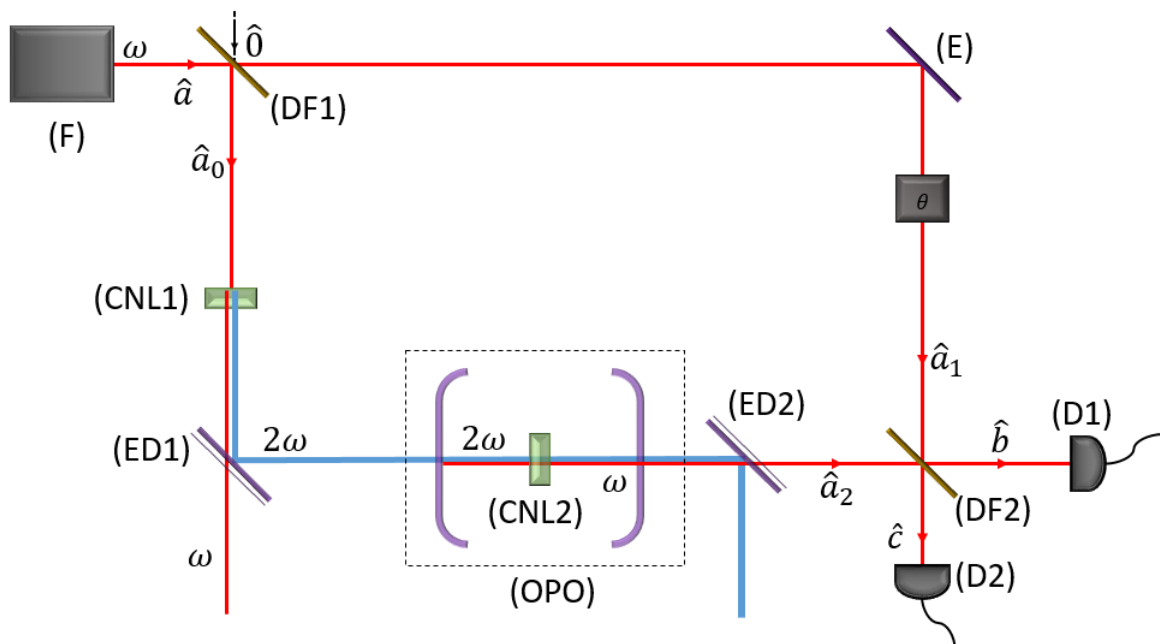


Figura 7 – Esquema de interferômetro: Geração e detecção de estados comprimidos. F-fonte, DF(1/2)-divisores de feixes, CNL(1/2)-cristais não-lineares, ED(1/2)-espelhos dicróicos, OPO-oscilador paramétrico óptico, E-espelho e D(1/2)- detectores.

Neste processo de geração do estado de vácuo comprimido, um campo, considerado estar num estado coerente, de frequência ω sai da fonte F e passa por um divisor de feixes DF1. É possível mostrar que quando um estado coerente passa por um divisor de feixes, os estados dos campos, transmitidos e refletidos, que saem do divisor de feixes ainda são considerados estados coerentes [2]. Para o caso geral, onde chegam dois estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$, tem-se

$$|\alpha\rangle_a |\beta\rangle_0 \rightarrow |t\alpha + ir\beta\rangle_{a_1} |t\beta + ir\alpha\rangle_{a_0}. \quad (3.33)$$

Para o caso que no modo $\hat{0}$ chega o estado de vácuo, tem-se

$$|\alpha\rangle_a |0\rangle_0 \rightarrow |t\alpha\rangle_{a_1} |ir\alpha\rangle_{a_0}, \quad (3.34)$$

onde t e r são os coeficientes de transmissão e reflexão, respectivamente.

O campo que é refletido por DF1 passa por um cristal não-linear CNL1, onde ocorre a geração do segundo harmônico, que faz com que alguns pares de fótons, de frequência ω cada, sejam convertidos em fótons de frequência 2ω . Isso pode ser visto através do Hamiltoniano (3.3) que gera uma evolução temporal do tipo do operador deslocamento (2.56) quando os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger são substituídos pelas correspondentes amplitudes $\alpha e^{-i\omega t}$ e $\alpha^* e^{i\omega t}$. Os feixes que saem deste primeiro cristal não-linear passam por um espelho dicroico ED1 que reflete apenas o campo de frequência 2ω , transmitindo o campo de frequência ω . O campo refletido de frequência 2ω passa por um oscilador paramétrico ótico OPO, onde ele bombeia um outro cristal não-linear CNL2 e alguns fótons deste campo são convertidos em pares de fótons idênticos de frequência ω cada um. Aqui os espelhos que formam a cavidade fazem com que haja uma maior interação do campo incidente aumentando a intensidade do campo de frequência ω produzido. O estado de vácuo comprimido é gerado devido a esta interação do campo laser, considerado em um estado coerente, com o cristal não-linear dentro da cavidade, assim como tratado na seção 3.1.

Para a posterior detecção deste estado, um segundo espelho dicroico ED2 reflete o campo de frequência 2ω que saiu do OPO, transmitindo apenas o campo de frequência ω . No braço superior do interferômetro, o feixe que foi transmitido em DF1 é refletido em um espelho E e é usado como oscilador local. Os campos que chegam em \hat{a}_1 e \hat{a}_2 passam por um segundo divisor de feixes DF2 e os campos resultantes da combinação deles, \hat{b} e \hat{c} , são finalmente detectados nos detectores D1 e D2. Como foi explicado na seção 3.3, o oscilador local no modo a_1 é usado para medir as quadraturas do modo a_2 , bem como suas variâncias.

4 Estado quântico da luz Laser

Muitas vezes o estado do campo eletromagnético gerado por um laser é modelado por um estado coerente, pois, para fins práticos, a explicação de muitos experimentos é facilitada ao assumir que a luz laser de um único modo está num estado coerente [7,13,21,27], como foi mostrado no capítulo 3. Porém, o estado do laser é melhor modelado por uma mistura estatística de estados coerentes com fases aleatórias, ou uma mistura estatística de estados de Fock [12,14,17,24,35]. O presente capítulo faz uma abordagem sobre o estado do laser e traz também uma breve discussão na literatura de trabalhos pertinentes a este assunto.

4.1 Descrição do Campo de Luz Laser

Apesar de estudos considerarem que o estado do laser pode ser descrito como sendo um estado coerente [7,13,21,27], é possível mostrar que coerência óptica não é facilmente gerada [14]. Considerando um sistema composto por átomos numa cavidade laser, nos estados $|i_\gamma\rangle$, onde os índices γ e i referem-se respectivamente aos átomos e aos níveis atômicos, com as correspondentes energias dadas por $E_{\gamma,i}$, e o campo eletromagnético quantizado, seu Hamiltoniano total é escrito como

$$\hat{H} = \hat{H}_c + \hat{H}_M + \hat{H}_{int}, \quad (4.1)$$

onde

$$\hat{H}_c = \sum_{\mathbf{k}s} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}s} + \frac{1}{2} \right) \quad (4.2a)$$

corresponde ao Hamiltoniano do campo eletromagnético quantizado,

$$\hat{H}_M = \sum_{\gamma,i} E_{\gamma,i} |i_\gamma\rangle \langle i_\gamma| \quad (4.2b)$$

é o Hamiltoniano do meio, aqui representado pelos átomos numa cavidade, e

$$\hat{H}_{int} = \hbar \sum_{\mathbf{k}s,\gamma,i} (f_{\gamma,\mathbf{k}s}^{i,j} \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger |i_\gamma\rangle \langle j_\gamma| + f_{\gamma,\mathbf{k}s}^{*i,j} \hat{a}_{\mathbf{k}s} |j_\gamma\rangle \langle i_\gamma|) \quad (4.2c)$$

é o Hamiltoniano de interação. Nota-se em (4.2c) que para cada fóton criado, um átomo γ faz a transição do nível i para o nível j , de forma que o estado $|i_\gamma\rangle$ passa para o estado $|j_\gamma\rangle$, enquanto que para cada fóton absorvido pela cavidade, um átomo γ faz a transição do nível j para o nível i , e agora o estado $|j_\gamma\rangle$ passa para o estado $|i_\gamma\rangle$.

De (4.2c), vê-se que o nível atômico j é mais energético que o nível i , mas o número de excitações no sistema mantém-se constante. O estado após a evolução deste sistema

será então uma superposição de estados com emaranhamento existente entre o campo e os átomos. É possível calcular a matriz densidade para este estado e a partir dela obter a matriz densidade reduzida para o campo, traçando a parte referente aos átomos. Quando este procedimento é realizado, a matriz densidade reduzida obtida é diagonal no número de fótons indicando que não existe coerência óptica entre os diferentes estados. O processo incoerente de levar átomos do estado i para o j do laser através de outra fonte de energia também não é capaz de gerar superposições coerentes de estados de energias distintas [14, 24]. Portanto, o campo quântico de luz produzido em uma cavidade laser tem um campo elétrico fundamentalmente indeterminado [24], uma vez que o seu valor esperado na base de Fock é nulo, como mostrado em (2.70). Logo o estado do laser não pode ser um estado coerente, como é usualmente considerado.

4.2 Estado do Campo Laser na Base de Fock

O estado do campo laser é bem aproximado por uma mistura estatística de estados coerentes de amplitude $|\alpha|$ e fase aleatória [12, 17, 20, 24, 35],

$$\hat{\rho} = \int \frac{d\varphi}{2\pi} |\alpha e^{i\varphi}\rangle \langle \alpha e^{i\varphi}|. \quad (4.3)$$

Este estado vem do fato de não se ter conhecimento da fase do campo laser *a priori*. Desta forma é necessário se fazer uma soma incoerente de estados coerentes, com pesos iguais, sobre todas as fases.

No entanto, existe uma correspondência entre a descrição para o estado do laser como uma mistura estatística de estados coerentes com fases aleatórias e uma mistura estatística de estados de Fock (ou estados de número)

$$\hat{\rho} = \int \frac{d\varphi}{2\pi} |\alpha e^{i\varphi}\rangle \langle \alpha e^{i\varphi}| = \sum_{n=0}^{\infty} P_n |n\rangle \langle n|, \quad (4.4)$$

onde n é o número de fótons no modo e P_n é uma distribuição de probabilidade [12]. Esta estatística para o número de fótons é Poissoniana [19], ou seja, a distribuição é da forma

$$P_n = \frac{e^{-\bar{n}} \bar{n}^n}{n!}, \quad (4.5)$$

onde \bar{n} é o número médio de fótons de acordo com (2.59). Para esta correspondência, verifica-se que o valor do número médio de fótons \bar{n} é $|\alpha|^2$.

4.3 Discussões na Literatura

O fato do laser não estar em um estado coerente motivou estudos em diversas áreas [14, 16–24, 36–40]. A começar pelo artigo de Klaus Mølmer, que mostra que existe

uma aparente contradição entre descrever o campo laser como um estado coerente ou como uma mistura estatística da forma (4.4), visto que o valor esperado do campo elétrico é não-nulo para estados coerentes e nulo para a mistura estatística [14]. O esquema interferométrico tratado por Mølmer, mostrado na Fig.8, visa explicar os experimentos que mostram interferência na luz vinda de fontes laser independentes [41–43]. Neste modelo, Mølmer assume que os modos nas cavidades são populados por estados de número e então o estado inicial do campo é um estado produto $|n\rangle \otimes |n\rangle$. Para o estado inicial, os detectores tem a mesma probabilidade de foto-deteccção. Após a deteção o estado do campo não é mais um estado do tipo produto, pois os modos dos campos da cavidade se tornam emaranhados e a taxa de deteção dos detectores não é mais a mesma. O estado se torna então $1/\sqrt{2}(|n\rangle \otimes |n-1\rangle + e^{i\Phi} |n-1\rangle \otimes |n\rangle)$, onde Φ depende da geometria do interferômetro. Depois de algumas foto-deteccções, a estatística prevista para os números de fótons detectados por cada detector é a mesma que com a consideração de que os estados da luz das fontes são estados coerentes devido às correlações que as deteções geram nos estados das cavidades.

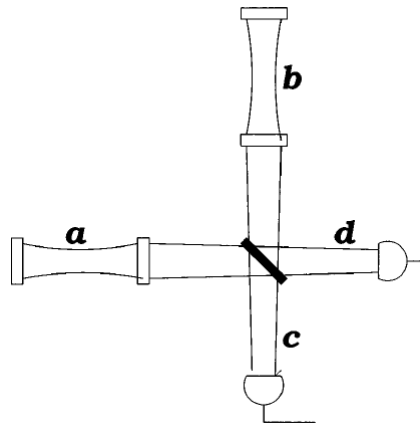


Figura 8 – Esquema óptico onde feixes vindos de duas cavidades ópticas são misturados em um divisor de feixes 50:50 e as intensidades dos feixes resultantes são medidas por dois fotodetectores. Esta imagem foi retirada de [14].

Mølmer mostra então que os resultados obtidos para a interferência entre duas fontes de luz independentes, inicialmente em estados de número, são indistinguíveis daqueles resultados obtidos ao considerar o laser como estando em um estado coerente. A explicação se dá essencialmente pela presença de emaranhamento entre diferentes modos do campo. O uso de coerência para estes tipos de experimentos, segundo Mølmer, serve como uma ferramenta matemática conveniente.

Akira Furusawa *et al.* publicaram, em 1998, um artigo no qual eles apresentaram uma demonstração experimental para teletransporte quântico de estados coerentes, usando emaranhamento de estados comprimidos [15]. Porém, Terry Rudolph e Barry C. Sanders questionaram se o teletransporte quântico em variáveis contínuas pode ser de

fato implementado ao considerar que o estado do laser não é um estado coerente (2.54), devido à ausência de coerência óptica intrínseca, visto que uma descrição mais fiável para o estado do laser é do tipo (4.3) [16]. No entanto, Steven J. van Enk e Christopher A. Fuchs [17], fornecem uma outra descrição teórica para o estado quântico de um laser, na qual consideram que o estado quântico do laser é uma mistura de N cópias de estados coerentes puros idênticos. A partir dessa descrição, Enk e Fuchs mostram que realizando-se medições de fase completa, é possível utilizar uma fonte de laser convencional para o teletransporte quântico em variáveis contínuas, ao contrário do que obtiveram Rodolph e Sanders em [16].

Utilizando a correspondência (4.3), Sanders *et al.* introduzem uma representação chamada de estados coerentes emaranhados [18]. Esta ferramenta desenvolvida por eles, descreve e analisa experimentos de óptica quântica, respeitando a regra de superseleção de número de fótons. Além disso, Sanders *et al.* discutem que medições de fase completa, sugeridas por Enk e Fuchs em [17], violariam a regra de superseleção de número de fótons, mas mostram que a representação de estados coerentes emaranhados também pode ser empregada para a descrição de teletransporte quântico em variáveis contínuas para uma fonte de estado de número. Ainda sobre a interpretação de experimentos ópticos, Hugo Cable *et al.* apresentam um estudo sobre medição induzida da localização de graus de liberdade relativos, em particular, analisam a interferência entre dois modos e concluem que a localização da fase relativa pode ser tão boa para estados mistos, como o do tipo (4.4), quanto para o caso de dois estados de Fock [19].

Stephen D. Bartlett *et al.* apresentam um interessante e didático debate sobre dois pontos de vista em relação à coerência quântica, uma visão factista e uma visão ficcionista [20]. Um diálogo entre o “factista” e o “ficccionista” é utilizado para mostrar vários pontos, cada um em seu respectivo contexto, a favor ou contra a observância de coerência óptica em experimentos ópticos. Bartlett *et al.* concluem que nenhuma visão é privilegiada, no sentido que a visão factista apresenta uma descrição apropriada da relação do sistema com um referencial, enquanto a visão ficcionista apresenta uma descrição apropriada ao se tratar a relação do sistema com um outro referencial não-correlacionado, sendo portanto paradigmas de descrição alternativos, mas igualmente válidos. Finalizam enfatizando a importância de estudos envolvendo esses problemas, pois referenciais imperfeitos podem representar um desafio para implementação bem sucedida de protocolos de informação quântica. Um estudo publicado pelos mesmos autores subsequente à conclusão apresentada em [20], mostra uma revisão sobre os aspectos referentes a referenciais e a regras de superseleção aplicadas na teoria de processamento de informação quântica [21].

O trabalho apresentado por David T. Pegg traz um estudo acerca do significado de coerência de fase em campos ópticos [22]. Pegg examina a coerência de fase intrínseca à luz laser. É mostrado que não é uma condição necessária impor que o campo laser da

intra-cavidade esteja em um estado coerente para que a luz emitida tenha coerência de fase intrínseca, embora essa condição seja suficiente. O trabalho de Pegg teve como principal objetivo examinar o papel de espelhos parcialmente transmissores na criação de luz laser com coerência em fase, mesmo considerando que o estado da intra-cavidade é um estado de número.

Um trabalho mostrado por Toru Kawakubo e Katsuji Yamamoto, na área de tomografia de estados quânticos, também utilizou do fato de que o estado do laser é da forma (4.3) [23]. Neste artigo os autores examinam o processo de detecção homódina na visão de distribuição de probabilidade conjunta, considerando que a detecção homódina é invariante sobre transformações de fase de campos ópticos. Um outro trabalho, agora na área de metrologia quântica, foi o de Marcin Jarzyna e Rafał Demkowicz-Dobrzański, onde os autores tratam a interferometria quântica com e sem uma referência de fase externa, utilizando a informação de Fisher quântica em esquemas interferométricos para a estimativa de fase [36].

Pablo L. Saldanha mostra uma análise quântica de medida direta de ondas de luz [24]. Em seu trabalho, o autor faz um tratamento quântico que explica como o campo eletromagnético “clássico” aparece no experimento realizado por Goulielmakis *et al.* [44], Saldanha mostra como as características não-lineares de um interferômetro f:2f podem mudar o estado quântico do campo eletromagnético dentro da cavidade laser para um estado com um campo elétrico oscilatório definido. O autor salienta que este experimento foi a primeira demonstração de uma superposição coerente absoluta de diferentes estados de número no regime óptico. Desta forma, a conjectura feita por Mølmer [14] não é mais válida, visto que o uso de um interferômetro f:2f pode gerar uma coerência absoluta em uma fonte inicialmente incoerente do tipo (4.3).

Luca Pezzè *et al.* estabelecem limites gerais (limites de Heisenberg) para a sensibilidade de estimativa de fase em interferômetros lineares de dois modos [37]. Nos casos apresentados, eles demonstram que o emaranhamento de partícula é necessário para ultrapassar a incerteza clássica de fase. Eles mostram também que se o estado utilizado (probe states) e os resultados da medição contém coerência entre o número total de partículas diferentes, não é possível estabelecer uma relação entre emaranhamento e sensibilidade de fase. No artigo de Hiromichi Nakazato *et al.* é apresentada uma forma analítica para a distribuição de fótons na saída de um divisor de feixes, considerado na entrada do divisor estados balanceados e desbalanceados. Eles generalizam o estudo para esquema interferométrico do tipo Hong-Ou-Mandel e concluem dizendo que para o contexto de pesquisas atuais na área de “quantum walks” seria interessante estender este trabalho para o caso de interferômetros de multi-modos e considerando uma mistura de estados de Fock para os estados de entrada [45]. Alexander Foerster *et al.* mostram, utilizando métodos numéricos, uma abordagem algébrica para obter uma evolução aproximada de sistemas

quânticos de muitas partículas [38]. Luiz G. E. Arruda *et al.* realizam um estudo sobre fenômenos não-lineares que aparecem devido a colisões atômicas e implicações em regras de superseleção [39]. Considerações sobre regras de superseleção também são abordadas no trabalho de Leon Loveridge *et al.*, que surgem pelo estudo que introduzem sobre referenciais em sistemas quânticos [40].

5 Diferentes descrições do experimento de geração de estados de vácuo comprimido

Embora os experimentos de geração do vácuo comprimido [3–7, 13] sejam explicados considerando que o feixe laser é descrito por um estado coerente, os mesmos resultados podem ser obtidos considerando um estado não-clássico para a descrição do feixe laser, por conseguinte, sem a geração de um estado comprimido, como será demonstrado neste capítulo. Para fins de uma primeira análise, será feita a descrição do experimento considerando-se o estado de saída do feixe laser como sendo um estado de Fock $|M\rangle$, sem coerência no regime óptico. Neste caso, fica evidente que os resultados experimentais podem ser explicados sem que haja um estado comprimido para a luz em nenhuma etapa. Sendo assim, questiona-se se estados comprimidos para a luz foram de fato construídos em laboratório. Posteriormente, o feixe laser também será descrito como um estado sem coerência no regime óptico, desta vez uma mistura estatística de estados de Fock da forma $\sum_M C_M |M\rangle \langle M|$, que é um estado mais realista. Por fim será feita uma consideração para quando o laser é descrito como uma soma incoerente de estados coerentes.

5.1 Estado da Luz Laser como um Estado de Fock

O experimento mostrado na Fig.9 é descrito considerando-se o estado do laser como sendo um estado de Fock.

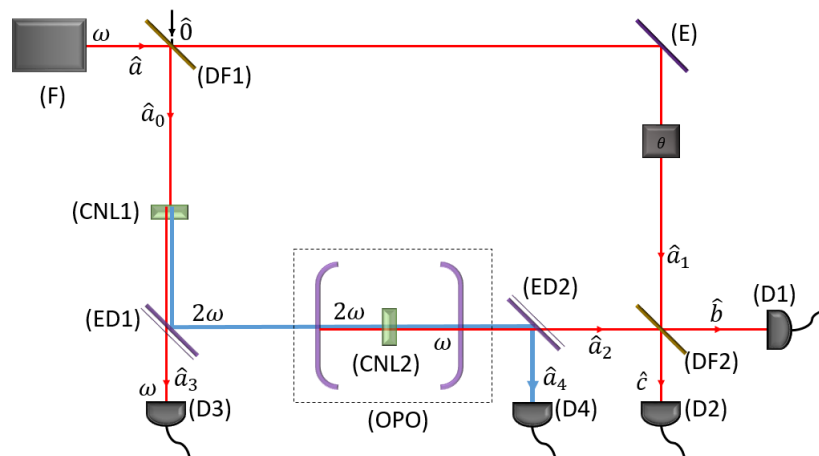


Figura 9 – Esquema interferométrico: F-fonte, DF(1/2)-divisores de feixes, CNL(1/2)-cristais não-lineares, ED(1/2)-espelhos dicróicos, OPO-oscilador paramétrico óptico, E-espelho e D(1/2/3/4)- detectores.

A ideia da discussão desta seção não é modelar um experimento factível, mas salientar de forma clara os elementos necessários para a explicação do experimento quando o estado do laser não é um estado coerente.

Ao passar pelo primeiro divisor de feixes DF1, uma parte do laser é transmitida e outra parte é refletida. Dessa maneira tem-se uma distribuição de amplitude de probabilidades para o número de fótons que seguiram pelo braço superior e o número de fótons que foram refletidos e seguiram no caminho do braço inferior, aqui indexados como a_1 e a_0 , respectivamente. Essa distribuição é da forma

$$|\psi_0\rangle = \sum_s Q_s |M - s\rangle_{a_1} |s\rangle_{a_0}, \quad (5.1)$$

onde $M - s$ é o número de fótons transmitidos, s é o número de fótons que foi refletido, com M sendo o total de fótons do pulso e Q_s o coeficiente complexo. Após o laser passar pelo primeiro cristal não linear CNL1, alguns pares de fótons são convertidos em fótons com o dobro de sua frequência. Ao interagirem com o segundo meio não-linear CNL2 dentro do OPO, alguns destes fótons de frequência dobrada são novamente convertidos em pares de fótons idênticos de mesma frequência. Estes são os fótons que chegam pelo modo \hat{a}_2 , logo neste modo há apenas números pares de fótons, $2m$. Considera-se que o número de fótons detectados pelos detectores (D3) e (D4) são, respectivamente, N_{a_3} e N_{a_4} e que o número total de fótons nos modos \hat{a}_1 e \hat{a}_2 é dado por $N = M - N_{a_3} - 2N_{a_4}$. O fator de 2 multiplicando N_{a_4} aparece pois cada fóton de frequência 2ω detectado pelo detector D4 corresponde a dois fótons de frequência ω provenientes do campo laser. Logo antes do segundo divisor de feixes DF2, obtém-se o estado

$$|\psi\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} P_m |N - 2m\rangle_{a_1} |2m\rangle_{a_2}, \quad (5.2)$$

com a amplitude de probabilidade de se gerar m pares de fótons dada por $|P_m|$. Note que o estado acima possui emaranhamento entre os modos.

5.1.1 Operador Diferença do Número de Fótons

Busca-se a diferença do número de fótons detectados pelos dois detectores, pois a variância desta diferença possibilitará a comparação do resultado a calcular-se com o resultado já esperado (3.32), quando este cálculo é feito considerando o estado do laser como um estado coerente. A variância do operador é dada por

$$\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = \langle (\hat{n}_b - \hat{n}_c)^2 \rangle, \quad (5.3)$$

onde os operadores \hat{n}_b e \hat{n}_c são definidos, respectivamente, como

$$\hat{n}_b = \hat{b}^\dagger \hat{b} \quad (5.4a)$$

e

$$\hat{n}_c = \hat{c}^\dagger \hat{c}, \quad (5.4b)$$

com

$$\hat{b} = \frac{i\hat{a}_1 e^{i\theta} + \hat{a}_2}{\sqrt{2}} \quad (5.5a)$$

e

$$\hat{c} = \frac{\hat{a}_1 e^{i\theta} + i\hat{a}_2}{\sqrt{2}}, \quad (5.5b)$$

uma vez que

$$\begin{aligned} \langle (\hat{n}_b - \hat{n}_c) \rangle &= \langle i\hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger e^{i\theta} - i\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 e^{-i\theta} \rangle \\ &= \sum_{m,m'} P_{m'}^* P_m \langle N - 2m' |_{a_2} \langle 2m' | (i\hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger e^{i\theta} - i\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 e^{-i\theta}) | N - 2m \rangle_{a_1} | 2m \rangle_{a_2} \\ &= \sum_{m,m'} P_{m'}^* P_m \langle N - 2m' |_{a_2} \langle 2m' | \times \\ &\quad \times (ie^{i\theta} \sqrt{(N - 2m)(2m + 1)} | N - 2m - 1 \rangle_{a_1} | 2m + 1 \rangle_{a_2} + \\ &\quad - ie^{-i\theta} \sqrt{(N - 2m + 1)(2m)} | N - 2m + 1 \rangle_{a_1} | 2m - 1 \rangle_{a_2}) = 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Expandindo (5.3), tem-se

$$\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = \langle \hat{n}_b^2 \rangle + \langle \hat{n}_c^2 \rangle - \langle \hat{n}_b \hat{n}_c \rangle - \langle \hat{n}_c \hat{n}_b \rangle. \quad (5.7)$$

Calcula-se as médias $\langle \hat{n}_b^2 \rangle$, $\langle \hat{n}_c^2 \rangle$, $\langle \hat{n}_b \hat{n}_c \rangle$ e $\langle \hat{n}_c \hat{n}_b \rangle$ utilizando-se o estado mostrado em (5.2). Começando pelo operador \hat{n}_b , tem-se que

$$\langle \hat{n}_b^2 \rangle = \langle \psi | \hat{n}_b^2 | \psi \rangle. \quad (5.8)$$

Utilizando-se (5.4a), (5.5a) e (5.5b), tem-se

$$\begin{aligned} \hat{n}_b | \psi \rangle &= \frac{1}{2} \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 - i\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 e^{-i\theta} + i\hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger e^{i\theta} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} P_m | N - 2m \rangle_{a_1} | 2m \rangle_{a_2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_m P_m [N | N - 2m \rangle_{a_1} | 2m \rangle_{a_2} + \\ &\quad - i\sqrt{2m(N - 2m + 1)} e^{-i\theta} | N - 2m + 1 \rangle_{a_1} | 2m - 1 \rangle_{a_2} + \\ &\quad + i\sqrt{(2m + 1)(N - 2m)} e^{i\theta} | N - 2m - 1 \rangle_{a_1} | 2m + 1 \rangle_{a_2}]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Tomando-se o hermitiano conjugado de (5.9), tem-se

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{n}_b^\dagger = \langle \psi | \hat{n}_b &= \frac{1}{2} \sum_m P_m^* [N \langle N - 2m |_{a_2} \langle 2m | + \\ &\quad + i\sqrt{2m(N - 2m + 1)} e^{i\theta} \langle N - 2m + 1 |_{a_2} \langle 2m - 1 | + \\ &\quad - i\sqrt{(2m + 1)(N - 2m)} e^{-i\theta} \langle N - 2m - 1 |_{a_2} \langle 2m + 1 |]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Obtém-se assim

$$\begin{aligned}
\langle \psi | \hat{n}_b^2 | \psi \rangle &= \frac{1}{4} \left[\sum_m |P_m|^2 (N^2 + N + 4mN - 8m^2) + \right. \\
&\quad - \sum_{m,m'} P_m P_{m'}^* \left(\sqrt{2m'(N - 2m' + 1)(2m + 1)(N - 2m)} e^{2i\theta} \times \right. \\
&\quad \times {}_{a_1} \langle N - 2m' + 1 | {}_{a_2} \langle 2m' - 1 | N - 2m - 1 \rangle_{a_1} | 2m + 1 \rangle_{a_2} + \\
&\quad + \sqrt{2m(N - 2m + 1)(2m' + 1)(N - 2m')} e^{-2i\theta} \times \\
&\quad \left. \left. \times {}_{a_1} \langle N - 2m' - 1 | {}_{a_2} \langle 2m' + 1 | N - 2m + 1 \rangle_{a_1} | 2m - 1 \rangle_{a_2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{4} \sum_m [|P_m|^2 (N^2 + N + 4mN - 8m^2) + \\
&\quad - P_m P_{m+1}^* \sqrt{(2m + 2)(2m + 1)(N - 2m - 1)(N - 2m)} e^{2i\theta} + \\
&\quad - P_{m+1} P_m^* \sqrt{(2m + 2)(2m + 1)(N - 2m - 1)(N - 2m)} e^{-2i\theta}].
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Procedendo-se analogamente para as médias $\langle \hat{n}_c^2 \rangle$, $\langle \hat{n}_b \hat{n}_c \rangle$ e $\langle \hat{n}_c \hat{n}_b \rangle$, obtém-se, respectivamente

$$\begin{aligned}
\langle \psi | \hat{n}_c^2 | \psi \rangle &= \frac{1}{4} \sum_m [|P_m|^2 (N^2 + N + 4mN - 8m^2) + \\
&\quad - P_m P_{m+1}^* \sqrt{(2m + 2)(2m + 1)(N - 2m - 1)(N - 2m)} e^{2i\theta} + \\
&\quad - P_{m+1} P_m^* \sqrt{(2m + 2)(2m + 1)(N - 2m - 1)(N - 2m)} e^{-2i\theta}],
\end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}
\langle \psi | \hat{n}_b \hat{n}_c | \psi \rangle &= \frac{1}{4} \sum_m [|P_m|^2 (N^2 - N - 4mN + 8m^2) + \\
&\quad + P_m P_{m+1}^* \sqrt{(2m + 2)(2m + 1)(N - 2m - 1)(N - 2m)} e^{2i\theta} + \\
&\quad + P_{m+1} P_m^* \sqrt{(2m + 2)(2m + 1)(N - 2m - 1)(N - 2m)} e^{-2i\theta}]
\end{aligned} \tag{5.13}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \psi | \hat{n}_c \hat{n}_b | \psi \rangle &= \frac{1}{4} \sum_m [|P_m|^2 (N^2 - N - 4mN + 8m^2) + \\
&\quad + P_m P_{m+1}^* \sqrt{(2m + 2)(2m + 1)(N - 2m - 1)(N - 2m)} e^{2i\theta} + \\
&\quad + P_{m+1} P_m^* \sqrt{(2m + 2)(2m + 1)(N - 2m - 1)(N - 2m)} e^{-2i\theta}].
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Portanto a variância do operador $\Delta \hat{n}$ (5.7) é dada por

$$\begin{aligned}
\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle &= \sum_m [|P_m|^2 (N + 4mN - 8m^2) + \\
&\quad - P_m P_{m+1}^* \sqrt{(2m + 2)(2m + 1)(N - 2m - 1)(N - 2m)} e^{2i\theta} + \\
&\quad - P_{m+1} P_m^* \sqrt{(2m + 2)(2m + 1)(N - 2m - 1)(N - 2m)} e^{-2i\theta}].
\end{aligned} \tag{5.15}$$

5.1.2 Resultado obtido: Estado de Fock

Para a análise do resultado (5.15), considera-se que o número de fótons N nos modos \hat{a}_1 e \hat{a}_2 é sempre muito maior que o número de fótons no modo \hat{a}_2 . Aproxima-se então $N - 2m \approx N - 2m - 1 \approx N$. Portanto a variância no número de fótons, $\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle$, é dada por

$$\begin{aligned} \langle(\Delta\hat{n})^2\rangle \approx \sum_m N[|P_m|^2(4m+1) - P_m P_{m+1}^* \sqrt{(2m+2)(2m+1)}e^{2i\theta} + \\ - P_{m+1} P_m^* \sqrt{(2m+2)(2m+1)}e^{-2i\theta}]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

A escolha dos coeficiente P_m foi feita baseada na expansão dos coeficientes do estado de vácuo comprimido, quando escrito na base de Fock (3.17). Portanto o coeficiente P_m é da forma

$$P_m = \sqrt{\operatorname{sech} r} (-1)^m \frac{\sqrt{(2m)!}}{2^m m!} (e^{i\phi} \tanh r)^m. \quad (5.17)$$

Por conseguinte, $\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle$ é escrito como

$$\begin{aligned} \langle(\Delta\hat{n})^2\rangle \approx N \operatorname{sech} r \sum_m \left[\frac{(2m)!}{2^{2m} m!} (\tanh r)^{2m} (4m+1) + \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{(2m)!}}{2^m m!} (e^{i\phi} \tanh r)^m \frac{\sqrt{(2m+2)!}}{2^{m+1} (m+1)!} (e^{-i\phi} \tanh r)^{m+1} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{(2m+2)(2m+1)} e^{2i\theta} + \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{(2m)!}}{2^m m!} (e^{-i\phi} \tanh r)^m \frac{\sqrt{(2m+2)!}}{2^{m+1} (m+1)!} \times \right. \\ \left. \times (e^{i\phi} \tanh r)^{m+1} \sqrt{(2m+2)(2m+1)} e^{-2i\theta} \right], \end{aligned} \quad (5.18)$$

agrupando-se os termos tem-se

$$\begin{aligned} \langle(\Delta\hat{n})^2\rangle \approx N \operatorname{sech} r \sum_m \left[\frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} (\tanh r)^{2m} (4m+1) + \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{(2m)!(2m+2)!}}{2^{2m+2} m! (m+1)!} (\tanh r)^{2m+1} \sqrt{(2m+2)(2m+1)} \cos(2\theta - \phi) \right]. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Para comparar (5.19) com o resultado já estabelecido (3.32), será empregado o uso de algumas relações e manipulações. Mostra-se no anexo B que a expansão de uma função do tipo de $(1 - \tanh^2 r)^{-1/2}$ é dada por

$$(1 - \tanh^2 r)^{-1/2} = \sum_m \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} (\tanh r)^{2m}. \quad (5.20)$$

Então, tem-se que

$$\sum_m \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} (\tanh r)^{2m} (2m) = \tanh r \frac{d}{d \tanh r} (1 - \tanh^2 r)^{-1/2}. \quad (5.21)$$

Substituindo-se (5.20) e (5.21) em (5.19), chega-se a

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle \approx & N \operatorname{sech} r [2 \tanh^2 r (1 - \tanh^2 r)^{-3/2} + \cosh r - 2 [\tanh^3 r (1 - \tanh^2 r)^{-3/2} + \\ & + (1 - \tanh^2 r)^{-1/2}] \cos (2\theta - \phi)], \end{aligned} \quad (5.22)$$

que com as manipulações

$$\begin{aligned} \operatorname{sech} r [2 \tanh^2 r (1 - \tanh^2 r)^{-3/2} + \cosh r] &= \operatorname{sech} r (2 \tanh^2 r \cosh^3 r + \cosh r) = \\ &= 2 \sinh^2 r + 1 = \cosh^2 r + \sinh^2 r \end{aligned} \quad (5.23a)$$

e

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sech} r [\tanh^3 r (1 - \tanh^2 r)^{-3/2} + (1 - \tanh^2 r)^{-1/2}] &= 2 \operatorname{sech} r \tanh r \cosh^3 r \\ &= 2 \sinh r \cosh r, \end{aligned} \quad (5.23b)$$

faz com que (5.19) reduza-se a

$$\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle \approx N [\cosh^2 r + \sinh^2 r - 2 \cosh r \sinh r \cos (2\theta - \phi)]. \quad (5.24)$$

Este resultado concorda com o resultado estabelecido para o cálculo da variância do operador de diferença de número de fótons considerando o estado do laser como sendo um estado coerente como mostrado em (3.32). Mas note que o estado do campo que chega em DF2 pelo modo a_2 será, ao tomar-se o traço parcial no estado mostrado em (5.2), uma mistura estatística de números pares de fótons

$$\hat{\rho}_{a_2} = \sum_m |P_m|^2 |2m\rangle_{a_2} \langle 2m|, \quad (5.25)$$

que não é um estado comprimido. Isto reforça a ideia de que é possível reproduzir os resultados de experimentos que geram o vácuo comprimido, considerando que o estado do laser, sem coerência no regime óptico, interage com meios não-lineares e não gera um estado comprimido. Ressalta-se que o conceito de compressão não foi utilizado em nenhuma etapa do tratamento. A não-classicalidade dos resultados experimentais é corroborada pelo emaranhamento entre o campo utilizado como oscilador local e o campo proveniente do oscilador paramétrico óptico. No entanto, não é completamente explicada por este fator. Como mencionado anteriormente, esta foi uma primeira análise na qual aproximou-se o estado do laser por um estado de Fock, porém uma forma mais realista de se descrever o estado do laser é considerá-lo uma mistura estatística de estados de Fock [12, 14, 17, 24, 35], que será apresentado na próxima seção.

5.2 Estado da Luz Laser como uma Mistura Estatística de Estados de Fock

Considera-se agora que o estado de saída do laser é dado por uma soma incoerente de estados de Fock da forma

$$\hat{\rho}_0 = \sum_M C_M |M\rangle \langle M|. \quad (5.26)$$

Se não há detecção pelos detectores D_3 e D_4 , pode-se escrever uma distribuição de probabilidades para o número de fótons N da forma

$$\sum_N Q_N |N\rangle \langle N|, \quad (5.27)$$

fazendo com que agora a equação obtida em (5.24) seja reescrita como

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = Tr[\hat{\rho}(\Delta \hat{n})^2] \approx \sum_N Q_N N [\cosh^2 r + \sinh^2 r - 2 \cosh r \sinh r \cos(2\theta - \phi)]. \quad (5.28)$$

Considerando que Q_N exibe uma distribuição Poissoniana quando $N \gg 1$, tem-se que o valor de $\Delta N/N$ é pequeno, uma vez que $\Delta N/N \propto 1/\sqrt{N} \rightarrow 0$. Desta forma é válido $\sum_N N Q_N = \langle N \rangle$ e então chega-se novamente ao resultado

$$Tr[\hat{\rho}(\Delta \hat{n})^2] \approx \langle N \rangle [\cosh^2 r + \sinh^2 r - 2 \cosh r \sinh r \cos(2\theta - \phi)], \quad (5.29)$$

que é o mesmo obtido em (5.24) e conseqüentemente, o mesmo resultado obtido em (3.32).

Novamente, os resultados aqui descritos concordam com os resultados esperados e o estado reduzido referente ao campo que chega em a_2 é

$$\hat{\rho}_{a_2} = \sum_N Q_N \sum_m |P_m|^2 |2m\rangle_{a_2} \langle 2m|, \quad (5.30)$$

que não é um estado comprimido. Isto comprova que é possível descrever e reproduzir os resultados de experimentos que geram o vácuo comprimido, utilizando-se estados aos quais não consegue-se obter um análogo clássico, possibilitando uma descrição mais realista para o estado do feixe laser. Desta maneira, vê-se que para a descrição de experimentos de geração do vácuo comprimido [3–7, 13] não é necessário aproximar o estado do feixe do laser por um estado coerente. Esta aproximação pode facilitar a descrição dos resultados obtidos, mas não necessariamente descrever a realidade. Com este resultado mostra-se que, para este experimento, após a interação do campo do laser pulsado com o cristal não linear na cavidade não ocorre a geração de um estado de vácuo comprimido.

5.3 Mistura Estatística de Estados Coerentes

Como visto no capítulo 4, o estado do laser pode ser escrito tanto quanto uma mistura estatística de estados de Fock, quanto como uma mistura estatística de estados

coerentes. Considerando-se o estado de saída do laser como sendo uma soma incoerente de estados coerentes, ou uma mistura estatística de estados coerentes, com amplitude $|\alpha|$ e uma fase aleatória φ , tem-se

$$\hat{\rho}_0 = \int \frac{d\varphi}{2\pi} |\alpha e^{i\varphi}\rangle \langle \alpha e^{i\varphi}|, \quad (5.31)$$

e o estado que chega no (DF2) será então da forma

$$\hat{\rho}_1 = \int |K(\tilde{\alpha})|^2 |\xi(\tilde{\alpha})\rangle_{a_2} |\beta\rangle_{a_1 a_2} \langle \xi(\tilde{\alpha})|_{a_1} \langle \beta| \frac{d\varphi}{2\pi}, \quad (5.32)$$

que também pode ser escrito como

$$\hat{\rho}_1 = |K(\tilde{\alpha})|^2 \int |\xi(\tilde{\alpha})\rangle_{a_2 a_2} \langle \xi(\tilde{\alpha})| \otimes |\beta\rangle_{a_1 a_1} \langle \beta| \frac{d\varphi}{2\pi}, \quad (5.33)$$

onde $\tilde{\alpha} = r\alpha e^{i(\varphi+\pi/2)}$, $\beta = |t/r\tilde{\alpha}| e^{-i(\varphi-\psi)}$, r e t os coeficientes de reflexão e transmissão no DF1, e onde $K(\tilde{\alpha})$ é um fator de normalização. Uma maneira de tentar “visualizar” o estado reduzido $\hat{\rho}_{a_2} = Tr_{a_1} \hat{\rho}_1$ no espaço de fase é mostrada na Fig.10.

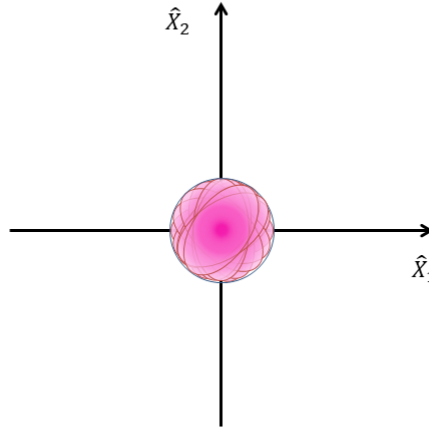


Figura 10 – Representação no espaço de fase: uma soma de estados comprimidos com fases arbitrárias e diferentes não apresenta compressão para uma dada quadratura preferencial, a aleatoriedade da fase faz com que não seja possível atribuir compressão a uma quadratura específica.

A compressão para uma dada quadratura não é evidenciada pelo estado reduzido, esta somente será definida no momento da medição. A existência da fase aleatória faz com que não haja uma quadratura preferencial para a compressão. Porém, ao passar pelo

segundo divisor de feixes, DF2, o feixe descrito por (5.33) se recombina com o estado que foi transmitido no primeiro divisor de feixes, DF1, que é uma mistura estatística de estados coerentes. Essa combinação entre os dois estados faz com que alguma quadratura seja escolhida para haver a compressão. Portanto o oscilador local define esta quadratura preferencial, na qual o valor de sua variância é menor que o valor da variância desta quadratura para um estado coerente (ou o estado do vácuo).

6 Conclusões

É comum encontrar na literatura a explicação para os resultados obtidos num experimento de geração e detecção do estado de vácuo comprimido. Para isto, toda a descrição, desde a preparação até a detecção, é feita considerando o estado do laser como sendo um estado coerente. Porém, foi mostrado por Mølmer que, apesar de estados coerentes reproduzirem bem e eficientemente os resultados de experimentos realizados com laser, estes mesmos resultados podem em princípio ser explicados utilizando estados quânticos sem coerência no regime óptico, por meio de interferência [14]. Neste trabalho mostrou-se que é possível descrever todo o experimento para geração do estado de vácuo comprimido, sem considerar que o estado do laser é um estado coerente.

Primeiramente, no capítulo 2 foi mostrada uma revisão sobre a quantização do campo eletromagnético e estados coerentes, e foi introduzida uma das ferramentas necessárias para analisar o resultado obtido experimentalmente, que é o operador de quadratura. Para o estado de vácuo ou para um estado coerente, o valor obtido para o cálculo da variância em alguma quadratura é $\langle (\Delta \hat{X})^2 \rangle = 1/4$. Desta forma, para que um estado seja considerado comprimido é necessário que o valor da variância para a quadratura neste estado seja menor que o valor obtido quando esta é calculada com o estado de vácuo, ou analogamente para um estado coerente, portanto, deve ser menor que o ruído do vácuo. No capítulo 3, apresentou-se a forma usual de se obter a variância para o operador de quadratura, utilizando-se dos estados coerentes, e dessa maneira inferir se houve geração do estado de vácuo comprimido, para uma determinada quadratura. A seção 3.4 apresentou o experimento estudado nesta dissertação. Neste capítulo foi mostrada uma maneira de gerar e detectar o estado de vácuo comprimido considerando o laser num estado coerente.

No entanto, foi mostrado no capítulo 4 que uma forma mais realista para se descrever o estado do laser é como sendo uma mistura estatística de estados coerentes, que é equivalente a uma mistura estatística de estados de Fock. Foi apresentada, nesse mesmo capítulo, uma breve revisão de literatura acerca de alguns dos trabalhos que foram motivados por essa descrição para o estado do laser.

Considerando o fato do estado do laser ser melhor descrito não por um estado coerente, mas por uma mistura estatística de estados de Fock, foram apresentados os resultados no capítulo 5. Para uma primeira análise, considerou-se que o laser é descrito inicialmente por um estado de Fock. O resultado encontrado concordou com o obtido na descrição do laser utilizando um estado coerente. No entanto, apesar de trazer uma certa intuição sobre o que está acontecendo no experimento, uma descrição utilizando estados de Fock para descrever o estado do laser é tão fictícia quanto considerar o estado do laser

como sendo um estado coerente.

Foi então apresentada a descrição do experimento considerando o estado do laser como um mistura estatística de estados de Fock obtendo-se o estado (5.29) ao passar pelo segundo divisor de feixes. O estado reduzido referente ao feixe que passou pelo braço inferior do interferômetro é do tipo $\hat{\rho}_{a_2} = \sum_N Q_N \sum_m |P_m|^2 |2m\rangle_{a_2} \langle 2m|$, de forma que a indeterminância do número de fótons faz com que o estado reduzido obtido não seja um estado comprimido. Este resultado pode também ser obtido ao fazer a correspondência mostrada em (4.3), entre descrever-se o estado do laser como sendo uma mistura estatística de estados de Fock ou descrevê-lo como uma mistura estatística de estados coerentes, como foi apresentada na seção 5.3.

Nesta última descrição, vê-se que a aleatoriedade da fase para a mistura estatística de estados coerentes faz com que o estado que chega pelo braço 2 no interferômetro da Fig.9 não seja um estado comprimido. Uma visualização no espaço de fase da elipse de erro para este estado é mostrada na Fig.10, onde vê-se que não é possível definir uma quadratura comprimida, mas sim vê-se todas as possibilidades de quadraturas comprimidas. No entanto a mistura com o estado que segue pelo braço superior no interferômetro faz com que uma direção de quadratura seja definida, desta forma após a detecção é possível medir um valor de variância menor que o valor obtido para o estado do vácuo, o que caracteriza um estado comprimido.

Pretende-se ampliar o estudo mostrado neste trabalho para estados comprimidos gerais, $|\alpha, \xi\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)|0\rangle$, de forma a descrever um experimento de geração destes estados sem fazer a consideração que o estado do laser é descrito por um estado coerente, mas sim utilizando um estado do laser da forma (4.3). Uma compreensão acerca da detecção de estados comprimidos é de grande valia, visto que há trabalhos recentes, envolvendo o uso destes estados, em especial trabalhos na área de metrologia quântica [6, 8–11].

Em suma, conclui-se que não é necessário aproximar o estado do laser por um estado coerente para descrever-se os resultados obtidos num experimento de geração do estado de vácuo comprimido, uma vez que os mesmos resultados são recuperados ao fazer tal descrição com estados de Fock e com mistura estatística de estados de Fock. Devido à correspondência entre as formas de se descrever o estado inicial do laser (4.3), é possível obter uma forma de visualizar a elipse de erro para o estado obtido após a interação com os meios não lineares, que mostra não haver uma quadratura preferencial para a compressão. Ainda não é claro qual seria o efeito quântico fundamental por trás dos resultados experimentais. Ao se descrever o laser como um estado coerente, este efeito poderia ser o estado comprimido gerado. No entanto, ao considerar-se um estado de Fock ou um uma mistura estatística de estados de Fock, não ocorre a geração de um estado de vácuo comprimido e o conceito de compressão não foi utilizado durante todo o tratamento utilizado para a obtenção dos resultados. Nesse sentido, o trabalho desenvolvido questiona

se estados comprimidos para a luz já foram de fato produzidos em laboratório.

Referências

- [1] J. F. M. Rocha, R. I. L. Ponczek, S. T. R. Pinho R. F. S. Andrade O. Freire Jr. e A. R. Filho: *Origens e Evolução das Ideias da Física*. Editora da UFBA, (2011). Citado na página 15.
- [2] C. C. Gerry e P. L. Knight: *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, (2008). Citado 19 vezes nas páginas 15, 16, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 31, 32, 33, 34, 36, 38 e 40.
- [3] L. A. Wu, H. J. Kimble, J. L. Hall e H. Wu: *Generation of Squeezed States by Parametric Down Conversion*. Phys. Rev. Lett., 57:2520–2523, (1986). Citado 3 vezes nas páginas 16, 47 e 53.
- [4] R. E. Slusher, L. W. Hollberg, B. Yurke J. C. Mertz e J. F. Valley: *Observation of Squeezed States Generated by Four-Wave Mixing in an Optical Cavity*. Phys. Rev. Lett., 55:2409–2412, (1985). Citado 4 vezes nas páginas 16, 31, 47 e 53.
- [5] C. Fabre: *Squeezed States of Light*. Phys. Rep., 219:215–225, (1992). Citado 4 vezes nas páginas 16, 31, 47 e 53.
- [6] R. Schnabel: *Squeezed States of Light and Their Applications in Laser Interferometers*. Phys. Reports, 684:1–51, (2017). Citado 6 vezes nas páginas 16, 31, 39, 47, 53 e 58.
- [7] G. Breitenbach, S. Schillerand e J. Mlynek: *Measurement of the Quantum States of Squeezed Light*. Nature, 387:471–475, (1997). Citado 4 vezes nas páginas 16, 41, 47 e 53.
- [8] S. Dwyer, S. Chua, L. Barsotti D. Sigg et al. The LIGO Scientific Collaboration: *Enhanced Sensitivity of the LIGO Gravitational Wave Detector by Using Squeezed States of Light*. Nature Photonics, 7, 177:613–619, (2013). Citado 3 vezes nas páginas 16, 31 e 58.
- [9] K. L. Dooley, E. Schreiber, H. Vahlbruch C. Affeldt J. R. Leong H. Wittel e H. Grote1: *Phase Control of Squeezed Vacuum States of Light in Gravitational Wave Detectors*. Opt. Express, 23:8235–8245, (2015). Citado 3 vezes nas páginas 16, 31 e 58.
- [10] E. Schreiber, K. L. Dooley, H. Vahlbruch C. Affeldt A. Bisht J. R. Leong J. Lough M. Prijatelj J. Slutsky M. Was H. Wittel K. Danzmann e H. Grote1: *Alignment Sensing and Control for Squeezed Vacuum States of Light*. Opt. Express, 24:146–152, (2016). Citado 3 vezes nas páginas 16, 31 e 58.

-
- [11] H. Vahlbruch, M. Mehmet, K. Danzmann e R Schnabel: *Detection of 15 dB Squeezed States of Light and their Application for the Absolute Calibration of Photoelectric Quantum Efficiency*. Phys. Rev. Lett., 117:110801, (2016). Citado 3 vezes nas páginas 16, 31 e 58.
- [12] W. F. Walls e G. J. Milburn: *Quantum Optics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2008). Citado 7 vezes nas páginas 16, 20, 25, 27, 41, 42 e 52.
- [13] S. M. Barnett e P. M. Radmore: *Methods in Theoretical Quantum Optics*. Oxford University Press, (2005). Citado 5 vezes nas páginas 16, 34, 41, 47 e 53.
- [14] K. Mølmer: *Optical Coherence: A Convenient Fiction*. Phys. Rev. A, 55, 3195, (1997). Citado 7 vezes nas páginas 16, 41, 42, 43, 45, 52 e 57.
- [15] A. Furusawa, J. L. Sørensen, S. L. Braunstein C. A. Fuchs H. J. Kimble E. S. Polzik: *Unconditional Quantum Teleportation*. Science, 282:706–709, (1998). Citado 2 vezes nas páginas 16 e 43.
- [16] T. Rudolph e B. C. Sanders: *Requirement of Optical Coherence for Continuous-Variable Quantum Teleportation*. Phys. Rev. Lett., 87:077903, (2001). Citado 3 vezes nas páginas 16, 42 e 44.
- [17] S. J. van Enk e C. A. Fuchs: *Quantum State of an Ideal Propagating Laser*. Phys. Rev. Lett., 88:027902, (2002). Citado 5 vezes nas páginas 16, 41, 42, 44 e 52.
- [18] B. C. Sanders, S. D. Bartlett, T. Rudolph e P. L. Knight: *Photon-Number Superselection and the Entangled Coherent-State Representation*. Phys. Rev. A, 68:042329, (2003). Citado 3 vezes nas páginas 16, 42 e 44.
- [19] H. Cable, P. L. Knight e T. Rudolph: *Measurement-Induced Localization of Relative Degrees of Freedom*. Phys. Rev. A, 71:042107, (2005). Citado 3 vezes nas páginas 16, 42 e 44.
- [20] S. D. Bartlett, T. Rudolph e R. W. Spekkens: *Dialogue Concerning Two Views on Quantum Coherence: Factist and Fictionist*. Int. J. Quant. Info., 4:17–43, (2006). Citado 3 vezes nas páginas 16, 42 e 44.
- [21] S. D. Bartlett, T. Rudolph e R. W. Spekkens: *Reference Frames, Superselection Rules, and Quantum Information*. Rev. Mod. Phys., 79:555–609, (2007). Citado 4 vezes nas páginas 16, 41, 42 e 44.
- [22] D. T. Pegg: *Intrinsic Phase Coherence of Laser Light*. Phys. Rev. A, 79:053837, (2009). Citado 3 vezes nas páginas 16, 42 e 44.

- [23] T. Kawakubo e K. Yamamoto: *Optical Homodyne Detection in View of the Joint Probability Distribution*. Phys. Rev. A, 82:032102, (2010). Citado 3 vezes nas páginas 16, 42 e 45.
- [24] P. L. Saldanha: *Quantum Analysis of the Direct Measurement of Light Waves*. New J. Phys., 16:013021, (2014). Citado 5 vezes nas páginas 16, 41, 42, 45 e 52.
- [25] N. A. Lemos: *Mecânica Analítica*. Editora Livraria da Física, (2007). Citado na página 22.
- [26] J. C. Garrison e R. Y. Chiao: *Quantum Optics*. Oxford University Press, (2012). Citado na página 25.
- [27] S. M. Dutra: *Cavity Quantum Electrodynamics, The Strange Theory of Light in a Box*. John Wiley Sons, Inc., (2005). Citado 3 vezes nas páginas 25, 26 e 41.
- [28] L. Mandel e E. Wolf: *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, (2008). Citado na página 26.
- [29] C. M. Caves: *Quantum-Mechanical Noise in an Interferometer*. Phys. Rev. D, 23:1693–1708, (1981). Citado na página 31.
- [30] R. E. Slusher e B. Yurke: *Squeezed Light for Coherent Communications*. J. Lightwave Tech., 8:466–477, (1990). Citado na página 31.
- [31] W.M. Zhang, D. H. Feng e R. Gilmore: *Coherent States: Theory and Some Applications*. Rev. Mod. Phys., 62:867–927, (1990). Citado na página 31.
- [32] M. I. Kolobov: *The Spacial Behavior of Nonclassical Light*. Rev. Mod. Phys., 71:1539–1589, (1999). Citado na página 31.
- [33] D. G. Welsch, W. Vogel e T. Opatrny: *Homodyne Detection and Quantum State Reconstruction*. arXiv, 0907.1353, (2009). Citado na página 36.
- [34] S. Chelkowski, H. Vahlbruch, K. Danzmann e R. Schnabel: *Coherent Control of Broadband Vacuum Squeezing*. Phys. Rev. A, 75:043814, (2007). Citado na página 38.
- [35] J. Jeffers e D. T. Pegg: *Quantum Nature of Laser Light*. J. Mod. Opt., 52:1–40, (2005). Citado 3 vezes nas páginas 41, 42 e 52.
- [36] M. Jarzyna e R. Demkowicz-Dobrzański: *Quantum Interferometry With and Without an External Phase Reference*. Phys. Rev. A, 85:011801, (2012). Citado 2 vezes nas páginas 42 e 45.

-
- [37] L. Pezzè, P. Hyllus e A. Smerzi: *Phase-Sensitivity Bounds for Two-Mode Interferometers*. Phys. Rev. A, 91:032103, (2015). Citado 2 vezes nas páginas 42 e 45.
- [38] A. Foerster, H. A. M. Leymann e J. Wiersig: *Computer-Aided Cluster Expansion: An Efficient Algebraic Approach for Open Quantum Many-Particle Systems*. Comp. Phys. Comm., 212:210–219, (2017). Citado 2 vezes nas páginas 42 e 46.
- [39] L. G. E. Arruda, G. A. Prata e M. C. de Oliveira: *Phase Collapse and Revival of a 1-mode Bose–Einstein Condensate Induced by an Off-Resonant Optical Probe Field and Superselection Rules*. Annals of Physics, 389:30–47, (2018). Citado 2 vezes nas páginas 42 e 46.
- [40] L. Loveridge, T. Miyadera e P. Busch: *Symmetry, Reference Frames, and Relational Quantities in Quantum Mechanics*. P. Found. Phys., 48:135–198, (2018). Citado 2 vezes nas páginas 42 e 46.
- [41] J. I. Cirac, C. W. Gardiner, M. Naraschewski e P. Zoller: *Quantum Phase of a Bose-Einstein Condensate with an Arbitrary Number of Atoms*. Phys. Rev. Lett., 76:161, (1996). Citado na página 43.
- [42] J. I. Cirac, C. W. Gardiner, M. Naraschewski e P. Zoller: *Quantum Phase of a Bose-Einstein Condensate with an Arbitrary Number of Atoms*. Phys. Rev. Lett., 76:161, (1996). Citado na página 43.
- [43] T. Wong, M. J. Collett e D. F. Walls: *Interference of two Bose-Einstein condensates with collisions*. Phys. Rev. A, 54:R3718, (1996). Citado na página 43.
- [44] E. Goulielmakis *et al*: *Direct Measurement of Light Waves*. Science, 305:1267–1269, (2004). Citado na página 45.
- [45] H. Nakazato, S. Pascazio, M. Stobińska e K. Yuasa: *Photon Distribution at the Output of a Beam Splitter for Imbalanced Input States*. Phys. Rev. A, 93:023845, (2016). Citado na página 45.
- [46] J. J. Walls: *Modern Quantum Mechanics Revised Edition*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., (1994). Citado na página 67.

Anexos

ANEXO A – Operador de Compressão: Atuação nos Operadores Aniquilação e Criação

O operador de compressão

$$\hat{S}(\xi) = e^{\frac{r}{2}(e^{-i\phi}\hat{a}^2 - e^{i\phi}\hat{a}^{\dagger 2})} \quad (\text{A.1})$$

é um operador unitário, isto é

$$\hat{S}(\xi)\hat{S}^\dagger(\xi) = \hat{S}^\dagger(\xi)\hat{S}(\xi) = \mathbb{1}, \quad (\text{A.2})$$

onde r e ϕ são os parâmetros de compressão. Sua atuação no operador de aniquilação, utilizando-se o lema de Baker-Hausdorff [46],

$$\begin{aligned} e^{i\hat{G}\lambda} \hat{A} e^{-i\hat{G}\lambda} &= \hat{A} + i\lambda[\hat{G}, \hat{A}] + \left(\frac{(i\lambda)^2}{2!}\right) [\hat{G}, [\hat{G}, \hat{A}]] + \left(\frac{(i\lambda)^3}{3!}\right) [\hat{G}, [\hat{G}, [\hat{G}, \hat{A}]]] + \\ &+ \dots + \left(\frac{(i\lambda)^n}{n!}\right) [\hat{G}, [\hat{G}, \dots [\hat{G}, \hat{A}]] \dots] + \dots, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

fornece

$$\begin{aligned} \hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}\hat{S}(\xi) &= e^{\frac{r}{2}(e^{i\phi}\hat{a}^{\dagger 2} - e^{-i\phi}\hat{a}^2)} \hat{a} e^{-\frac{r}{2}(e^{-i\phi}\hat{a}^2 - e^{i\phi}\hat{a}^{\dagger 2})} \\ &= \frac{\hat{a}}{0!} + \frac{[(e^{-i\phi}\hat{a}^2 - e^{i\phi}\hat{a}^{\dagger 2}), \hat{a}] \frac{r}{2}}{1!} + \\ &+ \frac{[(e^{-i\phi}\hat{a}^2 - e^{i\phi}\hat{a}^{\dagger 2}), [(e^{-i\phi}\hat{a}^2 - e^{i\phi}\hat{a}^{\dagger 2}), \hat{a}]] \frac{r^2}{4}}{2!} + \\ &+ \frac{[(e^{-i\phi}\hat{a}^2 - e^{i\phi}\hat{a}^{\dagger 2}), [(e^{-i\phi}\hat{a}^2 - e^{i\phi}\hat{a}^{\dagger 2}), [(e^{-i\phi}\hat{a}^2 - e^{i\phi}\hat{a}^{\dagger 2}), \hat{a}]]] \frac{r^3}{8}}{3!} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Calculando-se agora os comutadores e agrupando-se os termos de potências de r , pares e ímpares, obtém-se

$$\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}\hat{S}(\xi) = \hat{a} \left(\frac{1}{0!} + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} + \dots \right) - \hat{a}^\dagger e^{i\phi} \left(\frac{r}{1!} + \frac{r^3}{3!} + \frac{r^5}{5!} + \dots \right). \quad (\text{A.5})$$

A soma no primeiro parênteses nada mais é que a expansão em série de Taylor do cosseno hiperbólico de r , isto é

$$\cosh r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{(2n)!}, \quad (\text{A.6})$$

enquanto que no segundo parênteses aparece a expansão em série de Taylor do seno hiperbólico de r

$$\sinh r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (\text{A.7})$$

Substituindo-se esses resultados em (A.5), obtém-se então

$$\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}\hat{S}(\xi) = \hat{a} \cosh r - \hat{a}^\dagger e^{i\phi} \sinh r. \quad (\text{A.8})$$

Procedendo-se de maneira análoga para o operador de criação, obtém-se

$$\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}^\dagger\hat{S}(\xi) = \hat{a}^\dagger \cosh r - \hat{a} e^{-i\phi} \sinh r. \quad (\text{A.9})$$

ANEXO B – Expansão $(1 - x)^{-\frac{1}{2}}$

Seja $f(x) = (1 - x)^{-1/2}$. Avaliando essa função e suas derivadas no ponto $x = 0$ tem-se

$$\begin{aligned}
 f(x, x = 0) &= 1 \\
 f'(x, x = 0) &= \frac{1}{2} \\
 f''(x, x = 0) &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
 f'''(x, x = 0) &= \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
 &\vdots \\
 f^n(x, x = 0) &= \frac{(2n - 1)}{2} \cdot \frac{(2n - 3)}{2} \cdot \frac{(2n - 5)}{2} \cdots \frac{1}{2} = \frac{(2n - 1)!!}{2^n},
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

onde foi utilizada a propriedade de duplo fatorial para um número ímpar. A partir da relação de duplo fatorial com o fatorial, para um número ímpar $2n - 1$, dada por

$$(2n - 1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!}, \tag{B.2}$$

é possível escrever então a expansão para a função $f(x) = (1 - x)^{-1/2}$ como

$$(1 - x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}. \tag{B.3}$$