

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-graduação em Matemática

Douglas Vilela de Paiva Silva

COMPLEXIDADE TOPOLÓGICA EM ESPAÇOS DE CONFIGURAÇÕES DE  
GRAFOS

Belo Horizonte  
2024

Douglas Vilela de Paiva Silva

COMPLEXIDADE TOPOLÓGICA EM ESPAÇOS DE CONFIGURAÇÕES DE  
GRAFOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Bhalchandra Digambar Thatte

Belo Horizonte  
2024

2024, Douglas Vilela de Paiva Silva.  
Todos os direitos reservados

Silva, Douglas Vilela de Paiva.

S586c Complexidade topológica em espaços de configurações de grafos [recurso eletrônico] / Douglas Vilela de Paiva Silva. Belo Horizonte — 2024.  
1 recurso online (74 f. il.): pdf.

Orientador: Bhalchandra Digambar Thatte.

Disertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f. 72

1. Matemática – Teses. 2. Topologia algébrica – Teses. 3. Teoria da homologia – Teses. 4. Teoria dos grafos – Teses. I. Thatte, Bhalchandra Digambar. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irénquer Vismeg  
Lucas Cruz - CRB 6ª Região - nº 819.



FOLHA DE APROVAÇÃO

*Complexidade Topológica em Espaços de  
Configurações de Grafos*

**DOUGLAS VILELA DE PAIVA SILVA**

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Prof. Bhalchandra Digambar Thatte  
UFMG

Prof. Charles Aparecido de Almeida  
UFMG

Prof. Daniel Vendruscolo  
UFSCar

Prof. Dmitry Shestakov  
UFMG

Prof. Luis Augusto de Mendonça  
UFMG

Belo Horizonte, 22 de fevereiro de 2024.

Para todas as pessoas que me incentivaram a explorar cada vez mais as profundezas da matemática, e especialmente àquelas que me cobraram emergir de vez em quando.

# Agradecimentos

Sob o risco de soar piegas, agradeço primeiramente aos meus pais, não apenas pelo apoio durante o mestrado, mas também pelo estímulo desde os primeiros anos de vida para que tanto eu quanto meu irmão buscássemos uma educação contínua. Nesse sentido, agradeço também ao meu irmão por ser meu modelo a tanto tempo. Por um viés mais pragmático, o agradeço também por esse computador no qual venho escrevendo essas linhas.

Agradeço ao meu orientador por toda a liberdade que me foi confiada, não só em escolher o tema da dissertação, como a de seguir no meu próprio ritmo. Aos colegas de departamento, agradeço em particular aos professores que tive pela formação durante esses últimos dois anos, às prestativas Elianes desse instituto por todos os esclarecimentos de confusões que minha mente insistia em criar e aos colegas que conseguiram me encontrar apesar da minha frequente ausência na sala de café. Em particular, agradeço à Janaíne Geralda Mastins e ao Luiz Henrique de Souza Matos por 90% das informações que eu sei sobre o departamento.

Além disso, agradeço à banca por terem aceitado o trabalho e o esforço de fazer parte das 5 pessoas que irão ler essa dissertação, principalmente durante as férias. Muito obrigado mesmo.

Agradeço também aos amigos e colegas fora da Matemática por me darem uma chance de pensar em outras coisas quando o desejo de queimar esse texto só era parado por eu nunca tê-lo impresso. Em particular, destaco meus amigos de Ipatinga (e Coronel Fabriciano para as más línguas) bem como Matheus e Paula pelo apoio, amizade e inspiração desde o início da graduação.

Pelo receio de não a renovarem no doutorado, agradeço também à CAPES pela Bolsa de Pesquisa durante o mestrado, o departamento e ao IMPA pelo auxílio durante viagens. Nessas linhas, destaco também meu agradecimento à duas importantes instituições presentes na vida de todo pesquisador brasileiro, o LibGen e o SciHub.

Finalmente, gostaria de agradecer à pessoa que está comigo todos os dias desde o dia exato em que descobri que havia passado no mestrado. Seu carinho e amor não me deixaram cair perante os obstáculos, e minha admiração e amor por você me fazem querer enfrentar ainda muitos outros ao seu lado. Obrigado por tudo, Yasmin.

# Resumo

Desde o final do século passado, o problema de planejamento de movimento obteve uma roupagem matemática com o conceito de complexidade topológica de Farber. Além disso, com o conceito de espaços de configurações, conseguimos tratar também o caso do trânsito de diversos corpos sem colisão. Nessa dissertação, veremos como calcular esse invariante numérico para os espaços de configurações sobre grafos topológicos, e em particular sobre árvores. Para isso, faremos uso de técnicas gerais da Topologia Geral e Algébrica.

**Palavras-chave:** complexidade topológica; espaços de configurações; grafos.

# Abstract

Since the end of the last century, the motion planning problem has acquired a mathematical framework with the concept of Farber's topological complexity. Furthermore, with the concept of configuration spaces, we have managed to address the case of the motion of multiple bodies without collisions. In this dissertation, we will see how to calculate this numerical invariant for configuration spaces over topological graphs. To achieve this, we will make use of general techniques from General and Algebraic Topology.

**Keywords:** topological complexity; configuration spaces; graphs.

# Sumário

Prefácio	11
Motivação	13
<b>1 Pré-requisitos Topológicos</b>	<b>16</b>
1.1 Propriedades Locais	16
1.2 Paracompacidade, Partições da Unidade e Dimensão de Lebesgue	17
1.3 Propriedades de levantamento e Fibrações	18
1.4 Ações de Grupos e Espaços de Órbitas	19
<b>2 Espaço de Caminhos</b>	<b>22</b>
2.1 Topologia do compacto-aberto	22
2.2 Espaço de Caminhos	23
<b>3 Teoria Simplicial</b>	<b>27</b>
3.1 Complexos Simpliciais	27
3.2 Grafos Topológicos	30
<b>4 Espaços de Configurações</b>	<b>33</b>
4.1 Configurações ordenadas e não-ordenadas	33
4.2 Conexidade em Espaços de configurações de Grafos	34
4.3 2-Espaço de configurações de árvores	39
4.4 Tipo Homotópico de $C(\Gamma, 2)$	42
<b>5 Complexidade Topológica</b>	<b>46</b>
5.1 Teoria Geral	46
5.2 Cotas superiores	47
5.3 Gênero de Schwarz e cotas inferiores	51
5.4 Exemplos	53
<b>6 Estabilidade da complexidade topológica em árvores</b>	<b>55</b>
6.1 Classes de cohomologia $u_{ij}$	55
6.2 Teorema principal	58
6.3 Lema auxiliar	59
6.4 Generalizações	62
<b>7 Apêndice: Teorias de (Co)Homologia</b>	<b>63</b>
7.1 Complexos de Cadeia	63
7.2 (Co)Homologia Singular	65

7.3	Cohomologia Singular com coeficientes em DIP . . . . .	67
7.4	Anel de Cohomologia e o produto- <i>cup</i> . . . . .	68
7.5	(Co)Homologia Simplicial . . . . .	70
	<b>Bibliografia</b>	<b>72</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>73</b>

## Prefácio

Em poucas palavras, essa dissertação é um trabalho de Topologia Algébrica. Sendo assim, diversos conceitos e resultados tanto sobre Topologia Geral, quanto uma introdução às Estruturas Algébricas básicas precisam ser assumidos prezando a brevidade do texto.

No que tange à Topologia Geral, o parâmetro escolhido foi assumir como conhecido tudo aquilo presente em um livro típico de um curso de Topologia Geral, especificamente no clássico *Topology* do professor J. Munkres. Assim, todo o desenvolvimento sobre espaços topológicos e espaços métricos, axiomas de separação e até mesmo a teoria elementar de homotopia serão assumidos.

Já para as estruturas algébricas, assumimos aqui a ementa de um primeiro curso de pós-graduação sobre tais objetos. Ou apenas para citar uma referência, os tópicos abordados em *Algebra: A Graduate Course*.

Apesar disso, diversos resultados preliminares relativamente básicos também estão fora do escopo das bibliografias recomendadas. Assim, nesses casos tomamos a decisão de dar um passo atrás e definir os pré-requisitos desses tópicos afim de introduzir as novas ideias. Portanto o primeiro capítulo do texto tem esse propósito.

Durante a dissertação, também faremos uso das teorias elementares de Homologia e Cohomologia, principalmente em sua versão singular, mas também em sua forma simplicial. Assim, montamos um apêndice reunindo todos os conceitos e resultados necessários para esse texto. Bem como no primeiro capítulo não provaremos os resultados do apêndice, mas convidamos os leitores desconfiados à consulta do livro *Algebraic Topology* do professor A. Hatcher.

Outro ponto que vale menção é que não utilizaremos a definição comum de grafos dada pela Análise Combinatória e sim os trataremos como espaços topológicos, especificamente complexos simpliciais. É de esperança do autor que essa decisão não traga maiores dificuldades já que tal definição topológica carrega toda a intuição presente no caso combinatório. De qualquer modo essa nova roupagem sobre os grafos é introduzida no terceiro capítulo desse texto.

Durante os capítulos 2-5 desenvolveremos a teoria de fato relevante dessa dissertação e assim nos esforçamos para apresentar a prova de todos os resultados descritos. No caso onde omitimos a demonstração citamos um livro ou artigo com tal prova. Nos casos onde citamos um material mas também apresentamos uma demonstração, indicamos o texto onde esse resultado apareceu na literatura pela primeira vez.

Seguindo a convenção utilizada por Munkres, ao dizermos que  $U$  é uma vizinhança de  $x$  em  $X$ , assumiremos que  $U$  é um subconjunto aberto de  $X$  contendo  $x$ . Além disso, convencionalmente durante todo o texto um *mapa* será uma função sempre contínua. Outrossim, como todos os anéis que trabalharemos serão comutativos e com unidade (exceto o anel de cohomologia do apêndice), assumiremos tais adjetivos sempre que tomarmos um *anel*.

Durante esse texto tomaremos o conjunto dos naturais  $\mathbb{N}$  incluindo o zero e  $\mathbb{R}^n$  como um espaço topológico com a topologia padrão. Além disso,  $\mathbb{D}^n$  denotará o  $n$ -disco abaixo com a

topologia de subespaço:

$$\mathbb{D}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i \leq 1\}.$$

Particularmente, destacamos o intervalo  $I = \mathbb{D}^1$ . Do mesmo modo, a  $n$ -esfera  $\mathbb{S}^n$  denota o seguinte subespaço de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

$$\mathbb{S}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i^2 = 1\}.$$

Nesse caso destacamos o círculo  $\mathbb{S}^1$ . Assim, definimos o  $n$ -toro  $\mathbb{T}^n$  como o produto topológico de  $n$  cópias do círculo  $\mathbb{S}^1$ . Finalmente, se  $(X, d)$  é um espaço métrico,  $B(x, \epsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$ :

Apesar de desejável, o conhecimento sobre a Teoria de Categorias não será necessário, já que utilizaremos apenas a definição de um diagrama comutativo e termos que serão introduzidos no texto.

Visando a leitura de uma comunidade matemática brasileira e lusófona, durante o texto evitamos o uso de termos em inglês exceto nos casos de *loops*, *rank* e o *cup* do produto-*cup*, nos quais uma tradução dos termos pareceu sem propósito ou sem uma boa escolha. Nesses casos, tais termos sempre aparecerão em itálico.

# Motivação

Um problema clássico da teoria de Controle (como em Latombe 1991) é o da automatização de sistemas de trânsito. Assim, a questão básica dessa área é a seguinte.

*Dado uma partícula em um espaço ambiente, como criar um algoritmo que recebe o ponto de partida e o destino dessa partícula e devolve um trajeto entre tais pontos?*

Com aplicações tanto industriais quanto acadêmicas, tal problema obteve uma formulação matemática no final do século passado com os trabalhos de Michael Farber.

Nesse sentido, interpretamos o palco do movimento de tal partícula como um espaço topológico  $X$  e cada configuração de ponto inicial e final como uma dupla em  $X \times X$ . Assim, a proposta de Farber é a associação de um caminho para cada dupla  $(x, y)$  de pontos em  $X \times X$ , com  $x$  e  $y$  como seu ponto inicial e final, respectivamente. Ou seja, queremos uma função

$$s : X \times X \rightarrow \{\gamma : I \rightarrow X\},$$

satisfazendo a condição de extremidades, i.e.  $s(x, y)(0) = x$  e  $s(x, y)(1) = y$ . Naturalmente, esse problema não é problema algum já que podemos definir  $s(x, y)$  justamente como uma função  $\gamma : I \rightarrow X$  que satisfaz o exigido nas extremidades e vale qualquer coisa que seja entre 0 e 1.

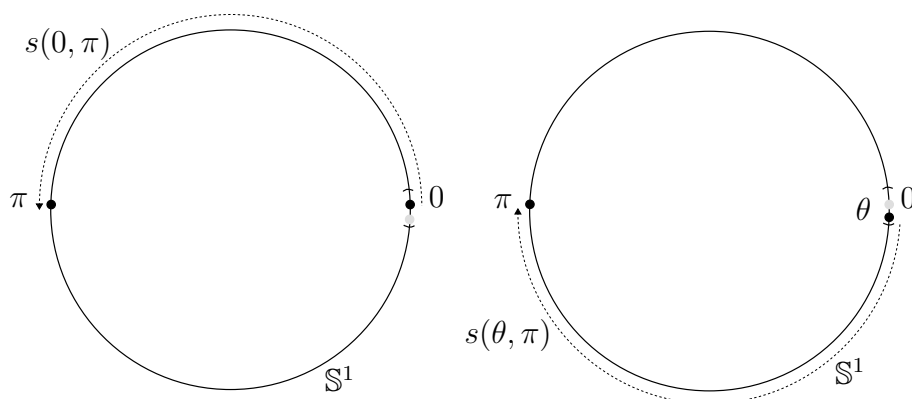
De fato, ainda motivados pela modelagem física e pelo desafio mental matemático, podemos adotar a restrição que a imagem desse algoritmo deve ser sempre uma função contínua. Se a versão aplicada já parece satisfeita com tal restrição, ainda não obtivemos o dito desafio já que trivialmente isso é possível se e somente se os espaços ambientes forem conexos por caminhos.

Assim, podemos exigir que  $s$  satisfaça ainda outra condição. Para ilustrar essa necessidade vejamos um exemplo.

Se tomarmos o círculo  $\mathbb{S}^1$  como nosso espaço ambiente, temos que existe uma função

$$s : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \{\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^1 \text{ contínua}\}$$

que satisfaz a condição de extremidades. Como  $\mathbb{S}^1$  é um espaço geodésico, podemos tomar  $s$  como justamente a função que associa uma geodésica entre cada dupla. Assim, perceba que ao tomarmos o ponto 0 como ponto inicial e  $\pi$  como ponto final e  $s$  for tal que o caminho associado é como o da figura 1, uma pequena oscilação do ponto inicial produziria um caminho drasticamente diferente.

Figura 1: Instabilidade em  $s$ .

Em situações aplicadas é fácil ver que esse comportamento é de fato um problema, já que uma incerteza de se aferir a posição real em relação à posição medida de um ponto inicial (ou final) se traduz em uma instabilidade do caminho sugerido por  $s$ . Em um cenário puramente matemático, podemos interpretar isso como uma falha da função  $s$  em ser contínua no sentido ingênuo do cálculo, i.e. uma pequena mudança nos pontos iniciais e finais se traduziu em uma grande mudança no trajeto associado.

Evidentemente, não podemos falar de continuidade de  $s$  enquanto não munirmos o conjunto das funções contínuas do intervalo para o espaço ambiente com uma topologia. Assim, o capítulo 2 ataca esse exato problema.

Como veremos, a limitação do algoritmo no círculo descrito acima não é apenas uma restrição desse mapa em si, mas sim do espaço  $\mathbb{S}^1$ . Apesar disso, isso não significa que em subespaços de  $\mathbb{S}^1$  o algoritmo descrito não seja suficiente. De fato, ao restringirmos  $s$  em  $U \subseteq \mathbb{S}^1$  sem duplas antipodais, temos que  $s$  torna-se contínua nesse sentido intuitivo. Assim, contornamos o problema em  $\mathbb{S}^1$  ao encontrar uma cobertura de tal espaço em que em cada aberto tenhamos um algoritmo local, i.e. uma função  $s : U \rightarrow \{\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^1 \text{ contínua}\}$  que satisfaz a condição de extremidades.

Dessa forma, a complexidade topológica de Farber ganha vida como o menor número de pedaços em que precisamos quebrar o espaço ambiente para que cada pedaço tenha um algoritmo local. Veremos a teoria geral da complexidade topológica no capítulo 5.

Apesar disso tudo, o problema da teoria de controle que essa dissertação atacará não é o citado no início dessa seção, mas o seguinte.

*Dada uma coleção de  $n$  partículas em um espaço ambiente, como criar um algoritmo capaz de transportar cada partícula de um ponto inicial à um designado destino sem que ocorram colisões durante esse trânsito de partículas?*

Ou seja, precisamos que os movimentos associados não só sejam uma  $n$ -tupla de caminhos para cada partícula, mas que os caminhos não se cruzem entre si. Para isso, tomaremos apenas um subespaço do espaço de  $n$ -tuplas do espaço base, as  $n$ -tuplas de coordenadas distintas. Tais espaços são os espaços de configurações e os trabalharemos no capítulo 4.

Finalmente, durante essa dissertação focaremos especialmente em espaços bases que são unidimensionais em certo sentido. Essa restrição ainda ataca diversos cenários da matemá-

tica aplicada como trilhos e esteiras, além de oferecer interessantes resultados puramente matemáticos. Esses espaços serão os grafos e os introduziremos no capítulo 3.

O principal resultado que estudaremos aqui é que a complexidade topológica de uma classe de grafos se estabiliza mesmo que aumentemos o número de partículas a se movimentar em tais espaços. Este teorema é tratado no capítulo 6.

Vejamos como tudo isso ocorre.

# Capítulo 1

## Pré-requisitos Topológicos

### 1.1 Propriedades Locais

O objetivo dessa seção é introduzir algumas propriedades locais de espaços topológicos, i.e. invariantes topológicos que em certo sentido só valem em vizinhanças de pontos do espaço.

Nesse sentido, traremos as versões locais de dois dos invariantes mais estudados de um espaço topológico, a conexidade e a compacidade, além da contratibilidade. Ademais, definiremos também o conceito de um subespaço ser localmente fechado, bem como uma coleção ser localmente finita.

Diversas dessas definições se farão úteis no contexto dos espaços paracompactos e de seus objetos associados que trabalharemos na seguinte seção.

**Definição 1.1.1 (Conexidade Local).** Dado um espaço  $X$ , o chamaremos *localmente conexo* se para todo ponto  $x \in X$  e vizinhança  $U$  de  $x$ , existir uma vizinhança conexa  $V$  de  $x$  contida em  $U$ .  $\square$

**Definição 1.1.2 (Conexidade por caminhos Local).** Dado um espaço  $X$ , o chamaremos *localmente conexo por caminhos* se para todo ponto  $x \in X$  e vizinhança  $U$  de  $x$ , existir uma vizinhança conexa por caminhos  $V$  de  $x$  contida em  $U$ .  $\square$

Apesar de interessantes por si só, tais propriedades locais também conseguem dar informações sobre seus análogos globais.

**Lema 1.1.3.** Se  $X$  é um espaço localmente conexo por caminhos, então  $X$  é conexo se e somente se  $X$  é conexo por caminhos.

Como pode ser consultado em *Topology*, tais propriedades locais são preservadas por produtos e quocientes. Apesar disso, de forma semelhante aos seus análogos globais, temos que em geral isso não vale para subespaços. Ainda assim, temos o seguinte resultado.

**Lema 1.1.4.** Se  $U$  é um subespaço aberto de um espaço  $X$  que é localmente conexo (por caminhos), então  $U$  é localmente conexo (por caminhos).

O segundo tipo de propriedade local que usaremos, é o da compacidade.

**Definição 1.1.5 (Compacidade Local).** Dado um espaço  $X$ , o chamaremos *localmente compacto* se para todo ponto  $x \in X$ , existir um subespaço compacto  $V$  de  $X$  que contém uma vizinhança  $U$  de  $x$ .  $\square$

Uma forma útil de garantir que um subespaço de um espaço localmente compacto também é localmente compacto é com uma outra noção local.

**Definição 1.1.6 (Subespaço Localmente Fechado).** Dado um subespaço  $Y$  de  $X$ , o chamaremos *localmente fechado* se  $\overline{Y} \setminus Y$  for um subespaço fechado de  $X$ .  $\square$

**Observação 1.1.7.** Um segunda caracterização da propriedade acima dada por Bourbaki que nos permite ver o porque a encaramos como uma propriedade local, é que para todo  $x \in Y$  existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que  $U \cap Y$  é subespaço fechado de  $U$ .

Com isso, temos o seguinte resultado.

**Lema 1.1.8.** Se  $Y$  é um subespaço de um espaço Hausdorff  $X$  localmente compacto, então  $Y$  é localmente compacto se e somente se  $Y$  é localmente fechado em  $X$ .

Como mencionado, uma outra noção de compacidade é a dita paracompacidade. Para defini-la porém, precisamos de uma outra classe de invariantes locais, a das coberturas localmente finitas.

**Definição 1.1.9 (Cobertura Localmente Finita).** Dada cobertura aberta de  $\{U_i\}_{i \in I}$  de um espaço  $X$ , a chamaremos *localmente finita* se para todo  $x \in X$  existir uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que apenas finitos abertos  $U_i$  têm interseção não trivial com  $U$ .  $\square$

Antes de seguirmos o texto para a paracompacidade, vejamos uma última propriedade local que aparecerá durante o texto.

**Definição 1.1.10 (Contratibilidade Local).** Dado um subespaço  $U$  de  $X$ , o chamaremos *localmente contrátil* se para todo ponto  $x$  existe uma vizinhança  $V \subseteq U$  tal que a inclusão canônica  $\iota : V \rightarrow U$  for homotopicamente nula, i.e.  $\iota \simeq_H c_u$ , no qual  $c_u$  é um mapa constante em  $U$ .  $\square$

## 1.2 Paracompacidade, Partições da Unidade e Dimensão de Lebesgue

**Definição 1.2.1 (Paracompacidade).** Dado um espaço  $X$ , o chamaremos **paracompacto** se toda cobertura aberta  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $X$  admite um refinamento aberto localmente finito, i.e. existe uma cobertura  $\{V_j\}_{j \in J}$  localmente finita tal que para todo  $j \in J$ , existe um  $i \in I$  com  $V_j \subseteq U_i$ .  $\square$

O principal modo que nos utilizaremos desse sabor de compacidade é pelo fato que coberturas abertas em espaços paracompactos admitem uma coleção especial de funções, as partições da unidade.

**Definição 1.2.2 (Partição da Unidade).** Dado um espaço  $X$ , definimos uma *partição da unidade* de  $X$ , como uma coleção de mapas  $\{\rho_j : X \rightarrow I\}$  tal que para todo  $x \in X$ ,

- (i) existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que  $\rho_j(U) \neq 0$ , somente para uma quantidade finita de índices,
- (ii) a soma da imagem de  $x$  por todas as funções  $\rho_j$  é 1, i.e.  $\sum_{j \in J} \rho_j(x) = 1$ .

$\square$

Nesse texto, as partições da unidade que utilizaremos terão uma importante propriedade extra.

**Definição 1.2.3 (Partições da unidade subordinadas à uma cobertura).** Dado um espaço  $X$ , uma cobertura aberta  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $X$  e uma partição da unidade  $\{\rho_i\}_{i \in I}$ , dizemos que a partição da unidade é **subordinada à cobertura**  $\{U_i\}$  se para todo  $i \in I$ , o suporte de cada  $\rho_i$  está contido em  $U_i$ , i.e.

$$\{x \in X \mid \rho_i(x) \neq 0\} \subseteq U_i.$$

□

A existência de uma partição da unidade subordinada a uma dada cobertura aberta de um espaço, é delicada em espaços gerais. Apesar disso, como comentamos, para espaços paracompactos sempre conseguimos garantir tal propriedade.

**Lema 1.2.4.** Se  $X$  é um espaço paracompacto, então toda cobertura aberta  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $X$  admite uma partição da unidade subordinada à  $\{U_i\}_{i \in I}$ .

Conectando com a noção de compacidade local da seção anterior, também conseguimos um resultado análogo em espaços Hausdorff e coberturas finitas.

**Lema 1.2.5.** Se  $X$  é um espaço Hausdorff localmente compacto, então toda cobertura aberta  $\{U_i\}_{i=1}^n$  finita de  $X$  admite uma partição da unidade subordinada à  $\{U_i\}_{i=1}^n$ .

Um outra forma que os espaços paracompactos simplificam o tratamento de um espaço é na noção de dimensão de Lebesgue. Para isso, definimos a ordem de uma cobertura.

**Definição 1.2.6 (Ordem de uma cobertura).** Dados um espaço  $X$  e uma cobertura aberta  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $X$ , definimos a *ordem* da cobertura como o menor valor  $m$  (se existir) tal que todo ponto  $x \in X$  está contido em no máximo  $m$  abertos  $U_i$  da cobertura. □

Com isso, definimos a dimensão de Lebesgue.

**Definição 1.2.7 (Dimensão de Lebesgue).** Dados um espaço  $X$ , definimos a *dimensão de Lebesgue*  $dim(X)$  de  $X$ , como o menor valor  $m$  tal que toda cobertura aberta  $\{U_i\}_{i \in I}$  finita tem um refinamento aberto com ordem  $m + 1$ .

Caso não exista tal valor, diremos que a dimensão de Lebesgue é infinita. □

No caso dos espaços paracompactos, temos a seguinte equivalência.

**Proposição 1.2.8.** Se  $X$  é um espaço paracompacto, então  $dim(X) = n$  se e somente se toda cobertura aberta  $\{U_i\}_{i \in I}$  tem um refinamento aberto com ordem  $n + 1$ .

**Observação 1.2.9.** Observe que a diferença da caracterização acima da dimensão de Lebesgue para espaços paracompactos e da definição geral, é que no caso dos espaços paracompactos não exigimos que a cobertura seja finita. Como veremos, isso será de grande ajuda.

## 1.3 Propriedades de levantamento e Fibrações

**Definição 1.3.1 (Propriedade de levantamento).** Dado um mapa  $p : X \rightarrow Y$ , dizemos que  $p$  tem a *propriedade de levantamento* com respeito a um mapa  $i : A \rightarrow B$  se para quaisquer mapas  $f, g$  que comutam o diagrama abaixo,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

existe um mapa  $h : B \rightarrow X$  que comuta o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Ou seja, temos que  $h$  é uma diagonal no quadrado original. □

Nesse texto, duas classes de propriedades de levantamento aparecerão, os levantamentos de caminhos e os levantamentos por homotopia.

**Definição 1.3.2 (Propriedade de levantamento de caminhos).** Dado um mapa  $p : X \rightarrow Y$ , dizemos que  $p$  tem a *propriedade de levantamento de caminhos* se  $p$  tem a propriedade de levantamento com respeito ao mapa de inclusão  $\iota : \{0\} \rightarrow I$ . □

**Observação 1.3.3.** Note que  $p : X \rightarrow Y$  tem a propriedade de levantamento de caminhos se e somente se para todo caminho  $\gamma : I \rightarrow Y$ , existe um caminho  $\bar{\gamma} : I \rightarrow X$  tal que  $p \circ \bar{\gamma} = \gamma$ .

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow \bar{\gamma} & \downarrow p \\ I & \xrightarrow{\gamma} & Y \end{array}$$

**Definição 1.3.4 (Propriedade de levantamento por homotopias).** Dado um mapa  $p : X \rightarrow Y$ , dizemos que  $p$  tem a *propriedade de levantamento por homotopias* com respeito a um espaço  $Z$  se  $p$  tem a propriedade de levantamento com respeito à inclusão  $\iota : Z \times \{0\} \rightarrow Z \times I$ , definido como  $\iota(z, 0) = (z, 0)$ .

$$\begin{array}{ccc} Z \times \{0\} & \xrightarrow{f} & X \\ \iota \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ Z \times I & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

□

Um caso valioso de um mapa  $p$  que satisfaz a propriedade de levantamento por homotopias é quando ele o satisfaz com respeito a qualquer espaço topológico  $Z$ .

**Definição 1.3.5 (Fibração).** Dado um mapa  $p : X \rightarrow Y$ , dizemos que  $p$  é uma *fibração* se  $p$  tem a propriedade de levantamento por homotopias com respeito a qualquer espaço  $Z$ . □

**Observação 1.3.6.** Alguns autores chamam o que definimos acima de uma 'fibração de Hurewicz' afim de diferenciar de outras noções de fibrações, como a fibração de Serre. Como nesse texto apenas usaremos a definida acima, nos limitaremos a denominar a definida estrutura como 'fibração'.

## 1.4 Ações de Grupos e Espaços de Órbitas

**Definição 1.4.1 (Ação de grupo).** Dados um grupo  $G$  e um conjunto  $X$ , definimos uma *ação*  $\phi$  de  $G$  em  $X$ , como uma função  $\phi : G \times X \rightarrow X$ , tal que:

- (i)  $\phi(1_G, x) = x$ , para todo  $x \in X$ ,
- (ii)  $\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(gh, x)$ , para todos  $g, h \in G$  e  $x \in X$ .

□

Com uma ação de grupos de  $G$  em  $X$ , naturalmente temos uma partição dos elementos de  $X$  com respeito à ação em si.

**Definição 1.4.2 (Órbita).** Dada uma ação  $\phi$  de  $G$  em  $X$ , definimos a *órbita*  $Orb_\phi(x)$  de  $x \in X$  com respeito a ação  $\phi$ , como o seguinte subconjunto de  $X$ :

$$Orb_\phi(x) = \{y \in X \mid \phi(g, x) = y, g \in G\}.$$

□

**Observação 1.4.3.** É direto notar (ler em *Algebra: A Graduate Course*, por exemplo) que a relação em  $X$  definida como  $x \sim y$  se  $x \in Orb_\phi(y)$  define uma relação de equivalência nos elementos de  $X$ .

Além de um subobjeto do conjunto  $X$ , i.e. um subconjunto de  $X$ , uma ação de  $G$  em  $X$  define também um subobjeto do grupo  $G$ .

**Definição 1.4.4 (Estabilizador).** Dada uma ação  $\phi$  de  $G$  em  $X$ , definimos o *estabilizador*  $Stab_\phi(x)$  de  $x \in X$  com respeito à ação  $\phi$ , como o seguinte subgrupo de  $G$ :

$$\{g \in G \mid \phi(g, x) = x\}.$$

□

**Observação 1.4.5.** De fato o conjunto definido acima tem estrutura de subgrupo de  $G$ . Para ver isso, novamente citamos o livro *Algebra: A Graduate Course*.

Naturalmente, nosso foco será em ações de grupos sobre espaços topológicos e não meros conjuntos, assim fazemos a seguinte definição.

**Definição 1.4.6 (Ação Contínua).** Dada uma ação  $\phi$  de  $G$  sobre o conjunto do espaço  $X$ , a chamaremos de uma *ação contínua* se  $\phi$  for contínua quando equipamos  $G$  com a topologia discreta. □

Uma segunda caracterização da continuidade de uma ação é dada abaixo.

**Lema 1.4.7.** Se  $\phi$  é uma ação de  $G$  em um espaço  $X$ , então  $\phi$  é contínua se e somente se  $\phi(g, \cdot) : X \rightarrow X$  for contínua para todo  $g \in G$ .

Com tais ações contínuas em mente, podemos usar o conjunto de todas as órbitas de uma ação  $\phi$  em  $X$  para definirmos um espaço quociente, o espaço de órbitas.

**Definição 1.4.8 (Espaço de Órbitas).** Dada uma ação contínua  $\phi$  de  $G$  em  $X$ , definiremos o *espaço de órbitas*  $X/G$  de  $X$  sob a ação  $\phi$ , como o conjunto de todas as órbitas dessa ação munida com a topologia quociente induzida pelo mapa  $p : X \rightarrow X/G$ , que associa cada ponto  $x$  à sua órbita  $Orb_\phi(x)$ . □

**Observação 1.4.9.** Novamente, terceirizamos o trabalho de provar que tal construção está bem definida. Nesse caso, recomendamos o texto *Topology and Groupoids*. Além disso, as demonstrações para o restante dos resultados dessa seção também podem ser encontrados no mesmo livro.

Com isso, temos um resultado auxiliar importante sobre os espaços de órbitas.

**Proposição 1.4.10.** Se  $X/G$  é um espaço de órbitas, então seu mapa quociente  $q : X \rightarrow X/G$  é aberto.

Nesse texto trabalharemos com ações que satisfazem uma propriedade especial, as ditas ações descontínuas.

**Definição 1.4.11 (Ação Descontínua).** Dada uma ação contínua  $\phi$  de  $G$  em  $X$ , a chamaremos de *descontínua* se para todo  $x \in X$ , o estabilizador  $Stab_\phi(x)$  for finito e existir uma vizinhança  $U_x$  de  $x$  tal que  $\phi(g, U_x) \cap U_x = \emptyset$  para todo  $g \in G$  fora do estabilizador de  $x$ .  $\square$

Sobre tais ações descontínuas temos um importante resultado acerca da propriedade de levantamento de caminhos em espaços Hausdorff.

**Lema 1.4.12.** Se  $\phi$  é uma ação contínua de um grupo finito  $G$  em um espaço Hausdorff  $X$ , então  $\phi$  é descontínua.

**Proposição 1.4.13.** Dada uma ação descontínua  $\phi$  de  $G$  em um espaço Hausdorff  $X$ , então o mapa quociente  $p : X \rightarrow X/G$  tem a propriedade de levantamento de caminhos.

## Capítulo 2

# Espaço de Caminhos

### 2.1 Topologia do compacto-aberto

O problema de se criar um espaço topológico no conjunto  $\mathcal{C}(X, Y)$  de funções contínuas entre dois espaços  $X$  e  $Y$  é ubíquo em diversas áreas da matemática, e portanto apresenta diversas soluções. Uma das mais comuns é a topologia do compacto-aberto. Para isso, tomaremos uma classe de subconjuntos que formarão uma sub-base de uma topologia em  $\mathcal{C}(X, Y)$ .

**Lema 2.1.1.** Se  $X$  e  $Y$  são espaços, então para todo mapa  $f : X \rightarrow Y$  existe um compacto  $K$  em  $X$  e um aberto  $U$  de  $Y$  tal que  $f(K) \subseteq U$ .

**Demonstração:** Se  $X$  for o espaço-vazio, então podemos tomar  $K = X$  e  $U = Y$  e assim trivialmente todo mapa  $f$  é tal que  $f(K) \subseteq U$ . Se  $X$  tiver ao menos um ponto  $x \in X$ , tome  $K = \{x\}$  e novamente  $U = Y$ . Assim,  $f(K) \subseteq U$  e portanto temos o que queríamos. ■

Assim, podemos fazer a seguinte definição.

**Definição 2.1.2 (Topologia do Compacto-Aberto).** Dado o conjunto das funções contínuas  $\mathcal{C}(X, Y)$ , definimos a *topologia do compacto-aberto* como a topologia gerada pela sub-base

$$\{V(K, U) \mid K \text{ é um compacto de } X \text{ e } U \text{ é um aberto de } Y\},$$

de  $\mathcal{C}(X, Y)$ , no qual

$$V(K, U) = \{f \in \mathcal{C}(X, Y) \mid f(K) \subseteq U\}.$$

□

Assim, definimos o espaço de funções contínuas.

**Definição 2.1.3 (Espaço de Funções).** Dados dois espaços  $X$  e  $Y$ , definimos o *espaço de funções contínuas* entre  $X$  e  $Y$ , como o conjunto  $\mathcal{C}(X, Y)$  munido da topologia do compacto-aberto. □

Um importante resultado sobre a topologia do compacto-aberto é que faz da função de avaliação uma função contínua.

**Teorema 2.1.4 (Munkres 2000).** Se  $Y$  é um espaço e  $X$  é um espaço Hausdorff localmente compacto, então a função  $e : \mathcal{C}(X, Y) \times X \rightarrow Y$ , definido com  $e(f, x) = f(x)$  é contínua.

Um outro importante resultado é que o espaço de funções contínuas e o mapa de avaliação satisfazem uma propriedade universal, a saber, tal dupla é um objeto exponencial caso o domínio do espaço de funções seja Hausdorff e localmente compacto.

**Proposição 2.1.5.** Se  $X$  é um espaço Hausdorff localmente compacto e  $Y$  é um espaço qualquer, então para qualquer espaço  $Z$  e função contínua  $f : Z \times X \rightarrow Y$ , existe um mapa  $f' : Z \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$  tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} Z \times X & & \\ f' \times id_X \downarrow & \searrow f & \\ \mathcal{C}(X, Y) \times X & \xrightarrow{e} & Y \end{array}$$

## 2.2 Espaço de Caminhos

O caso mais importante de um espaço de funções contínuas é quando o domínio desse espaço é o intervalo.

**Definição 2.2.1 (Espaço de Caminhos).** Dado um espaço  $X$ , definimos o *espaço de caminhos*  $PX$ , como o conjunto  $\mathcal{C}(I, X)$ , munido da topologia do compacto aberto.  $\square$

Assim, como o intervalo é evidentemente Hausdorff e localmente compacto, temos o seguinte resultado.

**Lema 2.2.2.** Se  $X$  é um espaço, então a função  $e : PX \times I \rightarrow X$ , definido com  $e(\gamma, t) = \gamma(t)$  é contínuo.

Com isso, conseguimos garantir que a seguinte função é de fato um mapa.

**Definição 2.2.3 (Fibração de Caminhos).** Dado um espaço  $X$ , definimos a *fibração de caminhos*  $\pi$  em  $X$ , como o mapa  $\pi : PX \rightarrow X \times X$  tal que  $\pi(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(1))$ .  $\square$

De certa forma esse será o mapa mais importante dessa dissertação. Além disso, a nomenclatura de 'fibração' no termo *fibração de caminhos* não é mera coincidência e assim temos o seguinte resultado.

**Lema 2.2.4.** Se  $\pi : PX \rightarrow X \times X$  é a fibração de caminhos de  $X$ , então  $\pi$  é uma fibração.

**Demonstração:** Por definição, precisamos provar que  $\pi$  satisfaz a propriedade de levantamento por homotopia para qualquer espaço topológico  $Z$ . Assim, assumamos que existam mapas  $f, g$  que comutam o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} Z \times \{0\} & \xrightarrow{f} & PX \\ \downarrow \iota & & \downarrow \pi \\ Z \times I & \xrightarrow{g} & X \times X \end{array}$$

Dessa forma, queremos mostrar que existe uma diagonal  $h : Z \times I \rightarrow PX$  que comuta com o quadrado acima.

Note que  $g(z, t) = (g_1(z, t), g_2(z, t))$ , onde  $g_i : Z \times I \rightarrow X$ . Com isso, defina  $h : Z \times I \rightarrow PX$  tal que

$$h(z, t)(s) = \begin{cases} g_1(z, -3s + t), & \text{caso } 0 \leq s \leq t/3, \\ f(z, \frac{3s-t}{3-2t}), & \text{caso } t/3 \leq s \leq 1 - t/3, \\ g_2(z, 3(s-1) + t), & \text{caso } 1 - t/3 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Portanto  $h$  é contínua pelo lema da colagem. Assim, basta provarmos que  $h$  é diagonal do quadrado, ou seja, que  $\pi \circ h = g$  e  $h \circ \iota = f$ .

Note que por definição,  $h(z, 0)(s) = f(z, 0)(s)$ , logo  $h \circ \iota = f$ . Além disso, também temos que  $\pi \circ h(z, t)(s) = (h(z, t)(0), h(z, t)(1)) = (g_1(z, t), g_2(z, t)) = g(z, t)$ . Assim,  $\pi \circ h = g$  e  $h \circ \iota = f$  como queríamos demonstrar. ■

Seguindo o último resultado da seção anterior, também temos o seguinte fato diretamente.

**Lema 2.2.5.** Se  $X$  é um espaço qualquer, então para qualquer espaço  $Y$  e função contínua  $f : Y \times I \rightarrow X$ , existe um mapa  $f' : Y \rightarrow PX$  tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} Y \times I & & \\ f' \times id_I \downarrow & \searrow f & \\ PX \times I & \xrightarrow{e} & X \end{array}$$

Um caso particular do lema acima que será útil mais tarde é quando lidarmos com subespaços contráteis.

**Proposição 2.2.6.** Se  $Y$  é um subespaço contrátil de  $X$ , i.e. existe uma homotopia  $H : Y \times I \rightarrow X$  entre a inclusão  $\iota_Y$  e uma função constante  $c : Y \rightarrow X$  em  $x_0 \in X$ , então existe um mapa  $s : Y \rightarrow PX$  tal que  $s(u)(0) = u$  e  $s(u)(1) = x_0$ .

**Demonstração:** Naturalmente pelo lema acima, temos que existe a função  $s : Y \rightarrow PX$  contínua. Além disso, como  $H$  é uma homotopia entre  $id_Y$  e  $c$ , temos pela comutatividade do diagrama que  $s(u)(0) = u$  e  $s(u)(1) = x_0$ . ■

Seguindo ainda a escola da teoria de homotopia, mostraremos que a operação de concatenação de caminhos é uma função contínua sempre que fizer sentido. Bem como, concluiremos esse capítulo com a determinação do tipo homotópico do espaço de caminhos com respeito ao espaço base.

**Lema 2.2.7.** Seja  $x \in X$ . Se  $PX_0 = \{\gamma \mid \gamma(0) = x\}$ ,  $PX_1 = \{\gamma \mid \gamma(1) = x\}$  e  $c : PX_1 \times PX_0 \rightarrow PX$  é a função tal que  $c(\gamma, \lambda) = \gamma * \lambda$ , i.e. o mapa de concatenação de caminhos, então  $c$  é uma função contínua.

**Demonstração:** Seja  $(\gamma, \lambda) \in PX_1 \times PX_0$  qualquer. Mostraremos que  $c$  é contínua em tal ponto. Para isso, note que se  $\cap^n V(K_i, U_i)$  for vizinhança básica de  $\gamma * \lambda$ , então por definição de  $V(K_i, U_i)$  temos que  $(\gamma * \lambda)(K_i) \subseteq U_i$ , para todo  $i \leq n$ . Agora pela definição da concatenação de caminhos, se  $K_i^0 = 2 \cdot (K_i \cap [0, 1/2])$  e  $K_i^1 = 2 \cdot (K_i \cap [1/2, 1]) - 1$ , temos que:

$$\begin{aligned} \gamma(K_i^0) &\subseteq U_i, \\ \lambda(K_i^1) &\subseteq U_i. \end{aligned}$$

Logo,  $(\gamma, \lambda) \in \cap^n V(K_i^0, U_i) \times V(K_i^1, U_i)$ . Trivialmente,

$$V = \bigcap^n \left( V(K_i^0, U_i) \times V(K_i^1, U_i) \right) \cap PX_1 \times PX_0$$

é aberto em  $PX_1 \times PX_0$ . Como  $c(V) \subseteq V(K, U)$ , temos que  $c$  é contínua em  $(\gamma, \lambda)$  e portanto, contínua em todo ponto. ■

Finalizamos esse capítulo com um resultado acerca do tipo homotópico do espaço de caminhos que utilizaremos mais tarde.

**Teorema 2.2.8.** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $\alpha : X \rightarrow PX$  o mapa tal que  $\alpha(x)$  é o caminho constante em  $x \in X$ . Assim,  $\alpha$  é uma equivalência homotópica.

**Demonstração:** Mostraremos que o mapa  $\beta : PX \rightarrow X$  definido como  $\beta(\gamma) = \gamma(0)$  é um inverso homotópico de  $\alpha$ .

Note que  $\beta \circ \alpha = id_X$ . Portanto, basta que  $\alpha \circ \beta \simeq_H id_{PX}$ . Para isso, construiremos a seguinte homotopia  $F : PX \times I \rightarrow PX$ ,

$$F(\gamma, s)(t) = \begin{cases} \gamma(0), & \text{se } 0 \leq t \leq 1 - s \\ \gamma(t - 1 + s), & \text{se } 1 - s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

De fato,  $F(\gamma, 0) = (\alpha \circ \beta)(\gamma)$  e  $F(\gamma, 1) = id_{PX}(\gamma)$ . Assim, basta garantirmos que  $F$  é um mapa contínuo.

Para isso, fixe um  $(\gamma_0, s_0) \in PX \times I$  e tome  $W = \cap_{i=1}^n V(K_i, U_i)$  vizinhança básica de  $F(\gamma_0, s_0)$ . Provaremos que  $F$  é contínua ao achar uma vizinhança  $V$  de  $(\gamma, s)$  tal que  $F(V) \subseteq W$ . Nesse propósito, construiremos uma vizinhança básica  $\cap_{i=1}^n V(K'_i, U_i)$  de  $\gamma_0$  e um aberto  $S$  de  $s_0$  e tomaremos  $V = \cap_{i=1}^n V(K'_i, U_i) \times S$ .

Note que como  $K_i$  é um conjunto compacto para todo  $1 \leq i \leq n$  e  $[0, s_0]$  também é compacto, os seguintes conjuntos também são

$$\left\{ \{k - 1 + s \in I \mid k \in K_i, s \in [0, s_0]\} \right\}_{1 \leq i \leq n}.$$

Observe que cada conjunto é apenas uma união de translações de  $K_i$  por  $1 + s$  unidades com  $s \in [0, s_0]$ . Mais formalmente, concluímos que cada subconjunto é compacto já que trivialmente todos são limitados e toda sequência em tais conjuntos se escreve como uma soma de sequências em compactos, que contém seus pontos limites. Assim os conjuntos também contém seus pontos limites e portanto eles são compactos pelo Teorema de Heine-Borel.

Mais ainda, ao tomarmos a união de tais conjuntos pelo conjunto  $\{0\}$  ainda temos um conjunto compacto. Logo, ao definirmos  $K'_i$  como abaixo, temos um conjunto compacto em  $I$  para todo  $1 \leq i \leq n$ .

$$K'_i = \{k - 1 + s \in I \mid k \in K_i, s \in [0, s_0]\} \cup \{0\}.$$

Note que para cada  $\lambda \in V(K'_i, U_i)$ , podemos tomar um  $\epsilon_\lambda$  tal que  $\lambda(B(K'_i, \epsilon_\lambda)) \subseteq U_i$ , já que  $\lambda$  é contínua e  $I$  é um espaço métrico. Assim, seja

$$\epsilon_i = \inf_{\lambda \in V(K'_i, U_i)} \epsilon_\lambda.$$

Com isso, finalmente definimos  $\epsilon = \min \epsilon_i$  e  $S = B([0, s_0], \epsilon)$ . Assim, de fato  $S$  é aberto.

Assim, resta apenas provar que  $F(V) \subseteq W$ . De fato, dada uma dupla  $(\gamma_1, s_1) \in V$ , temos que para qualquer  $k \in K_i$ ,

$$F(\gamma_1, s_1)(k) = \begin{cases} \gamma_1(0), & \text{se } 0 \leq k \leq 1 - s_1 \\ \gamma_1(k - 1 + s_1), & \text{se } 1 - s_1 \leq k \leq 1 \end{cases}$$

De qualquer modo,  $F(\gamma_1, s_1)(k) \in U_i$  já que  $\gamma_1(0) \in \gamma_1(K'_i) \subseteq U_i$  e como  $s_1 \in B([0, s_0], \epsilon)$  então existe  $s_2 \in [0, s_0]$  tal que  $d(s_1, s_2) < \epsilon$ . Portanto,

$$d(k - 1 + s_1, k - 1 + s_2) = d(s_1, s_2) < \epsilon,$$

e assim,  $k - 1 + s_1 \in B(K_i, \epsilon)$ . Logo,  $\gamma_1(k - 1 + s_1) \in \gamma_1(B(K_i, \epsilon)) \subseteq U_i$ .

Como vale o argumento para todo  $1 \leq i \leq n$ , temos que  $F(\gamma_1, s_1) \in W$ . Assim, temos o que queríamos. ■

## Capítulo 3

# Teoria Simplicial

Nesse capítulo introduziremos os complexos simpliciais e destacaremos os grafos como caso particular. Sendo assim, reforçamos a ideia de que nesse texto não tomaremos um grafo como uma entidade combinatorial, mas como um espaço topológico especial.

Apesar disso, muito do que se espera continua sendo verdade nessa nova perspectiva e assim, esse capítulo não traz muito mais do que notações e nomenclaturas. De qualquer modo, na última seção deduziremos informações topológicas sobre tais espaços.

### 3.1 Complexos Simpliciais

**Definição 3.1.1 (Simplexo Padrão).** Dado um inteiro  $n \geq 0$ , definimos o  $n$ -simplexo padrão  $\Delta^n$ , como o conjunto abaixo munido da topologia de subespaço de  $\mathbb{R}^{n+1}$ :

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n t_i = 1 \text{ e } t_i \geq 0, \text{ para todo } 0 \leq i \leq n \right\}.$$

□

**Observação 3.1.2.** É fácil ver que o  $n$ -simplexo padrão  $\Delta^n$  é homeomorfo ao disco  $D^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$ . Assim, a seguinte noção de dimensão está bem definida.

**Definição 3.1.3 (Dimensão de um simplexo padrão).** Dado um inteiro  $n \geq 0$ , definimos a *dimensão de um simplexo padrão*  $\Delta^n$ , como o inteiro  $n$ . □

Intuitivamente, a ideia de um complexo simplicial que iremos construir é a da reunião de diversos simplexos padrões, colados de uma maneira adequada. Para isso, precisamos criar cópias desses simplexos padrões distribuídas pelo espaço ambiente, e não somente com posições fixas como no caso dos simplexos já definidos. Com esse objetivo, definimos os simplexos euclidianos com respeito à pontos em posição geral.

**Definição 3.1.4 (Posição Geral).** Dados pontos  $\{v_0, \dots, v_m\}$  em  $\mathbb{R}^m$ , os denominaremos em *posição geral* se  $\{v_1 - v_0, \dots, v_m - v_0\}$  é um conjunto linearmente independente. □

**Definição 3.1.5 (Fecho convexo).** Dado um conjunto  $S = \{v_0, \dots, v_m\}$  em  $\mathbb{R}^n$ , definimos o *fecho convexo*  $[v_0, \dots, v_m]$  de  $S$ , como sendo o conjunto

$$\left\{ \alpha_0 v_0 + \dots + \alpha_m v_m \mid \sum_{i=0}^m \alpha_i = 1 \text{ e } \alpha_i \geq 0 \text{ para todo } i \leq m \right\}$$

□

Assim, podemos definir os simplexes euclidianos.

**Definição 3.1.6 (Simplexo euclidiano).** Dados  $n + 1$  pontos  $\{v_i\}_{i=0}^n \in \mathbb{R}^m$  em posição geral, definimos um  $n$ -simplexo euclidiano  $\sigma^n$  com respeito aos pontos  $v_0, \dots, v_n$ , como o fecho convexo  $\sigma^n$  do conjunto  $\{v_0, \dots, v_n\}$ .  $\square$

Afim de fixarmos a nomenclatura, definimos os vértices e faces de um simplexo.

**Definição 3.1.7 (Vértice e Face).** Dado um simplexo euclidiano  $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$ , definimos os *vértices* de  $\sigma$ , como os pontos  $v_i$  com  $i \leq n$ . Além disso, também definimos uma *face* de  $\sigma$ , como o fecho convexo de qualquer subconjunto não-vazio de  $\{v_0, \dots, v_m\}$ .  $\square$

Além disso, definimos a dimensão de um simplexo.

**Definição 3.1.8 (Dimensão de um simplexo euclidiano).** Dado um simplexo euclidiano  $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$ , definimos a *dimensão de simplexo euclidiano* de  $\sigma$  como sendo  $n$ .  $\square$

Com tais simplexos, finalmente definimos os complexos simpliciais.

**Definição 3.1.9 (Complexo Simplicial).** Dada uma coleção de simplexos euclidianos  $K$ , dizemos que  $K$  é um *complexo simplicial*,

- (i) se  $\sigma \in K$  e  $\tau$  é uma face de  $\sigma$ , então  $\tau \in K$ ,
- (ii) se  $\sigma, \tau \in K$  tais que  $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ , então a interseção é uma face de  $\sigma$  e  $\tau$ ,
- (iii) para todo  $\sigma \in K$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $\sigma$  que intersecta apenas finitos simplexos de  $K$ .

Além disso, chamaremos de  $i$ -*esqueleto* de  $K$  o conjunto  $K^i$  de todos os simplexos  $\sigma \in K$  com dimensão menor ou igual a  $i$ .  $\square$

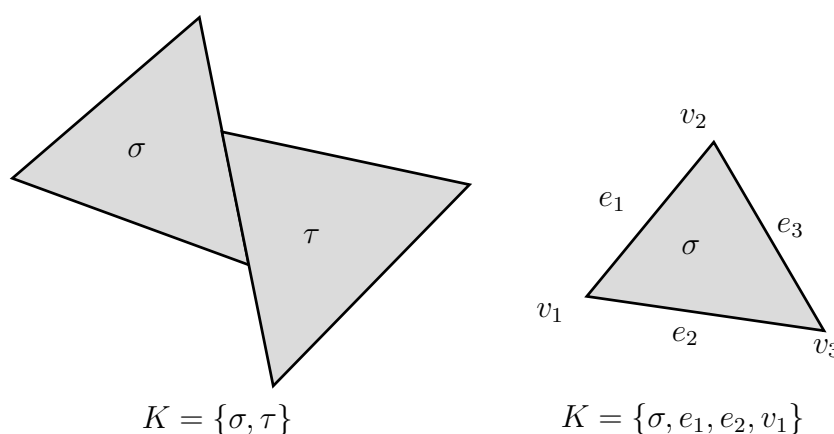


Figura 3.1: Contra-exemplos de Complexos Simpliciais devido às condições (i) e (ii).

**Observação 3.1.10.** A última condição pode ser reescrita ao falar que a coleção dos simplexos formam uma cobertura localmente finita. Essa condição, algumas vezes desprezada garante que tais objetos sejam localmente compactos e assim a manteremos.

No caso de um complexo simplicial  $K$ , o conceito de dimensão é dado abaixo.

**Definição 3.1.11 (Dimensão de um complexo simplicial).** Dado um complexo simplicial  $K$ , definimos a *dimensão* de  $K$ , como o máximo das dimensões de seus simplexes.  $\square$

Uma importante subestrutura de um complexo simplicial são os subcomplexos.

**Definição 3.1.12 (Subcomplexo).** Dado um complexo simplicial  $K$ , definimos um *subcomplexo*  $L$  de  $K$ , como uma subcoleção de  $K$  que também é um complexo.  $\square$

Em muitos casos, não temos que um complexo é um subcomplexo de outro, mas é de certa forma, apenas um subcomplexo mais 'refinado'.

**Definição 3.1.13 (Subdivisão de um complexo).** Dado um complexo simplicial  $K$ , definimos uma *subdivisão*  $L$  de  $K$ , como sendo um complexo simplicial tal que:

- (i) todo simplexo de  $L$  está contido em um simplexo de  $K$ ,
- (ii) todo simplexo de  $K$  é uma união de simplexos de  $L$ .

$\square$

**Observação 3.1.14.** Note que no que tange os conjuntos e até mesmo os espaços topológicos, se  $L$  é uma subdivisão de  $K$ , então ambos são iguais. A diferença de fato está apenas na forma como 'triangulamos' tais espaços.

Além disso, temos os seguintes mapas entre complexos.

**Definição 3.1.15 (Função Simplicial).** Dados dois complexos simpliciais  $K$  e  $L$ , definimos uma *função simplicial*  $f : K \rightarrow L$ , como uma função tal que para todo  $\sigma \in K$ , temos que  $f(\sigma) \in L$ .  $\square$

**Observação 3.1.16.** Note que podemos munir a união de todos os elementos de um dado complexo simplicial com a topologia de subespaço do seu espaço ambiente. De fato, o faremos com frequência e interpretaremos tanto o espaço quanto o conjunto como o dito complexo simplicial.

Considerando a observação acima, podemos pensar nos subespaços de um dado complexo que gostaríamos de pensar como um subcomplexo.

Com isso em mente, temos uma noção adequada de morfismo entre os espaços dos complexos simpliciais.

**Definição 3.1.17 (Mapa Linear por Partes).** Dados dois complexos simpliciais  $K$  e  $L$ , definimos um *mapa linear por partes* entre os complexos, como uma função contínua  $f : K \rightarrow L$  tal que existe uma subdivisão  $K'$  de  $K$  e uma subdivisão  $L'$  de  $L$  tal que  $f : K' \rightarrow L'$  é um mapa simplicial.  $\square$

No contexto da homologia simplicial, esses são os mapas relevantes. De fato, toda a informação apresentada nessa seção introduz o necessário para tratarmos da homologia simplicial detalhada no apêndice.

## 3.2 Grafos Topológicos

**Definição 3.2.1 (Grafo).** Dado um complexo simplicial  $G$ , o chamaremos de *grafo* se  $G$  for um complexo simplicial de dimensão menor ou igual a 1.  $\square$

**Observação 3.2.2.** Observe que não excluimos a possibilidade de um grafo ter apenas vértices e nenhuma aresta.

De fato, nesse texto nos preocuparemos apenas com complexos simpliciais que são grafos. Assim, introduziremos aqui algumas classes de grafos, bem como uma série de nomenclaturas afim de trabalharmos com tais objetos ao longo do texto.

**Definição 3.2.3 (Aresta).** Dado um grafo  $G$ , definimos uma *aresta* de  $G$ , como sendo um 1-simplexo de  $G$ . Assim, denotaremos por  $E(G)$  o conjunto das arestas de  $G$  e diremos que se  $e = [v_0, v_1]$ , então  $e$  é uma aresta entre  $v_0$  e  $v_1$ , ou ainda,  $e$  incide sobre tais vértices.  $\square$

Sendo assim, temos duas medidas de um grafo associadas aos vértices e às arestas.

**Definição 3.2.4 (Ordem e Tamanho).** Dado um grafo  $G$ , definimos a *ordem* de  $G$ , como a cardinalidade do conjunto  $V(G)$  de vértices de  $G$ . Além disso, definimos o *tamanho* de  $G$ , como a cardinalidade de  $E(G)$ .  $\square$

Além disso, temos os famosos números de Betti.

**Definição 3.2.5 (Números de Betti).** Dado um grafo  $G$ , definimos o  $n$ -número de Betti  $b_n(G)$ , como

$$b_n(G) = \begin{cases} |C(G)|, & \text{se } n = 0, \\ |E(G)| + |C(G)| - |V(G)|, & \text{se } n = 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases},$$

onde  $|C(G)|$  denota o número de componentes conexas de  $G$ .  $\square$

Nessa linha, também podemos ainda associar uma grandeza a cada vértice, a valência de vértices. Além do mais, podemos destacar alguns vértices com respeito à sua valência.

**Definição 3.2.6 (Valência de um vértice).** Dados um grafo  $G$  e um vértice  $v$  em  $G$ , definimos a *valência*  $\eta(v)$  de  $v$ , como sendo o número de arestas de  $G$  que estão entre  $v$  e algum outro vértice.  $\square$

**Definição 3.2.7 (Vértice Essencial).** Dado um vértice  $v$  em  $G$ , o chamaremos de *vértice essencial* se  $\eta(v) \geq 3$ .

Além disso, denotaremos por  $m(G)$  o número de vértices essenciais de  $G$ .  $\square$

**Observação 3.2.8.** Note que tais definições apenas imitam as noções da teoria de grafos usual. Nessa vertente, é possível observar que nossos grafos não permitem *loops*, i.e. arestas em que ambos os vértices incidentes são iguais. Além disso, também não permitimos multiarestas entre dados dois vértices fixos já que entre dois vértices existe apenas um 1-simplexo associado. Assim, todos os nossos grafos são simples. Apesar disso, muitas vezes nos importaremos com a estrutura topológica dos grafos e não a simplicial, logo também podemos atacar os grafos não-simples em muitos momentos do texto.

Com isso, destacaremos uma séries de grafos.

**Definição 3.2.9 (Cíclico Padrão).** Dado um grafo  $G$ , o chamaremos de *cíclico padrão* se  $E(G) = V(G) = 3$ , i.e.  $G$  é um grafo com apenas três vértices e três arestas.  $\square$

É fácil ver que o grafo cíclico padrão é um espaço homeomorfo ao círculo  $\mathbb{S}^1$ . Intuitivamente, tal grafo é o menor grafo (em tamanho e ordem) que satisfaz essa propriedade. Assim, definiremos os outros grafos com tal propriedade.

**Definição 3.2.10 (Grafo cíclico).** Dado um grafo  $G$ , o chamaremos de *cíclico* se  $G$  for uma subdivisão do grafo cíclico padrão.  $\square$

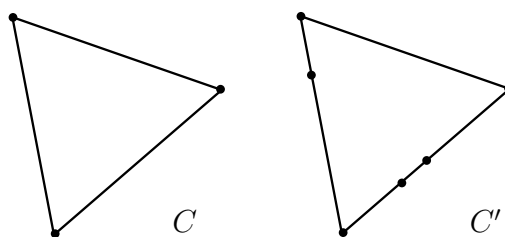


Figura 3.2: Grafo cíclico padrão  $C$  e um grafo cíclico  $C'$ .

**Definição 3.2.11 (Segmento).** Dado um grafo  $G$ , o chamaremos de *segmento* se  $G$  for uma subdivisão do grafo com apenas uma aresta.  $\square$

**Definição 3.2.12 (Grafo Y).** Dado um grafo  $G$ , o chamaremos de *grafo Y* se  $G$  tiver 4 vértices  $v_0, \dots, v_3$  nos quais  $v_0$  é um vértice de valência 3, enquanto os outros vértices são univalentes.  $\square$

Esses últimos grafos são exemplos de uma classe ainda maior de grafos.

**Definição 3.2.13 (Árvore).** Dado um grafo  $G$ , o chamaremos de *árvore* se  $G$  for conexo e não conter um subgrafo cíclico.  $\square$

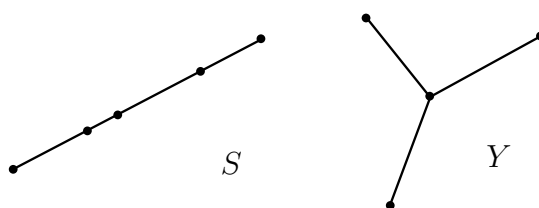


Figura 3.3: Segmento  $S$  e grafo  $Y$ , ambos exemplos de árvores.

**Definição 3.2.14 (Raíz).** Dado um vértice  $v$  de uma árvore  $\Gamma$ , o chamaremos de *raíz* de  $\Gamma$  se  $\eta(v) = 1$ .  $\square$

Sendo grafos, e em geral complexos, uma reunião de  $n$ -simplexos euclidianos, todas propriedades topológicas satisfeitas por tais simplexos que são preservadas por uniões, também são propriedades de nossos complexos simpliciais. Assim, naturalmente temos uma série de invariantes sobre os complexos simpliciais em geral.

**Proposição 3.2.15.** Se  $K$  é um complexo simplicial, então  $K$  é:

- (i) Hausdorff,
- (ii) localmente conexo por caminhos,
- (iii) compacto, e portanto localmente compacto e paracompacto.

**Observação 3.2.16.** De fato, usando essa mesma lógica, podemos concluir que um complexo simplicial satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade e é regular. Assim, pelo Lema de Urysohn temos que os complexos simpliciais são metrizáveis. Além disso, a condição de finitude que impusemos aos complexos garante ainda que a topologia induzida pela métrica é a mesma da topologia de subespaço que equipamos os complexos. Apesar disso tudo, evitaremos lidamos com a estrutura métrica dos complexos durante esse texto.

Um resultado menos trivial sobre os complexos é o chamado teorema de cobertura de Lebesgue provado em sua tese.

**Teorema 3.2.17 (Lebesgue 1902).** Seja  $K$  um complexo simplicial  $n$ -dimensional, então  $\dim(K) = n$ .

**Corolário 3.2.18.** Se  $G$  é um grafo, então  $\dim(G) = 1$ .

## Capítulo 4

# Espaços de Configurações

Começamos esse capítulo introduzindo o conceito dos espaços de configurações que serão os espaços ideais para estudarmos o problema de movimento simultâneo sem colisões em um dado espaço. Além disso, nas seções seguintes restringimos cada vez mais nossa atenção a espaços de configurações sobre grafos e depois sobre árvores, concluindo fatos sobre a conexidade e tipo homotópico nesses casos.

### 4.1 Configurações ordenadas e não-ordenadas

**Definição 4.1.1 (Espaço de Configurações).** Dados um espaço topológico  $X$  e um inteiro  $n \geq 1$ , definimos o *espaço de configurações*  $C(X, n)$  de  $n$  pontos em  $X$ , como o seguinte conjunto munido da topologia de subespaço de  $X^n$ :

$$C(X, n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n \mid x_i \neq x_j, \text{ caso } i \neq j\}.$$

□

Assim, perceba que o espaço de configurações  $C(X, n)$  é um espaço natural para o problema de se tomar  $n$  pontos distintos em  $X$ . Apesar disso, note que se  $x = (x_1, \dots, x_n) \in C(X, n)$ , então qualquer permutação das coordenadas de  $x$  corresponde a um ponto diferente em  $C(X, n)$ . Para registrarmos apenas uma escolha de pontos  $\{x_1, \dots, x_n\}$  distintos em  $X$  sem um ordenação específica, podemos pensar nos elementos de  $C(X, n)$  a menos de permutações. Para isso, introduzimos uma ação do grupo de permutações  $S_n$  em  $C(X, n)$ .

**Lema 4.1.2.** Se  $x = (x_1, \dots, x_n) \in C(X, n)$  e  $\phi$  é a função  $\phi : S_n \times C(X, n) \rightarrow C(X, n)$  tal que:

$$\phi(\sigma, x) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}),$$

então  $\phi$  define uma ação contínua de  $S_n$  em  $C(X, n)$ .

**Demonstração:** De fato  $\phi$  é uma ação já que  $\phi(id, x) = x$  e

$$\begin{aligned} \phi(\sigma_2, \phi(\sigma_1, x)) &= \phi(\sigma_2, (x_{\sigma_1(1)}, \dots, x_{\sigma_1(n)})) \\ &= (x_{\sigma_2 \circ \sigma_1(1)}, \dots, x_{\sigma_2 \circ \sigma_1(n)}) \\ &= \phi(\sigma_2 \circ \sigma_1, x). \end{aligned}$$

Além disso,  $\phi$  é um mapa contínuo entre o espaço discreto  $S_n$  e  $C(X, n)$ . Para ver isso, basta mostrarmos que  $\phi_\sigma = \phi(\sigma, \cdot) : C(X, n) \rightarrow C(X, n)$  é contínuo para todo  $\sigma \in S_n$ . De fato, como o mapa  $\phi_\sigma$  é definido com:

$$\phi_\sigma(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}),$$

temos que  $\phi_\sigma = \pi_{\sigma(1)} \times \dots \times \pi_{\sigma(n)}$ , no qual  $\pi_i$  é a projeção no  $i$ -ésimo fator de  $X^n$ , restrito ao espaço de configurações. Assim,  $\phi_\sigma$  é contínuo, bem como a ação definida. ■

**Definição 4.1.3 (Ação por permutações).** Dados um espaço  $X$  e um inteiro  $n \geq 1$ , definimos a  $n$ -ação por permutação  $\phi_n$  em  $X$ , como a ação  $\phi$  de  $S_n$  em  $C(X, n)$  introduzida acima. □

**Definição 4.1.4 (Espaço de Configurações não-Ordenado).** Dados um espaço topológico  $X$  e um inteiro  $n \geq 1$ , definimos o *espaço de configurações não-ordenado*  $U(X, n)$  de  $n$  pontos em  $X$ , como o espaço de órbitas  $C(X, n)/S_n$  do espaço de configurações  $C(X, n)$  sob a  $n$ -ação por permutações  $\phi_n$ . □

**Proposição 4.1.5.** Se  $X$  é um espaço Hausdorff, então a  $n$ -ação por permutação  $\phi_n$  em  $X$  é descontínua para todo  $n \geq 1$ .

**Demonstração:** Primeiramente, note que como  $X$  é um espaço Hausdorff,  $X^n$  também é. Aliado ao fato que todo subespaço de um espaço Hausdorff é Hausdorff, temos que  $C(X, n)$  é um espaço Hausdorff.

Com isso, como  $S_n$  é um grupo finito e sabemos que a ação por permutações é contínua, podemos usar o Lema 1.4.12 para concluir que a ação por permutações é descontínua. ■

Assim, diretamente da proposição 1.4.13 temos o seguinte corolário.

**Corolário 4.1.6.** Se  $X$  é um espaço Hausdorff, então o mapa quociente  $q : C(X, n) \rightarrow U(X, n)$  tem a propriedade de levantamento de caminhos.

Finalizamos essa seção com um outro resultado sobre o espaço de configurações ordenado de um espaço Hausdorff.

**Lema 4.1.7.** Se  $X$  é um espaço Hausdorff, então  $C(X, n)$  é um subespaço aberto de  $X^n$ .

**Demonstração:** Note que dada uma configuração  $x = (x_1, \dots, x_n) \in C(X, n)$  qualquer, temos  $n$  vizinhanças  $U_i$  de  $x_i$ , duas a duas disjuntas entre si, já que  $X$  é Hausdorff. Assim,  $U = \prod U_i$  é um aberto de  $X^n$  e  $U \subseteq C(X, n)$ . Logo,  $U$  é vizinhança aberta de  $x$  em  $C(X, n)$  e o espaço de configurações é um subespaço aberto de  $X^n$ . ■

## 4.2 Conexidade em Espaços de configurações de Grafos

Nessa seção trataremos dos espaços de configurações de grafos, em particular focaremos nas propriedades de conexidade de tais espaços.

Porém, antes disso começamos com um pequeno resultado sobre a conexidade dos espaços de configurações em geral.

**Proposição 4.2.1.** Se  $X$  é um espaço tal que  $C(X, m)$  é conexo, então  $C(X, n)$  é conexo para todo  $n \leq m$ .

**Demonstração:** Note que como  $n \leq m$ , o mapa  $p : C(X, m) \rightarrow C(X, n)$  definido abaixo é contínuo,

$$p(x_1, \dots, x_n, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n).$$

Assim, sendo  $p$  uma sobrejeção, temos que  $C(X, n)$  também é conexo, já que funções contínuas preservam conexidade. ■

Analogamente, temos tal resultado para a conexidade por caminhos.

**Proposição 4.2.2.** Se  $X$  é um espaço tal que  $C(X, m)$  é conexo por caminhos, então  $C(X, n)$  é conexo por caminhos para todo  $n \leq m$ .

Como veremos, para os nossos propósitos tais noções de conexidade serão equivalentes. Antes disso, vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 4.2.3.** Dado o intervalo  $I$ , temos que  $C(I, n)$  é desconexo por caminhos para todo  $n \geq 2$ . Para ver isso, pela contra-positiva da proposição 4.2.2, basta mostrarmos que  $C(I, 2)$  é desconexo por caminhos.

De fato, se  $(x, y) \in C(I, 2)$ , então não existe caminho entre tal ponto e  $(y, x)$ . Se por absurdo existisse tal caminho  $\gamma$  em  $C(I, 2)$ , teríamos que  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  com  $\gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)$ , para todo  $t$ . Se supusermos, sem perda de generalidade que  $x < y$ , então  $\gamma_1(t) < \gamma_2(t)$ , pelo teorema do valor intermediário. Assim, temos um absurdo já que  $\gamma_1(1) = y$  e  $\gamma_2(1) = x$ . Portanto  $C(I, 2)$  é desconexo por caminhos e também é o caso de  $C(I, n)$ , para  $n \geq 2$ .

**Exemplo 4.2.4.** Dado o círculo  $\mathbb{S}^1$ , temos que  $C(\mathbb{S}^1, n)$  é desconexo por caminhos para todo  $n \geq 3$ . Para isso, analogamente ao exemplo acima, argumentamos que  $C(\mathbb{S}^1, 3)$  é desconexo por caminhos.

Para ver isso, note que se  $(x, y, z) \in C(\mathbb{S}^1, 3)$ , então não existe um caminho que o liga ao ponto  $(x, z, y)$ . Isso vem do fato que fixada uma orientação em  $\mathbb{S}^1$  compatível com  $x < y < z$ , temos que um caminho  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  entre as triplas citadas teria que trocar a orientação em algum momento do caminho, assim existiria um  $t_0 \in I$  tal que  $\gamma_i(t_0) = \gamma_j(t_0)$  com  $i \neq j$ , um absurdo já que  $\gamma(t) \in C(\mathbb{S}^1, 3)$ .

Como comentado, mostraremos que em espaços de configurações de grafos, o conceito de conexidade por caminhos é equivalente ao de conexidade. Para isso, mostraremos que tais espaços de configurações são localmente conexos por caminhos.

**Lema 4.2.5.** Se  $G$  é um grafo, então o espaço de configurações  $C(G, n)$  é localmente conexo por caminhos.

**Demonstração:** Sabemos pelo lema 1.1.4, que todo subespaço aberto de um espaço localmente conexo por caminhos é localmente conexo por caminhos. Como  $G$  é localmente conexo por caminhos,  $G^m$  também é. Portanto, sendo  $G$  Hausdorff, temos o que queríamos com o lema 4.1.7. ■

Assim, com o lema 1.1.3, temos o seguinte corolário.

**Corolário 4.2.6.** Se  $G$  é um grafo, então  $C(G, n)$  é conexo se e somente se  $C(G, n)$  for conexo por caminhos.

**Exemplo 4.2.7.** Dados o intervalo  $I$  e o círculo  $\mathbb{S}^1$ , temos que  $C(I, n)$  e  $C(\mathbb{S}^1, n + 1)$  são desconexos para todo  $n \geq 2$ .

Analogamente ao caso dos espaços de configurações ordenados, temos a conexidade local nos espaços não-ordenados.

**Lema 4.2.8.** Se  $G$  é um grafo, então o espaço de configurações  $U(G, n)$  é localmente conexo por caminhos.

**Demonstração:** Tome  $[x_1, \dots, x_n] \in U(G, n)$  qualquer. Como  $C(X, n)$  é localmente conexo por caminhos, sabemos que existe vizinhança  $U$  de  $(x_1, \dots, x_n)$  que é conexa por caminhos. Assim, note que  $[x_1, \dots, x_n] \in q(U)$ , onde  $q$  é a projeção canônica dos espaços de configurações. Como tal projeção é definida pela ação de grupos, temos que tal mapa é aberto com a proposição 1.4.10 e assim  $q(U)$  é uma vizinhança aberta de  $[x_1, \dots, x_n]$ . Além disso, a conexidade por caminhos é preservada por quocientes, logo  $q(U)$  é uma vizinhança conexa por caminhos de  $[x_1, \dots, x_n]$  e portanto  $U(G, n)$  é localmente conexo por caminhos. ■

**Corolário 4.2.9.** Se  $G$  é um grafo, então  $U(G, n)$  é conexo se e somente se  $U(G, n)$  for conexo por caminhos.

Sendo assim, temos que a conexidade dos espaços de configurações ordenados ou não-ordenados, pode ser aferida com a conexidade por caminhos e vice-versa, fato que não é verdade em espaços gerais. Finalizamos a seção dando as condições necessárias e suficientes para que uma dessas propriedades de conexidade (e portanto ambas) seja satisfeita em termos do grafo no qual tomamos os espaços de configurações.

**Lema 4.2.10.** Se  $G$  é um grafo com ao menos uma aresta ou  $n + 1$  vértices, então  $U(G, n)$  é conexo se e somente se  $G$  é conexo.

**Demonstração:** Suponha que  $G$  é desconexo. Assim, existem  $x_1$  e  $x_2$  em componentes conexas distintas de  $G$ . Tomando  $x_3, \dots, x_{n+1}$  pontos distintos de  $G$ , temos que não existe caminho entre  $[x_1, x_3, \dots, x_{n+1}]$  e  $[x_2, x_3, \dots, x_{n+1}]$  em  $U(G, n)$ . Se existisse, pelo corolário 4.1.6 teríamos um caminho entre  $(x_1, x_3, \dots, x_{n+1})$  e  $(x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, \dots, x_{\sigma(n+1)})$  para algum  $\sigma \in S_n$ , um absurdo já que indutivamente isso significa a existência de um caminho de  $x_1$  para  $x_2$ .

Para a volta, supondo que  $G$  é conexo e tomando  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  em  $C(G, n)$ , concluiremos a prova ao mostrar que existe um caminho em  $U(G, n)$  ligando  $[x]$  e  $[y]$  juntamente do corolário 4.2.9.

Para isso, faremos uma prova por indução na quantidade  $r(x, y)$  de coordenadas distintas entre  $x$  e  $y$ , i.e. a cardinalidade de  $\{x_i\} \setminus \{y_j\}$ . Note que se  $r(x, y) = 0$ , então  $[x] = [y]$  e assim tomamos o caminho constante. Se  $r(x, y) > 0$ , então existe ao menos um  $x_k$  e um  $y_l$  tais que  $x_k \notin \{y_i\}$  e  $y_l \notin \{x_i\}$ . Construiremos um caminho entre  $[x]$  e  $[x'] = [x_1, \dots, x_{k-1}, y_l, x_{k+1}, \dots, x_n]$  em  $U(G, n)$  e como  $r(x', y) < r(x, y)$ , pela hipótese indutiva teríamos um caminho entre  $[x']$  e  $[y]$ . Assim, a concatenação entre tal caminho e o construído nos permite concluir a prova.

Como  $G$  é conexo, existe um caminho  $\gamma$  entre  $x_k$  e  $y_l$ . Note que em  $I$  existem subconjuntos  $I_i$  nos quais  $\gamma(I_i) = x_i$  (não excluimos a possibilidade de tais  $I_i$  serem vazios). Todos tais subconjuntos são compactos e portanto defina  $t_i = \max I_i$  para todo intervalo não-vazio e  $t_0 = 0$ . Se  $t_{j_1} < \dots < t_{j_m}$  é uma ordenação para o conjunto  $\{t_i\} \in I$ , então podemos construir o caminho  $\gamma_m$  em  $G^n$  tal que  $\gamma_m$  é o caminho  $\gamma|_{[t_m, 1]}$  na  $j_m$ -ésima coordenada e constante em todas as outras coordenadas de  $x$ . Ou seja, construímos um caminho entre  $x$  e  $(x_1, \dots, x_{j_m-1}, y_l, x_{j_m+1}, \dots, x_n)$ .

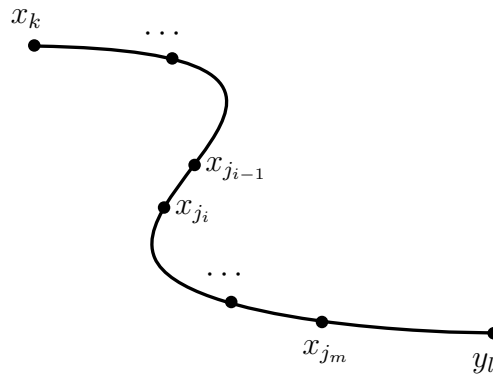


Figura 4.1: Caminho  $\gamma$  entre  $x_k$  e  $y_l$ .

Continuamos o processo definindo os caminhos  $\gamma_{i < m}$  como os caminhos que começam onde  $\gamma_{i+1}$  terminam e levam a coordenada  $j_i$  para o ponto  $x_{t_{i+1}}$ . Isso é feito com o caminho  $\gamma_i$ , i.e.  $\gamma_i$  é o caminho  $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$  na coordenada  $i$  e constante nas outras coordenadas. Assim, a projeção da concatenação  $\gamma_m * \gamma_{m-1} * \dots * \gamma_1 * \gamma_0$  é um caminho entre  $[x]$  e  $[x']$  já que por construção a concatenação é um caminho em  $C(G, n)$ . Como discutido, isso conclui a prova. ■

**Teorema 4.2.11 (Abrams 2000).** Seja  $G$  um grafo com ao menos uma aresta ou  $n$  vértices. Então o espaço de configurações  $C(G, n)$  é conexo se, e somente se  $G$  é conexo e

- (1)  $n = 1$ , ou
- (2)  $n = 2$  e  $G$  não é um segmento, ou
- (3)  $n \geq 3$  e  $G$  não é um segmento ou um ciclo.

**Demonstração:** Caso  $G$  tenha exatamente  $n$  pontos, então  $C(G, n)$  é conexo se e somente se  $n = 1$  que por sua vez é equivalente a dizer que  $G$  é conexo, já que  $C(G, 1) = G$ . Assim, resta provar o caso que  $G$  tenha mais que  $n$  pontos.

Se  $C(G, n)$  for conexo, então  $U(G, n)$  também é, já que o quociente  $q : C(X, n) \rightarrow U(X, n)$  é trivialmente sobrejetivo. Assim, pelo lema 4.2.10 temos que  $G$  é conexo. Portanto basta mostrarmos que vale ao menos um dos três itens do enunciado. Se por absurdo não valesse, teríamos que  $n = 1$ ,  $n = 2$  e  $G$  é um segmento ou  $n \geq 3$  e  $G$  é um segmento ou um ciclo. Naturalmente, no primeiro caso o absurdo vem do fato que  $C(G, 1) = G$ . Como em ambos os últimos casos temos que  $C(G, n)$  é desconexo pelos exemplos 4.2.3 e 4.2.4, também temos um absurdo e de fato vale a ida.

Para a volta, assumindo que  $G$  é conexo, temos que o primeiro caso é trivial já que novamente,  $C(G, 1) = G$ . Já para os dois últimos casos, podemos aproveitar o lema 4.2.10 para concluir que  $U(G, n)$  é conexo e assim, basta mostrar que um ponto  $(x_1, \dots, x_n)$  é conectável a todos os seus conjugados  $(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$  com  $\sigma \in S_n$ , já que assim poderíamos usar a propriedade de levantamento de caminhos de  $q : C(X, n) \rightarrow U(X, n)$  do corolário 4.1.6 e criar um caminho em  $C(G, n)$  entre quaisquer dois pontos.

Caso (2), temos que  $G$  é um ciclo ou tem um vértice essencial  $v \in G$ . Em ambos os casos, é fácil construir um caminho que leva uma dupla  $(x_1, x_2)$  à  $(x_2, x_1)$  em  $C(G, 2)$ .

Caso (3), temos que  $G$  contém um vértice essencial  $v \in G$ . Portanto, existem  $d \geq 3$  arestas em  $G$  que incidem sobre  $v$ . Como  $G$  é conexo e Hausdorff, toda configuração  $(x_1, \dots, x_n)$  pode ser levada para uma aresta  $a_1$  incidente de  $v$ , por um caminho em  $C(G, n)$ . Assim, podemos mostrar apenas que duas configurações conjugadas em  $C(a_1, n)$  são conectáveis por um caminho em  $C(\cup a_i, n)$ .

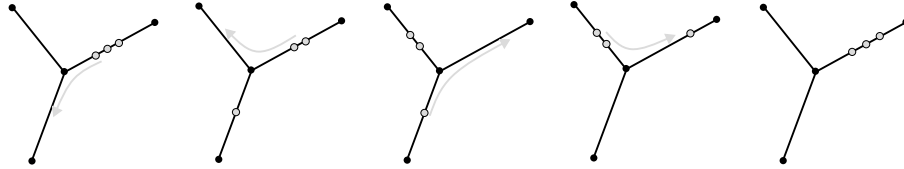


Figura 4.2: Caminho correspondente à permutação (123).

Note que, se  $(x_1, \dots, x_n) \in C(a_1, n)$ , podemos trocar a ordem das duas primeiras coordenadas com duas outras arestas  $a_2$  e  $a_3$  incidentes à  $v$ . Além disso, também podemos conectar  $(x_1, \dots, x_n)$  à  $(x_n, x_1, \dots, x_{n-1})$ . Para isso, podemos primeiramente mover os pontos  $x_1, \dots, x_{n-1}$  para a aresta  $a_2$  e depois mover o ponto  $x_n$  para a aresta  $a_3$ . Depois disso, voltamos  $x_1, \dots, x_{n-1}$  para a aresta original e assim finalizamos com o retorno de  $x_n$ . Portanto, criamos um caminho entre  $(x_1, \dots, x_n)$  e  $(x_n, x_1, \dots, x_{n-1})$  em  $C(\cup a_i, n)$ . Como  $S_n$  é gerado pelas permutações (12) e  $(12 \dots n)$ , temos que todo ponto em  $C(a_1, n)$  é conectável ao seu conjugado em  $C(\cup a_i, n)$ . Logo,  $C(G, n)$  é conexo, como queríamos demonstrar. ■

Uma outra forma que a conexidade do grafo nos traz informações topológicas sobre o seu espaço de configurações é a seguinte.

**Proposição 4.2.12.** Se  $G$  é um grafo conexo, então  $C(G, n)$  é vazio ou um subespaço denso de  $G^n$  para todo  $n \geq 0$ .

**Demonstração:** Como  $G$  é conexo,  $G$  tem ao menos uma aresta ou tem apenas um vértice. Caso  $G$  tenha apenas um vértice,  $C(G, 1) = G$  e portanto o espaço de configurações é denso em  $G$  ou  $C(G, n) = \emptyset$  caso  $n > 1$ . Assim, basta provarmos o resultado no caso em que  $G$  tem ao menos uma aresta.

Seja  $x$  um ponto  $(x_1, \dots, x_n) \in G^n \setminus C(G, n)$ . Assim, sem perda de generalidade assumimos que  $x_1 = x_2$ . Provaremos que  $C(G, n)$  é denso em  $G^n$  ao construir uma sequência  $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  em  $C(G, n)$  que converge para  $x$ . Como  $G$  é conexo, existe um caminho  $\gamma$  entre  $x_0 \in G \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$  e  $x_1$ . Note que  $x_0$  existe já que  $G$  tem ao menos uma aresta. Nesse caminho, existem momentos  $t_0, t_1$  tais que  $t_0 = \max\{t \in I \mid \gamma(t) = x_i \text{ para algum } i \leq n\}$  e  $t_1 = \min\{t \in I \mid \gamma(t) = x_1\}$ .

Assim,  $\gamma|_{(t_0, t_1)}$  define o pedaço de um caminho aberto que converge para  $\gamma(t_1) = x_1$ . Trivialmente, conseguimos uma sequência  $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de pontos em  $G \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$  que converge para  $x_1$ . Logo, definindo por  $y$  a sequência de pontos em  $G^n$  que é igual a sequência  $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  na primeira coordenada e constante igual à  $x_i$  nas  $i$ -ésimas coordenadas  $i > 1$ , temos que  $y$  é uma sequência em  $C(G, n)$  que converge para  $x$ , como queríamos demonstrar. ■

Assim, nesses casos concluímos que  $C(G, n)$  é sempre localmente compacto.

**Proposição 4.2.13.** Se  $G$  é um grafo conexo, então  $C(G, n)$  é localmente compacto.

**Demonstração:** Se  $G$  tem ao menos uma aresta, sabemos que  $C(G, n)$  é denso em  $G^n$ . Assim, por definição  $C(G, n)$  é localmente fechado em  $G^n$  se e somente se  $C(G, n)$  for aberto em  $G^n$ . Isso de fato é verdade já que  $G$  é um espaço Hausdorff. Sendo assim, usando o lema 1.1.8, temos que  $C(G, n)$  é localmente compacto.

Naturalmente, se  $G$  tiver apenas vértices  $C(G, n)$  é denso ou vazio em  $G^n$ . De qualquer modo, podemos seguir com o mesmo argumento. ■

### 4.3 2-Espaço de configurações de árvores

Quando nos restringimos aos grafos que são árvores, conseguimos diversos resultados sobre a teoria dos espaços de configurações de tais espaços que não tínhamos antes. Nessa seção, veremos um resultado desse tipo. Em particular, veremos que se  $\Gamma$  é uma árvore com vértice essencial, então o 2-Espaço de Configurações é homotopicamente equivalente a uma classe de grafos.

Seja  $\Gamma$  uma árvore e fixe uma raiz  $u_0$ . Assim, para todo vértice  $v \in \Gamma$ , existe um único caminho minimal ligando  $v$  à  $u_0$ . Com isso, destacaremos uma subcoleção de arestas.

**Definição 4.3.1 (Aresta Ascendente).** Dada uma árvore  $\Gamma$  com raiz  $u_0$ , chamaremos uma aresta  $e \in \Gamma$  de *ascendente* com respeito a um vértice  $v \neq u_0$ , se o caminho minimal entre  $v$  e  $u_0$  não contém  $e$ .

Algumas vezes, denotaremos por  $e^v$  uma aresta  $e$  ascendente com respeito à um vértice  $v$ . □

Assim, definimos o útil grafo  $Q_\Gamma$ .

**Definição 4.3.2 (Grafo  $Q_\Gamma$ ).** Dada uma árvore  $\Gamma$  com ao menos um vértice essencial, definimos o *grafo*  $Q_\Gamma$  como o grafo com uma coleção  $C$  de segmentos de duas arestas entre dois vértices  $\{A, B\}$  fixos de  $Q_\Gamma$ . Além disso, pedimos que o conjunto  $C$  esteja em bijeção com o seguinte conjunto

$$\left\{ (v, e_1, e_2) \mid v \in V_E(G) \text{ e } e_1^v, e_2^v \text{ arestas ascendentes distintas e incidentes à } v \right\},$$

onde  $V_E(G)$  denota o conjunto dos vértices essenciais de  $G$ . □

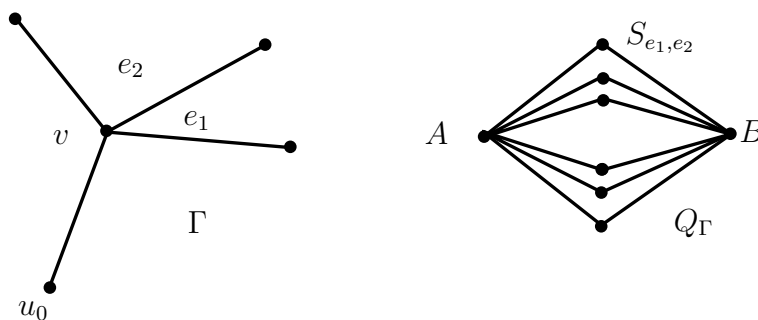


Figura 4.3: Construção do Grafo  $Q_\Gamma$ .

Como descrito, o objetivo dessa seção é apresentar o seguinte teorema e seus resultados. Para isso, separaremos a prova do teorema para a próxima seção. Isso é feito já que a prova do

mesmo é de certa forma 'grande demais' e atrapalharia o teor ferramental no qual usaremos esse resultado.

**Teorema 4.3.3.** Seja  $\Gamma$  uma árvore com ao menos um vértice essencial. Assim,  $C(\Gamma, 2) \simeq_H Q_\Gamma$ .

Como consequência da definição acima temos o seguinte resultado.

**Proposição 4.3.4.** Se  $\Gamma$  é uma árvore com vértice essencial, então  $Q_\Gamma$  tem exatamente

$$2 \sum_v (\eta(v) - 2)(\eta(v) - 1)$$

arestas, no qual  $v$  corre nos vértices essenciais de  $\Gamma$ .

**Demonstração:** Note que pela definição de  $Q_\Gamma$ , basta provarmos que tal grafo tem  $\sum_v (\eta(v) - 2)(\eta(v) - 1)$  segmentos entre os vértices  $A$  e  $B$ , ou ainda que tal valor é a cardinalidade do conjunto

$$\left\{ (v, e_1, e_2) \mid v \in V_E(G) \text{ e } e_1^v, e_2^v \text{ arestas ascendentes distintas e incidentes à } v \right\}.$$

Isso é fácil ver já que para todo vértice essencial  $v$  existem  $\eta(v) - 1$  arestas ascendentes e incidentes à  $v$ . Assim, o número de duplas distintas de tais arestas ascendentes e incidentes à  $v$  é igual a

$$2 \cdot (\eta(v) - 1)(\eta(v) - 2).$$

Somando todos os casos para os diferentes vértices essenciais temos o que queremos. ■

Com o resultado acima, naturalmente temos o 1-número de Betti dos grafos  $Q_\Gamma$ .

**Lema 4.3.5.** Se  $\Gamma$  é uma árvore com vértice essencial, então

$$b_1(Q_\Gamma) = \sum_v (\eta(v) - 2)(\eta(v) - 1) - 1.$$

**Demonstração:** Como  $Q_\Gamma$  é conexo, temos que  $C(Q_\Gamma) = 1$ . Além disso, por construção, a ordem  $|V(Q_\Gamma)|$  de  $Q_\Gamma$  é igual a

$$2 + \sum_v (\eta(v) - 2)(\eta(v) - 1).$$

Com o resultado anterior, temos

$$\begin{aligned} b_1(Q_\Gamma) &= 2 \left( \sum_v (\eta(v) - 2)(\eta(v) - 1) \right) + 1 - \left( 2 + \sum_v (\eta(v) - 2)(\eta(v) - 1) \right) \\ &= \sum_v (\eta(v) - 2)(\eta(v) - 1) - 1. \end{aligned}$$

■

De fato, tais resultado nos permite concluir uma série de outros fatos que nos serão úteis para a prova do resultado principal desse texto.

**Corolário 4.3.6.** Se  $\Gamma, \Gamma'$  são árvores tais que  $\Gamma'$  tem ao menos um vértice essencial e  $\alpha : \Gamma' \rightarrow \Gamma$  uma imersão de grafos, então a inclusão natural  $\alpha' : C(\Gamma', 2) \rightarrow C(\Gamma, 2)$  induz um monomorfismo  $\alpha'_* : H_1(C(\Gamma', 2)) \rightarrow H_1(C(\Gamma, 2))$ .

**Demonstração:** Dado o teorema 4.3.3 acima, temos que a imersão topológica  $\alpha'$  induz uma imersão entre os grafos  $Q_{\Gamma'}$  e  $Q_{\Gamma}$ . Assim, temos o que queríamos com o corolário 7.5.9. ■

**Corolário 4.3.7.** Se  $\Gamma'$  é o grafo  $Y$ , então  $H_1(C(\Gamma', 2); R) = R$  e toda imersão topológica  $\alpha : \Gamma' \rightarrow \Gamma$  determina um gerador do módulo  $H_1(C(\Gamma, 2); R)$ .

**Demonstração:** Diretamente do teorema 4.3.3 temos que  $H_1(C(\Gamma', 2); R) = R$ , já que  $Q_Y \simeq_H \mathbb{S}^1$ . Além disso,  $H_1(C(\Gamma, 2); R) = H_1(Q_{\Gamma}; R) = R^b$ , onde  $b$  é o primeiro número de Betti de  $Q_{\Gamma}$ . Assim, cada coordenada em  $R^b$  é determinada por um segmento em  $Q_{\Gamma}$  que por sua vez é associado a algum vértice essencial em  $\Gamma$ . ■

O propósito de estudarmos o 2-espço de configurações é maior do que simplesmente o conhecimento do tipo de homotopia no caso  $n = 2$ . Apesar de realmente usarmos explicitamente esse caso, em grafos conseguimos relacionar o 2-Espaço de Configurações com seus análogos de dimensão maior. Um forma de fazê-lo é como abaixo.

**Lema 4.3.8.** Se  $\Gamma$  é um grafo com vértice univalente e  $n, m$  são inteiros tais que  $m > n$ , então:

$$\begin{aligned} p : C(\Gamma, m) &\rightarrow C(\Gamma, n) \\ (x_1, \dots, x_n, \dots, x_m) &\mapsto (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

é uma dominação, i.e. existe um  $q : C(\Gamma, n) \rightarrow C(\Gamma, m)$  tal que  $p \circ q \simeq_H id_{C(\Gamma, n)}$ .

**Demonstração:** Seja  $u_0$  um vértice univalente de  $\Gamma$ . Logo, sem perda de generalidade tome uma vizinhança  $U$  de  $u_0$  pequena o suficiente para que  $\Gamma' = \Gamma \setminus U$  seja homeomorfo a  $\Gamma$ . Além disso, fixe  $m - n$  pontos distintos  $a_{n+1}, \dots, a_m$  em  $U$  e defina:

$$\begin{aligned} s : C(\Gamma', n) &\rightarrow C(\Gamma, m) \\ (z_1, \dots, z_n) &\mapsto (z_1, \dots, z_n, a_{n+1}, \dots, a_m). \end{aligned}$$

Assim, note que  $p \circ s$  é a inclusão de  $C(\Gamma', n)$  em  $C(\Gamma, n)$ . Além disso, pela construção de  $\Gamma'$  existe um retrato de deformação  $H : C(\Gamma, n) \times I \rightarrow C(\Gamma, n)$  de  $C(\Gamma, n)$  em  $C(\Gamma', n)$ .

Portanto, ao definirmos  $q = s \circ H(-, 1)$ , temos que  $H$  é naturalmente uma homotopia entre  $p \circ q$  e  $id_{C(\Gamma, n)}$ . ■

Ainda nesse sentido, é de interesse a classificação homotópica dos espaços de configurações de árvores (como em Christ, Lütgehetmann e Recio-Mitter). Uma importante vitória nesse sentido é a seguinte generalização do resultado acima.

**Teorema 4.3.9 (Christ 1999).** Seja  $Y^k$  um grafo com  $k + 1$  vértices e  $k$  arestas, todas incidentes a um mesmo vértice  $v_0 \in Y^k$ . Assim,  $C(Y^k, n)$  é homotópico a um grafo  $G$  com  $b_1(G)$  tal que

$$b_1(G) = 1 + \frac{(n + k - 2)!}{(k - 1)!} (n(k - 2) - k + 1).$$

## 4.4 Tipo Homotópico de $C(\Gamma, 2)$

Como discutido, nessa seção provaremos o teorema 4.3.3. Para isso, quebraremos nossa prova em diversos lemas. A prova da equivalência homotópica será realizada com a construção de outros dois espaços intermediários nos quais provaremos que ambos não só têm o mesmo tipo homotópico entre si, mas entre o espaço  $C(\Gamma, 2)$  e o grafo  $Q_\Gamma$ . Vejamos como construí-los.

Durante toda essa seção fixaremos uma árvore  $\Gamma$ . Além disso, sabemos que existe ao menos um vértice univalente em  $\Gamma$ . Seja  $u_0$  um vértice com tal valência. Também temos que dados quaisquer pontos  $x, y$  em  $\Gamma$  existe um caminho minimal que os liga. Seja  $\gamma_{xy}$  a imagem de tal caminho e  $\gamma_x$  a imagem do caminho que liga o ponto  $x$  à raiz  $u_0$ . Outrossim, como  $u_0$  é univalente, existe uma única aresta  $e_0$  incidente à  $u_0$  e assim denote por  $u'_0$  um ponto interior a tal aresta.

Além disso, definiremos os seguintes conjuntos:

$$U = \{(x, y) \in C(\Gamma, 2) \mid y \notin \gamma_x\},$$

$$V = \{(x, y) \in C(\Gamma, 2) \mid x \notin \gamma_y\}.$$

**Lema 4.4.1.** O conjunto  $\{U, V\}$  é uma cobertura aberta de  $C(\Gamma, 2)$ .

**Demonstração:** Seja  $(x, y)$  um ponto qualquer de  $C(\Gamma, 2)$ . Note que se  $(x, y) \notin U$  então  $y \in \gamma_x$ . Assim, existe  $t_0 \in I$  tal que  $\gamma_x(t_0) = y$  e temos que  $\gamma_y = \gamma_x|_{[t_0, 1]}$ . Portanto  $x \notin \gamma_y$  e  $(x, y) \in V$ . Logo,  $U \cup V = C(\Gamma, 2)$ .

Além disso,  $U$  e  $V$  são naturalmente abertos. Isso vem do fato que  $\Gamma$  é Hausdorff, logo se por exemplo  $y \notin \gamma_x$ , então existem vizinhanças  $V_x$  e  $V_y$  de  $x$  e  $y$ , respectivamente, tais que  $V_y \not\subseteq \gamma_{x'}$  para todo  $x' \in V_x$ . Assim,  $V_x \times V_y$  é vizinhança de  $(x, y)$  em  $U$ . Por um argumento análogo, temos que  $V$  também é aberto. ■

**Lema 4.4.2.** Os conjuntos  $U$  e  $V$  são contráteis.

**Demonstração:** Primeiramente provaremos que  $U$  é contrátil em  $C(\Gamma, 2)$ . De fato, temos que  $F : U \times I \rightarrow C(\Gamma, 2)$  definido como abaixo é um mapa tal que  $F(u, 0) = u$  e  $F(u, 1) = (u_0, u'_0)$ ,

$$F((x, y), t) = (\gamma_x(v_1(t)), \gamma_{yu'_0}(v_2(t))),$$

nos quais  $v_i : I \rightarrow I$  são as seguintes funções.

$$v_1(x) = \begin{cases} 2x, & \text{caso } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 1, & \text{caso } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$v_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{caso } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2x - 1, & \text{caso } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Efetivamente, o que o mapa  $F$  faz é primeiro mover  $x$  para  $u_0$  e depois  $y$  para  $u'_0$ . As funções  $v_i$  tem o propósito de garantir que tais movimentos nunca se cruzem já que  $\gamma_{yu'_0}(0) = y \notin \gamma_x$  e  $\gamma_x(1) = u_0 \notin \gamma_{yu'_0}$ .

Como  $v_i$ 's são contínuas e o mapa  $x \mapsto \gamma_x$  é contínuo já que  $\Gamma$  é uma árvore e portanto contrátil, as composições e o produto também são, ou seja,  $F$  é contínua. Assim, temos que  $F$  é uma homotopia e  $U$  é contrátil. Analogamente,  $V$  é contrátil. ■

Observe que se  $(x, y) \in U \cap V$ , então  $x \notin \gamma_y$  e  $y \notin \gamma_x$ . Com isso, conseguimos garantir que os caminhos minimais  $\gamma_x$  e  $\gamma_y$  se encontram em um vértice essencial  $v$ . Isso vem do fato que  $u_0 \in \gamma_x \cap \gamma_y$  e assim tais caminhos se encontram e portanto o fazem em algum vértice. Além disso, esse vértice não pode ser a raiz já que como  $u_0$  é univalente, a aresta  $e_0$  e o outro vértice incidente à  $e_0$  também estão contidos em ambos os caminhos. Ainda mais, como  $(x, y) \in U \cap V$ , temos que os caminhos não podem percorrer as mesmas arestas desde o início. Assim, existe um vértice  $v$  no qual os caminhos se encontram, mas que cada caminho vem de uma aresta diferente, digamos  $e$  e  $e'$ .

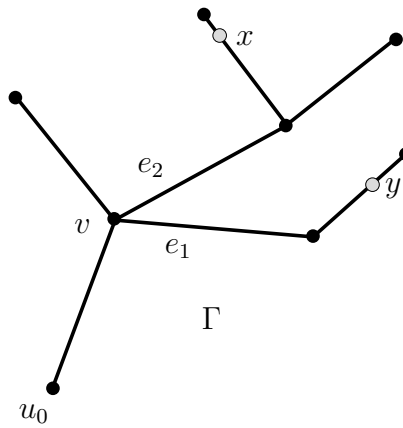


Figura 4.4: A configuração  $(x, y)$  está em  $W_{v, e_1, e_2}$ .

Esse tratamento da interseção inspira a definição do seguinte conjunto. Denotaremos por  $W_{v, e, e'}$  o conjunto das configurações  $(x, y)$  tais que  $\gamma_x$  e  $\gamma_y$  se reúnem em  $v$  e  $e, e'$  são as arestas incidentes à  $v$  contidas em  $\gamma_x$  e  $\gamma_y$  respectivamente, mas não na outra. Com isso, naturalmente temos o seguinte resultado:

**Lema 4.4.3.** Se  $\{v, e, e'\}$  denota o conjunto das triplas nos quais  $v$  é um vértice essencial e  $e, e'$  são arestas ascendentes distintas e incidentes à  $v$ , então

$$U \cap V = \bigsqcup_{v, e, e'} W_{v, e, e'}$$

**Demonstração:** Pela discussão acima temos que se  $(x, y) \in U \cap V$ , então  $(x, y) \in \sqcup W_{v, e, e'}$ . Além disso, se  $(x, y) \in \sqcup W_{v, e, e'}$ , então  $x \notin \gamma_y$  e  $y \notin \gamma_x$ . Ou seja,  $(x, y) \in U \cap V$ . Portanto ambos os conjuntos são iguais. ■

A vantagem de tratar a interseção  $U \cap V$  como uma união disjunta de outros conjuntos, é que temos uma rica informação topológica de tais conjuntos.

**Lema 4.4.4.** Se  $(v, e, e')$  é uma tripla no qual  $v$  é um vértice essencial e  $e, e'$  são arestas ascendentes distintas e incidentes à  $v$ , então  $W_{v, e, e'}$  é contrátil.

**Demonstração:** Podemos mover qualquer configuração  $(x, y) \in W_{v, e, e'}$  para  $(x_0, y_0)$  no qual  $x_0 \in \text{int } e$  e  $y_0 \in \text{int } e'$ . A homotopia é construída de forma análoga à homotopia anterior. ■

Com isso, considere o quociente  $X_\Gamma$  da união disjunta  $U \sqcup V \sqcup (U \cap V) \times I$ , no qual  $((x, y), 0) \in U \cap V \times I$  é identificado com  $(x, y) \in U$  e  $((x, y), 1) \in U \cap V \times I$  é identificado com  $(x, y) \in V$ . Além disso, denotaremos por  $q$  o mapa quociente. Temos assim, a primeira equivalência homotópica.

**Teorema 4.4.5.** Seja  $\Gamma$  uma árvore. Assim,  $C(\Gamma, 2) \simeq_H X_\Gamma$ .

**Demonstração:** Para provar a equivalência homotópica, construiremos dois mapas  $P : X_\Gamma \rightarrow C(\Gamma, 2)$  e  $S : C(\Gamma, 2) \rightarrow X_\Gamma$ , inversos homotópicos entre si. Primeiramente, definimos o mapa  $P : X_\Gamma \rightarrow C(\Gamma, 2)$  tal que:

$$P([(x, y), t]) = (x, y),$$

no qual  $[(x, y), t]$  denota a classe de equivalência de  $((x, y), t) \in U \cap V \times I$ . Como  $U$  e  $V$  são identificados com subconjuntos de  $U \cap V \times I$ , tal mapa está bem definido. Além disso, note que  $P$  é tal que  $P \circ q = i$ , no qual  $i$  é o seguinte mapa.

$$\begin{aligned} i : U \sqcup V \sqcup (U \cap V) \times I &\rightarrow C(\Gamma, 2) \\ (x, y) &\mapsto (x, y), \text{ caso } (x, y) \in U \text{ ou } V, \\ ((x, y), t) &\mapsto (x, y), \text{ caso } ((x, y), t) \in (U \cap V) \times I. \end{aligned}$$

Como tal mapa é contínuo em cada componente da união disjunta,  $i$  em si é contínuo. Assim, pela propriedade universal dos quocientes, temos que  $P$  é contínuo.

Para construirmos o mapa  $S$ , faremos uso da cobertura  $\{U, V\}$  e do fato que  $C(G, n)$  é localmente compacto. Com isso, existe uma partição da unidade subordinada à cobertura  $\{U, V\}$ . Ou seja, temos mapas  $\phi_U, \phi_V : C(\Gamma, 2) \rightarrow [0, 1]$  satisfazendo algumas propriedades descritas na seção 1.2. Portanto, ao definir  $\Phi_U, \Phi_V : C(\Gamma, 2) \rightarrow [0, 1]$  como os mapas abaixo, temos que tais mapas ainda são partições da unidade, mas com a propriedade extra que  $\Phi_U(x, y) = \Phi_V(y, x)$ .

$$\begin{aligned} \Phi_U(x, y) &= \frac{1}{2}(\phi_U(x, y) + \phi_V(y, x)), \\ \Phi_V(x, y) &= \frac{1}{2}(\phi_V(x, y) + \phi_U(y, x)). \end{aligned}$$

Com isso, se  $S : C(\Gamma, 2) \rightarrow X_\Gamma$  é tal que  $S(x, y) = [(x, y), \Phi_U(x, y)]$ , então trivialmente temos que  $P \circ S = id_{C(\Gamma, 2)}$ . Por outro lado, o mapa  $S \circ P$  é homotópico à  $id_{X_\Gamma}$ , com homotopia dada por:

$$F_s([(x, y), t]) = [(x, y), (1 - s)\Phi_U(x, y) + st].$$

Pelos argumentos usuais e os já usados nessa seção, de fato  $F$  é contínua e também temos que  $F_0([(x, y), t]) = [(x, y), \Phi_U(x, y)] = (S \circ P)(x, y)$  e  $F_1([(x, y), t]) = [(x, y), t] = id_{X_\Gamma}$ . Portanto,  $F$  é homotopia como argumentamos.

Logo,  $P$  e  $S$  são inversos homotópicos e  $C(\Gamma, 2) \simeq_H X_\Gamma$ . ■

O segundo espaço a se definir será um quociente de  $X_\Gamma$ . Especificamente, chamaremos de  $X'_\Gamma$  o espaço quociente de  $X_\Gamma$  definido como a identificação de  $U$  com um ponto  $A$  e do subespaço  $V$  com um ponto  $B$  distinto.

Assim, como  $U$  e  $V$  são contráteis, diretamente temos o seguinte resultado.

**Teorema 4.4.6.** Seja  $q'$  o mapa quociente entre  $X_\Gamma$  e  $X'_\Gamma$ . Assim,  $q'$  é uma equivalência homotópica, i.e.  $X_\Gamma \simeq_H X'_\Gamma$ .

Além disso, podemos relacionar o quociente  $X'_\Gamma$  com a suspensão de  $U \cap V$ .

**Lema 4.4.7.** Se  $\Sigma(U \cap V)$  denota a suspensão de  $U \cap V$ , então  $X'_\Gamma \simeq \Sigma(U \cap V)$

**Demonstração:** Nos lembremos que o espaço  $\Sigma(U \cap V)$  é por definição o espaço dado pelo quociente do cilindro  $(U \cap V) \times I$  das identificações de  $(U \cap V) \times \{0\}$  com um ponto e  $(U \cap V) \times \{1\}$  com outro. Assim, naturalmente tais espaços são homeomorfos. ■

**Teorema 4.4.8.** Seja  $\Sigma(U \cap V)$  a suspensão de  $U \cap V$ . Assim,  $\Sigma(U \cap V) \simeq_H Q_\Gamma$

**Demonstração:** Note que se  $\{v, e, e'\}$  for o conjunto das triplas já mencionadas munido da topologia discreta, então  $Q_\Gamma \simeq \Sigma(\{v, e, e'\})$  pela definição de  $Q_\Gamma$ . Além disso, como cada  $W_{v,e,e'}$  é contrátil, temos que  $Q_\Gamma \simeq \Sigma(\{v, e, e'\}) \simeq_H \Sigma(\sqcup W_{v,e,e'}) = \Sigma(U \cap V)$ . ■

Finalmente, juntando todos os resultados dessa seção temos a prova do teorema 4.3.3.

## Capítulo 5

# Complexidade Topológica

### 5.1 Teoria Geral

**Definição 5.1.1 (Algoritmo de Planejamento de Movimento).** Dado um espaço topológico  $X$ , definimos um *algoritmo de planejamento de movimento* em  $X$ , como um mapa

$$\begin{aligned} s: X \times X &\rightarrow PX \\ (x, y) &\mapsto \gamma. \end{aligned}$$

tal que  $\gamma(0) = x$  e  $\gamma(1) = y$ . □

**Observação 5.1.2.** Note que se  $s$  é um algoritmo de planejamento de movimento em  $X$ , então  $\pi \circ s = id_{X \times X}$ , no qual  $\pi$  é a fibração de caminhos  $\pi : PX \rightarrow X \times X$ , tal que  $\pi(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(1))$ . Ou seja, um algoritmo de planejamento de movimento é uma seção da fibração de caminhos  $\pi$ .

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{s} & PX \\ & \searrow id_{X \times X} & \downarrow \pi \\ & & X \times X \end{array}$$

**Teorema 5.1.3 (Farber 2003).** Seja  $X$  um espaço topológico. Assim,  $X$  admite um algoritmo de planejamento de movimento se, e somente se,  $X$  é contrátil.

**Demonstração:** Suponha que  $s : X \times X \rightarrow PX$  seja um algoritmo de planejamento de movimento em  $X$  e  $x_0 \in X$ . Assim, definimos  $H : X \times I \rightarrow X$  com  $H(x, t) = s(x_0, x)(t)$ . Logo,  $H(-, 0) = c_{\{x_0\}}$  e  $H(-, 1) = id_X$ . Além disso, o mapa  $H$  é a seguinte composição de funções.

$$X \times I \xrightarrow{i} \{x_0\} \times X \times I \xrightarrow{s|_{X' \times id}} PX \times I \xrightarrow{e} X,$$

no qual  $X' = \{x_0\} \times X$ ,  $i$  é o mapa de inclusão e  $e$  é o mapa de avaliação. Assim, a composição  $H$  é contínua, e portanto temos a implicação direta.

Por outro lado, se  $H$  é uma homotopia de  $id_X$  à  $c_{\{x_0\}}$ , então podemos definir o algoritmo  $s : X \times X \rightarrow PX$  com:

$$s(x, y) = H(x, -) * \overline{H(y, -)},$$

onde  $H(x, -)$  denota o caminho de  $x$  à  $x_0$  e  $\overline{H(y, -)}$  denota o caminho inverso ao caminho  $H(y, -)$ . De fato, o mapa  $s$  assim definido é contínuo já que a concatenação de caminhos é

contínua pelo Lema 2.2.7 e o mapa  $x \mapsto H(x, -)$  também é contínuo pela proposição 2.2.6. ■

No caso de espaços não-contráteis, podemos nos recorrer às seções locais da fibração de caminhos e nesse sentido definimos a complexidade topológica.

**Definição 5.1.4 (Complexidade Topológica).** Dado um espaço topológico  $X$ , definimos a *complexidade topológica*  $TC(X)$  de  $X$ , como o menor inteiro  $k$  tal que:

- (i) existe uma cobertura aberta  $\{U_1, \dots, U_k\}$  de  $X \times X$ ;
- (ii) para cada  $1 \leq i \leq k$ , existe um mapa contínuo

$$s_i : U_i \rightarrow PX,$$

tal que  $\pi \circ s_i = id_{U_i}$ .

Nesse caso, diremos que  $s_i$  é um algoritmo de planejamento de movimento em  $X$  restrito à  $U_i$  ou simplesmente um algoritmo local (em contraste à definição 5.1.1 que será chamada de algoritmo global). □

Note que devido à definição acima e ao teorema 5.1.3, todos os espaços de tipo homotópico contrátil têm o mesmo valor de complexidade topológica, a saber,  $TC(X) = 1$ . De fato, isso não é exclusividade de tal tipo homotópico, i.e. se dois espaços têm o mesmo tipo de homotopia, então suas complexidades topológicas são iguais. Ainda mais, temos o seguinte resultado.

**Teorema 5.1.5 (Farber 2003).** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos. Se  $X$  domina  $Y$ , i.e. existem mapas  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow X$  tais que  $f \circ g \simeq id_Y$ , então  $TC(Y) \leq TC(X)$ .

**Demonstração:** Se  $TC(X) = \infty$ , então não resta nada à provar. Assim, assumamos que a complexidade topológica de  $X$  é finita. Caso  $TC(X) = k$  e  $\{U_1, \dots, U_k\}$  seja uma cobertura de abertos que admitem algoritmos locais  $s_i$ , então para cada  $U_i$  podemos definir  $V_i = (g \times g)^{-1}(U_i)$  aberto de  $Y \times Y$ . Seja  $H$  uma homotopia entre  $id_Y$  e  $f \circ g$ . Então, definimos  $\sigma_i : V_i \rightarrow PY$  com:

$$\sigma_i(x, y)(t) = \begin{cases} H(x, 3t) & \text{se } t \in [0, 1/3], \\ f(s_i(g(x), g(y)))(3t - 1) & \text{se } t \in [1/3, 2/3], \\ H(y, 3 - 3t) & \text{se } t \in [2/3, 1]. \end{cases}$$

Assim, de fato a imagem de  $\sigma_i$  são caminhos contínuos usando o Lema da Colagem e  $\sigma_i$  em si é contínua por ser uma concatenação tripla de caminhos. Logo,  $\sigma_i$  é um algoritmo local em  $V_i$ . Como trivialmente  $\{V_1, \dots, V_k\}$  cobre  $Y \times Y$ , temos que  $TC(Y) \leq TC(X)$ , como queríamos. ■

Com tal resultado, temos o que havíamos prometido.

**Corolário 5.1.6 (Farber 2003).** Se  $X \simeq_H Y$ , então  $TC(X) = TC(Y)$ .

## 5.2 Cotas superiores

Observe que como a complexidade topológica é um invariante numérico, podemos determiná-la ao estimar uma cota superior  $\leq n$  e uma inferior  $\geq n$  e assim concluir que a complexidade é  $n$ .

Nessa seção lidaremos com as cotas superiores. Note que a explicitação de um algoritmo de planejamento de movimento com  $n$  seções locais da fibração de caminhos para um espaço  $X$ , nos permite concluir ao menos que  $TC(X) \leq n$ . Dois importantes exemplos são dados abaixo.

**Exemplo 5.2.1 (Farber 2017).** Dado o círculo  $\mathbb{S}^1$ , temos que  $TC(\mathbb{S}^1) = 2$ .

**Demonstração:** Dados dois pontos  $a$  e  $b$  no círculo que não são antipodais entre si, existe um único caminho geodésico  $\gamma$  entre tais pontos. Note que se  $U_1$  for o subconjunto de tais duplas, existe um mapa  $s_1 : U_1 \rightarrow P\mathbb{S}^1$  que é seção local da fibração de caminhos de  $\mathbb{S}^1$ .

Além disso, o conjunto  $U_2 = \{(a, b) \mid a \neq b\}$  admite uma seção local  $s_2$  dada pelo movimento horário ao longo de  $\mathbb{S}^1$ . A argumentação de que tais mapas são de fato funções contínuas é baseada na estrutura métrica de  $\mathbb{S}^1$  e não será feita aqui.

Como  $U_1$  e  $U_2$  são naturalmente abertos, e juntos tais conjuntos cobrem  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ , temos que  $TC(\mathbb{S}^1) \leq 2$ . Como o círculo não é contrátil, temos que  $TC(\mathbb{S}^1) = 2$ . ■

**Exemplo 5.2.2 (Farber 2005).** Dada uma árvore  $\Gamma$  com ao menos um vértice essencial, existe um algoritmo de planejamento de movimento de  $2m(\Gamma) + 1$  seções locais.

**Demonstração:** Fixe em  $u_0 \in V(\Gamma)$  um vértice univalente de  $\Gamma$ . Assim, o chamaremos de raiz. Para todo  $x \in \Gamma$ , existe um caminho  $\gamma_x$  de  $x$  à  $u_0$  em  $\Gamma$ . Observe ainda que como  $\Gamma$  é uma árvore, tal caminho é único a menos de homotopia.

Com tal raiz, note ainda temos uma noção de ordem parcial nos pontos de  $\Gamma$  dada por  $x \leq y$  se  $x \in \gamma_y(I)$ .

Além disso, denote por  $e_0 \in E(\Gamma)$  a aresta de  $\Gamma$  incidente à  $u_0$ . Assim, perceba que para toda configuração  $C = (z_1, \dots, z_n)$  em  $C(e_0, n) \subseteq C(\Gamma, n)$ , existe uma permutação  $\tau \in S_n$  tal que:

$$z_{\tau(1)} \leq \dots \leq z_{\tau(n)}.$$

Portanto, se  $C(e_0, n, \tau) = \{(z_1, \dots, z_n) \mid z_{\tau(1)} \leq \dots \leq z_{\tau(n)}\}$ , temos que  $\{C(e_0, n, \tau)\}_{\tau \in S_n}$  cobre  $C(e_0, n)$ . Trivialmente, note que tal cobertura é disjunta. Ainda mais, a cobertura é aberta já que se  $z = (z_1, \dots, z_n) \in C(e_0, n, \tau)$ , então  $z_{\tau(1)} \leq \dots \leq z_{\tau(n)}$ . Como  $\Gamma$  é Hausdorff e  $e_0$  é um intervalo, conseguimos vizinhanças  $Z_i$  para cada  $z_i$  respeitando a ordenação ditada por  $\tau$ . Ou seja, se  $Z = \prod Z_i$ , temos que  $Z$  é uma vizinhança aberta de  $z$  em  $C(e_0, n, \tau)$  e portanto  $C(e_0, n, \tau)$  é aberto.

Naturalmente, dadas duas configurações  $z, z'$  em  $C(e_0, n, \tau)$  temos uma homotopia entre todas as coordenadas e portanto entre as configurações em si. Logo, cada  $C(e_0, n, \tau)$  é um subespaço contrátil de  $C(e_0, n)$ . Assim, pela proposição 2.2.6, existe uma seção local  $\sigma_0$  de  $\pi : P(C(\Gamma, n)) \rightarrow C(\Gamma, n) \times C(\Gamma, n)$  para cada  $C(e_0, n, \tau)$ . Como tais subespaços são disjuntos entre si, isso define um algoritmo local em  $C(e_0, n)$ . Ou seja, para quaisquer  $n$ -configurações em  $e_0$ , existe um movimento que transita uma configuração na outra sem colisões. Note também que talvez esse movimento percorra um trecho fora de  $e_0$ .

Assim, definimos o seguinte algoritmo em  $C(\Gamma, n)$ . Dadas duas configurações  $A = (A_1, \dots, A_n)$  e  $B = (B_1, \dots, B_n) \in C(\Gamma, n)$  construiremos um caminho entre tais configurações. Se  $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$  denotar os pontos minimais em  $A$  com respeito à ordem parcial da árvore, então podemos mover o ponto  $A_{i_1}$  para o interior de  $e_0$ , depois  $A_{i_2}$  e assim por diante. Tal movimento em partes é feito usando um ajuste de velocidades como feito no lema 4.4.2. Depois disso, movemos o novo conjunto de pontos minimais de  $\{A_i\} \setminus \{A_{i_j}\}$ . Iterando esse processo, temos que todos os pontos de  $A$  podem ser movidos à uma configuração  $A'$  em  $C(e_0, n)$ .

Aplicando o mesmo processo para a configuração  $B$ , conseguimos uma configuração  $B' \in C(e_0, n)$ . Assim, conectamos as duas configurações, primeiro levando a configuração  $A$  em  $A'$  e depois movendo  $A'$  para  $B'$  com a seção  $\sigma_0$ . Depois disso, retornamos  $B'$  à  $B$  com o movimento inverso do descrito. Sabemos que  $\sigma_0$  é contínuo, assim se o processo de levar configurações à aresta  $e_0$  também for, então teríamos uma seção global da fibração de caminhos  $\pi : PX \rightarrow X \times X$ , com  $X = C(\Gamma, n)$ . Em verdade isso não ocorre, porém podemos quebrar o espaço  $X$  em  $n + 1$  regiões onde o processo descrito torna-se contínuo.

Note que o problema é que se  $A_j$  for um ponto minimal da configuração  $A$ , talvez uma pequena perturbação nos pontos da configuração  $A$  já pode torná-lo não-minimal. Como  $\Gamma$  é Hausdorff, todo ponto que não está em vértice não sofre desse problema. Além disso, os únicos vértices com tal problema são os essenciais.

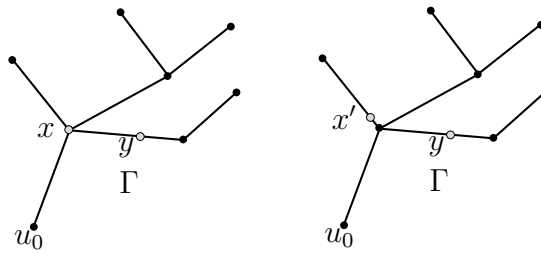


Figura 5.1: Uma pequena oscilação na configuração  $(x, y)$  muda o conjunto de pontos minimais de  $\{x\}$  para  $\{x', y\}$ .

Se  $S_i \subseteq C(\Gamma, n)$  denotar as configurações com exatamente  $i$  pontos em vértices essenciais, podemos restringir o algoritmo descrito aos pares  $(A, B) \in S_i \times S_j$  com  $i, j$  fixos. De fato, se  $A$  tem  $i$  pontos em vértices essenciais, temos uma vizinhança de  $A$  em  $S_i$  que também deverá ter  $i$  pontos em vértices essenciais. Assim, contornamos o problema e temos uma seção contínua

$$\sigma_{ij} : S_i \times S_j \rightarrow P(C(\Gamma, n)), \text{ com } i, j \in \{1, \dots, m(\Gamma)\}.$$

Como  $\overline{S_i} \subseteq \bigcup_{j \geq i} S_j$ , temos que dados dois pares distintos  $(i, j)$  e  $(i', j')$  tais que  $i + j = i' + j'$ , então

$$\overline{S_i \times S_j} \cap S_{i'} \times S_{j'} = \emptyset.$$

Logo, se

$$W_k := \bigcup_{i+j=k} S_i \times S_j, \quad k = 0, 1, \dots, 2m(\Gamma),$$

conseguimos construir seções locais em  $W_k$  da fibração de caminho com as seções  $\sigma_{ij}$ .

Assim, temos uma cobertura  $\{W_k\}$  de  $2m(\Gamma) + 1$  abertos com seções locais da fibração de caminhos de  $C(\Gamma, n)$ . ■

**Corolário 5.2.3.** Se  $\Gamma$  é uma árvore com ao menos um vértice essencial, então

$$TC(C(\Gamma, n)) \leq 2m(\Gamma) + 1.$$

Em geral, essa abordagem se prova terrivelmente difícil para os nossos espaços, ou ao menos massante para a maioria deles. Assim, é interessante o desenvolvimento de outras formas de se determinar uma cota superior.

**Teorema 5.2.4 (Farber 2017).** Seja  $X$  um espaço paracompacto e localmente contrátil, então

$$TC(X) \leq \dim(X \times X) + 1,$$

onde  $\dim(X \times X)$  denota a dimensão de Lebesgue de  $X \times X$ .

**Demonstração:** Suponha que  $\dim(X \times X) = n$  e tome  $U = \{U_i\}_{i \in I}$  cobertura aberta de  $X \times X$  tal que existam seções locais  $s_i : U_i \rightarrow PX$ . Tal cobertura existe já que  $X \times X$  é localmente contrátil e assim podemos usar a proposição 2.2.6.

Como  $X \times X$  é paracompacto, existe um refinamento  $V = \{V_j\}_{j \in J}$  de  $U$  com ordem igual a  $n$ , i.e. para todo ponto  $(x, y) \in X \times X$ , existe no máximo  $n + 1$  índices  $j$  em  $J$  tal que  $(x, y) \in V_j$ .

Assim, construa uma partição da unidade  $\{h_j\}_{j \in J}$  subordinada à  $V$ . Por definição, temos que  $h_j : X \times X \rightarrow [0, 1]$  é um mapa tal que  $\text{supp}(h_j) \subseteq V_j$  para todo  $j \in J$  e  $\sum_j h_j = 1_{X \times X}$ .

Com isso, dado  $S \subseteq J$  definimos  $W(S) \subseteq X \times X$  como o seguinte conjunto

$$\{(x, y) \in X \times X \mid h_j(x, y) > h_k(x, y), \text{ no qual } j \in S, k \notin S\}.$$

De tal modo, mostraremos que para todo  $k \leq n + 1$ , a coleção dos  $W_k = \bigcup_{|S|=k} W(S)$  é uma cobertura aberta de  $X \times X$  e para cada  $W_k$  existe uma seção local da fibração de caminhos, e assim concluiremos que  $TC(X) \leq n + 1$ .

Primeiramente, note que  $W(S)$  é aberto para todo  $S \subseteq J$ . Isso vem do fato que

$$W(S) = \bigcap_{j \in S, k \notin S} (h_j - h_k)(0, \infty).$$

Como  $h_j - h_k$  é contínua para todos  $j, k \in J$  e  $(0, \infty)$  é aberto em  $\mathbb{R}$ , temos que a pré-imagem  $W(S)$  da interseção finita é aberta. Assim, sendo  $W_k$  uma união de abertos, temos que  $W_k$  também é aberto.

Além disso,  $\{W(S) \mid S \subseteq J\}$  cobre  $X \times X$ . De fato, se  $(x, y) \in X \times X$ , então podemos definir  $S$  como o conjunto dos  $j \in J$  tais que  $h_j(x, y) = \max_k \{h_k(x, y)\}$ . Assim, trivialmente temos que  $(x, y) \in W(S)$ . Portanto  $\{W_k\}^{n+1}$  é cobertura aberta de  $X \times X$ .

Agora, basta que exista seção local  $\sigma_k : W_k \rightarrow PX$  para todo  $k \leq n + 1$ . Para isso, definiremos em  $W(S)$  tais seções e mostraremos que dados  $S, S' \subseteq J$  distintos tais que  $|S| = |S'| = k$ , então  $W(S)$  e  $W(S')$  são disjuntos. Logo, poderemos definir o algoritmo em  $W_k$  de modo disjunto.

Note que para todo  $V_j$ , podemos definir  $\rho_j : V_j \rightarrow PX$  tal que  $\rho_j(x, y)(t) = s_i(x, y)(t)$ . Isso está bem definido já que  $V$  é refinamento de  $U$  e portanto para todo  $V_j$  existe um  $i \leq n$  tal que  $V_j \subseteq U_i$ . Além disso, dado  $(x, y) \in W(S)$  com  $j \in S$ , temos que  $h_j(x, y) > 0$  e assim  $(x, y) \in \text{supp } h_j \subseteq V_j$ . Ou seja, se  $j \in S$ , então  $W(S) \subseteq V_j$ . Desse modo, podemos restringir o algoritmo mais uma vez e com isso temos seções locais em  $W(S)$  para todos os  $S \subseteq J$ .

Finalmente, observe que se  $S \not\subseteq S'$ , então existe um  $j \in S \setminus S'$ . Analogamente, se  $S' \not\subseteq S$ , então existe um  $j' \in S' \setminus S$ . Nesse caso, dado um ponto  $(x, y)$  em  $W(S)$  qualquer, temos então que  $h_j(x, y) > h_{j'}(x, y)$  e assim  $(x, y) \notin W(S')$ . Por um argumento análogo para a outra inclusão, concluímos que  $W(S) \cap W(S') = \emptyset$  e portanto podemos construir um algoritmo local para cada  $W_k$ , usando os algoritmos em  $W(S)$  como discutido.

Sendo assim,

$$TC(X) \leq |\{W_k\}^{n+1}| = n + 1 = \dim(X \times X) + 1,$$

como queríamos demonstrar. ■

## 5.3 Gênero de Schwarz e cotas inferiores

Tanto a complexidade topológica quanto alguns outros invariantes numéricos (como a categoria de Lusternik–Schnirelmann em *Jong van Lier e James*) são casos particulares de um conceito mais profundo, o gênero de Schwarz.

Nessa seção, exploraremos como tal conceito nos permite determinar cotas inferiores para a complexidade topológica usando da teoria de cohomologia singular.

**Definição 5.3.1 (Gênero de Schwarz).** Dada uma fibração  $p : E \rightarrow B$ , definimos o *gênero de Schwarz*  $g(p)$  como sendo o menor inteiro  $k$  tal que:

- (i) existe uma cobertura aberta  $\{B_1, \dots, B_k\}$  de  $B$ ;
- (ii) para cada  $1 \leq i \leq k$ , existe um mapa contínuo

$$s_i : B_i \rightarrow E,$$

tal que  $p \circ s_i = id_{B_i}$ .

□

Assim, temos de fato o que comentamos acima.

**Proposição 5.3.2.** Se  $X$  é um espaço topológico e  $\pi$  é a sua fibração de caminhos, então  $g(\pi) = TC(X)$ .

Com a proposição anterior em mente, o estudo geral de propriedades do gênero nos permite extrair informações específicas da complexidade topológica. Em particular, veremos como tal conceito se relaciona com a teoria de cohomologia.

Note que dada uma fibração  $p : E \rightarrow B$ , dizer que  $g(p) = 1$  implica que existe uma seção global de  $p$ , i.e. um mapa  $s : B \rightarrow E$  tal que  $p \circ s = id_B$ . Assim, pela functorialidade (contravariante) da cohomologia singular temos que  $s^* \circ p^* = id_{H^*(B;R)}$  dado um anel  $R$  qualquer. Logo,  $p^*$  é injetiva e  $\ker p^* = 0$ . Em realidade, podemos provar um resultado mais forte, i.e. que se  $g(p) = n$ , então  $(\ker p^*)^n = 0$  no qual,

$$(\ker p^*)^n = \{u_1 \cup u_2 \cup \dots \cup u_n \mid \cup u_i \in \ker p^*\}.$$

Antes disso, introduziremos alguns resultados e a seguinte definição.

**Definição 5.3.3 (Comprimento de uma Fibração).** Dado um anel comutativo  $R$  e uma fibração  $p : E \rightarrow B$ , definimos o *comprimento*  $l_R(p)$  da fibração  $p$  com coeficientes em  $R$ , como o maior inteiro  $n$  tal que  $(\ker p^*)^n \neq 0$ . □

Assim, o que queremos mostrar é que dada uma fibração  $p$ , temos que  $g(p) > l_R(p)$ . No caso onde  $g(p) = 1$  é fácil ver que  $l_R(p) = 0$  já que  $p^*$  é injetivo. Para os demais casos, podemos provar isso ao assumir que o anel  $R$  dos coeficientes do anel de cohomologia é um domínio de ideais principais.

**Lema 5.3.4 (Schwarz 1966).** Se  $R$  é um domínio de ideais principais,  $p : E \rightarrow B$  é uma fibração e  $\{B_1, \dots, B_n\}$  uma cobertura aberta de  $B$ , então

$$l_R(p) < n + \sum_{i=1}^n l_R(p_i),$$

no qual  $p_i = p|_{p^{-1}(B_i)}$ .

Assim, temos o resultado anunciado.

**Teorema 5.3.5 (Schwarz 1966).** Seja  $R$  um domínio de ideais principais e  $p : E \rightarrow B$  uma fibração. Então  $g(p) > l_R(p)$ .

**Demonstração:** Se  $g(p) = n$ , tome  $\{B_1, \dots, B_n\}$  cobertura aberta de  $B$  tal que existe uma seção local de  $p$ ,  $s_i : B_i \rightarrow E$  para todo  $i$ . Note que podemos co-restringir os mapas  $s_i$  em  $p^{-1}(B_i)$  e sejam  $r_i$  tais co-restrições. Assim,  $p_i = p|_{p^{-1}(B_i)}$  é um mapa tal que  $p_i \circ r_i = id_{B_i}$ . Portanto, nos homomorfismos induzidos nos módulos de cohomologia temos que  $r_i^* \circ p_i^* = id_{H^*(B_i; R)}$ . Logo,  $p_i^*$  é injetiva e assim,  $l_R(p_i) = 0$ . Usando o lema anterior, temos que

$$l_R(p) < n + \sum_{i=1}^n l_R(p_i) = n = g(p).$$

■

Sendo assim, voltando ao caso da complexidade topológica temos o seguinte corolário.

**Corolário 5.3.6.** Se  $X$  é um espaço topológico e  $R$  é um domínio de ideais principais, então  $TC(X) = g(\pi) > l_R(\pi)$ .

Apesar de já ser uma cota inferior para a complexidade topológica, o comprimento da fibração de caminhos com respeito a um domínio de ideais principais  $R$  ainda é uma quantidade em geral desconhecida. Porém, quando nos restringimos ao caso onde  $R$  também é um corpo, podemos simplificar razoavelmente alguns cálculos.

**Teorema 5.3.7 (Farber 2017).** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $\mathbb{K}$  um corpo e  $\pi$  a fibração de caminhos de  $X$ . Então  $\ker \pi^* \simeq \ker \cup_{\otimes}$ .

**Demonstração:** Como  $\mathbb{K}$  é um corpo, temos que o produto-cruzado abaixo torna-se o chamado isomorfismo de Künneth.

$$\mu : H^*(X; \mathbb{K}) \otimes H^*(X; \mathbb{K}) \rightarrow H^*(X \times X; \mathbb{K})$$

Além disso, sabemos que o produto- $\cup_{\otimes}$  e o produto cruzado se relacionam de modo que  $u \cup v = \Delta^*(u \times v)$ . Ou seja, o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} H^*(X; K) \otimes H^*(X; K) & \xrightarrow{\mu} & H^*(X \times X; K) \\ & \searrow \cup_{\otimes} & \downarrow \Delta^* \\ & & H^*(X; K) \end{array}$$

Por outro lado, se  $\alpha : X \rightarrow PX$  é o mapa dado por  $\alpha(x)(t) = x$  para todo  $x \in X$  e  $t \in I$ , então temos o seguinte diagrama comutativo à esquerda, que induz o diagrama comutativo à direita.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & PX \\ \Delta \searrow & & \downarrow \pi \\ & & X \times X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} H^*(X; K) & \xleftarrow{\alpha^*} & H^*(PX; K) \\ \Delta^* \swarrow & & \uparrow \pi^* \\ & & H^*(X \times X; K) \end{array}$$

Juntando com o primeiro diagrama comutativo, temos que

$$\begin{array}{ccc} H^*(X; K) \otimes H^*(X; K) & \xrightarrow{\mu} & H^*(X \times X; K) \\ & \searrow \cup_{\otimes} & \downarrow \pi^* \\ & & H^*(PX; K) \\ & & \downarrow \alpha^* \\ & & H^*(X; K) \end{array}$$

Assim, basta que  $\alpha^*$  seja um isomorfismo para concluirmos a prova, já que  $\mu$  é isomorfismo. Isso de fato é verdade, afinal  $\alpha$  é uma equivalência homotópica, como visto no teorema 2.2.8. Portanto,  $\ker \pi^* \simeq \ker \cup_{\otimes}$ , como queríamos demonstrar. ■

**Corolário 5.3.8.** Se  $\pi$  for a fibração de caminhos, então  $\mu(\ker \cup_{\otimes}) = \ker \pi^*$ .

Note que com isso, podemos relacionar o comprimento da fibração de caminhos com o produto-*cup*. Para ver isso, perceba que se denotarmos por  $(\ker \cup_{\otimes})^k$  o seguinte conjunto

$$\{(u_1 \otimes v_1) \cdot (\cdots) \cdot (u_k \otimes v_k) \mid u_i \otimes v_i \in \ker \cup_{\otimes}\},$$

temos que  $\mu((\ker \cup_{\otimes})^k) = (\ker \pi^*)^k$  já que  $\mu$  é um homomorfismo de anéis.

**Definição 5.3.9 (Ideal e Comprimento dos Divisores de Zero).** Dado um espaço  $X$  e um corpo  $\mathbb{K}$ , definimos o *ideal dos divisores de zero*, como o ideal  $\ker \cup_{\otimes} \in H^*(X; \mathbb{K}) \otimes H^*(X; \mathbb{K})$ . Além disso, definimos com o *comprimento dos divisores de zero*  $zcl_{\mathbb{K}}(X)$  o maior inteiro  $k$  tal que  $(\ker \cup_{\otimes})^k$  é não-nulo. □

Assim, pela discussão acima temos os seguintes resultados.

**Proposição 5.3.10.** Se  $X$  for um espaço e  $\mathbb{K}$  for um corpo, então  $zcl_{\mathbb{K}}(X) = l_{\mathbb{K}}(\pi)$ , no qual  $\pi$  é a fibração de caminhos de  $X$ .

**Teorema 5.3.11 (Farber 2017).** Sejam  $X$  um espaço e  $\mathbb{K}$  um corpo. Então  $TC(X) > zcl_{\mathbb{K}}(X)$ .

## 5.4 Exemplos

A fim de justificar todo esse esforço, vejamos como tal cota inferior para a complexidade topológica resolve alguns problemas.

**Exemplo 5.4.1.** Dado um grafo conexo  $G$  e com  $b_1(G) > 1$ , então  $TC(G) = 3$ .

**Demonstração:** Como  $b_1(G) > 1$ , existem ao menos duas classes de cohomologia  $u_1$  e  $u_2$  em  $H^1(G; \mathbb{K})$  que são linearmente independentes. Para cada classe, podemos definir as seguintes classes  $1 \otimes u_i - u_i \otimes 1$  em  $H^*(G; \mathbb{K}) \otimes H^*(G; \mathbb{K})$ . Perceba que essas últimas são divisores de zero já que  $\cup_{\otimes}(1 \otimes u_i - u_i \otimes 1) = 1 \cup u_i - u_i \cup 1 = u_i - u_i = 0$ .

Além disso, lembrando que  $H^2(G; \mathbb{K}) = 0$  temos

$$\begin{aligned} (u_1 \otimes 1 - 1 \otimes u_1) \cdot (u_2 \otimes 1 - 1 \otimes u_2) &= (u_1 \otimes 1) \cdot (u_2 \otimes 1) - (u_1 \otimes 1) \cdot (1 \otimes u_2) - \\ &\quad (1 \otimes u_1) \cdot (u_2 \otimes 1) + (1 \otimes u_1) \cdot (1 \otimes u_2) \\ &= (u_1 u_2 \otimes 1) - (u_1 \otimes u_2) + (u_2 \otimes u_1) + (1 \otimes u_1 u_2) \\ &= -(u_1 \otimes u_2) + (u_2 \otimes u_1), \end{aligned}$$

que é não nula já que as classes  $u_1$  e  $u_2$  são l.l.

Assim,  $zcl_{\mathbb{K}}(G) \geq 2$  e pelo teorema 5.3.11,  $TC(G) \geq 3$ . Usando o teorema 5.2.4, concluímos também que  $TC(G) \leq 3$ , logo  $TC(G) = 3$  como queríamos demonstrar. ■

**Corolário 5.4.2.** Dada uma árvore  $\Gamma$  com ao menos um vértice essencial e com tamanho maior que 3, temos que  $TC(C(\Gamma, 2)) = 3$ .

Perceba que a única árvore com vértice essencial que excluímos com a condição acima é o grafo  $Y$ , já que  $C(Y, 2) \simeq \mathbb{S}^1$  que quando realizada como grafo tem 1-número de Betti igual a 1. Apesar disso, podemos ainda determinar a complexidade topológica dos  $n$ -espaços de configurações de tal grafo para qualquer  $n$ .

Usando o algoritmo descrito em 5.2.1, podemos concluir o seguinte resultado.

**Corolário 5.4.3.** Se  $X \simeq \mathbb{S}^1$  é o círculo, então  $TC(X) = 2$

Assim, temos a complexidade topológica do 2-espaço de configurações de  $Y$ . Para os outros espaços de configurações, podemos usar o teorema 4.3.9 para concluirmos o seguinte.

**Corolário 5.4.4.** Dados o grafo  $Y$  e  $n > 2$ , temos que  $TC(C(Y, n)) = 3$ .

Finalizamos a seção dando mais um exemplo de como o tratamento por cohomologia é capaz de estabelecer uma conta inferior para a complexidade topológica, agora das  $n$ -esferas.

**Exemplo 5.4.5.** Dada uma  $n$ -esfera  $\mathbb{S}^n$ , temos que  $TC(\mathbb{S}^n) \geq 1$  se  $n$  é par, e  $TC(\mathbb{S}^n) \geq 2$  se  $n$  é ímpar.

**Demonstração:** Seja  $u \in H^n(\mathbb{S}^n, \mathbb{K})$  a classe fundamental de  $\mathbb{S}^n$ , i.e. como  $H^n(\mathbb{S}^n, \mathbb{K}) = \mathbb{K}$ ,  $u$  é a classe correspondente à  $1 \in \mathbb{K}$ . Além disso, tome  $1 \in H^0(\mathbb{S}^n, \mathbb{K})$ . Assim, note que  $a = 1 \otimes u - u \otimes 1$  é um divisor de zero já que  $U_{\otimes}(a) = 1 \cup u - u \cup 1 = u - u = 0$ . Ademais, um outro divisor de zero é  $b = u \otimes u$  já que  $u \cup u = 0$ .

Portanto, note que  $a \cdot a = ((-1)^{n-1} - 1)u \otimes u$ . Logo,  $a^2 = -2b$  se  $n$  for par, e  $a^2 = 0$  se  $n$  for ímpar. Como  $a \cdot b = 0$ , temos que  $zcl_{\mathbb{K}}(\mathbb{S}^n)$  é maior que 2 caso  $n$  seja par e maior que 1 caso  $n$  seja ímpar. Juntando com o teorema 5.3.11, temos o que queríamos. ■

## Capítulo 6

# Estabilidade da complexidade topológica em árvores

Nesse capítulo, provaremos o resultado principal desta dissertação. Este resultado afirma que a complexidade topológica do  $n$ -espaço de configurações de uma árvore (dadas algumas condições simples) é a mesma para  $n$  suficientemente grande.

Para isso, faremos o uso da teoria de cohomologia singular dos espaços envolvidos e em particular utilizaremos um conjunto de classes de cohomologia que introduziremos agora para facilitar a leitura da prova do teorema.

### 6.1 Classes de cohomologia $u_{ij}$

Sejam  $\Gamma$  uma árvore com raiz  $u_0$  e  $n \geq m = m(\Gamma)$  no qual  $m(\Gamma)$  denota o número de vértices essenciais de  $\Gamma$ . Assim, para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$ , definimos o seguinte mapa contínuo

$$\begin{aligned} \Phi_i: C(\Gamma, n) &\rightarrow C(\Gamma, 2) \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_{2i-1}, x_{2i}). \end{aligned}$$

Além disso, seja  $\{v_i\}_{i=1}^m$  o conjunto dos vértices essenciais de  $\Gamma$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$ , fixe uma imersão  $\Gamma_i \subseteq \Gamma$  do grafo  $Y$  ao redor do vértice essencial  $v_i$ . Nesse caso, assuma sem perda de generalidade que  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$  são pequenos o suficiente para que  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$  caso  $i \neq j$ , isso não é difícil já que  $\Gamma$  é Hausdorff.

Com isso, defina o seguinte mapa,

$$\begin{aligned} \Psi: \prod_{i=1}^m C(\Gamma_i, 2) &\rightarrow C(\Gamma, 2m) \\ \left( (x_1, x_2), \dots, (x_{2m-1}, x_{2m}) \right) &\mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{2m-1}, x_{2m}). \end{aligned}$$

É fácil ver que o mapa acima é um homeomorfismo sobre a imagem e portanto tal imagem é homotopicamente equivalente ao  $m$ -toro. Isso se deve ao fato que o espaço  $C(\Gamma_i, 2)$  é homotópico ao círculo para todo  $1 \leq i \leq m$  como caso particular do teorema 4.3.3.

Assim, temos o seguinte diagrama comutativo,

$$\begin{array}{ccc} \prod_{j=1}^m C(\Gamma_j, 2) & \xrightarrow{\Psi} & C(\Gamma, 2m) \\ \pi_i \downarrow & & \downarrow \Phi_i \\ C(\Gamma_i, 2) & \xrightarrow{\iota_i} & C(\Gamma, 2) \end{array}$$

no qual  $\pi_i$  é a projeção no  $i$ -ésimo fator e o mapa  $\iota_i$  é a inclusão natural.

Usando novamente o teorema 4.3.3, temos que  $H_1(C(\Gamma, 2); \mathbb{K}) = H_1(Q_\Gamma; \mathbb{K}) = \mathbb{K}^b$ , no qual  $b$  é o 1-número de Betti  $b_1(Q_\Gamma)$  de  $Q_\Gamma$ . Pela definição de  $Q_\Gamma$ , temos que  $b$  é o número de segmentos entre  $A$  e  $B$  menos 1. Ou seja, cada coordenada de  $\mathbb{K}$  é associada a algum vértice essencial.

Assim, podemos definir  $\alpha_j \in H^1(C(\Gamma, 2), \mathbb{K}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{K}}(H_1(C(\Gamma, 2), \mathbb{K}))$  as classes de cohomologia, tais que  $\alpha_j(z_1, \dots, z_b) = \sum_i z_{j_i}$  nos quais as coordenadas  $j_i$  são associadas ao vértice essencial  $v_j$ . Desse modo, temos que  $(\iota_i)^*(\alpha_j) = 0$  se  $i \neq j$  e  $(\iota_i)^*(\alpha_j) \neq 0$  caso  $i = j$ . Isso pode ser observado facilmente ao notar que  $\forall k \in H_1(C(\Gamma_i, 2), \mathbb{K}) = \mathbb{K}$ ,  $\iota_i(k) = (z_1, \dots, z_b)$  no qual  $z_i = k$  se a coordenada  $k$  é associada ao vértice essencial  $v_i$  e zero caso contrário.

Com isso, definimos as seguintes  $m^2$  classes de cohomologia

$$u_{ij} = \Phi_i^*(\alpha_j),$$

com  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ .

Com o diagrama comutativo abaixo induzido pelo diagrama acima, temos que  $u_{ij}$  são classes de grau um.

$$\begin{array}{ccc} H^1(\prod_{j=1}^m C(\Gamma_j, 2), \mathbb{K}) & \xleftarrow{\Psi^*} & H^1(C(\Gamma, 2m), \mathbb{K}) \\ \pi_i^* \uparrow & & \uparrow \Phi_i^* \\ H^1(C(\Gamma_i, 2), \mathbb{K}) & \xleftarrow{\iota_i^*} & H^1(C(\Gamma, 2), \mathbb{K}) \end{array}$$

Da fato usaremos tais classes para provar o teorema da seguinte seção. Porém, para isso definiremos ainda uma classe de homologia em  $H_m(C(\Gamma, 2m); \mathbb{K})$  para avaliarmos algumas combinações das classes de cohomologia definidas e concluir sobre a nulidade de tais combinações.

Perceba que como o produto  $\prod^m C(\Gamma_i, 2)$  é homotópico ao  $m$ -toro  $\mathbb{T}^m$ , temos que  $H_m(\prod^m C(\Gamma_i, 2), \mathbb{K}) = \mathbb{K}$ . Sendo assim, defina  $z \in H_m(C(\Gamma, 2m), \mathbb{K})$  como  $z = \Psi_*(1)$ . Com isso, já temos o primeiro dos lemas de cálculo.

**Lema 6.1.1.** Dadas as classes  $u_{jj}$  com  $1 \leq j \leq m$ , temos

$$\left\langle \prod_{j=1}^m u_{jj}, z \right\rangle \neq 0.$$

**Demonstração:** Primeiramente, note que  $\Psi^*(\prod_{j=1}^m u_{jj}) \neq 0$ . Isso vem do fato que

$$H^m(\prod_{j=1}^m C(\Gamma_j, 2), \mathbb{K}) = H^m(T^m, \mathbb{K}) = \mathbb{K},$$

não tem divisores de zero e assim,  $\Psi^*(\prod_{j=1}^m u_{jj}) = \prod_{j=1}^m \Psi^*(u_{jj})$  é nulo se, e somente se  $\Psi^*(u_{jj})$  for nulo para algum  $j \leq m$ . Sabemos que isso não é verdade já que  $\Psi^*(u_{jj}) = (\Psi^* \circ \Phi_j^*)(\alpha_j) = (\pi_j^* \circ \iota_j^*)(\alpha_j)$  é não-nulo devido ao fato que  $\pi_j^*$  é um monomorfismo e que  $\iota_j^*(\alpha_j) \neq 0$ . Com isso em mãos, temos que:

$$\left\langle \prod_{j=1}^m u_{jj}, z \right\rangle = \left\langle \prod_{j=1}^m u_{jj}, \Psi_*(1) \right\rangle = \left\langle \Psi^* \left( \prod_{j=1}^m u_{jj} \right), 1 \right\rangle \neq 0. \quad (6.1)$$

■

Além disso, também podemos calcular outras avaliações úteis de classes de cohomologia em classes de homologia.

Note que se  $\sigma = (i_1, \dots, i_m)$  é uma sequência tal que  $i_k \in \{1, \dots, m\}$  (não necessariamente distintos), então podemos definir a classe  $u_\sigma = u_{1i_1} \cdots u_{mi_m}$ . Assim, temos o seguinte resultado.

**Lema 6.1.2.** Dada uma sequência  $\sigma \neq (1, 2, \dots, m)$ , então

$$\langle u_\sigma, z \rangle = 0.$$

**Demonstração:** Note que pelo diagrama comutativo acima, temos  $\Psi^*(u_{ij}) = \pi_i^*(l_i^*(\alpha_j))$ . Sabemos que se  $i \neq j$ , então  $l_i^*(\alpha_j) = 0$  e assim,  $\Psi^*(u_{ij}) = \pi_i^*(0) = 0$ . Logo,

$$\begin{aligned} \langle u_\sigma, z \rangle &= \langle u_{1i_1} \cdots u_{mi_m}, \phi_*(1) \rangle \\ &= \langle \phi^*(u_{1i_1} \cdots u_{mi_m}), 1 \rangle \\ &= \langle \phi^*(u_{1i_1}) \cdots \phi^*(u_{mi_m}), 1 \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Nessa mesma linha, perceba que dada uma permutação  $\tau = (j_1, j_2, \dots, j_m)$  do conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$ , temos um homeomorfismo  $L^\tau$  que permuta os índices, i.e.

$$\begin{aligned} L^\tau: C(\Gamma, 2m) &\rightarrow C(\Gamma, 2m) \\ (x_1, \dots, x_m) &\mapsto (x_{2j_1-1}, x_{2j_1}, \dots, x_{2j_m-1}, x_{2j_m}). \end{aligned}$$

Assim, podemos definir a classe  $z^\tau = L_*^\tau(z)$ . Com isso, temos esse último lema.

**Lema 6.1.3.** Dada uma sequência  $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$  e uma permutação  $\tau = (j_1, j_2, \dots, j_m)$ , então

$$\langle u_\sigma, z^\tau \rangle \neq 0 \text{ se, e somente se } \tau = \sigma. \quad (6.2)$$

**Demonstração:** Isso vem do simples cálculo abaixo,

$$\begin{aligned} \langle u_\sigma, z^\tau \rangle &= \langle u_\sigma, L_*^\tau(z) \rangle \\ &= \langle (L^\tau)^*(u_\sigma), z \rangle \\ &= \langle (L^\tau)^*\left(\prod_{k=1}^m u_{ki_k}\right), z \rangle \\ &= \left\langle \prod_{k=1}^m (L^\tau)^*(u_{ki_k}), z \right\rangle \\ &= \left\langle \prod_{k=1}^m (\Phi_k \circ L^\tau)^*(\alpha_{i_k}), z \right\rangle \\ &= \left\langle \prod_{k=1}^m \Phi_{j_k}^*(\alpha_{i_k}), z \right\rangle \\ &= \left\langle \prod_{k=1}^m u_{j_k i_k}, z \right\rangle. \end{aligned}$$

onde a última expressão é não-nula se, e somente se,  $j_k = i_k$  para todo  $k$ , i.e.  $\tau = \sigma$ . Além disso, na penúltima igualdade, usamos que  $\Phi_k \circ L^\tau = \Phi_{j_k}$ . ■

## 6.2 Teorema principal

**Teorema 6.2.1.** Sejam  $\Gamma$  uma árvore e  $n \in \mathbb{Z}$  tais que  $n \geq 2m(\Gamma) \geq 2$ . Além disso, no caso  $n = 2$  suponha também que  $\Gamma \not\cong Y$ . Assim,

$$TC(C(\Gamma, n)) = 2m(\Gamma) + 1,$$

no qual  $m(\Gamma)$  é o número de vértices essenciais de  $\Gamma$ .

**Observação 6.2.2.** Note que a condição  $2m(\Gamma) \geq 2$  implica que  $\Gamma$  tem ao menos um vértice essencial. Assim, se  $\Gamma$  não o tivesse, teríamos que  $\Gamma$  é um segmento por ser uma árvore. Nesse caso, teríamos que  $C(\Gamma, n)$  é desconexo (usando o exemplo 4.2.3) para todo  $n \geq 2$ .

Já a condição extra caso  $n = 2$  vem do fato que  $TC(C(Y, 2)) = 2 \neq 3 = 2m(Y) + 1$ . Ou seja, as restrições na hipótese do teorema não vêm de casos desconhecidos das complexidades topológicas, mas justamente do conhecimento de contraexemplos da expressão  $2m(\Gamma) + 1$ .

**Demonstração:** Inicialmente, assumiremos que  $m = m(\Gamma) \geq 2$  e denotaremos por  $X$  o espaço  $C(\Gamma, n)$ .

Usando o corolário 5.2.3, basta provarmos que  $TC(X) \geq 2m + 1$ . Para isso, note que como temos a desigualdade  $TC(X) > zcl_{\mathbb{K}}(X)$  do teorema 5.3.11, podemos mostrar apenas que  $zcl_{\mathbb{K}}(X) \geq 2m$ . Pela definição de  $zcl_{\mathbb{K}}(X)$ , então queremos  $2m$  classes de cohomologia no núcleo do produto- $cup_{\otimes}$ , os ditos *divisores de zero*, cujo produto (dado abaixo) das  $2m$  classes é não-nulo.

$$(u_1 \otimes v_1) \cdot (u_2 \otimes v_2) := (-1)^{|u_2||v_1|} u_1 u_2 \otimes v_1 v_2, \quad (6.3)$$

Primeiramente, note que para toda classe  $u \in H^1(X; \mathbb{K})$ , o elemento  $\bar{u} = u \otimes 1 - 1 \otimes u$  está no núcleo do produto- $cup_{\otimes}$ , já que  $\cup_{\otimes}(u \otimes 1 - 1 \otimes u) = u \cup 1 - 1 \cup u = u - u = 0$ . Assim, provaremos o resultado ao encontrar  $2m$  classes de cohomologia de grau um, cujas classes associadas tem produto não-trivial.

Para isso, podemos tomar as classes  $u_{11}, \dots, u_{mm}, u_{12}, \dots, u_{m-1m}, u_{m1}$  introduzidas na seção anterior. Assim, para cada uma dessas classes  $u_{ij}$  associamos um elemento  $\bar{u}_{ij}$  no núcleo de  $\cup_{\otimes}$  como discutido. Além disso, para simplificar a manipulação de tais classes, também denotaremos por  $u_{mm+1}$  e  $\bar{u}_{mm+1}$  as classes  $u_{m1}$  e  $\bar{u}_{m1}$ , respectivamente.

Por indução, é possível provar (lema 6.3.1) que temos a seguinte igualdade, onde  $S$  corre nos subconjuntos de  $\{1, \dots, m\}$ ,

$$\prod_{i=1}^m \bar{u}_{ii} \cdot \prod_{i=1}^m \bar{u}_{ii+1} = \sum_{S \subseteq \{1, \dots, m\}} \left\{ \pm \left( \bigcup_{i \in S} u_{ii} \cup \bigcup_{i \notin S} u_{ii+1} \right) \otimes \left( \bigcup_{i \notin S} u_{ii} \cup \bigcup_{i \in S} u_{ii+1} \right) \right\}. \quad (6.4)$$

Aqui, o símbolo  $\prod$  denota o produto 6.3, enquanto  $\cup$  denota o produto- $cup$ . Para provar que o produto é não-nulo, iremos avaliá-lo em uma classe de homologia e mostrar que a avaliação é não-nula. Em particular, avaliaremos no tensor  $z \otimes z^\tau$ , onde  $z \in H_m(C(\Gamma, 2m))$  tal que  $z = \Psi_*(1)$  e  $z^\tau = L_*^\tau(z)$  definidas na seção anterior com  $\tau$  sendo a permutação  $(12 \dots m)$ . Assim, note que

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_S \left\{ \pm \left( \bigcup_{i \in S} u_{ii} \cup \bigcup_{i \notin S} u_{ii+1} \right) \otimes \left( \bigcup_{i \notin S} u_{ii} \cup \bigcup_{i \in S} u_{ii+1} \right) \right\}, z \otimes z^\tau \right\rangle = \\ & \sum_S \left\langle \pm \left( \bigcup_{i \in S} u_{ii} \cup \bigcup_{i \notin S} u_{ii+1} \right), z \right\rangle \cdot \left\langle \left( \bigcup_{i \notin S} u_{ii} \cup \bigcup_{i \in S} u_{ii+1} \right), z^\tau \right\rangle. \end{aligned}$$

Como na expressão acima a avaliação a esquerda é nula para todo  $S \subsetneq \{1, 2, \dots, m\}$  (usando o lema 6.1.2), temos que a soma acima se simplifica para a parcela com  $S = \{1, 2, \dots, m\}$  logo temos a seguinte equação,

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_S \left\{ \pm \left( \bigcup_{i \in S} u_{ii} \cup \bigcup_{i \notin S} u_{ii+1} \right) \otimes \left( \bigcup_{i \in S} u_{ii} \cup \bigcup_{i \notin S} u_{ii+1} \right) \right\}, z \otimes z^\tau \right\rangle = \\ & \left\langle \pm \bigcup_{i=1}^m u_{ii}, z \right\rangle \cdot \left\langle \bigcup_{i=1}^m u_{ii+1}, z^\tau \right\rangle. \end{aligned}$$

Agora note que a avaliação à esquerda é não-nula (usando o lema 6.1.1) e a avaliação à direita também é diferente de zero (usando o lema 6.1.3). Como a avaliação se dá em um corpo, temos que o produto é diferente de zero e assim o produto 6.4 das  $2m$  classes  $\overline{u_{ii}}$  e  $\overline{u_{ij}}$  não pode ser trivial. Assim,  $zcl_{\mathbb{K}}(X) \geq 2m$ . Como discutido, finalmente temos que  $TC(X) \geq 2m + 1 = 2m(\Gamma) + 1$ .

Caso  $m = 1$ , então existe apenas um vértice essencial  $v$  em  $\Gamma$ . Se  $v$  tem valência 3, então  $\Gamma \simeq Y$  e assim de fato temos a identidade  $2m(\Gamma) + 1$  para  $n > 2$  como vimos na seção 5.4. Agora, se  $v$  tem valência maior que 3, então o grafo  $Q_\Gamma$  é tal que

$$b_1(Q_\Gamma) = \sum_{v'} (\eta(v') - 1)(\eta(v') - 2) - 1 > 1.$$

Sendo assim, pelo exemplo 5.4.1 temos que  $TC(Q_\Gamma) = 3$  e como  $C(\Gamma, 2) \simeq_H Q_\Gamma$  (usando o teorema 4.3.3), temos o que queríamos para  $n = 2$ . Já para o caso  $n > 2$ , basta simplesmente usarmos 5.1.5 e 4.3.8 e assim exaurimos todos os casos, concluindo a prova. ■

## 6.3 Lema auxiliar

**Lema 6.3.1.** Nas mesmas linhas da prova do teorema 6.2.1, temos que

$$\prod_{i=1}^m \overline{u_{ii}} \cdot \prod_{i=1}^m \overline{u_{ii+1}} = \sum_S \left\{ \pm \left( \bigcup_{i \in S} u_{ii} \cup \bigcup_{i \notin S} u_{ii+1} \right) \otimes \left( \bigcup_{i \notin S} u_{ii} \cup \bigcup_{i \in S} u_{ii+1} \right) \right\}.$$

**Demonstração:** Provaremos tal resultado por indução em  $m$ . Como assumimos que  $m \geq 2$ , para o caso base basta tomarmos  $m = 2$ .

Assim, perceba que

$$\begin{aligned}
 \prod_{i=1}^2 \overline{u_{ii}} \cdot \prod_{i=1}^2 \overline{u_{ii+1}} &= \overline{u_{11}} \cdot \overline{u_{22}} \cdot \overline{u_{12}} \cdot \overline{u_{21}}. \\
 &= \prod_{i=1}^2 (u_{ii} \otimes 1) - (1 \otimes u_{ii}) \cdot \prod_{i=1}^2 (u_{ii+1} \otimes 1) - (1 \otimes u_{ii+1}) \\
 &= \left( (u_{11}u_{22} \otimes 1) - (u_{11} \otimes u_{22}) - (u_{22} \otimes u_{11}) + (1 \otimes u_{11}u_{22}) \right) \cdot \\
 &\quad \left( (u_{12}u_{21} \otimes 1) - (u_{12} \otimes u_{21}) - (u_{21} \otimes u_{12}) + (1 \otimes u_{12}u_{21}) \right). \\
 &= (u_{11}u_{22}u_{12}u_{21} \otimes 1) - (u_{11}u_{22}u_{12} \otimes u_{21}) - (u_{11}u_{22}u_{21} \otimes u_{12}) + (u_{11}u_{22} \otimes u_{12}u_{21}) + \\
 &\quad - (u_{11}u_{12}u_{21} \otimes u_{22}) + (u_{11}u_{12} \otimes u_{22}u_{21}) + (u_{11}u_{21} \otimes u_{22}u_{12}) - (u_{11} \otimes u_{22}u_{12}u_{21}) + \\
 &\quad - (u_{22}u_{12}u_{21} \otimes u_{11}) + (u_{22}u_{12} \otimes u_{11}u_{21}) + (u_{22}u_{21} \otimes u_{11}u_{12}) - (u_{22} \otimes u_{11}u_{12}u_{21}) + \\
 &\quad + (u_{12}u_{21} \otimes u_{11}u_{22}) - (u_{11}u_{22}u_{12} \otimes u_{21}) - (u_{11}u_{22}u_{21} \otimes u_{12}) + (1 \otimes u_{11}u_{22}u_{12}u_{21}).
 \end{aligned}$$

Como  $H^k(C(\Gamma, n); \mathbb{K}) = H^k(Q_\Gamma; \mathbb{K}) = 0$  para todo  $k \geq m = 2$ , toda parcela com um produto de mais de duas classes de cohomologia é nula. Assim, a expressão acima pode ser simplificada drasticamente para a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 \prod_{i=1}^2 \overline{u_{ii}} \cdot \prod_{i=1}^2 \overline{u_{ii+1}} &= (u_{11}u_{22} \otimes u_{12}u_{21}) + (u_{11}u_{12} \otimes u_{22}u_{21}) + (u_{11}u_{21} \otimes u_{22}u_{12}) + \\
 &\quad + (u_{22}u_{12} \otimes u_{11}u_{21}) + (u_{22}u_{21} \otimes u_{11}u_{12}) + (u_{12}u_{21} \otimes u_{11}u_{22}).
 \end{aligned}$$

Finalmente, temos que  $u_{11}u_{12}$  e  $u_{22}u_{21}$  são nulas pela observação que

$$u_{ij}u_{ik} = \Phi_i^*(\alpha_j)\Phi_i^*(\alpha_k) = \Phi_i^*(\alpha_j\alpha_k),$$

que é nula já que  $\alpha_j\alpha_k \in H^2(C(\Gamma, n); \mathbb{K}) = 0$ . Assim, o produto acima se reduz ainda mais.

$$\begin{aligned}
 \prod_{i=1}^2 \overline{u_{ii}} \cdot \prod_{i=1}^2 \overline{u_{ii+1}} &= (u_{11}u_{22} \otimes u_{12}u_{21}) + (u_{11}u_{21} \otimes u_{22}u_{12}) + \\
 &\quad + (u_{22}u_{12} \otimes u_{11}u_{21}) + (u_{12}u_{21} \otimes u_{11}u_{22}).
 \end{aligned}$$

Como os subconjuntos de  $\{1, 2\}$  são  $\emptyset, \{1\}, \{2\}$  e  $\{1, 2\}$ , é fácil ver que a expressão acima é tal que

$$\prod_{i=1}^2 \overline{u_{ii}} \cdot \prod_{i=1}^2 \overline{u_{ii+1}} = \sum_S \left\{ \pm \left( \bigcup_{i \in S} u_{ii} \cup \bigcup_{i \notin S} u_{ii+1} \right) \otimes \left( \bigcup_{i \notin S} u_{ii} \cup \bigcup_{i \in S} u_{ii+1} \right) \right\},$$

com  $S$  correndo nesses quatro subconjuntos de  $\{1, 2\}$ . Portanto a expressão vale no caso base  $m = 2$ .

Assim, seguindo a indução, note que

$$\prod_{i=1}^m \overline{u_{ii}} \cdot \prod_{i=1}^m \overline{u_{ii+1}} = \prod_{i=1}^{m-1} \overline{u_{ii}} \cdot \prod_{i=1}^{m-1} \overline{u_{ii+1}} \cdot \pm \overline{u_{mm}} \cdot \pm \overline{u_{m1}}.$$

Portanto, pela hipótese indutiva, temos que

$$\prod_{i=1}^m \overline{u_{ii}} \cdot \prod_{i=1}^m \overline{u_{ii+1}} = \sum_S \left\{ \pm \left( \bigcup_{i \in S} u_{ii} \cup \bigcup_{i \notin S} u_{ii+1} \right) \otimes \left( \bigcup_{i \notin S} u_{ii} \cup \bigcup_{i \in S} u_{ii+1} \right) \right\} \cdot \pm \overline{u_{mm}} \cdot \pm \overline{u_{m1}},$$

no qual  $S$  corre nos subconjuntos de  $\{1, \dots, m-1\}$ . Nos valendo da distributividade de tal produto podemos primeiro calcular o produto em cada  $S$  e depois somar os resultados. Nessa linha, se denotarmos por  $P_S$  cada parcela da soma em  $S$  acima perceba que

$$\begin{aligned} P_S \cdot \pm \overline{u_{mm}} \cdot \pm \overline{u_{m1}} &= P_S \cdot (u_{mm} \otimes 1 - 1 \otimes u_{mm}) \cdot (u_{m1} \otimes 1 - 1 \otimes u_{m1}) \\ &= P_S \cdot (u_{mm} u_{m1} \otimes 1) + P_S \cdot (u_{mm} \otimes u_{m1}) + \\ &+ P_S \cdot (u_{m1} \otimes u_{mm}) + P_S \cdot (1 \otimes u_{mm} u_{m1}) \\ &= \left( \bigcup_{i \in S} u_{ii} \cup u_{mm} \cup \bigcup_{i \notin S} u_{ii+1} \cup u_{m1} \right) \otimes \left( \bigcup_{i \notin S} u_{ii} \cup \bigcup_{i \in S} u_{ii+1} \right) + \\ &\left( \bigcup_{i \in S} u_{ii} \cup u_{mm} \cup \bigcup_{i \notin S} u_{ii+1} \right) \otimes \left( \bigcup_{i \notin S} u_{ii} \cup \bigcup_{i \in S} u_{ii+1} \cup u_{m1} \right) + \\ &\left( \bigcup_{i \in S} u_{ii} \cup \bigcup_{i \notin S} u_{ii+1} \cup u_{m1} \right) \otimes \left( \bigcup_{i \notin S} u_{ii} \cup u_{mm} \cup \bigcup_{i \in S} u_{ii+1} \right) + \\ &\left( \bigcup_{i \in S} u_{ii} \cup \bigcup_{i \notin S} u_{ii+1} \right) \otimes \left( \bigcup_{i \notin S} u_{ii} \cup u_{mm} \cup \bigcup_{i \in S} u_{ii+1} \cup u_{m1} \right). \end{aligned}$$

Primeiramente, note que como nos interessamos na soma das parcelas a menos de sinal, já na segunda linha trocamos todos os  $\pm$  ou  $\mp$  por  $+$  apenas para indicar a soma. Isso não muda nada no resultado final, mas limpa a notação. Além disso, como  $H^k(C(\Gamma, n); \mathbb{K}) = 0$  para todo  $k > m = m(\Gamma)$ , temos que a primeira e quarta parcela se anulam já que temos um produto-cup com  $m+1$  classes de grau um. Portanto a expressão acima se reduz a:

$$\begin{aligned} P_S \cdot \pm \overline{u_{mm}} \cdot \pm \overline{u_{m1}} &= \left( \bigcup_{i \in S} u_{ii} \cup u_{mm} \cup \bigcup_{i \notin S} u_{ii+1} \right) \otimes \left( \bigcup_{i \notin S} u_{ii} \cup \bigcup_{i \in S} u_{ii+1} \cup u_{m1} \right) + \\ &\left( \bigcup_{i \in S} u_{ii} \cup \bigcup_{i \notin S} u_{ii+1} \cup u_{m1} \right) \otimes \left( \bigcup_{i \notin S} u_{ii} \cup u_{mm} \cup \bigcup_{i \in S} u_{ii+1} \right). \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned} P_S \cdot \pm \overline{u_{mm}} \cdot \pm \overline{u_{m1}} &= \left( \bigcup_{i \in S_1} u_{ii} \cup \bigcup_{i \notin S_1} u_{ii+1} \right) \otimes \left( \bigcup_{i \notin S_1} u_{ii} \cup \bigcup_{i \in S_1} u_{ii+1} \right) + \\ &\left( \bigcup_{i \in S_2} u_{ii} \cup \bigcup_{i \notin S_2} u_{ii+1} \right) \otimes \left( \bigcup_{i \notin S_2} u_{ii} \cup \bigcup_{i \in S_2} u_{ii+1} \right) \\ &= P_{S_1} + P_{S_2}, \end{aligned}$$

no qual  $S_1 = S \cup \{m\}$  e  $S_2 = S$ . Como todo subconjunto  $S$  de  $\{1, \dots, m-1\}$  gera dois subconjuntos  $S_1$  e  $S_2$  de  $\{1, \dots, m\}$ , aliado ao fato que todo subconjunto  $\overline{S}$  de  $\{1, \dots, m\}$  é dessa forma, temos que

$$\begin{aligned}
 \prod_{i=1}^m \overline{u_{ii}} \cdot \prod_{i=1}^m \overline{u_{ii+1}} &= \sum_S P_S \cdot \pm \overline{u_{mm}} \cdot \pm \overline{u_{m1}} \\
 &= \sum_S P_{S_1} + P_{S_2} \\
 &= \sum_{\overline{S}} P_{\overline{S}},
 \end{aligned}$$

no qual,  $\overline{S}$  corre nos subconjuntos de  $\{1, \dots, m\}$ . Assim, pela definição de  $P_{\overline{S}}$  de fato temos o que queríamos e

$$\prod_{i=1}^m \overline{u_{ii}} \cdot \prod_{i=1}^m \overline{u_{ii+1}} = \sum_S \left\{ \pm \left( \bigcup_{i \in S} u_{ii} \cup \bigcup_{i \notin S} u_{ii+1} \right) \otimes \left( \bigcup_{i \notin S} u_{ii} \cup \bigcup_{i \in S} u_{ii+1} \right) \right\}.$$

■

## 6.4 Generalizações

Note que com o teorema 6.2.1 e alguns outros resultados expostos, é conhecida a complexidade topológica dos  $n$ –espaços de configurações de quaisquer árvores nos quais  $n$  é maior ou igual ao dobro do número de vértices essenciais.

No caso onde  $n$  é menor que o dobro do número de vértices essenciais, existem alguns resultados conhecidos como em Knudsen 2022, 2023.

Além disso, nos trabalhos de Lütgehetmann e Recio-Mitter, Christ e outros, temos ainda alguns resultados acerca da complexidade topológica de espaços de configurações de grafos que não necessariamente são árvores.

Assim, mesmo o estudo da complexidade topológica mesmo dos espaços de configurações mais simples, como os grafos ainda é uma área ativa de pesquisa.

# Capítulo 7

## Apêndice: Teorias de (Co)Homologia

Nesse capítulo desenvolveremos certa parte das teorias de homologia e cohomologia singular, necessárias ao desenvolvimento da dissertação. O objetivo dessa seção é meramente a nominação dos conceitos que atravessaram o texto. Sendo assim, de forma alguma tal seção é completa ou sequer fornece a intuição por trás de tais teorias.

Para isso recomendamos o clássico *Algebraic Topology* de A. Hatcher bem como o livro *Homologia básica*, bibliografia padrão em língua portuguesa. Além disso, para uma exposição mais sucinta e 'organizada', o primeiro capítulo da dissertação de *Jong van Lier* também foi extremamente útil para estudo do autor e são recomendadas para esse propósito.

No que tange as demonstrações dos resultados aqui enunciados, todos podem ser encontrados na primeira bibliografia mencionada.

### 7.1 Complexos de Cadeia

**Definição 7.1.1 (Complexo de Cadeia).** Dado um anel  $R$ , definimos um  $R$ -complexo de cadeia  $C = (C_n, \partial_n)$ , como uma coleção  $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  de  $R$ -módulos e uma coleção de  $R$ -homomorfismos  $\{\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  satisfazendo a condição de cadeia, i.e.  $\partial_{n-1} \circ \partial_n \equiv 0$  para todo  $n$ .  $\square$

**Observação 7.1.2.** Seguiremos a convenção padrão de denotar os homomorfismos  $\partial_n$  de um complexo de cadeias apenas como  $\partial$  quando não houver ambiguidade, e assim a condição de cadeias é comumente denotada por  $\partial^2 \equiv 0$ .

É fácil ver que uma outra forma de definir a condição de cadeia é a seguinte.

**Proposição 7.1.3.** Se  $\{\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é uma coleção homomorfismos de  $R$ -módulos, então tal coleção satisfaz a condição de cadeias se, e somente se,  $\text{img } \partial_{n+1} \subseteq \ker \partial_n$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

Essa nova forma de escrever a condição de cadeias motiva a seguinte definição.

**Definição 7.1.4 (Ciclos e Bordos).** Dado um  $R$ -complexo de cadeias  $C = (C_n, \partial_n)$ , definimos o  $n$ -módulo de ciclos  $Z_n(C)$ , como o  $R$ -módulo  $\ker \partial_n$  e o  $n$ -módulo de bordos  $B_n(C)$ , como o  $R$ -módulo  $\text{img } \partial_{n+1}$ .  $\square$

Note então que a condição de cadeias nos garante que todos os  $n$ -módulos de bordos sejam sub-módulos dos  $n$ -módulos de ciclos. Assim, podemos fazer a seguinte definição.

**Definição 7.1.5 (Homologia).** Dado um  $R$ -complexo de cadeias  $C = (C_n, \partial_n)$ , definimos o  $n$ -módulo de homologia  $H_n(C)$  como o  $R$ -módulo quociente  $Z_n(C)/B_n(C)$ .  $\square$

Assim, é fácil ver que um complexo de cadeias define nos seus módulos de homologia um segundo complexo de cadeias.

**Proposição 7.1.6.** Se  $C = (C_n, \partial_n)$  é um  $R$ -complexo de cadeias, então a coleção  $H(C) = (H_n(C), (\partial_*)_n)$  é um complexo de cadeia com  $(\partial_*)_n : H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(C)$ , definido por  $(\partial_*)_n([z]) = [\partial_n(z)]$ .

Ou seja, dado um complexo de cadeias, podemos induzir um complexo de cadeias nos módulos de homologia. Uma outra forma de induzir construções nos módulos de homologia que serão úteis durante o texto é com a noção de morfismo entre complexos de cadeia.

**Definição 7.1.7 (Morfismo de Complexos de Cadeia).** Dados dois  $R$ -complexos de cadeias  $C = (C_n, \partial_n)$  e  $C' = (C'_n, \partial'_n)$ , definimos um *morfismo*  $f$  entre os complexos  $C$  e  $D$ , como uma coleção de  $R$ -homomorfismos  $f_n : C_n \rightarrow C'_n$  tais que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+2} & \xrightarrow{\partial_{n+2}} & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & C_{n-2} & \longrightarrow & \cdots \\ & & f_{n+2} \downarrow & & f_{n+1} \downarrow & & f_n \downarrow & & f_{n-1} \downarrow & & f_{n-2} \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & C'_{n+2} & \xrightarrow{\partial'_{n+2}} & C'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & C'_{n-1} & \xrightarrow{\partial'_{n-1}} & C'_{n-2} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

□

**Proposição 7.1.8.** Se  $f : C \rightarrow C'$  é um morfismo entre complexos de cadeias, então a coleção  $\{(f_*)_n : H_n(C) \rightarrow H_n(C')\}$  definida com  $(f_*)_n([z]) = [f_n(z)]$  é um morfismo entre os complexos  $H(C)$  e  $H(C')$ .

Uma noção dual aos complexos de cadeia são os complexos de cocadeia.

**Definição 7.1.9 (Complexo de Cocadeia).** Dado um anel  $R$ , definimos um  $R$ -complexo de cocadeia  $C = (C^n, \delta_n)$ , como uma coleção  $\{C^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  de  $R$ -módulos e  $R$ -homomorfismos  $\{\delta_n : C^n \rightarrow C^{n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  satisfazendo a condição de cocadeia, i.e.  $\delta_n \circ \delta_{n+1} \equiv 0$  para todo  $n$ . □

Analogamente ao caso dos complexos de cadeias, temos ainda os seguintes módulos.

**Definição 7.1.10 (Cociclos e cobordos).** Dado um complexo de cocadeia  $C = (C^n, \delta_n)$ , definimos o  $n$ -módulo de cociclos  $Z^n(C)$ , como o módulo  $\ker \delta_n$  e o  $n$ -módulo de cobordos  $B^n(C)$ , como o módulo  $\text{img } \delta_{n-1}$ . □

**Definição 7.1.11 (Cohomologia).** Dado um complexo de cocadeia  $C = (C^n, \delta_n)$ , definimos o  $n$ -módulo de cohomologia  $H^n(C)$  como o  $R$ -módulo quociente  $Z^n(C)/B^n(C)$ . □

Naturalmente, temos também uma noção de morfismos entre complexos de cocadeias. A construção é análoga aos morfismos de cadeia. Assim, apenas reproduziremos aqui os resultados sobre os morfismos induzidos nos módulos de cohomologia, aos moldes do que obtivemos para os módulos de homologia.

**Proposição 7.1.12.** Se  $C = (C^n, \delta_n)$  é um  $R$ -complexo de cocadeias, então a coleção  $H^*(C) = (H^n(C), (\delta^*)_n)$  é um complexo de cadeia com  $(\delta^*)_n : H^n(C) \rightarrow H^{n-1}(C)$  definido por  $(\delta^*)_n([z]) = [\delta_n(z)]$ .

**Proposição 7.1.13.** Se  $f : C \rightarrow C'$  é um morfismo entre complexos de cocadeias, então a coleção  $\{f_n^* : H^n(C) \rightarrow H^n(C')\}$  definida com  $f_n^*([z]) = [f_n(z)]$  é um morfismo entre os complexos  $H^*(C)$  e  $H^*(C')$ .

## 7.2 (Co)Homologia Singular

Nessa seção introduziremos a chamada teoria de homologia e cohomologia singular.

**Definição 7.2.1 (Simplexo singular).** Dados um inteiro  $n \geq 0$  e um espaço  $X$ , definimos um  $n$ -simplexo singular  $\sigma$  em  $X$ , como uma função contínua  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ . Além disso, denotamos por  $S_n(X)$  o conjunto de todos os  $n$ -simplexos singulares em  $X$ .  $\square$

Naturalmente, cada simplexo singular possui uma noção de dimensão dada pelo seu domínio.

**Definição 7.2.2.** Dado um  $n$ -simplexo singular  $\sigma$  em  $X$ , definiremos a *dimensão* de  $\sigma$  como o inteiro  $n$ .  $\square$

Assim, temos os módulos de simplexos singulares.

**Definição 7.2.3 (Módulo de simplexos singulares).** Dado um anel  $R$  e um inteiro  $n$ , definimos o  $n$ -módulo de simplexos singulares  $C_n(X; R)$  de  $X$  com coeficientes em  $R$ , como o  $R$ -módulo livre, livremente gerado pelos elementos de  $S_n(X)$ .  $\square$

Queremos construir uma cadeia de homomorfismos entre os módulos definidos acima. Para isso, usamos uma maneira natural de relacionar dois simplexos singulares de dimensões sucessivas em um dado espaço.

**Definição 7.2.4 (Operador de Face).** Dado um espaço  $X$  e dois inteiros  $n \geq i \geq 0$ , definimos o  $i$ -ésimo operador de face  $\partial_n^i$ , como a função  $\partial_n^i : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$  tal que:

$$\partial_n^i(\sigma) = \sigma^i,$$

onde  $\sigma^i$  é o mapa tal que  $\sigma^i(t_0, \dots, t_{n-1}) = \sigma(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_{n-1})$ .  $\square$

Assim, os homomorfismos entre os módulos são construídos da seguinte forma.

**Definição 7.2.5 (Homomorfismo de bordo).** Dado um inteiro  $n$ , definimos o  $n$ -homomorfismo de bordo  $\partial_n : C_n(X; R) \rightarrow C_{n-1}(X; R)$  do  $n$ -módulo de simplexos de  $X$  com coeficientes em  $R$  como o seguinte homomorfismo de  $R$ -módulos:

$$\partial_n \left( \sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma \sigma \right) = \sum_{\sigma \in S_n(X)} r_\sigma \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_n^i(\sigma).$$

$\square$

**Observação 7.2.6.** Apesar de cansativo, é possível mostrar que de fato os homomorfismo de bordo são homomorfismos de módulo. Tão importante quanto, também temos que a condição de cadeia é satisfeita na coleção de morfismos  $\{\partial_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Com a condição de cadeias, novamente podemos definir os módulos de ciclos, bordos e homologia. Destacaremos os módulos de homologia, agora singulares.

**Definição 7.2.7 (Ciclo, Bordo e Homologia Singular).** Dados um anel  $R$  e um inteiro  $n$ , definimos o  $n$ -módulo de homologia singular  $H_n(X; R)$  de  $X$  com coeficientes em  $R$  como o seguinte quociente de módulos:

$$H_n(X; R) = \frac{Z_n(X; R)}{B_n(X; R)},$$

no qual  $Z_n(X; R) = \ker \partial_n$  e  $B_n(X; R) = \text{img } \partial_{n-1}$  são chamados de  $n$ -módulo de ciclos e  $n$ -módulo de bordos de  $X$  com coeficientes em  $R$ , respectivamente.  $\square$

Note que fixando um  $R$ -módulo  $M$ , podemos construir um complexo de cadeias dual ao complexo de cadeias dos módulos de simplexos singulares.

**Definição 7.2.8 (Complexo de cocadeia singular).** Dados um anel  $R$ , um  $R$ -módulo  $M$  e um inteiro  $n$ , definimos o  $n$ -módulo de cosimplexos singulares  $C^n(X; M)$  de  $X$  com coeficientes em  $M$ , como o  $R$ -módulo  $\text{Hom}_R(C_n(X; R); M)$ . Além disso, definimos o  $n$ -homomorfismo de cobordos  $\delta_n$ , como o homomorfismo  $\delta_n : C^{n-1}(X; M) \rightarrow C^n(X; M)$  tal que  $\delta_n(\phi) = \phi \circ \partial_n$ .  $\square$

**Observação 7.2.9.** Analogamente ao caso dos homomorfismos de bordo, os homomorfismos de cobordo são de fato homomorfismos de módulos e eles satisfazem a condição de cocadeia  $\delta^2 \equiv 0$ .

Assim, temos os módulos de cohomologia singular.

**Definição 7.2.10 (Cociclos, Cobordos e Cohomologia Singular).** Dados um anel  $R$ , um  $R$ -módulo  $M$  e um inteiro  $n$ , definimos o  $n$ -módulo de cohomologia singular  $H^n(X; R)$  de  $X$  com coeficientes em  $M$  como o seguinte quociente de módulos:

$$H^n(X; M) = \frac{Z^n(X; M)}{B^n(X; M)},$$

no qual  $Z^n(X; M) = \ker \delta_n$  e  $B^n(X; M) = \text{img } \delta_n$  são chamados de  $n$ -módulo de cociclos e  $n$ -módulo de cobordos de  $X$  com coeficientes em  $M$ .  $\square$

Assim, usando as proposições 7.1.6 e 7.1.12, temos que o complexo de cadeias singular sempre induz um complexo de cadeias nos módulos de homologia e cohomologia singular. Além disso, temos que funções contínuas entre espaços induzem um morfismo entre os complexos de cadeias.

**Proposição 7.2.11.** Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma função contínua, então as coleções  $\{f_n : C_n(X; R) \rightarrow C_n(Y; R)\}$  e  $\{f'_n : C^n(X; M) \rightarrow C^n(Y; M)\}$  tais que

$$\begin{aligned} f_n(\sigma) &= f \circ \sigma \text{ e} \\ f'_n(\phi) &= \phi \circ f_n, \end{aligned}$$

são morfismos de complexos de cadeia e cocadeia, respectivamente para todo anel  $R$  e  $R$ -módulo  $M$ .

Naturalmente, então temos que uma função contínua entre dois espaços induz morfismos entre os módulos de homologia e cohomologia com a proposição 7.1.13. Nesses casos, o homomorfismo induzido pela composição de duas funções contínuas também pode ser escrito como a composição dos homomorfismos induzidos tanto no caso homológico quanto no caso cohomológico. Vejamos em detalhes.

**Proposição 7.2.12.** Se  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  são funções contínuas, então temos que os morfismos de homologia  $f_*, g_*$  e de cohomologia  $f^*, g^*$  são tais que

$$\begin{aligned} (g \circ f)_* &= g_* \circ f_*, \\ (g \circ f)^* &= f^* \circ g^*. \end{aligned}$$

Além disso, para todo  $n$ , anel  $R$  e  $R$ -módulo  $M$ , se  $id : X \rightarrow X$  é a identidade de  $X$ , então  $(id_*)_n$  e  $id_n^*$  são as identidades de  $H_n(X; R)$  e  $H^n(X; M)$ , respectivamente.

**Observação 7.2.13.** Aos já conhecedores isso significa que as teorias de homologia e cohomologia podem ser interpretadas como funtores entre a categoria dos espaços topológicos e a categoria dos  $R$ -módulos. Ainda mais, a homologia é um funtor covariante enquanto a cohomologia é contravariante. Não usaremos a forma categórica durante o texto, mas usaremos os termos (co)contravariante para caracterizar o comportamento dos mapas induzidos com respeito às composições como descrevemos acima.

Finalizamos essa seção relacionando a homotopia com a (co)homologia.

**Proposição 7.2.14.** Se  $f, g : X \rightarrow Y$  são mapas homotópicos, então os morfismos induzidos nos módulos de homologia e cohomologia são iguais, i.e.  $f_* = g_*$  e  $f^* = g^*$ .

**Proposição 7.2.15.** Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma equivalência homotópica, então  $(f_*)_n$  e  $(f^*)_n$  são isomorfismos de módulos para todo inteiro  $n$ .

## 7.3 Cohomologia Singular com coeficientes em DIP

Em muitos cenários podemos relacionar os módulos de cohomologia e homologia de maneira relativamente direta. Em particular, usaremos que dado um domínio de ideais principais temos o corolário 7.3.1 apresentado abaixo. Tal resultado é um importante corolário do dito teorema dos coeficientes universais para cohomologia. Como até o enunciado do mesmo envolve novas estruturas de álgebra homológica que não usaremos em nenhum outro lugar do texto, nem sequer o escreveremos aqui.

**Corolário 7.3.1.** Dados um espaço  $X$ , um domínio de ideais principais  $R$  e um  $R$ -módulo  $M$ , então temos que

$$H^n(X; M) \simeq \text{Hom}_R(H_n(X; R), M),$$

com isomorfismo dado por  $h([\phi])[z] = \phi(z)$ .

Assim, no contexto de domínios de ideais principais podemos pensar nas classes de cohomologia como homomorfismo entre as classes de homologia e o módulo dos coeficientes do módulo de cohomologia. Com essa interpretação conseguimos mais algumas relações úteis para o que se segue.

Primeiramente, definimos o seguinte homomorfismo.

**Definição 7.3.2.** Dados um domínio de ideais principais  $R$ , um  $R$ -módulo  $M$  e um espaço  $X$ , definimos o **homomorfismo de avaliação**  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H^n(X; M) \times H_n(X; R) \rightarrow M$  das classes de cohomologia de  $X$  com coeficientes em  $M$  como o seguinte homomorfismo.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle([\phi], [\sigma]) := \langle [\phi], [\sigma] \rangle = \phi(\sigma)$$

□

Note que tal mapa está bem definido, justamente pelo isomorfismo do corolário acima. Assim, temos o seguinte resultado.

**Proposição 7.3.3.** Dados um domínio de ideais principais  $R$ , um  $R$ -módulo  $M$  e um mapa  $f : X \rightarrow Y$ , então para todo inteiro  $n$ ,

$$\langle [\phi], f_*([\sigma]) \rangle = \langle f^*([\phi]), [\sigma] \rangle,$$

para todo  $[\phi] \in H^n(Y; M)$  e  $[\sigma] \in H_n(X; R)$ .

**Demonstração:** Usando apenas as definições, temos que:

$$\begin{aligned}
 \langle [\phi], f_*([\sigma]) \rangle &= \langle [\phi], [f_{\#}(\sigma)] \rangle \\
 &= \langle [\phi], [f(\sigma)] \rangle \\
 &= \phi(f(\sigma)) \\
 &= (\phi \circ f)(\sigma) \\
 &= \langle [\phi \circ f], [\sigma] \rangle \\
 &= \langle [f^{\#}(\phi)], [\sigma] \rangle \\
 &= \langle f^*([\phi]), [\sigma] \rangle.
 \end{aligned}$$

■

## 7.4 Anel de Cohomologia e o produto-cup

Durante o texto, usaremos uma estrutura de anel da soma direta de todos os  $n$ -módulos de cohomologia singular de um dado espaço. Nessa seção definimos a operação de multiplicação dessa estrutura, o chamado produto-cup. Além disso, trabalharemos alguns resultados básicos de tal anel.

Para isso, definiremos alguns mapas auxiliares.

**Definição 7.4.1.** Dados dois inteiros  $k, l$ , definimos os mapas  $\epsilon_k^{k+l}, \xi_k^{k+l} : \Delta^k \rightarrow \Delta^{k+l}$ , como os mapas

$$\begin{aligned}
 \epsilon_k^{k+l}(t_0, \dots, t_k) &= (t_0, \dots, t_k, 0, \dots, 0), \\
 \xi_k^{k+l}(t_0, \dots, t_k) &= (0, \dots, 0, t_0, \dots, t_k).
 \end{aligned}$$

□

Com isso, podemos definir o produto-cup.

**Definição 7.4.2.** Dado um espaço  $X$  e dois inteiros  $k, l$ , definimos o **produto-cup**  $\cup$ , como o homomorfismo de  $R$ -módulos  $\cup : H^k(X; R) \times H^l(X; R) \rightarrow H^{k+l}(X; R)$  tal que  $\cup([\phi], [\psi]) = [\phi \cup \psi]$ , onde o homomorfismo  $\phi \cup \psi$  é definido linearmente como:

$$(\phi \cup \psi)(\sigma) = \phi(\sigma(\epsilon_k^{k+l})) \cdot \psi(\sigma(\xi_l^{k+l})).$$

□

De fato o homomorfismo está bem definido. Antes de introduzir o anel de cohomologia, enunciaremos três úteis resultados.

**Proposição 7.4.3.** Dados um espaço  $X$  e um anel  $R$ , o produto-cup é um homomorfismo  $R$ -bilinear.

**Observação 7.4.4.** Como tal morfismo é bilinear, usaremos diversas vezes o homomorfismo induzido no produto tensorial e o chamaremos de produto-cup $_{\otimes}$ .

**Proposição 7.4.5.** Dados um espaço  $X$  e um anel  $R$ , então para quaisquer classes de cohomologia  $u, v$  com coeficientes em  $R$ , temos que  $u \cup v = (-1)^{|u||v|} v \cup u$ , no qual  $|u|$  é o nível de cohomologia de  $u$ , i.e.  $u \in H^{|u|}(X; R)$ .

**Proposição 7.4.6.** Dado um espaço  $X$ , um anel  $R$  e um mapa  $f : X \rightarrow Y$ , então dadas classes de cohomologia  $u$  e  $v$ , temos que  $f^*(u \cup v) = f^*(u) \cup f^*(v)$ .

Com tudo isso em mãos, podemos definir o anel de cohomologia.

**Definição 7.4.7.** Dado um espaço  $X$  e um anel  $R$ , definimos o **anel de cohomologia**  $H^*(X; R)$  de  $X$  com coeficientes em  $R$ , como a soma direta  $\bigoplus_i H^i(X; R)$  com multiplicação dada por

$$\sum_i u_i \cdot \sum_j v_j = \sum_{i,j} u_i \cup v_j.$$

□

**Observação 7.4.8.** Aqui é onde nosso anel não precisa ser comutativo. De fato, com a proposição 7.4.5 é fácil ver que a operação dada pelo produto-cup não precisa ser comutativa. Ainda assim chamaremos a estrutura definida acima de anel. Além disso, o anel de cohomologia é uma  $R$ -álgebra já que o produto-cup é bilinear.

Finalizamos tal seção introduzindo uma segunda noção de produto, mas no produto tensorial de anéis de cohomologia.

**Definição 7.4.9.** Dados dois espaços  $X$  e  $Y$  e um anel  $R$ , definimos o **produto-cruzado**  $\mu$ , como o homomorfismo de  $R$ -módulos  $\mu : H^*(X; R) \otimes H^*(Y; R) \rightarrow H^*(X \times Y; R)$  tal que  $u \otimes v \mapsto u \times v$ , no qual  $u \times v = \pi_1^*(u) \cup \pi_2^*(v)$  onde  $\pi_i$  são as projeções canônicas no  $i$ -ésimo fator. □

Assim, definimos a seguinte estrutura.

**Definição 7.4.10.** Dados dois espaços  $X$  e  $Y$  e um anel  $R$ , definimos a operação

$$\cdot : H^*(X; R) \otimes H^*(Y; R) \times H^*(X; R) \otimes H^*(Y; R) \rightarrow H^*(X; R) \otimes H^*(Y; R),$$

como  $(u_1 \otimes v_1) \cdot (u_2 \otimes v_2) := (-1)^{|v_1||u_2|} (u_1 \cup u_2) \otimes (v_1 \cup v_2)$ . □

A vantagem dessa operação é que assim o produto-cruzado pode ser visto como um homomorfismo de anéis.

**Proposição 7.4.11.** Dados dois espaços  $X$  e  $Y$  e um anel  $R$ , o produto-cruzado  $\mu$  é um homomorfismo de anéis.

É importante notar que o produto-cup e o produto-cruzado são diretamente relacionados.

**Proposição 7.4.12.** Se  $u$  e  $v$  são classes de cohomologia, então  $\Delta^*(u \times v) = u \cup v$ .

Finalizamos essa seção com um resultado devido à Künneth que em anéis de cohomologia com coeficientes em um corpo, o produto-cruzado torna-se um isomorfismo de anéis.

**Proposição 7.4.13.** Se  $X$  e  $Y$  são espaços e  $\mathbb{K}$  é um corpo, então o produto-cruzado  $\mu : H^*(X; \mathbb{K}) \otimes H^*(Y; \mathbb{K}) \rightarrow H^*(X \times Y; \mathbb{K})$  é um isomorfismo.

## 7.5 (Co)Homologia Simplicial

Uma segunda teoria de (co)homologia possível em espaços topológicos é a chamada (co)homologia simplicial. Em verdade, tal teoria é possível apenas em complexos simpliciais e portanto, em nossos grafos.

De fato, o único intuito dessa seção é apresentar uma outra forma de calcular a homologia singular de tais grafos, junto do fato que para complexos simpliciais, ambas as teorias de homologia coincidem. Sendo assim, essa seção será ainda mais direta que as anteriores. Antes disso, faremos uso de uma noção de orientação dos simplexes que introduziremos a seguir.

**Definição 7.5.1.** Dado um  $n$ -simplexo  $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$ , uma **direção** de  $\sigma$  é uma ordenação do seu conjunto de vértices.  $\square$

Note que dado um  $n$ -simplexo  $\sigma$ , temos  $n!$  direções possíveis de  $\sigma$  dada pelas permutações da ordem dos  $n$  vértices de  $\sigma$ . Assim, para simplexes de dimensão maior que dois, não temos uma noção natural de direção oposta. Para isso, introduzimos a seguinte noção de equivalência.

**Definição 7.5.2.** Dado um  $n$ -simplexo  $\sigma$ , definimos a relação  $\sim$  no conjunto das direções de  $\sigma$  de modo que  $x \sim y$  se existe uma permutação par da ordenação de  $x$  que seja igual à  $y$ .  $\square$

**Observação 7.5.3.** Usando apenas a teoria elementar de grupos, é possível mostrar que essa relação define uma relação de equivalência. Assim, confundiremos tanto a classe de uma orientação com a orientação em si e denotaremos por  $(v_0, \dots, v_n)$  uma orientação do simplexo  $[v_0, \dots, v_n]$ .

Com isso podemos introduzir os módulos de simplexes euclidianos.

**Definição 7.5.4.** Dado um complexo simplicial  $K$ , um anel  $R$  e um inteiro  $n \geq 0$ , definimos o  $n$ -**módulo de simplexes**  $C_n(X; R)$  de  $K$  com coeficientes em  $R$ , como o  $R$ -módulo livre, livremente gerado pelos  $n$ -simplexes orientados de  $K$ .  $\square$

Naturalmente temos os seguintes homomorfismos.

**Definição 7.5.5.** Dado um complexo simplicial  $K$ , um anel  $R$  e um inteiro  $n \geq 0$ , definimos o  $n$ -**homomorfismo de bordo**  $\partial_n$  de  $C_n(X; R)$ , como o homomorfismo  $\partial_n : C_n(X; R) \rightarrow C_{n-1}(X; R)$  tal que:

$$\partial_n(\sigma) \mapsto \sum_{j=0}^n (-1)^j (v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m),$$

estendido linearmente no qual  $\sigma_i = [v_0, \dots, v_n]$ .  $\square$

Assim, podemos checar que vale a condição de cadeias nessa coleção de homomorfismo e portanto temos o seguinte resultado.

**Proposição 7.5.6.** Se  $R$  é um anel e  $K$  é um complexo simplicial, então a coleção  $(C_n(K; R), \partial_n)$  é um complexo de cadeias.

Portanto, temos naturalmente os módulos de bordo, ciclos e de homologia. Com isso, temos o seguinte resultado.

**Proposição 7.5.7.** Se  $R$  é um anel e  $K$  é um complexo simplicial  $n$ -dimensional, então  $H_n(K; R) = Z_n(K; R)$  e  $H_m(K; R) = 0$  para todo  $m \geq n$ .

**Demonstração:** Note que por definição de  $C_m(K; R)$ , temos que  $C_m(K; R) = 0$  para todo  $m \geq 0$ . Assim, para tais valores de  $m$ , tanto os  $m$ -módulos de ciclos, bordos e homologias são triviais. Além disso, como  $C_{n+1}(K; R) = 0$ , temos que  $B_n(K; R) = 0$  e portanto  $H_n(G; R) = Z_n(K; R)$ . ■

**Corolário 7.5.8.** Se  $R$  é um anel e  $G$  é um grafo, então  $H_1(G; R) = Z_1(G; R)$ .

Uma importante vitória da homologia simplicial é que injeções de grafos induzem um monomorfismo entre os módulos de homologia. Vejamos.

**Proposição 7.5.9.** Se  $R$  é um anel e  $f : K \rightarrow L$  é uma inclusão de complexos entre dois complexos de dimensão  $n$ , temos que  $f_n : H_n(K; R) \rightarrow H_n(L; R)$  é um monomorfismo.

**Demonstração:** Como ambos os complexos têm dimensão  $n$ , sabemos que  $H_n(K; R) = Z_n(K; R)$  e  $H_n(L; R) = Z_n(L; R)$ . Assim,  $f_n([\sigma]) = f(\sigma)$  e portanto como  $f$  é injetiva,  $f_n(\sum_{i \in I} r_{\sigma_i} [\sigma_i]) = 0$  se, e somente se,  $r_{\sigma_i} = 0$  para todo  $\sigma_i$  com  $i \in I$ . Ou seja,  $f_n$  se anula somente no elemento  $0 \in H_n(K; R)$ . ■

Finalmente, concluímos esse capítulo com o seguinte resultado sobre a conexão entre os módulos de homologia simplicial e singular.

**Teorema 7.5.10.** Seja  $K$  um complexo simplicial orientado e  $R$  um anel. Assim, os módulos de homologia singular e simplicial, ambos com coeficientes em  $R$  são iguais.

Note que o 1-módulo de homologia simplicial de um grafo é um módulo livre. Um poderoso corolário do teorema acima é que o *rank* do módulo de homologia de um grafo é de caráter simplicial, especificamente temos o seguinte resultado.

**Proposição 7.5.11.** Se  $G$  é um grafo, então  $H_n(G; R) = R^{b_n(G)}$ , no qual  $b_n(G)$  é o  $n$ -ésimo número de Betti de  $G$ .

## Bibliografia

- Abrams, A.D. (2000). *Configuration Spaces and Braid Groups of Graphs*. University of California, Berkeley.
- Brown, R. (2006). *Topology and Groupoids*. Groupoids.
- Farber, Michael (2005). "Collision Free Motion Planning on Graphs". Em: *Algorithmic Foundations of Robotics VI*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 123–138.
- (2017). "Configuration Spaces and Robot Motion Planning Algorithms". Em: *Combinatorial and Toric Homotopy*. World Scientific, pp. 263–303.
- (2003). "Topological Complexity of Motion Planning". Em: *Discrete and Computational Geometry* 29.2, pp. 211–221.
- Ghrist, Robert (1999). *Configuration spaces and braid groups on graphs in robotics*. arXiv: [math/9905023](https://arxiv.org/abs/math/9905023) [math.GT].
- Hatcher, A. (2002). *Algebraic Topology*. Algebraic Topology. Cambridge University Press.
- Isaacs, I.M. (2009). *Algebra: A Graduate Course*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society.
- James, I.M. (1978). "On category, in the sense of Lusternik–Schnirelmann". Em: *Topology* 17.4, pp. 331–348.
- Jong van Lier, Matias de (2021). *Topological Complexity and the Lusternik–Schnirelmann Category*. Tese de Doutorado; Universidade de Sao Paulo.
- Knudsen, Ben (2023). *On the stabilization of the topological complexity of graph braid groups*. arXiv: [2302.04346](https://arxiv.org/abs/2302.04346).
- (2022). *The topological complexity of pure graph braid groups is stably maximal*. arXiv: [2206.06268](https://arxiv.org/abs/2206.06268).
- Latombe, Jean-Claude (1991). *Robot Motion Planning*. USA: Kluwer Academic Publishers.
- Lebesgue, H. (1902). "Intégrale, Longueur, Aire". Em: *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 7.1, pp. 231–359.
- Lima, E.L. (2009). *Homologia básica*. Projeto Euclides. IMPA.
- Lütgehetmann, Daniel e David Recio-Mitter (2019). *Topological complexity of configuration spaces of fully articulated graphs and banana graphs*. arXiv: [1806.00659](https://arxiv.org/abs/1806.00659).
- Munkres, James R. (2000). *Topology*. 2ª ed. Prentice Hall, Inc.
- Schwarz, A. S. (1966). "On the genus of a fiber space". Em: *American Mathematical Society Translations* 55, pp. 49–140.

# Índice Remissivo

- Algoritmo de Planej. de Movimento, 46
- Ação de Grupos, 19
  - \_\_\_\_\_ contínua, 20
  - \_\_\_\_\_ descontínua, 21
  - \_\_\_\_\_ por permutação, 34
- Estabilizador, 20
- Órbita, 20
  
- Cohomologia Singular, 66
  - Cobordos, 66
  - Cociclos, 66
- Complexidade Topológica, 47
- Complexo de Cadeia, 63
  - Ciclos & Bordos, 63
  - Homologia, 63
  - Morfismo, 64
- Complexo de Cocadeia, 64
  - Cociclos & Cobordos, 64
  - Cohomologia, 64
- Complexo Simplicial, 28
  - Subcomplexo, 29
  - Subdivisão, 29
  
- Dimensão
  - complexo Simplicial, 29
  - de Lebesgue, 18
  - simplexo euclidiano, 28
  - simplexo padrão, 27
  - simplexo singular, 65
- Divisores de Zero
  - Comprimento, 53
  - Ideal, 53
  
- Espaço de Caminhos, 23
- Espaço de Configurações, 33
  - não-ordenado, 34
  - ordenado, 33
- Espaço de Funções, 22
- Espaço de Órbitas, 20
  
- Fibração, 19
  
- Fibração de Caminhos, 23
  
- Grafo, 30
  - \_\_\_\_\_ Cíclico, 31
  - \_\_\_\_\_ Cíclico Padrão, 31
  - \_\_\_\_\_ Y, 31
- Aresta, 30
  - Ascendente, 39
- Ordem, 30
- Raíz, 31
- Segmento, 31
- Tamanho, 30
- Vértice
  - \_\_\_\_\_ Essencial, 30
  - Valência, 30
- Árvore, 31
  
- Gênero de Schwarz, 51
  
- Homologia Singular, 65
  - Módulo Singular, 65
  - Bordos, 65
  - Ciclos, 65
  - Homomorfismo de bordo, 65
  
- Operador de Face, 65
- Ordem de uma cobertura, 18
  
- Paracompacidade, 17
- Partição da Unidade, 17
  - \_\_\_\_\_ subordinada à uma cobertura, 18
- Propriedade de levantamento, 18
  - \_\_\_\_\_ de caminhos, 19
  - \_\_\_\_\_ por homotopias, 19
- Propriedades Locais
  - Compacidade, 16
  - Subespaço Fechado, 17
  - Cobertura Finita, 17
  - Conexidade, 16
  - Conexidade por caminhos, 16
  - Contratibilidade, 17

## Simplexo

- \_\_\_\_\_ Euclidiano, 28

- Face, 28

- Vértices, 28

- \_\_\_\_\_ Padrão, 27

- \_\_\_\_\_ singular, 65

Topologia do Compacto-Aberto, 22