

**Engenharia de estados espaciais de dimensões
híbridas**

Paula D'Avila Machado

Março de 2016



Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG
Instituto de Ciências Exatas - ICEx
Programa de Pós Graduação em Física

Engenharia de estados espaciais de dimensões híbridas.

Paula D'Avila Machado

Orientador: Prof. Dr. Sebastião José Nascimento de Pádua
Co-orientador: Prof. Dr. Leonardo Teixeira Neves

Dissertação apresentada ao departamento de Física da Universidade Federal de Minas Gerais, para a obtenção de Título de Mestre em Física
Área de Concentração: Óptica e Informação Quântica.

Março de 2016

“Pois os seus atributos invisíveis, o seu eterno poder e divindade, são claramente vistos desde a criação do mundo, sendo percebidos mediante as coisas criadas...” *Romanos: 1 : 20*

Dedico esse trabalho aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço, antes de tudo, ao Deus criador, não só por ter dado a nós (cientistas) muitas possibilidades de diversão e trabalho, mas principalmente por ter me reconciliado com Ele mesmo por meio de Jesus Cristo, mestre e Senhor da minha vida.

Agradeço aos meus pais, Ângela e Marcos, por todo amor, apoio, dedicação e paciência; por terem me ensinado, dando exemplo, o caminho da vida, no qual andarei eternamente.

Ao meu irmão, André, juntamente com minha cunhada, Fernanda, e meu sobrinho, Gustavo, pelo apoio e incentivo constante.

Ao meu noivo, Renan, por estar sempre presente com todo seu amor, aliviando o peso da academia, sendo meu porto seguro e meu melhor amigo, com quem compartilho sonhos e planos tanto para o agora quanto para o amanhã, em nossa futura família.

Aos meus queridos irmãos e amigos da Igreja, por toda comunhão e convivência, por meio das quais sou edificada e me mantenho de pé.

Ao meu orientador, Sebastião, pelo aprendizado, pela excelente convivência dos últimos quatro anos, por sua confiança e paciência, muita paciência...

Ao meu co-orientador, Leonardo, pelas contribuições e pela disposição em ajudar.

Aos colegas do Grupo de Óptica Quântica, pelo auxílio profissional, e pela convivência que fizeram dos últimos anos bons tempos...

Ao CNPq, Fapemig e CAPES pela bolsa de mestrado e apoio financeiro ao Grupo de Óptica Quântica (EnLight).

Resumo

A Conversão Paramétrica Descendente (CPD) tem sido, nas últimas décadas, o principal meio de produção de estados quânticos fotônicos e emaranhados, geralmente bipartidos. Além disso, a discretização (dentro de certo intervalo) do momento transversal dos pares de fótons gerados pela CPD constitui a principal ferramenta para a produção de qudits emaranhados. Tal discretização, em conjunto com as diferentes formas de manipulação experimental dos feixes produzidos na CPD, constituem os diferentes métodos de engenharia de estados de fenda, os quais são bem estabelecidos apenas para estados de dimensão tipo $n \times n$. Nesta dissertação, é feito um estudo de cada um desses métodos, aplicados à produção de estados 2×2 e, como ponto principal do trabalho, são apresentadas suas respectivas extensões à produção de estados 2×3 , visando também a generalização para qualquer dimensão $n \times m$. Chamamos esses estados quânticos discretos, de duas partes com dimensões diferentes para cada uma das partes, de estados de dimensão híbrida.

Palavras-chave: Emaranhamento, sistema bipartido, Conversão Paramétrica Descendente, estados de fenda.

Abstract

In recent decades, Parametric Down Conversion (PDC) has been the main method of production of entangled photonic quantum states, most often bipartite. In addition, the discretization (within a certain range) of transversal momentum of the photon pair generated by PDC is the main tool for producing entangled qudits. Such discretization, in conjunction with different methods of experimental manipulation of photon beams produced in PDC, constitutes the various methods of engineering of slit states, which are well established only to states with dimensionality of the kind $n \times n$. In this master's thesis, a study is presented of each of those methods of production applied to states of the form 2×2 . As the central point of the work, is also presented their extension to case 2×3 , aiming the generalization to any dimensionality of the form $N \times M$. These two party discrete quantum states with different dimensions in each party is called Hybrid Dimension Quantum State.

Keywords: Entanglement, bipartite system, Parametric Down Conversion, slits states.

Sumário

Resumo	I
Abstract	II
1 Introdução	1
2 Conceitos e ferramentas importantes	4
2.1 Emaranhamento e os estados de dimensão $n \times m$	4
2.1.1 Como é um estado emaranhado?	5
2.1.2 Estados mistos	6
2.1.3 Quantificando o emaranhamento	7
2.2 Estados de fenda	8
2.2.1 Fótons emaranhados em momento transversal	8
2.2.2 Obtendo um estado discreto	11
2.3 As ferramentas da óptica de Fourier	13
2.3.1 Elementos básicos	13
2.3.2 Sistemas ópticos tratados como operadores	15
3 Produzindo estados de fenda 2×2	18
3.1 Analisando estados 2×2	18
3.2 Discretizando o momento transversal do bifóton na saída do cristal	19
3.3 Manipulando o perfil transversal do bifóton	20
3.3.1 Telescópio não confocal	20
3.3.2 Lente esférica montada em $f_l - f_l$	22
3.4 Manipulando o perfil transversal do <i>pump</i> antes da CPD	28
3.5 Detecção do estado	33
4 A produção dos estados 2×3	38
4.1 Estados 2×3	38
4.1.1 Manipulando o perfil transversal do bifóton, usando dois conjuntos de fendas diferentes	39
4.1.2 Manipulando o perfil transversal do <i>pump</i>	41

4.2	Detecção dos estados	47
4.3	Extensão para estados de dimensão maior	52
4.4	Proposta experimental	54
5	Conclusões	58
A	Cálculo da propagação do bifóton usando notação de operadores	60
A.1	Bifóton passando pelo telescópio	60
A.2	Bifóton passando por uma lente esférica - configuração f-f	62
B	Cálculo da probabilidade de detecção em coincidências	64
B.1	Probabilidade de detecção em coincidências com os dois detectores no plano de Fourier	64
B.2	Probabilidade de detecção em coincidências com um detector aberto e o outro sendo varrido (Probabilidade Marginal)	66
B.3	Probabilidade de detecção em coincidências para um dos detectores no plano de Fourier e outro no plano de imagem ("detecção mista")	69
	Referências Bibliográficas	73

Lista de Figuras

2.1	Direções nas quais os fótons gêmeos podem ser emitidos.	10
2.2	Discretização do caminho perfil do bifóton.	11
2.3	Representação matemática do conjunto de fendas múltiplas.	12
2.4	Perfil transversal de um campo propagado a uma distância $(z - z_0)$	15
2.5	Relações entre os operadores.	17
3.1	Geração de estados de correlação simétrica com uma fenda dupla na saída do cristal.	19
3.2	Setup para geração de qudits espaciais usando um telescópio não confocal.	20
3.3	Razão $R = \xi\left(\frac{d}{2M}, 0\right) / \xi(0, 0)$	26
3.4	Razão R em função da meia separação entre as aberturas para determinado comprimento do cristal.	26
3.5	Razão $R' = \tilde{E}\left(\frac{kd}{2f_i}\right) / \tilde{E}(0, 0)$	27
3.6	Razão R' em função da meia separação entre as aberturas para um feixe gaussiano de largura $l = 500\mu\text{m}$	27
3.7	Razão R' em função da meia separação entre as aberturas para um feixe gaussiano de largura $l = 500\mu\text{m}$	28
3.8	Representação da convolução de duas funções	29
3.9	Setup para a produção do estado de dois qubits anti-simétrico.	30
3.10	Ilustração da correlação entre os fótons no estado de dois qubits anti-simétrico.	31
3.11	Setup para a produção do estado de dois qubits simétrico.	31
3.12	Setup para a detecção dos estados de fenda, gerados pelos métodos estudados.	34
3.13	Diferentes tamanhos de perfis usados para a produção de estados de dois qubits com diferentes graus de emaranhamento.	36
3.14	Padrão de interferência para os estados de dois qubits com diferentes graus de emaranhamento com o detector D_s fixo.	36
3.15	Padrão de interferência para os estados de dois qubits com diferentes graus de emaranhamento com o detector D_i fixo.	37

4.1	Montagem da preparação de estados 2×3 usando um telescópio não con-	
	focal.	39
4.2	Razão entre os coeficientes, $R = \xi\left(\frac{d}{2M}\right) / \xi(0)$ (Estados 2×3).	41
4.3	Razão R em função da meia separação entre as aberturas (estados 2×3).	41
4.4	Razão entre os coeficientes, R' (estados 2×3).	42
4.5	Razão R' em função da meia separação entre as aberturas para um feixe	
	gaussiano de largura $l = 500\mu\text{m}$ (estado 2×3).	42
4.6	Razão R' em função da meia separação entre as aberturas para um feixe	
	gaussiano de largura $l = 100\mu\text{m}$ (estado 2×3).	43
4.7	Representação da correlação entre as partes dos estados 2×3 gerados	
	pela manipulação do perfil após depois do cristal.	43
4.8	Diagrama dos coeficientes do estado geral 2×3	44
4.9	Quantificadores de emaranhamento do estado $ \tau_{II}\rangle$	45
4.10	Representação do comportamento das coincidências na detecção mista	
	do estado $ \psi_{me}\rangle$	52
4.11	Diagrama dos coeficientes do estado geral 3×4	53
4.12	Representação da correlação entre os fótons nos estados 3×4	53
4.13	Setup da proposta experimental para a geração dos estados de dimensão	
	híbrida.	55
4.14	Perfis do feixe de bombeamento necessários à produção dos estados 2×3	
	estudados.	56
4.15	Relação entre as posições dos pontos onde o feixe de bombeamento é	
	manipulado e a posição das aberturas.	57

Capítulo 1

Introdução

A mecânica quântica é, certamente, uma área da Física que, desde seu advento, tem causado espanto e admiração por parte da comunidade científica (e também de leigos que entram em contato com suas surpreendentes conclusões). A partir do desenvolvimento de explicações para resultados experimentais, estranhos à percepção da física clássica, comportamentos ainda mais estranhos foram previstos pela teoria [1], e verificados experimentalmente ao longo dos anos [2, 3]. Em sistemas de apenas uma partícula (unipartidos) podemos citar, como exemplos desses estranhos comportamentos, a "dualidade" onda-partícula, as relações de incerteza e os estados de superposição dos sistemas quânticos de dois níveis, chamados de qubits. Para sistemas constituídos de duas partes (bipartidos), o fenômeno que mais provocou discussões e que tem sido o assunto central de muitos trabalhos é o emaranhamento. Uma correlação própria de estados quânticos, de um sistema multipartido, que não podem ser escritos como um produto dos estados das partes, sendo que tal correlação não pode ser reproduzida ou criada por meio de Operações Locais e Comunicação Clássica [4]. Apesar de num primeiro momento ter sido motivo de assombro e dissensões entre grandes cientistas, o emaranhamento passou a ter potencial para diferentes aplicações, sendo hoje em dia identificado como um recurso à informação quântica.

A possibilidade da utilização dos qubits, e do emaranhamento que pode existir no estado de muitos qubits, na transmissão de informação levanta a questão de como esses bits quânticos podem ser produzidos. Como exemplos de sistemas de dois níveis temos: uma partícula de spin meio, cuja projeção em determinada direção pode assumir dois valores; um feixe de fótons com polarização bem definida e que pode ser decomposta em duas componentes perpendiculares (horizontal e vertical, circular à direita ou à esquerda...). Dentro desse contexto (o dos fótons), o fenômeno da Conversão Paramétrica Descendente (CPD) tem se mostrado um dos principais meios de obtenção de estados quânticos bipartidos e emaranhados, já que na CPD são produzidos, por meio da incidência de um laser sobre um cristal não linear, pares de fótons em estados emaranhados tanto em polarização quanto em momento angular. Além disso, esses pares

de fótons (também chamados de fótons gêmeos) são emaranhados em momento transversal, o que leva a uma correlação (quântica) entre as posições onde esses fótons são detectados num determinado plano. Como veremos melhor ao longo dessa dissertação, o caráter aleatório da região espacial onde a conversão, propriamente dita, acontece dá origem a um contínuo de possibilidades para o momento transversal dos fótons, ou seja, os fótons gêmeos estão em um estado emaranhado, espacialmente, codificado numa variável contínua.

A discretização do momento transversal dos fótons tem sido feita por meio de fendas colocadas no caminho dos mesmos, o que nos dá estados de dois qubits (no caso de fendas duplas) emaranhados em caminho, os quais chamamos de estados de fenda. A grande vantagem dos estados de fenda é a possibilidade de produção de estados quânticos de vários níveis, os qudits, que são, em certas situações, mais úteis à informação quântica do que os qubits [5].

Nos últimos anos surgiram muitos trabalhos sobre as técnicas de produção de estados de dois qudits, emaranhados em caminhos definidos por fendas, e muitos outros que fazem uso desses estados [6, 7, 8, 9, 10]. No entanto, encontramos nesses trabalhos apenas estados, de dois fótons, bipartidos com os estados das partes possuindo a mesma dimensão, isto é, apenas estados de fenda $n \times n$ (como dois qubits e dois qutrits) foram produzidos e estudados experimentalmente [11]. Essa dissertação tem, assim, o objetivo de estudar a extensão dos principais métodos de engenharia de estados de fendas à produção de estados de dimensão híbrida, em especial estados 2×3 .

A motivação para tal estudo está não apenas no desejo de explorarmos por completo a versatilidade dos estados fotônicos codificados em caminho, mas também na possibilidade de implementarmos diversos trabalhos teóricos, desenvolvidos nos últimos anos, que envolvem estados de dimensão $n \times m$. Como um primeiro exemplo, temos [12], onde os autores estudaram o comportamento da fase topológica de estados emaranhados para estados 2×3 , tendo o mesmo já sido feito teórica e experimentalmente para estados $n \times n$, onde $n = 2, 3$ e 4 [13, 14]. Podemos citar também, trabalhos em que a dinâmica de estados $n \times m$ foi analisada, como nas referências [15] e [16], nos quais a morte súbita de emaranhamento de estados 2×3 foi estudada. Nos trabalhos das referências [17, 18, 19] a evolução do emaranhamento de estados 2×3 submetidos à interferências do ambiente foi bem estabelecida e em [20], a evolução do emaranhamento, na presença de ruído, também foi calculada para estados $2 \times m$.

Visando, então, a produção de estados $n \times m$ e suas aplicações, vamos começar nosso estudo, no capítulo 2, com uma revisão dos assuntos (e principais aspectos) que permeiam a produção dos estados de fenda. Incluímos neste grupo o entendimento, ainda que básico, a respeito de estados emaranhados com esse tipo de dimensão e também o conhecimento a respeito do fenômeno explorado em todos os métodos, bem como as ferramentas necessárias à boa compreensão dos mesmos.

No capítulo 3 veremos os diferentes métodos de engenharia de estados de fenda, encontrados na literatura e aplicados à estados 2×2 , cujo comportamento e dinâmica também já são conhecidos. No capítulo seguinte (4), vamos estudar as extensões de tais métodos a estados 2×3 . Além disso, apresentaremos uma proposta experimental para a implementação dessas extensões, visando não apenas os estados 2×3 , mas também estados $n \times m$.

Capítulo 2

Conceitos e ferramentas importantes

Para iniciarmos nosso estudo a respeito da produção dos estados de fenda, precisamos solidificar alguns conceitos básicos a respeito da área e conhecer as ferramentas usadas na engenharia desses estados. Isso será feito ao longo desse capítulo sem a pretensão de cobrir todos os aspectos (ou mesmo alguns profundamente) que permeiam o assunto. Na primeira seção faremos uma revisão sobre estados emaranhados, bipartidos e puros, incluindo os de dimensão $n \times m$. Na segunda seção, veremos como pares de fótons emaranhados no espaço contínuo são gerados e discretizados, dando origem aos conhecidos Estados de Fenda. Na última parte do capítulo (seção 2.3) vamos apontar algumas ferramentas da Óptica de Fourier, importantes para o estudo feito nesse trabalho.

2.1 Emaranhamento e os estados de dimensão $n \times m$

O emaranhamento é uma característica de estados quânticos de sistemas compostos cujas matrizes densidade não podem ser escritas como uma soma convexa de matrizes densidade que são o produto tensorial entre as de cada uma das partes do sistema [21]. Além disso, a correlação entre as partes, conseqüente do emaranhamento, não pode ser produzida por meio de Operações Locais e Comunicação Clássica ¹ [4, 22]. Apesar de inicialmente ter sido motivo de grandes debates no meio científico [1, 2, 3, 23], no final do sec. XX o emaranhamento foi tomado como um recurso para comunicação quântica [24], culminando, inclusive, numa área de pesquisa chamada de Informação Quântica [25, 26]. Foi mostrado que um alto grau emaranhamento torna diversos protocolos de informação mais seguros e eficientes [27], e que estados emaranhados de grandes dimensões (os qudits emaranhados) são, em muitos casos, mais resistentes a introdução de ruído [28, 29, 30]. Esses aspectos culminaram, nos últimos anos, numa infinidade de trabalhos que visam melhor entender e utilizar o emaranhamento em diversos graus de

¹Operações Locais e Comunicação se refere a operações feitas, separadamente, em cada uma das partes de um sistema bipartido em conjunto com a forma de comunicação entre as partes (comunicação dos métodos experimentais e dos resultados)

complexidade, desde estados bipartidos e puros, até estados multipartidos e mistos [31], sendo o primeiro o centro de nossa atenção neste trabalho.

Para definir, matematicamente, o que é um estado emaranhado, vamos começar por uma classe mais simples de estados quânticos, os estados puros. Estudaremos um critério usado para entender se um estado puro é ou não emaranhado, o qual é suficiente para estados bipartidos e puros [32] de quaisquer dimensão, e cuja construção é feita à partir da decomposição de Schmidt, descrita na sequência.

2.1.1 Como é um estado emaranhado?

Considerando um estado de duas partes A e B, descritos por bases ortonormais $\{|a_i\rangle\}$ e $\{|b_j\rangle\}$, em seus respectivos espaços de Hilbert, cujas dimensões são $\dim H_A = n$ e $\dim H_B = m$, com $n \leq m$, o estado do sistema composto $|\psi\rangle$, no espaço $H = H_A \otimes H_B$ de dimensão $\dim H = n \times m$, pode ser escrito como [32]

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \psi_{ij} |a_i\rangle |b_j\rangle. \quad (2.1)$$

A escolha das bases $\{|a_i\rangle\}$ e $\{|b_j\rangle\}$ pode ser feita de forma arbitrária, e geralmente depende de como particionamos nosso sistema [33]. No entanto, para todo estado escrito dessa forma existe uma base na qual o mesmo é escrito como uma soma biortogonal [34]. Isso significa que para um estado como Eq.(2.1), por exemplo, $\langle a_k | a_l \rangle = \delta_{k,l}$ ao mesmo tempo que $\langle b_k | b_l \rangle = \delta_{k,l}$. Podemos tomar como ilustração o estado

$$|\psi\rangle = 1/10 [|\alpha_1\rangle (|\beta_1\rangle + 2|\beta_2\rangle) + |\alpha_2\rangle (2|\beta_1\rangle + |\beta_2\rangle)], \quad (2.2)$$

que não está representado por uma soma biortogonal, pois

$$\langle \alpha_1 | \alpha_2 \rangle = 0, \quad (2.3)$$

mas

$$(\langle \beta_1 | + 2 \langle \beta_2 |) (2 |\beta_1\rangle + |\beta_2\rangle) \neq 0. \quad (2.4)$$

Uma soma biortogonal representando um estado de duas partes é a decomposição de Schmidt deste e, novamente, para todo estado da forma Eq.(2.1), existem bases

ortonormais $|\alpha_i\rangle$ em H_A e $|\beta_j\rangle$ em H_B , nas quais $|\psi\rangle$ é escrito como ²

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^r \sqrt{\lambda_i} |\alpha_i\rangle |\beta_i\rangle, \quad (2.5)$$

onde r é conhecido como posto de Schmidt, sendo $r \leq n$.

Um ponto essencial na decomposição é o fato de $\{\lambda_i\}$ ser os autovalores da matriz densidade reduzida do estado composto, e $\{|\alpha_i\rangle\}$ ser seus autovetores. Como $\text{rank}(\hat{\rho}_A) = \text{rank}(\hat{\rho}_B)$ ($\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B \hat{\rho}$, $\hat{\rho}_B = \text{Tr}_A \hat{\rho}$), ou, como os autovalores de $\hat{\rho}_B$ são os mesmos de $\hat{\rho}_A$ acrescentado de $(m - n)$ autovalores nulos [4], podemos usar qualquer uma das duas matrizes densidades reduzidas para determinar os coeficientes de Schmidt ($\sqrt{\lambda_i}$). Outro fato importante é que cada estado possui sua própria decomposição, mas essa decomposição não é única já que na Eq.(2.5), as fases podem ser escolhidas de forma arbitrária [35].

Voltando agora para o foco dessa discussão, a saber, o que é um estado emaranhado, temos que, se na Eq.(2.5) existir apenas um λ não nulo ($r = 1$), $|\psi\rangle$ é um estado produto, caso contrário, o mesmo é emaranhado. E, ainda, caso $r = n$ e $\sqrt{\lambda_1} = \dots = \sqrt{\lambda_n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, o estado é chamado de maximamente emaranhado [4].

Até o momento não fizemos nenhuma restrição a respeito da dimensão do estado ou de suas partes (apenas definimos, a título de notação, o sistema n como o de dimensão menor), mas já encontramos a primeira diferença entre estados $n \times n$ e $n \times m$. Para os primeiros, o rank de Schmidt máximo é igual à dimensão das partes, e os coeficientes de Schmidt iguais a um sobre a raiz da dimensão. Já para estados em que as partes possuem diferentes dimensões, estados de dimensão $n \times m$, tanto o posto máximo quanto os coeficientes de Schmidt são determinados pela menor dimensão. Isso quer dizer que, efetivamente, a decomposição de Schmidt reduz, pela escolha das bases, um estado $n \times m$, como acima, a um estado $n \times n$ [35]. Assim, um estado 2×3 , por exemplo, quando escrito na forma biortogonal, tem suas propriedades reduzidas às de um estado 2×2 .

Diante das considerações acima, sabemos determinar se um estado, bipartido puro, é ou não emaranhado, e até se o mesmo é maximamente emaranhado. Porém, existem estados com $r > 1$ e $\sqrt{\lambda_i}$ diferentes. Nesse caso, precisamos determinar a quantidade de emaranhamento presente no estado.

2.1.2 Estados mistos

A classe de estados que estudamos acima (puros) é composta por estados que podem ser descritos como vetores de estados em seu espaço de Hilbert. No entanto, existe uma

²Veja demonstração nas refs. [32] e [35]

classe mais complexa de estados, os estados mistos, que para um sistema bipartido pode ser decrito como

$$\hat{\rho} = \sum_{i,l=1}^m \sum_{j,o=1}^m P_{ij,lo} |a_i\rangle \langle a_l| \otimes |b_j\rangle \langle a_l|, \quad (2.6)$$

o qual é emaranhado se não puder ser escrito como

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i |a_i\rangle \langle a_i| \otimes |b_i\rangle \langle a_i|. \quad (2.7)$$

É possível encontrarmos, na literatura, o estudo de mais de um critério de emaranhamento para estados mistos sendo, ainda hoje, um assunto complexo e, para estados de grande dimensão, em aberto. Ao longo deste trabalho estudaremos apenas estados puros, de forma que o critério pelo posto de Schmidt nos é suficiente. Para o leitor interessado no estudo de emaranhamento de estados mistos indicamos [4, 21].

2.1.3 Quantificando o emaranhamento

Atualmente é conhecida uma grande variedade de quantificadores de emaranhamento [4] que apesar de diferentes possuem algumas características em comum que os permitem ser classificados como tais. Nesse trabalho, em particular, vamos estudar apenas dois. O Emaranhamento de Formação e a Concorrência, descritos abaixo.

Emaranhamento de formação

O Emaranhamento de Formação E_f foi, historicamente, o primeiro quantificador de emaranhamento bem estabelecido [36], e é definido como a entropia de Von Neumann da matriz densidade reduzida do estado [31, 32]. Tendo em mente a Eq.(2.1), E_f é definido da seguinte forma

$$\begin{aligned} E_f(|\psi\rangle) &= S(\hat{\rho}_A) = \text{Tr}(-\hat{\rho}_A \log_2 \hat{\rho}_A) \\ E_f(|\psi\rangle) &= - \sum_{i=1}^r \lambda_i \log_2 \lambda_i, \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde, novamente, $\{\lambda_i\}$ são os autovalores não nulos de $\hat{\rho}_A$.

O Emaranhamento de Formação é nulo para estados produto, como qualquer outro quantificador, e atinge o valor máximo de $\log_2 n$ para estados maximamente emaranhados de dimensão $n \times m$ com $n \leq m$. Essa generalização para estados de dimensão $n \times m$ foi bem estabelecida em 2005 por Kai Chen e colaboradores [37], sendo que, no caso especial onde $m = n = 2$, E_f pode ser escrito como [38]

$$E_f(|\psi\rangle) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}\right), \quad (2.9)$$

em que $h(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2 (1 - x)$ e C é a quantidade conhecida como Concorrência, descrita na sequência.

Concorrência

Apesar de aparecer como um parâmetro no cálculo de E_f para um estado 2×2 , a Concorrência é, por si só, um quantificador de emaranhamento e foi definido como tal em 1998 [37] para um sistema de dois qubits. Ao longo do tempo diferentes generalizações foram feitas dando origem a diferentes tipos de Concorrência [4, 39]. Vamos usar aqui a generalização, introduzida por Rungta em 2001 [40], conhecida como I-Concorrência, a qual assume o valor máximo de $\sqrt{2(n-1)/n}$, para estados $n \times m$ com $n \leq m$, se definida como

$$C_I(\psi) = \sqrt{2(1 - \text{Tr}(\rho_A^2))}. \quad (2.10)$$

Apesar de inicialmente, isto é, para estados 2×2 , E_f ser uma função crescente de C , em sistemas onde pelo menos uma das partes possui dimensão superior a 2, não existe uma relação entre as duas grandezas, de forma que as mesmas são tomadas como quantificadores de emaranhamento independentes [4]. Assim, encontramos mais uma diferença, não apenas entre estados $n \times n$ e $n \times m$, mas entre estados de dois qubits e os demais estados bipartidos.

2.2 Estados de fenda

A discussão da seção anterior, apesar de rápida, já nos dá base suficiente para entendermos o quanto o entendimento acerca do emaranhamento tem sido importante para o desenvolvimento da mecânica quântica, e o quanto a produção de estados emaranhados é fundamental para o uso desse recurso. Diante disso, estudaremos, nessa seção, uma maneira de obtermos estados bipartidos emaranhados a partir da Conversão Paramétrica Descendente, fenômeno que possibilita a criação de estados de vários níveis, o que não é possível a alguns sistemas físicos, como partículas de spin meio, por exemplo [41].

2.2.1 Fótons emaranhados em momento transversal

A Conversão Paramétrica Descendente (CPD) é um fenômeno óptico não linear que ocorre de forma espontânea quando um feixe de laser intenso (também chamado de

feixe de bombeamento, ou *pump*) inside em um cristal cuja resposta, não linear, à luz intensa destrói um fóton do *pump* e cria dois fótons, conhecidos como fótons gêmeos, e comumente nomeados de *signal* e *idler* [42]. O ponto no cristal onde a geração ocorre, bem como a direção em que os fótons são emitidos, são variáveis aleatórias, mas tanto energia quanto momento linear (e até momento angular [43]) são conservados durante o processo. Essa conservação, expressa matematicamente pela Equação de Casamento de Fase [44], nos dá pares de fótons gêmeos correlacionados em frequência, polarização e momento transversal, com este último sendo a variável de maior interesse nesse trabalho.

Resultados experimentais confirmaram que *signal* e *idler* são, de fato, emaranhados [45], e que o tratamento do fenômeno, apesar de quântico, pode ser baseado no estudo clássico da interação não linear entre luz e matéria. Posteriormente, o campo eletromagnético é quantizado e o estado do par de fótons é calculado através do operador evolução atuando no estado de vácuo. Não iremos, aqui, fazer uma revisão desse tratamento, haja vista a variedade de textos didáticos onde o leitor pode encontrar a descrição completa do fenômeno, tanto conceitual quanto matemática [10, 42, 46, 47, 48]. Nos será suficiente escrever o estado quântico dos fótons gêmeos produzidos pela CPD, dadas algumas aproximações e em apenas uma dimensão do momento transversal, à saber,

$$\begin{aligned} |\psi_{CPD}\rangle &\propto \int \int \tilde{E}(q_s + q_i, z_0) \tilde{\xi}(q_s - q_i, z_0) |q_s, \sigma_s\rangle |q_i, \sigma_i\rangle dq_s dq_i \\ &\propto \int \int \Phi(q_s, q_i, z_0) |q_s, \sigma_s\rangle |q_i, \sigma_i\rangle dq_s dq_i. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Para começarmos a entender essa expressão termo a termo, temos que q_s e q_i são o momento transversal de *signal* e *idler* na direção \hat{x} ; σ_i e σ_s indicam as polarizações dos dois feixes, que podem ser combinadas de duas maneiras, mostradas na Fig:2.1. Na primeira (Casamento de Fase Tipo I) a polarização dos dois fótons gerados são iguais e ortogonais à do *pump*, na segunda (Casamento de Fase Tipo II), a polarização de um dos gêmeos é igual à do feixe de bombeamento enquanto o outro possui polarização ortogonal a estes. Na maior parte deste texto trabalharemos com o primeiro caso, mas o segundo pode ser igualmente utilizado. Ainda na expressão acima, $\tilde{\xi}(q_s - q_i)$ é uma função (cuja a transformada de Fourier é chamada Função de Casamento de Fase) que depende das propriedades do cristal utilizado e é definida como

$$\tilde{\xi}(q_s - q_i) = \text{sinc} \left(\frac{L (|q_s - q_i|^2)}{8n_{eff}\bar{w}/c} \right), \quad (2.12)$$

onde L é o comprimento do cristal e n_{eff} é o índice de refração efetivo para fótons gêmeos de frequência \bar{w} .

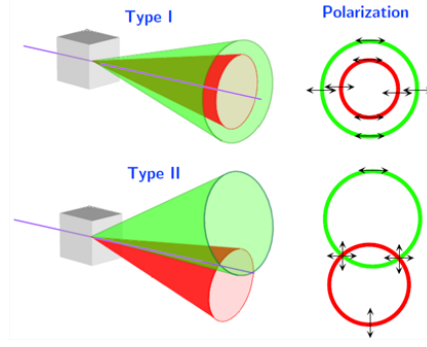


Figura 2.1: Representação das direções nas quais os fótons gêmeos podem ser emitidos nos dois tipos de casamento de fase. Figura retirada de [49].

Por fim, $\tilde{E}(q_s + q_i, z_0)$ é o espectro angular do *pump* na posição onde os pares são gerados ($z = z_0$) e expressa um dos resultados mais interessantes na geração de fótons emaranhados pela CPD, que é a transferência do espectro angular [50]. Como o *pump* é muito intenso, podemos utilizar a aproximação feita por C. K. Hong e L. Mandel [51], na qual o feixe de bombeamento é tratado classicamente. Além disso, nas aproximações paraxial e monocromática (para o feixe de bombeamento), é possível demonstrar que o momento transversal é conservado na CPD, de forma que poderemos escrever q_p como $q_s + q_i$ [52]. Assim, o espectro angular, ou mesmo o perfil transversal do campo, do *pump* é transferido para o estado dos fótons gêmeos. Essa transferência, modulada pelo Casamento de Fase, é total no caso em que a Eq.(2.10) possa ser aproximada como constante e igual a um. Precisamos, ainda, enfatizar que essa transferência não ocorre para cada feixe individualmente, mas para o par de fótons (que por esse motivo é chamado de bifóton), determinando, assim, a correlação entre eles.

Para visualizarmos melhor o comportamento de um estado emaranhado em caminho, vamos usar a representação do estado no espaço das posições. Para tanto, vamos definir as variáveis

$$q_{\pm} \equiv q_i \pm q_s; \quad x_{\pm} \equiv (x_i \pm x_s)/2, \quad (2.13)$$

de forma que podemos calcular as transformadas de Fourier das duas funções da Eq.(2.9) separadamente [53], resultando em

$$\begin{aligned} |\psi_{CPD}\rangle &\propto \int \int E\left(\frac{x_i + x_s}{2}, z_0\right) \xi\left(\frac{x_i - x_s}{2}, z_0\right) |x_s, \sigma_s\rangle |x_i, \sigma_i\rangle dx_s dx_i \Rightarrow \\ |\psi_{CPD}\rangle &\propto \int \int \Phi(x_s, x_i, z_0) |x_s, \sigma_s\rangle |x_i, \sigma_i\rangle dx_s dx_i. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Este é o estado logo na saída do cristal, de forma que o mesmo, em qualquer plano

determinado por z , é dado por [53]

$$|\psi_z\rangle \propto \int \int \Phi(x_s, x_i, z) |x_s, \sigma_s\rangle |x_i, \sigma_i\rangle dx_s dx_i. \quad (2.15)$$

2.2.2 Obtendo um estado discreto

Vimos acima um pouco sobre o fenômeno explorado na produção de pares de fótons emaranhados em momento transversal. No entanto, a maior parte das aplicações, em informação quântica, de um sistema emaranhado faz uso de estados discretos [5, 8, 54]. Assim, o próximo passo para tornar o emaranhamento espacial do bifóton mais atraente à informação quântica é discretizar o estado gerado na CPD. Isso foi feito pela primeira vez em [55] com o auxílio de um conjunto de fendas múltiplas, como ilustrado na (Fig.2.2).

Um conjunto de fendas múltiplas tem como função transmissão [56] (representação matemática) uma soma de funções retângulo (Fig.2.3)

$$T_\alpha(x) = \sum_{l=-\Lambda}^{l=\Lambda} \Pi\left(\frac{x - ld}{2a}\right), \quad (2.16)$$

sendo $\Lambda = \frac{\mathcal{D}-1}{2}$, \mathcal{D} a dimensão de uma das partes do estado do sistema composto, além disso, $\alpha = i, s$ indicando que cada um dos feixes de fótons gêmeos passará por uma fenda múltipla. A função retângulo, por sua vez, é definida da seguinte forma

$$\Pi(|t|) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{se } |t| > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.17)$$

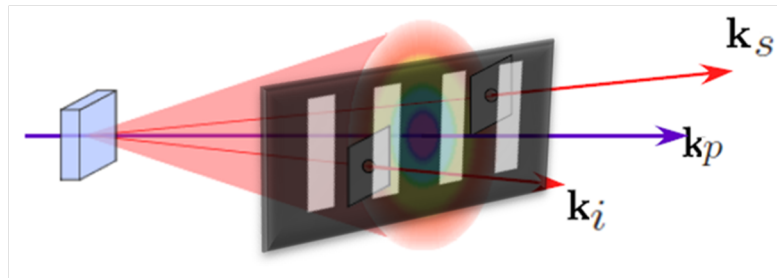


Figura 2.2: Representação da discretização do momento dos feixes produzidos na CPD por meio de uma fenda múltipla. Figura retirada de [49] e modificada.

Supondo que cada feixe de fótons passa por um conjunto de fendas múltiplas, a uma distância z_f do cristal, a amplitude do bifóton no plano das fendas, logo ao passar por

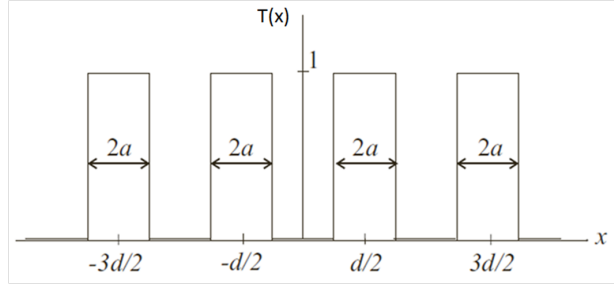


Figura 2.3: Gráfico da função transmissão do conjunto de fendas em função da variável de posição x . A separação entre as aberturas, centro a centro, vale d , e a largura de cada abertura é igual a $2a$. Figura retirada de [44].

elas, é dada por

$$\Phi_{\text{out}}(x_i, x_s, z_f) = \sum_{l_i} \sum_{l_s} \Phi_{\text{in}}(x_i, x_s, z_f) \Pi\left(\frac{x_i - l_i d}{2a}\right) \Pi\left(\frac{x_s - l_s d}{2a}\right), \quad (2.18)$$

onde $\Phi_{\text{in}}(x_i, x_s, z_f)$ é a amplitude do bifóton sobre o plano das fendas. Substituindo a Eq.(2.17) na Eq.(2.13) temos o seguinte estado para os fótons gêmeos logo depois das aberturas:

$$|\psi_f\rangle \propto \sum_{l_i} \sum_{l_s} \int \int \Phi_{\text{in}}(x_i, x_s, z_f) \Pi\left(\frac{x_i - l_i d}{2a}\right) \Pi\left(\frac{x_s - l_s d}{2a}\right) |x_s, \sigma_s\rangle |x_i, \sigma_i\rangle dx_i dx_s. \quad (2.19)$$

Se a largura de cada abertura ($2a$) é suficientemente pequena para que a variação da amplitude do bifóton, no interior de uma abertura, seja desprezível, podemos escrever

$$|\psi_f\rangle \propto \sum_{l_i} \sum_{l_s} \Phi_{\text{in}}(l_i d, l_s d, z_f) \int \int \Pi\left(\frac{x_i - l_i d}{2a}\right) \Pi\left(\frac{x_s - l_s d}{2a}\right) |x_s, \sigma_s\rangle |x_i, \sigma_i\rangle dx_i dx_s. \quad (2.20)$$

Definindo o estado de caminho $|l_\alpha\rangle$ de um fóton nomeado como $\alpha = i, s$, como sendo o estado do fóton transmitido pela abertura l_α , temos

$$|l_\alpha\rangle \equiv \sqrt{\frac{\pi}{a}} \int \Pi\left(\frac{x_\alpha - l_\alpha d}{2a}\right) |x_\alpha\rangle dx_\alpha. \quad (2.21)$$

E assim, obtemos a seguinte expressão geral para os Estados de Fenda (ou estado de caminho)

$$|\psi_f\rangle \propto \sum_{l_i=-\Lambda_i}^{\Lambda_i} \sum_{l_s=-\Lambda_s}^{\Lambda_s} \Phi_{in}(l_i, l_s, d, z_f) |l_i, \sigma_i\rangle |l_s, \sigma_s\rangle. \quad (2.22)$$

É notório, na expressão acima, que os coeficientes dos possíveis estados, e como consequência as correlações entre as posições em que os fótons de um par são detectados, são determinados pelo valor da amplitude Φ_{in} em pontos específicos. Como z_f não é, necessariamente, algo próximo de z_0 , a amplitude no plano das fendas não é necessariamente a mesma no centro do cristal Eq.(2.9). Portanto, como veremos no capítulo seguinte, diferentes estados de fenda podem ser gerados a partir de diferentes manipulações do bifóton, isto é, a partir da incidência de pares de fótons em estados com diferentes amplitudes sobre o conjunto de fendas. Ainda a respeito da expressão geral do estado, temos que a dimensão do mesmo é determinada pela quantidade de aberturas da fenda múltipla colocada no caminho dos fótons [9] e, a princípio, não há nenhuma restrição teórica para o uso de diferentes conjuntos de fendas. Apesar disso, encontramos na literatura apenas métodos para a geração de estados em que $\mathcal{D}_i = \mathcal{D}_s$. A discussão à respeito dos estados com $\mathcal{D}_i \neq \mathcal{D}_s$ é o objeto de estudo desse trabalho, como será visto no capítulo 4.

2.3 As ferramentas da óptica de Fourier

Na seção anterior, vimos como gerar pares de fótons emaranhados em momento transversal, ou estados de caminho quando pares de fótons gêmeos são transmitidos por fendas múltiplas, e assim, como obter um estado discreto e emaranhado de duas partes. Vimos também que os coeficientes dos estados, ou a correlação entre as partes, são determinados pela amplitude do bifóton no plano das fendas, em pontos específicos.

Antes de conhecer as diferentes manipulações, que produzem diferentes amplitudes sobre as fendas, precisamos conhecer as ferramentas usadas na engenharia desses estados. Nessa última seção apresentaremos os elementos básicos da Óptica de Fourier que são necessários à compreensão das discussões seguintes. Para um estudo mais completo do assunto indicamos a referência [56].

2.3.1 Elementos básicos

Para um campo elétrico harmônico e escalar, cuja parte espacial obedece a Equação de Helmholtz, podemos, para cada z constante, decompor o perfil transversal do campo em ondas planas, obtendo assim, seu espectro angular, já mencionado anteriormente, definido como

$$\tilde{E}(q_x, q_y, z) = \iint E(x, y, z) e^{-i(xq_x + yq_y)} dx dy, \quad (2.23)$$

e que se modifica por uma propagação livre ao longo de z , positivo, de forma tal que

$$\tilde{E}(q_x, q_y, z) = \tilde{E}(q_x, q_y, z_0) e^{ik_z(z-z_0)}, \quad (2.24)$$

o que nos leva a um perfil transversal, depois de propagar livremente numa distância $(z - z_0)$, dado por [47]

$$\begin{aligned} E(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint \tilde{E}(q_x, q_y, z_0) e^{i(xq_x + yq_y)} e^{i\sqrt{k^2 - (q_x^2 + q_y^2)}(z-z_0)} dq_x dq_y \\ E(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint E(x', y', z_0) \left\{ e^{ik\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z_0)^2}} \times \right. \\ &\quad \left. \frac{z-z_0}{i\lambda [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z_0)^2]} \left(1 + \frac{i}{k\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z_0)^2}} \right) \right\} dx' dy', \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde usamos $k^2 - (q_x^2 + q_y^2) = k_z^2$, e o Teorema da Convolação, pelo qual a Transformada de Fourier de um produto de funções é a convolação das Transformadas de cada uma, de forma que, o termo entre chaves na última linha de Eq.(2.24) é a Transformada de Fourier de $e^{\sqrt{k^2 - (q_x^2 + q_y^2)}(z-z_0)}$, escrita em termos das variáveis $x - x'$ e $y - y'$. A situação considerada, mostrada na Fig.2.4, nos dá a distribuição transversal de campo em z em função da mesma em z_0 , Eq.(2.24), a qual pode ser simplificada em algumas situações. A primeira delas é o caso em que $(z - z_0) \gg \lambda$, que faz com que o último termo entre parênteses, na expressão acima, possa ser desprezado. Na segunda, chamada de aproximação paraxial, o ângulo θ (Fig. 2.4) é muito pequeno, nos dando $\frac{(z-z_0)}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z_0)^2}} \approx 1$. Além disso, podemos escolher observar, no plano z constante, uma região tal que $(x - x')^2 + (y - y')^2 \ll (z - z_0)$, de forma que $\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z_0)^2} \approx (z - z_0) + [(x - x')^2 + (y - y')^2] / [2(z - z_0)]$ que constitui a aproximação de Fresnel. Considerando as três aproximações acima, temos

$$E(x, y, z) \approx \frac{e^{ik(z-z_0)}}{i\lambda(z-z_0)} \iint E(x', y', z_0) e^{i\frac{k}{2(z-z_0)}[(x-x')^2 + (y-y')^2]} dx' dy'. \quad (2.26)$$

Vamos supor agora que o campo elétrico seja deixado propagar por uma distância $(z - z_0)$ que não seja apenas muito maior que o comprimento de onda do campo, mas

que tenda à infinito, ou que seja grande o suficiente para que $(z - z_0) \gg (k/2)(x'^2 + y'^2)$ (aproximação de Fraunhofer) nos dando a seguinte expressão para o campo transversal

$$E(x, y, z) \approx \frac{e^{ik(z-z_0)} \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2(z-z_0)^2}\right)}{i\lambda(z-z_0)} \iint E(x', y', z_0) e^{i\frac{k}{(z-z_0)}(xx' + yy')} dx' dy'. \quad (2.27)$$

A equação acima é conhecida como Transformada de Fourier Óptica. Por ela temos a Transformada de Fourier de um perfil transversal no espaço das posições, e pode ser observada por meio da propagação livre até um plano bem distante da fonte ou mesmo com o auxílio de algum componente óptico, como uma lente esférica com o plano de observação coincidindo com o foco.

Falando em componentes ópticos, caso o feixe estudado passe por algum, o perfil transversal do campo elétrico transmitido será dado pelo produto entre a função que descreve o perfil sobre o plano do elemento óptico e a função transmissão (que é específica para cada elemento, como por exemplo, a fenda múltipla estudada na seção anterior). Assim, sabemos calcular de forma direta (como produto de duas funções) a ação da propagação livre sobre o espectro angular, e a ação de elementos ópticos sobre o perfil transversal do campo. Para uma situação em que o feixe passa por uma sucessão de propagações livres intercaladas com elementos ópticos, o perfil transversal resultante é obtido por meio de Transformadas de Fourier de Transformadas de Fourier, podendo ser um cálculo enfadonho. Nesse caso, para alguns elementos ópticos com funções transmissão (e operações sobre o feixe incidente) conhecidas, podemos usar, para simplificar as contas, o método descrito em [56] e apresentado na sequência.

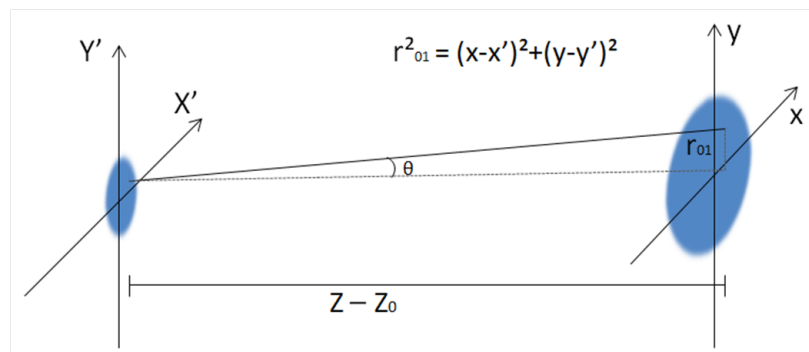


Figura 2.4: Ilustração da propagação de um campo elétrico numa distância $(z - z_0)$ e a projeção do perfil transversal nos planos (x, y) e (x', y') , em z_0 e z , respectivamente.

2.3.2 Sistemas ópticos tratados como operadores

Uma maneira alternativa de estudarmos o efeito de sistemas ópticos lineares sobre um campo transversal é pela utilização da álgebra de operadores. Esse método foi inicial-

mente explorado por VanderLugt em 1966 [57], e simplificado algum tempo depois por Butterwek em 1977 [58], e por Nazarathy e Shamir em 1979 [59]. Neste último, quatro operadores básicos (\mathcal{Q} , \mathcal{P} , \mathcal{F} e \mathcal{R}) são definidos pelas seguintes operações:

I - Multiplicação por uma fase exponencial quadrática

$$\mathcal{Q}[c] \{U(x)\} = e^{i\frac{k}{2}cx^2} U(x); \quad (2.28)$$

II - Dimensionamento por uma constante

$$\mathcal{P}[b] \{U(x)\} = |b|^{\frac{1}{2}} U(bx); \quad (2.29)$$

III - Transformada de Fourier

$$\mathcal{F} \{U(x)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{-iqx} dx; \quad (2.30)$$

IV - Propagação no espaço livre

$$\mathcal{R}[d] \{U(x_1)\} = \frac{1}{\sqrt{i\lambda d}} \int_{-\infty}^{\infty} U(x_1) e^{i(k/2d)(x_2-x_1)^2} dx_1. \quad (2.31)$$

Além disso, os quatro operadores apresentam as seguintes propriedades:

$$\mathcal{R}[d] = \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d}\right] \mathcal{P}\left[\frac{k}{d}\right] \mathcal{F} \mathcal{Q}\left[\frac{1}{d}\right]; \quad (2.32)$$

$$\mathcal{P}\left[\frac{k}{f}\right] \mathcal{F} = \mathcal{R}[f] \mathcal{Q}\left[\frac{-1}{f}\right] \mathcal{R}[f]. \quad (2.33)$$

Sabe-se também que os operadores se relacionam dois a dois segundo a Fig.2.5.

Essas relações nos permitem propagar um campo elétrico por um conjunto de sistemas ópticos lineares sem ser necessária a resolução de integrais dentro de integrais. Para tanto, precisamos conhecer a função transmissão de cada sistema óptico e associar a ação de cada um deles às expressões definidas acima. Assim, representamos a ação do conjunto como um produto de operadores e usamos tais relações para simplificar a expressão o máximo possível.

A utilidade do método nos parece, então, limitada aos elementos ópticos cujas ações sobre o campo são relacionadas com as quatro operações acima, porém, dentre esses elementos estão os estudados no presente texto. Por isso, apesar da limitação, o uso dos

operadores nos será de grande valia simplificando os cálculos apontados na sequência .

	P	F	Q	R
P	$P[t_2]P[t_1] = P[t_2t_1]$	$P[t]F = FP[\frac{1}{t}]$	$P[t]Q[c] = Q[t^2c]P[t]$	$P[t]R[d] = R[\frac{d}{t^2}]P[t]$
F	$FP[t] = P[\frac{1}{t}]F$	$FF = P[-1]$	$FQ[c] = R[-k^2c]F$	$FR[d] = Q[-\frac{d}{k^2}]F$
Q	$Q[c]P[t] = P[t]Q[\frac{c}{t^2}]$	$Q[c]F = FR[-k^2c]$	$Q[c_2]Q[c_1] = Q[c_2 + c_1]$	$Q[c]R[d] = R[(d^{-1}+c)^{-1}] \cdot P[1+cd] \cdot Q[(c^{-1}+d)^{-1}]$
R	$R[d]P[t] = P[t]R[t^2d]$	$R[d]F = FQ[-\frac{d}{k^2}]$	$R[d]Q[c] = Q[(c^{-1}+d)^{-1}] \cdot P[(1+cd)^{-1}] \cdot R[(d^{-1}+c)^{-1}]$	$R[d_2]R[d_1] = R[d_1 + d_2]$

Figura 2.5: Tabela com as relações entre os operadores, dois a dois, definidos nas Eqs.(2.27-2.30) .

Capítulo 3

Produzindo estados de fenda 2×2

Neste capítulo estudaremos os diferentes métodos de preparação dos estados de fenda de dimensão $n \times n$, bem como as diferenças e semelhanças entre eles. Além de mostrar os diferentes métodos, vamos analisar as condições necessárias para que cada um deles produza estados maximamente emaranhados. A apresentação dos métodos não será feita na ordem cronológica em que apareceram na literatura, mas em uma ordem mais didática considerando as discussões ao longo do texto. Na primeira seção vamos analisar os estados de fenda 2×2 , os quais serão usados nas análises das seções seguintes, como exemplificação, já que todos os métodos podem ser estendidos à estados de dimensões maiores $n \times n$. Na sequência, seções 3.2 e 3.3, estudaremos métodos que se valem da projeção do campo próximo e do campo distante dos fótons gêmeos sobre o plano das fendas; já na seção 4 estudaremos o método onde a atenção é voltada para o perfil do campo transversal do feixe de bombeamento antes do cristal. Por fim, veremos como os fótons são detectados e como as correlações presentes nos estados de caminho são analisadas por meio da detecção.

3.1 Analisando estados 2×2

Considerando a equação geral Eq.(2.22) para o caso em que os fótons gêmeos possuem polarizações iguais, o estado de fenda 2×2 pode ser escrito como

$$\begin{aligned} |\psi_{f(2 \times 2)}\rangle = & \frac{1}{n} [\Phi_{in}(\frac{d}{2}, \frac{d}{2}, z_f) |\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}\rangle + \Phi_{in}(\frac{-d}{2}, \frac{-d}{2}, z_f) |-\frac{1}{2}\rangle |-\frac{1}{2}\rangle + \\ & + \Phi_{in}(\frac{d}{2}, \frac{-d}{2}, z_f) |\frac{1}{2}\rangle |-\frac{1}{2}\rangle + \Phi_{in}(\frac{-d}{2}, \frac{d}{2}, z_f) |-\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}\rangle], \end{aligned} \quad (3.1)$$

Em que n é um fator de normalização. Para sistemas com essa dimensão existem quatro estados, considerando a base acima, com emaranhamento máximo, os quais são conhecidos como estados de Bell [31]. Nas seções seguintes estaremos, em especial, a procura de dois dos estados de Bell, a saber

$$|\phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}\rangle + |-\frac{1}{2}\rangle |-\frac{1}{2}\rangle), \quad (3.2)$$

$$|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\frac{1}{2}\rangle |-\frac{1}{2}\rangle + |-\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}\rangle). \quad (3.3)$$

Os estados acima são conhecidos como pareados e anti-pareados [6], mas também vamos chama-los, respectivamente, de estados de correlações simétrica e anti-simétrica. Isso porque o estado simétrico ($|\phi_+\rangle$) possui uma correlação tal que os dois fótons, de um par de fótons gêmeos, passam pela mesma abertura da fenda dupla (designada por $|\frac{1}{2}\rangle$ ou $|-\frac{1}{2}\rangle$), enquanto no estado anti-simétrico ($|\psi_+\rangle$), os fótons de um par passam por aberturas simetricamente opostas.

Assim, todos os trabalhos estudados à seguir procuram por, ou produzem, amplitudes que nos permitam escrever Eq.(3.1) como Eq.(3.2) ou Eq.(3.3).

3.2 Discretizando o momento transversal do bifóton na saída do cristal

De todas as formas de engenharia dos estados de fenda que analisaremos ao longo deste capítulo, a mais simples foi, também, apresentada em 2008 por S. Ryosuke e colaboradores [60]. Os autores posicionaram a fenda dupla imediatamente após um cristal BBO do tipo II bombeado por um laser de $300nm$ (Fig.3.1)

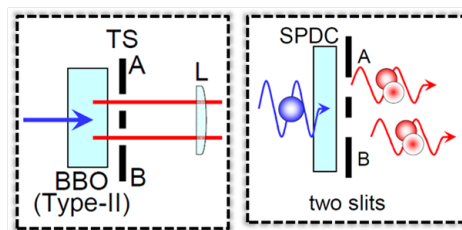


Figura 3.1: À esquerda: Parte do setup experimental usado em [60]: Geração de estados de correlação simétrica com a fenda múltipla na frente de um cristal tipo II. À direita: Ilustração de como os fótons passam pela mesma fenda, mas com diferentes polarizações.

Se considerarmos o cristal fino o suficiente para que o estado do bifóton na região de seu nascimento seja o mesmo na saída do cristal, os fótons gêmeos passarão pela mesma abertura. Como vimos no capítulo anterior, os fótons são criados em um mesmo "ponto", de forma que a fenda dupla, nesse caso, discretiza o caminho do bifóton próximo à região de seu nascimento, onde a posição transversal dos fótons é praticamente a mesma. O estado, assim obtido, é

$$|\psi_p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\frac{1}{2}, H\rangle |\frac{1}{2}, V\rangle + |-\frac{1}{2}, H\rangle |-\frac{1}{2}, V\rangle). \quad (3.4)$$

A marcação de polarização é necessária, pois além da geração de estados emaranhados em polarização ter sido o principal objeto de estudo dos autores, esta deve ser levada em conta sempre que os fótons gêmeos possuírem diferentes polarizações Eq.(2.22). No caso de apenas o grau de liberdade de caminho dos fótons ser o interesse, um cristal do tipo I pode ser utilizado (o mesmo vale para os métodos seguintes), e a marcação da polarização é fatorada. A diferença no uso dos dois tipos de casamento de fase, pode ser, inclusive, anulada na detecção do estado.

3.3 Manipulando o perfil transversal do bifóton

O método que vamos estudar nessa seção foi introduzido por W. H. Peeters e colaboradores em 2009 [6]. No trabalho, os autores exploraram a forma da amplitude do bifóton no campo próximo e no campo distante, utilizando duas configurações com lentes para projetar tais amplitudes no plano das fendas, posicionado longe do cristal. A primeira configuração é formada por um telescópio não confocal, já a segunda, consiste em apenas uma lente esférica.

3.3.1 Telescópio não confocal

Considere a seguinte montagem para preparação de estado (Fig. 3.2):

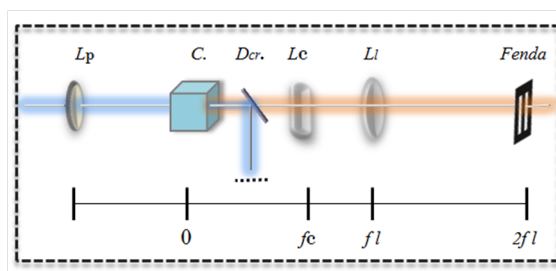


Figura 3.2: Produção dos estados de fenda maximamente emaranhados com o bifóton passando por um telescópio não confocal.

Nela, o feixe de bombeamento é fracamente focalizado no centro de um cristal não linear tipo I em $z = z_0 = 0$, e o sistema é alinhado de forma a obter fótons no regime colinear. Um espelho dicróico é colocado na sequência para barrar, refletindo para fora da montagem, o feixe de bombeamento que é transmitido pelo cristal devido a pequena probabilidade do fenômeno ocorrer (a taxa de fótons convertidos é muito pequena). O centro do cristal coincide com o foco anterior tanto da lente cilíndrica (que poderia muito

bem ser substituída por uma lente esférica de mesmo foco [56]) quanto da lente esférica, que possuem distâncias focais f_c e f_l , respectivamente. Além disso, uma fenda dupla é colocada no plano z_f a uma distância f_l da lente esférica. Assim, a amplitude do bifóton Eq.(2.11), passa, em sequência, pela propagação livre em uma distância f_c , transmissão pela lente cilíndrica, propagação livre em uma distância $f_l - f_c$, transmissão por uma lente esférica e, por fim, propagação livre em uma distância f_l . Usando as definições da última parte do capítulo anterior temos o seguinte operador resultante agindo sobre a amplitude em $z = 0$, isto é, Eq.(2.15)

$$\mathcal{R}[f_l] \mathcal{Q}\left[-\frac{1}{f_l}\right] \mathcal{R}[f_l - f_c] \mathcal{Q}\left[-\frac{1}{f_c}\right] \mathcal{R}[f_c] \quad . \quad (3.5)$$

Usando as propriedades da seção 2.3, obtemos a amplitude resultante no plano das fendas (cujo cálculo está mostrado no Apêndice A)

$$\begin{aligned} \Phi(x_+, x_-, z_f) &\propto \sqrt{\frac{f_c}{f_l}} e^{i\frac{k f_c}{f_l^2}(x_+^2 + x_-^2)} \Phi\left(-\frac{f_c x_+}{f_l}, -\frac{f_c x_-}{f_l}, 0\right) \\ &\propto \sqrt{\frac{f_c}{f_l}} e^{i\frac{k f_c}{f_l^2}(x_+^2 + x_-^2)} E\left(-\frac{f_c x_+}{f_l}, 0\right) \xi\left(-\frac{f_c x_-}{f_l}, 0\right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Considerando $E\left(\frac{f_c x_+}{f_l}, 0\right) = E\left(-\frac{f_c x_+}{f_l}, 0\right)$ e sabendo que $\xi\left(\frac{f_c x_-}{f_l}, 0\right) = \xi\left(-\frac{f_c x_-}{f_l}, 0\right)$, podemos escrever a amplitude no plano das fendas como

$$\Phi(x_+, x_-, z_f) \propto \sqrt{\frac{f_c}{f_l}} e^{i\frac{k f_c}{f_l^2}(x_+^2 + x_-^2)} E\left(\frac{f_c x_+}{f_l}, 0\right) \xi\left(\frac{f_c x_-}{f_l}, 0\right), \quad (3.7)$$

e o estado após as fendas como

$$|\psi_I\rangle \propto \left[E\left(\frac{f_c d}{2f_l}, 0\right) \xi(0,0) (|\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}\rangle + |-\frac{1}{2}\rangle |-\frac{1}{2}\rangle) + E(0,0) \xi\left(\frac{f_c d}{2f_l}, 0\right) (|\frac{1}{2}\rangle |-\frac{1}{2}\rangle + |-\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}\rangle) \right], \quad (3.8)$$

onde omitimos a exponencial complexa, pois a mesma, possuindo um valor constante ($e^{i\frac{k f_c}{4f_l^2} d^2}$), pôde ser fatorada não interferindo nas correlações do estado [41]. Vemos então, que o telescópio projeta sobre o plano das fendas, em $z = z_f$, a imagem ampliada do produto do perfil transversal do *pump* com o casamento de fase ξ , em $z = 0$, sendo $M = f_l/f_c$ o fator de aumento. Em especial, caso a largura de $E(x_+, 0)$ seja bem maior

que $d/2M$, o perfil do campo no plano das fendas será aproximadamente constante ($E(0,0) \approx E(\frac{d}{2M},0)$) e pode ser fatorado nos dando

$$|\psi_I\rangle \propto \left[\xi(0,0) |\phi_+\rangle + \xi\left(\frac{d}{2M},0\right) |\psi_+\rangle \right]. \quad (3.9)$$

Considerando nossa busca por estados maximamente emaranhados precisamos que a função ξ se anule em 0 ou em $d/2M$. Lembrando que

$$\xi(x_-) = \mathcal{F} \left[\text{sinc} \left(\frac{L|q_-|^2}{8n_{eff}\bar{w}/c} \right) \right], \quad (3.10)$$

temos que, pela própria definição $\tilde{\xi}$, e assim, ξ , não se anulam em 0. Conseqüentemente, o único estado de Bell que podemos gerar com o telescópio é $|\phi_+\rangle$. Se o índice de refração do cristal usado é fixo, as variáveis que podemos controlar para obtermos $\xi(\frac{d}{2M},0) = 0$ são: o comprimento do cristal (L), as distâncias focais das duas lentes, e a separação entre as fendas (d).

Na Fig.3.3(a), temos o gráfico da razão $R = \xi(\frac{d}{2M},0) / \xi(0,0)$ em função de d/M em mm, e do comprimento, também em mm, de um cristal PPKTP usado em [53]. O corte do gráfico em $R = 0$ (Fig.3.3(b)) nos dá as possíveis combinações de d/M e L que possibilitam a geração de estados, de fato, maximamente emaranhados.

Como, na prática, não temos tantas opções de elementos ópticos em um laboratório, vamos considerar, arbitrariamente, $L = 9.6mm$ e $M = 4$, que são valores usados em [53], onde também foram usadas fendas com separação $d = 0.24mm$. O gráfico da Fig.3.4 nos dá, então, R em função de d .

3.3.2 Lente esférica montada em $f_l - f_l$

Considere agora que a lente cilíndrica é retirada da montagem, de forma que a lente esférica permanece em uma configuração do tipo $f_l - f_l$ entre o cristal e a fenda dupla. Dividindo o caminho do bifóton de forma análoga à feita com o telescópio, o operador agindo sobre cada feixe dos fótons gêmeos é:

$$\mathcal{R}[f_l] \mathcal{Q} \left[-\frac{1}{f_l} \right] \mathcal{R}[f_l] \quad , \quad (3.11)$$

resultando, então, na seguinte amplitude no plano das fendas (Apêndice A)

$$\Phi(x_+, x_-, z_f) \propto \sqrt{\frac{k}{f_l}} \tilde{E}\left(\frac{kx_+}{f_l}, 0\right) \tilde{\xi}\left(\frac{kx_-}{f_l}, 0\right); \quad (3.12)$$

e no estado após as fendas

$$|\psi_{II}\rangle \propto \left[\tilde{E}\left(\frac{kd}{2f_l}, 0\right) \tilde{\xi}(0,0) (|\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}\rangle + |-\frac{1}{2}\rangle |-\frac{1}{2}\rangle) + \tilde{E}(0,0) \tilde{\xi}\left(\frac{kd}{2f_l}, 0\right) (|\frac{1}{2}\rangle |-\frac{1}{2}\rangle + |-\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}\rangle) \right]. \quad (3.13)$$

Com a lente esférica temos, portanto, projetado sobre o plano das fendas, o produto da função $\tilde{\xi}$ com o espectro angular do *pump* na saída do cristal, medido no espaço das posições. Como a transformada de Fourier do casamento de fase é uma função muito larga, podemos usar a aproximação $\tilde{\xi}\left(\frac{kd}{2f_l}\right) \approx \tilde{\xi}(0)$ e escrever o estado como

$$|\psi_{II}\rangle \propto \left[\tilde{E}\left(\frac{kd}{2f_l}, 0\right) |\phi_+\rangle + \tilde{E}(0,0) |\psi_+\rangle \right]. \quad (3.14)$$

Diferentemente do que ocorre com o telescópio, podemos obter os dois estados já que, ao contrário da função ξ , E e também \tilde{E} podem ser anulados no centro da função com o auxílio de algum elemento que bloqueie ou absorva a luz no centro de E . Deixaremos, porém, essa possibilidade para a próxima seção, nos atendo, agora, ao que foi feito em [6]. Estamos procurando por um perfil de campo (em $z = 0$) cuja transformada de Fourier, medida no espaço das posições, seja nula em $kd/2f_l$. Para um feixe de bombeamento gaussiano, o perfil transversal do campo é descrito pela seguinte expressão [61, 62]

$$E(x_p, y_p, z) = E_0 \frac{l}{w(z)} e^{ikz} e^{-i\phi} e^{\frac{ik}{2R(z)}(x_p^2 + y_p^2)} e^{-\frac{x_p^2 + y_p^2}{w^2(z)}}, \quad (3.15)$$

com

$$w(z) = l \sqrt{1 + (z/z_r)^2}, \quad (3.16)$$

$$l = \sqrt{\lambda z_r / \pi}, \quad (3.17)$$

$$R(z) = z [1 + (z_r/z)^2], \quad (3.18)$$

$$\phi = \text{tg}^{-1} \left(\frac{z}{z_r} \right). \quad (3.19)$$

Nas expressões acima, z_r , chamado de Comprimento de Rayleigh, especifica o plano em que a intensidade do feixe $|E(x, y, z)|^2$ é metade daquela medida em $z = 0$; Eq.(3.16)

determina a largura do feixe, em cada plano z constante, e assume um valor mínimo l (em $z = 0$) que, por esse motivo, é identificado como o raio da cintura do feixe; Eq.(3.18) é o raio de curvatura da frente de onda e ϕ (fase de Gouy) é o atraso dessa frente de onda com relação a uma onda plana ou esférica. Considerando nossa análise em apenas uma dimensão, bem como a transferência do espectro angular do *pump* para o estado do bifóton e, ainda, que a região de criação dos fótons gêmeos coincide com o plano da cintura do feixe, isto é, $z = 0$, a Eq.(3.15) se resume a

$$\begin{aligned} E(x_p, z) &= E(x_i, x_s, z) = E_0 e^{-\frac{(x_i + x_s)^2}{2l^2}} \\ &= E_0 e^{-\frac{x_+^2}{l^2}}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

sendo que $2l$, dobro da largura a meia altura, também é conhecido como *spot* do feixe [52]. A função $\tilde{E}\left(\frac{kx_+}{f_l}\right)$ é, então, dada por

$$\tilde{E}\left(\frac{kx_+}{f_l}\right) = \sqrt{\frac{l}{2}} \exp\left(-\frac{l^2}{4} \left(\frac{kx_+}{f_l}\right)^2\right). \quad (3.21)$$

Na Fig.3.5(a) está mostrado o gráfico de $R' = \tilde{E}\left(\frac{kd}{2f_l}, 0\right) / \tilde{E}(0, 0)$, considerando a função acima, em função de l , em mm, e da razão d/f_l para $k = (2\pi/413)10^9 \text{ m}^{-1}$. O gráfico seguinte (Fig.3.5(b)), nos fornece as combinações de d/f_l e l que nos proporcionam correlações perfeitas, isto é, as combinações que resultam em $R' = 0$. O gráfico de R' em função de d , em mm, para o caso particular em que $l = 500\mu\text{m}$ e $f_l = 20\text{cm}$ é mostrado na Fig.3.6, o qual nos mostra que correlações quase perfeitas ($R' \approx 0$) podem ser atingidas para valores de d a partir de 0.24mm (ou $240\mu\text{m}$).

É conhecido, e já foi bem estudado na literatura [63, 64, 65], que um feixe com largura muito pequena, isto é, bem focalizado no centro do cristal, "borra os cones" formados pelos feixes *signal* e *idler*, resultando em correlações imperfeitas, chegando até a obtenção de um estado produto [44]. De fato, vemos na Fig.3.5(b) que o estado $|\psi_+\rangle$ é perfeitamente gerado para valores de l a partir de, aproximadamente, 0.8mm (para o intervalo de d/f_l entre 0 e 0.01). Além disso, quanto menor for o spot do laser no centro do cristal, maior deve ser o valor de d para que R' seja nulo, o que pode ser percebido pela comparação entre as Figs.3.6 e 3.7, sendo que neste último $l = 100\mu\text{m}$ e $R' \approx 0$ para valores de d a partir de 1.2mm .

Para endossar nossas análises, vamos tomar como exemplo o trabalho concluído em 2011 [53], no qual o método apresentado acima foi usado na produção de estados de fenda 2×2 . Para tanto, o autor utilizou um conjunto de fendas com separação entre as

aberturas $d = 0.24\text{mm}$ e um laser de bombeamento com uma largura no centro do cristal $l = 100\mu\text{m}$. Além disso, os demais parâmetros experimentais (como, por exemplo, o comprimento de onda do *pump*) foram os mesmos usados em nossas análises. Apesar de o estado $|\psi_+\rangle$ ter sido obtido com sucesso, isto é, apesar de a montagem com o telescópio ter "funcionado", o autor não alcançou o mesmo êxito na produção de $|\phi_+\rangle$ (apenas com a lente esférica). De acordo com nossos gráficos de $R' \times d$, para fendas com $d = 0.24\text{mm}$, l deve ser igual ou superior a aproximadamente $500\mu\text{m}$. Colocando de outra forma, para os valores de $l = 100\mu\text{m}$ e $d = 0.24\text{mm}$ (Fig.3.7), temos $R' \approx 0.85$, resultando no estado da Eq.(3.14) com os coeficientes quase iguais. Este estado, quase produto, foi exatamente o observado em [53].

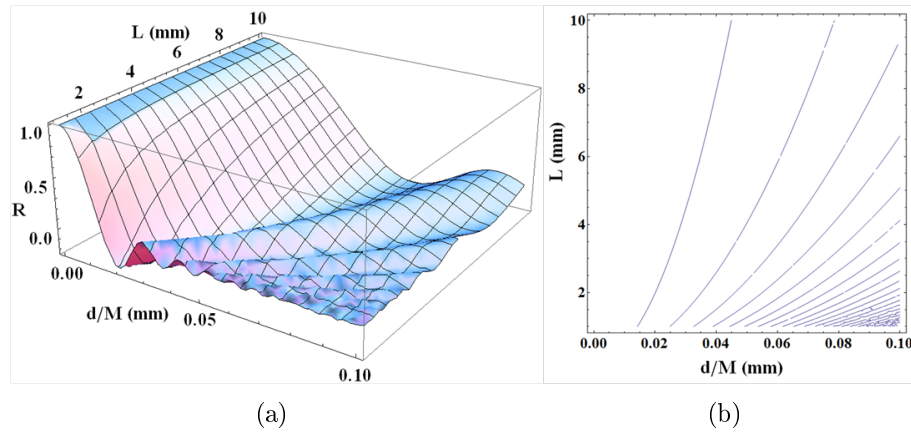


Figura 3.3: (a) Gráfico da razão entre os coeficientes ($R = \xi(\frac{d}{2M}, 0) / \xi(0, 0)$), em função da razão (d/M), em mm, e do comprimento L , também em mm, de um cristal usado em [53], para o qual $8n_{eff}\bar{w}/c \approx 10^9/9,138$. (b) Gráfico de L , em mm, em função de (d/M) resultando em $R = 0$.

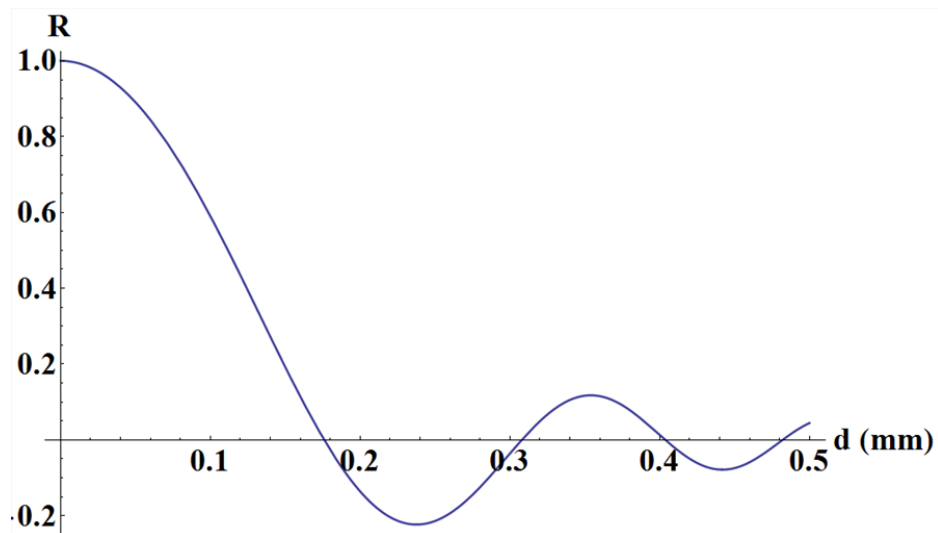


Figura 3.4: Gráfico da razão entre os coeficientes (R) em função de d , em mm, para $L = 9.6$ mm, $M = 4$ e $8n_{eff}\bar{w}/c \approx 10^9/9,138$.

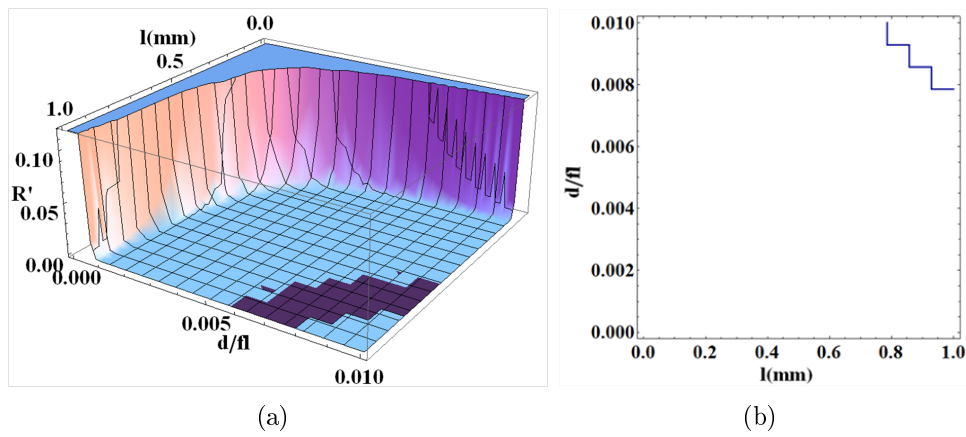


Figura 3.5: (a) Razão entre os coeficientes em, $R' = \tilde{E}\left(\frac{kd}{2f_l}\right) / \tilde{E}(0,0)$, em função da razão d/f_l e da largura da gaussiana l , em mm, para $k = (2\pi/413)10^9 \text{m}^{-1}$. (b) Gráfico de d/f_l em função de l , em mm, que resulta em $R' = 0$.

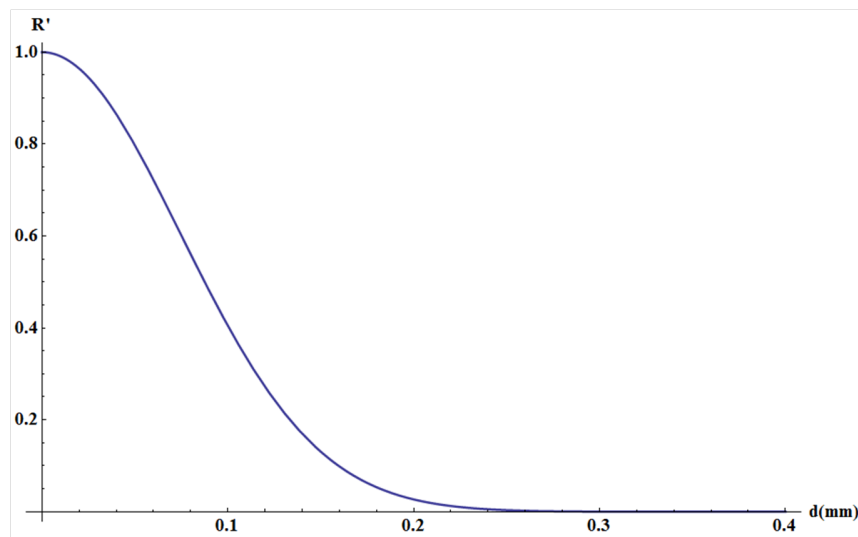


Figura 3.6: Gráfico da razão entre os coeficientes (R') em função de d , em mm, para $f_l = 20\text{cm}$, $k = (2\pi/413)10^9 \text{m}^{-1}$ e $l = 500\mu\text{m}$.

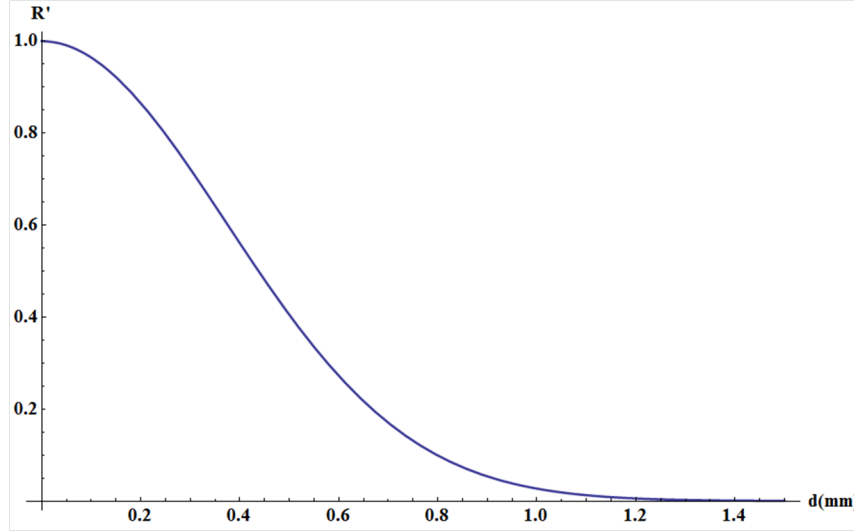


Figura 3.7: Gráfico da razão entre os coeficientes (R') em função de d , em mm, para $f_l = 20\text{cm}$, $k = (2\pi/413)10^9\text{m}^{-1}$ e $l = 100\mu\text{m}$.

3.4 Manipulando o perfil transversal do *pump* antes da CPD

O último método que vamos analisar foi introduzido em (2004) [55], e tem sido amplamente utilizado nos últimos anos. O método consiste em manipular a amplitude do bifóton por meio da manipulação prévia do feixe de bombeamento, isto é, a modificação do perfil do laser por componentes ópticos colocados antes do cristal. Antes porém, de entendermos essa etapa do processo, vamos analisar a propagação livre do bifóton até a fenda dupla, colocada em $z = z_f$.

Usando explicitamente as definições de x_+ e x_- na aplicação do operador \mathcal{R} , obtemos a amplitude no plano das fendas dada por (Eq.(2.31))

$$\Phi(x_+, x_-, z_f) \propto e^{\frac{ik_p}{8z_f}(2x_-)^2} \int E(x, 0) e^{\frac{ik_p}{2z_f}(x_+ - x)^2} d\chi \int \xi(r, 0) e^{\frac{ik_p}{2z_f}r^2} e^{i\Upsilon\left(\frac{k_p}{z_f}x_-\right)} d\Upsilon \quad (3.22)$$

A segunda integral, em particular, nos dá a transformada de Fourier da função Casamento de Fase modificada por uma fase quadrática. O resultado dessa integral, que vamos nomear como $\tilde{\xi}^f\left(\frac{k_p}{z_f}x_-\right)$, será proporcional à convolução entre $\tilde{\xi}\left(\frac{k_p x_-}{z_f}\right)$ e $e^{\frac{iz_f}{2k_p}\left(\frac{k_p x_-}{z_f}\right)^2}$ (transformada de Fourier da exponencial que multiplica ξ na Eq.(3.22)).

A convolução entre duas funções fornece a sobreposição das mesmas, em função do deslocamento relativo entre elas, isto é, a função resultante da convolução em cada ponto x é igual a área compartilhada pelas duas funções quando o deslocamento entre elas é x , como ilustrado na Fig.3.8.

O fator $z_f/(2k_p) = z_f\lambda/4\pi$, na função $e^{\frac{iz_f}{2k_p}q_-^2}$, é da ordem de 10^{-8}m^2 , de forma que

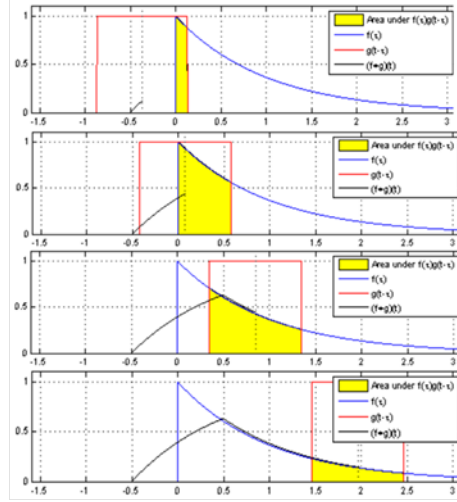


Figura 3.8: Representação gráfica da convolução de duas funções para diferentes distâncias entre as mesmas. A convolução em si é apresentada na cor preta, as duas funções nas cores vermelho e azul. A área entre as duas funções é colorida de amarelo. Figura retirada de [?]

essa função é aproximadamente constante. A função $\tilde{\xi}$ (Eq.(2.12)) também é aproximadamente constante, já que, $L/(8n_{eff}\bar{\omega}/c)$ é muito pequeno. Assim, a última integral da Eq.(3.22), por ser a convolução de duas funções aproximadamente constantes, pode ser aproximada como constante.

A primeira integral em Eq.(3.22) fornece a distribuição do campo do *pump* no plano das fendas a partir da distribuição do mesmo na região de nascimento do bifóton, e é por vezes chamada de propagador de Fresnel. De acordo com a análise feita em [11, 44, 66]

$$\begin{aligned} \int E(x, 0) e^{\frac{ik_p}{2z_f}(x+\chi)^2} d\chi &= E(x_+, z_f) \\ &= E\left(\frac{x_i + x_s}{2}, z_f\right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ao passar a amplitude $\Phi(x_+, x_-, z_f) \propto e^{\frac{ik_p}{8z_f}(2x_-)^2} E(x_+, z_f) \tilde{\xi}^f(x_-, z_f)$ pela fenda dupla obtemos o seguinte estado

$$\begin{aligned} |\psi_{III}(2 \times 2)\rangle &\propto \left[E\left(\frac{d}{2}, z_f\right) \tilde{\xi}^f(0, z_f) (|\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}\rangle + |-\frac{1}{2}\rangle |-\frac{1}{2}\rangle) + \right. \\ &\quad \left. + e^{\frac{ik_p}{8z_f}(2d)^2} E(0, z_f) \tilde{\xi}^f\left(\frac{d}{2}, z_f\right) (|\frac{1}{2}\rangle |-\frac{1}{2}\rangle + |-\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}\rangle) \right], \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde consideramos, como antes, todas as funções sendo simétricas. Fatorando a função $\tilde{\xi}^f$, e definindo $\phi = \frac{k_p}{8z_f}$, ficamos com

$$|\psi_{III}(2 \times 2)\rangle \propto \left[E\left(\frac{d}{2}, z_f\right) |\phi_+\rangle + e^{4i\phi d^2} E(0, z_f) |\psi_+\rangle \right]. \quad (3.25)$$

Como já foi discutido anteriormente, o espectro angular do laser de bombeamento é transferido para o estado quântico do bifóton, e por isso podemos escrever, no espaço das posições $E\left(\frac{x_i+x_s}{2}, z_f\right) = E(x_p, z_f)$.

Em termos práticos isso quer dizer que a amplitude do bifóton em z_f é o perfil transversal do feixe de bombeamento (para um casamento de fase perfeito) em z_f . Assim, a forma com que o campo transversal do *pump* é distribuído no plano das fendas, determina como será o estado de fenda, o que possibilita a produção tanto de $|\psi_+\rangle$ quanto de $|\phi_+\rangle$, contanto que tenhamos perfis de campo que anulem um dos coeficientes em Eq.(3.25). Na sequência veremos como cada um desses estados podem ser gerados na prática.

- Estado anti-simétrico

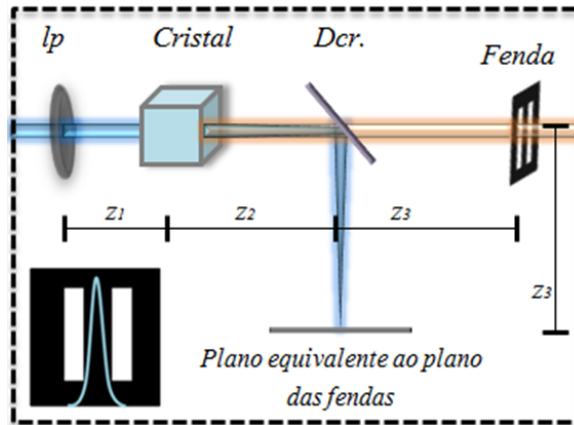


Figura 3.9: Produção do estado de correlação anti - simétrica

Pela Eq.(3.25) o estado $|\psi_+\rangle$ é obtido quando o campo transversal do *pump* é não-nulo apenas no centro da fenda múltipla. Uma maneira de conseguirmos isso é apresentada em [67] e [68] para um cristal tipo II. Na forma equivalente para um cristal tipo I, Fig.3.9, uma lente esférica (l_p) é usada para focalizar o laser no plano equivalente ao plano das fendas, sendo então, $z_1 + z_2 + z_3 = f_{l_p}$. No canto esquerdo da figura temos a representação de como a fenda dupla deveria estar alinhada com o perfil transversal (em $1D$) do laser de bombeamento caso o mesmo estivesse chegando até a fenda. Como isso não ocorre, devido à presença do dicróico, o alinhamento da fenda dupla deve ser feito por meio do balanceamento da população (número de fótons detectados) das aberturas, que é obtida pela medição da imagem da fenda dupla. Como uma segunda opção podemos substituir o dicróico por algum filtro que transmite apenas o comprimento

de onda do *pump* e medir, com um medidor de potência colocado atrás da fenda, o perfil transmitido pelas aberturas, de forma que, se não observamos nenhuma fração do feixe de bombeamento, sabemos que a fenda múltipla está alinhada com o spot do laser focalizado. O estado assim obtido é

$$|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [(|\frac{1}{2}\rangle |-\frac{1}{2}\rangle + |-\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}\rangle)]. \quad (3.26)$$

É interessante notar que o mesmo procedimento pode ser feito para gerar estados maximamente emaranhados de dimensões maiores $n \times n$ [69], já que todos os coeficientes nos quais x_i e x_s não são iguais e opostos são nulos. A Fig.3.10 ilustra a correlação entre os caminhos dos fótons em várias dimensões.

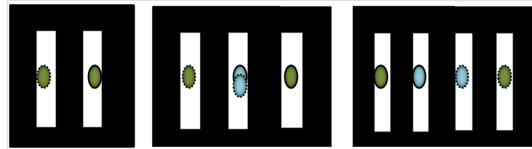


Figura 3.10: Ilustração da correlação entre os fótons no estado anti-simétrica em 2, 3 e 4 dimensões. Cada cor representa um par de fótons gêmeos, e os contornos contínuos e tracejados fazem diferenciação entre cada fóton do par.

- Estado simétrico

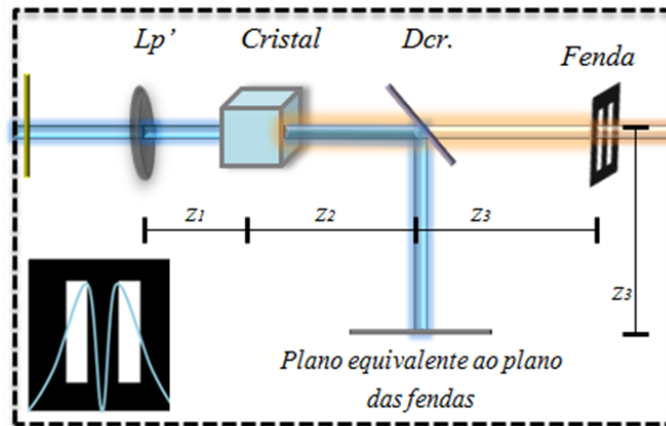


Figura 3.11: Produção do estado de correlação simétrica.

Para gerar o outro estado maximamente emaranhado 2×2 , precisamos fazer o oposto do que foi feito acima, isto é, precisamos anular o centro do campo que chega no plano das fendas, tomando o cuidado de não anular o mesmo em $d/2$. Para tanto, um fio fino pode ser colocado no caminho do laser, como feito em [67], seguido de uma lente esférica, colocada antes do cristal, a qual forma a imagem do fio no plano das fendas.

Como mostrado na Fig.3.11, o corte no perfil transversal do *pump* no plano das fendas, ou, a imagem do fio, deve estar alinhado com o centro da fenda dupla. Da mesma forma como descrito acima, o alinhamento da fenda pode ser feito pela medição da imagem da mesma (balanceamento da população de cada abertura), e também pelo medidor de potência, quando o dicróico é substituído por um filtro. Nesse último caso, o alinhamento será verificado quando a potência do laser de bombeamento for a mesma através das duas aberturas. Com esse procedimento o estado resultante é

$$|\phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [(|\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}\rangle + |-\frac{1}{2}\rangle |-\frac{1}{2}\rangle)]. \quad (3.27)$$

3.5 Detecção do estado

Veremos agora como os métodos descritos nas seções acima podem ser testados pela detecção do estado, isto é, como determinamos se conseguimos gerar $|\phi^+\rangle$ e $|\psi^+\rangle$. A reconstrução da matriz densidade do estado, e assim, sua caracterização completa, é feita por meio do processo de Tomografia Quântica [70, 71, 72], que, apesar de ser eficiente, possui complexidade desnecessária ao nosso objetivo. Em [7] os autores apresentam uma forma mais simples de determinar a quantidade de emaranhamento dos estados (e assim uma indicação do sucesso do métodos), descrita na sequência.

Se enviarmos cada um dos feixes de fótons gêmeos (*signal* e *idler*), transmitidos através das fendas, para diferentes detectores (D_i e D_s) observamos, em cada um, a contagem simples de cada feixe. Mas precisamos garantir que os fótons detectados pertençam a um mesmo par de fótons gêmeos, e por isso registramos contagens em coincidências entre os dois detectores, cuja probabilidade de ocorrer, para um estado geral, é dada por

$$P_2(x_i, x_s) = Tr \left(\hat{\rho} E_s^{(-)} E_i^{(-)} E_i^{(+)} E_s^{(+)} \right) \Rightarrow$$

$$P_2(x_i, x_s) = \left| \sum_{l_i} \sum_{l_s} \Phi_{in}(l_i, l_s, d, z_f) \langle null | E_i^{(+)} | l_i \rangle \langle null | E_s^{(+)} | l_s \rangle \right|^2, \quad (3.28)$$

onde $E_\alpha^{(+)}$ é a parte positiva do operador campo (para o fóton α) no plano em que os detectores são colocados, e $|null\rangle$ corresponde ao estado em que não há nenhum fóton sendo transmitido através de uma certa abertura (no espaço dos momentos trocamos $|null\rangle$ por $|vac\rangle$, que é o estado de Fock sem nenhum fóton) [44, 73].

Na Fig.3.12 está representado o esquema de detecção para todos os métodos de preparação de estados que estudamos (presente em todas as montagens discutidas). Nela, cada um dos fótons gêmeos passa por uma lente esférica com um dos focos no plano das fendas e o outro, no plano de detecção. Assim, temos, neste plano, a projeção da transformada de Fourier do campo transversal que sai do plano das fendas, de forma que [44, 73]

$$E_\alpha^{(+)} \propto e^{\frac{i}{2(f+z_f)}k} e^{-i\frac{kx_\alpha^2}{4f}} \hat{a} \left(\frac{kx_\alpha}{2f} \right) \quad (3.29)$$

e

$$\langle null | E_\alpha^{(+)} | l_\alpha \rangle \propto \text{sinc} \left(\frac{k}{2f} a x_\alpha \right) e^{-\frac{ikz_f}{4f} x_\alpha^2} e^{-\frac{ikd}{2f} l_\alpha x_\alpha}, \quad (3.30)$$

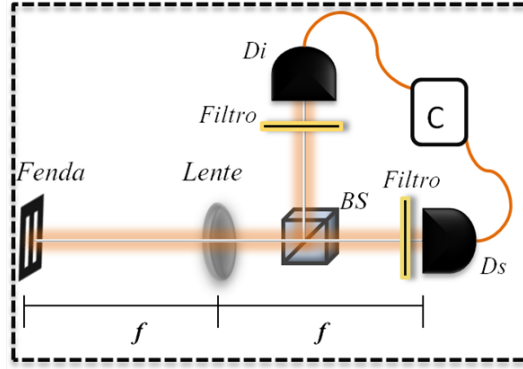


Figura 3.12: Montagem para a detecção dos estados de caminho dos fótons. Os fótons saem da fenda dupla, passam por uma lente esférica, são divididos por um divisor de feixes e seguem para os detectores. A lente projeta, nos planos dos detectores, a transformada de Fourier do campo no plano das fendas múltiplas.

nos dando

$$P_2(x_i, x_s) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_s\right) \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_i\right) \left| \sum_{l_i} \sum_{l_s} \Phi_{\text{in}}(l_i, l_s, d, Z_f) e^{-i\gamma(l_i x_i + l_s x_s)} \right|^2, \quad (3.31)$$

onde $\gamma \equiv -kd/(2f)$. Em particular, para os estados das Eqs. (3.9), (3.14) e (3.25), representados de forma genérica como

$$|\psi g\rangle = C_1 |\phi_+\rangle + C_2 |\psi_+\rangle, \quad (3.32)$$

a probabilidade de detectarmos coincidências entre os detectores é

$$P_2(x_i, x_s) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_s\right) \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_i\right) \{1 + |C_2|^2 \cos(\gamma(x_s - x_i)) + |C_1|^2 \cos(\gamma(x_s + x_i)) + 2|C_1||C_2| [\cos(\gamma x_s) + \cos(\gamma x_i)]\}. \quad (3.33)$$

Como já foi visto, o estado do bifóton será maximamente emaranhado apenas se um dos coeficientes, C_1 ou C_2 , for nulo. Nesse caso, a expressão acima teria apenas termos de interferência condicional [67], ou seja, fixando um dos detectores em duas posições diferentes, a varredura do outro detector nos dá, nas coincidências [74], dois padrões de interferência defasados, sendo ambos com alta visibilidade. É conhecido na literatura que a presença apenas de termos condicionais no padrão de interferência (em coincidências) de dois qubits, caracteriza um estado maximamente emaranhado [6]. Na Fig.3.14 temos os resultados experimentais obtidos por Leonardo Neves e colaboradores em [7], usando o método da seção 3.4 para a geração do estado anti-simétrico. Os

padrões de interferência foram medidos mantendo o detector D_s fixo (em determinado x_s) e varrendo o D_i , sendo $x_s = 0$ nos padrões da parte de cima da figura e $x_s = \pi/\gamma$ nos padrões da parte de baixo. Observamos, claramente, que a visibilidade e o número de contagens caem drasticamente no padrões obtidos com o detector fixo em $x_s = \pi/\gamma$, para os estados não maximamente emaranhados, que são aqueles obtidos com perfis de campo no plano das fendas (Fig.3.13) que são diferentes de zero em $d/2$.

- A probabilidade marginal e o emaranhamento

Integrando a Eq.(4.33) em termos de uma das variáveis, por exemplo x_s , encontramos a probabilidade de detecção em coincidências com o fóton *idler* sendo detectado com D_i fixo em um certo x_i , e com o fóton *signal* sendo detectado em qualquer posição, a qual é chamada de probabilidade marginal [75], e denotada por $\bar{P}_1(x_\alpha)$. Em [44] foi mostrado que, para os estados aqui discutidos, a probabilidade marginal é igual a probabilidade $P_1(x_\alpha)$ de um fóton ser detectado, independentemente da posição de detecção do outro fóton, isto é,

$$\bar{P}_1(x_i) = \int P_2(x_i, x_s) dx_s = P_1(x_i) = \text{Tr} \left(\hat{\rho}_i E_i^{(-)} E_i^{(+)} \right), \quad (3.34)$$

com

$$P_1(x_i) \propto \text{sinc}^2 \left(\frac{k}{2f} a x_i \right) [1 + |C_1 C_2^* + C_1^* C_2| \cos(\gamma x_i)]. \quad (3.35)$$

Substituindo a expressão, Eq.(2.10), da Concorrência (C) para um estado 2×2 na Eq.(3.35), obtemos

$$P_1(x_i) \propto \text{sinc}^2 \left(\frac{k}{2f} a x_i \right) \left[1 + \sqrt{1 - C^2} \cos(\gamma x_i) \right], \quad (3.36)$$

de forma que, deixando o detector do fóton *signal* completamente "aberto" (experimentalmente isso é feito por uma lente coletora), e fazendo uma varredura no detector do fóton *idler* (supostamente pontual), registrando as coincidências, e sabendo que o número de coincidências contados em cada posição é proporcional à probabilidade acima, temos um padrão de interferência cuja visibilidade V [76] é dada por

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \sqrt{1 - C^2}. \quad (3.37)$$

Assim, a visibilidade do padrão de interferência (resultante da medição da probabilidade marginal de um estado de dois qubits fotônicos codificados em caminho) nos dá a quantidade de emaranhamento do estado gerado. Sendo que, quando a visibilidade é igual a zero, $C = 1$ e o estado é maximamente emaranhado. Na Fig.3.15 estão apresentados alguns resultados experimentais, para a medição da probabilidade marginal, obtidos em [7], utilizando o método da seção 3.4.

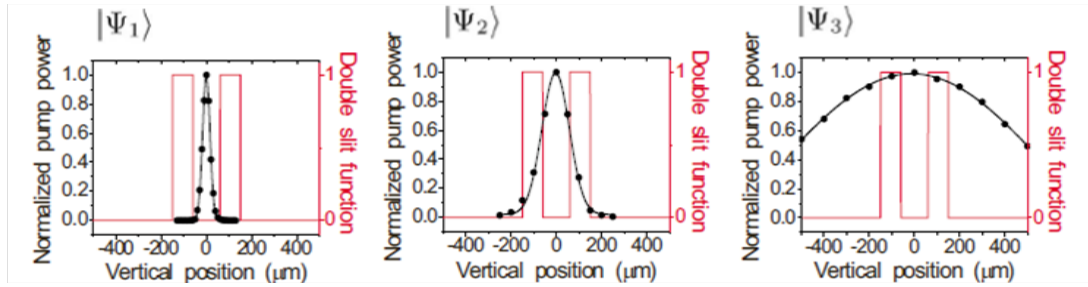


Figura 3.13: Diferentes perfis para o feixe de bombeamento incidindo no plano das fendas produzidos em [7] para a obtenção de três estados com diferentes graus de emaranhamento, e identificados como $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ e $|\psi_3\rangle$

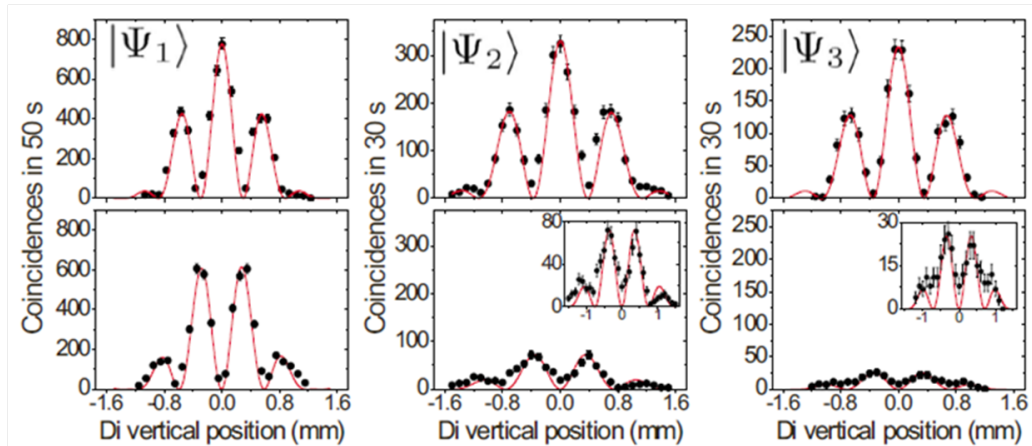


Figura 3.14: Padrão de interferência, nas coincidências, obtidos em [7] para os estados produzidos à partir dos perfis da Fig.3.14., em função da posição de um detector (x_i) enquanto o outro é mantido fixo em uma certa posição, à qual é $x_s = 0$ para os padrões de cima, e $x_s = \pi/\gamma$ para os padrões de baixo.

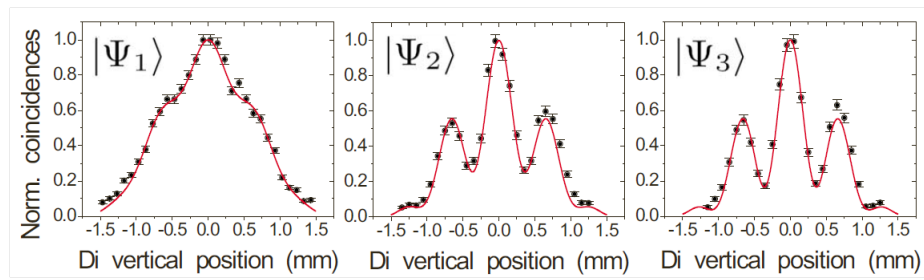


Figura 3.15: Padrão de interferência, nas coincidências, obtidos em [7] para os estados produzidos à partir dos perfis da Fig.3.14, em função da posição de um detector (x_i) enquanto o outro permanece completamente aberto (experimentalmente isso é feito com uma lente coletora).

Capítulo 4

A produção dos estados 2×3

Ao longo deste capítulo vamos aplicar os métodos das seções 3.3 e 3.4 para estados de fenda 2×3 . Na primeira seção vamos analisar algumas das semelhanças e diferenças entre esses estados e os estados de dois qubits. Além disso, vamos estudar os estados obtidos em cada um dos métodos. Na seção 4.2 estudaremos, em comparação com os resultados do capítulo anterior, o comportamento da detecção em coincidências desses estados. Na sequência, seção 4.3, veremos um exemplo de como as análises para os estados 2×3 podem ser extendidas a dimensões maiores. Por último, seção 4.4, uma proposta experimental, para a implementação de um dos métodos, a fim de gerarmos os estados obtidos teoricamente.

4.1 Estados 2×3

Ao longo dessa seção vamos analisar os estados de dimensão 2×3 , tanto os maximamente emaranhados quanto os não maximamente emaranhados, que podem ser obtidos com os métodos apresentados no capítulo anterior. Antes de tudo temos que, pela descrição dos estados de fenda na Eq.(2.22), a expressão geral para um estado 2×3 é dada por

$$\begin{aligned} |\psi_{f(2 \times 3)}\rangle = & \gamma \left[\left| -\frac{1}{2} \right\rangle (\Phi_{in}(-\frac{d}{2}, -d, Z_f) |-1\rangle + \Phi_{in}(\frac{-d}{2}, 0, Z_f) |0\rangle + \Phi_{in}(\frac{-d}{2}, d, Z_f) |1\rangle) \right. \\ & \left. + \left| \frac{1}{2} \right\rangle (\Phi_{in}(\frac{d}{2}, -d, Z_f) |-1\rangle + \Phi_{in}(\frac{d}{2}, 0, Z_f) |0\rangle + \Phi_{in}(\frac{d}{2}, d, Z_f) |1\rangle) \right], \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde os coeficientes dos estados de caminho dos fótons estão escritos em termos de x_i e x_s , isto é, $\Phi_{in}(x_i, x_s, z_f)$, a qual é um produto de duas funções, uma dependendo de x_+ (o campo elétrico), e outra de x_- (transformada de fourier do casamento de fase).

4.1.1 Manipulando o perfil transversal do bifóton, usando dois conjuntos de fendas diferentes

Numa primeira análise para a produção desses estados, vamos considerar que os feixes de fótons gêmeos passam por uma montagem como mostrada na Fig.4.1. Apesar de análoga à montagem da Fig. 3.2, os feixes são separados de forma que uma fenda dupla e uma fenda tripla são colocadas, cada uma, numa das saídas do divisor de feixe.

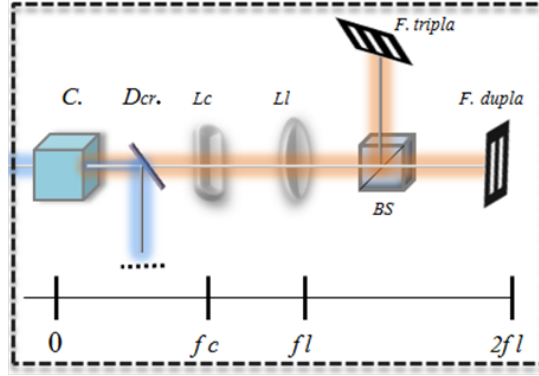


Figura 4.1: Montagem da preparação de estados 2×3 usando um telescópio não confocal. Os feixes gerados pela CPD são separados por um divisor de feixe não polarizador (BS), de forma que as distâncias entre as lentes e cada uma das fendas múltiplas são as mesmas que da Fig.3.2.

Considerando que os dois conjuntos de fenda múltipla estão à uma distância da lente esférica igual à sua distância focal, temos uma amplitude nos planos das duas fendas idêntica à Eq. (3.6), e a seguinte expressão para o estado,

$$\begin{aligned} |\psi_{I(2 \times 3)}\rangle \propto & \{ \xi \left(\frac{d}{4M}, 0 \right) [E \left(\frac{3d}{4M}, 0 \right) (|-\frac{1}{2}\rangle | -1\rangle + |\frac{1}{2}\rangle | 1\rangle) + E \left(\frac{d}{4M}, 0 \right) (|-\frac{1}{2}\rangle | 0\rangle + |\frac{1}{2}\rangle | 0\rangle)] \\ & + \xi \left(\frac{3d}{4M}, 0 \right) E \left(\frac{d}{4M}, 0 \right) (|-\frac{1}{2}\rangle | 1\rangle + |\frac{1}{2}\rangle | -1\rangle) \} \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde, novamente, supomos a simetria de E e ξ no cristal. Considerando ainda que o perfil transversal do *pump* no plano das fendas é tal que $3d/4M$ é muito menor que a largura do perfil (E é aproximadamente constante), temos

$$|\psi_{I(2 \times 3)}\rangle \propto \{ \xi \left(\frac{d}{4M}, 0 \right) [|-\frac{1}{2}\rangle (| -1\rangle + | 0\rangle) + |\frac{1}{2}\rangle (| 1\rangle + | 0\rangle)] + \xi \left(\frac{3d}{4M}, 0 \right) (|-\frac{1}{2}\rangle | 1\rangle + |\frac{1}{2}\rangle | -1\rangle) \} . \quad (4.3)$$

De forma análoga ao que foi estudado no capítulo anterior, a única manipulação que iremos considerar, nesse caso, é a anulação do casamento de fase em $3d/4$. Seguindo a análise feita na seção 3.3, temos na Fig.4.2 (a), o gráfico de $R = \xi \left(3\frac{d}{4M} \right) / \xi \left(\frac{d}{4M} \right)$ em função de d/M e do comprimento do cristal, ambos em mm. O corte do gráfico da Fig.4.2 (a) na região em que $R = 0$ é mostrado na parte (b) da mesma figura. Para

$L = 9.26\text{mm}$, $M = 4$ o gráfico da Fig.4.3 mostra a razão R em função de d , em mm.

Na preparação do estado apenas com a lente esférica (amplitude no plano das fendas igual a Eq.(3.12)), obtemos o seguinte estado

$$|\psi_{II(2 \times 3)}\rangle \propto \left\{ \tilde{E} \left(\frac{3kd}{4f_l}, 0 \right) \tilde{\xi} \left(\frac{kd}{4f_l}, 0 \right) (|-\frac{1}{2}\rangle | -1\rangle + |\frac{1}{2}\rangle | 1\rangle) + \right. \\ \left. + \tilde{E} \left(\frac{kd}{4f_l}, 0 \right) \left[\tilde{\xi} \left(\frac{kd}{4f_l} \right) (|-\frac{1}{2}\rangle | 0\rangle + |\frac{1}{2}\rangle | 0\rangle) + \tilde{\xi} \left(\frac{3kd}{4f_l}, 0 \right) (|-\frac{1}{2}\rangle | 1\rangle + |\frac{1}{2}\rangle | -1\rangle) \right] \right\}. \quad (4.4)$$

Para $3d/4f_l$ muito menor que a divergência do casamento de fase, $\tilde{\xi}$ é aproximadamente constante, nos dando o estado

$$|\psi_{II(2 \times 3)}\rangle \propto \left\{ \tilde{E} \left(\frac{3kd}{4f_l}, 0 \right) (|-\frac{1}{2}\rangle | -1\rangle + |\frac{1}{2}\rangle | 1\rangle) \right. \\ \left. + \tilde{E} \left(\frac{kd}{4f_l}, 0 \right) [|-\frac{1}{2}\rangle (| 0\rangle + | 1\rangle) + |\frac{1}{2}\rangle (| 0\rangle + | -1\rangle)] \right\}. \quad (4.5)$$

Mais uma vez, temos na Fig.4.4 os gráficos da razão, $R' = \tilde{E} \left(\frac{3kd}{4f_l}, 0 \right) / \tilde{E} \left(\frac{kd}{4f_l}, 0 \right)$, entre os coeficiente em função de l , em mm, e da razão d/f_l (mostrado na parte (a)), e o corte do gráfico da Fig.4.4(a) na região em que $R' = 0$ é mostrado na parte (b). A mesma razão em função de d , em mm, para $l = 500\mu\text{m}$ e $l = 100\mu\text{m}$ é mostrada nas Figs.4.5 e 4.6, respectivamente.

Para as duas manipulações acima, é interessante observar que os dois estados gerados, considerando o sucesso da preparação, são simétricos um em relação ao outro, isto é, espelhados em suas correlações (como mostram as Figs.4.7(a) e (b)). Assim, ambos possuem a mesma quantidade de emaranhamento, sendo a Concorrência $C = 0.866$ e o Emaranhamento de Formação $E_f = 0.811$.

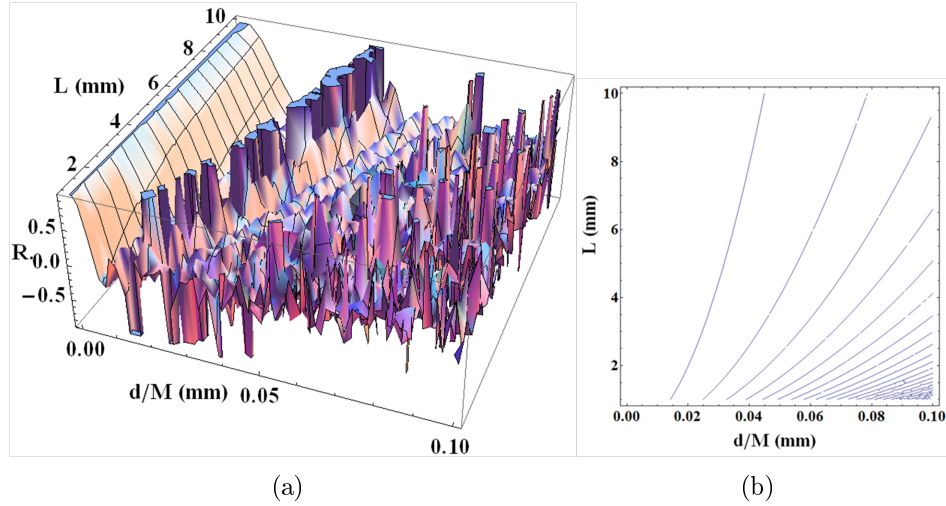


Figura 4.2: (a) Razão entre os coeficientes, $\xi\left(\frac{d}{2M}\right)/\xi(0)$, em função da razão (d/M) e do comprimento do cristal L , ambos em mm. (b) Pontos em que essa razão é nula. A geração do estado da Eq.(4.3) é feita por meio de um telescópio não confocal, numa montagem análoga a da Fig.3.2.

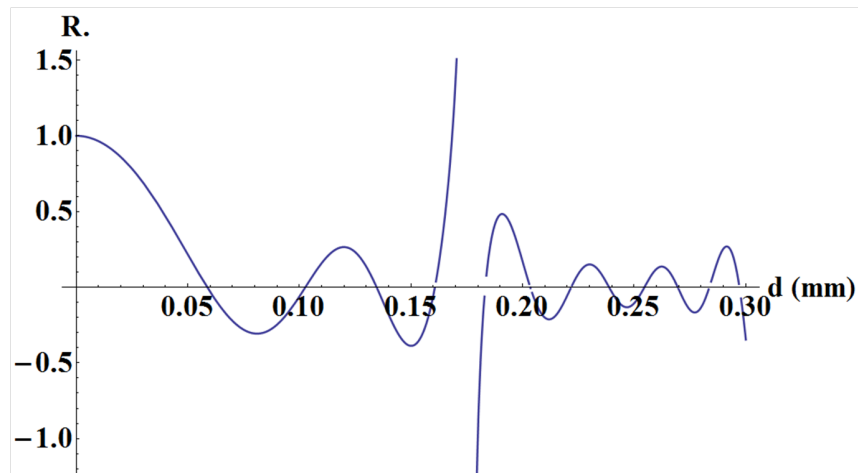


Figura 4.3: Razão entre os coeficientes $R = \xi\left(\frac{d}{2M}\right)/\xi(0)$ em função de d (em mm), para $L = 9.6$ mm, $M = 4$ e $8n_{ef}\bar{w}/c \approx 10^9/9,138$

4.1.2 Manipulando o perfil transversal do *pump*

Iremos estudar, agora, como seria a produção de estados 2×3 pelo último método apresentado no capítulo anterior, procurando por estados maximamente emaranhados. Para começar vamos analisar algumas características dos estados com essa dimensão, em contraste aos estados 2×2 , e então, buscaremos pelos estados de emaranhamento máximo.

- **O estado bi-ortogonal \times estado maximamente emaranhado**

Considerando uma amplitude como a resultante da Eq. (3.22), podemos escrever o estado 2×2 como

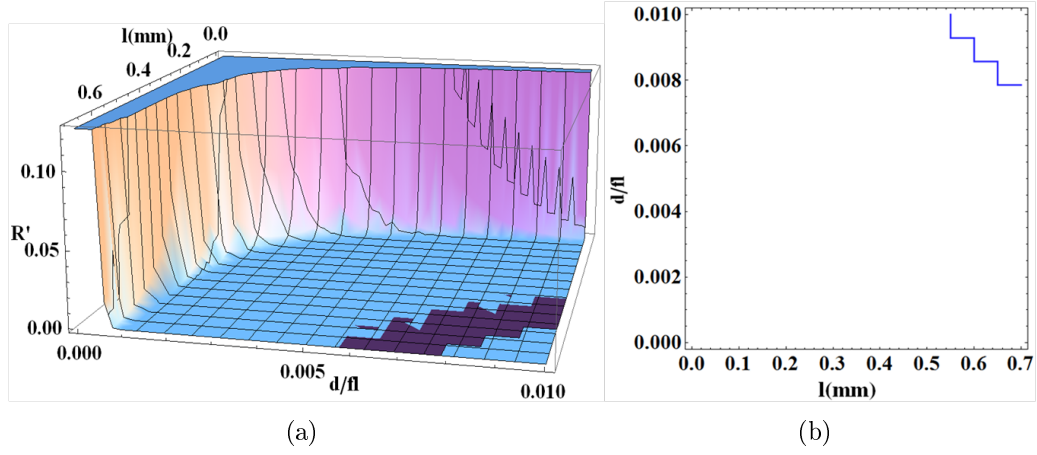


Figura 4.4: (a) Razão entre os coeficientes, $R' = \tilde{E}\left(\frac{3kd}{4f_l}, 0\right) / \tilde{E}\left(\frac{kd}{4f_l}, 0\right)$, em função da razão d/f_l e da largura da gaussiana l em mm, para $k = (2\pi/413)10^9 \text{m}^{-1}$. (b) Gráfico de d/f_l , em função de l em mm, que resulta em $R' = 0$. A geração do estado da Eq.(4.5) é feita com o bifóton passando por uma lente esférica.

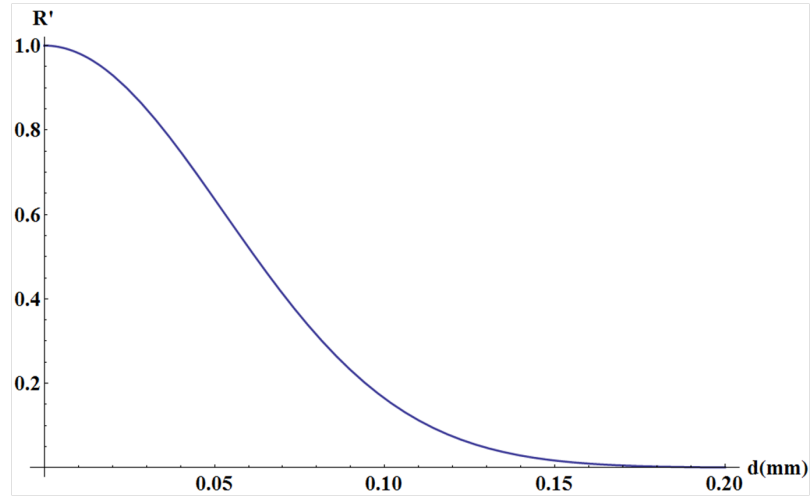


Figura 4.5: Gráfico da razão $R' = \tilde{E}\left(\frac{3kd}{4f_l}, 0\right) / \tilde{E}\left(\frac{kd}{4f_l}, 0\right)$ em função de d (em mm), para $k = (2\pi/413)10^9 \text{m}^{-1}$, $f_l = 20 \text{cm}$ e $l = 500 \mu\text{m}$. O estado da Eq.(4.5) é gerado com o bifóton passando por uma lente esférica.

$$|\psi_{(2 \times 2)}\rangle \propto \left[|-\frac{1}{2}\rangle \left(E\left(\frac{d}{2}, z_f\right) |-\frac{1}{2}\rangle + e^{i\phi d^2} E(0, z_f) |\frac{1}{2}\rangle \right) + |\frac{1}{2}\rangle \left(E\left(\frac{d}{2}, z_f\right) |\frac{1}{2}\rangle + e^{i\phi d^2} E(0, z_f) |-\frac{1}{2}\rangle \right) \right], \quad (4.6)$$

onde, $\phi = k/(8z_f)$, e o estado 2×3 como

$$|\psi_{(2 \times 3)}\rangle \propto \left[|-\frac{1}{2}\rangle \left(E\left(-\frac{3d}{4}, z_f\right) |-1\rangle + E\left(-\frac{d}{4}, z_f\right) |0\rangle + e^{2i\phi d^2} E\left(\frac{d}{4}, z_f\right) |1\rangle \right) + |\frac{1}{2}\rangle \left(e^{2i\phi d^2} E\left(-\frac{d}{4}, z_f\right) |-1\rangle + E\left(\frac{d}{4}, z_f\right) |0\rangle + E\left(\frac{3d}{4}, z_f\right) |1\rangle \right) \right]. \quad (4.7)$$

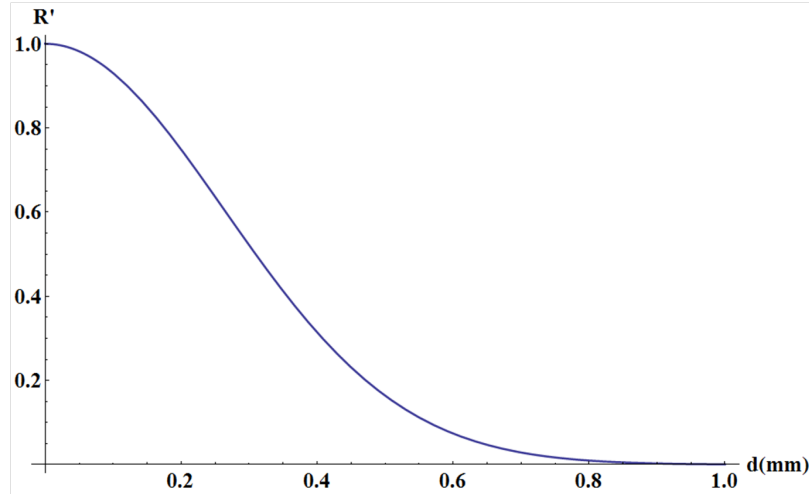


Figura 4.6: Gráfico da razão $R' = \tilde{E}\left(\frac{3kd}{4f_l}, 0\right) / \tilde{E}\left(\frac{kd}{4f_l}, 0\right)$ em função de d (em mm), para $k = (2\pi/413)10^9\text{m}^{-1}$, $f_l = 20\text{cm}$ e $l = 100\mu\text{m}$.

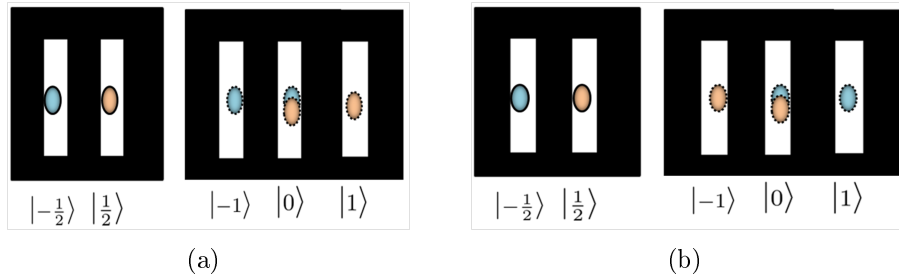


Figura 4.7: Representação da correlação entre os fótons nos estados 2×3 gerados de acordo com [2]. (a) Estado gerado com o telescópio. (b) Estado gerado com a lente esférica.

A expressão acima para o estado 2×2 nos mostra que quando o perfil transversal do campo do *pump* (e aqui também do bifóton) é zerado em certos pontos (0 ou $d/2$), os dois possíveis estados obtidos são biortogonais e maximamente emaranhados. Em outras palavras, levando em conta a simetria dos coeficientes, os dois estados obtidos, quando fazemos os dois parênteses na Eq.(4.6) ortogonais, pela anulação de um dos coeficientes, são estados de Bell.

Considerando então nossa busca pelos estados de correlação máxima passando, primeiramente, pela busca de estados biortogonais, podemos nos perguntar se os tipos de manipulações feitas na Eq.(4.6) produzem resultados análogos para os estados da Eq.(4.7). Ou seja, considerando apenas a anulação (ou não) de certos pontos do perfil transversal do campo, os estados biortogonais obtidos a partir da Eq.(4.7) são maximamente emaranhados? Se não, que tipo de estados são? E como então obter os estados maximamente emaranhados para essa dimensão?

Para responder à essas perguntas observe o diagrama da Fig.4.8.

Nele, estão os coeficientes do estado identificados pela interseção das linhas (níveis do qubit) com as colunas (níveis do qutrit). As setas ligam as amplitudes do perfil

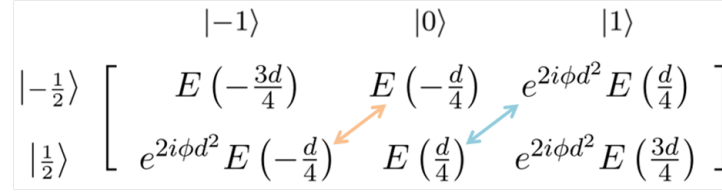


Figura 4.8: Diagrama dos coeficientes do estado geral 2×3 .

transversal de campo, num certo ponto, que determinam mais de um coeficiente do estado. Esse último fato introduz uma certa limitação à escolha das correlações, pois não podemos, por exemplo, escolher um estado em que $|- \frac{1}{2}\rangle$ não tenha correlação com $|0\rangle$, e $|\frac{1}{2}\rangle$ tenha correlação com $|1\rangle$. Se escolhemos não ter uma delas, automaticamente perdemos a outra. Esse fato também está presente no estado de dois qubits onde os coeficientes de $|- \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}\rangle$ e $|\frac{1}{2}\rangle |- \frac{1}{2}\rangle$ são, ambos, determinados pela intensidade do perfil em $x_+ = 0$.

Levando em conta apenas a escolha de anular ou não o campo transversal num certo ponto, existem dois possíveis estados (feitos biortogonais por essa escolha) que correlacionam todas as fendas e um possível estado que exclui correlações entre uma das aberturas da fenda tripla e as demais. Esses estados são apresentados abaixo:

$$|\tau_I\rangle \propto \left[E\left(-\frac{d}{4}, z_f\right) \left| -\frac{1}{2}\right\rangle |0\rangle + \left| \frac{1}{2}\right\rangle \left(e^{2i\phi d^2} E\left(-\frac{d}{4}, z_f\right) \left| -1\right\rangle + E\left(\frac{3d}{4}, z_f\right) \left| 1\right\rangle \right) \right] \quad (4.8)$$

$$|\tau_{II}\rangle \propto \left[\left| -\frac{1}{2}\right\rangle \left(E\left(-\frac{3d}{4}, z_f\right) \left| -1\right\rangle + e^{2i\phi d^2} E\left(\frac{d}{4}, z_f\right) \left| 1\right\rangle \right) + E\left(\frac{d}{4}, z_f\right) \left| \frac{1}{2}\right\rangle |0\rangle \right] \quad (4.9)$$

$$|\tau_{III}\rangle \propto \left[E\left(-\frac{3d}{4}, z_f\right) \left| -\frac{1}{2}\right\rangle \left| -1\right\rangle + E\left(\frac{3d}{4}, z_f\right) \left| \frac{1}{2}\right\rangle \left| 1\right\rangle \right] \quad (4.10)$$

Na Fig.4.14 ((a)-(f)) temos os três perfis, produzidos a partir de um perfil gaussiano, necessários à geração de cada um dos estados acima (à esquerda) e uma representação das correlações (à direita). A Fig.4.15((a)-(f)) mostra a posição, sobre as fendas múltiplas, de cada um dos cortes do perfil, para conjuntos de fenda com $d = 4a$. A posição desses cortes em relação às aberturas depende da relação entre d e a , cujo valor é relevante nesse momento, de forma que, caso um conjunto de fendas diferente seja usado, tal posicionamento será diferente, isto é, $3d/4$ não coincidirá com a borda de uma das aberturas da fenda dupla, por exemplo.

Considerando a simetria do campo transversal, o estado $|\tau_{III}\rangle$ possui, claramente, um emaranhamento máximo (coeficientes de Schmidt iguais a $1/\sqrt{2}$) apesar de não correlacionar todas as fendas. Já o estado $|\tau_{II}\rangle$, possui os seguintes autovalores, não nulos, das matrizes densidade reduzida

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{|E(\frac{d}{4}, z_f)|^2}{2|E(\frac{d}{4}, z_f)|^2 + |E(-\frac{3d}{4}, z_f)|^2}; \\
a_2 &= \frac{|E(\frac{d}{4}, z_f)|^2 + |E(-\frac{3d}{4}, z_f)|^2}{2|E(\frac{d}{4}, z_f)|^2 + |E(-\frac{3d}{4}, z_f)|^2},
\end{aligned} \tag{4.11}$$

pelos quais vemos que o estado será maximamente emaranhado apenas se $E(-\frac{3d}{4}, z_f) = 0$, o que nos dá, novamente, um estado que não relaciona todas as fendas. Numa análise intermediária, temos os gráficos da Concorrência e do Emaranhamento de formação desse estado (Fig.4.9(a) e (b)) em função de seus coeficientes, sendo $E(-\frac{3d}{4}, z_f) \equiv A$ e $E(\frac{d}{4}, z_f) \equiv B$.

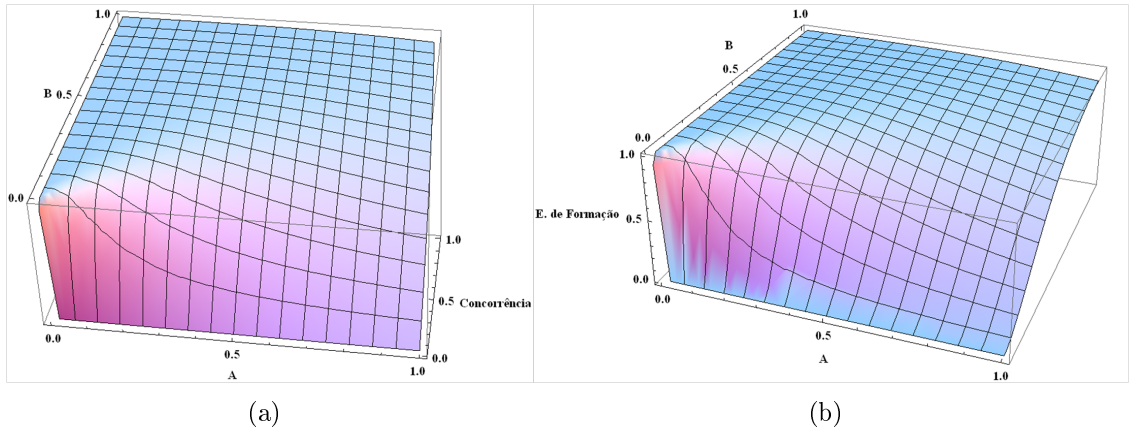


Figura 4.9: (a)Concorrência do estado $|\tau_{II}\rangle$, em função dos valores dos campos. (b)Emaranhamento de formação do estado $|\tau_{II}\rangle$ em função dos campos. Os gráficos para o estado $|\tau_I\rangle$ apresentam o mesmo comportamento.

• Manipulação para o estado maximamente emaranhado

Uma vez que a análise acima, feita apenas pela observação da Fig.4.8, não nos deu estados maximamente emaranhados correlacionando todas as fendas, vamos procurá-los pela quantificação do emaranhamento do estado geral. Como vimos no segundo capítulo, o cálculo das medidas de emaranhamento estudadas nesse trabalho envolvem os autovalores da matriz densidade reduzida do estado em questão. Portanto, tomando a matriz densidade para Eq.(4.5) encontramos os seguintes autovalores:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{\sqrt{(|E(-\frac{3d}{4})|^2 - |E(\frac{3d}{4})|^2)^2 + 4|g|^2}}{2(|E(-\frac{d}{4})|^2 + |E(\frac{d}{4})|^2) + |E(-\frac{3d}{4})|^2 + |E(\frac{3d}{4})|^2} \right], \tag{4.12}$$

onde $g = e^{-2i\phi d^2} E(-\frac{3d}{4}) E^*(-\frac{d}{4}) + e^{2i\phi d^2} E^*(\frac{3d}{4}) E(\frac{d}{4}) + E(-\frac{d}{4}) E^*(\frac{d}{4})$.

Tendo em mente as propriedades da decomposição de Schmidt (seção 2.1), temos que o estado será maximamente emaranhado quando $\lambda_+ = \lambda_- = 1/2$, o que só é possível se o numerador da fração da Eq.(4.11) for nulo. Isto é, precisamos que

$$\left(|E(-\frac{3d}{4})|^2 - |E(\frac{3d}{4})|^2\right)^2 + 4|g|^2 = 0. \quad (4.13)$$

Até o momento não consideramos a simetria do perfil transversal, o que possibilitou a proposta de estados com correlações interessantes. Mas como temos quatro variáveis a serem “manipuladas” podemos, a título de simplificação, considerar a simetria do perfil, inicialmente gaussiano, de forma que a Eq.(4.13) se resume a $gg^* = 0$, ou seja,

$$e^{-2i\phi d^2} E(\frac{3d}{4}) E^*(\frac{d}{4}) + e^{2i\phi d^2} E^*(\frac{3d}{4}) E(\frac{d}{4}) + |E(\frac{d}{4})|^2 = 0. \quad (4.14)$$

Vamos considerar que a amplitude do campo nos dois pontos acima estão relacionados de forma tal que $E(\frac{3d}{4}) = vE(\frac{d}{4})$, sendo v uma constante real. Temos que a Eq.(4.14) é satisfeita para $v = -\frac{1}{2\cos(2\phi d^2)}$. Isso quer dizer que para cada montagem experimental (para cada valor de $\phi = k/(8z_f)$), encontramos um fator de proporcionalidade que relaciona $E(\frac{3d}{4})$ e $E(\frac{d}{4})$, e que resulta no seguinte estado

$$|\psi_{me}\rangle \propto E(\frac{d}{4}) \left[|-\frac{1}{2}\rangle \left(-\frac{1}{2}|-1\rangle + |0\rangle + |1\rangle \right) + |\frac{1}{2}\rangle \left(|-1\rangle + |0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle \right) \right]. \quad (4.15)$$

Em especial, para o caso em que $2\phi d^2 = \pi$, $E(\frac{3d}{4}) = \frac{E(\frac{d}{4})}{2}$. Isso quer dizer que para que o estado seja maximamente emaranhado, a intensidade do campo elétrico em $3d/4$ deve ser quatro vezes menor que a intensidade em $d/4$, isto é, o módulo do campo em $3d/4$ deve ser metade do módulo em $d/4$. Para $2\phi d^2 = 2\pi$ uma diferença de fase igual a π , além da atenuação da amplitude, deve ser introduzida entre esses dois pontos (entre o campo nos dois pontos). Na Fig.4.14 temos o perfil, produzido a partir de um perfil gaussiano, necessário à geração do estado maximamente emaranhado descrito acima (g), e uma representação da correlação desse estado (h). Também temos, na Fig.4.15 ((g) e (h)), a posição dos pontos de atenuação do perfil, sobre as fendas múltiplas com $d = 4a$.

É interessante notar que desde que o campo não seja nulo em $d/4$ e em $3d/4$, a largura do perfil, ou mesmo seu formato, não são em si mesmos determinantes, apesar do discutido acima. Podemos ter um perfil qualquer (não apenas gaussiano) e utilizar algum dispositivo que mude a amplitude e a fase do campo em pontos específicos.

4.2 Detecção dos estados

Ao longo dessa seção vamos estudar os aspectos da detecção dos estados discutidos acima, nos atendo a análise da condicionalidade do padrão de interferência nas coincidências, e do comportamento das probabilidades marginais. Vamos estudar, ainda, outras possibilidades para a detecção dos estados, envolvendo a medição da imagem das fendas. Vamos analisar apenas $|\tau_{III}\rangle$, $|\psi_{me}\rangle$, $|\psi_I\rangle$, $|\tau_{II}\rangle$, já que, $|\psi_{II}\rangle$ e $|\tau_I\rangle$ são estados espelhados em relação aos dois últimos. Além disso, vamos considerar que o fóton *signal* passa pela fenda tripla e o fóton *idler* pela fenda dupla (o passo a passo das contas relacionadas à detecção são apresentadas no Apêndice B).

- Probabilidade de detecção em coincidências com os dois detectores no Plano de Fourier de uma lente

A começar pela probabilidade em coincidências, temos, para o estado $|\psi_I\rangle$, mostrado na Eq.(4.3) com $\xi\left(\frac{3d}{4M}\right) = 0$

$$P_2^{\psi_I}(x_i, x_s) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_s\right) \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_i\right) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cos(\gamma(2x_s + x_i)) + \frac{1}{2} \cos(\gamma x_i) + \cos(\gamma(x_s + x_i)) + \cos(\gamma x_s) \right\}. \quad (4.16)$$

Sabemos que este estado, $|\psi_I\rangle$, não apresenta emaranhamento máximo, e de forma semelhante ao caso 2×2 , observamos tanto termos condicionais como não-condicionais na expressão acima. Ainda assim, o comportamento desse padrão nas coincidências pode ser verificado experimentalmente. Se fixarmos, por exemplo D_s em $x_s = 0$ obtemos um padrão de interferência proporcional a $[1 + \cos(\gamma x_i)]$, ao passo que, para $x_s = \pi/\gamma$, obtemos uma contagem nula para as coincidências. Já para D_i fixo em $x_i = 0$ e em $x_i = \pi/\gamma$, obtemos padrões proporcionais a, respectivamente, $[1 + (1/3) \cos(2\gamma x_s) + (4/3) \cos(\gamma x_s)]$ e $[1 - \cos(2\gamma x_s)]$.

Para o estado $|\tau_{II}\rangle$ (Eq.(4.9)), temos

$$P_2^{\tau_{II}}(x_i, x_s) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_s\right) \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_i\right) \left\{ 2|E\left(\frac{d}{4}, z_f\right)|^2 + |E\left(-\frac{3d}{4}, z_f\right)|^2 + 2E\left(-\frac{3d}{4}, z_f\right) E\left(\frac{d}{4}, z_f\right) [\cos(2\phi d^2 - 2\gamma x_s) + \cos(\gamma(x_s + x_i))] + 2|E\left(\frac{d}{4}, z_f\right)|^2 \cos(2\phi d^2 + \gamma(-x_s + x_i)) \right\} \quad (4.17)$$

Novamente, observamos a presença de termos tanto condicionais quanto não condicionais na probabilidade de detecção em coincidência para o estado $|\tau_{II}\rangle$. Seguindo a análise feita acima, e considerando $2\phi d^2 = 2\pi$, encontramos, para D_i fixo em $x_i = 0$ e

$x_i = \pi/\gamma$, respectivamente,

$$\left[1 + \frac{2 |E(\frac{d}{4}, z_f)|^2 \cos(\gamma x_s)}{2 |E(\frac{d}{4}, z_f)|^2 + |E(-\frac{3d}{4}, z_f)|^2} + \frac{2E(\frac{d}{4}, z_f) E(-\frac{3d}{4}, z_f) [\cos(\gamma x_s) + \cos(2\gamma x_s)]}{2 |E(\frac{d}{4}, z_f)|^2 + |E(-\frac{3d}{4}, z_f)|^2} \right]$$

e

$$\left[1 - \frac{2 |E(\frac{d}{4}, z_f)|^2 \cos(\gamma x_s)}{2 |E(\frac{d}{4}, z_f)|^2 + |E(-\frac{3d}{4}, z_f)|^2} + \frac{2E(\frac{d}{4}, z_f) E(-\frac{3d}{4}, z_f)}{2 |E(\frac{d}{4}, z_f)|^2 + |E(-\frac{3d}{4}, z_f)|^2} [\cos(2\gamma x_s) - \cos(\gamma x_s)] \right].$$

Já para D_s em $x_s = 0$ e $x_s = \pi/\gamma$, temos expressões proporcionais a, respectivamente,

$$\left[1 + \frac{2 |E(\frac{d}{4}, z_f)|^2}{2 |E(\frac{d}{4}, z_f)|^2 + |E(-\frac{3d}{4}, z_f)|^2} \cos(\gamma x_i) + \frac{2E(\frac{d}{4}, z_f) E(-\frac{3d}{4}, z_f)}{2 |E(\frac{d}{4}, z_f)|^2 + |E(-\frac{3d}{4}, z_f)|^2} [1 + \cos(\gamma x_i)] \right]$$

e

$$\left[1 - \frac{2 |E(\frac{d}{4}, z_f)|^2}{2 |E(\frac{d}{4}, z_f)|^2 + |E(-\frac{3d}{4}, z_f)|^2} \cos(\gamma x_i) + \frac{2E(\frac{d}{4}, z_f) E(-\frac{3d}{4}, z_f)}{2 |E(\frac{d}{4}, z_f)|^2 + |E(-\frac{3d}{4}, z_f)|^2} [1 - \cos(\gamma x_i)] \right].$$

Vamos agora para a análise dos nossos estados maximamente emaranhados, para os quais encontramos as seguintes expressões

$$P_2^{\tau_{III}}(x_i, x_s) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f} a x_s\right) \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f} a x_i\right) [1 - \cos(2\gamma(x_s + x_i/2))], \quad (4.18)$$

a qual reproduz o comportamento condicional das coincidências para estados 2×2 , embora com uma dependência diferente para as posições dos detectores $(x_s + x_i/2)$.

Para o estado $|\psi_{me}\rangle$ da Eq.(4.15), a probabilidade de detectar os fótons em coincidência é

$$P_2^{\psi_{me}}(x_i, x_s) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{k a x_s}{2f}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{k a x_i}{2f}\right) \left\{ 1 + \frac{8}{9} \cos(\gamma(x_i - x_s)) - \frac{4}{9} \cos(\gamma(x_i + x_s)) - \frac{1}{9} \cos(\gamma(x_i + 2x_s)) - \frac{2}{9} \cos(\gamma(x_i - 2x_s)) - \frac{1}{9} \cos(\gamma x_i) \right\}. \quad (4.19)$$

Mais uma vez, temos para D_i posicionado em $x_i = 0$ e $x_i = \pi/\gamma$, respectivamente, padrões de interferência proporcionais a $[1 + \frac{1}{2} \cos(\gamma x_s) - \frac{3}{8} \cos(2\gamma x_s)]$ e $[1 - \frac{4}{9} \cos(\gamma x_s) + \frac{1}{3} \cos(2\gamma x_s)]$. Da mesma forma, temos que para d_s em $x_s = \pi/\gamma$ um padrão proporcional a $[1 - \frac{8}{9} \cos(\gamma x_i)]$ e, para D_s em $x_s = 0$, contagens, em coincidência, aproximadamente constantes, moduladas apenas pelo fator de difração.

- Probabilidade marginal

Na avaliação da probabilidade marginal, diferentemente do que ocorre em estados

2×2 , precisamos avaliar as duas expressões, tanto para *signal* quanto para *idler*, já que o fato de as duas matrizes densidade reduzidas serem diferentes resultam em diferentes padrões de interferência quando cada um dos dois detectores são deixados abertos, como vemos nas expressões abaixo (Apêndice B).

$$\begin{aligned}\bar{P}_1^{\psi_I}(x_s) &\propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_s\right) \{1 + \cos(\gamma x_s)\}; \\ \bar{P}_1^{\psi_I}(x_i) &\propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_i\right) \left\{1 + \frac{1}{2} \cos(\gamma x_i)\right\}.\end{aligned}\quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}\bar{P}_1^{\tau_{II}}(x_s) &\propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_i\right) \left\{1 + \frac{2E(-\frac{3d}{4}, z_f) E(\frac{d}{4}, z_f)}{2|E(\frac{d}{4}, z_f)|^2 + |E(-\frac{3d}{4}, z_f)|^2} \cos(2\phi d^2 - 2\gamma x_s)\right\}; \\ \bar{P}_1^{\tau_{II}}(x_i) &\propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_i\right) \left\{1 + \frac{1}{2} \cos(\gamma x_i)\right\}.\end{aligned}\quad (4.21)$$

$$\begin{aligned}\bar{P}_1^{\tau_{III}}(x_s) &\propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_i\right); \\ \bar{P}_1^{\tau_{III}}(x_i) &\propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_i\right).\end{aligned}\quad (4.22)$$

$$\begin{aligned}\bar{P}_1^{\psi_{me}}(x_s) &\propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_i\right) \left\{1 + \frac{4}{9} (\cos(\gamma x_s) - \cos(2\gamma x_s))\right\}; \\ \bar{P}_1^{\psi_{me}}(x_i) &\propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_i\right).\end{aligned}\quad (4.23)$$

Observando as expressões acima, à começar pelos estados M.E., temos os dois padrões com visibilidades nulas para $|\tau_{III}\rangle$, e um dos padrões com visibilidade não nula para $|\psi_{me}\rangle$ (em x_s). Para os estados que não possuem emaranhamento máximo, mas que também não são estados produto, temos os dois padrões com visibilidades não nulas para $|\tau_{II}\rangle$, ao passo que, para $|\psi_I\rangle$, um dos padrões apresenta visibilidade igual a 1 e outro, igual a $1/2$.

Mais uma vez, então, encontramos resultados diferentes daqueles conhecidos para os estados 2×2 , para os quais a visibilidade do padrão de interferência nas coincidências,

na medição da probabilidade marginal, é nula para estados M.E. e 1 para estados produto. Apesar de os resultados para $|\tau_{III}\rangle$ e $|\tau_{II}\rangle$ parecerem semelhantes aos do capítulo anterior, não há nenhuma relação clara entre a visibilidade dos padrões e a quantidade de emaranhamento dos estados, tal como na Eq.(3.36).

- Detecção mista

Uma outra maneira pela qual poderíamos tentar caracterizar os estados é usando lentes de comprimentos focais diferentes em cada um dos caminhos dos fótons, de forma que uma das lentes esteja numa configuração $f - f$ e a outra numa configuração $2f - 2f$, entre as fendas múltiplas e os detectores. Isso significa que na Eq.(3.28) usamos Eq.(3.30) aplicado em uma das partes e na outra, usamos o operador resultante para a configuração $2f - 2f$ [73], que nos dá

$$\langle null | E_{\alpha}^{(+)} | l_{\alpha} \rangle \propto e^{-\frac{ikz_f}{4f^2} x_{\alpha}^2} \prod \left(\frac{x_{\alpha} - l_{\alpha} d}{2a} \right). \quad (4.24)$$

Vamos, na sequência, fazer uma breve análise dos resultados apresentados no Apêndice B (seção B3) para as duas formas da detecção mista, sendo a primeira pela detecção da imagem da fenda dupla e a segunda pela detecção da imagem da fenda tripla.

Começando pelo estado $|\psi_I\rangle$, e pela imagem da imagem da fenda dupla, temos que fixando D_i em $x_i = \pm d/2$, medimos, ao varrer o detector D_s , dois padrões de interferência idênticos e proporcionais a

$$[1 + \cos(\gamma x_s)]. \quad (4.25)$$

Em contrapartida, considerando a projeção da imagem da fenda tripla sobre o plano de detecção, temos que caso D_s seja mantido fixo em $x_s = \pm d$, a varredura de D_i nos dá contagens aproximadamente constantes, modulada apenas pela função $\text{sinc}^2((k/2f)ax_i)$. Se, no entanto, D_s é fixo em $x_s = 0$, obtemos um padrão de interferência proporcional a

$$[1 - \cos(\gamma x_i)], \quad (4.26)$$

ou seja, obtemos anti-franjas do padrão da Eq.(4.25).

Considerando a mesma análise para o estado $|\tau_{II}\rangle$, temos que fixando D_i em $x_i = \pm d/2$ (para a imagem da fenda dupla), encontramos, na verredura de D_s , respectivamente, contagens aproximadamente constantes (modulada apenas pelo sinc) e um padrão de interferência proporcional a

$$\left[1 + \frac{2\text{Re}(E(-\frac{3d}{4}, z_f) E^*(\frac{d}{4}, z_f))}{|E(-\frac{3d}{4}, z_f)|^2 + |E(\frac{d}{4}, z_f)|^2} \cos(2\gamma x_s + 2\phi d^2) \right]. \quad (4.27)$$

Em contrapartida, fixando D_s em qualquer um dos pontos, $x_s = 0$ ou $\pm d$, obtemos, com a varredura de D_i , contagens aproximadamente constantes, mas multiplicadas por diferentes fatores, os quais são, na verdade, o quadrado do módulo de cada coeficiente do estado em questão. Assim, poderíamos, por meio da diferença entre a contagem máxima de cada varredura, inferir a razão entre $E(-\frac{3d}{4}, z_f)$ e $E(\frac{d}{4}, z_f)$.

Passando para o estado $|\psi_{me}\rangle$, ao fixar, na detecção da imagem da fenda dupla, D_i em $x_i = \pm d/2$, padrões de interferência proporcionais a

$$\left[\left(1 + \frac{4}{9} (\cos(\gamma x_s) - \cos(2\gamma x_s)) \right) \right], \quad (4.28)$$

o qual, é o mesmo padrão observado, nas coincidências, quando D_s é varrido e D_i é deixado aberto. Por fim, na detecção da imagem da fenda tripla, se fixamos D_s em $x_s = \pm d$ e 0 encontramos padrões proporcionais a, respectivamente,

$$\left[\left(1 - \frac{4}{5} \cos(\gamma x_i) \right) \right], \quad (4.29)$$

e

$$[(1 - \cos(\gamma x_i))]. \quad (4.30)$$

Como ilustração desses resultados, na Fig.4.10 temos os gráficos das três expressões acima, isto é, Eqs.(4.28),(4.29) e (4.30) representadas, respectivamente, por J_1 , J_2 e J_3 , sendo que γx_s e γx_i variam de -2π a 2π .

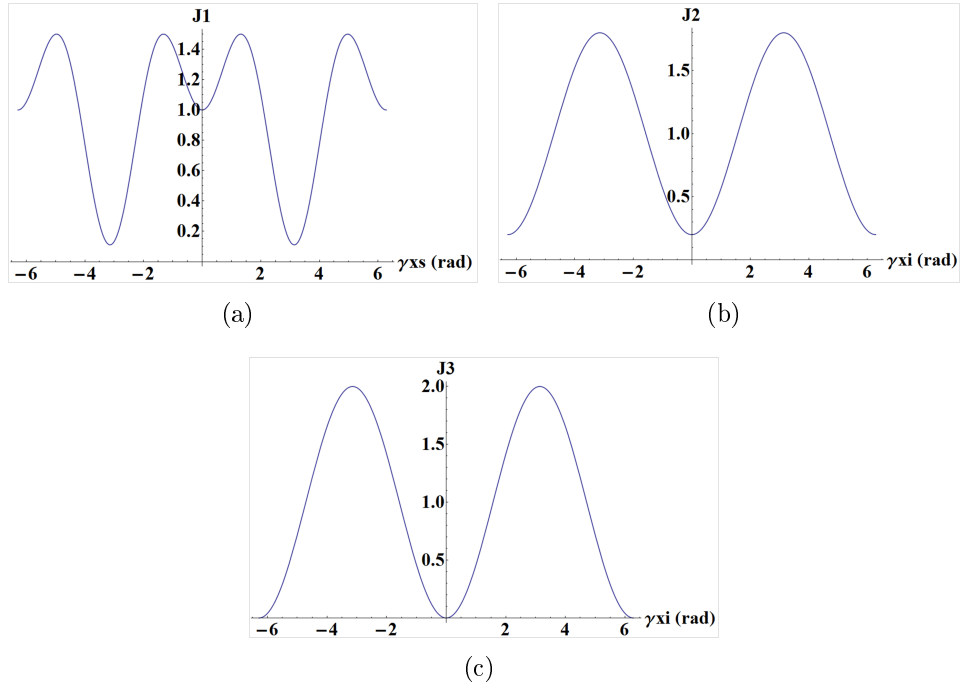


Figura 4.10: Comportamento das coincidências na detecção mista do estado $|\psi_{me}\rangle$. (a) A imagem da fenda dupla projetada sobre o plano de detecção, com D_i fixo em $x_i = \pm d/2$, e D_s é varrido. O caso em que D_i é varrido e a imagem da fenda tripla é projetada sobre o plano de detecção está mostrada em (b) para D_s fixo em $x_s = \pm d$, e em (c) para D_s fixo em $x_s = 0$.

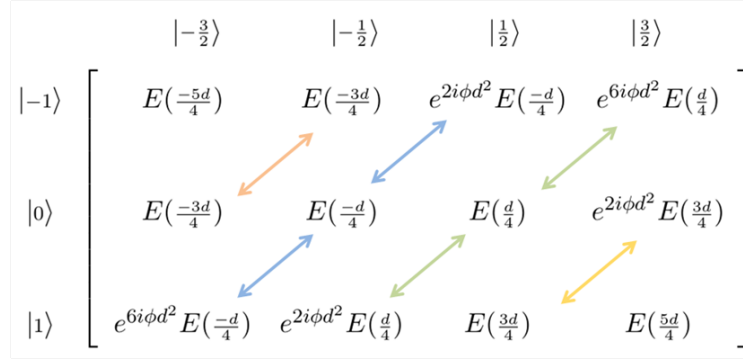
4.3 Extensão para estados de dimensão maior

Apesar de ainda não terem sido produzidos por meio de fendas, os estados fotônicos 2×3 já foram gerados por meio da utilização de diferentes graus de liberdade [77]. A grande vantagem dos estados de fenda está não apenas na versatilidade das correlações que podemos gerar mas na possibilidade de gerarmos estados de grandes dimensões, tanto $n \times n$ quanto $n \times m$. Para ilustrar o caráter geral dos estados de fenda, apresentamos abaixo uma análise semelhante à da seção 4.1.2 aplicada a estados de dimensão 3×4 , cujo estado geral é

$$\begin{aligned}
 |\psi_{3 \times 4}\rangle \propto e^{\frac{i\phi d^2}{4}} & \left[E\left(-\frac{5d}{4}, z_f\right) \left| -1-\frac{3}{2} \right\rangle + E\left(\frac{5d}{4}, z_f\right) \left| 1\frac{3}{2} \right\rangle + E\left(-\frac{3d}{4}, z_f\right) \left(\left| -1-\frac{1}{2} \right\rangle + \left| 0\frac{3}{2} \right\rangle \right) \right. \\
 & + E\left(\frac{3d}{4}, z_f\right) \left(\left| 1\frac{1}{2} \right\rangle + e^{2i\phi d^2} \left| 0\frac{3}{2} \right\rangle \right) + E\left(-\frac{d}{4}, z_f\right) \left(e^{2i\phi d^2} \left| -1\frac{1}{2} \right\rangle + e^{6i\phi d^2} \left| 1-\frac{3}{2} \right\rangle + \left| 0-\frac{1}{2} \right\rangle \right) \\
 & \left. + E\left(\frac{d}{4}, z_f\right) \left(e^{6i\phi d^2} \left| -1\frac{3}{2} \right\rangle + e^{2i\phi d^2} \left| 1-\frac{1}{2} \right\rangle + \left| 0\frac{1}{2} \right\rangle \right) \right], \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

para o qual obtemos o diagrama mostrado na Fig. fig:4.11.

Considerando apenas o caso em que todas as fendas são correlacionadas, obtemos os seguintes estados biortogonais (pelo corte do perfil em certos pontos):

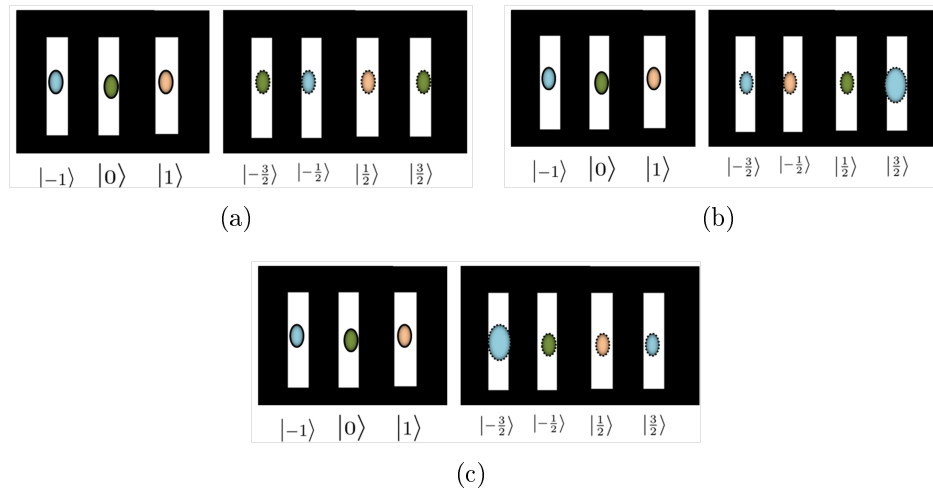
Figura 4.11: Diagrama dos coeficientes do estado geral 3×4 .

$$|\phi_I\rangle \propto \left[E\left(-\frac{3d}{4}, z_f\right) | -1-\frac{1}{2}\rangle + E\left(\frac{3d}{4}, z_f\right) | 1\frac{1}{2}\rangle + |0\rangle \left(E\left(-\frac{3d}{4}, z_f\right) | -\frac{3}{2}\rangle + e^{2i\phi d^2} E\left(\frac{3d}{4}, z_f\right) | \frac{3}{2}\rangle \right) \right], \quad (4.32)$$

$$|\phi_{II}\rangle \propto \left[E\left(\frac{d}{4}, z_f\right) | 0\frac{1}{2}\rangle + e^{2i\phi d^2} E\left(\frac{d}{4}, z_f\right) | 1-\frac{1}{2}\rangle + |-1\rangle \left(E\left(-\frac{5d}{4}, z_f\right) | -\frac{3}{2}\rangle + e^{6i\phi d^2} E\left(\frac{d}{4}, z_f\right) | \frac{3}{2}\rangle \right) \right], \quad (4.33)$$

$$|\phi_{III}\rangle \propto \left[E\left(-\frac{d}{4}, z_f\right) | 0-\frac{1}{2}\rangle + e^{2i\phi d^2} E\left(-\frac{d}{4}, z_f\right) | -1\frac{1}{2}\rangle + |1\rangle \left(E\left(\frac{5d}{4}, z_f\right) | \frac{3}{2}, z_f\rangle + e^{6i\phi d^2} E\left(-\frac{d}{4}, z_f\right) | -\frac{3}{2}\rangle \right) \right]. \quad (4.34)$$

Na Fig.4.12, temos a representação da correlação entre os fótons para cada um dos três estados acima.

Figura 4.12: Representação da correlação entre os fótons nos estados 3×4 gerados com base em [44], sendo que (a), (b) e (c) correspondem aos estados $|\phi_I\rangle$, $|\phi_{II}\rangle$ e $|\phi_{III}\rangle$, respectivamente.

4.4 Proposta experimental

Abaixo, apresentamos uma proposta experimental para a produção dos estados descritos na seção 4.1.2 com a utilização de um Modulador Espacial de Luz (SLM). Um SLM é um aparelho formado, basicamente, por uma tela de cristal líquido (LCD) e eletrodos, por meio dos quais pode-se aplicar diferentes tensões sobre diferentes regiões da tela de LCD. A aplicação de um campo elétrico sobre um cristal líquido modifica o ordenamento de suas moléculas e, portanto, modifica as propriedades ópticas do material (como a transmitância e o índice de refração). Assim, o SLM é capaz de modificar, ou melhor, modular regiões específicas do feixe de luz que incide sobre o display, sendo que alguns moduladores são capazes de modificar tanto a fase quanto a amplitude do feixe [5, 54]. Essas características o tornam uma peça fundamental na implementação experimental das análises deste trabalho, como pode ser visto à seguir.

Na montagem, esquematizada na Fig.4.13, o feixe de bombeamento passa por uma lente l_{p_1} , de foco f_{p_1} , chegando na tela do SLM com um perfil transversal grande. Uma lente l_{p_2} , de foco f_{p_2} , projeta a imagem da tela do SLM no plano das fendas (ou plano equivalente), ou seja, a distância da lente l_{p_2} até cada uma das fendas múltiplas, e também as distâncias SLM-lente e lente-plano equivalente são iguais a $2f_{p_2}$. Os fótons gêmeos são separados por um divisor de feixe (BS) fazendo com que a metade dos fótons de cada feixe (*signal* e *idler*) passe por um conjunto de fenda. Em cada saída do BS, depois das fendas, são colocadas lentes para a detecção, de forma semelhante à mostrada na Fig.3.13.

Nesse setup o SLM é utilizado para modular o feixe incidente e nos fornecer, no plano das fendas, os perfis da Fig.4.14. Além disso, o alinhamento das fendas pode ser feito de forma análoga à descrita na seção 3.4, com a diferença de que o alinhamento não é identificado pelo balanceamento das contagens simples detectadas em cada abertura, mas pela observação de uma queda abrupta, na contagem dos fótons, em algumas extremidades das aberturas (ver Fig.4.15).

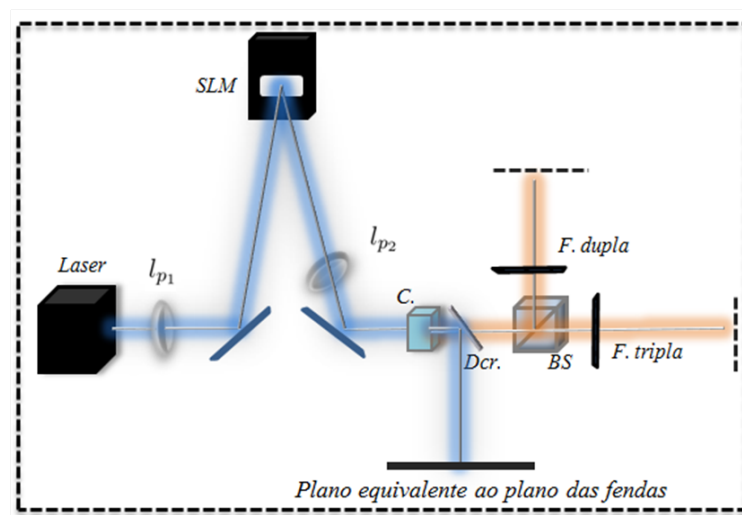


Figura 4.13: Setup da proposta experimental para a geração dos estados 2×3 . Na figura C. é um cristal não linear, Dcr. é um espelho dicróico que bloqueia o feixe de bombeamento e transmite os fótons gêmeos, BS é um divisor de feixe não polarizador 50/50, e tanto l_{p1} quanto l_{p2} são lentes convergentes.

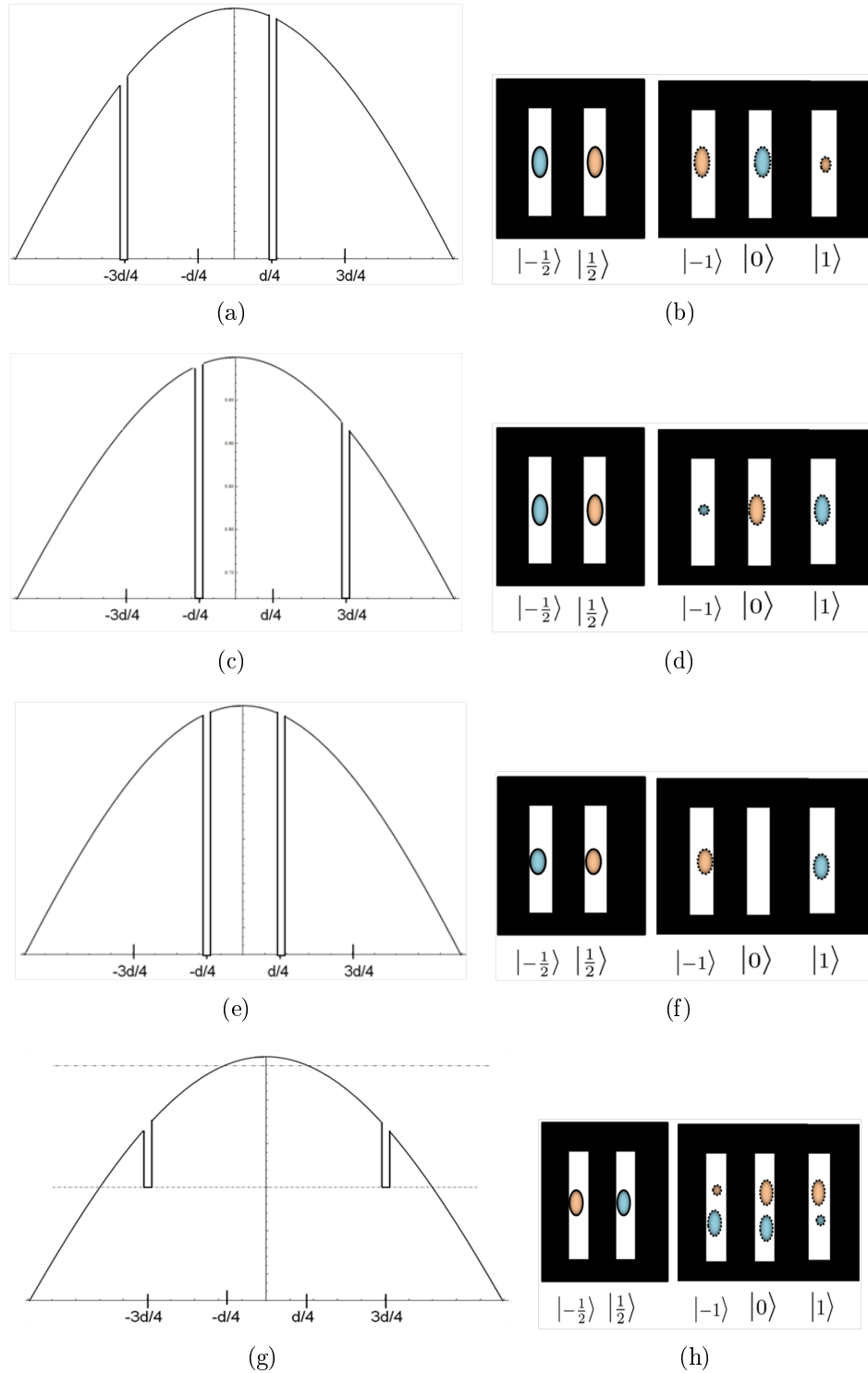


Figura 4.14: Perfis necessários (amplitude do campo elétrico do feixe de bombeamento) à geração dos estados $|\tau_I\rangle$, $|\tau_{II}\rangle$, $|\tau_{III}\rangle$ e $|\psi_{me}\rangle$ em (a), (c), (e) e (g). À direita estão representadas as correlações de cada estado. Além das cores e contornos diferentes indicarem fótons diferentes, círculos maiores indicam probabilidades maiores de um fóton passar por uma abertura.

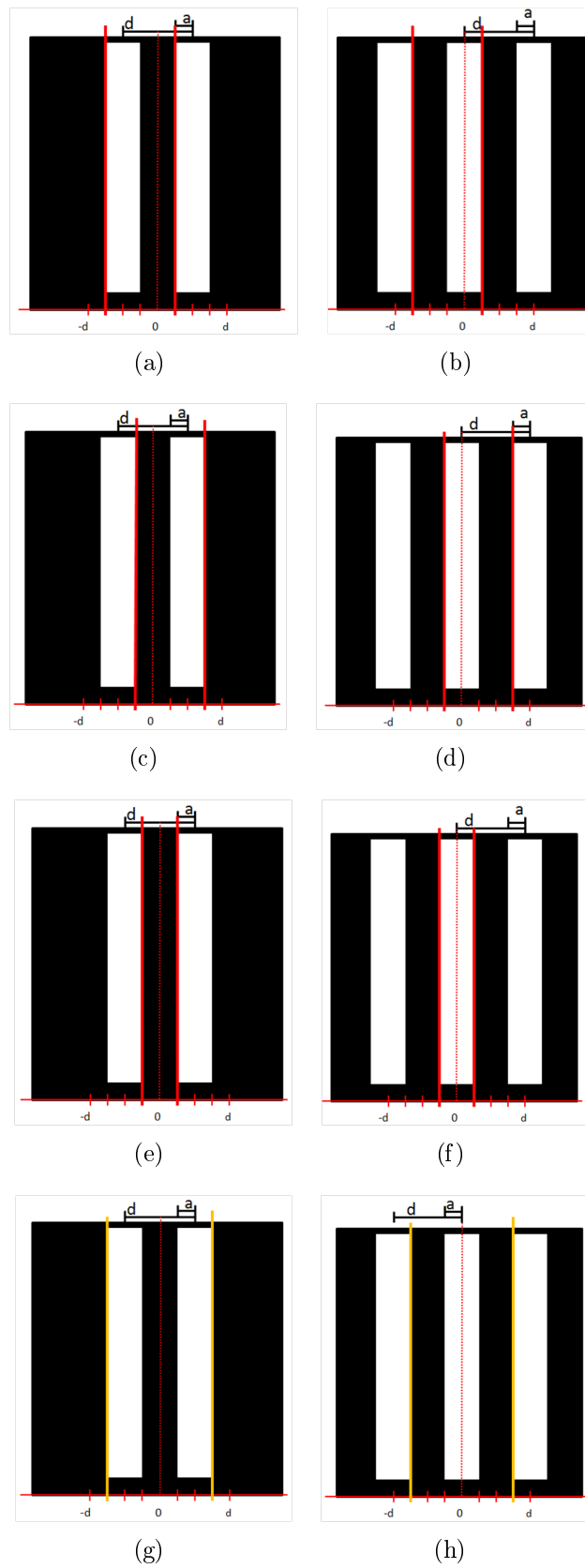


Figura 4.15: Relação entre a posição dos cortes sobre os perfis e os conjuntos de fendas múltiplas, para cada um dos estados analisados na seção 4.1.2: $|\tau_I\rangle$ em (a) e (b); $|\tau_{II}\rangle$ em (c) e (d); $|\tau_{III}\rangle$ em (e) e (f). Em (g) e (h) temos a relação entre a posição das atenuações e as aberturas (estado maximamente emaranhado). Consideramos $d = 4a$

Capítulo 5

Conclusões

Esse trabalho teve como objetivo central a extensão teórica dos principais métodos de engenharia de estados de fenda (usados na produção de dois qudits) aos estados de dimensão $n \times m$, e em particular estados 2×3 . Para tanto, fizemos uma revisão das principais características dos estados quânticos puros e bipartidos, na qual encontramos tanto semelhanças quanto diferenças entre os estados das duas dimensões, 2×2 e 2×3 . Podemos citar como semelhança a informação a cerca do emaranhamento dos estados fornecida pelos coeficientes de Schmidt e, como diferença, a relação entre a Concorrência e o Emaranhamento de Formação, a qual é direta para estados 2×2 mas inexistente para estados 2×3 .

Já nas extensões dos métodos, inicialmente apresentados nas seções 3.3 e 3.4, vimos que, enquanto os estados de fenda 2×2 são sempre gerados nos estados de Bell $|\phi_+\rangle$ e $|\psi_+\rangle$, diferentes estados 2×3 são gerados em cada um dos métodos (seção 4.1), considerando o mesmo tipo de análise para estados 2×2 e 2×3 . Vimos, também, que apesar da possibilidade de manipulação do feixe de bombeamento em qualquer ponto, não podemos produzir qualquer estado, pois um mesmo ponto desse perfil sobre o plano das fendas determina mais de um coeficiente do estado geral mostrado na Eq.(4.7).

Estudando a detecção em coincidências dos estados fotônicos (seções 3.5 e 4.2), podemos dizer que encontramos mais diferenças que semelhanças entre o comportamento dos estados 2×2 e 2×3 . A primeira delas é a presença somente de termos de interferência condicional, com os detectores no plano de Fourier de uma lente, nas coincidências de estados 2×2 maximamente emaranhados, o que não ocorre para estados 2×3 .

Encontramos, para essa dimensão, termos de interferência não condicional, nas coincidências, tanto para os estados não maximamente emaranhados, quanto para o estado maximamente emaranhado correlacionando todas as fendas. Além disso, como já era de se esperar, o comportamento das coincidências dos estados que não correlacionam uma das fendas (da fenda tripla) é o mesmo, a não ser pelo período de oscilação, dos estados 2×2 .

Ainda na análise da detecção dos estados, obtivemos, na Probabilidade marginal, padrões de interferência, nas coincidências, cujas visibilidades são uma função direta da Concorrência calculada para estados 2×2 . Não encontramos uma relação entre a visibilidade do padrão de interferência, obtido através da probabilidade marginal, e uma medida de emaranhamento para os estados 2×3 . Na tentativa de medirmos os coeficientes do estado gerado, analisamos um esquema de detecção mista, na qual um dos detectores é colocado no plano da imagem de uma lente.

Por último, vimos que a manipulação do feixe de bombeamento pode ser feita por meio de um Modulador Espacial de Luz, o que, inclusive, possibilita uma maior versatilidade na engenharia desses estados. Apesar de termos proposto o uso do SLM inserido no método apresentado na seção 3.4, a possibilidade de gerarmos os estados 2×3 com o auxílio de um modulador foi, primeiramente, mencionada em [6], trabalho no qual o método apresentado na seção 3.3 foi publicado. Nas palavras dos próprios autores: *"One can also turn to multidimensionally entangled two photon states by using multislit apertures. To tune between different multidimensionally entangled states, one could use a variable pump profile based on a spatial light modulator."* Ainda que essa "indicação" não tenha sido explorada nos últimos sete anos, a concordância entre a visão dos autores e as análises dessa dissertação nos mostra que os estados de fenda 2×3 , ou em outras dimensões maiores $n \times m$, podem ser gerados em laboratório tal como descrito no capítulo 4.

Apêndice A

Cálculo da propagação do bifóton usando notação de operadores

Usando as definições dos operadores descritos na seção 2.3, bem como suas propriedades, descritas na mesma seção, vamos calcular passo a passo os operadores resultantes agindo sobre a amplitude do bifóton, que sai do cristal, nas duas configurações discutidas na seção 3.3.

A.1 Bifóton passando pelo telescópio

Nessa configuração a amplitude do bifóton se propaga livremente numa distância f_c , passa pela primeira lente (que acrescenta uma fase quadrática), propaga livremente numa distância $f_l - f_c$, passa pela segunda lente (que faz a mesma operação da segunda), e propaga, novamente, de forma livre, numa distância f_l . O operador resultante agindo sobre a amplitude do bifóton é

$$\mathbf{R} = \mathcal{R}[f_l] \mathcal{Q}\left[-\frac{1}{f_l}\right] \mathcal{R}[f_l - f_c] \mathcal{Q}\left[-\frac{1}{f_c}\right] \mathcal{R}[f_c]. \quad (\text{A.1})$$

Usando as relações da tabela apresentada na Fig.2.5, temos

$$\mathbf{R} = \mathcal{R}[f_l] \mathcal{Q}\left[-\frac{1}{f_l}\right] \mathcal{R}[f_l] \mathcal{R}[-f_c] \mathcal{Q}\left[-\frac{1}{f_c}\right] \mathcal{R}[f_c]. \quad (\text{A.2})$$

Usando a propriedade da Eq.(2.33)

$$\mathbf{R} = \mathcal{P}\left[\frac{k_g}{f_l}\right] \mathcal{FR}[-f_c] \mathcal{Q}\left[-\frac{1}{f_c}\right] \mathcal{R}[f_c]; \quad (\text{A.3})$$

Aplicando a inversa de $\mathcal{R}[f_c]$, isto é, $\mathcal{R}[-f_c]$ à esquerda dos dois lados da Eq.(2.32), temos que

$$\mathcal{Q}\left[-\frac{1}{f_c}\right]\mathcal{R}[f_c] = \mathcal{R}[-f_c]\mathcal{P}\left[\frac{k_g}{f_c}\right]\mathcal{F}. \quad (\text{A.4})$$

Substituindo essa expressão em A.9,

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathcal{P}\left[\frac{k_g}{f_l}\right]\mathcal{F}\mathcal{R}[-f_c]\mathcal{R}[-f_c]\mathcal{P}\left[\frac{k_g}{f_c}\right]\mathcal{F} \\ &= \mathcal{P}\left[\frac{k_g}{f_l}\right]\mathcal{F}\mathcal{R}[-2f_c]\mathcal{P}\left[\frac{k_g}{f_c}\right]\mathcal{F}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Usando, novamente, a tabela

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathcal{P}\left[\frac{k_g}{f_l}\right]\mathcal{F}\mathcal{R}[-2f_c]\mathcal{F}\mathcal{P}\left[\frac{f_c}{k_g}\right] \\ &= \mathcal{P}\left[\frac{k_g}{f_l}\right]\mathcal{Q}\left[\frac{2f_c}{k_g^2}\right]\mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{P}\left[\frac{f_c}{k_g}\right] \\ &= \mathcal{P}\left[\frac{k_g}{f_l}\right]\mathcal{Q}\left[\frac{2f_c}{k_g^2}\right]\mathcal{P}[-1]\mathcal{P}\left[\frac{f_c}{k_g}\right] \\ &= \mathcal{P}\left[\frac{k_g}{f_l}\right]\mathcal{Q}\left[\frac{2f_c}{k_g^2}\right]\mathcal{P}\left[-\frac{f_c}{k_g}\right] \\ &= \mathcal{P}\left[\frac{k_g}{f_l}\right]\mathcal{P}\left[-\frac{f_c}{k_g}\right]\mathcal{Q}\left[\frac{2f_c}{k_g^2(-f_c/k_g)^2}\right] \\ &= \mathcal{P}\left[\frac{k_g - f_c}{f_l \quad k_g}\right]\mathcal{Q}\left[\frac{2}{f_c}\right] \\ &= \mathcal{P}\left[-\frac{f_c}{f_l}\right]\mathcal{Q}\left[\frac{2}{f_c}\right]. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Aplicando então, \mathbf{R} (para as duas varáveis x_+ e x_-) na amplitude do bifóton que sai do cristal, temos que a amplitude que chega no plano das fendas será

$$\begin{aligned}
\Phi(x_+, x_-, z_f) &= \mathbf{R}_{x_+} \mathbf{R}_{x_-} \{ \Phi(x_+, x_-, z_0) \} \\
&= \mathcal{P} \left[-\frac{f_c}{f_l} \right] \left\{ \mathcal{Q} \left[\frac{2}{f_c} \right] \{ E(x_+, 0) \} \right\} \mathcal{P} \left[-\frac{f_c}{f_l} \right] \left\{ \mathcal{Q} \left[\frac{2}{f_c} \right] \{ \xi(x_-, 0) \} \right\}.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Usando as definições dos operadores,

$$\begin{aligned}
\Phi(x_+, x_-, z_f) &= \mathcal{P} \left[-\frac{f_c}{f_l} \right] \left\{ e^{i\frac{kx_+^2}{2f_c}} E(x_+, 0) \right\} \mathcal{P} \left[-\frac{f_c}{f_l} \right] \left\{ e^{i\frac{kx_-^2}{2f_c}} \xi(x_-, 0) \right\} \\
\Phi(x_+, x_-, z_f) &= \frac{f_c}{f_l} e^{i\frac{kf_c^2 x_+^2}{2f_c f_l^2}} e^{i\frac{kf_c^2 x_-^2}{2f_c f_l^2}} E\left(-\frac{f_c x_+}{f_l}, 0\right) \xi\left(-\frac{f_c x_-}{f_l}, 0\right).
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Nessa última expressão k se refere ao vetor de onda do feixe de bombeamento, que é o dobro do vetor de onda dos fótons gêmeos, isto é, $k_g = k/2$. Já o sinal negativo nas dependências de E e ξ aparece porque a imagem formada é invertida. Para uma amplitude do bifóton simétrica em z_0 , podemos escrever

$$\Phi(x_+, x_-, z_f) = \frac{f_c}{f_l} e^{i\frac{kf_c(x_+^2 + x_-^2)}{2f_l^2}} E\left(\frac{f_c x_+}{f_l}, 0\right) \xi\left(\frac{f_c x_-}{f_l}, 0\right). \tag{A.9}$$

A.2 Bifóton passando por uma lente esférica - configuração f-f

Sem a primeira lente na configuração considerada acima, a amplitude do bifóton se propaga livremente em uma distância f_l , passa por uma lente e propaga, novamente, de forma livre, em uma distância f_l , de forma que o operador resultante é

$$\mathcal{R}[f_l] \mathcal{Q} \left[-\frac{1}{f_l} \right] \mathcal{R}[f_l], \tag{A.10}$$

que pela propriedade da Eq.(2.33), é igual a

$$\mathbf{R} = \mathcal{P} \left[\frac{k_g}{f_l} \right] \mathcal{F}. \tag{A.11}$$

Aplicando esse operador na amplitude inicial do bifóton (para as duas variáveis x_+ e x_-), temos

$$\begin{aligned} \Phi(x_+, x_-, z_f) &= \mathcal{P} \left[\frac{k}{f_l} \right] \{ \mathcal{F} \{ E(x_+, 0) \} \} \mathcal{P} \left[\frac{k}{f_l} \right] \{ \mathcal{F} \{ \xi(x_-, 0) \} \} \\ \Phi(x_+, x_-, z_f) &= \frac{k}{f_l} \mathcal{F} \{ E(x'_+, 0) \} \left(\frac{kx_+}{f_l} \right) \mathcal{F} \{ \xi(x'_-, 0) \} \left(\frac{kx_-}{f_l} \right) \\ \Phi(x_+, x_-, z_f) &\propto \tilde{E} \left(\frac{kx_+}{f_l}, 0 \right) \tilde{\xi} \left(\frac{kx_-}{f_l}, 0 \right). \end{aligned} \tag{A.12}$$

Apêndice B

Cálculo da probabilidade de detecção em coincidências

Neste apêndice vamos acompanhar as contas das coincidências em três diferentes formas de detecção: Os dois feixes são detectados no plano de Fourier de uma lente numa configuração $f - f$ em relação às fendas e aos detectores, e tanto D_s quanto D_i são considerados puntuais; um dos detectores é deixado aberto enquanto o outro é varrido (medição da probabilidade marginal) nessa mesma configuração; um dos feixes é detectado sobre o plano de imagem de uma lente numa configuração $2f - 2f$, enquanto o outro é detectado sobre o plano de Fourier de uma lente $f - f$. Assim, tendo em vista a expressão 4.28, precisaremos dos seguintes resultados, já conhecidos [73]

$$\langle null | E_{\alpha}^{(+)} | l_{\alpha} \rangle \propto \begin{cases} \text{sinc} \left(\frac{k}{2f} a x_{\alpha} \right) e^{-\frac{ikz_f}{4f^2} x_{\alpha}^2} e^{-\frac{ikd}{2f} l_{\alpha} x_{\alpha}} & \text{para a configuração } f - f \\ e^{-\frac{ikz_f}{4f^2} x_{\alpha}^2} \Pi \left(\frac{x_{\alpha} - l_{\alpha} d}{2a} \right) & \text{para a configuração } 2f - 2f, \end{cases}$$

onde $\alpha = i, s$ indica o fóton sobre o qual o operador está sendo aplicado.

B.1 Probabilidade de detecção em coincidências com os dois detectores no plano de Fourier

Para os quatro estados estudados na seção 5.2, temos os seguintes resultados para os dois feixes detectados numa configuração $f - f$ (considerando que os dois feixes passa pela mesma lente, ou que, no caso de duas lentes serem usadas, elas possuam a mesma distância focal).

1. Estado $|\tau_{III}\rangle$

$$P_2^{\tau_{III}}(x_i, x_s) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_s\right) \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_i\right) \times \\ \left| E\left(-\frac{3d}{4}, z_f\right) e^{i\gamma(x_s+x_i/2)} + E\left(\frac{3d}{4}, z_f\right) e^{-i\gamma(x_s+x_i/2)} \right|^2. \quad (\text{B.1})$$

Considerando um perfil simétrico, temos

$$P_2^{\tau_{III}}(x_i, x_s) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_s\right) \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_i\right) [1 - \cos(2\gamma(x_s + x_i/2))]. \quad (\text{B.2})$$

2. Estado $|\psi_I\rangle$ (Eq.(5.3) com $\xi\left(\frac{3d}{4M}\right) = 0$)

$$P_2^{\psi_I}(x_i, x_s) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_s\right) \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_i\right) \times \\ \times \left| e^{\gamma i(x_s+x_i/2)} + e^{-\gamma i(x_s+x_i/2)} + e^{-\gamma i(-x_i/2)} + e^{-\gamma i(x_i/2)} \right|^2 \\ P_2^{\psi_I}(x_i, x_s) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_s\right) \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_i\right) |\cos(\gamma(x_s + x_i/2)) + \cos(\gamma(x_i/2))|^2 \\ P_2^{\psi_I}(x_i, x_s) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_s\right) \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_i\right) \{ \cos^2(\gamma(x_s + x_i/2)) + \\ + \cos^2(\gamma(x_i/2)) + 2 \cos(\gamma(x_s + x_i/2)) \cos(\gamma(x_i/2)) \}. \quad (\text{B.3})$$

Usando as seguintes propriedades trigonométricas,

$$\cos(a) \cos(a+b) = \frac{1}{2} [\cos(2a+b) + \cos(b)] \\ \cos^2(a) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2a)), \quad (\text{B.4})$$

obtemos

$$P_2^{\psi_I}(x_i, x_s) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_s\right) \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_i\right) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cos(\gamma(2x_s + x_i)) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cos(\gamma x_i) + \cos(\gamma(x_s + x_i)) + \cos(\gamma x_s) \right\}. \quad (\text{B.5})$$

3. Estado $|\tau_{II}\rangle$. Considerando nula (ou igual a 2π) a fase existente entre a amplitude do campo nos dois pontos considerados, temos

$$\begin{aligned}
 P_2^{\tau_{II}}(x_i, x_s) &\propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_s\right) \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_i\right) \left| E\left(-\frac{3d}{4}, z_f\right) e^{i\gamma(x_i/2+x_s)} + \right. \\
 &\quad \left. + E\left(\frac{d}{4}, z_f\right) \left[e^{2i\phi d^2} e^{i\gamma(x_i/2-x_s)} + e^{-i\gamma(x_i/2)} \right] \right|^2 \\
 P_2^{\tau_{II}}(x_i, x_s) &\propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_s\right) \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_i\right) \left\{ 2|E\left(\frac{d}{4}, z_f\right)|^2 + |E\left(-\frac{3d}{4}, z_f\right)|^2 + \right. \\
 &\quad + 2E\left(-\frac{3d}{4}, z_f\right) E\left(\frac{d}{4}, z_f\right) [\cos(2\phi d^2 - 2\gamma x_s) + \cos(\gamma(x_s + x_i))] + \\
 &\quad \left. + 2|E\left(\frac{d}{4}, z_f\right)|^2 \cos(2\phi d^2 + \gamma(-x_s + x_i)) \right\}. \tag{B.6}
 \end{aligned}$$

4. Estado $|\psi_{me}\rangle$

$$\begin{aligned}
 P_2^{\psi_{me}}(x_i, x_s) &\propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_s\right) \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_i\right) \left| -\frac{1}{2} [e^{-i\gamma(-x_i/2-x_s)} + e^{-i\gamma(x_i/2+x_s)}] \right. \\
 &\quad \left. + e^{-i\gamma(x_i/2-x_s)} + e^{-i\gamma(-x_i/2+x_s)} + e^{-i\gamma(x_i/2)} + e^{-i\gamma(-x_i/2)} \right|^2 \\
 P_2^{\psi_{me}}(x_i, x_s) &\propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_s\right) \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_i\right) \left| -\cos(\gamma(x_i/2 + x_s)) \right. \\
 &\quad \left. + 2\cos(\gamma(x_i/2 - x_s)) + 2\cos(\gamma x_i/2) \right|^2 \\
 P_2^{\psi_{me}}(x_i, x_s) &\propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_s\right) \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_i\right) \left\{ \frac{8}{9} \cos(\gamma(x_i - x_s)) - \frac{1}{9} \cos(\gamma x_i) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{9} \cos(\gamma(x_i + 2x_s)) - \frac{2}{9} \cos(\gamma(x_i - 2x_s)) - \frac{4}{9} \cos(\gamma(x_i + x_s)) + 1 \right\}. \tag{B.7}
 \end{aligned}$$

B.2 Probabilidade de detecção em coincidências com um detector aberto e o outro sendo varrido (Probabilidade Marginal)

Vamos agora ao cálculo da probabilidade marginal para os quatro estados acima, à qual é dada por

$$\bar{P}_1(x_i) = \int P_2(x_i, x_s) dx_s = Tr \left(\hat{\rho}_i E_i^{(-)} E_i^{(+)} \right), \quad (\text{B.8})$$

isto é, vamos fazer o mesmo cálculo da seção anterior para os operadores densidade reduzidos e os operadores campo de apenas um dos subsistemas (*signal* ou *idler*).

1. Estado $|\tau_{III}\rangle$

$$\hat{\rho}_i = \frac{1}{2} \{ |-\frac{1}{2}\rangle \langle -\frac{1}{2}| + |\frac{1}{2}\rangle \langle \frac{1}{2}| \}, \quad (\text{B.9})$$

essa matriz densidade reduzida é a mesma para o estado de dois qubits maximamente emaranhado, de forma que

$$\bar{P}_1^{\tau_{III}}(x_i) \propto \text{sinc}^2 \left(\frac{k}{2f} ax_i \right), \quad (\text{B.10})$$

$$\hat{\rho}_s = \frac{1}{2} \{ | -1\rangle \langle -1| + |1\rangle \langle 1| \}, \quad (\text{B.11})$$

que da mesma forma resulta em

$$\bar{P}_1^{\tau_{III}}(x_s) \propto \text{sinc}^2 \left(\frac{k}{2f} ax_i \right). \quad (\text{B.12})$$

2. Estado $|\psi_I\rangle$ (Eq.(5.3) com $\xi(3d/4M) = 0$)

$$\hat{\rho}_i = \frac{1}{2} \{ |-\frac{1}{2}\rangle \langle -\frac{1}{2}| + |\frac{1}{2}\rangle \langle \frac{1}{2}| \} + \frac{1}{4} \{ |-\frac{1}{2}\rangle \langle \frac{1}{2}| + |\frac{1}{2}\rangle \langle -\frac{1}{2}| \}; \quad (\text{B.13})$$

$$\bar{P}_1^{\psi_I}(x_i) \propto \text{sinc}^2 \left(\frac{k}{2f} ax_i \right) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cos(\gamma x_i) \right\}. \quad (\text{B.14})$$

$$\hat{\rho}_s = \frac{1}{4} \{ | -1 \rangle \langle -1 | + | 1 \rangle \langle 1 | + 2 | 0 \rangle \langle 0 | + | -1 \rangle \langle 0 | + | 0 \rangle \langle -1 | + | 0 \rangle \langle 1 | + | 1 \rangle \langle 0 | \}; \quad (\text{B.15})$$

$$\bar{P}_1^{\psi_I}(x_s) \propto \text{sinc}^2 \left(\frac{k}{2f} ax_i \right) \{ 1 + \cos(\gamma x_i) \}. \quad (\text{B.16})$$

3. Estado $|\tau_{II}\rangle$

$$\hat{\rho}_i = \frac{(|E(\frac{d}{4}, z_f)|^2 + |E(-\frac{3d}{4}, z_f)|^2) |-\frac{1}{2}\rangle \langle -\frac{1}{2}| + |E(\frac{d}{4}, z_f)|^2 |\frac{1}{2}\rangle \langle \frac{1}{2}|}{2|E(\frac{d}{4}, z_f)|^2 + |E(-\frac{3d}{4}, z_f)|^2}; \quad (\text{B.17})$$

mais uma vez, a probabilidade de coincidências na medição da probabilidade marginal do qubit (*idler*), resulta em B.10.

$$\hat{\rho}_s = \frac{1}{2|E(\frac{d}{4}, z_f)|^2 + |E(-\frac{3d}{4}, z_f)|^2} \{ |E(\frac{d}{4}, z_f)|^2 (|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|) + |E(-\frac{3d}{4}, z_f)|^2 | -1 \rangle \langle -1 | + e^{-2i\phi d^2} E(-\frac{3d}{4}, z_f) E^*(\frac{d}{4}, z_f) | -1 \rangle \langle 1 | + e^{2i\phi d^2} E^*(-\frac{3d}{4}, z_f) E(\frac{d}{4}, z_f) | 1 \rangle \langle -1 | \}; \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_1^{\tau_{II}}(x_s) \propto \text{sinc}^2 \left(\frac{k}{2f} ax_s \right) & \left\{ |E(-\frac{3d}{4}, z_f)|^2 |\langle 0 | E^+ | -1 \rangle|^2 + |E(\frac{d}{4}, z_f)|^2 (|\langle 0 | E^+ | 0 \rangle|^2 \right. \\ & + |\langle vac | E^+ | 1 \rangle|^2) + e^{-2i\phi d^2} E(-\frac{3d}{4}, z_f) E^*(\frac{d}{4}, z_f) \langle -1 | E^- E^+ | 1 \rangle \\ & \left. + e^{2i\phi d^2} E^*(-\frac{3d}{4}, z_f) E(\frac{d}{4}, z_f) \langle 1 | E^- E^+ | -1 \rangle \right\} \end{aligned}$$

$$\bar{P}_1^{\tau_{II}}(x_s) \propto \text{sinc}^2 \left(\frac{k}{2f} ax_s \right) \left\{ 1 + \frac{2E(-\frac{3d}{4}, z_f) E(\frac{d}{4}, z_f)}{2|E(\frac{d}{4}, z_f)|^2 + |E(-\frac{3d}{4}, z_f)|^2} \cos(2\phi d^2 - 2\gamma x_s) \right\}. \quad (\text{B.19})$$

4. Estado $|\psi_{me}\rangle$

$$\hat{\rho}_i = \frac{1}{2} \{ |-\frac{1}{2}\rangle \langle -\frac{1}{2}| + |\frac{1}{2}\rangle \langle \frac{1}{2}| \}, \quad (\text{B.20})$$

resultando, novamente, em B.10.

$$\hat{\rho}_s = \frac{2}{9} \left\{ \frac{5}{4} (|-1\rangle \langle -1| + |1\rangle \langle 1|) + 2 |0\rangle \langle 0| - (|-1\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle -1|) \right. \\ \left. + (|-1\rangle \langle 0| + |0\rangle \langle -1| + |0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0|) \frac{1}{2} \right\}; \quad (\text{B.21})$$

$$\bar{P}_1^{\psi_{me}}(x_s) \propto \text{sinc}^2 \left(\frac{k}{2f} ax_s \right) \left\{ 2 \frac{5}{4} + 2 + 4 \frac{1}{2} \cos(\gamma x_s) - 2 \cos(2\gamma x_s) \right\} \\ \bar{P}_1^{\psi_{me}}(x_s) \propto \text{sinc}^2 \left(\frac{k}{2f} ax_s \right) \left\{ 1 + \frac{4}{9} (\cos(\gamma x_s) - \cos(2\gamma x_s)) \right\}. \quad (\text{B.22})$$

B.3 Probabilidade de detecção em coincidências para um dos detectores no plano de Fourier e outro no plano de imagem ("detecção mista")

Vamos calcular agora as probabilidades de detecção em coincidências para as duas possíveis situações dessa configuração: a) Medição da imagem da fenda dupla e da transformada de Fourier da fenda tripla. b) Medição da imagem da fenda tripla e da transformada de Fourier da fenda dupla.

1. Estado $|\psi_I\rangle$

a)

$$P_2^{\psi_I}(x_i, x_s) \propto \text{sinc}^2 \left(\frac{kax_s}{2f} \right) \left| \prod \left(\frac{x_i - d/2}{2a} \right) (1 + e^{-i\gamma x_s}) + \prod \left(\frac{x_i + d/2}{2a} \right) (1 + e^{i\gamma x_s}) \right|^2 \\ P_2^{\psi_I}(x_i, x_s) \propto \text{sinc}^2 \left(\frac{k}{2f} ax_s \right) \left\{ [1 + \cos(\gamma x_s)] \left[\prod \left(\frac{x_i - d/2}{2a} \right) + \prod \left(\frac{x_i + d/2}{2a} \right) \right] \right. \\ \left. + \prod \left(\frac{x_i - d/2}{2a} \right) \prod \left(\frac{x_i + d/2}{2a} \right) [1 + \cos(2\gamma x_s) + 2 \cos(\gamma x_s)] \right\}. \quad (\text{B.23})$$

b)

$$P_2^{\psi I}(x_i, x_s) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_i\right) \left| \prod\left(\frac{x_s}{2a}\right) (e^{-i\gamma x_i/2} + e^{i\gamma x_i/2}) + \prod\left(\frac{x_s+d}{2a}\right) e^{i\gamma x_i/2} + \prod\left(\frac{x_s-d}{2a}\right) e^{-i\gamma x_i/2} \right|^2$$

$$P_2^{\psi I}(x_i, x_s) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_i\right) \left\{ \prod\left(\frac{x_s}{2a}\right) [1 - \cos(\gamma x_i)] + \prod\left(\frac{x_s-d}{2a}\right) + \prod\left(\frac{x_s+d}{2a}\right) + 2 \prod\left(\frac{x_s-d}{2a}\right) \prod\left(\frac{x_s+d}{2a}\right) \cos(\gamma x_i) + [1 - \cos(\gamma x_i)] \prod\left(\frac{x_s}{2a}\right) \left[\prod\left(\frac{x_s-d}{2a}\right) + \prod\left(\frac{x_s+d}{2a}\right) \right] \right\}. \quad (\text{B.24})$$

2. Estado $|\tau_{II}\rangle$

a)

$$P_2^{\tau II}(x_i, x_s) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_s\right) \left| E\left(\frac{d}{4}, z_f\right) \prod\left(\frac{x_i-d/2}{2a}\right) + \prod\left(\frac{x_i+d/2}{2a}\right) \left[E\left(\frac{d}{4}, z_f\right) e^{-i\gamma x_s + 2i\phi d^2} + E\left(-\frac{3d}{4}, z_f\right) e^{i\gamma x_s} \right] \right|^2$$

$$P_2^{\tau II}(x_i, x_s) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_s\right) \left\{ |E\left(\frac{d}{4}, z_f\right)|^2 \prod\left(\frac{x_i-d/2}{2a}\right) + \prod\left(\frac{x_i+d/2}{2a}\right) \times \left[|E\left(\frac{d}{4}, z_f\right)|^2 + 2\text{Re}(E^*\left(-\frac{3d}{4}, z_f\right) E\left(\frac{d}{4}, z_f\right) e^{2i\phi d^2}) \cos(2\gamma x_s) + |E\left(-\frac{3d}{4}, z_f\right)|^2 \right] + 2 \prod\left(\frac{x_i-d/2}{2a}\right) \prod\left(\frac{x_i+d/2}{2a}\right) \times \left[\text{Re}(E\left(-\frac{3d}{4}, z_f\right) E^*\left(\frac{d}{4}, z_f\right)) \cos(\gamma x_s) + |E\left(\frac{d}{4}, z_f\right)|^2 \cos(\gamma x_s - 2\phi d^2) \right] \right\} \quad (\text{B.25})$$

b)

$$\begin{aligned}
 P_2^{\tau_{II}}(x_i, x_s) &\propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_i\right) \left| E\left(\frac{d}{4}, z_f\right) \prod\left(\frac{x_s}{2a}\right) e^{-i\gamma x_i/2} + e^{i\gamma x_i/2} \right. \\
 &\quad \left. \times \left[E\left(-\frac{3d}{4}, z_f\right) \prod\left(\frac{x_s+d}{2a}\right) + E\left(\frac{d}{4}, z_f\right) \prod\left(\frac{x_s-d}{2a}\right) e^{2i\phi d^2} \right] \right|^2 \\
 P_2^{\tau_{II}}(x_i, x_s) &\propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_i\right) \left\{ |E\left(\frac{d}{4}, z_f\right)|^2 \prod\left(\frac{x_s}{2a}\right) + |E\left(-\frac{3d}{4}, z_f\right)|^2 \prod\left(\frac{x_s+d}{2a}\right) \right. \\
 &\quad + |E\left(\frac{d}{4}, z_f\right)|^2 \prod\left(\frac{x_s-d}{2a}\right) + 2 \prod\left(\frac{x_s-d}{2a}\right) \prod\left(\frac{x_s+d}{2a}\right) \\
 &\quad \times \text{Re} \left[E\left(-\frac{3d}{4}, z_f\right) E^*\left(\frac{d}{4}, z_f\right) e^{-2i\phi d^2} \right] + 2 \cos(\gamma x_i) \prod\left(\frac{x_s}{2a}\right) \\
 &\quad \left. \times \text{Re} \left[\left(E\left(-\frac{3d}{4}, z_f\right) \prod\left(\frac{x_s+d}{2a}\right) + E\left(\frac{d}{4}, z_f\right) \prod\left(\frac{x_s-d}{2a}\right) e^{-2i\phi d^2} \right) \right] \right\}. \tag{B.26}
 \end{aligned}$$

3. Estado $|\psi_{me}\rangle$

a)

$$\begin{aligned}
 P_2^{\psi_{me}}(x_i, x_s) &\propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_s\right) \left| \prod\left(\frac{x_i+d/2}{2a}\right) \left[-\frac{1}{2}e^{i\gamma x_s} + 1 + e^{-i\gamma x_s} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \prod\left(\frac{x_i-d/2}{2a}\right) \left[-\frac{1}{2}e^{-i\gamma x_s} + 1 + e^{i\gamma x_s} \right] \right|^2 \\
 P_2^{\psi_{me}}(x_i, x_s) &\propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_s\right) \left\{ \frac{9}{4} \left[\prod\left(\frac{x_i-d/2}{2a}\right) + \prod\left(\frac{x_i+d/2}{2a}\right) \right] \right. \\
 &\quad \times \left[1 + \frac{4}{9} (\cos(\gamma x_s) - \cos(2\gamma x_s)) \right] + \prod\left(\frac{x_i-d/2}{2a}\right) \prod\left(\frac{x_i+d/2}{2a}\right) \\
 &\quad \left. \times \left[3 \cos(\gamma x_s) + \frac{5}{4} \cos(2\gamma x_s) \right] \right\}. \tag{B.27}
 \end{aligned}$$

b)

$$P_2^{\psi_{me}}(x_i, x_s) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_i\right) \left| 2 \prod\left(\frac{x_s}{2a}\right) \cos(\gamma x_i/2) + \prod\left(\frac{x_s+d}{2a}\right) \right. \\ \left. \times \left[e^{-i\gamma x_i/2} - \frac{e^{i\gamma x_i/2}}{2} \right] + \prod\left(\frac{x_s-d}{2a}\right) \left[-\frac{e^{-i\gamma x_i/2}}{2} + e^{i\gamma x_i/2} \right] \right|^2$$

$$P_2^{\psi_{me}}(x_i, x_s) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2f}ax_i\right) \left\{ 2 \prod\left(\frac{x_s}{2a}\right) [1 - \cos(\gamma x_i)] \right. \\ \left. + \frac{5}{4} \left[\prod\left(\frac{x_s-d}{2a}\right) + \prod\left(\frac{x_s+d}{2a}\right) \right] \left[1 - \frac{4}{5} \cos(\gamma x_i) \right] \right. \\ \left. + [1 - \cos(\gamma x_i)] \prod\left(\frac{x_s}{2a}\right) \left[\prod\left(\frac{x_s+d}{2a}\right) + \prod\left(\frac{x_s-d}{2a}\right) \right] \right. \\ \left. - 2 \prod\left(\frac{x_s-d}{2a}\right) \prod\left(\frac{x_s+d}{2a}\right) \left[1 - \frac{5}{4} \cos(\gamma x_i) \right] \right\}. \quad (\text{B.28})$$

Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?,” *Physical review*, vol. 47, no. 10, p. 777, 1935.
- [2] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, “Proposed experiment to test local hidden-variable theories,” *Physical review letters*, vol. 23, no. 15, p. 880, 1969.
- [3] S. J. Freedman and J. F. Clauser, “Experimental test of local hidden-variable theories,” *Physical Review Letters*, vol. 28, no. 14, p. 938, 1972.
- [4] C. Eltschka and J. Siewert, “Quantifying entanglement resources,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 47, no. 42, p. 424005, 2014.
- [5] B. M. G. Teixeira, “Modulador espacial de luz para processos quânticos: algoritmo de deutsch, concentração de emaranhamento e simulação de sistemas quânticos abertos,” *Tese de Doutorado. Departamento de Física, UFMG*, 2013.
- [6] W. H. Peeters, J. J. Renema, and M. P. van Exter, “Engineering of two-photon spatial quantum correlations behind a double slit,” *Physical Review A*, vol. 79, no. 4, p. 043817, 2009.
- [7] L. Neves, G. Lima, E. Fonseca, L. Davidovich, and S. Pádua, “Characterizing entanglement in qubits created with spatially correlated twin photons,” *Physical Review A*, vol. 76, no. 3, p. 032314, 2007.
- [8] A. Gutiérrez-Esparza, W. Pimenta, B. Marques, A. Matoso, S. Pádua, *et al.*, “Experimental characterization of two spatial qutrits using entanglement witnesses,” *Optics express*, vol. 20, no. 24, pp. 26351–26362, 2012.
- [9] L. Neves, G. Lima, J. A. Gómez, C. Monken, C. Saavedra, and S. Pádua, “Generation of entangled states of qudits using twin photons,” *Physical review letters*, vol. 94, no. 10, p. 100501, 2005.

-
- [10] L. Neves, G. Lima, J. Aguirre Gómez, C. Monken, C. Saavedra, and S. Pádua, “Two-photon high-dimensional spatial entanglement: theory and experiment,” *Modern Physics Letters B*, vol. 20, no. 01, pp. 1–23, 2006.
- [11] G. Lima, L. Neves, I. F. Santos, J. A. Gómez, C. Saavedra, and S. Pádua, “Propagation of spatially entangled qudits through free space,” *Physical Review A*, vol. 73, no. 3, p. 032340, 2006.
- [12] A. Khoury and L. Oxman, “Topological phase structure of entangled qudits,” *Physical Review A*, vol. 89, no. 3, p. 032106, 2014.
- [13] A. Khoury, L. Oxman, B. Marques, A. Matoso, and S. Pádua, “Fractional topological phase on spatially encoded photonic qudits,” *Physical Review A*, vol. 87, no. 4, p. 042113, 2013.
- [14] A. A. Matoso, X. Sánchez-Lozano, W. M. Pimenta, P. Machado, B. Marques, F. Sciarrino, L. E. Oxman, and A. Z. K. e S. Pádua, “Experimental observation of fractional topological phases with photonic qudits,” *Phys. Rev. A.*, 2016.
- [15] K. Ann and G. Jaeger, “Entanglement sudden death in qubit–qutrit systems,” *Physics Letters A*, vol. 372, no. 5, pp. 579–583, 2008.
- [16] S. Khan, “Generation and sudden death of entanglement in qubit–qutrit systems with depolarising noise,” *Mathematical Structures in Computer Science*, vol. 23, no. 06, pp. 1220–1233, 2013.
- [17] W. Hai-Rui, R. Bao-Cang, L. Tao, H. Ming, and D. Fu-Guo, “Dynamics of entanglement for a two-parameter class of states in a qubit–qutrit system,” *Communications in Theoretical Physics*, vol. 57, no. 6, p. 983, 2012.
- [18] Y. Hao and W. Lian-Fu, “Correlation dynamics of two-parameter qubit–qutrit states under decoherence,” *Chinese Physics B*, vol. 22, no. 5, p. 050303, 2013.
- [19] G. Karpat and Z. Gedik, “Correlation dynamics of qubit–qutrit systems in a classical dephasing environment,” *Physics Letters A*, vol. 375, no. 47, pp. 4166–4171, 2011.
- [20] Z.-G. Li, S.-M. Fei, Z. Wang, and W. Liu, “Evolution equation of entanglement for bipartite systems,” *Physical Review A*, vol. 79, no. 2, p. 024303, 2009.
- [21] O. Gühne and G. Tóth, “Entanglement detection,” *Physics Reports*, vol. 474, no. 1, pp. 1–75, 2009.
- [22] M. B. Plenio and S. Virmani, “An introduction to entanglement measures,” *arXiv preprint quant-ph/0504163*, 2005.

- [23] J. S. Bell, “On the einstein podolsky rosen paradox,” 1964.
- [24] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum computation and quantum information*. Cambridge university press, 2010.
- [25] C. H. Bennett and S. J. Wiesner, “Communication via one-and two-particle operators on einstein-podolsky-rosen states,” *Physical review letters*, vol. 69, no. 20, p. 2881, 1992.
- [26] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, “Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels,” *Physical review letters*, vol. 70, no. 13, p. 1895, 1993.
- [27] A. K. Ekert, “Quantum cryptography based on bell’s theorem,” *Physical review letters*, vol. 67, no. 6, p. 661, 1991.
- [28] D. Collins, N. Gisin, N. Linden, S. Massar, and S. Popescu, “Bell inequalities for arbitrarily high-dimensional systems,” *Physical review letters*, vol. 88, no. 4, p. 040404, 2002.
- [29] D. Kaszlikowski, P. Gnaciński, M. Żukowski, W. Miklaszewski, and A. Zeilinger, “Violations of local realism by two entangled n-dimensional systems are stronger than for two qubits,” *Physical Review Letters*, vol. 85, no. 21, p. 4418, 2000.
- [30] T. Durt, D. Kaszlikowski, and M. Żukowski, “Violations of local realism with quantum systems described by n-dimensional hilbert spaces up to $n=16$,” *Physical Review A*, vol. 64, no. 2, p. 024101, 2001.
- [31] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, “Quantum entanglement,” *Reviews of modern physics*, vol. 81, no. 2, p. 865, 2009.
- [32] O. Gühne and G. Tóth, “Entanglement detection,” *Physics Reports*, vol. 474, no. 1, pp. 1–75, 2009.
- [33] P. Zanardi, D. A. Lidar, and S. Lloyd, “Quantum tensor product structures are observable induced,” *Physical review letters*, vol. 92, no. 6, p. 060402, 2004.
- [34] A. Peres, *Quantum theory: concepts and methods*, vol. 57. Springer Science & Business Media, 2006.
- [35] B. Amaral, A. Baraviera, and M. T. Cunha, “Mecânica quântica para matemáticos em formação,” *Publicações Matemáticas*, vol. 28, 2011.
- [36] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, and W. K. Wootters, “Mixed-state entanglement and quantum error correction,” *Physical Review A*, vol. 54, no. 5, p. 3824, 1996.

- [37] K. Chen, S. Albeverio, and S.-M. Fei, “Entanglement of formation of bipartite quantum states,” *Physical review letters*, vol. 95, no. 21, p. 210501, 2005.
- [38] W. K. Wootters, “Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits,” *Physical Review Letters*, vol. 80, no. 10, p. 2245, 1998.
- [39] H. Fan, K. Matsumoto, and H. Imai, “Quantify entanglement by concurrence hierarchy,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 36, no. 14, p. 4151, 2003.
- [40] P. Rungta, V. Bužek, C. M. Caves, M. Hillery, and G. J. Milburn, “Universal state inversion and concurrence in arbitrary dimensions,” *Physical Review A*, vol. 64, no. 4, p. 042315, 2001.
- [41] L. E. Ballentine, *Quantum mechanics: A modern development*. World scientific, 1998.
- [42] S. P. Walborn, C. Monken, S. Pádua, and P. S. Ribeiro, “Spatial correlations in parametric down-conversion,” *Physics Reports*, vol. 495, no. 4, pp. 87–139, 2010.
- [43] S. Walborn, A. De Oliveira, R. Thebaldi, and C. Monken, “Entanglement and conservation of orbital angular momentum in spontaneous parametric down-conversion,” *Physical Review A*, vol. 69, no. 2, p. 023811, 2004.
- [44] L. T. Neves, “Estados emaranhados de qubits e qudits criados com pares de fótons produzidos na conversão paramétrica descendente,” *Tese de Doutorado. Departamento de Física, UFMG*, 2006.
- [45] W. Nogueira, S. Walborn, S. Pádua, and C. Monken, “Experimental observation of spatial antibunching of photons,” *Physical review letters*, vol. 86, no. 18, p. 4009, 2001.
- [46] P. L. Saldanha and C. Monken, “Energy and momentum entanglement in parametric downconversion,” *American Journal of Physics*, vol. 81, no. 1, pp. 28–32, 2013.
- [47] C. H. Monken, *Aplicação da Óptica de Fourier à Conversão Paramétrica Descendente*. Notas de aula - Departamento de Física - UFMG, 1998-2004.
- [48] A. G. da Costa Mourar, “Propriedades espaciais e de frequência e um estudo da pureza e fidelidade do estado quântico gerado na conversão paramétrica descendente em cristais uniaxiais,” *Tese de Doutorado. Departamento de Física, UFMG*, 2010.
- [49] C. H. Monken, *Tutorial sobre CPD*. Belo Horizonte, MG, Brasil: Universidade Federal de Minas Gerais.

- [50] C. H. Monken, P. S. Ribeiro, and S. Pádua, “Transfer of angular spectrum and image formation in spontaneous parametric down-conversion,” *Physical Review A*, vol. 57, no. 4, p. 3123, 1998.
- [51] C. Hong and L. Mandel, “Theory of parametric frequency down conversion of light,” *Physical Review A*, vol. 31, no. 4, p. 2409, 1985.
- [52] C. H. Monken, P. S. Ribeiro, and S. Pádua, “Transfer of angular spectrum and image formation in spontaneous parametric down-conversion,” *Physical Review A*, vol. 57, no. 4, p. 3123, 1998.
- [53] P.-L. de Assis, “Manipulação e mapeamento de correlações quânticas em estados de quatro qudits espaciais,” *Teses de Doutorado. Departamento de Física, UFMG*, 2011.
- [54] B. Marques, A. Matoso, W. Pimenta, A. Gutiérrez-Esparza, M. Santos, and S. Pádua, “Experimental simulation of decoherence in photonics qudits,” *Scientific reports*, vol. 5, 2015.
- [55] L. Neves, S. Pádua, and C. Saavedra, “Controlled generation of maximally entangled qudits using twin photons,” *Physical Review A*, vol. 69, no. 4, p. 042305, 2004.
- [56] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier optics*. Roberts and Company Publishers, 2005.
- [57] A. V. Lugt, “Operational notation for the analysis and synthesis of optical data-processing systems,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 54, no. 8, pp. 1055–1063, 1966.
- [58] A. V. Lugt, “Operational notation for the analysis and synthesis of optical data-processing systems,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 54, no. 8, pp. 1055–1063, 1966.
- [59] M. Nazarathy and J. Shamir, “Fourier optics described by operator algebra,” *JOSA*, vol. 70, no. 2, pp. 150–159, 1980.
- [60] R. Shimizu, T. Yamaguchi, Y. Mitsumori, H. Kosaka, and K. Edamatsu, “Generation of polarization entanglement from spatially correlated photons in spontaneous parametric down-conversion,” *Physical Review A*, vol. 77, no. 3, p. 032338, 2008.
- [61] B. E. Saleh, M. C. Teich, and B. E. Saleh, *Fundamentals of photonics*, vol. 22. Wiley New York, 1991.
- [62] K. Iizuka, *Elements of Photonics, In Free Space and Special Media*, vol. 1. John Wiley & Sons, 2002.

- [63] A. Moura, W. Nogueira, S. Walborn, and C. Monken, “Transverse spatial and frequency properties of two-photon states generated by spontaneous parametric down-conversion,” *arXiv preprint arXiv:0806.4624*, 2008.
- [64] G. Molina-Terriza, S. Minardi, Y. Deyanova, C. I. Osorio, M. Hendrych, and J. P. Torres, “Control of the shape of the spatial mode function of photons generated in noncollinear spontaneous parametric down-conversion,” *Physical Review A*, vol. 72, no. 6, p. 065802, 2005.
- [65] D. R. Guido and A. B. U’Ren, “Study of the effect of pump focusing on the performance of ghost imaging and ghost diffraction, based on spontaneous parametric downconversion,” *Optics Communications*, vol. 285, no. 6, pp. 1269–1274, 2012.
- [66] G. Lima, L. Neves, I. F. Santos, J. A. Gómez, C. Saavedra, and S. Pádua, “Propagation of spatially entangled qudits through free space,” *Physical Review A*, vol. 73, no. 3, p. 032340, 2006.
- [67] E. Fonseca, J. M. da Silva, C. Monken, and S. Pádua, “Controlling two-particle conditional interference,” *Physical Review A*, vol. 61, no. 2, p. 023801, 2000.
- [68] G. de Aquino Moreira Lima, “Geração de estados emaranhados de qudits espaciais e análises experimentais visando sua utilização prática,” *Tese de Doutorado. Departamento de Física, UFMG*, 2006.
- [69] G. Lima, L. Neves, I. F. Santos, C. Monken, J. Aguirre GOMEZ, C. Saavedra, and S. Padua, “Generating and distributing two-photon entangled spatial qudits,” *International Journal of Quantum Information*, vol. 5, no. 01n02, pp. 69–81, 2007.
- [70] W. Pimenta, B. Marques, M. Carvalho, M. Barros, J. Fonseca, J. Ferraz, M. T. Cunha, and S. Pádua, “Minimal state tomography of spatial qubits using a spatial light modulator,” *Optics express*, vol. 18, no. 24, pp. 24423–24433, 2010.
- [71] W. Pimenta, B. Marques, T. Maciel, R. Vianna, A. Delgado, C. Saavedra, and S. Pádua, “Minimum tomography of two entangled qutrits using local measurements of one-qutrit symmetric informationally complete positive operator-valued measure,” *Physical Review A*, vol. 88, no. 1, p. 012112, 2013.
- [72] W. M. Pimenta., “Tomografia experimental de estados quânticos: Implementação de tomografia mínima,” *Dissertação de Mestrado. Departamento de Física, UFMG*, 2010.
- [73] M. Ángel Solís Prosser, “Propriedades espaciais e de frequência e um estudo da pureza e fidelidade do estado quântico gerado na conversão paramétrica descendente em cristais uniaxiais,” *Tesis Magister. Concepción, Chile: Universidad de*

Concepción Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento de Física, 2011.

- [74] L. Mandel and E. Wolf, *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge university press, 1995.
- [75] A. F. Abouraddy, B. E. Saleh, A. V. Sergienko, and M. C. Teich, “Role of entanglement in two-photon imaging,” *Physical review letters*, vol. 87, no. 12, p. 123602, 2001.
- [76] G. R. Fowles, *Introduction to modern optics*. Courier Corporation, 2012.
- [77] L. Neves, G. Lima, A. Delgado, and C. Saavedra, “Hybrid photonic entanglement: Realization, characterization, and applications,” *Physical Review A*, vol. 80, no. 4, p. 042322, 2009.