

Laboratório de Detecção de Falhas, Controle, Otimização e Modelagem  
Departamento de Engenharia Eletrônica  
Universidade Federal de Minas Gerais  
Av. Antônio Carlos, 6627, 31270-901 Belo Horizonte, MG Brasil  
Fone: +55 31 3499-4866 - Fax: +55 31 3499-4850



---

## Síntese de Controladores Takagi-Sugeno com Taxa de Convergência Pré-Especificada para Sistemas Sujeitos a Retardo no Tempo

---

**Rafael Henrique Alves Gomes**

Dissertação submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

**Orientadores:** Fernando de Oliveira Souza  
Leonardo Amaral Mozelli

Belo Horizonte, 22 de junho de 2015

*Ao meu avô Olímpio, que me ensinou a pescar peixe grande com linha fina, à minha avó Raimunda, que sempre me recebe com brilho nos olhos, à minha mãe Gilza, por me amar incondicionalmente, ao meu irmão Túlio, por ser o melhor irmão que eu poderia ter, e à Letícia, que me mostrou que podemos ir mais longe juntos.*

---

---

# Agradecimentos

---

Muito obrigado à minha mãe e meu irmão: mais que meu porto seguro, minha referência. Difícil imaginar uma vida sem vocês. Tenho certeza que sempre teremos uns aos outros, pois não existe entre nós qualquer desconfiança ou inimizade. A vida nos ensinou que nós somos muito fortes juntos.

Muito obrigado à Letícia: uma pessoa que um dia compartilhou seus sonhos comigo e me fez querer dividir com ela todos outros sonhos pelo resto da vida. Meus sonhos não são mais só meus e hoje, este trabalho é a realização de um sonho nosso. Ainda temos muitos sonhos para realizar.

Obrigado aos professores Fernando Souza e Leonardo Mozelli por me tomarem pela mão e me ensinar como caminhar. Difícil imaginar que eu chegaria ao final desta caminhada sem a companhia de vocês. Obrigado pela paciência e pela amizade que cultivamos nos últimos anos.

Obrigado à Apta Sistemas de Automação: empresa que me formou como profissional e me trouxe amigos para a vida toda. A confiança depositada em mim e as palavras de incentivo, principalmente no início, me proporcionaram o desafio de querer ser o melhor que eu poderia. Ainda venceremos muitos outros desafios juntos.

Obrigados aos colegas do PPGEE: grupo com grandes pesquisadores e amigos. O resultado de meu trabalho não seria o mesmo sem a companhia, conversa e contribuição de vocês. De maneira especial, agradeço ao meu

amigo Jeferson por demonstrar diversas vezes como é ser um amigo de verdade.

Finalmente, agradeço a Deus por tudo que vivi durante esses dois últimos anos, por tudo que aprendi, desafios que venci e por todas as vidas que se cruzaram com a minha. Certamente, tudo tem um motivo e o momento para acontecer.

Rafael Henrique Alves Gomes

---

---

# Epígrafe

---

*Minha mãe achava estudo a coisa mais fina do mundo.  
Não é. A coisa mais fina do mundo é o sentimento.*

*Adélia Prado*

*É melhor tentar e falhar, que preocupar-se e ver a vida  
passar. É melhor tentar, ainda que em vão, que sentar-  
se, fazendo nada até o final. Eu prefiro na chuva cami-  
nhar, que em dias tristes em casa me esconder. Prefiro  
ser feliz embora louco, que em conformidade viver.*

*Martin Luther King*

---

---

# Conteúdo

---

<b>Resumo</b>	<b>viii</b>
<b>Abstract</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Abreviações</b>	<b>xii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Sistema com Atraso no Tempo . . . . .	3
1.2 Revisão da Literatura Atual . . . . .	4
1.3 Objetivos Específicos . . . . .	5
1.4 Relevância . . . . .	6
1.5 Organização do Texto . . . . .	6
<b>2 Formulação do Problema</b>	<b>8</b>
2.1 Sistema com Atraso Variante no Tempo . . . . .	8
2.1.1 Estabilidade de Sistemas Dinâmicos . . . . .	8
2.1.2 Método Direto de Lyapunov . . . . .	12
2.1.3 Estabilidade via Lyapunov-Krasovskii . . . . .	13
2.1.4 Funcional de Lyapunov-Krasovskii Candidato . . . . .	13
2.2 Modelo Nebuloso Takagi-Sugeno . . . . .	14
2.2.1 Controladores Fuzzy . . . . .	17

---

<b>3</b>	<b>Métodos Propostos</b>	<b>19</b>
3.1	Condições de Análise de Estabilidade . . . . .	19
3.1.1	Análise de Estabilidade Exponencial . . . . .	19
3.1.2	Análise de Estabilidade Assintótica . . . . .	31
3.2	Condições de Estabilização . . . . .	32
3.2.1	Controle Sem Memória ou Controle Com Memória Pura	36
<b>4</b>	<b>Estudos de Casos</b>	<b>38</b>
4.1	Caso 1: Estabilidade Assintótica . . . . .	38
4.2	Caso 2: Estabilidade Exponencial . . . . .	40
4.3	Caso 3: Síntese de Controladores com Convergência Exponencial	42
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>47</b>
<b>A</b>	<b>Algumas Propriedades Matemáticas</b>	<b>49</b>
A.1	Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) . . . . .	49
A.2	O Complemento de Schur . . . . .	50
A.3	Desigualdade de Jensen . . . . .	51

---

---

---

# Resumo

---

Este trabalho tem por objetivo propor um método de projeto de controladores nebulosos do tipo Takagi-Sugeno para sistemas não lineares sujeitos a retardo variante no tempo. O índice de desempenho do controlador é dado para uma taxa de convergência exponencial, que é útil para indicar uma estimativa do tempo da resposta transiente. O método proposto é desenvolvido com base na teoria de Lyapunov-Krasovskii e em desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês: Linear Matrix Inequalities). O funcional de Lyapunov-Krasovskii escolhido é composto por termos exponenciais fundamentais para determinar a taxa de convergência exponencial. Por fim, simulações numéricas são apresentadas para ilustrar a eficiência da metodologia proposta.

**Palavras-chave:** Sistemas Nebulosos Takagi-Sugeno (TS), Controle, Estabilidade, Retardo variante no tempo, Taxa de convergência exponencial, Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs).

---

---

# Abstract

---

This work proposes a design method of Takagi-Sugeno fuzzy controller for nonlinear systems subject to time-varying delay. The performance index of the controller is given by an exponential convergence rate, which is useful to indicate an estimative of the transient response time. The proposed method is developed based on Lyapunov-Krasovskii theory and linear matrix inequalities (LMIs). The Lyapunov-Krasovskii functional chosen is composed of exponential terms that are primordial to determine the exponential convergence rate. Finally, numerical experiments are presented to illustrate the efficiency of the proposed methodology.

**Keywords:** Takagi-Sugeno (TS) Fuzzy Systems, Control, Stability, Time-varying delay, Exponential convergence rate, Linear Matrix Inequalities (LMIs).

---



---

# Lista de Figuras

---

2.1	Interpretação geométrica de estabilidade: a) estável, b) assintoticamente estável. . . . .	11
4.1	Atraso variável, $\tau_1(t)$ , com amplitude aleatória dado por $\tau = 0.1$ e $\mu = 0.06$ . . . . .	40
4.2	<i>i</i> ) linha contínua: trajetória dos estados do sistema; <i>ii</i> ) linha tracejada: a curva exponencial $2,3e^{-2\delta t}$ com $\delta = 0,455$ . . . . .	42
4.3	Na parte superior: <i>i</i> ) linha contínua: trajetória dos estados do sistema; <i>ii</i> ) linha tracejada: a curva exponencial $2,3e^{-2\delta t}$ com $\delta = 0,455$ . Na parte inferior: forma do atraso pertencente ao intervalo $\tau(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$ com $\tau = 0,4$ e $\mu = 0,06$ . . . . .	43
4.4	<i>i</i> ) linha contínua: trajetória dos estados do sistema em malha fechada com controlador projetado para $\delta = 0$ e considerando $\tau(t) = 2 + 0,5 \cos(t)$ e condição inicial $\phi(s) = \cos(s)$ ; <i>ii</i> ) linha tracejada: a curva exponencial 2. . . . .	44
4.5	<i>i</i> ) linha contínua: trajetória dos estados do sistema em malha fechada com controlador projetado para $\delta = 1$ e considerando $\tau(t) = 2 + 0,5 \cos(t)$ e condição inicial $\phi(s) = \cos(s)$ ; <i>ii</i> ) linha tracejada: a curva exponencial $3e^{-2t}$ . . . . .	45
4.6	<i>i</i> ) linha contínua: trajetória dos estados do sistema em malha fechada com controlador projetado para $\delta = 2$ e considerando $\tau(t) = 2 + 0,5 \cos(t)$ e condição inicial $\phi(s) = \cos(s)$ ; <i>ii</i> ) linha tracejada: a curva exponencial $8e^{-4t}$ . . . . .	46

---

---

# Lista de Símbolos

---

Os principais símbolos utilizados nesta dissertação são apresentados a seguir.

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais;
$A < 0$	Matriz definida negativa;
$A > 0$	Matriz definida positiva;
$A \leq 0$	Matriz semi-definida negativa;
$A \geq 0$	Matriz semi-definida positiva;
$\det(A)$	Determinante da matriz A;
$\lambda(A)$	Autovalor da matriz A;
$\lambda_{max}(A)$	Autovalor máximo da matriz A;
$\lambda_{min}(A)$	Autovalor mínimo da matriz A;
$\forall$	Para todo e qualquer;
$\in$	Pertence a;
$\exists$	Existe;
$\Rightarrow$	Implica que;
$\square$	Fim da demonstração;
*	Termos transpostos em uma matriz simétrica;

---

---

# Lista de Abreviações

---

- TS Takagi-Sugeno;
- LMI Desigualdade Linear Matricial (*Linear Matricies Inequalities*);
- PDC Compensação Paralela Distribuída (*Parallel Distributed Compensation*);
- LK Lyapunov-Krasovskii.

# Introdução

---

*Cedo ou tarde, você descobrirá a diferença  
entre saber o caminho e percorrer o caminho.*

*Morpheus*

Em diversas áreas da engenharia, a modelagem matemática de processos e sistemas físicos conduz frequentemente a complexos modelos não lineares com sérias dificuldades de análise e síntese (Wu; 2011) e, portanto, alcançar maneiras efetivas para analisar e controlar esta classe de sistemas é algo comum a se pensar. Baseado na lógica *fuzzy*, introduzida por Zadeh (1965), o modelo nebuloso Takagi-Sugeno (TS) (Takagi; 1985) vem recebendo grande atenção por ser capaz de representar, de forma exata ou aproximada, dinâmicas não lineares por um conjunto de dinâmicas lineares, localmente válidas e interpoladas de maneira suave, não linear e convexa. Assim, representar sistemas não lineares por meio de uma combinação convexa de sistemas lineares permite a utilização de ferramentas de controle robusto para tratar essa classe de sistemas.

Dinâmicas não lineares aumentam consideravelmente a complexidade de projetos de controladores. Nesse caso, uma estratégia comum consiste em modelar tal dinâmica como um modelo nebuloso de Takagi-Sugeno. Desta maneira, o sistema será representado por um conjunto de sistemas lineares, possivelmente sujeitos a atraso no tempo. De acordo com Ogunnaike (1994),

---

a presença de atraso no tempo em dinâmicas lineares que modelam regiões de operação de um sistema pode representar, por exemplo, uma não linearidade do sistema em questão. Deve-se observar também, que a maioria dos sistemas físicos está sujeitos a retardos no tempo e que esta característica pode ser fonte de degradação de desempenho e pode levar o sistema à instabilidade.

Embasados por tais justificativas, nos últimos anos, técnicas de análise de estabilidade e síntese de controladores para modelos Takagi-Sugeno sujeitos a retardo no tempo tem sido bastante exploradas. Nesse sentido, trabalhos como Souza (2013a) e Mozelli et al. (2010) mostram que técnicas de controle para modelos TS tem trazido resultados significativos.

A vantagem trazida pela abordagem nebulosa de Takagi-Sugeno está no fato de o problema relacionado à estabilidade e síntese de controladores ser tratado por meio de ferramentas de controle robusto e com isso, métodos de projeto podem ser formulados por meio de desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês: *Linear Matrix Inequalities*). A utilização de LMIs na resolução de problemas é vantajosa, pois são resolvidas computacionalmente de forma exata e em tempo polinomial por meio de algoritmos de otimização convexa.

Neste trabalho, diferentemente de outros trabalhos encontrados na literatura, veja por exemplo, Yoneyama (2004); Lin et al. (2007); Wang (2011) são apresentadas condições suficientes para análise de estabilidade e estabilização de sistemas cujo retardo pode ser variante no tempo e não diferenciável. Assume-se que o retardo pode ser representado por  $\tau(t) = \tau + \mu(t)$ , sendo  $\tau > 0$ , uma constante, e  $\mu(t)$  uma função variante no tempo. Ademais, assume-se que o retardo pertence a um domínio finito dado por  $\tau(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$ , sendo  $\mu$  um limitante superior do módulo da variação de  $\mu(t)$ , ou seja,  $|\mu(t)| \leq \mu \leq \tau$ . Esta consideração pode ser aplicada em casos nos quais o retardo varia em um dado intervalo permitindo a análise de estabilidade e projeto de controladores considerando diferentes regiões do retardo, não apenas o primeiro intervalo de estabilidade,  $\tau(t) \in [0, \tau_{\max}]$  com  $\tau_{\max} > 0$ .

Este capítulo apresenta a parte introdutória desta dissertação. Inicialmente será apresentado um panorama histórico a respeito de sistemas com

atraso no tempo. Na segunda seção, faz-se uma revisão da literatura atual na qual se apresenta uma breve descrição da evolução do problema tratado por este trabalho. Adiante são apresentados os objetivos da dissertação, e por fim a organização do texto apresentado.

## 1.1 Sistema com Atraso no Tempo

Em diversos sistemas físicos e fenômenos biológicos, a evolução temporal depende de informações atrasadas. Esta característica é chamada de atraso ou atraso no tempo, e um sistema que possui esta característica é chamado de sistema com atraso no tempo (Wu; 2011). O fenômeno relacionado ao atraso no tempo foi inicialmente observado em sistemas biológicos e posteriormente encontrado em diversos sistemas de engenharia, tais como transmissões. Nos últimos anos, estudos envolvendo sistemas com atraso vem despertando interesse de diversos pesquisadores, pois sua ocorrência pode ser fonte de instabilidade e degradação de desempenho (Souza et al.; 2008).

As primeiras pesquisas relacionadas à estabilidade de sistemas dinâmicos com atraso no tempo foram estabelecidas no início da década de 50. Inicialmente foram utilizados métodos considerando a representação do sistema no domínio da frequência (Mori; 1989). Mais tarde, métodos utilizando o domínio do tempo começaram a ser adotados. A grande dificuldade da análise de estabilidade no domínio da frequência é que para sistemas com atraso no tempo as soluções eram geralmente muito complicadas de serem obtidas, o que apresentava uma séria limitação na aplicação desta metodologia para sistemas com atraso (Wu; 2011). Por outro lado, a análise de estabilidade desta classe de sistemas no domínio do tempo oferecia maior flexibilidade.

Os principais métodos de análise de estabilidade no domínio do tempo baseiam-se na construção de funcionais de Lyapunov-Krasovskii e funções de Razumikhin (Hale et al.; 1993). Antes da década de 90 era extremamente complicado construir funcionais de Lyapunov-Krasovskii devido à limitação matemática e computacional para resolver problemas que envolviam tais funções. Com o advento das equações de Riccati, as desigualdades lineares matriciais (LMI) (Boyd et al.; 1994), e os pacotes computacionais; a construção

de funcionais de Lyapunov-Krasovskii tornou-se uma tarefa menos árdua e computacionalmente viável, o que possibilitou avanços significativos nesse campo de pesquisa. Atualmente, métodos de análise de estabilidade no domínio do tempo baseado na construção de funcionais de Lyapunov-Krasovskii são largamente utilizados na análise e síntese de controladores para sistemas com atraso no tempo.

## 1.2 Revisão da Literatura Atual

Desde a introdução dos modelos fuzzy Takagi (1985), análise de estabilidade e controle de sistemas fuzzy tem atraído grande interesse da comunidade científica, veja por exemplo, Viswanah (1997), Mozelli (2008) e suas respectivas referências.

Os modelos TS são efetivos para modelagem matemática de sistemas. Consequentemente, modelos TS têm sido amplamente utilizados no estudo de sistemas não lineares com atraso no tempo e diferentes metodologias de análise e síntese de controladores têm sido propostas, veja Souza et al. (2008); Mozelli et al. (2010); Benzaoula (2011); Souza (2013b); Manai (2013).

Os resultados relacionados à análise e síntese de controladores para sistemas TS podem ser classificados em duas classes: independentes do atraso (*delay-independent*, veja Leite et al. (2006) e Leite et al. (2007)), aplicáveis a sistemas cujo atraso é desconhecido, e dependentes do atraso (*delay-dependent*, veja Wu (2007) e Manai (2013)), aplicáveis a sistemas cujo valor do atraso é conhecido. Neste trabalho busca-se condições dependentes do atraso no tempo para análise e síntese de controladores.

O objetivo é alcançar condições eficientes que garantam estabilidade e síntese com os menores custos e maior precisão possíveis, ou seja, busca-se cada vez mais encontrar condições menos conservadoras. Baseados nesse objetivo, trabalhos como Souza et al. (2008) utilizam uma estratégia bastante simples que adiciona matrizes de folga às formulações LMI, permitindo desacoplar as matrizes do sistema das matrizes do funcional de Lyapunov-Krasovskii. Técnicas de discretização de funcionais como a proposta por Gu (1997), tem se mostrado muito eficiente para análise de estabilidade de sistemas lineares

com atraso no tempo. O trabalho de Souza et al. (2009) aborda uma metodologia de análise de estabilidade e projeto baseado na extensão da técnica de discretização do funcional Lyapunov-Krasovskii trazendo resultados significativos. Outras técnicas tem sido amplamente utilizadas com o objetivo de reduzir o conservadorismo das LMIs como, por exemplo, a escolha de funcionais de Lyapunov-Krasovskii dependentes do grau de ativação das funções de pertinência, veja Souza et al. (2008) e Manai (2013).

Estudos recentes apontam o interesse de pesquisas em determinar condições mais eficientes para análise de estabilidade exponencial, a fim de verificar a convergência do sistema dentro de um intervalo de tempo definido. Trabalhos como Amri et al. (2009), Gassara (2010) e Alves et al. (2014) consideram funcionais de Lyapunov-Krasovskii com termos exponenciais de tal maneira que possibilitem a obtenção de métodos de análise de estabilidade exponencial.

### 1.3 Objetivos Específicos

Esta dissertação tem como objetivo principal a elaboração de métodos capazes de verificar a estabilidade e a síntese de controladores para sistemas não lineares com atraso variante no tempo. Será considerado que os sistemas devem convergir exponencialmente de acordo com sua respectiva taxa de convergência pré-especificada. Na síntese de controladores a convergência exponencial poderá ser associada aos critérios de desempenho do controlador. A metodologia nebulosa de Takagi-Sugeno será utilizada para modelar as dinâmicas não lineares, enquanto a síntese de controladores será baseada na metodologia de Compensação Paralela Distribuída. O problema será formulado em termos análise de estabilidade e estabilização para sistemas Takagi-Sugeno com atraso variante no tempo e com taxa de convergência exponencial pré-especificada e resolvido por meio de LMIs. Desta maneira, será apresentado soluções suficientes que garantem a estabilidade e a síntese de controladores para esta classe de sistemas.

## 1.4 Relevância

Os resultados contidos nesta dissertação apresentam significativa relevância dentre os resultados mais gerais presentes na literatura. Diversas considerações tomadas para o desenvolvimento deste trabalho atribuem aos métodos obtidos tal generalidade que os tornarão aptos a serem aplicados em sistemas, tais como:

- em sistemas contínuos sem atraso no tempo,
- em sistemas contínuos com atraso no tempo constante,
- em sistemas contínuos com atraso no tempo variável podendo ser não diferenciável,
- na síntese de controladores que levam em consideração uma estimativa do valor do retardo que o sistema está sujeito.

## 1.5 Organização do Texto

Esta dissertação contém 5 capítulos organizados da seguinte forma:

- O Capítulo 1 apresenta aspectos gerais do trabalho e da dissertação em si, além da revisão básica da literatura;
- O Capítulo 2 se trata de um capítulo fundamental para o entendimento do trabalho. Neste capítulo são apresentados conceitos, definições e teoremas que embasam os resultados obtidos por esta dissertação;
- O Capítulo 3 se trata do capítulo mais importante desta dissertação. Nele serão apresentados os resultados obtidos, bem como a demonstração detalhada de cada teorema e corolário;
- O Capítulo 4 aplica os resultados obtidos no Capítulo 3 em exemplos numéricos;

- O Capítulo 5 apresenta as conclusões do trabalho e as perspectivas futuras.

Finalmente, o Apêndice A apresenta uma breve descrição das ferramentas matemáticas utilizadas a longo desta dissertação.

# Formulação do Problema

---

*Se não sabes, aprende; se já sabes, ensina.*

*Confúcio*

Neste capítulo, apresenta-se a formulação do problema tratado nesta dissertação. Inicialmente, são apresentados conceitos fundamentais que darão suporte aos temas abordados nos capítulos subsequentes. Em seguida, é apresentado o conceito de modelos nebulosos Takagi-Sugeno levando em consideração a modelagem com atraso no tempo. E por fim, apresenta-se a técnica de controle de sistemas não lineares por Compensação Paralela Distribuída.

## 2.1 Sistema com Atraso Variante no Tempo

Nesta seção serão abordados conceitos relacionados a estabilidade e estabilização de sistemas com atraso variante no tempo. Porém para que a leitura desta dissertação seja fechada em si, é necessário que alguns conceitos preliminares sejam apresentados inicialmente.

### 2.1.1 Estabilidade de Sistemas Dinâmicos

Estabilidade é a condição básica para controlar um sistema. Geralmente, a estabilidade refere-se a habilidade desse sistema retornar a um estado inicial

após ser submetido a um distúrbio externo (Wu; 2011). Em outras palavras, quando existe estabilidade a trajetória de um sistema permanece próxima a um ponto de equilíbrio, caso ela comece próximo desse (Mozelli; 2008).

Sistemas dinâmicos podem ser representados por uma equação diferencial do tipo:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_o) = x_o, \quad (2.1)$$

sendo  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estados e  $t_o$  instante de tempo inicial e  $t$  uma variável contínua que representa a evolução do tempo. Uma trajetória do sistema é uma sequência de valores  $x(t)$ , que o mesmo descreve partindo de uma condição inicial  $x_o$  (Mozelli; 2008).

Os sistemas dinâmicos abrangidos por esta dissertação são representados por uma equação do tipo:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t))), \quad x(t_o) = x_o, \quad (2.2)$$

sendo  $\tau(t)$  o retardo variante no tempo. Nesta dissertação o retardo é variável e possivelmente não diferenciável. Assume-se que o atraso pode ser representado por  $\tau(t) = \tau + \mu(t)$ , sendo  $\tau > 0$ , uma constante, e  $\mu(t)$  uma função variante no tempo, Ademais, na apresentação dos métodos propostos, assume-se que o retardo pertence a um domínio finito dado por  $\tau(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$ , sendo  $\mu$  um limitante superior do módulo da variação de  $\mu(t)$ , ou seja,  $|\mu(t)| \leq \mu \leq \tau$ .

Uma classe de pontos especiais no campo vetorial de  $f$  são chamados de equilíbrio ou pontos fixos. Um ponto  $x_e \in \mathbb{R}^n$  é chamado de ponto de equilíbrio do sistema se  $f(t, x_e) = 0$  para todo  $t \geq t_o$  (Wu; 2011). Formalmente, um ponto de equilíbrio é alcançado quando  $\dot{x} \equiv 0$ , em outras palavras, se a derivada do sistema em (2.1) é nula significa que os estados não estão variando no tempo e, portanto, são indicados como pontos de equilíbrio,  $x_e$ .

A seguir são apresentadas algumas definições.

**Definição 2.1** *O ponto de equilíbrio  $x_e$  é atrativo se  $\exists d > 0$  tal que*

$$\|x_0 - x_e\| < d \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| \rightarrow 0,$$

Segundo essa definição, um ponto é atrativo quando existe um círculo de raio  $d$ , centrado em  $x_e$ , tal que as trajetórias que partem dessa região convergem para o ponto de equilíbrio.

**Definição 2.2** *(Estabilidade Assintótica) O ponto de equilíbrio  $x_e$  é assintoticamente estável se é estável e atrativo.*

**Definição 2.3** *(Estabilidade no Sentido de Lyapunov) O ponto de equilíbrio  $x_e$  é estável se  $\forall r > 0, \exists \epsilon > 0$  tal que*

$$\|x_0 - x_e\| \leq \epsilon \Rightarrow \|x(t) - x_e\| \leq r \quad \forall t \geq 0$$

sendo:  $\mathcal{R}(\epsilon)$  a região que consiste de todos os pontos tais que

$$\|x_0 - x_e\| \leq \epsilon, \quad \epsilon > 0$$

e  $\mathcal{R}(r)$  a região que consiste em todos os pontos tais que

$$\|x(t) - x_e\| \leq r, \quad r > 0, \quad r > \epsilon \quad \forall t > 0$$

*Do contrário o ponto de equilíbrio é instável.*

Um estado de equilíbrio,  $x_e$ , é dito assintoticamente estável se for estável no sentido de Lyapunov e se toda solução começando em  $\mathcal{R}(\epsilon)$  converge para  $x_e$ , sem deixar  $\mathcal{R}(r)$ , a medida que  $t$  aumenta. A Figura 2.1 ilustra os conceitos de estabilidade e estabilidade assintótica para o caso em que  $x \in \mathbb{R}^2$ . Nesse sentido, estabilidade implica que, se as condições iniciais estão confinadas em uma região centrada em  $x_e$  e com raio  $\epsilon$ , então as trajetórias resultantes ficaram confinadas a outra região, também centrada em  $x_e$  de raio  $r$ . Nota-se que nesse sentido a estabilidade é definida como um conceito local.

Uma outra definição de estabilidade pode ser dada a seguir.

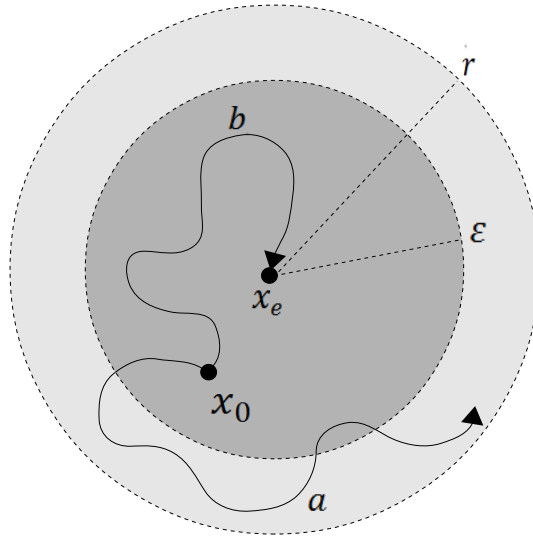


Figura 2.1: Interpretação geométrica de estabilidade: a) estável, b)assintoticamente estável.

**Definição 2.4** (*Liao et al.; 2007*) Se existe uma constante  $\delta > 0$ ,  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ , tal que

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| \leq \beta \|x(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)},$$

então o sistema é exponencialmente estável no ponto de equilíbrio,  $x_e = 0$ .

Segundo essa noção, as trajetórias que começam na vizinhança de um ponto de equilíbrio irão tender ao mesmo exponencialmente com taxa de convergência dada por  $\alpha$ .

Este trabalho busca condições que garantam estabilidade exponencial, nesse sentido é utilizada a seguinte definição de taxa de convergência exponencial.

**Definição 2.5** Um modelo dinâmico converge com taxa de convergência exponencial  $\delta$  se

$$\|x(t)\| \leq \kappa e^{-\delta t}, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.3)$$

sendo  $x(t)$  a trajetória dos estados do sistema e  $\kappa$  um escalar positivo com valor apropriado.

### 2.1.2 Método Direto de Lyapunov

O método direto de Lyapunov ou segundo método de Lyapunov pode ser visto como uma extensão matemática da observação física: se uma partícula move-se à partir de um estado instável em direção a um estado estável, sua energia deve necessariamente diminuir continuamente (Wu; 2011). Em outras palavras, se a energia de um sistema é dissipada continuamente, então este sistema deve se acomodar em um ponto de equilíbrio (Slotine; 1991).

Baseado neste princípio, a função de energia de um sistema é dada por  $V(t, x(t))$ , sempre definida positiva, e sua derivada temporal ao longo das trajetórias,  $\dot{V}(x_t) < 0$ , representa a dissipação desta energia (Mozelli; 2008). Para simplificar a notação, será usado  $(x_t)$  para denotar  $(t, x(t))$ . A função de energia dada por  $V(x_t)$  é chamada de função de Lyapunov.

**Teorema 2.1** (Liao et al.; 2007) *O sistema dinâmico 2.1 é globalmente assintoticamente estável, se existir uma função escalar  $V(x_t)$ , tal que:*

- $V(x_t)$  seja definida positiva,
- $\dot{V}(x_t)$  seja definida negativa,
- $V(x_t) \rightarrow \infty$  a medida que  $\|x_t\| \rightarrow \infty$ .

O método direto de Lyapunov pode ser aplicado a quaisquer sistemas dinâmicos. O que deve ser observado é que, se a função de Lyapunov candidata escolhida for definida positiva e sua derivada ao longo da evolução das trajetórias for definida negativa, garante-se que o sistema é assintoticamente estável.

### 2.1.3 Estabilidade via Lyapunov-Krasovskii

O método de análise de estabilidade de Lyapunov-Krasovskii corresponde a uma extensão do método de Lyapunov para o tratamento de sistemas sujeitos a atrasos no tempo. Esse método se baseia na proposição de um funcional, que leve em conta não só a evolução temporal do sistema, mas também o seu histórico temporal (Souza; 2008).

Assumindo  $V(x_t)$  um funcional quadrático e limitado, o teorema a seguir apresenta as condições impostas pelo método de análise de estabilidade de Lyapunov-Krasovskii.

**Teorema 2.2** (*Gu et al.; 2003*) *Um sistema sujeito a atrasos no tempo é assintoticamente estável se para algum  $\epsilon > 0 \in \mathbb{R}$  exista um funcional de Lyapunov-Krasovskii quadrático e limitado  $V(x_t)$  que satisfaça:*

$$\begin{aligned} V(x_t) &\geq \epsilon \|x(t)\|^2, \\ \dot{V}(x_t) &\leq -\epsilon \|x(t)\|^2, \end{aligned}$$

na qual  $x_t$  corresponde ao valor de  $x(\xi)$  com  $\xi \in [t - \tau, t]$  sendo  $\tau > 0 \in \mathbb{R}$  o atraso máximo que o sistema está sujeito e  $\dot{V}(x_t)$  a derivada do funcional ao longo das trajetórias do sistema.

### 2.1.4 Funcional de Lyapunov-Krasovskii Candidato

Um dos pontos principais desse trabalho é a escolha de um funcional de Lyapunov-Krasovskii apropriado que seja simples, quando comparado a outros estudados na literatura, que possua termos exponenciais que possibilitem a obtenção de um método capaz de estimar a taxa de convergência exponencial do sistema e que leve em consideração o atraso variante no tempo. Baseado nessa premissa, o seguinte funcional foi escolhido

$$\begin{aligned} V(x_t) &= e^{2\delta t} x^T(t) P x(t) \\ &+ 2e^{2\delta t} x^T(t) \int_{t-\tau}^t Q x(\xi) d\xi \\ &+ \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t e^{2\delta \xi} \hat{x}^T(\xi) \hat{R} \hat{x}(\xi) d\xi ds \\ &+ \int_{-\tau}^0 e^{2\delta(t+\xi)} x^T(t+\xi) S x(t+\xi) d\xi \\ &+ \int_{-\mu}^{\mu} \int_{t+s-\tau}^t e^{2\delta \xi} \dot{x}^T(\xi) Z \dot{x}(\xi) d\xi ds, \end{aligned} \tag{2.4}$$

no qual  $x_t$  corresponde ao valor de  $x(s)$  com  $s \in [t - \tau - \mu, t - \tau + \mu]$  conforme Teorema 2.2,  $\delta$  é um escalar que corresponde a taxa de convergência exponencial conforme Definição 2.5,  $\hat{x}^T(\xi) = \begin{bmatrix} x^T(\xi) & \dot{x}^T(\xi) \end{bmatrix}$ , matrizes de dimensão  $n \times n$ :  $P = P^T$ ,  $S = S^T$ ,  $Q$ ,  $R_1 = R_1^T$ ,  $R_2$ ,  $R_3 = R_3^T$ ,  $Z = Z^T$  e a matriz  $2n \times 2n$ :  $\hat{R} = \begin{bmatrix} R_1 & * \\ R_2 & R_3 \end{bmatrix}$ .

Portanto, considerando a teoria de Lyapunov-Krasovskii, o sistema descrito em (2.2) será assintoticamente estável se o funcional de Lyapunov-Krasovskii em (2.4) satisfizer as condições:

$$V(x_t) \geq \epsilon \|x(t)\|^2, \quad (2.5)$$

e, a derivada temporal do funcional for definida negativa:

$$\dot{V}(x_t) \leq -\epsilon \|x(t)\|^2, \quad (2.6)$$

sendo  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno.

## 2.2 Modelo Nebuloso Takagi-Sugeno

O modelo nebuloso Takagi-Sugeno (TS) consiste em um sistema de inferência capaz de descrever, de forma exata ou aproximada, sistemas dinâmicos não lineares por meio de um conjunto de dinâmicas lineares localmente válidas, interpolados de forma suave, não linear e convexa (Mozelli; 2008). Originalmente proposto por Takagi (1985), o modelo TS utiliza regras do tipo SE-ENTÃO para representar regiões de operação do sistema que possam ser consideradas lineares e, através da sobreposição de todas as regiões localmente válidas obtém-se a dinâmica não linear do sistema.

Em termos de modelagem, sabe-se que modelos TS têm a capacidade de aproximar uniformemente funções quaisquer em um domínio compacto, veja Tanaka (2001). Ou seja, modelos TS têm a capacidade de aproximação universal (Wang; 1997).

Além disso, outra vantagem de modelos TS é que esta abordagem fornece uma base para o desenvolvimento condições de análise de estabilidade e sín-

tese de controladores, pois permite utilizar, de forma rigorosa, resultados da teoria de sistemas lineares (Teixeira; 2007).

Para sistemas contínuos no tempo com atraso variante, o modelo TS tem o seguinte formato:

**Regra i:** SE  $\theta_1$  é  $\alpha_{i1}$  e ... e  $\theta_p$  é  $\alpha_{ip}$  ENTÃO

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_i x(t) + A_{di} x(t - \tau(t)) + B_i u(t) \\ x(t) &= \phi(s), s \in [\tau - \mu, 0] \\ y(t) &= I x(t),\end{aligned}\tag{2.7}$$

sendo  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  e  $y(t) \in \mathbb{R}^n$ , respectivamente, o vetor de estados, a entrada de controle e a saída medida;  $\tau(t)$  o retardo variante no tempo é dado por  $\tau(t) = \tau + \mu(t)$  em que  $\tau(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$  sendo  $\tau$  e  $\mu$  constantes tal que  $|\mu(t)| \leq \mu \leq \tau$ .  $A_i$ ,  $A_{di}$  e  $B_i$  são matrizes de dimensões apropriadas;  $\theta_j$  e  $\alpha_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, r$  e  $j = 1, 2, \dots, p$ ) são, respectivamente, as variáveis premissas e os conjuntos nebulosos;  $\phi(\cdot)$  é uma função contínua que corresponde a condição inicial do sistema.

As variáveis premissas podem, por exemplo, ser funções dos estados, distúrbios externos e condições de operação (Mozelli; 2011). Em geral, as variáveis premissas não são funções do vetor de entradas para evitar um processo complicado na etapa de defuzzificação de controladores fuzzy (Tanaka; 2001).

Para simplificar a notação, as variáveis premissas são agrupadas no vetor

$$\theta(t) := [\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_j(t)]$$

No antecedente das regras avalia-se o grau de compatibilidade de  $\theta_j(t)$  aos respectivos conjuntos nebulosos  $\alpha_{ij}(t)$ , obtendo-se graus de pertinência  $\mu_{ij}[\theta_j(t)]$ . Com isso, é possível determinar o grau de ativação da regra  $R_i$  dado por:

$$\omega_i[\theta(t)] := \prod_{j=1}^p \mu_{ij}[\theta_j(t)]$$

Nesse sentido, nota-se que o grau de ativação do antecedente é determinado pelo produto algébrico dos graus de pertinência. Vale ressaltar que ao

menos uma regra do modelo esteja ativa, ou seja, pelo menos um grau de ativação é estritamente positivo, garantindo as seguintes propriedades:

$$\omega_i[\theta(t)] \geq 0, \forall i \in \mathcal{R}, \quad \sum_{i=1}^r \omega_i[\theta(t)] > 0$$

O conseqüente induzido por cada regra  $R_i$  é uma ponderação de cada um dos modelo locais

*Conseqüente induzido para regra  $i$*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \omega_i[\theta(t)] [A_i x(t) + A_{di} x(t - \tau(t)) + B_i u(t)] \\ y(t) &= \omega_i[\theta(t)] [I x(t)] \end{aligned}$$

A etapa de agregação é dada pela média ponderada das regras. Assim, o modelo TS final pode ser representado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i[\theta(t)] [A_i x(t) + A_{di} x(t - \tau(t)) + B_i u(t)] \\ y(t) &= \sum_{i=1}^r h_i[\theta(t)] [I x(t)] \end{aligned} \tag{2.8}$$

sendo  $h_i[\theta(t)]$  a ponderação normalizada de cada regra fuzzy, dada por:

$$h_i[\theta(t)] = \frac{\omega_i[\theta(t)]}{\sum_{i=1}^r \omega_i[\theta(t)]}$$

Com o objetivo de descomplexificar a notação, será usado  $h_i(t)$  para denotar  $h_i[\theta(t)]$ . A ponderação normalizada de cada regra satisfaz a propriedade da combinação convexa:

$$\sum_{i=1}^p h_i(t) = 1, \quad \sum_{i=1}^p \dot{h}_i(t) = 0, \quad h_i(t) \geq 0 \forall i \in \mathbb{R}$$

Usando a identidade  $x(t - \tau(t)) = x(t - \tau) - \int_{-\tau(t)}^{\tau} \dot{x}(\tau - \xi) d\xi$ , o modelo

TS em (2.8) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(t) [A_i x(t) + A_{di} x(t - \tau(t)) + B_i u(t)] \\
 &= A(t)x(t) + A_d(t)x(t - \tau(t)) + B(t)u(t) \\
 &= A(t)x(t) + A_d(t) \left( x(t - \tau) - \int_{\tau(t)}^{\tau} \dot{x}(t - \xi) d\xi \right) + B(t)u(t),
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Portanto, o modelo TS busca modelar dinâmicas não lineares por meio de interpolação de modelos dinâmicos lineares. O modelo resultante é uma combinação convexa de modelos locais que é suave e não linear (Mozelli; 2008).

### 2.2.1 Controladores Fuzzy

Uma abordagem amplamente utilizada para controle de sistemas não lineares modelados via abordagem TS consiste na chamada Compensação Paralela Distribuída (PDC) (Tanaka; 2001).

O controlador PDC é, de modo geral, uma combinação fuzzy de controladores locais que compartilham a mesma estrutura de inferência do modelo TS

**Regra de controle i:**

**SE**  $\theta_i$  é  $\alpha_{i1}$  e ... e  $\theta_p$  é  $\alpha_{ip}$  **ENTÃO**

$$u(t) = K_i x(t) + K_{di} x(t - \tau) \tag{2.10}$$

Nesta dissertação, a lei de controle leva em conta o valor nominal do retardo no tempo,  $\tau$ . Então, mesmo nos casos em que o retardo não pode ser medido em tempo real para determinar  $x(t - \tau(t))$  a metodologia proposta pode ser aplicada. Além disso, casos particulares da lei de controle proposta podem ser considerados: *i*) controle sem memória, fazendo  $K_{di} = 0$ , e *ii*) controlador de memória pura, fazendo  $K_i = 0$ .

O controlador PDC é um tipo particular de realimentação de estados para

o qual cada regra fuzzy do modelo TS irá gerar um controlador linear local. Com isso, da mesma maneira que o modelo global do sistema foi inferido, a lei de controle global será dada pela interpolação convexa de todos os controladores lineares locais resultando em um controlador não linear. Assim, a lei de controle inferida é dada por:

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(t)[K_i x(t) + K_{di} x(t - \tau)]. \quad (2.11)$$

Desta maneira, ao se empregar o controle PDC (Tanaka; 2001) tem-se por finalidade determinar ganhos locais  $K_i$  e  $K_{di}$  de maneira que o sistema em malha fechada, descrito abaixo, seja exponencialmente estabilizável.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(t) \sum_{j=1}^r h_j(t) \left[ (A_i + B_i K_i) x(t) \right. \\ &\quad \left. + (A_{di} + B_i K_{dj}) x(t - \tau) - A_{di} \int_{\tau(t)}^{\tau} \dot{x}(t - \xi) d\xi \right] \\ &\triangleq [A(t) + B(t)K(t)]x(t) \\ &\quad + [A_d(t) + B(t)K_d(t)]x(t - \tau) - A_d(t) \int_{\tau(t)}^{\tau} \dot{x}(t - \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.12)$$

# Métodos Propostos

---

*Great Scott!*

*Dr. Emmett Brown*

Este capítulo apresenta a descrição dos métodos propostos para análise de estabilidade de modelos TS para sistemas não lineares sujeitos a atraso variante no tempo. É apresentada também a descrição dos métodos para síntese de controladores nebulosos para os quais o índice de desempenho é dado pela taxa de convergência exponencial, que é útil para indicar uma estimativa do tempo da resposta transiente.

## 3.1 Condições de Análise de Estabilidade

Nesta seção é apresentado o primeiro resultado deste trabalho: condições de análise de estabilidade exponencial dependentes do retardo variante no tempo para o sistema em (2.7) com  $u(t) = 0$ .

### 3.1.1 Análise de Estabilidade Exponencial

O teorema apresentado a seguir é o método proposto por essa dissertação como solução para o problema de análise de estabilidade exponencial para modelos TS de sistemas não lineares sujeito a um atraso variante no tempo,

podendo ser não diferenciável.

**Teorema 3.1** *Considere o modelo TS (2.7) com  $u(t) = 0$ . Sejam dados  $\tau > 0$  e  $0 \leq \mu \leq \tau$ , tal que  $\tau(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$ , e  $\delta > 0$ , a taxa de convergência exponencial. Então, o modelo TS em (2.7) com  $u(t) = 0$  e  $\tau(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$  é exponencialmente estável, com taxa de convergência exponencial  $\delta$ , se existirem matrizes de dimensões apropriadas:  $F$ ,  $G$ ,  $P = P^T$ ,  $S = S^T$ ,  $Q$ ,  $R_1 = R_1^T$ ,  $R_2$ ,  $R_3 = R_3^T$  e  $Z = Z^T$ , tais que as LMIs a seguir sejam satisfeitas*

$$\begin{bmatrix} P & * \\ Q^T & \varepsilon_1 S \end{bmatrix} > 0, \quad (3.1)$$

sendo  $\varepsilon_1 = e^{-2\delta\tau}/\tau$ ,

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} R_1 & * \\ R_2 & R_3 \end{bmatrix} > 0, \quad (3.2)$$

e

$$\left[ \begin{array}{c|c} \Xi_i & * \\ \Gamma_i^T & -\varepsilon_2^{-1}\mu Z \end{array} \right] < 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, r, \quad (3.3)$$

com

$$\varepsilon_2 = e^{-2\delta(\tau+\mu)}, \Gamma_i^T = \mu[A_{di}^T F^T \quad A_{di}^T G^T \quad 0 \quad 0]$$

e

$$\Xi_i = \begin{bmatrix} \kappa & * & * & * \\ P + \tau R_2 - \varepsilon_2(F^T - GA_i) & v & * & * \\ \varepsilon_1 R_3^T - Q^T + \varepsilon_2 A_{di}^T F^T & \varepsilon_2 A_{di}^T G^T & -\varepsilon_1(-R_3 + \tau S) & * \\ 2\delta Q^T - \varepsilon_1 R_2^T & Q^T & \varepsilon_1 R_2^T & -\varepsilon_1 R_1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

sendo

$$\kappa = 2\delta P + Q + Q^T + \tau R_1 - \varepsilon_1 R_3 + S + W \quad e \quad v = \tau R_3 + 2\mu Z - \varepsilon_2(G + G^T)$$

**Demonstração:** Esta demonstração apresenta condições que garantem que o sistema TS em (2.7) é exponencialmente estável. Pelo Teorema (2.1.3), se o funcional em (2.4) satisfaz as condições  $V(x_t) \geq \epsilon \|x(t)\|^2$  e  $\dot{V}(x_t) \leq -\epsilon \|x(t)\|^2$  o sistema TS em (2.7) será exponencialmente estável para algum

$\epsilon > 0 \in \mathbb{R}$ .

Com o intuito de tornar a demonstração mais clara, o funcional de Lyapunov-Krasovskii candidato em (2.4) é organizado conforme segue:

$$V(x_t) = V_1(x_t) + V_2(x_t) + V_3(x_t) + V_4(x_t) + V_5(x_t) \quad (3.5)$$

com

$$\begin{aligned} V_1(x_t) &= e^{2\delta t} x^T(t) P x(t) \\ V_2(x_t) &= 2e^{2\delta t} x^T(t) \int_{t-\tau}^t Q x(\xi) d\xi \\ V_3(x_t) &= \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t e^{2\delta\xi} \hat{x}^T(\xi) \hat{R} \hat{x}(\xi) d\xi ds \\ V_4(x_t) &= \int_{-\tau}^0 e^{2\delta(t+\xi)} x^T(t+\xi) S x(t+\xi) d\xi \\ V_5(x_t) &= \int_{-\mu}^{\mu} \int_{t+s-\tau}^t e^{2\delta\xi} \dot{x}^T(\xi) Z \dot{x}(\xi) d\xi ds \end{aligned}$$

sendo  $x_t$  corresponde ao valor de  $x(s)$  com  $s \in [t - \tau - \mu, t - \tau + \mu]$ ,  $\delta$  é um escalar que corresponde a taxa de convergência exponencial,  $\hat{x}^T(\xi) = \begin{bmatrix} x^T(\xi) & \dot{x}^T(\xi) \end{bmatrix}$ , matrizes de dimensão  $n \times n$ :  $P = P^T$ ,  $S = S^T$ ,  $Q$ ,  $R_1 = R_1^T$ ,

$R_2$ ,  $R_3 = R_3^T$ ,  $Z = Z^T$  e a matriz  $2n \times 2n$ :  $\hat{R} = \begin{bmatrix} R_1 & * \\ R_2 & R_3 \end{bmatrix}$ .

A primeira parte desta demonstração mostra que se as LMIs (3.1), (3.2) e (3.3) forem satisfeitas a condição  $V(x_t) \geq \epsilon \|x(t)\|^2$  também será.

Inicialmente, expande-se o termo  $V_2(x_t)$  obtendo-se:

$$\begin{aligned}
V_2(x_t) &= 2e^{2\delta t} x^T(t) \int_{t-\tau}^t Qx(\xi) d\xi \\
&= e^{2\delta t} x^T(t) Q \int_{t-\tau}^t x(\xi) d\xi + e^{2\delta t} \int_{t-\tau}^t x^T(\xi) d\xi Q^T x(t) \\
&= e^{2\delta t} x^T(t) Q \int_{-\tau}^0 x(t+\xi) d\xi + e^{2\delta t} \int_{-\tau}^0 x^T(t+\xi) d\xi Q^T x(t)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Em seguida, assumindo-se que  $S > 0$ , implícito em (3.1), e utilizando a desigualdade de Jensen (ver Apêndice A.3) em  $V_4(x_t)$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}
V_4(x_t) &= \int_{-\tau}^0 e^{2\delta(t+\xi)} x^T(t+\xi) S x(t+\xi) d\xi \\
&\geq e^{2\delta(t-\tau)} \int_{-\tau}^0 x^T(t+\xi) S x(t+\xi) d\xi \\
&\geq \frac{e^{2\delta(t-\tau)}}{\tau} \int_{-\tau}^0 x^T(t+\xi) d\xi S \int_{-\tau}^0 x(t+\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Assim, considerando (3.6) e (3.7) e agrupando  $V_1(x_t)$ ,  $V_2(x_t)$  e  $V_4(x_t)$  na forma quadrática, pode-se reescrever o funcional (3.5) como:

$$\begin{aligned}
V(x_t) &\geq \eta^T \begin{bmatrix} P & Q \\ * & (e^{-2\delta\tau}/\tau)S \end{bmatrix} \eta \\
&\quad + \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t e^{2\delta\xi} \hat{x}^T(\xi) \hat{R} \hat{x}(\xi) d\xi ds \\
&\quad + \int_{-\mu}^{\mu} \int_{t+s-\tau}^t e^{2\delta\xi} \dot{x}^T(\xi) Z \dot{x}(\xi) d\xi ds
\end{aligned}$$

sendo  $\eta^T = \left[ e^{\delta t} x^T(t) \quad e^{\delta t} \int_{-\tau}^0 x^T(t+\xi) d\xi \right]$ .

Portanto, uma condição suficiente para garantir que  $V(x_t) \geq \epsilon \|x(t)\|^2$  ( $\epsilon > 0$ ) é que o lado direito da desigualdade anterior seja positivo. Assim, note que as LMIs (3.1), (3.2) e (3.3) garantem, respectivamente, que os três termos do lado direito da desigualdade acima sejam positivos. A LMI em (3.3) garante que  $Z > 0$  (veja  $Z$  na diagonal principal desta LMI). Então,

fica demonstrado que se as LMIs em (3.1), (3.2) e (3.3) forem satisfeitas tem-se que  $V(x_t) \geq \epsilon \|x(t)\|$  ( $\epsilon > 0$ ).

Agora demonstra-se que o funcional em (3.5) satisfaz a condição:  $\dot{V}(x_t) \leq -\epsilon \|x(t)\|^2$  ( $\epsilon > 0$ ) se a LMI em (3.3) e  $\hat{R} > 0$  forem assegurados. Inicialmente, considerando  $u(t) = 0$  no modelo TS em (2.7), tem-se o termo nulo obtido à partir de (2.7):

$$0 = 2e^{2\delta(t-\tau-\mu)} [x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G] \times [-\dot{x}(t) + A(t)x(t) + A_d(t)x(t - \tau(t))] \quad (3.8)$$

Usando a identidade  $x(t - \tau(t)) = x(t - \tau) - \int_{-\tau(t)}^{\tau} \dot{x}(\tau - \xi) d\xi$ , pode-se expandir o termo nulo (3.8) conforme:

$$\begin{aligned} 0 &= 2e^{2\delta(t-\tau-\mu)} [x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G] \\ &\times \left[ -\dot{x}(t) + A(t)x(t) + A_d(t) \left( x(t - \tau) - \int_{-\tau(t)}^{-\tau} \dot{x}(t + \xi) d\xi \right) \right] \\ &= 2e^{2\delta(t-\tau-\mu)} [x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G] \\ &\times [-\dot{x}(t) + A(t)x(t) + A_d(t)(x(t - \tau))] + v(t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

sendo

$$v(t) = -2\Lambda A_d(t) \int_{-\tau(t)}^{-\tau} e^{\delta(t-\tau-\mu)} \dot{x}(t + \xi) d\xi \quad (3.10)$$

com

$$\Lambda = e^{\delta(t-\tau-\mu)} \begin{bmatrix} x^T(t)F & \dot{x}^T(t)G \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Então, aplicando em (3.10), a seguinte desigualdade:

$$2a^T b \leq a^T X a + b^T X^{-1} b \quad (3.12)$$

sendo  $a, b \in \mathbb{R}^n$  e  $X > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e fazendo  $a^T = \Lambda A_d(t)$ ,  $b = e^{\delta(t-\tau-\mu)} \dot{x}(t+\xi)$  e  $X = Z$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
v(t) &= -2 \int_{-\tau(t)}^{-\tau} \Lambda A_d(t) e^{\delta(t-\tau-\mu)} \dot{x}(t+\xi) d\xi \\
v(t) &\leq \int_{-\tau(t)}^{-\tau} (\Lambda A_d(t)) Z^{-1} (\Lambda A_d(t))^T d\xi \\
&\quad + \int_{-\tau(t)}^{-\tau} e^{2\delta(t-\tau-\mu)} \dot{x}^T(t+\xi) Z \dot{x}(t+\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Agora, substituindo  $\tau(t)$  pelo seu limite superior, obtém-se:

$$\begin{aligned}
v(t) &\leq \int_{-(\tau+\mu)}^{-\tau} (\Lambda A_d(t)) Z^{-1} (\Lambda A_d(t))^T d\xi \\
&\quad + \int_{-(\tau+\mu)}^{-\tau} e^{2\delta(t-\tau-\mu)} \dot{x}^T(t+\xi) Z \dot{x}(t+\xi) d\xi \\
&\leq \int_{-(\tau+\mu)}^{-\tau} d\xi (\Lambda A_d(t)) Z^{-1} (\Lambda A_d(t))^T \\
&\quad + e^{2\delta(t-\tau-\mu)} \int_{t-(\tau+\mu)}^{t-\tau} \dot{x}^T(\xi) Z \dot{x}(\xi) d\xi \\
&\leq \mu (\Lambda A_d(t)) Z^{-1} (\Lambda A_d(t))^T \\
&\quad + e^{2\delta(t-\tau-\mu)} \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau} \dot{x}^T(\xi) Z \dot{x}(\xi) d\xi \\
&\leq \mu (\Lambda A_d(t)) Z^{-1} (\Lambda A_d(t))^T \\
&\quad + \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} \dot{x}^T(\xi) Z \dot{x}(\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Após considerar as imposições feitas sobre  $v(t)$ , tem-se o termo nulo na forma expandida dado por:

$$\begin{aligned}
0 \geq & -e^{2\delta(t-\tau-\mu)} x^T(t) F \dot{x}(t) - e^{2\delta(t-\tau-\mu)} \dot{x}^T(t) F^T x(t) \\
& + e^{2\delta(t-\tau-\mu)} x^T(t) F A(t) x(t) + e^{2\delta(t-\tau-\mu)} x^T(t) A^T(t) F^T(t) x(t) \\
& + e^{2\delta(t-\tau-\mu)} x^T(t) F A_d(t) x(t-\tau) + e^{2\delta(t-\tau-\mu)} x(t-\tau)^T A_d(t)^T F^T x(t) \\
& - e^{2\delta(t-\tau-\mu)} \dot{x}^T(t) G \dot{x}(t) - e^{2\delta(t-\tau-\mu)} \dot{x}^T(t) G^T \dot{x}(t) \\
& + e^{2\delta(t-\tau-\mu)} \dot{x}^T(t) G A(t) x(t) + e^{2\delta(t-\tau-\mu)} x^T(t) A^T(t) G^T \dot{x}(t) \\
& + e^{2\delta(t-\tau-\mu)} \dot{x}^T(t) G A_d(t) x(t-\tau) + e^{2\delta(t-\tau-\mu)} x^T(t-\tau) A_d^T(t) G^T \dot{x}^T(t) \\
& + \mu (\Lambda A_d(t)) Z^{-1} (\Lambda A_d(t))^T + e^{2\delta(t-\tau-\mu)} \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} \dot{x}^T(\xi) Z \dot{x}(\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Com a formulação do termo nulo em (3.15), a próxima etapa da demonstração é aplicar a derivada ao longo das trajetórias dos estados do sistema (2.7), obtendo-se:

$$\dot{V}(x_t) = \dot{V}_1(x_t) + \dot{V}_2(x_t) + \dot{V}_3(x_t) + \dot{V}_4(x_t) + \dot{V}_5(x_t) \tag{3.16}$$

Sendo  $\dot{V}_1(x_t)$  dado por:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(x_t) &= e^{2\delta t} \dot{x}^T(t) P x(t) + e^{2\delta t} x^T(t) P \dot{x}(t) \\
\dot{V}_2(x_t) &= e^{2\delta t} \dot{x}^T(t) Q \int_{-\tau}^0 x(t+\xi) d\xi + e^{2\delta t} \int_{-\tau}^0 x^T(t+\xi) d\xi Q^T \dot{x}(t) \\
&+ e^{2\delta t} x^T(t) Q x(t) + e^{2\delta t} x^T(t) Q^T x(t) \\
&- e^{2\delta t} x^T(t) Q x(t-\tau) - e^{2\delta t} x^T(t-\tau) Q^T x(t) \\
&+ 2\delta e^{2\delta t} x^T(t) Q \int_{-\tau}^0 x(t+\xi) d\xi + 2\delta e^{2\delta t} \int_{-\tau}^0 x^T(t+\xi) d\xi Q^T x(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_3(x_t) &= \int_{-\tau}^0 e^{2\delta t} \hat{x}^T(t) \hat{R} \hat{x}(t) ds - \int_{-\tau}^0 e^{2\delta(t+s)} \hat{x}^T(t+s) \hat{R} \hat{x}(t+s) ds \\
&= \int_{-\tau}^0 e^{2\delta t} \hat{x}^T(t) \hat{R} \hat{x}(t) ds - \int_{t-\tau}^t e^{2\delta s} \hat{x}^T(s) \hat{R} \hat{x}(s) ds \\
&= e^{2\delta t} \hat{x}^T(t) \tau \hat{R} \hat{x}(t) - \int_{t-\tau}^t e^{2\delta s} \hat{x}^T(s) \hat{R} \hat{x}(s) ds
\end{aligned}$$

$$\dot{V}_4(x_t) = e^{2\delta t} x^T(t) S x(t) - e^{2\delta(t-\tau)} x^T(t-\tau) S x(t-\tau)$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_5(x_t) &= 2\mu e^{2\delta\xi} \dot{x}^T(t) Z \dot{x}(t) - \int_{-\mu}^{\mu} e^{2\delta\xi} \dot{x}^T(t+s-\tau) Z \dot{x}(t+s-\tau) ds \\
&= 2\mu e^{2\delta\xi} \dot{x}^T(t) Z \dot{x}(t) - \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} e^{2\delta\xi} \dot{x}^T(s) Z \dot{x}(s) ds
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema A.3 (Desigualdade de Jensen) ao segundo termo de  $\dot{V}_3(x_t)$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_3(x_t) &\leq e^{2\delta t} \hat{x}^T(t) \tau \hat{R} \hat{x}(t) - \int_{t-\tau}^t e^{\delta s} \hat{x}^T(s) ds \frac{1}{\tau} \hat{R} \int_{t-\tau}^t e^{\delta s} \hat{x}(s) ds \\
&\leq e^{2\delta t} \hat{x}^T(t) \tau \hat{R} \hat{x}(t) - \int_{-\tau}^0 e^{\delta(t+s)} \hat{x}^T(t+s) ds \frac{1}{\tau} \hat{R} \int_{-\tau}^0 e^{\delta(t+s)} \hat{x}(t+s) ds
\end{aligned}$$

Utilizando a definição de  $\hat{R}$  em (3.2) e  $\hat{x}$  tal que  $\hat{x}^T(\xi) = \begin{bmatrix} x^T(\xi) & \dot{x}^T(\xi) \end{bmatrix}$  tem-se que:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_3(x_t) &\leq e^{2\delta t} x^T(t) \tau R_1 x(t) + e^{2\delta t} \dot{x}^T(t) \tau R_2 x(t) \\
&+ e^{2\delta t} x^T(t) \tau R_2^T \dot{x}(t) + e^{2\delta t} \dot{x}^T(t) \tau R_3 \dot{x}(t) \\
&- \int_{t-\tau}^t e^{\delta s} x^T(s) ds \frac{1}{\tau} R_1 \int_{t-\tau}^t e^{\delta s} x(s) ds \\
&- e^{\delta t} x^T(t) \frac{1}{\tau} R_2 \int_{t-\tau}^t e^{\delta s} x(s) ds \\
&+ e^{\delta(t-\tau)} x^T(t-\tau) \frac{1}{\tau} R_2 \int_{t-\tau}^t e^{\delta s} x^T(t) x(s) ds \\
&- \int_{t-\tau}^t e^{\delta s} x^T(s) ds \frac{1}{\tau} R_2^T e^{\delta t} x(t) + \int_{t-\tau}^t e^{\delta s} x^T(s) ds \frac{1}{\tau} R_2^T e^{\delta(t-\tau)} x(t-\tau) \\
&- e^{\delta t} x^T(t) \frac{1}{\tau} R_3 e^{\delta t} x(t) + e^{\delta t} x^T(t) \frac{1}{\tau} R_3 e^{\delta(t-\tau)} x(t-\tau) \\
&+ e^{\delta(t-\tau)} x^T(t-\tau) \frac{1}{\tau} R_3 e^{\delta t} x(t) - e^{\delta(t-\tau)} x^T(t-\tau) \frac{1}{\tau} R_3 e^{\delta(t-\tau)} x(t-\tau)
\end{aligned}$$

Assumindo que  $Z > 0$  (condição implícita em (3.3)) temos que

$$\begin{aligned}
& - \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} e^{2\delta \xi} \dot{x}^T(s) Z \dot{x}(s) ds \\
& \leq -e^{2\delta(t-\tau-\mu)} \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} \dot{x}^T(s) Z \dot{x}(s) ds.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Com isso, temos o limitante superior de  $\dot{V}_5(x_t)$

$$\dot{V}_5(x_t) \leq 2\mu e^{2\delta \xi} \dot{x}^T(t) Z \dot{x}(t) - e^{2\delta(t-\tau-\mu)} \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} \dot{x}^T(s) Z \dot{x}(s) ds$$

Assim, adicionando-se o termo nulo (3.15) a (3.16) e buscando a representação quadrática para a equação, obtém-se o seguinte limitante superior para  $\dot{V}(x_t)$ :

$$\dot{V}(x_t) \leq \zeta^T \Xi(t) \zeta + \mu (\Lambda A_d(t)) Z^{-1} (\Lambda A_d(t))^T \tag{3.18}$$

com  $\zeta^T = e^{\delta t} \left[ x^T(t) \quad \dot{x}^T(t) \quad x^T(t - \tau) \quad \int_{t-\tau}^t x^T(s) ds \right]$ ,  $\Lambda$  dado em (3.11) e  $\Xi(t) = \sum_{i=1}^r h_i(t) \Xi_i$ , sendo  $\Xi_i$  dado em (3.4)

Note que

$$\begin{aligned} \Lambda A_d(t) &= [x^T(t) F A_d + \dot{x}^T(t) G A_d] \\ &= [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t)] \begin{bmatrix} F A_d \\ G A_d \end{bmatrix} \\ &= \zeta^T \begin{bmatrix} F A_d \\ G A_d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \zeta^T \Gamma(t). \end{aligned}$$

sendo  $\zeta^T = e^{\delta t} \left[ x^T(t) \quad \dot{x}^T(t) \quad x^T(t - \tau) \quad \int_{t-\tau}^t x^T(s) ds \right]$ .

Desta maneira, pode-se reescrever o limitante superior (3.18), como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &\leq \zeta^T \Xi(t) \zeta + (\zeta^T \Gamma(t)) \mu Z^{-1} (\zeta \Gamma(t)^T) \\ &\leq \zeta^T \left( \Xi(t) + \Gamma(t) (\mu e^{2\delta(\tau+\mu)} Z)^{-1} \Gamma(t)^T \right) \zeta \end{aligned} \quad (3.19)$$

Assim, para garantir que  $\dot{V}(x_t) < 0$  para qualquer  $\zeta \neq 0$  é suficiente impor que o lado direito da desigualdade em (3.19) seja negativo, ou seja,

$$\Xi(t) + \Gamma(t) (\mu e^{2\delta(\tau+\mu)} Z)^{-1} \Gamma(t)^T < 0.$$

Portanto, pelo complemento de Schur (ver Apêndice A.2), satisfazer a desigualdade acima e  $Z > 0$  é equivalente a satisfazer a desigualdade

$$\left[ \begin{array}{c|c} \Xi(t) & * \\ \hline \Gamma^T(t) & -e^{2\delta(\tau+\mu)} \mu Z \end{array} \right] < 0$$

que pode ser reescrita como

$$\sum_{i=1}^r h_i(t) \left[ \frac{\Xi_i}{\Gamma_i^T} \left| \begin{array}{c} * \\ -e^{2\delta(\tau+\mu)} \mu Z \end{array} \right. \right] < 0. \quad (3.20)$$

Note que  $h_i(t) > 0 \forall i$ , então uma condição suficiente para que a desigualdade acima seja satisfeita é que a LMI em (3.3) seja satisfeita para todo  $i = 1, 2, \dots, r$ , e, conseqüentemente:  $\dot{V}(x_t) \leq -\epsilon \|x(t)\|$  ( $\epsilon > 0$ ) será satisfeita.

Finalmente, resta demonstrar apenas que a condição em (2.3) também será satisfeita se as condições do teorema forem satisfeitas. Portanto, será mostrado que se as LMIs em (3.1), (3.2) e (3.3) forem satisfeitas, então o modelo TS (2.7) é exponencialmente estável com taxa de convergência  $\delta$ .

Usando a desigualdade dada em (3.12) no segundo termo do funcional (3.5), obtém-se:

$$\begin{aligned} & 2e^{\delta t} x^T(t) \int_{-\tau}^0 Qx(t+\xi) d\xi \\ & \leq \int_{-\tau}^0 x^T(t) e^{\delta t} QIQ^T e^{\delta t} x(t) d\xi \\ & \quad + \int_{t-\tau}^t e^{\delta t} x^T(s) I e^{\delta t} x(s) ds \end{aligned} \quad (3.21)$$

então o funcional de Lyapunov-Krasovskii em (3.5) tem o seguinte limitante superior

$$\begin{aligned}
V(x_t) &\leq e^{2\delta t} \lambda_{\max}\{P\} \|x(t)\|^2 + \int_{t-\tau}^t e^{2\delta t} \|x(s)\|^2 ds \\
&\quad + \tau \lambda_{\max}\{QQ^T\} e^{2\delta t} \|x(t)\|^2 \\
&\quad + \tau \lambda_{\max}\{\hat{R}\} \int_{t-\tau}^t e^{2\delta s} \|\hat{x}(s)\|^2 ds \\
&\quad + \lambda_{\max}\{S\} \int_{t-\tau}^t e^{2\delta s} \|x(s)\|^2 ds \\
&\quad + (\tau + \mu) \lambda_{\max}\{Z\} \int_{t-\tau-\mu}^t e^{2\delta s} \|\dot{x}(s)\|^2 ds \\
&= \bar{V}(x_t)
\end{aligned}$$

sendo  $\lambda_{\max}\{\cdot\}$  o maior autovalor de uma matriz.

Assumindo que as LMIs em (3.1), (3.2) e (3.3) são satisfeitas, então  $\dot{V}(x_t) < 0$  e  $V(x_t) > 0$ . Assim, tem-se que

$$0 \leq V(x_t) \leq V(x(0)) \leq \bar{V}(x_t)|_{t=0}. \quad (3.22)$$

Ademais,

$$\begin{aligned}
\bar{V}(x_0) &\leq \left\{ \lambda_{\max}\{P\} + \tau \lambda_{\max}\{QQ^T\} + \int_{-\tau}^0 e^{2\delta s} ds \right. \\
&\quad \left. + \lambda_{\max}\{S\} \int_{-\tau}^0 e^{2\delta s} ds \right\} \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} \{\|x(\theta)\|\} \\
&\quad + \left\{ \tau \lambda_{\max}\{\hat{R}\} \int_{-\tau}^0 e^{2\delta s} ds \right\} \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} \{\|\hat{x}(\theta)\|\} \\
&\quad + \left\{ (\tau + \mu) \lambda_{\max}\{Z\} \int_{-\tau-\mu}^0 e^{2\delta s} ds \right\} \\
&\quad \quad \times \sup_{-(\tau+\mu) \leq \theta \leq 0} \{\|\dot{x}(\theta)\|\} \\
&= \rho(\delta).
\end{aligned} \quad (3.23)$$

Por outro lado, tem-se

$$e^{2\delta t} \lambda_{\min}\{P\} \|x(t)\|^2 \leq V(x_t) \leq \rho(\delta), \quad (3.24)$$

sendo  $\lambda_{\min}\{P\}$  o menor autovalor da matriz  $P$ . Assim, de (3.22), (3.23) e (3.24) tem-se que

$$\|x(t)\|^2 \leq \frac{\rho(\delta)}{\lambda_{\min}\{P\}} e^{-2\delta t} \triangleq \kappa e^{-2\delta t}.$$

Por fim, fica demonstrado que se as LMIs (3.1), (3.2) e (3.3) impostas pelo Teorema 3.1 forem satisfeitas, o sistema TS em (2.7) será exponencialmente estável com taxa de convergência exponencial  $\delta$ , pelo Lema 2.1.3.  $\square$

### 3.1.2 Análise de Estabilidade Assintótica

Note que o resultado apresentado no Teorema 3.1 pode ser reduzido a um método de análise de estabilidade assintótica. Para isso, basta simplesmente considerar que o funcional de Lyapunov-Krasovskii em (3.5) não possui termos exponenciais, ou seja, basta considerar  $\delta = 0$ . Com isso, têm-se que as LMIs que garantem a estabilidade assintótica do sistema TS em (2.7) são equivalentes às LMIs (3.1), (3.2) e (3.3), considerando  $\delta = 0$ . O Corolário 3.1 apresenta as LMIs que garantem análise de estabilidade assintótica.

**Corolário 3.1** *Considere o modelo TS (2.7) com  $u(t) = 0$ . Sejam dados  $\tau > 0$  e  $0 \leq \mu \leq \tau$ , tal que  $\tau(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$ . Então, o modelo TS em (2.7) com  $u(t) = 0$  e  $\tau(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$  é assintoticamente estável, se existirem matrizes de dimensões apropriadas:  $F, G, P = P^T, S = S^T, Q, R_1 = R_1^T, R_2, R_3 = R_3^T$  e  $Z = Z^T$ , tais que as LMIs (3.25), (3.26) e (3.27) sejam satisfeitas.*

$$\begin{bmatrix} P & * \\ Q^T & \frac{1}{\tau}S \end{bmatrix} > 0, \quad (3.25)$$

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} R_1 & * \\ R_2 & R_3 \end{bmatrix} > 0, \quad (3.26)$$

e

$$\left[ \begin{array}{c|c} \Xi_i & * \\ \hline \Gamma_i^T & -\mu Z \end{array} \right] < 0, \forall i = 1, 2, \dots, r, \quad (3.27)$$

com

$$\Gamma_i^T = \mu[A_{di}^T F^T \quad A_{di}^T G^T \quad 0 \quad 0]$$

e

$$\Xi_i = \begin{bmatrix} \kappa & * & * & * \\ P + \tau R_2 - (F^T - GA_i) & v & * & * \\ \frac{1}{\tau} R_3^T - Q^T + A_{di}^T F^T & A_{di}^T G^T & -\frac{1}{\tau}(-R_3 + \tau S) & * \\ 2\delta Q^T - \frac{1}{\tau} R_2^T & Q^T & \frac{1}{\tau} R_2^T & -\frac{1}{\tau} R_1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

sendo

$$\kappa = Q + Q^T + \tau R_1 - \frac{1}{\tau} R_3 + S + W \quad e \quad v = \tau R_3 + 2\mu Z - (G + G^T)$$

A demonstração do corolário anterior é obtida simplesmente fazendo  $\delta = 0$ , no Teorema 3.1.

## 3.2 Condições de Estabilização

Nesta seção será apresentado o resultado principal deste trabalho: um método que viabilize o projeto de controladores nebulosos estabilizantes com taxa de convergência exponencial pré-especificada, no formato PDC, à partir do funcional de Lyapunov-Krasovskii candidato em (3.5). Como no caso da análise de estabilidade, seção (3.1), para a síntese de controladores aplica-se diretamente o Teorema 2.1.3 ao sistema TS (2.7), porém considerando o sistema em malha-fechada.

Para o desenvolvimento do método, a lei de controle proposta utiliza o valor nominal do retardo no tempo,  $\tau$ , ao invés de considerar o atraso variante como  $\tau(t)$ . Com isso, mesmo em casos em que o retardo no tempo não pode ser medido em tempo real para determinar  $x(t - \tau(t))$  a metodologia proposta pode ser aplicada.

O Teorema apresentado à seguir é o método proposto por esta dissertação como solução para o problema de síntese de controladores nebulosos estabili-

zantes com taxa de convergência exponencial pré-especificada para modelos TS de sistemas não lineares sujeitos a um atraso variante no tempo.

**Teorema 3.2** *Considere o modelo TS, descrito em (2.7). Sejam dados,  $\tau > 0$ ,  $\tau \geq \mu \geq 0$ , tal que  $\tau(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$ ,  $\delta > 0$  e  $\alpha \neq 0$  um parâmetro de ajuste escalar. Então, o modelo TS, em (2.7), é exponencialmente estabilizável com taxa de convergência exponencial  $\delta$  pelo controlador nebuloso em (2.11) com ganhos  $K_i = \bar{K}_i \bar{F}^{-T}$  e  $K_{di} = \bar{K}_{di} \bar{F}^{-T}$ , se existirem matrizes de dimensões apropriadas:  $\bar{F}$ ,  $\bar{P} = \bar{P}^T$ ,  $\bar{S} = \bar{S}^T$ ,  $\bar{Q}$ ,  $\bar{R}_1 = \bar{R}_1^T$ ,  $\bar{R}_2$ ,  $\bar{R}_3 = \bar{R}_3^T$  e  $\bar{Z} = \bar{Z}^T$ , tais que as LMIs a seguir sejam satisfeitas*

$$\begin{bmatrix} \bar{P} & \bar{Q} \\ * & \varepsilon_1 \bar{S} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.29)$$

sendo,  $\varepsilon_1 = e^{-2\delta\tau}/\tau$

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} \bar{R}_1 & * \\ \bar{R}_2 & \bar{R}_3 \end{bmatrix} > 0, \quad (3.30)$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} \bar{\Xi}_{ii} & * \\ \hline \bar{\Gamma}_{ii}^T & -\varepsilon_2^{-1} \mu \bar{Z} \end{array} \right] < 0, \quad (3.31)$$

com  $\varepsilon_2 = e^{-2\delta(\tau+\mu)}$  para  $i = 1, 2, \dots, r$ ,

$$\left[ \begin{array}{c|c} \bar{\Xi}_{ij} + \bar{\Xi}_{ij}^T & * \\ \hline 2\bar{\Gamma}_{ij}^T & -2\varepsilon_2^{-1} \mu \bar{Z} \end{array} \right] < 0, \quad (3.32)$$

para  $i < j$  com  $i, j = 1, 2, \dots, r$ ,

$$\bar{\Gamma}_{ij}^T = \mu[\bar{F}A_{di}^T + \bar{K}_{dj}^T B_i^T \quad \alpha(\bar{F}A_{di}^T + K_{dj}^T \bar{B}^T) \quad 0 \quad 0] \quad (3.33)$$

e  $\bar{\Xi}_{ij}$  dado em (3.34), para todo  $i, j = 1, 2, \dots, r$ .

$$\bar{\Xi}_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{\kappa}_{11} & * & * & * \\ \bar{\kappa}_{21} & \bar{\kappa}_{22} & * & * \\ \bar{\kappa}_{31} & \varepsilon_2 \alpha (\bar{F} A_{di}^T + \bar{K}_{dj}^T B^T) & -\varepsilon_1 (\bar{R}_3 + \tau \bar{S}) & * \\ 2\delta \bar{Q}^T - \varepsilon_1 \bar{R}_2^T & \bar{Q}^T & \varepsilon_1 \bar{R}_2^T & -\varepsilon_1 \bar{R}_1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

com

$$\varepsilon_1 = e^{-2\delta\tau}/\tau$$

$$\bar{\kappa}_{11} = 2\delta\bar{P} + \bar{Q} + \bar{Q}^T + \tau\bar{R}_1 - \varepsilon_1\bar{R}_3 + \bar{S} + \varepsilon_2(A_i\bar{F}^T + B_i\bar{K}_j + \bar{F}A_i^T + \bar{K}_j^TB_i^T)$$

$$\bar{\kappa}_{21} = \bar{P} + \tau\bar{R}_2 - \varepsilon_2\bar{F} + \varepsilon_2\alpha(A_i\bar{F}^T + B\bar{K}_j)$$

$$\bar{\kappa}_{22} = \tau\bar{R}_3 + 2\mu\bar{Z} - \varepsilon_2\alpha(\bar{F} + \bar{F}^T)$$

$$\bar{\kappa}_{31} = \varepsilon_1\bar{R}_3^T - \bar{Q}^T + \varepsilon_2(\bar{F}A_{di}^T + \bar{K}_{dj}^TB^T)$$

**Demonstração:** Esta demonstração segue diretamente do Teorema 3.1. Inicialmente, define-se novas variáveis:  $\bar{F} \triangleq F^{-1}$  e

$$\begin{bmatrix} \bar{P} & \bar{Q} & \bar{S} & \bar{R}_1 & \bar{R}_2 & \bar{R}_3 & \bar{Z} \end{bmatrix} \triangleq \bar{F}^T \begin{bmatrix} P & Q & S & R_1 & R_2 & R_3 & Z \end{bmatrix} \bar{F}$$

Desta maneira, a LMI em (3.29) é obtida pré e pós multiplicando a LMI em (3.1) por  $\text{diag}\{\bar{F}, \dots, \bar{F}\}$  e  $\text{diag}\{\bar{F}, \dots, \bar{F}\}^T$ , respectivamente; similarmente a LMI em (3.30) é obtida pré e pós multiplicando a LMI em (3.2) por  $\text{diag}\{\bar{F}, \dots, \bar{F}\}$  e  $\text{diag}\{\bar{F}, \dots, \bar{F}\}^T$ , respectivamente.

Além disso, a LMI em (3.31) é obtida seguindo os mesmos passos descritos no Teorema 3.1 para a obtenção da LMI em (3.3). Entretanto, é utilizado o seguinte termo nulo:

$$\begin{aligned}
0 = & 2e^{2\delta(t-\tau-\mu)} [x(t)^T F + \alpha \dot{x}^T(t) F] \{ -\dot{x} \\
& + [A(t) + B(t)K(t)]x(t) \\
& + [A_d(t) + B(t)K_d(t)]x(t - \tau) \\
& - A_d(t) \int_{\tau(t)}^{\tau} \dot{x}(t - \xi) d\xi \}
\end{aligned}$$

sendo  $\alpha$  um parâmetro escalar de ajuste. Este termo nulo leva em conta o sistema em malha fechada (2.12).

Assim, seguindo os mesmos passos na demonstração do Teorema 3.1, mas usando o termo nulo acima, obtém-se

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(t) h_j(t) \left[ \begin{array}{c|c} \hat{\Xi}_{ij} & * \\ \hline \hat{\Gamma}_{ij}^T & -e^{2\delta(\tau+\mu)} \mu Z \end{array} \right] < 0,$$

a qual é similar a desigualdade (3.20), mas substituindo  $A_i$  por  $A_i + B_i K_j$ ,  $A_{di}$  por  $A_{di} + B_i K_{dj}$  e  $G$  por  $\alpha F$ . Mais adiante pré e pós multiplicando a desigualdade acima por  $\text{diag}\{\bar{F}, \dots, \bar{F}\}$  e  $\text{diag}\{\bar{F}, \dots, \bar{F}\}^T$ , respectivamente, e usando as variáveis linearizantes  $\bar{K}_j = K_j \bar{F}^T$  e  $\bar{K}_{dj} = K_{dj} \bar{F}^T$ , tem-se

$$\begin{aligned}
0 & > \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(t) h_j(t) \left[ \begin{array}{c|c} \bar{\Xi}_{ij} & * \\ \hline \bar{\Gamma}_{ij}^T & -vZ \end{array} \right] \\
& = \sum_{i=1}^r h_i^2(t) \left[ \begin{array}{c|c} \bar{\Xi}_{ii} & * \\ \hline \bar{\Gamma}_{ii}^T & -vZ \end{array} \right] \\
& + \sum_{i < j}^r h_i(t) h_j(t) \left[ \begin{array}{c|c} \bar{\Xi}_{ij} + \bar{\Xi}_{ij}^T & * \\ \hline \bar{\Gamma}_{ij} + \bar{\Gamma}_{ij}^T & -2v(Z + Z^T) \end{array} \right]
\end{aligned}$$

sendo  $v = e^{2\delta(\tau+\mu)} \mu$ . Assim, para que a condição acima seja satisfeita basta que as LMIs em (3.31) e (3.32) sejam satisfeitas. Ademais, a demonstração que a condição em (2.3) será satisfeita se as LMIs deste teorema forem satisfeita é a mesma apresentada na demonstração do Teorema 3.1.

Portanto, se as LMIs em (3.29), (3.30), (3.31) e (3.32) forem satisfeitas, o modelo TS em (2.7) é exponencialmente estabilizável com taxa de convergência exponencial  $\delta$  de acordo com a Definição 2.5 pelo controlador nebuloso com seus ganhos dados por  $K_j = \bar{K}_j \bar{F}^{-T}$  e  $K_{dj} = \bar{K}_{dj} \bar{F}^{-T}$ , completando a demonstração.

□

### 3.2.1 Controle Sem Memória ou Controle Com Memória Pura

O Teorema 3.2 apresenta condições para síntese de controladores nebulosos com memória, dados pela lei de controle (2.11), pois leva em conta o valor instantâneo do estado do sistema assim como o valor nominal do atraso. Contudo, o Teorema 3.2 pode ser considerado também em casos alternativos cujo objetivo de controle seja sem memória ou controle puramente atrasado (memória pura). Para o controle sem memória basta escolher  $K_{dj} = 0$  nas LMIs (3.29), (3.30), (3.31) e (3.32). Caso, o objetivo de controle seja puramente atrasado ou com memória pura, basta escolher  $K_j = 0$  nas mesmas LMIs.

---

# Estudos de Casos

---

*Lembre-se sempre, o seu foco determina a sua realidade.*

*Yoda*

Este capítulo apresenta resultados obtidos com a aplicação dos métodos propostos por este trabalho para a análise de estabilidade e síntese de controladores para modelos TS de sistemas não lineares com taxa de convergência pré-especificada e com atraso possivelmente variante no tempo. Tais resultados são apresentados por meio de exemplos numéricos na forma de estudos de casos realizados em trabalhos relacionados e obtidos por meio de testes de factibilidade das LMIs utilizando o ambiente LMI *Control Toolbox*, no MATLAB.

## 4.1 Caso 1: Estabilidade Assintótica

Considere o sistema não linear sujeito a retardo no tempo

$$\begin{aligned}\ddot{y}(t) = & -6\dot{y}(t)\text{sen}^2(y(t)) - 8y(t) \\ & +y(t - \tau(t)) - 2\dot{y}(t - \tau(t))\end{aligned}$$

que pode ser rescrito em forma matricial como

$$\dot{x}(t) = - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 8 & 6\text{sen}^2(x) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x(t - \tau(t)).$$

Ademais, este sistema pode ser exatamente representado pelo modelo nebuloso de TS em (2.7), com

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}, A_{di} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

sendo  $i = 1, 2$ ,  $h_1 = \text{sen}^2(x_1(t))$  e  $h_2 = \text{cos}^2(x_1(t))$ .

Para fins de comparação, o Corolário 3.1 desta dissertação e o método apresentado por Lin et al. (2007) são utilizados para determinar o máximo atraso no tempo possível para o qual o sistema TS se mantém estável. Em Lin et al. (2007), este sistema foi estudado considerando  $\tau(t) = \tau$ , ou seja, assumindo o retardo no tempo fixo. Assim, considerando o método de análise de estabilidade apresentado em Lin et al. (2007), Corolário 2.3.1, obtém-se que o sistema sujeito a retardo no tempo constante é estável para o máximo retardo no tempo,  $\tau = 0,3078$ . Similarmente, aplicando-se o método proposto no Corolário 3.1, apresentado por este trabalho, obtém-se o máximo retardo no tempo:  $\tau = 0,3078$ .

Embora os resultados obtidos sejam iguais, o método proposto no Corolário 3.1 apresenta vantagens em relação Corolário 2.3.1 proposto em Lin et al. (2007), pois leva em consideração o retardo variante no tempo e taxa de convergência exponencial, enquanto em Lin et al. (2007) apresenta-se apenas condições de análise de estabilidade para retardo no tempo constante. Sabe-se que em sistemas físicos o retardo pode ser variante no tempo, assim o método proposto se mostra mais geral que o método proposto em Lin et al. (2007).

## 4.2 Caso 2: Estabilidade Exponencial

Para mostrar as vantagens do método proposto por esta dissertação, considere um segundo caso no qual o sistema não linear dado anteriormente está sujeito a um atraso variante e não diferenciável pertencente ao intervalo  $\tau(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$ , como mostrado na figura 4.1. Note que esta forma para o atraso é mais geral e realista se comparada a casos nos quais o atraso é diferenciável, pois nestes casos é necessário conhecer ou até mesmo calcular em tempo real a máxima taxa de variação para o atraso, veja trabalhos recentes em Wu (2007); Benzaoula (2011); Manai (2013). Com isso, métodos que propõem soluções para sistemas sujeitos a atraso variante no tempo que possuem tal premissa, ou seja, problemas para os quais é necessário que o atraso seja diferenciável e o valor máximo da taxa de variação deste atraso seja conhecido não são capazes de solucionar os mesmos problemas abrangidos por esta dissertação, o que torna o método proposto mais geral que os presentes na literatura.

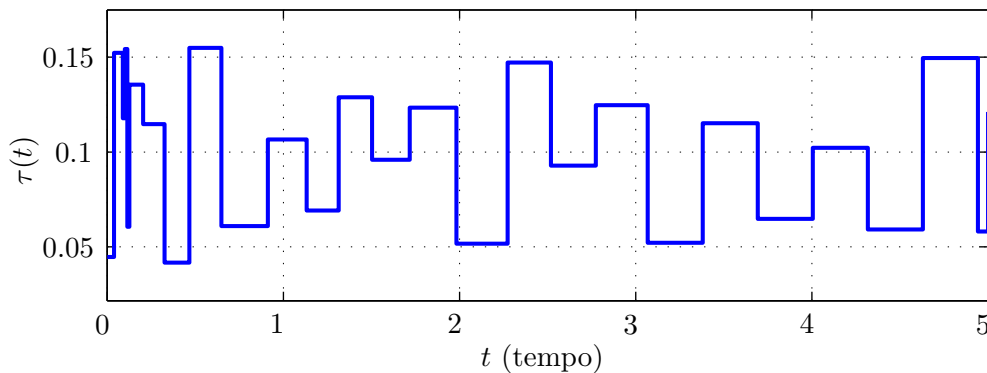


Figura 4.1: Atraso variável,  $\tau_1(t)$ , com amplitude aleatória dado por  $\tau = 0.1$  e  $\mu = 0.06$

Para avaliar a eficiência do método proposto pelo Teorema 3.1, é determinado o maior valor de  $\delta$  tal que o sistema seja exponencialmente estável para diferentes valores de  $\tau$  e  $\mu$ . A análise de estabilidade exponencial é importante uma vez que se deseje garantir a convergência do sistema dentro de um intervalo de tempo conhecido. Trabalhos como Benzaoula (2011) e Manai

(2013) não consideram a taxa de convergência exponencial como critério de convergência o que coloca o método proposto por esta dissertação dentre os métodos mais gerais presentes na literatura. Os resultados obtidos com os testes de factibilidade das LMIs são apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Maior valor para  $\delta$  obtido pelo Teorema 1, dado  $\tau$  e  $\mu$

$(\tau; \mu)$	(0,10; 0,06)	(0,15; 0,05)	(0,20; 0,04)
$\delta$	0,455	0,339	0,206

Além dos testes de factibilidade, para este estudo de caso também foram realizadas simulações para ilustrar o efeito do atraso no comportamento do sistema e verificar a eficiência do método quanto a garantia de estabilidade e convergência exponencial. A Figura 4.2 apresenta a curva exponencial  $2,3e^{-2 \times 0,455t}$  e a resposta temporal do sistema sujeito a um atraso não diferenciável pertencente ao intervalo  $\tau(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$  com  $\tau = 0,1$  e  $\mu = 0,06$ . Analisando a evolução temporal dos estados do sistema pode-se notar que taxa de convergência exponencial determinada via Teorema 3.1 apresenta uma boa estimativa do tempo de convergência do sistema. Note que a os estados estão sempre limitados, em norma, pelo decaimento da curva exponencial.

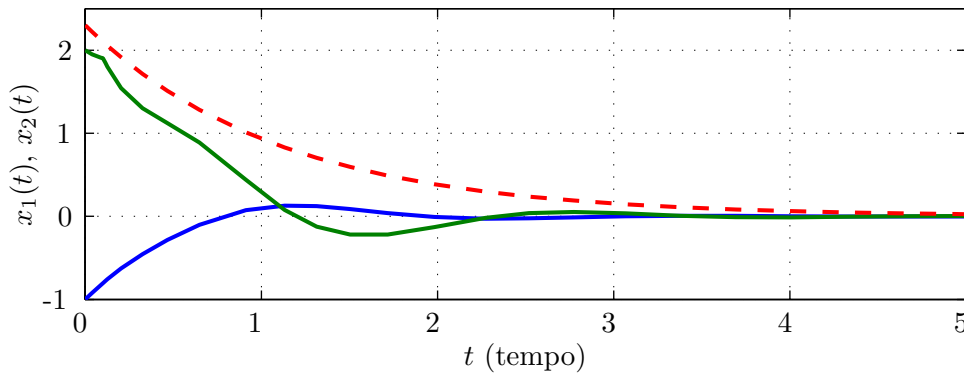


Figura 4.2: *i*) linha contínua: trajetória dos estados do sistema; *ii*) linha tracejada: a curva exponencial  $2,3e^{-2\delta t}$  com  $\delta = 0,455$ .

Agora, considere o caso onde o sistema esteja sujeito a um atraso não

diferenciável pertencente ao intervalo  $\tau(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$  com  $\tau = 0,4$  e  $\mu = 0,06$ . Analisando o comportamento das trajetórias dos estados, apresentado na figura 4.3, como era de se esperar, o sistema não atinge a estabilidade pois o valor do atraso  $\tau$  está maior que o valor máximo garantido pelo método para os valores de  $\mu$  e  $\delta$ .

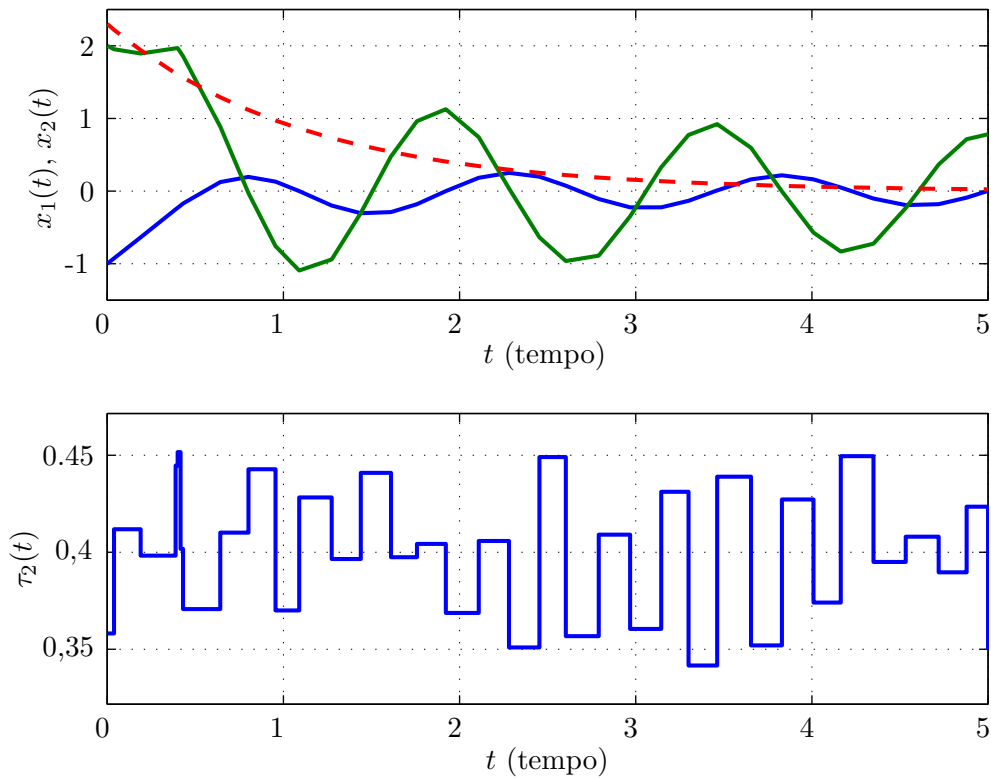


Figura 4.3: Na parte superior: *i*) linha contínua: trajetória dos estados do sistema; *ii*) linha tracejada: a curva exponencial  $2,3e^{-2\delta t}$  com  $\delta = 0,455$ . Na parte inferior: forma do atraso pertencente ao intervalo  $\tau(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$  com  $\tau = 0,4$  e  $\mu = 0,06$

### 4.3 Caso 3: Síntese de Controladores com Convergência Exponencial

Para mostrar as vantagens do método proposto por esta dissertação para síntese de controladores, considere ainda o sistema não-linear dado anteriormente fazendo com que a ação de controle atue apenas na segunda variável de estado, ou seja, escolhendo

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ para } i = 1, 2.$$

A lei de controle  $u(t)$  leva em conta o valor nominal do atraso no tempo. Com isso, mesmo em casos em que o retardo não pode ser medido em tempo real para determinar  $x(t - \tau(t))$  a metodologia proposta pode ser aplicada, diferentemente de diversos trabalhos recentemente publicados na literatura nos quais a lei de controle não leva em conta a informação passada trazida pelo atraso no tempo, veja: Gao (2009); Amri et al. (2009); Gassara (2010); Latrach (2011); Tsai (2014), o que coloca o método apresentado nesta dissertação dentre os mais gerais presentes na literatura.

Considerando  $\tau(t) = 2 + 0,5 \cos(t)$  e condição inicial  $\phi(s) = \cos(s)$  são projetados controladores estabilizantes usando o Teorema 3.2 com  $\alpha = 0,1$  e com  $\delta = 0, 1, 2$ . Para cada controlador obtido, além dos testes de factibilidade, são apresentadas simulações temporais da evolução das trajetórias do sistema em malha fechada para ilustrar a efeito da convergência exponencial e a eficiência do método proposto. Inicialmente considera-se o caso com  $\delta = 0$ .

- *Ganhos do controlador para  $\delta = 0$ :*

$$K_1 = [7,7133 \quad 1,5834], \quad K_2 = [7,6534 \quad -4,3368],$$

$$K_{d1} = [-0,9992 \quad 2,0030], \quad K_{d2} = [-0,9990 \quad 1,9988]$$

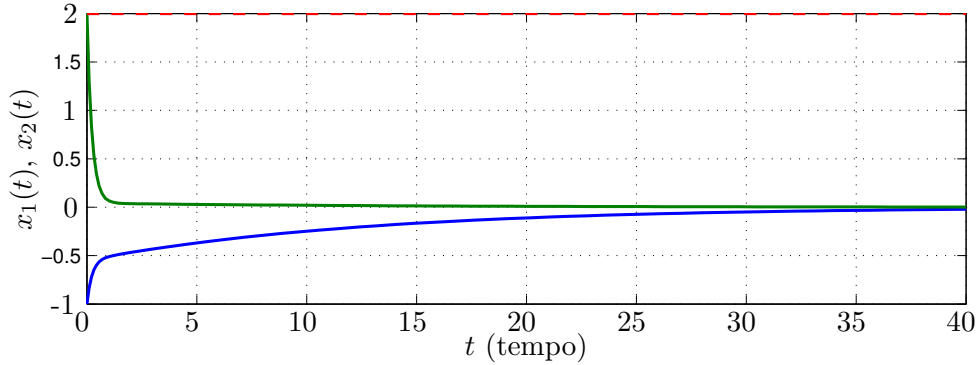


Figura 4.4: *i)* linha contínua: trajetória dos estados do sistema em malha fechada com controlador projetado para  $\delta = 0$  e considerando  $\tau(t) = 2 + 0,5 \cos(t)$  e condição inicial  $\phi(s) = \cos(s)$ ; *ii)* linha tracejada: a curva exponencial 2.

A Figura 4.4 ilustra a trajetória dos estados do sistema não linear em malha fechada com o controlador dado anteriormente para o qual a taxa de convergência exponencial  $\delta = 0$ . Analisando o comportamento das trajetórias do sistema na Figura 4.4 nota-se que o Teorema 3.2 garante a estabilização do sistema, mas por considerar a taxa de convergência exponencial  $\delta = 0$  o sistema não possui característica exponencial. A Figura 4.4 também ilustra que ao considerar a taxa de convergência exponencial igual a zero torna-se impossível estimar o tempo de convergência do sistema. Para o próximo caso, considera-se  $\delta = 1$  para o qual torna-se visível as vantagens em utilizar estabilização exponencial.

- *Ganhos do controlador para  $\delta = 1$ :*

$$K_1 = [-100,7283 \quad -33,5913], \quad K_2 = [-105,1327 \quad -39,5344],$$

$$K_{d1} = [-1,0000 \quad 2,0000], \quad K_{d2} = [-1,0000 \quad 2,0000]$$

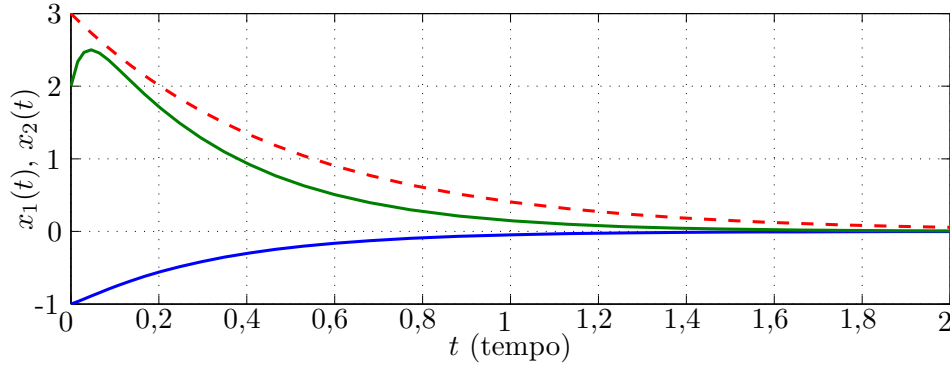


Figura 4.5: *i*) linha contínua: trajetória dos estados do sistema em malha fechada com controlador projetado para  $\delta = 1$  e considerando  $\tau(t) = 2 + 0,5 \cos(t)$  e condição inicial  $\phi(s) = \cos(s)$ ; *ii*) linha tracejada: a curva exponencial  $3e^{-2t}$ .

A Figura 4.5 ilustra a trajetória dos estados do sistema não linear em malha fechada com o controlador dado anteriormente para o qual a taxa de convergência exponencial  $\delta = 1$ . Analisando o comportamento das trajetórias fica evidente a convergência exponencial do sistema. A Figura também ilustra que os estados estão limitados, em norma, pela curva exponencial, conforme foi mostrado em (3.22), (3.23) e (3.24). Agora, comparando ao resultado obtido ao estudo anterior, para o qual foi considerado  $\delta = 0$ , é possível estimar o tempo de convergência do sistema baseado na taxa de convergência exponencial. Por fim, para o último controlador estudado considera-se  $\delta = 2$ .

- *Ganhos do controlador para  $\delta = 2$ :*

$$K_1 = [-406,0329 \quad -48,7830], \quad K_2 = [-411,2975 \quad -53,5833],$$

$$K_{d1} = [-1,0000 \quad 2,0000], \quad K_{d2} = [-1,0000 \quad 2,0000]$$

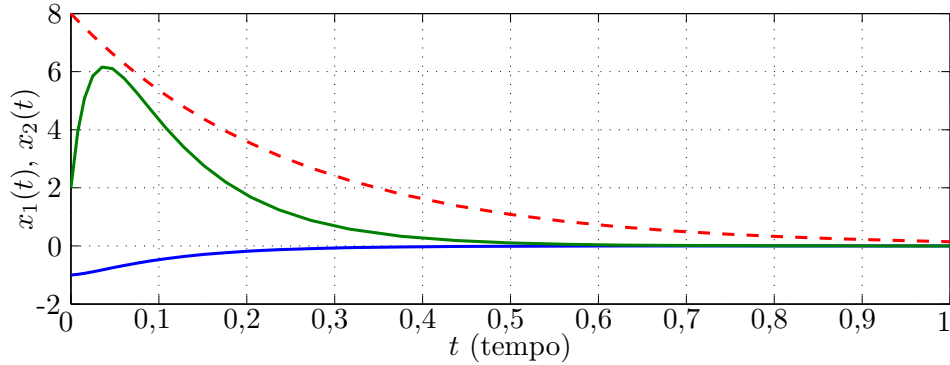


Figura 4.6: *i*) linha contínua: trajetória dos estados do sistema em malha fechada com controlador projetado para  $\delta = 2$  e considerando  $\tau(t) = 2 + 0,5 \cos(t)$  e condição inicial  $\phi(s) = \cos(s)$ ; *ii*) linha tracejada: a curva exponencial  $8e^{-4t}$ .

A Figura 4.6 ilustra a trajetória dos estados do sistema não linear em malha fechada com o controlador dado anteriormente para o qual a taxa de convergência exponencial  $\delta = 2$ . Analisando o comportamento das trajetórias dos estados fica evidente que a convergência exponencial é tão mais rápida quanto maior o valor de  $\delta$ . Porém, observando os ganhos dos controladores obtidos, está claro que quanto maior a taxa de convergência exponencial especificada para o projeto, maior os ganhos do controlador em média, mas apesar da inviabilidade de implementar controladores para determinados ganhos, o método proposto permite que o projetista obtenha um controlador com a maior taxa de decaimento exponencial que seja apropriada a sua margem para ajuste dos ganhos do controlador.

## Considerações Finais

---

*Embora ninguém possa voltar atrás e fazer um novo começo, qualquer um pode começar agora e fazer um novo fim.*

*Chico Xavier*

Este trabalho apresentou métodos, com caráter suficientes baseados em LMIs, para análise de estabilidade e síntese de controladores para sistemas TS com atraso variante no tempo possivelmente não diferenciável e taxa de convergência exponencial pré-especificada. Os resultados apresentados no Capítulo 4 mostram que os métodos propostos são eficientes e mais gerais que outros trabalhos publicados recentemente na literatura, por levar em consideração o atraso variante no tempo o qual pode ser não diferenciável e a taxa de convergência exponencial.

Apesar dos métodos propostos serem inicialmente para sistemas com atraso variante no tempo e taxa de convergência exponencial, ele também pode ser aplicado para sistemas com atraso nulo ou constante. Outra característica importante é que os métodos propostos para síntese de controladores podem ser estendidas para síntese de controladores sem memória ou com memória pura.

Esta dissertação apresentou contribuições relevantes no estudo de estabilidade e síntese de controladores para sistemas Takagi-Sugeno com atraso

variante no tempo. Dentre as principais contribuições estão:

- um método de análise de estabilidade para sistemas TS com atraso no tempo variável podendo ser não diferenciável e convergência exponencial pré-especificada;
- um método para síntese de controladores nebulosos para sistemas TS com retardo no tempo variável e convergência exponencial pré-especificada que não depende da informação do valor do retardo em tempo real, mas leva em conta o valor nominal do atraso.

Como extensão para trabalhos futuros sugere-se os seguintes tópicos:

- validação em experimentos físicos a fim de avaliar o desempenho dos métodos em sistemas reais;
- nova representação para sistemas TS com incertezas e perturbações externas, uma vez que muitos sistemas físicos possuem essas características.

Por fim, é importante ressaltar que parte dos resultados apresentados nesta dissertação foram publicados em Alves et al. (2014), na edição 2014 do tradicional Congresso Brasileiro de Automática.

# Algumas Propriedades Matemáticas

---

Neste apêndice é apresentada uma breve descrição das principais ferramentas matemáticas utilizadas no decorrer do trabalho, incluindo Lemas e Definições.

## A.1 Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

Uma LMI é uma desigualdade matricial do tipo  $F(g) > 0$ , no qual  $F(g)$  é simétrica e afim nas variáveis de busca que são representadas pelo vetor  $g$ . Assim, uma LMI pode ser genericamente apresentada na forma

$$F(g) = F_0 + \sum_{i=1}^m g_i F_i > 0 \quad (\text{A.1})$$

sendo  $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrizes dadas e  $g_i$  variáveis escalares a serem determinadas de forma a satisfazer a desigualdade (se possível). Quando existe uma solução  $g = [g_1 \ \cdots \ g_m]^T$  para  $F(g) > 0$ , dizemos que a LMI é factível (Trofino; 2000).

É importante enfatizar que uma LMI pode ser representada de várias formas e dificilmente aparece em um problema na forma genérica afim (A.1), por exemplo: dada uma matriz  $A$  e uma matriz  $Q > 0$ , a função matricial  $F(P) = A^T P + P A + Q$ , que aparece em diversos problemas de estabilidade,

é afim na variável  $P$  e, portanto, a desigualdade  $F(P) < 0$  é uma LMI que pode ser facilmente reescrita na forma (A.1) onde  $g$  é o vetor contendo os elementos da matriz  $P$  a ser determinada (Trofino; 2000).

Para a resolução de problemas na forma de LMIs, existem vários pacotes de otimização disponíveis na literatura. Entre eles estão o *LMI Control Toolbox* (Gahinet; 1995) e o *SeDuMi* (Sturm; 1998), ambos desenvolvidos para uso no *MATLAB*.

## A.2 O Complemento de Schur

Em geral, algumas propriedades são usadas para a formulação de LMIs a partir de inequações não lineares. Dentre tais propriedades está o complemento de Schur, apresentado no lema a seguir.

**Lema A.1** (Albert; 1969) *Seja a matriz de blocos*

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2^T & \Phi_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

onde  $\Phi_1$  e  $\Phi_3$  são matrizes simétricas. Então

- para  $\Phi_1 > 0$ ,  $\Phi > 0$  se, e somente se,  $\Phi_3 - \Phi_2^T \Phi_1^{-1} \Phi_2 > 0$ ;
- para  $\Phi_3 > 0$ ,  $\Phi > 0$  se, e somente se,  $\Phi_1 - \Phi_2 \Phi_3^{-1} \Phi_2^T > 0$ .

□

Essa propriedade pode ser utilizada, por exemplo, para transformar a desigualdade

$$A^T X + XA + XBX + C < 0 \quad (\text{A.3})$$

com  $B > 0$  e  $X = X^T$ , que aparece frequentemente em problemas de controle, em uma LMI, bastando fazer  $\Phi_1 = A^T X + XA + C$ ,  $\Phi_2 = X$  e  $\Phi_3 = B$ . Com

isso, obtém-se

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA + C & X \\ X & -B^{-1} \end{bmatrix} < 0.$$

Se  $B \geq 0$ , podemos escrever  $B = QQ^T$ . Dessa forma, usando a mesma ideia aplicada anteriormente, obtém-se a relação

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA + C & XQ \\ Q^T X & -I \end{bmatrix} < 0.$$

que é também equivalente a (A.3).

Por fim, caso  $B$  não seja definida nem semidefinida positiva, a desigualdade (A.3) não será convexa e portanto, não pode ser expressa em termos de LMIs.

### A.3 Desigualdade de Jensen

Desigualdades em integrais quadráticas são uma ferramenta importante no tratamento de problemas de sistemas sujeitos a atrasos no tempo formulados por meio de LMIs dada a necessidade da utilização de limitantes superiores para que o problema em questão possa ser formulado como um problema convexo. Uma dessas desigualdades, também conhecida como Desigualdade de Jensen, utilizada nesta dissertação é apresentada no lema a seguir:

**Lema A.2** (Gu; 2000) *Para qualquer matriz  $M = M^T > 0$  constante e um escalar  $\tau > 0$  a seguinte desigualdade é verdadeira:*

$$\int_{t-\tau}^t x^T(\xi) M x(\xi) d\xi \geq \int_{t-\tau}^t x^T(\xi) d\xi \frac{1}{\tau} M \int_{t-\tau}^t x(\xi) d\xi.$$

□

---

---

# Bibliografia

---

- Albert, A. (1969). Conditions for positive and nonnegative definiteness in terms of pseudoinverses, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 17, pp. 434–440.
- Alves, R., Souza, F. O. and Mozelli, L. A. (2014). Síntese de controladores Takagi-Sugeno com taxa de convergência pré-especificada para sistemas com retardo, *XX Congresso Brasileiro de Automática* pp. 1808–1811.
- Amri, I., Soudani, D. and Benrejeb, M. (2009). Exponential stability and stabilization of linear systems with time varying delays, *6th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices* pp. 1–6.
- Benzaoula, A. (2011). Delay-dependent stabilization conditions of controlled positive T-S fuzzy systems with time varying delay, *International Journal of Innovative Computing, Information and Control* **7**: 1533–547.
- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*.
- Gahinet, P. (1995). LMI control toolbox: For use with Matlab. Disponível em <<http://www.mathworks.de/releases/R13sp2/pdf-doc/lmi/lmi.pdf>>.
- Gao, H. (2009). Stability Analysis and Stabilization for Discrete-Time Fuzzy Systems with Time-Delay, *IEEE Trans. Syst.* **39**: 306–317.
- Gassara, H. (2010). Delay-dependent  $H_\infty$  exponential stabilization of T-S fuzzy systems with time-varying delay, *IEEE Conference on Decision and Control* pp. 4281 – 4286.

- Gu, K. (1997). Discretized LMI set in the stability problem of linear time delay systems, *Proceedings on the American Control Conference* **68**: 923–934.
- Gu, K. (2000). An integral inequality in the stability problem of time-delay systems, in P. of the 39th IEEE (ed.), *Proceedings of the 39th IEEE*, pp. 2805–2810.
- Gu, K., Kharitonov, V. and Chen, J. (2003). *Stability of time-delay systems*, Birkhuser.
- Hale, J. K., Verduyn, S. and Lunel, M. (1993). *Introduction to Functional Differential Equations*.
- Latrach, C. (2011). Robust stabilization conditions for time-delay fuzzy systems using fuzzy wighting-dependent approach, *Mediterranean Conference on Control and Automation* pp. 1484 – 1489.
- Leite, V. J. S., Peres, P. L. D., Castelan, E. B. and Tarbouriech, S. (2006).  $\mathcal{H}_\infty$  guaranteed cost of neutral systems with time-varying delay, *5th IFAC Symposium on Robust Control Systems - ROCOND 06*, Toulouse, França, pp. 1–6. Artigo No 244.
- Leite, V. J. S., Peres, P. L. D., Castelan, E. B. and Tarbouriech, S. (2007). Estabilidade robusta de sistemas neutrais com atrasos variantes no tempo, *Sociedade Brasileira de Automática*.
- Liao, X. X., Wang, L. Q. and Yu, P. (2007). *Stability of Dynamical Systems*, Elsevier.
- Lin, C., Wang, Q. and Lee, T. (2007). *LMI Approach to Analysis and Control of Takagi-Sugeno Fuzzy Systems with Time Delay*, Springer-Verlag.
- Manai, Y. (2013). New approach of stabilization for time-delay conditions Takagi-Sugeno fuzzy system, *10th International Multi-Conference on Systems, Signal & Devices* .

- Mori, T.; Kokarne, H. (1989). Stability of  $\dot{x} = Ax(t) + Bx(t - \tau)$ , *IEEE Transaction on Automation Control*, Vol. 34, pp. 460–462.
- Mozelli, L. A. (2008). Controle Fuzzy Para Sistemas Takagi-Sugeno: Condições Aprimoradas e Aplicações, *Dissertação de Mestrado - UFMG*.
- Mozelli, L. A. (2011). Novas Funções de Lyapunov Fuzzy e Soluções Numéricas para Análise de Estabilidade e Controle de Sistemas de Controle de Sistemas via Modelagem Takagi-Sugeno: Aproximando os Controles Fuzzy e Não-Linear, *Tese de Doutorado - UFMG*.
- Mozelli, L. A., Palhares, R. M., Avelar, G. and Santos, R. F. (2010). Condições LMIs alternativas para sistemas Takagi-Sugeno via função de Lyapunov Fuzzy, *Revista Controle & Automação* **12**: 96–107.
- Ogunnaike, B. A; Ray, W. H. (1994). *Process Dynamics Modeling and Control*, Oxford Univ. Press.
- Slotine, J-F; Li, W. (1991). Applied non linear control, *Prentice Hall*.
- Souza, F. O. (2008). *Estabilidade e Síntese de Controladores e Filtros Robustos para Sistemas com Retardo no Tempo: Novas Fronteiras*, Tese Doutorado - UFMG.
- Souza, F. O. (2013a). Further improvement in stability criteria for linear systems with interval time-varying delay, *IET Control Theory and Applications* **7**: 440–446.
- Souza, F. O. (2013b). On-delay dependent stability conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems, *Journal of Franklin Institute* **351**: 3707–3718.
- Souza, F. O., Mozelli, L. A. and Palhares, R. M. (2008). Condições de estabilidade e estabilização de sistemas não-lineares com retardo no tempo via abordagem TS, *XVII Congresso Brasileiro de Automática-CBA* .
- Souza, F. O., Mozelli, L. A. and Palhares, R. M. (2009). On stability and stabilization of T-S fuzzy time-delayed system, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **17**: 1450–1455.

- Sturm, J. F. (1998). Using SeDuMi 1.02 - A Matlab toolbox for optimization over symmetric cones.
- Takagi, T. ; Sugeno, M. (1985). Fuzzy Identification of Systems and its Applications to Modeling and Control, *IEEE Trans. Syst. Man, Cybern* **15**: 582–589.
- Tanaka, K ; Wang, H. (2001). *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*, Wiley-Interscience.
- Teixeira, M. C. M. (2007). Extensões para sistemas não lineares, *Enciclopédia de Automática: Controle e Automação* **1**: 218–246.
- Trofino, A. (2000). Controle robusto. Disponível em <<http://www.das.ufsc.br/~trofino/disciplinas-/das-6600/apostila-robusto.pdf>>.
- Tsai, S.-H. (2014). A Novel Relaxed Stabilization Condition for a Class of T-S Time-Delay Fuzzy Systems, *IEEE International Conference on Fuzzy Systems* pp. 2294 – 2299.
- Viswanah, M. T. P. (1997). On the stability of fuzzy systems, *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, pp. 145–151.
- Wang, D; Zhang, Z. (2011). Novel Delay-Dependent Stability Criteria for T-S Fuzzy Time-Delay Systems, *International Conference on Mechatronic Science, Electric Engineering and Computer* p. 185188.
- Wang, L. X. (1997). *Adaptive fuzzy systems and control*, Prentice Hall.
- Wu, H.-N. (2007). New Approach to Delay-dependent Stability Analysis and Stabilization for Continuous-Time Fuzzy Systems with Time-Varying Delay, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **15**: 482–493.
- Wu, L. (2011). A New Approach to Stability Analysis and Stabilization of Discrete-Time T-S Fuzzy Time-Varying Delay Systems, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybernetics* **41**: 273–286.

---

Yoneyama, J. (2004). Generalized Stability Conditions for Takagi-Sugeno Fuzzy Time-Delay Systems, *Conference on Cybernetics and Intelligent Systems* pp. 491–496.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets, *Inf. Control vol* , pp338-353.