

IDENTIFICAÇÃO CAIXA-CINZA DE SISTEMAS
NÃO-LINEARES UTILIZANDO REPRESENTAÇÕES
NARMAX RACIONAIS E POLINOMIAIS

MARCELO VIEIRA CORRÊA

Tese submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais como
parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

BELO HORIZONTE, BRASIL

FEVEREIRO 2001

© Copyright by Marcelo Vieira Corrêa, 2001

Resumo

A utilização de informação *a priori* na identificação de sistemas dinâmicos não-lineares é investigada. Essa utilização possibilita a obtenção de modelos mais robustos, com menor número de parâmetros, com maior capacidade de extrapolação e melhor desempenho na aproximação do comportamento observado nos dados reais.

É apresentado um estudo de diferentes representações usadas na identificação de sistemas não-lineares. O desempenho de modelos NARMAX racionais e polinomiais e outras representações é investigado no mesmo contexto. As representações são comparadas na identificação de sistemas autônomos caóticos e também em sistemas com uma entrada e uma saída. Neste último é verificada a capacidade, dos modelos identificados a partir de dados dinâmicos, de aproximar a curva estática conhecida do sistema.

As principais contribuições deste trabalho são três algoritmos que permitem sistematizar o uso de informação *a priori* na identificação de modelos NARMAX racionais e polinomiais. O primeiro refere-se à escolha da estrutura, o segundo à estimação de parâmetros e o terceiro à análise e validação de modelos. Um estudo detalhado dessas representações é apresentado. A partir deste pode-se compreender o papel que cada agrupamento de termo, em um modelo NARMAX racional ou polinomial, exerce nas funções estáticas. A relação entre agrupamento de termos e função estática do modelo permite a escolha de estrutura para que o modelo represente a característica estática desejada. As técnicas desenvolvidas são aplicadas a vários sistemas dinâmicos, reais e simulados.

Abstract

This thesis investigates the use of prior information in the identification of non-linear dynamic systems. This enables obtaining more robust models with less parameters, greater generalization capacity and better performance in describing the behaviour observed in the real data.

A study of different representations is presented and used in the identification of non-linear systems. The performance acting of NARMAX rational and polynomial models and other representations is investigated. These representations are compared in the identification of chaotic systems and also in the case of systems with one input and one output. In the latter, it is verified if the models identified from dynamic data are able to fit the system static curve previously known.

The main contribution of this thesis are algorithms developed to use prior information in the identification of NARMAX rational and polynomial models. The first refers to the choice of the model structure, the second to parameter estimation and the third to model analysis and validation. A detailed study of these representations is presented. With them it is possible to understand which role is played by each term in the model. The relationship between term clusters and the static function of the model allows one to choose a viable model structure that will be able, at least in principle, to represent the static characteristic desired. The developed techniques are applied to several dynamic systems, real and simulated.

Agradecimentos

A realização deste trabalho não seria possível sem a preciosa ajuda e apoio de diversas pessoas. Através dos nomes citados abaixo agradeço a todos pelas contribuições.

A preciosa orientação do Prof. Luis A. Aguirre, que hoje considero muito mais do que um orientador.

Sem o apoio, carinho, incentivo e sobretudo a compreensão da Márcia, minha esposa, seria impossível a realização deste trabalho. A todos da minha família que sempre torcem por mim e em especial a D. Haydê, minha mãe.

Ao Prof. Eduardo Mendes pelo seu apoio na época do mestrado, pelas rotinas de identificação de modelos NARMAX racionais e pela colaboração na análise dos resultados apresentados nas seções 4.1 e 4.3.

Os resultados apresentados na seção 4.4 é fruto de trabalho conjunto com Leandro Coelho e Cecília Cassini. Os dados do processo térmico II foram cedidos pela Cecília. O trabalho apresentado na seção 4.2 contou com a colaboração do Prof. Antônio P. Braga. Ao Prof. Rodney pelas valiosas contribuições no campo de otimização. Aos Prof. Christopher e Enrique Lima que participaram da banca de qualificação deixando sugestões e incentivo.

Ao Prof. Tor A. Johansen que gentilmente cedeu os dados usados na seção 8.4.

Ao colega Roselito que implementou e me cedeu o algoritmo do elipsóide usado neste trabalho. A todos os colegas do grupo MACSIN, aos quais tenho o maior apreço.

A Prof. Margareth pela revisão do texto.

À direção do Centro Universitário do Leste de Minas Gerais - UnilesteMG

e à Fundação Geraldo Perlingeiro de Abreu - FGPA, por ter acreditado e investido na minha formação.

Sumário

Resumo	iii
Abstract	v
Agradecimentos	vii
Sumário	xiii
Lista de Tabelas	xiv
Lista de Figuras	xvii
Nomenclatura	xxiii
Abreviações	xxvii
1 Introdução	1
1.1 Relevância	5
1.2 Motivação	7
1.3 Apresentação do Trabalho	9
1.3.1 Parte I - Identificação Caixa-Preta de Sistemas Não-Lineares	10
1.3.2 Parte II - Identificação Caixa-Cinza Usando Modelos NARMAX Racionais e Polinomiais	11
I Identificação Caixa-Preta de Sistemas Não-Lineares	13
2 Representações Matemáticas de Sistemas Não-Lineares	15
2.1 Representações de Wiener e Hammerstein	16
2.2 Representações NARMAX Racional e Polinomial	19

2.2.1	Modelos NARMAX Racionais	19
2.2.2	Linearização nos Parâmetros	20
2.2.3	Modelos NARMAX Polinomiais	22
2.2.4	Escolha de Estrutura	23
2.2.4.1	ERR	23
2.2.5	Estimação de Parâmetros	25
2.2.5.1	Polarização	25
2.2.5.2	Estimador de Mínimos Quadrados	26
2.2.5.3	Estimador de Mínimos Quadrados para Modelos Racionais	28
2.2.6	Estimador de Mínimos Quadrados Modificado para Modelos Racionais - REMQ	31
2.3	Representações Baseadas em Redes Neurais	32
2.3.1	Redes Neurais Multicamadas	32
2.3.2	Redes <i>Feedforward</i>	34
2.3.3	Redes Recorrentes Internas	35
2.3.4	Rede Neural Artificial de Base Radial	36
2.3.5	Funções de Base Radial	36
2.3.6	Redes RBFs	38
2.4	Modelos Contínuos	39
2.4.1	Base Matemática	39
2.5	<i>Wavelets</i>	41
2.5.1	A Transformada <i>Wavelet</i>	43
2.6	Aplicações	45
2.7	Comentários Finais	47
3	Propriedades das Representações Aplicadas na Identificação de Sistemas	49
3.1	Redes Neurais	50
3.1.1	Propriedades de Funções de Ativação	50
3.1.2	Recuperando Informação a Partir de Modelos Baseados em Redes Neurais	52
3.2	RBFs	53
3.2.1	Rede RBF em Identificação de Sistemas	53
3.2.2	Propriedades a Partir da Expansão da Função RBF	55
3.3	Modelos Contínuos	55
3.4	<i>Wavelets</i>	56
3.4.1	Efeito do Ruído nos Coeficientes <i>Wavelets</i>	56
3.4.2	Uma Aproximação Multi-resolucional B- <i>spline</i>	57

3.4.3	Cálculo dos Coeficientes da Decomposição Multi-resolucional <i>B-spline</i>	58
3.4.4	Cálculo das Derivadas do Sinal	59
3.5	Síntese das Propriedades	61
3.5.1	Escolha do Sinal de Excitação	61
3.5.2	Escolha do Tempo de Amostragem	62
3.5.3	Escolha de Estrutura	63
3.5.4	Treinamento / Estimção de Parâmetros	66
3.5.5	Simulação dos Modelos Obtidos	67
3.5.6	Recuperação de Informação	67
3.6	Comentários Finais	68
4	Desempenho das Representações na Identificação Caixa-Preta de Sistemas Não-Lineares	69
4.1	A Representação NARMAX Aplicada na Identificação de Dinâmica Caótica	70
4.1.1	Circuito de Chua	71
4.1.1.1	Modelos Polinomial e Racional do Circuito de Chua	72
4.1.2	Sistema de Rössler	74
4.2	Aspectos da Validação de Modelos de Sistemas Caóticos - Aplicação a Redes Neurais	76
4.2.1	Modelos Identificados	78
4.2.2	Validação das redes obtidas	79
4.2.2.1	Predição da série temporal	79
4.2.2.2	Reconstrução do atrator	80
4.2.2.3	Seção de Poincaré	82
4.2.2.4	Diagrama de Bifurcação	82
4.2.3	Comentários	84
4.3	Não-Linearidades de Mapas Estáticos	86
4.3.1	Mapa Senoidal com Não-Linearidades Cúbicas	86
4.3.2	<i>Tent map</i>	88
4.3.3	Mapa de Primeiro Retorno de um Modelo do Regulador Chaveado Buck	89
4.4	Comparando Representações Não-Lineares: Um Estudo de Caso	92
4.4.1	Processo Térmico	92
4.4.2	Resultados Experimentais	94
4.4.3	Comentários	97
4.5	Comentários Finais	99

II	Identificação Caixa-Cinza Usando Modelos NARMAX Racionais e Polinomiais	101
5	Identificação Caixa-Cinza de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares - Estado da Arte	103
5.1	Uso de Conhecimento a <i>Priori</i> em Redes Neurais	107
5.2	Modelagem Caixa-Cinza Física	110
5.3	Modelagem Caixa-Cinza Semifísica	113
5.4	Identificação Caixa-Cinza	114
5.4.1	Uso de Informação a <i>Priori</i> no estimador de parâmetros	118
5.5	Uso de Informação a <i>Priori</i> na Seleção de Estrutura de Modelos NARMAX Polinomiais	120
5.6	Comentários Finais	121
6	Propriedades dos Modelos NARMAX Racionais e Polinomiais Aplicadas à Identificação Caixa-Cinza	123
6.1	Pontos Fixos de Modelos NARMA	124
6.2	Características Estáticas de Modelos NARX Polinomiais	126
6.2.1	Constante de Tempo de Modelos NARX Polinomial de Primeira Ordem	127
6.2.2	Constante de Tempo de Modelos de Ordem Superior . .	132
6.2.3	Ganho em Estado Estacionário	136
6.2.4	Função Estática	138
6.3	Características Estáticas de Modelos NARX Racionais	140
6.3.1	Constante de Tempo de Modelos de Primeira Ordem . .	140
6.3.2	Constante de Tempo de Modelos de Ordem Superior . .	148
6.3.3	Ganho em Estado Estacionário	150
6.3.4	Função Estática	152
6.3.5	Simetria de Pontos Fixos	153
6.4	Uso de Informação a <i>Priori</i> na Seleção de Estrutura	154
6.5	Uso de Informação a <i>Priori</i> para Estimar Parâmetros de Modelos NARX Racionais e Polinomiais	158
6.6	Uso de Informação a <i>Priori</i> na Análise e Validação de Modelos NARX Racionais e Polinomiais	160
6.7	Comentários Finais	163
7	Exemplos de Aplicações na Validação e Análise de Modelos Identificados	165
7.1	Processo Térmico I	166
7.1.1	Modelo Polinomial <i>nl391</i>	169

7.1.2	Modelo Polinomial <i>nl251</i>	173
7.1.3	Modelo Racional <i>mr03f5</i>	177
7.1.4	Comparação Entre os Modelos	179
7.1.4.1	Ganho Estacionário	180
7.1.4.2	Constante de Tempo	181
7.2	Processo Térmico II	182
7.2.1	Modelo Polinomial <i>mp72pt2</i>	182
7.2.2	Modelo Racional <i>mr31pt2</i>	185
7.2.3	Análise da constante de tempo dos modelos	187
7.2.4	Obtendo Modelo de Hammerstein a Partir de Modelos NARMAX	188
7.3	Válvula de Controle	189
7.3.1	Modelo Polinomial <i>mp1533</i>	190
7.3.2	Modelo Racional <i>mr732</i>	194
7.3.3	Comparando os Modelos	197
7.4	Comentários Finais	200
8	Uso de Informação a <i>Priori</i> na Estimação de Parâmetros	203
8.1	O Algoritmo Elipsóide	204
8.2	Caso Teórico Simulado	206
8.2.1	Modelo Polinomial	208
8.2.2	Modelo Racional	212
8.3	Modelo de um CSTR	215
8.3.1	Uso de Informação a <i>priori</i> na Estimação de Parâmetros do Modelo NARX Polinomial do CSTR	219
8.4	Neutralização de pH	223
8.4.1	Modelo NARMAX Polinomial Identificado sem uso de Informação a <i>Priori</i> na Estimação de Parâmetros	225
8.4.2	Modelo NARMAX Polinomial Identificado com uso de Informação a <i>Priori</i> na Estimação de Parâmetros	227
8.5	Modelo do Conversor Buck	231
8.5.1	O Conversor Buck	232
8.5.2	Modelo do Conversor Buck	233
8.6	Comentários Finais	237
9	Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros	239
	Bibliografia	245

Lista de Tabelas

4.1	Invariantes dinâmicos dos dados e modelos identificados do Circuito de Chua.	74
4.2	Invariantes dinâmicos dos dados e modelos identificados para o sistema de Rössler	76
4.3	Invariantes dinâmicos dos dados e modelo identificados para o mapa senoidal com não-linearidades cúbicas	88
4.4	Validação dos modelos estimados para o regulador chaveado Buck	91
4.5	Dados em estado estacionário do processo térmico em p.u. . . .	93
4.6	Resultados quantitativos da validação dinâmica dos modelos identificados para o Processo Térmico	97
4.7	Resultados da validação estática dos modelos identificados para o Processo Térmico	97
5.1	Exemplo de uso de conhecimento <i>a priori</i> no modelo de uma mistura de gás	109
6.1	Sinais e coeficientes de termos que afetam a constante de tempo de modelos NARX polinomiais, com $\ell = 3$, em função dos agrupamentos de termos.	131
6.2	Sinais e coeficientes de termos que afetam os coeficientes da equação característica de modelos NARX polinomiais, com $\ell = 2$ e $d = 2$, em função dos agrupamentos- d	135

6.3	Sinais e coeficientes de termos que afetam os coeficientes da função ganho de modelos NARX polinomiais, com $\ell = 3$, em função dos agrupamentos de termos.	138
6.4	Sinais e coeficientes de termos que afetam a constante de tempo de modelos NARX racionais, sem termos em y no denominador e com $\ell = 3$, em função dos agrupamentos de termos.	147
6.5	Sinais e coeficientes de termos que afetam a constante de tempo de modelos NARX racionais, com termos em y no denominador e com $\ell = 3$, em função dos agrupamentos de termos.	148
6.6	Sinais e coeficientes de termos que afetam os coeficientes da função ganho de modelos NARX racionais, com $\ell = 3$, em função dos agrupamentos de termos.	153
6.7	Relação entre agrupamentos de termos e número de pontos fixos em modelos NAR racional	155
7.1	Resultados da validação dinâmica dos modelos de Hammerstein e polinomial para o Processo Térmico II.	189
8.1	Parâmetros estimados do modelo NARMAX polinomial via EMQ e EA para o sistema teórico simulado	210
8.2	Parâmetros estimados do modelo racional via EMQ e AE para o sistema teórico simulado	214
8.3	Parâmetros estimados por EMQ (Aguirre et al., 2000b) e AE para o modelo do Conversor Buck	235

Lista de Figuras

2.1	Modelo Wiener. $F(\cdot)$ é uma função não-linear estática e $H(q)$ é uma função dinâmica linear.	17
2.2	Modelo Hammerstein. $F(\cdot)$ é uma função não-linear estática e $H(q)$ é um função dinâmica linear.	17
2.3	Representações propostas por Narendra e Parthasarathy (1990)	33
2.4	Rede neural artificial de n entradas, 1 saída e m neurônios na camada escondida	34
2.5	Rede neural recorrente com n entradas, 1 saída e m neurônios na camada escondida	36
4.1	(a) Circuito de Chua e (b) Função caraterística do Diodo de Chua	71
4.2	Reconstrução bidimensional do atrator de dupla volta de Chua	72
4.3	Atrator de dupla-volta reconstruído a partir (a) de simulação do modelo polinomial (4.3) e (b) simulação do modelo racional (4.4)	74
4.4	Projeção bidimensional da variável x para o sistema Rössler, usando: (a) dados simulados (b) modelo polinomial (c) modelo racional	76
4.5	Dados de identificação do sistema Duffing-Ueda (duffing.dat @). Eixo- x amostras, eixo- y variáveis u e y da equação (4.10), respectivamente entrada e saída.	78
4.6	Resultado típico obtido para todas as redes, na predição livre .	80

4.7	Trajectoria no pseudo-plano de fases (a) Modelo <i>nn2</i> , (b) Modelo <i>nn3</i> , (c) Modelo <i>nn8</i> , (d) Modelo <i>nn9</i> , (e) Modelo <i>nn12</i> e (f) Sistema original	81
4.8	Seção de Poincaré para a entrada $u = 11\cos(t)$ (a) Modelo <i>nn2</i> , período-1, (b) Modelo <i>nn3</i> , período-3, (c) Modelo <i>nn8</i> , caos, (d) Modelo <i>nn9</i> , período-1, (e) Modelo <i>nn12</i> , possivelmente quase-periódico, e (f) Sistema original, caos	83
4.9	Diagramas de bifurcações (a) Modelo <i>nn2</i> , (b) Modelo <i>nn3</i> , (c) Modelo <i>nn8</i> , (d) Modelo <i>nn9</i> , (e) Modelo <i>nn12</i> e (f) Sistema original	85
4.10	Atrator original e dos modelos NARMAX do mapa senoidal com não-linearidade cúbicas	87
4.11	Atrator <i>tent</i> (ponta aguda). Não-linearidade estática estimada usando modelo racional (4.19) e modelo polinomial (4.18) . . .	89
4.12	Mapa de primeiro retorno para modelo do regulador Buck . . .	91
4.13	Dados de identificação do Processo Térmico	93
4.14	Histograma com a distribuição dos dados de identificação do Processo Térmico	94
4.15	Validação dinâmica e não-linearidades estática dos modelos (a) NN-MLP, (b) NN-Elman, (c) NN-RBF, (d) NARMAX polinomial e (e) NARMAX racional do processo térmico	96
5.1	Escala cinzenta definindo os diferentes níveis de informação a <i>priori</i> na identificação caixa-cinza.	105
5.2	Representação pictórica das dificuldades de cada classe de modelos e das motivações para o desenvolvimento de novos procedimentos	106
5.3	Fluxograma ilustrativo do procedimento iterativo de refinamento de estrutura (Bohlin e Graebe, 1995).	111
5.4	Modelo de blocos orientados com realimentação, estrutura I (Pottmann e Pearson, 1998).	115

5.5	Modelo de Blocos Orientados com Realimentação, estrutura IV (Pottmann e Pearson, 1998).	116
5.6	Modelo de Blocos Orientados com Realimentação. Variação da estrutura IV, obtida por manipulações algébricas (Pottmann e Pearson, 1998).	116
7.1	Resposta ao ruído quantizado do Processo Térmico I	167
7.2	Resposta ao degrau do Processo Térmico I	168
7.3	Autovalores associados a cada estado estacionário do modelo <i>nl391</i>	171
7.4	Estados estacionários da saída do modelo <i>nl391</i> em função da entrada $\bar{u}$, obtidas a partir da equação (7.2).	172
7.5	Autovalores associados aos estados estacionários da saída do modelo <i>nl251</i>	175
7.6	Saídas estacionárias do modelo <i>nl251</i> obtidas pelo cálculos das raízes da equação (7.5).	176
7.7	Autovalores do modelos <i>mr03f5</i> para cada ponto de operação. .	178
7.8	Estados estacionários da saída do modelo <i>mr03f5</i>	179
7.9	Ganho estacionário dos modelos do processo térmico I analisados.	180
7.10	Função constante de tempo dos modelos do processo térmico I analisados.	182
7.11	Simulação de k -passos dos modelos do Processo Térmico I . . .	183
7.12	Autovalores associados à saída estacionária do modelo <i>mp72pt2</i> .	185
7.13	Autovalores do modelo <i>mr31pt2</i> para cada ponto de operação. .	187
7.14	Funções constante de tempo do Processo Térmico II obtidas a partir dos modelos polinomial e racional	188
7.15	Predição livre do modelo de Hammerstein e do modelo polino- mial para o Processo Térmico II, sistemas original.	190
7.16	Trecho da massa de dados obtida a partir de medições reais usadas para modelagem da válvula de controle	191
7.17	Autovalores associados aos estados estacionários da saída do modelo <i>mp1533</i> para a Válvula de Controle	193

7.18	Saídas estacionárias do modelo <i>mp1533</i> em função da entrada $\bar{u}$, obtidas a partir da equação (7.21).	194
7.19	Autovalores associados a estados estacionários da saída do modelo <i>mp732</i> para a Válvula de Controle	196
7.20	Estados estacionários da saída do modelo <i>mr732</i> em função da entrada $\bar{u}$, obtidos a partir da equação (7.24).	197
7.21	Predição livre dos modelos racional e polinomial da válvula de controle	198
7.22	Relações estacionárias entre entrada e saída dos modelos da válvula de controle	199
7.23	Funções de constante de tempo para os modelo da válvula de controle	200
8.1	Dados de identificação de sistema simulado com ganho constante de constante de tempo variável	207
8.2	Funções da constante de tempo e ganho dos modelos NARMAX polinomiais obtidos a partir de dados simulados	211
8.3	Função constante de tempo e ganho dos modelos racionais obtidos a partir de dados simulados	216
8.4	Dados de identificação obtidos pela simulação do sistema CSTR. 217	
8.5	Curva estática obtida a partir dos modelos (a) polinomial e (b) racional para o sistema CSTR.	219
8.6	Curva estática do modelo polinomial obtido com uso de informação <i>a priori</i> na estimação de parâmetros.	222
8.7	Validação dinâmica dos modelos do CSTR.	223
8.8	Dados simulados de identificação do tanque de neutralização de pH (Johansen, 1996). Eixo- <i>x</i> tempo em minutos e eixo- <i>y</i> (a) pH como saída e (b) vazão de base como entrada (<i>dataset.mat</i> @). 224	
8.9	Dados simulados de validação do tanque de neutralização de pH (Johansen, 1996). Eixo- <i>x</i> tempo em minutos e eixo- <i>y</i> (a) pH como saída e (b) vazão de base como entrada (<i>default.mat</i> @). . 225	

8.10	Relação estacionária entre entrada e saída do tanque de neutralização de pH (Johansen, 1996). Eixo- x é a entrada (fluxo base) e eixo- y saída (pH). A linha tracejada indica a região dos dados de identificação.	226
8.11	Resultado da predição livre do modelo (8.31) para o tanque de neutralização de pH	227
8.12	Característica estática do modelo 8.31 e do sistema original. As linhas tracejadas na horizontal mostram a região dos dados de identificação. Eixo- x vazão de base e eixo- y pH.	228
8.13	Resultado da predição livre do modelo (8.35) para o tanque de neutralização de pH	230
8.14	Característica estática do modelo (8.35) e do tanque de neutralização de pH	231
8.15	dy/dt em cada ponto da função estática do tanque de neutralização de pH e do modelo (8.35)	231
8.16	Conversor DC-DC Buck	232
8.17	Predição livre dos modelos e do conversor Buck	236
8.18	Função estática do sistema original, modelo EMQ e modelo EA para o conversor Buck	236

Nomenclatura

A	Matriz auxiliar, no procedimento de Gram-Schmidt, para estimação ortogonal de parâmetros.
$a(.)$	Função não linear qualquer usada no numerador do modelo NARMAX racional.
$b(.)$	Função não linear qualquer usada no denominador do modelo NARMAX racional.
$C(\epsilon)$	Função de correlação utilizada no cálculo da dimensão de correlação de um atrator.
c_{jk}	Coefficiente da função de escalonamento na transformada <i>wavelet</i>
c_i	Centro de uma função de base radial qualquer.
D	Matriz diagonal obtida a partir de $W^T W$
D_c	Dimensão de correlação do atrator de um sistema dinâmico não-linear.
D_L	Dimensão de Lyapunov de um sistema dinâmico não-linear.
D_f	Matriz Jacobiana de uma função não-linear
d_i	Elementos da matriz diagonal D .
d_{jk}	Coefficiente da função <i>wavelet</i> .
$e(t)$	Ruído ou perturbações em um sistema dinâmico.
$F(.)$	Função não-linear qualquer.
$f(.)$	Função escalar qualquer.
g	Parâmetro do modelo ortogonalizado, no procedimento de Gram-Schmidt.

$\hat{g}$	Estimativa do parâmetro g .
$J_N(.)$	Índice de desempenho ou função de custo.
k	Intervalo de predição.
l	Grau de não-linearidade de uma função não-linear polinomial.
M	Mapa de Poincaré de um sistema dinâmico não-linear.
N	Comprimento do registro de dados disponíveis.
n	Ordem de um sistema dinâmico.
n_e	Atraso máximo nos termos em $e(k)$, em modelos discretos.
n_u	Atraso máximo nos termos em $u(k)$, em modelos discretos.
n_y	Atraso máximo nos termos em $y(k)$, em modelos discretos.
n_ξ	Número de termos de ruído em um modelo NARMAX.
n_θ	Número de termos em um modelo NARMAX.
$\mathbf{P}$	Matriz dos regressores de um modelo NARMAX.
$\bar{p}$	Ponto fixo de um sistema dinâmico.
Q	Matriz ortogonal (decomposição QR).
$\bar{Q}$	Matriz ortogonal aumentada (decomposição QR).
R	Matriz triangular superior (decomposição QR).
r	Distância entre o vetor de entrada $\mathbf{x}$ e o centro c_i de uma RBF.
s	Variável complexa de Laplace.
T_s	Período de amostragem.
t	Tempo.
σ_z	Parte real do autovalor de um sistema discreto.
$u(t)$	Sinal medido de entrada de um sistema.
ω_z	Parte imaginária do autovalor de um sistema discreto ou discretizado.
ω_{ij}	Pesos de uma rede neural artificial.
$\mathbf{Y}$	Vetor de saídas.
$y(t)$	Sinal de saída medido de um sistema contínuo.
$y(k)$	Sinal de saída medido de um sistema discreto.

$\hat{y}(k)$	Saída do preditor de “um-passo-a-frente”.
z	Autovalor de um sistema discreto ou discretizado.
α	Autovalor da matriz Jacobiana de um modelo NARMAX polinomial.
Γ	Seção de Poincaré de um sistema dinâmico não-linear.
δt	Passo de integração numérica.
$\delta(\cdot)$	Função delta de Dirac.
λ_1	Maior expoente de Lyapunov de um sistema dinâmico não-linear.
$\{\lambda_i\}_{i=1}^n$	Espectro de expoentes de Lyapunov de um sistema dinâmico não-linear.
μ_b	Parâmetro de bifurcação de um sistema dinâmico.
Θ	Vetor de parâmetros de um modelo NARMAX polinomial.
θ	Parâmetro nominal de um sistema dinâmico representado por um modelo NARMAX.
$\hat{\theta}$	Parâmetro de um modelo NARMAX, estimado pelo método dos mínimos quadrados.
Ξ	Vetor de resíduos de modelagem em um modelo NARMAX polinomial.
$\xi(k)$	Resíduo de modelagem.
$\phi_{jk}(\cdot)$	Função de escalonamento em uma transformada <i>wavelet</i> .
$\psi_{jk}(\cdot)$	Função <i>wavelet</i> .
$\zeta(t)$	Resultado de $b(t)e(t)$, obtido devido a linearização dos parâmetros para o modelo NARMAX racional.
Σ_i	Coefficiente de um agrupamento de termos em um modelo NARMAX polinomial.
Σ_i^α	Coefficiente de um agrupamento de termos do numerador em um modelo NARMAX racional.

Σ_i^β	Coeficiente de um agrupamento de termos do denominador em um modelo NARMAX racional.
$\Sigma_{i_d}^\alpha$	Coeficiente de um agrupamento de termos de ordem d do numerador em um modelo NARMAX racional.
$\Sigma_{i_d}^\beta$	Coeficiente de um agrupamento de termos de ordem d do denominador em um modelo NARMAX racional.
τ	Tempo de atraso na definição das coordenadas de atraso.
τ_m	Valor mínimo entre τ_y e τ_{y^2} .
τ_y	Tempo em que ocorre o primeiro mínimo da autocorrelação linear de um sinal.
τ_{y^2}	Tempo em que ocorre o primeiro mínimo da auto-correlação não-linear de um sinal.
$\phi(\cdot)$	Função de base radial qualquer.
σ_ξ^2	Variância dos resíduos.
Ψ e ψ	Matrizes auxiliares no processo de estimação de parâmetros por mínimos quadrados estendido para o modelo NARMAX racional.
$\Phi_{y_1 y_1}(\cdot)$	Função de auto-correlação do sinal $y_1(t)$.
$\Phi_{y_1 y_2}(\cdot)$	Função de correlação cruzada dos sinais $y_1(t)$ e $y_2(t)$.
Ω	Agrupamento de termos em um modelo NARMAX polinomial.
Ω^α	Agrupamentos de termos do numerador em um modelo NARMAX racional.
Ω^β	Agrupamentos de termos do denominador em um modelo NARMAX racional.
Ω_d^α	Agrupamentos de termos de ordem d do numerador em um modelo NARMAX racional.
Ω_d^β	Agrupamentos de termos de ordem d do denominador em um modelo NARMAX racional.

Abreviações

AE	Algoritmo elipsóide.
AR	Auto-regressivo.
ARMAX	Modelo auto-regressivo, de média móvel com entradas exógenas (do inglês <i>autoregressive moving average model with exogenous inputs.</i>)
ARX	Modelo auto-regressivo com entradas exógenas (do inglês <i>autoregressive model with exogenous inputs.</i>)
EMQ	Estendido de mínimos quadrados.
ERR	Taxa de redução do erro (do inglês <i>error reduction ratio.</i>)
CSTR	Reator tanque agitado contínuo (do inglês <i>continuous stirred tank reactor.</i>)
NARMAX	Modelo não-linear auto-regressivo, de média móvel com entradas exógenas (do inglês <i>nonlinear autoregressive moving average model with exogenous inputs.</i>)
NARMA	Modelo não-linear auto-regressivo, de média móvel (do inglês <i>nonlinear autoregressive moving average model.</i>)
MLP	Rede neural multicamada perceptron (do inglês <i>multilayer perceptrons.</i>)
NARX	Modelo não-linear auto-regressivo com entradas exógenas (do inglês <i>nonlinear autoregressive model with exogenous inputs.</i>)
NN	Rede neural (do inglês <i>neural network.</i>)
PC	Computador pessoal (do inglês <i>personal computer.</i>)
RBF	Função de base radial (do inglês <i>radial basis function.</i>)

Capítulo 1

Introdução

O desenvolvimento de técnicas para obter equações matemáticas, capazes de reproduzir de forma aproximada o comportamento dinâmico de sistemas reais, é um dos temas mais fascinantes da cultura humana (Ljung, 1994). Além de fascinante, tal assunto é de vital importância para o desenvolvimento da ciência e tecnologia.

Ao longo das últimas décadas, a modelagem matemática vem-se transformando em uma poderosa ferramenta para analisar e quantificar dados observados. Os modelos matemáticos permitem descobrir relações de causa e efeito em dados observados (Aguirre, 2000b) e também são aplicados no desenvolvimento de controladores (Hernández e Arkun, 1993; Jorgensen e Hangos, 1995).

Os modelos lineares desempenharam um importante papel no desenvolvimento das técnicas de identificação. Devido a sua simplicidade e à facilidade de obtenção, são usados para aproximar o comportamento de sistemas em determinadas faixas de operação. Considerando regiões restritas de operação, desempenham um importante papel na modelagem de sistemas dinâmicos. Billings (1980) justifica a utilização de modelos lineares em função da complexidade potencial dos não-lineares.

A necessidade de representar de forma mais precisa o comportamento não-linear de sistemas reais levou à busca de representações não-lineares. Em (Billings, 1980) um importante estudo sobre métodos de identificação de sistemas não-lineares anteriores à década de oitenta pode ser visto. Nesse artigo, como ferramentas para identificar sistemas não-lineares, o autor cita os métodos de séries funcionais, como o método de Wiener e suas variações, série de Volterra e técnicas no domínio da frequência. Como alternativa, cita os sistemas orientados por blocos, apresentando a formulação geral e os modelos clássicos de Wiener e Hammerstein.

Billings (1980) apresenta importantes observações que serviram como base

para novos desenvolvimentos. Com relação às séries funcionais, o autor cita como desvantagens a complexidade computacional, a dificuldade de incorporar informação *a priori* e de interpretar e estimar características físicas do processo a partir do modelo. Com relação aos modelos orientados por blocos, afirma que a separação do sistema modelado em subsistemas lineares e não-lineares é extremamente atrativa e pode fornecer importante ajuda no desenvolvimento de controladores. Para essa representação, salienta a necessidade de pesquisas futuras para simplificar e estender a aplicação de tais métodos.

Vale ressaltar, no trabalho citado, a afirmação do autor de que, quando se conhecem as equações diferenciais representativas do sistema, os métodos para estimação de parâmetros estão bem estabelecidos. Porém, quando apenas um conjunto de informação está disponível, o problema de obtenção do modelo e de estimação de parâmetros deve ser investigado. Outra observação importante do autor é a dificuldade de identificar sistemas não-lineares e a impossibilidade de recomendar apenas uma técnica capaz de fornecer soluções gerais e aceitáveis.

Na década de oitenta, novos métodos para identificar sistemas não-lineares surgiram. Destaca-se nessa fase o aparecimento de novas representações. Dentre essas, a representação NARMAX polinomial proposta em (Leontaritis e Billings, 1985a) e NARMAX racional (Billings e Chen, 1989a). Outro conjunto de representações que se destacaram na identificação de sistemas não-lineares no final da década de oitenta são as redes neurais. Como referência do uso dessas na identificação de sistemas não-lineares, destaca-se o trabalho de Narendra e Parthasarathy (1990). Em todos esses casos, o objetivo era sempre o de encontrar representações capazes de aproximar diversas classes de não-linearidades.

Entre as não-linearidades que mereceram atenção de inúmeros pesquisadores, destacam-se os sistemas com comportamento caótico. Dentro desse campo de aplicações pode ser citado o trabalho pioneiro de Casdagli (1989), no qual o autor aborda o problema de obtenção de modelos preditivos do tipo RBF a partir de dados temporais.

Na década de noventa, aplicações das representações e técnicas de identificação de sistemas não-lineares surgem em grande número na literatura. As aplicações colocaram em evidência diversas dificuldades que, por sua vez, motivaram o desenvolvimento de novas técnicas de identificação, as quais vêm se incorporando à ciência da identificação de sistemas não-lineares. Entre diversos trabalhos, destacam-se: a identificação de modelo não-linear da injeção de diesel em um motor de combustão (Billings et al., 1989a); modelagem do

controle neural de um sistema cardiovascular usando modelos NARMAX (Valverde et al., 1992); identificação de um sistema de controle de emissão de CO_2 na respiração de um homem (Noshiro et al., 1993); modelagem de um sistema de neutralização de pH com objetivo de desenvolvimento de controle preditivo (Pröll e Karim, 1994); identificação de não-linearidades em alto-falantes usando modelos NARMAX polinomiais (Jang e Kim, 1994); recuperação de mapas não-lineares estáticos a partir de dados caóticos usando modelos dinâmicos (Aguirre, 1997). Utilizando representações baseadas em redes neurais, trabalhos de identificação podem ser vistos em (Cubillos et al., 1996; Häck e Köhne, 1996; Tsoi e Back, 1999; Gençay e Liu, 1997; Ohba e Ishida, 1998; Castillo e Gutiérrez, 1998; Henrique et al., 1998), entre outros.

Um dos principais problemas citados nos diversos trabalhos enumerados acima é a dificuldade encontrada na escolha da estrutura, o que motivou o desenvolvimento de diversas pesquisas. Vários trabalhos surgiram com intuito de atacar tal problema (Haber e Unbehauen, 1990; Breeden e Packard, 1994; Aguirre, 1994; Judd e Mees, 1995; Mao e Billings, 1997). Discussão dos efeitos da sobreparametrização em modelos não-lineares é apresentada em (Aguirre e Billings, 1995). No caso específico de modelos NARMAX polinomiais, pode-se citar o estudo de agrupamento de termos (Aguirre e Billings, 1995) e sua aplicação na identificação de atratores caóticos observados no circuito de Chua (Aguirre et al., 1997).

Naturalmente, cada pesquisa abordou o problema de forma diferente. Entre essas pode-se relacionar a incorporação de informação *a priori* em modelos lineares (Eskinat et al., 1993; Kárný et al., 1995), o estudo de propriedades das redes neurais (Joerding e Meador, 1991; Hernández e Arkun, 1992; Thompson e Kramer, 1994) e a proposição de modelos chamados de híbridos (Cubillos et al., 1996; Cubillos e Lima, 1997). Na linha de extensivo uso de informação *a priori*, destacam-se os trabalhos de Bohlin (Bohlin, 1994; Bohlin e Graebe, 1995), cujas aplicações podem ser vistas em (Sorlie, 1994). Detalhes desses trabalhos e de outros com abordagem semelhante podem ser vistos no Capítulo 5 desta tese.

A possibilidade de utilizar informação *a priori* juntamente com dados de entrada e saída do sistema deu origem a uma nova classificação dos métodos de modelagem. Esta classificação diz respeito ao uso de informação *a priori* durante o processo de modelagem. Então, de acordo com o nível ou com o tipo de informação *a priori* usada, as técnicas para obtenção de modelos passaram a ser classificadas como (Herbert e Tulleken, 1993; Sjöberg et al., 1995; Bohlin e Graebe, 1995):

- Modelagem caixa-branca;
- Modelagem caixa-cinza;
- Modelagem caixa-preta.

Na modelagem caixa-branca, foram agrupados os procedimentos em que a estrutura do modelo é totalmente conhecida, geralmente determinada pelas equações físicas ou químicas que regem o comportamento estático e dinâmico do sistema (Garcia, 1997). Neste caso, os parâmetros, em geral, possuem algum significado físico e são determinados também a partir de conhecimentos *a priori* do sistema. Dessa forma, o processo de modelagem não utiliza dados de entrada e saída medidos no sistema.

Já na modelagem caixa-preta, nenhuma informação *a priori* do sistema é conhecida ou utilizada. Os parâmetros do modelo não possuem nenhum significado físico. O processo de modelagem, chamado de identificação, se baseia única e exclusivamente em dados de entrada e saída medidos no sistema.

Duas desvantagens são associadas à modelagem caixa-branca (Pottmann e Pearson, 1998). A primeira é a maior complexidade que em geral se tem na estrutura das equações, normalmente envolvendo equações diferenciais algébricas, equações diferenciais parciais e/ou integrações. A segunda é que modelos caixa-branca são geralmente constituídos por equações contínuas no tempo, enquanto os processos de medição e controle são em geral discretos.

A identificação caixa-preta permite a escolha de uma estrutura conveniente para facilitar a formulação e a resolução de problemas de controle (Pottmann e Pearson, 1998). Como desvantagem, tem-se o alto grau de liberdade na seleção da estrutura do modelo. Outro problema é que a obtenção do modelo a partir de um número finito de observações é um problema mal-condicionado no sentido de que os modelos não são únicos e podem não depender continuamente da observação (Tikhonov e Arsenin, 1977).

Entre os extremos modelagem caixa-branca e identificação caixa-preta, situa-se a identificação caixa-cinza, que utiliza informação *a priori* do sistema em conjunto com dados de entrada e saída medidos no mesmo. Em (Jorgensen e Hangelos, 1995) a identificação caixa-cinza é definida como *a ciência de construção de modelos que incorporam conhecimento a priori do sistema, com um certo grau de incerteza na seleção da estrutura da representação*.

Sjöberg e outros (1995), subdividem a modelagem caixa-cinza em dois subgrupos: (i) modelagem física, na qual toda a estrutura é determinada por conhecimentos físicos do sistema, e apenas os parâmetros, ou um certo número desses são estimados a partir dos dados e (ii) modelagem semifísica, em que

informações do sistema são usadas para sugerir combinações não-lineares entre os sinais medidos, utilizando tais informações na escolha da estrutura do modelo.

Em outras palavras, a modelagem semifísica, ou simplesmente chamada neste trabalho de identificação caixa-cinza, combina características desejáveis da modelagem caixa-branca e da identificação caixa-preta. Não possui o rigor da determinação prévia da estrutura e dos parâmetros da modelagem caixa-branca, nem a liberdade total para seleção de estrutura da modelagem caixa-preta.

Inúmeras vantagens vêm sendo apontadas para a identificação caixa-cinza em relação às demais. Tulleken (1993) cita que modelos caixa-cinza podem trazer benefícios consideráveis no projeto de controladores avançados que requerem descrições adequadas do processo. Johansen (1996) enfatiza que o uso de informações a *priori* reduz efetivamente o número de parâmetros a serem estimados e torna o problema de identificação melhor condicionado, além de gerar modelos melhores e mais robustos, mesmo com conjunto de dados escassos ou incompletos. Recentemente, Aguirre (2000) sugeriu que a capacidade do uso de informação a *priori* pode vir a se tornar um meio para se escolher entre diversas possibilidades de representações matemática na modelagem de sistemas dinâmicos não-lineares.

Uma questão de grande relevância no processo de identificação caixa-cinza é saber que informações a respeito do sistema são úteis e como utilizá-las na etapa de seleção de estrutura e de estimação de parâmetros. Ou ainda, determinar que representação é capaz de incorporar o maior volume de conhecimento a *priori* do sistema.

1.1 Relevância

A necessidade de pesquisar ferramentas para incorporação de informação a *priori* é destacada em diversos trabalhos publicados na literatura. Conforme citado na seção anterior, em (Billings, 1980), um trabalho com caráter revisional, o autor apresenta como desvantagens das séries funcionais a impossibilidade de incorporar informação a *priori* e de interpretar características físicas do processo a partir do modelo. Ou seja, já em 1980 era reconhecida como sendo importante a possibilidade de utilizar informação a *priori* para identificar sistemas não-lineares.

No final da década de oitenta e na década de noventa, vários trabalhos surgiram buscando incorporar informação a *priori* na identificação de sistemas. Nesses, vantagens de utilização de informação a *priori* são apresentadas e

justificadas. Outras questões importantes são levantadas. A seguir um breve apanhado histórico da incorporação de informação *a priori* na identificação de sistemas é apresentado.

Em (Bai e Sastry, 1986) os autores apresentam a utilização de informação *a priori* na estimação de parâmetros de modelos lineares. Citam que “os benefícios da utilização de informação *a priori* na estimação de parâmetros é a rápida convergência e o menor erro de identificação”.

Haber e Unbehauen (1990), em um trabalho sobre a identificação de estrutura de sistemas dinâmicos não-lineares, citam que “métodos para estimação de parâmetros e a elaboração de estruturas que consideram o conhecimento *a priori* devem ser desenvolvidos”.

Entre alguns dos relativamente poucos trabalhos da década de noventa que utilizam a informação *a priori* na identificação de sistemas, podem ser destacadas algumas frases: “... modelagem caixa-cinza pode trazer consideráveis benefícios em termos de melhorar o projeto de controladores” (Tulleken, 1993); “... tudo indica que a abordagem caixa-cinza é superior” (Bohlin, 1994); “... os resultados mostram que conhecimento *a priori* acentua a capacidade de generalização de um modelo neural puro” (Thompson e Kramer, 1994).

Em (Bohlin e Graebe, 1995) lê-se que “... imponha restrições nos parâmetros de um modelo estimado para refletir conhecimento *a priori* e aumente o desempenho de um controle adaptativo”. Ao final citam que “... apesar da identificação caixa-cinza necessitar de certos desenvolvimentos, esta emerge como uma exequível e promissora área para complementar as convencionais técnicas de identificação”.

Em (Jorgensen e Hangos, 1995) é citado que “modelagem caixa-cinza traz grandes promessas para o desenvolvimento de métodos e ferramentas que garantam consistência entre modelos de um mesmo sistema usado para diferentes propósitos e para permitir manutenção e desenvolvimento contínuo de tais modelos”.

Johansen (1996) argumenta que o uso de conhecimento *a priori* junto com dados empíricos torna o problema de identificação melhor condicionado. O autor cita que “se a informação *a priori* for correta, o modelo obtido, em geral, será melhor e mais robusto mesmo quando o conjunto de dados for deficiente ou incompleto”. Cita ainda nos comentários que “... mais trabalhos são necessários para desenvolver procedimentos de engenharia práticos para incorporar informação *a priori* ...”.

Petrick e Wigdorowitz (1997) afirmam que “... poucas ferramentas existem para seleção *a priori* da estrutura de modelos de sistemas não-lineares”. No contexto de redes neurais Cubillos e Lima (1997) citam que “... modelagem

de processo baseado em redes neurais requer grande número de parâmetros (pesos), resultando em dois problemas principais: pesada carga computacional no treinamento da rede e a possibilidade de sobreparametrização, com perda da capacidade de generalização, quando um reduzido número de dados está disponível para treinamento. Estes dois problemas podem ser minimizados usando algum tipo de informação *a priori* na construção do modelo”.

Em (Aguirre et al., 2000b) os autores mostram que modelos obtidos usando técnicas caixa-preta são modelos com características locais, apesar de serem não-lineares. Enquanto que “o uso de informação *a priori* força o modelo a um comportamento mais global, aumentando a faixa sobre a qual o modelo é dinamicamente válido, com uma pequena perda de precisão”. Esta observação vem ao encontro da afirmação de Godfrey (1986) destacando que “para tentar estimar parâmetros em sistemas não-lineares, é essencial que se verifique se os dados excitam o sistema em toda sua não-linearidade”.

Em um trabalho mais recente, Aguirre (2000) destaca que “possui especial relevância a possibilidade de impor e extrair a partir do modelo informações importantes sobre o sistema”. Cita ainda que “a seleção da representação não-linear é um problema que continua aberto na literatura” e acrescenta “.. a facilidade de como incluir informação no modelo e a possibilidade de extrair informação útil de um modelo dado terá um importante papel na seleção da representação matemática para modelagem de sistemas dinâmicos”.

1.2 Motivação

Na última década, a representação NARMAX (*Nonlinear Autoregressive Moving Average with exogenous input*) polinomial veio sendo largamente usada na identificação de sistemas dinâmicos não-lineares. Entre outros trabalhos, a utilização da representação NARMAX polinomial na modelagem não-linear de sistemas dinâmicos reais pode ser vista em (Billings et al., 1989a; Vallverdu et al., 1992; Noshiro et al., 1993; Pröll e Karim, 1994; Çinar, 1995; Jácome e Aguirre, 1996).

Já a representação NARMAX racional (Billings e Chen, 1989b; Billings e Zhu, 1991) que, como será visto no Capítulo 2, é um caso mais geral que a polinomial, tem tido uma utilização mais restrita na modelagem dinâmica de sistemas reais. Aparentemente, modelos racionais obtidos a partir de dados reais podem ser vistos apenas em (Corrêa et al., 1998; Aguirre et al., 2000a; Corrêa et al., 2000). Embora ainda com poucas aplicações, os resultados obtidos até aqui se mostraram bastantes promissores.

Propriedades da representação NARMAX polinomial também vêm recebendo atenção nos últimos anos. Em (Aguirre e Mendes, 1996) é apresentado método para recuperar número e localização de pontos fixos a partir de modelos NARMAX polinomiais. O cálculo da localização de pontos fixos é um procedimento puramente algébrico e este utiliza definições de coeficientes e agrupamentos de termos. Esses conceitos são aplicados na seleção de estrutura de modelos, onde a informação de número de pontos fixos é conhecida *a priori* (Aguirre e Mendes, 1996; Aguirre et al., 1997).

A metodologia para determinação de número, localização e estabilidade de pontos fixos a partir de um modelo NARMAX polinomial foi estendida para modelos NARMAX racionais (Mendes, 1995; Mendes e Billings, 2000). Em (Corrêa et al., 2000) este método é aplicado à escolha de agrupamentos de termos candidatos para a determinação de estrutura de modelos de sistemas cujo número e localização de pontos fixos são previamente conhecidos.

Outro estudo refere-se à capacidade de se obter características estáticas de sistemas dinâmicos a partir de modelos NARX (Jácome, 1996; Aguirre e Jácome, 1998; Aguirre et al., 1999b). Mais uma vez, os resultados obtidos possibilitaram a aplicação de novos conceitos na determinação de estrutura, ou termos candidatos a estas representações, no caso onde características estáticas são previamente conhecidas (Jácome, 1996; Jácome e Aguirre, 1996; Aguirre e Jácome, 1998).

Os resultados obtidos e destacados nas referências acima mostram que a representação NARMAX polinomial tem desempenhado um papel de fundamental importância na identificação de sistemas dinâmicos não-lineares. As principais características associadas a essa representação são: (i) facilidade de manipulação dos modelos; (ii) facilidade de estimação de parâmetros; (iii) possibilidade de se obter analiticamente características de estado estacionário; (iv) possibilidade de se obter expressões analíticas para pontos fixos. Muitas das propriedades da representação NARMAX polinomial são naturalmente estendidas à representação NARMAX racional. Porém, vale ressaltar que estimar parâmetros de modelos racionais apresenta uma dificuldade adicional. Essa se deve ao fato da representação racional ser não-linear nos parâmetros, o que impede a utilização direta de métodos clássicos de mínimos quadrados.

As características apresentadas acima, credenciam a utilização das representações NARMAX polinomial e racional na identificação caixa-cinza de sistemas não-lineares. Porém, são escassos na literatura métodos e procedimentos para sua utilização. Outro aspecto que ainda não está completamente determinado é a escolha da representação.

Nesta tese dois aspectos da identificação de sistemas dinâmicos não-lineares

são apresentados. O primeiro diz respeito à escolha da representação; o segundo, à utilização de informação *a priori* no processo de identificação.

Com relação à escolha da representação, procurou-se investigar a capacidade de cada representação aproximar o comportamento dinâmico de sistemas não-lineares. São estudadas características de algumas representações matemáticas de sistemas não-lineares, tais como NARMAX racional, polinomial, redes neurais e modelos contínuos. Algumas dessas representações são comparadas na aproximação de características de sistemas dinâmicos não-lineares com comportamento caótico (Corrêa et al., 1999; Corrêa et al., 2000). São utilizados sistemas como circuito de Chua (Chua, 1992), sistema de Rössler (Rössler, 1976) e Duffing-Ueda (Ueda, 1980). É investigada a capacidade de aproximar mapas estáticos não-lineares, como mapa senoidal, *tent map* e mapa de primeiro retorno do regulador chaveado Buck (Corrêa et al., 2000). É também comparada a capacidade de diferentes modelos de reproduzir características estáticas de um sistema a partir de modelos dinamicamente válidos (Coelho et al., 2000).

Com relação à identificação caixa-cinza utilizando as representações NARMAX polinomial e racional, o objetivo é desenvolver procedimentos para incorporar informação *a priori* nessas representações. Um aprofundado estudo dessas representações é desenvolvido. A partir desse estudo, três procedimentos para incorporar informação *a priori* em modelos NARMAX racional e polinomial são apresentados. O primeiro diz respeito à seleção de estrutura; o segundo para estimar parâmetros e o último, para analisar e validar modelos. Os procedimentos propostos são aplicados a sistemas simulados e reais (Aguirre et al., 1999b; Corrêa et al., 2000).

1.3 Apresentação do Trabalho

As principais contribuições deste trabalho são: (i) um estudo comparativo de características de diferentes representações matemáticas de sistemas não-lineares e o desempenho destas na aproximação de diferentes sistemas dinâmicos; (ii) o desenvolvimento de algoritmos para utilizar informação *a priori* na seleção de estrutura, para estimar parâmetros e para analisar e validar modelos NARMAX polinomial e racional.

Embora não fosse um objetivo deste trabalho, o estudo aprofundado das representações NARMAX polinomiais e racionais permitiu desenvolver um mecanismo eficiente para se determinar a ordem de um modelo. Um problema na escolha da estrutura de um modelo discreto é a determinação do atraso máximo da variável de saída. Esse atraso é a ordem do modelo. Nesta tese é

sugerido no Capítulo 6 que uma análise dos autovalores do modelo pode servir de indicativo de ordem sobredimensionada.

Esta tese é então dividida em duas partes. A primeira trata exclusivamente da identificação caixa-preta. Na segunda, é abordada a identificação caixa-cinza. A seguir, uma breve descrição da organização de cada uma das partes é apresentada.

1.3.1 Parte I - Identificação Caixa-Preta de Sistemas Não-Lineares

Nesta parte um estudo sobre as representações matemáticas mais usadas na identificação de sistemas dinâmicos não-lineares é apresentado. O desempenho de diferentes representações na aproximação de comportamento de sistemas dinâmicos é investigado. Os principais objetivos são a contextualização das representações NARMAX racional e polinomial entre as diversas representações usadas em identificação de sistemas e a comparação do desempenho de diversas representações na modelagem de sistemas dinâmicos.

No Capítulo 2, são discutidos aspectos concernentes às representações NARMAX polinomial e racional, redes neurais, modelos contínuos e a transformada *Wavelet*. A forma geral de cada representação é apresentada. São discutidos procedimentos para escolha de estrutura e para estimar parâmetros de modelos NARMAX racionais e polinomiais.

No Capítulo 3, são discutidas propriedades de cada representação estudada no capítulo anterior, sempre no contexto da identificação de sistemas dinâmicos não-lineares. A síntese das propriedades é apresentada no final do capítulo. Essa síntese traz aspectos qualitativos sobre cada representação, abordando vantagens e desvantagens de cada uma.

No Capítulo 4, o desempenho de diferentes representações é verificado através da identificação caixa-preta de sistemas não-lineares. Os modelos NARMAX polinomial e racional são aplicados na modelagem de dinâmica caótica. Mostra-se que a opção de se utilizar representação NARMAX polinomial ou racional deve ser feita de acordo com as propriedades dos sistemas modelados. Também é verificada a capacidade dessas representações de aproximar mapas estáticos não-lineares. Nesta seção observou-se que a escolha da representação determina a capacidade ou não de um modelo reproduzir mapas estáticos. As redes neurais são utilizadas na modelagem no sistema de Duffing-Ueda. São discutidos procedimentos de validação de modelos baseados em redes neurais. Por último, redes neurais e modelos NARMAX racionais e polinomiais são comparados através da capacidade de aproximar

características estáticas conhecidas de um processo térmico. Procura-se verificar a capacidade do modelo de aproximar a característica estática, apesar do mesmo ter sido obtido a partir de dados dinâmicos.

1.3.2 Parte II - Identificação Caixa-Cinza Usando Modelos NARMAX Racionais e Polinomiais

Na segunda parte, concentram-se as principais contribuições deste estudo. São apresentadas tabelas com o efeito de cada agrupamento de termos nas características de modelos NARMAX racionais e polinomiais. As características estudadas são a não-linearidade estática e a função de autovalores. Procedimentos para incorporar informação *a priori* na seleção de estrutura, estimação de parâmetros e análise e validação de modelos são desenvolvidas. Estes procedimentos são aplicados a sistemas reais e simulados.

No Capítulo 5, uma revisão bibliográfica a respeito da identificação caixa-cinza é apresentada. São apresentados os principais procedimentos para incorporar informação *a priori* na identificação de sistemas dinâmicos, que apareceram na literatura recente. Os procedimentos encontrados são discutidos com o objetivo de contextualizar as técnicas desenvolvidas nesta tese.

No Capítulo 6, as propriedades dos modelos NARMAX racionais e polinomiais são discutidas. São apresentados métodos para determinação da localização e estabilidade de pontos fixos, de sistemas autônomos. A seguir, são discutidos procedimentos para se obter a função estática entre saída e entrada do modelo e a função autovalor em relação ao ponto de operação. O método proposto para determinação dos autovalores é um procedimento novo que permite estimar o comportamento local do modelo dinamicamente válido. Três algoritmos são desenvolvidos. O primeiro para seleção de estrutura; o segundo para estimar parâmetros e por último um algoritmo para analisar e validar modelos. Todos os algoritmos usam informação *a priori* do sistema modelado.

No Capítulo 7, o algoritmo de análise e validação de modelos é aplicado a modelos previamente obtidos. A possibilidade de validar modelos é demonstrada através da análise de modelos obtidos a partir dados reais. São discutidos modelos obtidos a partir de dados reais gerados em dois processos térmicos e dados de uma válvula de controle. Os resultados apresentados neste capítulo mostram a eficiência do referido algoritmo. Aspectos não observados por procedimentos convencionais de validação foram detectados pelo referido algoritmo. Para um determinado caso analisado, o procedimento permitiu concluir que um modelo de Hammerstein poderia ser eficiente para representar o sistema.

No Capítulo 8, o algoritmo desenvolvido para utilizar informação *a priori* na estimação de parâmetros é aplicado para obter modelos NARMAX racionais e polinomiais. Para estimar parâmetros com restrições é usado o método do elipsóide, também apresentado neste capítulo. O algoritmo desenvolvido é aplicado a dois sistemas simulados e um real. Um sistema simulado é puramente teórico. O outro refere-se à simulação de Reator Tanque Agitado Contínuo. Este último apresenta três saídas estacionárias para cada entrada. O sistema real trata-se de um conversor de tensão cc-cc Buck. Em todos os casos o uso de informação *a priori* melhorou o comportamento global dos modelos obtidos.

Como vantagem associada à utilização do método do elipsóide na estimação de parâmetros de modelos racionais, tem-se a não necessidade de linearização dos parâmetros do modelo racional. Como desvantagem, é necessário conhecer previamente a estrutura, não sendo possível incorporar procedimentos de seleção de estrutura na fase de estimação de parâmetros.

No Capítulo 9, as principais conclusões são sintetizadas e propostas para continuação do trabalho são enumeradas.

Parte I

Identificação Caixa-Preta de Sistemas Não-Lineares

Capítulo 2

Representações Matemáticas de Sistemas Não-Lineares

Representar um sistema dinâmico, ou simplesmente um fenômeno físico, por uma equação matemática é algo que há muito desperta o interesse de pesquisadores. O assunto remonta aos primórdios da ciência. Vários cientistas procuraram descrever fenômenos físicos através de leis matemáticas, como Isaac Newton com as leis do movimento e gravitação universal, Charles Coulomb com as leis da repulsão e atração de cargas elétricas, Maxwell e Boltzmann com a teoria cinética dos gases, dentre outros.

Com o desenvolvimento de processos industriais e a necessidade de controlá-los, surgiu também a necessidade do desenvolvimento de modelos que melhor reproduzam suas características estáticas e dinâmicas. Nesta busca de melhores modelos surge o processo de identificação de sistemas (Box e Jenkins, 1976; Ljung, 1987), como também a necessidade de representar comportamentos não-lineares (Wiener, 1958; Billings, 1980; Haber e Keviczky, 1976).

As equações diferenciais formam uma das primeiras soluções aplicadas para reproduzir comportamentos dinâmicos de sistemas físicos. Este método, em geral, é fundamentado na modelagem física do sistema dinâmico (Doebelin, 1980; Klamkin, 1987). A busca da representação de comportamentos não-lineares, juntamente com o advento dos computadores, produziu ao longo dos anos várias propostas de estruturas de equações matemáticas para cumprir tal objetivo. Tais equações são fundamentalmente baseadas em equações de diferenças, onde a dinâmica do sistema é reproduzida utilizando valores passados da saída.

Dentre as representações surgidas nas últimas décadas, podem-se citar, além dos modelos NARMAX, os baseados em redes neurais e os modelos

contínuos. Na classe dos baseados em redes neurais, destacam-se as redes multicamadas (MLPs - do inglês *MultiLayer Perceptrons*), as redes com funções de base radial (RBFs - do inglês *Radial Basis Function*), as redes recorrentes e as redes baseadas em funções *wavelets*. As funções *wavelets*, por sua vez, vêm adquirindo destaque e têm sido aplicadas em diferentes áreas do conhecimento.

Independente do tipo de representação usada em um processo de identificação de sistemas, alguns problemas são comuns a qualquer uma delas. Dentre esses destaca-se a seleção de estrutura (que no caso de redes neurais é denominado escolha de topologia). Outro é a estimação de parâmetros (treinamento no caso de redes neurais).

Embora cada representação citada venha sendo usada na identificação de sistemas, poucos são os trabalhos que comparam as características de cada representação (Tsoi, 1998; Cassini et al., 1998; Marchi et al., 1999). Aguirre (2000) afirma que o problema da escolha da representação continua aberto na literatura e que “na prática a ‘melhor’ representação é, com poucas exceções, a única disponível”.

Neste capítulo são apresentados aspectos concernentes às diferentes representações matemáticas. A profundidade com que cada representação é discutida depende do interesse desta para o objetivo deste trabalho. Sendo assim, dá-se maior destaque às representações NARMAX racionais e polinomiais. Na sequência são discutidas as representações baseadas em redes neurais. A apresentação destas se justifica pela importância que esses modelos vêm adquirindo na modelagem de sistemas dinâmicos. As funções *Wavelets* são também apresentadas, mas não serão usadas ao longo deste trabalho, assim como os modelos contínuos. A discussão inicia-se com as clássicas representações de Wiener e Hammerstein.

O principal objetivo deste capítulo é fornecer subsídios para a discussão que será desenvolvida nos capítulos seguintes.

2.1 Representações de Wiener e Hammerstein

As representações de Wiener e Hammerstein podem ser consideradas como clássicas na representação de sistemas não-lineares (Wiener, 1958; Greblick e Pawlak, 1989). Nestas, os sistemas dinâmicos não-lineares são representados por blocos em cascata. Em um bloco tem-se uma função estática não-linear, e no outro uma função dinâmica linear.

A diferença entre as representações está na ordem em que aparecem tais blocos. No modelo de Wiener, o bloco com a característica dinâmica aparece primeiro, enquanto que no modelo de Hammerstein o bloco dinâmico segue o

estático, conforme Figuras 2.1 e 2.2.

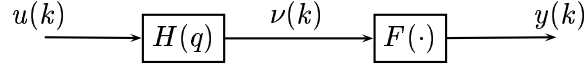


Figura 2.1: Modelo Wiener. $F(\cdot)$ é uma função não-linear estática e $H(q)$ é uma função dinâmica linear.

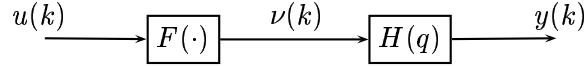


Figura 2.2: Modelo Hammerstein. $F(\cdot)$ é uma função não-linear estática e $H(q)$ é um função dinâmica linear.

Com o objetivo de estabelecer matematicamente as diferenças entre as representações, considerar-se-á que

$$H(q) = \frac{a_1 q^{-1}}{1 - b_1 q^{-1}} \quad (2.1)$$

e que

$$F(\cdot) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \quad (2.2)$$

sendo q^{-i} o operador de deslocamento, x uma variável auxiliar que representa a entrada do bloco estático. Considerando as equações (2.1) e (2.2), no caso do modelo de Hammerstein, Figura 2.2, tem-se

$$\begin{aligned} \nu(k) &= c_0 + c_1 u(k) + c_2 u^2(k), \\ y(k) &= a_1 \nu(k-1) + b_1 y(k-1), \end{aligned} \quad (2.3)$$

ou ainda

$$y(k) = d_0 + d_1 u(k-1) + d_2 u^2(k-1) + d_3 y(k-1), \quad (2.4)$$

sendo d_i constantes determinadas em função dos parâmetros a , b e c das funções $H(q)$ e $F(\cdot)$. Nota-se na equação (2.4) que toda não-linearidade está expressa em função da entrada. A saída estacionária $\bar{y}$ pode ser determinada por

$$\bar{y} = g_0 + g_1 \bar{u} + g_2 \bar{u}^2, \quad (2.5)$$

sendo $g_{0,1,2}$ funções de $d_{0,1,2,3}$. Para o modelo de Wiener, Figura 2.1, considerando as equações (2.1) e (2.2) tem-se que

$$\begin{aligned} \nu(k) &= a_1 u(k-1) + b_1 \nu(k-1), \\ y(k) &= c_0 + c_1 \nu(k) + c_2 \nu^2(k), \end{aligned} \quad (2.6)$$

ou ainda

$$y(k) = c_0 + c_1 [a_1 u(k-1) + b_1 \nu(k-1)] + c_2 [a_1 u(k-1) + b_1 \nu(k-1)]^2, \quad (2.7)$$

através de manipulações algébricas vem,

$$\begin{aligned} y(k) &= d_0 + d_1 u(k-1) + d_2 \nu(k-1) + d_3 u(k-1) \nu(k-1) + \\ &\quad d_4 u^2(k-1) + d_5 \nu^2(k-1), \end{aligned} \quad (2.8)$$

considerando que no estado estacionário, $\bar{\nu} = K_0 \bar{u}$, a partir de (2.8) tem-se

$$\bar{y} = g_0 + g_1 \bar{u} + g_2 \bar{u}^2. \quad (2.9)$$

Nota-se que, tanto o modelo de Hammerstein quanto o de Wiener possuem comportamento em estado estacionário equivalentes, dados pela função $F(\cdot)$. Porém, o mesmo não pode ser afirmado com relação ao comportamento dinâmico. Detalhes sobre utilização das representações de Hammerstein e Wiener, assim como da seleção de estrutura e estimação de parâmetros podem ser vistos em (Billings e Fakhouri, 1982; Greblick e Pawlak, 1989; Wigren, 1993; Patwardhan et al., 1998; Ikonen e Najim, 1999).

2.2 Representações NARMAX Racional e Polinomial

A base teórica para o desenvolvimento da representação NARMAX polinomial foi proposta por Leontaritis e Billings (1985). Desde então modelos NARMAX vêm sendo usados para representar uma grande classe de não-linearidades dinâmicas.

Várias vantagens têm sido atribuídas à representação NARMAX polinomial. Dentre elas destacam-se: (i) a linearidade nos parâmetros, (ii) a facilidade de combinar seleção de estrutura com estimação de parâmetros, (iii) a facilidade de simulação e (iv) a possibilidade de obter modelos estáticos.

A representação NARMAX racional é considerada uma extensão natural depois do modelo polinomial não-linear. Billings e Zhu (1991) destacam que a representação NARMAX racional descreve eficientemente várias classes de não-linearidades. Às funções racionais também são atribuídas características de serem mais gerais e capazes de representar com exatidão certos tipos de singularidades, ou características próximas de singular. Funções racionais possuem boa propriedade de extrapolação, são fáceis para avaliar e incluem funções polinomiais como caso especial (Zhu e Billings, 1993). Funções racionais estáticas têm tido sucesso quando usadas para aproximar funções não-lineares típicas como e^x , e^{-x} e e (Braess, 1986). Uma desvantagem do modelo racional é sua não-linearidade nos parâmetros, o que torna a estimação destes mais complexa.

A seguir são apresentadas as formas gerais das representações NARMAX racional e polinomial e discutidos os problemas referentes à escolha de estrutura e estimação de parâmetros.

2.2.1 Modelos NARMAX Racionais

Um modelo racional estocástico de entrada e saída é definido com a razão de dois polinômios envolvendo o passado das entradas, saídas e ruído, como (Billings e Chen, 1989b):

$$y(k) = \frac{a \begin{pmatrix} y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k-1), \dots, \\ u(k-n_u), e(k-1), \dots, e(k-n_e) \end{pmatrix}}{b \begin{pmatrix} y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k-1), \dots, \\ u(k-n_u), e(k-1), \dots, e(k-n_e) \end{pmatrix}} + e(k), \quad (2.10)$$

sendo que $u(k)$ e $y(k)$ representam, respectivamente, a entrada e a saída nos instantes discretos k ($k = 1, 2, \dots$), $e(k)$ representa um ruído independente não-observável, igualmente distribuído, com média zero e variância finita σ_e^2 . n_u , n_y e n_e são, respectivamente, os máximos atrasos dos termos da entrada, saída e ruído. $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$ são funções polinomiais não-lineares quaisquer.

Para simplificar, os polinômios do numerador e denominador da equação (2.10) são definidos, respectivamente, como

$$a(k) = \sum_{j=1}^{num} p_{nj}(k)\theta_{nj}, \quad (2.11)$$

$$b(k) = \sum_{j=1}^{den} p_{dj}(k)\theta_{dj}, \quad (2.12)$$

sendo p_{nj} e p_{dj} os regressores, dados por $y(k-1), \dots, y(k-n_y)$, $u(k-1), \dots, u(k-n_u)$, $e(k-1), \dots, e(k-n_e)$ ou combinações dos mesmos, θ_{nj} e θ_{dj} os parâmetros, todos se referindo, respectivamente, ao numerador e denominador. Sendo num o número de termos no numerador, e den o número de termos no denominador, o número de parâmetros a serem estimados é dado por: $num + den$.

2.2.2 Linearização nos Parâmetros

Os métodos desenvolvidos para seleção de estrutura e estimação de parâmetros de modelos NARMAX polinomiais se baseiam na linearidade nos parâmetros. Uma vez que a equação (2.10) é não-linear nos parâmetros, tais métodos não podem ser aplicados, pelo menos a princípio. Uma alternativa é a multiplicação nos dois lados da equação (2.10) por $b(k)$ e a movimentação de todos os termos para o lado direito, com exceção de $y(k)p_{d1}(k)\theta_{d1}$, obtendo (Zhu e Billings, 1991):

$$\begin{aligned} Y(k) &= a(k) - y(k) \sum_{j=2}^{den} p_{dj}(k)\theta_{dj} + b(k)e(k) \\ &= \sum_{j=1}^{num} p_{nj}(k)\theta_{nj} - \sum_{j=2}^{den} y(k)p_{dj}(k)\theta_{dj} + \zeta(k), \end{aligned} \quad (2.13)$$

sendo

$$\begin{aligned}
Y(k) &= y(k)\theta_{d1}p_{d1}|_{\theta_{d1}=1} \\
&= p_{d1}(k)\frac{a(k)}{b(k)} + p_{d1}e(k)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

e

$$\begin{aligned}
\zeta(k) &= b(k)e(k) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{den} p_{dj}(k)\theta_{dj} \right) e(k),
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Uma vez que $e(k)$ tem média nula e não está correlacionado com $b(k)$, tem-se

$$E[\zeta(k)] = E[b(k)]E[e(k)] = 0. \tag{2.16}$$

A equação (2.13) pode ser expressa como

$$\begin{aligned}
Y(k) &= \sum_{j=1}^{num} p_{nj}(k)\theta_{nj} - \sum_{j=2}^{den} y(k)p_{dj}\theta_{dj} + b(k)e(k) \\
&= \sum_{j=1}^{num} p_{nj}(k)\theta_{nj} - \sum_{j=2}^{den} \frac{a(k)}{b(k)}p_{dj}\theta_{dj} + p_{d1}(k)e(k).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Em notação vetorial:

$$\begin{aligned}
Y(k) &= \mathbf{P}(k)\Theta + \zeta(k) \\
&= \hat{\mathbf{P}}(k)\Theta + p_{d1}(k)e(k),
\end{aligned} \tag{2.18}$$

sendo

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(k) &= [\mathbf{P}_n(k) \ \mathbf{P}_d(k)] \\
&= [p_{n1}(k) \ \cdots \ p_{nnum}(k) \ -p_{d2}(k)y(k) \ \cdots \ -p_{dden}(k)y(k)] \\
&= \left[p_{n1}(k) \ \cdots \ p_{nnum}(k) \ -p_{d2}(k) \left(\frac{a(k)}{b(k)} + e(k) \right) \ \cdots \right. \\
&\quad \left. -p_{dden}(k) \left(\frac{a(k)}{b(k)} + e(k) \right) \right];
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}\Theta^T &= [\Theta_n \ \Theta_d] \\ &[\Theta_{n1} \ \cdots \ \Theta_{nnum} \ \Theta_{d2} \ \cdots \ \Theta_{nden}],\end{aligned}\tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}}(k) &= [\mathbf{P}_n(k) \ \hat{\mathbf{P}}_d(k)] \\ &= \begin{bmatrix} p_{n1}(k) & \cdots & p_{nnum}(k) & -p_{d2}(k) \left(\frac{a(k)}{b(k)}\right) & \cdots & -p_{dden}(k) \left(\frac{a(k)}{b(k)}\right) \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{2.21}$$

sendo, $Y(k)$ um escalar, $\mathbf{Y}(k)$, $\mathbf{P}(k)$, Θ e $\hat{\mathbf{P}}(k)$ vetores. $\hat{\mathbf{P}}(k)$ é uma estimativa de $\mathbf{P}(k)$, uma vez que $a(k)/b(k)$ não pode ser medido. O vetor $\mathbf{P}(k)$ pode ser montado exclusivamente a partir dos valores medidos de $y(k)$ e $u(k)$.

As equações (2.17) e (2.18) são lineares nos parâmetros. Portanto métodos para seleção de estrutura e estimação de parâmetros desenvolvidos para modelos polinomiais podem ser aplicados a estas. Um efeito da linearização dos parâmetros será discutido na seção 2.2.5. O procedimento discutido acima, que torna linear nos parâmetros a representação NARMAX racional, será denominado *pseudo-linearização*.

2.2.3 Modelos NARMAX Polinomiais

Embora tenha surgido primeiro, a representação NARMAX polinomial pode ser considerada como um caso particular da representação NARMAX racional. Um modelo NARMAX polinomial é representado por (Leontaritis e Billings, 1985a; Leontaritis e Billings, 1985b; Billings e Chen, 1989a):

$$\begin{aligned}y(k) &= F^\ell[y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-n_y), u(k-1), \dots, \\ &\quad u(k-n_u), e(k-1), \dots, e(k-n_e)] + e(k),\end{aligned}\tag{2.22}$$

equivalente à equação (2.10) com $b(k) = 1$. Todas as variáveis são similares ao modelo racional e F^ℓ representa uma função polinomial qualquer com grau de não-linearidade ℓ .

Utilizando a representação matricial, a Equação (2.22) pode ser reescrita como

$$\mathbf{Y} = \mathbf{P}\hat{\Theta} + \xi,\tag{2.23}$$

sendo $\mathbf{P}$ a matriz de regressores, Θ os parâmetros desconhecidos do modelo e ξ vetor de resíduo.

2.2.4 Escolha de Estrutura

As não-linearidades de modelos NARMAX polinomial e racional são determinadas por produtos entre entradas, entre saídas ou por produtos entre entrada e saída. Para o caso racional, também pela razão de dois polinômios contendo as combinações citadas acima. A escolha de estrutura destes em modelos consiste em determinar que termos farão parte do modelo, ou seja, que produtos de termos devem estar presentes em sua estrutura.

Entre as técnicas usadas na determinação de estrutura, será destacado o procedimento denominado ERR (*error reduction ratio*) (Billings et al., 1989b). O ERR associa a cada termo-candidato um índice que corresponde à contribuição deste na explicação da variância dos dados de saída. Desta forma é possível ordenar os termos-candidatos de acordo com a contribuição de cada um. O algoritmo ERR gera uma lista em ordem decrescente com os termos e suas contribuições na identificação do sistema.

2.2.4.1 ERR

O ERR é um critério baseado num algoritmo ortogonal que eficientemente combina seleção de estrutura e estimação de parâmetros. Foi originalmente desenvolvido por Korenberg (1985), estendido para a identificação de sistemas de uma única-entrada e única-saída para sistemas estocásticos (Korenberg et al., 1988) e posteriormente aplicado a sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (Billings et al., 1989b).

O ERR pode ser aplicado a problemas que podem ser escritos na forma matricial

$$\mathbf{Y} = \mathbf{P}\hat{\Theta} + \xi, \quad (2.24)$$

sendo $\mathbf{P}$ a matriz de regressores, $\hat{\Theta}$ o vetor que contém os parâmetros a serem estimados e ξ o vetor de resíduos. O objetivo é obter um vetor de parâmetros $\hat{\Theta}$, estimado de forma que a norma Euclidiana $\|\mathbf{Y} - \mathbf{P}\hat{\Theta}\|_2$ seja minimizada. O ERR associará um índice a cada coluna da matriz $\mathbf{P}$, correspondente à contribuição desta na explicação da variância dos dados de saída $\mathbf{Y}$.

O método de Mínimos Quadrados Ortogonal (OLS - *Orthogonal Least Squares*) parte de vetores de base $\mathbf{p}_i$ e encontra um vetor solução, que satisfaz a condição de $\mathbf{P}\Theta$ projetar os valores de y no espaço dado pelos vetores base. O método OLS (Billings et al., 1989b) envolve a transformação do conjunto de vetores $\mathbf{p}_i$ em um conjunto de vetores de base ortogonais, realizando

cálculos para determinar a contribuição individual de cada vetor. Sendo M o número de regressores na matriz $\mathbf{P}$, essa é decomposta como

$$\mathbf{P} = \mathbf{W}\mathbf{A}, \quad (2.25)$$

sendo $\mathbf{A}$ uma matriz triangular superior $M \times M$ com 1's na diagonal,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1M} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2M} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

e $\mathbf{W}$ é uma matriz $N \times M$ com colunas $\mathbf{w}_i$ ortogonais sobre os dados. Então

$$\mathbf{W}^T \mathbf{W} = \mathbf{D}, \quad (2.27)$$

e $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ é diagonal com elementos d_i :

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_i = \sum_{t=1}^N \mathbf{w}_i(t) \mathbf{w}_i(t), \quad 1 \leq i \leq M. \quad (2.28)$$

O espaço representado pelo conjunto de vetores de base ortogonais $\mathbf{w}_i$ é o mesmo espaço representado pelo conjunto $\mathbf{p}_i$, podendo-se rescrever a Equação (2.24) como

$$\mathbf{Y} = \mathbf{W}\mathbf{g} + \Xi. \quad (2.29)$$

A solução OLS de $\hat{\mathbf{g}}$ é dada por

$$\hat{\mathbf{g}}_i = \frac{\mathbf{w}_i^T \mathbf{Y}}{\mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_i}, \quad 1 \leq i \leq M. \quad (2.30)$$

Os valores de $\hat{\mathbf{g}}$ e $\hat{\Theta}$ satisfazem o sistema triangular

$$\mathbf{A}\hat{\Theta} = \hat{\mathbf{g}}. \quad (2.31)$$

Esta última equação é usada para obter os parâmetros estimados $\hat{\Theta}$ a partir de $\hat{\mathbf{g}}$. Os métodos Gram-Schmidt e Gram-Schmidt Modificado podem ser usados para obter (2.25) e então, resolver pelos mínimos quadrados, estimando $\hat{\Theta}$ (Golub e Van Loan, 1989).

O valor quadrático médio da saída pode ser expresso por

$$\frac{1}{N} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^M \mathbf{g}_i^2 \mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_i + \frac{1}{N} \Xi^T \Xi . \quad (2.32)$$

Nota-se que $\mathbf{g}_i^2 \mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_i / N$ é a parte do valor quadrático médio da saída explicado pelo i -ésimo regressor, e que $\Xi^T \Xi / N$ é a parcela do valor quadrático médio da saída $y(t)$ não explicada. A taxa de redução de erro (*error reduction ratio* - ERR), devida à inclusão de $\mathbf{w}_i$ no modelo é definida como

$$[\text{ERR}] = \frac{\mathbf{g}_i^2 \mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_i}{\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}} , \quad 1 \leq i \leq M . \quad (2.33)$$

A razão acima oferece um meio simples e efetivo de verificar a importância de cada regressor na explicação da variância da saída.

2.2.5 Estimação de Parâmetros

O método dos mínimos quadrados vem sendo usado tanto para estimação de parâmetros de modelos NARMAX polinomiais quanto para modelos NARMAX racionais. No contexto da estimação de parâmetros, a principal diferença entre estas representações é a não-linearidade nos parâmetros dos modelos racionais. Porém a pseudo-linearização apresentada na seção anterior possibilita a aplicação do método dos mínimos quadrados também para o caso racional.

Uma discussão importante a ser realizada é a polarização do estimador usado. Nesta seção será discutida a polarização de estimadores e a seguir apresentam-se métodos baseados nos mínimos quadrados para estimar parâmetros de modelos NARMAX polinomial e racional.

2.2.5.1 Polarização

A estimação dos parâmetros de um modelo linear nos parâmetros do tipo

$$\mathbf{Y} = \mathbf{P}\Theta + \mathbf{e}, \quad (2.34)$$

pode ser obtida por

$$\hat{\Theta} = \mathbf{A}\mathbf{Y}, \quad (2.35)$$

sendo $\mathbf{P}$ a matriz dos regressores e $\mathbf{A}$ uma matriz cujos elementos dependem de alguma maneira dos regressores. Os parâmetros estimados não estarão polarizados se

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{A}\mathbf{Y}] - \Theta &= 0 \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{A}(\mathbf{P}\Theta + \mathbf{e})] - \Theta, \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{I}]\Theta + \mathbb{E}[\mathbf{A}\mathbf{e}], \\ &= (\mathbb{E}[\mathbf{A}\mathbf{P}] - \mathbf{I})\Theta + \mathbb{E}[\mathbf{A}\mathbf{e}], \end{aligned} \quad (2.36)$$

sendo Θ determinístico. Da equação (2.36) verifica-se que a polarização será nula se

- $\mathbb{E}[\mathbf{A}\mathbf{P}] = \mathbf{I}$,
- os elementos de $\mathbf{A}$ não forem correlacionados com o ruído,
- o ruído possuir média nula.

A condição $\mathbb{E}[\mathbf{A}\mathbf{P}] = \mathbf{I}$ é satisfeita através da escolha adequada da matriz $\mathbf{A}$. Pode ser demonstrado que o estimador de mínimos quadrados atende à primeira condição. As duas últimas são satisfeitas pelo estimador estendido de mínimos quadrados (EMQ), descrito na próxima seção.

Tanto modelos polinomiais quanto racionais podem ter o problema de estimação de parâmetros escrito na forma (2.35). Nos modelos polinomiais, pode-se demonstrar que não ocorrerá polarização se e for não-correlacionado com a entrada u e com a saída y . Para o caso racional, devido a $y(k)$ implicitamente conter termos de ruído $e(k)$ sempre haverá correlação entre o ruído e o sinal, então os parâmetros estimados pelo método dos mínimos quadrados sempre serão polarizados (Billings e Zhu, 1991).

2.2.5.2 Estimador de Mínimos Quadrados

Seja um problema escrito na forma da equação (2.24). O estimador de mínimos quadrados é um estimador do tipo $\hat{\Theta} = \mathbf{A}\mathbf{Y}$, sendo

$$\mathbf{A} = [\mathbf{P}^T \mathbf{P}]^{-1} \mathbf{P}^T, \quad (2.37)$$

e $\mathbf{P}$ a matriz de regressores. Para o caso NARMAX polinomial, pode-se demonstrar que o estimador de mínimos quadrados é não-polarizado se o ruído for branco, com média nula.

Aplicando-se as propriedades dos estimadores não-polarizados, descritos na seção anterior, tem-se

1. $E[\mathbf{A}\mathbf{P}] = \mathbf{I}$,
2. $E[\mathbf{A}\mathbf{e}] = 0$, pois o ruído é branco, e na matriz de regressores $\mathbf{P}$ aparecem apenas termos $e(k-1)$,
3. o ruído possui média nula, por consideração.

Nem sempre, em casos reais, onde há um número limitado de amostras pode-se garantir que o ruído seja branco. Muitas vezes o ruído possui um certo grau de auto-regressividade. Nestes caso, por incluir regressores da saída, ocorrerá polarização do estimador de mínimos quadrados.

O estimador estendido de mínimos quadrados (EMQ) contorna o problema da polarização acrescentando à matriz de regressores a parte “modelada” do ruído. Então, a nova matriz de regressores será composta por

$$\mathbf{P}^* = [\mathbf{P} \ \mathbf{P}_e], \quad (2.38)$$

sendo $\mathbf{P}$ a matriz de regressores que contém os termos de processo, e $\mathbf{P}_e$ a matriz que contém os termos de ruído. Dessa forma, garante-se que o estimador será não-polarizado e a estimação não-polarizada de $\hat{\Theta}$ será dada, através de um processo iterativo, por

$$\hat{\Theta}_i^* = [\mathbf{P}_i^{*\text{T}} \mathbf{P}_i^*]^{-1} \mathbf{P}_i^{*\text{T}} \mathbf{y}. \quad (2.39)$$

Na prática a função que “modela” a parte determinística do ruído não é conhecida. Porém, tem-se observado que modelos lineares de ruído com n_e entre 10 e 20 são suficientes para redução da polarização dos estimadores.

Sendo o ruído uma grandeza que não pode ser medida, a construção da matriz $\mathbf{P}_e$ é feita com valores estimados do ruído, determinados por

$$\xi(k)_i = \mathbf{y} - \mathbf{P}_{i-1}^* \hat{\Theta}_{i-1}^*, \quad (2.40)$$

sendo que i indica o número de iterações do algoritmo EMQ. No primeiro passo, $i = 1$ utiliza-se o estimador de mínimos quadrados. Em geral com quatro

iterações, $i = 4$, é suficiente para se eliminar a polarização do estimador. Detalhes a respeito de estimadores não polarizados podem ser vistos em (Aguirre, 2000a).

2.2.5.3 Estimador de Mínimos Quadrados para Modelos Racionais

Para o caso racional, a matriz $\mathbf{P}^T$ pode ser escrita como

$$\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} p_{n1}(1) & \cdots & p_{n1}(N) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{nnum}(1) & \cdots & p_{nnum}(N) \\ -p_{d2}(1) \left(\frac{a(1)}{b(1)} + e(1) \right) & \cdots & -p_{d2}(N) \left(\frac{a(N)}{b(N)} + e(N) \right) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -p_{dden}(1) \left(\frac{a(1)}{b(1)} + e(1) \right) & \cdots & -p_{dden}(N) \left(\frac{a(N)}{b(N)} + e(N) \right) \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

e

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{Y}(1) \quad \cdots \quad \mathbf{Y}(N)]^T, \quad (2.42)$$

sendo que N representa o número total de amostras, e conforme (2.10), em $\mathbf{P}$ pode-se ter termos de ruído.

Aplicando a propriedade do limite da probabilidade, tem-se

$$\begin{aligned} P \lim[\hat{\Theta}] &= P \lim [(\mathbf{P}^T \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{Y}] \\ &= P \lim[\mathbf{P}^T \mathbf{P}]^{-1} P \lim[\mathbf{P}^T \mathbf{Y}], \end{aligned} \quad (2.43)$$

e assumindo que as seqüências de entrada e saída são estacionárias e que o comprimento dos dados N é suficientemente grande, tem-se

$$\begin{aligned} P \lim \left[\frac{1}{N} \mathbf{P}^T \mathbf{P} \right] &\approx \frac{1}{N} \mathbf{P}^T \mathbf{P} \\ P \lim \left[\frac{1}{N} \mathbf{P}^T \mathbf{Y} \right] &\approx \frac{1}{N} \mathbf{P}^T \mathbf{Y}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

sendo

$$\mathbf{P}^T \mathbf{P} =$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccccccc}
 \sum_{k=1}^N p_{n_1}^2(k) & \cdots & \sum_{k=1}^N p_{n_1}(k)p_{n_{num}}(k) & \cdots & -\sum_{k=1}^N p_{n_1}(k)p_{d_2}(k)\frac{a(k)}{b(k)} & \cdots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 \sum_{k=1}^N p_{n_{num}}(k)p_{n_1}(k) & \cdots & \sum_{k=1}^N p_{n_{num}}^2(k) & \cdots & -\sum_{k=1}^N p_{n_{num}}(k)p_{d_2}(k)\frac{a(k)}{b(k)} & \cdots \\
 -\sum_{k=1}^N p_{d_2}(k)p_{n_1}(k)\frac{a(k)}{b(k)} & \cdots & -\sum_{k=1}^N p_{d_2}(k)p_{n_{num}}(k)\frac{a(k)}{b(k)} & \cdots & -\sum_{k=1}^N p_{d_2}^2(k)\left(\frac{a(k)}{b(k)}\right)^2 & \cdots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 -\sum_{k=1}^N p_{d_{den}}(k)p_{n_1}(k)\frac{a(k)}{b(k)} & \cdots & -\sum_{k=1}^N p_{d_{den}}(k)p_{n_{num}}(k)\frac{a(k)}{b(k)} & \cdots & -\sum_{k=1}^N p_{d_{den}}p_{d_2}(k)\left(\frac{a(k)}{b(k)}\right)^2 & \cdots \\
 \\
 -\sum_{k=1}^N p_{n_1}(k)p_{d_{den}}(k)\frac{a(k)}{b(k)} & & & & & & \\
 \vdots & & & & & & \\
 -\sum_{k=1}^N p_{n_{num}}(k)p_{d_{den}}(k)\frac{a(k)}{b(k)} & & & & & & \\
 \vdots & & & & & & \\
 -\sum_{k=1}^N p_{d_2}(k)p_{d_{den}}(k)\left(\frac{a(k)}{b(k)}\right)^2 & & & & & &
 \end{array} \right] + \\
 & \left[\begin{array}{ccccccc}
 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
 0 & \cdots & 0 & \cdots & \sigma_e^2 \sum_{k=1}^N p_{d_2}^2(k) & \cdots & \sigma_e^2 \sum_{k=1}^N p_{d_2}(k)p_{d_{den}}(k) \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 0 & \cdots & 0 & \cdots & \sigma_e^2 \sum_{k=1}^N p_{d_{den}}(k)p_{d_2}(k) & \cdots & \sigma_e^2 \sum_{k=1}^N p_{d_{den}}^2(k)
 \end{array} \right], \tag{2.45}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^T \mathbf{y} = & \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N p_{n_1}(k) p_{d_1}(k) \left(\frac{a(k)}{b(k)} + e(k) \right) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^N p_{n_{num}}(k) p_{d_1}(k) \left(\frac{a(k)}{b(k)} + e(k) \right) \\ \sum_{k=1}^N p_{d_2}(k) p_{d_1}(k) \left(\frac{a(k)}{b(k)} + e(k) \right)^2 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^N p_{d_{den}}(k) p_{d_1}(k) \left(\frac{a(k)}{b(k)} + e(k) \right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N p_{n_1}(k) p_{d_1}(k) \left(\frac{a(k)}{b(k)} \right) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^N p_{n_{num}}(k) p_{d_1}(k) \left(\frac{a(k)}{b(k)} \right) \\ \sum_{k=1}^N p_{d_2}(k) p_{d_1}(k) \left(\frac{a(k)}{b(k)} \right)^2 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^N p_{d_{den}}(k) p_{d_1}(k) \left(\frac{a(k)}{b(k)} \right)^2 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sigma_e^2 \sum_{k=1}^N p_{d_2}(k) p_{d_1}(k) \\ \vdots \\ -\sigma_e^2 \sum_{k=1}^N p_{d_{den}}(k) p_{d_1}(k) \end{bmatrix}. \tag{2.46}
\end{aligned}$$

Para $N \rightarrow \infty$, a estimativa de $\hat{\Theta}$ converge em probabilidade para $[\mathbf{P}^T \mathbf{P}]^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{y}$.

Reescrevendo as equações (2.45 e 2.46), usando notação matricial, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^T \mathbf{P} &= [\mathbf{P}^T \mathbf{P}]_{k-1} + \sigma_e^2 \Psi, \quad \text{e} \\
\mathbf{P}^T \mathbf{y} &= [\mathbf{P}^T \mathbf{y}]_{k-1} + \sigma_e^2 \psi, \tag{2.47}
\end{aligned}$$

sendo

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \sigma_e^2 \sum_{k=1}^N p_{d_2}^2(k) & \cdots & \sigma_e^2 \sum_{k=1}^N p_{d_2}(k) p_{d_{den}}(k) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \sigma_e^2 \sum_{k=1}^N p_{d_{den}}(k) p_{d_2}(k) & \cdots & \sigma_e^2 \sum_{k=1}^N p_{d_{den}}^2(k) \end{bmatrix} \tag{2.48}$$

e

$$\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sigma_e^2 \sum_{k=1}^N p_{d_2}(k) p_{d_1}(k) \\ \vdots \\ -\sigma_e^2 \sum_{k=1}^N p_{d_{den}}(k) p_{d_1}(k) \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Todos os termos envolvendo $e(k)$ aparecem em $\sigma_e^2 \Psi$ e $\sigma_e^2 \psi$, que são os termos de ruído. O subscrito $(k-1)$ indica que apenas termos de ruído até $(k-1)$ estão presentes (Billings e Zhu, 1991).

O estimador de parâmetros dado em (2.37) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \hat{\Theta} &= [\mathbf{P}^T \mathbf{P}]^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{Y} \\ &= [[\mathbf{P}^T \mathbf{P}]_{k-1}^{-1} + \sigma_e^2 \Psi]^{-1} [[\mathbf{P}^T \mathbf{Y}]_{k-1} + \sigma_e^2 \psi]. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Note-se que, $[\mathbf{P}^T \mathbf{P}]^{-1} \mathbf{P}^T$ está correlacionado com o ruído, o que significa que o estimador é polarizado, mesmo se o ruído for branco com média nula. A polarização do estimador é o preço pago pela linearização dos parâmetros.

2.2.6 Estimador de Mínimos Quadrados Modificado para Modelos Racionais - REMQ

O procedimento apresentado aqui foi proposto pela primeira vez em (Corrêa, 1997) como uma alternativa simplificada do algoritmo proposto em (Billings e Zhu, 1991). Basicamente consiste em redução da polarização utilizando as matrizes Ψ e ψ definidas em (2.48, 2.49), durante a fase de estimação de parâmetros e a utilização das propriedades dos mínimos quadrados estendidos.

O método é sintetizado através do Algoritmo 2.1. Note-se que, se no modelo não existirem termos de ruído no numerador e no denominador, o quarto passo não precisa ser executado a cada interação, pois as matrizes Ψ e ψ serão constantes. A matriz Φ_e deve ser atualizada a cada interação. No quinto passo, o que se pretende é estimar os fatores que polarizam o estimador, subtraindo-os para estimar novos parâmetros.

Algoritmo 2.1. Estimador de Mínimos Quadrados para Modelos Racionais - REMQ

- 1: Estimar os coeficientes iniciais através de

$$\hat{\Theta} = [\mathbf{P}^T \mathbf{P}]^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{y}$$

- 2: Cálculo dos resíduos

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{P} \hat{\Theta}$$

- 3: Calcular a variância dos resíduos σ_e^2
- 4: Construção da nova matriz de regressores. $\mathbf{P}^* = [\mathbf{P} \ \mathbf{P}_e]$
- 5: Construir as matrizes ψ e Ψ
- 6: Estimar novos parâmetros usando

$$\hat{\Theta} = [\mathbf{P}^{*\text{T}} \mathbf{P}^* - \sigma_e^2 \Psi]^{-1} [\mathbf{P}^{*\text{T}} \mathbf{y} - \sigma_e^2 \psi]$$
- 7: Retornar ao segundo passo até a convergência

O Algoritmo 2.1 foi utilizado em (Corrêa, 1997; Aguirre et al., 1999b; Corrêa et al., 2000) com excelentes resultados na estimação de parâmetros. Nos trabalhos citados são obtidos modelos a partir de dados simulados e a partir de dados reais, tanto para sistemas entrada-saída quanto para sistemas autônomos com comportamento caótico.

2.3 Representações Baseadas em Redes Neurais

Nesta seção são apresentadas a forma geral das representações baseadas em redes neurais multicamadas (MLPs) e redes com funções de base radial (RBFs).

2.3.1 Redes Neurais Multicamadas

A utilização de redes neurais na identificação de sistemas dinâmicos foi proposta em (Narendra e Parthasarathy, 1990). Os referidos autores propuseram quatro representações diferentes, a saber:

Caso 1:

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n_y} a_i y(k-i) + g(u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-n_u)). \quad (2.51)$$

Caso 2:

$$y(k) = f(y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-n_y)) + \sum_{i=1}^{n_u} b u(k-i). \quad (2.52)$$

Caso 3:

$$y(k) = f(y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-n_y)) + g(u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-n_u)). \quad (2.53)$$

Caso 4:

$$y(k) = f(y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-n_y), u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-n_u)). \quad (2.54)$$

A Figura (2.3) resalta as diferenças básicas para cada representação proposta, através de diagramas em blocos. No primeiro caso, toda a não-linearidade do sistema está em função da entrada $u(k)$, similar à representação de Hammerstein. No segundo caso, a não-linearidade está representada em função da saída, $y(k)$. No terceiro caso, aparecem funções não-lineares tanto para a entrada $u(k)$, quanto para a saída $y(k)$, podendo estas ser diferentes. No quarto caso, a função não-linear $f(\cdot)$ inclui tanto os sinais da entrada $u(k)$, quanto da saída $y(k)$.

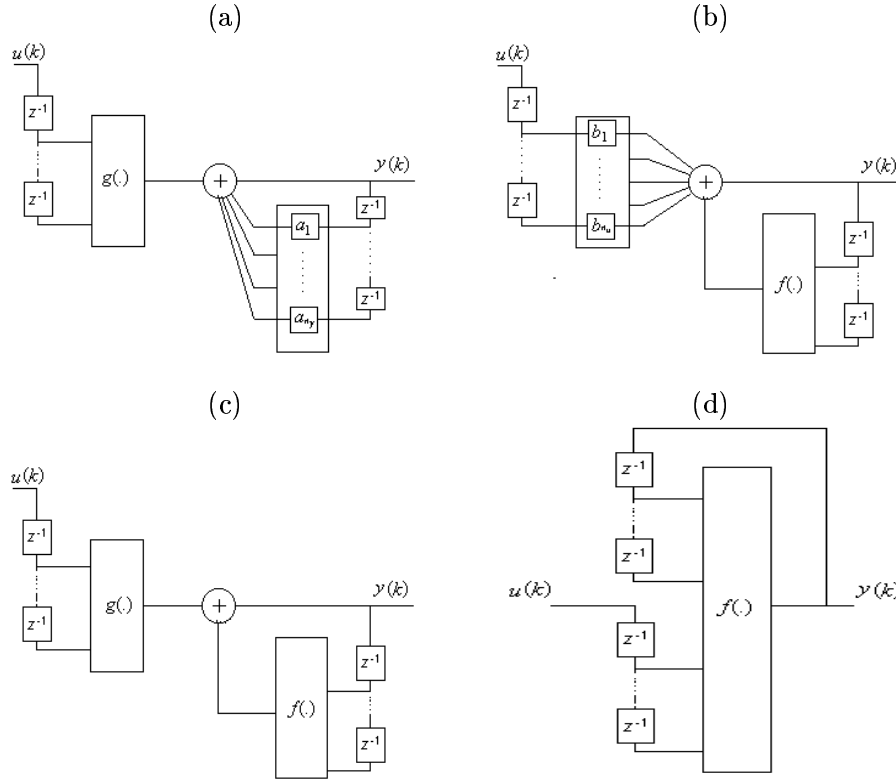


Figura 2.3: Representações propostas por Narendra e Parthasarathy (1990) (a) Caso 1, (b) Caso 2, (c) Caso 3 e (d) Caso 4.

As redes neurais artificiais inicialmente foram concebidas para mapeamento de funções estáticas e reconhecimento de padrões. Com o desenvolvimento

da teoria de redes neurais, o aparecimento de novas redes e o aprimoramento de algoritmos de treinamento, as redes neurais vêm cada vez mais sendo usadas na identificação de sistemas dinâmicos (Gençay e Liu, 1997; Henrique et al., 1998).

De uma maneira geral, as redes neurais são caracterizadas por sua topologia, pelas características computacionais de seus neurônios e pelo algoritmo de treinamento (Henrique et al., 1998). Outra caracterização de redes neurais diz respeito à direção do fluxo de informação internamente à rede. Redes onde os sinais internos fluem na direção da entrada para saída são denominadas redes *feedforward*. Por outro lado, quando ocorre realimentação (*feedback*) interna na rede, estas são denominadas redes recorrentes internas (Jordan, 1986; Elman, 1990). Tanto redes *feedforward* quando redes recorrentes internas vêm sendo usadas na identificação de sistemas (Henrique et al., 1998; Gençay e Liu, 1997).

2.3.2 Redes *Feedforward*

A Figura 2.4 apresenta a topologia básica de uma rede *feedforward* com n entradas, 1 saída, 1 camada escondida com m neurônios. Como citado anteriormente, o fluxo de informação internamente na rede ocorre sempre da entrada para a saída. A entrada da rede é composta pelo vetor $\mathbf{x}$ que, conforme visto na Figura 2.3(d), é constituído, no caso de identificação de sistemas dinâmicos, por valores atrasados da saída e da entrada.

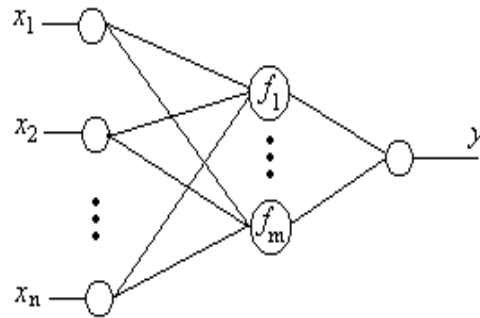


Figura 2.4: Rede neural artificial de n entradas, 1 saída e m neurônios na camada escondida

A saída de uma rede, como apresentada na Figura 2.4, pode ser escrita como

$$\hat{y}_i(k) = F_i \left(\sum_{j=0}^m \omega_{ij} f_j \left(\sum_{l=1}^n \omega_{jl} x_l + w_{j0} \right) + \omega_{i0} \right) \quad (2.55)$$

sendo F_i a função de ativação da saída, f_j a função de ativação da camada escondida, n o número de entradas, m o número de neurônios na camada escondida.

Para obter uma rede neural que reproduza o comportamento de um sistema qualquer, as seguintes etapas devem ser cumpridas: (i) escolha do número de camadas escondidas, (ii) número de neurônios em cada camada, (iv) escolha da função de ativação e (v) treinamento da rede. Esses fatores determinam a chamada topologia da rede, sendo equivalente à escolha de estrutura de um modelo NARMAX racional ou polinomial.

2.3.3 Redes Recorrentes Internas

Outra classe de redes usadas na representação de sistemas dinâmicos são as redes recorrentes internas. Estas possuem configuração do tipo mostrado na Figura 2.5. Note-se que m entradas foram adicionadas à rede, cada uma dessas entradas com valores atrasados da saída do respectivo neurônio na camada escondida (Elman, 1990). A saída da rede apresentada na Figura 2.5 pode ser expressa como

$$\hat{y}_i(k) = F_i \left(\sum_{j=0}^q \omega_{ij} f_j \left(\sum_{l=1}^n \omega_{jl} x_l + \omega_{j0} + \sum_{l=1}^m \omega_{jn+l} h_l \right) + \omega_{i0} \right), \quad (2.56)$$

sendo h_l o valor anterior na saída do neurônio l da camada escondida.

As redes recorrentes são consideradas como melhores aproximações das características dos neurônios biológicos. Outra característica atribuída às redes recorrentes é uma maior capacidade de reproduzir comportamentos dinâmicos, devido à presença de realimentação interna (Gençay e Liu, 1997).

A primeira vantagem atribuída às rede recorrentes é a capacidade de filtragem de dados (Gençay e Liu, 1997). Nessas redes uma entrada adicional é acrescida ao vetor de entrada; como consequência, a cada etapa de treinamento, além de componentes de ruído daquela amostra, passam a existir informação da história do ruído, fornecida pela realimentação interna. Tal característica possibilita uma maior rejeição ao ruído nas redes recorrentes (Gençay e Liu, 1997). Ao contrário das redes *feedforward*, nas recorrentes não é necessário acrescentar estruturas para tratamento de ruído.

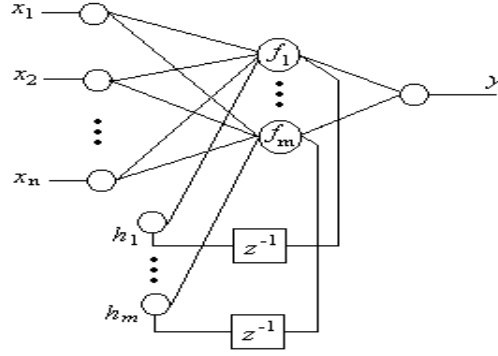


Figura 2.5: Rede neural recorrente com n entradas, 1 saída e m neurônios na camada escondida

2.3.4 Rede Neural Artificial de Base Radial

A rede neural de base radial, chamada de RBF, é um caso particular das redes multicamadas. A RBF é constituída por três camadas, uma de entrada, uma escondida e uma de saída. Na escondida utilizam-se funções de base radial como função de ativação. Na camada de saída, funções de ativação lineares.

2.3.5 Funções de Base Radial

Dado um conjunto de pontos $\{x_i, y_i; i = 1, 2, \dots, N\}$ um polinômio linear que interpola estes pontos pode ser composto por segmentos de retas do tipo

$$f(x) = \sum_{i=1}^N w_i |x - \xi_i|, \quad (2.57)$$

sendo $\xi_i : i = 1, 2, \dots, N$ chamados de *nós*, ou *pontos essenciais*, e os coeficientes $w_i : i = 1, 2, \dots, N$ são números reais, determinados de forma a satisfazer as restrições dadas pela equação

$$f(x_i) = y_i \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.58)$$

A equação (2.57) é uma combinação linear das funções contínuas $|x - \xi_1|$, $|x - \xi_2|$, $\dots$, $|x - \xi_N|$. Entretanto, o cálculo do valor absoluto torna as funções descontínuas nos *nós*. Uma forma de caracterizar a continuidade e a existência de derivadas de alta ordem é escrever a aproximação polinomial como sendo

$$f(x) = \sum_{i=1}^N w_i \phi(|x - \xi_i|), \quad (2.59)$$

sendo que $\phi(\cdot)$ representa uma função polinomial qualquer.

A extensão natural para o caso multivariável, onde $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi_i : i = 1, 2, \dots, N$ é o cálculo da norma do vetor, como

$$f(x) = \sum_{i=1}^N w_i \|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|, \quad (2.60)$$

satisfazendo $f(x_i) = y_i$. A distância $\|\cdot\|$ é calculada pela norma Euclidiana. c_i são conhecidos como centros, sendo equivalentes aos *nós*. Novamente para satisfazer a condição de continuidade, a forma geral é aproximada por

$$f(x) = \sum_{i=1}^N w_i \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|), \quad (2.61)$$

sendo $x, c_i \in \mathbb{R}^n$, e $\phi(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função radialmente simétrica. Chamando $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|$, a função de base radial pode ser local ou global, dependendo do valor do limite

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r), \quad (2.62)$$

sendo zero para uma RBF local, e não zero para uma RBF global. RBF local interpola os pontos em uma dada região, enquanto que RBF global extrapola globalmente.

Como exemplos de RBFs locais tem-se

$$\begin{aligned} \text{Gaussiana} & : \quad \phi(r) = e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}}, \\ \text{Multiquadrática inversa} & : \quad \phi(r) = (r^2 + \sigma^2)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

e de RBF's globais

$$\begin{aligned} \text{Linear} & : \quad \phi(r) = r, \\ \text{Cúbica} & : \quad \phi(r) = r^3, \\ \text{Multiquadrática} & : \quad \phi(r) = (r^2 + \sigma^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \text{Thin-plate spline} & : \quad \phi(r) = r^2 \log(r), \end{aligned}$$

sendo σ um número real que define a forma do cone hiperbólico usado na função de base radial.

2.3.6 Redes RBFs

Comparando as Equações (2.61) e (2.55), nota-se que uma interpolação de uma função multivariável via Função de Base Radial (RBF) é similar a uma rede MLP de três camadas. Os pontos equivalentes são: (i) na camada escondida de uma rede MLP temos $\left(\sum_{l=1}^n \omega_{jl}x_l + w_{j0}\right)$ e na RBF temos $(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|)$; (ii) a função de ativação $f_j(\cdot)$, da camada escondida de uma rede MLP equivale a Função de Base Radial $\phi(\cdot)$ e (iii) na rede MLP tem-se a função $F_i(\cdot)$ na camada de saída e na RBF a função de saída é uma combinação linear dada por $\sum_{i=1}^N w_i \phi(\cdot)$.

Então a implementação de uma aproximação via RBF pode ser representada como uma rede MLP de três camadas, com função de ativação de base radial, totalmente interconectada. Esta rede, denominada rede neural RBF, implementa um mapeamento de $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ de acordo com

$$f(x) = \omega_0 + \sum_{i=1}^m \omega_i \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|), \quad (2.63)$$

sendo ω_0 um *offset* constante, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ o vetor de entrada, $\phi(\cdot)$ uma função de base radial de $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ e $\|\cdot\|$ a norma Euclidiana. ω_i , $i = 1, 2, \dots, m$, são os pesos que satisfazem $f(x_j) = y_j$, $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq m$, são os centros das RBF's, e m é o número de centros (nete caso, o número de centros é igual ao número de dados).

Na maioria das situações práticas, com dados corrompidos por ruído, a escolha do número de centros igual ao número de dados não é aconselhável por inúmeras razões. Um número de centros muito elevado, além de resultar em elevado esforço computacional devido ao número de pesos a serem estimados, pode resultar em sobreajuste, também chamado de sobreparametrização. Para evitar esse problema, foi proposta uma representação com um número limitado de pontos (Broomhead e Lowe, 1988). Ou seja, uma rede RBF com pontos x_i , $i = 1, 2, \dots, N$ e centros $\mathbf{c}_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, onde $m \ll N$. A forma geral da rede RBF é dada então como

$$f(x) = \omega_0 + \sum_{i=1}^m \omega_i \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|). \quad (2.64)$$

A partir da equação (2.64) podem-se ressaltar três fases na obtenção de uma rede RBF: (i) a escolha da função de base radial usada, ϕ ; (ii) a escolha do número e da posição dos centros, $\mathbf{c}_i$, e (iii) a estimação dos pesos $\omega_{0,1,\dots,m}$. Na Capítulo 3 é apresentado um estudo, no contexto de identificação de sistemas, a respeito de propriedades das funções de ativação com base em expansões polinomiais, técnicas para escolha do número de centros (topologia), e estimação dos parâmetros ou pesos $\omega_{0,1,\dots,m}$.

Conforme pode ser visto na seção 3.2, em problemas de identificação de sistemas não-lineares é comum acrescentar um parte linear ARX na rede RBF.

2.4 Modelos Contínuos

A representação contínua de um sistema dinâmico é uma representação em que o comportamento dinâmico do sistema é descrito através de uma equação diferencial. No caso de sistemas lineares, duas representações podem ser consideradas clássicas: (i) a função de transferência e (ii) a representação por variáveis de estados.

Teoricamente, a função de transferência de um sistema dinâmico é obtida através da modelagem pela física do processo. No caso de sistemas lineares, a função de transferência pode ser obtida indiretamente a partir de métodos não-paramétricos, como por exemplo a resposta ao impulso ou a resposta em frequência do sistema representado via diagramas de Bode (Ogata, 1998; Aguirre, 2000a).

O procedimento que será discutido nesta seção consiste em obter, via identificação, um modelo contínuo de um sistema dinâmico, representando-o por uma equação diferencial. Os modelos contínuos são obtidos a partir de uma transformação padrão direta, DST (do inglês *direct standard transformation*)(Gouesbet, 1991).

2.4.1 Base Matemática

Suponha-se um sistema cujas coordenadas originais são (x, y, z) ,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, z); \\ \dot{y} &= g(x, y, z); \\ \dot{z} &= h(x, y, z),\end{aligned}\tag{2.65}$$

sendo $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ e $h(\cdot)$ funções quaisquer, podendo ser lineares ou não. É possível aplicar uma transformação no sistema, incluindo novas coordenadas,

(X, Y, Z) , de forma a obter

$$\begin{aligned}\dot{X} &= Y, \\ \dot{Y} &= Z, \\ \dot{Z} &= F(X, Y, Z).\end{aligned}\tag{2.66}$$

Tal transformação será denominada, neste trabalho, de DST. A idéia é obter uma função $F(\cdot)$ a partir de um única série temporal de tal forma que $F(X, Y, Z)$ descreva a dinâmica do sistema original (2.65).

Quando o objetivo é identificação de sistemas, há duas incógnitas, em geral não conhecidas, a função F , e o número de coordenadas necessárias para representar a dinâmica do sistema.

Exemplo 2.1. DST de um sistema teórico

Seja a equação de Rössler (Rössler, 1976) definida como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - c),\end{aligned}\tag{2.67}$$

sendo a , b e c números reais. Analiticamente a transformada DST deste sistema pode ser obtida fazendo

$$\begin{aligned}X &= x \\ Y &= \dot{X} = -y - z, \\ Z &= \dot{Y} = -\dot{y} - \dot{z}, \\ &= -b - x - ay + z(c - x),\end{aligned}\tag{2.68}$$

desenvolvendo as equações apresentadas em (2.68), obtém-se uma expressão para a função F , como em (Gouesbet, 1991):

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= ab - cX + X^2 - aXY + XZ + (ac - 1)Z - \\ &\quad \frac{Y}{a+c-X}(X + b - aY + Z).\end{aligned}\tag{2.69}$$

O Exemplo 2.1 mostra que, teoricamente, é possível representar o sistema de Rössler utilizando uma transformação de coordenadas dada por (2.68), a partir da observação de uma única variável de estado. Deve-se notar que a função F obtida analiticamente é não-linear e racional.

Uma forma de determinar uma função padrão F é através da razão de dois polinômios, conforme apresentado em (Gouesbet, 1991) para o caso de sistemas em $\mathbb{R}^3$:

$$\dot{Z} = \frac{\sum_{j+k+m=0}^{N_0} N_{jkm} X^j Y^k Z^m}{1 + \sum_{j+k+m=1}^{N_0} D_{jkm} X^j Y^k Z^m} \quad (2.70)$$

sendo X a variável observada no sistema, Y e Z , respectivamente, as derivadas primeira e segunda da variável X . N_0 se refere ao grau máximo de não-linearidade presente na equação, N_{jkm} e D_{jkm} são os coeficientes a serem determinados. O procedimento para se obter F , proposto em (Gouesbet, 1991), consiste em aumentar N_0 até se obter a convergência, ou seja, até que o sistema obtido via DST atenda os critérios de validação estabelecidos.

2.5 Wavelets

Wavelets são funções matemáticas que ampliam intervalos de dados, separando-os em diferentes componentes de frequência, permitindo a análise de cada componente em sua escala correspondente. A transformada *wavelet* permite representar uma série temporal ou uma função no tempo. A representação de série temporal ou de uma função no tempo vem sendo usada desde que Joseph Fourier descobriu que se pode sobrepor uma série de senos e co-senos para representar outras funções periódicas. A transformada de Fourier é então considerada como sendo a representação de uma função temporal aperiódica no domínio da frequência.

A idéia básica da transformada *wavelet* é possibilitar representar simultaneamente uma função nos domínios do tempo e da frequência. De tal forma que, uma vez obtida a transformada *wavelet* de um sinal temporal, tem-se informação simultânea do tempo e da frequência. A principal característica da transformada *wavelet* é a decomposição com múltiplas resoluções da função/série temporal, com propriedades de translação e escalonamento (Graps, 1995).

A transformada *wavelet* é obtida a partir de uma função que satisfaz certos requisitos matemáticos, chamada de *wavelet mãe*. A análise da série temporal é obtida através da dilatação e contração da frequência da função *wavelet*.

As transformadas discretas *Wavelet* (DWT), assim como as funções transformadas de Fourier (FFT), são operações lineares em um vetor, cujo tamanho é uma potência de dois, transformando-o em outro vetor, numericamente diferente, de mesmo tamanho. A DWT, assim como a FFT, são inversíveis.

Enquanto para a FFT, o novo domínio das bases são funções trigonométricas, senos e co-senos, o domínio das *Wavelets* tem bases um pouco mais complicadas, chamadas de *Wavelet mãe*. Desta forma, enquanto que na FFT tem-se apenas um único conjunto de funções bases, senos e co-senos, na DWT tem-se uma infinidade de bases no espaço de funções. Essa versatilidade permite que as funções *Wavelets* sejam escolhidas conforme o conjunto de dados a que se destinam.

Wavelets se tornaram conhecidas no mundo científico com a publicação de Daubechies (Daubechies, 1988). Na última década, a transformada *wavelet* vem sendo usada em filtros não-lineares (Donoho, 1995; Donoho e Johnstone, 1994; Lang et al., 1995), estimação estatística (Donoho, 1993), solução numérica de Equações Diferenciais Parciais (Glowinski et al., 1990; Robertsson et al., 1994; Resnikoff e Wells, 1997; Beylkin et al., 1991; Beylkin, 1994; Guo e Burrus, 1996), Processamento de Sinal Geofísico e Sísmico (Robinson e Durrani, 1986; Yilmaz, 1987; Scales, 1994; Georgiou e Kumar, 1994), Processamento de Imagem e de Sinais Médicos e Biomédicos (Aldroubi e Unser, 1996; Turner, 1986; Ivanov et al., 1996), análise de sistemas caóticos e fractais (Farge et al., 1993; Massaopust, 1994; Wornell, 1996), remoção de ruídos em músicas (Berger et al., 1994).

As principais propriedades atribuídas à transformada e expansão *wavelet* na eficiente análise de uma grande classe de sinais são (Burrus et al., 1998):

- A expansão *wavelet* permite maior precisão em uma descrição local e na separação das características de um sinal.
- *Wavelets* são ajustáveis e adaptáveis. Por isso podem ser projetadas para se ajustar a aplicações específicas.
- A geração de *wavelets* e seus cálculos são fáceis de ser implementados em computadores digitais. Não existem integrais, nem derivadas, somente multiplicações e adições.

Na identificação de sistemas dinâmicos, as propriedades das funções *wavelets* pode ser vistas aplicadas: (i) na obtenção de derivadas de séries

temporais (Coca e Billings, 1995a; Coca e Billings, 1996); (ii) como função de ativação em redes neurais (Bakshi e Stephanopoulos, 1993) e (iii) na filtragem de sinais temporais (Coca e Billings, 1995b).

2.5.1 A Transformada *Wavelet*

Definição 2.1. Um espaço de particular importância no processamento de sinal é chamado de $L^2(\mathbb{R})$ (Burrus et al., 1998). Este é o espaço de todas as funções $f(t)$ com integral definida do quadrado do seu módulo. “ L ” significa integral de Lebesgue, “2” indica integral do quadrado do módulo da função, e $\mathbb{R}$ indica que a variável de integração t pertence à reta real. Quando uma função $f(t)$ pertencer ao espaço L^2 , isto será representado por: $f \in L^2(\mathbb{R})$ ou simplesmente $f \in L^2$.

Uma decomposição multiresolucional em L^2 é uma seqüência aninhada de subespaços $\dots V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \dots \subset L^2$ tendo uma união densa, satisfazendo às propriedades de escalonamento e translação, respectivamente:

$$\begin{aligned} f(x) \in V_j &\Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1} \quad \text{e} \\ f(x) \in V_j &\Leftrightarrow f(x - k) \in V_j, \end{aligned} \quad (2.71)$$

para todo $j, k \in \mathbb{Z}$.

Qualquer função f em L^2 pode ser aproximada na resolução j por sua projeção ortogonal, representada por $P_j f$, em V_j .

A importância da propriedade de escalonamento surge do fato de que uma aproximação multi-resolucional pode ser descrita por meio de uma única função ϕ e suas translações e dilatações. Dessa forma, na resolução j , a projeção P_j da função f pode ser representada como um série que converge na norma L^2 ,

$$P_j f = \sum_k c_{j,k} \phi_{j,k}, \quad (2.72)$$

sendo que $\phi_{j,k} = 2^{j/2} \phi(2^j x - k)$ e $c_{j,k}$ são os coeficientes da função de escalonamento.

O subespaço *wavelet* W_j pode ser introduzido no contexto de análise multi-resolucional como o complemento ortogonal de V_j com respeito ao próximo subespaço V_{j+1} ,

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad (2.73)$$

sendo que $\oplus$ representa a soma ortogonal de subespaços. Cada subespaço *wavelet* W_j é gerado por uma única função $\psi(x)$ e suas dilatações e translações, da mesma forma que a função de escalonamento $\phi(x)$ gera os subespaços V_j .

Dessa forma a projeção $Q_j f$ da função f no subespaço *wavelet* W_j possui uma representação serial, em termos da dilatação e translação da função *wavelet* $\psi(x)$, como

$$Q_j f = \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k} , \quad (2.74)$$

sendo $d_{j,k}$ os coeficientes da função *wavelet*. Considerando a estrutura aninhada dos subespaços V_j e o fato que W_j é o complemento ortogonal do subespaço V_j com respeito a V_{j+1} , pode-se escrever

$$P_{j+1} f = P_j f + Q_j f \quad (2.75)$$

resultando na seguinte representação da função em termos das funções de escalonamento e *wavelet*,

$$f(x) = \sum_k c_{j,k} \phi_{j,k}(x) + \sum_k \sum_{i \geq j} d_{i,k} \psi_{i,k}(x) . \quad (2.76)$$

Os coeficientes das funções *wavelet* e de escalonamento são dados por

$$\begin{aligned} c_{j,k} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \bar{\phi}_{j,k}(x) dx \\ d_{j,k} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \bar{\psi}_{j,k}(x) dx , \end{aligned} \quad (2.77)$$

sendo $\bar{\phi}(x)$ e $\bar{\psi}(x)$ as funções de escalonamento e *wavelet*, conhecidas. Existe um caso particular onde as funções duais são explicitamente conhecidas. No caso ortogonal as funções *wavelet* e de escalonamento são idênticas às suas duais.

Considerando $V_1 = V_0 \oplus W_0$, as funções *wavelet* e de escalonamento podem ser expressas em termos da função de escalonamento na resolução $j = 1$, como

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_k p_k \phi(2x - k) , \\ \psi(x) &= \sum_k q_k \phi(2x - k) . \end{aligned} \quad (2.78)$$

Estas são as relações, em escala, das funções *wavelet* e de escalonamento. $\{p_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e $\{q_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ são conhecidas como seqüências de reconstrução em escala. Reciprocamente, qualquer função de V_1 pode alternativamente ser escrita usando o escalonamento e a função *wavelet* de V_0 , e W_0 , respectivamente como

$$\phi(2x - k) = \sum_l \{a_{k-2l}\phi(x - l) + b_{k-2l}\psi(x - l)\}, k \in \mathbb{Z}. \quad (2.79)$$

Isto se refere a uma relação de decomposição com as seqüências de decomposição $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e $\{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Considere-se a aproximação da função $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, pela projeção ortogonal $P_j f$ em um subespaço de aproximação fino V_j . Isto pode ser decomposto em uma aproximação mais grosseira no subespaço V_{j-1} , junto com a diferença, ou a informação detalhada entre os níveis de aproximação sucessivos $j - 1$ e j , que é representado pela projeção ortogonal no subespaço W_{j-1} . Podendo ser escrito como

$$\sum_k c_{j,k} \phi_{j,k}(x) = \sum_k c_{j-1,k}(x) + \sum_k d_{j-1,k} \psi_{j-1,k}(x). \quad (2.80)$$

Os coeficientes das funções de escalonamento e *wavelet*, $c_{j-1,k}$ e $d_{j-1,k}$ na resolução $j - 1$ podem ser calculados de uma forma eficiente usando um algoritmo de decomposição rápida, dado por:

$$\begin{cases} c_{j-1,k} = \sum_l a_{l-2k} c_{j,l} \\ d_{j-1,k} = \sum_l b_{l-2k} c_{j,l} \end{cases}, \quad (2.81)$$

deduzido a partir de (2.79). Esta equação descreve um processo de média móvel envolvendo os coeficientes de escalonamento $c_{j,k}$ na resolução j e a seqüência de decomposição $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e $\{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. A sucessão de dados resultantes deve ser subsequentelemente dizimada por dois, pegando sempre o segundo valor da sucessão, para se obter os coeficientes desejados.

2.6 Aplicações

Diversas aplicações de modelo NARMAX polinomiais podem ser encontradas na literatura. Billings e colegas modelam a dinâmica não-linear de um motor de combustão a diesel. Em (Noshiro et al., 1993) é modelado um sistema

de controle na emissão de CO_2 na respiração de um homem. Pröll e Karin (1994) apresentam um controle preditivo de pH usando modelos NARX. Em (Aguirre et al., 1997) pode ser vista a identificação da dinâmica caótica do circuito de Chua. Já a utilização de modelos NARMAX racionais pode ser visto em (Corrêa et al., 1998; Corrêa et al., 2000). Os resultados apresentados nestas últimas referências são reproduzidos no Capítulo 4 desta tese.

Em (Henrique et al., 1998) redes neurais foram usadas na modelagem de características dinâmicas de sistemas não-lineares e na predição de instabilidade dinâmica a partir de dados reais de um Reator Tanque Agitado Contínuo (CSTR - *Continuous Stirred Tank Reactor*), onde ocorre uma reação exotérmica de primeira ordem. Os autores mostram que a RNA (Rede Neural Artificial) é capaz de prever com precisão, dependendo da qualidade dos dados de treinamento, pontos de bifurcação. Mostram ainda que a predição de instabilidade não depende da arquitetura da RNA. Em (Cubillos et al., 1996) uma estrutura neural híbrida é usada para modelagem de um processo de secagem de sólidos. Em (Corrêa et al., 1999) a capacidade de algumas topologias de redes neurais de reproduzirem o comportamento dinâmico caótico da equação de Duffing-Ueda (Ueda, 1980; Ueda, 1985) é estudada.

A aplicação de RBFs na identificação de sistemas pode ser vista na análise e estudo de oscilações de períodos um e dois, em um sistema eletroquímico (Adomaitis et al., 1990); modelagem da corrente do emissor em função da voltagem de base-emissor e base-coletor, da junção de um transistor bipolar (Mees et al., 1992); identificação das características dinâmicas de um robô hidráulico industrial (Carlin, 1992); identificação de trocador de calor, tratamento de água e turbo alternador (Sze, 1995).

Modelos contínuos, baseados na transformação DST, foram usados em (Letellier et al., 1995b) na reconstrução de campos vetoriais a partir de um sinal experimental caótico obtido na eletrodissolução de cobre.

Já a aplicação da transformada *Wavelet*, no campo da identificação de sistemas, não está completamente determinada. Em (Coca e Billings, 1995a; Coca e Billings, 1996) é sugerida a utilização da transformada *Wavelet* como um processo simples e eficaz de se obter derivadas de ordem n -ésima de sinais temporais e obtenção de modelos contínuos. Em (Coca e Billings, 1995b) *wavelets* são usadas como filtro no pré-processamento de sinais para identificação. A utilização de funções *wavelets* na identificação de sistemas pode ser vista ainda em (Bakshi e Stephanopoulos, 1993; Carrier e Stephanopoulos, 1998; Nikolaou e Vuthandam, 1998)

2.7 Comentários Finais

Neste capítulo foram apresentadas as formas gerais das representações de Hammerstein, Wiener, NARMAX racional e polinomial, redes neurais, modelos contínuos e transformada *Wavelet*. Uma discussão mais detalhada é feita sobre as representações NARMAX racionais e polinomiais, sendo discutidas para estas aspectos concernentes à escolha de estrutura e estimação de parâmetros.

Alguns aspectos abordados neste capítulo serão usados nos capítulos seguintes. No final deste capítulo, são enumeradas aplicações das diversas representações na identificação de sistemas dinâmicos. As diversas referências citadas não são as únicas e nem podem ser consideradas as mais importantes, são apenas exemplos de aplicações de cada representação. No capítulo seguinte é apresentada uma análise de cada representação no contexto de identificação de sistemas.

Capítulo 3

Propriedades das Representações Aplicadas na Identificação de Sistemas

A escolha da representação não tem sido uma etapa cumprida criteriosamente na identificação de sistemas dinâmicos não-lineares. Tal ausência pode ser em parte justificada pela falta de estudos mais consistentes a respeito das características de cada representação. Ou ainda, pelo não-aparecimento de demanda específica que justifique incluir uma etapa intitulada escolha da representação no processo de modelagem. Neste capítulo é apresentado um estudo preliminar a respeito das características de cada representação discutida no Capítulo 2, no que se refere à identificação de sistemas. As representações NARMAX racional e polinomial não são discutidas neste capítulo. Detalhes a respeito de propriedades destas representações são apresentados no Capítulo 6. Não se pretende esgotar o tema, mas levantar elementos que possam nortear a opção por uma representação.

Algumas funções de ativação de redes neurais são estudadas a partir de suas expansões polinomiais. O mesmo ocorre para funções de base radial, RBFs. Outro aspecto discutido é a capacidade da representação fornecer informações a respeito do sistema modelado. Será mostrado que, devido à sua complexidade, as representações baseadas em redes neurais, aqui estudadas, não permitem recuperação analítica de características estáticas de sistemas modelados. Propriedades da representação contínua também são discutidas. No caso das funções *wavelets*, é apresentado um procedimento para cálculo de derivadas de sinais temporais. Este é pouco afetado pela presença de ruído, o que é uma vantagem no cálculo de derivadas. Na seção 3.5 uma síntese das

propriedades de cada representação é apresentada. A discussão é feita tendo como base as etapas de um processo de identificação, a saber: (i) escolha do sinal de excitação, (ii) escolha de estrutura, (iii) treinamento/estimação de parâmetros, (iv) simulação dos modelos e (v) recuperação de informações. Por último são enunciados comentários gerais sobre o capítulo.

3.1 Redes Neurais

3.1.1 Propriedades de Funções de Ativação

A escolha da função de ativação usada em uma rede neural é uma etapa importante na obtenção de modelos neurais. No Capítulo 5 são apresentadas características das funções de ativação importantes na identificação caixa-cinza. Nesta seção, será apresentado o estudo de propriedades de funções de ativação a partir da expansão em séries de potência.

Considere uma rede MLP com um vetor de entrada composto por $\mathbf{x} = [1 \ y(k-1) \ y(k-2) \ u(k-1)]^T$, com apenas um neurônio na camada escondida, e uma saída. Sua saída pode ser escrita como

$$\hat{y}(k) = F \left(\omega_{ij} f_j \left(\sum_{l=1}^n \omega_{jl} x_l + w_{j0} \right) + \omega_{i0} \right) \quad (3.1)$$

sendo F a função de ativação da saída, f_j a função de ativação da camada escondida, n o número de entradas.

Considere ainda que $f_i = \tanh(\cdot)$, F uma função linear, $\omega_{ij} = 1$, $\omega_{i0} = 0$ e $z = \sum_{l=1}^n \omega_{jl} x_l + \omega_{j0}$, de tal forma que $\hat{y}(k)$ pode ser escrito como

$$\hat{y}(k) = F(\tanh(z)), \quad (3.2)$$

e a expansão da função $\tanh(\cdot)$ em

$$\tanh(z) = \frac{z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots}{1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots}, \quad (3.3)$$

substituindo z por $\sum_{l=1}^n \omega_{jl} x_l + \omega_{j0}$ na equação (3.3) vem

$$\begin{aligned}\hat{y}(k) = & \frac{1}{D} \times \{a_0 + a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + a_3u(k-1) + \\ & a_4y(k-1)y(k-2) + a_5y(k-1)u(k-1) + a_6y(k-2)^2 + \\ & a_7y(k-2)u(k-1) + a_8y(k-1)y(k-2)u(k-1) + \\ & a_9y(k-1)^2 + a_{10}u(k-1)^3 + a_{11}y(k-1)^2u(k-1) + \dots\}\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}D = & \{b_0 + b_1y(k-1) + b_2y(k-2) + b_3u(k-1) + b_4y(k-1)^2 + \\ & b_5y(k-1)y(k-2) + b_6y(k-1)u(k-1) + b_7y(k-2)^2 + \\ & b_8y(k-2)u(k-1) + b_9u(k-1)^2 + \dots\}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Na equação (3.4) o numerador foi expandido até o termo z^3 e no denominador até o termo z^2 . As constantes a_i e b_i são funções dos pesos. Note-se que a expansão da função $\tanh(z)$ fornece uma expressão racional com polinômios de ordem infinita tanto no numerador quanto no denominador. Naturalmente os termos de maior ordem possuem coeficientes menores.

Outra função não-linear muito usada nas camadas escondidas de redes neurais multicamada é a *sigmóide*. A função *sigmóide* é representada pela equação

$$\phi(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}} .\tag{3.5}$$

Expandindo-se (3.5) em uma série de potências, obtém-se

$$\frac{1}{1 + e^{-z}} = 0,5 - 0,25z + 0,125\frac{z^3}{3!} - 0,25\frac{z^5}{5!} + \dots ,\tag{3.6}$$

Da mesma forma que o desenvolvimento anterior, considerando que $z = \sum_{l=1}^n \omega_{jl}x_l + \omega_{jo}$, substituindo z na equação (3.6), tem-se

$$\begin{aligned}\hat{y}(k) = & a_0 + a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + a_3u(k-1) + \\ & a_4y(k-1)y(k-2) + a_5y(k-1)u(k-1) + a_6y(k-2)^2 + \\ & a_7y(k-2)u(k-1) + a_8y(k-1)y(k-2)u(k-1) + \\ & a_9y(k-1)^2 + a_{10}u(k-1)^3 + a_{11}y(k-1)^2u(k-1) + \dots ,\end{aligned}\tag{3.7}$$

com $a_{0,1,2,\dots,n}$ sendo função dos pesos ω da rede. Com a expansão usada, teoricamente, pode-se dizer que redes neurais com $\tanh(\cdot)$ na função de ativação são mais similares à representação NARMAX racional. As redes com função de ativação sigmoidal se equivalem mais aos modelos NARMAX polinomiais.

3.1.2 Recuperando Informação a Partir de Modelos Baseados em Redes Neurais

Nesta seção será apresentada uma discussão válida para redes neurais de uma forma geral sobre a determinação de pontos fixos. O desenvolvimento aqui apresentado tem como base o procedimento descrito por Hernández e Arkun (1992), limitado a uma rede com um neurônio em uma única camada escondida. Os resultados obtidos servirão como base para alguns comentários a respeito do cálculo de ganho e dos autovalores a partir de uma RNA.

A capacidade de calcular singularidades, ou pontos fixos, de sistemas dinâmicos é outra característica importante em uma representação. A seguir tal capacidade será investigada nas redes neurais.

Definição 3.1. *Ponto Fixo* de um sistema dinâmico é um ponto onde todas as suas derivadas são nulas. No caso contínuo, no ponto fixo de um sistema tem-se $\dot{y} = \ddot{y} = \ddot{\ddot{y}} = \dots = 0$. No caso discreto se $\bar{y}$ é um ponto fixo do sistema, então $\bar{y} = y(k) = y(k-1) = \dots = y(k-n_y)$.

□

Considere uma RNA cujo vetor de entrada é constituído por valores passados da entrada $u(k)$ e valores passados da saída $y(k)$, do tipo

$$\mathbf{x} = [y(k-1) \ y(k-2) \ \dots \ y(k-n_y) \ u(k-1) \ u(k-2) \ \dots \ u(k-n_u)]^T, \quad (3.8)$$

contendo apenas uma camada escondida, com um neurônio e cujo vetor de pesos da entrada é dado por $\mathbf{w} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_P]^T$, com $P = (n_y + n_u)$, então a saída predita da rede pode ser expressa como

$$y(k) = F [\omega_o f(\mathbf{w}^T \mathbf{x})]; \quad (3.9)$$

Considerando a função de saída como uma função puramente linear, $F = K$, $f(\cdot)$ uma *sigmóide* como função de ativação e $\omega_0 = 1$, tem-se

$$y(k) = K \left[1 + e^{-(\mathbf{w}^T \mathbf{x})} \right]^{-1}, \quad (3.10)$$

e, ainda, considerando o sistema operando em seu ponto fixo

$$\bar{y} = K \left[1 + e^{-(\mathbf{w}^T \bar{\mathbf{x}})} \right]^{-1}, \quad (3.11)$$

sendo $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{y} \cdots \bar{y} \bar{u} \cdots \bar{u}]^T$. Então, os pontos fixos do sistema, teoricamente, podem ser determinados resolvendo a equação (3.11) para $\bar{y}$. Note-se que a equação (3.11) não possui uma solução analítica, e sua solução deve ser obtida por algum procedimento numérico, como por exemplo o método de Newton.

De forma similar ao descrito anteriormente, pode-se determinar o ganho de um modelo baseado em entrada e saída. Ou então, outro procedimento possível de ser usado, válido para qualquer modelo, é a predição livre; neste caso fixa-se um determinado valor de u , calculando a saída da RNA em estado estacionário, a partir daí se determina o ganho.

Note-se que, embora exista a possibilidade de recuperação de curvas de pontos fixos a partir de um modelo baseado em rede neural, esse procedimento não é um procedimento analítico. Portanto, até onde se conhece, o uso de informação *a priori* de estado estacionário para seleção de estrutura/topologias de redes neurais não está determinado.

Em (Hernández e Arkun, 1992) um procedimento semelhante é apresentado para análise da estabilidade de pontos de equilíbrio. Porém mais uma vez a solução não é analítica. A única informação possível de ser usada, e que sistematicamente tem justificado a escolha de funções de ativação, diz respeito à excursão da variável de saída. Se a variável de saída assume valores apenas positivos, utiliza-se uma função de ativação do tipo *sigmoidal*. Porém, se a saída assume valores positivos e negativos, utilizam-se funções cuja imagem varre todo o eixo real, tipo tangente hiperbólica.

3.2 RBFS

3.2.1 Rede RBF em Identificação de Sistemas

Nos últimos anos vários pesquisadores têm utilizado redes RBF em identificação de sistemas (Broomhead e Lowe, 1988; Casdagli, 1989; Mees et al., 1992; Chen et al., 1990; Sze, 1995; Zhu e Billings, 1996). Uma das principais justificativas utilizadas para identificação de sistemas com redes RBF, é a facilidade de se aplicarem, nesta representação, técnicas desenvolvidas e

consolidadas para estimação de parâmetros e escolha de estrutura de modelos NARMAX.

Nesta seção pretende-se discutir, à luz do procedimento adotado por Sze (1995), propriedades de algumas funções de base radial. Tais propriedades são extraídas a partir da expansão polinomial das RBFs. O desenvolvimento apresentado nesta seção servirá de base para a discussão a ser feita na seção 3.5.

Considerando o caso de uma única saída incluindo um sinal de erro, a equação (2.64) pode ser escrita como

$$f(x) = \omega_0 + \sum_{i=1}^m \omega_i \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|) + e(k), \quad (3.12)$$

sendo que o vetor de entrada é do tipo $\mathbf{x}(k) = [y(k-1) \dots y(k-n_y) u(k-1) \dots u(k-n_u)]$. Pode-se afirmar que a rede RBF é um caso particular da representação NARMAX cuja função $f(\cdot)$ é uma função de base radial. Acrescentando um polinômio linear à rede (Mason e Parks, 1992) obtém-se

$$\begin{aligned} f(x) &= \omega_0 + \sum_{i=1}^m \omega_i \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|) + p(\mathbf{x}(k)) + e(k) \\ &= \omega_0 + \sum_{i=1}^m \omega_i \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|) + \sum_{j=1}^{n_u} \omega_{m+j} u(k-j) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n_y} \omega_{m+n_u+k} y(t-k) + e(k), \end{aligned} \quad (3.13)$$

sendo o número de termos da rede RBF igual a $m + n_y + n_u$.

Ressalta-se aqui o fato de que a utilização de redes RBF para identificação de sistemas dinâmicos inclui, nas etapas descritas na seção anterior, a escolha do número de atrasos n_y e n_u . Miyano e colegas (2000) citam que “o desempenho de um rede neural é melhorado quando polinômios algébricos são adicionados às redes”.

Uma comparação entre obtenção de modelos NARMAX polinomiais e racionais e modelos baseados em redes RBF permite sugerir que: (i) a estimação de parâmetros em um modelo NARMAX polinomial ou racional é equivalente à fase de treinamento da rede, ou seja, o cálculo dos pesos $\omega_{0,1,\dots,m}$; (ii) a escolha do grau de não-linearidade e escolha da estrutura em modelos NARMAX polinomiais e racionais é de certa forma equivalente à escolha da função ϕ , e de seus centros, $\mathbf{c}_i$, na rede RBF; (iii) por último, os atrasos n_y e n_u são equivalentes tanto para modelos NARMAX polinomiais e racionais quanto para redes RBFs.

3.2.2 Propriedades a Partir da Expansão da Função RBF

O mesmo procedimento aplicado a funções de ativação de redes multicamadas pode ser aplicado a RBFs. A expansão da função de ativação de uma rede RBF através de uma série pode ser vista em (Sze, 1995). A seguir será apresentada apenas a expansão das funções radiais Gaussiana e *thin-plate spline*.

Usando a expansão em série de potências, a função de base radial Gaussiana, $\phi(r) = e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}}$, pode ser aproximada por

$$e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}} = 1 - \frac{r^2}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \frac{r^4}{\sigma^4} - \frac{1}{6} \frac{r^6}{\sigma^6} + \dots \quad (3.14)$$

e a função *thin-plate spline*, $\phi(r) = (1 + r)^2 \log(1 + r)$, (Sze, 1995), válida para $|r| < 1$,

$$\phi(r) = (1 + r)^2 \left\{ r - \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} + \dots \right\}, \quad (3.15)$$

reescrevendo, obtém-se

$$\phi(r) = r - \frac{3}{2}r^2 + \frac{1}{3}r^3 - \frac{11}{12}r^4 + \dots \quad (3.16)$$

Note-se que as duas funções de ativação podem ser aproximadas por polinômios de grau infinito. Na função Gaussiana há apenas expoentes pares e na *thin-plate spline*, tanto expoentes pares quanto ímpares. Ao substituir r pela distância euclidiana do vetor entrada ao centro da RBF aparecerão, em ambos os casos, termos polinomiais com todos os expoentes. Diferente do observado entre a função *sigmóide* e *tangente hiperbólica*, o desenvolvimento acima não é suficiente para apontar diferenças significativas entre a função Gaussiana e *thin-plate spline*.

3.3 Modelos Contínuos

A obtenção de modelos via DST, conforme visto no capítulo anterior, necessita do cálculo de derivadas de primeira, segunda e enésima ordem, a partir da série temporal medida. Tal procedimento implica algumas dificuldades: (i) necessidade de um tempo de amostragem relativamente pequeno, o que por sua vez resulta em séries temporais com um número muito grande de pontos; (ii) problemas numéricos devido à presença de ruído nos dados.

Outro fator que deve ser avaliado na identificação da função F são os pontos que devem ser usados na sua determinação. Teoricamente a função F poderia ser determinada apenas por um número de pontos da série temporal x igual ao número de parâmetros a ser estimados, porém devido a problemas ocasionados por ruído, mais pontos devem ser usados para obtenção de F . Uma questão importante no processo de identificação é a escolha de tais pontos. Uma alternativa seria a escolha da totalidade dos pontos disponíveis, porém isso implicaria um esforço computacional elevado, e provavelmente instabilidade numérica.

Outra característica de tal representação é que, sendo uma representação contínua, sua evolução no tempo só é possível através de métodos de integração numérica, sendo uma desvantagem dessa representação em relação aos modelos discretos, uma vez que, para estes últimos, a simulação consiste apenas em solução recursiva de uma equação de diferenças.

3.4 *Wavelets*

Nesta seção serão apresentadas algumas propriedades da transformada *Wavelet*, importantes para o contexto de identificação de sistemas. Destaca-se o efeito do ruído no cálculo dos coeficientes *wavelets* e a determinação de derivadas do sinal.

3.4.1 Efeito do Ruído nos Coeficientes *Wavelets*

O estudo apresentado a seguir foi desenvolvido por Coca e Billings (1995) . O efeito num sinal amostrado do erro de medição é representado pela seguinte equação:

$$y_{\epsilon}(k) = y(k) + \epsilon(k) , \quad (3.17)$$

sendo $y(k)$ o sinal de interesse e $y_{\epsilon}(k)$ o sinal observado com o erro. O erro é considerado aleatório, representado por $\epsilon(k)$, e possui a seguinte propriedade:

$$E[\epsilon(k)] = 0. \quad (3.18)$$

O sinal discreto contaminado por ruído pode ser aproximado por um série *wavelet*, na resolução j , através da seguinte expressão:

$$y_\epsilon(k) = \sum_k c_{j-p} \phi_{j-p}(k) + \sum_k \sum_{l=j-p}^j d_{l,k} \psi_{l,k}(k) . \quad (3.19)$$

Devido à presença de ruído, os coeficientes da representação *wavelet* do sinal ruidoso terão características estocásticas. Os coeficientes *wavelet* com ruído poderão ser calculados teoricamente usando a fórmula de integração dada pela Equação (2.77), como

$$\hat{d}_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} y_\epsilon(t) \hat{\psi}_{j,k}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \hat{\psi}_{j,k}(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(t) \hat{\psi}_{j,k}(t) dt . \quad (3.20)$$

Considerando $\epsilon(t)$ um ruído branco, com $\mathbf{E}[\epsilon(t)] = 0$, o valor esperado dos coeficientes *wavelet*, $d_{j,k}$ podem ser calculados como

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\hat{d}_{j,k}] &= \mathbf{E} \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t) \hat{\psi}_{j,k}(t) dt \right] + \mathbf{E} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(t) \hat{\psi}_{j,k}(t) dt \right] = \\ &= d_{j,k} + \mathbf{E} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(t) \hat{\psi}_{j,k}(t) dt \right] = d_{j,k} , \end{aligned} \quad (3.21)$$

demonstrando que os coeficientes estocásticos são não-polarizados.

A propriedade apresentada acima permite a utilização da série *wavelet* para separar o sinal desejado $y(k)$ do sinal observado $y_\epsilon(k)$ (Coca e Billings, 1995a).

3.4.2 Uma Aproximação Multi-resolucional B-spline

A função B-spline, $\beta^m(x)$ com $m \in \mathbb{Z}$, é um exemplo de função de escalonamento $\phi(x)$, não-ortogonal, definida recursivamente pela integral de convolução:

$$\beta^m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \beta^{m-1}(x-t) \beta^1(t) dt , \quad (3.22)$$

sendo $\beta^1(x)$ a função característica do intervalo $\chi(x)$.

$$\beta^1(t) = \chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{se } x \notin (0, 1) \end{cases} . \quad (3.23)$$

A relação (3.22) pode ser escrita como

$$\beta^m = \int_0^1 \beta^{m-1}(x-t)dt. \quad (3.24)$$

As funções base B-*spline* de alta ordem podem ser definidas recursivamente em função da base de primeira ordem (de grau zero) equação (3.23), como

$$\beta^m(x) = \frac{x}{m-1}\beta^{m-1}(x) + \frac{m-x}{m-1}\beta^{m-1}(x-1). \quad (3.25)$$

Usando esta fórmula, pode-se deduzir que a versão transladada e escalonada da função B-*spline* pode ser calculada usando uma relação recorrente similar a

$$\beta_{j,k}^m = \frac{2^j x - k}{m-1}\beta^{m-1}(x) + \frac{m+k-2^j x}{m-1}\beta^{m-1}(x-1), \quad (3.26)$$

sendo $\beta_{j,k}^m = 2^{j/2}\beta^m(2^j x - k)$. A função B-*spline* β^m (de ordem m) consiste em um polinômio de m termos e grau $m-1$, de forma que

$$\beta^m|_{k-1,k} = P_{m-1,k}, \quad k = 1, \dots, m, \quad (3.27)$$

sendo $P_{m-1,k}$ um polinômio de grau $m-1$.

Assumindo que W_j representa o subespaço na resolução j , uma base *wavelet* B-*spline* pode, então ser definida para qualquer W_j em termos da translação e dilatação da função *wavelet* mãe. Esta função *wavelet* mãe pode ser construída como uma combinação linear das funções escalonadas B-*spline* (Chui, 1992).

As funções de escalonamento e *wavelet* podem ser consideradas como funções de filtro. A diferença entre elas é que, enquanto a função de escalonamento age como filtro passa baixa, a função *wavelet* correspondente se comporta como um filtro passa faixa (Coca e Billings, 1995a).

3.4.3 Cálculo dos Coeficientes da Decomposição Multi-resolucional B-*spline*

Considere uma série temporal discreta $y(k)$. O primeiro passo para implementação prática de uma decomposição consiste na expansão do sinal em termos da função base de escalonamento, correspondendo a um fino subespaço de resolução V_j . Isso envolve o cálculo dos coeficientes da série

$$y(k) \cong \sum_k c_{j,k} \phi_{j,k}(k) \quad (3.28)$$

onde $\phi_{j,k} = 2^{j/2} \phi(2^j - k)$ e $\phi(k) = \beta^m(k)$ de ordem m . O lado direito da equação (3.28) é a projeção do sinal no subespaço aproximado V_j .

Dois métodos podem ser usados para determinar os coeficientes da série (3.28). O primeiro é o cálculo da seqüência de coeficientes através da convolução dos dados (procedimento de média móvel) com um apropriado operador de interpolação *spline* (Chui, 1992). Outra forma é através do algoritmo de mínimos quadrados, desde que a expressão seja linear nos parâmetros. Isso fornece a projeção ortogonal $P_j y$ no subespaço de aproximação V_j .

3.4.4 Cálculo das Derivadas do Sinal

Uma importante característica da aproximação discutida na seção anterior é a facilidade de se obter a derivada do sinal reconstruído pela série B-*spline*. Segundo Boor (1978), a derivada da série B-*spline* na escala $j = 0$ pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_k c_k \beta_k^m \right] = \sum_k (c_k - c_{k-1}) \beta_k^{m-1}. \quad (3.29)$$

Essa equação mostra que a primeira derivada da série B-*spline* pode ser encontrada diferenciando os coeficientes da série B-*spline*, obtendo os coeficientes da série B-*spline* de uma ordem inferior, que representa sua derivada. A equação (3.29) se aplica a sinais de comprimento infinito, porém a derivada de uma série finita B-*spline* é obtida através da adição de coeficientes nulos na função B-*spline*.

A fórmula para cálculo de derivadas da série B-*spline* para qualquer resolução j é a seguinte (Coca e Billings, 1996):

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_k c_{j,k} \beta_{j,k}^m \right] = 2^j \sum_k (c_{j,k} - c_{j,k-1}) \beta_{j,k}^{m-1}, \quad (3.30)$$

podendo facilmente ser deduzida a partir de (3.29). Por repetição da aplicação de (3.30), a fórmula da derivada i -ésima, da série *spline* pode ser escrita como (Coca e Billings, 1996):

$$\frac{d^i}{dt^i} \left[\sum_k c_{j,k} \beta_{j,k}^m \right] = 2^j \sum_k c_{j,k}^{i+1} \beta_{j,k}^{m-1}, \quad (3.31)$$

sendo

$$c_{j,k}^{i+1} = \begin{cases} c_{j,k} & \text{para } i = 0 \\ 2^{ij} (c_{j,k}^i - c_{j,k-1}^i) & \text{para } i > 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

O procedimento total para se obter derivadas de um sinal discreto com ruído pode ser resumido da seguinte forma (Coca e Billings, 1996):

- Considere-se um sinal amostrado com uma frequência de amostragem $f_s > 2kf_h$, sendo f_h a maior frequência de interesse contida no sinal e k o fator de sobreamostragem. Então o sinal pode ser separado em k diferentes subconjuntos de acordo com a equação:

$$\{y_\epsilon(t_{k(i-1)+p})\}_{i=1,n} = \{y_\epsilon^p(t_i)\}_{i=1,n}, \quad (3.33)$$

com $k < f_s/2f_h$, $k \in \mathbb{Z}$, $p = 1, \dots, k$. Obtendo-se k séries do sinal original $y_\epsilon^i(t_i), \dots, y_\epsilon^k(t_i)$ $i = 1, \dots, n$, com frequência de amostragem k vezes menor.

- Cada sequência obtida no item anterior é aproximada por uma série B-spline de m -ésima ordem na resolução j .
- Para cada sequência, um algoritmo de decomposição *wavelet* é executado p vezes.
- Eliminam-se os coeficientes *wavelets* de alta escala, o que equivale à execução de um filtro passa baixa.
- O sinal é então reconstruído usando o valor médio dos coeficientes correspondentes às k séries obtidos a partir de (3.33).
- Calculam-se as derivadas da série B-spline reconstruída usando a relação (3.31).

O procedimento descrito acima vem sendo usado na obtenção de modelos contínuos (Coca e Billings, 1995a; Coca e Billings, 1996). A principal justificativa da utilização desse procedimento é a sua robustez ao ruído.

3.5 Síntese das Propriedades

Nesta seção será apresentada uma síntese das características de cada representação estudada. O objetivo aqui não é de determinar qual a melhor representação, mas enumerar características de cada uma, o que poderá nortear a escolha de uma determinada representação, em função dos objetivos em cada problema.

A síntese formulada nesta seção tomará como base os seguintes aspectos:

- Escolha do sinal de excitação,
- Escolha de estrutura,
- Treinamento/Estimação de parâmetros,
- Simulação dos modelos obtidos,
- Recuperação de informações.

No caso da escolha do sinal de excitação, será discutido que características devem estar presentes na massa de dados de identificação para se obter modelos em cada representação. As características que serão abordadas se referem ao tempo de amostragem e ao tamanho da massa de dados de identificação.

No item “escolha de estrutura”, serão abordados aspectos a respeito das variáveis envolvidas na estrutura de cada representação. Serão enfatizadas questões já resolvidas na literatura e questões ainda em aberto, assim como a capacidade de incorporação de conhecimento *a priori* do sistema.

A respeito da estimação de parâmetros, serão discutidos apenas fatores relativos ao tempo de processamento e número de parâmetros a ser estimados. Será comentada também a facilidade de simular os modelos obtidos. Por último, será apresentada uma discussão sobre a recuperação de informação a partir de modelos identificados.

3.5.1 Escolha do Sinal de Excitação

Em qualquer processo de identificação, independente da representação usada, para se obter bons modelos matemáticos é necessário que o sinal de excitação possua características de (Aguirre, 2000a): (i) persistência na excitação, (ii) excursão do sistema em toda a faixa de operação que se deseja modelar, (iii) tempo de amostragem compatível com as constantes de tempo envolvidas.

3.5.2 Escolha do Tempo de Amostragem

O tempo de amostragem e o número de pontos do conjunto de dados de identificação irão variar dependendo da representação escolhida. Com relação ao tempo de amostragem, as representações podem ser divididas em dois grupos: (i) as discretas, envolvendo os modelos NARMAX, as redes RBFs e as redes multicamadas MLPs e (ii) as contínuas, representadas pelos modelos DSTs e modelos obtidos via cálculo de derivadas a partir da transformada *Wavelet*.

A importância da seleção correta do tempo de amostragem para modelos discretos pode ser vista em (Billings e Aguirre, 1995). Estes autores concluíram que (i) o tempo de amostragem muito pequeno pode afetar o desempenho do algoritmo de seleção de estrutura e estimação de parâmetros; (ii) algumas interações não-lineares só aparecerão e serão reproduzidas se a taxa de amostragem for suficientemente rápida.

Uma superamostragem, ou seja, um sinal amostrado mais rápido do que o necessário, freqüentemente resulta em problemas numéricos durante a estimação de parâmetros (Billings e Aguirre, 1995). Na prática, entretanto, uma superamostragem pode também provocar problemas na seleção de estrutura. Por outro lado uma subamostragem pode provocar o efeito de dados adjacentes não serem correlacionados, impossibilitando assim a identificação.

Alguns métodos para escolha do tempo de amostragem utilizam funções de autocorrelação linear (Casdagli et al., 1991; Fraser, 1989) e não-linear (Aguirre, 1995). As funções utilizadas em (Billings e Tao, 1991) são definidas como

$$\phi_{yy}(\tau_c) = E(y(k) - \overline{y(k)})(y(k - \tau_c) - \overline{y(k)}), \quad \tau_c = 0, 1, \dots, \quad (3.34)$$

$$\phi_{y^2 y^2}(\tau_c) = E(y^2(k) - \overline{y^2(k)})(y^2(k - \tau_c) - \overline{y^2(k)}), \quad \tau_c = 0, 1, \dots, \quad (3.35)$$

sendo $E(\cdot)$ a esperança matemática e a barra indica média com relação ao tempo. ϕ_{yy} indica a correlação linear e $\phi_{y^2 y^2}$ indica a correlação não-linear.

O procedimento proposto em (Aguirre, 1995) para determinação do tempo de amostragem inicia-se através do estudo das autocorrelações, descritas em (3.34) e (3.35), dos dados de identificação a serem usados. Define-se

$$\tau_m = \min \tau_y, \tau_{y^2}, \quad (3.36)$$

sendo τ_y e $\tau_{y'}$, os primeiros mínimos das funções de autocorrelação linear e não-linear, respectivamente. O tempo de amostragem pode então ser escolhido de acordo com (Billings e Aguirre, 1995):

$$\frac{\tau_m}{20} \leq T_s \leq \frac{\tau_m}{10} \quad (3.37)$$

Aguirre e Billings (1995) citam que, em alguns casos, os limites superiores e inferiores podem ser relaxados para $\tau_m/5$ e $\tau_m/25$, respectivamente.

No caso dos modelos lineares, de maneira geral, na prática este tempo de amostragem possui magnitude próxima a 1/3 da menor constante de tempo de interesse (Aguirre, 2000a).

Para representações contínuas, conforme discutido na seção 2.4, uma das etapas do processo de identificação é a obtenção de derivadas da série temporal usadas na identificação. A obtenção de derivadas pode ser feita por filtros polinomiais lineares (Letellier et al., 1995b), ou por decomposição *wavelet* (Coca e Billings, 1996).

A necessidade de se obter derivadas de n -ésima ordem da série temporal implica necessariamente haver séries temporais sobreamostradas, tanto quando estas derivadas são obtidas via filtros polinomiais lineares quanto quando estas são obtidas via decomposição *wavelets*. Coca e Billings (1996) mostram que, para se estimar derivadas via decomposição *wavelet*, uma série temporal deve ser sobreamostrada de um fator K de forma que a frequência de amostragem seja K vezes maior que $2f_h$, sendo $2f_h$ a frequência de amostragem que satisfaz a condição de Whittaker-Shannon e f_h a maior frequência de interesse presente na série temporal.

Portanto, para se obter representações contínuas, necessita-se de tempo de amostragem menor, implicando séries temporais com maior número de pontos. A necessidade de um tempo de amostragem mais baixo pode, em muitas aplicações, representar uma limitação, devido à impossibilidade de se obter na prática tais tempos de amostragem, por exemplo, por limitações de *hardware*.

3.5.3 Escolha de Estrutura

No caso de modelos NARMAX, a escolha de estrutura em geral é feita pelo algoritmo de ERR, conforme discutido na Seção 2.2.4.1. Uma etapa que precede a utilização do ERR é a escolha dos parâmetros de inicialização, como o grau de não-linearidade do modelo, número de atrasos máximos em cada variável de entrada e a estrutura do modelo de ruído. Outro fator difícil de

se determinar previamente é o número de termos do modelo, o que em geral é feito aumentando-se gradativamente o número de termos até se obter os resultados desejados. Na escolha do número de termos do modelo, pode-se utilizar o critério de informação de Akaike (1974) para delimitar a região de busca no espaço de estruturas de modelos (Aguirre, 1994).

Quando não se tem nenhum conhecimento prévio do sistema, as funções de autocorrelação e correlação cruzada entre entrada e saída do sistema dão um indicativo da escolha do atraso máximo para cada entrada. Já a questão do grau de não-linearidade deve ser escolhido por um processo de tentativa e erro. Na prática grau de não-linearidade igual a 3 é normalmente suficiente na maioria dos problemas de identificação de sistemas com curvas estáticas suaves. Com relação ao modelo do ruído a ser usado nos modelos NARMAX, tem-se verificado que uma estrutura linear com 10 a 20 termos, tem sido suficiente para eliminar efeitos de polarização na estimação de parâmetros.

Já em situações em que há conhecimento prévio do sistema, como por exemplo número de pontos fixos, a escolha da estrutura pode ser iniciada pela escolha dos agrupamentos de termos que farão parte do modelo (Aguirre e Mendes, 1996; Aguirre e Billings, 1995). Outras informações que podem ser consideradas na escolha de estrutura são as curvas de ganho e constante de tempo em função do ponto de operação. Se um sistema possui ganho variando com o ponto de operação, então o modelo deve conter termos do agrupamento Ω_{u^i} com $i > 1$ (Jácome, 1996). Se o sistema possuir constante de tempo variando com o ponto de operação, no modelo deve-se ter termos pertencentes ao agrupamento Ω_{y_u} (Aguirre et al., 1999b). Detalhes a respeito do uso de informação *a priori* na seleção de estrutura serão discutidos na segunda parte deste trabalho.

No caso da representação RBF, alguns problemas são comuns às representações NARMAX polinomial e racional, como o número de funções de base a serem usadas, equivalente ao número de termos dos modelos NARMAX polinomial e racional, e a escolha do centro de cada RBF. O número de RBF's, assim como o número de termos de modelos NARMAX polinomial e racional, deve ser objeto de busca durante a identificação. Já a escolha dos centros das RBF's também pode ser feita pelo algoritmo ERR.

Uma questão ainda não resolvida é a escolha da função de base radial a ser usada na identificação de um sistema qualquer. Este ponto está aberto para investigação. Uma possibilidade seria utilizar a expansão polinomial das funções RBFs, conforme apresentado na seção (2.3.4), para aplicar os conceitos de agrupamentos de termos para os modelos NARMAX polinomial e racional. Neste caso, o conhecimento *a priori* de um determinado sistema

poderia apontar para uma determinada função.

No caso de modelos contínuos, a escolha de estrutura é muito similar à escolha da estrutura de modelos NARMAX polinomial e racional. Por exemplo, o grau de não-linearidade de modelos NARMAX polinomial e racional é similar ao dos modelos contínuos; a escolha de atrasos máximos nas variáveis de entrada e saída para modelos NARMAX polinomial e racional é equivalente à ordem máxima n das derivadas para modelos contínuos; e a escolha do número de termos é determinada através do seu gradativo incremento, até se atingir o resultado desejado.

Fator novo nesta representação, em relação aos modelos NARMAX polinomial e racional, é a escolha das N_s equações a serem usadas para estimar os parâmetros. Enquanto que nos modelos NARMAX polinomial e racional todos os pontos de uma massa de dados são usados na identificação, no caso de modelos contínuos é feita uma seleção de pontos para se compor as restrições usadas na estimação de parâmetros. Essa seleção tem sido feita de forma empírica, contando muita vezes com experiências anteriores, acumuladas via processo de tentativa e erro.

Nessa representação, porém, é muito fácil incorporar informações de pontos fixos na seleção de estrutura (Le Sceller et al., 1994). A principal vantagem neste caso é que se pode isolar termos que influem na localização dos pontos fixos, de termos que não têm nenhuma influência nessa propriedade. Como exemplo, considere a Equação (2.69). Uma vez que nos pontos fixos do sistema todas suas derivadas são nulas, ou seja, $\dot{X} = 0$, $\dot{Y} = 0$, $\dot{Z} = 0$ e $\dot{\dot{Z}} = 0$, esta equação fica então reduzida a

$$ab - cx + x^2 = 0, \quad (3.38)$$

sendo esta uma expressão analítica para a obtenção dos pontos fixos da série temporal x . Note-se que os termos com as variáveis X , Y e Z não influem na localização dos pontos fixos, embora certamente influam na sua estabilidade.

Outra característica importante é a capacidade de incorporar todas as informações *a priori* do sistema. Se as equações dinâmicas do sistema são conhecidas, pode-se, algebricamente, aplicar a DST nessas equações, obtendo assim a estrutura do modelo. Naturalmente, nesse caso, o processo de identificação se restringirá à estimação de parâmetros.

A escolha de estrutura para redes multicamadas MLP é certamente, de todas as representações, a que envolve o maior grau de liberdade. Nas redes MLPs pode-se variar o número de camadas escondidas, o número de neurônios em cada camada, as funções de ativação usadas, podendo inclusive utilizar

funções de ativação diferentes para cada nodo, além do atraso máximo de cada entrada.

A escolha da função de ativação no contexto de identificação de sistemas é algo ainda não resolvido. Analisando a rede contendo apenas uma camada, assim como para as RBFs, pode-se utilizar a expansão polinomial da função de ativação apresentada na Seção (2.3.1) e aplicar os conceitos de agrupamentos de termos para modelos NARMAX polinomial e racional. Mas, no caso de multicamadas, em que a expressão de saída não é mais linear nos parâmetros, qualquer análise é mais complicada. Na prática, a escolha da função de ativação é em geral feita de forma empírica (Zhu e Billings, 1996; Castillo e Gutiérrez, 1998; Narendra e Parthasarathy, 1990).

Já na definição do número de neurônios em cada camada, parte-se de uma rede superdimensionada, aplicando então técnica de *pruning* para se obter uma rede mais enxuta (Reed, 1993). Outro fator comum entre as redes MLP e os modelos NARMAX polinomial e racional e RBFs é a escolha dos vetores de entrada, ou seja, dos atrasos máximos em cada variável de processo. Nesse caso essa escolha a princípio pode se dar de forma similar em todas essas representações.

Com relação à incorporação de conhecimento prévio na escolha da estrutura, ainda é um ponto pouco discutido para redes neurais, assim como para qualquer outra representação, principalmente considerando aplicação em identificação de sistemas. Nesse ponto cabe uma pesquisa a respeito da influência da função de ativação na capacidade do modelo de aproximar características estáticas e dinâmicas de sistemas.

3.5.4 Treinamento / Estimação de Parâmetros

A estimação de parâmetros consiste na resolução de um problema de otimização. A diferença que se observa entre as diversas representações depende da função custo ser ou não linear nos parâmetros.

Considerando esses aspectos, podem-se separar as representações em dois grupos: as lineares nos parâmetros e as não-lineares. No grupo de representações lineares nos parâmetros, tem-se a representação NARMAX polinomial, as redes RBFs e os modelos contínuos. No grupo de representações não-lineares nos parâmetros destacam-se as redes neurais multicamadas - MLP.

É importante ressaltar que tanto as representações NARMAX quanto as representações contínuas, no caso de uma estrutura racional, são também não-lineares nos parâmetros, porém, para estimação dos parâmetros a *pseudo-linearização* pode ser aplicada. Portanto, a principal diferença para estimação

de parâmetros está no método de otimização usado. Este fator muitas vezes implica um tempo maior de processamento.

3.5.5 Simulação dos Modelos Obtidos

No caso da simulação dos modelos obtidos, as diferenças entre as diversas representações são muito significativas. A simulação dos modelos contínuos implica implementação de algoritmos de integração numérica do tipo Runge-Kutta. Este fato implica um grande esforço computacional.

No caso de Redes Neurais (tanto MLPs quanto RBFs), sua simulação implica armazenar um número elevado de parâmetros (pesos da rede), e a executar operações geralmente complexas, como por exemplo, exponenciais, logaritmos etc, dadas pelas funções de ativação.

No caso de modelos NARMAX polinomial e racional, sua simulação parece ser uma das mais simples. Consiste apenas na solução recursiva de uma equação de diferenças, constituída apenas por operações de adições e multiplicações, e no máximo divisões, caso da representação NARMAX racional.

3.5.6 Recuperação de Informação

A questão da recuperação de informação é outro fator que vem adquirindo relevância nos últimos anos (Knohl e Unbehauen, 1998; Wigren, 1998; Jang e Kim, 1994). A questão a que se deseja responder é: uma vez obtido o modelo, que informações o mesmo pode nos dar sobre o sistema?

Para as representações NARMAX polinomial, já se encontram na literatura algumas respostas a essa questão. Em (Aguirre e Mendes, 1996) é apresentado um procedimento para recuperar número e localização de pontos fixos. Em (Jácome e Aguirre, 1996) modelos NARMAX polinomiais são usados para recuperar a curva estática de uma válvula de controle. Em (Aguirre et al., 1999b) são sugeridos procedimentos para se obter analiticamente curvas de ganho e constante de tempo em função do ponto de operação, se a estrutura do modelo em questão for adequada. Esses procedimentos são geralmente muito simples e consistem apenas na solução algébrica de uma função polinomial.

No caso de redes neurais, alguns procedimentos para recuperação de informações vêm sendo sugeridos, porém em geral do tipo **se - então**, aplicados à classificação de padrões. Já na identificação de sistemas qualquer tentativa de recuperação de informações analiticamente é por demais complexo.

Já os modelos contínuos, conforme apresentados na Seção 2.4, possibilitam de uma forma muito simples obter o número e localização de pontos fixos.

3.6 Comentários Finais

Neste capítulo, propriedades de RNAs, RBFs, *wavelets* e de modelos contínuos, foram discutidas no âmbito de identificação de sistemas. A síntese apresentada na seção 3.5 fornece um indicativo de fatores que devem ser considerados na seleção de uma representação para um determinado objetivo de identificação.

Vale ressaltar que não se procurou aqui advogar a favor de ou contra alguma representação específica. O que se procurou fazer foi apontar características que devem ser consideradas na escolha de uma representação. De uma forma geral, conforme pode ser minimamente visto na Seção 2.6, todas as representações vêm sendo usadas em identificação de sistemas reais. No entanto, dependendo do tipo de dado disponível, ou do objetivo do modelo, uma determinada representação pode ser mais vantajosa que outra.

Como diferenças básicas entre as representações destacam-se: (i) a facilidade ou não de simulação, (ii) a quantidade de pontos necessários para estimar parâmetros, (iii) a linearidade ou não nos parâmetros e (iv) a capacidade ou não de se recuperar algebricamente características estáticas, tais como localização de pontos fixos e relação entre saída e entrada estacionária.

Capítulo 4

Desempenho das Representações na Identificação Caixa-Preta de Sistemas Não-Lineares

A área de identificação de sistemas não-lineares tem sofrido uma série de avanços. Várias representações matemáticas são disponíveis e cada uma delas com diferentes propriedades. Infelizmente o problema da escolha da *melhor representação*, para um dado problema, está longe de ter uma resposta. Na prática, a melhor representação é, com muito poucas exceções, a única que temos em mãos (Aguirre, 2000b).

Neste capítulo o desempenho de diversas representações na aproximação do comportamento de sistemas dinâmicos não-lineares é investigado. O termo *representação* será usado para indicar o tipo de modelo. Por exemplo, a rede multicamadas (MLP) e os modelos NARX polinomiais são diferentes representações. Por outro lado, o termo *estrutura do modelo* será usado para indicar uma particular configuração do modelo. Por exemplo, os regressores $y(k-1)$, $u(k-1)$ e $y(k-3)u(k-1)^2$ definem uma estrutura de um modelo NARX polinomial de três termos.

Neste capítulo são utilizados vários sistemas dinâmicos considerados *benchmark* no campo de sistemas não-lineares, tais como circuito de Chua (Chua et al., 1986), equações de Rössler (Rössler, 1976) e Duffing-Ueda (Ueda, 1985). Dados obtidos em um circuito de Chua (Tôrres e Aguirre, 1996) e na simulação do sistema de Rössler são usados para comparar o desempenho das representações NARMAX racionais e polinomiais na modelagem destas dinâmicas.

Aspectos da validação de modelos de sistemas caóticos também são discutidos. São apresentados resultados obtidos ao modelar o sistema de Duffing-Ueda utilizando redes multicamadas (Norgaard, 1997; Braga et al., 1998). Tal sistema caótico se presta como *benchmark* para problemas de identificação de sistemas não-lineares por apresentar uma grande diversidade de regimes dinâmicos que incluem regimes caóticos. Os resultados aqui descritos mostram que diversas redes validadas pela predição livre têm comportamentos dinâmicos muito distintos. Além disso, tais comportamentos tornam-se evidentes na medida em que técnicas do tipo mapas de Poincaré e diagramas de bifurcação são usados para verificar o poder de generalização das redes. Os resultados sugerem que, quando o objetivo do treinamento de uma RNA for reproduzir a dinâmica não-linear do sistema original, outros critérios, além da predição livre devem ser usados na validação dos modelos (Henrique et al., 1998; Corrêa et al., 1999).

Outra discussão apresentada é sobre a capacidade de recuperar não-linearidades de mapas estáticos. Esse aspecto é investigado para representações NARMAX racionais e polinomiais. O objetivo aqui é verificar que representação é melhor para recuperar a não-linearidade estática a partir de dados dinâmicos. Será mostrado que, para determinados casos, apenas uma das representações é capaz de aproximar o comportamento observado nos dados originais (Corrêa et al., 2000).

Por último, cinco representações matemáticas usadas em identificação são comparadas: Modelos polinomiais (Billings e Chen, 1989a), modelos racionais (Zhu e Billings, 1991; Corrêa et al., 2000), rede neural multicamada (MLP) (Cybenko, 1989), redes Elman (Elman, 1990) e rede RBFs (Chen et al., 1990). Os modelos são comparados através de seus respectivos desempenhos dinâmicos observados por meio da predição livre e, também, pela suas habilidades para representar a característica estática não-linear do sistema. O sistema usado é um processo térmico cuja curva em estado estacionário foi previamente obtida.

4.1 A Representação NARMAX Aplicada na Identificação de Dinâmica Caótica

Nesta seção a aplicação das representações NARMAX racional e polinomial na modelagem de sistemas caóticos será apresentada. Serão utilizados dois sistemas autônomos, considerados *benchmarks* de comportamentos dinâmicos não-lineares; o circuito de Chua e o sistema de Rössler. No primeiro, os dados foram obtidos via implementação real do circuito e, no segundo, os dados são

obtidos pela simulação de suas equações diferenciais. Em ambos os casos os modelos são do tipo NARMA, pois não possuem entradas.

Em sistemas dinâmicos, característica caótica é um fenômeno intrinsecamente não-linear. A principal característica de um sistema caótico é a extrema sensibilidade às condições iniciais, quando o movimento dinâmico de sistemas dissipativos fica restrito a uma região finita do espaço de estados, chamada de atrator estranho. As implicações físicas do caos não tinham sido estudadas até os anos sessenta, quando a primeira demonstração conclusiva da existência de características caóticas foi feita em um modelo não-linear simulando a convecção atmosférica (Lorenz, 1963).

4.1.1 Circuito de Chua

O circuito de Chua está apresentado na Figura 4.1(a). O único elemento não-linear é um resistor linear por partes denominado ‘diodo de Chua’. A função característica tensão×corrente do diodo de Chua é apresentada na Figura 4.1(b).

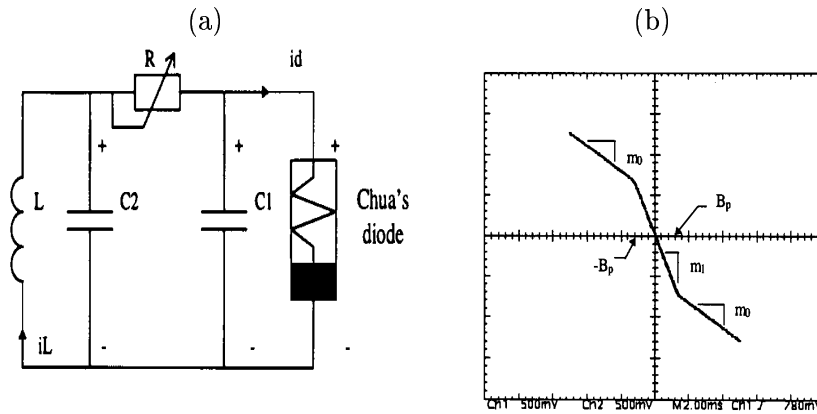


Figura 4.1: (a) Circuito de Chua e (b) Função caraterística do Diodo de Chua

As equações que governam o comportamento dinâmico do sistema, obtidas a partir das leis físicas, são

$$\begin{cases} C_1 \frac{dv_1}{dt} = \frac{(v_2 - v_1)}{R} - i_d(v_1) \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} = \frac{(v_1 - v_2)}{R} + i_L \\ L \frac{di_L}{dt} = -v_2 - r_L i_L \end{cases}, \quad (4.1)$$

sendo v_i a tensão no capacitor C_i , i_L a corrente através do indutor e a corrente no diodo de Chua dada por

$$i_d(v_1) = \begin{cases} m_0 v_1 + B_p(m_0 - m_1) & v_1 < -B_p \\ m_1 v_1 & |v_1| \leq B_p \\ m_0 v_1 + B_p(m_1 - m_0) & v_1 > B_p \end{cases}, \quad (4.2)$$

sendo B_p , m_0 e m_1 , respectivamente, o ponto de quebra e as inclinações da função linear por partes apresentada na Figura 4.1(b). Os seguintes componentes foram usados: $C_1 = 10 \pm 0,5 \text{ nF}$, $C_2 = 90 \pm 5 \text{ nF}$, $L = 21 \pm 2\% \text{ mH}$, $r_L = 15 \Omega$ e R é um *trimpot* de $2,0 \text{ k}\Omega$, $m_0 = -0,37 \pm 0,04 \text{ mS}$, $m_1 = -0,68 \pm 0,04 \text{ mS}$ e $B_p = 1,1 \pm 0,2 \text{ V}$.

Variando o *trimpot* R , o sistema acomoda com diferentes comportamentos dinâmicos, com atratores regulares e caóticos. O atrator de dupla volta é obtido com $R \approx 1800 \Omega$ e o atrator espiral é observado quando $R \approx 1900 \Omega$. A Figura 4.2 mostra o atrator bidimensional reconstruído, usando os dados medidos com relação sinal-ruído ($20 \log \frac{\sigma^2(\text{signal})}{\sigma^2(\text{ruído})}$) estimado em aproximadamente 72,3 dB. Foram coletadas 5000 amostras com $T_s = 12 \mu\text{s}$ e conversor A/D com resolução de 12 bits. Não se utilizou filtro *anti-aliasing* analógico, e a escolha do tempo de amostragem foi feita baseada em funções de correlação (Aguirre et al., 1997).

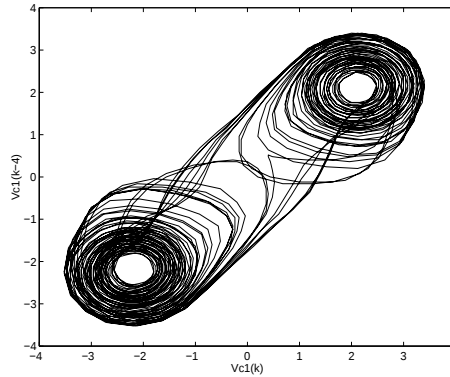


Figura 4.2: Reconstrução bidimensional (2000 pontos) do atrator de dupla volta de Chua (dsvcl.dat ©). Um janela de 1000 pontos destes dados foi usada para a identificação.

4.1.1.1 Modelos Polinomial e Racional do Circuito de Chua

Mil pontos da saída $y(k)$, tensão no capacitor C_1 , foram usados na identificação. O seguinte modelo polinomial foi obtido (Rodrigues, 1996):

$$\begin{aligned}
y(k) = & 3,5230y(k-1) - 4,287y(k-2) - 0,2588y(k-4) - 1,7784y(k-1)^3 \\
& + 2,0652y(k-3) + 6,1761y(k-1)^2y(k-2) + 0,1623y(k-1)y(k-2)y(k-4) \\
& - 2,7381y(k-1)^2y(k-3) - 5,5369y(k-1)y(k-2)^2 + 0,1031y(k-2)^3 \\
& + 0,4623y(k-4)^3 - 0,5247y(k-2)^2y(k-4) - 1,8965y(k-1)y(k-3)^2 \\
& + 5,4255y(k-1)y(k-2)y(k-3) + 0,7258y(k-2)y(k-4)^2 \\
& - 1,7684y(k-4)^2y(k-3) + 1,1800y(k-4)y(k-3)^2 + \psi_\xi^T(k-1)\hat{\theta}_\xi + \xi(k) ,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

sendo $\psi_\xi^T(k-1)\hat{\theta}_\xi$ o modelo MA do ruído, composto por 20 termos lineares na forma $\xi(k-j)$ usados para evitar polarização. Esta parte do modelo não foi usada nas simulações mostradas abaixo. Análise mais detalhada do modelo (4.3) identificado pode ser vista em (Aguirre et al., 1997).

Usando os mesmos dados descritos acima e também informação de agrupamento de termos (Mendes, 1995; Aguirre et al., 1997; Aguirre e Jácome, 1998; Mendes e Billings, 2000), o seguinte modelo racional foi obtido (Corrêa, 1997);

$$\begin{aligned}
y(k) = & \frac{1}{D} \times (2,5568y(k-1) - 1,7594y(k-2) + 0,2696y(k-5) + 0,6192y(k-1)^3 \\
& - 1,0219y(k-2)^3 - 3,2455y(k-1)^2y(k-5) + 0,0735y(k-3)^3 \\
& + 0,3444y(k-1)y(k-5)^2 - 0,4401y(k-2)y(k-5)^2 \\
& + 3,4624y(k-1)y(k-2)y(k-5) + 0,1986y(k-1)^2y(k-2)) \\
& + \sum_{i=1}^{10} \hat{\theta}_i \xi(k-i) + \sum_{j=1}^5 \hat{\theta}_j \xi(k-j)^2 + \xi(k) ,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

sendo

$$\begin{aligned}
D = & 1 + 1,5164y(k-1)y(k-2) + 0,5657y(k-3)y(k-5) - 12,8527y(k-2)^2 \\
& + 0,1948y(k-1)^2 + 1,7662y(k-2)y(k-5) - 0,1409y(k-5)^2 \\
& - 2,0470y(k-1)y(k-5) .
\end{aligned} \tag{4.5}$$

A Figura 4.3 mostra o atrator de dupla volta reconstruído usando o modelo polinomial (4.3) e o modelo racional (4.4). A Tabela 4.1 apresenta os pontos fixos e máximo expoente de Lyapunov estimados para o sistema original e os modelos identificados.

Os resultados sugerem que tanto o modelo polinomial quanto o modelo racional reproduzem as características dinâmicas do atrator original. Estes

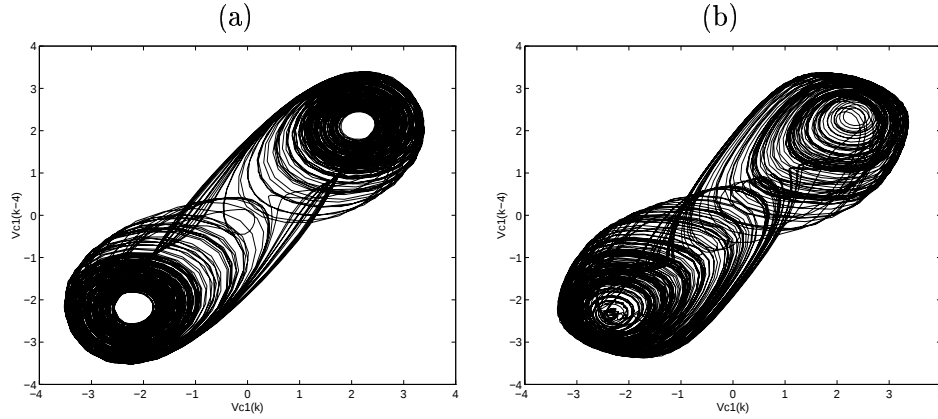


Figura 4.3: Atrator de dupla-volta reconstruído a partir (a) de simulação do modelo polinomial (4.3) e (b) simulação do modelo racional (4.4). O eixo- x é $y(k)$ e o eixo- y é $y(k - 4)$.

Tabela 4.1: Invariantes dinâmicos dos dados e modelos identificados do Circuito de Chua.

	Dados	Polinomial (4.3)	Racional (4.4)-(4.5)
Pontos Fixos	$(0; 2, 24; -2, 24)$	$(0; 2, 24; -2, 24)$	$(0; 2, 37; -2, 37)$
Máx. Exp. Lyapunov	$1,3516 \pm 0,0343$	$1,3350 \pm 0,0563$	$1,4218 \pm 0,0596$

resultados também mostram que a representação polinomial produz uma melhor aproximação do atrator produzido pelo circuito de Chua.

4.1.2 Sistema de Rössler

A equação de Rössler é outro *benchmark* largamente usado para o estudo de dinâmica caótica e pode ser representado como (Rössler, 1976):

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases}, \quad (4.6)$$

sendo que para gerar dados para identificação utilizou-se $a = 0, 2$, $b = 0, 2$ e $c = 5, 7$, para os quais o sistema possui comportamento caótico.

Em (Gouesbet e Letellier, 1994) se demonstra que a reconstrução do atrator através da observação de apenas uma variável x ou z requer uma representação

racional. Este fato ocorre devido ao produto entre as variáveis x e z que aparece na terceira equação dinâmica do sistema. Por outro lado, reconstrução a partir de observações da variável y implicará uma representação tipicamente polinomial.

Os seguintes modelos polinomial e racional foram identificados a partir da observação da variável x da equação de Rössler (Corrêa et al., 2000):

$$\begin{aligned}
 x(k) = & 0,1972 \times 10 x(k-1) - 0,104 \times 10 x(k-2) \\
 & + 0,7456 \times 10^{-4} x(k-4)x(k-2)^3 x(k-1) \\
 & - 0,2053 \times 10^{-4} x(k-5)x(k-4)^4 - 0,285 \times 10^{-4} x(k-5)x(k-1)^4 \\
 & + 0,2484 \times 10^{-4} x(k-3)^2 x(k-2)^3 \\
 & + 0,1238 \times 10^{-2} x(k-2)x(k-1)^2 + 0,4353 \times 10^{-4} x(k-5)^4 \\
 & + 0,2258 \times 10^{-2} x(k-5)x(k-2)x(k-1)^2 \\
 & + 0,3123 \times 10^{-4} x(k-4)^5 + 0,7531 \times 10^{-3} x(k-1)^4 \\
 & - 0,2703 \times 10^{-2} x(k-3)^2 x(k-1)^2 - 0,7807 \times 10^{-3} x(k-1)^3 \\
 & - 0,7077 \times 10^{-4} x(k-3)^2 x(k-2)^2 x(k-1) \\
 & - 0,3304 \times 10^{-3} x(k-3)x(k-2)^3 - 0,8847 \times 10^{-2} x(k-5)x(k-1) \\
 & + 0,7631 \times 10^{-2} x(k-4)x(k-1) - 0,387 \times 10^{-4} x(k-5)^3 x(k-1)^2 \\
 & + 0,4676 \times 10^{-3} x(k-3)^3 x(k-1) ,
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

e

$$\begin{aligned}
 x(k) = & \frac{1}{D} \times \{ 0,2718 \times 10 x(k-1) - 0,2545 \times 10 x(k-2) \\
 & - 0,7374 \times 10^{-2} x(k-1)x(k-2)x(k-4) + 0,3883 \times 10^{-2} x(k-4)^3 \\
 & + 0,7798 \times 10^{-2} x(k-2)x(k-3)x(k-4) + 0,8335 x(k-3) \\
 & - 0,2614 \times 10^{-1} x(k-5) + 0,9227 \times 10^{-3} x(k-2)^2 x(k-4) \\
 & - 0,6736 \times 10^{-2} x(k-1)^2 x(k-4) - 0,3483 \times 10^{-2} x(k-4)^2 x(k-5) \\
 & + 0,6479 \times 10^{-3} x(k-4)x(k-5) - 0,2461 \times 10^{-2} x(k-3)x(k-4)^2 \} ,
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

sendo

$$\begin{aligned}
 D = & 1 - 0,742 \times 10^{-2} x(k-1)x(k-4) + 0,412 \times 10^{-5} x(k-1)^3 \\
 & + 0,1515 \times 10^{-4} x(k-1)x(k-4)x(k-5) .
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Um modelo de ruído foi estimado (mas não apresentado) com os modelos (4.7) e (4.8) para reduzir a polarização. Como pode ser observado, ambos modelos possuem o mesmo atraso máximo $n_y = 5$, ou seja, possuem a mesma ordem. Porém o grau de não-linearidade do modelo racional é menor, assim como o número de termos de processo.

A Figura 4.4 apresenta a projeção bidimensional da equação de Rössler reconstruída usando a variável x do sistema original e também dos modelos (4.7) e (4.8). O atrator reconstruído a partir do modelo racional é mais

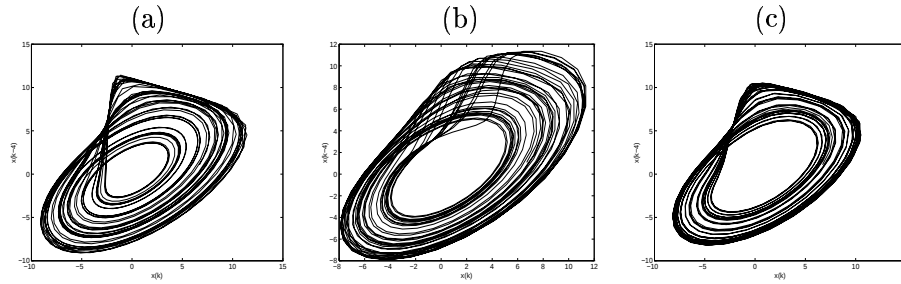


Figura 4.4: Projeção bidimensional da variável x para o sistema Rössler, usando: (a) dados simulados (rossler.dat) (b) modelo polinomial (c) modelo racional.

parecido com o original. Este fato pode ser justificado pela estrutura do modelo racional. Tal representação é mais “natural” para aproximar o atrator de Rössler a partir da variável x (Gouesbet e Letellier, 1994). Isso não é uma garantia automática de que o atrator reconstruído usando o modelo (4.8) é válido e nem desqualifica o modelo (4.7). Para tal, é necessário verificar se os atratores reconstruídos são topologicamente equivalentes ao atrator original (Gilmore, 1998; Letellier et al., 1995b). Não obstante, pode-se verificar que o modelo racional é capaz de representar a dinâmica da equação de Rössler com menor número de parâmetros e menor grau de não-linearidade. Isso reforça a observação prévia de que a reconstrução do fluxo a partir da variável x é tipicamente racional.

Tabela 4.2: Invariantes dinâmicos dos dados e modelos identificados para o sistema de Rössler

	Dados	Polinomial	Racional
Pontos Fixos	(0,0070;5,6930)	(0;21,5425; 3,4002 $\pm$ 11,4882i; -10,8118)	(0; -3,9033 $\pm$ 9,5741i; 9,3869)
Exp. de Lyapunov	1,2418 $\pm$ 0,3987	1,5661 $\pm$ 0,2814	0,6118 $\pm$ 0,1607

4.2 Aspectos da Validação de Modelos de Sistemas Caóticos - Aplicação a Redes Neurais

A validação dos modelos tem relevância significativa em qualquer problema de identificação. Adquire maior importância no caso de sistemas que exibem diversos tipos de regimes dinâmicos incluindo o caos (Aguirre e Billings, 1994;

Henrique et al., 1998). Dentre as possibilidades de validação de sistemas com dinâmica caótica destacam-se a reconstrução de atratores, os diagramas de bifurcação e a obtenção de seções de Poincaré. Uma das principais limitações de se utilizar tais ferramentas em problemas práticos é que nem sempre é possível obter tais diagramas para os sistemas originais. Sendo assim, fica difícil comparar os diagramas de bifurcação e as seções de Poincaré dos modelos com aqueles do sistema original. Vale ressaltar porém que já existem trabalhos que conseguiram “extrair o diagrama de bifurcação” a partir de dados (Bagarinao et al., 1999). Por outro lado, em estudos onde o sistema original é um modelo do qual tais diagramas podem ser facilmente obtidos, o seu uso é recomendado para investigar mais a fundo as características dinâmicas dos modelos obtidos. É fundamental perceber que, na maioria dos casos, usar diagramas de bifurcação e seções de Poincaré para avaliar o desempenho dinâmico dos modelos, em muito excede ao procedimento convencional de verificar como tais modelos *predizem* os dados. Além disso, a variância (ou valor absoluto) de erros de predição de um passo à frente, tão comumente usada como critério de parada de treinamento, é totalmente ineficaz na caracterização do desempenho de modelos dinâmicos.

Nesta seção será utilizada a equação de Duffing-Ueda (Ueda, 1980; Ueda, 1985) para estudar a capacidade de algumas topologias de redes neurais artificiais (RNA) reproduzirem dinâmicas caóticas. A equação de Duffing-Ueda foi originalmente proposta como um modelo de um oscilador não-linear e tem sido considerada como um padrão no estudo de dinâmicas não-lineares. O modelo é simples e pode produzir uma grande variedade de regimes dinâmicos (Ueda, 1980).

A equação de Duffing-Ueda é escrita como (Ueda, 1985)

$$\ddot{y} + k\dot{y} + y^3 = u(t) , \quad (4.10)$$

sendo que $k=0,1$ foi usado para produzir os dados originais via simulação digital. Estes dados foram os mesmos usados por (Aguirre e Billings, 1994). Um algoritmo de Runge-Kutta de quarta-ordem com um intervalo de integração de $\pi/3000$ s foi usado para simular a resposta do sistema para uma determinada entrada. Entrada $u(t)$ e saída $y(t)$ foram uniformemente amostradas com período de $T_s = \pi/60$ s, correspondendo a 120 pontos por pseudo-período do sinal de entrada. A massa de dados usada para identificação está apresentada na Figura 4.5. Todas as figuras usadas nesta seção, que se referem ao sistema original, foram retiradas de (Aguirre e Billings, 1994).

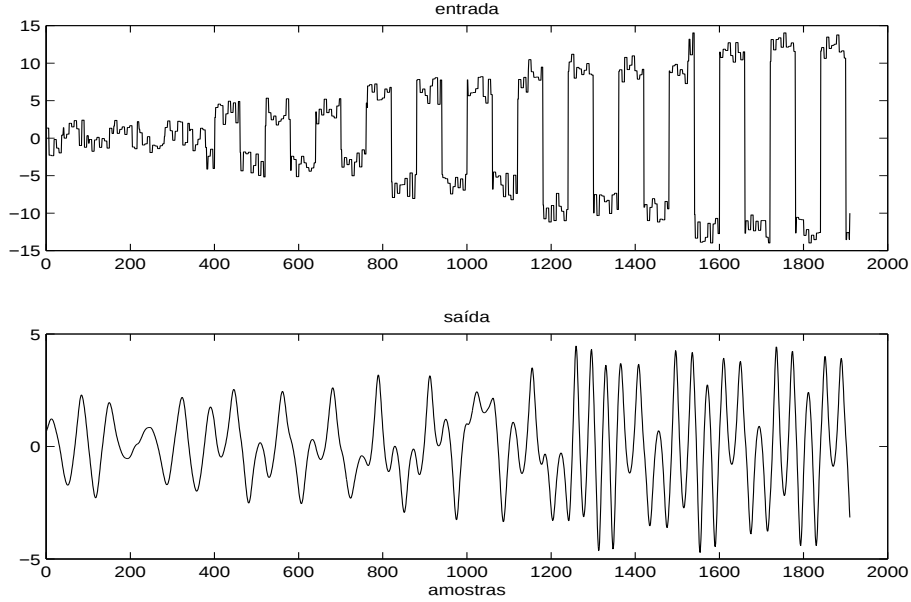


Figura 4.5: Dados de identificação do sistema Duffing-Ueda (duffing.dat @). Eixo- x amostras, eixo- y variáveis u e y da equação (4.10), respectivamente entrada e saída.

4.2.1 Modelos Identificados

Os modelos apresentados nesta seção foram obtidos utilizando as rotinas do “*toolbox*” de identificação baseados em redes neurais, para o MATLABTM desenvolvido por Norgaard (1997). A rotina usada foi a *nnarmax1.m*, que identifica uma rede neural ARMAX (*auto-regressive, moving average with exogenous input*) a partir de um par de vetores contendo entrada e saída desejada. A rede é obtida a partir da escolha de: n_y , n_u e n_e , respectivamente, número de atrasos da saída, entrada e número de termos de ruído, além da seleção do número de neurônios na camada escondida e das funções de ativação usadas.

Como critério de parada para o algoritmo de treinamento, utilizaram-se sempre valores *default* da rotina. Os valores de n_y , n_u e n_e usados foram, respectivamente, 3, 2 e 10. Os valores de n_y e n_u foram escolhidos iguais aos “*lags*” usados em (Aguirre e Billings, 1994). Empiricamente, escolheu-se $n_e = 10$.

Obtiveram-se várias redes variando apenas o número de neurônios na camada escondida. As redes obtidas foram chamadas: *nn2*, *nn3*, *nn4*, *nn5*, *nn6*, *nn7*, *nn8*, *nn9*, *nn10*, *nn11*, *nn12*, onde os números 2, 3, ... 12 correspondem ao número de neurônios na camada escondida (Corrêa et al., 1999). Em todos

os casos utilizou-se a tangente hiperbólica para função de ativação na camada escondida e função de ativação linear para a camada de saída. Os pesos foram sempre inicializados com valores nulos.

Para todas as topologias usadas na obtenção dos modelos, utilizou-se o mesmo critério de parada. Embora tenha ocorrido número de épocas diferentes para cada topologia usada, sempre o critério de parada foi atingido.

4.2.2 Validação das redes obtidas

A questão crítica na obtenção de modelos é a sua validação, principalmente se o sistema possui dinâmica caótica (Aguirre e Billings, 1994). Para o sistema apresentado neste trabalho, utilizaram-se quatro critérios de validação:

- Predição da série temporal
- Reconstrução do atrator
- Seção de Poincaré
- Diagramas de Bifurcação

Detalhes sobre cada um dos critérios de validação referidos acima podem ser encontrados em (Aguirre, 1996a; Aguirre, 1996b).

4.2.2.1 Predição da série temporal

Consiste em simular o modelo com a mesma entrada do sistema e verificar sua capacidade de seguir os dados originais. Nesse caso a predição é livre. Nessa simulação utilizou-se a mesma massa de dados usada para a identificação. Os resultados estão apresentados na Figura 4.6.

Na predição livre não foi possível perceber diferenças significativas no comportamento dos modelos, principalmente considerando o comportamento caótico observado nos dados de identificação. A razão para isso é o fato de que sistemas caóticos têm pelo menos um expoente de Lyapunov positivo. A consequência é que, no espaço de estados numa “direção” as trajetórias divergem. Em função disso, pequenas diferenças entre condições iniciais são amplificadas à medida que o sistema se desenvolve. Isso é conhecido como *sensibilidade a condições iniciais* e é um limite teórico e prático à predição (de médio e longo prazo) de séries temporais caóticas. A Figura 4.6 apresenta um resultado típico obtido na simulação das redes.

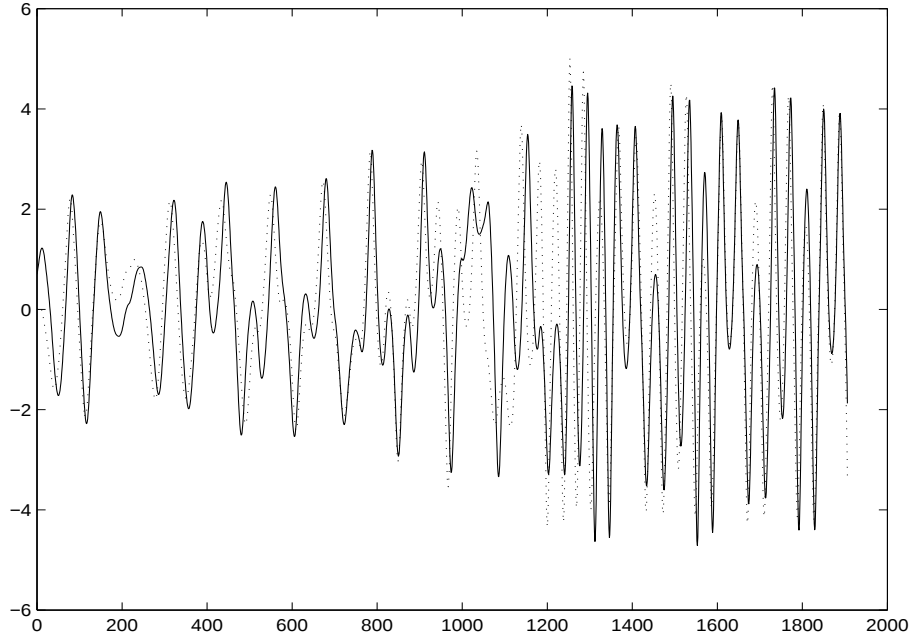


Figura 4.6: Resultado típico obtido para todas as redes, na predição livre. (-) Sistema Original e (..) Rede (Corrêa et al., 1999). Eixo- x amostras e eixo- y saída.

4.2.2.2 Reconstrução do atrator

Neste critério é usado um pseudo-plano de fases constituído por $y(t)$ e $y(t - T_p)$ para reconstruir o atrator (Packard et al., 1980; Takens, 1981).

As trajetórias obtidas a partir da simulação dos modelos identificados estão apresentadas nas Figuras 4.7(a)-(f). Os modelos foram simulados com a entrada $u(t) = A \cos(wt)$, com $A = 11$ e $w = 1$ rad/s. A Figura 4.7(f) apresenta a trajetória obtida a partir do sistema original com $T_p = 200 \times \pi/3000$, sendo que para os modelos utilizou-se $T_p = 4 \times \pi/60$, equivalendo sempre ao tempo de quatro amostras.

Os atratores reconstruídos com modelos com 4, 5, 6, 7, 8, 10 e 11 neurônios na camada escondida estão aparentemente próximos do atrator do sistema original. A fim de ser categóricos nesta afirmação, não bastaria olhar apenas para a geometria das projeções dos atratores, mas seria necessário verificar como as trajetórias se cruzam no espaço de estados. A análise topológica inclui esse tipo de investigação (Gilmore, 1998). As redes, com dois, três e nove neurônios na camada escondida, apresentaram comportamento periódico, e a rede com 12 neurônios apresentou uma deformação do atrator, com um deslocamento para a esquerda.

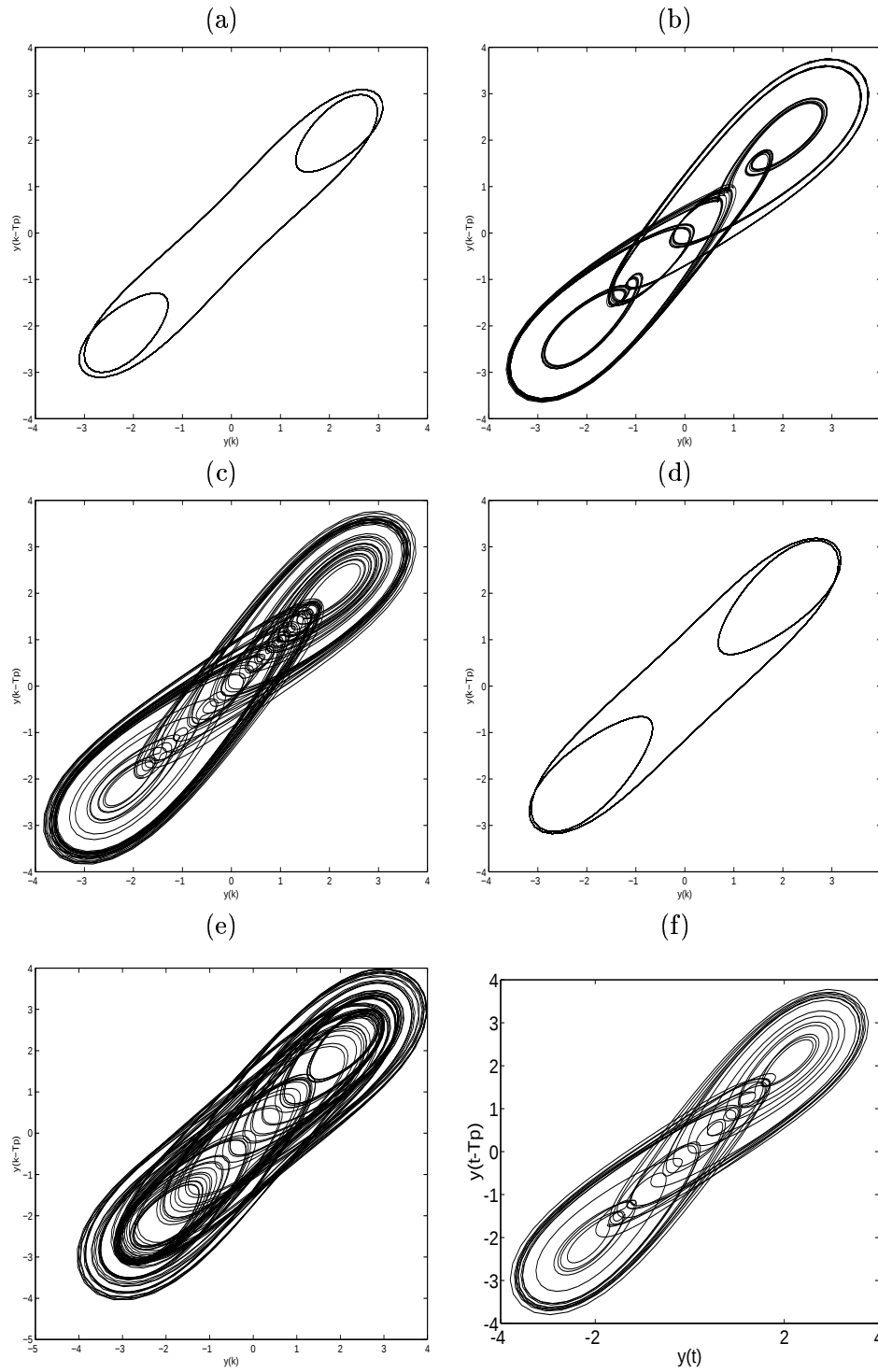


Figura 4.7: Trajetória no pseudo-plano de fases (a) Modelo *nn2*, (b) Modelo *nn3*, (c) Modelo *nn8*, (d) Modelo *nn9*, (e) Modelo *nn12* e (f) Sistema original (Corrêa et al., 1999).

4.2.2.3 Seção de Poincaré

Mapa de primeiro retorno de um sistema dinâmico de ordem n , ou mapa de Poincaré, é uma hipersuperfície de dimensão $n-1$ que é transversal ao fluxo $\phi \in \mathbf{R}^n$. O mapa de Poincaré $P = \Sigma \rightarrow \Sigma$ é definido para um ponto $q \in \Sigma$, por

$$P(q) = \phi_\tau(q), \quad (4.11)$$

sendo que τ é o tempo para a órbita $\phi_t(q)$ baseado em q , retornar pela primeira vez a Σ .

As Figuras 4.8(a)-(f) apresentam as seções de Poincaré obtidas a partir da simulação de alguns modelos para entrada, $u = 11 \cos(t)$, e a Figura 4.8(f) apresenta a seção de Poincaré para o sistema original. As redes omitidas apresentaram comportamentos similares, mas certamente não idênticos à Figura 4.8(c).

Segundo esse critério as redes que mais se aproximaram do comportamento do sistema original foram as redes com 4, 5, 6, 7, 8, 10 e 11 neurônios na camada escondida. Os modelos com 2, 3, 9 e 12 neurônios possuem seções de Poincaré muito distantes do sistema original.

4.2.2.4 Diagrama de Bifurcação

Um ponto r de um diagrama de bifurcação, para o caso considerado neste trabalho, é definido como

$$r = \{(y, A) \in \mathbf{R} \times I \mid y = y(t_i), \quad A = A_0; t_i = K_{ss} \times 2\pi/w\}, \quad (4.12)$$

sendo que I é o intervalo $I = [A_i \ A_f] \subset \mathbf{R}$. O ponto r é obtido por simulação do sistema por um tempo suficientemente longo para atingir o regime permanente, então é feito o gráfico de $y(K_{ss} \times 2\pi)$ por A_0 . Para cada valor de A , tem-se n_b pontos.

O diagrama de bifurcação permite determinar os valores de $A \in I$ para os quais o sistema bifurca e qual é o tipo de bifurcação. No estudo de sistemas não-lineares o diagrama é usado para determinar qual é a faixa de valores do parâmetro de bifurcação em que o sistema possui comportamento caótico. Deve ser notado que, ao passo que o mapa de Poincaré fornece uma imagem (um corte) do atrator no espaço de estados, o diagrama de bifurcação resume os diversos regimes dinâmicos exibidos pelo sistema para diversos valores do parâmetro de bifurcação.

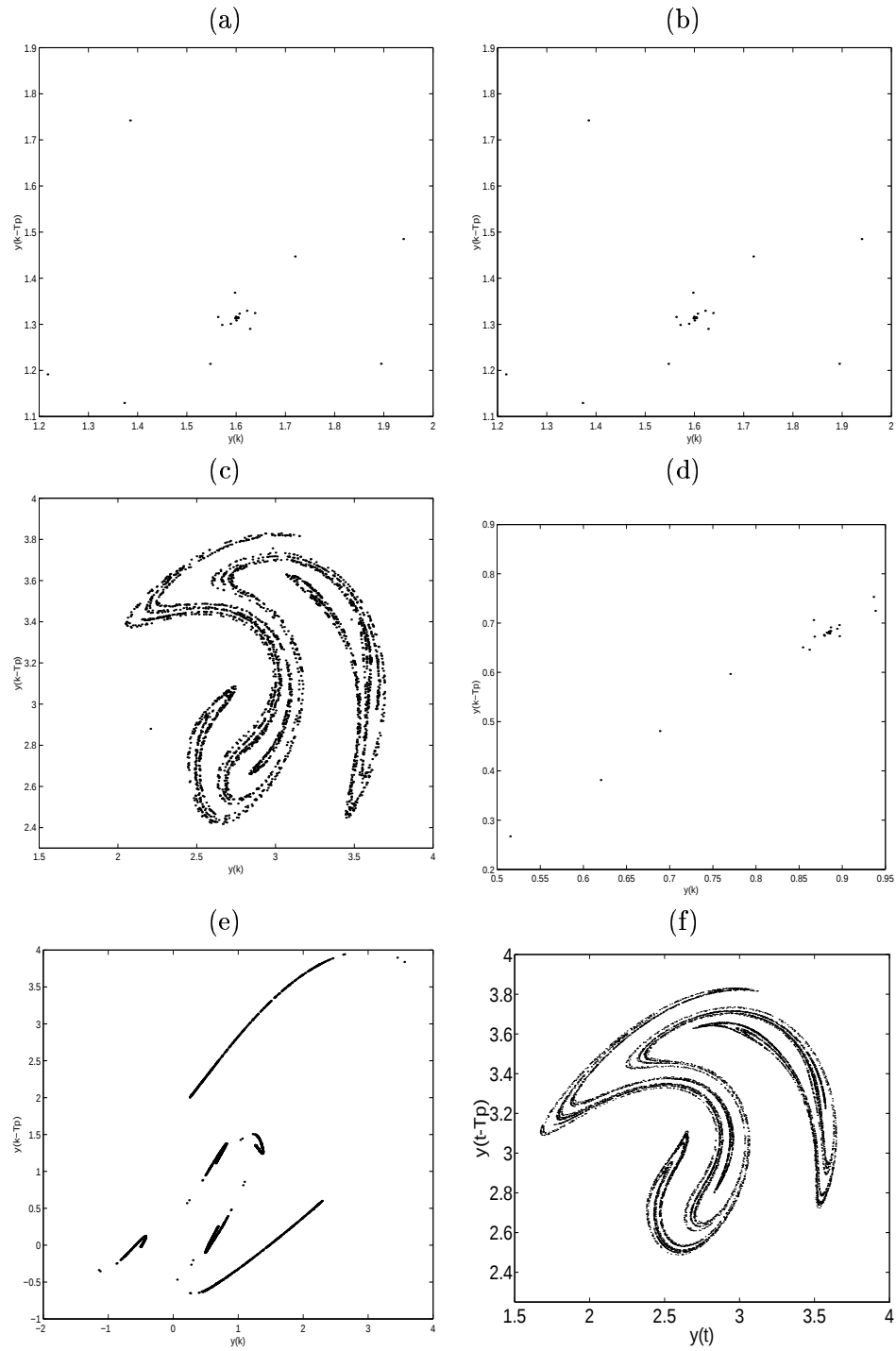


Figura 4.8: Seção de Poincaré para a entrada $u = 11\cos(t)$ (a) Modelo $nn2$, período-1, (b) Modelo $nn3$, período-3, (c) Modelo $nn8$, caos, (d) Modelo $nn9$, período-1, (e) Modelo $nn12$, possivelmente quase-periódico, e (f) Sistema original, caos (Corrêa et al., 1999).

Os diagramas de bifurcação para os modelos identificados estão apresentados nas Figuras 4.9(a)-(e). O parâmetro de bifurcação usado foi a amplitude do sinal senoidal da entrada, na faixa $4, 5 < A < 12$. 150 pontos equidistantes foram gerados com $K_{ss} = 63$ e $n_b = 20$. O diagrama de bifurcação do sistema original está apresentado na Figura 4.9(f), tendo sido gerado com $K_{ss} = 400$ e $n_b = 20$ (Aguirre e Billings, 1994). A diferença nos valores de K_{ss} e o número de pontos usados para o modelo e para o sistema original se deve ao grande esforço computacional necessário para simular os modelos baseados em rede neurais. $K_{ss} = 400$ significa simular a rede com 48000 pontos, 750 vezes. $K_{ss} = 63$, já é suficiente para o propósito, pois com este valor o sistema atinge o regime permanente.

É interessante notar que o mapa de Poincaré corresponde a um valor no diagrama de bifurcação. Por exemplo, todos os mapas da Figura 4.8 correspondem aos atratores observados para $A = 11$, nos respectivos diagramas da Figura 4.9. Portanto, os regimes dinâmicos (para $A = 11$) “período-1” e caos podem ser constatados com certa facilidade. Os regimes “período-3”¹ e quase-periódicos não são tão facilmente discerníveis nos diagramas de bifurcação.

Segundo esse critério de validação, verifica-se que as redes que mais se aproximaram do comportamento do sistema original foram as redes com 4, 5, 6, 7, 8, 10 e 11 neurônios na camada escondida. Porém ressalta-se o fato de nenhuma delas reproduzirem a seqüência de bifurcações observadas nos dados originais.

4.2.3 Comentários

Os resultados apresentados apontam para a necessidade de se estabelecer critérios de validação que não sejam baseados apenas na predição livre, quando se trata de modelagem de sistemas não-lineares. Verifica-se que apenas o critério de parada do algoritmo de treinamento de uma rede neural não é suficiente para garantir comportamento dinâmico da rede igual ao observado no sistema original. Isso não é uma propriedade peculiar a redes neurais, pelo contrário, praticamente todas as representações não-lineares apresentam esses problemas. O que diferencia uma representação de outra é a facilidade com que tais problemas podem ser resolvidos em casos práticos.

Por outro lado, a reconstrução do atrator, conforme visto na Figura 4.7, também não foi suficiente para garantir a capacidade de generalização das redes obtidas, apesar de que uma análise topológica (Letellier et al., 1995a; Letellier et al., 1996; Gilmore, 1998) é necessária a fim de quantificar quão

¹Também chamados de “órbitas de recorrência-3”.

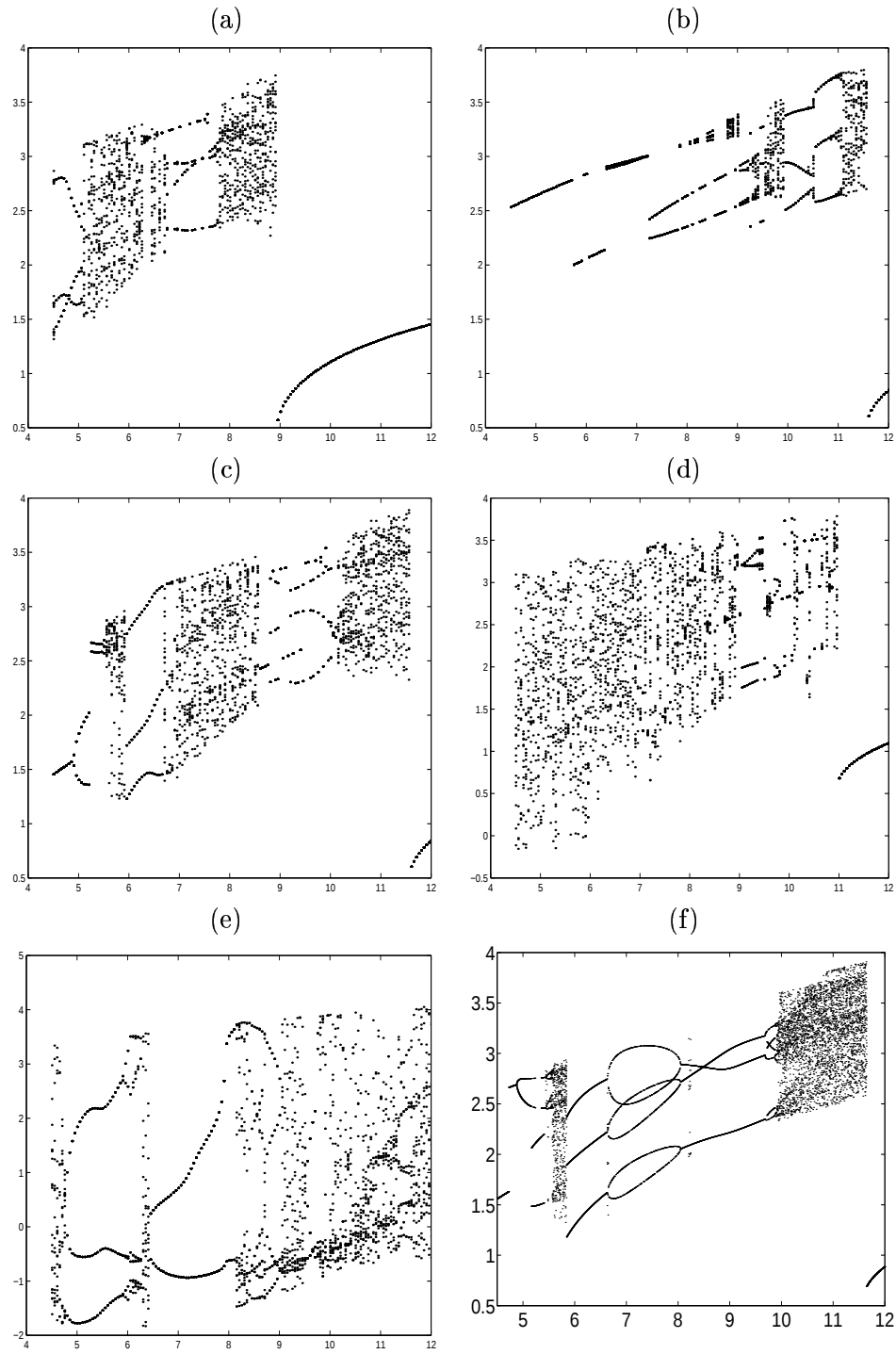


Figura 4.9: Diagramas de bifurcações (a) Modelo *nn2*, (b) Modelo *nn3*, (c) Modelo *nn8*, (d) Modelo *nn9*, (e) Modelo *nn12* e (f) Sistema original (Corrêa et al., 1999).

próximos estão os atratores do atrator original. Observa-se também que a seção de Poincaré se mostrou mais apropriada para estabelecer comparações entre as redes obtidas para $A = 11$.

Os diagramas de bifurcação se apresentam como uma ferramenta mais poderosa para se verificar a capacidade de generalização das redes neurais. Observa-se que, nos casos apresentados aqui, nenhuma rede conseguiu reproduzir a seqüência de bifurcações observadas nos dados originais. Nesse ponto cabe um estudo mais aprofundado sobre a influência do número de camadas escondidas e do número de nodos, assim como da influência das funções de ativação usadas.

Antes de encerrar esta seção, deve-se notar que existem modelos identificados a partir dos dados da Figura 4.5 que reproduzem satisfatoriamente os critérios aqui usados, bem como outros tais como o máximo expoente de Lyapunov e a dimensão de correlação (Aguirre e Billings, 1994).

4.3 Não-Linearidades de Mapas Estáticos

Uma importante ferramenta para validar e selecionar estruturas de modelos é a estimação de não-linearidades estáticas (Aguirre, 1997). Nesta seção um estudo sobre a reconstrução de mapas de primeiro retorno usando as representações NARX racional e polinomial é apresentado. Para discussão serão usados o mapa senoidal com não-linearidade cúbica, o mapa tenda (*tent map*) e o mapa do regulador chaveado *buck*. A meta será sempre obter modelos dinamicamente válidos que também representem corretamente as não-linearidades estáticas do sistema (Corrêa et al., 2000).

4.3.1 Mapa Senoidal com Não-Linearidades Cúbicas

Considere o seguinte mapa,

$$y(k) = \alpha \sin(y(k-1)) , \quad (4.13)$$

sendo $\alpha = \pi$ e as condições iniciais $y(0) \in [0, \pi]$.

Usando 500 pontos gerados através da simulação da equação (4.13), os seguintes modelos polinomial (Aguirre, 1997) e racional (Corrêa et al., 2000) foram obtidos:

$$y(k) = +0,29893 \times 10 y(k-1) - 0,2479 y(k-1)^3 \quad (4.14)$$

e

$$y(k) = \frac{1}{D} \times \{ +0,3957 \times 10 y(k-1) - 0,3951 y(k-1)^3 \} , \quad (4.15)$$

sendo

$$\begin{aligned} D = & 1 - 0,5117 \times 10^{-3} y(k-2)^2 - 0,3722 \times 10^{-2} y(k-3)^2 \\ & + 0,8053 \times 10^{-2} y(k-1)y(k-2) - 0,2728 \times 10^{-2} y(k-1)y(k-3) \\ & + 0,1174 y(k-1)^2 . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Observa-se que a equação (4.14) é um modelo polinomial de primeira ordem com dois termos de processo, enquanto que a equação (4.15) é um modelo racional com oito termos de processo. Entretanto, como pode ser observado na Figura 4.10, o mapa estático reconstruído a partir do modelo racional é mais preciso do que o mapa obtido pelo modelo polinomial.

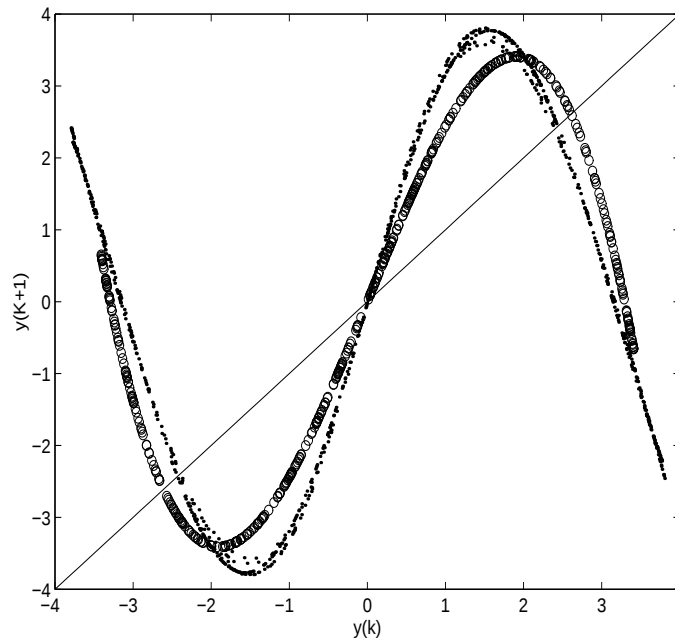


Figura 4.10: (·) Atrator original e dos modelos NARMAX do Mapa Senoidal com não-linearidade cúbicas, (o) modelo polinomial (—) é a linha $y = x$. A não-linearidade estática estimada com o modelo racional é a curva com maior ruído indicada com pontos (Corrêa et al., 2000).

A Tabela 4.3 apresenta os pontos fixos e os expoentes de Lyapunov estimados a partir dos dados e modelos. Como era esperado, o modelo racional reproduziu melhor que o modelo polinomial as características do sistema original.

Tabela 4.3: Invariantes dinâmicos dos dados e modelo identificados para o mapa senoidal com não-linearidades cúbicas (Corrêa et al., 2000)

	Dados	Modelo Polinomial	Modelo Racional
Pontos Fixos	(2,439;0;-2,439)	(2,610;0;-2,610)	(2,400;0;-2,400)
Exp. Lyapunov	$1,1574 \pm 0,1105$	$1,0544 \pm 0,0883$	$1,1544 \pm 0,0077$

4.3.2 Tent map

Considere agora o *tent map* descrito por

$$y(k) = 1 - 1,999|y(k-1) - 0,5| . \quad (4.17)$$

Utilizando 500 pontos gerados a partir da simulação da equação (4.17), foram identificados os seguintes modelos polinomial (Aguirre, 1997) e racional (Corrêa et al., 2000):

$$y(k) = 2,7627y(k-1) - 1,6938y(k-1)^2 - 1,2405y(k-1)^3, \quad (4.18)$$

e

$$y(k) = \frac{1}{D} \times \{ +0,2608 \times 10^{-1} - 0,1325 \times 10 y(k-1)y(k-1) + 0,1325 \times 10 y(k-1) \} \quad (4.19)$$

sendo

$$D = 1 - 0,2416 \times 10 y(k-1) + 0,2407 \times 10 y(k-1)y(k-1). \quad (4.20)$$

Note que tanto o modelo polinomial representado pela equação (4.18), quanto o modelo racional, equação (4.19), são de primeira ordem e possuem grau de não-linearidade $l = 3$. O modelo polinomial possui três termos de processo e o modelo racional, cinco. Apesar da aparente estrutura polinomial

observada na equação (4.17), a Figura 4.11 demonstra que a representação racional é mais eficiente para reproduzir a não-linearidade estática original. Em (Aguirre, 1997) a limitação do modelo polinomial para reproduzir este mapa foi apontada.

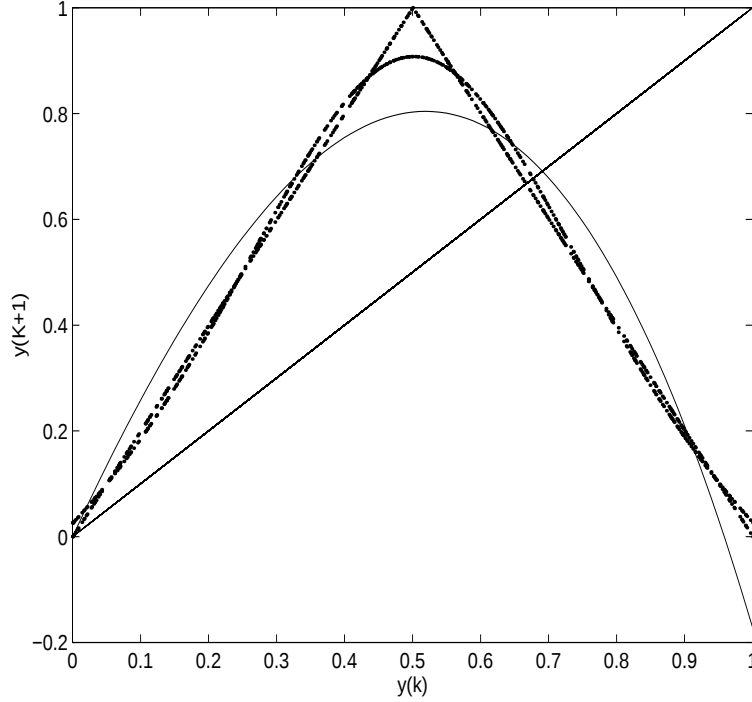


Figura 4.11: 500 pontos do atrator *tent* (ponta aguda). Não-linearidade estática estimada usando (·) modelo racional (4.19) e (—) modelo polinomial (4.18). A linha reta é $y = x$ (Corrêa et al., 2000).

4.3.3 Mapa de Primeiro Retorno de um Modelo do Regulador Chaveado Buck

Nesta seção um modelo racional é estimado para um modelo de um regulador chaveado Buck. O regulador opera em malha fechada para garantir uma certa tensão na carga (Tse, 1994). O mapa obtido das equações do circuito possui a seguinte forma geral (Tse, 1994):

$$y(k) = \alpha y(k-1) + \frac{h(d_n)^2 \beta E [E - y(k-1)]}{y(k-1)} \quad (4.21)$$

sendo $\alpha=0,8872$, $\beta = 1,2$ e $E = 33$ constantes que somente dependem dos componentes do circuito, d_n é a saída do controlador (um sinal de tensão) e a saturação $h(d_n)$ é dada por

$$h(d_n) = \begin{cases} 0 & \text{if } d_n < 0, \\ 1 & \text{if } d_n > 1, \\ d_n & \text{qualquer outro.} \end{cases} \quad (4.22)$$

Em (Aguirre, 1997) se mostra que modelos NARMAX polinomiais não são capazes de reproduzir o comportamento dinâmico da equação (4.21). Aguirre (1997) apresentou o seguinte modelo para aproximar o comportamento dinâmico do conversor Buck:

$$y(k) = \frac{2,6204y(k-1)^2 - 9,9875y(k-1) + 1,4171 \times 10^3}{y(k-1)} + 46,429 \exp[22 - y(k-1)]. \quad (4.23)$$

Note-se que o modelo acima envolve uma parcela com estrutura racional e outra exponencial. A estrutura da equação (4.23) foi obtida de forma *ad-hoc*, sendo que os parâmetros foram estimados por mínimos quadrados.

A seguir será mostrado que um modelo racional identificado com o mesmo conjunto de dados reproduz o comportamento dinâmico da equação (4.22). A equação de tal modelo é dada por

$$y(k) = \frac{1}{D} \times \{ +0,8658 \times 10 + 0,1223 \times 10^{-2} y(k-1)^3 - 0,441 \times 10^{-1} y(k-1)^2 \}, \quad (4.24)$$

sendo

$$D = 1 - 0,8381 \times 10^{-1} y(k-1) + 0,1766 \times 10^{-2} y(k-1)^2. \quad (4.25)$$

Na Figura 4.12 os mapas de primeiro retorno reconstruído a partir dos dados originais e pela simulação dos modelos representados pelas equações (4.24) e (4.23) são apresentados. Note-se que o modelo racional aproxima melhor a não-linearidade estática do sistema original do que o modelo (4.23).

Pontos fixos e expoentes de Lyapunov calculados usando o modelo (4.24) confirmam a qualidade da aproximação das características dinâmicas do sistema original usando tal modelo. Estes resultados estão apresentados na Tabela 4.4.

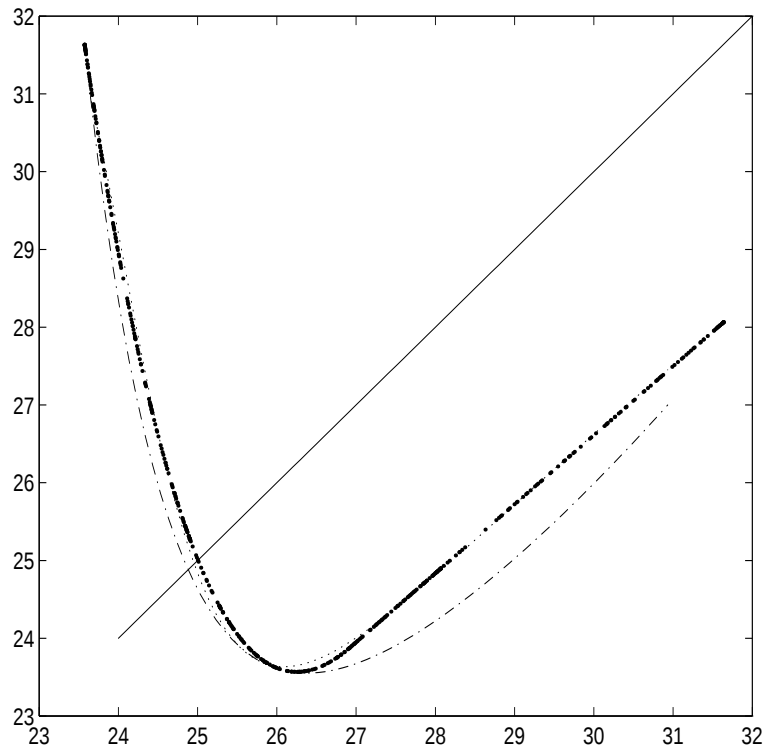


Figura 4.12: Mapa de primeiro retorno para modelo do regulador Buck. Pontos em negrito são os dados; pontos claros correspondem ao modelo racional (4.24); o traço-ponto corresponde ao modelo (4.23); linha cheia representa os pontos onde $x = y$ (Corrêa et al., 2000).

Tabela 4.4: Validação dos modelos estimados para o Regulador Chaveado Buck (Corrêa et al., 2000).

	Dados	Modelo Racional
Pontos Fixos	25,0018	24,9561
Exp. Lyapunov	$0,4422 \pm 0,2054$	$0,4212 \pm 0,1747$

4.4 Comparando Representações Não-Lineares: Um Estudo de Caso

Nesta seção é apresentada uma comparação de cinco representações matemáticas usadas em identificação de sistemas. São comparados os modelos NARMAX polinomiais, NARMAX racionais, as redes neurais multicaudadas, a rede parcialmente recorrente Elman (Elman, 1990) e as redes RBFs. Os modelos são obtidos via dados reais, é verificado o desempenho de cada representação na predição livre e também suas capacidades de representar a característica estática não-linear do sistema (Coelho et al., 2000).

4.4.1 Processo Térmico

O sistema a ser modelado consiste de um pequeno aquecedor elétrico e um conjunto de ventiladores que podem estar ligados ou desligados. A temperatura do aquecedor é medida por um termopar e a relação em estado estacionário entre potência elétrica na entrada e temperatura final depende, naturalmente, do estado dos ventiladores (Cassini, 1999). Aqui serão usados dados coletados com os ventiladores desligados.

Dispõem-se de duas massas de dados diferentes. A primeira, com apenas 17 pontos, contendo dados de estado estacionário do sistema, ver Tabela 4.5. A segunda, com 1200 pontos, contendo dados dinâmicos de entrada e saída obtidos no sistema. A Figura 4.13 apresenta parte destes dados usados na identificação (amostras 1 a 600). As seguintes 600 amostras (não apresentadas) foram usadas para validação dinâmica dos modelos. O tempo de amostragem usado foi $T_s = 12$ s. Tanto os dados estáticos quanto os dinâmicos estão normalizados.

A Figura 4.14 apresenta o histograma com a distribuição dos valores da saída dos dados de identificação. Pode-se notar que a saída geralmente satisfaz a condição $y < 0,25$. Seu valor máximo é $y = 0,3206$. Vale ressaltar que o histograma mostra que os dados de identificação pertencem a uma faixa muito mais restrita que os dados estáticos. Neste último tem-se o máximo valor de saída $y = 0,4391$.

A relação em estado estacionário entre saída e entrada foi facilmente obtida através de testes estáticos. Um dos objetivos aqui é verificar qual representação reproduz melhor a característica estática a partir dos dados de identificação. Como estes pertencem a uma faixa mais restrita que os dados estáticos, será verificada a capacidade de extrapolação de cada modelo.

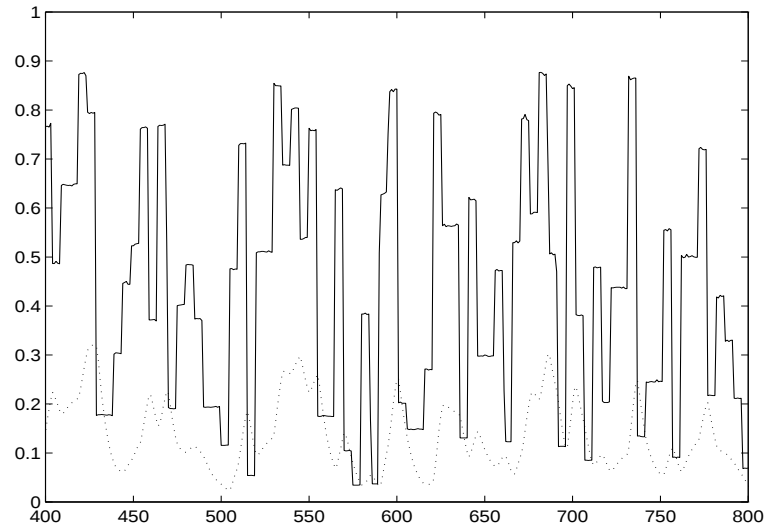


Figura 4.13: Dados de identificação do Processo Térmico. Eixo- x são as amostras e o eixo- y é a temperatura em p.u. (—) Entrada e (···) saída (Cassini, 1999) (mydin3.dat @).

Tabela 4.5: Dados em estado estacionário do processo térmico em p.u. (Cassini, 1999).

Entrada	Saída
$\bar{u}$	$\bar{y}$
0	0
0,0230	0,0015
0,0508	0,0029
0,0855	0,0063
0,1197	0,0112
0,1538	0,0166
0,1939	0,0259
0,3282	0,0679
0,4689	0,1299
0,6066	0,2061
0,6818	0,2535
0,7082	0,2745
0,7858	0,3297
0,8230	0,3614
0,8640	0,3873
0,9304	0,4391

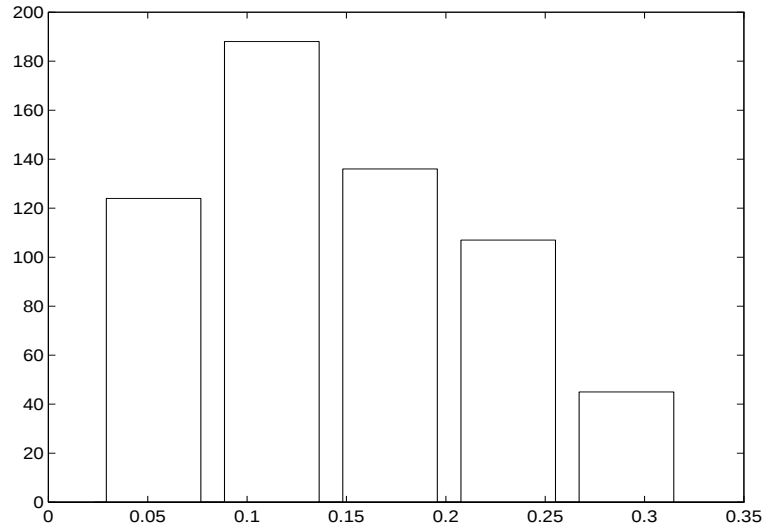


Figura 4.14: Histograma com a distribuição dos dados de identificação do Processo Térmico. Eixo- x são os valores da saída e eixo- y é o número de vezes que cada conjunto de valores aparece (Coelho et al., 2000).

4.4.2 Resultados Experimentais

Nesta seção algumas características dos modelos identificados serão apresentadas. Isso possibilitará comparar as representações matemáticas estudadas. Os modelos NARX racionais e polinomiais foram obtidos usando o critério ERR (ver seção 2.2.4.1); para seleção da estrutura do modelo e a estimação de parâmetros foi utilizado o algoritmo de mínimos quadrados estendidos para o caso polinomial, e o estimador de mínimos quadrados modificado para o caso racional. As estruturas das redes neurais foram obtidas via procedimento de tentativa-e-erro, com estimação de parâmetros (pesos) usando momento e taxa de aprendizagem (NN-MLP e NN-Elman), e número de centros (NN-RBF).

Cada rede neural (NN) possui três camadas com 8 neurônios na camada escondida. Como vetor de entrada em todas as NN foi usado $x = [u(k-1) \ y(k-1)]$. A função de ativação na NN-MLP e da NN-Elman são tangentes hiperbólicas para a camada escondida e função linear para a camada de saída. NN-RBF usa função Gaussiana para a camada escondida e linear para a camada de saída.

O seguinte modelo polinomial foi identificado (Cassini, 1999):

$$\begin{aligned}
 y(k) = & 1,2929y(k-1) + 0,0101u(k-1)u(k-2) \\
 & + 0,0407u(k-1)u(k-1) - 0,3779y(k-2) \\
 & - 0,1280y(k-1)u(k-2) + 0,0957y(k-2)u(k-2) \\
 & + 0,0051u(k-2)u(k-2)
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

tendo a seguinte equação estática:

$$\bar{y} = \frac{0,0559\bar{u}^2}{0,0850 + 0,0323\bar{u}}. \tag{4.27}$$

O modelo racional (Coelho et al., 2000)

$$y(k) = \frac{0,8666y(k-1) + 0,05951u(k-1)^2}{1 - 0,04059u(k-1)} \tag{4.28}$$

foi obtido. Este último possui a seguinte função estática:

$$\bar{y} = \frac{0,05951\bar{u}^2}{0,1334 - 0,04059\bar{u}}. \tag{4.29}$$

As funções estáticas dos modelos polinomiais e racionais foram obtidas analiticamente. Detalhes do procedimento usado para escrevê-las poderá ser visto no Capítulo 6.

A Figura 4.15 mostra a predição livre de todos os modelos e as não-linearidades estáticas dos mesmos. Nota-se que a simples observação da predição livre dos modelos não é suficiente para emitir nenhuma opinião conclusiva a respeito destes. Com apenas uma inspeção visual, pode-se falar que todos os modelos obtidos são razoavelmente bons para predizer o comportamento do sistema em questão.

Com relação às não-linearidades estáticas, observa-se que a rede RBF foi a que melhor aproximou a curva estática do sistema, a curva obtida com a rede sobrepõe a curva original. A rede MLP forneceu o pior ajuste da curva estática. Tanto a rede MLP quanto a Elman dão sinais claros de saturação. A curva estática do modelo NARX polinomial é sempre inferior ao sistema original. O modelo NARX racional mostrou-se pouco capaz de extrapolar a região dos dados de identificação, fato que pode ser observado pelo aumento do erro no ajuste da curva estática para $\bar{y} > 0,3$.

A Tabela 4.6 apresenta uma comparação quantitativa da predição livre de cada modelo. Observando essa tabela, nota-se que o modelo polinomial

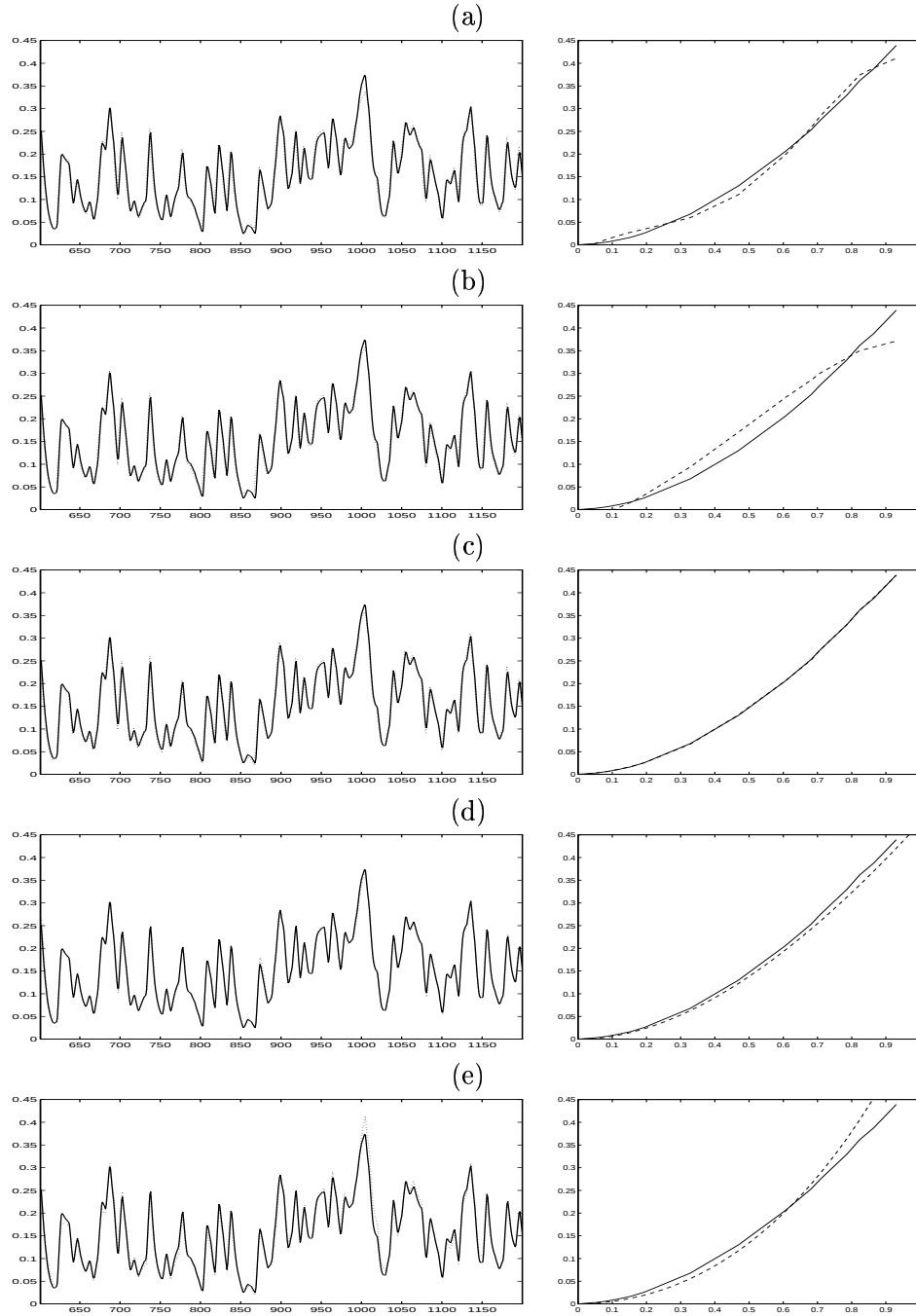


Figura 4.15: Validação dinâmica (coluna à esquerda) e não-linearidades estática (coluna à direita) dos modelos (a) NN-MLP, (b) NN-Elman, (c) NN-RBF, (d) NARMAX polinomial e (e) NARMAX racional do processo térmico. A linha é a saída do sistema térmico e o tracejado a dos modelos (Coelho et al., 2000). Na coluna à esquerda o eixo- x são amostras k e eixo- y é a saída y , na coluna à direita o eixo- x é $\bar{u}$ e o eixo- y é $\bar{y}$.

produziu o menor somatório de erro quadrático, seguido do modelo racional. Ressalta-se que estes modelos são os que possuem maior diferença de desempenho quando comparados com os dados de identificação e dados de validação. As redes neurais, apesar de predizerem com maior erro, foram mais regulares quando excitadas com dados de validação.

A Tabela 4.7 apresenta quantitativamente como cada modelo aproxima a função estática. Naturalmente as conclusões que podem ser tiradas dessa tabela não diferem das já mencionadas com relação à Figura 4.15.

Tabela 4.6: Resultados quantitativos da validação dinâmica dos modelos identificados para o Processo Térmico. Erros calculados a partir da predição livre (Coelho et al., 2000).

Modelo		Janela de Estimação				Janela de Validação			
Tipo	np	máx ($\times 10^{-2}$)	média ($\times 10^{-4}$)	std ($\times 10^{-2}$)	SSE ($\times 10^{-2}$)	máx ($\times 10^{-2}$)	média ($\times 10^{-4}$)	std ($\times 10^{-2}$)	SSE ($\times 10^{-2}$)
MLP	30	8,70	5,45	1,75	18,33	4,99	-4,38	1,53	14,11
Elman	30	6,28	0,01	1,58	14,93	3,40	-1,67	1,49	13,27
RBF	30	4,13	-3,93	1,48	13,10	2,84	3,04	1,44	12,37
Pol	7	1,74	0,69	0,42	1,07	2,00	0,14	0,60	2,18
Rac	3	2,33	4,79	0,97	5,68	2,54	-9,08	1,17	8,30

Convenção: np : número de parâmetros estimados; std: desvio padrão;

SSE: soma dos erros quadráticos

Tabela 4.7: Resultados da validação estática dos modelos identificados para o Processo Térmico (Coelho et al., 2000).

Modelo		Dados estáticos			
Tipo	np	máx	média	std	SSE
MLP	30	$6,7842 \times 10^{-2}$	$1,2992 \times 10^{-3}$	$2,9674 \times 10^{-2}$	$1,3236 \times 10^{-2}$
Elman	30	$2,8198 \times 10^{-2}$	$2,1285 \times 10^{-4}$	$1,2463 \times 10^{-2}$	$2,3306 \times 10^{-3}$
RBF	30	$1,1920 \times 10^{-3}$	$7,2500 \times 10^{-7}$	$7,4121 \times 10^{-4}$	$8,2408 \times 10^{-6}$
Pol	7	$2,2126 \times 10^{-2}$	$8,3237 \times 10^{-3}$	$7,4782 \times 10^{-3}$	$1,9474 \times 10^{-3}$
Rac	3	$1,5534 \times 10^{-2}$	$-1,2359 \times 10^{-2}$	$3,1812 \times 10^{-2}$	$1,7624 \times 10^{-2}$

4.4.3 Comentários

Nesta seção o problema de identificação de sistemas foi abordado do ponto de vista prático. Um dos grandes problemas no campo de identificação de sistemas é a escolha da representação matemática a ser usada em um dado problema. No estudo apresentado não se tentou dar uma resposta conclusiva ao

problema, mas cinco representações foram comparadas usando a identificação de um sistema real. Para maior clareza, as representações foram comparadas em termos da seguinte lista de itens (Coelho et al., 2000):

Número de parâmetros. As NNs possuem mais de quatro vezes o número de parâmetros do modelo polinomial e dez vezes o número de parâmetros do modelo racional. Ressalta-se que não se aplicou nenhum método de *pruning*, o que poderia diminuir o número de parâmetros nas redes.

Treinamento. A NN-RBF e o modelo polinomial são lineares nos parâmetros, enquanto que os outros três modelos são não-lineares. Conseqüentemente a estimação de parâmetros para os primeiros pode ser feita por algoritmos clássicos, como mínimos quadrados e mínimos quadrados estendidos. O tempo de computação típico² necessário para obter os modelos apresentados são 10 segundos (polinomial), 5 segundos (racional), 29 segundos (NN-MLP), 17 segundos (NN-Elman), e 8 segundos (NN-RBF).

Validação dinâmica. O desempenho dos modelos na predição livre foi comparado na Figura 4.15 e Tabela 4.7. Observa-se que todos os modelos são muito competitivos. Entretanto, a representação com menor somatório dos erros quadráticos foi a polinomial.

Aproximação da função estática não-linear. A Figura 4.15 apresenta a relação de estado estacionário entre entrada e saída, para o sistema e todos os modelos. O desempenho da NN-RBF nesta aproximação é excelente. A coincidência entre a função estática obtida usando a NN-RBF e os pontos medidos é grande. A superioridade desta rede pode ser explicada pelo fato das NN-RBFs terem sido desenvolvidas para interpolação de funções estáticas. O desempenho das outras representações, com exceção da NN-MLP (que não foi boa), é similar com as seguintes características: o modelo polinomial parece ser melhor na extrapolação. A rede Elman revela claramente sinais de saturação para valores de entrada maiores que 0,8, e o modelo racional tende à divergência para valores acima de 0,7.

Facilidade analítica. As funções estáticas não-lineares dos modelos polinomiais e racionais foram obtidos *analiticamente* (veja equações 4.27) e (4.29). Esta característica pode ser muito conveniente em monitoramento *on-line* e no controle de processos não-lineares (Cassini, 1999). A função não-linear estática das redes neurais foi obtida por simulação.

²Valores aproximados considerando um computador PC Pentium 400 e software rodando sob o MATLAB.

4.5 Comentários Finais

Neste capítulo foram apresentadas comparações de diferentes modelos na representação de diferentes sistemas dinâmicos. Sem a pretensão de determinar qual a melhor representação, foi possível observar algumas características que serão enunciadas em síntese a seguir.

Uma comparação entre modelos NARMAX polinomiais e racionais obtidos para sistemas com comportamento caótico foi apresentada. O modelo NARMAX polinomial se mostrou mais eficiente para reproduzir a dinâmica observada no circuito de Chua do que o modelo NARMAX racional. Já para o sistema de Rössler foi observado que, para o caso onde se mede unicamente a variável x , a representação racional é mais indicada para reproduzir sua dinâmica do que a representação polinomial. Embora haja diferenças entre as representações, ambas são capazes de reproduzir as dinâmicas citadas.

O desempenho de diferentes topologias de redes neurais multicamadas cuja função de ativação é a tangente hiperbólica foi verificada. Assim como para outras representações, os resultados apresentados neste capítulo mostram que apenas a análise de erros de predição não é suficiente para validar modelos de sistemas que exibem diversos regimes dinâmicos, inclusive caos. Várias redes que atingiram o critério de parada do algoritmo de treinamento e passaram pela validação por predição livre, não reproduziram o comportamento observado no sistema dinâmico original. Observou-se que a capacidade de generalização de uma rede neural usada na identificação de sistemas não-lineares deve ser testada através de diagramas de Poincaré, e diagramas de Bifurcação. Redes que reproduziram o atrator para uma determinada entrada, não conseguiram reproduzir nenhuma das seqüências de bifurcação observadas nos dados originais, bem como não reproduziram a seção de Poincaré observada no sistema original.

Outro aspecto discutido neste capítulo é a recuperação de não-linearidades de mapas estáticos. Estes foram utilizados para validar e comparar modelos NARMAX racionais e polinomiais, obtidos a partir de sistemas simulados. Constata-se que, dependendo da forma do mapa estático, uma determinada representação pode não conseguir reproduzi-lo. O mapa senoidal com não-linearidade cúbica foi melhor aproximado pelo modelo racional do que o polinomial. O mesmo ocorreu com o *tent map*. Mostrou-se que o modelo racional é capaz de aproximar o mapa do regulador chaveado Buck, fato que não se consegue com a representação polinomial.

Por último, o desempenho de diferentes representações foi verificado na

identificação de um processo térmico. Foram comparados os modelos NARMAX polinomial, NARMAX racional, as redes neurais multicamadas, redes Elman e as redes RBFs. Verificou-se o desempenho de cada representação na predição livre e também a capacidade de representar a característica estática não-linear do sistema (Coelho et al., 2000). Observou-se que as redes NN-RBFs geralmente possuem melhor precisão do que NN-MLPs. Outra característica é que a resposta da NN-RBF é linearmente relacionada com seus pesos. A aprendizagem das NN-RBF é mais rápida do que NN-MLP. As redes RBFs foram mais eficientes para aproximar as características estáticas conhecidas do sistema original. Como vantagem dos modelos NARMAX racionais e polinomiais, destaca-se a possibilidade de se obter analiticamente a sua função estática.

Parte II

Identificação Caixa-Cinza Usando Modelos NARMAX Racionais e Polinomiais

Capítulo 5

Identificação Caixa-Cinza de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares - Estado da Arte

Em métodos de identificação caixa-preta, nenhuma informação *a priori* do sistema está disponível ou, se disponível, não é usada no procedimento de obtenção do modelo. Neste caso, apenas dados de entrada e saída do sistema são usados durante a identificação. A escolha da representação e da sua estrutura é feita de forma empírica nos casos mais simples. Em casos mais complexos, como por exemplo na identificação de sistemas não-lineares, é possível usar métodos mais sofisticados para escolher a estrutura do modelo. Tais métodos baseiam-se em técnicas de álgebra linear e em conceitos de estatística, conforme será discutido nos capítulos seguintes. Para estimação de parâmetros utilizam-se procedimentos de otimização sem restrições. Na identificação caixa-preta não existe nenhuma relação óbvia entre a estrutura e seus parâmetros com aspectos físicos do sistema sendo identificado.

Na identificação caixa-branca ou simplesmente modelagem física, o processo de obtenção do modelo se baseia em leis e princípios físicos. Todos os parâmetros são conhecidos, ou previamente determinados. Dados de entrada e saída do sistema, quando disponíveis são usados apenas para validar o modelo. Na identificação caixa branca, todos os termos da estrutura, e seus parâmetros, possuem significado físico.

A cada um destes métodos são atribuídas vantagens e desvantagens. Como desvantagens da identificação caixa-preta, em geral, são citados o fato de a estrutura do modelo não possuir significado físico, a dificuldade para sua

seleção e o número excessivo de parâmetros, apesar da possibilidade de usar técnicas, como ERR e *pruning*, para reduzir seu número. Como vantagens, em geral, são enumeradas a facilidade de obtenção e a possibilidade de se escolher estruturas mais adequadas para o projeto de sistemas de controle (Pottmann e Pearson, 1998).

Como desvantagem da modelagem caixa-branca, destaca-se a dificuldade de obtenção do modelo. Em geral, as equações físicas envolvidas em um processo, assim como seus parâmetros, não são totalmente conhecidas. Muitas vezes, as relações são por demais complexas e não podem ser determinadas. Como principal vantagem, destaca-se o significado físico do modelo obtido.

Naturalmente, o objetivo da modelagem pode indicar a melhor adequação de um ou outro procedimento. Outro fator que pode influir na escolha do método de modelagem é a possibilidade, ou não, de se obter no sistema dados de identificação que o excitem em toda a faixa de interesse. Em geral, na identificação caixa-preta, principalmente em sistemas não-lineares, é desejável que os dados de identificação excitem o sistema em toda faixa de interesse. Em muitos casos práticos, atingir uma ampla faixa de operação dinâmica no sistema é algo impraticável.

De uma maneira geral pode-se dizer que nenhum sistema é tão ignorado, ou desconhecido, que não possa fornecer informações úteis para sua identificação. Ou seja, quase sempre será possível obter informações úteis do sistema além de dados de entrada e saída. Por outro lado, nenhum sistema real é tão conhecido que possa prescindir totalmente de dados de entrada e saída para sua modelagem. Em outras palavras, dificilmente se conhecem em um sistema real todas as leis físicas que o regem e/ou todos os parâmetros envolvidos. Na verdade, os extremos caixa-branca e caixa-preta praticamente inexistem em situações reais de identificação. O que se pode discutir é “quão preto”, ou “quão branco” é um determinado processo de identificação.

Entre os extremos citados acima, destaca-se a identificação caixa-cinza. Esta é uma ferramenta que se busca como forma de combinar as vantagens dos procedimentos de identificação caixa-preta e caixa-branca. Nesse procedimento, tanto dados de entrada e saída obtidos no sistema, quanto informações *a priori* são usados na identificação. Conseqüentemente, a identificação caixa-cinza é uma área bastante ampla. Por outro lado, por se tratar de um assunto relativamente novo, muitos problemas na área da identificação caixa-cinza estão praticamente em aberto. O tipo de conhecimento *a priori* utilizado, assim como o nível de conhecimento, varia de caso para caso. Sohlberg (1998) apresenta, através de uma figura, uma escala cinzenta, proposta em (Karplus, 1976) definindo a região cinzenta da modelagem caixa-cinza, veja Figura 5.1.

A tonalidade do “cinza” varia de acordo com o nível e a quantidade de informação *a priori* usada no processo de modelagem.

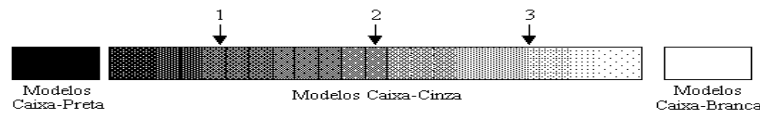


Figura 5.1: Escala cinzenta definindo os diferentes níveis de informação *a priori* na identificação caixa-cinza (Karpplus, 1976). Por exemplo: procedimentos em que o uso de informação *a priori* se limita à definição de termos candidatos, no caso de modelos NARMAX, ou da função de ativação, no caso de redes neurais, se situariam na região 1; procedimentos em que se usa informação *a priori* na estimação de parâmetros se situam na região 2; nos casos em que a estrutura é definida por leis físicas e parâmetros estimados com dados de entrada e saída, região 3.

Sohlberg (1998) cita, em geral, os modelos para controle de processos como modelos caixa-preta. Como caixa-branca cita os circuitos eletrônicos. Para os últimos, o autor ressalta que as equações que os regem, assim como seus parâmetros, são geralmente bem conhecidos. Na tonalidade cinza, o autor cita os sistemas econômicos, hidráulicos e de poluição do ar, respectivamente do cinza mais escuro para o mais claro. A Figura 5.1 fornece uma boa idéia da vasta área compreendida pelo que se chama de caixa-cinza.

Nos últimos anos vários trabalhos vêm citando tanto o termo identificação caixa-cinza (“grey box identification”) quanto o termo conhecimento *a priori* na identificação de sistemas. A maneira de incorporar informação *a priori* assume várias formas, aplicadas a diferentes etapas do processo de modelagem. Estas formas determinam a tonalidade do cinza para representar o método.

Aguirre (2000b) apresenta, através de uma figura, ver Figura 5.2, uma síntese das vantagens de cada abordagem de identificação, além das dificuldades que serviram como motivação para o desenvolvimento de novas técnicas. Pode ser observado que o autor cita como dificuldades do “Modelo Matemático Não-Linear Geral” a complexidade e a dificuldade para extrair informação do modelo. Segundo o autor, estas dificuldades deram origem ao desenvolvimento de algoritmos para determinar a estrutura e estimar parâmetros e/ou o desenvolvimento de técnicas de identificação caixa-cinza. Também objetiva-se fornecer uma lista de referências bibliográficas sobre o assunto.

Neste capítulo pretende-se dar uma visão geral de como este problema vem

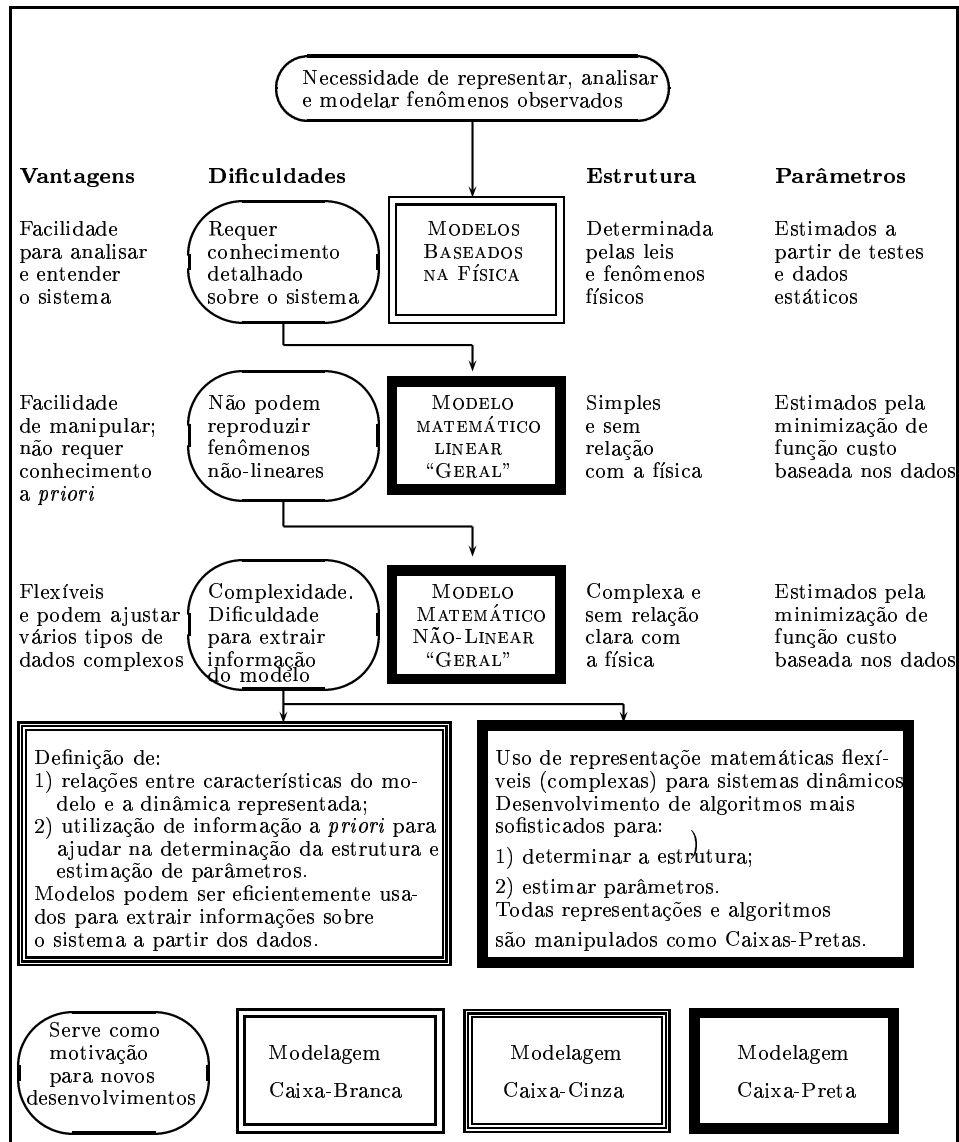


Figura 5.2: Representação pictórica das dificuldades de cada classe de modelos e das motivações para o desenvolvimento de novos procedimentos (Aguirre, 2000b).

sendo tratado na literatura. O objetivo aqui não será o de descrever pormenorizadamente cada técnica, mas contextualizar o procedimento proposto nesta tese com os procedimentos encontrados na literatura.

Dentro do conjunto de métodos que se denominam identificação caixa-cinza, destaca-se a classificação de modelos caixa-cinza físicos e semifísicos. Esta subdivisão aparece em (Sjöberg et al., 1995) como: (i) modelagem física, onde toda a estrutura é determinada por conhecimentos físicos do sistema, e apenas os parâmetros, ou um certo número de parâmetros são estimados a partir dos dados e (ii) modelagem semifísica, em que informações do sistema são usadas para sugerir combinações não-lineares entre os sinais medidos, utilizando-as na escolha da estrutura dos modelos.

Este capítulo é organizado como se segue. Na seção 5.1, mencionam-se trabalhos que utilizam informações *a priori* em redes neurais. Estes podem ser considerados como um dos que possuem tonalidade mais escura de “cinza”. Na seção 5.2 são agrupados trabalhos que se baseiam na determinação da estrutura dos modelos pelas leis físicas do processo. Estes trabalhos podem ser classificados como identificação caixa-cinza física. Na seção 5.3 são apresentados os métodos classificados como caixa-cinza semifísica. Estes utilizam conhecimento *a priori* na definição da estrutura dos modelos, porém, sem necessariamente utilizar equações obtidas a partir de leis físicas. Neste caso as informações *a priori* sugerem combinações entre as variáveis. Na seção 5.4 apresentam-se trabalhos que não podem, necessariamente, ser agrupados nas categorias anteriores. É dado um destaque a métodos que incorporam informações *a priori* na estimação de parâmetros. Na seção 5.5 é apresentado o uso de informação *a priori* na seleção de estrutura de modelos NARMAX polinomiais. Este procedimento é a base do desenvolvimento da técnica apresentada nesta tese. Por último, na seção 5.6 são apresentados comentários gerais dos pontos abordados.

5.1 Uso de Conhecimento *a Priori* em Redes Neurais

O uso de conhecimento *a priori* em redes neurais pode ser visto em (Thompson e Kramer, 1994; Joerding e Meador, 1991). Thompson e Kramer defendem a utilização de informação *a priori*, principalmente em situações onde os dados são escassos, ou seja, compostos por uma série temporal de curta duração e seriamente contaminada por ruído.

Citam que conhecimento *a priori* de monotonicidade e assintoticidade devem ser usados em modelos baseados em redes neurais. Além desses, os autores citam como conhecimento *a priori*: (i) o propósito de modelagem, (ii) restrições “fortes” baseadas em princípios físicos e (iii) desempenho de modelos previamente obtidos. O objetivo declarado pelos autores é o de maximizar o valor do conhecimento *a priori*. Para os autores, esta maximização ocorre quando a informação *a priori* é usada tanto na seleção da estrutura quanto no treinamento da rede.

O objetivo de modelagem implica propriedades gerais da estrutura do modelo e de critérios de desempenho. Um modelo destinado ao controle deve aproximar bem as características dinâmicas do processo e ter possibilidade de adaptação. Já modelos destinados à otimização devem ter boa precisão em estado estacionário.

Restrições “fortes” geralmente são oriundas de equações de balanço de energia, balanço de massa e limitações físicas impostas por equipamentos e plantas. Restrições de igualdade com formas conhecidas implicam a inclusão de estruturas paramétricas, que reduzem o grau de liberdade do modelo.

Thompson e Kramer (1994) dividem o conhecimento *a priori* em duas classes: o qualitativo e o quantitativo. As informações quantitativas são expressas na forma de equações ou inequações com estrutura conhecida. Informações qualitativas apenas identificam relações entre um conjunto de variáveis de entrada e saída.

Como forma de utilizar tais conhecimentos os autores citam: (i) a definição da estrutura e (ii) a forma de estimação de parâmetros. Tal procedimento reduz a dimensão do espaço de parâmetros e a quantidade de dados necessários para sua estimação.

Cada tipo de conhecimento *a priori* exercerá um determinado papel na identificação. O papel desempenhado por cada parcela de informação disponível *a priori* depende dos seguintes atributos: (i) tipo, se a relação é de igualdade ou desigualdade; (ii) forma, se a estrutura funcional da relação é conhecida ou não; (iii) precedência, a precedência em relação aos dados; e (iv) variáveis, quais variáveis são envolvidas. O Exemplo 5.1 permite um entendimento melhor de como a informação *a priori* é incorporada na seleção de estrutura.

Exemplo 5.1. Uso de conhecimento *a priori* na seleção de estrutura de modelos Neurais (Thompson e Kramer, 1994). Considere um sistema de mistura de gás não ideal com componentes A , B , e C . Usando dados experimentais, deseja-se determinar a relação entre volume V , pressão P , temperatura T , total de moles n e composição (fração molar) $X = [X_A \ X_B \ X_C]^T$.

Como forma de entender, na visão dos autores, o papel que cada conhecimento *a priori* desempenha na seleção de estrutura híbrida para modelagem, considere a Tabela 5.1. Note que, na linha 1, há informação de que o volume V é função das variáveis P , T , n e X , mas sua forma é desconhecida, o que implica a inclusão no modelo de uma rede neural. Na linha 2, como existe uma equação de forma conhecida, então no modelo é selecionado um pré-processador paramétrico.

Em síntese, pode-se notar que o conhecimento da forma de relações entre variáveis implica a inclusão de modelos paramétricos. O que possui forma não conhecida é modelado pela rede neural.

Tabela 5.1: Exemplo de uso de conhecimento *a priori* no modelo de uma mistura de gás (Thompson e Kramer, 1994)

	Relação	Atributos		Estrutura
1.	$V = f(P, T, n, X)$	Tipo:	igualdade	rede neural
		Forma:	desconhecida	
		Precedência:	grande	
		Variáveis:	entrada & saída	
2.	soma das frações molares $\sum X_i = 1$	Tipo:	igualdade	pré-processador paramétrico
		Forma:	conhecida	
		Precedência:	grande	
		Variáveis:	entradas	
3.	Entradas não-negativas $x \geq 0$	Tipo:	desigualdade	pré-processador paramétrico
		Forma:	conhecida	
		Precedência:	grande	
		Variáveis:	entradas	
4.	Saídas não-negativas $y(x) \geq 0$, para todo x	Tipo:	desigualdade	modelo paramétrico na saída
		Forma:	conhecida	
		Precedência:	grande	
		Variáveis:	entradas	

□

Na seleção de estrutura, conhecimentos *a priori* determinam o tipo de função de ativação utilizada, a modularização da arquitetura e/ou a inclusão de modelos paramétricos não neurais, denominados modelos neurais semi-paramétricos. A abordagem modular propõe interconexões nas redes neurais de acordo com a topologia e estrutura previamente conhecidas do processo. No caso semi-paramétrico, combina-se um modelo paramétrico fixo com uma rede neural, em série ou paralelo. Utilização de estruturas híbridas para identificação de sistemas dinâmicos pode ser visto também em (Cubillos et al.,

1996; Cubillos e Lima, 1997).

Como exemplo de rede modular, Thompson e Kramer (1994) citam a rede hierárquica proposta por Mavrouniots e Chang (1992). Esta decompõe o modelo do processo em grupos de variáveis relacionadas. Enquanto que uma rede neural convencional é treinada com todas as entradas possíveis afetando todas as saídas, na abordagem modular a rede é dividida em sub-redes, uma para cada unidade de processo. As sub-redes são conectadas de acordo com a estrutura e funções do processo. Desta forma, a arquitetura modular é menos interconectada do que uma rede convencional. Os resultados, segundo os autores, são: menos parâmetros, maior facilidade de treinamento e de interpretação das características do modelo.

Na abordagem semiparamétrica, um modelo paramétrico é usado em série com a rede neural. O modelo paramétrico possui uma estrutura fixa obtida a partir de conhecimentos *a priori*.

Em (Joerding e Meador, 1991) três benefícios do uso de informação *a priori* em redes neurais são citados: (i) previne que a rede faça previsões impossíveis ou não plausíveis; (ii) melhora a capacidade de generalização e (iii) aumenta a eficiência do treinamento. Os autores propõem a utilização de informação *a priori* na definição da arquitetura da rede neural e no estabelecimento de restrições na estimação dos pesos.

Um exemplo referido pelos autores é o problema de classificação mutuamente exclusiva. Os autores apresentam situações teóricas em que se deve usar informação *a priori* para definir a estrutura da rede. Os autores apresentam mecanismos para garantir à rede características de monotonicidade e concavidade. Mostram que o uso de função de ativação sigmoidal, juntamente com certas restrições nos parâmetros, dão à rede tais características.

Outra discussão apresentada refere-se à capacidade de uma rede de reproduzir uma determinada função e seu gradiente. Os autores apresentam uma discussão de como incorporar tais informações. Embora apresentem sempre procedimentos globais, todos os exemplos referem-se a mapeamentos estáticos.

5.2 Modelagem Caixa-Cinza Física

Dentre os trabalhos que tratam da identificação caixa-cinza, destaca-se o grande número de referências aos trabalhos de Bohlin (Bohlin, 1994; Bohlin e Graebe, 1995). Nestes, Bohlin e colegas apresentam um procedimento que denominam como modelagem semifísica probabilística. Os autores utilizam como ferramenta um software denominado IdKit e citam que sua concepção é

apresentada em (Bohlin, 1970), com algoritmo completamente detalhado em (Bohlin, 1984) e com implantação apresentada em (Graebe, 1990).

Em (Bohlin e Graebe, 1995) é apresentado um procedimento que se baseia na premissa de que os engenheiros são, em geral, bons para melhorar uma determinada estrutura para modelagem. O usuário especifica uma estrutura inicial para o modelo, e o software implementa a estimação de parâmetros e a validação. As etapas do procedimento de modelagem são apresentadas via um fluxograma reproduzido na Figura 5.3. O usuário interage com o computador em uma dupla malha de refinamento e refutação de estruturas selecionadas, e deve parar a modelagem quando a melhor alternativa de uma determinada estrutura servir aos seus propósitos.

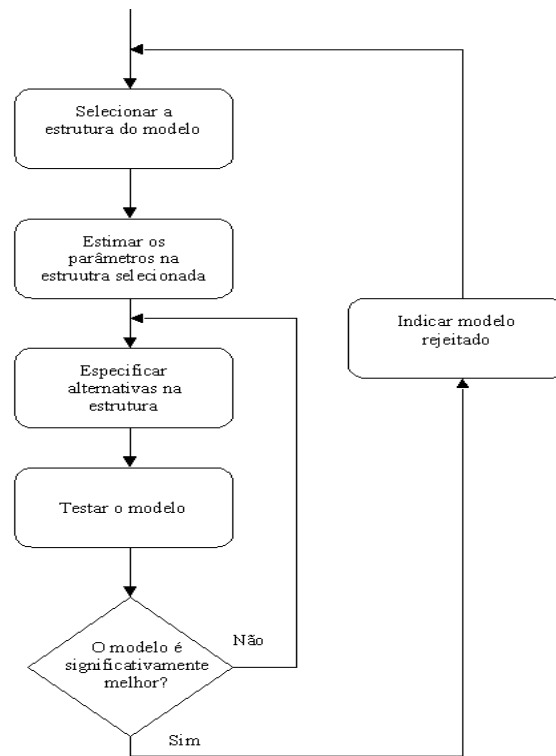


Figura 5.3: Fluxograma ilustrativo do procedimento iterativo de refinamento de estrutura (Bohlin e Graebe, 1995).

Conforme citado pelos referidos autores, no procedimento apresentado na Figura 5.3, não existe critério explícito de parada. Como em qualquer outro procedimento de modelagem, esse critério é definido de acordo com o propósito

de modelagem. Sempre a alteração na estrutura do modelo se dá pelo usuário. A parte realizada pelo computador se resume a estimar os parâmetros e validar o modelo. Esta se dá tanto por procedimentos estatísticos quanto por simulação dinâmica.

A definição da estrutura inicial, assim como das futuras modificações, baseia-se no conhecimento do processo. Tal conhecimento, por sua vez, é oriundo de leis físicas que o regem. Uma detalhada discussão desse procedimento pode ser visto, inclusive com aplicações industriais, em (Sohlberg, 1998).

Outro trabalho que pode ser classificado como modelagem caixa-cinza física é apresentado em (Jorgensen e Hangos, 1995). Neste, os autores colocam como questão relevante a definição mais precisa do termo *modelagem caixa-cinza*. Citam-no como um dos objetivos do artigo. Modelos qualitativos são propostos como uma estrutura unificada para modelagem caixa-cinza com diferentes precisões.

Dentro do primeiro objetivo, os autores citam que modelagem caixa-cinza pode ser entendida como a ciência de construção de modelos que incorporam descrições imprecisas através da representação selecionada. Como descrição imprecisa entende-se, por exemplo, o conhecimento de ordem de grandeza de parâmetros do sistema.

Citam que o termo *modelos qualitativos* tem origem na literatura como física qualitativa, indicando um conjunto de equações algébricas e diferenciais descrevendo objetos físicos reais com *range* qualitativo, chamado *espaço quantitativo*. O *range* qualitativo é descrito por um conjunto fixo de intervalos pré-definidos (os sinais das variáveis podem ser valores qualitativos) e a solução das equações do modelo qualitativo é obtida em um algoritmo usando álgebra de intervalo.

Jorgensen e Hangos (1995) citam que modelos caixa-cinza, para propósito de controle, podem ser entendidos como modelos dinâmicos com estrutura e/ou parâmetros imprecisos, refletindo conhecimento físico geralmente originado de modelos físicos convencionais. Por isso modelos qualitativos são propostos como uma estrutura para modelagem caixa-cinza com precisão ajustável. No caso citado pelos autores, modelos qualitativos são um conjunto de equações algébricas diferenciais qualitativas (QDAEs do inglês *Qualitative Differential Algebraic Equations*), no caso contínuo, e equações algébricas de diferenças qualitativas (QDDAEs), para o caso discreto. QDAEs são DAEs com variáveis e parâmetros com espaço de intervalos reais ou simbólicos com funções qualitativas descritas por um conjunto compacto e limitado de funções em um espaço de funções.

O espaço de intervalos das variáveis e parâmetros em um modelo QDAE é definido como um conjunto de intervalos de números/símbolos fixos atribuídos individualmente para cada variável real. As dependências parcialmente conhecidas são descritas por pares de funções denominadas *funções envelope*.

Ainda dentro desse contexto, em (Sadegh et al., 1995) é apresentado um procedimento para projeto de sinal de excitação que maximiza o valor da informação *a priori* disponível. O método se aplica à modelagem caixa-cinza física, ou seja, para situação onde a estrutura do modelo é obtida a partir de leis físicas. O problema é tratado como um caso de otimização, onde o objetivo é determinar uma entrada ótima para estimação de determinados parâmetros.

5.3 Modelagem Caixa-Cinza Semifísica

Conforme citado anteriormente, na identificação caixa-cinza semifísica, conhecimento baseado em leis físicas é usado para sugerir combinações não-lineares entre os sinais medidos. Nesta seção, são apresentados trabalhos que utilizam informação *a priori* na modelagem e podem ser agrupados neste conceito.

Dentro do contexto proposto, destaca-se o trabalho de Lindsdkog e Ljung (1994), os quais apresentam um exemplo ilustrativo baseado em um sistema de aquecimento de uma residência através de energia solar e exemplificam a incorporação de conhecimento baseado em leis físicas na estrutura de modelos discretos.

Os autores utilizam uma estrutura baseada em equações de diferenças para modelar o sistema. Para determinar relações entre as variáveis usam o conhecimento da lei de conservação de energia. Consideram que a energia total recebida pelo painel solar é igual à energia acumulada menos a energia perdida para o ambiente. Através dessa lei básica, os autores sugerem a seguinte relação:

$$x_1(k+1) - x_1(k) = \eta_1 I(k) - \eta_2 x_1(k) - \eta_3 x_1(k)u(k), \quad (5.1)$$

sendo que x_1 representa a temperatura média no painel solar, $I(k)$ o calor recebido por radiação solar, $u(k)$ o sinal de comando da bomba responsável pelo fluxo de água entre o painel solar e o acumulador de calor. A equação 5.1 revela que a diferença de temperatura entre duas amostras, $x_1(k+1) - x_1(k)$, é proporcional ao calor recebido por radiação solar, $\eta_1 I(k)$, menos o calor perdido no painel para o ambiente, proporcional à sua temperatura $\eta_2 x_1(k)$, e o calor perdido na bomba, proporcional ao produto do sinal de comando pela temperatura do painel $\eta_3 x_1(k)u(k)$.

Nota-se que, no exemplo acima, parte-se de conhecimento das leis físicas, porém sem se preocupar em estimar parâmetros com significado físico. Detalhes do desenvolvimento seguinte podem ser vistos na referência citada.

Em (Kárný et al., 1995) é proposto um procedimento, que segundo os autores, fornece (i) uma nova ferramenta tanto para modelagem caixa-preta quanto para caixa-cinza, (ii) uma inédita adaptação de modelos probabilísticos e (iii) uma aproximação de um modelo dado por um mais simples.

O procedimento é aplicado a um modelo ARX, ilustrando a aplicação nas seguintes tarefas: (i) escolha da estrutura apropriada; (ii) incorporação de informação *a priori* nas condições iniciais do algoritmo de mínimos quadrados recursivos; (iii) construção de referência para uma técnica de esquecimento avançada; (iv) aproximação de um modelo analítico complexo por um modelo ARX.

Conhecimentos *a priori*, como resposta ao degrau e ganho estacionário, são usados tanto na seleção da estrutura do modelo, quanto para estabelecer condições iniciais para o algoritmo de mínimos quadrados.

5.4 Identificação Caixa-Cinza

Nesta seção será apresentada síntese de trabalhos em que a informação *a priori* utilizada não é necessariamente obtida a partir de leis físicas. Os trabalhos aqui apresentados partem de informações a respeito da curva estática de sistemas. A utilização desse tipo de informação se justifica, pois relações estáticas, ou seja, em estado estacionário são mais fáceis de ser obtidas e eventualmente podem até estar previamente disponíveis.

Entre os trabalhos que propõem o uso da curva estática de sistemas dinâmicos, destaca-se o apresentado por Pottmann e Pearson (1998). Os autores defendem que características estacionárias são geralmente mais fáceis de serem obtidas do que as dinâmicas. O objetivo de modelagem proposto pelos mesmos é a obtenção de modelos NARMAX que reproduzam exatamente as características estacionárias conhecidas do sistema.

Os autores utilizam uma representação geral denominada *NARMAX orientada por blocos*, tendo como casos particulares as representações de Wiener e Hammerstein (Wiener, 1958). Quatro estruturas básicas para modelagem são apresentadas.

A estrutura I, apresentada na Figura 5.4, consiste em um bloco contendo um elemento dinâmico linear no ramo direto, e outro, com característica estática não-linear na realimentação.

O modelo NARMAX equivalente ao sistema da Figura 5.4 é

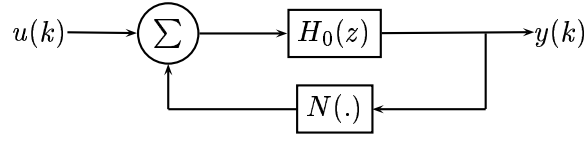


Figura 5.4: Modelo de blocos orientados com realimentação, estrutura I (Pottmann e Pearson, 1998).

$$y(k) = \sum_{i=1}^p a_i y(k-i) + \sum_{j=1}^q b_j u(k-j) + \sum_{j=1}^q b_j N[y(k-j)], \quad (5.2)$$

sendo que $N[\cdot]$ é uma função estática não-linear. Considerando em estado estacionário que $y(k) = \bar{y}$ e $u(k) = \bar{u}$, para todo k , a seguinte relação pode ser obtida (Pottmann e Pearson, 1998):

$$\bar{y} \left(1 - \sum_{i=1}^p a_i \right) - \bar{u} \sum_{j=1}^q b_j = N(\bar{y}) \sum_{j=1}^q b_j, \quad (5.3)$$

que corresponde ao polinômio agrupado estudado em (Aguirre e Mendes, 1996). Definindo a constante

$$g_o = \frac{\sum_{j=1}^q b_j}{1 - \sum_{i=1}^p a_i}, \quad (5.4)$$

a função de estado estacionário pode ser escrita como

$$\bar{y} = g_o \bar{u} + g_o N(\bar{y}), \quad (5.5)$$

sendo que, no processo de identificação, parte-se de uma função estática $N(\bar{y})$ previamente conhecida.

Outras estruturas apresentadas pelos autores se baseiam no diagrama em blocos representado na Figura 5.5 e na sua variação, Figura 5.6, sendo que

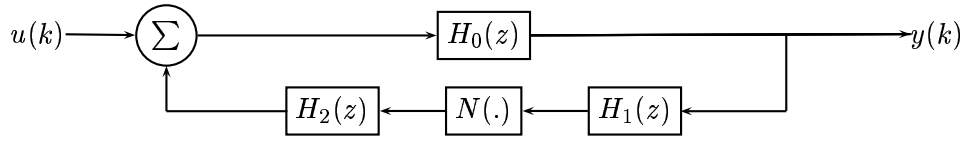


Figura 5.5: Modelo de Blocos Orientados com Realimentação, estrutura IV (Pottmann e Pearson, 1998).

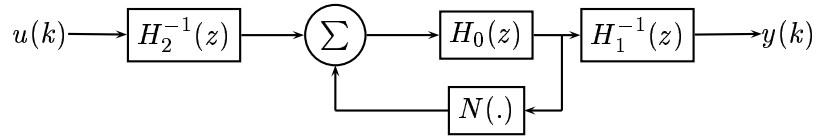


Figura 5.6: Modelo de Blocos Orientados com Realimentação. Variação da estrutura IV, obtida por manipulações algébricas (Pottmann e Pearson, 1998).

esta última é obtida através da aplicação de regras algébricas de manipulação de diagramas em blocos.

A estrutura apresentada na Figura 5.5 é denominada pelos autores de estrutura IV. Como caso especial desta, destacam-se as estruturas II e III com $H_1(z) = 1$ e $H_2(z) = 1$, respectivamente. Os autores citam que a estrutura II representa uma variação da estrutura I sendo equivalente ao modelo de Hammerstein, e a estrutura III equivalente ao modelo de Wiener.

Argumentam que as estruturas I e II formam uma base mais conveniente para ser utilizada na modelagem caixa-cinza de sistemas que apresentam saídas estacionárias múltiplas. A estrutura I pode ser considerada como um caso particular da estrutura II. Para esta última, a saída do modelo pode ser expressa como

$$y(k) = \sum_{i=1}^p a_i y(k-i) + \sum_{j=1}^q b_j u(k-j) + \sum_{j=1}^q b_j x(k-j), \quad (5.6)$$

sendo $x(k)$ a saída do modelo de Hammerstein na realimentação, dada por

$$x(k) = \sum_{n=1}^s d_n x(k-n) + \sum_{l=0}^{r-1} c_l N[y(k-l)], \quad (5.7)$$

a_i , b_j , b_j , d_n e c_l são constantes a serem determinadas no processo de identificação. Uma vez escolhida a estrutura, os valores dos parâmetros p , q , r e s são selecionados durante o processo de identificação.

No referido artigo, os autores aplicam a estrutura apresentada na identificação de um Reator Tanque Agitado Contínuo, CSTR. Os dados são gerados a partir de simulação. Nenhum processo de seleção de estrutura é utilizado. Os autores experimentaram onze variações para os valores de p , q , r e s até se obter um modelo melhor. Detalhes podem ser vistos em (Pottmann e Pearson, 1998). A identificação caixa-cinza do sistema CSTR também pode ser vista, usando o procedimento proposto no Capítulo 6, na seção 8.3.

Outro trabalho que utiliza informação *a priori* na seleção de estrutura de modelos pode ser visto em (Petrick e Wigdorowitz, 1997). Neste, os autores citam que poucas ferramentas existem para incorporar informações *a priori* na seleção de estrutura de modelos não-lineares. Apresentam uma abordagem para utilização de técnicas de análise de sistemas não-lineares na seleção de estrutura. Mostram a possibilidade de se utilizar resultados do cálculo dos expoentes de Lyapunov, mapas de Poincaré e dimensão de correlação.

Como exemplo, aplicam a técnica em dados obtidos no circuito de Chua. Através do retrato de fase do atrator reconstruído, mostram que é possível inferir o número e a posição aproximada de cada ponto fixo. O mapa de Poincaré é usado para inferir o comportamento do sistema próximo aos pontos fixos.

Com as informações extraídas acima, procura-se uma estrutura não-linear mínima capaz de reproduzir tais características observadas nos dados. No exemplo utilizado pelos autores, é selecionada uma estrutura de modelos contínuos, porém a modelagem propriamente não é apresentada.

A partir do retrato de fase do atrator reconstruído do circuito de Chua, os autores concluem que a oscilação ocorre em torno de dois pontos do espaço de estado, aproximadamente em $\pm(2, 7; 0; -2, 7)$, implicando a existência de pontos de equilíbrios nessas localizações. Através do mapa de Poincaré e do retrato de fase próximo ao ponto $(0, 0, 0)$, inferem também a possibilidade de um ponto de equilíbrio instável próximo de $(0, 0, 0)$. Vale notar que existem métodos para estimar pontos fixos a partir de séries temporais (Aguirre e Souza, 1998) e a relação entre seu número e simetria com a estrutura de modelos NARMAX polinomiais foi devidamente estabelecido (Aguirre e Mendes,

1996).

Então, a partir da observação da existência de três pontos de equilíbrio, sugerem a necessidade de três variáveis de estado, x , y e z . A princípio propõem a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + bh(x) \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ \dot{z} &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z,\end{aligned}\tag{5.8}$$

sendo $h(x)$ uma função não-linear. Considerando a informação dos pontos de equilíbrio, vem que $a_{31} = a_{33} = 0$ e $a_{21} = a_{23}$, obtendo a seguinte estrutura simplificada,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + bh(x) \\ \dot{y} &= a_{21}(x + y) + a_{23}z \\ \dot{z} &= a_{32}y,\end{aligned}\tag{5.9}$$

sendo que a não-linearidade é $h(x) = -x$ para $x = y = z = 0$. Esta última escolha baseia-se na instabilidade do ponto de equilíbrio em $(0, 0, 0)$.

5.4.1 Uso de Informação a *Priori* no estimador de parâmetros

Outro alvo buscado na identificação caixa-cinza é o uso de informação a *priori* no estimador de parâmetros (Bai e Sastry, 1986; Tulleken, 1993; Johansen, 1996). O objetivo é garantir que o modelo obtido reproduza fielmente características previamente conhecidas.

Em (Bai e Sastry, 1986) é considerado o problema de estimar ganho de uma função de transferência para um sistema SISO. A técnica apresentada é aplicada a um sistema simulado.

Tulleken (1993) discute o problema de uso de informação a *priori* ao estimar parâmetros usando modelos ARMAX e discute a utilização de informação sobre estabilidade e ganho estacionário. Tais conhecimentos são utilizados como restrições ao estimar parâmetros que, segundo o autor, fica mais consistente e atrativa sobre condições experimentais não-ideais.

Por condições experimentais não-ideais, o autor refere-se às diversas situações de teste reais. Na maioria dos casos, ou mesmo na sua totalidade, as condições ideais necessárias para uma identificação não estão presentes em situações reais. Nesses casos o autor defende a utilização de informação a *priori* ao estimar parâmetros. Como conhecimento de “vital” importância em um

processo de modelagem, o autor cita as “regiões admissíveis para localização de pólos” e “ganhos estáticos”.

Tulleken (1993) trabalha com modelos do tipo ARX. Com relação à localização dos pólos considera as seguintes informações *a priori*: (i) estabilidade do sistema em malha aberta; (ii) frequência de amostragem correta e (iii) coeficiente de amortecimento previamente conhecido.

Para cada um dos itens citados acima, o autor apresenta restrições a serem incorporadas no estimador de parâmetros de um modelo ARX. A estabilidade do modelo ARX em malha aberta é obtida restringindo a localização dos pólos dentro do círculo de raio unitário no plano complexo $\mathbb{C}$. No caso da frequência de amostragem, o autor parte do princípio que, se o sistema está corretamente amostrado, então seus pólos não podem estar situados no semiplano negativo de $\mathbb{C}$. Procedimento equivalente é apresentado para o caso de coeficiente de amortecimento conhecido.

Com relação ao ganho estático, o autor cita que: “...‘bons’ modelos geralmente são pobres na aproximação de características de baixa frequência”. Ressalta que o uso de informação sobre o ganho estático introduz um significativo aumento da qualidade do modelo em geral, o que pode ser crucial para um projeto de controle satisfatório (Tulleken, 1993).

Detalhes das restrições necessárias para incorporar informação de localização de pólos e/ou de ganho estacionário para modelos ARX podem ser vistos em (Tulleken, 1993). Nesse trabalho, pode ser vista, também, a aplicação das técnicas citadas em um sistema simulado.

Um trabalho na linha do apresentado anteriormente pode ser visto em (Johansen, 1996). O autor incorpora conhecimento *a priori* no estimador de parâmetros através de restrições e penalidades na função objetivo. A aplicação é estendida a modelos NARMAX, cuja não-linearidade é implementada através de uma rede neural.

Como exemplos possíveis de serem incorporados, o autor cita: (i) modelo padrão, (ii) modelo linear de ruído, (iii) modelo linear conhecido, (iv) balanço de massa em estado estacionário e (v) estabilidade. Johansen (1996) discute como incorporar tais informações ao estimar parâmetros. O enfoque do trabalho é o desenvolvimento de métodos de otimização capazes de incorporar tais informações de forma geral.

O autor aplica o procedimento a um sistema de neutralização de pH, simulado por suas equações diferenciais. Os dados gerados pelo sistema pertencem a uma região de operação limitada, e o objetivo da modelagem é recuperar a curva estática em uma região fora dos dados de identificação.

Como aspectos negativos da metodologia proposta, o autor cita a complexidade computacional e a dificuldade de interpretar e analisar o modelo obtido. Como principal vantagem, cita a flexibilidade do método. Essa flexibilidade se refere à possibilidade de incorporação de conhecimento *a priori* de várias formas. Vale ressaltar que o autor cita que “*Mais trabalhos são necessários para desenvolver procedimentos práticos de engenharia para codificar conhecimentos a priori*”. Os próximos capítulos podem ser interpretados como contribuições nessa direção.

5.5 Uso de Informação a *Priori* na Seleção de Estrutura de Modelos NARMAX Polinomiais

A seguir será apresentado de forma bastante sucinta como a informação *a priori* vem sendo utilizada na seleção da estrutura de modelos NARMAX polinomiais. Detalhes desse procedimento poderão ser vistos no Capítulo 6. Como será apresentado, este procedimento difere dos anteriores, pois a incorporação da informação *a priori* se baseia fundamentalmente em um estudo aprofundado das características da representação. A partir desse estudo determina-se como deve ocorrer o uso da informação *a priori*.

A base desse desenvolvimento são os conceitos de agrupamento de termos e coeficiente de agrupamento apresentados em (Aguirre e Billings, 1995) e podem ser vistos na seção 6.1 desta tese. A partir desses conceitos, em (Aguirre e Mendes, 1996) são deduzidas relações entre agrupamento de termos e o número e a localização de pontos fixos. Com estas relações, a partir de informação *a priori* do número e localização dos pontos fixos do sistema a ser modelado selecionam-se os agrupamentos de termos candidatos ao modelo. A escolha dos termos do modelo continua sendo feita pelo método de ERR.

Dentro da escala “cinza” apresentada na Figura 5.1, esse procedimento pode ser classificado como um “cinza-escuro”, isto porque o grau de utilização da informação *a priori* é muito restrito. A partir da seleção dos agrupamentos candidatos o procedimento é puramente caixa-preta, tendo sido aplicado com sucesso na identificação de diversos sistemas autônomos caóticos, entre esses destaca-se a identificação a partir de dados reais em um circuito de Chua (Aguirre et al., 1997).

Esse procedimento foi estendido para identificação de sistemas não-autônomos em (Jácome, 1996; Aguirre e Jácome, 1998). O objetivo é possibilitar selecionar a estrutura da representação a partir de informação de ganho em estado estacionário. Fundamenta-se, da mesma forma que para o caso autônomo, no estudo de como é mapeada no modelo a função de ganho de

estado estacionário. A partir desse estudo e da informação *a priori* disponível, são escolhidos os agrupamentos de termos candidatos para seleção pelo ERR. Aplicações desse procedimento podem ser vistas em (Aguirre et al., 2000b; Aguirre et al., 1999a). Detalhes são apresentados no Capítulo 6.

5.6 Comentários Finais

Sem a pretensão de esgotar o assunto, este capítulo apresentou, de forma geral, como a identificação caixa-cinza vem sendo tratada na literatura recente. A defesa da necessidade de incorporar informação *a priori* nos processos de identificação é observada nos diversos trabalhos aqui citados.

Muitos trabalhos possuem caráter meramente teórico, e aplicações práticas precisam ainda ser testadas. Porém, na maioria dos casos, as técnicas são testadas em sistemas simulados com efetiva melhora dos resultados em relação à identificação caixa-preta. Os métodos propostos que incorporam informações *a priori* ao estimar parâmetros, através de técnicas de otimização com restrições, exigem grande esforço computacional.

Como principais pontos a favor da identificação caixa-cinza a literatura destaca: (i) a diminuição do número de parâmetros, (ii) maior capacidade de reproduzir características fora dos dados de identificação, (iii) maior robustez e (iv) maior adequação para o desenvolvimento de sistemas de controle. Também se identifica, nos trabalhos citados, a necessidade de criar mecanismos mais eficientes para incorporar informações *a priori* nos modelos.

O uso de informação *a priori* se dá principalmente nas etapas (i) seleção de estrutura e (ii) estimação de parâmetros. A forma com que essas informações são incorporadas dependem do tipo de representação escolhida. Pode-se destacar que, conforme visto na seção 5.1, em geral a incorporação de informação *a priori* em modelos neurais se dá fundamentalmente por introdução de estruturas paramétricas, o que em geral é classificado como modelos híbridos. Ou então se resume à escolha da função de ativação usada.

Para os casos apresentados na seção 5.2, observa-se que o procedimento de identificação é fortemente ligado ao conhecimento da estrutura do modelo. Quando não se conhece a estrutura, esta é determinada por métodos empíricos baseados nas leis físicas que regem o processo.

Nos métodos apresentados na seção 5.3, mais uma vez há a escolha da estrutura feita pelo usuário, baseada em conhecimento *a priori* do sistema. Nos casos apresentados na seção 5.4, tem-se novamente uma estrutura híbrida. Nesse caso a informação *a priori* é usada para definir a estrutura da função estática conhecida *a priori*.

Como não poderia deixar de ser, todos esses métodos utilizam dados de entrada-saída e informação a *priori*. Porém não se observa em nenhum deles a utilização de recursos para seleção de estrutura desenvolvidos em métodos caixa-preta. Essa é a principal diferença para o procedimento apresentado na seção 5.5. O procedimento apresentado nesta seção pode ser definido como um método para incorporar informação a *priori* em procedimento de identificação caixa-preta. Nesse caso, a seleção da estrutura não é totalmente definida pelo usuário. Utiliza-se informação a *priori* junto com procedimentos estatísticos para sua seleção.

O procedimento proposto nesta tese, apresentado no Capítulo 6, é baseado nos trabalhos discutidos na seção 5.5. O objetivo é incorporar informação a *priori* na identificação caixa-preta. Como resultado tem-se, além da incorporação da informação a *priori* na seleção de termos candidatos, a possibilidade de se utilizar tal informação para estimar parâmetros, feito tanto para modelos NARMAX polinomiais quanto para racionais. Este último resultado sendo uma das principais contribuições desta Tese.

De uma maneira geral, pode-se dizer que a área de pesquisa está aberta, e que contribuições neste campo certamente serão bem-vindas. Além dos trabalhos já citados, uso de informação a *priori* na identificação de sistemas pode ser visto em (Eskinat et al., 1993; Hansen et al., 1997; Miyano et al., 2000).

Capítulo 6

Propriedades dos Modelos NARMAX Racionais e Polinomiais Aplicadas à Identificação Caixa-Cinza

O desenvolvimento de metodologia para incorporar informação *a priori* em representações tipicamente caixa-preta é algo que ainda está em aberto na literatura (Aguirre, 2000b). Em geral, poucos são os mecanismos atualmente disponíveis para incorporar informação *a priori* na identificação usando representações NARMAX racionais e polinomiais. Uma justificativa para esse fato é que não se conhece em geral o papel que cada termo, ou agrupamento de termos, exerce no modelo, ou como cada grupo de termos influencia na capacidade de o modelo representar certas características. Se a função de um determinado agrupamento não é conhecida, como decidir se ele deve ou não pertencer ao modelo? Estudos de como funções estáticas são mapeadas em modelos NARMAX já foram publicados e utilizados na seleção de estrutura (Aguirre e Mendes, 1996; Jácome e Aguirre, 1996; Aguirre et al., 2000b).

Esses estudos se baseiam na determinação de pontos fixos de modelos autônomos e no mapeamento de funções estáticas. Em todos os estudos citados, utiliza-se o conceito de agrupamento de termos e se define a função de cada agrupamento na equação de pontos fixos e ganho em estado estacionário. As aplicações mostram de forma inequívoca o efeito positivo da utilização de informação *a priori* na seleção de estrutura de modelos NARMAX.

Outro estudo na mesma linha pode ser visto em (Jácome, 1996). Nesse trabalho o autor procura obter a função constante de tempo¹ de modelos

¹ Apesar de o termo constante de tempo ser bem conhecido na teoria de sistemas lineares,

NARMAX polinomial. O procedimento proposto se baseia em métodos de discretização de modelos contínuos. Apesar de fornecer indicativos de quais termos influenciam na constante de tempo dos modelos, o método é limitado, pois, além de se basear em aproximações, não pode ser estendido para a forma mais geral da representação. Tais dificuldades serviram de inspiração para investigar como a constante de tempo é mapeada em um modelo NARMAX.

O que se pretende neste capítulo é definir mecanismos claros e eficientes para se incorporar informação *a priori* na identificação de sistemas via modelos NARMAX racionais e polinomiais. A técnica proposta se baseia em um estudo teórico de três aspectos dos modelos NARMAX: (i) a obtenção de pontos fixos, (ii) a obtenção da função constante de tempo e (iii) a determinação do ganho em estado estacionário.

A partir desse estudo, são apresentados algoritmos para analisar e validar modelos, selecionar estrutura e estimar parâmetros com restrições. Todos esses algoritmos se baseiam nas equações desenvolvidas e em conhecimentos *a priori* do processo a ser identificado.

A técnica proposta permite utilizar informação *a priori* em todas as etapas de identificação, desde a seleção de estrutura até a validação de modelos. Estas técnicas são aplicadas a casos simulados e reais nos Capítulos 7 e 8.

Este capítulo é organizado como se segue: na seção 6.1 é revisto um procedimento para determinação de pontos fixos de modelos NARMAX polinomiais autônomos proposto em (Aguirre e Mendes, 1996). Na seção 6.2 é apresentado o mapeamento de funções estáticas de constante de tempo e ganho em modelos NARMAX polinomiais. Na seção 6.3 procedimento similar é desenvolvido para modelos racionais. Nas seções 6.4, 6.5 e 6.6 são propostos algoritmos para usar informação *a priori* para selecionar estrutura, estimar parâmetros, analisar e validar modelos, respectivamente. Estes algoritmos são fundamentados nas equações desenvolvidas nas seções iniciais. Por último, comentários são apresentados na seção 6.7.

6.1 Pontos Fixos de Modelos NARMA

Nesta seção será revisto o procedimento desenvolvido em (Aguirre e Mendes, 1996) para determinação de pontos fixos de modelos NARMA polinomial. Esse procedimento se baseia nos conceitos de *agrupamentos de termos* e de *coeficientes de agrupamento*, reapresentados nesta seção. O estudo apresentado

no presente trabalho será utilizada a terminologia “*função constante de tempo*” para representar a variação da constante de tempo de um sistema linearizado, em torno do ponto de operação.

nas seções seguintes tem como base esse desenvolvimento.

A parte determinística do modelo NARMAX definido na equação (2.22), um modelo NARX, pode ser escrita como (Peyton-Jones e Billings, 1989):

$$y(k) = \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^m \sum_{n_y, n_u}^{n_y, n_u} c_{p, m-p}(n_n, \dots, n_m) \prod_{i=1}^p y(k - n_i) \prod_{i=1}^m u(k - n_i), \quad (6.1)$$

sendo,

$$\sum_{n_y, n_u}^{n_y, n_u} \equiv \sum_{n_n=1}^{n_y} \sum_{n_n=2}^{n_y} \dots \sum_{n_m=1}^{n_u}, \quad (6.2)$$

ℓ o grau de não-linearidade, n_y refere-se aos fatores em $y(k - n_i)$ e n_u aos fatores $u(k - n_i)$.

Considerando o sistema em estado estacionário com todas as derivadas nulas, tanto do sinal de entrada quanto do sinal de saída, pode-se afirmar que:

$$\begin{aligned} y(k) &= y(k-1) = y(k-2) = \dots = y(k-n_y), \\ u(k) &= u(k-1) = u(k-2) = \dots = u(k-n_u). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Aplicando (6.3) na equação (6.1) resulta em

$$y(k) = \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^{m} \sum_{n_y, n_u}^{n_y, n_u} c_{p, m-p}(n_1, \dots, n_m) y(k-1)^p u(k-1)^m. \quad (6.4)$$

Definição 6.1. O conjunto de termos na forma $y(k-i)^p u(k-j)^m$ é denominado agrupamento de termos (*term cluster* em (Aguirre e Billings, 1995)). Os agrupamentos de termos serão representados por $\Omega_{y^p u^m}$ ($m = 0, \dots, \ell$ e $p = 0, \dots, m$). A constante $\sum_{n_y, n_u}^{n_y, n_u} c_{p, m-p}(n_1, \dots, n_m)$ é o coeficiente do agrupamento de termos $\Omega_{y^p u^m}$ (*cluster coefficient* em (Aguirre e Billings, 1995)) e será representada por $\Sigma_{y^p u^m-p}$. $\square$

Definição 6.2. Pontos fixos (ou pontos de equilíbrio) de um sistema discreto autônomo são aqueles pontos tais que $y(k) = y(k-i)$, $\forall i \in \mathbb{Z}^+$. No caso de sistemas não-autônomos, os pontos de equilíbrio são determinados fazendo $u(k-i) = \bar{u}$, $\forall i \in \mathbb{Z}^+$ (Fieldler-Ferrara and Prado, 1994) $\square$

Os agrupamentos de termos e seus coeficientes podem ser utilizados na determinação dos pontos fixos de um sistema representado por modelos NAR. Essa possibilidade oferece, em alguns casos, uma importante opção na determinação da estrutura. Os agrupamentos possíveis de um polinômio autônomo com grau de não-linearidade ℓ são Ω_0 (que inclui apenas o termo constante), $\Omega_y, \Omega_{y^2}, \dots, \Omega_{y^\ell}$.

Então, os pontos fixos de um polinômio autônomo com grau de não-linearidade ℓ são dados pelas raízes do polinômio (6.5), onde foram usados os conceitos de agrupamento e coeficiente de agrupamento de termos (Aguirre e Mendes, 1996):

$$\Sigma_{y^\ell} y^\ell + \dots + \Sigma_{y^2} y^2 + (\Sigma_y - 1)y + \Sigma_0 = 0, \quad (6.5)$$

sendo Σ_0 = termo constante do modelo. Fica claro que o número de pontos fixos de um polinômio de grau ℓ é igual a ℓ se $\Sigma_{y^\ell} \neq 0$.

A localização dos pontos fixos é dada pelas raízes da equação (6.5), e a álgebra envolvida na sua solução analítica para os casos $\ell = 1, 2, 3$ pode ser vista em (Aguirre e Mendes, 1996). No trabalho citado, também é apresentado um estudo entre agrupamento de termos e existência de pontos fixos simétricos em sistemas autônomos. Parte dessa discussão poderá ser vista na seção 6.3.

6.2 Características Estáticas de Modelos NARX Polinomiais

Nesta seção, características estáticas de modelos NARX polinomiais serão expressas em função de seus agrupamentos e coeficientes de agrupamento de termos. Serão consideradas as relações algébricas não-lineares de ganho estacionário², constante de tempo e pontos de equilíbrio para sistemas não-autônomos. O objetivo é o de identificar em um modelo sinais que influenciam tais funções. Uma vez conhecendo tais relações, pretende-se utilizá-las na identificação caixa-cinza usando as representações NARMAX polinomiais.

Para facilitar o desenvolvimento, para o caso da constante de tempo, inicialmente será considerado o modelo de primeira ordem, em seguida o procedimento será estendido para sistemas de ordem superior. Ao final da seção seguinte são relacionados os sinais que afetam a constante de tempo e como estes aparecem nos modelos.

²Neste trabalho o termo *ganho estacionário* será usado para representar a relação em estado estacionário entre saída e entrada estacionárias de um sistema dinâmico, $\bar{y}/\bar{u}$.

6.2.1 Constante de Tempo de Modelos NARX Polinomial de Primeira Ordem

A função constante de tempo de um modelo NARX polinomial de primeira ordem pode ser representada de uma forma geral por

$$\tau(\bar{x}_{\tau_1}, \dots, \bar{x}_{\tau_{n_\tau}}) = f \left(\lambda_0 + \sum_{i=1}^{n_\tau} \lambda_i \bar{x}_{\tau_i} \right), \quad (6.6)$$

sendo que λ_i , $i = 0, \dots, n_\tau$ são constantes e, x_{τ_i} , $i = 1, \dots, n_\tau$ sinais dos quais a variável constante de tempo $\tau(x_\tau)$ depende. A barra sobre a variável x indica valor em estado estacionário. Claro que, se $\lambda_i \neq 0$ para qualquer $i = 1, \dots, n_\tau$, então a equação (6.6) representa a função constante de tempo, ou seja, ela mostra como a constante de tempo depende dos sinais (x_{τ_i}). A questão é identificar em um modelo NARX polinomial que sinais influenciam a constante de tempo, como se dá essa relação e de que forma esses termos aparecem no modelo.

Para verificar como essas variáveis estão relacionadas no modelo, considere o modelo NARX polinomial de primeira ordem escrito na seguinte forma:

$$y(k) = \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^{\ell-m} \sum_{n_1, \dots, n_u}^{1, n_u} c_{p,m}(n_1, \dots, n_u) y(k-1)^p u(k-n_u)^m, \quad (6.7)$$

que pode ser considerada uma equação geral para modelos NARX polinomiais de primeira ordem, devido ao atraso máximo, igual a uma unidade na variável de saída y . Para facilitar o entendimento, o exemplo a seguir apresenta todos os termos que aparecem em um modelo de primeira ordem com grau de não-linearidade $\ell = 2$ e $n_u = 2$, a partir da expansão da equação (6.7). Através desse exemplo, muitas propriedades discutidas ao longo desta seção serão melhor compreendidas.

Exemplo 6.1. Um modelo NARX polinomial de primeira ordem, com grau de não-linearidade $\ell = 2$, $n_u = 2$, e com todos os termos possíveis, pode ser escrito, a partir da expansão da equação (6.7), como

$$\begin{aligned} y(k) = & c_{0,0} + c_{1,0}(1)y(k-1) + c_{2,0}(1)y(k-1)^2 + \\ & c_{0,1}(1)u(k-1) + c_{0,1}(2)u(k-2) + \\ & c_{1,1}(1)y(k-1)u(k-1) + c_{1,1}(1,2)y(k-1)u(k-2) + \\ & c_{0,2}(1)u(k-1)^2 + c_{0,2}(1,2)u(k-1)u(k-2) + \\ & c_{0,2}(2)u(k-2)^2. \end{aligned} \quad (6.8)$$

□

Para deduzir a função constante de tempo de modelos NARX, será considerada a representação por espaço de estados. O procedimento adotado é o de representar o modelo no espaço de estados, linearizando-o em torno de cada estado estacionário. Chamando $\mathbf{Y}(k-1)$ de vetor de estado, a equação (6.7) pode ser escrita como

$$\mathbf{Y}(k) = \mathbf{D}_f \mathbf{Y}(k-1) + \mathbf{B} \mathbf{U}(k) , \quad (6.9)$$

sendo $\mathbf{D}_f$ a matriz jacobiana da equação (6.7) avaliada em cada estado estacionário. Então $\mathbf{D}_f$ será uma matriz cujos coeficientes dependem do ponto de operação³ definido por $(\bar{u}, \bar{y})$. Note que a equação (6.9) é geral e pode ser aplicada a modelos de qualquer ordem. Para os de primeira ordem, $\mathbf{Y}(k-1) = [y(k-1)]$ e $\mathbf{D}_f$ será um escalar; $\mathbf{U}(k)$ é um vetor que contém os regressores da entrada e $\mathbf{B}$ a matriz de entrada sendo em geral não-constante.

Considerando $u(k)$ uma entrada em estado estacionário representada por $\bar{u}$ e $\bar{y}$ a respectiva saída, também em estado estacionário, a matriz $\mathbf{D}_f$ é determinada, para cada ponto de operação, por

$$\mathbf{D}_f(\bar{u}, \bar{y}) = \left. \frac{\partial y(k)}{\partial y(k-1)} \right|_{\substack{y(k) = \bar{y} \\ u(k) = \bar{u}}} , \quad (6.10)$$

sendo a função $y(k)$ definida pela equação (6.7). Uma vez que essa função é polinomial, sua derivada também o será. O cálculo dessa derivada é puramente algébrico, e pode ser expresso de uma forma geral por

$$\left. \frac{\partial y(k)}{\partial y(k-1)} \right|_{\substack{y(k) = \bar{y} \\ u(k) = \bar{u}}} = \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^{\ell-m} p \, c_{p,m} \bar{y}^{(p-1)} \bar{u}^m . \quad (6.11)$$

Desta forma, tem-se que a matriz jacobiana é função do ponto de operação do modelo. A partir da matriz jacobiana $\mathbf{D}_f(\bar{u}, \bar{y})$, pode-se determinar os autovalores do modelo, associados a cada ponto de operação, por

$$\det |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{D}_f(\bar{y}, \bar{u})| = 0 , \quad (6.12)$$

³Por *ponto de operação* entende-se um ponto sobre a função $\bar{y} = g(\bar{u})$, definida no plano, sendo g a relação estática (possivelmente não-linear) entre $\bar{y}$ e $\bar{u}$.

sendo λ os autovalores e $\mathbf{I}$, a matriz identidade. Neste caso, como $\mathbf{D}_{\mathbf{f}}(\bar{u}, \bar{y})$ tem dimensão 1×1 , o modelo tem apenas um autovalor para cada ponto de operação, determinado a partir da equação (6.11), como

$$\lambda(\bar{u}, \bar{y}) = \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^{\ell-m} p \, c_{p,m} \bar{y}^{(p-1)} \bar{u}^m, \quad (6.13)$$

sendo que, para o caso de primeira ordem, $\lambda(\bar{u}, \bar{y})$ assume sempre valores reais. Uma vez que o plano s mapeia-se no plano z pela relação $z = e^{T_s s}$, é possível mapear a função autovalor $\lambda(\bar{u}, \bar{y})$ no plano s , e a partir deste, determinar a constante de tempo do modelo no ponto. Usando esse procedimento, a constante de tempo será dada por

$$\tau(\lambda) = -\frac{T_s}{\ln \lambda(\bar{y}, \bar{u})}, \quad (6.14)$$

ou ainda, substituindo (6.13) em (6.14) vem

$$\tau(\bar{u}, \bar{y}) = -\frac{T_s}{\ln \left(\sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^{\ell-m} p \, c_{p,m} \bar{y}^{(p-1)} \bar{u}^m \right)}, \quad (6.15)$$

sendo T_s o tempo de amostragem e $\tau(\bar{u}, \bar{y})$ a função constante de tempo do modelo. A análise da equação (6.13) permite enunciar os seguintes Lemas.

Lema 6.1. *Os agrupamentos de termos $\Omega_{y^p u^m}$ com $p = 0$ e $m \neq 0$ em um modelo NARX polinomial não influenciam os autovalores, portanto os termos pertencentes a tais agrupamentos não afetam a constante de tempo do modelo.*

Prova: Considerando apenas os termos de um modelo pertencentes aos agrupamentos $\Omega_{y^p u^m}$ com $p = 0$ e $m \neq 0$, correspondendo a agrupamentos de termos que envolvam somente termos em u , Ω_u , Ω_{u^2} , $\dots$, Ω_{u^ℓ} , a equação (6.13) pode ser reduzida a

$$\lambda(\bar{y}, \bar{u}) = \sum_{m=0}^{\ell} 0 \times c_{0,m} \bar{u}^m = 0. \quad (6.16)$$

Ou seja, tais agrupamentos de termos Ω_u , Ω_{u^2} , $\dots$, Ω_{u^ℓ} não influenciam nos autovalores do modelo. Esta prova também pode ser feita a partir da equação (6.11). Note que a derivada parcial de tais termos em relação a $y(k-1)$ será sempre nula. $\square$

Lema 6.2. *Termos em um modelo NARX polinomial pertencentes ao agrupamento $\Omega_{y^p u^m}$ com $m = 0$ e $p \neq 0$ influenciam os autovalores do modelo. Além disso, se $p > 1$, então o valor dos autovalores irá variar com o sinal $\bar{y}^{p-1}$.*

Prova: Se um modelo NARX polinomial tem somente termos pertencentes ao agrupamento $\Omega_{y^p u^m}$ com $m = 0$ e $p \neq 0$, ou seja, agrupamentos de termos somente em y , que são, $\Omega_y, \Omega_{y^2}, \dots, \Omega_{y^\ell}$, a equação (6.13) pode ser reduzida a

$$\lambda(\bar{y}, \bar{u}) = \sum_{p=1}^{\ell} p c_{p,0} \bar{y}^{p-1}, \quad (6.17)$$

ou

$$\lambda(\bar{y}, \bar{u}) = c_{1,0} + \sum_{p=2}^{\ell} p c_{p,0} \bar{y}^{p-1}. \quad (6.18)$$

Como mostrado pela equação (6.18), a função autovalor $\lambda(\bar{y}, \bar{u})$ possuirá uma parte constante, $c_{1,0}$, e uma variável que é função de $\bar{y}^{p-1}$. Consequentemente, a presença do agrupamento de termos Ω_{y^p} com $p > 1$ no modelo NARX polinomial indica que os autovalores dependerão do sinal $\bar{y}^{p-1}$. $\square$

Lema 6.3. *Termos em um modelo NARX polinomial pertencentes ao agrupamento $\Omega_{y^p u^m}$ com $m \neq 0$ e $p \neq 0$ indicam que os autovalores do modelo dependem do ponto de operação definido por $(\bar{u}, \bar{y})$.*

Prova Se um modelo NARX polinomial possuir somente termos do agrupamento $\Omega_{y^p u^m}$, com $m \neq 0$ e $p \neq 0$, a equação (6.13) poderá ser reduzida a

$$\lambda(\bar{y}, \bar{u}) = \sum_{m=1}^{\ell} \sum_{p=1}^{\ell-m} p c_{p,m} \bar{y}^{p-1} \bar{u}^m, \quad (6.19)$$

que indica que a posição dos autovalores é função do ponto de operação definido por $(\bar{u}, \bar{y})$. $\square$

Usando as equações (6.16), (6.18) e (6.19), a equação (6.13) pode ser reescrita como

$$\lambda(\bar{y}, \bar{u}) = c_{1,0} + \sum_{p=2}^{\ell} p c_{p,0} \bar{y}^{p-1} + \sum_{m=1}^{\ell} \sum_{p=1}^{\ell-m} p c_{p,m} \bar{y}^{p-1} \bar{u}^m, \quad (6.20)$$

ou ainda,

$$\lambda(\bar{x}_{\lambda_i}) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n_\lambda} \lambda_i \bar{x}_{\lambda_i} , \quad (6.21)$$

sendo que $\lambda_0 = c_{1,0}$ e λ_i são constantes que dependem do coeficiente de agrupamento de termos. $\bar{x}_{\lambda_i}$ são sinais, dos quais a função de autovalor $\lambda(\bar{x}_{\lambda_i})$ depende. Conseqüentemente, a função constante de tempo pode ser escrita na forma da equação (6.6), usando a equação (6.15) e considerando $\bar{x}_{\lambda_i} = \bar{x}_{\tau_1}$; assim

$$\tau(\bar{x}_{\tau_1}, \dots, \bar{x}_{\tau_{n_\tau}}) = - \frac{T_s}{\ln \left(\lambda_0 + \sum_{i=1}^{n_\tau} \lambda_i \bar{x}_{\tau_i} \right)} . \quad (6.22)$$

A Tabela 6.1 apresenta a relação entre agrupamentos de termos e sinais $\bar{x}_{\tau_1}$, além da relação entre coeficientes de agrupamentos e coeficientes λ_i . Para a construção da Tabela 6.1 foram considerados todos os agrupamentos possíveis em um modelo NARX polinomial de primeira ordem com grau de não-linearidade $\ell = 3$.

Tabela 6.1: Sinais e coeficientes de termos que afetam a constante de tempo de modelos NARX polinomiais, com $\ell = 3$, em função dos agrupamentos de termos. O índice i indica o número de sinais que apacerão na função constante de tempo devido ao agrupamento analisado, sendo o mesmo índice usado na equação 6.21.

Agrupamentos	$\tau_i(\bar{x}_{\tau_i})$		
	i	$\bar{x}_{\tau_i}$	λ_i
Ω_y	0	-	Σ_y
Ω_{y^2}	1	$\bar{y}$	$2\Sigma_{y^2}$
Ω_{y^3}	1	$\bar{y}^2$	$3\Sigma_{y^3}$
Ω_u	-	-	-
Ω_{u^2}	-	-	-
Ω_{u^3}	-	-	-
Ω_{yu}	1	$\bar{u}$	Σ_{yu}
Ω_{y^2u}	1	$\bar{y}\bar{u}$	$2\Sigma_{y^2u}$
Ω_{yu^2}	1	$\bar{u}^2$	Σ_{yu^2}

A Tabela 6.1 revela que, se o modelo NARX polinomial possuir apenas termos não-lineares na forma $y(k-1)u(k-1), \dots, y(k-1)u(k-n_u)$, que são

termos do agrupamento Ω_{yu} , então $\bar{x}_{\tau_i} = \bar{u}$ e $\lambda_i = \Sigma_{yu}$. Por outro lado, se o modelo NARX polinomial possuir apenas termos na forma $y(k-1)^p$ com $1 < p \leq l$, então $\bar{x}_{\tau_i} = \bar{y}^{p-1}$ e $\lambda_i = p \Sigma_{y^p}$. Naturalmente, se o modelo possui termos dos agrupamentos Ω_{yu} e Ω_{y^p} , então $n_\tau = 2$ e haverá valores para λ_1 e λ_2 , que são Σ_{yu} e $p \Sigma_{y^p}$, como será mostrado no próximo exemplo.

Exemplo 6.2. Considere o modelo NARX polinomial de primeira ordem apresentado no Exemplo 6.1. Usando (6.15) e (6.18) a respectiva função constante de tempo será

$$\tau(\bar{u}, \bar{y}) = -\frac{T_s}{\ln(c_{1,0}(1) + 2c_{2,0}(1)\bar{y} + c_{1,1}(1)\bar{u} + c_{1,1}(1,2)\bar{u})} , \quad (6.23)$$

ou, usando a notação de coeficiente e agrupamento de termos,

$$\tau(\bar{u}, \bar{y}) = -\frac{T_s}{\ln(\Sigma_y + 2\Sigma_{y^2}\bar{y} + \Sigma_{yu}\bar{u})} , \quad (6.24)$$

sendo $\Sigma_y = c_{1,0}$, $\Sigma_{y^2} = c_{2,0}$ e $\Sigma_{yu} = c_{1,1}(1) + c_{1,1}(1,2)$.

Ou ainda, usando a relação apresentada na Tabela 6.1 pode-se dizer que $n_\tau = 2$, $\lambda_0 = \Sigma_y = c_{1,0}$, $\lambda_1 = 2\Sigma_{y^2} = 2c_{2,0}$, $\bar{x}_{\tau_1} = \bar{y}$, $\lambda_2 = \Sigma_{yu} = c_{1,1}(1) + c_{1,1}(1,2)$ e $\bar{x}_{\tau_2} = \bar{u}$. $\square$

6.2.2 Constante de Tempo de Modelos de Ordem Superior

O procedimento adotado para obter a função constante de tempo de modelos NARX polinomiais é: (i) representar o modelo na forma de equação de estados, linearizando-o em torno dos pontos fixos através da matriz jacobiana, (ii) a partir da matriz jacobiana montar a equação característica, determinando seus autovalores em função do ponto de operação e, (iii) mapear os autovalores do modelo discreto, plano z , no plano s , determinando a constante de tempo. Este é um procedimento geral, que foi aplicado a modelos de primeira ordem, mas que também pode ser aplicado a sistemas de ordem superior.

No caso de sistemas de ordem superior, com autovalores conjugados complexos, como constante de tempo entender-se-á a constante de tempo da função exponencial que atenua a oscilação. A diferença fundamental da análise a ser desenvolvida nesta seção e a da seção anterior está na equação característica do modelo. Nesta, os autovalores são determinados pelas raízes de um polinômio de grau d , sendo d a ordem do modelo. Sua solução nem sempre é analítica, o que torna impossível explicitar a função constante de tempo. Porém será visto que, mesmo assim, é possível identificar os sinais que influenciam na constante de tempo do modelo.

Diferente do procedimento que será adotado para o ganho, aqui o transitório é de interesse e a igualdade $y(k) = y(k-1) = \dots = y(k-n_y)$ não é verificada, pelo menos não exatamente. Entretanto, será considerado que $u(k) = u(k-1) = \dots = u(k-n_u)$. Isso corresponde a assumir que as entradas são constantes dentro da janela analisada. Para a análise apresentada a seguir, os termos em $u(k)$ com o mesmo grau de não-linearidade podem ser agrupados, mas os termos em $y(k)$ não. Portanto serão usados novos conceitos de agrupamento de termos, denominados *agrupamentos- d* e *coeficientes- d* . Estes conceitos são apresentados a seguir.

Definição 6.3. Termos na forma $y(k-d)^p u(k-j)^m$ para $m = 0, \dots, \ell$, $p = 0, \dots, \ell$ com $m+p \leq \ell$ e $j = 1, \dots, n_u$ são chamados *agrupamentos- d* e são representados por $\Omega_{y_d^p u^m}$. A soma de todos os coeficientes de um agrupamento de termos de ordem d são chamados de *coeficientes- d* e são representados por $\Sigma_{y_d^p u^m}$. $\square$

Vale ser ressaltado que

$$\begin{aligned} \Omega_y &= \Omega_{y_1} \cup \Omega_{y_2} \cup \Omega_{y_3} \dots \\ \Omega_{y^2} &= \Omega_{y_1 y_2} \cup \Omega_{y_1^2} \cup \Omega_{y_2^2} \dots \\ \vdots &\quad \vdots \\ \Sigma_y &= \sum_{i=1}^{n_y} \Sigma_{y_i} \\ \vdots &\quad \vdots \end{aligned} \tag{6.25}$$

o que significa que no caso de modelos de primeira ordem os *agrupamentos termos* são iguais aos *agrupamentos- d* . O mesmo ocorre com os coeficientes de agrupamentos.

Para modelo de ordem superior, a equação (6.9) pode ser escrita na forma

$$\begin{bmatrix} y(k-n_y+1) \\ y(k-n_y+2) \\ \vdots \\ y(k-1) \\ y(k) \end{bmatrix} = \mathbf{D}_f \begin{bmatrix} y(k-n_y) \\ y(k-n_y+1) \\ \vdots \\ y(k-2) \\ y(k-1) \end{bmatrix} + \mathbf{B}\mathbf{U}(k), \tag{6.26}$$

sendo

$$\mathbf{D}_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \Delta_d & \Delta_{d-1} & \cdots & \Delta_2 & \Delta_1 \end{bmatrix}, \quad (6.27)$$

$$\Delta_d = \left. \frac{\partial y(k)}{\partial y(k-d)} \right|_{\bar{y}, \bar{u}}, \quad (6.28)$$

e d é o atraso da saída y . Note-se que a expressão de Δ_d é determinada em função da derivada parcial, avaliada para $y = \bar{y}$ e $u = \bar{u}$, ou seja, no ponto de operação. A equação (6.28) é uma generalização da equação (6.10). Nesta, $d = 1$ e na equação (6.28), d pode ser $1, 2, \dots, n_y$. Com objetivo de obter uma expressão geral para Δ_d serão usados os conceitos de agrupamentos- d , coeficientes- d e o mesmo procedimento adotado para deduzir a equação (6.20). Assim, a equação de (6.28) pode ser escrita como

$$\Delta_d(\bar{y}, \bar{u}) = \Sigma_{y_d} + \sum_{p=2}^{\ell} p \Sigma_{y_d^p} \bar{y}^{p-1} + \sum_{m=1}^{\ell} \sum_{p=1}^{\ell-m} p \Sigma_{y_d^p u^m} \bar{y}^{p-1} \bar{u}^m, \quad (6.29)$$

ou, escrita como a equação (6.21),

$$\Delta_d(\bar{x}_{\Delta_{d_i}}) = \Delta_{d_0} + \sum_{i=1}^{n_{\Delta_d}} \Delta_{d_i} \bar{x}_{\Delta_{d_i}}, \quad (6.30)$$

sendo $\Delta_{d_0} = \Sigma_{y_d}$, $\Delta_{d_1, 2, \dots, d}$ constantes que dependem dos coeficientes- d , e $\bar{x}_{\Delta_{d_i}}$ são sinais dos quais a variável Δ_d depende. Estes sinais aparecem nos modelos NARX polinomiais como produto de $y(k-d)$.

Os autovalores do modelo NARX podem ser determinados por $\det |\lambda I - \mathbf{D}_f| = 0$. Então, a equação característica será dada por

$$\lambda^d - \Delta_1 \lambda^{d-1} - \dots - \Delta_{d-1} \lambda - \Delta_d = 0, \quad (6.31)$$

sendo as raízes da equação (6.31) os autovalores λ do modelo NARX polinomial no ponto de operação $(\bar{u}, \bar{y})$. Os autovalores λ podem ser números complexos, representados por $\lambda_i = r_i e^{\pm j\theta_i}$. Então, próximo a cada ponto de operação o valor da constante de tempo pode ser calculado por

$$\tau_{1,2,\dots,d} = \frac{-T_s}{\ln r_{1,2,\dots,d}}, \quad (6.32)$$

sendo que o número de funções $\tau(\bar{y}, \bar{u})$ é igual à ordem do modelo e r é o valor do módulo do autovalor λ . Se os autovalores são complexos, então $\tau(\bar{u}, \bar{y})$ será a constante de tempo da função exponencial que atenua a oscilação, ou seja, a envoltória da oscilação. Note que, $r = f(\lambda)$ por sua vez, $\lambda = f(\Delta_d)$ e, $\Delta_d = f(\bar{u}, \bar{y})$.

Conforme visto, não é possível obter uma expressão analítica para a função autovalores, e por consequência para a constante de tempo. Porém, a partir da equação (6.29), é possível identificar os sinais que interferem nos coeficientes da equação característica do modelo. Este procedimento é o mesmo usado para modelos de primeira ordem. A Tabela 6.2 apresenta, para cada agrupamento possível em um modelo NARX polinomial de ordem $d = 2$ e grau de não-linearidade $\ell = 2$, os sinais $\bar{x}_{\Delta_{d_i}}$ e os coeficientes Δ_{d_i} .

Tabela 6.2: Sinais e coeficientes de termos que afetam os coeficientes da equação característica de modelos NARX polinomiais, com $\ell = 2$ e $d = 2$, em função dos agrupamentos- d .

Agrupamentos	i	$\Delta_{1_i}(\bar{x}_{\Delta_{1_i}})$		i	$\Delta_{2_i}(\bar{x}_{\Delta_{2_i}})$	
		$\bar{x}_{\Delta_{1_i}}$	Δ_{1_i}		$\bar{x}_{\Delta_{2_i}}$	Δ_{2_i}
Ω_{y_1}	0	-	Σ_{y_1}	-	-	-
Ω_{y_2}	-	-	-	0	-	Σ_{y_2}
Ω_u	-	-	-	-	-	-
$\Omega_{y_1^2}$	1	$\bar{y}$	$2\Sigma_{y_1^2}$	-	-	-
$\Omega_{y_2^2}$	-	-	-	1	$\bar{y}$	$2\Sigma_{y_2^2}$
$\Omega_{y_1 y_2}$	1	$\bar{y}$	$\Sigma_{y_1 y_2}$	1	$\bar{y}$	$\Sigma_{y_1 y_2}$
$\Omega_{y_1 u}$	1	$\bar{u}$	$\Sigma_{y_1 u}$	-	-	-
$\Omega_{y_2 u}$	-	-	-	1	$\bar{u}$	$\Sigma_{y_2 u}$
Ω_{u^2}	-	-	-	-	-	-

Note-se que, naturalmente, a Tabela 6.2 é similar à Tabela 6.1. Em ambas verifica-se que agrupamento de termos contendo apenas a saída u não afetam os autovalores do modelo. A seguir será apresentado um algoritmo para determinação da constante de tempo de modelo NARX polinomial de ordem superior.

Algoritmo 6.1. Determinação da função constante de tempo de modelos NARX polinomiais

- 1: Desconsiderar no modelo termos pertencentes aos agrupamentos Ω_{u^m} com $m > 0$, termos esses que não influenciam na posição dos autovalores.
- 2: Escrever o modelo NARX polinomial usando os conceitos de *agrupamentos-d* e *coeficientes-d*.
- 3: Determinar as expressões de $\Delta_d(\bar{u}, \bar{y})$, $d = 1, 2, \dots, n_y$, usando a equação (6.29).
- 4: Calcular o valor de Δ_d , $d = 1, 2, \dots, n_y$, para cada ponto de operação definido por $(\bar{u}, \bar{y})$.
- 5: Montar a equação característica conforme equação (6.31).
- 6: Calcular os autovalores λ_i , $i = d$, para cada ponto de operação, representando na forma $r_i e^{\pm j\theta_i}$, sendo r_i o módulo e θ_i ângulo.
- 7: Determinar, através da equação (6.32), a constante de tempo associada a cada ponto de operação.

Vale ressaltar que, para o caso de ordem superior, é impossível obter uma expressão analítica para constante de tempo. No algoritmo apresentado acima, os passos 1 a 3 são facilmente executados. A equação (6.29) é puramente algébrica. Procedimento numérico deve ser usado para cálculo das raízes da equação (6.31) e para a constante de tempo (6.32).

Embora a equação geral para constante de tempo não seja analítica, seu cálculo não apresenta problemas quando se usam softwares de matemática, como por exemplo o MATLABTM.

6.2.3 Ganho em Estado Estacionário

Nesta seção será demonstrado que a não-linearidade estática em um modelo NARX polinomial pode ser escrita em uma forma geral como

$$K_s(\bar{x}_{K_1}, \dots, \bar{x}_{K_{n_K}}) = f \left(K_0 + \sum_{i=1}^{n_K} K_i \bar{x}_{K_i} \right), \quad (6.33)$$

sendo K_i , $i = 0, \dots, n_K$ constantes; $\bar{x}_{K_i}$, $i = 1, \dots, n_K$ sinais, em estado estacionário, dos quais a variável ganho estático $K_s(\bar{x}_K)$ depende. Será visto que x_{K_i} poderá ou não ser igual a x_{τ_i} , e como tais sinais aparecem nos modelos.

Como o objetivo é o de determinar o ganho estático K_s , a equação (6.7) será considerada em estado estacionário. Neste caso as seguintes igualdades, $y(k) = y(k-1) = \dots = y(k-n_y) = \bar{y}$ e $u(k-1) = u(k-2) = \dots = u(k-n_u) = \bar{u}$ podem ser utilizadas. Isso é o mesmo que aplicar o teorema do valor final para o modelo representado pela equação (6.7), para uma entrada em degrau de amplitude final $\bar{u}$. Usando a definição de coeficientes de agrupamentos, o modelo NARX polinomial pode ser escrito na forma

$$\bar{y} = \Sigma_0 + \Sigma_y \bar{y} + \Sigma_u \bar{u} + \sum_{m=1}^{\ell-1} \sum_{p=1}^{\ell-m} \Sigma_{y^p u^m} \bar{y}^p \bar{u}^m + \sum_{p=2}^{\ell} \Sigma_{y^p} \bar{y}^p + \sum_{m=2}^{\ell} \Sigma_{u^m} \bar{u}^m, \quad (6.34)$$

sendo que os termos foram separados em: termo constante, Σ_0 ; termos lineares em y , $\Sigma_y \bar{y}$; termos lineares em u , $\Sigma_u \bar{u}$; termos cruzados $\sum_{m=1}^{\ell-1} \sum_{p=1}^{\ell-m} \Sigma_{y^p u^m} \bar{y}^p \bar{u}^m$; termos não-lineares em y , $\sum_{i=1}^{\ell} \Sigma_{y^i} \bar{y}^i$; e termos não-lineares em u , $\sum_{i=1}^{\ell} \Sigma_{u^i} \bar{u}^i$.

Então, a partir da equação (6.34), o ganho estático K_s pode ser expresso por

$$\hat{K}_s(\bar{u}, \bar{y}) = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = \frac{\Sigma_0/\bar{u} + \Sigma_u + \sum_{m=2}^{\ell} \Sigma_{u^m} \bar{u}^{m-1}}{1 - \Sigma_y - \sum_{m=1}^{\ell-1} \sum_{p=1}^{\ell-m} \Sigma_{y^p u^m} \bar{y}^{p-1} \bar{u}^m - \sum_{p=2}^{\ell} \Sigma_{y^p} \bar{y}^{p-1}}. \quad (6.35)$$

Nas seções anteriores mostrou-se que um conjunto de termos que aparecem nas equações (6.18) e (6.19) podem ser expressos de acordo com a equação (6.21). Também se mostrou que termos de agrupamentos- u não influenciam a função constante de tempo, ver equação (6.16). Logo o numerador da equação (6.35) pode ser expresso em termos da variável $\bar{x}_K$, que influencia somente no ganho. Por outro lado, as últimas seções também revelam que ambos, agrupamentos $\Omega_{y^p u^m}$ e Ω_y^p , influenciam na constante de tempo. Esses agrupamentos também aparecem no denominador de (6.35), afetando a função ganho estático. Com essas considerações, a equação (6.35) pode ser expressa na forma

$$\hat{K}_s(\bar{x}_{\tau_i}, \bar{x}_{K_i}) = \frac{\Sigma_0/\bar{u} + \Sigma_u + \sum_{i=1}^{n_K} \Sigma_{x_{K_i} u} \bar{x}_{K_i}}{1 - \Sigma_y - \sum_{i=1}^{n_{\tau}} \Sigma_{y x_{\tau_i}} \bar{x}_{\tau_i}}, \quad (6.36)$$

ou

$$\hat{K}_s(\bar{x}_{\tau_i}, \bar{x}_{K_i}) = \frac{c_0/\bar{u} + K_0 + \sum_{i=1}^{n_K} K_i \bar{x}_{K_i}}{1 - \lambda_0 - \sum_{i=1}^{n_\tau} \lambda_i \bar{x}_{\tau_i}}, \quad (6.37)$$

sendo que, $\bar{x}_K$ são sinais que influenciam somente a função ganho estático, enquanto que $\bar{x}_\tau$ influencia tanto a função constante de tempo quanto a ganho estático. É importante ressaltar que na equação (6.36) os números $\Sigma_{yx_{\tau_i}}$ e $\Sigma_{x_{K_i}u}$ são coeficientes de agrupamentos $\Omega_{yx_{\tau_i}}$ e $\Omega_{x_{K_i}u}$, não devendo serem confundidos com somatórios.

A Tabela 6.3 apresenta, para um modelo de ordem d , e grau de não linearidade $\ell = 3$ os sinais $\bar{x}_{K_i}$ e $\bar{x}_{\tau_i}$ em função de cada agrupamento de termos, além dos coeficientes K_i e τ_i . Note que aqui não se preocupou em utilizar os conceitos de agrupamentos- d , pois para o ganho em estado estacionário as relações $y(k) = y(k-1) = y(k-2) = \dots = y(k-n_y) = \bar{y}$ podem ser utilizadas.

Tabela 6.3: Sinais e coeficientes de termos que afetam os coeficientes da função ganho de modelos NARX polinomiais, com $\ell = 3$, em função dos agrupamentos de termos.

Agrupamentos	$\hat{K}_s(\bar{x}_{K_i}, \bar{x}_{\tau_i})$					
	i	$\bar{x}_{K_i}$	K_i	i	$\bar{x}_{\tau_i}$	λ_i
Ω_y	-	-	-	0	-	Σ_y
Ω_u	0	-	Σ_u	-	-	-
Ω_{yu}	-	-	-	1	$\bar{u}$	Σ_{yu}
Ω_{y^2u}	-	-	-	1	$\bar{y}\bar{u}$	$2\Sigma_{y^2u}$
Ω_{yu^2}	-	-	-	1	u^2	Σ_{yu^2}
Ω_{u^2}	1	$\bar{u}$	Σ_{u^2}	-	-	-
Ω_{u^3}	1	u^2	Σ_{u^3}	-	-	-
Ω_{y^2}	-	-	-	1	$\bar{y}$	$2\Sigma_{y^2}$
Ω_{y^3}	-	-	-	1	y^2	$3\Sigma_{y^3}$

Ressalta-se que a Tabela 6.3 refere-se à função ganho em estado estacionário. O fato dos sinais $\bar{x}_{\tau_i}$ aparecerem na equação (6.37), significa que estes afetam tanto a constante de tempo quanto o ganho em estado estacionário.

6.2.4 Função Estática

Como função estática de um modelo entender-se-á a função que descreve a relação entre a saída em estado estacionário $\bar{y}$ e a respectiva entrada, também

em estado estacionário, $\bar{u}$. Esta função pode ser entendida também como a função de pontos fixos para um sistema não-autônomo.

Uma vez obtida a expressão para ganho estático de um modelo, equação (6.35), a expressão para função estática pode ser determinada por

$$\bar{y} = \hat{K}_s(\bar{y}, \bar{u}) \bar{u}, \quad (6.38)$$

então, a partir da equação (6.35)

$$\bar{y} = \frac{\Sigma_0 + \Sigma_u \bar{u} + \sum_{m=2}^{\ell} \Sigma_{u^m} \bar{u}^m}{1 - \Sigma_y - \sum_{m=1}^{\ell-1} \sum_{p=1}^{\ell-m} \Sigma_{y^p u^m} \bar{y}^{p-1} \bar{u}^m - \sum_{p=2}^{\ell} \Sigma_{y^p} \bar{y}^{p-1}}, \quad (6.39)$$

que não é uma expressão que explicita $\bar{y} = f(\bar{u})$. Uma vez que aparecem termos em Ω_{y^p} , com $p > 2$, fica impossível explicitar uma relação. Uma forma de contornar tal problema é através da multiplicação de ambos os membros da equação (6.39) pelo denominador do segundo membro, movendo todos os termos para o primeiro membro. Desta forma, a saída em estado estacionário de um modelo NARX polinomial com grau de não-linearidade ℓ é determinada pelas raízes do seguinte polinômio:

$$\begin{aligned} & (\Sigma_{y^\ell}) \bar{y}^\ell + \left(\sum_{i=0}^{i=1} \Sigma_{y^{\ell-1} u^i} \bar{u}^i \right) \bar{y}^{\ell-1} + \dots + \\ & \left(\sum_{i=0}^{i=\ell-2} \Sigma_{y^2 u^i} \bar{u}^i \right) \bar{y}^2 + \left(1 - \sum_{i=0}^{i=\ell-1} \Sigma_{y u^i} \bar{u}^i \right) \bar{y} + \sum_{i=0}^{i=\ell} \Sigma_{u^i} \bar{u}^i = 0, \end{aligned} \quad (6.40)$$

podendo-se verificar que, se $\Sigma_{y^\ell} \neq 0$ então o modelo terá ℓ saídas estacionárias para cada valor de entrada $\bar{u}$. Em outras palavras, pode-se dizer que o número de saídas estacionárias possíveis de um modelo NARX polinomial é igual ao maior expoente que aparece nos termos em y , inclusive os termos cruzados Ω_{yu} .

6.3 Características Estáticas de Modelos NARX Racionais

Nesta seção o desenvolvimento apresentado para modelos NARX polinomiais será estendido para modelos NARX racionais. Naturalmente, sendo a representação NARX polinomial um caso particular da racional, as equações aqui apresentadas podem ser aplicadas, como caso particular, também para modelos polinomiais.

O desenvolvimento apresentado a seguir utiliza os conceitos de agrupamento de termos, coeficientes de agrupamentos, agrupamentos- d e coeficientes- d previamente definidos, porém, nesta representação, aplicados tanto para o polinômio do numerador quanto para o denominador. Para tal, serão acrescentados os índices α indicando termos no numerador e β para o denominador, tanto para os agrupamentos de termos e coeficientes de agrupamentos (Mendes, 1995; Mendes e Billings, 2000) quanto para os agrupamentos- d e coeficientes- d . De tal forma que, Ω_y^α e Ω_y^β indicam, respectivamente, agrupamento de termos em y no numerador e denominador.

Assim como para o caso polinomial, o objetivo aqui é descobrir como podem ser mapeadas no modelo racional as funções constante de tempo e ganho estacionário. Pretende-se identificar como aparecem no modelo racional sinais que influenciam nas funções constante de tempo e ganho estático.

Para se atingir o objetivo proposto, será utilizada a mesma metodologia aplicada para o caso polinomial. Inicialmente será apresentada uma discussão a respeito da constante de tempo para modelos racionais de primeira ordem. A seguir o procedimento será estendido para sistemas de ordem superior. Para o caso do ganho, as equações serão desenvolvidas para o caso geral.

6.3.1 Constante de Tempo de Modelos de Primeira Ordem

De forma similar ao procedimento utilizado para o modelo polinomial, será provado aqui que a constante de tempo de um modelo NARX racional pode também ser expressa na forma da equação (6.6).

Os principais objetivos a ser trabalhados são identificar a função f que relaciona τ a $\bar{x}_{\tau_i}$ e identificar que sinais influenciam na constante de tempo de modelo NARX racionais e como estes aparecem no modelo. Para tal, considerar-se-á um modelo NARX racional de primeira ordem e grau de não-linearidade ℓ , escrito na seguinte forma:

$$y(k) = \frac{\sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^{\ell-m} \sum_{n_n, n_m}^{1, n_u} c_{p,m}^{\alpha}(n_1, \dots, n_n) y(k-1)^p u(k-n_u)^m}{\sum_{m=0}^{\ell-1} \sum_{p=0}^{\ell-m-1} \sum_{n_n, n_m}^{1, n_u} c_{p,m}^{\beta}(n_1, \dots, n_n) y(k-1)^p u(k-n_u)^m}, \quad (6.41)$$

sendo esta similar à equação (6.7). Aqui foram acrescentados os expoentes α e β nos coeficientes $c_{p,m}$ para indicar, respectivamente, coeficientes do numerador e do denominador. Ressalta-se que o grau de não-linearidade do polinômio do numerador é ℓ e do denominador $\ell - 1$. Esta diferença de grau dos polinômios foi justificada em (Mendes, 1995) no estudo dos pontos fixos dos modelo racionais e também será vista nas seções seguintes.

Neste desenvolvimento as equações (6.9) e (6.10) serão utilizadas. Essas equações são gerais e valem tanto para o caso polinomial quanto para o racional. Naturalmente, a diferença das representações será observada no cálculo dos elementos da matriz $\mathbf{D}_f$, que define os autovalores do modelo.

Chamando de f_a a função polinomial do numerador, e f_b a função polinomial do denominador da equação (6.41), o elemento da matriz $\mathbf{D}_f$ será dado em função do ponto de operação por

$$\lambda_{(\bar{y}, \bar{u})} = \frac{\partial y(k)}{\partial y(k-1)} \Big|_{(\bar{y}, \bar{u})} = \frac{\frac{\partial f_a}{\partial y(k-1)} \Big|_{(\bar{y}, \bar{u})} f_b(\bar{y}, \bar{u}) - f_a(\bar{y}, \bar{u}) \frac{\partial f_b}{\partial y(k-1)} \Big|_{(\bar{y}, \bar{u})}}{(f_b(\bar{y}, \bar{u}))^2}, \quad (6.42)$$

sendo que, a partir da equação (6.41), pode-se deduzir que

$$\frac{\partial f_a}{\partial y(k-1)} \Big|_{(\bar{y}, \bar{u})} = \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^{\ell-m} p c_{p,m}^{\alpha} \bar{y}^{(p-1)} \bar{u}^m, \quad (6.43)$$

$$\frac{\partial f_b}{\partial y(k-1)} \Big|_{(\bar{y}, \bar{u})} = \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^{\ell-m} p c_{p,m}^{\beta} \bar{y}^{(p-1)} \bar{u}^m, \quad (6.44)$$

$$f_a(\bar{y}, \bar{u}) = \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^{\ell-m} c_{p,m}^{\alpha} \bar{y}^p \bar{u}^m, \quad (6.45)$$

e

$$f_b(\bar{y}, \bar{u}) = \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^{\ell-m} c_{p,m}^{\beta} \bar{y}^p \bar{u}^m. \quad (6.46)$$

Note que, apesar das equações (6.43) a (6.46) serem individualmente simples e similares à equação (6.11), do modelo polinomial, a equação (6.42) é bastante complexa. Naturalmente se, $f_b(\bar{y}, \bar{u}) = 1$ então a equação (6.42) fica reduzida ao caso polinomial.

A seguir serão discutidas algumas propriedades dos modelos NARX racionais que podem ser obtidas a partir da equação (6.42). Estas propriedades serão apresentadas na forma de Lemas.

Lema 6.4. *Todos os termos que aparecem no denominador de um modelo NARX racional influenciam a posição dos autovalores do modelo.*

Prova: Na equação (6.42), que representa a função de autovalores do modelo, verifica-se que no denominador tem-se $(f_b(\bar{y}, \bar{u}))^2$. Então todos os termos que aparecem no denominador de (6.41) influenciaram na posição dos autovalores. $\square$

Lema 6.5. *Os sinais que influenciam a posição dos autovalores de um modelo NARX racional podem ser diretamente identificados no modelo se todos os coeficientes $c_{p,m}^{\beta} = 0$ para $p \neq 0$. Esta restrição significa que não existem termos em Ω_y no denominador da equação (6.41),*

Prova: Se em um modelo NARX racional todos os coeficientes $c_{p,m}^{\beta} = 0$ para $p \neq 0$, tem-se

$$\left. \frac{\partial f_b}{\partial y(k-1)} \right|_{(\bar{y}, \bar{u})} = 0. \quad (6.47)$$

Então, a partir da equação (6.42), pode-se demonstrar que

$$\lambda(\bar{y}, \bar{u}) = \frac{\left. \frac{\partial f_a}{\partial y(k-1)} \right|_{(\bar{y}, \bar{u})}}{f_b(\bar{y}, \bar{u})}, \quad (6.48)$$

ou

$$\lambda(\bar{y}, \bar{u}) = \frac{\sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^{\ell-m} p c_{p,m}^{\alpha} \bar{y}^{(p-1)} \bar{u}^m}{\sum_{m=0}^{\ell} c_{0,m}^{\beta} \bar{u}^m}, \quad (6.49)$$

de forma que, isolando os termos independentes no numerador e denominador, a função autovalor associado a cada ponto de operação do modelo racional será dada por

$$\lambda(\bar{y}, \bar{u}) = \frac{c_{1,0}^\alpha + \sum_{m=1}^{\ell} \sum_{p=1}^{\ell-m} p c_{p,m}^\alpha \bar{y}^{(p-1)} \bar{u}^m}{c_{0,0}^\beta + \sum_{m=1}^{\ell} c_{0,m}^\beta \bar{u}^m}. \quad (6.50)$$

Então pode ser observado que, se $c_{p,m}^\beta = 0$ para $p \neq 0$, os sinais que determinam a constante de tempo são: no numerador $\bar{y}^{(p-1)} \bar{u}^m$ para $p > 0$ e no denominador $\bar{u}^m$ para $m > 0$. Ou seja, os sinais que aparecem nos termos cruzados no numerador pertencente aos agrupamentos $\Omega_{y^p u^m}^\alpha$ com $p > 0$, termos do agrupamento $\Omega_{y^p}^\alpha$ e termos em u no denominador, dos agrupamentos $\Omega_{u^m}^\beta$. $\square$

Lema 6.6. Se além de $c_{m,p}^\beta = 0$ para $p \neq 0$ o modelo apresentar $c_{m,p}^\alpha = 0$ para $p > 1$, significando que o único termo em y que aparece no modelo é $y(k-1)$ no numerador, então os autovalores do modelo racional serão determinados em função dos termos em u no denominador.

Prova: Com $c_{m,p}^\beta = 0$ para $p \neq 0$, a equação (6.50) se resume a

$$\lambda(\bar{y}, \bar{u}) = \frac{c_{1,0}^\alpha}{c_{0,0}^\beta + \sum_{m=1}^{\ell} c_{0,m}^\beta \bar{u}^m}, \quad (6.51)$$

sendo que, como pode ser observado, aparecem apenas termos em Ω_{u^m} no denominador. $\square$

Todos os sinais que aparecem no denominador do modelo racional influenciam nos autovalores do modelo, e por conseguinte na função constante de tempo. Os lemas apresentados acima mostram que dificilmente um modelo racional terá constante de tempo fixa para qualquer ponto de operação, independente dos termos presentes na sua estrutura.

A partir dos Lemas 6.4 a 6.6 enunciados para modelos racionais que não possuem termos em y no denominador, pode-se deduzir que a função autovalor destes pode ser representada por

$$\lambda(\bar{x}_{\lambda_i}^{\alpha,\beta}) = \frac{\lambda_0^\alpha + \sum_{i=1}^{n_\lambda} \lambda_i^\alpha \bar{x}_{\lambda_i}^\alpha}{\lambda_0^\beta + \sum_{i=1}^{n_\lambda} \lambda_i^\beta \bar{x}_{\lambda_i}^\beta}, \quad (6.52)$$

sendo que λ_i^α e λ_i^β são coeficientes que dependem dos coeficientes de agrupamentos de termos no numerador e no denominador, respectivamente. $\bar{x}_{\lambda_i}^\alpha$ são sinais presentes no numerador que influenciam a função autovalor, neste caso, sinais que aparecem como fatores de $y(k-1)$. $\bar{x}_{\lambda_i}^\beta$, sinais que aparecem no denominador do modelo racional.

Utilizando o procedimento adotado para o modelo polinomial, a expressão constante de tempo do modelo será então

$$\tau(\bar{x}_{\tau_1}, \dots, \bar{x}_{\tau_{n_\tau}}) = - \frac{T_s}{\ln \left(\frac{\lambda_0^\alpha + \sum_{i=1}^{n_\lambda} \lambda_i^\alpha \bar{x}_{\tau_i}^\alpha}{\lambda_0^\beta + \sum_{i=1}^{n_\lambda} \lambda_i^\beta \bar{x}_{\tau_i}^\beta} \right)}. \quad (6.53)$$

Suponha-se agora que o denominador do modelo racional possua o $y(k-1)$. Para esta situação, tem-se que, na equação (6.44), $\partial f_b / \partial y(k-1) = \Sigma_y^\beta$. Então, a expressão para os autovalores do modelo, obtida a partir da equação (6.42) e das equações (6.43) a (6.46) será

$$\lambda(\bar{u}, \bar{y}) = \frac{\left(\sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^{\ell-m} p c_{p,m}^\alpha \bar{y}^{(p-1)} \bar{u}^m \right) \left(\sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^{\ell-m} c_{p,m}^\beta \bar{y}^p \bar{u}^m \right)}{\left(\sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^{\ell-m} c_{p,m}^\beta \bar{y}^p \bar{u}^m \right)^2} - \frac{\Sigma_y^\beta \left(\sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^{\ell-m} c_{p,m}^\alpha \bar{y}^p \bar{u}^m \right)}{\left(\sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^{\ell-m} c_{p,m}^\beta \bar{y}^p \bar{u}^m \right)^2}, \quad (6.54)$$

mostrando que, o aparecimento de termos em Ω_y no denominador dos modelo racionais aumenta significativamente a complexidade da função constante de

tempo do modelo. Esse fato pode significar que essa representação está mais apta para representar sistemas cuja constante de tempo varia como o ponto de operação. Note que todos os termos presentes no modelo aparecem na função de autovalor. Nessa função surgem combinações de sinais não explicitamente presentes no modelo. Essa observação permite enunciar o seguinte lema:

Lema 6.7. *Na função de autovalores de um modelo NARX racional de primeira ordem aparecem combinações de sinais que não estão presentes no modelo.*

Prova: *Apresentada através do exemplo a seguir.*

Exemplo 6.3. Considere-se um modelo racional de primeira ordem, com grau de não-linearidade $\ell = 2$, $n_u = 1$, com todos os termos possíveis, representado por

$$y(k) = \frac{\frac{c_{0,0}^\alpha + c_{1,0}^\alpha y(k-1) + c_{0,1}^\alpha u(k-1) + c_{1,1}^\alpha y(k-1)u(k-1)}{c_{0,0}^\beta + c_{1,0}^\beta y(k-1) + c_{0,1}^\beta u(k-1)} + \frac{c_{2,0}^\alpha y(k-1)^2 + c_{0,2}^\alpha u(k-1)^2}{c_{0,0}^\beta + c_{1,0}^\beta y(k-1) + c_{0,1}^\beta u(k-1)}. \quad (6.55)$$

Aplicando a equação (6.54) em (6.55), a função autovalor pode ser obtida como

$$\lambda(\bar{u}, \bar{y}) = \frac{(c_{1,0}^\alpha + c_{1,1}^\alpha \bar{u} + 2c_{2,0}^\alpha \bar{y})(c_{0,0}^\beta + c_{1,0}^\beta \bar{y} + c_{0,1}^\beta \bar{u})}{(c_{0,0}^\beta + c_{1,0}^\beta \bar{y} + c_{0,1}^\beta \bar{u})^2} - \frac{c_{1,0}^\beta (c_{0,0}^\alpha + c_{1,0}^\alpha \bar{y} + c_{0,1}^\alpha \bar{u} + c_{1,1}^\alpha \bar{y}\bar{u} + c_{2,0}^\alpha \bar{y}^2 + c_{0,2}^\alpha \bar{u}^2)}{(c_{0,0}^\beta + c_{1,0}^\beta \bar{y} + c_{0,1}^\beta \bar{u})^2} \quad (6.56)$$

ou ainda,

$$\lambda(\bar{u}, \bar{y}) = \frac{\lambda_0^\alpha + \lambda_y^\alpha \bar{y} + \lambda_{y^2}^\alpha \bar{y}^2 + \lambda_u^\alpha \bar{u} + \lambda_{u^2}^\alpha \bar{u}^2 + \lambda_{yu}^\alpha \bar{y}\bar{u}}{\lambda_0^\beta + \lambda_y^\beta \bar{y} + \lambda_{y^2}^\beta \bar{y}^2 + \lambda_u^\beta \bar{u} + \lambda_{u^2}^\beta \bar{u}^2 + \lambda_{yu}^\beta \bar{y}\bar{u}}, \quad (6.57)$$

sendo que $\lambda_{y,u}^{\alpha,\beta}$ são constantes obtidas a partir dos coeficientes do modelo, cujos valores são

$$\begin{aligned}
\lambda_0^\alpha &= \Sigma_y^\alpha \Sigma_0^\beta - \Sigma_0^\alpha \Sigma_y^\beta, \\
\lambda_y^\alpha &= 2\Sigma_{y^2}^\alpha \Sigma_0^\beta, \\
\lambda_{y^2}^\alpha &= 2\Sigma_{y^2}^\alpha \Sigma_y^\beta - \Sigma_{y^2}^\alpha \Sigma_y^\beta, \\
\lambda_{yu}^\alpha &= 2\Sigma_{y^2}^\alpha \Sigma_u^\beta, \\
\lambda_u^\alpha &= \Sigma_{yu}^\alpha + \Sigma_y^\alpha \Sigma_u^\beta - \Sigma_u^\alpha \Sigma_y^\beta, \\
\lambda_{u^2}^\alpha &= \Sigma_{yu}^\alpha \Sigma_u^\beta - \Sigma_{u^2}^\alpha \Sigma_y^\beta, \\
\lambda_0^\beta &= \Sigma_0^{\beta^2}, \\
\lambda_y^\beta &= 2\Sigma_0^\beta \Sigma_y^\beta, \\
\lambda_{y^2}^\beta &= \Sigma_y^{\beta^2}, \\
\lambda_{yu}^\beta &= 2\Sigma_y^\beta \Sigma_u^\beta, \\
\lambda_u^\beta &= 2\Sigma_0^\beta + \Sigma_u^\beta, \\
\lambda_{u^2}^\beta &= \Sigma_u^{\beta^2}.
\end{aligned} \tag{6.58}$$

Note-se que, na equação (6.57), aparecem no denominador termos cruzados $\bar{y}\bar{u}$, termos em $\bar{u}^2$ e $\bar{y}^2$, que não aparecem no denominador da equação (6.55). Então, a posição dos autovalores de um modelo racional pode depender de sinais, ou combinações de sinais, que não aparecem explicitamente no modelo original. $\square$

A partir da equação (6.57), a constante de tempo de um modelo NARMAX racional de segunda ordem, grau de não-linearidade $\ell = 2$, representado pela equação (6.55) será dada por

$$\tau(\lambda) = \frac{-T_s}{\ln \left(\frac{\lambda_0^\alpha + \lambda_1^\alpha \bar{y} + \lambda_2^\alpha \bar{y}^2 + \lambda_3^\alpha \bar{u} + \lambda_4^\alpha \bar{u}^2 + \lambda_5^\alpha \bar{y}\bar{u}}{\lambda_0^\beta + \lambda_1^\beta \bar{y} + \lambda_2^\beta \bar{y}^2 + \lambda_3^\beta \bar{u} + \lambda_4^\beta \bar{u}^2 + \lambda_5^\beta \bar{y}\bar{u}} \right)}, \tag{6.59}$$

O exemplo acima mostra o grande número de possibilidades que existe em um modelo NARX racional para representar sistemas com constante de tempo variável com o ponto de operação. Resultados apresentados no Capítulo 7 podem ser justificados por tal característica.

A partir da equação (6.59) pode-se demonstrar que a equação para constante de tempo de um modelo NARX racional pode ser escrita de uma forma geral dada por

$$\tau(\bar{x}_{\tau_1}^{\alpha,\beta}, \dots, \bar{x}_{\tau_{n_\tau}}^{\alpha,\beta}) = - \frac{T_s}{\ln \left(\frac{\lambda_0^\alpha + \sum_{i=1}^{n_\tau} \lambda_i^\alpha \bar{x}_{\tau_i}^\alpha}{\lambda_0^\beta + \sum_{i=1}^{n_\tau} \lambda_i^\beta \bar{x}_{\tau_i}^\beta} \right)}, \quad (6.60)$$

sendo $x_{\tau_i}^\alpha$ sinais que aparecem no numerador e, $x_{\tau_i}^\beta$ sinais que aparecem no denominador, ou combinação destes, do modelo NARX racional.

A Tabela 6.4 apresenta os sinais que influenciam na constante de tempo de modelos NARX racionais, de primeira ordem, que não possuem termos em y no denominador, em função dos agrupamentos de termos. Nesta, também são apresentados os coeficientes de termos da equação (6.60) em função dos coeficientes de agrupamentos.

Tabela 6.4: Sinais e coeficientes de termos que afetam a constante de tempo de modelos NARX racionais, sem termos em y no denominador e com $\ell = 3$, em função dos agrupamentos de termos.

Agrupamentos	$\hat{\tau}_i(\bar{x}_{\tau_i}^{\alpha,\beta})$					
	i	$\bar{x}_{\tau_i}^\alpha$	λ_i^α	i	$\bar{x}_{\tau_i}^\beta$	λ_i^β
Ω_y^α	0	-	Σ_y^α	-	-	-
$\Omega_{y^2}^\alpha$	1	$\bar{y}$	$2\Sigma_{y^2}^\alpha$	-	-	-
$\Omega_{y^3}^\alpha$	1	$\bar{y}^2$	$3\Sigma_{y^3}^\alpha$	-	-	-
Ω_u^α	-	-	-	-	-	-
$\Omega_{u^2}^\alpha$	-	-	-	-	-	-
$\Omega_{u^3}^\alpha$	-	-	-	-	-	-
Ω_{yu}^α	1	$\bar{u}$	Σ_{yu}^α	-	-	-
$\Omega_{y^2u}^\alpha$	1	$\bar{y}\bar{u}$	$2\Sigma_{y^2u}^\alpha$	-	-	-
$\Omega_{yu^2}^\alpha$	1	$\bar{u}^2$	$\Sigma_{yu^2}^\alpha$	-	-	-
Ω_u^β	-	-	-	1	$\bar{u}$	Σ_u^β
$\Omega_{u^2}^\beta$	-	-	-	1	$\bar{u}^2$	$\Sigma_{u^2}^\beta$

A existência de termos do agrupamento Ω_y^β nos modelos NARX racionais aumenta significativamente o número de sinais que afetam a constante de tempo do modelo. A Tabela 6.5 exemplifica este aumento. Esta é similar à Tabela 6.4, porém nesta são considerados modelos que possuem termos com $y(k-1)$ no denominador, que são termos dos agrupamentos Ω_y^β , $\Omega_{y^2}^\beta$ e Ω_{yu}^β . Os agrupamentos de termos que aparecem na primeira coluna desta tabela

se referem a agrupamentos nos modelos além de Ω_y^β , $\Omega_{y^2}^\beta$ e Ω_{yu}^β . É analisado apenas o efeito de dois agrupamentos de termos no numerador.

Pode ser observado na primeira linha da Tabela 6.5 que um modelo NARX racional de primeira ordem, com agrupamento de termos Ω_y^β , $\Omega_{y^2}^\beta$ e Ω_{yu}^β , além do termo constante no numerador, terá seis sinais diferentes na função constante de tempo. Note-se que, no modelo não aparecem termos com y^2u^2 , porém estes estão presentes na função constante de tempo.

Tabela 6.5: Sinais e coeficientes de termos que afetam a constante de tempo de modelos NARX racionais, com termos em y no denominador e com $\ell = 3$, em função dos agrupamentos de termos.

Agrupamentos além de Ω_y^β , $\Omega_{y^2}^\beta$ e Ω_{yu}^β	$\hat{\tau}_i(\bar{x}_{\tau_i}^{\alpha,\beta})$					
	i	$\bar{x}_{\tau_i}^\alpha$	λ_i^α	i	$\bar{x}_{\tau_i}^\beta$	λ_i^β
Ω_0^α	0	-	Σ_y^β	-	-	-
	1	$\bar{y}$	$2\Sigma_{y^2}^\beta$	-	-	-
	2	$\bar{u}$	Σ_{yu}^β	-	-	-
	-	-	-	1	$\bar{y}^2$	$(\Sigma_y^\beta)^2$
	-	-	-	2	$\bar{y}^3$	$2\Sigma_y^\beta \Sigma_{y^2}^\beta$
	-	-	-	3	$\bar{y}^4$	$(\Sigma_{y^2}^\beta)^2$
	-	-	-	4	$\bar{y}^2\bar{u}$	$2\Sigma_y^\beta \Sigma_{yu}^\beta$
	-	-	-	5	$\bar{y}^3\bar{u}$	$2\Sigma_{y^2}^\beta \Sigma_{yu}^\beta$
	-	-	-	6	$\bar{y}^2\bar{u}^2$	$(\Sigma_{yu}^\beta)^2$
Ω_y^α	1	$\bar{y}$	$2\Sigma_y^\alpha \Sigma_y^\beta$	-	-	-
	2	$\bar{y}^2$	$3\Sigma_y^\alpha \Sigma_{y^2}^\beta$	-	-	-
	3	$\bar{y}\bar{u}$	$2\Sigma_y^\alpha \Sigma_{yu}^\beta$	-	-	-
	-	-	-	1	$\bar{y}^2$	$(\Sigma_y^\beta)^2$
	-	-	-	2	$\bar{y}^3$	$2\Sigma_y^\beta \Sigma_{y^2}^\beta$
	-	-	-	3	$\bar{y}^4$	$(\Sigma_{y^2}^\beta)^2$
	-	-	-	4	$\bar{y}^2\bar{u}$	$2\Sigma_y^\beta \Sigma_{yu}^\beta$
	-	-	-	5	$\bar{y}^3\bar{u}$	$2\Sigma_{y^2}^\beta \Sigma_{yu}^\beta$
	-	-	-	6	$\bar{y}^2\bar{u}^2$	$(\Sigma_{yu}^\beta)^2$

6.3.2 Constante de Tempo de Modelos de Ordem Superior

O desenvolvimento apresentado para o caso de primeira ordem permite identificar a influência de cada agrupamento de termos na posição dos autovalores do modelo, o que é suficiente para os propósitos deste trabalho. Portanto, não

se pretende aqui deduzir uma expressão geral para a constante de tempo de modelos NARX racionais de ordem superior. Assim como para o caso polinomial, esta expressão não é analítica e sua solução é numérica. Nesta seção, será deduzida apenas a expressão que determina os coeficientes da equação característica do modelo.

Conforme apresentado para o caso polinomial, uma vez linearizado o modelo a partir da equação (6.26), com a matriz jacobiana calculada por (6.27) e (6.29), a equação característica do modelo será dada por (6.31). A partir das raízes desta equação característica, os autovalores do modelo são determinados.

Utilizando o procedimento apresentado para os modelos racionais de primeira ordem, pode-se demonstrar que a equação da função de $\Delta_d(\bar{u}, \bar{y})$, para o caso racional, é dada por

$$\Delta_d(\bar{u}, \bar{y}) = \frac{\left(\Sigma_{y_d}^\alpha + \sum_{p=2}^{\ell} p \Sigma_{y_d^p}^\alpha \bar{y}^{p-1} + \sum_{m=1}^{\ell} \sum_{p=1}^{\ell-m} p \Sigma_{y_d^p u^m}^\alpha \bar{y}^{p-1} \bar{u}^m \right) \left(\sum_{m=0}^{\ell-1} \sum_{p=0}^{\ell-m-1} \Sigma_{y^p u^m}^\beta \bar{y}^p \bar{u}^m \right)}{\left(\sum_{m=0}^{\ell-1} \sum_{p=0}^{\ell-m-1} \Sigma_{y^p u^m}^\beta \bar{y}^p \bar{u}^m \right)^2} - \frac{\left(\sum_{m=0}^{\ell-1} \sum_{p=0}^{\ell-m-1} \Sigma_{y^p u^m}^\alpha \bar{y}^p \bar{u}^m \right) \left(\Sigma_{y_d}^\beta + \sum_{p=2}^{\ell} p \Sigma_{y_d^p}^\beta \bar{y}^{p-1} + \sum_{m=1}^{\ell} \sum_{p=1}^{\ell-m} p \Sigma_{y_d^p u^m}^\beta \bar{y}^{p-1} \bar{u}^m \right)}{\left(\sum_{m=0}^{\ell-1} \sum_{p=0}^{\ell-m-1} \Sigma_{y^p u^m}^\beta \bar{y}^p \bar{u}^m \right)^2}. \quad (6.61)$$

A equação apresentada acima, como mostrado para o caso polinomial, determina os coeficientes da equação característica (6.31). A partir desta é possível determinar tanto a estabilidade quanto a constante de tempo associada ao modelo. Apesar de sua complexidade, na prática a determinação da equação (6.61) é relativamente simples. Esta simplicidade se deve ao fato de os modelos racionais geralmente possuírem menor número de termos que os polinomiais. Outro fator que facilita determinar a equação acima é sua expressão em função dos coeficientes de agrupamentos, o que torna possível o desenvolvimento de algoritmos para este fim.

Não será aqui apresentada nenhuma discussão a respeito da equação apresentada acima. Os Lemas apresentados para o caso de primeira ordem são suficientes para o propósito deste trabalho.

6.3.3 Ganho em Estado Estacionário

Assim como para o caso polinomial, será mostrado que a não-linearidade estática em um modelo NARX racional pode ser escrita de uma forma geral como

$$K_s(\bar{x}_{K_1}, \dots, \bar{x}_{K_{n_K}}) = f \left(K_0 + \sum_{i=1}^{n_K} K_i \bar{x}_{K_i} \right), \quad (6.62)$$

sendo K_i , $i = 0, \dots, n_K$ constantes; x_{K_i} , $i = 1, \dots, n_K$ sinais dos quais a variável ganho estático $K_s(x_K)$ depende. Será visto que x_{K_i} poderá ou não ser igual a x_{τ_i} .

Considere um modelo NARX racional escrito na forma da razão de dois polinômios como na equação (6.41). Note-se que, se modelo NARX racional possui grau de não-linearidade ℓ , então no numerador temos grau ℓ e/ou no denominador grau $(\ell - 1)$. Considerando o modelo em estado estacionário e utilizando os conceitos de agrupamentos de termos, a equação (6.41) pode ser escrita como

$$\bar{y} = \frac{\Sigma_0^\alpha + \Sigma_y^\alpha \bar{y} + \Sigma_u^\alpha \bar{u} + \sum_{m=1}^{\ell-1} \sum_{p=1}^{\ell-m} \Sigma_{y^p u^m}^\alpha \bar{y}^p \bar{u}^m + \sum_{p=2}^{\ell} \Sigma_{y^p}^\alpha \bar{y}^p + \sum_{m=2}^{\ell} \Sigma_{u^m}^\alpha \bar{u}^m}{\Sigma_0^\beta + \Sigma_y^\beta \bar{y} + \Sigma_u^\beta \bar{u} + \sum_{m=1}^{\ell-2} \sum_{p=1}^{\ell-m-1} \Sigma_{y^p u^m}^\beta \bar{y}^p \bar{u}^m + \sum_{p=2}^{\ell-1} \Sigma_{y^p}^\beta \bar{y}^p + \sum_{m=2}^{\ell-1} \Sigma_{u^m}^\beta \bar{u}^m} \quad (6.63)$$

sendo que tanto no numerador quanto no denominador os termos foram separados em constantes, agrupamento de termos lineares Ω_y e Ω_u , agrupamento de termos não-lineares em Ω_{y^p} e Ω_{u^m} e agrupamento de termos cruzados $\Omega_{y^p u^m}$. Multiplicando ambos os membros da equação (6.63) pelo polinômio do denominador vem

$$\begin{aligned} & \Sigma_0^\beta \bar{y} + \Sigma_y^\beta \bar{y}^2 + \Sigma_u^\beta \bar{u} \bar{y} + \sum_{m=1}^{\ell-2} \sum_{p=1}^{\ell-m-1} \Sigma_{y^p u^m}^\beta \bar{y}^{p+1} \bar{u}^m + \sum_{p=2}^{\ell-1} \Sigma_{y^p}^\beta \bar{y}^{p+1} + \sum_{m=2}^{\ell-1} \Sigma_{u^m}^\beta \bar{u}^m \bar{y} \\ &= \Sigma_0^\alpha + \Sigma_y^\alpha \bar{y} + \Sigma_u^\alpha \bar{u} + \sum_{m=1}^{\ell-1} \sum_{p=1}^{\ell-m} \Sigma_{y^p u^m}^\alpha \bar{y}^p \bar{u}^m + \sum_{p=2}^{\ell} \Sigma_{y^p}^\alpha \bar{y}^p + \sum_{m=2}^{\ell} \Sigma_{u^m}^\alpha \bar{u}^m, \end{aligned} \quad (6.64)$$

ou ainda, rearrumando os termos do primeiro membro da equação (6.64) de forma a agrupar termos cruzados e termos em y^i com $i > 1$ vem

$$\begin{aligned} & \Sigma_0^\beta \bar{y} + \sum_{m=1}^{\ell-2} \sum_{p=0}^{\ell-m-1} \Sigma_{y^p u^m}^\beta \bar{y}^{p+1} \bar{u}^m + \sum_{p=1}^{\ell-1} \Sigma_{y^p}^\beta \bar{y}^{p+1} = \\ & \Sigma_0^\alpha + \Sigma_y^\alpha \bar{y} + \Sigma_u^\alpha \bar{u} + \sum_{m=1}^{\ell-1} \sum_{p=1}^{\ell-m} \Sigma_{y^p u^m}^\alpha \bar{y}^p \bar{u}^m + \sum_{p=2}^{\ell} \Sigma_{y^p}^\alpha \bar{y}^p + \sum_{m=2}^{\ell} \Sigma_{u^m}^\alpha \bar{u}^m, \end{aligned} \quad (6.65)$$

note-se que os coeficientes de agrupamentos de termos $\Sigma_{y^p u^m}^\beta$ aparecem na equação (6.65) como coeficientes de termos $y^{p+1} u^m$, ou seja, em estado estacionário um termo em y de grau p no denominador, terá efeito de grau $p+1$. Portanto o grau do denominador será sempre, pelo menos uma unidade a menos do que o grau de não-linearidade do modelo, conforme citado no início desta seção. Demonstração semelhante a esta pode também ser vista em (Mendes, 1995), no desenvolvimento da expressão para pontos fixos de modelo NARX racionais autônomos.

A partir da equação (6.65), pode-se obter a equação do ganho estático $K_s(\bar{y}, \bar{u}) = \bar{y}/\bar{u}$ como

$$\begin{aligned} \hat{K}_s(\bar{y}, \bar{u}) = & \frac{\Sigma_0^\alpha / \bar{u} + \Sigma_u^\alpha + \sum_{m=2}^{\ell} \Sigma_{u^m}^\alpha \bar{u}^{m-1}}{\left(\Sigma_0^\beta - \Sigma_y^\alpha \right) + \sum_{m=1}^{\ell-2} \sum_{p=0}^{\ell-m-1} \left(\Sigma_{y^p u^m}^\beta - \Sigma_{y^{p+1} u^m}^\alpha \right) \bar{y}^p \bar{u}^m + \sum_{p=1}^{\ell-1} \left(\Sigma_{y^p}^\beta - \Sigma_{y^{p+1}}^\alpha \right) \bar{y}^p}, \end{aligned} \quad (6.66)$$

sendo que pode-se observar na equação acima que: (i) seu numerador é igual ao numerador da equação (6.35) do modelo polinomial; (ii) os coeficientes dos termos y^p que aparecem no denominador do modelo racional são agrupados com os coeficientes dos termos y^{p+1} que aparecem no numerador. Como exemplo, pode-se observar que no último somatório apresentado no denominador tem-se $\Sigma_{y^p}^\beta - \Sigma_{y^{p+1}}^\alpha$. Este fato mostra que, o agrupamento de termos $\omega_{y^3}^\alpha$ do modelo racional tem, na equação de ganho estático, o mesmo efeito do agrupamento de termos $\Omega_{y^2}^\beta$. Aplicações desta propriedade serão apresentadas no Capítulo 8.

Outro fato em comum com relação às equações (6.35) e (6.66) são os termos que aparecem no denominador. Pode-se observar que os termos são iguais para

ambas as equações, com diferenças apenas nos coeficientes. Dessa forma, tal como para o modelo NARX polinomial, a equação de ganho estacionário pode ser escrita como

$$\hat{K}_s(\bar{x}_{\tau_i}, \bar{x}_{K_i}) = \frac{\Sigma_0/\bar{u} + \Sigma_u + \sum_{i=1}^{n_K} \Sigma_{x_{K_i}u} \bar{x}_{K_i}}{\Sigma_0^\beta - \Sigma_y - \sum_{i=1}^{n_\tau} \Sigma_{yx_{\tau_i}} \bar{x}_{\tau_i}} . \quad (6.67)$$

Sendo que, neste caso, x_K são sinais que necessariamente influenciam no ganho do modelo, porém podem ou não estar presentes na função constante de tempo, enquanto que x_τ necessariamente aparece na função constante de tempo. Ressalta-se que, para o caso de modelos racionais, um sinal pode afetar a constante de tempo e não aparecer na equação de ganho, porém todo sinal $\bar{x}_{\tau_i}$ que aparecer na função ganho estático aparecerá na constante de tempo.

A equação (6.67) pode ser reescrita na forma geral da equação (6.62), como

$$\hat{K}_s(\bar{x}_{\tau_i}, \bar{x}_{K_i}) = \frac{c_0/\bar{u} + K_0 + \sum_{i=1}^{n_K} K_i \bar{x}_{K_i}}{\Sigma_0^\beta - \lambda_0 - \sum_{i=1}^{n_\tau} \lambda_i \bar{x}_{\tau_i}} . \quad (6.68)$$

A Tabela 6.6 apresenta, para um modelo de ordem d , e grau de não-linearidade $\ell = 3$ os sinais $\bar{x}_{K_i}$ e $\bar{x}_{\tau_i}$ em função de cada agrupamento de termos, além dos coeficientes K_i e λ_i . Assim como para o caso polinomial, aqui não se preocupou em utilizar os conceitos de agrupamentos- d , pois para o ganho em estado estacionário a igualdade $y(k) = y(k-1) = y(k-2) = \dots = y(k-n_y) = \bar{y}$ pode ser utilizada.

6.3.4 Função Estática

Uma vez determinada a função ganho, a função estática que relaciona $\bar{y} = f(\bar{y}, \bar{u})$ poderá ser determinada como $\bar{y} = \hat{K}_s \bar{u}$. Assim como para o caso polinomial, esta não possui, pelo menos para o caso mais geral, uma relação explícita.

A partir da equação (6.66) a saída estacionária do modelo NARX racional pode ser determinada pelas raízes do seguinte polinômio:

Tabela 6.6: Sinais e coeficientes de termos que afetam os coeficientes da função ganho de modelos NARX racionais, com $\ell = 3$, em função dos agrupamentos de termos.

Agrupamentos	$\hat{K}_s(\bar{x}_{K_i}, \bar{x}_{\tau_i})$					
	i	$\bar{x}_{K_i}$	K_i	i	$\bar{x}_{\tau_i}$	λ_i
Ω_y^α	-	-	-	0	-	$-\Sigma_y^\alpha$
Ω_u^α	0	-	Σ_u^α	-	-	-
Ω_{yu}^α	-	-	-	1	$\bar{u}$	$-\Sigma_{yu}^\alpha$
$\Omega_{y^2u}^\alpha$	-	-	-	1	$\bar{y}\bar{u}$	$-\Sigma_{y^2u}^\alpha$
$\Omega_{yu^2}^\alpha$	-	-	-	1	$\bar{u}^2$	$-\Sigma_{yu^2}^\alpha$
$\Omega_{u^2}^\alpha$	1	$\bar{u}$	$\Sigma_{u^2}^\alpha$	-	-	-
$\Omega_{u^3}^\alpha$	1	$\bar{u}^2$	$\Sigma_{u^3}^\alpha$	-	-	-
$\Omega_{y^2}^\alpha$	-	-	-	1	$\bar{y}$	$-\Sigma_{y^2}^\alpha$
$\Omega_{y^3}^\alpha$	-	-	-	1	$\bar{y}^2$	$-\Sigma_{y^3}^\alpha$
Ω_y^β	-	-	-	1	$\bar{y}$	Σ_y^β
$\Omega_{y^2}^\beta$	-	-	-	1	$\bar{y}^2$	$\Sigma_{y^2}^\beta$
Ω_u^β	-	-	-	1	$\bar{u}$	Σ_u^β
$\Omega_{u^2}^\beta$	-	-	-	1	$\bar{u}^2$	$\Sigma_{u^2}^\beta$
Ω_{yu}^β	-	-	-	1	$\bar{y}\bar{u}$	Σ_{yu}^β

$$\begin{aligned}
& \left(\Sigma_{y^{\ell-1}}^\beta - \Sigma_{y^\ell}^\alpha \right) \bar{y}^\ell + \left(\sum_{i=0}^{i=1} \Sigma_{y^{\ell-2}u^i}^\beta \bar{u}^i - \sum_{i=0}^{i=1} \Sigma_{y^{\ell-1}u^i}^\alpha \bar{u}^i \right) \bar{y}^{\ell-1} + \dots + \\
& \left(\sum_{i=0}^{i=\ell-2} \Sigma_{yu^i}^\beta \bar{u}^i - \sum_{i=0}^{i=\ell-2} \Sigma_{y^2u^i}^\alpha \bar{u}^i \right) \bar{y}^2 + \left(\Sigma_0^\beta + \sum_{i=1}^{i=\ell-1} \Sigma_{u^i}^\beta \bar{u}^i - \sum_{i=0}^{i=\ell-1} \Sigma_{yu^i}^\alpha \bar{u}^i \right) \bar{y} - \\
& \sum_{i=0}^{i=\ell} \Sigma_{u^i}^\alpha \bar{u}^i = 0.
\end{aligned} \tag{6.69}$$

6.3.5 Simetria de Pontos Fixos

O estudo aqui apresentado parte do princípio de que a simetria de vários sistemas físicos deve ser considerada na obtenção de modelos matemáticos (Le Sceller et al., 1994). Neste contexto, considerar-se-ão as condições necessárias para que modelos NARMAX racionais possuam pontos fixos

simétricos. O estudo da simetria de pontos fixos em modelo NARMAX polinomiais foi inicialmente apresentado em (Aguirre e Mendes, 1996) e será reproduzido a seguir.

Pontos fixos simétricos são aqueles equidistantes da origem do sistema de coordenadas considerado. Quando um modelo é estimado a partir de dados que são obtidos através de medições, os pontos fixos serão reais, em princípio (Aguirre e Mendes, 1996).

A partir da equação (6.5), Aguirre e Mendes (1996) desenvolveram a relação entre agrupamento de termos, grau de não-linearidade do modelo, com a existência de pontos fixos triviais simétricos. Esta relação é apresentada na primeira parte da Tabela 6.7. Nesta foi acrescentado o índice α , pois o modelo é polinomial.

Para estender a análise a modelos racionais, será tomada como base a equação (6.69), porém considerando que todos os coeficientes de agrupamentos contendo termos em u são nulos. Esta consideração se baseia no fato de o modelo ser autônomo, possuindo apenas termos em y . A partir desta consideração, os pontos fixos de um modelo NAR racional podem ser determinados por (Mendes e Billings, 2000):

$$\begin{aligned} & \left(\Sigma_{y^{\ell-1}}^{\beta} - \Sigma_{y^{\ell}}^{\alpha} \right) \bar{y}^{\ell} + \left(\Sigma_{y^{\ell-2}}^{\beta} - \Sigma_{y^{\ell-1}}^{\alpha} \right) \bar{y}^{\ell-1} + \dots + \\ & \left(\Sigma_y^{\beta} - \Sigma_{y^2}^{\alpha} \right) \bar{y}^2 + \left(\Sigma_0^{\beta} - \Sigma_y^{\alpha} \right) \bar{y} - \Sigma_0^{\alpha} = 0, \end{aligned} \quad (6.70)$$

então, por analogia ao procedimento apresentado em (Aguirre e Mendes, 1996) pode-se determinar quais agrupamentos de termos devem estar presentes para que modelos NAR racionais possuam pontos fixos não triviais simétricos. A Tabela 6.7, cuja primeira parte é reproduzida de (Aguirre e Mendes, 1996), apresenta uma relação entre os agrupamentos de termos de um modelo NAR racional e o número de pontos fixos triviais em função do grau ℓ do modelo, para que este possua pontos fixos não-triviais simétricos.

As tabelas apresentadas até aqui serão usadas na seção seguinte. Nesta, serão propostos procedimentos para serem usados durante problemas práticos de identificação, principalmente utilizando informação *a priori* do sistema a ser identificado.

6.4 Uso de Informação a *Priori* na Seleção de Estrutura

Nesta seção é apresentado um procedimento para utilização de informação *a priori* na seleção de estrutura de modelos NARX racionais e polinomiais.

Tabela 6.7: Agrupamento de termos de modelos NAR racional dos quais devem ser escolhidos os termos de um modelo para que este apresente pontos fixos não-triviais simétricos e pontos triviais na quantidade indicada na segunda coluna. A primeira parte se refere a um modelo polinomial (Aguirre e Mendes, 1996). A segunda se refere a um modelo racional (Mendes e Billings, 2000).

ℓ	Nº de pontos fixos triviais	Agrupamentos
1	1	Ω_y^α
2	0	$\Omega_{y^2}^\alpha, \Omega_0^\alpha$
3	1	$\Omega_{y^3}^\alpha, \Omega_y^\alpha$
4	0	$\Omega_{y^4}^\alpha, \Omega_{y^2}^\alpha, \Omega_0^\alpha$
4	2	$\Omega_{y^4}^\alpha, \Omega_{y^2}^\alpha$
5	1	$\Omega_{y^5}^\alpha, \Omega_{y^3}^\alpha, \Omega_y^\alpha$
5	3	$\Omega_{y^5}^\alpha, \Omega_3^\alpha$
6	0	$\Omega_{y^6}^\alpha, \Omega_{y^4}^\alpha, \Omega_{y^2}^\alpha, \Omega_0^\alpha$
6	2	$\Omega_{y^6}^\alpha, \Omega_{y^4}^\alpha, \Omega_{y^2}^\alpha$
6	4	$\Omega_{y^6}^\alpha, \Omega_{y^4}^\alpha$
2	0	$\Omega_{y^2}^\alpha, \Omega_y^\beta, \Omega_0^\alpha$
3	1	$\Omega_{y^3}^\alpha, \Omega_{y^2}^\beta, \Omega_y^\alpha$
4	0	$\Omega_{y^4}^\alpha, \Omega_{y^3}^\beta, \Omega_{y^2}^\alpha, \Omega_y^\beta, \Omega_0^\alpha$
4	2	$\Omega_{y^4}^\alpha, \Omega_{y^3}^\beta, \Omega_{y^2}^\alpha, \Omega_y^\beta$
5	1	$\Omega_{y^5}^\alpha, \Omega_{y^4}^\beta, \Omega_{y^3}^\alpha, \Omega_{y^2}^\beta, \Omega_y^\alpha$
5	3	$\Omega_{y^5}^\alpha, \Omega_{y^4}^\beta, \Omega_3^\alpha, \Omega_2^\beta$
6	0	$\Omega_{y^6}^\alpha, \Omega_{y^5}^\beta, \Omega_{y^4}^\alpha, \Omega_{y^3}^\beta, \Omega_{y^2}^\alpha, \Omega_y^\beta, \Omega_0^\alpha$
6	2	$\Omega_{y^6}^\alpha, \Omega_{y^5}^\beta, \Omega_{y^4}^\alpha, \Omega_{y^3}^\beta, \Omega_{y^2}^\alpha, \Omega_y^\beta$
6	4	$\Omega_{y^6}^\alpha, \Omega_{y^5}^\beta, \Omega_{y^4}^\alpha, \Omega_{y^3}^\beta$

Conforme apresentado no Capítulo 5, alguns resultados sobre a utilização de informação *a priori* na seleção de estrutura de modelos NARX polinomiais pode ser visto em (Aguirre e Jácome, 1998; Aguirre et al., 1999b). Por outro lado, é necessário formalizar procedimentos para incorporar informação *a priori*. Esta seção é um passo nesta direção.

O procedimento que será apresentado baseia-se nos conceitos de agrupamentos de termos de modelos NARX racionais e polinomiais e da influência de cada um destes nas características dos modelos. O objetivo é restringir o espaço de busca da seleção de estrutura a determinados agrupamentos de termos, baseando-se em algumas características que se deseja que o modelo identificado tenha. Isto é possível em função do estudo apresentado a respeito da influência dos agrupamentos nas características estáticas do modelo.

O procedimento para incorporar informação *a priori* na seleção de estrutura de modelos NARX racionais ou polinomiais está sintetizado no Algoritmo 6.2.

Algoritmo 6.2. Utilização de informação *a priori* na seleção de estrutura de modelos NARMAX racionais e polinomiais.

- 1: Reunir informações *a priori* a respeito do sistema a ser identificado. Estas informações *a priori* podem ser: (i) informações de ganho em estado estacionário, (ii) número de estados estacionários na saída do sistema e, (iii) características qualitativas a respeito do comportamento dinâmico do sistema, tais como variação ou não da constante de tempo com o ponto de operação.
- 2: **SE** o número de estados estacionários da saída for conhecido, **ENTÃO**
- 3: atribuir a n o número de estados estacionários da saída
- 4: **SE** Modelo Polinomial, **ENTÃO**
- 5: excluir do conjunto de termos candidatos os agrupamentos Ω_{yp} para $p > n$.
- 6: **SE NÃO**
- 7: exclua do conjunto de termos candidatos os agrupamentos Ω_{yp}^α para $p > n$ e Ω_{yp}^β para $p > n - 1$.
- 8: **FIM SE**
- 9: **FIM SE**
- 10: **SE** a constante de tempo do sistema variar com o ponto de operação, ou o sistema for bilinear **ENTÃO**
- 11: selecionar preferencialmente a representação racional.
- 12: **SE** a representação for polinomial, **ENTÃO**
- 13: selecionar agrupamentos com termos $\Omega_{y^p u^m}$ com $p \neq 0$ e $m \neq 0$.
- 14: **SE NÃO**
- 15: Selecionar para o denominador apenas agrupamentos de termos Ω_u^β com $m > 0$, excluindo os termos cruzados.

- 16: **SE** não obtiver resultados satisfatórios, ou seja, o modelo não representar a dinâmica observada nos dados, **ENTÃO**
- 17: incorporar termos cruzados no denominador.
- 18: **FIM SE**
- 19: **FIM SE**
- 20: **FIM SE**
- 21: **SE** Dados de entrada e saída em estado estacionário estiverem disponíveis, **ENTÃO**
- 22: fazer um ajuste de curva polinomial, determinando o menor grau do polinômio que melhor se ajusta aos dados.
- 23: atribuir este grau à variável m
- 24: **SE** modelo polinomial, **ENTÃO**
- 25: selecionar os agrupamentos de termos com $\Omega_{u^m, m-1, \dots, 1}$ para o conjunto de termos candidatos
- 26: **SE NÃO**
- 27: selecionar os agrupamentos de termos $\Omega_{u^m, m-1, \dots, 1}^\alpha$ e $\Omega_{u^m, m-1, \dots, 1}^\beta$ para o conjunto de termos candidatos
- 28: **FIM SE**
- 29: **FIM SE**
- 30: **SE** Na identificação de um sistema autônomo o número de pontos fixos triviais e número de pontos fixos simétricos for conhecido, **ENTÃO**
- 31: os agrupamentos de termos candidatos ao modelo devem ser escolhidos conforme Tabela 6.7.
- 32: **FIM SE**

Informação de ganho estático ou relação em estado estacionário, em muitos processos reais, podem já estar disponíveis no processo. Informações qualitativas dizem respeito ao conhecimento de especialistas do sistema. Tais informações podem ser: se a constante de tempo do sistema varia ou não; se, dependendo do ponto de operação, o comportamento dinâmico do sistema muda significativamente.

Mudança no comportamento dinâmico do sistema pode significar que seus autovalores passam de reais para complexos conjugados. Este fato pode ser observado na resposta ao degrau do sistema em vários pontos de operação. Outra informação diz respeito ao número de estados estacionários na saída do sistema para uma determinada entrada. Como será visto no Capítulo 8, vários sistemas, principalmente químicos, possuem multiplicidade de estados estacionários (Hernández e Arkun, 1993; Pottmann e Pearson, 1998).

Com relação à eficiência do método citado, pode-se recorrer a várias aplicações que se encontram na literatura. Conforme citado anteriormente, o procedimento não é novo e já foi testado em diferentes processos. Entre estes destaca-se a seleção de estrutura na modelagem do circuito de Chua (Aguirre

et al., 1997). Neste sistema os termos candidatos foram selecionados para garantir a simetria de pontos fixos não triviais. Outra aplicação está na modelagem do conversor Buck (Aguirre et al., 2000b) e em um processo térmico (Aguirre et al., 1999b).

6.5 Uso de Informação a *Priori* para Estimar Parâmetros de Modelos NARX Racionais e Polinomiais

Nesta seção, as equações desenvolvidas nas seções 6.2 e 6.3 serão aplicadas na estimação de parâmetros de modelos NARX racionais e polinomiais. O objetivo será garantir que o modelo estimado tenha características em estado estacionário mais próximas do sistema real.

O principal problema que se pretende atacar ocorre quando estão disponíveis dados de entrada e saída, dinâmicos e estáticos de um determinado sistema. O problema a ser resolvido é garantir que um modelo obtido a partir de dados dinâmicos tenha as características estáticas do sistema, mesmo quando os dados dinâmicos se encontram em uma faixa de operação mais estreita que os dados estáticos.

Note-se que esta é uma situação bastante comum. Realizar testes em estados estacionários, ou mesmo ter estas informações a *priori*, em diversos pontos de operação é muito mais fácil do que ter dados dinâmicos que excursionem o sistema em uma ampla faixa de operação (Johansen, 1996; Aguirre et al., 2000b). A solução proposta para este problema é também aplicada para garantir que o sistema possua pontos fixos previamente determinados.

O procedimento é apresentado através do Algoritmo 6.3.

Algoritmo 6.3. Utilização de informação a *priori* na estimação de parâmetros

- 1: A partir da informação a *priori* disponível, selecione os termos candidatos através do procedimento apresentado na seção 6.4
- 2: Selecione a estrutura através do algoritmo ERR.
- 3: **SE** a estrutura do modelo indicar apenas um único estado estacionário na saída, **ENTÃO**
- 4: a partir da estrutura selecionada, escreva a função que relaciona $\bar{y} = f(\bar{u})$ conforme equação (6.39). Neste caso $\bar{y} = f(\bar{u})$ será expressa como um polinômio em $\bar{u}$ na forma

$$\bar{y} = a_0 + a_1\bar{u} + a_2\bar{u}^2 + \dots + a_\ell\bar{u}^\ell, \quad (6.71)$$

sendo $a_{0,1,2,\dots,\ell}$ constantes que podem ser expressas como função dos coeficientes de agrupamentos.

- 5: Estime os coeficientes $a_{0,1,2,\dots,\ell}$ da equação (6.71) a partir dos dados estáticos usando ajuste de curva polinomial, ou qualquer método de otimização.
- 6: Escreva as equações que relacionam os coeficientes de agrupamentos de termos em função dos coeficientes da equação (6.71), utilizando a equação (6.39). Estas equações serão da forma

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma_0}{1-\Sigma_y} &= a_0 \\ \frac{\Sigma_u}{1-\Sigma_y} &= a_1 \\ \frac{\Sigma_u^2}{1-\Sigma_y} &= a_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (6.72)$$

- 7: Tome as equações acima como restrições na estimação de parâmetros.
- 8: **SE NÃO SE** a estrutura do modelo indicar múltiplos estados estacionários na saída, **ENTÃO**
- 9: escreva a equação polinomial que determina os estados estacionários da saída conforme equação (6.40), para o caso polinomial, e (6.69) para o caso racional. Neste caso, tem-se uma equação na forma

$$\bar{y} = a_\ell \bar{y}^\ell + f_{\ell-1}(\bar{u}) \bar{y}^{\ell-1} + \dots + f_2(\bar{u}) \bar{y}^2 + f_1(\bar{u}) \bar{y} + f_0(\bar{u}), \quad (6.73)$$

sendo a_ℓ constante que depende dos coeficientes de agrupamentos. $f_{\ell-1,\ell-2,\dots,1,0}$ funções polinomiais em $\bar{u}$, cujos coeficientes dependem dos coeficientes de agrupamento de termos.

- 10: Considerando que pelo menos para uma entrada estacionária, $\bar{u}_c$, as saídas em estado estacionário, $\bar{y}_c$, são conhecidas, substitua na equação (6.73) o valor de $\bar{u}_c$. Neste caso a equação (6.73) fica reduzida a

$$\bar{y} = a_\ell \bar{y}^\ell + \alpha_{\ell-1} \bar{y}^{\ell-1} + \dots + \alpha_2 \bar{y}^2 + \alpha_1 \bar{y} + \alpha_0, \quad (6.74)$$

sendo $\alpha_{\ell-1,\ell-2,\dots,1,0} = f_{\ell-1,\ell-2,\dots,1,0}(\bar{u}_c)$, e $\bar{u}_c$ o valor da entrada para a qual se conhecem as saídas em estado estacionário.

- 11: Estime os coeficientes da equação (6.74) para que tenha as raízes iguais às saídas em estado estacionário conhecidas $\bar{y}$.
- 12: Escreva as equações que relacionam os coeficientes de agrupamentos de termos em função dos coeficientes da equação (6.74), utilizando as equações (6.40) e (6.69) para modelos polinomial e racional, respectivamente.

- 13: Escreva as equações acima em forma de restrições na estimação de parâmetros.
- 14: **FIM SE**
- 15: Estime os parâmetros do modelo, cuja estrutura foi selecionada no 2º Passo, utilizando as equações de restrições. Para isso deverão ser usados métodos de otimização com restrições.
- 16: Validar o modelo obtido.

Vale ressaltar que o algoritmo apresentado acima também se aplica a sistemas autônomos cujos pontos fixos são conhecidos. Neste caso basta considerar que $\bar{u} = 0$. Resultados da aplicação do algoritmo acima serão apresentados no Capítulo 8.

6.6 Uso de Informação a *Priori* na Análise e Validação de Modelos NARX Racionais e Polinomiais

Outra questão relevante é a análise e validação de modelos. A preocupação de estabelecer ferramentas para validar modelos pode ser encontrada na literatura em (Billings e Zhu, 1994; Aguirre e Billings, 1994; Ljung e Guo, 1995; Deco et al., 1997). Os procedimentos encontrados se dividem em dois grupos, validação estatística e validação dinâmica. A primeira diz respeito à análise estatística dos erros de predição de um passo-à-frente.

Fundamentalmente, o que se busca responder é se os erros de predição são ou não aleatórios. Quando isso ocorre, conclui-se que o modelo é estatisticamente válido. Outro método de validação é a predição livre. Neste caso o modelo é simulado com dados diferentes dos usados para identificação. Nesse procedimento, as predições do modelo são comparadas com a saída do processo real.

Os procedimentos citados acima, embora muito úteis, são limitados. Sabe-se que modelos estatisticamente válidos podem não ser dinamicamente válidos. Por outro lado, modelos validados em um determinado ponto de operação podem não ser válidos em outras regiões. A questão de validar o modelo em outra faixa de operação pode ser possível se existirem dados do sistema em outras regiões de operação. Porém muitas vezes estes não estão disponíveis.

Outro aspecto a ser considerado diz respeito ao comportamento do modelo em malha fechada. Um determinado modelo pode fazer boas predições em malha aberta, porém comportar-se de forma totalmente diferente do sistema em malha fechada. Essa preocupação é de fundamental importância quando o objetivo de modelagem é o desenvolvimento de controladores. Acredita-se

que o comportamento do modelo em malha fechada pode ser estudado pelo cálculo de seus autovalores, como será discutido a seguir.

O procedimento aqui proposto pretende complementar a validação estatística e a dinâmica. Dois pontos serão abordados: (i) a capacidade do modelo de aproximar características estáticas conhecidas e, (ii) a localização dos autovalores em função do ponto de operação.

Procura-se responder às seguintes questões: (i) Quão geral é um modelo que tenha passado pela validação estatística e pela validação dinâmica? (ii) Tal modelo é capaz de aproximar o comportamento do sistema fora da faixa de operação? (iii) Sua ordem está sobredimensionada (Mendes e Billings, 1998)? (iv) Como será seu comportamento em malha fechada? (v) Os estados estacionários do modelo coincidem com as do sistema original?

Naturalmente, muitas dessas questões enumeradas acima exigem conhecimento *a priori* do sistema. O procedimento proposto, através do Algoritmo 6.4, baseia-se na análise da curva em estado estacionário do modelo e da função de autovalores. Muitos dos critérios usados ainda são subjetivos e necessitam de um especialista no processo modelado para se obter as conclusões.

A análise apresentada baseia-se unicamente nas equações apresentadas nas seções 6.2 e 6.3. Não se utiliza em nenhum momento a simulação do modelo. São considerados indicativos de modelos não-válidos: (i) autovalores no semiplano esquerdo do plano complexo z e (ii) multiplicidade de estados estacionários não observados no sistema original.

Em um sistema com taxa de amostragem adequada, seus autovalores estarão sempre no semiplano direito. A existência de autovalores no lado esquerdo pode ser indicativo de sobredimensionamento da ordem do modelo.

A multiplicidade de estados estacionários do modelo diferente do sistema original pode indicar vários problemas com o modelo. Se os pontos estacionários excedentes estiverem fora da faixa de operação e possuírem autovalores fora do círculo unitário, isso pode não significar prejuízo na capacidade do modelo de aproximar o sistema original. Porém se as saídas múltiplas excedentes forem estáveis, ou mesmo não sendo estáveis estiverem dentro da faixa de operação, pode significar modelo não válido, pelo menos para esta região. Um sistema pode ter uma saída instável em malha aberta e estável em malha fechada. Se essa saída estacionária for espúria, então o modelo não será válido em malha fechada.

O Algoritmo 6.4 apresenta os passos a serem seguidos para análise e validação de modelos a partir das equações desenvolvidas. Uma melhor compreensão da metodologia proposta poderá ser obtida através das aplicações apresentadas no Capítulo 7.

Algoritmo 6.4. Análise e validação de modelos NARX com uma entrada e uma saída

- 1: A partir de um modelo considerado válido por métodos estatísticos e dinâmicos.
- 2: Determinar a expressão da saída em estado estacionário do modelo, para toda a extensão que se deseja validar/analisar. Usar as equações (6.40) ou (6.69).
- 3: Para cada ponto de operação, calcular os autovalores. Equações (6.30) ou (6.61) e (6.31).
- 4: Indicar graficamente a localização dos autovalores para cada conjunto entrada/saída em estado estacionário. Esta figura será denominada Autovalores.
- 5: **SE** a figura Autovalores mostrar que existem autovalores no semiplano discreto esquerdo, **ENTÃO**
- 6: existe um forte indício de que a ordem do modelo está sobredimensionada.
- 7: sugere-se reduzir a ordem do modelo.
- 8: **SE NÃO**
- 9: a ordem do modelo está adequada.
- 10: **FIM SE**
- 11: Representar no mesmo gráfico as diversas saídas em estado estacionário para cada entrada $\bar{u}$. Identificar os pares $(\bar{u}, \bar{y})$ estáveis e instáveis. Esta figura será denominada Saídas Estacionárias.
- 12: **SE** o modelo possui apenas uma saída em estado estacionário, **ENTÃO**
- 13: analise a posição dos autovalores a partir da figura obtida no passo 3.
- 14: **SE** os autovalores associados a esta estão dentro do círculo unitário no semiplano direito do plano z , **ENTÃO**
- 15: o modelo pode ser considerado válido.
- 16: **SE NÃO SE** existem autovalores fora do círculo unitário e saída estacionária instável não é uma característica do sistema, **ENTÃO**
- 17: o modelo não é válido para representar o sistema nestes pontos de operação.
- 18: **FIM SE**
- 19: **SE NÃO SE** o modelo possuir mais de um estado estacionário na saída para uma mesma entrada, **ENTÃO**
- 20: analise a existência de pontos estacionários estáveis múltiplos na saída através da figura Saídas Estacionárias.
- 21: **SE** existe multiplicidade de pontos estacionários estáveis **ENTÃO**
- 22: verifique se esta é uma característica do sistema
- 23: **SE** não for uma característica do sistema, **ENTÃO**
- 24: o modelo não é válido para a região onde a multiplicidade ocorre
- 25: obter novo modelo, retirando os termos do agrupamento Ω_{yp} , sendo p o maior expoente que aparece no modelo original

```

26:         retornar ao passo 1
27:     SE NÃO
28:         o modelo representa a multiplicidade de saídas estacionárias obser-
           vadas no sistema.
29:     FIM SE
30: FIM SE
31: SE NÃO SE o modelo possui dois ou mais estados estacionários na saída,
           dentro da faixa de operação, uma estável e as demais instáveis ENTÃO
32:     verificar se esta é uma característica do sistema
33:     SE não for uma característica do sistema, ENTÃO
34:         pode significar que o modelo não será válido para operação em malha
           fechada
35:         retirar do modelo os termos do agrupamento  $\Omega_{yp}$ , sendo  $p$  o maior
           expoente que aparece no modelo original
36:         repetir a identificação
37:     SE NÃO SE não for possível ENTÃO
38:         validar o modelo em malha fechada
39:     FIM SE
40: SE NÃO
41:     o modelo parece representar bem o sistema.
42: FIM SE

```

6.7 Comentários Finais

Este capítulo apresentou um estudo sobre características das representações NARMAX racionais e polinomiais. Foram deduzidas equações que mostram como os agrupamentos de termos influenciam na função de ganho e na função constante de tempo dos modelos.

O estudo se baseou nos conceitos de agrupamentos de termos e coeficientes de agrupamentos de termos para o caso da função de ganho estacionário. No caso da função constante de tempo introduziram-se novos conceitos de agrupamentos, denominados agrupamentos- d e, associados a estes, coeficientes- d .

A partir das equações desenvolvidas apresentaram-se três algoritmos para utilização de informação *a priori* na identificação de sistemas. O primeiro é um conjunto de passos para selecionar a estrutura de modelos NARMAX polinomiais e racionais. O segundo trata do problema de estimação de parâmetros. O objetivo deste é garantir que o modelo possua características do sistema previamente conhecidas. Por último foi apresentado um método para análise e validação de modelos. Através do procedimento proposto, é possível inferir o comportamento dinâmico do modelo, sem necessariamente realizar simulações

dinâmicas.

Ressalta-se que os três algoritmos propostos resultam da aplicação de novos conceitos e formulações desenvolvidas ao longo deste trabalho. A aplicação de tais algoritmos em problemas de identificação será ilustrada e comentada nos Capítulos 7 e 8.

Capítulo 7

Exemplos de Aplicações na Validação e Análise de Modelos Identificados

Neste capítulo, o Algoritmo 6.4, apresentado no Capítulo 6, será aplicado para análise e validação de modelos obtidos a partir de dados reais de três processos distintos; dois processos térmicos e uma válvula de controle.

O objetivo será o de verificar se a ordem do modelo está adequada, se os estados estacionários da saída de cada modelo coincidem com o sistema identificado e determinar regiões de validade para os modelos. As sugestões de redução de ordem são implementadas, ou seja, quando é verificado que um modelo possui ordem sobredimensionada, um modelo de menor ordem é obtido e analisado pelo mesmo algoritmo.

Através do Algoritmo 6.4 e das equações desenvolvidas no Capítulo 6 várias características, em geral não determinadas por métodos convencionais de validação, podem ser identificadas. Essas características dizem respeito a números de estados estacionários na saída, estabilidade de estados estacionários e região de validação de modelos. Outra possibilidade é a função constante de tempo do modelo. Se o modelo é considerado válido, então esta função pode ser considerada como uma aproximação da característica do sistema identificado.

Este capítulo é organizado como se segue: na seção 7.1 são analisados três modelos do Processo Térmico I: dois modelos polinomiais, um obtido em (Rodrigues, 1996) e outro obtido a partir da redução da ordem sugerida pelo Algoritmo 6.4, e um modelo racional obtido em (Corrêa, 1997). Na seção 7.2 são analisados os modelos racional e polinomial do Processo Térmico II. Esses modelos são os mesmos apresentados na seção 4.4. Nesta seção também é apresentado um modelo de Hammerstein obtido a partir do modelo polinomial

e das conclusões tiradas a partir da análise dos modelos. Na seção 7.3 o procedimento é aplicado aos modelos racional e polinomial de uma válvula de controle. O modelo polinomial foi obtido em (Jácome, 1996). Ao final, na seção 7.4 são apresentados comentários a respeito dos resultados obtidos.

7.1 Processo Térmico I

O Processo Térmico I se refere a um forno elétrico do Laboratório de Controle de Processos Industriais (LCPI) do Centro de Pesquisa e Desenvolvimento em Engenharia Elétrica (CPDEE) (Abreu, 1993). Esse é uma caixa metálica com dimensões $15 \times 10 \times 31$ cm, construído a partir de uma chapa de alumínio com espessura igual a 2 mm. O elemento de aquecimento interno é uma lâmpada elétrica de 200 W. O forno não é isolado termicamente, de modo que variações na temperatura ambiente afetam o seu comportamento dinâmico.

O sensor utilizado para medição de temperatura é um resistor com coeficiente de temperatura negativo (NTC) ligado em ponte de Wheatstone, a qual encontra-se equilibrada à temperatura ambiente. O sinal de tensão resultante do desbalanceamento da ponte é processado por conversor A/D de 12 bits e por um microcomputador, onde são implementados os algoritmos de controle.

O sensor de temperatura é apoiado sobre a superfície externa do forno elétrico, sem ser afixado à sua estrutura metálica. Essa configuração de medição torna o sistema sensível a distúrbios externos, tais como flutuações da temperatura ambiente e existência de correntes de ar.

O objetivo do controle é ajustar a temperatura de um ponto na superfície externa do forno a um perfil de referência previamente estabelecido. O controlador determina o tempo em que a lâmpada permanece acesa entre duas amostragens, gerando um sinal de controle normalizado entre 0 e 100%. A lâmpada permanece acesa por um tempo $uT_s/100$, sendo u o sinal de controle e T_s o período de amostragem. O elemento atuador é um *triac* operando como chave.

Abreu (1993) desenvolveu um modelo do sistema baseado na física do processo. A troca de calor entre a lâmpada e a superfície externa do forno se processa através de dois fenômenos: convecção e radiação. A taxa de transferência de calor por radiação depende da quarta potência da temperatura absoluta do meio emissor, o que torna o processo não-linear e dependente da condição de operação (ganhos e parâmetros variantes com o ponto de operação).

A transferência de calor por radiação irá predominar em relação à transferência por convecção durante o período de aquecimento do forno. Esse fato

ocorre porque as dimensões reduzidas do forno impedem a circulação das ondas de convecção. Por outro lado, durante o resfriamento do forno predomina a transferência de calor por convecção (do forno para o meio ambiente). Este mecanismo de transferência de calor faz com que o forno apresente diferentes constantes de tempo de aquecimento e resfriamento (Abreu, 1993). Essas constantes de tempo e o ganho do sistema em regime permanente dependem das condições iniciais do sistema e da região de operação considerada. Maiores detalhes sobre o comportamento dinâmico do forno são encontradas em (Abreu, 1993).

Dados de Identificação

Os dados usados na identificação dos modelos aqui apresentados são: Figura 7.1 - respostas ao “ruído quantizado” e Figura 7.2 - respostas ao degrau. O sinal de saída é a temperatura da superfície externa do forno, normalizada em relação a uma temperatura máxima possível e a entrada é o sinal que define a tensão aplicada ao comando do triac que controla a potência média fornecida à lâmpada. O intervalo de amostragem utilizado foi de $T_s = 210s$ e o eixo x , na figura, indica o número de amostras.

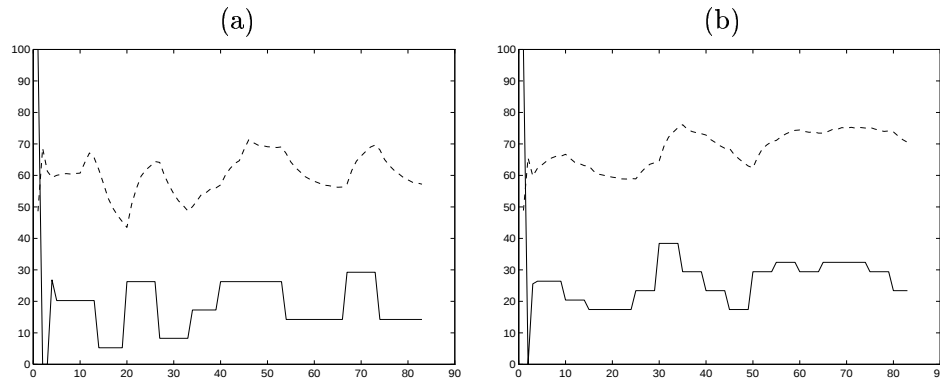


Figura 7.1: Resposta ao ruído quantizado do Processo Térmico I. Eixo- x são as amostras. Linha contínua é a entrada e a tracejada é a temperatura de saída, ambos normalizados de 0 a 100%. (a) Massa de dados *freq1* e (b) massa de dados *freq2*.

A Figura 7.2 revela que o forno possui constante de tempo de aquecimento diferente da constante de tempo de resfriamento. Isto ocorre porque o aquecimento é causado pelo fornecimento de calor através da lâmpada e o esfriamento é devido à perda de calor do forno para o ambiente.

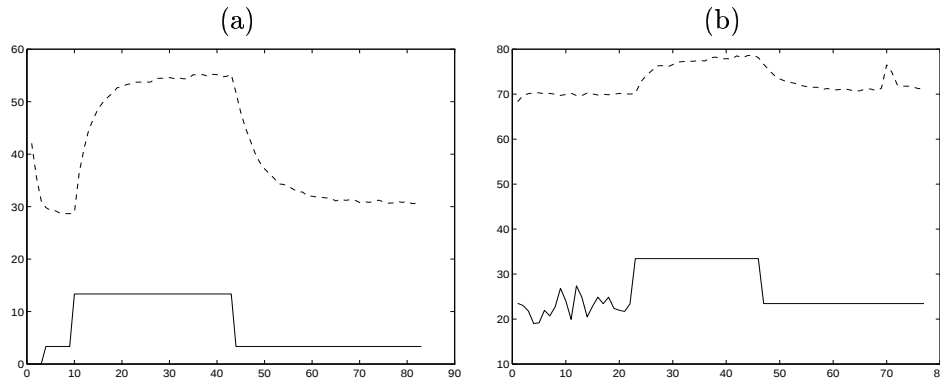


Figura 7.2: Resposta ao degrau do processo térmico I. Eixo- x são as amostras. Linha contínua é a entrada e linha pontilhada é a temperatura de saída, ambos normalizados de 0 a 100%. (a) Massa de dados $fd1$ e (b) massa de dados $fd2$.

Outra característica observada nas massas de dados $fd1$ e $fd2$ relatada em (Rodrigues, 1996), é o lento e contínuo aumento da temperatura da saída do sistema enquanto o sinal de controle é mantido constante, intervalo $25 < k < 40$. Este fato mostra que o sistema possui duas constantes de tempo de aquecimento, uma rápida e outra lenta, fenômeno explicado em (Rodrigues, 1996).

Outra observação importante diz respeito à região excitada por cada massa de dados. Na massa de dados $frq1$ a temperatura do sistema oscila entre 50 e 70% do valor normalizado, em $fd1$ está entre 30 a 50%, em $fd2$ entre 70 a 80% e em $frq2$ está entre 60 e 75%. Esta observação é importante, pois a massa de dados $frq2$ foi usada para identificação dos modelos (Rodrigues, 1996; Corrêa, 1997) e as demais massas de dados foram usadas na validação dinâmica dos mesmos. Então verifica-se que, principalmente no caso das respostas ao degrau, os modelos foram validados em regiões de operação diferentes dos dados usados para identificação.

No procedimento de aquisição de dados do forno, a planta operou em malha fechada com um controlador automático proporcional-integral-derivativo (PID) até que um dado perfil de referência fosse ajustado. Em seguida, a malha de realimentação foi aberta, o sinal de teste aplicado ao comando do triac e o correspondente sinal de temperatura da chapa do forno foi medido e processado (Rodrigues, 1996).

7.1.1 Modelo Polinomial *nl391*

O modelo polinomial chamado de *nl391*, do processo térmico I, foi apresentado em (Rodrigues, 1996), que submeteu este modelo a testes de validação dinâmica e estatística clássicos, atestando *qualidade dinâmica* ao modelo *nl391*. O autor afirma que “o modelo reproduz a dinâmica do forno elétrico com boa exatidão”. Nesta seção será feita uma análise deste modelo através do Algoritmo 6.4.

O modelo *nl391* é apresentado a seguir:

- *modelo não-linear nl391*: grau de não-linearidade três, terceira ordem, com oito termos de processo e com 22 termos lineares de ruído (não mostrados).

$$\begin{aligned}
 y(k) = & 0,44551 y(k-1) + 0,57773 y(k-2) - \\
 & 0,63628 u(k-2) + 0,4860 u(k-1) - \\
 & 1,14580 \times 10^{-6} y(k-1)^2 u(k-1) - \\
 & 9,97760 \times 10^{-5} u(k-1)^2 u(k-3) - \\
 & 2,92710 \times 10^{-5} y(k-3)^3 + \\
 & 7,88310 \times 10^{-3} y(k-2) u(k-2) + \\
 & 7,43860 \times 10^{-8} y(k-3)^2 u(k-3)
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Na validação dinâmica deste modelo, baseada em comparação entre a saída deste, e a do sistema modelado, observam-se as seguintes características (Rodrigues, 1996):

- Ajusta-se melhor apenas na faixa de operação visitada pelos dados de identificação;
- Não reproduz a constante de tempo lenta do forno.

A seguir, o algoritmo 6.4 será usado para análise do modelo apresentado.

Algoritmo 6.4 Aplicado na Análise do Modelo *nl391*

1. O modelo *nl391* é considerado válido por métodos estatísticos e dinâmicos. Detalhes desta validação podem ser vistos em (Rodrigues, 1996).

2. A partir da equação (6.40), determina-se a expressão que permite calcular as saídas estacionárias do modelo.

Na equação (7.1) podem ser identificados os seguintes *agrupamentos de termos* Ω_y , Ω_u , Ω_{yu} , Ω_{y^2u} , Ω_{y^3} e Ω_{u^3} cujos *coeficientes de agrupamento* são $\Sigma_y = 1,02324$, $\Sigma_u = 0,4860$, $\Sigma_{yu} = 7,88310 \times 10^{-3}$, $\Sigma_{y^2u} = -1,07141 \times 10^{-6}$, $\Sigma_{y^3} = -2,92710 \times 10^{-5}$, e $\Sigma_{u^3} = -9,97760 \times 10^{-5}$. Então, a partir da equação (6.40), as saídas em estado estacionário do modelo *nl391* são determinadas pelas raízes do seguinte polinômio:

$$\begin{aligned} & -2,92710 \times 10^{-5} \bar{y}^3 - 1,07141 \times 10^{-6} \bar{y}^2 \bar{u} + \\ & (0,02324 + 7,88310 \times 10^{-3} \bar{u}) \bar{y} - \\ & 0,15028 \bar{u} - 9,97760 \times 10^{-5} \bar{u}^3 = 0, \end{aligned} \quad (7.2)$$

que, como pode ser observado, é de terceiro grau. Isto implica que o modelo possui três saídas em estado estacionário para cada valor de entrada $\bar{u}$.

3. Cálculo dos autovalores para cada ponto de operação.

Os seguintes *agrupamentos-d* podem ser identificados na equação (7.1), a saber: Ω_{y_1} , Ω_{y_2} , $\Omega_{y_1^2u}$, Ω_{y_2u} , $\Omega_{y_3^2u}$ e $\Omega_{y_3^3}$, cujos *coeficientes-d* são: $\Sigma_{y_1} = 0,44551$, $\Sigma_{y_2} = 0,57773$, $\Sigma_u = 0,4860$, $\Sigma_{y_2u} = 7,88310 \times 10^{-3}$, $\Sigma_{y_1^2u} = -1,14580 \times 10^{-6}$, $\Sigma_{y_3^2u} = 7,43860 \times 10^{-8}$, $\Sigma_{y_3^3} = -2,92710 \times 10^{-5}$ e $\Sigma_{u^3} = -9,97760 \times 10^{-5}$.

A partir da Tabela 6.2 verifica-se que: $\Delta_{1_0} = 0,44551$, $\Delta_{1_1} = -2,2916 \times 10^{-6}$, $\bar{x}_{\Delta_{1_1}} = \bar{y}\bar{u}$, $\Delta_{2_0} = 0,57773$, $\Delta_{2_1} = 7,88310 \times 10^{-3}$, $\bar{x}_{\Delta_{2_1}} = \bar{u}$, $\Delta_{3_1} = 14,8772 \times 10^{-8}$, $\bar{x}_{\Delta_{3_1}} = \bar{y}\bar{u}$, $\Delta_{3_2} = -8,7813 \times 10^{-5}$ e $\bar{x}_{\Delta_{3_2}} = \bar{y}^2$. Com os sinais e coeficientes determinados acima, a partir da equação (6.30), as seguintes expressões para os coeficientes da equação característica do modelo podem ser obtidas como

$$\begin{aligned} \Delta_1(\bar{x}_{\Delta_{1_i}}) &= 0,44551 - 2,2916 \times 10^{-6} \bar{y}\bar{u}, \\ \Delta_2(\bar{x}_{\Delta_{2_i}}) &= 0,57773 + 7,88310 \times 10^{-3} \bar{u}, \\ \Delta_3(\bar{x}_{\Delta_{3_i}}) &= 14,8772 \times 10^{-8} \bar{y}\bar{u} - 8,7813 \times 10^{-5} \bar{y}^2, \end{aligned}$$

e, utilizando a equação (6.31), a equação característica do modelo será

$$\begin{aligned} \lambda^3 - (0,44551 - 2,2916 \times 10^{-6} \bar{y} \bar{u}) \lambda^2 - \\ (0,57773 + 7,88310 \times 10^{-3} \bar{u}) \lambda - \\ (14,8772 \times 10^{-8} \bar{y} \bar{u} - 8,7813 \times 10^{-5} \bar{y}^2) = 0, \end{aligned} \quad (7.3)$$

que permite calcular os autovalores para cada ponto de operação determinado por $(\bar{u}, \bar{y})$.

4. Representação gráfica da localização dos autovalores para cada estado estacionário da saída.

A partir da equação característica do modelo, equação (7.3), os autovalores associados a cada ponto de operação podem ser determinados por procedimentos numéricos. A Figura 7.3 apresenta no plano z os autovalores calculados para cada estado estacionário da saída, determinado pelas raízes da equação (7.2).

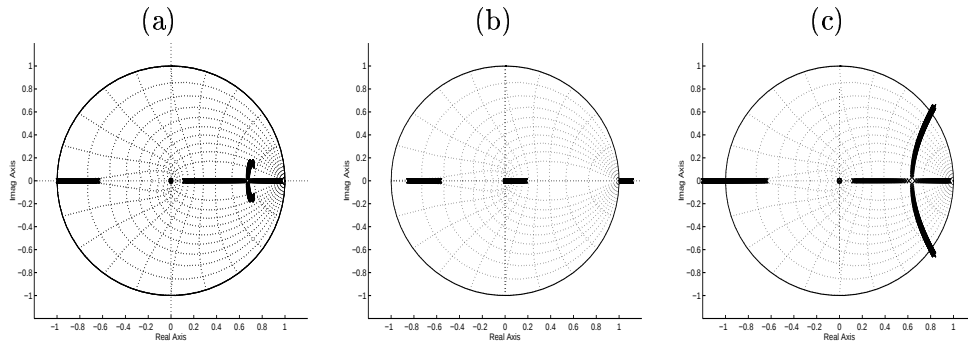


Figura 7.3: Autovalores associados a cada estado estacionário do modelo *nl391*. Estado estacionário determinado pelas raízes da equação 7.2 (a) raiz I - superior, (b) raiz II - média e (c) raiz III - inferior.

5. Verifica-se nas Figuras 7.3 (a), (b) e (c) que pelo menos um autovalor está sempre no semiplano esquerdo, ENTÃO
6. conclui-se que existe um forte indício de que o modelo está com ordem sobredimensionada,
7. deve-se tentar obter novo modelo com menor ordem.

11. Representar graficamente os estados estacionários da saída para cada valor de entrada $\bar{u}$, identificadas quanto à estabilidade, Figura 7.4.

A partir da equação (7.2) determinam-se os estados estacionários da saída para cada entrada $\bar{u}$ avaliando os autovalores pela equação (7.3).

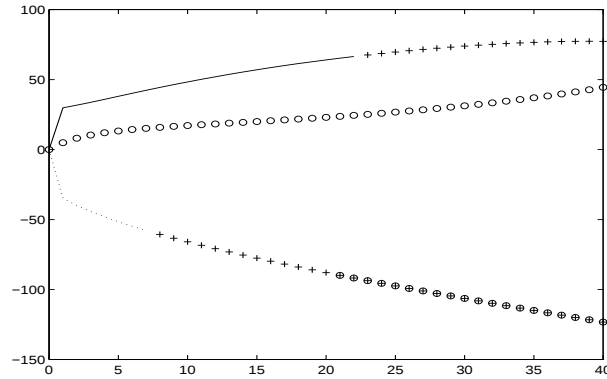


Figura 7.4: Estados estacionários da saída do modelo *nl391* em função da entrada $\bar{u}$, obtidas a partir da equação (7.2). (– e ..) representam autovalores reais dentro do círculo unitário, (o) autovalores fora do círculo unitário e (+) autovalores complexos dentro do círculo unitário. Posição dos autovalores determinada pela equação (7.3). Eixo- x é a entrada em estado estacionário $\bar{u}$ e no eixo- y saída em estado estacionário $\bar{y}$, ambos normalizados de 0 a 100%.

12. O modelo possui mais de uma saída em estado estacionário para uma mesma entrada, ENTÃO
13. verifica-se que, para uma mesma entrada existe mais de uma saída estável, conforme pode ser observado na Figura 7.4, para $0 < \bar{u} < 8$ duas saídas estacionárias com autovalores reais dentro do círculo unitário. Para $8 < \bar{u} < 19$ o modelo possui duas saídas estacionárias com autovalores dentro do círculo unitário, uma com autovalores reais e outra com autovalores complexos conjugados.
14. Existe a multiplicidade de pontos estacionários estáveis, ENTÃO
15. conforme descrito anteriormente, o processo identificado é um processo térmico cuja saída 0 foi atribuída à temperatura ambiente. Estados estacionários múltiplos na saída não são uma característica do sistema. Também não justifica o modelo assumir saídas negativas para excitação de potência positiva. Principalmente para valores de entrada $\bar{u}$ próximos

de 0, os múltiplos estados estacionários na saída possuem valores muito próximos em termos de ordem de grandeza, fato que pode ser observado pelas curvas superior e inferior na Figura 7.4,

16. ENTÃO

17. existe forte evidência de que o modelo não é válido para funcionamento com entradas $\bar{u}$ próximas de 0. Sugere-se tentar identificar o modelo excluindo os termos do agrupamento Ω_{y^3} .

31. Verifica-se também a existência de dois estados estacionários na saída dentro da faixa de operação; um estável e outro instável.

Pode-se observar na Figura 7.4 que as curvas superior e intermediária estão relativamente próximas, ENTÃO

32. verifica-se se esta é uma característica do sistema identificado. Note-se que existência de multiplicidade de saídas estacionárias não é uma característica do processo térmico em questão.

33. Como multiplicidade de estados estacionários não é uma característica do sistema, ENTÃO

34. o modelo pode não ser válido para operação em malha fechada.

35. Mais uma vez deve-se tentar retirar do modelo os termos do agrupamento Ω_{y^3} .

O procedimento executado acima aponta para duas características do modelo *nl391* que não são reconhecidas como características do processo térmico identificado: multiplicidade de estados estacionários estáveis, multiplicidade de saídas estacionárias na região de operação, além de ordem sobredimensionada. Sugere-se a obtenção de modelos com menor ordem e com número menor de saídas em estado estacionário.

Na seção seguinte será apresentado um modelo, também polinomial, obtido a partir das recomendações sugeridas no algoritmo executado para o modelo *nl391*.

7.1.2 Modelo Polinomial *nl251*

O modelo polinomial *nl251* do Processo Térmico I teve sua estrutura selecionada de forma a atender às recomendações sugeridas pelo procedimento de

análise, apresentado pelo algoritmo 6.4, aplicado ao modelo *nl391*. Desta forma, sua ordem é uma unidade menor que o modelo *nl391* e o maior expoente dos termos em y também é uma unidade menor que em *nl391*.

Dessa forma, o *Modelo não-linear nl251* possui grau de não-linearidade três, segunda ordem, com cinco termos de processo, tendo sido identificado com 17 termos lineares de ruído. Este modelo é representado pela seguinte equação:

$$\begin{aligned} y(k) = & 0,98746 y(k-1) - 0,69218 \times 10^{-1} y(k-2) \\ & - 0,19342 \times 10^{-1} u(k-2) + 0,41553 u(k-1) \\ & - 0,36748 \times 10^{-4} y(k-1)^2 u(k-1). \end{aligned} \quad (7.4)$$

A seguir, a análise desse modelo, utilizando o algoritmo 6.4, é apresentada.

Algoritmo 6.4 Aplicado na Análise do Modelo *nl251*

1. O modelo *nl251* foi validado por métodos estatísticos e dinâmicos.
2. Cálculo dos estados estacionários da saída do modelo a partir da equação (6.40).

Na equação (7.4) pode ser verificada a presença dos seguintes *agrupamentos de termos* Ω_y , Ω_u e Ω_{y^2u} , cujos *coeficientes* são $\Sigma_y = 0,91824$, $\Sigma_u = 0,39619$ e $\Sigma_{y^2u} = -0,36748 \times 10^{-4}$. Então, a partir da equação (6.40), os estados estacionários da saída do modelo *nl251* são determinados pelas raízes do seguinte polinômio:

$$0,36748 \times 10^{-4} \bar{u} \bar{y}^2 + 0,081758 \bar{y} - 0,39619 \bar{u} = 0. \quad (7.5)$$

Como pode ser observado, o modelo *nl251* apresenta dois estados estacionário da saída para cada entrada $\bar{u}$.

3. Cálculo dos autovalores para cada ponto de operação.

Os seguintes *agrupamentos-d* podem ser identificados na equação (7.1), a saber: Ω_{y_1} , Ω_{y_2} , $\Omega_{y_1^2u}$, cujos *coeficientes-d* são: $\Sigma_{y_1} = 0,98746$, $\Sigma_{y_2} = 0,69218 \times 10^{-1}$, $\Sigma_u = 0,19342 \times 10^{-1}$ e $\Sigma_{y_1^2u} = -0,36748 \times 10^{-4}$.

A partir da Tabela 6.2 pode ser determinado que: $\Delta_{1_0} = 0,98746$, $\Delta_{1_1} = -0,73496 \times 10^{-4}$, $\bar{x}_{\Delta_{1_1}} = \bar{y}\bar{u}$ e $\Delta_{2_0} = 0,69218 \times 10^{-1}$. Usando os sinais e coeficientes apresentados acima, a partir da equação (6.30)

as seguintes expressões para os coeficientes da equação característica do modelo podem ser obtidas:

$$\begin{aligned}\Delta_1(\bar{x}_{\Delta_{1_i}}) &= 0,98746 - 0,73496 \times 10^{-4} \bar{y} \bar{u}, \\ \Delta_2(\bar{x}_{\Delta_{2_i}}) &= 0,69218 \times 10^{-1},\end{aligned}$$

e, utilizando equação (6.31), a equação característica do modelo será

$$\lambda^2 - (0,98746 - 0,73496 \times 10^{-4} \bar{y} \bar{u}) \lambda - (0,69218 \times 10^{-1}) = 0. \quad (7.6)$$

4. Localização dos autovalores para cada estado estacionário da saída.

A partir da equação característica do modelo, equação (7.6), os autovalores associados a cada ponto de operação podem ser determinados por procedimentos numéricos. A Figura 7.5 apresenta, no plano z , os autovalores calculados para cada estado estacionário da saída, determinado pelas raízes da equação (7.5).

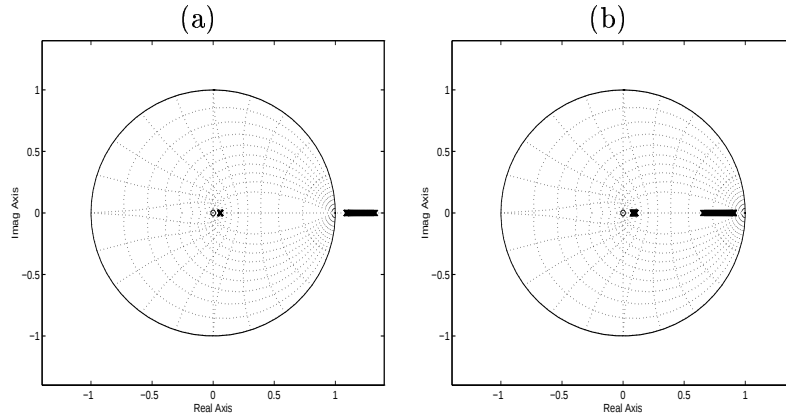


Figura 7.5: Autovalores associados aos estados estacionários da saída do modelo *nl251* (a) curva inferior e (b) curva superior, da Figura 7.6.

5. Verifica-se nas Figuras 7.5 (a) e (b) que todos os autovalores estão no semiplano discreto direito,
8. ENTÃO
9. a ordem do modelo pode ser considerada adequada.

11. Representar graficamente os estados estacionários da saída para cada valor de entrada $\bar{u}$, identificados quanto à estabilidade, Figura 7.5.

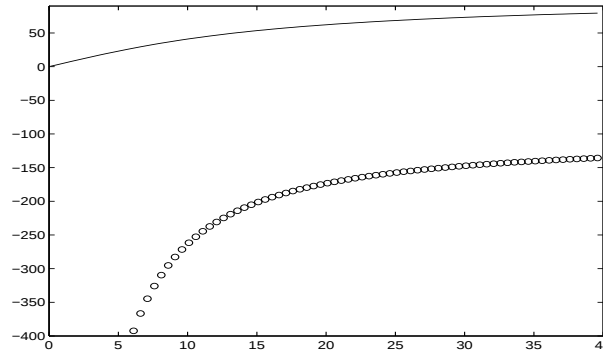


Figura 7.6: Estados estacionários da saída do modelo *nl251*, obtidos pelo cálculo das raízes da equação (7.5). (-) indica estados estacionários estáveis e (o) instáveis. Eixo- x é a entrada em estado estacionário $\bar{u}$ e no eixo- y saída em estado estacionário $\bar{y}$, ambos normalizados de 0 a 100%.

19. O modelo possui dois estados estacionários na saída para uma mesma entrada, ENTÃO
20. verifica-se, através da Figura 7.6, que não existem, para uma mesma entrada, múltiplos estados estacionários estáveis. Verifica-se que os estados estacionários da saída com valores negativos, fora da faixa de operação do sistema, são instáveis. Portanto o modelo possui apenas um estado estacionário estável para cada entrada $\bar{u}$.
21. Não existe multiplicidade de estados estacionários estáveis, ENTÃO
31. verifica-se também que o modelo não possui estados estacionários múltiplos dentro da faixa de operação.
41. O modelo está adequado para representar o sistema.

O Algoritmo 6.4 aplicado na análise e validação do modelo *nl251* mostra que este não possui as características apresentadas pelo modelo *nl391*. Note-se que a existência de estados estacionários múltiplos na saída, em geral, não podem ser verificadas por procedimentos estatísticos, nem pela predição livre.

Ressalta-se também que o modelo *nl251* possui uma saída estacionária instável fora da faixa de operação. Na simulação do modelo em malha aberta,

esta saída com valores negativos e com autovalores fora do círculo unitário não afeta a capacidade do modelo para aproximar o comportamento do sistema. Porém, o mesmo não pode ser garantido para o comportamento do modelo em malha fechada. Um determinado controlador pode estabilizar os autovalores que, em malha aberta, são instáveis.

Modelos com multiplicidade de saídas estacionárias, para serem usados para controle, devem passar por validação em malha fechada. Ou então deve ser analisado, através de uma expressão analítica, o que ocorrerá com esses autovalores ao ser introduzido um controlador.

7.1.3 Modelo Racional *mr03f5*

A mesma análise feita para os modelos polinomiais será aplicada a um modelo racional para o mesmo processo térmico. Esse modelo é denominado *mr03f5* e foi apresentado em (Corrêa, 1997) como superior aos modelos polinomiais para representar a dinâmica do Processo Térmico I. Detalhes de sua obtenção e validação podem ser vistos na referência citada acima.

O modelo *mr03f5*, apresentado na Equação (7.7) é de primeira ordem, com grau de não-linearidade dois, sendo que três interações do algoritmo de mínimos quadrados modificado descrito na Seção 2.2 foram usadas para estimar os parâmetros.

$$y(k) = \frac{0,9122y(k-1) + 0,6185u(k-1)}{1 - 0,4937 \times 10^{-3}u(k-1)} - \frac{0,6029 \times 10^{-2}y(k-1)u(k-1)}{1 - 0,4937 \times 10^{-3}u(k-1)}. \quad (7.7)$$

Algoritmo 6.4 Aplicado na Análise do Modelo *mr03f5*

1. O modelo *mr03f5* foi validado por métodos estatísticos e dinâmicos. Detalhes dessa validação podem ser vistos em (Corrêa, 1997).
2. Cálculo dos estados estacionários da saída do modelo a partir da equação (6.40).

A partir da equação (7.7) podem ser identificados os seguintes agrupamentos de termos, Ω_y^α , Ω_u^α , Ω_{yu}^α , Ω_u^β e Ω_0^β , cujos coeficientes são: $\Sigma_y^\alpha = 0,9122$, $\Sigma_u^\alpha = 0,6185$, $\Sigma_{yu}^\alpha = -0,6029 \times 10^{-2}$, $\Sigma_u^\beta = -0,4937 \times 10^{-3}$ e $\Sigma_0^\beta = 1$.

A partir da Tabela 6.6, conclui-se que $K_0 = 0,6185$, $\lambda_0 = -0,9122$ e $\lambda_1 = \Sigma_u^\beta - \Sigma_{yu}^\alpha = 5,5353 \times 10^{-3}$, então, usando a equação (6.68), o ganho em estado estacionário do modelo pode ser expresso como

$$k(\bar{u}) = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = \frac{0,6185}{0,0878 + 5,5353 \times 10^{-3}\bar{u}}, \quad (7.8)$$

e a relação estacionária entre saída e entrada como

$$\bar{y} = \frac{0,6185\bar{u}}{0,0878 + 5,5353 \times 10^{-3}\bar{u}}. \quad (7.9)$$

3. Cálculo dos autovalores para cada ponto de operação.

O modelo *mr03f5* é de primeira ordem sem termos em y no denominador, portanto são aplicados a ele os Lemas 6.4 a 6.6. O autovalor associado a cada ponto de operação pode ser determinado pela equação (6.52), como

$$\lambda(\bar{u}) = \frac{0,9122 - 0,6029 \times 10^{-2}\bar{u}}{1 - 0,4937 \times 10^{-3}\bar{u}}, \quad (7.10)$$

4. Localização dos autovalores em função dos pontos de operação estacionários.

A Figura 7.7 apresenta, no plano z , os autovalores do modelo *mr03f5* calculados através da equação (7.10).

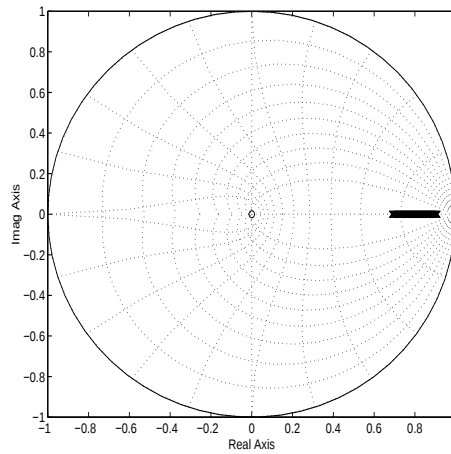


Figura 7.7: Autovalores do modelo *nr03f5* em função de cada ponto de operação.

5. Verifica-se na Figura 7.7 que todos autovalores estão no semiplano discreto direito, ENTÃO
9. a ordem do modelo está adequada.
11. Representar graficamente os estados estacionários da saída para cada valor de entrada $\bar{u}$, identificados quanto à estabilidade.

Os estados estacionários da saída do modelo *nl251* estão apresentadas na figura 7.8.

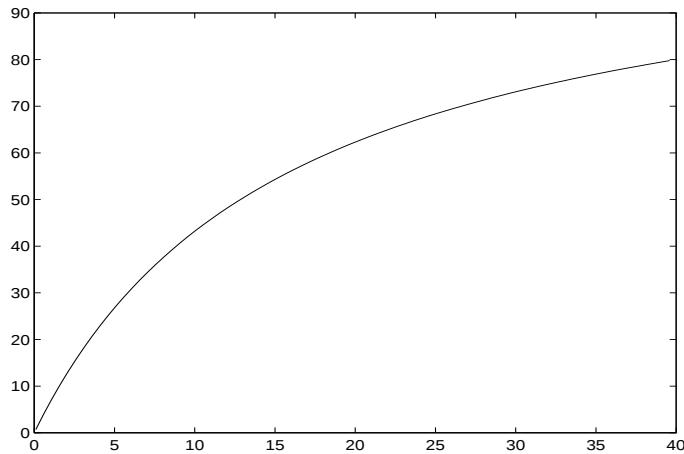


Figura 7.8: Estados estacionários da saída do modelo *mr03f5* obtidos pela equação (7.9). Eixo- x é a entrada em estado estacionário $\bar{u}$ e no eixo- y saída em estado estacionário $\bar{y}$, ambos normalizados de 0 a 100%.

12. O modelo possui um estado estacionário da saída para cada entrada.
14. Os autovalores estão dentro do círculo unitário.
15. O modelo pode ser considerado válido.

O procedimento apresentado não indicou nenhum problema com as características do modelo racional *mr03f5*, o que é de primeira ordem tendo apenas uma saída em estado estacionário. Esta é uma característica razoável para aproximar o comportamento do processo térmico em questão.

7.1.4 Comparação Entre os Modelos

Nesta seção serão comparados os ganhos, a constante de tempo e o desempenho na predição livre de cada modelo do Processo Térmico I analisado. O objetivo

aqui é verificar se as observações feitas através do algoritmo de análise possuem correspondência no comportamento dinâmico e estático de cada modelo.

7.1.4.1 Ganho Estacionário

Para comparação do ganho estático dos três modelos estudados serão considerados: para o modelo *nl391* o estado estacionário representado pela curva superior da Figura 7.4, o estado estacionário estável da saída do modelo *nl251* e o único estado estacionário da saída do modelo *mr03f5*. Como ganho estacionário será considerada a razão entre $\bar{y}/\bar{u}$.

A Figura 7.9 apresenta o ganho em função da entrada para os três modelos analisados. Pode-se notar que para entradas $\bar{u} > 15$ os três modelos possuem ganhos muito próximos. Esse fato pode ser justificado pela massa de dados de identificação. Como pode ser visto na Figura 7.1(b), nos dados de identificação, a entrada varia entre $15 < \bar{u} < 40$, com uma maior concentração de valores entre 20 e 25. Como era de se esperar, os modelos possuem características mais próximas na faixa de dados de identificação.

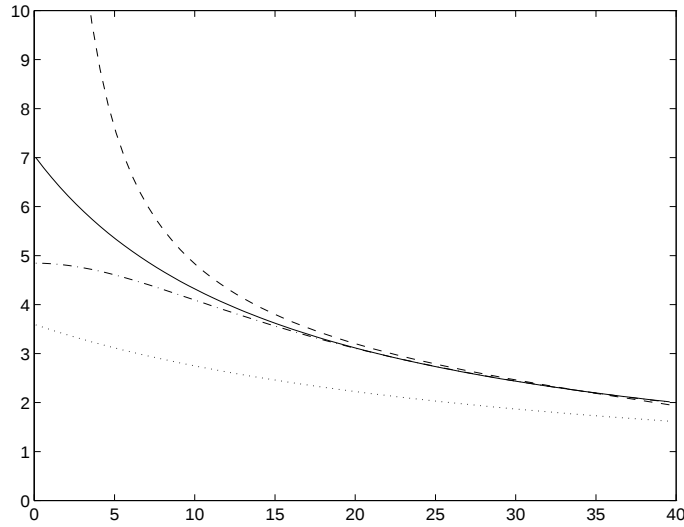


Figura 7.9: Ganho estacionário dos modelos: (tracejado) *nl391*, (traço-ponto) *nl251* e (linha) *mr03f5* do Processo Térmico I. A linha pontilhada é ganho do Processo Térmico segundo (Abreu, 1993). Eixo- x é a entrada $\bar{u}$ e o eixo- y ganho estacionário $k(\bar{u})$.

Para valores de $\bar{u}$ próximos de zero, observa-se que o modelo polinomial *nl391* possui ganho muito elevado, e o modelo *nl251* ganho inferior ao racional

mr03f5. Na Figura 7.9 também é apresentada a curva do ganho obtida a partir de modelagem caixa-branca desenvolvida em (Abreu, 1993). A diferença entre o ganho deduzido pelo modelo caixa-branca e os modelos caixa-preta pode ser justificada por mudanças no sistema entre a data da modelagem caixa-branca e da identificação caixa-preta, datas estas, separadas por três anos. Porém, pode-se observar que o modelo racional é o que mais se aproxima da forma da equação teórica obtida por Abreu (1993).

7.1.4.2 Constante de Tempo

Uma vez que a função dos autovalores em cada ponto de operação dos modelos foi determinada, a função constante de tempo será obtida utilizando a equação (6.32). No caso de modelos de segunda ordem e ordem superior, será considerada a soma das constantes de tempo associadas a cada autovalor, sendo desprezados autovalores à esquerda do plano discreto.

A Figura 7.10 apresenta as funções constantes de tempo em função da entrada $\bar{u}$ para cada modelo analisado. Assim como para o caso do ganho estacionário, observam-se em todos os modelos, constantes de tempo muito próximas para valores de $\bar{u}$ que aparecem na massa de dados de identificação. Para valores de $\bar{u}$ próximos de zero há uma diferença significativa entre o modelo *nl391* e os modelos *nl251* e *mr03f5*.

Predição livre

A seguir são apresentados os resultados da predição livre dos modelos analisados. Os resultados apresentados a seguir confirmam várias observações feitas apenas com base nas características dos modelos, obtidas através das técnicas apresentadas no capítulo anterior.

A Figura 7.11(a), (b) e (c) apresenta o resultado da simulação dos modelos, com predição livre, para as massas de dados de validação, *fd1*, *fd2* e *frq1*, respectivamente. Mostra-se também a simulação dos modelos para uma entrada em degrau. Neste último caso não existe a saída do sistema real.

A Figura 7.11 mostra que, na maioria das simulações, o modelo polinomial *nl251* tem comportamento semelhante ao modelo racional *nr03f5*. Já o modelo polinomial *nl391* possui comportamento diferenciado, principalmente para a massa de dados *fd1*, Figura 7.11(a), e para a resposta ao degrau simulado, Figura 7.11(d). Note-se que os resultados acima confirmam as observações feitas ao longo do estudo das características dos modelos em questão. Para o degrau apresentado da Figura 7.11(d) o modelo *nl391* apresenta uma oscilação (característica de pólos complexos conjugados), e um tempo de acomodação bem superior aos demais modelos.

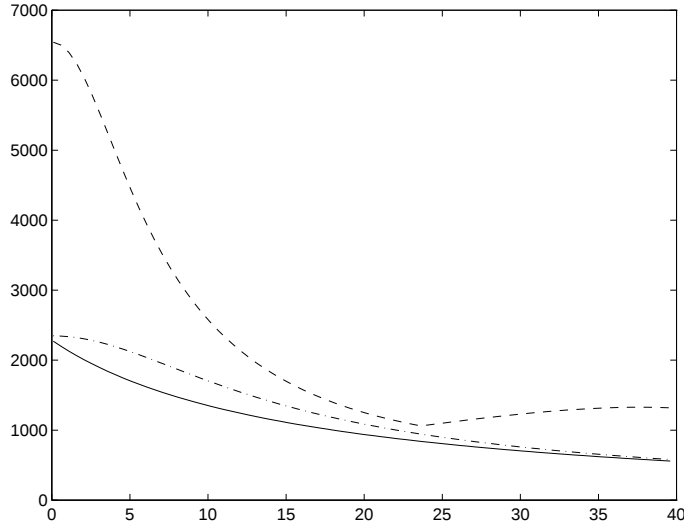


Figura 7.10: Função constante de tempo dos modelos: (tracejado) *nl391*, (traço-ponto) *nl251* e (linha) *mr03f5* do Processo Térmico I. Eixo- x é a entrada $\bar{u}$ e no eixo- y tem-se a constante de tempo em segundos.

7.2 Processo Térmico II

Nesta seção serão analisados o modelo polinomial e racional do processo térmico II apresentado na seção 4.4.

7.2.1 Modelo Polinomial *mp72pt2*

Análise do modelo polinomial *mp72pt2*, pelo Algoritmo 6.4, com sete termos de processo, grau de não-linearidade $\ell = 2$ e ordem $n_y = 2$ (Cassini, 1999):

$$\begin{aligned}
 y(k) = & 1,2929y(k-1) + 0,0101u(k-1)u(k-2) \\
 & + 0,0407u(k-1)u(k-1) - 0,3779y(k-2) \\
 & - 0,1280y(k-1)u(k-2) + 0,0957y(k-2)u(k-2) \\
 & + 0,0051u(k-2)u(k-2).
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

1. O modelo *mp72pt2* é considerado válido por métodos estatísticos e dinâmicos. Detalhes da sua validação podem ser vistos em (Cassini, 1999).

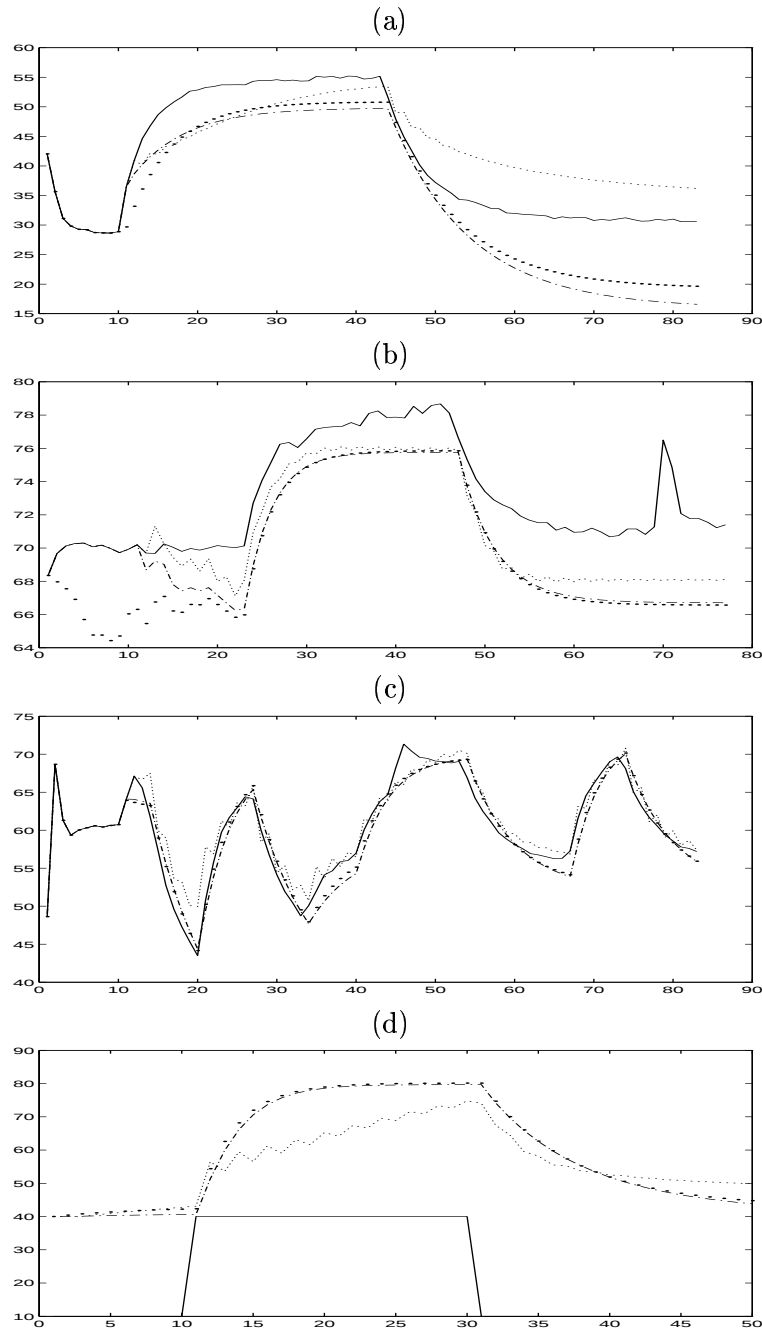


Figura 7.11: Simulação de k -passos dos modelos do Processo Térmico I. (a) Massa de dados $fd1$, (b) massa de dados $fd2$, (c) massa de dados $frq1$ e (d) resposta ao degrau apenas dos modelos. (—) Sistema original em (a), (b) e (c) em (d) representa a entrada, (...) modelo $nl391$ (-.-) modelo $nl251$ e (...) modelo $mr03f5$. Eixo- x amostras e eixo- y saída normalizada em 0 a 100%.

2. Cálculo dos estados estacionários da saída do modelo a partir da equação (6.40).

A partir da equação (7.11) pode ser identificada a presença dos seguintes agrupamentos de termos, Ω_y , Ω_{u^2} e Ω_{yu} , cujos coeficientes são $\Sigma_y = 0,9150$, $\Sigma_{u^2} = 0,0559$ e $\Sigma_{yu} = -0,0323$. Então, a partir da equação (6.40), as saídas em estado estacionário do modelo *nl251* são determinadas pelas raízes do seguinte polinômio:

$$\bar{y} = \frac{0,0559\bar{u}^2}{0,0850 + 0,0323\bar{u}}. \quad (7.12)$$

3. Cálculo dos autovalores para cada ponto de operação.

Os seguintes *agrupamentos-d* podem ser identificados na equação (7.11), a saber: Ω_{y_1} , Ω_{y_2} , Ω_{y_1u} e Ω_{y_2u} , cujos *coeficientes-d* são: $\Sigma_{y_1} = 1,2929$, $\Sigma_{y_2} = -0,3779$, $\Sigma_{y_1u} = -0,1280$ e $\Sigma_{y_2u} = 0,0957$.

A partir da Tabela 6.2 obtém-se que: $\Delta_{1_0} = 1,2929$, $\Delta_{1_1} = -0,1280$, $\bar{x}_{\Delta_{1_1}} = \bar{u}$, $\Delta_{2_0} = -0,3779$, $\Delta_{2_1} = 0,0957$ e $\bar{x}_{\Delta_{2_1}} = \bar{u}$. Usando os sinais e coeficientes determinados acima, e a partir da equação (6.30), as seguintes expressões para os coeficientes da equação característica do modelo podem ser obtidas:

$$\begin{aligned} \Delta_1(\bar{x}_{\Delta_{1_i}}) &= 1,2929 - 0,1280\bar{u} \\ \Delta_2(\bar{x}_{\Delta_{2_i}}) &= -0,3779 + 0,0957\bar{u} \end{aligned}$$

e, utilizando equação (6.31), a equação característica do modelo será

$$\lambda^2 - (1,2929 - 0,1280\bar{u})\lambda - (-0,3779 + 0,0957\bar{u}) = 0. \quad (7.13)$$

4. Localização dos autovalores para a saída em estado estacionário.

A partir da equação característica do modelo, equação (7.6), os autovalores associados a cada ponto de operação podem ser determinados por procedimentos numéricos. A Figura 7.12 apresenta, no plano z , os autovalores calculados para cada saída estacionária determinada pela equação (7.12).

5. Verifica-se na Figura 7.12 que o modelo não possui autovalores no semi-plano discreto esquerdo, ENTÃO

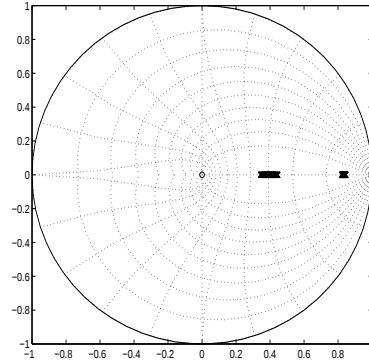


Figura 7.12: Autovalores associados à saída estacionária do modelo *mp72pt2*.

9. pode-se considerar que a ordem do modelo está adequada.
11. Representar graficamente os estados estacionários da saída para cada valor de entrada $\bar{u}$, identificados quanto à estabilidade, ver Figura 4.15(d).
12. O modelo possui uma única saída em estado estacionário, ENTÃO
13. a posição dos autovalores é analisada através da Figura 7.12.
14. Como todos os autovalores estão dentro do círculo unitário e no semi-plano direito, ENTÃO
15. o modelo é considerado válido para trabalhar em toda a faixa analisada.

Pode-se observar que o procedimento de análise representado pelo Algoritmo 6.4 não detectou nenhum problema do modelo.

7.2.2 Modelo Racional *mr31pt2*

Modelo racional com três termos de processo, grau de não-linearidade $\ell = 2$ e ordem $n_y = 1$, denominado de *mr31pt2*:

$$y(k) = \frac{0,8666y(k-1) + 0,5951 \times 10^{-1} u(k-1)^2}{1 - 0,4059 \times 10^{-1} u(k-1)}. \quad (7.14)$$

1. O modelo *mr31pt2* foi validado por métodos estatísticos e dinâmicos. Detalhes desta validação podem ser vistos na seção 4.4.

2. Cálculo dos estados estacionários da saída do modelo a partir da equação (6.40).

A partir da equação (7.14) podem ser identificados os seguintes agrupamentos de termos, Ω_y^α , $\Omega_{u^2}^\alpha$, Ω_0^β e Ω_u^β , cujos coeficientes são: $\Sigma_y^\alpha = 0,8666$, $\Sigma_{u^2}^\alpha = 0,5951 \times 10^{-1}$, $\Sigma_0^\beta = 1$ e $\Sigma_u^\beta = -0,4059 \times 10^{-1}$.

A partir da Tabela 6.6 conclui-se que $K_1 = 0,5951 \times 10^{-1}$, $\bar{x}_{K_1} = \bar{u}^2$, $\lambda_0 = -0,8666$, $\lambda_1 = -0,4059 \times 10^{-1}$ e $\bar{x}_{\tau_1} = \bar{u}$, então, usando a equação (6.68), a relação estacionária entre entrada e saída pode ser expressa como

$$\bar{y} = \frac{0,5951 \times 10^{-1} \bar{u}^2}{0,1334 - 0,4059 \times 10^{-1} \bar{u}}. \quad (7.15)$$

3. Cálculo dos autovalores para cada ponto de operação.

O modelo *mr031pt2* é de primeira ordem sem termos em y no denominador, portanto são aplicados a ele os Lemas 6.4 a 6.6. O autovalor associado a cada ponto de operação pode ser determinado pela equação (6.52), como

$$\lambda(\bar{u}) = \frac{0,8666}{1 - 0,4059 \times 10^{-1} \bar{u}}, \quad (7.16)$$

4. Localização dos autovalores para cada estado estacionário da saída.

A Figura 7.13 apresenta, no plano z , os autovalores do modelo *mr31pt2* calculados através da equação (7.16).

5. Verifica-se na Figura 7.7 que o modelo não possui autovalores no semi-plano discreto esquerdo, ENTÃO
9. pode-se concluir que a ordem do modelo está adequada.
11. Representar graficamente os estados estacionários da saída do modelo para cada valor de entrada $\bar{u}$, identificadas quanto à estabilidade, ver Figura 4.15(e).
12. O modelo possui um único estado estacionário na saída, ENTÃO
13. a posição dos autovalores é analisada através da Figura 7.13.

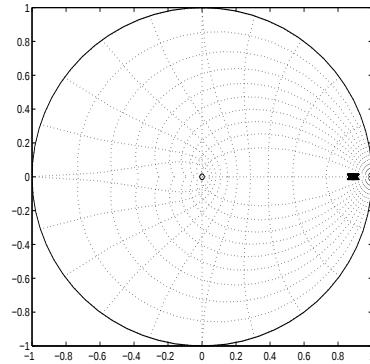


Figura 7.13: Autovalores do modelo *mr31pt2* para cada ponto de operação.

14. Como o modelo não possui autovalores fora do círculo unitário, ENTÃO
15. o modelo é considerado válido.

7.2.3 Análise da constante de tempo dos modelos

A seguir serão analisadas as funções constantes de tempo dos modelos apresentados para o Processo Térmico II. Não serão apresentadas aqui as equações, mas apenas os resultados, obtidos pelos procedimentos descritos no Capítulo 6 e aplicados ao Processo Térmico I.

A Figura 7.14 apresenta as funções constantes de tempo do Processo Térmico II obtidas a partir dos modelos polinomial e racional. As linhas pontilhadas em negrito se referem às constantes de tempo associadas a cada autovalor do modelo polinomial, que é de segunda ordem. A linha pontilhada clara se refere à soma das constantes de tempo deste modelo. A linha contínua se refere à constante de tempo obtida a partir do modelo racional.

No caso da constante de tempo, não existem informações *a priori* do sistema as quais permitam comparar o modelo com o sistema original. Porém algumas observações podem ser feitas a partir da Figura 7.14. Note-se que, apesar de aparecerem termos do agrupamento Ω_{yu} no modelo polinomial, a função constante de tempo deste praticamente permanece inalterada, sendo um indicativo de que o sistema original possui constante de tempo que não varia com o ponto de operação, pelo menos na faixa estudada.

Para o caso do modelo racional, verifica-se uma variação significativa da constante de tempo com o ponto de operação. Uma vez que na validação dinâmica o modelo polinomial se mostrou melhor para se ajustar aos dados

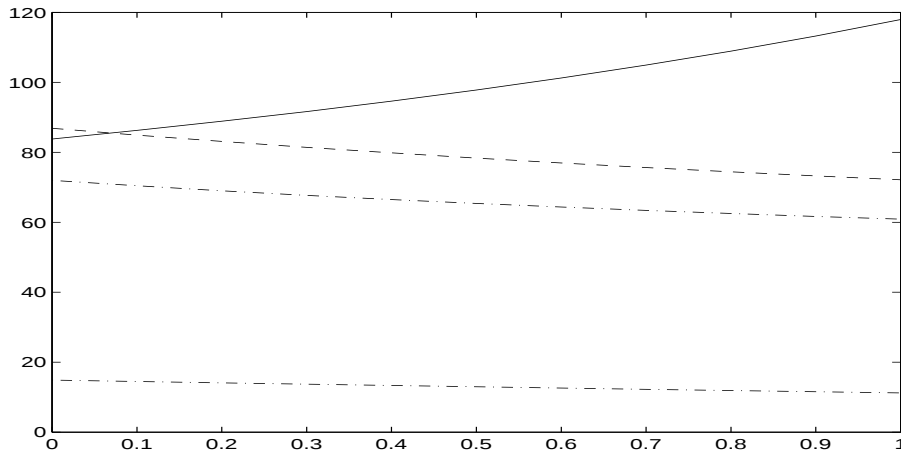


Figura 7.14: Função constante de tempo do Processo Térmico II obtida a partir dos modelos polinomial e racional. Eixo- x entrada $\bar{u}$ em pu e eixo- y τ em segundos. (—) Constante de tempo do modelo racional τ_r , (— . —) Constantes de tempo do modelo polinomial τ_{p1} e τ_{p2} e (— — —) $\tau_{p1} + \tau_{p2}$.

que o racional, pode-se concluir que a função constante de tempo do modelo polinomial está mais próxima do sistema original. Então pode-se afirmar que o Processo Térmico estudado possui constante de tempo que praticamente não varia com o ponto de operação.

Ressalta-se também que, apesar de não ser possível saber, com as informações disponíveis, qual é o verdadeiro comportamento da função constante de tempo do sistema, o procedimento adotado com certeza possibilita um indicativo desse comportamento. Uma vez que os modelos são dinamicamente válidos, tendo o modelo polinomial melhor resultado que o racional, a função constante de tempo obtida pelo modelo polinomial pode ser considerada uma aproximação da função constante de tempo do sistema original.

7.2.4 Obtendo Modelo de Hammerstein a Partir de Modelos NARMAX

As análises dos modelos *mp72pt2* e *mr31pt2* mostraram que existe um forte indício de que a constante de tempo do Processo Térmico II não varia com o ponto de operação. Portanto tal sistema deverá ser bem representado Modelo de Hammerstein, ou seja, por um ganho não-linear e uma dinâmica linear.

Nesta seção, a partir do modelo polinomial *mp72pt2*, será obtido um modelo de Hammerstein para o Processo Térmico II. Considere-se a representação

em blocos do modelo de Hammerstein, apresentada na Figura 2.2.

O modelo de Hammerstein será aqui obtido considerando que, em estado estacionário, $u(k-1) \approx u(k-2) \approx \bar{u}$, e que o modelo *mt72pt2* produz uma boa aproximação da curva estática do sistema. Então $F(u)$ pode ser escrita na forma

$$v = F(\bar{u}) = 0,0047\bar{u} + 0,0469\bar{u}^2, \quad (7.17)$$

então, determinou-se $F(\cdot)$ a partir do modelo polinomial. $f(\cdot)$ será determinado como um modelo ARX, cuja entrada é $v(k)$. Desta forma tem-se

$$y(k) = f(v(k - n_v), y(k - n_y)); \quad (7.18)$$

utilizando ERR para escolha de estrutura e OLS para estimar os parâmetros, obtém-se que

$$y(k) = 1,2668y(k-1) + 0,9268v(k-1) - 0,3619y(k-2). \quad (7.19)$$

A Figura 7.15 mostra o resultado da predição livre do modelo de Hammerstein. Pode-se observar que não existe diferença significativa de comportamento entre o modelo polinomial *mp72pt2* e o modelo de Hammerstein. A Tabela 7.1 apresenta uma comparação quantitativa entre os modelos.

Tabela 7.1: Resultados da validação dinâmica dos modelos de Hammerstein e polinomial para o Processo Térmico II. Dados de validação amostras 601 a 1200. Max $\rightarrow$ máximo erro absoluto; Med $\rightarrow$ erro médio de predição; Std $\rightarrow$ desvio padrão; e SSE $\rightarrow$ somatório dos erros quadráticos.

Modelo	Max	Med	Std	SSE
Polinomial	0,0193	$-6,475 \times 10^{-4}$	0,0061	0,0228
Hammerstein	0,0187	$-2,781 \times 10^{-4}$	0,0061	0,0223

A representação de Hammerstein aproximou eficientemente as características observadas nos dados de identificação e validação. Então esses resultados confirmam a observação de que o Processo Térmico II possui constante de tempo que não varia com o ponto de operação.

7.3 Válvula de Controle

Serão analisados aqui modelos NARMAX de uma válvula de controle acionada por um atuador pneumático. O sinal de controle é uma corrente elétrica, que

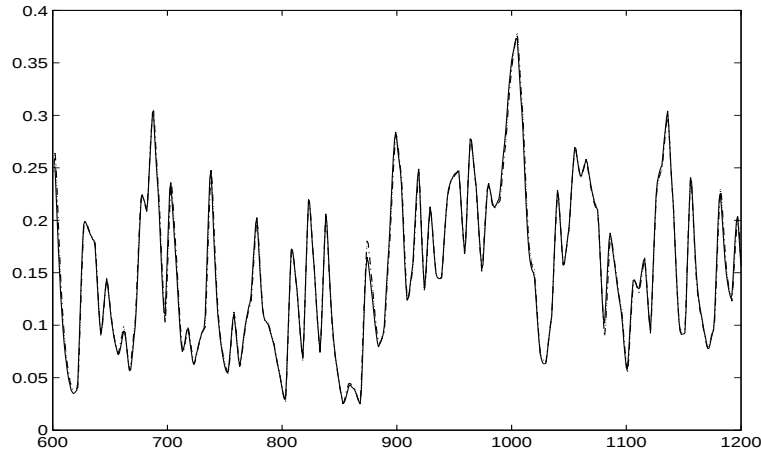


Figura 7.15: Predição livre do modelo de Hammerstein e do modelo polinomial para o Processo Térmico II, sistemas original (traço), modelo NARMAX polinomial (pontilhado) e modelo de Hammerstein (traço-ponto), curvas sobrepostas.

é transformada num sinal de pressão pelo posicionador da válvula. O sinal de controle movimenta um pistão que determina a vazão de saída da válvula. O modelo polinomial a ser analisado foi obtido por Jácome (1996).

A Figura (7.16) apresenta um trecho do conjunto de dados reais medidos na válvula de controle. A massa de dados possui um total 3000 observações, sendo que as primeiras 1800 foram usadas para identificação e as demais para validação. O tempo de amostragem é $T_s = 0,2s$ (Jácome, 1996).

7.3.1 Modelo Polinomial *mp1533*

A Equação (7.20) apresenta um modelo polinomial obtido em (Jácome, 1996) para a referida válvula de controle. O modelo é de terceira ordem, $n_y = 3$, com grau de não-linearidade $\ell = 3$. Durante a seleção da estrutura, os termos em y^p com $p > 1$ foram excluídos dos termos candidatos, de forma a possibilitar expressar $\bar{y} = f(\bar{u})$. Detalhes da obtenção e validação desse modelo podem ser vistos no trabalho citado.

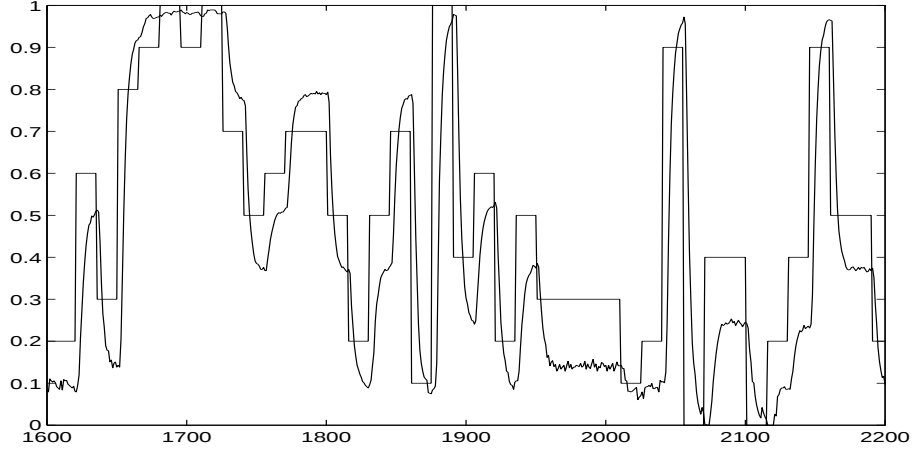


Figura 7.16: Trecho da massa de dados obtida a partir de medições reais usadas para modelagem da válvula de controle. Eixo- x são as amostras e eixo- y amplitude da entrada e saída normalizadas de 0 a 1.

$$\begin{aligned}
 y(k) = & 0,02428 - 0,20522y(k-1) + 1,08220y(k-2) - \\
 & 0,02922u(k-2)^3 - 3,80950u(k-3)^2y(k-1) + \\
 & 6,46510u(k-3)y(k-1) - 5,57840u(k-3)y(k-2) + \\
 & 4,08710u(k-3)^2y(k-2) - 0,35280u(k-3)^2u(k-2) + \\
 & 2,83290u(k-2)y(k-3) - \\
 & 1,05690u(k-3)u(k-2)y(k-3) - \\
 & 0,33528y(k-3) + 0,56637u(k-3)^3 - \\
 & 1,37440u(k-3)y(k-3) - 1,31640u(k-2)y(k-1)
 \end{aligned} \tag{7.20}$$

Esse modelo será denominado neste trabalho de *mp1533*. A seguir é apresentada a análise usando o Algoritmo 6.4.

1. O modelo *mp1533* é considerado válido por métodos estatísticos e dinâmicos. Detalhes dessa validação podem ser vistos em (Jácome, 1996)
2. Cálculo dos estados estacionários da saída do modelo a partir da equação (7.20).

A partir da equação (7.20) podem ser identificados os seguintes agrupamentos de termos, Ω_0 , Ω_y , Ω_{yu} , Ω_{yu^2} e Ω_{u^3} , cujos coeficientes de agrupamentos são $\Sigma_0 = 0,02428$, $\Sigma_y = 0,5417$, $\Sigma_{yu} = 1,0288$, $\Sigma_{yu^2} = -0,7793$,

$\Sigma_{u^3} = 0,18435$. Então, a partir da equação (7.20), a saída em estado estacionário do modelo *mp1533* pode ser determinada por

$$\bar{y} = \frac{0,02428 + 0,18453\bar{u}^3}{0,4583 - 1,0288\bar{u} + 0,7793\bar{u}^2} \quad (7.21)$$

3. Cálculo dos autovalores para cada ponto de operação.

Os seguintes *agrupamentos-d* podem ser identificados na equação (7.20), a saber: $\Omega_{y_1}, \Omega_{y_1u}, \Omega_{y_2u}, \Omega_{y_1u^2}, \Omega_{y_2}, \Omega_{y_2u}, \Omega_{y_2u^2}, \Omega_{y_3}, \Omega_{y_3u}$ e $\Omega_{y_2u^2}$, cujos *coeficientes-d* são: $\Sigma_{y_1} = -0,20522$, $\Sigma_{y_1u} = 5,1487$, $\Sigma_{y_1u^2} = -3,80950$, $\Sigma_{y_2} = 1,0822$, $\Sigma_{y_2u} = -5,57840$, $\Sigma_{y_2u^2} = 4,08710$, $\Sigma_{y_3} = -0,33528$, $\Sigma_{y_3u} = 1,4585$ e $\Sigma_{y_3u^2} = -1,0569$.

A partir da Tabela 6.2 e da equação (6.30), as seguintes expressões para os coeficientes da equação característica do modelo podem ser obtidas

$$\begin{aligned} \Delta_1(\bar{x}_{\Delta_1}) &= -0,20522 + 5,1487\bar{u} - 3,80950\bar{u}^2 \\ \Delta_2(\bar{x}_{\Delta_2}) &= 1,0822 - 5,57840\bar{u} + 4,08710\bar{u}^2 \\ \Delta_3(\bar{x}_{\Delta_3}) &= -0,33528 + 1,4585\bar{u} - 1,0569\bar{u}^2, \end{aligned}$$

e, utilizando equação (6.31), a equação característica do modelo será

$$\begin{aligned} \lambda^3 - (-0,20522 + 5,1487\bar{u} - 3,80950\bar{u}^2)\lambda^2 - \\ (1,0822 - 5,57840\bar{u} - 4,08410\bar{u}^2)\lambda - \\ (-0,33528 + 1,4585\bar{u} - 1,0569\bar{u}^2) &= 0. \end{aligned} \quad (7.22)$$

4. Localização dos autovalores para cada estado estacionário da saída.

A partir da equação característica do modelo, equação (7.22), os autovalores associados a cada ponto de operação podem ser determinados por procedimentos numéricos. A Figura 7.17 apresenta, no plano z , os autovalores calculados para cada estado estacionário da saída determinado pelas raízes da equação (7.21).

5. Verifica-se na Figura 7.17 que, para diversos pontos de operação, pelo menos um autovalor está no semiplano esquerdo, ENTÃO
6. existe um forte indício de que o sistema possui ordem sobredimensionada.
7. Sugere-se reduzir a ordem do modelo.

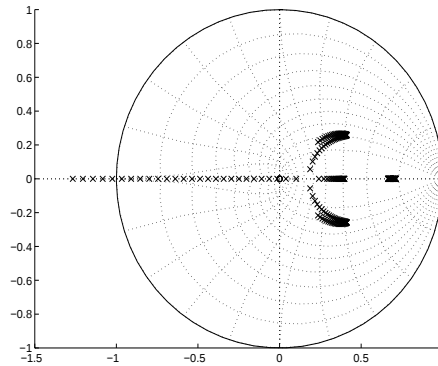


Figura 7.17: Autovalores associados aos estados estacionários da saída do modelo *mp1533* para a Válvula de Controle.

11. Representar graficamente os estados estacionários da saída para cada valor de entrada $\bar{u}$, identificadas quanto à estabilidade.
A partir da equação (7.21) determinam-se os estados estacionários da saída para cada entrada $\bar{u}$ avaliando os autovalores pela equação (7.22). A Figura 7.18 apresenta os estados estacionários identificados quanto à estabilidade.
12. O modelo possui apenas um estado estacionário na saída, $\bar{y}$ para cada entrada $\bar{u}$. ENTÃO
13. a posição dos autovalores é analisada.
14. Pode-se observar na Figura 7.18 que, para valores de $\bar{u}$ próximos de 0, o modelo possui autovalores fora do círculo unitário, ENTÃO
16. existem autovalores fora do círculo unitário para entradas próximas de 0, e esta não é uma característica observada na válvula de controle; ENTÃO
17. o modelo não pode ser considerado válido para representar o sistema para entradas próximas de 0.

Note-se que o procedimento aplicado ao modelo *mp1433* mostrou existir um forte indício de ordem sobredimensionada. Outro problema é a existência de autovalores fora do círculo unitário para entradas próximas a 0, o que invalida o modelo para operar nesta região. Essa característica não foi detectada no

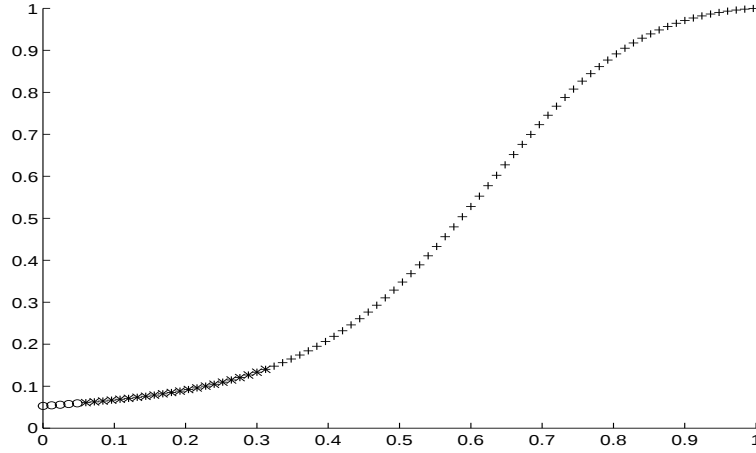


Figura 7.18: Estados estacionários da saída do modelo *mp1533* em função da entrada $\bar{u}$, obtidas a partir da equação (7.21). Eixo- x é $\bar{u}$ e eixo- y é $\bar{y}$. (*) representam autovalores reais dentro do círculo unitário, (o) autovalores fora do círculo unitário e (+) autovalores complexos dentro do círculo unitário. Posição dos autovalores determinada pela equação (7.22).

procedimento de validação convencional. Esse fato é justificado nas massas de dados usadas para validação, em nenhum instante o sistema foi excitado com entradas próximas de 0.

7.3.2 Modelo Racional *mr732*

A Equação (7.23) apresenta o modelo racional obtido a partir dos dados de identificação. A seleção de estrutura foi feita a partir dos algoritmos de seleção de estrutura ERR e da análise dos coeficientes de agrupamentos. O modelo possui sete termos de processo e os parâmetros foram estimados usando 10 termos lineares de ruído, com 4 iterações do algoritmo de mínimos quadrados estendidos.

$$y(k) = \frac{1,245y(k-1) - 0,431y(k-2) + 0,1863u(k-2)^2}{1 - 0,2525u(k-2) + 0,1824u(k-2)^2} - \frac{0,07424u(k-2)^3 + 0,00653u(k-1)}{1 - 0,2525u(k-2) + 0,1824u(k-2)^2}. \quad (7.23)$$

Deve-se notar que o modelo racional possui ordem uma unidade menor que o modelo polinomial. Diminuição da ordem do modelo foi sugerida pela análise

do modelo polinomial. A seguir é apresentada a análise usando o algoritmo 6.4.

1. O modelo *mr732* foi validado por métodos estatísticos e dinâmicos.
2. Cálculo das saídas estacionárias do modelo a partir da equação (7.23).

A partir da equação (7.23) podem ser identificados os seguintes agrupamentos de termos, Ω_y^α , Ω_u^α , $\Omega_{u_2}^\alpha$, $\Omega_{u_3}^\alpha$, Ω_u^β e $\Omega_{u_2}^\beta$ cujos coeficientes de agrupamentos são $\Sigma_y^\alpha = 0,814$, $\Sigma_u^\alpha = 0,00653$, $\Sigma_{u_2}^\alpha = 0,1863$, $\Sigma_{u_3}^\alpha = -0,07424$, $\Sigma_u^\beta = -0,2525$ e $\Sigma_{u_2}^\beta = 0,1824$. Então, a partir da equação (7.23), a saída em estado estacionário do modelo *mp1533* pode ser determinada por

$$\bar{y} = \frac{0,00653\bar{u} + 0,1863\bar{u}^2 - 0,07424\bar{u}^3}{0,1881 - 0,2525\bar{u} + 0,1824\bar{u}^2} \quad (7.24)$$

3. Cálculo dos autovalores para cada ponto de operação.

Os seguintes *agrupamentos-d* podem ser identificados na equação (7.23), a saber: $\Omega_{y_1}^\alpha$ e $\Omega_{y_2}^\alpha$ cujos *coeficientes-d* são: $\Sigma_{y_1}^\alpha = 1,245$ e $\Sigma_{y_2}^\alpha = -0,431$. Então, a partir da equação (6.61), as seguintes expressões para os coeficientes da equação característica do modelo podem ser obtidas:

$$\begin{aligned} \Delta_1(\bar{x}_{\Delta_{1_i}}) &= \frac{1,245}{1 - 0,2525\bar{u} + 0,1824\bar{u}^2} \\ \Delta_2(\bar{x}_{\Delta_{2_i}}) &= \frac{-0,431}{1 - 0,2525\bar{u} + 0,1824\bar{u}^2} \end{aligned}$$

e, utilizando a equação (6.31), a equação característica do modelo será:

$$\lambda^2 - \left(\frac{1,245}{1 - 0,2525\bar{u} + 0,1824\bar{u}^2} \right) \lambda - \left(\frac{-0,431}{1 - 0,2525\bar{u} + 0,1824\bar{u}^2} \right) = 0. \quad (7.25)$$

4. Localização dos autovalores para cada estado estacionário da saída.

A partir da equação característica do modelo, equação (7.25), os autovalores associados a cada ponto de operação podem ser determinados por procedimentos numéricos. A Figura 7.19 apresenta, no plano z , os autovalores calculados para cada estado estacionário da saída determinado pelas raízes da equação (7.24).

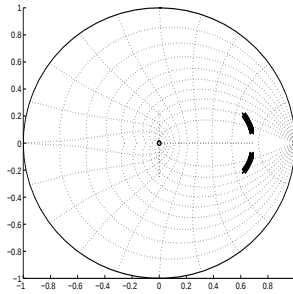


Figura 7.19: Autovalores associados a estados estacionários da saída do modelo *mr732* para a Válvula de Controle.

5. Verifica-se na Figura 7.19 que o modelo não possui autovalores no semi-plano esquerdo, qualquer que seja o ponto de operação, ENTÃO
9. não existe evidência de problemas com a ordem do modelo.
11. Representar graficamente os estados estacionários da saída para cada valor de entrada $\bar{u}$, identificadas quanto à estabilidade.

A partir da equação (7.24) determinam-se os estados estacionários da saída para cada entrada $\bar{u}$ avaliando os autovalores pela equação (7.25). A Figura 7.20 apresenta os estados estacionários da saída identificados quanto à estabilidade.
12. O modelo possui apenas um estado estacionário na saída.
13. A posição dos autovalores é verificada.
14. Observa-se que todos autovalores estão dentro do círculo unitário e no semiplano esquerdo, ENTÃO
15. O modelo é considerado válido para trabalhar em toda a faixa analisada.

Como foi observado, o procedimento de análise aplicado ao modelo *mr732* não detectou nenhum problema com este modelo. Sugere ainda que este modelo é mais adequado para aproximar as características da válvula de controle que o polinomial *mp1533*.

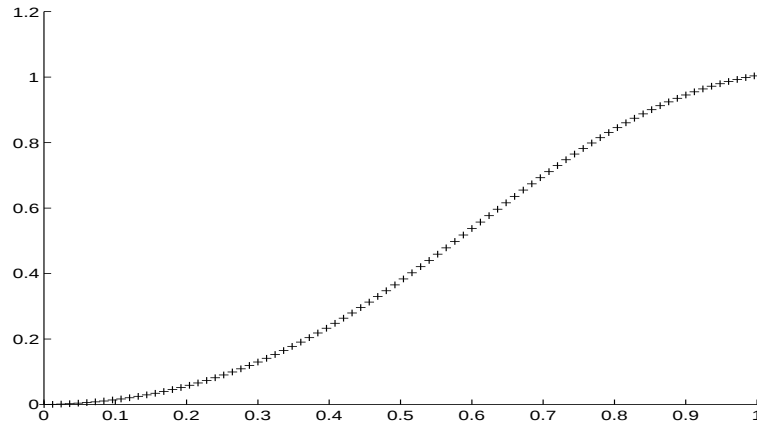


Figura 7.20: Estados estacionários da saída do modelo *nl391* em função da entrada $\bar{u}$, obtidos a partir da equação (7.24). (–) representam autovalores reais dentro do círculo unitário, (o) autovalores fora do círculo unitário e (+) autovalores complexos dentro do círculo unitário. Posição dos autovalores determinada pela equação (7.25).

7.3.3 Comparando os Modelos

A exemplo do que foi feito para o Processo Térmico I, nesta seção as características dos modelos da válvula de controle serão discutidas. Será apresentada a predição livre, a função constante de tempo e a relação entre entrada e saída em estado estacionário.

Predição Livre dos Modelos

A Figura (7.21) apresenta trechos da predição livre dos modelos analisados, racional e polinomial, para um trecho da massa de dados de validação. No trecho observado, verifica-se um ganho ligeiramente superior do modelo racional em relação ao polinomial. De uma maneira geral, pode-se afirmar que o polinomial se ajusta melhor ao comportamento observado nos dados de validação. No trecho em questão, o erro médio quadrático para o modelo polinomial foi de $e_p = 0,0013$ e para o racional de $e_r = 0,0020$.

Relações Estáticas dos Modelos da Válvula de Controle

A Figura 7.22 apresenta as relações entre saída e entrada estacionárias para os modelos racional e polinomial da válvula de controle, além dos dados estacionários obtidos diretamente na mesma válvula (Jácome, 1996).

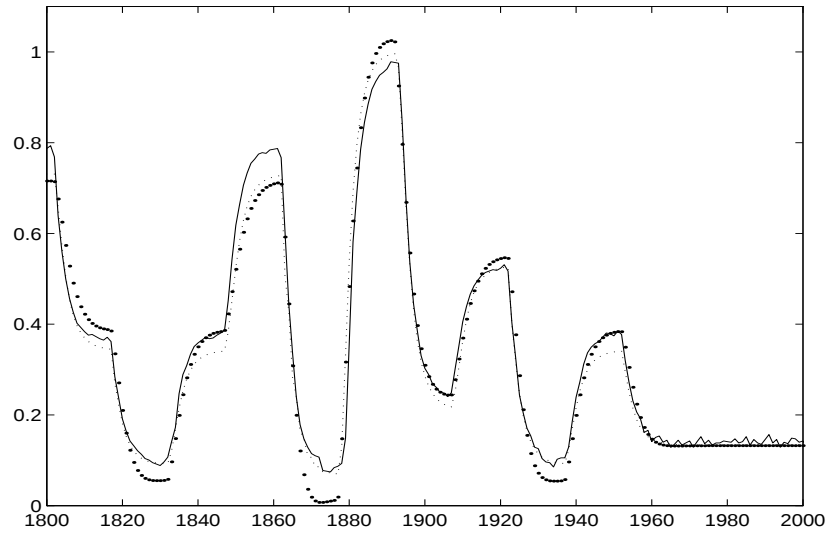


Figura 7.21: Predição livre dos modelos racional e polinomial da válvula de controle. Eixo- x são as amostras e eixo- y tem amplitude do sinal de saída em pu. (—) Saída do sistema, (---) saída do modelo racional e (···) saída do modelo polinomial.

Observa-se que a principal diferença entre o modelo racional e o polinomial está na faixa de operação com entradas próximas de zero. Essa diferença se justifica, pois na estrutura do modelo racional não existem termos independentes, o que impossibilita ao modelo reproduzir um comportamento em que na saída há um valor diferente de zero para entradas nulas. Fisicamente esse fato pode ser entendido como existência de vazão na saída da válvula mesmo com sinal de controle nulo.

Deve-se notar que nos dados obtidos na válvula de controle, para entradas próximas de zero, não existe vazão na saída da válvula. Esta só aparece para valores de entrada próximos de 0,08. Esse fenômeno pode ser entendido como existência de valor limiar para o comando da válvula, denominado “*threshold*” em (Doebelin, 1990). Note-se que esse fenômeno foi representado pelo modelo polinomial como saída estacionária instável. O modelo racional ajustou a curva iniciando do zero. Então reproduz o comportamento de saídas nulas para entradas $\bar{u} < 0,08$, porém comete um erro significativo para entradas entre $0,08 < \bar{u} < 0,28$.

De maneira geral pode-se afirmar que os dois modelos analisados não conseguiram reproduzir a característica de existência de valor limiar na válvula de controle.

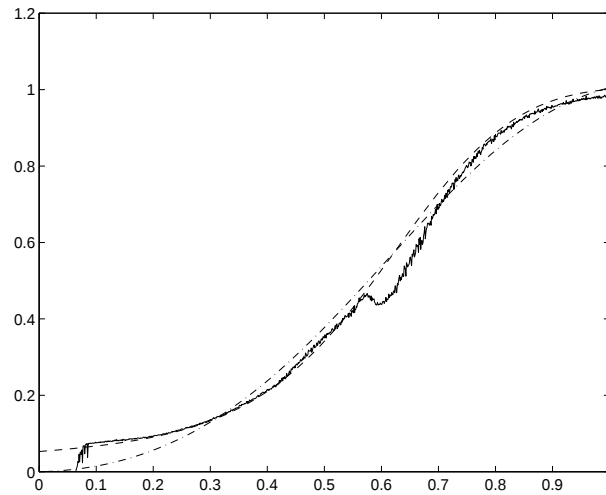


Figura 7.22: Relações estacionárias entre entrada e saída dos modelos da válvula de controle. Eixo- x é $\bar{u}$ e eixo- y é $\bar{y}$. (Tracejado) modelo polinomial, (traço-ponto) modelo racional e (linha contínua) sistema original.

Análise das Constantes de Tempo a partir dos Modelos da Válvula de Controle

O modelo polinomial da válvula de controle, representado pela equação (7.20) é de terceira ordem, portanto terá três autovalores associados a cada ponto de operação, porém será desconsiderado o autovalor que se encontra à esquerda do plano discreto z . Já o modelo racional, eq. (7.23) é de segunda ordem, portanto terá dois autovalores.

Para comparação entre os modelos utilizar-se-á o somatório das constantes de tempo de cada modelo estudado. Os resultados estão apresentados na Figura 7.23. Mais uma vez, informação *a priori* da constante de tempo do sistema não está disponível. Porém se o somatório das constantes de tempo dos modelos for comparado, observa-se que ambos possuem comportamentos equivalentes. Os resultados apresentados na Figura 7.23 indicam para uma constante de tempo do sistema não variando com o ponto de operação, com valor em torno de 1 seg. Uma vez que estes modelos se ajustam bem aos dados, ou seja, são dinamicamente válidos, a Figura 7.23 pode ser considerada uma boa indicação do comportamento da constante de tempo do sistema original.

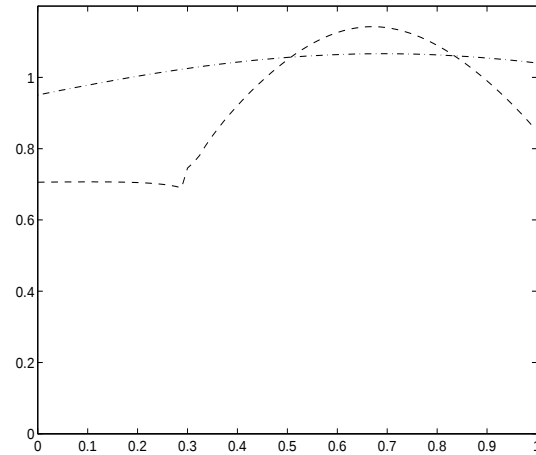


Figura 7.23: Funções de constante de tempo para os modelo da válvula de controle. Eixo- x é $\bar{u}$ e o eixo- y são as constantes de tempo em segundos. (Tracejado) modelo polinomial e (traço-ponto) modelo racional.

7.4 Comentários Finais

Os resultados apresentados nesta seção mostram que o Algoritmo 6.4 pode desempenhar um importante papel na análise e validação de modelos NARMAX racionais e polinomiais. Características dos modelos, que em geral não podem ser observadas pela validação estatística nem pela predição livre (validação dinâmica clássica), são detectadas pela execução do referido algoritmo.

Um fato importante diz respeito à ordem do modelo. Nos casos estudados observou-se que autovalores do modelo no semiplano discreto esquerdo, sobre o eixo real, é um indicativo da possibilidade de reduzir a ordem deste modelo. Naturalmente a redução da ordem deve ser acompanhada de nova escolha de estrutura. O modelo de terceira ordem *nl391*, do Processo Térmico I, possui um autovalor à esquerda do z . O modelo *nl251*, de segunda ordem, se mostrou com melhor desempenho na representação do sistema original. O mesmo ocorreu para os modelos da válvula de controle. O modelo polinomial de *mp1533* de terceira ordem possui um autovalor sempre à esquerda do plano z . O modelo racional *mr732* de segunda ordem aproxima-se bem das características do sistema original.

Outra aplicação do Algoritmo 6.4 é a possibilidade de determinar regiões de validade para os modelos. Por exemplo, através desse algoritmo ficou demonstrado que o modelo *nl391* não pode ser usado para representar o comportamento do Processo Térmico I para entradas próximas de 0. Isso ocorre pois, para estes valores de entrada o modelo possui dois estados estacionários na

saída, fato não observado no sistema original. No caso da válvula de controle, observou-se que o modelo *mp1533* possui estado estacionário instável na saída para entradas próximas de 0. Esse fato torna desaconselhável a utilização desse modelo nessa região de operação.

Observou-se também a mudança de comportamento do modelo *nl391*, verificado pelos seus autovalores para entradas $\bar{u} > 25$. Essa mudança caracterizada por autovalores passando de reais para complexos conjugados explica por que esse modelo não se ajusta bem aos dados nessa faixa de operação. Tal mudança de comportamento não foi observada nos modelos *nl251* e *mr03f5*.

Através do algoritmo proposto, pode-se também estimar características estáticas não conhecidas do sistema. Entre estas destaca-se o comportamento da constante de tempo. No caso do Processo Térmico II, observou-se que existe uma forte indicação de constante de tempo com pouca variação em função do ponto de operação. Isso foi comprovado pela análise das funções constantes de tempo de cada modelo analisado. Ambos os modelos possuem constante de tempo com mesma ordem de grandeza. No modelo polinomial a constante de tempo tem uma pequena queda com a entrada, e o racional uma elevação. Esse fato sugere um valor médio constante. Essa observação e o conhecimento da função estática de ganho permitiram a obtenção do modelo de Hammerstein. O comportamento desse, cuja constante de tempo é constante, aproximou-se bem do comportamento observado nos dados originais.

Capítulo 8

Uso de Informação a *Priori* na Estimação de Parâmetros

Várias técnicas vêm sendo usadas para estimar parâmetros de modelos NARMAX polinomial (Billings et al., 1988; Chen et al., 1989) e NARMAX racional (Zhu e Billings, 1991; Zhu e Billings, 1993; Corrêa et al., 2000). Basicamente todas as técnicas citadas utilizam alguma variação do método dos mínimos quadrados. A principal vantagem de se utilizar tal método é a possibilidade de combinar estimação de parâmetros com escolha de estrutura. No entanto, a utilização dos mínimos quadrados, por não trabalhar com restrições, não permite incorporar conhecimento a *priori* na estimação de parâmetros.

Neste capítulo, o Algoritmo 6.3 já apresentado no Capítulo 6 é utilizado para incorporar conhecimento a *priori* na identificação de diferentes sistemas. São três sistemas simulados, sendo um teórico e dois baseados em modelos físicos de sistemas reais, além de um caso real. Em todos os casos, o desempenho de modelos obtidos com parâmetros estimados por mínimos quadrados é comparado com os modelos obtidos com uso de informação a *priori* na estimação de parâmetros.

O caso teórico consiste num modelo proposto em (Haber e Unbehauen, 1990), que possui ganho constante em toda a faixa de operação e constante de tempo que varia com a entrada segundo uma equação de reta. Os casos “reais” que foram simulados são modelos de um Reator Tanque Agitado Contínuo e de um tanque de Neutralização de pH. O caso real é a identificação de um Conversor CC-CC Buck. Para estimar parâmetros com restrições é utilizado o Algoritmo Elipsóide (Dziuban et al., 1985).

Este capítulo é organizado como se segue. Na seção 8.1 o Algoritmo Elipsóide é apresentado. A seguir, nas seções 8.2 a 8.5 são discutidos os resultados da utilização do algoritmo 6.3 para o caso teórico simulado, o Reator

Tanque Continuamente Misturado, o tanque de Neutralização de pH e o Conversor CC-CC Buck. Por último, na seção 8.6 apresentam-se comentários a respeito dos resultados.

8.1 O Algoritmo Elipsóide

Nesta seção será apresentado o algoritmo elipsóide (AE) de programação não-linear para estimação de parâmetros de modelos NARX racional e polinomial. Uma das vantagens da utilização de métodos de otimização não-linear com restrições em relação ao método dos mínimos quadrados estendido é a possibilidade de se introduzir conhecimento *a priori* na estimação de parâmetros. Outra vantagem é a possibilidade de se aplicar esses métodos em representações não-lineares nos parâmetros.

A seguir será apresentado o algoritmo elipsóide básico de otimização não-linear. Detalhes deste algoritmo, assim como uma descrição mais detalhada de suas características, pode ser visto em (Dziuban et al., 1985; Kim et al., 1994).

O algoritmo elipsóide é um método simples para resolver problemas não lineares da seguinte forma (Dziuban et al., 1985):

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f_o(x) \\ &\text{sujeito a} && x \in S = \{x \in \mathbb{R}^n | f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\} \quad , \end{aligned} \tag{8.1}$$

sendo f_i funções convexas localmente.

Algoritmo do Elipsóide

Passo 0 Selecione x^0 e uma matriz definida positiva $\mathbf{Q}_0$, tal que o elipsóide

$$E_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - x^0)^T \mathbf{Q}_0^{-1} (x - x^0) \leq 1\}, \quad (8.2)$$

contenha um ponto x^* ótimo para a equação (8.1).

Fazer $k = 0$.

Passo 1 Tomar a função de restrição f_v para a qual $f_v(x^k) > 0$, ou a função objetivo se $f_i(x^k) \leq 0$, $i = 1, \dots, m$.

Calcular o gradiente g_k de f_0 no ponto x^k . Se $g_k = 0$, PARE porque x^k é um ponto de mínimo. Calcular $d = -\mathbf{Q}_k g_k / \sqrt{g_k^T \mathbf{Q}_k g_k}$ se $g_k^T \mathbf{Q}_k g_k > 0$, senão PARE.

Passo 2 Tomar $x^{k+1} = x^k + \frac{1}{n+1}d$ e $\mathbf{Q}_{k+1} = (n^2/(n^2-1))(\mathbf{Q}_k - (2/(n+1))dd^T)$

Retorne ao *Passo 1* fazendo $k = k + 1$.

Partindo de E_0 , o algoritmo gera uma seqüência de elipsóides sucessivamente menores, tal que, se E_k indica o elipsóide corrente com matriz $\mathbf{Q}_k$ e centro x^k , o próximo elipsóide terá centro x^{k+1} e matriz $\mathbf{Q}_{k+1}$ dado pelo Passo 2. A razão q_n entre o volume de E_{k+1} para o volume de E_k é dada por (Dziuban et al., 1985):

$$q_n = \frac{n}{n+1} \left(\frac{n^2}{n^2-1} \right)^{(n-1)/2} < 1. \quad (8.3)$$

Geometricamente, o elipsóide E_{k+1} é gerado usando o gradiente g_k do Passo 1, construindo o hiperplano $g_k^T(x - x^k) = 0$ passando através do centro x^k de E_k . Quando cada f_i é convexa, então x^* pertencerá ao meio-espaço

$$H_k = \{x \mid g_k^T(x - x^k) \leq 0\} \quad (8.4)$$

e $x^* \in E_k \cap H_k$. O elipsóide E_{k+1} definido pela fórmula de atualização no Passo 2 é o único elipsóide de mínimo volume contendo $E_k \cap H_k$ e assim $x^* \in E_{k+1}$.

O Método do Elipsóide não admite restrições de igualdade. Esse problema é contornado com a utilização de duas restrições de desigualdade, definindo a igualdade dentro de um intervalo $\pm\epsilon$.

8.2 Caso Teórico Simulado

Nesta seção, o Algoritmo 6.3 para incorporar informação *a priori* na estimação de parâmetros, é utilizado na identificação a partir de dados gerados em um sistema teórico simulado. Os resultados obtidos são comparados com o Estimador de Mínimos Quadrados (EMQ). Investiga-se também o efeito de ruído aditivo nos parâmetros estimados.

O sistema teórico simulado, é um sistema de primeira ordem representado por (Haber e Unbehauen, 1990):

$$[1 + \alpha u(t)] \frac{dy}{dt} + y(t) - u(t) = 0, \quad (8.5)$$

ou seja, um sistema cujo ganho é constante e a constante de tempo varia com o ponto de operação na seguinte forma $\tau(u) = 1 + \alpha u$. A Equação (8.5) foi simulada com $\alpha = 0,5$, gerando massas de dados para identificação e para validação.

A partir da massa de dados gerada para identificação, deu-se origem a mais duas massas de dados, sendo que nestas duas últimas foi adicionado ruído, simulando erro de medição. Então, para o processo de estimação de parâmetros será usado: (i) Massa de dados *dad_ctv1* - sinal original $y(k)$, sem ruído acrescido; (ii) Massa de dados *dad_ctv2* - sinal com ruído adicionado $y_2(k) = y(k) + \epsilon$, sendo que ϵ possui distribuição gaussiana de média zero e variância $\sigma^2 = 0,01$; (iii) Massa de dados *dad_ctv3* - sinal com ruído adicionado $y_3(k) = y(k) + \epsilon$, sendo que ϵ possui distribuição gaussiana de média zero e variância $\sigma^2 = 0,05$. Desta forma, verificou-se o efeito do ruído na estimação de parâmetros. Trechos dos sinais usados na identificação estão apresentados na Figura 8.1. Como pode ser observado, a entrada possui amplitude aleatória, excursionando o sistema em toda a sua faixa de operação com duração de cada patamar também aleatório. O tempo de amostragem usado foi de $T_s = 0,1$ s e a massa de dados total possui 2002 amostras.

Será considerado que a única informação *a priori* do sistema é o ganho constante, não variando com o ponto de operação. Porém, para verificar a eficiência dos métodos usados na estimação de parâmetros, será observado como a constante de tempo do modelo se comporta com o ponto de operação.

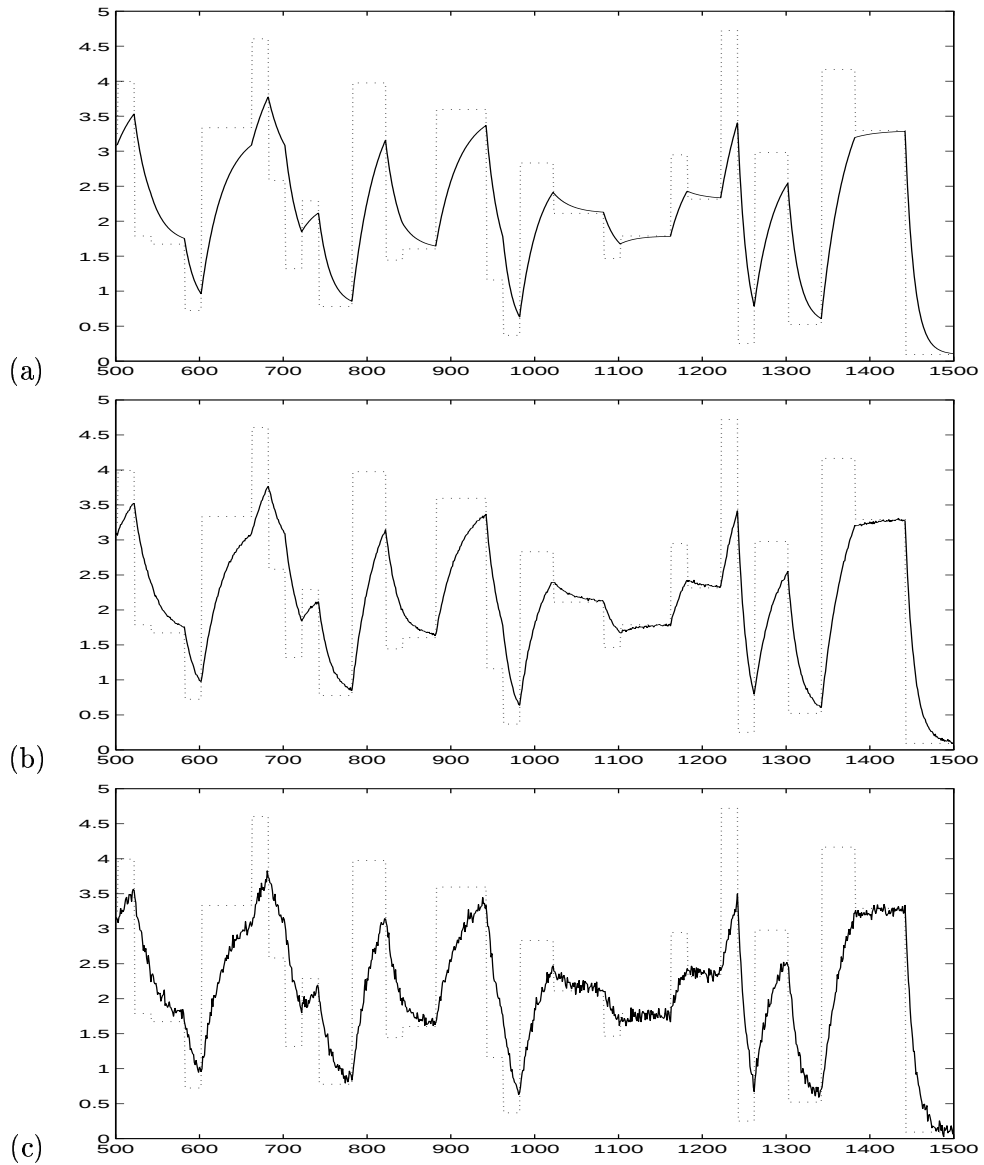


Figura 8.1: Parte dos dados de identificação simulados a partir da equação (8.5). Eixo- x são as amostras e eixo- y amplitude, (-) Saída $y(k)$ e (...) entrada $u(k)$. (a) Dados *dad_ctv1*, (b) dados *dad_ctv2* e (c) dados *dad_ctv3*.

Como função de custo a ser minimizada pelo AE, será usada a mesma função minimizada pelo EMQ, ou seja

$$J_{MQ} = \|\mathbf{y} - \Psi\hat{\Theta}\|^2, \quad (8.6)$$

sendo Ψ a matriz dos regressores, contendo termos de ruído, $\hat{\Theta}$ os parâmetros estimados e $\mathbf{y}$ o vetor contendo os dados medidos na saída do sistema.

8.2.1 Modelo Polinomial

O Algoritmo 6.3 é utilizado para obter um modelo NARMAX polinomial a partir dos dados apresentados na Figura 8.1.

Aplicação do Algoritmo 6.3 na Identificação do Modelo NARMAX Polinomial

1. Não se utilizou nenhuma informação a priori para seleção dos termos candidatos. Procurou-se obter um modelo de ordem $n_y = 1$ e grau de não-linearidade $\ell = 2$.
2. Seleção de estrutura pelo algoritmo ERR. A estrutura selecionada foi

$$\begin{aligned} y(k) = & \theta_1 y(k-1) + \theta_2 u(k-1) + \theta_3 y(k-1)u(k-1) + \\ & \theta_5 u(k-1)^2 + e(k), \end{aligned} \quad (8.7)$$

sendo que $\Sigma_{y_1} = \theta_1$, $\Sigma_u = \theta_2$, $\Sigma_{y_1 u} = \theta_3$ e $\Sigma_{u^2} = \theta_5$. Note-se que há apenas um termo de cada *agrupamento de termos*, então cada *coeficiente de agrupamento* corresponde a apenas um parâmetro do modelo.

3. Na estrutura do modelo apresentada pela equação (8.7) não aparece agrupamento de termos Ω_{y^p} com $p > 1$, o que significa que o modelo possui apenas um estado estacionário na saída $\bar{y}$ para cada entrada $\bar{u}$, ENTÃO
4. a partir da estrutura selecionada, a função que relaciona $\bar{y} = f(\bar{u})$ pode ser escrita como

$$\bar{y} = \frac{\theta_2 \bar{u} + \theta_5 \bar{u}^2}{(1 - \theta_1) - \theta_3 \bar{u}}, \quad (8.8)$$

ou ainda, o ganho em estado estacionário escrito como

$$\frac{\bar{y}}{\bar{u}} = \frac{\theta_2 + \theta_5 \bar{u}}{(1 - \theta_1) - \theta_3 \bar{u}}, \quad (8.9)$$

não sendo usados os *coeficientes de agrupamentos*, pois, conforme mencionado, cada coeficiente corresponde a apenas um parâmetro no modelo.

5. Estimar os coeficientes da equação (8.9) para que o modelo reproduza a característica conhecida do sistema. Neste caso, a informação conhecida é o ganho constante igual à unidade. Para que o modelo possua também ganho constante igual à unidade tem-se que $\theta_2 = (1 - \theta_1)$ e $\theta_5 = -\theta_3$.
6. Escrever as equações que relacionam os *coeficientes de agrupamentos* em função dos parâmetros da equação (8.7). Nesse caso, os parâmetros são iguais aos coeficientes; então pode ser escrito que

$$\begin{aligned} \theta_2 &= (1 - \theta_1) \\ \theta_5 &= -\theta_3. \end{aligned} \quad (8.10)$$

7. Tomar as equações (8.10) como restrições. Uma vez que o método do elipsóide não admite restrições de igualdade, será considerado que

$$\begin{aligned} -\epsilon &< a_2 - (1 - a_1) < \epsilon \\ -\epsilon &< a_5 + a_3 < \epsilon, \end{aligned} \quad (8.11)$$

sendo $\epsilon = 1 \times 10^{-4}$ a precisão requerida.

15. Estimar os parâmetros utilizando as restrições apresentadas em (8.11). Os parâmetros estimados, assim como a validação do modelo, serão discutidos a seguir.

A Tabela 8.1 apresenta os valores dos parâmetros estimados via EMQ e AE, para cada massa de dados apresentada na Figura 8.1. As primeiras quatro linhas da tabela apresentam os valores estimados dos parâmetros da equação (8.7), e nas duas últimas tem-se o resultado das equações de restrições mostradas em (8.11).

Tabela 8.1: Parâmetros estimados do modelo NARMAX polinomial via EMQ e EA a partir das massas de dados *dad_ctv1*, *dad_ctv2* e *dad_ctv3*.

	EMQ			Algoritmo Elipsóide		
	<i>dad_ctv1</i>	<i>dad_ctv2</i>	<i>dad_ctv3</i>	<i>dad_ctv1</i>	<i>dad_ctv2</i>	<i>dad_ctv3</i>
$\hat{\theta}_1$	0,9244	0,9243	0,9191	0,9235	0,9237	0,9180
$\hat{\theta}_2$	0,0758	0,0761	0,0832	0,0765	0,0763	0,0820
$\hat{\theta}_3$	0,0101	0,0100	0,0099	0,0107	0,0106	0,0116
$\hat{\theta}_5$	-0,0103	-0,0103	-0,0111	-0,0107	-0,0106	-0,0116
r_1	0,0002	0,0004	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000
r_2	-0,0002	-0,0003	-0,0012	0,0000	0,0000	0,0000

Sendo $r_1 = \hat{\theta}_2 - (1 - \hat{\theta}_1)$ e $r_2 = \hat{\theta}_5 + \hat{\theta}_3$

Pode-se observar na Tabela 8.1 que os valores dos parâmetros estimados pelos dois métodos apresentam a mesma ordem de grandeza, com diferenças apenas na terceira casa decimal. Tal fato se justifica, pois os dois métodos minimizam a mesma função custo, só que, devido às restrições impostas ao método AE, este garante que o modelo identificado tenha ganho em estado estacionário igual ao do sistema simulado.

Com o objetivo de comparar os modelos obtidos pelo EMQ e AE, utilizou-se a equação da constante de tempo de cada modelo. Considerando a estrutura da equação (8.7), e o desenvolvimento apresentado na seção 6.2, a constante de tempo é dada por

$$\tau(\bar{u}) = \frac{-T_s}{\ln(\theta_1 + \theta_3 \bar{u})}. \quad (8.12)$$

sendo T_s o tempo de amostragem.

A Figura 8.2 apresenta graficamente as funções de ganho e constante de tempo dos modelos com parâmetros estimados via EMQ e AE, assim como para o sistema simulado. Observe-se que a curva de ganho obtida com os parâmetros estimados pelo AE sobrepõem a curva do sistema simulado, fato que não ocorre para o caso do EMQ. No gráfico da constante de tempo em função do ponto de operação, observa-se que para as massas de dados *dad_ctv1* e *dad_ctv2* não se observam diferenças significativas com os parâmetros estimados pelo EMQ e ME. Já para a massa de dados *dad_ctv3*, verifica-se que os parâmetros estimados pelo AE resultaram em uma maior aproximação da curva de constante de tempo. Nota-se também que o ruído adicionado aos dados produziu efeitos similares nos dois métodos de estimação de parâmetros, embora não exista no AE nenhum tratamento especial à existência de ruído nos dados.

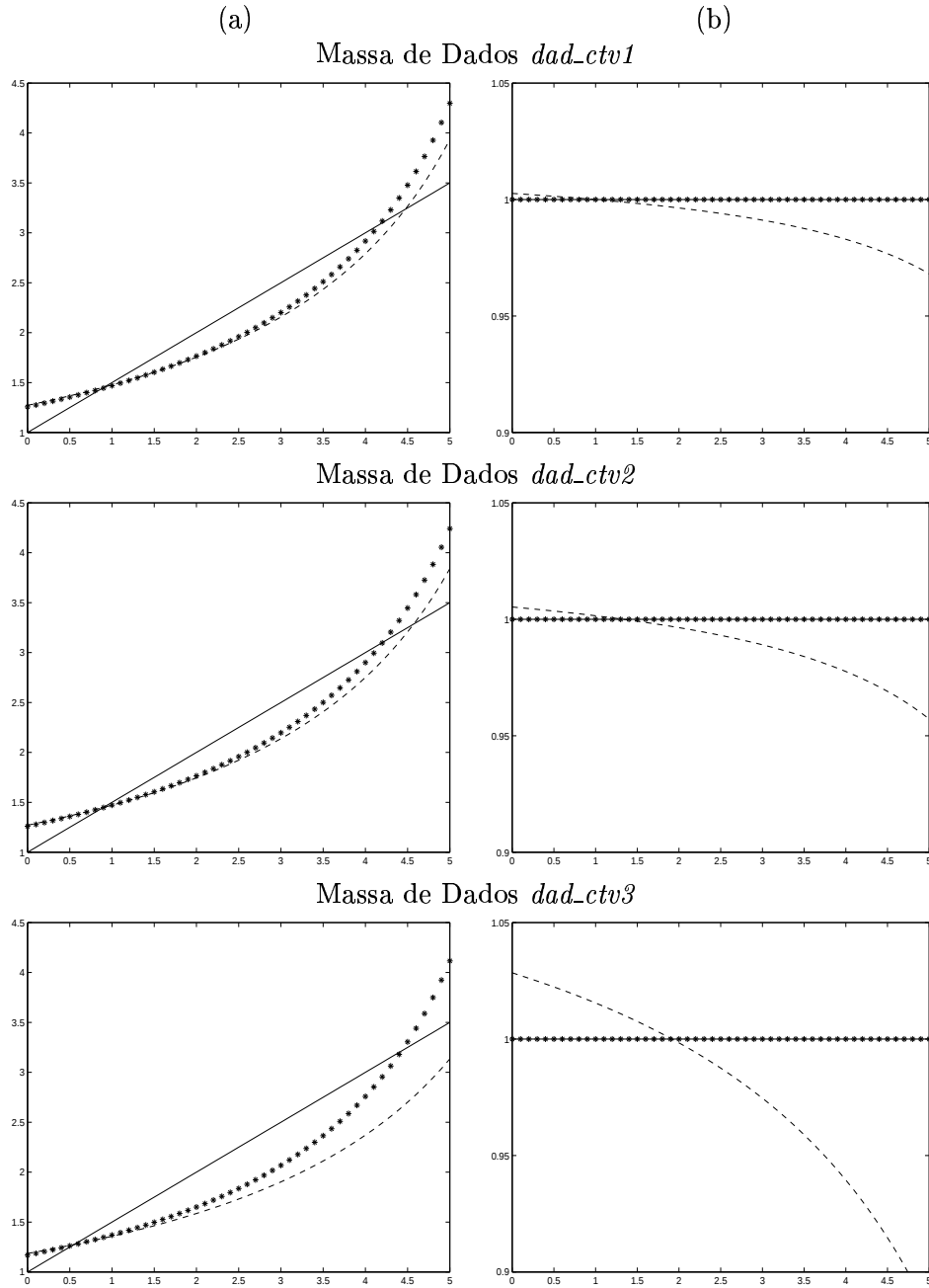


Figura 8.2: Funções da constante de tempo e ganho dos modelos NARMAX polinomiais obtidos a partir da simulação da eq. (8.5). Coluna (a) Curvas de Constante de tempo, eixo- x é $\bar{u}$ e eixo- y é τ em segundos. Coluna (b) curvas de ganho, eixo- x é $\bar{u}$ e eixo- y é $k(\bar{u})$. (—) Sistema simulado (**) modelos AE e (---) modelos EMQ.

8.2.2 Modelo Racional

Para o caso de modelos NARMAX racionais, a aplicação do método do elipsóide apresenta uma vantagem adicional. Essa vantagem reside na possibilidade de estimar os parâmetros sem a necessidade de aplicar a pseudo-linearização, conforme apresentado na seção 2.2. Dessa forma, a estimação de parâmetros utiliza forma original da representação racional.

A seguir o Algoritmo 6.3 é utilizado para obter um modelo NARMAX racional a partir dos dados apresentados na Figura 8.1.

Aplicação do Algoritmo 6.3 na Identificação do Modelo NARMAX Racional

1. Para facilitar a obtenção das expressões estacionárias, foram excluídos do conjunto de termos candidatos os *agrupamentos de termos* $\Omega_{y^p}^\alpha$ com $p > 1$ e $\Omega_{y^p}\beta$ com $p > 0$.
2. A partir do conjunto de termos candidatos, a estrutura selecionada pelo ERR foi

$$y(k) = \frac{\theta_{N_1}y(k-1) + \theta_{N_2}u(k-1)}{\theta_{D_0} + \theta_{D_2}u(k-1)} + \frac{\theta_{N_3}y(k-1)u(k-1) + \theta_{N_5}u(k-1)^2}{\theta_{D_0} + \theta_{D_2}u(k-1)} + e(k) \quad (8.13)$$

sendo que pode ser observado que $\Sigma_{y_1}^\alpha = \theta_{N_1}$, $\Sigma_u^\alpha = \theta_{N_2}$, $\Sigma_{y_1u}^\alpha = \theta_{N_3}$, $\Sigma_{u^2}^\alpha = \theta_{N_5}$, $b_0 = 1$ e $\Sigma_u^\beta = \theta_{D_2}$. Assim como para o modelo polinomial, no modelo racional cada agrupamento de termos tem apenas um termo.

3. A estrutura da equação (8.13) mostra que o modelo possui apenas um estado estacionário da saída para cada entrada, ENTÃO
4. a partir da estrutura selecionada é possível escrever que

$$\bar{y} = \frac{\theta_{N_2}\bar{u} + \theta_{N_5}\bar{u}^2}{(1 - \theta_{N_1}) + (\theta_{D_2} - \theta_{N_3})\bar{u}}, \quad (8.14)$$

como função estacionária e

$$K = \frac{y}{u} = \frac{\theta_{N_2} + \theta_{N_5} \bar{u}}{(1 - \theta_{N_1}) + (\theta_{D_2} - \theta_{N_3}) \bar{u}}, \quad (8.15)$$

como ganho em estado estacionário.

5. De forma a garantir que o modelo possui ganho constante igual à unidade, deve-se ter: $\theta_{N_2} = 1 - \theta_{N_1}$ e $\theta_{N_5} = \theta_{D_2} - \theta_{N_3}$.
6. Escrever equações que relacionam os *coeficientes de agrupamentos* em função dos parâmetros da equação (8.13). Neste caso, como os parâmetros são iguais aos coeficientes, então pode ser escrito que

$$\begin{aligned} \theta_{N_2} &= (1 - \theta_{N_1}) \\ \theta_{N_5} &= \theta_{D_2} - \theta_{N_3}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

7. Tomar (8.16) como restrições. Escrevendo as restrições de igualdade na forma de desigualdade, tem-se que:

$$\begin{aligned} -\epsilon &< \theta_{N_2} - (1 - \theta_{N_1}) < \epsilon \\ -\epsilon &< \theta_{N_5} - (\theta_{D_2} - \theta_{N_3}) < \epsilon \end{aligned} \quad (8.17)$$

sendo $\epsilon = 1 \times 10^{-4}$ a precisão requerida.

8. As equações são tomadas como restrições à estimação de parâmetros.
15. Estimar os parâmetros utilizando as restrições expressas por (8.17). Os parâmetros estimados, assim como a validação do modelo, serão discutidos a seguir.

A fim de comparar o procedimento apresentado acima, os parâmetros foram estimados pelo EMQ e AE. Para aplicar o método dos mínimos quadrados, a pseudo-linearização deve ser aplicada (Billings e Zhu, 1991). Nesse caso, a equação (8.13) é escrita na forma

$$\begin{aligned} \theta_{D_0} y(k) = & \theta_{N_1} y(k-1) + \theta_{N_2} u(k-1) + \theta_{N_3} y(k-1)u(k-1) + \\ & \theta_{N_5} u(k-1)^2 - \theta_{D_2} u(k-1)y(k), \end{aligned} \quad (8.18)$$

sendo que o erro $e(k)$ foi omitido. As consequências nos parâmetros estimados devido a esta pseudo-linearização foram analisadas em (Billings e Zhu, 1991). Então o Estimador de Mínimos Quadrados Extendidos (EMQ), minimizará a função custo representada pela equação (8.6).

A fim de utilizar o AE para estimar parâmetros, não é necessário aplicar a pseudo-linearização. Então, nesse caso, o objetivo de otimização será

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar} && \|\mathbf{y} - \frac{\Psi_N \hat{\Theta}_N}{\Psi_D \hat{\Theta}_D}\|^2 \\
& \text{sujeito a} && \theta_{N_2} - (1 - \theta_{N_1}) < \epsilon \\
& && -\theta_{N_2} + (1 - \theta_{N_1}) < -\epsilon \\
& && \theta_{N_5} - (\theta_{D_2} - \theta_{N_3}) < \epsilon \\
& && -\theta_{N_5} + (\theta_{D_2} - \theta_{N_3}) < -\epsilon \quad ,
\end{aligned} \tag{8.19}$$

sendo Ψ_N e Ψ_D as matrizes contendo, respectivamente, os regressores do numerador e denominador, $\hat{\Theta}_N$ e $\hat{\Theta}_D$ os vetores contendo os parâmetros estimados para o numerador e denominador.

A Tabela 8.2 apresenta os parâmetros estimados para o modelo racional usando EMQ e AE. Note-se que, diferente do observado para o caso NARX polinomial, no caso racional os dois métodos utilizados, EMQ e AE, estimaram parâmetros significativamente diferentes. Uma possível causa para isso será discutida adiante. Também se observa um maior efeito do ruído nos valores estimados.

Tabela 8.2: Parâmetros estimados do modelo NARMAX racional via EMQ e AE com as massas de dados *dad_ctv1*, *dad_ctv2* e *dad_ctv3*.

	Estimação por EMQ			Algoritmo Elipsóide		
	<i>dad_ctv1</i>	<i>dad_ctv2</i>	<i>dad_ctv3</i>	<i>dad_ctv1</i>	<i>dad_ctv2</i>	<i>dad_ctv3</i>
$\hat{\theta}_{N_1}$	0,9179	0,9179	0,9048	0,9066	0,9068	0,9040
$\hat{\theta}_{N_2}$	0,0836	0,0840	0,1065	0,0934	0,0932	0,0960
$\hat{\theta}_{N_3}$	0,2012	0,1725	0,4259	0,4186	0,4185	0,2984
$\hat{\theta}_{N_5}$	-0,0062	-0,0068	-0,0004	-0,0020	-0,0018	-0,0055
$\hat{\theta}_{D_2}$	0,1959	0,1666	0,4305	0,4167	0,4167	0,2929
r_1	0,0015	0,0019	0,0113	0,0000	0,0000	0,0000
r_2	-0,0009	-0,0009	-0,0050	-0,0001	0,0000	0,0000

Sendo $r_1 = \hat{\theta}_{N_2} - (1 - \hat{\theta}_{N_1})$ e $r_2 = \hat{\theta}_{N_5} - (\hat{\theta}_{D_2} - \hat{\theta}_{N_3})$

A partir da equação (8.13) a seguinte função constante de tempo para os modelos pode ser obtida

$$\tau = \frac{-T_s}{\ln \frac{(\theta_{N_1} + \theta_{N_3} \bar{u})}{1 - \theta_{D_2} \bar{u}}}. \quad (8.20)$$

A Figura 8.3 apresenta as curvas de ganho e constante de tempo obtidas a partir dos modelos NARMAX racionais. Note-se que, com os parâmetros estimados pelo AE, utilizando as massas de dados *dad_ctv1* e *dad_ctv2*, obtém-se uma precisa reprodução da curva original do ganho e da constante de tempo. Ressalta-se aqui que a função da constante de tempo é uma reta. A estimação de parâmetros com a massa de dados *dad_ctv3*, como observado, o EMQ produziu um resultado inferior ao AE, apesar de não existir nenhum tratamento para a presença de ruído nos dados.

Na Tabela 8.2 pode ser observado que existe diferença significativa quando se compara os parâmetros pelo EMQ e AE, como também quando se compara os mesmos estimados com massas de dados distintas. Conforme já citado, este fato não foi observado para os modelos NARMAX polinomiais, Tabela 8.1. Dois fatores podem ser considerados para explicar tal diferença, o primeiro seria o fato de se utilizar informação *a priori* no AE, porém, esta pode ser descartada por ter sido também utilizada para o caso do modelo polinomial. O segundo seria a pseudo-linearização aplicada na estimação de parâmetros pelo EMQ. Note que na equação (8.18) o parâmetro Θ_{D_2} passa para o numerador, o termo $u(k-1)$ multiplicado por $y(k)$. No caso do AE os parâmetros são estimados com a estrutura original da representação. Os efeitos da pseudo-linearização nos parâmetros estimados precisam ainda ser melhor investigados.

8.3 Modelo de um CSTR

Nesta seção serão apresentados modelos identificados a partir de dados gerados pela simulação de um modelo, baseado nas leis físicas, de um sistema real. Tal sistema refere-se a uma reação exotérmica de primeira ordem em um Reator Tanque Agitado Contínuo Misturado (CSTR). Esse sistema pode ser considerado, devido à sua curva estática, como um *benchmark* em identificação de sistemas. O modelo que será usado neste trabalho também foi usado em (Hernández e Arkun, 1992; Pottmann e Pearson, 1998)

A entrada do sistema é a temperatura da jaqueta de refrigeração e a saída, a conversão. O sistema é descrito pelas seguintes equações (Uppal et al., 1974):

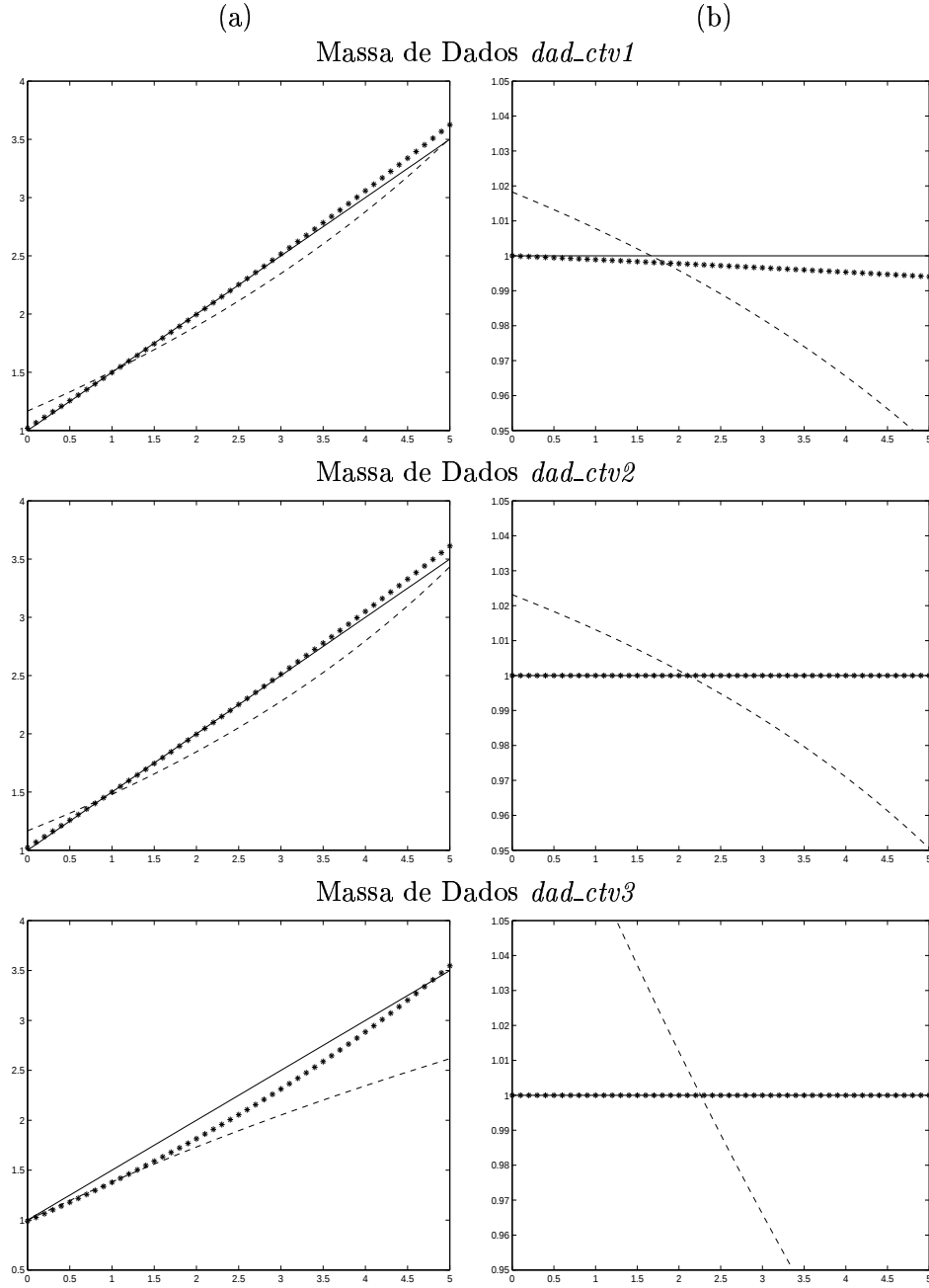


Figura 8.3: Função constante de tempo e ganho dos modelos NARMAX racionais obtidos a partir de dados gerados pela simulação da equação (8.5). Coluna (a) Funções Constante de tempo, eixo- x é $\bar{u}$ e eixo- y é τ em segundos. Coluna (b) funções ganho em estado estacionário, eixo- x é $\bar{u}$ e eixo- y é $k(\bar{u})$. (—) Sistema simulado (— —) modelos EMQ e (**) modelos AE.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1 + \text{Da}(1 - x_1) \exp\left(\frac{x_2}{1 + x_2/\gamma}\right), \\
\dot{x}_2 &= -x_2 + B\text{Da}(1 - x_1) \exp\left(\frac{x_2}{1 + x_2/\gamma}\right) + \beta(u - x_2), \\
y &= x_1,
\end{aligned} \tag{8.21}$$

sendo x_1 a conversão medida e x_2 a temperatura adimensional interna no reator. A entrada u é a temperatura do fluido na jaqueta de refrigeração, também adimensional. Para simulação os seguintes parâmetros foram usados: $\text{Da} = 0,072$, $\gamma = 20,0$, $B = 8,0$ and $\beta = 0,3$. Os dados usados para identificação estão apresentados na Figura 8.4.

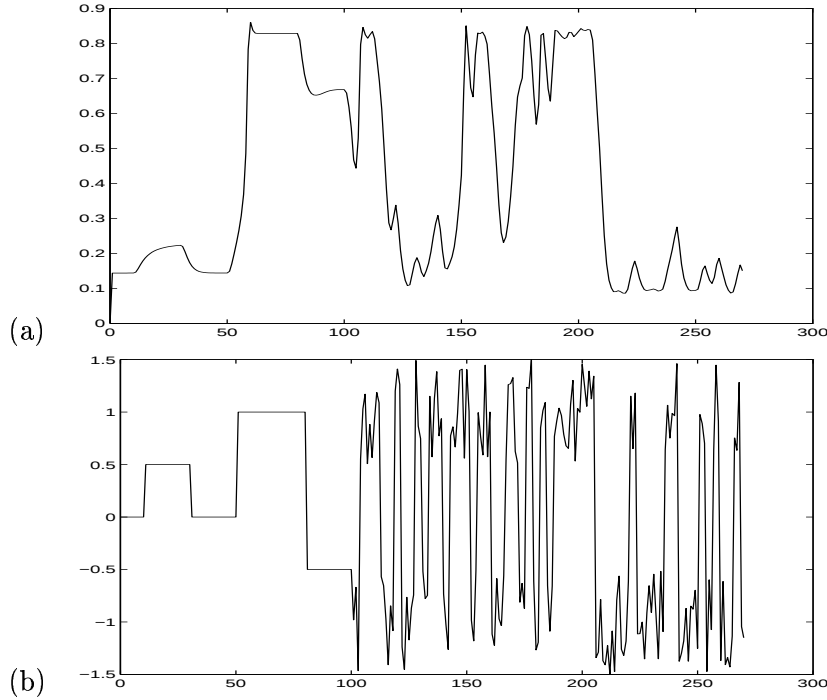


Figura 8.4: Dados de identificação (d_cstr.dat @) obtidos pela simulação do sistema CSTR através da equação (8.21) (a) saída $y(k)$ e (b) entrada $u(k)$, o eixo- x é o número das amostras.

Os seguintes modelos foram obtidos com estrutura selecionada pelo ERR e parâmetros estimados pelo EMQ:

$$\begin{aligned}
y(k) = & -0,4125 y(k-1) + 1,048 y(k-2) - \\
& -0,02363 u(k-1) - 10,05 y(k-1)^3 + \\
& + 2,223 y(k-3) y(k-1) - 0,02379 u(k-1) y(k-3) - \\
& - 9,938 y(k-2) y(k-1) - 0,4567 \times 10^{-2} u(k-2) u(k-1)^2 - \\
& - 0,2862 y(k-3) - 2,332 y(k-3) y(k-1)^2 + \\
& + 9,845 y(k-1)^2 + 10,59 y(k-2) y(k-1)^2 + \\
& + 0,05318 + 0,6047 \times 10^{-2} u(k-3) u(k-1) y(k-2) - \\
& - 0,6651 \times 10^{-2} u(k-3) u(k-1) + 0,3552 u(k-1) y(k-1) - \\
& - 0,2951 u(k-1) y(k-1)^2
\end{aligned} \tag{8.22}$$

como modelo polinomial, e

$$\begin{aligned}
y(k) = & \frac{1}{den} \times \{1,234 y(k-1) - 0,4106 y(k-2) + \\
& + 0,8145 \times 10^{-2} u(k-1) + 2,773 y(k-1)^3 + \\
& + 0,01744 - 3,373 y(k-1)^2 + \\
& + 0,5154 y(k-2)^2 - 0,3385 \times 10^{-2} u(k-3) + \\
& + 0,1152 \times 10^{-2} u(k-1) u(k-2) - 0,2223 y(k-2)^2\}
\end{aligned} \tag{8.23}$$

sendo

$$\begin{aligned}
den = & 1 - 3,333 y(k-1) \\
& + 2,915 y(k-1)^2 - 0,405 \times 10^{-2} u(k-3)
\end{aligned}$$

como modelo racional.

Para garantir que os modelos acima tivessem três estados estacionários na saída, para cada entrada, escolheu-se grau de não-linearidade $\ell = 3$. Em ambos, aparece o agrupamento de termos Ω_{y^3} possibilitando aproximação da curva estática conhecida do sistema identificado. A Figura 8.5 mostra as curvas estáticas obtidas pelos modelos (8.22), (8.23) e do sistema original.

Observa-se, na Figura 8.5, que a curva estática obtida a partir do modelo racional se ajusta melhor à curva original do que o modelo polinomial. Vale ressaltar que no processo de obtenção destes modelos a utilização de informação *a priori* se restringiu à escolha do grau de não-linearidade ℓ . O fato observado acima, parece ser um indicativo de que a representação racional é mais indicada pra representar este tipo de não-linearidade.

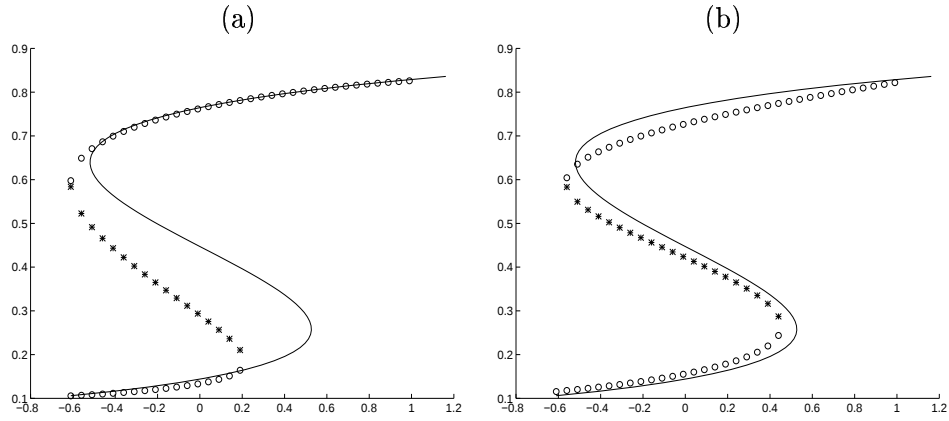


Figura 8.5: Curva estática obtida a partir dos modelos (a) polinomial e (b) racional para o sistema CSTR. Os círculos representam pontos estáveis (com autovalores dentro do círculo unitário) e os asteriscos representam pontos instáveis. A curva representada pela linha cheia foi obtida a partir do sistema original. Eixos- x é a entrada $\bar{u}$ e eixos- y saída $\bar{y}$.

Os resultados da validação dinâmica desses modelos serão apresentados na próxima seção. Esses resultados serão comparados com o modelo polinomial obtido a partir da utilização do Algoritmo 6.3.

8.3.1 Uso de Informação *a priori* na Estimação de Parâmetros do Modelo NARX Polinomial do CSTR

Como alternativa para melhorar a qualidade do modelo polinomial, será aplicado neste o Algoritmo 6.3. Será utilizada a mesma estrutura apresentada na equação (8.22). A informação *a priori* usada são os estados estacionários da saída do sistema original quando $\bar{u} = 0$. O uso de informação *a priori* restrita foi utilizada, pois este fato é mais realístico do ponto de vista de modelagem de sistemas reais.

Aplicação do Algoritmo 6.3 para Obtenção do Modelo NARMAX Polinomial

1. Conforme apresentado na seção anterior, os termos candidatos foram selecionados de forma a garantir que o modelo possua, para cada entrada $\bar{u}$, três estados estacionários na saída.
2. O modelo obtido a partir do algoritmo ERR está apresentado na equação (8.22).

8. O modelo possui múltiplos estados estacionários na saída, ENTÃO
9. utilizando a equação (6.40), os estados estacionários da saída do modelo (8.22) podem ser determinados pelas raízes de

$$\begin{aligned} & \Sigma_{y^3} \bar{y}^3 + (\Sigma_{y^2} - \Sigma_{y^2 u} \bar{u}) \bar{y}^2 + (\Sigma_y + \Sigma_{yu} \bar{u} + \Sigma_{yu^2} \bar{u}^2 - 1) \bar{y} \\ & + \Sigma_0 + \Sigma_u \bar{u} + \Sigma_{u^2} \bar{u}^2 + \Sigma_{u^3} \bar{u}^3 = 0 \end{aligned} \quad (8.24)$$

10. Para $\bar{u} = 0$ a equação (8.21) possui os seguintes estados estacionários: $[0, 1439 \quad 0, 4471 \quad 0, 7645]$, sendo o primeiro e o último estáveis e o outro instável. Fazendo $\bar{u} = 0$ na equação (8.24), os estados estacionários da saída do modelo (8.22), podem ser determinados pelas raízes da seguinte equação:

$$\Sigma_{y^3} \bar{y}^3 + \Sigma_{y^2} \bar{y}^2 + (\Sigma_y - 1) \bar{y} + \Sigma_0 = 0, \quad (8.25)$$

ou de uma forma geral como

$$\alpha_3 \bar{y}^3 + \alpha_2 \bar{y}^2 + \alpha_1 \bar{y} + \alpha_0 = 0. \quad (8.26)$$

11. Para que a equação (8.26) tenha raízes em $[0, 1439 \quad 0, 4471 \quad 0, 7645]$, deve-se ter $\alpha_3 = 1$, $\alpha_2 = -1, 355$, $\alpha_1 = 0, 5162$ e $\alpha_0 = -0, 0492$.
12. Relacionando os coeficientes de agrupamento de termos com os coeficientes da equação (8.26), obtém-se que

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma_{y^2}}{\Sigma_{y^3}} &= \frac{\alpha_2}{\alpha_3}, \\ \frac{\Sigma_y - 1}{\Sigma_{y^3}} &= \frac{\alpha_1}{\alpha_3}, \\ \frac{\Sigma_0}{\Sigma_{y^3}} &= \frac{\alpha_0}{\alpha_3}. \end{aligned} \quad (8.27)$$

13. Escrevendo as relações acima na forma de restrições, vem

$$\begin{aligned}
\frac{\Sigma_y^2}{\Sigma_y^3} &= -1,355, \\
\frac{\Sigma_y - 1}{\Sigma_y^3} &= 0,5162, \\
\frac{\Sigma_0}{\Sigma_y^3} &= -0,0492.
\end{aligned} \tag{8.28}$$

ou, escrevendo na forma de desigualdades vem

$$\begin{aligned}
-\epsilon &< \Sigma_y^2 + 1,355\Sigma_y^3 < \epsilon \\
-\epsilon &< \Sigma_y - 1 - 0,5162\Sigma_y^3 < \epsilon \\
-\epsilon &< \Sigma_0 + 0,0492\Sigma_y^3 < \epsilon.
\end{aligned} \tag{8.29}$$

15. Estimam-se os parâmetros a partir das restrições acima. O novo modelo NARMAX polinomial obtido pode ser expresso por

$$\begin{aligned}
y(k) = & -1,0368 y(k-1) + 2,0244 y(k-2) - \\
& -0,0206 u(k-1) - 12,2604 y(k-1)^3 + \\
& + 5,1339 y(k-3)y(k-1) - 0,0443 u(k-1)y(k-3) - \\
& - 15,4786 y(k-2)y(k-1) - 0,0044 u(k-2)u(k-1)^2 - \\
& - 0,7796 y(k-3) - 4,9928 y(k-3)y(k-1)^2 + \\
& + 12,4242 y(k-1)^2 + 15,7186 y(k-2)y(k-1)^2 + \\
& + 0,0756 + 0,0154 \times 10^{-2} u(k-3)u(k-1)y(k-2) - \\
& - 0,0084 \times 10^{-2} u(k-3)u(k-1) + 0,3824 u(k-1)y(k-1) - \\
& - 0,3408 u(k-1)y(k-1)^2
\end{aligned} \tag{8.30}$$

Os estados estacionários deste modelo podem ser vistos na Figura 8.6. Como se pode notar, o uso de informação do estado estacionário do sistema para um único valor da entrada possibilitou um melhor ajuste da característica estacionária do sistema original.

16. Validação do modelo. Apresentada a seguir.

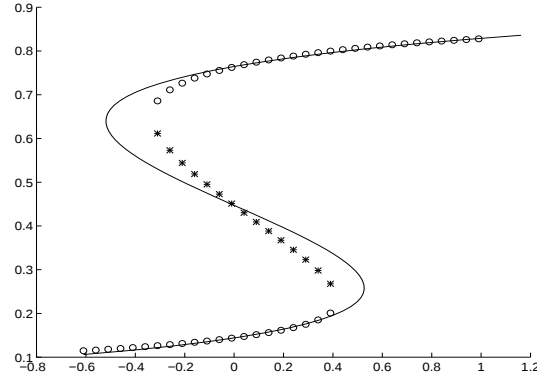


Figura 8.6: Curva estática do modelo polinomial obtido com uso de informação *a priori* na estimação de parâmetros.

Para validar e comparar dinamicamente os modelos, utilizou-se a predição livre usando dados diferentes dos dados de identificação. A nova entrada pode ser vista na Figura 8.7(a). Observa-se que a entrada é uma sequência de valores de amplitudes diferentes, a qual permanece em cada patamar por tempo suficientemente longo para se atingir o estado estacionário na saída.

Na Figura 8.7(b) temos a resposta do modelo racional (8.23), na (c) o modelo polinomial (8.22) e na (d) o modelo polinomial obtido com uso de informações *a priori* na estimação de parâmetros (8.30). Essa simulação confirma várias características observadas nas funções de estados estacionários dos modelos.

Na Figura 8.5(b) verifica-se que a curva estacionária do modelo racional na parte superior está abaixo do sistema original. Esse comportamento é também verificado na predição livre, Figura 8.7(b). Para o modelo polinomial, observa-se que sua saída diverge do sistema para entradas próximas de 0,4, Figura 8.7(c). Esse fato também é observado na curva estática Figura 8.5(a). Naturalmente, o modelo polinomial obtido com uso de informação *a priori* na estimação de parâmetros aproxima melhor o comportamento do sistema original, Figura 8.7(d). Para este observa-se uma divergência de comportamento próximo à amostra 250, sendo que a saída do modelo tende a assumir valores inferiores à do sistema original. Esse comportamento é comprovado na curva estática, Figura 8.6. Observe que para $\bar{u} = -0,4$ a curva estática do modelo não coincide com o sistema original.

O exemplo acima mostrou que o procedimento para incorporar informação *a priori* na estimação de parâmetros é eficiente mesmo quando a informação de estado estacionário usada está restrita a um único valor de entrada. A

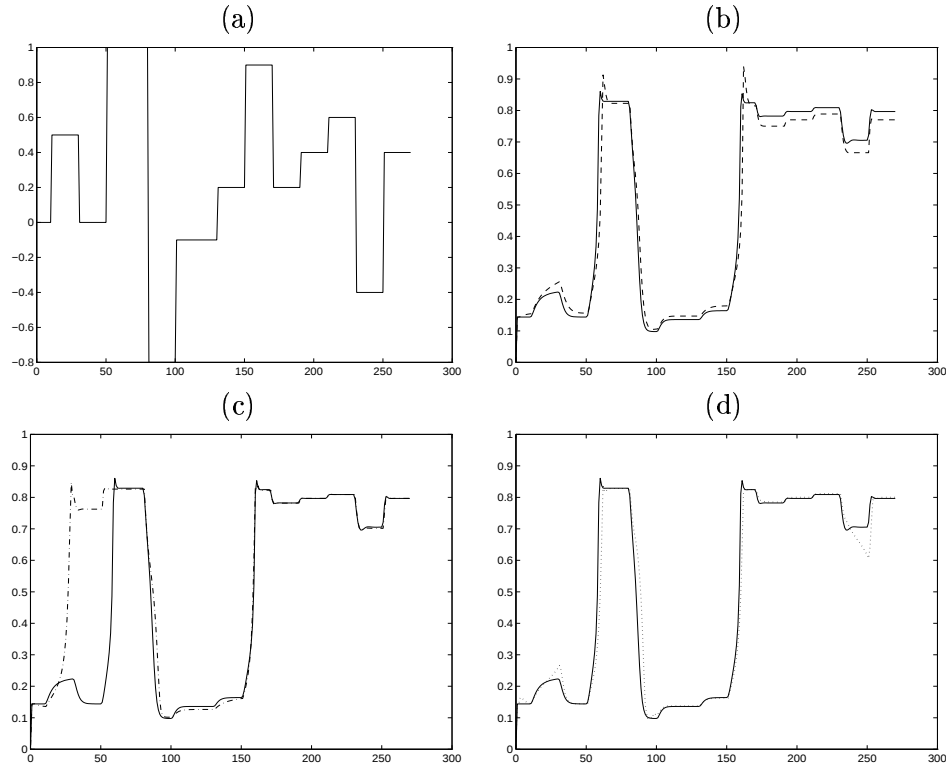


Figura 8.7: Validação dinâmica dos modelos do CSTR. (a) entrada, (b) modelo racional, (c) modelo polinomial e (d) modelo polinomial obtido com informação *a priori* na estimação de parâmetros. A linha contínua é a resposta do sistema original da equação (8.21) e o tracejado é a resposta de cada modelo identificado.

qualidade do modelo polinomial para aproximar a curva estática, assim como para aproximar o comportamento dinâmico do sistema, foi superior quando se usou informação *a priori* na estimação de parâmetros.

8.4 Neutralização de pH

Nesta seção serão usados dados obtidos via simulação do modelo de um tanque de neutralização de pH, desenvolvido por Hall e Seborg (1989). Esses dados são os mesmos usados em (Johansen, 1996) que os utilizou para verificar a eficiência de incorporar de informação *a priori* na identificação.

O sistema é descrito como tendo uma entrada (taxa de fluxo base $u(k)$) e uma saída (pH medido $y(k)$), sem distúrbios e sem ruído. Detalhes das equações do modelo podem ser vistos também em (Johansen, 1996).

Esse sistema é de interesse neste trabalho, pois tem dados dinâmicos restritos a uma faixa de operação e informação estática em uma região mais ampla. O objetivo aqui é o de verificar a capacidade do modelo de aproximar a característica estática global, a partir de dados dinâmicos locais, com e sem utilização de informação a priori.

Dados de identificação.

Os dados usados para identificação podem ser vistos na Figura 8.8 e de validação na Figura 8.9. Pode-se notar que nos dados de identificação a saída está restrita a $4,39 < y < 8,47$, e nos dados de validação tem-se $2,72 < y < 11,06$. Ou seja, os dados de validação percorrem uma faixa muito mais ampla do sistema que os dados de identificação.

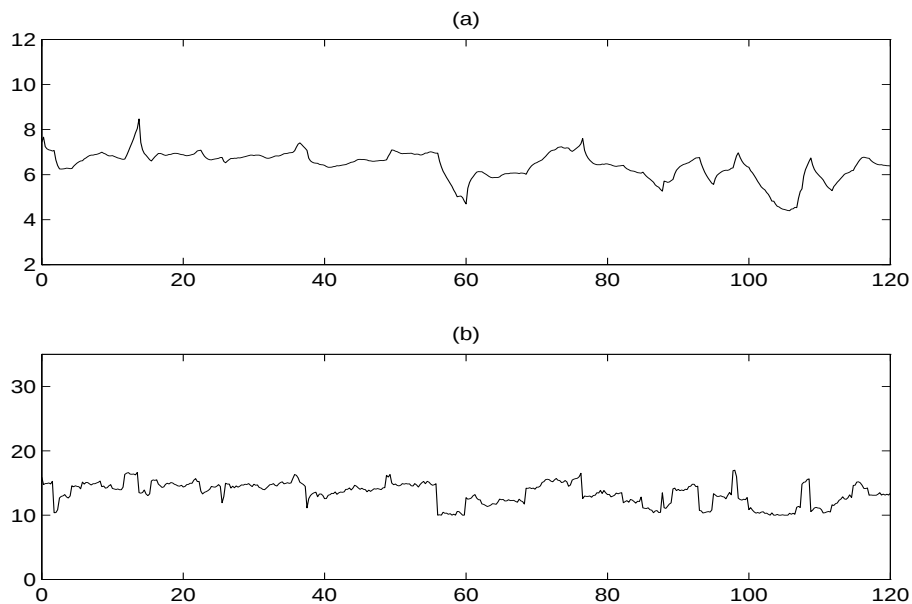


Figura 8.8: Dados simulados de identificação do tanque de neutralização de pH (Johansen, 1996). Eixo- x tempo em minutos e eixo- y (a) pH como saída e (b) vazão de base como entrada (dataset.mat @).

A Figura 8.10 apresenta a relação de estado estacionário entre a saída (pH medido) e a entrada (taxa de fluxo base). Pode-se notar que a função em estado estacionário do sistema é não-linear, com variação significativa do ganho em cada ponto de operação. Nessa figura pode-se notar também, entre as linhas tracejadas, a região dos dados de identificação. O objetivo aqui é verificar a capacidade de obter modelo globalmente válido a partir de dados locais.

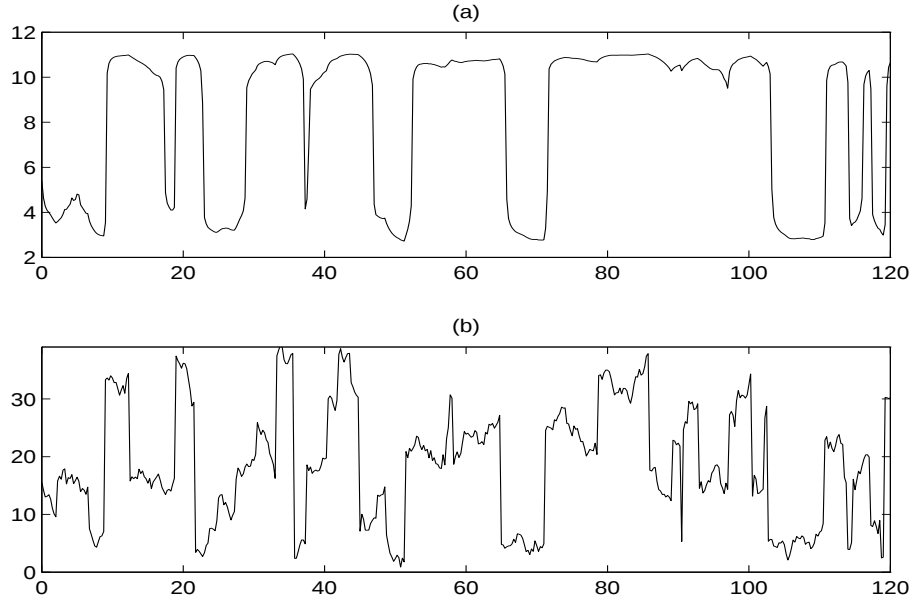


Figura 8.9: Dados simulados de validação do tanque de neutralização de pH (Johansen, 1996). Eixo- x tempo em minutos e eixo- y (a) pH como saída e (b) vazão de base como entrada (default.mat @).

8.4.1 Modelo NARMAX Polinomial Identificado sem uso de Informação a *Priori* na Estimação de Parâmetros

Inicialmente será mostrado modelo obtido sem utilizar informação a *priori* na estimação de parâmetros. O grau de não-linearidade $\ell = 5$ foi escolhido de forma a possibilitar um bom ajuste da curva estática. A ordem do modelo $n_y = 2$ foi selecionada, pois com $n_y = 3$ um autovalor aparece no semiplano discreto esquerdo, ver discussão na seção 6.6. Do conjunto de termos candidatos foram excluídos os termos do agrupamento $\Omega_{y^p u^m}$ com $p > 1$, de forma a garantir a existência de apenas um estado estacionário para a saída. Por uma questão de simplicidade, os termos cruzados também foram excluídos. Os dados foram normalizados, dividindo entrada e saída por 40.

O modelo identificado com as características citadas acima e parâmetros para os dados normalizados é

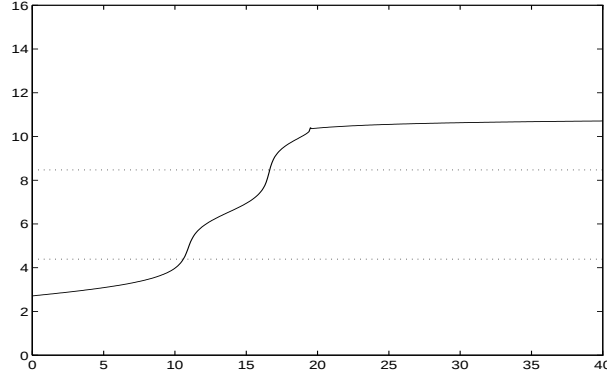


Figura 8.10: Relação estacionária entre entrada e saída do tanque de neutralização de pH (Johansen, 1996). Eixo- x é a entrada (fluxo base) e eixo- y saída (pH). A linha tracejada indica a região dos dados de identificação.

$$\begin{aligned}
 y(k) = & +1,055 y(k-1) + 4,673 u(k-1) + 3,436 u(k-2)^2 \\
 & -0,1933 y(k-2) - 3,586 u(k-1)^5 - 0,4646 - 9,286 u(k-1)^2 \\
 & +10,654 u(k-1)^3 - 8,8235 u(k-2)u(k-1) \\
 & -11,600 u(k-2)u(k-1)^4 \\
 & -15,99 u(k-2)^5 + 23,74 u(k-2)^2 u(k-1)^2,
 \end{aligned} \tag{8.31}$$

obtido com 12 termos de processo. A Figura 8.11 mostra o resultado da predição livre deste modelo usando dados de identificação e de validação. Pode-se notar que o modelo não é válido pois faz uma boa predição dos dados de identificação porém não prediz bem os de validação.

Esse é um resultado esperado. Uma vez que os dados de identificação estão restritos a uma estreita faixa, torna-se muito difícil prever características fora dessa região. A característica estática do modelo, obtida a partir das equações apresentadas no Capítulo 6, está apresentada na Figura 8.12. Mais uma vez pode-se notar que o modelo aproxima bem a característica do sistema na região dos dados de identificação, porém fora desta região a característica estática do modelo está muito longe da característica do sistema original.

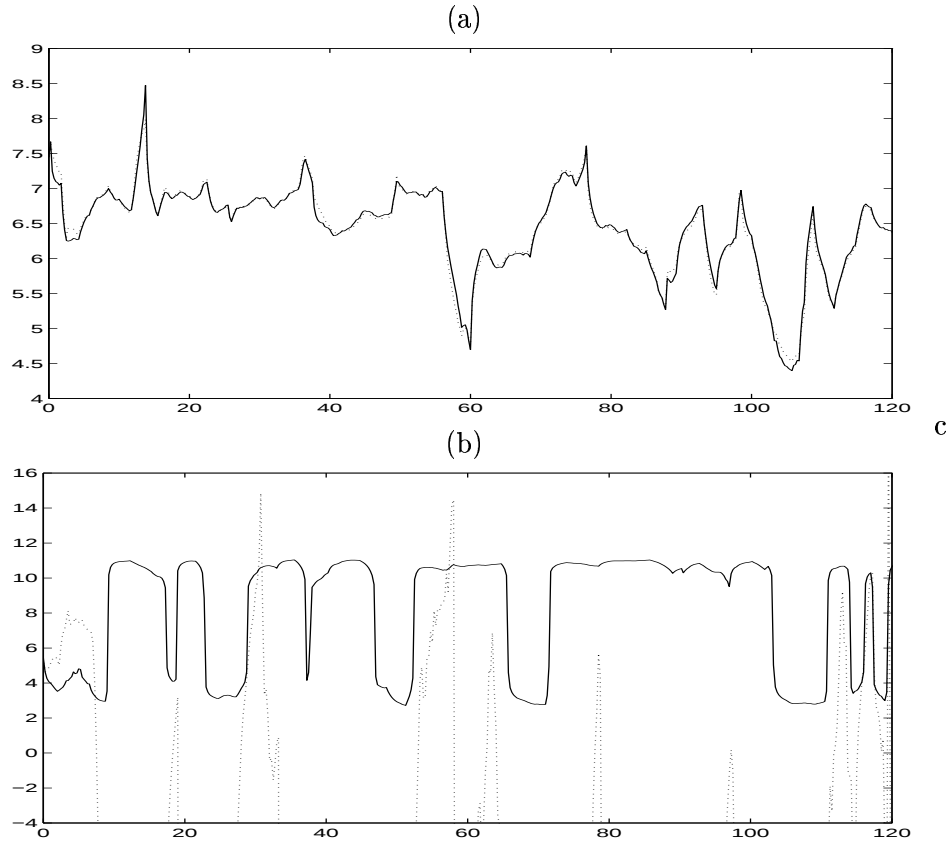


Figura 8.11: Resultado da predição livre do modelo (8.31) para o tanque de neutralização de pH (a) dados de identificação e (b) dados de validação. Eixos- x amostras e eixos- y pH.

8.4.2 Modelo NARMAX Polinomial Identificado com uso de Informação a *Priori* na Estimação de Parâmetros

O objetivo desta seção é buscar um melhor comportamento global do modelo representado pela equação 8.31, através do uso de informação a *priori* ao estimar os parâmetros. Serão executados os passos 4, 5, 6, 7 e 15 do Algoritmo 6.3, apresentados a seguir.

Utilização do Algoritmo 6.3

4. A partir da estrutura selecionada para o modelo 8.31, a seguinte expressão que relaciona $\bar{y} = f(\bar{u})$ pode ser escrita como

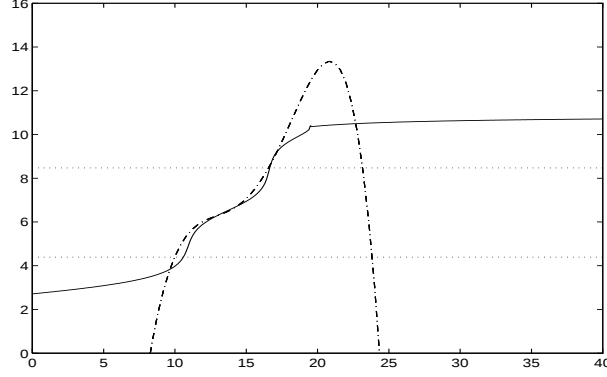


Figura 8.12: Característica estática do modelo 8.31 e do sistema original. As linhas tracejadas na horizontal mostram a região dos dados de identificação. Eixo- x vazão de base e eixo- y pH.

$$\bar{y} = \theta_5 \bar{u}^5 + \theta_4 \bar{u}^4 + \theta_3 \bar{u}^3 + \theta_2 \bar{u}^2 + \theta_1 \bar{u} + \theta_0. \quad (8.32)$$

5. Usando ajuste de curva polinomial, e os dados estáticos apresentados na Figura 8.10, os seguintes parâmetros foram estimados: $\theta_5 = 0,1578$, $\theta_4 = 2,5987$, $\theta_3 = -6,2512$, $\theta_2 = 4,2955$, $\theta_1 = -0,6081$ e $\theta_0 = 0,0876$. Ressalta-se que os dados foram normalizados dividindo entrada e saída por 40 para dar maior estabilidade numérica à estimação de parâmetros.
6. Escrevendo as equações que relacionam os *coeficientes de agrupamentos* em função dos parâmetros da equação 8.32, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma_u^5}{1-\Sigma_y} &= 0,1578 \\ \frac{\Sigma_u^4}{1-\Sigma_y} &= 2,5987 \\ \frac{\Sigma_u^3}{1-\Sigma_y} &= -6,2512 \\ \frac{\Sigma_u^2}{1-\Sigma_y} &= 4,2955 \\ \frac{\Sigma_u}{1-\Sigma_y} &= -0,6081 \\ \frac{\Sigma_0}{1-\Sigma_y} &= 0,0876 \end{aligned} \quad (8.33)$$

porém, como forma de forçar que o novo modelo tenha comportamento dinâmico mais próximo ao modelo (8.31), será tomado ainda como restrição que $\Sigma_{y_1} = 1,05$ e $\Sigma_{y_2} = -0,19$, respectivamente coeficientes dos termos $y(k-1)$ e $y(k-2)$ na equação (8.31).

7. Então, considerando as relações acima e as restrições para os parâmetros dos coeficientes dos termos $y(k-1)$ e $y(k-2)$, as seguintes restrições podem ser escritas

$$\begin{aligned}
-\epsilon &< \Sigma_{y_1} - 1,05 < \epsilon \\
-\epsilon &< \Sigma_{y_2} + 0,19 < \epsilon \\
-\epsilon &< \Sigma_{u^5} - 0,0219 < \epsilon \\
-\epsilon &< \Sigma_{u^4} - 0,3604 < \epsilon \\
-\epsilon &< \Sigma_{u^3} + 0,867 < \epsilon \\
-\epsilon &< \Sigma_{u^2} - 0,5958 < \epsilon \\
-\epsilon &< \Sigma_u + 0,0843 < \epsilon \\
-\epsilon &< \Sigma_0 - 0,0122 < \epsilon
\end{aligned} \tag{8.34}$$

com $\epsilon = 1 \times 10^{-4}$.

8. Os parâmetros foram estimados a partir das restrições acima. A simulação do modelo será apresentada a seguir.

A partir do procedimento apresentado acima, o novo modelo obtido foi

$$\begin{aligned}
y(k) = & +1,050y(k-1) - 0,0835u(k-1) - 0,0317u(k-2)^2 \\
& - 0,1899y(k-2) + 0,9239u(k-1)^5 + 0,0111 \\
& + 0,4494u(k-1)^2 - 0,8669u(k-1)^3 \\
& + 0,1782u(k-2)u(k-1) + 0,092u(k-2)u(k-1)^4 \\
& - 0,9947u(k-2)^5 + 0,3602u(k-2)^2u(k-1)^2
\end{aligned} \tag{8.35}$$

A Figura 8.13 apresenta o resultado da predição livre do modelo (8.35) usando a massa de dados de identificação e de validação. Em comparação com a predição livre do modelo (8.31), Figura (8.13), pode-se observar que o primeiro é melhor aproximação dos dados de validação e pior nos dados de identificação. Na verdade, ambos os modelos não reproduzem o comportamento da massa de dados de validação.

Esse fato pode ser justificado pela observação da curva estática do modelo (8.35), Figura 8.14. Aparentemente esse modelo aproxima bem a característica estática do sistema, porém se for feita análise em termos da derivada em cada ponto da função estática $d\bar{y}/d\bar{u}$, tem-se uma diferença significativa entre o

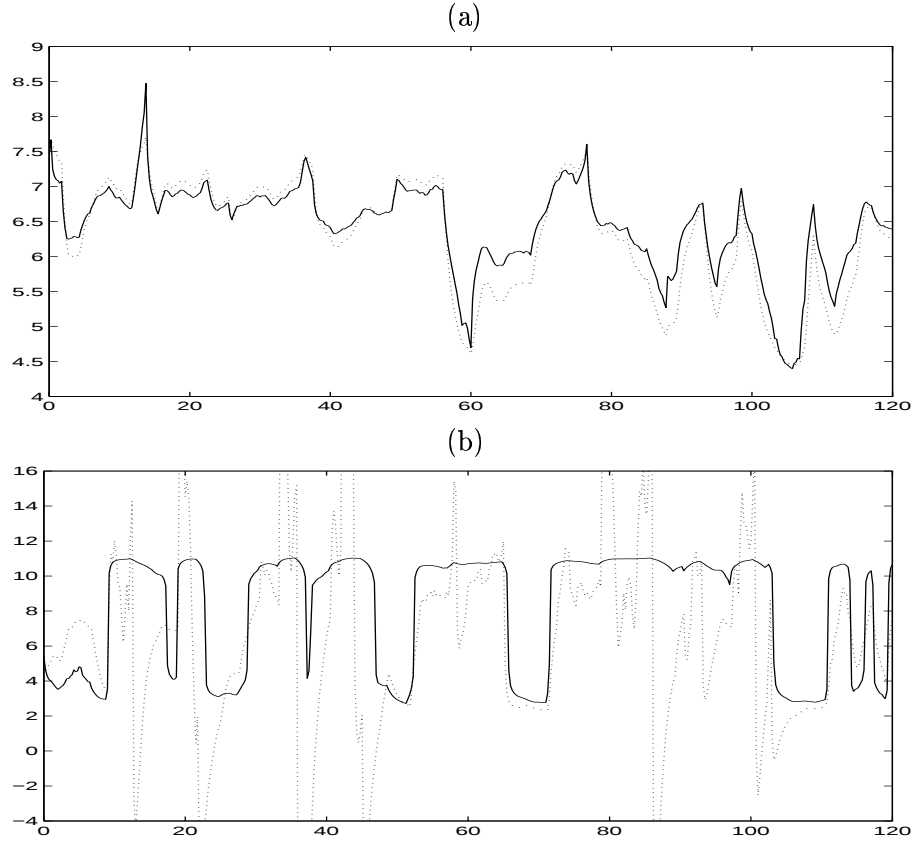


Figura 8.13: Resultado da predição livre do modelo (8.35) para o tanque de neutralização de pH (a) dados de identificação e (b) dados de validação. Eixos- x amostras e eixos- y pH.

modelo e o sistema original. Considerando a derivada, pode ser observado que o sistema original possui sempre ganho positivo, alternando regiões com pequeno ganho e regiões de elevado ganho. Já o modelo possui regiões com ganho negativo. Esse fato pode ser observado na Figura 8.15.

Neste caso específico pode-se notar que, apesar do uso de informação *a priori* na estimação de parâmetros ter melhorado a característica global do modelo, não foi ainda suficiente para aproximar o comportamento do sistema original. Porém vale ressaltar que a qualidade do modelo estará sempre associada à possibilidade ou não de aproximar o sistema por uma função polinomial ou racional. No caso em questão, provavelmente, para melhorar a qualidade do modelo deve-se aumentar significativamente o grau de não-linearidade ℓ da função polinomial usada na estrutura do modelo ou usar representação diferente, como em (Johansen, 1996).

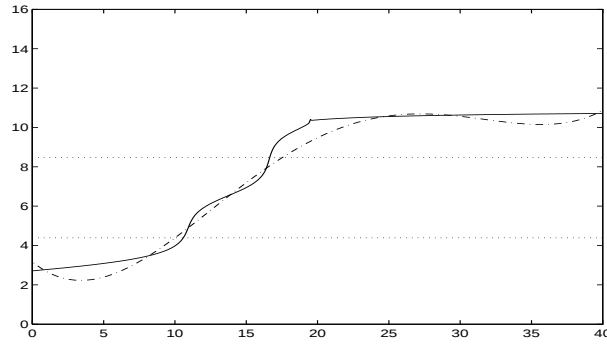


Figura 8.14: Característica estática do modelo (8.35) e do tanque de neutralização de pH. As linhas tracejadas na horizontal mostram a região dos dados de identificação. Eixo- x vazão de base e eixo- y pH.

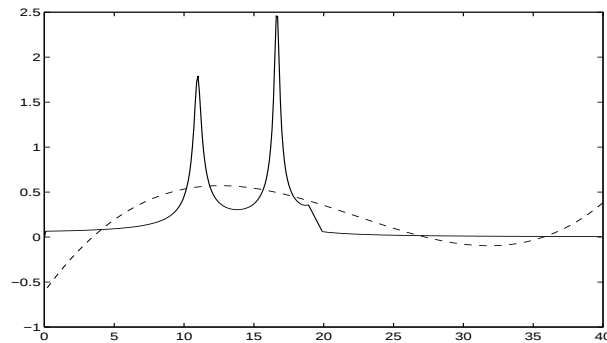


Figura 8.15: dy/dt em cada ponto da função estática do (—) tanque de neutralização de pH e (— —) do modelo (8.35). Eixo- x vazão de base na entrada e eixo- y $d\bar{y}/d\bar{u}$.

8.5 Modelo do Conversor Buck

Nesta seção a técnica apresentada para incorporar informações *a priori* na estimação de parâmetros será aplicada em um sistema real. Este, apresentado aqui, assim como os dados de identificação, foram utilizados em (Aguirre et al., 2000b). Os autores mostram no referido trabalho que o uso de informações *a priori* da curva estática do sistema possibilita a obtenção de modelos que aproximam melhor as características estáticas do sistema em regiões fora dos dados de identificação.

Aguirre e colegas (2000) citam vários trabalhos recentes de modelagem de conversores de potência (Guinjoan et al., 1997; Wong et al., 1997; Kazimierzczuk e Massarini, 1997; Banerjee, 1997; Leyva et al., 1997; Mahdavi et al., 1997). Ressaltam ainda que muitos destes procedimentos de modelagem são

baseados no conhecimento da topologia dos conversores e nos valores de seus parâmetros. A variação dos valores dos parâmetros, por exemplo, devido à temperatura, são usados como argumentos para justificar vantagens de se utilizar técnicas de identificação nos referidos sistemas. Como desvantagem cita-se a dificuldade de se obter estruturas compactas e “adequadas” para os modelos .

Neste trabalho estende-se a utilização de informação *a priori* à estimação de parâmetros. Será mostrada a aplicabilidade das técnicas aqui apresentadas na identificação de modelos obtidos a partir de dados reais. O exemplo usado é importante pois a função que descreve a característica estática do sistema não depende de nenhum valor de componente do sistema, mas apenas do sinal de entrada e da tensão de alimentação.

8.5.1 O Conversor Buck

O conversor Buck usado neste trabalho está apresentado na Figura 8.16. Durante todo o teste a tensão DC da fonte, V_d , é mantida constante em 24V. O MOSFET IRF840 é chaveado pela atuação na sua porta G. O ciclo de trabalho, definido pela proporção do tempo ligado e o período total, $D = T_{on}/T$, é variado usando a Modulação por Largura de Pulso (PWM, do inglês *Pulse Width Modulation*) a uma frequência de chaveamento de $1/T = 33kHz$. Esta modulação é realizada pelo circuito integrado LM3524 (Aguirre et al., 2000b).

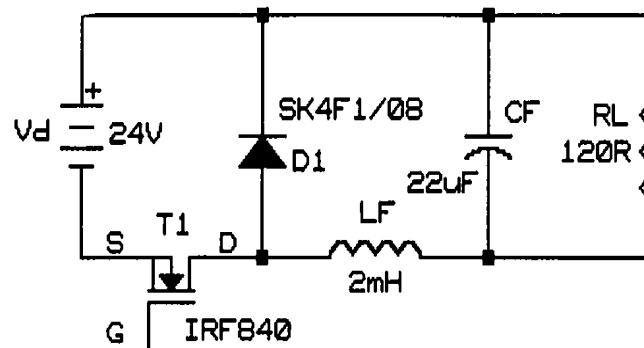


Figura 8.16: Conversor DC-DC Buck

A frequência de chaveamento utilizada resulta em um modo de operação contínuo. Quando o ciclo de trabalho tende à unidade, a corrente flui através

de LF e a tensão de saída V_o aumenta, pois V_d é aplicada em série com LF e CF. Por outro lado, quando D aproxima de zero, a tensão da saída diminui de acordo com o regime dinâmico definido por CF, LF e a carga RL.

8.5.2 Modelo do Conversor Buck

O conversor Buck apresentado na Figura 8.16 possui a seguinte relação de tensão em estado estacionário (Aguirre et al., 2000b):

$$\begin{aligned} V_o &= (1 - D)V_d \\ &= \left(1 - \frac{\bar{u} - 1}{3}\right) V_d \\ &= \frac{4V_d}{3} - \frac{V_d}{3}\bar{u}, \end{aligned} \tag{8.36}$$

sendo V_o a tensão na carga, D o ciclo de trabalho, $V_d = 24V$ a tensão constante fornecida pela fonte e $\bar{u}$ o valor de estado estacionário do sinal de controle $u(k)$. Os dados de identificação podem ser vistos na Figura 8.17. Pode-se observar que o sistema é excitado pelos dados somente para valores de entrada entre $u(k) = 2, 2$ a $2, 5$. O objetivo da modelagem é obter modelo que se ajusta à característica estática do sistema fora da região dos dados de identificação.

A seguir será apresentado o modelo obtido a partir da aplicação do Algoritmo 6.3. O desempenho deste será comparado ao modelo apresentado em (Aguirre et al., 2000b).

Algoritmo 6.3 Aplicado à Identificação do Conversor Buck

1. Seleção dos termos candidatos a partir de informação *a priori*. Detalhes da escolha dos termos candidatos, a partir de informação *a priori* podem ser vistos em (Aguirre et al., 2000b).
2. Seleção da estrutura através do algoritmo ERR. Em (Aguirre et al., 2000b) podem ser vistos vários modelos para esse sistema. O que melhor reproduziu a característica estática conhecida do sistema foi o modelo obtido através do uso de informação *a priori* na escolha de termos candidatos. A estrutura selecionada foi

$$\begin{aligned}
y(k) = & c_{1,0}(1)y(k-1) + c_{1,0}(2)y(k-2) + c_0 + c_{0,3}(1)u(k-1)^3 + \\
& + c_{1,0}(3)y(k-3) + c_{0,3}1,1,3u(k-1)^2u(k-3) + \\
& c_{0,2}(3)u(k-3)^3 + c_{0,2}(1,3)u(k-1)u(k-3) + \\
& c_{0,3}(1,3,3)u(k-1)u(k-3)^2.
\end{aligned} \tag{8.37}$$

3. Como pode ser observado pela equação (8.37), na estrutura do modelo não aparecem os *agrupamentos de termos* Ω_{y^p} com $p > 1$, o que significa que o modelo possui, para cada entrada $\bar{u}$, apenas um estado estacionário na saída.
4. A partir da estrutura apresentada na equação (8.37), a relação estática $\bar{y} = f(\bar{u})$ pode ser expressa por

$$\bar{y} = \alpha_3 \bar{u}^3 + \alpha_2 \bar{u}^2 + \alpha_0. \tag{8.38}$$

5. Usando o conjunto de dados estáticos obtidos pela equação (8.36) e estimando os parâmetros pelo método dos mínimos quadrados, os valores ótimos para ajuste da curva são: $\alpha_3^* = 0,4391$; $\alpha_2^* = -3,3710$ e $\alpha_0^* = 26,2696$, sendo que “*” significa valores ótimos dos parâmetros. Então, a equação estática com a qual se tem o melhor ajuste da característica do sistema é

$$\bar{y} = 0,4391\bar{u}^3 - 3,3710\bar{u}^2 + 26,2696. \tag{8.39}$$

6. As equações que relacionam os coeficientes da equação (8.39) com os *coeficientes de agrupamento de termos* são

$$\alpha_3 = \frac{\Sigma_{u^3}}{1 - \Sigma_y}, \quad \alpha_2 = \frac{\Sigma_{u^2}}{1 - \Sigma_y} \text{ and } \alpha_0 = \frac{\Sigma_0}{1 - \Sigma_y}. \tag{8.40}$$

7. Escrevendo na forma de restrições obtém-se

$$\begin{aligned}
-\epsilon & < 0,4391 - 0,4391\Sigma_y - \Sigma_{u^3} < \epsilon, \\
-\epsilon & < -3,3710 + 3,3710\Sigma_y - \Sigma_{u^2} < \epsilon, \\
-\epsilon & < 26,2696 - 26,2696\Sigma_y - \Sigma_0 < \epsilon,
\end{aligned} \tag{8.41}$$

a partir das equações (8.40), sendo $\epsilon = 0,01$ a precisão estabelecida.

Tabela 8.3: Parâmetros estimados por EMQ (Aguirre et al., 2000b) e AE para o modelo do Conversor Buck

	EMQ	AE
$\hat{c}_{1,0}(1)$	1,2013	0,7315
$\hat{c}_{1,0}(2)$	-0,2608	-0,0047
$\hat{c}_0$	6,2479	13,7292
$\hat{c}_{0,3}(3)$	-2,6783	-0,8280
$\hat{c}_{1,0}(3)$	-0,2080	-0,2495
$\hat{c}_{0,3}(1, 1, 3)$	8,8699	3,6774
$\hat{c}_{0,3}(3)$	3,6636	2,0210
$\hat{c}_{0,2}(1, 3)$	-0,6162	-1,7617
$\hat{c}_{0,3}(1, 3, 3)$	-9,7707	-4,6409
$\hat{\alpha}_0$	23.3488	26,2659
$\hat{\alpha}_2$	-2,3029	-3,3704
$\hat{\alpha}_3$	0,2037	0,4391

15. Estimação dos parâmetros a partir das restrições apresentadas. A Tabela 8.3 apresenta os parâmetros estimados pelo EMQ (Aguirre et al., 2000b) e AE. Pode-se observar que os módulos $|\alpha_0^* - \alpha_0|$, $|\alpha_2^* - \alpha_2|$ e $|\alpha_3^* - \alpha_3|$ são sempre menores que ϵ para o caso AE.

16. A validação será discutida a seguir.

O resultado da predição livre dos modelos com parâmetros estimados por EMQ e AE, usando dados de validação, podem ser vistos na Figura 8.17. Os parâmetros estimados pelo EMQ fornece o menor erro quadrático na predição livre usando dados de identificação.

A Figura 8.18 apresenta as curvas estáticas obtidas a partir dos modelo e do sistema original. Verifica-se que o AE fornece o melhor ajuste da curva estática fora da região dos dados de identificação. Em síntese, o uso de informação *a priori* para estimar os parâmetros possibilitou obter um modelo que melhor reproduz a característica estática global do conversor Buck.

A melhor aproximação da característica estática significou um pior desempenho da predição livre do modelo com dados dinâmicos de identificação. De fato, um modelo obtido por identificação caixa-preta ajusta os dados de validação muito bem, mas com uma pobre característica estática e uma faixa de validade estreita (Aguirre et al., 2000b). Pode-se dizer que, para o caso em questão, o preço pago pela melhor aproximação da curva estática global foi um pior desempenho no comportamento dinâmico local.

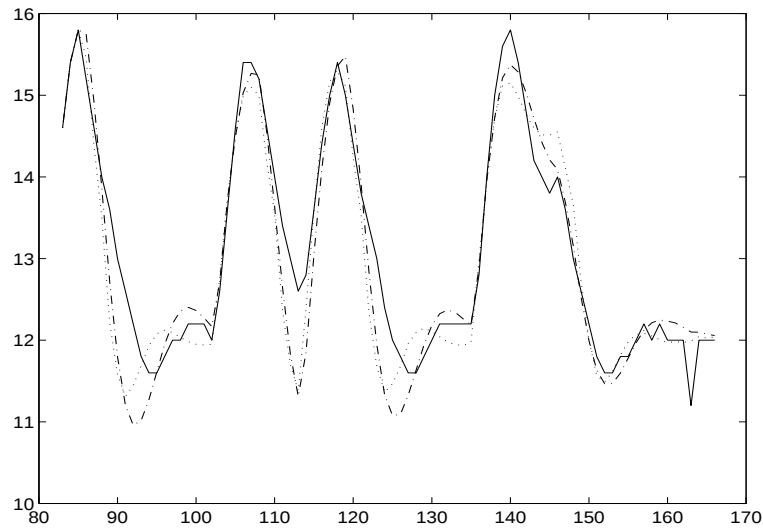


Figura 8.17: Predição livre dos modelos e do conversor Buck. Eixo- x são amostras e eixo- y são: (linha) saída do sistema, (traço-ponto) modelo EMQ e (pontilhado) modelo EA.

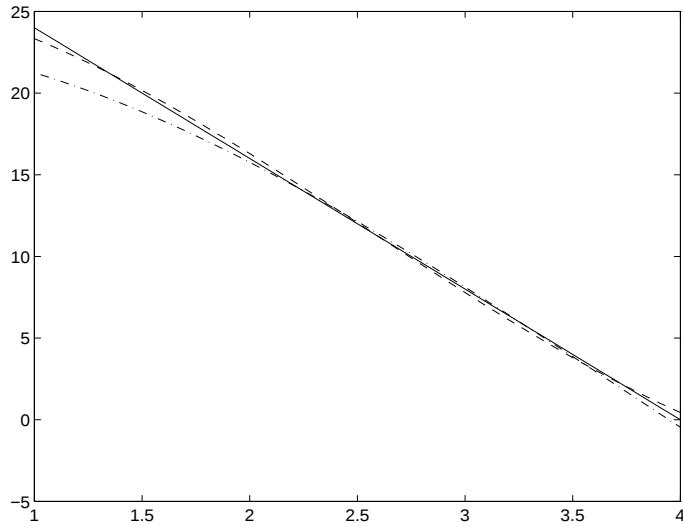


Figura 8.18: Função estática do (linha) sistema original, (traço-ponto) modelo EMQ e (pontilhado) modelo EA para o conversor Buck. Ambos são caixa-cinza, porém o modelo EA é mais branco que o EMQ. Eixo- x é $\bar{u}$ em % e eixo- y é $\bar{y}$. A curva do modelo EA está muito próxima à curva original.

8.6 Comentários Finais

O Algoritmo 6.3 foi aplicado para incorporar informação *a priori* na identificação de diferentes sistemas não-lineares. Quatro casos foram apresentados, três simulados e um real. O Algoritmo Elipsóide foi aplicado para estimar de parâmetros. O uso deste, na estimação de parâmetros da representação racional, torna dispensável o uso da pseudo-linearização apresentada na seção 2.2. Porém vale ressaltar que em todos os casos a estrutura foi selecionada pelo ERR.

No primeiro caso simulado, denominado de caso teórico, o algoritmo foi aplicado tanto para o modelo polinomial quanto para o racional. Observou-se que utilização de informação *a priori* do ganho em estado estacionário possibilitou ao modelo, além de uma melhor aproximação dessa característica, uma melhor aproximação da função constante de tempo do sistema original. Outro fator importante é que, mesmo com presença de ruído nos dados, o algoritmo do elipsóide estimou bons modelos.

Observou-se também que o modelo racional aproximou melhor as características conhecidas do sistema teórico. Este fato pode ser explicado pelas características estudadas desta representação, mais apropriada para representar sistemas cuja constante de tempo varia com o ponto de operação.

O segundo caso analisado trata da identificação de modelos a partir da simulação do modelo de um CSTR. Para a situação em que não se utilizou informação *a priori* ao estimar parâmetros, observou-se que o modelo racional é quem melhor aproximou a função estática do sistema original. Com a utilização de informação *a priori* dos estados estacionários para um único valor de entrada, observou-se que o desempenho do modelo polinomial na aproximação da característica estática e na predição livre foi melhor em comparação com a situação sem essa utilização.

Na identificação do tanque de neutralização de pH, o problema era o de obter modelos globais a partir de dados de identificação locais. Verificou-se que, como era de se esperar, o modelo obtido via identificação caixa-preta não é válido pois quando simulado com dados de validação, que excitam o sistema em uma região mais ampla em relação aos dados de identificação, o modelo tem desempenho muito pobre. Esse fato também é observado na comparação entre a característica estática do modelo e do sistema original fora da faixa dos dados de identificação.

No caso da utilização de informação *a priori* na estimação de parâmetros, o primeiro problema encontrado é o fato de não se conseguir representar bem a característica estática do sistema com estrutura polinomial de até quinta

ordem. Apesar de ter melhorado o desempenho global do modelo, tanto na aproximação da característica estática quanto na predição livre com dados de validação, o desempenho do modelo ainda é muito ruim. Vale ressaltar que Johansen (1996) obteve modelos neurais (com 390 parâmetros) com boa aproximação da característica estática do sistema, utilizando as mesmas massas de dados apresentadas neste capítulo.

Para Conversor CC-CC Buck, verificou-se que a utilização de informação *a priori* na estimação de parâmetros possibilitou obter um modelo com melhor desempenho global do que o modelo com utilização de informação *a priori* apenas na seleção da estrutura. Ressalta-se neste caso que a característica estática do sistema original pode ser bem representada por uma função polinomial.

De uma maneira geral, pode-se afirmar que o Algoritmo 6.3 se mostrou bastante eficiente para garantir que modelos NARMAX racionais e polinomiais tenham características estáticas desejadas *a priori*. Naturalmente a qualidade da aproximação depende da estrutura da função estática usada para representar a característica do sistema original. No caso do tanque de neutralização de pH, a característica estática do sistema original não é bem representada por uma função polinomial de baixo grau, então, o comportamento dinâmico do modelo também é comprometido, diferente do que ocorreu para os demais casos analisados.

Capítulo 9

Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros

A obtenção de modelos matemáticos de sistemas físicos não-lineares vem, ao longo das últimas décadas, adquirindo importância vital para a ciência e engenharia e são utilizados em diversas áreas do conhecimento humano. Entre os métodos para a obtenção de modelos matemáticos se destaca a identificação de sistemas, uma técnica através da qual modelos são obtidos a partir de dados medidos no sistema a ser modelado.

Um tema que vem recebendo especial atenção na identificação de sistemas é a representação matemática. Várias representações vêm sendo usadas na identificação de sistemas não-lineares, com destaque para as representações de Wiener, Hammerstein, os modelos NARMAX, as Redes Neurais Artificiais, as redes RBFs e as funções *Wavelets*. Cada uma destas representações possui características peculiares de acordo com os métodos aplicados para sua obtenção e a forma de utilizá-las.

Outro aspecto importante no processo de identificação de sistemas diz respeito ao nível de informação *a priori* utilizada durante a obtenção de modelos. De acordo com a utilização de informação *a priori*, o processo de identificação se classifica em identificação *caixa-preta*, *caixa-cinza* e *caixa-branca*. Na identificação *caixa-preta* nenhuma informação *a priori* é utilizada, e a identificação se baseia única e exclusivamente em dados de entrada e saída do sistema. No outro extremo, na identificação *caixa-branca* utilizam-se apenas informações *a priori* do sistema e o processo de obtenção de modelos se abstém da utilização de dados de entrada e saída do sistema. A identificação *caixa-cinza* se situa em uma posição intermediária entre os extremos citados acima, utilizando tanto dados de entrada e saída quanto informações *a priori* do sistema modelado.

Técnicas de identificação *caixa-preta* vêm ao longo das últimas décadas

conseguindo aproximar com razoável precisão comportamentos de vários sistemas dinâmicos não-lineares. A aplicação dessas técnicas em conjunto com informação *a priori* possibilita uma significativa melhora na qualidade dos modelos. A utilização de conhecimento *a priori* se justifica, pois, em geral, esses estão disponíveis em vários sistemas dinâmicos.

Dentro desse contexto, este trabalho apresentou dois estudos distintos. O primeiro diz respeito às representações matemáticas usadas em identificação de sistemas dinâmicos não-lineares. São discutidas características das representações NARMAX polinomial, NARMAX racional, Redes Neurais Multicamadas, Redes RBF's, Modelos Contínuos e de funções *Wavelets* sobre a ótica da utilização destas na identificação de sistemas. O desempenho de várias dessas representações é verificado em problemas práticos de identificação. Não se objetivou indicar a melhor representação para identificar uma determinada dinâmica, mas apenas apontar características de cada a serem consideradas em um processo de identificação.

O desempenho das representações NARMAX racional e polinomial foi verificado na aproximação de sistemas dinâmicos não-lineares com comportamento caótico. Foi observada a capacidade de cada uma dessas de reproduzir os atratores dos sistemas originais e/ou a capacidade de reproduzir mapas de não-linearidade estática. Os sistemas identificados foram o circuito de Chua, o sistema de Rössler, o mapa senoidal com não-linearidades cúbicas, o *tent map* e o mapa de primeiro retorno do regulador chaveado Buck.

O modelo polinomial se mostrou mais eficiente para reproduzir a dinâmica observada na tensão do capacitor C_1 do circuito de Chua. No caso da variável x do sistema de Rössler o modelo racional foi superior ao polinomial. Esses fatos podem ser justificados pelas estruturas das equações em cada um destes sistemas. O modelo racional se mostrou ainda mais eficiente para reproduzir o mapa senoidal com não-linearidades cúbicas e o *tent map*, tendo sido o único modelo capaz de aproximar o comportamento observado no mapa de primeiro retorno do regulador chaveado Buck.

Dados gerados através da simulação da equação de Duffing-Ueda foram usados para identificar modelos usando MLP's com diferentes números de neurônios na camada escondida. O desempenho dessas redes foi observado através da predição livre, da reconstrução do atrator, da seção de Poincaré e dos diagramas de bifurcação. Observou-se que redes que atingiram o critério de parada do algoritmo de treinamento e foram eficientes na predição livre, não atenderam aos demais critérios de validação, como reprodução da seção de Poincaré e dos diagramas de bifurcação.

Dados reais medidos em um sistema térmico foram utilizados para comparar o desempenho de diferentes representações. A capacidade de modelos, baseados nas representações NARMAX polinomial, racional, rede MLP, rede Elman e rede RBF, de aproximarem a curva estática a partir de dados dinâmicos foi verificada. Os modelos NARMAX polinomial e racional são os que possuem o menor número de parâmetros. O NARMAX polinomial foi o que melhor aproximou o comportamento dos dados dinâmicos, porém o RBF foi o que melhor ajustou a curva estática. Ressalta-se também, que a característica estática dos modelos NARMAX racional e polinomial foi obtida algebricamente enquanto que, para as redes, por simulação.

O segundo estudo apresentado diz respeito à utilização de informação *a priori* na identificação de sistemas utilizando as representações NARMAX racional e polinomial. Essas foram estudadas com o objetivo de identificar o papel que cada agrupamento de termo exerce nas funções estáticas de ganho e constante de tempo do modelo. Este estudo possibilitou o desenvolvimento de equações gerais que permitem, a partir de modelos identificados, obter as funções de ganho estático, autovalores e constante de tempo. Nesse item surgem novos conceitos, denominados *agrupamentos-d* e *coeficientes-d*. Esses conceitos são a base para cálculo das funções autovalores e constante de tempo. Tabelas foram apresentadas com o efeito de cada agrupamento de termos nas funções de ganho e constante de tempo do modelo.

Através das equações desenvolvidas e das propriedades estudadas, três algoritmos para utilização de informação *a priori* na identificação foram desenvolvidos. Esses algoritmos apresentam procedimentos para uso de informação *a priori* na seleção de estrutura, na estimação de parâmetros e na análise e validação de modelos. Através do procedimento de análise e validação é possível obter fortes indícios de ordem sobredimensionada em modelos NARMAX racionais e polinomiais.

Os algoritmos desenvolvidos são aplicados a diversos problemas de identificação. Na validação, tais técnicas permitiram comparar diferentes modelos, todos previamente obtidos via identificação *caixa-preta*. No Processo Térmico I observou-se que, quando o algoritmo de validação indicou ordem sobredimensionada em um modelo NARMAX polinomial de terceira ordem, foi possível obter um modelo de segunda ordem com desempenho melhor que o primeiro.

No Processo Térmico II observou-se que existia um forte indício de que a constante de tempo do sistema não variava com o ponto de operação. A análise desenvolvida indicou que poderia ser usada a representação de Hammerstein para identificar o sistema, nesse a constante de tempo não varia com o ponto de operação. O modelo de Hammerstein se mostrou bastante eficiente para

representar a dinâmica do sistema original, o que reforçou a hipótese de que a constante de tempo do sistema original não varia com o ponto de operação.

Os outros modelos analisados são modelos de uma válvula de controle a qual possui característica estática não-linear conhecida. Observaram-se diferenças significativas entre os modelos, as quais não foram reveladas pela validação dinâmica nem estatística. Essas diferenças referem-se ao comportamento instável do modelo polinomial para entradas próximas de zero. A válvula de controle possui *threshold* e essa característica foi identificada pelo modelo polinomial através de estados estacionários na saída com autovalores fora do círculo unitário. Ou seja, para entradas próximas de zero o modelo é instável.

O Algoritmo para utilização de informação *a priori* na estimação de parâmetros foi aplicado em quatro diferentes sistemas, três simulados e um real. Estes sistemas são (i) o modelo teórico de um sistema cuja constante de tempo varia com o ponto de operação, (ii) o modelo de um Reator Tanque Continuamente Misturado, (iii) um tanque de neutralização de pH e (iv) um Conversor CC-CC Buck. Observou-se que a utilização de informação *a priori* na estimação de parâmetros possibilita obter modelos com características mais globais.

No sistema teórico simulado observou-se que a utilização de informação *a priori* do ganho de estado estacionário permitiu, além da reprodução dessa característica pelo modelo, uma melhor aproximação da função constante de tempo. No caso do CSTR verificou-se a melhora do desempenho do modelo mesmo utilizando informação de estado estacionário restrita a um único valor de entrada. No caso do tanque de neutralização de pH, observou-se que é necessário não só aproximar a curva estacionária do sistema original mas também aproximar a derivada desta curva em cada ponto. A representação polinomial não se mostrou eficaz para aproximar a curva estacionária do tanque de neutralização de pH estudado. Nos modelos identificados para o Conversor CC-CC Buck, observou-se que o algoritmo proposto melhorou o desempenho do modelo obtido com uso de informação *a priori* na seleção da estrutura.

Para incorporar informação *a priori* na estimação de parâmetros, utilizou-se o algoritmo elipsóide para otimização não-linear com restrições. Esse algoritmo permite estimar os parâmetros dos modelos NARMAX racionais na sua forma original, mesmo sendo essa representação não-linear nos parâmetros, o que é uma vantagem em relação ao método dos mínimos quadrados tradicionalmente usados.

Portanto, este trabalho apresenta mecanismos eficientes para incorporar

informação *a priori* em modelos NARMAX racionais e polinomiais de forma simples. Isto se dá tanto na seleção de estrutura quanto na estimação de parâmetros e na validação de modelos. Um aspecto importante abordado se refere a escolha da ordem do modelo. Mostrou-se que a análise dos autovalores, obtidos a partir da linearização do modelo identificado, pode ser usada para detectar ordem sobredimensionada. A determinação de autovalores de modelos NARMAX racionais e polinomiais é um procedimento relativamente simples. A facilidade de obter a influência de cada termo nas características de modelos NARMAX racionais e polinomiais, parece ser uma importante característica destas representações.

No presente trabalho estabeleceram-se relações entre a estrutura do modelo e os estados estacionários possíveis. O uso de informação em estado estacionário tem-se tornado relativamente comum na identificação de modelos (Thompson e Kramer, 1994; Johansen, 1996; Pottmann e Pearson, 1998; Aguirre et al., 2000b). Entretanto, no presente trabalho, dá-se um passo além, a saber: as relações desenvolvidas permitem restringir os parâmetros estimados a fim de garantir certas características em estado estacionário. Esse procedimento, até onde se sabe, não tem paralelo na literatura e resulta na melhora dos modelos identificados. Naturalmente a abordagem aqui apresentada é ainda restrita a informação da relação estacionária e da constante de tempo, porém podem ser facilmente estendidos a outras características, como por exemplo comportamento do sistema em malha fechada.

Como propostas de trabalhos futuros destacam-se:

- desenvolver mecanismos que permitam não só aproximar a função de estado estacionário da saída mas também sua derivada;
- desenvolver controladores que levem em consideração as funções de ganho, autovalores e constante de tempo dos sistemas identificados;
- estender os desenvolvimentos aqui apresentados a outras representações.

Bibliografia

- Abreu, S. D. G. (1993). *Avaliação de desempenho de controladores auto-ajustáveis*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG.
- Adomaitis, R. A., Farber, R. M., Hudson, J. L., Kevrekidis, I. G., Kube, M., and Lapedes, A. S. (1990). Application of neural nets to system identification and bifurcation analysis of real world experimental data. In *Neural Networks: Biological computers or electronic brains*, pages 87–97. Springer Verlag, Paris.
- Aguirre, L. A. (1994). Some remarks on structure selection for nonlinear models. *Int. J. Bif. Chaos*, 4(6):1707–1714.
- Aguirre, L. A. (1995). A nonlinear correlation function for selecting the delay time in dynamical reconstructions. *Phys. Lett.*, 203A(2,3):88–94.
- Aguirre, L. A. (1996a). A tutorial introduction to nonlinear dynamics and chaos, part I: Tools and benchmarks. *Controle & Automação*, 7(1):29–49.
- Aguirre, L. A. (1996b). A tutorial introduction to nonlinear dynamics and chaos, part II: Tools and benchmarks. *Controle & Automação*, 7(1):50–66.
- Aguirre, L. A. (1997). Recovering map static nonlinearities from chaotic data using dynamical models. *Physica D*, 100(1,2):41–57.
- Aguirre, L. A. (2000a). *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. UFMG, Belo Horizonte, MG.
- Aguirre, L. A. (2000b). A nonlinear dynamical approach to system identification. *IEEE Circuits & Systems Newsletter Society*, 11(2):10–23,47.

- Aguirre, L. A. and Billings, S. A. (1994). Validating identified nonlinear models with chaotic dynamics. *Int. J. Bif. Chaos*, 1(4):109–125.
- Aguirre, L. A. and Billings, S. A. (1995). Improved structure selection for nonlinear models based on term clustering. *Int. J. Control*, 62:569–587.
- Aguirre, L. A., Corrêa, M. V., Cassini, C. C. S., and Rodrigues, G. G. (1999a). Static nonlinearities of polynomial and rational NARX models. *Science & Engineering journal*, 2(8):39–47.
- Aguirre, L. A., Corrêa, M. V., and Mendes, E. M. (1999b). Using rational NARMAX models to recover static nonlinearities. *Invited session on Laguerre functions at the 1999 European Control Conference*. 31 August to 3 September.
- Aguirre, L. A., Corrêa, M. V., and Tôrres, L. A. B. (2000a). Modeling and control of an electronic chaotic oscillator. In Balthazar, J., Gonçalves, P., and Sampaio, R., editors, *Recent Developments and Applications in Dynamics, Stability and Control*, pages 1–18. SIAM Press.
- Aguirre, L. A., Donoso-Garcia, P. F., and Santos-Filho, R. (2000b). Use of *a priori* information in the identification of global nonlinear models - a case study using a buck converter. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 47(7):1081–1089.
- Aguirre, L. A. and Jácome, C. R. (1998). Cluster analysis of NARMAX models for signal-dependent systems. *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, 145(4):409–414.
- Aguirre, L. A. and Mendes, E. M. (1996). Nonlinear polynomial models: Structure, term clusters and fixed points. *Int. J. Bif. Chaos*, 6(2):279–294.
- Aguirre, L. A., Rodrigues, G. G., and Mendes, E. M. (1997). Nonlinear identification and cluster analysis of chaotic attractors from a real implementation of Chua's circuit. *Int. J. Bif. Chaos*, 7(6):1411–1423.
- Aguirre, L. A. and Souza, A. V. P. (1998). An algorithm for estimating fixed points of dynamical systems from time series. *Int. J. Bif. Chaos*, 11(8):2203–2213.
- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 6(19):716–723.

- Aldroubi, A. and Unser, M. (1996). *Wavelets in Medicine and Biology*. CRC Press, Boca Raton. Editors.
- Bagarinao, E., Pakdaman, K., Nomvra, T., and Sato, S. (1999). Reconstructing bifurcation diagrams from noisy time series using nonlinear autoregressive models. *Phys. Rev. E*, 60(1):1073–1076.
- Bai, E. W. and Sastry, S. S. (1986). Parameter identification using prior information. *Int. J. Control*, 44(2):455–473.
- Bakshi, B. R. and Stephanopoulos, G. (1993). Wave-net: a multiresolution, hierarchical neural network with localized learning. *AIChE Journal*, 39(1):57–81.
- Banerjee, S. (1997). Coexisting attractors, chaotic saddles and fractal basis in a power electronic circuit. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 44(9):847–849.
- Berger, J., Coifman, R. R., and Goldberg, M. J. (1994). Removing noise from music using local trigonometric bases and wavelet packets. *Journal of the Audio Engineering Society*, 42(10):808–817.
- Beylkin, G. (1994). On wavelet-based algorithms for solving differential equations. In Benedetto, J. J. and Frazier, M. W., editors, *Wavelets: Mathematics and Applications*, pages 449–466, Boca Raton. CRC Press.
- Beylkin, G., Coifman, R. R., and Rokhlin, V. (1991). Fast wavelet transforms and numerical algorithms I. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, (44):141–183.
- Billings, S. A. (1980). Identification of nonlinear systems - a survey. In *Proc. IEE, Part D*, pages 272–285.
- Billings, S. A. and Aguirre, L. A. (1995). Effects of the sampling time on the dynamics and identification of nonlinear models. *Int. J. Bif. Chaos*, 5(6):1541–1556.
- Billings, S. A. and Chen, S. (1989a). Extended model set, global data and threshold model identification of several nonlinear systems. *Int. J. Control*, 50(5):1897–1923.
- Billings, S. A. and Chen, S. (1989b). Identification of non-linear rational systems using prediction-error estimation algorithm. *Int. J. Control*, 20(3):467–494.

- Billings, S. A., Chen, S., and Backhouse, M. J. (1989a). The identification of linear and non-linear models of a turbocharged automotive diesel engine. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 3(2):123–142.
- Billings, S. A., Chen, S., and Korenberg, M. J. (1989b). Identification of MIMO nonlinear systems using a forward-regression orthogonal estimator. *Int. J. Control*, 49(6):2157–2189.
- Billings, S. A. and Fakhouri, S. Y. (1982). Identification of systems containing linear dynamic and static nonlinear elements. *Automatica*, 18(1):15–26.
- Billings, S. A., Korenberg, M. J., and Chen, S. (1988). Identification of nonlinear output-affine systems using an orthogonal least-squares algorithm. *Int. J. Control*, 19(8):1559–1568.
- Billings, S. A. and Tao, Q. H. (1991). Model validation tests for nonlinear signal processing applications. *Int. J. Control*, 54:157–194.
- Billings, S. A. and Zhu, Q. M. (1991). Rational model identification using an extended least-squares algorithm. *Int. J. Control*, 54(3):529–546.
- Billings, S. A. and Zhu, Q. M. (1994). Nonlinear model validation using correlation tests. *Int. J. Control*, 60(6):1107–1120.
- Bohlin, T. (1970). On the maximum likelihood method of identification. *IBM J. Res. Develop.*, 14(1):41–51.
- Bohlin, T. (1984). Computer-aided grey-box identification. Technical report, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden. TRITA-REG-8403.
- Bohlin, T. (1994). A case study of grey box identification. *Automatica*, 30(2):307–318.
- Bohlin, T. and Graebe, S. T. (1995). Issues in nonlinear stochastic grey box identification. *Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing*, 9(6):465.
- Boor, C. d. (1978). *A practical guide to spline*. Springer Verlag, Berlin.
- Box, G. E. P. and Jenkins, G. M. (1976). *Time Series Analysis Forecasting and Control*. Holden-Day, San Francisco.
- Braess, D. (1986). *Nonlinear Approximation Theory*. Springer-Verlag, Berlin.

- Braga, A. P., Carvalho, A. P. L. T., and Ludermir, T. B. (1998). *Fundamentos de Redes Neurais Artificiais*. 11^a Escola de Computação, Rio de Janeiro, Brasil.
- Breeden, J. I. and Packard, N. H. (1994). A learning algorithm for optimal representation data. *Int. J. Control*, 4(2):311–326.
- Broomhead, D. and Lowe, D. (1988). Learning by canonical smooth estimation, part I: Simultaneous estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- Burrus, C. S., Gopinath, R. A., and Guo, H. (1998). *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.
- Carlin, M. (1992). Radial basis function networks and nonlinear data modelling. In *Proceedings of Neuro-Nimes'92: Neural Networks and their Applications*, volume EC2, pages 623–633, France.
- Carrier, J. F. and Stephanopoulos, G. (1998). Wavelet-based modulation in control-relevant process identification. *AIChE Journal*, 44(2):341–360.
- Casdagli, M. (1989). Nonlinear prediction of chaotic time series. *Physica D*, (35):335–356.
- Casdagli, M., Eubank, S., Farmer, J. D., and Gibson, J. (1991). State space reconstruction in the presence of noise. *Physica D*, 51:52–98.
- Cassini, C. C. S. (1999). *Estimação Recursiva de Não Linearidades Estáticas Usando Modelos NARMAX Polinomiais*. Dissertação de Mestrado, PPGEE, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.
- Cassini, C. C. S., Braga, A. P., and Aguirre, L. A. (1998). Um estudo comparativo entre modelos polinomiais NARMAX e redes neurais aplicados à identificação de sistemas. In *V Simpósio Brasileiro de Redes Neurais*, pages 237–240, Belo Horizonte, MG.
- Castillo, E. and Gutiérrez, J. M. (1998). Nonlinear time series modeling and prediction using functional networks. Extracting information masked by chaos. *Physics Letters A*, (244):71–84.
- Çinar, A. (1995). Nonlinear time series models for multivariable dynamic processes. *Chemometrics and intelligent laboratory systems*, 30:147–158.

- Chen, S., Billings, S., Cowan, C., and Grant, P. (1990). Nonlinear systems identification using radial basis functions. *Int. J. Systems Sci.*, 21(12):2513–2539.
- Chen, S., Billings, S. A., and Luo, W. (1989). Orthogonal least squares methods and their application to non-linear system identification. *Int. J. Control*, 50(5):1873–1896.
- Chua, L. O. (1992). The genesis of Chua's circuit. *Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik*, 46(4):250–257.
- Chua, L. O., Komuro, M., and Matsumoto, T. (1986). The double scroll family. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 33(11):1072–1118.
- Chui, C. (1992). *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*. Academic Press Inc.
- Coca, D. and Billings, S. A. (1995a). Estimating derivatives from noisy data: A wavelet multiresolution decomposition approach. Technical report, University of Sheffield, Sheffield, S1 3JD, UK. Research Report No. 606.
- Coca, D. and Billings, S. A. (1995b). Smoothing chaotic signals for system identification: A multiresolution wavelet decomposition approach. Technical report, University of Sheffield, Sheffield, S1 3JD, UK. Research Report No. 587.
- Coca, D. and Billings, S. A. (1996). Continuous-time system identification for linear and nonlinear systems using wavelet decompositions. Technical report, University of Sheffield, Sheffield, S1 3JD, UK. Research Report No. 611.
- Coelho, L. S., Corrêa, M. V., Cassini, C. C. S., and Aguirre, L. A. (2000). A comparison of representations for nonlinear system identification: A case study. In *XIII Congresso Brasileiro de Autômática*, Florianópolis - SC.
- Corrêa, M. V. (1997). *Identificação de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares Utilizando Modelos NARMAX Racionais - Aplicação a Sistemas Reais*. Dissertação de Mestrado, PPGEE, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.
- Corrêa, M. V., Aguirre, L. A., and Braga, A. P. (1999). Validação de modelos neurais identificados a partir de um sistema caótico. In *IV Congresso Brasileiro de Redes Neurais*, pages 152–158, ITA São José dos Campos, SP, Brasil.

- Corrêa, M. V., Aguirre, L. A., and Mendes, E. M. (1998). A representação NARMAX racional aplicada na modelagem de um forno elétrico. *XII Congresso Brasileiro de Automática*, 5:1773–1777.
- Corrêa, M. V., Aguirre, L. A., and Mendes, E. M. (2000). Modeling chaotic dynamics with discrete nonlinear rational models. *Int. J. Bif. Chaos*, 10(5):1019–1032.
- Cubillos, F. A., Alvarez, P. I., Pinto, J. C., and Lima, E. L. (1996). Hybrid-neural modeling for particulate solid drying processes. *Power Technology*, (87):153–160.
- Cubillos, F. A. and Lima, E. L. (1997). Identification and optimizing control of a rougher flotation circuit using an adaptable hybrid-neural model. *Minerals Engineering*, 10(7):707–721.
- Cybenko, G. (1989). Approximation by superpositions of a sigmoidal function. *Mathematics of Control Signals and Systems*, 2:303–314.
- Daubechies, I. (1988). Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, (41):909–996.
- Deco, G., Schittenkopf, C., and Schrmann, B. (1997). Dynamical analysis of time series by statistical tests. *Int. J. Bif. Chaos*, 7(12):2629–2652.
- Doebelin, E. O. (1980). *System modeling and response - Theoretical and experimental approaches*. John Wiley & Sons, Inc.
- Doebelin, E. O. (1990). *Measurement Systems - Application and Design*. McGRAW-HILL. Fourth Edition.
- Donoho, D. L. (1993). Unconditional bases are optimal bases for data compression and for statistical estimation. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 1(1):100–115.
- Donoho, D. L. (1995). De-noising by soft-thresholding. *IEEE Transactions on Information Theory*, 41(3):613–627.
- Donoho, D. L. and Johnstone, I. M. (1994). Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. *Biometrika*, (81):425–455.
- Dziuban, S. T., Ecker, J. G., and Kupferschmid, M. (1985). Using deep cuts in an ellipsoid algorithm for nonlinear programming. *Mathematical Programming Study*, 25:93–107.

- Elman, J. L. (1990). Finding structure in time. *Cognitive Science*, (14):179–211.
- Eskinat, E., Johnson, S. H., and Luyben, W. L. (1993). Use of auxiliary information in system identification. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 32:1981–1992.
- Farge, M., Hunt, J. C. R., and Vassilicos, J. C. (1993). *Wavelets, Fractals, and Fourier Transforms*. Clarendon Press, Oxford. Editors.
- Fieldler-Ferrara, N. and Prado, C. P. C. (1994). *Caos, uma introdução*. Edgar Blücher Ltda, São Paulo, Brasil.
- Fraser, A. M. (1989). Reconstructing attractors from scalar time series: a comparison of singular system and redundancy criteria. *Physica D*, 34:391–404.
- Garcia, C. (1997). *Modelagem e simulação de processos industriais e de sistemas eletromecânicos*. EDUSP, São Paulo.
- Gençay, R. and Liu, T. (1997). Nonlinear modelling and prediction with feedforward and recurrent networks. *Physica D*, (108):119–134.
- Georgiou, E. F. and Kumar, P. (1994). Wavelets in geophysics. In *Wavelet Analysis and its Applications*. Academic Press, San Diego. Editors.
- Gilmore, R. (1998). Topological analysis of chaotic dynamical systems. *Reviews of Modern Physics*, 70(4):1455–1529.
- Glowinski, R., Lawton, W., Ravachol, M., and Tenenbaum, E. (1990). Wavelet solution of linear and nonlinear elliptic, parabolic and hyperbolic problems in one dimension. In *Proceedings of the Ninth SIAM International Conference on Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, Philadelphia.
- Godfrey, K. R. (1986). Practical problems in identification. In Godfrey, K. and Jones, P., editors, *Signal Processing for Control, Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 358–386. Springer-Verlag.
- Golub, G. and Van Loan, C. (1989). *Matrix Computations*. Johns Hopkins, London.
- Gouesbet, G. (1991). Reconstruction of the vector fields of continuous dynamical systems from numerical scalar time series. *Phys. Rev. A*, 43(10):5321–5331.

- Gouesbet, G. and Letellier, C. (1994). Global vector-field reconstruction by using a multivariate polynomial l_2 approximation on nets. *Phys. Rev. E*, 49(6):4955–4972.
- Graebe, S. F. (1990). *Theory and Implementation of Gray Box Identification*. Stockholm, Sweden. Ph.D. thesis TRITA-REG-9006.
- Graps, A. (1995). An introduction to wavelets. *IEEE Computational Science and Engineering*, 2(2).
- Greblick, W. and Pawlak, M. (1989). Recursive nonparametric identification of Hammerstein systems. *Journal of the Franklin Institute*, 326(4):461–481.
- Guinjoan, F., Calvente, J., Poveda, A., and Matínez, L. (1997). A large-signal modeling and simulation of switching DC-DC converters. *IEEE Trans. Power Electron.*, 12(3):485–494.
- Guo, H. and Burrus, C. S. (1996). Convolution using the discret wavelet transform. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, volume III, pages 1291–1294, Atlanta. IEEE ICASSP-96.
- Haber, R. and Keviczky, L. (1976). Identification of nonlinear dynamic systems. In *4th IFAC Symp. Ident. & System Par. Est.*, pages 79–126.
- Haber, R. and Unbehauen, H. (1990). Structure identification of nonlinear dynamic systems - a survey on input/output approaches. *Automatica*, 26(4):651–677.
- Häck, M. and Köhne, M. (1996). Estimation of wastewater process parameters using neural networks. *Wat. Sci. Tech.*, 33(1):101–115.
- Hall, R. C. and Seborg, D. E. (1989). Modelling and self-tuning control of a multivariable pH neutralization process. Part I: Modelling and multiloop control. In *Proceedings of the American Control Conference*, volume 2, pages 1822–1827. Pittsburgh.
- Hansen, L. H., Madsen, H., Holst, J., Bidstrup, N., and Vadstrup, P. (1997). A dynamic nonlinear model of a thermostatic valve. In *CLIMA 2000 Conference*, Brussels.
- Henrique, H. M., Lima, E. L., and Pinto, J. C. (1998). A bifurcation study on neural network models for nonlinear dynamics systems. *Latin American Applied Research*, 28:187–200.

- Herbert, J. A. and Tulleken, A. F. (1993). Grey-box modeling and identification using physical knowledge and bayesian techniques. *Automatica*, 29(2):285–308.
- Hernández, E. and Arkun, Y. (1992). Study of the control-relevant properties of backpropagation neural network models of nonlinear dynamical systems. *Computers Chemical Engineering*, 16(4):227–240.
- Hernández, E. and Arkun, Y. (1993). Control of nonlinear systems using polynomial ARMA models. *AIChE Journal*, 39(3):446–460.
- Ikonen, E. and Najim, K. (1999). Identification of Wiener systems with steady-state non-linearities. *European Control Conference*. 31 August to 3 September.
- Ivanov, P. C., Rosenblum, M. G., Peng, C., Mietus, J., Havlin, S., Stanley, H. E., and Golberg, A. L. (1996). Scaling behaviour of heartbeat intervals obtained by wavelet-based time-series analysis. *Nature*, (383):323:327.
- Jácome, C. R. F. (1996). *Uso de conhecimento prévio na Identificação de Modelos Polinomiais NARMAX*. Dissertação de Mestrado PPGEE, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.
- Jácome, C. R. F. and Aguirre, L. A. (1996). Uso de técnicas de identificação não-linear na modelagem de válvulas para controle de processos. *I Congresso Mineiro de Automação*, (37–45). Belo Horizonte.
- Jang, H.-K. and Kim, K.-J. (1994). Identification of loudspeaker nonlinearities using the NARMAX technique. *J. Audio Eng. Soc.*, 42(1/2):50–59.
- Joerding, W. J. and Meador, J. L. (1991). Encoding a priori information in feedforward networks. *Neural Networks*, 4:847–856.
- Johansen, T. A. (1996). Identification of non-linear systems using empirical data and prior knowledge - an optimization approach. *Automatica*, 32:337.
- Jordan, M. I. (1986). Serial order: A parallel distributed processing approach. Technical report, UC San Diego, Institute for Cognitive Science. Report 8604.
- Jorgensen, S. B. and Hangos, K. M. (1995). Grey box modelling for control: Qualitative models as a unifying framework. *Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing*, 9(6):547–562.

- Judd, K. and Mees, A. I. (1995). On selecting models for nonlinear time series. *Physica D*, (82):426–444.
- Kárný, M., Halousková, A., and Nedoma, P. (1995). Recursive approximation by ARX model: A tool for grey box modelling. *Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing*, 9(6):525–546.
- Karplus, W. (1976). *The spectrum of Mathematical Modelling and System Simulation. Simulation of Systems*. North-Holland Publishing Company.
- Kazimierczuk, M. K. and Massarini, A. (1997). Feedforward control of DC-DC pwm boost converter. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 44(2):143–148.
- Kim, S., Kim, D., and Chang, K. (1994). Using two successive subgradients in the ellipsoid method for nonlinear programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 82(3):543–554.
- Klamkin, M. P. (1987). *Mathematical modeling. Classroom notes in applied mathematics*. SIAM, Philadelphia, U.S.A.
- Knohl, T. and Unbehauen, H. (1998). Adaptive control of linear systems with unknown memoryless input nonlinearities using ANN. In *The IFAC Workshop on Adaptive Systems in Control & Signal Processing*, pages 466–471, Glasgow, Scotland.
- Korenberg, M. (1985). Orthogonal identification of nonlinear difference equation models. *Mid. West Symposium on Circuits and Systems*. Louisville.
- Korenberg, M., Billings, S., Y.P., L., and McIlroy, P. (1988). Orthogonal parameter estimation algorithm for non-linear stochastic systems. *Int. J. Control*, 48(1):193–210. Louisville.
- Lang, M., Guo, H., Odegard, J. E., Burrus, C. S., and Wells, R. O. (1995). Nonlinear processing of a shift-invariant DWT for noise reduction. In Szu, H. H., editor, *SPIE Conference 2491, Wavelet Applications II*, pages 640–651, Orlando.
- Le Sceller, L., Letellier, C., and Gouesbet, G. (1994). Structure selection for global vector field reconstruction by using the identification of fixed points. *Phys. Rev. E*, 60(2):1600–1606.
- Leontaritis, I. and Billings, S. (1985a). Input-output parametric models for non-linear systems part I: deterministic non-linear systems. *Int. J. Control*, 41(2):303–328.

- Leontaritis, I. and Billings, S. (1985b). Input-output parametric models for non-linear systems part II: deterministic non-linear systems. *Int. J. Control*, 41(2):329–344.
- Letellier, C., Gouesbet, G., and Rulkov, N. (1996). Topological analysis of chaos in equivariant electronic circuits. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 6(12):2531–2555.
- Letellier, C., Le Sceller, L., Dutertre, P., Gouesbet, G., Fei, Z., and Hudson, J. L. (1995a). Topological characterization and global vector field reconstruction from an experimental electrochemical system. *Journal of Physical Chemistry*, A(99):7016–7027.
- Letellier, C., Le Sceller, L., E., M., Dutertre, P., Maheu, B., and G., G. (1995b). Global vector field reconstruction from a chaotic experimental signal in copper electrodisolution. *Phys. Rev. E*, 51(5):4262–4266.
- Leyva, R., L., M.-S., B., J., C., M. J., and Guinjoan, F. (1997). Identification and control of power converters by means of neural networks. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 44(8):735–742.
- Lindskog, P. and Ljung, L. (1995). Tools for semiphysical modelling. *Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing*, 9(6):509.
- Ljung, L. (1987). *System identification, Theory for the user*. Prentice-Hall, New Jersey.
- Ljung, L. (1994). System identification in a MIC perspective. *Modelling Identification and Control*, 15(3):153–159. Special 15th Anniversary Issue.
- Ljung, L. and Guo, L. (1995). The role of model validation for assessing the size of the unmodeled dynamics. Technical report, Linköpings University, S-581 83 Linköping, Sweden. LiTH-ISY-R-1803 ISSN 1400-3902.
- Lorenz, E. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 20:282–293.
- Mahdavi, J., Emaadi, A., Bellar, M. D., and Ehsani, M. (1997). Analysis of power electronic converters using the generalized state-space averaging approach. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 44(8):767–770.
- Mao, K. Z. and Billings, S. (1997). Algorithms for minimal model structure detection in nonlinear dynamic system identification. *Int. J. Control*, 68(2):311–330.

- Marchi, P. A., Coelho, L. S., and Coelho, A. A. R. (1999). Comparative study of parametric and structural methodologies in identification of an experimental nonlinear process. In *IEEE International Conference on Control Applications*, pages 1062–1067, Kohala Coast, Hawaii, USA.
- Mason, J. and Parks, P. (1992). Selection of neural network structures: Some approximation theory guidelines. *Neural Network for Control and Systems IEE Control Engineering Series 42*, pages 151–180. Reading.
- Massaopust, P. R. (1994). *Fractal Functions, Fractal Surfaces, and Wavelets*. Academic Press, San Diego.
- Mavrovouniotis, M. L. and Chang, S. (1992). Hierarchical neural networks for process monitoring. *Comp. Chem. Eng.*, 4(16):347.
- Mees, A., Jackson, M., and Chua, L. (1992). Device modeling by radial basis functions. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 39(1):19–26.
- Mendes, E. M. and Billings, S. A. (1998). On overparametrization of global-nonlinear discrete models. *Int. J. Bif. Chaos*, 8(3):535–556.
- Mendes, E. M. and Billings, S. A. (2000). Term clustering ideas applied to rational NARMAX models. (Submitted).
- Mendes, E. M. A. M. (1995). *Identification of Nonlinear Discrete Systems with Intelligent Structure Detection*. PhD Thesis, University of Sheffield, Sheffield, UK.
- Miyano, T., Kimoto, S., Shibuta, H., Nakashima, K., Ikenaga, Y., and Aihara, K. (2000). Time series analysis and prediction on complex dynamical behavior observed in a blast furnace. *Physica D*, 135:305–330.
- Narendra, K. S. and Parthasarathy, K. (1990). Identification and control of dynamical systems using neural networks. *IEEE Trans. Neural Net.*, 1:4–27.
- Nikolaou, M. and Vuthandam, P. (1998). FIR model identification: Parsimony through kernel compression with wavelets. *AIChE Journal*, 44(1):141–150.
- Norgaard, M. (1997). Neural network based system identification - TOOLBOX. Technical report, DTU, Technical University of Denmark. Technical Report 97-E-851.

- Noshiro, M., M., F., Linkens, D., and Goode, K. (1993). Nonlinear identification of the P_{CO_2} control system in man. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 40:189–202.
- Ogata, K. (1998). *Engenharia de Controle Moderno*. Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro, RJ.
- Ohba, T. and Ishida, M. (1998). Application of a neural network to evaluation of interactions in a MIMO process. *AIChE Journal*, 44(9):2018–2024.
- Packard, N. H., Crutchfield, J. P., Farmer, J. D., and Shaw, R. S. (1980). Geometry from a time series. *Phys. Rev. Lett.*, 49(9):712–716.
- Patwardhan, R. S., Lakshminarayanan, S., and L., S. S. (1998). Constrained nonlinear MPC using Hammerstein and Wiener models: PLS framework. *AIChE Journal*, 44(7):1611–1622.
- Petrick, M. H. and Wigdorowitz, B. (1997). A priori nonlinear model structure selection for system identification. *Control Eng. Practice*, 5(8):1053–1062.
- Peyton-Jones, J. and Billings, S. (1989). Recursive algorithm for computing the frequency response of a class of non-linear difference equation models. *Int. J. Control*, 50(5):1925–1940.
- Pottmann, M. and Pearson, R. K. (1998). Block-oriented NARMAX models with output multiplicities. *AIChE Journal*, 44(1):131–140.
- Pröll, T. and Karim, M. N. (1994). Model-predictive pH control using real-time NARX approach. *AIChE Journal*, 40(2):269–282.
- Reed, R. (1993). Pruning algorithms – a survey. *IEEE Trans. Neural Networks*, 4(5):740–747.
- Resnikoff, H. L. and Wells, R. O. (1997). *Wavelet analysis and the Scalable Structure of Information*. Springer-Verlag, New York.
- Robertsson, J. O. A., Blanch, J. O., Symes, W. W., and Burrus, C. S. (1994). Galerkin-wavelet modeling of wave propagation: optimal finite-difference stencil design. *Mathematical and Computer Modelling*, 19(1):31–38.
- Robinson, E. A. and Durrani, E. A. (1986). *Geophysical Signal Processing*. Prentice Hall. Englewood Cliffs, N.J.

- Rodrigues, G. G. (1996). *Identification of Real Nonlinear Systems with NAR-MAX Polynomial Models, (in Portuguese)*. Master's Thesis, PPGEE, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brazil.
- Rössler, O. E. (1976). An equation for continuous chaos. *Phys. Lett.*, 57A(5):397–398.
- Sadegh, P., Holst, J., Madsen, H., and Melgaard, H. (1995). Experiment design for grey box identification. *Int. J. of Adaptative Control and Signal Processing*, 9(6):491.
- Scales, J. A. (1994). *Theory of Seismic Imaging*. Samizat Press, Golden, CO.
- Sjöberg, J., Zhang, Q., Ljung, L., Benveniste, A., Delyon, B., Glorennec, P., Hjalmarsson, H., and Juditsky, A. (1995). Nonlinear black-box modeling in system identification: A unified overview. *Automatica*, 31:1691.
- Sohlberg, B. (1998). *Supervision and Control for Industrial Processes - Using Grey Box Models, Predictive Control and Fault Detection Methods*. Springer-Verlag.
- Sorlie, J. A. (1994). *On Interfacing Software for Grey-Box Identification*. Licentiate thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden.
- Sze, T. L. (1995). *System Identification Using Radial Basis Function Networks*. PhD Thesis, University of Sheffield, Sheffield, UK.
- Takens, F. (1981). Detecting strange attractors in turbulence. In Rand, D. and Young, L. S., editors, *Dynamical systems and turbulence, Lecture Notes in Mathematics*, volume 898, pages 366–381. Springer Verlag.
- Thompson, M. L. and Kramer, M. A. (1994). Modeling chemical processes using prior knowledge and neural networks. *Automatica*, 40(8):1328–1340.
- Tikhonov, A. N. and Arsenin, V. Y. (1977). *Solutions of Ill-posed Problems*. Winston, Washington DC.
- Tôrres, L. A. B. and Aguirre, L. A. (1996). Um protótipo para o estudo de sistemas dinâmicos não-lineares - montagem e sintonia. In *Proc. XI Congresso Brasileiro de Automática*, volume 2, pages 881–886, São Paulo - SP.
- Tse, C. K. (1994). Flip bifurcation and chaos in three-state boost switching regulators. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 41(1):16–23.

- Tsoi, A. C. (1998). Recurrent neural network architectures an overview. In Cirles, C. and Can, M., editors, *Adaptive Processe of Sequence and Data Stuches*, pages 1–26, Heidelberg, New York. Springer Verlag Berlin.
- Tsoi, A. C. and Back, A. (1999). Discrete time recurrent neural network architectures: A unifying review. *Neurocomputing*, (15):183–223.
- Tulleken, H. J. A. F. (1993). Grey-box modelling and identification using physical knowledge and bayesian techniqes. *Automatica*, 29(2):285–308.
- Turner, M. (1986). Texture discrimination by Gabor functions. *Biological Cybernectics*, (55):71–82.
- Ueda, Y. (1980). Steady motions exhibited by Duffing’s equation: A picture book of regular and chaotic motions. In Holmes, P. J., editor, *New approaches to nonlinear problems in dynamics*, pages 311–322. SIAM.
- Ueda, Y. (1985). Random phenomena resulting from nonlinearity in the system described by Duffing’s equation. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 20(5/6):481–491.
- Uppal, A., Ray, A. W., and Poore, A. B. (1974). On the dynamic behavior of continuous stirred tank reactors. *Chemical Engineering Science*, 29:967.
- Vallverdu, M., Korenberg, M. J., and Caminal, P. (1992). Model indentification of the neural control of the cardiovascular system using NARMAX models. *IEEE Conference*.
- Wiener, N. (1958). Nonlinear problems in random theory. In Wiley, J. and Sons, editors, *The Technology Press*. M.I.T. New York, NY.
- Wigren, T. (1993). Recursive prediction error identification using the nonlinear Wiener model. *Automatica*, 29(4):1011–1025.
- Wigren, T. (1998). Output error convergence of adaptative filters with compensation for output nonlinearities. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 43(7):975–978. Louisville.
- Wong, L. K., Leung, F. H., and Tam, P. K. S. (1997). A simple large-signal nonlinear modeling approach for fast simulation of zero-current-switch quasi-resonant converters. *IEEE Trans. Power Electron.*, 12(3):437–442.
- Wornell, G. W. (1996). *Signal Processing with Fractals, A Wavelet-Based Approach*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

- Yilmaz, O. (1987). Seismic data processing. Tulsa. Society of Exploration Geophysicists.
- Zhu, Q. M. and Billings, S. A. (1991). Recursive parameter estimation for nonlinear rational models. *Journal of Systems Engineering*, 1:63–76.
- Zhu, Q. M. and Billings, S. A. (1993). Parameter estimation for stochastic nonlinear rational models. *Int. J. Control*, 57(2):309–333.
- Zhu, Q. M. and Billings, S. A. (1996). Fast orthogonal identification of nonlinear stochastic models and radial basis function neural networks. *Int. J. Control*, 64(5):871–886. Reading.