

Joilson Silva Porto

**Simetria de Bose em amplitudes quirais anômalas e
aspectos da renormalização da eletrodinâmica quântica
reduzida**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio

Belo Horizonte

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Porto, Joilson Silva.

M853s Simetria de Bose em amplitudes quirais anômalas e aspectos da renormalização da eletrodinâmica quântica reduzida/ Joilson Silva
Porto. – 2018.
75 f.

Orientador: Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio.
Tese (doutorado) – Universidade Federal de Minas Gerais –
Departamento de Física.
Bibliografia: f. 81 -89.

1. Eletrodinâmica quântica. Teses. 2. Renormalização (Física).
I. Título. II. Sampaio, Marcos Donizeti Rodrigues.

CDU – 519.67 (043)

Elaborada pela Biblioteca Professor Manoel Lopes de Siqueira da UFMG.



Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física
Caixa Postal 702
30.123-970 Belo Horizonte - MG - Brasil

Telefone (xx) (31) 3409 5637
(xx) (31) 3409 5633
Fax (xx) (31) 3409 5688
(xx) (31) 3409 5600
e-mail pgfisica@fisica.ufmg.br

ATA DA SESSÃO DE ARGUIÇÃO DA 347ª TESE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA, DEFENDIDA POR Joilson Silva Porto orientado pelo professor Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio para obtenção do grau de **DOUTOR EM CIÊNCIAS, área de concentração Física**. Às 10:00 horas de vinte e quatro de agosto de dois mil e dezoito, na sala 3098 do Departamento de Física da UFMG, reuniu-se a Comissão Examinadora, composta pelos professores **Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio** (Orientador - Departamento de Física/UFABC), **Antônio Sérgio Teixeira Pires** (Departamento de Física/UFMG), **Nelson de Oliveira Yokomizo** (Departamento de Física/UFMG), **André Luiz Mota** (Departamento de Ciências Naturais/UFSJ) e **Heron Carlos de Godoy Caldas** (Departamento de Ciências Naturais/UFSJ) para dar cumprimento ao Artigo 37 do Regimento Geral da UFMG, submetendo o Mestre **Joilson Silva Porto** à arguição de seu trabalho de Tese de Doutorado, que recebeu o título de **"Simetria de Bose em amplitudes quirais anômalas e aspectos da renormalização da eletrodinâmica quântica reduzida"**. Às 14:00 horas do mesmo dia o candidato fez uma exposição oral de seu trabalho durante aproximadamente 50 minutos. Após esta, os membros da comissão prosseguiram com a sua arguição e apresentaram seus pareceres individuais sobre o trabalho, concluindo pela aprovação do candidato.

Belo Horizonte, 24 de agosto de 2018.

Prof. Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio (via Skype)
Orientador do estudante
Departamento de Física/UFABC

Prof. Antônio Sérgio Teixeira Pires
Departamento de Física/UFMG

Prof. Nelson de Oliveira Yokomizo
Departamento de Física/UFMG

Prof. André Luiz Mota
Departamento de Física/UFSJ

Prof. Heron Carlos de Godoy Caldas
Departamento de Física/UFSJ

Candidato

Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas que contribuíram de alguma forma com o meu percurso até aqui.

Agradeço, de forma especial, ao Marcos Sampaio pela orientação e incentivo; à Carolina Nemes (*in memoriam*); aos colaboradores Brigitte Hiller, Adriano Cherchiglia, Alexandre Vieira e Gustavo Gazzola; às agências de fomento à pesquisa CAPES e CNPq, pelo suporte financeiro; aos professores e funcionários da UFMG; aos meus pais Neusa e Délio; irmãos, Daniel, Isaac e Josias; sobrinhas, Esther e Clarice; à Barbara Marques, pelo apoio e companhia; aos grupos Tira o Queijo, Trovão das Minas e Mictian, pelo refúgio musical/artístico; aos amigos, Gabriel Fagundes, Jonas Reis, Eliel Silva, Tassius Maciel, David Martins, José David, Hakob Avetisyan, Dangeles Lima, Pedro, Andrej Gadelha, Fábio Lacerda, Yuri Batista, Janaína Dias, Bruna, Ruany Maia, Vinícios Theofilo, Victor Macaroun, Lucas Mussnich, Jean Felipe, Tiago Debarba, Daniela Ramos, Pedro Pacheco, Átila, Philip, Mirna, Maíra, Erinaldo Borges, Bete, Núbia Cardoso, Eltom Dias, Leandro Barbosa, Leandro Ribeiro, Rafael Hatred, Rafael Machado, Lucas Teixeira, Kleber Silva, Avanilton, Halph, Leon Lacerda, Diego David, Diego Oliveira, Fabio Ferreira, Rogério Lima, Sangram Sahoo, Gilberto Junior, Beatriz Ferraz, Murilo Lacerda, Carlos Parra, Igor Antoniazzi, Diego Carvalho e tantos outros que não foram citados, mas que foram, também, essenciais na minha formação pessoal e profissional.

“Physics is like sex: sure, it may give some practical results, but that’s not why we do it.”

Richard Feynman

Resumo

Esta tese apresenta resultados envolvendo dois temas no contexto do tratamento de divergências em teorias de calibre: o primeiro sobre a simetria de Bose em amplitudes quirais anômalas e o segundo sobre a renormalização da eletrodinâmica quântica reduzida.

Surge uma aparente inconsistência em relação à simetria de Bose, em amplitudes relacionadas à anomalia quiral, quando, ao se impor essa simetria, a anomalia é fixada nas identidades de Ward, violando, por exemplo, a conservação da corrente vetorial. Esse problema era assumido, até então, como intrínseco à anomalia. Mostramos, no entanto, que o problema surge devido às dificuldades envolvendo o tratamento da matriz γ_5 em amplitudes divergentes, e que, sob uma prescrição adequada, a simetria de Bose não promove restrição alguma à anomalia. Obtivemos relações entre tais amplitudes consistentes com essa simetria, em um método de regularização que se mantém na dimensão física da teoria. Os resultados servem, ainda, como uma evidência de que a álgebra envolvendo o γ_5 em amplitudes divergentes necessita de uma prescrição adequada, mesmo no contexto de métodos não dimensionais.

Os resultados sobre o segundo tema surgem de um estudo sobre a regularização e renormalização da eletrodinâmica quântica reduzida, um modelo efetivo onde o campo fermiônico é restrito a uma dimensão menor que o campo de calibre. Nas variantes desse modelo, com férmions sem massa restritos a $2+1$ e $1+1$ dimensões, tratamos da estrutura de divergência a um laço, onde analisamos a relação entre termos finitos arbitrários, invariância por rotação dos momentos internos e simetria de calibre. Por fim, obtivemos as constantes de renormalização a dois laços para o modelo com férmions sem massa em $2+1$ dimensões, sob um método de regularização independente, e comparamos com resultados existentes.

Palavras-chaves: anomalia quiral. identidades de Ward. teorias de calibre. renormalização. regularização. eletrodinâmica quântica. modelo de Schwinger. modelos efetivos.

Abstract

In this thesis we present results on two topics in the context of regularization of gauge theories, the first one on the Bose symmetry in anomalous chiral amplitudes and the second one on the renormalization until the two-loop order of reduced quantum electrodynamics.

In the apparent inconsistency of Bose symmetry in amplitudes related to the chiral anomaly, the preservation of this symmetry leads to fixing the anomaly on the Ward identities, which violates, for example, the conservation of vectorial current. Although this problem is often assumed to be intrinsic to the anomaly itself, we show that it results from the difficulty on how to work with γ_5 during the regularization procedure. We demonstrate how to obtain the quantum breaking of Ward identities in a way that allows preserving Bose symmetry independently of the chiral anomaly, in a fixed-dimension method. The results are an evidence of the necessity of a proper prescription on γ_5 treatment even in this kind of method.

The results on the second topic emerge from the study of the regularization and renormalization of reduced quantum electrodynamics, an effective model to describe fermionic fields restricted to dimensions smaller than that of the gauge fields. In the variants of this model with massless fermions on 1+1 and 2+1 dimensions, we investigate the divergence structure at the one-loop order, where we analyze the relationship with finite arbitrary terms, momentum routing invariance and gauge symmetry. Lastly, we calculate the renormalization constants for massless fermions on 2+1 dimensions at two-loop order.

Keywords: chiral anomaly. Ward identities. gauge theories. renormalization. regularization. quantum electrodynamics. Schwinger model. effective models.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
2	SOBRE A SIMETRIA DE BOSE EM AMPLITUDES QUIRAIS ANÔMALAS	19
2.1	Revisão sobre a anomalia quiral	19
2.2	A anomalia quiral nas identidades de Ward vetorial e axial	23
2.3	Relações entre amplitudes quirais anômalas: A-V versus L-R	26
2.3.1	Duas dimensões	26
2.3.2	Quatro dimensões	29
2.4	Síntese e considerações	36
3	ASPECTOS DA RENORMALIZAÇÃO DA ELETRODINÂMICA QUÂN- TICA REDUZIDA	39
3.1	Modelo e regras de Feynman	39
3.2	regularização e renormalização	42
3.2.1	Amplitudes a um laço	44
3.2.2	Constantes e funções do grupo de renormalização	48
3.3	Considerações e perspectivas	54
4	CONCLUSÃO	57
	APÊNDICES	59
	APÊNDICE A – CÁLCULOS DE AMPLITUDES	61
A.1	Integrais divergentes: definições e notações	61
A.2	Parametrização de integrais finitas	62
A.3	Exemplo de cálculo de diagrama a um laço	64
A.4	Exemplo de cálculo de diagrama a dois laços não overlapado	66
A.5	Exemplo de cálculo de diagrama a dois laços overlapado	68
	REFERÊNCIAS	71

1 Introdução

Para lidar com divergências inerentes aos cálculos perturbativos em teoria quântica de campos, são realizados, usualmente, procedimentos de regularização nos passos intermediários desses cálculos. Esses procedimentos devem fazer parte de um esquema completo e consistente de regularização e renormalização [1]. Devem, assim, respeitar os princípios de unitariedade e causalidade, as simetrias do modelo, e ainda, deles não devem resultar nenhuma contradição matemática.

Esquemas baseados na continuação dimensional do espaço-tempo estão entre os mais utilizados por satisfazerem tais requisitos em diversos contextos [2]. Em tais métodos é necessário definir um conjunto de regras para operações envolvendo objetos de dimensão específica, como tensores métricos e matrizes de Dirac. Essas regras resultam em restrições ao uso de identidades genuinamente n -dimensionais, onde n = dimensão física do espaço-tempo; *i.e.*, identidades que são válidas na dimensão física, mas que podem gerar inconsistências no contexto do processo de regularização.

Constituem exemplos importantes os relacionados à matriz γ_5 , onde, na regularização dimensional (RD) [3–5], um possível tratamento envolve a definição de t’Hooft e Veltman (tHV) [3] para esse objeto,

$$\gamma_5 = \frac{i}{4!} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu \quad (1.1)$$

em 3+1 dimensões, e a expressão equivalente em 1+1 dimensões; em oposição à definição por anticomutação,

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0, \quad (1.2)$$

uma vez que essa última leva a inconsistências no contexto da RD [6]. Tais restrições relacionadas ao γ_5 é tema de debate na literatura [7–14], onde se discute como operar com tal objeto em diferentes métodos de regularização, bem como alternativas à definição tHV que sejam computacionalmente eficientes.

Análises superficiais poderiam induzir à conclusão de que esquemas não dimensionais são livres dessas restrições, mas esse nem sempre é o caso. Em relação ao γ_5 , há evidências de que a sua definição por anticomutação leva a inconsistências mesmo em métodos definidos na dimensão física [15, 16]. Além disso, foi mostrado recentemente, na referência [17], que as dificuldades em relação à álgebra de Dirac e de Lorentz que existem em métodos dimensionais também estão presentes em métodos não dimensionais; onde foi proposto um procedimento consistente para manipular tensores de Lorentz, incluindo o tensor ϵ e a matriz γ_5 , em alguns desses métodos. O estudo foi feito, basicamente, em variantes dos

métodos conhecidos como regularização implícita (RI) [18], regularização diferencial [19] e regularização quatro-dimensional [15] (consulte [2] para uma revisão atual sobre esquemas de regularização); métodos esses que, além de serem definidos na dimensão física, agem diretamente nas integrais nuas, sem modificarem diretamente a lagrangiana pela adição de parâmetros; sendo, por isso, usualmente denominados *métodos implícitos*. O procedimento proposto se fundamenta no fato de que, nesses métodos, contrações de Lorentz não comutam, em geral, com renormalização; existindo, assim, restrições ao uso das identidades genuinamente n -dimensionais.

Apresentaremos, nesta tese, um resultado que contribui a esse tópico; onde investigamos uma aparente inconsistência em relação a Simetria de Bose em amplitudes quirais anômalas, resultante da definição por anticomutação do γ_5 , num esquema de regularização que se mantêm na dimensão física. Esse problema surge quando relacionamos amplitudes quirais associadas ao campo espinorial ψ com amplitudes associadas aos campos quirais esquerdo ψ_L e direito ψ_R , definidos pela decomposição quiral

$$\psi = \psi_L + \psi_R \quad (1.3)$$

com

$$\psi_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi \quad \text{e} \quad \psi_R = \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi, \quad (1.4)$$

onde o espinor de quatro componentes é escrito em termos de espinores de duas componentes [20,21]. Nas relações entre as amplitudes, obtidas a partir do γ_5 definido por anticomutação, a simetria de Bose (que permite a permutação de vértices iguais em um diagrama) impõe restrições às amplitudes. Como a anomalia quiral se manifesta na quebra das identidades de Ward (IW) vetorial (V) ou axial (A) [22–24], que, por sua vez, estão relacionadas às amplitudes mencionadas, essas restrições se estendem a anomalia quiral, levando, por exemplo, a quebra da IWV.

Até então, essa dificuldade parecia ser intrínseca à anomalia, onde acreditava-se que a manutenção da simetria de Bose dos diagramas envolvendo vértices quirais esquerdo (L) ou direito (R) implicaria na fixação da anomalia nas IWs A e V, sendo necessário recorrer a adições de contra-termos [25,26]. Em contrapartida, foi mostrado que a simetria de Bose é compatível com a simetria de calibre em (1+1) D, em estudos não perturbativos da anomalia quiral [27,28], contrariando os resultados anteriores.

Estudamos essas relações numa prescrição baseada na definição tHV para o γ_5 (1.1), mas no contexto de um esquema de regularização na dimensão física. Essa prescrição está relacionada à preservação de uma simetrização em relação a índices de Lorentz e momentos externos, na avaliação de traços de Dirac; o que não acontece ao se utilizar a definição por anticomutação, como discutiremos com mais detalhes no próximo capítulo. Mostramos, assim, como obter relações entre tais amplitudes consistentes com a simetria de Bose; e, a partir dessas relações, mostramos que essa simetria não impõe restrição alguma à anomalia

quiral. Mostramos, também, que há contribuições de certas amplitudes que seriam nulas pela definição do γ_5 por anticomutação; e obtivemos as anomalias na forma de operador, nas representações A-V e R-L, em uma forma independente de regularização.

O segundo tema que compõe esta tese é um estudo de aspectos da renormalização da eletrodinâmica quântica reduzida (EDQR) [29–39], também conhecida por pseudo eletrodinâmica quântica [40–44]; um modelo efetivo para descrever sistemas em que o campo fermiônico está restrito a uma dimensão menor que o campo de calibre. Estudamos, no contexto de um esquema de regularização implícita, os casos com férmions não massivos restritos a $2+1$ e $1+1$ dimensões; onde analisamos a relação entre a invariância de rótulo dos momentos internos (IRM) nos gráficos de Feynman e a simetria de calibre, a um laço, buscando generalizar para as EDQRs a relação entre IRM e simetria de calibre já verificada em diversos modelos [16, 45–48]. Como resultados adicionais: calculamos, na EDQR com férmions não massivos em $2+1$ dimensões, as funções do grupo de renormalização a dois laços; e iniciamos um estudo sobre o cálculo de correções finitas a dois laços e o papel de ambiguidades de regularização nessas correções, tendo em vista possíveis aplicações, como no cálculo de observáveis no contexto de aplicações em matéria condensada.

Os resultados sobre o primeiro tema serão apresentados no capítulo 2. Revisaremos a anomalia quiral na seção 2.1 e as IWs V-A na seção 2.2. Abordaremos, então, o problema da simetria de Bose em amplitudes quirais; analisando relações entre IWs A-V versus IWs R-L, em duas dimensões na seção 2.3.1, e em quatro dimensões na seção 2.3.2, com uma síntese e discussão dos resultados na seção 2.4. Assim, a essência do trabalho está contida na seção 2.3. Esses resultados estão publicados em [49].

O segundo tema será apresentado no capítulo 3. A seção 3.1 é uma revisão geral sobre modelo e regras de Feynman, que foi fundamentado principalmente nas referências [29, 32–34, 42]. Na seção 3.2.1 apresentaremos um estudo da estrutura de divergência a um laço, com uma análise da relação entre IRM, termos finitos arbitrários (ou termos de superfície) e IWs de calibre. A renormalização a dois laços da EDQR_{4,3} será apresentada na seção 3.2.2, com a apresentação dos resultados para o cálculo das constantes de renormalização. Discussões e perspectivas desse trabalho serão apresentadas na seção 3.3.

O capítulo 4 consiste de conclusões gerais e perspectivas, seguido do apêndice A sobre alguns aspectos técnicos: parametrizações de integrais finitas, definições e notações para integrais divergentes no contexto da RI e exemplos de como foram realizados os cálculos das amplitudes.

2 Sobre a simetria de Bose em amplitudes quirais anômalas

A simetria de Bose é a simetrização de uma amplitude em relação à permutação de bósons envolvidos na amplitude. Nos diagramas de Feynman, essa simetria se manifesta pela invariância sob permutação dos índices relacionados a dois bósons. Considere, como exemplo, uma amplitude $\Gamma_{\mu\nu}(p, q)$, cujo índice μ e momento p estão associados a um fóton externo; e índice ν e momento q , a outro fóton externo. Então, esse diagrama satisfaz a simetria de Bose se $\Gamma_{\mu\nu}(p, q) = \Gamma_{\nu\mu}(q, p)$.

A anomalia quiral [22,23], associada a quebra quântica da lei clássica para a corrente axial, é importante, por exemplo, para descrever o decaimento do pión em dois fótons (a referência [50] é uma revisão atual sobre a relação entre a anomalia e o decaimento). O estudo dessas anomalias, em teoria de perturbação, é feito a partir das chamadas Identidades de Ward (IW). Ao relacionar IWs quirais em duas bases, quiral direto-esquerdo (R-L) com vetorial-axial (V-A), pode surgir uma aparente inconsistência com a simetria de Bose nos diagramas envolvidos.

Iremos, neste capítulo, abordar esse problema, identificando que o mesmo está relacionado à questão da regularização envolvendo objetos dimensionais, apresentada na introdução. Apresentaremos uma análise, sob a perspectiva de teoria de perturbação, para essa aparente inconsistência.

2.1 Revisão sobre a anomalia quiral

Podemos descrever férmions não massivos interagindo via acoplamentos axial e vetorial pela ação, em d dimensões,

$$S = \int d^d x \bar{\psi} \left(i \not{\partial} + e \not{V} + e A \gamma^5 \right) \psi, \quad (2.1)$$

onde os campos vetoriais, V_μ e A_μ podem ser tratados como externos e clássicos, pois estamos interessados em correções a um loop apenas, já que, pelo teorema de Adler-Bardeen [51], só elas contribuem para a anomalia. Dessa ação resgatamos, respectivamente, a EDQ, com $A = 0$, e a EDQ quiral, com $A = V$.

Se todos os campos são clássicos, a Eq.(2.1) é invariante sob transformações de calibre e axial locais, *i.e.*, possui simetria $U_V(1) \times U_A(1)$. Associadas a essas simetrias, o teorema de Noether garante a conservação clássica das correntes vetorial, $j_V^\mu \equiv \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$, e

axial, $j_A^\mu \equiv \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$; resultando nas respectivas leis de conservação clássicas:

$$\partial_\mu j_V^\mu = 0 \quad \text{e} \quad \partial_\mu j_A^\mu = 0. \quad (2.2)$$

Em alternativa, podemos reescrever a ação (2.1) a partir da decomposição do campo fermiônico em campos com quiralidades direita (R) e esquerda (L),

$$\psi = \psi_R + \psi_L, \quad (2.3)$$

onde

$$\psi_{R,L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)\psi; \quad (2.4)$$

e dos campos vetoriais A e V em termos de novos campos R e L ,

$$V_\mu = \frac{1}{2}(R_\mu + L_\mu) \quad \text{e} \quad A_\mu = \frac{1}{2}(R_\mu - L_\mu); \quad (2.5)$$

o que resulta em:

$$S = \int d^d x \bar{\psi}_R(i\cancel{\partial} + e\cancel{R})\psi_R + \bar{\psi}_L(i\cancel{\partial} + e\cancel{L})\psi_L. \quad (2.6)$$

A Eq.(2.6) é invariante sob as transformações locais quiral esquerda e quiral direita, *i.e.*, possui simetria $U_L(1) \times U_R(1)$. Assim, temos, associados a esses espinores, correntes de Noether,

$$j_R^\mu \equiv \bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R \quad \text{e} \quad j_L^\mu \equiv \bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L, \quad (2.7)$$

que obedecem suas respectivas leis clássicas de conservação:

$$\partial_\mu j_L^\mu = 0 \quad \text{e} \quad \partial_\mu j_R^\mu = 0. \quad (2.8)$$

Podemos investigar a violação por correções quânticas das leis de conservação (2.2) e (2.8) calculando o valor esperado no vácuo na representação de interação $\langle \partial_\mu j_I^\mu \rangle$, onde $I = \{V, A, R, L\}$ representa cada uma das correntes apresentadas acima.

Em duas dimensões, os termos que contribuem para as correções das leis de conservação são os de primeira ordem nos campos externos (consulte livros-texto, como [52], para mais detalhes). A correção para a lei de conservação da corrente axial é:

$$\langle \partial_\mu j_A^\mu \rangle = ie \int d^2 y \partial_x^\mu \left(\Pi_{\mu\nu}^{AA}(x, y) A^\nu(y) + \Pi_{\mu\nu}^{AV}(x, y) V^\nu(y) \right); \quad (2.9)$$

onde $\Pi_{\mu\nu}^{AV}(x, y)$ é a função correlação,

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}^{AV}(x, y) &= \langle 0 | T j_\mu^A(x) j_\nu^V(y) | 0 \rangle \\ &= -\text{Tr} [s(y-x) \gamma_\mu \gamma_5 s(x-y) \gamma_\nu],\end{aligned}\quad (2.10)$$

com $|0\rangle$ representando o estado de vácuo no espaço de Fock da teoria fermiônica livre, e $\Pi_{\mu\nu}^{AA}(x, y)$ tem a mesma natureza, mas com duas correntes axiais. Analogamente, temos as correções para as leis de conservação das demais correntes,

$$\langle \partial_\mu j_V^\mu \rangle = ie \int d^2 y \partial_x^\mu \left(\Pi_{\mu\nu}^{VA}(x, y) A^\nu(y) + \Pi_{\mu\nu}^{VV}(x, y) V^\nu(y) \right), \quad (2.11)$$

$$\langle \partial_\mu j_R^\mu \rangle = ie \int d^2 y \partial_x^\mu \left(\Pi_{\mu\nu}^{RR}(x, y) A^\nu(y) + \Pi_{\mu\nu}^{RL}(x, y) V^\nu(y) \right) \quad (2.12)$$

e

$$\langle \partial_\mu j_L^\mu \rangle = ie \int d^2 y \partial_x^\mu \left(\Pi_{\mu\nu}^{LR}(x, y) A^\nu(y) + \Pi_{\mu\nu}^{LL}(x, y) V^\nu(y) \right). \quad (2.13)$$

É necessário, assim, computar os diagramas de dois pontos AA e AV para encontrar a anomalia axial; VV e VA, para a anomalia da corrente vetorial; e RR, RL, LR e LL, para as anomalias das correntes J_R e J_L .

No espaço dos momentos, podemos escrever esses diagramas numa forma geral:

$$\Pi_{\mu\nu}^{IJ}(p) = - \int_q \text{Tr} \mathcal{V}_\mu^I \frac{1}{\not{q} - \not{p}} \mathcal{V}_\nu^J \frac{1}{\not{q}}, \quad (2.14)$$

onde $\int_q \equiv \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2}$. Os índices $I, J = \{V, A, L, R\}$, representam, respectivamente, os seguintes vértices: vetorial, axial, quiral esquerdo e quiral direito;

$$\mathcal{V}_\mu^V = \gamma_\mu, \quad \mathcal{V}_\mu^A = \gamma_\mu \gamma_5, \quad \mathcal{V}_\mu^R = \frac{1}{2} \gamma_\mu (1 + \gamma_5), \quad \mathcal{V}_\mu^L = \frac{1}{2} \gamma_\mu (1 - \gamma_5). \quad (2.15)$$

A correção para a lei de conservação da corrente vetorial, que se restringe ao termo $p^\mu (\Pi_{\mu\nu}^{VA} + \Pi_{\mu\nu}^{VV})$, leva a IWW,

$$p^\mu (\Pi_{\mu\nu}^{VA} + \Pi_{\mu\nu}^{VV}) = 0; \quad (2.16)$$

e para a corrente axial, a correspondente IWA,

$$p^\mu (\Pi_{\mu\nu}^{AV} + \Pi_{\mu\nu}^{AA}) = 0. \quad (2.17)$$

Como veremos, essas duas IWs estão correlacionadas de modo a impossibilitar que ambas sejam satisfeitas simultaneamente, o que constitui a anomalia quiral.

A correção para as leis das correntes J_R e J_L , que surgem dos respectivos termos, $p^\mu (\Pi_{\mu\nu}^{RR} + \Pi_{\mu\nu}^{RL})$ e $p^\mu (\Pi_{\mu\nu}^{LL} + \Pi_{\mu\nu}^{LR})$, leva, de modo semelhante, às IWs R e L.

Em quatro dimensões, as correções são em segunda ordem nos campos externos, resultando em diagramas de três pontos para os cálculos das anomalias. Deste modo, a correção para a lei axial é:

$$\begin{aligned} \langle \partial_\mu j_A^\mu \rangle = & -\frac{e^2}{2} \int d^4y d^4z \partial_{(x)}^\mu \left(T_{\mu\nu\rho}^{AVV}(x, y, z) V_\nu(y) V_\rho(z) \right. \\ & + T_{\mu\nu\rho}^{AAV}(x, y, z) A_\nu(y) V_\rho(z) + T_{\mu\nu\rho}^{AAA}(x, y, z) A_\nu(y) A_\rho(z) \\ & \left. + T_{\mu\nu\rho}^{AVA}(x, y, z) V_\nu(y) A_\rho(z) \right), \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde $T_{\mu\nu\rho}^{AVV}$, $T_{\mu\nu\rho}^{AAV}$, etc., são funções de três pontos análogas à função $\Pi_{\mu\nu}^{AV}(y)$ (2.10), mas, agora, constituídas por três correntes. O cálculo da anomalia axial envolve, então, os seguintes diagramas: AVV, AAV, AVA e AAA. Seguindo a mesma lógica, o cálculo da anomalia vetorial envolve os diagramas VVV, VAV, VVA, e VAA; da anomalia da corrente J_R envolve RLL, RRL, RLR e RRR; e da anomalia da corrente J_L envolve LLL, LRL, LLR, LRR.

As funções no espaço dos momentos, que denotaremos novamente em termos dos índices $I, J, K = \{A, V, L, R\}$,

$$T_{\mu\nu\alpha}^{IJK}(p, q, l) = \int d^4x d^4y d^4z \exp(ipx + qy + lz) \langle 0 | T j_\mu^I(x) j_\nu^J(y) j_\lambda^K(z) | 0 \rangle, \quad (2.19)$$

onde os momentos externos obedecem a relação

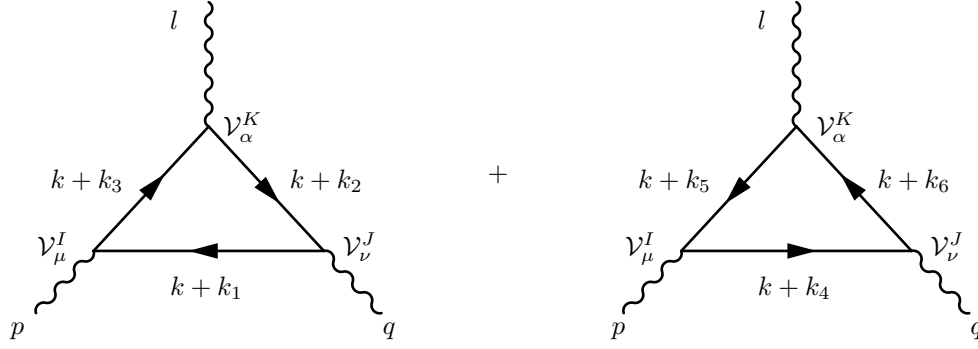
$$p + q + l = 0; \quad (2.20)$$

podem ser calculadas pelas regras de Feynman (fig.1), que resulta em

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu\alpha}^{IJK}(p, q, l) = & -i \int_k \text{Tr} \mathcal{V}_\mu^I \frac{i}{\not{k} + \not{k}_1} \mathcal{V}_\nu^J \frac{i}{\not{k} + \not{k}_2} \mathcal{V}_\alpha^K \frac{i}{\not{k} + \not{k}_3} \\ & -i \int_k \text{Tr} \mathcal{V}_\nu^J \frac{i}{\not{k} + \not{k}_4} \mathcal{V}_\mu^I \frac{i}{\not{k} + \not{k}_5} \mathcal{V}_\alpha^K \frac{i}{\not{k} + \not{k}_6}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde $\int_k \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$, e os momentos internos satisfazem a seguinte relação:

$$\begin{aligned} k_2 - k_1 = q, \quad k_3 - k_2 = l, \quad k_1 - k_3 = p, \\ k_4 - k_6 = q, \quad k_6 - k_5 = l, \quad k_5 - k_4 = p. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Figura 1 – Triângulo $T_{\mu\nu\alpha}^{IJK}(p, q, l)$

Seguindo a mesma discussão do caso bidimensional; em quatro dimensões, as correções e correspondentes IWs estarão associados às contrações de momentos externos com os respectivos vértices. Deste modo, a correção de $\langle \partial_\mu J_A^\mu \rangle$ se origina dos termos

$$p^\mu \left(T_{\mu\nu\alpha}^{AVV}(p, q, l) + T_{\mu\nu\alpha}^{AVA}(p, q, l) + T_{\mu\nu\alpha}^{AAV}(p, q, l) + T_{\mu\nu\alpha}^{AAA}(p, q, l) \right); \quad (2.23)$$

a correção de $\langle \partial_\mu J_A^\mu \rangle$,

$$p^\mu \left(T_{\mu\nu\alpha}^{VVV}(p, q, l) + T_{\mu\nu\alpha}^{VVA}(p, q, l) + T_{\mu\nu\alpha}^{VAV}(p, q, l) + T_{\mu\nu\alpha}^{VAA}(p, q, l) \right); \quad (2.24)$$

e as correções correspondentes a $\langle \partial_\mu J_R^\mu \rangle$ e $\langle \partial_\mu J_L^\mu \rangle$ seguem de forma semelhante.

Com isso, chegamos a duas possibilidades para a análise da anomalia quiral: através das correntes J_V e J_A , ou através das correntes J_R e J_L . Iremos estudar identidades entre as IWs dessas duas representações, *i.e.*, expressões que relacionam as IWs A e V com as IWs R e L; mas, antes, revisaremos a anomalia no contexto da representação axial-vetorial.

2.2 A anomalia quiral nas identidades de Ward vetorial e axial

A anomalia quiral se manifesta nas IWs axial e vetorial pelo fato de que é impossível que ambas sejam satisfeitas simultaneamente, sendo pelo menos uma delas anômala [22,23,26,53]; a escolha da simetria de calibre resulta, então, na quebra da IWA. Revisaremos esse tema seguindo uma abordagem em que a anomalia é parametrizada por um termo de superfície (TS), *i.e.*, um termo finito e dependente de regularização, sendo possível ter uma análise das possíveis quebras, de uma das IWs ou de ambas simultaneamente, por escolhas específicas de valores para o TS. Essa análise possibilita monitorar correções anômalas em uma perspectiva independente de regularização, onde a imposição da invariância de calibre pode ser feita ao final dos cálculos.

Todos os resultados desta seção foram obtidos de [16], onde os cálculos foram feitos na RI (um esquema no contexto dos *métodos implícitos* citados na introdução) e uma prescrição baseada na definição tHV (1.1) para o γ_5 de acordo com a discussão a seguir.

Complicações resultantes da definição do γ_5 por anticomutação podem acontecer quando integrais divergentes contêm traços envolvendo esse objeto, como é o caso da amplitude AV em duas dimensões (2.14). Essa amplitude envolve o traço $\text{Tr } \gamma_\sigma \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_5$, que pode ser validado utilizando a definição tHV em $d = 2$:

$$\gamma_5 = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu; \quad (2.25)$$

a partir dela, obtemos

$$\text{Tr } \gamma_\sigma \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_5 = 2(-g_{\mu\alpha} \epsilon_{\sigma\nu} + g_{\sigma\alpha} \epsilon_{\mu\nu} - g_{\sigma\mu} \epsilon_{\alpha\nu} + g_{\mu\nu} \epsilon_{\sigma\alpha} - g_{\sigma\nu} \epsilon_{\mu\alpha} - g_{\alpha\nu} \epsilon_{\sigma\mu}). \quad (2.26)$$

Se, porém, simplificarmos essa expressão utilizando o anticomutador $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$,

$$\begin{aligned} \text{Tr } \gamma_\sigma \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_5 &= \frac{1}{2} (\text{Tr } \gamma_\sigma \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_5 + \text{Tr } \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\mu \gamma_5) \\ &= -2(g_{\mu\alpha} \epsilon_{\sigma\nu} + g_{\sigma\mu} \epsilon_{\alpha\nu} + g_{\sigma\nu} \epsilon_{\mu\alpha} + g_{\alpha\nu} \epsilon_{\sigma\mu}), \end{aligned} \quad (2.27)$$

obtemos expressões que são equivalentes fora do contexto da regularização (2.26 e 2.27).

Vamos analisá-las no contexto de amplitude divergentes como VA:

$$\Pi_{\mu\nu}^{VA} = -i \text{Tr} \int_q \gamma_\mu \frac{1}{\not{q} - \not{p}} \gamma_\nu \gamma_5 \frac{1}{\not{p}} = -i \int_q \text{Tr} \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_5 \gamma_\beta \frac{(p-q)_\alpha p_\beta}{(p-q)^2 p^2}. \quad (2.28)$$

Essa integral possui grau de divergência superficial logarítmica, apesar de retornar um valor finito após regularizada. Ao utilizar o primeiro resultado para o traço (Eq. 2.26), que é caracterizado por conter todas as permutações possíveis dos índices de Lorentz, resulta, ao final do procedimento de regularização, em:

$$\Pi_{\mu\nu}^{VA} = -2i\epsilon_{\nu\theta} \left[\frac{(\delta_\mu^\theta p^2 - p_\mu p^\theta)(-2b)}{p^2} - \delta_\mu^\theta v \right] = \Pi_{\nu\mu}^{AV} \quad (2.29)$$

onde $b \equiv i/4\pi$, e v é um TS, que é finito, mas arbitrário,

$$g^{\mu\nu} v \equiv g^{\mu\nu} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{1}{(q^2 - \mu^2)} - 2 \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{q^\mu q^\nu}{(q^2 - \mu^2)^2}; \quad (2.30)$$

mas, como traço simplificado pelo anticomutador (2.27), o resultado é

$$\Pi_{\mu\nu}^{VA} = 2i \frac{b}{p^2} (p^\alpha \epsilon_{\alpha\nu} p_\mu - p^\alpha \epsilon_{\alpha\mu} p_\nu); \quad (2.31)$$

onde não existe mais o TS.

Com o primeiro resultado (2.29) e resultados para AA e VV seguindo a mesma prescrição,

$$\Pi_{\mu\nu}^{VV} = \Pi_{\mu\nu}^{AA} = -2i \left[\frac{(g_{\mu\nu}p^2 - p_\mu p_\nu)(-2b)}{p^2} - g_{\mu\nu}v \right], \quad (2.32)$$

obtemos as IW A e V em duas dimensões,

$$\begin{aligned} p^\mu \Pi_{\mu\nu}^{VA} &= 2i\epsilon_{\nu\theta} p^\theta v, \\ p^\nu \Pi_{\mu\nu}^{VA} &= -2i\epsilon_{\mu\theta} p^\theta (2b + v). \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde o TS v pode ser escolhido como sendo nulo para satisfazer apenas a IWV. Por outro lado, escolher $v = -2b$ corresponde a satisfazer apenas a IWA e escolher $v = -b$ corresponde a distribuir a anomalia igualmente entre as duas IWs. Essa correspondência entre os valores do TS e as possíveis violações serão importantes na nossa discussão sobre a simetria de Bose na próxima seção.

Em quatro dimensões, as amplitudes contêm o traço $\text{Tr } \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\gamma \gamma_\delta \gamma_5$. Da definição tHV, que equivale a escolher a expressão mais simétrica em relação aos índices de Lorentz para esse traço,

$$\begin{aligned} -\frac{i}{4!} \text{Tr } \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\gamma \gamma_\delta \gamma_5 &= -g^{\alpha\beta} \epsilon^{\gamma\delta\mu\nu} + g^{\alpha\gamma} \epsilon^{\beta\delta\mu\nu} - g^{\alpha\delta} \epsilon^{\beta\gamma\mu\nu} - g^{\alpha\mu} \epsilon^{\beta\gamma\delta\nu} + g^{\alpha\nu} \epsilon^{\beta\gamma\delta\mu} \\ &\quad - g^{\beta\gamma} \epsilon^{\alpha\delta\mu\nu} + g^{\beta\delta} \epsilon^{\alpha\gamma\mu\nu} + g^{\beta\mu} \epsilon^{\alpha\gamma\delta\nu} - g^{\beta\nu} \epsilon^{\alpha\gamma\delta\mu} - g^{\gamma\delta} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \\ &\quad - g^{\gamma\mu} \epsilon^{\alpha\beta\delta\nu} + g^{\gamma\nu} \epsilon^{\alpha\beta\delta\mu} + g^{\delta\mu} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\nu} - g^{\delta\nu} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} - g^{\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

resultam as IWs:

$$l^\alpha T_{\mu\nu\alpha}^{VVA}(p, q, l) = -\frac{1}{2\pi^2} a \epsilon_{\mu\nu\beta\lambda} p^\beta q^\lambda, \quad (2.35a)$$

$$p^\mu T_{\mu\nu\alpha}^{VVA}(p, q, l) = \frac{1}{4\pi^2} (1+a) \epsilon_{\nu\alpha\beta\lambda} p^\beta q^\lambda, \quad (2.35b)$$

$$q^\nu T_{\mu\nu\alpha}^{VVA}(p, q, l) = \frac{1}{4\pi^2} (1+a) \epsilon_{\alpha\mu\beta\lambda} p^\beta q^\lambda, \quad (2.35c)$$

onde o parâmetro a é definido como $\frac{1}{4\pi^2}(1+a) \equiv 4iv_4(\alpha - \beta - 1)$; v_4 é o TS análogo a v (2.30), *i.e.*, originado de diferenças de integrais logaritmicamente divergentes, mas,

agora, em quatro dimensões; e α, β são parâmetros relacionados a rotulação interna dos momentos e que obedecem

$$\begin{aligned} k_1 &= \alpha p + (\beta - 1)q, \\ k_2 &= \alpha p + \beta q, \\ k_3 &= (\alpha - 1)p + (\beta - 1)q. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Um dos resultados importantes dessa parametrização é que a invariância de calibre, que é satisfeita pela condição $a = -1$, pode ser obtida com uma rotulação arbitrária dos momentos se escolhermos o TS nulo, que é um resultado original de [16]. Outras escolhas possíveis são: $a = 0$ que satisfaz apenas a IWA ou $a = -1/3$ que distribui a anomalia igualmente entre as duas IWs.

2.3 Relações entre amplitudes quirais anômalas: A-V versus L-R

Faremos uma análise de relações envolvendo as IWs das correntes J_A e J_V com as IWs das correntes J_R e J_L , onde mostraremos que a definição do γ_5 por anticomutação leva a relações inconsistentes com a simetria de Bose, enquanto que, ao contrário, uma prescrição baseada na definição tHV leva a relações consistentes com essa simetria.

Começaremos com um caso mais simples na seção 2.3.1, que é o problema em duas dimensões, e generalizaremos para quatro dimensões na seção 2.3.2.

2.3.1 Duas dimensões

As relações diretas entre as amplitudes nas duas representações, pela simples relação entre os vértices (2.15),

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{RR} &= \frac{1}{4} \left(\Pi_{\mu\nu}^{VV} + \Pi_{\mu\nu}^{AV} + \Pi_{\mu\nu}^{VA} + \Pi_{\mu\nu}^{AA} \right), \\ \Pi_{\mu\nu}^{LL} &= \frac{1}{4} \left(\Pi_{\mu\nu}^{VV} - \Pi_{\mu\nu}^{AV} - \Pi_{\mu\nu}^{VA} + \Pi_{\mu\nu}^{AA} \right), \\ \Pi_{\mu\nu}^{RL} &= \frac{1}{4} \left(\Pi_{\mu\nu}^{VV} + \Pi_{\mu\nu}^{AV} - \Pi_{\mu\nu}^{VA} - \Pi_{\mu\nu}^{AA} \right), \\ \Pi_{\mu\nu}^{LR} &= \frac{1}{4} \left(\Pi_{\mu\nu}^{VV} - \Pi_{\mu\nu}^{AV} + \Pi_{\mu\nu}^{VA} - \Pi_{\mu\nu}^{AA} \right), \end{aligned} \quad (2.37)$$

podem ser simplificadas por dois caminhos. No primeiro, utilizando o anticomutador

$$\{\gamma_\alpha, \gamma_5\} = 0, \quad (2.38)$$

e a propriedade $(\gamma_5)^2 = 1$, levam às relações entre as amplitudes

$$\Pi_{\mu\nu}^{AV} = \Pi_{\mu\nu}^{VA} \quad (2.39)$$

e

$$\Pi_{\mu\nu}^{AA} = \Pi_{\mu\nu}^{VV} ; \quad (2.40)$$

que, por sua vez, levam às relações

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{RR} &= \frac{1}{2}\Pi_{\mu\nu}^{VV} + \frac{1}{2}\Pi_{\mu\nu}^{AV} , \\ \Pi_{\mu\nu}^{LL} &= \frac{1}{2}\Pi_{\mu\nu}^{VV} - \frac{1}{2}\Pi_{\mu\nu}^{AV} , \\ \Pi_{\mu\nu}^{RL} &= \Pi_{\mu\nu}^{LR} = 0 . \end{aligned} \quad (2.41)$$

Usando, como alternativa ao anticomutador (1.2), a definição tHV,

$$\gamma_5 = \frac{1}{2!}\epsilon^{\alpha\beta}\gamma_\alpha\gamma_\beta , \quad (2.42)$$

a Eq. (2.40) permanece idêntica, como mostrado na seção anterior nas pelas Eq. (2.29) e (2.32), pois ela pode ser obtida independentemente do anticomutador (1.2). Já a Eq.(2.39) é alterada para

$$\Pi_{\mu\nu}^{VA} = \Pi_{\nu\mu}^{AV} , \quad (2.43)$$

que leva às relações:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{RR} &= \frac{1}{2}\Pi_{\mu\nu}^{VV} + \frac{1}{4}\left(\Pi_{\mu\nu}^{VA} + \Pi_{\nu\mu}^{VA}\right) , \\ \Pi_{\mu\nu}^{LL} &= \frac{1}{2}\Pi_{\mu\nu}^{VV} - \frac{1}{4}\left(\Pi_{\mu\nu}^{VA} + \Pi_{\nu\mu}^{VA}\right) , \\ \Pi_{\mu\nu}^{RL} &= -\Pi_{\mu\nu}^{LR} = \frac{1}{4}\left(\Pi_{\nu\mu}^{VA} - \Pi_{\mu\nu}^{VA}\right) , \end{aligned} \quad (2.44)$$

que são diferentes das obtidas anteriormente (2.41).

Temos dois resultados diferentes entre si, e com consequências no que diz respeito a anomalia quiral ser consistente com a simetria de Bose. O primeiro deles é inconsistente com essa simetria nos diagramas RR e LL, como podemos verificar como segue.

A simetria de Bose, por exemplo, no diagrama RR, impõe a condição:

$$\Pi_{\mu\nu}^{RR}(p) = \Pi_{\nu\mu}^{RR}(-p) , \quad (2.45)$$

que implica, pela primeira relação (2.41), que a amplitude $\Pi_{\mu\nu}^{VA}$ deve ser simétrica sob troca dos índices de Lorentz e momentos, $\mu \leftrightarrow \nu$ e $p \leftrightarrow -p$. Isso fixa, no entanto, o valor das IWs A e V, pois a condição

$$p^\mu \Pi_{\mu\nu}^{VA}(p) = p^\mu \Pi_{\nu\mu}^{VA}(-p) = p^\mu \Pi_{\nu\mu}^{VA}(p) \quad (2.46)$$

implica na igualdade entre as IWs A e V em (2.32) e fixa o TS com valor $v = -b$ distribuindo a anomalia igualmente para as duas IWs axial e vetorial, como fica claro pela análise da Eq. (2.33).

Podemos verificar facilmente que, na segunda relação (2.44), a simetria de Bose nos diagramas RR e LL são satisfeitas independentemente do valor da amplitude $\Pi_{\nu\mu}^{VA}$, não sendo necessário fixar a anomalia das IW A e V.

É importante notar o que difere esses dois resultados. O primeiro deles, Eq. (2.41), é antissimétrico no lado esquerdo da igualdade em relação a amplitude $\Pi_{\mu\nu}^{AV}$ ao contrário do segundo, Eq. (2.44), que pode ser identificado como uma simetrização do primeiro resultado, *i.e.*, $\frac{1}{2}(\Pi_{\mu\nu}^{RR} + \Pi_{\nu\mu}^{RR})$. Esse fato nos possibilitará uma artifício para obter o resultado simetrizado em 4 dimensões, levando em conta que, nesse caso, os traços envolvendo um grande número de matrizes tornam o problema mais complexo.

As relações (2.44) podem ser usadas para calcular explicitamente as IWs das correntes J_L e J_R a partir dos resultados das amplitudes AV e VV. Escrevemos os resultados para as diferenças das amplitudes,

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}^{VA} + \Pi_{\nu\mu}^{VA} &= -4ib(p_\nu\epsilon_{\mu\theta} + p_\mu\epsilon_{\nu\theta})\frac{p^\theta}{p^2}, \\ \Pi_{\mu\nu}^{VA} - \Pi_{\nu\mu}^{VA} &= -4ib(p_\mu\epsilon_{\nu\theta} - p_\nu\epsilon_{\mu\theta})\frac{p^\theta}{p^2} - 4i\epsilon_{\mu\nu}(v_0 + 2b),\end{aligned}\quad (2.47)$$

e, assim, seguem direto de (2.44) as IWs desejadas,

$$p^\mu\Pi_{\mu\nu}^{RR} = i(vp_\nu - b\epsilon_{\nu\theta}p^\theta) \quad (2.48a)$$

$$p^\mu\Pi_{\mu\nu}^{LL} = i(vp_\nu + b\epsilon_{\nu\theta}p^\theta) \quad (2.48b)$$

$$p^\mu\Pi_{\mu\nu}^{RL} = -p^\mu\Pi_{\mu\nu}^{LR} = -i(b+v)\epsilon_{\nu\theta}p^\theta. \quad (2.48c)$$

Algumas considerações são importantes sobre os resultados das IWs acima. Apesar da amplitude AV ser sensível ao procedimento utilizado na avaliação dos traços, a soma $\Pi_{\mu\nu}^{AV} + \Pi_{\nu\mu}^{AV}$ é livre de qualquer ambiguidade, havendo o cancelamento do TS v . Ainda assim, as IW das amplitudes RR e LL dependem do termo de superfície citado devido a presença da amplitude VV na Eq. (2.44).

Outra consequência é que as amplitudes envolvendo vértices cruzadas, RL e LR , não são nulas em geral e contribuem para a anomalia das correntes. Essa detalhe está em concordância com os resultados de [27, 28]. Onde, nos trabalhos citados, é feita uma decomposição quiral do determinante fermiônico em duas dimensões, levando a um resultado invariante de calibre, sendo mostrado, também, que essas amplitudes não são nulas em geral. Em nossa análise, essas IW são nulas apenas quando $v = -b$; que acontece ao utilizar-se, nos cálculos, do anticomutador (1.2) combinado com a imposição da simetria de Bose.

Uma ultima consideração é que, para a escolha do termo de superfície v nulo, as WI relacionadas a VV e AA são nulas, já as relacionadas a RR e LL diferem por um sinal e o mesmo acontece nas relacionadas a RL e LR.

A partir dos resultados das IWs R-L (2.48) e A-V (2.33) obtemos as anomalias das correntes na forma de operadores,

$$\begin{aligned}\langle \partial_\mu J_V^\mu \rangle &= iev\epsilon^{\nu\rho}F_{\nu\rho}^A - 2iev\partial_\mu V^\mu, \\ \langle \partial_\mu J_A^\mu \rangle &= -ie(2b+v)\epsilon^{\nu\rho}F_{\nu\rho}^V - 2iev\partial_\mu A^\mu, \\ \langle \partial_\mu J_R^\mu \rangle &= -\frac{ibe}{2}\epsilon^{\nu\rho}F_{\nu\rho}^R - iev\partial^\nu R_\nu - ie\frac{b+v}{2}\epsilon^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^L, \\ \langle \partial_\mu J_L^\mu \rangle &= i\frac{be}{2}\epsilon^{\nu\rho}F_{\nu\rho}^L - iev\partial^\nu L_\nu + ie\frac{b+v}{2}\epsilon^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^R,\end{aligned}\tag{2.49}$$

que estão coerentes com as relações entre as correntes,

$$J_V^\mu = J_R^\mu + J_L^\mu, \quad J_A^\mu = J_R^\mu - J_L^\mu\tag{2.50}$$

e entre os campos externos (2.5); indicando, mais uma vez, que as relações obtidas a partir da segunda abordagem (2.44) estão corretas.

2.3.2 Quatro dimensões

Vimos, na seção anterior, que a utilização do anticomutador (1.2) para simplificar os traços das amplitudes levam a uma inconsistência da anomalia quiral com a simetria de Bose, quando relacionamos as IWs das correntes J_V e J_A com as IWs das correntes J_L e J_R . Vamos agora generalizar essa análise ao caso em quatro dimensões, onde essa inconsistência é reportada em livros-texto como [25, 26]. Nessa seção mostraremos que, de forma correspondente ao caso bi-dimensional, essa inconsistência está vinculada à utilização do γ_5 definido por anticomutação em integrais divergentes.

A seguir, procederemos como no caso bi-dimensional: obteremos as relações entre as IWs em dois caminhos, no primeiro simplificando expressões pela utilização do anticomutador 1.2 em integrais divergentes e no segundo evitando tais simplificações.

Assim, no primeiro caminho, segue direto de (1.2) as relações entre as amplitudes,

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu\alpha}^{RRR}(p, q, l) &= \frac{1}{2}T_{\mu\nu\alpha}^{VVA}(p, q, l), \\ T_{\mu\nu\alpha}^{LLL}(p, q, l) &= -\frac{1}{2}T_{\mu\nu\alpha}^{VVA}(p, q, l), \\ T_{\mu\nu\alpha}^{AAA}(p, q, l) &= T_{\mu\nu\alpha}^{VVA}(p, q, l),\end{aligned}\tag{2.51}$$

onde o diagrama $T_{\mu\nu\alpha}^{VVV}$ não aparece por ser nulo devido ao teorema de Furry¹.

¹ Qualquer diagrama contendo um número ímpar de vértices, onde todos são vetoriais, é nulo. Esse fato pode ser demonstrado utilizando o operador conjugação de carga C , um operador unitário e linear que transforma um férmion num anti-férmion $Cj^\mu C^\dagger = -j^\mu$.

As três equações acima são inconsistentes com a simetria de Bose nos diagramas RRR, LLL e AAA. Considere, por exemplo, essa simetria no diagrama RRR,

$$T_{\mu\nu\alpha}^{RRR}(p, q, l) = T_{\mu\alpha\nu}^{RRR}(p, l, q) = T_{\alpha\nu\mu}^{RRR}(l, q, p) = \dots, \quad (2.52)$$

que leva, pela Eq. (2.51), a impor a mesma simetria no diagrama $T_{\mu\nu\alpha}^{VVA}$ (simetria sob troca consecutiva de dois pares de índices e momentos). Isso fixa as anomalias axial e vetorial, como podemos verificar partindo de

$$T_{\mu\nu\alpha}^{VVA}(p, q, l) = T_{\mu\alpha\nu}^{VVA}(p, l, q) \quad (2.53)$$

que implica em

$$l^\alpha T_{\mu\nu\alpha}^{VVA}(p, q, l) = l^\alpha T_{\mu\alpha\nu}^{VVA}(p, l, q). \quad (2.54)$$

Comparando o lado esquerdo desta equação com a Eq. (2.35a), vemos que ela representa a IW axial; assim como o lado direito, a IW vetorial, Eq. (2.35c). Este ultimo, com as devidas renomeações dos momentos e índices de Lorentz ($l \leftrightarrow q$ e $\alpha \rightarrow \nu$), e conservação dos momentos, $l = -(p + q)$, se reduz a

$$\begin{aligned} l^\alpha T_{\mu\alpha\nu}^{VVA}(p, l, q) &= \frac{1}{4\pi^2}(1+a)\epsilon_{\nu\mu\beta\lambda}p^\beta l^\lambda \\ &= \frac{1}{4\pi^2}(1+a)\epsilon_{\mu\nu\beta\lambda}p^\beta q^\lambda. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Consequentemente, a Eq. (2.53) resulta em

$$a = -\frac{1}{3}, \quad (2.56)$$

distribuindo a anomalia com igual valor para as IWs axial e vetorial.

Esperamos que as relações consistentes com a simetria de Bose devem ser obtidas evitando-se o uso da identidade (1.2) e utilizando a definição do γ_5 em termos do tensor ϵ e das matrizes Dirac (1.1). No entanto, isso equivale a simetrizar os traços envolvidos. Podemos, então, generalizar o lado esquerdo das Eq.(2.51) a uma simetrização com todas as possíveis permutações de momentos e índices de Lorentz.

Assim, começando com a amplitude AAA, a expressão pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu\alpha}^{AAA}(p, q, l) &= \frac{1}{3} \left(T_{\mu\nu\alpha}^{VVA}(p, q, l) + T_{\mu\alpha\nu}^{VVA}(p, l, q) \right. \\ &\quad \left. + T_{\alpha\nu\mu}^{VVA}(l, q, p) \right), \end{aligned} \quad (2.57)$$

que é consistente com a simetria de Bose do diagrama AAA de forma independente do valor de $T_{\mu\alpha\nu}^{VVA}(p, l, q)$, não sendo necessário fixar a anomalia AVV.

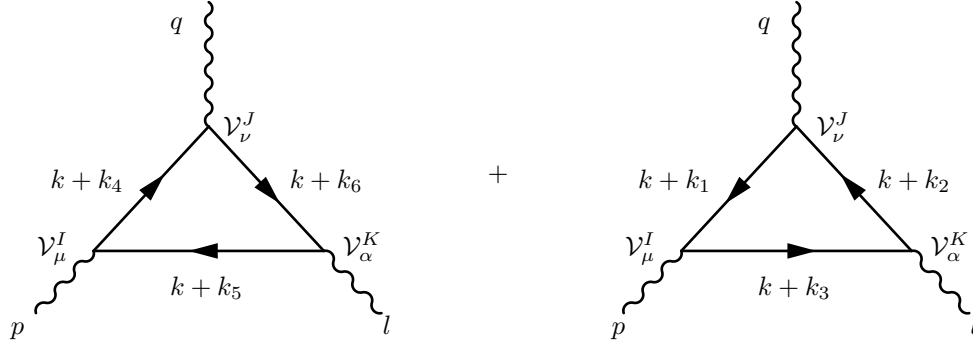


Figura 2 – The $T_{\mu\alpha\nu}^{IKJ}(p, l, q)$ triangle diagram.

Para obter as relações entre as amplitudes RRR e LLL em termos das amplitudes envolvendo vértices A e V, começamos pelas relações algébricas entre os vértices (2.15):

$$T_{\mu\nu\alpha}^{RRR}(p, q, l) = \frac{1}{8} \left(T_{\mu\nu\alpha}^{VVV}(p, q, l) + T_{\mu\nu\alpha}^{VVA}(p, q, l) + \cdots + T_{\mu\nu\alpha}^{AAA}(p, q, l) \right), \quad (2.58)$$

que contem todas as seguintes combinações (mantendo fixos os índices e momentos): VVV, VVA, VAV, VAA, AVV, AVA, AAV, AAA.

Utilizaremos agora a propriedade cíclica do traço para simplificar a expressão acima. Com essa propriedade, a Eq. (2.21) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu\alpha}^{IJK}(p, q, l) &= -i \int_k \text{Tr} \mathcal{V}_\mu^I \frac{i}{\not{k} + \not{k}'_5} \mathcal{V}_\alpha^K \frac{i}{\not{k} + \not{k}'_6} \mathcal{V}_\nu^J \frac{i}{\not{k} + \not{k}'_4} \\ &\quad -i \int_k \text{Tr} \mathcal{V}_\alpha^K \frac{i}{\not{k} + \not{k}'_3} \mathcal{V}_\mu^I \frac{i}{\not{k} + \not{k}'_1} \mathcal{V}_\nu^J \frac{i}{\not{k} + \not{k}'_2}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Com as definições (2.22), essa expressão é idêntica a amplitude $T_{\mu\alpha\nu}^{IKJ}(p, l, q)$ retratada na fig.2. Assim, obtemos

$$T_{\mu\nu\alpha}^{IJK}(p, q, l) = T_{\mu\alpha\nu}^{IKJ}(p, l, q). \quad (2.60)$$

Do mesmo modo, temos

$$T_{\mu\nu\alpha}^{IJK}(p, q, l) = T_{\alpha\nu\mu}^{KJI}(l, q, p) \quad (2.61)$$

e então

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu\alpha}^{VAV}(p, q, l) &= T_{\mu\alpha\nu}^{VVA}(p, l, q), \\ T_{\mu\nu\alpha}^{AVV}(p, q, l) &= T_{\alpha\nu\mu}^{VVA}(l, q, p). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Os diagramas envolvendo dois vértices axiais reduzem ao diagramas VVV em qualquer prescrição para o γ_5^2 , *i.e.*,

$$\text{Tr} [\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_5 \gamma_\gamma \gamma_\delta \gamma_5] = \text{Tr} [\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\gamma \gamma_\delta], \quad (2.63)$$

levando a

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu\alpha}^{AAV}(p, q, l) &= T_{\mu\nu\alpha}^{AVA}(p, q, l) = T_{\mu\nu\alpha}^{VAA}(p, q, l) \\ &= T_{\mu\nu\alpha}^{VVV}(p, q, l) = 0, \end{aligned} \quad (2.64)$$

Com as Eqs. (2.58), (2.57) e (2.64), finalmente obtemos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu\alpha}^{RRR}(p, q, l) &= \frac{1}{6} \left(T_{\mu\nu\alpha}^{VVA}(p, q, l) + T_{\mu\alpha\nu}^{VVA}(p, l, q) \right. \\ &\quad \left. + T_{\alpha\nu\mu}^{VVA}(l, q, p) \right); \end{aligned} \quad (2.65)$$

e, de forma análoga,

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu\alpha}^{LLL}(p, q, l) &= -\frac{1}{6} \left(T_{\mu\nu\alpha}^{VVA}(p, q, l) + T_{\mu\alpha\nu}^{VVA}(p, l, q) \right. \\ &\quad \left. + T_{\alpha\nu\mu}^{VVA}(l, q, p) \right). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Os resultados (2.65) e (2.66) são compatíveis com a simetria de Bose dos diagramas RRR e LLL, sem a necessidade de se fixar a anomalia nas IWs AVV. É importante enfatizar que isso reside no fato de existir uma permutação nos índices de Lorentz e momentos externos nesses resultados, em oposição ao que ocorre nas Eqs. (2.51).

Com esses resultados podemos obter as IWs das correntes R e L. Começando pela anomalia da corrente J_R , combinamos a Eq. (2.65) com os resultados das anomalias axial e vetorial (2.35), obtendo

$$\begin{aligned} l^\alpha T_{\mu\nu\alpha}^{RRR}(p, q, l) &= \frac{1}{6} l^\alpha \left(T_{\mu\nu\alpha}^{VVA}(p, q, l) + T_{\mu\alpha\nu}^{VVA}(p, l, q) \right. \\ &\quad \left. + T_{\alpha\nu\mu}^{VVA}(l, q, p) \right), \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} l^\alpha T_{\mu\nu\alpha}^{VVA}(p, q, l) &= -\frac{1}{2\pi^2} a \epsilon_{\mu\nu\beta\lambda} p^\beta q^\lambda, \\ l^\alpha T_{\mu\alpha\nu}^{VVA}(p, l, q) &= \frac{1}{4\pi^2} (1+a) \epsilon_{\nu\mu\beta\lambda} p^\beta l^\lambda \\ &= \frac{1}{4\pi^2} (1+a) \epsilon_{\mu\nu\beta\lambda} p^\beta q^\lambda, \\ l^\alpha T_{\alpha\nu\mu}^{VVA}(l, q, p) &= -\frac{1}{4\pi^2} (1+a) \epsilon_{\mu\nu\beta\lambda} l^\beta q^\lambda \\ &= \frac{1}{4\pi^2} (1+a) \epsilon_{\mu\nu\beta\lambda} p^\beta q^\lambda, \end{aligned} \quad (2.68)$$

² Isso pode ser demonstrado analisando a estrutura tensorial do resultado de traços envolvendo um número par de matrizes γ_5 ; que não dependem de tensores ϵ , são apenas combinações de $g^{\mu\nu}$ s.

que leva a

$$l^\alpha T_{\mu\nu\alpha}^{RRR}(p, q, l) = \frac{1}{12\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\beta\lambda} p^\beta q^\lambda. \quad (2.69)$$

Procedendo de maneira similar, obtemos

$$l^\alpha T_{\mu\nu\alpha}^{LLL}(p, q, l) = -\frac{1}{12\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\beta\lambda} p^\beta q^\lambda. \quad (2.70)$$

e

$$l^\alpha T_{\mu\nu\alpha}^{AAA}(p, q, l) = \frac{1}{6\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\beta\lambda} p^\beta q^\lambda. \quad (2.71)$$

Aqui cabem alguns comentários sobre as Eqs. (2.69), (2.70), (2.71). Essas WI não são ambíguas, pois a simetrização (2.67) cancela o valor do parâmetro a , e a condição extra do diagrama VVV ser nulo pelo teorema de Furry, não sobrando qualquer termo ambíguo. O caso 2-d é análogo no termo que vem da simetrização, $\Pi_{\mu\nu}^{VA} + \Pi_{\nu\mu}^{VA}$ (2.47), que cancela o TS v , mas, naquele caso, o diagrama VV ainda mantém a arbitrariedade da expressão.

Uma consequência importante do resultado simétrico nas amplitudes, que existe nos dois casos, 2d ou 4d, é que as contribuições com quiralidades cruzadas não são nulas, com o aconteceria como resultado proveniente do γ_5 definido por anticomutação; contribuindo assim para as respectivas anomalias.

Podemos agora usar essas relações para analisar a anomalia na forma de operador (2.18) para as respectivas correntes.

As correções para a corrente vetorial dependem das amplitudes $p^\mu T_{\mu\nu\rho}^{VVV}(p, q, l)$, $p^\mu T_{\mu\nu\rho}^{VAV}(p, q, l)$, $p^\mu T_{\mu\nu\rho}^{VAA}(p, q, l)$ and $p^\mu T_{\mu\nu\rho}^{VVA}(p, q, l)$. Com os resultados para cada uma delas,

$$p^\mu T_{\mu\nu\rho}^{VVA}(p, q, l) = \frac{1}{4\pi^2} (1 + a) \epsilon^{\rho\nu\beta\lambda} l_\beta q_\lambda, \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} p^\mu T_{\mu\nu\rho}^{VAV}(p, q, l) &= p^\mu T_{\mu\rho\nu}^{VVA}(p, l, q) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} (1 + a) \epsilon^{\nu\rho\beta\lambda} q_\beta l_\lambda \\ &= \frac{1}{4\pi^2} (1 + a) \epsilon^{\rho\nu\beta\lambda} l_\beta q_\lambda \end{aligned} \quad (2.73)$$

e desde que outros diagramas não contribuem, obtemos

$$\langle \partial_\mu J_V^\mu \rangle = \frac{e^2}{16\pi^2} (1 + a) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^A F_{\rho\sigma}^V. \quad (2.74)$$

As amplitudes de que depende a correção para a corrente axial são $p^\mu T_{\mu\nu\rho}^{AVV}(p, q, l)$, $p^\mu T_{\mu\nu\rho}^{AAV}(p, q, l)$, $p^\mu T_{\mu\nu\rho}^{AAA}(p, q, l)$ e $p^\mu T_{\mu\nu\rho}^{AVA}(p, q, l)$.

Assim, de

$$p^\mu T_{\mu\nu\rho}^{AVV}(p, l, q) = \frac{1}{2\pi^2} a \epsilon^{\nu\rho\lambda\sigma} l_\lambda q_\sigma \quad (2.75)$$

e

$$p^\mu T_{\mu\nu\rho}^{AAA}(p, l, q) = \frac{1}{6\pi^2} \epsilon_{\nu\rho\beta\lambda} l^\beta q^\lambda, \quad (2.76)$$

obtemos

$$\langle \partial_\mu J_A^\mu \rangle = \frac{e^2}{16\pi^2} \left(-a \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^V F_{\rho\sigma}^V + \frac{1}{3} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^A F_{\rho\sigma}^A \right). \quad (2.77)$$

Para calcular $\langle \partial_\mu J_R^\mu \rangle$ e $\langle \partial_\mu J_L^\mu \rangle$ precisamos considerar os diagramas $T_{\mu\nu\rho}^{RRR}$, $T_{\mu\nu\rho}^{RLR}$, $T_{\mu\nu\rho}^{RLL}$, etc. Uma maneira equivalente e mais fácil é usar as relações entre as correntes (2.50) e campos (2.5). Dessa maneira, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \partial_\mu J_R^\mu \rangle &= \frac{1}{2} (\langle \partial_\mu J_V^\mu \rangle + \langle \partial_\mu J_A^\mu \rangle) \\ &= \frac{e^2}{32\pi^2} \left(\frac{1}{3} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^R F_{\rho\sigma}^R - \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{3} \right) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (F_{\mu\nu}^L F_{\rho\sigma}^L + F_{\mu\nu}^R F_{\rho\sigma}^L) \right), \end{aligned} \quad (2.78a)$$

$$\begin{aligned} \langle \partial_\mu J_L^\mu \rangle &= \frac{1}{2} (\langle \partial_\mu J_V^\mu \rangle - \langle \partial_\mu J_A^\mu \rangle) \\ &= -\frac{e^2}{32\pi^2} \left(\frac{1}{3} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^L F_{\rho\sigma}^L - \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{3} \right) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (F_{\mu\nu}^R F_{\rho\sigma}^R + F_{\mu\nu}^R F_{\rho\sigma}^L) \right). \end{aligned} \quad (2.78b)$$

Ainda assim é instrutivo checar esse resultados avaliando os diagramas RRR, RLL, RLR, RRL, LLL, LLR, LRL e LRR; ressaltando que, pela utilização do anticomutador (2.44), apenas os diagramas RRR e LLL não são nulos; em contradição com a prescrição defendida no presente trabalho, em que utilizamos a simetrização do traço, o que leva a resultados não nulos para todas essas amplitudes.

Com a mesma prescrição que procedemos com a amplitude RRR, partindo da eq. (2.58), obtemos

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu\alpha}^{RLL}(p, q, l) &= \frac{1}{8} \left(-T_{\mu\nu\alpha}^{VVA}(p, q, l) - T_{\mu\nu\alpha}^{VAV}(p, q, l) + T_{\mu\nu\alpha}^{AVV}(p, q, l) + T_{\mu\nu\alpha}^{AAA}(p, q, l) \right) \\
&= \frac{1}{8} \left(-T_{\mu\nu\alpha}^{VVA}(p, q, l) - T_{\mu\alpha\nu}^{VVA}(p, l, q) + T_{\alpha\nu\mu}^{VVA}(l, q, p) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} \left(T_{\mu\nu\alpha}^{VVA}(p, q, l) + T_{\mu\alpha\nu}^{VVA}(p, l, q) + T_{\alpha\nu\mu}^{VVA}(p, q, l) \right) \right) \\
&= \frac{1}{6} T_{\alpha\nu\mu}^{VVA}(l, q, p) - \frac{1}{12} \left(T_{\mu\nu\alpha}^{VVA}(p, q, l) + T_{\mu\alpha\nu}^{VVA}(p, l, q) \right) \tag{2.79}
\end{aligned}$$

que leva a

$$p^\mu T_{\mu\nu\alpha}^{RLL}(p, q, l) = \frac{1}{8\pi^2} \left(a + \frac{1}{3} \right) \epsilon_{\nu\alpha\sigma\lambda} l^\sigma q^\lambda; \tag{2.80}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu\alpha}^{RLR}(p, q, l) &= \frac{1}{8} \left(T_{\mu\nu\alpha}^{VVA}(p, q, l) - T_{\mu\nu\alpha}^{VAV}(p, q, l) + T_{\mu\nu\alpha}^{AVV}(p, q, l) - T_{\mu\nu\alpha}^{AAA}(p, q, l) \right) \\
&= \frac{1}{12} \left(T_{\mu\nu\alpha}^{VVA}(p, q, l) + T_{\alpha\nu\mu}^{VVA}(l, q, p) \right) - \frac{1}{6} T_{\mu\alpha\nu}^{VVA}(p, l, q), \tag{2.81}
\end{aligned}$$

resultando em

$$p^\mu T_{\mu\nu\alpha}^{RLR}(p, q, l) = \frac{1}{16\pi^2} \left(a + \frac{1}{3} \right) \epsilon_{\nu\alpha\sigma\lambda} l^\sigma q^\lambda; \tag{2.82}$$

e, por fim,

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu\alpha}^{RRL}(p, q, l) &= \frac{1}{8} \left(-T_{\mu\nu\alpha}^{VVA}(p, q, l) + T_{\mu\nu\alpha}^{VAV}(p, q, l) + T_{\mu\nu\alpha}^{AVV}(p, q, l) - T_{\mu\nu\alpha}^{AAA}(p, q, l) \right) \\
&= \frac{1}{12} \left(T_{\mu\nu\alpha}^{VVA}(p, q, l) + T_{\alpha\nu\mu}^{VVA}(l, q, p) \right) - \frac{1}{6} T_{\mu\alpha\nu}^{VVA}(p, l, q) \tag{2.83}
\end{aligned}$$

resultando em

$$p^\mu T_{\mu\nu\alpha}^{RRL}(p, q, l) = \frac{1}{16\pi^2} \left(a + \frac{1}{3} \right) \epsilon_{\nu\alpha\sigma\lambda} l^\sigma q^\lambda. \tag{2.84}$$

Os resultados das eqs. (2.80), (2.82) e (2.84) levam novamente a Eq. (2.78a) como queríamos checar; e o mesmo pode ser feito para checar a Eq (2.78b).

A forma da anomalia quiral que obtivemos na representação RL (2.78), que pode ser comparada com a anomalia na representação AV (2.78), pode ser ajustada através do parâmetro a para mapear os resultados encontrados na literatura, calculados diretamente pelos diagramas envolvendo vértices R e L [54, 55]. Por exemplo, a anomalia simétrica nas correntes L e R equivale a escolher $a = -1/3$; satisfazer a IWV, no entanto, equivale ao valor $a = -1$, que implica considerar as contribuições dos gráficos com quiralidades cruzadas (RLL, RLR etc).

2.4 Síntese e considerações

A primeira motivação para o trabalho apresentado neste capítulo foi resolver o aparente conflito entre a simetria de Bose e a anomalia quiral, reportado, por exemplo, nos livros-texto [25, 26]. Esse conflito se manifesta em relações entre amplitudes envolvendo vértices A e V com amplitudes envolvendo vértices R e L; onde a imposição da simetria de Bose resulta em restrições à anomalia, distribuindo-a nas IWs A-V e violando ambas simultaneamente. Reproduzimos as relações citadas, em duas dimensões (2.41) e em quatro dimensões (2.51), para confrontá-las em seguida.

A segunda motivação surgiu ao identificarmos a relação entre o problema citado com a questão do tratamento de objetos dimensionais no contexto de regularização e renormalização. Assim, esse trabalho contribui com uma evidência de que a regularização de amplitudes envolvendo a matriz γ_5 necessita de uma prescrição adequada, mesmo em métodos que se mantêm na dimensão física, completando evidências já reportadas que apontam na mesma direção [15, 16]. A necessidade dessa prescrição em métodos não dimensionais foi explorada recentemente na referência [17], um trabalho que se debruça sobre as razões de existirem restrições às álgebras de Dirac e Lorentz, e, como consequência, à utilização de identidades envolvendo objetos dimensionais, no contexto da renormalização.

Mostramos que a utilização do γ_5 definido por anticomutação é a origem do conflito citado, e obtivemos relações consistentes com a simetria de Bose, por uma prescrição baseada na definição tHV para esse objeto, em duas dimensões (2.44) e em quatro dimensões (2.57, 2.65 e 2.66). A partir dessas relações, mostramos que a simetria de Bose não impõe restrição alguma à anomalia quiral.

A utilização do anticomutador do γ_5 (1.2) resulta em algumas simplificações para traços de Dirac que são válidas na dimensão física, mas que geram ambiguidades no contexto de regularização e renormalização. Em duas dimensões esse problema é facilmente contornado pela utilização da definição tHV para o γ_5 (2.25). Comparando os resultados obtidos pelas duas definições do γ_5 , (2.44) e (2.41), percebemos claramente que o anticomutador destrói a simetrização em relação aos índices de Lorentz e momentos externos, e, por isso, gera inconsistências com a simetria de Bose.

Utilizar a definição tHV em 4 D (1.1) pode gerar complicações computacionais devido ao número extenso de matrizes de Dirac envolvidas. Para contornar essa dificuldade observamos que o efeito de se utilizar o anticomutador é o de permutar e/ou reduzir a simetrização, em relação aos índices de Lorentz, de resultados para traços de Dirac, gerando ambiguidades devido ao fato de que contrações de Lorentz não comutam, em geral, com renormalização [17]. Assim, ao relacionar amplitudes envolvendo tais traços, buscamos manter tais simetrizações, analisando as possíveis permutações envolvendo índices de Lorentz e momentos externos. Essa argumentação nos levou à expressão (2.57), que é

essencial, pois ela relaciona um amplitude envolvendo três matrizes γ_5 com três amplitudes que envolvem apenas uma matriz γ_5 em cada. A partir disso e da utilização de propriedades que são permitidas no contexto da regularização, como $\gamma_5^2 = 1$ e ciclicidade do traço [17], obtivemos os resultados desejado entre as amplitudes em quatro dimensões (2.57, 2.65 e 2.66); resultados que satisfazem a simetria de Bose independentemente da anomalia quirial.

Por fim, mostramos que diagramas com vértices R e L cruzados (RL, RLL etc) têm contribuições não nulas (2.48c, 2.80, 2.82 e 2.84), em oposição aos resultados com o γ_5 definido por anticomutação; e obtivemos a anomalia, na forma de operadores, das correntes J_V (2.74), J_A (2.77), J_R (2.78a) e J_L (2.78b), em quatro dimensões e em duas dimensões (2.49). Esses resultados estão em uma forma independente de regularização, onde as possíveis escolhas em relação a quais IWs serão satisfeitas e quais serão anômalas podem ser feitas pela parametrização de um termo finito dependente de regularização. A expressão, nessa forma, da anomalia permite uma análise geral das simetrias, escolhendo, ao final dos cálculos, quais IWs devem ser satisfeitas e quais devem ser anômalas, por considerações físicas do problema considerado.

3 Aspectos da renormalização da eletrodinâmica quântica reduzida

O modelo conhecido por alguns autores como pseudo eletrodinâmica quântica (PEDQ) [40–44] é uma teoria efetiva em 3+1 dimensões que tem por objetivo descrever férmions restritos a se moverem num plano infinito, levando em conta a real interação eletromagnética entre essas partículas, quando estão sob essa restrição. Esse modelo é estabelecido a partir da lagrangiana

$$\mathcal{L}_{PQED} = -\frac{1}{4}\bar{F}_{\mu\nu} \left[\frac{1}{(\partial^2)^{1/2}} \right] \bar{F}^{\mu\nu} - \frac{e}{2}j^\mu \bar{A}_\mu + \frac{\xi}{2}\bar{A}_\mu \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{(\partial^2)^{1/2}} \bar{A}_\nu + \mathcal{L}_M, \quad (3.1)$$

onde $\mathcal{L}_M$ é o termo cinético da matéria, j^μ é a corrente, (∂^2) é o operador D’alambertiano, $\bar{A}_\mu$ é chamado de pseudo campo eletromagnético, assim como o pseudo tensor $\bar{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \bar{A}_\nu - \partial_\nu \bar{A}_\mu$.

Essa lagrangiana pode ser obtida, também, como um caso particular de teorias efetivas que descrevem férmions localizados em branas. Nessa abordagem, o modelo é mais conhecida por eletrodinâmica quântica reduzida (EDQR) [29–39].

Em dimensões menores ou iguais a 3+1, além do caso em que os férmions estão em 2 + 1 dimensões e bosons em 3 + 1 (EDQR_{4,3}), existem também os casos em que os férmions estão em 1 + 1, e bósons em 3 + 1 (EDQR_{4,2}) ou 2 + 1 (EDQR_{3,2}). A EDQR_{4,3} e suas variantes trazem, além do interesse puramente teórico, possíveis aplicações em matéria condensada.

Trataremos, neste capítulo, de uma análise da renormalização dessa teoria sob a perspectiva de uma regularização que se enquadra no contexto dos *métodos implícitos* citados na introdução. Descreveremos, nessa análise, resultados obtidos e perspectivas de continuação do trabalho.

3.1 Modelo e regras de Feynman

A $EDQR_{d_\gamma d_e}$ sem massa, com a dimensão do campo de calibre d_γ e do férmion d_e , é definida impondo ao campo fermiônico a restrição de existir apenas na dimensão d_e . Considere a ação da EDQ,

$$S = S_{d_\gamma} + S_{cin}, \quad (3.2)$$

com uma parte definida na dimensão do d_γ ,

$$S_{d_\gamma} = \int d^{d_\gamma} x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + e A_\mu J^\mu - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right), \quad (3.3)$$

onde ξ é o parâmetro de calibre, A_μ é o campo de calibre e J_μ é o vetor densidade de corrente; e o termo cinético dos férmions,

$$S_{cin} = ie \int d^{d_e} x \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi, \quad (3.4)$$

que é definido apenas na dimensão d_e . As matrizes de Dirac são definidas numa dimensão que denotaremos por d_D , que depende da dimensão d_e . Em $d_e = 3$, por exemplo, duas representações diferentes são muito usadas, a depender do contexto: $d_D = 2$ e $d_D = 4$.

Usando o formalismo de integral de trajetória e métodos de integração funcional, integrando no campo A_μ , podemos mostrar que

$$S_{d_\gamma} = \int d^{d_\gamma} x d^{d_\gamma} y J^\mu(x) D_{\mu\nu}^{(0)}(x-y) J^\nu(y), \quad (3.5)$$

onde $D_{\mu\nu}^{(0)}(x-y)$ é o propagador livre do campo de calibre em d_γ dimensões,

$$D_{\mu\nu}^{(0)}(x-y) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \exp(ik(x-y)) \left(g_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{1}{k^2}. \quad (3.6)$$

Restringindo a corrente $J^\mu(x)$ à dimensão d_e ,

$$\begin{aligned} J^\mu(x) &= 0 \quad \text{para} \quad \mu = d_e, \dots, d_\gamma - 1 \\ &= j^\mu(x_0, \dots, x_{d_e-1}) \delta^{d_\gamma-d_e}(x_{d_e}, \dots, x_{d_\gamma-1}) \quad \text{para} \quad \mu = 0, \dots, d_e - 1, \end{aligned} \quad (3.7)$$

e integrando em $\bar{x} = x_{d_e}, \dots, x_{d_\gamma-1}$ e $\bar{y}$, obtemos uma ação da teoria efetiva em d_e dimensões,

$$\tilde{S} = \frac{1}{2} \int d^{d_e} x d^{d_e} y j^\mu(x) \tilde{D}_{\mu\nu}^{(0)}(x-y) j^\nu(y), \quad (3.8)$$

onde $\tilde{D}_{\mu\nu}^{(0)}(x-y)$ é o propagador efetivo do campo de calibre em d_e dimensões,

$$\tilde{D}_{\mu\nu}^{(0)}(x-y) = \int \frac{d^{d_e} k d^{d_\gamma-d_e} \bar{k}}{(2\pi)^{d_\gamma}} \exp(ik(x-y)) \left(g_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k_\mu k_\nu}{\bar{k}^2 + k^2} \right) \frac{1}{\bar{k}^2 + k^2}. \quad (3.9)$$

Assim, o propagador efetivo no espaço dos momentos é:

$$\tilde{D}_{\mu\nu}^{(0)}(k) = \int \frac{d^{d_\gamma-d_e} \bar{k}}{(2\pi)^{d_\gamma-d_e}} \left(g_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k_\mu k_\nu}{\bar{k}^2 + k^2} \right) \frac{1}{\bar{k}^2 + k^2}. \quad (3.10)$$

Após integrar no momento $\bar{k}$ pode-se obter uma ação da teoria efetiva reescrita na seguinte forma geral:

$$\bar{S}_{d_e} = \int d^{d_e}x \left(\frac{1}{4} F^{\mu\nu} I(-\partial^2) F_{\mu\nu} + e A_\mu j^\mu + \text{termo de calibre} + \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \right), \quad (3.11)$$

onde ∂^2 é o D’lambertiano em d_e dimensões e $I(\partial^2)$ é um operador não local. A ação da $EDQR_{4,3}$, por exemplo, é

$$\bar{S}_3 = \int d^3x \left(\frac{1}{4} F^{\mu\nu} \frac{1}{\sqrt{-\partial^2}} F_{\mu\nu} + e A_\mu j^\mu - \frac{1}{2\xi} A_\nu \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\sqrt{-\partial^2}} A_\mu + \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \right). \quad (3.12)$$

As regras de Feynman para o vértice,

$$V_\mu = -ie\gamma_\mu, \quad (3.13)$$

e para o fémion,

$$S_0(k) = \frac{i}{\bar{k}}, \quad (3.14)$$

são as mesmas da EDQ na dimensão d_e . Mas o propagador efetivo do campo de calibre é dado por:

$$\bar{D}_0^{\mu\nu}(p) = \frac{i}{2\sqrt{-p^2}} \left(g^{\mu\nu} - \frac{\bar{\xi}}{2} \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right), \quad (3.15)$$

com $\bar{\xi} = 1 - \xi$.

A $EDQR_{3,2}$ é análoga: as regras de Feynman são as mesmas da EDQ_2 ; exceto pelo propagador do fóton que é dado pela expressão (3.15), mas em duas dimensões.

Na $EDQR_{4,2}$ não podemos simplesmente integrar a Eq (3.10) em $\bar{k}$, pois ela é divergente nessa variável. A estratégia pode ser utilizar um “regulador” para esse propagador, como é feito em [29] (uma abordagem diferente foi utilizada recentemente para esse problema em [56]). Voltaremos a esse tema na seção 3.3, no sentido de perspectivas, pois não trabalharemos com o propagador desse modelo neste trabalho.

As dimensões dos campos clássicos,

$$[\psi] = \frac{d_e - 1}{2} \quad \text{e} \quad [A] = \frac{d_\gamma - 2}{2} \quad (3.16)$$

levam a uma dimensão da constante de acoplamento

$$[e] = \frac{4 - d_\gamma}{2}. \quad (3.17)$$

Assim, para $d_\gamma = 4$ temos teorias renormalizáveis, onde o grau de divergência se mantém o mesmo para cada ordem de perturbação; e para $d_\gamma < 4$ super-renormalizável, onde o grau de divergência diminui a cada ordem.

Diagrama	(d_γ, d_e)	(4, 4)	(4, 3)	(4, 2)	(3, 3)	(3, 2)	(2, 2)
um loop							
Tadpole	$d_e - 1$	3	2	1	2	1	1
A.E. gauge	$d_e - 2$	2	1	0	1	0	0
A.E. férmion	$d_\gamma - 3$	1	1	1	0	0	-1
Vértice	$d_\gamma - 4$	0	0	0	-1	-1	-2
dois loops							
A.E. gauge	$d_e + d_\gamma - 6$	2	1	0	0	-1	-2
A.E. férmion	$2d_\gamma - 7$	1	1	1	-1	-1	-3
Vértice	$2d_\gamma - 8$	0	0	0	-2	-2	-4

Tabela 1 – Grau superficial de divergência de diagramas.

O grau de divergência superficial (GDS) de cada gráfico é dado pela expressão [30]:

$$GDS = d_e + \frac{d_\gamma + 4}{2}V - \frac{d_\gamma - 2}{2}N_\gamma + \frac{d_e - 1}{2}N_e \quad (3.18)$$

onde V é o número de vértices, N_γ , o número de linhas externas de calibre e N_e , o número de linhas externas de férmions. A tabela 1 lista o grau de divergência superficial para diagramas a um e dois laços.

3.2 regularização e renormalização

Os cálculos foram realizados em RI [18, 48, 57–60], um esquema de regularização no espaço dos momentos, onde as divergências no ultravioleta são reduzidas a integrais divergentes básicas (IDBs) que não dependem das grandezas físicas, como massa e momento externo das partículas. As IDBs são parametrizadas como funções de uma escala do grupo de renormalização λ e absorvidas diretamente na definição das constantes de renormalização. Esse método não utiliza qualquer regulador explícito e se mantém na dimensão física da teoria.

Exemplos de IDBs em RI que utilizaremos são:

$$\begin{aligned}
I_{\log d=3}(\lambda^2) &\equiv \int_k \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^{3/2}}, \\
I_{\log d=3}^{(2)}(\lambda^2) &\equiv \int_k \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^{3/2}} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right), \\
I_{\text{lin } d=3}(\lambda^2) &\equiv \int_k \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)}, \\
I_{\text{lin } d=3}^{(2)}(\lambda^2) &\equiv \int_k \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right),
\end{aligned} \tag{3.19}$$

onde $\int_k \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$.

As definições de todas as IDBs utilizadas e suas parametrizações em termos da escala λ encontram-se no apêndice A.1. Exemplos dos cálculos de amplitudes são apresentados nas seções A.3, A.4 e A.5 do apêndice.

A renormalização foi feita no esquema de subtração mínima, de forma análoga a renormalização da EDQ. Os campos e constantes nus são relacionados com os renormalizados por

$$\psi = Z_\psi^{1/2} \psi_r, \quad A_\mu = Z_A^{1/2} A_\mu^r, \quad e = Z_e e_r, \quad \xi = Z_\xi \xi, \tag{3.20}$$

onde os Z s são as constantes de renormalização que irão absorver as divergências em cada ordem da teoria de perturbação.

O termo cinético do férmion, por exemplo, é reescrito por

$$\bar{\psi} \not{\partial} \psi = \bar{\psi}_r \not{\partial} \psi_r + (Z_\psi - 1) \bar{\psi}_r \not{\partial} \psi_r \tag{3.21}$$

e o segundo termo é tratado perturbativamente, gerando um contratermo de renormalização para o propagador do férmion:

$$i(Z_\psi - 1) \not{p} \tag{3.22}$$

que deve ser somado a auto energia do férmion a cada laço para absorver somente a divergência, de acordo com o esquema de subtração mínima.

Assim, Z_ψ é obtido pela expansão

$$Z_\psi = 1 + \sum_n (Z_\psi - 1)^{(n)}, \tag{3.23}$$

onde cada termo de ordem n absorverá as divergências dos diagramas dos respectivos laços (mais detalhes sobre os procedimentos de renormalização da QED podem ser encontrados em livros-texto como em [25]). Somamos

$$-i\Sigma_1(\not{p}) + i(Z_\psi - 1)^{(1)} \not{p} \tag{3.24}$$

para absorver as divergências a um laço; em seguida, a dois laços,

$$-i\Sigma_2(\not{p}) + i(Z_\psi - 1)^{(2)}\not{p}, \quad (3.25)$$

onde o Σ_2 inclui a soma dos diagramas a dois laços e dos subcontratermos necessários para remover as subdivergências, de acordo o esquema de Bogoliubov, Parasiuk, Hepp e Zimmermann (BPHZ) [61–64].

De forma análoga, temos o contra termo do vértice,

$$-i(Z_\psi Z_A^{1/2} Z_e - 1)\gamma^\mu, \quad (3.26)$$

e do propagador de calibre, que não precisaremos utilizar, pois, como veremos, a auto energia do fóton é finita até dois laços.

Pela invariância de calibre temos, ainda, a relação

$$Z_e Z_A^{1/2} = 1, \quad (3.27)$$

indicando que a renormalização da carga depende apenas da renormalização do campo de calibre.

A escala do grupo de renormalização, λ , é introduzida na RI pelas relações de escala, como descrito no apêndice A.1. Podemos, então, definir as funções do grupo de renormalização: a função beta,

$$\beta = \frac{d\alpha_r}{d\ln\lambda}, \quad (3.28)$$

que descreve a dependência da constante de acoplamento $\alpha_r = e_r^2/(4\pi)$ com a escala de energia; as dimensões anômalas dos campos,

$$\gamma_\psi = \frac{d\ln Z_\psi}{d\ln\lambda} \quad \text{e} \quad \gamma_A = \frac{d\ln Z_A}{d\ln\lambda} \quad (3.29)$$

que descrevem a mudança na dimensão dos campos com a renormalização.

3.2.1 Amplitudes a um laço

Vamos analisar os diagramas a um laço, onde usaremos IWs para fixar os TSs. Analisaremos os diagramas com rotulação arbitrária para checar a relação entre IRM e invariância de calibre nessas teorias. Apresentaremos, aqui, os resultados dos cálculos realizados em RI. As definições das IDBs nesse esquema, bem como notações e um exemplo de como foram realizados os cálculos a um laço, encontram-se no apêndice A.

Utilizamos o calibre de Feynman $1 - \xi = 0$, que simplifica o propagador do efetivo do fóton da $EDQR_{4,3}$ e $EDQR_{3,2}$:

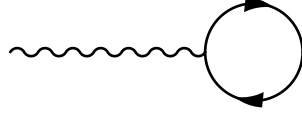


Figura 3 – Diagrama tadpole

$$\bar{D}_0^{\mu\nu}(p) = \frac{ig^{\mu\nu}}{2\sqrt{-p^2}}. \quad (3.30)$$

O diagrama *tadpole* (Figura 3), em $d_e < 4$ e com um rótulo arbitrário $k + l$, resulta em

$$\begin{aligned} i\Xi^\mu &= - \int_k \text{Tr} [ie\gamma^\mu S_0(k+l)] \\ &= -ied_D \int_k \frac{k^\mu + l^\mu}{(k+l)^2 - \mu^2} \\ &= -ied_D \int_k \left(\frac{k^\mu}{k^2 - \mu^2} + l^\nu \frac{\partial}{\partial k^\nu} \frac{k^\mu}{k^2 - \mu^2} + \frac{l^\nu l^\lambda}{2} \frac{\partial}{\partial k^\nu} \frac{\partial}{\partial k^\lambda} \frac{k^\mu}{k^2 - \mu^2} \right) \\ &= -ied_D l^\nu \int_k \frac{\partial}{\partial k^\nu} \frac{k_\mu}{k^2 - \mu^2} = -ied_D l^\mu \Gamma_i, \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde utilizamos a expansão

$$f_\mu(k+l) = f_\mu(k) + l^\nu \frac{\partial}{\partial k^\nu} f_\mu(k) + \frac{l^\nu l^\lambda}{2!} \frac{\partial}{\partial k^\nu} \frac{\partial}{\partial k^\lambda} f_\mu(k) + \dots \quad (3.32)$$

para expressar o resultado em termos do TS (os termos seguintes são nulos pelo teorema de Gauss)

$$\Gamma_{id} g^{\mu\nu} = \int_k \frac{\partial}{\partial k^\nu} \frac{k_\mu}{k^2 - \mu^2} = \int_k \left(\frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - \mu^2)} - 2 \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - \mu^2)^2} \right), \quad (3.33)$$

que é finito e dependente de regularização. Γ_i é uma diferença de duas integrais linearmente divergentes em $d_e = 3$, onde, pela notação adotada (ver apêndice A.1), temos $\Gamma_{id} = \Gamma_{1d=3}$; e logaritmicamente divergente em $d_e = 2$, onde $\Gamma_{id} = \Gamma_{0d=2}$.

Esses TSs devem ser nulos nesse diagrama se mantermos rotulação arbitrária, (*i.e.*, qualquer valor em l^μ), pois, $\Xi^\nu = 0$ por operação de conjugação de carga (teorema de Furry), $CJ^\mu C^\dagger = -J^\mu$, onde C é um operador unitário e linear, e $C|0\rangle = |0\rangle$ e $\langle 0|C^\dagger = \langle 0|$. Assim,

$$\langle 0|Tj_\mu|0\rangle = \langle 0|C^\dagger Cj_\mu CC^\dagger|0\rangle = -\langle 0|Tj_\mu|0\rangle = 0. \quad (3.34)$$

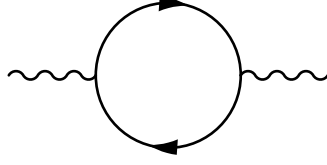


Figura 4 – Auto energia do fóton a um laço.

A auto energia do fóton (Figura 4) em $d_e < 4$

$$\begin{aligned}
 i\Pi_d^{\mu\nu}(p) &= -\int_k \text{Tr} [V^\mu S_0(k+r) V^\nu S_0(k+s)] \\
 &= -e^2 d_D \int_k \left(\frac{-g^{\mu\nu}(k^2 + k(k+s) + ks) + (k^\mu k^\nu + k^\mu(r+s)^\nu + r^\mu r^\nu) + (\mu \leftrightarrow \nu)}{(k+r)^2(k+s)^2} \right) \\
 &= e^2 d_D \int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{k^\nu}{(k^2 - \mu^2)} + i\Pi_{f,d}^{\mu\nu}(p) \\
 &= e^2 d_D g^{\mu\nu} \Gamma_{i,d} + i\Pi_{f,d}^{\mu\nu}(p)
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

onde p é o momento, r e s são rótulos arbitrários e $\Pi_{f,d}^{\mu\nu}$ é a parte finita e independente de regularização e que tem uma estrutura transversa. Em $d = 3$ temos

$$i\Pi_{f,d=3}^{\mu\nu} = -id_D e^2 \frac{\sqrt{-p^2}}{32\pi} \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right); \tag{3.36}$$

em $d = 2$,

$$i\Pi_{f,d=2}^{\mu\nu} = -\frac{i}{\pi} \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right). \tag{3.37}$$

O TS $\Gamma_{i,d}$ é idêntico ao diagrama *tadpole* ($\Gamma_{1d=3}$ em $d_e = 3$ e $\Gamma_{0d=2}$ em $d_e = 2$), e deve ser nulo nesse diagrama pela IW da invariância de calibre envolvendo esse diagrama:

$$p_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0. \tag{3.38}$$

Assim, a auto energia do fóton é independente de rótulo e tem o TS fixado pela invariância de calibre nas EDQRs com $d_e < 4$.

Na $EDQR_{4,3}$ temos, para a auto-energia do férmion Σ_1 a um laço (Figura 5):

$$\begin{aligned}
 -i\Sigma_1(p) &= \int_k V_\mu S_0(k+r) V_\nu \tilde{D}_0^{\mu\nu}(k+s) \\
 &= \frac{ie^2}{6} \left(\not{p} \left(I_{\log}(p^2, \lambda^2) + \frac{1}{4\pi^2} \ln \left(\frac{-4p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{5}{6\pi^2} \right) + 2(2\not{s} + \not{p}) \Gamma_{0d=3} \right).
 \end{aligned} \tag{3.39}$$



Figura 5 – Auto energia do férmion a um laço.

onde p é o momento externo, r e s são rotulações arbitrárias.

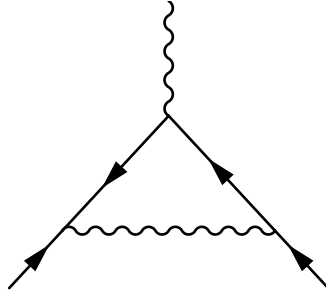


Figura 6 – Vértice fóton-férmion a um laço.

Já o vértice (Figura 6) resulta em

$$\begin{aligned} -ie\Lambda_1^\rho &= \int_k V^\mu S(k+r) V^\rho S(k+t) V^\nu \tilde{D}_{\mu\nu}(k+s) \\ &= -ie^3 \gamma^\rho \left(\frac{1}{6} I_{\log}(\lambda^2) - \frac{1}{3} \Gamma_{0,d=3}^{(1)} \right) - ie\Lambda_{f,d=3}^\rho, \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde $\Lambda_{f,d=3}^\rho$ é um termo finito e independente de regularização. Esse diagrama não depende dos rótulos r , t e s , pois a integral inicial é logaritmicamente divergente e por isso permite *shift* na variável de integração [45].

Nas $EDQR_{3,2}$, EDQ_3 e EDQ_2 , os diagramas Σ_1 e Λ_1^μ são finitos e independentes de regularização.

A IW envolvendo o vértice e a auto energia do férmion é

$$(p-q)_\mu \Lambda_1^\mu = \Sigma(p) - \Sigma(q), \quad (3.41)$$

que é satisfeita se os TSs envolvidos forem nulos, pois

$$(p-q)_\mu \Lambda_1^\mu = e^2 (\not{p} - \not{q}) \left(\frac{1}{6} I_{\log}(\lambda^2) - \frac{1}{3} \Gamma_{0,d=3}^{(1)} \right) + (p-q)_\mu \Lambda_{1f}^\mu, \quad (3.42)$$

e

$$\Sigma_1(p) - \Sigma_1(q) = \frac{e^2}{6}(\not{p} - \not{q}) \left(I_{\log}(\lambda^2) + 2(2\alpha + 1)\Gamma_{0,d=3} \right). \quad (3.43)$$

onde usamos $s = \alpha p$ para parametrizar a rotulação do Σ_1 .

Assim,

$$(4\alpha + 2 - \frac{1}{3})\Gamma_{0,d=3} = 0. \quad (3.44)$$

Diagrama	$EDQR_{4,3}$	$EDQR_{4,2}$	EDQ_3	$EDQR_{3,2}$	EDQ_2
<i>tadpole</i>	$\beta\Gamma_{1,d=3}$	$\beta\Gamma_{0,d=2}$	$\beta\Gamma_{1,d=3}$	$\beta\Gamma_{0,d=2}$	$\beta\Gamma_{0,d=2}$
A.E. gauge	$\Gamma_{1,d=3}$	$\Gamma_{0,d=2}$	$\Gamma_{1,d=3}$	$\Gamma_{0,d=2}$	$\Gamma_{0,d=2}$
A.E. férmion	$\alpha\Gamma_{0,d=3}$	ñ calculado	finito	finito	finito
Vértice	$\Gamma_{0,d=3}$	ñ calculado	finito	finito	finito

Tabela 2 – TSs em diagramas a um laço, onde α e β indicam dependência com a rotulação dos momentos internos.

Podemos analisar a relação entre rotulação arbitrária dos momentos e TSs pela tabela 2. Observamos que IRM implica que todos os termos de superfície que aparecem acima devem ser zeros na $EDQR_{4,3}$, pois os gráficos *tadpole* e auto energia do férmion só serão invariantes de rótulo por essa condição.

Por outro lado, as identidades de Ward a um laço são satisfeitas se os mesmos termos de superfícies forem nulos, *i.e.*, a invariância de calibre fixa os TSs. Assim, a um laço, IRM é condição necessária para satisfazer invariância de calibre.

A conclusão é análogo para as demais teorias, com exceção da $EDQR_{4,2}$, onde a auto-energia do férmion e o vértice não foram avaliados nesse trabalho devido a dificuldade em lidar com o propagador do campo de calibre nessa teoria. Pretendemos abordar essa questão em trabalhos futuros, mas podemos conjecturar que essa relação entre IRM e TSs é válida também nessa teoria; pois, pela divergência superficial dos diagramas (ver tabela 1) e pela estrutura dos mesmos, podemos concluir que o único termo de superfície que pode surgir deles é o $\Gamma_{0,d=2}$, que já está fixado pelos diagramas *tadpole* e auto-energia do fóton.

3.2.2 Constantes e funções do grupo de renormalização

Apresentaremos nesta seção os resultados da renormalização da $EDQR_{4,3}$ a dois laços, onde foram calculadas as constantes de renormalização no esquema de subtração mínima.

Os resultados dos diagramas a um laço (figuras 4, 5, 6) (com os TSs fixos pela invariância de calibre) são:

$$i\Pi_1^{\mu\nu} = -id_D e^2 \left[\frac{\sqrt{-q^2}}{32} \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \right], \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} -i\Sigma_1(p^2) &= i\frac{e^2}{6} \not{p} \left(I_{\log}(\lambda^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4\pi^2} \ln \left(-\frac{4p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{5}{6\pi^2} \right). \end{aligned} \quad (3.46)$$

e

$$-ie\Lambda_1^\mu = -ie^3 \gamma^\mu \frac{e^3}{6} I_{\log}(\lambda^2) - ie\Lambda_{1f}^\mu. \quad (3.47)$$

Destes diagramas resultam, pela expansão dos Z s (3.23), nas constantes de renormalização a um laço:

$$(Z_A - 1)^{(1)} = 0 \quad \text{e} \quad (Z_\psi - 1)^{(1)} = \frac{e^2}{6} I_{\log}(\lambda^2). \quad (3.48)$$

Diagramas a dois laços para a auto energia do campo de calibre

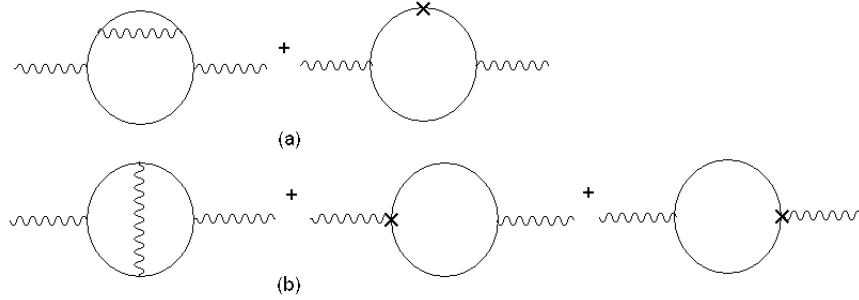


Figura 7 – Contribuições a dois laços para a auto energia do campo de calibre com seus respectivos contratermos necessários para absorver as subdivergências.

O cálculo dos diagramas que contribuem para a auto energia do campo de calibre (7) levam a

$$\begin{aligned} i\Pi_{2a}^{\mu\nu} &= i\Pi_{2b}^{\mu\nu} = - \int_k \text{Tr} [V^\nu S_0(k+q) V^\mu S_0(k) (-i\Sigma(k)) S_0(k)] \\ &= -\frac{e^4}{6} I_{\log}(\lambda^2) \int_k \frac{\text{Tr} [\gamma^\mu (\not{k} + \not{p}) \gamma^\nu \not{k}]}{(k+p)^2 k^2} \\ &\quad - e^4 d_D g^{\mu\nu} \left(-\frac{1}{24\pi^2} I_{\ln}(\lambda^2) + \frac{1}{24\pi^2} \Gamma_1^{(2)} \right) \\ &\quad + i\Pi_{2af}^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde $i\Pi_{2af}^{\mu\nu}$ é um termo finito e independente de regularização, com as IDBs e TS definidos por:

$$\begin{aligned}\Gamma_{1,d=3}^{(2)} g^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} I_{lin}^{(2)}(\mu^2) - 2I_{lin}^{(2)\mu\nu}(\mu^2) + 2I_{lin}^{\mu\nu}(\mu^2) \\ &= \int_k \left(\frac{g^{\mu\nu}}{(k^2 - \mu^2)} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) - 2 \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - \mu^2)^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) + 2 \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - \mu^2)^2} \right); \end{aligned} \quad (3.50)$$

e

$$\begin{aligned}i\Pi_{2c}^{\mu\nu} &= \int_k \int_q \text{Tr} [V^\mu S_0(k+p-q) V^\alpha S_0(k+p) V^\nu S_0(k) V^\beta S_0(k-q) \tilde{D}_{0\lambda\rho}(q)] \\ &= -d \frac{e^4}{6} (I_{log}(\mu^2) + 2\chi_0^{(1)}) \int_k \frac{2k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu} + p^\mu k^\nu + p^\nu k^\mu - pk g^{\mu\nu}}{(k+p)^2 k^2} \\ &\quad - \frac{e^4 d g^{\mu\nu}}{12\pi^2} \left(-\frac{5}{3} \chi_1^{(1)} - \frac{1}{2} \chi_1^{(2)} + I_{lin}(\lambda^2) \right) + i\Pi_{2cf}^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Com seus respectivos contratermos de subdivergências:

$$i\Pi_{2asub}^{\mu\nu} = i\Pi_{2bsub}^{\mu\nu} = \frac{1}{6} I_{log}(\lambda^2) \int_k \frac{\text{Tr} [V^\mu (\not{k} + \not{p}) V^\nu \not{k}]}{(k+p)^2 k^2}; \quad (3.52)$$

e

$$i\Pi_{2csub}^{\mu\nu} = \frac{de^4}{6} I_{log}(\lambda^2) \int_k \frac{-g^{\mu\nu}(k^2 + kp) + 2k^\mu k^\nu + k^\mu p^\nu + k^\nu p^\mu}{(k+p)^2 k^2}. \quad (3.53)$$

Diagramas a dois laços da auto energia do férmion

O cálculo dos diagramas que contribuem para a auto energia do férmion a dois laços (8) levam a

$$\begin{aligned}-i\Sigma_{2a}(p) &= \int_k V^\mu S_0(k+p) (-i\Sigma_1(k+p)) S_0(k+p) V^\nu \tilde{D}_{0\mu\nu}(k) \\ &= \frac{-ie^4 \not{p}}{9} \left(\frac{1}{16\pi^2} I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \left(\frac{\ln(2)}{8\pi^2} - \frac{1}{6\pi^2} + \frac{1}{2} \chi_0^{(1)} \right) I_{log}(\lambda^2) \right) \\ &\quad - \frac{ie^4}{12} I_{log}(\lambda^2) \gamma^\lambda (I_\lambda^{1,1/2}(p) + p_\lambda I^{1,1/2}(p)) - i\Sigma_{2bf}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned}-i\Sigma_{2b}(p) &= \int_k (V^\mu) S_0(k+q) V^\rho \tilde{D}_{0\mu\lambda}(k) (i\Pi_1^{\lambda\rho}(k)) \tilde{D}_{0\rho\mu}(k) \\ &= -\frac{ie^4}{48} [I_{log}(\lambda^2) - \chi_0^{(1)}] - i\Sigma_{2af}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

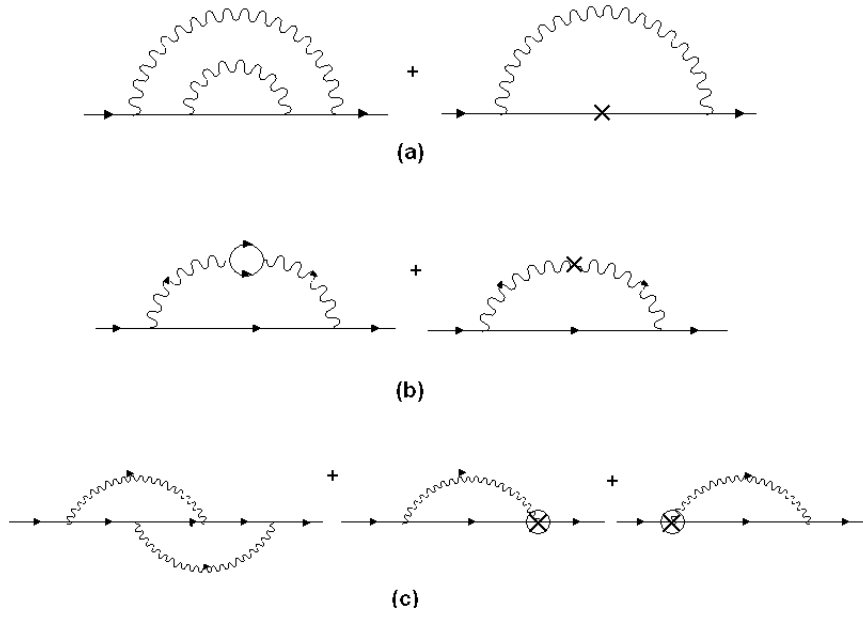


Figura 8 – Contribuições a dois laços para a auto energia do férmion com seus respectivos contratermos necessários para absorver as subdivergências.

$$\begin{aligned}
 -i\Sigma_{2c}(p) &= \int_k \int_q V^\mu S_0(q+p) V^\lambda S_0(k+p+q) V^\sigma S_0(k+p) \tilde{D}_{0\nu\lambda}(k) \tilde{D}_{0\sigma\mu}(l) \\
 &= -ie^4 \frac{\not{p}}{9\pi^2} \left(-\frac{1}{8} I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \left(\frac{23}{24} - \frac{\ln(2)}{4} \right) I_{log}(\lambda^2) \right) \\
 &\quad + \frac{ie^4}{12} I_{log}(\lambda^2) \gamma^\alpha \left(I_\alpha^{1,1/2}(p) + p_\alpha I^{1,1/2}(p) \right) - i\Sigma_{2cf}, \tag{3.56}
 \end{aligned}$$

com seus respectivos diagramas de contratermos das subdivergências

$$-i\Sigma_{a\ subcont}^{(2)} = \frac{ie^4}{12} I_{log}(\lambda^2) \left(\not{p} I^{1,1/2}(p) + \gamma^\mu I_\mu^{1,1/2}(p) \right), \tag{3.57}$$

$$\Sigma_{b\ subcont}^{(2)} = 0, \tag{3.58}$$

$$-i\Sigma_{c1\ subcont}^{(2)} = -i\Sigma_{c2\ subcont}^{(2)} = \frac{ie^4}{6} I_{log}(\lambda^2) \left(\not{p} I^{1,1/2}(p) + \gamma^\mu I_\mu^{1,1/2}(p) \right). \tag{3.59}$$

Resultados a dois laços: soma dos diagramas

Os resultados finais a dois laços, após somar todos os diagramas, incluindo os contratermos das subdivergências, são, para a auto energia do fóton:

$$\begin{aligned}
i\Pi^{(2)\mu\nu} &= i\Pi_{2a}^{\mu\nu} + i\Pi_{2a\text{sub}}^{\mu\nu} + i\Pi_{2b}^{\mu\nu} + i\Pi_{2b\text{sub}}^{\mu\nu} + i\Pi_{2c}^{\mu\nu} + i\Pi_{2c\text{sub}}^{\mu\nu} \\
&= e^4 g^{\mu\nu} \frac{1}{12\pi^2} \Gamma_{1,d=3}^{(2)} + i\Pi_f^{(2)\mu\nu},
\end{aligned} \tag{3.60}$$

que é finito, mas depende do TS

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,d=3}^{(2)} g^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} I_{lin}^{(2)}(\mu^2) - 2I_{lin}^{(2)\mu\nu}(\mu^2) + 2I_{lin}^{\mu\nu}(\mu^2) \\
&= \int_k \left(\frac{g^{\mu\nu}}{(k^2 - \mu^2)} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) - 2 \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - \mu^2)^2} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right) + 2 \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - \mu^2)^2} \right),
\end{aligned} \tag{3.61}$$

e para a auto energia do férmion:

$$\begin{aligned}
-i\Sigma^{(2)}(p^2) &= -i\Sigma_a^{(2)}(p) - i\Sigma_{a\text{subcont}}^{(2)} - i\Sigma_b^{(2)}(p) - i\Sigma_{b\text{subcont}}^{(2)} - i\Sigma_c^{(2)}(p) \\
&\quad - i\Sigma_{c1\text{subcont}}^{(2)} - i\Sigma_{c2\text{subcont}}^{(2)} \\
&= ie^4 \not{p} \left(\frac{1}{48\pi^2} I_{log\,d=3}^{(2)}(\lambda^2) + \left(\frac{1}{48} + \frac{23}{216\pi^2} + \frac{\ln(2)}{36\pi^2} \right) I_{log\,d=3}(\lambda^2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{35}{36\pi^2} \Gamma_{0\,d=3}^{(2)} \right) - i\Sigma_f^{(2)}(p^2).
\end{aligned} \tag{3.62}$$

que depende das divergências:

$$\begin{aligned}
I_{log\,d=3}^{(2)}(\lambda^2) &= \int_k \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^{3/2}} \ln \left(-\frac{k^2}{\lambda^2} \right), \\
I_{log\,d=3}(\lambda^2) &= \int_k \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^{3/2}};
\end{aligned} \tag{3.63}$$

e do TS:

$$\Gamma_{0\,d=3}^{(2)} g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} I_{log\,d=3}^{(2)} - 3I_{log\,d=3}^{(2)\mu\nu} + 2I_{log\,d=3}^{\mu\nu}. \tag{3.64}$$

Com os resultados acima podemos calcular as constantes de renormalização a dois laços pela expansão (3.23),

$$\begin{aligned}
(1 - Z_A)^{(2)} &= 0, \\
(1 - Z_\psi)^{(2)} &= e^4 \left(-\frac{1}{144\pi^2} I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \left(\frac{1}{48} + \frac{19}{216\pi^2} - \frac{\ln(2)}{72\pi^2} \right) I_{log}(\lambda^2) \right).
\end{aligned} \tag{3.65}$$

que, quando combinados aos resultados a um laço (3.48), resultam nas constantes de renormalização até dois laços:

$$\begin{aligned} Z_A &= 1 + O(e^6), \\ Z_\psi &= 1 + e^2 z_\psi^{(1)} + e^4 z_\psi^{(2)} + O(e^6), \end{aligned} \quad (3.66)$$

com

$$\begin{aligned} z_\psi^{(1)} &= \frac{1}{6} I_{\log}(\lambda^2), \\ z_\psi^{(2)} &= -\frac{1}{144\pi^2} I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) + \left(\frac{1}{48} + \frac{19}{216\pi^2} - \frac{\ln(2)}{72\pi^2} \right) I_{\log}(\lambda^2). \end{aligned} \quad (3.67)$$

As Funções do grupo de renormalização podem ser calculadas a partir destes resultados pela expressão:

$$\gamma_i = \frac{d \ln Z_i}{d \lambda} = \frac{2\lambda^2}{Z_i} \frac{d Z_i}{d \lambda^2} \quad (3.68)$$

A dimensão anômala do campo de calibre não tem correção até segunda ordem,

$$\gamma_A = 1 + O(e^6); \quad (3.69)$$

e a do férmion é corrigida por:

$$\begin{aligned} \gamma_\psi &= 2\lambda^2 \frac{e^2 \dot{z}_\psi^{(1)} + e^4 \dot{z}_\psi^{(2)} + \dots}{1 + e^2 z_\psi^{(1)} + e^4 z_\psi^{(2)} + \dots} = 2\lambda^2 \left(e^2 \dot{z}_\psi^{(1)} + e^4 \left(\dot{z}_\psi^{(2)} - z_\psi^{(1)} \dot{z}_\psi^{(1)} \right) + O(e^6) \right) \\ &= -\frac{1}{12\pi^2} e^2 + \left(-\frac{7}{144\pi^2} - \frac{1}{96} \right) e^4 + O(e^6), \end{aligned} \quad (3.70)$$

onde

$$\dot{z}_\psi^{(1)} = \frac{1}{6} \frac{d}{d \lambda^2} I_{\log}(\lambda^2) = -\frac{1}{4} \int_k \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^{5/3}} = \frac{1}{24\pi^2 \lambda^2} \quad (3.71)$$

e

$$\begin{aligned} \dot{z}_\psi^{(2)} &= \frac{d}{d \lambda^2} \left(-\frac{1}{144\pi^2} I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) + \left(\frac{1}{48} + \frac{19}{216\pi^2} - \frac{\ln(2)}{72\pi^2} \right) I_{\log}(\lambda^2) \right) \\ &= \frac{1}{576\pi^2 \lambda^2} \left(-I_{\log}(\lambda^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 - \ln 2)}{4\pi^2 \lambda^2} \left(-\frac{1}{96} + \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\ln 2}{144} + \frac{19}{432} \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Pela relação da constante de renormalização da carga com a do campo de calibre (3.27), a função beta é nula até dois laços:

$$\beta = \frac{d \ln \alpha}{d \ln \lambda} = \frac{2\lambda^2}{\alpha} \frac{d\alpha}{d\lambda^2} = \frac{2\lambda^2}{Z_e} \frac{dZ_e}{d\lambda^2} = O(e^6). \quad (3.73)$$

3.3 Considerações e perspectivas

Realizamos um estudo da renormalização das EDQRs sem massa, sob a perspectiva de uma regularização independente; a um laço, em 2+1 e 1+1 dimensões; e a dois laços, em 2+1 dimensões. Em comparação as EDQs em 2+1 e 1+1, essas teorias apresentam uma dificuldade técnica adicional, que se origina no fato de que, nas EDQRs, o propagador do fóton contém um expoente semi-inteiro (3.15).

Ao analisarmos a estrutura de divergência conseguimos generalizar a relação entre IRM e invariância de calibre, a um laço, já conhecida na EDQ_4 [45], aos modelos que estudamos. Para finalizarmos essa análise precisamos, ainda, considerar o caso da $EDQR_{4,2}$, onde encontramos um obstáculo relacionado ao propagador efetivo de calibre. Esse propagador precisa, a princípio, ser “regularizado”, quando realizamos a transição da teoria com o fóton em 3+1 dimensões para uma teoria efetiva em 1+1 dimensões; onde, pela Eq. (3.10), o propagador efetivo é obtido ao integramos em duas dimensões espaciais:

$$\tilde{D}_{\mu\nu}^{(0)}(k) = \int \frac{d^2 \bar{k}}{(2\pi)^2} \left(g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{\bar{k}^2 + k^2} \right) \frac{1}{\bar{k}^2 + k^2}. \quad (3.74)$$

Esse propagador foi tratado com um parâmetro “regularizador” no contexto da equação de Dyson-Schwinger em [29]. Pretendemos, como perspectiva, investigar o tratamento desse propagador em teoria de perturbação.

Considerações sobre a $EDQR_{4,2}$ são relevantes na descrição de isolantes topológicos, como mostrado recentemente em [56]. Assim, ao tratar o propagador efetivo do fóton nessa teoria, podemos fazer um estudo da renormalização a dois laços da mesma, onde esperamos obter resultados interessantes, *e.g.* a correção da auto-energia do férmion, que depende desse propagador, e a condutividade óptica para uma linha de grafeno ou elétrons em uma linha, que pode ser comparado com o cálculo realizado em outros modelos efetivos [65].

Na renormalização da $EDQR_{4,3}$ obtivemos a renormalização a dois laços pelo método BPHZ em RI, obtendo correções finitas para o propagador do fóton e correções divergentes para a auto energia do férmion. Assim, foi obtido o valor nulo para a função beta até dois laços, não existindo renormalização da carga até essa ordem; e a dimensão anômala do férmion foi obtida até essa ordem (3.70). Até então, esses resultados tinham sido obtidos apenas em RD [32, 34, 66].

Como perspectiva de continuação do trabalho, pretendemos finalizar os cálculos dos termos finitos das auto-energias do fóton e do férmion. Com esses cálculos, esperamos fixar os TS característicos dos diagramas a dois laços (3.61 e 3.64) pelas IWs de calibre, de forma análoga aos resultados a um laço. Além disso, os resultados finitos a dois laços podem ser importantes no contexto de aplicações desse modelo em matéria condensada, *e.g.* na investigação de observáveis do grafeno a partir desse modelo.

Aplicações e efeitos de interação baseados na utilização da $EDQR_{4,3}$ como modelo ultrarelativísticos já foram explorados [33, 67–70]. A partir dos cálculos apresentados anteriormente, podemos estudar a condutividade óptica, que descreve a resposta linear para uma campo elétrico externo e estático, usando a forma de Kubo [67, 68, 71] que envolve o tensor polarização do vácuo¹.

Existe um debate na literatura em relação à correção da condutividade a um laço [33, 66, 67, 71, 72]. Essa correção foi calculada, em RI, utilizando um modelo efetivo em $2 + 1$ dimensões [72], onde foi indicado uma possível interferência à correção por um termo finito arbitrário. Esse termo foi fixado pela invariância rotacional $O(2)$ do modelo, que impõe transversalidade ao $\Pi^{\mu\nu}$. Esperamos, como perspectiva de continuação do trabalho, contribuir com esse debate; investigando o papel dos termos de superfície nessas correções, a dois laços, sob o modelo da $RQED_{4,3}$.

¹ A descrição depende do ajuste $j_\mu = (j_0, j_i) \rightarrow j_\mu = (j_0, v_F j_i)$, onde v_F é a velocidade de Fermi.

4 Conclusão

Apresentamos, nesta tese, resultados no contexto da teoria de renormalização e regularização de teorias de calibre, onde foram tratados dois temas: o primeiro envolvendo o problema do tratamento de traços contendo a matriz γ_5 em amplitudes divergentes, e a relação desse problema com a consistência de amplitudes quirais anômalas em relação a simetria de Bose; o segundo tema está relacionado a aspectos da renormalização da EDQR.

As contribuições importantes no primeiro tema foram: 1) mostrar um exemplo em que o uso do γ_5 definido por anticomutação (1.2) resulta em inconsistências, mesmo em regularizações que se mantêm na dimensão física, devendo-se ter uma prescrição adequada ao tratamento dessa matriz também nesses métodos; 2) mostrar que, contrário ao que uma análise descuidada poderia indicar, a simetria de Bose em amplitudes quirais anômalas não impõe restrição alguma à anomalia quiral, e que é possível obter relações entre IWs das correntes V-A *vs* R-L consistentes com essa simetria, independentemente de como a anomalia quiral se manifesta nas IWs.

Tais contribuições foram obtidas ao analisarmos a conexão entre esse dois problemas. Para esse fim, utilizamos um modelo sem massa, com acoplamentos vetorial e axial (2.1), em $1 + 1$ dimensões (modelo de Schwinger quiral) e $3 + 1$ dimensões (EDQ quiral), onde estudamos relações entre amplitudes construídas a partir do campo ψ com amplitudes construídas a partir dos campos ψ_L e ψ_R .

O tratamento em $1 + 1$ D nos possibilitou compreender as ambiguidades geradas pelo uso do anticomutador, que “destroem” uma simetrização envolvendo índices de Lorentz e momentos externos, resultando em inconsistências com a simetria de Bose nas equações que relacionam as amplitudes analisadas. Um exemplo claro pode ser observado ao compararmos as relações inconsistentes entre as amplitudes (2.41) com as relações consistentes (2.44), as últimas obtidas pela definição tHV do γ_5 (em termos do tensor ϵ e matrizes de Dirac). A partir dos resultados em $1 + 1$ D conseguimos lidar com o caso $3 + 1$ D, que é computacionalmente mais complexo; *e.g.* ao nos deparamos com amplitudes do tipo AAA, por envolverem um número extenso de matrizes de Dirac ao se utilizar a definição tHV (1.1). A analogia ao caso bidimensional nos permitiu, no entanto, obter a relação (2.57), que, apesar de simples, foi um resultado importante para o nosso avanço num aspecto técnico.

Resolvida a aparente inconsistência entre simetria de Bose e anomalia quiral, obtivemos, adicionalmente, a anomalia quiral, na forma de operador, para as correntes J_R e J_L , em $1 + 1$ D (2.49) e em $3 + 1$ D (2.78), a partir dos resultados das IWs V-A em [16].

Aqui, as contribuições não nulas de diagramas com vértices R e L cruzados (2.48c, 2.80, 2.82 e 2.84), que seriam nulas na prescrição do anticomutador, foram essenciais. Esses resultados para a anomalia das correntes estão em uma forma livre de influências por escolha de regularização, onde ambiguidades de regularização encontram-se parametrizadas, possibilitando uma análise das simetrias de modo que as mesmas possam ser fixadas por considerações físicas, a partir dessa parametrização.

Ao estudarmos a renormalização da EDQR começamos com um análise da estrutura de divergências nos modelos com férmions em $1 + 1$ D e em $2 + 1$ D, comparando a $EDQR_{4,3}$, $EDQR_{4,2}$ e $EDQR_{3,2}$ com as EDQ_3 e EDQ_2 . Em termos técnicos, a maior dificuldade encontrada está relacionada ao propagador efetivo do fóton, que, nesses modelos, é proporcional a $(p^2)^{-1/2}$ (3.15), gerando certas dificuldades.

Com a análise a um laço, obtivemos a relação entre rótulos e calibre, resumida na tabela 2; onde IRM requer TSs nulos nos diagramas *tadpole* e auto-energia do férmion; e, por outro lado, invariância de calibre exige os mesmos TSs nulos nas respectivas IWs. Nessa análise, os diagramas contendo o propagador do fóton na $EDQR_{4,2}$ não foram avaliados devido a dificuldades para defini-lo nesse modelo. Como descrito na seção 3.3, investigar o tratamento desse propagador é uma das propostas de continuação do trabalho. Essa perspectiva tem relevância por possibilitar um estudo perturbativo dessa teoria, que pode ser significativo, por exemplo, para a aplicação da mesma em contextos de matéria condensada.

Estudamos a renormalização a dois laços da $EDQR_{4,3}$, calculando as constantes e funções do grupo de renormalização em RI, onde nossos resultados concordam com os obtidos em RD [32, 34]. A auto energia do fóton é finita a dois laços, resultando na função beta nula e não havendo renormalização da carga até essa ordem. A auto-energia do férmion é divergente a um e dois laços, resultando em correções para a dimensão anômala do férmion (3.70).

Nos diagramas a dois laços analisamos apenas os termos divergentes, sem realizar o cálculo completo da parte finita. Pretendemos completar esses cálculos com a perspectiva de possíveis análises de observáveis em matéria condensada, como o cálculo da condutividade óptica do grafeno nesse modelo. Apesar dessa perspectiva de aplicações, neste trabalho nos limitamos a um estudo do modelo no contexto da TQC, sem um estudo apropriado de aplicações desse formalismo no contexto da matéria condensada.

Apêndices

APÊNDICE A – Cálculos de amplitudes

A.1 Integrais divergentes: definições e notações

O esquema de regularização adotado nos cálculos perturbativos foi a RI [18, 48, 57–60], um método de regularização no espaço dos momentos, onde não se utiliza nenhum regulador explícito. Nesse esquema, o conteúdo divergente das amplitudes é exibido em termos das IDBs, que são, então, absorvidas nas definições das constantes de renormalização.

O primeiro passo do esquema é realizar a álgebra de Dirac, utilizando a expressão com a estrutura mais geral possível nos índices de Lorentz. Em seguida, escreve-se as divergências em termos das IDBs por meio de manipulações algébricas a nível do integrando, onde, se necessário, é introduzido um regulador infravermelho μ^2 . A necessidade desse regulador se restringe aos passos intermediários, sendo cancelado ao se introduzir a escala do grupo de renormalização.

Escrevemos, em seguida, IDBs com índices de Lorentz em termos TSs e IDBs sem índices de Lorentz, sendo, essas últimas, reduzidas a IDBs que dependem apenas de uma escala do grupo de renormalização λ pelas chamadas relações de escala. As IDBs em função de λ são, por fim, absorvidos nas definições das constantes de renormalização.

Essa estratégia pode ser generalizada para ordens com dois ou mais laços, tendo em vista que a RI é compatível com a fórmula de recursão de Bogoliubov, exibindo adequadamente os termos a serem subtraídos, e respeitando unitariedade, localidade e invariância de Lorentz [73–75].

As IDBs utilizadas no trabalho podem ser sumarizadas pelas seguintes definições:

$$I_{log}^{(l)}(\mu^2) \equiv \int_k \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^{d/2}} \ln^{l-1} \left(-\frac{k^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right), \quad (\text{A.1a})$$

$$I_{log}^{(l)\nu_1 \dots \nu_r}(\mu^2) \equiv \int_k \frac{k^{\nu_1} \dots k^{\nu_r}}{(k^2 - \mu^2)^{(d+r)/2}} \ln^{l-1} \left(-\frac{k^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right), \quad (\text{A.1b})$$

$$I_{lin}^{(l)}(\mu^2) \equiv \int_k \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^{(d-1)/2}} \ln^{l-1} \left(-\frac{k^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right), \quad (\text{A.1c})$$

$$I_{lin}^{(l)\nu_1 \dots \nu_r}(\mu^2) \equiv \int_k \frac{k^{\nu_1} \dots k^{\nu_r}}{(k^2 - \mu^2)^{(d+r-1)/2}} \ln^{l-1} \left(-\frac{k^2 - \mu^2}{\lambda^2} \right), ; \quad (\text{A.1d})$$

$$(\text{A.1e})$$

onde

$$\int_k \equiv \int_k^\Lambda \frac{d^d k}{(2\pi)^d}. \quad (\text{A.2})$$

Os TSs são definidos pela seguinte notação:

$$\Upsilon_{i,d}^{(l)\nu_1 \dots \nu_j} \equiv \int_k \frac{\partial}{\partial k_{\nu_1}} \frac{k^{\nu_2} \dots k^{\nu_j}}{(k^2 - \mu^2)^{\frac{d+j-2-i}{2}}} \ln^{l-1} \left[-\frac{(k^2 - \mu^2)}{\lambda^2} \right]; \quad (\text{A.3})$$

que podem, ainda, serem escritos em termos de objetos escalares de Lorentz,

$$g^{\{\nu_1 \dots \nu_j\}} \Gamma_{i,d}^{(l,j)} \equiv \Upsilon_{i,d}^{(l)\nu_1 \dots \nu_j}, \quad (\text{A.4})$$

onde $g^{\{\nu_1 \dots \nu_j\}} \equiv g^{\nu_1 \nu_2} \dots g^{\nu_{j-1} \nu_j} + \text{combinações simétricas}$.

O índice i na notação para os TSs referem-se ao grau de divergência das integrais de que os “originaram”, e o índice l , ao laço de integração. Por exemplo, o termo de superfície resultante da diferença de duas integrais logaritmicamente divergentes em $d = 4$ a um laço é:

$$\begin{aligned} \Gamma_{0,d=4}^{(1)} g^{\mu\nu} &= \int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \frac{k^\nu}{(k^2 - \mu^2)^2} \\ &= \int_k \frac{g^{\mu\nu}}{(k^2 - \mu^2)^2} - 4 \int_k \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - \mu^2)^3} \\ &= g^{\mu\nu} I_{\log}^{(1)}(\mu^2) - 4 I_{\log}^{(1)\mu\nu}(\mu^2). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

As relações de escala utilizadas, as quais possibilitam reduzir as IDBs em termos apenas da escala de renormalização λ , foram as seguintes:

$$I_{\log d=3}(m^2) - I_{\log d=3}(\lambda^2) = \frac{1}{4\pi^2} \ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \quad (\text{A.6})$$

e

$$I_{\log d=3}^{(2)}(m^2) - I_{\log d=3}^{(2)}(\lambda^2) = \frac{1}{4\pi^2} \left[2(1 - \ln(2)) \ln \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) + \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{m^2}{\lambda^2} \right) \right]. \quad (\text{A.7})$$

A.2 Parametrização de integrais finitas

Utilizando a parametrização de Feynman podemos reduzir integrais nos momentos em termos de integrais em uma variável x como segue:

$$\begin{aligned}
I_{mn} &\equiv \int_k \frac{1}{[(k+p)^2 - \mu^2]^m (k^2 - \mu^2)^n} \\
&= \frac{\Gamma[m+n]}{\Gamma[m]\Gamma[n]} \int_0^1 dx x^{m-1} (x-1)^{n-1} \int_k \frac{1}{[(k+xp)^2 - (x^2 p^2 - xp^2 + \mu^2)]^{m+n}} \\
&= \frac{\Gamma[m+n]}{\Gamma[m]\Gamma[n]} \int_0^1 dx x^{m-1} (x-1)^{n-1} \frac{i}{(-1)^{m+n} (4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma[n+m-\frac{d}{2}]}{\Gamma[n+m]} \times \\
&\quad (x^2 p^2 - xp^2 + \mu^2)^{\frac{d}{2}-m-n} \\
&= \frac{i}{(-1)^{m+n} (4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma[n+m-\frac{d}{2}]}{\Gamma[m]\Gamma[n]} \int_0^1 dx x^{m-1} (x-1)^{n-1} (x^2 p^2 - xp^2 + \mu^2)^{\frac{d}{2}-m-n};
\end{aligned} \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned}
I_{mn}^\mu &= \int_k \frac{k^\mu}{[(k+p)^2 - \mu^2]^m (k^2 - \mu^2)^n} \\
&= \frac{\Gamma[m+n]}{\Gamma[m]\Gamma[n]} \int_0^1 dx x^{m-1} (x-1)^{n-1} \int_k \frac{(k+xp)^\mu - xp^\mu}{[(k+xp)^2 - (x^2 p^2 - xp^2 + \mu^2)]^{m+n}} \\
&= -\frac{i}{(-1)^{m+n} (4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma[n+m-\frac{d}{2}]}{\Gamma[m]\Gamma[n]} p^\mu \int_0^1 dx x^m (x-1)^{n-1} (x^2 p^2 - xp^2 + \mu^2)^{\frac{d}{2}-m-n};
\end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
I_{mn}^{\mu\nu} &= \int_k \frac{k^\mu k^\nu}{[(k+p)^2 - \mu^2]^m (k^2 - \mu^2)^n} \\
&= \frac{\Gamma[m+n]}{\Gamma[m]\Gamma[n]} \int_0^1 dx x^{m-1} (x-1)^{n-1} \int_k \frac{(k-xp)^\mu (k-xp)^\nu}{[k^2 - (x^2 p^2 - xp^2 + \mu^2)]^{m+n}} \\
&= \frac{i}{(-1)^{m+n-1} (4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma[n+m-\frac{d}{2}-1]}{\Gamma[m]\Gamma[n]} \frac{g^{\mu\nu}}{2} \times \\
&\quad \int_0^1 dx x^{m-1} (x-1)^{n-1} (x^2 p^2 - xp^2 + \mu^2)^{\frac{d}{2}+1-m-n} \\
&\quad + \frac{i}{(-1)^{m+n} (4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma[n+m-\frac{d}{2}]}{\Gamma[m]\Gamma[n]} p^\mu p^\nu \int_0^1 dx x^{m+1} (x-1)^{n-1} (x^2 p^2 - xp^2 + \mu^2)^{\frac{d}{2}-m-n};
\end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}
I_{mnd}^{\mu\nu\rho} &= \int_k \frac{k^\mu k^\nu k^\rho}{[(k+p)^2 - \mu^2]^m (k^2 - \mu^2)^n} \\
&= \frac{\Gamma[m+n]}{\Gamma[m]\Gamma[n]} \int_0^1 dx x^{m-1} (x-1)^{n-1} \int_k \frac{(k-xp)^\mu (k-xp)^\nu (k-xp)^\rho}{[k^2 - (x^2 p^2 - xp^2 + \mu^2)]^{m+n}} = \\
&\quad - \frac{i}{(-1)^{m+n-1} (4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma[n+m-\frac{d}{2}-1]}{\Gamma[m]\Gamma[n]} \frac{p^\mu g^{\nu\rho} + p^\nu g^{\mu\rho} + p^\rho g^{\nu\mu}}{2} \times \\
&\quad \int_0^1 dx x^m (x-1)^{n-1} (x^2 p^2 - xp^2 + \mu^2)^{\frac{d}{2}+1-m-n} \\
&\quad - \frac{i}{(-1)^{m+n} (4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma[n+m-\frac{d}{2}]}{\Gamma[m]\Gamma[n]} p^\mu p^\nu p^\rho \times \\
&\quad \int_0^1 dx x^{m+2} (x-1)^{n-1} (x^2 p^2 - xp^2 + \mu^2)^{\frac{d}{2}-m-n};
\end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
I_{mn}^{\mu\nu\alpha\beta} &= \int_k \frac{k^\mu k^\nu k^\alpha k^\beta}{[(k+p)^2 - \mu^2]^m (k^2 - \mu^2)^n} \\
&= \frac{\Gamma[m+n]}{\Gamma[m]\Gamma[n]} \int_0^1 dx x^{m-1} (x-1)^{n-1} \int_k \frac{(k-xp)_\mu (k-xp)_\nu (k-xp)_\alpha (k-xp)_\beta}{[k^2 - (x^2 p^2 - xp^2 + \mu^2)]^{m+n}} \\
&= \frac{i}{(-1)^{m+n} (4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma[n+m-\frac{d}{2}-2]}{\Gamma[m]\Gamma[n]} \frac{g^{\{\mu\nu} g^{\alpha\beta\}}}{4} \times \\
&\quad \int_0^1 dx x^{m-1} (x-1)^{n-1} (x^2 p^2 - xp^2 + \mu^2)^{\frac{d}{2}+2-m-n} \\
&\quad + \frac{i}{(-1)^{m+n-1} (4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma[n+m-\frac{d}{2}-1]}{\Gamma[m]\Gamma[n]} \frac{g^{\{\mu\nu} p^\alpha p^\beta\}}{2} \times \\
&\quad \int_0^1 dx x^{m+1} (x-1)^{n-1} (x^2 p^2 - xp^2 + \mu^2)^{\frac{d}{2}+1-m-n} \\
&\quad + \frac{i}{(-1)^{m+n} (4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma[n+m-\frac{d}{2}]}{\Gamma[m]\Gamma[n]} p^\mu p^\nu p^\alpha p^\beta \times \\
&\quad \int_0^1 dx x^{m+3} (x-1)^{n-1} (x^2 p^2 - xp^2 + \mu^2)^{\frac{d}{2}-m-n}.
\end{aligned} \tag{A.12}$$

A.3 Exemplo de cálculo de diagrama a um laço

Como exemplo de como foram realizados os cálculos a um laço, avaliaremos a auto energia do férmion na EDQR₄₃ no calibre $\bar{\xi} = \xi - 1 = 0$.

A partir das regras de Feynman para o diagrama 5 obtemos,

$$\begin{aligned}
-i\Sigma_1(p) &= \int_k V_\mu S_0(k+r) V_\nu \tilde{D}_0^{\mu\nu}(k+s) \\
&= (-ie)^2 \int_k \gamma_\mu \frac{i}{\not{k} + \not{p}} \gamma_\nu \frac{ig^{\mu\nu}}{2\sqrt{-k^2}} \\
&= -i\frac{e^2}{2} \int_k \text{Tr} \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma^\mu \frac{(k+p)^\alpha}{(k+p)^2 (k^2)^{1/2}} \\
&= i\frac{e^2}{2} \gamma_\alpha \int_k \frac{(k+p)^\alpha}{(k+p)^2 (k^2)^{1/2}} \\
&= i\frac{e^2}{2} \gamma_\alpha (I_{1\frac{1}{2}}^\alpha + p^\alpha I_{1\frac{1}{2}}). \tag{A.13}
\end{aligned}$$

Reduzindo $I_{1\frac{1}{2}}$ e $I_{1\frac{1}{2}}^\mu$ em termos das integrais definidas acima,

$$\begin{aligned}
I_{1\frac{1}{2}}^\mu &= \int_k \frac{k^\mu}{[(k+p)^2 - \mu^2](k^2 - \mu^2)^{1/2}} = \int_k \frac{k^\mu}{(k^2 - \mu^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{2kp + p^2}{[(k+p)^2 - \mu^2]}\right) \\
&= -p^2 I_{1\frac{3}{2}}^\mu - 2p_\lambda \int_k \frac{k^\mu k^\lambda}{(k^2 - \mu^2)^{5/2}} \left(1 - \frac{2kp + p^2}{[(k+p)^2 - \mu^2]}\right) \\
&= -p^2 I_{1\frac{3}{2}}^\mu - 2p_\lambda I_{\log d=3}^{\mu\lambda} + 4p_\lambda p_\rho I_{1\frac{5}{2}}^{\mu\lambda\rho} + 2p^2 p_\lambda I_{1\frac{5}{2}}^{\mu\lambda} \\
&= -2p_\lambda I_{\log d=3}^{\mu\lambda} + \frac{p^\mu}{4\pi^2} \int_0^1 dx \left(\frac{x(1-x)^{1/2}}{x^2 - x + \frac{\mu^2}{p^2}} - 4 \frac{x(1-x)^{3/2}}{x^2 - x + \frac{\mu^2}{p^2}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{8}{3} \frac{x^3(1-x)^{3/2}}{(x^2 - x + \frac{\mu^2}{p^2})^2} + \frac{2}{3} \frac{(1-x)^{3/2}}{x^2 - x + \frac{\mu^2}{p^2}} - \frac{4}{3} \frac{x^2(1-x)^{3/2}}{(x^2 - x + \frac{\mu^2}{p^2})^2} \right) \\
&= -2p_\lambda I_{\log d=3}^{\mu\lambda} + p^\mu \left(\frac{13}{18\pi^2} - \frac{1}{6\pi^2} \ln \left(\frac{-4p^2}{\mu^2} \right) \right) \tag{A.14}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
I_{1\frac{1}{2}} &= \int_k \frac{1}{[(k+p)^2 - \mu^2](k^2 - \mu^2)^{1/2}} = \int_k \frac{1}{(k^2 - \mu^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{2kp + p^2}{[(k+p)^2 - \mu^2]}\right) \\
&= I_{\log d=3} - p^2 I_{1\frac{3}{2}} - 2p_\lambda I_{1\frac{3}{2}}^\lambda \\
&= I_{\log d=3} - \frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 dx \left(\frac{(1-x)^{1/2}}{x^2 - x + \frac{\mu^2}{p^2}} - 2 \frac{x(1-x)^{1/2}}{x^2 - x + \frac{\mu^2}{p^2}} \right) \\
&= I_{\log d=3} - \frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 dx \frac{(1-2x)(1-x)^{1/2}}{x^2 - x + \frac{\mu^2}{p^2}} \\
&= I_{\log d=3} + \frac{1}{4\pi^2} \ln \left(\frac{-4p^3}{\mu^2} \right) - \frac{1}{\pi^2} \tag{A.15}
\end{aligned}$$

Assim,

$$-i\Sigma_1(p) = \frac{e^2}{2}(-2\gamma_\alpha p_\lambda I_{log\,d=3}^{\alpha\lambda} + \not{p} I_{log\,d=3}) - i\Sigma_f \quad (\text{A.16})$$

com

$$-i\Sigma_f = \frac{ie^2}{\pi^2} \not{p} \left(\frac{1}{24} \ln \left(\frac{-4p^2}{\mu^2} \right) - \frac{5}{36} \right). \quad (\text{A.17})$$

Reescrevemos a parte divergente através da relação:

$$I_{log}^{\mu\nu}(\mu^2) = \frac{g^{\mu\nu}}{3} (I_{log}(\mu^2) - \Gamma_{0,d=3}), \quad (\text{A.18})$$

e utilizando a relação de escala A.6 obtemos

$$\begin{aligned} -i\Sigma_1(p) &= \frac{ie^2}{6} \not{p} \left(I_{log}(\lambda^2) + \frac{1}{4\pi^2} \ln \left(\frac{\mu^2}{\lambda^2} \right) + 2\Gamma_{0,d=3} \right) - i\Sigma_{1\,finito}(p) \\ &= \frac{ie^2}{6} \not{p} \left(I_{log}(\lambda^2) + \frac{1}{4\pi^2} \ln \left(\frac{-4p^2}{\lambda^2} \right) + 2\Gamma_{0,d=3} - \frac{5}{6\pi^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

A.4 Exemplo de cálculo de diagrama a dois laços não sobreposto

Exemplificaremos como foram obtidas as divergências de diagramas não sobrepostos, *i.e.* diagramas que consistem em um diagrama completamente contido em outro.

Considere os diagramas (a) da figura 8, onde o primeiro resulta na expressão

$$\begin{aligned} -i\Sigma_{2a}(p) &= \int_k V^\mu S_0(k+p)(-i\Sigma_1(k+p))S_0(k+p)V^\nu \tilde{D}_{0\mu\nu}(k) \\ &= \frac{ie^4}{12} (I_{log}(\lambda^2)) \int_k \frac{\gamma^\mu (\not{k} + \not{p})(\not{k} + \not{p})(\not{k} + \not{p})\gamma^\mu g_{\mu\nu}}{[(k+p)^2]^2 (k^2)^{1/2}} \\ &\quad + \frac{ie^4}{2} \int_k \frac{\gamma^\mu (\not{k} + \not{p})(\not{k} + \not{p})(\not{k} + \not{p})\gamma^\mu g_{\mu\nu}}{[(k+p)^2]^2 (k^2)^{1/2}} \left(\frac{1}{24\pi^2} \ln \left(\frac{-4(k+p)^2}{\lambda^2} \right) - \frac{5}{36\pi^2} \right) \\ &= \frac{ie^4}{12} I_{log}(\lambda^2) \int_k \frac{\not{k} + \not{p}}{(k+p)^2 (k^2)^{1/2}} \\ &\quad + \frac{ie^4}{48\pi^2} \int_k \frac{\not{k} + \not{p}}{(k+p)^2 (k^2)^{1/2}} \ln \left(\frac{-(k+p)^2}{\lambda^2} \right) \\ &\quad + \frac{ie^4}{24\pi^2} \left(\ln 2 - \frac{5}{3} \right) \int_k \frac{\not{k} + \not{p}}{(k+p)^2 (k^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Podemos obter a parte divergente da integral que depende de $\ln \left(\frac{-(k+p)^2}{\lambda^2} \right)$ pela expansão:

$$\ln \left(\frac{-(k+p)^2}{\lambda^2} \right) = \ln \left(\frac{-k^2}{\lambda^2} \right) + 2 \frac{kp}{k^2} + \dots \quad (\text{A.21})$$

que resulta em

$$\begin{aligned} I_{11/2}^{(2)} &\equiv \int_k \frac{\not{k} + \not{p}}{(k+p)^2 (k^2)^{1/2}} \ln \left(\frac{-(k+p)^2}{\lambda^2} \right) \\ &= \int_k \frac{\not{k} + \not{p}}{(k^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{2kp + p^2}{(k+p)^2} \right) \left(\ln \left(\frac{-k^2}{\lambda^2} \right) + 2 \frac{kp}{k^2} + \dots \right) \\ &= \not{p} I_{log}^{(2)}(\mu^2) - 2p^\nu \gamma^\mu I_{log\mu\nu}^{(2)}(\mu^2) + 2p^\nu \gamma^\mu I_{log\mu\nu}(\mu^2) + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

onde as reticências indicam termos finitos que não iremos considerar nesse calculo e as integrais $I_{log}^{(2)}$ e $I_{log\mu\nu}^{(2)}$ estão definidas nas Eqs (A.1a) e (A.1b).

Usando a relação (A.3), entre $I_{log\mu\nu}^{(2)}$ e $\Gamma_{0d=3}^{(2)}$, e a relação de escala (A.6) e (A.7), obtemos

$$I_{11/2}^{(2)} = \not{p} \left(\frac{1}{3} I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{2}{9} I_{log}(\lambda^2) - \frac{2}{9} \Gamma_{0d=3} + \frac{2}{3} \Gamma_{0d=3}^{(2)} \right) + \dots \quad (\text{A.23})$$

onde podemos considerar $\Gamma_{0d=3} = 0$ que já foi fixado por IW de calibre no diagrama a um laço.

Voltando a expressão (A.20), o primeiro termo cancela com o diagrama do subcontratermo; que, com a constante de renormalização a um laço já obtida (3.48), resulta em

$$\begin{aligned} -i\Sigma_{2a\text{ subcont}}(p) &= \int_k V^\mu S_0(k+p) \left(\frac{ie^2}{6} I_{log} \right) S_0(k+p) V^\nu \tilde{D}_{0\mu\nu}(k) \\ &= \frac{ie^2}{12} I_{log}(ie^2) \int_k \frac{\not{k} + \not{p}}{(k+p)^2 (k^2)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

e como as outras integrais já estão calculadas no Σ_1 (A.19), obtemos

$$\begin{aligned}
-i\Sigma_{2a}(p) - i\Sigma_{2a\text{ subcont}}(p) &= \frac{ie^4}{48\pi^2} I_{11/2}^{(2)} + \frac{ie^4}{24\pi^2} \left(\ln 2 - \frac{5}{3} \right) \gamma_\alpha (I_{1\frac{1}{2}}^\alpha + p^\alpha I_{1\frac{1}{2}}) \\
&= \frac{ie^4}{48\pi^2} \not{p} \left(\frac{1}{3} I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{2}{9} I_{\log}(\lambda^2) + \frac{2}{3} \Gamma_{0d=3}^{(2)} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\ln 2}{3} - \frac{5}{9} \right) \left(I_{\log}(\lambda^2) + \frac{1}{4\pi^2} \ln \left(\frac{-4p^2}{\lambda^2} \right) - \frac{5}{6\pi^2} \right) \right) + \dots \\
&= \frac{ie^4}{144\pi^2} \not{p} \left(I_{\log}^{(2)}(\lambda^2) + (\ln 2 - 1) I_{\log}(\lambda^2) + 2\Gamma_{0d=3}^{(2)} \right) + \dots \quad .
\end{aligned} \tag{A.25}$$

A.5 Exemplo de cálculo de diagrama a dois laços sobreposto

Esse é o segundo caso que pode ocorrer em diagramas a dois laços e que são um pouco mais complexos: os diagramas sobrepostos, *i.e.* quando cada laço compartilha um propagador com o outro.

O primeiro diagrama da figura 8 (c) resulta na expressão:

$$\begin{aligned}
-i\Sigma_{2c} &= \int_k \int_l V^\mu S_0(l+p) V^\lambda S_0(k+l+p) V^\sigma S_0(k+p) V^\nu \tilde{D}_{0\nu\lambda}(k) \tilde{D}_{0\sigma\mu}(l) \\
&= -\frac{ie^4}{4} \int_k \int_l \gamma^\mu \gamma^\epsilon \gamma^\lambda \gamma^\tau \gamma^\sigma \gamma^\alpha \gamma^\nu g_{\nu\lambda} g_{\sigma\mu} \frac{(l+p)_\epsilon (k+l+p)_\tau (k+p)_\alpha}{(l+p)^2 (k+l+p)^2 (k+p)^2 (l^2 k^2)^{1/2}} \\
&= -\frac{ie^2}{4} \int_k \int_l \frac{(k^2(l+p) - 4k(l+p)) + (k \leftrightarrow l) - 3k\not{p}l - 6p\not{k}p + O(p^2)}{(l+p)^2 (k+l+p)^2 (k+p)^2 (k^2 l^2)^{1/2}} \\
&= -\frac{ie^2}{4} \int \frac{N}{D} + \text{termos finitos}, \tag{A.26}
\end{aligned}$$

onde

$$\int \frac{N}{D} = -3 \int_k \int_l \frac{k\not{p}l}{D} - 6\not{p} \int_k \int_l \frac{kl}{D} + 2 \int_k \int_l \frac{k^2 \not{q}}{D} - 8 \int_k \int_l \frac{k\not{k}(l+p)}{D}, \tag{A.27}$$

com

$$D = (l+p)^2 (k+l+p)^2 (k+p)^2 (k^2 l^2)^{1/2}. \tag{A.28}$$

Precisamos analisar a parte divergente em cada uma dessas integrais, que são basicamente de dois tipos. O tipo de integral primeiro é

$$\begin{aligned}
\int_k \int_l \frac{l^\mu k^\nu}{D} &= \int_l \frac{l^\mu}{(l+p)^2(l)^{1/2}} \int_k \frac{k^\lambda}{(k+l)^2(k^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{2kp+p^2}{(k+p)^2}\right) \left(1 - \frac{2p(k+l)+p^2}{(k+l+p)^2}\right) \\
&= \int_l \frac{l^\mu}{(l+p)^2(l)^{1/2}} \int_k \frac{k^\lambda}{(k+l)^2(k^2)^{3/2}} + \text{termos finitos} \\
&= \int_l \frac{l^\mu}{(l+p)^2(l)^{1/2}} I_{1,3/2}^\lambda(l) + \text{termos finitos}, \tag{A.29}
\end{aligned}$$

onde as integrais do tipo $I_{1,3/2}^\lambda(l)$ foram calculadas pela parametrização descrita em A.2.

O segundo tipo,

$$\begin{aligned}
\int_k \int_l \frac{l^\mu k^\nu k^\lambda}{D} &= \int_l \frac{l^\mu}{(l+p)^2(l^2)^{1/2}} \int_k \frac{k^\mu k^\lambda}{(k+l+p)^2(k^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{2kp+p^2}{(k+p)^2}\right) \\
&= \int_l \frac{l^\mu}{(l+p)^2(l^2)^{1/2}} \int_k \frac{k^\mu k^\lambda}{(k+l+p)^2(k^2)^{3/2}} \\
&\quad - 2p_\rho \int_k \frac{k^\mu k^\nu k^\rho}{(k+p)^2(k^2)^{3/2}} \int_l \frac{l^\mu}{(l+k+p)^2(l^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{2lp+p^2}{(l+p)^2}\right) + \dots \\
&= \int_l \frac{l^\mu}{(l+p)^2(l^2)^{1/2}} \int_k \frac{k^\mu k^\lambda}{(k^2)^{3/2}(k+l)^2} \left(1 - \frac{2p(l+k)+p^2}{(k+l+p)^2}\right) \\
&\quad - 2p_\rho \int_k \frac{k^\mu k^\nu k^\rho}{(k+p)^2(k^2)^{3/2}} \int_l \frac{l^\mu}{(l+k+p)^2(l^2)^{3/2}} + \dots \\
&= \int_l \frac{l^\mu}{(l+p)^2(l^2)^{1/2}} \int_k \frac{k^\mu k^\lambda}{(k^2)^{5/2}} \left(1 - \frac{2kl+l^2}{(k+l)^2}\right) \\
&\quad - 2p_\rho \int_k \frac{k^\mu k^\nu k^\rho}{(k+p)^2(k^2)^{3/2}} I_{1,3/2}^\mu(k+p) + \dots \\
&= \int_l \frac{l^\mu}{(l+p)^2(l^2)^{1/2}} \left(I_{\log}(\mu^2) - 2l_\alpha I_{1,5/2}^{\alpha\mu\lambda}(l) \right) \\
&\quad - 2p_\rho \int_k \frac{k^\mu k^\nu k^\rho}{(k+p)^2(k^2)^{3/2}} I_{1,3/2}^\mu(k+p) + \text{termos finitos} \tag{A.30}
\end{aligned}$$

onde as integrais dos tipos $I_{1,3/2}^\mu(k+p)$ e $I_{1,5/2}^{\alpha\mu\lambda}(l)$ são avaliadas pela parametrização da seção A.2.

Com a análise das divergências realizadas dessa forma, realizadas as integrais finitas como descrito, foram obtidos os seguintes resultados:

$$\int_k \int_l \frac{k \not{p} l}{D} = -\frac{\not{p}}{6\pi^2} \left(I_{\log}(\lambda^2) - \Gamma_0 \right) + \text{termos finitos}; \tag{A.31}$$

$$\int_k \int_l \frac{kl}{D} = \frac{1}{2\pi^2} I_{\log}(\lambda^2) + \text{termos finitos}; \tag{A.32}$$

$$\begin{aligned}
\int_k \int_l \frac{k^2(\not{p} + \not{l})}{D} &= I_{log}(\lambda^2) \int_l \frac{\not{p} + \not{l}}{(p+l)^2(l^2)^{1/2}} \\
&+ \frac{\not{p}}{\pi^2} \left(\frac{1}{12} I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \left(\frac{\ln 2}{6} - \frac{11}{18} \right) I_{log}(\lambda^2) \right. \\
&\left. + \left(-\frac{7}{18} + \frac{1}{6} \ln \left(\frac{4\lambda^2}{\mu^2} \right) \right) \Gamma_0 + \frac{1}{6} \Gamma_0^{(2)} \right) + \text{termos finitos}; \quad (\text{A.33})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_k \int_l \frac{\not{k} k(l+p)}{D} &= \frac{1}{3} I_{log}(\lambda^2) \int_l \frac{\not{l} + \not{p}}{(l+p)^2(l^2)^{1/2}} + \frac{\not{p}}{\pi^2} \left(\frac{1}{36} I_{log}^{(2)}(\lambda^2) \right. \\
&+ \left(\frac{\ln 2}{18} - \frac{14}{27} + \frac{1}{9} \Gamma_0 \right) I_{log}(\lambda^2) + \left(\frac{1}{18} \ln \left(\frac{4\lambda^2}{\mu^2} \right) - \frac{11}{54} \right) \Gamma_0 + \frac{1}{18} \Gamma_0^{(2)} \Bigg) \\
&+ \text{termos finitos}. \quad (\text{A.34})
\end{aligned}$$

Antes de voltar com esses resultados na Eq. (A.27) consideremos os diagramas das subdivergências, que somados resulta em

$$-i\Sigma_{c1 \text{ subcont}} - i\Sigma_{c1 \text{ subcont}} = -\frac{ie^2}{6} I_{log}(\lambda^2) \int_l \frac{(\not{p} + \not{l})}{(p+l)^2(l^2)^{1/2}}. \quad (\text{A.35})$$

Essa expressão cancela as divergências não locais em (A.27). Ao somar os três diagramas da figura 8 (c) obtemos, então,

$$\begin{aligned}
-i\Sigma_{2c \text{ total}} &= -i\Sigma_{2c} - i\Sigma_{c1 \text{ subcont}} - i\Sigma_{c1 \text{ subcont}} \\
&= -ie^4 \not{p} \left(-\frac{1}{72\pi^2} I_{log}^{(2)}(\lambda^2) + \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{23}{54} - \frac{\ln 2}{9} \right) I_{log}(\lambda^2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{12\pi^2} \left(1 + \frac{32}{3} \right) \Gamma_0^{(2)} \right) - i\Sigma_{2c \text{ finito}}. \quad (\text{A.36})
\end{aligned}$$

Referências

- [1] Bonneau, Guy: *Some fundamental but elementary facts on renormalization and regularization: a critical review of the eighties*. International Journal of Modern Physics A, 5(20):3831–3859, 1990. Citado na página 15.
- [2] Gnendiger, C, A Signer, D Stöckinger, A Broggio, AL Cherchiglia, F Driencourt-Mangin, AR Fazio, B Hiller, P Mastrolia, T Peraro *et al.*: *To $\{d\}$ d , or not to $\{d\}$ d : recent developments and comparisons of regularization schemes*. The European Physical Journal C, 77(7):471, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.
- [3] Hooft, G. 't e M. Veltman: *Regularization and renormalization of gauge fields*. Nuclear Physics B, 44(1):189–213, 1972. Citado na página 15.
- [4] Hooft, Gerard't: *Dimensional regularization and the renormalization group*. Nuclear Physics: B, 61:455–468, 1973. Citado na página 15.
- [5] Bollini, CG e JJ Giambiagi: *Dimensional renormalization: The number of dimensions as a regularizing parameter*. Il Nuovo Cimento B (1971-1996), 12(1):20–26, 1972. Citado na página 15.
- [6] Breitenlohner, P e D Maison: *Dimensional renormalization and the action principle*. Communications in Mathematical Physics, 52(1):11–38, 1977. Citado na página 15.
- [7] Bonneau, Guy: *Consistency in dimensional regularization with γ_5* . Physics Letters B, 96(1-2):147–150, 1980. Citado na página 15.
- [8] Cheng, Hung e SP Li: *How to treat γ_5* . International Journal of Modern Physics A, 13(17):2991–3050, 1998. Citado na página 15.
- [9] Jegerlehner, Fred: *Facts of life with γ_5* . The European Physical Journal C-Particles and Fields, 18(4):673–679, 2001. Citado na página 15.
- [10] Tsai, Er Cheng: *Gauge invariant treatment of γ_5 in the scheme of't Hooft and Veltman*. Physical Review D, 83(2):025020, 2011. Citado na página 15.
- [11] Tsai, Er Cheng: *Maintaining gauge symmetry in renormalizing chiral gauge theories*. Physical Review D, 83(6):065011, 2011. Citado na página 15.
- [12] Ferrari, Ruggero: *Managing γ_5 in Dimensional Regularization and ABJ Anomaly*. arXiv preprint arXiv:1403.4212, 2014. Citado na página 15.
- [13] Ferrari, Ruggero: *Managing γ_5 in Dimensional Regularization II: the Trace with more γ_5* . 2016. Citado na página 15.

- [14] Gnendiger, C e A Signer: γ_5 in *FDH*. arXiv preprint arXiv:1710.09231, 2017. Citado na página 15.
- [15] Pittau, Roberto: *A four-dimensional approach to quantum field theories*. Journal of High Energy Physics, 2012(11):151, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 15, 16 e 36.
- [16] Viglioni, ACD, AL Cherchiglia, AR Vieira, Brigitte Hiller e Marcos Sampaio: γ_5 algebra ambiguities in Feynman amplitudes: momentum routing invariance and anomalies in $D=4$ and $D=2$. arXiv preprint arXiv:1606.01772, 2016. Citado 6 vezes nas páginas 15, 17, 23, 26, 36 e 57.
- [17] Bruque, AM, AL Cherchiglia e M Perez-Victoria: *Dimensional regularization vs methods in fixed dimension with and without gamma_5*. arXiv preprint arXiv:1803.09764, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 15, 36 e 37.
- [18] Battistel, OA, AL Mota e MC Nemes: *Consistency conditions for 4-D regularizations*. Modern Physics Letters A, 13(20):1597–1610, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 16, 42 e 61.
- [19] Del Aguila, F, A Culatti, R Munoz Tapia e M Pérez-Victoria: *Techniques for one-loop calculations in constrained differential renormalization*. Nuclear Physics B, 537(1-3):561–585, 1999. Citado na página 16.
- [20] Pal, Palash B: *Dirac, majorana, and weyl fermions*. American Journal of Physics, 79(5):485–498, 2011. Citado na página 16.
- [21] Dreiner, Herbi K, Howard E Haber e Stephen P Martin: *Two-component spinor techniques and Feynman rules for quantum field theory and supersymmetry*. Physics Reports, 494(1-2):1–196, 2010. Citado na página 16.
- [22] Adler, Stephen L: *Axial-vector vertex in spinor electrodynamics*. Physical Review, 177(5):2426, 1969. Citado 3 vezes nas páginas 16, 19 e 23.
- [23] Bell, JS e R. Jackiw: *Nuovo Cimento A 60, 47 (1969)*. Nuovo Cimento A, 60:47, 1969. Citado 3 vezes nas páginas 16, 19 e 23.
- [24] Bardeen, William A: *Anomalous Ward identities in spinor field theories*. Physical Review, 184(5):1848, 1969. Citado na página 16.
- [25] Pokorski, S.: *Gauge Field Theories*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2000, ISBN 9780521478168. Citado 4 vezes nas páginas 16, 29, 36 e 43.
- [26] Bertlmann, R.A.: *Anomalies in Quantum Field Theory*. International Series of Monographs on Physics. Oxford University Press, 2000, ISBN 9780198507628. Citado 4 vezes nas páginas 16, 23, 29 e 36.

- [27] Abreu, EMC, R Banerjee e C Wotzasek: *Bose symmetry and chiral decomposition of 2D fermionic determinants*. Nuclear Physics B, 509(1-2):519–528, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 28.
- [28] Banerjee, N e R Banerjee: *Bose symmetry and bosonisation*. Nuclear Physics B, 445(2):516–524, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 28.
- [29] Gorbar, Eduard V, Valery P Gusynin e Vladimir A Miransky: *Dynamical chiral symmetry breaking on a brane in reduced QED*. Physical Review D, 64(10):105028, 2001. Citado 4 vezes nas páginas 17, 39, 41 e 54.
- [30] Teber, S: *Electromagnetic current correlations in reduced quantum electrodynamics*. Physical Review D, 86(2):025005, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 17, 39 e 42.
- [31] Kotikov, AV e S Teber: *Note on an application of the method of uniqueness to reduced quantum electrodynamics*. Physical Review D, 87(8):087701, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 39.
- [32] Teber, S: *Two-loop fermion self-energy and propagator in reduced qed 3, 2*. Physical Review D, 89(6):067702, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 17, 39, 54 e 58.
- [33] Teber, S e AV Kotikov: *Interaction corrections to the minimal conductivity of graphene via dimensional regularization*. EPL (Europhysics Letters), 107(5):57001, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 17, 39 e 55.
- [34] Kotikov, AV e S Teber: *Two-loop fermion self-energy in reduced quantum electrodynamics and application to the ultrarelativistic limit of graphene*. Physical Review D, 89(6):065038, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 17, 39, 54 e 58.
- [35] Teber, Sofian e Anatolii Vasil’evich Kotikov: *The method of uniqueness and the optical conductivity of graphene: New application of a powerful technique for multiloop calculations*. Theoretical and Mathematical Physics, 190(3):446–457, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 39.
- [36] Hsiao, Wei Han e Dam Thanh Son: *Duality and Universal Transport in a Mixed-Dimension Electrodynamics*. arXiv preprint arXiv:1705.01102, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 39.
- [37] Teber, S e AV Kotikov: *Field theoretic renormalization study of reduced quantum electrodynamics and applications to the ultrarelativistic limit of Dirac liquids*. Physical Review D, 97(7):074004, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 39.
- [38] Teber, S e AV Kotikov: *Field theoretic renormalization study of interaction corrections to the universal ac conductivity of graphene*. arXiv preprint arXiv:1802.09898, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 39.

- [39] Dudal, David, Ana Júlia Mizher e Pablo Pais: *Comments on the Chern-Simons photon term in the planar reduced QED description of graphene*. arXiv preprint arXiv:1801.08853, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 39.
- [40] Kovner, A e B Rosenstein: *Kosterlitz-Thouless mechanism of two-dimensional superconductivity*. Physical Review B, 42(7):4748, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 39.
- [41] Marino, EC: *Complete bosonization of the Dirac fermion field in 2+ 1 dimensions*. Physics Letters B, 263(1):63–68, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 39.
- [42] Marino, EC: *Quantum electrodynamics of particles on a plane and the Chern-Simons theory*. Nuclear Physics B, 408(3):551–564, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 39.
- [43] Alves, Van Sérgio, Wallace S Elias, Leandro O Nascimento, Vladimir Juričić e Francisco Peña: *Chiral symmetry breaking in the pseudo-quantum electrodynamics*. Physical Review D, 87(12):125002, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 39.
- [44] Nascimento, Leandro O, Van Sérgio Alves, Francisco Peña, C Moraes Smith e EC Marino: *Chiral-symmetry breaking in pseudoquantum electrodynamics at finite temperature*. Physical Review D, 92(2):025018, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 39.
- [45] Ferreira, Luellerson C, AL Cherchiglia, Brigitte Hiller, Marcos Sampaio e MC Nemes: *Momentum routing invariance in Feynman diagrams and quantum symmetry breakings*. Physical Review D, 86(2):025016, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 17, 47 e 54.
- [46] Cherchiglia, AL, LA Cabral, MC Nemes e Marcos Sampaio: *(Un) determined finite regularization-dependent quantum corrections: The Higgs boson decay into two photons and the two-photon scattering examples*. Physical Review D, 87(6):065011, 2013. Citado na página 17.
- [47] Felipe, JCC, AR Vieira, AL Cherchiglia, AP Baêta Scarpelli e Marcos Sampaio: *Arbitrariness in the gravitational Chern-Simons-like term induced radiatively*. Physical Review D, 89(10):105034, 2014. Citado na página 17.
- [48] Vieira, AR, AL Cherchiglia e Marcos Sampaio: *Momentum routing invariance in extended QED: Assuring gauge invariance beyond tree level*. Physical Review D, 93(2):025029, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 17, 42 e 61.
- [49] Porto, JS, AR Vieira, AL Cherchiglia, Marcos Sampaio e Brigitte Hiller: *On the Bose symmetry and the left-and right-chiral anomalies*. The European Physical Journal C, 78(2):160, 2018. Citado na página 17.

- [50] Bernstein, AM e Barry R Holstein: *Neutral pion lifetime measurements and the QCD chiral anomaly*. Reviews of Modern Physics, 85(1):49, 2013. Citado na página 19.
- [51] Adler, Stephen L e William A Bardeen: *Absence of higher-order corrections in the anomalous axial-vector divergence equation*. Physical Review, 182(5):1517, 1969. Citado na página 19.
- [52] Alvarez-Gaumé, Luis e Miguel A Vázquez-Mozo: *An invitation to quantum field theory*, volume 839. Springer Science & Business Media, 2011. Citado na página 20.
- [53] Scarpelli, AP Baêta, Marcos Sampaio, MC Nemes e B Hiller: *Chiral anomaly and CPT invariance in an implicit momentum space regularization framework*. Physical Review D, 64(4):046013, 2001. Citado na página 23.
- [54] Ball, Richard D: *Chiral gauge theory*. Physics Reports, 182(1-2):1–186, 1989. Citado na página 35.
- [55] Hill, Christopher T: *Anomalies, Chern-Simons terms and chiral delocalization in extra dimensions*. Physical Review D, 73(8):085001, 2006. Citado na página 35.
- [56] Menezes, Natália, Giandomenico Palumbo e Cristiane Morais Smith: *Conformal QED in two-dimensional topological insulators*. Scientific Reports, 7(1):14175, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 54.
- [57] Carneiro, David, Marcos Sampaio, Maria Carolina Nemes e Antonio Paulo Baêta Scarpelli: *Consistent momentum space regularization/renormalization of supersymmetric quantum field theories: the three-loop β -function for the Wess-Zumino model*. Journal of High Energy Physics, 2003(12):044, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 61.
- [58] Cherchiglia, AL, Marcos Sampaio, B Hiller e AP Baêta Scarpelli: *Subtleties in the beta-function calculation of $N=1$ supersymmetric gauge theories*. The European Physical Journal C, 76(2):47, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 61.
- [59] Fargnoli, HG, B Hiller, AP Baêta Scarpelli, Marcos Sampaio e MC Nemes: *Regularization independent analysis of the origin of two loop contributions to $N=1$ Super Yang–Mills beta function*. The European Physical Journal C, 71(5):1633, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 61.
- [60] Scarpelli, AP Baêta, Marcos Sampaio e MC Nemes: *Consistency relations for an implicit n -dimensional regularization scheme*. Physical Review D, 63(4):046004, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 61.
- [61] Bogoliubov, NN e OS Parasiuk: *On the Multiplication of the causal function in the quantum theory of fields*. Acta Math., 97:227–266, 1957. Citado na página 44.

- [62] Parasiuk, OS: *Ukr. Mat. Zh.* 12, 287 (1960). *Ukr. Mat. Zh.*, 12:287, 1960. Citado na página 44.
- [63] Hepp, Klaus: *Proof of the Bogoliubov-Parasiuk theorem on renormalization*. *Communications in Mathematical Physics*, 2(1):301–326, 1966. Citado na página 44.
- [64] Zimmermann, W: *W. Zimmermann, Commun. Math. Phys.* 15, 208 (1969). *Commun. Math. Phys.*, 15:208, 1969. Citado na página 44.
- [65] Faccioli, Pietro e Enrico Lipparini: *Effective field theory for the quantum electrodynamics of a graphene wire*. *Physical Review B*, 80(4):045405, 2009. Citado na página 54.
- [66] Teber, S e AV Kotikov: *Field theoretic renormalization study of interaction corrections to the universal ac conductivity of graphene*. arXiv preprint arXiv:1802.09898, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 55.
- [67] Herbut, Igor F e Vieri Mastropietro: *Universal conductivity of graphene in the ultrarelativistic regime*. *Physical Review B*, 87(20):205445, 2013. Citado na página 55.
- [68] Marino, EC, Leandro O Nascimento, Van Sergio Alves e C Morais Smith: *Interaction induced quantum valley Hall effect in graphene*. *Physical Review X*, 5(1):011040, 2015. Citado na página 55.
- [69] Menezes, N, Van Sergio Alves, EC Marino, L Nascimento, Leandro O Nascimento e C Morais Smith: *Valley-and spin-splitting due to interactions in graphene*. arXiv preprint arXiv:1601.07454, 2016. Citado na página 55.
- [70] Menezes, Natália, Van Sergio Alves, EC Marino, Leonardo Nascimento, Leandro O Nascimento e C Morais Smith: *Spin g-factor due to electronic interactions in graphene*. *Physical Review B*, 95(24):245138, 2017. Citado na página 55.
- [71] Gusynin, VP, SG Sharapov e JP Carbotte: *AC conductivity of graphene: from tight-binding model to 2+ 1-dimensional quantum electrodynamics*. *International Journal of Modern Physics B*, 21(27):4611–4658, 2007. Citado na página 55.
- [72] Gazzola, G, AL Cherchiglia, LA Cabral, MC Nemes e Marcos Sampaio: *Conductivity of Coulomb interacting massless Dirac particles in graphene: Regularization-dependent parameters and symmetry constraints*. *EPL (Europhysics Letters)*, 104(2):27002, 2013. Citado na página 55.
- [73] Pontes, Carlos R, AP Baêta Scarpelli, Marcos Sampaio e MC Nemes: *Implicit regularization beyond one-loop order: scalar field theories*. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 34(10):2215, 2007. Citado na página 61.

-
- [74] Dias, EW, AP Baêta Scarpelli, LCT Brito, Marcos Sampaio e MC Nemes: *Implicit regularization beyond one-loop order: gauge field theories*. The European Physical Journal C, 55(4):667–681, 2008. Citado na página 61.
- [75] Cherchiglia, Adriano Lana, Marcos Sampaio e Maria Carolina Nemes: *Systematic Implementation of Implicit Regularization for Multiloop Feynman Diagrams*. International Journal of Modern Physics A, 26(15):2591–2635, 2011. Citado na página 61.