



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Integrabilidade Algébrica para r -formas Polinomiais

Eduardo Cardenas Apaza

Belo Horizonte - MG

2017

Eduardo Cardenas Apaza

Integrabilidade Algébrica para r -formas Polinomiais

Versão final

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas (ICEX) da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Arturo Ulises Fernández Pérez.

Belo Horizonte - MG

2017

2017, Eduardo Cardenas Apaza.
Todos os direitos reservados

Cardenas Apaza, Eduardo.

C266i Integrabilidade Algébrica para r - formas Polinomiais [recurso eletrônico] / Eduardo Cardenas Apaza – 2017.
1 recurso online (69 f. il., color): pdf

Orientador: Arturo Ulises Fernández Pérez.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f. 68-69.

1. Matemática – Teses. 2. Campos vetoriais – Teses.
3. Hipersuperfícies – Teses. 4. Folheações (Matemática) – Teses. I. Fernández Pérez, Arturo Ulises. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irenquer Vismeg Lucas Cruz
CRB 6/819 - Universidade Federal de Minas Gerais – ICEX

ATA DA DUCENTÉSIMA NONAGÉSIMA QUINTA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DO ALUNO EDUARDO CÁRDENAS APAZA, REGULARMENTE MATRICULADO NO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA, DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS, DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, REALIZADA NO DIA 05 DE SETEMBRO DE 2017.

Aos cinco dias do mês de setembro de 2017, às 10h30, na sala 3060, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para julgar a defesa de dissertação do aluno **Eduardo Cárdenas Apaza**, intitulada: "*Integrabilidade algébrica para r -formas polinomiais*", requisito final para obtenção do Grau de mestre em Matemática. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Arturo Ulises Fernández Pérez, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares do trabalho final, passou a palavra ao aluno para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do aluno. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se sem a presença do aluno e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o aluno foi considerado aprovado, por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente ao aluno pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 05 de setembro de 2017.



PROF. ARTURO ULISES FERNÁNDEZ PÉREZ
Orientador (UFMG)



PROF. MÁRCIO GOMES SOARES
Examinador (UFMG)



PROF. ROGÉRIO SANTOS MOL
Examinador (UFMG)

« *para minha filha Maíra.* »

Agradecimentos

- Agradeço, em primeiro lugar, ao meu orientador, Arturo Ulises Fernández Pérez pela enorme paciência, compreensão, e ajuda na elaboração deste trabalho.
- Agradeço também aos professores e funcionários do Departamento de Matemática da UFMG, pelos conhecimentos transmitidos e pela boa vontade para os estudantes. Um agradecimento muito especial a Kelly e Andréa por toda a compreensão que tiveram comigo.
- Agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro.
- Agradeço aos membros da banca.
- Agradeço aos meus familiares em especial a minha Mãe, por todo incentivo e ajuda em todos os momentos.
- Finalmente, agradeço a todas as pessoas que direta ou indiretamente ajudaram para fazer este trabalho realidade, em especial a José Vilca, Julio Leo, Carlos C. meus grandes amigos que me apoiaram em todo momento incondicionalmente.

Resumo

A teoria da integrabilidade construída por Darboux proveí uma relação entre a integrabilidade de campos vetoriais polinomiais e o número de hipersuperfícies algébricas invariantes que ele admite. Esta teoria proposta inicialmente por Henri Poincaré tem sido aplicado satisfatoriamente ao estudo de muitos modelos físicos. Jean Pierre Jouanolou melhorou muito a teoria de Darboux caracterizando a existência de integrais primeiras racionais para 1-formas Polinomiais em \mathbb{K}^n e $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$, onde \mathbb{K} é um corpo algebricamente fechado de característica zero.

Este trabalho esta baseado no estudo do artigo [9], no qual M.Corrêa Jr, L.G.Maza e M.G.Souares demostram um teorema de integrabilidade algébrica de tipo Darboux-Jouanolou para as r -formas polinomiais. Assim o primeiro resultado principal de este trabalho está dado por

Teorema 4.0.1 Seja \mathbb{K} um corpo algebricamente fechado e ω uma r -forma polinomial de grau d em \mathbb{K}^n . Se ω admite

$$\binom{d-1+n}{n} \cdot \binom{n}{r+1} + r + 1$$

hipersuperfícies algébricas irredutíveis invariantes, então ω admite uma integral primeira racional.

Supondo que a forma não admite integral primeira racional a última equação nos provê uma cota para o número de hipersuperfícies invariantes por ω , infelizmente esta cota está longe de ser ótima. Desta forma o segundo resultado de este trabalho esta baseado na teoria de integrabilidade de Lagutinskii-Pereira, na qual é introduzido o conceito de r -ésimo polinômio extático de um campo de vetores fornecendo um outro critério para a

existência de integrais primeiras racionais. Em particular obtemos uma cota ótima para o número de hiperplanos invariantes.

Teorema 5.0.2 Seja X um campo polinômial em \mathbb{C}^n de grau d . Suponha que X não admite integral primeira racional então o número de hipersuperfícies irredutíveis invariantes por X de grau k é no máximo

$$(d-1) \binom{\binom{n+k}{k}}{2} + \frac{1}{k} \binom{k+1}{2} \left[\binom{n+k}{k} - 1 \right].$$

Em particular, se $k = 1$ vale

$$\binom{n+1}{2} (d-1) + n,$$

sendo esta última cota ótima.

Finalmente, na última parte deste trabalho, damos uma aplicação à teoria das folheações holomorfas de dimensão um no espaço projetivo \mathbb{P}^n .

Teorema 6.0.3 Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa 1-dimensional no espaço projetivo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ com $\text{grau}(\mathcal{F}) = d$. Suponha que \mathcal{F} não admite integral primeira racional então

1. O número de hipersuperfícies irredutíveis invariantes por \mathcal{F} de grau k contando multiplicidade é no máximo

$$\binom{n+k}{k} + \frac{1}{k} \binom{\binom{n+k}{k}}{2} (d-1).$$

2. No caso $k = 1$ vale,

$$(n+1) + \binom{n+1}{2} (d-1) = nd + \binom{n}{2} (d-1) + 1.$$

Palavras-chaves: Campo de vetores; hipersuperfícies invariantes; folheações holomorfas.

Abstract

The theory of integrability developed by Darboux provides a relationship between the integrability of polynomial vector fields and the number of invariant algebraic hypersurfaces that they admit. This theory, initially proposed by Henri Poincaré, has been successfully applied to the study of many physical models. Jean Pierre Jouanolou significantly improved Darboux's theory by characterizing the existence of rational first integrals for polynomial 1-forms in \mathbb{K}^n and $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$, where \mathbb{K} is an algebraically closed field of characteristic zero.

This work is based on the study of article [9], in which M. Corrêa Jr., L. G. Maza, and M. G. Soares prove an algebraic integrability theorem of Darboux–Jouanolou type for polynomial r -forms. Thus, the first main result of this work is given by

Theorem 4.0.1 Let \mathbb{K} be an algebraically closed field and let ω be an r -form of degree d in \mathbb{K}^n . If ω admits

$$\binom{d-1+n}{n} \cdot \binom{n}{r+1} + r + 1$$

irreducible invariant algebraic hypersurfaces, then ω admits a rational first integral.

Assuming that the form does not admit a rational first integral, the above equation provides an upper bound for the number of invariant hypersurfaces of ω , unfortunately, this bound is far from optimal. Thus, the second main result of this work is based on the Lagutinskii–Pereira theory of integrability, in which the concept of the r -th extactic polynomial of a vector field is introduced, providing another criterion for the existence of rational first integrals. In particular, we obtain an optimal bound for the number of invariant hyperplanes.

Theorem 5.0.2 Let X be a polynomial vector field on \mathbb{C}^n of degree d . Suppose that X does not admit a rational first integral. Then the number of irreducible invariant hypersurfaces of degree k of X is at most

$$(d-1) \binom{\binom{n+k}{k}}{2} + \frac{1}{k} \binom{k+1}{2} \left[\binom{n+k}{k} - 1 \right].$$

In particular, if $k = 1$, we have

$$\binom{n+1}{2} (d-1) + n,$$

and this last bound is optimal.

Finally, in the last part of this work, we present an application to the theory of one-dimensional holomorphic foliations on the projective space \mathbb{P}^n .

Theorem 6.0.3 Let \mathcal{F} be a one-dimensional holomorphic foliation on the complex projective space $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ with degree $\deg(\mathcal{F}) = d$. Suppose that \mathcal{F} does not admit a rational first integral then

1. The number of irreducible invariant hypersurfaces of \mathcal{F} of degree k , counted with multiplicity, is at most

$$\binom{n+k}{k} + \frac{1}{k} \binom{\binom{n+k}{k}}{2} (d-1).$$

2. For $k = 1$, we have

$$(n+1) + \binom{n+1}{2} (d-1) = nd + \binom{n}{2} (d-1) + 1.$$

Keywords: Vector field; invariant hypersurfaces; holomorphic foliations.

Sumário

1	Preliminares	12
1.1	Formas r -lineares Alternadas	12
1.1.1	Permutações	12
1.1.2	Aplicações Multilineares	13
1.1.3	Produto Tensorial de Formas Multilineares	14
1.1.4	Produto Exterior	14
1.1.5	Álgebra de Grassman	16
1.1.6	Produto Interior ou Contração	17
1.2	Campos de Vetores e Derivações em \mathbb{C}^n	17
1.2.1	Derivações em um ponto	17
1.2.2	Campos de Vetores como Derivações	18
1.2.3	r -formas holomorfas em \mathbb{C}^n	20
2	Variedade Algébricas Afins e Aplicações Polinomiais	22
2.1	Variedades Algébricas Afins	22
2.1.1	Teorema da Base de Hilbert	24
2.1.2	Teorema dos Zeros de Hilbert-Nullstellensatz	25
2.2	Aplicações Polinomiais e Racionais	26
3	Folheações Holomorfas e o Teorema de Frobenius	28
3.1	Teorema de Frobenius	28
3.1.1	Distribuição numa Variedade	28
3.1.2	Distribuição de k -planos definidos por formas diferenciais	29
3.2	Folheações Holomorfas	30
3.3	Folheações em Espaços Projetivos	37

3.3.1	O Espaço Projetivo \mathbb{P}^n	37
3.3.2	Expressão em Coordenadas Homogêneas	38
4	Integrabilidade Algébrica de r-formas diferenciais Polinomiais	42
4.1	r-formas polinomiais em \mathbb{K}^n	43
4.2	Hipersuperfícies Invariantes e Integrais	
	Primeiras Racionais	45
4.3	Prova do Teorema (4.0.1)	50
5	Integrabilidade Algébrica de Lagutinskii - Pereira	56
6	Aplicação à Teoria das Folheações Holomorfas no Espaço Projetivo \mathbb{P}^n	62
	Referências	68

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, vamos introduzir conceitos e resultados que serão fundamentais para o posterior entendimento de este trabalho. Vamos começar inicialmente com a teoria das r -formas lineares alternadas, posteriormente vamos continuar com a teoria dos campos vetoriais ou derivações e finalizaremos com o caso particular das r -formas holomorfas no espaço afim \mathbb{C}^n .

1.1 Formas r -lineares Alternadas

Ao longo desta seção \mathbb{K} denotará um corpo algebricamente fechado de característica zero e E um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita.

Pela álgebra linear sabemos que se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base de E , então a base dual de E está dada por $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ onde,

$$e_i^*(e_j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

1.1.1 Permutações

Fizemos um inteiro r . Uma permutação de um conjunto $A = \{1, 2, \dots, r\}$ é uma aplicação bijetiva $\tau : A \rightarrow A$. Uma permutação cíclica denotada por $(a_1 a_2 \dots a_k)$ é uma permutação τ de A tal que

$$\tau(a_1) = a_2, \tau(a_2) = a_3, \dots, \tau(a_k) = a_1$$

e de forma que τ fixa todos os outros elementos de A .

A permutação cíclica $(a_1 a_2 \dots a_k)$ é também chamada de um k -ciclo.

Em particular permutações da forma (ab) são chamados de transposições. Denotemos por S_r o grupo de todas as permutações do conjunto $\{1, 2, \dots, r\}$.

Uma permutação é *par* ou *ímpar* se ela é o produto de um número par ou ímpar de transposições.

1.1.2 Aplicações Multilineares

Denotemos por $E^r = E \times \dots \times E$ o produto cartesiano de r cópias do \mathbb{K} -espaço vetorial E . Uma forma r -linear em \mathbb{E} , é uma aplicação $\omega : E^r \rightarrow \mathbb{K}$ linear em cada um dos r argumentos ou seja

$$\omega(\dots, av + bw, \dots) = a\omega(\dots, v, \dots) + b\omega(\dots, w, \dots)$$

para todo $a, b \in \mathbb{K}$ e $v, w \in E$.

Denotaremos por $L_r(E)$ o espaço vetorial de todas as formas r -lineares em E .

Definição 1.1.1 *Uma forma r -linear $\omega : E^r \rightarrow \mathbb{K}$ é simétrica se*

$$\omega(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(r)}) = \omega(v_1, \dots, v_r)$$

para toda permutação $\tau \in S_r$.

Uma forma r -linear é alternada ou exterior se

$$\omega(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(r)}) = \text{Sgn}(\tau)\omega(v_1, \dots, v_r)$$

para toda $\tau \in S_r$, onde $\text{Sgn}(\tau)$ denota o sinal da permutação τ dado por

$$\text{Sgn}(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{se } \tau \text{ é par,} \\ -1, & \text{se } \tau \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Denotaremos por $\wedge^r(E)$ o espaço vetorial das formas r -lineares alternadas.

Exemplo 1.1.1 *Consideremos $E = \mathbb{K}^n$. Sejam $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$ e $[v_1, v_2, \dots, v_n]$ a matriz cujas colunas são formadas pelas coordenadas dos vetores v_i relativo à base canônica de \mathbb{K}^n . A aplicação determinante dada por*

$$\det : \underbrace{\mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}_n \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(v_1, \dots, v_n) \longmapsto \det([v_1, \dots, v_n])$$

é uma forma r -linear alternada.

Exemplo 1.1.2 Seja $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de E . A aplicação produto vetorial dada por

$$\begin{aligned} \bigwedge : \underbrace{E \times \dots \times E}_{n-1} &\longrightarrow E \\ (v_1, \dots, v_{n-1}) &\longmapsto \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \det(A_i) e_i \end{aligned}$$

onde A_i é a matriz $(n-1) \times (n-1)$ omitindo a i -ésima linha da matriz $(a_{ij})_{n \times (n-1)}$ obtida da relação $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$, para todo $j = 1, 2, \dots, n-1$, é uma aplicação n -linear alternada. Usaremos a notação $\bigwedge(v_1, \dots, v_{n-1}) = v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}$.

No caso $n = 3$ temos que $v_1 \wedge v_2 = v_1 \times v_2$ onde \times é o produto vetorial de \mathbb{K}^3 .

1.1.3 Produto Tensorial de Formas Multilineares

Seja $\omega \in L_r(E)$ e $\vartheta \in L_l(E)$ o produto tensorial entre ω e ϑ é a forma $(r+l)$ -linear $\omega \otimes \vartheta$ definida por

$$(\omega \otimes \vartheta)(v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_{r+l}) = \omega(v_1, \dots, v_r) \cdot \vartheta(v_{r+1}, \dots, v_{r+l}).$$

Proposição 1.1.1 Se ω, ϑ, β são formas multilineares em E , então

$$(\omega \otimes \vartheta) \otimes \beta = \omega \otimes (\vartheta \otimes \beta).$$

Prova ver [6].

Proposição 1.1.2 Seja $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ordenada de E e $B^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ a base dual, então para toda sequência de inteiros $\{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n\}$ as formas r -lineares $e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_r}^*$ formam uma base para $L_r(E)$.

Prova ver [1].

1.1.4 Produto Exterior

Seja $\omega \in \bigwedge^r(E)$ e $\vartheta \in \bigwedge^l(E)$. O produto exterior entre ω e ϑ é a forma $(r+l)$ -linear alternada $\omega \wedge \vartheta$ definido por

$$\begin{aligned} \bigwedge^r(E) \times \bigwedge^l(E) &\longrightarrow \bigwedge^{r+l}(E) \\ (\omega, \vartheta) &\longmapsto \omega \wedge \vartheta = \frac{1}{r! l!} A(\omega \otimes \vartheta) \end{aligned}$$

onde $A(\omega) = \sum_{\tau \in S_r} \text{Sgn}(\tau) \omega$. Se segue da definição que

$$(\omega \wedge \vartheta)(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_{r+l}) = \frac{1}{r! l!} \sum_{\tau \in S_{r+l}} \text{Sgn}(\tau) \omega(e_{\tau(1)}, \dots, e_{\tau(r)}) \cdot \vartheta(e_{\tau(r+1)}, \dots, e_{\tau(r+l)}).$$

As provas das proposições e corolários abaixo podem ser encontradas em [6],[1].

Proposição 1.1.3 *Sejam $\omega \in \bigwedge^r(E)$, $\vartheta \in \bigwedge^l(E)$ e $\beta \in \bigwedge^s(E)$ então*

$$i) \omega \wedge \vartheta = (-1)^{r^l} \vartheta \wedge \omega \quad (\text{anti-comutatividade})$$

$$ii) \omega \wedge (\vartheta \wedge \beta) = (\omega \wedge \vartheta) \wedge \beta \quad (\text{associatividade})$$

Corolário 1.1.1 *Se $\omega \in \bigwedge^r(E)$ e r é ímpar então $\omega \wedge \omega = 0$*

Corolário 1.1.2 *Nas mesmas hipóteses da proposição (1.1.3) temos*

$$\omega \wedge \vartheta \wedge \beta = \frac{1}{r! \, l! \, s!} A(\omega \otimes \vartheta \otimes \beta).$$

Proposição 1.1.4 *Sejam $\omega_1, \dots, \omega_r \in E^*$ e $v_1, \dots, v_r \in E$ então*

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r(v_1, \dots, v_r) = \det[w_i(v_j)].$$

Prova Usando a definição do produto exterior temos

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r(v_1, \dots, v_r) = \sum_{\tau \in S_r} \text{Sgn}(\tau) \omega_1(v_{\tau(1)}) \dots \omega_r(v_{\tau(r)}) = \det[w_i(v_j)].$$

Definição 1.1.2 *Uma r -forma alternada α sobre um espaço vetorial E é dita decomponível se existem 1-formas lineares $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r \in E^*$ tais que*

$$\alpha = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r.$$

Veremos que toda r -forma alternada é combinação linear de r -formas decomponíveis.

Proposição 1.1.5 *Seja $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de E e $B^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ a base dual, então*

$$\bigwedge^r(B) := \{v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_r}^* ; 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n\}$$

formam uma base para o espaço vetorial $\bigwedge^r(E)$.

Prova Introduzindo a notação de multi-índice para $I = \{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n\}$ e $J = \{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n\}$ e escrevendo $V_I = (v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r})$ e $V_I^* = v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_r}^*$ temos que

$$V_I^*(V_J) = \begin{cases} 1, & \text{se } I = J, \\ 0, & \text{se } I \neq J. \end{cases}$$

Assim, se $\alpha \in \bigwedge^r(E)$ chamando então $f_I = f_{i_1 i_2 \dots i_r} = \alpha(V_I) \in \mathbb{K}$ temos

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} f_I V_I^*$$

ou seja $\bigwedge^r(B)$ é um conjunto gerador, por outro lado não é difícil mostrar que $\bigwedge^r(B)$ é um conjunto linearmente independente por tanto, $\bigwedge^r(B)$ é uma base para $\bigwedge^r(E)$.

Corolário 1.1.3 *Se o espaço vetorial E tem dimensão n , então o espaço vetorial $\bigwedge^r(E)$ tem dimensão $\binom{n}{r}$.*

Corolário 1.1.4 *Se $r > \dim_{\mathbb{K}} E$ então $\bigwedge^r(E) = \{0\}$.*

1.1.5 Álgebra de Grassman

Seja E um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão n . Consideremos o seguinte \mathbb{K} -espaço vetorial

$$\bigwedge E = \mathbb{K} \oplus E \oplus \bigwedge^2 E \oplus \dots \oplus \bigwedge^n E,$$

lembramos que $\mathbb{K} = \bigwedge^0 E$ e $E = \bigwedge^1 E$. Assim dado $\Omega \in \bigwedge E$ temos a seguinte expressão.

$$\Omega = \omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_n.$$

onde $\omega_i \in \bigwedge^i E$, para todo $i = 0, 1, \dots, n$.

Podemos ver também que

$$\dim_{\mathbb{K}} \left(\bigwedge E \right) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n.$$

Vamos definir a continuação um produto em $\bigwedge E$ em termos do produto exterior.

Dados $\Omega, \theta \in \bigwedge E$, sabemos que $\Omega = \omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_n$ e $\theta = \theta_0 + \theta_1 + \dots + \theta_n$. Assim a aplicação definida por

$$\begin{aligned} (\cdot) : \bigwedge E \times \bigwedge E &\longrightarrow \bigwedge E \\ (\Omega, \theta) &\longmapsto \Omega \cdot \theta = (\omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_n) \wedge (\theta_0 + \theta_1 + \dots + \theta_n) \\ &= \omega_0 \theta_0 + (\omega_0 \theta_1 + \omega_1 \theta_0) + (\omega_0 \theta_2 + \omega_1 \theta_1 + \omega_2 \theta_0) \\ &= \sum_{r=0}^n \left(\sum_{i+j=r} \omega_i \wedge \theta_j \right), \end{aligned}$$

satisfaz as seguintes propriedades .

- $(\bigwedge^i E) \cdot (\bigwedge^j E) \subset \bigwedge^{i+j} E$ ou seja $\bigwedge E$ é uma álgebra graduada com unidade.
- $\bigwedge E$ é anti-comutativa e associativa, isto devido à anticomutatividade e associatividade do produto exterior.

Com estas propriedades $\bigwedge E$ é chamado **Álgebra de Grassmann**.

Definição 1.1.3 *Uma seqüência de aplicações lineares entre espaços vetoriais*

$$E \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} G$$

é dita exata se $\ker(\psi) = \text{Im}(\varphi)$.

1.1.6 Produto Interior ou Contração

Seja $v \in E$ e $k \in \mathbb{N}$, consideremos a seguinte aplicação linear.

$$\begin{aligned} \iota_v : \bigwedge^k E &\longrightarrow \bigwedge^{k-1} E \\ \omega &\longmapsto \iota_v(\omega) \\ \iota_v(\omega)(e_1, \dots, e_{k-1}) &= \omega(v, e_1, \dots, e_{k-1}). \end{aligned}$$

Definição 1.1.4 A aplicação linear ι_v é chamado produto interior ou contração.

Proposição 1.1.6 Sejam $u, v \in E$, $\omega \in \bigwedge^r E$, $\theta \in \bigwedge^l E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ então

- i) $\iota_{u+v} = \iota_u + \iota_v$ e $\iota_{au} = a\iota_u$.
- ii) $\iota_u \cdot \iota_v = -\iota_v \cdot \iota_u$.
- iii) $\iota_u^2 = 0$.
- iv) $\iota_v(\omega \wedge \theta) = (\iota_v(\omega)) \wedge \theta + (-1)^r \omega \wedge (\iota_v(\theta))$.

Prova ver [6].

1.2 Campos de Vetores e Derivações em \mathbb{C}^n

1.2.1 Derivações em um ponto

Seja $U \subset \mathbb{C}^n$ aberto. Vamos denotar por $C^\infty(U)$ a \mathbb{C} -álgebra sobre U formada por todas as funções infinitamente diferenciáveis definidas em U e por $O(U_p)$ o espaço de funções holomorfas definidas numa vizinhança de p .

Um Campo de Vetores X em U é uma aplicação que associa a cada ponto $p \in U$ uma aplicação

$$X_p := X(p) : O(U_p) \longrightarrow \mathbb{C}$$

satisfazendo

- i) X_p é \mathbb{C} -linear.
- ii) $X_p(fg) = X_p(g)f(p) + g(p)X_p(f)$ para todo $f, g \in O(U_p)$ (regra de Leibniz).

Uma aplicação com estas propriedades é chamada uma *derivação em p* . Denotemos por $\mathcal{D}_p(\mathbb{C}^n)$ o espaço vetorial formado por todas as derivações em p .

Dado $v \in \mathbb{C}^n$ definamos a aplicação D_v dada por

$$D_v : O(U_p) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} f &\longmapsto \left(\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial z_i} \Big|_p \right) (f) \\ &= \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial z_i} (p) \end{aligned}$$

Não é difícil mostrar que a aplicação D_v é uma derivação em p . Assim usando o Isomorfismo $T_p(\mathbb{C}^n) \simeq \mathbb{C}^n$ podemos definir também a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : T_p(\mathbb{C}^n) &\longrightarrow \mathcal{D}_p(\mathbb{C}^n) \\ v &\longmapsto D_v \end{aligned}$$

A aplicação ϕ é um Isomorfismo de espaços vetoriais.

Em particular tomando os vetores canônicos $v = e_i = (0, \dots, \underbrace{1}_{i\text{-ésima}}, \dots, 0)$ temos que as *derivações* $\{D_{e_1}, \dots, D_{e_n}\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \Big|_p \right\}$ formam uma base de $T_p(\mathbb{C}^n)$.

De esta forma para o campo e vetores X temos que

$$X_p = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial z_i} \Big|_p,$$

para todo $p \in U$.

Dizemos que o campo X é de classe C^∞ em U se as funções coordenadas a_i são de classe C^∞ em U . Esta construção permite também definir um campo vetorial em U como uma aplicação que associa para cada $p \in U$ um vetor tangente $X_p \in T_p(\mathbb{C}^n)$.

1.2.2 Campos de Vetores como Derivações

Seja X é um campo de vetores de classe C^∞ em U e $f \in C^\infty(U)$ consideremos a função $X(f)$ em U definida por

$$X(f)(p) = X_p(f),$$

para todo $p \in U$. Assim escrevendo $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ temos

$$X(f)(p) = X_p(f) = \left(\sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial z_i} \Big|_p \right) (f) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial f}{\partial z_i} (p),$$

para todo $p \in U$ ou seja

$$X(f) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial z_i}$$

mostrando assim que $X(f) \in C^\infty(U)$. De esta forma um campo de vetores X de classe C^∞ em U induz uma aplicação \mathbb{C} -linear

$$C^\infty(U) \longrightarrow C^\infty(U)$$

$$f \longmapsto X(f)$$

Além disso esta aplicação satisfaz a regra de Leibniz

$$X(fg) = X(f)g + fX(g)$$

Em geral se A é uma álgebra sobre um corpo \mathbb{K} , uma derivação de A é uma aplicação

$$D : A \longrightarrow A$$

satisfazendo

i) D é \mathbb{K} -linear

ii) $D(a.b) = (D(a))b + a(D(b))$ para todo $a, b \in A$.

O conjunto de todas as derivações de A é fechado sobre a adição e a multiplicação por escalar e forma um espaço vetorial denotado por $Der(A)$. Assim dado um campo de vetores de classe C^∞ em U este induz uma derivação da \mathbb{C} -álgebra $A = C^\infty(U)$. Isto permite definir a aplicação

$$\phi : \chi(U) \longrightarrow Der(C^\infty(U))$$

$$X \longmapsto (f \mapsto X(f))$$

Onde $\chi(U)$ é o \mathbb{C} -espaço vetorial formado por todos os campos vetoriais de classe C^∞ em U .

Pode se provar de fato que ϕ é um isomorfismo de espaços vetoriais, mais ainda é um isomorfismo de módulos sobre $C^\infty(U)$, mostrando assim que os campos de vetores de classe C^∞ em um aberto U podem ser identificados com as derivações da \mathbb{C} -álgebra $C^\infty(U)$.

Considere uma equação diferencial ordinária (EDO) da forma

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= P_1(z_1, \dots, z_n) \\ &\vdots \\ \frac{dz_n}{dt} &= P_n(z_1, \dots, z_n) \end{aligned}$$

onde P_1, \dots, P_n são polinômios em n variáveis complexas.

Uma aplicação holomorfa $\gamma : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ definida num aberto U de \mathbb{C} , é uma solução do sistema acima se

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = (P_1(\gamma(t)), \dots, P_n(\gamma(t))) ,$$

para todo $t \in U$. O teorema de Existência e Unicidade para (EDO) complexas garante a existência de soluções para sistemas polinômiais. Seja $\gamma : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ uma solução com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = (P_1(\gamma(0)), \dots, P_n(\gamma(0)))$, consideremos a derivação em p definida por

$$X_p(f) := \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t) \Big|_{t=0} .$$

Temos que

$$X_p(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f(\gamma(0)))}{\partial z_i} \cdot \gamma'_i(0) = \sum_{i=1}^n P_i(\gamma(0)) \frac{\partial f}{\partial z_i}(p) = \left(\sum_{i=1}^n P_i(p) \frac{\partial}{\partial z_i} \Big|_p \right) (f)$$

para todo $f \in O(U_p)$, ou seja

$$X_p = \sum_{i=1}^n P_i(p) \frac{\partial}{\partial z_i} \Big|_p$$

para todo $p \in U$. Desta forma à (EDO) complexa podemos associar o campo de vetores

$$X = \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

tendo-se que

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = X(\gamma(t))$$

para todo $t \in U$. Ou seja γ é a solução da equação diferencial induzida pelo campo X .

1.2.3 r -formas holomorfas em \mathbb{C}^n

Uma r -forma holomorfa num aberto $U \subset \mathbb{C}^n$ é uma aplicação holomorfa

$$\omega : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \bigwedge^r (\mathbb{C}^n)^* .$$

Toda r -forma holomorfa pode ser escrita como

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} f_{i_1 \dots i_r} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_r} ,$$

onde $f_{i_1 \dots i_r} \in O(U)$. Denotaremos por $\bigwedge^r(U)$ o espaço das r -formas holomorfas definidas no aberto $U \subset \mathbb{C}^n$.

Definição 1.2.1 *Seja $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} f_{i_1 \dots i_r} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_r}$ uma r -forma holomorfa.*

A **diferencial exterior** de ω é a $(r+1)$ -forma holomorfa dada por

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} df_{i_1 \dots i_r} \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_r} ,$$

onde $df_{i_1 \dots i_r} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{i_1 \dots i_r}}{\partial z_j} dz_j$.

Definição 1.2.2 *Seja U e V abertos de \mathbb{C}^n e \mathbb{C}^m respectivamente. Consideremos agora uma aplicação holomorfa $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m) : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{C}^m$ e uma r -forma holomorfa em V*

$$\theta = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m} f_{i_1 \dots i_r} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_r}.$$

O **pull-back** de θ por ρ é por definição a r -forma holomorfa em U dada por

$$\rho^* \theta := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m} (f_{i_1 \dots i_r} \circ \rho) dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_r}$$

Proposição 1.2.1 *Seja $F : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{C}^m$ uma aplicação holomorfa, $\omega \in \Lambda^r(V)$ e $\theta \in \Lambda^l(V)$ então*

i) $f^*(\omega \wedge \theta) = f^*\omega \wedge f^*\theta$

ii) $df^*(\omega) = f^*(d\omega)$

iii) $d^2(\omega) = 0$

iv) $d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^{lr}\omega \wedge d\theta$.

Prova ver [6].

Capítulo 2

Variedade Algébricas Afins e Aplicações Polinomiais

Neste capítulo vamos estudar os conceitos relacionados as variedades algébricas afins. A finalidade central deste capítulo serão entender o Teorema da base de Hilbert e o teorema dos Zeros de Hilbert pois eles são fundamentais nos capítulos 4,5 e 6. As demonstrações da proposições, lemas e teoremas deste capítulo podem ser encontradas em [12]

2.1 Variedades Algébricas Afins

Definição 2.1.1 *Sejam f_1, \dots, f_s polinômios em n variáveis complexas isto é $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ o conjunto*

$$V(f_1, \dots, f_s) := \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n : f_i(a_1, \dots, a_n) = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n\}$$

*é chamado **variedade algébrica afim**.*

No caso em que $s = 1$ e $\text{grau}(f) = d$ dizemos que $V(f)$ é uma hipersuperfície algébrica de grau d .

Seja $V(f_1, \dots, f_s)$ uma variedade algébrica afim com $s \leq n$. Consideremos a aplicação holomorfa $f = (f_1, \dots, f_s) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^s$ o conjunto singular de V é definido por

$$\text{Sing}(V) := \{p \in V : df(p) \text{ não tem posto máximo} \}$$

Observação 2.1.1 *Considerando a restrição de f ao conjunto aberto $\mathbb{C}^n \setminus \text{Sing}(V)$ ou seja $g = f|_{\mathbb{C}^n \setminus \text{Sing}(V)} : \mathbb{C}^n \setminus \text{Sing}(V) \rightarrow \mathbb{C}$*

temos que:

$$i) g^{-1}(0) = V \setminus \text{Sing}(V)$$

ii) 0 é um valor regular de g .

Assim o conjunto $V_{\text{reg}} := V \setminus \text{Sing}(V)$ chamado parte regular de V é uma variedade complexa de dimensão $n-s$.

Definição 2.1.2 Sejam $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$. O ideal gerado por f_1, \dots, f_s é o subconjunto do espaço de polinômios $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ dado por

$$\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^s h_i f_i : h_1, \dots, h_s \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] \right\}$$

Proposição 2.1.1 Se f_1, \dots, f_s e g_1, \dots, g_t são tais que $\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$ então $V(f_1, \dots, f_s) = V(g_1, \dots, g_t)$

Interseções e uniões de conjuntos algébricos também são algébricos.

lema 2.1 Se $V, W \subset \mathbb{C}^n$ são variedades afins, então $V \cup W$ e $V \cap W$ também são variedades afins.

Prova Se $V = V(f_1, \dots, f_s)$ e $W = W(g_1, \dots, g_t)$ então

$$V \cup W = V(f_i g_j) \text{ onde } 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t.$$

$$V \cap W = V(f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_t).$$

Este último lema implica que interseções arbitrárias e uniões finitas de variedades afins são ainda variedades afins. Além disso podemos ver que \mathbb{C}^n e \emptyset são também variedades algébricas, desta forma podemos definir uma topologia em \mathbb{C}^n chamada **Topologia de Zariski** onde os conjuntos fechados são as variedades algébricas $V(f_1, \dots, f_s)$ ou seja os conjuntos abertos são os complementares de $V(f_1, \dots, f_s)$.

Definição 2.1.3 Seja $V \subset \mathbb{C}^n$ uma variedade afim. O ideal de V é por definição

$$I(V) = \{f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] : f(a_1, \dots, a_n) = 0, \forall (a_1, \dots, a_n) \in V\}$$

A inclusão seguinte é claramente verdadeira

lema 2.2 Se $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ então

$$\langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset I(V(f_1, \dots, f_s))$$

A igualdade em geral não é válida como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 2.1.1 Dados $f_1(x, y) = x^2$, $f_2(x, y) = y^2 \in \mathbb{C}[x, y]$ temos

i) $V(f_1, f_2) = V(x^2, y^2) = \{(0, 0)\}$

ii) $I(V(x^2, y^2)) = I(\{(0, 0)\}) = \langle x, y \rangle$.

De fato: provaremos ii)

Claramente $\langle x, y \rangle \subset I(\{(0, 0)\})$.

Por outro lado, se $f \in I(\{(0, 0)\})$ então $f = \sum_{i,j} a_{ij}x^i y^j$ onde $a_{00} = f(0, 0) = 0$

logo $f = 0 + \left(\sum_{(ij) \neq (0,0)} a_{ij}x^i y^j \right) = \left(\sum_{(ij), i>0} a_{ij}x^{i-1} y^j \right)x + \left(\sum_{j>0} a_{0j}y^{j-1} \right)y \in \langle x, y \rangle$.

Agora como $x \notin \langle x^2, y^2 \rangle$ temos que $I(V(x^2, y^2)) \not\subset \langle x^2, y^2 \rangle$

Proposição 2.1.2 Sejam V e W variedades afins em \mathbb{C}^n então

i) $V \subset W$ se, e somente se, $I(V) \supset I(W)$

ii) $V = W$ se, e somente se, $I(V) = I(W)$

Prova é suficiente demonstrar a parte i)

Seja $f \in I(W)$ temos que $f(p) = 0$, $\forall p \in W$ como $V \subset W$ então $f(q) = 0$, $\forall q \in V$ portanto $f \in I(V)$ isto é $I(W) \subset I(V)$.

Por outro lado se $p \in V$ temos que $f(p) = 0$, $\forall f \in I(V)$ como $I(V) \supset I(W)$ temos que $g(p) = 0$, $\forall g \in I(W)$ como $W = W(g_1, \dots, g_s)$ então $\{g_1, \dots, g_s\} \subset I(W)$ assim temos que $g_i(p) = 0$, $\forall i = 1, \dots, s$ então $p \in W$ ou seja $V \subset W$.

Podemos definir também a variedade de um ideal.

Definição 2.1.4 Seja $I \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ um ideal. A variedade de I está definido como

$$V(I) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n : f(a_1, \dots, a_n) = 0, \forall f \in I\}$$

O próximo teorema é conhecido como o **Teorema da base de Hilbert**

2.1.1 Teorema da Base de Hilbert

Teorema 2.1.1 Todo ideal $I \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ é finitamente gerado, isto é existem $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ tais que

$$I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$$

Corolário 2.1.1 Se I um ideal de $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ então $V(I)$ é uma variedade afim.

Observação 2.1.2 *O Teorema da Base de Hilbert mostra que todo subconjunto algébrico é a interseção de um número finito de hipersuperfícies.*

De fato. Seja $J \subset \mathbb{C}^n$ subconjunto algébrico então $J = V(S)$ onde $S \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ consideremos agora $I = \langle S \rangle$ temos que $V(S) = V(\langle S \rangle)$. Pelo Teorema da Base de Hilbert temos que $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ onde $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$, assim

$$J = V(S) = V(I) = V(f_1, \dots, f_s) = \bigcap_{i=1}^s V(f_i).$$

Seja I um ideal de $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$, o radical de I é definido por

$$\sqrt{I} = \{f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] : \exists m \in \mathbb{N}, f^m \in I\}$$

O Teorema dos Zeros de Hilbert diz que o ideal de uma variedade $V(I)$ é o radical de I .

2.1.2 Teorema dos Zeros de Hilbert-Nullstellensatz

Teorema 2.1.2 *Seja $I \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ um ideal então*

$$I(V(I)) = \sqrt{I}$$

Observação 2.1.3 *Pelo Teorema da Base de Hilbert temos que*

$$I(V(f_1, \dots, f_s)) = I(V(I)) = \sqrt{I} = \sqrt{\langle f_1, \dots, f_s \rangle}$$

Exemplo 2.1.2 *Usando o Teorema dos Zeros de Hilbert temos*

$$I(V(x^2, y^2)) = \sqrt{\langle x^2, y^2 \rangle}$$

ou seja

$$\langle x, y \rangle = \sqrt{\langle x^2, y^2 \rangle}.$$

Uma variedade algébrica $V \subset \mathbb{C}^n$ é dita redutível se ela pode ser escrita como uma união de duas subvariedades próprias não vazias isto é $V = V_1 \cup V_2$ onde $V \neq V_1$ e $V \neq V_2$ caso contrario, dizemos que V é irredutível .

Exemplo 2.1.3 *$V(f)$ é irredutível se, e somente se, f é um polinômio irredutível .*

Exemplo 2.1.4 *Considerando a variedade algébrica afim em \mathbb{C}^3 dada por*

$$V = V(x^3 + xy^2 - xz, yx^2 + y^3 - yz)$$

pode-se facilmente verificar que

$$V = V(x^2 + y^2 - z) \cup V(x, y)$$

mostrando assim que V é redutível.

A seguinte proposição caracteriza variedades irredutíveis.

Proposição 2.1.3 *Seja $V \subset \mathbb{C}^n$ variedade afim. As seguintes afirmações são equivalentes.*

- i) V é irredutível
- ii) $I(V)$ é um ideal primo de $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$.

Esta última caracterização juntamente com o Teorema dos Zeros de Hilbert nos permite estabelecer uma correspondência biunívoca entre ideais primos e variedades algébricas irredutíveis dada por

$$I \longmapsto V(I).$$

2.2 Aplicações Polinomiais e Racionais

Definição 2.2.1 *Uma aplicação $\phi : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ é dita aplicação polinomial (ou aplicação regular) se existem polinômios $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_m]$ tais que*

$$\phi(a_1, \dots, a_m) = (f_1(a_1, \dots, a_m), \dots, f_n(a_1, \dots, a_m)) ,$$

para todo $(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{C}^m$.

Da mesma forma que o anel dos números inteiros pode ser imerso no corpo dos números racionais temos que o anel dos polinômios $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ pode ser imerso como um subanel do corpo das funções racionais

$$\mathbb{C}(z_1, \dots, z_n) = \left\{ \frac{f(z_1, \dots, z_n)}{g(z_1, \dots, z_n)} : f, g \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n], g \neq 0 \right\}.$$

Este é o chamado corpo das frações de $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$.

Uma aplicação $\phi : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ é dita uma aplicação racional se

$$\phi = \left(\frac{f_1}{g_1}, \dots, \frac{f_n}{g_n} \right).$$

Observemos que ϕ não é uma função propriamente dita pois ela não está definida ao longo do conjunto algébrico

$$\text{Ind}(\phi) = \{f_1 = g_1 = 0\} \cup \dots \cup \{f_n = g_n = 0\}.$$

chamado conjunto de indeterminação de ϕ .

Dada uma função racional $R = \frac{P}{Q}$ associamos uma família de hipersuperfícies algébricas

$\{P - \lambda Q = 0\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$ que chamamos de **pencil de hipersuperfícies associado a $\frac{P}{Q}$** . O conjunto de pólos de $\frac{P}{Q}$ é a hipersuperfície

$$\left(\frac{P}{Q}\right)_{\infty} = \{Q = 0\}$$

Denotaremos por $\mathbb{C}_d[z] := \mathbb{C}_d[z_1, \dots, z_n]$ o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a d . É bem conhecido (ver[1]) que

$$\dim \mathbb{C}_d[z] = \binom{d+n}{n}.$$

Capítulo 3

Folheações Holomorfas e o Teorema de Frobenius

Neste capítulo introduziremos os conceitos de distribuições de k -planos e algumas de suas propriedades, que serão necessários para enunciar o famoso Teorema de Frobenius. Posteriormente introduziremos os conceitos de folheação holomorfa singular e não singular para logo estabelecer uma relação entre distribuição e folheação, aliás toda folheação \mathcal{F} de dimensão k induz uma distribuição de planos k -dimensional. O Teorema de Frobenius nós garante a recíproca desta afirmação. Na parte final deste capítulo estudaremos o caso particular das folheações holomorfas no espaço projetivo \mathbb{P}^n .

Todas as demonstrações dos resultados deste capítulo podem ser encontradas em [2],[3],[4] e [8].

3.1 Teorema de Frobenius

3.1.1 Distribuição numa Variedade

Uma distribuição de k -planos em uma variedade M é uma aplicação D que associa à cada ponto $q \in M$ um subespaço vetorial $D(q)$ de dimensão k de T_qM . Dizemos que uma distribuição de k -planos é de classe C^r , se para todo $q \in M$ existem k campos de vetores X^1, \dots, X^k de classe C^r , definidos em uma vizinhança U de q tais que para todo $x \in U$ $\{X^1(x), \dots, X^k(x)\}$ é uma base para $D(x)$.

Definição 3.1.1 *Dados dois campos de vetores $X, Y \in \chi(U)$. O campo vetorial definido*

por $[X, Y] = XY - YX$ é chamado **colchete de Lie** de X e Y .

Definição 3.1.2 Dizemos que uma distribuição de planos D é **involutivo** se, dados dois campos de vetores X e Y tais que, para cada $q \in M$ com $X(q), Y(q) \in D(q)$ então $[X, Y](q) \in D(q)$.

Uma distribuição de k -planos D é dita completamente integrável se para todo $p \in U \subset M$ tal que $D(p) = \langle X^1(p), \dots, X^k(p) \rangle$ existe uma subvariedade k -dimensional L_p tal que $T_p L_p = D(p)$.

Teorema 3.1.1 (Frobenius)

Seja D uma distribuição de k -planos de classe C^∞ . Então D é completamente integrável se, e somente se, é involutivo.

veja [3]

3.1.2 Distribuição de k -planos definidos por formas diferenciais

Sejam $\omega^1, \dots, \omega^k$ 1-formas de classe C^r ($r \geq 0$) definidas e linearmente independentes em um conjunto aberto $U \subset M^n$. Para cada $q \in U$ definamos

$$D(q) = \{v \in T_q M : \omega_q^1(v) = \dots = \omega_q^k(v) = 0\}$$

Desde que $\omega_q^1, \dots, \omega_q^k$ são linearmente independentes no dual $(T_q M)^*$ temos que $D(q)$ é um subespaço de codimensão k de $T_q M$.

Proposição 3.1.1 Uma distribuição de planos de classe C^r ($r \geq 0$) e de codimensão k em M pode ser definido localmente como o núcleo de k , 1-formas de classe C^r linearmente independentes. Reciprocamente, se $\omega^1, \dots, \omega^k$ são 1-formas de classe C^r linearmente independentes em M então

$$D(q) = \{v \in T_q M : \omega_q^1(v) = \dots = \omega_q^k(v) = 0\}$$

define uma distribuição de planos de codimensão k e classe C^r em M .

Teorema 3.1.2 (Frobenius para formas)

Seja D uma distribuição de planos de codimensão k e classe C^r definido em um conjunto aberto $U \subset M$ por 1-formas linearmente independentes $\omega^1, \dots, \omega^k$. Então D é completamente integrável se, e somente se, para todo $j \in \{1, \dots, k\}$ temos

$$d\omega^j \wedge (\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k) = 0$$

3.2 Folheações Holomorfas

Seja M uma variedade complexa de dimensão $n \geq 2$.

Definição 3.2.1 *Uma folheação holomorfa não singular \mathcal{F} de dimensão k em M com $1 \leq k \leq n-1$ é dada por*

- 1) *Uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M por abertos.*
- 2) *Para cada $\alpha \in A$, um biholomorfismo*

$$\Phi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{D}^k \times \mathbb{D}^{n-k}$$

onde $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ é o disco unitário na origem.

- 3) *Se $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ então a mudança de coordenadas*

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha\beta} : \Phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) &\longrightarrow \Phi_\beta(U_{\alpha\beta}) \\ (z, w) &\longmapsto \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}(z, w) \end{aligned}$$

é da forma

$$\Phi_{\alpha\beta}(z, w) = (h_{\alpha\beta}(z, w), g_{\alpha\beta}(w)).$$

Cada aberto U_α é chamado *aberto trivializador da folheação*.

Por 2) da definição anterior temos que U_α é descomposto em subvariedades holomorfas de dimensão k da forma $\Phi_\alpha^{-1}(\mathbb{D}^k \times \{w_0\})$, onde $\{w_0\} \in \mathbb{D}^{n-k}$. Estas subvariedades são chamadas de placas de U_α .

Por 3) as placas se sobrepõem nas interseções de abertos trivializadores ou seja. Se P_α e P_β são placas de U_α e U_β respectivamente então

$$P_\alpha \cap P_\beta = \emptyset \quad \text{ou} \quad P_\alpha = P_\beta = P_\alpha \cap U_\beta = P_\beta \cap U_\alpha.$$

Dados $p, q \in M$ definimos a seguinte relação de equivalência $p \sim q$ se existem placas P_1, P_2, \dots, P_n com $p \in P_1$ e $q \in P_n$ tais que $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, n-1$. A classe de equivalência de $p \in M$ por essa relação é chamada de folha de \mathcal{F} passando por p . Cada folha, com a topologia gerada pelos abertos de suas placas, possui estrutura de variedade complexa de dimensão k imersa biunivocamente em M . De esta forma uma folheação holomorfa \mathcal{F} de dimensão k proporciona uma decomposição da variedade em subvariedades imersas de dimensão k , duas a dois disjuntas.

O *espaço tangente* à folheação \mathcal{F} em $p \in M$, denotado por $T_p\mathcal{F}$ é definido como o espaço tangente no ponto p , à folha passando por esse ponto.

Diremos também que duas folheações são iguais se todas a suas folhas coincidem.

Exemplo 3.2.1 Dado o espaço afim \mathbb{C}^n podemos considerar qualquer decomposição $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$. Tal decomposição define uma folheação \mathcal{F} de dimensão k em \mathbb{C}^n , cujas folhas são os subespaços afins $\mathbb{C}^k \times \{q\}$, $q \in \mathbb{C}^{n-k}$.

Em seguida veremos formas equivalentes de definir uma folheação.

Proposição 3.2.1 (Descrição por submersões locais)

Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa de dimensão k então \mathcal{F} é dada por coleções $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\mathcal{Y} = \{y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\mathcal{G} = \{g_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset}$ que satisfazem

i) \mathcal{U} é uma cobertura de M por abertos.

ii) Para todo $\alpha \in A$, $y_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^{n-k}$ é uma submersão.

iii) Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ então $y_\alpha = g_{\alpha\beta}(y_\beta)$

onde $g_{\alpha\beta} : y_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^k \rightarrow y_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^k$ é um difeomorfismo local holomorfo.

Neste caso as placas de \mathcal{F} em U_α são os conjuntos da forma $y_\alpha^{-1}(q)$, $q \in V_\alpha$.

Exemplo 3.2.2 Seja $f : M \rightarrow N$ uma submersão holomorfa, onde M e N são variedades holomorfas de dimensões $n+k$ e k respectivamente. Neste caso, pelo Teorema holomorfo da forma local das submersões, os conjuntos de nível $\{f = c\}$, $c \in N$, são subvariedades holomorfas de codimensão k de M . A definição equivalente por submersões locais garante que existe uma folheação em M cujas folhas são as componentes conexas dos conjuntos de nível de f .

Sejam M e N variedades complexas, $f : M \rightarrow N$ uma aplicação holomorfa e \mathcal{F} uma folheação em N de codimensão k .

Definição 3.2.2 Dizemos que f é transversal a \mathcal{F} se para todo ponto $q \in N$, os subespaços $df_q(T_qM)$ e $T_p\mathcal{F}$ geram o espaço tangente T_pN , sendo $p = f(q)$.

Exemplo 3.2.3 (Pull-back ou imagem inversa de uma folheação)

Seja f é transversal a \mathcal{F} então existe uma folheação em M , denotada por $f^*(\mathcal{F})$ com a mesma codimensão k , cujas folhas são as componentes conexas de $f^{-1}(L)$ onde L são as folhas de \mathcal{F} em N . A folheação $f^*(\mathcal{F})$ é chamada de pull-back ou imagem inversa de \mathcal{F} por f .

A folheação $f^*(\mathcal{F})$ é construída utilizando a definição equivalente por submersões locais.

Exemplo 3.2.4 (Folheação gerada por um campo de vetores holomorfo)

Sejam M uma variedade complexa de dimensão n e X um campo de vetores holomorfo não identicamente nulo em M . Seja $S = \{p \in M : X(p) = 0\}$, o conjunto singular de X . Então X gera uma folheação holomorfa \mathcal{F} de dimensão um no aberto $N = M \setminus S$. As folhas de \mathcal{F} são as trajetórias de X em N . A estrutura de folheação decorre do Teorema do Fluxo Tubular para campos holomorfos, o qual pode ser enunciado da seguinte forma:

“Para todo $p \in M$ tal que $X(p) \neq 0$, existe um sistema de coordenadas holomorfo $(\phi = (z_1, \dots, z_n), U)$, onde $p \in U$, $\phi: U \rightarrow \phi(U) = A \times B \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$, no qual $X = \frac{\partial}{\partial z_1}$ ”. Como as trajetórias de X são as soluções da equação diferencial $dz/dt = X(z)$ e $X|_U = \frac{\partial}{\partial z_1}$, vemos que as trajetórias de X em U são da forma $\phi^{-1}(A \times \{w\})$ com $w \in B$. Obtemos daí e da definição (3.2.1) uma folheação de dimensão 1, cujas folhas são as trajetórias de X .

De fato, toda folheação de dimensão um é localmente definida por campos de vetores como veremos no resultado seguinte.

Proposição 3.2.2 Sejam M uma variedade complexa de dimensão $n \geq 2$ e \mathcal{F} uma folheação de dimensão um em M . Então existem coleções $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\mathcal{G} = \{g_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset}$ tais que

i) \mathcal{U} é uma cobertura de M por abertos.

ii) X_α é um campo de vetores holomorfo de U_α que não se anula em nenhum ponto.

iii) $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$, isto é uma função holomorfa que não se anula em $U_\alpha \cap U_\beta$.

iv) Em $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ temos $X_\alpha = g_{\alpha\beta} \cdot X_\beta$.

v) Se $p \in U_\alpha$ então $T_p\mathcal{F} = \langle X_\alpha(p) \rangle$ o subespaço de T_pM gerado por $X_\alpha(p)$.

Reciprocamente, se existem coleções \mathcal{X} , \mathcal{U} e \mathcal{G} satisfazendo i), ii), iii) e iv), então existe uma folheação \mathcal{F} que satisfaz v).

Dada uma folheação \mathcal{F} em M podemos induzir uma distribuição de planos dada por

$$D(p) = T_p(L_p)$$

onde L_p é a folha de \mathcal{F} que passa por p . Assim temos a seguinte proposição.

Proposição 3.2.3 Toda folheação \mathcal{F} de classe C^r ($r \geq 1$) de dimensão k em M induz uma distribuição de k -planos de classe C^{r-1} em M denotado por $T\mathcal{F}$.

Seja M uma variedade complexa de dimensão n e ω uma 1-forma holomorfa não identicamente nula em M . Seja $S = \{p \in M : \omega_p = 0\}$ o conjunto singular de ω . Neste caso ω induz uma distribuição Ω de $(n - 1)$ -planos chamados também hiperplanos no aberto $N = M \setminus S$, definida por

$$\Omega_p = \ker(\omega_p) = \{v \in T_p M : \omega_p(v) = 0\}.$$

Definição 3.2.3 Dizemos que ω ou (Ω) é integrável, se existe uma folheação holomorfa \mathcal{F} em N tal que $T\mathcal{F} = \Omega$. Em outras palavras, o espaço tangente em p à folha de \mathcal{F} que passa por p , coincide com Ω_p .

Segue como consequência do **teorema de Frobenius** que

$$\omega \text{ é integrável se, e somente se, } \omega \wedge d\omega = 0.$$

As folheações de codimensão um são localmente definidas por 1-formas holomorfas integráveis, como veremos no resultado a seguir.

Proposição 3.2.4 Sejam M uma variedade complexa de dimensão $n \geq 2$ e \mathcal{F} uma folheação de codimensão um em M . Então existem coleções $\mathcal{W} = \{\omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\mathcal{G} = \{g_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset}$ tais que

i) \mathcal{U} é uma cobertura de M por abertos.

ii) ω_α é uma 1-forma holomorfa integrável em U_α que não se anula em nenhum ponto.

iii) $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$.

iv) Em $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ temos $\omega_\alpha = g_{\alpha\beta} \cdot \omega_\beta$.

v) Se $p \in U_\alpha$, então $T_p \mathcal{F} = \ker(\omega_\alpha(p))$.

Reciprocamente se existem coleções \mathcal{W} , \mathcal{U} e \mathcal{G} satisfazendo i), ii), iii) e iv), então existe uma folheação \mathcal{F} que satisfaz v).

Definição 3.2.4 Seja M variedade conexa, \mathcal{F} uma folheação em M definida por uma 1-forma holomorfa integrável ω e $f \in \mathcal{O}(M)$ uma função holomorfa não constante se anulando em algum ponto de M , de forma que o subconjunto analítico $(f = 0)$ de M tenha codimensão 1 e seja não vazio. Diremos que $(f = 0)$ é **invariante** por \mathcal{F} se as suas componentes conexas são folhas de \mathcal{F} .

Ver [2]

Proposição 3.2.5 *Na situação acima, $(f = 0)$ é invariante por \mathcal{F} se, e somente se existe uma 2-forma holomorfa θ em M tal que*

$$\omega \wedge df = f\theta$$

Definição 3.2.5 *Uma **folheação holomorfa singular** \mathcal{F} de dimensão k (ou codimensão $n - k$) onde $1 \leq k \leq n - 1$ em uma variedade complexa M é uma folheação não singular de dimensão k em $M \setminus S$, onde S é um conjunto analítico em M de codimensão maior ou igual a 2.*

Exigiremos ainda que o conjunto S da definição acima seja minimal no seguinte sentido: não existe subconjunto analítico próprio $S' \subset S$ tal que a folheação regular (não singular) em $M \setminus S$ se estende a $M \setminus S'$. Nestas condições, S é chamado de *conjunto singular* da folheação \mathcal{F} . O conjunto singular de \mathcal{F} é denotado por $Sing(\mathcal{F})$. Os elementos de $Sing(\mathcal{F})$ são chamados de *pontos singulares* ou *singularidades*, em quanto que os elementos de $M \setminus Sing(\mathcal{F})$ são chamados de pontos regulares.

As folhas de \mathcal{F} , são por definição, as folhas da folheação regular $\mathcal{F}|_{M \setminus Sing(\mathcal{F})}$.

Duas folheações singulares \mathcal{F} e \mathcal{F}' são iguais se

- 1) $Sing(\mathcal{F}) = Sing(\mathcal{F}')$
- 2) As folhas regulares $\mathcal{F}|_{M \setminus Sing(\mathcal{F})}$ e $\mathcal{F}'|_{M \setminus Sing(\mathcal{F}')}$ são iguais.

São casos particularmente interessantes

Proposição 3.2.6 *Seja M uma variedade complexa de dimensão $n \geq 2$ e \mathcal{F} uma folheação singular por curvas (dimensão um) de M . Então existem coleções $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\mathcal{G} = \{g_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset}$ tais que*

- i) \mathcal{U} é uma cobertura aberta de M .
- ii) X_α é um campo de vetores holomorfo não identicamente nulo sobre U_α .
- iii) $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$, ou seja, é uma função holomorfa em $U_\alpha \cap U_\beta$ que não se anula.
- iv) Em $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ temos $X_\alpha = g_{\alpha\beta} \cdot X_\beta$

Seja $S_\alpha = Sing(X_\alpha) := \{p \in U_\alpha : X_\alpha(p) = 0\}$ o conjunto singular de X_α então

- v) $Sing(\mathcal{F}) = \bigcup_\alpha S_\alpha$

Reciprocamente se existem coleções \mathcal{X}, \mathcal{U} e \mathcal{G} satisfazendo i), ii), iii) e iv), então existe uma folheação singular de dimensão um em M que satisfaz v)

Proposição 3.2.7 *Sejam M uma variedade complexa de dimensão $n \geq 2$ e \mathcal{F} uma folheação holomorfa singular de codimensão um em M . Então existem coleções $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ $\mathcal{W} = \{\omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\mathcal{H} = \{h_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset}$ tais que*

i) \mathcal{U} é uma cobertura aberta de M .

ii) ω_α é uma 1-forma holomorfa integrável não identicamente nula em U_α .

iii) $h_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^(U_\alpha \cap U_\beta)$.*

iv) Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então $\omega_\alpha = h_{\alpha\beta} \cdot \omega_\beta$.

Seja $S_\alpha = \text{Sing}(\omega_\alpha) := \{p \in U_\alpha : \omega_\alpha(p) = 0\}$ o conjunto singular de ω_α então

v) $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \bigcup_\alpha S_\alpha$

Reciprocamente se existem coleções \mathcal{U}, \mathcal{W} e \mathcal{H} satisfazendo i), ii), iii) e iv), então existe uma folheação singular de codimensão um em M que satisfaz v)

Exemplo 3.2.5 *(Folheações dadas por 1-formas holomorfas fechadas)*

Sejam M uma variedade complexa de dimensão $n \geq 2$ e ω uma 1-forma holomorfa fechada em M (isto é $d\omega = 0$) que não se anula identicamente. Então pelo teorema de Frobenius ω é claramente integrável e portanto define uma folheação \mathcal{F} em M . O lema de Poincaré garante que dado um aberto simplesmente conexo $U \subset M$, existe uma função holomorfa $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $\omega|_U = df$. Observe que se $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ é outra função tal que $\omega|_V = dg$ com $U \cap V$ é conexo e não vazio, então f e g diferem por uma constante em $U \cap V$. Desta forma, a folheação \mathcal{F} pode ser localmente definida por funções holomorfas no seguinte sentido:

Existem coleções $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\mathcal{C} = \{c_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset}$, tais que

i) \mathcal{U} é uma cobertura de M por abertos simplesmente conexos.

ii) Se $\alpha \in A$, então f_α é uma função holomorfa não constante em U_α tal que $\omega|_{U_\alpha} = df_\alpha$.

iii) Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então $U_\alpha \cap U_\beta$ é conexo, $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$ e $f_\alpha = f_\beta + c_{\alpha\beta}$ em $U_\alpha \cap U_\beta$.

Observe que se ω não tem singularidades, então as funções f_α são submersões e \mathcal{F} é não singular. Neste caso, se denotarmos por $g_{\alpha\beta}$ a translação $g_{\alpha\beta}(z) = z + c_{\alpha\beta}$ então:

$f_\alpha = g_{\alpha\beta}(f_\beta)$, de forma que \mathcal{F} pode ser descrita por submersões locais como na proposição (3.2.1) sendo que, no caso, as $g_{\alpha\beta}$ são translações. Dizemos então que \mathcal{F} tem uma *estrutura transversal aditiva*.

No caso em que $S = \text{Sing}(\omega) \neq \emptyset$, vemos que \mathcal{F} tem uma estrutura transversal aditiva em $N = M \setminus S = M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$.

Reciprocamente, se \mathcal{F} é uma folheação com estrutura transversal aditiva em $M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$

e tal que $\text{cod}(\text{Sing}(\mathcal{F})) \geq 2$, então \mathcal{F} pode ser definida por uma 1-forma holomorfa fechada.

De fato, sabemos que as coleções $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\mathcal{C} = \{c_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset}$ satisfazem *i*), *ii*) e *iii*) onde \mathcal{U} é uma cobertura aberta de $M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$, assim temos por *iii*) que se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ então $df_\alpha = df_\beta$ em $U_\alpha \cap U_\beta$, isto implica que existe uma 1-forma holomorfa ω em $M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$ tal que $\omega|_{U_\alpha} = df_\alpha$. Não é difícil ver que a forma ω é fechada e define \mathcal{F} em $M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$. Por outro lado, como $\text{cod}(\text{Sing}(\mathcal{F})) \geq 2$, o *Teorema de Hartogs* implica que ω se estende a uma forma holomorfa em M , a qual é também fechada e define a folheação \mathcal{F} . Podemos então enunciar o seguinte resultado.

Proposição 3.2.8 *Sejam M uma variedade holomorfa e \mathcal{F} uma folheação em M cujo conjunto singular tem codimensão ≥ 2 . Então \mathcal{F} pode ser definida por uma 1-forma fechada se, e somente se, \mathcal{F} tem uma estrutura transversal aditiva em $M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$.*

Exemplo 3.2.6 *(Folheações dadas por formas 1-meromorfas fechadas)*

Sejam M uma variedade holomorfa de dimensão $n \geq 2$ e ω uma 1-forma meromorfa (não holomorfa) e fechada em M . Denotaremos o divisor de pólos de ω por $(\omega)_\infty$. No caso $(\omega)_\infty \neq \emptyset$, já que ω não é holomorfa, como ω é fechada e holomorfa no aberto $N = M \setminus (\omega)_\infty$, ela define uma folheação de codimensão um em N , digamos \mathcal{F} . Veremos em seguida que, de fato, \mathcal{F} se estende a uma folheação em M .

Proposição 3.2.9 *A folheação \mathcal{F} se estende a uma folheação \mathcal{F}' em M tal que $(\omega)_\infty$ é invariante por \mathcal{F}' .*

veja [2].

Exemplo 3.2.7 *(Folheações logarítmicas)*

Sejam M uma variedade complexa de dimensão $n \geq 2$, f_1, \dots, f_r funções holomorfas não identicamente nulas sobre M e $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ números complexos não nulos. A 1-forma meromorfa $\theta = \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$ é chamada de **forma logarítmica**.

Observe que θ é fechada, de modo que induz uma folheação \mathcal{F} em M . A folheação \mathcal{F} é chamada de folheação logarítmica associada a θ . Note que \mathcal{F} pode ser definida também pela 1-forma holomorfa integrável $\omega = f_1 \dots f_r \theta$. A proposição (3.2.5) implica que

$$(\theta)_\infty = (f_1 \dots f_r = 0) = \cup_{j=1}^r (f_j = 0)$$

é invariante por \mathcal{F} .

3.3 Folheações em Espaços Projetivos

3.3.1 O Espaço Projetivo \mathbb{P}^n

Sejam $p, q \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ dizemos que $p \sim q$ se, e somente se, $p = \lambda q$ onde $\lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. O Espaço Projetivo Complexo de dimensão n é, o espaço quociente $\mathbb{P}^n = \frac{\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}$. Dado um ponto $p \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ a sua classe de equivalência de p será denotada por $[p]$.

Note que \mathbb{P}^n é obtido de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ por identificação de pontos p e q sobre a mesma reta complexa que passa pelo origem e que contém a p e q . Desta forma \mathbb{P}^n é interpretado geometricamente como o espaço de retas que passam pela origem de \mathbb{C}^{n+1} .

\mathbb{P}^n é um espaço topológico com a topologia quociente dada por la projeção canônica $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$.

A estrutura de variedade complexa em \mathbb{P}^n é dada pelo atlas de coordenadas homogêneas o qual é definido da seguinte forma.

Em \mathbb{P}^n , consideramos os abertos $E_j = \{[z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{P}^n : z_j \neq 0\}$, desta forma temos que $\mathbb{P}^n = \bigcup_{j=0}^n E_j$. Além disso, se $p = [z_0, \dots, z_n] \in E_j$ então temos que $z_j \neq 0$ de forma que $[p] = [(z_0/z_j, \dots, z_{j-1}/z_j, 1, z_{j+1}/z_j, \dots, z_n/z_j)]$, ou seja $[p]$ tem um único representante da forma $[w_0, \dots, w_{j-1}, 1, w_{j+1}, \dots, w_n]$, isto nos garante que a aplicação $\varphi_j : E_j \rightarrow \mathbb{C}^n$ definida por:

$$\varphi_j([z_0, \dots, z_n]) = (z_0/z_j, \dots, z_{j-1}/z_j, z_{j+1}/z_j, \dots, z_n/z_j)$$

é uma bijeção. Por outro lado, se $j \neq k$, não é difícil ver que $\varphi_j \circ \varphi_k^{-1}$ é um biholomorfismo de $\varphi_k(E_j \cap E_k)$ sobre $\varphi_j(E_j \cap E_k)$, pois suponha que $j = 1$ e $k = 0$ então

$$\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(z_1, \dots, z_n) = (1/z_1, z_2/z_1, \dots, z_n/z_1).$$

Isto mostra que $\{(\varphi_j, E_j) : j = 0, \dots, n\}$ é um atlas holomorfo de \mathbb{P}^n . Com esta estrutura \mathbb{P}^n é uma variedade complexa compacta e conexa de dimensão n .

Seja E_j um aberto de \mathbb{P}^n então $\mathbb{P}^n \setminus E_j$ é biholomorfo a \mathbb{P}^{n-1} ou seja \mathbb{P}^{n-1} pode ser mergulhado em \mathbb{P}^n .

De fato: Consideremos o conjunto $H_j = \{(z_1, \dots, z_n); z_j = 0\}$, podemos identificar naturalmente H_j com \mathbb{C}^n de aqui $H_j \setminus \{0\}$ é biholomorfo a $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ assim

$$\mathbb{P}^n \setminus E_j = \pi(H_j \setminus \{0\}) \simeq \pi(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) = \mathbb{P}^{n-1}$$

De um modo geral, se $1 \leq k \leq n$ podem ser obtidos mergulhos de \mathbb{P}^k em \mathbb{P}^n da seguinte forma. Fixemos um conjunto $\{v_0, \dots, v_k\}$ de $k+1$ vetores linearmente independentes em

\mathbb{C}^{n+1} , e consideremos o subespaço $k + 1$ dimensional gerado por eles $V = \langle v_0, \dots, v_k \rangle$. Definamos agora a aplicação $\phi_V : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^n$, dada por

$$\phi_V([z_0, \dots, z_k]) = \pi\left(\sum_{j=0}^k z_j \cdot v_j\right)$$

ϕ_V esta bem definida, e de fato é um mergulho holomorfo. A sua imagem, $[V] = \phi_V(\mathbb{P}^k)$ é o quociente de $V \setminus \{0\}$ por a relação \sim .

Sendo ϕ_V um mergulho então $[V]$ é uma subvariedade de \mathbb{P}^n chamada de k -plano de \mathbb{P}^n . No caso em que V tem dimensão n , $[V]$ é um $(n - 1)$ -plano, ou hiperplano mergulhado e o aberto $U = \mathbb{P}^n \setminus [V]$ é biholomorfo a \mathbb{C}^n . Chamamos $[V]$ de *hiperplano do infinito de U* . Por outro lado, se V tem dimensão dois, diremos que $[V]$ é uma *reta projetiva*, ou simplesmente uma *reta*.

3.3.2 Expressão em Coordenadas Homogêneas

O objetivo desta seção é ver que as folheações de codimensão um (respectivamente, dimensão um) nos espaços projetivos complexos \mathbb{P}^n , $n \geq 2$, podem ser definidas por 1-formas integráveis (respectivamente campos de vetores) meromorfas (respectivamente, meromorfos). Veremos também como elas podem ser definidas em coordenadas homogêneas.

Lembremos que se M é uma variedade complexa de dimensão $n \geq 2$, uma 1-forma meromorfa ω em M é integrável se $\omega \wedge d\omega = 0$. Pelo teorema de Frobenius, ω define uma folheação holomorfa \mathcal{F} de codimensão um em $M \setminus (\omega)_\infty$ onde $(\omega)_\infty$ é o divisor de polos de ω .

Sabemos também que o conjunto singular da folheação coincide com o conjunto de zeros de ω , ou seja $Sing(\mathcal{F}) = \{p \in M; \omega(p) = 0\}$.

Definição 3.3.1 Dizemos que uma folheação de codimensão um (resp. dimensão um) \mathcal{F} numa variedade M pode ser definida por 1-formas (respectivamente, campos) meromorfas, se para todo $p \in M$ existe uma 1-forma meromorfa integrável ω (respectivamente, um campo de vetores meromorfo X) em M tal que $p \notin (\omega)_\infty$ (respectivamente, $p \notin (X)_\infty$), e ω (resp. X) define \mathcal{F} em $M \setminus (\omega)_\infty$ (respectivamente, $M \setminus (X)_\infty$).

Exemplo 3.3.1 Seja $\omega = \sum_{j=1}^n f_j(z) dz_j \neq 0$ uma 1-forma integrável em \mathbb{C}^n , $n \geq 2$ onde f_1, \dots, f_n são polinômios. Vamos supor também que $cod(Sing(\omega)) \geq 2$, o que corresponde ao fato de f_1, \dots, f_n não terem fator comum em sua decomposição em fatores irredutíveis.

Seja \mathcal{F} a folheação definida por ω em \mathbb{C}^n , podemos estender \mathcal{F} a \mathbb{P}^n como se segue. Consideremos \mathbb{C}^n como a carta afim $E_0 = \{[z] = [z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{P}^n; z_0 = 1\}$. O hiperplano do infinito desta carta é dado por $H = \{[z] \in \mathbb{P}^n; z_0 = 0\}$. Fixemos um ponto $[p] \in H$ e suponha que $p_n \neq 0$ então $[p] \in E_n = \{[x_1, \dots, x_n, 1]; x_j \in \mathbb{C}, j = 1, 2, \dots, n\}$. A mudança de carta $\phi = \varphi_0 \circ \varphi_n^{-1} : \varphi_n(E_n \cap E_0) \rightarrow \varphi_0(E_n \cap E_0)$ é dada por

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = (x_2/x_1, \dots, x_n/x_1, 1/x_1).$$

Como $\varphi_n(E_n \cap E_0) = \{(x_1, \dots, x_n); x_1 \neq 0\}$ então

$$\phi^*(\omega) = f_n(x/x_1, 1/x_1)d(1/x_1) + \sum_{j=1}^{n-1} f_j(x/x_1, 1/x_1)d(x_{j+1}/x_1)$$

é uma 1-forma holomorfa integrável em $\{(x_1, \dots, x_n); x_1 \neq 0\}$. Sendo os f_j 's polinômios, a 1-forma acima pode ser vista como uma 1-forma meromorfa em \mathbb{C}^n , sendo que o seu conjunto de polos está dada por $(\phi^*(\omega))_\infty = (x_1 = 0)$. Observamos que a multiplicidade de x_1 como polo de $\phi^*(\omega)$ é $k \geq 2$. Assim podemos então escrever $\phi^*(\omega) = \omega_n/x_1^k$ onde ω_n é 1-forma em \mathbb{C}^n com coeficientes polinomiais, a forma ω_n é integrável, como se pode verificar. Identificando agora E_n com \mathbb{C}^n temos que ω_n define uma folheação em E_n que coincide com a folheação \mathcal{F} em $(E_n \cap E_0)$ definida por ω ou seja ω_n define uma folheação que estende a folheação \mathcal{F} a $H \cap E_n$. Procedendo de maneira análoga para os outros sistemas afins $E_j = \{[z]; z_j = 1\}$ com $j = 2, \dots, n-1$, obtemos 1-formas polinomiais integráveis ω_j cujas folheações associadas, estendem a folheação \mathcal{F} a uma folheação \mathcal{G} em \mathbb{P}^n .

Um argumento análogo, permite provar que folheações definidas por campos de vetores polinomiais em \mathbb{C}^n se estendem a folheações de dimensão um em \mathbb{P}^n .

Seja \mathcal{G} a folheação de \mathbb{P}^n definida pela 1-forma polinomial integrável $\omega = \sum_{j=1}^n f_j(y)dy_j$ na carta afim $E_0 \simeq \mathbb{C}^n$. Seja $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$ a projeção canônica deste quociente ou seja $\pi(z) = [z]$. Na carta E_0 a projeção pode ser expressa como

$$\pi(z) = (\varphi_0 \circ \pi)(z_0, \dots, z_n) = (z_1/z_0, \dots, z_n/z_0) = (w/z_0)$$

onde $w = (z_1, \dots, z_n)$. De aqui

$$\pi^*(\omega) = 1/z_0^2 \sum_{j=1}^n f_j(w/z_0)(z_0 dz_j - z_j dz_0).$$

É uma 1-forma holomorfa integrável em $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{z_0 = 0\}$. Como os $f_{j's}$ são polinômios $\pi^*(\omega)$ pode ser vista também como 1-forma meromorfa em \mathbb{C}^{n+1} com polos no conjunto $\{z_0 = 0\}$, assim multiplicando $\pi^*(\omega)$ por uma potência apropriada de z_0 obtemos uma 1-forma polinomial em \mathbb{C}^{n+1} .

$$\Omega = z_0^k \pi^*(\omega) = \sum_{j=0}^n F_j(z) dz_j$$

satisfazendo às seguintes propriedades:

- i) Ω é integrável e define a folheação $\pi^*(\mathcal{G})$.
- ii) Os polinômios F_j são homogêneos do mesmo grau, digamos $k \geq 1$.
- ii) Os polinômios F_j não têm fator comum.
- iv) A forma Ω satisfaz à relação $\iota_R(\Omega) = 0$, onde $R = \sum_{j=0}^n z_j \partial / \partial z_j$ é o campo radial de \mathbb{C}^{n+1} . Esta relação é equivalente a

$$\sum_{j=0}^n z_j F_j(z) \equiv 0.$$

A relação em iv) é consequência de fato que $\iota_R(z_0 dz_j - z_j dz_0) = 0$ para todo $j = 1, \dots, n$. Observe que $Sing(\pi^*(\mathcal{G})) = (F_1 = \dots = F_n = 0)$ e portanto as componentes irredutíveis de $Sing(\pi^*(\mathcal{G}))$ têm codimensão ≥ 2 , isto por iii). A relação em iv) é equivalente ao fato de que uma reta ℓ de \mathbb{C}^{n+1} que passa pela origem, ou está contida numa folha de $\pi^*(\mathcal{G})$ ou está contida em $Sing(\pi^*(\mathcal{G}))$. Em particular as folhas de $\pi^*(\mathcal{G})$ são cones com vértice na origem $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$.

Notamos também que $\omega = \Omega|_{\{z_0=1\}}$, ou seja restringindo Ω ao hiperplano $\{z_0 = 1\}$ recuperamos a 1-forma ω original.

De maneira análoga, a restrição de $\Omega|_{\{z_j=1\}}$ define uma 1-forma polinomial integrável na carta afim $E_j = \{z_j = 1\}$, que coincide a menos de um fator constante com a forma ω_j obtida no exemplo anterior. Diremos que a forma Ω representa \mathcal{G} em **coordenadas homogêneas**. Devido a iii) temos que duas formas que representam \mathcal{G} em coordenadas homogêneas diferem por um fator constante não nulo.

Observação 3.3.1 *Seja Ω uma 1-forma em \mathbb{C}^{n+1} satisfazendo i), ii), iii) e iv). Se os coeficientes F_j de Ω são homogêneos de grau k então*

$$\iota_R(d\Omega) = (k + 1)\Omega.$$

Em particular obtemos o seguinte fato $d\Omega = 0$ se, e somente se, $\Omega = 0$

Esta relação pode ser verificada considerando-se a derivada de Lie de Ω na direção do campo radial.

Finalmente temos o teorema seguinte que pode ser visto em [4].

Teorema 3.3.1 *Toda folheação de codimensão um (respetivamente, dimensão um) em \mathbb{P}^n pode ser definida por 1- formas (respetivamente, campos) polinomias em cartas afins.*

Capítulo 4

Integrabilidade Algébrica de r-formas diferenciais Polinomiais

Este capítulo está dedicado ao estudo do artigo *Algebraic integrability of polynomial differential r-forms*, Journal of Pure and Applied Algebra (Print), v. 215, p.2290-2294, 2011. No qual M. Corrêa Jr, L.G. Maza e M.G. Soares demonstram um teorema de integrabilidade de tipo Darboux-Jouanolou para r -formas diferenciais polinomiais, generalizando resultados análogos de Jouanolou e Ghys.

Nosso principal resultado de este capítulo está dado pelo teorema seguinte.

Teorema 4.0.1 *Seja \mathbb{K} um corpo algebricamente fechado e ω uma r -forma polinomial de grau d em \mathbb{K}^n . Se ω admite*

$$\binom{d-1+n}{n} \cdot \binom{n}{r+1} + r + 1$$

hipersuperfícies algébricas irredutíveis invariantes, então ω admite uma integral primeira racional.

Corolário 4.0.1 *(Jouanolou) Seja ω uma 1-forma polinomial de grau d em \mathbb{K}^n . Se ω admite*

$$\binom{d-1+n}{n} \cdot \binom{n}{2} + 2$$

hipersuperfícies algébricas irredutíveis invariantes, então ω admite uma integral primeira racional.

Corolário 4.0.2 *Seja $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou \mathbb{R} e X um campo vetorial polinomial de grau d em \mathbb{K}^n . Se X admite*

$$\binom{d-1+n}{n} + n$$

hipersuperfícies algébricas irredutíveis invariantes, então X admite uma integral primeira racional.

4.1 r-formas polinomiais em \mathbb{K}^n

Seja \mathbb{K} um corpo de característica zero. Denotemos por $\mathbb{K}[z] := \mathbb{K}[z_1, \dots, z_n]$ o anel dos polinômios em n variáveis com coeficientes em \mathbb{K} e por $\mathbb{K}(z) := \mathbb{K}(z_1, \dots, z_n)$ a \mathbb{K} -álgebra das funções racionais, denotemos também por $\Omega^r(n)$ a álgebra exterior das r -formas polinomiais em \mathbb{K}^n ou seja

$$\Omega^r(n) := \Omega^r(\mathbb{K}^n) \otimes \mathbb{K}[z].$$

Seja $\mathbb{K}_d[z]$ o subespaço vetorial de $\mathbb{K}[z]$ formado por todos os polinômios de grau $\leq d$, se denotamos por $\Omega_d^r(n)$ o \mathbb{K} -espaço vetorial das r -formas polinomiais de grau $\leq d$ em \mathbb{K}^n ou seja

$$\Omega_d^r(n) := \Omega^r(\mathbb{K}^n) \otimes \mathbb{K}_d[z].$$

Então, podemos ver que

$$\Omega^r(n) = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} \Omega_d^r(n)$$

ou seja a álgebra $\Omega^r(n)$ é naturalmente graduada.

Notamos também que

$$\dim_{\mathbb{K}}(\Omega_d^r(n)) = \binom{d+n}{n} \binom{n}{r}.$$

Dado $\omega \in \Omega^r(n)$, temos que

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} P_{i_1 i_2 \dots i_r} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_r}$$

onde $P_{i_1 i_2 \dots i_r} \in \mathbb{K}[z]$.

Vamos definir o grau da r -forma ω como sendo

$$\text{grau}(\omega) = \max \{ \text{grau}(P_{i_1 i_2 \dots i_r}) ; 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n \}.$$

Seja $\omega \in \Omega^r(n)$. Denotemos por $\xi^*(\omega)$ o $\mathbb{K}(z)$ -subespaço de $\Omega^1(n) \otimes \mathbb{K}(z)$ dado por

$$\xi^*(\omega) = \{ \eta \in \Omega^1(n) \otimes \mathbb{K}(z) : \omega \wedge \eta = 0 \},$$

onde $\Omega^1(n) \otimes \mathbb{K}(z)$ é a álgebra das 1-formas racionais em \mathbb{K}^n .

lema 4.1 *Seja $\omega \in \Omega^r(n)$. Se existem r elementos $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r \in \xi^*(\omega)$ linearmente independentes sobre $\mathbb{K}(z)$ então existe uma função racional $R \in \mathbb{K}(z)$ tal que $\omega = R\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_r$.*

Prova. Sendo $\{\eta_1, \dots, \eta_r\}$ linearmente independentes sobre $\mathbb{K}(z)$, podemos estender $\{\eta_1, \dots, \eta_r\}$ a uma base $\{\eta_1, \dots, \eta_r, \eta_{r+1}, \dots, \eta_M\}$ de $\Omega^1(n) \otimes \mathbb{K}(z)$.

Denotemos por $I = \{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq M\}$ e por $J = \{1 \leq j_1 < \dots < j_r < j_{r+1} \leq M\}$, então pela proposição (1.1.5) temos que $\{\eta_I\}_I$ e $\{\eta_J\}_J$ é uma base de $\Omega^r(n) \otimes \mathbb{K}(z)$ e $\Omega^{r+1}(n) \otimes \mathbb{K}(z)$ respectivamente, onde $\eta_I = \eta_{i_1} \wedge \dots \wedge \eta_{i_r}$ e $\eta_J = \eta_{j_1} \wedge \dots \wedge \eta_{j_r} \wedge \eta_{j_{r+1}}$. Como toda r-forma polinômial é também uma r-forma racional então

$$\omega = \sum_I R_I \eta_I$$

com $R_I \in \mathbb{K}(z)$.

Temos por hipóteses que $\eta_1, \dots, \eta_r \in \xi^*$ então

$$0 = \omega \wedge \eta_1 = \sum_I R_I \eta_I \wedge \eta_1 = \sum_{1 \notin I} R_I \eta_I \wedge \eta_1 = \sum_{1 \notin I} R_I (-1)^r \eta_1 \wedge \eta_I.$$

Observemos também que para todo I tal que $1 \notin I$ tem-se, $\eta_1 \wedge \eta_I \in \{\eta_J\}_J$. Isto implica que $R_I = 0$ para todo I tal que $1 \notin I$, pois $\{\eta_J\}_J$ é linearmente independente sobre $\mathbb{K}(z)$.

Assim temos

$$\omega = \sum_{1 \in I} R_I \eta_I.$$

Multiplicando agora ω por η_2 temos

$$\begin{aligned} 0 = \omega \wedge \eta_2 &= \sum_{1 \in I} R_I \eta_I \wedge \eta_2 = \sum_{\substack{1 \in I \\ 2 \notin I}} R_I \eta_I \wedge \eta_2 = \sum_{\substack{1 \in I \\ 2 \notin I}} R_I \eta_1 \wedge \eta_{i_2} \wedge \dots \wedge \eta_{i_r} \wedge \eta_2 \\ &= \sum_{\substack{1 \in I \\ 2 \notin I}} R_I (-1)^{r-1} \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_{i_2} \wedge \dots \wedge \eta_{i_r}. \end{aligned}$$

Como no caso anterior observamos que $\eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_{i_2} \wedge \dots \wedge \eta_{i_r} \in \{\eta_J\}_J$, então temos que $R_I = 0$ para todo I tal que $1 \in I$ e $2 \notin I$. Assim

$$\omega = \sum_{1,2 \in I} R_I \eta_I.$$

De forma análoga, multiplicando por η_3, \dots, η_r temos finalmente que

$$\omega = \sum_{1,2,\dots,r \in I} R_I \eta_I$$

ou seja

$$\omega = R_{12\dots r} \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_r. \quad \square$$

lema 4.2 *Sejam f_1, f_2, \dots, f_s polinômios linearmente independentes sobre \mathbb{K} , irredutíveis em $\mathbb{K}[z]$ e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in \mathbb{K}$ tais que $\sum_{j=1}^s \lambda_j \frac{df_j}{f_j} = 0$. Então $\lambda_1 = \dots = \lambda_s = 0$.*

Prova. Para cada $i = \{1, 2, \dots, s\}$, definamos $V_i := \{f_i = 0\}$. Pelo teorema dos zeros de Hilbert (**Nullstellensatz**) temos que $(V_j \setminus \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq s \\ i \neq j}} V_i) \neq \emptyset$ para todo $j = 1, 2, \dots, s$, desta forma podemos escolher para cada j um $p_j \in V_j \setminus \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq s \\ i \neq j}} V_i$. Consideremos agora uma reta afim L_j passando por p_j não contida em V_j e seja $\alpha : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}^n$ uma parametrização de L_j com $\alpha(0) = p_j$. Colocando $g_i = f_i \circ \alpha$, $i = 1, 2, \dots, s$ temos:

$g_j(0) = 0$ e $g_i(0) \neq 0$ para todo $i \neq j$, isto implica que a função $\frac{g'_i}{g_i}$ é regular em 0 e $\frac{g'_j}{g_j}$ tem um polo simples em 0, com $\text{Res}(\frac{g'_j}{g_j}, 0) = \rho_j$, onde ρ_j é a multiplicidade de 0 como raiz de g_j . Como $\sum_{j=1}^s \lambda_j \frac{df_j}{f_j} = 0$ então

$$\lambda_1 \frac{g'_1}{g_1} + \dots + \lambda_j \frac{g'_j}{g_j} + \dots + \lambda_s \frac{g'_s}{g_s} = 0.$$

Tomando agora resíduos em 0 nesta última relação temos

$$\lambda_1(0) + \dots + \lambda_j \rho_j + \dots + \lambda_s(0) = 0.$$

Sendo $\rho_j \neq 0$ temos finalmente que $\lambda_j = 0$ para todo $j = 1, 2, \dots, s$. □

4.2 Hipersuperfícies Invariantes e Integrais Primeiras Racionais

Definição 4.2.1 *Se $V = \{f = 0\}$ é uma hipersuperfície algébrica em \mathbb{K}^n e $\omega \in \Omega^r(n)$.*

Dizemos que V é ω -invariante se $(\omega \wedge df)|_V = 0$.

Observação 4.2.1 *Seja $S(\omega) = \{x \in \mathbb{K}^n : \omega(x) = 0\}$ o conjunto singular da forma ω .*

Suponha que $\omega = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r$ onde $\omega_i \in \Omega^1(n)$, então a distribuição definida no aberto $U := \mathbb{K}^n \setminus S(\omega)$ por

$$z \mapsto \ker(\omega(z))$$

tem codimensão r , onde $\ker(\omega(z)) = \{v \in \mathbb{K}^n : \iota_v(\omega(z)) = 0\}$.

Com efeito Sendo $\omega = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r$ então $\omega_1, \dots, \omega_r$ são linearmente independentes no aberto U . Assim a observação segue-se da afirmação seguinte parte *i*).

Afirmção 4.2.1 *i)* $\ker(\omega(z)) = \bigcap_{i=1}^r \ker(\omega_i(z))$.

ii) Se V é ω -invariante então $\ker(\omega(z)) \subset T_z V_{reg}$, onde $V_{reg} = V \setminus \text{Sing}(V)$.

Com efeito Parte *i*)

Seja $v \in \bigcap_{i=1}^r \ker(\omega_i(z))$ então $\omega_i(z)v = 0$, para todo $i = 1, 2, \dots, r$. Pela proposição (1.1.6) parte *iv*) temos

$$\begin{aligned} \iota_v(\omega(z)) &= \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \iota_v(\omega_i(z)) \wedge \omega_1 \dots \wedge \widehat{\omega}_i \wedge \dots \wedge \omega_r \\ &= \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \omega_i(z)v \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\omega}_i \wedge \dots \wedge \omega_r \\ &= 0 \end{aligned}$$

por tanto $v \in \ker(\omega(z))$.

Por outro lado se $v \in \ker(\omega(z))$ então $\iota_v(\omega(z)) = 0$. Seja $i = 1, 2, \dots, r$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= \iota_v(\omega(z) \wedge \omega_i(z)) = (\iota_v(\omega(z))) \wedge \omega_i(z) + (-1)^r \omega(z) \wedge \iota_v(\omega_i(z)) \\ &= (-1)^r \omega(z) \wedge \iota_v(\omega_i(z)) = (-1)^r \iota_v(\omega_i(z)) \omega(z) \end{aligned}$$

desde que $\omega(z) \neq 0$ temos $\iota_v(\omega_i(z)) = 0$ ou seja $\omega_i(z)v = 0$, para todo $i = 1, 2, \dots, r$.

Assim $v \in \bigcap_{i=1}^r \ker \omega_i(z)$.

Parte *ii*)

Seja $z \in V_{reg}$ e $v \in \ker(\omega(z))$, como V é ω -invariante temos que

$$0 = \iota_v(\omega(z) \wedge df(z)) = \iota_v(\omega(z)) \wedge df(z) + (-1)^r \omega(z) \wedge \iota_v(df(z)) = (-1)^r \iota_v(df(z)) \omega(z),$$

sendo $\omega(z) \neq 0$ temos então $\iota_v(df(z)) = 0$ ou seja $df(z)v = 0$. Assim $v \in \ker(df(z))$ e como $\ker(df(z)) = T_z V_{reg}$ temos finalmente que $\ker(\omega(z)) \subset T_z V_{reg}$.

lema 4.3 *Seja $V = \{f = 0\}$ uma hipersuperfície algébrica em \mathbb{K}^n .*

V é ω -invariante se, e somente se, existe $\theta_f \in \Omega_{d-1}^{r+1}(n)$ tal que $\omega \wedge df = f\theta_f$, onde $d = \text{grau}(\omega)$.

Prova. Se existe $\theta_f \in \Omega_{d-1}^{r+1}(n)$ tal que $\omega \wedge df = f\theta_f$, então $(\omega \wedge df)|_V = (f\theta_f)|_V = 0$ é dizer V é ω -invariante.

Suponha agora que V seja ω -invariante, vamos considerar dois casos .

Caso I : f irredutível

$$\begin{aligned} \omega \wedge df &= (\sum_I P_I dz_I) \wedge (\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} [(\sum_I P_I dz_I) \wedge dz_j] \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} [\sum_I P_I dz_I \wedge dz_j] = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} [\sum_{j \notin I} P_I dz_I \wedge dz_j] \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{j \notin I} P_I \frac{\partial f}{\partial z_j} (d_I \wedge dz_j).$$

Como o grau $P_I \leq d$ então $\text{grau}(P_I \frac{\partial f}{\partial z_j}) = \text{grau}(P_I) + \text{grau}(\frac{\partial f}{\partial z_j}) \leq d + \text{grau}(f) - 1$.

Assim $\omega \wedge df \in \Omega_{d+\text{grau}(f)-1}^{r+1}(n)$, ou seja

$$\omega \wedge df = \sum_J Q_J dz_J$$

onde $Q_J \in \mathbb{K}_{d+\text{grau}(f)-1}[z]$.

Sendo V ω -invariante então $(Q_J)|_V = 0$ para todo J , ou seja

$$V(\langle f \rangle) = V(f) \subset V(Q_J) = V(\langle Q_J \rangle)$$

de aqui

$$I(V(\langle f \rangle)) \supset I(V(\langle Q_J \rangle)).$$

Assim pelo teorema de Hilbert (Nullstellensatz) temos

$$\sqrt{\langle f \rangle} \supset \sqrt{\langle Q_J \rangle}.$$

Sendo f irredutível então

$$\langle f \rangle = \sqrt{\langle f \rangle} \supset \sqrt{\langle Q_J \rangle}.$$

Ou seja para todo J tem-se

$$Q_J = H_J f.$$

Como $\text{grau}(Q_J) \leq d + \text{grau}(f) - 1$, então $\text{grau}(H_J) \leq d - 1$, ou seja

$H_J \in \mathbb{K}_{d-1}[z]$. Finalmente

$$\omega \wedge df = \sum_J Q_J dz_J = \sum_J H_J f dz_J = f \left(\sum_J H_J dz_J \right) = f \theta_f$$

onde $\theta_f \in \Omega_{d-1}^{r+1}(n)$.

CASO II : f qualquer

Se $f = f_1^{\alpha_1} \cdot f_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot f_k^{\alpha_k}$ é a decomposição de f em fatores irredutíveis, então temos que

$$df = \alpha_1 f_1^{\alpha_1-1} \prod_{i \neq 1}^k f_i df_1 + \alpha_2 f_2^{\alpha_2-1} \prod_{i \neq 2}^k f_i df_2 + \dots + \alpha_k f_k^{\alpha_k-1} \prod_{i=1}^{k-1} f_i df_k.$$

Assim

$$\frac{df}{f} = \alpha_1 \frac{df_1}{f_1} + \alpha_2 \frac{df_2}{f_2} + \dots + \alpha_k \frac{df_k}{f_k}$$

] ou seja

$$\omega \wedge \frac{df}{f} = \sum_{i=1}^k \alpha_i (\omega \wedge \frac{df_i}{f_i}). \quad (1)$$

Pela ω -invariância de V temos que $(\omega \wedge df)|_V = 0$. Assim aplicando o teorema da divisão de De Rham existe uma $(r-1)$ -forma holomorfa β em V tal que $\omega = df \wedge \beta$ em V . Como $V = \bigcup_{i=1}^k V_i$ temos

$$(\omega \wedge df_i)|_{V_i} = ((df \wedge \beta) \wedge df_i)|_{V_i} = (((-1)^{r-1} \beta \wedge df) \wedge df_i)|_{V_i} = ((-1)^{r-1} \beta \wedge (df \wedge df_i))|_{V_i}$$

Por outro lado

$$(df \wedge df_i)|_{V_i} = [\alpha_1 f_1^{\alpha_1-1} \prod_{j \neq 1}^k f_j df_j \wedge df_i + \alpha_2 f_2^{\alpha_2-1} \prod_{j \neq 2}^k f_j df_j \wedge df_i + \dots + \alpha_k f_k^{\alpha_k-1} \prod_{j=1}^{k-1} f_j df_j \wedge df_i]|_{V_i} = 0.$$

Isto mostra que $(\omega \wedge df_i)|_{V_i} = 0$, isto é $V_i = \{f_i = 0\}$ é ω -invariante para todo $i = 1, 2, \dots, k$.

Aplicando agora o caso I as f_i , temos que existem $r+1$ -formas $\theta_i \in \Omega_{d-1}^{r+1}(n)$ tais que

$$\omega \wedge df_i = f_i \theta_i \quad (2)$$

para todo $i = 1, 2, \dots, k$. Finalmente usando a equação (1) e (2) temos

$$\omega \wedge \frac{df}{f} = \sum_{i=1}^k \alpha_i (\omega \wedge \frac{df_i}{f_i}) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \theta_i.$$

Isto mostra que

$$\omega \wedge df = f \theta_f,$$

onde $\theta_f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \theta_i \in \Omega_{d-1}^{r+1}(n)$. □

Definição 4.2.2 *Seja $R = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(z)$ uma função racional, consideremos o pencil de hipersuperfícies $\{P - \lambda Q = 0\}_{\lambda \in \mathbb{K}}$ induzido por R . Dizemos que R é uma integral primeira racional de ω se $V_\lambda := \{P - \lambda Q = 0\}$ é ω -invariante para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.*

lema 4.4 *Seja $R \in \mathbb{K}(z)$ uma função racional. Então R é uma integral primeira racional de ω se, e somente se, $dR \in \xi^*(\omega)$.*

Prova Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$, chamemos de $f_\lambda = P - \lambda Q$. Suponha que R seja uma integral primeira racional de ω , então pelo Lema 4.3 temos

$$\omega \wedge df_\lambda = f_\lambda \theta_\lambda \quad (3)$$

onde $\theta_\lambda \in \Omega_{d-1}^{r+1}(n)$. Por outro lado

$$dR = d(R - \lambda) = d\left(\frac{P}{Q} - \lambda\right) = d\left(\frac{P - \lambda Q}{Q}\right) = d\left(\frac{f_\lambda}{Q}\right) = \frac{Qdf_\lambda - f_\lambda dQ}{Q^2}. \quad (4)$$

Usando as equações (3) e (4) temos

$$\begin{aligned} \omega \wedge dR &= \omega \wedge \left(\frac{Qdf_\lambda - f_\lambda dQ}{Q^2}\right) = \frac{1}{Q}\omega \wedge df_\lambda - \frac{f_\lambda}{Q^2}\omega \wedge dQ \\ &= \frac{f_\lambda}{Q}\theta_\lambda - \frac{f_\lambda}{Q^2}\omega \wedge dQ = f_\lambda \left(\frac{1}{Q}\theta_\lambda - \frac{1}{Q^2}\omega \wedge dQ\right), \end{aligned}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

Esta última equação válida para todo λ em \mathbb{K} mostra que

$$\omega \wedge dR = 0$$

ou seja $dR \in \xi^*(\Omega)$. Suponha agora que $dR \in \xi^*(\Omega)$. Usando a equação (4) temos

$$0 = \omega \wedge dR = \omega \wedge \left(\frac{Qdf_\lambda - f_\lambda dQ}{Q^2}\right)$$

de aqui

$$0 = \omega \wedge (Qdf_\lambda - f_\lambda dQ)$$

isto implica que

$$\omega \wedge \frac{dQ}{Q} = \omega \wedge \frac{df_\lambda}{f_\lambda}. \quad (5)$$

Sejam Q_J e H_J^λ os coeficientes polinomiais das $r+1$ -formas $\omega \wedge dQ$ e $\omega \wedge df_\lambda$.

Pela equação (5) temos

$$f_\lambda Q_J = Q H_J^\lambda$$

para todo J , ou seja

$$(P - \lambda Q)Q_J = Q H_J^\lambda.$$

De aqui

$$PQ_J = Q(H_J^\lambda + \lambda Q_J)$$

assim Q/PQ_J para todo J .

Sendo $MDC(P, Q) = 1$ temos Q/Q_J para todo J .

Desta forma

$$\omega \wedge \frac{dQ}{Q} = \omega \wedge \frac{df_\lambda}{f_\lambda} \in \Omega_{d-1}^{r+1}(n)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

Aplicando agora o lema 4.3, temos finalmente $V_\lambda = \{f_\lambda = 0\}$ é ω -invariante para todo

$\lambda \in \mathbb{K}$, ou seja R é uma integral primeira racional para ω . □

4.3 Prova do Teorema (4.0.1)

Seja $N = \binom{d-1+n}{n} \cdot \binom{n}{r+1}$ e $f_1, \dots, f_N, \dots, f_{N+r}, f_{N+r+1}$ os polinômios que definem as hipersuperfícies algébricas irredutíveis invariantes.

Para cada $i = 1, \dots, N+r, N+r+1$, por el lema 4.3 existem $r+1$ -formas $\theta_{f_i} \in \Omega_{d-1}^{r+1}(n)$ tais que

$$\omega \wedge df_i = f_i \theta_{f_i}. \quad (6)$$

Sendo $\dim_{\mathbb{K}}(\Omega_{d-1}^{r+1}(n)) = \binom{d-1+n}{n} \cdot \binom{n}{r+1} = N$, temos que para cada $k = 1, 2, \dots, r, r+1$ o conjunto $\{\theta_{f_k}, \theta_{f_{k+1}}, \dots, \theta_{f_{k+N}}\}$ é linearmente dependente sobre \mathbb{K} , isto quer dizer que existem $\lambda_k^k, \lambda_{k+1}^k, \dots, \lambda_{k+N}^k$ em \mathbb{K} não todos nulos tais que

$$\sum_{j=k}^{k+N} \lambda_j^k \theta_{f_j} = 0. \quad (7)$$

Podemos supor sem perda de generalidade $\lambda_k^k \neq 0$ para $k = 1, 2, \dots, r-1$, $\lambda_{N+r+1}^{r+1} \neq 0$ e $\lambda_{N+r+1}^{r+1} \neq 0$.

Definamos agora para cada $k = 1, 2, \dots, r, r+1$ as 1-formas racionais dadas por

$$\eta_k = \sum_{j=k}^{k+N} \lambda_j^k \frac{df_j}{f_j}.$$

Pelas equações (6) e (7) temos

$$\omega \wedge \eta_k = \sum_{j=k}^{k+N} \lambda_j^k \omega \wedge \frac{df_j}{f_j} = \sum_{j=k}^{k+N} \lambda_j^k \frac{f_j \theta_{f_j}}{f_j} = \sum_{j=k}^{k+N} \lambda_j^k \theta_{f_j} = 0.$$

Assim $\eta_k \in \xi^*(\omega)$ para todo $k = 1, 2, \dots, r, r+1$.

Seja α_1 e α_2 as r -formas racionais dadas por

$$\alpha_1 = \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \dots \wedge \eta_r \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \eta_2 \wedge \eta_3 \wedge \dots \wedge \eta_{r+1}.$$

Temos as seguintes possibilidades:

CASO I $\alpha_1 \neq 0$ e $\alpha_2 \neq 0$

CASO II $\alpha_1 = 0$ ou $\alpha_2 = 0$

-Provamos primeiro o caso I

Sendo $\alpha_1 \neq 0$ então $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r\}$ é linearmente independente sobre $\mathbb{K}(z)$. Assim pelo lema 4.1 existe $R_1 \in \mathbb{K}(z)$ tal que

$$\omega = R_1 \alpha_1. \quad (8)$$

Similarmente para α_2 , existe $R_2 \in \mathbb{K}(z)$ tal que

$$\omega = R_2 \alpha_2. \quad (9)$$

Pelas equações (8) e (9) temos

$$\alpha_2 = \frac{R_1}{R_2} \alpha_1. \quad (10)$$

Como as η_k são fechadas para todo $k = 1, 2, \dots, r + 1$, temos que α_1 e α_2 são fechadas. Assim derivando a equação (10) temos

$$0 = d\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \wedge \alpha_1$$

logo escrevendo $R = \frac{R_1}{R_2}$ temos

$$\omega \wedge dR = \omega \wedge d\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = (R_1 \alpha_1) \wedge d\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = 0.$$

Ou seja, ou R é uma integral primeira racional de ω ou R é constante.

Suponha que $\frac{R_1}{R_2} = \text{cte} = c \in \mathbb{K}$, então da equação (10) temos que

$$(\alpha_1)_\infty = (\alpha_2)_\infty.$$

Usando o teorema dos zeros de Hilbert (Nullstellensatz) e como as f_i são irredutíveis temos

$$(V_{N+r+1} \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq N+r} V_i) \neq \emptyset. \quad (11)$$

Observemos que

$$(\alpha_1)_\infty = \bigcup_{i=1}^{N+r} V_i \text{ e } (\alpha_2)_\infty = \bigcup_{i=2}^{N+r+1} V_i,$$

então pela equação (11) temos

$$(\alpha_1)_\infty \neq (\alpha_2)_\infty.$$

Isto é uma contradição ao afirmado anteriormente, de esta forma $R = \frac{R_1}{R_2} \neq \text{cte}$. Assim $R = \frac{R_1}{R_2}$ é uma integral Primeira Racional para ω .

-Provamos agora o caso II

Suponha que $\alpha_1 = 0$ então $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r\}$ é linearmente dependente sobre $\mathbb{K}(z)$. Assim seja $s = \max\{t \in \mathbb{N} : \eta_{i_1}, \dots, \eta_{i_t} \text{ é L. independente sobre } \mathbb{K}(z)\}$, temos claramente $s < r$. Podemos supor também que $\{\eta_{i_1}, \dots, \eta_{i_s}\} = \{\eta_1, \dots, \eta_s\}$, então da definição de s temos que $\{\eta_1, \dots, \eta_s, \eta_r\}$ é linearmente dependente sobre $\mathbb{K}(z)$, ou seja

$$\eta_r = \sum_{i=1}^s R_i \eta_i \quad (12)$$

onde $R_i \in \mathbb{K}(z)$, para todo $i = 1, \dots, s$. Derivando a equação (12) temos

$$0 = \sum_{i=1}^s dR_i \wedge \eta_i. \quad (13)$$

Para cada $j = 1, 2, \dots, s$ multipliquemos (13) por $\eta_1 \wedge \dots \wedge \hat{\eta}_j \wedge \dots \wedge \eta_s$ então

$$0 = \sum_{i=1}^s dR_i \wedge \eta_i \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \hat{\eta}_j \wedge \dots \wedge \eta_s = (-1)^{j+1} dR_j \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_j \wedge \dots \wedge \eta_s.$$

De aqui $dR_j \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_j \wedge \dots \wedge \eta_s = 0$ para cada $j = 1, \dots, s$. Isto implica que $\{dR_j, \eta_1, \dots, \eta_j, \dots, \eta_s\}$ é linearmente dependente sobre $\mathbb{K}(z)$. Sendo $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s\}$ linearmente independente, então para cada $j = 1, \dots, s$ temos

$$dR_j = \sum_{i=1}^s g_i \eta_i, \quad (14)$$

onde $g_i \in \mathbb{K}(z)$. Sabemos também que os $\eta_k \in \xi^*(\omega)$, para todo $k = 1, 2, \dots, r, r+1$. Assim pela equação (14) temos

$$\omega \wedge dR_j = \sum_{i=1}^s g_i \omega \wedge \eta_i = 0,$$

para todo $j = 1, 2, \dots, s$. Esta última igualdade implica que, ou existe algum $j_0 = 1, 2, \dots, s$ tal que R_{j_0} é uma integral primeira racional de ω ou $R_j = \text{cte}$ para todo $j = 1, 2, \dots, s$.

Suponha que $R_j = a_j \in \mathbb{K}$ para todo $j = 1, 2, \dots, s$ da equação (12) temos

$$0 = \eta_r - \sum_{j=1}^s a_j \eta_j,$$

ou seja

$$\sum_{j=r}^{N+r} \lambda_j^r \frac{df_j}{f_j} - a_1 \sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j^1 \frac{df_j}{f_j} - \dots - a_s \sum_{j=s}^{N+s} \lambda_j^s \frac{df_j}{f_j} = 0. \quad (15)$$

Sendo $s < r$ então $s + N < r + N$, logo aplicando o lema 4.2 á equação (15), temos em particular que $\lambda_{r+N}^r = 0$ isto é uma contradição, pois no início da prova do teorema tínhamos que $\lambda_{r+N}^r \neq 0$. De aqui existe um $j_0 = 1, 2, \dots, m$ tal que R_{j_0} é uma integral primeira racional de ω .

O caso $\alpha_2 = 0$ é idênticamnete análogo, isto conclui a demonstração. \square

Observação 4.3.1 *Suponha que η_1, \dots, η_r são dados como na prova do teorema (4.0.1) e $\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_r \neq 0$, então sabemos que existe $R \in \mathbb{K}(z)$ tal que $\frac{\omega}{R} = \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_r$. De aqui pela observação (4.2.1) a distribuição D induzida por $\frac{\omega}{R}$*

$$z \mapsto \ker\left(\frac{\omega}{R}(z)\right),$$

para todo $z \in U := \mathbb{K}^n \setminus S(\frac{\omega}{R})$ tem codimensão r . Mais ainda sendo as η_k fechadas para todo $k = 1, 2, \dots, r$ temos pelo teorema de Frobenius que D é integrável. De aqui existe uma folheação \mathcal{F} de codimensão r em U tal que

$$T_z \mathcal{F} = \ker\left(\frac{\omega}{R}(z)\right),$$

para todo $z \in U$. Por outro lado, consideremos agora as funções multivaluadas

$$F_k = \int \eta_k$$

temos, para todo $k = 1, 2, \dots, r$.

$$F_k = \sum_{j=k}^{k+N} \lambda_j^k \log f_j = \log(f_k^{\lambda_k^k} \dots f_{k+N}^{\lambda_{k+N}^k}) \quad e \quad dF_k = \eta_k.$$

Pela afirmação (4.2.1) temos também

$$\ker\left(\frac{\omega}{R}(z)\right) = \bigcap_{k=1}^r \ker(\eta_k) = \bigcap_{k=1}^r \ker(dF_k).$$

Considerando a função $H = (F_1, \dots, F_r)$, temos que $\ker(dH) = \bigcap_{k=1}^r \ker(dF_k)$.

Assim

$$T_z \mathcal{F} = \ker\left(\frac{\omega}{R}(z)\right) = \ker(dH(z)) = T_z(H^{-1}(c)),$$

onde $H(z) = (c_1, c_2, \dots, c_r) = c$. Sendo $H^{-1}(c) = \bigcap_{k=1}^r F_k^{-1}(c_k)$, temos finalmente

$$\mathcal{F}_z = \bigcap_{k=1}^r F_k^{-1}(c_k).$$

onde $F_k(z) = c_k$ para todo $k = 1, 2, \dots, r$.

Ou seja as folhas da folheação induzida por $\frac{\omega}{R}$ são as interseções das curvas de nível das funções multivaluadas dadas por F_k .

Consideremos agora X um campo polinômial de grau d em \mathbb{K}^n . Ou seja

$$X = \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

onde $P_i \in \mathbb{K}[z]$ e $d = \max\{P_i : i = 1, \dots, n\}$.

Dizemos que uma hipersuperfície algébrica $V = \{f = 0\}$ é invariante por X se $df(X)(p) = 0$ para todo $p \in V$.

Afirmção 4.3.1 *Uma hipersuperfície algébrica $V = \{f = 0\}$ é X -invariante se, e somente se, existe $L_f \in \mathbb{K}_{d-1}[z]$ tal que $X(f) = L_f \cdot f$*

A demonstração é análoga ao lema (4.3).

Dizemos também que uma função racional $R = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(z)$ é uma integral primeira racional para X se o pencil de hipersuperfícies $\{P - \lambda Q = 0\}_{\lambda \in \mathbb{K}}$ é invariante por X .

Afirmção 4.3.2 *Uma função Racional $R \in K(z)$ é uma integral primeira racional para X se, e somente se, $X(R) = 0$.*

A demonstração é análoga ao lema (4.4).

Consideremos agora a $(n-1)$ -forma polinômial em \mathbb{K}^n dada por

$$\omega_X = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} P_i dz_1 \wedge \dots \wedge \hat{dz}_i \wedge \dots \wedge dz_n.$$

Afirmção 4.3.3 $\omega_X \wedge df = (-1)^{n+1} X(f) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$

para todo $f \in \mathbb{K}[z]$.

Com efeito:

$$\begin{aligned} \omega_X \wedge df &= \omega_X \wedge \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} (\omega_X \wedge dz_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} P_i dz_1 \wedge \dots \wedge \hat{dz}_i \wedge \dots \wedge dz_n \wedge dz_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} \left((-1)^{j+1} P_j dz_1 \wedge \dots \wedge \hat{dz}_j \wedge \dots \wedge dz_n \wedge dz_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} \left((-1)^{j+1} (-1)^{n-j} P_j dz_1 \wedge \dots \wedge dz_j \wedge \dots \wedge dz_n \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{n+1} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} P_j \right) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \\
&= (-1)^{n+1} X(f) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n .
\end{aligned}$$

Afirmação 4.3.4 $V = \{f = 0\}$ é X -invariante se, e somente se, V é ω_X -invariante.

Com efeito:

Se V é X -invariante então $X(f) = f.L_f$, onde $L_f \in \mathbb{K}_{d-1}[z]$. De aqui pela afirmação (4.3.3) temos $\omega_X \wedge df = f.\theta_f$, onde $\theta_f = (-1)^{n+1} L_f dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \in \Omega_{d-1}^n(n)$. Isto implica pelo lema (4.3) que V é ω_X -invariante.

Suponha agora que V seja ω_X -invariante, então pelo lema (4.3) temos $\omega_X \wedge df = f.\theta_f$ onde $\theta_f \in \Omega_{d-1}^n(n)$. Isto quer dizer $\omega_X \wedge df = f.Q dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$, onde $Q \in \mathbb{K}_{d-1}[z]$, usando agora a afirmação (4.3.3) temos, $(-1)^{n+1} X(f) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n = f.Q dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$. Isto implica que $X(f) = f.L_f$, onde $L_f = (-1)^{-(n+1)} Q \in \mathbb{K}_{d-1}[z]$, de aqui finalmente pela afirmação (4.3.1) temos que V é X -invariante.

Prova do Corolário 4.0.2

Consideremos a $(n-1)$ -forma polinômial ω_X definida acima. Usando a afirmação (4.3.4) ω_X admite

$$\binom{d-1+n}{n} + n = \binom{d-1+n}{n} \cdot \binom{n}{(n-1)+1} + (n-1) + 1.$$

hipersuperfícies algébricas irredutíveis invariantes. De aqui pelo teorema (4.0.1) ω_X tem uma integral primeira racional, ou seja existe $R \in \mathbb{K}(z)$ tal que $\omega_X \wedge dR = 0$. Isto implica pela afirmação (4.3.3) que $X(R) = 0$. Finalmente pela afirmação (4.3.2) temos que X admite uma integral primeira racional. \square

Capítulo 5

Integrabilidade Algébrica de Lagutinskii - Pereira

O corolário 4.0.2 nos diz em particular que se um campo polinomial em \mathbb{K}^n não admite integral primeira racional, então o número de hipersuperfícies algébricas invariantes é no máximo $\binom{d-1+n}{n} + n - 1$, infelizmente esta cota está longe de ser ótima. Embora fixando o grau das hipersuperfícies invariantes podemos encontrar uma melhor cota usando a teoria de integrabilidade algébrica de Lagutinskii-Pereira.

Definição 5.0.1 *Seja X um campo de vetores em \mathbb{K}^n . O r -ésimo polinômio extático de X é dado por*

$$\xi_r(X) = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_l \\ X(v_1) & X(v_2) & \cdots & X(v_l) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X^{l-1}(v_1) & X^{l-1}(v_2) & \cdots & X^{l-1}(v_l) \end{pmatrix}$$

onde $l = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_r[z]$, $\{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ é uma base de $\mathbb{K}_r[z]$, $X^0(V_i) = V_i$ e $X^j(V_i) = X^{j-1}(X(V_i))$ para todo $i = 1, 2, \dots, l$ e todo $j = 1, \dots, l-1$.

A hipersuperfície $\{\xi_r(X) = 0\}$ dada pelos zeros do r -ésimo polinômio extático é chamada de r -ésima hipersuperfície extática de X .

Observação 5.0.1 *A definição de hipersuperfície extática independe da escolha da base.*

Com efeito: Seja $\{w_1, w_2, \dots, w_l\}$ outra base de $\mathbb{K}_r[z]$ e $\zeta_r(X)$ o r -ésimo polinômio extático com respeito à base.

Se $\Upsilon = (\gamma_{ji})$ denota a matriz de cambio de base então $v_j = \sum_{i=1}^l \gamma_{ij} w_i$, onde $\gamma_{ij} \in \mathbb{K}$ para todo $i, j = 1, 2, \dots, l$. Sendo X é \mathbb{K} -linear temos

$$X^k(v_j) = \sum_{i=1}^l \gamma_{ij} X^k(w_i), \quad (16)$$

para todo $j = 1, 2, \dots, l$. Daqui pela equação (16) temos

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_l \\ X(v_1) & X(v_2) & \cdots & X(v_l) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X^{l-1}(v_1) & X^{l-1}(v_2) & \cdots & X^{l-1}(v_l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_l \\ X(w_1) & X(w_2) & \cdots & X(w_l) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X^{l-1}(w_1) & X^{l-1}(w_2) & \cdots & X^{l-1}(w_l) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1l} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2l} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \gamma_{l1} & \gamma_{l2} & \cdots & \gamma_{ll} \end{pmatrix}.$$

Como $\det(\Upsilon) \neq 0$, temos que $\{\xi_r(X) = 0\} = \{\zeta_r(X) = 0\}$, ou seja a definição de hipersuperfície extática independe da escolha da base.

Observação 5.0.2 Considerando o campo constante $X = \frac{\partial}{\partial t}$ e v_1, v_2, \dots, v_l polinômios em uma variável $t \in \mathbb{C}$. Temos que $X^j(v_i) = v_i^j$ representa a j -ésima derivada de v_i .

Assim

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_l \\ v_1' & v_2' & \cdots & v_l' \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_1^{l-1} & v_2^{l-1} & \cdots & v_l^{l-1} \end{pmatrix}$$

é simplesmente o Wronskiano $W(v_1, v_2, \dots, v_l)$ das funções v_1, v_2, \dots, v_l .

Proposição 5.0.1 Toda hipersuperfície algébrica de grau r invariante pelo campo de vetores X é um fator de $\xi_r(X)$.

Prova Seja f o polinômio de grau r que define V , consideremos $v_1 = f$ e completemos a uma base $\{f, v_2, \dots, v_l\}$ de $\mathbb{K}_r[z]$. Assim pela independência da escolha da base temos

$$\xi_r(X) = \det \begin{pmatrix} f & v_2 & \cdots & v_l \\ X(f) & X(v_2) & \cdots & X(v_l) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X^{l-1}(f) & X^{l-1}(v_2) & \cdots & X^{l-1}(v_l) \end{pmatrix}.$$

Observamos também que

$$X^i(f) = fh_i$$

onde $h_i \in \mathbb{K}[z]$ para todo $i = 1, 2, \dots, l-1$. Isto pode ser facilmente provado por indução. Se $i = 1$, então $X(f) = fh_1$ pois $V = \{f = 0\}$ é X -invariante.

Suponha que para $i = k$ seja válida esta relação.

Para $i = k+1$, usando a regra de Leibnitz e a hipoteses de indução temos

$$\begin{aligned} X^{k+1}(f) &= X^k(X(f)) = X(X^k(f)) = X(fh_k) = fX(h_k) + X(f)h_k = fX(h_k) + fh_1h_k \\ &= fh_{k+1}, \text{ onde } h_{k+1} = X(h_k) + h_1h_k \in \mathbb{K}[z]. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} &\xi_r(X) \\ = \det &\begin{pmatrix} f & v_2 & \cdots & v_l \\ fh_1 & X(v_2) & \cdots & X(v_l) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ fh_{l-1} & X^{l-1}(v_2) & \cdots & X^{l-1}(v_l) \end{pmatrix} = f \det \begin{pmatrix} 1 & v_2 & \cdots & v_l \\ h_1 & X(v_2) & \cdots & X(v_l) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ h_{l-1} & X^{l-1}(v_2) & \cdots & X^{l-1}(v_l) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ou seja $\xi_r(X) = f \det(M_f)$, isto mostra que f é um fator de $\xi_r(X)$. \square

Teorema 5.0.1 *Seja X um campo de vetores polinomiais em \mathbb{K}^n . Então $\xi_r(X) = 0$ e $\xi_{r-1}(X) \neq 0$ se, e somente se, X admite uma integral primeira racional.*

Prova Suponha que X admita uma integral primeira racional, então existe $R = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(z)$ tal que as hipersuperfícies algébricas $\{f_\lambda = P - \lambda Q = 0\}_{\lambda \in \mathbb{K}}$, são X - invariantes para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Se $r = \text{grau}(P - \lambda Q)$ então pela proposição 5.0.1 temos

$$\xi_r(X) = f_\lambda \det M_\lambda, \tag{17}$$

onde M_λ é a Matriz como na proposição (5.0.1). Como existem infinitos $\lambda \in \mathbb{K}$ que satisfazem a equação (17), temos que $\xi_r(X) = 0$.

Suponha agora que $\xi_r(X) = 0$. Desde que $X^j(V_i)$ são em particular funções racionais,

então as colunas da Matriz extáctica são linearmente dependentes sobre o corpo $\mathbb{K}(z)$, daqui existem funções racionais $\alpha_i \in \mathbb{K}(z)$, com $i = 1, 2, \dots, l$ não todos nulos tais que

$$\mathcal{N}_j := \sum_{i=1}^l \alpha_i X^j(v_i) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, l-1$$

onde $l = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_r[z]$ e $\{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ é uma base de $\mathbb{K}_r[z]$.

Agore tome k como sendo o menor valor, tal que existem funções racionais $\alpha_i \in \mathbb{K}(z)$ com $i = 1, 2, \dots, k$ não todos nulos, tais que

$$\mathcal{N}_j := \sum_{i=1}^k \alpha_i X^j(v_i) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k-1. \quad (18)$$

Sem perda de generalidade podemos assumir que $\alpha_k = 1$. Assim aplicando a regra de Leibnitz à equação (18) e como $X(\alpha_k) = 0$, temos

$$\begin{aligned} X(\mathcal{N}_j) &= \sum_{i=1}^k [X(\alpha_i)X^j(v_i) + \alpha_i X^{j+1}(v_i)] = \sum_{i=1}^{k-1} X(\alpha_i)X^j(v_i) + \sum_{i=1}^k \alpha_i X^{j+1}(v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} X(\alpha_i)X^j(v_i) + \mathcal{N}_{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, k-2. \end{aligned}$$

Daqui

$$0 = X(\mathcal{N}_j) - \mathcal{N}_{j+1} = \sum_{i=1}^{k-1} X(\alpha_i)X^j(v_i), \quad j = 0, 1, 2, \dots, k-2.$$

Da minimalidade de k , temos que $X(\alpha_i) = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, k-1$. Por tanto cada um dos α_i ou é uma integral primeira racional para X ou é uma constante.

Suponha que $\alpha_i = c_i \in \mathbb{K}$ para todo $i = 1, 2, \dots, k-1$, então pela equação (18) temos $\mathcal{N}_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0$, sendo $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ linearmente independente sobre \mathbb{K} , temos que $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, k$. Isto é uma contradição pois $\alpha_k = 1$, assim existe $i = 1, 2, \dots, k-1$ tal que α_i é uma integral primeira racional para X . □

O resultado seguinte dá uma cota para o número máximo de hipersuperfícies invariantes de um grau fixado.

Teorema 5.0.2 *Seja X um campo polinomial em \mathbb{C}^n de grau d . Suponha que X não admite integral primeira racional, então o número de hipersuperfícies irredutíveis invariantes por X , de grau k , é no máximo*

$$(d-1) \binom{\binom{n+k}{k}}{2} + \frac{1}{k} \binom{k+1}{2} \left[\binom{n+k}{k} - 1 \right].$$

Em particular, se $k = 1$ então temos

$$\binom{n+1}{2} (d-1) + n.$$

Prova Como X não admite integral primeira racional, segue do corolário (4.0.2) e do teorema (5.0.1) que o número de hipersuperfícies algébricas irredutíveis invariantes por X é finito e que $\xi_k(X) \neq 0$. Assim, se f_1, f_2, \dots, f_N são os polinômios irredutíveis de grau k definindo as hipersuperfícies invariantes, então pela proposição (5.0.1) temos

$$\{f_i = 0\} \subset \{\xi_k(X) = 0\}$$

para todo $i = 1, \dots, N$. Sendo os f_i irredutíveis, temos pelo teorema dos zeros de Hilbert

$$f_i | \xi_k(X)$$

para todo $i = 1, \dots, N$. Por outro lado para $i \neq j$ temos $\text{MDC}(f_i, f_j) = 1$, isto pois $\mathbb{K}[z]$ é um DFU (domínio de fatoração única) e $\{f_i = 0\} \neq \{f_j = 0\}$. Isto implica que $(f_1 \cdot f_2 \dots f_N) | \xi_k(X)$, ou seja

$$\xi_k(X) = (f_1 f_2 \dots f_N) R, \tag{19}$$

para algum $R \in \mathbb{K}[z]$.

Como $\text{grau}(f_1 f_2 \dots f_N) = \sum_{i=1}^N \text{grau}(f_i) = kN$. Temos pela equação (19)

$$\text{grau}(\xi_k(X)) \geq kN \tag{20}$$

por outro lado temos também que

$$\text{grau}(\xi_k(X)) = k(d-1) \binom{\mathcal{K}}{2} + \binom{k+1}{2} (\mathcal{K} - 1), \tag{21}$$

onde $\mathcal{K} = \binom{k+n}{n} = \binom{n+k}{k}$. Por tanto da equação (20) e (21) temos

$$N \leq (d-1) \binom{\mathcal{K}}{2} + \frac{1}{k} \binom{k+1}{2} (\mathcal{K} - 1) \quad \square$$

Exemplo 5.0.1 A cota do teorema (5.0.2) no caso $k = 1$ é ótima. Consideremos o campo de vetores

$$X = \sum_{i=1}^n z_i(z_i^{d-1} - 1) \frac{\partial}{\partial z_i}$$

Sejam as

$$nd + (d-1) \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2} (d-1) + n \quad (22)$$

hipersuperfícies algébricas irredutíveis dadas por

$$z_j = 0, \quad 1 \leq j \leq n$$

$$z_j - \lambda = 0, \quad \lambda^{d-1} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\lambda z_i - z_j = 0, \quad \lambda^{d-1} = 1, \quad 1 \leq 1 < i < j \leq n.$$

Chamando $f_j = z_j$, $g_j = z_j - \lambda$ e $h_{ij} = \lambda z_i - z_j$ temos

$$X(f_j) = \sum_{i=1}^n z_i(z_i^{d-1} - 1) \frac{\partial}{\partial z_i}(f_j) = z_j(z_j^{d-1} - 1) = z_j \cdot L_{f_j} \quad \text{onde } L_{f_j} = z_j^{d-1} - 1,$$

$$\begin{aligned} X(g_j) &= \sum_{i=1}^n z_i(z_i^{d-1} - 1) \frac{\partial}{\partial z_i}(g_j) = z_j(z_j^{d-1} - 1) = z_j(z_j^{d-1} - \lambda^{d-1}) = z_j(z_j - \lambda) \left(\sum_{k=2}^d z_j^{d-k} \lambda^{k-2} \right) \\ &= (z_j - \lambda) \cdot L_{g_j} \quad \text{onde } L_{g_j} = z_j \left(\sum_{k=2}^d z_j^{d-k} \lambda^{k-2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(h_{ij}) &= \sum_{k=1}^n z_k(z_k^{d-1} - 1) \frac{\partial}{\partial z_k}(h_{ij}) = z_i(z_i^{d-1} - 1)\lambda + z_j(z_j^{d-1} - 1)(-1) \\ &= \lambda z_i^d - z_i \lambda - z_j^d + z_j = -(\lambda z_i - z_j)(\lambda z_i^d - z_j^d) = -(\lambda z_i - z_j) + (\lambda^d z_i^d - z_j^d) \\ &= -(\lambda z_i - z_j) + (\lambda z_i - z_j) \left(\sum_{k=1}^d (\lambda z_i)^{d-k} z_j^{k-1} \right) = (\lambda z_i - z_j) \left(-1 + \sum_{k=1}^d (\lambda z_i)^{d-k} z_j^{k-1} \right) \\ &= h_{ij} \cdot L_{h_{ij}} \quad \text{onde } L_{h_{ij}} = -1 + \sum_{k=1}^d (\lambda z_i)^{d-k} z_j^{k-1}. \end{aligned}$$

Pela afirmação (4.3.1) estas hipersuperfícies são X -invariantes e pela equação (22) a cota para $k = 1$ é ótima.

Capítulo 6

Aplicação à Teoria das Folheações

Holomorfias no Espaço Projetivo \mathbb{P}^n

Finalizaremos este trabalho dando uma aplicação à teoria das folheações holomorfas no espaço projetivo \mathbb{P}^n . Lembremos que as hipersuperfícies algébricas em \mathbb{P}^n estão definidos por os zeros de polinômios homogêneos, desta forma vamos definir a continuação, o polinômio extático para o caso homogêneo.

Denotemos por \mathcal{H}_r o subespaço vetorial de $\mathbb{K}[z] = \mathbb{K}[z_0, \dots, z_{n-1}]$ formado por todos os polinômios homogêneos de grau r .

Definição 6.0.1 *Seja X um campo de vetores em \mathbb{K}^n . O r -ésimo polinômio "homogêneo" extático de X é dado por*

$$\hbar_r(X) = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_s \\ X(v_1) & X(v_2) & \cdots & X(v_s) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X^{s-1}(v_1) & X^{s-1}(v_2) & \cdots & X^{s-1}(v_s) \end{pmatrix}$$

onde $s = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{H}_r$, $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ é uma base de \mathcal{H}_r , $X^0(v_i) = v_i$ e $X^j(v_i) = X^{j-1}(X(v_i))$ para todo $i = 1, 2, \dots, s$ e todo $j = 1, \dots, s-1$.

A hipersuperfície $\{\hbar_r(X) = 0\}$, dada por los zeros do r -ésimo polinômio homogêneo extático é chamada de r -ésima hipersuperfícies homogênea extática de X .

A demonstração dos seguintes resultados é exatamente igual aos resultados do capítulo 5, por esse motivo eles só serán anunciados.

Observação 6.0.1 *A definição de hipersuperfície homogênea extática independe da escolha da base.*

Proposição 6.0.1 *Toda hipersuperfície algébrica homogênea de grau r , invariante pelo campo de vetores X é um fator de $\hbar_r(X)$.*

Teorema 6.0.1 *Seja X um campo polinomial em \mathbb{K}^n . Se $\hbar_r(X) = 0$ e $\hbar_{r-1} \neq 0$. Então X admite uma integral primeira racional.*

Observação 6.0.2 *A recíproca deste teorema não necessariamente é verdadeira, como mostra o seguinte exemplo em \mathbb{C}^2 .*

Consideremos o campo polinomial homogêneo de grau 1, $X = 2x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$. Temos que X tem uma integral primeira racional dada por $R = \frac{x}{y^2}$.

De fato: $X(f_\lambda) = 2f_\lambda$, onde $f_\lambda = x - \lambda y^2$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Tomando a parte homogênea de grau 2 de f_λ denotada por $f_\lambda^2 = -\lambda^2 y^2$ temos também que f_λ^2 é X -invariante. Assim considerando a base $\{-\lambda y^2, x^2, xy\}$ de \mathcal{H}_2 , temos

$$\hbar_2(X) = \det \begin{pmatrix} -\lambda y^2 & x^2 & xy \\ X(-\lambda y^2) & X(x^2) & X(xy) \\ X^2(-\lambda y^2) & X^2(x^2) & X^2(xy) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\lambda y^2 & x^2 & xy \\ 2(-\lambda y^2) & 4x^2 & 3xy \\ 4(-\lambda y^2) & 16x^2 & 9xy \end{pmatrix}$$

$= (-\lambda y^2)[36x^3y - 48x^3y - 2(9x^3y - 16x^3y) + 4(3x^3y - 4x^3y)] = (\lambda y^2)(-2x^3y)$. Sendo $\lambda \neq 0$, temos finalmente $\hbar_2(X) \neq 0$.

Pode-se provar que a recíproca só é satisfeita se consideramos integrais primeiras racionais homogêneas de X , isto é, funções racionais $R = \frac{P}{Q}$ onde P e Q são polinômios homogêneos do mesmo grau.

De fato, se $r = \text{grau}(P) = \text{grau}(Q)$, então $f_\lambda = P - \lambda Q$ é homogêneo de grau $=r$ e X -invariante para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Pela proposição (6.0.1) temos que, $\hbar_r(X) = f_\lambda \det M_\lambda$.

Como existem infinitos $\lambda \in \mathbb{K}$ que satisfazem esta última equação então $\hbar_r(X) = 0$.

Teorema 6.0.2 *Seja X um campo polinomial em \mathbb{C}^n de grau d . Suponha que X não admite integral primeira racional, então o número de hipersuperfícies homogêneas irredutíveis invariantes por X de grau k é no máximo*

$$\binom{k + (n-1)}{n-1} + \frac{1}{k}(d-1) \binom{k+(n-1)}{2}$$

em particular, se $k = 1$ vale

$$(d-1) \binom{n}{2} + n$$

Prova Como X não admite integral primeira racional, segue do corolário (4.0.2) e do teorema (6.0.1) que o número de hipersuperfícies algébricas irredutíveis invariantes por X é finito e que $\tilde{h}_k(X) \neq 0$. Assim, se f_1, f_2, \dots, f_N são os polinômios homogêneos irredutíveis de grau k definindo as hipersuperfícies homogêneas invariantes, então pela proposição (6.0.1) temos

$$\{f_i = 0\} \subset \{\tilde{h}_k(X) = 0\}$$

para todo $i = 1, \dots, N$. Sendo os f_i irredutíveis, temos pelo teorema dos zeros de Hilbert

$$f_i | \tilde{h}_k(X)$$

para todo $i = 1, \dots, N$. Por outro lado para $i \neq j$ temos $\text{MDC}(f_i, f_j) = 1$, isto pois $\mathbb{K}[z]$ é um DFU (domínio de fatoração única) e $\{f_i = 0\} \neq \{f_j = 0\}$. Isto implica que $(f_1 \cdot f_2 \dots f_N) | \tilde{h}_k(X)$, ou seja

$$\tilde{h}_k(X) = (f_1 f_2 \dots f_N) R, \quad (23)$$

para algum $R \in \mathbb{K}[z]$.

Como $\text{grau}(f_1 f_2 \dots f_N) = \sum_{i=1}^N \text{grau}(f_i) = kN$. Temos pela equação (23)

$$\text{grau}(\tilde{h}_k(X)) \geq kN \quad (24)$$

por outro lado temos também que

$$\text{grau}(\tilde{h}_k(X)) = (d-1) \binom{\mathcal{K}}{2} + \mathcal{K}k, \quad (25)$$

onde $\mathcal{K} = \binom{k+(n-1)}{n-1} = \binom{(n-1)+k}{k}$. Por tanto da equação (24) e (25) temos

$$N \leq \mathcal{K} + \frac{1}{k}(d-1) \binom{\mathcal{K}}{2} \quad \square$$

Como uma generalização da representação em coordenadas homogêneas para folheações de codimensão r temos a seguinte proposição.

Proposição 6.0.2 *Toda folheação holomorfa de codimensão r e grau d em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, pode ser definido em coordenadas homogêneas por uma r -forma polinomial homogênea Ω integrável em \mathbb{C}^{n+1} de grau $(d+1)$ integrável satisfazendo, $\iota_R(\Omega) = 0$. Ainda, Ω é única a menos de multiplicação por constantes não nulas.*

Teorema 6.0.3 *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa 1-dimensional em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ e $\text{grau}(\mathcal{F}) = d$ suponha que \mathcal{F} não admite integral primeira racional. Então*

1. *O número de hipersuperfícies irredutíveis invariantes por \mathcal{F} de grau k contando multiplicidade é no máximo*

$$\binom{n+k}{k} + \frac{1}{k} \binom{\binom{n+k}{k}}{2} (d-1)$$

2. *Para o caso $k = 1$ temos*

$$(n+1) + \binom{n+1}{2} (d-1) = nd + \binom{n}{2} (d-1) + 1$$

Prova Pela proposição (6.0.2), seja Ω a $(n-1)$ -forma polinomial homogênea em \mathbb{C}^{n+1} de grau $(d+1)$ que representa \mathcal{F} . Usando o isomorfismo canônico

$$\mathbb{C}^{n+1} \cong \bigwedge^n (\mathbb{C}^{n+1}) \otimes \bigwedge^{n-1} (\mathbb{C}^{n+1})^*,$$

podemos também representar \mathcal{F} por um campo polinomial homogêneo X em \mathbb{C}^{n+1} de grau d , com $\iota_X \Omega = 0$. Assim uma hipersuperfície algébrica $V = (f = 0)$ é Ω -invariante se, e somente se, é X -invariante, como também uma função racional R é uma integral primeira racional para Ω se, e somente se, é uma integral primeira racional para X . Como como o campo \mathcal{F} não admite integral primeira racional, então X não admite integral primeira racional, de aqui pelo teorema (6.0.2) temos que o número de hipersuperfícies homogêneas irredutíveis invariantes por X de grau k é no máximo

$$\binom{k + ((n+1) - 1)}{(n+1) - 1} + \frac{1}{k} (d-1) \binom{\binom{k + ((n+1) - 1)}{(n+1) - 1}}{2} = \binom{k+n}{n} + \frac{1}{k} (d-1) \binom{\binom{k+n}{n}}{2}.$$

Vendo que $\binom{k+n}{n} = \binom{n+k}{k}$, temos o resultado desejado para a parte 1.

Em particular se $k = 1$ e como $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2}$, temos

$$(d-1) \binom{n+1}{2} + n+1 = nd + \binom{n}{2} (d-1) + 1$$

que é o resultado desejado para a parte 2. □

Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa 1-dimensional em \mathbb{P}^n com $\text{grau}(\mathcal{F}) = d$, \mathbb{L}^l um l -plano fixo de \mathbb{P}^n e $X = \sum_{j=0}^n P_j \frac{\partial}{\partial z_j}$ o campo polinomial homogêneo de grau d que representa \mathcal{F} em coordenadas homogêneas. Podemos assumir sem perda de generalidade que

$$\mathbb{L}^l = \{[z_0, \dots, z_l, 0, \dots, 0]\}.$$

De aqui, se $f = \sum_{i=0}^n a_i z_i$ determina uma hipersuperfície algébrica de grau 1 em \mathbb{P}^n que contém \mathbb{L}^l , então $a_0 = \dots = a_l = 0$. Isto pode ser visto tomando para todo $j = 0, 1, \dots, l$ os pontos $[0, \dots, \underbrace{1}_j, \dots, 0, 0, \dots, 0]$ em \mathbb{L}^l . Assim

$$f = \sum_{i=l+1}^n a_i z_i.$$

Ou seja f pode ser considerado como um polinômio em \mathbb{C}^{n-l} .

Denotemos por \mathcal{H}_1^{n-l} o subespaço formado por todos os polinômios homogêneos em \mathbb{C}^{n+1} de grau 1, que dependem só das variáveis z_{l+1}, \dots, z_n e consideremos o polinômio

$$\hbar_1^{n-l}(X) = \det \begin{pmatrix} z_{l+1} & z_{l+2} & \cdots & z_n \\ X(z_{l+1}) & X(z_{l+2}) & \cdots & X(z_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X^{n-l-1}(z_{l+1}) & X^{n-l-1}(z_{l+2}) & \cdots & X^{n-l-1}(z_n) \end{pmatrix}$$

onde $\{z_{l+1}, \dots, z_n\}$ é uma base de \mathcal{H}_1^{n-l} .

Suponha que \mathcal{F} não admita integral primeira racional então:

- i) $\hbar_1^{n-l}(X) \neq 0$
- ii) Toda hipersuperfície algébrica homogênea de grau 1 que contém \mathbb{L}^l e X -invariante é um fator de $\hbar_1^{n-l}(X)$.

Com efeito

i) e ii) podem ser provados de forma análoga à proposição (5.0.1) e ao teorema (5.0.1).

Sejam f_1, f_2, \dots, f_N os polinômios homogêneos de grau 1 contendo \mathbb{L}^l e X -invariantes, então por i) e ii) temos

$$\{f_i = 0\} \subset \{\hbar_1^{n-l}(X)\}$$

para todo $i = 1, \dots, N$. Sendo as f_i irredutíveis, temos pelo teorema dos zeros de Hilbert que

$$f_i | \hbar_1^{n-l}(X)$$

mais especificamente

$$\hbar_1^{n-l}(X) = (f_1 \dots f_N) \cdot R$$

para algúm $R \in \mathbb{C}[z_{l+1}, \dots, z_n]$, isto pois, $\mathbb{C}[z_{l+1}, \dots, z_n]$ é um D.F.U. De aqui temos

$$\text{grau}(\hbar_1^{n-l}(X)) = \text{grau}(f_1 \dots f_N \cdot R) \geq \text{grau}(f_1 \dots f_N) = \sum_{i=1}^N \text{grau}(f_i) = N \quad (26)$$

Por outro lado

$$\text{grau}(\hbar_1^{n-l}(X)) = (d-1) \binom{n-l}{2} + (n-l) \quad (27)$$

Assim, pelas equações (26) e (27) temos

$$N \leq (d-1) \binom{n-l}{2} + (n-l)$$

Ou seja, o número de hipersuperfícies algébricas de grau 1 (hiperplanos) contendo \mathbb{L}^l e \mathcal{F} -invariantes é no máximo

$$(d-1) \binom{n-l}{2} + (n-l)$$

Isto demonstra o seguinte Corolário:

Corolário 6.0.1 *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa 1-dimensional no espaço projetivo \mathbb{P}^n com $\text{grau}(\mathcal{F}) = d$. Suponha que \mathcal{F} não admite integral primeira racional, então o número de hiperplanos invariantes por \mathcal{F} que contém um l -plano fixo, $1 \leq l \leq n-1$ é limitado por*

$$(d-1) \binom{n-l}{2} + n-l$$

Observação 6.0.3 *A cota dada no corolário (6.0.1) é ótima. De fato, Consideremos o campo vetorial*

$$X = \sum_{j=0}^l \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{j=l+1}^n z_j (z_j^{d-1} - 1) \frac{\partial}{\partial z_j}.$$

Temos que X deixa invariante os hiperplanos

$$z_j = 0, \quad l+1 \leq j \leq n$$

$$\lambda z_i - z_j = 0, \quad \lambda^{d-1} = 1, \quad l+1 \leq i < j \leq n.$$

Ao mesmo tempo que estes hiperplanos contém o l -plano fixo $\mathbb{L}^l = \{z_{l+1} = \dots = z_n = 0\}$.

Referências

- [1] M.Corrêa JR, *Campos polinomiais e hipersuperfícies algébricas invariantes*, Lecturas Matemáticas . Lima-Perú, Departamento de Ciencias, Sección Matemáticas, PUCP.
- [2] A.L.Neto e B. Scárdua *Introdução à Teoria das Folheações Algébricas Complexas*, Rio de Janeiro, IMPA Abril de 2011.
- [3] C.Camacho M. ,A.L.Neto *Geometric Theory of Foliations (translation of Teoria Geométrica das folheações, IMPA, 1979)* Birkäuser Boston, 1985.
- [4] A.L.Neto *Componentes Irredutíveis dos Espaços de Folheações*, Rio de Janeiro, IMPA 12 de abril de 2007.
- [5] J.P.Jouanolou, *Equations de Pfaff algébriques*, Lect. Notes in Math., 708, Springer-Verlag (1979).
- [6] E.L.Lima, *Álgebra exterior*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2005.
- [7] J.V.Pereira, *Integrabilidade de Equações Diferenciais no Plano Complexo*, LIMA: IMCA - Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines, 2001. 50 p.
- [8] M.G.Soares; R.S.Mol, *Índices de Campos Holomorfos e Aplicações. 1. ed*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2001. v. 01. 197 p.
- [9] M.Corrêa JR ; L.G.Maza ; M.G.Soares, *Algebraic integrability of polynomial differential r-forms*, Journal of Pure and Applied Algebra (Print), v. 215, p.2290-2294, 2011.
- [10] M. Corrêa JR ; M.G.Soares., *Counting hypersurfaces invariant by one dimensional complex foliations*, London Mathematical Society Lecture Note Series, v. 308, p. 104-113, 2010.

- [11] J.V.Pereira; C.Christopher ; J.Llibre, *Multiplicity of Invariant Algebraic Curves in Polynomial Vector Fields.*, Pacific Journal of Mathematics, v. 229, p. 63-117, 2007.
- [12] D.Cox; J.Little; D.O'shea, *Ideals, varieties, and algorithms. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. Third edition.* Undergraduate Texts in Mathematics. New York, Springer-Verlag, 1991-513p.