

Guilherme Gomes da Silva

Estudo e Desenvolvimento de Técnicas de Controle Para  
Grafos de Eventos Temporizados

Belo Horizonte  
2012



Universidade Federal de Minas Gerais  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Estudo e Desenvolvimento de Técnicas de Controle Para  
Grafos de Eventos Temporizados

Dissertação apresentada ao Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
da Universidade Federal de Minas Gerais  
como requisito parcial para obtenção do  
grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Aluno: Guilherme Gomes da Silva  
Orientador: Carlos Andrey Maia

Belo Horizonte  
2012

*À memória dos meus amados pais,  
José Reinaldo da Silva e Maria Raquel Silva e Silva*

## Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela força, proteção e bençãos a cada dia de minha vida.

Agradeço à minha esposa Juliana, pelo amor, paciência e apoio. Obrigado por tudo.

Aos meus queridos pais, pelo amor, bençãos e proteção seja onde estiverem.

Agradeço à toda a minha família, a qual foi fundamental para esta conquista.

Agradeço à Tia Regina e a minha irmã, pelo amor e carinho.

Agradeço aos meus avós, pelo lar, educação e amor sempre.

Ao Prof. Carlos Andrey, pela orientação, ensinamentos, confiança e apoio durante este trabalho.

À Capes e UFMG pelo apoio financeiro.

Aos companheiros de mestrado.

Finalmente a todas as pessoas que de alguma forma fizeram parte dessa importante conquista em minha vida.

Obrigado a Todos.

## Resumo

Sistemas regidos pela ocorrência de eventos e que possuem somente fenômenos de sincronização e atraso de tempo podem ser modelados por grafos de eventos temporizados. A dinâmica desses sistemas pode ser descrita de forma linear por meio de uma álgebra não convencional chamada de álgebra max-plus. Com essa álgebra, é possível sintetizar estratégias de controle que fazem com que os sistemas respeitem as restrições impostas. Neste trabalho são apresentados dois problemas distintos com abordagens diferentes. O primeiro problema trata de encontrar os tempos de entrada do sistema baseado no controle “just-in-time”. Esses tempos são encontrados de duas formas, a primeira utilizando principalmente a teoria de semimódulos e a segunda utilizando um algoritmo alternante. O segundo problema abordado visa encontrar uma matriz de realimentação de estado, a qual faz com que o sistema não viole as restrições impostas ao estado. Por fim, para testar o controle obtido, realizou-se aplicação de ambos os métodos de controle em sistemas de manufatura.

**Palavras-chave:** grafos de eventos temporizados, álgebra max-plus, teoria da residuação, semimódulos, controle “just-in-time”, controle por realimentação de estado.

## Abstract

Systems governed by the occurrence of events and that have only phenomena of synchronization and time delay can be modeled by timed event graph. The dynamics of these systems can be described linearly through an algebra called max-plus algebra. With this algebra we can synthesize control strategies which make the systems respect the restrictions. In this paper we present two problems with different approaches. The first problem is to find the system's time of input based on just-in-time control. These times are found in two forms, the first using mainly the theory of semimodules and the second using an alternate algorithm. The second problem discussed deals with the problem of finding a state feedback matrix, which ensures that the system does not violate the restrictions imposed on the state. Finally, in order to test the control obtained, these control methods were applied in manufacturing systems.

**Keywords:** timed event graph, max-plus algebra, residuation theory, semimodule, just-in-time control, feedback control.

# Lista de Figuras

2.1	Rede de Petri . . . . .	12
2.2	Redes de Petri Marcadas . . . . .	13
2.3	Dinâmica das Redes de Petri . . . . .	15
2.4	Redes de Petri Temporizadas . . . . .	16
2.5	Grafo de Eventos Temporizado . . . . .	18
2.6	Grafo de Eventos Temporizado . . . . .	23
3.1	Sistema de Manufatura . . . . .	47
4.1	Sistema de Manufatura . . . . .	66
4.2	Modelo do Sistema de Manufatura via Grafo de Eventos Temporizado . . . . .	68
4.3	Modelo Expandido do Sistema de Manufatura via Grafo de Eventos Temporizado . . . . .	70
4.4	Modelo do Sistema de Manufatura Realimentado . . . . .	73

## Lista de Símbolos e Notações

$P$	Conjunto finito de lugares
$T$	Conjunto finito de transições
$A$	Conjunto de arcos
$w$	Função de pesos dos arcos
$\succeq$	Elemento maior ou igual comparando termo a termo
$\preceq$	Elemento menor ou igual comparando termo a termo
$\in$	Pertence
$f$	Função
$\otimes$	Operador de multiplicação na álgebra max-plus
$\oplus$	Operador de soma na álgebra max-plus
$\infty$	Infinito
$\varepsilon$	$-\infty$
$\cdot$	$\varepsilon$
$\bigoplus$	Somatório na álgebra max-plus
$\bigwedge$	Operador de mínimo na álgebra max-plus
$\top$	$+\infty$
$e$	Elemento unitário na álgebra max-plus
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais

$\cup$	União
$\bar{\mathbb{R}}_{max}$	Conjunto $\{\mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}, \oplus, \otimes\}$
$I(t_j)$	Conjunto de lugares conectados à entrada da transição.
$\mathcal{D}$	Dióide
$\mathcal{E}$	Dióide
$\forall$	Para todo
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\bar{\mathbb{Z}}_{max}$	Dióide completo $\{\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \otimes, \oplus\}$
$*$	Operador estrela de Kleene
$I$	Matriz identidade na álgebra max-plus
$F$	Matriz de controle
$D, E$	Matrizes de restrições das entradas
$\exists$	Existe
$ $	Dado que
$(k + j k)$	Valor em $k+j$ dado $k$
$\nlessgtr$	Não maior ou igual comparando termo a termo
$\Rightarrow$	Implica
$f \circ f(x)$	Função de $f(x)$ ( $f(f(x))$ )
$Im$	Imagem

$M$	Matriz cuja colunas geram o semimódulo
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\hat{x}, \hat{y}$	Valores previstos
$\mathcal{G}(A)$	Grafo de eventos temporizados

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Conceitos Preliminares</b>	<b>9</b>
2.1	Sistemas a Eventos Discretos . . . . .	9
2.2	Redes de Petri . . . . .	10
2.2.1	Grafos de Eventos Temporizados . . . . .	17
2.3	Álgebra Max-Plus . . . . .	19
2.3.1	Matrizes em $\bar{\mathbb{R}}_{max}$ . . . . .	21
2.3.2	Sistemas Max-Plus Lineares . . . . .	22
2.4	Teoria da Residuação . . . . .	24
2.4.1	Mapeamentos Residuáveis e Dualmente Residuáveis nos Dióides Completos . . . . .	27
2.5	Semimódulos . . . . .	30
2.6	Solução da Equação $A \otimes x = B \otimes y$ . . . . .	33
2.7	Conclusão . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Controle “Just-in-Time” em Horizonte Finito de Sistemas Max- Plus Lineares</b>	<b>37</b>
3.1	Introdução . . . . .	37

3.2	Problema de Controle . . . . .	38
3.2.1	Determinação de Calendário Mínimo Viável . . . . .	41
3.2.2	Solução do Problema de Controle utilizando Semimódulos . . . . .	43
3.2.3	Solução do Problema de Controle utilizando o Método Alternante . . . . .	45
3.2.4	Exemplo . . . . .	47
3.3	Conclusões . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Controle Realimentado de Sistemas Max-Plus Sujeitos a Restrições no Estado</b> . . . . .	<b>57</b>
4.1	Introdução . . . . .	57
4.2	Problema de Controle . . . . .	58
4.2.1	Solução do Problema de Controle . . . . .	59
4.2.2	Exemplo . . . . .	66
4.3	Conclusões . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Conclusões</b> . . . . .	<b>77</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b> . . . . .	<b>80</b>
<b>A</b>	<b>Geração de Todas as Soluções para a Equação <math>Ax = Bx</math></b> . . . . .	<b>84</b>
<b>B</b>	<b>Matrizes do Exemplo do Capítulo 3</b> . . . . .	<b>88</b>



# Capítulo 1

## Introdução

Muitos processos fabris podem ser modelados como sistemas que são regidos pela ocorrência de eventos, logo alguns desses sistemas podem ser classificados como sistemas dinâmicos a eventos discretos (SEDs). Os SEDs, por definição, são sistemas cujo espaço de estados é discreto e dirigido por eventos, isto é, a evolução do estado depende inteiramente da ocorrência de eventos assíncronos discretos no tempo (Cassandras and Lafortune, 1999).

As técnicas de modelagem mais conhecidas para SEDs são os autômatos (Hopcroft et al., 2000) e as redes de Petri (Murata, 1989). A representação por automata tem sua origem na engenharia elétrica e as redes de Petri surgiram no trabalho de doutorado de Carl Adam Petri em 1962. Atualmente a rede de Petri é uma das ferramentas mais utilizadas na modelagem de SEDs, pois é uma ferramenta gráfica que permite a visualização de todas as partes do processo. Exemplos de modelagem de sistemas podem ser vistos amplamente na literatura. Em Atto et al. (2011) o autor modela uma linha de fabricação de peças de borracha para carros e em Goverde (2007) é modelado um sistema de transporte ferroviário, ambos utilizando redes de Petri.

Uma das classes das redes de Petri é o grafo de eventos temporizado (GET), capazes de descrever processos onde ocorrem somente fenômenos de sincronismo de eventos e atrasos de tempo, sendo úteis na análise de desempenho dos processos.

Os GET's podem ser descritos por uma álgebra conhecida como álgebra max-plus (Bacelli et al., 1992). Essa álgebra é capaz de descrever sistemas não lineares na álgebra convencional como lineares na álgebra max-plus, sujeitos a sincronismo de eventos e fenômenos de atraso de tempo através de duas operações básicas: a adição e a multiplicação. Pelo fato de possuir somente duas operações a álgebra max-plus também é conhecida como dióide, definido como  $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ .

Existem várias abordagens para o controle de SEDs, uma delas é apresentada em Ramadge and Wonham (1987). Denominado Teoria do Controle Supervisório, esta teoria é baseada em linguagens formais e autômatos de estados finitos e estabelece condições necessárias e suficientes para a existência de um controlador minimamente restritivo.

Outra abordagem é apresentada em Murata (1989), na qual o autor apresenta algumas definições e propriedades das redes de Petri e as utiliza para o controle e modelagem de processos. As redes de Petri permitem a análise e síntese por meio de invariantes de lugar (Yamalidou et al., 1994), em que as restrições são apresentadas na forma de desigualdades lineares e o controlador força o sistema a respeitar as restrições. Nesse caso o controlador é também uma rede de Petri, obtida transformando um conjunto de restrições em invariantes de lugar do sistema controlado.

As redes de Petri também podem apresentar restrições temporais associadas a cada lugar e algumas técnicas de controle com base na realimentação de estados já foram propostas na literatura. Katz (2007) soluciona um problema de sincro-

nização de trens utilizando a teoria de semimódulos  $(A,B)$ -invariantes e apresenta uma forma de calcular uma tabela de horários, determinando a existência do semimódulo e, a partir desse, um controle de realimentação de estados que garanta a não violação das restrições.

Outro trabalho que utiliza a teoria do semimódulo  $(A,B)$ -invariante é o trabalho de [Garcia \(2007\)](#). Esse trabalho consiste em encontrar um semimódulo  $(A,B)$ -invariante e uma matriz  $F$  que realimente os estados para controlar e coordenar um sistema de tráfego urbano.

Em [Andrade and Maia \(2008\)](#), a partir da obtenção do modelo em grafo de eventos temporizados de um sistema a eventos discretos, uma estrutura de controle é definida com base na realimentação de estados, cujo objetivo é projetar um controlador que garanta a evolução do sistema sem violar as restrições impostas ao estado. Para mostrar a eficiência do método proposto, esse é aplicado em uma rede de tráfego urbano.

Em [Maia et al. \(2011a\)](#) é projetado um controle com realimentação de estados que atenda as restrições para sistemas a eventos discretos modelados por grafos de eventos temporizados, juntamente com as condições suficientes para a existência do controlador.

Outro método de controle aplicado a SEDs é o controle supervisorio. Em [Atto et al. \(2011\)](#) é apresentado um método para o controle supervisorio de uma planta industrial. Essa supervisão tem a função de garantir que o sistema respeite uma restrição de máxima duração temporal para o processo desejado. As restrições são reduzidas a restrições elementares, cujas contribuições são introduzidas na equação de estado do sistema, resultando em uma equação de estado restrita. De posse dessa equação restrita, é proposta a inserção de lugares no modelo em rede de Petri para que esse obedeça as restrições, conectando os lugares nas

transições apropriadas. O novo modelo escolhido é o que, após a introdução dos novos lugares, não altere o máximo ciclo médio do sistema, ou seja, é escolhido o modelo supervisionado que possui rendimento da produção igual ao sistema sem supervisão.

Técnicas de controle baseadas na política “just-in-time” também têm sido aplicadas a SEDs modelados via redes de Petri. O princípio do controle “just-in-time” pode ser enumerado em três itens: no primeiro o processo deve atender a algumas condições iniciais e algumas condições finais dadas, no segundo as variáveis de estado são sujeitas a algumas restrições e na terceira o controle é ótimo tal que otimize um critério escolhido (Houssin et al., 2007). Ao empregar tal política evita-se a formação de estoques no início, no meio e no fim de um sistema, evitando também a imobilização de capital.

No contexto de sistemas de manufatura, dado um calendário de saída desejado, é necessário encontrar os maiores tempos de entrada de matéria-prima no sistema, de forma que, a saída seja a mais próxima possível à saída desejada, o que satisfaz a demanda do consumidor enquanto minimiza os estoques.

Em Menguy et al. (1998) é proposta uma forma de encontrar os tempos de entrada do material a partir de um calendário de demanda desejado corrigido. A correção do calendário é necessária para torná-lo viável. Os tempos de entrada atendem restrições de igualdade impostas e são obtidos através da teoria da residuação e da resposta do sistema ao impulso.

Em Schutter and Boom (2001), o problema de controle é tratado como um modelo de controle preditivo adaptado para SEDs, dessa forma o autor propõe um algoritmo baseado na técnica do problema linear estendido complementar, denominado ELCP, que permite a inclusão de restrições na forma de inequações lineares na entrada e na saída do sistema e a ponderação entre os objetivos do

problema.

A ideia principal do modelo de controle preditivo, também conhecido como controle de horizonte finito, pode ser descrito como a solução de um problema de otimização a partir de um evento na  $k$ -ésima data, até um horizonte finito  $k + N_p$ , em que  $N_p$  é o número de predições desejado, levando em consideração o estado atual e as restrições do problema. A solução do problema conduz a uma sequência de controle, a qual começa em  $k$  e termina em  $k + N_p$  (Garcia et al., 1989).

Se a sequência de controle desejada for um caminho no qual o sistema irá evoluir de forma a atender um calendário com datas de saída do sistema, o modelo de controle preditivo pode ser considerado como uma forma de obter o controle “just-in-time”.

Em Maia et al. (2005), diversas estratégias baseadas na abordagem por modelo de referência são apresentadas, exemplificadas e discutidas. Um problema de controle é proposto cujo objetivo é determinar os tempos de entrada, de modo que a saída do sistema siga uma trajetória de referência dada, logo esse controle está relacionado com a estratégia “just-in-time”.

Em Houssin et al. (2007), o autor realiza o controle “just-in-time” em sistemas max-plus lineares. Nesse trabalho, o problema de rastreamento de saída é generalizado considerando restrições adicionais no objetivo de controle. Essa estratégia de controle é aplicada em um sistema de transporte urbano, cujo objetivo é encontrar os horários de partida dos ônibus.

A partir desses trabalhos citados, o objetivo deste trabalho é desenvolver novos meios de realizar o controle de SEDs modelados via GETs. Este trabalho modelará principalmente processos de manufatura para a aplicação das técnicas propostas, uma vez que esses processos podem ser considerados SEDs, pois suas

dinâmicas ocorrem a partir da ocorrência de eventos.

Novos meios de estudar e aperfeiçoar processos industriais são de grande importância atualmente, devido ao aumento da produção fomentado pelo aumento do consumo e a necessidade de economia de recursos, logo a eficiência é fortemente desejada. As técnicas desenvolvidas neste trabalho e as análises feitas servem para controlar, analisar e auxiliar na gerência de um sistema de manufatura. São estudadas as restrições dos sistemas e são propostos novos meios de obter controles visando aumentar a eficiência de sistemas de manufatura.

O primeiro problema de controle apresentado será solucionado por dois métodos distintos: o primeiro método utilizará a teoria dos semimódulos (Cohen et al., 2004)(Butkovic and Hegedus, 1984) e a teoria da residuação (Bacelli et al., 1992); o segundo método utilizará o algoritmo alternante proposto por Cuninghame-Green and Butkovic (2003). Ambos os métodos realizarão o controle preditivo de acordo com a política “just-in-time”. A segunda técnica de controle será baseada na realimentação de estados, de tal forma a encontrar um controle supervisorio que obrigue o sistema a respeitar as restrições temporais impostas ao estado (Maia et al., 2011a) (Andrade, 2008).

Esta dissertação está dividida da seguinte forma:

- No capítulo 2 são apresentados conceitos preliminares para o entendimento deste trabalho, conceitos como a teoria de sistemas a eventos discretos, álgebra max-plus, teoria da residuação e teoria dos semimódulos.
- No capítulo 3 são apresentados os métodos propostos para realizar o controle preditivo, baseado na política “just-in-time” para sistemas modelados por grafos de eventos temporizados.
- No capítulo 4 é apresentada uma nova proposta a fim de realizar o controle

supervisório para sistemas modelados por grafos de eventos temporizados, baseada na solução de inequações matriciais contendo as restrições do sistema, com o objetivo de encontrar uma matriz de realimentação de estados.

- No capítulo 5 são apresentadas as conclusões deste trabalho.



## Capítulo 2

# Conceitos Preliminares

Neste capítulo são abordados os conceitos relativos aos sistemas a eventos discretos, dentre eles as redes de Petri, os grafos a eventos temporizados, a álgebra max-plus, teoria da residuação, teoria de semimódulos e outros conceitos necessários para a compreensão deste trabalho.

### 2.1 Sistemas a Eventos Discretos

A definição de sistema é um dos conceitos primitivos, o qual é mais fácil ser compreendido pela intuição do que pela definição exata (Cassandras and Lafontaine, 1999). Podemos encontrar algumas definições de sistema como sendo uma combinação de componentes que agem em conjunto para executar uma função, que não seria possível para qualquer outra parte individual (Booth and Kurpis, 1993), ou ainda, como um conjunto de elementos interrelacionados que interagem no desempenho de uma função.

Sistemas podem ser classificados como contínuos e discretos. Em um sistema contínuo, o valor do seu estado pode assumir qualquer valor n-dimensional no domínio real, sendo normalmente tratado por meio de equações diferenciais. No

sistema discreto, seu modelo no espaço de estados é um conjunto discreto, por exemplo  $\{0,1,2,\dots\}$ , ou seja, as variáveis de estado só podem assumir valores discretos no tempo.

Quando o espaço de estados de um sistema é discreto e a transição entre os estados ocorre somente em alguns pontos discretos no tempo, relacionados com a ocorrência de um evento, dizemos que esse sistema é discreto e regido por eventos, ou seja, é um sistema a eventos discretos (SED).

Tais eventos podem estar relacionados com a chegada de clientes na fila de um banco, o término de processamento de uma peça por uma determinada máquina, uma ligação recebida por uma central de atendimentos, entre outros. Logo todo sistema que é regido pela ocorrência de eventos pode ser modelado como sistema a eventos discretos.

Existem várias ferramentas capazes de modelar o funcionamento de SEDs, como os processos de Markov, autômatos, álgebra de dióides e as redes de Petri (Cassandras and Lafortune, 1999). Neste trabalho serão utilizadas as redes de Petri e a álgebra de dióides, mais precisamente a álgebra max-plus.

## 2.2 Redes de Petri

As redes de Petri são uma ferramenta gráfica e matemática que permitem a modelagem de SEDs, para maiores detalhes veja Cassandras and Lafortune (1999) e Murata (1989).

Nas redes de Petri os eventos são associados com as transições e para que uma transição dispare, algumas condições devem ser satisfeitas. Uma transição é dita habilitada quando todas as condições necessárias para que ela dispare estão satisfeitas, a transição somente dispara quando ela está habilitada e ocorre o evento associado a ela.

As condições necessárias à habilitação da rede estão contidas nos lugares, logo todos os lugares precedentes a uma transição devem conter a informação necessária para habilitar a transição, essas informações normalmente são chamadas de fichas. Para conectar os nós da rede (transições e lugares), as redes de Petri são dotadas de arcos, que são direcionais e podem ser de lugar para transição e de transição para lugar.

**Definição 2.1 (Redes de Petri)** (*Cassandras and Lafortune, 1999*) *Uma rede de Petri é um grafo ponderado bi-partido*

$$(P, T, A, w)$$

*sendo  $P$  um conjunto finito de lugares,  $T$  um conjunto finito de transições,  $A$  um conjunto de arcos das transições para os lugares e dos lugares para as transições e  $w$  a função peso dos arcos.*

Assumimos que o grafo é conexo, ou seja, não existem arcos ou lugares isolados na rede.

**Exemplo 2.1 (Rede de Petri)** *Considere um grafo de uma rede de Petri definida pelos seguintes conjunto de lugares, conjunto de transições e conjunto de arcos, respectivamente,*

$$P = \{p_1, p_2, p_3\}, T = \{t_1, t_2, t_3\}$$

$$A = \{(t_1, p_1), (p_1, t_2), (t_2, p_2), (p_2, t_3), (t_3, p_3), (p_3, t_2)\}$$

*cujos arcos possuem os seguintes pesos,*

$$w(t_1, p_1) = 1, w(p_1, t_2) = 2, w(t_2, p_2) = 1, w(p_2, t_3) = 1, w(t_3, p_3) = 1 \text{ e}$$

$$w(p_3, t_2) = 1.$$

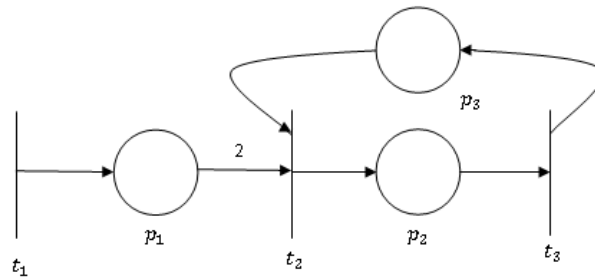


Figura 2.1: Rede de Petri para o Exemplo 2.1

A rede de Petri correspondente é mostrada na Figura 2.1.

**Definição 2.2 (Rede de Petri Marcada)** (*Cassandras and Lafortune, 1999*)

Uma rede de Petri marcada é uma quintupla  $(P, T, A, w, x)$ , onde  $(P, T, A, w)$  é um grafo de uma rede de Petri e  $x$  é uma marcação do conjunto de lugares.

$$x = \left[ \begin{array}{cccc} x(p_1) & x(p_2) & \dots & x(p_n) \end{array} \right] \in \mathbb{N}^n$$

é o vetor linha associado a  $x$ .

**Exemplo 2.2 (Rede de Petri Marcada)** Considere a rede de Petri apresentada na Figura 2.1, existem várias marcações que essa rede pode alcançar, uma delas é o vetor

$$x_1 = \left[ \begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

e outra é o vetor

$$x_2 = \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

As marcações para os dois vetores estão representadas, respectivamente, nas Figuras 2.2a e Figura 2.2b.

A forma como uma rede de Petri está marcada determina também o estado

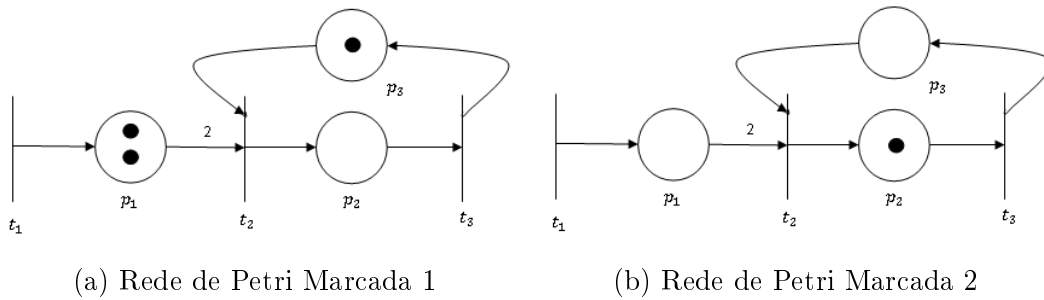


Figura 2.2: Exemplos de Redes de Petri Marcadas. (a) Rede de Petri Marcada com o vetor  $x_1$ . (b) Rede de Petri Marcada com o vetor  $x_2$ .

em que o sistema modelado se encontra, pois em cada estado possível de ser alcançado pelo sistema, existe uma marcação distinta na rede de Petri. Neste trabalho, a fim de simplificação, chamaremos as redes de Petri marcadas somente de redes de Petri. A marcação de uma rede de Petri convencional é sempre um número inteiro e indica a quantidade de fichas em cada lugar.

Para entender a dinâmica de funcionamento de uma rede de Petri é necessário definir quando uma transição estará habilitada a disparar. O disparo de uma ou mais transições é o que determina a mudança do estado do sistema. Para uma transição estar habilitada a disparar é necessário que cada lugar precedente a mesma contenha, no mínimo, uma quantidade de fichas igual ao arco que liga o respectivo lugar a transição.

**Definição 2.3 (Transição Habilitada)** (*Cassandras and Lafortune, 1999*) Uma transição  $t_j \in T$  em uma rede de Petri é dita habilitada se

$$x(p_i) \geq w(p_i, t_j) \text{ para todo } p_i \in I(t_j).$$

sendo  $I(t_j)$  o conjunto de lugares de entrada da transição  $t_j$ . Em outras palavras, a transição  $t_j$  em uma rede de Petri é habilitada quando o número de fichas em

$p_i$  é maior que o peso do arco que conecta  $p_i$  a  $t_j$ , para todos os lugares  $p_i$  que precedem a transição  $t_j$ .

A partir do momento que uma transição se torna habilitada ela pode disparar, normalmente esse disparo está associado a ocorrência de um evento. Quando a transição dispara, ocorre a mudança de estado do sistema. O mecanismo de transição de estado é feito a partir da movimentação de fichas. Ao disparar, uma transição retira uma quantidade de fichas de cada lugar que a antecede, igual ao peso do respectivo arco que conecta o lugar a transição, e coloca em cada lugar sucedente, um número de fichas igual ao respectivo arco que liga a transição ao lugar.

**Definição 2.4 (Dinâmica da Rede de Petri)** (*Cassandras and Lafortune, 1999*)

A função de transição de estado,  $f : \mathbb{N}^n \times T \rightarrow \mathbb{N}^n$ , de uma rede de Petri  $(P, T, A, w, x)$  é definida para a transição  $t_j \in T$  se e somente se,

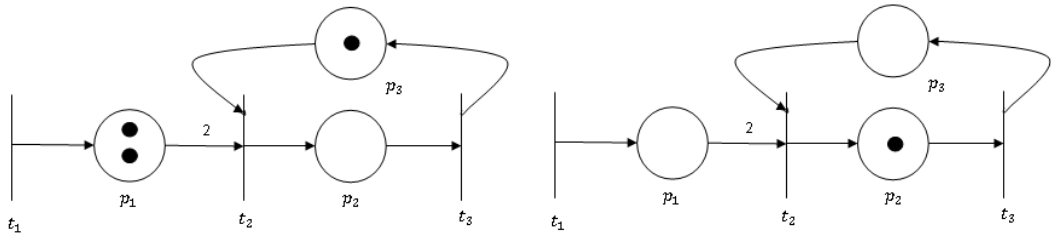
$$x(p_i) \geq w(p_i, t_j), \text{ para todo } p_i \in I(t_j)$$

sendo  $I(t_j)$  o conjunto de lugares de entrada da transição  $t_j$ . Se  $f(x, t_j)$  é definida, definimos  $x' = f(x, t_j)$ , onde,

$$x'(p_i) = x(p_i) - w(p_i, t_j) + w(t_j, p_i), \quad i=1, \dots, n.$$

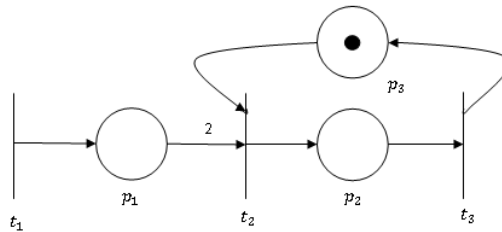
**Exemplo 2.3 (Dinâmica da Rede de Petri)** Considere a rede de Petri apresentada na Figura 2.3a, nesse estado as transições  $t_1$  e  $t_2$  estão habilitadas. A transição  $t_1$  estará sempre habilitada pois não existem lugares que a precedem, logo seu disparo estará condicionado somente a ocorrência do evento associado a essa transição. Já a transição  $t_2$  estará habilitada pois existem duas fichas em  $p_1$  e uma ficha em  $p_3$ , fazendo com que o número de fichas seja igual aos pesos dos respectivos arcos que ligam os lugares a transição.

Se a partir do estado apresentado na Figura 2.3a, ocorrer o disparo da transição  $t_2$ , o estado resultante será o apresentado na Figura 2.3b. Ao disparar, a transição  $t_2$  consome duas fichas de  $p_1$ , uma ficha de  $p_3$  e colocará uma ficha no lugar  $p_2$ . Podemos observar que o número de fichas na mudança de estado pode ser não conservativo, dependendo dos pesos associados a cada arco, uma vez que a quantidade de fichas consumidas depende do peso dos arcos que chegam à transição, e o número de fichas disponibilizadas depende dos pesos dos arcos que saem da transição.



(a) Rede de Petri antes do disparo

(b) Rede de Petri após o disparo da transição  $t_2$



(c) Rede de Petri após o disparo da transição  $t_3$

Figura 2.3: Dinâmica das Redes de Petri. (a) Rede de Petri inicial. (b) Rede de Petri após o disparo de  $t_2$ . (c) Rede de Petri após o disparo de  $t_3$ .

Na Figura 2.3b, as transições  $t_1$  e  $t_3$  estão habilitadas e a transição  $t_2$  desabilitada. Se a transição  $t_3$  disparar, ela consumirá uma ficha de  $p_2$  e colocará uma

ficha em  $p_3$ , o estado alcançado é apresentado na Figura 2.3c.

O modelo apresentado na Figura 2.3 pode ser, por exemplo, o modelo de um call center, no qual clientes ligam para a central de atendimento e aguardam atendimento (lugar  $p_1$ ), o call center tem capacidade de atendimento unitária (lugar  $p_3$ ). O cliente é admitido no atendimento (lugar  $p_2$ ) e após o término do atendimento, o sistema é liberado para atender um novo cliente (ficha retorna para  $p_3$ ).

Os modelos em redes de Petri podem ser dotados de tempos associado à sua estrutura e existem várias formas de temporizá-las, as mais utilizadas são os tempos associados aos lugares ou às transições. Quando o tempo é associado às transições, como na Figura 2.4a, após ser habilitada, a transição deve esperar o tempo associado a ela e só então poderá disparar, nesse caso a transição deve esperar quatro unidades de tempo. Da mesma forma, quando o tempo é associado aos lugares, como na Figura 2.4b, uma ficha ao chegar em determinado lugar deverá permanecer nesse por um tempo no mínimo igual ao tempo associado ao lugar, que nessa figura é duas unidades de tempo. Neste trabalho o tempo será associado aos lugares.

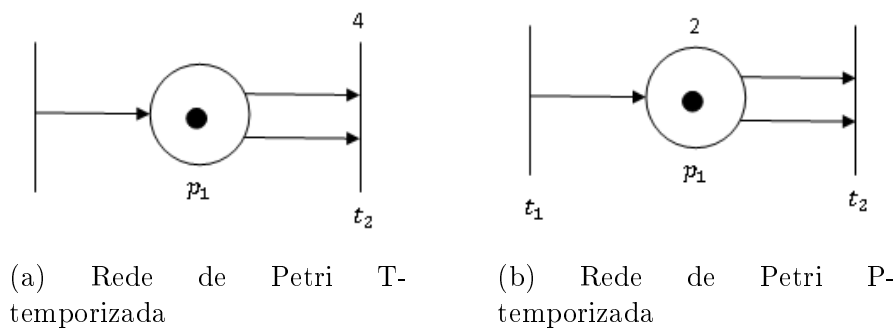


Figura 2.4: Redes de Petri Temporizadas. (a) Rede de Petri T-temporizada. (b) Rede de Petri P-temporizada.

### 2.2.1 Grafos de Eventos Temporizados

A temporização das redes de Petri é de suma importância para a avaliação e análise de desempenho. As redes temporizadas cujos lugares possuem somente uma transição de saída e uma transição de entrada, são classificadas como Grafos de Eventos Temporizados (GET). Nessa sub-classe das redes de Petri existem somente fenômenos de sincronismo de eventos e atraso de tempo, não sendo permitido a modelagem da concorrência por recursos, ou seja, assume-se que a concorrência por recursos foi resolvida por outro método qualquer.

**Definição 2.5 (Grafos de Eventos Temporizados (GET))** (*Bacelli et al., 1992*) *Um grafo a eventos temporizado é uma rede de Petri, na qual cada lugar tem um tempo de espera associado e somente uma transição de entrada e somente uma transição de saída.*

Na modelagem de GETs, cada transição normalmente é associada a um evento e a ocorrência do evento determina o disparo da transição. Por exemplo, a transição  $t_1$  da Figura 2.3a pode estar associada à família de eventos "chegada de clientes na fila", e se o evento ocorrido foi "chegada do quarto cliente na fila às 15h", significa que a transição disparou quatro vezes e a quarta vez foi na data de 15h. Dessa forma, os GETs são usualmente descritos por datadores, ou seja, associa-se a transição  $x$  uma sequência de datas de disparo,  $x(k)$ , sendo que  $k$  é o número do disparo.

Considere o GET apresentado na Figura 2.5. A transição  $u$  é a entrada do sistema e não possui lugares precedentes, logo não depende de nenhuma outra transição. A transição  $y$  é a saída do sistema e não condiciona nenhuma transição.

Considerando que a situação inicial é a marcação apresentada na Figura 2.5. O  $k$ -ésimo disparo da transição  $x_1$  ocorrerá após o  $k$ -ésimo disparo da transição

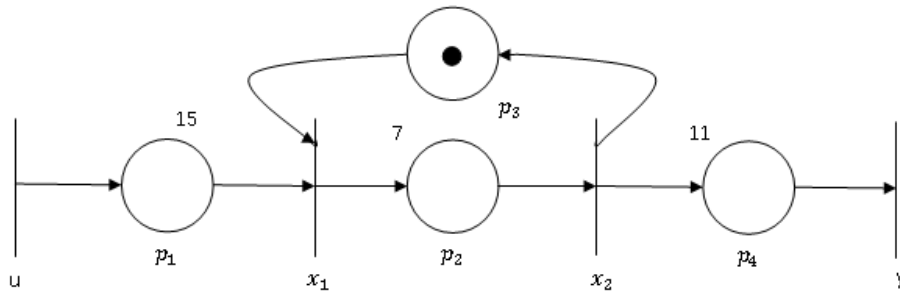


Figura 2.5: Grafo de Eventos Temporizado

$u$  mais 15 unidades de tempo e o  $(k-1)$ -ésimo disparo da transição  $x_2$ . Analogamente, a transição  $x_2$  poderá disparar pela  $k$ -ésima vez, após o  $k$ -ésimo disparo da transição  $x_1$  mais 7 unidades de tempo. O disparo da transição de saída do sistema ocorrerá após o  $k$ -ésimo disparo da transição  $x_2$  mais 11 unidades de tempo. O comportamento desse sistema é descrito pelas equações a seguir:

$$\begin{aligned} x_1(k) &= \max\{u(k) + 15; x_2(k - 1)\} \\ x_2(k) &= x_1(k) + 7 \\ y(k) &= x_2(k) + 11 \end{aligned} \tag{2.1}$$

As Equações 2.1 utilizam dois operadores para descrever a dinâmica do sistema da Figura 2.5, o operador max e o operador soma. O operador max está relacionado com a sincronização de tarefas e o operador soma ao tempo atribuído aos lugares.

Por utilizarem apenas dois operadores, as Equações 2.1 podem ser descritas por um dióide, que será definido na próxima seção. O dióide que utiliza os operadores max e soma é conhecido como Álgebra Max-Plus, no qual a soma é representada pelo operador  $\otimes$  e o operador max é representado pelo operador  $\oplus$ . Reescrevendo as equações anteriores com os operadores da álgebra max-plus, obtemos o sistema a seguir:

$$\begin{aligned}
x_1(k) &= u(k) \otimes 15 \oplus x_2(k-1) \\
x_2(k) &= x_1(k) \otimes 7 \\
y(k) &= x_2(k) \otimes 11
\end{aligned}
\tag{2.2}$$

Nos sistemas representados pela álgebra max-plus é necessário que se informe o estado inicial da rede, ou seja, para a rede da Figura 2.5, o estado de  $x_1$  e  $x_2$  para  $k < 0$ . Nesse caso, normalmente, arbitra-se que todos os disparos anteriores a  $k = 0$  ocorreram em  $-\infty$ . Dessa forma, a marcação inicial da rede já contribuiu com o tempo de atraso de seus respectivos lugares e a habilitação das transições, dependerá apenas do número de fichas dos lugares que as precedem. A partir do estado inicial e do deslocamento do disparo das transições é possível obter um sistema de equações recursivas na álgebra max-plus a partir das Equações 2.2, capaz de descrever toda a dinâmica do GET. Maiores detalhes sobre a álgebra max-plus serão apresentados na seção a seguir.

## 2.3 Álgebra Max-Plus

A álgebra max-plus é um dióide, uma vez que possui somente duas operações, dessa forma é importante definir primeiro a estrutura dos dióides, e para tal, definimos a estrutura dos anéis. Anel é uma estrutura algébrica  $(A, \otimes, \oplus)$  que possui um conjunto  $A$  e este conjunto admite duas operações internas. O operador  $\oplus$  é associativo, tem elemento neutro, é inversível e comutativo. O elemento  $\otimes$  é associativo, comutativo e admite elemento neutro, além disso,  $\otimes$  é distributivo em relação a  $\oplus$ .

Dióide é uma estrutura algébrica que apresenta todas as propriedades de um anel, exceto a de elemento inverso aditivo. Por essa razão, os dióides são caracterizados algebricamente como semi-anéis idempotentes (Bacelli et al., 1992).

**Definição 2.6 (Dióide)** (*Bacelli et al., 1992*) *O dióide é uma estrutura algébrica representada por um conjunto  $D$  munido de duas operações  $(\oplus, \otimes)$  (soma e multiplicação) que obedece os axiomas abaixo.*

**Axioma 2.1 (Associatividade da Adição)**  $\forall a, b, c \in D, (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$

**Axioma 2.2 (Comutatividade da Adição)**  $\forall a, b \in D, a \oplus b = b \oplus a$

**Axioma 2.3 (Associatividade da Multiplicação)**  $\forall a, b, c \in D, (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$

**Axioma 2.4 (Distributividade da Multiplicação em relação à adição)**

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in D, a \otimes (b \oplus c) &= (a \otimes b) \oplus (a \otimes c) \\ (b \oplus c) \otimes a &= (b \otimes a) \oplus (c \otimes a) \end{aligned}$$

**Axioma 2.5 (Existência do Elemento Neutro da Adição)**  $\forall a \in D, a \oplus \varepsilon = a$

**Axioma 2.6 (Absorção pelo Elemento Neutro da Adição)**  $\forall a \in D, a \otimes \varepsilon = \varepsilon$

**Axioma 2.7 (Existência do Elemento Identidade da Multiplicação)**  $\forall a \in D, a \otimes e = e \otimes a = a$

**Axioma 2.8 (Idempotência da Adição)**  $\forall a \in D, a \oplus a = a$

Um dióide é completo se ele for fechado em relação às somas infinitas e se a multiplicação for distributiva em relação a somas infinitas. Portanto, podemos considerar a álgebra max-plus como um dióide completo que possui a estrutura  $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$  e é simbolizado por  $\bar{\mathbb{R}}_{max}$ , conseqüentemente a álgebra max-plus obedece a todos os axiomas dos dióides.

Além dos operadores soma e multiplicação, outra importante operação definida sobre qualquer dióide é o operador estrela de Kleene, definida por  $a^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} a^i$ , com  $a^i = a \otimes a^{i-1}$  e  $a^0 = e$ . Verifica-se que para qualquer inteiro positivo  $p$ ,  $(a^*)^p = a^*$  e  $(a^*)^* = a^*$ .

### 2.3.1 Matrizes em $\bar{\mathbb{R}}_{max}$

As matrizes são de grande importância para a teoria dos grafos de eventos temporizados, uma vez que todo grafo pode gerar uma matriz que o represente e toda matriz com elementos inteiros também tem um grafo correspondente. As matrizes podem ser definidas na álgebra max-plus por meio das operações de soma e multiplicação. Se  $A, B \in \bar{\mathbb{R}}_{max}^{n \times m}$ , sendo  $n, m \in \mathbb{N}$  e  $i, j$  são, respectivamente, as linha e colunas das matrizes, a operação de soma é definida por:

$$[A \oplus B]_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}.$$

Se  $A \in \bar{\mathbb{R}}_{max}^{n \times l}$  e  $B \in \bar{\mathbb{R}}_{max}^{l \times m}$ , então o produto das matrizes é definido por:

$$[A \otimes B]_{ik} = \bigoplus_{j=1}^l a_{ij} \otimes b_{jk}.$$

**Exemplo 2.4 (Multiplicação e Soma de Matrizes)** *Considere as matrizes  $A, B, C \in \bar{\mathbb{Z}}_{max}^{2 \times 2}$ , sendo*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} 4 \oplus 2 & 3 \oplus 6 \\ 5 \oplus 1 & 2 \oplus 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$(A \oplus B) \otimes C = \begin{bmatrix} 4 \otimes 1 \oplus 6 \otimes 1 & 4 \otimes 0 \oplus 6 \otimes 4 \\ 5 \otimes 1 \oplus 3 \otimes 1 & 5 \otimes 0 \oplus 3 \otimes 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \oplus 7 & 4 \oplus 10 \\ 6 \oplus 4 & 5 \oplus 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

A matriz identidade  $I$  em  $\bar{\mathbb{R}}_{max}$  é definida como  $i_{ij} = e$  para  $i = j$  e  $i_{ij} = \varepsilon$  para  $i \neq j$ .

O operador estrela de Kleene também pode ser definido para matrizes, considerando a matriz  $A \in \bar{\mathbb{R}}_{max}^{n \times n}$ , temos que:

$$A^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A^i,$$

com  $A^i = A^i \otimes A^{(i-1)}$  e  $A^0 = I$ .

### 2.3.2 Sistemas Max-Plus Lineares

Um GET modelado através da álgebra max-plus gera um conjunto de equações, como representado nas Equações 2.2. Esse conjunto de equações pode ser reescrito como equações matriciais da seguinte forma:

$$x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k) \tag{2.3}$$

$$y(k) = Cx(k) \tag{2.4}$$

Nas Equações 2.3 e 2.4 o símbolo de  $\otimes$  foi omitido para facilitar o tratamento das equações e será omitido sempre que for conveniente,  $x(k)$  é o vetor de estado do sistema e  $u(k)$  é o vetor de entrada do sistema. Em um sistema max-plus as datas de disparo devem ser não-decrescentes, logo  $A \succeq I$  (os elementos da matriz  $A$  são maiores ou iguais aos elementos de  $I$  quando comparados termo a termo), pois  $x(k) \succeq x(k-1)$ , em que  $I$  é a matriz identidade na álgebra max-plus.

Em muitos sistemas modelados em max-plus é comum aparecer um termo relacionado a  $x(k)$  no lado direito da Equação 2.3, mas esse fato pode ser facilmente corrigido e o sistema retorna para a forma apresentada na Equação 2.3. Para demonstrar esse fato, considere o teorema a seguir.

**Teorema 2.3.1** (*Bacelli et al., 1992*) *Se existe somente circuitos de pesos não positivos em um grafo  $\mathcal{G}(A)$ , existe uma solução para  $x = Ax \oplus b$  que é dada por  $x = A^*b$ . Além disso, se os pesos dos circuitos são negativos, a solução é única.*

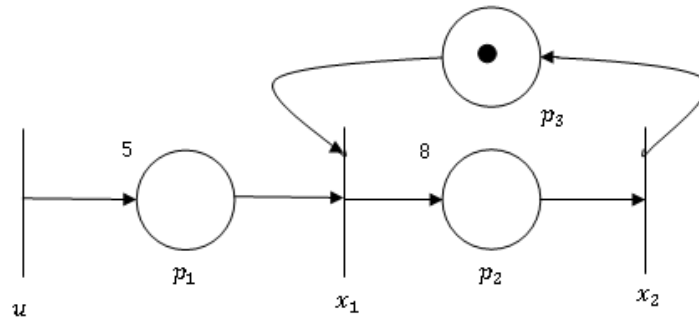


Figura 2.6: Grafo de Eventos Temporizado

Dessa forma, um GET como apresentado na Figura 2.6, pode ser modelado pela equação

$$x(k) = A_o x(k) \oplus A_1 x(k-1) \oplus B_o u(k) \quad (2.5)$$

e esta equação pode ser reescrita como

$$x(k) = A_o x(k) \oplus W \quad (2.6)$$

em que,  $W = A_1 x(k-1) \oplus B_o u(k)$ . Supondo que  $x$  é solução, consequentemente,

$x$  satisfaz a Equação 2.6, logo

$$\begin{aligned} x(k) &= A_o x(k) \oplus W \\ x(k) &= A_o(A_o x(k) \oplus W) \oplus W \\ x(k) &= A_o^2 x(k) \oplus A_o W \oplus W \\ &\vdots \\ x(k) &= A_o^l x(k) \oplus A_o^{l-1} W \oplus A_o^{l-2} W \oplus \dots \oplus W \end{aligned}$$

e portanto  $x(k) \succeq A_o^* W$ . Além disso, se todos os circuitos do grafo tem pesos negativos,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} A_o^l = [\varepsilon] \quad (2.7)$$

em que  $[\varepsilon]$  é uma matriz de  $\varepsilon$  de dimensão apropriada. Dessa forma,

$$x(k) = A_o^* W \quad (2.8)$$

Substituindo  $W$  na Equação 2.8,

$$x(k) = A_o^* A_1 x(k-1) \oplus A_o^* B_o u(k) \quad (2.9)$$

Resultando em:

$$x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k) \quad (2.10)$$

sendo  $A = A_o^* A_1$  e  $B = A_o^* B_o$ .

## 2.4 Teoria da Residuação

A Equação  $f(x) = b$  pode ter inúmeras ou nenhuma solução, portanto a teoria da residuação é utilizada para encontrar a máxima subsolução de inequações

da forma  $f(x) \preceq b$  e a teoria da residuação dual busca a mínima supersolução para a inequação  $f(x) \succeq b$  na álgebra de dióides. As operações  $\oplus$  e  $\otimes$  não são inversíveis, particularmente para aplicações matriciais, dessa forma a residuação trata da inversão de mapeamentos isotônicos e da solução de inequações.

**Definição 2.7 (Isotonia)** (*Bacelli et al., 1992*) *Um mapeamento  $f$  definido sobre um dióide  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$  em um dióide  $(\mathcal{C}, \otimes, \oplus)$  é chamado de mapeamento isotônico se, para todo  $a, b \in \mathcal{D}$ , a seguinte relação de ordem é preservada*

$$a \preceq b \Rightarrow f(a) \preceq f(b)$$

Para garantir a existência de um limite superior e inferior, assumimos que  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{C}$  são dióides completos. Seja  $f$  um mapeamento isotônico de um dióide  $\mathcal{D}$  em outro dióide  $\mathcal{C}$ , se  $f(x) = b$  não é sobrejetiva, a equação pode não ter solução para alguns valores de  $b$ , e se  $f(x) = b$  não é injetiva, a mesma equação pode não ter solução única. A solução para esse problema pode ser obtida considerando um subconjunto da solução, isto é, valores de  $x$  que satisfazem  $f(x) \preceq b$ . Analogamente, definem-se supersoluções de  $f(x) = b$ , como os valores de  $x$  tais que  $f(x) \succeq b$ . (*Maia, 2003*) (*Bacelli et al., 1992*).

As definições e teoremas a seguir foram retirados de (*Bacelli et al., 1992*) e (*Maia, 2003*) e aplicações para a residuação aplicadas a dióides são dadas em (*Bacelli et al., 1992*).

**Definição 2.8 (Resíduo e Mapeamento Residuável)** *Um mapeamento isotônico  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ , no qual  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{E}$  são conjuntos ordenados, é um mapeamento residuável se para todo  $y \in \mathcal{E}$  existe a maior subsolução para a inequação  $f(x) \preceq y$ . Essa maior subsolução é denotada por  $f^\sharp(y)$  e o mapeamento  $f^\sharp$  é chamado resíduo de  $f$ .*

**Teorema 2.4.1 (Residuação)** *Seja  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  um mapeamento isotônico na qual  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{E}$  são conjuntos ordenados, então  $f$  é residuável se e somente se  $f^\sharp$  é o único mapeamento isotônico tal que*

$$f \circ f^\sharp(y) \preceq y \quad e \quad f^\sharp \circ f(x) \succeq x \quad (2.11)$$

$\forall x \in \mathcal{D}$  e  $\forall y \in \mathcal{E}$ .

O teorema a seguir caracteriza os mapeamentos residuáveis para os dióides completos.

**Teorema 2.4.2** (*Bacelli et al., 1992*) *Considere os dióides completos  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{C}$ . O mapeamento  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ , é residuável, se e somente se, para todo subconjunto  $X$  de  $\mathcal{D}$*

$$\begin{aligned} f\left(\bigoplus_{x \in X} x\right) &= \bigoplus_{x \in X} f(x) \\ f(\varepsilon) &= \varepsilon \end{aligned}$$

Resultados com demonstrações análogas podem ser anunciados para mapeamentos dualmente residuáveis.

**Definição 2.9 (Resíduo Dual e Mapeamento Dualmente Residuável)** (*Bacelli et al., 1992*) *Um mapeamento isotônico  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ , no qual  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{E}$  são conjuntos ordenados, é um mapeamento dualmente residuável se para todo  $y \in \mathcal{E}$  existe a menor supersolução para a inequação  $f(x) \succeq y$ . Essa menor supersolução é denotada por  $f^\flat(y)$  e o mapeamento  $f^\flat$  é chamado de resíduo dual de  $f$ .*

**Teorema 2.4.3 (Residuação Dual)** (*Bacelli et al., 1992*) *Seja um mapeamento isotônico  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ , no qual  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{E}$  são conjuntos ordenados, então  $f$  é dualmente*

residuável, se e somente se  $f^b$  é o único mapeamento isotônico tal que:

$$f \circ f^b(y) \succeq y \quad e \quad f^b \circ f(x) \preceq x \quad (2.12)$$

$\forall x \in \mathcal{D}$  e  $\forall y \in \mathcal{E}$ .

**Teorema 2.4.4** (*Bacelli et al., 1992*) *Considere os dióides completos  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{C}$ . O mapeamento  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  é dualmente residuável se e somente se, para todo sub-conjunto  $X$  de  $\mathcal{D}$*

$$f\left(\bigwedge_{x \in X} x\right) = \bigwedge_{x \in X} f(x) \quad (2.13)$$

$$f(\top) = \top \quad (2.14)$$

$\forall x \in \mathcal{D}$  e  $\forall y \in \mathcal{E}$ . Em que  $\bigwedge$  é o operador de ínfimo (mínimo) e  $\top$  representa o elemento infinito.

### 2.4.1 Mapeamentos Residuáveis e Dualmente Residuáveis nos Dióides Completos

Serão apresentados nesta seção alguns resultados derivados da teoria da residuação que dizem respeito aos mapeamentos lineares ( $f(x) = a \otimes x$  ou  $f(x) = x \otimes a$ ) e ao mapeamento afim ( $f(x) = x \oplus a$ ), que serão utilizados neste trabalho. Esses resultados foram obtidos em [Maia \(2003\)](#).

Sejam os mapeamentos  $L_a, R_a$  e  $T_a$  definidos em um dióide completo  $\mathcal{D}$

$$L_a : x \mapsto a \otimes x \quad (2.15)$$

$$R_a : x \mapsto x \otimes a \quad (2.16)$$

$$T_a : x \mapsto a \oplus x \quad (2.17)$$

Como citado na seção 2.3, um dióide é completo se ele é fechado em relação a somas infinitas e se a multiplicação é distributiva sobre somas infinitas, observa-se que a multiplicação se distribui em relação as somas infinitas tanto à esquerda quanto à direita para os mapeamentos  $L_a$  e  $R_a$ . Observa-se ainda que  $L_a(\varepsilon) = R_a(\varepsilon) = \varepsilon$ . A aplicação do teorema 2.4.2 garante que esses mapeamentos são residuáveis. Além disso, se  $\mathcal{D}$  é comutativo tem-se que  $L_a = R_a$  e, portanto,  $L_a^\sharp = R_a^\sharp$ .

O mapeamento  $T_a$  não é sempre residuável, pois  $T_a(\varepsilon) \neq \varepsilon$ , considerando  $\mathcal{D}$  completo e distributivo. Porém,  $T_a(\top) = \top$ , e verifica-se que  $T_a$  satisfaz o teorema 2.4.4 e é, portanto, dualmente residuável.

As notações abaixo para os mapeamentos  $L_a, R_a$  e  $T_a$  são apresentados em Bacelli et al. (1992).

**Notação (Resíduos de  $L_a, R_a$  e  $T_a$ ):**

$$L_a^\sharp(x) = a \setminus x$$

$$R_a^\sharp(x) = x / a$$

$$T_a^\flat(x) = x \ominus a$$

No caso particular do dióide  $\bar{\mathbb{Z}}_{max}$  tem-se  $L_a^\sharp = R_a^\sharp = x - a$  (operação de subtração na álgebra convencional) (Bacelli et al., 1992). Para  $T_a^\flat$  temos

$$T_a^\flat = x \ominus a = \begin{cases} x & \text{se } x \succ a \\ \varepsilon & \text{se } x \preceq a \end{cases}$$

Se  $\mathcal{D}$  é um dióide completo,  $\mathcal{D}^{n \times n}$  também é um dióide e as operações  $L_A(X) = A \otimes X$  e  $R_A(X) = X \otimes A$  também são residuáveis, sendo  $A$  e  $X$  matrizes  $n \times n$

com coeficientes em  $\mathcal{D}$ ,

$$L_A^\# = (A \bowtie X)_{ij} = \bigwedge_{l=1}^n a_{li} \bowtie x_{lj}$$

$$R_A^\# = (X \not\bowtie A)_{ij} = \bigwedge_{l=1}^n x_{li} \not\bowtie a_{lj}$$

Analogamente, o mapeamento  $T_A(X) = X \oplus A$  é dualmente residuável, sendo

$$T_A^b = (X \oplus A)_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & \text{se } x_{ij} \succ a_{ij} \\ \varepsilon & \text{se } x_{ij} \preceq a_{ij} \end{cases}$$

Um importante resultado para este trabalho, que utiliza a teoria da residuação dual, pode ser obtido em [Bacelli et al. \(1992\)](#) e é demonstrado a seguir.

$$x \oplus a = \{y \mid a \oplus y \succeq x\} \Rightarrow a \oplus (x \oplus a) \succeq x$$

Por outro lado, se

$$(x \oplus a) \preceq x \Rightarrow a \oplus (x \oplus a) \preceq x$$

Logo,

$$a \oplus (x \oplus a) = x \oplus a \tag{2.18}$$

**Exemplo 2.5 (Residuação e Residuação Dual)** *Considere as matrizes  $A, B \in \overline{\mathbb{Z}}_{max}^{2 \times 2}$ , sendo*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pela residuação dual, a menor solução para  $X$  tal que  $X \oplus A \succeq B$  é dada por:

$$X = B \ominus A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 4 \\ \varepsilon & 2 \end{bmatrix},$$

Pela teoria da residuação, a maior solução para  $X$  tal que  $A \otimes X \preceq B$ , é dada por:

$$X = A \setminus B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix},$$

e a maior solução para  $X \otimes A \preceq B$ , é dada por:

$$X = B \not\! / A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix},$$

## 2.5 Semimódulos

O conceito de semimódulo é equivalente em semi-anéis à noção de espaço linear vetorial na teoria clássica de sistemas.

**Definição 2.10 (Semimódulo)** (*Cohen et al., 2004*) Um semimódulo definido sobre um semi-anel  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes, \varepsilon_s, e)$  é um monóide comutativo  $(\mathcal{M}, \hat{\otimes})$ , com elemento neutro  $\varepsilon_{\mathcal{M}}$  e equipado com o mapa  $(\mathcal{D} \times \mathcal{M}) \mapsto \mathcal{M}$ , que é  $(\lambda, v) \mapsto \lambda.v$  (ação à esquerda), para o qual:

1.  $(\lambda \otimes \mu).v = \lambda.(\mu.v)$
2.  $\lambda.(u \hat{\otimes} v) = \lambda u \hat{\otimes} \lambda.v$
3.  $(\lambda \hat{\otimes} \mu).v = \lambda.v \hat{\otimes} \mu.v$
4.  $\varepsilon_s.v = \varepsilon_{\mathcal{M}}$

$$5. \lambda.\varepsilon_{\mathcal{M}} = \varepsilon_{\mathcal{M}}$$

$$6. e.v = v$$

para todo  $u, v \in \mathcal{M}$  e  $\lambda, \mu \in \mathcal{D}$

**Definição 2.11 (Subsemimódulo)** (*Katz, 2007*) *Um subsemimódulo de  $\mathcal{M}$  é um subconjunto  $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$  para o qual se  $u, v \in \mathcal{S}$  e  $\lambda, \mu \in \mathcal{D}$  então  $\lambda.v \hat{\oplus} \mu.v \in \mathcal{S}$*

Vamos considerar o subsemimódulo do semimódulo o vetor n-dimensional com entrada em  $\mathcal{D}$  equipado com as operações  $(u \hat{\oplus} v)_i = u_i \oplus v_i$  e  $\lambda.v = \lambda \otimes v$ . Nesse contexto, o conjunto de todas as soluções para o sistema  $Ax = Bx$ , para o qual  $A, B, x$  tem entradas em  $\bar{\mathbb{Z}}_{max}$ , pode ser caracterizado por um semimódulo finitamente gerado (*Butkovic and Hegedus, 1984*) (*Gaubert, 1992*) (*Maia et al., 2011a*), ou seja, o conjunto de todas as soluções pode ser expresso como uma imagem de uma matriz com entradas em  $\bar{\mathbb{Z}}_{max}$ . Uma discussão e um método para a solução de  $Ax = Bx$  são apresentadas no Apêndice A.

**Exemplo 2.6 (Semimódulo)** *Considere a equação  $Au = Bu$  em que as matrizes  $A, B \in \bar{\mathbb{Z}}_{max}^{2 \times 2}$  e  $u \in \bar{\mathbb{Z}}_{max}^{2 \times 1}$ , sendo*

$$A = \begin{bmatrix} e & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \varepsilon & 2 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

*Utilizando o método apresentado no Apêndice A é possível escrever a equação referente as primeiras linhas das matrizes, ou seja,*

$$e \otimes u_1 \oplus 3 \otimes u_2 = 2 \otimes u_1 \oplus 3 \otimes u_2$$

*Logo é possível enunciar o seguinte conjunto:*

$$\Upsilon_1 = \{(l, p) | (a_l \succeq b_l) e (b_p \succeq a_p)\} = \{(2, 1), (2, 2)\}$$

e encontrar os seguintes vetores de forma que  $v^{(l,p)} \in \bar{\mathbb{Z}}_{max}^{2 \times 1}$ , tal que  $v^{(l,p)}(l) = b_p$ ,  $v^{(l,p)}(p) = a_l$  e  $v^{(l,p)}(k) = \varepsilon$  para  $k \in \{l, p\}$ , ou seja,

$$v^{(2,1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, v^{(2,2)} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 3 \end{bmatrix}$$

Estes vetores formam as colunas de uma matriz  $M_1$ , ou seja,

$$M_1 = \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

As colunas de  $M_1$  geram um espaço na qual a solução da primeira linha pertence. A matriz  $M_1$  deve ser considerada na solução da equação das segundas linhas das matrizes  $A$  e  $B$ , de modo que,

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Simplificando a equação matricial obtém-se:

$$8 \otimes u_1 \oplus 4 \otimes u_2 = 4 \otimes u_1 \oplus 5 \otimes u_2$$

de forma que,

$$\Upsilon_2 = \{(1,2)\}$$

e

$$v^{(1,2)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$M_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Com os valores de  $M_1$  e  $M_2$  é possível encontrar uma matriz  $M$  na qual as colunas desta matriz formam um semimódulo que contém todas as possíveis soluções de  $Au = Bu$ . A matriz  $M$  é dada por:

$$M = M_1 \otimes M_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Assim, a solução  $u \in \text{Im}M$ .

## 2.6 Solução da Equação $A \otimes x = B \otimes y$

Um resultado importante para este trabalho é a solução da equação  $A \otimes x = B \otimes y$  definida na álgebra max-plus. O método para a solução dessa equação foi proposto por [Cuninghame-Green and Butkovic \(2003\)](#) e denominado de método alternante. Através de um algoritmo o método encontra a solução da equação sempre que essa existir a partir de um ponto inicial finito.

As matrizes  $A$  e  $B$  nessa equação devem ser duplo G-astic, ou seja,  $A$  e  $B$  devem conter ao menos um elemento finito em cada linha e em cada coluna ([Cuninghame-Green and Butkovic, 2003](#)). O algoritmo proposto por [Cuninghame-Green and Butkovic \(2003\)](#) é apresentado abaixo.

### Inicialize

**Escolha** um vetor finito arbitrário  $x$

**Faça**  $r = 0$ ;  $x(0) = x$ ;

### Repita

$$\begin{aligned}
y(r) &= B \setminus (Ax(r)); \\
x(r+1) &= A \setminus (By(r)); \\
r &= r+1; \\
\text{Até } Ax(r) &= By(r-1)
\end{aligned}$$

**Fim**

As equações

$$y(r) = B \setminus (Ax(r)) \quad (2.19)$$

$$x(r+1) = A \setminus (By(r)) \quad (2.20)$$

encontram as maiores subsoluções tais que

$$By(r) \preceq Ax(r) \quad (2.21)$$

$$Ax(r+1) \preceq By(r) \quad (2.22)$$

logo

$$Ax(r+1) \preceq By(r) \preceq Ax(r) \quad (2.23)$$

Alguns teoremas acerca das propriedades desse algoritmo apresentados por [Cunningham-Green and Butkovic \(2003\)](#) e que são importantes para este trabalho são dados a seguir.

**Teorema 2.6.1** ([Cunningham-Green and Butkovic, 2003](#)) *A sequência  $\{A \otimes x(r) (r = 0, 1, \dots)$  é não crescente.*

**Teorema 2.6.2** ([Cunningham-Green and Butkovic, 2003](#)) *A sequência  $\{x(r) (r = 0, 1, \dots)$  é não crescente.*

**Proposição 2.6.1** *A partir da condição inicial, a solução encontrada pelo algoritmo é a maior possível menor ou igual à condição inicial.*

**Prova:** Para uma mesma condição inicial,  $x(0)$ , considere  $x$  a solução encontrada pelo algoritmo, suponha que exista uma outra solução  $z = f(z)$ , tal que  $x \preceq z \preceq x(0)$ . Logo,  $\exists m | x = f^m(x(0))$ , em que  $f^m$  é uma função isotônica, então se  $x \preceq z \preceq x(0) \Rightarrow f^m(x) \preceq f^m(z) \preceq f^m(x(0))$ . Como  $x$  e  $z$  são soluções de  $f$  (pontos fixos de  $f$ ), então  $f^m(x) = x$  e  $f^m(z) = z$ , logo  $f^m(x) \preceq f^m(z) \preceq f^m(x(0)) \Rightarrow x \preceq z \preceq x$ , conseqüentemente  $x = z$ .

O teorema a seguir determina que existe um limitante inferior para a solução da equação.

**Teorema 2.6.3** (*Cunninghame-Green and Butkovic, 2003*) Se a solução para a equação  $A \otimes x = B \otimes y$  existe, então a sequência  $\{x(r) | r = 1, 2, \dots\}$  é delimitada inferiormente para qualquer  $x(0)$ .

Os teoremas abaixo asseguram que, se a solução para a equação existe, o algoritmo converge para a solução em um número finito de passos.

**Teorema 2.6.4** (*Cunninghame-Green and Butkovic, 2003*) Os pares da sequência  $\{(x(r), y(r)) | r = 0, 1, \dots\}$ , gerado pelo método alternante, converge se e somente se a solução existe. A convergência é monotônica, para uma solução estável, para qualquer escolha de  $x(0)$ .

**Teorema 2.6.5** (*Cunninghame-Green and Butkovic, 2003*) No caso inteiro, se a solução existe, o método alternante produz uma solução em um número finito de passos.

De acordo com o Teorema 2.6.5, se os elementos finitos de  $A$  e  $B$  são todos inteiros, a convergência desse algoritmo acontece em um número finito de passos.

Os resultados desta seção serão utilizados para solucionar o problema de controle apresentado no Capítulo 3.

## 2.7 Conclusão

Neste capítulo foram apresentadas as ferramentas necessárias à compreensão desse trabalho. As redes de Petri, mais precisamente os grafos de eventos temporizados, são as ferramentas utilizadas para a modelagem dos processos juntamente com a álgebra max-plus. Os métodos de controle propostos utilizam a teoria da residuação, semimódulos e a teoria de matrizes em  $\bar{\mathbb{R}}_{max}$ , para encontrar o controlador que force o sistema a não violar as restrições impostas.

## Capítulo 3

# Controle “Just-in-Time” em Horizonte Finito de Sistemas Max-Plus Lineares

### 3.1 Introdução

Este capítulo irá apresentar uma nova forma de obter um controle baseado no princípio de controle “just-in-time”. Este princípio estabelece que, dado um calendário de saída desejado, é necessário encontrar os maiores tempos de entrada de matéria prima no sistema, de forma que a saída seja a mais próxima possível à saída desejada.

Neste trabalho o problema de controle preditivo será tratado em espaço de estados e será solucionado por dois métodos distintos. O primeiro método apresentado utiliza a teoria dos semimódulos para solucionar a restrição de igualdade imposta, enquanto o segundo utiliza o algoritmo alternante proposto por [Cuningham-Green and Butkovic \(2003\)](#).

A solução da restrição de igualdade será utilizada para encontrar a solução do problema de controle, juntamente com a equação de evolução do sistema, a qual possui todas as informações sobre o sistema. A principal contribuição deste capítulo é propor novas metodologias para realizar o controle “just-in-time” em sistemas modelados via grafos de eventos temporizados.

## 3.2 Problema de Controle

Os resultados apresentados nesta seção são baseados nos trabalhos de [Menguy et al. \(1998\)](#) e [Schutter and Boom \(2001\)](#), que em seus trabalhos propuseram meios de encontrar os tempos de entrada de sistemas a eventos discretos.

Sistemas descritos na álgebra max-plus podem ser descritos na forma de espaço de estados, como mostrado na Equação 3.1.

$$\begin{cases} x(k+1) = \mathbf{A} \otimes x(k) \oplus \mathbf{B} \otimes u(k) \\ y(k) = \mathbf{C} \otimes x(k) \end{cases} \quad (3.1)$$

O problema de controle “just-in-time” nesse tipo de sistemas pode ser entendido como encontrar os tempos máximos de entrada  $u$ , tal que a saída  $y$  ocorra em um instante desejado e factível, ou seja, vamos predizer os instantes de entrada a partir da data  $k$  até um horizonte  $k + N_p$  em um intervalo finito, em que  $N_p$  é o número de predições desejado.

Seja  $k$  a data a partir da qual desejamos iniciar as predições, o primeiro instante de saída após esse tempo é dado por:

$$\hat{y}(k+1) = \mathbf{C}x(k+1) = \mathbf{C}\mathbf{A}x(k) \oplus \mathbf{C}\mathbf{B}u(k)$$

o segundo instante de saída é dado por:

$$\hat{y}(k+2) = \mathbf{C}x(k+2)$$

$$\hat{y}(k+2) = \mathbf{C}\mathbf{A}^2x(k) \oplus \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}u(k) \oplus \mathbf{C}\mathbf{B}u(k+1)$$

logo, todos os instantes futuros podem ser preditos conhecendo os tempos de entradas futuros e o estado do sistema na data  $k$ , ou seja,

$$\hat{x}(k+j|k) = \mathbf{A}^jx(k) + \sum_{i=0}^{j-1} \mathbf{A}^{j-i-1}\mathbf{B}u(k+i) \quad (3.2)$$

$$\hat{y}(k+j|k) = \mathbf{C}\mathbf{A}^jx(k) + \sum_{i=0}^{j-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{j-i-1}\mathbf{B}u(k+i) \quad (3.3)$$

onde  $\hat{x}(k+j|k)$  e  $\hat{y}(k+j|k)$  são as datas de disparo das transições e as datas de saída previstas em  $k+j$  a partir da  $k$ -ésima data, respectivamente.

Na notação matricial obtemos,

$$\hat{y}(k) = \mathbf{H} \otimes \hat{u}(k) \oplus \mathbf{G} \otimes x(k) \quad (3.4)$$

em que,

$$\hat{y}(k) = \begin{bmatrix} y(k+1|k) \\ \vdots \\ y(k+Np|k) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{B} & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{B} & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{Np-1}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{Np-2}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{B} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{Np} \end{bmatrix},$$

$$\hat{u}(k) = \begin{bmatrix} u(k) \\ \vdots \\ u(k + Np - 1) \end{bmatrix},$$

A Equação 3.4 descreve como o sistema irá evoluir a partir dos instantes de entrada  $\hat{u}(k)$  futuros e da informação do estado atual do sistema  $x(k)$ .

**Definição 3.1** *O problema de controle em questão pode ser formulado da forma a seguir:*

$$\max(\hat{u}(k)) \tag{3.5}$$

*sujeito a:*

$$\hat{y}(k) = \mathbf{H}\hat{u}(k) \oplus \mathbf{G}x(k) \preceq r_v(k) \tag{3.6}$$

$$\mathbf{D}\hat{u}(k) = \mathbf{E}\hat{u}(k) \tag{3.7}$$

Em que  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{E}$  são matrizes contendo as restrições aplicadas às entradas do sistema. As restrições físicas de entrada do sistema podem ser colocadas como na Equação 3.7, essa equação é o caso geral da família de equações que podem ser resolvidas por um semimódulo finitamente gerado ou pelo algoritmo proposto por [Cuninghame-Green and Butkovic \(2003\)](#).

Deseja-se encontrar os valores máximos para a entrada do sistema  $\hat{u}(k)$ , sujeito

à restrição da evolução da saída do sistema e tal saída deve ser a mais próxima possível a um calendário de saída desejado e viável  $r_v(k)$  (Inequação 3.6). Para a notação matricial temos que,

$$r_v(k) = \begin{bmatrix} r_v(k+1) \\ \vdots \\ r_v(k+Np) \end{bmatrix},$$

onde  $r_v(k+i)$ , para  $i = 1, 2, \dots, Np$ , são as datas futuras de saída desejada e viável.

### 3.2.1 Determinação de Calendário Mínimo Viável

A maioria dos sistemas reais demandam tempo para que um processo seja executado. Conseqüentemente, a taxa de produção está relacionada ao tempo gasto no ciclo de trabalho, ou seja, um sistema não consegue gerar produtos na sua saída em tempos inferiores ao tempo gasto no seu ciclo de trabalho.

Denominamos de calendário mínimo viável os tempos mínimos que um determinado sistema consegue gerar sua saída, ou seja, os tempos de saída obtidos em um sistema trabalhando em sua máxima taxa de produção. Se não for respeitado esse calendário mínimo viável de saída, os instantes de saída desejados não poderão ser alcançados. Para obter as saídas mínimas para um dado sistema é necessário conhecer a data  $k$  a partir do qual se deseja prever as saídas e fornecer todos os recursos em  $k-1$ , fazendo com que todas as entradas futuras sejam iguais a  $u(k-1)$ , ou seja,  $u(k+j) = u(k-1)$  para todo  $0 \preceq j \preceq Np-1$ . Sendo assim,  $u(k+j)$  são os instantes de entrada no qual os recursos estarão sempre disponíveis ao sistema. Assim, denominaremos de  $u_{min}(k)$  o vetor de entradas  $u(k+j)$  em que  $u(k+j) = u(k-1)$  para todo  $0 \preceq j \preceq Np-1$ , logo os instantes mínimos de saída são:

$$y_{min}(k) = \mathbf{H}u_{min}(k) \oplus \mathbf{G}x(k) \quad (3.8)$$

em que,

$$u_{min}(k) = \begin{bmatrix} u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-1) \end{bmatrix},$$

Portanto,  $y_{min}(k)$  é o mais rápido possível que o sistema pode gerar saídas a partir do tempo  $k$ , ou seja, devemos considerar o calendário mínimo viável  $r_{min,v}(k)$  como sendo a saída mínima alcançável  $y_{min}(k)$ .

$$r_{min,v}(k) = y_{min}(k) \quad (3.9)$$

Logo um calendário  $r(k)$  qualquer, em que

$$r(k) = \begin{bmatrix} r(k+1) \\ \vdots \\ r(k+Np) \end{bmatrix},$$

onde  $r(k+i)$ , para  $i = 1, 2, \dots, Np$ , são as datas futuras de saída desejada, pode não ser viável, ou seja,  $r(k) \not\geq y_{min}(k)$ . Entretanto, pode-se obter a menor modificação  $\Delta_r(k)$ , no sentido de  $\oplus$ , tal que

$$r(k) \oplus \Delta_r(k) \succeq y_{min}(k) \quad (3.10)$$

A menor modificação  $\Delta_{r_{min}}(k)$  é obtida pela residuação dual,

$$\Delta_{r_{min}}(k) = y_{min}(k) \ominus r(k) \quad (3.11)$$

Portanto, de acordo com a propriedade da adição na álgebra max-plus, a referência viável mais próxima à desejada é dada por:

$$r_v(k) = r(k) \oplus \Delta_{r_{min}}(k) = r(k) \oplus (y_{min}(k) \ominus r(k))$$

Consequentemente, utilizando a Equação 2.18, a referência viável mais próxima à desejada é:

$$r_v(k) = r(k) \oplus y_{min}(k) \tag{3.12}$$

O problema de controle a ser tratado a seguir considerará somente calendários com a menor modificação possível no sentido de  $\oplus$ , de forma a torná-lo viável, assim como obtido na Equação 3.12.

### 3.2.2 Solução do Problema de Controle utilizando Semimódulos

A solução do problema apresentado na Definição 3.1 pode ser obtida tratando inicialmente as restrições e, a partir delas, encontrar os máximos instantes de entrada, de forma que a saída fique a mais próxima possível do calendário desejado e viável. Portanto, é possível mostrar que todas as soluções para a Equação 3.7, em que  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{E}$  são matrizes e  $\hat{u}(k)$  é um vetor, podem ser completamente descritas como um semimódulo finitamente gerado. Assim, a solução  $\hat{u}(k)$  pertence a imagem de uma matriz  $\mathbf{M}$ , ou seja,  $\hat{u}(k) \in \text{Im}\mathbf{M}$ , em que as colunas da matriz  $\mathbf{M}$  geram um semimódulo (Gaubert, 1992) (Cohen et al., 2004).

Para solucionar a Equação 3.7 e encontrar a matriz  $\mathbf{M}$ , utilizamos o método apresentado em Butkovic and Hegedus (1984) com demonstração simplificada em Maia et al. (2011b), também apresentado no Apêndice A. Esse método foi implementado utilizando ferramentas do Scilab, que pode ser obtido na página

da internet do Scilab (J-P.Quadrat, 2007) (Hardouin et al., 2007). A solução para esse tipo de equação pode ser dada por:

$$\hat{u}(k) = \mathbf{M} \otimes v \quad (3.13)$$

logo é necessário encontrar o valor do vetor  $v$  que produza o  $\hat{u}(k)$  desejado.

A fim de encontrar o valor de  $v$  que gere o maior valor de  $\hat{u}(k)$  que atenda as restrições, podemos eliminar a restrição da Equação 3.7 e reescrever a restrição da Inequação 3.6 de modo que ela contenha a restrição da Equação 3.7, fazendo com que o problema tenha apenas a seguinte restrição:

$$\mathbf{HM}v \oplus \mathbf{G}x(k) \preceq r_v(k) \quad (3.14)$$

Reescrevendo a Inequação 3.14, por definição da álgebra max-plus, temos que:

$$\mathbf{HM}v \preceq r_v(k) \quad (3.15)$$

$$\mathbf{G}x(k) \preceq r_v(k) \quad (3.16)$$

Na seção 3.2.1, ao determinar  $y_{min}$  na Equação 3.8 pela álgebra max-plus, consideramos que

$$y_{min} \succeq \mathbf{G}x(k)$$

e pela Equação 3.12,

$$r_v(k) \succeq y_{min}$$

logo,  $\mathbf{G}x(k) \preceq y_{min} \preceq r_v(k)$ , portanto a Inequação 3.16 sempre será satisfeita, pois se trata de um calendário viável. A solução da Inequação 3.15 pode ser obtida aplicando a teoria da residuação, resultando em

$$v = (\mathbf{HM}) \searrow r_v(k). \quad (3.17)$$

Pelo teorema da residuação, o valor de  $v$  obtido na Equação 3.17 será o máximo tal que a Inequação 3.15 seja verdadeira, portanto, substituindo esse valor de  $v$  na Equação 3.13, encontra-se o maior tempo de entrada possível de um sistema descrito pelas Equação 3.1 e que atende ao calendário viável, ou seja,

$$\hat{u}(k) = \mathbf{M}((\mathbf{HM}) \searrow r_v(k)) \quad (3.18)$$

### 3.2.3 Solução do Problema de Controle utilizando o Método Alternante

O problema de controle da Definição 3.1 também pode ser solucionado através da metodologia do algoritmo alternante. Considerando a restrição apresentada na Inequação 3.6, as inequações a seguir podem ser derivadas a partir dela.

$$\mathbf{H}\hat{u}(k) \preceq r_v(k) \quad (3.19)$$

$$\mathbf{G}x(k) \preceq r_v(k) \quad (3.20)$$

Como mostrado na subseção anterior, a Inequação 3.20 sempre será satisfeita para um calendário viável. Os maiores valores que satisfazem a Inequação 3.19 para o vetor  $\hat{u}(k)$  são dados pela seguinte equação:

$$\hat{u}(k) = \mathbf{H} \searrow r_v(k) \quad (3.21)$$

O vetor  $\hat{u}(k)$  obtido com a Equação 3.21 é utilizado como condição inicial para o algoritmo do método alternante proposto por **Cuninghame-Green and Butkovic**

(2003).

Esse algoritmo encontra a solução para a equação

$$A \otimes x = B \otimes y, \quad (3.22)$$

se ela existir e, caso não exista, os valores encontrados pelo algoritmo divergem monotonicamente para  $-\infty$ . A restrição 3.7 do problema de controle da Definição 3.1 é equivalente a

$$D \otimes u = I \otimes y \quad e \quad E \otimes u = I \otimes y$$

em que  $I$  é a matriz identidade na álgebra max-plus e  $y$  é um vetor de dimensão apropriada, por isso,

$$\begin{bmatrix} D \\ E \end{bmatrix} \otimes u = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} \otimes y \quad (3.23)$$

A solução para a Equação 3.23 é obtida pelo algoritmo do método alternante e tal solução é a maior possível que atende às restrições impostas. Uma vez que a teoria da residuação encontra a maior subsolução para a restrição 3.6 e a solução do problema deve ser menor que esta, a solução da restrição 3.6 pode ser utilizada como condição inicial do algoritmo, que encontrará a maior solução possível para a restrição 3.7 menor que a condição inicial, como mostrado na Seção 2.6. Logo, a solução encontrada,  $\hat{u}(k)$ , para o problema de controle é a maior possível que atende as restrições impostas.

Dessa forma, podemos enunciar a proposição seguinte:

**Proposição 3.2.1** *O problema de controle da Definição 3.1 tem solução para qualquer referência viável, e tal solução é a maior possível que gera uma saída inferior mais próxima ao calendário viável.*

### 3.2.4 Exemplo

Seja um sistema de manufatura fictício dado pela rede de Petri temporizada, representado na Figura 3.1.

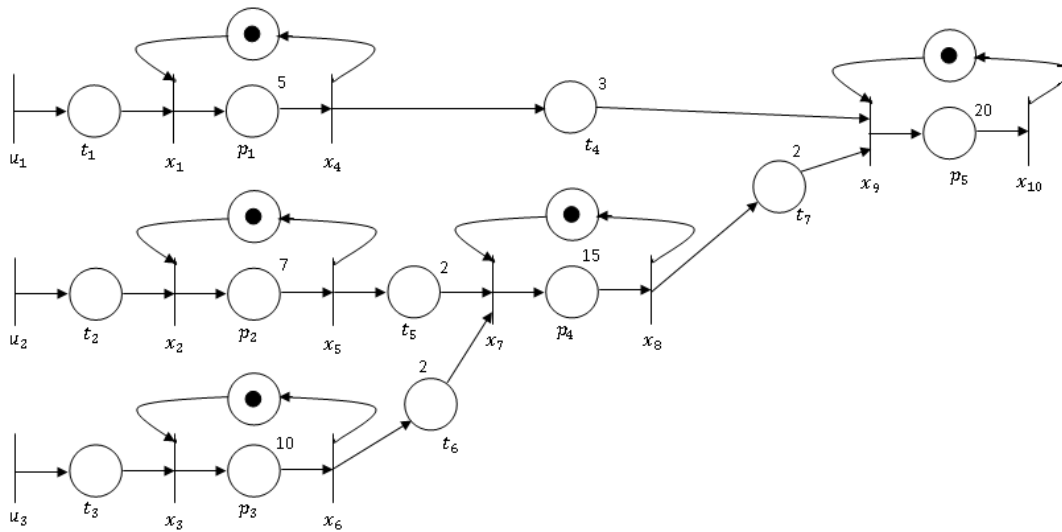


Figura 3.1: Modelo em Rede de Petri

Nesse modelo, recursos são fornecidos através das entradas  $u_1(k)$ ,  $u_2(k)$  e  $u_3(k)$ , são transportados e processados após o disparo das transições  $x_1(k)$ ,  $x_2(k)$  e  $x_3$  no lugares  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$ , respectivamente. As peças oriundas de  $u_2$  e  $u_3$ , são transportadas (lugares  $t_5$  e  $t_6$ ) para serem processadas em conjunto no lugar  $p_4$ , e o resultado desse processo é transportado para ser processado juntamente com a peça que entrou em  $u_1$ , no lugar  $p_5$ . O produto final é obtido após o disparo da transição  $x_{10}$ . Todos os processos desse sistema tem capacidade unitária. Essa rede pode ser representada pelas seguintes equações,

$$\begin{aligned}
 x_1(k) &= u_1(k) \oplus x_4(k-1) \\
 x_2(k) &= u_2(k) \oplus x_5(k-1) \\
 x_3(k) &= u_3(k) \oplus x_6(k-1) \\
 x_4(k) &= 5x_1(k) \\
 x_5(k) &= 7x_2(k) \\
 x_6(k) &= 10x_3(k) \\
 x_7(k) &= 2x_6(k) \oplus 2x_5(k) \oplus x_8(k-1) \\
 x_8(k) &= 15x_7(k) \\
 x_9(k) &= 2x_8(k) \oplus 3x_4(k) \oplus x_{10}(k-1) \\
 x_{10}(k) &= 20x_9(k)
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Estas equações podem ser escritas em espaço de estados como

$$\begin{cases} x(k) = A_o x(k) \oplus A_1 x(k-1) \oplus B_o u(k) \\ y(k) = C x(k) \end{cases}$$

em que,

$$A_o = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 7 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 10 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 15 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 20 & \cdot \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & e & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & e & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & e & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & e \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

$$B_o = \begin{bmatrix} e & \cdot & \cdot \\ \cdot & e & \cdot \\ \cdot & \cdot & e \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e \end{bmatrix}^t$$

E este sistema pode ser simplificado para a forma da Equação 2.10, fazendo,

$$\begin{cases} x(k) = A_o^* A_1 x(k-1) \oplus A_o^* B_o u(k) \\ y(k) = C x(k) \end{cases}$$

resultando no seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x(k) = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & e & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & e & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & e & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & 5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 7 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 10 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 9 & 12 & \cdot & e & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 24 & 27 & \cdot & 15 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & 8 & 26 & 29 & \cdot & \cdot & 17 & e \\
 \cdot & \cdot & \cdot & 28 & 46 & 49 & \cdot & 37 & \cdot & 20 \end{bmatrix} x(k-1) \oplus \begin{bmatrix} e & \cdot & \cdot \\
 \cdot & e & \cdot \\
 \cdot & \cdot & e \\
 5 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & 7 & \cdot \\
 \cdot & \cdot & 10 \\
 \cdot & 9 & 12 \\
 \cdot & 24 & 27 \\
 8 & 26 & 29 \\
 28 & 46 & 49 \end{bmatrix} u(k) \\
 y(k) = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & e \end{bmatrix} x(k)
 \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Todo sistema real possui limitações no processos de produção, logo neste exemplo uma restrição importante é limitar cada entrada em um intervalo de tempo, de acordo com o tempo mínimo de disponibilidade de recurso e o tempo máximo que esse recurso deve ser consumido, de forma que para um sistema com  $n$  entradas temos:

$$a_i \preceq \Delta u_i \preceq b_i \quad (3.26)$$

para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ . Reescrevendo a Equação 3.26, obtemos,

$$\begin{cases}
 a_i \otimes u_i(k) \preceq u_i(k+1) \\
 (-b_i) \otimes u_i(k+1) \preceq u_i(k)
 \end{cases} \quad (3.27)$$

As Inequações 3.27 representam os intervalos de tempo entre os instantes de uma mesma entrada, mas podemos acrescentar restrições que relacionam as

várias entradas do sistema, ou seja,

$$u_i(k) = \bigoplus_j c_{(i,j)} u_j(k); i, j = 1, 2, \dots \quad (3.28)$$

em que  $c_{(i,j)}$  é o elemento que relaciona a entrada  $i$  com a entrada  $j$ .

O sistema apresentado na Figura 3.1 possui três entradas e uma saída, deseja-se para a entrada  $u_1$  um intervalo entre os tempos de entrada entre 2 e 35 unidades de tempo ( $2 \preceq \Delta u_1(k) \preceq 35$ ), para a entrada  $u_2$  deseja-se um intervalo entre 0 e 45 unidades de tempo ( $0 \preceq \Delta u_2(k) \preceq 45$ ), deseja-se que o intervalo para a entrada  $u_3$  esteja entre 3 e 47 unidades de tempo ( $3 \preceq \Delta u_3(k) \preceq 47$ ). Deseja-se ainda que o  $k$ -ésimo disparo da entrada  $u_3$  ocorra imediatamente após o  $k$ -ésimo disparo de  $u_1$  mais duas unidades de tempo e após o  $k$ -ésimo disparo de  $u_2$  mais cinco unidades de tempo, ou seja,  $u_3(k) = 2u_1(k) \oplus 5u_2(k)$ . As restrições de desigualdade podem ser reescritas como nas Inequações 3.27,

$$\left\{ \begin{array}{l} 2u_1(k) \preceq u_1(k+1) \\ (-35)u_1(k+1) \preceq u_1(k) \\ u_2(k) \preceq u_2(k+1) \\ (-45)u_2(k+1) \preceq u_2(k) \\ 3u_3(k) \preceq u_3(k+1) \\ (-47)u_3(k+1) \preceq u_3(k) \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Analisando as Inequações 3.29 para instantes de entrada posteriores, perceberemos que cada instante de tempo aparece mais de uma vez nas inequações e a solução encontrada deve obedecer a todas as restrições em qualquer instante de tempo.

*Propriedade 1:* Definindo  $v_1, v_2$  e  $v_3 \in R_{max}$ . Se  $v_1 \preceq v_3$  e  $v_2 \preceq v_3$ , consequen-

temente  $v_1 \oplus v_2 \preceq v_3$ . Da mesma forma, se  $v_1 \oplus v_2 \preceq v_3$ , ambos elementos  $v_1$  e  $v_2$  devem ser menores que  $v_3$  para que a inequação continue verdadeira.

Utilizando a propriedade anterior, as Inequações 3.29 podem ser escritas na forma matricial,

$$\mathbf{J}u(k) \preceq \mathbf{I}u(k) \quad (3.30)$$

mas,  $\mathbf{J}u(k) \preceq \mathbf{I}u(k) \Rightarrow (\mathbf{J} \oplus \mathbf{I})u(k) = \mathbf{I}u(k)$ , em que  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade na álgebra max-plus. A restrição  $u_3(k) = 2u_1(k) \oplus 5u_2(k)$  também pode ser escrita na forma matricial, de forma que,

$$\mathbf{Q}u(k) = \mathbf{R}u(k) \quad (3.31)$$

Logo estas restrições apresentadas em 3.30 e 3.31 podem ser reescritas como  $\mathbf{D}u(k) = \mathbf{E}u(k)$ , em que,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{J} \oplus \mathbf{I} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}.$$

A matriz  $\mathbf{J}$  foi omitida devido à sua grande dimensão e as matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  são apresentadas no Apêndice B. A solução é igual a  $u(k) = \mathbf{M}v$ , em que  $u \in \text{Im}\mathbf{M}$ , sendo  $\mathbf{M}$  obtido através do método apresentado no Apêndice A.

Dessa forma, a primeira restrição do problema, Inequação 3.6, pode ser escrita como a Inequação 3.14,

$$\mathbf{H}\mathbf{M}v \oplus \mathbf{G}x(k) \preceq r_v(k),$$

as matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  foram obtidas como na seção 3.2 e são apresentadas no Apêndice B. Deseja-se realizar as predições a partir de  $k = 2$  até  $k = 10$ . A condição

inicial, definida arbitrariamente, pode ser dada por:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t.$$

Considerando  $u_1(0) = u_2(0) = u_3(0) = 0$ , utilizando as Equações 3.25 temos que:

$$x(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 7 & 10 & 12 & 27 & 29 & 49 \end{bmatrix}^t.$$

O calendário desejado, também definido arbitrariamente, é:

$$r(k) = \begin{bmatrix} 50 & 70 & 100 & 135 & 150 & 155 & 170 & 200 & 270 \end{bmatrix}^t.$$

Mas, pela Equação 3.8 e 3.9 a menor referência viável é:

$$r_{min,v}(k) = \begin{bmatrix} 69 & 89 & 109 & 129 & 149 & 169 & 189 & 209 & 229 \end{bmatrix}^t$$

sendo

$$u_{min}(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t.$$

Dessa forma, utilizando a Equação 3.12, a referência possível de ser alcançada mais próxima à desejada é:

$$r_v(k) = \begin{bmatrix} 69 & 89 & 109 & 135 & 150 & 169 & 189 & 209 & 270 \end{bmatrix}^t.$$

Os maiores tempos de entrada que satisfazem o calendário desejado, obtidos como na Seção 3.2.2, são:

$$\hat{u}_1(k) = \begin{bmatrix} 18 & 38 & 58 & 75 & 78 & 98 & 118 & 153 & 188 \end{bmatrix}^t,$$

$$\hat{u}_2(k) = \left[ 15 \ 35 \ 55 \ 72 \ 75 \ 95 \ 115 \ 155 \ 200 \right]^t,$$

$$\hat{u}_3(k) = \left[ 20 \ 40 \ 60 \ 77 \ 80 \ 100 \ 120 \ 160 \ 205 \right]^t,$$

os tempos de saída, obtidos utilizando a Equação 3.25, são dados então por:

$$y(k) = \left[ 69 \ 89 \ 109 \ 129 \ 149 \ 169 \ 189 \ 209 \ 254 \right]^t.$$

O exemplo em questão também pode ser solucionado pelo algoritmo alternante, como mostrado na subseção 3.2.3. Utilizando a restrição da Inequação 3.6 podemos encontrar os maiores tempos de entrada que satisfazem essa restrição através da Equação 3.21, ou seja,

$$\hat{u}_1(k) = \left[ 41 \ 61 \ 81 \ 101 \ 101 \ 121 \ 141 \ 181 \ 242 \right]^t,$$

$$\hat{u}_2(k) = \left[ 23 \ 43 \ 63 \ 83 \ 83 \ 103 \ 123 \ 163 \ 224 \right]^t,$$

$$\hat{u}_3(k) = \left[ 20 \ 40 \ 60 \ 80 \ 80 \ 100 \ 120 \ 160 \ 221 \right]^t,$$

Percebemos que esses tempos de entrada não satisfazem todas as restrições, uma vez que desejamos  $u_3(k) = 2u_1(k) \oplus 5u_2(k)$ . Dessa forma, podemos usar os tempos de entrada encontrados como condição inicial para o algoritmo do método alternante, o que retorna como tempos de entrada os tempos:

$$\hat{u}_1(k) = \left[ 18 \ 38 \ 58 \ 75 \ 78 \ 98 \ 118 \ 153 \ 188 \right]^t,$$

$$\hat{u}_2(k) = \left[ 15 \ 35 \ 55 \ 72 \ 75 \ 95 \ 115 \ 155 \ 200 \right]^t,$$

$$\hat{u}_3(k) = \left[ 20 \ 40 \ 60 \ 77 \ 80 \ 100 \ 120 \ 160 \ 205 \right]^t,$$

os tempos de saída são dados então por:

$$y(k) = \left[ 69 \ 89 \ 109 \ 129 \ 149 \ 169 \ 189 \ 209 \ 254 \right]^t.$$

O exemplo apresentado demonstra que ambos os métodos de solução do problema retornam os mesmos instantes para a entrada e saída do sistema, o que será verdadeiro para qualquer caso, uma vez que ambos os métodos encontram os maiores tempos de entrada possíveis.

### 3.3 Conclusões

Neste capítulo foi apresentado um problema de controle que consiste em encontrar os tempos de entrada do sistema sujeito a algumas restrições impostas. A principal contribuição apresentada é a possibilidade de solucionar o problema através da teoria dos semimódulos ou através de um algoritmo alternante e da teoria da residuação. A solução obtida através do método do semimódulo pode ser inviável se a quantidade de restrições ou o número de predições forem grandes, uma vez que a matriz  $\mathbf{M}$  obtida pode ter dimensão inviavelmente elevada, com isso o custo computacional para encontrar o semimódulo é exponencial. Os tempos de entrada encontrados são os maiores possíveis que geram tempos de saída mais próximos ao calendário desejado viável e que não violam as restrições.



## Capítulo 4

# Controle Realimentado de Sistemas Max-Plus Sujeitos a Restrições no Estado

### 4.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar uma forma de controle, baseado na realimentação de estado, para sistemas a eventos discretos, modelados através da álgebra max-plus e grafos de eventos temporizados, visando projetar um controlador a fim de garantir que o sistema evolua sem violar as restrições temporais impostas ao estado.

O trabalho proposto encontrará uma matriz  $F$  de realimentação de estado que obrigue o sistema a obedecer as restrições temporais impostas ao estado, ou seja, uma forma de modificar a equação de estado para que o sistema respeite a restrição desejada. O controle desenvolvido será aplicado no mesmo sistema de manufatura que foi apresentado em [Atto et al. \(2011\)](#). A principal contribui-

ção deste capítulo é propor uma nova abordagem para solucionar um problema proposto na literatura.

O problema abordado neste capítulo é diferente do apresentado no capítulo anterior, uma vez que o objetivo é encontrar uma matriz de realimentação de estados que controle o sistema de forma a impedir que este viole as restrições impostas. Enquanto que no capítulo anterior o objetivo era encontrar os maiores tempos de entrada do sistema para realizar o controle “just-in-time” de acordo com as restrições impostas ao sistema.

## 4.2 Problema de Controle

O problema a ser tratado neste capítulo foi proposto por [Atto et al. \(2011\)](#), em que é apresentado um método de controle supervisorio, visando garantir que o sistema respeite a restrição de máxima duração temporal para o processo desejado. Para tal, o autor reduz as restrições para restrições elementares, cujas contribuições são introduzidas na equação de estado do sistema, resultando em uma equação de estado restrita. Com essa equação são propostas formas de inserir lugares no modelos, conectando-os de forma apropriada, e o novo modelo escolhido é o que não altera o máximo ciclo médio do sistema.

A abordagem apresentada busca encontrar uma matriz de realimentação de estados, a fim de garantir que o sistema irá obedecer a restrição de máxima duração temporal, para o processo desejado, utilizando a teoria da residuação. Neste trabalho, não há preocupação com o rastreamento de trajetória e nem com o atraso das datas de entrada.

Sistemas modelados por meio de grafos de eventos temporizados podem ser descritos na álgebra max-plus por equações em espaço de estados, como mostrado na Equação [4.1](#).

$$\begin{cases} x(k+1) = A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k) \\ y(k) = C \otimes x(k) \end{cases} \quad (4.1)$$

O objetivo é implementar uma lei de controle por realimentação de estados, isto é,

$$u(k) = Fx(k) \quad (4.2)$$

e esse controle deve ser tal que:

$$Ex(k) \preceq Hx(k+1) \quad (4.3)$$

em que,  $F$  é a matriz de realimentação de estados e  $E$  e  $H$  são matrizes contendo as restrições do sistema.

#### 4.2.1 Solução do Problema de Controle

Dado um sistema descrito pela equação:

$$x(k+1) = Ax(k) \oplus Bu(k) \quad (4.4)$$

em que,  $u(k) = Fx(k)$ , deseja-se garantir que o sistema não viole restrições da forma

$$Ex(k) \preceq Hx(k+1). \quad (4.5)$$

Substituindo as Equações 4.2 e 4.4 na Inequação 4.5, temos

$$\begin{aligned} Ex(k) &\preceq H[Ax(k) \oplus BFx(k)] \\ Ex(k) &\preceq (HA \oplus HBF)x(k) \end{aligned}$$

logo, é necessário encontrar uma matriz  $F$  que satisfaça a seguinte desigualdade:

$$E \preceq HA \oplus HBF \tag{4.6}$$

em que, as matrizes  $E$  e  $H$  são as restrições impostas ao sistema,  $A$  e  $B$  as matrizes da equação de estado do sistema e  $F$  a matriz de realimentação de estado que deseja-se encontrar. Utilizando a residuação dual temos, a partir da Inequação 4.6, que

$$HBF \succeq E \ominus HA, \tag{4.7}$$

fazendo  $G = E \ominus (H \otimes A)$  e  $L = H \otimes B$ , a Inequação 4.7 pode ser reescrita como

$$L \otimes F \succeq G. \tag{4.8}$$

**Lema 4.1** *Se a matriz  $L$  é linha  $G$ -astic,  $\forall G \in \bar{\mathbb{R}}_{max}^{m \times j}$ ,  $\exists F | LF \succeq G$ .*

**Demonstração:** *É direta a partir da seguinte observação: Se  $L$  é linha  $G$ -astic ( $(\forall i)(\exists l) | L_{il} \neq \varepsilon$ )  $\Rightarrow [LF]_{ij} = \sum_{l=1}^n L_{il}F_{lj}$ . Portanto, escolhendo os valores da matriz  $F$  para que seja grande o suficiente, é possível fazer  $[LF]_{ij}$  tão grande quando se queira, ou seja,  $[LF]_{ij} \succeq G_{ij}$ .*

**Proposição 4.1** *Para um sistema tal que  $L$  é linha  $G$ -astic, uma condição suficiente para a existência do controlador é encontrar uma solução  $F$ , tal que  $F \neq [\varepsilon]$  para a inequação:*

$$L \otimes F \succeq G$$

**Demonstração:** *É direta pelo fato de  $L$  ser  $G$ -astic e, utilizando a Lema 4.1, é possível fazer o resultado de  $L \otimes F$  tão grande quanto se queira.*

Como  $L$  e  $G$  são matrizes de tamanho  $m \times n$  e  $m \times j$  respectivamente, é possível escrever o problema explicitamente na forma de um sistema de inequações

$$\begin{aligned}
 L_{11}F_{11} \oplus L_{12}F_{21} \oplus \cdots \oplus L_{1n}F_{n1} &\succeq G_{11} \\
 L_{21}F_{11} \oplus L_{22}F_{21} \oplus \cdots \oplus L_{2n}F_{n1} &\succeq G_{21} \\
 &\vdots \\
 L_{m1}F_{11} \oplus L_{m2}F_{21} \oplus \cdots \oplus L_{mn}F_{n1} &\succeq G_{m1} \\
 L_{11}F_{12} \oplus L_{12}F_{22} \oplus \cdots \oplus L_{1n}F_{n2} &\succeq G_{12} \\
 L_{21}F_{12} \oplus L_{22}F_{22} \oplus \cdots \oplus L_{2n}F_{n2} &\succeq G_{22} \\
 &\vdots \\
 L_{m1}F_{12} \oplus L_{m2}F_{22} \oplus \cdots \oplus L_{mn}F_{n2} &\succeq G_{m2}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Pela álgebra max-plus, para que cada inequação seja satisfeita, é necessário encontrar ao menos um termo que satisfaça a desigualdade, mas cada termo da matriz  $F$  aparece em mais de uma inequação, mais precisamente, os mesmos termos de  $F$  se repetem para cada conjunto de inequações referentes a cada coluna da matriz  $G$ . Dessa forma, uma solução que respeita a todas as inequações é dada pelo maior elemento  $F_{ij}$ , que satisfaz todas as inequações em que ele esteja envolvido.

Qualquer elemento obtido através da residuação entre os elementos da primeira linha de  $L$  e o primeiro elemento de  $G$  é solução para a primeira inequação de 4.9, ou seja, o conjunto de elementos que satisfazem a primeira inequação é dado por:

$$S_1 = \left\{ L_{11} \setminus G_{11} \quad L_{12} \setminus G_{11} \quad L_{13} \setminus G_{11} \quad \cdots \quad L_{1n} \setminus G_{11} \right\}$$

do mesmo modo, o conjunto de elementos que satisfazem a segunda inequação em 4.9 é dado por:

$$S_2 = \left\{ L_{21} \setminus G_{21} \quad L_{22} \setminus G_{21} \quad L_{23} \setminus G_{21} \quad \cdots \quad L_{2n} \setminus G_{21} \right\}$$

A residuação é definida para tratar inequações do tipo  $f(x) \preceq b$ , mas nesse caso particular estamos utilizando cada elemento da desigualdade separadamente, ou seja, estamos tratando desigualdades do tipo  $a \otimes x \succeq b$ . Ao encontramos uma solução para  $a \otimes x \preceq b$  por meio da residuação, para  $a, x, b \in \bar{\mathbb{Z}}_{max}$ , encontraremos um valor de  $x$  tal que  $a \otimes x = b$ . Logo esse valor de  $x$  também é solução para  $a \otimes x \succeq b$ .

Assim, cada posição do conjunto de soluções para as inequações referentes à primeira coluna da matriz G são referentes ao mesmo elemento da matriz F, ou seja, o conjunto de todos os elementos da primeira posição de cada conjunto referentes à mesma linha de G são soluções para o mesmo termo de F, logo as soluções para cada termo de F são dadas por:

$$\Phi_{11} = \left\{ L_{11} \setminus G_{11} \quad L_{21} \setminus G_{21} \quad L_{31} \setminus G_{31} \quad \cdots \quad L_{m1} \setminus G_{m1} \right\}$$

$$\Phi_{12} = \left\{ L_{12} \setminus G_{11} \quad L_{22} \setminus G_{21} \quad L_{32} \setminus G_{31} \quad \cdots \quad L_{m2} \setminus G_{m1} \right\}$$

Dessa forma é possível encontrar um conjunto para cada elemento da matriz F, com as respectivas soluções de cada inequação. Assim, o elemento solução para uma dada posição em F é dado pelo maior elemento em seu conjunto de soluções que seja diferente de  $\top$ , em que  $\top$  é o elemento infinito na álgebra max-plus, ou seja, para a posição  $(k,i)$  da matriz F, a solução é dada por:

$$F_{ki} = \begin{cases} (\bigoplus_p \Phi_{ki}); & \text{se } \bigoplus_p \Phi_{ki} \succeq e \quad \text{ou } \bigoplus_p \Phi_{ki} = \varepsilon; \quad p = 1, 2, \dots \\ e & \text{se } \varepsilon \prec \bigoplus_p \Phi_{ki} \preceq e \end{cases} \quad (4.10)$$

em que,

$$\Phi_{ki} = \begin{cases} L_{jk} \setminus G_{ji} & \text{se } L_{jk} \neq \varepsilon \\ \varepsilon & \text{se } L_{jk} = \varepsilon; \quad i, j, k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

É possível ignorar as soluções iguais a  $\top$ , pois este valor é obtido por meio da residuação entre um elemento  $\varepsilon$  da matriz  $L$  com um elemento qualquer de  $G$ , e neste trabalho esse resultado foi substituído por  $\varepsilon$ .

Como  $L$  é linha G-astic, poderá existir colunas da matriz  $L$  iguais a  $\varepsilon$ , o que poderia fazer com que algum vetor de soluções dos elementos de  $F$  seja igual a  $\top$ . Ao ignorar esse resultado trocando o resultado da residuação por  $\varepsilon$ , a matriz  $F$  só poderá ter valores reais maiores ou iguais a  $e$  ou iguais a  $\varepsilon$ . Os elementos de  $F$  devem ser reais maiores ou iguais a  $e$  ou iguais a  $\varepsilon$ , uma vez que os sistemas os quais se deseja controlar são causais. Ao realizar a operação  $L \otimes F$  o resultado sempre satisfaz a Inequação 4.8, pois os elementos de  $F$  são as maiores soluções, as quais satisfazem todas as inequações nas quais estão presentes. Outro motivo pelo qual pode-se ignorar a residuação cujos termos de  $L$  são iguais a  $\varepsilon$  é que, na multiplicação entre  $L \otimes F$ , os termos de  $L$  iguais a  $\varepsilon$  não contribuem para a solução da inequação, pois  $\varepsilon \otimes F_{ij} = \varepsilon, \forall i, j$ .

**Exemplo 4.1 (Solução de Inequação)** *Considere o sistema a seguir:*

$$\begin{bmatrix} L_{11} & \varepsilon & \varepsilon \\ L_{21} & \varepsilon & L_{23} \\ \varepsilon & L_{32} & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \end{bmatrix} \succeq \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \end{bmatrix}$$

utilizando a equação 4.10 tem-se que:

$$\begin{aligned}
 F_{11} &= (L_{11} \setminus G_{11}) \oplus (L_{21} \setminus G_{21}) \oplus (\varepsilon \setminus G_{31}) \\
 F_{21} &= (\varepsilon \setminus G_{11}) \oplus (\varepsilon \setminus G_{21}) \oplus (L_{32} \setminus G_{31}) \\
 F_{31} &= (\varepsilon \setminus G_{11}) \oplus (L_{23} \setminus G_{21}) \oplus (\varepsilon \setminus G_{31}) \\
 F_{12} &= (L_{11} \setminus G_{12}) \oplus (L_{21} \setminus G_{22}) \oplus (\varepsilon \setminus G_{32}) \\
 F_{22} &= (\varepsilon \setminus G_{12}) \oplus (\varepsilon \setminus G_{22}) \oplus (L_{32} \setminus G_{32}) \\
 F_{32} &= (\varepsilon \setminus G_{12}) \oplus (L_{23} \setminus G_{22}) \oplus (\varepsilon \setminus G_{32}) \\
 F_{13} &= (L_{11} \setminus G_{13}) \oplus (L_{21} \setminus G_{23}) \oplus (\varepsilon \setminus G_{33}) \\
 F_{23} &= (\varepsilon \setminus G_{13}) \oplus (\varepsilon \setminus G_{23}) \oplus (L_{32} \setminus G_{33}) \\
 F_{33} &= (\varepsilon \setminus G_{13}) \oplus (L_{23} \setminus G_{23}) \oplus (\varepsilon \setminus G_{33}) \\
 F_{14} &= (L_{11} \setminus G_{14}) \oplus (L_{21} \setminus G_{24}) \oplus (\varepsilon \setminus G_{34}) \\
 F_{24} &= (\varepsilon \setminus G_{14}) \oplus (\varepsilon \setminus G_{24}) \oplus (L_{32} \setminus G_{34}) \\
 F_{34} &= (\varepsilon \setminus G_{14}) \oplus (L_{23} \setminus G_{24}) \oplus (\varepsilon \setminus G_{34})
 \end{aligned}$$

desprezando a residuação para os termos de  $L$  iguais a  $\varepsilon$  e arbitrariamente supondo  $(L_{21} \setminus G_{21}) \succ (L_{11} \setminus G_{11})$ ,  $(L_{21} \setminus G_{22}) \succ (L_{11} \setminus G_{12})$ ,  $(L_{21} \setminus G_{23}) \succ (L_{11} \setminus G_{13})$  e  $(L_{21} \setminus G_{24}) \succ (L_{11} \setminus G_{14})$ , a matriz  $F$  será dada por:

$$F = \begin{bmatrix} (L_{21} \setminus G_{21}) & (L_{21} \setminus G_{22}) & (L_{21} \setminus G_{23}) & (L_{21} \setminus G_{24}) \\ (L_{32} \setminus G_{31}) & (L_{32} \setminus G_{32}) & (L_{32} \setminus G_{33}) & (L_{32} \setminus G_{34}) \\ (L_{23} \setminus G_{21}) & (L_{23} \setminus G_{22}) & (L_{23} \setminus G_{23}) & (L_{23} \setminus G_{24}) \end{bmatrix}$$

fazendo  $J = L \otimes F$

$$J = \begin{bmatrix} L_{11}(L_{21} \setminus G_{21}) & L_{21}(L_{21} \setminus G_{21}) \oplus L_{23}(L_{23} \setminus G_{21}) & L_{32}(L_{32} \setminus G_{31}) \\ L_{11}(L_{21} \setminus G_{22}) & L_{21}(L_{21} \setminus G_{22}) \oplus L_{23}(L_{23} \setminus G_{22}) & L_{32}(L_{32} \setminus G_{32}) \\ L_{11}(L_{21} \setminus G_{23}) & L_{21}(L_{21} \setminus G_{23}) \oplus L_{23}(L_{23} \setminus G_{23}) & L_{32}(L_{32} \setminus G_{33}) \\ L_{11}(L_{21} \setminus G_{24}) & L_{21}(L_{21} \setminus G_{24}) \oplus L_{23}(L_{23} \setminus G_{24}) & L_{32}(L_{32} \setminus G_{34}) \end{bmatrix}^t$$

e simplificando, temos

$$J = \begin{bmatrix} L_{11}(L_{21} \setminus G_{21}) & L_{11}(L_{21} \setminus G_{22}) & L_{11}(L_{21} \setminus G_{23}) & L_{11}(L_{21} \setminus G_{24}) \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \end{bmatrix}$$

logo  $F$  será solução para o problema, pois cada elemento de  $F$  será o máximo elemento possível diferente de  $\top$ , e esse elemento satisfaz todas as inequações nas quais está presente. Na matriz  $J$  temos que:

$$J_{11} = L_{11}(L_{21} \setminus G_{21})$$

mas pela consideração desse exemplo,

$$(L_{21} \setminus G_{21}) \succ (L_{11} \setminus G_{11})$$

logo

$$L_{11}(L_{21} \setminus G_{21}) \succ L_{11}(L_{11} \setminus G_{11})$$

e como  $L_{11}(L_{11} \setminus G_{11}) = G_{11}$

$$L_{11}(L_{21} \setminus G_{21}) \succ G_{11}$$

repetindo para os demais elementos de  $J$ , concluímos que  $J \succeq G$ , logo  $F$  é solução para o problema de controle.

### 4.2.2 Exemplo

O processo sobre o qual será aplicado o controle apresentado nessa seção, mostrado na Figura 4.1, foi obtido em [Atto et al. \(2011\)](#). Esse processo de manufatura produz tubos de borracha para equipamentos automotivos. O sistema de manufatura apresenta três correias transportadoras em ciclos. Os ciclos 1 e 2 são idênticos, cada ciclo é composto por uma estação de carregamento (A, no ciclo 2), um forno para tratamento térmico (I), uma estação de resfriamento (O) e uma estação de descarga (E).

O forno é composto por duas partes, a primeira é a parte quente, onde as peças são submetidas a altas temperaturas e na segunda parte são resfriadas para serem despachadas. O transporte para tirar as peças na estação de descarga nem sempre está disponível, por isso, em algum casos, pode ocorrer a saturação e o acúmulo de peças na entrada do sistema.

As peças quando entram no forno não podem exceder o tempo determinado do processo, pois se isso ocorrer, as peças são queimadas e perdidas. Dessa forma, o tempo de permanência do forno e a entrada de peças no sistema deve ser controlado de forma que evite a saturação.

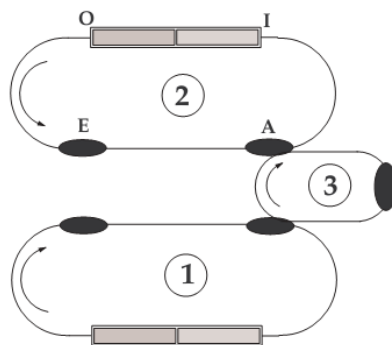


Figura 4.1: ([Atto et al., 2011](#)) Sistema de Manufatura

Esse sistema pode ser modelado via grafo de eventos temporizados. O modelo é apresentado na Figura 4.2, em que é representado somente um dos ciclos do sistema, uma vez que eles são idênticos, o que for feito nessa parte do sistema é aplicável à outra parte. Esta unidade de manufatura apresenta somente fenômenos de sincronização e possui capacidade limitada, por isso, é necessário avaliar a disponibilidade do transporte para retirar as peças prontas do sistema. Nesse grafo, as transições são associadas com os seguintes eventos:

- $u$ : entrada de partes.
- $x_1$ : iniciando a operação de carregamento.
- $x_2$ : iniciando o transporte para o forno.
- $x_3$ : entrada da peça na parte quente do forno.
- $x_4$ : entrada da peça na parte de resfriamento do forno.
- $x_5$ : início do transporte para a área de descarga de peças.
- $x_6$ : iniciado a operação de descarga.
- $x_7$ : saída da peça.
- $q$ : operador de descarga.
- $y$ : partida das peças

As fichas nesse modelo representam os recursos da unidade de manufatura, como por exemplo, a capacidade do forno e a capacidade do sistema. As equações de estado e de saída do sistema que descrevem a dinâmica do grafo da Figura 4.2 são dadas na álgebra max-plus por:

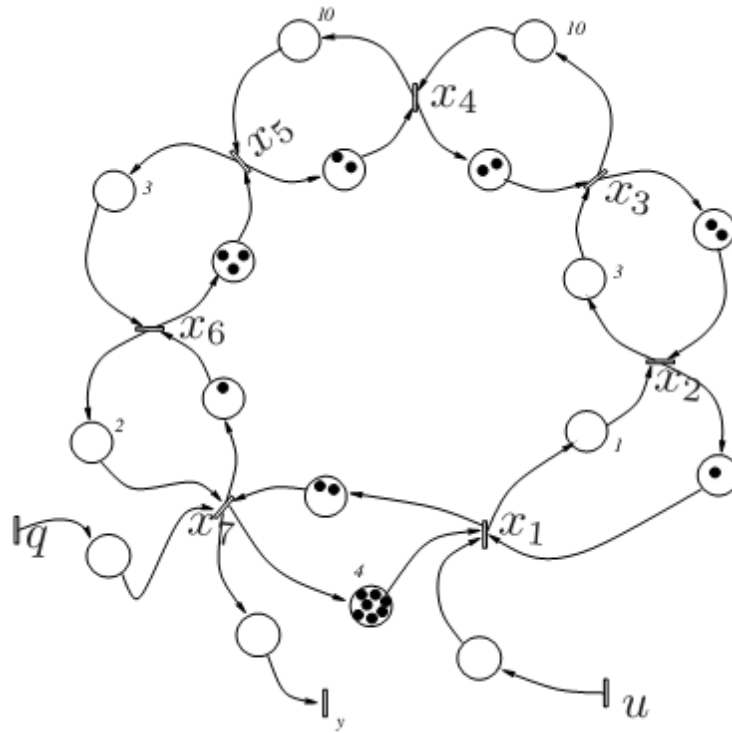


Figura 4.2: (Atto et al., 2011) Modelo do Sistema de Manufatura via Grafo de Eventos Temporizado

$$\begin{aligned}
 x_1(k) &= x_2(k-1) \oplus 4x_7(k-7) \oplus u(k) \\
 x_2(k) &= 1x_1(k) \oplus x_3(k-2) \\
 x_3(k) &= 3x_2(k) \oplus x_4(k-2) \\
 x_4(k) &= 10x_3(k) \oplus x_5(k-2) \\
 x_5(k) &= 10x_4(k) \oplus x_6(k-3) \\
 x_6(k) &= 3x_5(k) \oplus x_7(k-1) \\
 x_7(k) &= 2x_6(k) \oplus x_1(k-2) \oplus q(k) \\
 y(k) &= x_7(k)
 \end{aligned}$$

Estas equações produzem uma representação matricial onde o vetor de estado  $x(k)$  no instante  $k$  depende dos estados  $x(k)$ ,  $x(k-1)$ ,  $x(k-2)$ ,  $x(k-3)$ ,  $x(k-7)$  e das entradas  $q(k)$  e  $u(k)$ . Entretanto, é possível simplificar a representação da equação de espaço de estados para a forma apresentada no sistema da Equação 4.11. De fato, um lugar com  $m$  fichas e temporização  $\alpha$  é equivalente a  $m$  lugares contendo somente uma ficha e temporização  $\alpha_i$ , com  $\Sigma\alpha_i = \alpha$ . De acordo com esta decomposição, o modelo do grafo de eventos temporizados é o apresentado na Figura 4.3.

O comportamento dinâmico do sistema expandido da Figura 4.3 é descrito por um sistema da forma:

$$\begin{cases} x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k) \\ y(k) = Cx(k-1) \end{cases} \quad (4.11)$$

em que as matrizes **A**, **B** e **C** são dadas por:

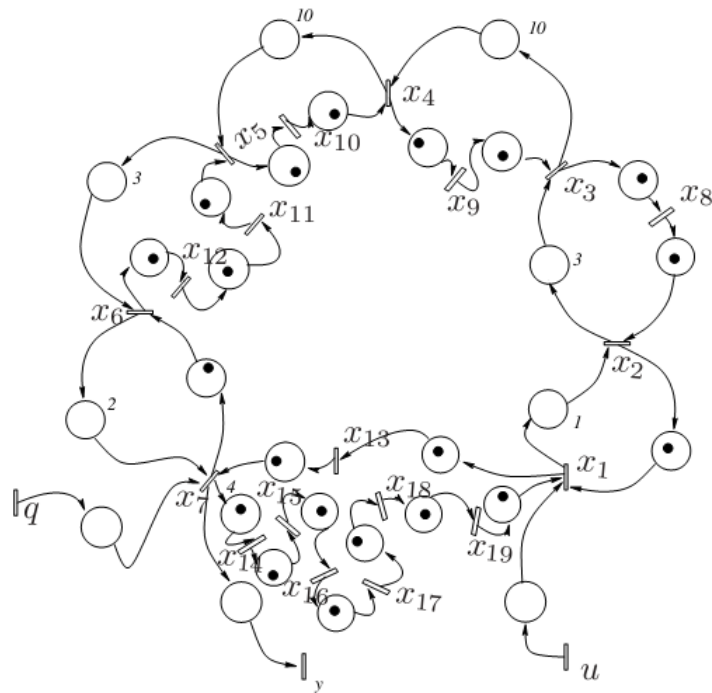


Figura 4.3: (Atto et al., 2011) Modelo Expandido do Sistema de Manufatura via Grafo de Eventos Temporizado







alimentado utilizando a Equação 4.11, considerando

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é:

$$x(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 14 & 24 & 27 & 29 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x(2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 15 & 25 & 29 & 31 & 4 & 14 & 24 & 0 & 27 & 0 & 33 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x(3) = \begin{bmatrix} 24 & 25 & 28 & 38 & 48 & 51 & 53 & 5 & 15 & 25 & 27 & 29 & 1 & 35 & 33 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com isso, fica claro que a transição  $x_4$  dispara sempre dez unidades de tempo após  $x_3$  e que o sistema de controle atende a restrição desejada. A solução encontrada nesse capítulo é diferente da proposta em [Atto et al. \(2011\)](#) pois, nesse trabalho, é calculada uma matriz de realimentação de estados para o sistema, enquanto no trabalho de [Atto et al. \(2011\)](#), o controlador é obtido procurando por soluções na equação de estado restrita em modelos de grafos de eventos discretos, ou seja, a contribuição das restrições são somadas na equação de estado e partir dela propõe-se a inserção de lugares no modelo, sendo os modelos supervisionados classificados e escolhidos de acordo com sua performance.

### 4.3 Conclusões

Este capítulo propôs uma nova forma de encontrar um controle para um problema já proposto na literatura, por meio da álgebra max-plus e da realimentação de estados. A matriz de controle é encontrada a partir das matrizes de restrições e da teoria da residuação. Os resultados encontrados demonstram que o controle

obtido é capaz de atender a restrição imposta ao sistema.



## Capítulo 5

# Conclusões

Grafos de eventos temporizados têm se mostrado uma ferramenta poderosa para a modelagem de sistemas discretos que apresentam somente fenômenos de sincronização de eventos e atrasos de tempo. Esses modelos, que na álgebra convencional são não-lineares, podem ser descritos de forma linear através da álgebra de dióides, permitindo a representação dos grafos a eventos temporizados por equações de estado.

Neste trabalho foram desenvolvidas duas técnicas para controle de sistemas max-plus lineares. A primeira técnica de controle é baseada no princípio de controle “just-in-time”, visando a otimização do processo de produção, uma vez que determina os tempos de entrada do material no sistema de manufatura, buscando a economia de recursos e evitando a formação de estoques, tanto na entrada quanto na saída. Esse problema de controle foi resolvido utilizando dois métodos distintos.

O primeiro método trata inicialmente a restrição de igualdade apresentada e a solução dessa restrição é utilizada na equação de evolução do sistema para encontrar o resultado desejado. O segundo método trata inicialmente a restrição

de evolução do sistema, a solução dessa inequação é utilizada como valor inicial no algoritmo do método alternante, logo o resultado obtido com esse algoritmo é também solução do problema de controle. A solução encontrada utilizando ambos os métodos são iguais, mas a solução obtida pelo método que utiliza o semimódulo pode ter custo computacional exponencial, pois o tempo para encontrar a solução da equação  $Ax = Bx$  cresce exponencialmente quanto maior a matriz utilizada pelo algoritmo. A solução encontrada pelo método alternante necessita do cálculo da condição inicial para o algoritmo que encontrará a solução do problema. A vantagem desse método é que o algoritmo encontra diretamente a solução do problema, enquanto o método do semimódulo necessita de um número maior de cálculos além do algoritmo.

Para mostrar a eficiência do controle desenvolvido em termos da facilidade da aplicação, esse foi aplicado em um exemplo ilustrativo de sistema de manufatura, o qual foi modelado via grafo de eventos temporizados e sua dinâmica foi obtida por meio da álgebra max-plus.

A segunda técnica de controle é baseada na realimentação de estados. As restrições temporais impostas ao sistema foram colocadas na forma de uma inequação matricial. Para solucionar o problema, a equação de estado foi substituída na inequação de restrição e utilizando a teoria da residuação e da residuação dual, pôde-se encontrar uma matriz de realimentação de estados que controla o sistema. Cada elemento dessa matriz pôde ser obtido pelo fato de que, na álgebra max-plus, o maior elemento de um conjunto de elementos que solucionam inequações de mesmas variáveis, também soluciona as demais inequações. Para mostrar que o controle atende as restrições impostas, esse foi aplicado em um sistema de manufatura real apresentado em [Atto et al. \(2011\)](#).

Na implementação dos exemplos foi utilizado o software gratuito Scilab, mais

precisamente o pacote desenvolvido por [J-P.Quadrat \(2007\)](#), no qual é possível trabalhar com a álgebra max-plus.

Os controles desenvolvidos apresentam algumas particularidades. No primeiro controle, o calendário com as datas desejadas de saída deve ser corrigido como apresentado neste trabalho, tornando-o viável, caso contrário o sistema poderá não ter solução. No segundo método de controle, a matriz de realimentação pode alterar o ciclo médio de trabalho e a matriz  $L$  deve ser linha G-astic, senão o sistema de controle pode não ter solução. Dessa forma, as perspectivas para trabalhos futuros são: reestruturar a matriz  $L$  de forma que o controle sempre se aplique ao sistema, ou seja, transformar a matriz  $L$  de forma que ela seja sempre linha G-astic e encontrar matrizes de realimentação melhores, que obriguem o sistema a obedecer as restrições e que não altere o valor do máximo ciclo médio.

Por fim, novas técnicas utilizando os grafos de eventos temporizados e a álgebra de dióides podem ser desenvolvidas. Um exemplo de técnica a ser desenvolvida é a composição paralela para grafos de eventos temporizados, ou seja, modela-se partes separadas de um sistema e depois obtém-se o modelo completo do sistema a partir dos modelos anteriores, o que permitiria reduzir a complexidade de análise em sistemas que possuem um grande número de lugares e transições.

# Referências Bibliográficas

- Allamigeon, X., Gaubert, S., and Goubaut, E. (2008). Inferring min and max invariants using max-plus polyhedra. In LNCS, S., editor, *Proceedings of the 15th International Static Analysis Symposium (SAS'08)*, number 5079, pages 189–204.
- Andrade, C. R. (2008). Controle de sistemas max-plus lineares sujeitos a restrições no estado: Aplicação a sistemas de transporte. Master's thesis, UFMG.
- Andrade, C. R. and Maia, C. A. (2008). Controle de sistemas max-plus lineares sujeito a restrições no estado: aplicação a sistemas de transporte. *XL Símposio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, pages 1–12.
- Atto, A. M., Martinez, C., and Amari, S. (2011). Control of discrete event system with respect to strict duration: Supervision of an industrial manufacturing plant. *Computer and Industrial Engineering*. doi:10.1016/j.cie.2011.07.004.
- Bacelli, F., Cohen, G., Olsder, G., and Quadrat, J. P. (1992). *Synchronisation and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems*. New York.
- Booth, C. J. and Kurpis, G. P. (1993). *IEEE Standard Dictionary of Electrical and Electronics Terms*. Institute of Electrical and Electronics Engineers, 5 edition.

- Butkovic, P. and Hegedus, G. (1984). An elimination method for finding all solutions of the system of linear equations over an extremal algebra. *Ekon. ? Mat. Obzor*, 20:203–214.
- Cassandras, C. G. and Lafortune, S. (1999). *Introduction to Discrete Event Systems*. Kluwer Academic Publishers.
- Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J. (2004). Duality and separation theorems in idempotent semimodules. *Linear and Appl.*, (379):395–422.
- Cuninghame-Green, R. A. and Butkovic, P. (2003). The equation  $a \otimes x = b \otimes y$  over  $(\max, +)$ . *Theoretical Computer Science*, 293:3–12.
- Garcia, C. E., Prett, D. M., and Morari, M. (1989). Model predictive control: Theory and practice - a survey. *Automatica*, 25(3):335–348.
- Garcia, T. R. (2007). *Modelagem e controle da coordenação do tráfego urbano através de formalismos para sistemas a eventos discretos e híbridos*. PhD thesis, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Gaubert, S. (1992). *Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, Paris.
- Goverde, R. M. P. (2007). Railway timetable stability analysis using max-plus system theory. *Transportation Research Part B*, 41:179–201.
- Hardouin, L., Gruet, B., Cottenceau, B., and Lhommeau, M. (2007). <http://istia.univ-angers.fr/hardouin/outils.html>.
- Hopcroft, J. E., Ullman, J. D., and Motwani, R. (2000). *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*. Addison Wesley.

- Houssin, L., Lahaye, S., and Boimond, J.-L. (2007). Just in time control of constrained  $(\max,+)$ -linear systems. *Discrete Event Dynamic Systems*, 17:159–178.
- J-P.Quadrat (2007). *www.scilab.org/contrib*.
- Katz, R. D. (2007). Max-plus  $(a,b)$ -invariant spaces and control of timed discrete-event systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(2):229–241.
- Maia, C. A. (2003). *Identificação e Controle de Sistemas a Eventos Discretos na álgebra  $(\max,+)$* . Tese de doutorado, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil.
- Maia, C. A., Andrade, C. R., and Hardouin, L. (2011a). On the control of max-plus linear system subject to state restriction. *Automatica*, 47(5):988–992.
- Maia, C. A., Hardouin, L., Mendes, R. S., and Loiseau, J. (2011b). A super-eigenvector approach to control constrained max-plus linear systems. *CDC/ECC - Orlando, Flórida*.
- Maia, C. A., Luders, R., Mendes, R. S., and Hardouin, L. (2005). Estratégias de controle por modelo de referência de sistemas a eventos discretos max-plus lineares. *Controle e Automação*, 16(3):263–278.
- Menguy, E., Boimond, J., and Hardouin, L. (1998). Optimal control of discrete event systems in case of updated reference input. *Proceedings of the IFAC Conference on System Structure and Control*, pages 601–607.
- Murata, T. (1989). Petri nets : properties, analysis and applications. *Proceedings of the IEEE*, 77(4):541–580.
- Ramadge, P. J. G. and Wonham, W. M. (1987). Supervisory control of a

class of discrete event processes. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 25(1):206–230.

Schutter, B. and Boom, T. V. D. (2001). Model predictive control for max-plus-linear discrete event systems. *Automatica*, 37:1049–1056.

Yamalidou, K., Moody, J., Lemmon, M., and Antsaklis, P. (1994). Feedback control of petri nets based on place invariants. Technical report, University of Notre Dame.

## Apêndice A

# Geração de Todas as Soluções para a Equação $Ax = Bx$

Os resultados apresentados neste apêndice foram obtidos de (Maia et al., 2011b). Estamos interessados em equações baseadas no dióide  $\bar{\mathbb{R}}_{max} = (\mathbb{R} \cup \varepsilon, max, +)$ , como proposto em (Butkovic and Hegedus, 1984). Sabemos que todas as soluções da equação  $Ax = Bx$ , para o qual  $A$  e  $B \in R_{max}^{m \times n}$  e  $x \in \bar{\mathbb{R}}_{max}^n$  podem ser expressos como um semimódulo finitamente gerado e pode ser calculado por um método apresentado em (Butkovic and Hegedus, 1984). Este método foi recentemente melhorado em (Allamigeon et al., 2008). O objetivo dessa seção é discutir este problema e dar uma simples prova desse fato.

Vamos começar considerando o caso em que as matrizes  $A$  e  $B$  são vetores linha, que é  $A = [a_1 \dots a_n]$  e  $B = [b_1 \dots b_n]$ . A solução para o problema, para o qual  $A$  e  $B$  são matrizes de dimensões gerais, pode ser obtido simplesmente solucionando o problema linha por linha, isto é, resolvemos para a primeira linha da matriz  $A$  e  $B$  e usar o resultado para resolver o problema da segunda linha e assim por diante.

Explicitamente a equação a ser solucionada é:

$$a_1 \otimes x_1 \oplus \dots \oplus a_n \otimes x_n = b_1 \otimes x_1 \oplus \dots \oplus b_n \otimes x_n \quad (\text{A.1})$$

Sem perda da generalização, assumimos que os elementos deste vetor são tais que  $a_k \oplus b_k \neq \varepsilon$  para todo  $k \in 1, \dots, n$ . Nesse sentido, se existe uma solução não nula para esse problema, então:

$$\exists(i,j) | a_i \otimes x_i = b_j \otimes x_j \quad (\text{A.2})$$

para o qual

$$(a_k \otimes x_k \preceq a_i \otimes x_i)$$

e

$$(b_k \otimes x_k \preceq b_j \otimes x_j), \forall k. \quad (\text{A.3})$$

Desde que a solução é não nula,  $\exists k$  tal que  $x_k \neq \varepsilon$ . Uma vez que  $a_k \oplus b_k \neq \varepsilon$ , por suposição, então  $a_k \otimes x_k \neq \varepsilon$  ou  $b_k \otimes x_k \neq \varepsilon$ . Como resultado da Ineq. [A.3](#), podemos garantir que  $a_i \otimes x_i = b_j \otimes x_j \neq \varepsilon$ . Portanto:

$$a_i \otimes b_j \neq \varepsilon \quad (\text{A.4})$$

Nesse caso, podemos ver que  $[x_i x_j]^t \in \text{Im}[b_j a_i]^t$  e  $a_i \succeq b_i$  e  $b_j \succeq a_j$ . Além disso, podemos observar que todos os vetores  $v^{(l,p)} \in (R_{max})^n$ , tal que  $v^{(l,p)}(l) = b_p$ ,  $v^{(l,p)}(p) = a_l$  e  $v^{(l,p)}(k) = \varepsilon$  para  $k \in \underline{l,p}$ , para o qual  $a_l \succeq b_l$  e  $b_p \succeq a_p$ , gera uma solução para a Eq [A.1](#). Este fato motiva a definição do seguinte conjunto:

$$\Upsilon = \{(l,p) | (a_l \succeq b_l) e (b_p \succeq a_p)\} \quad (\text{A.5})$$

Como consequência, todos os vetores na imagem da matriz, na qual as colunas são os vetores  $v^{(l,p)}$ ,  $(l,p) \in \Upsilon$  são soluções para a Eq. A.1. A seguir denotamos essa matriz de  $M$ . Se existe uma solução não nula  $x = [x_1 \dots x_n]^t$  para o problema, então:

$$\exists(i,j) \in \Upsilon | a_i \otimes x_i = b_j \otimes x_j \quad (\text{A.6})$$

tal que Ineq. A.3 e Ineq. A.4 sejam verdadeiras. Portanto, como discutido previamente,  $x_i$  e  $x_j$  são gerados pelo vetor  $\beta v^{(i,j)}$  tomando  $\beta$  de tal forma que  $x_i = \beta b_j$ . Como uma consequência ele mostra que todos os outros elementos não nulos  $x_k$  tal que  $k \in i,j$  podem ser gerados por uma combinação linear das colunas de  $M$ . Nesse sentido, podemos ter somente duas possibilidades apresentadas a seguir.

1) ( $a_k \succeq b_k$ ): Desde  $b_j \succeq a_j$  então  $(k,j) \in \Upsilon$ . Vamos mostrar que  $x_k$  pode ser gerado pela imagem de  $v^{(k,j)}$ . Nesse sentido se nós escolhermos  $\alpha_k$  tal que  $x_k = \alpha_k \otimes b_j$ . Ele permanece para mostrar que  $\alpha_k \otimes a_k \preceq x_j$ , desde  $x_j$  já é gerado pela imagem de  $v^{(i,j)}$ . Sabemos pela Ineq. A.3 que  $a_k \otimes x_k \preceq a_i x_i$ , desde  $a_i x_i = b_j x_j$  então  $a_k \otimes \alpha_k \otimes b_j \preceq b_j x_j$ . Pela Ineq. A.4,  $b_j$  é um escalar não nulo, então  $x_i, x_j$  e  $x_k$  são gerados por  $\alpha_k v^{c(i,j,k)} \oplus \beta v^{(i,j)}$ , no qual  $c(i,j,k) = (k,j)$ .

2) ( $b_k \succeq a_k$ ): Desde  $a_i \succeq b_i$  então  $(i,k) \in \Upsilon$ . A prova segue o mesmo raciocínio do item (1), ou seja, vamos mostrar que  $x_k$  pode ser gerado a partir da imagem de  $v^{(i,k)}$ . Para este fim escolhemos  $\alpha_k$  tal que  $x_k = \alpha_k \otimes a_i$  e devemos assegurar que  $\alpha_k \otimes b_k \preceq x_i$ , desde que  $x_i$  já é gerado pela imagem de  $v^{(i,j)}$ . Pela Ineq. A.3, mostramos que  $b_k \otimes x_k \preceq b_j x_j$ , desde que  $b_j x_j = a_i x_i$  então  $b_k \otimes \alpha_k \otimes a_i \preceq a_i x_i$ . Pela Ineq. A.4,  $a_i$  é um número escalar diferente de zero, então  $x_i, x_j$  e  $x_k$  são gerados por  $\alpha_k v^{c(i,j,k)} \oplus \beta v^{(i,j)}$ , no qual  $c(i,j,k) = (k,j)$ .

Como resultado, graças à idempotência do dióide, a solução não nula  $x$  é

descrita como uma combinação linear das colunas de  $M$ , tal que  $x \in ImM$ .

Explicitamente:

$$x = \bigoplus_{\forall k \subseteq i, j \in E(x_k \neq \varepsilon)} (\alpha_k v^{c(i,j,k)}) \oplus \beta v^{(i,j)} \in ImM \quad (A.7)$$

na qual  $c(i,j,k)$  é tomado como  $(k,j)$  se  $(a_k \succeq b_k)$  ou  $(i,k)$  caso contrário.

Finalmente, é importante ressaltar que o caso para o qual  $a_k \oplus b_k = \varepsilon$  é levado em consideração adicionando uma coluna na matriz  $M$  na qual o  $k^{th}$  termo é igual a  $e$  e os demais são nulos.





