

Discriminação e decoerência: um modelo em cavidades de microondas

Roque Teles Frade Paulinelli

Universidade Federal de Minas Gerais

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Física

Discriminação e decoerência:
um modelo em cavidades de microondas

Roque Teles Frade Paulinelli

Orientadora: Maria Carolina Nemes

Dissertação apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal de Minas

Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Belo Horizonte, Março de 2012.

A Dona Adriana.

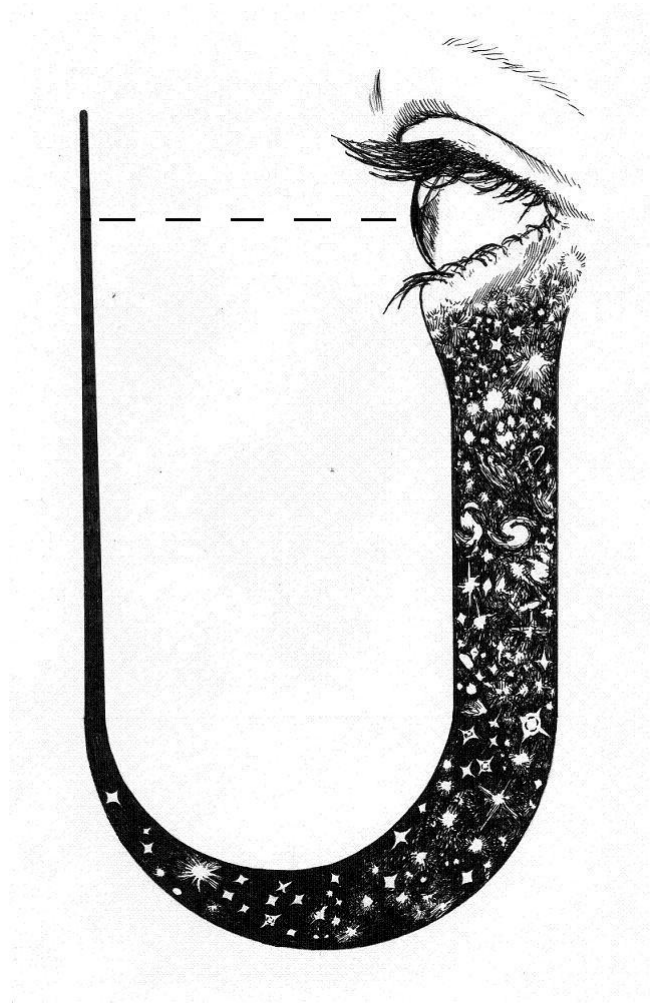
Um índio e um branco sentaram-se para conversar. O homem branco desenhou um círculo na areia e um círculo maior cercando-o. "Veja", ele disse, apontando para o pequeno círculo "Isto é o que os índios sabem, e isto", apontando para o círculo maior, "é o que o homem branco sabe.". O índio ficou em silêncio por alguns minutos, e então lentamente apontou com o braço para o leste e virou e acenou para o oeste. "E aquilo, homem branco, é o que nenhum de nós sabe.".

- Crônicas Niniquianas

Agradecimentos

- Primeiramente, gostaria de agradecer a todos que mantiveram meu copo cheio nos momentos de estudo. Seja café, seja cerveja, o estímulo merece todas as honrarias;
- À Carol, esta profissional que dispensa comentários, agradeço pelas ótimas conversas, pela alegria contagiante, pelo carinho e pelo exemplo de ser humano que é. Enfim, por tudo que me ensinou;
- À minha mãe, pela raça, dedicação e apoio constantes em minha vida. Sem ela com certeza nenhuma página estaria escrita;
- À Julia, por desde os 4 anos de idade me levar a cavalo pelo cerrado afora pra eu pegar a kombi escolar;
- Ao meu pai. O bom som que eu escutava quando novo é o mesmo que me embalou por todo este trabalho;
- Aos Teles, Frades e Paulinellis, agradeço pelos exemplos e afeto;
- Ao grande Cowboy Tonico do Lico, pelas conversas inspiradoras e inúmeras estadias;
- Aos místicos, meus sinceros agradecimentos por despertarem em mim o desejo de conhecer o universo;
- A todos os membros e agregados da "Ninico is Love" (Luketinha Beira-Mara, Cabas, Henrikóvsky, Doidão, Julia Dream, Leitan, Tom Zé, Mel, Alemooone, Alllgesta, Batutinha, Dilei, Breda, Boromoita, todos da "Casa de Banho", à elfa da porta e a todos os outros que já marcaram presença), um muitíssimo obrigado por tudo. Tamo de corete;
- Gostaria de agradecer ao Moita, à Paulete e à Augusta por serem pessoas "helps";
- Muito obrigado aos rpgistas, cachaceiros, mendigos e amigos de Formiga. Toda a galera "das antiga", com uma conversa mais pra lá que pra cá, possui um pouco deste trabalho;
- Ao Beakman, pela iniciação científica. Você merece todo o respeito tecnológico;
- Ao Marcos Sampaio, Zezim, Zezão, Arthur, Romeo e demais, muito obrigado pelas inúmeras dicas e conversas;
- Não poderia deixar de agradecer a todos meus professores, funcionários e colegas do Departamento de Física, por tudo;
- Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para este trabalho, mesmo que com uma risada ou uma tentativa de piada;
- À FAPEMIG e ao CNPq pelo apoio financeiro;

Obrigado a todos!



(criado por John Archibald Wheeler)

Resumo

Estudamos a evolução de um q-bit monitorado por uma ponta de prova dispersiva sujeita a dissipação. Ambos são mapeados em um átomo de dois níveis "vestido" por um campo coerente no regime de alta dessintonia do modelo de Jaynes-Cummings. O campo monomodal, criado no interior de uma cavidade supercondutora, é constantemente alimentado por uma fonte clássica de microondas. A dinâmica é governada por uma equação mestra markoviana no limite de acoplamento fraco, onde o ambiente é modelado por infinitos osciladores harmônicos não-interagentes entre si. O átomo, preparado numa superposição de estados, tem seu caminho marcado pelo campo através de estados não-ortogonais e, portanto, apenas parcialmente distinguíveis. A dinâmica dissipativa apresenta três regimes distintos em relação à perda de coerência nos quais a interação átomo-campo é fixa e varia-se a constante de dissipação. Apesar destes regimes apresentarem um análogo clássico direto, efeitos essencialmente quânticos tais como o "congelamento" da interação átomo-campo ocorrem devido ao aumento da dissipação. Uma implementação experimental para quantificar a discriminação de-que-caminho através de medidas de visibilidade atômica é sugerida.

Abstract

We have studied the evolution of a q-bit monitored by a dispersive probe submitted to dissipation. Both are mapped on a two-level atom "dressed" by a coherent field in the high detuning regime of the Jaynes-Cummings model. A monomodal field, created inside of a superconducting cavity, is constantly fed by a classical microwave source. The dynamics is governed by a markovian master equation in the weak-coupling limit, where the environment is modeled by infinity harmonic oscillators non-interacting with each other. The atom, prepared in a superposition, has its path marked by a field through non-orthogonal states and, therefore, only partially distinguishable. The dissipative dynamics has three distinct regimes in respect of loss of coherence in which the atom-field interaction is fixed and the dissipation constant is varied. Despite these regimes have a direct classical analogue, essentially quantum effects such as "freezing" of the atom-field interaction occur due to increased dissipation. An experimental implementation to quantify the which-way discrimination through atomic visibility measures is suggested.

Sumário

1	Introdução	10
2	Fundamentação teórica e sistema físico	12
2.1	Operador densidade	12
2.1.1	Grau de mistura	13
2.1.2	Operador densidade reduzido	14
2.2	Emaranhamento	15
2.2.1	Quantificando o grau de emaranhamento	16
2.3	Sistemas Quânticos Abertos	18
2.3.1	Decoerência, Distinguibilidade e Complementaridade	18
2.3.2	Equação mestra	21
2.4	O sistema	23
2.5	Átomo	25
2.6	Campo	26
2.6.1	Estados coerentes	27
2.7	Interação átomo-campo	28
2.7.1	Modelo de Jaynes-Cummings na RWA	28
2.7.2	Zona de Ramsey	32
3	Dinâmica dispersiva com dissipação e fonte	33
3.1	A dinâmica	33
3.2	As equações de movimento	35
3.3	Evolução de um estado inicial puro e separável	38
3.3.1	Estado assintótico de uma cavidade com fonte e dissipação	38
3.3.2	Operador densidade global	39
3.3.3	Operadores densidade reduzidos	43
4	Análise	46
4.1	Entropias Lineares	46
4.2	Concorrência	49
4.3	Distinguibilidade	50

4.4	Discussão	51
5	Conclusão	61
5.1	Perspectivas	63
A	Ferramentas matemáticas	64
A.1	Traço	64
A.2	Teoremas sobre operadores	64
A.2.1	Teorema 1: Fórmula de Baker-Hausdorff	65
A.2.2	Teorema 2:	65
A.3	Desacoplando exponenciais	65
A.3.1	O método da diferenciação de parâmetro	65
A.3.2	Caso para álgebra de Lie bidimensional	67
B	Dinâmica do modelo Jaynes-Cummings na aproximação dispersiva com dissipação	69
B.1	Exponenciais de Lie	72
B.1.1	Desacoplamento dos elementos diagonais	72
B.1.2	Desacoplamento dos elementos não-diagonais	73
B.2	Evolução de um estado inicial puro e separável	74
C	Desacoplamento das exponenciais de Lie das equações de movimento na interação dispersiva e dissipativa com fonte	78
C.1	Superoperadores	79
C.2	Desacoplando as exponenciais de Lie dos elementos diagonais	80
C.3	Desacoplando as exponenciais de Lie dos elementos não-diagonais	84

Capítulo 1

Introdução

O emaranhamento é um fenômeno quântico, sem análogo clássico, que caracteriza-se pela impossibilidade de determinar o estado global de um sistema composto puro apenas conhecendo-se suas partes. Isto se deve à presença de correlações estatísticas que se originam nas interações entre as partes do sistema. Cada parte deixa de possuir características individuais bem definidas e passa a depender dos outros subsistemas. Em 1935, Einstein, Podolsky e Rosen formularam o paradoxo EPR [16], um experimento mental que revelava a natureza não-local da Mecânica Quântica numa tentativa de demonstrar sua incompletude. Os experimentos viabilizados anos depois [2, 1, 22], porém, tendiam a favor da Mecânica Quântica e de seu comportamento não-local¹.

Este fenômeno é de fundamental importância na questão da emergência da classicidade. Nos últimos vinte anos, um esforço foi feito na direção de associar a supressão de superposições quânticas de estados e a inexistência de emaranhamento entre partes de um sistema ao emaranhamento deste sistema com o ambiente. Um tratamento formal possível para um sistema aberto, ou seja, em contato com o ambiente, é assumir uma evolução unitária para o sistema total: o sistema de interesse, o ambiente e mais uma possível ponta de prova. Através do processo dinâmico de decoerência tal sistema de interesse tem suas correlações quânticas transformadas em correlações clássicas de forma irreversível [51, 52, 53, 38].

O ambiente no processo de decoerência, juntamente com a ponta de prova, é visto como um reservatório de informação sobre o subsistema. Através de inúmeras medidas este é monitorado transmitindo àqueles informação de-que-caminho, ou melhor, informação de-que-estado. Deve-se enfatizar que este processo de monitoramento não requer um observador. Apenas o fato da informação de-que-caminho estar disponível, mesmo que não observada, já é suficiente para acabar com interferências quânticas. Neste ponto, torna-se fundamental a análise da acessibilidade da informação gerada. Caso os estados do ambiente+ponta de prova associados às histórias do sistema de interesse sejam ortogonais,

¹Críticas a estes experimentos bem como teorias alternativas são propostas até hoje, indicando que este assunto ainda não foi encerrado.

seu caminho estará totalmente marcado e a coerência, ou seja, o caráter ondulatório deste sistema de interesse, será mínima: a informação de-que-caminho pode ser totalmente acessada para qualquer tempo num processo irreversível. Caso contrário, ela será apenas parcial, pois seus caminhos não poderão ser totalmente discriminados.

Nosso trabalho consiste na análise da dinâmica de um q-bit preparado numa superposição de estados medido por uma ponta de prova dispersiva, ou seja, cuja interação depende de uma dada frequência, acoplada a um reservatório térmico. A interação escolhida fará com que o q-bit seja monitorado pelo ambiente através dos estados não-ortogonais da ponta de prova. Assim, espera-se que a taxa de decoerência atômica dependa do grau de discriminação de-que-caminho permitida pelo campo. Investigaremos a influência da dissipação na acessibilidade da informação gerada por este medidor e suas consequências sobre a evolução do q-bit.

O sistema q-bit+ponta de prova é mapeado em um átomo de dois níveis "vestido" por um campo coerente no regime de alta dessintonia do modelo de Jaynes-Cummings. Tal modelo descreve a interação completamente quantizada da radiação com a matéria [30] e, numa forma simplificada, apenas um modo do campo é acoplado à transição eletrônica relevante. Serão feitas duas aproximações no hamiltoniano que rege a interação: a aproximação de ondas girantes², que permite solução analítica, e a aproximação dispersiva, válida no limite de alta dessintonia entre campo e transição atômica. O campo coerente, criado no interior de uma cavidade supercondutora de altíssima qualidade, é constantemente alimentado por uma fonte clássica de microondas a fim de evitar sua completa dissipação.

A dinâmica não-unitária é regida por uma equação mestra markoviana no limite de acoplamento fraco onde o ambiente é modelado como um conjunto infinito de osciladores harmônicos não-interagentes entre si mantidos a temperatura nula.

No Capítulo 2, são discutidos os conceitos básicos para o entendimento deste trabalho e são apresentados detalhes do sistema proposto. No Capítulo 3, são encontradas as equações de movimento do nosso sistema de interesse, o átomo, e da ponta de prova, o campo. No Capítulo 4, exploramos a dinâmica do emaranhamento entre os diversos constituintes e sua ligação com a distinguibilidade dos estados do campo e o grau de dissipação. Três apêndices são incluídos: um contendo técnicas e ferramentas matemáticas úteis; outro trazendo a solução da dinâmica do modelo Jaynes-Cummings na aproximação dispersiva com dissipação, mas sem a fonte; e por último, um contendo cálculos relativos ao sistema com a presença da fonte.

Boa leitura!

²"Rotating Wave Approximation" - RWA.

Capítulo 2

Fundamentação teórica e sistema físico

Neste capítulo apresentaremos de forma breve os elementos necessários ao bom entendimento deste trabalho. Exporemos conceitos básicos de Mecânica Quântica (MQ) e Sistemas Quânticos Abertos (SQA), como o comportamento não-local de um sistema quântico, sua descrição estatística e como tudo se conecta com a supressão de interferências quânticas quando o sistema se encontra em contato com um ambiente. Além disso, uma discussão sobre a evolução não-unitária modelada por equações mestras markovianas é apresentada, nos fornecendo a dinâmica para certos sistemas em processo de decoerência. Mostraremos como tratar quanticamente uma ponta de prova quantificando a acessibilidade da informação armazenada, ou seja, sua capacidade de discriminação de-que-caminho. Descreveremos o sistema usado para investigar a influência do acoplamento com o ambiente sobre esta propriedade. Por fim, o modelo Jaynes-Cummings é mostrado juntamente com seu limite de alta dessintonia, no qual será gerado nosso medidor quântico num regime dispersivo. Ao leitor inteirado à área é aconselhado apenas a leitura da Seção 2.4.

2.1 Operador densidade

Em MQ, representamos o estado de um sistema isolado, numa descrição mais simples, como um vetor $|\Psi\rangle$ no espaço de Hilbert [15]. Porém, o estado pode agregar incertezas que são de natureza clássica, e não quânticas. Estas incertezas podem ser oriundas, por exemplo, de uma falta de informação a respeito de qual estado foi preparado, ou por simplesmente querermos observar apenas uma parte do sistema, ignorando seu restante (maiores detalhes serão dados na Seção 2.2). Para lidar com isso é necessário um *ensemble* de estados puros através do qual descreve-se o sistema. Tal descrição é feita pelo operador densidade.

Introduzido em 1927 por **John Von Neumann**, o operador densidade [18, 24, 25] é visto como uma combinação linear de projetores pesados pela probabilidade com que aparecem no *ensemble* em questão:

$$\hat{\rho} = \sum_k p_k |\Psi_k\rangle \langle \Psi_k|, \quad (2.1.1)$$

onde cada p_k representa a probabilidade associada a um dos estados $|\Psi_k\rangle$, normalizados mas não necessariamente ortogonais entre si, e que portanto possui as seguintes propriedades: $0 \leq p_1, p_2, \dots, p_k \leq 1$ e $\sum_k p_k = 1$.

Das características acima seguem as seguintes propriedades:

- Normalização:

$$Tr(\hat{\rho}) = 1; \quad (2.1.2)$$

- Hermiticidade:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger; \quad (2.1.3)$$

- Não-negatividade:

$$\langle \Psi | \hat{\rho} | \Psi \rangle \geq 0 \quad \forall |\Psi\rangle. \quad (2.1.4)$$

Para propriedades do traço (Tr) ver Apêndice A.

O operador densidade é representado comumente em forma matricial, dada uma base. A esta representação damos o nome de *matriz densidade* do sistema, sendo representada como apenas ρ , sem chapéu. Ela carrega toda a informação a respeito do sistema em questão, permitindo-nos calcular qualquer grandeza, assim generalizando cálculos feitos com vetores de estado. Por exemplo, dado um observável $\hat{A}$, seu valor esperado pode ser escrito na forma de um traço, que é independente da base escolhida:

$$\langle \hat{A} \rangle = Tr(\hat{\rho} \hat{A}). \quad (2.1.5)$$

2.1.1 Grau de mistura

Estados quânticos descritos por vetores de estado são chamados estados *puros*. Os estados *mistos* são, então, os estados onde isto é impossível devido às incertezas clássicas. Para estados puros sempre temos:

1. $\hat{\rho} = |\Psi\rangle \langle \Psi|$, onde $|\Psi\rangle$ é normalizado;
2. $\hat{\rho} = \hat{\rho}^2$;
3. $Tr(\hat{\rho}) = Tr(\hat{\rho}^2) = 1$.

Vemos, pela primeira equação, que ele é um projetor do estado $|\Psi\rangle$ pois possui apenas um $p_k = 1$. Daí seguem-se as demais propriedades.

Estados mistos, por sua vez, perdem a propriedade projetora. Podemos perceber isto pela expressão:

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}(\hat{\rho}^2) &= \sum_n \langle \varphi_n | \hat{\rho}^2 | \varphi_n \rangle \\
 &= \sum_n \sum_i \sum_j p_i p_j \langle \varphi_n | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \varphi_n \rangle \\
 &= \sum_i \sum_j p_i p_j |\langle \psi_i | \psi_j \rangle|^2 \\
 &\leq \left[\sum_i p_i \right]^2 = 1,
 \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

onde os $|\varphi_n\rangle$'s formam uma base completa e ortonormal. A igualdade é satisfeita apenas se $|\langle \psi_i | \psi_j \rangle|^2 = 1$ para cada par de estados $|\psi_i\rangle$ e $|\psi_j\rangle$, o que significa que todos os $|\psi_i\rangle$'s são colineares. Como para estados mistos isto não ocorrerá percebemos uma maneira de os diferenciarmos de estados puros: basta determinarmos o valor do traço do quadrado da matriz densidade.

Um sistema descrito por um operador densidade (2.1.1) de dimensão 2 com $p_1 = 0,01$ e $p_2 = 0,99$ nos dá uma boa idéia de qual estado foi preparado: o estado $|\Psi_2\rangle$, com 99% de chance. A quantidade de "mistura" é pequena. Por outro lado, se $p_1 = p_2 = 0,5$ o operador densidade não conterá qualquer informação sobre qual estado foi preparado. O grau de ignorância, e portanto, de "mistura" é máximo. Uma boa medida para esta ignorância é dada pela Entropia de Von Neumann [46, 39]:

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho). \tag{2.1.7}$$

Outra boa medida, mais fácil de calcular porém não-aditiva, é a Entropia Linear [10, 39]:

$$S_L(\rho) = 1 - \text{Tr}(\rho^2). \tag{2.1.8}$$

Para estados puros, a matriz densidade será um projetor e portanto $S_L = 0$. Já para um estado misto composto por N estados igualmente prováveis teremos um valor máximo de $1 - 1/N$.

2.1.2 Operador densidade reduzido

Dado um sistema $\mathcal{S}$ composto por dois ou mais subsistemas, muitas vezes podemos nos interessar apenas por medidas realizadas em apenas um deles. Para lidar com isso precisamos de um objeto matemático que contenha todas as informações pertinentes ao

subsistema mesmo havendo correlações com outros. Esta necessidade pode ter origem na incapacidade de medir todo o sistema $\mathcal{S}$ ou por simples desinteresse pelos outros subsistemas. Este objeto é o *operador densidade reduzido* (ver pág. 45 de [42] para dedução):

$$\hat{\rho}_{\mathcal{A}} = Tr_{\mathcal{B}}(\hat{\rho}). \quad (2.1.9)$$

Aqui, o subíndice $\mathcal{A}$ representa o subsistema de interesse e $\mathcal{B}$ todos os outros, ou seja, tomamos um traço usando uma base ortonormal apenas do espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$. O símbolo " $Tr_{\mathcal{B}}$ " é chamado de "traço parcial sobre $\mathcal{B}$ " e pode ser entendido como uma média sobre todos os graus de liberdade em $\mathcal{B}$. De posse da densidade reduzida podemos calcular o valor esperado de qualquer medida local realizada sobre $\mathcal{A}$, como demonstrado em [42].

Este objeto é de extrema importância ao modelarmos um sistema em contato com o ambiente. Fora casos em que o ambiente é modelado de maneira extremamente simplista a densidade reduzida torna-se essencial, pois descrevê-lo pode ser uma tarefa extremamente difícil. Portanto, se quisermos retratar um processo realista em MQ devemos tomar um traço sobre o ambiente, visto que nunca conseguiremos medi-lo eficazmente.

2.2 Emaranhamento

Quando estamos no domínio da Física Clássica podemos representar o estado de um sistema composto puro, ou seja, sem incertezas, como um ponto num espaço de fase. Se quisermos representar cada parte separadamente podemos associar diferentes pontos a diferentes subsistemas em espaços de menor dimensão. Quanticamente isto não é sempre possível. Há estados que estão de tal forma correlacionados que cada subsistema deixa de possuir características individuais bem definidas de maneira que algumas propriedades passam a depender dos outros subsistemas, num comportamento claramente não-local. Em 1935, Schrödinger cunha o termo que descreveria este tipo de estado [43] :

When two systems, of which we know the states by their respective representatives, enter into temporary physical interaction due to known forces between them, and when after a time of mutual influence the systems separate again, then they can no longer be described in the same way as before, viz. by endowing each of them with a representative of its own. I would not call that *one* but rather *the* characteristic trait of quantum mechanics, the one that enforces its entire departure from classical lines of thought. By the interaction the two representatives (or ψ -functions) have become entangled.¹

¹Quando dois sistemas, cujos estados conhecemos através de seus representantes, entram em interação física temporária devido a forças conhecidas entre eles, e quando depois de um tempo de influência mútua os sistemas voltam a se separar, então eles não mais podem ser descritos da mesma forma que anterior-

Para definirmos mais rigorosamente estados *emaranhados*² precisamos definir estados não-emaranhados, ou seja, estados *separáveis*. Para estados puros, um estado separável com dois subsistemas é todo aquele que pode ser escrito na forma³:

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle. \quad (2.2.1)$$

Ou seja, ele é separável e qualquer medida local num subespaço de índice i afetará apenas $|\psi_i\rangle$. Em termos do operador densidade o critério de separabilidade para um sistema bipartido se torna a possibilidade de ser escrito na forma:

$$\hat{\rho} = \sum_k p_k \hat{\rho}_{1k} \otimes \hat{\rho}_{2k}, \quad (2.2.2)$$

onde $\hat{\rho}_{1k}$ e $\hat{\rho}_{2k}$ são operadores densidade dos subespaços 1 e 2, respectivamente e p_k é uma probabilidade respeitando as propriedades $0 \leq p_1, p_2, \dots, p_k \leq 1$ e $\sum_k p_k = 1$ para todo k . À primeira vista, devido à soma, pode parecer que este estado não é separável. Mas ela surge devido às correlações clássicas quantificadas pelas probabilidades p_k , e não quânticas, pois cada termo $\hat{\rho}_{1k} \otimes \hat{\rho}_{2k}$ representa um estado separável. Vale lembrar que estamos discutindo o emaranhamento entre os $\hat{\rho}_{ik}$, $i = 1, 2$, e não possíveis emaranhamentos entre partições de um único $\hat{\rho}_{ik}$. A generalização para um número maior de partes, ou seja, para $i > 2$, é direta.

Assim, todo estado será emaranhado se não for separável. Surge aí um problema computacional, pois não é tarefa fácil determinar se um estado misturado é ou não separável. Quando nos deparamos com um estado não-emaranhado sabemos que ele pode ser escrito na forma separável, mas podemos não ter idéia de qual é esta forma [32].

O conceito de emaranhamento é importante para entendermos, por exemplo, a supressão de interferências no regime clássico, pois o emaranhamento do sistema com o ambiente pode ser visto como o mecanismo por trás deste fenômeno. Vamos entender isto melhor na Seção 2.3, por agora vejamos as medidas de emaranhamento que serão utilizadas na análise do nosso sistema físico.

2.2.1 Quantificando o grau de emaranhamento

Para um sistema puro composto por duas partes $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, ao encontrarmos a matriz reduzida de uma delas a incerteza emergente será totalmente devida ao "corte" de suas correlações quânticas. Uma boa medida do grau de emaranhamento poderá ser então a Entropia de

mente, a saber, associando a cada um deles um representante próprio. Eu não chamaria isto *um*, mas o traço característico da mecânica quântica, que obriga o seu afastamento completo das linhas de pensamento clássicas. Através da interação os dois representantes (ou funções- ψ) se tornaram emaranhadas.

²Para uma boa revisão do assunto ler [27].

³O símbolo $\otimes$ representa o produto tensorial.

Von Neumann (2.1.7):

$$E(\psi) = -Tr(\rho_{\mathcal{A}} \log_2 \rho_{\mathcal{A}}) = -Tr(\rho_{\mathcal{B}} \log_2 \rho_{\mathcal{B}}), \quad (2.2.3)$$

onde $\rho_{\mathcal{A}}$ e $\rho_{\mathcal{B}}$ representam as matrizes densidade reduzidas dos subsistemas.

Se o sistema composto for misto, a Entropia de Von Neumann de cada subsistema medirá não apenas o emaranhamento, mas também as correlações clássicas. Devido a isso devemos utilizar uma outra medida, por exemplo o *Emaranhamento de Formação*, definido como [49, 50]:

$$E(\rho) = \min_i \sum p_i E(\psi_i), \quad (2.2.4)$$

onde a minimização se dá sobre todas as possíveis decomposições de ρ , ou seja, sobre todos os conjuntos $\{p_k, |\psi_k\rangle\}$ tais que possamos escrever $\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k|$. Nesta expressão, $E(\psi_i)$ é a Entropia de Von Neumann associada à decomposição i .

Para um par de q-bits, ou seja, para um sistema bipartido de dois níveis em cada subsistema, podemos expressar $E(\rho)$ como uma função explícita de ρ . Primeiramente definimos a função:

$$\mathcal{E}(C) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x), \quad (2.2.5)$$

onde

$$x = \frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}, \quad (2.2.6)$$

e C é a *Concorrência*:

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}. \quad (2.2.7)$$

Os λ_i 's são os autovalores em ordem decrescente da matriz hermitiana:

$$R = \sqrt{\sqrt{\rho} \tilde{\rho} \sqrt{\rho}}, \quad (2.2.8)$$

e $\tilde{\rho}$ é a matriz densidade que sofreu a ação não-unitária da transformação de "*spin - flip*", que por sua vez é dada por:

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y), \quad (2.2.9)$$

com σ_y sendo a matriz de Pauli correspondente:

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

e ρ^* o complexo conjugado da matriz densidade.

É possível mostrar que [26]:

$$E(\rho) = \mathcal{E}(C(\rho)). \quad (2.2.10)$$

A função $\mathcal{E}(C)$ é monotonicamente crescente para $0 \leq C \leq 1$. A Concorrência pode também ser usada sem problemas como uma medida de emaranhamento.

2.3 Sistemas Quânticos Abertos

No início da Mecânica Quântica, os sistemas estudados eram sempre idealizados como isolados, sem qualquer interação explícita com o ambiente. Essa abordagem levou a um clima geral de "incômodo" com relação às fronteiras da aplicabilidade da teoria. Enquanto o mundo microscópico estava cheio de sobreposições e interferências que desafiavam a intuição, o mundo clássico continuava com suas velocidades e posições bem determinadas. A "linha" que separa um comportamento do outro era uma completa incógnita. Parte do problema foi resolvido com o estudo dos Sistemas Quânticos Abertos que levou ao "programa" da Decoerência [38, 53].

Um sistema é dito aberto se está em contato com um sistema maior com um grande número de graus de liberdade, o chamado ambiente ou reservatório térmico. Quando este ambiente é modelado como um contínuo de estados quânticos o comportamento da matriz densidade reduzida do sistema se torna irreversível [28]; e sua evolução pode nos dar luz sobre esta "linha".

2.3.1 Decoerência, Distinguibilidade e Complementaridade

Se supusermos que as leis da Mecânica Quântica são universais é relevante nos perguntarmos por que não observamos emaranhamento ou sobreposição de estados em objetos macroscópicos, como ressaltou Schrödinger com o "paradoxo" do gato [44]. A resposta a esta pergunta levou ao estudo de como se dá a emergência da "classicalidade".

A interação entre um sistema quântico e seu ambiente leva à não-separabilidade de seus estados (ver Seção 2.2), suprimindo efeitos de sobreposições de estados num processo chamado de *decoerência*. Podemos ter uma noção deste processo analisando o sistema abaixo.

Tomemos um sistema $\mathcal{S}$ de dois níveis em contato com um ambiente $\mathcal{A}$. O sistema inicial total é puro e separável ($|\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|s_1\rangle + |s_2\rangle) \otimes |a_0\rangle$), porém a dinâmica leva o ambiente a emaranhar-se com o sistema de maneira que para cada estado de $\mathcal{S}$ associamos um de $\mathcal{A}$, onde os estados de $\mathcal{A}$ não são necessariamente ortogonais:

$$\begin{aligned} |s_1\rangle &\rightarrow |a_1\rangle, \\ |s_2\rangle &\rightarrow |a_2\rangle. \end{aligned}$$

Assim temos, após a interação:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|s_1\rangle |a_1\rangle + |s_2\rangle |a_2\rangle). \quad (2.3.1)$$

A matriz densidade total do sistema pode ser escrita como:

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 |s_i\rangle \langle s_j| \otimes |a_i\rangle \langle a_j|. \quad (2.3.2)$$

Para lidarmos com o sistema $\mathcal{S}$ precisamos calcular sua matriz densidade reduzida. Dada uma base ortonormal em $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$, $\{|\varphi_n\rangle\}$, podemos escrever:

$$|a_i\rangle = \sum_n c_n^i |\varphi_n\rangle.$$

Teremos:

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{S}} &= \text{Tr}_{\mathcal{A}} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 |s_i\rangle \langle s_j| \otimes |a_i\rangle \langle a_j| \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 |s_i\rangle \langle s_j| \sum_k \langle \varphi_k | \left(\sum_{n,n'} c_n^i (c_{n'}^j)^* |\varphi_n\rangle \langle \varphi_{n'}| \right) |\varphi_k\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 |s_i\rangle \langle s_j| \sum_k c_k^i (c_k^j)^* \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 |s_i\rangle \langle s_j| \langle a_j | a_i \rangle \\ &= \frac{1}{2} (|s_1\rangle \langle s_1| + |s_2\rangle \langle s_2| + |s_1\rangle \langle s_2| \langle a_2 | a_1 \rangle + |s_2\rangle \langle s_1| \langle a_1 | a_2 \rangle). \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Percebemos claramente a influência do ambiente nos elementos não-diagonais de $\rho_{\mathcal{S}}$. Como estes são os elementos indicadores de interferência entre os estados $|s_1\rangle$ e $|s_2\rangle$ (compare com o estado misto $\rho_{\text{misto}} = \frac{1}{2}(|s_1\rangle \langle s_1| + |s_2\rangle \langle s_2|)$) o *overlap* entre os estados do

ambiente ditará o aparecimento ou não de comportamento quântico(interferência) no sistema $\mathcal{S}$ nesta base $\{|s_1\rangle, |s_2\rangle\}$. Vemos neste modelo simples a forte conexão entre emaranhamento, decoerência e informação "de-que-caminho". Caso este *overlap* seja máximo ($|\langle a_1 | a_2 \rangle| = 1$) nenhuma informação sobre "que-caminho" $\mathcal{S}$ seguiu será acessível no ambiente e as sobreposições continuarão a existir. Por outro lado se $\langle a_1 | a_2 \rangle = 0$ o sistema $\mathcal{S}$ sofrerá completa decoerência e as incertezas quânticas se tornarão "clássicas". No caso intermediário a interferência será apenas parcial, o que seria visto como um padrão de interferência de menor contraste [17]. Devemos ressaltar que a coerência presente no estado inicial de $\mathcal{S}$ não foi destruída, foi apenas transferida através do emaranhamento para um sistema maior, como podemos ver em (2.3.1). Uma maneira de se medir esta coerência é através de sua Visibilidade [29]:

$$\mathcal{V} = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}. \quad (2.3.4)$$

Onde I_{max} e I_{min} representam as intensidades máxima e mínima, respectivamente, do padrão de interferência conseguido com um experimento apropriado. Neste caso simples, a Visibilidade pode ser escrita como:

$$\mathcal{V} = 2 |\langle \sigma_- \rangle|, \quad (2.3.5)$$

onde σ_- é a correspondente pseudo-matriz de Pauli:

$$\sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como se pode ver, a Visibilidade está intimamente relacionada a este *overlap*.

O limite clássico é atingido quando algum sistema $\mathcal{S}'$ interage de tal forma com o ambiente que os estados $|a_i\rangle$ se tornam distintos o suficiente para suprimir rapidamente o comportamento quântico. Neste caso, o caminho foi completamente marcado.

Podemos também imaginar $\mathcal{A}$ como um reservatório mais um detector com o qual adquirimos informação sobre $\mathcal{S}$. Fazendo isto explicitamos o caráter ondulatório do nosso aparelho de medida⁴. Para um sistema como o acima, com duas "histórias" (dois níveis) em $\mathcal{S}$, podemos definir $\rho_D^{(+)}$ e $\rho_D^{(-)}$ como as partes da matriz reduzida do detector associadas aos dois estados $|s_1\rangle$ e $|s_2\rangle$:

$$\rho_D = \frac{1}{2} \rho_D^{(+)} + \frac{1}{2} \rho_D^{(-)}. \quad (2.3.6)$$

⁴Sobre os possíveis estados em que podemos encontrar o detector, ver [51].

Com isso podemos definir a *Distinguibilidade* [17] dos estados do medidor:

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \text{Tr}_D \left\{ \left| \rho_D^{(+)} - \rho_D^{(-)} \right| \right\}. \quad (2.3.7)$$

Fisicamente, ela mede a quantidade de informação "de-que-caminho" que ficou disponível com a medida. Desta maneira, para $\mathcal{D} = 0$ teremos dois "caminhos" totalmente indistinguíveis e a interferência no sistema S pode ser máxima; para $\mathcal{D} = 1$ os dois "caminhos" estão totalmente marcados e nenhuma franja de interferência será vista.

Vemos aqui a manifestação do Princípio de Complementaridade de Bohr [5], que afirma que sistemas quânticos (ou quântons⁵) possuem propriedades que são igualmente reais mas mutuamente exclusivas. O exemplo clássico é a dualidade onda-partícula, onde dependendo do aparato experimental o quânton se comportará como onda, partícula ou um misto de ambos [29]. Explicações baseadas no princípio da incerteza sempre foram comuns, porém foi mostrado em [45] a importância da informação "de-que-caminho" em um experimento onde o princípio da incerteza não é suficiente para esclarecer o comportamento dual.

Experimentos atuais sobre decoerência: Nas últimas décadas, vários experimentos sobre decoerência foram levados a cabo. Em especial destacam-se os realizados na *École Normale Supérieure*, em Paris [8, 4] e na Universidade de Viena pelo grupo de Anton Zeilinger [7].

2.3.2 Equação mestra

A evolução do sistema total, sistema+ambiente ($\mathcal{S} + \mathcal{A}$), é suposta unitária e possui, em geral, infinitos graus de liberdade. A matriz densidade do sistema obedecerá então à equação de Liouville-von Neumann:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_{SA}(t) = \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{H}_{SA}, \hat{\rho}_{SA}(t) \right]. \quad (2.3.8)$$

O operador $\hat{H}_{SA}$ atua no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{SA} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A$ e é formado pelos hamiltonianos livres do sistema e do ambiente e pelo hamiltoniano de interação entre eles.

O fato da dinâmica do sistema ser, na maioria das vezes, de difícil solução e nosso interesse cair sobretudo sobre o sistema $\mathcal{S}$ nos estimula a encontrar uma equação para sua densidade reduzida. Mediante aproximações apropriadas conseguimos encontrar a *equação mestra do sistema*⁶. As aproximações feitas dependem do tipo de interação sistema-ambiente e das qualidades deste ambiente.

⁵De acordo com J.-M. Lévy-Leblond, *Physica* (Amsterdam) 151B, 314 (1988), este nome foi cunhado por M. Bunge para evitar o uso de "partícula" ou "onda" em se tratando de dualidades interferométricas, tendo em vista suas limitações e associações oriundas de nossa experiência clássica.

⁶Deduções e detalhes em [23, 42].

Para este trabalho duas aproximações são necessárias:

Aproximação de acoplamento fraco: a influência do sistema sobre o reservatório é negligenciável devido a duas características: à fraca interação entre eles e ao tamanho do reservatório, considerado muito maior que o sistema de interesse. Ela é também conhecida como aproximação de Born.

Aproximação markoviana: as escalas de tempo das correlações do reservatório são muito menores que as da dinâmica do sistema de interesse de tal forma que seus efeitos de memória podem ser ignorados.

Estas aproximações deixam o sistema desacoplado do reservatório para todo o tempo. Este desacoplamento pode soar estranho já que a idéia da dinâmica não-unitária da equação mestra é a de que as correlações quânticas do sistema sejam anuladas pelas correlações sistema-reservatório. No entanto, o modelo é justificado pelo acordo entre teoria e experimento.

Na representação de Schrödinger a eliminação de variáveis do ambiente nos conduz a uma equação mestra generalizada, uma equação diferencial linear, para a matriz densidade reduzida do sistema $\mathcal{S}$. Na representação de Heisenberg somos levados a equações de Langevin generalizadas para os observáveis de $\mathcal{S}$.

A equação mestra de um sistema aberto é, em geral:

$$\frac{d\hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_{\mathcal{S}}, \hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t)] + \mathcal{L}_D(\hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t)), \quad (2.3.9)$$

onde $\mathcal{L}_D \bullet$ é o Liouvilliano⁷ dissipativo que introduzirá o comportamento não-unitário. Ele é um superoperador⁸ que possui uma forma diferente para cada tipo de reservatório. Para um reservatório constituído por infinitos osciladores harmônicos a temperatura nula acoplados fracamente a um único modo de um campo eletromagnético este superoperador tem a forma:

$$\mathcal{L}_D \bullet = k (2\hat{a} \bullet \hat{a}^\dagger - \bullet \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a} \bullet), \quad (2.3.10)$$

onde k é a constante de amortecimento para o modo considerado. Ele possui as propriedades de linearidade e de preservação tanto do traço quanto da positividade do operador densidade para quaisquer estados iniciais.

⁷O ponto $\bullet$ nos indica a posição do operador sobre o qual $\mathcal{L}$ atua.

⁸Um superoperador atua sobre um operador transformando-o em outro operador.

2.4 O sistema

"Qualquer tecnologia suficientemente avançada parece ser mágica."

Arthur C. Clarke.

A fim de estudar os efeitos da dissipação na acessibilidade da informação de uma ponta de prova quântica precisamos encontrar um sistema físico propício. É desejável que ele possua solução analítica e seja de fácil implementação em laboratório. O modelo aqui proposto visa implementar estes quesitos tanto quanto possível, sem perder a compreensão qualitativa dos fenômenos.

Temos um átomo de dois níveis em uma sobreposição de estados em contato com um estado coerente da luz. A interação entre eles é de tal modo longe da ressonância que transições eletrônicas são extremamente improváveis. Ao atravessar uma cavidade eletrodinâmica supercondutora o campo evolui para uma sobreposição de dois estados onde cada estado representa a "marca do caminho" atômico. Deste modo, a Distinguiabilidade destes estados nos dará uma medida sobre a informação "de-que-caminho" armazenada no medidor campo. Para tornar o sistema mais realista levamos em conta a dissipação no sistema bem como a fonte de microondas usada para manter a amplitude do campo coerente.

O átomo de rubídio⁹ é preparado num estado de Rydberg de forma que sua velocidade seja selecionada com precisão. Para controlar a sobreposição de estados atômicos será usada uma Zona de Ramsey, ou seja, uma cavidade de microondas de relativamente baixo fator de qualidade Q^{10} ressonante com o átomo que gera um pulso¹¹ de $\pi/2$. Depois disto, o átomo atravessa uma cavidade de alto fator de qualidade onde interagirá com o campo(ponta de prova) dispersivamente. Por fim, outra Zona de Ramsey é introduzida para realização de interferometria atômica e detectores seletivos são instalados. M. Brune e seus colaboradores descrevem em [8] um aparato deste tipo.

As cavidades usadas neste tipo de experimento eram geralmente abertas, numa configuração de Fabry-Perot. Seus espelhos de nióbio são resfriados abaixo de $1K$ para reduzir o número de fótons térmicos e tornar a cavidade supercondutora, aumentando a sua refletividade e tornando fraco o acoplamento sistema-ambiente. A separação entre os espelhos é da ordem de centímetros, o que sintoniza a cavidade na faixa de microondas. Uma nova configuração [35, 34] é utilizada atualmente onde um anel cilíndrico dotado de pequenos furos circunda os espelhos protegendo seu interior. Com isso consegue-se um tempo de vida médio para o fóton de $1ms$.

⁹O rubídio(Rb) é um elemento metálico leve, branco-prateado em sua forma cristalina e do grupo dos metais alcalinos. Seu número atômico é 37.

¹⁰O fator de qualidade compara a frequência natural de oscilação do sistema com a taxa com que se dissipa energia. Para o nosso caso $Q = \omega/\gamma$, onde ω é a frequência própria do sistema e γ a taxa de dissipação ($\gamma = 2k$).

¹¹Ver Subseção 2.7.2.

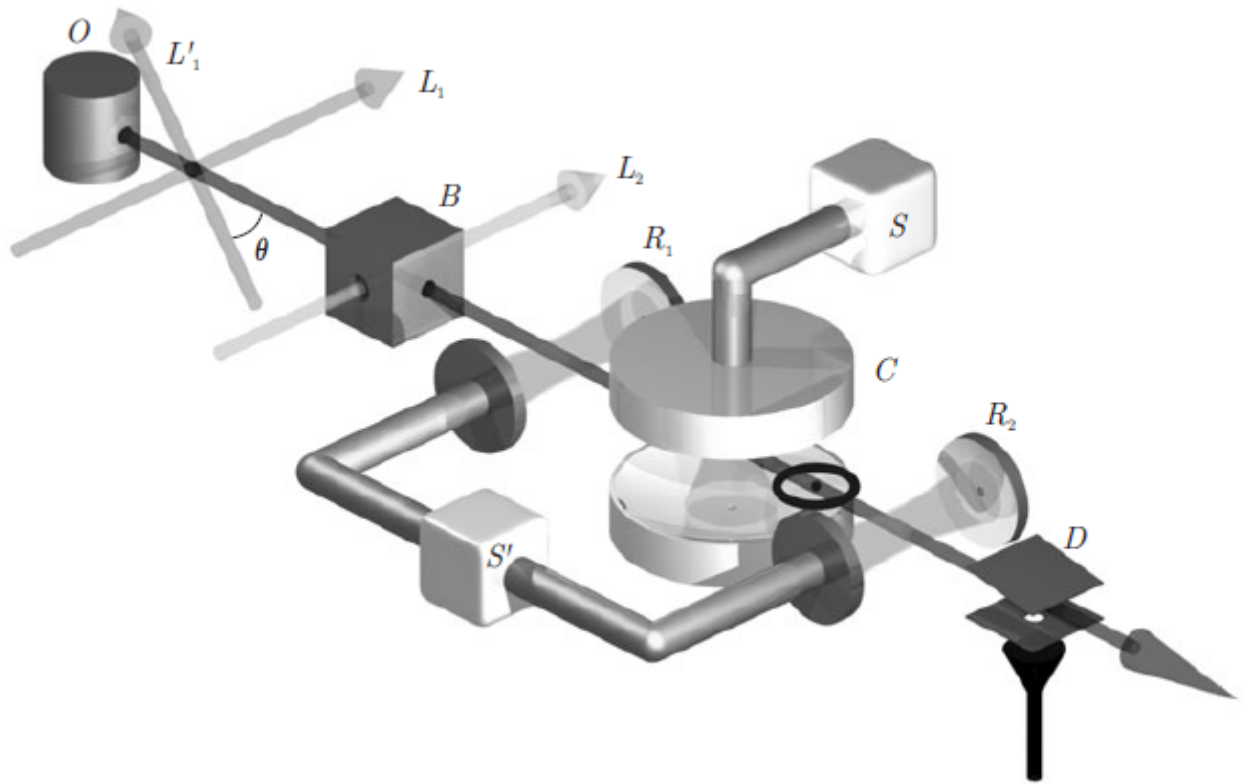


Figura 2.4.1: Exemplo de aparato experimental. O representa o forno de átomos de Rubídio. L_1 e L'_1 são lasers que selecionam as velocidades atômicas a $400 \pm 6 \text{ m/s}$. O átomo é preparado em B num estado circular excitado, com a combinação do laser L_2 com excitação por microondas. A fonte clássica S fornece um pequeno campo coerente à cavidade de alta qualidade C . Duas Zonas de Ramsey, R_1 e R_2 , manipulam o estado atômico, que é detectado em D . Toda a configuração é mantida a $0,6K$. (HAROCHE, RAIMOND, 2006)

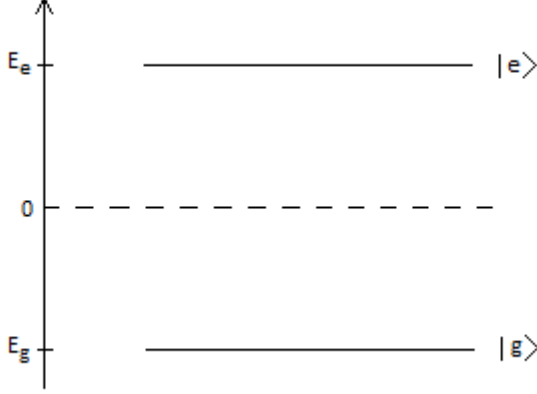


Figura 2.5.1: Níveis atômicos e redefinição do zero da energia.

As próximas seções são dedicadas ao entendimento do átomo, do campo e de sua interação.

2.5 Átomo

Apenas dois níveis¹² de energia atômicos são relevantes, $|e\rangle$ e $|g\rangle$, com energias E_e e E_g , respectivamente. Seu hamiltoniano pode ser escrito como:

$$\hat{H}_{\text{átomo}} = E_e |e\rangle \langle e| + E_g |g\rangle \langle g|. \quad (2.5.1)$$

Redefinindo o zero de energia para o ponto intermediário entre o estado excitado e o desexcitado, como mostrado na Fig.2.5.1, podemos reescrever o hamiltoniano (2.5.1) como:

$$\hat{H}_{\text{átomo}} = \frac{\hbar\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z, \quad (2.5.2)$$

onde consideramos $\hbar\omega_a = E_e - E_g$. O operador $\hat{\sigma}_z$ é o usual operador de Pauli:

$$\hat{\sigma}_z = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

¹²*Excited*(excitado) e *Ground*(fundamental, ou desexcitado).

Realização experimental: Em CQED¹³, quase sempre são usados átomos de metais alcalinos¹⁴ nos chamados *estados de Rydberg*. Estes são estados com número quântico principal n elevado ($n \sim 50$) de interação suficientemente grande para o propósito de estudar o emaranhamento com campos de microondas [9, 36]. Destes usaremos os *Estados Circulares de Rydberg*, que são estados de Rydberg com números quânticos orbital e magnético máximos, ou seja, $l = |m| = n - 1$. Estes estados possuem um grande momento de dipolo elétrico permitindo um forte acoplamento com o campo eletromagnético. Além disso, decaem apenas para o próximo estado excitado, justificando o tratamento de dois níveis. Sua frequência de transição se encontra na faixa de microondas (para o Rb com $n \sim 50$ a frequência de transição é de aproximadamente 50 GHz). Os estados circulares correspondem, em termos clássicos, às órbitas circulares da velha teoria quântica, com um raio de $a_0 n^2$ ($a_0 = 0,53 \text{ \AA}$ é o raio de Bohr). Estas órbitas são bastante estáveis, com tempos de vida da ordem de ms ($20ms$ para $n = 50$).

2.6 Campo

Em sistemas óticos quânticos o campo eletromagnético é tratado no formalismo de segunda quantização [19], onde o fóton é visto como uma excitação fundamental de um modo normal do campo e seu número não necessariamente se conserva. Na presença de apenas um modo, o campo eletromagnético livre pode ser representado como um oscilador harmônico simples. Seu hamiltoniano será então:

$$\hat{H} = \hbar\omega_c \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \quad (2.6.1)$$

onde utilizamos os operadores¹⁵ criação $\hat{a}^\dagger$ e destruição $\hat{a}$.

Os operadores criação/destruição atuam sobre estados de Fock $|n\rangle$ ¹⁶ da seguinte forma:

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad (2.6.2)$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (2.6.3)$$

Assim, podemos obter um estado número a partir do estado fundamental $|0\rangle$:

¹³ *Cavity Quantum Electrodynamics* (Eletrodinâmica Quântica de Cavidades).

¹⁴ Metais de baixa densidade com apenas um elétron na camada de valência.

¹⁵ A diferença em relação ao oscilador no contexto de primeira quantização reside no fato dos operadores definidos na segunda quantização atuarem no espaço de Fock, conectando espaços de Hilbert com números diferentes de partículas.

¹⁶ n representa o número de fótons, $|0\rangle$ representando o estado de mínima energia definido na relação $\hat{a} |0\rangle = 0$.

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle. \quad (2.6.4)$$

O comutador entre $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ vale:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{1}. \quad (2.6.5)$$

De posse deste arcabouço podemos discutir o estado da luz que nos interessa.

2.6.1 Estados coerentes

Estados coerentes são autoestados do operador aniquilação¹⁷:

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle, \quad (2.6.6)$$

onde α é um número complexo. Eles são considerados os estados mais "clássicos" do oscilador harmônico quântico e possuem média e variância em relação ao número de fótons iguais a:

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \langle \alpha | n | \alpha \rangle = |\alpha|^2, \\ \langle \Delta n \rangle &= \sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2} = \sqrt{|\alpha|^2 (|\alpha|^2 + 1) - |\alpha|^4} = \sqrt{\bar{n}}. \end{aligned}$$

Estados coerentes podem ser escritos como uma combinação linear de estados de Fock obedecendo a uma distribuição de Poisson¹⁸:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.6.7)$$

Estes estados minimizam a relação de incerteza para operadores de quadratura do campo ortogonais, ou seja, eles possuem as flutuações do vácuo.

Podemos ainda definir estados coerentes como estados deslocados do vácuo. O operador deslocamento de Weyl-Heisenberg [21]:

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}}, \quad (2.6.8)$$

ao ser aplicado sobre o estado de vácuo, gera um estado coerente:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle. \quad (2.6.9)$$

¹⁷Recomenda-se a referência [19] para provas e detalhes de toda esta subseção.

¹⁸ $P_n = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = e^{-\bar{n}} \left(\frac{\bar{n}^n}{n!} \right).$

É fácil verificar sua unitariedade e as seguintes propriedades:

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}(-\alpha). \quad (2.6.10)$$

$$\hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta) = \exp[i\text{Im}(\beta^*\alpha)]\hat{D}(\alpha+\beta) \quad (2.6.11)$$

Outro ponto importante para nossa análise é a não-ortogonalidade destes estados:

$$\begin{aligned} \langle \beta | \alpha \rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{*m} \alpha^n}{\sqrt{m!} \sqrt{n!}} \langle m | n \rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \beta^* \alpha} \\ &= e^{\frac{1}{2}(\beta^* \alpha - \beta \alpha^*)} e^{-\frac{1}{2}|\beta - \alpha|^2}. \end{aligned} \quad (2.6.12)$$

2.7 Interação átomo-campo

Esta seção é dedicada a aprofundar a discussão sobre a interação entre um átomo de dois níveis e um campo eletromagnético (quântico no Modelo Jaynes-Cummings e clássico na Zona de Ramsey). Serão também discutidos a aproximação de onda girante e o limite dispersivo do Modelo Jaynes-Cummings que gerarão nossa ponta de prova.

2.7.1 Modelo de Jaynes-Cummings na RWA

Introduzido em 1963 por Jaynes e Cummings [30], este modelo surgiu como uma idealização do acoplamento matéria-campo no espaço livre. Porém, com o avanço das técnicas de Eletrodinâmica Quântica de Cavidades, ele passou a ser uma descrição fiel de experimentos.

O modelo consiste na interação de um modo do campo com um átomo de dois níveis, ou seja, o mesmo que um oscilador harmônico quântico acoplado a uma partícula de spin $1/2$. Detalhes do modelo podem ser vistos em [24, 19].

Um campo elétrico de um único modo pode ser expresso como:

$$\vec{E} = \hat{e} \left(\frac{\hbar \omega_c}{\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) f(z), \quad (2.7.1)$$

onde $\hat{e}$ é um vetor de polarização, ω_c é a frequência do campo, ε_0 é a permissividade do vácuo, V o volume efetivo, z é um eixo perpendicular a $\hat{e}$ e $f(z)$ é uma função moduladora arbitrária. O hamiltoniano de interação, na aproximação de dipolo, será:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{int} &= -\hat{d} \cdot \vec{E} \\
&= -\left(\frac{\hbar\omega_c}{\varepsilon_0 V}\right)^{\frac{1}{2}} f(z) (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \hat{d} \cdot \hat{e}.
\end{aligned} \tag{2.7.2}$$

Considerando, por questões de paridade, $d = \langle e | \hat{d} \cdot \hat{e} | g \rangle$:

$$\hat{H}_{int} = \hbar G (\hat{\sigma}^+ + \hat{\sigma}^-) (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \tag{2.7.3}$$

onde:

$$G = -\frac{d}{\hbar} \left(\frac{\hbar\omega_c}{\varepsilon_0 V}\right)^{\frac{1}{2}} f(z), \tag{2.7.4}$$

mede a intensidade do acoplamento e vale a metade da frequência de Rabi Ω_0 do vácuo, definida semelhantemente. Os operadores de transição atômica, $\hat{\sigma}^+$ e $\hat{\sigma}^-$, são definidos como:

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}^+ &= |e\rangle \langle g|, \\
\hat{\sigma}^- &= |g\rangle \langle e|.
\end{aligned}$$

O hamiltoniano (2.7.3) apresenta quatro termos proporcionais a: $\hat{\sigma}^+ \hat{a}^\dagger$, $\hat{\sigma}^- \hat{a}$, $\hat{\sigma}^- \hat{a}^\dagger$ e $\hat{\sigma}^+ \hat{a}$. Fazer a aproximação de onda girante(RWA) significa desprezar os dois primeiros termos. Estes representam a excitação do átomo acompanhada da criação de um fóton e a sua desexcitação acompanhada de uma aniquilação, respectivamente. Estes processos, apesar de poderem ocorrer, são altamente não-ressonantes para ω_a e ω_c próximos. Assim, possuem uma probabilidade muito baixa para nosso sistema e portanto serão desprezados. O hamiltoniano do sistema total nas aproximações de dipolo e RWA então se torna:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{JC} &= \hat{H}_{\text{átomo}} + \hat{H}_{\text{campo}} + \hat{H}_{int} \\
\hat{H}_{JC} &= \frac{\hbar\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar\omega_c \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + \hbar G (\hat{\sigma}^+ \hat{a} + \hat{\sigma}^- \hat{a}^\dagger).
\end{aligned} \tag{2.7.5}$$

Este hamiltoniano tem a enorme vantagem de possuir solução analítica e, apesar de simples, apresentar uma dinâmica muito rica.

Diagonalizando $\hat{H}_{JC}$ na base $\{|e, n\rangle, |g, n\rangle\}$ com $n = 0, 1, 2, \dots$, obtemos seus autoestados:

$$|+, n\rangle = \sin \theta_n |e, n\rangle + \cos \theta_n |g, n+1\rangle, \quad (2.7.6)$$

$$|-, n\rangle = \cos \theta_n |e, n\rangle - \sin \theta_n |g, n+1\rangle, \quad (2.7.7)$$

e $|g, 0\rangle$, o estado fundamental nessas condições de aproximação. Nestas expressões definimos:

$$\sin \theta_n \equiv \frac{\Omega_n}{\sqrt{(\Delta_n - \delta)^2 + \Omega_n^2}}, \quad (2.7.8)$$

$$\cos \theta_n \equiv \frac{\Delta_n - \delta}{\sqrt{(\Delta_n - \delta)^2 + \Omega_n^2}}. \quad (2.7.9)$$

onde temos a dessintonia $\delta = \omega_a - \omega_c$, a frequência de Rabi generalizada $\Omega_n = \Omega_0 \sqrt{n+1}$, e $\Delta_n = \sqrt{\delta^2 + \Omega_n^2}$.

Seus autovalores são:

$$E_{\pm n} = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \pm \frac{\hbar \Delta_n}{2}, \quad (2.7.10)$$

$$E_{g0} = -\frac{\hbar \delta}{2}. \quad (2.7.11)$$

Como é visível em (2.7.6) e (2.7.7) estes são estados emaranhados. Eles são chamados de dubleto de Jaynes-Cumming ou *estados vestidos*, pois representam um átomo "vestido" pelo campo. O conjunto $\{|g, 0\rangle, |\pm, n\rangle\}$ forma uma base completa no espaço de Hilbert do sistema átomo-campo.

Limite dispersivo

Aumentando a dessintonia pode-se alcançar um regime onde transições eletrônicas praticamente não ocorrem, mas onde apenas interações "dispersivas" estão presentes entre o átomo e o campo [41]. Esta interação pode ser interpretada como um efeito de índice de refração de um único átomo [24] que muda a frequência do campo de acordo com o estado atômico. O limite dispersivo é alcançado quando podemos tratar o hamiltoniano de interação como uma perturbação¹⁹, fazendo valer:

$$\frac{|\delta|}{G} \gg \sqrt{n_{rel} + 1}. \quad (2.7.12)$$

Aqui n_{rel} significa " n relevante" e representa, para um dado estado do campo, qualquer

¹⁹Para dedução do hamiltoniano ver apêndice de [19].

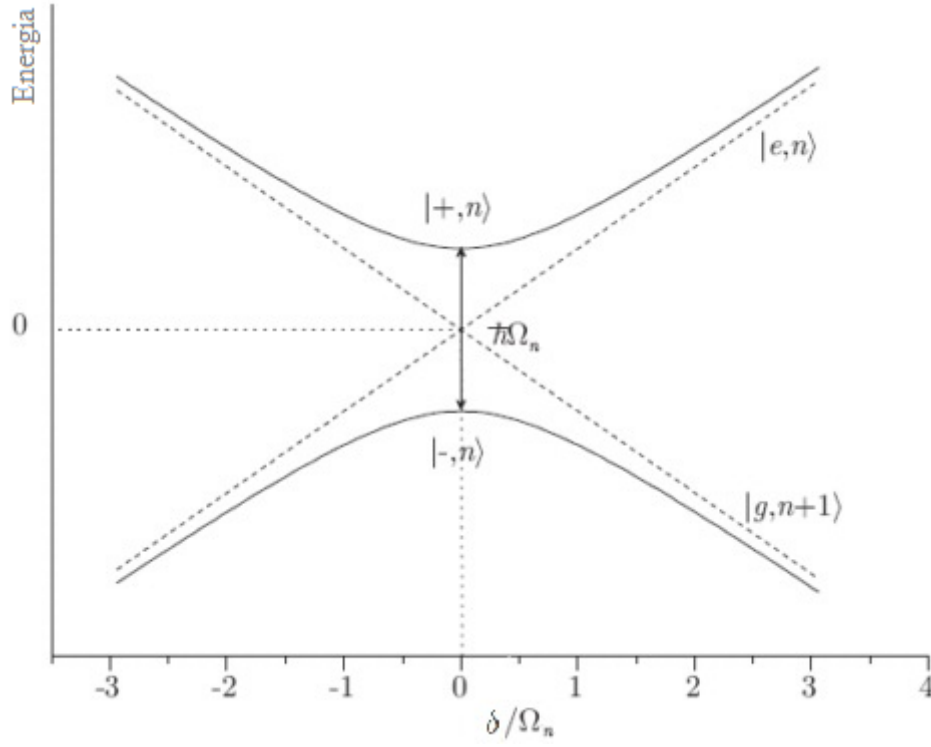


Figura 2.7.1: Energia dos estados vestidos como função da dessintonia δ . As linhas pontilhadas representam as energias dos estados desacoplados. (Adaptado de HAROCHE, RAIMOND, 2006)

valor de n para o qual sua probabilidade de ocorrência é significativa. Vemos, então, que a validade da aproximação depende não apenas da dessintonia, mas também da intensidade do campo e da constante de acoplamento, o que seria de se esperar já que o objetivo é suprimir as transições eletrônicas cujas probabilidades dependem destes três quesitos.

Expandindo (2.7.10) em potências de Ω_n/δ e aproximando até segunda ordem encontramos as energias no limite dispersivo:

$$E_{\pm n} \simeq \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \pm \frac{\hbar|\delta|}{2} \pm \frac{\hbar G^2}{|\delta|} (n+1). \quad (2.7.13)$$

Se $\delta > 0$, então de acordo com (2.7.6) e (2.7.7) seus autoestados se aproximam assintoticamente de:

$$\begin{aligned} |+, n\rangle &\rightarrow |e, n\rangle, \\ |-, n\rangle &\rightarrow -|g, n+1\rangle. \end{aligned}$$

Se $\delta < 0$:

$$\begin{aligned} |+, n\rangle &\rightarrow |g, n+1\rangle, \\ |-, n\rangle &\rightarrow |e, n\rangle. \end{aligned}$$

Percebemos isto claramente na Figura 2.7.1, onde vemos a energia dos estados $|+, n\rangle$ e $|-, n\rangle$ como função da dessintonia δ . Portanto na aproximação dispersiva os autoestados são os mesmos que os da evolução desacoplada, mas com autovalores deslocados:

$$\Delta E(|e, n\rangle)_{\text{dispersivo}} = \hbar\omega(n+1), \quad (2.7.14)$$

$$\Delta E(|g, n\rangle)_{\text{dispersivo}} = -\hbar\omega n. \quad (2.7.15)$$

Onde definimos $\omega \equiv G^2/\delta$. Os deslocamentos são os mesmos independentemente do sinal da dessintonia.

Com uma pequena mudança em (2.7.5) chegamos a um hamiltoniano efetivo para o limite dispersivo:

$$\hat{H}_{\text{disp}} = \frac{\hbar\omega_a}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega[(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1)|e\rangle\langle e| - \hat{a}^\dagger\hat{a}|g\rangle\langle g|]. \quad (2.7.16)$$

Note que a evolução gerada por $\hat{H}_{\text{disp}}$ faz com que a frequência do campo seja deslocada: se o átomo se encontra no estado $|e\rangle$ sua frequência muda para $\omega_c + \omega$; se ele se encontra em $|g\rangle$ sua frequência muda para $\omega_c - \omega$.

2.7.2 Zona de Ramsey

As Zonas de Ramsey são cavidades de fator de qualidade Q relativamente baixo ($Q \sim 10^4$). São geralmente resfriadas abaixo de $1K$ e sintonizadas na faixa de microondas em ressonância ou próximas da ressonância com a transição atômica de interesse.

O papel destas cavidades é "girar" o estado de um átomo de dois níveis na esfera de Bloch. Ajustando-se a intensidade e a frequência do campo com a velocidade atômica podemos produzir, por exemplo, uma rotação de $\pi/2$ em relação a um eixo do plano equatorial sobre o ponto que representa este estado na esfera de Bloch. Para os estados $|e\rangle$ e $|g\rangle$ a ação deste pulso resulta, escolhendo um eixo de rotação apropriado, em:

$$|e\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle), \quad (2.7.17)$$

$$|g\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle - |e\rangle). \quad (2.7.18)$$

No interior destas cavidades o campo coerente, mesmo com número médio de fótons próximo à unidade, comporta-se classicamente! Kim e colaboradores [31] mostraram que este comportamento é consequência da forte dissipação, mantendo o campo coerente e desemaranhado do átomo para todos os fins práticos, *i.e.*, para típicas velocidades dos átomos e tamanho de cavidade.

Capítulo 3

Dinâmica dispersiva com dissipação e fonte

Através deste capítulo mostraremos a dinâmica do sistema átomo-campo no modelo Jaynes-Cummings dispersivo onde continuamente a energia do campo é dissipada. Consideraremos o reservatório térmico a temperatura nula, constituído por infinitos osciladores harmônicos não-interagentes entre si e fracamente acoplados ao modo do campo. Isto significa que os espelhos da cavidade apresentam uma alta reflectividade, ou seja, a cavidade é de altíssima qualidade. Ademais, considerarmos a temperatura nula significa desprezarmos o ruído térmico no interior da cavidade.

A dinâmica do sistema sem a fonte de microondas resulta, assintoticamente e para quaisquer níveis de dissipação, num estado de vácuo para o campo¹. Para preservarmos nosso medidor quântico e podermos analisá-lo em qualquer instante precisamos então acoplá-lo a uma fonte clássica [14, 12]. Com isso esperamos que as perdas para o ambiente sejam compensadas pela contínua reposição de energia pela fonte externa.

3.1 A dinâmica

Para nosso sistema deveremos acrescentar à equação mestra (2.3.9) a parte que representa a ação da fonte. Para uma fonte coerente de frequência ω_F acoplada ao modo do campo de frequência ω_c o liouvillian correspondente é:

$$\mathcal{L}_{F\bullet} = -i \left[F e^{-i(\omega_F - \omega_c)t} \hat{a}^\dagger + F^* e^{i(\omega_F - \omega_c)t} \hat{a}, \bullet \right], \quad (3.1.1)$$

onde F mede o acoplamento entre a fonte e o campo. Suporemos, para fins de simplificação, que a fonte se encontra em ressonância com o campo, ou seja, que $\omega_F = \omega_c$. Assim a evolução do nosso sistema composto por um átomo de dois níveis acoplado dispersiva-

¹Para a dinâmica do sistema sem a fonte ver Apêndice B.

mente a um campo coerente, numa cavidade dissipativa e abastecida por uma fonte em ressonância, será regido por uma equação mestra do tipo:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{AC}(t) = \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{H}_{disp}, \hat{\rho}_{AC}(t) \right] + \mathcal{L}_F(\hat{\rho}_{AC}(t)) + \mathcal{L}_D(\hat{\rho}_{AC}(t)). \quad (3.1.2)$$

Nesta expressão, $\hat{H}_{disp}$ representa o hamiltoniano de Jaynes-Cummings no regime dispersivo (2.7.16):

$$\hat{H}_{disp} = \frac{\hbar\omega_a}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega \left[(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1) |e\rangle\langle e| - \hat{a}^\dagger\hat{a} |g\rangle\langle g| \right].$$

$\mathcal{L}_F$ é o superoperador liouvillian da fonte ressonante:

$$\mathcal{L}_F\bullet = -i \left[F\hat{a}^\dagger + F^*\hat{a}, \bullet \right],$$

e $\mathcal{L}_D$ o correspondente à ação não-unitária do ambiente sobre o sistema (2.3.10):

$$\mathcal{L}_D\bullet = k \left(2\hat{a} \bullet \hat{a}^\dagger - \bullet \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a} \bullet \right).$$

Na representação de interação² teremos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}_{AC}(t) = & -i\omega \left[(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1) |e\rangle\langle e| - \hat{a}^\dagger\hat{a} |g\rangle\langle g|, \hat{\rho}_{AC}(t) \right] - i \left[F\hat{a}^\dagger + F^*\hat{a}, \hat{\rho}_{AC}(t) \right] \\ & + k \left[2\hat{a}\hat{\rho}_{AC}(t)\hat{a}^\dagger - \hat{\rho}_{AC}(t)\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}_{AC}(t) \right], \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

onde $\omega \equiv \frac{G^2}{\delta}$, com G (2.7.4) medindo a intensidade do acoplamento átomo-campo e $\delta = \omega_a - \omega_c$ representando a dessintonia átomo-campo. Lembrando que para valer esta equação devemos obedecer à condição dispersiva (3.1.4):

$$\frac{|\delta|}{G} \gg \sqrt{n_{rel} + 1}, \quad (3.1.4)$$

e à condição de acoplamento fraco:

$$\frac{k}{\omega_c \pm \omega} \ll 1. \quad (3.1.5)$$

²Para esclarecimento sobre a representação de interação ver pág. 316 de [40].

3.2 As equações de movimento

O operador $\hat{\rho}_{AC}(t)$ é um operador de classe traço que atua no produto direto dos espaços de Hilbert do átomo ($\mathcal{H}_A$) e do campo ($\mathcal{H}_C$), podendo então ser representado pela matriz:

$$\hat{\rho}_{AC}(t) = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_{gg}(t) & \hat{\rho}_{ge}(t) \\ \hat{\rho}_{eg}(t) & \hat{\rho}_{ee}(t) \end{pmatrix}, \quad (3.2.1)$$

onde:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{gg}(t) &= \langle g | \hat{\rho}_{AC}(t) | g \rangle, \\ \hat{\rho}_{ge}(t) &= \langle g | \hat{\rho}_{AC}(t) | e \rangle, \\ \hat{\rho}_{eg}(t) &= \langle e | \hat{\rho}_{AC}(t) | g \rangle, \\ \hat{\rho}_{ee}(t) &= \langle e | \hat{\rho}_{AC}(t) | e \rangle, \end{aligned}$$

são operadores que atuam em $\mathcal{H}_C$. Portanto, ele será da forma:

$$\hat{\rho}_{AC}(t) = \hat{\rho}_{gg}(t) \otimes |g\rangle\langle g| + \hat{\rho}_{ge}(t) \otimes |g\rangle\langle e| + \hat{\rho}_{eg}(t) \otimes |e\rangle\langle g| + \hat{\rho}_{ee}(t) \otimes |e\rangle\langle e|. \quad (3.2.2)$$

Para encontrarmos as equações de movimento para cada um dos elementos $\hat{\rho}_{ij}(t)$, $i, j = e, g$, multiplicamos cada lado de (3.1.3) pelos estados atômicos $\langle i | \dots | j \rangle$, resultando em:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho}_{ee}(t) &= -i\omega [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho}_{ee}(t)] - i [F\hat{a}^\dagger + F^*\hat{a}, \hat{\rho}_{ee}(t)] \\ &\quad + k [2\hat{a}\hat{\rho}_{ee}(t)\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}\hat{\rho}_{ee}(t) - \hat{\rho}_{ee}(t)\hat{a}^\dagger \hat{a}], \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho}_{eg}(t) &= -i\omega [\hat{a}^\dagger \hat{a}\hat{\rho}_{eg}(t) + \hat{\rho}_{eg}(t)\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\rho}_{eg}(t)] \\ &\quad - i [F\hat{a}^\dagger + F^*\hat{a}, \hat{\rho}_{eg}(t)] \\ &\quad + k [2\hat{a}\hat{\rho}_{eg}(t)\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}\hat{\rho}_{eg}(t) - \hat{\rho}_{eg}(t)\hat{a}^\dagger \hat{a}]. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Para descobrirmos a equação para $\hat{\rho}_{ge}(t)$ basta evocarmos a hermiticidade da matriz densidade ($\hat{\rho}_{ge}(t) = \hat{\rho}_{eg}^\dagger(t)$) ou trocar $\omega \rightarrow -\omega$. A equação para $\hat{\rho}_{gg}(t)$ também pode ser obtida a partir de (3.2.3) apenas mudando-se o sinal de ω como pode ser constatado. Isto se deve a duas coisas: à mudança de frequência do campo induzida pela interação dispersiva e à representação de interação. Um estado coerente de frequência ω_c evolui livremente no espaço de fase quântico transladando-se ao redor da origem com frequência

ω_e . Um átomo em $|e\rangle$ produz um aumento de frequência igual a ω , enquanto um estado $|g\rangle$ produz uma diminuição de mesmo módulo. Como estamos na representação de interação, onde a evolução livre do campo interfere apenas em observáveis e não em estados, isto se reflete numa frequência negativa para o estado do campo associado a $|g\rangle$. A equação (3.2.3) descreve a dinâmica de um oscilador harmônico de frequência ω na RWA, enquanto a equação para $\hat{\rho}_{gg}(t)$ descreve a dinâmica de um oscilador de frequência $-\omega$.

Há uma diferença fundamental entre (3.2.3) e (3.2.4): o termo não-unitário acompanhando $-i\omega$. Este termo será o responsável pelo desaparecimento dos elementos não-diagonais nesta base, o que caracteriza o processo de decoerência.

Para simplificar a notação podemos reescrever estas equações como:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{ij}(t) = \mathcal{L}'_{ij}\hat{\rho}_{ij}(t), \quad (3.2.5)$$

onde $\mathcal{L}'_{ij}$ representa $\mathcal{L}'_+$, $\mathcal{L}'_-$, $\mathcal{L}'_{eg}$ e $\mathcal{L}'_{ge}$, os liouvillianos associados a $\hat{\rho}_{ee}(t)$, $\hat{\rho}_{gg}(t)$, $\hat{\rho}_{eg}(t)$ e $\hat{\rho}_{ge}(t)$, respectivamente. Estes podem ser escritos como:

$$\mathcal{L}'_{ij} = \mathcal{L}_{ij} + \mathcal{L}_F. \quad (3.2.6)$$

Nesta expressão, $\mathcal{L}_{ij}$ são superoperadores associados à dinâmica deste sistema sem a presença da fonte, ou seja, com $F = 0$:

$$\mathcal{L}_{+\bullet} = -i\omega [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \bullet] + \mathcal{L}_D \bullet, \quad (3.2.7)$$

$$\mathcal{L}_{-\bullet} = i\omega [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \bullet] + \mathcal{L}_D \bullet, \quad (3.2.8)$$

$$\mathcal{L}_{eg\bullet} = -i\omega [\hat{a}^\dagger \hat{a} \bullet + \bullet \hat{a}^\dagger \hat{a} + \bullet] + \mathcal{L}_D \bullet, \quad (3.2.9)$$

$$\mathcal{L}_{ge\bullet} = i\omega [\hat{a}^\dagger \hat{a} \bullet + \bullet \hat{a}^\dagger \hat{a} + \bullet] + \mathcal{L}_D \bullet. \quad (3.2.10)$$

Com esta notação podemos expressar a solução formal das equações de movimento de forma unificada:

$$\hat{\rho}_{ij}(t) = e^{\mathcal{L}'_{ij}t} \hat{\rho}_{ij}(0). \quad (3.2.11)$$

Como os operadores contidos em $\mathcal{L}'_{ij}$ em geral não comutam precisamos "desacoplar" cada exponencial, *i.e.*, expressá-las como um produto ordenado de exponenciais destes operadores. Para isso, utilizamos o método de diferenciação de parâmetro descrito no Apêndice A. Os detalhes do procedimento estão no Apêndice C.

Os elementos diagonais da matriz (3.2.1), após o processo, podem ser expressos como:

$$\hat{\rho}_{ee}(t) = \hat{D}(\beta_e(t)) [\exp(\mathcal{L}_+ t) \hat{\rho}_{ee}(0)] \hat{D}^\dagger(\beta_e(t)), \quad (3.2.12)$$

$$\hat{\rho}_{gg}(t) = \hat{D}(\beta_g(t)) [\exp(\mathcal{L}_- t) \hat{\rho}_{gg}(0)] \hat{D}^\dagger(\beta_g(t)), \quad (3.2.13)$$

onde:

$$\beta_e(t) \equiv \frac{F}{\omega - ik} [e^{-(k+i\omega)t} - 1], \quad (3.2.14)$$

$$\beta_g(t) \equiv -\frac{F}{\omega + ik} [e^{-(k-i\omega)t} - 1]. \quad (3.2.15)$$

Nas expressões (3.2.12) e (3.2.13) o termo entre colchetes é o mesmo que rege a evolução do estado inicial sem a presença da fonte. Os operadores deslocamento presentes representam então exclusivamente a ação da fonte sobre o sistema, impedindo o campo eletromagnético dentro da cavidade de ir para o estado de vácuo.

Para os elementos fora da diagonal, temos:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{eg}(t) &= \exp[z + |F|^2(p^2 - q^2 + 2pq + |p + q|^2)] \hat{D}[\beta_e(t)] \\ &\times \exp[2F^*(\text{Re}(p) - i\text{Im}(q))\hat{a}] \exp[\mathcal{L}_{eg}t] \hat{\rho}_{eg}(0) \\ &\times \exp[-2F(\text{Re}(p) - i\text{Im}(q))\hat{a}^\dagger] \hat{D}^\dagger[\beta_g(t)], \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

onde:

$$\begin{aligned} z(t) &= -\frac{2i\omega|F|^2}{(k+i\omega)^2} \left\{ t + \frac{4e^{-(k+i\omega)t} - e^{-2(k+i\omega)t} - 3}{2(k+i\omega)} \right. \\ &\quad \left. + i\frac{\omega}{(k+i\omega)^2} [\cosh[(k+i\omega)t] - 1]^2 \right\}, \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

$$p(t) = i\frac{k}{(k+i\omega)^2} \{\cosh[(k+i\omega)t - 1]\} - i\frac{\sinh[(k+i\omega)t]}{(k+i\omega)}, \quad (3.2.18)$$

$$q(t) = -\frac{\omega}{(k+i\omega)^2} \{\cosh[(k+i\omega)t] - 1\}. \quad (3.2.19)$$

Como nos elementos diagonais, em (3.2.16) o termo $\exp[\mathcal{L}_{eg}t] \hat{\rho}_{eg}(0)$ é o responsável pela evolução do mesmo sistema com ausência de fonte. Todos os outros termos surgem devido à presença da fonte.

3.3 Evolução de um estado inicial puro e separável

Calcularemos a evolução de um estado puro e não-emaranhado a fim de esclarecer basicamente dois aspectos da dinâmica: o papel da distinguibilidade do campo, visto como um medidor do átomo, sobre a dinâmica do sistema; e o papel do acoplamento do ambiente sobre este medidor dispersivo.

Por simplicidade, suporemos que o átomo chega à cavidade no estado:

$$|\psi_a(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle).$$

Como o átomo cruzará a cavidade quando o estado coerente já estiver formado, é conveniente utilizar como estado inicial do campo o estado assintótico do sistema com dissipação e fonte, sem interação átomo-campo. Calcularemos tal estado na próxima subseção.

3.3.1 Estado assintótico de uma cavidade com fonte e dissipação

Consideraremos um sistema composto por uma fonte clássica em ressonância com o modo de uma cavidade dissipativa. A cavidade é a mesma considerada anteriormente, portanto a equação mestra é a mesma que (3.1.2), porém sem o termo referente à interação dispersiva:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}_C(t) &= (\mathcal{L}_F + \mathcal{L}_D)\hat{\rho}_C(t) \\ &= -i[F\hat{a}^\dagger + F^*\hat{a}, \hat{\rho}_C(t)] \\ &\quad + k[2\hat{a}\hat{\rho}_C(t)\hat{a}^\dagger - \hat{\rho}_C(t)\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}_C(t)], \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

cuja solução formal é:

$$\hat{\rho}_C(t) = e^{(\mathcal{L}_F + \mathcal{L}_D)t}\hat{\rho}_C(0), \quad (3.3.2)$$

onde $\hat{\rho}_C(0)$ é o estado inicial do campo. Através do método da diferenciação de parâmetro, descrito no Apêndice A, podemos escrever a solução como:

$$\hat{\rho}_C(t) = \hat{D}\left[-i\frac{F}{k}(1 - e^{-kt})\right][e^{\mathcal{L}_D t}\hat{\rho}_C(0)]\hat{D}^\dagger\left[-i\frac{F}{k}(1 - e^{-kt})\right]. \quad (3.3.3)$$

O mesmo resultado pode ser obtido realizando-se um traço parcial sobre o espaço de Hilbert do átomo em (3.2.2) e fazendo-se $\omega = 0$.

Para qualquer estado inicial $\hat{\rho}_C(0)$ temos o comportamento assintótico:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mathcal{L}_D t}\hat{\rho}_C(0) = |0\rangle\langle 0|.$$

Assim, como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{D} \left[-i \frac{F}{k} (1 - e^{-kt}) \right] = \hat{D} \left[-i \frac{F}{k} \right],$$

teremos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\rho}_C(t) = \left| -i \frac{F}{k} \right\rangle \left\langle -i \frac{F}{k} \right|. \quad (3.3.4)$$

Como foi citado, este resultado independe da condição inicial. Porém, com a condição inicial $|0\rangle\langle 0|$ ele se torna óbvio.

3.3.2 Operador densidade global

Consideraremos a fonte ligada em $t \rightarrow -\infty$ para garantir a presença do estado assintótico do campo em $t = 0$. Deste modo, o estado inicial do sistema átomo-campo será³:

$$|\psi_{AC}(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle) \otimes \left| -i \frac{F}{k} \right\rangle. \quad (3.3.5)$$

Então, para que a aproximação dispersiva continue a valer, devemos respeitar:

$$\frac{|\delta|}{G} \gg \sqrt{n_{rel} + 1} \approx \sqrt{n_{rel}} \approx |\alpha| = \frac{|F|}{k}. \quad (3.3.6)$$

Procuramos os elementos $\hat{\rho}_{ij}$ do operador densidade total

$$\hat{\rho}_{AC}(t) = \hat{\rho}_{gg}(t) \otimes |g\rangle\langle g| + \hat{\rho}_{ge}(t) \otimes |g\rangle\langle e| + \hat{\rho}_{eg}(t) \otimes |e\rangle\langle g| + \hat{\rho}_{ee}(t) \otimes |e\rangle\langle e|,$$

para qualquer instante.

De acordo com (3.3.5), as condições iniciais para cada elemento $\hat{\rho}_{ij}$ são:

$$\hat{\rho}_{ee}(0) = \hat{\rho}_{eg}(0) = \hat{\rho}_{ge}(0) = \hat{\rho}_{gg}(0) = \frac{1}{2} \left| -i \frac{F}{k} \right\rangle \left\langle -i \frac{F}{k} \right|. \quad (3.3.7)$$

³Poderíamos considerar um estado inicial mais geral mas isto em nada acrescentaria à nossa análise.

Considerando que a interação dispersiva começa em $t = 0$, teremos para o elemento diagonal $\hat{\rho}_{ee}(t)$, de acordo com (3.2.12) e (B.2.5):

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{ee}(t) &= \hat{D}[\beta_e(t)] \left[\exp(\mathcal{L}_+ t) \frac{1}{2} \left| -i \frac{F}{k} \right\rangle \left\langle -i \frac{F}{k} \right| \right] \hat{D}^\dagger[\beta_e(t)] \\ &= \frac{1}{2} \hat{D}[\beta_e(t)] \left| -i \frac{F}{k} e^{-(k+i\omega)t} \right\rangle \left\langle -i \frac{F}{k} e^{-(k+i\omega)t} \right| \hat{D}^\dagger[\beta_e(t)] \\ &= \frac{1}{2} \left| \beta_e(t) - i \frac{F}{k} e^{-(k+i\omega)t} \right\rangle \left\langle \beta_e(t) - i \frac{F}{k} e^{-(k+i\omega)t} \right|. \quad (3.3.8)\end{aligned}$$

Analogamente, para $\hat{\rho}_{gg}(t)$:

$$\hat{\rho}_{gg}(t) = \frac{1}{2} \left| \beta_g(t) - i \frac{F}{k} e^{-(k-i\omega)t} \right\rangle \left\langle \beta_g(t) - i \frac{F}{k} e^{-(k-i\omega)t} \right|. \quad (3.3.9)$$

A solução de (3.2.16) envolve um esforço maior mas pode ser escrita de forma simplificada:

$$\hat{\rho}_{eg}(t) = \frac{1}{2} \exp[\Phi(\omega, k, F; t)] \left| \beta_e(t) - i \frac{F}{k} e^{-(k+i\omega)t} \right\rangle \left\langle \beta_g(t) - i \frac{F}{k} e^{-(k-i\omega)t} \right|, \quad (3.3.10)$$

onde:

$$\begin{aligned}\Phi(\omega, k, F; t) &= \left\{ -i\omega t + z(t) + |F|^2 (p^2 - q^2 + 2pq + |p + q|^2)(t) \right. \\ &\quad + \Gamma(t) + i\Theta(t) + \frac{|F|^2}{k} \left[-4e^{-(k+i\omega)t} [\text{Im}q(t) + i\text{Re}p(t)] \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2ie^{-kt}}{k^2 + \omega^2} [k \sin \omega t - \omega \cos \omega t + \omega e^{-kt}] \right] \right\}. \quad (3.3.11)\end{aligned}$$

Nesta expressão, as funções $z(t)$, $p(t)$ e $q(t)$ são as definidas em (3.2.17), (3.2.18) e (3.2.19). As funções $\Gamma(t)$ e $\Theta(t)$ aparecem mesmo na ausência da fonte, como visto no Apêndice B. Com a condição inicial usada elas se tornam:

$$\Gamma(t) = -\frac{|F|^2}{k^2} (1 - e^{-2kt}) - \frac{|F|^2}{k(k^2 + \omega^2)} [e^{-2kt} (k \cos 2\omega t - \omega \sin 2\omega t) - k] \quad (3.3.12)$$

$$\Theta(t) = \frac{|F|^2}{k(k^2 + \omega^2)} [e^{-2kt} (k \sin 2\omega t + \omega \cos 2\omega t) - \omega]. \quad (3.3.13)$$

Assim, o operador densidade toma a forma:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{AC}(t) = & \frac{1}{2} \left\{ \left| \beta_e(t) - i\frac{F}{k}e^{-(k+i\omega)t} \right\rangle \left\langle \beta_e(t) - i\frac{F}{k}e^{-(k+i\omega)t} \right| \otimes |e\rangle \langle e| \right. \\
& + \exp[\Phi(\omega, k, F; t)] \left| \beta_e(t) - i\frac{F}{k}e^{-(k+i\omega)t} \right\rangle \left\langle \beta_g(t) - i\frac{F}{k}e^{-(k-i\omega)t} \right| \otimes |e\rangle \langle g| \\
& + \exp[\Phi^*(\omega, k, F; t)] \left| \beta_g(t) - i\frac{F}{k}e^{-(k-i\omega)t} \right\rangle \left\langle \beta_e(t) - i\frac{F}{k}e^{-(k+i\omega)t} \right| \otimes |g\rangle \langle e| \\
& \left. + \left| \beta_g(t) - i\frac{F}{k}e^{-(k-i\omega)t} \right\rangle \left\langle \beta_g(t) - i\frac{F}{k}e^{-(k-i\omega)t} \right| \otimes |g\rangle \langle g| \right\}. \quad (3.3.14)
\end{aligned}$$

Definindo:

$$\beta'_e(t) \equiv \beta_e(t) - i\frac{F}{k}e^{-(k+i\omega)t}, \quad (3.3.15)$$

$$\beta'_g(t) \equiv \beta_g(t) - i\frac{F}{k}e^{-(k-i\omega)t}, \quad (3.3.16)$$

podemos expressar $\hat{\rho}_{AC}(t)$ de forma mais compacta:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{AC}(t) = & \frac{1}{2} \left\{ \left| e, \beta'_e(t) \right\rangle \left\langle e, \beta'_e(t) \right| + \left| g, \beta'_g(t) \right\rangle \left\langle g, \beta'_g(t) \right| \right. \\
& + \exp[\Phi(\omega, k, F; t)] \left| e, \beta'_e(t) \right\rangle \left\langle g, \beta'_g(t) \right| \\
& \left. + \exp[\Phi^*(\omega, k, F; t)] \left| g, \beta'_g(t) \right\rangle \left\langle e, \beta'_e(t) \right| \right\}. \quad (3.3.17)
\end{aligned}$$

A exponencial presente nos termos não-diagonais se anula para tempos suficientemente grandes visto que $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(\omega, k, F, t) = -\infty$, levando à perda de coerência do sistema. A ação desta exponencial simboliza então o vazamento de informação do sistema para o ambiente. Como a frequência e portanto a energia de $|\beta'_e(t)\rangle$ e $|\beta'_g(t)\rangle$ são diferentes, podemos imaginar que cada fóton absorvido pela cavidade transporta um pouco de informação de-que-caminho levando ao processo irreversível de decoerência. O tempo necessário para isto ocorrer pode ser estimado analisando-se a função $\Phi(\omega, k, F, t)$. De acordo com (3.3.11), para tempos longos as exponenciais não serão de grande importância, e sim a parte real do termo linear no tempo da função $z(t)$:

$$\text{Re} \left[-\frac{2i\omega|F|^2}{(k+i\omega)^2} t \right] = -\frac{4\omega^2 k|F|^2}{(k^2+\omega^2)^2} t.$$

Podemos com este termo associar um tempo característico de amortecimento aproxi-

mado dos elementos não-diagonais da matriz densidade:

$$\tau = \frac{(k^2 + \omega^2)^2}{4\omega^2 k |F|^2}. \quad (3.3.18)$$

Nota-se que com o aumento da intensidade da fonte, com todos os outros parâmetros fixos, este tempo diminui. Este é o comportamento esperado já que um campo de maior amplitude, e portanto mais clássico, é gerado. Estamos interessados também no comportamento do sistema em relação a mudanças na razão k/ω e, por simplicidade, consideraremos o número médio de fótons do estado inicial $\bar{n} = (F/k)^2 = 1$. Esta razão representa o quanto o acoplamento com o ambiente(k) é mais forte/fraco que o acoplamento átomo-campo(ω).

- Regime subamortecido, $k/\omega \ll 1$, $F/k = 1$:

$$\tau \approx \frac{1}{2k} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{k} \right)^2 \right].$$

- Regime de amortecimento crítico, $k/\omega = 1$, $F/k = 1$:

$$\tau = \frac{1}{k}.$$

- Regime superamortecido, $k/\omega \gg 1$, $F/k = 1$:

$$\tau \approx \frac{1}{2k} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{\omega} \right)^2 \right].$$

No regime subamortecido, o tempo de amortecimento diminui com o aumento da razão k/ω como esperado pelo aumento relativo da dissipação. No amortecimento crítico, o comportamento também é o esperado: aumentando-se a dissipação o tempo de amortecimento diminui. Porém, no regime superamortecido, ao aumentarmos k/ω o sistema demora cada vez mais para anular os elementos de interferência num comportamento claramente não intuitivo. Investigaremos suas causas no próximo capítulo.

O comportamento assintótico da matriz densidade do sistema é:

$$\hat{\rho}_{AC}(\infty) = \hat{\rho}_{ee}(\infty) |e\rangle \langle e| + \hat{\rho}_{gg}(\infty) |g\rangle \langle g|. \quad (3.3.19)$$

Os operadores $\hat{\rho}_{ee}(\infty)$ e $\hat{\rho}_{gg}(\infty)$ são facilmente obtidos fazendo o limite para tempos longos em (3.3.8) e (3.3.9). As exponenciais anulam vários elementos, sobrando apenas:

$$\beta'_e(t \rightarrow \infty) = \beta_e(t \rightarrow \infty) = -\frac{F}{\omega - ik},$$

$$\beta'_g(t \rightarrow \infty) = \beta_g(t \rightarrow \infty) = \frac{F}{\omega + ik}.$$

3.3.3 Operadores densidade reduzidos

Tomando-se o traço parcial de $\hat{\rho}_{AC}(t)$ sobre as variáveis atômicas chegamos ao operador densidade reduzido do campo:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_C(t) &= Tr_A \hat{\rho}_{AC}(t) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left| \beta'_e(t) \right\rangle \left\langle \beta'_e(t) \right| + \left| \beta'_g(t) \right\rangle \left\langle \beta'_g(t) \right| \right\}.\end{aligned}\quad (3.3.20)$$

Para encontrar o operador densidade reduzido atômico precisamos de tomar um traço sobre o espaço de Hilbert do campo. Porém os estados $\left| \beta'_e(t) \right\rangle$ e $\left| \beta'_g(t) \right\rangle$ não são ortonormais. É necessário expressar o campo numa base apropriada.

Tentaremos uma base do tipo:

$$\left| s \right\rangle = \cos \mu \left| \beta'_e(t) \right\rangle + e^{i\theta} \sin \mu \left| \beta'_g(t) \right\rangle, \quad (3.3.21)$$

$$\left| d \right\rangle = -\sin \mu \left| \beta'_e(t) \right\rangle + e^{i\theta} \cos \mu \left| \beta'_g(t) \right\rangle. \quad (3.3.22)$$

onde θ é real. Para que $\langle s | d \rangle = 0$, devemos ter:

$$\mu = \frac{\pi}{4},$$

e

$$e^{i\theta} = \frac{\langle \beta'_g(t) | \beta'_e(t) \rangle}{|\langle \beta'_g(t) | \beta'_e(t) \rangle|}.$$

Assim:

$$\begin{aligned}\left| s \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left| \beta'_e(t) \right\rangle + e^{i\theta} \left| \beta'_g(t) \right\rangle \right\}, \\ \left| d \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -\left| \beta'_e(t) \right\rangle + e^{i\theta} \left| \beta'_g(t) \right\rangle \right\}.\end{aligned}$$

Normalizando a base $\{|s\rangle, |d\rangle\}$:

$$\left| S \right\rangle = \frac{\left| s \right\rangle}{\sqrt{\langle s | s \rangle}} = \frac{\left| s \right\rangle}{\sqrt{1 + |\langle \beta'_g(t) | \beta'_e(t) \rangle|}}, \quad (3.3.23)$$

$$\left| D \right\rangle = \frac{\left| d \right\rangle}{\sqrt{\langle d | d \rangle}} = \frac{\left| d \right\rangle}{\sqrt{1 - |\langle \beta'_g(t) | \beta'_e(t) \rangle|}}. \quad (3.3.24)$$

Assim, os estados do campo podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} \left| \beta'_e(t) \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{1 + |\langle \beta'_g(t) | \beta'_e(t) \rangle|} |S\rangle - \sqrt{1 - |\langle \beta'_g(t) | \beta'_e(t) \rangle|} |D\rangle \right\}, \\ \left| \beta'_g(t) \right\rangle &= \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{1 + |\langle \beta'_g(t) | \beta'_e(t) \rangle|} |S\rangle + \sqrt{1 - |\langle \beta'_g(t) | \beta'_e(t) \rangle|} |D\rangle \right\}. \end{aligned}$$

Ainda podemos simplificar as expressões acima se definirmos:

$$A \equiv \sqrt{\frac{1 + |\langle \beta'_g(t) | \beta'_e(t) \rangle|}{2}}, \quad (3.3.25)$$

$$B \equiv \sqrt{\frac{1 - |\langle \beta'_g(t) | \beta'_e(t) \rangle|}{2}}. \quad (3.3.26)$$

Em termos de A e B elas se tornam:

$$\left| \beta'_e(t) \right\rangle = A |S\rangle - B |D\rangle, \quad (3.3.27)$$

$$\left| \beta'_g(t) \right\rangle = e^{-i\theta} (A |S\rangle + B |D\rangle). \quad (3.3.28)$$

A matriz densidade total, expressa com o campo na base ortonormal, será:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{AC}(t) &= \frac{1}{2} \left\{ (A |S\rangle - B |D\rangle) (A \langle S| - B \langle D|) \otimes |e\rangle \langle e| \right. \\ &\quad + (A |S\rangle + B |D\rangle) (A \langle S| + B \langle D|) \otimes |g\rangle \langle g| \\ &\quad + e^{\Phi+i\theta} (A |S\rangle - B |D\rangle) (A \langle S| + B \langle D|) \otimes |e\rangle \langle g| \\ &\quad \left. + e^{\Phi*-i\theta} (A |S\rangle + B |D\rangle) (A \langle S| - B \langle D|) \otimes |g\rangle \langle e| \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

Agora podemos tirar o traço no campo encontrando o operador densidade reduzido do átomo:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_A(t) &= Tr_C \hat{\rho}_{AC}(t) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ |e\rangle \langle e| + |g\rangle \langle g| + e^{\Phi} \left\langle \beta'_g(t) \left| \beta'_e(t) \right\rangle |e\rangle \langle g| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{\Phi*} \left\langle \beta'_e(t) \left| \beta'_g(t) \right\rangle |g\rangle \langle e| \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

A presença dos produtos internos dos estados do campo nos elementos não-diagonais revela que o átomo também mede o campo. A decoerência do campo é causada pela informação guardada tanto no ambiente como no átomo; assim como a decoerência atômica é resultado de informação guardada no ambiente e no campo.

Capítulo 4

Análise

"Eu quase que nada não sei. Mas desconfio de muita coisa."
Riobaldo¹.

Neste capítulo, calcularemos grandezas que ajudarão a interpretar os resultados anteriores, revelando os detalhes relevantes sobre a evolução do sistema. Na Seção 4.1, serão calculadas as entropias atômica, do campo e total. Logo após, na Seção 4.2, calcularemos a Concorrência entre o átomo e o campo vistos como um sistema de dois q-bits. Em 4.3 chegamos a uma expressão para a distinguibilidade dos estados do campo, uma medida do quanto os caminhos do átomo são discriminados pelo medidor. Por fim, as grandezas são analisadas e comparadas revelando uma explicação para a mudança de comportamento do sistema com a variação da razão k/ω .

4.1 Entropias Lineares

Como o estado inicial de nosso sistema é puro as entropias lineares de cada parte nos darão uma boa medida de quão emaranhadas elas estão com todo o resto.

O cálculo da Entropia Linear (2.1.8) de algum subsistema é facilitada quando sua matriz densidade é apresentada em sua forma diagonal. Além disso, esta forma será útil no cálculo da Concorrência na próxima seção.

Diagonalizando a matriz densidade total:

$$\hat{\rho}_{AC}(t) = \lambda_+ |+\rangle \langle +| + \lambda_- |-\rangle \langle -|, \quad (4.1.1)$$

onde $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ são seus autoestados:

¹Grande Sertão: Veredas, de João Guimarães Rosa.

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left| e, \beta'_e(t) \right\rangle + \exp[-i\text{Im}\Phi(\omega, k, F; t)] \left| g, \beta'_g(t) \right\rangle \right\}, \quad (4.1.2)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left| e, \beta'_e(t) \right\rangle - \exp[-i\text{Im}\Phi(\omega, k, F; t)] \left| g, \beta'_g(t) \right\rangle \right\}, \quad (4.1.3)$$

e $\lambda_+(t)$ e $\lambda_-(t)$ seus autovalores:

$$\lambda_+(t) = \frac{1}{2} \{1 + \exp[\text{Re}\Phi(\omega, k, F; t)]\}, \quad (4.1.4)$$

$$\lambda_-(t) = \frac{1}{2} \{1 - \exp[\text{Re}\Phi(\omega, k, F; t)]\}. \quad (4.1.5)$$

A Entropia Linear do sistema átomo-campo nos revelará o quanto ele emaranhou com o ambiente:

$$\begin{aligned} S_L(\rho_{AC}) &= 1 - \text{Tr}(\rho_{AC}^2) \\ &= 1 - \lambda_+^2(t) - \lambda_-^2(t) \\ &= \frac{1}{2} \{1 - \exp[2\text{Re}\Phi(\omega, k, F; t)]\}. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Como vimos, o termo linear em $\Phi(\omega, k, F; t)$ anula a exponencial para tempos longos. O valor assintótico da entropia total vale então $1/2$, independentemente de qualquer outro fator.

O operador densidade reduzido do átomo diagonalizado pode ser expresso como:

$$\hat{\rho}_A(t) = \lambda_{e'} |e'\rangle \langle e'| + \lambda_{g'} |g'\rangle \langle g'|, \quad (4.1.7)$$

com:

$$\lambda_{e'} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left| \left\langle \beta'_g(t) \left| \beta'_e(t) \right\rangle \right|^2 \exp[\text{Re}\Phi(\omega, k, F; t)] \right\}, \quad (4.1.8)$$

$$\lambda_{g'} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left| \left\langle \beta'_g(t) \left| \beta'_e(t) \right\rangle \right|^2 \exp[\text{Re}\Phi(\omega, k, F; t)] \right\}. \quad (4.1.9)$$

e:

$$|e'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |e\rangle + \exp \left[-i \operatorname{Im} \left(\beta'_e(t) \beta'_g{}^*(t) + \Phi(\omega, k, F; t) \right) \right] |g\rangle \right\}, \quad (4.1.10)$$

$$|g'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |e\rangle - \exp \left[-i \operatorname{Im} \left(\beta'_e(t) \beta'_g{}^*(t) + \Phi(\omega, k, F; t) \right) \right] |g\rangle \right\}. \quad (4.1.11)$$

Sua Entropia Linear então se torna:

$$\begin{aligned} S_L(\rho_A) &= 1 - \operatorname{Tr}(\rho_A^2) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left| \langle \beta'_g(t) | \beta'_e(t) \rangle \right|^2 \exp [2 \operatorname{Re} \Phi(\omega, k, F; t)] \right\}. \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

Percebemos a contribuição do campo e do reservatório na decoerência atômica. O campo armazena informação de-que-caminho através de sua fase no plano complexo e, devido à diferença energética entre $|\beta'_e(t)\rangle$ e $|\beta'_g(t)\rangle$, esta informação é transmitida irreversivelmente ao reservatório térmico. O valor assintótico de $S_L(\rho_A)$ é máximo para quaisquer valores de ω , k e F .

Para o campo, o operador densidade diagonalizado pode ser escrito numa base ortonormal. Usando (3.3.27) e (3.3.28):

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_C(t) &= \frac{1}{2} \left\{ |\beta'_e(t)\rangle \langle \beta'_e(t)| + |\beta'_g(t)\rangle \langle \beta'_g(t)| \right\} \\ &= \frac{1}{2} \{ (A|S\rangle - B|D\rangle) (A\langle S| - B\langle D|) + (A|S\rangle + B|D\rangle) (A\langle S| + B\langle D|) \} \\ &= A^2 |S\rangle \langle S| + B^2 |D\rangle \langle D|, \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

resultando na entropia:

$$\begin{aligned} S_L(\rho_C) &= 1 - \operatorname{Tr}(\rho_C^2) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left| \langle \beta'_g(t) | \beta'_e(t) \rangle \right|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

Como tanto o átomo quanto o reservatório armazenam informação de-que-caminho do campo baseada em seu *overlap*, apenas este termo aparece na expressão para a Entropia Linear.

4.2 Concorrência

Enquanto a Entropia Linear nos deu uma medida do emaranhamento de uma partição do sistema com todo o resto, a Concorrência $C(\rho_{AC})$ nos permite medir o emaranhamento entre o átomo e o campo, mesmo em contato com o ambiente. Para isso podemos olhar para os dois como um par de q-bits. Através da base ortonormal definida em (3.3.23) e (3.3.24) poderemos enxergar o campo como um q-bit, ou seja, um sistema de dois níveis, que no nosso caso são representados por $|S\rangle$ e $|D\rangle$.

Utilizando a matriz densidade do sistema com o campo na base ortonormal, escrita em (3.3.29), aplicamos a transformação não-unitária de *spin – flip*:

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_{AC}(t) &= \sigma_y \rho_{AC}^*(t) \sigma_y \\ &= \left\{ \frac{1}{2} (A|g, D\rangle + B|g, S\rangle)(A\langle g, D| + B\langle g, S|) \right. \\ &\quad + (A|e, D\rangle - B|e, S\rangle)(A\langle e, D| - B\langle e, S|) \\ &\quad - e^{\Phi+i\theta} (A|e, D\rangle - B|e, S\rangle)(A\langle g, D| + B\langle g, S|) \\ &\quad \left. - e^{\Phi^*-i\theta} (A|g, D\rangle + B|g, S\rangle)(A\langle e, D| - B\langle e, S|) \right\}.\end{aligned}$$

Para calcular a raiz da matriz densidade total usamos sua forma diagonal (4.1.1):

$$\sqrt{\hat{\rho}_{AC}(t)} = \sqrt{\lambda_+}|+\rangle\langle+| + \sqrt{\lambda_-}|-\rangle\langle-|.$$

Com estes resultados chegamos, após alguma álgebra, numa expressão para a matriz R (2.2.8):

$$R = \sqrt{\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}} = 2AB(\lambda_+|+\rangle\langle+| + \lambda_-|-\rangle\langle-|). \quad (4.2.1)$$

A Concorrência é dada por:

$$C(\rho_{AC}) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\},$$

onde os λ_i 's são os autovalores em ordem decrescente de R . Portanto:

$$\begin{aligned}C(\rho_{AC}) &= 2AB(\lambda_+ - \lambda_-) \\ &= \left(1 - \left|\langle\beta'_g(t)|\beta'_e(t)\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} e^{\text{Re}\Phi(\omega, k, F, t)}.\end{aligned} \quad (4.2.2)$$

4.3 Distinguibilidade

Para quantificar a máxima quantidade de informação de-que-caminho que um observador pode obter de uma medida sobre o campo calcularemos a Distinguibilidade (2.3.7)

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \text{Tr}_D \left\{ \left| \rho_D^{(+)} - \rho_D^{(-)} \right| \right\},$$

de seus estados.

Olhando para (3.3.20):

$$\hat{\rho}_C(t) = \frac{1}{2} \left\{ \left| \beta'_e(t) \right\rangle \left\langle \beta'_e(t) \right| + \left| \beta'_g(t) \right\rangle \left\langle \beta'_g(t) \right| \right\},$$

identificamos os elementos da matriz densidade (2.3.6):

$$\begin{aligned} \rho_D^{(+)} &= \left| \beta'_e(t) \right\rangle \left\langle \beta'_e(t) \right|, \\ \rho_D^{(-)} &= \left| \beta'_g(t) \right\rangle \left\langle \beta'_g(t) \right|. \end{aligned}$$

O módulo da diferença $\rho_D^{(+)} - \rho_D^{(-)}$ pode ser calculado lembrando-se que para uma matriz A temos $|A| = \sqrt{A^\dagger A}$; a raiz de $A^\dagger A$ por sua vez pode ser conseguida diagonalizando-se este produto. O resultado final é:

$$\mathcal{D} = \left(1 - \left| \left\langle \beta'_g(t) \right| \beta'_e(t) \right\rangle \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.3.1)$$

O fator $|\langle \alpha | \beta \rangle|^2$ para estados coerentes se relaciona com a exponencial:

$$e^{-|\alpha - \beta|^2} = |\langle \alpha | \beta \rangle|^2.$$

Assim:

$$\left| \left\langle \beta'_g(t) \right| \beta'_e(t) \right\rangle \right|^2 = \exp \left\{ - \left\{ \frac{2F}{k(k^2 + \omega^2)} e^{-kt} [k\omega (\cos \omega t - e^{kt}) - \omega^2 \sin \omega t] \right\}^2 \right\}, \quad (4.3.2)$$

e a Distinguibilidade pode ser expressa em termos de $(\omega, k, F; t)$:

$$\mathcal{D} = \left(1 - \exp \left\{ - \left\{ \frac{2F}{k(k^2 + \omega^2)} e^{-kt} [k\omega (\cos \omega t - e^{kt}) - \omega^2 \sin \omega t] \right\}^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.3.3)$$

Analisando as grandezas calculadas nas seções anteriores vemos que algumas podem ser escritas em termos de $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} C(\rho_{AC}) &= \mathcal{D} e^{\text{Re}\Phi(\omega, k, F, t)}, \\ S_L(\rho_C) &= \frac{1}{2} \mathcal{D}^2, \\ S_L(\rho_A) &= \frac{1}{2} \{1 - (1 - \mathcal{D}^2) \exp[2\text{Re}\Phi(\omega, k, F; t)]\}, \end{aligned}$$

indicando a importância da capacidade de se ter acesso à informação, discriminando suas duas "histórias", na dinâmica do sistema.

Para tempos longos e mantendo o acoplamento fonte-campo com a mesma intensidade que o acoplamento campo-reservatório ($F/k = 1$) o valor da Distingüibilidade se aproxima de:

$$\mathcal{D}(t \rightarrow \infty) = \left\{ 1 - \exp \left\{ -4 \left(\frac{\omega}{k} \right)^2 [1 + (\omega/k)^2]^{-2} \right\} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (4.3.4)$$

Nestas condições, pode-se mostrar que o valor máximo de $\mathcal{D}(t \rightarrow \infty)$ se dá para $k/\omega = 1$. Mostraremos, na próxima seção, que este ponto de equilíbrio entre dissipação e interação átomo-campo indica um divisor de águas no comportamento do sistema. Lembre-se de que este resultado só pode ser obtido com a ajuda da fonte, já que o estado assintótico do campo sem fonte é o vácuo tanto para o estado ligado a $|e\rangle$ quanto para o ligado a $|g\rangle$.

4.4 Discussão

"Nenhum cientista pensa com fórmulas."

Albert Einstein.

Como foi dito, a presença do átomo de dois níveis longe da ressonância com um campo coerente induz neste uma mudança de frequência dependente do estado atômico. Assim, um átomo no seu estado excitado, com $\delta > 0$, muda o volume efetivo da cavidade de maneira a aumentar a frequência do campo enquanto sua frequência de transição também aumenta ligeiramente [24]. Já o estado desexcitado diminui as duas frequências. Para $\delta < 0$ os efeitos se invertem, havendo uma diminuição das frequências quando o estado atômico é excitado e aumento quando é desexcitado. A energia do sistema é conservada nos dois casos através da diminuição ou aumento da energia cinética do átomo ao entrar e sair da cavidade. Porém a introdução de dissipação leva à quebra de simetria do modelo levando-o a comportar-se não-unitariamente. Através da absorção de fótons a cavidade armazena informação de-que-caminho sobre o campo e, através dele, sobre o átomo. Tal

transferência de informação pode ser entendida como um processo de inúmeras medidas não observadas [52] realizadas pelo ambiente através de cada absorção de fóton: a energia absorvida reflete a frequência e a amplitude do campo e, portanto, discrimina o estado do átomo. Através destas medidas o sistema se emaranha com o ambiente transformando incertezas quânticas em clássicas.

Em nosso sistema, onde há a presença de uma fonte clássica em sintonia com a cavidade, os efeitos devido à interação dispersiva são os mesmos. Porém, o campo não tende assintoticamente para o vácuo permitindo que o ambiente extraia informação suficiente para causar total decoerência do sistema. Matematicamente, este comportamento é representado pela presença do termo linear em t de $\Phi(\omega, k, F; t)$. Tal termo é responsável pela anulação dos termos não-diagonais da matriz densidade total do sistema átomo-campo, levando sua entropia linear para o valor máximo de $1/2$ para quaisquer parâmetros ω , k e F .

Se aumentarmos o acoplamento fonte-campo(ou seja, o valor de F) mantendo os outros parâmetros fixos o resultado é o esperado: a decoerência é mais rápida devido à maior classicalidade do sistema. Da mesma forma, o átomo tem seu caminho marcado mais facilmente pelo campo resultando numa perda de coerência mais rápida. Agora, mantendo F/k constante e igual a 1, evitamos o efeito do aumento da amplitude do campo e podemos investigar outros aspectos da evolução. Isto é justamente o que faremos na análise dos gráficos das figuras (4.4.1), (4.4.5) e (4.4.7) das páginas seguintes.

Para escolhermos os valores de seus parâmetros devemos ter em vista os limites impostos pelas aproximações realizadas((3.1.4) e (3.1.5)) e os valores comumente utilizados em experimentos de cavidades, como abordado nas seções 2.4 e 2.5. Por simplicidade adotamos sempre $\omega = 1000$ Hz.

Uma olhada nos gráficos das figuras 4.4.1, 4.4.5 e 4.4.7 nos faz perceber uma semelhança de comportamento com o oscilador harmônico clássico amortecido. Para $k/\omega < 1$ notam-se várias oscilações na Distinguíbilidade, nas entropias e na Concorrência. Aumentando-se a dissipação o tempo de decoerência diminui, como mostra a entropia total, reduzindo também o número de oscilações. O tempo mínimo de decoerência é atingido quando $k/\omega = 1$ e, após este ponto, num comportamento no mínimo estranho à primeira vista, o tempo de decoerência aumenta com o aumento de k , ou seja, quanto mais o reservatório absorve fótons mais o sistema mantém a coerência. Chamaremos os três regimes, em analogia à mecânica clássica, de subamortecido, de amortecimento crítico e superamortecido.

Regime subamortecido

Neste regime o processo de decoerência é acelerado, para todos os elementos do sistema, com o aumento da dissipação. Esta aceleração se deve ao aumento do número de medições realizadas sobre o sistema pelo ambiente enquanto há informação de-que-caminho

disponível. Esta disponibilidade é evidenciada pela alta Distinguíbilidade, ou seja, pela grande discriminação entre as histórias do sistema.

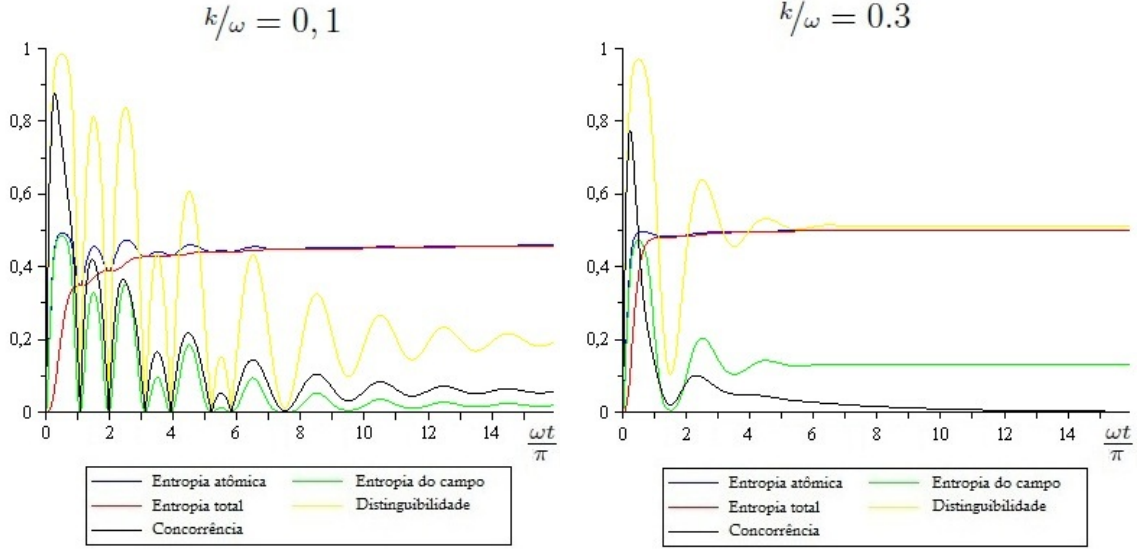


Figura 4.4.1: Várias grandezas, para $\omega = 1000$ Hz, no regime **subamortecido**. Para todos temos $F/k = 1$. No primeiro gráfico temos $k = 100$ Hz e no segundo $k = 300$ Hz.

A Entropia do campo aumenta e diminui acompanhando a Distinguíbilidade, já que a informação armazenada tanto no átomo como no reservatório também dependem apenas do *overlap* entre seus estados. Os estados assintóticos do campo, por serem sempre distinguíveis e não-ortogonais, impõem um valor assintótico não nulo e não máximo à sua entropia. Assim, sua decoerência nunca é completa.

O átomo é o mais afetado pela dinâmica não-unitária. Sua entropia também acompanha a Distinguíbilidade, porém ela decresce muito pouco à medida que a Distinguíbilidade abaixa. Isto nos indica que parte de sua coerência é recuperada quando não mais conseguimos acessar a informação de-que-caminho armazenada no campo, porém a informação contida no ambiente impõe um limite a esta recuperação. A ação do campo sobre a entropia atômica é marcada pela presença do *overlap* de seus estados em sua expressão (4.1.12), enquanto a atuação do ambiente é evidenciada pela exponencial de $\text{Re}[\Phi(\omega, k, F; t)]$. Diferentemente do campo, o átomo sempre sofre completa decoerência, pois seus estados são obviamente ortogonais.

Uma série de platôs na entropia total aparece também devido à Distinguíbilidade. Como a decoerência do sistema se dá através da interação entre campo e reservatório valores baixos de Distinguíbilidade implicam num aumento modesto da entropia total. Como foi dito, seu valor assintótico é máximo. Podemos entender isto pelo fato do átomo carregar consigo toda a decoerência do sistema, ou seja, com informação sobre o estado do átomo disponível no ambiente pode-se inferir com certeza qual o estado do campo, caracterizando uma completa decoerência de todo o sistema.

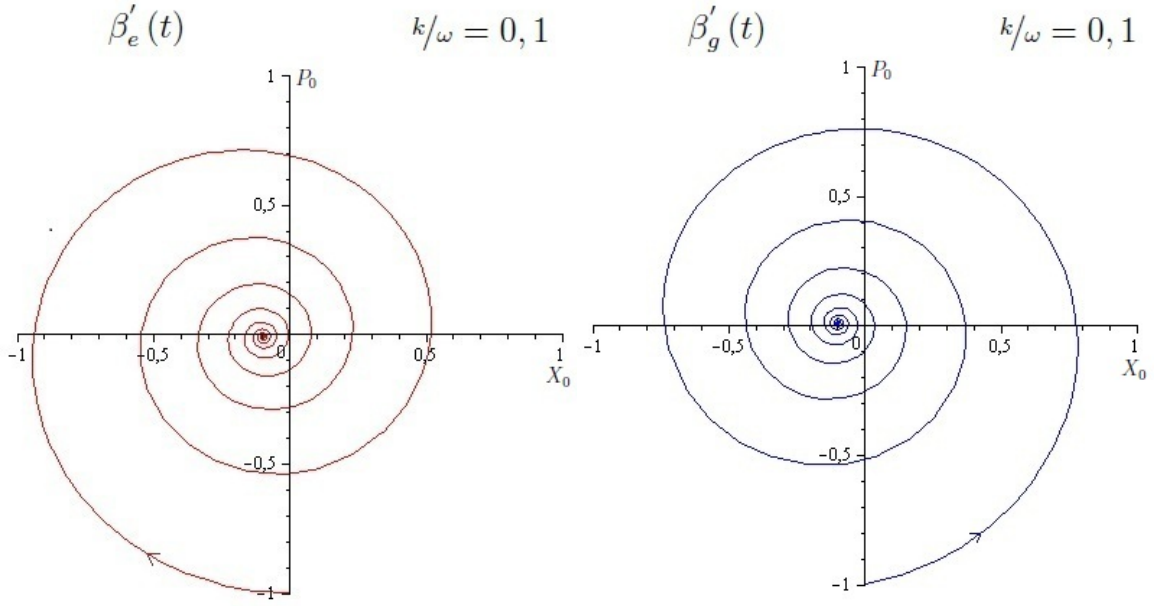


Figura 4.4.2: Evolução dos estados do campo $|\beta'_e(t)\rangle$ e $|\beta'_g(t)\rangle$ no regime **subamortecido**. Temos $\omega = 1000$ Hz e $k = F = 100$ Hz.

A quantidade de emaranhamento entre átomo e campo é resultado de dois fatores: do *overlap* dos estados do campo e da pureza atômica. Um maior *overlap* torna a matriz densidade total "menos separável", mais emaranhada. Por outro lado, um estado totalmente impuro para o átomo não apresentará qualquer emaranhamento. O equilíbrio entre estas duas "forças" é atingido quando a Concorrência atinge seu valor máximo. Depois disto, com o aumento da impureza atômica, ela tende assintoticamente a zero.

A análise do comportamento dos estados do campo consegue explicar a variação nos valores de cada máximo local da Distinguíbilidade, e assim, vários detalhes da evolução do sistema. Na figura 4.4.2 estão representadas as evoluções dos centros dos círculos de incerteza mínima que caracterizam os estados $|\beta'_e(t)\rangle$ e $|\beta'_g(t)\rangle$, para um valor de dissipação de $k = 100$ Hz. Percebe-se que a origem da variação citada se deve à assimetria destes estados.

Podemos evocar a linearidade dos vetores do plano complexo onde são representados os estados coerentes para separar o campo em duas componentes: uma associada à evolução do estado inicial $|-i\frac{F}{k}\rangle$ na ausência da fonte e outra que surge exclusivamente devido à fonte, $|\beta_e(t)\rangle$ ou $|\beta_g(t)\rangle$, definidos em (3.2.14) e (3.2.15). Com esta separação podemos enxergar a origem desta assimetria, como explicado nos próximos parágrafos.

O eixo vertical deste plano representa o momento P_0 e o horizontal a coordenada² X_0 . Assim, um estado representado neste plano normalmente evoluirá em quadrantes

²Estes operadores são definidos no contexto de osciladores harmônicos quânticos como $X_0 = \frac{a+a^\dagger}{2}$ e $P_0 = i\frac{a^\dagger-a}{2}$. Eles correspondem às partes real e imaginária, respectivamente, de um α de um estado coerente $|\alpha\rangle$.

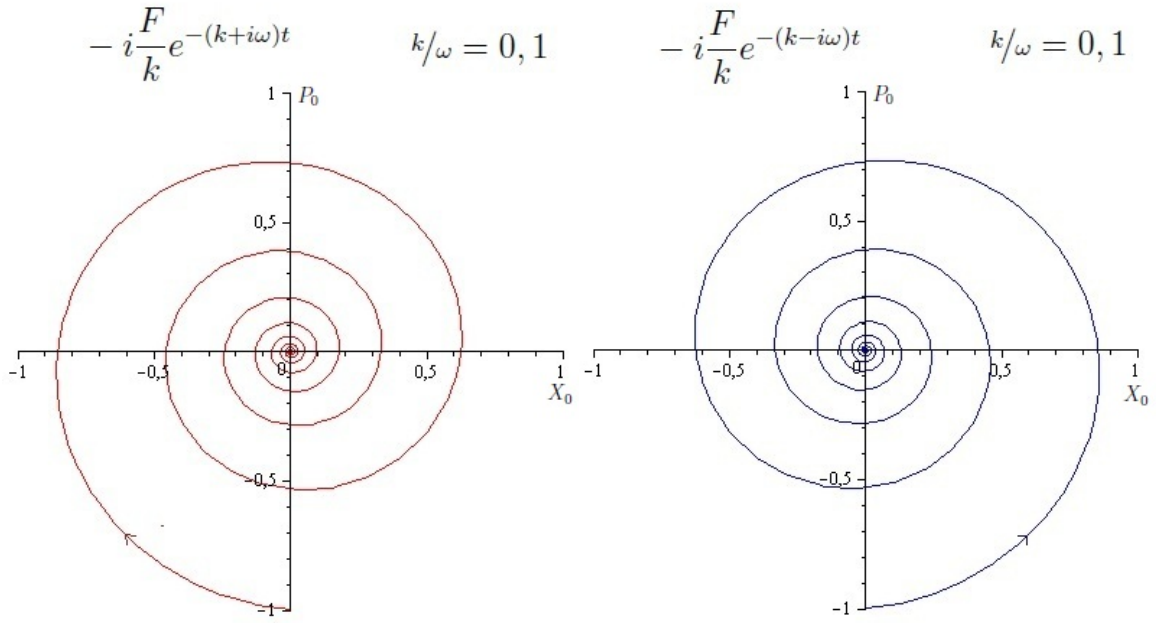


Figura 4.4.3: Evolução da parte do campo associada à evolução do estado inicial $|-i \frac{F}{k}\rangle$, sem presença da fonte. Temos $\omega = 1000$ Hz e $F/k = 1$, no regime **subamortecido**.

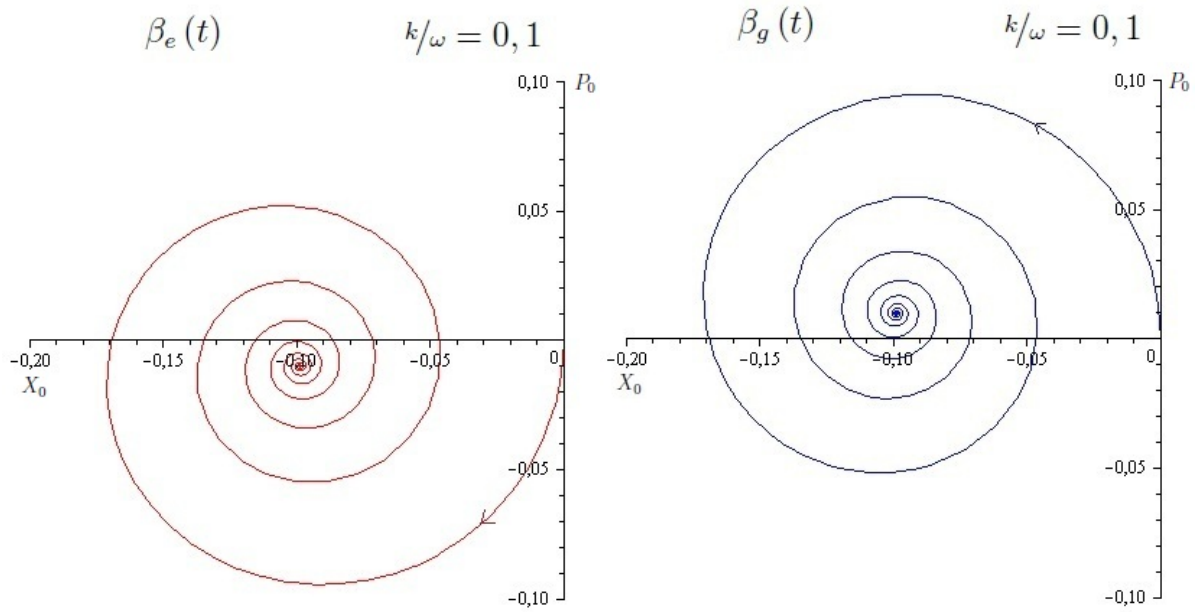


Figura 4.4.4: Evolução da parte do campo associada à presença da fonte, $|\beta_e(t)\rangle$ e $|\beta_g(t)\rangle$. Temos $\omega = 1000$ Hz e $F/k = 1$, no regime **subamortecido**.

de momento positivo no sentido de aumentar o valor de X_0 . Entretanto, como estamos na representação de interação vemos os estados de frequência $\omega_C - \omega$ como estados de frequência negativa $-\omega$, onde quadrantes de momento P_0 positivo leva a regiões de menor X_0 . Tudo se passa como se estivéssemos num referencial que girasse com frequência ω_C . Como consequência deste aspecto do modelo o estado inicial evoluído, associado ao estado $|e\rangle$, $|-i\frac{F}{k}e^{-(k+i\omega)t}\rangle$, gira no sentido horário no espaço de fase quântico, enquanto o estado $|-i\frac{F}{k}e^{-(k-i\omega)t}\rangle$, associado ao estado $|g\rangle$, gira no sentido anti-horário, como pode ser visto na figura 4.4.3. Ambos tendem assintoticamente ao vácuo, obviamente.

A assimetria surge devido à fonte, cuja dinâmica evolui $|\beta_e(t)\rangle$ e $|\beta_g(t)\rangle$ em torno de um eixo de simetria diferente. Tanto a parte ligada a $|e\rangle$ quanto à ligada a $|g\rangle$ partirão do vácuo. Como o operador deslocamento $\hat{D}[\beta_e(t)]$ gera uma componente inicial para baixo, $|\beta_e(t)\rangle$ seguirá em sentido horário partindo de baixo (P_0 negativo diminuindo X_0), aumentando inicialmente seu módulo. O operador $\hat{D}[\beta_g(t)]$ tem comportamento análogo, mas com uma diferença: ele gera uma componente inicial para cima, com P_0 positivo mas *diminuindo* X_0 , devido ao referencial citado.

Regime de amortecimento crítico

Este regime marca a mudança de comportamento em relação a mudanças na razão k/ω . Tal razão representa o quanto a dissipação é importante em relação à dinâmica interna do sistema e, como no caso clássico de oscilações amortecidas, neste ponto elas estão em pé de igualdade.

Para $k = \omega$, o tempo de amortecimento dos elementos não-diagonais da matriz densidade do sistema é mínimo e, como já foi dito, é neste regime que a Distingüibilidade apresenta seu valor assintótico máximo.

Praticamente toda a análise feita no regime subamortecido pode ser aplicada aqui. No entanto, com estes parâmetros as oscilações deixam de ocorrer. A discriminação entre os caminhos atômicos pelo campo e pelo ambiente é a maior possível devido ao grande valor da Distingüibilidade e à sua constância.

A evolução dos estados do campo é apresentada nos gráficos da figura 4.4.6.

Regime superamortecido

Nos gráficos da figura 4.4.7 percebemos claramente a mudança de comportamento ao ultrapassarmos o ponto de amortecimento crítico. Com o aumento da dissipação o tempo característico de decoerência do sistema aumenta, evidenciado pela menor inclinação na entropia total. A coerência do átomo também fica protegida por mais tempo, já que a concorrência é sempre baixa. Por outro lado, o estado do campo se estabiliza rapidamente, com pouca diferença no seu tempo de decoerência à medida em que se aumenta k . Seu comportamento torna-se parecido com o de um *beam splitter* clássico [4], onde

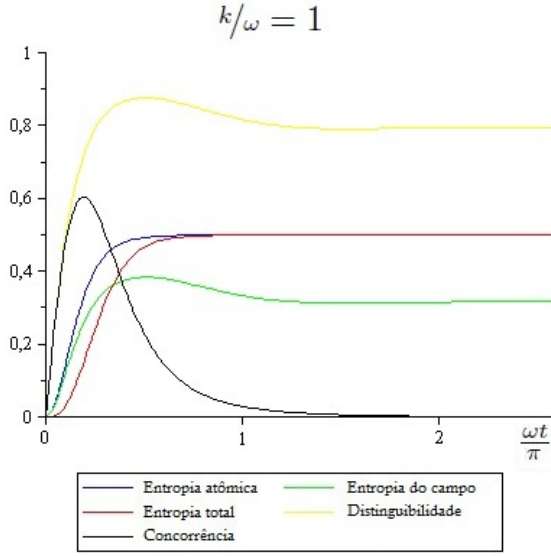


Figura 4.4.5: Várias grandezas para $\omega = k = F = 1000$ Hz, ou seja, no regime de **amortecimento crítico**.

sua interação com o sistema em que atua é de tal modo fraca que muda muito pouco seu estado, suprimindo o emaranhamento.

Uma luz sobre o problema é dada ao observarmos a evolução do campo. Para altos valores de dissipação a parte do campo originada do estado inicial $|-i\frac{F}{k}\rangle$ vai rapidamente para o estado de vácuo. O comportamento é regido então, principalmente, por $|\beta_e(t)\rangle$ e $|\beta_g(t)\rangle$, os estados simétricos em relação ao eixo X . Comparando os gráficos de 4.4.6 com os de 4.4.8 concluímos que à medida em que k cresce os estados giram cada vez menos dando a impressão de "desligamento" da interação dispersiva. Então quanto maior o acoplamento campo-reservatório menos distinguíveis os estados do campo se tornam e, mesmo aumentando o número de medidas energéticas feitas pelo reservatório, cada medida carrega muito menos informação de-que-caminho preservando a coerência de todo o sistema.

Extrapolando os parâmetros para além dos valores permitidos pelas aproximações, fazendo $k \rightarrow \infty$, com $F/k = 1$, notamos que a Distingüibilidade tende a zero, assim como todas as entropias e a Concorrência. Uma tentativa de interpretar este resultado é como consequência do grande número de medidas realizadas pelo ambiente em comparação ao tempo característico da interação átomo-campo, caracterizado por $\frac{2\pi}{\omega}$, o que poderia resultar em Efeito Zenão Quântico. De fato, como mostrado por Pascazio e Namiki em [37], para se obter Efeito Zenão Quântico é suficiente que a informação esteja disponível e não necessariamente armazenada. Efeito semelhante foi encontrado teoricamente por A. R. Bosco de Magalhães em [6] e experimentalmente por J. Bernu em [3] no contexto de cavidades dissipativas. Entretanto, no nosso caso, é difícil associar a origem do comportamento às medições, à fonte ou a um misto de ambos.

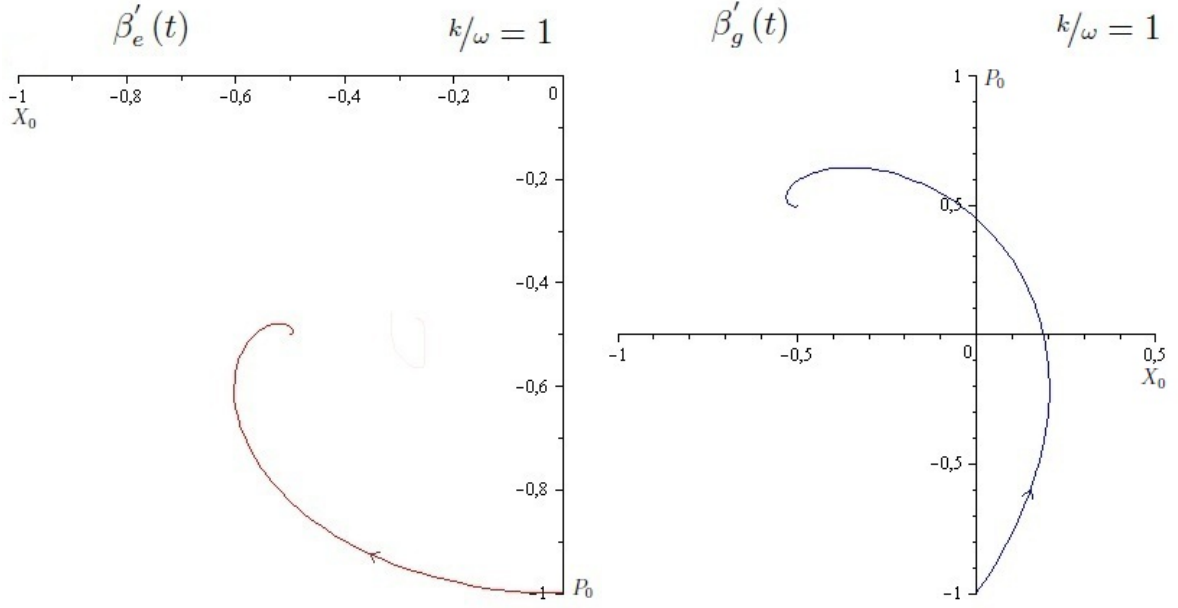


Figura 4.4.6: Evolução do campo total, caracterizado por $|\beta'_e(t)\rangle$ e $|\beta'_g(t)\rangle$, no regime de **amortecimento crítico**. Temos $\omega = k = F = 1000$ Hz.

Uma sugestão de experimento para nosso sistema é a medição da visibilidade (2.3.5) do átomo de Rydberg:

$$\mathcal{V}_a = \left| \left\langle \beta'_g(t) \left| \beta'_e(t) \right\rangle \right| \exp[\text{Re}\Phi(\omega, k, F; t)]. \quad (4.4.1)$$

Tal visibilidade pode ser conseguida realizando-se interferometria Ramsey sobre o átomo. Uma segunda Zona de Ramsey, localizada após a cavidade onde se encontra o campo fora de ressonância, induz uma rotação do estado atômico na esfera de Bloch. Uma diferença de fase variável entre $|e\rangle$ e $|g\rangle$, responsável pelo aparecimento do padrão de interferência, pode ser conseguida aplicando-se um campo elétrico variável no interior desta cavidade de baixa qualidade. Este campo muda a frequência de transição atômica através de efeito Stark modulando a ação da Zona de Ramsey. A visibilidade é conseguida através da probabilidade de se detectar um dado estado $|e\rangle$ ou $|g\rangle$ em detectores seletivos localizados após o aparato. Resultados teóricos são mostrados na Fig. 4.4.9. Nota-se que os tempos envolvidos são da ordem do tempo de vida do estado circular de Rydberg. Este fato não consiste num problema, pois átomos que por ventura decaiam para outros estados que não $|e\rangle$ ou $|g\rangle$ não serão detectados por possuírem maior energia de ionização.

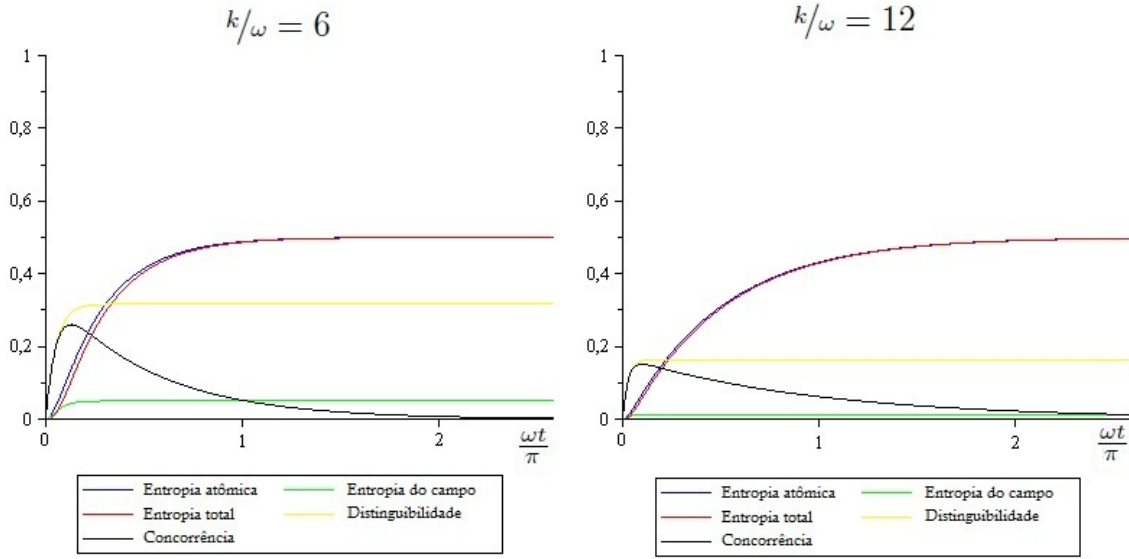


Figura 4.4.7: Várias grandezas, para $\omega = 1000$ Hz, no regime **superamortecido**. Para todos temos $F/k = 1$. No primeiro gráfico temos $k = 6000$ Hz e no segundo $k = 12000$ Hz.

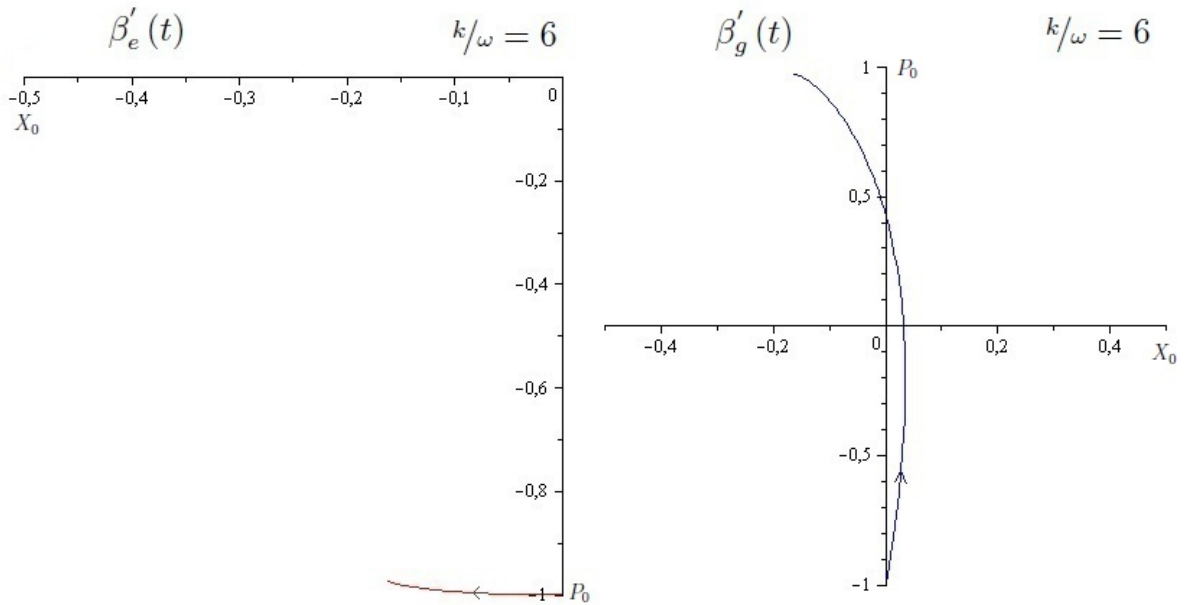


Figura 4.4.8: Evolução do campo para $k = 6000$ Hz. Temos $\omega = 1000$ Hz e $F/k = 1$, no regime **superamortecido**.

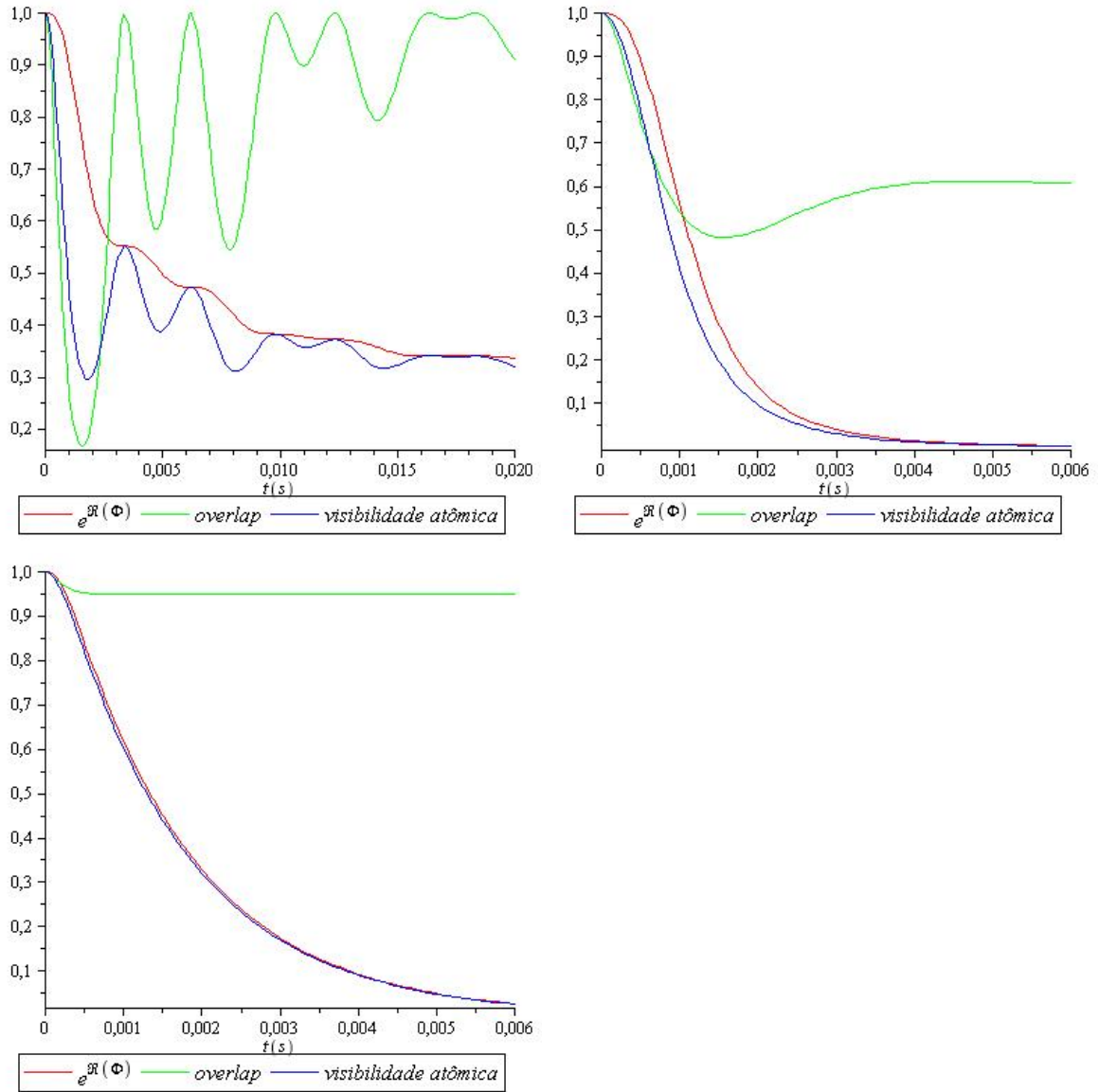


Figura 4.4.9: Visibilidades atômicas e termos relacionados, para $\omega = 1000$ Hz. Para todos temos $F/k = 1$. No primeiro gráfico temos $k = 100$ Hz, no segundo $k = 1000$ Hz e no terceiro $k = 6000$ Hz.

Capítulo 5

Conclusão

Ao longo deste trabalho, esperamos ter lançado luz ao problema da emergência da clasicidade no que diz respeito à influência do ambiente não somente sobre um sistema quântico de interesse, mas também sobre a ponta de prova utilizada para medi-lo. Investigamos o papel da dissipação na dinâmica de um sistema aberto composto por um átomo de dois níveis acoplado a um campo monomodal coerente no regime dispersivo do modelo de Jaynes-Cummings. Trata-se de um modelo simples, que permite solução analítica, mas porém de rica evolução.

O ambiente, através de medidas energéticas, capta informação de-que-caminho baseada na distinguibilidade dos estados do campo. O fato do átomo não interagir diretamente, mas por intermédio da luz, com o ambiente torna elegante a interpretação deste campo como um medidor do átomo.

A dinâmica do sistema proposto foi resolvida através de uma equação mestra markoviana e analisada através de conceitos como entropia linear, concorrência para dois q-bits e distinguibilidade.

Percebemos que toda a evolução do sistema se torna dependente da acessibilidade da informação de-que-caminho contida nos estados do campo, como esperado. O ambiente, através de suas inúmeras "medidas", somente é capaz de se emaranhar com o sistema e portanto causar decoerência se cada medida puder discriminar entre os estados da superposição em que se encontra o sistema átomo+campo.

Ao contrário do sistema sem fonte, este apresenta completa decoerência para quaisquer parâmetros ω , k e F . Seu tempo característico de decoerência sempre diminui com a intensidade do estado coerente. Um campo com maior número médio de fótons transmite mais informação de-que-caminho devido à maior quantidade total de medidas realizadas pelo ambiente, como evidencia o comportamento exponencial da amplitude na ausência da fonte.

Devido à não-ortogonalidade dos estados do campo este não chega a sofrer total perda de pureza. O átomo, entretanto, é o mais afetado pela decoerência, sempre atingindo assintoticamente o valor máximo para sua entropia. O fato disto ocorrer ao átomo traz

como consequência a total decoerência do sistema átomo+campo: existindo no ambiente a completa informação sobre em qual estado o átomo se encontra permite inferir com certeza o estado do campo, caracterizando a total perda de pureza do sistema.

A concorrência do sistema se mostra fruto do equilíbrio de duas grandezas: a distinguibilidade do campo e o grau de mistura atômica. Um maior *overlap* entre os estados do campo tende a aumentar o emaranhamento entre átomo e campo. Por outro lado, um estado totalmente impuro para o átomo não apresentará qualquer emaranhamento. O equilíbrio é alcançado quando a concorrência atinge seu valor máximo. Após isto, aumentando-se a impureza atômica, ela tende assintoticamente a zero. O estado assintótico do sistema é portanto completamente desentrelaçado mas classicamente correlacionado.

Separando o campo em duas componentes, uma originada da evolução do estado inicial e outra gerada exclusivamente pela fonte, fomos capazes de explicar detalhes da dinâmica: a variação de valores dos máximos locais da distinguibilidade dos estados do campo e de todas as grandezas relacionadas surgem da assimetria destes estados introduzida pela ação da fonte.

Mantendo fixa a razão F/k e o acoplamento átomo-campo caracterizado por ω , observamos a existência de três regimes de comportamento também existentes num sistema massa-mola amortecido clássico. À medida em que variamos a constante de dissipação, juntamente com o acoplamento campo-fonte, passamos pelos regimes subamortecido, de amortecimento crítico e superamortecido. Constatamos o papel da distinguibilidade dos estados do medidor dispersivo no aparecimento destes regimes: o amortecimento crítico se dá quando ocorre o maior valor assintótico da distinguibilidade. É também no amortecimento crítico que a decoerência de nosso q-bit, o átomo, é mais rápida. A partir deste ponto, aumentando-se tanto a dissipação quanto o acoplamento com a fonte, tanto a entropia atômica quanto a total tendem mais lentamente ao seu valor máximo. A coerência é preservada por mais tempo numa forte evidência de "congelamento" da interação unitária devido a "observações frequentes" do ambiente juntamente com a atuação mais intensa da fonte. O campo atinge um equilíbrio entre as ações da fonte, dissipação e interação dispersiva de maneira a paralisar sua evolução na representação de interação. Os estados do campo, altamente indistinguíveis, mesmo sendo medidos mais vezes pelo ambiente fornecem menos informação de-que-caminho preservando a coerência atômica e, portanto, do sistema.

Também no regime superamortecido, embora no limite de interação átomo-campo ressonante, foi explicado o fenômeno da classicalidade desta interação na Zona de Ramsey, onde este limite é adequado. A semelhança com nosso sistema dá pista sobre a importância da distinguibilidade dos estados do campo também neste contexto.

Por fim, um experimento foi sugerido visando medir a visibilidade atômica através de interferometria Ramsey.

5.1 Perspectivas

Tendo em vista a comprovação da presença de Efeito Zenão Quântico nos artigos citados no final do Capítulo 4 em um sistema parecido com o analisado neste trabalho, uma continuação interessante seria modelar nosso sistema acoplado a uma fonte pulsante e procurar por rastros deste efeito tanto no aumento da amplitude da parte do campo criada pela fonte como em seu possível papel no "desligamento" da interação unitária.

Apêndice A

Ferramentas matemáticas

A.1 Traço

Em álgebra linear, o traço de uma matriz quadrada $n \times n$ é definido como a soma dos elementos de sua diagonal principal:

$$\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Algumas de suas propriedades são:

1. $\text{Tr}(I_n) = n$;
2. $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$;
3. $\text{Tr}(cA) = c \cdot \text{Tr}(A)$
para qualquer escalar c ;
4. $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A^T)$;
5. $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$
onde A é $m \times n$ e B é $n \times m$;
6. $\text{Tr}(A \otimes B) = \text{Tr}(A)\text{Tr}(B)$.

A.2 Teoremas sobre operadores

Operadores diferem de números-c¹ pela importância da ordem em que são escritos. Para lidarmos com eles necessitaremos de dois teoremas envolvendo seus comutadores. Suas provas podem ser encontradas em [33].

¹Esta nomenclatura era usada por Paul Dirac para representar números reais e complexos.

A.2.1 Teorema 1: Fórmula de Baker-Hausdorff

Sejam A e B dois operadores que não necessariamente comutam e ξ um parâmetro, temos:

$$e^{\xi A} B e^{-\xi A} = B + \xi [A, B] + \frac{\xi^2}{2!} [A, [A, B]] + \frac{\xi^3}{3!} [A, [A, [A, B]]] + \dots \quad (\text{A.2.1})$$

A.2.2 Teorema 2:

Sejam A e B dois operadores que não necessariamente comutam mas que satisfazem à condição:

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0, \quad (\text{A.2.2})$$

é fácil ver que:

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} = e^B e^A e^{\frac{1}{2}[A,B]}. \quad (\text{A.2.3})$$

A.3 Desacoplando exponenciais

Ao longo do trabalho, será necessário transformar a exponencial de uma soma de operadores em um produto de exponenciais destes operadores. Faremos isto de duas formas:

A.3.1 O método da diferenciação de parâmetro

O método da diferenciação de parâmetro [47, 12] será usado quando na exponencial existirem três ou mais operadores que não comutam.

O método é possível se os operadores obedecem a uma álgebra Lie. Grosso modo, uma Álgebra de Lie n -dimensional é formada por um conjunto de operadores $\mathcal{X}_n = \{\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_n\}$ cujos comutadores de qualquer par $\hat{X}_i, \hat{X}_j \in \mathcal{X}_n$ podem ser expressos como uma combinação linear de elementos de $\mathcal{X}_n$, ou seja:

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = \sum_{k=1}^n C_{i,j}^k \hat{X}_k,$$

onde os coeficientes $C_{i,j}^k$ são números complexos chamados de constantes de estrutura da álgebra [20].

Definimos então uma *exponencial de Lie* como uma exponencial de uma combinação linear $\mathcal{L}$ de operadores de $\mathcal{X}_n$:

$$e^{\mathcal{L}t} = e^{(x_1 \hat{X}_1 + x_2 \hat{X}_2 + \dots + x_n \hat{X}_n)t}, \quad (\text{A.3.1})$$

onde x_i representa um coeficiente da combinação linear e t é o parâmetro, real ou complexo.

Mostraremos agora o método de diferenciação de parâmetro. A exponencial (A.3.1) pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{L}t} &= \exp \left\{ f_1(x_1, \dots, x_n; t) \hat{X}_1 \right\} \times \exp \left\{ f_2(x_1, \dots, x_n; t) \hat{X}_2 \right\} \\ &\times \dots \times \exp \left\{ f_n(x_1, \dots, x_n; t) \hat{X}_n \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.3.2})$$

Nesta exponencial cada $f_k(x_1, \dots, x_n; t)$, $k = 1, 2, \dots, n$, é uma função dos coeficientes da combinação linear $\mathcal{L}$ e do parâmetro t . O método consiste numa forma de determinar estas funções. Derivando-se (A.3.2) com relação ao parâmetro t :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{\mathcal{L}t} &= \mathcal{L} e^{\mathcal{L}t} \\ &= \dot{f}_1(x_1, \dots, x_n; t) \hat{X}_1 \exp \left\{ f_1(x_1, \dots, x_n; t) \hat{X}_1 \right\} \\ &\times \dots \times \exp \left\{ f_n(x_1, \dots, x_n; t) \hat{X}_n \right\} \\ &+ \dot{f}_2(x_1, \dots, x_n; t) \exp \left\{ f_1(x_1, \dots, x_n; t) \hat{X}_1 \right\} \\ &\times \hat{X}_2 \exp \left\{ f_2(x_1, \dots, x_n; t) \hat{X}_2 \right\} \\ &\times \dots \times \exp \left\{ f_n(x_1, \dots, x_n; t) \hat{X}_n \right\} \\ &+ \dots + \dot{f}_n(x_1, \dots, x_n; t) \exp \left\{ f_1(x_1, \dots, x_n; t) \hat{X}_1 \right\} \\ &\times \dots \times \hat{X}_n \exp \left\{ f_n(x_1, \dots, x_n; t) \hat{X}_n \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \dot{f}_i(x_1, \dots, x_n; t) \hat{Y}_{i1} \exp \left\{ f_1(x_1, \dots, x_n; t) \hat{X}_1 \right\} \\ &\times \dots \times \hat{Y}_{in} \exp \left\{ f_n(x_1, \dots, x_n; t) \hat{X}_n \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.3.3})$$

Os operadores $\hat{Y}_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, são definidos da seguinte maneira:

$$\hat{Y}_{ij} = \begin{cases} \hat{X}_i, & \text{se } i = j \\ 1, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Utilizando a fórmula de Baker-Hausdorff (A.2.1) podemos levar os operadores fora das exponenciais cada vez mais para a esquerda. Para isso devemos inserir algumas unidades. Por exemplo, no segundo termo do lado direito da igualdade inserimos

$$\left(\exp \left\{ -f_1(x_1, \dots, x_n; t) \hat{X}_1 \right\} \times \exp \left\{ f_1(x_1, \dots, x_n; t) \hat{X}_1 \right\} \right):$$

$$\begin{aligned} & f_2(x_1, \dots, x_n; t) \exp \left\{ f_1(x_1, \dots, x_n; t) \hat{X}_1 \right\} \times \hat{X}_2 \\ & \times \left(\exp \left\{ -f_1(x_1, \dots, x_n; t) \hat{X}_1 \right\} \times \exp \left\{ f_1(x_1, \dots, x_n; t) \hat{X}_1 \right\} \right) \\ & \times \exp \left\{ f_2(x_1, \dots, x_n; t) \hat{X}_2 \right\} \times \dots \times \exp \left\{ f_n(x_1, \dots, x_n; t) \hat{X}_n \right\} \end{aligned}$$

Notamos o aparecimento do fator

$$\exp \left\{ f_1(x_1, \dots, x_n; t) \hat{X}_1 \right\} \times \hat{X}_2 \times \exp \left\{ -f_1(x_1, \dots, x_n; t) \hat{X}_1 \right\}$$

onde aplicaremos a equação (A.2.1), obtendo:

$$\exp \left\{ f_1(x_1, \dots, x_n; t) \hat{X}_1 \right\} \hat{X}_2 \exp \left\{ -f_1(x_1, \dots, x_n; t) \hat{X}_1 \right\} = \mathbf{g}_2(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n; f_1)$$

onde $\mathbf{g}_2$ é função de f_1 e dos operadores de $\mathcal{X}_n$. Podemos ainda escrever a expressão acima da forma:

$$\exp \left\{ f_1(x_1, \dots, x_n; t) \hat{X}_1 \right\} \hat{X}_2 = \mathbf{g}_2(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n; f_1) \exp \left\{ f_1(x_1, \dots, x_n; t) \hat{X}_1 \right\}$$

Ao fazermos o mesmo com todos os termos de (A.3.3) obtemos uma expressão para $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n; t) \mathbf{g}_i(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n; f_1, \dots, f_{i-1}). \quad (\text{A.3.4})$$

Lembrando que:

$$\mathcal{L} = x_1 \hat{X}_1 + x_2 \hat{X}_2 + \dots + x_n \hat{X}_n, \quad (\text{A.3.5})$$

e comparando os termos referentes ao mesmo $\hat{X}_i$, obtemos uma série de equações diferenciais acopladas que junto às condições iniciais $f_i(t=0) = 0$ determinam as funções $f_i(x_1, \dots, x_n; t)$.

A.3.2 Caso para álgebra de Lie bidimensional

Para operadores do conjunto $\mathcal{X}_n = \{\hat{X}_1, \hat{X}_2\}$ obedecendo

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = c_1 \hat{X}_1 + c_2 \hat{X}_2, \quad (\text{A.3.6})$$

onde c_1 e c_2 são as duas constantes de estrutura da álgebra de Lie bidimensional, podemos através da fórmula de Baker-Hausdorff (A.2.1) chegar à expressão [48]:

$$\begin{aligned}
e^{x_1 \hat{X}_1 + x_2 \hat{X}_2} &= \exp \left\{ \frac{1}{c_2} \ln \left[c_2 x_1 \left(\frac{e^{c_2 x_1 - c_1 x_2} - 1}{c_2 x_1 - c_1 x_2} \right) + 1 \right] \hat{X}_1 \right\} \\
&\quad \times \exp \left\{ \frac{1}{c_1} \ln \left[c_2 x_1 \left(\frac{1 - e^{c_1 x_2 - c_2 x_1}}{c_2 x_1 - c_1 x_2} \right) + e^{c_1 x_2 - c_2 x_1} \right] \hat{X}_2 \right\}, \quad (\text{A.3.7})
\end{aligned}$$

onde x_1 e x_2 são números complexos. Para nós será particularmente útil o caso onde $c_2 = 0$. Assim, será necessário o limite:

$$\lim_{c_2 \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{c_2} \ln \left[c_2 x_1 \left(\frac{e^{c_2 x_1 - c_1 x_2} - 1}{c_2 x_1 - c_1 x_2} \right) + 1 \right] \right\} = -x_1 \frac{e^{-c_1 x_2} - 1}{c_1 x_2}. \quad (\text{A.3.8})$$

Então, para $c_2 = 0$:

$$e^{x_1 \hat{X}_1 + x_2 \hat{X}_2} = \exp \left\{ -x_1 \frac{e^{-c_1 x_2} - 1}{c_1 x_2} \hat{X}_1 \right\} \exp \left\{ x_2 \hat{X}_2 \right\}. \quad (\text{A.3.9})$$

Apêndice B

Dinâmica do modelo Jaynes-Cummings na aproximação dispersiva com dissipação

Neste apêndice, estudaremos a dinâmica de um átomo de dois níveis acoplado dispersivamente a um campo coerente num reservatório Born-Markoviano. O ambiente possui temperatura nula e é composto por infinitos osciladores harmônicos que não interagem entre si. Reproduzimos os resultados encontrados em [13, 12].

A equação mestra que rege o sistema é:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{AC}(t) = \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{H}_{disp}, \hat{\rho}_{AC}(t) \right] + \mathcal{L}_D \hat{\rho}_{AC}(t), \quad (\text{B.0.1})$$

onde:

$$\hat{H}_{disp} = \frac{\hbar\omega_a}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega \left[(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1) |e\rangle\langle e| - \hat{a}^\dagger\hat{a} |g\rangle\langle g| \right],$$

com $\omega = \frac{G^2}{\delta}$ e $\delta = \omega_a - \omega_c$, e

$$\mathcal{L}_D \bullet = k \left(2\hat{a} \bullet \hat{a}^\dagger - \bullet \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a} \bullet \right).$$

Devido ao fraco acoplamento com o reservatório deve-se verificar $\frac{k}{\omega_c \pm \omega} \ll 1$; e, devido à aproximação dispersiva, $\frac{|\delta|}{G} \gg \sqrt{n_{rel} + 1}$.

Na representação de interação, (B.0.1) toma a forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}_{AC}(t) = & -i\omega \left[(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1) |e\rangle\langle e| - \hat{a}^\dagger\hat{a} |g\rangle\langle g|, \hat{\rho}_{AC}(t) \right] \\ & + k \left[2\hat{a}\hat{\rho}_{AC}(t)\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}_{AC}(t) - \hat{\rho}_{AC}(t)\hat{a}^\dagger\hat{a} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.0.2})$$

O operador $\hat{\rho}_{AC}(t)$ é um operador de classe traço que atua no produto direto dos espaços de Hilbert do átomo ($\mathcal{H}_A$) e do campo ($\mathcal{H}_C$), podendo então ser representado pela matriz:

$$\hat{\rho}_{AC}(t) = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_{gg}(t) & \hat{\rho}_{ge}(t) \\ \hat{\rho}_{eg}(t) & \hat{\rho}_{ee}(t) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.0.3})$$

onde:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{gg}(t) &= \langle g | \hat{\rho}_{AC}(t) | g \rangle, \\ \hat{\rho}_{ge}(t) &= \langle g | \hat{\rho}_{AC}(t) | e \rangle, \\ \hat{\rho}_{eg}(t) &= \langle e | \hat{\rho}_{AC}(t) | g \rangle, \\ \hat{\rho}_{ee}(t) &= \langle e | \hat{\rho}_{AC}(t) | e \rangle, \end{aligned}$$

são operadores que atuam em $\mathcal{H}_C$.

Multiplicando cada lado de (B.0.2) pelos estados atômicos $\langle i | \dots | j \rangle$ encontramos as equações de movimento desacopladas para cada $\hat{\rho}_{ij}(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho}_{ee}(t) &= -i\omega [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho}_{ee}(t)] \\ &+ k [2\hat{a} \hat{\rho}_{ee}(t) \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}_{ee}(t) - \hat{\rho}_{ee}(t) \hat{a}^\dagger \hat{a}] = \mathcal{L}_+ \hat{\rho}_{ee}(t), \end{aligned} \quad (\text{B.0.4})$$

onde definimos o superoperador $\mathcal{L}_+$. Esta equação descreve a dinâmica de um oscilador harmônico de frequência ω na RWA em contato com um reservatório térmico a temperatura nula. Para $\hat{\rho}_{gg}(t)$ a equação é a mesma, mas com frequência negativa, $-\omega$.

Para os elementos não-diagonais:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho}_{eg}(t) &= -i\omega [\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}_{eg}(t) + \hat{\rho}_{eg}(t) \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\rho}_{eg}(t)] \\ &+ k [2\hat{a} \hat{\rho}_{eg}(t) \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}_{eg}(t) - \hat{\rho}_{eg}(t) \hat{a}^\dagger \hat{a}] = \mathcal{L}_{eg} \hat{\rho}_{eg}(t), \end{aligned} \quad (\text{B.0.5})$$

onde também definimos o superoperador $\mathcal{L}_{eg}$. Esta equação difere principalmente da (B.0.4) pela presença do termo não-unitário multiplicando $-i\omega$. Este termo será o responsável pelo decaimento exponencial dos elementos não-diagonais da matriz densidade total. Para $\hat{\rho}_{ge}(t)$ a equação também é a mesma mas com a frequência contrária, ou seja, $+\omega$.

Como as equações para $\hat{\rho}_{gg}(t)$ e $\hat{\rho}_{ge}(t)$ podem ser encontradas apenas trocando-se o

semelhante a ω resolveremos apenas (B.0.4) e (B.0.5). Definindo liouvillianos análogos para estes elementos, teremos como solução formal das equações de movimento:

$$\hat{\rho}_{gg}(t) = e^{\mathcal{L}t} \hat{\rho}_{gg}(0), \quad (\text{B.0.6})$$

$$\hat{\rho}_{ge}(t) = e^{\mathcal{L}_{ge}t} \hat{\rho}_{ge}(0), \quad (\text{B.0.7})$$

$$\hat{\rho}_{eg}(t) = e^{\mathcal{L}_{eg}t} \hat{\rho}_{eg}(0), \quad (\text{B.0.8})$$

$$\hat{\rho}_{ee}(t) = e^{\mathcal{L}t} \hat{\rho}_{ee}(0). \quad (\text{B.0.9})$$

Para resolvermos estas equações, dadas as condições iniciais, precisamos separar as exponenciais com o método descrito no apêndice A. Para isto, definiremos outros superoperadores que agruparão os $\hat{a}$'s e $\hat{a}^\dagger$'s de algum fator de (B.0.2) em um único superoperador:

$$\mathcal{M} \bullet \equiv (\hat{a}^\dagger \hat{a} \bullet), \quad (\text{B.0.10})$$

$$\mathcal{P} \bullet \equiv (\bullet \hat{a}^\dagger \hat{a}), \quad (\text{B.0.11})$$

$$\mathcal{J} \bullet \equiv (\hat{a} \bullet \hat{a}^\dagger). \quad (\text{B.0.12})$$

Através das relações de comutação para os superoperadores bosônicos

$$[(\hat{a} \bullet), (\hat{a}^\dagger \bullet)] = (1 \bullet) = 1, \quad (\text{B.0.13})$$

$$[(\bullet \hat{a}), (\bullet \hat{a}^\dagger)] = -(\bullet 1) = -1, \quad (\text{B.0.14})$$

podemos encontrar os comutadores:

$$[\mathcal{J}, \mathcal{M}] = \mathcal{J}, \quad (\text{B.0.15})$$

$$[\mathcal{J}, \mathcal{P}] = \mathcal{J}, \quad (\text{B.0.16})$$

$$[\mathcal{M}, \mathcal{P}] = 0. \quad (\text{B.0.17})$$

Observando (B.0.15) e (B.0.16) percebemos que $\mathcal{J}$ e $(\mathcal{M} + \mathcal{P})$ fecham uma álgebra de Lie:

$$[\mathcal{J}, \mathcal{M} + \mathcal{P}] = 2\mathcal{J}. \quad (\text{B.0.18})$$

Em função destes superoperadores, os liouvillianos para as matrizes densidade redu-

zidas tomam a forma:

$$\mathcal{L}_{\pm} = \mp i\omega (\mathcal{M} - \mathcal{P}) + k (2\mathcal{J} - \mathcal{M} - \mathcal{P}), \quad (\text{B.0.19})$$

$$\mathcal{L}_{eg} = -i\omega (\mathcal{M} + \mathcal{P} + 1) + k (2\mathcal{J} - \mathcal{M} - \mathcal{P}). \quad (\text{B.0.20})$$

Lembrando que $\mathcal{L}_{ge}$ pode ser encontrado trocando-se $\omega \rightarrow -\omega$ em (B.0.20).

B.1 Exponenciais de Lie

Desacoplaremos primeiramente a exponencial de $\mathcal{L}_{+}$, e conseqüentemente de $\mathcal{L}_{-}$, e logo após as de $\mathcal{L}_{eg}$ e $\mathcal{L}_{ge}$.

B.1.1 Desacoplamento dos elementos diagonais

A solução da equação (B.0.9):

$$\hat{\rho}_{ee}(t) = \exp[-i\omega (\mathcal{M} - \mathcal{P})t + k (2\mathcal{J} - \mathcal{M} - \mathcal{P})t] \hat{\rho}_{ee}(0), \quad (\text{B.1.1})$$

pode ser encontrada utilizando-se (A.3.7). Reescrevendo a exponencial acima

$$\exp[-i\omega (\mathcal{M} - \mathcal{P})t + k (2\mathcal{J} - \mathcal{M} - \mathcal{P})t] = \exp[2kt\mathcal{J} - (k + i\omega)t\mathcal{M} - (k - i\omega)t\mathcal{P}].$$

podemos fazer $\hat{X}_1 = \mathcal{J}$, $x_1 = 2kt$, $\hat{X}_2 = -(k + i\omega)t\mathcal{M} - (k - i\omega)t\mathcal{P}$ e $x_2 = 1$. O comutador relevante será:

$$[\mathcal{J}, -(k + i\omega)t\mathcal{M} - (k - i\omega)t\mathcal{P}] = -2kt\mathcal{J},$$

revelando $c_1 = -2kt$ e $c_2 = 0$. Assim, de acordo com (A.3.9):

$$e^{x_1\hat{X}_1+x_2\hat{X}_2} = \exp\left\{-x_1\frac{e^{-c_1x_2}-1}{c_1x_2}\hat{X}_1\right\} \exp\left\{x_2\hat{X}_2\right\}.$$

Temos

$$\begin{aligned} \exp[2kt\mathcal{J} - (k + i\omega)t\mathcal{M} - (k - i\omega)t\mathcal{P}] = \\ \exp[(e^{2kt} - 1)\mathcal{J}] \exp[-(k + i\omega)t\mathcal{M}] \exp[-(k - i\omega)t\mathcal{P}]. \end{aligned} \quad (\text{B.1.2})$$

A exponencial contendo $\mathcal{M}$ e $\mathcal{P}$ foi desacoplada diretamente, visto que estes superoperadores comutam entre si.

Abrindo as exponenciais em séries de potência e explicitando os operadores bosônicos, encontramos sua ação sobre $\hat{\rho}_{ee}(0)$:

$$\hat{\rho}_{ee}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{2kt} - 1)^n}{n!} \hat{a}^n e^{-(k+i\omega)t\hat{a}^\dagger\hat{a}} \times \hat{\rho}_{ee}(0) \times e^{-(k-i\omega)t\hat{a}^\dagger\hat{a}} (\hat{a}^\dagger)^n. \quad (\text{B.1.3})$$

B.1.2 Desacoplamento dos elementos não-diagonais

Resolveremos agora a equação (B.0.8):

$$\hat{\rho}_{eg}(t) = \exp[-i\omega(\mathcal{M} + \mathcal{P} + 1)t + k(2\mathcal{J} - \mathcal{M} - \mathcal{P})t] \hat{\rho}_{eg}(0). \quad (\text{B.1.4})$$

Reescrevendo a exponencial

$$\exp[-i\omega(\mathcal{M} + \mathcal{P} + 1)t + k(2\mathcal{J} - \mathcal{M} - \mathcal{P})t] = e^{-i\omega t} \exp[2kt\mathcal{J} - (k + i\omega)(\mathcal{M} + \mathcal{P})],$$

e ignorando por enquanto o termo $e^{-i\omega t}$, comparamos esta exponencial com (A.3.7) e fazemos $\hat{X}_1 = \mathcal{J}$, $x_1 = 2kt$, $\hat{X}_2 = (\mathcal{M} + \mathcal{P})$ e $x_2 = -(k + i\omega)t$. O comutador $[\hat{X}_1, \hat{X}_2]$ vale

$$[\mathcal{J}, \mathcal{M} + \mathcal{P}] = 2\mathcal{J},$$

ou seja, $c_1 = 2$ e $c_2 = 0$. Assim, de acordo com (A.3.9) encontramos:

$$\begin{aligned} \exp[2kt\mathcal{J} - (k + i\omega)(\mathcal{M} + \mathcal{P})] = \\ \exp\left[\frac{k}{k + i\omega}(e^{2(k+i\omega)t} - 1)\mathcal{J}\right] \exp[-(k + i\omega)t\mathcal{M}] \\ \times \exp[-(k + i\omega)t\mathcal{P}]. \end{aligned} \quad (\text{B.1.5})$$

Expressando as exponenciais em séries de potência e explicitando os operadores bosônicos, encontramos sua ação sobre $\hat{\rho}_{eg}(0)$:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{eg}(t) = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{k}{k + i\omega}(e^{2(k+i\omega)t} - 1) \right]^n \hat{a}^n \exp[-(k + i\omega)t\hat{a}^\dagger\hat{a}] \times \\ \hat{\rho}_{eg}(0) \exp[-(k + i\omega)t\hat{a}^\dagger\hat{a}] (\hat{a}^\dagger)^n. \end{aligned} \quad (\text{B.1.6})$$

B.2 Evolução de um estado inicial puro e separável

Através das equações (B.1.3) e (B.1.6) podemos calcular a matriz densidade total do sistema átomo-campo. Usaremos como estado inicial o mesmo usado para o sistema com fonte:

$$|\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle) \otimes |\alpha\rangle. \quad (\text{B.2.1})$$

Para que a aproximação dispersiva seja válida deve-se respeitar a condição: $\frac{|\delta|}{G} \gg |\alpha|$. A matriz densidade do sistema num tempo t será da forma:

$$\hat{\rho}_{AC}(t) = \hat{\rho}_{gg}(t)|g\rangle\langle g| + \hat{\rho}_{ge}(t)|g\rangle\langle e| + \hat{\rho}_{eg}(t)|e\rangle\langle g| + \hat{\rho}_{ee}(t)|e\rangle\langle e|. \quad (\text{B.2.2})$$

Devemos calcular agora a evolução de cada elemento $\hat{\rho}_{ij}(t)$.

Partindo de (B.1.3):

$$\hat{\rho}_{ee}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{2kt} - 1)^n}{n!} \hat{a}^n e^{-(k+i\omega)t\hat{a}^\dagger\hat{a}} \left(\frac{1}{2} |\alpha\rangle\langle\alpha| \right) e^{-(k-i\omega)t\hat{a}^\dagger\hat{a}} (\hat{a}^\dagger)^n.$$

O efeito das exponenciais "vizinhas" de $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ podem ser visualizados com a ajuda da relação¹:

$$e^{x\hat{a}^\dagger\hat{a}}|\alpha\rangle = \exp\left[\frac{|\alpha|^2}{2}(|e^x|^2 - 1)\right]|e^x\alpha\rangle. \quad (\text{B.2.3})$$

Assim:

¹Ela pode ser facilmente deduzida usando-se a representação de um estado coerente em função de estados número (2.6.7).

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho}_{ee}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{2kt} - 1)^n}{n!} \hat{a}^n e^{\frac{|\alpha|^2}{2} (|e^{-(k+i\omega)t}|^2 - 1)} |e^{-(k+i\omega)t}\alpha\rangle \langle e^{-(k+i\omega)t}\alpha| e^{\frac{|\alpha|^2}{2} (|e^{-(k+i\omega)t}|^2 - 1)} (\hat{a}^\dagger)^n \\
 &= \frac{1}{2} e^{|\alpha|^2 (e^{-2kt} - 1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{2kt} - 1)^n}{n!} \hat{a}^n |e^{-(k+i\omega)t}\alpha\rangle \langle e^{-(k+i\omega)t}\alpha| (\hat{a}^\dagger)^n \\
 &= \frac{1}{2} e^{|\alpha|^2 (e^{-2kt} - 1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{2kt} - 1)^n}{n!} (e^{-(k+i\omega)t}\alpha)^n |e^{-(k+i\omega)t}\alpha\rangle \langle e^{-(k+i\omega)t}\alpha| (e^{-(k-i\omega)t}\alpha^*)^n \\
 &= \frac{1}{2} e^{|\alpha|^2 (e^{-2kt} - 1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - e^{-2kt})^n}{n!} (\alpha\alpha^*)^n |e^{-(k+i\omega)t}\alpha\rangle \langle e^{-(k+i\omega)t}\alpha| \\
 &= \frac{1}{2} e^{|\alpha|^2 (e^{-2kt} - 1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - e^{-2kt})^n}{n!} (|\alpha|^2)^n |e^{-(k+i\omega)t}\alpha\rangle \langle e^{-(k+i\omega)t}\alpha| \\
 &= \frac{1}{2} |e^{-(k+i\omega)t}\alpha\rangle \langle e^{-(k+i\omega)t}\alpha|.
 \end{aligned}$$

Definindo

$$\alpha(t) \equiv e^{-kt}\alpha(0). \quad (\text{B.2.4})$$

Podemos escrever:

$$\hat{\rho}_{ee}(t) = \frac{1}{2} |\alpha(t) e^{-i\omega t}\rangle \langle \alpha(t) e^{-i\omega t}|. \quad (\text{B.2.5})$$

Para o elemento $\hat{\rho}_{eg}(t)$ o procedimento é o mesmo. Partimos de B.1.6:

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho}_{eg}(t) &= e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{k}{k+i\omega} (e^{2(k+i\omega)t} - 1) \right]^n \hat{a}^n \exp[-(k+i\omega)t \hat{a}^\dagger \hat{a}] \\
 &\quad \times \left(\frac{1}{2} |\alpha\rangle \langle \alpha| \right) \exp[-(k+i\omega)t \hat{a}^\dagger \hat{a}] (\hat{a}^\dagger)^n,
 \end{aligned}$$

e tendo em vista (B.2.3):

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho}_{eg}(t) &= \frac{1}{2} e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{k}{k+i\omega} (e^{2(k+i\omega)t} - 1) \right]^n \hat{a}^n |\alpha e^{-(k+i\omega)t}\rangle \langle \alpha e^{-(k-i\omega)t}| \\
 &\quad \times (\hat{a}^\dagger)^n \exp[|\alpha|^2 (e^{-2kt} - 1)] \\
 &= \frac{1}{2} \exp[-i\omega t + |\alpha|^2 (e^{-2kt} - 1)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{k}{k+i\omega} (e^{2(k+i\omega)t} - 1) \right]^n [\alpha e^{-(k+i\omega)t}]^n \\
 &\quad \times |\alpha e^{-(k+i\omega)t}\rangle \langle \alpha e^{-(k-i\omega)t}| [\alpha^* e^{-(k+i\omega)t}]^n \\
 &= \frac{1}{2} \exp[-i\omega t + |\alpha|^2 (e^{-2kt} - 1)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{k}{k+i\omega} (1 - e^{-2(k+i\omega)t}) \right]^n \\
 &\quad \times |\alpha|^{2n} |\alpha e^{-(k+i\omega)t}\rangle \langle \alpha e^{-(k-i\omega)t}| \\
 &= \frac{1}{2} \exp \left[-i\omega t - |\alpha|^2 (1 - e^{-2kt}) - |\alpha|^2 \frac{k}{k+i\omega} (e^{-2(k+i\omega)t} - 1) \right] \\
 &\quad \times |\alpha e^{-(k+i\omega)t}\rangle \langle \alpha e^{-(k-i\omega)t}|.
 \end{aligned} \tag{B.2.6}$$

Definindo:

$$\eta(t) \equiv 1 - e^{-2kt} + \frac{k}{k+i\omega} (e^{-2(k+i\omega)t} - 1), \tag{B.2.7}$$

podemos escrever $\hat{\rho}_{eg}(t)$ de forma mais compacta:

$$\hat{\rho}_{eg}(t) = \frac{1}{2} \exp[-i\omega t - \eta(t) |\alpha|^2] |\alpha(t) e^{-i\omega t}\rangle \langle \alpha(t) e^{i\omega t}|. \tag{B.2.8}$$

As fases deste elemento, sendo reais ou complexas, exercerão papéis bastante diversos. A parte real será responsável pela anulação destes elementos não-diagonais. O ambiente, através de inúmeras medições da energia do sistema, carrega informação de-que-caminho causando decoerência e é esta parte real que medirá quanta informação está sendo passada. A parte puramente imaginária será responsável apenas por uma fase unimodular sem consequências para os observáveis da dinâmica. Vê-se conveniente então separar estas duas contribuições. Vamos escrever $-\eta(t) |\alpha|^2$ como função de duas funções reais $\Gamma(t)$ e $\Theta(t)$:

$$-\eta(t) |\alpha|^2 = \Gamma(t) + i\Theta(t)$$

e, através de sua definição (B.2.7), encontrar seus valores:

$$\Gamma(t) = -|\alpha|^2 (1 - e^{-2kt}) - \frac{|\alpha|^2 k}{k^2 + \omega^2} [e^{-2kt} (k \cos 2\omega t - \omega \sin 2\omega t) - k], \tag{B.2.9}$$

$$\Theta(t) = \frac{|\alpha|^2 k}{k^2 + \omega^2} [e^{-2kt} (k \sin 2\omega t + \omega \cos 2\omega t) - \omega]. \tag{B.2.10}$$

Os resultados para todos os elementos são:

$$\hat{\rho}_{ee}(t) = e^{\mathcal{L}_+ t} \left(\frac{1}{2} |\alpha\rangle \langle \alpha| \right) = \frac{1}{2} |e^{-i\omega t} \alpha(t)\rangle \langle e^{-i\omega t} \alpha(t)|, \quad (\text{B.2.11})$$

$$\hat{\rho}_{gg}(t) = e^{\mathcal{L}_- t} \left(\frac{1}{2} |\alpha\rangle \langle \alpha| \right) = \frac{1}{2} |e^{i\omega t} \alpha(t)\rangle \langle e^{i\omega t} \alpha(t)|, \quad (\text{B.2.12})$$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{eg}(t) &= e^{\mathcal{L}_{eg} t} \left(\frac{1}{2} |\alpha\rangle \langle \alpha| \right) = \frac{1}{2} \exp \{ \Gamma(t) + i [\Theta(t) - \omega t] \} \\ &\quad \times |e, \alpha(t) e^{-i\omega t}\rangle \langle g, \alpha(t) e^{i\omega t}|, \end{aligned} \quad (\text{B.2.13})$$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{ge}(t) &= e^{\mathcal{L}_{ge} t} \left(\frac{1}{2} |\alpha\rangle \langle \alpha| \right) = \frac{1}{2} \exp \{ \Gamma(t) - i [\Theta(t) - \omega t] \} \\ &\quad \times |g, \alpha(t) e^{i\omega t}\rangle \langle e, \alpha(t) e^{-i\omega t}|. \end{aligned} \quad (\text{B.2.14})$$

De posse das expressões acima podemos expressar a evolução da matriz densidade total para um tempo t :

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{AC}(t) &= \frac{1}{2} \{ |e, \alpha(t) e^{-i\omega t}\rangle \langle e, \alpha(t) e^{-i\omega t}| + |g, \alpha(t) e^{i\omega t}\rangle \langle g, \alpha(t) e^{i\omega t}| \\ &\quad + \exp \{ \Gamma(t) + i [\Theta(t) - \omega t] \} |e, \alpha(t) e^{-i\omega t}\rangle \langle g, \alpha(t) e^{i\omega t}| \\ &\quad + \exp \{ \Gamma(t) - i [\Theta(t) - \omega t] \} |g, \alpha(t) e^{i\omega t}\rangle \langle e, \alpha(t) e^{-i\omega t}| \}. \end{aligned} \quad (\text{B.2.15})$$

Apêndice C

Desacoplamento das exponenciais de Lie das equações de movimento na interação dispersiva e dissipativa com fonte

Estamos interessados em resolver a dinâmica para um sistema onde um átomo de dois níveis, $|e\rangle$ e $|g\rangle$, interage dispersivamente com um campo coerente no interior de uma cavidade dissipativa acoplada a uma fonte clássica de microondas. A cavidade, de altíssima qualidade, é modelada como um reservatório térmico markoviano a temperatura nula. O sistema obedece à equação mestra:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{AC}(t) = \left[\hat{H}_{disp}, \hat{\rho}_{AC}(t)\right] + \mathcal{L}_F(\hat{\rho}_{AC}(t)) + \mathcal{L}_D(\hat{\rho}_{AC}(t)), \quad (\text{C.0.1})$$

onde $\hat{H}_{disp}$ representa o hamiltoniano de Jaynes-Cummings no regime dispersivo (2.7.16), $\mathcal{L}_F$ o superoperador liouvilliano da fonte (3.1.1) e $\mathcal{L}_D$ o correspondente à ação não-unitária do ambiente sobre o sistema (2.3.10). Na representação de interação e considerando a fonte em ressonância com o modo do campo teremos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}_{AC}(t) = & -i\omega \left[(\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1) |e\rangle \langle e| - \hat{a}^\dagger \hat{a} |g\rangle \langle g|, \hat{\rho}_{AC}(t) \right] - i \left[F\hat{a}^\dagger + F^*\hat{a}, \hat{\rho}_{AC}(t) \right] \\ & + k \left[2\hat{a}\hat{\rho}_{AC}(t)\hat{a}^\dagger - \hat{\rho}_{AC}(t)\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}_{AC}(t) \right], \end{aligned} \quad (\text{C.0.2})$$

onde $\omega \equiv \frac{G^2}{\delta}$, G (2.7.4) é uma medida da intensidade do acoplamento átomo-campo e $\delta = \omega_a - \omega_c$.

Representando a matriz densidade na forma:

$$\hat{\rho}_{AC}(t) = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_{gg}(t) & \hat{\rho}_{ge}(t) \\ \hat{\rho}_{eg}(t) & \hat{\rho}_{ee}(t) \end{pmatrix}$$

chegamos a um sistema de equações de movimento desacopladas para os elementos $\hat{\rho}_{ij}(t)$:

$$\hat{\rho}_{ij}(t) = e^{\mathcal{L}'_{ij}t} \hat{\rho}_{ij}(0). \quad (\text{C.0.3})$$

Na equação acima, $\mathcal{L}'_{ij}$ representa os superoperadores associados aos elementos $\hat{\rho}_{ij}(t)$: $\mathcal{L}'_+ \Rightarrow \hat{\rho}_{ee}(t)$, $\mathcal{L}'_- \Rightarrow \hat{\rho}_{gg}(t)$, $\mathcal{L}'_{eg} \Rightarrow \hat{\rho}_{eg}(t)$, $\mathcal{L}'_{ge} \Rightarrow \hat{\rho}_{ge}(t)$. Como as exponenciais apresentam operadores não-comutativos entre si devemos usar o método de diferenciação de parâmetro, descrito no Apêndice (A), para escrevê-las como um produto de exponenciais destes operadores.

Os superoperadores $\mathcal{L}'_{ij}$ podem ser vistos como uma soma de duas partes, uma responsável pela evolução dispersiva e dissipativa, $\mathcal{L}_{ij}$, e outra devida à fonte, $\mathcal{L}_F$:

$$\mathcal{L}'_{ij} = \mathcal{L}_{ij} + \mathcal{L}_F,$$

onde $\mathcal{L}_{ij}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{+\bullet} &= -i\omega [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \bullet] + \mathcal{L}_D \bullet, \\ \mathcal{L}_{-\bullet} &= i\omega [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \bullet] + \mathcal{L}_D \bullet, \\ \mathcal{L}_{eg\bullet} &= -i\omega [\hat{a}^\dagger \hat{a} \bullet + \bullet \hat{a}^\dagger \hat{a} + \bullet] + \mathcal{L}_D \bullet, \\ \mathcal{L}_{ge\bullet} &= i\omega [\hat{a}^\dagger \hat{a} \bullet + \bullet \hat{a}^\dagger \hat{a} + \bullet] + \mathcal{L}_D \bullet, \end{aligned}$$

e:

$$\mathcal{L}_F \bullet = -i [F \hat{a}^\dagger + F^* \hat{a}, \bullet],$$

C.1 Superoperadores

Para utilizar o método de diferenciação de parâmetros precisamos de uma álgebra de Lie (ver Apêndice A) para cada $\mathcal{L}'_{ij}$. Antes de encontrá-las é conveniente definir alguns superoperadores:

$$\mathcal{M}\bullet \equiv (\hat{a}^\dagger \hat{a} \bullet), \mathcal{P}\bullet \equiv (\bullet \hat{a}^\dagger \hat{a}), \mathcal{J}\bullet \equiv (\hat{a} \bullet \hat{a}^\dagger).$$

que são os mesmo usados no Apêndice B.

Para solucionar o sistema com fonte também serão necessários:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\pm\bullet} &\equiv (\hat{a}^\dagger \bullet) \pm (\bullet \hat{a}^\dagger), \\ \mathcal{Y}_{\pm\bullet} &\equiv (\bullet \hat{a}) \pm (\hat{a} \bullet). \end{aligned}$$

As relações de comutação entre estes operadores podem ser facilmente determinadas com o auxílio de:

$$\begin{aligned} [(\hat{a}\bullet), (\hat{a}^\dagger\bullet)] &= (1\bullet) = 1, \\ [(\bullet\hat{a}), (\bullet\hat{a}^\dagger)] &= -(\bullet 1) = -1, \\ \text{e } [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= 1. \end{aligned}$$

Os comutadores não nulos se encontram abaixo:

$$\begin{aligned} [\mathcal{J}, \mathcal{P}] &= \mathcal{J}, \\ [\mathcal{J}, \mathcal{M}] &= \mathcal{J}, \\ [\mathcal{J}, \mathcal{X}_\pm] &= \frac{1}{2}(\mathcal{X}_+ - \mathcal{X}_-), \\ [\mathcal{J}, \mathcal{Y}_\pm] &= \frac{1}{2}(\mathcal{Y}_+ - \mathcal{Y}_-), \\ [\mathcal{P}, \mathcal{X}_\pm] &= \pm \frac{1}{2}(\mathcal{X}_- - \mathcal{X}_+), \\ [\mathcal{P}, \mathcal{Y}_\pm] &= \frac{1}{2}(\mathcal{Y}_+ + \mathcal{Y}_-), \\ [\mathcal{M}, \mathcal{X}_\pm] &= \frac{1}{2}(\mathcal{X}_+ + \mathcal{X}_-), \\ [\mathcal{M}, \mathcal{Y}_\pm] &= \pm \frac{1}{2}(\mathcal{Y}_- - \mathcal{Y}_+), \\ [\mathcal{X}_+, \mathcal{Y}_-] &= -[\mathcal{X}_-, \mathcal{Y}_+] = 2. \end{aligned} \tag{C.1.1}$$

C.2 Desacoplando as exponenciais de Lie dos elementos diagonais

Lidaremos apenas com a exponencial:

$$\hat{\rho}_{ee}(t) = e^{\mathcal{L}'_+ t} \hat{\rho}_{ee}(0).$$

A exponencial para $e^{\mathcal{L}'_- t}$ pode ser conseguida fazendo-se $\omega \rightarrow -\omega$.

Em termos dos superoperadores descritos em (C.1), $\mathcal{L}'_+$ se torna;

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_+ &= -i\omega(\mathcal{M} - \mathcal{P}) + k(2\mathcal{J} - \mathcal{M} - \mathcal{P}) - i(F\mathcal{X}_- - F^*\mathcal{Y}_-) \\ &= \mathcal{L}_+ - i(F\mathcal{X}_- - F^*\mathcal{Y}_-). \end{aligned} \tag{C.2.1}$$

Podemos fechar uma álgebra de Lie utilizando $\mathcal{L}_+$, $\mathcal{X}_-$ e $\mathcal{Y}_-$:

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_+, \mathcal{X}_-] &= -(k + i\omega) \mathcal{X}_-, \\ [\mathcal{L}_+, \mathcal{Y}_-] &= -(k - i\omega) \mathcal{Y}_-, \\ [\mathcal{X}_-, \mathcal{Y}_-] &= 0. \end{aligned}$$

De acordo com (A.3.2), procuramos uma expressão do tipo:

$$e^{\mathcal{L}'_+ t} = e^{x_-(t)\mathcal{X}_-} e^{y_-(t)\mathcal{Y}_-} e^{\lambda(t)\mathcal{L}_+}. \quad (\text{C.2.2})$$

Diferenciando a equação acima em relação ao parâmetro t :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_+ e^{\mathcal{L}'_+ t} &= \dot{x}_-(t) \mathcal{X}_- e^{x_-(t)\mathcal{X}_-} e^{y_-(t)\mathcal{Y}_-} e^{\lambda(t)\mathcal{L}_+} + \dot{y}_- \mathcal{Y}_- e^{x_-(t)\mathcal{X}_-} e^{y_-(t)\mathcal{Y}_-} e^{\lambda(t)\mathcal{L}_+} \\ &\quad + \dot{\lambda} e^{x_-(t)\mathcal{X}_-} e^{y_-(t)\mathcal{Y}_-} \mathcal{L}_+ e^{\lambda(t)\mathcal{L}_+}. \end{aligned}$$

Note que $\mathcal{Y}_-$ comuta com $\mathcal{X}_-$, por isso ele já pode ser colocado à esquerda no segundo termo à direita da igualdade. Para o último termo podemos usar a relação [11, 48]:

$$e^{a\hat{A}} \hat{B} e^{-a\hat{A}} = e^{\beta a} \hat{B} + (e^{\beta a} - 1) \frac{\alpha}{\beta} \hat{A},$$

válida para uma álgebra bidimensional:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \alpha \hat{A} + \beta \hat{B}.$$

Precisaremos usá-la duas vezes, e em ambas $\beta = 0$. Então devemos tomar o limite:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} e^{\beta a} \hat{B} + (e^{\beta a} - 1) \frac{\alpha}{\beta} \hat{A} = \hat{B} + \alpha a \hat{A}. \quad (\text{C.2.3})$$

Olhando para o termo alvo (o último) e inserindo a unidade $(e^{-y_-(t)\mathcal{Y}_-} e^{-x_-(t)\mathcal{X}_-} e^{x_-(t)\mathcal{X}_-} e^{y_-(t)\mathcal{Y}_-})$ à direita de $\mathcal{L}_+$:

$$\underbrace{\dot{\lambda} e^{x_-(t)\mathcal{X}_-} \overbrace{e^{y_-(t)\mathcal{Y}_-} \mathcal{L}_+ e^{-y_-(t)\mathcal{Y}_-}}^I e^{-x_-(t)\mathcal{X}_-}}_{II} e^{x_-(t)\mathcal{X}_-} e^{y_-(t)\mathcal{Y}_-} e^{\lambda(t)\mathcal{L}_+}$$

Tendo em vista os comutadores e o limite (C.2.3):

$$I = \mathcal{L}_+ + (k - i\omega) y_- \mathcal{Y}_-,$$

e, portanto

$$II = (k + i\omega) x_- \mathcal{X}_- + \mathcal{L}_+ + (k - i\omega) y_- \mathcal{Y}_-.$$

Então:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_+ e^{\mathcal{L}'_+ t} &= \left[\dot{x}_- + \dot{\lambda} (k + i\omega) x_- \right] \mathcal{X}_- e^{x_- \mathcal{X}_-} e^{y_- \mathcal{Y}_-} e^{\lambda \mathcal{L}_+} \\ &\quad + \left[\dot{y}_- + \dot{\lambda} (k - i\omega) y_- \right] \mathcal{Y}_- e^{x_- \mathcal{X}_-} e^{y_- \mathcal{Y}_-} e^{\lambda \mathcal{L}_+} \\ &\quad + \dot{\lambda} \mathcal{L}_+ e^{x_- \mathcal{X}_-} e^{y_- \mathcal{Y}_-} e^{\lambda \mathcal{L}_+}. \end{aligned} \quad (\text{C.2.4})$$

Eliminando $e^{\mathcal{L}'_+ t}$ de todos os fatores:

$$\mathcal{L}'_+ = \left[\dot{x}_- + \dot{\lambda} (k + i\omega) x_- \right] \mathcal{X}_- + \left[\dot{y}_- + \dot{\lambda} (k - i\omega) y_- \right] \mathcal{Y}_- + \dot{\lambda} \mathcal{L}_+. \quad (\text{C.2.5})$$

Comparando com

$$\mathcal{L}'_+ = \mathcal{L}_+ - i (F \mathcal{X}_- - F^* \mathcal{Y}_-),$$

e igualando termos de um mesmo superoperador encontramos um sistema de equações diferenciais acopladas:

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = 1, \\ -iF = \dot{x}_- + \dot{\lambda} (k + i\omega) x_-, \\ iF^* = \dot{y}_- + \dot{\lambda} (k - i\omega) y_-, \end{cases}$$

cuja solução, com condições iniciais $x_-(0) = y_-(0) = \lambda(0) = 0$, é:

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= t, \\ x_-(t) &= \frac{F}{\omega - ik} [e^{-(k+i\omega)t} - 1], \\ y_-(t) &= \frac{F^*}{\omega + ik} [e^{-(k-i\omega)t} - 1]. \end{aligned} \quad (\text{C.2.6})$$

Assim, podemos escrever a expressão para $\hat{\rho}_{ee}(t)$ com três exponenciais:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{ee}(t) &= e^{\mathcal{L}'_+ t} \hat{\rho}_{ee}(0) \\ &= \exp \left\{ \frac{F}{\omega - ik} [e^{-(k+i\omega)t} - 1] \mathcal{X}_- \right\} \exp \left\{ \frac{F^*}{\omega + ik} [e^{-(k-i\omega)t} - 1] \mathcal{Y}_- \right\} \\ &\quad \times \exp \{ \mathcal{L}_+ t \} \hat{\rho}_{ee}(0).\end{aligned}$$

Explicitando os operadores bosônicos encontramos sua ação sobre $\hat{\rho}_{ee}(0)$:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{ee}(t) &= \exp \left\{ \frac{F}{\omega - ik} [e^{-(k+i\omega)t} - 1] \hat{a}^\dagger \right\} \exp \left\{ -\frac{F^*}{\omega + ik} [e^{-(k-i\omega)t} - 1] \hat{a} \right\} \\ &\quad \times \exp \{ \mathcal{L}_+ t \} \hat{\rho}_{ee}(0) \exp \left\{ \frac{F^*}{\omega + ik} [e^{-(k-i\omega)t} - 1] \hat{a} \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{F}{\omega - ik} [e^{-(k+i\omega)t} - 1] \hat{a}^\dagger \right\}.\end{aligned}\tag{C.2.7}$$

As exponenciais tomam a forma de um operador deslocamento de Weyl-Heisenberg (2.6.8):

$$\begin{aligned}\hat{D}(\alpha) &= \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}}, \\ \hat{D}^\dagger(\alpha) &= \hat{D}(-\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-\alpha \hat{a}^\dagger} e^{\alpha^* \hat{a}} = e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha^* \hat{a}} e^{-\alpha \hat{a}^\dagger}, \\ \text{com } \alpha &= \frac{F}{\omega - ik} [e^{-(k+i\omega)t} - 1]. \text{ Chegamos a:}\end{aligned}$$

$$\hat{\rho}_{ee}(t) = \hat{D}[\beta_e(t)] [\exp(\mathcal{L}_+ t) \hat{\rho}_{ee}(0)] \hat{D}^\dagger[\beta_e(t)],\tag{C.2.8}$$

onde definimos:

$$\beta_e(t) \equiv \frac{F}{\omega - ik} [e^{-(k+i\omega)t} - 1].\tag{C.2.9}$$

Fazendo $\omega \rightarrow -\omega$ encontramos a expressão para $\hat{\rho}_{gg}(t)$:

$$\hat{\rho}_{gg}(t) = \hat{D}[\beta_g(t)] [\exp(\mathcal{L}_- t) \hat{\rho}_{gg}(0)] \hat{D}^\dagger[\beta_g(t)],\tag{C.2.10}$$

com

$$\beta_g(t) \equiv -\frac{F}{\omega + ik} [e^{-(k-i\omega)t} - 1].\tag{C.2.11}$$

A ação das exponenciais $\exp(\mathcal{L}_\pm t)$ são discutidas no Apêndice B.

C.3 Desacoplando as exponenciais de Lie dos elementos não-diagonais

Queremos resolver

$$\hat{\rho}_{eg}(t) = e^{\mathcal{L}'_{eg}t} \hat{\rho}_{eg}(0).$$

A evolução de $\hat{\rho}_{ge}(t)$ pode ser achada facilmente explorando a hermiticidade da matriz densidade $\hat{\rho}_{ge}(t) = \hat{\rho}_{eg}^\dagger(t)$.

Em termos dos superoperadores descritos em (C.1), $\mathcal{L}'_{eg}$ se torna;

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{eg} &= -i\omega(\mathcal{M} + \mathcal{P} + 1) + k(2\mathcal{J} - \mathcal{M} - \mathcal{P}) - i(F\mathcal{X}_- - F^*\mathcal{Y}_-) \\ &= \mathcal{L}_{eg} - i(F\mathcal{X}_- - F^*\mathcal{Y}_-). \end{aligned} \quad (\text{C.3.1})$$

Podemos fechar uma álgebra de Lie utilizando $\{\mathcal{L}_{eg}, F\mathcal{X}_- - F^*\mathcal{Y}_-, F\mathcal{X}_+ - F^*\mathcal{Y}_+\}$. Para verificar isto, vejamos os comutadores abaixo:

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_{eg}, F\mathcal{X}_- - F^*\mathcal{Y}_-] &= -k(F\mathcal{X}_- - F^*\mathcal{Y}_-) - i\omega(F\mathcal{X}_+ - F^*\mathcal{Y}_+), \\ [\mathcal{L}_{eg}, F\mathcal{X}_+ - F^*\mathcal{Y}_+] &= -(2k + i\omega)(F\mathcal{X}_- - F^*\mathcal{Y}_-) + k(F\mathcal{X}_+ - F^*\mathcal{Y}_+), \\ [F\mathcal{X}_- - F^*\mathcal{Y}_-, F\mathcal{X}_+ - F^*\mathcal{Y}_+] &= 4|F|^2 \hat{I}. \end{aligned}$$

De acordo com (A.3.2), procuramos uma expressão do tipo:

$$e^{\mathcal{L}'_{eg}t} = e^{z(t)\hat{I}} e^{p(t)(F\mathcal{X}_- - F^*\mathcal{Y}_-)} e^{q(t)(F\mathcal{X}_+ - F^*\mathcal{Y}_+)} e^{s(t)\mathcal{L}_{eg}}. \quad (\text{C.3.2})$$

Repare na presença da exponencial de $\hat{I}$, o operador identidade, pelo fato dele aparecer nos comutadores. Diferenciando a equação acima em relação ao parâmetro t :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{eg} e^{\mathcal{L}'_{eg}t} &= \left[\dot{z} + \dot{p}(F\mathcal{X}_- - F^*\mathcal{Y}_-) + \dot{s} \right] e^z e^{p(F\mathcal{X}_- - F^*\mathcal{Y}_-)} e^{q(F\mathcal{X}_+ - F^*\mathcal{Y}_+)} e^{s\mathcal{L}_{eg}} \\ &\quad + \dot{q} e^z e^{p(F\mathcal{X}_- - F^*\mathcal{Y}_-)} (F\mathcal{X}_+ - F^*\mathcal{Y}_+) e^{q(F\mathcal{X}_+ - F^*\mathcal{Y}_+)} e^{s\mathcal{L}_{eg}}. \end{aligned}$$

De modo semelhante ao feito na seção anterior, inserimos a unidade

$$(e^{-p(F\mathcal{X}_- - F^*\mathcal{Y}_-)} e^{-z} e^z e^{p(F\mathcal{X}_- - F^*\mathcal{Y}_-)})$$

à direita de $(F\mathcal{X}_+ - F^*\mathcal{Y}_+)$ no último termo e usamos a fórmula de Baker-Hausdorff (A.2.1) repetidas vezes. Deste modo, obtemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_{eg} = & \dot{z} + 4p\dot{q}|F|^2 - 4\dot{s}p\dot{q}k|F|^2 + 2i\dot{s}p^2\omega|F|^2 - 2(2k + i\omega)\dot{s}q^2|F|^2 \\ & + \left[\dot{p} + \dot{s}pk + (2k + i\omega)\dot{s}q\right](F\mathcal{X}_- - F^*\mathcal{Y}_-) \\ & + \left[\dot{q} + i\dot{s}p\omega - \dot{s}qk\right](F\mathcal{X}_+ - F^*\mathcal{Y}_+) + \dot{s}\mathcal{L}_{eg}.\end{aligned}\tag{C.3.3}$$

Comparando com

$$\mathcal{L}'_{eg} = \mathcal{L}_{eg} - i(F\mathcal{X}_- - F^*\mathcal{Y}_-),$$

e igualando termos de um mesmo superoperador encontramos um sistema de equações diferenciais acopladas:

$$\begin{cases} \dot{s} = 1, \\ \dot{p} + \dot{s}pk + (2k + i\omega)\dot{s}q = -i, \\ \dot{q} + i\dot{s}p\omega - \dot{s}qk = 0, \\ \dot{z} + 4p\dot{q}|F|^2 - 4\dot{s}p\dot{q}k|F|^2 + 2i\dot{s}p^2\omega|F|^2 - 2(2k + i\omega)\dot{s}q^2|F|^2 = 0. \end{cases}$$

cuja solução, com as condições iniciais $z(0) = p(0) = q(0) = s(0) = 0$, é:

$$\begin{aligned}z(t) = & -\frac{2i\omega|F|^2}{(k + i\omega)^2} \left\{ t + \frac{4e^{-(k+i\omega)t} - e^{-2(k+i\omega)t} - 3}{2(k + i\omega)} \right. \\ & \left. + i\frac{\omega}{(k + i\omega)^2} [\cosh[(k + i\omega)t] - 1]^2 \right\},\end{aligned}\tag{C.3.4}$$

$$p(t) = i\frac{k}{(k + i\omega)^2} \{\cosh[(k + i\omega)t - 1]\} - i\frac{\sinh[(k + i\omega)t]}{(k + i\omega)},\tag{C.3.5}$$

$$q(t) = -\frac{\omega}{(k + i\omega)^2} \{\cosh[(k + i\omega)t] - 1\},\tag{C.3.6}$$

$$s(t) = t.\tag{C.3.7}$$

A partir de agora faremos uma série de modificações no produto de exponenciais (C.3.2) para deixá-lo com melhor aspecto. Podemos fatorá-lo ainda mais usando o fato de $\mathcal{X}_\pm$ comutar com $\mathcal{Y}_\pm$. Com isso, separamos suas exponenciais:

$$e^{\mathcal{L}'_{eg}t} = e^z e^{Fp\mathcal{X}_-} e^{-F^*p\mathcal{Y}_-} e^{Fq\mathcal{X}_+} e^{-F^*q\mathcal{Y}_+} e^{s\mathcal{L}_{eg}}.$$

Usando o teorema (A.2.3), válido quando $\left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] = \left[\hat{B}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] = 0$, e lembrando que $[\mathcal{Y}_-, \mathcal{X}_+] = -2$, trocamos a terceira exponencial de posição com a quarta:

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{L}'_{eg}t} &= e^{z+[Fp\mathcal{Y}_-, -F^*q\mathcal{X}_+]} e^{Fp\mathcal{X}_-} e^{Fq\mathcal{X}_+} e^{-F^*p\mathcal{Y}_-} e^{-F^*q\mathcal{Y}_+} e^{s\mathcal{L}_{eg}} \\ &= e^{z+2pq|F|^2} e^{Fp(\hat{a}^\dagger \bullet - \bullet \hat{a}^\dagger)} e^{Fq(\hat{a}^\dagger \bullet + \bullet \hat{a}^\dagger)} e^{-F^*p(\bullet \hat{a} - \hat{a} \bullet)} e^{-F^*q(\bullet \hat{a} + \hat{a} \bullet)} e^{s\mathcal{L}_{eg}} \\ &= e^{z+2pq|F|^2} e^{F(p+q)\hat{a}^\dagger \bullet} e^{F(q-p)\bullet \hat{a}^\dagger} e^{-F^*(p+q)\bullet \hat{a}} e^{-F^*(q-p)\hat{a} \bullet} e^{s\mathcal{L}_{eg}}. \end{aligned}$$

Atuando $e^{\mathcal{L}'_{eg}t}$ em $\hat{\rho}_{eg}(0)$:

$$\hat{\rho}_{eg}(t) = e^{\mathcal{L}'_{eg}t} \hat{\rho}_{eg}(0) = e^{z+2pq|F|^2} e^{F(p+q)\hat{a}^\dagger} e^{F^*(p-q)\hat{a}} e^{s\mathcal{L}_{eg}} \hat{\rho}_{eg}(0) e^{-F^*(p+q)\hat{a}} e^{F(q-p)\hat{a}^\dagger}.$$

Assim como em (C.2.8) e (C.2.10) podemos agrupar exponenciais num operador deslocamento de Weyl-Heisenberg (2.6.8). Para isso, começamos comutando as duas últimas exponenciais da expressão acima usando (A.2.3):

$$\hat{\rho}_{eg}(t) = e^{\mathcal{L}'_{eg}t} \hat{\rho}_{eg}(0) = e^{z+|F|(p^2-q^2+2pq)} e^{F(p+q)\hat{a}^\dagger} e^{F^*(p-q)\hat{a}} e^{s\mathcal{L}_{eg}} \hat{\rho}_{eg}(0) e^{F(q-p)\hat{a}^\dagger} e^{-F^*(p+q)\hat{a}},$$

e acrescentamos exponenciais convenientes

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{eg}(t) &= e^{z+|F|(p^2-q^2+2pq)} e^{F(p+q)\hat{a}^\dagger} e^{-F^*(p-q)^*\hat{a}} e^{F^*(p-q)^*\hat{a}} e^{F^*(p-q)\hat{a}} e^{s\mathcal{L}_{eg}} \\ &\quad \times \hat{\rho}_{eg}(0) e^{F(q-p)\hat{a}^\dagger} e^{-F(p+q)^*\hat{a}^\dagger} e^{F(p+q)^*\hat{a}^\dagger} e^{-F^*(p+q)\hat{a}}. \end{aligned}$$

Chegamos a:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{eg}(t) &= \exp[z + |F|^2(p^2 - q^2 + 2pq + |p + q|^2)] \hat{D}[\beta_e(t)] \\ &\quad \times \exp[2F^*(\text{Re}(p) - i\text{Im}(q))\hat{a}] \exp[\mathcal{L}_{eg}t] \hat{\rho}_{eg}(0) \\ &\quad \times \exp[-2F(\text{Re}(p) - i\text{Im}(q))\hat{a}^\dagger] \hat{D}^\dagger[\beta_g(t)], \end{aligned} \tag{C.3.8}$$

onde encontramos novamente:

$$\begin{aligned} \beta_e(t) &\equiv \frac{F}{\omega - ik} [e^{-(k+i\omega)t} - 1], \\ \beta_g(t) &\equiv -\frac{F}{\omega + ik} [e^{-(k-i\omega)t} - 1]. \end{aligned}$$

A ação da exponencial $\exp[\mathcal{L}_{eg}t]$ é descrita no Apêndice B,

Referências Bibliográficas

- [1] A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger. Experimental test of bell's inequalities using time-varying analyzers. *Physical review letters*, 49(25):1804–1807, 1982.
- [2] M. Barbieri, F. De Martini, G. Di Nepi, P. Mataloni, GM D'Ariano, and C. Macchiavello. Experimental detection of entanglement with polarized photons. *Arxiv preprint quant-ph/0307003*, 2003.
- [3] J. Bernu, S. Deléglise, C. Sayrin, S. Kuhr, I. Dotsenko, M. Brune, J.M. Raimond, and S. Haroche. Freezing coherent field growth in a cavity by the quantum zeno effect. *Physical review letters*, 101(18):180402, 2008.
- [4] P. Bertet, S. Osnaghi, A. Rauschenbeutel, G. Nogues, A. Auffeves, M. Brune, JM Raimond, and S. Haroche. A complementarity experiment with an interferometer at the quantum–classical boundary. *Nature*, 411(6834):166–170, 2001.
- [5] N. Bohr. Naturwissenschaften 16 245 bohr n 1928. *Nature*, 121:580, 1928.
- [6] AR Bosco de Magalhães, R. Rossi Jr, and MC Nemes. Environment induced quantum zeno effect in coupled microwave cavities. *Physics Letters A*, 2011.
- [7] B. Brezger, L. Hackermüller, S. Uttenthaler, J. Petschinka, M. Arndt, and A. Zeilinger. Matter-wave interferometer for large molecules. *Physical review letters*, 88(10):100404, 2002.
- [8] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maitre, A. Maali, C. Wunderlich, JM Raimond, and S. Haroche. Observing the progressive decoherence of the meter in a quantum measurement. *Physical Review Letters*, 77(24):4887–4890, 1996.
- [9] M. Brune, S. Haroche, JM Raimond, L. Davidovich, and N. Zagury. Manipulation of photons in a cavity by dispersive atom-field coupling: Quantum-nondemolition measurements and generation of schrodinger cat states. *Physical Review A*, 45(7):5193, 1992.
- [10] F. Buscemi, P. Bordone, and A. Bertoni. Linear entropy as an entanglement measure in two-fermion systems. *Physical Review A*, 75(3):032301, 2007.

- [11] J.G.P. de Faria. Aspectos da dinâmica browniana do oscilador harmônico quântico e cálculos de densidades reduzidas pela técnica das álgebras de lie: Aplicações a óptica quântica, 1997.
- [12] J.G.P. de Faria. Aspectos do entrelaçamento em sistemas quânticos abertos, 2001.
- [13] J.G.P. de Faria and MC Nemes. Dissipative dynamics of the jaynes-cummings model in the dispersive approximation: Analytical results. *Physical Review A*, 59(5):3918, 1999.
- [14] MC De Oliveira, MHY Moussa, and SS Mizrahi. Continuous pumping and control of mesoscopic superposition state in a lossy qed cavity. *Arxiv preprint quant-ph/0002047*, 2000.
- [15] P.A.M. Dirac. The principles of quantum mechanics. *The International Series of Monographs on Physics, Oxford: Clarendon Press, 1947*, 1, 1947.
- [16] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical review*, 47(10):777, 1935.
- [17] B.G. Englert. Fringe visibility and which-way information: An inequality. *Physical review letters*, 77(11):2154–2157, 1996.
- [18] U. Fano. Description of states in quantum mechanics by density matrix and operator techniques. *Reviews of Modern Physics*, 29(1):74–93, 1957.
- [19] C.C. Gerry, P.L. Knight, and M. Beck. Introductory quantum optics. *American Journal of Physics*, 73:1197, 2005.
- [20] R. Gilmore and R. Hermann. Lie groups, lie algebras, and some of their applications. *Physics Today*, 27:54, 1974.
- [21] R.J. Glauber. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Physical Review*, 131(6):2766, 1963.
- [22] O. Guhne, P. Hyllus, D. Bruss, A. Ekert, M. Lewenstein, C. Macchiavello, and A. Sanpera. Experimental detection of entanglement via witness operators and local measurements. *Journal of Modern Optics*, 50(6-7):1079–1102, 2003.
- [23] F. Haake. Statistical treatment of open systems by generalized master equations. *Quantum Statistics in Optics and Solid-State Physics*, pages 98–168, 1973.
- [24] S. Haroche and J.M. Raimond. *Exploring the quantum: atoms, cavities and photons*. Oxford University Press, USA, 2006.

- [25] U. Hashagen. Die habilitation von john von neumann an der friedrich-wilhelms-universität in berlin: Urteile über einen ungarisch-jüdischen mathematiker in deutschland im jahr 1927. *Historia Mathematica*, 37(2):242–280, 2010.
- [26] S. Hill and W.K. Wootters. Entanglement of a pair of quantum bits. *Physical review letters*, 78(26):5022–5025, 1997.
- [27] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki. Quantum entanglement. *Reviews of Modern Physics*, 81(2):865, 2009.
- [28] K. Jacobs. Topics in quantum measurement and quantum noise. *Arxiv preprint quant-ph/9810015*, 1998.
- [29] M. Jakob and J.A. Bergou. Quantitative complementarity relations in bipartite systems: Entanglement as a physical reality. *Optics Communications*, 283(5):827–830, 2010.
- [30] E.T. Jaynes and F.W. Cummings. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, 51(1):89–109, 1963.
- [31] J.I. Kim, KM Fonseca Romero, AM Horiguti, L. Davidovich, M.C. Nemes, and A.F.R. de Toledo Piza. Classical behavior with small quantum numbers: The physics of ramsey interferometry of rydberg atoms. *Physical review letters*, 82(24):4737–4740, 1999.
- [32] M. Lewenstein, D. Bruß, J.I. Cirac, B. Kraus, M. Kuś, J. Samsonowicz, A. Sanpera, and R. Tarrach. Separability and distillability in composite quantum systems-a primer. *Journal of Modern Optics*, 47(14-15):2481–2499, 2000.
- [33] W.H. Louisell. *Quantum statistical properties of radiation. Creator/Author, Louisell, wh. Publication Date, 1973 Jan 01. OSTI Identifier, OSTI ID: 4208943...*, volume 2. Wiley, 1973, 1973.
- [34] G. Nogues, A. Rauschenbeutel, S. Osnaghi, P. Bertet, M. Brune, JM Raimond, S. Haroche, LG Lutterbach, and L. Davidovich. Measurement of a negative value for the wigner function of radiation. *Physical Review A*, 62(5):054101, 2000.
- [35] G. Nogues, A. Rauschenbeutel, S. Osnaghi, M. Brune, JM Raimond, and S. Haroche. Seeing a single photon without destroying it. *Nature*, 400(6741):239–242, 1999.
- [36] P. Nussenzveig, F. Bernardot, M. Brune, J. Hare, JM Raimond, S. Haroche, and W. Gawlik. Preparation of high-principal-quantum-number circular states of rubidium. *Physical Review A*, 48(5):3991–3994, 1993.

- [37] S. Pascazio and M. Namiki. Dynamical quantum zeno effect. *Physical Review A*, 50(6):4582, 1994.
- [38] J. Paz and W. Zurek. Environment-induced decoherence and the transition from quantum to classical. *Fundamentals of Quantum Information*, pages 77–148, 2002.
- [39] N.A. Peters, T.C. Wei, and P.G. Kwiat. Mixed-state sensitivity of several quantum-information benchmarks. *Physical Review A*, 70(5):052309, 2004.
- [40] J.J. Sakurai and S.F. Tuan. *Modern quantum mechanics*. Pearson Education, 1994.
- [41] CM Savage, S.L. Braunstein, and DF Walls. Macroscopic quantum superpositions by means of single-atom dispersion. *Optics letters*, 15(11):628–630, 1990.
- [42] M.A. Schlosshauer. *Decoherence and the quantum-to-classical transition*. Springer Verlag, 2007.
- [43] E. Schrödinger. Discussion of probability relations between separated systems. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 31, pages 555–563. Cambridge Univ Press, 1935.
- [44] E. Schrödinger. Naturwissenschaften 23 807 schrödinger e 1935. *Naturwissenschaften*, 23(823):152–87, 1935.
- [45] M.O. Scully, B.G. Englert, and H. Walther. Quantum optical tests of complementarity. *Nature*, 351:111–116, 1991.
- [46] J. Von Neumann. *Mathematische grundlagen der quantenmechanik*. Springer Verlag, 1995.
- [47] RM Wilcox. Exponential operators and parameter differentiation in quantum physics. *Journal of Mathematical Physics*, 8:962, 1967.
- [48] W. Witschel. Ordered products of exponential operators by similarity transformations. *International Journal of Quantum Chemistry*, 20(6):1233–1241, 1981.
- [49] W.K. Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Physical Review Letters*, 80(10):2245–2248, 1998.
- [50] W.K. Wootters. Entanglement of formation and concurrence. *Quantum Information and Computation*, 1(1):27–44, 2001.
- [51] W.H. Zurek. Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse? *Physical Review D*, 24(6):1516, 1981.

- [52] W.H. Zurek. Environment-induced superselection rules. *Physical Review D*, 26(8):1862, 1982.
- [53] W.H. Zurek. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. *Reviews of Modern Physics*, 75(3):715, 2003.