
**A DECOMPOSIÇÃO EM VALORES
SINGULARES:
Teoria e aplicações**

Jonilson dos Santos Oliveira

**Monografia apresentada
ao
Departamento de Matemática
da
Universidade Federal de Minas Gerais
Especialização em Matemática
Ênfase: Matemática do Ensino Básico**

Orientadora: Profa. Aniura Milanés Barrientos

Belo Horizonte, 24 de fevereiro de 2016

Este exemplar corresponde à redação
final da monografia corrigida e apresentada
por Jonilson dos Santos Oliveira
e aprovada pela comissão julgadora.

Belo Horizonte, 24 de fevereiro de 2016.

Banca examinadora:

Professora Aniura Milanés Barrientos(Orientador)

Professora Denise Burgarelli Duczmal

Professor Alberto Sarmiento

Agradecimentos

À minha família, que em alguns momentos, me deram a esperança para seguir.

À minha esposa Juliana, pessoa com quem amo partilhar a vida, obrigado pelo carinho, paciência e por sua capacidade de me trazer paz na correria do dia a dia.

Ao meu filho Guilherme e meu sobrinho Danilo que embora não tivessem conhecimento disto, iluminaram de maneira especial os meus pensamentos me levando a buscar mais conhecimentos.

Ao meu amigo Fernando Carvalho pelo auxílio computacional nas implementações.

À Professora Aniura Milanés Barrientos pela paciência na orientação e incentivo que tornou possível a conclusão desta monografia.

A todos aqueles que de alguma forma estiveram e estão próximos de mim, fazendo esta vida valer cada vez mais a pena.

Resumo

A princípio pode parecer pouco interessante decompor uma matriz, mas fatorar uma matriz em duas ou mais matrizes é a base para resolver com eficiência muitos problemas importantes.

O objetivo deste trabalho é fazer um estudo sobre um tipo de fatoração de matrizes: a Decomposição em Valores Singulares. Serão discutidas a demonstração e duas aplicações desta decomposição. A primeira aplicação mostra a transformação de uma esfera em um elipsoide utilizando o software Geogebra. A segunda aplicação é um exemplo de como podemos usar esta decomposição no reconhecimento de padrões de imagens. Nesta aplicação foi utilizada a linguagem R.

Palavras chave: Teorema Espectral, Decomposição em Valores Singulares, elipsoide, Geogebra, Linguagem R.

Sumário

Resumo	i
1 Notações, Definições e propriedades Básicas	1
1.1 Matriz e Matrizes Especiais	1
1.2 Operações sobre Matrizes	2
1.3 Subespaço, Base e Dimensão	3
1.4 Transformação Linear, Núcleo e Imagem	4
1.5 Produto Interno e Ortogonalidade	4
1.6 Autovalores, Autovetores e Polinômio Característico	4
2 Motivação Geométrica	5
2.1 Um problema de geometria analítica	5
2.2 A decomposição em valores singulares	6
2.3 A imagem de uma circunferência por uma matriz	9
3 Demonstração	13
3.1 Teorema espectral para matrizes simétricas.	13
3.2 Demonstração do teorema da DVS	14
4 Uma aplicação da SVD	17
4.1 O identificador de rostos	17
4.2 O algoritmo	17
4.3 Resultados	20
5 Considerações Finais	27

Capítulo 1

Neste capítulo serão apresentadas algumas notações e definições importantes para a leitura e compreensão dos teoremas e resultados apresentados no estudo proposto. As demonstrações dos resultados podem ser encontradas nas referências bibliográficas ou em outros textos vistos na disciplina de Álgebra linear.

1.1 Matriz e Matrizes Especiais

Uma matriz A , $m \times n$ é uma tabela de números dispostos em m linhas e n colunas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a i -ésima linha de A é

$$[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}]$$

para $i = 1, \dots, m$ e a j -ésima coluna de A é

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

para $j = 1, \dots, n$.

Algumas matrizes apresentam mais utilidade que outras de acordo com o objetivo do texto, chamaremos de matrizes especiais as seguintes matrizes:

- **Matriz linha** é toda matriz do tipo $1 \times n$, isto é, uma matriz que tem uma única linha.

$$[a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}]$$

- **Matriz coluna** é toda matriz do tipo $m \times 1$, isto é, uma matriz que tem uma única coluna.

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

- **Matriz nula** é toda matriz que tem todos os elementos iguais a zero.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

- **Matriz quadrada** é toda matriz do tipo $n \times n$, isto é, uma matriz que tem a quantidade de colunas igual á quantidade de linhas.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Matriz diagonal** é toda matriz quadrada em que os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Matriz identidade** é toda matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1. Indica-se a matriz identidade de ordem n por I_n .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- **Matriz simétrica** é toda matriz quadrada em que há simetria dos elementos em relação a diagonal principal, isto é $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$.

1.2 Operações sobre Matrizes

As operações entre matrizes são essenciais na resolução de sistemas. Segue abaixo algumas operações.

- **Adição e subtração** - Dadas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, chama-se *soma* $A + B$ a matriz C , $n \times m$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo i e j e *subtração* $A - B$ a matriz C , $n \times m$ tal que $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ para todo i e j .
- **Produto de um escalar por uma matriz** - Dado um número k e uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se *produto* kA a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$ tal que $b_{ij} = k \times a_{ij}$ para todo i e j .

- **Produto de matrizes** - Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$, chama-se *produto* AB a matriz $C = (c_{ik})_{m \times p}$ tal que

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$
 para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e todo $k \in \{1, 2, \dots, p\}$.
- **Matriz Transposta** - Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se *transposta* de A a matriz $A^t = (a'_{ji})_{n \times m}$ tal que $a'_{ji} = a_{ij}, \forall i, j$.
- **Matriz Inversível** - Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n . Dizemos que A é *uma matriz inversível* se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$. Se A não é inversível, dizemos que A é uma matriz singular. A matriz B também é chamada de inversa de A ou A^{-1} .

1.3 Subespaço, Base e Dimensão

- **Subespaço Vetorial** - Sejam V um espaço vetorial e W um subconjunto não vazio de V . Dizemos que W é um *subespaço vetorial* de V , ou simplesmente um *subespaço* de V , se W com as operações de adição em V e de multiplicação de vetores de V por escalares, é um espaço vetorial.
- **Subespaços Gerados** - Seja V e sejam v_1, v_2, \dots, v_r vetores de V . Diremos que um vetor v de V é uma *combinação linear* de v_1, v_2, \dots, v_r se existirem números reais a_1, a_2, \dots, a_r tais que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_r v_r$$

- **Bases** - Seja $\alpha = v_1, v_2, \dots, v_n$ um conjunto de vetores de um espaço vetorial não nulo V . Dizemos que α é uma *base* de V se as seguintes condições são verificadas:
 1. α é linearmente independente;
 2. $V = G(\alpha)$.
- **Dimensão** - O número de elementos de uma base de um espaço vetorial não nulo V de dimensão finita é chamado de *dimensão* de V e denotado por $\dim V$. Convencionamos que se V é o espaço vetorial nulo, então $\dim V = 0$.

Teorema 1.1. *Qualquer subconjunto linearmente independente de um espaço vetorial V de dimensão finita pode ser completado de modo a formar uma base de V .*

- **Espaço linha de uma matriz** - O espaço $G(v_1, \dots, v_m)$ gerado pelos vetores linha de A é chamado *espaço linha* de A e denotado por $L(A)$.

Teorema 1.2. *As linhas não nulas de uma matriz \tilde{A} , na forma escalonada e equivalente a uma matriz A , formam uma base para o espaço linha de A .*

- **Posto** - O posto de uma matriz A é o número de linhas não-nulas quando a mesma está escrita na forma reduzida escalonada por linhas ou, equivalentemente, o número de linhas ou colunas linearmente independentes de A .

1.4 Transformação Linear, Núcleo e Imagem

- **Transformações lineares** - Sejam V e W espaços vetoriais. Uma *transformação linear de V em W* é uma função $T : V \rightarrow W$ que possui as seguintes propriedades:

1. $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$, para quaisquer v_1 e v_2 em V ;
2. $T(\alpha v) = \alpha T(v)$, para quaisquer v em V e α em \mathbb{R} .

- **Núcleo** - Se $T : V \rightarrow W$ é uma transformação linear, o **núcleo de T** , denotado por $\text{Ker } T$, é o conjunto de vetores de V que são levados por T no vetor nulo de W , ou seja, $\text{Ker } T = \{v \in V; T(v) = 0\}$.
- **Imagem** - A *imagem de T* de uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ é o conjunto $\text{Im } T = \{T(v)\}$.

Teorema 1.3. *Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear, onde V tem dimensão finita. Então $\dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T = \dim V$.*

1.5 Produto Interno e Ortogonalidade

- **Norma** - Seja V um espaço com produto interno. Definimos a *norma* do vetor v de V , ou o **comprimento** de v , por $\|v\| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}$.
se $\|v\| = 1$ dizemos que é um **vetor unitário**.
A **distância** $d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}$.
- **Ortogonalidade** - Sejam v um vetor de V e W um subespaço de V . Dizemos que V é ortogonal a W se v é ortogonal a cada vetor de W . O conjunto de todos os vetores de V que são ortogonais a W é chamado *complemento ortogonal de W* e denotado W^\perp .

1.6 Autovalores, Autovetores e Polinômio Característico

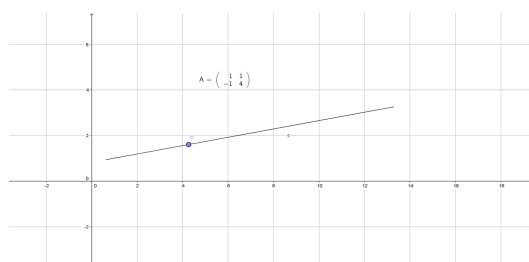
- **Autovalor** - Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Um número real c será dito um *autovalor* de T se existir um vetor não nulo v em V tal que $T(v) = cv$. O vetor v é chamado de *autovetor* de T associado a c .
- **Autovetor** - Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear e sejam c_1, c_2, \dots, c_r autovalores distintos de T . Se v_1, v_2, \dots, v_r são autovetores associados aos autovalores c_1, c_2, \dots, c_r , respectivamente, então $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ é linearmente independente.
- **Polinômio Característico** - Seja A uma matriz quadrada de ordem n . A matriz $tI_n - A$, onde t é uma indeterminada, é chamada *matriz característica de A* . O determinante dessa matriz é um polinômio em t , chamado *polinômio característico* da matriz A e denotado por $P_A(t)$.

Capítulo 2

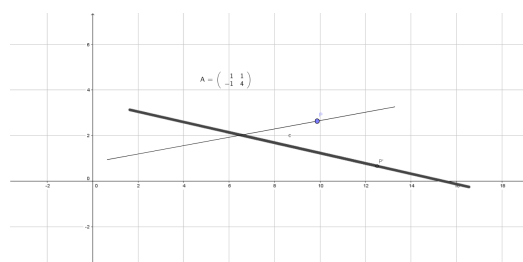
2.1 Um problema de geometria analítica

Temos a noção de lugar geométrico como um conjunto de pontos que satisfazem uma propriedade geométrica. Podemos por exemplo definir uma circunferência, de raio r e centro em O , como sendo o lugar geométrico dos pontos P tais que $d(P, O) = r$.

Agora, suponhamos que A é uma matriz 2×2 . Se considerarmos uma reta c (ou um segmento de reta), não é difícil comprovar que Ac , o conjunto de pontos da forma AP , com $P \in c$, será um ponto ou uma reta (ou um segmento).



(a) Reta c



(b) Reta Ac

Isto pode ser verificado utilizando, por exemplo, a representação vetorial da reta. Se c for uma região do plano limitada por retas ou segmentos, também não será difícil determinar o conjunto Ac .

Um problema um pouco mais complicado de resolver é apresentado a seguir.

Problema: Dada uma matriz $A_{2 \times 2}$, qual será o objeto geométrico descrito pelos pontos da forma AP , se o ponto P percorre uma circunferência unitária?

Uma primeira aproximação até a resposta desta pergunta pode ser realizada se utilizarmos o software de geometria dinâmica Geogebra. Introduzindo uma matriz 2×2 com entradas variáveis e utilizando a função `AplicarMatriz`, obtemos fortes evidências de que neste caso, o conjunto AC é uma elipse.

Poderíamos estender este problema ao espaço tridimensional e nos perguntar: dada uma matriz $A_{3 \times 3}$ e a esfera unitária C , que tipo de conjunto será AC ?

Parece natural pensar que de maneira similar, neste caso deveríamos obter um elipsoide. Ao tentarmos explorar esta hipótese no software Geogebra, nos deparamos com problemas de natureza prática pois o Geogebra 3D não tem tantas possibilidades quanto o 2D. Por isso escolhemos construir um ambiente tridimensional no Geogebra 2D, seguindo as recomendações em [2]. Neste ambiente aparecem duas janelas, uma contendo a esfera C e a outra, o conjunto AC .

Após estas experiências com os dois arquivos elaborados (que foram colocados como anexos a esta monografia), temos evidências bastante fortes de que os conjuntos AC

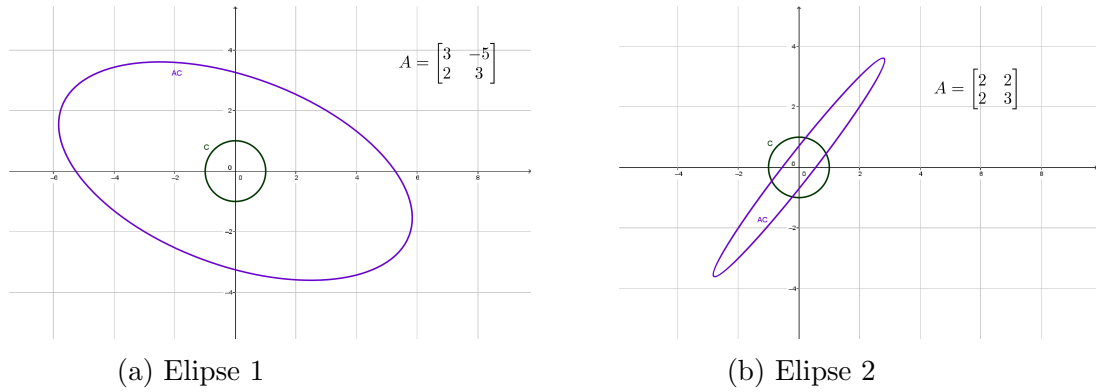


Figura 2.2: O conjunto AC para duas matrizes A diferentes.

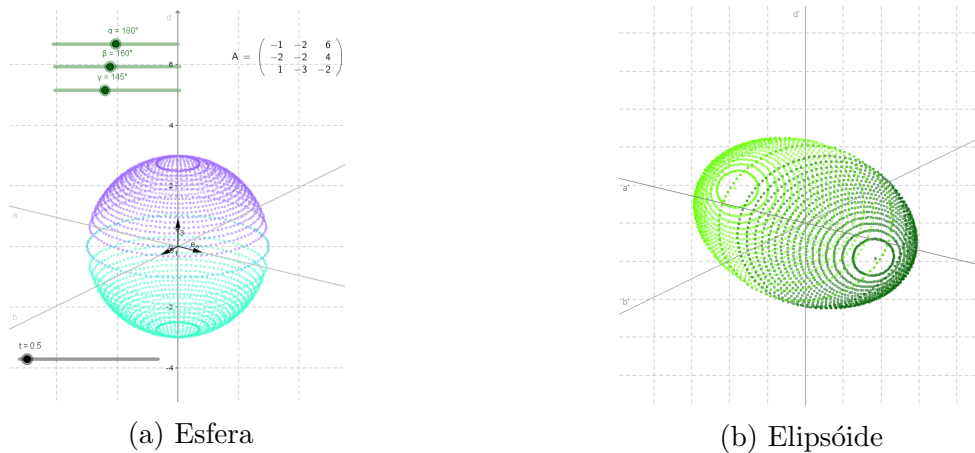


Figura 2.3: O conjunto AC para esfera A .

devem ser “quase sempre” elipses ou elipsoides, no caso tridimensional. Para formularmos e demonstrarmos rigorosamente este resultado, precisaremos de um teorema que apresentamos na próxima seção.

Conceitos matemáticos podem ser abordados de maneira mais didática para os alunos com a utilização de ferramentas tecnológicas. A utilização do software Geogebra permitiu dar uma visão dinâmica do problema proposto. Todas as construções geométricas referentes às imagens acima foram pensadas como uma sequência didática onde os alunos irão testar várias matrizes e em seguida elaborar hipóteses sobre quem é AC , após a introdução do problema podemos justificar tal fato com a decomposição em valores singulares.

2.2 A decomposição em valores singulares

A conjectura formulada na seção anterior está muito relacionado com o teorema a seguir.

Teorema 2.1. *Decomposição reduzida de uma matriz em valores singulares.*

Seja $A_{m \times n}$ uma matriz de m linhas e n colunas e posto r . Então ela pode ser fatorada da forma

$$A = U\Sigma V^T,$$

onde $U_{m \times r}$ e $V_{n \times r}$ são matrizes com colunas ortonormais e $\Sigma_{r \times r}$ é uma matriz diagonal.

As colunas de U são autovetores de AA^T . Elas são chamadas de vetores singulares à esquerda da matriz A . As colunas de V são autovetores de $A^T A$. Elas são chamadas de

vetores singulares à direita de A . Além disto, os elementos da diagonal principal de Σ são positivos e são as raízes quadradas dos autovalores não nulos de AA^T e $A^T A$. Eles são os chamados valores singulares da matriz A .¹

A forma completa da decomposição em valores singulares (SVD) de uma matriz $A_{m \times n}$ ($m \geq n$) é composta por matrizes ortogonais $\hat{U}_{m \times m}$ e $\hat{V}_{n \times n}$ e pela matriz $\hat{\Sigma}_{m \times n}$. Para maiores referências ver [6].

Exemplo 2.2.1. Vamos obter a decomposição em valores singulares da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}.$$

- Cálculo da matriz V .

Para obter a matriz V , precisamos encontrar os autovetores de $A^T A$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 18 \\ 18 & 74 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A^T A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 26 - \lambda & 18 \\ 18 & 74 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 100\lambda + 1600 = (\lambda - 20)(\lambda - 80).$$

Então, os autovalores de $A^T A$, na ordem decrescente são $\lambda_1 = 80$ e $\lambda_2 = 20$.

Determinando vetores unitários, soluções dos sistemas homogêneos com matrizes $A^T A - 80I = \begin{bmatrix} -54 & 18 \\ 18 & -6 \end{bmatrix}$ e $A^T A - 20I = \begin{bmatrix} 6 & 18 \\ 18 & 54 \end{bmatrix}$, obtemos os autovetores

$$V_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \text{ e } V_2 = \begin{bmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \text{ e chegamos portanto, à matriz}$$

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}.$$

- Cálculo da matriz Σ .

Como a matriz A tem posto dois, seus valores singulares são $\sigma_1 = \sqrt{80}$ e $\sigma_2 = \sqrt{20}$, portanto

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

- Cálculo da matriz U .

Se $A = U\Sigma V^T$ e inserindo o fato de que $V^T V = I$, obtemos

$$\begin{aligned} A &= U\Sigma V^T \\ AV &= U\Sigma V^T V = U\Sigma. \end{aligned}$$

¹Mesmo a decomposição não sendo única, vamos nos referir a ela como Decomposição em valores singulares.

Substituindo A , V e Σ para calcular $U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2\sqrt{10} & -\sqrt{10} \\ 2\sqrt{10} & \sqrt{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\sqrt{5}a & 2\sqrt{5}b \\ 4\sqrt{5}c & 2\sqrt{5}d \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.2.2. Cálculo da decomposição em valores singulares de $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Cálculo da matriz V

$$B^T B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\det(B^T B - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 25 - \lambda & 15 \\ 15 & 25 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 50\lambda + 400.$$

Então os autovalores de $B^T B$, na ordem decrescente são $\lambda_1 = 40$ e $\lambda_2 = 10$

Calculando os autovetores ortonormais associados obtemos $V = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

- Cálculo da matriz Σ .

Como a matriz B tem posto 2, seus valores singulares são $\sigma_1 = 2\sqrt{10}$ e $\sigma_2 = \sqrt{10}$.

Postanto $\Sigma = \sqrt{10} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- Cálculo da matriz U .

Se $B = U\Sigma V^T$ e novamente usando o fato de que $V^T V = I$, temos

$$B = U\Sigma V^T$$

$$BV = U\Sigma.$$

Substituindo B , V e Σ para calcular $U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \sqrt{10} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \sqrt{10} \begin{bmatrix} 2a & b \\ 2c & d \\ 2e & f \end{bmatrix}$$

Resolvendo temos:

$$U = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3 A imagem de uma circunferência por uma matriz

Enunciaremos e demonstraremos a seguir o resultado que formaliza a conjectura que apresentamos na primeira seção.

Teorema 2.2. *Seja $C = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : \|x\| = 1\}$ a esfera unitária n -dimensional e seja A uma matriz quadrada de tamanho n . Se denotarmos por AC ao conjunto $\{y \in \mathbb{R}^n : y = Ax, \text{ para algum } x \in C\}$, vale que:*

- Se A for não singular ($\det(A) \neq 0$), então AC é um elipsóide generalizado cujos eixos principais são os vetores singulares à esquerda da matriz A .
- Caso contrário AC é o elipsoide sólido r -dimensional com eixos paralelos aos r primeiros vetores singulares à esquerda de A e contido no subespaço gerado por esses vetores.

Demonstração. Seja $x \in C$ e seja $y = Ax$. Utilizando a decomposição em valores singulares de A , podemos escrever $y = U\Sigma V^T x$.

- Como A é invertível, então Σ também o é e vale

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^{-1} \end{bmatrix}.$$

Então $\Sigma^{-1}U^T y = V^T x$. Além disto, e $\|V^T x\| = \|x\| = 1$. Portanto, $z = U^T y$ satisfaz $\|\Sigma^{-1}z\|^2 = 1$, ou seja,

$$\frac{z_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{z_2^2}{\sigma_2^2} + \cdots + \frac{z_n^2}{\sigma_n^2} = 1.$$

AC é um elipsóide generalizado.

- Suponhamos agora que A é uma matriz singular de posto $r < n$ com DVS completa $A = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^T$ e sejam $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ seus valores singulares. Denotemos $z = \hat{U}^T y$ e $\xi = \hat{V}^T x$. Então

$$z = \hat{U}^T y = \Sigma V^T x = \hat{\Sigma} \xi = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & & & 0_{r \times n-r} & \\ \hline & & \sigma_r & & & \\ & & & & 0_{n-r \times r} & \\ & & & & & 0_{n-r \times n-r} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \xi_1 \\ \vdots \\ \sigma_r \xi_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como \hat{V} é uma matriz ortogonal, vale que $\|\xi\| = \|x\| = 1$, portanto

$$\frac{z_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{z_2^2}{\sigma_2^2} + \dots + \frac{z_r^2}{\sigma_r^2} = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_r^2 \leq 1.$$

AC é um elipsóide sólido r -dimensional.

□

Exemplo 2.3.1. Um exemplo com $A_{2 \times 2}$.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Utilizando os resultados obtidos no exemplo 1.2.1

$$A = U\Sigma V^T$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}.$$

$$\|V\Sigma^{-1}U^{-1}Y\|^2 = 1$$

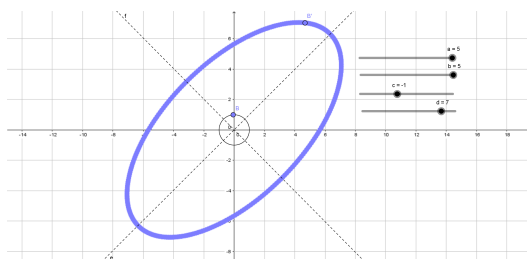
$$Y^T U (\Sigma^{-1})^2 U^T Y = 1$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{16} & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 1$$

A matriz U pode ser interpretada como uma rotação dos eixos x e y em 45° levando a um novo sistema de coordenadas. Chamando $U^T Y = Z$

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{16} & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = 1$$

$$\frac{5}{16}z_1^2 + \frac{5}{4}z_2^2 = 1$$



(a) Elipse

Figura 2.4: Elipse gerada a partir da matriz A .

Exemplo 2.3.2. Um exemplo com $B_{3 \times 3}$.

$$B = U\Sigma V^T$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 - 4\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 6 + 4\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

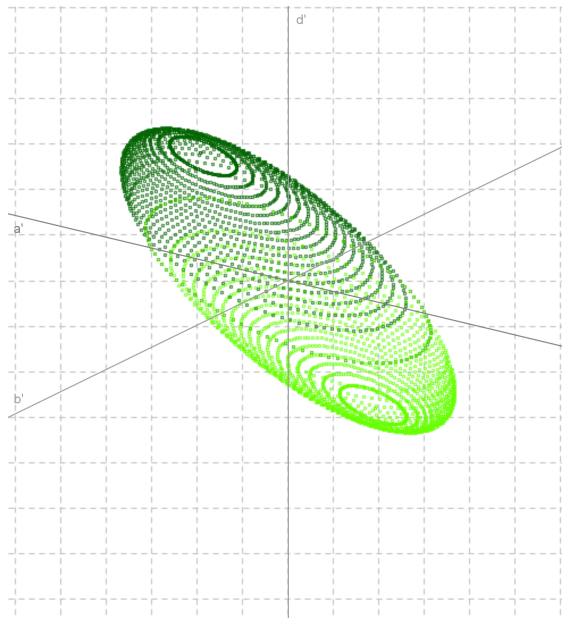
$$\|V\Sigma^{-1}U^{-1}Y\|^2 = 1$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{68-48\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{68+48\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 1$$

Chamando $U^T Y = Z$,

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{68-48\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{68+48\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = 1$$

$$\frac{z_1^2}{68 - 48\sqrt{2}} + \frac{z_2^2}{68 + 48\sqrt{2}} + \frac{z_3^2}{16} = 1$$



(a) Elipsoide

Figura 2.5: Elipsóide gerado a partir da matriz B.

Capítulo 3

Demonstração do Teorema da DVS

No capítulo anterior vimos alguns exemplos e uma aplicação do Teorema de Decomposição em Valores Singulares, agora veremos a demonstração do Teorema Espectral para Matrizes Simétricas, que funciona como base para a demonstração deste teorema.

3.1 Teorema espectral para matrizes simétricas.

Teorema 3.1. *Se A é uma matriz simétrica, então existem uma matriz ortogonal Q e uma matriz diagonal Λ tais que:*

$$A = Q\Lambda Q^T.$$

Demonstração. A prova será feita por indução sobre a ordem da matriz A .

O resultado é válido para matrizes de ordem 1, com $A = \Lambda$ e $Q = 1$.

Supomos que o resultado seja válido para matrizes A de ordem $(n - 1) \times (n - 1)$, para $n \geq 2$, e vamos mostrar que o resultado é válido para matrizes de ordem $n \times n$.

Vamos assumir que λ_1 é um autovalor de A , pois toda matriz real simétrica tem pelo menos um autovalor e os autovalores das matrizes simétricas são reais. Seja u_1 um autovetor associado a λ_1 com norma 1.

Considere Q_1 uma matriz ortogonal com u_1 como primeira coluna. Consideramos as outras colunas completadas pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Temos que:

$$Q_1^T A Q_1 = Q_1^T [A u_1 A u_2 \dots A u_n] = \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \dots \\ u_n^T \end{bmatrix} [\lambda u_1 A u_2 \dots A u_n] = \left[\begin{array}{c|cccc} \lambda_1 & l_2 & l_3 & \dots & l_n \\ \hline 0 & & & & \\ 0 & & & & A_1 \\ \dots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right]$$

Como A é simétrica, $Q_1^T A Q_1$ também o é e portanto $l_2 = l_3 = \dots = l_n = 0$. Portanto,

$$Q_1^T A Q_1 = \left[\begin{array}{c|cccc} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ 0 & & & & A_1 \\ \dots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right]$$

onde a matriz A_1 é simétrica

Utilizando a hipótese de indução, temos que é verdadeira para A_1 que é $(n-1) \times (n-1)$, obtemos $A_1 = Q_2 \Lambda_1 Q_2^T$ onde Q_2 é uma matriz $(n-1) \times (n-1)$ ortogonal e Λ_1 é diagonal.

Definimos

$$\bar{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & Q_2 & \\ \dots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

\bar{Q}_2 é ortogonal porque $\bar{Q}_2^T \bar{Q}_2 = I_n$

Obtemos então que:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_2^T Q_1^T A Q_1 \bar{Q}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & Q_2^T & \\ \dots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & A_1 & \\ \dots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & Q_2 & \\ \dots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & Q_2^T A_1 Q_2 & \\ \dots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \Lambda_1 & \\ \dots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = \Lambda \end{aligned}$$

é uma matriz diagonal e vale $A = Q \Lambda Q^T$ e $Q = Q_1 \bar{Q}_2$.

□

3.2 Demonstração do teorema da DVS

Teorema 3.2. *Qualquer matriz A do tipo m por n pode ser fatorada em $A = U \Sigma V^T$*

- As colunas de U (m por n) são autovetores de AA^T ;
- As colunas de V (n por n) são autovetores de $A^T A$;
- Os r valores singulares na diagonal de Σ (m por n) são as raízes quadradas dos autovalores não nulos de AA^T e $A^T A$.

Seja A uma matriz $n \times n$ e seja $\ker A = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times 1}\}$ vale:

Lema 3.3. *Dim Ker $A = m - r$, onde r é o posto de A .*

Dividiremos a demonstração em três partes.

1. Vetores Singulares à direita

A matriz $(A^T A)_{n \times n}$ é simétrica e portanto ela possui n autovalores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$ associados a autovetores $\{v_j\}_{j=1}^n$ que formam uma base ortonormal de \mathbb{R}^n .

Todos os valores são não negativos porque:

$$\begin{aligned} [A^T A] v_j &= \lambda_j v_j \\ \|Av_j\|^2 &= v_j^T A^T Av_j \\ &= v_j^T (\lambda_j v_j) \\ &= \lambda_j (v_j^T v_j) \\ &= \lambda_j \|v_j\|^2 \\ &= \lambda_j \end{aligned}$$

logo

$$\|Av_j\|^2 = \lambda_j \geq 0.$$

Como $\dim \text{Ker} A = n - r$, teremos que $\lambda_j = 0, r + 1 \leq j \leq n$ e $\lambda_j > 0$ para $1 \leq j \leq r$. Cada vetor v_j é chamado de vetor singular à direita de A para o valor singular $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$.

A matriz \hat{V} na decomposição completa é $\hat{V} = [v_1 | v_2 | \dots | v_n]$ e a matriz V na decomposição reduzida é $V = [v_1 | v_2 | \dots | v_r]$.

2. Vetores Singulares à esquerda

Se $1 \leq j \leq n$, vale

$$\begin{aligned} A^T Av_j &= \lambda_j v_j \\ A(A^T Av_j) &= A(\lambda_j v_j) \\ (AA^T)Av_j &= \lambda_j (Av_j) \end{aligned}$$

Portanto Av_j ou é o vetor nulo ou é um autovetor da matriz AA^T , associado ao autovalor λ_j . Como $\|Av_j\|^2 = \lambda_j$, se $1 \leq j \leq r$, então $\lambda_j > 0$ e os vetores $u_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} Av_j$ são autovetores de AA^T de norma 1. Eles também são ortogonais porque:

$$\begin{aligned} u_j^T u_k &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_j \lambda_k}} v_j^T A^T Av_k \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_j \lambda_k}} v_j^T (\lambda_k v_k) \\ &= \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_j}} v_j^T v_k \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto $\{u_j\}_{j=1}^r$ é um conjunto ortonormal de \mathbb{R}^m .

Cada vetor u_j é chamado de vetor singular à esquerda de A associado ao valor singular σ_j , $1 \leq j \leq r$.

A matriz U se define como $U = [u_1 | u_2 | \dots | u_r]$. Se completarmos o sistema ortogonal obtido com $m - r$ vetores ortonormais, e os colocarmos como colunas de uma matriz, obtemos a matriz \hat{U} que aparece na decomposição completa.

3. Fatoração

Temos que para $1 \leq j \leq r$, vale $Av_j = \sigma_j v_j$. Portanto

$$A [v_1 | v_2 | \cdots | v_r]_{m \times r} = [u_1 | u_2 | \cdots | u_r]_{n \times r} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \end{bmatrix}_{r \times r}$$

Sabemos também que $Av_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{m \times 1}$, para $r + 1 \leq j \leq m$ e então

$$A [v_1 | v_2 | \cdots | v_n] = [U\Sigma | 0].$$

Como \hat{V} é ortogonal, obtemos que:

$$\begin{aligned} A &= [U\Sigma | 0] \hat{V}^T \\ &= [U\Sigma | 0] \begin{bmatrix} V^T \\ \frac{v_{r+1}^T}{\sigma_{r+1}} \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix} \\ &= U\Sigma V^T \end{aligned}$$

Esta é a decomposição reduzida em valores singulares, porque não estamos considerando valores singulares nulos.

A forma completa da DVS da matriz A resulta ao escrevermos $A = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^T$, onde $\hat{\Sigma}$ é uma matriz $m \times n$, cujos primeiros r elementos na diagonal principal são os valores singulares de A e o resto das entradas valem zero.

Referências[4], [5] e [6].

Capítulo 4

Um ”‘identificador’” de rostos

No livro ”Coding the matrix” [3] é possível encontrar várias aplicações computacionais de Álgebra Linear. Uma interessante aplicação é uma atividade proposta no capítulo 11.6 Eigenface, uma interpretação da tradução seria reconhecimento de faces. Esta atividade propõe criar uma sequência de procedimentos computacionais baseado na SVD e desenvolver um algoritmo capaz de identificar padrões numéricos para reconhecimento de faces humanas.

No trabalho original o código proposto está implementado em linguagem Python, nesse trabalho irei apresentar os procedimentos necessários para implementar o código em linguagem R e resolver as questões propostas como exercício.

A escolha da linguagem R (código livre) se deu devido aos seus excelentes resultados em comparação aos outros softwares: MATLAB e SCILAB, que ao serem utilizados apresentaram desempenho insatisfatório na aplicação da função SVD em matrizes com um grande número de entradas.

A leitura de outros artigos também foram necessários para complementar o entendimento sobre a SVD, podendo ser encontrado em [1] uma outra aplicação da SVD sobre imagens.

4.1 O identificador de rostos

Considere um conjunto de imagens. Uma vez que essas imagens podem ser representadas por matrizes de mesmo tamanho, podemos nos perguntar se é possível detectar padrões. Em especial, tentaremos detectar se essa imagem é um rosto humano ou não.

Vamos utilizar a decomposição de uma matriz em valores singulares para resolver este problema. Para isso é necessário construir o espaço afim de dimensão 10 (utilizando a SVD) mais próximo dessas 20 imagens e determinar a distância de um conjunto de pontos dados no sentido de mínimos quadrados. Os detalhes podem ser encontrados nas referências [3] e [6].

4.2 O algoritmo

Para criar um programa que seja capaz de identificar se uma certa fotografia possui o rosto de face humana precisamos dos seguintes passo:

- Criar um banco de dados contendo imagens de rostos humanos;

- transformá-los em vetores linha;
- calcular sua média, o que chamamos de centróide;
- Realizar a diferença entre cada imagem e o centróide;
- Colocar esses 20 vetores linha em uma única matriz, resultando em uma matriz $A = U\Sigma V^T$;
- Calcular a SVD de $A_{20 \times 31374}$, lembrando que precisamos apenas da matriz V ;
- Montar o subespaço afim V_{10} , o subespaço afim de dimensão 10 mais próximo dos 20 pontos que representam as imagens.
- Calcular as distâncias de cada uma das imagens centradas até o subespaço afim, ou seja a projeção desses vetores. Em seguida verificar o valor máximo e mínimo dessas distâncias para definir um intervalo de aceitação;
- Inserir imagens teste e centralizá-las para calcular sua distância até o subespaço afim, de acordo com o valor da distância decidir se é uma imagem de um rosto humano ou não.

tradução da atividade proposta em [3], página 553 (Algoritmo mais técnico e alguns comandos da linguagem R)

São dadas 20 imagens de rostos, estas imagens estão disponíveis no endereço ¹. Cada imagem é uma matriz que precisa ser transformada em um vetor linha.

Primeiro precisamos determinar o espaço afim de dimensão 10 mais próximo das imagens dos rostos.

Durante este processo vamos seguir alguns passos:

Passo I

1. Transformar as imagens em vetores;

A linguagem R possui vários pacotes, utilizei o pacote *EImage* e o comando *readImage* para transformar as imagens em matrizes.

Cada imagem é uma matriz que precisa ser transformada em vetor por linhas p_1 ; p_2 ; : : : ; p_{20} para isso utilizei o comando *as.vector*.

2. Calcular o centroide;

$$\bar{p} = \frac{1}{m} \sum (p_1 + \dots + p_m).$$

Chamamos de centroide a média aritmética dos 20 vetores linha. Após a implementação é interessante visualizá-lo e verificar se a imagem formada parece um rosto humano ou não.

3. Construir a Matriz A ;

Para construir a matriz $A_{20 \times 31374}$ é necessário centralizar essas 20 imagens, realizando a diferença entre cada imagem e o centroide. Uma boa maneira de realizar essa tarefa é utilizar o comando *cbind*.

¹<http://resources.codingthematrix.com> no arquivo *facez.zip*

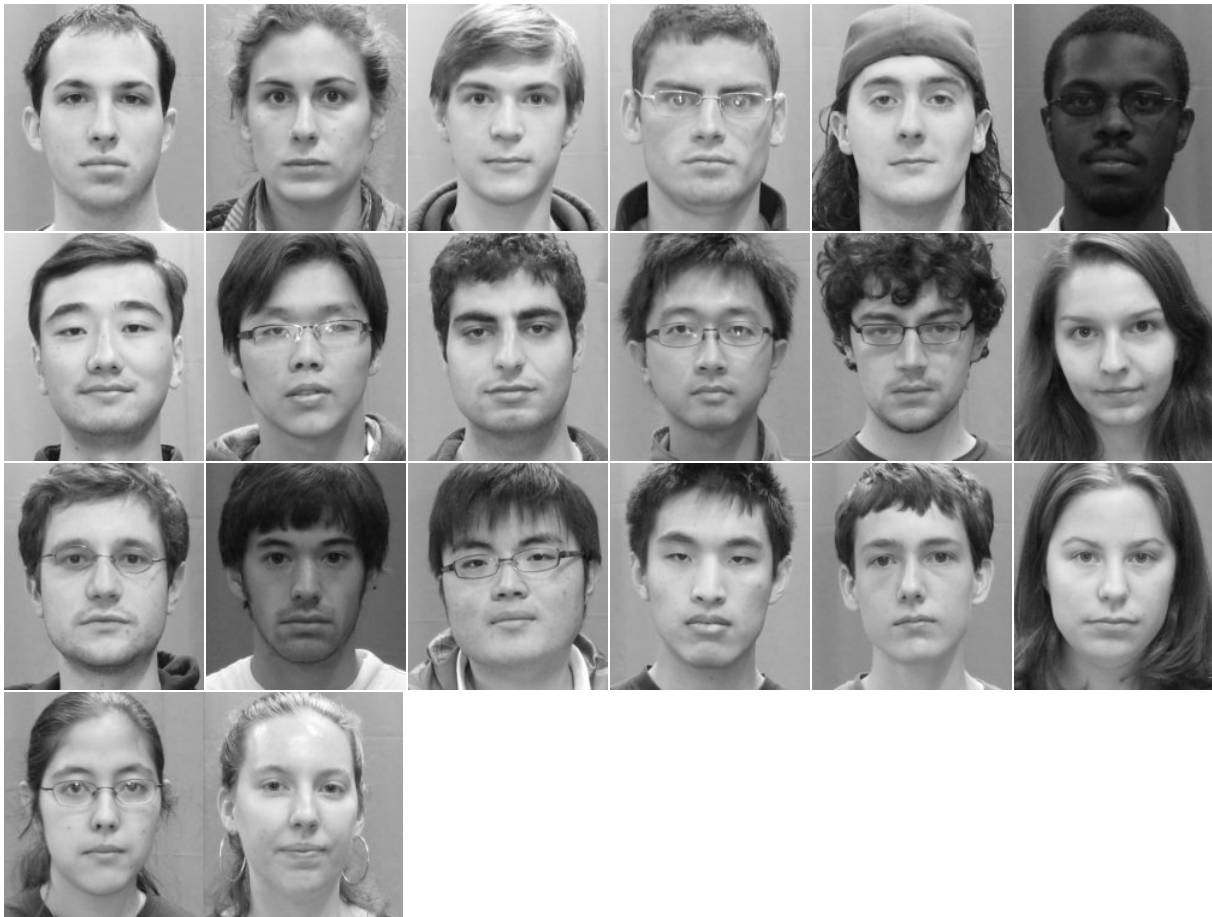


Figura 4.1: Considere as imagens da esquerda para a direita numeradas de 1 a 20

4. Realizar a decomposição em valores singulares;

A decomposição já está implementada dentro da linguagem R, utilize a sequência

$a.svd <- svd(A)$

$u <- a.svd$u$

$v <- a.svd$v$

$d <- diag(a.svd$d)$

5. Obter v_1, \dots, v_{10} : primeiros 10 vetores singulares à direita de A ;

$$A = \begin{bmatrix} (p_1 - \bar{p})^t \\ (p_2 - \bar{p})^t \\ \vdots \\ (p_m - \bar{p})^t \end{bmatrix}_{m \times n};$$

$V_{10} = \bar{p} + [v_1, \dots, v_{10}]$ que é o subespaço afim de dimensão 10 mais próximo dos 20 pontos que representam as imagens, esse subespaço é formado pelos 10 colunas correspondentes de V .

Passo II:

1. Obter uma lista de todas as distâncias entre cada uma das imagens centradas; $p_j - \bar{p}$ e o subespaço $V = [v_1, \dots, v_{10}]$.

2. Para cada vetor imagem q_l ,
 - (a) centre o vetor: $q_l - \bar{p}$
 - (b) calcule a distância até o subespaço
 - (c) Baseado nas distâncias achadas, estime quais imagens são rostos e quais não o são.
3. Visualize cada uma das imagens não classificadas para verificar sua estimativa.

As distâncias ao quadrado de V até imagens que não são rostos são de fato maiores que as distâncias até imagens que o são?

Qual valor você usaria para decidir se uma imagem é ou não um rosto?

Parte III: Análise das projeções das imagens

1. É interessante saber o quanto um rosto projetado no subespaço de rostos parece com a imagem original. Utilizando $\bar{p} + \text{proj}_{V_{10}}(p_j - \bar{p})$, visualize as projeções de vários rostos e compare-as com o rosto original. São parecidos?

Parte IV: Justificativa

Dados os pontos $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}^d$, achar os vetores unitários $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^d$, base ortonormal do espaço vetorial V_k e o ponto $b \in \mathbb{R}^d$ que minimizam

$$\text{dist}^2(p_1, b + V_k) + \text{dist}^2(p_2, b + V_k) + \dots + \text{dist}^2(p_m, b + V_k).$$

Solução:

$$v_j: j\text{-ésimo vetor singular à direita de } A = \begin{pmatrix} (p_1 - \bar{p})^t \\ (p_2 - \bar{p})^t \\ \vdots \\ (p_m - \bar{p})^t \end{pmatrix}_{m \times d}$$

$$\text{dist}^2(p_1, b + V_k) + \text{dist}^2(p_2, b + V_k) + \dots + \text{dist}^2(p_m, b + V_k) = \|A\|_F^2 - \sigma_1^2 - \dots - \sigma_k^2,$$

onde σ_j é o j -ésimo valor singular de A .

4.3 Resultados

Apresentaremos a seguir os resultados referentes as questões propostas na seção anterior. Primeiramente vamos a visualização do centróide, e como questionado podemos ver sua semelhança com um rosto humano.

Após implementar todo o código podemos gerar os valores das distâncias entre cada uma das imagens de rostos centradas e o subespaço V_{10} .



Figura 4.2: centroide das 20 imagens de rostos

Imagem	Distância	Imagem	Distância
1	11.01373	11	9.463533
2	15.67452	12	6.693776
3	7.054915	13	14.20976
4	8.947237	14	9.622245
5	5.331085	15	10.36829
6	27.79505	16	12.49825
7	5.20257	17	11.8645
8	7.699991	18	9.97679
9	11.95066	19	13.52687
10	12.52542	20	10.72408

Com esses valores temos uma referência para podermos testar outras imagens e tentar classificá-las como rostos humanos ou não. Abaixo os valores obtidos das distâncias das imagens de teste.

Imagem de Comparação	Distância
1	29.7572
2	24.38027
3	19.55583
4	22.23388
5	19.08704
6	24.2119
7	40.54017
8	25.86204
9	39.67338
10	37.28705

Utilizando os valores de referência pertencentes ao intervalo entre 5 e 28, fiz o primeiro teste, sendo as imagens 2, 3, 4, 5, 6 e 8 classificadas como rostos humanos. Visualizando as imagens testadas, que estão ordenadas segundo a tabela anterior, podemos perceber um erro de classificação na imagem 8.

Após a visualização das imagens vemos que a imagem 8 foi reconhecida como um rosto, pois seu valor é de 25.86204, que está dentro do parâmetro. Com um novo valor parâmetro entre 5 e 25, podemos melhorar o critério de seleção das imagens teste.



Figura 4.3: Considere as imagens teste da esquerda para a direita numeradas de 1 a 10

Temos abaixo algumas imagens de rostos projetados no subespaço afim obtido em comparação com a imagem original e sua semelhança com o rosto original. Podemos projetar cada uma das imagens na figura 3.2 no espaço afim obtido e comparar o resultado com a imagem original. Desta forma estaremos avaliando o quão próxima está a imagem do espaço afim.

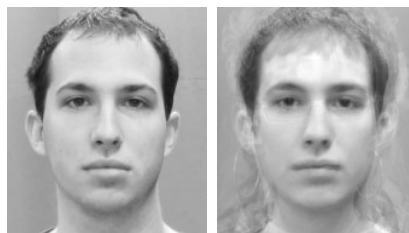


Figura 4.4: Imagem1, Projeção da imagem 1

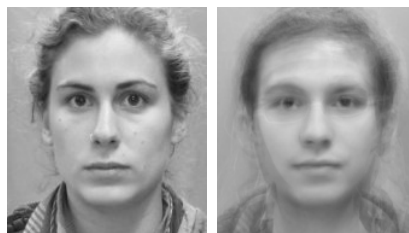


Figura 4.5: Imagem 2, Projeção da Imagem 2

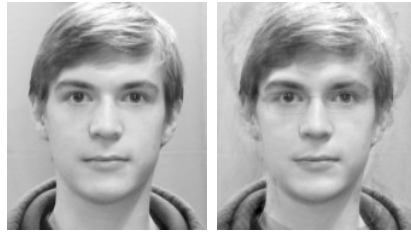


Figura 4.6: Imagem 3, Projeção da Imagem 3



Figura 4.7: Imagem 4, Projeção da Imagem 4



Figura 4.8: Imagem 5, Projeção da Imagem 5



Figura 4.9: Imagem 6, Projeção da Imagem 6

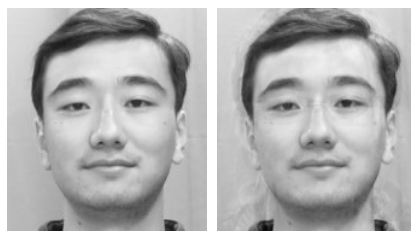


Figura 4.10: Imagem 7, Projeção da Imagem 7

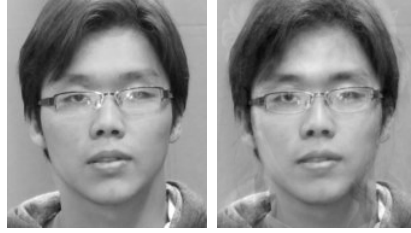


Figura 4.11: Imagem 8, Projeção da Imagem 8



Figura 4.12: Imagem 9, Projeção da Imagem 9

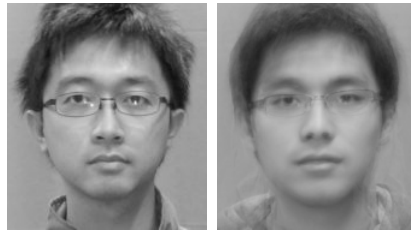


Figura 4.13: Imagem 10, Projeção da Imagem 10



Figura 4.14: Imagem 11, Projeção da Imagem 11

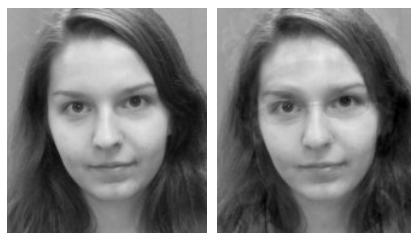


Figura 4.15: Imagem 12, Projeção da Imagem 12



Figura 4.16: Imagem 13, Projeção da Imagem 13



Figura 4.17: Imagem 14, Projeção da Imagem 14

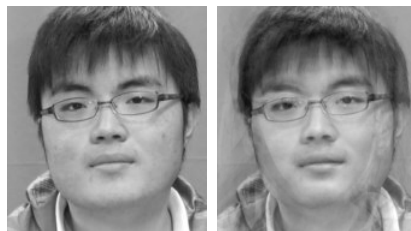


Figura 4.18: Imagem 15, Projeção da Imagem 15



Figura 4.19: Imagem 16, Projeção da Imagem 16



Figura 4.20: Imagem 17, Projeção da Imagem 17

Capítulo 5

Considerações Finais

A motivação geométrica utilizada é uma ferramenta didática interessante para introduzir a teoria sobre a DVS, onde podemos levar o aluno a levantar hipóteses, questionar, argumentar e buscar o conhecimento que justifique tal transformação. O uso de softwares como geogebra e outros, mesmo com suas limitações técnicas permitem o uso da criatividade para superar tais problemas e garantem uma visualização dinâmica de conceitos matemáticos facilitando o entendimento.

A utilização da SVD em uma aplicações prática também funciona como uma ferramenta didática de motivação e pode ajudar o aluno a despertar o interesse pela disciplina de Álgebra Linear.

Não foram realizados testes com outros bancos de imagens para podermos verificarmos o potencial da SVD em softwares de reconhecimento de imagens.

Referências

- [1] Humberto José Bortolossi Dirce Uesu Pesco. Imagens digitais e matrizes. *Gazeta de Matemática*, (169), March 2013.
- [2] O-Won Kwon Hee-Chan Yang Kyeong-Sik Choi Jeong-Eun Park, Young-Hyun Son. Constructing 3d graph of function with geogebra(2d). page 10, 2003.
- [3] Philip N. Klein. *Coding the Matrix* -. Editora: Newtonian Press, 1 edition, 2013.
- [4] Gene H. Golub; Charles F. Van Loan. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, terceira edition, 1996.
- [5] Reginaldo J. Santos. *Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2010.
- [6] Gilbert Strang. *Álgebra Linear e suas aplicações*. Editora CENGAGE Learning, São Paulo, tradução da 4ª edição norte-americana edition, 2012.